2,10

Jaensch.

Sammlung geometrischer Rechenaufgaben

zum

Gebrauch an Seminarien sowie zum Selbstunterricht

bestimmt und herausgegeben

von

W. Lichtblau und **B. Wiese,**
Königlichen Seminarlehrern.

Zweite, erweiterte und verbesserte Auflage.

Ferdinand Hirt,
Königliche Universitäts- und Verlags-Buchhandlung.
Breslau, 1900.

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage.

Soll der Unterricht in Raumlehre fruchtbringend sein, so muß er so erteilt werden, daß **Wissen** und **Können** sich gegenseitig durchdringen, daß die **formale** Seite des Unterrichts und die **praktische Anwendung** des Gewonnenen gebührende Berücksichtigung finden. Der Schüler muß Gelegenheit erhalten, sich seiner erworbenen geistigen Kraft bewußt zu werden, sie zu stählen durch selbstthätige Weiterverarbeitung des Gefundenen; er muß aber auch erkennen, daß und wie das durch den Unterricht erworbene Wissen zu der Natur und dem menschlichen Leben in innigste Beziehung gesetzt werden kann. Das einzige Mittel zur Erreichung dieses Zieles sind selbständige Lösungen von geometrischen Rechen- und Konstruktionsaufgaben.

Die beifolgende Sammlung geometrischer Rechenaufgaben will ebenso wie die von denselben Verfassern bearbeitete „Sammlung geometr. Konstruktionsaufgaben" (Hannover, Carl Meyer) einen kleinen Beitrag zur Förderung des Raumlehre-Unterrichts nach dieser Richtung hin liefern. Sie ist für die Hand des Seminaristen bestimmt, um dem Seminarlehrer das zeitraubende Diktieren zu ersparen. Wir halten trotz des bescheidenen Umfangs das dargebotene Material ausreichend für drei verschiedene Kurse; die im Seminar nicht zur Lösung kommenden Aufgaben bieten dem jungen Lehrer später Gelegenheit zur Wiederholung oder Erweiterung des Gelernten.

Diejenigen Aufgaben, zu deren Lösung gemischt-quadratische Gleichungen erforderlich sind oder sonst größere Schwierigkeiten zeigen, sind mit * bezeichnet.

Daß wir die Antworten der Auflösungen beigegeben haben, rechnet man uns hoffentlich nicht als Fehler an. Der Schüler hat in den Antworten sofort den Maßstab für die Richtigkeit seiner Rechnung; zudem ist für den Lehrer nicht die Antwort maßgebend, sondern der Gang der Lösung. Für die schwierigeren Aufgaben sind in kürzerer oder längerer Form Andeutungen zur Lösung gegeben. Durch die beigefügten Formeln soll natürlich nicht das mechanische Rechnen begünstigt werden, sie sollen nur für den augenblicklichen Verlegenheitsfall helfen; eine Formel hat für den Schüler überhaupt nur dann Wert, wenn er im stande ist, sie sofort zu beweisen bezw. zu entwickeln.

In dem Bestreben, den Forderungen der deutschen Sprache gerecht zu werden, sind die fremden Bezeichnungen möglichst vermieden und durch deutsche ersetzt worden.

Mit der Bitte um milde Beurteilung verbinden wir die andere besonders an die Herren Amtsgenossen, uns etwaige Vorschläge zur Vervollkommnung des Werkchens freundlichst zukommen zu lassen.

Die Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Die Sammlung ist einer gründlichen Durchsicht unterzogen worden; ausgeschieden sind die Aufgaben zur Berechnung der Winkel, neu aufgenommen eine Reihe von Aufgaben zur Guldinschen Regel. Die Zahl der Aufgaben mit allgemeinen Größen hat eine bedeutende Vermehrung erfahren; auch ist bei der Aufeinanderfolge derselben die Lösungsschwierigkeit noch mehr als bei der ersten Auflage entscheidend gewesen.

Die Verfasser.

Inhalt.

Erster Teil. Aufgaben.

Zweiter Teil.

A. Planimetrie.

Berechnung des Umfangs und Flächeninhalts der Figuren.

§ 1. Parallelogramm.

Bezeichnung.

a) Quadrat: Die Seite mit a, die Diagonale mit e und der Flächeninhalt mit F.

b) Rechteck: Die beiden anstoßenden Seiten mit a und b, die Diagonale mit e und der Flächeninhalt mit F.

c) Rhombus: Eine Seite mit a, die Diagonalen mit e und e', die Höhe mit h und der Flächeninhalt mit F.

d) Rhomboid: Die Grundseite mit g, die Höhe mit h, die Diagonalen mit e und e' und der Flächeninhalt mit F.

A. Quadrat.

1. Berechne a) den Flächeninhalt, b) die Ecklinie eines Quadrats, wenn eine Seite = a gegeben ist.

2. Die Seite eines Quadrats mißt a) 10 m, b) $2\frac{1}{2}$ m, c) 3,6 m; berechne Umfang, Ecklinie und Inhalt.

3. Der Inhalt eines Quadrats beträgt a) 144 qm, b) 64 qm, c) 50 qm; berechne Seite und Ecklinie.

4. A kauft einen quadratischen Garten von 480 m Umfang und zahlt für das qm 0,60 ℳ; wie teuer ist der Garten?

5. Ein quadratförmiger Garten hat eine Länge von 66 m; wie lang ist ein anderer, der $\frac{1}{4}$ mal so groß als der erste ist?

6. Wie lang muß eine Seite eines Quadrats genommen werden, wenn dasselbe a) $\frac{9}{16}$, b) $\frac{3}{4}$ von dem Inhalt eines Quadrats von 72 m Seite betragen soll?

7. Ein quadratförmiger Platz von a) 324 qm, b) 800 qm Inhalt soll an seinem Rande mit Bäumchen bepflanzt werden, deren gegenseitige Entfernung $1\frac{1}{2}$ m beträgt. Wieviel Bäumchen müssen an einer Quadratseite stehen?

8. Ein Quadrat zu berechnen, wenn die Diagonale e gegeben ist. ($e = 50$.)

9. Die Ecklinie eines Quadrats mißt a) 10 m, b) 5 m, c) 3,6 m. Berechne Umfang und Inhalt.

10. In einen Kreis mit dem Halbmesser r ist ein Quadrat gezeichnet. Berechne den Inhalt des Quadrats. [a) $r = 8$ m, b) $r = 16$ m.]

11. a) Aus dem Halbmesser r eines Kreises ist der Unterschied zwischen dem umgeschriebenen und dem eingeschriebenen Quadrate zu berechnen. b) Wie verhalten sich die Inhalte beider? ($r = 2{,}4$.)

12. Die Seite eines Quadrats ist a; wie groß ist die Seite des n-fachen Quadrats? ($a = 20$; $n = 2$ [3, 4, 5, 6].)

13. a) Wie lang müßte die Seite eines Quadrats sein, dessen Flächeninhalt gleich dem des Deutschen Reiches = 540 000 qkm wäre? b) Der Flächeninhalt des Deutschen Reiches sei durch ein Quadrat von 10 cm Seite dargestellt; wie lang müßte die Seite des Quadrats sein, das den Flächeninhalt des europäischen Rußlands = 5 400 000 qkm veranschaulichte?

14. Eine Seite eines Quadrats zu berechnen, das a) gleich der Summe, b) gleich dem Unterschiede zweier Quadrate von 10 m und 15 m Seite ist.

15. Die Summe der Seiten zweier Quadrate beträgt s, der Unterschied d. Berechne Seite und Inhalt eines jeden. ($s = 14$ m, $d = 2$ m.)

16. Die Summe der Inhalte zweier Quadrate beträgt 74 qm, der Unterschied 24 qm. Seite und Inhalt eines jeden sind zu berechnen.

***17.** Der Unterschied der Inhalte zweier Quadrate ist q^2, die Summe zweier Seiten s. Berechne Seite und Inhalt eines jeden. ($q^2 = 252$ qm, $s = 42$ m.)

***18.** Aus der Summe der Inhalte zweier Quadrate s und dem Unterschiede der Seiten d ist Seite und Inhalt eines jeden zu berechnen. ($s = 468$ qm, $d = 6$ m.)

***19.** Die Seiten zweier Quadrate unterscheiden sich um d, der Flächeninhalt des größeren ist gleich dem n-fachen von dem des kleineren. Berechne die Fläche des letzteren. ($d = 20$, $n = 5$.)

***20.** Ein Quadrat zu berechnen, a) wenn die Summe von Diagonale und Seite = s, b) wenn der Unterschied von Diagonale und Seite = d gegeben ist. (s = 50, d = 10.)

***21.** Die Summe von Diagonale und Seite eines Quadrats beträgt a) 10 m, b) 25 m; berechne die Seiten und den Inhalt.

***22.** Der Unterschied zwischen Diagonale und Seite eines Quadrats beträgt a) 5 m, b) 15 m. Berechne den Inhalt.

***23.** Um ein Quadrat, dessen Seite a ist, ist ein anderes mit der Seite b so zu legen, daß die Eckpunkte des ersten in die Seiten des zweiten fallen. Wie groß sind die Abschnitte, in welche die Seiten des letzten Quadrats durch die Ecken des ersten geteilt werden? (a = 10 cm, b = 14 cm.)

***24.** In ein Quadrat von 289 qm Inhalt soll ein anderes von 169 qm Inhalt so gelegt werden, daß die Ecken des letzten auf die Seiten des ersten fallen. Berechne die Abschnitte der Seiten des ersten Quadrats.

B. Das Rechteck.

25. Die Seiten eines Rechtecks messen a und b. Berechne a) den Umfang, b) den Inhalt, c) die Ecklinie. (a = 48, b = 14.)

26) Es ist die Länge eines Rechtecks zu berechnen, wenn Ecklinie und Breite folgende Werte haben: a) 2,5 m und 2 m; b) 8,5 m und 4 m.

27. Ein Garten in Rechtecksform hat einen Umfang von 360 m, die eine Seite mißt 80 m mehr als die andere; berechne seinen Inhalt.

28. Ein Platz in Rechtecksform ist mit 120 Bäumchen eingefaßt, von denen auf eine Längsseite 12 mehr als auf eine Breitenseite kommen; die Entfernung der Bäume beträgt $4\frac{2}{3}$ m; wie groß ist der Platz?

29. Von einem Garten in Rechtecksform, welcher 80 m lang und 60 m breit ist, soll ein kleineres Rechteck abgeschnitten werden, dessen Seiten überall gleichweit von denen des ersten entfernt sind und dessen Umfang gleich der Hälfte des Umfangs des größeren Gartens ist. Berechne die Seiten und den Inhalt des abgeschnittenen Rechtecks.

30. Berechne aus dem Inhalte eines Rechtecks und einer Ausdehnung die andere, wenn folgende Werte gegeben sind: a) 180 qm und 12 m; b) 40 qm und 7,5 m; c) 60 qcm und $3\frac{3}{4}$ cm; d) $2\frac{2}{3}$ qm und 3 m; e) 8,64 qkm und 3,6 km.

31. Der rechteckige Fußboden eines Ganges von 36 m Länge und 4,5 m Breite soll mit quadratischen Steinen von 45 cm Seite belegt werden; a) wieviel Stück sind dazu erforderlich? b) Wie teuer kommt die

Belegung, wenn ein Stein mit 0,20 ℳ bezahlt wird und für das qm 0,30 ℳ Arbeitslohn gerechnet wird?

32. Berechne die Oberfläche einer quadratischen Säule mit der Grundkante a, wenn die Seitenkante das n-fache der Grundkante ist. ($a = 10$ cm, $n = 2\frac{1}{2}$.)

33. Wie groß ist die Oberfläche einer Rechtecksäule von der Höhe c, wenn die Grundkanten a und b messen? ($a = 17$ cm, $b = 8$ cm $c = 36$ cm.)

34. Die Oberfläche eines geraden Prismas mit quadratischer Grundfläche ist O, die Höhe h; berechne die Grundkante. ($O = 1342$ qcm, $h = 25$ cm.)

35. Wie groß ist die Oberfläche einer Rechtecksäule von 48 cm Höhe und 72 cm Umfang, wenn sich die Grundkanten wie 3 : 5 verhalten?

36. Ein Dach, dessen Flächen Rechtecke von 15 m Länge und $6\frac{2}{3}$ m Breite bilden (Satteldach), soll mit quadratischen Schieferplatten von 30 cm Seite belegt werden. Wieviel Platten sind notwendig, wenn $12\frac{1}{2}$ % der Gesamtfläche mehr gerechnet werden muß?

37. Ein Saal von 10 m Länge und 7,5 m Breite soll gedielt werden mit Brettern von $3\frac{3}{4}$ m Länge und $\frac{5}{8}$ m Breite. Wieviel Bretter sind erforderlich, wenn auf Abfall u. s. w. $6\frac{1}{4}$ % der Fläche mehr gerechnet werden muß?

38. Zu jeder Seite eines Rechtecks von 15 m Länge und 10 m Breite sind Parallele gelegt, deren Abstand von den Seiten 3 m beträgt. Um wieviel qm ist das neue Rechteck größer oder kleiner, wenn die Parallelen a) sämtlich außerhalb, b) sämtlich innerhalb des ersten Rechtecks gelegt sind, c) wenn die Parallelen der Längsseiten außerhalb, die anderen teilweise innerhalb liegen?

39. In einem Rechteck, dessen anstoßende Seiten 15 m und 10 m messen, ist ein Punkt P gegeben, dessen Entfernungen von diesen Seiten 3 m und 4 m sind; durch P sind Parallele zu den Seiten gelegt. Wie groß ist jedes der entstehenden vier Rechtecke?

40. Ein Spiegelglas in Rechtecksform, welches eine Länge von 76 cm und eine Breite von 46 cm hat, soll mit einem Rahmen von 15 cm Breite so umgeben werden, daß jeder Rand des Glases $\frac{1}{2}$ cm breit unter dem Rahmen liegt; wie groß ist die Oberfläche des Rahmens?

41. Ein Zimmer von $7\frac{1}{2}$ m Länge, 6 m Breite und $3\frac{2}{3}$ m Höhe soll tapeziert werden. In dem Zimmer befinden sich 2 Thüren, jede

$2\frac{2}{3}$ m hoch und $1\frac{1}{2}$ m breit, und 4 Fenster, jedes $1\frac{1}{2}$ m hoch und 1 m breit. Wie teuer kommen die Tapeten, wenn eine Rolle von 10 m Länge und 0,50 m Breite 1,20 ℳ kostet und eine halbe Rolle über das notwendigste Bedürfnis gerechnet werden muß?

42. Zwei Gärten haben gleichen Flächeninhalt, jeder ist 18 a groß. Der eine hat die Form eines Rechtecks von 45 m Länge, der andere die eines Quadrats. Wie groß ist der Unterschied der Begrenzungen?

43. Die Summe zweier anstoßenden Seiten eines Rechtecks beträgt 60 cm, das Verhältnis derselben $= 5:7$; wie groß ist der Inhalt?

44. Die Summe zweier anstoßenden Seiten eines Rechtecks = 60 cm, der Unterschied = 12 cm; berechne den Inhalt.

45. Länge eines Rechtecks a) 36 cm, b) 50 cm, Ecklinie a) 39 cm, b) 60 cm; berechne den Inhalt.

***46.** Ein Quadrat und ein Rechteck sind zusammen 896 qcm groß; die Länge des Rechtecks mißt 40 cm und die Breite desselben ist gleich der Seite des Quadrats; berechne die Seite des Quadrats.

***47.** Ein Quadrat ist um 375 qcm größer als ein Rechteck, dessen Länge gleich der Quadratseite und dessen Breite 10 cm ist. Berechne die Seite des Quadrats.

48. Ein Rechteck ist zu berechnen, wenn die Länge a und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises r gegeben ist. [a) $a = 36$ cm, $r = 19{,}5$ cm; b) $a = 50$ cm, $r = 30$ cm.]

49. Die übrigen Stücke eines Rechtecks zu berechnen aus dem Flächeninhalt F und der Seite a. ($F = 165$ qm, $a = 30$ m.)

***50.** Länge eines Rechtecks = a, Unterschied zwischen Breite und Ecklinie = d. Wie groß ist der Flächeninhalt? ($a = 24$ cm, $d = 16$ cm.)

***51.** Berechne ein Rechteck, wenn die Diagonale = e, die Summe zweier anstoßenden Seiten = s ist. ($e = 17$, $s = 23$.)

***52.** Berechne ein Rechteck, wenn die Summe von Diagonale und einer Seite = s, die andere Seite = a ist. [a) $s = 72$ m, $a = 60$ m; b) $s = 96$, $a = 72$ m.]

***53.** Summe von Ecklinie und Länge eines Rechtecks = 98 m, Summe von Länge und Breite = 62 m; wie groß ist der Flächeninhalt?

***54.** Berechne ein Rechteck, wenn die Differenz der Diagonale und einer Seite = d, die andere Seite = a ist. ($d = 16$, $a = 32$.)

55. Der Inhalt eines Rechtecks = 108 qcm; Länge und Breite verhalten sich wie 4 : 3; wie lang ist jede Seite?

***56.** Länge eines Rechtecks = 24 m, Unterschied zwischen Breite und Ecklinie = 16 m; wie groß der Flächeninhalt?

***57.** Länge eines Rechtecks = 72 m, Summe von Ecklinie und Breite = 96 m; berechne den Inhalt.

***58.** Ecklinie eines Rechtecks = 51 m, Inhalt = 1080 qm; berechne Länge und Breite.

***59.** Berechne ein Rechteck, wenn die Diagonale = e, der Unterschied der Seiten = d ist. (e = 37, d = 23.)

***60.** Ecklinie eines Rechtecks = 25 m, Summe von Länge und Breite = 31 m; berechne den Inhalt.

***61.** Inhalt eines Rechtecks = 320 qm, die Länge 4 m mehr als die Breite; berechne diese Ausdehnungen.

***62.** Umfang eines Rechtecks von 480 qm Fläche = 92 m; berechne die Seiten und die Ecklinie.

***63.** Ein Rechteck zu berechnen, das mit einem gegebenen Quadrat a^2 gleichen Inhalt, aber doppelten Umfang hat. ($a^2 = 36^2$.)

***64.** Ein Rechteck zu berechnen, das mit einem gegebenen Quadrat a^2 gleichen Umfang, aber den halben Inhalt hat. ($a^2 = 36^2$.)

***65.** Summe von Ecklinie und Länge eines Rechtecks = 75 m, Unterschied zwischen Ecklinie und Breite = 24 m; wie groß der Flächeninhalt?

***66.** Ein Rechteck von 24 m Länge und 18 m Breite schließt ein anderes Rechteck so ein, daß die Seiten beider Rechtecke überall gleichweit von einander abstehen. Welche Länge und Breite muß das eingeschlossene Rechteck haben, wenn es gleich der Hälfte des ersten ist?

***67.** Ein Rechteck, dessen Seiten sich wie 3 : 4 verhalten, soll zu einem Quadrat so erweitert werden, daß dessen Inhalt das 3-fache des Rechtecks ist, und daß der Unterschied der Umfänge beider Figuren 20 m beträgt. Wie groß ist jede Figur?

***68.** Der Inhalt eines Rechtecks = 96 qm; vergrößert man jede Seite um 2 m, so beträgt der Inhalt des neuen Rechtecks 140 qm; berechne die Seiten.

***69.** Ein Rechteck von 24 m Länge und 18 m Breite soll in ein anderes so verwandelt werden, daß a) die Summe zweier anstoßenden Seiten 43 m, b) der Unterschied derselben 24 m ist; wie lang sind die Seiten?

***70.** Ein Rechteck von 7,5 cm Länge und 8 cm Breite ist in ein anderes so zu verwandeln, daß dessen Ecklinie 13 cm ist; berechne die Seiten desselben.

***71.** Ein Rechteck von 20 m Länge und 15 m Breite ist in ein anderes von doppeltem Umfange zu verwandeln. Berechne die Seiten dieses Rechtecks.

***72.** Der Fußboden einer Turnhalle mißt 135 qm, die eine Seitenwand 108 qm, die andere 180 qm; wie lang, breit und hoch ist die Halle?

73. Die Seiten eines Rechtecks messen 20 cm und 30 cm; in überall gleichen Abständen sind Parallele zu den Seiten so gelegt, daß der Umfang des neuen Rechtecks a) 68 cm, b) 148 cm beträgt. Berechne die Abstände. c) Wie müssen die Parallelen gelegt sein, wenn der Umfang des entstehenden Rechtecks gleich dem des gegebenen ist?

74. In ein Rechteck, dessen anstoßende Seiten a und b messen, sind in gleichen Abständen zu den Seiten Parallele gelegt, so daß das von den Parallelen gebildete Rechteck $= q^2$ ist. Berechne den Abstand. ($a = 36$, $b = 25$, $q^2 = 390$.)

C. Raute.

75. Eine Raute zu berechnen, wenn die beiden Diagonalen e und e' gegeben sind. [a) $e = 14$ cm, $e' = 48$ cm; b) $e = 24$ cm, $e' = 36$ cm.]

76. Berechne die Seite eines Quadrats, das einer Raute von 75 cm Grundseite und 36 cm Höhe inhaltsgleich ist.

77. Seite und Höhe einer Raute von 320 qm Inhalt stehen im Verhältnis von 5 : 4; berechne diese.

78. Welchen Flächeninhalt hat eine Raute von a) 20 cm, b) 12 cm Seite, wenn ein Winkel derselben $= 60^0$ ist?

79. Die Höhe einer Raute mißt a) 20 cm, b) 12 cm; welchen Inhalt hat sie, wenn ein Winkel $= 60^0$ ist?

80 u. 81. Welche Werte für den Flächeninhalt erhält man, wenn in den letzten beiden Aufgaben anstatt des Winkels von 60^0 ein solcher von 45^0 gesetzt wird?

82—85. Setze in den Aufgaben 78—81 für Grundseite und Höhe die allgemeinen Werte g und h und berechne den Flächeninhalt (F).

86. Wie verhalten sich die beiden Rauten in 78 a) und 79 a)?

87. Der Inhalt einer Raute beträgt 120 qm, die eine Ecklinie 24 m; wie lang ist eine Seite?

88. Eine Raute von 12 m Seite hat eine Ecklinie von 20 m; welchen Inhalt hat die Raute?

***89.** Einen Rhombus zu berechnen, wenn eine Diagonale e und die Höhe h gegeben ist. (e = 34, h = 16.)

***90.** Einen Rhombus zu berechnen, wenn die Summe der Diagonalen = 2 s und eine Seite des Rhombus = a ist. [a) 2 s = 94, a = 37; b) 2 s = 92, a = 34.)

***91.** Eine Seite eines Rhombus ist a und der Unterschied der Ecklinien 2 d. Berechne den Inhalt des Rhombus. [a) a = 41, 2 d = 62; b) a = 25, 2 d = 34.]

***92.** Der Flächeninhalt einer Raute mißt 360 qm, die Höhe ist um 9 m kleiner als die Grundseite; berechne diese Ausdehnungen.

93. Von einer Raute kennt man die Höhe = 8 m und die kleinere Ecklinie = 10 m; berechne Seite und Inhalt.

***94.** Der Inhalt einer Raute = 108 qm, der Unterschied der Ecklinien = 6 m; es sind die Ecklinien und die Seite zu berechnen.

***95.** Inhalt einer Raute = 75 qm, Summe der Ecklinien = 25 m; berechne eine Seite und die Ecklinien.

D. Parallelogramm (im allgemeinen).

96. Der Umfang eines Parallelogramms beträgt 72 m, zwei anstoßende Seiten verhalten sich a) wie 3 : 5, b) $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2}$; berechne die Seiten.

97. Es soll der Inhalt eines Parallelogramms aus folgenden Werten für Grundseite und Höhe gefunden werden: a) 25 cm und 18 cm; b) 12,5 cm und 3,6 cm; c) $2\frac{2}{3}$ und $3\frac{3}{4}$ m.

98. Aus dem Inhalt eines Parallelogramms und einer Ausdehnung soll die andere gesucht werden, wenn folgende Werte gegeben sind: a) 54 qm und 16 m; b) 72 qm und 20 m; c) $2\frac{1}{2}$ qcm und $1\frac{1}{2}$ cm; d) 17,28 qcm und 4,8 cm.

99. Die Inhalte zweier Parallelogramme von gleicher Grundseite betragen 96 qm und 60 qm; die eine Höhe ist um 3 m kleiner als die andere; berechne die Ausdehnungen.

100. Die Inhalte zweier Parallelogramme von gleicher Höhe betragen 44 qm und 55 qm; die Summe der Grundseiten = 18 m; wie lang sind die Ausdehnungen?

101. Es ist a) die Summe, b) der Unterschied zweier Parallelogramme zu berechnen, wenn beide gleiche Grundseiten haben = 25 cm die Höhe des einen 18 cm, die des anderen 27 cm beträgt. c) Wie verhalten sich die Flächeninhalte beider? d) Welche Höhe müßte ein Parallelogramm auf derselben Grundseite haben, wenn es gleich der Summe oder e) gleich dem Unterschiede beider wäre?

---

102. Die beiden anstoßenden Seiten eines Parallelogramms messen 45 cm und 30 cm, der von ihnen eingeschlossene Winkel = a) 60^0, b) 30^0, c) 45^0; wie groß ist der Flächeninhalt?

103. Ein Parallelogramm zu berechnen, wenn sein Umfang 80 cm, die Höhen 12 cm und 20 cm messen.

104. Der Umfang eines Parallelogramms sei 2 s, der Abstand der Parallelen bezüglich h_a und h_b. Berechne den Inhalt. (2 s = 50 m, $h_a = 8$ m, $h_b = 12$ m.)

105. Die Umfänge zweier ähnlichen Parallelogramme verhalten sich wie 2 : 3, die Seiten des kleineren messen 10 m und 15 m; wie lang sind die des größeren?

106. Der Umfang eines Parallelogramms = 50 m, der Unterschied zweier Seiten = 5 m, die kleinere Seite eines ähnlichen Parallelogramms = 7,5 m; berechne den Umfang des letzteren.

***107.** Die Grundseite eines Parallelogramms = 21 m, die anstoßende Seite = 10 m, eine Ecklinie = 17 m; berechne den Inhalt.

108. Parallelogramm ABCD zu berechnen, wenn Seite AB = 40 cm, Seite AD = 13 cm, Diagonale BD = 37 cm mißt.

109. Ein Parallelogramm zu berechnen, wenn eine Seite 21 cm, die Diagonalen 34 cm und 20 cm messen.

***110.** Die Grundseite eines Parallelogramms = 7 m, die anstoßende Seite = 15 m, eine Ecklinie = 20 m; die Ecklinie wird in einem Punkte im Verhältnis von 1 : 4 geteilt und werden durch diesen Punkt Parallele zu den Seiten gelegt. Wie groß sind die entstehenden vier Parallelogramme?

***111.** Zwei anstoßende Seiten eines Parallelogramms messen 10 m und 17 m, eine Ecklinie 21 m. Durch Parallele zu den Seiten soll ein ähnliches Parallelogramm abgeschnitten werden, welches a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{4}{9}$, c) $\frac{1}{2}$ des gegebenen ist. Berechne die Seiten und die Inhalte.

***112.** Die anstoßenden Seiten eines Parallelogramms messen 24 m und 12 m, die Summe der Höhen = 24 m; berechne den Inhalt.

***113.** Die Grundseite eines Parallelogramms sei 20 m, die Ecklinien 30 m und 14 m; wie groß ist der Inhalt?

***114.** Im Parallelogramm ABCD ist die Ecklinie AC = 37 m, Ecklinie BD = 20 m, die Höhe auf AB = 12 m; wie groß ist der Inhalt?

***115.** Die Grundseite eines Parallelogramms ist um 4 m größer als die zugehörige Höhe, der Inhalt beträgt 96 qm; berechne die Ausdehnungen.

---

§ 2. Das Dreieck.

A. Rechtwinkliges Dreieck.

Bezeichnung.

a, b, c sind die Seiten, h_a, h_b, h_c sind die zu den Seiten gehörigen Höhen.

t^a, t_b, t_c sind die nach den Seiten a, b und c gezogenen Mittellinien, p und q sind die Höhenabschnitte; (p an $\measuredangle$ B, q an $\measuredangle$ A). Im rechtwinkligen Dreieck ist c die Hypotenuse, im gleichschenkligen die Grundseite; im gleichseitigen ist die Seite = a und die Höhe = h. Der Flächeninhalt des Dreiecks wird mit F, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises mit r und der des eingeschriebenen mit ϱ bezeichnet.

---

1. Es ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, dessen Katheten a) a und b, b) 6 m und 8 m, c) 5 cm und 12 cm, d) 7 cm und 24 cm, e) 1,6 m und 3 m, f) 10 m und 15 m lang sind.

2. Berechne die Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, dessen eine Kathete a) 10 m, b) $2\frac{1}{2}$ m, c) 3,6 m lang ist.

***3.** Zwei Wanderer reisen von einem Orte P ab, der eine nach Norden, der andere nach Osten, jeder mit einer täglichen Geschwindigkeit von 30 km; a) wie weit sind sie nach 4 Tagen von einander entfernt? b) Nach wieviel Tagen beträgt aber ihre Entfernung 174 km, wenn der täglich zurückgelegte Weg des einen 30 km, der des anderen $31\frac{1}{2}$ km beträgt?

4. Ein Bauhandwerker hat 3 Balken in Form eines rechtwinkligen Dreiecks zusammenzulegen; die Balken, welche die Katheten bilden, sind 2,4 m und 4,5 m lang; wie lang ist der dritte Balken?

5. Welche Länge muß eine Leiter haben, die an eine Wand von 6 m Höhe gelegt, unten $2\frac{1}{2}$ m abstehen soll?

6. Die Hypotenuse eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks mißt 30 cm; wie lang ist ein Schenkel?

7. Es ist die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, dessen Hypotenuse und andere Kathete folgende Werte haben: a) 37 cm und 35 cm, b) 51 cm und 45 cm, c) 7,5 m und 2,1 m, d) 12 m und 10 m.

8. Berechne die Seitenhöhe einer geraden Pyramide (Spitzsäule) mit quadratischen Grundflächen, wenn die Pyramidenhöhe a) 12 cm, b) 60 cm, die Grundkante a) 10 cm, b) 22 m mißt.

9. Die Seitenlinie eines geraden Kegels ist s, der Halbmesser der Grundfläche r; berechne die Höhe des Kegels. [a) s = 25 cm, r = 7 cm; b) s = 17 cm, r = 8 cm.]

10. Zur oberen Plattform eines Kalkofens führt eine schiefe Ebene von 50 m Länge, eine gerade Linie vom unteren Endpunkte der schiefen Ebene bis zum Fuße des Ofens mißt 48 m; wie hoch ist der Ofen?

11. a) Welchen Umfang, b) welchen Flächeninhalt hat ein recht-winklig-gleichschenkliges Dreieck, wenn die Senkrechte aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse = h ist? (h = 5 cm.)

12. Wie groß ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, wenn eine Kathete a) 10 cm, b) 7,5 cm, c) 3,75 cm, d) 2,4 m lang ist?

13. Der Inhalt eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks beträgt a) $12\frac{1}{2}$ qm, b) 25 qm, c) 18 a; berechne Kathete und Hypotenuse.

14. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mißt 3,9 m, die eine Kathete 1,5 m; berechne Umfang und Inhalt.

15. Ein Feld hat die Gestalt eines rechtwinkligen Dreiecks; die eine Kathete geht teilweise durch einen Sumpf, ist also nicht meßbar, die Hypotenuse hat eine Länge von 87 m, die andere Kathete mißt 60 m; wie lang ist die erste Kathete und welchen Flächeninhalt hat das Feld?

16. Von einem Punkte außerhalb einer Ebene, dessen Entfernung von derselben = 25 cm ist, ist nach der Ebene eine Gerade unter einem Neigungswinkel von a) 45°, b) 60° gezogen; wie lang ist diese?

17. Von einem Punkte P sind nach einer Geraden zwei andere Gerade von 51 cm und 26 cm Länge so gezogen, daß sich die Entfernungen ihrer Fußpunkte vom Fußpunkte der von P auf die erste Gerade gefällten Senkrechten wie 9 : 2 verhalten; wie lang ist die Senkrechte und wie lang die Verbindungslinie ihrer Fußpunkte?

18. Auf der Ebene eines rechtwinkligen Dreiecks ist im Winkelpunkte des rechten Winkels eine Senkrechte errichtet worden = 24 cm; die Entfernungen ihres oberen Endpunktes von den Endpunkten der Hypotenuse sind bezüglich 25 cm und 26 cm; berechne die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks.

19. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks = 54 qcm, die Katheten verhalten sich wie 3 : 4; berechne diese.

20. Die spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie 1 : 2, die Hypotenuse mißt 30 cm; berechne Umfang und Inhalt.

21. Der eine Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks mißt 60^0, die diesem gegenüberliegende Kathete 30 cm; berechne Umfang und Inhalt.

***22.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn die Summe der Katheten = s, die Hypotenuse = c ist. (s = 23, c = 17.)

***23.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn die Differenz der Katheten = d, die Hypotenuse = c ist. (d = 17, c = 25.)

***24.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn eine Kathete a, die Summe von Hypotenuse und der anderen Kathete = s gegeben ist. (a = 20, s = 50.)

***25.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn eine Kathete a, der Unterschied zwischen Hypotenuse und der anderen Kathete = d ist. (a = 21, d = 9.)

***26.** Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks = 84 qm, die Katheten unterscheiden sich um 17 m; berechne diese.

***27.** Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks = 60 m, der Unterschied der Katheten 14 m; berechne die Seiten.

***28.** Hypotenuse und Kathete eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks unterscheiden sich um 10 m; berechne diese und den Inhalt.

***29.** Der Unterschied zwischen Hypotenuse und einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks = a) 18 m, b) 6 m, die andere Kathete = 24 m; wie lang ist jede Seite?

***30.** In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Unterschied zwischen Hypotenuse und einer Kathete = 18 m, während sich die Katheten um 17 m unterscheiden; wie groß ist der Inhalt?

***31.** Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks von 54 qm Inhalt beträgt 36 m; berechne die Seiten.

***32.** Es sind die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, wenn a) die Summe der beiden Katheten 15 m, der Inhalt 27 qm, b) wenn die Summe von Hypotenuse und einer Kathete 36 m, der Inhalt 96 qm beträgt.

***33.** Ein Rechteck von 12 cm Länge und 8 cm Breite ist in ein rechtwinkliges Dreieck zu verwandeln, dessen Hypotenuse 20 cm mißt; wie lang sind die Katheten?

34. In einem rechtwinkligen Dreieck wird die Hypotenuse durch die Senkrechte aus dem Scheitel des rechten Winkels so geteilt, daß die Abschnitte derselben 16 m und 25 m messen; berechne die Senkrechte und den Inhalt.

35. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mißt 24 m, der an ihr liegende Abschnitt der Hypotenuse 18 m; berechne die Hypotenuse, die Katheten und den Inhalt.

36. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn eine Kathete $= a$, der ihr anliegende Hypotenusenabschnitt $= p$ ist ($a = 16$, $p = 12{,}8$).

37. Die Senkrechte aus dem rechten Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks = 20 m, der eine Abschnitt der Hypotenuse 16 m; wie groß der andere Abschnitt und der Inhalt des Dreiecks?

38. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn die Hypotenusenabschnitte p und q gegeben sind ($p = 28$, $q = 5$).

***39.** Die Senkrechte aus dem rechten Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks = 30 cm, der Unterschied der Hypotenusenabschnitte = 25 cm; berechne diese und den Inhalt.

40. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn eine Kathete a und der ihr nicht anliegende Hypotenusenabschnitt q gegeben ist ($a = 15$, $q = 16$).

***41.** Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mißt 30 cm, der nicht anliegende Abschnitt der Hypotenuse 11 cm; berechne den anliegenden Abschnitt, die Senkrechte auf die Hypotenuse und den Inhalt.

***42.** Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mißt 61 cm, die Senkrechte aus dem rechten Winkel = 30 cm; berechne die Hypotenusenabschnitte und den Inhalt.

43. Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 150 qcm, die Kathete a = 20 cm. Berechne die anderen Stücke.

44. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn die Hypotenuse 17 cm, der Radius des eingeschriebenen Kreises 3 cm mißt.

45. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn die Kathete a = 15 cm, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises 3 cm mißt.

***46.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn die Summe der Katheten 23 cm, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises 3 cm mißt.

***47.** Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn a) die Summe aus Hypotenuse und einer Kathete 49 cm, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises 6 cm; b) der Unterschied von Hypotenuse und einer Kathete 18 cm, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises 3 cm beträgt.

*48. Ein rechtwinkliges Dreieck zu berechnen, wenn sein Umfang $= s$, der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises ϱ ist ($s = 56$, $\varrho = 3$).

*49. Über der Strecke c als Hypotenuse ist ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet, dessen Seiten eine stetige Proportion bilden. Berechne diese ($c = 60$).

*50. Über der Strecke a als Kathete ist ein rechtwinkliges Dreieck gezeichnet, dessen Seiten eine stetige Proportion bilden. Berechne die Seiten, wenn die gegebene Strecke a) die kleinere, b) die größere Kathete ist ($a = 60$).

*51. In ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten a und b sind ist ein Quadrat so zu legen, daß es a) mit dem Dreieck den rechten Winkel gemeinsam hat und der vierte Winkelpunkt in der Hypotenuse liegt; b) daß zwei Ecken des Quadrats in der Hypotenuse, die beiden anderen in den Katheten liegen ($a = 40$, $b = 30$).

B. Gleichseitiges Dreieck.

52. Ein gleichseitiges Dreieck zu berechnen, wenn eine Seite $= a$ gegeben ist [a) $a = 10$ cm, b) $a = 15$ cm, c) $a = 2{,}5$ cm].

53. Berechne die Oberfläche a) eines regelmäßigen Vierflachs, b) eines regelmäßigen Achtflachs, wenn eine Kante $= a$ gegeben ist ($a = 25$ cm).

54. Bestimme den Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks, wenn die Höhe $= h$ gegeben ist [a) $h = 10$ cm, b) $h = 20$ cm, c) $h = 30$ cm].

55. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks ist $= F$; wie lang ist eine Seite?

56. Der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks = a) 60 qm, b) 15 qm; wie lang ist eine Seite?

57. Ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck haben gleiche Seiten $= a$; wie verhalten sich ihre Inhalte?

58. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist $= a$; über der Höhe desselben als Seite ist ein zweites gleichseitiges Dreieck errichtet worden. a) Wie groß ist das zweite Dreieck? b) Wie verhalten sich beide? ($a = 10$.)

59. Es ist der Inhalt eines gleichseitigen Dreiecks zu berechnen, wenn a) der Halbmesser des umgeschriebenen $= r$, b) der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $= \varrho$ gegeben ist [a) $r = 6$, b) $\varrho = 6$].

*60. Die Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist $= a$; wie lang ist die Seite des doppelt so großen Dreiecks? ($a = 10$ m.)

***61.** Ein gleichseitiges Dreieck zu berechnen, wenn a) die Summe von Seite und Höhe = s, b) der Unterschied beider = d gegeben ist [a) s = 12 m, b) d = 6 m].

***62.** In ein Quadrat von a cm Seite ist ein gleichseitiges Dreieck so eingeschrieben, daß die eine Ecke des Dreiecks mit einer Ecke des Quadrats zusammenfällt, die beiden anderen auf den dieser Ecke gegenüberliegenden Seiten liegen; wie lang ist eine Seite des Dreiecks? (a = 10 cm.)

***63.** In ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Seite = a ist, ist ein Quadrat so beschrieben, daß zwei Eckpunkte desselben auf einer Seite des Dreiecks, die beiden anderen in den anderen Seiten liegen; wie lang ist eine Quadratseite? (a = 30.)

***64.** Im Mittelpunkte eines gleichseitigen Dreiecks ist auf der Ebene dieses eines Senkrechte errichtet = 36 cm; die Entfernung des oberen Endpunktes der Senkrechten von einem Eckpunkte des Dreiecks beträgt 39 cm; berechne den Flächeninhalt des ersten Dreiecks.

***65.** Um ein gleichseitiges Dreieck von 20 cm Seite ist ein anderes so zu legen, daß die Seiten des letzteren senkrecht auf denen des ersteren stehen; a) wie lang ist eine Seite? b) Berechne den Inhalt und das Verhältnis der beiden Dreiecke.

66. Über jeder Seite eines Quadrats, dessen Ecklinie = d gegeben ist, ist nach außen ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet. Berechne a) den Umfang, b) den Inhalt dieser sternförmigen Figur.

67. In das gleichseitige Dreieck ABC, dessen eine Seite = a ist, ist ein anderes gleichseitiges Dreieck DEF (D in AB, E in BC, F in AC) so gezeichnet, daß die Seiten des zweiten auf denen des ersten senkrecht stehen. Berechne die Seite des zweiten (a = 30).

C. Gleichschenkliges Dreieck.

68. Ein gleichschenkliges Dreieck zu berechnen, wenn die Grundseite = c und die Höhe = h gegeben ist. [a) c = 12 m, h = 7,5 m, b) c = $4\frac{1}{2}$ m, h = $2\frac{2}{3}$ m, c) c = 3,6 m, h = 2,4 m.]

69. Die übrigen Stücke eines gleichschenkligen Dreiecks sind zu berechnen aus a) c und h_c, b) c und F, c) a und h_c.

70. Berechne Höhe und Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks, wenn ein Schenkel a) 13 m, b) 2,9 m, die Grundseite a) 10 m, b) 4 m mißt.

71. Der Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks beträgt a) 120 qm,

b) 7,2 qm, c) 1,44 qm, die Grundseite mißt a) 24 m, b) 4,8 m, c) 0,48 m; wie groß ist die Höhe?

72. Die Giebelseite eines Hauses besteht aus einem Rechteck von 12 m Breite und 10 m Höhe und einem darauf ruhenden gleichschenkligen Dreieck von 4,5 m Höhe. Wie teuer kommt das Weißen derselben, wenn 1 qm mit 0,15 ℳ bezahlt wird?

73. Die Spitze eines Kirchturms ist eine achtseitige Spitzsäule (Pyramide) von 2,5 m Grundkante und 10 m Seitenhöhe. Wieviel qm Kupferplatten sind zur Bekleidung derselben notwendig?

74. Die Städte Dresden, Prag und Görlitz bilden die Winkelpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Grundseite die Strecke Dresden-Görlitz bildet = 105 km, während ein Schenkel 120 km lang ist. Welchen Flächeninhalt hat dieses Dreieck?

75. Berechne den Flächeninhalt des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Winkelpunkte durch die Städte Berlin, Wien und Königsberg gebildet werden, wenn die Grundseite Wien-Königsberg 750 km, ein Schenkel 540 km mißt.

76. Grundseite und Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks verhalten sich wie 5:6, der Flächeninhalt beträgt 240 qcm; berechne jene Ausdehnungen und einen Schenkel.

---

77. Schenkel und Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks verhalten sich wie 5 : 6, die Höhe beträgt 24 m; wie lang sind jene beiden Seiten?

***78.** In ein gleichschenkliges Dreieck von 10 cm Grundseite und 15 cm Höhe soll ein Quadrat so gelegt werden, daß zwei Winkelpunkte des Quadrats in die Grundseite, die beiden anderen in die Schenkel desselben fallen; wie groß ist die Seite des Quadrats?

***79.** In ein gleichschenkliges Dreieck von 24 cm Grundseite und 20 cm Schenkellänge ist ein Rechteck, dessen Seiten sich wie 1 : 2 verhalten, so zu legen, daß zwei Eckpunkte desselben auf die Grundseite, die beiden anderen auf die Schenkel zu liegen kommen; berechne die Seiten desselben.

80. In ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, dessen eine Kathete = a ist, ist ein Quadrat so gezeichnet, daß zwei Ecken des Quadrats auf der Hypotenuse, die beiden anderen auf der anderen Seite liegen (a = 50).

***81.** Die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks mißt 13 m, die Höhe auf einen Schenkel 12 m; berechne den Inhalt.

*82. Die Höhe auf die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks mißt 15 m, die Höhe auf einen Schenkel 10 m; berechne den Inhalt.

*83. Die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks = 12 cm, die Summe von Schenkel und Höhe = 18 cm; wie groß ist das Dreieck?

*84. Die Grundseite eines gleichschenkligen Dreiecks = 20 cm, der Unterschied zwischen Schenkel und Höhe = 2 cm; wie groß ist der Inhalt?

*85. Es ist der Inhalt eines gleichschenkligen Dreiecks zu berechnen, wenn der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises 8 cm, ein Schenkel 12 cm mißt.

D. Ungleichseitiges Dreieck.

86. Berechne den Inhalt eines Dreiecks, wenn die Grundseite = c und die Höhe = h_c gegeben sind. (Setze für c bezw. h_c die Werte a) 15 m und 10 m, b) $3\frac{3}{4}$ m und $2\frac{2}{3}$ m, c) 5,6 m und 3,75 m.)

87. Berechne eine Ausdehnung, Grundseite oder Höhe, wenn der Inhalt F und die Grundseite = c bezw. die Höhe = h_c gegeben sind. [a) = 60 qm und 12 m, b) 24 qm und 4,8 m, c) 10 a und 75 m, d) 8,64 qkm und 3,6 km.]

88. Die Grundseite eines Dreiecks beträgt c; welche Höhe muß es haben, um einem Quadrat, dessen Seite a ist, flächengleich zu sein? (c = 7,2 m, a = 6 m.)

89. Die Grundseite eines Dreiecks mißt 12 m, die Höhe 8 m, die Grundseite wird um 3 m a) verlängert, b) verkürzt; um wieviel m ist die Höhe zu verkürzen oder zu verlängern, wenn der Inhalt derselbe bleiben soll?

90. Die Grundseite eines Dreiecks mißt c, die Höhe h; das Dreieck soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen anstoßende Seiten sich wie m : n verhalten; wie lang sind diese? (c = 12, h = 8, m : n = 2 : 3.)

91. Im Dreieck ABC ist die Grundseite AB = c und die Höhe auf AB = h gegeben. Wie lang ist die Seite des ihm flächengleichen gleichseitigen Dreiecks? (c = 45, h = 36.)

92. Ein Dreieck von 27 cm Grundseite und 24 cm Höhe soll a) in ein Quadrat, b) in ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, c) in ein gleichseitiges Dreieck verwandelt werden; wie lang sind die Seiten?

93. Die Grundseiten zweier ähnlichen Dreiecke messen 9 m und 12 m, die Summe der Inhalte beträgt 150 qm; berechne die Inhalte und die Höhen.

94. Die Grundseiten zweier ähnlichen Dreicke messen 9 m und 12 m; der Inhalt des ersten = 54 qm; a) berechne den Inhalt des zweiten Dreiecks. b) Wie verhalten sich die Ausdehnungen und die Inhalte beider Dreiecke?

95. Die Grundseite eines Dreiecks von 225 qcm Inhalt mißt 25 cm; berechne die Ausdehnungen eines ähnlichen Dreiecks von 100 qcm Inhalt.

96. Die Inhalte zweier ähnlichen Dreiecke betragen 54 qm und 96 qm, die Summe der Grundseiten ist 21 cm; berechne diese und die Höhen.

97. Grundseite und Höhe eines Dreiecks von 240 qcm Inhalt verhalten sich a) wie 5 : 6, b) wie 3 : 4; berechne die Ausdehnungen.

98. Ein Stab von 3,5 m Höhe wirft einen Schatten von 2 m Länge; in demselben Augenblicke mißt der Schatten eines Turmes 18 m; wie hoch ist der Turm?

99. Wie lang ist der Kernschatten der Erde, wenn der Durchmesser der Sonne 1 388 000 km, der Durchmesser der Erde 12 750 km, die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne 149 Mill. km beträgt?

100. Wie dick ist dieser Schattenkegel an der Stelle, an welcher er (zur Zeit einer Mondfinsternis) vom Monde durchschnitten wird, wenn die mittlere Entfernung des Mondes 386 000 km beträgt?

101. Ein Dreieck zu berechnen, wenn zwei Seiten a und b und die Höhe auf die dritte Seite h_c gegeben ist. ($a = 40$, $b = 26$, $h_c = 24$.)

102. Ein Dreieck zu berechnen, wenn die Höhenabschnitte einer Seite p und q und die Höhe auf diese Seite h_c gegeben sind. ($p = 15$, $q = 6$, $h_c = 8$.)

103. Die Summe zweier Dreiecksseiten = 77 m, die zugehörigen Höhen messen 25 m und 30 m; berechne den Inhalt.

104. Welchen Inhalt hat ein Dreieck, wenn zwei Seiten desselben 10 m und 24 m messen und der von ihnen eingeschlossene Winkel = 60° ist?

105. Im Dreieck ABC ist AB = 20 m, AC = 18 m, $\measuredangle B = 60^0$; berechne den Inhalt.

106. Im Dreieck ABC ist $\measuredangle A = 60^0$, $\measuredangle B = 45^0$, die von C auf AB gefällte Senkrechte CD = 12 m; berechne die Seiten.

***107.** Die 3 Seiten eines Dreiecks messen 14 m, 13 m und 15 m; es sind die Abschnitte zu berechnen, in welche jede Seite durch die zugehörige Höhe geteilt wird.

108. Zwei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks sind 28 m und 26 m lang, die Projektion der dritten Seite auf die erste mißt 18 m; berechne diese und den Inhalt.

***109.** Zwei Seiten eines Dreiecks betragen 30 m und 40 m, die Projektion der ersten auf die dritte Seite = 18 m; berechne diese und den Inhalt.

***110.** Die drei Seiten eines Dreiecks messen a, b und c. Berechne den Inhalt.

***111.** Aus den drei Seiten eines Dreiecks a, b und c sind die Höhenabschnitte p und q zu bestimmen und zwar unter der Voraussetzung, daß $\measuredangle$ A a) kleiner, b) größer als ein Rechter ist.

***112.** Die 3 Seiten eines Dreiecks messen bezüglich a) 13 m, 14 m, 15 m, b) 14 m, 48 m, 50 m, c) 5 m, 8,5 m, 10,5 m; berechne den Inhalt. d) Untersuche, ob die Dreiecke rechtwinklig, spitzwinklig oder stumpfwinklig sind.

***113.** Das Königreich Sachsen bildet ein Dreieck, dessen Seiten annähernd 235 km, 215 km und 140 km lang sind; wie groß ist sein Flächeninhalt?

***114.** Welchen Flächeninhalt hat das Dreieck, dessen Winkelpunkte durch die Städte Berlin, Leipzig und Hannover gebildet werden, wenn die Strecke Berlin-Leipzig 150 km mißt, diejenige Berlin-Hannover 250 km und die Leipzig-Hannover 220 km?

***115.** Die drei Höhen eines Dreiecks messen 12 m, 15 m und 20 m; berechne den Inhalt.

***116.** Der Umfang eines Dreiecks beträgt 24 m, die Seiten eines ihm ähnlichen messen 4 m, 5 m und 7 m; berechne den Inhalt der Dreiecke.

***117.** Die Seiten eines Dreiecks messen 7 m, 8 m und 9 m; die größte Seite eines ihm ähnlichen Dreiecks mißt 6 m; berechne die anderen Seiten und den Inhalt.

***118.** Die drei Seiten eines Dreiecks messen 40 m, 13 m und 37 m; der Inhalt eines ähnlichen = 960 qm; berechne den Inhalt des ersten und die Seiten des zweiten Dreiecks.

***119.** Die drei Seiten eines Dreiecks sind 11 m, 13 m und 20 m lang; parallel der 11 m langen Seite soll zwischen die anderen Seiten eine Gerade so gelegt werden, daß der Abstand der Parallelen 4 m beträgt, berechne die Seiten und den Inhalt des abgeschnittenen Dreiecks.

120. Im Dreieck ABC ist AC = b, BC = a, die von C nach der

Mitte der AB gelegte Transversale $CD = t_c$ gegeben. Berechne das Dreieck. [a) $a = 26$, $b = 22$, $t_c = 20$, b) $a = 39$, $b = 25$, $t_c = 28$.]

***121.** Zwei Seiten eines Dreiecks messen 8 m und 26 m, die Mittellinie nach der 26 m langen Seite = 7 m; berechne die dritte Seite und den Inhalt.

***122.** Im Dreieck ABC ist AB = 8 m, die Mittellinien nach den beiden anderen Seiten = 6 m und 9 m; wie groß ist das Dreieck?

***123.** Im Dreieck ABC ist AC = 10 m, BC = 15 m, die den Winkel C Halbierende (w_c) = 9 m; berechne die dritte Seite.

***124.** Im Dreieck ABC ist AC = 12 m, BC = 10 m, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises = 8 m; berechne die dritte Seite und den Inhalt.

125. Die Mittellinien eines Dreiecks messen 12 m, 15 m und 18 m; berechne den Inhalt.

***126.** Die drei Seiten eines Dreiecks messen 10 m, 17 m und 21 m; wie lang ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

***127.** Der Flächeninhalt eines Dreiecks beträgt 66 qm, 2 Seiten desselben 11 m und 13 m; berechne die dritte Seite, den Halbmesser des umgeschriebenen und den des eingeschriebenen Kreises.

***128.** Die Dreiecke ABC und ADE haben $\measuredangle$ A gemeinsam (E in AB); ferner ist ABC = 60 qm, ADE = 48 qm, AB = 15 m, AC = 12 m, AD + AE = 24 m; berechne diese Seiten und die Höhen.

***129.** Im Dreieck ABC ist AC = 18 m, BC = 8 m, AB = 14 m; es soll Dreieck ABC unter Beibehaltung des Winkels C in ein gleichschenkliges Dreieck verwandelt werden; berechne Schenkel und Inhalt.

130. Ein Dreieck zu berechnen, wenn gegeben ist eine Seite = c, die Höhe auf diese = h_c und eine andere Seite = a. ($c = 21$, $h_c = 12$, $a = 20$.)

131. Ein Dreieck zu berechnen, wenn gegeben ist eine Seite c, die Höhe h_c und die Mitteltransversale nach dieser t_c. ($c = 30$, $h_c = 12$, $t_c = 13$.)

132. Dreieck ABC, dessen Grundseite = c, dessen Höhe = h ist, soll in ein anderes verwandelt werden, in dem Grundseite und Höhe einander gleich sind. Berechne diese Ausdehnungen. ($c = 45$, $h = 36$.)

133. Ein Dreieck, dessen Seiten a, b und c gegeben sind, ist in ein Dreieck zu verwandeln, in dem Grundseite und Höhe einander gleich sind. Berechne die Ausdehnungen. [Die Seiten messen a) 7, 15 und 20 cm, b) 13, 20 und 21 cm, c) 40, 37 und 13 cm.]

134. Die vorigen Dreiecke (Nr. 133) sind in gleichseitige zu verwandeln; berechne eine Seite.

135. Im Dreieck ABC mißt die Seite $a = 37$ cm, $b = 13$ cm und $c = 40$ cm. Dieses Dreieck soll in ein Rechteck verwandelt werden, das mit dem Dreieck gleichen Umfang hat. Berechne die Ausdehnungen des Rechtecks.

136. Ein Dreieck, dessen Grundseite 28 cm, dessen Höhe 15 cm beträgt, ist in ein rechtwinkliges zu verwandeln, von dem gegeben ist: a) der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = 6 cm, b) die Summe der Katheten = 41 cm, c) der Umfang = 70 cm. Berechne die Seiten.

***137.** Ein Dreieck, dessen Seiten a) 7, 15 und 20 cm; b) 10, 17 und 21 cm; c) 13, 20 und 21 cm; d) 25, 39 und 56 cm messen, in ein rechtwinkliges zu verwandeln, von dem das Verhältnis der Katheten = 2 : 3 gegeben ist. Berechne die Katheten.

***138.** Ein Dreieck, dessen Seiten 25, 39 und 56 cm messen, ist a) in ein rechtwinkliges zu verwandeln, in welchem der Unterschied der Katheten 22 cm beträgt; b) in ein rechtwinkliges, für das der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises $6\sqrt{2}$ cm mißt; c) in ein rechtwinklig-gleichschenkliges.

***139.** In ein Dreieck, dessen eine Seite = c, die Höhe auf diese Seite = h_c gegeben ist, ist ein Quadrat so gelegt, daß zwei Ecken desselben auf jener Dreiecksseite, die beiden anderen auf den anderen Seiten liegen. Wie lang ist eine Quadratseite? ($c = 36$, $h = 12$.)

140. In ein Dreieck, dessen Seiten a, b und c sind, ist ein Quadrat so gelegt, daß zwei Ecken auf eine Dreiecksseite, die beiden anderen auf die anderen Seiten fallen. Wie lang ist eine Quadratseite? ($a = 13$, $b = 37$, $c = 40$.)

Für welche Dreiecke bleibt der Wert für die Quadratseite gleich?

141. In ein Dreieck, dessen Grundseite = c, dessen Höhe = h_c ist, ist ein Rechteck so gelegt, daß zwei Ecken desselben in der Grundseite, die beiden anderen in den anderen Seiten liegen. Berechne die Rechtecksseiten, wenn der Umfang des Rechtecks 2 s ist. ($c = 60$, $h_c = 45$, $2s = 100$.)

142. In ein Dreieck, dessen Seiten a, b und c sind, ist, wie in voriger Aufgabe, ein Rechteck gelegt, dessen Umfang = 2 s ist. Berechne die Seiten. ($a = 20$, $b = 13$, $c = 21$; $2s = 36$.)

143. Wie in voriger Aufgabe ist in ein Dreieck ein Rechteck gelegt, dessen Seiten sich wie $m:n$ verhalten. Berechne die Seiten. ($a = 20$, $b = 13$, $c = 21$; $m:n = 4:3$.)

144. Wie in Aufg. 140 ist in ein Dreieck ein Rechteck zu legen, das einen gegebenen Flächeninhalt q^2 hat. ($c = 56$, $b = 39$, $a = 25$, $q^2 = 157{,}5$.)

145. In das $\triangle$ ABC ist ein Parallelogramm so zu legen, daß es mit dem Dreieck den Winkel A gemeinsam hat und daß die vierte Ecke auf der diesem Winkel gegenüberliegenden Seite liegt. Berechne die Seiten des Parallelogramms, wenn der Umfang desselben $= 2s$ ist. ($c = 42$, $b = 76$, $a = 40$, $2s = 76$.)

---

§ 3. Trapez und unregelmäßiges Vieleck.

A. Trapez.

Bezeichnung: Die Seiten eines Trapezes werden mit a, b, c und d, die Diagonalen mit e und e', die Höhe auf a mit h, die Mittellinie mit m und der Flächeninhalt mit F bezeichnet.

1. Berechne die Mittelline eines Trapezes, wenn die Parallelen a) 12 m und 9 m, b) 1,50 m und 2,40 m, c) $2\frac{1}{2}$ m und $3\frac{3}{4}$ m lang sind.

2. Die Mittellinie eines Trapezes mißt 10 cm, die beiden nicht parallelen Seiten = 5 cm und 7 cm, die Parallelen verhalten sich wie 2 : 3; berechne den Umfang und die Parallelen.

3. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes unterscheiden sich um 3 cm, die nicht parallelen um 2 cm, die Mittellinie mißt 10,5 cm, die Summe der nicht parallelen Seiten beträgt 16 cm; wie groß ist der Umfang?

4. Die Mittellinie eines Trapezes mißt a) 12,5 m, b) 3,6 m, die Höhe 4,5 m; wie groß ist der Flächeninhalt?

5. Es soll der Inhalt eines Trapezes gefunden werden, wenn die Parallelen (a u. c) und die Höhe (h) folgende Werte haben: a) $a = 15$ m, $c = 10$ m, $h = 8$ m, b) $a = 3\frac{3}{4}$ m, $c = 2\frac{1}{2}$ m, $h = 5$ m, c) $a = 5{,}75$ m, $c = 3{,}6$ m, $h = 2{,}4$ m, d) $a = 24{,}48$ m, $c = 15{,}6$ m, $h = 12{,}5$ m.

6. Berechne a) den Mantel, b) die Oberfläche einer vierseitigen abgestumpften Pyramide (Spitzsäule) von 25 cm Seitenlinie, wenn die Grundkante 15 cm, eine Endkante 9 cm mißt.

7. Ein Ackerstück hat die Form eines Trapezes, dessen parallele Seiten 90 m und 150 m messen, während der Abstand derselben 55 m beträgt; wie groß ist diese Fläche?

8. Ein Trapez von 12 m Höhe, dessen Parallelen 25 cm und 17 cm messen, soll in ein Dreieck von derselben Höhe verwandelt werden; wie lang ist die Grundseite?

9. Ein Trapez von 3,5 m Höhe, dessen Parallelen 5 m und 7 m messen, soll in ein Dreieck a) über der größeren, b) über der kleineren Parallele als Grundseite verwandelt werden; berechne die Höhe.

10. Von einem Trapeze ist der Inhalt $= F$, die Höhe $= h$ gegeben. a) Wie lang ist die Mittellinie? b) Wie lang sind die beiden Parallelen, wenn sie sich wie $m:n$ verhalten? ($F = 192$ qm, $h = 12$ m $m:n = 3:5$).

11. Der Inhalt eines Trapezes $= 60$ qm, die Höhe 8 m, der Unterschied der Parallelen $= 2$ m; berechne diese.

12. Der Inhalt eines Trapezes $= 252$ qm, die Parallelen 24 m und 18 m; berechne die Höhe.

13. Ein Trapez von 15 m Höhe, dessen Parallelen 20 m und 16 m messen, soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen Seiten sich wie $3:10$ verhalten; berechne diese.

14. Im Trapez $ABCD$ ist $\measuredangle A = \measuredangle D = R$, außerdem sind die Seiten a, b und c gegeben. Berechne die Höhe und den Inhalt ($a = 32$, $b = 20$, $c = 20$.)

15. Im Trapez $ABCD$ ist der an der größeren Parallele AB liegende $\measuredangle A = 45^0$, $AB = 24$ m, Parallele $CD = 16$ m, $AD = 10$ m; berechne den Inhalt.

16. Im Trapez $ABCD$ ist der an der größeren Parallele AB liegende $\measuredangle A = 45^0$, $\measuredangle B = 60^0$, $AD = 12$ m, Parallele $CD = 15$ m; wie groß ist der Inhalt?

17. Im Trapez $ABCD$ ist $\measuredangle A = 60^0$, $\measuredangle B = 45^0$, die Parallelen AB und CD 30 cm und 12 cm; berechne den Inhalt.

18. Die Parallelen eines Trapezes messen 20 m und 15 m, die Höhe 12 m; wie groß ist das Dreieck, welches man durch Verlängerung der nicht parallelen Seiten erhält? b) Wie groß ist das auf der kleineren Parallele ruhende Dreieck?

19. In ein Dreieck von 18 cm Grundseite und 15 cm Höhe wird parallel der Grundseite eine die beiden anderen Seiten schneidende Gerade von 12 cm Länge gelegt; wie groß ist das abgeschnittene Trapez?

20. Wie groß ist das Trapez, das man erhält, wenn man im Dreieck der vorigen Aufgabe zwischen die Verlängerungen der Dreiecksseiten über die Grundseite hinaus eine 24 cm lange Gerade parallel der Grundseite legt?

21. Höhe, kleinere und größere Parallele eines Trapezes von 252 qcm Inhalt verhalten sich wie 2 : 3 : 4; berechne diese Ausdehnungen.

***22.** Der Inhalt eines Trapezes = 216 qcm, der Unterschied der Parallelen 4 cm, die Höhe ist um 4 cm kleiner als die kleinere Parallele; berechne diese Ausdehnungen.

***23.** Im Trapez ABCD messen die Parallelen AB und CD 14 cm und 11 cm, Schenkel AD = 13 cm, Diagonale BD = 15 cm; berechne den Inhalt.

***24.** Im Trapez ABCD ist Diagonale AC = 13 cm, Diagonale BD = 15 cm, während der Abstand der Parallelen AB und CD 5 cm beträgt; berechne den Inhalt.

***25.** Von einem Dreieck, dessen Seiten bezüglich 40 cm, 37 cm und 13 cm messen, soll durch eine Parallele zu der 40 cm langen Seite ein 180 qcm großes Trapez abgeschnitten werden; berechne die Parallele und die Höhe des Trapezes.

***26.** Berechne den Inhalt eines geraden Trapezes, wenn die Parallelen 30 cm und 16 cm, ein Schenkel 25 cm lang sind.

***27.** Eine Dachfläche hat die Form eines geraden Trapezes; die größere Parallele mißt 20 m, die Ecklinie 18,5 m, die nicht parallele Seite 6,5 m. Das Dach soll mit quadratischen Ziegeln von 25 cm Seite gedeckt werden. Wieviel Stück sind notwendig, wenn 25 % der Fläche mehr gerechnet werden muß?

28. In einem geraden Trapeze ist die eine Parallele = 48 cm, die andere = 40 cm, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises 25 cm; wie groß ist der Inhalt?

29. In einem geraden Trapeze ist die eine Parallele 96 cm, die Höhe 44 cm, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises = 50 cm; berechne den Inhalt.

30. Der Halbmesser des einem Trapeze eingeschriebenen Kreises mißt 8 m, die Parallelen 25 cm und 15 cm; wie groß ist der Inhalt?

31. Die Parallelen eines geraden Trapezes messen 44 cm und 30 cm, ein Schenkel 25 cm; berechne den Inhalt des Trapezes und den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises.

32. Von einem Trapez sind die beiden Parallelen a und c und der Flächeninhalt F gegeben; die Höhe ist gleich der Parallelen a. Berechne die Höhe.

33. Die Grundseite eines Rechtecks ist 50 cm und die Höhe 20 cm. An dem einen Endpunkte der Grundseite ist ein Winkel von 60^0, an dem anderen ein Winkel von 30^0 angetragen; die Schenkel schneiden die Gegenseite. Berechne den Inhalt des hierdurch entstandenen Trapezes.

34. Von einem Trapeze sind die vier Seiten a, b, c und d gegeben. Berechne den Flächeninhalt desselben. ($a = 60$, $b = 37$, $c = 20$, $d = 13$.)

B. Unregelmäßiges Vier- und Vieleck.

35. Berechne Inhalt und Umfang eines symmetrischen Vierecks*), dessen Diagonalen 12 m und 14 m messen, während der der kleineren Diagonale gegenüberliegende Winkel = R ist.

36. Die gemeinschaftliche Grundseite zweier gleichschenkligen Dreiecke beträgt 24 cm, der Schenkel des einen = 13 cm, der des andern = 20 cm; berechne Inhalt und Umfang.

37. Berechne den Inhalt eines Vierecks, wenn eine Diagonale (Ecklinie) und die von den gegenüberliegenden Winkelpunkten auf diese gefällten Lote folgende Werte haben: a) Diagonale = 15 cm, Höhen = 12 cm und 8 cm, b) Diagonale = 48 cm, Höhen = 27 cm und 30 cm, c) Diagonale = 17,5 m, Höhen = 12,5 m und 7,5 m.

38. Ein Gartenland in Form eines unregelmäßigen Vierecks hat eine Ecklinie von 80 m, die beiden von den gegenüberliegenden Winkelpunkten auf sie gefällten Lote messen 64 m und 48 m; welchen Wert hat der Garten, wenn das Ar mit 36 ℳ bezahlt wird?

39. Ein Ackerstück hat die Gestalt eines unregelmäßigen Vierecks, dessen eine Diagonale = 90 m; die beiden Höhen auf diese messen 45 m und 36 m. Dieses Viereck soll a) in ein Rechteck von 54 m Breite, b) in ein Quadrat verwandelt werden. Berechne die Länge des Rechtecks und die Seite des Quadrats.

---

*) Ein symmetrisches Viereck entsteht, wenn man über einer Geraden als Grundseite (entweder nach derselben oder nach entgegengesetzten Richtungen) zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet.

40. Der Inhalt eines Vierecks = 600 qcm, eine Ecklinie = 25 cm, die Höhen auf diese verhalten sich wie 3 : 5; berechne die Höhen.

41. Berechne den Inhalt des Fünfecks ABCDE, wenn Ecklinie AD = 45 m, das von E auf AD gefällte Lot = 18 m, Ecklinie AC = 36 m, die von B und D auf AC gefällten Lote 19 m und 16 m messen.

42. Im Fünfeck ABCDE ist Ecklinie AD = 36 cm, die auf diese von B, C und E gefällten Lote BF, CG und EH messen bezüglich 12 cm, 18 cm und 8 cm, die Diagonalabschnitte AF und DG = 5 cm und 9 cm; wie groß ist der Inhalt?

---

43. Der Inhalt eines symmetrischen Vierecks = 192 qcm, die Ecklinien verhalten sich wie 2 : 3; berechne diese.

***44.** Der Inhalt eines symmetrischen Vierecks = 180 qcm; das Dreifache der kleinen Ecklinie ist um 3 cm kleiner als das Doppelte der größeren; wie lang ist jede Ecklinie?

***45.** Der Inhalt eines symmetrischen Vierecks = 180 qcm, die Summe der Ecklinien = 37 cm; wie groß ist der Umfang, wenn die eine Ecklinie durch die andere im Verhältnis von 2 : 5 geteilt wird?

***46.** Der eine der beiden ungleichen Winkel eines symmetrischen Vierecks = 60^0, die von diesem Winkel ausgehende Ecklinie = 15 m, die andere 10 m. Inhalt und Umfang sind zu berechnen.

***47.** In einen Kreis ist ein symmetrisches Viereck gezeichnet; die Ecklinie, welche die beiden gleichen Winkel verbindet, mißt 48 cm, die Abschnitte der anderen Ecklinie unterscheiden sich um 14 cm; berechne den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises, den Inhalt und den Umfang des Vierecks.

***48.** Die eine Ecklinie eines unregelmäßigen Vierecks mißt 48 cm, die Höhen auf diese = 36 cm und 24 cm; berechne die Seiten eines inhaltsgleichen Rechtecks, wenn der Unterschied derselben 4 cm beträgt.

***49.** Es ist der Inhalt eines Sehnenvierecks zu berechnen, dessen Seiten 38 cm, 30 cm, 14 cm und 10 cm lang sind. b) Berechne die Ecklinien und den Durchmesser des umgeschriebenen Kreises.

50. In einem Sehnenviereck ist die eine Ecklinie ein Durchmesser, die Summe der beiden Seiten, die in dem einen Endpunkt dieser Diagonale zusammenstoßen, 21, die Summe der beiden anderen Seiten 7; das Rechteck aus beiden Diagonalen würde 75 sein. Berechne a) die Seiten, b) den Inhalt des Sehnenvierecks.

51. Der Inhalt eines unregelmäßigen Vielecks beträgt 96 qcm, eine Seite 5 cm; die homologe Seite eines ähnlichen Vielecks mißt 7,5 cm; berechne den Inhalt desselben.

52. Die Umfänge zweier ähnlichen Vielecke betragen 60 m und 36 m, eine Seite des größeren mißt 7,5 m; wie lang ist die gleichliegende Seite des kleineren?

53. Der Plan eines Ackerstückes in Form eines unregelmäßigen Vierecks nimmt eine Fläche von 1200 qcm ein; die eine Seite des Vierecks hat auf dem Plane eine Länge von 15 cm, die gleichliegende Seite des Ackerstückes selbst hat eine Länge von 30 m; welchen Wert hat der Acker, wenn das Ar mit 30 ℳ bezahlt wird?

---

§ 4. Regelmäßiges Vieleck und Kreis.

A. Regelmäßiges Vieleck.

Bezeichnung. Die Seite des regelmäßigen Vielecks wird mit s, der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises mit r, die Höhe des Bestimmungsdreiecks (Seitenstrahl) mit h und der Flächeninhalt mit F bezeichnet.

1. Aus dem Halbmesser des Kreises = r und der Seite s des in denselben gelegten regelmäßigen Vielecks (n-ecks) die Seiten des in denselben Kreis gelegten regelmäßigen Vielecks von doppelter Seitenzahl (2 n-eck) zu berechnen.

2. Aus der Seite s des regelmäßigen 2 n-ecks und dem Halbmesser r des umgeschriebenen Kreises berechne die Seite des regelmäßigen n-ecks.

3. Aus dem Halbmesser eines Kreises r ist a) die Seite des regelmäßigen Sechsecks, b) die des regelmäßigen Zwölfecks, c) die des regelmäßigen Vierundzwanzigecks zu berechnen. (r = 10.)

4. Berechne die Seite eines regelmäßigen Dreiecks, wenn der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises = r gegeben ist. (r = 10.)

5. Aus dem Halbmesser des Kreises = r ist die Seite a) des regelmäßigen Vierecks, b) des regelmäßigen Achtecks, c) des regelmäßigen Sechzehnecks zu berechnen. (r = 10.)

6. Aus dem Halbmesser des Kreises = r ist die Seite des regelmäßigen Zehnecks (10-ecks) zu berechnen. (r = 20.)

7. Aus r und dem Werte für die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks ist die Seite des regelmäßigen Fünfecks zu suchen. (r = 10.)

8. Berechne den Umfang a) des regelmäßigen Sechsecks, b) Zwölfecks, c) Vierundzwanzigecks, d) Vierecks, e) Achtecks, f) Zehnecks, g) Fünfecks und setze ihn ins Verhältnis zum Durchmesser.

9. Aus der Seite = s eines regelmäßigen einem Kreise eingeschriebenen Vielecks und dem Halbmesser = r ist die Seite des umgeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl zu berechnen.

10. Berechne aus dem Halbmesser des Kreises = r die Seite des umgeschriebenen regelmäßigen a) Sechsecks, b) Zwölfecks, c) Achtecks.

11. Der Halbmesser eines Kreises = 10. Berechne die Seite und den Umfang des umgeschriebenen regelmäßigen Vierundzwanzigecks. Setze den Umfang ins Verhältnis zum Durchmesser.

12. Setze für den Durchmesser eines Kreises 1 und berechne dann den Umfang des dem Kreise a) eingeschriebenen, b) umgeschriebenen regelmäßigen Sechsecks, Zwölfecks, Vierundzwanzigecks, Achtundvierzigecks und Sechsundneunzigecks.

13. Berechne das Verhältnis von Seite und Seitenstrahl a) im regelmäßigen Dreieck, b) im regelmäßigen Viereck, c) im regelmäßigen Sechseck, d) im regelmäßigen Achteck.

14. Aus der Seite s a) des regelmäßigen Vierecks, b) Achtecks, c) Dreiecks, d) Sechsecks ist der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

15. Die Höhe eines Bestimmungsdreiecks a) eines regelmäßigen Vierecks, b) eines regelmäßigen Dreiecks, c) eines regelmäßigen Sechsecks, d) eines regelmäßigen Achtecks ist 1. durch die Seite s, 2. durch den Halbmesser des umgeschriebenen Kreises r auszudrücken.

16. Berechne den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vierecks, Dreiecks, Achtecks, Sechsecks wenn a) die Seite s, b) der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises r gegeben ist.

17. Die Seite eines regelmäßigen Dreiecks beträgt a) 10 cm, b) 15 cm, c) 20 cm; berechne den Seitenstrahl und den Inhalt.

18. Der Umfang eines regelmäßigen Sechsecks = a) 60 cm, b) 2,40 m; berechne Seitenstrahl und Inhalt.

19. In einen Kreis von 30 cm Halbmesser ist ein regelmäßiges Sechseck beschrieben; berechne dasselbe.

20. Der Fußboden eines regelmäßigen achtseitigen Zimmers soll mit quadratischen Platten von 25 cm Seite belegt werden. Wieviel derselben sind notwendig, wenn eine Seite des Zimmers 2,5 m mißt?

21. Welche Oberfläche hat a) eine regelmäßige sechsseitige, b) eine regelmäßige fünfseitige Säule von 10 cm Grundkante und 20 cm Seitenkante?

22. Aus einem regelmäßigen Zwölfeck von 10 cm Seite soll ein solches von 7,5 cm Seite herausgeschnitten werden; wie groß ist der übrig bleibende Ring?

23. Der äußere Umfang eines Gebäudes von regelmäßiger sechseckiger Grundfläche beträgt 30 m, der innere 24 m. Es ist die Grundfläche des Gebäudes und die des Mauerwerks zu berechnen.

24. Wie groß ist die Oberfläche eines regelmäßigen Zwölfflachs von 20 cm Kante?

---

25. Der Inhalt eines regelmäßigen Sechsecks soll 500 qcm betragen; wie lang ist eine Seite?

26. In einem Garten soll ein regelmäßiges achtseitiges Blumenbeet von 20 qm Inhalt angelegt werden; wie lang ist der Halbmesser des um das Achteck zu beschreibenden Kreises und wie lang eine Seite des Achtecks?

27. Der Halbmesser eines Kreises beträgt 10 m; a) wie groß ist der Unterschied zwischen dem eingeschriebenen und dem umgeschriebenen regelmäßigen Sechseck? b) Wie verhalten sich beide?

28. Die Endkanten eines regelmäßigen sechsseitigen Pyramiden- (Spitzkant-) Stumpfes messen 15 cm und 10 cm, die Seitenlinie 30 cm; wie groß ist die Oberfläche?

***29.** Die Seite des einem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen Sechsecks sei 10 cm; berechne die Seite und den Umfang des umgeschriebenen regelmäßigen Sechsecks.

B. Kreis.

Bezeichnung: Der Halbmesser eines Kreises wird mit r, der Durchmesser mit d, der Mittelpunkt mit M, der Umfang mit U und die Kreisfläche mit F bezeichnet.

Anmerkung: $\pi = 3{,}14$ oder $3{,}1416$ oder $3\frac{1}{7}$; ist kein bestimmter Wert gegeben, so ist 3,14 zu setzen.

30. Der Halbmesser eines Kreises ist r. Berechne a) den Umfang, b) den Inhalt des Kreises. ($r = 7, 14, 21$; $\pi = 3\frac{1}{7}$.)

31. Der Durchmesser eines Kreises ist d. Berechne a) den Umfang, b) den Inhalt. ($d = 10, 15, 20$.)

32. In welchem Verhältnisse stehen die Inhalte der Kreise, deren Halbmesser a und b messen?

33. Ein Zehnmarkstück hat 19,5 mm, ein Zwanzigmarkstück 22,5 mm Durchmesser; wie groß ist der Inhalt jeder Kreisfläche?

34. Um ein Rad von 35 cm Halbmesser soll ein eiserner Reifen gelegt werden; welchen Umfang hat er auf seiner Innenseite? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.) b) Welches ist der äußere Umfang, wenn die Dicke des Reifens 1 cm beträgt?

35. Der Mond bewegt sich in einer Entfernung von 386 000 km um die Erde, diese in einer Entfernung von 149 Mill. km um die Sonne; wieviel km beträgt die Bahn jedes Körpers?

36. Der Durchmesser der Erde mißt 12 750 km; welchen Umfang hat der Äquator? b) Welche Zeit würde ein Eisenbahnzug zur Zurücklegung dieses Weges brauchen, wenn er stündlich 45 km macht?

37. In einem Garten soll ein kreisrundes Stück Land von 154 m Umfang abgestochen werden; a) wie lang ist die Schnur zu nehmen, mit der man diesen Kreis beschreibt? b) Wie groß ist die Fläche? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

38. Der Umfang eines Kreises ist U; berechne a) den Durchmesser, b) den Inhalt. (U = 125,6.)

39. Um einen kreisrunden Teich von 132 m Umfang soll ein 1 m breiter Weg so angelegt werden, daß der innere Rand desselben $3\frac{1}{2}$ m vom Ufer des Teiches entfernt ist. Berechne den Halbmesser des Teiches, den inneren und den äußeren Rand des Weges. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

40. Die Wachstuchdecke über einem kreisrunden Tische ist durch 176 Stiftchen befestigt, die $2\frac{1}{2}$ cm von einander abstehen; wie groß ist die Oberfläche der Tischplatte? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

41. Der Umfang einer Walze beträgt 157 cm, die Höhe 20 cm; berechne a) eine Grundfläche, b) den Mantel, c) die Oberfläche.

42. Berechne die Oberfläche einer geraden Walze von 30 cm Durchmesser, deren Seitenhöhe gleich dem Durchmesser ist. b) Wie verhalten sich Grundfläche und Mantel, c) Grundfläche und Oberfläche?

43. Am Rande eines kreisrunden Platzes stehen 160 Bäume, deren gegenseitige Entfernung (im Lichten) 5 m beträgt. Welchen Inhalt hat dieser Platz, wenn durchschnittlich auf jeden Baum noch $\frac{1}{2}$ m Stammdicke zu rechnen ist? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

44. Eine Kegelbahn ist 15,4 m lang; es werden auf derselben Kugeln von 14 cm und 21 cm Durchmesser geschoben; wieviel Umdrehungen macht jede Kugel bei geradliniger Zurücklegung der Bahn?

45. Die Vorderräder eines Wagens sind 60 cm hoch, die Hinterräder 84 cm; auf einer bestimmten Strecke machen die letzteren 50 Umdrehungen; wieviel die Vorderräder? b) Wie lang ist die Strecke? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

46. Die Stadt Paris bildet annähernd einen Kreis von 10 km Durchmesser. Berechne a) den Umfang, b) den Inhalt der Fläche, welchen die Stadt bedeckt.

47. Amsterdam bildet einen Dreiviertelkreis von 3,5 km Durchmesser; wie groß ist die Stadtfläche? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

48. Ein Kammrad von 1,4 m Durchmesser soll 22 Zähne erhalten, von denen jeder 5 cm dick ist; wie groß ist die Entfernung zweier Zähne im Lichten? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

49. Ein Maschinenrad hat einen Durchmesser von 70 cm und trägt an seinem Umfange 55 Zähne; durch dieses Rad soll ein anderes in eine fünfmal so schnelle Bewegung gesetzt werden; welchen Halbmesser und wieviel Zähne von gleicher Stärke muß es erhalten? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

50. Der Halbmesser eines Kreises ist r. Wie groß ist der Kreisbogen, der zur Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen a) Sechsecks, b) Achtecks, c) Zwölfecks gehört? (r = 10 cm.)

51. Der Halbmesser eines Kreises ist r. Wie lang ist der Kreisbogen eines Kreisausschnittes von a) 60^0, b) 72^0, c) 18^0? (r = 10,5; $\pi = 3\frac{1}{7}$.)

52. Wie groß ist die Entfernung zweier Orte auf dem Äquator in km, wenn diese Entfernung a) 6^0, b) 20^0 beträgt? (S. Aufg. 36.)

53. Köln liegt unter 7^0 östlicher Länge, Breslau unter 17^0, beide auf dem 51. n. Parallelkreise; wie weit sind diese beiden Orte von einander entfernt, wenn 1^0 dieses Parallelkreises = 70,5 km ist?

54. Neapel und New York liegen beide unter dem 41. n. Parallelkreise, Neapel unter 14^0 östlicher Länge, New York unter 74^0 westlicher Länge; wie weit sind diese Orte von einander entfernt, wenn 1^0 dieses Parallelkreises = 84,2 km ist?

55. Mainz liegt unter $8^0\ 20'$ östlicher Länge, Schweinfurt unter $10^0\ 15'$, Eger unter $12^0\ 20'$, Prag unter $14^0\ 25'$, alle vier unter dem 50. n. Parallelkreise, von welchem 1^0 = 71,7 km Länge hat; berechne die Entfernungen.

56. Berechne die Breitenausdehnung Asiens auf dem 40. n. Parallelkreise von 26^0 bis 126^0 östlicher Länge, wenn 1^0 dieses Parallelkreises 85,4 km mißt.

57. Wieviel km beträgt die größte Ausdehnung Afrikas a) von Süden nach Norden auf dem 20. Meridian, b) die von Westen nach Osten auf dem 10. n. Parallelkreise? ($1^0 = 109{,}6$ km.)

58. Der Umfang eines Kreises beträgt 66 cm; berechne den Winkel des Kreisausschnittes, wenn der Bogen desselben a) 11 cm, b) 16,5 cm, c) 13,2 cm, d) 49,5 cm beträgt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

59. Der Mittelpunktswinkel (Centriwinkel) eines Kreisausschnittes mißt 54^0, der zugehörige Bogen a) 30 cm, b) 45 cm; wie groß ist der Halbmesser?

60. Der Umfang des Zifferblattes einer Wanduhr beträgt 66 cm, der Endpunkt des Minutenzeigers ist von dem Umfange $1\frac{3}{4}$ cm, der des Stundenzeigers $3\frac{1}{2}$ cm entfernt. Welchen Weg beschreibt die Spitze jedes Zeigers bei einem Umlaufe?

61. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel, bei dem Halbmesser und Bogen gleich sind?

62. Um einen kreisrunden Teich von 20 m Halbmesser soll ein Weg von 1 m Breite gelegt werden; welchen Flächeninhalt nimmt derselbe ein?

63. Der äußere Umfang eines kreisrunden Turmes mißt 33 m, der innere 22 m; berechne die Grundfläche der Mauer. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

64. Ein Wassereimer hat unten einen Umfang von 125,6 cm, oben von 157 cm; berechne den Unterschied und das Verhältnis der Endflächen.

65. Ein Kreisring von 66 cm äußerem und 44 cm innerem Umfang soll a) in ein Trapez, dessen parallele Seiten gleich den Umfängen sind, b) in ein Rechteck, dessen Grundseite gleich der Summe der beiden Halbmesser ist, verwandelt werden; berechne die Höhen. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

66. Wie groß ist ein Kreisausschnitt, wenn der Halbmesser des zugehörigen Kreises 10 cm, der Mittelpunktswinkel (Centriwinkel) a) 90^0, b) 60^0, c) 45^0, d) 36^0, e) 216^0 mißt?

67. Der Inhalt eines Kreisausschnittes = 66 qcm, der Halbmesser = 7 cm; wie groß ist der Centriwinkel? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

68. Der Inhalt eines Kreisausschnittes = 123,2 qcm, der Mittelpunktswinkel 72^0; berechne den Halbmesser und den Bogen des Ausschnittes. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

---

69. Welchen Halbmesser müßte ein Kreis haben, wenn sein Inhalt a) gleich dem des Königreichs Preußen = 350 000 qkm, b) gleich dem des Deutschen Reiches = 540 000 qkm wäre? ($\pi = 3{,}1416$.)

70. Über einer 10 cm langen Strecke als Durchmesser ist ein Halbkreis gezeichnet; jeder der beiden Halbmesser wird Durchmesser von zwei in den vorigen Halbkreis gezeichneten Halbkreisen. Wie groß ist die zwischen den Umfängen der drei Halbkreise liegende Figur?

71. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 15 cm und 20 cm lang sind. Über der Hypotenuse als Durchmesser zeichne einen das Dreieck einschließenden Halbkreis, ebenso zeichne über jeder Kathete nach außen einen Halbkreis. Berechne die Halbkreise und vergleiche die Summe derjenigen über den Katheten mit dem über der Hypotenuse. b) Vergleiche die Summe der sichelförmigen Flächenstücke mit dem Flächeninhalt des Dreiecks.

72. Der Halbmesser eines Viertelkreises (Quadrant) = 10 cm; über demselben ist nach innen ein Halbkreis gezeichnet; berechne diesen und das Reststück und vergleiche beide.

73. Über der Sehne eines Viertelkreises, zu einem Kreise von 10 cm Halbmesser gehörig, zeichnet man nach außen einen Halbkreis; a) vergleiche diesen mit dem Viertelkreise. b) Berechne den Inhalt der entstehenden halbmondförmigen Figur und vergleiche sie mit dem Dreieck. c) Wie groß ist der Kreisabschnitt?

74. Der Durchmesser eines Halbkreises = 30 cm; derselbe ist im Verhältnis von 1 : 2 geteilt und über beiden Abschnitten sind nach innen Halbkreise gezeichnet. Berechne das Flächenstück zwischen diesen drei Kreisumfängen und vergleiche es mit dem Inhalte des Kreises, dessen Durchmesser die Senkrechte im Teilungspunkte des gegebenen Durchmessers bis zur Peripherie ist. (Sichel des Archimedes.)

75. In und um ein Quadrat von 20 cm Seite sind Kreise gezeichnet; a) berechne den Unterschied zwischen diesen und den Kreisen. b) Wie verhalten sich die beiden Kreise?

76. Wie verhalten sich die Umfänge eines Kreises und eines Quadrates von gleichem Flächeninhalte?

77. Ein Kreis und ein Quadrat haben gleichen Umfang = 88 cm; a) wie groß ist der Flächenunterschied beider Figuren? b) Wie verhalten sich die Flächen?

78. In einen Kreis von 1256 qcm Inhalt ist ein regelmäßiges Sechseck gezeichnet; berechne den Unterschied der beiden Figuren.

79. Ein Kreis, dessen Halbmesser = 10 cm ist, soll a) in ein Rechteck mit 20 cm Grundseite, b) in ein Dreieck über dem Umfange als

Grundseite, c) in ein Dreieck von 15 cm Grundseite verwandelt werden; berechne die Höhen.

80. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, der gleich der Summe zweier Kreise von 7 cm und 24 cm Halbmesser ist?

81. Welchen Durchmesser hat ein Kreis, wenn er gleich dem Unterschiede zweier Kreise von 15 cm und 17 cm Durchmesser ist?

82. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt n mal so groß ist als der Flächeninhalt eines gegebenen Kreises mit dem Halbmesser r? ($n = 4, 36, \frac{1}{9}, 2, 3, \frac{3}{7}$.)

83. Die Politur einer kreisrunden Tischplatte von 70 cm Durchmesser kostet 4 ℳ; wie teuer ist die Politur einer Tischplatte von 1,05 m Durchmesser?

84. In einer Höhe von 50 cm über der Mitte einer kreisrunden Tischplatte von 60 cm Halbmesser befindet sich ein leuchtender Punkt; der Tisch selbst hat eine Höhe von 75 cm; wie groß ist der Schatten der Tischplatte?

85. Der Inhalt eines Kreisringes = 2198 qcm, der Halbmesser des größeren Kreises = 40 cm; berechne die Breite des Ringes.

86. Der Inhalt eines Kreisringes = 1570 qcm, der innere Halbmesser = 20 cm; wie breit ist der Ring?

***87.** Der Inhalt eines Kreises = 1232 qcm; durch den Umfang eines konzentrischen Kreises soll er so geteilt werden, daß der Kreisring 924 qcm enthält; a) wie breit ist der Ring? b) Welche Breite müßte der 924 qcm große Kreisring haben, wenn er nach außen um den gegebenen Kreis gelegt würde? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

88. Der Inhalt eines Kreisringes = 549,5 qcm; die Summe der Halbmesser = 35 cm; berechne diese.

89. Der Inhalt eines Kreisringes von 7 cm Breite beträgt 1078 qcm; berechne die Halbmesser. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

90. In den äußeren von zwei konzentrischen Kreisen von 10 cm und 15 cm Halbmesser ist eine Sehne so gelegt, daß sie zugleich Berührende des inneren Kreises ist; vergleiche den Inhalt des Kreisringes mit dem desjenigen Kreises, dessen Durchmesser die Sehne ist.

91. Ein konzentrischer Kreisring hat eine Breite von 4 cm; eine Sehne des äußeren Kreises, die zugleich Berührende des inneren ist, hat eine Länge von 24 cm; berechne den Halbmesser des inneren Kreises.

92. Die Halbmesser eines konzentrischen Ringstückes betragen 21 cm und 14 cm, der Mittelpunktswinkel 72°; wie groß ist das Ringstück? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

93. Der Inhalt eines konzentrischen Ringstückes = 353,25 qcm, der größere Halbmesser 50 cm, der Mittelpunktswinkel 45°; berechne den kleinen Halbmesser.

94. In einen Kreis von 10 cm Halbmesser ist ein regelmäßiges a) Sechseck, b) Dreieck, c) Viereck, d) Achteck gezeichnet; berechne die entstehenden Kreisabschnitte.

95. Ein Kreisausschnitt von 25 cm Halbmesser, dessen Mittelpunktswinkel 45° beträgt, soll in ein Rechteck verwandelt werden, dessen Seiten sich wie 3 : 4 verhalten; berechne die Seiten.

96. Der Bogen eines Kreisausschnittes von 10 cm Halbmesser ist gleich dem Durchmesser; berechne den Mittelpunktswinkel und den Kreisausschnitt.

97. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnittes, dessen Gesamtumfang gleich dem Umfange des zugehörigen Kreises ist?

98. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel des Kreisausschnittes, dessen Inhalt gleich dem Quadrate des Halbmessers ist?

99. Der Durchmesser AB eines Kreises mißt 30 cm; derselbe ist in C und D in 3 gleiche Teile geteilt. a) Beschreibe über AC und AD nach der einen, über BC und BD nach der anderen Seite Halbkreise und berechne den Inhalt und den Umfang der entstehenden Figuren. b) Vergleiche die gefundenen Werte mit dem Inhalte und dem Umfange des Kreises.

***100.** In ein gleichschenkliges Dreieck von 240 qcm Inhalt und 24 cm Höhe ist ein Kreis beschrieben; wie groß ist der Inhalt desselben?

***101.** In einen Kreis von 10 cm Halbmesser soll ein gleichschenkliges Dreieck so gelegt werden, daß Grundseite und Höhe desselben sich wie 3 : 2 verhalten; wie groß ist der Unterschied der beiden Figuren?

***102.** Die drei Seiten eines Dreiecks sind 13 cm, 14 cm und 15 cm lang; a) wie groß ist die Summe der Kreisabschnitte des um das Dreieck gelegten Kreises? b) Wie groß ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

103. Durch einen Kreis von 15 cm Halbmesser ist eine Sehne gelegt, welche den zu derselben senkrechten Halbmesser vom Mittelpunkte aus im Verhältnis von 3 : 2 teilt. Auf dieser Sehne sind zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet, deren Spitzen in dem Umfange des Kreises liegen. Wie groß ist der Inhalt des entstehenden Vierecks?

104. In einem Kreise sind zwei Sehnen von 60 cm und 50 cm

Länge gezogen; ihre Abstände vom Mittelpunkte verhalten sich wie 2:3; wie groß ist der Halbmesser des Kreises?

105. In einen Kreis von 25 cm Halbmesser legt man zwei einander in E senkrecht schneidende Sehnen AB und CD; AB = 40 cm, CD = 48 cm. a) Vergleiche die Summe der über den Sehnenabschnitten als Durchmesser gezeichneten Kreise mit dem gegebenen Kreise. b) Wie groß ist jeder?

106. In einen Kreis von 15 cm Halbmesser ist ein Rechteck gelegt, dessen Seiten sich wie 4:3 verhalten; berechne den Inhalt des Rechtecks.

***107.** In einen Kreis, dessen Halbmesser r ist, ist ein Rechteck gezeichnet, dessen Umfang = 2 s ist. Berechne die Seiten. (r = 20, 2 s = 112.)

***108.** In einen Kreis mit dem Halbmesser r ist ein Rechteck gezeichnet; der Unterschied zweier Seiten desselben ist d. Berechne die Seiten. (r = 25, d = 10.)

***109.** In einen Kreis von 50 cm Durchmesser ist ein Rechteck so gelegt, daß a) dessen Inhalt 672 qcm beträgt, b) daß der Umfang des Rechtecks 140 cm mißt, c) daß sich die Seiten wie 1:2 verhalten. Berechne die Seiten.

***110.** In einen Halbkreis, dessen Halbmesser r ist, ist ein Quadrat so gezeichnet, daß zwei Ecken desselben auf dem Durchmesser, die beiden anderen auf dem Kreisbogen liegen. Berechne eine Quadratseite. (r = 25.)

111. Der Radius eines Quadranten ist r; es ist der Radius eines Kreises zu berechnen, der den Bogen und die Radien des Quadranten berührt. (r = 20.)

112. Die Ecklinien einer Raute messen 48 cm und 14 cm; wie groß ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises?

***113.** Um einen Kreis von 10 cm Halbmesser soll eine Raute gelegt werden, deren eine Ecklinie 30 cm mißt; wie lang ist die andere?

114. In ein gleichseitiges Dreieck von 20 cm Seite sind drei Kreise beschrieben, die sich gegenseitig und die Seiten des Dreiecks berühren; um wieviel qcm ist der Inhalt des Dreiecks größer als die Summe der Kreise?

***115.** Drei gleiche Kreise von 20 cm Halbmesser berühren sich gegenseitig; wie groß ist die von den Kreisen eingeschlossene Figur?

***116.** In einen Kreis von 20 cm Halbmesser sind vier gleiche Kreise so beschrieben, daß jeder zwei der anderen berührt. a) Berechne den Halbmesser derselben. b) Wie groß ist die von den vier Kreisen eingeschlossene Figur? c) Wie groß ist der Inhalt einer der vier Figuren, welche durch einen zwischen zwei Berührungspunkten liegenden Bogen des äußeren Kreises und die Bogen zweier inneren Kreise begrenzt werden?

117. Teile den Durchmesser eines Kreises $= d$ in n gleiche Strecken; zeichne über jeder Strecke als Durchmesser einen Kreis. a) Berechne die Umfänge sämtlicher Kreise. Vergleiche die Summe der Umfänge dieser Kreise mit dem Umfang des gegebenen Kreises. ($d = 20$, $n = 4$.)

C. Linien am Kreise.

118. In einen Kreis mit dem Halbmesser r ist durch Punkt P, dessen Entfernung von M gleich a ist, eine Sehne so gelegt, daß sie im Punkte P im Verhältnis vom $m:n$ geteilt ist. Berechne die Abschnitte. ($r = 17{,}5$, $a = 12{,}5$, $m:n = 2:3$.)

119. Punkt P liegt außerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser r so, daß $MP = a$ ist; von P ist eine Sekante gelegt, die in der Peripherie halbiert ist. Berechne die Abschnitte derselben. ($r = 20$, $a = 50$.)

120. Punkt P liegt außerhalb des Kreises so, daß seine Entfernung von $M = a$ ist. Von P ist eine Sekante so gelegt, daß sich Sehne und äußerer Abschnitt wie $m : n$ verhalten. Berechne die Abschnitte. ($r = 20$, $a = 50$, $m:n = 3:5$.)

121. Punkt P liegt außerhalb des Kreises so, daß seine Entfernung von $M = a$ ist; von P ist eine Sekante so gelegt, daß sich Sekante und äußerer Abschnitt wie $m:n$ verhalten. Berechne die Strecken. ($r = 15$, $a = 45$, $m:n = 5:3$.)

122. In einem Kreise von 13 cm Halbmesser liegt eine Sehne AB, deren Entfernung vom Mittelpunkte 5 cm beträgt. In C ist diese Sehne im Verhältnis von $1:3$ geteilt; durch C ist eine zweite Sehne so gelegt, daß sie in C im Verhältnis von $3:4$ geteilt wird. Berechne die Abschnitte.

123. In einem Kreise von 15 cm Halbmesser liegen zwei einander in E schneidende Sehnen AB und CD, deren Entfernungen vom Mittelpunkte sich wie $15:7$ verhalten; die Länge der kleineren beträgt 24 cm. Berechne die größere Sehne und deren Abschnitte, wenn sie in E im Verhältnis von $3:5$ geteilt wird.

124. Punkt P liegt innerhalb des Kreises so, daß $MP = a$ ist. Durch P ist eine Sehne so gelegt, daß das Rechteck aus der ganzen Sehne und dem einen Abschnitt gleich einem gegebenen Quadrate q^2 ist. Berechne die Abschnitte. ($r = 20$, $a = 15$, $q^2 = 400$.)

***125.** Zwei Sehnen schneiden sich so, daß die Abschnitte der einen 12 cm und 15 cm messen, während die andere 29 cm lang ist; berechne deren Abschnitte.

126. In einem Kreise von 25 cm Halbmesser liegt eine Sehne 7 cm vom Mittelpunkte entfernt; sie ist in C im Verhältnis von 3 : 13 geteilt. Durch C ist eine zweite Sehne gelegt, die senkrecht auf der ersten steht; berechne deren Abschnitte.

127. Eine Sehne von 50 cm Länge ist im Verhältnis von 1 : 9 geteilt; durch den Teilpunkt ist eine zweite Sehne gelegt, die in diesem Punkte halbiert wird; wie lang ist diese?

128. In einem Kreise von 25 cm Halbmesser liegt 10 cm vom Mittelpunkte entfernt Punkt P; durch diesen ist eine Sehne so zu legen, daß sie in P im Verhältnis von 3 : 5 geteilt wird; berechne die Abschnitte derselben.

129. In einem Kreise ist ein Durchmesser AB und ein zweiter XY so gelegt, daß AX : AY = m : n ist. Berechne AX und AY. (r = 20, m : n = 3 : 4.)

130. Auf dem Durchmesser AB eines Kreises sind zwei Punkte P und P' in gleichem Abstande a von M gegeben, und ein Punkt auf der Peripherie so, daß der Halbmesser die mittlere Proportionale zwischen PX und P'X ist. Berechne die Strecken. (r = 15, a = 10.)

131. Von einem Punkte sind zwei Schneidelinien von 24 cm und 36 cm durch einen Kreis gelegt; der äußere Abschnitt der ersten = 9 cm; wie groß sind die Abschnitte der anderen?

132. Von einem Punkte sind zwei Sekanten durch einen Kreis gelegt; der äußere Abschnitt der ersten = 18 cm, der innere = 7 cm; die Abschnitte der anderen sind einander gleich; berechne diese.

133. Die Summe zweier von einem Punkte ausgehenden Schneidelinien (Sekanten) eines Kreises = 63 cm, die äußeren Abschnitte = 8 cm und 10 cm; berechne die inneren Abschnitte.

***134.** Von einem Punkte sind an einen Kreis zwei Schneidelinien gelegt, das Rechteck aus der einen und ihrem äußeren Abschnitt = 264 qcm, der innere Abschnitt der anderen = 25 cm; berechne den äußeren Abschnitt der letzten und beide Abschnitte der ersten Sekante, wenn sich äußerer und innerer Abschnitt wie 6 : 5 verhalten.

135. Eine Sehne von 27 cm wird um 9 cm verlängert; wie lang ist die vom Endpunkte an den Kreis gelegte Tangente.

136. Die Sehne a eines Kreises ist so zu verlängern, daß die von dem Endpunkt derselben an den Kreis gelegte Tangente = b ist. (a = 20, b = 24.)

137. Durch einen Punkt P innerhalb eines Kreises mit dem Halbmesser r ist eine Sehne so gelegt, daß sie in P stetig geteilt ist. Wie groß sind die Abschnitte dieser Sehne, wenn P von M um a entfernt ist? (r = 26, a = 10.)

138. Punkt P liegt innerhalb des Kreises so, daß MP = a ist; durch P ist eine Sehne gelegt, deren Abschnitte sich um die Strecke d unterscheiden. Berechne diese. (r = 26, a = 14, d = 4.)

***139.** Der innere Abschnitt einer Schneidelinie ist um 8 cm größer als der äußere; die von dem Endpunkte derselben an den Kreis gelegte Berührungslinie = 8 cm; berechne die Abschnitte der Schneidelinie.

140. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise (Centrale) von 15 cm und 5 cm Halbmesser = 26 cm; wie lang ist die an die Kreise gelegte gemeinsame Tangente bis zum Schnitt der (verlängerten) Verbindungslinie? b) Wie lang ist der Teil derselben zwischen den Berührungspunkten? (Äußere und innere Tangenten sind zu unterscheiden.)

141. Wie weit kann man (die Erde als vollkommene Kugel betrachtet) a) von der Schneekoppe = 1600 m, b) vom Brocken = 1140 m, c) vom Gaurisánkar (Himálaya) = 8800 m sehen?

142. Wie hoch muß das Licht eines Leuchtturmes angebracht werden, wenn es a) 30 km, b) 45 km weit sichtbar sein soll?

143. Wieviel km muß man mit einem Luftballon aufsteigen, damit man a km weit sehen kann? (a = 75, 300, 450 km.)

144. Von einem Punkte P außerhalb eines Kreises sind nach dem Kreise zwei Sekanten gezogen, deren innere Abschnitte a und b messen. Die Länge der Sekante, deren innerer Abschnitt a mißt, ist c. Berechne die Länge der anderen Sekante. (a = 16, b = 40, c = 48.)

145. In dem einen Endpunkte des Durchmessers eines Kreises ist eine Tangente an diesen gelegt; von dem anderen Endpunkte des Durchmessers ist eine Gerade so nach der Tangente gezogen, daß das Rechteck aus beiden Abschnitten gleich einem gegebenen Quadrat q^2 ist; berechne die Abschnitte. (r = 20, $q^2 = 576$.)

146. Auf dem einen Endpunkte des Durchmessers eines Kreises ist eine Tangente an diesen errichtet; von dem anderen Endpunkte ist eine Sekante so nach der Tangente gezogen, daß der äußere Abschnitt dieser gleich a ist. Berechne den inneren Abschnitt. (r = 15, a = 32.)

147. Der Durchmesser ist um die Strecke b verlängert; in dem

Endpunkte der Verlängerung ist eine Senkrechte auf dem Durchmesser errichtet und von dem einen Endpunkt des Durchmessers eine Sekante so bis zur Senkrechten gezogen, daß ihr äußerer Abschnitt gleich a ist. Berechne den inneren Abschnitt der Sekante. ($r = 26$, $a = 14$, $b = 4$.)

148. Auf dem Durchmesser AB eines Kreises ist Punkt C so gegeben, so daß $AC = a$ ist; auf der Verlängerung des Durchmessers ist ein Punkt D so durch Rechnung zu bestimmen, daß die von D an den Kreis gelegte Tangente gleich CD ist. ($r = 20$, $a = 25$.)

---

§ 5. Teilung der Figuren.

1. Ohne Anwendung der Ähnlichkeit.

A. Dreieck.

1. Von einem 72 qcm großen Dreieck, dessen Grundseite = 18 cm, sind durch eine Gerade von der Spitze nach der Grundseite a) 24 qcm, b) 54 qcm abzuschneiden; wie lang sind die Grundseiten dieser Teile?

2. Ein Dreieck von 96 qcm Inhalt und 12 cm Höhe ist durch eine Gerade von der Spitze nach der Grundseite im Verhältnis von $5:7$ zu teilen; berechne die Grundseiten der Teildreiecke.

3. Ein Dreieck von 240 qcm Inhalt und 20 cm Höhe soll durch Gerade von der Spitze nach der Grundseite so in 3 Teile geteilt werden, daß jeder folgende Teil 20 qcm mehr enthält als der vorhergehende. Wie lang sind die Grundseiten der einzelnen Teile?

4. Im Dreieck ABC werden a) AC und BC bezüglich in D und E halbiert, b) AC wird in F so geteilt, daß $AF = \frac{1}{3} AC$ ist; welchen Teil des ganzen Dreiecks bilden die Dreiecke CDE, CEF, DEF, Viereck ABEF?

5. Im Dreieck ABC ist $CD = \frac{3}{4} AC$, $CE = \frac{4}{5} BC$ (D in AC, E in BC); welchen Teil des Dreiecks ABC bildet jede der erhaltenen Figuren CDE und ABED?

6. Eine Wiese in Gestalt des Dreiecks ABC hat einen Wert von 3600 ℳ. In derselben sind 3 Teilpunkte, D in AB, E in AC, F in BC so gelegt, daß $AD = \frac{2}{3} AB$, $AE = \frac{2}{3} AC$, $BF = \frac{1}{2} BC$ ist; welchen Wert hat jeder der Teile ADE, BDF und DECF?

7. Seite AB des Dreiecks ABC ist in D so geteilt, daß $AD = \frac{3}{4} AB$

ist; von D soll eine Teilungslinie so gelegt werden, daß das entstehende Viereck $\frac{1}{3}$ des Dreiecks ABC ist; wie lang ist AE?

8. Im Dreieck ABC ist AB = 18 m, AC = 15 m, während der Inhalt des Dreiecks = 120 qm beträgt; Punkt D in AB teilt diese so, daß AD : DB = 5 : 4 ist, ferner verhält sich AE : EC = 3 : 2; wie groß sind die durch DE erhaltenen Stücke des Dreiecks?

9. Von einem dreieckigen Felde, welches 3600 ℳ gekostet hat, soll in einer Ecke ein Dreieck im Werte von 1200 ℳ abgeschnitten werden; die Teilungslinie soll auf der Mitte der einen Seite beginnen; wieviel der benachbarten ist abzuschneiden?

10. Der gemeinschaftliche Endpunkt D zweier Teilungslinien eines Dreiecks ABC liegt in AC so, daß AD : DC = 2 : 1 ist; die von D nach AB gehende Teilungslinie schneidet AE = $\frac{3}{4}$ AB ab, die nach BC gehende schneidet CF = $\frac{4}{5}$ BC ab; a) vergleiche die Größe der entstandenen Teile mit ABC. b) Welchen Wert hätten die Teile, wenn ABC eine Wiese im Gesamtwerte von 6000 ℳ wäre?

***11.** Im Dreieck ABC ist AB = 80 m, AC = 120 m, BC = 160 m; AB ist in D so geteilt, daß AD = 60 m, AC in E so, daß AE = 80 m, BC in F so, daß BF = 128 m mißt; wie groß sind die Teile, wenn a) die Teillinien DE und DF gelegt sind; b) wenn durch DE, EF und DF das Dreieck in 4 Teile geteilt wird?

***12.** Im Dreieck ABC ist AB = 150 m, AC = 130 m, BC = 140 m; AB ist in D so geteilt, daß AD : BD = 2 : 3 ist; von D aus sollen nach AC und BC bezüglich die Geraden DE und DF so gelegt werden, daß ADE : DECF : DBF = 1 : 2 : 2 ist; berechne die Abschnitte der Seiten und den Inhalt jeder Figur.

13. Ein gleichseitiges Dreieck von 30 cm Seite ist an den Ecken so abzustumpfen, daß ein regelmäßiges Sechseck entsteht; a) wie lang ist eine Seite desselben? b) Welchen Teil des Dreiecks bildet das Sechseck?

14. In einem gleichseitigen Dreieck von 10 cm Seite sind zwei Höhen gezogen; wie groß ist das an der dritten Ecke liegende Viereck?

B. Parallelogramm.

15. Wie wird jedes Parallelogramm a) durch eine, b) durch beide Diagonalen geteilt; c) wie, wenn die Teilungslinien die Mitten der Gegenseiten verbinden?

16. Welchen Teil des Parallelogramms bildet das Dreieck, das man erhält, wenn man a) einen Winkelpunkt mit der Mitte einer Gegenseite, b) wenn man die Mitten zweier anstoßenden Seiten verbindet?

17. In einer Ecke eines Parallelogramms wird ein Dreieck so abgeschnitten, daß es $\frac{3}{4}$ der einen und $\frac{5}{6}$ der anstoßenden Seite als Seiten erhält; wie groß ist das Dreieck?

18. In einem Quadrat von 36 cm langen Seiten sind 4 rechtwinklige Dreiecke so an den Ecken abzuschneiden, daß die Katheten jedes Dreiecks bezüglich $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ der Quadratseiten messen; welchen Umfang und Inhalt hat das Quadrat der Mitte?

19. Im Parallelogramm $ABCD = 240$ qcm sollen in der Ecke A 48 qcm abgeschnitten werden. In welchem Verhältnis muß AD geteilt werden, wenn AB in E so geteilt ist, daß $AE : EB = 3 : 2$ ist, und die Teilungslinie bei E beginnen soll?

20. Im Parallelogramm ABCD ist $AB = 18$, $BC = 27$ m; durch zwei Gerade von D aus soll es in drei gleiche Teile zerlegt werden; wie sind die Seiten AB und BC zu teilen?

21. Ein Ackerstück hat die Gestalt des Parallelogramms ABCD; die Seiten AB und AD sind bezüglich in E und F so geteilt, daß $AE = \frac{2}{3} AB$, $AF = \frac{3}{4} AD$ ist; Dreieck AEF mißt 720 qm; wie groß ist der Acker?

---

*__22.__ Eine Wiese in Gestalt des Parallelogramms ABCD, in welchem $AB = 140$ m, $AD = 130$ m, $BD = 150$ m, soll durch eine Senkrechte zwischen AB und CD halbiert werden; wie ist AB zu teilen?

*__23.__ In ein Quadrat mit 20 cm langen Seiten ist ein anderes mit 15 cm langen Seiten so zu legen, daß die Winkelpunkte des letzteren auf die Seiten des ersteren fallen; wie sind diese zu teilen?

*__24.__ Ein Quadrat von 20 cm Seite ist an den vier Ecken so abzustumpfen, daß der Rest ein regelmäßiges Achteck ist; wie lang ist eine Seite desselben?

*__25.__ Die Seite eines regelmäßigen Achtecks ist 10 cm; wie lang ist die Seite des Quadrats, durch dessen Abstumpfung jenes entstanden ist?

C. Trapez.

26. In ein Trapez von 8 cm Höhe, dessen Parallelen 20 cm und 12 cm messen, lege durch den Halbierungspunkt der Mittellinie eine Gerade, welche die Parallelen schneidet; wie groß ist jedes Trapez?

27. Im Trapez ABCD ist AB = 24 cm, CD = 16 cm, die Höhe mißt 12 cm; die Parallele CD ist in E so geteilt, daß DE = 4 cm ist. Durch E und den Halbierungspunkt der Mittellinie wird eine Gerade gelegt, welche AB in F schneidet; a) wie lang ist AF? b) Wie verhalten sich die neuen Trapeze?

28. Teile die Mittellinie eines Trapezes von 12 cm Höhe, dessen Parallelen 36 cm und 24 cm messen, in drei gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte Gerade, welche die Parallelen innerhalb des Trapezes schneiden; wie groß ist jedes der entstehenden Trapeze?

29. Die Mittellinie eines Trapezes von 15 cm Höhe, dessen Parallelen 48 cm und 24 cm messen, wird im Verhältnis von 1 : 2 : 3 geteilt und werden durch diese Teilpunkte Gerade gelegt, welche die Parallelen schneiden. Bestimme die Größe und das gegenseitige Verhältnis dieses Trapezes.

30. Die Mittellinie eines Trapezes von 15 cm Höhe, dessen Parallelen = 35 cm und 25 cm, ist so geteilt, daß der eine Teil 6 cm mehr beträgt als der andere. Wie groß ist jedes der entstandenen Trapeze, wenn durch den Teilpunkt eine Gerade zwischen die Parallelen gelegt wird?

31. Die Parallelen eines 18 cm hohen Trapezes messen 25 cm und 15 cm; von der Mitte einer der nicht parallelen Seiten legt man Gerade nach den Endpunkten der Gegenseite; wie groß ist jedes Dreieck? b) In welchem Verhältnis steht das mittlere Dreieck zu dem Trapez?

***32.** In einem geraden Trapez mißt die eine Parallele 7 cm, ein Schenkel 15 cm, eine Diagonale 20 cm; berechne den Inhalt des ganzen Trapezes und der vier Dreiecke, in welche dieses durch die Diagonalen zerlegt wird.

---

2. Mit Anwendung der Ähnlichkeit.

A. Teilung gerader Linien.

***33.** Eine Strecke a ist so zu teilen, daß das Rechteck aus beiden Teilen = q^2 ist. Wie lang sind die Teile? ($a = 20$, $q^2 = 75$.)

***34.** Eine Strecke a ist so zu verlängern, daß das Rechteck aus der verlängerten Strecke und der Verlängerung = q^2 ist; berechne die Verlängerung. ($a = 20$, $q^2 = 156$.)

***35.** Eine Strecke a ist so zu verlängern, daß sich die verlängerte

Gerade zur Verlängerung wie $m:n$ verhält; berechne die Verlängerung. ($a = 60$, $m : n = 5 : 3$.)

***36.** Die Strecke $AB = a$ ist a) in X so zu teilen, b) bis X so zu verlängern, daß $AX \cdot BX = q^2$ ist. Berechne AX und BX. ($a = 80$, $q^2 = 1500$.)

***37.** Die Strecke $AB = a$ ist a) in X so zu teilen, b) bis X so zu verlängern, daß $AX^2 + BX^2 = q^2$ ist. Berechne die Teile. [a) $a = 30$, $q^2 = 500$; b) $a = 30$, $q^2 = 2900$.]

***38.** Die Strecke $AB = a$ ist a) in X so zu teilen, b) bis X so zu verlängern, daß $AX^2 - BX^2 = q^2$ ist. Berechne die Teile. [a) $a = 120$, $q^2 = 3600$; b) $a = 120$, $q^2 = 21600$.]

***39.** Eine Gerade von 20 cm ist so zu verlängern, daß a) die Summe der Quadrate der Verlängerung und der verlängerten Linie 1000 qcm, b) der Unterschied dieser Quadrate 600 qcm enthält; wie groß ist die Verlängerung?

***40.** Gegeben die Strecke $AB = a$, in dieser Punkt C so, daß $AC = b$; gesucht Punkt X so, daß $AC : CX = CX : BX$ ist. ($a = 30$, $b = 20$.)

41. Gegeben zwei Strecken, deren Maßzahlen a) 12 und 27, b) 18 und 32, c) 20 und 31,25, d) 30 und 67,5 sind. Berechne die mittlere Proportionale.

***42.** Gesucht zwei Strecken, deren Summe $= s$, deren geometrisches Mittel $= m$ ist. ($s = 61$ cm, $m = 30$ cm.)

***43.** Gesucht zwei Strecken, deren Unterschied $= d$, deren mittlere Proportionale $= m$ ist. ($d = 13$, $m = 42$.)

***44.** Die größere Seite a eines Rechtecks, dessen andere Seite b ist, ist so zu teilen, daß das Rechteck aus beiden Teilen gleich dem gegebenen Rechteck ist. ($a = 60$, $b = 12$.)

***45.** Die größere Seite a eines Rechtecks, dessen andere Seite b ist, ist so zu teilen, daß die Summe der Quadrate beider Abschnitte gleich dem Rechteck ist. ($a = 60$, $b = 36$.)

***46.** Strecke $AB = a$ ist so zu teilen, daß sich die Quadrate dieser Teile wie $m:n$ verhalten. ($a = 60$, $m:n = 2:3$.)

***47.** Strecke $AB = a$ ist bis X so zu verlängern, daß sich $AX:BX = m:n$ verhält. Berechne die Verlängerung. ($a = 60$, $m:n = 3:2$.)

***48.** Eine gegebene Strecke a ist durch Rechnung stetig zu teilen. ($a = 30$.)

*49. Eine gegebene Strecke a ist so zu verlängern, daß die gegebene Strecke mittlere Verhältnisgleiche zwischen der verlängerten Strecke und der Verlängerung ist. Berechne die Verlängerung. ($a = 60$.)

*50. Der Halbmesser eines Kreises mißt 20 cm; wie lang ist die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehnecks?

*51. Die Seite eines regelmäßigen Zehnecks = 12 cm; wie lang ist der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises?

*52. An eine Gerade von 30 cm ist a) eine kleinere, b) eine größere Gerade so anzusetzen, daß die ganze stetig geteilt ist; berechne die Verlängerung.

*53. Die Strecke $AB = a$ ist durch Rechnung harmonisch im Verhältnis von $m:n$ zu teilen. ($a = 120$, $m:n = 5:4$.)

*54. In einer harmonisch geteilten Strecke $AB = a$ ist $AD = 30$ cm, $DB = 12$ cm; berechne den äußeren Abschnitt.

*55. Eine Gerade von 50 cm ist harmonisch so zu teilen, daß der erste Teil 40 cm mißt; wie lang sind die anderen Teile?

*56. Eine Strecke $AB = a$ ist harmonisch so zu teilen, daß die äußeren Abschnitte einander gleich sind. ($a = 75$.)

*57. Die Centrale zweier Kreise mit den Radien R und r ist a; suche durch Rechnung die Durchschnittspunkte der inneren und äußeren Berührenden mit der Centrale. ($a = 100$, $R = 30$, $r = 10$.)

*58. Zu den Strecken $AC = a$ und $BC = b$ ist durch Rechnung a) das arithmetische, b) das geometrische, c) das harmonische Mittel zu suchen. ($a = 90$, $b = 40$.)

*59. Das arithmetische Mittel zweier Strecken ist d, ihr harmonisches h; berechne das geometrische Mittel. ($d = 6{,}5$, $h = 5\frac{7}{13}$.)

*60. Die Differenz zweien Strecken ist d, ihr harmonisches Mittel h. Die Strecken sind durch Rechnung zu suchen. ($d = 8$, $h = 15$.)

B. Dreieck.

*61. Ein Dreieck, dessen Grundseite = c und dessen Höhe = h ist, soll durch eine Parallele zur Grundseite halbiert werden; berechne Grundseite und Höhe des abzuschneidenden Dreiecks. ($c = 20$, $h = 12$.)

*62. Von dem Dreieck ABC mit der Grundseite c und der Höhe h ist durch eine Parallele zur Grundseite AB ein Dreieck DCE abzuschneiden, das sich zum ganzen Dreieck wie $m : n$ verhält. Berechne Grundseite und Höhe dieses Dreiecks. ($c = 70$, $h = 50$, $m:n = 3:5$.)

*63. Von einem Dreieck von 18 cm Grundseite und 15 cm Höhe ist durch eine Parallele zur Grundseite $\frac{1}{3}$ desselben als Dreieck abzuschneiden; berechne Grundseite und Höhe dieses Dreiecks.

*64. Von einem Dreieck von 36 cm Grundseite und 25 cm Höhe sind durch Parallele zur Grundseite a) 50 qcm, b) 150 qcm von der Spitze aus abzuschneiden. Berechne die Ausdehnungen der abzuschneidenden Dreiecke.

*65. Teile ein Dreieck von 30 cm Grundseite und 15 cm Höhe durch Parallele zur Grundseite in drei gleiche Teile; welche Ausdehnungen haben die entstehenden Figuren?

*66. Die Seiten eines Dreiecks messen 7 cm, 15 cm und 20 cm; durch Parallele zu der 7 cm langen Seite ist es in drei gleiche Teile zu teilen. Berechne die Teilungslinien und die Höhe der Teile.

*67. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten a und b sind, ist durch eine Senkrechte auf die Hypotenuse zu halbieren; berechne die Seiten des abzuschneidenden Dreiecks. ($a = 7$, $b = 24$.)

*68. Dreieck ABC, dessen Seiten AB, BC und AC bezüglich 40 cm, 37 cm und 13 cm messen, soll durch eine Senkrechte auf die Seite AB halbiert werden, berechne die Abschnitte dieser Seite und die Senkrechte.

*69. Dreieck ABC, dessen Seiten AB, BC und AC bezüglich 20 cm, 15 cm und 7 cm lang sind, soll durch Senkrechte auf die 20 cm lange Seite (von A aus bestimmt) im Verhältnis von 1 : 2 : 3 geteilt werden; berechne die Grundseiten der entstehenden Figuren.

*70. Dreieck ABC, dessen Seiten AB, BC und AC bezüglich 63 cm, 51 cm und 30 cm lang sind, soll so in drei gleiche Teile geteilt werden, daß die eine Teilungslinie parallel AB geht, die andere senkrecht auf dieser steht. In welcher Entfernung von AB ist die erste Teilungslinie zu legen, und wie lang sind die durch die zweite Teilungslinie erzeugten Abschnitte derselben?

*71. Im Dreieck ABC, dessen Seiten AB, BC und AC bezüglich 20 cm, 13 cm und 11 cm messen, ist zur Seite AB eine 15 cm lange Parallele DE (D in AC) gelegt; es soll von C aus eine Gerade CX so gezogen werden, daß Dreieck CDX = Trapez ABED ist; berechne das Trapez und die Abschnitte der DE.

*72. Dreieck ABC, dessen Seiten AB, BC und AC bezüglich 14 cm, 12 cm und 16 cm messen, ist durch eine Gerade zwischen AC und BC so zu halbieren, daß die Umfänge der entstehenden Figuren einander gleich sind. In welche Abschnitte sind die Seiten AC und BC zu zerlegen?

73. Im $\triangle$ ABC ist XY ∥ AB (X in AC, Y in BC) so gelegt, daß ABC : ABYX = ABYX : XYC. Berechne die Parallele und die beiden Teile. (c = 39, a = 40, b = 25.)

74. Im $\triangle$ ABC ist XY ∥ AB (X in AC, Y in BC) so gelegt, daß sich verhält ABC : XYC = XYC : ABYX. Berechne die Parallele und die Teile. (c = 40, a = 39, b = 25.)

75. In das gleichseitige Dreieck ABC, dessen Seite a ist, ist ein anderes gelegt, das gleich der Hälfte des gegebenen ist. Berechne die Seite des eingeschriebenen Dreiecks und die Abschnitte, in welche die Seiten des Dreiecks ABC zerlegt werden. (a = 30.)

76. Gegeben das gleichschenklige Dreieck ABC, AB = c, AC = a, CD $\perp$ AB; auf CD ist ein Punkt X so zu suchen, daß $\triangle$ ABC durch die von X auf AC und BC gefällten Lote und durch XD in drei gleich große Vierecke zerlegt wird. (c = 20, a = 26.)

77. Im $\triangle$ ABC liegt eine Gerade XY so zwischen AC und BC (X in AC), daß sie das Dreieck halbiert und die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ist. Berechne den Schenkel. (c = 21, b = 13, a = 20.)

78. Im $\triangle$ ABC ist $\measuredangle$ C ein spitzer; zwischen die Seiten AC und BC ist eine Gerade XY (X in AC) so gelegt, daß sie das $\triangle$ ABC halbiert und gleich CX ist. Berechne die Seiten des abgeschnittenen gleichschenkligen Dreiecks. (c = 14, a = 15, b = 13.)

C. Parallelogramm.

***79.** Durch einen zu suchenden Punkt der Ecklinie eines Parallelogramms von 20 cm Grundseite und 12 cm Höhe sind Parallele zu zwei anstoßenden Seiten so zu legen, daß das abgeschnittene Parallelogramm a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$ des gegebenen ist. In welcher Höhe liegt der gesuchte Punkt und wie lang ist die Grundseite des kleinen Parallelogramms?

***80.** Von einem Parallelogramm von 36 cm Grundseite und 25 cm Höhe sind a) 100 qcm, b) 300 qcm, c) 450 qcm als ein dem ganzen ähnliches Parallelogramm abzuschneiden; berechne Grundseite und Höhe.

***81.** Berechne Grundseite und Höhe eines Parallelogramms, welches einem anderen von 20 cm Grundseite und 15 cm Höhe ähnlich und gleich dem Fünffachen desselben ist.

***82.** Die Grundseiten zweier ähnlichen Rechtecke sind 25 cm und 15 cm; wie groß ist die Grundseite eines dritten ähnlichen Rechtecks, das a) gleich der Summe, b) gleich dem Unterschiede jener ist?

*83. Im Parallelogramm ABCD ist AB = 40 cm, BC = 13 cm; Ecklinie AC = 37 cm; durch Parallele zu den Seiten, die von einem zu suchenden Punkte der Ecklinie ausgehen und von beiden Ecklinien begrenzt werden, soll ein dem gegebenen ähnliches Parallelogramm ausgeschnitten werden = $\frac{1}{6}$ desselben. Berechne die Seiten und den Inhalt.

D. Viereck.

*84. Von einem Trapez von 12 cm Höhe, dessen Parallelen 20 cm und 16 cm messen, ist durch von den Ecklinien begrenzte Parallele zu den Seiten ein dem ganzen ähnliches Trapez gleich der Hälfte desselben abzuschneiden; berechne dessen Ausdehnungen.

*85. Berechne die Seiten und den Inhalt eines Trapezes, das einem gegebenen ähnlich und gleich dem Dreifachen desselben ist, wenn die Parallelen des gegebenen 30 cm und 18 cm, die nicht parallelen Seiten 12 cm und 15 cm messen.

*86. Ein 16 cm hohes Trapez, in welchem die Parallelen bezüglich 30 cm und 18 cm messen, ist durch eine Parallele zu den Parallelen zu halbieren. Berechne die Halbierungslinie und die Höhe der Trapeze.

*87. Die parallelen Seiten eines Ackers, welcher Trapezform hat, messen 180 m und 90 m, der senkrechte Abstand derselben 40 m. Der Acker soll durch Parallele zu den Parallelen in drei gleiche Teile geteilt werden. Berechne die Ausdehnungen der Teile.

E. Regelmäßiges Vieleck und Kreis.

*88. In einen Kreis von 20 cm Halbmesser ist ein regelmäßiges Zehneck beschrieben; durch Parallele zu den Seiten soll ein regelmäßiges Zehneck herausgeschnitten werden, so daß der übrig bleibende Ring = $\frac{2}{3}$ des gegebenen Zehnecks ist. Berechne die Seiten der Zehnecke.

*89. Ein Kreis von 20 cm Halbmesser ist durch die Umfänge konzentrischer Kreise a) zu halbieren, b) in drei gleiche Teile zu teilen, c) von innen aus so zu teilen, daß sich die Teile wie 1 : 2 : 3 verhalten. Berechne die Halbmesser der teilenden Kreislinien.

*90. Ein Kreisring von 10 cm Breite und 20 cm äußerem Halbmesser ist durch die Umfänge konzentrischer Kreise a) zu halbieren, b) in drei gleiche Teile zu teilen; berechne die Breite der neuen Kreisringe.

*91. Ein Kreis von 20 cm Halbmesser ist durch den Umfang eines konzentrischen Kreises so zu teilen, daß der Ring das geometrische Mittel zwischen den beiden konzentrischen Kreisen ist. Berechne den Halbmesser der teilenden Kreislinie.

*92. Eine Seite eines Quadrats, Rechtecks, Dreiecks, Trapezes mißt a. Wie lang ist die gleichliegende Seite einer ähnlichen Figur, wenn diese a) das Doppelte, b) das Dreifache, c) die Hälfte, d) der dritte Teil der gegebenen ist, e) sich zu derselben wie m : n verhält? (a = 20; m : n = 5 : 6.)

B. Stereometrie.

§ 6. Würfel.

Bezeichnung: Die Kante des Würfels wird mit a, die Diagonale einer Seitenfläche mit d, die Diagonale des Würfels mit D, die Oberfläche mit O und der Rauminhalt mit V bezeichnet.

1. Die Kante eines Würfels ist a; berechne a) die Oberfläche, b) den Rauminhalt. (a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 15, 20 cm.)

2. Die Kante eines Würfels mißt a und die eines anderen b. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt? Wie verhalten sich c) die Oberflächen, d) die Rauminhalte beider? (a = 24, b = 36.)

3. Ein Würfel von 3,5 m Kantenlänge soll mit Ölfarbe angestrichen werden. Das qm wird mit 1,25 ℳ bezahlt. Wie teuer kommt der Anstrich, wenn die Seite, auf welcher der Würfel ruht, nicht gestrichen wird?

4. Aus der Oberfläche eines Würfels = O ist eine Kante zu berechnen. [O = a) 864, b) = 3456, c) 300.]

5. Die Kante eines Würfels ist a; berechne a) die Flächendiagonale, b) die Körperdiagonale. Wie weit ist der Durchschnittspunkt der Körperdiagonalen c) von den Seiten, d) von den Kanten, e) von den Ecken entfernt?

6. Die Diagonale eines Würfelquadrats = d; berechne a) die Oberfläche, b) den Rauminhalt des Würfels. [d = a) 10, b) 15, c) 20.]

7. Die Körperdiagonale eines Würfels ist D. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

8. Die Oberfläche eines Würfels ist 600 qcm; berechne die Flächen- und die Würfeldiagonale.

9. Die Kanten zweier Würfel verhalten sich wie 2 : 3, die Oberflächen sind um 270 qcm verschieden; berechne diese und die Kanten.

10. Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie 25 : 49, die Summe der Kanten beträgt 6 cm; berechne diese und die Oberflächen.

11. Die Kanten-Summe zweier Würfel = k, die Summe ihrer Oberflächen = s. Wie lang sind die Kanten? (k = 15, s = 702.)

***12.** Berechne die Kanten zweier Würfel, wenn die Summe der Oberflächen 1734 qcm und der Unterschied der Kanten 7 cm beträgt.

***13.** Verlängert man die Kante eines Würfels um 3 cm, so nimmt die Oberfläche um 270 qcm zu; wie lang ist die Kante?

***14.** Vermindert man die Kante eines Würfels um 4 cm, so verringert sich die Oberfläche um 480 qcm; berechne die ursprüngliche Kantenlänge.

***15.** Der Unterschied zwischen einer Flächeneckline und einer Kante beträgt 3 cm; wie groß ist die Oberfläche?

***16.** Der Unterschied zwischen der Körper- und der Flächeneckline beträgt 5 cm; wie groß ist die Oberfläche?

17. Wie groß ist der rechteckige Diagonalschnitt eines Würfels, dessen Kante a ist? (a = 30.)

18. a) Wieviel *l* Wasser faßt ein würfelförmiger Blechkasten von 35 cm Kantenlänge? b) Welches Gewicht hat diese Wassermenge bei 4° C.?

19. Wieviel hl Getreide faßt eine würfelförmige Futterkiste von 0,80 m Kantenlänge?

20. Wie schwer ist ein Würfel aus Gußeisen von 12 cm Kante, wenn das Eisen 7,25 mal so schwer ist als Wasser?

21. Wieviel wiegt ein Bleiwürfel von 15 cm Kante, wenn das spezifische Gewicht des Bleies 11,25 beträgt?

22. Ein Würfel hat 13 824 ccm Rauminhalt; wie lang ist eine Seitenkante?

23. Ein würfelförmiges Gefäß faßt a) 8 *l*, b) 729 *l*, c) 3,375 *l*, d) 91,125 *l*; wie lang ist eine Kante?

24. Wie lang sind die Kanten eines würfelförmigen Hektolitergefäßes?

25. Wieviel *l* faßt ein Gefäß, dessen hohler Raum ein Würfel mit der Kante a ist?

26. Wieviel Würfel von 3 cm Kante müssen zusammengesetzt werden, um einen Würfel von a) 15 cm, b) 18 cm, c) 24 cm, d) 30 cm Kante zu erhalten?

27. Ein Würfel aus Eichenholz wiegt 24,300 kg; a) wie schwer ist ein ebenso großer Sandsteinwürfel, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,9, das des Sandsteins 2,5 ist? b) Welchen Inhalt hat jeder Würfel?

---

28. Die Kanten zweier Würfel verhalten sich wie 2 : 3, die Summe der Inhalte beider beträgt 945 ccm; berechne diese und die Kanten.

29. Die Oberflächen zweier Würfel verhalten sich wie 9 : 16, die Summe der Inhalte beträgt 728 ccm; berechne die Kanten und die Inhalte.

30. Wieviel Maßeinheiten hat die Kante eines Würfels, wenn die Maßzahlen der Oberfläche und des Inhalts einander gleich sind?

31. Wieviel Würfel von 5 cm Kante lassen sich aus 937,5 kg Eisen gießen, wenn das spezifische Gewicht des Eisens 7,5 ist und 5 % der Masse bei dem Gusse verloren gehen?

32. Wieviel kg Blei müssen mit 36 kg Zinn zusammengeschmolzen werden, wenn die Mischung einen Würfel von 20 cm Kante bilden soll und das spezifische Gewicht des Bleies 11,5, das des Zinnes 7,2 ist?

33. Ein Würfel von 3 cm und ein anderer von 4 cm Kante werden zusammengeschmolzen; wie groß ist die Kante des neuen Würfels?

34. Die Summe der Oberflächen zweier Würfel beträgt 600 qcm, die Kanten verhalten sich wie 3 : 4; a) berechne diese und die körperlichen Inhalte. b) Welche Kantenlänge hätte ein Würfel, dessen Oberfläche gleich jener Summe wäre?

*35. Der Unterschied zwischen der Ecklinie eines Würfelquadrats und einer Seite beträgt 4 cm; berechne den Rauminhalt.

*36. Verlängert man die Kante eines Würfels a) um 2 cm, b) um 5,5 cm, so wird der Inhalt a) um 152 ccm, b) um 496,375 ccm vergrößert; berechne die Kanten und den Rauminhalt.

*37. Vermindert man die Kanten eines Würfels um 4 cm, so nimmt der Inhalt um 1216 ccm ab; berechne die Kanten.

38. Die Kante eines Würfels ist a; wie lang ist die Kante des Würfels von a) n-facher Oberfläche, b) n-fachem Rauminhalt? ($a = 10$, $n = 2, 3, 4$.)

*39. Die Kantensumme zweier Würfel ist s, die Summe ihrer Rauminhalte v. Berechne die Oberfläche und den körperlichen Inhalt jedes Würfels. ($s = 12$, $v = 468$.)

40. Berechne die Länge der Kanten zweier Würfel, wenn der Unterschied ihrer Rauminhalte v und der Unterschied der Kanten d beträgt. ($v = 2646$, $d = 6$.)

41. Von 3 hohlen Würfeln ist der erste um 2 cm höher als der zweite, dieser um 2 cm höher als der dritte. Füllt man den zweiten leeren aus dem ersten vollen und den dritten leeren aus dem zweiten vollen, so enthält der erste 120 ccm Wasser mehr als der zweite. Berechne die Kante jedes Würfels. (Heis.)

42. Von einem Würfel, dessen Kante a ist, schneidet man durch Ebenen die Ecken ab. Die Ebenen gehen durch die Mitten derjenigen Kanten, welche von der abzuschneidenden Ecke ausgehen. Berechne die Oberfläche des Restkörpers. ($a = 12$.)

---

§ 7. Prisma.

Bezeichnung: a, b, c = Kanten, d = Diagonale der Grundfläche, D = Körperdiagonale (Durchmesser der umgeschriebenen Kugel), n = Anzahl der Seitenflächen, G, h, O, V (auch in allen anderen Körpern) bezw. Grundfläche, Höhe, Oberfläche, Rauminhalt (Volumen).

1. Die drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten einer Rechteckssäule messen a, b und c (3, 4 und 5) cm. Berechne die Flächen- und Körpereclinien dieser Rechteckssäule.

2. Es ist die Oberfläche einer Rechteckssäule zu berechnen, wenn die drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten folgende Ausdehnung haben: a) 12 cm, 8 cm, 20 cm; b) 14 cm, 8,5 cm, 20,5 cm; c) 12,5 cm, 10 cm, 26 cm.

3. Es ist die Oberfläche und der Rauminhalt einer geraden Säule von 50 cm Höhe zu berechnen, wenn die Grundfläche a) ein regelmäßiges Dreieck von 10 cm Seite, b) ein gleichschenkliges Dreieck ist, in dem die Grundseite 30 cm, ein Schenkel 25 cm mißt, c) ein Dreieck, dessen Seiten 13, 37 und 40 cm messen, d) ein regelmäßiges Sechseck von 20 cm Seitenlänge.

4. Die Kanten einer Rechteckssäule sind 8 cm, 10 cm und 15 cm lang; wie lang ist die Verbindungslinie zweier entgegengesetzten Eckpunkte (die also durch den Schwerpunkt geht)?

5. Die Kanten einer Rechteckssäule messen 5 cm, 9 cm, 12 cm; berechne den Inhalt seiner Schnittebenen, welche die Diagonalen gegenüberliegender Seitenflächen verbinden (Diagonalschnittebenen).

6. Die Grundkanten einer Rechtecksäule verhalten sich wie 3 : 4, die Ecklinie der Grundfläche mißt 15 cm, die Seitenkante 20 cm; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

7. Der körperliche Inhalt einer quadratischen Säule beträgt 300 ccm, die Höhe 12 cm; wie lang ist die Grundkante?

8. Wieviel cbm Luft enthält ein Schulzimmer, welches 8 m lang, 5 m breit und 3,40 m hoch ist? Wie schwer ist diese Luft? (1 cbm = 1,290 kg.)

9. Wieviel hl Futterkorn faßt eine Kiste, welche 1,25 m lang, 0,80 m breit und 0,50 m hoch ist?

10. Eine Kalkgrube ist 3 m lang, 2,50 m breit und 1,75 m tief; wieviel cbm Kalk faßt dieselbe?

11. Ein Holzstoß ist 5,75 m lang, 1,80 m hoch und 1 m breit; wieviel Raummeter enthält derselbe? (Ein massiver Holzwürfel von 1 m Kante ist ein Festmeter, ein würfelförmiger Holzstoß [aus Scheiten] von 1 m Kante ist ein Raummeter.) b) Wieviel Festmeter enthält der Holzstoß, wenn 4 Festmeter = 5 Raummeter gerechnet werden?

12. Auf einem Felde von 80 m Länge und 30 m Breite liegt der Schnee durchschnittlich 35 cm hoch. Wieviel hl Wasser giebt derselbe, wenn man annimmt, daß 18 ccm Schnee 1 ccm Wasser geben?

13. Wieviel hl Wasser sind in einem Garten von 60 m Länge und 45 m Breite gefallen, wenn bei einem starken Regen ein im Garten stehendes Gefäß 2,5 cm hoch mit Wasser bedeckt war?

14. Für alle Staatsbauten müssen die Ziegelsteine 25 cm lang, 12 cm breit und 6,5 cm dick sein. Wieviel Steine sind zu einer Mauer erforderlich, welche 24 m lang, 52 cm dick und 1,5 m hoch ist? (Die durch den Mörtel herbeigeführte Vergrößerung ist nicht in Anrechnung zu bringen.)

15. Wie teuer stellt sich ein vierseitiger Balken mit Rechtecksgrundflächen, wenn die Kanten 30 cm, 40 cm und 4 m messen und 1 cbm mit 20 ℳ bezahlt wird?

16. Wieviel Würfel von a) 10 cm, b) 4 cm, c) $2\frac{1}{2}$ cm Kante lassen sich in einen prismatischen Raum von 1 m Länge, 60 cm Breite und 20 cm Höhe legen?

17. Wie schwer ist die Platte eines 4seitigen Marmortisches von 65 cm Länge, 55 cm Breite und 1,5 cm Dicke? (Spezifisches Gewicht 2,5.)

18. Wie schwer ist der Granitblock in St. Petersburg, auf welchem das Denkmal Peters des Großen steht, wenn seine Länge 11,5 m, die

Breite 6,5 m und die Höhe 6 m beträgt, Granit aber ein spezifisches Gewicht von 2,7 hat?

19. Bestimme die Höhe einer Rechtecksäule, wenn Rauminhalt und Grundkanten folgende Werte haben: a) 480 ccm, 9 cm und 8 cm; b) 1,728 cbm, 0,9 m und 1,6 m; c) 33,750 cbm, 9 m und 2,5 m.

20. Aus einer Grube von 5 m Breite und 8 m Länge sind 75 cbm Erde ausgegraben; wie tief ist die Grube?

21. Eine Futterkiste faßt 6 hl Hafer; sie ist 1,20 m lang und 0,80 m breit; wie hoch ist sie?

22. Auf einen Schüttboden von 8 m Länge und 3,5 m Breite sollen 84 hl Getreide aufgeschüttet werden; wie hoch liegt dasselbe?

23. Eine Kartoffelgrube, deren Grundfläche ein Rechteck von $2\frac{1}{2}$ m Länge und 2 m Breite ist, soll 80 hl Kartoffeln fassen; wie tief muß sie sein?

***24.** Die Oberfläche einer geraden quadratischen Säule = 210 qcm, die Höhe 8 cm; wie lang ist die Grundkante?

25. Die Summe von Grund- und Seitenkante einer geraden quadratischen Säule von a) 312 qcm, b) 230 qcm Oberfläche beträgt a) 16 cm, b) 14 cm; wie lang sind die Kanten?

***26.** In einer geraden quadratischen Säule ist die Ecklinie der Grundfläche 20 cm, die Ecklinie einer Seitenfläche 30 cm; berechne die Kanten.

***27.** Die Körperdiagonale einer quadratischen Säule mißt 24 cm, die Grundkante verhält sich zur Seitenkante wie 2 : 5; berechne dieselben.

***28.** Die Ecklinie der Seitenfläche einer geraden quadratischen Säule mißt 25 cm, die Seitenkante übertrifft die Grundkante um 17 cm; wie lang sind die Kanten?

***29.** Die Grundkante einer quadratischen Säule verhält sich zur Seitenkante wie 3 : 4. Vergrößert man die Grundkante um 1 cm und die Seitenkante um 2 cm, so nimmt die Oberfläche um 166 qcm zu. Wie lang sind die Kanten?

***30.** Die Grundkante einer quadratischen Säule verhält sich zur Seitenkante wie 5 : 8. Vermindert man die Grundkante um 2 cm und die Seitenkante um 3 cm, so nimmt die Oberfläche um 296 qcm ab. Berechne die Kanten.

***31.** In eine gerade quadratische Ecksäule ist eine andere so einbeschrieben, daß deren Eckpunkte die Grundkanten des ersten a) halbieren, b) im Verhältnis von 3 : 4 teilen. Berechne die Oberfläche der eingeschriebenen Säule, wenn eine Grundkante der umgeschriebenen 70 cm, eine Seitenkante 20 cm mißt.

***32.** Die Länge einer Zigarrenkiste ist 20 cm, die Breite ist der größere, die Höhe der kleinere Abschnitt der nach stetiger Verhältnisgleichung geteilten Länge. Berechne die Oberfläche.

33. Ein Kanal von 25 km Länge hat unten eine Breite von 6 m, oben von 10 m, die Tiefe beträgt 2 m. Wie teuer ist die Anlage desselben, wenn durchschnittlich für 1 cbm 2,50 ℳ gerechnet werden?

34. Berechne den Rauminhalt eines sechsseitigen Bleistiftes von 20 cm Länge und 3 mm Grundkante.

35. In einer Kirche stehen sechs regelmäßige sechsseitige Säulen von 8 m Höhe und 0,50 m Grundkante. Wie schwer ist eine solche Säule, wenn das spezifische Gewicht 2,25 ist?

36. Wie schwer ist eine regelmäßige achtseitige Mühlwelle von 25 cm Grundkante und 3,5 m Länge, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,9 ist?

37. Die Oberfläche einer quadratischen Säule von 6 cm Grundkante beträgt 312 qcm; wie groß ist der körperliche Inhalt?

38. Berechne den Rauminhalt einer quadratischen Säule, wenn die Summe der Endflächen 128 qcm, die Summe der Seitenflächen 480 qcm beträgt.

39. Die Ecklinie der Grundfläche einer quadratischen Säule von 2 m Höhe mißt 0,40 m; berechne den Rauminhalt.

---

40. Die drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten einer Rechtecksäule verhalten sich wie 3 : 4 : 5, die Oberfläche beträgt 846 qcm; wie groß ist der Rauminhalt?

41. Grund- und Seitenkante einer geraden quadratischen Säule von 800 qcm Oberfläche verhalten sich wie 2 : 3; berechne den Rauminhalt.

***42.** In einer quadratischen Säule beträgt die Ecklinie der Grundfläche 20 cm, die Ecklinie einer Seitenfläche 30 cm; wie groß ist der Rauminhalt?

***43.** In einer Rechtecksäule, deren Grundkanten sich wie $2\frac{1}{2}$: 6 verhalten, mißt die Ecklinie der Grundflächen 13 cm, die Ecklinie der größeren Seitenfläche 37 cm; wie groß ist der körperliche Inhalt?

***44.** Die Diagonalebene einer Rechtecksäule ist ein Quadrat von 225 qcm Inhalt, die Grundkanten verhalten sich wie 3 : 4; berechne den körperlichen Inhalt.

***45.** Die Oberfläche einer geraden quadratischen Säule beträgt 608 qcm, eine Seitenkante 15 cm; berechne den Rauminhalt.

***46.** Die beiden Grundkanten einer Rechtecksäule verhalten sich wie 3 : 4, die Seitenkante mißt 15 cm, die Oberfläche 516 qcm; berechne den Rauminhalt.

***47.** Die Summe von je einer Grund- und einer Seitenkante einer quadratischen Säule beträgt 15 cm, die Oberfläche 288 qcm; berechne den Rauminhalt.

***48.** Die Summe der beiden Grundkanten einer Rechtecksäule beträgt 11 cm, die Summe aus kleiner Grund- und Seitenkante 15 cm, die Oberfläche 280 qcm; wie groß ist der Rauminhalt?

***49.** Der körperliche Inhalt einer Rechtecksäule ist 720 ccm, die Oberfläche 516 qcm, der Umfang der Grundfläche 28 cm; berechne die Kanten.

***50.** a) Wie lang sind die drei anstoßenden Kanten einer Rechtecksäule, wenn die Diagonale der Grundfläche um 7 cm kleiner als die Höhe, die körperliche Diagonale 13 cm und der Inhalt der vier Seitenflächen 168 qcm ist? b) Wie groß ist der Rauminhalt?

***51.** Die Summe der drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten einer Rechtecksäule beträgt 19 cm, der Rauminhalt der Säule 216 ccm. Wie lang sind die Kanten, wenn die eine das geometrische Mittel der beiden anderen ist?

***52.** Die Länge einer Kiste beträgt 1,5 m, die Breite ist gleich dem größeren, die Höhe gleich dem kleineren Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Länge. Wie groß ist der körperliche Inhalt?

***53.** Die Breite und Höhe einer Zigarrenkiste sind die beiden Abschnitte der nach stetiger Verhältnisgleichung (Proportion) geteilten Länge; die Breite ist 12 cm; a) berechne den Rauminhalt. b) Wie groß ist der Rauminhalt, wenn die Höhe 10 cm ist?

***54.** Eine quadratische Säule von 20 cm Grund- und 40 cm Seitenkante ist so abzustumpfen, daß die größte regelmäßige achtseitige Säule entsteht. Wie groß ist der Rauminhalt der letzteren?

***55.** Eine regelmäßige dreiseitige Säule von 30 cm Grund- und 40 cm Seitenkante ist so abzustumpfen, daß die größte regelmäßige sechsseitige Säule entsteht. Wie groß ist der Rauminhalt der letzteren?

***56.** Berechne die Grundkante und den Rauminhalt der größten quadratischen Säule, entstanden aus einer regelmäßigen dreiseitigen Säule von 20 cm Grundkante und 50 cm Höhe.

57. Die Grundflächen dreier Prismen von gleicher Höhe sind einem Kreise mit dem Halbmesser r eingeschrieben. Wie verhalten sich die Rauminhalte der drei Prismen, wenn die Grundfläche des ersten Prismas ein Quadrat, die des zweiten ein regelmäßiges Sechseck und die des dritten ein regelmäßiges Zehneck ist?

---

58. Zwei gleichliegende Kanten ähnlicher prismatischer Gefäße messen 25 cm und 40 cm, der Unterschied der Inhalte beträgt 43 *l*; wieviel *l* faßt jedes?

59. Die Inhalte zweier ähnlichen Prismen sind 250 ccm und 686 ccm, die Summe zweier gleichliegenden Kanten mißt 12 cm; berechne die Kanten.

60. Die Grundkante einer quadratischen Säule mißt 5 cm, die Seitenkante 8 cm; die Grundkante einer ähnlichen Säule mißt 10 cm. a) Berechne den Inhalt der beiden Säulen. b) Wie verhalten sich die Oberflächen und die Inhalte?

61. Die Grundkante einer regelmäßigen sechsseitigen Säule sei 10 cm, die Seitenkante 15 cm; die Seitenkante einer ähnlichen Ecksäule sei 22,5 cm; a) berechne die Inhalte beider Säulen. b) Wie verhalten sich die Oberflächen und die Inhalte beider?

62. Die Oberfläche einer Rechtecksäule = 280 qcm, die beiden Grundkanten bezüglich 5 cm und 6 cm. Berechne den Rauminhalt einer ähnlichen Säule, deren Oberfläche das Vierfache der ersten beträgt.

***63.** Der körperliche Inhalt einer quadratischen Säule sei 2500 ccm, eine Seitenkante 25 cm; berechne die Ausdehnungen einer dieser ähnlichen Säule, die a) $\frac{1}{8}$, b) das Vierfache der vorigen ist.

***64.** Wie verhalten sich die Inhalte ähnlicher Prismen, wenn die Oberfläche des einen das Doppelte der des anderen ist?

***65.** Wie verhalten sich die Oberflächen ähnlicher Prismen, wenn der Rauminhalt des einen das Doppelte des Inhalts des anderen ist?

***66.** Die Summe der Grundkanten zweier ähnlichen quadratischen Säulen = 15 cm, die Summe zweier Grundflächen = 125 qcm, die Summe der Rauminhalte = 1800 ccm; berechne die Kanten.

67. Die Grundkante einer regelmäßigen sechsseitigen Säule sei 10 cm, die Höhe 25 cm, die Grundkante einer ähnlichen Säule 30 cm; berechne Grund- und Seitenkante einer dritten ähnlichen Säule, die a) gleich der Summe, b) gleich dem Unterschiede beider Säulen ist.

---

68. Der äußere Umfang eines Gebäudes von regelmäßiger sechsseitiger Grundfläche beträgt 30 m, der innere 24 m, die Höhe 10 m; es ist der Rauminhalt des Mauerwerks zu berechnen.

69. Eine Eisenstange von 2 m Länge, in Form einer regelmäßigen sechsseitigen Säule von 5 cm Grundkante, ist derartig ausgehöhlt, daß der Hohlraum ebenfalls eine regelmäßige sechsseitige Säule von 4 cm Grundkante bildet; wie schwer ist die Stange? (Spezifisches Gewicht 7,5.)

70. Ein Wasserbehälter von 0,50 m Höhe bildet ein regelmäßiges achtseitiges Hohlprisma; die äußere Grundkante ist 1,25 m, die innere 1 m lang. a) Wieviel hl Wasser faßt der Behälter? b) Welchen Rauminhalt hat das Mauerwerk?

71. Die parallelen Seitenkanten eines schief abgeschnittenen Prismas messen 1,80 m, 1,50 m und 1,35 m, der Inhalt des senkrechten Querschnitts beträgt 2,50 qm; berechne den Rauminhalt.

72. Ein Gebäude ist 18 m lang, 10 m tief und bis an das Dach 12 m hoch; das Dach hat die Form eines an beiden Seiten schief abgeschnittenen Prismas; die obere Dachkante mißt 15 m, eine Senkrechte von dieser bis auf den Dachboden = 4 m; berechne den Rauminhalt des ganzen Gebäudes.

73. Der Querschnitt eines Prismenstumpfes ist ein gleichseitiges Dreieck von 10 cm Seite, die Seitenkanten messen 12 cm, 8 cm und 7 cm; wie groß ist der körperliche Inhalt?

74. Der Querschnitt eines Prismenstumpfes ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie 10 cm, dessen einer Schenkel 13 cm mißt; die Seitenkanten des Stumpfes betragen 17 cm, 19 cm und 24 cm; berechne den Rauminhalt.

***75.** Der Querschnitt eines Prismenstumpfes ist ein Dreieck von 10 cm, 17 cm und 21 cm langen Seiten; die Seitenkanten messen 25 cm, 30 cm und 35 cm; berechne den Rauminhalt.

***76.** Der Querschnitt eines Prismenstumpfes ist ein Dreieck von 11 cm, 13 cm und 20 cm langen Seiten, der körperliche Inhalt beträgt 1650 ccm, die Seitenkanten verhalten sich wie 4 : 5 : 6; wie lang sind diese?

§ 8. Cylinder (Rundsäule, Walze).

Bezeichnung: Der Halbmesser der Grundfläche des Cylinders wird mit r, die Mantelfläche mit Mt, die Oberfläche mit O, der Rauminhalt mit V, die Höhe mit h bezeichnet.

1. Berechne die Oberfläche und den Rauminhalt einer geraden Rundsäule, wenn der Halbmesser der Grundfläche r und die Höhe h gegeben ist. [a) $r = 7$, $h = 20$, ($\pi = 3\frac{1}{7}$); b) $r = 21$, $h = 50$ ($\pi = 3\frac{1}{7}$); c) $r = 10$, $h = 25$; d) $r = 10{,}50$, $h = 3{,}75$ m ($\pi = 3\frac{1}{7}$).]

2. Aus Blech soll ein walzenförmiges Gefäß von 30 cm Weite und 40 cm Höhe gefertigt werden; wieviel qcm sind dazu erforderlich, wenn nur eine Endfläche vorhanden ist?

3. Es sollen verschiedene cylindrische Abflußröhren gefertigt werden, die einen Durchmesser von 25 cm und eine Gesamtlänge von 60 m haben; wieviel Blech ist dazu erforderlich?

4. Die Außenseite eines cylindrischen Turmes von 2 m Durchmesser und 20 m Höhe soll übertüncht werden. Wie teuer kommt die Arbeit, wenn 1 qm mit 0,30 ℳ berechnet wird?

5. Berechne Oberfläche und Rauminhalt eines geraden gleichseitigen Cylinders,*) dessen Halbmesser r gegeben ist. [a) $r = 7$ cm ($\pi = 3\frac{1}{7}$); b) $r = 25$ cm.] c) Bestimme das Verhältnis zwischen Grundfläche und Mantel einerseits und zwischen Grundfläche und Oberfläche andererseits.

6. Der Durchmesser einer geraden Säule beträgt 10 cm, der Achsenschnitt 75 qcm; berechne die Oberfläche und den Rauminhalt.

7. Der Mantel eines geraden Cylinders beträgt 3768 qcm, der Durchmesser der Grundfläche = 15 cm; wie lang ist eine Seitenlinie?

8. Berechne den Halbmesser der Grundfläche einer geraden Walze, wenn der Mantel = Mt und die Seitenlinie = s gegeben ist. ($Mt = 3768$, $s = 20$.)

9. Wieviel *l* faßt ein cylindrisches Gefäß, dessen innerer Raum 8 cm Durchmesser und 15 cm Höhe hat?

10. Wieviel *l* faßt eine Gießkanne, deren innerer Durchmesser 30 cm und deren Höhe 40 cm mißt?

11. Ein Gasbehälter hat 33 m Umfang und 5 m Höhe; wieviel cbm Gas faßt derselbe? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

---

*) In dem gleichseitigen Cylinder ist der Durchmesser der Grundfläche gleich der Höhe des Cylinders; der Achsenschnitt ist ein Quadrat.

12. Wieviel l Wasser kann ein Trinkglas von 7 cm Durchmesser und 10 cm Höhe aufnehmen? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

13. Wieviel cbm Erde müssen ausgeschachtet werden, um einen kreisrunden Brunnen von $1\frac{3}{4}$ m Weite und 12 m Tiefe zu erhalten?

14. Ein Trog hat im Innern die Gestalt eines der Länge nach in der Mitte durchschnittenen Cylinders, der $1\frac{1}{2}$ m lang ist und einen Durchmesser von 0,5 m hat. Wieviel l faßt derselbe?

15. Wie teuer ist ein walzenförmiger Stamm von 4 m Länge und 0,40 m Durchmesser, wenn 1 cbm mit 20 ℳ bezahlt wird? b) Wie schwer ist er, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,75 ist?

16. Ein Mühlstein hat 0,70 m Durchmesser und 0,75 m Höhe; wie schwer ist derselbe? (Spezifisches Gewicht 2,75.) ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

17. Wie schwer ist eine walzenförmige Eisenstange von 11 cm Umfang und 1,20 m Länge, wenn das spezifische Gewicht des Eisens 7,2 ist? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

18. Eine steinerne Straßenwalze hat 1,20 m Durchmesser und 1,20 m Länge; welchen Druck übt die Walze aus, wenn das spezifische Gewicht 2,5 beträgt?

19. Wieviel Raummeter Scheitholz (s. § 7, Aufg. 11) liefert ein walzenförmiger Stamm von 3 m Länge und 0,50 m Dicke, wenn in einem Raummeter 75 % Holzmasse enthalten sind?

20. Aus einer quadratischen Säule von 25 cm Grundkante und 3 m Höhe soll die größte Rundsäule hergestellt werden; wie groß ist der Abfall?

21. Ein kreisrunder Wasserbehälter von 12,56 m Umfang und 1,50 m Tiefe soll durch eine Röhre gefüllt werden, welche in einer Minute 75 l Wasser giebt; in welcher Zeit ist das Gefäß gefüllt?

22. Wieviel l Wasser liefert eine Feuerspritze in einer Minute, wenn jeder der beiden Kolben einen Durchmesser von 14 cm hat und in dieser Zeit 75 mal 20 cm hoch gehoben wird? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

23. Die Oberfläche einer geraden Rundsäule $=$ O, der Halbmesser der Grundfläche $=$ r; berechne die Höhe und den Rauminhalt. ($O = 9420$, $r = 30$.)

24. Die Oberfläche eines gleichseitigen Cylinders ist O. a) Berechne Grundfläche und Mantel. b) Gieb das Verhältnis beider Flächen an. ($O = 1884$ qcm.)

25. Einem Würfel mit der Kante a ist ein Cylinder a) einbeschrieben, b) umbeschrieben. Berechne Oberfläche und Rauminhalt des Cylinders. ($a = 10$.)

26. Wie groß ist der Unterschied zwischen der Oberfläche eines geraden Cylinders von 20 cm Halbmesser und 50 cm Seitenlinie und der Oberfläche der demselben umbeschriebenen kleinsten quadratischen Säule?

27. Der Halbmesser einer geraden Walze ist 10 cm, die Seitenlinie 50 cm; berechne die Oberfläche der größten regelmäßigen sechsseitigen Säule, die man aus jener gewinnen kann.

28. In welchem Verhältnis müssen Durchmesser und Seitenlinie eines geraden Cylinders stehen, a) wenn der Mantel gleich der Grundfläche, b) wenn der Achsenschnitt gleich der Grundfläche ist?

29. Ein Rechteck mit den Seiten a und b wird um jede derselben als Achse gedreht. a) Berechne Oberfläche und Inhalt der entstehenden Walzen. b) Wie verhalten sich die Mäntel und die Grundflächen? ($a = 21$, $b = 14$.)

30. Durchmesser und Höhe eines geraden Cylinders von 2512 qcm Oberfläche verhalten sich wie $2 : 3$; berechne diese Ausdehnungen.

31. Es ist die Gesamtoberfläche des Ausschnitts eines geraden Cylinders von 10 cm Halbmesser und 30 cm Seitenlinie zu berechnen, welcher durch zwei Ebenen entstanden ist, die sich in der Cylinderachse unter einem Winkel von a) 45^0, b) 60^0 schneiden.

32. Durchmesser und Höhe einer Walze messen bezüglich 14 cm und 40 cm; die Ausdehnungen einer ähnlichen Walze sind doppelt so lang; berechne die Oberflächen und das Verhältnis derselben. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

33. Der Unterschied der Oberflächen zweier ähnlichen Walzen beträgt 280 qcm, die Höhen sind 9 cm und 12 cm; berechne die Oberfläche einer jeden.

34. Die Summe der Oberflächen zweier ähnlichen Walzen = 10990 qcm, die Halbmesser der Grundflächen messen 10 cm und 20 cm; berechne die Höhen.

35. Ein gleichseitiger Cylinder hat 15 cm Durchmesser; wie groß ist der Durchmesser eines ihm ähnlichen Cylinders, dessen Oberfläche a) doppelt, b) halb so groß ist?

***36.** Die Oberfläche eines geraden Cylinders beträgt 968 qcm, die Höhe 15 cm; berechne den Durchmesser. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***37.** Ein gerader Cylinder ist durch eine der Achse parallele Schnittfläche geschnitten; die Ecklinie der Schnittfigur = 17 cm, der Inhalt derselben = 120 qcm, der Abstand von der Achse = 3 cm; es ist die Höhe und der Halbmesser der Grundfläche zu berechnen.

38. Der Halbmesser eines geraden Cylinders mißt 10 cm, die Höhe 25 cm; es ist der Inhalt eines zur Grundfläche senkrechten Schnittes zu berechnen, welcher den zu ihm senkrechten Halbmesser halbiert.

***39.** Die Halbmesser zweier geraden gleichseitigen Cylinder unterscheiden sich um 5 cm, ihre Oberflächen haben einen Unterschied von 2355 qcm; wie lang sind die Halbmesser?

40. Der Halbmesser eines Cylinders beträgt 10 cm, die Höhe 50 cm; berechne die Grundkanten eines ebenso hohen quadratischen Prismas, dessen Oberfläche gleich der des Cylinders ist.

***41.** Die Summe von Durchmesser und Höhe einer Walze = 24 cm, die Oberfläche = 748 qcm; berechne die Ausdehnungen. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***42.** Die Summe aus dem Halbmesser und der Höhe einer geraden Walze mißt 17 cm, die Linie, welche die Mitte der oberen Grundfläche mit einem Punkte des Umfangs der unteren verbindet, mißt 13 cm; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

***43.** Der Unterschied zwischen der Höhe und dem Halbmesser einer geraden Walze beträgt 21 cm, die Entfernung der Mitte der oberen Grundfläche von dem Umfange der unteren = 39 cm; berechne a) die Oberfläche, b) den Rauminhalt.

***44.** Die Höhe eines geraden Cylinders ist 40 cm; der Halbmesser der Grundfläche ist gleich dem größeren Abschnitt der nach dem goldenen Schnitt geteilten Höhe; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

***45.** Der Halbmesser und die Höhe eines geraden Cylinders sind bezüglich der kleinere und der größere Abschnitt einer nach stetiger Proportion geteilten Strecke von 24 cm; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

***46.** Der Umfang eines geraden Cylinders übertrifft die Höhe um 34 cm, der Mantel beträgt 440 qcm; berechne a) Halbmesser, b) Höhe, c) Rauminhalt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***47.** Die Oberfläche einer geraden Walze mißt 1570 qcm; vergrößert man Halbmesser sowohl als Höhe um 5 cm, so wird die Oberfläche um 1727 qcm vergrößert; berechne a) die Ausdehnungen, b) den Rauminhalt.

***48.** Vergrößert man den Halbmesser einer geraden Walze von 1570 qcm Oberfläche um 5 cm und verringert die Höhe um 5 cm, so wird die Oberfläche um 785 qcm vergrößert; berechne die Ausdehnungen und den Rauminhalt.

*49. Die Oberfläche einer geraden Walze beträgt 1570 qcm; wird aber der Halbmesser um 5 cm, die Höhe um $3\frac{1}{3}$ cm vergrößert, so erhält man eine Walze von doppelter Oberfläche. Berechne die ursprünglichen Ausdehnungen und den Rauminhalt.

*50. Der Halbmesser einer geraden Walze mißt 10 cm, die Höhe 15 cm; es sollen Halbmesser und Höhe so vergrößert werden, daß diese Vergrößerungen sich wie 2 : 3 verhalten und die Oberfläche der neuen Walze das Doppelte der des ersten beträgt. Berechne diese Vergrößerungen.

51. Der aufgerollte Mantel eines geraden Cylinders ist ein Quadrat, dessen Diagonale = d ist. Berechne a) die Oberfläche, b) den Rauminhalt des Cylinders. (d = 20.)

52. Um eine Rechtecksäule, deren Kanten a, b und c lang sind, lassen sich drei Cylinder beschreiben. Wie verhalten sich a) die Grundflächen, b) die Mantelflächen und c) die Rauminhalte dieser Cylinder?

53. Ein walzenförmiges Gefäß von 50 cm Weite ist bis zu einer Höhe von 20 cm mit Wasser gefüllt. Durch einen in dasselbe gelegten Stein steigt das Wasser um 5 cm; berechne den Rauminhalt des Steines.

54. Aus einer Rundsäule von 30 cm Durchmesser und 4 m Länge soll die größte quadratische Säule hergestellt werden; wie groß ist der Abfall?

55. Um ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma, dessen Höhe gleich der Grundkante = a ist, ist ein Cylinder beschrieben. Berechne a) die Oberflächen, b) die Rauminhalte beider Körper.

56. Die Grundkanten eines dreiseitigen Prismas messen bezüglich 13, 14 und 15 cm und die Höhe 30 cm. Berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt des umbeschriebenen Cylinders.

57. Die Grundfläche einer geraden Rundsäule mißt 314 qcm, die Mantelfläche 942 qcm; wie groß ist der Rauminhalt?

58. Wie lang muß die Kante eines Würfels sein, wenn dieser mit einer Walze von 25 cm Durchmesser und 40 cm Höhe gleichen Inhalt haben soll?

59. Der Inhalt einer Walze beträgt 500 ccm, die Grundfläche a) 75 qcm, b) $66\frac{2}{3}$ qcm, c) 37,5 qcm; berechne die Höhe.

60. Berechne den Durchmesser der Grundfläche einer Walze von 385 ccm Inhalt und 10 cm Höhe. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

61. Wie groß ist der Durchmesser eines Cylinders, wenn Rauminhalt und Höhe folgende Werte haben: a) 4710 ccm und 15 cm, b) 37680 ccm und 30 cm, c) 17 662,5 ccm und 25 cm.

62. Berechne die Höhe eines Cylinders von 3532,5 ccm Inhalt und 15 cm Durchmesser.

63. Es soll ein cylindrisches Gefäß von 70 cm Weite und 1,50 m Höhe durch ein anderes von 14 cm Weite und 30 cm Höhe gefüllt werden. Wie oft muß geschöpft werden, und wieviel l faßt jedes Gefäß? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

64. Ein walzenförmiger Baumstamm hat 0,6 cbm Inhalt, der Durchmesser ist 0,40 m; wie lang ist der Stamm?

65. Das Litermaß soll gesetzlich cylindrische Form und einen Durchmesser von 8,6 cm haben; wie hoch muß der innere Raum dieses Maßes sein? ($\pi = 3{,}1416$.)

66. Welche Höhe hat der innere Raum eines Hektolitermaßes, wenn der innere Durchmesser 58 cm mißt? ($\pi = 3{,}1416$.)

67. Welchen Durchmesser im Lichten muß der innere Raum eines Hektolitermaßes erhalten, dessen Höhe a) 30 cm, b) 50 cm betragen soll? ($\pi = 3{,}1416$.)

68. Eine eiserne Walze von 15 cm Höhe hat ein Gewicht von 35,325 kg; wie groß ist der Durchmesser, wenn das spezifische Gewicht 7,5 ist?

69. Der Mantel einer gleichseitigen Walze mißt 2464 qcm; wie groß ist der Rauminhalt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

70. Die Oberfläche einer gleichseitigen Walze mißt a) 924 qcm, b) $1885\frac{5}{7}$ qcm; berechne den Rauminhalt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

71. Welche Oberfläche hat eine gleichseitige Rundsäule von 2156 ccm Rauminhalt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

72. Der Umfang einer Rundsäule übertrifft den Durchmesser a) um 30 cm, b) um 45 cm; wie groß ist der Rauminhalt, wenn die Höhe a) 24 cm, b) 45 cm mißt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

73. Durchmesser und Höhe einer Walze verhalten sich wie 2 : 5, die Oberfläche beträgt 3768 qcm; berechne den Rauminhalt.

74. Halbmesser und Länge einer Walze verhalten sich wie 1 : 3, die Oberfläche mißt 2512 qcm; wie groß ist der Rauminhalt?

75. Die cylinderförmigen Hohlmaße sind gewöhnlich doppelt so hoch als weit. Berechne danach die Ausdehnungen eines Fünflitermaßes.

76. Grund- und Mantelfläche eines geraden Cylinders verhalten sich wie 1 : 3, die Oberfläche beträgt 1570 qcm; wie groß ist der Rauminhalt?

77. Ein Blatt Papier in Rechtecksform ist 66 cm lang und 44 cm breit; es kann also damit der Mantel eines Cylinders von 44 cm oder der eines Cylinders von 66 cm Höhe bekleidet werden. Wie verhalten sich die körperlichen Inhalte dieser beiden Cylinder?

78. Ein Rechteck, dessen Seiten 20 cm und 10 cm messen, wird um jede der beiden Seiten als Achse gedreht. Wie verhalten sich a) die Mäntel, b) die Oberflächen, c) die körperlichen Inhalte der durch die Drehung erzeugten Cylinder?

***79.** a) In welchem Verhältnis stehen die Rauminhalte gleichseitiger Cylinder, wenn die Oberfläche des einen das Doppelte der Oberfläche des andern ist? b) Wie verhalten sich die Oberflächen, wenn die Rauminhalte im Verhältnis von 1 : 2 stehen?

***80.** Der körperliche Inhalt einer Walze beträgt 4710 ccm, der Mantel 942 qcm; berechne Durchmesser und Höhe.

***81.** Die Summe von Durchmesser und Höhe einer Walze beträgt 24 cm, die Oberfläche 748 qcm; berechne den körperlichen Inhalt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

82. In einen geraden Cylinder von 30 cm ist ein vierseitiges Prisma beschrieben, dessen Grundkanten der Reihe nach 19, 15, 7 und 5 cm messen. Berechne die Rauminhalte beider Körper.

***83.** Der Umfang eines geraden Cylinders übertrifft die Höhe um 19 cm, die Oberfläche mißt 1408 qcm; berechne den Rauminhalt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***84.** Aus einem cylindrischen Holzstamme von 3 m Länge und 15 cm Halbmesser soll ein Balken mit Rechtecksgrundflächen so herausgehauen werden, daß die Grundkanten sich wie 3 : 4 verhalten; wie groß ist der Abfall?

***85.** Verkürzt man die Höhe eines Cylinders unter Beibehaltung der Grundfläche um 5 cm, so verringert sich der kubische Inhalt um 1570 ccm; behält man aber die ursprüngliche Höhe bei und verringert den Halbmesser der Grundfläche um 2 cm, so wird der Inhalt um 3391,2 ccm verkleinert. Berechne die Ausdehnungen.

***86.** Ein Cylinder von 8 cm Höhe hat einen Halbmesser von 10 cm. Vermindert man das eine Mal den Halbmesser um eine gewisse Größe und verkleinert ein anderes Mal die Höhe um die gleiche Größe, so haben in beiden Fällen die neu entstehenden Cylinder dieselbe Größe.

Wieviel muß jene Verkürzung betragen, und welches ist der Inhalt des entstehenden Cylinders?

87. Wieviel Maßeinheiten hat der Halbmesser eines geraden Cylinders, wenn die Maßzahl des Rauminhaltes der der Mantelfläche gleich ist?

88. Der Mantel eines Cylinders bildet ein Quadrat, dessen Ecklinie = 45 cm ist; berechne den Rauminhalt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

---

89. Der Halbmesser einer geraden Rundsäule beträgt 7 cm, die Höhe 20 cm, die Höhe einer ähnlichen Rundsäule 30 cm; a) berechne die Oberflächen und die Inhalte beider. b) Wie verhalten sich die Walzen in ihren Oberflächen und in ihren Inhalten? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

90. Die Summe der Inhalte zweier ähnlicher Walzen beträgt 13 475 ccm, die Höhe der einen mißt 20 cm, die der anderen 30 cm; berechne die Durchmesser und die Inhalte. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

91. Zwei ähnliche cylindrische Gefäße fassen zusammen 210 *l*, die Höhen verhalten sich wie 2 : 3; wieviel faßt jedes?

92. Ein cylindrischer Holzblock von 40 cm Länge hat ein Gewicht von 235,5 kg; a) wie schwer ist ein ähnlicher Block von 20 cm Länge? b) Berechne den Halbmesser derselben, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,75 ist.

93. Die Oberfläche einer Walze = 408,2 qcm, der Halbmesser 5 cm; berechne den Rauminhalt einer ähnlichen Walze, deren Oberfläche das Vierfache der ersten ist.

***94.** Der Rauminhalt einer Walze ist 4710 ccm, der Halbmesser = 10 cm; berechne die Ausdehnungen einer ähnlichen Walze, deren Rauminhalt a) $\frac{1}{8}$, b) das Vierfache der gegebenen ist.

***95.** Wie verhalten sich die Inhalte ähnlicher Walzen, wenn die Oberfläche der einen das Doppelte der Oberfläche der anderen ist?

***96.** Wie verhalten sich die Oberflächen ähnlicher Walzen, wenn der Rauminhalt der einen das Doppelte des Rauminhalts der anderen ist?

***97.** Die Summe der Halbmesser zweier ähnlicher Rundsäulen beträgt 35 cm, die Summe der beiden Grundflächen 2002 qcm, die Summe der körperlichen Inhalte 64680 ccm; berechne die Ausdehnungen. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

98. Der Halbmesser einer Walze sei 8 cm, die Höhe 15 cm, der Halbmesser einer ähnlichen Walze 12 cm; berechne die Ausdehnungen derjenigen ähnlichen Walze, deren Rauminhalt a) gleich der Summe, b) gleich dem Unterschiede der gegebenen Walzen ist.

99. Aus einer Walze von 50 cm Durchmesser und 2,50 m Länge wird eine Walze von 40 cm Durchmesser herausgenommen. a) Welchen Rauminhalt hatte die Walze anfänglich? b) Wie groß ist der innere Hohlraum und welchen Inhalt hat der Hohlcylinder?

100. Um eine Walze von 2 m Länge und 28 cm Halbmesser wird eine überall 7 cm dicke Zementschicht gelegt. Berechne den Rauminhalt a) der ursprünglichen, b) der durch die Schicht vergrößerten Walze, c) der Vergrößerung. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

101. Der innere Halbmesser eines 15 m hohen Turmes beträgt 5 m, der äußere Umfang 44 m; berechne den Inhalt des Mauerwerkes. ($\pi = 3\frac{1}{7}$ und 3,14.)

102. Wie schwer ist ein Kochherdring von $\frac{1}{2}$ cm Dicke, wenn die äußere Weite 30 cm, die innere 28 cm mißt? (Spezifisches Gewicht des Eisens 7,5.)

103. Wieviel wiegt eine 1,50 m lange Zinkröhre von 3,5 mm Wandstärke bei einem inneren Durchmesser von 28 cm, wenn das spezifische Gewicht des Zinkes 7 ist? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

104. Der innere Durchmesser einer Bleiröhre mißt 20 cm, die Wandstärke 5 mm, das Gewicht beträgt 29,9 kg; berechne die Länge derselben, wenn das spezifische Gewicht 11,5 ist. ($\pi = 3{,}14$ und $3\frac{1}{7}$.)

105. Der innere Halbmesser eines 60 cm langen Hohlcylinders beträgt 20 cm, die Grundfläche desselben (der Kreisring) 1570 qcm; berechne den Rauminhalt und die Wandstärke.

106. Ein Hohlcylinder von 33 880 ccm Inhalt hat eine Höhe von 80 cm, die Summe der Halbmesser der Grundfläche beträgt 38,5 cm; berechne die Halbmesser. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

107. Die äußere Mantelfläche eines Hohlcylinders beträgt 4710 qcm, die innere 3140 qcm, die Summe der Halbmesser 25 cm; berechne diese und den Rauminhalt.

***108.** Aus einer Rundsäule von 20 cm Halbmesser und 50 cm Höhe soll ein solcher Cylinder herausgenommen werden, daß der Rest die Hälfte des ursprünglichen Cylinders ist; berechne die Dicke der Wand des Hohlcylinders.

***109.** In einen Korkcylinder, der eine Länge von 10 cm und einen Halbmesser von 20 cm hat, ist eine cylindrische Röhre der Länge nach gebohrt und diese hierauf mit Blei ausgefüllt worden. Welchen Halbmesser hat die Röhre, wenn der so hergestellte Cylinder genau das spezifische Gewicht des Wassers hat? (Spezifisches Gewicht des Korkes 0,25, des Bleies 11,5.)

110. Welchen Rauminhalt hat das Mauerwerk eines sogenannten Tunnelgewölbes von 10 m Länge, wenn die Endfläche desselben die Hälfte eines Kreisringes von 4 m innerem Halbmesser und 0,50 m Breite ist?

111. Es ist der Inhalt eines halbkreisförmigen Tonnengewölbes zu berechnen, wenn seine Länge 8 m, die innere Weite 10,50 m, die Wandstärke $\frac{7}{8}$ m beträgt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

112. Ein Kreisbogengewölbe von 12 m Länge hat eine Bogenspannung von 135°, der Halbmesser des inneren Kreises mißt 5 m, die Wandstärke $\frac{5}{8}$ m; berechne den Rauminhalt.

113. Ein Kreisbogengewölbe von 15 m Länge hat eine Bogenspannung von 216°, der Halbmesser des inneren Kreises mißt 4 m, die Wandstärke 1 m; wie groß ist der Rauminhalt?

114. Welchen Inhalt hat ein senkrechter, schief abgeschnittener Cylinder von 40 cm Durchmesser, wenn seine längste Seitenlinie 75 cm, die kleinste 45 cm mißt?

115. Ein Cylinder von 10 m Höhe soll so schief geschnitten werden, daß der höchste Punkt der Schnittfläche 10 m von der Grundfläche entfernt liegt und der übrig bleibende Cylinderabschnitt $\frac{4}{5}$ des ganzen Cylinders beträgt. Wie hoch liegt der tiefste Punkt der Schnittfläche von der Grundfläche entfernt?

116. Der Inhalt eines Cylinderabschnittes beträgt 49,28 cbm, der Halbmesser der Grundfläche mißt 1,40 m, die größte und kleinste Höhe verhalten sich wie 5 : 3; berechne diese. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

117. Der Halbmesser eines Cylinders mißt 20 cm; von einem Punkte des Umfanges der unteren Grundfläche ist eine Schnittebene gelegt, welche mit der Grundfläche einen Winkel von 45° bildet; berechne den Rauminhalt des abgeschnittenen Teiles.

---

§ 9. **Pyramide** (Spitzsäule).

Bezeichnung: a, b, c u. s. w. = Grundkanten, h = Höhe, s = Seitenhöhe.

1. Die Grundfläche einer Spitzsäule ist ein Quadrat, eine Grundkante mißt 4 cm, die Höhe jedes der 4 Seitendreiecke mißt 7 cm; berechne den Inhalt dieser Flächen.

2. Die Grundkante einer regelmäßigen vierseitigen Spitzsäule mißt 25 cm, die Seitenhöhe 50 cm; wie groß ist die Oberfläche?

3. Eine Kirchturmspitze in Form einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide von 9 m Umfang und 5 m Seitenhöhe soll mit Zinkplatten von 0,75 m Länge und 0,50 m Breite gedeckt werden. Wieviel derselben sind notwendig, wenn 10 % der Fläche mehr gerechnet werden muß?

4. Es ist der körperliche Inhalt einer quadratischen Spitzsäule zu berechnen, wenn Grundkante und Höhe bezüglich folgende Werte haben: a) 10 cm und 15 cm; b) 3,6 m und 7,5 m; c) $\frac{2}{3}$ m und $1\frac{1}{2}$ m.

5. Wie groß ist der Rauminhalt einer 30 cm hohen Spitzsäule, deren Grundfläche ein Rechteck von 30 cm und 20 cm langen Seiten ist?

6. Die Grundkante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt a) 10 cm, b) 14 cm, die Seitenkante a) 13 cm, b) 25 cm; berechne die Oberfläche.

7. Die Grundkante einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide mißt 14 cm, die Pyramidenhöhe 24 cm; berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt.

8. Die Grundfläche einer geraden Spitzsäule ist ein Rechteck von 10 cm und 7 cm langen Seiten, die Höhe der Säule mißt 12 cm; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

9. Berechne die Oberfläche einer regelmäßigen dreiseitigen Spitzsäule von 10 cm Grundkante und 25 cm Seitenhöhe.

10. Wie groß ist a) Oberfläche, b) Rauminhalt eines regelmäßigen Tetraeders, dessen Kante = a ist? (a = 20.)

11. Die Kante eines regelmäßigen Achtflachs (Oktaeder) ist a cm; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt? (a = 25 cm.)

12. Die Oberfläche einer quadratischen Spitzsäule mißt 1440 qcm, die Grundkante 10 cm; wie lang ist a) die Seitenhöhe, b) der Rauminhalt?

13. Die Oberfläche einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide beträgt 1009,8 qcm, die Grundkante 10 cm; berechne die Seitenhöhe.

14. Eine 30 cm hohe quadratische Spitzsäule aus Gußeisen, deren Seitenhöhe 34 cm mißt, soll in einen Würfel umgegossen werden; wie lang ist die Kante desselben? b) Welches Gewicht hat dieser Würfel, wenn sein spezifisches Gewicht 7,5 ist?

15. Eine regelmäßige, dreiseitige Spitzsäule von 1,50 m Grundkante ist 2,40 m hoch; berechne den Rauminhalt.

16. Welchen Rauminhalt hat eine dreiseitige Spitzsäule von 45 cm Höhe, wenn die Grundfläche ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist, dessen Hypotenuse 12 cm beträgt?

17. Die Grundfläche einer 40 cm hohen Spitzsäule ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 39 cm, dessen eine Kathete 15 cm mißt; berechne den Rauminhalt.

18. Die Grundfläche einer Spitzsäule von 675 ccm Inhalt und 36 cm Höhe ist ein Quadrat; wie lang sind die Grundkanten?

19. Die Grundfläche einer 90 cm hohen Spitzsäule ist ein regelmäßiges Sechseck mit 20 cm langen Seiten; berechne den Rauminhalt.

20. Welchen Rauminhalt hat eine 20 cm hohe Spitzsäule, deren Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck von 25 cm Umfang ist?

21. Berechne die Oberfläche und den Rauminhalt einer geraden regelmäßigen zehnseitigen Spitzsäule von 75 cm Höhe und 10 cm Seitenkante.

22. Die Höhe einer geraden regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 1125 ccm Inhalt ist gleich der Grundkante; berechne diese und die Oberfläche.

23. Die Oberfläche einer geraden regelmäßigen vierseitigen Pyramide beträgt 144 cm, die Grundkante 8 cm; wie groß ist der Rauminhalt?

24. Grundkante und Seitenhöhe einer geraden quadratischen Spitzsäule von 528 qcm Oberfläche verhalten sich wie 3 : 4; berechne a) diese Ausdehnungen, b) den Rauminhalt.

25. Grundkante und Seitenkante einer geraden quadratischen Spitzsäule von 1344 qcm Oberfläche verhalten sich wie 6 : 5; berechne a) diese Ausdehnungen, b) den Rauminhalt.

26. Grundkante und Höhe einer regelmäßigen vierseitigen Pyramide verhalten sich wie 5 : 6, die Oberfläche beträgt 1440 qcm; berechne a) die Grundkante, b) die Höhe, c) den Rauminhalt.

***27.** Wie groß ist die Grundkante einer geraden quadratischen Pyramide von 528 qcm Oberfläche und 16 cm Seitenhöhe?

***28.** Die Grundkante einer regelmäßigen vierseitigen Spitzsäule ist um 4 cm kleiner als die Seitenhöhe, der Mantel mißt 120 qcm; berechne die Oberfläche.

***29.** Die Oberfläche einer quadratischen Spitzsäule von 24 cm Höhe beträgt 1440 qcm; es ist a) die Grundkante, b) der Rauminhalt zu berechnen.

30. In ein gerades quadratisches Prisma von 14 cm Grundkante und 24 cm Höhe ist auf jede Grundfläche eine gerade Pyramide so gestellt, daß die Spitzen derselben in der gegenüberliegenden Endfläche liegen. Berechne die Oberflächen und die Schnittfläche der Pyramiden.

31. Der körperliche Inhalt eines regelmäßigen Vierflachs beträgt $486\sqrt{2}$ ccm; wie groß ist die Oberfläche?

32. Wie verhält sich der Rauminhalt eines regelmäßigen Vierflachs zu dem eines regelmäßigen Achtflachs, wenn beide gleiche Kante haben?

33. Ein regelmäßiges Achtflach hat 1590 ccm Rauminhalt; wie lang ist eine Kante?

34. Grundkante und Höhe einer geraden quadratischen Pyramide von 864 ccm Inhalt verhalten sich wie 2 : 3; berechne diese Ausdehnungen.

35. Die Grundkante einer geraden Spitzsäule mit quadratischer Grundfläche mißt 32 cm, die Seitenkante 36 cm; wie groß ist der Rauminhalt?

***36.** Wie groß ist der Rauminhalt einer geraden regelmäßigen vierseitigen Pyramide von 12 cm Höhe und 360 qcm Oberfläche?

***37.** Die Grundfläche einer geraden Pyramide ist ein Quadrat mit 20 cm Seite, der Inhalt eines von der Spitze durch die Ecklinie der Grundfläche gelegten Schnittes $= 300\sqrt{2}$ qcm; wie groß ist der Rauminhalt?

***38.** Es ist der Körperinhalt einer geraden regelmäßigen dreiseitigen Pyramide zu berechnen, wenn der Halbmesser des der Grundfläche eingeschriebenen Kreises $2\sqrt{3}$ cm, eine Seitenfläche das Vierfache der Grundfläche ist.

***39.** Es ist der Rauminhalt einer 18 cm hohen Pyramide zu berechnen, deren Grundfläche ein einem Kreise einbeschriebenes Viereck von bezüglich 62 cm, 51 cm, 38 cm und 23 cm langen Seiten ist.

***40.** Die Ecken eines Würfels von 10 cm Kante sind so abgestumpft, daß jede Schnittebene durch die Mitten dreier anstoßenden Kanten geht; wie groß ist der Inhalt des entstehenden Körpers? (Kubooktaeder.)

***41.** In eine gerade quadratische Spitzsäule von 20 cm Grundkante und 15 cm Höhe ist ein Würfel so gestellt, daß 4 Ecken desselben in der Grundfläche, die 4 anderen in den Seitenkanten liegen; berechne eine Kante des Würfels.

***42.** In einen Würfel von 12 cm Kante ist ein regelmäßiges Achtflach so gestellt, daß die Eckpunkte desselben in die Würfelflächen fallen. Wie groß ist die Oberfläche des Achtflachs?

*43. Ein regelmäßiges Vierflach hat mit einem regelmäßigen Achtflach gleiche Oberfläche; a) wie verhalten sich die Kantenlängen beider Körper? b) Wie verhalten sich die Oberflächen, wenn die Kanten gleich sind?

44. Die Achse eines regelmäßigen Achtflachs mißt 14 cm; wie groß ist die Oberfläche?

45. Die Grundkante einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mißt 10 cm, die Seitenhöhe 24 cm; a) wie groß ist die Oberfläche einer ähnlichen Pyramide von 16 cm Seitenhöhe? b) Wie verhalten sich die Oberflächen?

46. Von einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide von 10 cm Grundkante und 20 cm Seitenhöhe soll durch eine der Grundfläche parallele Schnittebene eine kleine Pyramide so abgeschnitten werden, daß die Oberfläche derselben a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{9}$, c) $\frac{1}{2}$ der Oberfläche der gegebenen Pyramide beträgt. Berechne Grundkante, Seitenhöhe und Oberfläche der abzuschneidenden Pyramide.

*47. Die Grundkanten zweier ähnlichen quadratischen Pyramiden verhalten sich wie 2 : 3, die Oberfläche der ersten beträgt 256 qcm, die Seitenhöhe derselben 10 cm; berechne die Ausdehnungen und die Oberfläche der zweiten.

*48. Die Oberflächen zweier ähnlichen quadratischen Pyramiden betragen 256 qcm und 576 qcm, die Seitenhöhe der ersten mißt 10 cm; berechne die übrigen Ausdehnungen.

*49. Die Grundkanten zweier ähnlichen quadratischen Pyramiden verhalten sich wie 2 : 3, die Summe aus je einer Seitenhöhe beträgt 25 cm, die Summe der Oberflächen = 832 qcm; berechne a) die Ausdehnungen und die Oberflächen, b) die Rauminhalte.

50. Eine gerade regelmäßige sechsseitige Pyramide von 10 cm Grundkante und 24 cm Höhe sei parallel der Grundfläche so durchschnitten, daß die Schnittebene die Höhe halbiert; a) wie groß ist die Oberfläche und der Rauminhalt der Pyramidenspitze? b) Wie verhalten sich Pyramidenspitze und gegebene Pyramide in ihren Oberflächen und Rauminhalten?

*51. Eine regelmäßige vierseitige Pyramide von 50 cm Höhe und 25 cm Grundkante soll durch eine der Grundfläche parallele Schnittebene a) halbiert, b) so geteilt werden, daß die Pyramidenspitze $\frac{1}{4}$ der ganzen Pyramide beträgt; berechne die Grundkante und Höhe der abgeschnittenen Spitze.

*52. Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide von 25 cm Grundkante und 100 cm Höhe soll durch eine der Grundfläche parallele Schnitt=

ebene so geteilt werden, daß sich die Pyramidenspitze zu dem Pyramidenstumpfe wie 3 : 5 verhält; berechne Grundkante und Höhe der abgeschnittenen Pyramide.

53. Die Grundkanten zweier ähnlichen Pyramiden mit quadratischen Grundflächen verhalten sich wie 5 : 8; die Höhe der ersten beträgt 25 cm, die Summe der Inhalte = 9555 ccm; berechne die Ausdehnungen und die Inhalte.

***54.** Die Grundkante einer quadratischen Pyramide beträgt 10 cm, die Höhe 30 cm; durch vier Schnittebenen, die parallel den Seitenflächen gehen, wird eine Pyramide herausgenommen, deren Grundkante 7,5 cm beträgt; welchen Inhalt hat die Hohlpyramide?

***55.** Eine quadratische Pyramide von 15 cm Höhe und 20 cm Grundkante soll durch zwei der Grundfläche parallele Schnitte in drei gleiche Teile geteilt werden; berechne die Höhe der Teile und die Inhalte der Schnittflächen.

***56.** Grundkante und Höhe einer quadratischen Pyramide verhalten sich wie 5 : 6; die Grundkante einer ähnlichen Pyramide ist um 5 cm größer, der Unterschied der Oberflächen beträgt 450 qcm; berechne den Rauminhalt der beiden Pyramiden.

§ 10. Kegel.

Bezeichnung: r = Halbmesser der Grundfläche, h = Höhe, s = Seitenlinie, Mt = Mantelfläche.

1. Der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels ist r, die Höhe h; berechne a) den Rauminhalt, b) die Oberfläche.

2. Der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels ist r, die Seitenlinie s; berechne a) die Oberfläche; b) den körperlichen Inhalt des Kegels.

3. Berechne die Oberfläche eines Kegels, wenn der Halbmesser der Grundfläche und die Seitenhöhe folgende Werte haben: a) 7 cm und 20 cm; b) 10 cm und 25 cm; c) 7,5 m und 17,75 m.

4. Welchen körperlichen Inhalt hat ein Kegel, wenn Halbmesser und Seitenlinie folgende Werte haben: a) 7 cm und 25 cm ($\pi = 3\frac{1}{7}$); b) 20 cm und 29 cm; c) 8 cm und 17 cm?

5. Ein Zelt hat die Gestalt eines Kegels; der Durchmesser der

Grundfläche mißt 10 m, eine Seitenlinie 7,50 m; wieviel qm Leinwand sind dazu erforderlich?

6. Der Umfang eines Kegels mißt a) 44 cm ($\pi = 3\frac{1}{7}$), b) 157 cm, die Seitenhöhe beträgt in beiden Fällen 25 cm; wie groß ist die Oberfläche?

7. Wie verhält sich die Oberfläche eines geraden Kegels zu der einer geraden Rundsäule, wenn beide gleiche Grundflächen und gleiche Seitenlinie haben?

8. Welchen Rauminhalt hat ein Kegel, wenn folgende Werte für den Halbmesser der Grundfläche und für die Höhe gegeben sind: a) 7 cm und 24 cm; b) 10 cm und 36 cm?

9. Der Umfang der Grundfläche eines Kegels beträgt 66 cm, die Höhe 25 cm; wie groß ist der Rauminhalt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

10. Von zwei Kegeln mit gleicher Grundfläche ist der eine doppelt so hoch als der andere; wie verhalten sich ihre Rauminhalte?

11. Von zwei gleichhohen Kegeln ist der Halbmesser des einen a) die Hälfte, b) das Doppelte des Halbmessers des anderen; wie verhalten sich ihre Inhalte?

12. Wie schwer ist ein kegelförmiger Zuckerhut, wenn der Durchmesser der Grundfläche 20 cm, die Höhe 50 cm beträgt und das spezifische Gewicht des Zuckers 1,4 ist?

13. Welchen Wert hat ein kegelförmiger Baumstamm von 20 m Länge, wenn der Durchmesser der Grundfläche 0,80 m mißt und das cbm mit 20 ℳ bezahlt wird?

14. Welchen Inhalt hat ein Kegel, dessen Durchmesser gleich der Höhe gleich a) 20 cm, b) 3,50 m ist?

15. Wie groß ist der Abfall, wenn man aus einem Cylinder von 35 cm Durchmesser und 1,50 m Höhe den größten Kegel herstellt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

16. Berechne a) die Oberfläche, b) den Rauminhalt eines gleichseitigen*) Kegels, dessen Halbmesser r gegeben ist.

17. Welche Oberfläche hat ein gleichseitiger Kegel, wenn der Durchmesser desselben a) 21 cm ($\pi = 3\frac{1}{7}$), b) 50 cm ist? c) Wie verhalten sich Grundfläche und Mantel eines gleichseitigen Kegels?

18. Der Mantel eines Kegels bildet $\frac{1}{3}$ eines Kreises, dessen Halbmesser 9 cm lang ist; berechne die Oberfläche des Kegels.

---

*) Im gleichseitigen Kegel ist die Seitenlinie gleich dem Durchmesser der Grundfläche, der Achsenschnitt ist also ein gleichseitiges Dreieck.

19. Aus einer quadratischen Spitzsäule von 20 cm Grundkante und 20 cm Seitenlinie soll der größte Kegel gewonnen werden; berechne die Oberfläche beider Körper.

20. Die Oberfläche eines geraden Kegels mißt 594 qcm, der Halbmesser der Grundfläche = 7 cm; wie lang ist die Seitenhöhe? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

21. Welche Seitenhöhe hat ein Kegel von 1099 qcm Oberfläche, wenn der Durchmesser der Grundfläche 20 cm mißt?

22. Die Oberfläche eines gleichseitigen Kegels mißt a) 1848 qcm, b) 7392 qcm, c) 1039,5 qcm; wie groß ist der Durchmesser? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

23. Welche Oberfläche hat ein Kegel von 24 cm Höhe und 7 cm Halbmesser? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

24. Der Umfang eines 24 cm hohen Kegels beträgt 62,8 cm; wie groß ist die Oberfläche?

25. Die Grundfläche eines geraden Kegels soll 616 qcm, der Mantel 2200 qcm messen; berechne Halbmesser, Höhe und Seitenlinie. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

26. Eine Petroleumkanne besteht aus einem Cylinder von 10 cm Durchmesser und 12 cm Höhe, einem darauf gesetzten gleichseitigen Kegel und einer kegelförmigen Ausgußröhre von 1,5 cm Durchmesser und 10 cm Seitenhöhe. Wieviel qcm Blech sind dazu verwendet worden?

27. Der Inhalt eines Kegels = 9856 ccm, die Höhe = 48 cm; wie groß ist der Durchmesser? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

28. Berechne die Oberfläche eines Kegels von 1004,8 ccm Inhalt und 8 cm Halbmesser.

29. Wie schwer ist ein Sandsteinkegel von 15 cm Halbmesser und 40 cm Höhe, wenn das spezifische Gewicht des Sandsteins 2,5 ist?

30. Ein gußeiserner Kegel von 25 cm Höhe hat ein Gewicht von 88,500 kg; wie groß ist der Halbmesser der Grundfläche, wenn das spezifische Gewicht des Eisens 7,5 ist?

31. Auf einem Kreise von 10 cm Halbmesser steht ein Kegel und auf dem diesem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Sechseck eine Pyramide; die Höhe beider Körper beträgt 30 cm; wie groß ist der Unterschied der körperlichen Inhalte?

32. Wie groß ist der Abfall, wenn man aus einer quadratischen Spitzsäule von 20 cm Grundkante und 1440 qcm Oberfläche den größten Kegel herstellt?

33. Wie schwer ist ein senkrechter Hohlkegel aus Gußeisen, wenn der äußere Halbmesser 7 cm, der innere 5 cm, die äußere Mantelfläche

550 qcm mißt und die Spitzen der beiden Kegel 6 cm von einander entfernt sind? (Spezifisches Gewicht 7,5.)

34. Der Achsenschnitt eines 48 cm hohen Kegels mißt 672 qcm; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

35. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels ist ein rechtwinkliges Dreieck, der Umfang der Grundfläche mißt 125,6 cm; berechne die Oberfläche.

36. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten bezüglich 5 m und 12 m lang sind, wird a) um die größere, b) um die kleinere Kathete als Achse bewegt; wie groß sind die Oberflächen und Rauminhalte der entstehenden Kegel? c) Wie verhalten sich die Mäntel dieser Kegel?

37. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 17 cm und dessen eine Kathete 8 cm mißt, rotiert um letztere. Berechne a) den Rauminhalt, b) den Mantel des entstehenden Kegels.

38. In einen Kreis von 10 cm Halbmesser ist ein regelmäßiges Sechseck beschrieben; über dem Kreise als Grundfläche ruht ein Kegel von 24 cm Höhe; über dem Sechseck ein Prisma von gleicher Höhe; wie groß ist der Unterschied der Mäntel beider Körper?

39. In welchem Verhältnis steht der Mantel eines gleichseitigen Kegels zu dem eines gleichseitigen Cylinders, wenn beide gleiche Grundfläche haben?

***40.** Ein Dreieck von 7 cm, 15 cm und 20 cm langen Seiten wird um jede der Seiten als Achse bewegt; berechne die Oberflächen der entstehenden Kegel.

41. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel eines abgerollten Kegelmantels, wenn der Halbmesser der Grundfläche 15 cm, der Mantel 1884 qcm mißt?

42. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel des Mantels eines gleichseitigen Kegels?

43. Die Seitenhöhe eines geraden Kegels ist gleich dem Umfange der Grundfläche; wie groß ist der Mittelpunktswinkel des abgerollten Kegelmantels?

***44.** Berechne den Durchmesser eines geraden Kegels von 1534,50 qcm Oberfläche, dessen Seitenlinie 36 cm beträgt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

45. Durchmesser und Seitenhöhe eines Kegels verhalten sich wie 4 : 5, die Oberfläche beträgt 1099 qcm; berechne diese Ausdehnungen.

***46.** Die Seitenlinie eines Kegels von 170,50 qcm Oberfläche ist um 5 cm größer als der Durchmesser; berechne diese Ausdehnungen.

***47.** Grundfläche und Mantel eines geraden Kegels verhalten sich wie 7 : 20, die Summe von Durchmesser und Seitenlinie = 34 cm; berechne die Ausdehnungen und die Oberfläche.

***48.** Wird die Höhe eines Kegels von 12 cm Halbmesser um 4 cm vergrößert, so wächst der Mantel um 75,36 qcm; welche Höhe hat der gegebene Kegel?

49. Aus einem Holzkegel von 20 cm Halbmesser und 60 cm Höhe soll die größte regelmäßige vierseitige Pyramide geschnitten werden; wie groß ist der Abfall?

50. Auf einem Kreise von 20 cm Halbmesser steht ein Kegel von 50 cm Höhe, und auf dem dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Dreieck ein Prisma von derselben Höhe; wie groß ist der Raumunterschied beider Körper?

51. Die Halbmesser zweier Kegel von gleichem Rauminhalt verhalten sich wie 3 : 4; in welchem Verhältnisse stehen die Höhen?

52. Der Halbmesser eines 15 cm hohen Kegels beträgt 20 cm; der eines anderen ebenso hohen 21 cm; es soll ein dritter Kegel von gleicher Höhe hergestellt werden, welcher gleich der Summe der beiden ersten ist; welchen Halbmesser muß dieser haben?

53. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels beträgt 300 qcm, die Grundfläche 314 qcm; berechne den Rauminhalt.

54. Der Achsenschnitt eines geraden Kegels beträgt 420 qcm, die Seitenlinie 37 cm; wie groß ist der Rauminhalt?

55. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 30 cm und 40 cm messen, bewegt sich um die Hypotenuse als Achse; berechne Oberfläche und Rauminhalt des entstehenden Körpers.

56. Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten 8 cm und 15 cm messen, bewegt sich um jede der Katheten als Achse. Wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Rauminhalte der entstehenden Körper?

***57.** Ein Dreieck, dessen Seiten 10 cm, 17 cm und 21 cm messen, wird um die 21 cm lange Seite als Achse gedreht; welchen Inhalt hat der entstehende Doppelkegel?

***58.** Ein Dreieck von 7 cm, 15 cm und 20 cm langen Seiten wird um die 7 cm lange Seite als Achse gedreht; wie groß ist der Inhalt des entstehenden Hohlkegels?

59. Ein Quadrat mit der Seite a rotiert um die Diagonale. Berechne Oberfläche und Inhalt des Rotationskörpers.

60. Einem Kreise mit dem Halbmesser r ist ein gleichseitiges Dreieck umgeschrieben, das um seine Höhe rotiert. Berechne den Rauminhalt des Rotationskörpers.

***61.** Die Oberfläche eines Kegels beträgt 2816 qcm, die Seitenlinie 50 cm; wie groß ist der Rauminhalt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

62. In einem Kegel von 1413 ccm Inhalt verhalten sich Halbmesser und Höhe wie 5 : 16; berechne diese Ausdehnungen.

63. Halbmesser und Höhe eines Kegels von 1130,40 qcm Oberfläche verhalten sich wie 5 : 12; berechne den Rauminhalt.

64. Durchmesser und Höhe eines Kegels von 1570 ccm Inhalt verhalten sich wie 4 : 3; berechne diese.

***65.** Die Seitenlinie eines geraden Kegels sei 26 cm, die Summe von Halbmesser und Höhe = 34 cm; berechne Oberfläche und Inhalt.

***66.** Ein gerader Kegel hat eine Oberfläche von 704 qcm, die Seitenhöhe beträgt 11 cm mehr als der Durchmesser; berechne den Rauminhalt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***67.** Der körperliche Inhalt eines Kegels beträgt 1004,8 ccm, die Oberfläche 628 qcm; berechne Durchmesser und Höhe.

***68.** Die Maßzahlen für den körperlichen Inhalt und den Mantel eines Kegels sind gleich; in welchem Verhältnis stehen Halbmesser und Höhe?

***69.** Wie verhält sich der Rauminhalt eines gleichseitigen Kegels zu dem einer gleichseitigen Walze, wenn beide Körper gleiche Oberflächen haben?

***70.** Wie verhalten sich die Oberflächen eines gleichseitigen Kegels und eines gleichseitigen Cylinders, wenn beide gleichen Rauminhalt haben?

71. In einem schiefen Kegel, dessen Spitze senkrecht über dem Durchmesser liegt, ist die längste Seitenlinie 20 cm, die Achse 13 cm, die Höhe 12 cm; berechne den körperlichen Inhalt.

72. Der in einer Ebene aufgerollte Mantel eines Kegels giebt einen Kreisausschnitt, dessen Halbmesser 24 cm, dessen Centriwinkel 90^0 ist. Berechne den Rauminhalt des Kegels.

---

73. Der Umfang eines Kegels mißt 44 cm, die Seitenlinie 20 cm, der Umfang eines ähnlichen Kegels 66 cm; a) berechne die Oberflächen beider Kegel. b) Wie verhalten sich die Oberflächen? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

74. Die Oberflächen zweier ähnlichen Kegel verhalten sich wie 4 : 9, der Halbmesser des kleineren beträgt 10 cm, die Seitenlinie des größeren 37,5 cm; berechne die Oberflächen.

***75.** Von einem geraden Kegel von 10 cm Halbmesser und 15 cm Seitenlinie soll ein kleiner Kegel durch eine der Grundfläche parallele

Schnittebene so abgeschnitten werden, daß die Oberfläche der Spitze a) $\frac{1}{4}$, b) $\frac{1}{3}$, c) $\frac{1}{2}$ der des ganzen Kegels ist. Berechne Halbmesser und Seitenlinie der Spitze.

***76.** Der Unterschied der Halbmesser zweier ähnlichen Kegel beträgt 5 cm, der Unterschied der Oberflächen 981,25 qcm, die Seitenlinie des kleineren 15 cm; berechne die Halbmesser und die Seitenlinien.

***77.** Die Oberfläche eines Kegels mißt 594 qcm; die Seitenlinie ist um 13 cm größer als der Halbmesser, die Summe von Halbmesser und Seitenlinie eines ähnlichen Kegels = 54 cm; berechne die Ausdehnungen und die Oberfläche des zweiten Kegels.

***78.** Die Halbmesser zweier ähnlichen Kegel verhalten sich wie 2 : 3, die Summe der Seitenlinien = 60 cm, der Unterschied der Oberflächen = 3454 qcm. Berechne Halbmesser und Seitenlinie eines dritten ähnlichen Kegels, dessen Oberfläche gleich der Summe der Oberflächen jener ist.

79. Durchmesser und Höhe eines Kegels messen bezüglich 20 cm und 50 cm, der Halbmesser eines ähnlichen Kegels mißt 15 cm; berechne die Inhalte beider und bestimme das Verhältnis derselben.

80. Ein Kegel von 5 cm Halbmesser und 12 cm Höhe wird durch eine der Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, daß die Höhe der abgeschnittenen Spitze a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{4}$ der Gesamthöhe beträgt. Berechne den körperlichen Inhalt der Spitze.

81. Von einem Kegel mit dem Halbmesser r und der Höhe h wird durch einen parallelen Schnitt zur Grundfläche a) $\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{9}$ desselben abgeschnitten. Berechne Halbmesser und Höhe des abgeschnittenen Kegels.

***82.** Ein Zuckerhut von 28 cm Durchmesser und 60 cm Höhe soll durch eine der Grundfläche parallele Ebene halbiert werden; in welcher Höhe von oben muß dies geschehen, und wie schwer ist jeder Teil, wenn das spezifische Gewicht des Zuckers 1,5 ist? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***83.** Aus einem Kegel von 20 cm Halbmesser und 45 cm Höhe soll ein demselben ähnlicher so herausgeschnitten werden, daß die gleichliegenden Seitenlinien parallel sind und der Inhalt des herausgeschnittenen Kegels $\frac{1}{4}$ des ganzen ist. Wie groß ist die Grundfläche des Restes?

***84.** Ein Kegel von 10 cm Halbmesser und 36 cm Höhe soll durch parallele Schnittebenen zur Grundfläche in drei gleiche Teile geteilt werden; a) welche Höhe haben die einzelnen Teile? b) Welchen Rauminhalt hat jeder Teil?

***85.** Ein hölzerner Kegel hat 20 cm Halbmesser und 60 cm Höhe. a) Wie tief sinkt derselbe, die Spitze lotrecht nach abwärts gerichtet, im

Wasser ein, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,75 ist? b) Welches ist der Inhalt der im Wasser stehenden Kegelspitze?

***86.** Aus einem Kegel von 3140 ccm Inhalt, in welchem sich Halbmesser und Höhe wie 1 : 3 verhalten, ist ein Kegel, welcher dieselbe Achse und bezüglich parallele Seitenlinien hat, herausgenommen worden; die Breite des Kreisringes der Grundfläche mißt 2,5 cm; welchen Rauminhalt hat der Hohlkegel?

***87.** Ein gerader Kegel hat einen Halbmesser von 10 cm und eine Höhe von 15 cm; der Rauminhalt desselben wird durch die Grundfläche eines andern geraden Kegels, der mit dem ersten die Achse gemeinsam hat und dessen Spitze im Mittelpunkte der Grundfläche des ersten liegt, halbiert. a) Welchen Inhalt hat der zweite Kegel? b) In welchem Verhältnis steht der Mantel des abgeschnittenen zu dem des gegebenen Kegels?

88. Wie groß ist der Halbmesser eines 13 cm hohen Kegels, der mit einem Würfel von 14,25 cm Kante gleichen Rauminhalt hat?

89. In einem Würfel mit der Kante a ist ein Kegel eingeschrieben. Wie groß ist a) der Halbmesser, b) die Höhe, c) die Seitenlinie und d) der Rauminhalt des Kegels?

90. Aus einem quadratischen Prisma, dessen Grundkante 48,2 cm und dessen Höhe 50 cm beträgt, soll ein 75 cm hoher Kegel gegossen werden. Berechne den Halbmesser der Grundfläche des Kegels.

---

§ 11. Abgestumpfte Pyramide.

1. Die Grundflächen einer abgestumpften Spitzsäule sind Quadrate von 15 cm und 10 cm langen Seiten, die Seitenhöhe mißt 12 cm; berechne a) jede der beiden Grundflächen, b) die Summe der Seitenflächen, c) die Oberfläche.

2. Die Grundfläche einer geraden Spitzsäule bildet ein Quadrat mit 12 cm langen Seiten, die Seitenhöhe beträgt 15 cm. Diese Spitzsäule wird parallel der Grundfläche a) in halber Höhe, b) so durchschnitten, daß die Seitenhöhe der Ergänzungspyramide $\frac{1}{3}$ der gegebenen Seitenhöhe ist. Berechne die Oberfläche des entstehenden Stumpfes und die der Ergänzungspyramide.

3. Berechne Körper- und Seitenhöhe einer quadratischen Ergänzungspyramide, wenn die Seitenhöhe der ganzen Pyramide 26 cm, die Endkanten des Stumpfes 20 cm und 8 cm messen.

4. Die Seitenhöhe eines geraden abgestumpften Spitzkants = 12 cm, zwei gleichliegende Endkanten messen 24 cm und 16 cm; wie groß ist die Seitenhöhe der Spitze?

5. Ein gerades regelmäßiges vierseitiges Spitzkant von 24 cm Höhe und 20 cm Grundkante wird durch eine der Grundfläche parallele Ebene so geschnitten, daß die Seitenhöhe der Ergänzungsspitze 6,5 cm mißt; berechne die Oberfläche des Stumpfes.

6. Die Grundfläche einer geraden abgestumpften Spitzsäule ist ein Rechteck von 20 cm und 14 cm langen Seiten, die Höhe des Stumpfes mißt 12 cm, die größte Endkante = 10 cm; wie groß ist die Oberfläche?

7. Wie groß ist die Oberfläche eines regelmäßigen sechsseitigen abgestumpften Spitzkants von 3 m Seitenhöhe, wenn die parallelen Grundkanten 2 m und 1,50 m messen?

8. Wie groß ist die Oberfläche einer regelmäßigen fünfseitigen abgestumpften Spitzsäule von 10 cm Seitenhöhe, wenn die Endkanten bezüglich 10 cm und 15 cm messen?

9. a) Berechne den körperlichen Inhalt eines Pyramidenstumpfes mit quadratischen Endflächen, wenn die Grundkante 20 cm, die Endkante 15 cm, die Höhe 6 cm beträgt. Welchen Rauminhalt erhält man für diesen Stumpf, wenn man ihn berechnet als ein Prisma von derselben Höhe, welches b) das arithmetische Mittel der beiden Endflächen, c) die mittlere Schnittfläche als Grundfläche hat?

10. Welchen körperlichen Inhalt hat ein vierkantiger 8 m langer Balken mit quadratischen Endflächen von 40 cm und 30 cm Seitenlänge? (Nach den Bestimmungen der vorigen Aufgabe in dreifacher Weise zu berechnen.)

11. Berechne den Rauminhalt eines behauenen Baumstammes von 7,50 m Länge, wenn die eine Grundfläche ein Rechteck von 50 cm und 40 cm, die andere ein solches von 25 cm und 20 cm Seiten ist? (3 Antworten.)

12. Ein Behälter hat die Form eines abgestumpften Spitzkants, dessen Endflächen Rechtecke sind. Die Grundkanten messen 50 cm und 40 cm, die Endkanten 40 cm und 32 cm, während die Höhe 15 cm mißt. Wieviel l faßt derselbe?

13. Es soll ein 2,50 m hoher Damm aufgeführt werden, dessen Endflächen Rechtecke sind. Die Grundkanten messen 20 m und 6 m, die Endkanten 18 m und 5 m; wieviel cbm Erde enthält derselbe?

14. Welchen Inhalt hat ein 1,20 m hoher Steinhaufen, wenn die Grundfläche ein Rechteck von 3 m und $\frac{5}{6}$ m, die Endfläche ein solches von 2 m und $\frac{2}{3}$ m langen Seiten ist?

15. Wie schwer ist ein 24 cm hoher Obelisk aus Sandstein, dessen Endflächen Rechtecke sind, wenn die Grundkanten 40 cm und 30 cm, die Endkanten 30 cm und 20 cm messen? (Spezifisches Gewicht 2,5.) (Drei Berechnungsweisen.)

16. Eine regelmäßige sechsseitige Spitzsäule von 1,80 m Höhe und 40 cm Grundkante ist durch eine der Grundfläche parallele Ebene so geteilt, daß die Seite der Schnittfläche 30 cm mißt; welchen Rauminhalt hat der Stumpf?

17. Die Höhe eines quadratischen Pyramidenstumpfes beträgt 20 cm, die Höhe der Ergänzungspyramide 50 cm, die größere Grundkante des Stumpfes 35 cm; berechne den Rauminhalt desselben.

18. Der Inhalt eines quadratischen abgestumpften Spitzkants beträgt 1464 ccm, die Endkanten messen 10 cm und 8 cm; wie hoch ist es?

19. Die Seitenkante eines regelmäßigen vierseitigen Pyramidenstumpfes sei 5 cm, die Seitenhöhe 4 cm, die größere Grundkante 10 cm; wie groß ist die Oberfläche?

***20.** Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Dreieck mit 13 cm, 14 cm und 15 cm langen Seiten; die Höhe beträgt 25 cm. Parallel der Grundfläche wird eine Schnittfläche so gelegt, daß die Höhe der Ergänzungspyramide 15 cm beträgt. Berechne die Endflächen des Stumpfes.

21. Grundkante, Endkante und Seitenhöhe eines quadratischen Pyramidenstumpfes verhalten sich wie 6 : 4 : 5; die Oberfläche beträgt 608 qcm; berechne die Ausdehnungen.

***22.** Die Summe zweier Endkanten eines quadratischen Pyramidenstumpfes von 1280 qcm Oberfläche beträgt 30 cm, die Seitenhöhe 13 cm; berechne die Endkanten und die Höhe des Stumpfes.

***23.** Die Oberfläche eines quadratischen Pyramidenstumpfes von 15 cm Seitenhöhe beträgt 855 qcm, der Mantel verhält sich zur Summe der Endflächen wie 14 : 5; berechne die Ausdehnungen.

***24.** Ein quadratischer Pyramidenstumpf von 900 qcm Mantelfläche, dessen Endkanten 20 cm und 10 cm messen, soll durch eine der Grundfläche parallele Ebene so geschnitten werden, daß der Mantel halbiert wird. Berechne eine Seite der Schnittebene und den Abstand derselben von einer Grundkante.

---

25. Der Inhalt eines vierseitigen abgestumpften Spitzkants mit quadratischen Endflächen beträgt 1520 ccm, die Höhe mißt 15 cm; wie lang sind die Endkanten, wenn sie sich wie 2 : 3 verhalten?

*26. Die Grundfläche eines 1,50 m hohen abgestumpften Spitzkants bildet ein Dreieck von 28 cm, 60 cm und 80 cm langen Seiten, die Seiten der Endfläche messen 7 cm, 15 cm und 20 cm; wie groß ist der Rauminhalt?

*27. Ein Pyramidenstumpf mit quadratischen Endflächen hat 1520 ccm Inhalt und 15 cm Höhe; wie groß ist die Endkante, wenn die Grundkante 12 cm mißt?

28. Welchen Inhalt hat ein Keil von 30 cm Höhe (Abstand der Schärfe von der Grundfläche) und 7 cm Schärfe, wenn der Rücken desselben ein Rechteck von 16 cm und 10 cm langen Seiten ist und die Schärfe parallel a) der Längs-, b) der Breitenseite geht?

29. Ein Holzkeil hat eine Höhe von 30 cm, die Schneide = 12 cm, der Rücken bildet ein Rechteck von 15 cm und 6 cm langen Seiten. Wie schwer ist er, wenn das spezifische Gewicht 0,9 beträgt und die Schneide a) der langen, b) der kurzen Rückenseite parallel geht?

30. Ein Walmdach, d. h. ein Dach, dessen 4 Seitenflächen schräg liegen, hat eine Höhe von 6 m, während der First 10 m lang ist; die Grundfläche ist ein Rechteck von 12 m und 8 m langen Seiten; berechne den Rauminhalt desselben.

31. Die Höhe eines geraden sechsseitigen Pyramidenstumpfes verhält sich zur Höhe der Ergänzungspyramide wie 2 : 7, die Grundkante mißt 45 cm, die Seitenhöhe der Ergänzungspyramide 70 cm; berechne den Inhalt des Stumpfes.

32. Berechne den Rauminhalt einer vollständigen Spitzsäule, wenn die Grundfläche 64 qcm, eine Schnittfläche 36 qcm und der dadurch abgeschnittene Stumpf 740 ccm Inhalt hat.

33. Die Summe der Grundflächen einer abgestumpften Pyramide ist s, die Höhe h und der Rauminhalt v. Berechne a) die Grundflächen, b) den Rauminhalt der vervollständigten Pyramide.

*34. In einer abgestumpften Spitzsäule von 6 cm Höhe ist die Summe der Endflächen 61 qcm, der körperliche Inhalt 182 ccm; berechne die Endflächen und den Inhalt der vervollständigten Spitzsäule.

35. Von einer abgestumpften Pyramide sind die Grundflächen G und g und der Rauminhalt r gegeben. Berechne die Höhe h derselben.

*36. Der Inhalt eines 15 cm hohen Pyramidenstumpfes beträgt 740 ccm, der Unterschied der Endflächen 28 qcm; berechne diese.

*37. Eine abgestumpfte quadratische Spitzsäule aus Sandstein wiegt 2187,500 kg, ihre Höhe beträgt 1,50 m, während sich die Grundkanten um 50 cm unterscheiden; wie lang sind diese, wenn das spezifische Gewicht des Sandsteins 2,5 ist?

***38.** Die Endkanten eines quadratischen abgestumpften Spitzkants von 12 cm Höhe messen 24 cm und 16 cm; durch eine in halber Höhe gelegte parallele Schnittebene wird der Stumpf geteilt; berechne den Inhalt und das Verhältnis dieser Teile.

***39.** Die Oberfläche eines quadratischen abgestumpften Spitzkants von 15 cm Seitenhöhe beträgt 2304 qcm, der Mantel verhält sich zur Summe der Endflächen wie 35 : 29; wie groß ist der Rauminhalt?

***40.** Ein quadratischer Pyramidenstumpf von 36 cm Höhe, dessen Endkanten bezüglich 50 cm und 20 cm messen, soll durch eine der Grundfläche parallele Ebene halbiert werden. Wie hoch sind die einzelnen Teile, und wie lang ist eine Seite der Schnittebene?

***41.** Von einem quadratischen Pyramidenstumpfe von 60 cm Höhe, dessen Grundkanten bezüglich 50 cm und 30 cm messen, sollen 49000 ccm durch eine den Grundflächen parallele Schnittfläche abgeschnitten werden. In welcher Höhe von oben muß dies geschehen, und wie lang ist eine Seite der Schnittfläche?

***42.** Ein quadratischer Pyramidenstumpf von 30 cm Grundkante, 20 cm Endkante und 15 cm Höhe soll durch eine den Grundflächen parallele Schnittebene von der kleineren Grundfläche aus im Verhältnis von 2 : 3 geteilt werden; wie lang ist eine Seite der Schnittebene?

43. Die Grundflächen einer geraden abgestumpften Pyramide sind Quadrate mit den Seiten a und b; die Summe der Seitenflächen ist gleich der Summe der Grundflächen. Berechne die Höhe h der abgestumpften Pyramide.

§ 12. Abgestumpfte Kegel.

1. Die Umringe eines abgestumpften Kegels von 15 cm Seitenlinie messen 36 cm und 24 cm; wie groß ist der Mantel?

2. Berechne den Mantel und die Oberfläche eines abgestumpften Kegels, wenn die Halbmesser der Grundflächen R und r und die Seitenlinie s gegeben sind ($R = 50$ cm, $r = 20$ cm, $s = 26$ cm).

3. Eine an beiden Enden offene Blechröhre hat die Gestalt eines abgestumpften Kegels von 75 cm Seitenlänge, die untere Weite mißt 20 cm, die obere 5 cm. Wieviel qcm Blech sind dazu erforderlich?

4. Ein Becher in Form eines abgestumpften Kegels ist inwendig zu vergolden. Derselbe ist oben 14 cm, unten 7 cm weit, während die Seitenlinie 15 cm mißt. Wie teuer kommt die Vergoldung, wenn 1 qcm mit 2,5 Pf bezahlt wird? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

5. Der Durchmesser eines Kegels mißt 21 cm, die Seitenlinie 18 cm; parallel der Grundfläche wird eine Schnittebene so gelegt, daß die Seitenlinie des Ergänzungskegels a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{2}{3}$ der vollständigen Seitenlinie ist. Berechne die Schnittfläche und die Oberfläche der entstehenden Körper. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

6. Der Halbmesser eines Kegels beträgt 7 cm, die Höhe 24 cm; berechne die Seitenlinie des Kegelstumpfes und den Halbmesser der Schnittebene, wenn diese so gelegt wird, daß die Höhe des Ergänzungskegels a) 16 cm, b) 18 cm mißt.

7. In welchem Verhältnis stehen Grundfläche und Schnittfläche eines Kegels von 15 cm Höhe, wenn die Höhe des abgeschnittenen Kegels 10 cm mißt?

8. Die Halbmesser eines Kegelstumpfes messen 14 cm und 10,5 cm; die Höhe des vollständigen Kegels = 48 cm; berechne die Seitenhöhe und die Oberfläche des Kegelstumpfes. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

9. Die Halbmesser der Grundkreise eines abgestumpften Kegels messen 35 cm und 14 cm, die Höhe 20 cm; berechne die Seitenhöhe und die Oberfläche des Kegelstumpfes. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

10. Die Durchmesser der Grundkreise eines Kegelstumpfes messen 28 cm und 21 cm, der Mantel = 770 qcm; wie groß ist die Seitenhöhe? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

11. Ein Kegel, dessen Halbmesser der Grundfläche = 10 cm ist, wird durch eine derselben parallele Ebene so geschnitten, daß die Höhe des Ergänzungskegels zu der des Stumpfes sich wie 3 : 2 verhält; wie groß ist die Schnittfläche?

12. Ein Baumstamm in Form eines abgestumpften Kegels hat an dem einen Ende einen Durchmesser von 80 cm, an dem andern von 60 cm, die Länge beträgt 3 m. Wieviel cbm Holz enthält derselbe, wenn man ihn berechnet als Walze von derselben Höhe, deren Grundfläche a) gleich der halben Summe der beiden Endflächen, b) gleich der mittleren Durchschnittsfläche ist? c) Berechne die Höhe und den körperlichen Inhalt des vervollständigten Kegels und daraus und aus dem Inhalt des Ergänzungskegels den Inhalt des Stumpfes. — Welche Antwort ist genau? Welche kommt der richtigen am nächsten? Wie kann man aus

den Antworten der beiden ungenauen Berechnungen die genaue Antwort erhalten?

13. Berechne auf dieselbe Weise den Rauminhalt eines Baumstammes von 10 m Länge, dessen Durchmesser 1 m und 0,30 m lang sind.

14. Ein in der Elbe gefundener riesiger Eichenstamm, ein Zeuge der Urwälder Deutschlands, hatte eine Länge von 7,50 m, während (nach Entfernung der Rinde) der Umfang des einen Endes 9,42 m, der des andern 7,85 m zeigte. Ein fast zu gleicher Zeit in der Rhone gefundener Stamm hatte eine Länge von 20 m, während die Umfänge 8,80 m und 2,20 m betrugen. Berechne Rauminhalt und Gewicht dieser Stämme. (Spezifisches Gewicht 1,1.)

15. Ein kreisrunder Bottich von 2 m Tiefe hat unten eine Weite von 4 m, oben von 5 m; wieviel hl faßt er?

16. Ein Hügel in Form eines abgestumpften Kegels hat unten einen Umfang von 56,52 m, oben von 31,40 m, die Seitenlinie mißt 8,50 m; wieviel Wagenladungen sind notwendig, um den Hügel fortzuschaffen, wenn jede Fuhre durchschnittlich $\frac{3}{4}$ cbm nimmt?

17. Ein Wassereimer hat unten eine Weite von 21 cm, oben von 35 cm, die Seitenlinie mißt 25 cm; wie groß ist das Gewicht des den Eimer füllenden Wassers? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

18. Ein Pokal in Form eines abgestumpften Kegels enthält 5,39 l; die Halbmesser der Grundflächen messen 14 cm und 7 cm; wie groß ist die Höhe? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

19. Ein abgestumpfter Kegel von 36 cm Höhe und bezüglich 42 cm und 28 cm Durchmesser ist so ausgehöhlt, daß die Wand überall gleich dick ist. Berechne den Rauminhalt des hohlen Stumpfes, wenn der größere Durchmesser des Hohlraumes 35 cm mißt. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

20. Der Unterbau einer Windmühle hat die Gestalt eines hohlen abgestumpften Kegels von 6 m Höhe. Der äußere Umfang mißt unten 31,4 m, oben 23,55 m, der innere unten 23,55 m, oben 18,84 m; welchen Inhalt hat das Mauerwerk?

21. Aus einem quadratischen Pyramidenstumpfe von 30 cm Höhe, 50 cm Grundkante und 40 cm Endkante soll der größte Kegelstumpf hergestellt werden; wie groß ist der Abfall?

22. Aus einem Stamme von 1,5 m Länge, in welchem das eine Ende einen Durchmesser von 1 m hat, während das andere 80 cm dick ist, soll die größte quadratische Säule geschlagen werden; wie groß ist der Abfall?

23. Aus einem geraden Kegelstumpfe von 45 cm Höhe soll der größte Pyramidenstumpf mit quadratischen Endflächen herausgeschnitten werden; a) wie groß ist der Abfall, wenn die Halbmesser des Kegelstumpfes 30 cm und 20 cm messen? b) Wie groß ist der Abfall, wenn die Endflächen des herzustellenden Stumpfes regelmäßige Sechsecke sind?

24. In der unteren Grundfläche eines Würfels von 30 cm Seite ist ein Kreis beschrieben und auf demselben ein gerader Kegel errichtet, dessen Höhe fünfmal so groß ist als der Halbmesser der Grundfläche. Wie groß ist der Kegelstumpf, der zwischen den Grundflächen des Würfels liegt?

25. Der Mantel eines Kegelstumpfes beträgt 612,3 qcm, die Seitenlinie 13 cm, die Höhe 12 cm; berechne den körperlichen Inhalt.

26. Es ist der Mantel eines geraden Kegelstumpfes zu berechnen, dessen Halbmesser bezüglich 15 cm und 10 cm lang sind; der Neigungswinkel der Seitenlinie gegen die Grundfläche beträgt 45^0.

27. Die Halbmesser eines Kegelstumpfes messen 30 cm und 20 cm, der Neigungswinkel der Seitenlinie gegen die Grundfläche a) 60^0, b) 30^0; wie groß ist die Oberfläche?

28. Die Durchmesser eines Kegelstumpfes verhalten sich wie 3 : 4, die Summe der Grundflächen beträgt $962\frac{1}{2}$ qcm, der Mantel mißt 770 qcm; berechne die Durchmesser und die Seitenlinie. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

29. Die Durchmesser der Grundkreise und die Seitenlinie eines Kegelstumpfes von 3061,5 qcm Oberfläche verhalten sich wie 3 : 4 : 1; berechne diese Ausdehnungen.

30. Die Durchmesser eines Kegelstumpfes messen 30 cm und 20 cm; wie groß muß die Seitenlinie sein, wenn der Mantel gleich der Summe der Grundflächen ist?

***31.** Die Oberfläche eines Kegelstumpfes von 8 cm Seite beträgt 1298 qcm, der Mantel 528 qcm; berechne die Halbmesser. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***32.** Die Durchmesser eines Kegelstumpfes von 1732,50 qcm Oberfläche haben einen Unterschied von 7 cm, die Seitenlinie mißt 10 cm; berechne die Ausdehnungen. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***33.** Die Halbmesser eines abgestumpften Kegels sind 15 cm und 10 cm, die Höhe = 8 cm. In welchem Abstande von der Grundfläche muß dieser Kegel parallel der Grundfläche geschnitten werden, damit die Schnittfigur dem arithmetischen Mittel der Endflächen gleich sei, und wie groß ist der Halbmesser der Schnittfläche?

***34.** In einem geraden abgestumpften Kegel stehen zwei vollständige Kegel, so daß die Grundfläche eines jeden Kegels eine der Grundflächen des Kegelstumpfes und die Spitze der Mittelpunkt der andern Grundfläche ist. Wie groß ist der Halbmesser des Kreises, in welchem die beiden Kegel einander schneiden, wenn die Halbmesser des Kegelstumpfes 30 cm und 20 cm messen?

***35.** Ein marmorner Kegelstumpf ist 29,045 kg schwer; die Seitenlinie desselben mißt 13 cm, der Unterschied der Halbmesser = 5 cm; berechne die Halbmesser. (Spezifisches Gewicht 2,5.)

***36.** Die Oberfläche eines Kegelstumpfes sei 2041 qcm, das Verhältnis der Halbmesser = 3 : 2, die Seitenlinie = 13 cm; berechne die Halbmesser und den Rauminhalt.

***37.** Der Mantel eines gleichseitigen Kegelstumpfes = 1413 qcm, die Höhe = $5\sqrt{3}$ cm; wie groß ist der Rauminhalt?

38. Der Inhalt eines Kegelstumpfes = 14915 ccm, die Halbmesser und die Höhe verhalten sich wie 3 : 2 : 6; berechne diese Ausdehnungen.

***39.** Der Rauminhalt eines Kegelstumpfes beträgt 2198 ccm, die Höhe 12 cm, der Unterschied der Halbmesser = 5 cm; berechne die Halbmesser und die Oberfläche.

***40.** In einem Kegelstumpfe von 18 cm Höhe und 8949 ccm Inhalt ist die Summe der Halbmesser 25 cm; berechne diese.

***41.** Der körperliche Inhalt eines geraden Kegelstumpfes sei 9482,5 ccm, der Unterschied der Halbmesser = 8 cm, der Unterschied zwischen Seitenlinie und Höhe = 2 cm; berechne diese Ausdehnungen.

***42.** Ein gerader Kegelstumpf ist zweimal so groß als der auf der kleinsten Grundfläche stehende Cylinder von derselben Höhe; wie verhalten sich die Halbmesser der beiden Endflächen?

***43.** Aus einem geraden Cylinder, dessen Halbmesser der Grundfläche 20 cm und dessen Höhe 60 cm beträgt, soll ein Kegelstumpf von gleicher Höhe so herausgeschnitten werden, daß die eine Grundfläche gleich der Grundfläche des Cylinders, die andere gleich der Hälfte derselben ist. Wie groß ist der Rauminhalt des übrig bleibenden Körpers?

***44.** Aus einem geraden Cylinder von 45 cm Höhe und 20 cm Halbmesser soll ein gerader Kegelstumpf gleich der Hälfte des Cylinders so herausgenommen werden, daß er mit dem Cylinder die Höhe und eine Grundfläche gemeinsam hat; berechne den Halbmesser der anderen Endfläche und den Rauminhalt des Stumpfes.

***45.** Ein Cylinder von 24 cm Höhe hat einen Halbmesser von 5 cm;

ein Kegelstumpf von doppelter Höhe, dessen eine Grundfläche der des Cylinders gleich ist, soll gleichen Rauminhalt mit dem Cylinder haben; wie groß ist der Halbmesser der andern Grundfläche und der Rauminhalt des Stumpfes?

*46. Ein Kegelstumpf von 24 cm Höhe, dessen Halbmesser der Grundfläche 15 cm und 10 cm messen, soll durch eine den Endflächen parallele Ebene halbiert werden; berechne den Halbmesser der Schnittfläche und die Höhe der einzelnen Teile.

*47. Von einem 24 cm hohen Kegelstumpf, dessen Halbmesser der Endflächen 15 cm und 10 cm messen, sind durch eine den Endflächen parallele Schnittebene 5966 ccm abzuschneiden; berechne den Halbmesser der Schnittfläche und die Höhe der einzelnen Teile.

*48. Ein 15 cm hoher Kegelstumpf, dessen Halbmesser 25 cm und 20 cm messen, soll im Verhältnis von 1 : 3 geteilt werden, so daß der größere Teil an der größeren Grundfläche liegt; wie groß ist der Halbmesser der Schnittfläche?

---

49. Wieviel l enthält annähernd ein Faß von 1,20 m Länge, wenn die Bodenweite 56 cm, die Spundweite 70 cm beträgt? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

50. Berechne den Inhalt eines Fasses von 120 cm Länge, 70 cm Bodenweite, 84 cm Spundweite. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

51. Das „Heidelberger“ Faß hat 9,5 m Länge, 6,5 m Spund- und 5 m Bodenweite; wieviel hl kann es aufnehmen?

52. Ein Faß von 1 m Spund- und 80 cm Bodenweite soll 8 hl fassen; wie lang muß es werden?

---

§ 13. Die Kugel.

1. Der Halbmesser einer Kugel ist r; berechne a) die Oberfläche, b) den Rauminhalt. [a) r = 7 cm ($\pi = 3\frac{1}{7}$); b) r = 10.]

2. Wie groß ist eine Kugel von a) 20 cm, b) 30 cm Durchmesser?

3. Berechne a) die Oberfläche, b) den Rauminhalt einer Kugel, entstanden durch Umdrehung eines Halbkreises um den 50 cm langen Durchmesser.

4. Die Halbmesser zweier Kugeln messen R und r; berechne die Oberflächen und das Verhältnis der Oberflächen. (R = 21; r = 14; $\pi = 3\frac{1}{7}$.)

5. Der Umfang eines Globus beträgt U; wie groß ist die Oberfläche desselben? ($U = 1,57.$)

6. Die Umfänge zweier Kugeln messen bezüglich 62,8 cm und 31,4 cm; berechne die Oberflächen und bestimme das Verhältnis der Umfänge und Oberflächen.

7. Der Halbmesser des Mondes mißt 1740 km, der der Erde 6370 km; a) wie groß ist die Oberfläche jedes Körpers? b) Wie groß ist der Rauminhalt der Erde?

8. Die Oberflächen zweier Kugeln messen bezüglich 1256 qcm und 5024 qcm; wie groß sind die Halbmesser?

9. Wie groß müßte der Halbmesser derjenigen Kugel sein, deren Oberfläche a) gleich der Größe des Deutschen Reiches = 540 000 qkm, b) gleich der des gesamten russischen Reiches = 21 250 000 qkm ist?

10. Bestimme durch möglichst kleine Zahlen das Verhältnis der Oberfläche des Mondes zu der der Erde nach den in Aufgabe 7 gegebenen Bestimmungen.

11. a) Wieviel Kupferplatten zu 1,5 qm werden zur Bedachung einer halbkugelförmigen Kuppel von 12,5 m Durchmesser gebraucht, wenn man $8\frac{1}{3}\frac{0}{0}$ (des Flächeninhalts) mehr rechnen muß? b) Wie teuer ist das dazu nötige Kupfer, wenn 1 qm mit 15 ℳ bezahlt wird?

12. Der Umfang einer Kugel ist um 60 cm größer als der Durchmesser; wie groß ist die Oberfläche? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

13. Ein Luftballon von 10 m Durchmesser hat eine Seidenhülle; wie schwer ist diese, wenn 1 qm 175 g wiegt?

14. Um eine Kugel mit dem Durchmesser d ist ein gleichseitiger Cylinder gelegt. a) Berechne die Oberfläche der Kugel und den Mantel des Cylinders. b) Wie verhalten sich beide? Wie verhalten sich c) die Oberflächen, d) die Rauminhalte der Körper?

15. Wie groß ist die Begrenzungsfläche a) einer Halbkugel, b) einer Viertelkugel, entstanden aus einer Kugel von 25 cm Halbmesser? c) Wie verhalten sich die Begrenzungsflächen dieser drei Körper?

16. Durch eine Kugel von 15 cm Halbmesser wird 12 cm vom Mittelpunkte entfernt eine Schnittebene gelegt; berechne den Halbmesser und den Inhalt dieser Ebene.

17. Durch eine Kugel von 25 cm Halbmesser ist eine Schnittebene so gelegt, daß die Höhe des einen Kugelabschnitts 5 cm mißt; wie groß ist die Schnittfläche?

18. Die Schnittfläche einer Kugel von 25 cm Halbmesser soll

154 qcm Fläche haben; in welcher Entfernung vom Mittelpunkte ist sie zu legen? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

---

19. Der Umfang eines Billardballes mißt 31,4 cm; berechne den Rauminhalt.

***20.** Berechne die Oberfläche und den Rauminhalt einer Kugel, entstanden durch Umdrehung eines Halbkreises um den 20 m langen Durchmesser.

***21.** Ein halbkugelförmiges Gefäß hat einen Durchmesser von 75 cm; wieviel *l* kann es aufnehmen?

22. Eine Kegelkugel hat einen Umfang von 66 cm; wie schwer ist sie, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,9 ist? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

23. In welchem Verhältnis stehen (annähernd) die Größen von Sonne und Erde, wenn der Durchmesser der Sonne zu 1 388 000 km, der der Erde zu 12 740 km angenommen wird?

24. Die Oberflächen zweier Kugeln messen bezüglich 1256 qcm und 5024 qcm; a) berechne die Halbmesser und die Rauminhalte. b) Wie verhalten sich Halbmesser, Oberflächen und Rauminhalte?

25. Der Rauminhalt einer Kugel beträgt a) 14 130 ccm, b) 113 040 ccm; berechne den Halbmesser.

26. Wieviel wiegt eine Bleikugel von 5 cm Durchmesser, wenn das spezifische Gewicht des Bleies 11,4 ist?

27. Welchen Halbmesser hat eine Billardkugel von 226,08 g Gewicht, wenn das spezifische Gewicht des Elfenbeins 2 ist?

28. Wie groß muß der Halbmesser derjenigen Kugel sein, deren Oberfläche a) gleich der Summe, b) gleich dem Unterschiede der Oberflächen zweier Kugeln von 20 cm und 25 cm Halbmesser ist?

29. Berechne Oberfläche und Rauminhalt einer Kugel, die einem Würfel mit der Kante a a) eingeschrieben, b) umgeschrieben ist. Wie verhalten sich c) die Oberflächen, d) die Rauminhalte dieser beiden Kugeln? (a = 20.)

30. a) Wie groß ist der Verlust, wenn eine Halbkugel von 15 cm Halbmesser zu dem größten Kegel abgedreht wird? b) Wie verhalten sich Kegel und Halbkugel?

31. Wie groß ist der Abfall, wenn aus einem gleichseitigen Cylinder von 20 cm Durchmesser die größte Kugel abgedreht wird?

32. Aus einem Kupferwürfel von 20 cm Kante soll eine Kugel gegossen werden; wie groß ist der Halbmesser derselben, wenn $4\frac{0}{0}$ der Masse beim Gusse verloren gehen?

33. Aus einem kupfernen Kegelstumpfe von 14 cm Höhe, dessen Halbmesser der Endflächen 12 cm und 7,5 cm messen, soll eine Kugel gegossen werden; wie groß muß der Halbmesser der Gußform genommen werden, wenn $5\frac{0}{0}$ der Masse verloren gehen?

***34.** Ein gleichseitiges Dreieck von 20 cm Seite, dem ein Kreis einbeschrieben ist, rotiert um seine Höhe als Achse; a) berechne die Oberflächen der durch diese Drehung erzeugten Körper. b) Wie verhalten sich die Oberflächen der Kugel und des Kegels? c) Berechne die Oberfläche der Kugel, die durch Umdrehung des dem Dreieck umschriebenen Kreises entstanden ist. d) Wie verhalten sich die Oberflächen der Kugeln?

***35.** Der Halbmesser der Grundfläche eines geraden Kegels mißt 7 cm, die Höhe 24 cm; wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt der eingeschriebenen Kugel?

***36.** Die Halbmesser zweier Kugeln verhalten sich wie 3 : 4, die Summe ihrer Oberflächen beträgt 7850 qcm; berechne die Halbmesser und die Oberflächen.

***37.** Die Summe der Oberflächen zweier Kugeln = 4082 qcm, der Unterschied der Halbmesser = 5 cm; berechne diese und die Oberflächen.

***38.** Die Summe der Oberflächen zweier Kugeln = 3850 qcm, die Summe ihrer Durchmesser = 49 cm; berechne die Oberflächen. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***39.** Vergrößert man den Halbmesser einer Kugel um 5 cm, so wird die Oberfläche um 2826 qcm vergrößert; berechne den Halbmesser.

***40.** Verkleinert man den Halbmesser einer Kugel um 7 cm, so wird die Oberfläche um 1848 qcm verkleinert; wie groß ist der Halbmesser? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

41. Wie groß ist die Oberfläche der Kugel, die um eine Rechtecksäule von 12 cm, 9 cm und 36 cm Kanten gelegt ist?

---

42. Berechne die Begrenzungsfläche eines Kugelabschnittes von 5 cm Höhe, wenn der Halbmesser der zugehörigen Kugel 10 cm mißt.

43. Eine Kugel von 25 cm Halbmesser wird in der Weise geschnitten, daß die Schnittfläche 154 qcm enthält; berechne die beiden Kugelhauben.

44. In einen Kreis von 20 cm Halbmesser ist ein regelmäßiges Sechseck beschrieben; wie groß ist die Rotationsfläche des halben Umfangs dieses Sechsecks um den Durchmesser des Kreises?

45. Welchen Flächeninhalt hat eine Kugelzone, wenn der Halbmesser der Kugel 50 cm, die Höhe der Zone 20 cm beträgt?

46. Der Inhalt einer Kugelzone = 942 qcm, der Halbmesser der zugehörigen Kugel = 15 cm; wie groß ist die Höhe der Zone?

47. Die Höhe einer Kugelhaube = 20 cm, der Halbmesser der Schnittfläche = 8 cm; berechne den Halbmesser der zugehörigen Kugel und die Kugelhaube.

48. Wie groß ist der Halbmesser einer Kugel, wenn eine Kugelkappe derselben bei einer Höhe von 10 cm 942 qcm Inhalt hat?

49. Höhe einer Kugelkappe und Halbmesser der zugehörigen Kugel verhalten sich wie 3 : 5, der Inhalt der Kugelkappe beträgt 2355 qcm; a) berechne die beiden Ausdehnungen. b) Berechne die Gesamtoberfläche des Kugelabschnitts.

50. Die Halbmesser zweier Schnittflächen einer Kugel messen bezüglich 15 cm und 10 cm, ihre Abstände vom Mittelpunkte verhalten sich wie 3 : 5; wie groß ist der Kugelhalbmesser?

51. Von einer Kugel, deren Halbmesser 10 cm beträgt, ist ein Kugelsegment so abzuschneiden, daß die krumme und die ebene Begrenzungsfläche sich wie 5 : 3 verhalten; a) wie groß ist die Höhe dieses Abschnitts? b) Wie aber, wenn sich der gekrümmte Teil der Begrenzungsfläche zum ebenen wie 8 : 3 verhält?

52. Jede der beiden kalten Zonen der Erde enthält 0,041 der Erdoberfläche, jede der gemäßigten Zonen 0,26; berechne die Höhen und den Inhalt der Zonen. (Erdhalbmesser = 6370 km.)

Anmerkung. Durch drei Schnittebenen, von denen die eine durch den Äquator, die beiden andern 30° nördlich und südlich vom Äquator gelegt sind, wird die Oberfläche der Erde in vier gleiche Teile geteilt.

53. Welche Oberfläche hat ein Kugelausschnitt, wenn der Halbmesser der Kugel 15 cm, die Höhe der zugehörigen Kappe 6 cm mißt?

54. Die Höhe eines Kugelabschnittes beträgt 2 cm, der Halbmesser des Begrenzungskreises 8 cm; wie groß ist die Begrenzungsfläche des zugehörigen Kugelausschnitts?

55. Der Inhalt einer Kugelhaube beträgt 3140 qcm; Halbmesser der Kugel und Höhe der Kugelhaube verhalten sich wie 5 : 4; wie groß ist die Oberfläche des zugehörigen Kugelausschnitts?

56. Wie hoch müßte man sich über die Erde erheben, um einen Flächenraum von der Größe Europas = 10 Millionen qkm zu übersehen?

***57.** Ein leuchtender Punkt befindet sich 10 m von einer Kugel entfernt, deren Halbmesser 20 m ist; wie groß ist die beleuchtete Fläche derselben? b) Wie groß ist das Gebiet, das man, abgesehen von sonstigen Einwirkungen, aus einer Höhe von 5000 m (etwa Höhe des Montblanc) übersehen kann?

***58.** Ein leuchtender Punkt hat vom Mittelpunkte der Kugel, deren Halbmesser 50 cm ist, einen Abstand gleich dem doppelten Kugeldurchmesser; a) wie groß ist der beleuchtete Teil der Kugeloberfläche? b) Wie verhält sich die beleuchtete Fläche zur Kugeloberfläche?

***59.** Die Entfernung der Mittelpunkte zweier Kugeln von 10 cm und 30 cm Halbmesser beträgt 50 cm; in der geradlinigen Verlängerung der Centrale liegt vor der kleineren Kugel ein leuchtender Punkt so, daß die größere gerade von dem Schattenkegel der kleineren umhüllt wird. Wie groß ist die beleuchtete Fläche der ersten Kugel und die Entfernung des leuchtenden Punktes von derselben?

60. Eine Halbkugel von 25 cm Halbmesser und ein gerader Kegel, dessen Höhe gleich dem Durchmesser der Kugel ist, stehen auf derselben Grundfläche; wie groß ist der Halbmesser des Kreises, in welchem sich beide Körper schneiden, und der Abstand der Schnittfläche von der Grundfläche?

61. Eine Million Mark in Gold wiegt etwa 398 kg, in Silber 5555 kg; welchen Halbmesser müßte a) eine goldene, b) eine silberne Kugel haben, wenn ihr Wert gleich dem des Reichskriegsschatzes im Juliusturme zu Spandau (120 Millionen Mark) wäre? (Spezifisches Gewicht des Goldes 19,3, das des Silbers 10,5.)

62. Ein Marmordenkmal besteht unten aus einem Würfel von 50 cm Kante; darauf steht eine 1,2 m hohe Rundsäule von 20 cm Halbmesser, diese wird von einer Halbkugel bedeckt, auf welcher zuletzt eine kleine Kugel von 7 cm Halbmesser liegt. a) Berechne das Gewicht dieses Denkmals, wenn das spezifische Gewicht des Marmors 2,5 ist. b) Wie groß ist der sichtbare Teil der Oberfläche?

63. Der (äußere) Durchmesser einer Hohlkugel beträgt 21 cm, die Wandstärke 3,5 cm; berechne den Rauminhalt derselben. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

64. Der Umfang einer Hohlkugel mißt 94,2 cm, der Halbmesser des Hohlraumes 12,5 cm; berechne den Inhalt der Hohlkugel.

65. Welchen Inhalt hat ein halbkugelförmiges Gewölbe, wenn der äußere Halbmesser 4,5 m, der innere 3,5 m mißt?

66. Wie groß ist der Inhalt einer Hohlkugel von 5024 qcm Oberfläche, wenn die Wandstärke 5 cm beträgt?

67. Eine hohle Glaskugel hat eine Oberfläche von 1256 qcm, die

Wandstärke beträgt $\frac{1}{2}$ cm; wie schwer ist dieselbe a) leer, b) mit Wasser gefüllt, wenn das spezifische Gewicht des Glases 2,5 ist?

68. Die Grundfläche einer Rundsäule und eines Kegels ist gleich dem größten Kreise einer Kugel, deren Halbmesser $= r$ ist; die Höhe von Kegel und Rundsäule ist gleich dem Durchmesser. Berechne die körperlichen Inhalte und das Verhältnis dieser drei Körper. ($r = 10$.)

***69.** Um eine Kugel, deren Halbmesser $= r$ ist, soll ein gleichseitiger Kegel und eine gleichseitige Walze gelegt werden. Wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Rauminhalte dieser drei Körper? c) Berechne Oberfläche und Rauminhalt des Kegels. ($r = 10$ cm.)

70. Ein Metallcylinder, in welchem Durchmesser und Höhe im Verhältnis von 4 : 3 standen, hat durch Umgießen eine Kugel von 12,5 cm Halbmesser ergeben; wie groß sind die Ausdehnungen des Cylinders?

71. Welchen Halbmesser muß eine Kugel haben, die a) gleich der Summe, b) gleich dem Unterschiede zweier Kugeln von 15 cm und 20 cm Halbmesser ist?

72. Die Halbmesser zweier Kugeln verhalten sich wie 4 : 3, die Oberflächen unterscheiden sich um 2198 qcm; berechne die Halbmesser.

73. Die Rauminhalte zweier Kugeln verhalten sich wie 8 : 27, die Oberflächen unterscheiden sich um 3080 qcm; berechne die Halbmesser und die Inhalte. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

***74.** Die Oberflächen zweier Kugeln unterscheiden sich um 1570 qcm, die Halbmesser nm 5 cm; berechne diese und die Rauminhalte.

***75.** Die Summe der Oberflächen zweier Kugeln beträgt 4082 qcm, die Summe ihrer Halbmesser 25 cm; berechne diese.

76. Vergrößert man den Halbmesser einer Kugel um 5 cm, so nimmt der Inhalt um 19 363$\frac{1}{3}$ ccm zu; berechne den Halbmesser.

***77.** Ein Stück Kork im Gewicht von 100 g soll mit einer Bleikugel so verbunden werden, daß beide Körper im Wasser schweben. Welcher Halbmesser ist der Kugel zu geben, wenn das spezifische Gewicht des Korkes 0,25, das des Bleies 11,4 ist?

78. Die Maßzahl der Oberfläche einer Kugel ist gleich der des Rauminhaltes; welche Maßzahl hat der Halbmesser?

***79.** Wie groß ist das spezifische Gewicht der Masse einer Hohlkugel von 10 cm (äußerem) Halbmesser und 1 cm Wandstärke, wenn sie bis zur Hälfte ihres Rauminhaltes im Wasser einsinkt?

80. Eine konzentrische Kugelschale ist 4 cm dick; ein ebener Schnitt, welcher durch die äußere Kugelfläche geht und die innere berührt, hat einen Halbmesser von 12 cm; welchen Rauminhalt hat die Hohlkugel?

***81.** Welche Dicke muß eine eiserne Hohlkugel von 21 cm äußerem Halbmesser haben, um im Wasser zu schweben? (Spezifisches Gewicht des Eisens 7,5.)

***82.** Die Dicke einer gläsernen Hohlkugel sei 2 cm; wie groß muß der Halbmesser des Hohlraumes sein, damit die Kugel im Wasser schwebend erhalten wird, wenn das spezifische Gewicht des Glases 2,5 ist?

***83.** In zwei Kugeln verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Rauminhalte wie $m:n$; wie verhalten sich im ersten Falle die Rauminhalte, im zweiten die Oberflächen? ($m:n = 1:2$.)

84. Der Halbmesser einer Kugel mißt r, welchen Halbmesser hat eine zweite Kugel, deren Rauminhalt a) das Doppelte, b) die Hälfte der ersten ist? ($r = 10$.)

85. Aus einer gleichseitigen Walze von 50 cm Durchmesser sind zwei größte Halbkugeln herauszunehmen; der zurückbleibende Körper ist in einen Cylinder mit der ursprünglichen Höhe zu verwandeln; wie groß ist der Halbmesser desselben?

***86.** Aus einer Kugel von 20 cm Durchmesser soll eine gerade Rundsäule herausgeschnitten werden, deren Achsenschnitt gleich dem in den größten Kreis der Kugel geschriebenen Quadrat ist; wieviel beträgt der Abfall?

***87.** In einen geraden Kegel von 24 cm Höhe und 2512 ccm Rauminhalt ist die größte Kugel zu legen; berechne deren Rauminhalt.

***88.** In eine Kugel von 10 cm Halbmesser ist ein gerader Kegel zu legen, dessen Halbmesser der Grundfläche sich zur Höhe wie 3 : 4 verhält; welchen Rauminhalt hat der Kegel?

***89.** Einem gleichseitigen Kegel sei eine Kugel und dieser ein gleichseitiger Cylinder eingeschrieben; wie verhalten sich die Oberflächen und Rauminhalte dieser drei Körper?

***90.** Durch eine Kugel von 15 cm Halbmesser ist ein ebener Schnitt gelegt, welcher den zu ihm senkrechten Halbmesser vom Mittelpunkte aus im Verhältnis von 3 : 2 teilt. Auf der Schnittfläche sind nach entgegengesetzten Seiten zwei gerade Kegel errichtet, deren Spitzen in der Kugeloberfläche liegen. Berechne den Rauminhalt des Doppelkegels.

91. In einem abgestumpften geraden Kegel von 17 cm Seitenlinie, dessen Durchmesser der Endflächen 25 cm und 9 cm messen, ist eine Kugel gelegt; berechne den Unterschied der beiden Körper.

92. Einer Kugel von 29 cm Halbmesser ist ein Cylinder von 20 cm Halbmesser eingeschrieben. Berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt des Cylinders.

93. Ein gleichseitiges Dreieck, in das ein Kreis eingeschrieben ist, wird um die Höhe als Achse geschwenkt. Berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt der entstehenden Körper, wenn die Höhe des Dreiecks h ist. (h = 12 cm).

94. In einer Kugel mit 65 cm Halbmesser steht ein gerades Prisma, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit 10 cm langen Seiten ist. Berechne den Inhalt des Prismas.

95. Um ein regelmäßiges Tetraeder (Oktaeder) ist eine Kugel gelegt, deren Halbmesser = r ist. Berechne a) Oberfläche, b) Inhalt des eingeschriebenen Körpers.

96. Einer Kugel von 10 cm Halbmesser ist ein regelmäßiges sechsseitiges Prisma umgeschrieben. Berechne die Kanten und den Rauminhalt desselben.

97. Einer Kugel vom Halbmesser r ist ein regelmäßiges Tetraeder ein- und umgeschrieben. Wie verhalten sich a) die Oberflächen, b) die Rauminhalte der Körper?

---

98. Es ist der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks zu berechnen, wenn der Winkel desselben (w) und der Halbmesser der Kugel (r) folgende Werte haben: a) $w = 45^0$, $r = 10$ cm; b) $w = 30^0$, $r = 10$ cm; c) $w = 72^0$, $r = 7$ cm.

99. Der Flächeninhalt eines Kugelzweiecks = 1177,50 qcm, der Winkel 54^0; wie groß ist der Halbmesser der zugehörigen Kugel?

100. Der Inhalt eines Kugelzweiecks = 753,60 qcm, der Halbmesser der Kugel = 12 cm; wie groß ist der Winkel?

***101.** Es ist der Flächeninhalt eines Kugeldreiecks zu berechnen, wenn $\sphericalangle A = 75^0$, $\sphericalangle B = 60^0$, $\sphericalangle C = 120^0$, der Halbmesser der Kugel 10 cm beträgt.

***102.** Der Flächeninhalt eines Kugeldreiecks beträgt 117,75 qcm; $\sphericalangle A = 80^0$, $\sphericalangle B = 70^0$, $\sphericalangle C = 60^0$; wie groß ist der Kugelhalbmesser?

103. Welchen körperlichen Inhalt hat ein Kugelausschnitt, wenn der Halbmesser der Kugel (r) und die Höhe der Kugelhaube (h) folgende Werte haben: a) $r = 7$ cm, $h = 3$ cm; b) $r = 10$ cm, $h = 9$ cm; c) $r = 5$ cm, $h = 3$ cm?

104. Der körperliche Inhalt eines Kugelausschnittes beträgt 1570 ccm, der Halbmesser der Kugel 10 cm; wie groß ist die Höhe der Kugelhaube?

105. Die Höhe einer Kugelhaube (Calotte) mißt 18 cm, der zugehörige Kugelausschnitt 15 072 ccm; berechne den Kugelhalbmesser.

***106.** Die Oberfläche eines Kugelausschnitts mißt 1130,4 qcm, der Halbmesser der Kugel 15 cm; wie groß ist die Höhe der Kugelhaube und der Rauminhalt des Kugelausschnitts?

107. Ein Kreisausschnitt von 15 cm Halbmesser, dessen Centriwinkel 45^0 beträgt, dreht sich um seinen Halbmesser als Achse; wie groß ist der Rauminhalt des entstehenden Kugelausschnitts?

108. Kugelhalbmesser und Höhe der Kugelhaube verhalten sich wie 5 : 3, der körperliche Inhalt des Kugelausschnitts beträgt 19 625 ccm; berechne die bezeichneten Ausdehnungen.

109. Der Halbmesser einer Kugel = 25 cm, die Höhe einer Kugelhaube in derselben = 15 cm; a) wie groß ist der zugehörige Kugelabschnitt? b) Wie groß ist die Kugelhaube?

110. Welchen Inhalt hat ein Gefäß in Form eines Kugelabschnitts, wenn der Halbmesser der zugehörigen Kugel 20 cm, die Tiefe des Gefäßes 18 cm beträgt?

111. Eine Kugelhaube von 942 qcm Inhalt hat eine Höhe von 10 cm; wie groß ist der Kugelhalbmesser und der körperliche Inhalt des Kugelabschnitts?

***112.** Eine Kugelhaube von 704 qcm Inhalt gehört einer Kugel von 14 cm Halbmesser an; berechne die Höhe und den körperlichen Inhalt des Kugelabschnitts. ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

113. Halbmesser der Kugel und Höhe der Kugelhaube verhalten sich wie 4 : 3, der körperliche Inhalt des Kugelabschnitts beträgt 10 597,5 ccm; berechne die Ausdehnungen.

114. Wie groß ist ein Kugelabschnitt, wenn der Halbmesser des Begrenzungskreises 14 cm, die Höhe 12 cm mißt?

115. Die Höhe eines Kugelabschnitts von 2784,13 ccm Inhalt beträgt 10 cm; wie groß ist der Halbmesser des Begrenzungskreises und der Kugel?

116. Höhe eines Kugelabschnitts und Halbmesser des Begrenzungskreises verhalten sich wie 4 : 3, der Rauminhalt beträgt 2430,36 ccm; wie lang sind jene Ausdehnungen?

***117.** Die zu einem Kugelabschnitte gehörige Haube verhält sich zur ebenen Begrenzungsfläche desselben wie 4 : 1; der Halbmesser der Kugel mißt 20 cm; berechne den Halbmesser des Begrenzungskreises und die Höhe des Abschnitts.

***118.** Ein Kugelabschnitt ist $\frac{1}{3}$ des zugehörigen Kugelausschnitts; welche Höhe hat er, wenn der Kugelhalbmesser 10 cm mißt?

***119.** Eine Kugel von 10 cm Halbmesser ist durch eine Ebene so geschnitten, daß die aus der Kugeloberfläche entstandenen Hauben sich wie 1 : 4 verhalten; berechne die Höhen und die Rauminhalte der entstandenen Kugelabschnitte.

120. Ein Gewölbe bildet einen Teil eines Kugelabschnitts. Der äußere Halbmesser des Begrenzungskreises = 4 m, die äußere Höhe = 2,5 m, die (senkrechte) Dicke des Gewölbes 0,75 m. Wie groß ist der Rauminhalt desselben?

***121.** Ein Kugelgewölbe (gleich dem Unterschiede zweier Kugelabschnitte) hat im Innern eine Höhe von 4 m, die innere Weite beträgt 10 m, die Wandstärke an der Basis (horizontal gemessen) 1 m; welchen Inhalt hat das Gewölbe?

***122.** Ein Kugelgewölbe hat im Innern eine Höhe von 4 m, während die innere Weite 12 m und die Wandstärke (horizontal gemessen) 2 m beträgt. Berechne die Halbmesser der zugehörigen Kugeln und den Rauminhalt.

***123.** Eine Holzkugel von 20 cm Halbmesser sinkt mit ihrem größeren Teile so tief im Wasser ein, daß die Begrenzungslinie des Wassers einen Umfang von 100,48 cm hat; wie groß ist das spezifische Gewicht dieser Holzart?

***124.** In eine Kugel von 50 cm Halbmesser ist eine gleichseitige Rundsäule gelegt. Berechne die 4 Stücke, in welche die Kugel geteilt wird.

***125.** Durch eine Kugel von 15 cm Halbmesser ist eine Schnittebene so gelegt, daß ihr Abstand vom Mittelpunkte der Kugel 9 cm beträgt; parallel derselben liegt eine zweite Schnittebene, deren Entfernung vom Mittelpunkte 3 cm beträgt. Welchen Inhalt hat die körperliche Zone, wenn der Kugelmittelpunkt a) zwischen den Schnittebenen, b) außerhalb derselben liegt?

126. Der Inhalt einer körperlichen Kugelzone beträgt 17 498,25 ccm, die Höhe der zur kleineren Schnittebene gehörigen kleineren Kugelkappe = 10,5 cm, die Höhe der Zone = 10,5 cm; wie groß ist der Halbmesser der Kugel? ($\pi = 3\frac{1}{7}$.)

127. Welchen Rauminhalt hat eine körperliche Kugelzone von 12 cm Höhe, wenn die Halbmesser der Begrenzungskreise 10 cm und 5 cm messen?

***128.** Der Inhalt einer körperlichen Zone von 30 cm Höhe beträgt 21 854,4 ccm, der Halbmesser des einen Begrenzungskreises = 10 cm; wie groß ist der des andern?

129. Die Halbmesser der Begrenzungskreise und die Höhe einer körperlichen Kugelzone verhalten sich wie 1 : 2 : 5; der Rauminhalt derselben = 2826 cm; berechne die Ausdehnungen.

***130.** Aus einer Kugel von 15 cm Halbmesser soll eine körperliche Zone von 12 cm Höhe herausgeschnitten werden, welche gleich der Hälfte der Kugel ist; berechne die Abstände der Schnittflächen vom Mittelpunkte der Kugel.

***131.** In eine Kugel von 50 cm Halbmesser sind zwei parallele Schnittebenen gelegt, deren Halbmesser 48 cm und 30 cm messen. Aus der entstandenen körperlichen Zone ist ein Kegelstumpf herausgenommen worden, dessen Endflächen jene Schnittflächen sind. Berechne den Inhalt des Reststückes.

132. Eine Metallkugel schwimmt auf Quecksilber und taucht $\frac{7}{10}$ ihres Durchmessers ein, so daß die unter der Quecksilberoberfläche liegende Kugelkappe 1266,7 qcm Oberfläche hat. Welches ist der Halbmesser dieser Kugel und das spezifische Gewicht ihres Metalles, wenn das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,596 ist?

***133.** Welchen Rauminhalt hat ein körperliches Kugelzweieck (Kugelkeil), dessen Winkel 60° beträgt, wenn der Halbmesser der Kugel 15 cm mißt?

***134.** Ein Kugelkeil hat 2826 ccm Inhalt, der Winkel desselben mißt 72°; wie groß ist der Halbmesser?

***135.** Ein Kugelzweieck hat 157 qcm Inhalt, der Winkel desselben mißt 45°; berechne den Halbmesser der Kugel und den Rauminhalt des zugehörigen Keiles.

***136.** Die drei Winkel eines Kugeldreiecks messen 75°, 60° und 120°, der Halbmesser der Kugel 10 cm; wie groß ist der Rauminhalt des zugehörigen körperlichen Dreiecks?

***137.** Der Inhalt eines körperlichen Kugeldreiecks sei 2355 ccm, die Winkel des zugehörigen Flächendreiecks messen 80°, 100° und 120°; wie groß ist der Halbmesser der Kugel?

Anhang.

§ 14. Mittelbare Bestimmung des Rauminhaltes unregelmäßiger Körper.

1. Ein senkrechter Kasten mit Rechtecksgrundflächen von 40 cm Länge und 25 cm Breite ist teilweise mit Wasser gefüllt. Durch einen hineingelegten Stein steigt das Wasser um 8 cm; wie groß ist der Rauminhalt desselben?

2. In ein walzenförmiges Gefäß von 10 cm Halbmesser und 50 cm Höhe legt man einen Stein und füllt den übrigen Raum mit Sand aus. Nach Herausnahme des Steines steht der Sand noch 20 cm hoch; welchen Rauminhalt hat der Stein?

3. Ein hohles Blechgefäß wiegt 2,750 kg; mit Wasser gefüllt wiegt es 17,500 kg; welchen Rauminhalt hat es?

4. Welchen Rauminhalt hat eine a) 44 kg, b) 30,800 kg schwere Kupfermasse, wenn das spezifische Gewicht des Kupfers 8,8 ist?

5. Ein Eisenstück von 37,500 kg wiegt im Wasser 32,5 kg; welchen Rauminhalt hat dasselbe?

6. Ein Stück Steinsalz im Gewicht von 1,800 kg verliert, in Öl gewogen, 640 g; welchen Rauminhalt hat es, wenn Öl 0,9 mal so schwer als Wasser ist?

7. Die Grundfläche einer durchschnittlich 75 cm dicken Eisscholle schätzt man auf 25 qm; sie sinkt im Wasser 67,5 cm tief ein; berechne das spezifische und das absolute Gewicht derselben.

8. Eine Rechtecksäule aus Tannenholz von 2,50 m Länge, 50 cm Breite und 40 cm Dicke wird ins Wasser gelegt. Welchen Rauminhalt hat der über das Wasser ragende Teil, wenn das spezifische Gewicht des Holzes 0,6 ist ist?

9. Ein Zinkstück von 140 g wiegt im Wasser 120 g; dasselbe wird an ein 84 g schweres Holzstück befestigt; beide Körper wiegen im Wasser zusammen 84 g; welchen Rauminhalt und welches spezifische Gewicht hat jeder Körper?

10. Welches Eisengewicht kann man an ein 500 g schweres Korkstück befestigen, damit beide im Wasser schweben? (Spezifisches Gewicht des Eisens 7,5, des Korkes 0,25.)

11. Wieviel g Kupfer müssen mit 272 g Nickel zusammengeschmolzen werden, damit die Mischung 50 ccm Raum einnimmt? (Spezifisches Gewicht des Kupfers 8,8, des Nickels 8,5.)

12. Ein Schmuck, aus Gold uud Silber bestehend, wiegt 78 g, sein Gewichtsverlust im Wasser beträgt 5 g; wieviel g enthält er von jedem Metalle, und welchen Rauminhalt hat er? (Spezifisches Gewicht des Goldes 19, des Silbers 10,5.)

13. Eine 42,250 kg schwere Mischung aus Blei und Zinn mißt 5500 ccm; wieviel kg jeden Metalles sind vorhanden? (Spezifisches Gewicht des Bleies 11,5, des Zinnes 7,3.)

14. Das sogenannte Glockengut besteht aus Kupfer und Zinn, die im Verhältnis von 4 : 1 gemischt sind; wieviel kg jeder Art sind in einer Mischung enthalten, die 37 600 ccm Raum einnimmt? (Spezifisches Gewicht des Kupfers 8,8, des Zinnes 7,2.)

§ 15. Aufgaben, die mit Hilfe der Guldinschen Regel zu lösen sind.

1. Das Rechteck ABCD (AB = a, BC = b) wird um eine in der Ebene des Rechtecks liegende zu AB im Abstande d parallele Achse EF gedreht. Berechne den Rauminhalt des Umdrehungskörpers.

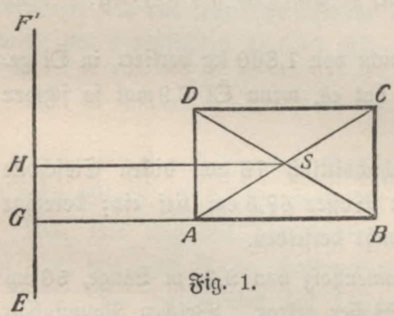

Fig. 1.

Auflösung (Fig. 1). Das Rechteck ABCD beschreibt bei der Drehung um die Achse EF einen Hohlcylinder. Setzt man für GB = r und GA (= d) ϱ, so ist der Rauminhalt des Hohlcylinders: $J = r^2\pi b - \varrho^2\pi b = (r^2 - \varrho^2)\pi b = (r + \varrho)(r - \varrho)\pi b$. Da $r - \varrho = a$, so ist $J = \underline{(r + \varrho) a b \pi} = \underline{\frac{2(r + \varrho) a b \pi}{2}}$.

$r + \varrho = 2HS$; $\frac{1}{2}(r + \varrho) = HS$.

S ist der Schwerpunkt des rotierenden Rechtecks; ab die Rechtecksfläche, HS der Halbmesser des Kreises, den der Schwerpunkt der rotierenden Rechtecksfläche bei der Umdrehung beschreibt; mithin ist $2HS\pi \cdot ab$. In Worten: Der Rauminhalt des Drehungskörpers ist gleich dem Produkte aus der rotierenden Fläche und dem Wege, den der Schwerpunkt bei der Drehung beschreibt; oder: Man findet den Rauminhalt eines Drehungskörpers, wenn man den Flächeninhalt der kreisenden Fläche mit der Länge der Kreislinie vervielfältigt, den der Schwerpunkt der Fläche bei der Umdrehung beschreibt.

Guldinsche Regel für den Drehungskörper:

J = Fläche mal Schwerpunktsweg.

2. Das Trapez ABCD wird um die Seite AB als Achse gedreht. Berechne die Fläche, die die Seite BC bei der Umdrehung beschreibt.

Auflösung (Fig. 2). Die Seite BC beschreibt bei der Umdrehung den Mantel eines abgestumpften Kegels. Bezeichnet man CD mit ϱ und AB mit r und CB mit s, so ist der Mantel des Kegelstumpfs $M = (r + \varrho)\pi s$; $r + \varrho = 2ES$; folglich $M = 2ES\pi s$. S ist der Schwerpunkt der Strecke CB, ES der Abstand des Schwerpunktes von der Achse AD; mithin ist die bei der Drehung beschriebene Fläche gleich dem Produkte aus der Länge der rotierenden Strecke (Linien) und der Länge des Weges, den der Schwerpunkt der Strecke bei der Umdrehung beschreibt.

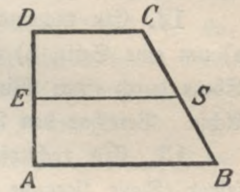

Fig. 2.

Guldinsche Regel für Drehungsflächen: M = Summe der Strecken mal Schwerpunktsweg.

3. Ein Kreis mit dem Halbmesser r rotiert um eine Achse in seiner Ebene, die vom Mittelpunkt um a) 2 r, b) 3 r, c) 4 r entfernt ist. Berechne Oberfläche und Rauminhalt des entstehenden Ringkörpers.

4. Ein Kreis mit dem Halbmesser r rotiert um eine Tangente als Achse. Berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt des entstehenden Ringkörpers.

5. Das gleichseitige Dreieck ABC kreist um die Seite AB = a als Achse. Berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt des Umdrehungskörpers. (Löse die Aufgabe in doppelter Weise.)

6. Ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite a wird um eine Achse gedreht, die durch die Spitze C des Dreiecks parallel zu AB gelegt ist. Berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt des Drehungskörpers.

7. Das gleichseitige Dreieck ABC wird um eine zur Seite AB parallele Achse gedreht, die a) von der Spitze C um die Höhe CD, b) von der Seite AB nach der entgegengesetzten Seite um CD entfernt ist. Berechne a) Oberfläche, b) Rauminhalt des Rotationskörpers.

8. Ein Rechteck mit den Seiten a und b kreist a) um die Seite a, b) um die Seite b als Achse. Berechne den Rauminhalt des entstehenden Körpers. (Löse die Aufgabe in zweifacher Weise.)

9. Ein Quadrat mit der Seite a rotiert a) um eine Seite, b) um eine Diagonale, c) um einen durch einen Eckpunkt zu einer Diagonale gelegte Parallele als Achse. Berechne den Rauminhalt des Drehungskörpers.

10. Ein Rechteck mit den Seiten a und b kreist um eine im Abstande d zu einer Diagonale in seiner Ebene parallele Achse, die die Rechtecksfläche nicht schneidet. Berechne den Rauminhalt des entstehenden Körpers.

11. Das Rechteck in voriger Aufgabe wird um eine Achse gedreht, die parallel zu einer Ecklinie durch einen Eckpunkt gelegt ist. Wie groß ist der Rauminhalt des Drehungskörpers?

12. Ein regelmäßiges Sechseck, dessen eine Seite = a ist, kreist a) um eine Seite, b) um den größten Durchmesser, c) um eine in seiner Ebene durch einen Winkelpunkt zum größten Durchmesser parallel gelegte Achse. Berechne den Rotationskörper.

13. Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck rotiert um eine in seiner Ebene liegende und der Hypotenuse parallel bleibende Achse so, daß der Scheitel des rechten Winkels immer der Achse zugewandt ist. Der Abstand der Hypotenuse von der Achse ist d = 14 cm, die Kathete a = 5 cm. Wie schwer wiegt ein solcher Ring aus Eisen vom spezif. Gewicht 7,5?

14. Berechne mit Hilfe der Guldinschen Regel den Schwerpunkt der Halbkreisfläche mit dem Halbmesser r.

Auflösung. Die Halbkreisfläche beschreibt bei der Umdrehung um den Durchmesser eine Kugel, deren Rauminhalt $= \frac{4}{3} r^3 \pi$. Der Schwerpunkt der Halbkreisfläche liegt auf dem halbierenden Halbmesser. Setzt man für den Abstand des Schwerpunkts von dem Durchmesser x, so ist nach der Guldinschen Regel der Inhalt des entstehenden Körpers

$$J = r^2\pi \cdot 2x\pi = xr^2\pi^2; \text{ folglich}$$
$$xr^2\pi^2 = \tfrac{4}{3} r^3 \pi$$
$$x = \frac{4r}{3\pi}.$$

15. Berechne den Schwerpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b.

16. Berechne den Schwerpunkt eines Halbkreisbogens.

17. Ein gleichseitiges Dreieck kreist um seine Höhe. Berechne den Schwerpunkt des durch Höhe abgeschnittenen rechtwinkligen Dreiecks.

§ 16. Zusammenstellung der für die Berechnung der Figuren und Körper wichtigsten Formeln.

I. Planimetrie.

a) Parallelogramm. (Bezeichnung: a, b = anstoßende Seiten, e, e' = Ecklinien, g, h, F (auch in allen übrigen Figuren) bezw. Grundlinie, Höhe und Flächeninhalt.

1. Quadrat: $F = a^2 = \frac{1}{2}e^2$. 2. Rechteck. $F = ab$. 3. Raute. $F = \frac{1}{2}ee'$. 4. Parallelogramm (im allgemeinen): $F = gh$.

b) Dreieck. (Bezeichnung: a, b, c = Seiten; im rechtwinkligen Dreieck sind a und b die Katheten, c ist die Hypotenuse; R = Halbmesser des umgeschriebenen, r = Halbmesser des eingeschriebenen Kreises; ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c bezw. Halbmesser der den Seiten anbeschriebenen Kreise; t_a, t_b, t_c bezw. Schwerlinien nach den Mitten der Seiten a, b und c (Transversalen); w_a, w_b, w_c bezw. Halbierungslinien der Winkel A, B und C.)

1. Rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck: $F = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{4}c^2$. — 2. Rechtwinkliges Dreieck: $F = \frac{1}{2}ab$. — 3. Gleichseitiges Dreieck: $F = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} = h^2\sqrt{\frac{1}{3}} = 3r^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$. — 4. Ungleichseitiges Dreieck: $F = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}(a+b+c)r =$

$$\frac{abc}{4R} = \frac{1}{2}\varrho_a(b+c-a) = \frac{1}{2}\varrho_b(a+c-b) = \frac{1}{2}\varrho_c(a+b-c)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}.$$

Oder $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Je zwei Seiten eines Dreiecks, die Höhe auf die dritte Seite und der Durchmesser des umschriebenen Kreises stehen in folgender Beziehung: $ab = 2Rh_c$; $ac = 2Rh_b$; $bc = 2Rh_a$.

Das Verhältnis, in welchem die Seiten des Dreiecks zu den Schwerlinien (Transversalen), Winkelhalbierenden und Höhen stehen, wird durch folgende Gleichungen bezeichnet:

1. $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$; $t_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

2. $a = \frac{2}{3}\sqrt{2t_b^2+2t_c^2-t_a^2}$; $b = \frac{2}{3}\sqrt{2t_a^2+2t_c^2-t_b^2}$; $c = \frac{2}{3}\sqrt{2t_a^2+2t_b^2-t_c^2}$.

3. $$w_a^2 = \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2};$$

$$w_b^2 = \frac{ac(a+b+c)(a+c-b)}{(a+c)^2};$$

$$w_c^2 = \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2};$$

4. $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$.

c. Trapez. (Bezeichnung: a, c = Parallele; h = senkrechter Abstand derselben; b, d = nichtparallele Seiten, m = Mittellinie.) $F = mh = \frac{1}{2}(a+c)h =$
$\frac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{(a-c+b+d)(c-a+b+d)(a+b-c-d)(a+d-b-c)}$.

d) Sehnenviereck: $F=\sqrt{(\frac{s}{2}-a)(\frac{s}{2}-b)(\frac{s}{2}-c)(\frac{s}{2}-d)}$; (s = Umfang des Vierecks). — Das Verhältnis, in welchem die Ecklinien und der Halbmesser des umgeschriebenen Kreises zu den Seiten stehen, wird durch folgende Gleichungen bezeichnet: 1. $ac + bd = ee'$.
2. $e=\sqrt{\frac{(ac+bd)\ (ad+bc)}{ab+cd}}$; $e'=\sqrt{\frac{(ac+bd)\ (ab+cd)}{ad+bc}}$;
$R=\sqrt{\frac{(ab+cd)\ (ac+bd)\ (ad+bc)}{4F}}$. (e = Diagonale AC).

e) Regelmäßiges Vieleck. (Bezeichnung: s_6, r_6, R_6 bezw. Seite des regelmäßigen Sechsecks, Halbmesser des demselben eingeschriebenen, Halbmesser des umgeschriebenen Kreises; ähnlich s_5, r_5 u. s. w.)

Im regelmäßigen Viereck ist $s_4 = R\sqrt{2}$; $r_4 = \frac{1}{2}R\sqrt{2}$; $F_4 = 2R^2$; im regelmäßigen Dreieck ist $s_3 = R\sqrt{3}$; $r_3 = \frac{1}{2}R$; $F_3 = \frac{3}{4}R^2\sqrt{3}$; im regelmäßigen Sechseck ist $s_6 = R$; $r_6 = \frac{1}{2}R\sqrt{3}$; $F_6 = \frac{3}{2}R^2\sqrt{3}$; im regelmäßigen Zehneck ist $s_{10} = \frac{1}{2}R\sqrt{5}-1)$; $r_{10} = \frac{1}{4}R\sqrt{10+2\sqrt{5}}$; $F_{10} = \frac{5}{4}R^2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Die Seite des regelmäßigen Vielecks von doppelter Seitenzahl (s_{n^2}) aus R und $s_n = \sqrt{2R(R-\sqrt{R^2-\frac{1}{4}s_n{}^2})}$.

Die Seite des einem Kreise umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks (s^n) aus der Seite des eingeschriebenen Vielecks von gleicher Seitenzahl (s^i) und $R = \frac{2Rs^i}{\sqrt{4R^2-s^{i2}}}$.

Im regelmäßigen Achteck: $s_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $r_8 = \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}}$; $F_8 = 2R^2\sqrt{2}$; im regelmäßigen Zwölfeck: $s_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$; $r_{12} = \frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{3}}$; $F_{12} = 3R^2$; im regelmäßigen Fünfeck: $s_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; $r_5 = \frac{1}{4}R(\sqrt{5}+1)$; $F_5 = \frac{5}{8}R^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. (Siehe auch § 5.)

f) **Kreis.** (Bezeichnung: r = Halbmesser, d = Durchmesser, im Kreisringe sind R und D bezw. Halbmesser und Durchmesser des größeren Kreises; w = Anzahl der Grade eines Mittelpunktwinkels, U = Umfang.)

$U = d\pi = 2r\pi$. $F = r^2\pi = \frac{1}{4}d^2\pi$. F des **Kreisringes** $= R^2\pi - r^2\pi = \pi(R^2 - r^2) = \pi(R + r)(R - r) = \frac{1}{4}\pi(D + d)(D - d)$. F des **Kreisausschnitts** $= \frac{r^2\pi w}{360} = \frac{\frac{1}{4}d^2\pi w}{360}$.

Bogen des Kreisausschnitts $= \frac{2r\pi w}{360} = \frac{d\pi w}{360}$.

II. Stereometrie.

a) **Ecksäule** (Prisma). Bezeichnung: a, b, c = Kanten, e = Ecklinie der Grundfläche, E = Körperecklinie (Durchmesser der umgeschriebenen Kugel), n = Anzahl der Seitenflächen, G, h, O, V (auch in allen andern Körpern) bezw. Grundfläche, Höhe, Oberfläche, Rauminhalt (Volumen).

1. **Würfel.** $O = 6a^2 = 3e^2 = 2E^2$. — $V = a^3 = \frac{1}{2}e^3\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}E^3\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2. **Quadratische Säule.** $O = 2a^2 + 4ab = 2a(a + 2b) = e^2 + 2eb\sqrt{2}$. $V = a^2b = \frac{1}{2}e^2b$.

3. **Rechtecksäule.** $O = 2ab + 2ac + 2bc$. — $V = abc$. — $E^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

4. **Ecksäule** (Prisma) (im allgemeinen). O*) $= 2G + nah$. $V = Gh$.

5. V **des dreiseitigen prismatischen Abschnitts** $= F\frac{(a + b + c)}{3}$. (F = senkrecht zur Achse stehender Querschnitt; a, b und c = Seitenkanten.)

6. V **des parallelepipedischen Abschnitts** $= F\left(\frac{a+c}{2}\right)$; ($a$, c = gegenüberliegenden Seitenkanten).

b) **Rundsäule** (Cylinder). (Bezeichnung: r, d = bezw. Halbmesser und Durchmesser der Grundfläche.)

1. $O = r^2\pi + 2r\pi h = 2r\pi(r + h) = d\pi(\frac{1}{2}d + h)$. — $V = r^2\pi h = \frac{1}{4}d^2\pi h$.

2. **Gleichseitige Rundsäule.** $O = 6r^2\pi = \frac{3}{2}d^2\pi$. — $V = 2r^3\pi = \frac{1}{4}d^3\pi$.

3. **Cylindrischer Abschnitt.** Mantel $= r\pi(h + h')$. — $V = \frac{1}{2}r^2\pi(h + h')$. ($h$ = größte, h' = kleinste Seitenhöhe).

---

*) Die Berechnung der Oberfläche kann sich natürlich nur auf die geraden, d. h. auf die Körper erstrecken, deren Achse mit der Höhe zusammenfällt.

4. Cylindrische Röhre. $V = \pi h (R + r)(R - r)$.

c. Spitzsäule (Pyramide). (a = Grundkante, s = Seitenhöhe.) O der regelmäßigen Pyramide $= G + \frac{1}{2} n a s$. — $V = \frac{1}{3} G h$.

d) Kegel. $O = r^2 \pi + r \pi s = r \pi (r + s) = \frac{1}{2} d \pi (\frac{1}{2} d + s)$.

1. $V = \frac{1}{3} r^2 \pi h = \frac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2} = \frac{1}{3} r^2 \sqrt{(s + r)(s - r)}$.

2. Gleichseitiger Kegel. $O = 3 r^2 \pi = \frac{3}{4} d^2 \pi$. — $V = \frac{1}{3} r^3 \pi \sqrt{3}$.

e) Abgestumpfte Spitzsäule. (Bezeichnung: G = Grundfläche, g = Endfläche, U = Umfang der Grundfläche, u = Umfang der Endfläche, M = mittlere Durchschnittsfigur, E = Ergänzungsfigur, a, b u. s. w. = Grundkanten, a' b' u. s. w. = gleichliegende Endkanten, s = Seitenhöhe.)

1. $O = G + g + \frac{1}{2}(U + u) s$. — $V = \frac{1}{3} h (G + g + \sqrt{Gg})$ oder (annähernd) $\frac{1}{2}(G + g) h$ oder Mh.

Die Seiten der mittleren Durchschnittsfigur (M) sind bezüglich $\frac{1}{2}(a + a')$, $\frac{1}{2}(b + b')$ u. s. w., die Seiten der Ergänzungsfigur (E) sind bezüglich $\frac{1}{2}(a - a')$, $\frac{1}{2}(b - b')$ u. s. w.

2. Obelisk. $V = \frac{1}{3} h \left(\frac{G + g}{2} + 2M\right) = h (M + \frac{1}{3} E)$.

Sind die Grundflächen des Obelisken Rechtecke mit den Seiten a und b, bezüglich a' und b', so ist

$$V = h \left[\frac{(a + a')}{2} \frac{(b + b')}{2} + \frac{1}{3} \frac{(a - a')}{2} \frac{(b - b')}{2}\right].$$

f) Abgestumpfter Kegel. Mantel $= (R + r) \pi s$; $O = [R^2 + r^2 + (R + r) s] \pi$. — $V = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr) =$

$$\pi h \left[\frac{(R + r)^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{(R - r)^2}{2}\right].$$

2. Tonnengefäße (annähernd). $V = \frac{1}{3} \pi h (2 R^2 + r^2)$. ($h$ = Länge des Gefäßes.)

g) Kugel.

1. $O = 4 r^2 \pi = d^2 \pi$. — $V = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{1}{6} d^3 \pi$.

2. Kugelhaube oder Kugelzone $= 2 r \pi h$. — (h = Höhe der Zone oder der Kugelhaube.)

3. V des Kugelausschnitts $= \frac{2}{3} r^2 \pi h$. — (h = Höhe der zugehörigen Haube.)

4. V des Kugelabschnitts $= r h^2 \pi - \frac{1}{3} h^3 \pi = h^2 \pi (r - \frac{1}{3} h)$ oder $\frac{1}{2} a^2 \pi h + \frac{1}{6} h^3 \pi = \frac{1}{6} h \pi (3 a^2 + h^2)$. — ($a$ = Halbmesser des Begrenzungskreises.)

5. V der körperlichen Kugelzone $= H^2\pi(r - \frac{1}{3}H) - h^2\pi(r - \frac{1}{3}h)$ oder $\frac{1}{2}a^2\pi h + \frac{1}{2}b^2\pi h + \frac{1}{6}h^3\pi = \frac{1}{6}\pi h(3a^2 + 3b^2 + h^2)$. — (H und h sind die Höhen der beiden Kugelabschnitte, deren Unterschied gleich der Kugelzone ist, a und b sind die Halbmesser der Begrenzungskreise.)

6. Kugelzweieck. (A = Winkel desselben.)

Flächeninhalt $= \frac{r^2\pi A}{90}$. — $V = \frac{r^3\pi A}{270}$.

7. Kugeldreieck. (A, B, C = Winkel desselben.)

Flächeninhalt $= \left(\frac{A + B + C - 180}{180}\right) r^2\pi$. —

$$V = \left(\frac{A + B + C - 180}{540}\right) r^3\pi.$$

h) Regelmäßiges Vielflach (Polyeder). (Bezeichnung: a = Kante, R = Halbmesser der umgeschriebenen, r = Halbmesser der eingeschriebenen Kugel.)

1. Sechsflach (Hexaeder = Würfel). $O = 6a^2$; $V = a^3$; $R = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{2}a$.

2. Vierflach (Tetraeder). $O = a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$; $R = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{3}{2}}$; $r = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{6}}$.

3. Achtflach (Oktaeder). $O = 2a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$; $R = a\sqrt{\frac{1}{2}}$; $r = a\sqrt{\frac{1}{6}}$.

4. Zwanzigflach (Ikosaeder). $O = 5a\sqrt{3}$; $V = \frac{5}{12}a^3(3 + \sqrt{5})$; $R = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}$; $r = \frac{1}{4}a\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.

5. Zwölfflach (Dodekaeder). $O = 3a^2\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$; $V = 3a^3\sqrt{5(5 + 2\sqrt{5})}$; $R = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{9 + 3\sqrt{5}}{2}}$; $r = \frac{1}{4}a\sqrt{\frac{50 + 22\sqrt{5}}{5}}$.

Bei Lösung der Aufgaben sind folgende Werte benutzt worden:

$\sqrt{2} = 1{,}414.$	$\sqrt{0{,}5} = 0{,}707.$	$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599.$	$\sqrt[3]{0{,}5} = 0{,}7937.$
$\sqrt{3} = 1{,}732.$	$\sqrt{0{,}\overline{3}} = 0{,}577.$	$\sqrt[3]{3} = 1{,}442.$	$\sqrt[3]{0{,}25} = 0{,}63.$
$\sqrt{5} = 2{,}236.$	$\sqrt{0{,}\overline{6}} = 0{,}8165.$	$\sqrt[3]{4} = 1{,}5874.$	$\sqrt[3]{0{,}\overline{3}} = 0{,}6934.$
$\sqrt{6} = 2{,}449.$	$\sqrt{0{,}75} = 0{,}866.$	$\sqrt[3]{5} = 1{,}70945.$	$\sqrt[3]{0{,}\overline{6}} = 0{,}8735.$
$\sqrt{7} = 2{,}646.$		$\sqrt[3]{6} = 1{,}817.$	$\sqrt[3]{0{,}75} = 0{,}90856.$
$\sqrt{10} = 3{,}162.$			

Zweiter Teil.

Antworten und Andeutungen zur Lösung der schwierigeren Aufgaben.

§ 1.

1. a) a^2, **b)** $a\sqrt{2}$. **2. a)** 40 m; 14,14 m; 100 qm. **b)** 10 m; 3,535 m; 6,25 qm. **c)** 14,40 m; 5,09 m; 12,96 qm. **3. a)** 12 m; 16,971 m. **b)** 8 m; 11,314 m. **c)** 7,07 m; 10 m. **4.** 8640 ℳ. **5.** 33 m. **6. a)** 54 m; **b)** 62,352 m. **7. a)** 12; **b)** 19 Bäumchen.

8. $a = \frac{e}{\sqrt{2}} = \frac{e\sqrt{2}}{2}$; $F = \frac{1}{2}e^2$; $a = 35{,}35$.

Lösung: Eine Quadratseite sei x, dann ist $2x^2 = e^2$.

$x = \frac{1}{2}e\sqrt{2}$	$x = 25\sqrt{2} = 35{,}35$
$F = \frac{1}{2}e^2$.	$F = 1250$.

9. a) 28,28 m; 50 qm. **b)** 14,14 m; 12,5 qm. **c)** 10,1808 m; 6,48 qm. **10.** $2r^2$; 128 qm; 512 qm. **11. a)** $4r^2 - 2r^2 = 2r^2$; 11,52 qm. **b)** 1 : 2. **12.** $a\sqrt{n}$; 28,28; 34,64; 40; 44,72; 48,98. **13. a)** 734,85 km; **b)** 31,623 cm. **14. a)** 18,028 m. **b)** 11,18 m. **15.** $\frac{1}{2}(s+d)$; $\frac{1}{2}(s-d)$; $\frac{1}{4}(s+d)^2$; $\frac{1}{4}(s-d)^2$; 8 m; 6 m; 64 qm; 36 qm. **16.** 7; 5; 49; 25. **17.** $\frac{q^2-s^2}{2s}$; $\frac{s^2+q^2}{2s}$; 24 m; 18 m; 576 qm; 324 qm. **18.** $\frac{1}{2}(-d+\sqrt{2s^2-d^2})$; 18 m; 12 m; 324 qm; 144 qm. **19.** Ist die Seite des kleineren Quadrats x, so ist die Seite des größeren $x + d$.

$$(x+d)^2 = nx^2$$

$$(n-1)x^2 - 2dx = d^2$$

$$x^2 - \frac{2dx}{n-1} = \frac{d^2}{n-1}$$

$$x = \frac{d}{n-1} \pm \sqrt{\frac{d^2}{n-1} + \frac{d^2}{(n-1)^2}} = \frac{d}{n-1} \pm \sqrt{\frac{(n-1)d^2 + d^2}{(n-1)^2}} =$$

$\frac{d}{n-1} \pm \frac{d\sqrt{n}}{n-1} = \frac{d(1 \pm \sqrt{n})}{n-1}$. **20.** Lösung zu **a)**: Eine Quadratseite sei $= x$; die Diagonale $= s - x$; demnach

$2x^2 = (s-x)^2$;	
$x = s(\sqrt{2} - 1)$;	$x = 20{,}7$;
$e = s(2 - \sqrt{2})$;	$e = 29{,}3$;
$F = s^2(3 - 2\sqrt{2})$.	$F = 428{,}49$.

Lösung zu **b)**: Quadratseite sei x, Diagonale $= x + d$, demnach

$2x^2 = (x+d)^2$;	
$x^2 - 2dx = d^2$;	$x = a = 24{,}14$;
$x = d(\sqrt{2} + 1)$;	$e = 34{,}14$;
$e = d(\sqrt{2} + 2)$;	$F = 582{,}74$.
$F = d^2(3 + 2\sqrt{2})$.	

21. a) 4,1425 m; 5,8575 m; 17,16 m. **b)** 10,356 m; 14,654 m; 107,257 qm. **22. a)** 12,07 m; 17,07 m; 145,68 qm. **b)** 36,21 m; 51,21 m; 1311,16 qm. **23.** $\frac{b \pm \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$; 8 m; 6 m. **24.** 12 m; 5 m. **25. a)** $2(a+b)$. **b)** ab. **c)** $\sqrt{a^2 + b^2}$; 124; 672; 50. **26. a)** 1,5 m. **b)** 7,5 m. **27.** 6500 qm. **28.** 18 816 qm. **29.** 45 m; 25 m; 1125 qm. **30. a)** 15 m; **b)** $5\frac{1}{3}$ m; **c)** 16 cm; **d)** $\frac{8}{9}$ m; **e)** 2,4 km. **31. a)** 800 Stck. **b)** 208,60 ℳ. **32.** $2a^2(1 + 2n)$; 1200 qm. **33.** $2ab + 2(a+b)c$; 2072 qcm. **34.** $-h + \frac{1}{2}\sqrt{20 + 4h^2}$; 11. **35.** 4063,5 qcm. **36.** 2500 Stck. **37.** 34 Stck. **38. a)** 186 qm; **b)** 114 qm. **c)** 6 qm. **39.** 12 qm; 33 qm; 28 qm; 77 qm. **40.** 4500 qcm. **41.** 21 ℳ. **42.** 0,32 m. **43.** 875 qcm. **44.** 864 qcm. **45. a)** 540 qcm. **b)** 1658,3 qcm. **46.** 16 cm. **47.** 25 cm. **48.** $b = \sqrt{e^2 - a^2} = \sqrt{(e+a)(e-a)}$
$F = a \cdot \sqrt{(e+a)(e-a)}$. **a)** Die Breite $= 15$ cm. $F = 540$ qcm. **b)** 33,17 cm; 1658,5 qcm. **49.** Seite $b = \frac{F}{a}$; $b = 5\frac{1}{2}$. **50.** $\frac{a^3 - ad^2}{2d} = \frac{a(a^2 - d^2)}{2d.}$; $F = 240$ qcm; **51.** Lösung: Die

eine Seite sei x, die andere s — x; daher

$$(s-x)^2+x^2=e^2;$$
$$x^2-sx=\tfrac{1}{2}(e^2-s^2);$$
$$x=\tfrac{1}{2}(s+\sqrt{2e^2-s^2});$$
$$s-x=\tfrac{1}{2}(s-\sqrt{2e^2-s^2});$$
$$F=\tfrac{1}{2}(s^2-e^2).$$

$a=15;$ $b=8;$ $F=120.$

52. Lösung: Ist die andere Rechteckseite $=x$, die Diagonale $=s-x$, so ist

$$x^2+a^2=(s-x)^2,$$
$$x=\frac{s^2-a^2}{2s};$$
$$s-x=\frac{s^2+a^2}{2s}.$$

a) $b=11;$ $e=61;$ $F=660.$ **b)** $b=21;$ $e=75;$ $F=1512.$

53. 672 qm. Lösung: Länge $=x$, Breite $=y$.

$$\text{I. } x+y=62\;;$$
$$\text{II. } y+\sqrt{x^2+y^2}=98.$$
$$\sqrt{x^2+y^2}=98-y\;;$$
$$\text{III. } x^2+y^2=y^2=196y+9604.$$

Aus I folgt: $x=62-y$; diesen Wert in III eingesetzt und geordnet:

$$\text{IV. } y^2+72y=5760.$$

54. Lösung: Ist die eine Rechtecksseite $=x$, die Diagonale $=x+d$, so ist

$$a^2+x^2=(x+d)^2,$$
$$x=\frac{a^2-d^2}{2d};$$
$$x+d=\frac{a^2+d^2}{2d}.$$

$b=24;$ $e=40.$

55. 12 cm; 9 cm. **56.** 240 qm. **57.** 1512 qm. **58.** 24 m; 45 m. **59.** Lösung: Ist die eine Seite $=x$, so ist die andere $=d+x$, demnach

$$x^2+(x+d)^2=e^2;$$
$$x^2+dx=\tfrac{1}{2}(e^2-d^2);$$
$$x=\tfrac{1}{2}(-d+\sqrt{2e^2-d^2});$$
$$x+d=\tfrac{1}{2}(d+\sqrt{2e^2-d^2});$$
$$F=\tfrac{1}{2}(e^2-d^2).$$

$a=35;$ $b=12;$ $F=420.$

60. 168 qm. **61.** 16 m; 20 m. **62.** 16 m; 30 m; 34 m.

63. Lösung: Die Seiten des Rechtecks seien x und y, dann ist

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } xy = a^2; & \\ \text{II. } x + y = 4a, & x = 134{,}355; \\ \hline x = a(2 + \sqrt{3}), & y = 9{,}645. \\ y = a(2 - \sqrt{3}). & \end{array}$$

64. Lösung: Die Seiten des Rechtecks seien x und y, dann ist

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x + y = 2a, & \\ \text{II. } 2xy = a^2, & x = 61{,}452; \\ \hline x = \tfrac{1}{2}a(2 + \sqrt{2}), & y = 10{,}548. \\ y = \tfrac{1}{2}a(2 - \sqrt{2}). & \end{array}$$

65. 540 qm.

Lösung: Länge = x, Breite = y; Eckl. = z.

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x^2 + y^2 = z^2, & \text{In I eingesetzt und geordnet:} \\ \text{II. } x + z = 75, & \text{IV. } x^2 - 48z = -576. \\ \text{III. } z - y = 24. & \text{Wert von z aus II eingesetzt:} \\ \hline \text{Aus III: } y = z - 24, & \text{V. } x^2 + 48x = 3024 \text{ u. s. w.} \\ y^2 = z^2 - 48z + 576. & \end{array}$$

66. 18 cm; 12 m. **67.** 48 qm; 144 qm. **68.** 12 m; 8 m. **69. a)** 27 m; 16 m. **b)** 36 m; 12 m. **70.** 5 cm; 12 cm. **71.** 65,414 m; 4,586 m. **72.** 9 m; 12 m; 15 m.

$$\begin{array}{r} \text{Lösung: I. } xy = 135, \\ \text{II. } xz = 108, \\ \text{III. } yz = 180. \\ \hline \text{I. II. III.} = x^2y^2z^2 = 135.\,108.\,180. \\ \hline \text{IV. } xyz = 9.\,12.\,15. \end{array}$$

IV. durch die Gl. I. bis III. geteilt u. s. w.

73. Abstand **a)** 4 cm. **b)** 6 cm. **c)** Das eine Paar innerhalb, das andere außerhalb der Parallelen; die Entfernung kann sehr verschieden sein. **74.** Abstand = 5.

Lösung: Der Abstand sei x, dann ist

$$\frac{(a - 2x)(b - 2x) = q^2,}{x^2 - \tfrac{1}{2}x\,(a + b) = \dfrac{q^2 - ab}{4},}$$

$$x = \tfrac{1}{4}(a + b) \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{4q^2 + (a - b)^2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = 5 \\ x_2 = 25\tfrac{1}{2}. \end{array}\right\}$$ Wie sind im zweiten Falle die Parallelen zu legen?

75. $\frac{1}{2}ee'$ **a)** 25 cm; 336 qcm. **b)** 21,633 cm; 432 qcm **76.** 51,96 cm. **77.** 20 cm; 16 cm. **78. a)** 346,49 cm. **b)** 124,7 qcm. **79. a)** 461,88 qcm. **b)** 166,28 qcm. **80. a)** 282,8 qcm. **b)** 101,808 qcm. **81. a)** 565,6 qcm. **b)** 203,616 qcm. **82.** $\frac{1}{2}g^2\sqrt{3}$. **83.** $2h^2\sqrt{\frac{1}{3}}$. **84.** $g^2\sqrt{\frac{1}{2}}$. **85.** $h^2\sqrt{2}$. **86.** $\frac{1}{2}\sqrt{3}:2\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{3}{4}}:\sqrt{\frac{4}{3}}$. **87.** 13 m. **88.** 132,66 qm.

89. Lösung: ABCD sei der gegebene Rhombus, die Diagonalen schneiden sich in O. Man fälle $OE \perp AB$; dann ist $AO = \frac{1}{2}e$, $OE = \frac{1}{2}h$;
$AE = \frac{1}{2}\sqrt{e^2-h^2}$; $BE = \frac{\frac{1}{2}h^2}{\sqrt{e^2-h^2}}$; $AB = \frac{\frac{1}{2}e^2}{\sqrt{e^2-h^2}}$; $BO = \frac{\frac{1}{2}he}{\sqrt{e^2-h^2}}$;
$F = \frac{\frac{1}{2}e^2h}{\sqrt{e^2-h^2}}$. —

$AE = 15$; $BE = 4\frac{4}{15}$; $AB = 19\frac{4}{5}$; $BO = 9\frac{1}{15}$; $F = 308\frac{4}{15}$.

90. Lösung: Die eine halbe Diagonale sei x, die andere $= s - x$, dann ist

$$\begin{aligned} x^2+(s-x)^2 &= a^2, \\ x &= \tfrac{1}{2}(s+\sqrt{2a^2-s^2}); \\ 2x &= s+\sqrt{2a^2-s^2}; \\ 2(s-x) &= s-\sqrt{2a^2-s^2}. \end{aligned}$$

a) $e = 70$. $e' = 24$. $F = 840$.
b) $e = 60$. $e' = 32$. $F = 960$.

91. Lösung: Ist die eine halbe Diagonale $= x$, die andere $x + d$, so ist

$$\begin{aligned} x^2+(x+d)^2 &= a^2 \\ x &= \tfrac{1}{2}(-d+\sqrt{2a^2-d^2}), \\ 2x &= -d+\sqrt{2a^2-d^2}; \\ 2(x+d) &= d+\sqrt{2a^2-b^2}. \end{aligned}$$

a) $e = 80$; $e' = 18$. $F = 360$.
b) $e = 48$. $e' = 14$. $F = 336$.

92. 24 m; 15 m. **93.** $8\frac{1}{3}$ m; $66\frac{2}{3}$ qm. **94.** 18 m; 12 m; 10,816 m. **95.** 10 m; 15 m; 9,014 m. **96. a)** 13,50 m; 22,50 m. **b)** 15 m; 21 m. **97. a)** 450 qcm. **b)** 45 qcm. **c)** 10 qm. **98. a)** $3\frac{3}{8}$ m. **b)** 3,6 m. **c)** $1\frac{2}{3}$ cm. **d)** 3,6 cm. **99.** 12 m; 8 m; 5 m. **100.** 5,5 m; 8 m; 10 m. **101. a)** 1125 qcm. **b)** 225 qcm. **c)** 2 : 3. **d)** 45 cm. **e)** 9 cm. **102. a)** 1169,1 qcm. **b)** 675 qcm. **c)** 954,45 qcm.

103. Lösung: ABCD sei das gegebene Parallelogramm. Man fälle $DE \perp AB$, $AF \perp BC$; dann ist $\triangle AED \sim \triangle BFA$, mithin $DE : AF = AD : AB$ oder $12 : 20 = b : a$, also $3a = 5b$; der halbe Umfang ist also im Verhältnis von 3 : 5 zu teilen; b = 15 cm, a = 25 cm. **104.** $\frac{sh_a \cdot h_b}{h_a+h_b}$. 120 qm. **105.** 15 m; $22\frac{1}{2}$ m. **106.** 37,5 m. **107.** 168 qm.

Lösung: Da $17^2 < 21^2 + 10^2$, so ist der der gegebenen Eckl. gegenüberliegende Winkel ein spitzer. Bezeichnet man die Höhe auf die 21 cm lange Seite mit x, den einen Abschnitt der Grundl. mit y, so ist

$$\text{I. } x^2 + y^2 = 100; \quad \text{II. } (21 - y)^2 + x^2 = 289.$$

Aus I folgt: $x^2 = 100 - y^2$; setzt man diesen Wert in II ein, so erhält man nach einigen Umformungen: $42y = 252$. **108.** 480 qm. Lösung: $\frac{1}{2} F = \sqrt{s(s-a)(s-e)(s-b)} = \sqrt{45 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 32} = \sqrt{9 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 4} = 3 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 2 = 240$ qm; mithin das Parallelogramm $2 \cdot 240$ qm $= 480$ qm. **109.** Lösung: Schneiden sich die Diagonalen in O, so ist $\triangle ABO = \frac{1}{4} \# ABCD$, $AO = 17$, $BO = 10$, mithin $\triangle ABO = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 84$ qm; folgl. das Parallelogramm 336 qm. Dann ist $DE = h_a = 16$ cm. Ist $\measuredangle A$ kleiner als $\measuredangle B$, so ist $BE = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ cm, $AE = 9$ cm, $AD = \sqrt{9^2 + 16^2} = 18{,}358$ cm. **110.** 84 qm; 3,36 qm; 53,76 qm; 13,44 qm. **111. a)** 5 m; 8,50 m; 10,50 m; 21 qm. **b)** $6\frac{2}{3}$ m; $11\frac{1}{3}$ m; 14 m; $37\frac{1}{3}$ qm. **c)** 7,07 m; 12,019 m; 14,847 m; 42 qm. **112.** 192 qm. **113.** 168 qm. **114.** 306 qm. **115.** 8 m; 12 m.

§ 2.

1. a) $\sqrt{a^2 + b^2}$. **b)** 10 m. **c)** 13 cm. **d)** 25 cm. **e)** 3,40 m. **f)** 18,028 m. **2. a)** 14,14 m. **b)** 3,535 m. **c)** 5,09 m. **3. a)** 169,700 km. **b)** 4 Tg. **4.** 5,1 m. **5.** 6,5 m. **6.** 21,21 cm. **7. a)** 12 cm. **b)** 24 cm. **c)** 7,2 m. **d)** 15,6205 m. **8. a)** 13 cm. **b)** 61 cm. **9. a)** 24 cm. **b)** 15 cm. **10.** 14 m. **11. a)** $U = 2h(\sqrt{2} + 1)$; $F = h^2$. **b)** $U = 24{,}14$ cm, $F = 25$ qcm. **12. a)** 50 qcm. **b)** 28,125 qcm. **c)** 7,03125 qcm. **d)** 2,88 qm. **13. a)** 5 m; 7,07 m. **b)** 7,07 m; 10 m. **c)** 60 m; 84,84 m. **14.** 9 m; 2,7 qm. **15.** 63 m; 18,90 a. **16. a)** 35,35 cm. **b)** 28,868 cm. **17.** 24 cm; 55 cm oder 24 cm, 35 cm. **18.** 7 cm; 10 cm; 12,207 cm. **19.** 9 cm; 12 cm. **20.** 70,98 cm; 194,85 qcm. **21.** 81,96 cm; 259,8 qcm. **22.** Lösung: Die Katheten seien x und y;

$$\text{I. } x + y = s,$$
$$\text{II. } x^2 + y^2 = c^2,$$
Aus $\text{I. } x^2 + 2xy + y^2 = s^2;$
$$\text{II. subtr. } x^2 + y^2 = c^2;$$
$$\text{III. } 2xy = s^2 - c^2.$$

$$\text{II.} - \text{III. } (x - y)^2 = 2c^2 - s^2,$$
$$x - y = \sqrt{2c^2 - s^2},$$
$$x = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{2c^2 - s^2};$$
$$y = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{2c^2 - s^2}).$$
$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{s^2 - c^2}.$$
$$x = 15;\ y = 8;\ F = 60.$$

23. Lösung: Katheten x und y; also

$$\text{I. } x - y = d,$$
$$\text{II. } x^2 + y^2 = c^2; \text{ daraus folgt}$$

$$x = \tfrac{1}{2}(d + \sqrt{2c^2 - d^2});$$
$$y = \tfrac{1}{2}(-d + \sqrt{2c^2 - d^2});$$
$$F = \tfrac{1}{4}(c^2 - d^2)$$
$$h = \frac{c^2 - d^2}{4c}$$

$x = 24$; $y = 7$; $F = 84$; $h = 6{,}72$; $p = 23{,}04$; $q = 1{,}96$; $r = 12{,}5$; $\varrho = 3$.

Katheten a und x.

24.

$$\text{I. } a^2 + x^2 = c^2,$$
$$\text{II. } x + c = s;$$
$$c = s - x;$$
$$a^2 + x^2 = (s - x)^2;$$
$$2sx = s^2 - a^2$$
$$x = \frac{s^2 - a^2.}{2s}$$

$c = 29$; $b = 21$; $F = 210$; $h = 14\tfrac{14}{19}$; $p = 13\tfrac{23}{29}$; $q = 15\tfrac{6}{29}$; $r = 14{,}5$; $\varrho = 6$.

25. Die Hypotenuse $= \dfrac{a^2 + d^2}{2d}$;

Die eine Kathete $= \dfrac{a^2 - d^2}{2d}$.

$c = 29$; $b = 20$; $F = 210$; $h = 14\tfrac{14}{19}$; $p = 13\tfrac{23}{29}$; $q = 15\tfrac{6}{29}$; $r = 14{,}5$; $\varrho = 6$.

26. 7 m; 24 m. **27.** 10 m; 24 m; 26 m. **28.** 34,14 m; 24,14 m; 291,37 qm. **29. a)** 7 m; 25 m. **b)** 45 m; 51 m. **30.** 84 qm.

Lösung: x, y = Katheten, z = Hypotenuse.

$$\text{I. } x - y = 17,$$
$$\text{II. } z - y = 18,$$
$$\text{III. } z^2 = x^2 + y^2.$$

$$\text{II.} - \text{I.}: z = x + 1;$$
$$\text{IV. } z^2 = x^2 + 2x + 1.$$

Wert für y^2 aus I in III eingesetzt, giebt aus III u. IV: $x^2 - 36x = -288$.
31. 9 m; 12 m; 15 m. Lösung: x, y = Katheten.

$$\text{I. } x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 36,$$
$$\text{II. } xy = 108;$$

I quadriert, nachdem auf beiden Seiten $x + y$ subtr., giebt

$$72x + 72y - 2xy = 36^2;$$

dazu $2xy = 216$ (Gleich. II) addiert und durch 72 dividiert, giebt III. $x + y = 21$ u. s. w. **32. a)** 6 m; 9 m; 10,817 m. **b)** 12 m; 16 m; 20 m. **33.** 12 m; 16 m. **34.** 20 m; 410 m. **35.** 32 m; 21,166 m; 253,99 m. **36.** Lösung: $b = \sqrt{a^2 - p^2}$; $q = \frac{a^2 - p^2}{p}$; $F = \frac{a^2 \sqrt{(a^2 - p^2)}}{2p}$; $c = 20$; $b = 12$; $q = 7,2$; $h = 9,6$; $r = 10$; $\varrho = 4$; $F = 96$. **37.** 25 cm; 410 qm. **38.** $a = \sqrt{p(p+q)}$; $b = \sqrt{q(p+q)}$; $F = \frac{1}{2}(p+q)\sqrt{pq}$; $r = \frac{1}{2}(p+q)$; $\varrho = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{pq}}{\sqrt{p(p+q)} + \sqrt{q(p+q)}}$; $c = 33,8$; $h = 12$; $a = 31,2$; $b = 13$; $F = 202,8$; $r = 16,9$; $\varrho = 5,2$. **39.** 20 cm; 25 cm; 975 qcm.
40. Lösung: Der anliegende Hypotenusenabschnitt sei x; dann verhält sich

$$x : a = a : (q + x);$$
$$x^2 + qx = a^2;$$
$$p = x = \tfrac{1}{2}\left(-q + \sqrt{4a^2 + q^2}\right);$$
$$c = \tfrac{1}{2}\left(q + \sqrt{4a^2 + q^2}\right);$$
$$b = \sqrt{\tfrac{1}{2}q\left(q + \sqrt{4a^2 + q^2}\right)};$$
$$h = \sqrt{\tfrac{1}{2}q\left(-q + \sqrt{4a^2 + q^2}\right)};$$
$$F = \tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{2}q\left(q + \sqrt{4a^2 + q^2}\right)}.$$

$p = 9$;
$c = 25$;
$b = 20$;
$h = 12$;
$F = 150$;
$r = 12,5$;
$\varrho = 5$.

41. 25 cm; 16,583 cm; 298,494 qcm. **42.** 25 cm; 36 cm; 915 qcm.
43. $b = 15$ cm; $c = 25$ cm; $h = 12$ cm; $p = 16$ cm; $q = 9$ cm; $r = 12\frac{1}{2}$ cm; $\varrho = 5$ cm. **44.** Lösung: Sind die Katheten x und y, so ist

$$\text{I. } x^2 + y^2 = 17^2,$$
$$\text{II. } xy = 3(x + y + 17)$$
$$= 3x + 3y + 51.$$

Aus II. $\frac{xy}{3} - 17 = x + y$,

$$\text{quadriert: } \frac{x^2y^2}{9} + 17^2 - \frac{34xy}{3} = x^2 + y^2 + 2xy;$$

da $x^2 + y^2 = 17^2$ ist, so ist

$$\frac{x^2y^2}{9} - \frac{34xy}{3} = 2xy$$

$$\text{oder } \frac{xy}{9} - \frac{34}{3} = 2,$$

daraus III. $xy = 120$.

Aus I. und III. erhält man $x = 15$; $y = 8$.

45. $b = 8$ cm; $c = 17$ cm; $F = 60$ qcm. **46.** Lösung: Die Katheten seien x und y, dann ist

$$\text{I. } x + y = 23;$$

$$\text{II. } xy = 3\,(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})$$
$$= 3 \cdot 23 + 3\sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Aus II. } \frac{xy}{3} - 23 = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{quadriert III. } \frac{x^2y^2}{9} + 529 - \frac{46xy}{3} = x^2 + y^2;$$

aus I. erhält man $x^2 + y^2 = 529 - 2xy$; dies in III. eingesetzt und geordnet, giebt:

IV. $xy = 120$.

Aus I. und IV. erhält man $x = 15$; $y = 8$.

47. a) $a = 20$ cm; $b = 21$ cm; $c = 29$ cm. **b)** $a = 24$ cm; $b = 7$ cm; $c = 25$ cm. **48.** Lösung: Die Katheten seien x und y, also

$$\text{I. } x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = s;$$

$$\text{II. } \frac{xy}{s} = \varrho, \text{ (da } F = \frac{\varrho\,[a + b + c]}{2} \text{ ist),}$$

oder $xy = s\varrho$.

$$\text{Aus I. } \sqrt{x^2 + y^2} = s - x - y;$$

quadriert, den Wert aus II. eingesetzt und geordnet:

$$\text{III. } x + y = \tfrac{1}{2}s + \varrho;$$

III. quadriert und $4xy = 4s\varrho$ subtrahiert:

$$\text{IV. } x^2 + y^2 - 2xy = \tfrac{1}{4}s^2 + \varrho^2 - 3s\varrho.$$

$$\text{V. } x - y = \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 + \varrho^2 - 3s\varrho}.$$

Aus V. und III. erhält man

$$x = \frac{\tfrac{1}{2}s + \varrho + \sqrt{\tfrac{1}{4}s^2 + \varrho^2 - 3s\varrho}}{2},$$

$$y = \frac{\frac{1}{2}s + \varrho - \sqrt{\frac{1}{4}s^2 + \varrho^2 - 3s\varrho}}{2}.$$

Für das Zahlenbeispiel: $a = 24$; $b = 7$; $c = 25$.

49. Lösung: Es sei x die größere, y die kleinere Kathete, dann ist

I. $c : x = x : y$ oder $x^2 = cy$,
II. $x^2 + y^2 = c^2$,

$$y^2 + cy = c^2,$$
$$y = \tfrac{1}{2}c\ (\sqrt{5} = 1),$$
$$x = \tfrac{1}{2}c\sqrt{2\sqrt{5} - 2}.$$

$$y = 30\ (\sqrt{5} - 1) = 37{,}08;$$
$$x = 30\sqrt{2\sqrt{5} - 2} = 47{,}16.$$

50. Lösung zu a): x sei die größere Kathete, y die Hypotenuse, dann ist

I. $a : x = x : y$ oder $x^2 = ay$:
II. $y^2 - x^2 = a^2$, also $y^2 - ay = a^2$;

$$y = \tfrac{1}{2}a\ (\sqrt{5} + 1);$$
$$x = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2\sqrt{5} + 2}.$$

$$y = 97{,}08;$$
$$x = 76{,}32.$$

Lösung zu b): x sei die kleinere Kathete, y die Hypotenuse, dann ist

I. $x : a = a : y$ oder $xy = a^2$,
II. $y^2 - x^2 = a^2$;

$$y = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2 + 2\sqrt{5}};$$
$$x = \frac{\sqrt{2 + 2\sqrt{5}}}{1 + \sqrt{5}}.$$

$$y = 76{,}32;$$
$$x = 23{,}585.$$

51. Lösung zu a): Ist eine Quadratseite $= x$, so verhält sich

$$a : x = b : (b - x),$$
$$x = \frac{ab}{a + b}.$$

$$x = 17{,}143.$$

Lösung zu b): Durch die Katheten ist die Hypotenuse c und die Höhe auf diese h gegeben. Dann verhält sich, wenn man die Quadratseite mit x bezeichnet,

$$c : x = h : (h - x),$$
$$x = \frac{ch}{c + h}.$$

$$x = 16{,}216.$$

52. a) 43,3 qcm; **b)** 97,425 qcm; **c)** 2,706 qcm.

53. a) $a^2\sqrt{3}$;

1082,5 qcm; **b)** $2a^2\sqrt{3}$; 2165 qcm. **54.** $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$; **a)** 57,735 qcm; **b)** 230,94 qcm; **c)** 519,615 qcm. **55.** $\frac{2F}{\sqrt{3}}$. **56. a)** 11,77 m; **b)** 5,885 m. **57.** $\sqrt{3}:4$. **58. a)** 4 : 3; **b)** 32,475. Lösung zu a): Die Seite verhält sich zur Höhe wie $10:5\sqrt{3}$ oder wie $1:\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Da sich gleichseitige Dreiecke wie die Quadrate gleichliegender Ausdehnungen verhalten, so verhalten sich die zu untersuchenden Dreiecke wie $1:(\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 1:\frac{3}{4} = 4:3$. **59. a)** 46,765 qm; **b)** 187,06 qm. **60.** $10\sqrt{2} = 14{,}14$ m. **61. a)** 6,432 m; 5,568 m; 17,906 qm; **b)** 44,784 m; 38,784 m; 868,43 qm.

Lösung zu **a)**: Seite $= x$, Höhe $= \frac{1}{2}x\sqrt{3}$;

$$\text{mithin } x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} = s$$

$$x = \frac{s}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} = 2s(2-\sqrt{3});$$

$$h = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} = s(2\sqrt{3}-3);$$

$$F = s^2(7\sqrt{3}-12).$$

b) $x = 2d(2+\sqrt{3})$;

$$h = \tfrac{1}{2}x\sqrt{3} = d(2\sqrt{3}+3);$$

$$F = d^2(7\sqrt{3}+12).$$

62. 10,352. Lösung: Ist der größere Abschnitt der Quadratseite $= x$, die Seite des Dreiecks $= y$, so ist

$$\text{I. } 2x^2 = y^2;$$

$$\text{II. } a^2 + (a-x)^2 = y^2$$

$$2x^2 = a^2 + (a-x)^2$$

$$x^2 + 2ax = 2a^2$$

$$x = a(\sqrt{3}-1).$$

63. 4,64 m. Durch die der Grundseite der Dreiecks gegenüberliegende Seite des Quadrats wird ein kleineres gleichseitiges Dreieck abgeschnitten. Ist die Seite desselben $= 2x$, so ist

$$(a-2x)^2 = 4x^2 + (\frac{a}{2}-x)^2,$$

$$x^2 + 3ax = \frac{3a^2}{4},$$

$$(x + \frac{3a}{2})^2 = 3a^2;$$

$$x = a\,(\sqrt{3} - \tfrac{3}{2}).$$

Für das Zahlenbeispiel: $(10 - x)^2 = 4x^2 + (5 - x)^2$; also $x^2 + 30x = 75$ u. s. w. **64.** 292,20 qcm. **65. a)** 34,641 cm; **b)** 173,2 qcm; 519,6 qcm; 1 : 3. **66. a)** $\frac{8\,d}{\sqrt{2}} = 4\,d\sqrt{2}$; **b)** $\frac{d^2}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

67. $a\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; $30\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 10\sqrt{3} = 17{,}32$. Lösung: Das rechtwinklige Dreieck ADF ist die Hälfte eines gleichseitigen, mithin $AD = \frac{1}{2}AF$. Da die abgeschnittenen Dreiecke kongruent sind, ist $AD + AF = a$, mithin $AD = \frac{1}{3}a$, $AF = \frac{2}{3}a$. Bezeichnet man die gesuchte Dreiecksseite mit x, so ist

$x^2 = (\frac{2}{3}a)^2 - (\frac{1}{3}a)^2 = \frac{1}{3}a^2$ $x = a\sqrt{\frac{1}{3}}$	17,32.

68. $\frac{1}{2}$ch. **a)** 45 qm; **b)** 6 qm; **c)** 4,32 qm. **69. a)** $F = \frac{1}{2}ch$; $a = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + c^2}$; **b)** $h = \frac{2F}{c}$; **c)** $c = 2\sqrt{(a^2 - h^2)}$; $F = h\sqrt{a^2 - h^2}$. **70. a)** 60 qm; **b)** 4,20 qm. **71. a)** 10 m; **b)** 3 m; **c)** 6 m. **72.** 22,05 ℳ. **73.** 100 qm. **74.** 5664,75 qkm. **75.** 145 700 qkm (abgerundet). **76.** 20 cm; 24 cm; 26 cm. **77.** 36 m; 30 m. **78.** 6 cm [Seite des Quadrats = 2 x, dann verhalten sich $(5 - x) : 2x = 1 : 3$]. **79.** 6 cm und 12 cm oder $6\frac{6}{7}$ cm und $13\frac{5}{7}$ cm. **80.** Lösung: Die Hypotenuse ist $a\sqrt{2}$, die Höhe auf diese $= \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Bezeichnet man die Quadratseite mit x, so verhält sich

$2 : 1 = x : (\frac{1}{2}a\sqrt{2} - x)$ $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$	$x = 23{,}56$.

81. 101,4 qm. (Der eine Schenkelabschn. $= \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ m; ist der andere $= x$, so ist $12^2 + x^2 = (5 + x)^2$, also $10x = 119$.) **82.** 79,5375 qm. Lösung: Da die Seiten eines Dreiecks sich umgekehrt wie ihre Höhen verhalten, so ist, wenn man die Grundl. mit 2x bezeichnet, ein Schenkel = 3x. Ist der zwischen einem Endpunkte der Grundl. und dem Fußpunkte der Schenkelhöhe liegende Teil des Schenkels = y, so ist

I. $10^2 + y^2 = 4x^2$.	**83.** 54,6 qcm. $(6^2 + x^2 = [20 - x]^2.)$
II. $15^2 + x^2 = 9x^2$.	**84.** 240 qcm. $(10^2 + x^2 = [x + 2]^2.)$
Aus II. folgt: $8x^2 = 225$ u. s. w.	

85. 71,435 qcm. (In jedem Dreieck ist das Rechteck aus zwei Seiten gleich dem Rechteck aus der Höhe auf die dritte Seite und dem Durchm. des umgeschr. Kreises.) **86.** $\frac{1}{2}ch_c$. **a)** 75 qm. **b)** 5 qm. **c)** 10,5 qm. **87.** $h = \frac{2F}{c}$; $c = \frac{2F}{h}$. **a)** 10 m. **b)** 10 m. **c)** $26\frac{2}{3}$ m. **d)** 4,800 km. **88.** $h = \frac{2a^2}{c}$; 10 m. **89. a)** 1,60 m. **b)** $2\frac{2}{3}$ m. **90.** $\sqrt{\frac{\frac{1}{2}mch}{n}}$; $\sqrt{\frac{\frac{1}{2}nch}{m}}$; 8,484 u. 5,656.

91. Lösung: Die Seite des gleichseitigen Dreiecks sei x, sein Flächeninhalt also $\frac{1}{4}x^2\sqrt{3}$; demnach ist $\frac{1}{4}x^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}ch$

$$x = \sqrt{\frac{2ch\sqrt{3}}{3}};\ (x = 43,25).$$

92. a) 18 cm. **b)** $18\sqrt{2} = 25,452$ cm. **c)** 27,50 cm. **93.** 12 m; 16 m; 54 qm; 96 qm. **94. a)** 96 qm. **b)** 3 : 4; 9 : 16. **95.** $16\frac{2}{3}$ cm; 12 cm. **96.** 9 cm; 12 cm; 12 cm; 16 cm. **97. a)** 20 cm; 24 cm. **b)** 18,974 cm; 25,2886 cm. **98.** 31,50 m. **99.** 1 378 704 km. (Bezeichnet man die Länge des Schattens mit x, so verhält sich 1 388 000 : 12750 = 149 000 000 + x : x, oder (abgerundet) 109 : 1 = (149 000 000 + x) : x. **100.** 9180 km. **101.** 42 cm; 504 qcm. **102.** $a = \sqrt{p^2 + h_c^2}$; $b = \sqrt{q^2 + h_c^2}$; $c = p + q$; $F = \frac{1}{2}(p + q)h_c$; $a = 17$; $b = 10$; $c = 21$; $F = 84$; $r = 10\frac{5}{8}$; $\varrho = 3\frac{1}{2}$. **103.** 525 qcm. **104.** 103,92 qm. **105.** 129,03 qm oder 44,176 qm. **106.** $AC = 8\sqrt{3} = 13,856$ m; $AB = 12 + 4\sqrt{3} = 18,928$ m; $BC = 12\sqrt{2} = 16,968$ m. **107.** 5 m u. 9 m; $6\frac{3}{5}$ m u. $8\frac{2}{5}$ m; $7\frac{8}{13}$ m u. $5\frac{5}{13}$ m. **108.** 30 m; 336 qm. **109.** 50 m; 600 qm. **110.** $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

$$\textbf{111. a)}\ p = \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2c};\quad \textbf{b)}\ p = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c};$$

$$q = c - \left(\frac{b^2 - c^2 - a^2}{2c}\right);\ q = c + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}.$$

112. a) 84 qm. **b)** 336 qm. **c)** 21 qm. **d)** 3eck; a) spitzwinklig, denn $15^2 < 13^2 + 14^2$; b) rechtw., denn $50^2 = 14^2 + 48^2$; c) stumpfw., denn $10,5^2 > 8,5^2 + 5^2$. 1. Lösung zu 92a): Nimmt man die 14 m lange Seite als Grundseite an und zieht auf diese die Höhe, so ist, wenn man den einen Abschn. der Grundſ. mit x bezeichnet,

$$\frac{13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2}{140 = 28x \text{ u. s. w.}}$$

2. Lösung:

Inh. $= \frac{1}{4}\sqrt{(13+14+15)(13+14-15)(13+15-14)(14+15-13)}$
$= \frac{1}{4}\sqrt{42 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 16} = 84$ qm.

113. 14 815 qkm. **114.** 16 400 qkm (rund). **115.** 150 qm. Lösung: Bezeichnet man die zu den Höhen 12 m, 15 m und 20 m gehörigen Seiten bezüglich mit x, y und z, so ist I. $x : y = 5 : 4$, also $y = 0{,}8x$; ferner ist II. $x : z = 5 : 3$, also $z = 0{,}6x$, folglich der Inh. $= \frac{1}{4}\sqrt{2{,}4x \cdot 0{,}4x \cdot 0{,}8x \cdot 1{,}2x} = 0{,}24x^2$. Da der Inh. aber auch $= \frac{1}{2} \cdot 12x = 6x$ ist, so ist $0{,}24x^2 = 6x$; $x = 25$; $y = 20$; $z = 15$.

116. 6 m; 7,50 m; 10,50 m; 9,796 qm; 22,041 qm. **117.** $4\frac{2}{3}$ m; $5\frac{1}{3}$ m; 6 m; $12\sqrt{5} = 26{,}832$ qm; $\frac{4}{9} \cdot 12\sqrt{5} = 11{,}925$ qm.

118. 240 qm; 80 m; 26 m; 74 m. **119.** $7\frac{1}{3}$ m; $8\frac{2}{3}$ m; $13\frac{1}{3}$ m; $29\frac{1}{3}$ qm. **120. a)** 264 qm. 1. Lösung: Verlängert man die Mittellinie CD um sich selbst bis E, so ist $\triangle ACE = \triangle ABC = 264$ qm. 2. Lösung: Da in jedem Dreieck die Summe der Quadrate zweier Seiten gleich der Summe aus dem doppelten Quadrate der halben dritten Seite und dem doppelten Quadrate der Querlinie (Transversale) nach ihr ist, so ist, wenn man die dritte Seite mit 2x bezeichnet,

$$2x^2 + 2 \cdot 20^2 = 22^2 + 26^2,$$

$$x = 6\sqrt{5} = 13{,}416, \text{ also } AB = 26{,}832 \text{ m.}$$

b) $AB = 34$. **121.** 19,287 m; $28\sqrt{3} = 48{,}496$ qm. **122.** 34,857 qm. Lösung: Ist der Schnittpunkt der Mittellinien $= M$, so ist $AM = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ m; $BM = 4$ m; folgl. $\triangle ABM = 3\sqrt{15}$, also $\triangle ABC = 9\sqrt{15}$.

123. 16,95 m. Lösung (allgemein): Ist CD die Winkelhalbierende (w_c) und bezeichnet man $AD = x$, $BD = y$, $BC = a$, $AC = b$, so verhält sich $x : y = b : a$, also $x + y : x = a + b : b$, und $x + y : y = a + b : a$; da $x + y = c$ ist, so verhält sich $c : x = a + b : b$ und $c : y = a + b : a$; daraus folgt

$$x = \frac{bc}{a+b}; \quad y = \frac{ac}{a+b}.$$

Beschreibt man um ein $\triangle ABC$ einen Kreis und verlängert CD bis zum Schnitt der Peripherie in E, so ist

$$\triangle ACD \sim \triangle CBE, \text{ folglich } CE : CB = AC : CD,$$

$$\text{d. i. } (w_c + DE) : a = b : w_c, \text{ also } w_c^2 + w_c \cdot DE = ab.$$

$$\text{Nun ist } w_c \cdot DE = xy = \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ac}{a+b}; \text{ demnach}$$

$$w_c^2 + \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ac}{a+b} = ab \text{ und } ab \cdot c^2 = (ab - w_c^2)\,(a+b)^2, \text{ folglich}$$

$$c = \sqrt{\frac{(ab - w_c^2)\,(a+b)^2}{ab}} = (a+b)\sqrt{\frac{ab - w_c^2}{ab}}.$$

Setzt man die gegebenen Werte in diese Gleichung ein, so erhält man

$$c = 25\sqrt{0{,}46} = 25 \cdot 0{,}678.$$

124. AB = 15,982 m od. 2,753 m; Inh. = 59,9325 qm od. 20,6475 qm. 1. Lösung: In jedem Dreieck ist das Rechteck aus zwei Seiten gleich dem Rechteck aus der Höhe auf die dritte Seite und dem Durchm. des umgeschriebenen Kreises. Bezeichnet man die Höhe auf AB mit x, so ist $16x = 120$; $x = 7{,}5$. Aus AC = 12 m, BC = 10 m und der gefundenen Höhe lassen sich die Abschnitte der Grundl. berechnen = 9,3675 m u. 6,6144 m, daher diese selbst gleich der Summe oder Differenz derselben. 2. Lösung: Ist AB = y, so ist $\triangle ABC =$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 7{,}5y = \tfrac{1}{4}\sqrt{(22+y)\,(22-y)\,(y+2)\,(y-2)}$$

$$\text{oder } 15y = \sqrt{(22^2 - y^2)\,(y^2 - 2^2)}$$

$$225y^2 = 488y^2 - 1936 - y^4$$

$$y^4 - 263y^2 = -1936.$$

Setzt man $y^2 = z$, so ist $z^2 - 263z = -1936$ u. s. w.

125. 119,05875 qm. 1. Lösung: Berechne $\frac{1}{3}$ des gegebenen Dreiecks. 2. Lösung: Das aus den Schwerpunktstransversalen gebildete Dreieck ist $\frac{3}{4}$ des gesuchten. 3. Lösung: Es sei t_a (die Mittellinie nach BC) = 12 m, $t_b = 15$ m, $t_c = 18$ m. Bezeichnet man der Reihe nach die Seiten a, b und c mit 2x, 2y und 2z, so ist

$$\text{I. } 2y^2 + 2z^2 - x^2 = 12^2;$$

$$\text{II. } 2x^2 + 2z^2 - y^2 = 15^2;$$

$$\text{III. } 2x^2 + 2y^2 - z^2 = 18^2.$$

Durch Zusammenzählen der Gleichungen erhält man:

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 693 \text{ oder}$$

$$\text{IV. } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 462.$$

Zieht man von IV. der Reihe nach die Gleichungen I, II u. III ab, so erhält man: $x^2 = 106$, $y^2 = 79$, $z^2 = 46$, also

$$x = 10{,}295;\ y = 8{,}888;\ z = 6{,}782.$$

126. 3,50 m. **127.** 20 m oder $6\sqrt{5} = 13{,}416$ m; $10\frac{5}{6}$ m; 3 m.

128. 12 m; 8 m. Lösung: AE = x, dann verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle ADE = 60 : 48 = 5 : 4,$$
$$\triangle ABC : \triangle ADE = 180 : x(24 - x),$$
$$5 : 4 = 180 : x(24 - x);$$
$$x = 12.$$

129. 12 m; $24\sqrt{5} = 53{,}664$ qm. **130.** $b = 13$; $p = 5$; $q = 16$; $F = 126$. **131.** Lösung: ABC sei das gegebene Dreieck, $AB = c$, das von C auf AB gefällte Lot $CD = h_c$, $AE = EB$, $CE = t_c$. Dann ist $DE = \sqrt{t_c^2 - h_c^2}$, $DB = \frac{1}{2}c + \sqrt{t_c^2 - h_c^2}$, $BC = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + t_c^2 + c\sqrt{t_c^2 - h_c^2}}$, $AD = \frac{1}{2}c - \sqrt{t_c^2 - h_c^2}$, $AC = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + t_c^2 - c\sqrt{t_c^2 - h_c^2}}$. Setzt man die gegebenen bestimmten Zahlen ein, so erhält man $DE = 5$, $p = 16$, $q = 10$, $a = 20$, $b = 15{,}62$; $F = 180$; $r = 13{,}017$; $\varrho = 5{,}486$. **132.** $\sqrt{ch}$; $\sqrt{45 \cdot 36} = 40{,}248$. **133. a)** 9,165 cm. **b)** 15,852 cm. **c)** 21,909 cm. **134. a)** 9,8483. **b)** 17,058. **c)** 23,542. **135.** 38,81; 6,19. **136.** Lösung zu **a)**: Bezeichnet man die Katheten mit x und y, so ist, da der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks 210 qcm beträgt,

$$6 = \frac{420}{x + y + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

oder I. $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 70$;

II. $xy = 420$.

Aus I. $\sqrt{x^2 + y^2} = 70 - x - y$;

I quadriert, geordnet und den Wert für xy aus II eingesetzt,

$$140x + 140y = 5740,$$
$$\text{III.}\quad x + y = 41.$$

Aus II und III erhält man:

$$x = 21;$$
$$y = 20.$$

b) und **c)** sind ähnlich zu lösen; man erhält in beiden Fällen $x = 21$; $y = 20$. **137. a)** 7,484 cm; 11,236 cm. **b)** 10,58 cm; 15,87 cm. **c)** 12,96 cm; 19,94 cm. **d)** 23,64 cm; 35,46 cm. **138. a)** 42 cm; 20 cm. **b)** 34,037 cm; 23,937 cm. **c)** 28,983 cm. **139.** Lösung: Ist eine Seite des Quadrats x, so verhält sich

$$c : x = h : (h - x);$$
$$x = \frac{ch}{c + h};\quad x = 9.$$

140. $\frac{ch}{c + h}$; 9,23. **141.** Lösung: Ist die eine Rechtecks. $= x$, die andere y, so ist

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{c} \text{I. } x + y = s, \\ \text{II. } c : x = h : (h - y), \\ \hline x = \dfrac{c(s-h)}{c-h}; \\ y = \dfrac{h(c-s)}{c-h}. \end{array} & \begin{array}{l} x = 20; \\ y = 30. \end{array} \end{array}$$

142. Das Rechteck sei auf die Seite c gelegt; aus den drei Seiten läßt sich die Höhe auf diese Seite berechnen; sie sei $= h$. Bezeichnet man die Rechtecksseiten mit x und y, so ist

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{c} \text{I. } x + y = s, \\ \text{II. } c : x = h : (h - y), \\ \hline x = \dfrac{c(s-h)}{c-h}, \\ y = \dfrac{h(c-s)}{c-h}. \end{array} & \begin{array}{l} (h = 12); \\ x = 14; \\ y = 4. \end{array} \end{array}$$

143. Lösung: Lage des Rechtecks und Bezeichnung wie in voriger Aufgabe.

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{c} \text{I. } x : y = m : n, \\ \text{II. } c : x = h : h - y, \\ \hline x = \dfrac{chm}{cm + hn}; \\ y = \dfrac{chn}{cm + hn}. \end{array} & \begin{array}{l} (h = 12); \\ x = 8{,}4; \\ y = 6{,}3. \end{array} \end{array}$$

144. Lösung: Lage des Rechtecks und Bezeichnung wie in Aufg. 142.

$$\begin{array}{l|l} \begin{array}{l} \text{Dann ist I. } xy = q^2, \\ \qquad\quad \text{II. } c : x = h : h - y \\ \qquad\quad \text{oder } cy + hx = ch, \\ \hline x = \tfrac{1}{2}c \pm \sqrt{\dfrac{c^2}{4} - \dfrac{cq^2}{h}}; \\ y = \tfrac{1}{2}h \pm \sqrt{\dfrac{h^2}{4} - \dfrac{hq^2}{c}}. \end{array} & \begin{array}{l} x_1 = 42; \\ x_2 = 14; \\ y_1 = 3\tfrac{3}{4}; \\ y_2 = 11\tfrac{1}{4}. \end{array} \end{array}$$

145. Die Seiten des Parallelogramms sind x und y.

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & x + y = 36, \\
\text{II.}\quad & 42 - y : y = x : 26 - x, \\
& 42x + 26y = 1092, \\
\hline
y \text{ eingesetzt aus I:}\quad & 42x - 26x = 936, \\
& 16x = 156, \\
& x = 9\tfrac{3}{4}, \\
& y = 26\tfrac{1}{4}.
\end{aligned}$$

§ 3.

1. a) 10,50 m. **b)** 1,95 m. **c)** $3\frac{1}{8}$ m. **2.** 32 cm; 8 cm; 12 cm, **3.** 37 m. **4. a)** 56,25 qm. **b)** 16,20 qm. **5. a)** $100\frac{1}{4}$ qm. **b)** $15\frac{5}{8}$ qm. **c)** 11,22 qm. **d)** 250,50 qm. **6. a)** 1200 qcm. **b)** 1506 qcm. **7.** 66a. **8.** 42 cm. **9. a)** 6 m. **b)** 8,40 m. **10. a)** $\frac{F}{h}$. **b)** $\frac{2Fm}{h(m+n)}$; $\frac{2Fn}{h(m+n)}$; 16 m; 12 m; 20 m. **11.** 6,50 m. 8,50 m. **12.** 12 m. **13.** 9 m; 30 m. **14.** 16 m; 416 qm. **15.** $20 \cdot 5\sqrt{2} = 141{,}40$ qm. **16.** 184,0307 qm. Lösung: Fällt man von C u. D die Senkrechten CE u. DF, so ist $AF = DF = CE = 6\sqrt{2}$. Im $\triangle BEC$ ist $BE = \frac{1}{2}BC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$, also $AB = 15 + 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 28{,}383$ m. **17.** 239,64 qcm. Lösung: Fällt man von C u. D die Senkrechten CE u. DF und setzt $BE = x$, $AF = y$, so ist I. $x + y = 18$; II. $x = y\sqrt{3}$. II in I eingesetzt, giebt: $y + y\sqrt{3} = 18$; $y = 6{,}5886$. **18. a)** 480 qm. **b)** 270 qm. **19.** 75 qcm. **20.** 105 qcm. **21.** 12 cm; 18 cm; 24 cm. **22.** 12 cm; 16 cm; 20 cm. **23.** 150 qcm. **24.** 65,35 qcm. Lösung: Von C aus lege zu BD eine Parallele bis zum Schnitt der Verlängerung der AB in E, dann ist $\triangle ACE$ gleich dem Trapez. **25.** 20 cm; 6 cm. **26.** 552 qcm. **27.** 4200 Stck. **28.** 968 qcm oder 352 qcm. **29.** 3872 qcm. **30.** 320 qm. **31.** 888 qcm; 22,97 cm. **32.** $\frac{2F}{a+c}$. **33.** 538,2 qcm. **34.** $\frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c}\sqrt{\frac{(a-c+b+d)\,(c-a+b+d)}{(a+b-c-d)\,(a+d-b-c)}}$; 480. **35.** 84 qm; 36,968 m. **36.** 252 od. 132 qcm; 66 cm. **37. a)** 150 qcm. **b)** 1368 qcm. **c)** 175 qm. **38.** 1612,80 ℳ. **39. a)** 67,50 m. **b)** 60,372 m. **40.** 18 cm; 30 cm. **41.** 10,35 a. **42.** 585 qm. **43.** 16 cm; 24 cm. **44.** 15 cm; 24 cm. **45.** 54 cm. **46.** 75 qm; 36,15 m. **47.** 25 cm; 1200 qcm; 140 cm. **48.** 36 cm;

40 cm. **49. a)** 384 qcm. **b)** 22,8035 cm; 35,0823 cm; 38 cm. Lösung: Da sich in jedem Sehnenviereck die Ecklinien wie die Summe der Rechtecke der Seiten verhalten, die in deren Endpunkten zusammenstoßen, so verhält sich, wenn man die Ecklinie AC mit x, BD mit y bezeichnet:

I. $x : y = (14 \cdot 38 + 10 \cdot 30) : (30 \cdot 38 + 10 \cdot 14)$ oder
$x : y = 13 : 20$; ferner ist

II. $xy = 800$, da in jedem Sehnenviereck das Rechteck der Ecklinien gleich der Summe der Rechtecke der Gegenseiten ist. Es ergiebt sich aus I u. II: $x = 22{,}8035$, $y = 35{,}0823$. Daraus sind die Dreiecke ABC und ACD = 342 qcm bezw. 42 qcm zu berechnen. Aus dem Inh. des Dreiecks ABC und Seite AB = 38 cm ergiebt sich die von C auf AB gefällte Senkrechte = 18 cm und daraus der Durchm. = 38 cm. **50.** $a = 10$; $b = 5$; $c = 12$; $d = 11$. **51.** 216 qcm. **52.** 4,5 m. **53.** 1440 ℳ.

§ 4.

1. Lösung: AB sei die Seite des gegebenen n-ecks; man erhält die Seite des regelmäßigen 2 n-ecks, wenn man von M, dem Mittelpunkte des Kreises, eine Senkrechte ME auf AB fällt und diese bis zur Peripherie in D verlängert; AD = x ist die Seite des 2 n-ecks. Nun ist

$$ME^2 = r^2 - \frac{s^2}{4}, \text{ folglich}$$

$$ME = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}$$

$$ED = r - \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}, \text{ weil } ED = MD - ME \text{ ist, also}$$

$$ED^2 = r^2 + \tfrac{1}{4}4r^2 - \tfrac{1}{4}s^2 - r\sqrt{4r^2 - s^2};$$

$$\text{da } AD^2 = AE^2 + ED^2 \text{ ist, so ist}$$

$$AD^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + 2r^2 - \tfrac{1}{4}s^2 - r\sqrt{4r^2 - s^2}$$

$$= 2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s^2}, \text{ folglich}$$

$$AD = x = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - s^2}}.$$

2. $s_n = \frac{s}{r}\sqrt{4r^2 - s^2}$. **3. a)** $s_6 = r$. Lösung zu **b)**: Da die Seite des regelmäßigen Sechsecks = r ist, so setze man in die allgemeine Formel r statt s ein und man erhält

$$s_{12} = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{3r^2}} = \sqrt{2r^2 - r^2\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{r^2(2 - \sqrt{3})} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

c) Für s den eben gefundenen Wert $r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ in die allgemeine Formel eingesetzt, giebt

$$s_{24} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

a) 10. b) 5,39. c) 2,85. **4.** $s = r\sqrt{3}$; 17,32. **5.** Lösung: a) $s_4^2 = 2r^2$, folglich $s_4 = r\sqrt{2}$. b) Der für s_4 gefundene Wert in die allgemeine Formel eingesetzt, giebt

$$s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

c) Ebenso erhält man $s_{16} = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. a) 14,14. b) 7,66. c) 4. **6.** Lösung: Bezeichnet man die Seite des regelmäßigen Zehnecks mit x, so verhält sich $r : x = x : r - x$, folglich

$$x^2 = r^2 - rx \text{ oder}$$
$$x^2 + rx = r^2;$$
$$(x + \tfrac{1}{2}r)^2 = \tfrac{5}{4}\sqrt{r^2};$$
$$x + \tfrac{1}{2}r = \frac{r}{2}\sqrt{5};$$
$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Zahlenbeispiel: 12,36.

7. $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Zahlenbeispiel = 11,65. **8.** a) = 6r. b) $12r\sqrt{2-\sqrt{3}}$. c) $24r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$. d) $4r\sqrt{2}$. e) $8r\sqrt{2-\sqrt{2}}$. f) $5r(\sqrt{5}-1$. g) $\frac{5r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. **9.** Lösung: Ist AB die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen n-ecks, also CB die halbe Seite, so findet man die halbe Seite des umschriebenen 2n-ecks, wenn man MC über C bis zum Schnitt der Peripherie in D verlängert und von D eine Berührungslinie an den Kreis legt, bis sie die Verlängerung der MB in E schneidet; $DE = \frac{x}{2}$ ist die gesuchte halbe Seite. Es ist $\triangle DEM \sim \triangle CBM$, folglich $DE : CB = DM : CM$

$$\text{oder } \frac{x}{2} : \frac{s}{2} = r : \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2}$$
$$\text{d. i. } x : s = r : \tfrac{1}{2}\sqrt{4r^2 - s^2};$$

$$\text{folglich} \quad x = \frac{2sr}{\sqrt{4r^2 - s^2}}.$$

10. **a)** $s_6^n = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$; **b)** $s_{12}^n = 2r(2-\sqrt{3})$; **c)** $s_8^n = 2r(\sqrt{2}-1)$. **11.** 2,6334; 63,2016; 1 : 3,16008. **12.** **a)** 3; 3,1058285; 3,1326286; 3,1393502; 3,14110319. **b)** 3,4641019; 3,2153903; 3,1596599; 3,1460862; 3,1427146. **13.** **a)** 1 : 0,288. **b)** 1 : 0,5. **c)** 1 : 0,866. **d)** 1 : 1,207.

14. **a)** $\frac{s}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{s}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$. **c)** $\frac{s}{\sqrt{3}}$. **d)** s. **15.** 1. **a)** $= s$. **b)** $\frac{s}{2}\sqrt{3}$. **c)** $\frac{s}{2}\sqrt{3}$. **d)** $\frac{s\sqrt{3}}{\sqrt{8-4\sqrt{2}}}$. 2. **a)** $r\sqrt{2}$. **b)** $\frac{3r}{2}$. **c)** $\frac{r\cdot\sqrt{3}}{2}$. **d)** $\frac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **16.** **a)** s^2; $0{,}433\,s^2$; $4{,}828\,s^2$; $2{,}598\,s^2$. **b)** $2r^2$; $\frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$; $4r^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$ **17.** **a)** 2,88 cm; 43,3 qcm. **b)** 4,32 cm; 97,425 qcm. **c)** 5,76 cm; 173,2 qcm. **18.** **a)** 8,66 cm; 259,8 qcm. **b)** 34,64 cm; 4156,8 qcm. **19.** 2338,2 qcm. **20.** 483 Stck. **21.** **a)** 1719,6 qcm. **b)** 1344 qcm. **22.** 489,825 qcm. **23.** 64,95 qm; 23,382 qm. **24.** 8256 qcm. **25.** 13,9 cm. **26.** 2,66 m; 2,035 m. **27.** **a)** 346,4 — 259,8 = 86,6 qm. **b)** $1 : \frac{4}{3} = 3 : 4$. **28.** 259,8 + 584,55 + 2250 = 3094,35 qcm. **29.** 11,549 cm; 69,294 cm. Lösung: M sei der Mittelpunkt des Kreises, AB die Seite des Sechsecks. Man lege den Durchmesser CD $\perp$ AB. Durch D lege man an den Kreis eine Berührungslinie bis zum Schnitt der über B verlängerten MB in F. Dann ist DF die halbe Seite des umgeschriebenen regelm. Sechsecks. Bezeichnet man sie mit x, so verhält sich x : 5 = 10 : EM; EM = 8,66 cm, folgl. x = 50 : 8,66 = 5,7745 cm. **30.** **a)** $2r\pi$. **b)** $r^2\pi$. **a)** 22; 44; 66. **b)** 154; 616; 1416. **31.** **a)** $d\pi$. **b)** $\frac{d^2\pi}{4}$. **a)** 31,4; 47,1; 62,8. **b)** 78,5; 176,05; 314. **32.** $a^2 : b^2$. **33.** 298,5 qmm; 397,4 qmm. **34.** **a)** 220 cm. **b)** 226,08 cm. **35.** 2 424 080 km; 935,72 Mill. km. **36.** **a)** 40 035 km. **b)** 37 T. $1\frac{2}{3}$ Std. **37.** **a)** 24,5. **b)** 1336,5 qm. **38.** $d = \frac{U}{\pi}$. $\frac{U^2}{4\pi}$. 40; 1256. **39.** 21 m; 154 m; $160\frac{2}{7}$ m. **40.** 1,54 qm.

41. a) 1962,5 qcm. b) 3140 qcm. c) 7065 qcm. **42.** a) 4239 qcm. b) 1 : 4. c) 1 : 6. **43.** 6,16 ha. **44.** 35 und $23\frac{1}{3}$ Umdrehungen. **45.** a) 70 Umdrehungen. b) 132 m. **46.** a) 31,400 km. b) 78,500 qkm. **47.** 7,219 qkm. **48.** 15 cm. **49.** 7 cm; 11 Zähne. **50.** a) $\frac{r\pi}{3}\cdot$ b) $\frac{r\pi}{4}$; $\frac{r\pi}{6}\cdot$ a) 10,47 cm. b) 7,85 cm. c) 5,23 cm. **51.** $\frac{r\pi n}{180}\cdot$ a) 11 cm. b) 13,2 cm. c) 3,3 cm. **52.** a) 667,250 km. b) 2224,200 km. **53.** 705 km. **54.** 7409,600 km. **55.** a) 137,400 km. b) $149\frac{3}{8}$ km. c) $149\frac{3}{8}$ km. **56.** 8540 km. **57.** a) 8025,500 km. b) 7535 km. **58.** a) 60°. b) 90°. c) 72°. d) 270°. **59.** a) 31,818 cm. b) 47,727 cm. **60.** a) 55 cm. b) 44 cm. **61.** 57°19′30″. **62.** 130 qm (128,74). **63.** 48,125 qm. **64.** 706,5 qcm; 25 : 16. **65.** a) 3,5 cm. b) 11 cm. **66.** a) 78,5 qcm. b) $52\frac{1}{3}$ qcm. c) 39,25 qcm. d) 31,40 qm. e) 188,40 qm. **67.** $154^{0}17\frac{1}{7}'$. **68.** 14 cm; 17,6 cm. **69.** a) 333,78 km. b) 414,59 km. **70.** 19,615 qcm. **71.** a) 88,3125 qcm; 157 qcm; 245,3125 qcm. b) Beide sind gleich = 150 qcm. **72.** Beide sind gleich = 39,25 qcm. **73.** a) Beide sind gleich = 78,5 qcm. b) Beide sind gleich = 50 qcm. c) 28,5 qcm. **74.** Beide sind gleich = 157 qcm. **75.** a) 86 qcm; 228 qcm. b) 1 : 2. **76.** $\sqrt{\pi} : 2$. **77.** a) 132 qcm. b) $4 : \pi$. **78.** 216,8 qcm. **79.** a) 15,7 cm. b) 10 cm. c) $41{,}8\overline{6}$ cm. **80.** 25 cm. **81.** 8 cm. **82.** $r\sqrt{n}$; 2r; 6r; $\frac{1}{3}r$; $r\sqrt{2}$; $r\sqrt{3}$; $r\sqrt{\frac{3}{7}}$. **83.** 9 ℳ. **84.** 7,065 qm. **85.** 10 cm. **86.** 10 cm. **87.** a) $7\sqrt{2} = 9{,}898$ cm. b) $7\sqrt{14} - 14\sqrt{2} =$ 6,396 cm. **88.** 20 cm; 15 cm. **89.** 28 cm; 21 cm. **90.** Beide sind gleich = 392,5 qcm. **91.** 16 cm. **92.** 154 cm. **93.** 40 cm. **94.** a) $9{,}0\overline{3}$ qcm. b) $61{,}3\overline{6}$ qcm. c) 28,5 qcm. d) 3,92 qcm. **95.** 13,564 cm u. 18,086 cm. **96.** 114°39′; 100 qcm. **97.** 245°21′. **98.** $360 : \pi = 114^{0}49'$. **99.** Umf. jeder Figur = Umf. d. Kr. = 94,2 cm; Inh. = 235,5 qcm = $\frac{1}{3}$ Kr. **100.** 139,5 qcm, (r = $6\frac{2}{3}$ cm). **101.** 191,12 qcm. Lösung: Ist die halbe Grundseite = 3x, die Höhe also 4x, so verh. sich $20 - 4x : 3x = 3x : 4x$ oder $20 - 4x : 3x = 3 : 4$, also $9x = 80 - 16x$; $25x = 80$ u. s. w. **102.** 123,3 qcm. b) 4 cm. Lösung zu a): Aus den drei Seiten des Dreiecks läßt sich der Flächeninhalt finden = 84 qcm. Daraus ergiebt sich die Höhe z. B. auf die 14 cm lange Seite = 12 cm. Da in jedem Dreieck das Rechteck aus zwei Seiten gleich dem Rechteck aus der Höhe auf die dritte Seite und dem

Durchm. (d) des umgeschr. Kr. ist, so ist $12\,d = 13 \cdot 15$; $d = 16\frac{1}{4}$ u. s. w. Lösung zu b): Verbindet man den Mittelp. des eingeschr. Kreises mit den Winkelpunkten, so zerlegt man das gegebene Dreieck in 3 Dreiecke, von denen jedes den Halbm. des eingeschr. Kreises zur Höhe hat. Da der Inh. des ersten Dreiecks bekannt ist, läßt sich die Höhe leicht berechnen. **103.** 360 qcm. **104.** 33,466 cm. **105. a)** Summe der Kreise gleich dem gegebenen. **b)** 63,585 qcm; 572,265 qcm; 132,65 qcm; 1193,85 qcm. **106.** 432 qcm. **107.** $a = 32$, $b = 24$. **108.** $a = 30$, $b = 36$. **109. a)** 48; 14. **b)** 30; 40. **c)** 44,78; 22,39. **110.** $s = 22{,}40$. **111.** 8,29. **112.** 6,72 cm. Lösung: Die Seite der Raute $= \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ cm, der Inh. = 336 qcm, folglich die Höhe = 13,44 cm, der Halbmesser $= \frac{1}{2} \cdot 13{,}44 = 6{,}72$ cm. **113.** 26,832 cm. Lösung: Bezeichnet man die Abschnitte einer Seite, in welche diese durch einen Halbm. nach dem Berührungspunkte geteilt wird, mit x und y, so ist $x^2 = 15^2 - 10^2 = 125$; $x = 5\sqrt{5}$; dann verhält sich $5\sqrt{5} : 10 = 10 : y$; $y = \frac{20}{\sqrt{5}}$. **114.** 46,8625 qcm. **115.** 64,48 qcm. Lösung: Die Mittelpunkte der 3 Kreise sind die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Inh. also $= \frac{1}{4} \cdot 40^2 \sqrt{3}$. Inh. eines Kreisausschn. $= \frac{1}{6} \cdot 20^2 \pi$, folgl. der Inh. der gesuchten Figur $= \frac{1}{4} \cdot 40^2 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \cdot 20^2 \pi = 64{,}48$ qcm. **116. a)** 8,28 cm. **b)** 58,96 qcm. **c)** 83,72 qcm. **117.** $\frac{d\pi}{n} + \frac{d\pi}{n} + \frac{d\pi}{n}$. nmal $= d\pi$; $5\pi + 5\pi + 5\pi + 5\pi = 20\pi$; Summe der Umfänge sämtlicher Kreise = dem Umfang des Kreises. **118.** Lösung: Die Abschnitte seien x und y;

daher I. $(r + a)(r - a) = xy$; II. $x : y = m : n$. Aus II. $y = \frac{nx}{m}$; in I. eingesetzt und geordnet: $x = \sqrt{\frac{m}{n}(r^2 - a^2)}$; $y = \sqrt{\frac{n}{m}(r^2 - a^2)}$.	$x = 11$; $y = 15$.

119. Lösung: Der äußere Abschnitt sei x, dann ist

$$2x^2 = (a + r)(a - r) = a^2 - r^2,$$

$x = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 - r^2)}$.	$x = 32{,}4$.

120. Lösung: Die gesuchte Sekante sei $= x$, der äußere Abschnitt derselben $= y$; dann verhält sich

I. $x : y = (m + n) : n$ oder $nx = (m + n)\,y$;

II. $xy = (a + r)(a - r)$
$= a^2 - r^2$.

Aus I: $y = \frac{nx}{m + n}$;

in II eingesetzt: $\frac{nx^2}{m + n} = a^2 - r^2$;

$$x = \sqrt{\frac{(a^2 - r^2)(m + n)}{n}},$$

$$y = \sqrt{\frac{(a^2 - r^2)\,n}{m + n}}.$$

$x = 57{,}965$;
$y = 36{,}228$.

121. Lösung: Sekante $= x$; äußere Abschnitt $= y$; also

I. $(a + r)(a - r) = xy$
oder $a^2 - r^2 = xy$;

II. $x : y = m : n$;

$$x = \sqrt{\frac{m}{n}(a^2 - r^2)};$$

$$y = \sqrt{\frac{n}{m}(a^2 - r^2)}.$$

$x = 54{,}75$;
$y = 32{,}85$.

122. 9 cm; 12 cm. **123.** 28,8 cm; 18 cm; 10,8 cm. **124.** Lösung: Die Abschnitte seien x und y; also

I. $xy = (r + a)(r - a) = r^2 - a^2$;

II. $(x + y)\,x = s^2$ oder $x^2 + xy = s^2$;
da $xy = r^2 - a^2$ ist, so ist
$x^2 = s^2 - r^2 + a^2$,

$$\mathbf{x} = \sqrt{s^2 - r^2 + a^2};$$

$$\mathbf{y} = \frac{r^2 - a^2}{\sqrt{s^2 - r^2 + a^2}}.$$

$x = 12{,}2$;
$y = 14{,}344$.

125. 20 cm; 9 cm. Lösung: Abschnitte der zweiten Sehne x u. y; dann ist I. $x + y = 29$; II. $xy = 12 \cdot 15 = 180$ u. s. w. **126.** 13 cm; 27 cm. **127.** 30 cm. **128.** 17,748 cm; 29,58 cm. **129.** Lösung: $AX = x$, $AY = y$; also

$$\begin{array}{l|l} \text{I. } x:y=m:n, & \\ \text{II. } x^2+y^2=4r^2. & \\ \hline x=\dfrac{2mr}{\sqrt{m^2+n^2}}; & x=24; \\ y=\dfrac{2nr}{\sqrt{m^2+n^2}}. & y=32. \end{array}$$

130. Lösung: $PX = x$, $P'X = y$; dann ist

$$\text{I. } x:r=r:y \text{ oder } xy=r^2,$$
$$\text{II. } x^2+y^2=2r^2+2a^2,$$

$$\begin{array}{l|l} x=\frac{1}{2}(\sqrt{2a^2+4r^2}+a\sqrt{2}), & x=30{,}39. \\ y=\frac{1}{2}(\sqrt{2a^2+4r^2}-a\sqrt{2}). & y=13{,}43. \end{array}$$

131. 30 cm; 6 cm. **132.** 15 cm. **133.** 18 cm; 27 cm. Lösung: Die inneren Abschnitte $= x$ u. y; dann ist

$$\text{I. } x+y=45;$$
$$\text{II. } (x+8)\,8=(y+10)\,10.$$

134. 8 cm; 10 cm; 12 cm. **135.** 18 cm. **136.** 16 cm.
137. Abschnitte der Sehne: 18,85 u. 30,50. **138.** Die Abschnitte der Sehne sind x und $x+4$. Nach dem Sehnensatz:

$$x(x+4)=480 \text{ oder}$$
$$x^2+4x=480;$$
$$(x+2)^2=484;$$
$$x+2=22;$$
$$x=20 \text{ u. } 24.$$

139. 4 cm; 12 cm. **140.** 36 cm; 24 cm; 4,155 cm; 12,467 cm.
141. a) 142,75 km. **b)** 120,5 km. **c)** 335 km (abgerundet). Lösung zu a): Die Aussichtsweite von einem erhöhten Punkte der Erdoberfläche (ohne Berücksichtigung der Strahlenbrechung) wäre der Bogen von dem Standpunkte der Erhöhung bis zum Berührungspunkte der von dem Aussichtspunkte an die Erdoberfläche gelegten Berührungslinie. Da die Erhebung über die Erdoberfläche im Verhältnis zum Durchmesser der Erde eine verschwindend kleine ist, kann man ohne merklichen Fehler für die Aussichtsweite die Berührungslinie setzen. Ist der Halbm. der Erde $=$ 12 750 km, die Berührungslinie $= x$, so ergiebt sich

$$12\,750+1{,}6 : x = x : 1{,}6;$$
$$x^2 = 1{,}6\,(12\,750+1{,}6).$$

142. a) 70,6 m. **b)** 158,8 m. Lösung zu a): Bezeichnet man die gesuchte Höhe mit x, so ergiebt sich

$$12\,750 + x : 30 = 30 : x$$
$$12\,750\,x + x^2 = 900.$$

Da x^2 verschwindend klein ist, kann man ohne erheblichen Fehler setzen:

$$12\,750\,x = 900$$
$$x = 0{,}0706 \text{ km} = 70{,}6 \text{ m}.$$

143. $x = \sqrt{a^2 + r^2} - r$. **a)** 441 m. **b)** 7059 m. **c)** 15882 m.
144. 29,2 cm. **145.** Lösung: Der innere Abschnitt der Sekante sei x, der äußere y. Dann ist

$$\text{I. } xy = ab,$$
$$\text{II. } (x + y) : 2r = 2r : x.$$

Man erhält $x = \sqrt{4r^2 - ab}$,

$$y = \frac{ab}{\sqrt{4r^2 - ab}}.$$

Für das Zahlenbeispiel: $x = 32$; $y = 18$.

146. Lösung: Der innere Abschnitt sei x; dann verhält sich

$$(x + a) : 2r = 2r : x,$$
$$x^2 + ax = 4r^2,$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-a + \sqrt{16r^2 + a^2}.)$$

Abschnitte 40 und 50.

147. Lösung: AB sei der Durchmesser, BC die Verlängerung, AXY die Sekante, AX = x. Dann ist

$$\triangle ABX \sim \triangle ACY,$$
$$2r : x = (x + a) : (2r + b);$$
$$x = \tfrac{1}{2}(-a + \sqrt{16r^2 + 86r + a^2}).$$

$x = 38{,}76.$

148. Lösung: $AD = x$, also $BD = x - 2r$, $CD = x - a$;
dann verhält sich $x : (x - a) = (x - a) : (x - 2r)$,
also $x^2 - 2rx = x^2 + a^2 - 20x$,

$$x = \frac{a^2}{2(a - r)};$$
$$BD = \frac{a^2 - 4ar + 4r^2}{2(a - r)}.$$

$x = 62{,}5$; $BD = 22{,}5$.

§ 5.

1. a) 6 cm. **b)** 13,5 cm. **2.** $6\frac{2}{3}$ cm; $9\frac{1}{3}$ cm. **3.** 6 cm; 8 cm; 10 cm. **4.** $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{3}$. **5.** $\frac{3}{5}$ u. $\frac{2}{5}$. **6.** 1600 ℳ; 600 ℳ; 1400 ℳ. **7.** $\frac{8}{9}$ von AC. **8.** 40 qm; 80 qm. **9.** $\frac{2}{3}$. **10. a)** $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{30}$; $\frac{8}{30}$.

b) 3000 ℳ; 1400 ℳ; 1600 ℳ. **11. a)** 2323,80 qm; 929,52 qm; 1394,28 qm. **b)** 2323,80 qm; 309,84 qm; 1084,44 qm; 929,52 qm. **12.** ADE $= \frac{5}{3}$ ABC; DEF $= \frac{11}{30}$ ABC. **13. a)** 10 cm. **b)** $\frac{2}{3}$. **14.** $\frac{1}{3} =$ 14,43 qcm. **15. a)** In 2, **b)** in 4, **c)** in 4 gleiche Teile. **16. a)** $\frac{1}{4}$; **b)** $\frac{1}{8}$. **17.** $\frac{5}{16}$. **18.** 720 qcm; 107,3 cm. **19.** 2 : 1. **20.** AB in 12 u. 9 m; BC in 9 u. 18 m. **21.** 2880 qm. **22.** 45 u. 95 m. Lösung: Da die drei Seiten des Dreiecks ABD bekannt sind, läßt sich der Inhalt desselben und also auch der Inhalt des Parallelogramms berechnen $= 16\,800$ qm; daraus ergiebt sich die Höhe $= 120$ m. Dann ist der eine Abschn. der Grundseite AB $= \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ m. **23.** 6,465 u. 13,535 cm. Lösung: Die Abschnitte der Quadratseite $= x$ u. y, dann ist I. $x + y = 20$; II. $x^2 + y^2 = 15^2$. **24.** 5,86 cm; 8,28 cm. Lösung: Das an einer Ecke abgeschnittene Stück der Quadratseite $= x$, die Seite des Achtecks $= y$, dann ist I. $2x + y = 20$; II. $2x^2 = y^2$. Aus II folgt: $y = x\sqrt{2}$; diesen Wert in I eingesetzt: $x(2 + \sqrt{2}) =$ 20 u. s. w. **25.** 24,1422 cm. **26.** 64 qcm. **27. a)** 16 cm. **b)** Beide sind gleich $= 120$ qcm. **28.** 120 qcm. **29. a)** 90 qcm; 180 qcm; 270 qcm. **b)** 1 : 2 : 3. **30.** 180 qcm; 270 qcm. **31. a)** 112,5 qcm; 67,5 qcm; 180 qcm. **b)** 1 : 2. **32.** 192 qcm; $9\frac{3}{16}$ qcm; $32\frac{13}{16}$ qcm; $117\frac{3}{16}$ qcm. Lösung: Berechne den Inhalt des Dreiecks, das aus Parallele, Schenkel und Ecklinie gebildet wird $= 42$ qcm. Daraus erhält man die Höhe des Trapezes $= 12$ cm. Da $20^2 > 15^2 + 7^2$ ist, ist der der Diagonale gegenüberliegende Winkel ein stumpfer, also die zweite Parallele größer als die gegebene. Durch Senkrechte von den Endpunkten der gegebenen Parallelen auf die andere enthält man die Abschnitte der letzteren $= \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$; folglich diese selbst $= 25$ cm. Legt man durch den Schnittpunkt der Ecklinien die Senkrechte zwischen die Parallelen, so wird sie im Verhältnis von 25 : 7 geteilt u. s. w. **33.** $\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4q^2 + a^2}$; 15 cm; 5 cm. **34.** $-\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4q^2 + a^2}$; 6 cm. **35.** $x = \frac{an}{m - n}$; 90 cm.

36. Lösung zu **a)**: $AX = x$;

$$x(a - x) = q^2;$$
$$x = \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4q^2});\quad x = 50.$$

Lösung zu **b)**: $BX = x$;

also $x(a + x) = q^2$;

$$x = \tfrac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + 4q^2});$$
$$x = 15{,}678.$$

37. Lösung zu **a)**: AX sei $= x$, also

$$x^2 + (a - x)^2 = q^2;$$
$$x^2 - ax = \frac{q^2 - a^2}{2},$$
$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{2q^2 - a^2}\right).$$

Lösung zu **b)**: $AX = x$; also

$$x^2 + (x - a)^2 = q^2,$$
$$x^2 - ax = \frac{q^2 - a^2}{2};$$
$$x = -\tfrac{1}{2}\left(a - \sqrt{2q^2 - a^2}\right).$$

Zahlenbeispiel: **a)** 20 und 10. **b)** 30 und 20.

38. Lösung zu **a)**: $AX = x$,

also $x^2 - (a - x)^2 = q^2$

$$x = \frac{a^2 + q^2}{2a}.$$

75 und 45.

Lösung zu **b)**: $AX = x$,

also $x^2 - (a - x)^2 = q^2;$

$$x = \frac{a^2 + q^2}{2a}.$$

Zahlenbeispiel: 150; 30. **39. a)** 10 cm. **b)** 5 cm. **40.** Lösung: $CX = x$; also

$$b : x = x : (a - b - x);$$
$$x^2 + bx = ab - b^2;$$
$$x = \tfrac{1}{2}\left(-b \pm \sqrt{b(4a - 3b)}\right).$$

$x_1 = 7{,}32;$
$x_2 = -27{,}32.$

41. a) 18. **b)** 24. **c)** 25. **d)** 45. **42.** $\tfrac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{s^2 - 4m^2}\right)$. 36; 25. **43.** $\tfrac{1}{2}\left(d + \sqrt{d^2 + 4m^2}\right)$. 49; 36. **44.** Lösung: Der eine Abschnitt sei x, die andere Rechtecksseite $= b$, dann ist

$$x(a - x) = ab, \quad x^2 - ax = -ab;$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4ab}\right);$$
$$a - x = \tfrac{1}{2}\left(a - \sqrt{a^2 - 4ab}\right).$$

Determination: $b \overline{\overline{<}} \tfrac{1}{4} a$.

$x = 43{,}416;$
$a - x = 16{,}584.$

45. Lösung: Der eine Abschnitt sei x, die andere Rechtecksseite $= b$, also

$$x^2 + (a - x)^2 = ab,$$
$$x^2 - ax = \frac{a(b - a)}{2},$$
$$x = \tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{a[2b - a]}\right),$$
$$a - x = \tfrac{1}{2}\left(a - \sqrt{a[2b - a]}\right),$$

Determination: $b \overline{\overline{>}} \tfrac{1}{2} a$.

$x = 43{,}416;$
$a - x = 16{,}584.$

46. Lösung: AX sei x, also

$$x^2:(a-x)^2 = m:n$$

oder $x:(a-x) = \sqrt{m}:\sqrt{n},$

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{a(m-\sqrt{mn})}{m-n}. \qquad x = 26{,}968.$$

47. Lösung: $AX = x$, also

$$x^2:(x-a)^2 = m:n$$

oder $x:(x-a) = \sqrt{m}:\sqrt{n}$

$$x = \frac{a\sqrt{m}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} = \frac{a(m-\sqrt{mn})}{m-n}. \qquad x_1 = 326{,}94;\quad x_2 = 33{,}06.$$

48. Lösung: Der größere Abschnitt sei x; dann verhält sich

$$a:x = x:(a-x),$$
$$x^2 + ax = a^2;$$
$$x = \tfrac{1}{2}a(\sqrt{5}-1). \qquad x = 30(\sqrt{5}-1). = \underline{37{,}08.}$$

49. $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$; 37,08. **50.** 12,36 cm. **51.** 19,41 cm. **52.** **a)** 18,54 cm. **b)** 48,54 cm. **53.** $\frac{am}{m+n}$, $\frac{an}{m+n}$, $\frac{an}{m-n}$; $66\frac{2}{3}$, $53\frac{1}{3}$, 480. **54.** 28. **55.** $16\frac{2}{3}$. **56.** 53,09; 21,91. **57.** 75; 25; 150; $\frac{Ra}{R+r}$; $\frac{ra}{R+r}$; $\frac{ra}{R-r}$. **58.** **a)** $\frac{1}{2}(a+b)$. **b)** $\sqrt{ab}$. **c)** $\frac{2ab}{a+b}$. **a)** 65. **b)** 60. **c)** $55\frac{5}{13}$. **59.** $\sqrt{dh}$; 6. **60.** Die kleinere Strecke sei x; dann ist die größere $x+d$. Nach dem Satze: Das geometrische Mittel zweier Zahlen (Strecken) ist auch das geometrische Mittel zwischen dem arithmetischen und dem harmonischen Mittel derselben, folgt

$$\frac{2x+d}{2}:\sqrt{x(x+d)} = \sqrt{x(x+d)}:h,$$

$$x^2 + dx = hx + \frac{dh}{2},$$

$$x^2 + dx - hx = \frac{dh}{2},$$

$$\left(x + \frac{[d-h]}{2}\right)^2 = \frac{dh}{2} + \frac{d^2}{4} - \frac{2dh}{4} + h^2,$$

$$x = \tfrac{1}{2}\left(-\frac{d-h}{2} \pm \sqrt{d^2+h^2}\right);$$ 12; 20. **61.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$; $\frac{h}{\sqrt{2}}$. 14,142; 8,485. **62.** $c\sqrt{\frac{n}{m}}$; $h\sqrt{\frac{n}{m}}$; 54,22; 38,73. **63.** 10,39 cm; 8,66 cm. **64.** **a)** 12 cm; $8\frac{1}{3}$ cm. **b)** $36\sqrt{\frac{1}{3}} = 20{,}7846$ cm; $25\sqrt{\frac{1}{3}} =$ 14,434 cm. **65.** 24,495 cm; 17,32 cm; 2,7525 cm; 3,587 cm;

8,66 cm. **66. a)** 4,042; 5,11. **b)** 6,909; 9,80. **67.** 16,98; 4,96. 4,9497 cm; 16,97 cm; 17,677 cm. **68.** 13,5425 cm; 26,4575 cm; 9,2834 cm. Lösung: Inh. des Dreiecks = 240 qcm Höhe auf AB = 12 cm = CD, folgl. die durch die Höhe erzeugten Abschnitte der Seite AB = 5 cm u. 35 cm. Ist EF die gesuchte Senkrechte (E in AB), und legt man von C nach dem Halbierungspunkte der AB die Gerade CG, so verhält sich $\triangle BEF : \triangle BCD = \overline{BE}^2 : \overline{BD}^2$; ferner verhält sich $\triangle BCG : \triangle BCD = BG : BD$; ist nun $BEF = BCG = \frac{1}{2}ABC$, so muß sich verhalten $\overline{BE}^2 : \overline{BD}^2 = BG : BD$ oder $\overline{BE}^2 : BD = BG : 1$, also $BE = \sqrt{BD \cdot BG} = \sqrt{20 \cdot 35} = 26{,}4575$. **69.** 4,3205 cm; 12 cm; 3,6795 cm; Lösung: Ist EF die erste Senkrechte (E in AC, F in AB, also $\triangle AEF = \frac{1}{6} \triangle ABC$, und legt man von C aus auf AB die Senkrechte CD, so verh. sich $\triangle AEF : \triangle ACD = \overline{AF}^2 : \overline{AD}^2$. Schneidet man $AG = \frac{1}{6}AB$ ab und verbindet C mit G, so verh. sich $\triangle ACG : \triangle ACD = AG : AD$. Ist nun $\triangle AEF = \triangle ACG = \frac{1}{6}\triangle ABC$, so verh. sich $\overline{AF}^2 : \overline{AD}^2 = AG : AD$ oder $\overline{AF}^2 : AD = AG : 1$, also $\overline{AF}^2 = AD \cdot AG$. Da der Inh. des Dreiecks bekannt ist = 42 qcm, so ist CD = 4,2 cm; $AD = \sqrt{7^2 - 4{,}2^2} = 5{,}6$ cm; $AG = \frac{1}{6} \cdot 20 = 3\frac{1}{3}$ cm; folglich $AF = \sqrt{5{,}6 \cdot 3\frac{1}{3}} = 4{,}3205$ cm u. s. w. **70.** 5,304 cm; 51,44 cm; 30,7 cm; 20,7 cm. **71.** 28,875 qcm; $11\frac{2}{3}$ cm; $3\frac{1}{3}$ cm.

Lösung: $\triangle ABC : \triangle DEC = 20^2 : 15^2 = 16 : 9$,

$\triangle ABC - \triangle DEC : \triangle DEC = 7 : 9$,

d. i. Trapez $ABED : \triangle DEC = 7 : 9$.

Ist DX = x, so verh. sich $\triangle CDX : \triangle DEC = x : 15$, folgl. $7 : 9 = x : 15$; $x = 11\frac{2}{3}$. **72.** AC = 1,725 cm und 14,275 cm; BC = 5,275 cm und 6,725 cm. Lösung: DE sei die gesuchte Gerade (D in AC, E in BC). Ist AD = x, BE = y, so ist I. $x + y = 7$. Ferner verhält sich $\triangle ABC : \triangle DEC = 16 \cdot 12 : (16 - x)(12 - y)$, da beide $\measuredangle$ C gemeinsam haben; da sie sich auch wie 2 : 1 verhalten, so ist II. $2(16 - x)(12 - y) = 16 \cdot 12$ u. s. w. **73.** Lösung: Es sei XY = x; dann verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle XYC = c^2 : x^2,$$

$$\triangle ABC : (ABC - XYC) = c^2 : (c^2 - x^2),$$

oder I. $\triangle ABC$: Trapez $ABYX = c^2 : (c^2 - x^2)$;

ebenso II. Trapez $ABYX : XYC = (c^2 - x^2) : x^2$.

$$c^2 : (c^2 - x^2) = (c^2 - x^2) : x^2$$

$$x = \tfrac{1}{2}c(\sqrt{5} - 1).$$

x = 24,102. ABYX = 289,1. XYC = 178,9.

74. Lösung: Ist $XY = x$, so folgt ähnlich wie in voriger Aufgabe:

$$\frac{c^2 : x^2 = x^2 : (c^2 - x^2),}{x^4 + c^2x^2 = c^4.}$$

Setzt man $x^2 = y$, so ist

$$y^2 + c^2y = c^4,$$

Daraus $y = \frac{c^2}{2}(\sqrt{5} - 1)$;

$$x = c\sqrt{\tfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)}.$$

$x = 31{,}44$; $ABYX = 178{,}9$; $XYC = 289{,}1$.

75. Lösung: Die Seite des gesuchten gleichseitigen Dreiecks sei x; dann verhält sich

$$\frac{a^2 : x^2 = 2 : 1,}{x = a\sqrt{\tfrac{1}{2}}.}$$

$x = 21{,}21$.

Ist AXZ das eine abgeschnittene Dreieck, und bezeichnet man AX mit y, dann ist $AZ = a - y$. Da die Dreiecke ABC und AXZ den Winkel A gemeinsam haben, verhält sich

$$\triangle AXZ : \triangle ABC = y(a - y) : a^2;$$

$$3 \cdot \triangle AXZ : \triangle ABC = 3y(a - y) : a^2;$$

da $3 \cdot \triangle AXZ = \frac{1}{2}\triangle ABC$ ist, ist auch

$$3y(a - y) = \tfrac{1}{2}a^2,$$

$$y = \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}}).$$

6,783; 23,217.

76. Lösung: Durch AB und AC ist auch CD gegeben; sie sei gleich h. Ist das von X auf AC gefällte Lot gleich XY, das Lot von X auf BC gleich XZ, so ist $CYXZ = ADXY = BDXZ$. Dann ist $\triangle CXY = \frac{1}{3}\triangle ADC$. Nun ist $\triangle CXY \sim \triangle ADC$, mithin, wenn man CX mit x bezeichnet, $\triangle CXY : \triangle ADC = x^2 : a^2 = 1 : 3$,

$$\frac{3x^2 = a^2,}{x = \tfrac{1}{3}a\sqrt{3}.}$$

$x = 15{,}011$.

77. Lösung: CX sei x; dann verhält sich

$$\triangle ABC : \triangle CXY = \frac{ab : x^2 = 2 : 1,}{x = \tfrac{1}{2}\sqrt{2ab}.}$$

$x = 11{,}402$.

78. Lösung: Man lege von A eine Parallele zu XY, die BC in Z schneidet, dann ist $AZ = AC = b$. Mit dem $\triangle ABC$ ist auch die von A nach BC gelegte Höhe h_a gegeben; aus b und h_a läßt sich CZ berechnen $= 2\sqrt{b^2 - h_a^2}$. Nun verhält sich

$$\text{I.}\quad \triangle ABC : \triangle AZC = a : CZ,$$
$$\text{ferner}\quad \triangle XYC : \triangle AZC = \overline{CY}^2 : \overline{CZ}^2$$
$$\text{oder}\quad 2 \cdot \triangle XYC : \triangle AZC : 2 \cdot \overline{CY}^2 : \overline{CZ}^2,$$
$$\text{d. i. II.}\quad \triangle ABC : \triangle AZC = 2 \cdot \overline{CY}^2 : \overline{CZ}^2.$$
$$\text{Aus I und II folgt:}\quad a : CZ = 2 \cdot \overline{CY}^2 : \overline{CZ}^2$$
$$\text{oder III.}\quad a : 1 = 2 \cdot \overline{CY}^2 : CZ.$$

Bezeichnet man CY mit x und setzt den für CZ gefundenen Wert in III ein, so erhält man

$$x^2 = a\sqrt{b^2 - h_a^2}, \qquad F = 84;$$
$$x = \sqrt{a\sqrt{b^2 - h_a^2}}. \qquad h_a = 11{,}2; \quad x = 9{,}95.$$

Durch die Proportion $AZ : XY = CZ : CY$ läßt sich XY berechnen, da die drei andern Glieder bekannt sind; man erhält

$$XY = \tfrac{1}{2}b\sqrt{\frac{a}{\sqrt{b^2 - h_a^2}}}. \qquad XY = 9{,}7994.$$

79. **a)** $20\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 14{,}14$ cm; $12\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 8{,}484$ cm; **b)** $20\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 16{,}33$ cm; $12\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 9{,}798$ cm. **80.** **a)** 12 cm; $8\tfrac{1}{3}$ cm. **b)** 20,785 cm; 14,434 cm. **c)** 25,4556 cm; 17,6775 cm. **81.** 44,72 cm; 33,54 cm. **82.** **a)** $\sqrt{25^2 + 15^2} = 29{,}155$ cm. **b)** $\sqrt{25^2 - 15^2} = 20$ cm. **83.** 80 qcm; 16,328 cm; 5,3066 cm. **84.** 14,142 cm; 11,3136 cm; 8,485 cm. **85.** 51,96 cm; 31,176 cm; 25,98 cm; 20,784 cm; 843,075 qcm. **86.** 24,74 cm; 7,015 cm; 8,985 cm. Lösung: Verlängert man die beiden nicht parallelen Seiten bis zum Schnitt in G, so ist die Höhe des Dreiecks $ABG = 40$ cm. Die gesuchte Teilungslinie EF sei gleich x, dann verhält sich, wenn AB und CD die Parallelen sind,

$$\triangle ABG : EFG = 30^2 : x^2$$
$$(ABG - EFG) : EFG = (30^2 - x^2) : x^2, \text{ d. i.}$$
$$\text{I. Trpz. } ABFE : \triangle EFG = (30^2 - x^2) : x^2. \text{ Ebenso ergiebt sich}$$
$$\text{II. Trpz. } EFCD : \triangle EFG = (x^2 - 18^2) : x^2$$
$$30^2 - x^2 = x^2 - 18^2 \text{ u. s. w.}$$

87. 155,88 m; 127,28 m; 10,718 m; 12,714 m; 16,568 m. **88.** 12,36 cm; 7,136 cm. **89.** **a)** 14,14 cm. **b)** 11,547 cm; 16,33 cm. **c)** 8,165 cm; 14,14 cm. **90.** **a)** 15,81 cm; 4,19 u. 5,81 cm. **b)** 14,14 cm; 4,14 cm; 3,18 u. 2,68 cm. Lösung zu a): Der Halbm. des teilenden Kreises sei gleich x, dann ist, da der Inhalt des gegebenen Kreisringes = 942 qcm ist, der innere abzuschneidende Ring = 471 =

$(10+x)(x-10)\pi$, folglich $x^2 = 250$ u. s. w. **91.** 12,361 cm.
Lösung: Der gesuchte Halbmesser sei $= x$, dann verhält sich

$$\begin{aligned} 20^2 : (20^2 - x^2) &= (20^2 - x^2) : x^2 \\ 20^4 - 2 \cdot 20^2 x^2 + x^4 &= 20^2 x^2 \\ x^4 - 1200\,x^2 &= -160\,000 \\ x^2 &= z \\ z^2 - 1200\,z &= -160\,000 \\ z &= 1047{,}21 \\ z^1 &= 152{,}79 \\ x &= 32{,}3606 \\ x^1 &= 12{,}361. \end{aligned}$$

92. a) $a\sqrt{2} = 28{,}2842$. **b)** $a\sqrt{3} = 34{,}6408$. **c)** $a\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 14{,}287$. **d)** $a\sqrt{\tfrac{1}{3}} = 11{,}547$. **e)** $a\sqrt{\dfrac{n}{m}} = 18{,}2558$.

§ 6.

1. a) $6a^2$. **b)** a^3. **a)** 6, 24, 54, 96, 150, 216, 294, 384, 486, 600, 864, 1350, 2400 qcm. **b)** 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, 1728, 3375, 8000 ccm. **2. a)** $6a^2$; $6b^2$. **b)** a^3; b^3. **c)** $a^2 : b^2$. **d)** $a^3 : b^3$. **a)** 3456; 7776. **b)** 13 824; 46656. **c)** 4 : 9. **d)** 8 : 27. **3.** 76,56 ℳ. **4.** $\dfrac{O}{\sqrt{6}}$. **a)** 12. **b)** 24. **c)** $5\sqrt{2} = 7{,}07$. **5. a)** $a\sqrt{2}$. **b)** $a\sqrt{3}$. **c)** $\dfrac{a}{2}$. **d)** $\dfrac{a}{2}\sqrt{2}$. **e)** $\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$. **6. a)** $3d^2$. **b)** $\dfrac{d^3}{2\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}d^3\sqrt{\tfrac{1}{2}}$. **a)** 300; **b)** 675; **c)** 1200; **a)** 353,5; **b)** 1193,06; **c)** 2828. **7. a)** $2D^2$. **b)** $\dfrac{D^3}{3\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}D^3\sqrt{\tfrac{1}{3}}$. **8.** $10\sqrt{2} = 14{,}14$ cm. $10\sqrt{3} =$ 17,32 cm. **9.** 6 cm; 9 cm. **10.** 2,5 cm; 3,5 cm; 37,5 qcm; 73,5 qcm. **11.** $\tfrac{1}{2}(k \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}s - k^2})$; 6 u. 9. **12.** 15 cm; 8 cm. **13.** 6 cm. **14.** 12 cm. **15.** 314,68 qcm (Kante $= x$, dann ist $2x^2 = [x+3]^2$). **16.** 1484,6 qcm. Lösung: Ist die Kante $= x$, so ist die Flächeneckline $= x\sqrt{2}$, die Körpereckline $= x\sqrt{3}$, folglich $x\sqrt{3} - x\sqrt{2} = 5$. **17.** $a^2\sqrt{2}$; 1262,6. **18. a)** 42,875 *l*. **b)** 42,875 kg. **19.** 5,12 hl. **20.** 12,528 kg. **21.** 37,969 kg. **22.** 24 cm. **23. a)** 20 cm. **b)** 90 cm. **c)** 15 cm.

d) 45 cm. **24.** 46,416 cm. **25.** $\frac{a^3}{1000} l$, wenn a die Benennung cm hat. **26. a)** 125. **b)** 216. **c)** 512. **d)** 1000. **27. a)** 67,500 kg. **b)** 27 000 ccm. **28.** 6 cm; 9 cm; 216 ccm; 729 ccm. **29.** 6 cm; 8 cm; 216 ccm; 512 ccm. **30.** 6. **31.** 950 Würfel. **32.** 34,500 kg. **33.** $\sqrt[3]{3^3 + 4^3} = 4,4989$ cm (4,5). **34. a)** 6 cm, 8 cm. **b)** 10 cm. **35.** 901,4 ccm. Lösung: Kante $= x$, Ecklinie $= x + 4$; also $2x^2 = (x + 4)^2$. Oder: Kante $= x$, Ecklinie $= x\sqrt{2}$, also $x(\sqrt{2} - 1) = 4$. **36. a)** 4 cm; 6 cm; 64 ccm; 216 ccm. **b)** 2,5 cm; 8 cm; 15,625 ccm; 512 ccm. **37.** 12 cm. **38.** $a\sqrt{n}$; **a)** 14,1421; 17,32; 20. **b)** $a\sqrt[3]{n}$; 12,599; 15,102; 15,97. **39.** $\frac{1}{2}\left(s \pm \sqrt{\frac{4v - s^3}{3s}}\right)$; 5; 7. **a)** 150; 294. **b)** 125,243. **40.** $\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{4v - d^3}{3d}} \pm d\right)$; 15; 9. **41.** 3 cm; 5 cm; 7 cm. **42.** $a^2(3 + \sqrt{3})$; 681,408. Lösung: Der Restkörper wird von 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt. Seite eines Quadrats $= \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; Inhalt $= \frac{1}{2}a^2$. Seite eines gleichseitigen Dreiecks $= \frac{1}{2}a\sqrt{2}$; Inhalt $\frac{1}{8}a^2\sqrt{3}$; also Oberfläche des Restkörpers $= 3a^2\sqrt{} + a^2\sqrt{3} = a^3(3 + \sqrt{3})$.

§ 7.

1. $\sqrt{a^2 + b^2}$; $\sqrt{a^2 + c^2}$; $\sqrt{b^2 + c^2}$; $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. 5; 5,831; 6,403; 7,07. **2. a)** 992 qcm; 1920 ccm. **b)** 1160,5 qcm; 2439,5 ccm. **c)** 1420 qcm; 3250 ccm. **3. a)** 1586,6 qcm; 2165 ccm. **b)** 4600 qcm; 15 000 ccm. **c)** 4980 qcm; 12 000 ccm; **d)** 8078,4 qcm; 51 960 ccm. **4.** $\sqrt{8^2 + 10^2 + 15^2} = 19,723$ cm. **5.** $12\sqrt{5^2 + 9^2} = 123,5$ qcm; $9\sqrt{5^2 + 12^2} = 117$ qcm; $5\sqrt{9^2 + 12^2} = 75$ qcm. **6.** 1056 qcm; 2160 ccm. **7.** 5 cm. **8. a)** 136 cbm. **b)** 175,440 kg. **9.** 5 hl. **10.** 13,125 cbm. **11. a)** 10,35 Raummeter. **b)** 8,28 Festmeter. **12.** $466\frac{2}{3}$ hl. **13.** 675 hl. **14.** 9600 Stück. **15.** 2,40 ℳ. **16. a)** 120. **b)** 1875. **c)** 7680 Würfel. **17.** 13,406 kg. **18.** 1210,950 t. **19. a)** $6\frac{2}{3}$ cm. **b)** 1,20 m. **c)** 1,50 m. **20.** 1,875 m. **21.** 0,625 m. **22.** 0,30 m. **23.** 1,6 m. **24.** 5 cm. **25. a)** 10 cm; 6 cm. **b)** 9 cm; 5 cm. Lösung zu a): Grundk. $= x$, Seitenk. $= y$, also I. $x + y = 16$; II. $x^2 + 2xy = 156$. I quadriert und um II vermindert: III. $x^2 = 100$. **26.** 26,4575 cm;

14,14 cm. **27.** 8,3558 cm; 20,8895 cm. **28.** 7 cm; 24 cm. **29.** 9 cm; 12 cm. Lösung: Grundk. $= 3x$, Seitenk. $= 4x$; dann ist $2(3x+1)^2 + 4(3x+1)(4x+2) - 18x^2 - 48x^2 = 166$ u. s. w. **30.** 10 cm; 16 cm. **31. a)** 6409,2 qcm. **b)** 9000 qcm. **32.** 989,22 qcm. Lösung: Breite $= x$, Höhe $= 20 - x$, also $20 : x = x : (20 - x)$. **33.** 1 000 000 *M*. **34.** 4,676 ccm. **35.** 11,691 t. **36.** 950,5 kg. **37.** 360 ccm. **38.** 960 ccm. **39.** 0,16 cbm. **40.** 1620 ccm. **41.** 1500 ccm. **42.** 5291,5 ccm. **43.** 2100 ccm. **44.** 1620 ccm. **45.** 960 ccm. **46.** 720 ccm. **47.** 324 ccm. **48.** 300 ccm. Lösung: Grundk. $= x$ u. y, Seitenk. $= z$; dann ist

I. $x + y = 11$;	Aus I folgt $y = 11 - x$;
II. $x + z = 15$;	„ II „ $z = 15 - x$;
III. $xy + xz + yz = 140$;	diese Werte in III eingesetzt:

IV. $x(11 - x) + x(15 - x) + (11 - x)(15 - x) = 140$.

49. 6 cm; 8 cm; 15 cm. Lösung: Kanten x, y, z, also I. $x + y = 14$; II. $xy + xz + yz = 258$ oder $xy + z(x + y) = 258$; III. $xyz = 720$. Wert für $x + y$ aus I und Wert für xy aus III in II eingesetzt, giebt IV. $\frac{720}{z} + 14z = 258$ u. s. w. **50. a)** 3 cm; 4 cm; 13 cm. **b)** 144 ccm. Lösung zu a): Grundk. $= x$ u. y, Seitenk. $= z$, also I. $\sqrt{x^2 + y^2} = z - 7$; II. $x^2 + x^2 + z^2 = 169$; III. $xz + yz = 84$. — I quadriert und geordnet: $x^2 + y^2 - z^2 + 14z = 49$. Dies von II subtrahiert: $2z^2 - 14z = 120$ u. s. w. **51.** 4 cm; 6 cm; 9 cm. Lösung: Kanten $= x, y, z$; demnach I. $x + y + z = 19$; II. $xz = y^2$; III. $xyz = 216$. II in III eingesetzt: $y^3 = 216$. **52.** 796 756,5 ccm. **53. a)** 1727,9 ccm. **b)** 4235,9 ccm. **54.** 13 256 ccm. **55.** 10 392 ccm. **56.** 4305,9 ccm. **57.** $2 : \frac{3}{2}\sqrt{3} : \frac{5}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. **58.** $13\frac{8}{9}$ *l* u. $56\frac{8}{9}$ *l*. **59.** 5 cm; 7 cm. **60. a)** 200 ccm; 1600 ccm. **b)** $1^3 : 2^3 = 1 : 8$. **61. a)** 3897 ccm; $13\,152\frac{3}{8}$ ccm. **b)** $1^2 : (\frac{3}{2})^2 = 1 : \frac{9}{4}$. $1^3 : (\frac{3}{2})^3 = 1 : \frac{27}{8}$. **62.** 2400 ccm. **63. a)** 5 cm; 12,5 cm. **b)** $5\sqrt[3]{4} = 7{,}937$ cm; $25\sqrt[3]{4} = 39{,}685$ cm. **64.** $1 : 2\sqrt{2}$. Lösung: Verhalten sich die Oberflächen wie $1 : 2$, so verh. sich die homologen Ausdehnungen wie $\sqrt{1} : \sqrt{2}$; folgl. die Rauminhalte wie $(\sqrt{1})^3 : (\sqrt{2})^3 = 1 : 2\sqrt{2}$. **65.** $1 : \sqrt[3]{4} = 1 : 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. **66.** 5 cm;

8 cm; 10 cm; 16 cm. **67.** **a)** $10\sqrt[3]{3^3+1^3}=30{,}376$ cm; $25\sqrt[3]{3^3+1^3}=75{,}94$ cm. **b)** $10\sqrt[3]{3^3-1^3}=29{,}625$ cm; $25\sqrt[3]{3^3-1^3}=74{,}0625$ cm. **68.** 233,82 cbm. **69.** 35,073 kg. **70.** **a)** 24,14 hl. **b)** 1,357 875 cbm. **71.** 3,875 cbm. **72.** 2500 cbm. **73.** 389,7 ccm. **74.** 1200 ccm. **75.** 2520 ccm. **76.** 20 cm; 25 cm; 30 cm.

§ 8.

1. **a)** 1188; 3080. **b)** 9372; 69 300. **c)** 2198; 7850. **d)** 940,50 qm; 1299,375 cbm. **2.** 4474,50 qcm. **3.** 47,1 qm. **4.** 37,68 ℳ. **5.** $6r^2\pi$; $2r^3\pi$; **a)** 924 qcm; 2156 ccm. **b)** 11 775 qcm; 98 125 ccm. **c)** 1 : 4; 1 : 6. **6.** 392,5 qcm; 588,75 ccm. **7.** 80 cm. **8.** $r=\frac{Mt}{2s\pi}$; 30 cm. **9.** $0{,}7536\,l=\frac{3}{4}\,l$. **10.** $28{,}26\,l$. **11.** 433,125 cbm. **12.** $0{,}385\,l$. **13.** $28\frac{7}{8}$ cbm. **14.** $147\frac{3}{16}\,l$. **15.** **a)** 10,05 ℳ. **b)** 376,8 kg. **16.** $794\frac{1}{16}$ kg. **17.** 8,316 kg. **18.** 3,3912 t. **19.** 0,785 cbm. **20.** 40 312,5 ccm. **21.** 4 Std. $11\frac{1}{5}$ Min. **22.** $462\,l$. **23.** $h=\frac{O-2r^2\pi}{2r\pi}=\frac{O}{2r\pi}-r$. $J=\frac{1}{2}r(O-2r^2\pi)$; 20 cm 14 130 ccm. **24.** **a)** $\frac{1}{6}O$; $\frac{2}{3}O$: 314 qcm; 1256 qcm. **b)** 1 : 4. **25.** **a)** $\frac{3}{2}a^2\pi$; $\frac{1}{4}a^3\pi$; 471 qcm; **b)** $a^2\pi(1+\sqrt{2})$; $\frac{1}{2}a^3\pi$; 757,996 qcm; **26.** 2408 qcm. **27.** 3519,6 qcm. **28.** **a)** 4 : 1. **b)** $4:\pi$. **29.** **a)** $2a^2\pi+2ab\pi=2a\pi(a+b)$; $a^2b\pi$; $2b\pi\,(a+b)$; $ab^2\pi$; 4620; 1380; 19404; 12 936. **b)** Mäntel sind gleich; Grundflächen verhalten sich wie $21^2:14^2=9:4$. **30.** 20 cm; 30 cm. **31.** **a)** 914 qcm. **b)** $1018\frac{2}{3}$ qcm. **32.** **a)** 2068 qcm; 8272 qcm. **b)** 1 : 4. **33.** 360 qcm; 640 qcm. **34.** 25 cm; 50 cm. **35.** **a)** $15\sqrt{2}=21{,}21$ cm. **b)** $15\sqrt{\frac{1}{2}}=10{,}606$ cm. **36.** 14 cm. **37.** Halbm. = 5 cm od. 8,0778 cm; Höhe 15 cm od. 8 cm. Lösung: Die Seiten der Schnittfigur = x u. y, also I. $xy=120$; II. $\sqrt{x^2+y^2}=17$ od. $x^2+y^2=289$. Daraus folgt: $x=15$; $y=8$. Ist die 8 cm lange Seite Sehne in der Grundfläche, so ist der Halbm. derselben $=\sqrt{3^2+4^2}=5$; ist es die 15 cm lange Seite, so ist der Halbm. $=\sqrt{7{,}5^2+3^2}=8{,}0778$. **38.** 433 qcm. **39.** 15 cm; 10 cm. **40.** 16,212 cm. **41.** 10 cm; 14 cm. **42.** **a)** 533,8 qcm od. 1281,12 qcm. **b)** 942 ccm od.

2260,8 ccm. **43. a)** 4804,2 qcm oder 11 530,08 qcm. **b)** 25 434 ccm. **44. a)** 10 047 qcm. **b)** 76 750,36 ccm. Lösung zu a): Ist der Halbm $= x$, so verhält sich $40 : x = x : 40 - x$, folgl. $x^2 + 40x = 1600$; $x = 24{,}72$ cm. **45. a)** 1382 qcm. **b)** 3914,5 cm. **46. a)** 7 cm; **b)** 10 cm. **c)** 1540 ccm. Lösung zu a): Halbm. $= x$, Höhe $= y$; also I. $2xy\pi = 440$; II. $2x\pi - y = 34$. Aus I folgt: $2x\pi = \frac{440}{y}$; aus II: $2x\pi = 34 + y$; folgl. III. $\frac{440}{y} = 34 + y$ u. s. w. **47. a)** 10 cm. **b)** 15 cm; 4710 ccm. **48.** 10 cm; 15 cm; 4710 ccm. Lösung: Halbm. $= x$, Höhe $= y$, demnach

I. $2x^2 \cdot 3{,}14 + 2x \cdot 3{,}14y = 1570$ oder
$x^2 + xy = 250.$
II. $2(x + 5)^2 \cdot 3{,}14 + 2(x + 5)\,3{,}14\,(y - 5) = 2355$ oder
$x^2 + xy + 5x + 5y = 375.$
II—I. $5x + 5y = 125$ oder
III. $x + y = 25.$
I durch III. dividiert: $x = 10$.

49. 10 cm; 15 cm; 4710 ccm. **50.** 4,142 cm; 6,213 cm. Lösung: Ist die Verlängerung des Halbm. $= 2x$, die der Höhe $= 3x$, so ist $2(10 + 2x)\,3{,}14\,(25 + 5x) = 3140$; durch $2 \cdot 3{,}14$ dividiert: $(10 + 2x)(25 + 5x) = 500$ u. s. w. **51.** $\frac{1}{4}d^2(1 + 2\pi)$; $\frac{\frac{1}{2}d^3\sqrt{\frac{1}{2}}}{4\pi}$; 231,792 qcm; 224,8012 ccm.

52. a) $(a^2 + b^2) : (a^2 + c^2) : (b^2 + c^2)$;
b) $(a^2 + b^2)\,c : (a^2 + c^2)\,b : (b^2 + c^2)\,a$;
c) $c\sqrt{a^2 + b^2} : b\sqrt{a^2 + c^2} : a\sqrt{b^2 + c^2}$.

53. 9812,5 ccm. **54.** 102 600 ccm. **55. a)** $a^2(3 + \frac{1}{2}\sqrt{3})$; $\frac{2}{3}a^2\pi(1 + \sqrt{3})$; **b)** $\frac{1}{4}a^3\sqrt{3}$; $\frac{1}{3}a^3\pi$. **56. a)** 1945,33 qcm. **b)** 6218,7 ccm. **57.** 4710 ccm. **58.** 23,245 ccm. **59. a)** $6\frac{2}{3}$ cm. **b)** 7,5 cm. **c)** $13\frac{1}{3}$ cm. **60.** 7 cm. **61. a)** 20 cm. **b)** 20 cm. **c)** 30 cm. **62.** 20 cm. **63.** 125 mal 4,62 *l*; 577,5 *l*. **64.** 477,72 cm. **65.** 17,215 cm. **66.** 37,849 cm. **67. a)** 65,15 cm. **b)** 50,46 cm. **68.** 20 cm. **69.** 17 248 ccm. **70. a)** 2156 ccm. **b)** $6285\frac{5}{7}$ ccm. **71.** 924 qcm. **72. a)** 3696 ccm. **b)** 15 592,5 ccm. **73.** 15 700 ccm. **74.** 9420 ccm. **75.** 14,713 cm; 29,425 cm. **76.** 4710 ccm. **77.** 10 164 ccm; 15 246 ccm; 2 : 3. **78. a)** Die Mäntel sind gleich. **b)** Die Oberflächen verhalten sich wie

1 : 2. **c)** Die Inh. wie 1 : 2. **79. a)** $2\sqrt{2} : 1$. **b)** $2\sqrt[3]{\frac{1}{2}} : 1$. Lösung zu a): Verhalten sich die Oberfl. wie 2 : 1, so verh. sich die Halbmesser wie $\sqrt{2} : 1$, folglich die Rauminh. wie $(\sqrt{2})^3 : 1^3 = 2\sqrt{2} : 1$. **80.** 20 cm; 30 cm. **81.** 1540 ccm. **82.** 21 195 ccm; 9080,85 ccm. **83.** 3850 ccm. **84.** 82 350 ccm. **85.** 10 cm; 30 cm. **86.** 7,5 cm. Lösung: Bezeichnet man die Verkürzung mit x, so ist $8(10 - x)^2\pi = 10^2(8 - x)\pi$ oder $8(10 - x)^2 = 10^2(8 - x)$; die Klammern gelöst und durch 8 geteilt: $x^2 = 7{,}5x$, also $x = 7{,}5$. **87.** 2 Einheiten ($x^2\pi y = 2x\pi y$). **88.** 2395,316 ccm. **89. a)** 1188 qcm; 2673 qcm; 3080 ccm; 10 395 ccm. **b)** 4 : 9; 8 : 27. **90.** 14 cm; 21 cm; 3080 ccm; 10 395 ccm. **91.** 48 *l*; 162 *l*. **92.** $29\frac{7}{16}$ kg; 50 cm; 25 cm; **93.** 5024 ccm. **94. a)** 5 cm; 7,5 cm. **b)** $10\sqrt[3]{4} = 15{,}874$ cm; $15\sqrt[3]{4} = 23{,}811$ cm. **95.** $1 : 2\sqrt{2}$. **96.** $1 : 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. **97.** 14 cm; 21 cm; 24 cm; 36 cm. **98. a)** $\sqrt[3]{8^3 + 12^3} = 13{,}084$ cm; $\sqrt[3]{15^3 + 22{,}5^3} = 24{,}53$ cm. **b)** 10,674 cm; 20,013 cm. **99. a)** 1,9925 cbm; **b)** 1,256 cbm; 0,7065 cbm. **100. a)** 0,4928 cbm. **b)** 0,77 cbm; **c)** 0,2772 cbm. **101.** 1132,5 cbm. **102.** $339\frac{3}{8}$ g. **103.** 32,744 kg. **104.** 80 cm. **105.** 94 200 ccm; 10 cm. **106.** 21 cm; 17,5 cm. **107.** 10 cm; 15 cm; 19 625 ccm. **108.** 5,86 cm. **109.** 5,164 cm. Lösung; Ist der Halbm. des Bleicylinders = x, so ist das Gewicht des ausgehöhlten Korkcylinders $= \frac{1}{4} \cdot 10\pi(20^2 - x^2)$; das Gewicht des Bleicylinders $= 11{,}5 \cdot 10\pi x^2$, und das Gewicht des verdrängten Wassers $= 20^2\pi \cdot 10$; folgl. ist $\frac{1}{4} \cdot 10\pi(20^2 - x^2) + 11{,}5 \cdot 10\pi x^2 = 20^2 \cdot 10 \cdot \pi$. **110.** 66,725 cbm. **111.** $125\frac{1}{8}$ cbm. **112.** 93,832 cbm. **113.** 254,34 cbm. **114.** 75 360 ccm. **115.** 6 m. **116.** 6 m; 10 m. **117. a)** 25 120 ccm. **b)** 1775,984 qcm.

§ 9.

1. 72 qcm. **2.** 3125 qcm. **3.** 66 Platten. **4. a)** 500 ccm. **b)** 32,4 cbm. **c)** $\frac{2}{9}$ cbm. **5.** 6000 ccm. **6. a)** 340 qcm. **b)** 868 qcm. **7. a)** 896 qcm. **b)** 1568 ccm. **8. a)** 286 qcm. **b)** 280 ccm. **9.** 418,3 qcm. **10. a)** $a^2\sqrt{3}$; 692,8 qcm. **b)** $\frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$; $942\frac{2}{3}$ ccm. **11. a)** $2a^2\sqrt{3}$; 2165 qcm. **b)** $\frac{1}{3}a^3\sqrt{2}$; 7365,7 ccm. **12. a)** 67 cm. **b)** 2227,1 ccm. **13.** 25 cm. **14. a)** 21,714 cm. **b)** 76,800 kg. **15.** 0,7794 kg. **16.** 540 ccm. **17.** 3600 ccm. **18.** 7,5 cm. **19.** 31 176 ccm. **20.** 286,6 ccm.

21. 19 235 ccm. **22.** 15 cm; 729 qcm. **23.** 64 ccm. **24.** 12 cm; 16 cm. **b)** 711,84 ccm. **25. a)** 24 cm; 20 cm. **b)** 3072 ccm. **26. a)** 20 cm. **b)** 24 cm. **c)** 3200 ccm. **27.** 12 cm. **28.** 156 qcm. **29. a)** 20 cm. **b)** 3200 ccm. Lösung: Ist die Grundkante $= 2x$, so ist die Seitenhöhe $= \sqrt{x^2 + 24^2}$, die Oberfl. =

$$4x^2 + 4x\sqrt{x^2 + 24^2} = 1440, \text{ also } x\sqrt{x^2 + 24^2} = 360 - x^2.$$

Die Gleichung quadriert: $x^2(x^2 + 24^2) = 360^2 - 720x^2 + x^4$; die Klammer gelöst, x^4 abgezogen und geordnet: $x^2 = 100$. **30.** 896 qcm; 49 qcm. **31.** 471,3 qcm. **32.** 1 : 4. **33.** 15 cm. **34.** 12 cm; 18 cm. **35.** $9557\frac{1}{3}$ ccm. **36.** 400 ccm. Lösung: Grundkante $= 2x$, also Seitenhöhe $= \sqrt{x^2 + 12^2}$, Oberfl. $= 4x^2 + 4x\sqrt{x^2 + 144} = 360$; durch 4 geteilt und x^2 abgezogen: $x\sqrt{x^2 + 144} = 90 - x^2$; die Gleichung quadriert: $x^2(x^2 + 144) = 90^2 + x^4 - 180x^2$; Klammer gelöst, x^4 abgezogen und geordnet: $x^2 = 25$. **37.** 4000 ccm. (Die Eckl. der Grundfl. $= 20\sqrt{2}$, folgl. die Höhe der Schnittfl. = Pyramidenhöhe $= 300\sqrt{2} : 10\sqrt{2} = 30$.) **38.** 860,978 ccm. Lösung: Höhe des Grunddreiecks $= 6\sqrt{3}$, Seite desselben $= 12$ cm; Inh. $= 6^2\sqrt{3}$ qcm; Seitenhöhe $= 24\sqrt{3}$, Höhe der Pyramide =

$$\sqrt{(24\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{1716}.$$

39. 10 080 ccm. **40.** 833,344 ccm. Lösung: Grundkante einer abgeschnittenen Pyramide $= 5\sqrt{2}$, Seitenkante $= 5$ cm, Höhe des Grunddreiecks $= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{6}$, Halbm. des umgeschriebenen Kreises $= \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{6}$, folgl. Höhe einer Pyramide $= \sqrt{5^2 - (\frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{6})^2} = 2{,}8867$ cm. **41.** $8\frac{4}{7}$ cm. Lösung: Ist die Kante des Würfels $= x$, so verhält sich $20 : x = 15 : (15 - x)$. **42.** 249,408 qcm. **43. a)** $\sqrt{2} : 1$. **b)** 2 : 1. **44.** 339,472 qcm. **45. a)** 435,47 qcm. **b)** 9 : 4. **46. a)** 5 cm; 10 cm; 214,95 qcm. **b)** $3\frac{1}{3}$ cm; $6\frac{2}{3}$ cm; 95,53 qcm. **c)** $10\sqrt{\frac{1}{2}} = 7{,}07$ cm; 14,14 cm; 429,9 qcm. **47.** 13,302 cm; 15 cm; 576 qcm. **48.** 8,868 cm; 13,302 cm; 15 cm. **49. a)** 8,868 cm; 10 cm; 13,302 cm; 15 cm; 256 qcm; 576 qcm. **b)** 234,96 ccm; 792,99 ccm **50. a)** 256,31 qcm; 259,8 ccm. **b)** 1 : 4; 1 : 8. **51. a)** 39,685 cm; 1,8245 cm. **b)** 31,498 cm; 15,747 cm. Lösung a): Ist P die vollständige Pyramide, p die Ergänzungspyramide, x die Höhe der letzteren, so verhält sich

$$\begin{array}{l} P:p = 50^3 : x^3 \text{ und} \\ \underline{P:p = \quad 2:1} \\ 50^3 : x^3 = 2:1 \end{array}$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 50^3} = 50\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}.$$

52. 72,112 cm; 18,025 cm. **53.** 15 cm; 25 cm; 1875 ccm; 24 cm; 40 cm; 7680 ccm. Lösung: Verhalten sich die Grundkanten wie 5 : 8, so verh. sich die Inh. wie $5^3 : 8^3 = 125 : 512$; die 9555 ccm bestehen also aus 637 Teilen; 1 Teil = 15 ccm; die erste Pyr. = $125 \cdot 15$ ccm; da die Höhe derselben 25 cm mißt, so ist die Grundfl. = $125 \cdot 15 \cdot 3 : 25 = 15^2$. **54.** 578,125 ccm. **55.** 10,404 cm; 2,7 cm; 1,896 cm; 192,43 qcm; 305,27 qcm. **56.** 400 ccm; 1350 ccm. Lösung: Verhalten sich Grundkante und Höhe wie 5 : 6, so verh. sich Grundkante und Seitenhöhe wie $5 : 6\frac{1}{2}$; ist die Grundkante einer ähnl. Pyr. um 5 cm größer, so ist die Seitenhöhe um $6\frac{1}{2}$ cm größer. Bezeichnet man die Grundkante der ersten mit 5x, also die Seitenhöhe mit $6\frac{1}{2}x$, so ist $(5x + 5)^2 + 2(5x + 5)(6\frac{1}{2}x + 6\frac{1}{2}) - (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 6\frac{1}{2}x = 450$.

§ 10.

1. a) $\frac{1}{3} r^2 \pi h$. **b)** $r^2 \pi + r \pi \sqrt{r^2 + h^2}$. **2.** $r \pi (r + s)$. **b)** $\frac{1}{3} r^2 \pi \sqrt{s^2 - r^2}$. **3. a)** 594 qcm. **b)** 1099 qcm. **c)** 590,525 qm. **4. a)** 1232 ccm. **b)** 8792 ccm. **c)** 1004,8 ccm. **5.** 117,75 qm. **6. a)** 704 qcm. **b)** Nicht lösbar. **7.** 1 : 2. **8. a)** 1232 ccm. **b)** 3768 ccm. **9.** 2887,5 ccm. **10.** 1 : 2. **11. a)** 4 : 1. **b)** 1 : 4. **12.** 7,326 kg. **13.** 67 ℳ. **14. a)** 2093,3 ccm. **b)** 11,219 cbm. **15.** 96 250 ccm. **16. a)** $3r^2\pi$. **b)** $\frac{1}{3}r^3\pi\sqrt{3}$. **17. a)** 1039,5 qcm. **b)** 5887,5 qcm. **c)** 1 : 2. **18.** 113,04 qcm. **19.** 1200 qcm; 942 qcm. **20.** 20 cm. **21.** 25 cm. **22. a)** 28 cm. **b)** 56 cm. **c)** 21 cm. **23.** 704 qcm. **24.** 1130,4 qcm. **25.** 14 cm; 48 cm; 50 cm. **26.** 635,85 qcm. **27.** 28 cm. **28.** 628 qcm. **29.** 23,55 kg. **30.** 21,236 cm. **31.** 542 ccm. **32.** 688 ccm. **33.** 5707,5 g. **34. a)** 2816 qcm. **b)** 9856 ccm. **35.** 3031,98 qcm. **36 a)** 282,6 qcm. **b)** 942 qcm. **c)** 5 : 12. **37) a)** 1884 ccm; **b)** 800,7 qcm. **38.** 623,6 qcm. **39.** 1 : 2. **40.** 1318,8 qcm; 474,768 qcm; 290,1369 qcm. **41.** 135°. **42.** 180°. **43.** 57° 19′ 5″. **44.** 21 cm. **45.** 20 cm; 25 cm. **46.** 7 cm; 12 cm. **47.** 14 cm; 20 cm; 594 qcm. Lösung: Halbm. = x, Seitenlinie = 34 — 2 x, dann verhält sich $x^2 \pi : x \pi (34 - 2x) =$

$7:20$, oder $x:(34-2x)=7:20$, also $x=7$. **48.** 5 cm. Lösung: Höhe $=x$, also Seitenhöhe des gegebenen Kegels $=\sqrt{x^2+12^2}$, Seitenhöhe des vergrößerten Kegels $=\sqrt{(x+4)^2+12^2}$, folglich $12\cdot 3{,}14\sqrt{(x+4)^2+12^2}-12\cdot 3{,}14\sqrt{x^2+12^2}=75{,}36$. Die Gl. durch $12\cdot 3{,}14$ geteilt: $\sqrt{(x+4)^2+12^2}-\sqrt{x^2+12^2}=2$; geordnet und quadriert; $3+2x=\sqrt{x^2+12^2}$; nochmals quadriert und geordnet $x^2+4x=45$. **49.** 9120 ccm. **50.** $5046\frac{2}{3}$ ccm. **51.** $4^2:3^2$. **52.** $\sqrt{20^2+21^2}=29$ cm. **53.** 3140 ccm. **54.** 5275,2 od. 15386 ccm. **55.** 5275,2 qcm; 30144 ccm. **56. a)** $15(15+\sqrt{15^2+8^2}):8(8+\sqrt{15^2+8^2})$. **b)** $15:8$. **57.** 1406,72 ccm. **58.** 1055,4 ccm. **59.** $a^2\pi\sqrt{2}$; $\frac{1}{6}a^3\pi\sqrt{2}$. **60.** $3r^3\pi$. **61.** 9856 ccm. **62.** 7,5 cm; 24 cm. **63.** 2512 ccm. (Verh. sich Halbm. und Höhe wie $5:12$, so verh. sich Halbm. und Seitenlinie wie $5:13$ u. s. w.) **64.** 20 cm; 15 cm. **65.** 1130,4 qcm; 2512 ccm. **66.** 1232 ccm. **67.** 16 cm u. 15 cm oder 12 cm u. $26\frac{2}{3}$ cm. Lösung: Ist der Halbm. $=x$, die Höhe $=y$, so ist die Seitenlinie $=\sqrt{x^2+y^2}$; die Oberfl. =

I. $x^2\pi+x\pi\sqrt{x^2+y^2}=628$; der Rauminh. =

II. $\frac{1}{3}x^2\pi y=1004{,}8$. Beide Gl. durch π geteilt:

III. $x^2+x\sqrt{x^2+y^2}=200$; IV. $x^2y=960$.

In III. x^2 abgez. u. quadriert: $\underline{x^4+x^2y^2=40\,000-400x^2+x^4}$

$$\text{V.}\quad x^2=\frac{40\,000}{y^2+400}.$$

V in IV eingesetzt u. geordnet: $960y^2-40\,000y=-384\,000$.

68. Lösung: Ist der Halbm. $=r$, die Höhe $=h$, so ist die Seitenlinie $=\sqrt{r^2+h^2}$, der Mantel also $=r\pi\sqrt{r^2\pi+h^2}$, der Rauminh. $=\frac{1}{3}r^2\pi h$, folglich ist

$$\frac{1}{3}r^2\pi h=r\pi\sqrt{r^2+h^2}\ \text{oder}$$
$$\frac{1}{3}rh=\sqrt{r^2+h^2};$$
$$\text{quadriert: } \frac{1}{9}r^2h=r^2+h^2$$
$$r=\frac{3h}{\sqrt{(h+3)(h-3)}};\ h=\frac{3r}{\sqrt{(r+3)(r-3)}}.$$

69. $\sqrt{\frac{1}{3}}:\sqrt{\frac{1}{2}}$ od. $\sqrt{\frac{2}{3}}:1$. Lösung: Ist der Halbm. des Kegels $=r$, der des Cylinders $=x$, so ist die Oberfl. des Kegels $=3r^2\pi$, die des Cylinders $=6x^2\pi$, folgl. ist $3r^2=6x^2$, also $x=r\sqrt{\frac{1}{2}}$. Der Rauminhalt des Kegels ist dann $\frac{1}{3}r^3\pi\sqrt{3}$, der des Cylinders $=r^3\pi\sqrt{\frac{1}{2}}$, die Inhalte verh. sich also wie $\frac{1}{3}\sqrt{3}:\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{3}}:\sqrt{\frac{1}{2}}$. **70.** $2\sqrt[3]{\frac{3}{2}}:2$ od.

$1:\sqrt{\frac{2}{3}}$. **71.** 1519,76 ccm. **72.** 875,683 ccm. **73. a)** 594 qcm; 1336,5 qcm. **b)** 4 : 9. **74.** 1099 qcm; 2472,75 qcm. **75. a)** 5 cm; 7,5 cm. **b)** $3\frac{1}{3}$ cm; 5 cm. **c)** $10\sqrt{\frac{1}{2}} = 7{,}07$ cm; $15\sqrt{\frac{1}{2}} = 10{,}605$ cm. **76.** 10 cm; 15 cm; 15 cm; 22,5 cm. **77.** 14 cm; 40 cm; 2376 qcm. **78.** $\sqrt{20^2+30^2} = 36{,}0555$ cm; $\sqrt{24^2+36^2} =$ 43,2666 cm. **79.** 5233,3 ccm; 17 662,5 ccm; 8 : 27. **80. a)** 39,25 ccm. **b)** 132,47 ccm. **81. a)** $\frac{1}{2}r$; $\frac{1}{2}h$. **b)** $r\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$; $h\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$. **82.** 47,622 ccm; 9,24 kg. Lösung: K = vollständiger Kegel, k = Kegelspitze, x = Höhe derselben; dann verhält sich

$$K : k = 60^3 : x^3;$$
$$K : k = 2 : 1$$
$$60^3 : x^3 = 2 : 1$$
$$x = 60\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = 47{,}622.$$

83. 757,57 qcm. **84. a)** 24,96 cm; 6,487 cm; 4,553 cm. **b)** 1256 ccm. **85. a)** 54,51 cm. **b)** 18 840 ccm. **86.** 1324,6875 ccm. **87. a)** 204,038 ccm. **b)** $1:\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ oder $1:\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$. Lösung: Da die Grundfl. des zweiten Kegels den ersten halbiert, so ist der Halbm. der Grundfl. $= 10\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ und seine Höhe $= 15 - 15\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. **88.** 14,58 cm. **89. a)** $\frac{1}{2}a$. **b)** a. **c)** $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$. **d)** $\frac{1}{12}a^3\pi$. **90.** 148,9 cm.

§ 11.

1. a) 225 qcm; 100 qcm. **b)** 600 qcm. **c)** 925 qcm. **2. a)** 450 qcm; 126 qcm. **b)** 480 qcm; 56 qcm. **3.** 10,4 cm; 9,6 cm. **4.** 24 cm. **5.** 1400 qcm. **6.** 998 qcm. **7.** 47,7375 qm. **8.** 1950 qcm. **9. a)** 1850 ccm. **b)** 1875 ccm. **c)** 1837,5 ccm. **10. a)** 0,986 cbm. **b)** 1 cbm. **c)** 0,98 cbm. **11. a)** 0,875 cbm. **b)** 0,9375 cbm. **c)** 0,84375 cbm. **12.** 24,4 *l*. **13.** $261{,}\overline{6}$ cbm. **14.** $2{,}\overline{26}$ cbm. **15. a)** 53 kg. **b)** 54 kg. **c)** 52,5 kg. **16.** 144 189 ccm. **17.** $18\,166\frac{2}{3}$ ccm. **18.** 18 cm. **19.** 228 qcm. **20.** 84 qcm. 30,24 qcm. **21.** 12 cm; 8 cm; 10 cm. **22.** 10 cm; 20 cm; 12 cm. **23.** 12 cm; 9 cm. Lösung: Die Endkanten = x u. y; dann ist

$$\text{I. } x^2 + y^2 + 30(x+y) = 855$$
$$\text{II. } 30(x+y) : x^2 + y^2 = 14 : 5.$$

Aus II folgt: $x^2 + y^2 = \frac{75}{7}(x+y)$; setzt man diesen Wert in I ein, so erh. man: $\frac{75}{7}(x+y) + 30(x+y) = 855$

III. $x + y = 21$;

III in II eingesetzt: IV · $x^2 + y^2 = 225$ u. s. w.

24. 15,81 cm; 6,285 cm; 8,715 cm. **25.** 12 cm; 8 cm. **26.** 44100 ccm. **27.** 8 cm. **28.** **a)** 1950 ccm. **b)** 2160 ccm. **29.** **a)** 1,134 kg. **b)** 1,620 kg. **30.** 272 cbm. **31.** 75 330 ccm. **32.** 1280 ccm. **33.** $\frac{s}{2} \pm \frac{\sqrt{\frac{5}{36}h^2s^2 - V^2}}{\frac{1}{3}h}$. **34.** 36 qcm; 25 qcm; 432 ccm. **35.** $\frac{3V}{G + g + \sqrt{Gg}}$. **36.** 64 qcm; 36 qcm.

37. 100 cm; 50 cm. Lösung: Da das spez. Gew. des Steines 2,5 ist, hat derselbe einen Rauminh. von 2 187 500 : 2,5 = 875 000 ccm. Sind die Grundkanten = x u. y, so ist I. $x - y = 50$; II. $(x^2 + y^2 + xy)\,50 = 875\,000$ oder $x^2 + y^2 + xy = 17500$. I quadriert u. von der vereinfachten II abgezogen, giebt: $3xy = 15\,000$, also III. $xy = 5000$. Aus I u. III lassen sich nun x u. y leicht finden. **38.** **a)** 2912 ccm; 1952 ccm. **b)** $(24^3 - 20^3):(20^3 - 16^3)$. **39.** 7020 ccm. Lösung: Endkanten = x u. y; dann ist

I. $x^2 + y^2 + 30(x+y) = 2304$.

II. $x^2 + y^2 : 30(x+y) = 29 : 35$.

Aus II folgt: $x^2 + y^2 = \frac{30 \cdot 29\,(x+y)}{35}$;

dieser Wert in I eingesetzt, giebt

III. $384(x+y) = 7 \cdot 2304$, also

$x + y = 42$ u. s. w.

40. 11,3832 cm; 24,6168 cm; 40,514 cm. Lösung: PG sei die vervollständigte Pyramide auf der größeren, Pg die Ergänzungspyramide auf der kleineren Grundfläche, PX die Pyramide auf der Schnittfläche, x eine Seite der Schnittfläche. Dann verh. sich $PG : PX = 50^3 : x^3$, folgl.

I. $(PG - PX) : PX = (50^3 - x^3) : x^3$; ferner

$PX : Pg = x^3 : 20^3$, folgl.

II. $(PX - Pg) : PX = (x^3 - 20^3) : x^3$.

Da PG — PX = PX — Pg, so folgt aus I u. II:

$$50^3 - x^3 = x^3 - 20^3$$

$$x^3 = \frac{50^3 + 20^3}{2};\; x = 40{,}514.$$

Die Höhe der vervollständigten Pyramide beträgt 60 cm. Bezeichnet man die Höhe des unteren Stumpfes mit y, so ergiebt sich $50 : 40{,}514 = 60 : (60 - y)$; $y = 11{,}382$. Zusatz: In ähnlicher Weise, wie vorhin die Seite der Schnittebene entwickelt wurde, könnte auch die Höhe der einzelnen Teile unmittelbar gefunden werden. **41.** 42,456 cm; 37,368 cm. Lösung: Der Inh. des ganzen Stumpfes = 98 000 ccm; da 49 000 ccm abgeschnitten werden sollen, ist der Stumpf zu halbieren. **42.** 24,9866 cm. Lösung: PG sei die vervollständigte Pyramide auf der größeren, PG die auf der kleineren Grundfläche, PX die auf der gesuchten Schnittfläche, x eine Seite derselben.

Dann verhält sich $PG : PX : 30^3 : x^3$, also

$$\text{I. } (PG - PX) : PX = (30^3 - x^3) : x^3;$$

ferner $PX : Pg = x^3 : 20^3$, also

$$\text{II. } (PX - Pg) : PX = (x^3 - 20^3) : x^3.$$

Aus I u. II folgt: $(PG - PX) : (PX - PG) = (30^3 - x^3) : (x^3 - 20^3)$; da sich die Teile wie 3 : 2 verhalten sollen, so ist

$$(30^3 - x^3) : (x^3 - 20^3) = 3 : 2;$$

$$x^3 = \frac{2 \cdot 30^3 + 3 \cdot 20^3}{5}.$$

43. $\frac{ab}{a+b}$.

§ 12.

1. 450 qcm. **2.** $(R + r)\pi s$; $[R^2 + r^2 + (R + r)s]\pi$; 5714,8 qcm; 14 820,8 qcm. **3.** 2943,75 qcm. **4.** 13,34 *M*. **5. a)** 86,625 qcm; 878,625 qcm; 235,125 qcm. **b)** 154 qcm; 830,5 qcm; 418 qcm. **6. a)** $8\frac{1}{3}$ cm; $4\frac{2}{3}$ cm. **b)** $6\frac{1}{4}$ cm; $5\frac{1}{4}$ cm. **7.** 9 : 4. **8.** 12,5 cm; 1925 qcm. **9.** 29 cm; 8932 qcm. **10.** 10 cm. **11.** 113,04 qcm. **12. a)** 1,1775 cbm. **b)** 1,15 395 cbm. **c)** 1,1618 cbm. **13. a)** 4,27 825 cbm. **b)** 3,316 625 cbm. **c)** $3{,}63\,71\overline{6}$ cbm. **14.** 53,9 cbm; 59,29 t; 44,678 cbm; 49,1458 t. **15.** $319{,}2\overline{3}$ hl. **16.** 1580 Fuhren. **17.** 15,092 kg. **18.** 15 cm. **19.** 12 474 ccm. **20.** 147,58 cbm. **21.** 13 115 ccm. **22.** 0,3477 cbm. **23. a)** 32 490 ccm. **b)** 15 447 ccm. **24.** 13 847,4 ccm.

25. 2198 ccm. **26.** 554,995 qcm. **27. a)** 7222 qcm. **b)** 5893,78 qcm. **28.** 28 cm; 21 cm; 10 cm. **29.** 40 cm; 30 cm; 10 cm. **30.** 13 cm. **31.** 14 cm; 7 cm. Lösung: Halbm. $= x$ u. y, dann ist

$$\text{I. } x^2 + y^2 + 8(x + y = 1298 : 3\tfrac{1}{7} = 413.$$
$$\text{II. } x + y \qquad = 528 : (3\tfrac{1}{7} \cdot 8) = 21.$$
II in I eingesetzt: $\text{III. } x^2 + y^2 = 245.$

II quadriert: $\text{IV. } (x + y)^2 = 441.$

IV — III $\quad 2xy = 196$ u. s. w.

32. 28 cm; 21 cm. **33.** 3,6 cm; 12,75 cm. Lösung: Ist der Halbmesser der Schnittfl. $= x$, so ist $2x^2 = 15^2 + 10^2$, also $x = 12{,}75$ cm. Die Höhe des vervollständigten Stumpfes beträgt 24 cm. Ist der Abstand der Schnittfl. $= y$, so verhält sich $15 : 24 = 12{,}75 : (24 - y)$. **34.** 12 cm. Lösung: Da sich die Halbm. wie $3 : 2$ verhalten, verhalten sich auch die Abstände der Schnittflächen von den Grundflächen wie $3 : 2$; ist also der gesuchte Halbm. $= x$, so verhält sich $30 : x = 5 : 2$. **35.** 20 cm; 15 cm. **36.** 15 cm; 10 cm; 5966 ccm. **37.** 13 822,8 ccm. **38.** 15 cm; 10 cm; 30 cm. **39.** 10 cm; 5 cm; 1004,8 qcm. **40.** 10 cm; 15 cm. **41.** 18 cm; 10 cm; 15 cm; 17 cm. Lösung: Ist die Seitenlinie $= x$, die Höhe $= y$, so ist

$$\text{I. } x - y = 2; \text{ II. } x^2 - y^2 = 64.$$

II geteilt durch I: $x + y = 32$, also $x = 17$, $y = 15$.

Ist der kleine Halbm. $= z$, der andere $= z + 8$, so ist der Rauminh. $= 5 \cdot 3{,}14\,[(z + 8)^2 + z^2 + z(z + 8)] = 9482{,}8$ u. s. w. **42.** Lösung: Sind R u. r die Halbm. der Endflächen, so ist

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(R^2 + r^2 + Rr) &= 2r^2 \\ \text{oder } \quad R^2 + Rr &= 5r^2 \\ \hline (R + \tfrac{1}{2}r)^2 &= 5\tfrac{1}{4}r^2 \\ R + \tfrac{1}{2}r &= \pm \tfrac{1}{2}r\sqrt{21}. \\ R &= \tfrac{1}{2}r(-1 \pm \sqrt{21}). \end{aligned}$$

43. 19 920,16 ccm. **44.** 7,32 cm; 28 260 ccm. **45.** 1,83 cm. 1884 ccm. **46.** 12,982 cm; 9,686 cm; 14,314 cm. Lösung: Ist KR der vervollständigte Kegel, Kr der Ergänzungskegel, KX der Kegel auf der Schnittfläche, x der Halbm. derselben, so verhält sich

$$KR : KX = 15^3 : x^3 \text{ oder}$$
$$\text{I. } (KR - KX) : KX = (15^3 - x^3 : x^3); \text{ ferner}$$
$$KX : Kr = x^3 : 10^3 \text{ oder}$$

II. $(KX - Kr) : KX = (x^3 - 10^3) : x^3$; folgl.

$$15^3 - x^3 = x^3 - 10^3$$

$$x^3 = \frac{15^3 + 10^3}{2}.$$

47. 12,982 cm; 9,686 cm; 14,314 cm. **48.** 21,476 cm. Lösung (Bezeichnung wie in Aufg. 46):

$KR : KX = 25^3 : x^3$ oder

I. $(KR - KX) : KX = (25^3 - x^3) : x^3$; ferner

$KX : Kr = x^3 : 20^3$ oder

II. $(KX - Kr) : KX = (x^3 - 20^3) : x^3$; da sich die Teile wie 3 : 1 verhalten sollen, so ist

$(25^3 - x^3) : (x^3 - 20^3) = 3 : 1$;

$x^3 = \frac{1}{4}(25^3 + 3 \cdot 20^3)$.

49. 406,56 *l*. **50.** 597,52 *l*. **51.** 2722 hl. **52.** 115,8 cm.

§ 13.

1. $4r^2\pi$; $\frac{4}{3}r^3\pi$. **a)** 616 qcm; $1537\frac{1}{3}$ ccm. **b)** 1256 qcm; $4186\frac{2}{3}$ ccm. **2. a)** $4186\frac{2}{3}$ ccm. **b)** 14 130 ccm. **3. a)** 7850 qcm; **b)** 65 416 ccm. **4.** $4R^2\pi$; $4r^2\pi$; $R^2 : r^2$; 2464 qcm; 5544 qcm; 4 : 9. **5.** $\frac{U^2}{\pi}$; 7850 qcm. **6.** 1256 qcm; 314 qcm; 1 : 2; $1^2 : 2^2 = 1 : 4$. **7. a)** 38 026 656 qkm; 509 646 000 qkm. **b)** 1 082 148 Mill. Kubikkilometer. **8.** 10 cm; 20 cm. **9. a)** 205,2 km. **b)** 1300,7 km. **10.** — **11. a)** 177,17 Stck. **b)** 2657,55 ℳ. **12.** 2464 qcm. **13.** 54,95 kg. **14. a)** $d^2\pi$; $d^2\pi$. **b)** 1 : 1 (sind gleich). **c)** 2 : 3. **d)** 2 : 3. **15. a)** 5887,5 qcm. **b)** 3925 qcm. **c)** 4 : 3 : 2. **16.** 9 cm; 254,34 qcm. **17.** 706,5 qcm. **18.** 24 cm. **19.** $523\frac{1}{3}$ ccm. **20.** 1256 qcm; $4186\frac{2}{3}$ ccm. **21.** 110,4 *l*. **22.** 4,366 kg. **23.** 1 : 1 293 180. **24.** 10 cm; 20 cm; $4186\frac{2}{3}$ ccm; $33\,493\frac{1}{3}$ ccm. **b)** 1 : 2; $1^2 : 2^2 = 1 : 4$; $1^3 : 2^3 = 1 : 8$. **25. a)** 15 cm. **b)** 30 cm. **26.** 745,75 g. **27.** 3 cm. **28. a)** $\sqrt{20^2 + 25^2} = 32{,}016$ cm. **b)** $\sqrt{25^2 - 20^2} = 15$ cm. **29. a)** $a^2\pi$; $\frac{1}{6}a^3\pi$. **b)** $3a^2\pi$; $\frac{1}{2}a^3\pi\sqrt{3}$. **c)** 1 : 3. **d)** $1 : 3\sqrt{3}$. **a)** 1256 qcm; $4186\frac{2}{3}$ ccm. **b)** 3768 qcm; 21 754,6 ccm. **30. a)** 3532,5 ccm. **b)** 1 : 2. **31.** $2093\frac{1}{3}$ ccm. **32.** 6,121 ccm. **33.** 9,885 ccm. **34. a)** $418\frac{2}{3}$ qcm; 942 qcm. **b)** 4 : 9. **c)** $1674\frac{2}{3}$ qcm. **d)** 1 : 4. **35. a)** 346,5 qcm. **b)** $606\frac{3}{8}$ ccm. **36.** 15 cm; 20 cm;

2826 qcm; 5024 qcm. **37.** 10 cm; 15 cm; 1256 qcm; 2826 qcm. **38.** 21 cm; 28 cm; 1386 qcm; 2464 qcm. **39.** 20 cm. **40.** 14 cm. **41.** 4775,94 qcm $= (9^2 + 12^2 + 36^2)\pi$. **42.** 549,5 qcm. **43.** 157 qcm; 7693 qcm. **44.** 4350,784 qcm. **45.** 6280 qcm. **46.** 10 cm. **47.** 11,6 cm; 1456,96 qcm. Lösung: Durchm. $= x$, dann verhält sich $20 : 8 = 8 : (x - 20)$. **48.** 15 cm. **49. a)** 15 cm; 25 cm. **b)** 4003,5 qcm. **50.** 17,182 cm. Lösung: Ist der Abstand der einen Schnittfl. $= 2x$, der der anderen $= 3x$, so ist $4x^2 + 15^2 = 9x^2 + 10^2 = r^2$. **51. a)** 8 cm. **b)** $12\frac{1}{2}$ cm. Lösung: Ist die Höhe des Kugelabschn. $= x$, so ist die Kugelhaube $= 2 \cdot 10 \cdot x\pi$. Bezeichnet man den Halbm. der Schnittfl. mit y, so verhält sich $x : y = y : (20 - x)$, also $y^2 = 20x - x^2$; folglich verhält sich $2 \cdot 10x : (20x - x^2) = 5 : 3$. **52.** 522,34 km; 3312,4 km; 20 895 486 qkm; 132 507 960 qkm. **53.** 1130,4 qcm. **54.** 640,56 qcm. **55.** 5062,8575 qcm. **56.** 260,2 km. Lösung: Da die Kugelhaube 10 Mill. qkm mißt, so ist die Höhe des zugehörigen Kugelabschnittes $= 10\,000\,000 : (2 \cdot 6370 \cdot 3{,}14) = 250$ km (abgerundet); demnach der Abstand der Schnittfl. vom Mittelpunkte $= 6120$ km, folgl. der Halbm. derselben $= \sqrt{6370^2 - 6120^2} = 1767$ km. Bezeichnet man die gesuchte Höhe mit x, den Halbm. der Schnittfl. mit ϱ, die Höhe des Kugelabschn. mit s, den Erdhalbm. mit r, so verhält sich $(x + s) : \varrho = \varrho : (r - s)$, also $x + s = \frac{\varrho^2}{r - s}$; die oben gefundenen Werte eingesetzt, giebt: $x = 260{,}2$.
57. a) $837\frac{1}{3}$ qm. **b)** 199 858 qkm. Lösung: Bezeichnet man die zur Kugelhaube gehörige Höhe mit x, den Halbm. des Grundkr. des Kugelabschn. mit y, so verh. sich $(10 + x) : y = y : (20 - x)$, also

I. $y^2 = (10 + x)(20 - x)$; ferner ist

II. $y^2 = 20^2 - (20 - x)^2$; folgl.

III. $(10 + x)(20 - x) = 20^2 - (20 - x)^2$ u. s. w.

58. a) 11 775 qcm. **b)** 3 : 8. **59.** 15 cm; 376,8 qcm. Lösung: Ist die Entfernung des Punktes vom Mittelpunkte der kleineren Kugel $= x$, so verhält sich $50 + x : x = 30 : 10 = 3 : 1$; $x = 25$. Ist nun die Höhe des zur beleuchteten Fläche gehörigen Kugelabschn. $= y$, der Halbm. der Grundfl. desselben $= z$, so ist

I. $10 - y : z = z : (y + 15)$;

II. $10^2 = (10 - y)^2 + z^2$; daraus folgt

$y = 6$; $z = 9{,}165$.

60. 15 cm; 20 cm. **61. a)** 83,923 cm. **b)** 247,516 cm. **62. a)** 734,76 kg. **b)** 2,9444 qm. **63.** $3413\frac{2}{3}$ ccm. **64.** 5952,9 ccm.

65. $101{,}00\overline{3}$ cbm. **66.** $19\,363\frac{1}{3}$ ccm. **67. a)** 1492,8 g. **b)** 5,082 kg. **68.** $\frac{2}{3}r^3\pi$; $\frac{4}{3}r^3\pi$; $2r^3\pi$; $1:2:3$; $2093\frac{1}{3}$ ccm. $4186\frac{2}{3}$ ccm; 6280 ccm. **69. a)** $4:6:9$. **b)** $4:6:9$. **c)** $9r^2\pi$; $3r^3\pi$; 2826 qcm; 9420 ccm. **70.** 24,04 cm; 18,03 cm. **71. a)** $\sqrt[3]{15^3+20^3}=$ 22,49 cm. **b)** $\sqrt[3]{20^3-15^3}=16{,}66$ cm. **72.** 20 cm; 15 cm. **73.** 14 cm; 21 cm; $11\,498\frac{2}{3}$ ccm; 38 808 ccm. **74.** 10 cm; 15 cm; $4186\frac{2}{3}$ ccm; 14 130 ccm. **75.** 15 cm; 10 cm. **76.** 15 cm. **77.** 1,903 cm. **78.** 3. **79.** 1,845. **80.** 16 344,75 ccm. [Halbm. der inneren Kugel $=x$; dann ist $x^2+12^2=(x+4)^2$.] **81.** 20,02 cm. Lösung: Ist der Halbm. des Hohlraumes $=x$, so ist

$$\frac{4}{3}\pi(21^3-x^3)\,7{,}5=\frac{4}{3}\pi\,21^3;\qquad x=\sqrt[3]{\frac{21^3\cdot 6{,}5}{7{,}5}}=20{,}02.$$

82. 10,7745 cm. Lösung: Ist x der Halbm. des Hohlraumes, so ist

$$\frac{4}{3}\pi\,[(x+2)^3-x^3]\,2{,}5=\frac{4}{3}\pi(x+2)^3$$

oder $2{,}5\,(x+2)^3-2{,}5\,x^3=(x+2)^3$;

auf beiden Seiten $(x+2)^3$ abgezogen, $2{,}5\,x^3$ zugezählt u. durch 2,5 geteilt, giebt

$$x^3=0{,}6\,(x+2)^3;\qquad x=(x+2)\sqrt[3]{0{,}6}.$$

83. a) $m\sqrt{m}:n\sqrt{n}=m:n\sqrt{\frac{n}{m}}$. **b)** $\sqrt[3]{m^2}:\sqrt[3]{n^2}=m:\sqrt[3]{mn^2}$.

a) $1:2\sqrt{2}$. **b)** $1:2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$.

84. a) $r\sqrt[3]{2}$. **b)** $r\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$. **a)** $10\sqrt[3]{2}=12{,}599$ cm. **b)** $10\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=7{,}937$ cm. **85.** 14,434 cm. **86.** 1966,69 ccm. **87.** 1240,49 ccm. **88.** 1234,7 ccm. Lösung: Bezeichnet man die Entfernung der Grundfläche des Kegels vom Kugelmittelpunkte mit x, die Höhe des Kegels also mit $x+10$, den Halbm. der Grundfl. mit y, so ist

$$\text{I. } x^2+y^2=100;\quad \text{II. } y:(x+10)=3:4;$$

daraus folgt: $x=2{,}8$; $y=9{,}6$.

89. Die Oberfl. verhalten sich wie $3:4:9$; die Rauminhalte wie $3\sqrt{\frac{1}{2}}:4:9$, **90.** 4521,6 ccm. **91.** 1887,925 ccm. **92. a)** 7787,2 qcm. **b)** 52752 ccm. **93. a)** $h^2\pi$; $\frac{4}{9}h^2\pi$; 452,16 qcm; 200,96 qcm. **b)** $\frac{1}{9}h^3\pi$; $\frac{4}{81}h^3\pi$; 602,88 ccm; 267,95 ccm. **94.** 33 372,8 ccm. **95. a)** $8r^2\sqrt{\frac{1}{3}}$. **b)** $\frac{8}{9}r^3\sqrt{\frac{1}{3}}$. [**a)** $4r^2\sqrt{3}$. **b)** $\frac{4}{3}r^3$.] **96.** 11,547 cm; 6928,1 ccm. **97. a)** $1:9$. **b)** $1:27$. **98. a)** 157 qcm. **b)** $104\frac{2}{3}$ qcm. **c)** 123,2 qcm. **99.** 25 cm. **100.** 150^0. **101.** $130\frac{5}{6}$ qcm. **102.** 15 cm. **103. a)** 308 ccm. **b)** 1884 ccm. **c)** 157 ccm.

104. 7,5 cm. **105.** 20 cm. **106.** 6 cm; 2826 ccm. Lösung: $x =$ Halbm. des Begrenzungskreises, $y =$ Höhe der Kugelhaube, dann ist

$$\text{I. } 2 \cdot 15\pi y + 15\pi x = 1130{,}4; \quad \text{II. } y : x = x : 2 \cdot 15 - y.$$

107. 2070,45 ccm. **108.** 25 cm; 15 cm. **109.** a) 14 130 ccm; b) 2355 qcm. **110.** 14 243,04 ccm = 14,2 *l*. **111.** 15 cm; $3663\frac{1}{3}$ ccm. **112.** 8 cm; 2279,6 ccm. **113.** 20 cm; 15 cm. **114.** 4596,96 ccm. **115.** 12 cm; 12,166 cm. **116.** 12 cm; 9 cm. **117.** $10\sqrt{3}$ cm; 30 cm. Lösung: Halbm. des Begrenzungskr. $= x$, Höhe des Abschnitts $= y$, dann ist I. $2 \cdot 20y\pi = 4x^2\pi$ oder $10y = x^2$; ferner ist II. $y : x = x : (40 - y)$ oder $40y^2 - y^2 = x$ u. s. w.

118. 2,417 cm. Lösung: Ist die Höhe des Abschnitts $= x$, so ist

$$\tfrac{2}{3}10^2\pi x = 3x^2\pi(10 - \tfrac{1}{3}x), \text{ folgl. } 3x^2 - 90x = -200.$$

119. 4 cm; 16 cm; $435{,}41\overline{3}$ ccm; $3751{,}25\overline{3}$ ccm. **120.** 39,37 cbm. Lösung: Der Halbm. der zum äußeren Abschnitte gehörigen Kugel $= \dfrac{4^2 + 2{,}5^2}{2 \cdot 2{,}5} = 4{,}45$ m; folgl. der Halbm. der inneren Kugel $= 3{,}7$ m; Höhe der inneren Kugelhaube $= 1{,}75$ m, Halbm. des Begrenzungskr. des inneren Kugelabschn. $= \sqrt{2 \cdot 3{,}7 \cdot 1{,}75 - 1{,}75^2} = 3{,}144$ m. Daraus läßt sich der Inh. der beiden Kugelabschnitte und der Inh. des Gewölbes berechnen. **121.** 155,6 cbm. Lösung: Es sei die Entfernung der Grundfl. vom Mittelp. der zugehörigen Kugel $= x$, der Halbm. der inneren Kugel $= y$, der der äußeren $= z$, dann ist

$$\text{I. } z^2 = 6^2 + x^2; \quad \text{II. } y^2 = 5^2 + x^2; \quad \text{III. } y = 4 + x.$$

Aus II u. III folgt: $x = 1{,}125$; $y = 5{,}125$, also $z = 6{,}1046$.

122. 20 m; 21,214 m; 487,87 cbm. **123.** 0,896. **124.** Cylinder = 277 497 ccm; ein Kugelabschn. = 30 406 ccm; die Kugelrinde = 175 024 ccm. **125.** a) 7686,72 ccm. b) 3504,24 ccm. **126.** 25 cm. **127.** 3259,32 ccm. **128.** 8 cm. **129.** 3 cm; 6 cm; 15 cm. **130.** 11,0497 cm; 0,9503 cm. Lösung: Sind R u. r die Halbm. der Schnittflächen, x der Abstand der einen, so ist

$$\tfrac{1}{6} \cdot 12\pi(3R^2 + 3r^2 + 12^2) = \tfrac{2}{3} \cdot 15^3\pi \text{ oder}$$

$$\begin{array}{rll}
\text{I.} & R^2 + r^2 & = 327; \text{ ferner ist} \\
\text{II.} & R^2 + x^2 & = 225; \\
\hline
\text{III.} & r^2 - x^2 & = 102; \text{ ebenso ist} \\
\text{IV.} & (12 - x)^2 + r^2 & = 225; \\
\text{IV} - \text{III:} & (12 - x)^2 + x^2 & = 123; \\
 & x_1 & = 11{,}0497; \\
 & x_2 & = 0{,}9503.
\end{array}$$

131. $13\,606\frac{2}{3}$ ccm oder 91 562,4 ccm. **132.** 12 cm; 10,66. **133.** 2355 ccm. **134.** 15 cm. **135.** 10 cm; $523\frac{1}{3}$ ccm. **136.** $435\frac{1}{9}$ ccm. **137.** 15 cm.

§ 14.

1. 8000 ccm. **2.** 9420 ccm. **3.** 14 750 ccm. **4. a)** 5000 ccm. **b)** 3500 ccm. **5.** 5000 ccm. **6.** 720 ccm. **7.** 0,9; 16,875 t. **8.** 0,2 cbm. **9.** Z. = 20 ccm; H. = 120 ccm. Spezif. Gew. 7 bezw. 0,7. **10.** $1730\frac{10}{13}$ g. **11.** 158,4 g. **12.** 57 g; 21 g; 5 ccm. **13.** 36,500 kg Zinn; 5,750 kg Blei. **14.** 63,360 kg Z.; 253,440 kg K.

§ 15.

1. —. **2.** —. **3. a)** $O = 8^2\pi^2$; $J = 4r^3\pi^2$. **b)** $O = 12r^2\pi^2$; $J = 6r^3\pi^2$. **c)** $O = 16r^2\pi^2$; $J = 8r^3\pi^2$. **4. a)** $4r^2\pi^2$. **b)** $2r^3\pi^2$. **5. a)** $O = \frac{2}{3}a^2\pi\sqrt{3}$. **b)** $J = \frac{1}{4}a^3\pi$. **6. a)** $O = 2a^2\pi\sqrt{3}$. **b)** $J = \frac{1}{2}a^3\pi$. **7. a)** $O = 5a^2\pi\sqrt{3}$; $J = \frac{3}{4}a^3\pi$. **b)** $O = 4a^2\pi\sqrt{3}$; $J = a^3\pi$. **8. a)** $ab^2\pi$; **b)** $a^2b\pi$. **9. a)** $a^3\pi$; **b)** $\frac{1}{3}a^3\pi\sqrt{2}$; **c)** $a^3\pi\sqrt{2}$. **10.** $2abd\pi$. **11.** $\frac{2a^2b^2\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\frac{9}{2}a^3\pi$. **12. a)** $4\frac{1}{2}a^3\pi$. **b)** $a^3\pi$. **c)** $3a^3\pi\sqrt{3}$. **13.** Der Schwerpunkt des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks liegt in der Höhe auf der Hypotenuse und ist von derselben um $\frac{1}{3}h_c$ entfernt; mithin Schwerpunktsweg $= 2\pi(14 - \frac{1}{3}h_c) = 2\pi . 12{,}822$. Rauminhalt des Rotationskörpers $= 1005{,}7$ ccm; Gewicht des eisernen Ringkörpers $= 7{,}549$ kg.

14. —. **15.** 1) Der Schnittpunkt ist von der Kathete a um $\frac{1}{3}b$ und von der Kathete b um $\frac{1}{3}a$ entfernt; es ist der Schnittpunkt der in diesen Entfernungen zu a und b gelegten Parallelen. 2) Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes von der Kathete a mit x, so ist der Rauminhalt des Rotationskörpers $ab\pi x$; berechnet man den Rotationskörper als Kegel, so ist der Inhalt $\frac{ab^2\pi}{3}$; mithin $ab\pi x = \frac{ab^2\pi}{3}$; $x = \frac{1}{3}b$.

16. Der Schwerpunkt des Halbkreisbogens liegt auf dem halbierenden Halbmesser. Bezeichnet man die Entfernung des Schwerpunktes des Halbkreisbogens von dem Mittelpunkt desselben mit x, so entsteht durch Rotation eine Kugel, deren Oberfläche $O = 2xr\pi^2$ ist. $O = 4r^2\pi$; folglich $x = \frac{2r}{\pi}$. **17.** $\frac{1}{4}a^2\pi x\sqrt{3} = \frac{1}{24}a^3\pi x\sqrt{3}$; $x = \frac{1}{6}a$.

Druck von Frankenstein & Wagner, Leipzig.

Kamblys Elementar-Mathematik.

Bisherige Verbreitung: Rund 750000 Exemplare.
In 4 Teilen. Mit zahlreichen Figuren.

Unveränderte Ausgaben des Kambly.

Teil I. **Arithmetik und Algebra.** 37. Auflage. Geb. 1,70 *M.*
Teil II. **Planimetrie.** 119.—123. Auflage. Geb. 1,70 *M.*
Teil III. **Ebene und sphärische Trigonometrie.** 24. Auflage. Geb. 1,55 *M.*
Teil IV. **Stereometrie.** 26. Auflage. Geb. 1,55 *M.*

Die neben die **weiter erscheinenden, unveränderten** Ausgaben von **Kamblys Mathematik** getretenen **Umarbeitungen** (siehe unten) liegen **abgeschlossen** vor.

Bezüglich der **Planimetrie** sei bemerkt, daß zur Erleichterung des Überganges von der unveränderten Ausgabe zu der völligen Umarbeitung eine von Prof. H. Roeder **durchgesehene** Ausgabe (siehe unten 100. Aufl.) veröffentlicht worden ist.

Neue Formen des Kambly,

bearbeitet durch Direktor Dr. **H. Langguth** und Prof. **H. Roeder.**

Teil I. **Kambly-Langguth, Arithmetik und Algebra.** Neubearbeitete Ausgabe der Arithmetik und Algebra von Kambly.

a. Ausgabe für Gymnasien. 36. Auflage. (3. Aufl. der Neubearb.) Geb. 1,65 *M.*
b. Ausgabe für Realgymnasien, Oberreal- und Realschulen. 36. Auflage. (2. Auflage der Neubearbeitung.) Geb. 2 *M.*

☛ Eine neue Aufgabensammlung, bearbeitet im Anschluß an die Arithmetik von Kambly-Langguth, aus der Feder des Prof. Dr. Th. Wimmenauer, vgl. die Anzeige auf der nächsten Seite.

Teil II. **Kambly-Roeder, Planimetrie.** Vollständig nach den preußischen Lehrplänen von 1892 **umgearbeitete** Ausgabe der Planimetrie von Kambly. Lehraufgabe der Quarta bis Unter-Sekunda. Mit Übungsaufgaben und 2 Anhängen: Trigonometrische und stereometrische Lehraufgabe der Unter-Sekunda. 6.—9. Auflage. (115.—118. der Kamblyschen Planimetrie.) Geb. 1,90 *M.*

[II. **Kambly, Planimetrie, durchgesehen von H. Roeder.** Mit Übungsaufgaben und zwei Anhängen: Trigonometrische und stereometrische Lehraufgabe der Unter-Sekunda. 100. Aufl. (Erste von H. Roeder durchgesehene Ausgabe.) 4. Abdruck. Geb. 2 *M.* Siehe oben.]

Teil III. **Kambly-Roeder, Trigonometrie.** Vollständig nach den preußischen Lehrplänen von 1892 **umgearbeitete** Ausgabe der Trigonometrie von Kambly. Lehraufgabe der Ober-Sekunda und der Prima. Unter Voranstellung der planimetrischen Lehraufgabe der Ober-Sekunda. Mit Ubungsaufgaben. 2. Aufl. (25. der Kamblyschen Trigonometrie). Geb. 2 *M.*

Teil IV. **Kambly-Roeder, Stereometrie und sphärische Trigonometrie.** Vollständig nach den preuß. Lehrplänen von 1892 **umgearbeitete** Ausgabe der Stereometrie und der sphärischen Trigonometrie von Kambly. Lehraufgabe der Prima. Mit Übungsaufgaben und einem Anhange: Der Koordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. 2. Aufl. (27. der Kamblyschen Stereometrie). Geb. 2 *M.*

Ergänzungen zu Kamblys Mathematik von Prof. H. Roeder.

Der Koordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der **Kegelschnitte.** Zum Gebrauche an Gymnasien nach den preußischen Lehrplänen von 1892 bearbeitet. Mit 36 Figuren. Sonder-Abdruck aus Kambly-Roeder, Stereometrie. Umarbeitung (s. oben). Steif geh. 60 *Pf.*

Trigonometrische und stereometrische Lehraufgabe der Unter-Sekunda. Sonder-Abdruck aus den neuen Formen der Kamblyschen Planim. (s. oben). 2. Aufl. Steif geh. 60 *Pf.*

Lehrsätze und Aufgaben aus der Planimetrie. 2., verbesserte Aufl. Geb. 1 *M.*

Aufgaben aus der ebenen Trigonometrie. 1,35 *M.* — **Auflösungen** hierzu. Steif geh. 1,25 *M.*

Hilfsbücher für den Volksschulunterricht.

* Allgemeines. *

Bock, Ed., Geh. Reg.- u. Schulrat, **Lehrbuch des Schulunterrichts** mit Berücksichtigung des Allerhöchsten Erlasses vom 1. Mai 1889. 5 M.

Franckes Instruktion für die Präzeptoren, was sie bei der Disziplin wohl zu beachten, übersichtlich geordnet und mit Anmerkungen versehen von Reg.- u. Schulrat J. Romeiks. 50 Pf.

Kloesel, Carl, Reg.- u. Schulrat, **Erziehungs- und Unterrichtslehre.**
I. Teil: Die leibliche Erziehung. 1,60 M.; Lwdbd. 2 M.
II. Teil: Die geistige Erziehung und der Unterricht. 3 M.; Lwdbd. 3,50 M.
Ein III. Teil wird das System der Unterrichtslehre und die besondere Methodik behandeln und soll Ende des Jahres 1900 zur Veröffentlichung kommen.

Koenigk, Herm., Geh. Reg.- u. Schulrat, **Ratgeber für Schulinspektoren.** Die Volksschule, ihr Aeußeres, ihre Arbeit und ihre Beaufsichtigung. 50 Pf.

Luthers pädagogische Schriften für Seminaristen und Lehrer ausgewählt und zusammengestellt von A. Moldehn, Prov.-Schulrat. 2., durchgesehene Auflage. 60 Pf.

Maaß, B., Reg.- u. Schulrat, **Die Psychologie in ihrer Anwendung auf die Schulpraxis.** 8., stereotypierte Auflage. Kart. 1 M.

Sander, F., Reg.- u. Schulrat, **Lexikon der Pädagogik.** Ein Handbuch für Lehrer und Erzieher, enthaltend das Ganze des Unterrichts- und Erziehungswesens in kurzer, alphabetisch geordneter Uebersicht. 2., durchgesehene und vermehrte Auflage. Lwdbd. 6 M.

Schulze, G., Reg.- u. Schulrat, **Grundriß der Volksschul-Pädagogik**, vornehmlich für Seminaristen und Lehrer. Drei Teile.
I. Teil: Geschichte der Volksschul-Pädagogik. 7. Auflage. 1,20 M.; Lwdbd. 1,60 M.
II. Teil: System der Volksschul-Pädagogik. 4. Auflage. 1,20 M.; Lwdbd. 1,60 M.
III. Teil: Praxis der Volksschul-Pädagogik. 3. Auflage. 1,20 M.; Lwdbd. 1,60 M.

* Lehrerbildungswesen. *

Bestimmungen, Die Allgemeinen, des Königlich preußischen Ministers der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten vom 15. Oktober 1872, betr. das Volksschul-, Präparanden- u. Seminar-Wesen, nebst den Prüfungs-Ordnungen für Volksschul-Lehrer und -Lehrerinnen, durch den Hauptinhalt der wichtigsten später erlassenen Ministerial-Verfügungen erläutert. Von **E. Sperber**, Geh. Reg.- u. Schulrat. 4. Auflage, ergänzt bis 1. Januar 1899. Kart. 2 M.

Förster, Ed., Schulrat u. Sem.-Dir., **Kurze Methodik des Elementarunterrichts** auf Grund der „Allgemeinen Bestimmungen.“ 3., vermehrte und verbesserte Aufl. Lwdb. 2,25 M.

Friese, Fr., Prov.-Schulrat, **Vorbildung und Fortbildung der Volksschullehrer in Preußen.** 2., verbesserte Auflage. 2,25 M.

— **Die zweite Volksschullehrerprüfung.** Eine Handreichung für Prüfende und Prüflinge. 2., verbesserte und vermehrte Auflage. 1,80 M.

Rzesnitzek, Kreisschulinspektor, **Kurzer Wegweiser für den Unterricht in unsern Volksschulen.** Mit besonderer Berücksichtigung zweisprachiger Verhältnisse. Kart. 80 Pf.

* Lehrerbesoldungsgesetz. *

Das Lehrereinkommen in Preußen nach dem Gesetze vom 3. März 1897. Ein Ratgeber für Lehrer und Lehrerinnen sowie für Schulbehörden von Schulrat Dr. **Robels**, Kreisschulinspektor, Mitglied der Kgl. Regierung zu Sigmaringen. **3. Auflage**, erweitert durch einen Nachtrag der seit Erlaß des Besoldungsgesetzes dazu ergangenen amtlichen Erläuterungen, Ergänzungen u. s. w. 60 Pf.

* Litteraturgeschichte. *

Cyranka, Dr. L., Sem.-Dir., **Wiederholungsbüchlein für den Unterricht in der Litteraturkunde** nebst einem Abriß der deutschen Poetik und Metrik. Steif geh. 60 Pf.

Heilmann, Dr. K., Sem.-Dir., **Geschichte der deutschen Nationallitteratur**, nebst einem Abriß der deutschen Poetik. 3., verbesserte Auflage.
Ausgabe A: Ohne Abbildungen. Lwdbd. 2 M. — **Ausgabe B:** Auf Velinpapier gedruckt und mit 30 Dichterporträts ausgestattet. In Geschenkband 3 M.

Hilfsbücher für den Volksschulunterricht.

* Geographie. *

Kerp, Heinrich, Gymnasiallehrer, **Führer bei dem Unterrichte in der Heimatkunde.** Nach begründender Methode und mit vorwiegender Betrachtung des Kulturbildes der Heimat. Mit 10 Zeichnungen und Skizzen. 2., erweiterte Auflage. 2,25 ℳ.

Schneiderwirth, Herm., Sem.-Lehrer, **Der geographische Unterricht auf der Mittelstufe,** in schulgemäßer Form für die Hand des Lehrers bearbeitet. Mit 9 Kartenskizzen. 1 ℳ.

Ziesemer, Joh., Sem.-Lehrer, **Kleine mathematische Geographie.** 4., verbesserte Auflage. Mit 35 in den Text gedruckten Figuren. 80 ₰.

* Gesang. *

Baumert, L., Sem.-Lehrer u. Kgl. Musik-Dir., **Anleitung zur Erteilung des Gesangunterrichts in der Volksschule** mit einem Anhange, enthaltend Winke für Chorgesang und musikalischen Kirchendienst. 2. Auflage. 1 ℳ; geb. 1,25 ℳ.

Köckert, Carl, Sem.-Lehrer u. Kgl. Musik-Dir., **Der Gesangunterricht in der mehrklassigen Volksschule.** Ein kurzgefaßter Leitfaden nebst einem Stoffverteilungsplan für sechs aufsteigende Klassen. 2., umgearbeitete Auflage. 1 ℳ; geb. 1,30 ℳ.

Merk, G., Sem.-Musiklehrer, **Elementar-Gesanglehre.** Anleitung zur Erteilung des Gesangunterrichts in deutschen Volksschulen. 1,75 ℳ; geb. 2 ℳ.

* Geschichte. *

André, Paul, Die brandenburgisch-preußische Geschichte in tabellarischer Übersicht. Für den Wiederholungs- und Selbstunterricht herausgegeben. 75 ₰.

Cyranka, Dr. **L.,** Sem.-Dir., **Die vaterländische Geschichte** in der Volksschule. Nach der ministeriellen Generalverordnung vom 18. Oktober 1890 und unter Berücksichtigung der „Ergänzungen zum Seminar-Lesebuche" zum Gebrauch für den Lehrer bei der Vorbereitung auf den Geschichtsunterricht bearbeitet. Mit 4 Feldzugsskizzen. 3., verb. Aufl. 1,25 ℳ; geb. 1,50 ℳ.

Hoffmeyer, L., Sem.-Oberl. u. **W. Hering,** Sem.-Lehrer, **Lehrbuch für den Geschichtsunterricht in Seminaren.** Mit zahlreichen Abbildungen im Text.
- I. Teil. Geschichte des Altertums. Lwdbd. 2,25 ℳ.
- II. Teil. Geschichte des Mittelalters und der Neuzeit bis 1648. Lwdbd. 3 ℳ.
- III. Teil. Neuere Geschichte seit 1648. Lwdbd. 3,50 ℳ.

Rosenburg, Herm., Sem.-Lehrer, **Methodik des Geschichtsunterrichts.** 2., vermehrte und verbesserte Auflage. 1,75 ℳ.

* Handarbeiten. *

Springer, Dr. **Wilh.,** Kreisschulinspektor, **Der Handarbeitsunterricht in der Volksschule.** Eine Methodik des Handarbeitsunterrichtes zur Vorbereitung für die Handarbeitslehrerinnen-Prüfung wie zum Gebrauche für Handarbeitslehrerinnen und Schulaufsichtsbeamte. Mit 88 dem Texte eingedruckten Abbildungen und einer Häkeltafel. Zwei Teile in einem Bande. I. Teil: Methodik. II. Teil: Die Lehrstoffe. 3., gänzlich umgearb. Aufl. Lwdbd. 4 ℳ.

— **Kurzer Abriß des Handarbeitsunterrichts in der Volksschule.** Zum Gebrauche für Handarbeitslehrerinnen und Lehrerinnen, wie zur Einführung der Schulaufsichtsbeamten in dieses Lehrgebiet. Mit 12 als Anhang beigegebenen Abbildungen. Steif geh. 1 ℳ.

— **Die Ausbildung der Handarbeitslehrerin.** Neue Wege zu einem schulgemäßen Betriebe des Unterrichts in den weiblichen Handarbeiten. Zum Gebrauche für Schulaufsichtsbeamte und Handarbeitslehrerinnen. 60 ₰.

* Schulfeiern. *

Henkel, A., Lehrer, **Die patriotischen Feste in der Schule.** Eine Gabe aus der Schule für die Schule. In drei Heften. Heft I. Das Kaiserfest. 2., erweiterte Aufl. 50 ₰. — Heft II. Kaiser Wilhelm- und Kaiser Friedrich-Tage. 50 ₰. — Heft III. Das Sedanfest. 2. Aufl. 35 ₰. Die 3 Hefte in einen Leinwandband gebunden. 1,75 ℳ.

Rietz, H., Reg.- u. Schulrat, **Schulreden.** Aus der Schulpraxis hervorgegangen und für dieselbe bestimmt. Inhalt: Antrittsreden (3), Einführungsreden (4), Eröffnungsreden (10), Entlassungsreden (11), Schlußreden (5), Festreden (3), Gedächtnisreden (4). 1,25 ℳ. — Sonder-Ausgabe: mit dem Bildnis des Verfassers und in Leinwandband 1,60 ℳ.

Kleese, A., Hauptlehrer, **Reden eines Lehrers bei festlichen Gelegenheiten.** Patriotische Reden (35), darunter 12 Musterreden für den Geburtstag Kaiser Wilhelms II., Schulreden (32), Pädagogische Reden (5), Reden vermischten Inhalts (30). 5. Aufl. 1,50 ℳ; Lwdbd. 2 ℳ.