

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

15589

*Haas. Stoffverring.*

~~F 9. 33~~

~~F 7. 709~~

2x  
829

0,75

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000301476

20/1  
1913, 13

# Stoffdehnung und Hüllenform

Beitrag zur Konstruktion von Ballonhüllen

---

## Dissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

Der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin

vorgelegt am 26. Oktober 1912

von

Dipl.-Ing. Rudolf Haas

aus Aschaffenburg

Genehmigt

am 10. Januar 1913



38

---

Verlagsbuchhandlung von Julius Springer in Berlin

F 7 70 g.

xxx  
849

Referent: Herr Professor Dr. Eugen Meyer

Korreferent: Herr Professor Dr. Dr.-Ing. ehrenh. von Parseval

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW

III 15589

*Sonderabdruck aus Luftfahrt und Wissenschaft, Heft 4.*

Akc. Nr. 2447/49

Dem Andenken  
meines verstorbenen Vaters



## Vorwort.

Die technischen Anforderungen, die an die Hülle eines Freiballons gestellt werden, beschränken sich auf Dichtigkeit, Festigkeit, geringes Gewicht und Widerstandsfähigkeit gegen mechanische Beanspruchungen und atmosphärische Einflüsse. Die Form der Hülle dagegen ist beliebig. Es kommt im allgemeinen nicht darauf an, ob sie unter dem Einfluß der Stoffspannungen Änderungen erleidet.

Das Gleiche gilt von den Gaszellen der starren Luftschiffe. Auch sie dienen lediglich der Aufnahme und Erhaltung der Füllung.

Anders bei den Luftschiffen der halbstarren und unstarren Bauart: Hier ist der Hülle außer dem Gasabschluß noch die Aufgabe zugewiesen, gegenüber Biegungs- und Schubkräften eine bestimmte, für den Betrieb erforderliche Form aufrecht zu erhalten.

Nun ist mit jeder Kraftaufnahme eine Formänderung verbunden. So lange die Größe dieser Formänderung die Erreichung des Betriebszweckes nicht verhindert, kann sie bei der Konstruktion außer acht gelassen werden. Für Schiffe mit geringem Streckungsverhältnis ist das im allgemeinen möglich.

Mit wachsendem Streckungsverhältnis jedoch werden die Biegungs- und Schubkräfte, die teils dauernd infolge der Belastung, teils vorübergehend bei der Fahrt auftreten, immer größer, die letzteren besonders dann, wenn die Eigengeschwindigkeit des Schiffes eine hohe ist. Es kann dann leicht die Grenze der für den Betrieb noch zulässigen Formänderungen erreicht und überschritten werden.

Dieser Fall ist bei dem Versuchsluftschiff der Siemens-Schuckert-Werke eingetreten. Schon in den ersten Wochen nach der Füllung und später im Laufe der Fahrten stellte es sich heraus, wie vorteilhaft, ja wie notwendig eine genaue Kenntnis der Dehnungseigenschaften des Ballonstoffs für die Formgebung seiner Hülle gewesen wäre.

Die vorliegende Arbeit dient dem Zweck, einen Teil des Versäumten nachzuholen.

Der Direktion der Siemens-Schuckert-Werke gebührt besonderer Dank für die Bereitwilligkeit, mit der sie die Vornahme der zu beschreibenden Untersuchungen im allgemeinen Interesse des Luftschiffbaus ermöglichte, da ja die gewonnenen Ergebnisse ihrem eigenen Versuchsluftschiff nicht mehr zugute kommen konnten.

Insbesondere ist der Unterzeichnete dem Leiter der Kriegs- und Schiffbau-technischen Abteilung der Siemens-Schuckert-Werke, Herrn Direktor Otto Krell, für das rege Interesse und die weitgehende Unterstützung, die er den vorliegenden Studien angedeihen ließ, zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

Berlin, im Dezember 1912.

Rudolf Haas.



## Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung: Verbiegung der Hülle, Korrektur, Vorbeugung . . . . .	1
A. Die Dehnungseigenschaften des Ballonstoffes . . . . .	2
Der einfache Stoff . . . . .	2
Die Fadenschiebung . . . . .	2
Durchmesserdehnung, Längskontraktion und Verdrehung der Hülle infolge der Fadenschiebung . . . . .	5
Die Fadenstreckung . . . . .	7
Durchmesserdehnung und Längskontraktion der Hülle infolge der Fadenstreckung . . . . .	11
Die Fadendehnung . . . . .	12
Die resultierende Formänderung . . . . .	12
Die Beziehung zwischen Spannung und Formänderung . . . . .	13
Die innere Reibung . . . . .	14
Versuche . . . . .	14
Versuch I. Die Langsamkeit der Formänderung . . . . .	15
Versuch II. Die Beziehung zwischen Spannung und Formänderung . . . . .	16
Versuch III. Die Fadendehnung . . . . .	21
Versuch IV. Die Formänderung zylindrischer Hüllen . . . . .	22
Mehrfache Stoffe . . . . .	27
Ableitung ihrer Dehnungskurven aus denen des einfachen Stoffes . . . . .	27
Versuch V. Die Dehnungskurven mehrfacher Stoffe . . . . .	29
Die Schubspannungen . . . . .	30
Versuch VI. Die Schiebung des einfachen und diagonaldoublierten Stoffes . . . . .	30
Die Formänderung einer Hülle aus paralleldoubliertem Stoff . . . . .	34
Die Formänderung einer Hülle aus diagonaldoubliertem Stoff . . . . .	37
B. Die Versuchsunterlagen für die praktische Vorausbestimmung der Hüllenformänderung . . . . .	37
Die Normalcharakteristik . . . . .	38
Die Schubcharakteristik . . . . .	39
Methoden zur Ermittlung der Normalcharakteristik . . . . .	39
Die Methode zur Ermittlung der Schubcharakteristik . . . . .	40
Versuch VII. Die Normalcharakteristik eines diagonaldoublierten Stoffes. „Einkreuzmethode“ . . . . .	40
Versuch VIII. Die Normalcharakteristik eines dreifachen Stoffes. „Vielkreuzmethode“ . . . . .	48
Versuch IX. Die Schubcharakteristik eines dreifachen Stoffes . . . . .	52
C. Die Formänderung der Hülle . . . . .	57
Die an der Hülle wirkenden Kräfte . . . . .	57
Der Gang der Berechnung . . . . .	58
Die Formänderung der luftgefüllten und gewichtslosen Hülle . . . . .	59
Das Grundgesetz der Spannungsverteilung . . . . .	59
Die Anwendung auf die Berechnung der kritischen Schubspannung. (Zwischenbetrachtung.) . . . . .	60
Die Anwendung auf die Spannungsberechnung der Hülle . . . . .	61
Die Bestimmung der Durchmesserdehnung und Längskontraktion . . . . .	62

	Seite
Die Biegung der gasgefüllten Hülle . . . . .	63
Die Naviersche Hypothese . . . . .	63
Die Biegemomente . . . . .	66
Die Biegungsspannungen . . . . .	67
Die Form der Biegungslinie . . . . .	68
Die Schiebung der gasgefüllten Hülle . . . . .	69
Die Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt . . . . .	69
Die Form der Schiebungslinie . . . . .	72
Die Form der Hüllenquerschnitte . . . . .	72
Die den Querschnitt beeinflussenden Kräfte . . . . .	73
Erster Belastungsfall: Angehängte Last gleich Null . . . . .	75
Zweiter Belastungsfall: Last gleich Auftrieb . . . . .	76
Die Gleichungen für Querspannung und Krümmungsradius . . . . .	76
Die praktische Bestimmung der Querschnittsform . . . . .	80
Dritter Belastungsfall: Last größer oder kleiner als Auftrieb . . . . .	83
Der Einfluß der Querschnittsform auf die Größe der Biegung und Schiebung . . . . .	84
Die praktische Anwendung bei der Biegungs- und Schiebungsrechnung . . . . .	85
D. Beispiel der Formänderungsrechnung einer Hülle . . . . .	88
I. Die Durchmesserdehnung und Längskontraktion . . . . .	88
II. Die biegenden Kräfte . . . . .	90
III. Die Schubkräfte und Momente . . . . .	91
IV. Die Biegung . . . . .	91
V. Die Schiebung und die resultierende Hüllenform . . . . .	95
E. Studien an einem besonders einfach belasteten Modell . . . . .	95
Beschreibung des Modells und seiner Belastung . . . . .	96
Die Verdrehung . . . . .	98
Die Durchmesserdehnung und Längskontraktion . . . . .	99
Die Biegungs- und Schiebungslinie . . . . .	101
Vergleichende Berechnung . . . . .	102
Zusammenfassung . . . . .	105
Stoff-Tabelle . . . . .	106

## Einleitung.

### Verbiegung der Hülle, Korrektur, Vorbeugung.

Die Hülle der unstarren und halbstarren Luftschiffe wird in der Regel als Rotationskörper ausgebildet. Der Zuschnitt der Stoffbahnen erfolgt dabei so, daß die Achse dieses Rotationskörpers eine Gerade ist. Sehr geringe Abweichungen von der Geraden, wie sie durch Ungenauigkeiten beim Aufzeichnen, Ausschneiden und Zusammenkleben der Bahnen entstehen, sind praktisch bedeutungslos.

Mit der Füllung und Montage tritt die Hülle unter Belastung; erstens infolge des Innendruckes, zweitens infolge der angehängten und der eigenen Last. Die Gasdruck- und die Gewichtsbelastung rufen Biegungs- und Schubspannungen hervor; unter dem Einfluß dieser Spannungen beginnt die bis dahin gerade Achse der Hülle sich zu krümmen: Der Rücken senkt sich, Kopf und Schwanz streben nach oben.

Dieser Krümmungsprozeß zeigt den Charakter eines langsamen Fließens. Er dauert tagelang fort, bis er asymptotisch eine Grenze erreicht, die im Verhältnis zur Lebensdauer der Hülle als fest angesehen werden kann.

Da die Formänderung der Ballonstoffe im Vergleich zu den Baustoffen des Maschinenbaus sehr erheblich ist, so erfordert die Verbiegung der Hülle in der Regel eine Korrektur.

Die Art dieser Korrektur richtet sich nach der Konstruktion des Schiffes. Bei Seiltakelung, bei der die Lasten durch weitgehende Unterteilung der Seile auf zahlreiche Punkte eines angenähten Gurtes übertragen werden, kann die Hülle in gefülltem Zustande durch Kürzen oder Längen einzelner Seile wenigstens im Bereich des Gurtes zurückgebogen werden. Die Anwendung dieses Hilfsmittels ist jedoch begrenzt, weniger durch die entstehende Ungleichmäßigkeit der Gurtbelastung als durch die Möglichkeit einer völligen Entlastung und Faltenbildung der Bauchseite. Bei Schiffen, die an Stelle einer Seiltakelung eine Stoffbahnaufhängung besitzen, kommt eine Formverbesserung an der gefüllten Hülle überhaupt nicht in Betracht. Ist nicht von vornherein auf die zu erwartenden Krümmungen Rücksicht genommen worden, so bleibt nichts übrig, als unter Opferung der ersten Füllung die Hülle durch eingesetzte Keilstücke annähernd gerade zu richten.

Es erscheint zweckmäßig, sich schon bei der Konstruktion ein Bild über die zu erwartende Formänderung zu machen und der Hülle von vornherein eine negativ verkrümmte Achse zu geben, die erst unter dem Einfluß der Belastung die gerade, für die Höhensteuerung und für die Erzielung des Geschwindigkeitsmaximums unerläßliche Form annimmt.

Die Grundlage für die Vorausbestimmung der Hüllenformänderung ist die Kenntnis der Dehnungseigenschaften des Ballonstoffes.

## A. Die Dehnungseigenschaften des Ballonstoffes. Der einfache Stoff.

Der zur Zeit verwendete Ballonstoff besteht aus 2 oder 3 durch Gummierung miteinander verbundenen Baumwollgeweben, die in ihren Faserrichtungen entweder parallel sind, oder einen Winkel miteinander bilden (Paralleldoublierung, Diagonaldoublierung). Der einfache Stoff wiederum ist aus 2 Gruppen von Fäden (Kette und Schuß) gebildet, die sich unter einem bestimmten, meist rechten Winkel überkreuzen. Dieses Gefüge erleidet unter dem Einfluß von Kräften drei Arten von Formänderungen, die in ihren Ursachen unabhängig voneinander sind, in ihren Wirkungen sich unter Umständen beeinflussen.

In Fig. 1 ist an einem eingespannten Stoffstück eine Kraft  $P$  angebracht. Die Wirkung ist folgende:

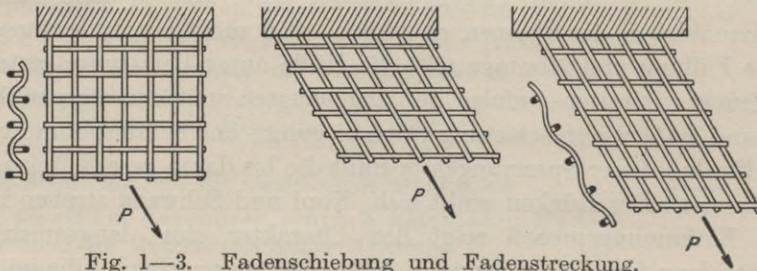


Fig. 1—3. Fadenschiebung und Fadenstreckung.

Da das Viereckgefüge keine Diagonalen enthält, geht es zunächst in die Lage der Fig. 2 über. Dies nennen wir die Fadenschiebung.

Da weiter der gezogene Faden eine Wellenlinie bildet, sucht er sich gerade zu strecken (Fig. 3). Dies nennen wir die Fadenstreckung.

Da drittens der gestreckte Faden selbst sich dehnt, erfährt der Stoff eine weitere Verlängerung in Richtung der Kraft. Dies nennen wir die Fadendehnung.

### Die Fadenschiebung.

Die Fadenschiebung ist die Winkeländerung eines viereckigen Netzes. Den allgemeinsten Belastungsfall zeigt Fig. 4. Aus dem beliebig in der Ebene liegenden, durch die Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  beanspruchten Stoff ist ein kleines Rechteck von den Seitenlängen  $a$  und  $b$  herausgeschnitten. Es besteht aus einer Anzahl  $[n_1]$  Quer- und einer gleichen oder verschiedenen Anzahl  $[n_2]$  Längsfäden. [In der Figur sind z. B. je 4 Fäden angenommen.] Auf jeden Faden entfallen nun entsprechend den beiden Spannungen 2 zueinander senkrechte Einzelkräfte  $P_1$  und  $P_2$  bzw.  $P_3$  und  $P_4$ . Sie setzen sich zu Resultierenden  $R_1$  und  $R_2$  zusammen, deren Richtungen im allgemeinen von den Fadenrichtungen abweichen. [In der Figur sind diese Kräfte nur an je einem Quer- und Längsfaden dargestellt, und zwar nur nach einer Seite hin. Am anderen Ende jedes Fadens sind selbstverständlich gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte anzubringen.]

Da das viereckige Netz keine Winkelfestigkeit hat, so müssen sich, damit Gleichgewicht besteht, die Fäden in die Richtungen der Resultierenden einstellen; d. h. aus dem Stoffrechteck der Fig. 4 entsteht das Parallelogramm der Fig. 5.

Sind  $\alpha$  und  $\beta$  die Winkel der Fäden gegenüber einer der beiden Hauptrichtungen, so ergeben sich für die Größe der Einzelkräfte folgende 4 Bedingungen:

$$\begin{aligned} P_1 \cdot n_1 &= \sigma_1 \cdot a_1 = \sigma_1 \cdot a \cdot \cos \alpha & P_3 \cdot n_2 &= \sigma_2 \cdot b_1 = \sigma_2 \cdot b \cdot \sin \beta \\ P_2 \cdot n_1 &= \sigma_2 \cdot a_2 = \sigma_2 \cdot a \cdot \sin \alpha & P_4 \cdot n_2 &= \sigma_1 \cdot b_2 = \sigma_1 \cdot b \cdot \cos \beta \end{aligned}$$

Durch Division ergibt sich:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \text{ctg } \alpha \qquad \frac{P_3}{P_4} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \text{tg } \beta.$$

Aus den schraffierten Dreiecken folgt andererseits:

$$\frac{P_1}{P_2} = \text{tg } \beta \qquad \frac{P_3}{P_4} = \text{ctg } \alpha.$$

Durch Gleichsetzung folgt:

$$\text{tg } \beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot \text{ctg } \alpha \qquad \text{ctg } \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \text{tg } \beta,$$

woraus in beiden Fällen:

$$\text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \dots \dots \dots \text{ (Gl. 1)}$$

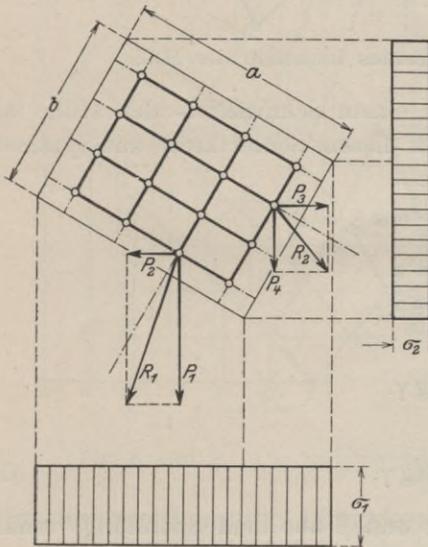


Fig. 4. Stoffelement vor der Fadenschiebung.

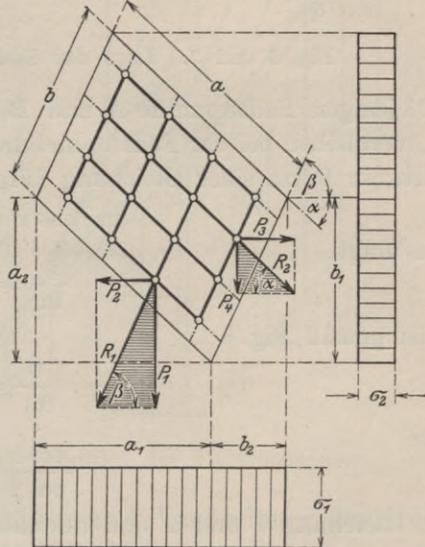


Fig. 5. Dasselbe nach der Fadenschiebung.

Diese Gleichung besagt zunächst:

1. Es kommt nicht auf die Fadenzahl pro Längeneinheit an; die Fadenschiebung ist unabhängig davon, ob Kette und Schuß gleich oder verschieden dicht sind.

2. Es kommt nicht auf die Fadenstärke an; die Fadenschiebung ist unabhängig von Qualitätsverschiedenheiten zwischen Kette und Schuß.

3. Es kommt nicht auf die absolute Größe der Spannungen an. Vielmehr ist für die Fadenschiebung nur ihr Verhältnis maßgebend.

Gleichung 1 wird durch  $\infty$  viele Parallelogramme erfüllt. Jedem beliebigen Winkel  $\alpha$  ist ein Winkel  $\beta$  zugeordnet, für den Gleichgewicht besteht. Zur eindeutigen

Bestimmung eines einzigen Parallelogrammes ist also noch eine zweite Bedingung notwendig. Sie ist gegeben durch die Einspannung des Stoffelementes in seiner Umgebung.

In Fig. 6 und 7 sind das ursprüngliche Rechteck und das aus ihm entstandene Parallelogramm in ihrem Zusammenhang mit einer zylindrischen Hülle einander gegenübergestellt. Die Einspannbedingung lautet:

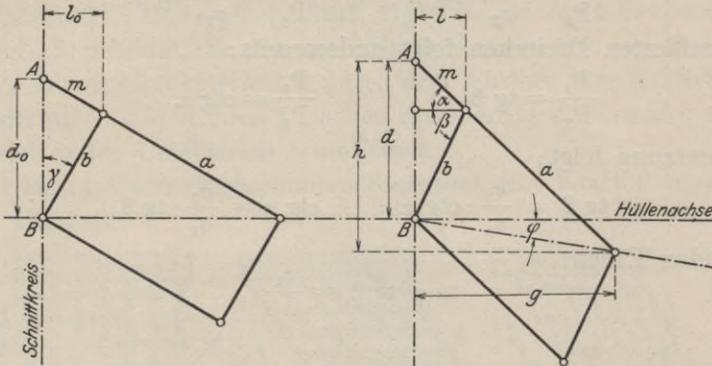


Fig. 6 und 7. Lage des Stoffelementes innerhalb der Hülle.

Diejenigen Fadenpunkte A und B, die einem Schnittkreis der Hülle angehören, verbleiben bei der Fadenschiebung auf diesem Schnittkreis, aus Symmetriegründen; in Form einer Gleichung (Fig. 7):

$$m \cdot \cos \alpha = b \cdot \cos \beta = l.$$

Daraus folgt:

$$\frac{b}{m} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}.$$

Nun ist gemäß Fig. 6:

$$\frac{b}{m} = \text{ctg } \gamma.$$

Somit:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \text{ctg } \gamma. \dots \dots \dots \text{(Gl. 2)}$$

Durch Gleichung 1 und 2 sind nunmehr  $\alpha$  und  $\beta$  aus dem Spannungsverhältnis und dem Anfangswinkel  $\gamma$  bestimmbar. Die Ausrechnung der Werte kann hier übergangen werden. Ihre Darstellung in Raumkoordinaten ergibt Fig. 8 und 9, mit folgenden Merkmalen:

1. Beide Flächen sind Spiegelbilder, da jedem Winkel  $\gamma$  zwischen 0 und 45° ein solcher zwischen 45 und 90° zugeordnet ist, für den sich ein symmetrischer Belastungsfall ergibt (vgl. auch Fig. 6 und 7).
2. Verschwindet die eine der beiden Spannungen, so werden beide Winkel  $\alpha$  und  $\beta = 90^\circ$ ; d. h. die übrig bleibende Spannung zieht das Rechteck zu einer Linie auseinander.
3. Fadenschiebung tritt nicht ein, wenn der Stoff parallel zur Hüllennachse liegt. Denn

für  $\gamma = 0^\circ$  ist  $\alpha = 0^\circ$ ;  $\beta = 90^\circ$   
 „  $\gamma = 90^\circ$  ist  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 0^\circ$ .

4. Fadenschiebung tritt nicht ein, wenn  $\sigma_1 = \sigma_2$ ; denn alsdann ist nach Gleichung 1 (Seite 3):

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = 1.$$

d. h.

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

oder:

$$\cos \beta = \sin \alpha.$$

Durch Einsetzung in Gleichung 2 ergibt sich:

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \gamma,$$

d. h.

$$\alpha = \gamma,$$

in Worten: das Rechteck der Fig. 6 bleibt erhalten.

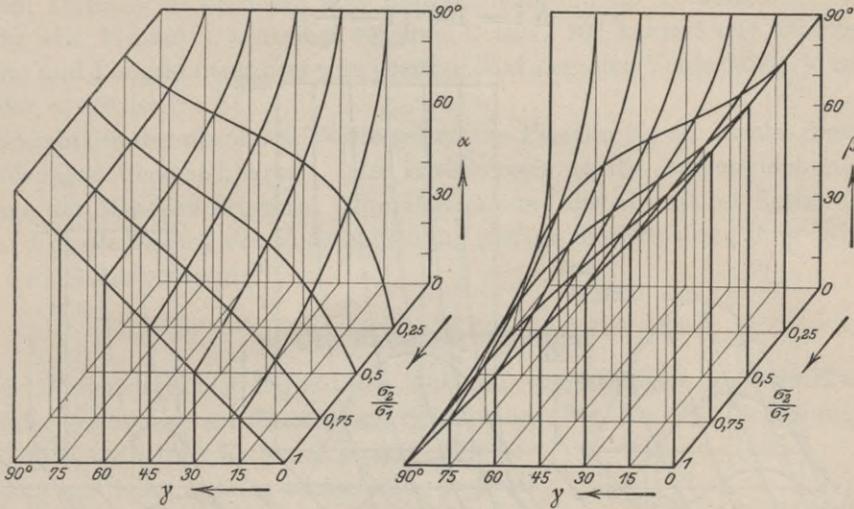


Fig. 8 und 9. Die resultierenden Fadenwinkel der Fadenschiebung.

### Durchmesserdehnung, Längskontraktion und Verdrehung der Hülle infolge der Fadenschiebung.

Den Konstrukteur interessieren bei der Fadenschiebung nicht ihre Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ , sondern ihre Folgen für die Form der Ballonhülle.

Die erste Folge ist eine Dehnung des Durchmessers. Sie ist bestimmt durch einen Faktor  $\frac{d}{d_0}$ , der das Verhältnis des neuen zum alten Durchmesser darstellt (Fig. 6 und 7). Er berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} d &= b \cdot \sin \beta + m \cdot \sin \alpha \\ &= b (\sin \beta + \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha) \\ &= d_0 \cdot \cos \gamma \cdot (\sin \beta + \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha), \end{aligned}$$

woraus:

$$\frac{d}{d_0} = \sin \beta \cdot \cos \gamma + \sin \alpha \cdot \sin \gamma.$$

Der Durchmesserzuwachs in Prozent ist:

$$\Delta d = 100 \cdot \left( \frac{d}{d_0} - 1 \right)$$

Die zweite Folge der Fadenschiebung ist eine Verminderung der Länge. Sie ist bestimmt durch einen Faktor  $\frac{1}{l_0}$ , der das Verhältnis der neuen zur alten Länge des Hüllenringes darstellt. Er berechnet sich wie folgt:

$$l = b \cdot \cos \beta = \frac{l_0}{\sin \gamma} \cdot \cos \beta,$$

woraus:

$$\frac{1}{l_0} = \frac{\cos \beta}{\sin \gamma}.$$

Die Längenabnahme in Prozent ist:

$$\Delta l = 100 \cdot \left( 1 - \frac{1}{l_0} \right).$$

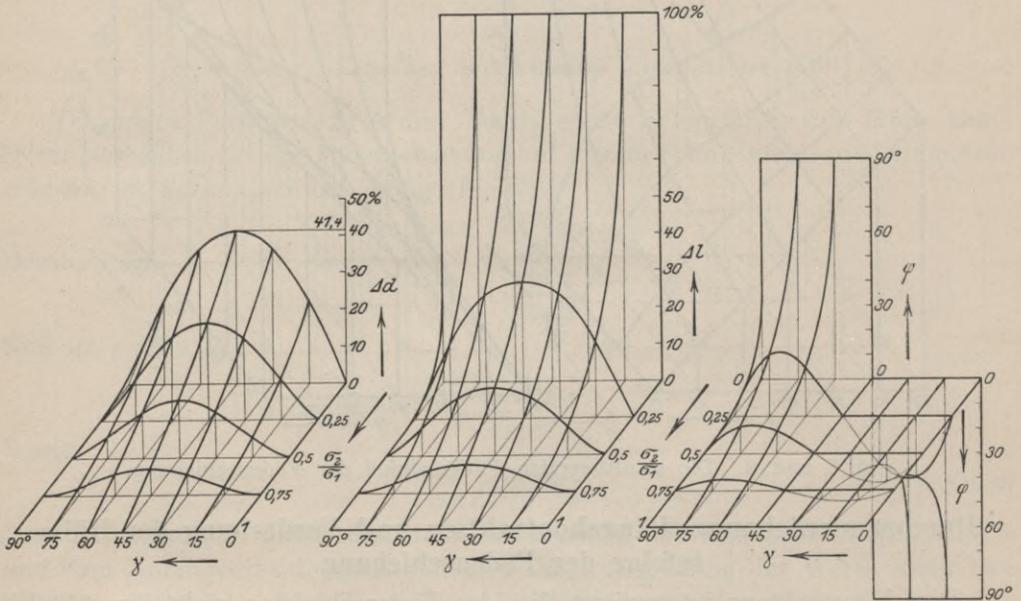


Fig. 10—12. Durchmesserdehnung, Längskontraktion und Verdrehung einer zylindrischen Hülle als Folge der Fadenschiebung.

Die dritte Folge der Fadenschiebung ist eine Verdrehung der Hülle. Sie ist bestimmt durch den Schiebungswinkel  $\varphi$  (Fig. 7), dessen Tangente sich wie folgt berechnet:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{h - d}{g}.$$

Hierin ist:

$$h = (a + m) \cdot \sin \alpha = \frac{d_0}{\sin \gamma} \cdot \sin \alpha = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\cos \gamma \cdot \sin \gamma}$$

$$d = b (\sin \beta + \operatorname{tg} \gamma \cdot \sin \alpha)$$

$$g = (a + m) \cdot \cos \alpha = \frac{b \cdot \cos \alpha}{\cos \gamma \cdot \sin \gamma}$$

Die Einsetzung ergibt:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (\sin \alpha - \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \gamma - \sin \alpha \cdot \sin^2 \gamma).$$

Die Bestimmung von  $\Delta d$ ,  $\Delta l$  und  $\varphi$  aus Fig. 8 und 9 liefert die in Fig. 10 bis 12 dargestellten Flächen.

Sie zeigen zunächst, daß für  $\gamma = 0$  bzw.  $90^\circ$  weder eine Durchmesserdehnung noch eine Längskontraktion noch eine Verdrehung der Hülle durch Fadenschiebung eintritt.

Dasselbe ist der Fall, wenn Quer- und Längsspannung einander gleich sind. Für diagonal unter  $45^\circ$  liegenden Stoff ist keine Verdrehung vorhanden, dafür erreichen Durchmesserdehnung und Längskontraktion ihr Maximum.

Für alle Winkel  $\gamma$  zwischen  $45^\circ$  und  $0$  bzw.  $90^\circ$  kommt zur Durchmesserdehnung und Längskontraktion eine positive oder negative Verdrehung, je nachdem  $\gamma >$  oder  $< 45^\circ$  ist.

Hinsichtlich der absoluten Werte gelten die Flächen für ein ideales Netzgefüge von beliebiger Verschiebbarkeit. In Wirklichkeit ist die Fadenschiebung durch die Enge der Maschen begrenzt. Die Bestimmung der Grenze ist Sache des Versuches. Für die Theorie der Fadenschiebung genügt die Erfassung ihrer Wirkungsweise und Größenordnung.

### Die Fadenstreckung.

Die Fadenstreckung ergibt sich aus der gegenseitigen Kräftewirkung der ineinander geschlungenen Ketten- und Schußfäden (Fig. 13). Die Beziehungen sind verwickelter als bei der Fadenschiebung. Wir beschränken uns daher auf den einfachsten, zugleich wichtigsten Fall, daß die Richtung der Fäden mit der der Spannungen übereinstimmt ( $\gamma = 0$ ), und machen ferner die Annahme, daß die Fäden einen unveränderlichen kreisrunden Querschnitt, eine in ihrer Länge unveränderliche Mittellinie und eine beliebig hohe, widerstandsfreie Biegsamkeit besitzen.

Sind  $n_1$  und  $n_2$  die Fadenzahlen pro m,  $P_1$  und  $P_2$  die in der Stoffebene wirkenden Komponenten der Fadenkräfte  $Z_1$  und  $Z_2$ ,  $\varepsilon$  und  $\zeta$  die Winkel der Fäden zur Stoffebene, so gilt für die normal zur Stoffebene wirkenden Komponenten  $N_1$  und  $N_2$  folgende Beziehung:

$$N_1 = P_1 \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$= \frac{\sigma_1}{n_1} \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$$

$$N_2 = P_2 \cdot \operatorname{tg} \zeta$$

$$= \frac{\sigma_2}{n_2} \cdot \operatorname{tg} \zeta.$$

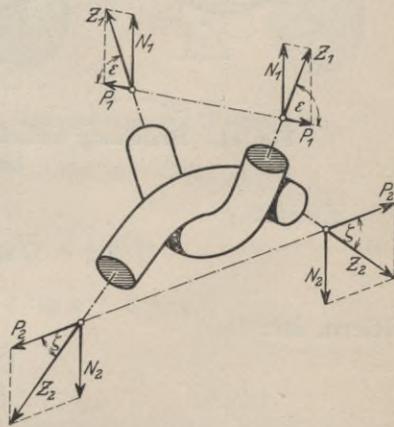


Fig. 13. Kräftewirkung bei der Fadenstreckung.

Für den Zustand des Gleichgewichtes ist:

$$N_1 = N_2,$$

also:

$$\frac{\sigma_1}{n_1} \cdot \text{tg } \varepsilon = \frac{\sigma_2}{n_2} \cdot \text{tg } \zeta,$$

woraus:

$$\frac{\text{tg } \varepsilon}{\text{tg } \zeta} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} \dots \dots \dots \text{ (Gl. 3)}$$

Diese Gleichung entspricht der Form nach der Gleichung 1 (Seite 3) für die Fadenschiebung. Sie besagt zunächst:

1. Es kommt auf das Verhältnis der Fadenzahlen pro Längeneinheit an.
2. Es kommt nicht auf die Fadenstärke an.
3. Es kommt nicht auf die absolute Größe der Spannungen an, sondern nur auf ihr Verhältnis.

Gleichung 3 wird analog Gleichung 1 durch  $\infty$  viele Winkel  $\varepsilon$  und  $\zeta$  befriedigt, da sie nur das Tangentenverhältnis vorschreibt. Zur eindeutigen Lösung ist noch eine weitere Gleichung erforderlich. Sie ergibt sich aus der Fadenstärke  $\delta$  und der als unveränderlich angenommenen Fadenlänge  $s_1$  bzw.  $s_2$  zwischen je 2 Kreuzungspunkten  $K_1$  und  $K_1'$ , bzw.  $K_2$  und  $K_2'$  (Fig. 14).

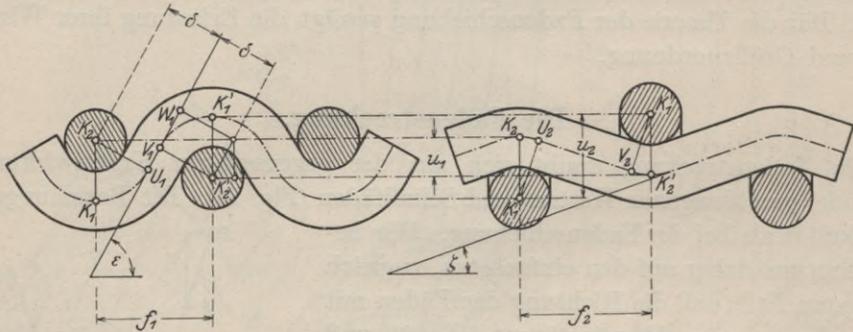


Fig. 14. Beziehung zwischen Fadenlänge, Fadenstärke und Fadenwinkel bei der Fadenstreckung.

Es ist:

$$s_1 = \overline{K_1 U_1 V_1 K_1'} \\ = \overline{U_1 V_1} + 2 \cdot \overline{K_1 U_1}.$$

Hierin ist:

$$\overline{U_1 V_1} = \overline{U_1 W_1} - \overline{V_1 W_1} \\ = 2 \delta \cdot \text{ctg } \varepsilon - \frac{u_1}{\sin \varepsilon}.$$

Ferner ist:

$$\overline{K_1 U_1} = \delta \cdot \varepsilon.$$

Somit:

$$s_1 = 2 \delta \cdot \text{ctg } \varepsilon - \frac{u_1}{\sin \varepsilon} + 2 \delta \cdot \varepsilon,$$

oder:

$$u_1 = 2 \delta \cdot \cos \varepsilon + 2 \delta \cdot \varepsilon \cdot \sin \varepsilon - s_1 \cdot \sin \varepsilon.$$

In gleicher Weise ergibt sich für den anderen Faden:

$$u_2 = 2 \delta \cdot \cos \zeta + 2 \delta \cdot \zeta \cdot \sin \zeta - s_2 \cdot \sin \zeta.$$

Nun besteht zwischen den beiden Wellenhöhen  $u_1$  und  $u_2$  die Beziehung:

$$u_1 + u_2 = 2 \delta.$$

Man erkennt diese Beziehung am besten, wenn man sich zunächst den einen Faden ganz gerade gestreckt vorstellt; in diesem Falle ist die Wellenhöhe des anderen Fadens ohne weiteres gleich dem doppelten Fadendurchmesser. Erteilt man nun dem geraden Faden eine Wellenhöhe von dem beliebigen Betrag  $u_1$ , so vermindert sich die Wellenhöhe des anderen Fadens um den gleichen Betrag, so daß die Summe konstant bleibt.

Es ergibt sich also:

$$2 \delta \cdot \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (2 \delta \cdot \varepsilon - s_1) + 2 \delta \cdot \cos \zeta + \sin \zeta (2 \delta \cdot \zeta - s_2) = 2 \delta,$$

oder nach Division durch den Faktor 2 und die an sich beliebige, nur in ihrem Verhältnis zu den Fadenlängen  $s_1$  und  $s_2$  maßgebende Fadenstärke:

$$\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left( \varepsilon - \frac{s_1}{2 \delta} \right) + \cos \zeta + \sin \zeta \left( \zeta - \frac{s_2}{2 \delta} \right) = 1 \quad \dots \text{(Gl. 4)}$$

Nach oben hin sind die Werte von  $s_1$  und  $s_2$  unbeschränkt; je größer die Fadenlängen, desto weiter die Maschen des Gewebes. Nach unten hin jedoch bestimmt der Minimalraumbedarf der Fäden eine Grenze, die nicht ohne weiteres aus Gleichung 4 hervorgeht, sondern durch eine besondere

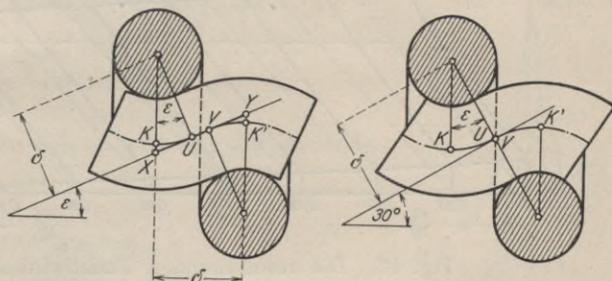


Fig. 15 und 16. Grenzwerte der Fadenlänge.

Betrachtung gefunden wird. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Ist  $\varepsilon \leq 30^\circ$ , so ist (Fig. 15):

$$\begin{aligned} s_{\min} &= \overline{K U V K'} = \overline{X Y} - 2 \overline{X U} + 2 \overline{K U} \\ &= \frac{\delta}{\cos \varepsilon} - 2 \delta \cdot \operatorname{tg} \varepsilon + 2 \delta \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

woraus folgt:

$$\frac{s}{2 \delta} \geq \varepsilon + \frac{1 - 2 \sin \varepsilon}{2 \cos \varepsilon}$$

Wäre  $\frac{s}{2 \delta}$  kleiner als dieser Grenzwert, so müßten sich die beiden im Querschnitt gezeichneten Fäden an ihren Kreuzungsstellen durchdringen, was unmöglich ist.

Ist  $\varepsilon \geq 30^\circ$ , so lautet die Grenzbedingung (Fig. 16):

$$s_{\min} = 2 \delta \cdot \varepsilon$$

oder:

$$\frac{s}{2\delta} \geq \epsilon \dots \dots \dots \text{(Gl. 5)}$$

Mit Berücksichtigung dieser Grenzbedingungen sind aus Gleichung 3 und 4 die Fadenwinkel  $\epsilon$  und  $\zeta$  für beliebige Fadenlänge und für ein beliebiges Spannungsverhältnis bestimmbar. Die umständliche, am besten zeichnerisch erfolgende Berechnung kann hier übergangen werden. Sie wurde durchgeführt für den Fall gleicher Fadenzahlen und gleicher Fadenlängen für Kette und Schuss. Das Ergebnis ist in Flächenform in Fig. 17 dargestellt. Die Fadenlängen  $s = \frac{2}{3} \pi \cdot \delta$  bis  $\pi \delta$  sind darin insofern ausgezeichnete Werte, als bei ihnen die Fadenwinkel  $\epsilon$  und  $\zeta$  gemäß Gleichung 5 die runden Maximalwerte von 60, 70, 80 und 90° erreichen können.

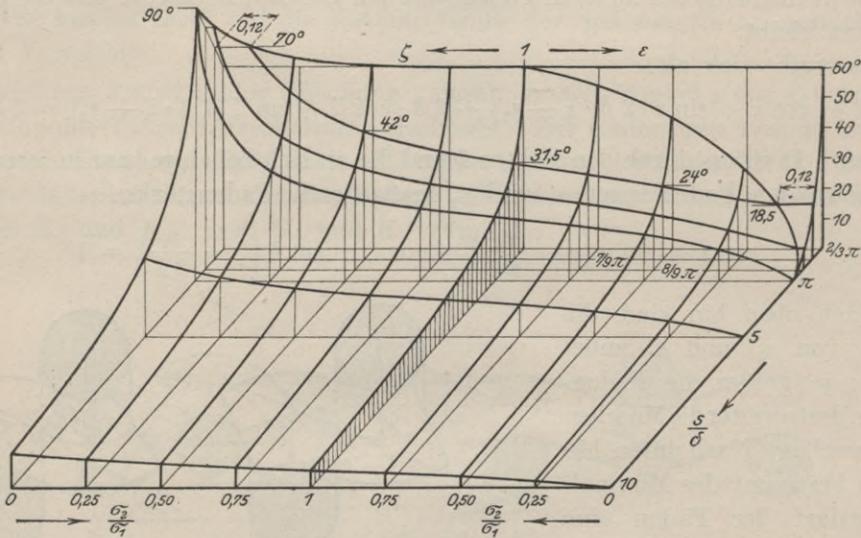


Fig. 17. Die resultierenden Fadenwinkel der Fadenstreckung.

Die Fläche ist durch eine schraffierte Mittelwand in zwei Hälften geteilt. Die Ordinaten der rechten Hälfte stellen die Größe von  $\epsilon$ , die der linken die von  $\zeta$  dar. Beide Hälften sind gegenseitig vertauschbar. Als Nullwerte sind die Ordinaten der schraffierten Wand zu betrachten. Beispiel: Bei der Fadenlänge  $s = \frac{7}{9} \pi \delta$  und dem Spannungsverhältnis 1 betragen beide Fadenwinkel je 31,5°. Wird  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  kleiner, zum Beispiel 0,5, so wird  $\epsilon$  kleiner (24°),  $\zeta$  größer (42°). Nimmt  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$  weiter ab, so wird schließlich bei  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,12$  mit  $\epsilon = 18,5^\circ$  und  $\zeta = 70^\circ$  ein Grenzwert erreicht, den zu überschreiten der Minimalraumbedarf der Fäden nicht gestattet.

Fig. 17 gibt einen guten Überblick über die Wirkungsweise der Fadenstreckung: sie beruht auf einer Erhöhung bzw. Verflachung der Fadenwellenlinien. Sind die Wellen an sich sehr flach, d. h. sind die Maschen des Gewebes sehr weit, so kann eine Änderung der Spannungsverteilung nur geringen Einfluß haben. Werden

die Maschen enger, so steigen die Wellenhöhen und damit auch ihr Veränderungsbereich. Werden schließlich die Maschen so eng, daß die Fäden einer Gattung (Kette bzw. Schuß) sich gegenseitig berühren (diese Erscheinung beginnt bei der Fadenlänge  $s = \pi \cdot \delta$  einzutreten), so vermindert sich der Veränderungsbereich wieder, bis bei völlig dichtem Gewebe, d. h. bei dem Grenzwert  $s = \frac{2}{3} \pi \cdot \delta$  die Fadenstreckung zu Null wird, da jede Bewegungsfreiheit durch den Minimalraumbedarf der Fäden aufgehoben ist.

### Durchmesserdehnung und Längskontraktion der Hülle infolge der Fadenstreckung.

Auch bei der Fadenstreckung ist die Bestimmung der Fadenwinkel nicht Selbstzweck. Vielmehr kommt es für den Konstrukteur auf ihre Folgen für die Hüllenform an. Behalten wir die einschränkende Annahme bei, daß der Stoff parallel zur Achse liege, so äußert sich die Fadenstreckung im Gegensatz zur Fadenschiebung nur in zwei Erscheinungen, einer Durchmesserdehnung und Längskontraktion der Hülle. Beide sind direkt proportional der Änderung der Fadenteilungen  $f_1$  und  $f_2$  in Fig. 14. Z. B. ergibt sich für den Durchmesserzuwachs:

$$\Delta d = 100 \cdot \left( \frac{f_1}{f_0} - 1 \right).$$

Hierin berechnet sich die Fadenteilung wie folgt:

$$f_1 = 2 \delta \cdot \sin \varepsilon + \overline{U_1 V_1} \cdot \cos \varepsilon.$$

Hierin ist:

$$\overline{U_1 V_1} = s_1 - 2 \delta \cdot \varepsilon,$$

also:

$$f_1 = 2 \delta \cdot \sin \varepsilon + s_1 \cdot \cos \varepsilon - 2 \delta \cdot \varepsilon \cdot \cos \varepsilon.$$

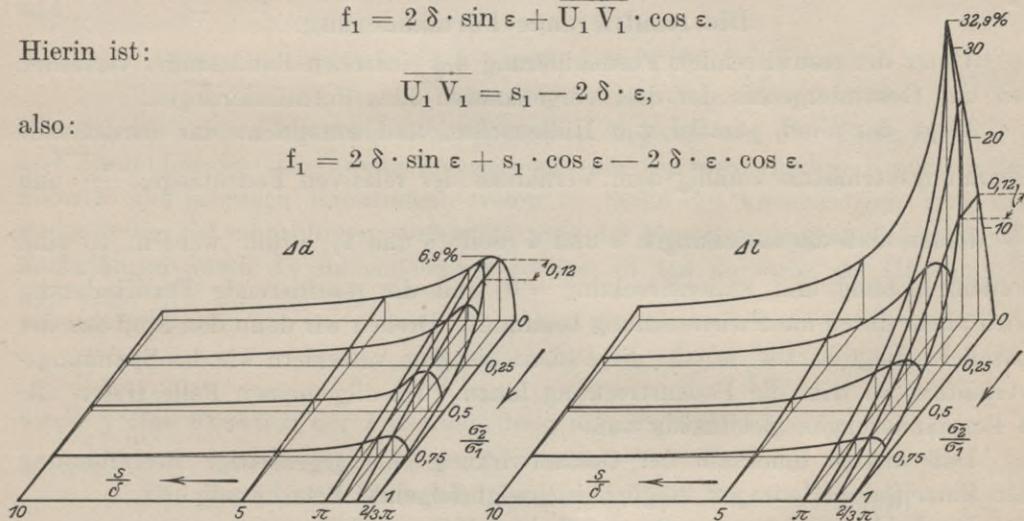


Fig. 18 und 19. Durchmesserdehnung und Längskontraktion einer zylindrischen Hülle als Folge der Fadenstreckung.

Mithin

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{\sin \varepsilon - \varepsilon \cdot \cos \varepsilon + \frac{s_1}{2\delta} \cdot \cos \varepsilon}{\sin \varepsilon_0 - \varepsilon_0 \cdot \cos \varepsilon_0 + \frac{s_1}{2\delta} \cdot \cos \varepsilon_0}$$

Durch Vertauschung von  $\varepsilon$  mit  $\zeta$  und  $s_1$  mit  $s_2$  ergibt sich die Längenabnahme  $\Delta l$ .

Die Berechnung beider Werte aus den in Fig. 17 dargestellten Winkeln liefert die Flächen der Fig. 18 und 19. Die Nullwerte sind wiederum bei  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 1$  angenommen. Hier tritt das über die Wirkungsweise der Fadenstreckung Gesagte noch deutlicher hervor: die bei weiten Maschen sehr geringe Formänderung steigt mit enger werdenden Maschen allmählich an und fällt nach Erreichung des Maximums infolge des Minimal-Raumbedarfes der Fäden steil ab.

### Die Fadendehnung.

Mit dem Begriff der Fadendehnung wollen wir alle Formänderungen bezeichnen, die der Faden selbst erleidet.

Unter dem Einfluß der ihn beanspruchenden Kräfte dehnt er sich der Länge nach aus. Gleichzeitig vermindert er seinen Durchmesser, nicht nur dadurch, daß die einzelnen Fasern, aus denen er besteht, sich zusammenziehen, sondern auch dadurch, daß sie sich innerhalb ihres Gespinnstes enger aneinander legen. Endlich wird der Querschnitt des Fadens, den wir mit Annäherung als kreisförmig ansehen dürfen, an den Kreuzungsstellen mehr oder weniger flach gedrückt.

Die Fadendehnung ist einer theoretischen Behandlung unzugänglich. Sie tritt bei jeder Beanspruchung des Stoffes auf als unvermeidliche Begleiterscheinung der Fadenschiebung und Fadenstreckung.

### Die resultierende Formänderung.

Unter der resultierenden Formänderung des einfachen Ballonstoffes verstehen wir das Gesamtergebnis der drei vorgenannten Einzelformänderungen.

Liegt der Stoff parallel zur Hüllennachse, und entspricht das herrschende Spannungsverhältnis zufällig dem Verhältnis der relativen Fadenlängen  $\frac{s_1}{\delta}$  und  $\frac{s_2}{\delta}$  derart, daß die Gleichungen 3 und 4 (Seite 8 und 9) erfüllt werden, so sind Fadenschiebung und Fadenstreckung = 0, und die resultierende Formänderung wird allein durch die Fadendehnung bestimmt. Drehen wir dann den Stoff aus der parallelen Lage heraus, so tritt die Fadenschiebung, verändern wir das Spannungsverhältnis, so tritt die Fadenstreckung hinzu. Im allgemeinen Falle treten alle 3 Formänderungen gleichzeitig auf.

Daß hierbei innerhalb der Gesamtwirkung eine gegenseitige Beeinflussung der Einzelformänderungen möglich ist, zeigt folgende Betrachtung.

Die beiden Gleichungen für die Fadenschiebung sind:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \dots \dots \dots \text{(Gl. 1)}$$

und

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \operatorname{ctg} \gamma \dots \dots \dots \text{(Gl. 2)}$$

Erstere besagt, daß die Fäden sich in die Richtung der resultierenden Kräfte einstellen müssen. Sie wird offenbar auch dann gelten, wenn eine Fadenstreckung erfolgt. Gleichung 2 setzt die beiden Fadenwinkel  $\alpha$  und  $\beta$  in eine Beziehung zu-

einander, die durch die Anfangswerte  $m$  und  $b$  (Fig. 6, Seite 4) und damit auch durch die Fadenteilungen  $f_1$  und  $f_2$  (Fig. 14, Seite 8) mitbestimmt ist. Da sich nun diese Fadenteilungen durch die Fadenstreckung ändern, so folgt, daß Gleichung 2 durch folgende Form zu ersetzen ist:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \operatorname{ctg} \gamma \cdot x,$$

wobei  $x$  eine Funktion der Fadenstreckung ist. Besonders wichtig ist diese Betrachtung für  $\gamma = 45^\circ$ . Hier ergibt sich:

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \operatorname{ctg} 45^\circ \cdot x = x$$

und damit:

$$\alpha \geq \beta,$$

d. h. durch die mittelbare Wirkung der Fadenstreckung kann eine Verdrehung eintreten, wo sie nach den Ableitungen über die Fadenschiebung nicht erwartet wird. Wir werden auf diese für den Hüllenbau unangenehme Erscheinung wiederholt zurückkommen.

Ein Gegenstück ergibt sich für die Fadenstreckung. Ihre beiden Gleichungen sind:

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{\operatorname{tg} \zeta} = \frac{\sigma_2 \cdot n_1}{\sigma_1 \cdot n_2} \dots \dots \dots \quad (\text{Gl. 3})$$

und:

$$\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left( \varepsilon - \frac{s_1}{2 \delta} \right) + \cos \zeta + \sin \zeta \left( \zeta - \frac{s_2}{2 \delta} \right) = 1 \quad \dots \quad (\text{Gl. 4})$$

Hier ist die erstere als reine Gleichgewichtsbedingung von den Fadenwinkeln  $\varepsilon$  und  $\zeta$  unabhängig. Die zweite hingegen gilt nur für rechtwinklige Kreuzung der Fäden. Bei schrägen Kreuzungen treten an Stelle der kreisförmigen Teile der Fadenwellen Schraubenlinien; außerdem wird die Voraussetzung unveränderlicher Fadenlängen durch die Fadendehnung gestört, so daß an Stelle der Gleichung 4 eine neue tritt von der Form:

$$\cos \varepsilon + \sin \varepsilon \left( \varepsilon - \frac{s_1}{2 \delta} \right) + \cos \zeta + \sin \zeta \left( \zeta - \frac{s_2}{2 \delta} \right) = y,$$

worin  $y$  eine Funktion der Fadenschiebung und Fadendehnung ist.

### Die Beziehung zwischen Spannung und Formänderung.

Nach Gleichung 1 und 3 (Seite 3 und 8) ist für die Fadenschiebung und Fadenstreckung nur das Verhältnis der Spannungen, nicht ihr absoluter Wert maßgebend. Dies Ergebnis führt zu nachstehenden Folgerungen:

1. Schon  $\infty$  kleine Spannungen erzwingen den jeweils einzig möglichen Wert der Formänderung in seiner vollen Größe.
2. Die Formänderung vollzieht sich ohne Arbeitsleistung. Sie kann bei Entlastung durch innere Kräfte des Stoffes nicht rückgängig gemacht werden.
3. Der Stoff kann keine bestimmte Gestalt (Länge, Breite) besitzen, die der Spannungslosigkeit entspricht.

Wir sehen, daß die obengenannten Gleichungen einer Einschränkung bedürfen. In der Tat beruhen sie auf der unerfüllten Voraussetzung, daß das Gewebe völlig unelastisch sei. Im Gegenteil besitzt der Faden eine gewisse, wenn auch sehr geringe Elastizität, die seiner Verlängerung, Zusammendrückung und Biegung einen mit der Größe der Formänderung wachsenden Widerstand entgegenstellt.

Hinzukommt der Einfluß der Stoffgummierung. Die in die Zwischenräume der Fäden eindringende Gummimasse und die über dem Stoff ausgebreitete Gummihaut wirkt für die Fadenschiebung als federnde Diagonale, für die Fadenstreckung und Fadendehnung als federnde Verstärkung, die die Fäden zu einem, wenn auch kleinen Teil entlastet.

Es ist daher zu erwarten, daß der Stoff schon bei geringen Belastungen eine hohe Formänderung aufweist, da er nur durch die elastischen Kräfte der Fäden und die Gummierung zurückgehalten wird. Je höher die Belastung steigt, desto langsamer wird die Formänderung sich ihrem theoretischen Maximalwert nähern (Kurve I in Fig. 20). Wird der Stoff entlastet, so wird die Elastizität der Fäden und die Gummierung die Formänderung rückgängig zu machen suchen.

### Die innere Reibung.

In dem Fasermaterial des Stoffgefüges ist eine hohe innere Reibung begründet. Sie hat zur Folge, daß die Formänderung die in Kurve I (Fig. 20) dargestellte Größe nicht erreicht, sondern ihr gegenüber um einen gewissen Betrag zurückbleibt, in positivem Sinne bei der Belastung, in negativem bei der Entlastung (siehe Kurve II und III).

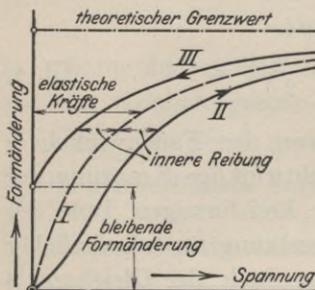


Fig. 20. Allgemeine Form der Dehnungskurven.

Die bleibende Formänderung bei völliger Entlastung entspricht dem Gleichgewicht zwischen den elastischen Kräften und der inneren Reibung.

Der Vorgang ist derselbe wie bei den Baustoffen des Maschinenbaus, jedoch tritt er beim Stoff bei jeder Belastung, bei jenen praktisch erst jenseits der Fließgrenze auf. Ballonstoff ist bei jeder Formänderung im Zustand des Fließens.

Die innere Reibung ist die Gesamtwirkung sehr vieler, unmeßbarer Einzelwiderstände. Man kann sie sich durch eine Art Verfilzung entstanden denken. Dieser Vorstellung entspricht es, daß sie sich im Laufe der Formänderung in gewissen Grenzen ändert, daß also das Gleichgewicht der Kräfte nicht sofort endgültig erreicht wird, sondern daß jede Formänderung zu ihrer Ausbildung Zeit braucht.

### Versuche.

Die in dieser Arbeit beschriebenen Versuche wurden in der drehbaren Ballonhalle der Siemens-Schuckert-Werke ausgeführt und verteilten sich zeitlich, je nach Gelegenheit, über die erste Hälfte des Jahres 1912.

Die Versuchseinrichtungen waren einfach. Von besonderen Festigkeitsmaschinen oder Feinmeßeinrichtungen konnte wegen der Größe der zu messenden Formänderungen abgesehen werden. Die Längenmessungen z. B. erfolgten in der Regel

mit einem schmalen, biegsamen Zelluloid-Maßstab mit Millimeterteilung, unter Schätzung der Zehntel.

Zur Belastung dienten neben geeichten Gewichtstücken hauptsächlich abgewogene Sandsäcke.

Die Wahl der zu den Versuchen verwendeten Stoffe war durch den Bestand des in der Ballonhalle geführten Reparaturlagers entscheidend beeinflusst. Nur wenige Stoffproben wurden eigens für die Versuche von der Firma Riedinger, Augsburg, zur Verfügung gestellt.

Die Beschreibung der Versuche ist auf eine kurze Darstellung der Versuchsanordnung und die Angabe der Ergebnisse in zeichnerischer Form beschränkt. Alle Zwischenrechnungen sind weggelassen.

Zum Zweck einer guten Übersicht werden alle Versuche fortlaufend (römisch) numeriert. Außerdem ist am Schlusse dieser Arbeit (Seite 106) eine Stofftabelle beigefügt, in der alle zu den Versuchen verwendeten Stoffe kurz beschrieben und mit einem Kennbuchstaben versehen sind.

## Versuch I.

### Die Langsamkeit der Formänderung.

(Stoff E und F der Tabelle.)

Je ein 5 cm breiter und etwa 40 cm langer Streifen (Streifen von diesen Abmessungen sind im Folgenden stets Normalstreifen genannt) wurde durch Anhängen von 20 kg mit 400 kg/m in Richtung des Schusses belastet. (Bei diagonal-doublierten Stoffen ist für die Richtungsangabe „Kette, Schuß“ jeweils die untere, der Länge nach durchgehende Stofflage maßgebend.)

In anfangs kurzen (Minuten und Stunden), später längeren Zeitabständen (Tagen) wurde die Dehnung (Meßlänge 200 mm) bestimmt.

Zwei weitere gleiche Streifen wurden ebenfalls mit 400 kg/m belastet, jedoch nicht auf einmal, sondern in 4 Stufen (100, 200, 300, 400) in Zeitabständen von je 24 Stunden.

Die Ablesungen wurden 4 Wochen lang fortgesetzt. Hiernach wurde die Entlastung vorgenommen, und zwar bei den ersten beiden Streifen gleich auf einmal, bei den letzten wieder stufenweise (300, 200, 100, 0).

Die ermittelten Dehnungen sind in Prozent als Funktion der Zeit in Fig. 21 und 22 dargestellt. Die eingeschriebenen Belastungszahlen weisen auf diejenigen Dehnungswerte hin, die jeweils 1 Minute nach erfolgter Belastung bzw. Entlastung gemessen wurden. Die darauf folgenden Versuchspunkte entsprechen der Dehnung nach 2 Stunden, die nächstfolgenden nach 24 Stunden. Von da ab nimmt die Dehnung nur noch langsam zu. Sie erreicht ihren endgültigen Wert bei der Belastung nach etwa 14 Tagen, bei der Entlastung frühestens nach etwa 4 Wochen.

Kleine Wellen in den Kurven (mit a bezeichnet) sind in starken Schwankungen der Temperatur und Luftfeuchtigkeit begründet. Der genauere Zusammenhang der Formänderung mit diesen Einflüssen blieb hier, wie bei allen anderen Versuchen, unberücksichtigt.

Bei der Entlastung zeigt sich, wie gering die elastischen Kräfte gegenüber der inneren Reibung sind. Die Kürzung der Streifen, namentlich bei der stufenweisen Entlastung, war stellenweise unmeßbar. Im Zusammenhang damit ist die bleibende Dehnung sehr hoch, etwa  $5\frac{1}{2}\%$ .

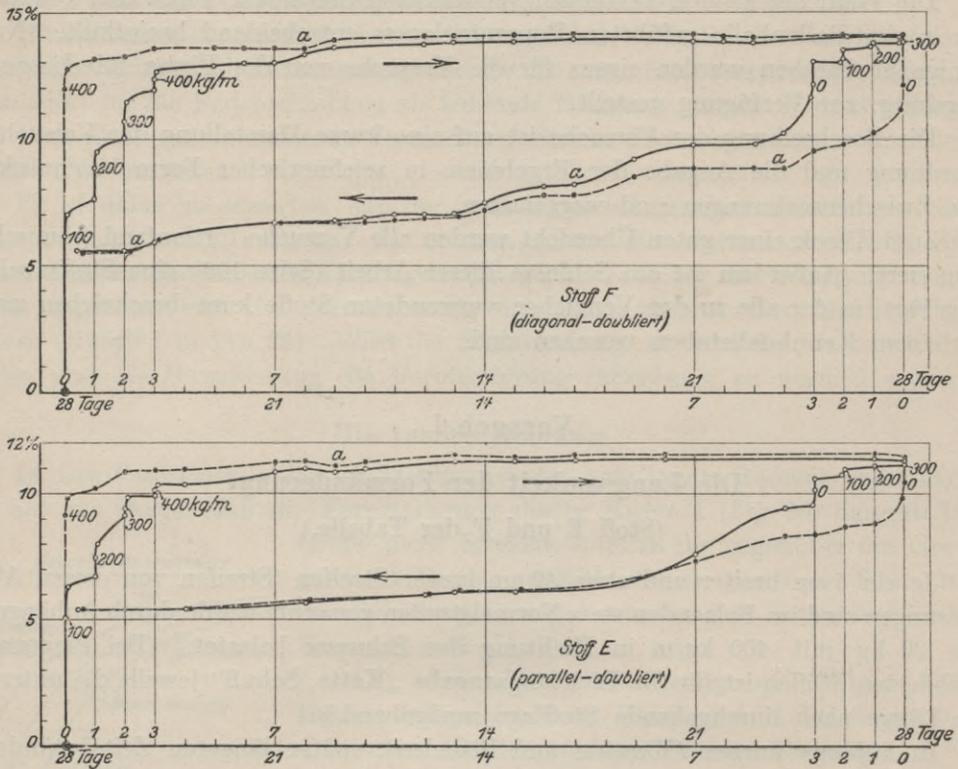


Fig. 21 und 22. Versuch I. Die Langsamkeit der Formänderung.  
(Stoff E und F der Tabelle.)

## Versuch II.

### Die Beziehung zwischen Spannung und Formänderung.

(Stoff A, B, C, D der Tabelle.)

Je 3 Normalstreifen wurden unter regelmäßiger Laststeigerung bis zum Bruch gedehnt, und zwar immer einer in Richtung der Kette, einer in Richtung des Schusses und einer diagonal unter  $45^\circ$ . Die Laststeigerung erfolgte in kurzen Abständen (ca. 1 Min.) um 20 bis 50 kg/m, je nach dem Genauigkeitsbedarf. Etwa eine halbe Minute nach erfolgter Laststeigerung wurde abgelesen, die Dehnung bei einer Meßlänge von 200 mm, die Querkontraktion bei einer Meßbreite gleich der Streifenbreite = 50 mm.

Die Versuchswerte sind in Fig. 23 bis 26 in Prozent als Funktion der spezifischen Belastung aufgetragen. (Die Versuchspunkte selbst sind nur im ersten Diagramm angegeben, um den Grad der Genauigkeit der Kurven zu veranschaulichen.)

Die Spannung ist als Quotient aus der angehängten Last und der ursprünglichen Streifenbreite von 50 mm, nicht aber der jeweiligen, geringeren Breite berechnet. Das gleiche Verfahren wird bei Dehnungsversuchen im Maschinenbau angewendet. Da die Formänderungen des Stoffes aber ungleich größere sind, so empfiehlt sich für genauere Rechnungen die Anbringung einer Korrektion (hierüber siehe später Seite 62).

Die ermittelten Dehnungskurven zeigen den in Fig. 20 angenommenen Charakter. Sie weichen damit vom Hookeschen Proportionalitätsgesetz stark ab. Die in der Praxis auftretenden Beanspruchungen gehen in der Regel nicht über das schnell ansteigende Anfangsstück der Dehnungskurven hinaus.

Für die Dehnung des Stoffes ist die Krafrichtung von ausschlaggebender Bedeutung; folgende Erscheinung kehrt bei allen Proben wieder: Die Dehnung des Schusses ist verschieden von der der Kette, und beide werden erheblich übertroffen von der Dehnung in der Diagonalen. In Fig. 27 ist dieser Unterschied an der verschiedenen Meßlänge bei gleicher Belastung der 3 Streifen zu erkennen.

Der Unterschied zwischen Kette und Schuß ist eine Folge der Fadenstreckung. Er kann nur darin begründet sein, daß im ungespannten Stoff die Wellenlinien der Ketten- und Schußfäden verschieden hoch sind, daß also die in den Fig. 17 bis 19 (Seite 10 u. 11) gemachte Annahme, nach der der Zustand gleicher Wellenhöhe ( $s_1 = s_2$ ,  $\varepsilon = \zeta$ ) als Anfangszustand angenommen wurde, nicht zutreffend ist.

Zur Entstehung solcher Unterschiede bietet der Gang der Fabrikation vornehmlich an zwei Stellen Gelegenheit:

1. Im Webstuhl sind die den beiden Fadenrichtungen zugeteilten Bewegungsvorgänge und Kräfte grundsätzlich verschieden.

2. Bei der Gummierung wird der Stoff unter einer gewissen Spannung von einer Rolle auf die andere übergewickelt; dabei ist er in Richtung der Kette gedehnt, des Schusses zusammengezogen. Ein Teil dieser Formänderung ist bleibend. Ein und derselbe Stoff besitzt also nach der Gummierung eine andere Nullage der Fadenstreckung als vorher.

Welche Beachtung diese Tatsache, die im Hüllenbau nur nachteilige Folgen hat, bei den erzeugenden Firmen findet, konnte nicht festgestellt werden. Eine Reihe dahin abzielender Fragen stieß auf Zurückhaltung.

Fig. 23 und 24, die für ein- und denselben Stoff gelten, zeigen den Einfluß der Gummierung: die Schußdehnung, die bei ungummiertem Stoff die geringere ist, übertrifft beim gummierten die Kettendehnung um fast das Doppelte.

Auch bei den gummierten Stoffen der Fig. 25 und 26 ist die Schußdehnung die größere (siehe besonders Stoff C). Ihr entspricht jedesmal die größere Querkontraktion in Richtung der Kette

Im Zusammenhang hiermit ist auf folgende Beobachtung hinzuweisen. Eine Reihe von Versuchsstreifen wurde erst einige Wochen, sogar Monate nach ihrer Vorbereitung (Aufzeichnung, Zuschnitt) untersucht, da der Fahrbetrieb des Siemens-Schuckert-Ballons die verfügbare Arbeitszeit öfters absorbierte. Während dieser Zeit verminderten sich in fast allen Fällen die Meßlängen, die durch feine Tuschelinien auf dem Stoff markiert waren, in Richtung der Kette um  $\frac{1}{2}$

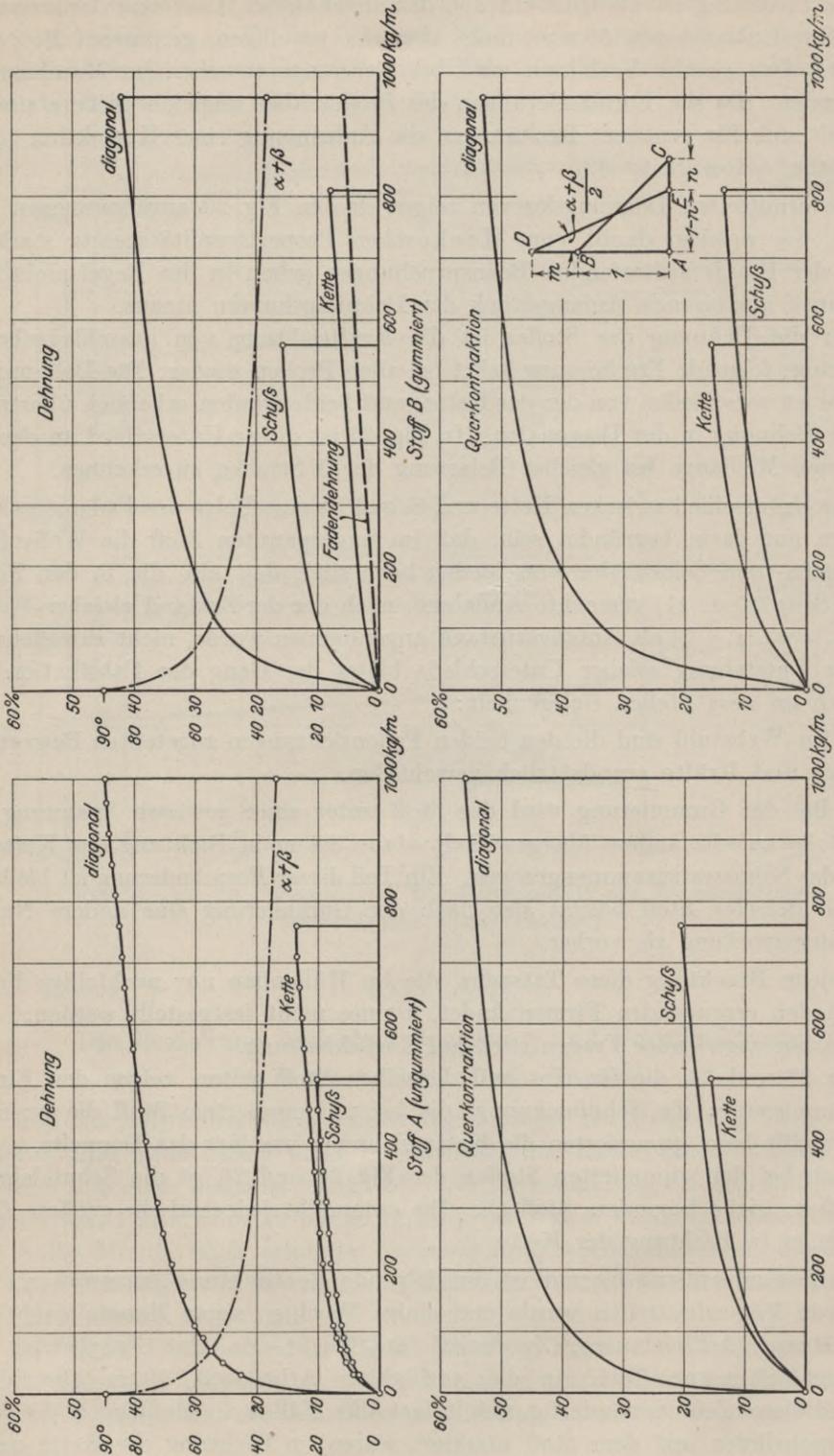


Fig. 23 und 24. Versuch II. Formänderung einfachen, ungummierten und gummierten Stoffes. (Stoff A und B der Tabelle).

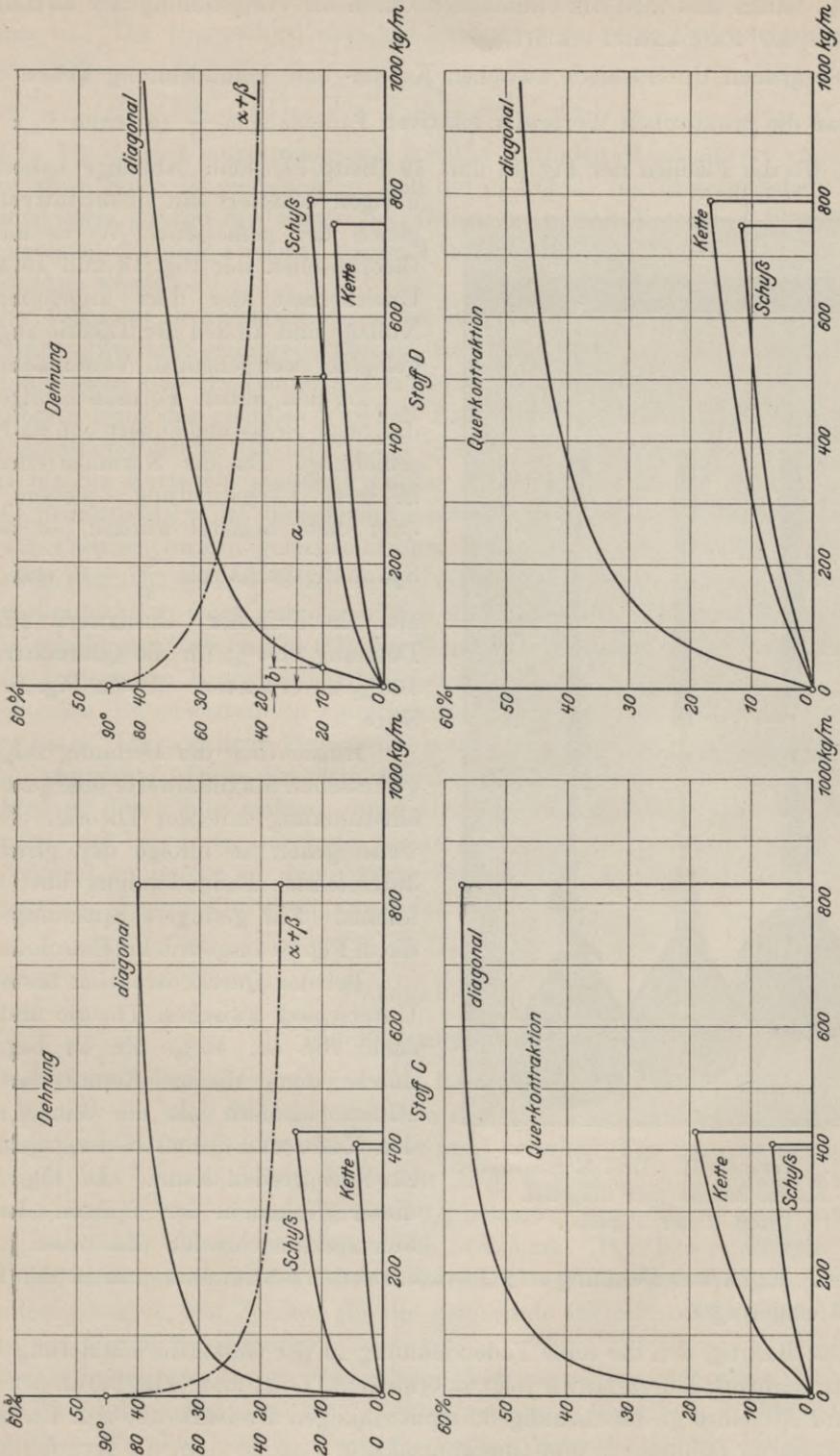


Fig. 25 und 26. Versuch II. Formänderung einfacher Stoffe. (Stoff C und D der Tabelle).

bis 1%. Auch dies wird am einfachsten durch die Vorspannung der Kettenfäden während der Fabrikation erklärt.

Die großen Unterschiede zwischen Ketten- und Schußdehnung weisen darauf hin, daß die praktischen Werte der relativen Fadenlängen  $\frac{s}{\delta}$  zwischen  $\frac{2}{3}\pi$  und  $\pi$  liegen, wo die Flächen der Fig. 18 und 19 (Seite 11) steile Abhänge haben. Im

übrigen scheidet ein quantitativer Vergleich der gemessenen Werte mit den theoretischen der Fig. 18 und 19 an der Unsicherheit der dort angenommenen Nullage und an den der Theorie zugrunde gelegten weitgehenden Vereinfachungen.

In den hohen Formänderungen für diagonale Belastung äußert sich die Fadenschiebung. Da die Normalstreifen nur in ihrer Längsrichtung, jedoch nicht quer dazu belastet wurden, so ist das Spannungsverhältnis  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0$ , und damit als theoretischer Grenzwert für die Dehnung 41,4%, für die Querkontraktion 100% zu erwarten. (Siehe Fig. 10 bis 12 Seite 6.)

Hinsichtlich der Dehnung zeigen die gemessenen Maximalwerte eine gute Übereinstimmung mit der Theorie. Stellenweise gehen sie infolge der gleichzeitig auftretenden Fadendehnung über 41,4% hinaus. Für geringere Spannungen gilt die in Fig. 20 ausgedrückte Einschränkung.

Bei der Querkontraktion besteht ein Unterschied zwischen Theorie und Versuch von ca. 45%. Er ist begründet durch den Minimal-Raumbedarf der Fäden, insofern als der Winkel  $\alpha + \beta$ , den Kette und Schuß bilden, nicht ganz zu Null werden kann. In Fig. 27 ist dieser Winkel in den Spitzen der drei aufeinanderstehenden Rhomben zu erkennen.

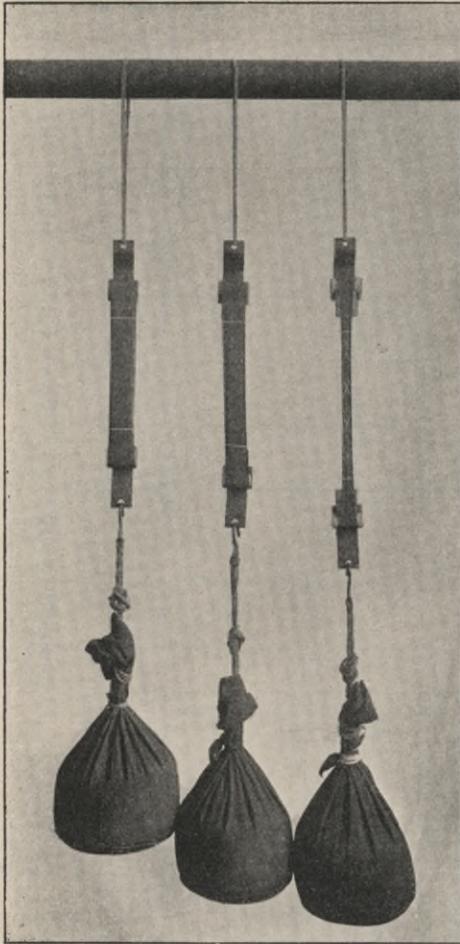


Fig. 27. Versuch II. Drei Normalstreifen, Kette, Schuss und diagonal. (Stoff C der Tabelle).

Er ist aus Dehnung und Querkontraktion bestimmbar und in den Fig. 23 bis 26 eingetragen.

Der Beitrag, den die reine Fadendehnung zu der Gesamtformänderung in diagonaler Richtung liefert, ist wie folgt zu ermitteln. Trägt man (Fig. 24) an den Seiten AB und AC eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 1 die gemessene Dehnung m und Querkontraktion n ab, so stellt die Hypotenuse DE

des neuen Dreiecks diejenige Fadenzahl dar, die aus der ursprünglichen BC hervorgegangen ist. Der Unterschied zwischen beiden ist die reine Fadendehnung. Sie hat die Größe

$$\sqrt{(1+m)^2 + (1-n)^2} - \sqrt{2}.$$

Sie ist in Fig. 24 mit eingetragen und erreicht dort den Maximalwert von 5,8%.

Im allgemeinen ist zu beachten, daß die in Fig. 23 bis 26 gefundenen Formänderungswerte infolge der Kürze der Belastung gemäß Versuch I kleiner sind als diejenigen, die sich an einer dauernd unter Belastung stehenden Ballonhülle herausbilden würden.

Die Werte der Bruchfestigkeit sind für die Zwecke dieser Arbeit von geringerer Bedeutung. (Zu ihrer genaueren Bestimmung hätte es wegen der unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Einspannung zahlreicher Zerreißversuche bedurft.)

Entsprechend der ziemlich gleichen Fadenzahl pro Meter zeigen Kette und Schuß annähernd gleiche Bruchfestigkeit (siehe Stoff C und D). Bei Stoff A und B scheint für die Kette ein stärkerer Faden verwendet worden zu sein.

Die Bruchgrenze in der diagonalen Richtung liegt höher als für Kette und Schuß, da beide Fadengattungen gemeinsam zum Tragen herangezogen werden. Doch ist gerade hier eine genaue Bestimmung nicht leicht, da an den Einspannstellen die Querkontraktion stark zurückgehalten und damit die Belastung des einzelnen Fadens erhöht wird (siehe Fig. 27); der Bruch erfolgt daher in der Regel zu früh.

Die gemessenen Bruchfestigkeiten unterscheiden sich von den für die Praxis maßgebenden Dauerwerten im umgekehrten Sinne wie die Formänderung: sie sind zu hoch. Die wirkliche Platzgrenze einer Hülle liegt tiefer, als den Versuchswerten entspricht. Diese Erscheinung, die bei dreifachem Stoff mit diagonalen Zwischenlagen durch hier weniger interessierende Dauerversuche ausreichend klar zutage trat, ist begründet durch die innere Stoffreibung. Der Konstrukteur sollte Festigkeitszahlen, sofern sie durch kurze Zerrei- oder Zerplatzversuche ermittelt sind, nur mit diesem Vorbehalt anwenden.

### Versuch III.

#### Die Fadendehnung.

Der einer Webspule entnommene Baumwollfaden wurde in 10 Schleifen (= 20 Fäden) um zwei Ösen gelegt, oben und unten zusammengebunden und in der Mitte mit zwei Marken (Meßlänge 500 mm) versehen (Fig. 28). An der unteren Öse wurde eine Wagschale (Eigengewicht 55 g) angehängt und durch Gewichtsstücke in regelmäßigen Stufen von je 200 g belastet. Eine Minute nach jeder Belastung wurde die Länge der Meßstrecke bestimmt. Der Bruch erfolgte in der Weise, daß zunächst ein Faden riß und dann in Abständen von wenigen Sekunden die anderen folgten, ein Zeichen für die genügende Gleichmäßigkeit der Lastverteilung auf die 20 Einzelfäden.

Die Dehnungswerte von zwei solchen Versuchen, die also einen Mittelwert von 40 Fäden darstellen, sind in Fig. 29 aufgetragen. Sie zeigen in ihrem Verlauf den gleichen Charakter wie die Werte des vorigen Versuchs, jedoch mit einer etwas

größeren Annäherung an das Hookesche Gesetz. Die Bruchdehnung liegt zwischen 5 und 6% und erreicht damit die Größe des in Fig. 24 ermittelten Wertes.

Zieht man die Fadendehnung von den in Fig. 23 bis 26 für Kette und Schuß ermittelten Dehnungswerten ab, so erhält man die reine Fadenstreckung. Sie erreicht Beträge bis 10% (Stoff D, Schuß), kann aber auch sehr gering sein (Stoff C, Kette).

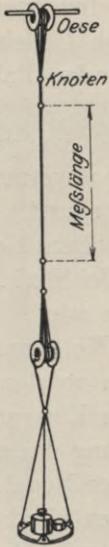


Fig. 28. Bestimmung der Fadendehnung.

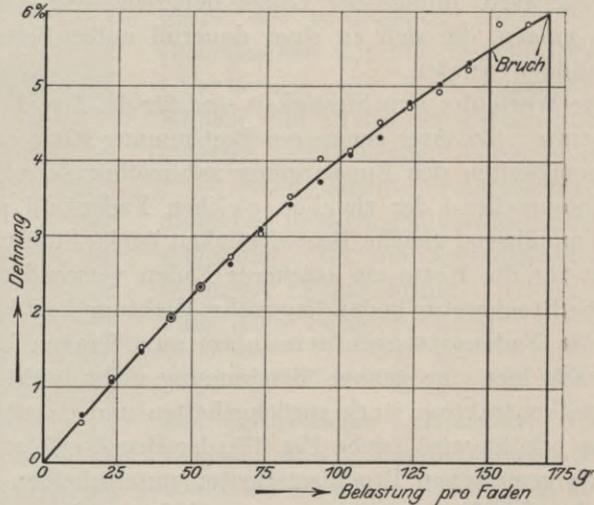


Fig. 29. Versuch III. Fadendehnung.

#### Versuch IV.

### Die Formänderung zylindrischer Hüllen.

(Stoff D der Tabelle.)

Es wurden 7 Stoffzylinder von 80 mm Durchmesser und 300 mm Höhe angefertigt (siehe Fig. 30 bis 32 und 41). Die zu ihrem Umfang notwendigen Stoffrechtecke wurden so zugeschnitten, daß die Richtung der Kettenfäden mit der Querschnittsebene des Zylinders Winkel  $\gamma$  (Fig. 6 Seite 4) von 0, 15, 30, 45, 60, 75 und 90° einschloß. Der beiderseitige Abschluß erfolgte durch eingebundene gerillte Holzscheiben von 30 mm Höhe.

Die Spannungen wurden durch Wasserdruck erzeugt. Zu dem Zwecke wurde der Wasserinhalt der Zylinder durch einen Gummischlauch mit einem hochziehbaren Gefäß verbunden, so daß jeder beliebige Druck eingestellt werden konnte.

Das Spannungsverhältnis wurde durch ein bald positives, bald negatives Zusatzgewicht reguliert. Zu dem Ende konnten die Zylinder, die mit der einen Stirnseite an einem U-Eisen festgeschraubt wurden, bald stehend (Fig. 32), bald hängend (Fig. 30 und 31) verwendet werden. Im ersteren Falle erfolgte die Belastung mit Hilfe eines übergelegten Doppelhebels. Hierbei war es nicht angängig, die Längsspannung  $\sigma_2$  ganz auf Null zu bringen, da dann die Zylinder keine Knickfestigkeit mehr besaßen. Vielmehr wurde die Längsspannung im Minimum auf ein

Fünftel der Querspannung gehalten. Auch hierbei war es noch nötig, die Zylinder durch leichtes seitliches Unterstützen vor dem Abknicken zu schützen.

Es wurden folgende Spannungsverhältnisse untersucht:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,2 \quad 0,5 \quad 1 \quad 2 \quad \text{und} \quad \infty.$$

Beim Spannungsverhältnis 0,5 wurden die Zylinder stehend verwendet ohne Zusatzbelastung, entsprechend der bekannten Beziehung, daß in einem durch Innendruck belasteten Zylinder die Längsspannung gleich der halben Querspannung ist. Das im Vergleich zu den angewendeten Wasserdrücken (7500 mm WS) sehr geringe Gewicht der oberen Holz-scheibe blieb dabei unberücksichtigt. Bei den Spannungsverhältnissen 1, 2 und  $\infty$  wurden die Zylinder hängend untersucht unter Zuhilfenahme direkt angehängter Zusatzlasten. Beim Spannungsverhältnis  $\infty$  (Fig. 31) wurde die Längsspannung  $\sigma_2$  nur durch diese Zusatzbelastung erzeugt, während die Querspannung  $\sigma_1$  durch Entleerung des Zylinders auf Null gebracht wurde.

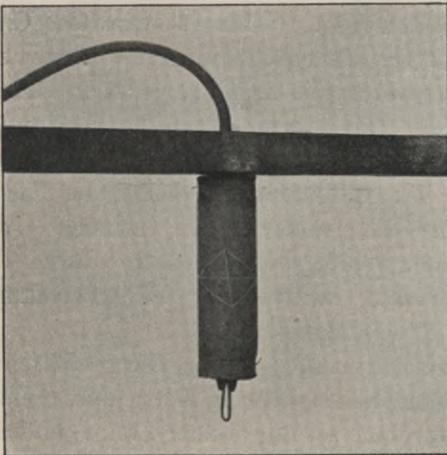


Fig. 30. Versuch IV. Stoffzylinder ohne Zusatzbelastung.  $\gamma = 15$  Grad. Verdrehung. (Stoff D der Tabelle).

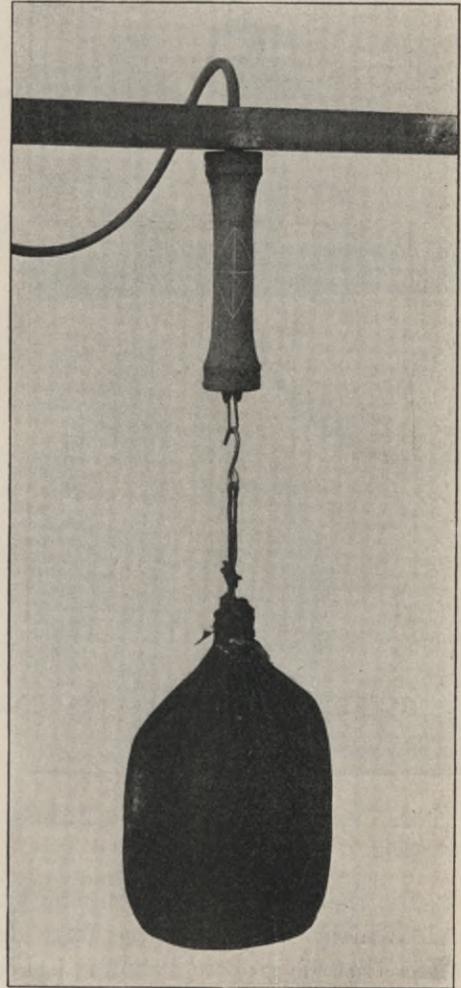


Fig. 31. Versuch IV. Positive Zusatzbelastung.  $\gamma = 45$  Grad. (Stoff D der Tabelle).

Wasserdruck und Zusatzgewicht wurden stets so gewählt, daß jeweils die größere der beiden Spannungen 300 kg/m betrug.

Zur Messung wurde ein auf der Spitze stehender Rhombus mit den Diagonalen 80 und 100 mm auf der der Naht des Zylinders gegenüberliegenden Seite in Tusche

aufgetragen. Gemessen wurden mit Hilfe des biegsamen Zelluloid-Maßstabes seine Seitenlängen und Diagonalen, durch die die Durchmesserdehnung  $\Delta d$ , die Längskontraktion  $\Delta l$  und die Verdrehung  $\varphi$  gegeben sind.

Die Versuchswerte, die jeweils nach einer Belastung von 8 bis 10 Min. Dauer ermittelt wurden, sind in Fig. 33 bis 35 als Funktion des Anfangswinkels  $\gamma$  derart auf-

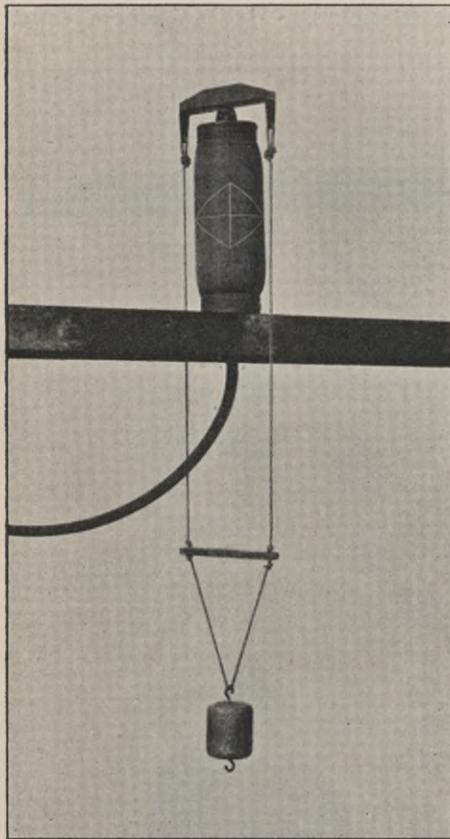


Fig. 32. Versuch IV. Negative Zusatzbelastung.  $\gamma = 45$  Grad. (Stoff D d. Tab.).

getragen, daß die Punkte gleichen Spannungsverhältnisses (0,2 bis  $\infty$ ) durch Kurven (a bis e) vereinigt sind. Ihre Übertragung in Flächenform ergibt Fig. 36 bis 38. Hierbei sind, um einen unmittelbaren Vergleich mit den theoretischen Werten der Fig. 10 bis 12 (Seite 6) zu ermöglichen, die Formänderungen für  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0, 0,25, 0,75$  sowie für  $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 0,25$  und  $0,75$  durch Interpolation ermittelt. Außerdem ist jeweils der negative Teil der Flächen, der für Ballonhüllen nicht in Betracht kommt, von dem positiven Teil, in dem die Querspannung  $\sigma_1$  stets größer oder im Grenzfall gleich der Längsspannung  $\sigma_2$  ist, abgetrennt.

In den Flächen kommt deutlich der nach den Fig. 10 bis 12 erwartete Charakter der Fadenschiebung zum Ausdruck. In der absoluten Größe zeigen sich Unterschiede: Die höheren Werte bleiben infolge der elastischen Kräfte, der inneren Reibung und des Minimalraumbedarfes der Fäden gegen die theoretischen zurück; die niederen Werte sind überdeckt durch die gleichzeitig auftretende Fadenstreckung und Fadendehnung.

Die theoretischen Flächen sind symmetrisch zur  $45^\circ$ -Achse. Die praktischen sind es nicht. Dies ist eine Folge der Ungleichheit zwischen Kette und Schuß. Immer tritt die größere Dehnung (sei es im Durchmesser oder in der Länge) und die geringere Kontraktion in Richtung des Schusses auf. Z. B. ist die Durchmesserdehnung beim Winkel  $\gamma = 90^\circ$  (Fig. 33) größer als bei  $\gamma = 0$ , da im ersteren Falle die Schußfäden in Richtung des Durchmessers liegen. Der größeren Dehnung des Schusses entspricht jeweils die größere Kontraktion der Kette und umgekehrt.

In Fig. 35 und 38 sehen wir bei  $45^\circ$  durchgehend eine positive Verdrehung. Wir haben hier die auf Seite 13 beschriebene Erscheinung, daß bei  $45^\circ$  durch die einseitige Wirkung der Fadenstreckung eine Verdrehung möglich ist. Der Drehsinn ist für alle Belastungsfälle der gleiche, da sowohl Längs- als auch Querspannung die Wirkung haben, daß sich die Schußfäden stärker strecken als die Kettenfäden.

Nun zeigen Fig. 35 und 38 nicht nur bei  $45^\circ$ , sondern auch bei  $0$  und  $90^\circ$  eine geringe Verdrehung, und zwar einmal positiv, einmal negativ. Der Grund ist folgender: Bei dem verwendeten Stoff betrug im unbelasteten Zustand, wie er von der Rolle entnommen und nach der Kettenrichtung orientiert ausgeschnitten wurde, der Winkel zwischen Kette und Schuß nicht genau  $90^\circ$ , sondern etwa  $1$  bis  $2^\circ$  weniger. Bei dem Versuchszylinder  $\gamma = 0$  lagen damit die Schußfäden um ebenso viel zur Achse geneigt; bei der Belastung stellten sie sich in die Achsenrichtung ein und verdrehten damit den Zylinder um dieselben  $1$  bis  $2^\circ$ . Bei dem Zylinder  $\gamma = 90^\circ$  war die Richtung der Kette zur Achse parallel, so daß für den Fall  $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \infty$  keine Verdrehung auftreten konnte. Erst mit wachsender Querspannung trat eine Verdrehung auf, da die Schußfäden wegen ihrer Abweichung von der zur Achse senkrechten Querschnittsebene keine geschlossenen Ringe, sondern Schraubenlinien bildeten, die nun auseinander federten, bis durch die allmähliche Schrägstellung der Kettenfäden ein Gegenmoment entstand. Die Figuren zeigen deutlich das Anwachsen der Verdrehung mit steigender Querspannung.

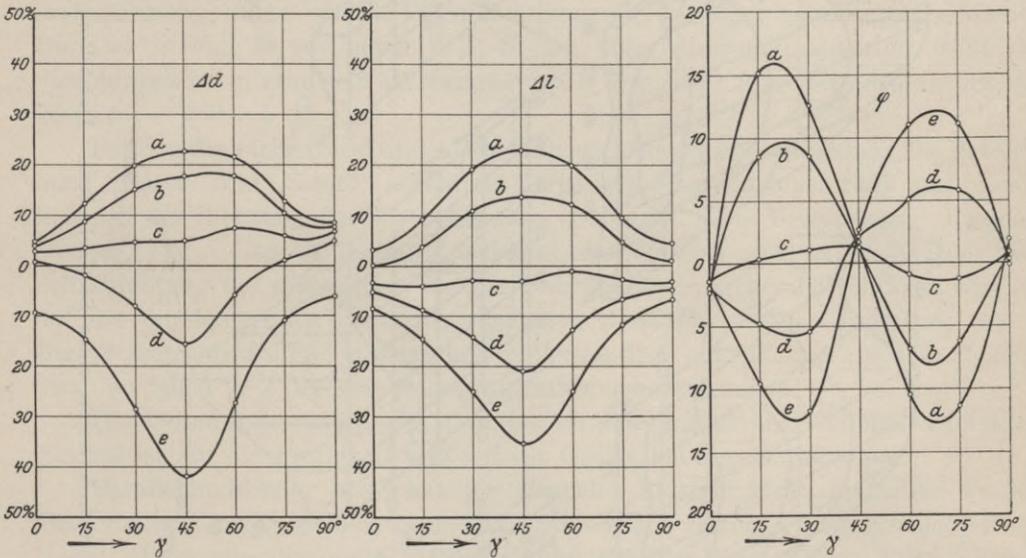


Fig. 33—35. Versuch IV. Formänderungen eines Stoffzylinders. Darstellung in Kurvenscharen. (Stoff D der Tabelle).

a . . . . .	$\sigma_1 = 300$ kg/m;	$\sigma_2 = 60$ kg/m
b . . . . .	" = 300 "	" = 150 "
c . . . . .	" = 300 "	" = 300 "
d . . . . .	" = 150 "	" = 300 "
e . . . . .	" = 0 "	" = 300 "

Die den Flächen zugrunde gelegten Spannungswerte entsprechen dem unge dehnten Durchmesser der Versuchszylinder. Demgegenüber weisen die tatsächlichen Spannungen wegen der hohen Durchmesseränderungen stellenweise ganz erhebliche Abweichungen auf. Hierdurch sind die Bilder verzerrt. Wäre dies nicht der Fall, so müßte z. B. die negative Fläche der Längskontraktion der positiven

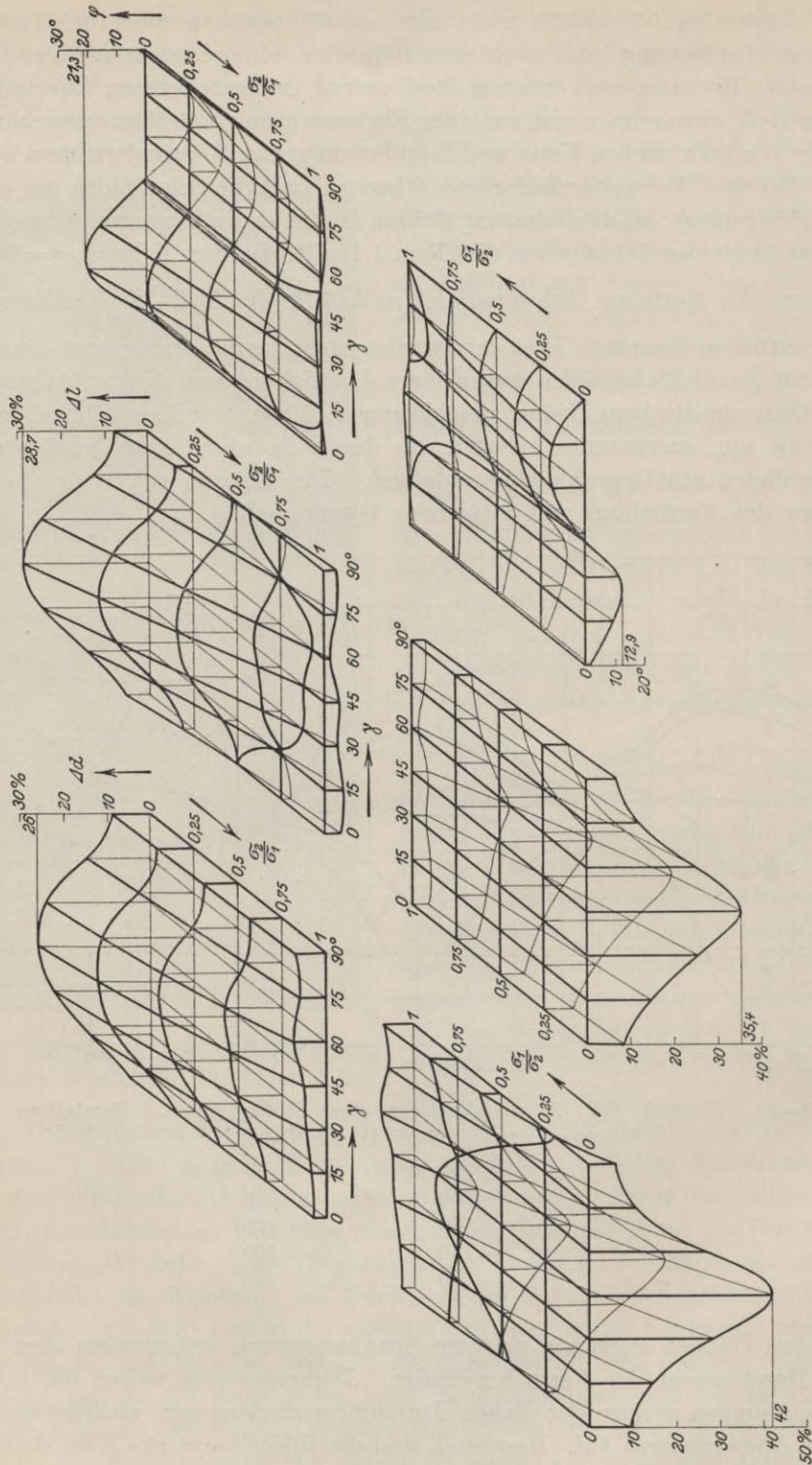


Fig. 36 bis 38. Versuch IV. Formänderungen eines Stoffzylinders. Darstellung in Raumkoordinaten. (Stoff D der Tabelle).

der Durchmesserdehnung kongruent sein und umgekehrt. Es wäre möglich, auf Grund der gemessenen Durchmesser die tatsächlichen Spannungen zu berechnen und die Kurven hiernach zu verbessern. Jedoch erübrigt sich diese auf eine umständliche Interpolation angewiesene Korrektur, da die Flächen nur als Anschauungsmittel, nicht als Rechnungsgrundlagen zur Verwendung kommen.

## Mehrfache Stoffe.

### Ableitung ihrer Dehnungskurven aus denen des einfachen Stoffes.

Die Formänderungseigenschaften der mehrfachen Stoffe, wie sie ausschließlich für den Hüllenbau verwendet werden, ergeben sich aus denen des einfachen Stoffes.

Wir denken uns aus dem Stoff D der Tabelle einen paralleldoublierten, einen unter  $45^\circ$  diagonaldoublierten und einen dreifachen Stoff (mit 2 parallelen und einer unter  $45^\circ$  diagonalen Lage) hergestellt und entwickeln für diese aus den Diagrammwerten der Fig. 26 die Dehnungskurven. Wir finden die jeweilige Gesamtspannung, indem wir für jeden Dehnungswert die Einzelspannungen addieren. Dies ist in Fig. 39 geschehen. Z. B. ist beim diagonaldoublierten Stoff der Spannungswert  $m$  ermittelt als Summe von  $a + b$  (Fig. 26); beim dreifachen der Wert  $n = 2a + b$ .

Für den dreifachen Stoff sind 4 Belastungsrichtungen unterschieden. Die Bezeichnung „Kette“ und „Schuß“ entspricht derjenigen beim einfachen Stoff und bezieht sich auf die Richtung der durchgehenden Stofflagen. Die Bezeichnung „diagonal (Kette)“ bzw. „diagonal (Schuß)“ bedeutet, daß die Belastung in der Ketten- bzw. Schußrichtung der diagonalen, bei der Fabrikation in einzelnen schrägen Streifen auf die durchgehenden Bahnen aufgelegten Stofflage erfolgt. Bestehen, wie in Fig. 39 angenommen, beim diagonaldoublierten Stoff beide Lagen aus dem gleichen Stoff, so fallen je 2 der vier Belastungsrichtungen zusammen.

Die Dehnungskurven zeigen, daß die Art der Doublierung von entscheidendem Einfluß ist auf die Festigkeit und auf die Größe der Formänderungen:

Paralleldoublierter Stoff hat die doppelte Festigkeit des einfachen Stoffes. Diagonaldoublierter Stoff hat eine nur unwesentlich höhere Festigkeit als der einfache. Denn die diagonale Stofflage nimmt infolge ihrer hohen Eigendehnung nur wenig an der Spannungsaufnahme teil. Erst wenn die parallele Lage an ihrer Bruchgrenze angelangt ist, erfolgt unter einem heftigen Dehnungssprung der Übergang der Spannung auf die diagonale Lage. Diagonaldoublierter Stoff bietet also in Hinsicht auf die Festigkeit keinen lohnenden Vorteil gegenüber dem einfachen Stoff.

Paralleldoublierter Stoff hat bei Belastung unter  $45^\circ$ , allgemein bei schräger Belastung, die gleichbedeutend ist mit einem Auftreten von Schubkräften, eine im Verhältnis zu Kette und Schuß ebenso hohe Dehnung wie einfacher Stoff. Diagonaldoublierter dagegen weist bei Belastung durch Schubkräfte keine höhere Formänderung auf als bei Belastung durch Normalkräfte. Er ist „schubfest“. In ihm ist die Fadenschiebung, die den größten Teil aller Formänderungen ausmacht, aufgehoben. Nur Fadenstreckung und Fadendehnung kommen für seine

Formänderungen in Betracht. Diese Eigenschaft ist nahezu ebenso wichtig wie eine hohe Bruchfestigkeit.

Der dreifache Stoff vereinigt die hohe Bruchfestigkeit des paralleldoublierten mit der „Schubfestigkeit“ des diagonaldoublierten Stoffes.

In Fig. 39 unten ist das Formänderungsbild des diagonaldoublierten Stoffes durch die Darstellung seiner Querkontraktion vervollständigt. Hierbei ist zu beachten, daß schon beim einfachen Stoff infolge der Vielheit der mitwirkenden Einflüsse zu einer und derselben Dehnung eine ganz verschiedene Querkontraktion gehört, die von der Belastungsrichtung abhängig ist und nur durch den Versuch ermittelt werden kann. So ist für den Stoff D die Größe der Querkontraktion im Verhältnis zur Dehnung für Belastungen in Kette-, Schuß- und diagonaler Richtung aus Fig. 26 abgeleitet.

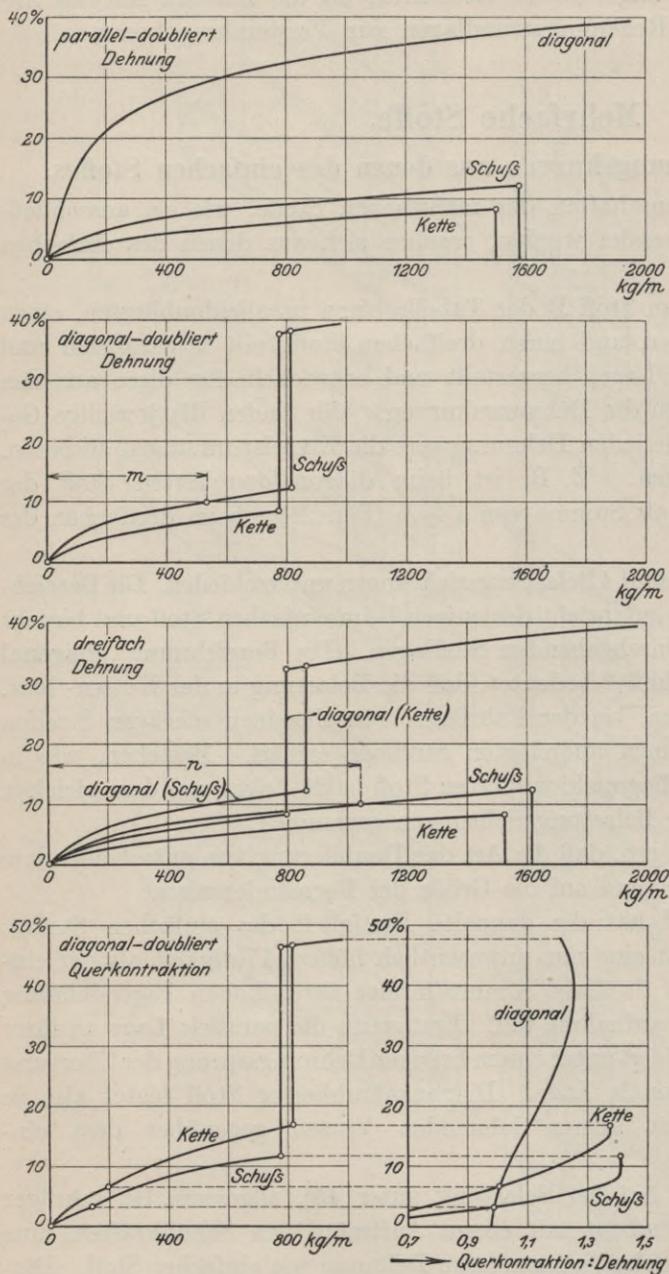


Fig. 39. Ableitung der Dehnungskurven mehrfacher Stoffe aus denen des einfachen Stoffes. (Stoff D der Tabelle).

andere mithin eine gleich große Druckbeanspruchung.

Beim mehrfachen, in der Querrichtung unbelasteten Stoff wird nun die Gesamtkontraktion jeweils gleich der größten Einzelkontraktion sein. Wäre dies nicht der Fall, d. h. würden sich die beiden bzw. 3 Einzelkontraktionen auf einem Mittelwert vereinigen, so würde diejenige Stofflage, die sich allein stärker zusammenziehen wollte, eine Zugbeanspruchung in der Querrichtung erfahren, die Dies aber ist unmöglich. Da

sich nun die Kurven der verhältnismäßigen Querkontraktionen gegenseitig überschneiden (Fig. 39 unten), so ergeben sich in den Kontraktionskurven der mehrfachen Stoffe Ecken, die jedoch im allgemeinen so flach sind, daß sie beim praktischen Dehnungsversuch als solche nicht bemerkt werden.

Versuch V.

Die Dehnungskurven mehrfacher Stoffe.

(Stoff E, F, G der Tabelle.)

Eine Wiederholung des Versuchs II für paralleldoublierten, diagonaldoublierten und dreifachen Stoff ergab die Diagramme Fig. 40. Die drei verwendeten Stoffe weichen sowohl von dem vorher besprochenen Stoff D der Tabelle wie auch untereinander in der Qualität ab. Jedoch zeigt sich deutlich der Charakter der in Fig. 39 aus dem einfachen Stoff entwickelten Kurven.

Besonders klar trat beim dreifachen Stoff der Dehnungssprung in die Erscheinung. In weniger als einer Minute zerriß die zwischen den beiden Hauptlagen fest eingummerte diagonale Zwischenlage auf ihrer ganzen Länge in zahlreiche kleine Stücke, so daß der Stoff im durchfallenden Licht ein gleichmäßig gesprenkeltes Aussehen erhielt.

Beim diagonaldoublierten Stoff gelang die gleiche Beobachtung nur einmal, da die Bruchgrenze der übrig bleibenden zweiten Stofflage dem Spannungssprung näher liegt und infolge der ruckweisen Zerstörung der ersten Lage zu früh erreicht wird.

Für diagonaldoublierten und dreifachen Stoff sind je einmal die Versuchspunkte mit in die Kurven eingetragen.

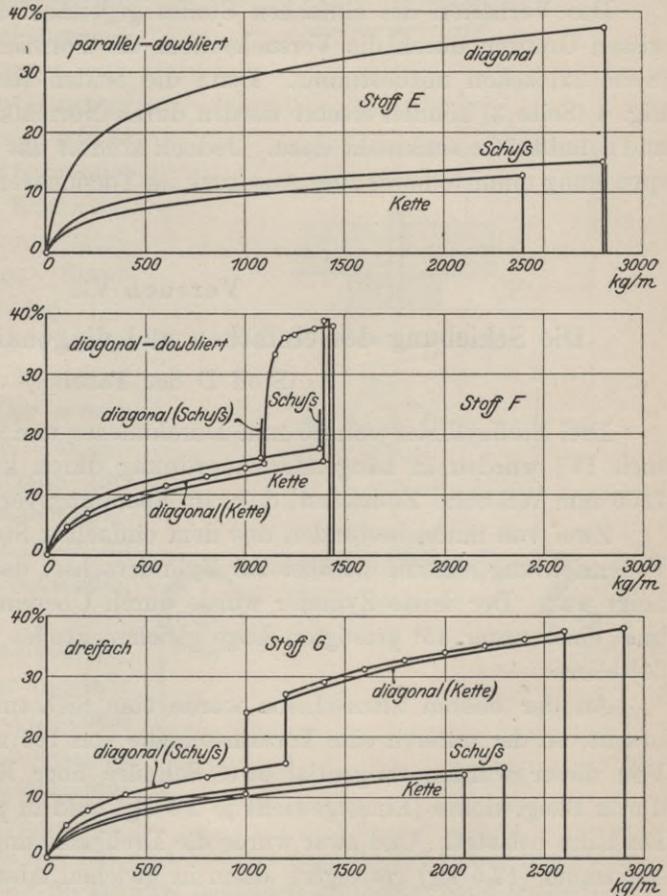


Fig. 40. Versuch V. Dehnungskurven mehrfacher Stoffe. (Stoff E, F, G der Tabelle.)

## Die Schubspannungen.

In den bisherigen Betrachtungen wurden alle Formänderungen auf die beiden zu einander senkrechten Normalspannungen  $\sigma_1$  (quer) und  $\sigma_2$  (längs) zurückgeführt; der Begriff der Schubspannungen wurde nicht verwendet. Eine gewisse Berechtigung dazu leitet sich beim einfachen Stoff daraus her, daß er Schubkräfte nicht aufnimmt, sondern ihnen ausweicht. (Diesen Begriff des Ausweichens nannten wir eben „Fadenschiebung“.) Für die Biegungsbetrachtungen an Hüllen ist nun die Einführung der Schubkraft empfehlenswert, weil damit die Übereinstimmung mit den üblichen Biegungsrechnungen des Maschinenbaus hergestellt werden kann.

Das Verhalten des einfachen Stoffes gegenüber Schubspannungen ist in gewissen Grenzen durch die Versuche über die Formänderung zylindrischer Hüllen (Seite 22) schon mitbestimmt. Denn die beiden Resultierenden  $R_1$  und  $R_2$  der Fig. 4 (Seite 3) können ersetzt werden durch Normalkräfte in Richtung der Fäden und Schubkräfte senkrecht dazu. Jedoch kommt das Wesentliche der Schubbeanspruchung unmittelbarer zum Ausdruck im Torsionsversuch.

### Versuch VI.

#### Die Schiebung des einfachen und diagonaldoublierten Stoffes.

(Stoff D der Tabelle.)

Drei Stoffzylinder von 80 mm Durchmesser und 300 mm Höhe (wie bei Versuch IV) wurden in hängender Anordnung durch konstanten Wasserdruck von 7500 mm WS ohne Zusatzlast, d. h. im Spannungsverhältnis 1 : 2, belastet.

Zwei von ihnen bestanden aus dem einfachen Stoff D der Tabelle, wobei die Fadenrichtung einmal parallel zur Zylinderachse, das andere mal unter  $45^\circ$  geneigt war. Der dritte Zylinder wurde durch Übereinanderkleben einer parallelen und einer unter  $45^\circ$  geneigten Lage gleichen Stoffes hergestellt, d. h. diagonaldoubliert.

An der oberen Stirnscheibe wurde eine Sicherung gegen Verdrehung angebracht, an der unteren eine Torsionsscheibe von 160 mm Durchmesser. (Fig. 41.) Von dieser wurden tangential zwei Schnüre über Kugellagerrollen geführt und durch Bleigewichte (Einzelgewicht je 2,5 kg) bald in positivem, bald in negativem Drehsinn belastet. Und zwar wurde die Drehbelastung zunächst bis zum positiven Maximum (12,5 kg) gesteigert, dann in gleichen Abstufungen auf Null gebracht, von da ins Negative bis zum gleichen Maximum fortgesetzt und schließlich wieder ins Positive bis zur vollständigen Verdrehung unter Faltenbildung zurückgeführt.

Die Meßfigur war dieselbe wie bei Versuch IV. (Seite 23.) Die Veränderung der Drehbelastung erfolgte alle 5 Minuten. Die Ablesungen an der Meßfigur wurden immer 3 Minuten nach erfolgter Veränderung begonnen.

Die Berechnung der Schubspannung ergibt sich wie folgt: Wirken die Drehkräfte  $T$  (in kg) am Durchmesser  $D$  (in m), und ist  $d$  (in m) der jeweilige Durch-

messer des Stoffzylinders an der Meßstelle, so ist die Schubspannung in kg/m

$$\tau = \frac{2 T \cdot \frac{D}{d}}{\pi \cdot d}$$

d ergibt sich aus dem Anfangsdurchmesser von 80 mm unter Berücksichtigung der gemessenen Dehnung.

D = Scheibendurchmesser + Schnurdurchmesser = 161,7 mm. Der Einfluß der der Meßfigur gegenüberliegenden Stoffnaht wurde wie bei Versuch IV vernachlässigt.

In Fig. 42 sind die Tangenten des Schiebungswinkels  $\varphi$ , d. h. die Schiebungen als Funktion der Schubspannungen aufgetragen. Die Kurven zeigen den Charakter einer ausgesprochenen Hysterese, wie er schon in Fig. 20 ausgedrückt und begründet ist. Begriffe wie Remanenz, Koerzitivkraft, jungfräuliche Kurve können sinngemäß aus den magnetischen Eisenuntersuchungen übertragen werden.

Der Unterschied zwischen parallel und diagonal liegendem einfachen Stoff ist in die Augen springend. Der erstere reagiert auf die Schubkraft vornehmlich durch Fadenschiebung, der letztere nur durch Fadenstreckung und Fadendehnung. Der geringen Dehnung in Fig. 26 (Seite 19) entspricht also hier die hohe Schiebung und umgekehrt.

Damit ist für den diagonaldoublierten Stoff zu erwarten, daß er ungefähr dasselbe Torsionsbild zeigt wie der diagonal liegende einfache Stoff, da der Anteil des parallelen Stoffes an der Spannungaufnahme nur gering ist.

Die Versuchswerte zeigen in der Tat eine Verdrehung, die der Größe nach weit eher dem diagonal liegenden als dem parallel liegenden einfachen Stoff entspricht. Jedoch ist die Verdrehung größer als beim diagonalen einfachen Stoff, während man eher etwas geringere Werte erwartet.

Der Grund für diese Abweichung liegt in dem Nebenumstand der Durchmesserdehnung. Zur Beurteilung sind in Fig. 42 die Durchmesser d und die Meßfigurhöhen h in mm eingetragen. Der einfache diagonal liegende Stoff hat eine höhere Durchmesserdehnung als der doublierte, bei dem sie durch die parallele Lage begrenzt ist.

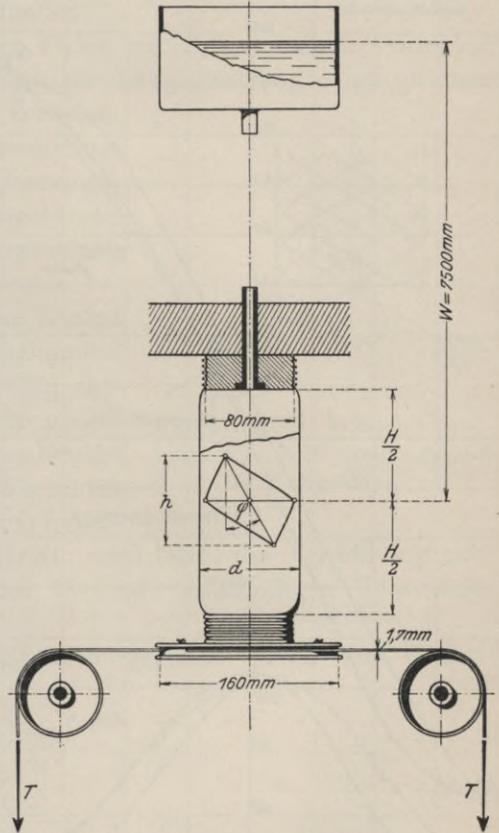


Fig. 41. Torsionsversuch.

Die Durchmesserdehnung wirkt nun torsionsvermindernd aus folgendem Grunde: Die Verdrehung entsteht durch die Verlängerung der einen, die Verkürzung der anderen Diagonalfaser. Bei kleinem Durchmesser ist die durch den Innendruck erzeugte Vorspannung beider Fasern gering. Die durch die Schubkraft hervorgerufene Belastung der einen, Entlastung der anderen Faser hat daher größere Dehnung bzw. Kontraktion zur Folge als bei größerem Durchmesser, bei dem die stark vorgedehnten Fasern entsprechend dem Charakter der Dehnungskurve (Fig. 20) nur geringe zusätzliche Formänderungen gestatten.

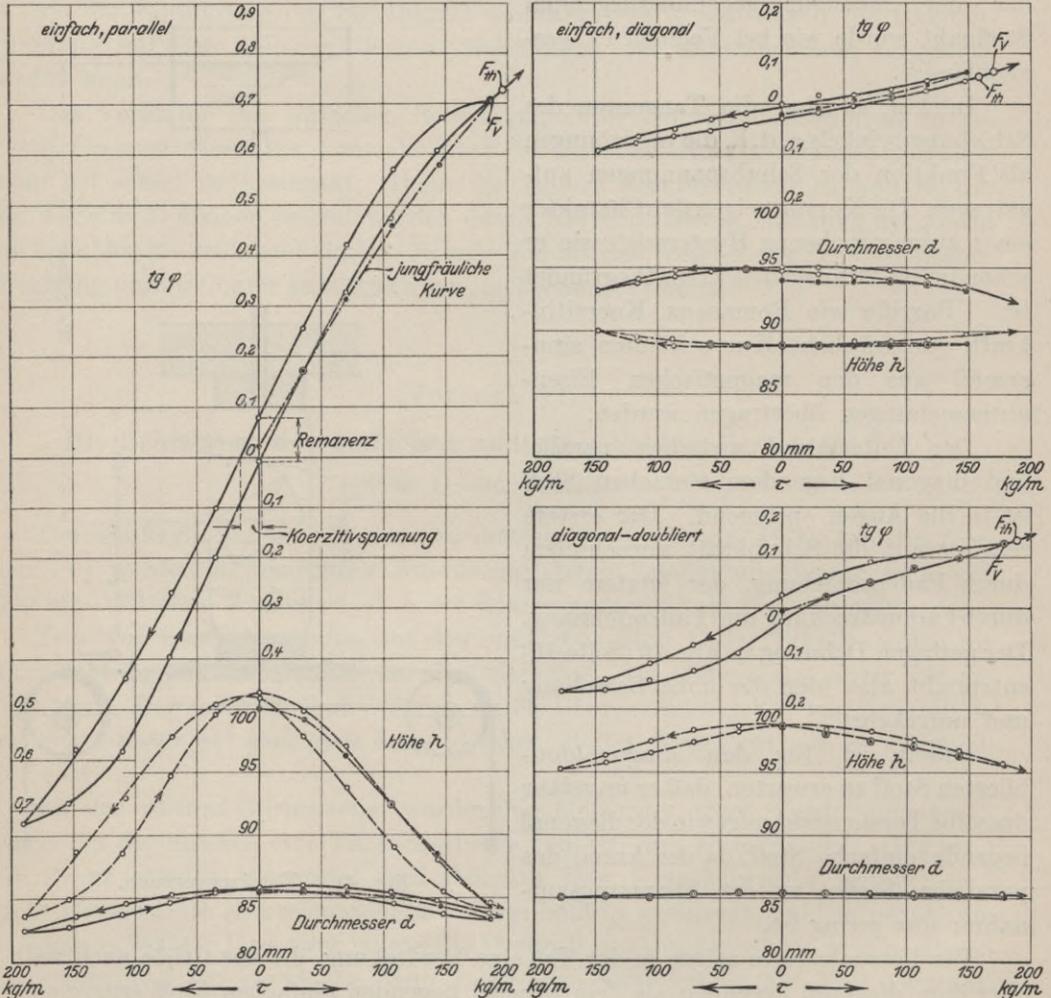


Fig. 42. Versuch VI. Schiebung des einfachen und diagonaldoublierten Stoffes. (Stoff D der Tabelle).

Es ist schwer, für die Verdrehung des diagonaldoublierten und des diagonal liegenden einfachen Stoffes genau gleiche Versuchsbedingungen zu erzielen. Man müßte (z. B. durch zahlreiche unzusammenhängende Ringe) die Durchmesserdehnung verhindern, ohne die Torsion zu beeinflussen. Von einer solchen Maß-

nahme konnte an dieser Stelle abgesehen werden, da es nur darauf ankam, den Wert der diagonalen Lage gegenüber der parallelen für die Verdrehung zu zeigen.

Die drei Drehversuche sind jeweils bis zum Maximum der Drehspannungen durchgeführt. Dieses Maximum ist abhängig von den beiden Normalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  des Stoffzylinders nach der Formel:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2}.$$

Die allgemeine Ableitung dieser Beziehung folgt später (Seite 60) im Zusammenhang mit der Spannungsberechnung an der Hülle. Für den Fall des idealen Netzgefüges wird sie auf folgende Weise gefunden:

In Fig. 43 sei  $\alpha = \beta$  der Winkel der Fäden zur Zylinderachse. Offenbar wird sich, solange kein Drehmoment auftritt, die Längsspannung  $\sigma_2$  zu gleichen Teilen auf die beiden Fadenrichtungen verteilen, wobei die Fäden sich in die Richtung der Resultierenden aus  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  einstellen. (Dieser Spannungszustand ist durch die schraffierten Kräfterechtecke angedeutet.) Kommt nun eine Torsionsspannung hinzu, so wird die eine Fadengattung weiter belastet, die andere dagegen entlastet. Die Winkel werden dabei nicht geändert. Bei einer bestimmten Schubspannung ist nun der eine Faden völlig entlastet. Wächst die Schubspannung weiter, so müßte zu ihrer Aufnahme der entspannte Faden eine Druckspannung erfahren, was unmöglich ist. Es bilden sich daher Falten. Der Zylinder schnürt sich hyperboloidförmig ein; das Gleichgewicht der Kräfte wird labil; die Verdrehung geht unter Herauspressung des Wasserinhaltes bis zur vollständigen Zusammenschnürung weiter.

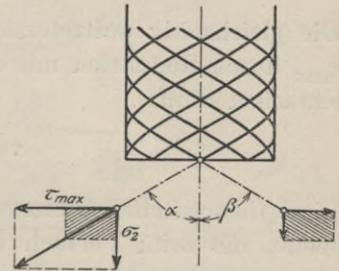


Fig. 43. Die kritische Drehspannung beim reibungslosen Netzgefüge.

Die kritische Schubspannung  $\tau_{\max}$  ist also gegeben durch die Winkelbeziehung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\tau_{\max}}{\sigma_2}.$$

Nun ist nach Gleichung 1 (Seite 3):

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

oder in unserem Falle der Winkelgleichheit:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}.$$

Daraus ergibt sich:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \cdot \sigma_2 = \sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2}.$$

Hiernach berechnet sich für den vorliegenden Versuch (Fig. 41, 42) die kritische Schubspannung wie folgt: Da die Faltenbildung an der Stelle der kleinsten Normalspannungen, d. h. an der oberen Einspannstelle eintreten muß, ist als

Zylinderdurchmesser nicht viel mehr als 80 mm einzusetzen. Der für die Querspannung  $\sigma_1$  maßgebende Wasserdruck an der oberen Einspannstelle betrug  $W - \frac{H}{2}$ , wo  $\frac{H}{2}$  eine Funktion der Längskontraktion, im Mittel ca. 110 mm. Somit:

$$\sigma_1 \cong (7500 - 110) \cdot 0,04 = 296 \text{ kg/m.}$$

Die Längsspannung ergibt sich durch den Druck  $W + \frac{H}{2}$  + dem auf Druck reduzierten Gewicht der Torsionsscheibe, im Mittel  $7500 + 110 + 75$  mm, zu:

$$\sigma_2 \cong 7685 \cdot \frac{0,04}{2} = 154 \text{ kg/m.}$$

Somit beträgt die kritische Schubspannung an der Einspannstelle:

$$\tau_{\max} \cong \sqrt{296 \cdot 154} = 214 \text{ kg/m.}$$

Die gleichzeitig auftretende Schubspannung  $\tau$  an der Meßfigur findet sich aus  $\tau_{\max}$  durch Reduktion mit dem Durchmesserquadrat. Z. B. ist für den parallelen einfachen Stoff:

$$\tau \cong 214 \cdot \left( \frac{80}{83,5} \right)^2 = 196 \text{ kg/m.}$$

Diese theoretischen Grenzwerte der Faltenbildung  $F_{th}$  sind in Fig. 42 eingetragen, ebenso die beim Versuch beobachteten  $F_v$ , die naturgemäß als Übergangswerte nicht allzu scharf zu erkennen sind und der persönlichen Beurteilung einen gewissen Spielraum lassen. Die Übereinstimmung ist trotzdem eine genügende.

### Die Formänderung einer Hülle aus paralleldoubliertem Stoff.

Nunmehr kann das Bild, das wir uns im Versuch IV (Seite 22) von einer Hülle aus einfachem bzw. paralleldoubliertem Stoff bezüglich ihrer Durchmesserdehnung, Längskontraktion und Verdrehung gemacht haben, bezüglich ihrer Verbiegung vervollständigt werden. Hierzu ist aus dem Späteren vorweg zu nehmen, daß jeder Hüllenquerschnitt unter dem Einfluß von Biegungs- und Schubkräften steht.

Fig. 44 zeigt in schematischer Form einen Ballon mit einer lotrecht aufgehängten Gondel sowie seinen Momente und Schubkraftkurve.

Liegt der Stoff parallel zur Hüllennachse, so erfährt die Hülle zunächst nach Fig. 36 bis 38 (Seite 26) eine geringe Durchmesserdehnung, eine geringe Längskontraktion und keine Verdrehung. Die Momente erzeugen nun Biegungsspannungen, die die Hüllennachse nach den Enden zu aufbiegen. Da diese Biegung jedoch nur durch Fadestreckung und Fadendehnung erfolgen kann, bleibt sie in geringen Grenzen. Im Gegensatz dazu bewirken die Schubkräfte eine große Winkeländerung des parallelen Stoffes. (Siehe Fig. 42 links, Seite 32).

Liegt der Stoff unter  $45^\circ$  diagonal, so erfährt die Hülle zunächst nach Fig. 36 bis 38 eine sehr große Durchmesserdehnung und Längskontraktion und keine bzw. nur geringe (siehe Seite 13) Verdrehung. Auf die Biegungskräfte reagiert der diagonale Stoff nun durch Fadenschiebung, indem die Winkel seines Netzgefüges nach oben hin spitzer, nach unten hin stumpfer werden. Es resultiert eine hohe

Aufbiegung der Enden. Die Formänderung der elastischen Linie durch die Schubkräfte dagegen ist gering, da sie nur durch Fadenstreckung und Faden-  
dehnung zustande kommt.

Die Hülle erfährt also in beiden Fällen eine unzulässig hohe Verbiegung, nur mit dem Unterschied, daß sie bei parallelem Stoff ihren Hauptgrund in den Schubkräften, bei diagonalem in den Biegemomenten hat.

Weder parallel noch diagonal liegender einfacher bzw. paralleldoublierter Stoff ist aus diesem Grunde für die Hüllen unstarrer Schiffe vorteilhaft. Es ist zwar denkbar, durch negative Formgebung beliebig große Krümmungen der Achse aufzuheben; ebenso wie es möglich ist, durch vorherige Berücksichtigung der Dehnung und Längskontraktion Durchmesser und Länge von ganz bestimmter Größe zu erzielen. Jedoch würde damit den Bedingungen des Fahrbetriebes noch nicht genügt sein, der eine Reihe von erheblichen Biege- und Schubkräften (Ruder, Böen) mit sich bringt. Die Hülle würde auf diese Momentankräfte durch starke Verbiegungen reagieren und damit die Steuerfähigkeit vermindern. Im Falle des diagonal liegenden Stoffes käme als weiterer Übelstand hinzu, daß sie bei den während der Fahrt unvermeidlichen Schwankungen des Gasdrucks (Steigen, Fallen, Bestrahlung) in unzulässiger Weise „atmen“, d. h. Durchmesser und Länge verändern würde.

Wie peinlich der Konstrukteur die geschilderten Eigenschaften des paralleldoublierten Stoffes beachten muß, zeigt der französische Luftschiffbau, der mit Vorliebe paralleldoublierten Stoff verwendet. Die Figuren 45 und 46 geben die beiden Schiffe „Clément Bayard“ und „Adjutant Reau“ wieder. Durch eine lange Gondel sind zunächst die Biegemomente und Schubkräfte der Hülle stark

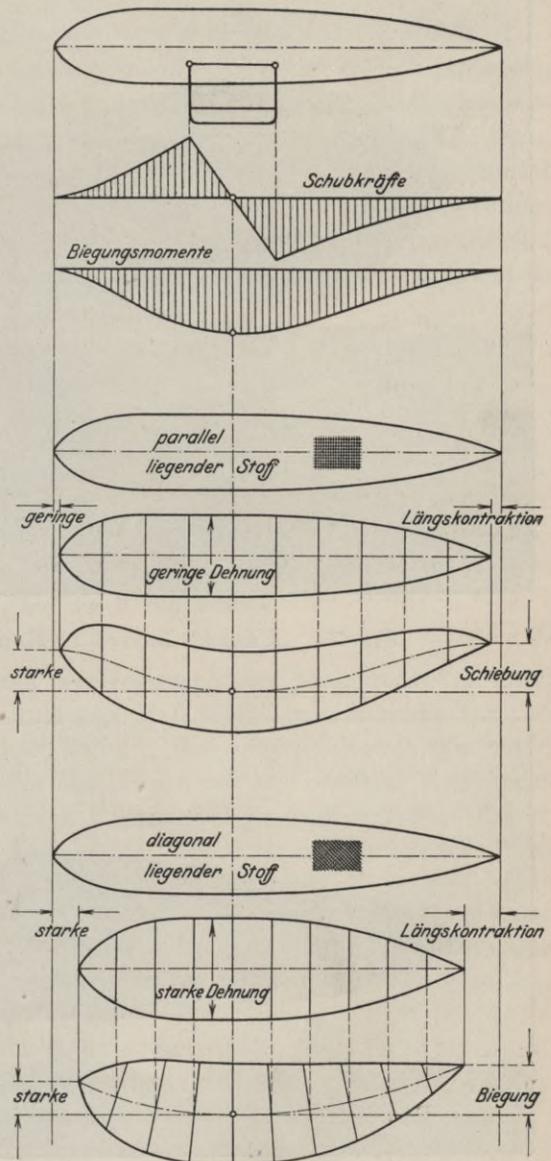


Fig. 44. Die Formänderungen einer Hülle aus einfachem oder paralleldoubliertem Stoff.

vermindert. (Halbstarre Bauart.) Geht man hierin nicht weit genug (Clement Bayard, Vorderteil), so tritt eine schon für das Auge unangenehme Schiebung ein. Die Hülle des „Adjutant Reau“ ist besonders durchdacht: Die Spitze ist aus einer

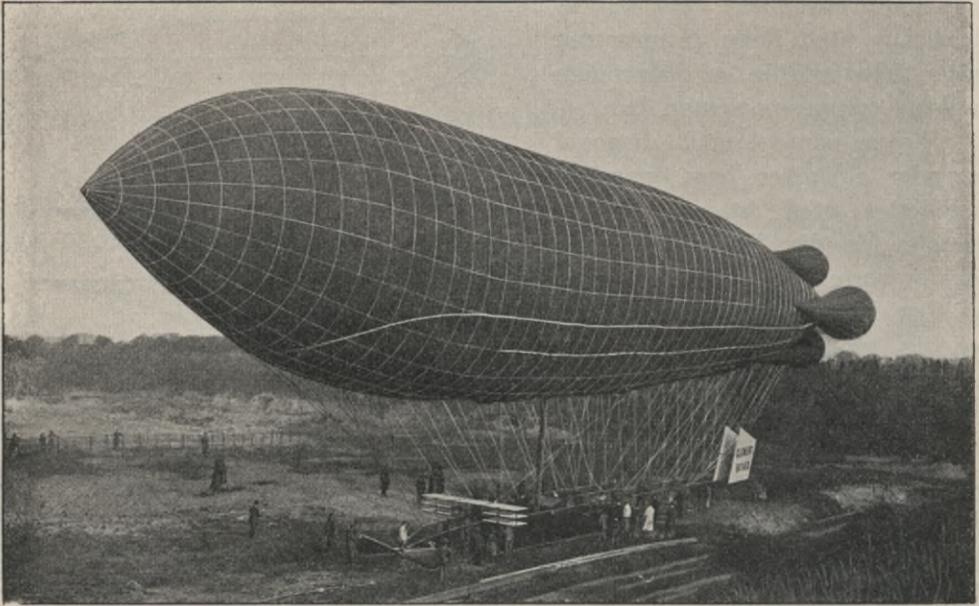


Fig. 45. „Clément Bayard“. Kopf durch Schiebung gehoben.

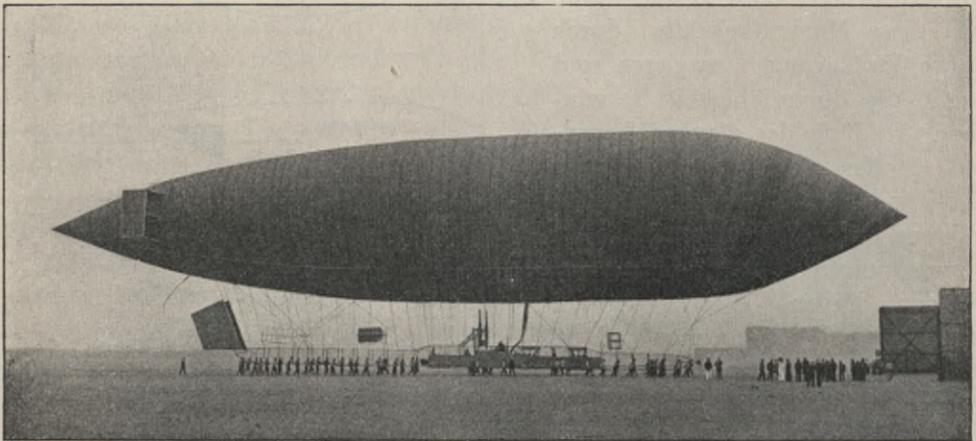


Fig. 46. „Adjutant Reau“. Schräger Zuschnitt der Stoffbahnen.

zusammengeklappten Viertelkugel hergestellt, was zur Folge hat, daß an dieser Stelle, wo wegen der Kürze der Hebelarme die Wirkung der Biegemomente durch die der Schubkräfte überwogen wird, die Stoffrichtung von der parallelen

allmählich zur diagonalen übergeht. Dadurch wird das Minimum der Aufbiegung erzielt. Entsprechend ist am Hinterende des Schiffes eine allmähliche Neigung der Stoffrichtung mit dem gleichen Erfolg durchgeführt.

### Die Formänderung einer Hülle aus diagonaldoubliertem Stoff.

Für unstarre Schiffe, deren Hüllen große Momente und Schubkräfte aufnehmen müssen, ist nur diagonaldoublierter Stoff verwendbar (wobei jeder Stoff diagonaldoubliert genannt werden soll, der mindestens eine diagonale Lage enthält). Denn gegen erhebliche Veränderung der elastischen Linie durch Biegungskräfte schützt ihn seine parallele, durch Schubkräfte seine diagonale Stofflage. Seine Durchmesserdehnung und Längskontraktion ist gering, vor allem dann, wenn man bei der Auswahl des Stoffes darauf achtet, daß die Schußdehnung möglichst nicht höher ist als die Kettendehnung.

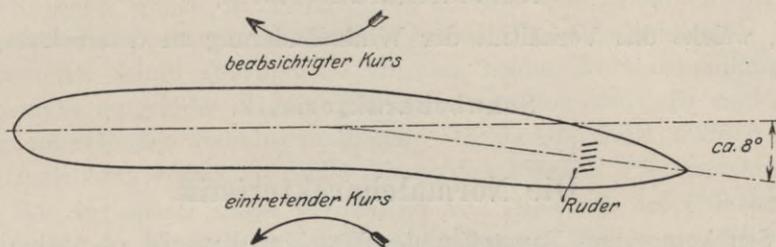


Fig. 47. Verbiegung durch Ruderdruck.

Daß selbst die an sich geringeren Verbiegungen des Diagonalstoffes unter Umständen das für den Fahrbetrieb zulässige Maß übersteigen können, trat bei der ersten Hülle des Siemens-Schuckert-Ballons, des ausgeprägtesten Vertreters der unstarren Bauart, zutage: Bei voller Maschinenkraft und starkem Ruderlegen bog sich die Hülle, wie bei dem zufälligen Überfahren einer spiegelnden Wasseroberfläche vom Schiff selbst aus beobachtet wurde, um schätzungsweise bis  $8^\circ$  ab (siehe Fig. 47). (Über diesen Wert hinaus trat Faltenbildung ein.) Durch diese starke Verbiegung erfolgte eine Kurvenführung des Schiffes entgegen dem beabsichtigten Kurs, die bei böigem Wetter die dauernde Einsetzung der vollen Maschinenleistung unmöglich machte. (Das Bild ist aus der Erinnerung skizziert, da eine gute Photographie leider nicht vorliegt.)

## B. Die Versuchsunterlagen für die praktische Vorausbestimmung der Hüllenformänderung.

Nächst den bisher besprochenen, grundsätzlichen Unterschieden, die zwischen den Stoffgattungen (paralleldoubliert, diagonaldoubliert, dreifach) hinsichtlich ihrer Dehnungseigenschaften bestehen, gibt es innerhalb jeder Gattung je nach Fadenstärke, Fadenzahl, Vorspannung bei der Fabrikation usw. Qualitätsunterschiede (siehe Fig. 23 bis 26). Daher ist es für die Vorausbestimmung der Hüllen-

formänderung nötig, von Fall zu Fall die „Charakteristik“ des gewählten Stoffes durch Versuche festzustellen. Es fragt sich hierbei:

Welche Feststellungen sind nötig und ausreichend, um den Stoff hinsichtlich seiner Dehnungseigenschaften vollständig zu charakterisieren?

Und:

Durch welche Versuche werden sie zweckmäßig gewonnen?

Wir bringen an einem in der Achsenrichtung aus der Hülle ausgeschnittenen quadratischen Stoffelement die im allgemeinsten Falle wirkenden Spannungen an. Diese sind: Die Normalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ , und die Schubspannungen  $\tau$ . Dann ist das Verhalten des Stoffes vollständig charakterisiert, wenn wir die Längenänderung seiner Seiten und seine Winkeländerung kennen. Diejenige zeichnerische Darstellung nun, welche das Verhältnis der Längenänderungen zu den Normalspannungen zeigt, nennen wir die

Normalcharakteristik,

diejenige, welche das Verhältnis der Winkeländerung zu den Schubspannungen zeigt, die

Schubcharakteristik.

### Die Normalcharakteristik.

Bei den homogenen Baustoffen des Maschinenbaus ist es nach dem Superpositionsgesetz möglich, aus jeder der beiden Normalspannungen die ihr entsprechende Dehnung und Querkontraktion ohne Rücksicht auf die andere zu bestimmen und hinterher die Gesamtdehnung als algebraische Summe der Einzeldehnungen zu berechnen. D. h. es genügt zur Normalcharakteristik eine einzige Dehnungskurve sowie die Kenntnis des konstanten Verhältnisses zwischen Dehnung und Kontraktion. Da die Dehnungskurve in den Grenzen der praktischen Anwendung geradlinig ist (Hookesches Gesetz), so kann sie sogar ersetzt werden durch eine einzige Zahl, nämlich den Neigungswinkel dieser Geraden. (Dehnungskoeffizient.)

Daß beim Ballonstoff ein solcher Ersatz nicht möglich ist, zeigte schon Versuch II (Seite 18 u. 19). Weiterhin ist das Verhältnis zwischen der Dehnung in der einen und der gleichzeitig auftretenden Kontraktion in der dazu senkrechten Richtung nicht konstant. (Siehe Fig. 39 unten, Seite 28.) Die Normalcharakteristik erfordert also zwei Diagramme, für jede Hauptrichtung eines.

Ferner gilt, wie wir später sehen werden, das Superpositionsgesetz nicht, d. h. die Formänderungen durch die Querspannung sind abhängig von der gleichzeitig herrschenden Längsspannung und umgekehrt. Jedes der beiden Diagramme läßt sich also nicht durch eine einzige Kurve erschöpfen, sondern erst durch eine Kurvenschar oder Fläche, innerhalb deren jede Einzelkurve den Dehnungsverlauf bei wachsender Querspannung und konstanter Längsspannung (oder umgekehrt) darstellt. Die Normalcharakteristik des Ballonstoffes besteht also aus zwei Kurvenscharen.

## Die Schubcharakteristik.

Ganz Ähnliches finden wir bei der Schubcharakteristik. Bei den Baustoffen des Maschinenbaus genügt eine einzige Zahl, der Schubkoeffizient. Daß beim Ballonstoff diese Zahl durch eine Kurve zu ersetzen ist, weil das Hooke'sche Gesetz auch für Schub nur mit gewisser Annäherung gilt, zeigt schon Versuch VI (Seite 32). Er zeigt ferner, daß der Schub abhängig ist von den Normalspannungen. Wäre er nun allein abhängig von einer der beiden Normalspannungen, so würde an Stelle der einen Kurve wie bei der Normalcharakteristik eine Kurvenschar bzw. eine Fläche treten. Da er aber von beiden abhängig ist, so erfordert die Schubcharakteristik eine Schar von Kurvenscharen bzw. eine Flächenschar. Eine solche kann z. B. aus Flächen gleicher Schubspannung gebildet werden, innerhalb deren sich die Normalspannungen längs und quer ändern.

Wegen der Ungleichheit von Kette und Schuß ist es erforderlich, die Schubcharakteristik nach beiden Richtungen hin aufzustellen. Dem entspricht beim Torsionsversuch der positive und negative Ast der Hysteresisschleife.

Nachdem der Schub abhängig ist von den beiden Normalspannungen, fragt es sich, ob nicht umgekehrt Dehnung und Kontraktion abhängig sind von etwa gleichzeitig auftretenden Schubspannungen. In diesem Falle würden wir auch für die Normalcharakteristik an Stelle der beiden Flächen Flächenscharen setzen müssen. Wie wir später sehen werden, ist nun innerhalb der praktischen Verwendungsgrenzen der Einfluß der Schubspannungen auf Dehnung und Kontraktion unbedeutend, so daß sich die getroffene Vereinfachung rechtfertigt, umso mehr, als sie zur Vermeidung allzu weitschweifiger Rechnungen geboten ist. Aus dem letzteren Grunde werden wir uns später veranlaßt sehen, ebenfalls die Schubcharakteristik durch eine Vereinfachung auf eine einzige Fläche zurückzuführen.

## Methoden zur Ermittlung der Normalcharakteristik.

Die Versuchsanordnung zur Feststellung der Normalcharakteristik ergibt sich aus der gestellten Aufgabe: Es soll der Stoff in seinen beiden Hauptrichtungen gleichzeitig beliebig belastet und seine Längenänderung in beiden Richtungen gemessen werden.

Diese Doppelbelastung kann entweder durch Innendruck und Zusatzbelastung eines Stoffzylinders, wie bei Versuch IV (Seite 23), oder durch reine Gewichtbelastung eines kreuzförmigen, ebenen Stoffstückes erfolgen. Letztere Anordnung hat den Vorteil der Einfachheit und des Wegfalls von Korrekturen. (Seite 25 unten). Sie ist nichts anderes als die zweidimensionale Ausführung des Normalstreifens. (Versuche II und V.)

Jede Einzelmessung liefert für die beiden Kurvenscharen der Normalcharakteristik je einen Versuchspunkt. Mit Rücksicht darauf lassen sich 3 Methoden unterscheiden:

1. Man kann sämtliche Versuchspunkte der beiden Kurvenscharen hintereinander an einem einzigen Stoffkreuz bestimmen.
2. Man kann jede Einzelkurve der Kurvenscharen an einem besonderen Stoffkreuz aufnehmen.

3. Man kann jedem einzelnen Versuchspunkte sein eigenes Stoffkreuz zuteilen.

Die Auswahl der geeignetsten Methode wird bestimmt durch die Bedingung, daß der Einfluß der Langsamkeit der Formänderung (siehe Versuch I, Seite 15) möglichst ausgeschaltet werden soll. Hiernach ist die dritte Methode weitaus die beste. Sie schließt eine gegenseitige Beeinflussung der Versuchspunkte aus und gestattet ohne übermäßigen Zeitaufwand die Ausdehnung des Versuches auf beliebige Dauer, wobei eine jederzeitige Kontrolle darüber möglich ist, ob die Versuchsdauer genügt oder noch verlängert werden muß. Ein kleiner, bei der Größe der Ballonhüllen nicht ins Gewicht fallender Nachteil ist ihr größerer Stoffbedarf. Aber gerade dieser bringt einen weiteren Vorzug mit sich: die Möglichkeit, den Stoff auf seine Gleichmäßigkeit zu beurteilen, insofern als die zahlreichen, räumlich verschiedenen Meßstellen die Mittelwerte mit größerer Sicherheit ergeben und Ausnahmewerte als solche erkennen lassen.

Während bei der dritten Methode alle Versuchspunkte zeitlich parallel geschaltet sind, stellen die erste und zweite eine vollständige bzw. teilweise Hintereinanderschaltung dar. Daraus folgt, daß die Zeitdauer für den Einzelpunkt nicht annähernd so weit ausgedehnt werden kann, wie bei der dritten Methode, soll anders der Versuch nicht Monate in Anspruch nehmen. Daraus wiederum ergibt sich die störende Erscheinung, daß jeder Versuchspunkt vom vorherigen beeinflusst wird. Es muß nun durch die zeitliche Gruppierung der Punkte diese Störung auf ein Minimum gebracht werden. Hier beginnt dann die Unsicherheit, der Spielraum der persönlichen Interpolation. Die Art und Weise dieser Interpolation ist bei der Beschreibung des Versuches VII angegeben.

### Die Methode zur Ermittlung der Schubcharakteristik.

Die Schubcharakteristik läßt sich am besten aus Torsionsversuchen nach Art des Versuches VI (Seite 31) feststellen. Soll der Schub bei  $m$  verschiedenen Quer- und  $n$  verschiedenen Längsspannungen bestimmt werden, so sind  $m \cdot n$  Hysteresisschleifen aufzunehmen. Die gesuchten Dauerwerte des Schubes sind aus den Momentanwerten der Versuche unter Berücksichtigung der Remanenz zu bestimmen.

Auch hier kann man entweder alle Hysteresisschleifen  $n$  in einem und demselben Stoffzylinder bestimmen oder an mehreren. Jedoch ist hier die Notwendigkeit der Vielheit nicht so zwingend wie bei der Normalcharakteristik, weil jeweils der Dauerwert der Schiebung nicht durch die Länge der Belastung erhalten wird, sondern aus der Mittelkurve der Hysteresisschleife hervorgeht.

#### Versuch VII.

##### Die Normalcharakteristik eines diagonaldoublierten Stoffes.

##### „Einzelkreuzmethode.“

(Stoff F der Tabelle.)

Fig. 48 bis 50 zeigen die Versuchsanordnung:

Ein Stoffkreuz von quadratischer Mittelfläche ist mit seinen vier schlaufenförmig umgenähten Schenkeln von je 250 mm Breite in einem aus Blech und Winkeln

gebauten Rahmen horizontal eingespannt. An zwei Schenkeln A und B wird unter Zuhilfenahme je eines ungleicharmigen Hebels U (Armverhältnis 1 : 2) durch angehängte Sandsackbelastung Längs- und Querspannung erzeugt. Die den Hebeln gegenüberliegenden Punkte C und D sind fest. Jedoch sind sowohl an den Hebeln als auch an den Festpunkten Stellschrauben angebracht, deren Gesamthub etwas größer ist als die voraussichtliche Stoffdehnung, so daß es möglich ist, bei jeder beliebigen Formänderung den Mittelpunkt des Kreuzes M im Achsenschnittpunkt des Rahmens und die Hebel U in horizontaler Stellung zu erhalten.

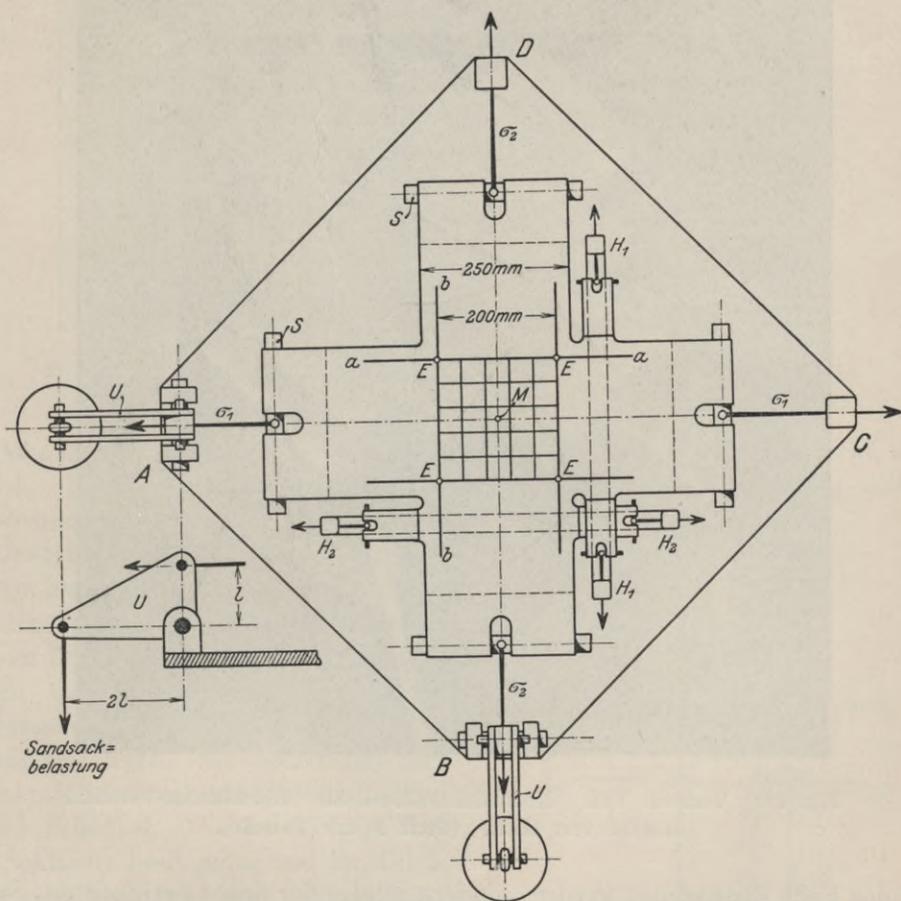


Fig. 48. Versuchsanordnung beim „Einzelkreuz-Versuch“.

Die Meßfigur ist ein quadratisches Liniennetz von der Seitenlänge 200 mm. Sie wurde in feinen Tuschestrichen aufgetragen. Für die Wiedergabe (Fig. 49 und 50) ist sie mit weißer Farbe stark überdeckt, da die photographische Platte den Kontrast schwarzer Linien auf dem gelben Stoff fast nicht zum Ausdruck bringt. (Das gleiche Verfahren wurde bei allen übrigen Photographien angewendet.)

Der gleichmäßigen Spannungsverteilung über die Schenkelbreite von 250 mm dienen die in die Schlaufen eingesteckten, in der Mitte durch einen Bolzen drehbar gefaßten Stahlrohre S, deren Eigendurchbiegung bei den angewandten Kräften

noch unmerklich ist, so daß die Dehnung der Stoffschenkel über ihre ganze Breite konstant ist. Jedoch wird dadurch der erstrebte Zweck der Gleichförmigkeit noch nicht vollkommen erreicht. Denn an den vier Ecken E der Mittelfläche tritt eine gegenseitige Beeinflussung der beiden Dehnungen dadurch ein, daß die von der einen Seite kommenden Spannungen  $\sigma_1$  bzw.  $\sigma_2$  nicht geradlinig nach der gegenüber-

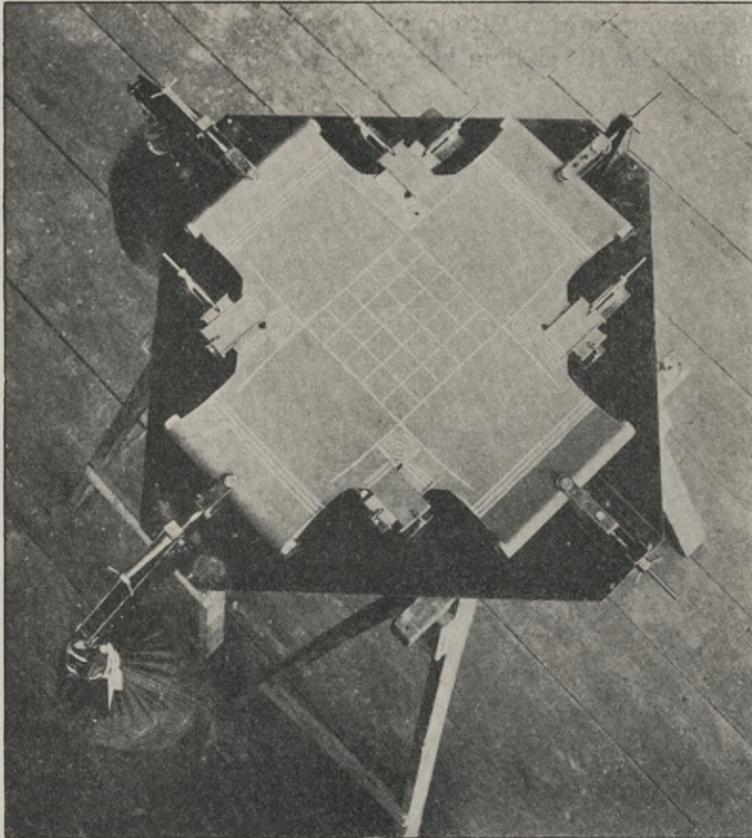


Fig. 49. Versuch VII. Normalcharakteristik. Einzelkreuz-Versuch. Ansicht von oben. (Stoff F der Tabelle).

liegenden Seite übergeleitet werden, sondern infolge der Schubfestigkeit des Stoffes in die benachbarten Schenkel übertreten. (Fig. 51.) Dadurch wird die Meßfigur an den Ecken entlastet und geht vom Rechteck in eine Tonnenform über. Die Spannungsverteilung entspricht also in Fig. 51 nicht mehr dem Rechteck 1-2-3-4, sondern der schraffierten Fläche.

Die Korrektur dieser störenden Nebenerscheinung ist auf verschiedene Weise möglich. Beim vorliegenden Versuch ist sie dadurch erfolgt, daß neben der durch Hebel und Gewichte wirkenden Hauptspannvorrichtung vier mit Spannschrauben ausgebildete „Hilfsspanner“  $H_1$ ,  $H_2$  verwendet werden, um die der Mittelfläche benachbarten Teile der Schenkel ihrer Breite nach auseinanderzuziehen. (In Fig. 48 sind nur 2 Hilfsspanner eingezeichnet.) Sie sind stets so weit anzuspinnen,

daß die über die Eckpunkte E verlängerten Seiten a—a, b—b der Meßfigur gerade Linien bilden. Denn in diesem Falle ist die Querdehnung der Schenkel gleich

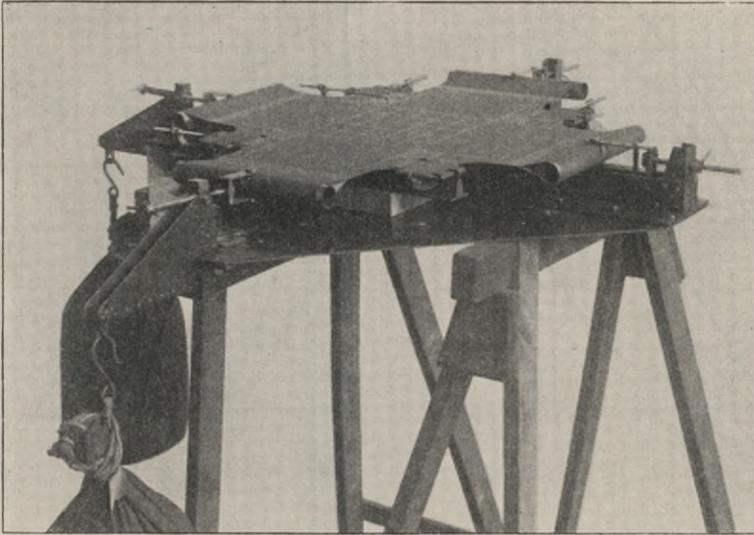


Fig. 50. Versuch VII. Normalcharakteristik. Einzelkreuz-Versuch. Ansicht von der Seite. (Stoff F der Tabelle).

der Dehnung der Mittelfläche und ein seitliches Spannungsabfließen nicht mehr möglich. In Fig. 51 tritt also zu dem Spannungs-Rechteck 1-2-3-4 das seitliche 2-3-6-5 und 1-4-7-8.

Die Hilfsspanner  $H_1$  und  $H_2$  sind verschieden hoch ausgebildet, so daß sie über einander liegen. Sie sind weder untereinander noch mit dem Spannrahmen verbunden und können daher den Formänderungen der Mittelfigur frei nach allen Richtungen folgen. Sie übertragen ihre Spannkraft durch angenähte Stoffschlaufen auf die Schenkel. Es ist wichtig, daß diese Schlaufen breit genug und der Mittelfläche möglichst nahe sind. Nach dieser Richtung hin kann die dargestellte Anordnung noch verbessert werden. Überhaupt stellen die Hilfsspanner keine ganz befriedigende Lösung dar. Ihre Nachstellung erfordert viel Zeit und dauernde Kontrolle, da der Stoff in der ersten Zeit seiner Belastung stark fließt (siehe Versuch I, Seite 16).

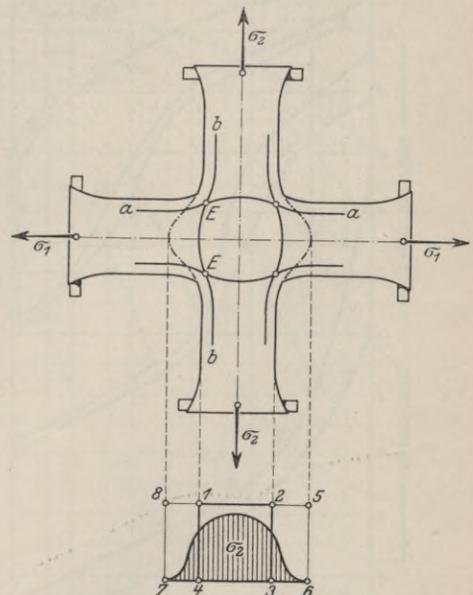


Fig. 51. Ungleichheit der Spannungsverteilung.

Im einzelnen gestaltete sich der Versuch folgendermaßen: Es wurden  $7 \times 7 = 49$  Versuchspunkte aufgenommen in Abständen von je 80 g/m Stoffspannung.

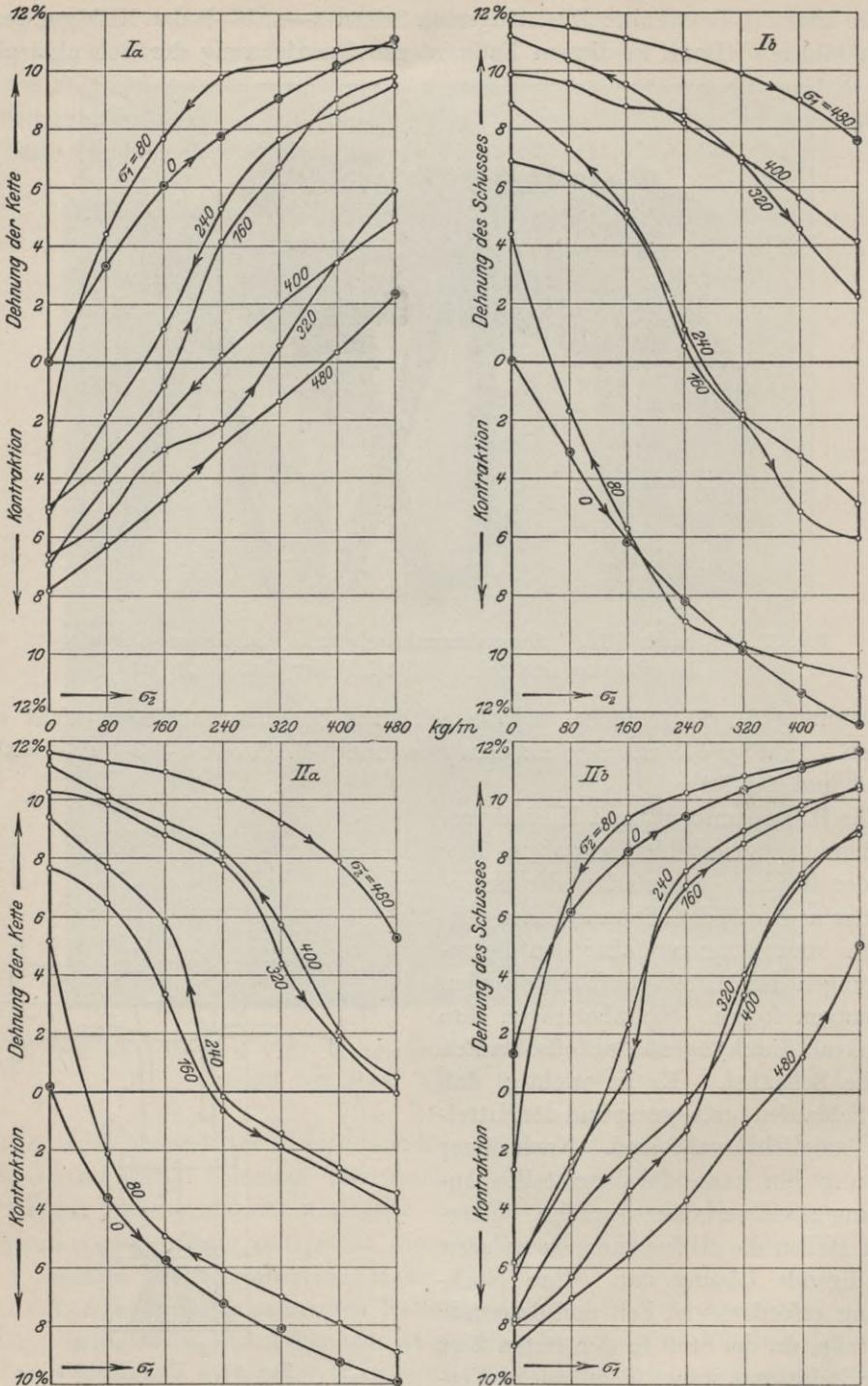


Fig. 52. Versuch VII. Die Normalcharakteristik nach der Einzelkreuzmethode.  
 Erste Auftragung der Werte. (Stoff F der Tabelle).

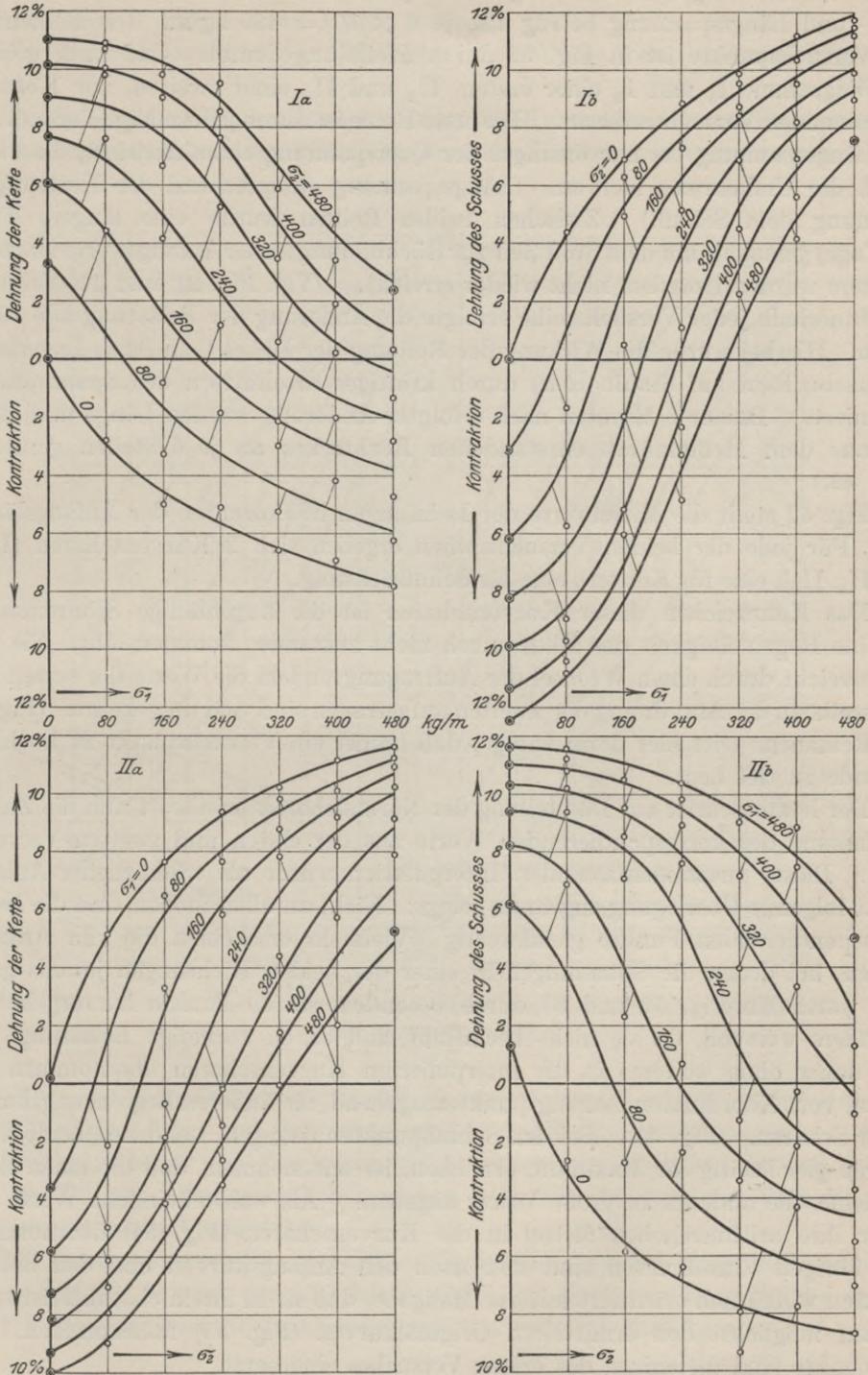


Fig. 53. Versuch VII. Die Normalcharakteristik nach der Einzelkreuzmethode. Zweite Auftragung der Werte. (Stoff F der Tabelle).

entsprechend 10 kg Sandbelastung am langen Arm der Hebel U. Die maximale Quer- und Längsspannung betrug also je  $6 \times 80 = 480$  kg/m. Die Reihenfolge der Versuchspunkte ist in Fig. 52 durch Pfeile angedeutet. Und zwar gehören die Diagramme  $I_a$  und  $I_b$  einer ersten,  $II_a$  und  $II_b$  einer zweiten, zur Kontrolle aufgenommen Versuchsreihe an. Die erste Reihe ist durch jedesmalige Veränderung der Längsspannung bei nur 6maliger der Querspannung charakterisiert, die zweite durch die Umkehrung hiervon. (Längsspannung entsprechend der Kette, Querspannung dem Schuß.) Zwischen beiden Reihen wurde eine längere Pause (18 Tage) gemacht, um dem Stoff Zeit zur Rückbildung seiner Anfangswerte zu geben. Letztere wurden trotzdem nicht wieder erreicht. (Vgl. Fig. 21 und 22, Seite 16).

Innerhalb jeder Versuchsreihe erfolgte die Änderung der Belastung alle 10 Minuten. Hierbei wurde die Wirkung der Reibung der Hebel U in ihren Lagerungen (Bronzebuchsen auf Stahlbolzen) durch kräftiges Erschüttern des Spanrahmens eliminiert. Immer 8 Minuten nach erfolgter Änderung wurden Länge und Breite des aus dem Meßquadrat entstandenen Rechteckes an je 6 Stellen gemessen. (Fig. 48.)

Fig. 52 stellt die Mittelwerte der Dehnungen in Prozenten der Anfangslängen dar. Für jede der beiden Versuchsreihen ergeben sich 2 Kurvenscharen ( $I_a$ ,  $I_b$  und  $II_a$ ,  $II_b$ ), eine für Ketten-, eine für Schußrichtung.

Das Kennzeichen dieser Kurvenscharen ist die augenfällige Stoffremanenz, die eine Regelmäßigkeit des Bildes noch nicht zustande kommen läßt. Sie wird erst erreicht durch einen Wechsel der Auftragung, indem die Werte der ersten Versuchsreihe in der Anordnung der zweiten aufgetragen sind und umgekehrt. (Fig. 53.) Die Remanenz tritt hier darin zutage, daß immer ein Versuchspunkt zu hoch, der folgende zu tief liegt.

Der letzte Schritt zur Darstellung der Normalcharakteristik ist nun die Zusammenfassung der korrespondierenden Werte aus der ersten und zweiten Versuchsreihe. Dieser zusammenfassenden Interpolation wurde als willkürlicher Anhaltspunkt folgende Überlegung zugrunde gelegt: Nicht an allen Stellen sind die beiden korrespondierenden Punkte gleichwertig. Vielmehr erscheinen die vier Anfangskurven, bei denen die Spannungen in einer der beiden Richtungen jeweils gleich Null waren (in Fig. 52 und 53 durch besonders starke Punkte hervorgehoben), besonders wertvoll, da sie nicht beeinflusst sind durch vorherige Belastung. Sie sind daher ohne weiteres in die interpolierten Kurvenscharen übernommen und bilden, vom Koordinaten, Anfangspunkt ausgehend, die äußeren Begrenzungskurven dieser Scharen. (Fig. 54.) Bei den Schlußpunkten dagegen, bei denen beide Spannungen gleichzeitig ihr Maximum erreichen, ist anzunehmen, daß die einen sicher zu kleine, die anderen zu große Werte angeben. Als wahrscheinliche Werte sind daher ihre arithmetischen Mittel in die Kurvenscharen (Fig. 54) übernommen. Alle übrigen Einzelkurven sind nun nach den Anfangskurven und den Schlußpunkten willkürlich orientiert mit der Maßgabe, daß sie in ihrem charakteristischen Verlauf möglichst den ermittelten Originalkurven (Fig. 53) nahekommen. Als Nullpunkte sind diejenigen des ersten Versuches eingesetzt.

In Fig. 54 sind die interpolierten Kurven sowohl in der Anordnung der Fig. 52 als in derjenigen der Fig. 53 aufgetragen. Durch diese Doppelauftragung ist eine

zeichnerische Kontrolle des Kurvenverlaufes ermöglicht. (Punkt A ist gleichbedeutend mit B, Punkt C mit D usw.)

Die Normalcharakteristik läßt alles Wesentliche des Stoffverhaltens erkennen:

Das Hookesche Gesetz gilt nicht, denn die Kurven sind keine Geraden.

Das Superpositionsgesetz gilt nicht, denn die Kurven sind untereinander nicht kongruent.

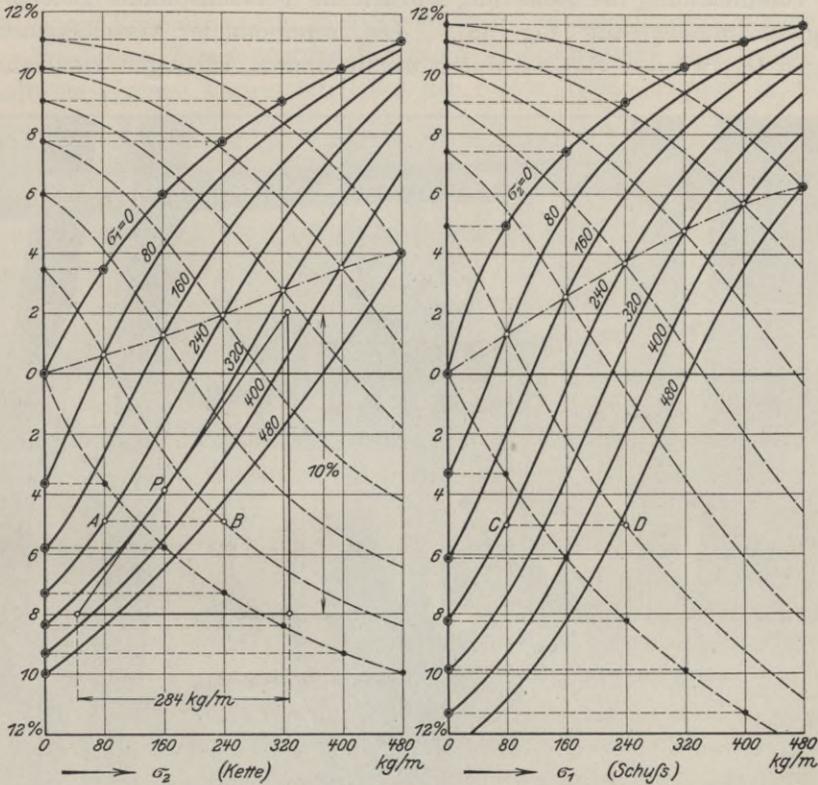


Fig. 54. Die Normalcharakteristik eines diagonaldoublierten Stoffes. (Stoff F der Tabelle).

Würde die Formänderung nur auf Fadenschiebung beruhen, so müßten die Punkte gleicher Längs- und Querspannung mit der Nulllinie zusammenfallen. Weil aber Fadenstreckung und Fadendehnung hinzukommen, so heben sie sich in den positiven Teil der Diagrammflächen empor. (In Fig. 54 sind ihre Verbindungslinien strichpunktiert eingetragen.)

Der Elastizitätsmodul ergibt sich als Tangente (bzw. Sekante) der Dehnungskurven. Z. B. beträgt der Elastizitätsmodul der Kettenrichtung für die durch Punkt P dargestellten Normalspannungen  $284 \times 10 = 2840$  kg/m.

Versuch VIII.

Die Normalcharakteristik eines dreifachen Stoffes. „Vielkreuzmethode.“  
(Stoff G der Tabelle.)

Im Gegensatz zu Versuch VII wurde die Zahl der Versuchspunkte auf  $5 \times 5 = 25$  beschränkt, mit Spannungsabstufungen von je 100 kg/m. Die maximalen Spannungen betragen also 400 kg/m.

Zur Vereinfachung der Belastung wurden die Versuchspunkte gleicher Längsspannung zusammengefaßt (Fig. 55). Die untereinander verschiedenen Querspannungen ( $\sigma_1$ ) wurden vertikal durch unmittelbares Anhängen von Sandsäcken

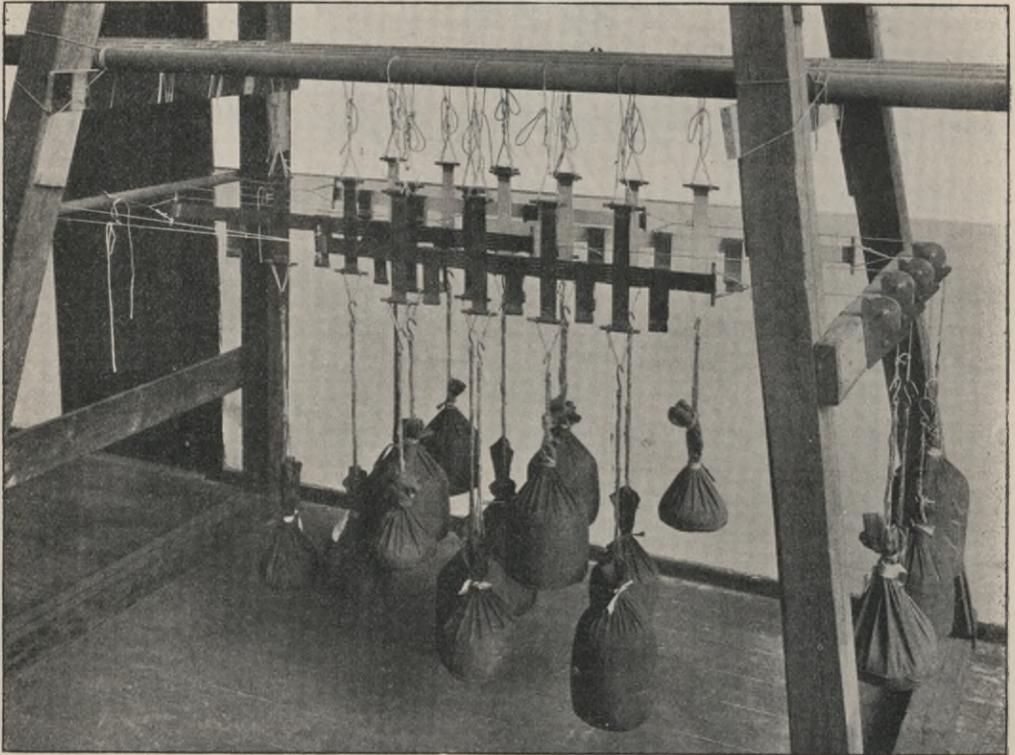


Fig. 55. Versuch VIII. Normalcharakteristik. Vielkreuz-Methode. (Stoff G der Tabelle).

erzeugt, die gemeinsame Längsspannung ( $\sigma_2$ ) horizontal unter Zwischenschaltung je einer auf schräger Bahn ( $45^\circ$ ) frei aufgelegten, d. h. nahezu reibungsfreien Rolle. Bei der Längsspannung 0 traten an Stelle der Kreuze 4 einfache Normalstreifen. (In Fig. 55 nicht sichtbar.)

Die Breite der Kreuzschenkel betrug 50 mm, die Sandsackbelastung dementsprechend 5 bis 20 kg. Als Meßfigur wurde die gesamte Mittelfläche der Kreuze von  $50 \times 50 \text{ mm}^2$  verwendet. Die Ablesungsgenauigkeit ist bei diesen kleinen Längen gegenüber den groben, im Stoff selbst liegenden Ungleichheiten noch ausreichend.

Die Verzerrung der Meßfigur durch gegenseitige Spannungsbeeinflussung (Fig. 51) wurde dadurch verhindert, daß alle Kreuzschenkel in Richtung der Kräfte mehrfach geschlitzt wurden (Fig. 56). Diese Methode führt bedeutend einfacher und sicherer zum Ziel als die beim vorigen Versuch angewandte der Hilfsspanner. Sie schneidet allen aus der Mittelfläche etwa austretenden Spannungen den Weg ab. Die Schenkel müssen hierbei genügend lang sein, damit die durch das Auseinanderklaffen der Schlitzte entstehenden schrägen Kraftwirkungen unerheblich bleiben.

Auch dieser Versuch wurde in zwei einander entsprechenden Reihen durchgeführt. Zu diesem Zweck wurden für jeden Versuchspunkt zwei nebeneinander ausgeschnittene Kreuze verwendet. Bei der ersten Reihe wurden zunächst die

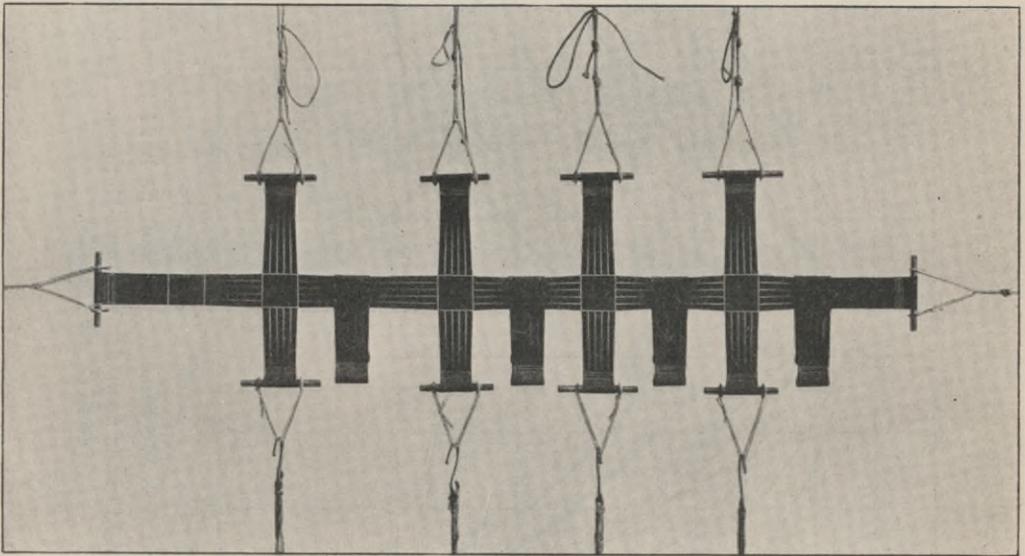
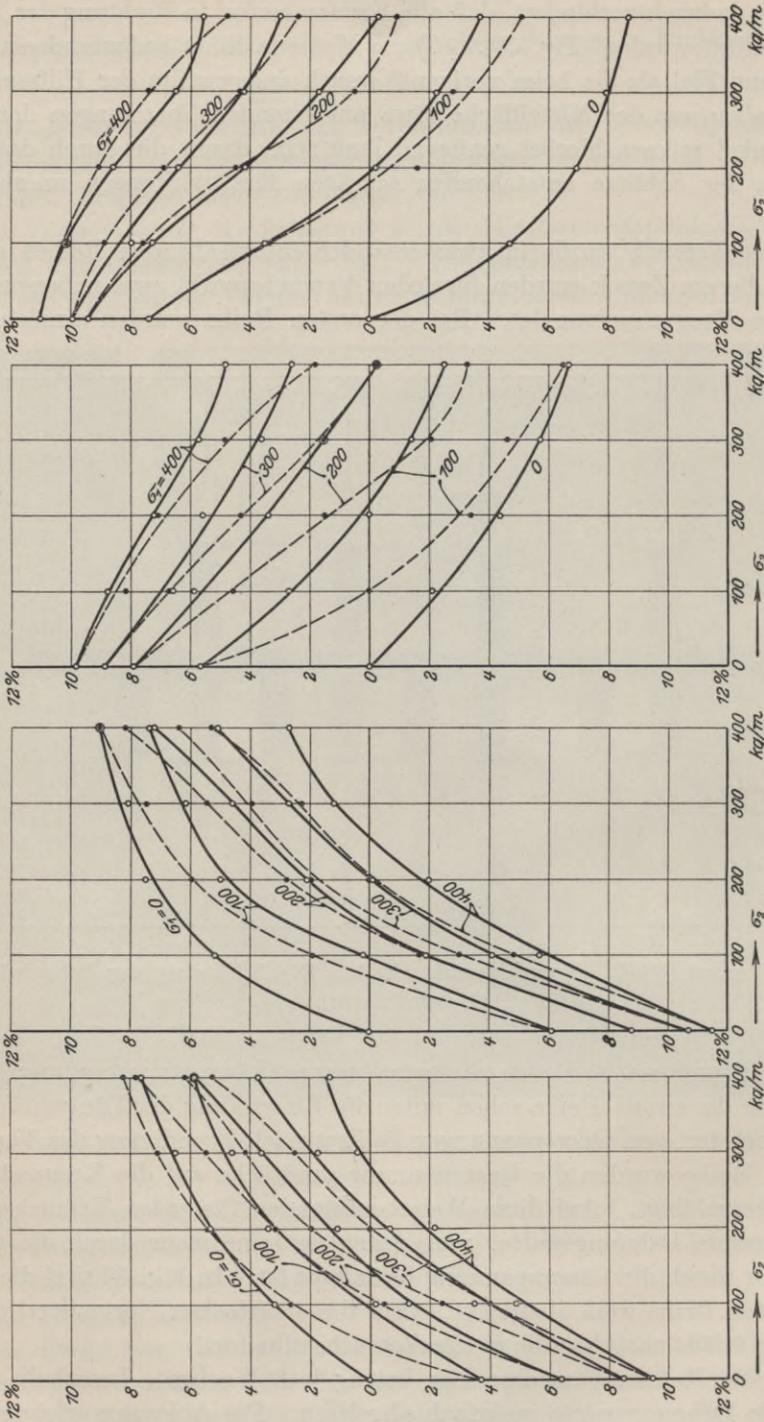


Fig. 56. Versuch VIII. Normalcharakteristik. Die Schlitzung der Schenkel. (Stoff G der Tabelle).

Querspannungen und nach diesen die gemeinsame Längsspannung angehängt. Damit trat auch die zweite Reihe schon unter die Einwirkung der Längsspannung, blieb jedoch noch frei von Querspannungen. Erst nach Beendigung des Versuchs mit der ersten Reihe wurden die Querspannungsandsäcke auf die Kreuzschenkel der zweiten übergehängt. Auf diese Weise entstanden für jeden Versuchspunkt 2 korrespondierende Dehnungswerte, von denen der eine mehr durch die Quer-, der andere mehr durch die Längsspannung beeinflusst ist. In Fig. 56 sind die Meßfiguren der ersten Reihe weiß überdeckt. (Für die 4 einfachen Normalstreifen der Längsspannung 0 fällt natürlich die zweite Versuchsreihe fort.)

Die Dauer der beiden Versuchsreihen betrug je 3 Wochen. Innerhalb dieser Zeit wurden die Dehnungswerte mehrfach abgelesen. Die Ablesung erfolgte stets an drei Stellen der Meßfigur, nämlich in der Mitte sowie in einem Abstand von je 5 mm von den Ecken.



Kette nach 24 Stunden. Kette nach 3 Wochen. Schuß nach 24 Stunden. Schuß nach 3 Wochen. Die Normalcharakteristik nach der Vielkreuz-Methode. Erste Auftragung der Versuchswerte. (Stoff G der Tabelle).

In Fig. 57 sind die gemessenen Dehnungen in Prozenten der Anfangslängen in der Form von Kurvenscharen dargestellt, und zwar stellen das erste und dritte Diagramm die Formänderungen von Kette und Schuß nach 24stündiger Belastung, das zweite und vierte nach drei Wochen dar. Dabei entsprechen die stark ausgezogenen Kurven der ersten, die gestrichelten der zweiten Versuchsreihe.

(Im Hinblick auf die Herstellung einer Hülle aus Längsbahnen ist — wie an allen Stellen dieser Arbeit — die Querspannung  $\sigma_1$  in Richtung des Schusses, die Längsspannung  $\sigma_2$  in Richtung der Kette angebracht.)

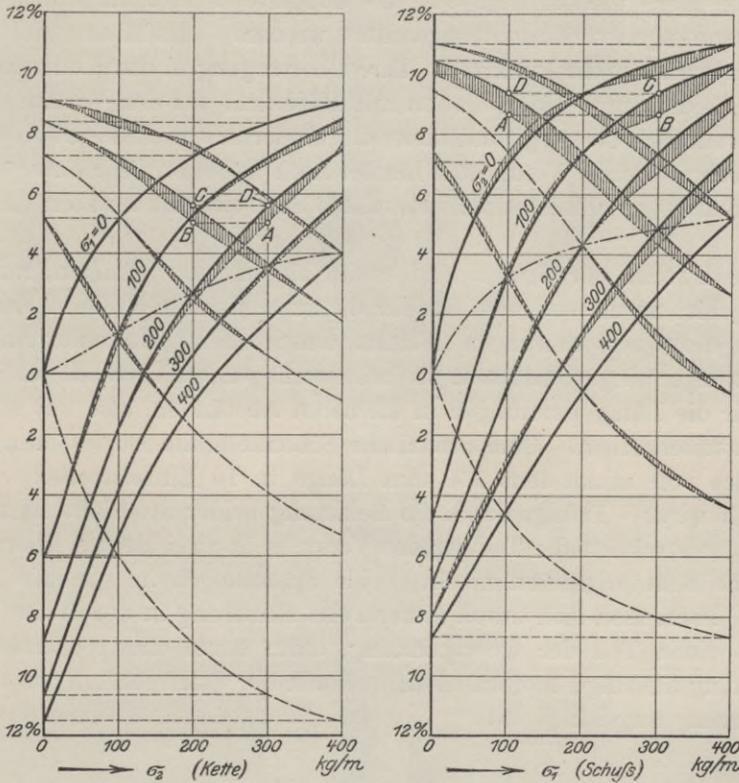


Fig. 58. Die Normalcharakteristik eines dreifachen Stoffes. (Stoff G der Tabelle).

Das teilweise recht wilde Durcheinanderliegen der Einzelpunkte ist weniger in Ablesungsungenauigkeiten als in der Ungleichmäßigkeit des Stoffes selbst begründet. Denn es fand sich für ein und dasselbe Kreuz bei allen über die dreiwöchige Versuchsdauer verteilten Ablesungen in der Regel eine gleichartige Abweichung.

Der Einfluß der Belastungsdauer entsprach den Erwartungen nach Versuch I (Seite 15). Eine Ablesung nach vierzehntägiger Belastung zeigte eine starke Zunahme der Formänderung gegenüber derjenigen nach einem Tage, wich dagegen nicht mehr erheblich von derjenigen nach drei Wochen ab, so daß die Versuchsdauer im Verhältnis zur Versuchsgenauigkeit als ausreichend angesehen werden kann.

In dem Unterschiede der beiden Versuchsreihen zeigt sich die starke einseitige Beeinflussung der Dehnung durch die jeweils zuerst vorhandene Einzelspannung. Der Vergleich des ersten und zweiten sowie des dritten und vierten Diagramms der Fig. 57 ergibt, daß diese Beeinflussung sich mit der Länge der Belastungsdauer vermindert.

Zur endgültigen Bestimmung der Normalcharakteristik sind für die Dehnung nach drei Wochen aus den korrespondierenden Werten der beiden Versuchsreihen die Mittel genommen (Fig. 58). Als Hilfsmittel der zeichnerischen Interpolation diente auch hier, wie in Fig. 54, die doppelte Auftragung, bei der Längs- und Querspannungen vertauscht angeordnet werden. Als Mittelwerte aus Fig. 57 ergaben sich zunächst die Punkte A. Ihre Übertragung in das Kontrollbild lieferte die Punkte B, die durch Interpolation mit Rücksicht auf den Verlauf der benachbarten Kurven nach C verlegt und ihrerseits wiederum durch die Übertragung nach D kontrolliert wurden. Wenn auch hierbei noch Spielraum für eine gewisse Willkür vorhanden ist, so erscheinen die Resultate doch sicherer als beim „Einzelkreuzversuch“.

Für die Zwecke der Praxis wird es im allgemeinen genügen, nur dasjenige Spannungsgebiet zu untersuchen, das für die zu erbauende Hülle in Frage kommt. Namentlich die Querspannungen können entsprechend Hüllendurchmesser und Innendruck enger eingegrenzt sein als beim vorliegenden Versuch. Es ist zu empfehlen, dafür die Längsspannungen in kleineren Abständen, also mit mehr Einzelpunkten zu untersuchen. Eine praktische Schenkelbreite ist 100 mm, die durch neun Schlitze von mindestens 150 mm Länge in 10 Einzelstreifen von 10 mm Breite geteilt wird. Erfolgt dabei die Belastung beider Stoffrichtungen möglichst gleichzeitig, so erscheint die Teilung des Versuchs in zwei Reihen überflüssig. Da es praktische Schwierigkeiten macht, beide Spannungen im gleichen Augenblick einzusetzen, kann man sich durch stufenweise Belastung in der Weise helfen, daß man zuerst einen Teil der Querspannung, dann einen entsprechenden Teil der Längsspannung anbringt, hierauf einen weiteren der Querspannung u. s. f., bis die ganze Belastung angehängt ist.

## Versuch IX.

### Die Schubcharakteristik eines dreifachen Stoffes.

(Stoff G der Tabelle.)

Nach Art des Versuches VI (Seite 31) wurden 9 Hysteresisschleifen I—IX aufgenommen bei 3 verschiedenen Querspannungen: 200, 250 und 300 kg/m. Innerhalb jeder Querspannung wurde die Längsspannung so verändert, daß sie jeweils 80, 50 und 20 % der Querspannung betrug. Für die 80 bzw. 20 % wurde wie schon früher (Versuch IV, Seite 22) eine positive bzw. negative Zusatzbelastung (Fig. 59 und 60) verwendet. Die angegebenen Spannungen beziehen sich auf den ungedehnten Durchmesser.

Alle 9 Versuche wurden an einem und demselben Stoffzylinder von wiederum 80 (genauer 79,6) mm Durchmesser und 300 mm Länge angestellt, und zwar stets in hängender Stellung, weshalb die negative Zusatzbelastung nicht mehr direkt,

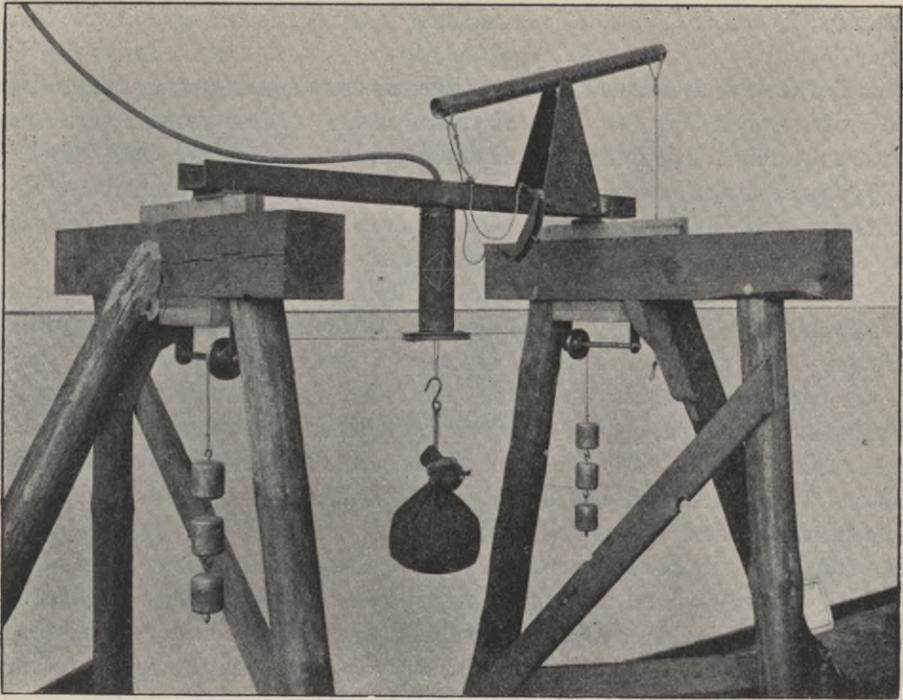


Fig. 59. Versuch IX. Torsionsversuch. Positive Zusatzbelastung. (Stoff G der Tabelle).

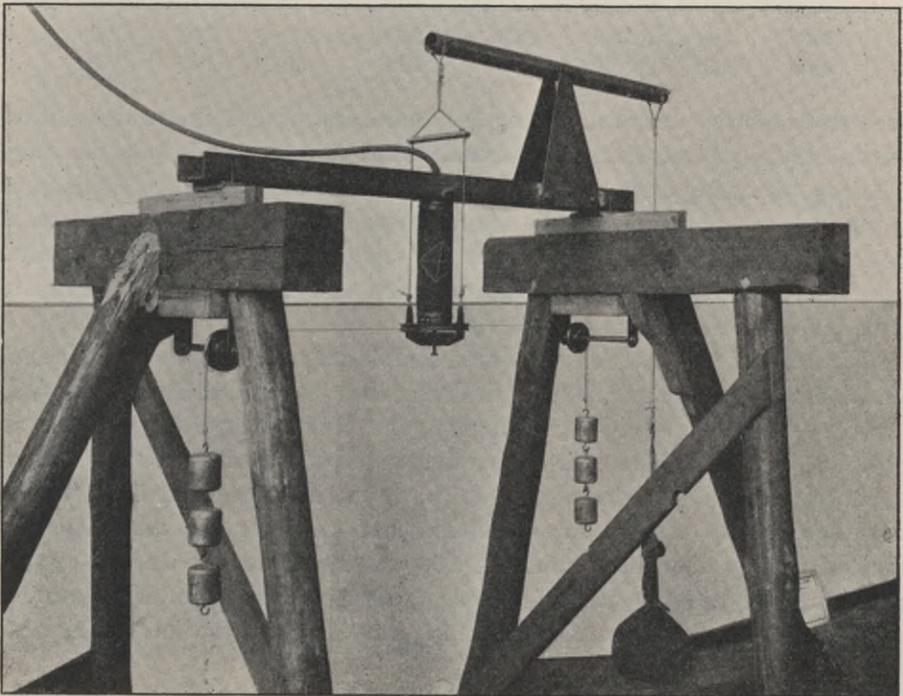


Fig. 60. Versuch IX. Torsionsversuch. Negative Zusatzbelastung. (Stoff G der Tabelle).

wie in Fig. 32, sondern durch Vermittlung eines gleicharmigen Umkehrhebels erfolgte.

Für den dicken dreifachen Stoff genügte die Abdichtung durch eingebundene gerillte Holzscheiben (Fig. 41, Seite 31) nicht mehr. Diese wurden daher ersetzt durch dünnwandig ausgedrehte Bronzescheiben, auf denen der Stoff durch je 2 um  $180^\circ$  versetzte Blechschellen festgeklemmt wurde. Drehscheibe (160 mm Durchmesser) und Drehgewichte (je 2,5 kg) waren die gleichen wie bei Versuch VI, ebenso die rhombische, auf der Spitze stehende Meßfigur.

Die Drehbelastung  $T$  wurde maximal auf 10 kg gesteigert. Bei den geringeren Normalspannungen war zur Vermeidung der Faltenbildung eine Beschränkung auf 7,5 bzw. 5 kg geboten. Da die einzelnen Versuche jeweils bei dem positiven Maximum der Drehbelastung und damit bei hoher Verdrehung endeten, so wurde der Stoffzylinder für den Beginn des darauf folgenden Versuchs von Hand in seine Nullage zurückgedreht. Die Zwischenpausen zwischen den Versuchen betragen mindestens 3 Stunden, während der die Normalspannungen bereits auf die Werte des folgenden Versuchs eingestellt wurden.

Die Resultate der Messungen sind in den 9 Hysteresisschleifen I—IX (Fig. 61) dargestellt. Und zwar sind die trigonometrischen Tangenten der Verschraubungswinkel  $\varphi$ , d. h. die Schiebungen pro Längeneinheit, als Funktion der Schubspannung aufgetragen. Die zugehörigen Normalspannungen in kg/m ergeben sich aus folgender Tabelle:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
$\sigma_1 =$	300	300	300	250	250	250	200	200	200
$\sigma_2 =$	240	150	60	200	125	50	160	100	40

Der erste Schritt zur Aufstellung der Schubcharakteristik ist der Ersatz der Hysteresisschleifen durch einzelne Kurven. Man könnte z. B. jeweils die jungfräuliche Kurve als maßgebend ansehen und würde damit diejenige Schiebung der Hülle vorausberechnen können, die sie im Montagestadium vor der ersten Fahrt erleidet. Beim Eintritt in den Fahrbetrieb ergeben sich jedoch Überspannungen nach der einen und anderen Seite, so daß sich eine Formänderung herausbilden wird, die einer mittleren Kurve entspricht.

In Fig. 61 sind in jeder Schleife durch Halbierung der Remanenz solche Mittelkurven bestimmt. Sie folgen in ihren beiden Enden jeweils den Spitzen der Schleife, sind also — beim Versuch — abhängig vom Versuchsbereich, bei der Fahrt des Schiffes von der Höhe der auftretenden Überspannungen. Da die in der Praxis auftretenden Schubspannungen durchweg weit unter der kritischen (Faltenbildung) bleiben, so kommt für die Schubcharakteristik nur ihr mittlerer Teil in Betracht. Faßt man ihre Ordinaten über einer Grundfläche, die aus Quer- und Längsspannungen gebildet ist, zu Flächen gleicher Schubspannungen zusammen, so erhält man die Schubcharakteristik in der (Seite 39 erwähnten) Form einer Flächenschar.

Nun zeigt die Fig. 61, daß für geringe Schubspannungen die Mittelkurven mit Annäherung durch gerade Linien ersetzt werden können, daß also innerhalb

gewisser Grenzen die Annahme des Hookeschen Gesetzes zulässig ist. Damit vereinfacht sich die Schubcharakteristik um eine Dimension zur Einzelfläche. In diesem Sinne ist aus den Wendetangenten der Mittelkurven (Fig. 61) die Schub-

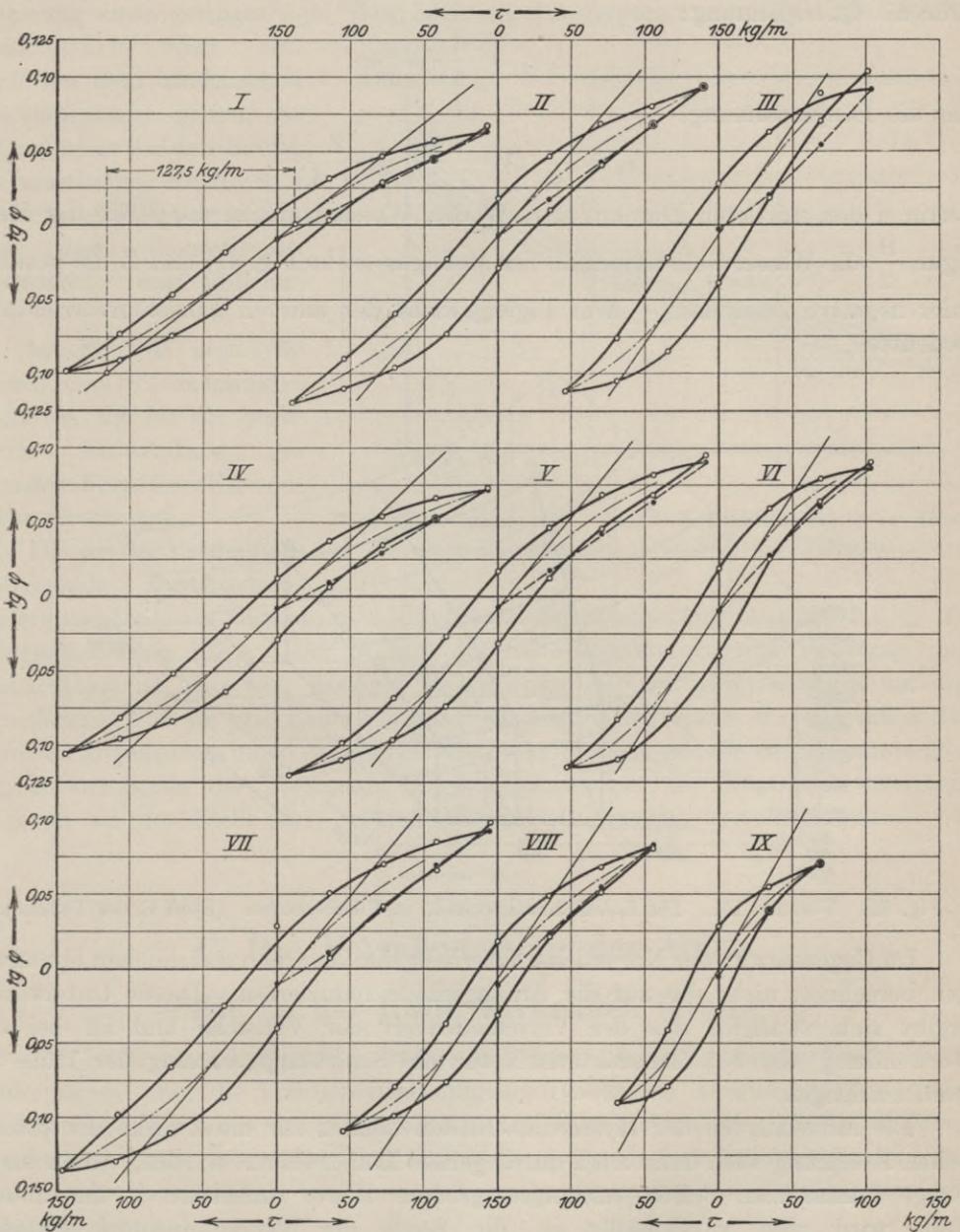


Fig. 61. Versuch IX. Hysteresis-Schleifen zur Schubcharakteristik. (Stoff G der Tabelle).  
 charakteristik des untersuchten Stoffes entwickelt. (Fig. 62.) Z. B. wurde aus der Hysteresisschleife I der Schubmodul  $G$  zu  $10 \times 127,5 = 1275 \text{ kg/m}$  entnommen und in Fig. 62 über dem Schnittpunkt der beiden für Schleife I geltenden Normalspannungen eingetragen.

Die Berechnung dieser Normalspannungen erfolgte nach dem Wasserdruck und dem mittleren Durchmesser jedes Einzelversuches unter Berücksichtigung der Zusatzlasten. Die Berechnungsformeln lauten:

Für die Querspannung:

$$\sigma_1 = \frac{d}{2} \cdot W,$$

für die Längsspannung:

$$\sigma_2 = \frac{d}{4} \cdot \left( W + \frac{H}{2} \right) \pm \frac{Z}{\pi \cdot d},$$

worin  $d$  den mittleren Durchmesser,  $W$  den Wasserdruck in der Mitte der Meßfigur,  $\frac{H}{2}$  die Wassersäule unterhalb der Meßfigur (siehe Fig. 41) und  $Z$  die positive oder negative Zusatzlast + dem Eigengewicht der unteren Einspannvorrichtung bedeuten.

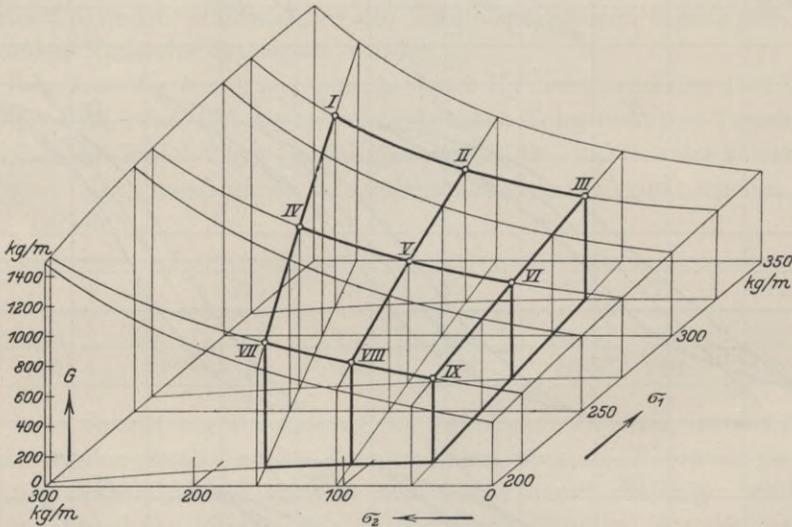


Fig. 62. Versuch IX. Die Schubcharakteristik in Flächenform. (Stoff G der Tabelle).

Im Gegensatz zu der Normalcharakteristik sind hier die tatsächlichen Spannungen berechnet, nicht die auf die Anfangsmaße reduzierten. Dieser Unterschied ergibt sich zwanglos aus der Verschiedenheit der Versuche und ist bei der Verwendung der Schubcharakteristik für die Schiebungsrechnung der Hülle zu berücksichtigen.

Die Mittelkurven der Hysteresisschleifen können für die Zwecke der praktischen Rechnung auch dann noch durch gerade Linien ersetzt werden, wenn die in Frage kommenden Schubspannungen größere Werte annehmen. In diesem Falle wird man zweckmäßig an die Stelle der Wendetangenten Sekanten setzen, wodurch die Ordinaten  $G$  der Schubcharakteristik kleiner werden.

Fig. 62 zeigt, daß die Schiebung im allgemeinen umso geringer ist, je größer die Normalspannungen sind. Diese Beobachtung wurde schon bei Versuch VI (Seite 32) am einfachen Stoff gemacht und dort zum Teil erklärt. Die Betrachtung kann hier noch etwas erweitert werden:

Denkt man sich in Fig. 41 aus der Schubspannung  $\tau$  und der Längsspannung die Resultierende gebildet, so wird ihre Neigung zur Achse, d. h. der Grenzwert der Schiebung für den Fall des reibungslosen Netzgefüges, bei gleicher Schubspannung umso geringer sein, je größer die Längsspannung  $\sigma_2$  ist. Die gleiche Abhängigkeit wird also auch bei dem praktischen Schiebungswert gelten, da dieser immer um den Betrag der elastischen Kräfte und der inneren Reibung gegenüber dem theoretischen Grenzwert zurückbleiben wird.

In Fig. 63 sind die Werte der Schubcharakteristik in die für die praktische Verwendung geeignete Form einer Kurvenschar übertragen.

Die bei der Verdrehung auftretende Durchmesseränderung betrug im Bereich von  $\pm 100$  kg/m Schubbelastung maximal 0,5 %, die Längenänderung 1,5 %. Der Einfluß der Schubspannungen auf Dehnung und Kontraktion ist also weit geringer als derjenige der Normalspannungen auf die Schiebung. Für die praktische Formänderungsrechnung kann er, wie schon auf Seite 39 angedeutet, umso eher außer Betracht bleiben, als die Schubspannungen nur an der Stelle der geringsten Biegungsspannungen ihr Maximum erreichen, dagegen an der Stelle der größten Biegungsspannungen verschwinden.

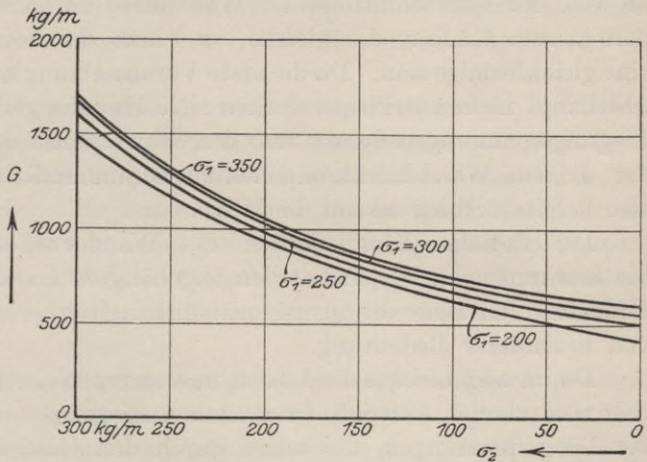


Fig. 63. Versuch IX. Die Schubcharakteristik in Form einer Kurvenschar. (Stoff G der Tabelle).

## C. Die Formänderung der Hülle.

### Die an der Hülle wirkenden Kräfte.

Die Hülle eines Luftschiffes erfährt eine dauernde und vorübergehende Formänderungen. Für die Vorausbestimmung der Hüllenform kommt nur die erstere in Betracht. Wir sehen also ab von allen motorischen und aerodynamischen Kräften, die bei der Fahrt in der Geraden und insbesondere in der Kurve auftreten, und denken uns das Schiff in horizontaler Lage im aerostatischen Gleichgewicht freischwebend.

Die Hülle unterliegt zunächst der Wirkung des Wanddruckes. Er steigt von unten nach oben praktisch linear an und liefert als Summe seiner Vertikal-komponenten den Gesamtauftrieb  $A \cdot V$ , wobei  $A$  den Auftrieb pro cbm Gas,  $V$  das Volumen der Hülle bedeutet. Im Gleichgewicht mit diesem Auftrieb stehen die Schwerkraft der Hülle und aller angehängten Lasten.

Die Wirkung des Wanddruckes und der Schwerkkräfte auf die Hülle ist nun die, daß jedes Flächenelement Querspannungen  $\sigma_1$ , Längsspannungen  $\sigma_2$  und Schubspannungen  $\tau$  erfährt. Durch die axialen Komponenten des Wanddruckes werden zunächst Längsspannungen geweckt. Ihre Verteilung über den Umfang hängt ab von der Querschnittsform. Wäre diese ein Kreis und der Wanddruck über den ganzen Umfang der gleiche, so würde die Verteilung der Längsspannungen eine gleichförmige sein. Da die erste Voraussetzung nur mit Annäherung, die zweite überhaupt nicht zutrifft, so decken sich über die gleichförmigen Längsspannungen Biegungsspannungen derart, daß der Schwerpunkt der Längsspannungen mit dem der axialen Wanddruckkomponenten zusammenfällt. Der reine Gasdruck wirkt also bereits verbiegend auf die Hülle.

Die radialen Komponenten des Wanddruckes erzeugen Querspannungen. Sie bestimmen im Verein mit den angehängten Lasten und dem Eigengewicht der Hülle in erster Linie die Querschnittsform. Hierbei ist die Art der Lastaufhängung von besonderer Bedeutung.

Da im allgemeinen die Lasten in anderer Weise über die Länge der Hülle verteilt sind als der Auftrieb, so entstehen Biegemomente. Infolgedessen werden die Längsspannungen, die schon durch den Gasdruck ungleich über den Querschnitt verteilt sind, weiter verändert. Endlich hat die Übertragung der konzentrierten Vertikallasten auf die Hülle mit Hilfe schrägliegender Zugorgane (Takelung) die Entstehung von Kräften in der Achsenrichtung zur Folge, durch die eine nochmalige Beeinflussung der Längsspannungen eintritt.

Der Ausgleich der Auftriebs- und Schwerkkräfte über die Längsrichtung der Hülle erfolgt durch die Schubspannungen.

### Der Gang der Berechnung.

Eine genaue Berechnung der Spannungen und Formänderungen für jede Stelle der Hülle scheidet daran, daß die Quer-, Längs- und Schubspannungen nicht nur in Abhängigkeit von den Kräften, sondern auch, wie wir bei den Stoffversuchen sahen, in gegenseitiger Abhängigkeit stehen. Hinzu kommt, daß die Querschnitte der Hülle nur an den Enden kreisförmig sind, im Bereich der Takelung jedoch mehr oder weniger von der Kreisform abweichen.

Der Unmöglichkeit einer genauen Berechnung steht glücklicherweise ihre Zwecklosigkeit gegenüber. Denn erstens ist der Innendruck während der Fahrt dauernden Schwankungen um eine Mittellage unterworfen. Zweitens sind je nach der Lufttemperatur und dem Barometerstand die Belastungsverhältnisse verschieden. Drittens hat die innere Stoffreibung zur Folge, daß ein und derselben Belastung nicht eine ganz bestimmte Formänderung der Hülle, sondern ein ganzer Formänderungsbereich entspricht, innerhalb dessen jeder Wert erreicht werden kann, je nachdem welche Belastung vorhergegangen ist. Endlich stellen die Rechnungsunterlagen, die in Form der Normal- und Schubcharakteristik gegeben sind, bei der geringen Gleichmäßigkeit der Stoffe nur mehr oder weniger gute Annäherungen an die wirklichen Mittelwerte dar. Wenn wir uns nun erinnern, daß der Ausgangspunkt der Betrachtungen der Wunsch war, grobe Formfehler der Hülle

von vornherein zu vermeiden, so ist ersichtlich, daß es sich bei den folgenden Spannungs- und Formänderungsrechnungen um möglichst praktische Annäherungsverfahren, am besten unter enger Anlehnung an die im Maschinenbau angewandten Methoden, handeln muß.

Wir wollen zu diesem Zweck die gegenseitige Abhängigkeit der Einzelspannungen bis zu einem gewissen Grade außer acht lassen und die Berechnung in mehrere Einzelbetrachtungen trennen.

Sehen wir zunächst von allen Biegungs- und Schubspannungen ab, so bleiben, gewissermaßen als Spannungen erster Ordnung, diejenigen Längs- und Querspannungen übrig, die allein durch einen überall konstanten Innendruck von mittlerer Größe erzeugt werden. Sie entstehen dann, wenn die Hülle nicht mit Gas, sondern mit Luft gefüllt ist, und wenn gleichzeitig ihr Eigengewicht vernachlässigt wird. Diese Spannungen erster Ordnung erzeugen eine Durchmesserdehnung und Längs-Kontraktion, die mit Hilfe der Normalcharakteristik festgestellt werden kann.

Alsdann füllen wir die Hülle mit Gas von gleichem mittlerem Druck, wodurch diese ersten Formänderungen zunächst unbeeinflusst bleiben. Jedoch tritt nun infolge der auftretenden Momente eine Verbiegung der Hülle ein, die wir unabhängig für sich berechnen wollen.

In gleicher Weise wollen wir dann in einem dritten Abschnitt den Einfluß der Schubspannungen auf die Hüllenform untersuchen.

Während wir für diese drei Einzelbetrachtungen die Kreisform der Querschnitte als Voraussetzung annehmen, ist der Inhalt eines vierten Abschnittes der Abweichung von der Kreisform und ihrem Einflusse auf die Verbiegung der Hülle gewidmet.

## Die Formänderung der luftgefüllten und gewichtslosen Hülle.

### Das Grundgesetz der Spannungsverteilung.

Die Grundlage für die Bestimmung der Normalspannungen bilden die Beziehungen zwischen Druck, Spannung und Wölbung eines Stoffelementes  $dF$  (Fig. 64). Sind  $ds_1$  und  $ds_2$  seine Abmessungen in den beiden Hauptrichtungen,  $\rho_1$  und  $\rho_2$  seine Krümmungsradien mit den zugehörigen Zentriwinkeln  $d\varphi_1$  und  $d\varphi_2$ , so gilt für die Kräfte senkrecht zum Flächenelement die Gleichgewichtsbedingung:

$$p \cdot ds_1 \cdot ds_2 = 2 \sigma_1 \cdot \sin \frac{d\varphi_1}{2} \cdot ds_2 + 2 \sigma_2 \cdot \sin \frac{d\varphi_2}{2} \cdot ds_1.$$

Nun ist:

$$ds_1 = \rho_1 \cdot d\varphi_1$$

$$ds_2 = \rho_2 \cdot d\varphi_2.$$

Ferner ist der Sinus eines  $\infty$  kleinen Winkels = dem Winkel selbst; mithin:

$$p \cdot \rho_1 \cdot d\varphi_1 \cdot \rho_2 \cdot d\varphi_2 = \sigma_1 \cdot d\varphi_1 \cdot \rho_2 \cdot d\varphi_2 + \sigma_2 \cdot d\varphi_2 \cdot \rho_1 \cdot d\varphi_1,$$

woraus folgt:

$$p \cdot \rho_1 \cdot \rho_2 = \sigma_1 \cdot \rho_2 + \sigma_2 \cdot \rho_1.$$

Diese Gleichung besagt, daß die beiden Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  in beliebigem Verhältnis an der Aufnahme des Druckes  $p$  beteiligt sein können, daß mithin zur ein-

deutigen Bestimmung noch eine zweite Beziehung erforderlich ist. Löst man z. B. nach  $\sigma_1$  auf, so ergibt sich:

$$\sigma_1 = p \cdot \rho_1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \sigma_2 \dots \dots \dots \text{ (Gl. 6)}$$

Verschwundet die eine Spannung, so wird die andere ein Maximum von der Form:

$$\sigma = p \cdot \rho \dots \dots \dots \text{ (Gl. 7.)}$$

Das gleiche tritt ein, wenn ein Radius, z. B.  $\rho_2$ ,  $\infty$  groß wird, d. h. wenn das Flächenelement auf einem Zylinder oder Kegelmantel liegt.

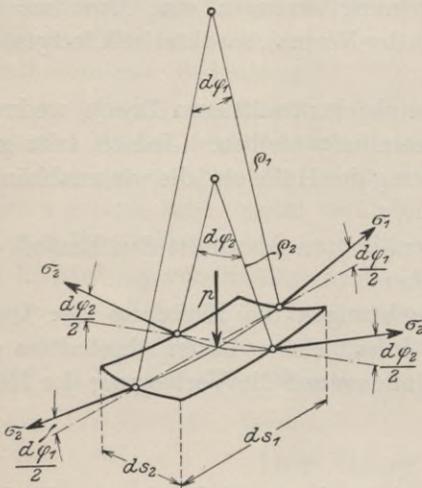


Fig. 64. Beziehung zwischen Druck, Spannung und Wölbung eines Stoffelementes.

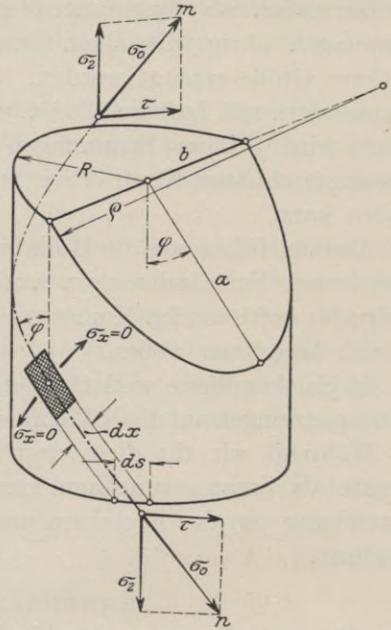


Fig. 65. Die kritische Schubspannung.

**Die Anwendung auf die Berechnung der kritischen Schubspannung.**

(Zwischenbetrachtung.)

Ist m—n (Fig. 65) die Richtung der durch Torsion entstehenden Falten eines Zylinders, so sind die zu dieser Richtung senkrechten Spannungen  $\sigma_x = 0$ .

Wir haben also den Fall der Gleichung 7:

$$\sigma = p \cdot \rho.$$

Hierin ist  $\sigma$  die in Richtung m—n wirkende, auf das Längenelement  $dx$  bezogene, aus  $\sigma_2$  und  $\tau$  resultierende Spannung von der Form:

$$\sigma = \frac{ds}{dx} \cdot \sigma_0 = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{\sigma_2^2 + \tau^2}.$$

Der Krümmungsradius  $\rho$  in Richtung m—n ist identisch mit dem größten Krümmungsradius der unter dem Winkel  $\varphi$  gelegten Schnittellipse des Zylinders, hat also nach bekannter Formel die Größe:

$$\rho = \frac{a^2}{b},$$

worin:

$$a = \frac{R}{\sin \varphi}$$

und:

$$b = R,$$

so daß:

$$\rho = \frac{R}{\sin^2 \varphi}.$$

Die Einsetzung in Gleichung 7 ergibt also:

$$\frac{1}{\cos \varphi} \cdot \sqrt{\sigma_2^2 + \tau^2} = p \cdot \frac{R}{\sin^2 \varphi}.$$

Die Auflösung dieser Gleichung führt auf die Form:

$$\frac{\tau^2}{\sigma_2} = R \cdot p.$$

Beachtet man, daß:

$$R \cdot p = \sigma_1,$$

so erhält man als Maximalwert der Schubspannung, für welchen die Faltenbildung beginnt:

$$\tau_{\max} = \sqrt{\sigma_1 \cdot \sigma_2}.$$

Diese Gleichung, die auf Seite 33 für den Spezialfall des idealen Netzgefüges abgeleitet wurde, ist also unabhängig von der Richtung der Fäden und gilt ganz allgemein, z. B. auch für Blechzylinder.

### Die Anwendung auf die Spannungsberechnung der Hülle.

Die für die Bestimmung der Hüllenspannungen notwendige zweite Beziehung ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung der axialen Kräfte entsprechend Fig. 66 wie folgt:

$$\pi R^2 \cdot p_m = 2 \pi R \cdot \sigma_2 \cdot \cos \delta,$$

woraus sich die Längsspannung berechnet zu:

$$\sigma_2 = \frac{p_m \cdot R}{2 \cos \delta}.$$

Hierin ist  $\delta$  der Winkel zwischen der Hüllenchse und der Tangente im Querschnitt A-B. Wird er gleich 0, d. h. erreicht der Hüllendurchmesser sein Maximum, so ist

$$\sigma_2 = \frac{p_m \cdot R}{2}.$$

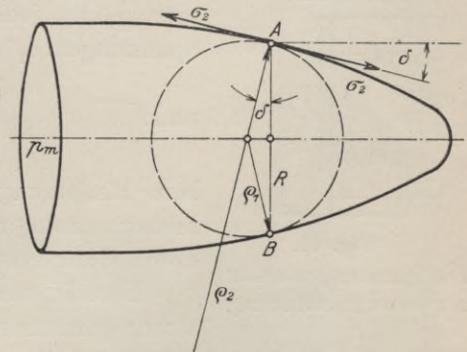


Fig. 66. Die Längsspannungen der luftgefüllten Hülle.

Nachdem die Längsspannung  $\sigma_2$  bekannt ist, kann mit Hilfe der Gleichung 6 (Seite 60) die Querspannung  $\sigma_1$  bestimmt werden. Hierbei kann man den Krümmungsradius  $\rho_1$  ersetzen durch den Ausdruck:

$$\rho_1 = \frac{R}{\cos \delta}$$

und erhält:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{p_m \cdot R}{\cos \delta} - \frac{R}{\cos \delta \cdot \rho_2} \cdot \frac{p_m \cdot R}{2 \cdot \cos \delta} \\ &= 2 \sigma_2 \cdot \left(1 - \frac{R}{2 \cos \delta \cdot \rho_2}\right).\end{aligned}$$

Für zylindrische und Kegelform ist  $\rho_2 = \infty$ , mithin:

$$\sigma_1 = 2 \sigma_2 = \frac{p_m \cdot R}{\cos \delta}.$$

Bei den schlanken Formen, die man den Hüllen zur Verminderung des Luftwiderstandes gibt, ist  $\cos \delta$  nahe an 1 und der Krümmungsradius  $\rho_2$  im Verhältnis zum Hüllradius  $R$  sehr groß, so daß mit genügender Annäherung die im Gebrauch einfacheren Formeln angewendet werden können:

$$\sigma_1 \cong p_m \cdot R, \quad \sigma_2 \cong \frac{p_m \cdot R}{2}.$$

An den beiden Enden der Hülle werden die Winkel  $\delta$  zwar größer, jedoch sind hier die Bieugungsmomente und Schubspannungen so gering, daß die Vernachlässigung für das Endresultat, nämlich die Form der elastischen Linie, ohne Bedeutung bleibt.

### Die Bestimmung der Durchmesserdehnung und Längskontraktion.

Aus den Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  ergibt sich mit Hilfe der Normalcharakteristik die Durchmesserdehnung  $\Delta d$  und Längskontraktion  $\Delta l$  für jeden Querschnitt der Hülle.

Diese Werte stellen aus den bei Versuch II, Seite 17, angegebenen Gründen nur erste Annäherungen dar. Mit ihrer Hilfe ergeben sich die Spannungen zweiter Annäherung, d. h. die dem gedehnten Durchmesser entsprechenden, jedoch auf ungedehnten Durchmesser bezogenen Spannungen  $\sigma_1'$  und  $\sigma_2'$  gemäß Fig. 67 wie folgt:

$$\sigma_1' = \sigma_1(1 + \Delta d)(1 - \Delta l)$$

und:

$$\sigma_2' = \sigma_2(1 + \Delta d)^2.$$

Ihre Einsetzung in die Normalcharakteristik liefert Durchmesserdehnung und Längskontraktion in zweiter Annäherung, deren Genauigkeit in jedem Falle ausreicht.

Die Spannungen erster u. zweiter Annäherung.

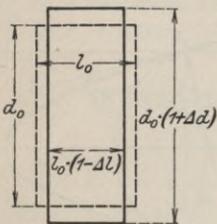


Fig. 67.

Besteht die Hülle aus Querbahnen, so vermindert sich streng genommen die mittlere Querspannung durch den verstärkenden Einfluß der Nähte. Beträgt die Überlappung an der Naht  $x$  % der Bahnbreite, so ist  $\sigma_1$  durch den Faktor  $\frac{100 + x}{100}$  zu dividieren.

Das gleiche gilt für die Längsspannung, falls die Hülle aus Längsbahnen besteht.

Diese Korrektur wird wegen ihres geringen Einflusses auf das Endresultat der Rechnung in der Regel unterbleiben können.

## Die Biegung der gasgefüllten Hülle.

### Die Naviersche Hypothese.

Für die Biegungsrechnungen der Hülle kommen diejenigen Methoden sinngemäß zur Anwendung, die in der technischen Mechanik für die Biegung des geraden, in seiner Mittelebene beliebig belasteten Stabes von symmetrischem Querschnitt und veränderlichem Trägheitsmoment entwickelt sind.

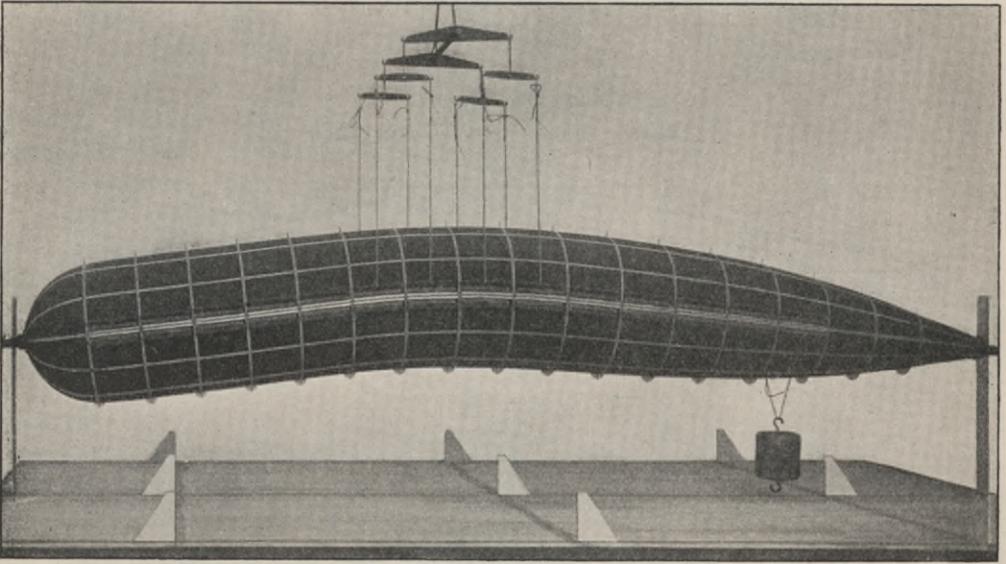


Fig. 68. Wassergefülltes Modell. Kopf-Aufnahme (A).

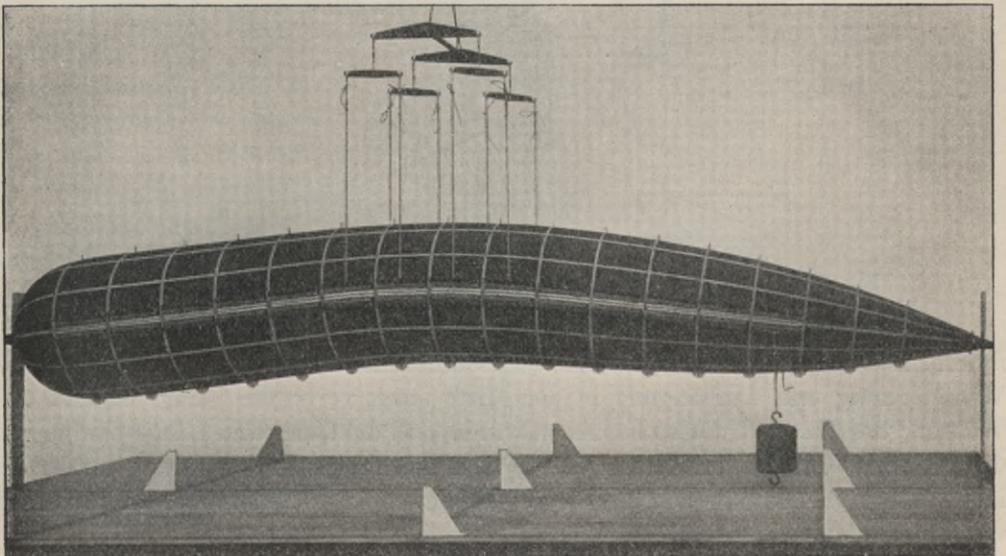


Fig. 69. Wassergefülltes Modell. Schwanz-Aufnahme (B).

Die Grundlage für diese Methoden bildet die Naviersche Hypothese, wonach ebene Querschnitte bei der Biegung eben bleiben.

Um einen Anhaltspunkt über ihre Gültigkeit für gebogene Ballonhüllen zu gewinnen, wurde aus dem dreifachen Stoff G der Stofftabelle eine Modell von 20 cm Durchmesser und ca. 150 cm Länge hergestellt, im luftgefüllten, d. h. praktisch biegungs-

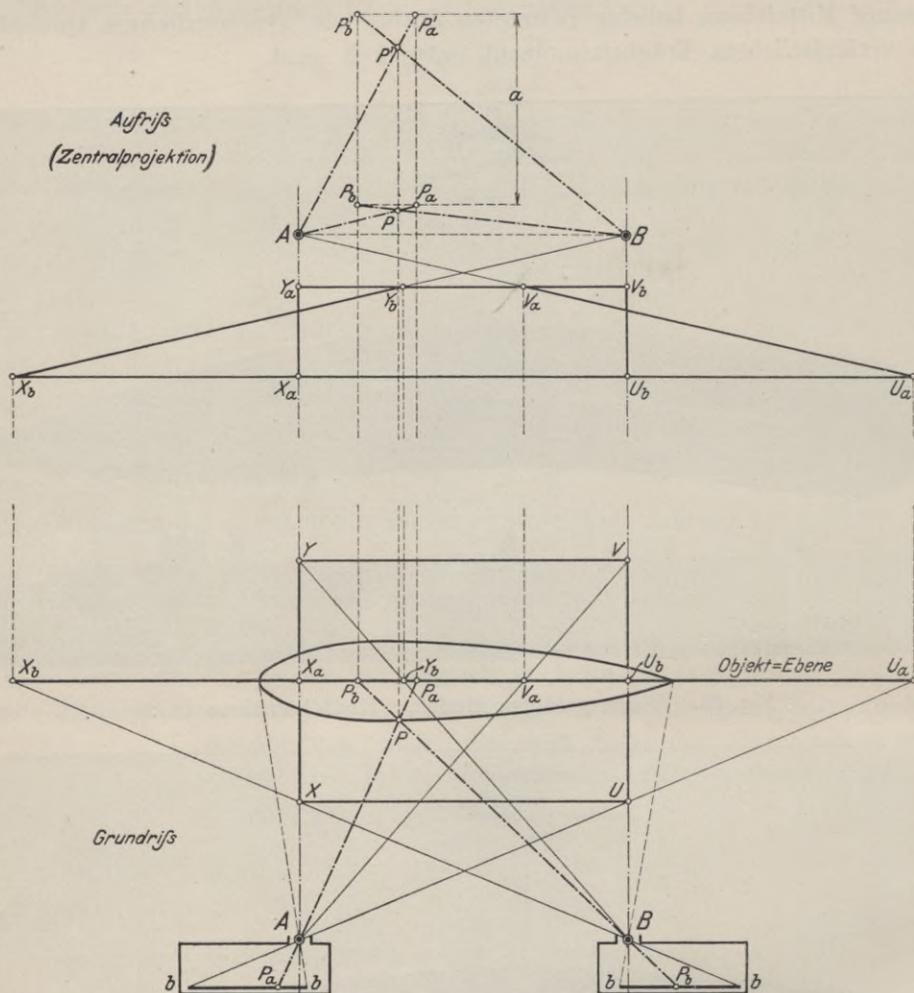


Fig. 70. Beziehung zwischen der fotografischen Zentralprojektion und der zeichnerischen Parallelprojektion.

freien Zustande, drehbar gelagert, mit Querschnittslinien versehen und sodann durch Wasserfüllung und Aufhängung in der Mitte stark verbogen. (Fig. 68 und 69.) Während der Wasserdruck so bemessen wurde, daß die Quer- und Längsspannungen denen eines Prallballons heutiger Größe gleichkommen, wurden durch die kurze Länge der Aufhängung die Biegungsspannungen erheblich über die praktisch vorkommenden Werte gesteigert.

Das Modell blieb 3 Wochen unter Belastung und erreichte in dieser Zeit einen nahezu festen Grenzwert der Verbiegung.

Die Beobachtung der Querschnitte erfolgte durch Anvisieren längs der Kante eines Lineals. Eine Abweichung von der ebenen Form hätte sich besonders an den beiden Enden der Hülle bemerkbar machen müssen, konnte jedoch weder nach der einen noch nach der anderen Seite hin festgestellt werden. Geringe Ungenauigkeiten, die unregelmäßig und mit wechselnden Vorzeichen auftraten, sind in Fehlern bei der von Hand erfolgten Aufzeichnung der Querschnittslinien begründet.

Aus der Photographie kann die Querschnittsform unmittelbar nur in der Ebene des Bildmittelpunktes beobachtet werden; alle anderen Querschnitte stellen sich infolge der photographischen Zentralprojektion in Ellipsenform dar. Ihre Übertragung in die zur Beurteilung geeignetere Parallelprojektion erfolgt am einfachsten mit Hilfe einer stereoskopischen Doppelaufnahme, wie sie in Fig. 70 und 71 angegeben ist:

Das Modell wurde über der Mitte eines rechtwinkligen Liniensystems X-Y-V-U aufgehängt und von 2 Punkten A und B aus (Fig. 70, Grundriß)

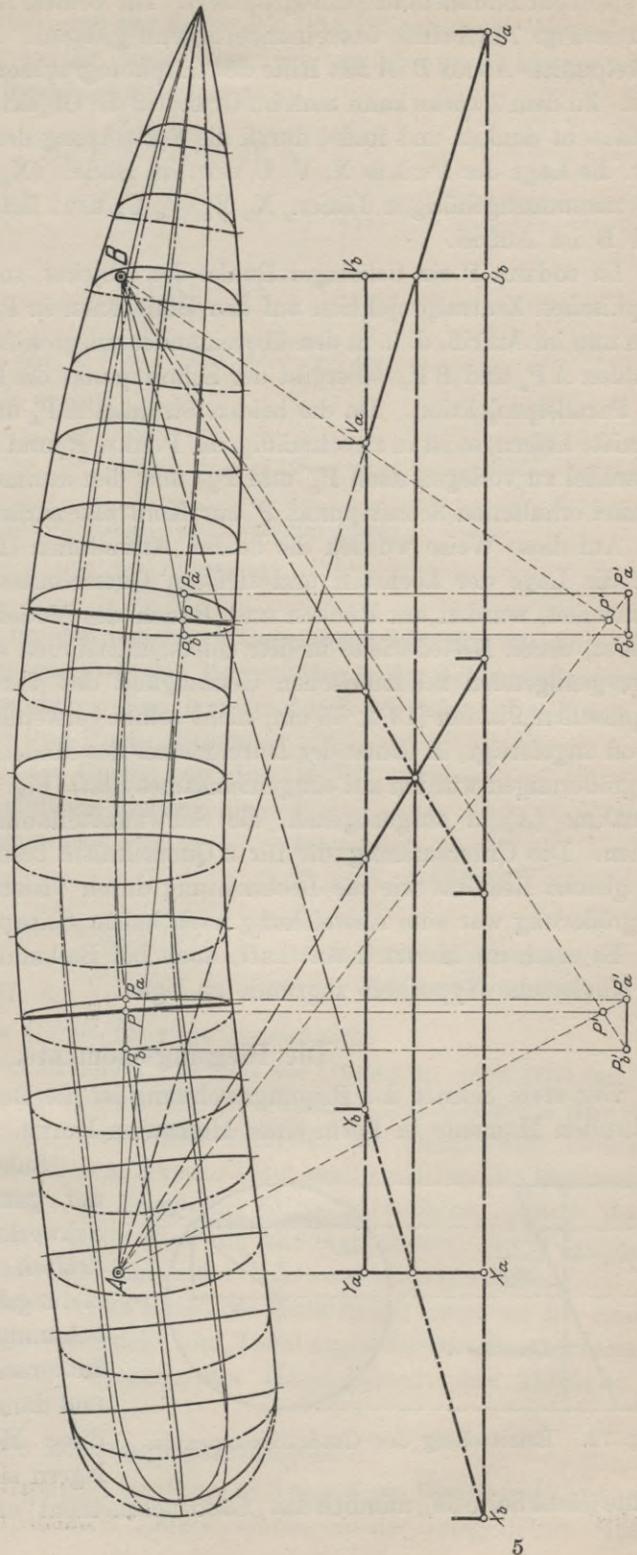


Fig. 71. Durchführung der Querschnittskontrolle nach den Aufnahmen der Fig. 68 und 69.



Ersteres entsteht dadurch, daß der Gasdruck (Fig. 72) über der Querschnittsmitte um den Betrag  $A \cdot y$  größer, unter derselben um ebensoviel kleiner ist als der mittlere Druck  $p_m$ . Es berechnet sich danach zu:

$$\begin{aligned} M_G &= 2 \int_{y=0}^{y=R} A \cdot y \cdot dF \cdot y \\ &= 2 \int A \cdot y \cdot 2 \cdot x \cdot y \cdot dy. \end{aligned}$$

Für die Kreisform ist:

$$x = \sqrt{R^2 - y^2},$$

und wir erhalten:

$$M_G = 4 A \int y^2 \cdot \sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy.$$

Die Auflösung des Integrals ergibt:

$$\int y^2 \sqrt{R^2 - y^2} \cdot dy = \frac{R^4}{8} \cdot \arcsin \frac{y}{R} + \sqrt{R^2 - y^2} \cdot \left( \frac{y^3}{4} - \frac{y \cdot R^2}{8} \right).$$

Die Einsetzung der Integrationsgrenzen führt auf die Form:

$$M_G = \frac{\pi}{4} \cdot R^4 \cdot A.$$

Das Takelungsmoment für den beliebigen Querschnitt AB (Fig. 73), unter dem wir gemäß dem auf S. 58 Gesagten nur das Moment der in der Achsenrichtung wirkenden Takelungskräfte verstehen wollen, berechnet sich wie folgt: Ist T eine am Gurt angreifende Seilkraft, H ihre Horizontalkomponente und e der Abstand des Gurtes von der neutralen Faser, so ist der endliche Beitrag, den das Seil T zu dem Takelungsmoment liefert:

$$\Delta M_T = H \cdot e.$$

Das bei AB herrschende Takelungsmoment ist mithin:

$$M_T = \Sigma H \cdot e,$$

gerechnet von dem Ende des Gurtes bis zum Querschnitt.

Greift die Takelung an zahlreichen Punkten des Gurtes an, oder tritt an ihre Stelle eine Stoffaufhängung, so ersetzt man zweckmäßig den endlichen Zuwachs  $\Delta M_T$  durch das Differential  $dM_T$  und erhält dann  $M_T$  als Integralwert zwischen den angegebenen Grenzen. Zu diesem Zwecke kann man zunächst die Horizontalkomponenten der Takelungskräfte in Form einer Kurve aufzeichnen. Durch Multiplikation mit den Abständen e ergibt sich die Differentialkurve der Takelungsmomente und durch Integration die Kurve der Takelungsmomente selbst.

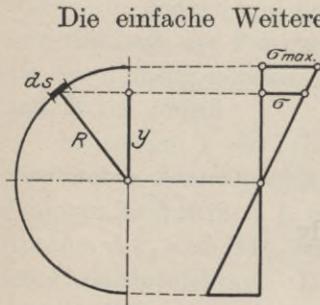
Während die Momente der Vertikallasten die Hülle in der Regel an den Enden in die Höhe biegen, haben die Gasdruck- und Takelungsmomente die gegenteilige Wirkung. Für die resultierende Biegung der Hülle kommt ihre Differenz in Betracht.

### Die Biegungsspannungen.

Die durch die Momente erzeugten positiven und negativen Biegungsspannungen lagern sich über die stets positiven Längsspannungen der luftgefüllten Hülle.

Ihre Beziehung zu den Momenten ist mit Bezug auf Fig. 74 gegeben durch die Gleichung:

$$M_b = \int \sigma \cdot ds \cdot y.$$



Die einfache Weiterentwicklung dieses Integrals ist an die Bedingung des Hookeschen Gesetzes gebunden, wonach der Elastizitätsmodul E, der für Stoffe die Dimension kg/m hat, über den ganzen Querschnitt der gleiche ist. Diese Bedingung ist nun, wie die Normalcharakteristik zeigt, im allgemeinen nicht erfüllt. Jedoch ist der Fehler, der mit ihrer Annahme gemacht wird, nicht allzu groß, vorausgesetzt, daß die Größe von E, d. h. der Differentialquotient der Dehnungskurve, der Normalcharakteristik an der richtigen Stelle entnommen wird. Unter dieser Voraussetzung können wir also der im Maschinenbau vorgezeichneten Weiterentwicklung der Biegungsgleichung folgen:

Fig. 74. Biegungsspannung.

$$\sigma = \sigma_{max} \cdot \frac{y}{R}$$

und damit:

$$M_b = \frac{\sigma_{max}}{R} \int y^2 \cdot ds = \frac{\sigma_{max}}{R} \cdot J.$$

Hierin ist J im Zusammenhang damit, daß die Stoffspannungen auf die Breite des Stoffes, nicht auf seine Querschnittsfläche bezogen werden, das Trägheitsmoment einer Linie, in unserem Falle der Kreislinie. Es hat nach bekannter Beziehung die Größe:

$$J = \pi \cdot R^3.$$

Hiermit ergibt sich die Biegungsspannung in der äußersten Faser zu:

$$\sigma_{max} = \pm \frac{M_b}{\pi R^2}.$$

Besteht die Hülle aus Längsbahnen, so ist das Trägheitsmoment J infolge des verstärkenden Einflusses der Nähte um einen der Überlappung entsprechenden Wert höher als  $\pi R^3$ . (Siehe auch Seite 62.) Die praktischen Werte dieser Korrektur betragen ca. 3 bis 6 %, an den Enden der Hülle je nach Querschnitt noch mehr.

### Die Form der Biegungslinie.

Die Gleichung der elastischen Linie hat die Form:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_b}{E \cdot J} \quad \dots \dots \dots \quad (Gl. 8)$$

Wie schon oben angedeutet, ist hierin E zwar innerhalb jedes einzelnen Querschnittes, jedoch nicht innerhalb der ganzen Hülle konstant. Vielmehr ist zu jedem Querschnitt dasjenige E aufzusuchen, welches gemäß der Normalcharakteristik den für die luftgefüllte Hülle ermittelten Normalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  entspricht.

Bei den Längsspannungen ist hierbei die Entlastung durch die Horizontal-komponenten der Takelungskräfte zu berücksichtigen, da diese unter Umständen den Elastizitätsmodul stark beeinflussen.

Streng genommen ist diese Berücksichtigung schon bei der Bestimmung der Durchmesserdehnung und Längskontraktion der luftgefüllten Hülle erforderlich. Für die praktische Berechnung genügt es jedoch, wenn sie an der vorliegenden Stelle in den Gang der Rechnung eintritt.

Da mit der Bestimmung von  $E$  nunmehr alle 3 Faktoren  $M_b$ ,  $E$  und  $J$  für die Gleichung der elastischen Linie bekannt sind, so kann die Kurve  $\frac{d^2y}{dx^2}$  aufgezeichnet und daraus durch zweimalige Integration in bekannter Weise die Form der elastischen Linie, wie sie sich durch reine Biegung ergibt, entwickelt werden.

### Die Schiebung der gasgefüllten Hülle.

Im praktischen Maschinenbau pflegt man bei Balken, die im Vergleich zu ihrem Querschnitt eine gewisse Länge haben, die Formänderung durch die Schubkräfte zu vernachlässigen. Für Ballonhüllen ist diese Vernachlässigung nicht zulässig. Denn die Änderung der Hüllenform durch die Schubspannungen macht in der Regel einen beträchtlichen Teil der Gesamtverbiegung aus.

#### Die Verteilung der Schubspannungen über den Querschnitt.

Die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Biegungs- und Schubspannungen, die an dem abgegrenzten, schraffierten Stück der Hülle (Fig. 75) angreifen, lautet:

$$2 \tau \cdot dl = \int_y^R d\sigma \cdot ds.$$

Hierin gelten die bekannten Beziehungen:

$$d\sigma = d \frac{y \cdot M_b}{J} = \frac{y}{J} \cdot dM_b$$

und:

$$dM_b = V \cdot dl,$$

wobei  $V$  die im Querschnitt herrschende Schubkraft bedeutet. Damit ergibt sich:

$$2 \tau \cdot dl = \int_y^R \frac{y}{J} \cdot V \cdot dl \cdot ds,$$

woraus folgt:

$$\tau = \frac{V}{2J} \int_y^R y \cdot ds = \frac{V}{2J} \cdot S.$$

Das statische Moment  $S$  des abgegrenzten Hüllenteils, bezogen auf die Schwerachse, ergibt für den Fall des kreisförmigen Querschnitts den einfachen Ausdruck:

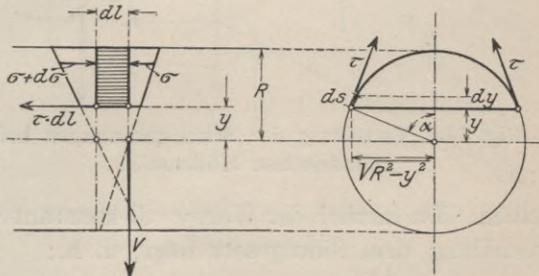


Fig. 75. Beziehung zwischen Biegemoment und Schubspannung.

$$S = \int y \cdot ds = R \cdot \int \frac{y}{\sqrt{R^2 - y^2}} \cdot dy$$

$$= 2 R \cdot \sqrt{R^2 - y^2} = 2 R^2 \cdot \sin \alpha.$$

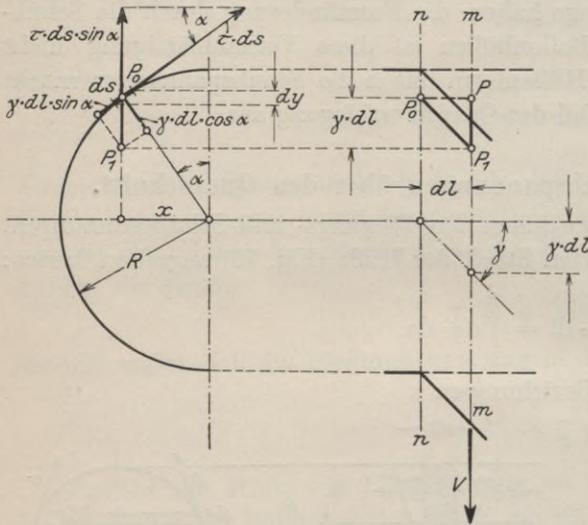
Hiermit findet sich die Schubspannung  $\tau$  zu:

$$\tau = \frac{V}{2 \pi R^3} \cdot 2 R^2 \cdot \sin \alpha = \frac{V}{\pi \cdot R} \cdot \sin \alpha \quad . . . . . \text{(Gl. 9)}$$

d. h. ihre Verteilung über den Querschnitt wird zeichnerisch durch einen Kreis vom Radius  $\frac{V}{\pi \cdot R}$  dargestellt. Ihren größten Wert erreicht die Schubspannung in der Mitte:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{\pi \cdot R}.$$

Zum gleichen Resultat führt folgende Betrachtung: Denken wir uns in Fig. 76 den Querschnitt m—m gegenüberdem nächstfolgenden n—n durch die Schubkraft V um die Strecke  $\gamma \cdot dl$  parallel verschoben, und vernachlässigen wir dabei die geringe Winkeländerung, die durch die gleichzeitig auftretenden Biegungsspannungen hervorgerufen wird, so wird auch der beliebige Punkt P des Querschnittes m—m sich um die gleiche Strecke  $\gamma \cdot dl$  nach  $P_1$  verschieben. Zerlegen wir diese Verschiebung in eine radiale Komponente von der Größe:



$\gamma \cdot dl \cdot \cos \alpha$

und in eine tangentielle von der Größe:

$$\gamma \cdot dl \cdot \cos \alpha$$

so wird nur die letztere eine Schubspannung im Stoff zur Folge

$$\gamma \cdot dl \cdot \sin \alpha,$$

so wird nur die letztere eine Schubspannung im Stoff zur Folge

Fig. 76. Verteilung der Schubspannungen beim zylindrischen Hüllenteil.

haben. Da hierbei der Wert  $\gamma \cdot dl$  konstant ist, so folgt, daß die Schubspannungsverteilung dem Sinusgesetz folgt, d. h.:

$$\tau = \tau_{\max} \cdot \sin \alpha.$$

Die auf das Längenelement entfallende Schubkraft ergibt sich zu:

$$\tau \cdot ds.$$

Hiervon nimmt wiederum nur eine Komponente:

$$\tau \cdot ds \cdot \sin \alpha = \tau_{\max} \cdot \sin^2 \alpha \cdot ds$$

an der Aufnahme des Gesamtschubes V teil; d. h. wir erhalten die Beziehung:

$$V = \tau_{\max} \int \sin^2 \alpha \cdot ds = \tau_{\max} \int \sin \alpha \cdot dy.$$

Nun ist:

$$\sin \alpha = \frac{x}{R},$$

so daß wir erhalten:

$$V = \frac{\tau_{\max}}{R} \cdot \int x \cdot dy.$$

Das Integral ist in der Fig. 76 dargestellt durch die Kreisfläche:  $\pi \cdot R^2$ , so daß sich ergibt:

$$V = \tau_{\max} \cdot \pi \cdot R,$$

oder wie oben:

$$\tau_{\max} = \frac{V}{\pi \cdot R}.$$

Die Übereinstimmung der beiden vorangegangenen Berechnungen besteht nur beim Kreisquerschnitt. Sie ist in gewissem Sinne eine Bestätigung der an dem Modell (Seite 63) hinsichtlich der Navierschen Hypothese angestellten Beobachtungen. Sie besagt nichts anderes, als daß diejenige Querschnittsverzerrung,

die bei gebogenen Stäben durch die Schubspannungen hervorgerufen wird, beim Kreisquerschnitt (besser gesagt: Kreisringquerschnitt) unterbleibt.

Die in Fig. 76 für zylindrische Hüllen durchgeführte Betrachtung gilt auch dann noch, wenn der Querschnitt m-m einem konischen Teil der Hülle angehört. Denn wenn wiederum jeder beliebige Punkt P (Fig. 77) sich um das Stück  $\gamma \cdot dl$  verschiebt, so wird auch

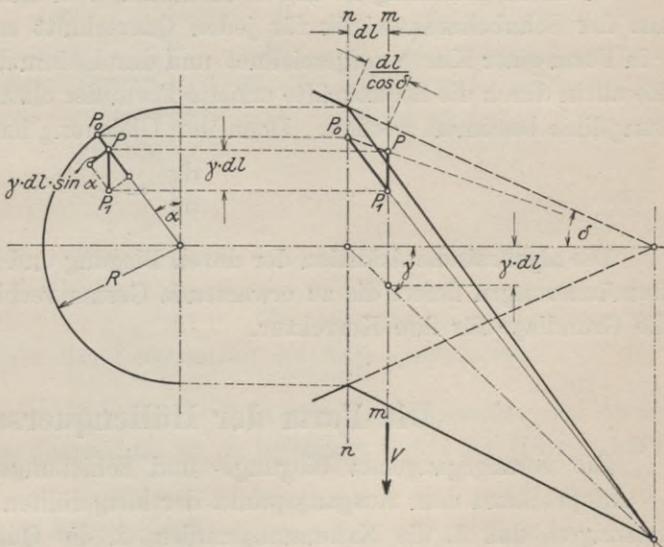


Fig. 77. Verteilung der Schubspannungen beim konischen Hüllenstück.

die tangentielle Komponente dieses Schubes wiederum die Größe  $\gamma \cdot dl \cdot \sin \alpha$  haben, d. h. die Verteilung der Schubspannungen wird die gleiche sein wie beim Zylinder. Da auch der zur Verfügung stehende Umfang die gleiche Größe hat ( $2 \pi R$ ), so folgt, daß auch die absoluten Einzelwerte von  $\tau$  mit denen an der zylindrischen Hülle identisch sind.

Der einzige Unterschied gegenüber dem Zylinder liegt darin, daß der Länge  $dl$  der Achse nicht mehr die gleiche, sondern eine etwas größere Stofflänge  $\frac{dl}{\cos \delta}$  entspricht, der zufolge die gleiche Schubspannung eine um den Faktor

$\frac{1}{\cos \delta}$  höhere Verschiebung des Querschnitts hervorruft. Jedoch ist dieser Einfluß wie schon bei der Berechnung der Normalspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  (Seite 62) wegen seiner geringen Größe unbedenklich zu vernachlässigen.

### Die Form der Schiebungslinie.

Die Schiebung der Hüllennachse ergibt sich aus der maximalen Schubspannung entsprechend der Beziehung:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

allgemein zu:

$$\gamma = \frac{V}{G} \cdot \frac{S}{2J} \dots \dots \dots \quad (\text{Gl. 10})$$

und für den Fall des Kreisquerschnittes zu:

$$\gamma = \frac{V}{G \cdot \pi R}$$

In dieser Gleichung ist der Schubmodul  $G$  in anloger Weise wie  $E$  (Seite 68) aus der Schubcharakteristik für jeden Querschnitt zu entnehmen. Damit kann  $\gamma$  in Form einer Kurve aufgezeichnet und durch einmalige Integration dieser Kurve die allein durch die Schubkräfte erzielte Form der elastischen Linie, d. h. die Schiebungslinie bestimmt werden. Denn ihre Gleichung hat die einfache Form:

$$\frac{dy}{dx} = \gamma.$$

Die algebraische Addition der durch Biegung und Schiebung erzeugten Einzelformänderungen liefert die zu erwartende Gesamtverbiegung der Hülle und damit die Grundlage für ihre Korrektur.

### Die Form der Hüllenquerschnitte.

Die vorangegangenen Biegungs- und Schiebungsrechnungen gründeten sich — entsprechend dem Ausgangspunkt der luftgefüllten Hülle — auf die 2 Voraussetzungen, daß 1. die Krümmungsradien, 2. die Querspannungen innerhalb des einzelnen Querschnittes konstant seien. Die erstere ergab eine Reihe von Rechnungsvereinfachungen, die zweite gestattete es, einen über den Umfang konstanten Elastizitäts- und Schubmodul anzunehmen.

In Wirklichkeit sind beide Voraussetzungen nur unvollkommen erfüllt. Zwar gibt es Querschnitte, in denen die erste, und solche, in denen die zweite, jedoch keinen einzigen, in dem beide zugleich erfüllt sind.

Der Grund für die Abweichungen von der Gleichförmigkeit der Radien und Spannungen liegt in der von unten nach oben erfolgenden Zunahme des Wanddruckes und in der einschnürenden Wirkung der Lastaufhängung; beide bewirken, daß die Querschnitte von der Kreisform in ein Oval übergehen, dessen größere Achse in der Regel senkrecht liegt.

Der Einfluß auf die Formänderung der elastischen Linie der Hülle ist indirekt, insofern als der ovale Querschnitt eine andere, in der Regel größere Widerstandsfähigkeit gegen Biegung und Schiebung besitzt als der kreisförmige.

### Die den Querschnitt beeinflussenden Kräfte.

In der „Deutschen Zeitschrift für Luftschiffahrt“ (1912, Seite 322) hat Prof. M. Weber, Hannover, unter Hinweis auf Ritter, Ingenieurmechanik, Hannover 1876, die Form der Querschnitte untersucht. Seine Betrachtungen beschränken sich auf den Spezialfall, daß an jedem Querschnitt Auftrieb und Schwerkraft einander gleich sind, so daß weder Schubspannungen noch Biegungsspannungen entstehen. Diese Annahme trifft nur für wenige Querschnitte der Hülle zu.

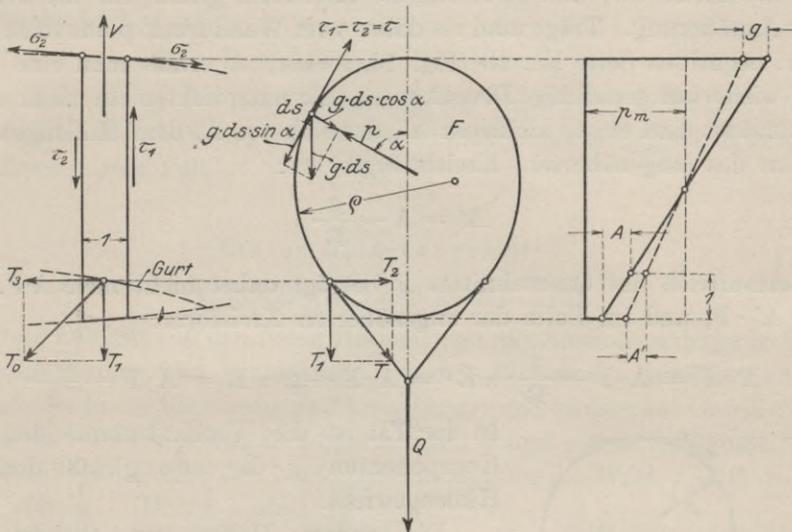


Fig. 78. Allgemeiner Belastungszustand des Hüllenquerschnitts.

Vielmehr ist der allgemeine Belastungsfall in Fig. 78 dargestellt: An einem Stoffring von der Breite  $1$ , herausgeschnitten an beliebiger Stelle der Hülle, wirken folgende „äußeren“ Kräfte:

1. Der Innendruck  $p$  in  $\text{kg}/\text{m}^2$ .
2. Das Eigengewicht des Stoffes  $g$  in  $\text{kg}/\text{m}^2$ .
3. Die Takelungskräfte  $T_0$  mit ihren 3 Komponenten  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_3$ .
4. Die Längsspannungen  $\sigma_2$ .
5. Die Schubspannungen  $\tau_1$  und  $\tau_2$ .

Von diesen Kräften interessieren uns nur diejenigen, welche die Querspannungen und die Querschnittsform direkt beeinflussen. Wir scheiden also zunächst die axialen Komponenten  $T_3$  der Takelungskräfte aus und bezeichnen im folgenden die Resultierenden aus  $T_1$  und  $T_2$  mit  $T$ . (Die am Querschnitt angreifende Last  $Q = 2 T_1$ .) Ebenso vernachlässigen wir die Längsspannungen  $\sigma_2$ , da sie für zylindrische und kegelförmige Querschnitte gar keinen, für doppelt gewölbte nur einen sehr geringen Einfluß haben (siehe Seite 62). Ferner setzen wir an Stelle der einander

entgegengesetzt gerichteten, in der Regel ungleichen Schubspannungen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  unter Vernachlässigung ihres Momentes ihre Differenz  $\tau_1 - \tau_2$  und nennen diese der Einfachheit halber die Schubspannung  $\tau$  des Ringes, ihre Gesamtwirkung in vertikaler Richtung die Schubkraft  $V$  des Ringes. Wir gebrauchen also für den endlichen Zuwachs die Bezeichnung des Gesamtwertes.

Endlich können wir mit dem Eigengewicht der Hülle  $G_H$ , das in der Praxis etwa 10 bis 20 % des Auftriebes  $A \cdot F$  ausmacht, eine Vereinfachung vornehmen:

Die Schwerkraft  $g$  pro Flächeneinheit zerfällt an jeder Stelle des Querschnittes in eine radiale Komponente  $g \cdot \cos \alpha$  und eine tangentielle  $g \cdot \sin \alpha$ . Erstere ist in der unteren Querschnittshälfte dem Wanddruck  $p$  gleich-, in der oberen entgegengerichtet. Ihre Größe stellt, entsprechend dem Faktor  $\cos \alpha$ , eine lineare Funktion der Höhe dar, und zwar für die Kreisform genau, für die ovale Form in starker Annäherung. Trägt man sie daher vom Wanddruck  $p$  aus nach der positiven bzw. negativen Seite hin ab (Fig. 78, rechts), so erhält man eine neue (gestrichelte) wiederum geradlinige Druckkurve. Sie entspricht nicht mehr dem Auftrieb  $A$ , sondern dem etwas kleineren  $A'$ , der sich aus  $A$ , dem Hüllengewicht und dem Radius des (angenäherten) Kreises ergibt zu:

$$A' = A - \frac{g}{R}$$

Der Gesamtauftrieb des Querschnittes  $F$  beträgt daher nicht mehr  $A \cdot F$ , sondern nur noch  $A' \cdot F$ , und im Falle der angenäherten Kreisform:

$$A' \cdot F = A \cdot F - \frac{g}{R} \cdot \pi R^2 = A \cdot F - g \cdot \pi R = A \cdot F - \frac{G_H}{2}$$

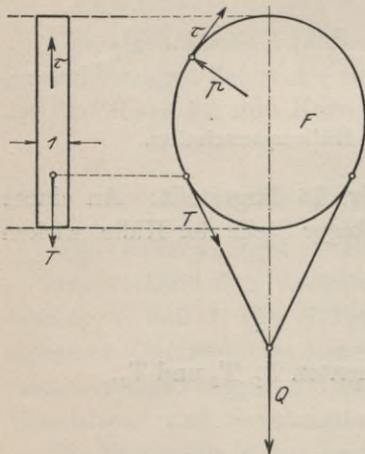


Fig. 79. Belastungszustand des Querschnitts; vereinfachende Annahme.

In der Tat ist die Vertikalsumme der radialen Komponenten  $g \cdot ds \cdot \cos \alpha$  gleich dem halben Hüllengewicht.

Die andere Hälfte von  $G_H$  ist in den tangentialen Komponenten vereinigt. Diese folgen dem Sinusgesetz und verteilen sich damit über den Querschnitt in gleichem Verhältnis wie die Schubspannungen  $\tau$  mit ihrer Vertikalsumme  $V$ . Sie können also mit den Schubspannungen  $\tau$  zu einer Größe  $\tau'$  zusammengefaßt werden, deren Vertikalsumme nicht mehr  $V$  ist, sondern:

$$V' = V - \frac{G_H}{2},$$

wobei das positive Vorzeichen von  $V$  entsprechend der Auftriebsgröße  $A \cdot F$  für die aufwärts gerichtete Schubkraft gilt.

Die Berücksichtigung des Hüllengewichtes bezüglich der Querschnittsform erfolgt also dadurch, daß man seine eine Hälfte vom Auftrieb, seine andere von der Schubkraft in Abzug bringt. Aus der Gleichung:

$$Q + G_H = A \cdot F + V$$



Nun ist:

$$ds = \frac{dy}{\sin \alpha},$$

d. h.:

$$\int \tau \cdot ds = \int A R \cdot dy.$$

Damit ergibt sich:

$$\sigma = \sigma_m \pm \int A R \cdot dy = \sigma_m \pm A \cdot R \cdot y,$$

d. h. die Querspannungen steigen von unten nach oben linear an. Für die Grenzwerte ergibt sich:

$$\sigma_o = \sigma_m + AR^2$$

und:

$$\sigma_u = \sigma_m - AR^2,$$

damit:

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_o + \sigma_u).$$

Nun gilt in der Horizontalen die Gleichgewichtsbedingung:

$$\sigma_o + \sigma_u = 2 R \cdot p_m.$$

Also:

$$\sigma_m = p_m \cdot R.$$

Hieraus folgt:

$$\sigma = p_m \cdot R \pm A R y = R (p_m \pm A y).$$

Nun ergibt sich der gesuchte Krümmungsradius als Quotient aus Spannung und Druck (Gleichung 7 Seite 60), mithin:

$$\rho = \frac{\sigma}{p} = \frac{R \cdot (p_m \pm A y)}{p_m \pm A y} = R,$$

d. h. in Übereinstimmung mit unserer Annahme bleiben alle freien Hüllenquerschnitte kreisförmig.

### Zweiter Belastungsfall:

#### Last gleich Auftrieb.

Hier gilt die von Prof. Weber angeführte Rittersche Ableitung, wonach die Querspannungen über den Umfang konstant sind. Der Vollständigkeit halber sei das Wesentliche dieser Ableitung in der Anwendung auf die Ballonhülle hier eingefügt.

#### Die Gleichungen für Querspannung und Krümmungsradius.

In Fig. 81 ist der zu untersuchende Querschnitt in ein Koordinatensystem eingetragen, in dessen X-Achse der Gasdruck  $p = 0$  ist. Die Querspannung  $\sigma$  in dem beliebigen Punkte P kann zerlegt werden in die beiden Komponenten V und H. Ihre Größen ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen an dem ausgeschnittenen Stoffstück O P wie folgt:

$$V = \int_0^P p \cdot dx = A \cdot \int y dx$$

und:

$$H = \sigma_0 - (y_0 - y) \frac{A y_0 + A y}{2} = \sigma_0 - \frac{A}{2} \cdot (y_0^2 - y^2).$$

Das Verhältnis von V zu H ist die Richtungstangente der Querschnittskurve, und zwar, da mit zunehmendem x die Höhe y abnimmt, mit negativem Vorzeichen:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = -\frac{V}{H},$$

woraus sich ergibt:

$$\left[ \sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2) \right] \cdot \frac{dy}{dx} = -A \cdot \int y \, dx.$$

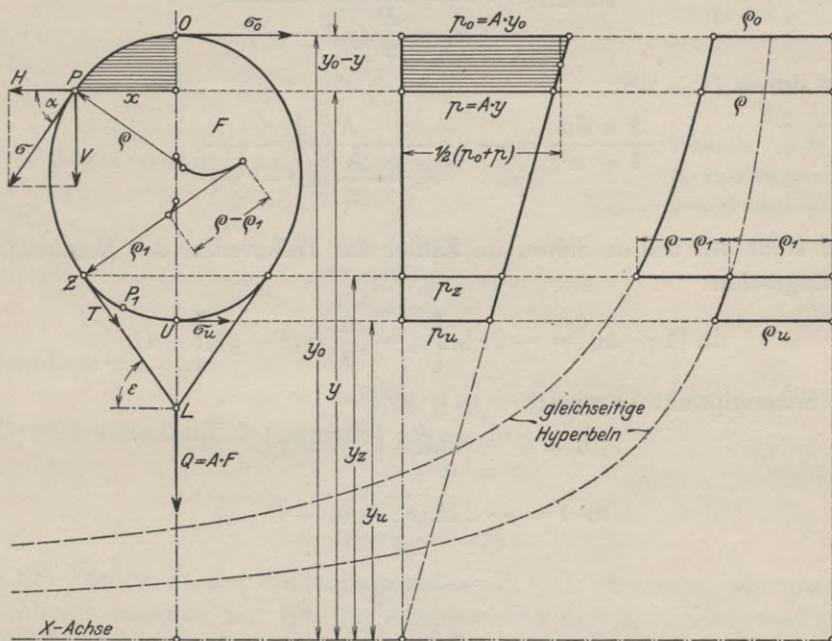


Fig. 81. Ermittlung der Querschnittsform bei Gleichgewicht zwischen Last und Auftrieb.

Die mathematische Weiterentwicklung dieser Gleichung hat den Zweck, einen Ausdruck für den Krümmungsradius  $\rho$  zu finden, und geht nach Ritter folgenden Weg:

Differenziere beide Seiten:

$$\left[ \sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2) \right] \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} \left[ 0 - \frac{A}{2} (0 - 2y \, dy) \right] = -A \cdot y \, dx$$

oder:

$$\left[ \sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2) \right] \frac{d^2 y}{dx^2} + A \cdot y \cdot \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = -A \cdot y,$$

woraus:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-A \cdot y \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}{\sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2)} \dots \dots \dots \text{(Gl. 11)}$$

Durch Einsetzung von:

$$\frac{dy}{dx} = u$$

geht die Gleichung über in:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-A y (1 + u^2)}{\sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2)}$$

Multipliziere links mit  $2 u dx$ , rechts mit  $2 dy$ , was gemäß der Einsetzung dasselbe ist:

$$2 u du = \frac{-2 A \cdot y \cdot dy (1 + u^2)}{\sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2)}$$

Dividiere durch  $(1 + u^2)$ :

$$\frac{2 u du}{1 + u^2} = -2 \cdot \frac{A y dy}{\sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2)}$$

Nunmehr steht auf beiden Seiten im Zähler das Differential des Nenners; mithin durch Integration:

$$\ln(1 + u^2) = -2 \cdot \ln \left[ \sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2) \right] + C.$$

Für den Scheitelpunkt O wird:

$$u = 0 \quad \text{und:} \quad y = y_0,$$

mithin:

$$\ln 1 = -2 \ln (\sigma_0 - 0) + C,$$

oder:

$$C = 2 \ln \sigma_0.$$

Also:

$$\ln(1 + u^2) = -2 \ln \left[ \sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2) \right] + 2 \ln \sigma_0,$$

woraus:

$$1 + u^2 = \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2)} \right]^2$$

oder:

$$\sigma_0 - \frac{A}{2} (y_0^2 - y^2) = \frac{\sigma_0}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Die Einsetzung dieser Werte in Gleichung 11 (Seite 77) liefert:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-A y \cdot (1 + u^2) \sqrt{1 + u^2}}{\sigma_0}$$

Gemäß der trigonometrischen Beziehung:

$$\sqrt{1 + u^2} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

erhalten wir:

$$\sigma_0 = \frac{-A \cdot y}{\cos^3 \alpha \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Nun besteht allgemein folgende Beziehung zwischen dem Krümmungsradius  $\rho$  einer Kurve und dem zugehörigen Winkel gemäß Fig. 82:

$$\rho \cdot d\alpha = ds = \frac{dx}{\cos \alpha}$$

Ferner ist:

$$d \operatorname{tg} \alpha = \frac{dx}{\cos^2 \alpha}$$

mithin:

$$d\alpha = d \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Damit:

$$\rho \cdot d \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \rho \cdot \frac{d^2 y}{dx} \cdot \cos^2 \alpha = \frac{dx}{\cos \alpha}$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{\cos^3 \alpha \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}} = \rho$$

Somit erhalten wir oben:

$$\sigma_0 = -A \cdot y \cdot \rho = -p \cdot \rho$$

Nun gilt nach Gleichung 7 (Seite 60) allgemein:

$$\sigma = p \cdot \rho,$$

d. h.:

$$\sigma = -\sigma_0 = \text{const.}$$

Für die Punkte  $P_1$  des Hüllenbauches ergibt sich sinngemäß die gleiche Ableitung. Damit erhalten wir für die Absolutwerte des Krümmungsradius unter Vernachlässigung des negativen Vorzeichens:

$$\rho = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sigma}{A \cdot y} = \frac{C}{y},$$

d. h. die Krümmungsradien werden dargestellt durch 2 gleichseitige Hyperbeln (Fig. 81). An dem Berührungspunkte  $Z$  der Takelungskraft findet ein Sprung statt von der Größe:

$$\rho - \rho_1 = \frac{T}{p_z} = \frac{A \cdot F}{2 \sin \varepsilon \cdot A \cdot y_z} = \frac{F}{2 \sin \varepsilon \cdot y_z} \quad \dots \quad (\text{Gl. 12})$$

Rückt der Takelungsgurt immer tiefer, so wird schließlich der Grenzfall erreicht, daß die Last im untersten, d. h. nur in einem einzigen Punkt der Hülle angreift. In diesem Falle ist die Querschnittsform durch eine einzige Hyperbel charakterisiert.

Das Resultat dieses Kapitels, die Gleichförmigkeit der Querspannungen  $\sigma$ , ist durch den Gedankengang des vorigen Kapitels (Last=Null) schon angedeutet. Denn dort wurde der Zuwachs von  $\sigma$  auf das Vorhandensein der Schubspannungen  $\tau$

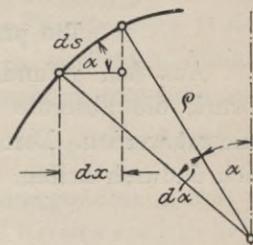


Fig. 82.  
Beziehung zwischen dem Krümmungsradius und dem Winkel einer Kurve.

zurückgeführt. Diese Schubspannungen sind nun beim vorliegenden zweiten Belastungsfall gleich Null: an jedem Stoffelement tritt im Gleichgewicht mit den Querspannungen nur der Innendruck, d. h. eine Kraft senkrecht zum Stoffelement auf. Es kann also nur die Richtung, nicht aber die Größe von  $\sigma$  eine Änderung erfahren.

### Die praktische Bestimmung der Querschnittsform.

Aus den gefundenen Beziehungen kann für einen gegebenen Umfang und Druck die absolute Größe der Krümmungsradien noch nicht unmittelbar bestimmt werden. Denn der Wert der Konstante  $C$  ist unbekannt. Jedoch kann man sich dadurch helfen, daß man zunächst mit Hilfe der Hyperbelbeziehung:

$$\rho \cdot y = C$$

unter Annahme beliebiger Größen von  $C$  eine Schar von Querschnitten aufzeichnet und aus diesen rückwärts die zugehörigen Umfänge und Drucke berechnet. Stellt man die so ermittelten Resultate in Form von Kurven zusammen, so kann man für die Zwecke der praktischen Rechnung aus diesen Kurven die gesuchte Querschnittsform durch Interpolation bestimmen.

Fig. 83 zeigt diese Methode: Sie beginnt mit dem Grenzfall, daß die Last im untersten Punkt angreift. Zu einem und demselben Werte von  $\rho_0 = 1$  sind mit Hilfe der beliebig angenommenen Größe  $y_0$  (6,25 und 3,71) verschiedene gleichseitige Hyperbeln bestimmt und daraus durch stückweises Kreiseschlagen im Annäherungsverfahren die zugehörigen Querschnittsformen entwickelt. (In Wirklichkeit wurde die Untersuchung mit 4 Querschnitten durchgeführt.) Hierbei ist zur zeichnerischen Kontrolle, insbesondere für den untersten Punkt der Querschnitte, der Winkel  $\alpha$  herangezogen. Er bestimmt sich algebraisch aus Fig. 81 wie folgt:

$$\cos \alpha = \frac{H}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 - \frac{A}{2}(y_0^2 - y^2)}{\sigma_0}$$

Hierin ist:

$$\sigma_0 = A \cdot y_0 \cdot \rho_0$$

Mithin:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{y_0^2 - y^2}{2 y_0 \rho_0}$$

Ist  $\alpha$  von der Horizontalen aus nach oben aufgetragen, so ändert sich sein Vorzeichen. Hiernach ist z. B. für den tiefsten Punkt des in Fig. 83 links unten gezeichneten Querschnitts:

$$\cos \alpha_u = \frac{3,71^2 - 0,716^2}{2 \cdot 3,71} - 1 = 0,782.$$

Auf diese Weise erhält man eine Schar von Querschnitten, die zunächst bei ein und derselben Krümmung an der Oberkante verschiedenen Innendrucke entsprechen. Da jedoch alle gleichseitigen Hyperbeln untereinander ähnlich sind, so umspannt die Querschnittsschar alle Möglichkeiten überhaupt. Denn alle Figuren,

bei denen das Verhältnis  $\frac{y_u}{y_0}$  oder, was dasselbe bedeutet,  $\frac{p_u}{p_0}$  das gleiche ist, sind untereinander ähnlich, d. h. haben dieselbe Abweichung von der Kreisform.

Das Verhältnis von  $\frac{p_u}{p_0}$  schwankt in der Praxis etwa zwischen  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{2}{3}$ .

Die Abweichung von der Kreisform wird praktisch genügend genau bestimmt durch das Verhältnis der Höhe H und der Breite B zu dem Durchmesser D des Kreises von gleichem Umfang sowie durch den Winkel  $\alpha_u$  im untersten Punkt. Diese drei Werte wurden nun aus den vier untersuchten Querschnitten abgemessen und als Funktion des Druckverhältnisses  $\frac{p_u}{p_0}$  zeichnerisch aufgetragen (Fig. 84 oben).

Der Vollständigkeit halber ist noch das Verhältnis der Krümmungsradien  $\rho_0$  und  $\rho_u$  sowie der Höhe des Rückens  $y_0 - y_m$  zu dem Durchmesser des Kreises von gleichem Umfang eingezeichnet.

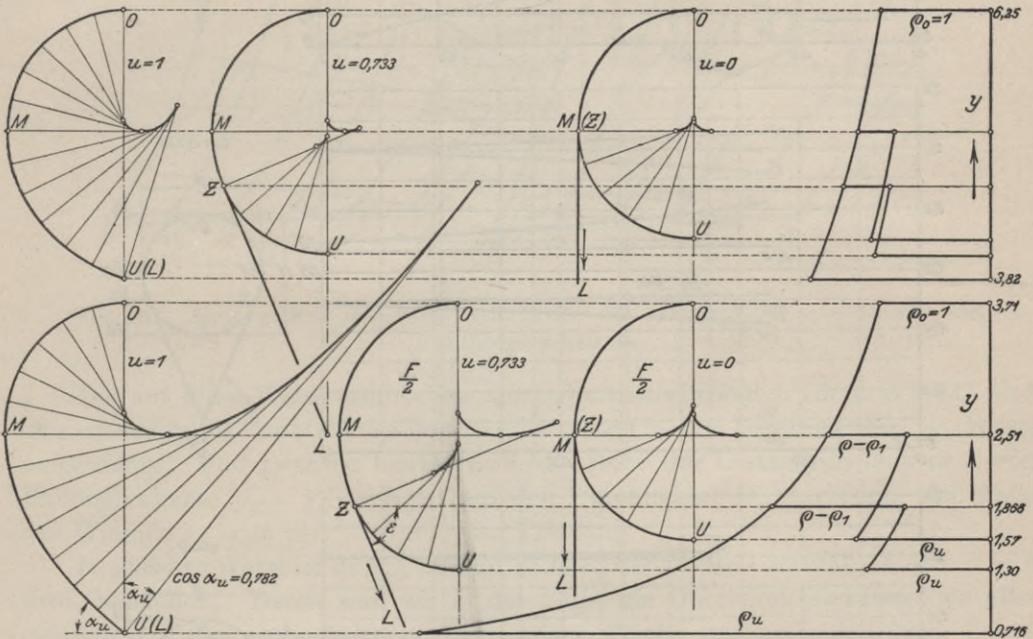


Fig. 83. Zeichnerische Bestimmung der Querschnittsformen.

Die Wahl der Abszisse als Druckverhältnis ermöglicht in der Praxis ein schnelles Auffinden der gesuchten Querschnittskoeffizienten, da durch den projizierten Durchmesser und den gewählten Fahrdruck  $p_m$  dies Druckverhältnis ohne weiteres gegeben ist.

Die Querschnittsform für seitlichen Lastangriff kann aus dem bisher ermittelten Grenzfall abgeleitet werden. Jeder Takelung entspricht ein bestimmtes „Takelungsverhältnis“  $u$ , welches in Fig. 81 durch die beiden abgewickelten Längen  $OZU$  und  $OZL$  gegeben ist. Greift die Last  $Q$  im untersten Querschnittspunkt an, so ist  $u = 1$ . Greift sie im entgegengesetzten Grenzfall in den Punkten der größten Querschnittsbreite derart an, daß beide Hälften der Takelung sich erst

im Unendlichen schneiden, so ist  $u = 0$ . Zwischen beiden Werten liegen alle Ausführungsmöglichkeiten.

In Fig. 83 sind für das beliebig gewählte Umfangsverhältnis 0,733 die Querschnittsformen aus denen des Grenzfalles ( $u = 1$ ) entwickelt: Zunächst bleibt die

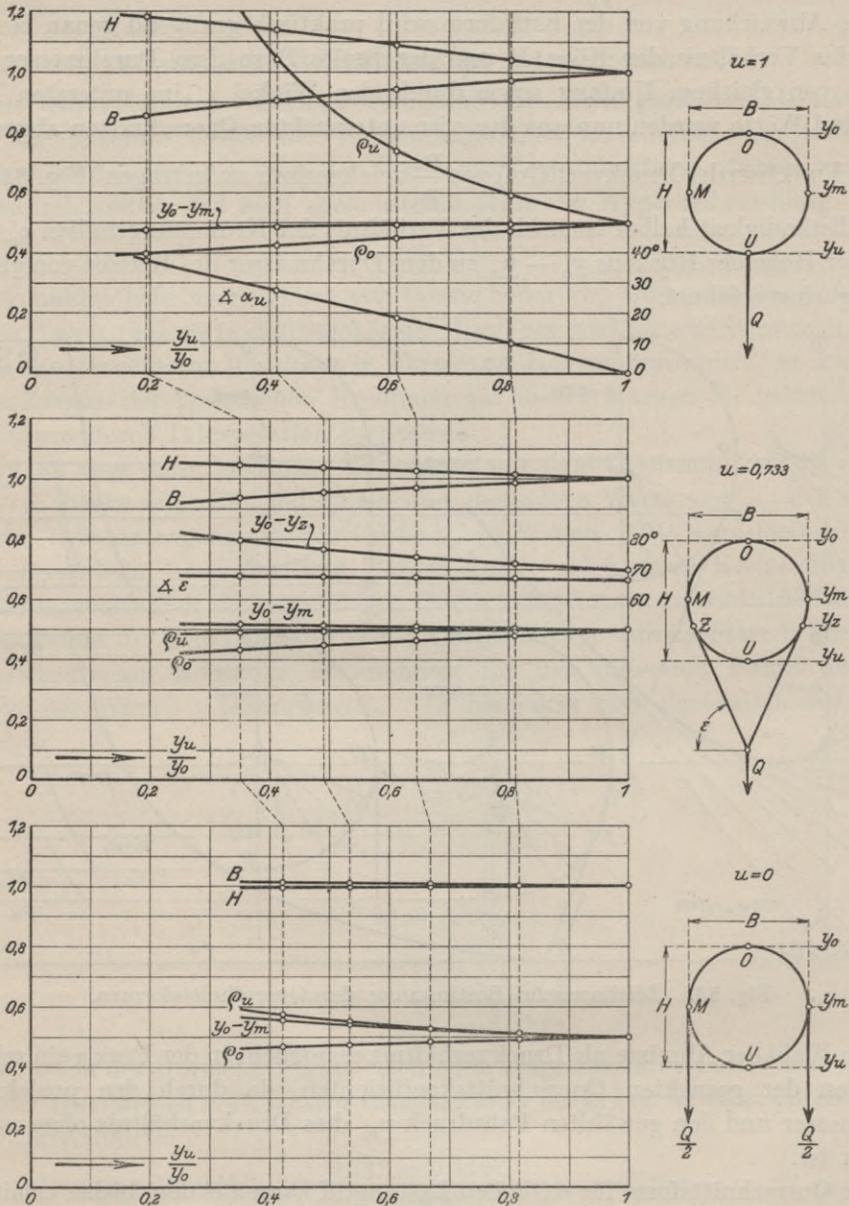


Fig. 84. Abhängigkeit der Querschnittskoeffizienten vom Druck- und Takelungsverhältnis.

Form des Rückens bis zum Angriffspunkt der Takelung  $Z$  unverändert, da sie der gleichen Hyperbel (z. B. in der unteren Reihe:  $\rho_0 = 1$ ,  $y_0 = 3,71$ ) entspricht. Sodann ist die Lage der Punkte  $Z$ ,  $U$  und  $L$  schätzungsweise angenommen. Die

Kontrolle dieser Schätzung ergibt sich folgendermaßen: Planimetriert man den Inhalt  $\frac{F}{2}$  der oberhalb Z gegebenen, unterhalb Z angenommenen Halbfigur, bestimmt man ferner den Sinus des mitangenommenen Winkels  $\varepsilon$  sowie die zugehörige Höhe  $y_z$  (1, 866), so kann man aus diesen drei Größen nach Gleichung 12 (Seite 79) die Radiendifferenz  $\rho - \rho_1$ , um die die zweite gleichseitige Hyperbel gegen die erste zurücksteht, berechnen. Mit Hilfe dieser zweiten Hyperbel ermittelt man nun wiederum durch stückweises Kreiseschlagen die Bauchkurve und sieht zu, ob sie mit der angenommenen übereinstimmt. (In der Regel bringt die zweite Korrektur schon volle Übereinstimmung.)

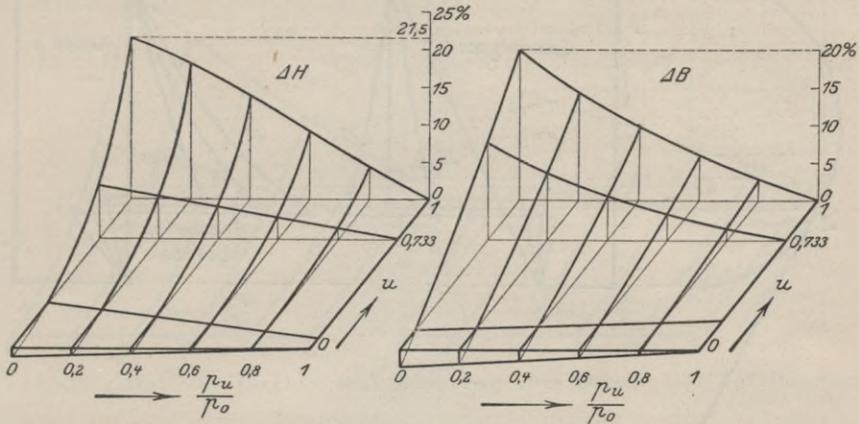


Fig. 85. Abhängigkeit der Höhe und Breite des Querschnitts vom Druck- und Takelungsverhältnis.

Die auf diese Weise ermittelten Querschnittskoeffizienten für  $u = 0,733$  sind nun wiederum als Funktion des Druckverhältnisses in dem Diagramm Fig. 84 (Mitte) aufgetragen. Und zwar ist hierbei noch die Höhe des Lastangriffspunktes Z von Ballonoberkante  $y_0 - y_z$ , bezogen auf den Durchmesser D, eingefügt. An Stelle des Winkels  $\alpha_u$  tritt der Winkel  $\varepsilon$  der Takelung.

In gleicher Weise ist in Fig. 83 und 84 noch der zweite Grenzfall, in dem  $u = 0$  wird, behandelt. Damit sind wir in der Lage, die Querschnittskoeffizienten aller möglichen Takelungsverhältnisse in je einer Fläche unterzubringen und damit einen sehr einfachen Überblick über das Verhalten der Querschnitte zu gewinnen. So sind beispielsweise die Abweichungen der Höhe und Breite gegenüber dem kreisförmigen Querschnitt in ihrer Abhängigkeit vom Druck- und Takelungsverhältnis in Fig. 85 in Form je einer Fläche dargestellt. Man übersieht sofort, daß die Kreisform umso mehr erhalten bleibt, je größer die Drucke sind, und je höher die Takelung angreift.

### Dritter Belastungsfall:

#### Last größer oder kleiner als Auftrieb.

Belastungsfall III ist der allgemeinste. Sein Verhältnis zu den beiden anderen I und II ist in dem Spannungs- und Krümmungsschema der Fig. 86 charakter-

sirt. Die Spannung steigt für Fall I von unten nach oben dem Druck proportional linear an, da die Radien konstant sind. Im Fall II sind die Spannungen im Rücken und Bauch konstant, während die Größe der Radien durch die beiden gleichseitigen Hyperbeln bestimmt ist. Ist im Falle III die Last  $Q < A \cdot F$  (III<sub>a</sub>), so liegt das Maximum und Minimum der Spannung in der Ober- und Unterkante, ist dagegen  $Q > A \cdot F$  (III<sub>b</sub>), so rücken beide an die Stelle Z des Gurtes. Im übrigen ist der Verlauf der Spannungen nicht mehr geradlinig, ebenso wenig wie die Kurve der Krümmungsradien, die einmal zwischen Fall I und II, das andere Mal jenseits Fall II liegen, der gleichseitigen Hyperbel entspricht.

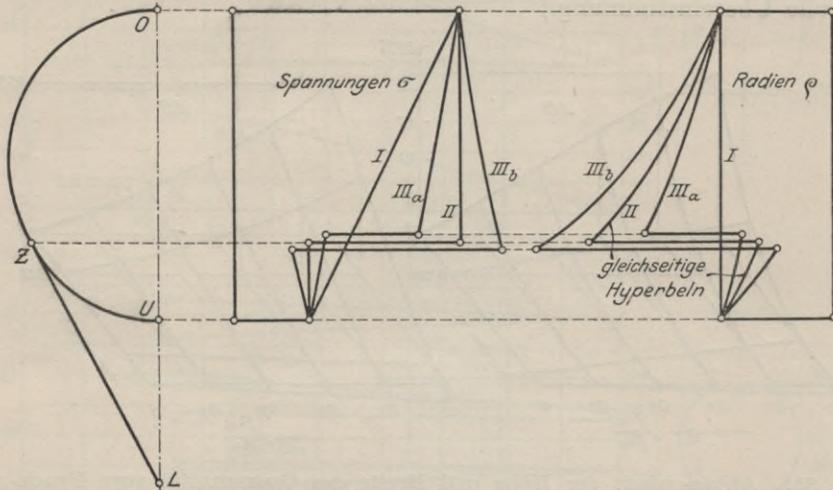


Fig. 86. Schema der Spannungen und Krümmungsradien für verschiedene Belastungsverhältnisse.

Wir sehen schon daraus, daß Fall III einer einfachen Berechnung unzugänglich ist. Am schnellsten kommt man noch zum Ziele, wenn man in Anlehnung an die für Fall II gefundenen Resultate eine Querschnittsform und die zugehörige Kurve der Krümmungsradien, von der wenigstens ein hyperbelähnlicher Verlauf zu erwarten ist, annimmt. Fügt man zu dieser ersten Annahme noch die einer bestimmten Verteilung der Schubspannungen (Seite 69), für deren Größe die Differenz  $Q - A \cdot F$  maßgebend ist, hinzu, so kann man mit Hilfe dieser und des angenommenen Innendruckes die Spannungen  $\sigma$  an jeder Stelle des Querschnittes bestimmen und aus diesen wiederum mit Hilfe des Innendruckes die Radien  $\rho$  rückwärts errechnen. Der Vergleich mit den angenommenen Radien ergibt die Genauigkeit der Annahme und die Richtschnur für eine Wiederholung des Verfahrens in zweiter Annäherung.

Dieser sehr umständliche Weg lohnt aber nicht der Mühe und kann, wie wir im folgenden Abschnitt sehen werden, durch Interpolation umgangen werden.

### Der Einfluß der Querschnittsform auf die Größe der Biegung und Schiebung.

Der Zweck unserer Querschnittsuntersuchung ist die Korrektur der Biegungs- und Schiebungsrechnungen.

Der Einfluß auf die Biegung ist gegeben durch die Veränderung des Trägheitsmomentes  $J$ , gemäß der Beziehung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_b}{E \cdot J} \quad \dots \quad (\text{Gl. 8, Seite 68})$$

der Einfluß auf die Schiebung durch die Veränderung der Größe  $\frac{J}{S}$  in der Gleichung:

$$\gamma = \frac{V}{G} \cdot \frac{S}{2J} \quad \dots \quad (\text{Gl. 10, Seite 72})$$

worin S das statische Moment der einen Querschnittshälfte bezogen auf die Schwerachse bedeutet.

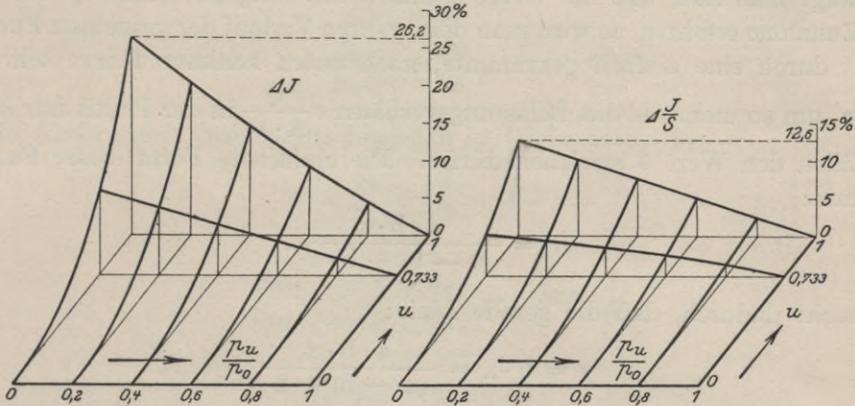


Fig. 87. Abhängigkeit der Biegung und Schiebung vom Druck- und Takelungsverhältnis

Nun lassen sich die beiden Werte J und S ebenso wie z. B. die Breite und Höhe (B, H) aus unseren Querschnittsformen (Fig. 83) zeichnerisch bestimmen und in Raumkoordinaten auftragen. Dies ist in Fig. 87 geschehen. Die beiden Flächen zeigen die Änderung von J und  $\frac{J}{S}$  in Prozent der für den kreisrunden Querschnitt geltenden Werte und geben damit einen guten Überblick über den Einfluß der Querschnittsform auf Biegung und Schiebung.

**Die praktische Anwendung bei der Biegungs- und Schiebungs-Rechnung.**

Bei der Vorausberechnung der Formänderung einer zu entwerfenden Hülle kommt in der Regel nur ein einziges, durch den Abstand der Gondel von der Hülle gegebenes Takelungsverhältnis u in Betracht. Man braucht also von den beiden Flächen der Fig. 87 nur je eine Kurve. Dagegen ist es erwünscht, innerhalb des einen Takelungsverhältnisses außer dem Einfluß des Druckverhältnisses  $\frac{p_u}{p_o}$  auch den des „Belastungsverhältnisses“  $\frac{Q}{A \cdot F}$  zu kennen. Für den letzteren haben wir zunächst folgende beiden Anhaltspunkte:

1. Ist  $\frac{Q}{A \cdot F} = 0$  (Belastungsfall I), so ist  $\Delta J$  und  $\Delta \frac{J}{S} = 0$ .
2. Ist  $\frac{Q}{A \cdot F} = 1$  (Belastungsfall II), so ist  $\Delta J$  und  $\Delta \frac{J}{S}$  durch Fig. 87 gegeben.

Zu diesen beiden Anhaltspunkten kommt nun noch als dritter hinzu, daß bei unendlich großer Last der Querschnitt sich zu einer vertikalen Linie von der Länge  $\pi \cdot R$  zusammenzieht, dessen  $J$  und  $\frac{J}{S}$  ganz bestimmte, asymptotisch erreichte Grenzwerte haben. Wollen wir also die Abweichungen  $\Delta J$  und  $\Delta \frac{J}{S}$  als Funktion des Belastungsverhältnisses auftragen, so sind für diese Funktion zwei Punkte A ( $x = 0, y = 0$ ) und B ( $x = 1, y = b$ ) sowie die Asymptote in Abstand  $a$  von der Nullachse gegeben (Fig. 88).

Erwägt man nun, daß die Werte  $J$  und  $S$  mit steigender Last  $Q$  sicher eine stetige Zunahme erfahren, so wird man dem wahren Verlauf der gesuchten Funktion  $y = f(x)$  durch eine einfach gekrümmte, nach unten konkave Kurve sehr nahe kommen, um so mehr als das Belastungsverhältnis  $\frac{Q}{A \cdot F}$  in der Praxis nur in Ausnahmefällen den Wert 3 erreichen dürfte. Die einfachste Form dieser Funktion lautet nun:

$$y = \frac{a \cdot b \cdot x}{(a - b) + b \cdot x}$$

Sie entsteht dadurch, daß die gerade Linie:

$$y = b \cdot x = \frac{a \cdot b \cdot x}{(a - b) + b}$$

durch die Einführung der wachsenden Abszisse  $x$  in das letzte Glied des Nenners stetig abgelenkt und im Unendlichen in die Asymptote:  $y = a$  übergeleitet wird.

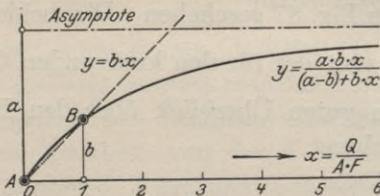


Fig. 88. Form der Interpolation der Querschnittskoeffizienten.

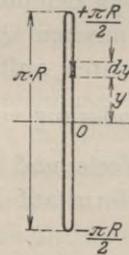


Fig. 89. Grenzform der Querschnitte für unendlich große Last.

Diese einfache Annahme ersetzt uns also die umständliche Kontrollkonstruktion für den dritten Belastungsfall (Seite 84). Die Größe der Grenzwerte bestimmt sich mit Bezug auf Fig. 89 wie folgt:

$$J_{\max} = \int_{-\frac{\pi R}{2}}^{+\frac{\pi R}{2}} 2 \cdot y^2 \cdot dy = \frac{\pi^3 \cdot R^3}{6}$$

Da das Trägheitsmoment des Kreises:

$$J_0 = \pi \cdot R^3,$$

so ist:

$$J_{\max} = \frac{\pi^2}{6} \cdot J_0 = 1,645 J_0.$$

Mithin:

$$(\Delta J)_{\max} = 64,5 \text{ \%}.$$

Es ist ferner:

$$S_{\max} = \int_0^{\frac{\pi R}{2}} 2y \, dy = \frac{\pi^2 \cdot R^2}{4}.$$

Damit ist:

$$\frac{J_{\max}}{S_{\max}} = \frac{2}{3} \pi \cdot R.$$

Für den kreisrunden Querschnitt hingegen ist (siehe Seite 72):

$$\frac{J_0}{S_0} = \frac{1}{2} \pi \cdot R.$$

Somit:

$$\frac{J_{\max}}{S_{\max}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{J_0}{S_0} = 1,333 \frac{J_0}{S_0},$$

d. h. :

$$\left( \Delta \frac{J}{S} \right)_{\max} = 33,33 \text{ \%}.$$

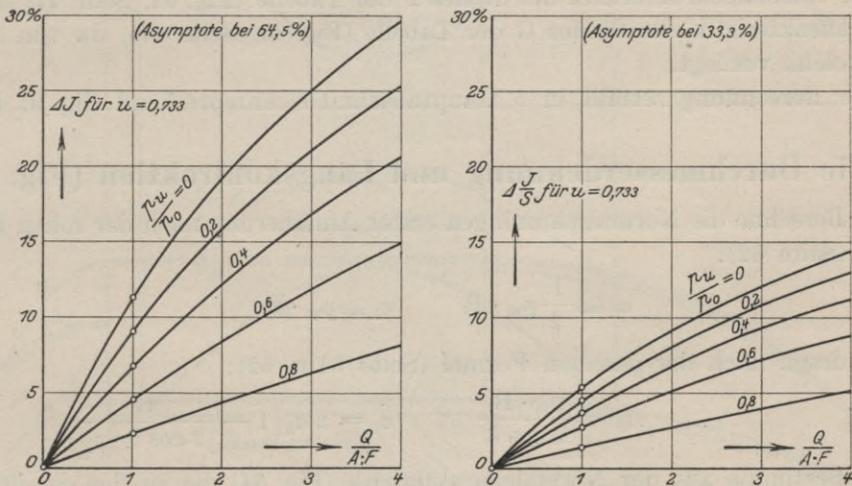


Fig. 90. Korrekturdiagramm für Biegung und Schiebung.

Mit diesen Grenzwerten sind nun aus Fig. 87 für des Umfangersverhältnis  $u = 0,733$  mit Hilfe der vorgenannten Funktion die beiden Diagramme der Fig. 90 entwickelt. Sie ergeben die anzubringenden Korrekturer für verschiedene Drucke und Belastungen und sind zum direkten Gebrauch am Konstruktionstisch geeignet.

## D. Beispiel der Formänderungsrechnung einer Hülle.

Das folgende Rechnungsbeispiel soll — unter stetem Hinweis auf die Ableitungen der vorangegangenen Kapitel — dem Konstrukteur in gedrängter Form eine Zusammenfassung der zur Vorausbestimmung der Hüllenformänderung notwendigen Einzelrechnungen, in der für die praktische Anwendung zweckmäßigsten Reihenfolge, bieten. An einzelnen Stellen soll es ihm dabei ein Urteil darüber ermöglichen, welche Vereinfachungen er sich im Vergleich zur Genauigkeit der ihm zu Gebote stehenden Versuchsunterlagen erlauben darf.

Mit Rücksicht auf diesen Zweck kann das Beispiel so einfach wie möglich gewählt werden, wofern es nur Gelegenheit zur Anwendung aller Einzelrechnungen bietet. Dementsprechend ist die Aufgabe folgendermaßen gestellt:

Gesucht die Hüllenformänderung eines Prallballons von 12 m  $\phi$  und 80 m Länge (Fig. 91), der außer Hülle und Gondel keine Lasten (Ballonets, Ruder, Fesselung usw.) enthält. Die Gondel sei in zwei geraden, 40 m langen Takelungsgurten DE (Fig. 92) so aufgehängt, daß sämtliche untereinander gleichen Takelungskräfte  $T_0$  (vgl. Fig. 78) gleichmäßig über die Gurtlänge verteilt sind und sich in den beiden Punkten A und B (Fig. 92, Querschnitt), die in der Seitenansicht im Punkt C zusammenfallen, vereinigen. Das Takelungsverhältnis sei  $u = 0,733$ ; der Auftrieb  $A = 1 \text{ kg/m}^3$ , der mittlere Druck  $p_m = 30 \text{ mm WS}$ . Das Gewicht des in Längsbahnen verarbeiteten, diagonaldoublierten Stoffes  $g = 0,5 \text{ kg/m}^2$ .

Als Versuchsunterlagen seien gegeben:

Die Normalcharakteristik des Stoffes F der Tabelle (Fig. 54, Seite 47) und die Schubcharakteristik des Stoffes G der Tabelle (Fig. 63, Seite 57), da von Stoff F keine solche vorliegt.

Die Berechnung zerfällt in 5 Hauptabschnitte, entsprechend Fig. 91 bis 95.

### I. Die Durchmesserdehnung und Längskontraktion (Fig. 91).

1. Berechne die Normalspannungen erster Annäherung nach der rohen Formel (Seite 62):

$$\sigma_2 \cong \frac{1}{2} p_m \cdot R \quad \sigma_1 \cong p_m \cdot R. \quad (a)$$

desgl. nach der genauen Formel (Seite 61 u. 62):

$$\sigma_2 = \frac{p_m \cdot R}{2 \cos \delta} \quad \sigma_1 = 2 \sigma_2 \left( 1 - \frac{R}{2 \cos \delta \cdot \rho_2} \right). \quad (b)$$

2. Bestimme aus der Normalcharakteristik (Fig. 54) die zu den Spannungen gehörige Durchmesserdehnung und Längskontraktion erster Annäherung, und zwar  $\Delta d$  aus dem Diagramm für Schuß,  $\Delta l$  für Kette. (a und b)
3. Berechne hiermit die Spannungen zweiter Annäherung (nur an b durchgeführt) nach den Formeln (Seite 62):

$$\sigma_1' = \sigma_1(1 + \Delta d)(1 - \Delta l) \quad \sigma_2' = \sigma_2(1 + \Delta d)^2 \quad (c)$$

4. Verbessere hiernach die Durchmesserdehnung und Längskontraktion; zweite Annäherung. (c)

5. Bestimme aus  $\Delta d$  und  $\Delta l$  die neue Form der luftgefüllten Hülle (gestrichelt über der alten Form eingezeichnet).

Der Unterschied zwischen den Formänderungen der ersten und zweiten Annäherung ist gering. Es wird in den meisten Fällen die erste Annäherung und innerhalb dieser die Anwendung der rohen Spannungsformeln genügen.

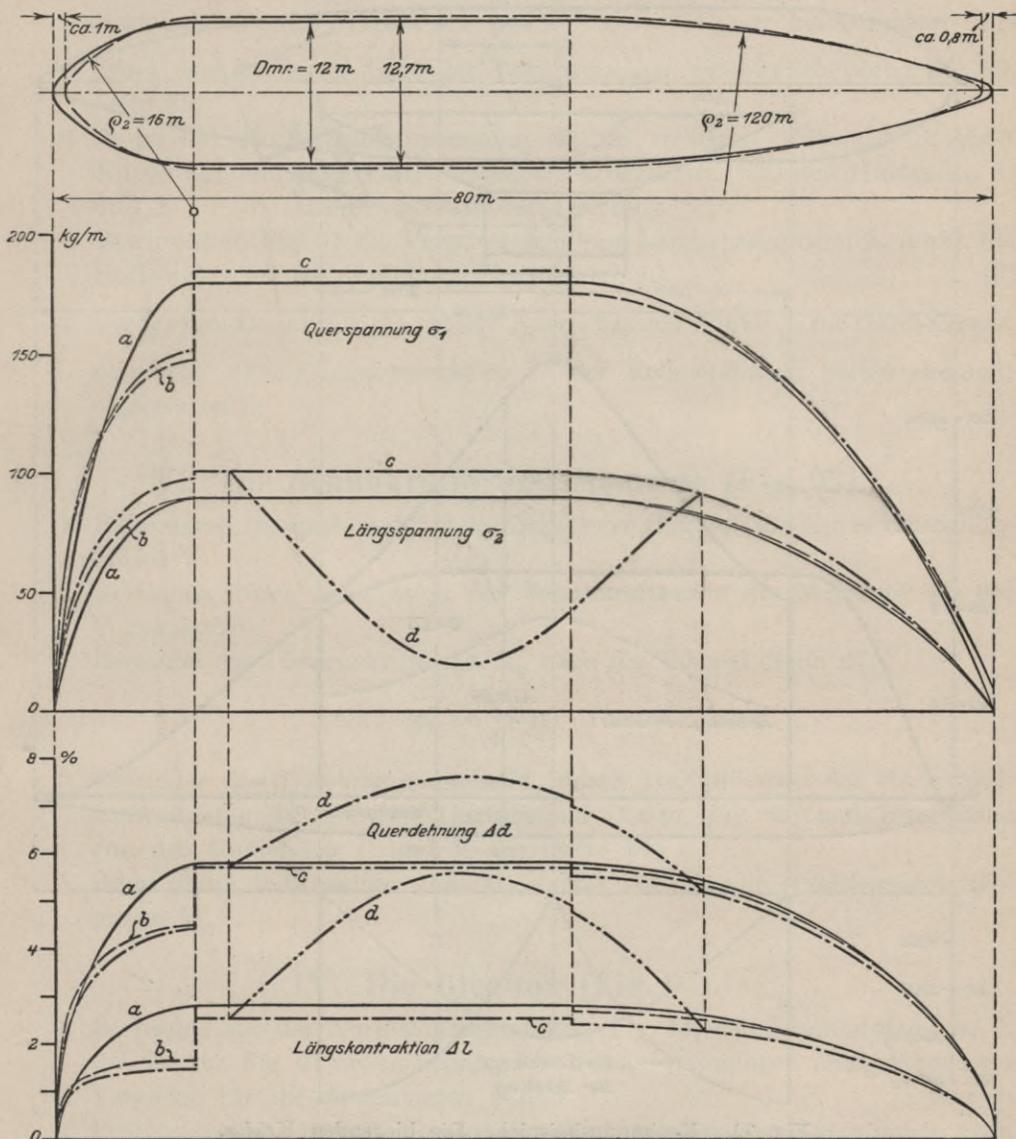


Fig. 91. Rechnungsbeispiel. Die Durchmesserdehnung und Längskontraktion.

Die genaue Formel für die Querspannung ergibt bei den un stetigen Übergängen von  $\rho_2$  Ecken, die natürlich durch die ausgleichende Wirkung der Formänderungen selbst abgerundet werden. (Vgl. Fig. 51, Seite 43.)



ermittelten Gondelgewicht. Die (stark ausgezogene) Differenzfigur ist die Belastungskurve:  $Q + G_H - A \cdot F$ .

5. Bilde für die spätere Korrektur von  $J$  und  $\frac{J}{S}$  das Belastungsverhältnis  $\frac{Q}{A \cdot F}$  (Seite 85). Hierbei ist die Berücksichtigung des Hüllengewichtes durch Verminderung des Wertes  $A \cdot F$  um  $\frac{G_H}{2}$  (Seite 74) nur bei geringem Gasdruck und bei tiefer Lage der Takelungsurte erforderlich (siehe Fig. 87, Seite 85).
6. Trage die Horizontalkomponenten  $T_2$  im richtigen Maßstabe in einer Kurve auf und bilde durch Integration derselben von den Gurtenden D und E aus die Horizontalkraft der Takelung.
7. Bestimme in Fig. 91 die Verminderung der Längsspannungen  $\sigma_2$  durch die Horizontalkraft der Takelung (Seite 69, oben). (d)
8. Verbessere danach für die spätere Korrektur von  $J$  und  $\frac{J}{S}$  die Durchmesserdehnung. (Die Längskontraktion ist der Vollständigkeit halber ebenfalls eingetragen.) (d)

### III. Die Schubkräfte und Momente (Fig. 93).

1. Bilde durch Integration der Belastungskurve (Fig. 92) die Kurve der Schubkräfte  $V$ .
2. Bestimme durch Integration der Schubkraftkurve die Momente  $M_V$  der Vertikalkräfte.
3. Berechne das Gasdruckmoment  $M_G$  nach der Formel (Seite 67):

$$M_G = \frac{\pi}{4} \cdot R^4 \cdot A$$

4. Bestimme das Takelungsmoment  $M_T$  durch Multiplikation der Horizontalkomponenten  $T_3$  mit dem Gurtabstand (2,6 m, Fig. 92) und Integration von den Gurtenden D und E aus (Seite 67).
5. Bilde durch Subtraktion von  $(M_G + M_T)$  von  $M_V$  die resultierenden Momente  $M_p$ .

### IV. Die Biegung (Fig. 94).

1. Bestimme aus der Normalcharakteristik (Fig. 54) den Elastizitätsmodul  $E$  für die aus Fig. 91 zu entnehmenden Normalspannungen (ausgeführt zum Vergleich für die Spannungen  $a$  und  $d$ ). (a und d)
2. Bestimme das Trägheitsmoment für den kreisförmigen Querschnitt nach der Formel (Seite 68):

$$J = \pi R^3$$

unter Zugrundelegung der in Fig. 91 ermittelten gedehnten Radien, und bringe daran folgende Korrekturen an:

Für die verstärkende Wirkung der Nähte (angenommen 5%, siehe Seite 68).

(b)

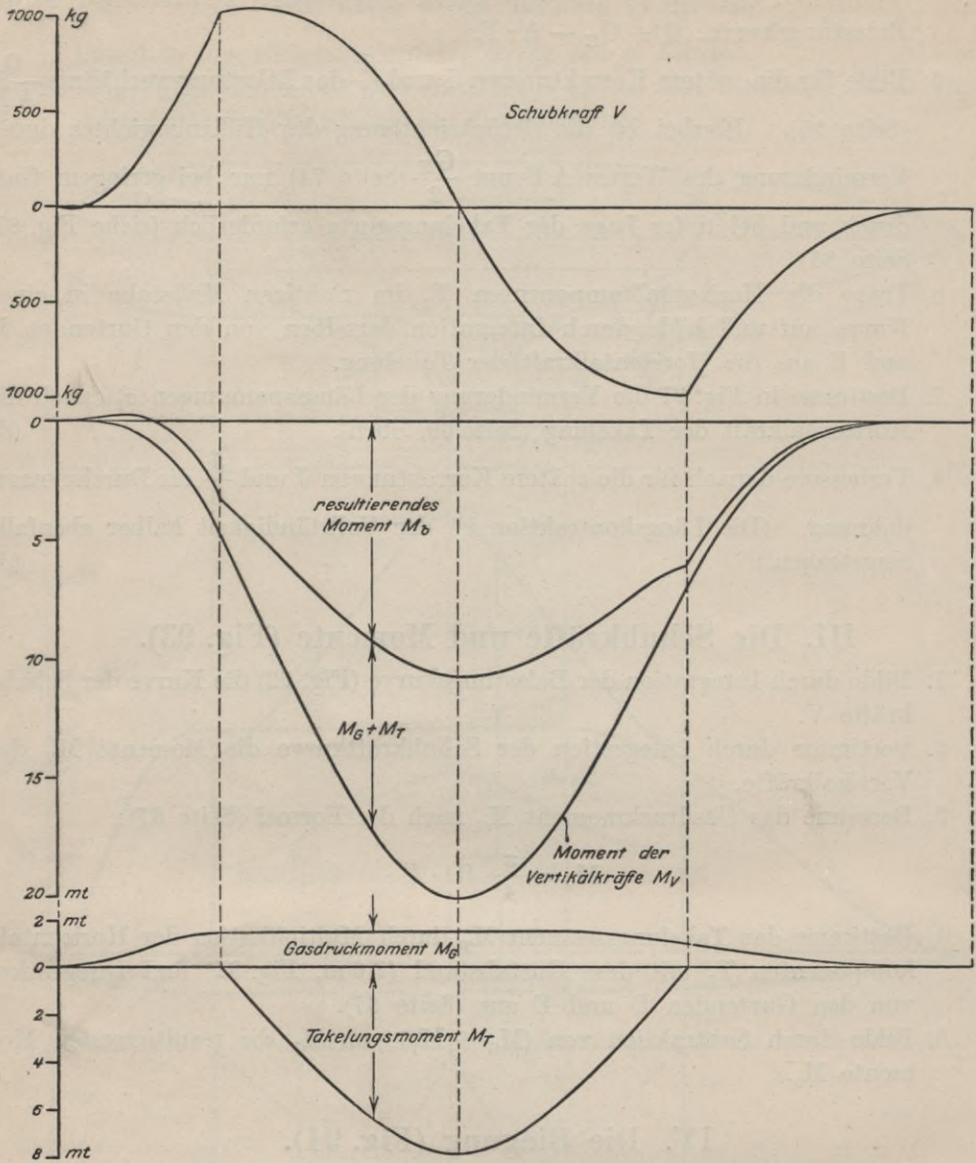


Fig. 93. Rechnungsbeispiel. Die Schubkräfte und Momente.

Für die Vergrößerung des Durchmessers infolge der Horizontalkraft der Takelung, entsprechend der Dehnungskurve d in Fig. 91. (c)

Für die Querschnittsveränderung nach dem Korrekturdiagramm der Fig. 90 (Seite 87), entsprechend dem in Fig. 92 ermittelten Belastungsverhältnis  $\frac{Q}{AF}$  und dem durch den Durchmesser und  $p_m = 30$  mm WS

gegebenen Druckverhältnis  $\frac{p_u}{p_o}$ . (d)

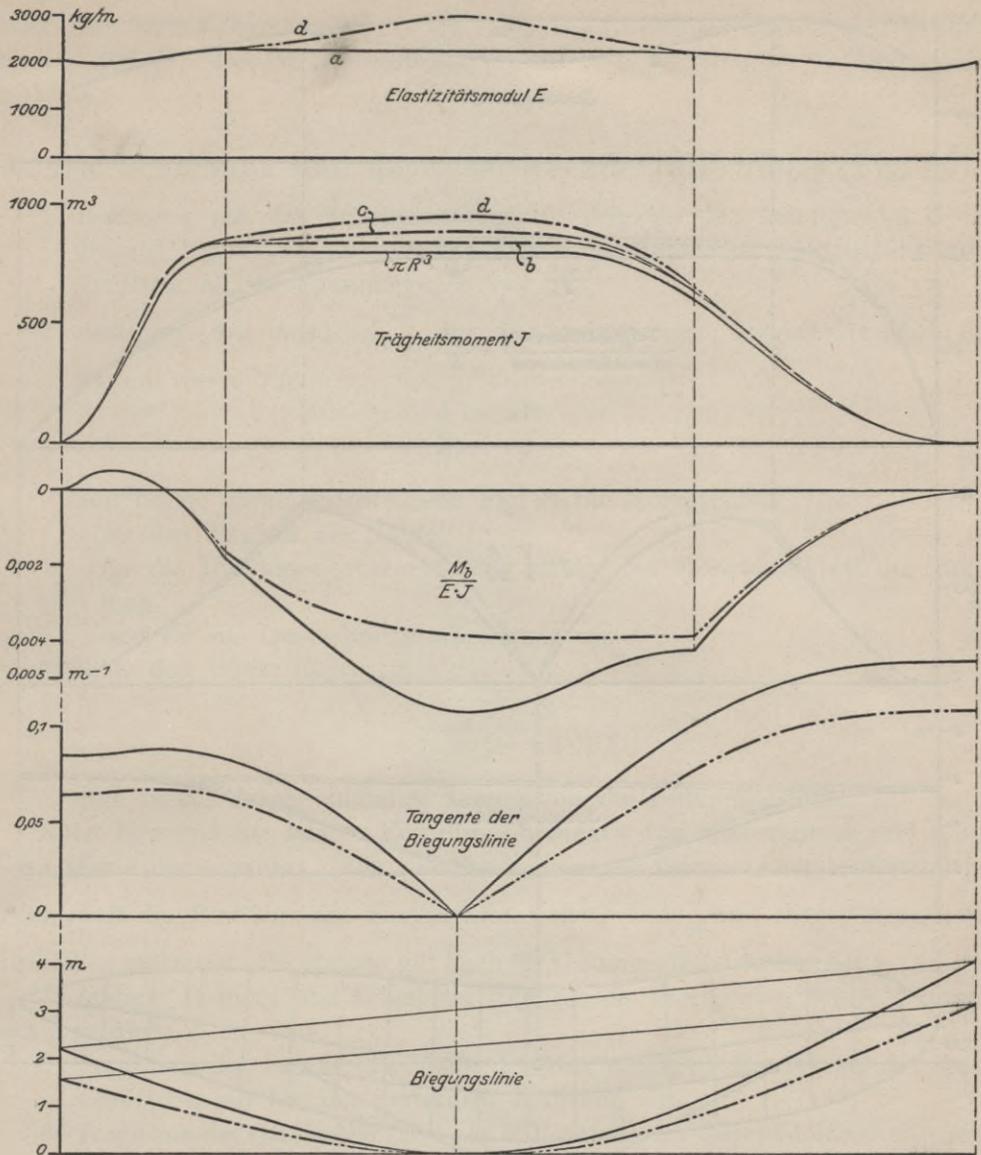


Fig. 94. Rechnungsbeispiel. Die Biegung.

3. Bilde den Quotient  $\frac{M_b}{E \cdot J}$  und daraus durch zweimalige Integration zunächst die Kurve der Tangenten der Biegungslinie und dann die Biegungslinie selbst.

Die letztgenannten Einzelbestimmungen sind einmal (in ausgezogenen Linien) für die unkorrigierten Werte von  $E$  (a) und  $J$  ( $\pi \cdot R^3$ ), das andere Mal (in strichpunktigten) für die korrigierten Werte (d) durchgeführt.

Der Vergleich zeigt, daß die Vernachlässigung sämtlicher Korrekturen für  $E$  und  $J$  zu erheblichen Abweichungen des Endresultats führen kann, wenn auch

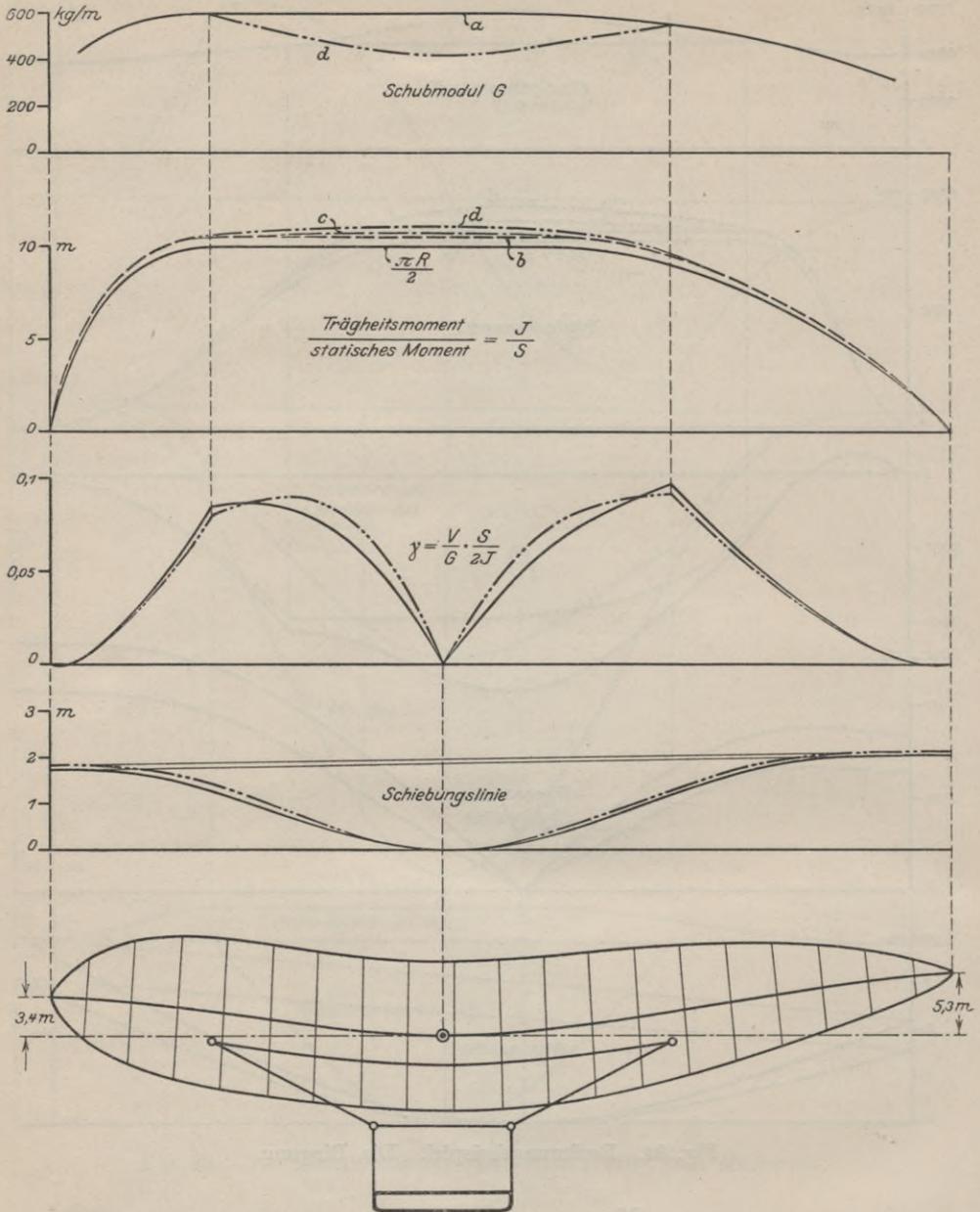


Fig. 95. Rechnungsbeispiel. Die Schiebung und die resultierende Hüllenform.

z. B. die 3 Korrekturen für  $J$  im einzelnen geringfügig erscheinen. Besonders kommt es auf die richtige Ermittlung von  $E$  an. Auch hierfür ist streng genommen noch eine, bisher nicht angedeutete Korrektur möglich, insofern als die Unterscheidung einer ersten und zweiten Annäherung, wie sie für die Normalspannungen (Seite 17 und 62) eingeführt wurde, auch für die Biegungsspannungen von Bedeutung sein kann. Doch lohnt sich eine solche Korrektur nur dann, wenn die Bestim-

mung der Normalcharakteristik selbst von Interpolationswillkür frei ist (siehe Seite 46 und 52), was bei Beobachtung des auf Seite 52 Gesagten wohl erreichbar erscheint.

## V. Die Schiebung und die resultierende Hüllenform (Fig. 95).

1. Bestimme aus der Schubcharakteristik (Fig. 63) den Schubmodul  $G$  für die aus Fig. 91 zu entnehmenden Normalspannungen. (Ausgeführt zum Vergleich für die Spannungen  $a$  und  $d$ ). (a und d)
2. Bestimme den Ausdruck  $\frac{J}{S}$  für den kreisförmigen Querschnitt nach der Formel (Seite 72):

$$\frac{J}{S} = \frac{\pi R}{2}$$

und bringe daran entsprechend Fig. 94 die Korrekturen

- für den Einfluß der Nähte (b)
- für die Durchmesserergrößerung infolge der Horizontalkraft der Take-  
lung (c)
- und für die Querschnittsveränderung an. (d)

3. Bilde den Wert: (Seite 72)

$$\gamma = \frac{V}{G} \cdot \frac{S}{2J}$$

und daraus durch einmalige Integration die Schiebungslinie.

Auch hier sind die letzten Einzelbestimmungen für unkorrigierte und korrigierte Werte durchgeführt. Die Verschiedenheit der Resultate ist bedeutend geringer, weil die Einflüsse der Korrekturen von  $G$  und  $\frac{J}{S}$  mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten. Im übrigen gilt auch für  $G$  sinngemäß das oben für  $E$  Gesagte.

4. Addiere Biegung und Schiebung (nur für die korrigierten Werte  $d$  durchgeführt).
5. Trage aus der Fig. 94 (Tangente der Biegungslinie) den Winkel der Querschnitte gegenüber der vertikalen Richtung ein.
6. Trage von der elastischen Linie aus in Richtung der Querschnitte nach beiden Seiten die Radien aus Fig. 91 ab und bestimme durch Verbindung der so erhaltenen höchsten und tiefsten Punkte die Seitenansicht der resultierenden Hüllenform.

## E. Studien an einem besonders einfach belasteten Modell.

An dem zur Beobachtung der Querschnitte (Seite 63) verwendeten Modell wurden einige Messungen vorgenommen, die unter anderem eine Vorstellung darüber ermöglichen, bis zu welchem Grade die auf Grund der Normal- und Schubcharakteristik vorausberechneten Formänderungen den tatsächlich eintretenden nahekommen.

### Beschreibung des Modells und seiner Belastung.

Das Modell hatte eine Länge von 1,5 m und bestand aus einem zylindrischen Hauptstück von 200 mm  $\phi$  mit einem halbkugeligen Kopf und einem sich sanft verjüngenden Ende. Es wurde aus 6 untereinander gleichen Bahnen I–VI des Stoffes G der Tabelle mit je 9 mm Überlappung zusammengenäht, an den Enden mit Schlauchansätzen und auf beiden Seiten über den größten Teil der Länge mit je einer durchgehenden Reihe von tangential angesetzten Doppelschlaufen zur Aufhängung versehen (Fig. 96 und 97).

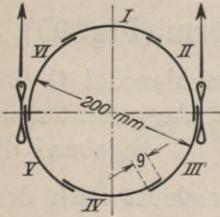


Fig. 96. Querschnitt des Ballonmodells.

Die Oberfläche erhielt ein rechtwinkeliges Netz von Meßlinien: 12 Meridianlinien wurden schon beim Zuschneiden der Bahnen, 17 Querschnittlinien (Spanten) dagegen am fertigen, mit Druckluft gefülltem Modell aufgetragen, indem dies, in den beider Schlauchansätzen gelagert, wie in einer Drehbank an einem feststehenden Bleistift vorbeigedreht wurde.

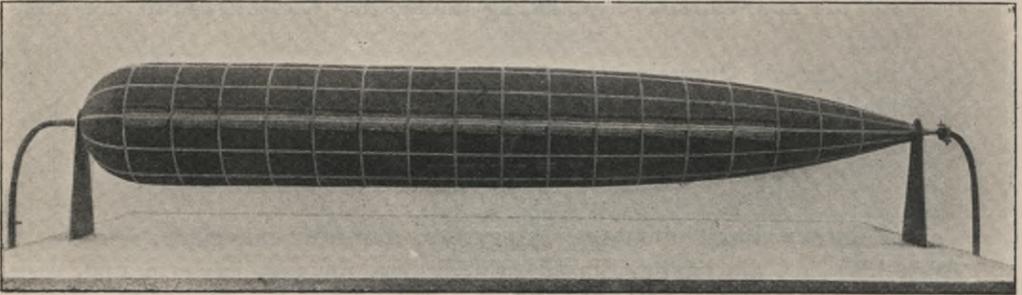


Fig. 97. Ballonmodell, mit Luft gefüllt, drehbar gelagert.

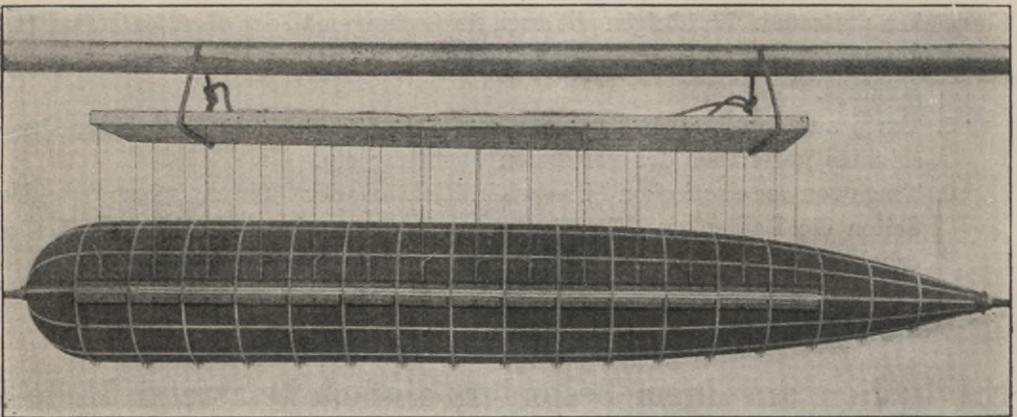


Fig. 98. Ballonmodell, mit Wasser gefüllt, biegungslos aufgehängt.

Das Modell wurde zunächst durch Luft-, nächst dem durch Wasserfüllung einem konstanten Innendruck  $p_m$  von 3000 mm WS unterworfen. Dabei wurden in einem ersten Zeitraum auch bei der Wasserfüllung nennenswerte Biegungs-

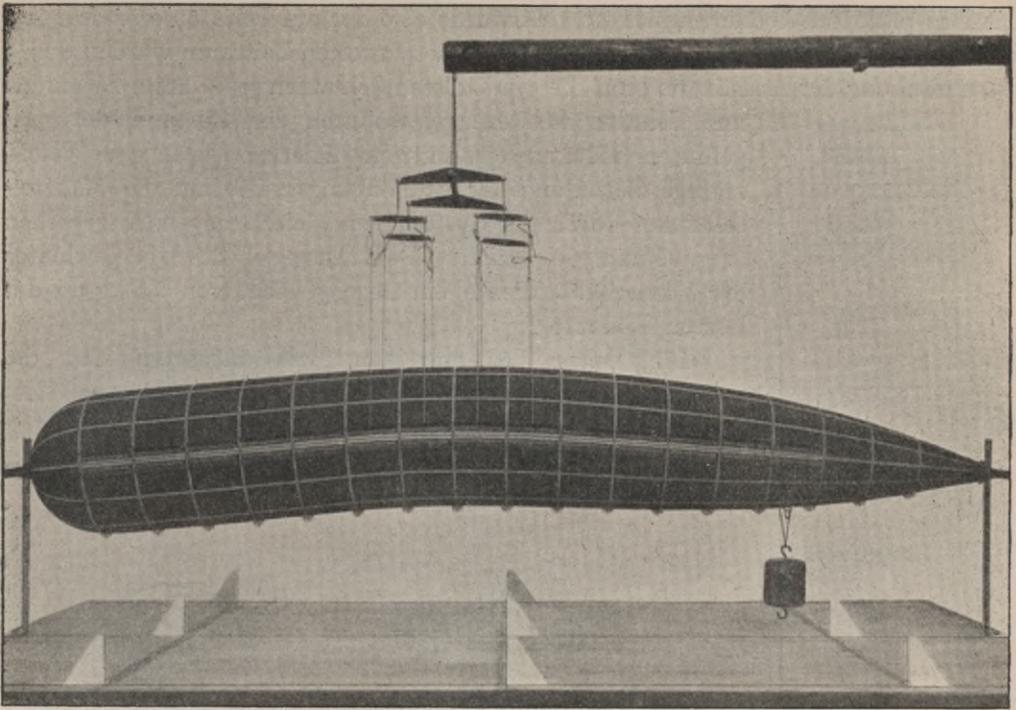


Fig. 99. Ballonmodell, gebogen nach 24 Stunden.

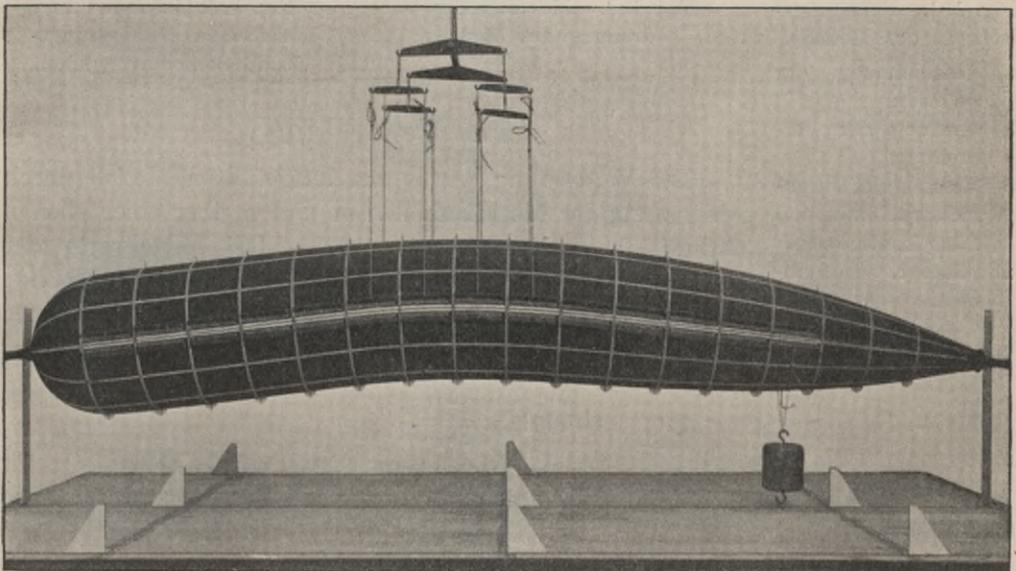


Fig. 100. Ballonmodell, gebogen nach 3 Wochen.

und Schubkräfte dadurch fern gehalten, daß die Aufhängung mittel's sämtlicher Schlaufen erfolgte (Fig. 98, halbstarre Ballontype), während bei der Luftfüllung das im Vergleich zum Inhalt sehr geringe Eigengewicht des in zwei Enden gelagerten

Modells praktisch bedeutungslos ist. Es wurde also der auf Seite 59 erörterte Zustand der luftgefüllten Hülle hergestellt. In einem zweiten Zeitraum wurden durch Beschränkung der Aufhängung auf die 4 mittelsten Schlaufen jeder Seite Biegungs-

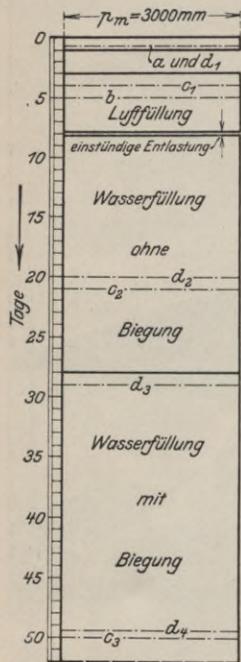


Fig. 101. Belastungsschema des Modells.

- a) Aufzeichnung der Spanten.
- b) Messung der Verdrehung.
- c) Messung der Durchmesserdehnung und Längskontraktion.
- d) photogr. Aufnahmen.

und Schubkräfte erzeugt, wodurch der Zustand der gasgefüllten Hülle nachgeahmt ist. Hierbei wurde eine gleichmäßige Verteilung der Aufhängungskräfte auf die 8 Mittelschlaufen durch ein System von gleicharmigen Wagebalken (Fig. 99 und 100) erzielt. Dem Ausgleich des Übergewichtes der Vorderhälfte diente ein Gegengewicht von 2,5 kg an der letzten Schlaufe.

Die Dauer der einzelnen Belastungsarten und die während derselben angestellten Messungen sind aus dem Schemæ der Fig. 101 zu ersehen.

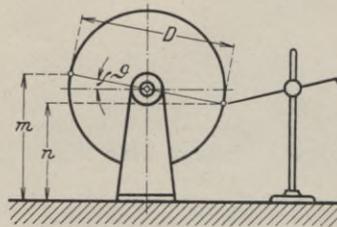


Fig. 102. Messung der Verdrehung des Modells.

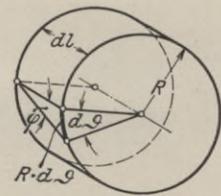


Fig. 103. Zusammenhang zwischen Verdrehungs- und Schiebungswinkel.

### Die Verdrehung.

Die Verdrehung wurde am luftgefüllten Modell durch Abmessung der Meridianhöhen m und n über einer ebenen Grundfläche bestimmt (Fig. 102). Die Mittelwerte der Messungen für 3 um je 120° versetzte Bahnpaare ergaben die in Fig. 104 dargestellten Verdrehungswinkel  $\vartheta$  (gerechnet vom Spant 9 als Nullpunkt) gemäß der Beziehung:

$$\sin \vartheta = \frac{m - n}{D}.$$

Der Schiebungswinkel  $\varphi$  ergibt sich daraus nach Fig. 103 durch die Gleichung:

$$\varphi = d\vartheta \cdot \frac{R}{dl}.$$

Der Schiebungswinkel  $\varphi$  beträgt beim vorliegenden Stoff nur wenig mehr als 1° (vgl. auch die Fig. 35 und 38 bei  $\gamma = 45^\circ$ ). Trotzdem sind die Verdrehungen  $\vartheta$ , die er erzeugt (in unserem Falle insgesamt ca. 11°), schon so bedeutend, daß

sie bei langen Schiffen mit mehreren Gondeln recht störende Nebenerscheinungen hervorrufen und in der Regel auch schon bei kurzen eine Versetzung der Ruder und Richtflossen nötig machen.

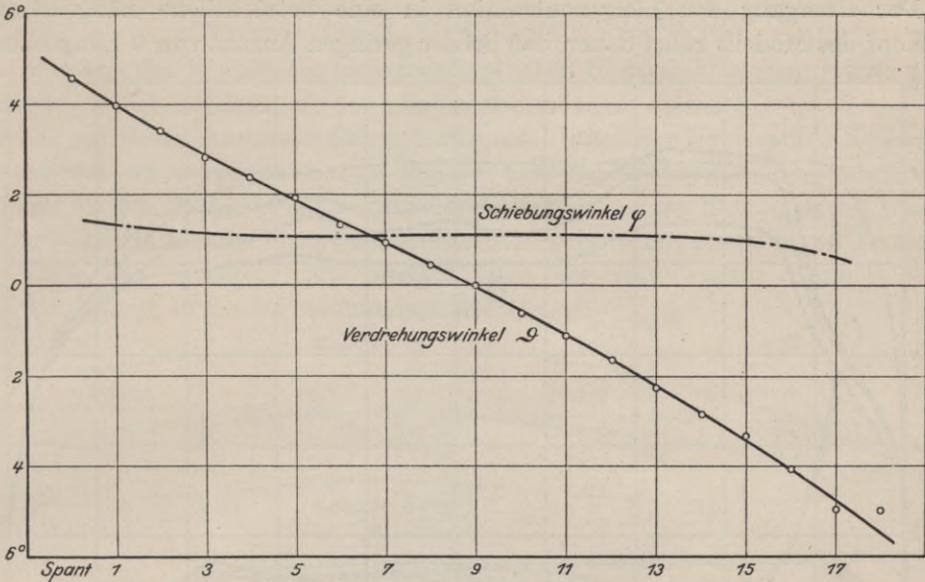


Fig. 104. Verdrehung des Modells.

## Die Durchmesserdehnung und Längskontraktion.

Die Durchmesserdehnung und Längskontraktion wurde zweimal am biegungsfreien, einmal am gebogenen Modell durch Abmessung der Meridian- und Spantabstände bestimmt. Die in Fig. 105 dargestellten Werte sind die Mittel aus den Versuchswerten von 3 bzw. 4 Bahnen.

Sie lassen zunächst wieder erkennen, daß die Formänderungen Zeit zu ihrer Ausbildung brauchen. Die Längskontraktion der zweiten Messung ist in der Figur der Deutlichkeit wegen fortgelassen, da sie der dritten schon sehr nahe kam.

Des weiteren zeigt sich innerhalb des zylindrischen Hüllenteiles ein beträchtliches Schwanken der Formänderungsgröße. Da es bei allen drei Messungen in gleicher Weise wiederkehrt, so erscheint es in der Ungleichförmigkeit des Stoffes begründet. Daraus folgt, daß zur Bestimmung der Normalcharakteristik die Vielkreuzmethode am zweckmäßigsten ist, und daß sie um so bessere Resultate ergeben wird, je größer die Zahl ihrer Einzelpunkte ist. In Fig. 105 ist die auf Grund der Normalcharakteristik (Fig. 58, Seite 51) vorausbestimmte Durchmesserdehnung und Längskontraktion in zweiter Annäherung (siehe Seite 62) strichpunktiert eingetragen.

In Fig. 106 sind die Längskontraktionen der 4 Bahnen I, II, III und IV für die Messung  $c_3$  am gebogenen Modell im Zusammenhang mit ihrem Mittelwert dargestellt. Das Bild veranschaulicht den Vorgang der Biegung; es zeigt, wie die im ganzen eingetretene Längskontraktion auf der gedrückten Seite erhöht, auf der gezogenen erniedrigt, ja sogar in eine Längsdehnung (schraffiert) verwandelt wird.

Damit läßt es den Umfang der Formänderung für jeden Querschnitt erkennen, der für die passende Wahl des Elastizitätsmoduls  $E$  aus der Normalcharakteristik von Bedeutung ist.

Der Übergang der Längskontraktion in eine beträchtliche Längsdehnung am Kopf des Modells rührt daher, daß bei der geringen Anzahl von 6 Längsbahnen

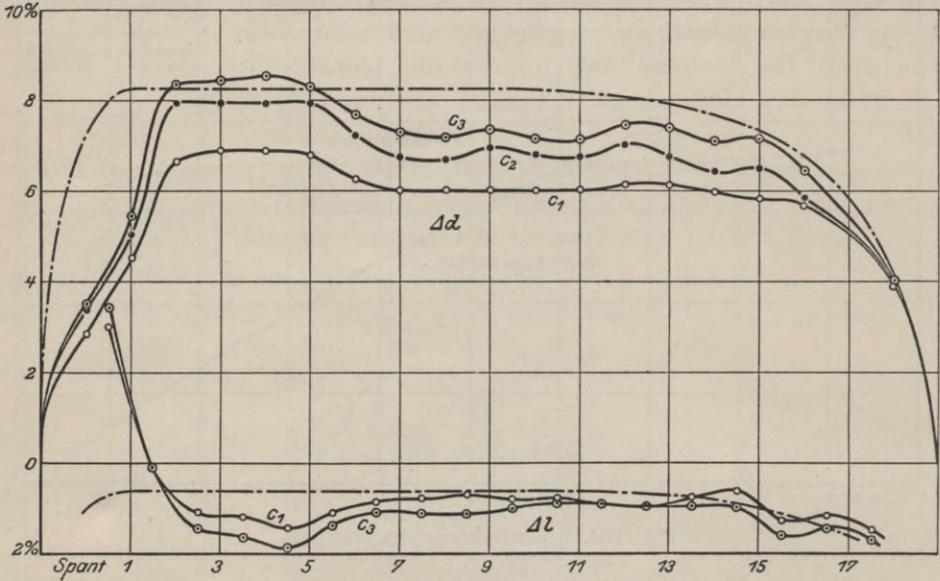


Fig. 105. Durchmesserdehnung und Längskontraktion des Modells nach verschiedener Belastungsdauer. Die Buchstaben entsprechen dem Schema Fig. 101.

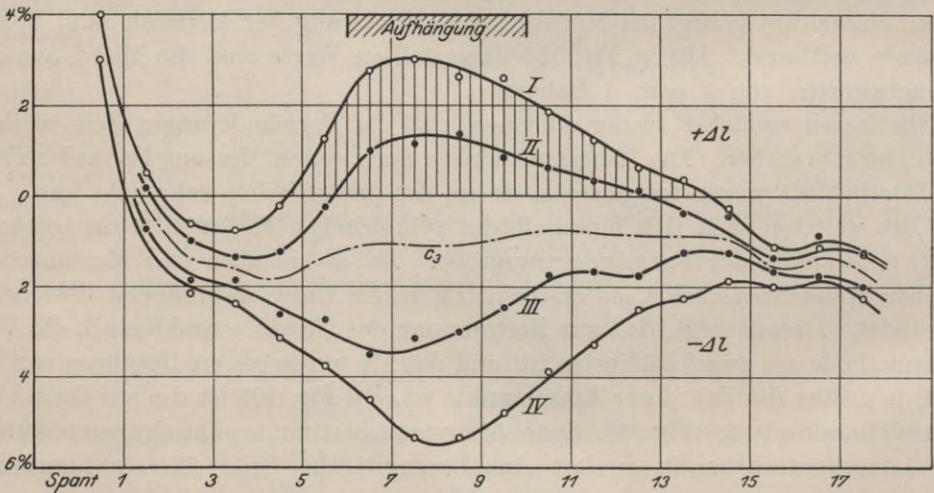


Fig. 106. Längskontraktion der einzelnen Bahnen des Modells als Folge der Biegung. In der Mitte der Mittelwert aus Fig. 105.

nur eine unvollkommene Halbkugel, viel eher eine sechseckige Spitze entsteht, bei der die Mittellinien der Bahnen, auf denen die Längskontraktion gemessen wurde, von vornherein im Vergleich zu den Nahtstellen zu kurz sind und daher höhere

Längsspannungen erfahren. Da die Zahl der Bahnen bei Ballonhüllen 30, 40, und mehr beträgt, so kommt der geschilderte Nebenumstand für sie nicht in Betracht.

### Die Biegungs- und Schiebungslinie.

Die Form des Modells nach dreiwöchentlicher Biegungsbelastung wurde nicht am Modell selbst, sondern aus den photographischen Aufnahmen (Fig. 68 und 69), die schon zur Beobachtung der Querschnitte hinsichtlich der Navierschen Hypothese dienten (Seite 63), abgemessen. In Fig. 107 sind die Konturen beider Aufnahmen, nach den für Fig. 71 (Seite 65) verwendeten Vergrößerungen durchgepaust, wiedergegeben. Die Halbierung ihrer Querschnittshöhen ergibt mit Annäherung die elastische Linie des Modells. Ihr Verlauf stellt die resultierende Formänderung dar. Er stimmt in beiden Aufnahmen überein.

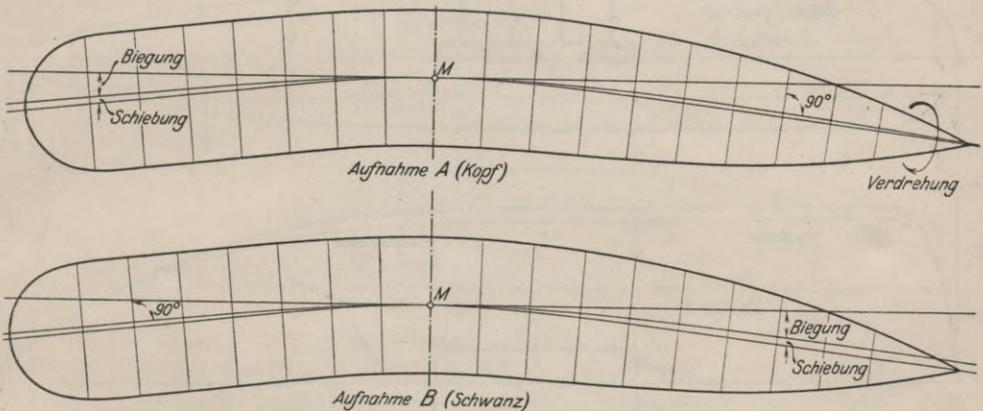


Fig. 107. Bestimmung der Biegung und Schiebung des Modells aus den Photographien der Fig. 68 und 69.

Durch die aufgeklebten Papierflossen am Bauch und Rücken ist ferner die Lage der Querschnitte bestimmt. Legt man nun, von M ausgehend, nach beiden Seiten eine Kurve, die alle Querschnittslinien senkrecht schneidet, so erhält man die Trennlinie zwischen reiner Biegung und Schiebung.

Die Lage dieser Trennlinie ist nun bei beiden Aufnahmen verschieden. Der Grund liegt zum Teil in kleinen Ungenauigkeiten der Parallelität beider Aufnahmestellungen, hauptsächlich aber in der Verdrehung des Modells: da die Papierflossen genau auf die obere und untere Meridianlinie geklebt waren, machten sie die Verdrehung mit und traten damit aus der in Fig. 70 (Grundriß) angegebenen Objektebene heraus, wodurch eine scheinbare Winkeländerung der Querschnitte eintrat. Die Erscheinung ist bei der Aufnahme A am Schwanz des Modells besonders deutlich, insofern, als die Trennlinie, die sich zunächst von der Mittellinie entfernt, ihr gegen das Ende hin wieder zustrebt.

Es ist einleuchtend, daß für die vordere Hälfte des Modells die Kopfaufnahme, für die hintere dagegen die Schwanzaufnahme wegen der geringeren Entfernung vom Bildmittelpunkt eine größere Annäherung darstellt. Da jedoch der Absolutwert der Schiebung im vorliegenden Falle gering und seine Bestimmung durch

die auf die Querschnitte gefällten Lote zeichnerisch nicht genau genug ist, um sichere Folgerungen daran zu knüpfen, so sollen dem Vergleich mit der nachfolgenden Rechnung die algebraischen Mittelwerte aus beiden Aufnahmen zugrunde gelegt werden.

### Vergleichende Berechnung.

Die Berechnung der Form der elastischen Linie ist in Fig. 108, 109 und 110 durchgeführt. Sie weist gegenüber dem Rechnungsbeispiel (Seite 88) drei Vereinfachungen auf:

1. Das Hüllengewicht konnte vernachlässigt werden, da es nur ca. 1,2% des Wassergewichtes beträgt.

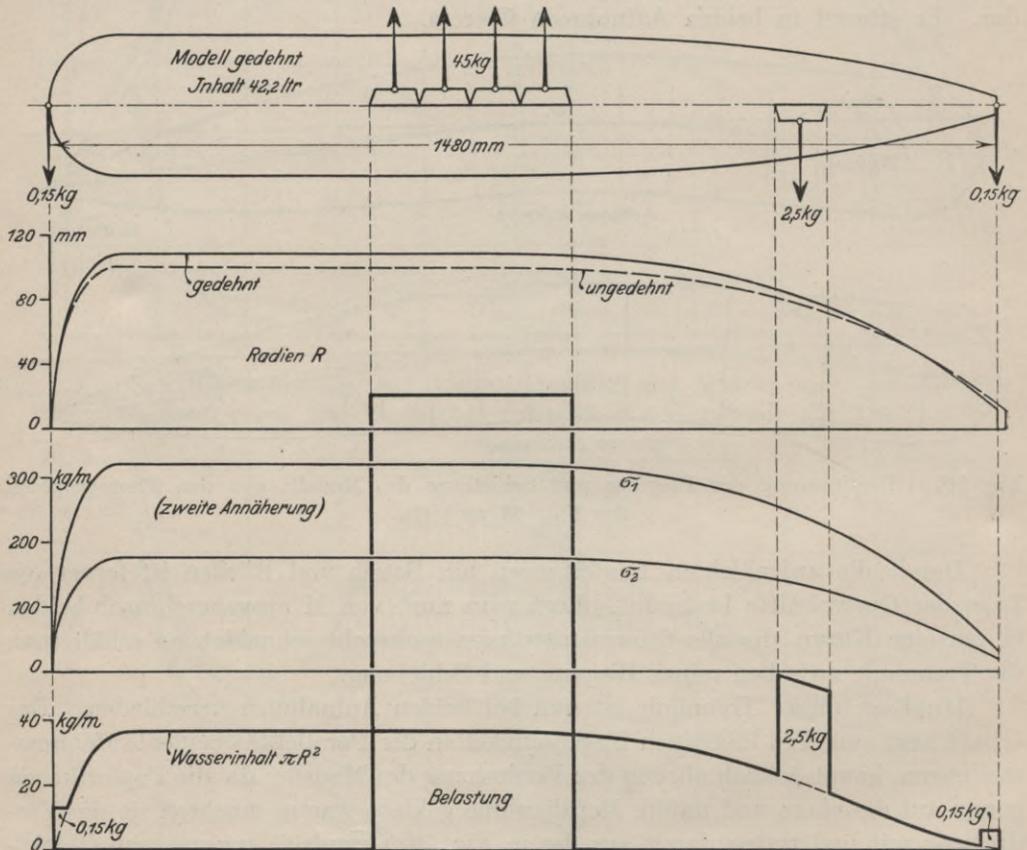


Fig. 108. Formänderungsrechnung des Modells. Die Belastung.

2. Bei der Aufhängung wirken nur vertikale Kräfte. Das Takelungsmoment sowie die axiale Entlastung fallen also fort.

3. Das Umfangsverhältnis der Takelung  $u = 0$ , und das Druckverhältnis  $\frac{P_u}{P_o} = 0,935 = \text{nahezu } 1$ . Es fällt also die Korrektur der Werte  $J$  und  $\frac{J}{S}$  fort (siehe Fig. 87).

Die Verstärkung durch die Nähte ergibt eine Korrektur von  $\frac{6 \cdot 9}{\pi \cdot 200} = \text{rund } 10\%$ .

Hiernach sind die Figuren 108 bis 110 ohne weiteres verständlich. Als Versuchsunterlagen dienten die Normalcharakteristik Fig. 58 (Seite 51) und die Schubcharakteristik Fig. 63 (Seite 57).

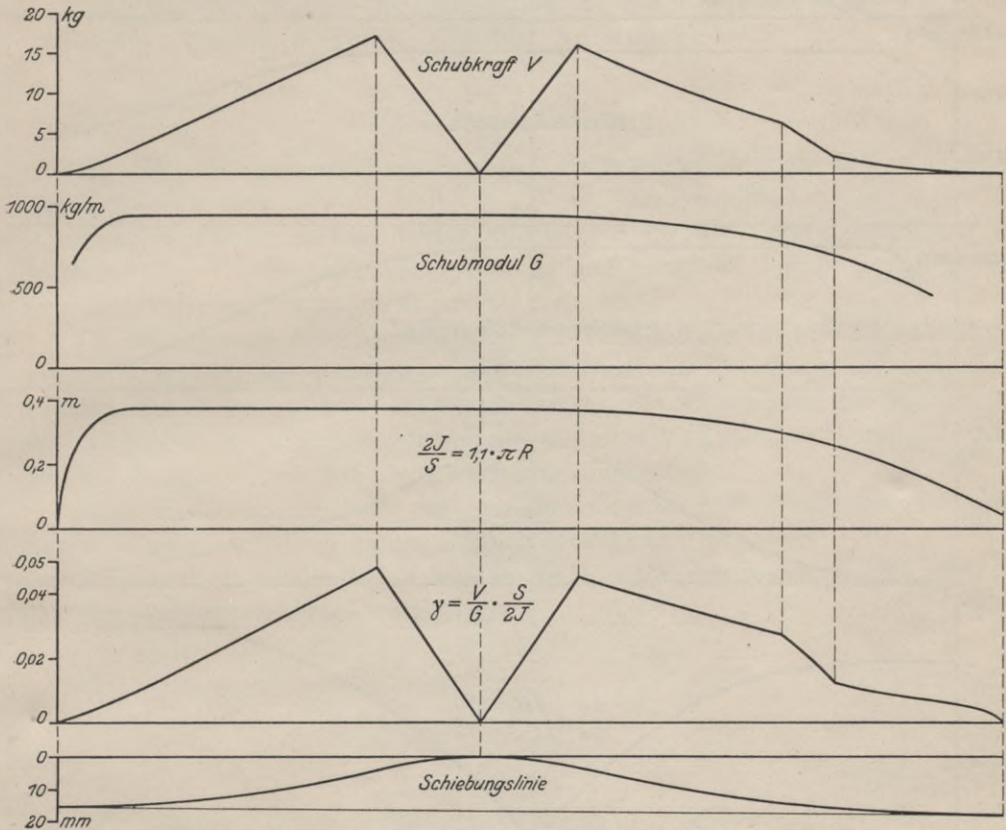


Fig. 109. Formänderungsrechnung des Modells. Die Schiebung.

In das Schlußbild der Fig. 110 sind die aus den beiden Photographien (Fig. 107) entnommenen Mittelwerte der Biegung und Schiebung zum Vergleich eingetragen.

Rechnung und Messung ergeben gleichartige Kurvenform. Hinsichtlich der absoluten Größe stehen die gemessenen Werte um ca. 15% gegenüber den berechneten zurück. Zu dieser Abweichung trägt die reine Biegung nur den geringeren Teil bei. Sie zeigt eine Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung bis auf rund 7%.

Die gemessene Schiebung hingegen ist 30—35% geringer als die berechnete. Diese Abweichung darf nicht überraschen. Sie ist hauptsächlich darin begründet, daß die der Rechnung zugrunde gelegte Schubcharakteristik (Fig. 63) den Mittelkurven der Hysteresisschleifen (Fig. 61) entspricht, denen gegenüber die gemessene Formänderung, die durch keine Vorbelastung beeinflusst war, um den Betrag der inneren Reibung zurückbleiben mußte (vgl. Fig. 20, Seite 14). Vergleicht man in

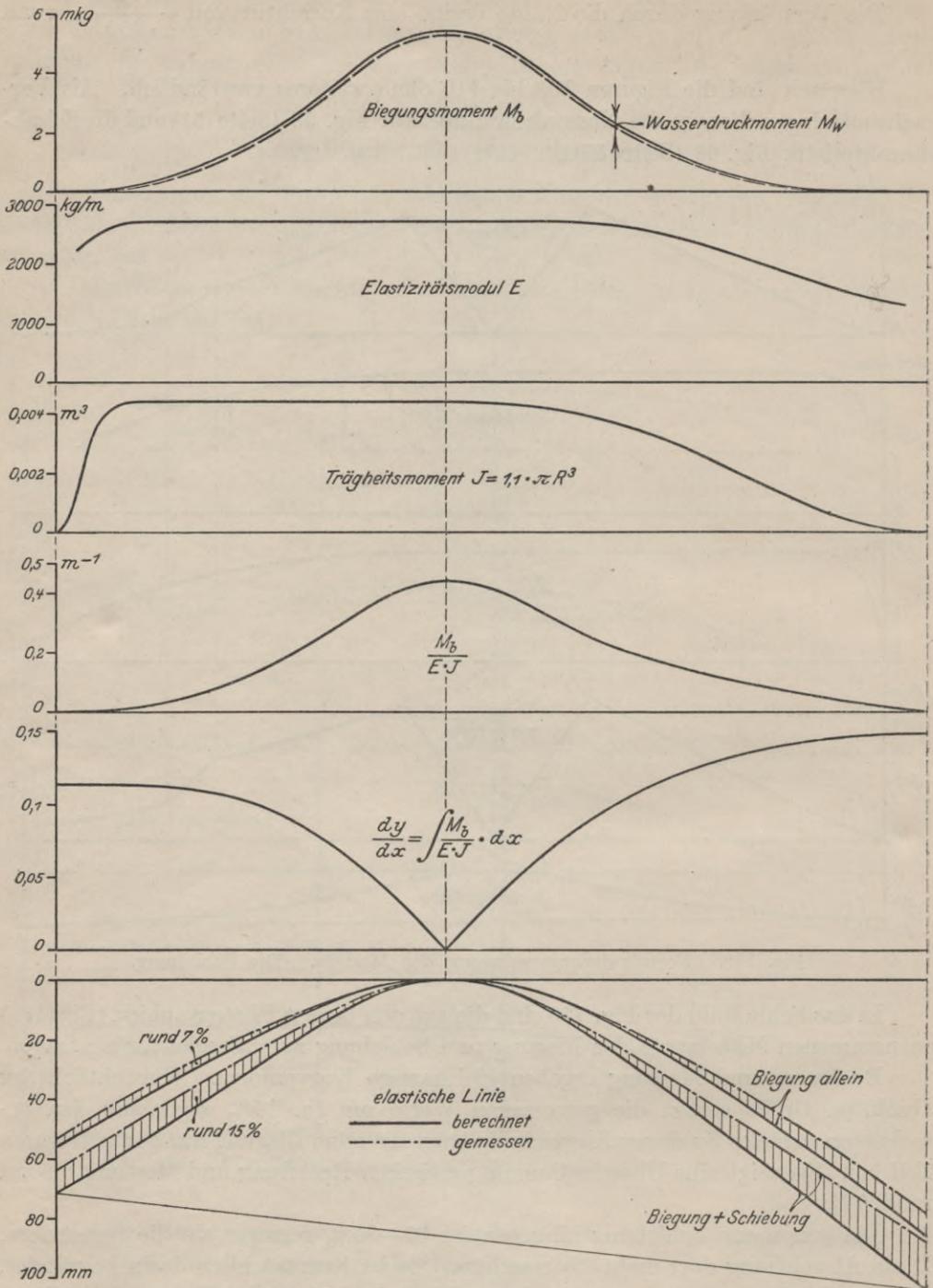


Fig. 110. Formänderungsrechnung des Modells.  
Die Biegung und die resultierende Form der elastischen Linie.

Fig. 61 den Schubmodul für die Mittelkurven mit dem für die jungfräulichen Kurven, so kommt man durchweg auf Unterschiede von 30—40%.

Wenn auch hiermit eine hinreichende Erklärung für die Abweichung der Messung von der Rechnung gegeben ist, so wäre immerhin eine Prüfung durch weitere, besonders der Schiebung gewidmete Versuche erwünscht.

Bezüglich der Biegung hingegen erscheint die Rechnung schon durch den vorliegenden Versuch in vollem Umfange bestätigt.

### Zusammenfassung.

Die Formänderungseigenschaften des Ballonstoffes werden aus seinem Gefüge hergeleitet und an einer Reihe von Versuchen geschildert.

Es wird geprüft, welche Versuchsunterlagen für die Vorausbestimmung der Formänderung von Ballonhüllen notwendig und ausreichend sind; geeignete Versuchsmethoden werden beschrieben.

Die Bestimmung der Formänderung von Ballonhüllen wird in 3 Einzelberechnungen aufgelöst, die der Reihe nach der Durchmesserdehnung und Längskontraktion, der Biegung und der Schiebung gelten. Die Abweichung der Querschnitte von der Kreisform wird ermittelt und ein einfacher Weg für ihre Berücksichtigung bei der Biegungs- und Schiebungsrechnung angegeben.

Dem Konstrukteur wird ein zusammenfassendes Rechnungsbeispiel unter stetem Hinweis auf die vorangegangenen Ableitungen vorgelegt.

An einem einfachen Modell werden die Einzelformänderungen gemessen und mit den vorausberechneten verglichen.

---

## Stoff-Tabelle.

	Stoffart	Mittlere Festigkeit in kg/m ca.	Gewicht pro qm in g ca.	Besondere Merkmale
A	Einfacher Stoff	630	85	Ungummiert und ungefärbt. Sogenannter Rohstoff.
B	Derselbe	680	195	Auf einer Seite gummiert, auf der anderen gelb gefärbt. (Für äußere Klebestreifen.)
C	Einfacher Stoff	420	75	Einseitig gummiert, ungefärbt. Sogenannter Aeroplanstoff.
D	Einfacher Stoff	770	225	Zweiseitig gummiert, ungefärbt. Sogenannter Bandstoff. (Für innere Klebestreifen.)
E	Doppelter Parallelstoff	2600	425	Eine starke Gummilage in der Mitte. Außen und innen ungummiert und ungefärbt.
F	Doppelter Diagonalstoff	1400	390	Äußere Lage unter ca. 45 ° diagonal. Innenseite gummiert und ungefärbt. Außenseite ungummiert, gelb gefärbt.
G	Dreifacher Stoff	2200	520	Mittlere Lage unter ca. 45 ° diagonal. Innenseite gummiert und ungefärbt. Außenseite ungummiert, gelb gefärbt.

S. 61



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000301476