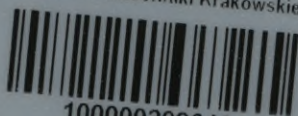




24  
30

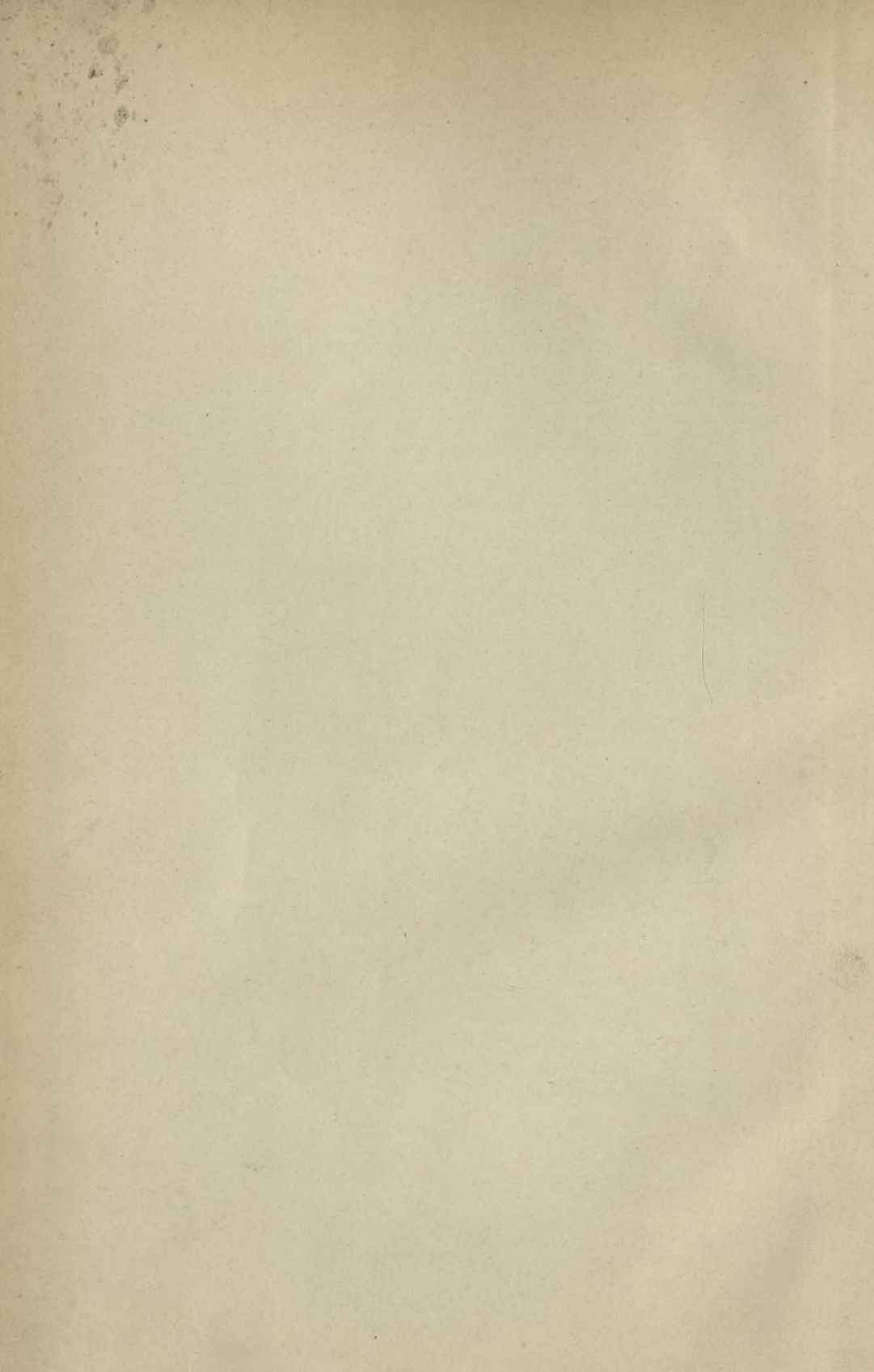
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299641



x  
230





STATIK

DER

HOCHBAU CONSTRUCTIONEN

ZWEITER THEIL:

HOLZ- UND EISEN CONSTRUCTIONEN

VON

DR. W. WITTMANN,

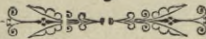
PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN MÜNCHEN.



ZWEITE UMGARBEITETE AUFLAGE.

MIT DREI TAFELN.

*J. Nr. 19031*



M. RIEGER'SCHE

UNIVERSITÄTS-  
GUSTAV HIMMER



BUCHHANDLUNG.  
K. B. HOF LIEFERANT.

MÜNCHEN 1893.

*VII B. 2*

STATIK



~~11-3891~~

11-352611

Dr. H. WITTMANN

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE IN KRAKAU

DRITTE UMGEBUNG

MIT DREI TAFELN

M. RIEGER SOHN

BUCHHANDLUNG



UNIVERSITÄT

VERLAG VON M. RIEGER SOHN

KRAKAU 1898

11-3-284/2018



## INHALTS-VERZEICHNISS

Die erste Auflage der Statik der Hochbauconstructions erschien in drei gesonderten Heften: I. Steinconstructions, II. Holzconstructions und III. Eisenconstructions. Bei der vorliegenden zweiten Auflage eines Theiles des Werkes erschien es zweckmässig, die frühere Trennung zwischen Holz- und Eisenconstructions aufzugeben und beide in einem Bande zu behandeln, wodurch es möglich gewesen ist, dem Stoffe eine knappere Form zu geben und Wiederholungen zu vermeiden.

Das Buch ist für solche Architekten bestimmt, welche auch der wissenschaftlichen Seite ihres Faches einige Aufmerksamkeit schenken, überhaupt für Techniker mit Hochschulbildung, die mit Ausführung von Hochbauten zu thun haben, und für Studierende des Baufaches.

Die günstige Aufnahme, welche der ersten Auflage zu Theil geworden ist, lässt hoffen, dass auch die zweite umgearbeitete Auflage ihren Zweck erfüllen werde: zur Verbreitung derjenigen Kenntnisse beizutragen, welche die Grundlage der Constructionslehre sind.





# INHALTS-VERZEICHNISS.

		Seite
	<b>I. Abschnitt.</b>	
	<b>Resultate der Festigkeitslehre.</b>	
§ 1.	Zug- und Druckfestigkeit . . . . .	2
§ 2.	Schubfestigkeit . . . . .	5
§ 3.	Biegefestigkeit . . . . .	7
	A. Biegebeanspruchung durch senkrecht zur Stabaxe wirkende äussere Kräfte.	
	I. Die Kraftebene schneidet die Querschnitte nach Hauptaxen	8
	Beziehung zwischen Angriffsmoment und Transversalkraft	10
	Beziehung zwischen Angriffsmoment und Widerstandsmoment, Gleichung der elastischen Linie . . . .	10
	Trägheitsmoment . . . . .	14
	1) Rechnerische Bestimmung der Trägheitsmomente . . . . .	15
	2) Graphische Bestimmung der Trägheitsmomente . . . . .	17
	3) Tabelle der Trägheitsmomente einiger Querschnittsformen . . . . .	20
	4) Tabellen der Profileisen des deutschen Normalprofilbuches . . . . .	24
	5) Änderung des Trägheitsmomentes bei Drehung der Axe, grösstes und kleinstes Trägheitsmoment . . . .	34
	6) Trägheitsellipse, Centralellipse . . . . .	36
	7) Fixpunkte eines Querschnitts . . . . .	40
	II. Die Kraftebene schneidet den Querschnitt nicht nach Hauptaxen . . . . .	41
	B Biegebeanspruchung durch nicht senkrecht zur Stabaxe wirkende äussere Kräfte . . . . .	46
	Kern eines Querschnitts . . . . .	51
	Bestimmung der grössten Normalspannung mittels des Kerns	54
	C. Schubspannungen parallel und senkrecht zur Trägeraxe bei Biegebeanspruchung . . . . .	57
	D. Normalspannungen und Schubspannungen bei Biegebeanspruchung nach beliebigen Richtungen . . . . .	60

§ 4. Knickfestigkeit . . . . .	63
Die Euler'sche Formel . . . . .	64
Die Navier-Schwarz'sche Formel . . . . .	67
Excentrische Belastung gerader Stäbe . . . . .	72
§ 5. Versuchsergebnisse über die Festigkeit des Holz- und Eisenmaterials . . . . .	76
A. Elasticitätsmodul, Proportionalitätsgrenze und Festigkeitscoefficienten . . . . .	78
B. Zulässige Beanspruchung . . . . .	79
Die Launhardt-Weyrauch'sche Dimensionenberechnung . . . . .	81

## II. Abschnitt.

### Der homogene Balkenträger bei verschiedener Art der Unterstützung und Belastung.

§ 1. Querschnittsbestimmung der Balkenträger . . . . .	87
§ 2. Der frei aufliegende Balken unter Einwirkung von ruhender und beweglicher Belastung.	
A. Gleichmässig verteilte, ruhende Last . . . . .	89
B. Belastung durch eine Anzahl feststehender Einzellasten . . . . .	97
C. Belastung des mit beiden Enden überragenden Trägers durch feststehende Einzellasten . . . . .	100
D. Belastung des mit beiden Enden überragenden Trägers durch gleichmässig verteilte Last . . . . .	101
E. Belastung durch gleichmässig verteilte Last und feststehende Einzellasten . . . . .	101
F. Belastung durch Eigengewicht und durch gleichmässig verteilte Last, welche sich nur über einen Teil der Trägerlänge erstreckt . . . . .	103
G. Belastung durch bewegliche, gleichmässig verteilte Last . . . . .	104
H. Belastung durch ein bewegliches System von unter sich fest verbundenen Einzellasten . . . . .	105
§ 3. Der mit beiden Enden wagrecht eingespannte Balken unter Einwirkung von ruhender und beweglicher Belastung.	
A. Belastung durch eine feststehende Einzellast . . . . .	108
B. Belastung durch ruhende, gleichmässig verteilte Last . . . . .	113
C. Belastung durch bewegliche, gleichmässig verteilte Last . . . . .	115
§ 4. Der mit einem Ende wagrecht eingespannte Balken (Kragträger).	
A. Belastung durch gleichmässig verteilte Last . . . . .	117
B. Belastung durch eine am freien Ende wirkende Einzellast . . . . .	118
C. Einmauerungstiefe der Kragträger . . . . .	118
§ 5. Der mit einem Ende eingespannte, mit dem anderen Ende frei aufliegende Träger.	
A. Belastung durch eine Einzellast . . . . .	121
B. Belastung durch gleichmässig verteilte Last . . . . .	124
§ 6. Der continuirliche Träger.	
A. Auflagermomente und Stützendrücke bei beliebiger ruhender Belastung . . . . .	125
B. Graphische Bestimmung der Auflagermomente und Stützendrücke . . . . .	134
C. Maximalmomente und Vertialkräfte bei beweglicher Belastung . . . . .	143



## III. Abschnitt.

**Verbindungen der Constructionsteile, einfache Constructionen.**

§ 1.	Holzverbindungen . . . . .	147
§ 2.	Schraubenbolzen- und Nietverbindungen . . . . .	149
§ 3.	Unterlagsplatten für Träger und Säulen . . . . .	155
§ 4.	Verstärkte Holzbalkenträger . . . . .	158
§ 5.	Balkenträger mit Sattelhölzern . . . . .	162
§ 6.	Balken in geneigter Lage bei verschiedener Art der Unterstützung . . . . .	164
§ 7.	Blechträger . . . . .	171
§ 8.	Armirtre Träger . . . . .	177
§ 9.	Hänge- und Sprengwerke . . . . .	183
§ 10.	Fachwerkträger . . . . .	188
§ 11.	Gitterträger . . . . .	197
§ 12.	Kennzeichen statisch bestimmter und stabiler Fachwerke und Trägerarten . . . . .	198

## IV. Abschnitt.

**Deckenconstructionen.**

§ 1.	Belastung der Zwischendecken . . . . .	203
§ 2.	Berechnungen von Deckenconstructionen . . . . .	205

## V. Abschnitt.

**Treppen.**

213

## VI. Abschnitt.

**Dacheonstructionen.**

§ 1.	Belastung der Dächer . . . . .	219
§ 2.	Auflagerreactionen bei einseitiger Beanspruchung durch den Winddruck . . . . .	224
§ 3.	Das einfache Sparrendach . . . . .	226
§ 4.	Das Sparrendach mit Firstpfette . . . . .	231
§ 5.	Das Pultdach . . . . .	232
§ 6.	Das Kehlbalckendach . . . . .	234
§ 7.	Das Pfettendach . . . . .	237
§ 8.	Das Hängewerkdach . . . . .	239
§ 9.	Das Sprengwerkdach . . . . .	244
§ 10.	Das Mansarddach . . . . .	248
§ 11.	Das Walmdach . . . . .	251
§ 12.	Der Dachbinder nach dem englischen System . . . . .	253
§ 13.	Der Polonceau'sche Dachbinder . . . . .	260
§ 14.	Der deutsche Dachbinder . . . . .	264
§ 15.	Der parabolische Dachbinder . . . . .	265
§ 16.	Der parabolische sichelförmige Dachbinder . . . . .	271
§ 17.	Consoldächer . . . . .	276
§ 18.	Der Bogenträger mit drei Gelenken . . . . .	279
§ 19.	Das Kuppeldach . . . . .	289
§ 20.	Das Zeltdach . . . . .	294

VII. Abschnitt.

Der elastische Bogenträger.

§ 1.	Der stabförmige elastische Bogenträger unter Einfluss von ruhender Belastung	301
§ 2.	Der stabförmige elastische Bogenträger bei beweglicher Belastung	314
§ 3.	Der stabförmige elastische Bogenträger mit Kämpfergelenken	316
§ 4.	Der stabförmige elastische Bogenträger mit drei Gelenken	318
§ 5.	Der fachwerkförmige Bogenträger mit Kämpfergelenken	320
§ 6.	Der fachwerkförmige Bogenträger ohne Gelenke	324



## I. Abschnitt.

### *Resultate der Festigkeitslehre.*

---

Wenn ein fester Körper dem Angriffe äusserer Kräfte ausgesetzt wird, so entsteht eine Formänderung, eine Veränderung in der gegenseitigen Lage der kleinsten Teile des Körpers. Hört die Einwirkung der äusseren Kräfte auf, so zeigt jeder Körper mehr oder weniger das Bestreben, in die frühere Form wieder zurückzukehren; diese Eigenschaft nennt man seine Elasticität. Vollkommen elastisch würde ein Körper sein, dessen Formänderung nach Beseitigung ihrer Ursache gänzlich wieder verschwinden würde und im Gegensatz hiezu müsste, wenn nach dem Aufhören der äusseren Einwirkung die Formänderung vollständig beibehalten würde, der Körper als vollkommen unelastisch zu bezeichnen sein. Obgleich es weder vollkommen elastische noch vollkommen unelastische Körper gibt, so nähern sich doch manche technisch wichtige Materialien in ihrem Verhalten denjenigen Eigenschaften, welche dem Begriff der vollkommenen Elasticität entsprechen, indem sie, wenn die Beanspruchung innerhalb gewisser Grenzen bleibt, nur sehr kleine dauernde Formänderungen erleiden. Lange Zeit entzogen sich wegen unzureichender Genauigkeit der Messinstrumente diese kleinen Formänderungen der Beobachtung und man unterschied daher bei Beanspruchung von Körpern durch äussere Kräfte zwischen bleibenden Formänderungen und solchen, welche nach dem Aufhören der Angriffnahme wieder verschwinden. Elasticitätsgrenze nannte man diejenige Grenze, nach deren Überschreiten bleibende Formänderungen eintreten, während bei Beanspruchungen unter dieser Grenze der Körper in seinen ursprünglichen Zustand zurückzukehren schien. Diese Definition hat sich indessen als unhaltbar erwiesen, indem durch die feineren Messinstrumente, die jetzt zur Verfügung stehen, namentlich durch den Bauschinger'schen Spiegelapparat, welcher Längenänderungen bis auf ein Zehntausendstel Millimeter abzulesen gestattet, festgestellt wurde, dass eine scharfe Grenze zwischen



bleibenden und gänzlich verschwindenden Formänderungen nicht existirt und dass fast alle Materialien bleibende Formänderungen schon bei verhältnissmässig geringer Belastung erleiden. Es haben aber alle Versuche, die mit den hier in Frage kommenden Materialien: Holz, Schweisseisen, Flusseisen, Stahl u. A. angestellt worden sind, zu dem weiteren wichtigen Ergebniss geführt, dass die bei genannten Stoffen erzeugten Formänderungen proportional den sie hervorbringenden Kräften sind, so lange die Beanspruchung unter einer gewissen Grenze, der Proportionalitätsgrenze bleibt. Überschreitet die Belastung diese Grenze, so sind die entstehenden Formänderungen nicht mehr proportional den Kräften, vielmehr wachsen die Formänderungen in einem anderen, stärkeren Verhältniss als die Belastungen. Da diejenigen bleibenden Formänderungen, welche unterhalb der Proportionalitätsgrenze liegen, für practische Zwecke als verschwindend klein angenommen werden können, so wird von Vielen die Bezeichnung Elasticitätsgrenze beibehalten, indessen ist dieser Begriff im Sinne der für die Proportionalitätsgrenze gegebenen Definition aufzufassen.

Wird die Beanspruchung eines Körpers fortgesetzt gesteigert, so findet schliesslich eine Trennung der einzelnen Teile desselben, der Bruch, statt. Die Belastung, bei welcher die Trennung beginnt, wird Bruchbelastung genannt; der hiebei vom Körper geleistete Widerstand ist seine Festigkeitsgrenze oder Festigkeit.

Spannung nennt man die in irgend einem Querschnitte des Körpers pro Flächeneinheit auftretende Beanspruchung. Die der Bruchbelastung entsprechende Spannung wird als Bruchspannung oder Festigkeitscoefficient bezeichnet.

## § 1. Zug- und Druckfestigkeit.

Wenn auf einen stabförmigen Körper in seiner Längsaxe eine Kraft ziehend oder drückend wirkt, so entsteht eine Längenänderung  $\Delta l$ .

Man kann bei constantem Querschnitt und wenn das Stabgewicht vernachlässigt wird, annehmen, dass diese Längenänderung direct proportional sei der Kraft  $P$  und der Stablänge  $l$ , indirect aber der Querschnittsfläche  $F$  und einer Grösse  $\varepsilon$ , Elasticitätsmodul genannt, welche den Widerstand des Materials gegen elastische Formänderung auszudrücken bestimmt ist. So ergibt sich für die Längenänderung der Ausdruck:

$$\Delta l = \frac{Pl}{F\varepsilon} \quad (1)$$

Diese Gleichung drückt zwar kein absolut richtiges Gesetz aus, doch kann sie erfahrungsmässig so lange als richtig gelten, als durch die Kraft



P die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird. Da, wenn dies der Fall ist,  $\frac{\Delta l}{P}$  constant bleibt, so ist auch der Elasticitätsmodul innerhalb der Proportionalitätsgrenze constant.

Für  $F = 1$  und  $\Delta l = 1$  wird  $\varepsilon = P$ , d. h. der Elasticitätsmodul ist gleich derjenigen Kraft pro Flächeneinheit, also derjenigen Spannung, welche erforderlich wäre, um einen Stab im Betrag seiner ganzen anfänglichen Länge zu verlängern oder zu verkürzen, vorausgesetzt, dass solche Längenänderungen innerhalb der Proportionalitätsgrenze möglich wären.

Bezeichnen  $\alpha'$  und  $\beta'$  die Beanspruchungen gezogener bezw. gedrückter Stäbe pro Flächeneinheit Querschnittsfläche, so geht vorstehende Gleichung über in:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\alpha'}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\beta'}{\varepsilon} \quad (2)$$

d. h. die Verlängerung oder Verkürzung pro Längeneinheit ist gleich dem Quotienten aus der Zug- oder Druckspannung und dem Elasticitätsmodul.

Für die Festsetzung der Dimensionen oder der Tragfähigkeit aller Constructionen ist vor Allem die Bedingung massgebend, dass durch die grösste vorkommende Belastung die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten werde, d. h. merkbare bleibende Formänderungen ausgeschlossen seien. Da indessen die Bestimmung der Proportionalitätsgrenze nicht für alle Materialien mit gleicher Schärfe möglich ist, da ferner diese Grenze bei einigen Materialien (Schmiedeeisen, Stahl u. a.) durch äussere Einwirkungen, als: wiederholte Anstrengungen, Stösse, verändert werden kann, so ist eine einheitliche Bestimmung der Dimensionen der Constructionsteile mittels der Proportionalitätsgrenze nicht ausführbar und es dient deswegen allgemein die präciser sich darstellende Festigkeitsgrenze als Ausgangspunkt für die Berechnung.

Bezeichnen  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  die Coefficienten der Zug- und Druckfestigkeit, F die Querschnittsfläche des auf Zug oder Druck beanspruchten Stabes und kann angenommen werden, dass die Belastung P sich gleichmässig über den Querschnitt verteile, so entsprechen die Gleichungen:

$$F \alpha_0 = P \quad \text{und} \quad F \beta_0 = P$$

dem Gleichgewichtszustand beim Beginne des Bruches. Selbstverständlich sind dieselben für die Querschnittsbestimmung zunächst noch nicht verwendbar, denn die geringste Vergrösserung von P würde ein Zerreißen oder Zerdrücken zur Folge haben. Da vielmehr für alle Constructionsteile ein gewisser  $\nu$ facher Sicherheitsgrad erforderlich ist, so pflegt man statt der Festigkeitscoefficienten  $\alpha_0$  und  $\beta_0$  nur die  $\nu^{\text{ten}}$  Theile derselben:  $\frac{\alpha_0}{\nu} = \alpha$  bezw.

$\frac{\beta_0}{\nu} = \beta$  als „zulässige“ Zug- und Druckspannung der Berechnung zu Grund zu legen.



Somit bestehen für die Berechnung der Querschnitte gezogener sowie kurzer gedrückter Stäbe die Gleichungen:

$$F\alpha = P \quad \text{und} \quad F\beta = P \quad (3)$$

und bei der Wahl des Sicherheitscoefficienten  $\nu$  ist zu berücksichtigen, dass durch  $\alpha$  und  $\beta$  die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten wird.

*Beispiel 1.* Eine Hängesäule aus Fichtenholz hat eine Zugwirkung von 40625 kg aufzunehmen. Wie gross muss die Seite  $a$  des quadratischen Querschnitts gemacht werden, wenn die zulässige Zugspannung des Fichtenholzes 65 kg pro qcm beträgt?

$$\text{Nach Gl. 3 ist } F = \frac{P}{\alpha}$$

$$\text{oder} \quad a^2 = \frac{40625}{65},$$

$$\text{daher } a^2 = 625 \quad \text{und} \quad a = 25 \text{ cm.}$$

*Beispiel 2.* Ein schmiedeiserner Stab ist einer ruhenden Zugbelastung von 15000 kg 'ausgesetzt. Welchen Durchmesser  $d$  muss der kreisrunde Querschnitt des Stabes erhalten, wenn für Schmiedeisen  $\alpha = 750$  kg pro qcm angenommen wird?

$$\text{Nach Gl. 3 ist } \frac{d^2\pi}{4} \cdot 750 = 15000,$$

$$\text{daher } d^2\pi = 80 \quad \text{und} \quad d = 5 \text{ cm.}$$

*Beispiel 3.* Eine gusseiserne Platte dient zur Auflagerung eines Trägers, welcher auf dieselbe einen in ihrer lotrechten Schweraxe angreifenden Druck  $P = 150000$  kg überträgt. Welche Breite  $b$  muss die 20 cm lange Platte erhalten, wenn die zulässige Druckspannung des Gusseisens  $\beta = 500$  kg pro qcm nicht überschritten werden soll?

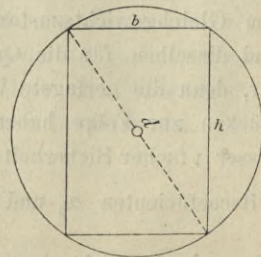
$$\text{Nach Gl. 3 ist } 20 b \cdot 500 = 150000,$$

$$\text{daher } b = 15 \text{ cm.}$$

*Beispiel 4.* Aus einem Rundholz vom Durchmesser  $d$  des kreisförmigen Querschnitts ist ein vierkantiger Balken zu schneiden, der als Pfosten zur Aufnahme von Druckbeanspruchungen bestimmt ist. Welches Verhältniss  $b : h$  (Fig. 1) der Seiten des rechteckförmigen Querschnitts dieses Pfostens wird mit Rücksicht auf Widerstand im Sinne der reinen Druckfestigkeit das günstigste sein?

Der Druckwiderstand des Balkenquerschnitts ist proportional der Querschnittsfläche  $F = bh$   
 $= b \sqrt{d^2 - b^2} = \sqrt{b^2 (d^2 - b^2)}$ .

Fig. 1.





Dieser Wert erreicht sein Maximum, wenn

$$d \frac{b^2 (d^2 - b^2)}{d b} = 0,$$

wenn also  $b^2 = \frac{d^2}{2}$  oder  $b = \frac{d}{\sqrt{2}}$ , d. h. von allen Rechtecken, welche dem gegebenen Kreis einbeschrieben werden können, gewährt das Quadrat als Pfostenquerschnitt die grösste Sicherheit gegen Zerdrücken.

## § 2. Schubfestigkeit.

Ein stabförmiger Körper wird in einem Querschnitt auf Schubfestigkeit beansprucht, wenn zu beiden Seiten der Querschnittsebene und unmittelbar neben derselben zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte wirken, welche die Stabachsen senkrecht schneiden. Die Kräfte sind bestrebt, den Stab nach dem Querschnitt zu verschieben bzw. abzuscheren. Man kann mit einer für die Anforderungen der Praxis hinreichenden Genauigkeit annehmen, dass der Widerstand gegen Abscheren, wie jener gegen Zerreißen und Zerdrücken, direct proportional sei der Grösse der Trennungsfläche, was einer gleichmässigen Verteilung der Schubspannungen über den ganzen Querschnitt entspricht. Bezeichnen daher  $P$  die Schubkraft,  $F$  die Querschnittsfläche und  $\gamma_0$  den Festigkeitscoefficienten der Schubfestigkeit, so enthält die Gleichung:

$$F \gamma_0 = P$$

die Beziehungen zwischen Angriff und Widerstand im Augenblick der Trennung.

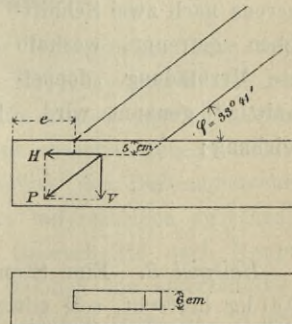
Mit Rücksicht auf den erforderlichen  $\nu$ -fachen Sicherheitsgrad bestimmen sich  $F$  oder  $P$  aus der Gleichung:

$$F \cdot \gamma = P, \tag{4}$$

in welcher  $\gamma = \frac{\gamma_0}{\nu}$  die zulässige Schubspannung bezeichnet.

*Beispiel 1.* Der Sparren eines Dachbinders, gegen den Horizont um den Winkel  $\varphi = 33^\circ 41'$  geneigt (Fig. 2), ist durch den sog. schrägen Zapfen mit dem ihm zum Auflager dienenden Dachbalken verbunden. Breite und Tiefe des Zapfens sind 6 cm und 5 cm. Welche Länge  $e$  muss der Balkenkopf vor dem Zapfen erhalten, wenn der Sparrendruck  $P$  2000 kg beträgt und wenn die zulässige Scherbeanspruchung des Fichtenholzes (parallel der Faserrichtung)  $\gamma = 6$  kg pro qcm nicht überschritten werden soll?

Fig. 2.





$P$  zerlegt sich in eine wagrechte Seitenkraft  $H = P \cos \varphi = 2000 \cos 33^{\circ}41' = 1664 \text{ kg}$  und in eine lotrechte Seitenkraft  $V = P \sin 33^{\circ}41' = 2000 \sin 33^{\circ}41' = 1109 \text{ kg}$ . Durch erstere abzüglich des Reibungswiderstandes wird der Balkenkopf auf Abscheren beansprucht, daher die Scherkraft  $H' = H - \mu V$ , wenn  $\mu$  den Reibungscoefficienten bezeichnet.

Ist  $\mu = 0,4$ , so ist  $H' = 1664 - 0,4 \cdot 1109 = 1221 \text{ kg}$ . Die auf Abscheren beanspruchte Fläche des Balkens, aus drei Rechtecken bestehend, ist  $6e + 2,5e = 16e \text{ qcm}$ , daher nach Gl. 4:

$$16e\gamma = 1221$$

und

$$e = 12,7 \text{ cm.}$$

*Beispiel 2.* Zwei auf Zug beanspruchte schmiedeiserne Stäbe (Fig. 3) sind durch einen Schraubenbolzen mit einander verbunden, der hiedurch auf Scherfestigkeit in Angriff genommen wird.

Der Durchmesser  $d$  des kreisförmigen Bolzenquerschnitts ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \gamma = P.$$

Auch die Stäbe werden auf Schubfestigkeit beansprucht, indem ein Ausschlitz der ringförmig ausgeschmiedeten Stab-Enden angestrebt wird. In dieser Beziehung dient zur Bestimmung der Dimension  $e$  die Gleichung:

$$2ae\gamma = P.$$

Die Bolzenverbindung Fig. 3 wird einschnittig genannt, weil hier der Bolzen nur nach einer Schnittfläche auf Abscheren beansprucht wird. Bei der Anordnung Fig. 4 wird

der Bolzen im Fall des Abscherens nach zwei Schnittflächen getrennt, weshalb diese Verbindung „doppelschnittig“ genannt wird. Hier ergibt sich der Bolzendurchmesser aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \gamma = \frac{1}{2} P.$$

*Beispiel 3.* Eine Stange aus Schweisseisen, in welcher ein Zug von  $6000 \text{ kg}$  herrscht, soll mittels eines Bolzens an einem  $\perp$  förmigen Dachbinder (Fig. 5) befestigt werden. Die zulässige Beanspruchung des Schweisseisens

Fig. 3.

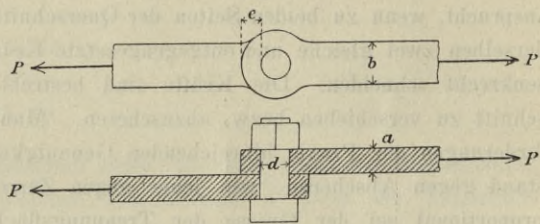
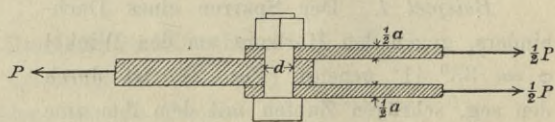


Fig. 4.





auf Schub sei 600 kg pro qcm. Welchen Durchmesser  $d$  muss der Bolzen erhalten?

Geschieht die Befestigung in der durch Fig. 5 angedeuteten Weise durch einen einschnittigen Bolzen, so ergibt sich  $d$  nach Gl. 4 aus:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot 600 = 6000$$

$$d = 3,6 \text{ cm.}$$

Fig. 5.

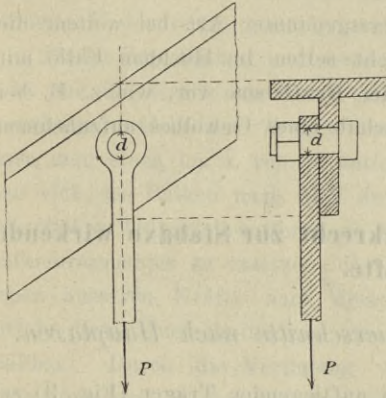
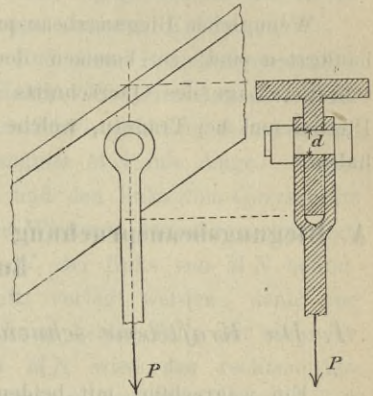


Fig. 6.



Ist das Ende der Zugstange gabelförmig ausgeschmiedet, den Steg des  $\perp$ -Eisens beiderseits umfassend (Fig. 6), so verteilt sich die Scherkraft auf zwei Bolzenquerschnitte, der Bolzen wird doppelschnittig und man erhält:

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot 600 = 6000$$

und

$$d = 2,5 \text{ cm.}$$

### § 3. Biegungsfestigkeit.

Ein stabförmiger Körper wird auf Biegung beansprucht, wenn auf den Stab in einer durch dessen Längsaxe gelegten Ebene äussere Kräfte wirken, die unter sich im Gleichgewicht sind. Die Kräfte können entweder senkrecht zur Stabaxe gerichtet oder auch beliebig gegen dieselbe geneigt sein. In beiden Fällen ist die Lage der Kraftebene gegenüber den Balkenquerschnitten von Belang. Man hat in dieser Beziehung zu unterscheiden zwischen denjenigen Fällen, in welchen die Kraftebene die Querschnitte nach Hauptaxen schneidet (Fig. 7) und denjenigen Fällen, in welchen die Querschnitte von der Kraftebene nicht nach Hauptaxen getroffen werden (Fig. 8). Über den

Begriff „Hauptaxen“ siehe § 3, A, I, 5. Hier sei nur bemerkt, dass, wenn ein Querschnitt Symmetrieaxen hat, diese zugleich Hauptaxen sind.

Fig. 7.

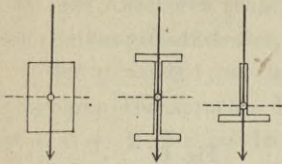
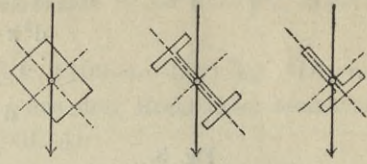


Fig. 8.



Wenngleich Biegungsbeanspruchungen erstgenannter Art bei weitem die häufigsten sind, so kommen doch auch nicht selten im Hochbau Fälle mit schräger Lage des Querschnitts gegenüber der Kraftebene vor, wie z. B. bei Pfetten und bei Trägern, welche den Seitenschub eines Gewölbes aufzunehmen haben.

### A. Biegungsbeanspruchung durch senkrecht zur Stabaxe wirkende äussere Kräfte.

#### I. Die Kraftebene schneidet die Querschnitte nach Hauptaxen.

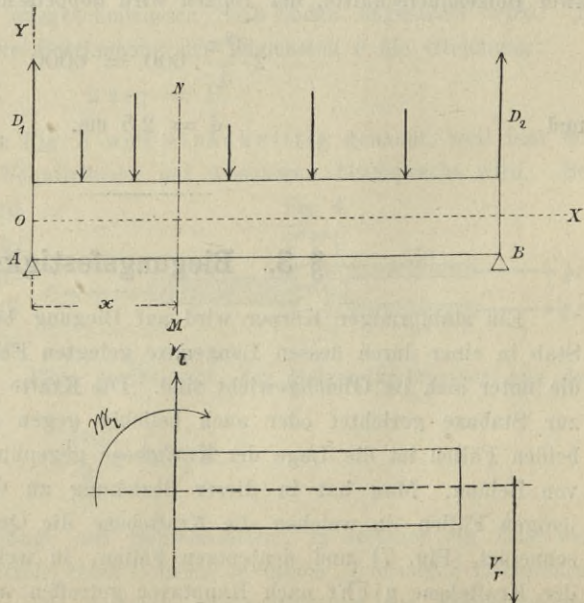
Ein wagrechter, mit beiden Enden frei aufliegender Träger (Fig. 9) sei durch lotrechte Lasten beansprucht, welche in einer durch die Balkenaxe gehenden Ebene (Kraftebene) wirken. Diese Ebene sei zugleich Längs-Symmetrieebene des Trägers,

Fig. 9.

so dass die Kraftebene die Trägerquerschnitte nach Symmetrieaxen (Hauptaxen) schneidet.

In Folge der Belastung entstehen in A und B Auflagerdrücke. Durch Anbringung der diesen Auflagerdrücken gleichen und entgegengesetzten Auflagerreactionen, die die Wirkungen der Stützen ersetzen, denke man sich den Träger in's freie Gleichgewicht gebracht.

Ist dies der Fall, so muss für jeden beliebigen, als Momenten-





punkt gewählten Punkt der Kraftebene die Summe der statischen Momente sämtlicher Kräfte gleich Null sein. Daraus folgt, dass für jeden Balkenquerschnitt die algebraische Summe  $\mathcal{M}_l$  der statischen Momente der links vom Querschnitt befindlichen äusseren Kräfte bezüglich des Querschnittschwerpunktes gleich und entgegengesetzt ist der Summe  $\mathcal{M}_r$  der statischen Momente der rechts vom Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte bezüglich des Querschnittschwerpunktes.

Desgleichen ist für jeden Querschnitt die Resultierende  $V_l$  der links von demselben befindlichen äusseren Kräfte gleich und entgegengesetzt der Resultierenden  $V_r$  der rechts vom Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte.

Durch den Balken und dessen Festigkeit sind diese Beziehungen ermöglicht und die Kräfte zu einem „System“ vereinigt. Um die Art der Beanspruchung, welche der Träger hiebei an jeder Stelle erleidet, festzustellen, fasse man einen um  $x$  von  $A$  entfernten Querschnitt  $MN$  in's Auge. Denkt man sich den Balken nach  $MN$  durchgeschnitten und den links vom Querschnitt befindlichen Trägerteil entfernt, so muss, um die Wirkung des weggenommenen Balkenfragmentes zu ersetzen, die Resultierende  $V_l$  der links von  $MN$  befindlichen äusseren Kräfte nach diesem Querschnitt verlegt werden, denn nur mittels dieses Querschnitts war eine Wechselwirkung beider Teile auf einander denkbar. Durch die Verlegung von  $V_l$  nach  $MN$  wird das rechtsseitige Balkenfragment in dem früheren Gleichgewichtszustand erhalten, denn  $V_l$  ist gleich und entgegengesetzt  $V_r$ . Da indessen eine Kraft ( $V_l$ ) in einem ebenen System, sofern an dem vorherigen Zustand nichts geändert werden soll, nur dann parallel ihrer anfänglichen Richtung verschoben werden kann, wenn ein Kräftepaar hinzugefügt wird, dessen Moment gleich dem Product aus der Kraft und der Länge ist, auf welche die Verschiebung erfolgte, so wirkt auf  $MN$  noch ein Kräftepaar, dessen Moment gleich  $V_l$  mal Entfernung dieser Kraft vom Querschnitt, gleich  $\mathcal{M}_l$  ist.

Es geht daraus hervor, dass die Beanspruchung des Balkens für jeden Querschnitt sich zusammensetzt aus einer lotrecht wirkenden Scherkraft, „Transversalkraft“, auch „Vertikalkraft“ genannt,  $V_l (= -V_r)$  und einem Drehmoment, „Angriffsmoment“  $\mathcal{M}_l (= -\mathcal{M}_r)$ .

$\mathcal{M}_l$  und  $\mathcal{M}_r$  beanspruchen den Balken im betrachteten Querschnitt in der durch Fig. 10 angedeuteten Weise, auch gibt es Fälle, in welchen die Bean-

Fig. 10.

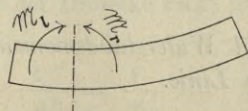
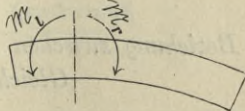


Fig. 11.



spruchung nach Fig. 11 erfolgt. Es ist aber nach dem Vorstehenden gleichgültig, ob man die Transversalkraft und das Angriffsmoment unter Zuggrund-



legung der links oder der rechts vom Querschnitt befindlichen äusseren Kräfte bestimmt. Im Folgenden soll für gewöhnlich als Transversalkraft  $V_x$  und Angriffsmoment  $\mathfrak{M}_x$  eines Querschnitts die Resultirende bzw. die Momentensumme der links vom Querschnitt befindlichen Kräfte verstanden werden. Ist  $V_x$  aufwärts gerichtet, so soll diese Richtung als positiv gelten und in Übereinstimmung damit wird eine Momentendrehrichtung, welche dem Sinne der Bewegung des Uhrenzeigers entspricht, als positiv angenommen werden.

*Zusammenhang zwischen Angriffsmoment und Transversalkraft.*

Bezeichnen  $\mathfrak{M}$  das Angriffsmoment eines Querschnitts  $x$ ,  $V_x$  die Transversalkraft desselben und  $v$  die Entfernung der letzteren vom Querschnitt, so ist:

$$\mathfrak{M}_x = V_x v.$$

Rückt der Querschnitt um die unendlich kleine Grösse  $dx$  weiter, so ändert sich  $\mathfrak{M}_x$  um  $d\mathfrak{M}_x$  und  $V_x v$  kann gleich  $V_x(v + dx) + q dx \frac{dx}{2}$  gesetzt werden, wenn man sich die an der Stelle  $x$  vorhandene Belastung durch eine gleichwertige, auf die unendlich kleine Strecke  $dx$  gleichmässig verteilte Last  $q$  ersetzt denkt. Daher ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_x + d\mathfrak{M}_x = V_x(v + dx) + q \frac{d^2 x}{2}$$

oder: 
$$d\mathfrak{M}_x = V_x dx + \frac{q}{2} d^2 x.$$

$\frac{q}{2} d^2 x$  ist eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung und verschwindet gegenüber den übrigen Grössen der Gleichung.

Es ist demnach

$$d\mathfrak{M}_x = V_x dx$$

oder: 
$$\frac{d\mathfrak{M}_x}{dx} = V_x. \quad (5)$$

Hieraus folgt, dass, wenn  $V_x = 0$ , auch  $\frac{d\mathfrak{M}_x}{dx} = 0$ , dass also jener Wert von  $x$ , für welchen die Transversalkraft gleich Null ist, das Angriffsmoment zum Maximum macht.

*Beziehung zwischen Angriffsmoment und Widerstandsmoment,  
Gleichung der elastischen Linie.*

Durch das Angriffsmoment je eines Querschnitts wird eine Drehung desselben bewirkt oder angestrebt. Betrachtet man zwei benachbarte Querschnitte (Fig. 12), welche vor der Belastung des Trägers einander parallel waren, so



werden dieselben, sobald unter Einfluss der Belastung die Biegung eintritt, einen Winkel mit einander einschliessen. Dies hat zur Folge, dass die oberen Fasern verkürzt, die unteren verlängert werden. Die oberen Fasern müssen also gedrückt, die unteren Zugwirkungen ausgesetzt sein. Zwischen den gedrückten und den gezogenen Faserschichten wird sich eine Faserschicht befinden, welche weder gezogen noch gedrückt ist und diese wird als neutrale Faserschicht bezeichnet. Die Schnittlinie dieser Schicht mit je einem ins Auge gefassten Querschnitt heisst die Neutralaxe oder Nullaxe des Querschnitts. Die hiebei parallel der Trägeraxe oder normal zu den Querschnitten auftretenden Druck- und Zugspannungen werden axiale Spannungen oder Normalspannungen genannt.

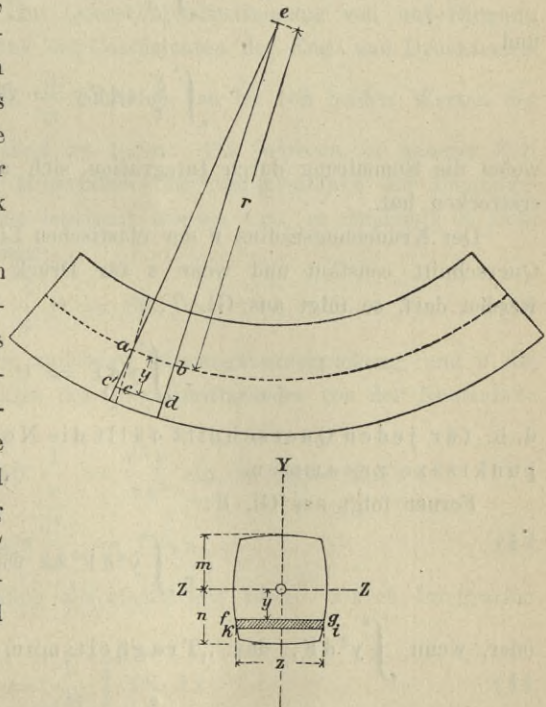
Die Normalspannungen, welche in den einzelnen Flächenteilen eines Querschnitts auftreten, sind verschieden je nach ihrem Abstand von der Neutralaxe. Zur Bestimmung der Grösse dieser Normalspannungen kann man die durch die Erfahrung hinreichend bestätigte Annahme machen, dass innerhalb der Proportionalitätsgrenze die Querschnitte des deformirten Balkens noch eben bleiben und in ihrer Form nicht verändert werden. Hieraus folgt, dass die Normalspannungen proportional sind den Abständen von der Neutralaxe und dass alle Querschnittelemente, die die gleiche Entfernung von der Neutralaxe besitzen, gleich stark beansprucht sind.

Betrachtet man eine im Abstände  $y$  von der Neutralaxe befindliche Faser eines von zwei benachbarten Querschnitten begrenzten Balkenelementes, deren ursprüngliche Länge  $cd$  gleich  $ab$  war und welche in Folge der Biegung eine Längenänderung um  $cc'$  erfahren hat, so ist wegen Ähnlichkeit der Dreiecke  $cac'$  und  $bea$ :

$$\frac{cc'}{ab} = \frac{y}{r},$$

wenn  $r$  den Krümmungsradius der jetzt gekrümmten neutralen Faserschicht, der sog. elastischen Linie, bezeichnet. Ist  $\alpha'$  die der Längenänderung  $cc'$  entsprechende Normalspannung, so folgt aus Gl. 2:

Fig. 12.



$$\frac{c c'}{ab} = \frac{\alpha'}{\varepsilon}$$

und:

$$\alpha' = \frac{y}{r} \varepsilon. \quad (6)$$

Die Normalspannungen, deren allgemeinen Ausdruck vorstehende Gleichung darstellt, sind zum Teil Zug-, zum Teil Druckspannungen. Da wagrechte äussere Kräfte nicht vorhanden sind, so erfordert der Gleichgewichtszustand, dass die Summe sämtlicher Normalspannungen eines jeden Querschnitts gleich Null ist, d. h. dass die Summe der Zugspannungen gleich ist der Summe der Druckspannungen. Die Normalspannungen bilden also ein Kräftepaar und das Moment derselben muss gleich und entgegengesetzt sein dem Angriffsmoment.

Bezeichnet  $dF$  den Flächeninhalt eines zur Neutralaxe des Querschnitts parallelen und von derselben um  $y$  entfernten Flächenstreifens  $fgik$ , dessen Breite  $z$  und dessen Höhe  $dy$  ist, so hat man

$$\int \frac{y}{r} \varepsilon dF = 0 \quad (7)$$

und

$$\int \frac{y}{r} \varepsilon dF y = \Theta \mathfrak{K}_x, \quad (8)$$

wobei die Summierung durch Integration sich auf den ganzen Querschnitt zu erstrecken hat.

Der Krümmungsradius  $r$  der elastischen Linie ist für einen und denselben Querschnitt constant und wenn  $\varepsilon$  für Druck und Zug gleich angenommen werden darf, so folgt aus Gl. 7:

$$\int y dF = 0 \quad (9)$$

d. h. für jeden Querschnitt fällt die Neutralaxe mit der Schwerpunktsaxe zusammen.

Ferner folgt aus Gl. 8:

$$\frac{\varepsilon}{r} \int y^2 dF = \Theta \mathfrak{K}_x,$$

oder, wenn  $\int y^2 dF$ , das „Trägheitsmoment“, mit  $\Theta$  bezeichnet wird:

$$\frac{\varepsilon}{r} \Theta = \Theta \mathfrak{K}_x. \quad (10)$$

Da nach Gl. 6  $\frac{\varepsilon}{r} = \frac{\alpha'}{y}$ , so erhält man:



$$\frac{\alpha'}{y} \Theta = \varpi \tau_x,$$

mittels welcher Gleichung bei gegebenem  $\varpi \tau_x$  und bekanntem  $\Theta$  die Spannung berechnet werden kann, die in einem gegebenen Querschnitt in der Entfernung  $y$  von der neutralen Faserschichte herrscht.

In gleicher Weise gilt für den gedrückten Querschnittsteil:

$$\frac{\beta'}{y} \Theta = \varpi \tau_x,$$

wenn  $\beta'$  die Druckspannung in der Entfernung  $y$  von der neutralen Faserschichte bezeichnet. Die grössten Normalspannungen finden in denjenigen Querschnittselementen statt, welche den grössten Abstand von der Neutralaxe besitzen. Hier soll die zulässige Beanspruchung nicht überschritten werden. Ist daher  $n$  der Abstand des äussersten Punktes des gezogenen Querschnittsteiles und  $m$  der Abstand des äussersten Punktes des gedrückten Querschnittsteiles von der Neutralaxe, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\alpha}{n} \Theta = \varpi \tau_x \quad \text{und} \quad \frac{\beta}{m} \Theta = \varpi \tau_x. \quad (11)$$

Diese Gleichungen dienen zur Querschnittsbestimmung von auf Biegung beanspruchten Trägern auf Grund der Coefficienten der Zug- und Druckfestigkeit. Sind die Grössen  $\frac{\alpha}{n}$  und  $\frac{\beta}{m}$  ungleich, so ist von beiden Werten der kleinere der Berechnung zu Grund zu legen. Da indessen in neuerer Zeit für alle in Frage kommenden Materialien die Coefficienten  $\delta$  der Biegezugfestigkeit durch directe Versuche bestimmt worden sind, so empfiehlt es sich, für die Berechnung die Gleichung:

$$\frac{\delta}{n} \Theta = \varpi \tau_x \quad (12)$$

zu verwenden, in welcher  $\delta$  die zulässige Biegezugbeanspruchung und  $n$  die Entfernung des äussersten Punktes des Querschnittsrandes von der Neutralaxe bezeichnen.

Führt man in Gleichung 10  $\frac{1}{r} = \frac{d^2 y}{d x^2}$  ein, so ergibt sich:

$$\varepsilon \Theta \frac{d^2 y}{d x^2} = \varpi \tau_x \quad (13)$$

als allgemeine Differentialgleichung der elastischen Linie. Durch Integration erhält man:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon \Theta} \int \varpi \tau_x d x \quad (14)$$

und durch nochmaliges Integriren:

$$y = \frac{1}{\varepsilon \Theta} \int \int \varpi \tau_x d x. \quad (15)$$

Man findet die Stelle der grössten Einbiegung, wenn man denjenigen Wert von  $x$  bestimmt, für welchen  $\frac{dy}{dx}$  der Gl. 14 gleich Null wird. Derselbe Wert von  $x$ , in Gl. 15 eingeführt, gibt den Wert der grössten Einbiegung.

### Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment eines Querschnitts bezüglich einer Axe ist nach Obigem gleich der Summe der Producte aus allen Flächenelementen des Querschnitts und den Quadraten ihrer Abstände von dieser Axe. Demnach ist das Trägheitsmoment von der Grösse und Form des Querschnitts abhängig und es können für bestimmte Querschnittsformen die allgemeinen Ausdrücke der Trägheitsmomente aufgestellt werden.

In vielen Fällen dient folgender Satz zur Erleichterung der Berechnung:

Das Trägheitsmoment eines Querschnitts bezüglich einer beliebigen Axe  $Z'Z'$  (Fig. 13) ist gleich dem Trägheitsmoment bezüglich der zu  $Z'Z'$  parallelen Schwerpunktsaxe  $ZZ$  vermehrt um das Product aus Querschnittsfläche und Quadrat des Abstandes beider Axen.

Bezeichnet nämlich  $\Theta_z$  das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Schwerpunktsaxe  $ZZ$  und  $\Theta_{z'}$  das Trägheitsmoment desselben Querschnitts bezüglich der Axe  $Z'Z'$ , welche im Abstand  $a$  zu  $ZZ$  parallel ist, so hat man:

$$\Theta_z = \int y^2 dF$$

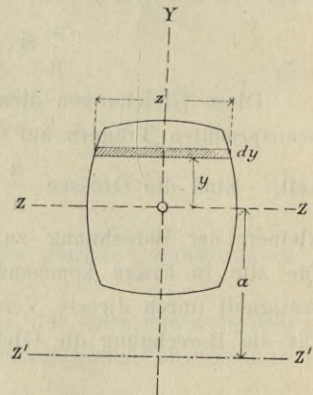
und

$$\begin{aligned} \Theta_{z'} &= \int (y + a)^2 dF \\ &= \int y^2 dF + 2a \int y dF + a^2 \int dF. \end{aligned}$$

Da  $ZZ$  eine Schwerpunktsaxe, so ist  $\int y dF = 0$ , da ferner  $\int dF = F$ , so erhält man:

$$\Theta_{z'} = \Theta_z + a^2 F. \quad (16)$$

Fig. 13.





1. Rechnerische Bestimmung der Trägheitsmomente.

a) Rechteck

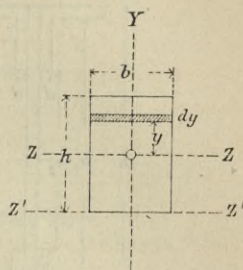
Für den rechteckförmigen Querschnitt, bezogen auf die Schwerpunktsaxe ZZ (Fig. 14) ist:

Fig. 14.

$$\Theta_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dF,$$

oder, da  $dF = b dy$ ,

$$\Theta = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{b}{3} \left[ \frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8} \right] = \frac{bh^3}{12}.$$



Das Trägheitsmoment desselben Querschnitts bezüglich der Axe Z'Z', welche mit einer der Kanten zusammenfällt, ist:

$$\Theta_{z'} = b \int_0^h y^2 dF = \frac{bh^3}{3}.$$

b) Querschnitte, welche aus Rechtecken zusammengesetzt sind.

Das Trägheitsmoment des Querschnitts Fig. 15 bezüglich seiner Schwerpunktsaxe ist gleich der Differenz der Trägheitsmomente des ganzen Rechtecks acde und des inneren Rechtecks fgik, daher:

$$\Theta = \frac{b}{12} (h^3 - h_1^3).$$

Fig. 15.

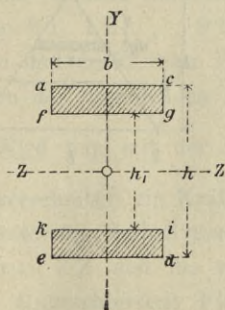
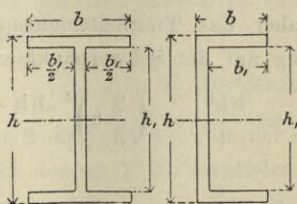


Fig. 16.



Für den I-förmigen und C-förmigen Querschnitt (Fig. 16) erhält man in gleicher Weise:

$$\Theta = \frac{1}{12} (bh^3 - b_1 h_1^3).$$

Das Trägheitsmoment des Blechträgerquerschnitts (Fig. 17) ist:

$$\Theta = \frac{1}{12} (bh^3 - b_1h_1^3 - 2dh_2^3).$$

Fig. 17.

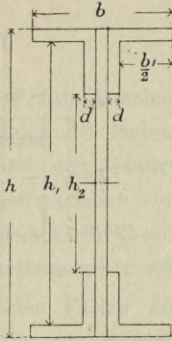
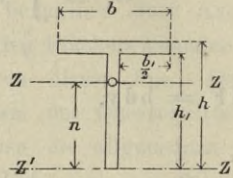


Fig. 18.



Ist das Trägheitsmoment eines T-Querschnitts (Fig. 18) zu bestimmen, so berechnet man zunächst das Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich einer durch die Unterkante gelegten Axe  $Z'Z'$ :

$$\Theta_{z'} = \frac{1}{3} (bh^3 - b_1h_1^3).$$

Sodann ergibt sich nach Gl. 16 das Trägheitsmoment bezüglich der Schwerpunktsaxe  $ZZ$ :

$$\Theta_z = \Theta_{z'} - n^2F.$$

c) Dreieck (Fig. 19).

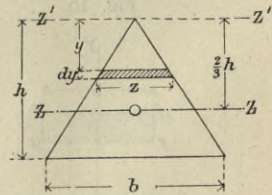
Bezüglich der Axe  $Z'Z'$  ist

$$\Theta_{z'} = \int_0^h zy^2 dy = \int_0^h \frac{yb}{h} y^2 dy = \frac{bh^3}{4}.$$

Daher das Trägheitsmoment des Dreiecks in Bezug auf die Schwerpunktsaxe  $ZZ$ :

$$\Theta_z = \frac{bh^3}{4} - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{1}{36} bh^3.$$

Fig. 19.



d) Kreis (Fig. 20).

Das Trägheitsmoment, bezogen auf die Schwerpunktsaxe  $ZZ$  ist:

$$\Theta = \int_{-r}^{+r} zy^2 dy,$$



oder, da  $z = 2r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  und  $dy = r \cos \varphi d\varphi$ ,

$$\Theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r \cos \varphi (r \sin \varphi)^2 r \cos \varphi d\varphi,$$

$$\Theta = 4r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$\Theta = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Fig. 20.

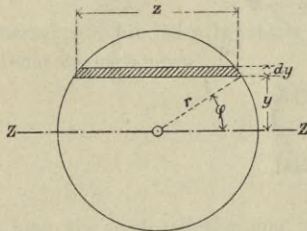
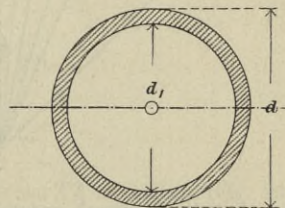


Fig. 21.



Für die kreisförmige Ringfläche (Fig. 21, Röhrenquerschnitt) ist:

$$\Theta = \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4).$$

## 2. Graphische Bestimmung der Trägheitsmomente.\*)

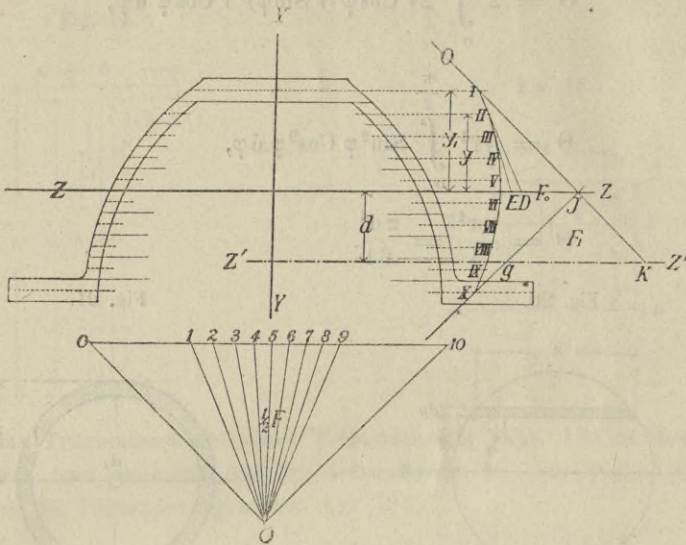
Man zerlegt die Querschnittsfläche parallel der Axe  $Z'Z'$ , bezüglich deren das Trägheitsmoment gefunden werden soll (Fig. 22), in eine hinreichende Anzahl von Lamellen, bestimmt die Flächen derselben, welche als Längen 0 1, 1 2 . . . 9 10 auf einer zu  $Z'Z'$  parallelen Geraden aufgetragen werden und denkt diese Flächen als zur Axe parallele Kräfte in den Schwerpunkten der betreffenden Lamellen angebracht.

Wird nun mit der Poldistanz  $\frac{1}{2} F = \frac{O 10}{2}$  (wenn F die Gesamtfläche des Querschnitts) ein Kräfte- und Seilpolygon construiert, so gibt der Schnitt J der äussersten Seilpolygonseiten einen Punkt der zu  $Z'Z'$  parallelen Schwerpunktsaxe ZZ und die von diesen Seilpolygonseiten sammt dem Seilpolygon selbst eingeschlossene Fläche  $F_0$  liefert, mit F multiplicirt, das Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich der Schwerpunktsaxe.

\*) Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructions, Zeitschrift des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover 1870.

Denkt man sich nämlich je zwei aufeinanderfolgende Seilpolygonseiten, z. B. O I und I II, I II und II III u. s. f. bis zur Schwerpunktsaxe ZZ ver-

Fig. 22.



längert, so sind die hiedurch entstehenden Dreiecke IJD, II DE u. s. f. ähnlich den entsprechenden Dreiecken O 01, O 12 u. s. f. im Kräftepolygon, daher

$$\begin{aligned} JD : JI &= O1 : O0, \\ DE : DI &= 12 : O1 \end{aligned}$$

oder, wenn mit  $f_1, f_2 \dots$  die Flächen der einzelnen Lamellen und mit  $y_1, y_2 \dots$  die Abstände ihrer Schwerlinien von ZZ bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} JD : y_1 &= f_1 : \frac{1}{2} F, \\ DE : y_2 &= f_2 : \frac{1}{2} F, \end{aligned}$$

daher

$$\frac{1}{2} JD y_1 = \frac{f_1 y_1^2}{F}$$

$$\frac{1}{2} DE y_2 = \frac{f_2 y_2^2}{F}$$

d. i. Fläche  $\triangle IJD = \frac{f_1 y_1^2}{F}$ , Fläche  $\triangle II DE = \frac{f_2 y_2^2}{F}$  etc.

Die Summe der von sämtlichen Seilpolygonseiten auf solche Weise mit ZZ eingeschlossenen Dreiecke ist nun nichts Anderes, als die vom Seilpolygon und dessen äussersten Seiten eingeschlossene Fläche. Bezeichnet man dieselbe mit  $F_0$ , so ist:

$$F_0 \cdot F = \sum f y^2 = \Theta.$$



Das Trägheitsmoment  $\Theta_{z'}$  des Querschnitts bezüglich  $Z'Z'$  ist ferner

$$\Theta_{z'} = \Theta + F d^2.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke JGK und O O 10 folgt aber:

$$GK : d = F : \frac{1}{2} F$$

oder

$$GK = 2d,$$

daher die Fläche  $F_1$  des Dreiecks JGK gleich  $d^2$ .

Mithin

$$\Theta_{z'} = \Theta + F \cdot F_1$$

oder

$$\Theta_{z'} = F(F_0 + F_1). *$$

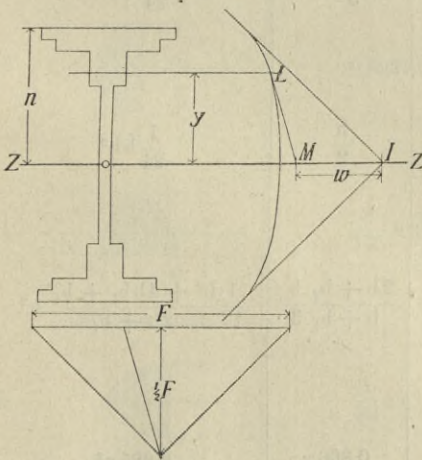
\*) Vorstehende Construction liefert auf einfache Weise auch die Werte  $\int_y^n y dF$  des Querschnitts für jedes beliebige  $y$ .  
Denn da nach oben

$$\overline{JD} = \frac{y_1 f_1}{\frac{1}{2} F} \text{ (Fig. 22),}$$

$$\overline{DE} = \frac{y_2 f_2}{\frac{1}{2} F} \text{ u. s. f.,}$$

so hat man nur in der Entfernung  $y$  eine Parallele zu  $ZZ$  zu ziehen (Fig. 23) und im Schnitt  $L$  derselben mit dem Seilpolygon eine Tangente an das letztere zu legen, um dadurch auf  $ZZ$  den Abschnitt  $JM = w$  zu erhalten, welcher die Bedingung erfüllt:

Fig. 23.



$$w \cdot \frac{1}{2} F = \int_y^n y dF.$$

Die horizontale oder verticale Schubkraft, welche bei einem auf Biegung beanspruchten Träger in der Entfernung  $y$  von der Schwerpunktsaxe eines Querschnitts und pro Längeneinheit des Trägers auftritt, ist nach Gl. 38, § 3, C:

$$S_y = \frac{V}{\Theta} \int_y^n y dF.$$

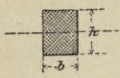
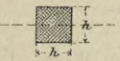
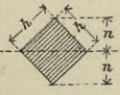
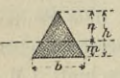
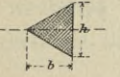
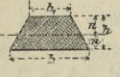
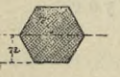
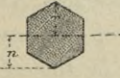
Man erhält also diese Schubkraft durch:

$$S_y = \frac{V}{\Theta} w \cdot \frac{1}{2} F = \frac{V w}{2 F_0}$$



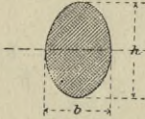
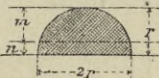
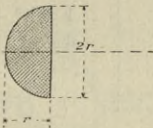
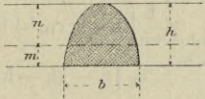
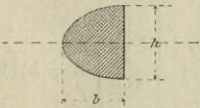
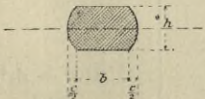
oder, wenn  $r$  der Trägheitsradius (s. Seite 37),

$$S_y = \frac{V w}{2 r^2}$$

## 3. Tabelle der Trägheits- und Widerstandsmomente einiger Querschnittsformen.

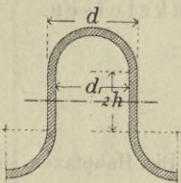
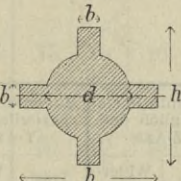
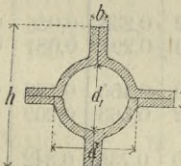
Querschnitt.	Trägheitsmoment $\Theta$ bezogen auf die Schwer- punktsaxe.	n	Widerstandsmoment $\frac{\Theta}{n}$
1 	$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} b h^2$
2 	$\frac{1}{12} h^4$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} h^3$
3 	$\frac{1}{12} h^4$	$\frac{h}{\sqrt{2}} = 0,707 h$	$\frac{h^3 \sqrt{2}}{12} = 0,118 h^3$
4 	$\frac{1}{36} b h^3$	$\frac{2}{3} h$	$\frac{1}{24} b h^2$
5 	$\frac{1}{48} b h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{24} b h^2$
6 	$\frac{1}{36} \frac{b^2 + 4b b_1 + b_1^2}{b + b_1} h^3$	$\frac{2b + b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$	$\frac{1}{12} \frac{b^2 + 4b b_1 + b_1^2}{2b + b_1} h^2$
7 	$0,5413 r^4$	$0,866 r$	$0,625 r^3$
8 	$0,5413 r^4$	r	$0,5413 r^3$



Querschnitt.	Trägheitsmoment $\Theta$ bezogen auf die Schwer- punktsaxe.	n	Widerstandsmoment $\frac{\Theta}{n}$
9 	$0,6381 r^4$	$0,924 r$	$0,6906 r^3$
10 	$\frac{1}{64} d^4 \pi = 0,0491 d^4$	$\frac{d}{2}$	$\frac{1}{32} d^3 \pi = 0,0982 d^3$
11 	$\frac{1}{64} b h^3 \pi = 0,0491 b h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{32} b h^2 \pi = 0,0982 b h^2$
12 	$0,11 r^4$	$0,5756 r$	$0,19 r^3$
13 	$0,3927 r^4$	$r$	$0,3927 r^3$
14 	$\frac{8}{175} b h^3$	$\frac{3}{5} h$	$\frac{8}{105} b h^2$
(Parabelsegment)			
15 	$\frac{1}{30} b h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{15} b h^2$
(Parabelsegment)			
16 	$\frac{1}{60} (5b + 2c) h^3$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{30} (5b + 2c) h^2$
(Rechteckförmiger Quer- schnitt mit anschliessenden Parabelsegmenten.)			

Querschnitt.	Trägheitsmoment $\Theta$ bezogen auf die Schwerpunktsaxe.	n	Widerstandsmoment $\frac{\Theta}{n}$	
17		$\frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{b (h^3 - h_1^3)}{h}$
18		$\frac{1}{12} (b h^3 - b_1 h_1^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{b h^3 - b_1 h_1^3}{h}$
19		$\frac{1}{12} (d h^3 + b d_1^3)$	$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{d h^3 + b d_1^3}{h}$
20		$\frac{1}{12} \left[ (h - h_1) b^3 + h_1 (b - b_1)^3 \right]$	$\frac{b}{2}$	$\frac{1}{6} \frac{b \left[ (h - h_1) b^3 + h_1 (b - b_1)^3 \right]}{b}$
21		$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4)$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi (d^4 - d_1^4)}{32 d}$



Querschnitt.	Trägheitsmoment $\Theta$ bezogen auf die Schwer- punktsaxe.	n	Widerstandsmoment $\frac{\Theta}{n}$
22		$h + \frac{d}{2}$	$\frac{1}{h + \frac{d}{2}} \left[ \frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) + \frac{h^2 \pi}{4} (d^2 - d_1^2) + \frac{h}{3} (d^3 - d_1^3) + \frac{2}{3} (d - d_1) h^3 \right]$
23		$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h} \left[ \frac{\pi}{6} d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$
24		$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h} \left[ \frac{\pi}{6} d^4 - d_1^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$

4. Tabellen von Profilleisen.

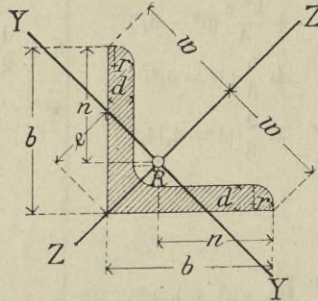
vereinbart 1879 vom Verbands deutscher Architekten- und Ingenieur-Vereine, dem Vereine deutscher Ingenieure und dem Techn. Verein für Eisenhüttenwesen. Vgl. Deutsches Normalprofilbuch für Walzeisen, im Auftrage der von den beiden erstgenannten Vereinen niedergesetzten Commission bearbeitet von Dr. F. Heinzerling und O. Intze, Aachen 1881.

Normalprofile für gleichschenklige Winkeleisen.

$$d_{\min.} = 0,1 b \text{ für } b \leq 100 \text{ mm}$$

$$d_{\min.} = \frac{1}{11} b \text{ für } b > 100 \text{ mm}$$

$$R = \frac{d_{\min.} + d_{\max.}}{2}; \quad r = \frac{R}{2}$$



Die Hauptaxen sind:  
ZZ als Winkelhalbierende.  
YY  $\perp$  ZZ.

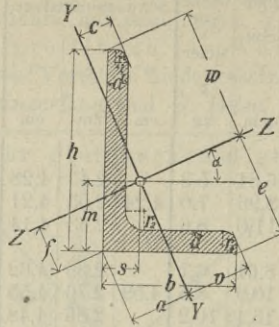
Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern				Quer-schn. F qcm	Ge-wicht per 1 Meter $\gamma$ kg	Abstände von den Hauptaxen und Schwerpunktslage			Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	b	d	R	r			w	e	n	Träg-heits-Moment $\Theta_z$	Wider-stands-Moment $\frac{\Theta_z}{w}$	Träg-heits-Moment $\Theta_y$	Wider-stands-Moment $\frac{\Theta_y}{e}$
1 1/2	15	3	3,5	2	0,81	0,63	1,06	0,69	1,02	0,252	0,238	0,066	0,096
		4			1,04	0,81		0,74	0,98	0,309	0,291	0,081	0,109
2	20	3	3,5	2	1,11	0,87	1,41	0,87	1,39	0,640	0,455	0,169	0,194
		4			1,44	1,12		0,92	1,35	0,792	0,563	0,209	0,226
2 1/2	25	3	3,5	2	1,41	1,10	1,77	1,04	1,76	1,30	0,735	0,342	0,329
		4			1,84	1,44		1,09	1,73	1,64	0,926	0,432	0,397
3	30	4	5	2,5	2,24	1,75	2,12	1,27	2,10	2,93	1,38	0,77	0,608
		6			3,24	2,53		1,30	2,02	4,01	1,89	1,05	0,755
3 1/2	35	4	5	2,5	2,64	2,06	2,47	1,44	2,48	4,80	1,94	1,26	0,876
		6			3,84	3,00		1,55	2,40	6,62	2,68	1,74	1,12
4	40	4	6	3	3,04	2,37	2,83	1,63	2,85	7,33	2,59	1,93	1,18
		6			4,41	3,46		1,74	2,77	10,2	3,60	2,68	1,54
		8			5,76	4,49		1,84	2,70	12,7	4,48	3,34	1,82
4 1/2	45	5	7	3,5	4,25	3,32	3,18	1,85	3,19	12,8	4,03	3,37	1,82
		7			5,81	4,53		1,96	3,11	16,9	5,31	4,45	2,27
		9			7,29	5,69		2,07	3,04	20,4	6,41	5,38	2,60
5	50	5	7	3,5	4,75	3,7	3,54	2,04	3,56	17,8	5,03	4,68	2,30
		7			6,51	5,1		2,14	3,49	23,5	6,64	6,18	2,89
		9			8,19	6,4		2,25	3,41	28,6	8,08	7,53	3,35
5 1/2	55	6	8	4	6,24	4,9	3,88	2,26	3,91	28,2	7,26	7,43	3,29
		8			8,16	6,4		2,36	3,83	35,7	9,18	9,38	3,99
		10			10,00	7,8		2,46	3,76	42,6	11,0	11,2	4,56



Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern				Querschn. F qcm	Gewicht per 1 Meter p kg	Abstände von den Hauptaxen und Schwerpunktslage			Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	b	d	R	r			w	e	n	Trägheits-Moment $\Theta_z$	Widerstands-Moment $\frac{\Theta_z}{w}$	Trägheits-Moment $\Theta_y$	Widerstands-Moment $\frac{\Theta_y}{e}$
6	60	6	8	4	6,84	5,3	4,24	2,43	4,28	37,0	8,72	9,74	4,02
		8			8,96	7,0		2,53	4,21	47,2	11,1	12,4	4,90
		10			11,0	8,6		2,63	4,14	56,3	13,3	14,8	5,64
6 <sup>1/2</sup>	65	7	9	4,5	8,61	6,7	4,59	2,66	4,62	54,4	11,8	14,3	5,38
		9			10,9	8,5		2,76	4,55	67,0	14,6	17,6	6,38
		11			13,1	10,2		2,86	4,48	78,5	17,1	20,7	7,24
7	70	7	9	4,5	9,31	7,3	4,95	2,85	4,99	68,5	13,9	18,0	6,32
		9			11,8	9,2		2,94	4,92	84,8	17,2	22,3	7,58
		11			14,2	11,1		3,04	4,85	99,8	20,2	26,3	8,65
7 <sup>1/2</sup>	75	8	10	5	11,4	8,9	5,30	3,07	5,33	95,0	18,0	25,0	8,16
		10			14,0	10,9		3,16	5,26	115,6	21,7	30,3	9,60
		12			16,6	12,9		3,26	5,19	133,0	25,1	35,0	10,7
8	80	8	10	5	12,2	9,5	5,66	3,25	5,71	117	20,6	30,8	9,48
		10			15,0	11,7		3,35	5,63	141	24,9	37,1	11,1
		12			17,8	13,9		3,44	5,56	162	28,6	42,7	12,4
9	90	9	11	5,5	15,4	12,0	6,36	3,65	6,42	187	29,4	49,2	13,5
		11			18,6	14,5		3,75	6,35	222	34,9	58,4	15,6
		13			21,7	16,9		3,85	6,28	254	39,9	66,8	17,4
10	100	10	12	6	19,0	14,8	7,07	4,05	7,13	285	40,2	75,0	18,5
		12			22,6	17,6		4,15	7,06	333	47,1	87,7	21,2
		14			26,0	20,3		4,25	6,99	378	53,4	99,5	23,5
11	110	10	12	6	21,0	16,4	7,78	4,41	7,88	385	49,4	101	22,9
		12			25,0	19,5		4,51	7,81	450	57,7	118	26,2
		14			28,9	22,5		4,61	7,74	513	65,9	135	29,3
12	120	11	13	6,5	25,2	19,7	8,48	4,84	8,59	549	64,8	144	29,8
		13			29,5	23,0		4,93	8,52	634	74,9	167	33,8
		15			33,8	26,3		5,02	8,45	715	84,4	188	37,5
13	130	12	14	7	29,8	23,2	9,19	5,22	9,31	763	83,1	201	38,6
		14			34,4	26,9		5,32	9,24	867	94,4	229	43,0
		16			39,0	30,5		5,42	9,17	970	106	256	47,3
14	140	13	15	7,5	34,7	27,1	9,90	5,64	10,02	1025	104	270	47,9
		15			39,8	31,0		5,74	9,95	1160	117	305	53,2
		17			44,7	34,9		5,84	9,88	1290	130	339	58,0
15	150	14	16	8	40,0	31,2	10,6	6,04	10,7	1360	128	358	59,3
		16			45,4	35,4		6,14	10,7	1525	144	401	65,3
		18			50,8	39,6		6,24	10,6	1685	159	443	71,1
16	160	15	17	8,5	45,8	35,7	11,3	6,45	11,5	1760	156	463	71,8
		17			51,5	40,2		6,55	11,4	1970	174	518	79,0
		19			57,2	44,6		6,65	11,3	2160	191	569	85,5



Normalprofile für ungleichschenklige Winkeleisen.



$d_{min.} = \frac{b + h}{20}$  ;  
jedoch mit geringfügigen Abweichungen.

$$r_2 = \frac{d_{min.} + d_{max.}}{2} ;$$

$$r_1 = \frac{r_2}{2}$$

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern					Quer-schn. F	Gewicht per 1 Meter	Schwerpunkts-abstände in cm		Lage der Hauptaxe ZZ	Abstände von den Hauptaxen in cm						Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	b	h	d	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>			m	s		von der ZZ-Axe			von der YY-Axe			Trägheitsmoment Θ <sub>z</sub>	Widerst.-moment Θ <sub>z</sub> /w	Trägheitsmoment Θ <sub>y</sub>	Widerst.-moment Θ <sub>y</sub> /v
											w	e	f	v	a	c				
2/3	20	30	3/4	2	3,5	1,41	1,10	1,01	0,51	0,407	2,00	1,51	0,76	1,09	0,86	0,48	1,44	0,718	0,292	0,263
						1,84	1,44	1,05	0,55	0,382	2,00	1,45	0,79	1,04	0,90	0,45	1,79	0,896	0,392	0,377
2/4	20	40	3/4	2	3,5	1,71	1,33	1,45	0,45	0,252	2,56	1,86	1,30	1,19	0,80	0,41	2,99	1,17	0,331	0,279
						2,24	1,75	1,49	0,49	0,231	2,53	1,79	1,34	1,18	0,82	0,42	3,79	1,50	0,445	0,378
3   4 1/2	30	45	4/5	2	4,5	2,84	2,22	1,50	0,75	0,421	3,05	2,30	1,11	1,62	1,30	0,79	6,63	2,18	1,29	0,795
						3,50	2,73	1,54	0,79	0,400	3,03	2,28	1,15	1,65	1,31	0,78	7,91	2,61	1,64	0,990
3/6	30	60	5/7	3	6	4,25	3,32	2,20	0,63	0,242	3,88	2,68	1,96	1,77	1,19	0,63	16,5	4,25	1,89	1,08
						5,81	4,53	2,27	0,77	0,215	3,85	2,70	2,06	1,78	1,25	0,65	21,7	5,63	2,66	1,50
4/6	40	60	5/7	3	6	4,75	3,71	1,99	0,99	0,426	4,11	3,01	1,44	2,02	1,72	1,03	19,9	4,85	3,79	1,88
						6,51	5,08	2,06	1,06	0,400	4,06	3,00	1,52	2,10	1,72	1,04	26,0	6,40	5,39	2,56
4/8	40	80	6/8	3,5	7	6,84	5,34	2,90	0,90	0,249	5,17	3,55	2,60	2,40	1,55	0,87	47,7	9,22	5,36	2,23
						8,96	7,00	2,97	0,97	0,229	5,15	3,59	2,66	2,37	1,60	0,94	60,6	11,8	7,16	3,02
5   7 1/2	50	75	7/9	4	8	8,26	6,40	2,51	1,26	0,417	5,10	3,75	1,83	2,64	2,10	1,26	53,2	10,4	10,5	3,97
						10,44	8,10	2,58	1,33	0,398	5,10	3,73	1,88	2,60	2,19	1,27	64,9	12,7	13,6	5,21
5/10	50	100	8/10	4,5	9	11,36	8,9	3,64	1,14	0,246	6,45	4,43	3,23	2,94	1,96	1,07	123	19,1	13,9	4,73
						14,00	10,9	3,71	1,21	0,231	6,39	4,45	3,32	2,96	2,04	1,14	148	23,2	17,4	5,88
6 1/2   10	65	100	10/11	5	10	14,04	11,0	3,37	1,62	0,399	6,77	4,90	2,51	3,54	2,76	1,62	160	23,7	30,1	8,50
						16,94	13,2	3,44	1,69	0,384	6,72	4,98	2,60	3,51	2,79	1,73	188	28,0	36,9	10,5
6 1/2   13	65	130	10/12	5,5	11	18,50	14,4	4,72	1,47	0,241	8,40	5,78	4,21	3,88	2,59	1,42	340	40,5	38,0	9,79
						21,96	17,1	4,79	1,54	0,236	8,38	5,80	4,30	3,84	2,61	1,42	396	47,2	45,9	12,0
8/12	80	120	10/12	5,5	11	19,00	14,8	3,97	1,97	0,425	8,18	6,00	2,90	4,20	3,36	2,11	318	38,8	61,1	14,6
						22,56	17,6	4,05	2,05	0,412	8,10	6,04	3,00	4,20	3,46	2,08	368	45,5	73,8	17,6
8/16	80	160	12/14	6,5	13	27,36	21,3	5,79	1,79	0,249	10,35	7,10	5,20	4,80	3,16	1,75	764	73,9	85,9	17,9
						31,64	24,7	5,87	1,87	0,240	10,30	7,10	5,27	4,78	3,20	1,78	870	84,6	99,6	20,8
10/15	100	150	12/14	6,5	13	28,56	22,3	4,95	2,45	0,426	10,18	7,51	3,62	5,26	4,20	2,62	749	73,7	143,6	27,2
						33,04	25,8	5,02	2,52	0,418	10,18	7,52	3,62	5,32	4,28	2,58	851	83,9	167,4	31,5
10/20	100	200	14/16	7,5	15	40,04	31,2	7,20	2,20	0,252	12,97	8,89	6,44	6,00	3,90	2,23	1757	135,5	196	32,7
						45,44	35,4	7,27	2,28	0,246	12,85	8,92	6,54	5,94	3,96	2,20	1970	152,5	223	37,5



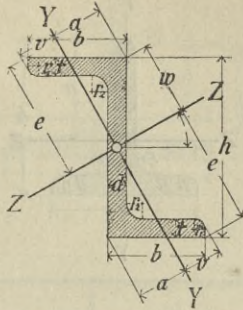
Normalprofile für  $\perp$ -Eisen.

$b = 0,25 h + 30 \text{ mm.}$

$d = 0,035 h + 3 \text{ mm;}$  jedoch auf halbe Millimeter abgerundet.

$t = 0,03 h + 3 \text{ mm.}$

$r_2 = t; \quad r_1 = \frac{t}{2}.$

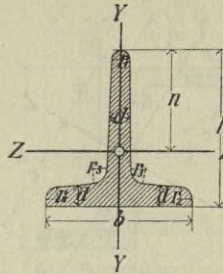


$\alpha =$  Winkel von ZZ mit den Flantschen, bzw. von YY mit der Verticalrippe.

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern						Querschn. F qcm	Gewicht per 1 Meter $\gamma$ kg	Lage der Hauptachsen $\text{tg } \alpha =$	Abstände von den Hauptachsen (in cm)				Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	h	b	d	t	$r_1$	$r_2$				von der Z-Axe		von der Y-Axe		Trägheitsmoment $\Theta_z$	Widerstandsmoment $\frac{\Theta_z}{e}$	Trägheitsmoment $\Theta_y$	Widerstandsmoment $\frac{\Theta_y}{a}$
										e	w	a	v				
3	30	38	4	4,5	2,5	4,5	4,26	3,3	1,69	3,86	0,56	1,41	0,84	18,3	4,75	1,61	1,14
4	40	40	4,5	5	2,5	5	5,35	4,2	1,20	4,19	1,10	1,68	1,16	28,3	6,76	3,00	1,79
5	50	43	5	5,5	3	5,5	6,68	5,2	0,96	4,62	1,60	1,92	1,45	45,2	9,80	5,17	2,69
6	60	45	5	6	3	6	7,80	6,1	0,80	5,00	2,19	2,10	1,69	67,9	13,60	7,07	3,34
8	80	50	6	7	3,5	7	10,96	8,6	0,61	5,86	3,26	2,34	2,15	142,9	24,40	13,60	5,82
10	100	55	6,5	8	4	8	14,26	11,1	0,52	6,84	4,30	2,60	2,53	272	39,70	21,10	8,14
12	120	60	7	9	4,5	9	17,94	14,0	0,46	7,88	5,32	2,81	2,81	474	60,10	30,00	10,70
14	140	65	8	10	5	10	22,60	17,6	0,42	8,79	6,33	3,03	3,15	773	88,00	44,60	14,20
16	160	70	8,5	11	5,5	11	27,13	21,2	0,39	9,85	7,32	3,29	3,48	1193	120,50	58,80	16,90

Normalprofile für hochstellige I-Eisen.

$h = b.$   
 $d = 0,1 h + 1 \text{ mm.}$   
 $r_1 = \frac{r_3}{4}.$



$r_2 = \frac{r_3}{2}.$   
 $r_3 = d.$

Neigung im Fuss 2 ‰,  
auf jeder Seite des Steges 2 ‰.

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern						Querschn. F qem	Gewicht per 1 Meter p kg	Schwerpunkts-abstand n cm	Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	b	h	d	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>				Trägheitsmoment $\Theta_z$	Widerstandsmoment $\frac{\Theta_z}{n}$	Trägheitsmoment $\Theta_y$	Widerstandsmoment $\frac{\Theta_y}{\frac{1}{2}b}$
2 1/2   2 1/2	25	25	3,5	1	2	3,5	1,63	1,3	1,75	0,931	0,53	0,463	0,37
3/3	30	30	4	1	2	4	2,24	1,7	2,10	1,86	0,88	0,914	0,61
3 1/2   3 1/2	35	35	4,5	1	2	4,5	2,95	2,3	2,46	3,34	1,36	1,63	0,93
4/4	40	40	5	1	2,5	5	3,75	2,9	2,82	5,56	1,97	2,70	1,35
4 1/2   4 1/2	45	45	5,5	1,5	3	5,5	4,65	3,6	3,17	8,74	2,76	4,23	1,88
5/5	50	50	6	1,5	3	6	5,64	4,4	3,53	13,1	3,71	6,33	2,54
6/6	60	60	7	2	3,5	7	7,91	6,2	4,24	26,4	6,23	12,8	4,25
7/7	70	70	8	2	4	8	10,6	8,2	4,96	48,4	9,76	23,1	6,62
8/8	80	80	9	2	4,5	9	13,6	10,6	5,67	81,5	14,4	38,8	9,70
9/9	90	90	10	2,5	5	10	17,0	13,3	6,38	129	20,3	61,4	13,6
10/10	100	100	11	3	5,5	11	20,8	16,2	7,10	195	27,5	92,7	18,5
12/12	120	120	13	3	6,5	13	29,5	23,0	8,52	389	45,6	189	31,5
14/14	140	140	15	4	7,5	15	39,8	31,0	9,95	734	73,7	347	49,5

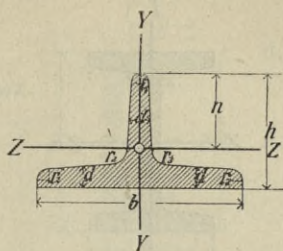


Normalprofile für breitfüßige I-Eisen.

$$h = \frac{b}{2}$$

$$d = 0,15 h + 1 \text{ mm.}$$

$$r_1 = \frac{r_3}{4}$$



$$r_2 = \frac{r_3}{2}$$

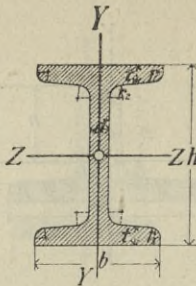
$$r_3 = d.$$

Neigung im Fuss 2 ‰,  
auf jeder Seite des Steges 4 ‰.

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern						Quer-schn. F q <sub>cm</sub>	Ge-wicht per 1 Meter p kg	Schwer-punkts-abstand n cm	Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	b	h	d	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>	r <sub>3</sub>				Träg-heits-moment Θ <sub>x</sub>	Wider-stands-moment Θ <sub>x</sub> / n	Träg-heits-moment Θ <sub>y</sub>	Wider-stands-moment Θ <sub>y</sub> / 1/3 b
6/3	60	30	5,5	1,5	3	5,5	4,64	3,6	2,30	2,91	1,26	9,98	3,33
7   3 1/2	70	35	6	1,5	3	6	5,94	4,6	2,69	5,12	1,90	17,3	4,94
8/4	80	40	7	2	3,5	7	7,91	6,2	3,07	8,87	2,89	30,1	7,52
9   4 1/2	90	45	8	2	4	8	10,16	7,9	3,45	14,4	4,18	49,0	10,9
10/5	100	50	8,5	2	4	8,5	12,02	9,4	3,84	21,2	5,51	71,3	14,3
12/6	120	60	10	2,5	5	10	17,0	13,3	4,62	43,2	9,35	145	24,2
14/7	140	70	11,5	3	6	11,5	22,8	17,8	5,39	79,1	14,7	265	37,8
16/8	160	80	13	3,5	6,5	13	29,5	23,0	6,17	134	21,7	446	55,8
18/9	180	90	14,5	3,5	7,5	14,5	37,0	28,9	6,95	213	30,5	709	78,8
20/10	200	100	16	4	8	16	45,4	35,4	7,72	323	41,8	1073	107

Normalprofile für I-Eisen.

Bis  $h = 250$  mm ist  $b = 0,4 \cdot h$   
 $+ 10$  mm;  
 $d = 0,03 \cdot h + 1,5$  mm.  
 Für  $h > 250$  mm ist  $b = 0,3 \cdot h$   
 $+ 35$  mm;  
 $d = 0,033 \cdot h$ .



Neigung der inneren Flantschen-  
 flächen 14 %.  
 $r_2 = d$ ;  $r_1 = 0,6 \cdot d$ .

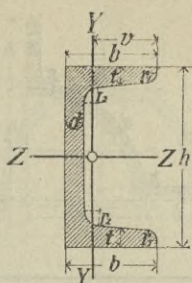
Profil- Nr.	Dimensionen in Millimetern						Quer- schnitt F qcm	Gewicht per 1 Meter p kg	Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	h	b	d	t	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>			Träg- heits- moment $\Theta_z$	Wider- stands- moment $\frac{\Theta_z}{\frac{1}{2}h}$	Träg- heits- moment $\Theta_y$	Wider- stands- moment $\frac{\Theta_y}{\frac{1}{2}b}$
8	80	42	3,9	5,9	2,3	3,9	7,61	6,0	78,4	19,6	7,35	3,5
9	90	46	4,2	6,3	2,5	4,2	9,05	7,1	118	26,2	10,4	4,5
10	100	50	4,5	6,8	2,7	4,5	10,69	8,3	172	34,4	14,3	5,7
11	110	54	4,8	7,2	2,9	4,8	12,36	9,6	241	43,8	18,9	7,0
12	120	58	5,1	7,7	3,1	5,1	14,27	11,1	331	55,1	25,2	8,7
13	130	62	5,4	8,1	3,2	5,4	16,19	12,6	441	67,8	32,2	10,4
14	140	66	5,7	8,6	3,4	5,7	18,35	14,3	579	82,7	41,3	12,5
15	150	70	6,0	9,0	3,6	6,0	20,5	16,0	743	99,0	51,8	14,8
16	160	74	6,3	9,5	3,8	6,3	22,9	17,9	945	118	64,4	17,4
17	170	78	6,6	9,9	4,0	6,6	25,4	19,8	1177	139	78,8	20,2
18	180	82	6,9	10,4	4,1	6,9	28,0	21,9	1460	162	95,9	23,4
19	190	86	7,2	10,8	4,3	7,2	30,7	24,0	1779	187	115,2	26,8
20	200	90	7,5	11,3	4,5	7,5	33,7	26,2	2162	216	138	30,7
21	210	94	7,8	11,7	4,7	7,8	36,6	28,5	2587	246	163	34,6
22	220	98	8,1	12,2	4,9	8,1	39,8	31,0	3090	281	192	39,2
23	230	102	8,4	12,6	5,0	8,4	42,9	33,5	3642	317	224	43,9
24	240	106	8,7	13,1	5,2	8,7	46,4	36,2	4288	357	261	49,3
26	260	113	9,4	14,1	5,6	9,4	53,7	41,9	5798	446	341	60,3
28	280	119	10,1	15,2	6,1	10,1	61,4	47,9	7658	547	429	72,1
30	300	125	10,8	16,2	6,5	10,8	69,4	54,1	9888	659	530	84,8
32	320	131	11,5	17,3	6,9	11,5	78,2	61,0	12622	789	652	99,5
34	340	137	12,2	18,3	7,3	12,2	87,2	68,0	15827	931	789	115
36	360	143	13,0	19,5	7,8	13,0	97,5	76,1	19766	1098	956	134
38	380	149	13,7	20,5	8,2	13,7	107,5	83,9	24208	1274	1138	153
40	400	155	14,4	21,6	8,6	14,4	118,3	92,3	29446	1472	1349	174
42 <sup>1/2</sup>	425	163	15,3	23,0	9,2	15,3	133,0	103,7	37266	1754	1672	205
45	450	170	16,2	24,3	9,7	16,2	147,7	115,2	46204	2054	2004	236
47 <sup>1/2</sup>	475	178	17,1	25,6	10,3	17,1	163,6	127,6	56912	2396	2424	272
50	500	185	18,0	27,0	10,8	18,0	180,2	140,5	69245	2770	2871	310



Normalprofile für [Eisen.

$b = 0,25 h + 25 \text{ mm.}$

Neigung der inneren Flantschenflächen 8 %.



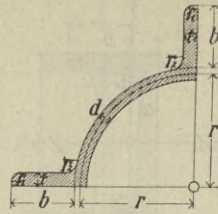
$r_1 = \frac{t}{2}$

$r_2 = t$



Profil-Nr	Dimensionen in Millimetern						Querschn. F qem	Gewicht per 1 Meter p kg	Schwerpunkts-Abstand v cm	Momente (in cm)		Momente (in cm)	
	h	b	d	t	r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>				Trägheitsmoment $\Theta_z$	Widerstandsmoment $\frac{\Theta_z}{\frac{1}{3}h}$	Trägheitsmoment $\Theta_y$	Widerstandsmoment $\frac{\Theta_y}{v}$
4	40	35	5	7	3,5	7	6,20	4,8	2,04	14,2	7,1	7,3	3,6
5	50	38	5	7	3,5	7	7,12	5,6	2,32	26,7	10,7	10,0	4,3
6 1/2	65	42	5,5	7,5	4	7,5	9,05	7,1	2,66	58,2	17,9	15,7	5,9
8	80	45	6	8	4	8	11,04	8,6	2,93	107	26,7	21,7	7,4
10	100	50	6	8,5	4,5	8,5	13,50	10,5	3,31	207	41,4	33,1	10,0
12	120	55	7	9	4,5	9	17,04	13,3	3,76	368	61,3	49,2	13,1
14	140	60	7	10	5	10	20,40	15,9	4,09	609	87,0	71,2	17,4
16	160	65	7,5	10,5	5,5	10,5	24,10	18,8	4,49	932	117	97,4	21,7
18	180	70	8	11	5,5	11	28,00	21,9	4,90	1364	152	130	26,6
20	200	75	8,5	11,5	6	11,5	32,30	25,2	5,30	1927	193	171	32,2
22	220	80	9	12,5	6,5	12,5	37,60	29,3	5,66	2712	247	226	39,9
26	260	90	10	14	7	14	48,40	37,8	6,42	4857	374	365	56,9
30	300	100	10	16	8	16	58,80	45,9	7,05	8064	538	564	80,0

## Normalprofile für Quadrant-Eisen.

$$b = 0,2 r + 25 \text{ mm.}$$

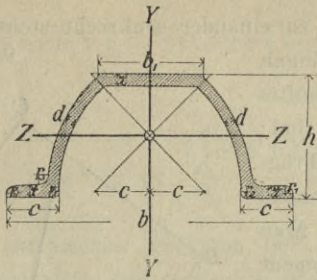


$$r_1 = 0,06 r; \quad r_2 = 0,12 r.$$

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern						Querschnitt $F$ der vollen Röhre qcm	Gewicht per 1 Meter $\varphi$ kg	Volle Röhre. Trägheitsmoment in cm für jede Axe	 Grösstes Widerstandsmoment bezüglich der Z-Axe in cm	 Kleinstes Widerstandsmoment bezüglich der Z-Axe in cm
	r	b	d	t	$r_1$	$r_2$					
5	50	35	4	6	3	6	29,6	23,4	573	90	66
5	50	35	8	8	3	6	48,0	37,5	901	135	101
7½	75	40	6	8	4,5	9	54,9	42,9	2046	235	173
7½	75	40	10	10	4,5	9	80,2	62,8	2957	329	246
10	100	45	8	10	6	12	88,1	68,9	5434	499	365
10	100	45	12	12	6	12	120,4	94,0	7395	660	490
12½	125	50	10	12	7,5	15	129,3	101,0	11970	907	665
12½	125	50	14	14	7,5	15	168,8	131,6	15591	1155	857
15	150	55	12	14	9	18	178,9	139,6	23206	1497	1100
15	150	55	18	17	9	18	248,6	194,0	32283	2030	1509



Normalprofile für  $\Omega$ -Eisen.



$$r_1 = d, \quad r_2 = d - 0,5 \text{ mm}, \quad r_3 = t.$$

Profil-Nr.	Dimensionen in Millimetern								Querschnitt F qcm	Gewicht per 1 Meter p kg	Momente (in cm) bezüglich der Z-Axe		Momente (in cm) bezüglich der Y-Axe	
	h	b	b <sub>1</sub>	c	t	d		r <sub>3</sub>			Trägheitsmoment $\Theta_z$	Widerstandsmoment	Trägheitsmoment $\Theta_y$	Widerstandsmoment
						= r <sub>1</sub>	r <sub>2</sub>							
5	50	120	33	21	5	3	2,5	5	6,8	5,3	24,0	9,6	84	14,0
6	60	140	38	24	6	3,5	3	6	9,5	7,3	47,7	15,9	161	23,0
7 <sup>1/2</sup>	75	170	45,5	28,5	7	4	3,5	7	13,4	10,3	106	28,3	353	40,4
9	90	200	53	33	8	4,5	4	8	17,9	13,8	206	45,8	647	64,7
11	110	240	63	39	9	5	4,5	9	24,2	18,6	419	76,2	1272	106

### 5. Änderung des Trägheitsmomentes eines Querschnitts bei Drehung der Axe, grösstes und kleinstes Trägheitsmoment.

Gegeben seien zwei zu einander senkrecht stehende Axen  $OZ'$  und  $OY'$ , welche durch einen beliebigen Punkt  $O$  eines Querschnitts  $ABCD$  (Fig. 24) gelegt sind;  $\Theta_{z'}$  und  $\Theta_{y'}$  seien die Trägheitsmomente des Querschnitts bezüglich dieser Axen. Man findet nun das Trägheitsmoment desselben Querschnitts für eine andere durch  $O$  gehende und mit  $OZ'$  den Winkel  $\varphi$  einschliessende Axe  $OU$  in folgender Weise:

Wenn  $y'$  und  $z'$  die Coordinaten eines Flächenelementes  $G$  bezüglich des Axenkreuzes  $Y'OZ'$  sind und wenn  $GE$  die Entfernung des Elementes von der neuen Axe  $OU$  bezeichnet, so ist:

$$\begin{aligned} GE &= GI \cos \varphi = (y' - z' \tan \varphi) \cos \varphi \\ &= y' \cos \varphi - z' \sin \varphi, \end{aligned}$$

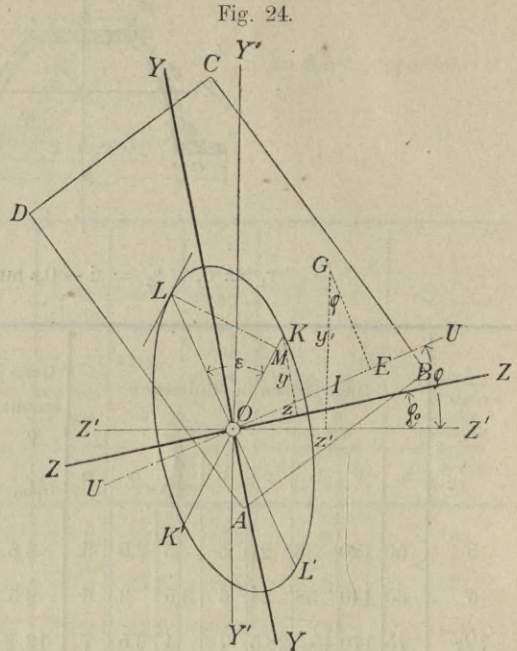
daher

$$\begin{aligned} \Theta_U &= \int (y' \cos \varphi - z' \sin \varphi)^2 dF \\ &= \int y'^2 dF \cos^2 \varphi + \int z'^2 dF \sin^2 \varphi - \int 2 y' z' dF \sin \varphi \cos \varphi \\ &= \Theta_{z'} \cos^2 \varphi + \Theta_{y'} \sin^2 \varphi - \sin 2\varphi \int y' z' dF. \end{aligned} \quad (17)$$

Der in vorstehender Gleichung vorkommende Ausdruck  $\int y' z' dF$  wird das Centrifugalmoment des Querschnitts bezüglich der Axen  $OY'$  und  $OZ'$  genannt.

Von besonderem Interesse ist es, die Lage derjenigen, durch  $O$  gehenden Axen kennen zu lernen, für welche das Trägheitsmoment des Querschnitts seinen grössten und kleinsten Wert erreicht.

Zum Maximum oder Minimum wird  $\Theta_U$  für jene Neigung  $\varphi_0$  der Axe gegen  $OZ'$ , welche die Bedingung





$$\frac{d\Theta_U}{d\varphi} = -2\Theta_{x'} \cos \varphi \sin \varphi + 2\Theta_{y'} \sin \varphi \cos \varphi - 2 \cos 2\varphi \int y' z' dF = 0$$

$$d. h. \quad (\Theta_{y'} - \Theta_{x'}) \sin 2\varphi - 2 \cos 2\varphi \int y' z' dF = 0$$

erfüllt, nämlich für

$$\text{tang } 2\varphi_0 = \frac{2 \int y' z' dF}{\Theta_{y'} - \Theta_{x'}} \quad (18)$$

Diesem Ausdruck entsprechen zwei um  $90^\circ$  von einander verschiedene Werte von  $\varphi_0$ . Die nochmalige Differentiation ergibt:

$$\frac{d^2 \Theta_U}{d\varphi_0^2} = 2(\Theta_{y'} - \Theta_{x'}) \cos 2\varphi_0 + 4 \sin 2\varphi_0 \int y' z' dF.$$

Setzt man  $90^\circ + \varphi_0$  für  $\varphi_0$ , so erhält man:

$$\frac{d^2 \Theta_U}{d\varphi_0^2} = -2(\Theta_{y'} - \Theta_{x'}) \cos 2\varphi_0 - 4 \sin 2\varphi_0 \int y' z' dF.$$

Da die zweiten Differentialquotienten, welche den beiden Winkeln  $\varphi_0$  und  $90^\circ + \varphi_0$  entsprechen, entgegengesetztes Vorzeichen haben, so zeigt der eine derselben ein Maximum, der andere ein Minimum von  $\Theta_U$  an.

Es geht daraus hervor, dass sich durch den Punkt O zwei zu einander senkrechte Axen legen lassen, für welche das Trägheitsmoment des Querschnitts ein Maximum und ein Minimum wird. Diese in Fig. 24 stark gezeichneten Axen OZ und OY heissen Hauptaxen und zwar bezeichnet man als erste Hauptaxe diejenige, welcher  $\Theta_{\max.}$  entspricht, als zweite Hauptaxe aber jene, welcher  $\Theta_{\min.}$  zugehörig ist.

Das oben beliebig angenommene Axenkreuz Y'OZ' fällt mit den Hauptaxen YOZ zusammen, wenn  $\varphi_0 = 0$  oder, nach Gl. 18, wenn

$$\int y' z' dF = 0.$$

Es folgt daraus, dass, wenn durch O eine Symmetrieaxe des Querschnitts gelegt werden kann, diese zugleich eine Hauptaxe des Querschnitts ist, während die hierzu Senkrechte die andere Hauptaxe vorstellt, denn für beide gilt

$$\int yz dF = 0.$$

Handelt es sich darum, die Hauptaxen eines Querschnitts für einen gegebenen Punkt O zu finden, so bestimmt man zunächst die Trägheitsmomente  $\Theta_{x'}$  und  $\Theta_{y'}$  für zwei durch den Punkt gehende beliebig angenommene, senkrecht zu einander stehende Axen OZ' und OY'. Hierauf berechnet man weiter das Trägheitsmoment  $\Theta_v$  für eine Axe OV, welche den rechten Winkel Y'OZ' halbirt, und erhält aus Gl. 17:

$$\Theta_v = \Theta_z \cdot \cos^2 45 + \Theta_y \cdot \sin^2 45 - \sin 90 \int y' z' dF$$

oder

$$\int y' z' dF = \frac{1}{2}(\Theta_z + \Theta_y) - \Theta_v \quad (19)$$

Nachdem hiedurch das Centrifugalmoment bekannt ist, liefert Gl. 18 den Wert  $\varphi_0$ , d. h. die Lage der Haupttaxen, und die Berechnung der Hauptträgheitsmomente kann nun ohne Weiteres erfolgen.

*Beispiel.* Für das Profil Fig. 25 und bezüglich des Schwerpunktes O desselben ist die Lage der Haupttaxen zu bestimmen.

Man berechnet für die zu den Schenkeln des Winkeleisens parallelen Schwerpunktsachsen  $Z'Z'$  und  $Y'Y'$  die Trägheitsmomente  $\Theta_z = 141,53$  und  $\Theta_y = 24,03$ , ferner das Trägheitsmoment bezüglich der um  $45^\circ$  gegen  $Z'Z'$  geneigten Axe  $VV$ :  $\Theta_v = 111,48$ .

Hieraus folgt nach Gl. 19:

$$\int y' z' dF = \frac{1}{2}(141,53 + 24,03) - 111,48 = -28,7$$

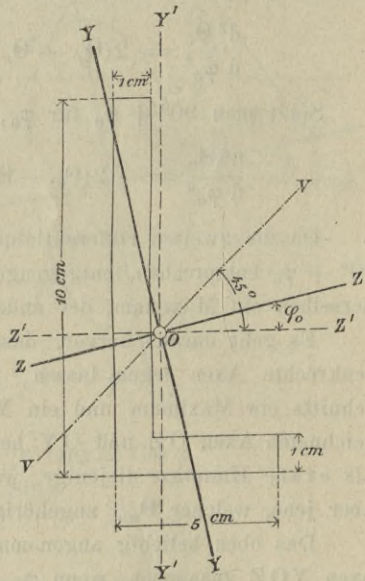
und nach Gl. 18:

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2(-28,7)}{24,03 - 141,51} = \frac{57,4}{117,5}$$

oder

$$\varphi_0 = 13^\circ 1'.$$

Fig. 25.



Die Hauptträgheitsmomente des Profils ergeben sich hienach:

$$\text{für } ZZ \dots \Theta_{\max.} = 148 \text{ und für } YY \dots \Theta_{\min.} = 17,4.$$

Werden die Haupttaxen zum Ausgangspunkt genommen und sind  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  die auf dieselben bezogenen Trägheitsmomente, so erhält man das Trägheitsmoment  $\Theta$  für eine beliebige andere Axe, welche mit der Hauptaxe  $OZ$  den Winkel  $\varphi$  bildet, aus der Gleichung:

$$\Theta = \Theta_1 \cos^2 \varphi + \Theta_2 \sin^2 \varphi. \quad (20)$$

## 6. Trägheitsellipse, Centraellipse.

Zur Vereinfachung der Rechnung wird häufig der Begriff des Trägheitsradius eingeführt. Bestimmt man nämlich für einen Querschnitt von der Fläche  $F$  und dem einer gegebenen Axe zugehörigen Trägheitsmoment  $\Theta$  eine Grösse  $r$  so, dass



$$r^2 F = \Theta,$$

so wird  $r$  der Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich der gegebenen Axe genannt.

Denkt man sich die Trägheitsmomente des Querschnitts  $A B C D$  (Fig. 24) für beliebig viele, durch  $O$  gehende Axen, z. B. für  $K K'$  bestimmt und trägt man auf jeder dieser Axen von  $O$  aus eine Länge  $OK = \frac{k}{\sqrt{\Theta}}$  auf, wobei  $\Theta$  das Trägheitsmoment von  $A B C D$  bezüglich  $K K'$  und  $k$  eine vorläufig beliebige Constante bedeuten, so liegen die so erhaltenen Punkte  $K$  auf einer Ellipse, deren Axen mit den Hauptaxen  $YOZ$  zusammenfallen.

Es ist nämlich nach Gl. 20:

$$\Theta_1 \cos^2 \varphi + \Theta_2 \sin^2 \varphi = \Theta,$$

oder, weil  $\cos \varphi = \frac{z}{OK}$  und  $\sin \varphi = \frac{y}{OK}$ ,

$$\Theta_1 \frac{z^2}{OK^2} + \Theta_2 \frac{y^2}{OK^2} = \Theta$$

oder

$$\Theta_1 z^2 + \Theta_2 y^2 = k^2.$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, der Trägheitsellipse des Querschnitts für den Punkt  $O$ . Dieselbe wird auf ihre einfachste Form gebracht durch Einführung der Constanten  $k = \sqrt{\frac{\Theta_1 \Theta_2}{F}}$ . Setzt man gleichzeitig  $\Theta_1 = a^2 F$  und  $\Theta_2 = b^2 F$ , so ergibt sich:

$$a^2 z^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2$$

oder

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{21}$$

als Gleichung derjenigen Trägheitsellipse, deren Halbaxen  $a$  und  $b$  die Trägheitsradien der Hauptträgheitsmomente  $\Theta_1$  und  $\Theta_2$  sind. Da bei

$$k = \sqrt{\frac{\Theta_1 \Theta_2}{F}}$$

auch

$$OK = \sqrt{\frac{\Theta_1 \Theta_2}{F \Theta}}$$

ist, so ergibt sich

$$\Theta = \frac{F a^2 b^2}{OK^2}$$

oder, wenn  $\Theta = Fr^2$  gesetzt wird:

$$r^2 = \frac{a^2 b^2}{OK^2}$$

d. i.

$$r = \frac{ab}{OK}.$$

Sind nun  $KK'$  und  $LL'$  (Fig. 24) conjugirte Durchmesser der Trägheitsellipse, sind ferner  $d$  und  $d'$  ihre halben Längen und  $\varepsilon$  der von denselben eingeschlossene Winkel, so ist bekanntlich

$$a \cdot b = d \cdot d' \sin \varepsilon,$$

daher

$$r = \frac{d \cdot d' \sin \varepsilon}{OK} = d' \sin \varepsilon = LM,$$

wenn  $LM$  die Länge der vom Endpunkt  $L$  des einen Durchmessers zum anderen gezogenen Senkrechten.

Der Trägheitsradius des auf die Axe  $KK'$  bezogenen Trägheitsmomentes ist also gleich dem Abstand dieser Axe von einer zu ihr parallelen Tangente an der Trägheitsellipse. Letztere kann deswegen auch dadurch entstanden gedacht werden, dass je zu beiden Seiten einer gegebenen Axe und im jeweiligen Abstand  $r$  von derselben parallele Gerade zu dieser Axe gezogen werden. Indem man die Axe um den Punkt  $O$  dreht, umhüllen jene Geraden die Trägheitsellipse.

In der Trägheitsellipse, welche bei bekannten Hauptaxen und Hauptträgheitsmomenten durch ihre Halbaxen  $a$  und  $b$  bestimmt ist, erkennt man, da  $F$  bekannt und  $r$  aus der Zeichnung zu entnehmen, ein einfaches Mittel zur Bestimmung der Trägheitsmomente beliebiger, durch  $O$  gehender Axen. Ist z. B. das Trägheitsmoment für eine Axe  $KK'$  zu ermitteln, so wird an die Trägheitsellipse eine zu  $KK'$  parallele Tangente gelegt und der Abstand  $LM$  derselben von  $KK'$  gemessen, so ist  $\Theta_{KK'} = F \cdot LM^2$ . Fällt der Punkt  $O$  mit dem Schwerpunkt des Querschnitts zusammen, so wird die Trägheitsellipse Centralellipse genannt.

*Beispiel 1.* Zur Bestimmung der Centralellipse des  $\Gamma$ -Profils, Fig. 32, berechnet man für die Hauptaxen dieses Profils, welche mit dessen Symmetriaxen zusammenfallen, die Trägheitsmomente:

$$\Theta_1 = \frac{1}{12} (12,5 \cdot 30,0^3 - 11,42 \cdot 26,76^3) = 9888,43$$

und

$$\Theta_2 = \frac{1}{12} (3,24 \cdot 12,5^3 + 26,76 \cdot 1,08^3) = 530,15.$$

Da  $F = 69,4$ , so ergeben sich die Halbaxen der Centralellipse

$$a = \sqrt{\frac{9888,43}{69,4}} = 11,93 \text{ cm}$$

$$\text{und } b = \sqrt{\frac{530,15}{69,4}} = 2,76 \text{ cm,}$$

welche somit gezeichnet werden kann.



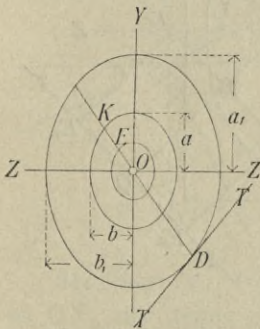
*Beispiel 2.* Für das L-Profil, Fig. 25, dessen Hauptaxen S. 36 bestimmt wurden und dessen Hauptträgheitsmomente  $\Theta_1 = 148$  und  $\Theta_2 = 17,4$  sind, berechnen sich die Halbaxen der Centralellipse:

$$a = \sqrt{\frac{148}{14}} = 3,25 \text{ cm}$$

$$\text{und } b = \sqrt{\frac{17,4}{14}} = 1,11 \text{ cm.}$$

*Beispiel 3.* Elliptischer Querschnitt. Das Trägheitsmoment des elliptischen Querschnitts, Fig. 26, mit den Halbaxen  $a_1$  und  $b_1$  bezüglich der Axe ZZ ist  $\frac{1}{4} a_1^3 b_1 \pi$ . Daher ist die Halbaxe a der Centralellipse:

Fig. 26.



$$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} a_1^3 b_1 \pi}{a_1 b_1 \pi}} = \frac{1}{2} a_1,$$

ebenso

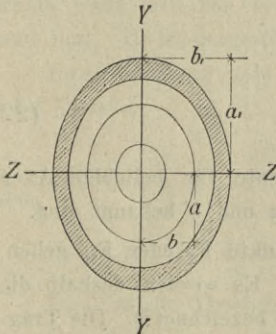
$$b = \frac{1}{2} b_1.$$

Die Centralellipse ist also der Begrenzungsellipse des Querschnitts ähnlich und ihre Axen und Durchmesser sind halb so gross als diejenigen der letzteren.

Daher ist die Centralellipse des Kreises ein concentrischer Kreis mit halb so grossem Radius.

*Beispiel 4.* Ringförmiger, durch zwei ähnliche, concentrische Ellipsen begrenzter Querschnitt. Sind  $a_1$  und  $b_1$  die Halbaxen der äusseren Ellipse und  $\nu a_1$  und  $\nu b_1$  diejenigen der inneren, wo  $\nu$  ein ächter Bruch, so ist das Trägheitsmoment des Ringes für die Axe ZZ (Fig. 27):

Fig. 27.



$$\frac{\pi}{4} a_1^3 b_1 (1 - \nu^4),$$

daher die Halbaxe a der Centralellipse:

$$a = \sqrt{\frac{\frac{1}{4} \pi a_1^3 b_1 (1 - \nu^4)}{\pi a_1 b_1 (1 - \nu^2)}} = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{1 + \nu^2},$$

desgleichen

$$b = \frac{1}{2} b_1 \sqrt{1 + \nu^2}.$$

Für den Kreisring vom äusseren Radius r ist die Centralellipse ein Kreis vom Radius:

$$r_0 = \frac{1}{2} r \sqrt{1 + \nu^2}$$

## 7. Fixpunkte eines Querschnitts.

Es seien  $\Theta_1 = a^2 F$  und  $\Theta_2 = b^2 F$  die Trägheitsmomente eines Querschnitts bezüglich der beiden Schwerpunkthauptaxen  $OZ$  und  $OY$  (Fig. 28), so ist nach Gl. 20 für die mit der ersten Hauptaxe den Winkel  $\varphi$  einschliessende Axe  $OU$  das Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned}\Theta_U &= \Theta_1 \cos^2 \varphi + \Theta_2 \sin^2 \varphi \\ &= \Theta_1 (1 - \sin^2 \varphi) + \Theta_2 \sin^2 \varphi \\ &= F [a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi],\end{aligned}$$

und für die, zu  $UU$  parallele, um  $d$  von derselben entfernte Axe  $TT$ :

$$\Theta_T = F [a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi + d^2].$$

Trägt man auf der  $Z$ -Axe von  $O$  aus nach beiden Seiten die den Entfernungen der Brennpunkte der Centralellipse von  $O$  entsprechende Länge  $\sqrt{a^2 - b^2} = OF_1 = OF_{11}$  auf, so ist

$$\begin{aligned}d^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi &= \overline{OQ^2} - \overline{OG^2} \\ &= (OQ + OG)(OQ - OG) \\ &= \overline{F_{11}E_{11}} \cdot \overline{F_1E_1} \\ &= e_{11} e_1,\end{aligned}$$

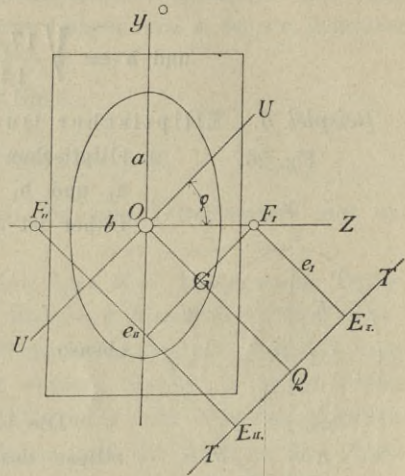
daher

$$\Theta_T = F (a^2 + e_1 e_{11}), \quad (22)$$

welche Gleichung zur Bestimmung der Trägheitsmomente für beliebige Axen dient, wenn die Hauptaxen und die Trägheitsradien  $a$  und  $b$  bekannt sind.

Für alle Axen  $TT$ , welche durch einen der Punkte  $F_1$  oder  $F_{11}$  gehen, hat das Trägheitsmoment die constante Grösse  $Fa^2$ . Es werden deshalb die Punkte  $F_1$  und  $F_{11}$  als Fixpunkte des Querschnitts bezeichnet\*). Die Trägheitsellipsen dieser Punkte sind Kreise vom Halbmesser  $a$ . Ist  $a = b$ , so fallen die Fixpunkte mit dem Schwerpunkt der Fläche zusammen.

Fig. 28.



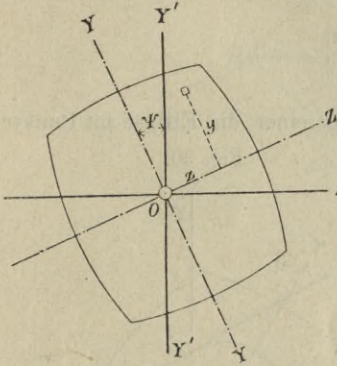
\*) Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructions, Zeitschrift des Arch.- und Ingen.-Vereins zu Hannover. 1870.



II. Die Kraftebene schneidet den Querschnitt nicht nach Hauptaxen.

Der auf Biegung beanspruchte Träger habe gegenüber der Kraftebene eine solche Lage, dass letztere die Querschnitte nicht nach Hauptaxen schneidet. Das Angriffsmoment eines Querschnitts, in der Ebene  $Y'Y'$  (Fig. 29) wirkend,

Fig. 29.



sei  $\mathfrak{M}$ . Man kann dasselbe in zwei Seitenmomente zerlegen,  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$ , deren Ebenen den Querschnitt nach dessen Hauptaxen OY und OZ schneiden:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \phi \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \sin \phi,$$

wenn  $\phi$  der Winkel ist, welchen die Kraftebene mit OY einschliesst.

Da die Momente  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  in Ebenen wirken, welche den Trägerquerschnitt nach Hauptaxen schneiden, so bestimmen sich die durch dieselben hervorgebrachten Normalspannungen auf Grund der Gleichung 12.

Bezeichnen  $\theta_1$  und  $\theta_2$  die Trägheitsmomente bezüglich der Axen OZ und OY, sind ferner y und z die Coordinaten eines Querschnittselementes, so erhält man für die an der bezeichneten Stelle herrschende Normalspannung den Wert:

$$\delta = \frac{\mathfrak{M} y \cos \phi}{\theta_1} + \frac{\mathfrak{M} z \sin \phi}{\theta_2}. \tag{23}$$

Die grösste Normalspannung des Querschnitts tritt in dem von der Neutralaxe am weitesten entfernten Punkte des Querschnitts auf, welchen man erhält, wenn man zur Neutralaxe eine parallele Tangente an den Querschnittsrand legt. Es ist demnach von Wichtigkeit, die Lage der Neutralaxe zu kennen.

Ihre Gleichung, als diejenige einer Linie, für deren sämtliche Punkte  $\delta = 0$ , ist:

$$\frac{y \cos \phi}{\theta_1} + \frac{z \sin \phi}{\theta_2} = 0$$

oder

$$y = -\frac{\theta_1}{\theta_2} z \tan \phi.$$

Dies ist die Gleichung einer durch O gehenden Geraden. Die Neutralaxe ist also eine gerade Linie, welche durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

Der Winkel  $\chi$  (Fig. 30), welchen die Neutralaxe mit OZ einschliesst, ist gegeben durch:

$$\tan \chi = -\frac{\theta_1}{\theta_2} \tan \phi. \tag{24}$$

Ist  $\phi = 0$ , so ist auch  $\chi = 0$ , d. h. fällt die Kraftebene mit einer Haupttaxe zusammen, so ist die Neutralaxe senkrecht zur Kraftebene.

Denkt man sich die Centralellipse des Querschnitts gezeichnet, deren Gleichung nach (21)

$$\frac{z^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

so ist, weil

$$\frac{2y dy}{a^2} = - \frac{2z dz}{b^2},$$

die trigonometrische Tangente des Neigungswinkels einer die Ellipse im Punkte  $z, y$  berührenden Geraden gegen die Axe  $Z$  bestimmt durch:

$$\frac{dy}{dz} = - \frac{a^2 z}{b^2 y}.$$

Nun ist für den Punkt  $K$ , in welchem die Centralellipse von der Kraftebene geschnitten wird,

$$\frac{z}{y} = \tan \phi,$$

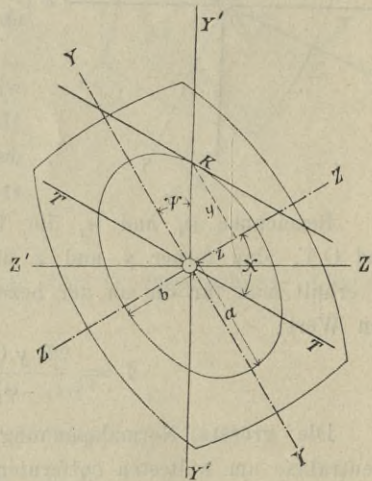
daher

$$\frac{dy}{dz} = - \frac{a^2}{b^2} \tan \phi = - \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \tan \phi.$$

Aus der Übereinstimmung dieses Ausdrucks mit Gl. 24 geht hervor, dass die Neutralaxe parallel ist zu jener Tangente, welche die Centralellipse in ihrem Schnittpunkt mit der Kraftebene berührt. Die Neutralaxe  $TT$  ist also parallel der Tangente in  $K$  und Neutralaxe sowie die Schnittlinie der Kraftebene mit dem Querschnitt sind conjugirte Durchmesser der Centralellipse.

Hierauf beruht folgende Construction der Neutralaxe:  $OY$  und  $OZ$  (Fig. 31) seien die Haupttaxen des Querschnitts,  $OY'$  Schnitt der Kraftebene mit demselben. Man legt parallel zu  $OY'$  in folgender Weise eine Tangente an die Centralellipse. Sind  $a$  und  $b$  die Halbaxen derselben, so bestimmt man zunächst die Brennpunkte  $F_1, F_2$  und beschreibt von  $F_2$  aus einen Kreis mit dem Radius  $2a$ . Wird hierauf von  $F_1$  aus eine Senkrechte zu  $OY'$  gefällt, welche den Kreis in  $E$  schneidet, und eine Gerade  $GG$  so gezogen, dass sie die Länge  $EF_1$  senkrecht halbirt, so ist  $GG$  Tangente an der Centralellipse. Der Berührungspunkt liegt in ihrem Schnittpunkt  $H$  mit  $EF_2$ , und die Verbindungslinie  $HO$  liefert die Neutralaxe.

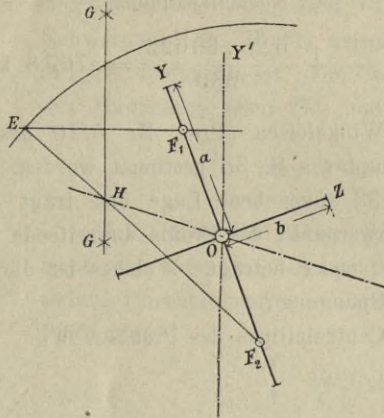
Fig. 30.





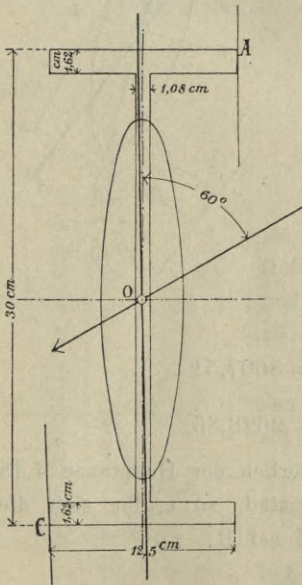
Nachdem letztere bestimmt ist, zieht man Tangenten parallel der Neutralaxe an den Umfang des Querschnitts und erhält auf solche Weise denjenigen Punkt des Querschnittsrandes, welcher am weitesten von der Neutralaxe ent-

Fig. 31.



fernt ist. Durch Einführung der Coordinaten dieses Punktes in die Gl. 23 ergibt sich die grösste im Querschnitt herrschende Normalspannung.

*Beispiel 1.* Der I-Träger, Fig. 32 (Prof. Nr. 30 des deutschen Normalprofilbuches) soll einem Tonnengewölbe als Widerlager dienen, dessen resultirender Widerlagerschub durch den Schwerpunkt O des Profils geht und mit der Y-Axe den Winkel von  $60^\circ$  einschliesst. Welches ist die grösste Normalspannung, wenn das durch den Gewölbeschub hervorgebrachte Maximalmoment  $700 \text{ mkg}$  beträgt?



Die Halbachsen der Centralellipse wurden S. 38 ermittelt:

Die Halbachsen der Centralellipse wurden S. 38 ermittelt:

$$a = \sqrt{\frac{9888}{69,4}} = 11,93 \text{ cm}$$

und

$$b = \sqrt{\frac{530}{69,4}} = 2,76 \text{ cm.}$$

Man bestimmt nun die Neutralaxe und findet mittels der parallel zu derselben an den Querschnittsrand gelegten Tangenten, dass in den Punkten A und C die grössten Normalspannungen herrschen. Für beide Punkte ist  $y = 15 \text{ cm}$  und  $z = 6,25 \text{ cm}$ .

Da  $\phi = 60^\circ$ , so ist

$$\mathcal{N} \cos \phi = 35000 \text{ cmkg}$$

und

$$\mathcal{M} \sin \phi = 60622 \text{ cmkg},$$

daher nach Gl. 23 die grösste Normalspannung:

$$\delta = \frac{15 \cdot 35000}{9888} + \frac{6,25 \cdot 60622}{530} = 767,8 \text{ kg pro qcm.}$$

*Beispiel 2.* Das Winkeleisen (Prof. Nr. 5/10 des deutschen Normalprofilbuches), dessen Hauptaxen S. 36 bestimmt wurden, hat als Pfette eines Dachstuhls die in Fig. 33 angegebene Lage und trägt eine lotrecht gleichmässig verteilte, im Schwerpunkt des Profils angreifende Last, deren grösstes Angriffsmoment + 9000 cmkg beträgt. Welches ist die grösste, im Trägerquerschnitt auftretende Spannung?

Die Halbaxen der Centralellipse des Profils sind nach S. 39:

$$a = \sqrt{\frac{148}{14}} = 3,25 \text{ cm}$$

und

$$b = \sqrt{\frac{17,4}{14}} = 1,11 \text{ cm.}$$

Die Hauptaxe  $YY$  schliesst mit  $AE$  nach S. 36 den Winkel  $13^\circ 1'$ , also mit der Kraftebene  $Y'Y'$  den Winkel  $\phi = 16^\circ 59'$  ein. Die Neutralaxe  $TT$  ist in der Centralellipse conjugirt der lotrechten Angriffsrichtung  $Y'Y'$ , daher durch Parallele zu  $TT$  am Profilumfang die Stellen  $B$  und  $E$  der grössten Spannung erhalten werden.

Die Hauptträgheitsmomente sind:

$$\theta_1 = 148 \quad \text{und} \quad \theta_2 = 17,4.$$

Ferner ist:

$$\mathcal{N} \cos \phi = 9000 \cos 16^\circ 59' = 8607,51$$

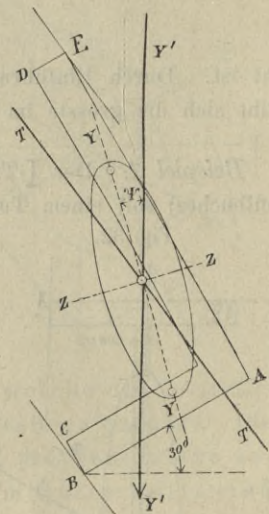
und

$$\mathcal{M} \sin \phi = 9000 \sin 16^\circ 59' = 2628,85.$$

Da die Coordinaten der Punkte  $B$  und  $E$  bezüglich der Hauptaxen 4,45 und 2,96 cm beziehungsweise 6,39 und 0,25 cm sind, so ergibt sich die grösste Normalspannung im unteren Querschnittsteil bei  $B$ :

$$\delta = \frac{4,45 \cdot 8607,51}{148} + \frac{2,96 \cdot 2628,85}{17,4} = 706 \text{ kg pro qcm (Zug)}$$

Fig. 33.



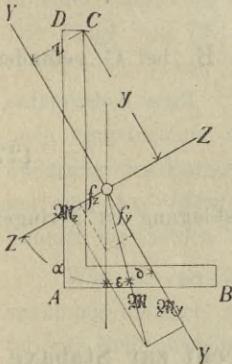


und die grösste Normalspannung im oberen Teil des Querschnitts bei E:

$$\delta = \frac{6,39 \cdot 8607,51}{148} - \frac{0,25 \cdot 2628,85}{17,4} = 337 \text{ kg pro qcm (Druck).}$$

*Beispiel 3.* Ein Winkeleisen, mit einem Schenkel AB wagrecht gelagert (Fig. 34), sei einer Belastung ausgesetzt, deren Ebene, durch den Schwerpunkt des Profils gehend, mit der Y-Axe den Winkel  $\delta$  einschliesst. Die Componenten von  $\mathfrak{N}$  nach den Haupttaxen seien  $\mathfrak{N}_y$  und  $\mathfrak{N}_z$ , daher

Fig. 34.



$$\text{tang } \delta = \frac{\mathfrak{N}_z}{\mathfrak{N}_y}$$

Soll durch die Belastung eine lotrechte Ausbiegung entstehen, so muss, wenn  $f_y$  und  $f_z$  die partiellen Durchbiegungen nach YY und ZZ sind, die Bedingung

$$\frac{f_z}{f_y} = \text{Cotg } \alpha$$

erfüllt werden, wobei  $\alpha$  der Winkel von ZZ mit der Verticalen.

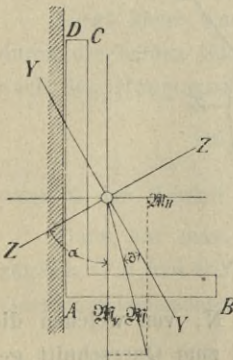
Da nun die Durchbiegungen nach den Haupttaxen umgekehrt den Trägheitsmomenten und direkt den Angriffsmomenten proportional sind, so ist

$$\text{Cotg } \alpha = \frac{f_z}{f_y} = \frac{\frac{\mathfrak{N}_z}{\Theta_y}}{\frac{\mathfrak{N}_y}{\Theta_z}} = \frac{\mathfrak{N}_z}{\mathfrak{N}_y} \cdot \frac{\Theta_z}{\Theta_y} = \frac{\Theta_z}{\Theta_y} \text{ tang } \delta$$

oder

$$\text{tang } \delta = \frac{\Theta_y}{\Theta_z} \text{ Cotg } \alpha \tag{25}$$

Fig. 35.



Um also eine lotrechte Durchbiegung zu erzielen, ist eine Belastung erforderlich, bei welcher die Verticalcomponente  $\mathfrak{N}_v = \mathfrak{N} \text{ Cos } \epsilon = \mathfrak{N} \text{ Sin } (\alpha + \delta)$  und die Horizontalcomponente  $\mathfrak{N}_h = \mathfrak{N} \text{ Sin } \epsilon = \mathfrak{N} \text{ Cos } (\alpha + \delta)$  ist.

Jede Belastung, deren Ebene einen anderen als den durch Gl. 25 bestimmten Winkel  $\delta$  mit YY einschliesst, wird seitliche Ausbiegungen bewirken.

Liegt das lotrecht belastete, mit einem Schenkel wagrecht gerichtete  $\perp$ -Eisen mit dem anderen Schenkel an einer lotrechten Wand an, durch welche die seitliche Ausbiegung verhindert und eine lotrechte erzwungen wird, so findet eine wagrechte Pressung gegen die Wand statt.

Das Moment  $\mathfrak{M}_H$  des Gegendruckes der Wand und das Moment  $\mathfrak{M}_V$  der lotrechten Belastung haben in diesem Falle eine Resultierende  $\mathfrak{M}$ , welche mit  $YY$  den durch Gl. 25 bestimmten Winkel  $\delta$  einschliesst, daher ist der Angriff auf die lotrechte Wand:

$$\mathfrak{M}_H = \mathfrak{M}_V \operatorname{Cotg}(\alpha + \delta). \quad (26)$$

Ferner ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{M}_V}{\sin(\alpha + \delta)}.$$

Hienach wird die Faserspannung im Profilrand z. B. bei C gefunden aus Gleichung:

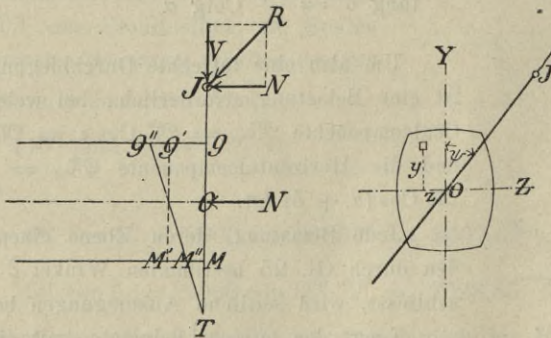
$$\alpha = \frac{\mathfrak{M} \cdot \cos \delta y}{\theta_x} + \frac{\mathfrak{M} \cdot \sin \delta z}{\theta_y}. \quad (27)$$

Diese Faserspannung bei verhinderter seitlicher Ausbiegung ist geringer als jene bei freier Lage.

## B. Biegungsbeanspruchung durch nicht senkrecht zur Stabaxe wirkende äussere Kräfte.

Der Träger sei durch äussere Kräfte beansprucht, welche zwar in einer durch die Stabaxe gehenden Ebene wirken, gegen diese Stabaxe aber beliebig geneigt sind. Die Resultierende  $R$  der links (oder rechts) von einem betrachteten Querschnitt  $GM$  wirkenden Kräfte wird die Querschnittsebene in irgend einem Punkt  $J$  schneiden (Fig. 36).

Fig. 36.



Man zerlegt hier  $R$  in zwei Componenten  $V$  und  $N$ , von welchen die erstere in die Querschnittsebene fällt, letztere senkrecht zum Querschnitt gerichtet ist.



Die Kraft  $N$  kann parallel ihrer anfänglichen Richtung nach dem Querschnittsschwerpunkt verlegt werden, wenn ein Kräftepaar vom Moment  $N \cdot OJ$  hinzugefügt wird. Daraus folgt, dass die Beanspruchung des Querschnitts aus der Scherkraft  $V$ , aus dem Drehmoment  $\mathfrak{M} = N \cdot OJ$  und aus der nach dem Querschnittsschwerpunkt verlegten Normalkraft  $N$  sich zusammensetzt.

Durch  $N$  entsteht eine über den Querschnitt gleichmässig sich verteilende Normalbeanspruchung, welche sich bei eintretender elastischer Formänderung in einer parallelen Verschiebung des Querschnitts von  $GM$  nach  $G'M'$  äussert. Die Folge von  $\mathfrak{M}$  ist eine gleichzeitige Drehung des Querschnitts, so dass  $G''M''$  der neuen Lage des Querschnitts nach eingetretener Formänderung entsprechen wird. Macht man auch hier die Annahme, dass die Querschnitte nach eingetretener elastischer Formänderung eben bleiben, so kann die Formänderung des Balkens an betrachteter Stelle als eine Drehung des Querschnitts um eine Axe (Neutralaxe, Nullaxe)  $T$  angesehen werden, welche durch den Schnitt der beiden Ebenen  $GM$  und  $G''M''$  bestimmt ist.

Was die an irgend einer Stelle des Querschnitts herrschende Normalspannung anlangt, so setzt sich dieselbe zusammen aus der (gleichmässig verteilten) Beanspruchung, welche durch die nach dem Schwerpunkt  $O$  verlegte Normalcomponente  $N$  hervorgebracht wird und aus der dem Drehmomente entsprechenden Spannung. Fällt die Kraftebene zusammen mit einer Hauptaxe und ist  $y$  der Abstand eines Querschnittselementes von der zur Neutralaxe parallelen Schwerpunktsaxe,  $\theta$  das Trägheitsmoment des Querschnitts und  $\mathfrak{M}$  das Drehmoment bezüglich jener Axe, so ist die in dem Elemente auftretende Spannung:

$$\delta = \frac{N}{F} + \frac{\mathfrak{M} y}{\theta}, \quad (28)$$

wobei  $y$  positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem das betrachtete Querschnittselement und  $J$  auf einer und derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Schwerpunktsaxe sich befinden.

Liegt keine von den Hauptaxen in der Kraftebene, so ist  $\mathfrak{M}$  zu ersetzen durch die beiden Seitenmomente  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$ , deren Ebenen den Querschnitt nach den Hauptaxen  $OY$  und  $OZ$  schneiden:

$$\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} \cos \phi \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M} \sin \phi,$$

wenn  $\phi$  der Winkel, den  $OJ$  mit  $OY$  einschliesst (Fig. 36).

Dann hat man, wenn wie früher  $\theta_1$  und  $\theta_2$  die Trägheitsmomente bezüglich  $OZ$  und  $OY$  sind und wenn  $y$  und  $z$  die Coordinaten des betreffenden Querschnittselementes bezüglich  $YOZ$  vorstellen:

$$\delta = \frac{N}{F} + \frac{\mathfrak{M} y \cos \phi}{\theta_1} + \frac{\mathfrak{M} z \sin \phi}{\theta_2}. \quad (28^1)$$

Alle Elemente eines zur Neutralaxe parallelen, unendlich dünnen Flächenstreifens haben gleiche Spannung. Bezeichnet  $dF$  den Flächeninhalt eines solchen Streifens,  $v$  dessen Entfernung von der Neutralaxe,  $\delta$  die hier herrschende Spannung,  $\delta_1$  aber die Spannung, welche der Entfernung 1 von der Neutralaxe entspricht, so ist

$$\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{v}{1}, \text{ d. h. } \delta = v\delta_1,$$

daher die Beanspruchung des Flächenstreifens  $dF$ :  $v\delta_1 dF$  und die Summe aller, über den ganzen Querschnitt verteilten Spannungen:

$$\delta_1 \int v dF.$$

Diese Summe ist gleich und entgegengesetzt der Aussenkraft  $N$ , deren Angriffsort  $J$  sie teilt, welcher deshalb auch Mittelpunkt der Spannung genannt wird:

$$\delta_1 \int v dF = N. \quad (29)$$

Bezeichnet  $\delta_s$  die Spannung in der zur Neutralaxe parallelen Schwerpunktsaxe und  $v_s$  die Entfernung derselben von der Neutralaxe, so ist

$$\delta_s = v_s \delta_1,$$

daher nach Gl. 29

$$\delta_s = \frac{N v_s}{\int v dF},$$

oder, da

$$\int v dF = F v_s,$$

$$\delta_s = \frac{N}{F}, \quad (30)$$

d. h. die Spannung in der zur Neutralaxe parallelen Schwerpunktsaxe ist unabhängig von der Lage des Angriffspunktes  $J$  und es wird durch  $\mathfrak{N}$  eine Drehung von  $M'N'$  um keine andere als die Schwerpunktsaxe hervorgebracht.

Die Gleichung der Neutralaxe, für deren sämtliche Punkte  $\delta = 0$  ist, ergibt sich nach Gl. 28<sup>1</sup>:

$$\frac{N}{F} + \frac{\mathfrak{N} y \cos \phi}{\Theta_1} + \frac{\mathfrak{N} z \sin \phi}{\Theta_2} = 0$$

oder

$$y = -\frac{\Theta_1}{\Theta_2} \tan \phi z - \frac{N \Theta_1}{F \mathfrak{N} \cos \phi},$$



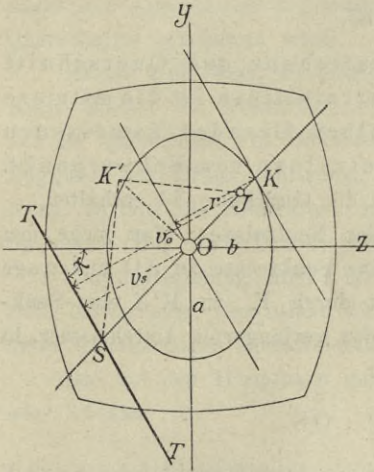
daher sich ihr Winkel  $\chi$  mit OZ und ihre Entfernung  $v_s$  vom Schwerpunkt (Fig. 37) ergeben :

$$\text{tang } \chi = - \frac{\Theta_1}{\Theta_2} \text{ tang } \phi \quad (31)$$

und

$$v_s = \frac{N}{F \sqrt{\frac{\Theta \mathcal{N}^2 \text{Cos}^2 \phi}{\Theta_1^2} + \frac{\Theta \mathcal{N}^2 \text{Sin}^2 \phi}{\Theta_2^2}}} \quad (32)$$

Fig. 37.



Ist  $N = 0$ , so ist  $v_s = 0$ , d. h. wenn keine zum Querschnitt senkrechte Aussenkraft vorhanden ist, so geht die Neutralaxe durch den Schwerpunkt des Querschnittes. (Transversale Belastung).

Ist  $\phi = 0$ , so ist auch  $\chi = 0$ , d. h. fällt eine Hauptaxe in die Kräfteebene, so ist die Neutralaxe senkrecht zur Kräfteebene.

In letzterem Falle geht Gl. 32 über in

$$v_s = \frac{N \Theta}{F \Theta \mathcal{N}} = \frac{\Theta}{F \cdot OJ} = \frac{r^2}{OJ} \quad (33)$$

wenn  $r$  der zugehörige Trägheitsradius.

Auf Grund der Beweisführung, welche auf S. 42 dargelegt wurde, ergibt sich auch hier, dass die Neutralaxe parallel ist derjenigen Geraden, welche die Centralellipse im Schnittpunkt K mit der Kräfteebene berührt. Es sind also Schnittlinie der Kräfteebene mit dem Querschnitt und eine zur Neutralaxe Parallele durch den Schwerpunkt conjugirte Durchmesser der Centralellipse.

Hiemit und durch Gl. 32 ist die Neutralaxe bei gegebenem J bestimmt. Es kann übrigens ihr Abstand vom Schwerpunkt noch auf folgende Weise gefunden werden:

Nach Gl. 29 ist, wenn  $v_0$  die Entfernung des Punktes J von der Neutralaxe,

$$N v_0 = \delta_1 \int v^2 dF,$$

daher

$$v_0 = \frac{\int v^2 dF}{\int v dF}$$

oder

$$v_0 = \frac{r_1^2 F}{v_s F} = \frac{r_1^2}{v_s},$$

wenn  $r_1$  der Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich der Neutralaxe ist.

Bezeichnet nun  $r$  den Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich der zur Neutralaxe  $TT$  parallelen Schwerpunktsaxe, und  $p$  den Abstand des Angriffspunktes  $J$  von dieser Schwerpunktsaxe, so ist, da

$$r_1^2 F = r^2 F + v_s^2 F$$

und

$$v_0 = v_s + p,$$

$$v_s p = r^2 \tag{34}$$

oder auch (Fig. 37):

$$\overline{OS} \cdot \overline{OJ} = \overline{OK}^2,$$

d. h. der in der Schnittlinie von Kraftebene und Querschnitt gemessene halbe Durchmesser der Centralellipse ist die mittlere Proportionale zwischen den in derselben Geraden gemessenen Abständen des Punktes  $J$  und der Neutralaxe vom Schwerpunkt.

In diesem allgemeineren Gesetz ist auch die Gleichung 33 enthalten.

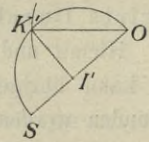
Hieraus ergibt sich die Construction der Neutralaxe: Man ziehe den Durchmesser  $JO$  (Fig. 37), errichte in  $O$  eine Senkrechte zu  $JO$  und trage auf derselben  $OK' = OK$  auf. Wird jetzt durch  $K'$  zu  $K'J$  eine Senkrechte  $K'S$  gezogen, so schneidet letztere den verlängerten Durchmesser in einem Punkte  $S$  der Neutralaxe, denn es ist:

$$OJ : OK' = OK' : OS.$$

Ist umgekehrt die Neutralaxe gegeben und der Angriffspunkt  $J$  der Kraft  $N$  gesucht, so zeichnet man den zu  $TT$  in der Centralellipse conjugirten Durchmesser  $SK$ , auf welchem  $J$  in dem durch Gl. 34 bestimmten Abstand von  $O$  sich befindet: Man beschreibt über  $SO$  einen Halbkreis (Fig. 38), schneidet mit dem Halbmesser  $OK$  von  $O$  aus  $OK'$  ab und zieht  $K'J'$  senkrecht zu  $SO$ , so ist  $OJ'$  der gesuchte Abstand.

Fig. 38.

Je mehr der Angriffspunkt  $J$  der Aussenkraft sich dem Schwerpunkt nähert, desto mehr entfernt sich die Neutralaxe von diesem, und für  $OJ = 0$  ist  $OS = \infty$ . Umgekehrt rückt, wenn die Neutralaxe an den Schwerpunkt herantritt, der Punkt  $J$  in unendliche Entfernung.



Wird die Neutralaxe parallel einer bestimmten Richtung verschoben, so bewegt sich der Angriffspunkt  $J$  auf einem zur erwähnten Richtung in der Centralellipse conjugirten Durchmesser. Umgekehrt: Bewegt sich der Punkt  $J$  auf einem Durchmesser, so verschiebt sich die Neutralaxe parallel der zu jenem Durchmesser conjugirten Richtung.

Dreht sich die Neutralaxe um einen festen Punkt, so beschreibt der Angriffspunkt  $J$  eine Gerade. Diese ist in Bezug auf die Centralellipse die Antipolare jenes festen Punktes; sie würde zur Neutralaxe werden, wenn jener Punkt Angriffspunkt der Aussenkraft wäre, ihre Richtung ist daher conjugirt



zu dem durch den festen Punkt gehenden Durchmesser. Bewegt sich die Neutralaxe so, dass sie immer eine gegebene Curve berührt, so beschreibt der Punkt J ebenfalls eine Curve. Letztere kann durch Wiederholung der Construction Fig. 38 leicht gezeichnet werden.

### *Kern eines Querschnitts.*

Wenn die Neutralaxe einen Querschnitt so umhüllt, dass sie, stets Tangente an ihm bleibend, nie in denselben eindringt, so beschreibt der Angriffspunkt der Aussenkraft die Umfangslinie einer Fläche, welche als Kern des Querschnitts bezeichnet wird.

Es ist klar, dass, so lange der Angriffspunkt der Kraft N innerhalb des Kerns bleibt, die Neutralaxe ausserhalb des Querschnitts zu liegen kommt und im Querschnitt nur Spannungen von gleichen Vorzeichen (entweder nur Zug oder nur Druck) auftreten. Überschreitet der Angriffspunkt von N den Kern, so tritt die Neutralaxe in den Querschnitt ein, und es findet zweierlei Spannung (Zug und Druck) statt.

Durch Rechnung findet man für beliebige Lagen der den Querschnittsrand berührenden Neutralaxe die zugehörigen Kernpunkte aus Gl. 32 oder 34 unter gleichzeitiger Berücksichtigung des Satzes S. 42.

Die auf den Hauptaxen gelegenen Kernpunkte ergeben sich nach Gl. 33 oder 34 aus

$$OJ = \frac{r^2}{n}, \quad (35)$$

wenn OJ die Entfernung des Kernpunktes vom Schwerpunkt (Kernweite),  $\Theta$  das Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich der anderen Hauptaxe und r den entsprechenden Trägheitshalbmesser, n die Entfernung des dem Kernpunkt gegenüberliegenden Querschnittsrandes vom Schwerpunkt bezeichnen.

Graphisch kann der Kern eines Querschnitts durch Wiederholung der Construction Fig. 38, S. 50, leicht gefunden werden.

*Beispiel 1.* Zur Bestimmung des Kerns eines rechteckförmigen Querschnitts (Fig. 39) denke man sich die Neutralaxe zuerst zusammenfallend mit AB. Der Kernpunkt  $J_1$ , welcher dieser Lage entspricht, befindet sich in dem zu AB conjugirten Durchmesser der Centralellipse, d. i. in der Hauptaxe YY. Seine Entfernung von O ergibt sich nach S. 50 mittels des über  $OS_1$  beschriebenen Halbkreises. Ebenso findet sich mittels des Halbkreises über  $OS_2$  der der Neutralaxe BC zugehörige Kernpunkt  $J_2$ . Den Stellungen CD und DA endlich der Neutralaxe entsprechen die Eckpunkte  $J_3$  und  $J_4$  des Kerns, welcher hiemit vollständig bestimmt ist, denn während der Drehung der Neutralaxe um die Punkte B, C, D und A beschreibt der Spannungsmittelpunkt die Geraden  $J_1J_2$ ,  $J_2J_3$ ,  $J_3J_4$  und  $J_4J_1$ . Letztere könnten auch ohne vorherige Bestimmung der Kerneckpunkte gefunden werden, indem man von den Drehpunkten A, B u. s. f. der Neutralaxe ausgeht. So entspricht



dem Drehpunkt D eine gerade Kernbegrenzungslinie  $J_3J_4$ , deren Richtung conjugirt ist zu DO, also parallel ist zur Diagonale AC und deren Lage mittels des Halbkreises über DO erhalten wird u. s. f.

Durch Rechnung findet man die Eckpunkte des Kerns auf Grund der Gl. 33. Es ist, wenn die Höhe des Rechtecks AD mit h und die Breite mit b bezeichnet wird:

$$OJ_1 = \frac{\frac{1}{12} b h^3}{b \cdot h \cdot \frac{h}{2}} = \frac{h}{6} = OJ_3,$$

ebenso

$$OJ_2 = OJ_4 = \frac{\frac{1}{12} h b^3}{b \cdot h \cdot \frac{b}{2}} = \frac{b}{6}.$$

Es liegen demnach die Kerneckpunkte um  $\frac{1}{3}$  der Höhe, beziehungsweise Breite des Querschnitts von den Kanten entfernt.

*Beispiel 2.* Der Kern des I-förmigen Profils ergibt sich in ähnlicher Weise wie der des rechteckförmigen Querschnitts, indem die Neutralaxe, das Profil fortwährend berührend, nach einander die Stellungen AB, BC, CD, DA einnimmt. Die Kerneckpunkte werden also durch die in Fig. 40 dargestellte Construction bestimmt.

Auf rechnerischem Wege wird nach Gl. 33 erhalten:

$$OJ_1 = \frac{a^2}{OS} = \frac{11,93^2}{15} = 9,5 \text{ cm}$$

und

$$OJ_2 = \frac{b^2}{OS_2} = \frac{2,76^2}{6,25} = 1,22 \text{ cm}.$$

*Beispiel 3.* Der Kern des L-Profiles (Fig. 41) wird erhalten, wenn man der Neutralaxe nach einander die Stellungen AB, BC, CD, DE, EA gibt und die diesen Stellungen entsprechenden Spannungsmittelpunkte 1, 2, . . . . 5 wie oben bestimmt.

Auf rechnerischem Wege ergibt sich nach Gl. 34 z. B. der Punkt 1, welcher auf dem zu

Fig. 39.

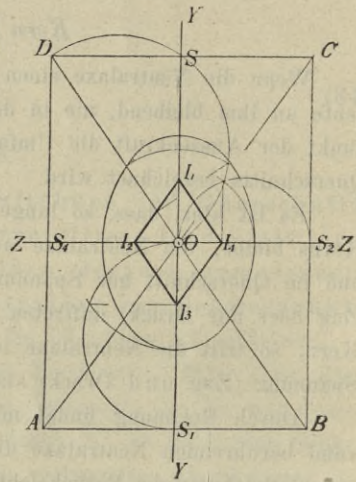
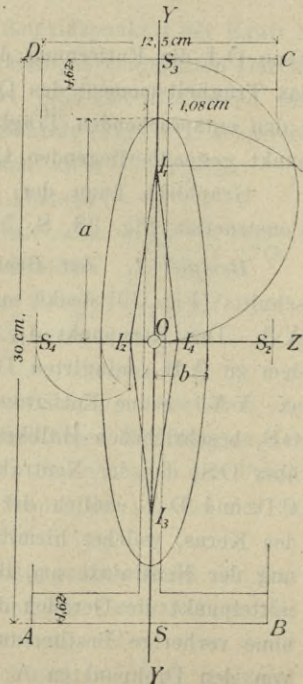


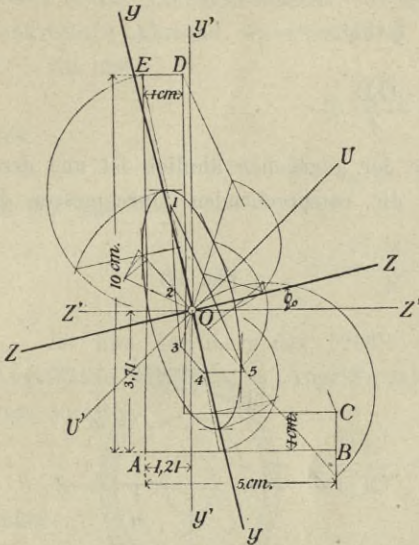
Fig. 40.





AB conjugirten Durchmesser der Centralellipse liegt, durch seine in diesem Durchmesser gemessene Entfernung  $p_1$  von  $Z'Z'$ :

Fig. 41.



$$p_1 = \frac{r_1^2}{3,71},$$

wenn

$$r_1 = \sqrt{\frac{141,53}{14}}$$

der Trägheitsradius des Querschnitts bezüglich  $Z'Z'$  ist, daher:

$$p_1 = \frac{10,11}{3,71} = 2,725.$$

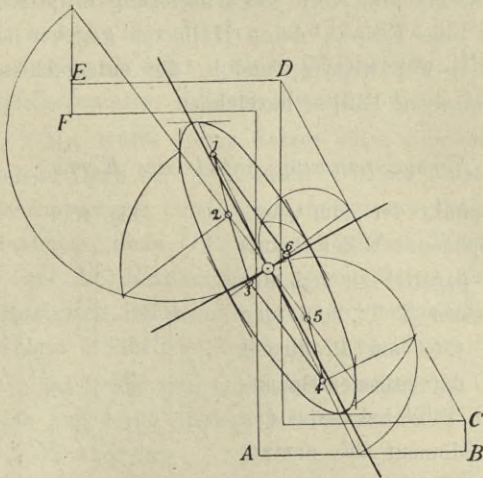
Analog ist bezüglich des Punktes 2, gelegen auf dem zu BC conjugirten Durchmesser:

$$p_2 = \frac{r_2^2}{3,79} = \frac{1,716}{3,79} = 0,453$$

u. s. f.

*Beispiel 4.* Es sei der Kern des  $\Gamma$ -Profils Nr. 10, Tabelle S. 27, zu bestimmen.

Fig. 42.



Aus der Tabelle ergeben sich die Haupttaxen durch

$$\tan \alpha = 0,52$$

und die Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_1 = 272 \text{ und } \Theta_2 = 21,1,$$

daher die Halbaxen der Centralellipse:

$$a = 4,36 \text{ und } b = 1,22 \text{ cm.}$$

Man zeichnet nun diejenigen Durchmesser, welche den Richtungen AB, BC, CD conjugirt sind, und erhält auf denselben, wie aus Fig. 42 zu ersehen, die Eckpunkte 1, 2...6 des Kerns.

*Beispiel 5.* Kern des ellipsenförmigen Querschnitts. Ist TT eine Tangente an der Ellipse im Punkte D (Fig. 43), so liegt der dieser Stellung der Neutralaxe entsprechende Kernpunkt auf der Geraden OD so, dass seine Entfernung von O gleich ist:

$$\overline{OE} = \frac{\overline{OK}^2}{\overline{OD}}$$

Da nun

$$\overline{OK} = \frac{1}{2} \overline{OD},$$

so ist

$$\overline{OE} = \frac{\overline{OD}}{4},$$

d. h. der Kern ist eine Ellipse, welche der gegebenen ähnlich ist und deren Durchmesser viermal kleiner sind als die entsprechenden Durchmesser der Begrenzungsellipse.

Fig. 43.

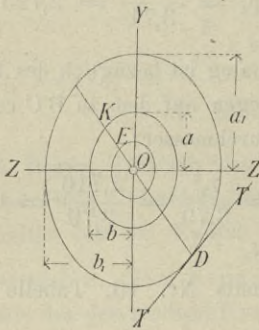
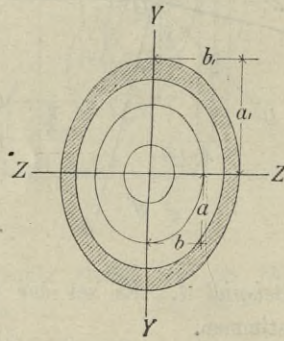


Fig. 44.

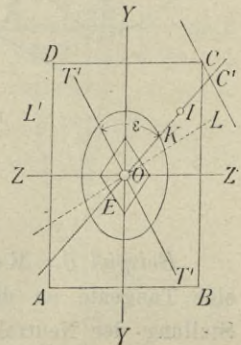


Ähnlich erhält man nach S. 39 als Kern des ringförmig elliptischen Querschnitts (Fig. 44) gleichfalls eine Ellipse, deren Halbachsen gegeben sind durch:  $\frac{1}{4} a_1 (1 + \nu^2)$  und  $\frac{1}{4} b_1 (1 + \nu^2)$ , wenn  $a_1$  und  $b_1$  die entsprechenden Halbdurchmesser der gegebenen äusseren Ellipse bezeichnen.

*Bestimmung der grössten Normalspannung mittels des Kerns.*

Ist J (Fig. 45) der Angriffspunkt der zum Querschnitt senkrecht gerichteten Komponente N der Resultierenden, so ist die Neutralaxe parallel zu dem der Geraden OJ conjugirten Durchmesser T'T', und eine zu letzterem parallele Tangente CC' am Profilrand berührt denselben an der Stelle C der grössten Spannung. Man zerlege nun, nachdem T'T' bekannt, das in der Angriffssaxe OJ wirkende Moment  $\mathcal{M}$ , anstatt nach den Hauptachsen, in Componenten senkrecht und parallel zur Neutralaxe. Die zur Neutralaxe senkrechte Componente  $\mathcal{M} \sin \varepsilon$  ist es ausschliesslich, welche eine Drehung des Querschnitts bewirkt. Daher ist die grösste in C auftretende Spannung:

Fig. 45.





$$\delta = \frac{N}{F} + \frac{\mathfrak{M} \sin \varepsilon m}{\theta},$$

wobei  $\theta$  das Trägheitsmoment des Querschnitts bezüglich  $T'T'$  und  $m$  den senkrechten Abstand des Punktes  $C$  von dieser Axe bezeichnen.

Da nun

$$\theta = F \cdot \overline{OK}^2 \sin^2 \varepsilon$$

und

$$m = \overline{OC'} \sin \varepsilon,$$

so hat man

$$\delta = \frac{N}{F} + \frac{\mathfrak{M} \overline{OC'}}{F \cdot \overline{OK}^2}.$$

Ist nun der Kern des Profils eingezeichnet und ist  $E$  der Schnitt der Angriffssaxe mit der dem Angriffspunkte  $J$  gegenüber liegenden Kernbegrenzung, so ist

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OK}^2} = \frac{1}{\overline{OE}},$$

daher

$$\delta = \frac{N}{F} + \frac{\mathfrak{M}}{F \cdot \overline{OE}}, \quad (36)$$

d. h. die Maximalspannung im Profilrande  $C$  ist gleich  $\frac{N}{F}$  plus dem Angriffsmoment  $\mathfrak{M}$  dividirt durch das Product aus der Querschnittsfläche und der dem Profilrande gegenüberliegenden Kernweite. (Siehe Manderla, Die directe Abmessung des Widerstandsmomentes, Allgem. Bauztg., Wien, 1882.)

Mit Hülfe dieses Satzes lässt sich einfach auch die Frage beantworten, welche Lage der Angriffssaxe  $OJ$  bei constantem  $N$  und  $\mathfrak{M}$  die ungünstigste Beanspruchung eines Querschnitts zur Folge hat: Der Wert von  $\delta$  wird zum Maximum, wenn  $\overline{OE}$  seinen kleinsten Wert erreicht. Es geben also die von  $O$  auf die Kernbegrenzung errichteten Senkrechten ( $OL$ , Fig. 45) die ungünstigsten Belastungsebenen an, während dem Maximum der Kernweite die wenigst gefährliche Lage der Angriffssaxe (hier  $OY$ ) entspricht.

Ist keine zum Querschnitt senkrechte Resultirende  $N$  vorhanden und der Stab nur durch äussere Kräfte senkrecht zur Stabaxe beansprucht, so geht Gl. 36 über in

$$\delta = \frac{\mathfrak{M}}{F \cdot \overline{OE}}. \quad (37)$$

*Beispiel 1.* Für einen  $\text{I}$ -Träger von den in Fig. 46 angegebenen Dimensionen, welcher einem Kappengewölbe als Widerlager dient, wurde die

grösste Normalspannung  $S$ . 44 durch Rechnung bestimmt. Dieselbe findet in den Punkten  $A$  und  $C$  statt. Ist der Kern gezeichnet, so ergibt sich  $OE$ , wie aus der Zeichnung zu entnehmen,  $= 1,31$  cm und man erhält, da  $F = 69,49$  cm, nach Gl. 44 die grösste Normalspannung:

$$\delta = \frac{70\,000}{69,4 \cdot 1,31} = 768 \text{ kg pro qcm.}$$

Fig. 46.

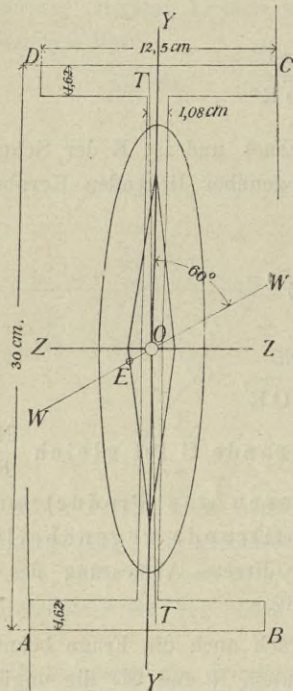
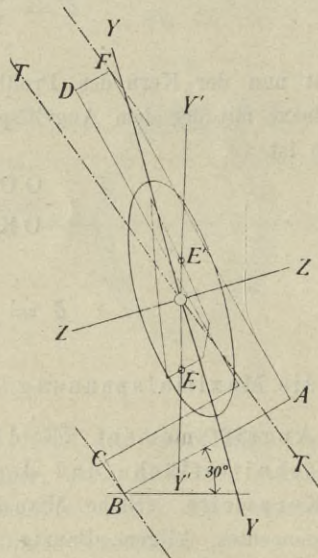


Fig. 47.



*Beispiel 2.* Soll für das L-Eisen, Fig. 33, S. 44, unter den dort angegebenen Verhältnissen die Maximalspannung graphisch bestimmt werden, so construirt man nach S. 53 den Kern, wodurch sich die Kernweiten  $OE = 1,9$  cm und  $OE' = 0,91$  cm ergeben. Da  $F = 14$ , so ergibt sich die grösste Druckspannung (bei F)

$$\delta = \frac{9000}{14 \cdot 1,9} = 338 \text{ kg pro qcm}$$

und die grösste Zugspannung bei B

$$\delta = \frac{9000}{14 \cdot 0,91} = 706 \text{ kg pro qcm.}$$



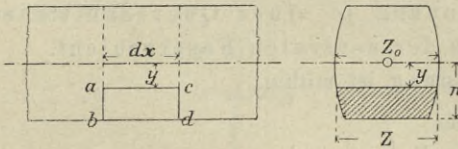
### C. Schubspannungen parallel und senkrecht zur Trägeraxe bei Biegungsbeanspruchung.

Jeder Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens wird nach S. 9, abgesehen von  $\mathcal{N}$ , auch durch eine senkrecht zur Stabaxe wirkende Kraft, die Transversalkraft (Querkraft)  $V$ , bei wagrechten Trägern auch Vertikalkraft genannt, beansprucht. Würde der Widerstand, welchen diese Kraft hervorruft, gleichmässig über die Querschnittsfläche verteilt sein, so würde die entstehende Schubspannung aus der Gleichung:  $F\gamma = V$  zu berechnen sein. Eine solche gleichmässige Verteilung der verticalen Schubspannungen findet aber nicht statt, vielmehr ist das Gesetz, nach welchem sich dieselben über einen Querschnitt verteilen, dadurch bestimmt, dass, wie nachgewiesen werden wird, an jeder Stelle des Querschnitts die senkrecht zur Stabaxe wirkende (verticale) Schubspannung gleich der daselbst parallel zur Stabaxe herrschenden (horizontalen) Schubspannung ist.

Die zur Stabaxe parallelen Schubspannungen eines auf Biegung beanspruchten Balkens sind veranlasst durch die Verschiedenheit der Angriffsmomente der auf einander folgenden Balkenquerschnitte, wodurch nach Gl.  $\frac{\delta'}{y} \Theta = \mathcal{N}_x$  (S. 13) auch Verschiedenheiten in den Normalspannungen entstehen, welche in den gleich weit von der Neutralaxe entfernten Faserschichten je zweier benachbarter Querschnitte auftreten.

Betrachtet man ein Trägerfragment  $abcd$  (Fig. 48), welches beiderseits

Fig. 48.



durch die um  $dx$  von einander abstehenden Querschnitte  $ab$  und  $cd$ , nach oben aber durch eine im Abstand  $y$  von der Neutralaxe befindliche Horizontalebene  $zdx$  begrenzt ist, so wirkt, wenn  $zdy = dF$ , auf  $ab$ , d. h. den schraffir-

ten Flächenteil, welcher dem Schnitt  $ab$  entspricht, die Normalkraft

$$\int_y^n \delta' dF = \frac{\mathcal{N}}{\Theta} \int_y^n y dF.$$

Auf  $cd$  dagegen wirkt die Normalkraft

$$\frac{\mathcal{N} + d\mathcal{N}}{\Theta} \int_y^n y dF.$$

Da beide Werte ungleich gross sind, so wird durch ihre Differenz der Träger nach der Fläche  $zdx$  auf Abscheren beansprucht. Die Scherkraft ist:

$$S' = \frac{d\mathcal{N}}{\Theta} \int_y^n y dF$$

oder nach Gl. 5:

$$S' = \frac{V dx}{\Theta} \int_y^n y dF.$$

Daher ist die Schubkraft längs  $ac$  pro Längeneinheit und auf die ganze Querschnittsbreite  $z$ :

$$S_y = \frac{V}{\Theta} \int_y^n y dF \quad (38)$$

und die in  $ac$  herrschende Schubspannung:

$$\sigma_y = \frac{V}{z \Theta} \int_y^n y dF. \quad (39)$$

Da für einen und denselben Querschnitt  $V$  und  $\Theta$  von  $y$  unabhängig sind, so wird die zur Stabaxe parallele Schubspannung ihren grössten Wert erreichen, wenn der Ausdruck  $\int_y^n y dF$  übergeht in:  $\int_0^n y dF$ , d. h. die zur Stabaxe parallele Schubspannung je eines Querschnitts erreicht ihren höchsten Wert in der neutralen Faserschicht.

Diese Maximal-Schubspannung ist mithin:

$$\sigma = \frac{V}{z_0 \Theta} \int_0^n y dF. \quad (40)$$

*Beispiel.* Für den rechteckförmigen Querschnitt von der Breite  $b$  und der Höhe  $h$  ist:

$$\int_0^{\frac{h}{2}} y dF = b \int_0^{\frac{h}{2}} y dy = \frac{bh^2}{8},$$

daher:

$$\sigma = \frac{V}{b \cdot \frac{1}{12} bh^3} \cdot \frac{bh^2}{8} = \frac{3V}{2bh}. \quad (40')$$



Diese Maximal-Schubspannung darf die zulässige Scherbeanspruchung nicht überschreiten.

Hat man einen mit beiden Enden frei aufliegenden, durch gleichmässig verteilte Last  $q$  beanspruchten Träger aus Fichtenholz von der Länge  $l$ , so ist:

$$V_{\max.} \text{ (für } x = 0) = \frac{q l}{2}$$

und

$$\varrho \mathcal{I}_{\max.} \text{ (für } x = \frac{l}{2}) = \frac{q l^2}{8},$$

daher die grösste, in der Neutralfaser an den Auflagern stattfindende Schubspannung:

$$\sigma = \frac{3}{4} \frac{q l}{b h},$$

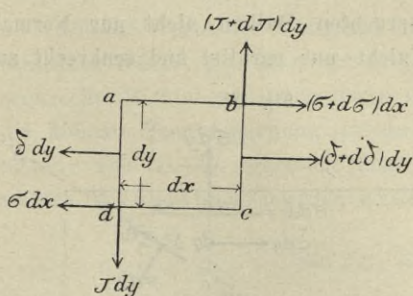
während die grösste (in den Aussenfasern der Trägermitte herrschende) Normalspannung:

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{q l^2}{b h^2}.$$

Daher  $\sigma : \delta = h : l$ , und da nach § 5 für Fichtenholz  $\sigma : \delta = 1 : 7$ , so ist bei constantem Querschnitt die Scherbeanspruchung am Auflager gleichwertig der Beanspruchung auf Zug oder Druck in der Trägermitte, wenn  $l = 7h$ .

Es geht daraus hervor, dass so belastete Träger, deren Länge kleiner als  $7h$ , auf Scherfestigkeit, im andern Fall auf Biegefestigkeit zu berechnen sind.

Fig. 49.



Was nun die zur Stabaxe senkrechten (verticalen) Schubspannungen anlangt, so betrachte man zur Bestimmung derselben ein beliebiges parallelepipedisches Balkenstück  $abcd$  (Fig. 49) von der Länge  $dx$ , der Höhe  $dy$  und und von der zur Bildebene senkrechten Tiefe gleich Eins. Auf dieses Balkenelement wirken in Folge der Biegung folgende Kräfte:

Senkrecht zur Fläche	$a d$	wirkt:	$\delta dy$ ,
„ „ „	$b c$	„	$(\delta + d \delta) dy$ ,
Längs der	$d c$	„	$\sigma dx$ ,
„ „ „	$a b$	„	$(\sigma + d \sigma) dx$ ,
„ „ „	$a d$	„	$\tau dy$ ,
„ „ „	$b c$	„	$(\tau + d \tau) dy$ .

Hiebei bezeichnen  $\tau$  und  $\tau + d\tau$  die Schubspannungen in den zur Trägeraxe senkrechten Begrenzungsflächen  $ad$  und  $bc$  des betrachteten Balkenelementes.

Lässt man diejenigen Kräfte, welche sich gegenseitig aufheben, fort, so bleiben die in Fig. 50 angegebenen übrig. Dieselben müssen sich im Gleichgewicht halten, daher ihre Momentensumme bezüglich eines beliebigen Punktes der Kraftebene gleich Null sein muss. Wählt man als Momentenpunkt den Punkt  $b$ , so ist:

$$\sigma dx dy - \tau dy dx - d\delta dy \frac{dy}{2} = 0.$$

Die unendlich kleine Grösse dritter Ordnung fällt gegen die unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung weg, es bleibt daher:

$$\sigma dx dy = \tau dx dy$$

oder

$$\sigma = \tau.$$

(41)

d. h. die bei einem auf Biegung beanspruchten Balken an irgend einer Stelle senkrecht zur Stabaxe auftretende Schubspannung ist gleich der Schubspannung, welche an derselben Stelle parallel zur Trägeraxe wirksam ist.

#### D. Normalspannungen und Schubspannungen bei Biegebeanspruchung nach beliebigen Richtungen.

Dass in einem auf Biegung beanspruchten Balken nicht nur Normalspannungen parallel der Trägeraxe und nicht nur parallel und senkrecht zur

Axe wirkende Schubspannungen auftreten, sondern auch Normalspannungen und Schubspannungen nach jeder beliebigen Richtung, lässt sich leicht einsehen, wenn man den Stab nach einer Ebene  $MN$  durchschnitten denkt, welche gegen die Stabaxe um den Winkel  $\varphi$  geneigt ist (Fig. 51). Man hat die bezüglich  $MN$  in Betracht kommende Resultierende

der äusseren Kräfte durch eine zu  $MN$  senkrechte Komponente und durch eine

Fig. 50.

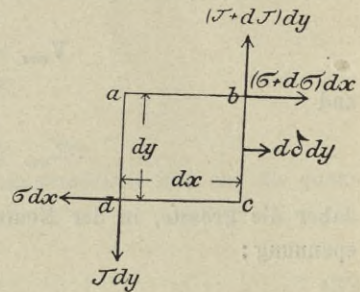
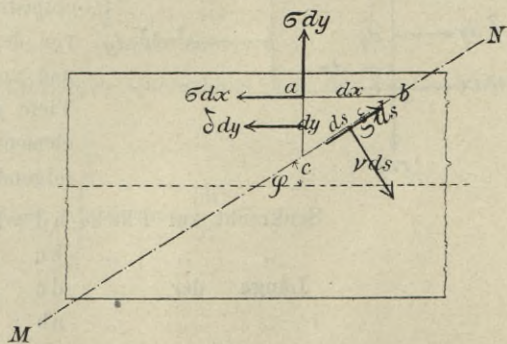


Fig. 51.





in die Schnittebene MN fallende Componente zu ersetzen. Durch erstere entstehen Normalspannungen, durch letztere Schubspannungen für sämtliche Flächenteile des betrachteten Balkenschnittes.

Wird das Balkenelement abc (Fig. 51) von der zur Bildfläche senkrechten Tiefe = 1 in's Auge gefasst und bezeichnen  $\nu ds$  und  $\xi ds$  die auf die Begrenzungsfläche cb wirkende Normalkraft und die Schubkraft, so müssen diese den übrigen, an dem Balkenelement wirkenden Kräften  $\delta dy$ ,  $\sigma dx$  und  $\sigma dy$  das Gleichgewicht halten. Zerlegt man letztere in Componenten senkrecht und parallel zu bc, so ist:

$$\nu ds = \delta dy \sin \varphi + \sigma dx \sin \varphi + \sigma dy \cos \varphi$$

und

$$\xi ds = \delta dy \cos \varphi + \sigma dx \cos \varphi - \sigma dy \sin \varphi.$$

Da nun  $\frac{dy}{ds} = \sin \varphi$  und  $\frac{dx}{ds} = \cos \varphi$ , so wird:

$$\nu = \frac{\delta}{2}(1 - \cos 2\varphi) + \sigma \sin 2\varphi \quad (42)$$

und

$$\xi = \frac{\delta}{2} \sin 2\varphi + \sigma \cos 2\varphi. \quad (43)$$

Diese Gleichungen ergeben die auf das beliebige Flächenelement bc wirkenden Spannungen als Functionen des Winkels  $\varphi$ . Setzt man  $\frac{d\nu}{d\varphi} = 0$ ,

d. h.  $\frac{\delta}{2} \sin 2\varphi + \sigma \cos 2\varphi = 0$ , so ergibt sich:

$$\tan 2\varphi = -\frac{2\sigma}{\delta}. \quad (44)$$

Diesem Werte der Tangente entsprechen zwei um  $90^\circ$  von einander verschiedene Winkel  $\varphi$ . Man hat in jedem Querschnittspunkte zwei zu einander senkrechte Richtungen, nach deren einer die grösste, nach deren anderen aber die kleinste Normalspannung stattfindet. Diese Spannungen, nach deren Richtungen, wie Gl. 43 erkennen lässt, die Schubspannungen gleich Null sind, werden Hauptspannungen genannt. Man erhält sie, da

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{2\sigma}{\sqrt{\delta^2 + 4\sigma^2}}$$

und

$$\cos 2\varphi = \mp \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\sigma^2}},$$

durch Einführung dieser Ausdrücke in Gl. 42:

$$\nu_0 = \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\sigma^2}. \quad (45)$$

In derselben Weise werden die Grenzwerte von  $\xi$  gefunden, wenn man  $\frac{d\xi}{d\varphi} = 0$  setzt, d. h. wenn  $\frac{\delta}{2} \cos 2\varphi - \sigma \sin 2\varphi = 0$  oder

$$\operatorname{tang} 2\varphi = \frac{\delta}{2\sigma}. \quad (46)$$

Für jeden Punkt sind zwei zu einander senkrechte Schnittrichtungen vorhanden, nach welchen Grenzwerte der Schubspannungen, „Hauptschubspannungen“, auftreten. Diese erhält man nach Gleichung 43:

$$\xi_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 + 4\sigma^2}. \quad (47)$$

Aus der Gleichung 45 kann Nachstehendes gefolgert werden:

Für die äussersten Fasern ist  $\sigma = 0$ , denn für  $y = n$  wird in Gl. 39:

$$\int_y^n y \, dF = \int_n^n y \, dF = 0,$$

daher:

$$\nu_0 = \delta$$

oder, weil nach Gl. 12:  $\delta = \frac{\mathcal{M}}{\Theta} n$ ,

$$\nu_0 = \frac{\mathcal{M}}{\Theta} n.$$

In der neutralen Faserschichte ist  $\delta = 0$ , daher nach Gl. 45:

$$\nu_0 = \sigma = \frac{V}{z_0 \Theta} \int_y^n y \, dF.$$

Für alle zwischen den äussersten Fasern und der Neutralaxe liegenden Punkte ist, wie aus Gl. 45 hervorgeht,  $\nu_0$  jedenfalls grösser als die an der betreffenden Stelle auftretende axiale Normalspannung und auch grösser als die parallel zur Trägeraxe wirkende Schubspannung. Selbstverständlich soll durch  $\nu_0$  die zulässige Zug- oder Druckspannung nicht überschritten werden. Da die axialen Normalspannungen vom Querschnittsrand gegen die Neutralaxe hin abnehmen und in dieser selbst gleich Null werden, während bei den Schubspannungen das Umgekehrte stattfindet, so wird, sofern es sich um Vollquerschnitte, wie Rechteck, Kreis u. dgl. handelt, bei Querschnittsbestimmung auf Grund der Gleichung:  $\frac{\delta}{n} \Theta = \mathcal{M}$  hinreichende Sicherheit nicht nur in den äussersten Fasern, sondern in sämtlichen übrigen auch gegenüber den hier auftretenden Werten von  $\nu_0$  sein.

Nur bei solchen Trägerquerschnitten, welchen, wie dem Blechwandträger mit dünner Mittelwand, eine beträchtliche Flächenverminderung vom Querschnittsrand gegen die Neutralaxe eigentümlich ist, besteht die Möglichkeit,



dass, wenn die Querschnittsdimensionen auf Grund der Normalspannung in den äussersten Fasern bestimmt sind, für gewisse Werte von  $y$  durch  $v_{\max}$  die zulässige Beanspruchung überschritten wird. Diese Frage ist in jedem gegebenen Falle zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung zu machen.

Was die Maximalschubspannung anlangt, so ist in den äussersten Fasern, für welche  $\sigma = 0$ , nach Gl. 47:

$$\xi_{\max.} = \pm \frac{\delta}{2},$$

dagegen in der neutralen Faserschicht, da hier  $\delta = 0$ ,

$$\xi_{\max.} = \pm \sigma.$$

Für die zwischen den äussersten Fasern und der neutralen Faserschicht befindlichen Querschnittspunkte wird in der Regel  $\xi_{\max.}$  nicht den Wert der grössten axialen Schubspannung in der neutralen Faserschicht überschreiten, so dass für die Anwendung der durch Gl. 40 bestimmte Wert ausschliesslich massgebend sein wird.

#### § 4. Knickfestigkeit.

Wird ein Stab durch eine in seiner Längsaxe wirkende Kraft  $P$  auf Druck beansprucht, so erfolgt, wenn die Länge des Stabes grösser ist als circa der fünffache Betrag der kleinsten Querschnittsdimension, bei fortgesetzter Steigerung der Belastung erfahrungsmässig nicht mehr ein eigentliches Zerdrücktwerden, sondern der Stab wird seitlich ausgebogen und endlich zerbrochen, zerknickt. Man nannte diese Art der Angriffnahme Beanspruchung auf Knickfestigkeit. Sie ist veranlasst durch unvermeidliche Ungleichartigkeiten des Stabmaterials, durch Fehler in der Centrirung der Last und durch kleine Abweichungen der Krafrichtung von der Stabaxe; denn wenn die Kraftlinie  $P$  genau mit der vollkommen geradlinig gedachten Stabaxe zusammenfallen würde und wenn das Material des Stabes homogen wäre, so würde die Erscheinung der seitlichen Ausbiegung undenkbar sein. Unter dem Einfluss aber der erwähnten Umstände entstehen durch  $P$  in den einzelnen Querschnitten Drehmomente, wodurch zu den überall vorhandenen Druckwirkungen noch Biegebungsbeanspruchungen hinzukommen. Der Bruch tritt in diesem Falle früher ein als bei Sicherung gegen seitliche Ausbiegung, und Stabquerschnitt  $F$  oder Belastung  $P$  sind nicht aus Gleichung 3, sondern mit Rücksicht auf die hier ungünstigeren Verhältnisse zu bestimmen.

Da bezüglich der Knickbeanspruchung auch die Art der Befestigung des Stabes von Einfluss ist, so mögen folgende, für die Anwendung hauptsächlich in Betracht kommende Fälle unterschieden werden:

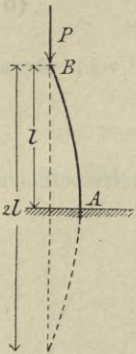




welche nach ihrem Urheber als die Euler'sche Gleichung bezeichnet wird. Dieselbe gibt jenen Grenzwert P der Belastung an, dessen Überschreiten ein Unsicherwerden des Gleichgewichtes des Stabes zur Folge hat. Mit Rücksicht auf Einhaltung  $\nu$ -facher Sicherheit schreibt sich die Gleichung:

Fig. 53.

$$P = \frac{\pi^2 \varepsilon \Theta}{\nu l^2} \quad (51)$$

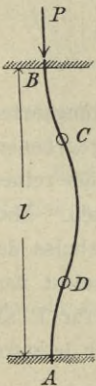


II. Der Stab ist mit dem einen Ende A eingespannt, am anderen Ende B aber frei beweglich (Fig. 53).

Nach eingetretener Biegung befindet sich der Stab offenbar in demselben Zustand wie die Hälfte des im vorgehenden Falle betrachteten Stabes. Deshalb kann, wenn  $l$  die jeweilige ganze Stablänge bezeichnet, Fall II auf Fall I zurückgeführt werden, wenn in Gl. 51 der Grösse  $l$  der Wert  $2l$  substituiert wird. Man erhält:

$$P = \frac{\pi^2 \varepsilon \Theta}{4 \nu l^2}. \quad (52)$$

Fig. 54.



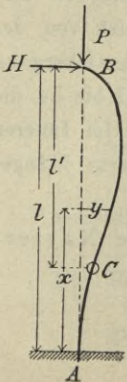
III. Der Stab ist mit beiden Enden fest eingespannt (Fig. 54).

Die elastische Linie wird eine Curve mit zwei Wendepunkten C und D sein. Die beiden Endstücke BC und DA befinden sich in demselben Zustand wie der ganze Stab der Fig. 53 (Fall II), während der mittlere Teil CD dem Fall I (Fig. 52) entspricht.

Indem man daher an Stelle des  $l$  der Gl. 52 den Wert  $\frac{l}{4}$  (oder an Stelle des  $l$  der Gl. 51 den Wert  $\frac{l}{2}$ ) setzt, ergibt sich:

$$P = \frac{4 \pi^2 \varepsilon \Theta}{\nu l^2}. \quad (53)$$

Fig. 55.



IV. Der Stab ist mit dem einen Ende A eingespannt und mit dem anderen, frei drehbaren Ende B in der ursprünglichen Stabaxe geführt (Fig. 55).

Wenn die Führung nicht vorhanden wäre, so würde in Folge der Biegung das Stab-Ende B eine seitliche Verrückung erleiden (Fall II). Die Wirkung der Führung besteht also in der Entwicklung einer Horizontal-Reaction H. Daher ist das Biegemoment für irgend einen Punkt  $x, y$  der Axe:

$$- P y + H (l - x)$$

und die Differentialgleichung der elastischen Linie:



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\epsilon \Theta} \left( -Py + H(1-x) \right).$$

Durch Integration und Bestimmung der Constanten auf Grund der hier vorliegenden Befestigungsart\*) ergibt sich:

$$P = \frac{2,046 \pi^2 \epsilon \Theta}{\nu l^2} \quad (54)$$

und der Abstand des Wendepunktes C der elastischen Linie vom oberen Stab-Ende:

$$l' = 0,71 l.$$

Der in den Gleichungen 51 bis 54 vorkommende Sicherheitscoefficient wird gewöhnlich für

Holz:	$\nu = 10$
Gusseisen:	$\nu = 8$ und
schmiedbares Eisen:	$\nu = 5$

angenommen.

Der Elasticitätsmodul ist für

Holz:	$\epsilon = 120\,000$ kg pro qcm
Gusseisen:	$\epsilon = 1\,000\,000$ „ „ „ und
schmiedbares Eisen:	$\epsilon = 2\,000\,000$ „ „ „

Die Euler'sche Formel sammt ihren, den verschiedenen Befestigungsarten entsprechenden Modificationen hat die Eigenthümlichkeit, dass sie bei gegebenem F für kürzere Säulen ziemlich hohe Werte von P liefert, welche die der reinen Druckfestigkeit entsprechenden Beträge von P oft weit überschreiten. Man hat daher bei der Anwendung stets zu prüfen, wie sich das Ergebniss der Berechnung zu dem auf Grund der Formel  $P = F\beta$  erhaltenen Resultat verhält. Ergibt sich aus der Euler'schen Formel ein grösserer Wert für P als aus Gleichung  $P = F\beta$ , so ist als zulässige Stab-Belastung nur der letztere, geringere Wert anzunehmen.

Die Euler'sche Formel lässt also den stetigen Übergang von den Verhältnissen der reinen Druckfestigkeit zu denjenigen der Knickfestigkeit vermissen. Denn wenn auch die Knickbeanspruchung verschieden ist von der reinen Druckbeanspruchung, so ist doch nicht anzunehmen, dass der Übergang plötzlich und sprungweise erfolge. Da zudem die Gleichungen 51 bis 54 die Grösse  $\beta$  nicht enthalten, also keinen Aufschluss geben über die im Inneren des Stabes herrschenden Spannungen, so war man bestrebt, diesem Mangel durch Aufstellung empirischer Formeln abzuhelfen.

Von solchen steht zur Zeit am meisten in Anwendung die Navier-Schwarz'sche Formel. Dieselbe lautet:

\*) Winkler, Lehre von der Elasticität und Festigkeit, I. Teil, S: 181.



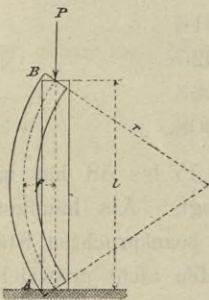
Für Fall I: 
$$P = \frac{F\beta}{1 + \alpha \frac{Fl^2}{\Theta}} \quad (55)$$

Hiebei bezeichnet:

- P die in der Stabaxe wirkende Belastung,
- F den Stab-Querschnitt,
- $\Theta$  das kleinste Trägheitsmoment des Stabquerschnitts,
- $\beta$  die zulässige Druckbeanspruchung des Materials. und
- $\alpha$  eine Erfahrungszahl, den sog. Knickkoeffizienten.

Die Formel kann auf folgende Weise begründet werden:

Fig. 56.



Die grösste Druckspannung findet in der äussersten gepressten, um  $n$  von der Neutralaxe entfernten Faser desjenigen Querschnitts statt, welcher sich an der Stelle  $f$  der grössten seitlichen Ausbiegung befindet (Fig. 56), und setzt sich zusammen aus der durch  $P$  unmittelbar bewirkten Druckspannung  $\beta_1 = \frac{P}{F}$  und aus der durch die Biegung hervorgerufenen Druckspannung  $\beta_2 = \frac{n P f}{\Theta}$ , so dass:

$$\beta = \frac{P}{F} + \frac{n P f}{\Theta}.$$

Wenn angenommen wird, die elastische Linie sei ein Kreisbogen vom Radius  $r$ , so ist annähernd:

$$f = \frac{l^2}{8r}$$

und da nach Gl. 6:

$$r = \frac{n\varepsilon}{\beta_2},$$

so ergibt sich:

$$\beta = \frac{P}{F} + \frac{P}{\Theta} l^2 \frac{\beta_2}{8\varepsilon}.$$

Setzt man die Constante  $\frac{\beta_2}{8\varepsilon} = \alpha$ , so ergibt sich:

$$P = \frac{F\beta}{1 + \alpha \frac{Fl^2}{\Theta}}$$

Aus dieser Gleichung erhält man wie oben:

Für Fall II: 
$$P = \frac{F\beta}{1 + 4\alpha \frac{Fl^2}{\Theta}} \quad (56)$$

für Fall III:

$$P = \frac{F\beta}{1 + \frac{1}{4}\alpha \frac{Fl^2}{\theta}} \quad (57)$$

und für Fall IV, wenn in Gleichung 55 der Grösse  $l$  der Wert  $0,71 l$  substituirt wird:

$$P = \frac{F\beta}{1 + \frac{1}{2}\alpha \frac{Fl^2}{\theta}} \quad (58)$$

Die Werte der Constanten  $\alpha$  sind durch Versuche bestimmt worden. Als Mittelwerte aus einer grösseren Zahl solcher Versuche können angenommen werden für:

Holz:	$\alpha = 0,00016$
Gusseisen (stehender Guss):	$\alpha = 0,00025$
Gusseisen (liegender Guss):	$\alpha = 0,00063$
Schmiedeeisen:	$\alpha = 0,00008.$

Bei der Anwendung der Formeln 51 bis 54 oder 55 bis 58 hat man zunächst zu entscheiden, welcher der vier Fälle vorliegt. Am häufigsten kommt Fall I vor, da in der Regel die auf Knickung beanspruchten Stäbe derart mit ihrer Umgebung verbunden sind, dass die Enden nicht ausweichen können.

Als fest eingespannt ist ein Stab-Ende anzusehen, wenn der Stab hinreichend tief in Erdreich eingerammt ist, oder wenn das Stab-Ende in eine entsprechend grosse Platte ausläuft, welche durch Verankerung gegen Umkanten gesichert ist.

*Beispiel 1.* Ein 4 m langer Pfosten aus Fichtenholz von quadratischem Querschnitt, dessen Enden als geführt zu betrachten sind, wird durch eine in der Längsaxe wirkende Kraft  $P = 20000$  kg beansprucht. Welche Seitenlänge  $h$  des Querschnitts muss der Pfosten erhalten?

a) Lösung auf Grund der Euler'schen Formel.

Nach Gl. 51 ist:

$$20000 = \frac{10.120000 \cdot \frac{1}{12} h^4}{10.400^2},$$

daher

$$h^4 = 320000 \quad \text{und} \quad h = 23,8 \text{ cm.}$$

Da der Pfostenquerschnitt jedenfalls gross genug sein muss, um der reinen Druckbeanspruchung mit hinreichender Sicherheit widerstehen zu können, so ist noch zu untersuchen, ob der berechnete Wert von  $h$  dieser Bedingung genügt. Letzteres ist nicht der Fall. Denn da die Druckfestigkeit des Fichtenholzes (siehe Tabelle, S. 78)  $\beta_0 = 300$  kg pro qcm, daher bei zehnfacher Sicherheit  $\beta = 30$  kg pro qcm, so ergibt sich aus:



$$30 h^2 = 20000$$

$$h = 25,8,$$

welcher grössere Wert unter Nichtberücksichtigung des Resultates der Euler'schen Formel der Dimensionirung des Pfostens zu Grund zu legen ist.

b) Lösung auf Grund der Navier-Schwarz'schen Formel.

Nach Gl. 55 ist, wenn  $\beta = 30$  kg pro qcm,

$$20000 = \frac{h^2 \cdot 30}{1 + 0,00016 \frac{h^2 \cdot 400^2}{\frac{1}{2} h^4}}$$

Hieraus folgt:

$$h^4 - 666,66 h^2 = 204800$$

oder, wenn man  $h^2 = x$  setzt,

$$x^2 - 666,66 x = 204800,$$

daher

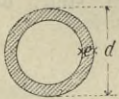
$$x = 895$$

und

$$h = 29,9 \text{ cm.}$$

*Beispiel 2.* Eine 3 m lange gusseiserne Hohlsäule (Fig. 57), welche mit beiden Enden geführt ist, hat eine in der Längsaxe wirkende Last von 120000 kg zu tragen. Es ist der äussere Durchmesser  $d$  des ringförmigen Querschnitts zu bestimmen, wenn die Wandstärke  $e = \frac{1}{10} d$ .

Fig. 57.



a) Lösung auf Grund der Euler'schen Formel.

Nach Gl. 51 ist, da  $\Theta = 0,02898 d^4$ ,

$$120000 = \frac{10 \cdot 1000000 \cdot 0,02898 d^4}{8 \cdot 300^2},$$

daher

$$d = 23,36 \text{ cm.}$$

Der Widerstand gegenüber der reinen Druckbeanspruchung erfordert, wenn  $\beta = 500$  kg pro qcm,

$$0,2827 d^2 \cdot 500 = 120000$$

oder

$$d = 29,1.$$

Letzterer Wert, als der grössere, ist für die Ausführung massgebend.

b) Lösung auf Grund der Navier-Schwarz'schen Formel.

Nach Gl. 55 ist, wenn  $\beta = 500$  kg pro qcm,

$$120000 = \frac{0,2827 d^2 \cdot 500}{1 + 0,00025 \cdot \frac{0,2827 d^2 \cdot 300^2}{0,02898 d^4}}$$

oder

$$d^4 - 849 d^2 = 186329,$$

hieraus

$$d = 32 \text{ cm}$$

und

$$e = 3,2 \text{ cm.}$$


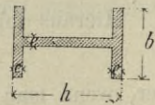
*Beispiel 3.* Eine 5 m lange gusseiserne Säule von förmigem Querschnitt (Fig. 58), welche an beiden Enden geführt ist, hat eine in der Längsaxe wirkende Last von 90 000 kg zu tragen. Es ist die Länge  $h$  des Querschnitts zu bestimmen, wenn die Breite  $b$  desselben gleich  $\frac{h}{2}$  und die Rippenstärke  $e = \frac{h}{12}$  angenommen wird.

Fig. 58.



a) Lösung auf Grund der Euler'schen Formel.

Nach Gl. 51 ist, da  $\Theta = 0,0017763 h^4$

$$90\,000 = \frac{10 \cdot 1\,000\,000 \cdot 0,0017763 h^4}{8 \cdot 500^2},$$

daher

$$h = 56,4 \text{ cm.}$$

Aus der Formel der reinen Druckfestigkeit  $F \cdot \beta = P$  ergibt sich, da  $F = 0,153 h^2$ ,

$$0,153 h^2 \cdot 500 = 90\,000$$

oder

$$h = 34,3.$$

Hier ist somit für die Ausführung der erstere Wert von  $h = 56,4$  massgebend.

b) Lösung auf Grund der Navier-Schwarz'schen Formel.

Nach Gl. 55 ist:

$$90\,000 = \frac{0,153 h^2 \cdot 500}{1 + 0,00025 \cdot \frac{0,153 h^2 \cdot 500^2}{0,0017763 h^4}}$$

oder

$$h^4 - 1176 h^2 = 6\,333\,294,$$

daher

$$h = 56 \text{ cm}$$

und

$$b = 28 \text{ cm}$$

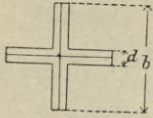
sowie

$$e = 4,7 \text{ cm.}$$



*Beispiel 4.* Ein 4 m langer schmiedeiserner, aus vier Winkeleisen zusammengesetzter Stab, welcher an beiden Enden geführt ist, hat eine axiale Belastung von 30 000 kg aufzunehmen. Es sind die Dimensionen des kreuzförmigen Querschnitts, Fig. 59, zu bestimmen, wenn  $d = \frac{1}{10} b$  angenommen wird.

Fig. 59.



a) Lösung auf Grund der Euler'schen Formel.

Nach Gl. 51 ist, da  $\Theta = 0,0084 b^4$ ,

$$30\,000 = \frac{10 \cdot 2\,000\,000 \cdot 0,0084 b^4}{5 \cdot 400^2};$$

daher

$$b = 19,4 \text{ cm.}$$

Aus der Formel:  $F\beta = P$  ergibt sich, da  $F = 0,19 b^2$  und wenn  $\beta = 750 \text{ kg pro qcm}$  angenommen wird,

$$b = 14,5 \text{ cm,}$$

weshalb der grössere, aus der Euler'schen Formel erhaltene Wert zu wählen ist.

b) Lösung auf Grund der Navier-Schwarz'schen Formel.

Nach Gl. 55 ist:

$$30\,000 = \frac{0,19 b^2 \cdot 750}{1 + 0,00008 \cdot \frac{0,19 b^2 \cdot 400^2}{0,0084 b^4}}$$

Hieraus folgt:

$$b^4 - 210,5 b^2 = 60951,$$

daher

$$b = 19,3 \text{ cm}$$

und

$$d = 1,93 \text{ cm.}$$

Die Euler'sche sowohl wie die Navier-Schwarz'sche Formel sind neuerdings von Professor Bauschinger und Professor Tetmajer durch Versuche auf ihre Richtigkeit geprüft worden.

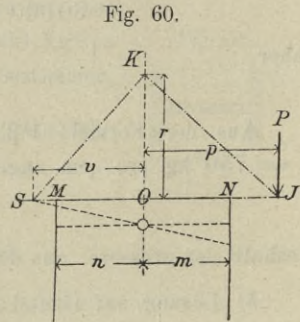
Aus den Versuchen Bauschinger's kann geschlossen werden, dass die Euler'sche Formel für Stäbe mit drehbaren Enden (Spitzenlagerung) zuverlässige Resultate gibt, sofern von jenen Fällen abgesehen wird, welche von vornherein in Folge der Anforderungen der reinen Druckfestigkeit auszuscheiden haben. Für Stäbe mit ebenen, an festen Druckplatten anliegenden Stirnflächen, wobei die Knickungsvorgänge nicht genau dem Elasticitätsgesetz entsprechen, hat die Navier-Schwarz'sche Formel brauchbare Werte geliefert. \*)

\*) Mitteilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. techn. Hochschule in München, Heft 15, München 1887.

Nach Tetmajer ist der Coefficient  $\alpha$  der Navier-Schwarz'schen Formel nicht constant, sondern eine Zahl, welche bei einem und demselben Material mit dem Verhältnisse der freien Stablänge  $l$  zum kleinsten Trägheitsradius  $r_{\min.}$  des Querschnitts sich ändert.\*)

### Excentrische Belastung gerader Stäbe.

Ein stabförmiger Körper sei durch eine ausserhalb seiner Längsaxe, im Abstand  $p$  parallel zu derselben wirkende Kraft  $P$  auf Druck beansprucht (Fig. 60). Wird zunächst die Länge des Stabes als gering im Vergleich mit den Querschnittsdimensionen angenommen, so dass seitliche Ausbiegungen von Belang nicht eintreten, so ist, wenn die durch  $P$  und die Stabaxe bestimmte Ebene die Stabquerschnitte nach Hauptaxen schneidet, nach Gl. 28 für irgend einen Querschnitt die grösste am Querschnittsrande bei  $N$  auftretende Druckspannung:



$$\beta = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{\Theta} m. \quad (59)$$

Ist  $r$  der dem Trägheitsmomente  $\Theta$  des Querschnitts entsprechende Trägheitsradius und bezeichnet  $v$  den Abstand der Neutralaxe vom Schwerpunkt  $O$ , so folgt, da

$$\Theta = Fr^2$$

und weil nach Gl. 34

$$r^2 = pv,$$

$$\beta = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{m}{v} \right). \quad (60)$$

Die Construction der Neutralaxe ergibt sich auf Grund von Gl. 34 nach dem auf S. 50, Fig 37, dargelegten Verfahren: Man trage von  $O$  aus auf der Stabaxe den Trägheitsradius  $r = OK$  auf, ziehe  $KJ$  und errichte zu  $KJ$  die Senkrechte  $KS$ , so gibt der Schnitt  $S$  der Letzteren mit  $MN$  die Lage der Neutralaxe.

Führt man statt  $v$  die Kernweite  $k$  ein, welche nach Gl. 35 durch  $r^2 = mk$  bestimmt ist, so nimmt Gl. 59 die Form an:

$$\beta = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{p}{k} \right). \quad (61)$$

\*) Tetmajer, Die Baumechanik, II. Teil, Zürich 1889.

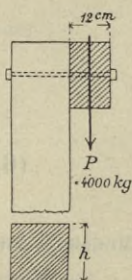
„ Mitteilungen der Anstalt zur Prüfung von Baumaterialien am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich, 4. Heft, Zürich 1890.



Die Querschnittsdimensionen des Stabes können aus einer der Gleichungen 59 bis 61, in welchen  $\beta$  gleich der zulässigen Druckbeanspruchung des Materials zu setzen ist, leicht bestimmt werden.

*Beispiel.* Eine Stuhlsäule aus Lärchenholz (Fig. 61) dient einer Pfette zum Auflager, welche, da sie mittels Schraubenbolzens seitlich an der Stuhlsäule befestigt ist, dieselbe excentrisch belastet. Die Breite der Pfette ist 12 cm, so dass diese Belastung  $P = 4000$  kg im Abstand  $\frac{1}{2} h + 6$  cm von der Axe der Säule wirksam ist. Welche Seitenlänge  $h$  muss der quadratische Querschnitt der Stuhlsäule erhalten, wenn die zulässige Druckbeanspruchung des Holzes von 40 kg nicht überschritten werden soll und wenn die Säule gegen seitliche Ausbiegung gesichert ist?

Fig. 61.



Da  $F = h^2$ ,  $p = \frac{1}{2} h + 6$  und, nach S. 52,  $k = \frac{h}{6}$ ,

so folgt aus Gl. 61:

$$\beta = \frac{4000}{h^2} \left( 1 + \frac{6(\frac{1}{2} h + 6)}{h} \right),$$

daher

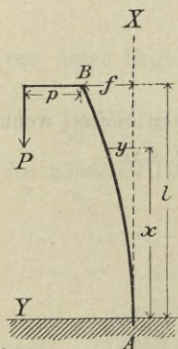
$$\beta h^3 - 16000 h = 144000$$

und

$$h = 23,5 \text{ cm.}$$

Ist das Verhältniss der Stablänge zur kleinsten Querschnittsdimension derart, dass nicht Druckfestigkeit allein, sondern auch Bieungsbeanspruchung in Frage kommt, so bleibt das Moment nicht wie im bisher betrachteten Fall constant, sondern es nimmt von B nach A hin zu.

Fig. 62.



Für irgend einen Punkt  $x, y$  der Stabachse (Fig. 62) ist:

$$\mathfrak{M} = P(p + f - y),$$

daher die Differentialgleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P}{\varepsilon \Theta} (p + f - y)$$

oder, wenn  $\frac{P}{\varepsilon \Theta} = t^2$  gesetzt wird,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = t^2 (p + f - y).$$

Durch zweimalige Integration dieser Gleichung erhält man:

$$-p - f + y = A \sin(tx) + B \cos(tx).$$

Da  $\frac{dy}{dx} = t A \cos(tx) - t B \sin(tx)$  und da für  $x = 0$  auch  $\frac{dy}{dx} = 0$ , so ist  $A = 0$ .

Ferner ist für  $x = 0$  auch  $y = 0$ , daher

$$-(p + f) = B.$$

Somit ergibt sich als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = (p + f) [1 - \text{Cos}(tx)]. \quad (62)$$

Für  $x = 1$  ist  $y = f$ , also

$$f = (p + f) [1 - \text{Cos}(t1)]$$

oder

$$f = \frac{p [1 - \text{Cos}(t1)]}{\text{Cos}(t1)}. \quad (63)$$

Das grösste Moment, an der Befestigungsstelle bei A stattfindend, ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\max.} &= P(p + f), \\ &= Pp + Pp \frac{1 - \text{Cos}(t1)}{\text{Cos}(t1)}, \\ &= \frac{Pp}{\text{Cos}(t1)}. \end{aligned}$$

Nach Gl. 28 erhält man hieraus die grösste Spannung an der durch die Biegung gezogenen Seite, wenn  $n$  den Abstand der äussersten gezogenen Faser von der Neutralaxe bezeichnet:

$$\alpha = \frac{P}{F} - \frac{\mathcal{M}n}{\Theta} = \frac{P}{F} - \frac{Pp}{\text{Cos}(t1)} \cdot \frac{n}{\Theta}$$

und die grösste Spannung an der durch die Biegung gedrückten Seite, wenn  $m$  die Entfernung des betreffenden Querschnittsrandes von der Axe:

$$\beta = \frac{P}{F} + \frac{\mathcal{M}m}{\Theta} = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{\text{Cos}(t1)} \cdot \frac{m}{\Theta},$$

oder

$$\alpha = P \left( \frac{1}{F} - \frac{pn}{\Theta \text{Cos} \left( 1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon \Theta}} \right)} \right) \quad (64)$$

und

$$\beta = P \left( \frac{1}{F} + \frac{pm}{\Theta \text{Cos} \left( 1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon \Theta}} \right)} \right). \quad (64^a)$$



Zur Berechnung der Tragfähigkeit bei gegebenem Querschnitt ist:

$$P = \frac{F \alpha}{1 - \frac{F p n}{\Theta \cos \left( 1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon \Theta}} \right)}} \quad (65)$$

oder

$$P = \frac{F \beta}{1 + \frac{F p m}{\Theta \cos \left( 1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon \Theta}} \right)}}, \quad (65^a)$$

wobei von den mittels beider Formeln erhaltenen Zahlenwerten der kleinere gültig ist.

Für den Stabquerschnitt ergeben sich die Formeln:

$$F = \frac{P}{\alpha} \left( 1 - \frac{F p n}{\Theta \cos \left( 1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon \Theta}} \right)} \right), \quad (66)$$

und

$$F = \frac{P}{\beta} \left( 1 + \frac{F p m}{\Theta \cos \left( 1 \sqrt{\frac{P}{\varepsilon \Theta}} \right)} \right), \quad (66^a)$$

von deren Ergebnissen das grössere der Dimensionirung zu Grunde zu legen ist.

Da  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$ , so ergibt sich, wenn die höheren Glieder der Reihe vernachlässigt werden:

$$F = \frac{P}{\alpha} \left( 1 - \frac{F p n}{\Theta \left( 1 - \frac{1}{2} l^2 \frac{P}{\varepsilon \Theta} \right)} \right), \quad (67)$$

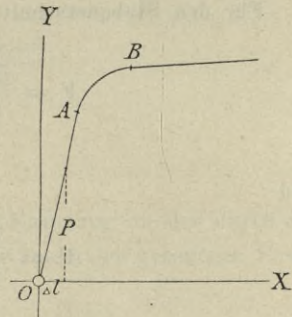
und

$$F = \frac{P}{\beta} \left( 1 + \frac{F p m}{\Theta \left( 1 - \frac{1}{2} l^2 \frac{P}{\varepsilon \Theta} \right)} \right). \quad (67^a)$$

## § 5. Versuchsergebnisse über die Festigkeit des Holz- und Eisenmaterials.

Werden stabförmige Körper aus Holz oder Eisen der Einwirkung äusserer Kräfte ausgesetzt, so entstehen Formänderungen, welche nach S. 2 innerhalb einer gewissen Grenze proportional den Kräften bleiben, welche sie hervorbringen. Trägt man auf der Axe  $OX$  (Fig. 63) die Formänderungen als Abscissen auf, die Kräfte aber als Ordinaten, so erhält man als Verbindungslinie der Endpunkte der Ordinaten eine Gerade. Bei zunehmender Belastung, wenn dieselbe die Proportionalitätsgrenze überschreitet, wachsen die Formänderungen in grösserem Verhältniss als die zugehörigen Belastungen, und die Verbindungslinie der Endpunkte der Kraftordinaten wird krummlinig. Der Punkt  $A$ , in welchem die Gerade  $OA$  in die Curve übergeht, ist die Proportionalitätsgrenze. Endlich geräth, wenn die Belastung weiter gesteigert wird, der Stab in einen Zustand, in welchem bei verhältnissmässig geringer Vergrösserung der Belastung ein ausserordentlich starkes Wachsen der Formänderungen bemerkbar ist. Der Stab beginnt sich zu strecken, zu „fliessen“. Die Verbindungslinie der Endpunkte der Kraftordinaten wird nahezu parallel  $OX$  und der Punkt  $B$ , welcher der manchmal scharf ausgesprochenen Richtungsänderung entspricht, wird Streckgrenze oder Fliessgrenze genannt.

Fig. 63.



Bei noch weiter gesteigerter Belastung wird die Festigkeitsgrenze erreicht und der Bruch tritt ein.

Die Proportionalitätsgrenze bildet nicht bei allen Materialien eine für alle Fälle feste Grenze, vielmehr haben die Versuche ergeben, dass dieselbe bei Eisen und Stahl durch äussere Einwirkungen verändert werden kann. So wird durch wiederholte Belastung zwischen Null und einer oberen Spannungsgrenze, die in der Nähe der Proportionalitätsgrenze befindlich ist, die Proportionalitätsgrenze gehoben, dagegen sinkt sie, wenn die Belastung die Streckgrenze überschreitet. Ferner vermindern Zugbelastungen, welche etwas, wenn auch nur wenig grösser sind als die betreffende Elastizitätsgrenze, die Druckproportionalitätsgrenze. Umgekehrt wird durch entsprechende Druckbeanspruchung die Zug-Proportionalitätsgrenze verringert. Liegen Proportionalitätsgrenze und Bruchbelastung nahe beisammen oder treten zwischen diesen Grenzen nur kleine Formänderungen auf, so wird das Material spröde genannt. Je grösser die Sprödigkeit ist, desto grösser ist die Gefahr, dass durch Stosswirkungen der Bruch herbeigeführt wird.

Zähe wird das Material genannt, wenn dem Eintritt des Bruches erhebliche bleibende Formänderungen vorausgehen; je bedeutender die Formänderung



ist, die ein Material annehmen kann, nachdem die Proportionalitätsgrenze überschritten ist, desto zäher ist es.

Im Allgemeinen ist beim schmiedbaren Eisen das Gesetz erkannt worden, dass, wenn durch irgend einen Einfluss die Festigkeit gesteigert wird, dann die Zähigkeit abnimmt, und umgekehrt hat man beobachtet, dass Prozesse, welche die Zähigkeit vergrössern, eine Verminderung der Festigkeit zur Folge haben.

Beim Eisen ist auch die chemische Zusammensetzung von Einfluss auf die Festigkeit. Die Festigkeit des schmiedbaren Eisens wächst mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt, bis letzterer den Betrag von ca. 1 % erreicht. Bei weiter steigendem Kohlenstoffgehalt bleibt die Festigkeit zunächst noch unverändert und nimmt alsdann allmählich ab.

Ferner wird beim schmiedbaren Eisen die Festigkeit gesteigert durch länger fortgesetzte Bearbeitung desselben in hoher Temperatur (Rothglühhitze), ohne dass eine bemerkbare Abnahme der Zähigkeit eintritt. Besonders deutlich zeigt sich dieser Einfluss bei der ersten Bearbeitung der gegossenen Flusseisenblöcke. Die Bearbeitung des Eisens in erkaltetem Zustande vergrössert zwar die Festigkeit, bedingt aber, wegen gleichzeitiger Erhöhung der Proportionalitätsgrenze, eine Verminderung der Zähigkeit. Man kann indessen solches, durch Bearbeitung in kaltem Zustande spröde gewordene Eisen dadurch in seinen ursprünglichen Zustand zurückführen, dass man es erhitzt und zwar mindestens bis zur Rothgluth. Die Wirkung der Erhitzung auf  $350^{\circ}$  bis  $450^{\circ}$  C. und der darauf folgenden Abkühlung besteht immer darin, dass die Proportionalitätsgrenze (und auch die Streckgrenze) erniedrigt wird und zwar um so mehr, je höher die Temperatur war.

Das feinkörnige Gusseisen hat einen höheren Grad von Festigkeit als das grobkörnige. Rasch erkaltetes und daher feinkörniges Gusseisen ist deshalb im Allgemeinen besser als langsam erkaltetes. Da Gussstücke von geringer Dicke rascher erkalten als solche mit dicken Wandungen, so folgt, dass die Wandstärken gusseiserner Constructionsteile nicht zu gross gewählt werden dürfen und dass übermässige Materialanhäufungen an einzelnen Stellen zu vermeiden sind.

Die Festigkeit und Elasticität des Holzes nimmt im Allgemeinen mit abnehmendem Wassergehalt zu. Je trockener das Holzmaterial, desto grösser ist die Bruchbelastung und der Elasticitätsmodul.

Nachstehende Tabellen enthalten Mittelwerte des Elasticitätsmoduls, der Proportionalitätsgrenze und der Festigkeitscoefficienten einiger Holz- und Eisenmaterialien.



### A. Elasticitätsmodul, Proportionalitätsgrenze und Festigkeit.

#### Tabelle des Elasticitätsmoduls und der Proportionalitätsgrenze.

Material	kg pro qcm					
	Elasticitätsmodul $E$			Proportionalitätsgrenze		
	Zug	Druck	Biegung	Zug	Druck	Biegung
Nadelholz . . . . .	120 000	110 000	120 000	360	130	250
Eichenholz . . . . .	110 000	100 000	100 000	470	150	216
Fuchenhholz . . . . .	180 000	170 000	15 000	580	105	250
Gusseisen *) . . . . .	1 000 000	1 000 000	—	—	1300	—
Schweisseisen . . . . .	2 000 000	2 100 000	1 800 000	1600	—	1600
Flusseisen . . . . .	2 150 000	—	1 990 000	2200	—	2000
Flussstahl . . . . .	2 200 000	2 300 000	2 100 000	3500	3500	4000
Gussstahl . . . . .	2 500 000	—	—	3750	5000	5000

\*) Gusseisen besitzt keinen constanten Elasticitätsmodul und keine ausgesprochene Elasticitätsgrenze. Obige Zahlen sind daher nur als annähernd genaue Mittelwerte zu betrachten.

#### Tabelle der Festigkeitscoefficienten.

Material	kg pro qcm				
	Zug $\alpha_0$	Druck $\beta_0$	Schub $\gamma_0$	Biegung $\delta_0$	
Lärche . . . . .	710	380	} = den Fasern }	72	670
Tanne . . . . .	600	280		63	500
Fichte . . . . .	650	300 bis 320		60	420
Föhre . . . . .	700	330		55	500
Eiche . . . . .	880	440		75	600
Buche . . . . .	1000	320	80	720	
Gusseisen . . . . .	1300	6000	1000	—	
Schweisseisen . . . . .	3600	3600	2900	3700	
Flusseisen . . . . .	4000	4000	3400	3600	
Flussstahl . . . . .	6000	6000	4000	6000	
Gussstahl . . . . .	7600	8000	6400	7600	



**B. Zulässige Beanspruchung.**

Die gewöhnliche Methode der Festsetzung der zulässigen Beanspruchung geht von ziemlich willkürlichen Voraussetzungen aus. Man nimmt als zulässige Beanspruchung einen bestimmten, den  $\nu_{\text{ten}}$  Teil des Festigkeitscoefficienten an. Vergl. S. 3.

Die Wahl von  $\nu$  hängt von dem Ermessen des Constructeurs ab, welcher hiebei die Zwecke, denen das Bauwerk zu dienen hat und die Einflüsse, welchen dasselbe unterworfen sein wird, zu berücksichtigen hat. So ist es z. B. angezeigt, bei provisorischen Bauten  $\nu$  kleiner anzunehmen, während bei besonders ungünstigen Umständen, starken Erschütterungen u. dergl. eine Vergrößerung von  $\nu$  erforderlich ist. Jedenfalls soll die zulässige Beanspruchung wesentlich unter der Elasticitätsgrenze bleiben.

Für definitive Constructionen ist es üblich, bei

- Holz  $\nu = 10$ ,
- Gusseisen  $\nu = 6$  und
- schmiedbarem Eisen  $\nu = 4-5$

zu wählen.

Mit Bezug hierauf enthält nachstehende Tabelle die abgerundeten Mittelwerte der zulässigen Beanspruchung für Holz- und Eisenmaterial:

**Tabelle der zulässigen Beanspruchung.**

Material	kg pro qcm			
	Zug $\alpha$	Druck $\beta$	Schub $\gamma$	Biegung $\delta$
Lärche . . . . .	70	40	7	65
Tanne . . . . .	60	30	6	50
Fichte . . . . .	65	30 bis 32	6	42
Föhre . . . . .	70	33	5	50
Eiche . . . . .	90	45	8	60
Buche . . . . .	90	32	8	72
Gusseisen . . . . .	250	500 bis 1000	200	— *)
Schweisseisen . . . . .	750	750	600	750
Flusseisen . . . . .	800	800	650	750
Flussstahl . . . . .	1200	1200	800	1200
Gussstahl . . . . .	1500	1500	1300	1500

\*) Nach den Versuchen von Prof. Bach besteht für Gusseisen bei rechteckigen und I-förmigen Querschnitten zwischen dem Biegungcoefficienten  $\delta_0$  und dem Zugfestigkeitscoefficienten  $\alpha_0$  folgende Beziehung:

$$\delta_0 = 1,25 \sqrt{\frac{n}{y_s}} \alpha_0,$$

wobei  $n$  den Schwerpunktsabstand der meistgespannten Faser und  $y_s$  den Abstand des Schwerpunktes der Profilhälfte von der horizontalen Schwerpunktsaxe des Profils bezeichnet. Nach den Versuchen von Prof. Tetmajer ist für Nadelholz und Laubholz  $\delta = 0,75 \alpha$ , für schmiedbares Eisen  $\delta = \alpha$ .



Die neuere Methode der Bestimmung der zulässigen Beanspruchung strebt eine auf mehr wissenschaftlicher Grundlage beruhende Querschnittsermittlung an. Von massgebender Bedeutung hierfür sind die Versuche gewesen, welche in den Jahren 1859—70 durch Wöhler mit Stäben aus schmiedbarem Eisen angestellt worden sind. Diese Versuche \*) haben nämlich folgendes Resultat ergeben:

Der Bruch des Materials kann nicht nur durch eine die Bruchfestigkeit überschreitende ruhende Last, sondern auch durch eine geringere Belastung bewirkt werden, wenn dieselbe öfter wiederholt wird, d. h. zwischen zwei Grenzwerten abwechselt, „schwingt“.

Für das Eintreten des Bruchs ist massgebend die Anzahl der auf einander folgenden Schwingungen und die Grösse jener Grenzwerte d. i. die Spannungsdifferenz, indem mit dem Wachsen derselben die Minimalspannung, welche den Bruch noch herbeiführen kann, sich verringert.

Professor Bauschinger bestätigt auf Grund seiner Versuche (Mitteilung., Heft XIII, München 1886) dieses Gesetz und kommt zu folgenden weiteren Resultaten:

1) Durch wiederholte Anstrengungen auf Zug zwischen Null und einer oberen Grenze, welche in der Nähe der ursprünglichen Proportionalitätsgrenze liegt, wird der Bruch selbst bei 5- bis 16 millionenmaliger Wiederholung dieser Anstrengung nicht erreicht.

Hiebei darf:

- a) das Material keine Fehler besitzen,
- b) die Proportionalitätsgrenze nicht künstlich, wie z. B. durch Strecken, Schmieden, Walzen erhöht sein.

2) Durch oftmals wiederholte Anstrengungen zwischen Null und einer oberen Spannungsgrenze, die mit der Proportionalitätsgrenze zusammenfällt oder auch mehr oder weniger über derselben gelegen ist, wird die Proportionalitätsgrenze gehoben und zwar um so mehr, je grösser die Zahl der Anstrengungen war, jedoch nicht über eine gewisse Höhe hinaus.

3) Oftmals wiederholte Anstrengungen sind im Stande, die ursprüngliche Proportionalitätsgrenze über die obere Spannungsgrenze hinaus zu heben. Solche Schwingungen führen einen Bruch nicht herbei. Wenn aber die obere Spannungsgrenze so hoch liegt, dass die Proportionalitätsgrenze darüber hinaus nicht gehoben werden kann, so muss der Bruch nach einer beschränkten Anzahl solcher Anstrengungen erfolgen.

Nach dem Bekanntwerden der Wöhler'schen Versuchsergebnisse wurden verschiedene Methoden zur Verwertung derselben für die Dimensionierung der

\*) Zeitschr. f. Bauwesen 1860, 1863, 1866, 1870.



Eisenconstruktionen in Vorschlag gebracht. Im Hochbau sind die Fälle wechselnder Belastung von Eisenconstruktionen nicht selten, und es soll daher im Nachstehenden eine der einfachsten und gebräuchlichsten dieser Methoden, nämlich die Launhardt-Weyrauch'sche, kurz erörtert werden.

*Die Launhardt-Weyrauch'sche Dimensionenberechnung.*

a) Die Beanspruchung findet immer im gleichen Sinne, also entweder **nur** als Zug oder **nur** als Druck statt.

Es bezeichne  $\alpha_0$  die der einmaligen Angriffnahme d. i. der ruhenden Last entsprechende Bruchspannung eines Stabes von der Quadrateinheit Querschnittsfläche. Setzt man den Stab einer Belastung aus, welche etwas kleiner ist als  $\alpha_0$ , so wird, um den Bruch herbeizuführen, eine gewisse Zahl von Wiederholungen nötig sein, letztere zunächst in dem Sinne verstanden, dass der Stab nach jedesmaliger Lasteinwirkung in den vollständig spannungslosen Zustand übergeht.

Je mehr man die Belastung vermindert, desto grösser wird die Zahl von Wiederholungen sein müssen, und es ist für auf solche Weise abnehmende Belastung jedenfalls ein Grenzwert der Spannung denkbar, bei welchem der Stab durch keine mögliche Anzahl Wiederholungen zerstört werden kann. Dieser Grenzwert sei  $\alpha'$ ; da die Beanspruchung zwischen ihm und Null wechselt, so ist die Spannungsdifferenz

$$\alpha_d = \alpha' - 0 = \alpha'. \tag{68}$$

In der Regel kehrt der Stab nicht in den spannungslosen Zustand zurück, sondern es bleibt irgend eine Minimalspannung  $\alpha_n$  bestehen. Der diesem allgemeineren Falle entsprechende, in obigem Sinne aufzufassende Grenzwert der Beanspruchung sei  $\alpha$ , dann ist, da die Spannungsdifferenz hier  $\alpha_d = \alpha - \alpha_n$ ,

$$\alpha = \alpha_n + \alpha_d. \tag{69}$$

Nach dem Wöhler'schen Gesetze wächst nun  $\alpha$  mit abnehmendem  $\alpha_d$  und die beiden Grenzwerte von  $\alpha$  sind nach Gl. 69:

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha_d = 0: & \quad \alpha = \alpha_d = \alpha', \\ \text{für } \alpha_d = 0: & \quad \alpha = \alpha_n = \alpha_0. \end{aligned}$$

Da  $\alpha$  eine Function von  $\alpha_d$  ist, so kann gesetzt werden:

$$\alpha = \nu \alpha_d, \tag{70}$$

worin  $\nu$  vorläufig noch unbekannt ist, jedoch den Bedingungen zu entsprechen hat, dass

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha_d = 0, & \quad \text{wegen } \alpha = \alpha_0, \quad \nu = \infty \\ \text{und für } \alpha_d = \alpha', & \quad \text{wegen } \alpha = \alpha_d, \quad \nu = 1. \end{aligned}$$

Diesen Bedingungen entspricht der Ausdruck:

$$\nu = \frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha_0 - \alpha}, \quad (71)$$

welcher auch für die Zwischenwerte hinreichende Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zeigt, so dass nach Gl. 69 und 70:

$$\alpha = \frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha_0 - \alpha} (\alpha - \alpha_n)$$

und hieraus:

$$\alpha = \alpha' \left( 1 + \frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} \frac{\alpha_n}{\alpha} \right). \quad (72)$$

Bezeichnen nun  $P_{\min.}$  und  $P_{\max.}$  die Grenzbeanspruchungen eines Constructionsteils, so ist

$$\frac{\alpha_n}{\alpha} = \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}}$$

und

$$\alpha = \alpha' \left( 1 + \frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} \right), \quad (73)$$

welche Formel Gültigkeit hat für Constructionsteile, welche entweder ausschliesslich auf Zug oder ausschliesslich auf Druck beansprucht sind.\*)

Was die Constanten des vorstehenden Ausdrucks anlangt, so ergaben die Versuche von Wöhler und Bauschinger für Schweisseisen durchschnittlich  $\alpha_0 = 3600$  und  $\alpha' = 2000$  kg pro qcm, so dass:

$$\frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} = \frac{3600 - 2000}{2000} = \frac{4}{5}$$

und

$$\alpha = 2000 \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} \right)$$

erhalten wird. Nimmt man mit Rücksicht auf Stösse und Erschütterungen, Fehler im Material u. s. w. dreifache Sicherheit an, so ergibt sich die zulässige Beanspruchung in kg pro qcm:

$$\alpha = 650 \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} \right). \quad \text{(Schweisseisen, nur Zug oder nur Druck)} \quad (74)$$

Für Flusseisen ist  $\alpha_0 = 4000$  und  $\alpha' = 2400$  kg pro qcm, daher:

$$\frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} = \frac{2}{3}$$

und

$$\alpha = 2400 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} \right),$$

\*) Zeitschr. des Arch. und Ing.-Vereins zu Hannover, 1873, S. 139.



demnach mit dem Sicherheitscoefficienten  $\frac{1}{3}$ :

$$\alpha = 800 \left( 1 + \frac{2}{3} \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} \right). \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Fluss Eisen, nur Zug)} \\ \text{oder nur Druck} \end{array} \right\} (75)$$

Für Gussstahl ist  $\alpha_0 = 7600$  und  $\alpha' = 3500$  kg pro qcm, daher:

$$\frac{\alpha_0 - \alpha'}{\alpha'} = \frac{6}{5}$$

und

$$\alpha = 3500 \left( 1 + \frac{6}{5} \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} \right),$$

somit unter Berücksichtigung des Sicherheitscoefficienten:

$$\alpha = 1200 \left( 1 + \frac{6}{5} \frac{P_{\min.}}{P_{\max.}} \right). \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Gussstahl, nur Zug)} \\ \text{oder nur Druck} \end{array} \right\} (76)$$

b) Die Beanspruchung eines Constructionsteils wechselt zwischen Zug und Druck.\*)

Es wurde hier von Wöhler besonders der specielle Fall untersucht, dass die entgegengesetzten Beanspruchungen der Grösse nach gleich sind und hiefür die Festigkeit als „Schwingungsfestigkeit“  $\alpha_1$  bezeichnet.

Wird ein Stab abwechselnd auf Zug und Druck beansprucht, so gibt es für jeden Wert  $\alpha$  der grösseren der hiedurch bedingten beiden Spannungen einen bestimmten Wert  $\alpha''$  der kleineren derart, dass auch bei der grössten denkbaren Anzahl der Schwingungen zwischen  $+\alpha$  und  $-\alpha''$  bzw.  $-\alpha$  und  $+\alpha''$  die Festigkeit des Materials nicht zerstört wird. Die Spannungsdifferenz ist gleich:

$$\alpha_d = \alpha + \alpha'',$$

daher

$$\alpha = \alpha_d - \alpha'', \quad (77)$$

wenn alle Grössen nur dem Zahlenwerte nach eingesetzt werden.

Wie oben kann gesetzt werden:

$$\alpha = \nu \alpha_d,$$

wobei

$$\text{für } \alpha'' = 0: \quad \alpha = \alpha' = \alpha_d,$$

ferner:

$$\text{für } \alpha'' = \alpha_1: \quad \alpha = \alpha_1 = \frac{1}{2} \alpha_d.$$

Daher muss

$$\text{für } \alpha = \alpha': \quad \nu = 1$$

und

$$\text{für } \alpha = \alpha_1: \quad \nu = \frac{1}{2}$$

stattfinden, welchen Bedingungen der Ausdruck:

\*) Weyrauch, Festigkeit und Dimensionenberechnung der Eisenconstruktionen, Leipzig, Teubner, 1884.

$$\nu = \frac{\alpha' - \alpha_1}{2\alpha' - \alpha_1 - \alpha} \quad (78)$$

entspricht; daher nach Gl.  $\alpha = \nu\alpha_d$  mit Berücksichtigung von Gl. 77:

$$\alpha = \frac{\alpha' - \alpha_1}{2\alpha' - \alpha_1 - \alpha} (\alpha + \alpha'')$$

und hieraus:

$$\alpha = \alpha' \left( 1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \frac{\alpha''}{\alpha} \right), \quad (79)$$

oder, da

$$\frac{\alpha''}{\alpha} = \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}},$$

$$\alpha = \alpha' \left( 1 - \frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}} \right), \quad (80)$$

wobei  $P'_{\max.}$  die kleinere,  $P_{\max.}$  die grössere der beiden Maximalbeanspruchungen von verschiedenen Vorzeichen bedeuten und sämtliche Grössen nur dem Zahlenwerte nach (ohne Vorzeichen) einzusetzen sind.

Für Schweisseisen ist  $\alpha_1 = 1100$  kg pro qcm, daher

$$\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \text{rund } \frac{1}{2}$$

und

$$\alpha = 2000 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}} \right)$$

oder mit dem Sicherheitscoefficienten  $\frac{1}{3}$ :

$$\alpha = 700 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}} \right). \quad \text{(Schweisseisen, wechselnde Beanspruchung auf Zug und Druck)} \quad (81)$$

Für Flusseisen ist  $\alpha_1 = 1300$  kg pro qcm, daher

$$\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \text{rund } \frac{1}{2}$$

und

$$\alpha = 2400 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}} \right)$$

oder bei dreifacher Sicherheit:

$$\alpha = 800 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}} \right). \quad \text{(Flusseisen, wechselnde Beanspruchung auf Zug und Druck)} \quad (82)$$

Für Gussstahl ist  $\alpha_1 = 2000$  kg pro qcm, daher

$$\frac{\alpha' - \alpha_1}{\alpha'} = \frac{3}{7}$$



und

$$\alpha = 3500 \left( 1 - \frac{3}{7} \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}} \right),$$

demnach mit dem Sicherheitscoefficienten  $\frac{1}{3}$  und nach unten abgerundet:

$$\alpha = 1100 \left( 1 - \frac{3}{7} \frac{P'_{\max.}}{P_{\max.}} \right). \quad \left. \begin{array}{l} \text{(Gussstahl, wechselnde Bean-} \\ \text{spruchung auf Zug und Druck)} \end{array} \right\} \quad (83)$$

*Beispiele.*

1) Die Beanspruchung eines schmiedeisernen Stabes bestehe aus der durch das Eigengewicht der Construction hervorgerufenen Zugkraft von 1200 kg und einer ebenfalls auf Zug gerichteten grössten Verkehrsbeanspruchung von 16800 kg.

Man hat  $P_{\min.} = + 1200$  kg und  $P_{\max.} = + 18000$  kg, daher nach Gl. 74:

$$\alpha = 650 \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{1200}{18000} \right) = 685 \text{ kg pro qcm}$$

und

$$\text{Querschnittsfläche } F = \frac{P_{\max.}}{\alpha} = 26,3 \text{ qcm.}$$

2) Der Stab erleide durch ruhende Last einen Druck von 2000 kg und durch die Verkehrslast einen grössten Druck von 14000 kg.

$P_{\min.} = - 2000$  kg und  $P_{\max.} = - 16000$  kg.

Nach Gl. 74 ist

$$\beta = 650 \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{2000}{16000} \right) = 715 \text{ kg,}$$

daher

$$F = \frac{16000}{715} = 22,3 \text{ qcm.}$$

3) Die ständige Last erzeuge in dem Stab die Zugwirkung 4000 kg, die Verkehrslast einen grössten Druck von 14000 kg.

Da hier  $P'_{\max.} = + 4000$  kg und  $P_{\max.} = - 10000$  kg, so ist nach Gl. 81:

$$\alpha = 700 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{4000}{10000} \right) = 560 \text{ kg}$$

und

$$F = \frac{10000}{560} = 17,9 \text{ qcm.}$$

Bei auf Biegung beanspruchten Trägern ist bekanntlich:

$$\frac{\delta}{n} \theta = \mathfrak{M}_{\max.}$$

Wenn innerhalb des Trägers nur Momente vom gleichen Drehsinn vorkommen können, wie z. B. bei dem mit beiden Enden frei aufliegenden oder bei dem mit einem Ende eingespannten Balken, so berechnet sich der Wert von  $\delta$  beispielsweise bei Schmiedeisen nach Gleichung 74:

$$\delta = 650 \left( 1 + \frac{4}{5} \frac{\mathfrak{M}_{\min.}}{\mathfrak{M}_{\max.}} \right),$$

wobei für den betreffenden Querschnitt  $\mathfrak{M}_{\min.}$  das Moment des Eigengewichtes und  $\mathfrak{M}_{\max.}$  das Maximalmoment der Totalbelastung bezeichnen.

Können positive und negative Momente auftreten, wie beim continuirlichen Träger, so dient bei verschiedenem Vorzeichen der beiden Grenzmomente zur Berechnung von  $\delta$  z. B. bei Schmiedeisen die Gleichung 81:

$$\delta = 700 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}'_{\max.}}{\mathfrak{M}_{\max.}} \right),$$

wobei  $\mathfrak{M}'_{\max.}$  das absolut kleinste der zwei Grenzmomente bezeichnet, welche ohne Vorzeichen einzusetzen sind.



## II. Abschnitt.

### *Der homogene Balkenträger bei verschiedener Art der Unterstützung und Belastung.*

#### § 1. Querschnittsbestimmung der Balkenträger.

Zur Querschnittsbestimmung von auf Biegung beanspruchten Balkenträgern dient Gl. 12:

$$\frac{\delta}{n} \Theta = \mathfrak{M},$$

in welcher

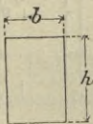
- δ die zulässige Biegebungsbeanspruchung,
- n die Entfernung der äussersten Faser von der Schwerpunktsaxe,
- Θ das Trägheitsmoment des Querschnitts, und
- ℳ das Angriffsmoment desselben

bezeichnen.

Holzbalken erhalten in der Regel rechteckförmigen Querschnitt. Bezeichnet  $b$  die Breite und  $h$  die Höhe desselben (Fig. 64), so ist  $n = \frac{h}{2}$  und, nach S. 15,  $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$ , so dass Gl. 12 übergeht in:

$$\delta \cdot \frac{1}{6} b h^2 = \mathfrak{M}. \quad (84)$$

Fig. 64.



Das Widerstandsmoment des Querschnitts und hiemit die Tragfähigkeit des Balkens wächst, wie man sieht, bei zunehmendem Querschnitt mit dem Quadrat der Querschnittshöhe, dagegen nur in einfachem Verhältniss mit der Querschnittsbreite. Um möglichst tragfähige Balken zu erhalten, wird man daher bestrebt sein, die Querschnittshöhe möglichst gross zu machen. Dieses Bestreben findet aber seine Beschränkung durch den Umstand, dass alle vierkantigen Holzbalken aus Rundstämmen geschnitten werden, was

mit sich bringt, dass (wenigstens bei den sog. Ganzhölzern) die Vergrößerung von  $h$  immer eine Verkleinerung von  $b$  bedingt. Es darf daher die Höhe des rechteckförmigen Balkenquerschnitts ein gewisses Verhältniss zur Breite nicht überschreiten, wenn nicht durch Materialverlust wieder eine Verminderung der Tragfähigkeit eintreten soll. Dies Verhältniss bestimmt sich wie folgt:

Soll  $\delta \cdot \frac{1}{6} b h^2$  seinen grössten Wert erreichen, so muss, weil  $\frac{\delta}{6}$  constant,

das Product  $\mathfrak{F} = b h^2$  ein Maximum werden. Es bezeichne (Fig. 65)  $d$  den Durchmesser des kreisförmigen Stammquerschnitts, so ist

$$h^2 = d^2 - b^2,$$

daher

$$\mathfrak{F} = b d^2 - b^3.$$

Damit für variables  $b$   $\mathfrak{F}$  zum Maximum wird, muss

$$\frac{d\mathfrak{F}}{db} = d^2 - 3b^2 = 0$$

werden. Hieraus ergibt sich:

$$b = \frac{d}{\sqrt{3}},$$

$$h = d \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

und

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{7}.$$

Teilt man den Kreisdurchmesser  $AB$  (Fig. 65) in drei gleiche Teile, errichtet man in den Teilpunkten  $F$  und  $E$  die Senkrechten  $EC$  und  $FD$  zu  $AB$ , so erhält man ein Rechteck, welches der Bedingung  $\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  entspricht.

Für gusseiserne Balkenträger ist der unsymmetrische **I**-Querschnitt der zweckmässigste.

Bezeichnen  $m$  und  $n$  die Entfernung der am meisten gedrückten bzw. gezogenen Faser von der Schwerpunktsaxe (Fig. 66), so ist:

$$\frac{\beta}{m} \Theta = \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha}{n} \Theta = \mathfrak{M},$$

somit

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n}{m}.$$

Fig. 65.

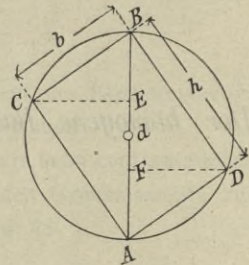
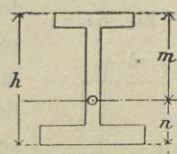


Fig. 66.





Da nun bei Gusseisen  $\beta = 2\alpha$ , so muss, wenn am oberen und unteren Querschnittsrand gleiche Sicherheit vorhanden sein soll, auch  $m = 2n$  oder, da  $m + n = h$ ,  $n = \frac{h}{3}$  sein, d. h. der Schwerpunkt soll von der äussersten gezogenen Faser einen Abstand gleich dem dritten Teil der Trägerhöhe erhalten.

Schmiedeeiserne Balkenträger erhalten am besten gleichfalls  $\Gamma$ -förmigen Querschnitt, welcher, da hier die zulässigen Zug- und Druckspannungen einander gleich sind, symmetrisch zur Schwerpunktsaxe anzuordnen ist.

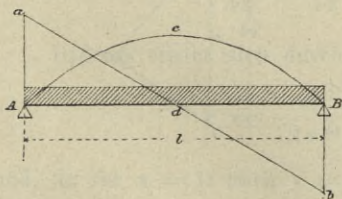
Bei den homogenen  $\Gamma$ -Trägern aus Gusseisen und Schmiedeeisen wird aus Gründen der Herstellung die Stegdicke stets so stark gemacht, dass eine besondere Untersuchung, ob den Gleichungen 40 und 45 Genüge geleistet wird, nicht notwendig ist. Daher dient zur Querschnittsberechnung einfach die Gleichung:

$$\frac{\delta}{n} \Theta = \mathfrak{N}.$$

## § 2. Der einfache frei aufliegende Träger unter Einwirkung von ruhender und beweglicher Belastung.

A) Ein mit beiden Enden frei aufliegender Träger von der Länge  $l$  (Fig. 67) ist durch gleichmässig verteilte Last  $q$  pro Längeneinheit beansprucht, welche sich über die ganze Länge  $l$  des Trägers erstreckt.

Fig. 67.



Die Auflagerreactionen sind  $A = B = \frac{q l}{2}$ .

Die Werte der Angriffsmomente aller Querschnitte ergeben sich aus der Gleichung:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{q l}{2} x - q \frac{x^2}{2}, \quad (85)$$

diejenigen der Vertikalkräfte aus:

$$V_x = \frac{q l}{2} - q x. \quad (86)$$

Soll der Träger, wie bei Holzbalken ausschliesslich der Fall, constanten Querschnitt erhalten, so ist es notwendig, dass dessen Dimensionen dem grössten zwischen  $x = 0$  und  $x = l$  möglichen Angriffsmoment entsprechen. Der Ort des letzteren ergibt sich aus:

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{q l}{2} - q x = 0,$$

also bei  $x = \frac{1}{2}$ , in der Trägermitte.

Denkt man sich mit Hilfe der Gleichung 85 die Momente für alle Werte von  $x$  berechnet und als Ordinaten aufgetragen, so wird die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Ordinaten Momentenlinie genannt. Dieselbe ist im vorliegenden Falle eine Parabel, deren Scheitel und grösste Ordinate in der Trägermitte befindlich sind.

Als Linie der Vertikalkräfte erhält man nach Gl. 86 eine Gerade, welche die X-Axe bei  $x = \frac{1}{2}$  schneidet.

Der Wert des grössten Angriffsmomentes ergibt sich, wenn in Gl. 85  $x = \frac{1}{2}$  eingeführt wird:

$$\mathfrak{M}_{\max.} = \frac{q l^2}{8}, \tag{87}$$

die Transversalkraft oder Vertikalkraft erreicht ihr Maximum für  $x = 0$ , nämlich  $V_{\max.} = \frac{q l}{2}$  und für  $x = 1$ , nämlich  $V_{\max.} = -\frac{q l}{2}$ .

*Graphische Lösung.* Man trägt die Gesamtlast  $q l$  in beliebig wählbarem Kräftemassstab auf einer Verticalen (Fig. 68<sup>a</sup>) als Länge  $O I$  an, zieht vom beliebig angenommenen Pol  $O$  die Strahlen  $O O$  und  $O I$  und zu diesen parallel die Seilpolygonseiten  $J A$  und  $J b$  (Fig. 68), so sind Letztere Tangenten an der Seilcurve, welche Momentenlinie ist. Die Berührungspunkte

Fig. 68.

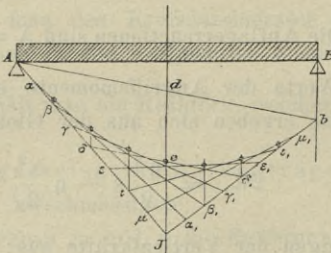
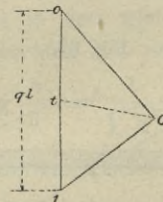


Fig. 68<sup>a</sup>.



sind  $A$  und  $b$ . Die Construction der Seilcurve geschieht am einfachsten durch Teilung der Strecken  $J A$  und  $J b$  in die gleiche Anzahl von Teilen und durch Verbindung der gleich bezeichneten Teilpunkte. Die dadurch erhaltenen Geraden  $\alpha \alpha_1, \beta \beta_1, \gamma \gamma_1$  u. s. f. sind Parabeltangente, deren Berührungspunkte in den Verticalen durch  $\beta, \delta, \iota$  u. s. f. liegen. Für jeden Wert von  $x$  erhält man das Angriffsmoment als Product der Poldistanz  $h$



und dem auf der Querschnittsverticalen gemessenen Abstand der Seilcurve von der Schlusslinie. Der Ort von  $\mathfrak{N}_{\max.}$  ist durch den Berührungspunkt einer zu  $\bar{A}b$  parallelen Tangente am Seilpolygon bestimmt. Daher ist

$$\mathfrak{N}_{\max.} = \bar{d} e. h.$$

Was den Massstab anlangt, in welchem die Momentenwerte der Zeichnung zu entnehmen sind, so ist derselbe abhängig von dem gewählten Längenmassstab, ferner von dem Massstab, welcher dem Auftragen der Kräfte zu Grunde gelegt wurde, endlich von der angenommenen Poldistanz. War z. B. der Längenmassstab 1 : 100, der Kräftemassstab 1 mm = 50 kg und  $h = 20$  mm, so entspricht jedem in der Zeichnung gemessenen Millimeter ein Momentenwert von  $0,1 \cdot 20 \cdot 50 = 100$  mkg.

### *Elastische Formänderung.*

Die Differentialgleichung der elastischen Linie ist nach Gl. 13 und 85:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{2 \varepsilon \Theta} (1x - x^2).$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2 \varepsilon \Theta} \left( \frac{1x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C.$$

Da für  $x = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{dy}{dx} = 0$ , so ist:

$$C = -\frac{q1^3}{24 \varepsilon \Theta},$$

daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{12 \varepsilon \Theta} (31x^2 - 2x^3) - \frac{q1^3}{24 \varepsilon \Theta}.$$

Hieraus ergibt sich durch nochmaliges Integriren:

$$y = \frac{q}{12 \varepsilon \Theta} \left( 1x^3 - \frac{x^4}{2} \right) - \frac{q1^3}{24 \varepsilon \Theta} x + C$$

und, da für  $x = 0$  auch  $y = 0$ , somit  $C = 0$ , als Gleichung der elastischen Linie:

$$y = -\frac{q x}{24 \varepsilon \Theta} (x^3 - 21x^2 + 1^3), \quad (88)$$

ferner als Wert der grössten Einsenkung in der Trägermitte:

$$f = -\frac{5}{384} \frac{q1^4}{\varepsilon \Theta} \quad (89)$$

Auch diese Gleichung hat unter Umständen neben Gl. 12 bei der Querschnittsbestimmung Berücksichtigung zu finden, wenn nämlich die Forderung gestellt wird, dass die grösste Einsenkung eine gewisse, als zulässig festgestellte Grenze nicht überschreiten soll. Der Träger hat dann der aus Gl. 89 folgenden Bedingung:

$$\Theta = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{\epsilon f}$$

und der durch Gl. 12 gegebenen Beziehung:

$$\Theta = \frac{n \mathcal{N}_{\max.}}{\delta}$$

zu entsprechen. Im Allgemeinen wird man zwei verschiedene Werte für  $\Theta$  erhalten, deren grösserer der Querschnittsbestimmung zu Grund zu legen ist.

*Beispiel 1.* Ein Balken aus Fichtenholz von 4 m Stützweite ist durch gleichmässig verteilte Belastung beansprucht, welche pro Meter Trägerlänge 400 kg beträgt. Welche Dimensionen hat der rechteckförmige Balkenquerschnitt zu erhalten, wenn die zulässige Biegebungsbeanspruchung  $\delta = 42$  kg pro qcm angenommen wird?

Nach Gl. 87 ist:

$$\mathcal{N}_{\max.} = \frac{q l^2}{8} = \frac{400 \cdot 16}{8} = 800 \text{ mkg} = 80000 \text{ cmkg},$$

daher nach Gl. 84:

$$\delta \cdot \frac{1}{8} b h^3 = \mathcal{N}_{\max.} = 80000.$$

Wird  $b = \frac{5}{7} h$  gesetzt, so ergibt sich

$$42 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{7} h^3 = 80000$$

oder

$$5 h^3 = 80000,$$

daher

$$h = 25,2 \text{ cm und } b = 18 \text{ cm.}$$

Die Durchbiegung erhält man nach Gl. 89:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{4 \cdot 400^4}{120000 \cdot \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot 25,2^3}$$

$$f = 0,46 \text{ cm,}$$

dieselbe ist gleich  $\frac{1}{870}$  der Trägerlänge.



Geht man von der Bedingung aus, dass  $f = \frac{1}{500} l$  als zulässige und nicht zu überschreitende Grenze der Durchbiegung zu gelten habe, so folgt aus Gl. 89:

$$\Theta = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{\varepsilon \frac{1}{500}}$$

und mit  $\varepsilon = 120\,000$  kg pro qcm:

$$\Theta = \frac{q l^3}{18432}$$

Nach Gleichung 12 aber ist:

$$\Theta = \frac{\frac{h}{2} \cdot \frac{q l^3}{8}}{\delta}$$

und mit  $\delta = 42$  kg pro qcm:

$$\Theta = \frac{q l^3}{672} h.$$

Durch Gleichsetzung beider Werte erhält man:

$$\frac{q l^3}{18432} = \frac{q l^3}{672} h,$$

$$l = 27 h.$$

Hieraus geht hervor, dass, wenn die Stützweite  $l$  kleiner ist als das Siebenundzwanzigfache der Trägerhöhe, die auf Grund der Normalspannungen entwickelte Formel (Gl. 12) massgebend zu sein hat für die Querschnittsbestimmung. Findet man aber, dass bei dem mit Gl. 12 erhaltenen Balkenquerschnitt  $l$  grösser wird als  $27 h$ , so ist der Trägerquerschnitt auf Grund von Gl. 89 zu berechnen.

*Günstigste Querschnittsform für Holzbalken mit Rücksicht auf Widerstand gegen Durchbiegung.*

Gl. 89 lässt erkennen, dass  $f$  indirect proportional ist dem Trägheitsmoment des Trägerquerschnitts. Da im Ausdruck  $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$  die Trägerhöhe in der dritten Potenz vorkommt, die Breite  $b$  aber nur als Grösse erster Dimension auftritt, so ist klar, dass die Durchbiegung mit möglichster Vergrösserung von  $h$  sehr wirksam vermindert werden wird. Dem Verhältniss  $b : h$  sind aber insoferne Grenzen gezogen, als das rechteckige Balkenprofil dem kreisförmigen Stammquerschnitt vom Durchmesser  $d$  einbeschrieben ist.

Soll  $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$  seinen grössten Wert erreichen, so muss, da

$$h = \sqrt{d^2 - b^2},$$

der Ausdruck:

$$\frac{1}{12} \sqrt{b^2 (d^2 - b^2)^3}$$

oder die Grösse:

$$\delta \Theta = b^2 (d^2 - b^2)^3$$

ein Maximum werden.

Aus:

$$\frac{d \delta \Theta}{d b} = 2 b (d^2 - b^2)^3 - 6 b^3 (d^2 - b^2)^2 = 0$$

erhält man

$$b = \frac{d}{2} \quad \text{und} \quad h = \frac{d}{2} \sqrt{3},$$

somit

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{7}.$$

Hieraus ergibt sich folgende Construction:

Man teilt den Kreisdurchmesser A B (Fig. 69) in vier gleiche Teile, errichtet in den Teilpunkten E und F die Senkrechten EC und FD zu AB, so erhält man ein Rechteck A D B C, welches den Bedingungen

$$\frac{b}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

entspricht.

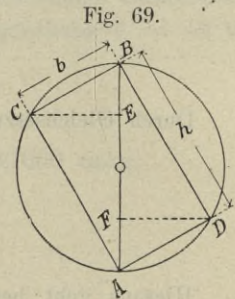


Fig. 69.

*Beispiel 2.* Welche grösste gleichmässig verteilte ruhende Last pro Längeneinheit kann ein gewalzter Träger des nebenstehenden Querschnitts (Fig. 70) aufnehmen, wenn derselbe auf 2 m Länge frei aufliegt?

Unter Voraussetzung von ruhender Belastung kann  $\bar{q} = 750$  kg pro qcm angenommen werden. Da  $n = 5$  cm und nach S. 15

$$\Theta = \frac{1}{12} (5 \cdot 10^3 - 4,55 \cdot 8,64^3) = 172,$$

so ist

$$\frac{\delta}{n} \Theta = \frac{750}{5} \cdot 172 = 25800 \text{ cmkg.}$$

Das Eigengewicht des Trägers beträgt (bei  $F = 10,69$  qcm und dem spezifischen Gewicht des Eisens 7,8) 0,083 kg pro cm, daher, wenn  $q$  die aufzunehmende Last per cm, nach Gl. 12 und 87:

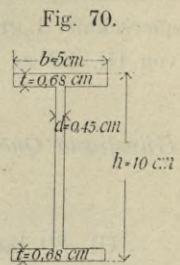


Fig. 70.



$$25\,800 = (0,083 + q) \frac{200^2}{8},$$

somit

$$q = 5,077 \text{ kg pro cm oder } 507,7 \text{ kg pro m.}$$

Die Durchbiegung ist nach Gl. 89:

$$f = \frac{5}{384} \frac{5,077 \cdot 200^4}{2\,000\,000 \cdot 172} = 0,003 \text{ cm.}$$

Wird bei Eisenträgern verlangt, dass die Durchbiegung das zulässige Mass  $\frac{1}{600} l$  nicht überschreite, so ergibt sich demzufolge aus Gl. 89:

$$\Theta = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{\varepsilon \frac{1}{600}}$$

und mit  $\varepsilon = 2\,000\,000$  kg pro qcm:

$$\Theta = \frac{q l^3}{256\,000}.$$

Auf Grund der Gl. 12 ist, mit  $\delta = 750$  kg pro qcm:

$$\Theta = \frac{\frac{h}{2} \cdot \frac{q l^2}{8}}{750} = \frac{q l^2}{12\,000} h.$$

Durch Gleichsetzung beider Werte von  $\Theta$  ergibt sich:

$$l = 21 h,$$

d. h. beträgt die Stützweite mehr als das Einundzwanzigfache der Höhe, so ist für die Querschnittsbestimmung (soferne  $f < \frac{1}{600} l$  bleiben soll) die Formel 89 massgebend.

*Beispiel 3.* Ein 4 m langer, mit den Enden frei aufliegender gewalzter I-Träger hat ausser seinem Eigengewicht eine gleichmässig verteilte ruhende Last  $p = 150$  kg pro m und eine zeitweise wirkende Last  $q = 400$  kg pro m aufzunehmen. Welches von den Profilen der Tabelle S. 30 ist für den Träger zu wählen?

Man hat:

$$\mathcal{M}_p = \frac{1,5 \cdot 400^2}{8} = 30\,000 \text{ cmkg}$$

und

$$\mathcal{M}_q = \frac{4,0 \cdot 400^2}{8} = 80\,000 \text{ cmkg.}$$

Da die Grenzbeanspruchungen  $\mathfrak{N}_{\min.} = 30\,000$  cmkg und  $\mathfrak{N}_{\max.} = 110\,000$  cmkg, so ist nach Gl. 74:

$$\delta = 660 \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{30\,000}{110\,000} \right) = 792,$$

daher

$$\frac{792 \cdot \Theta}{\frac{h}{2}} = 110\,000$$

oder

$$\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 139,$$

welchem Werte das Profil 17 der Tabelle S. 30 mit  $\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 139$  entspricht.

Wenn sich die gleichmässig verteilte Last nur über einen Teil  $AC = e$  der Trägerlänge erstreckt (Fig. 71), so ist

$$A = \frac{q e}{21} (21 - e) \text{ und } B = \frac{q e^2}{21}.$$

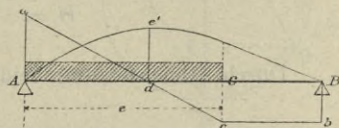
Für die belastete Trägerstrecke ist:

Fig. 71.

$$\mathfrak{N}_x = Ax - \frac{q x^2}{2},$$

für die unbelastete:

$$\mathfrak{N}_x = Ax - qe \left( x - \frac{e}{2} \right),$$



die Momentenlinie also der ersteren Strecke eine Parabel, die der letzteren eine Gerade, welche die Parabel in der Verticalen durch C berührt.

Das grösste Moment, welches innerhalb AC auftritt, wird erhalten, wenn  $\frac{d\mathfrak{N}}{dx} = 0$  gesetzt wird, woraus sich für  $x = \frac{e}{21} (21 - e)$

$$\mathfrak{N}_{\max.} = \frac{q e^2}{81^2} (21 - e)^2 \quad (90)$$

ergibt.

Die Vertikalkräfte erhält man aus den Gleichungen:

$$V_x = A - qx \dots \text{für } AC$$

und

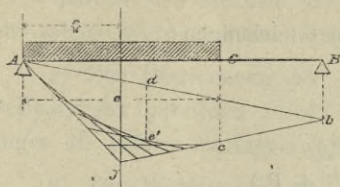
$$V_x = A - qe = -\frac{q e^2}{21} \dots \text{für } CB,$$

ersteres Gleichung einer die Axe X bei  $x = \frac{e}{21} (21 - e)$  schneidenden, letzteres die einer zur Axe X parallelen Geraden.



*Graphische Lösung.* Man trage auf der Verticalen des Kräftepolygons

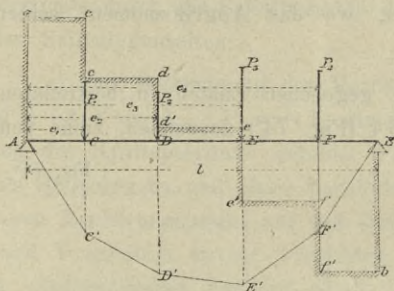
Fig. 72.



ge = 01 auf, ziehe parallel zu den Strahlen 00 und 01 die Seilpolygonseiten AJ und Jb (Fig. 72), so sind Letzteres Tangenten an der Momentenparabel des belasteten Trägerteils. Die Construction der Parabel gibt  $\mathcal{M}_{\max.} = d e' \cdot h$ . Die Momentenlinie des nicht belasteten Trägerteils wird in der Geraden cb erhalten.

B) Ein mit beiden Enden frei aufliegender Träger von der Länge l (Fig. 73) ist durch eine Anzahl feststehender verticaler Einzellasten  $P_1, P_2, P_3, P_4$  beansprucht.

Fig. 73.



Der constante Trägerquerschnitt hat dem grössten zwischen  $x = 0$  und  $x = 1$  möglichen Angriffsmoment zu entsprechen. Um dasselbe zu finden, bestimme man die Auflagerreactionen A und B, welche sich aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$A l - P_1 (1 - e_1) - P_2 (1 - e_2) - P_3 (1 - e_3) - P_4 (1 - e_4) = 0$$

(Drehpunkt B) und

$$A + B - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4) = 0$$

ergeben, und stelle für die von den Lastverticalen gebildeten Balkenabschnitte AC, CD, DE, EF, FB die allgemeinen Ausdrücke der Angriffsmomente her:

für AC  $\mathcal{M}_x = A x,$

„ CD  $\mathcal{M}_x = A x - P_1 (x - e_1),$

„ DE  $\mathcal{M}_x = A x - P_1 (x - e_1) - P_2 (x - e_2),$

„ EF  $\mathcal{M}_x = A x - P_1 (x - e_1) - P_2 (x - e_2) - P_3 (x - e_3),$

„ FB  $\mathcal{M}_x = A x - P_1 (x - e_1) - P_2 (x - e_2) - P_3 (x - e_3) - P_4 (x - e_4).$

Denkt man sich nun mit Hülfe vorstehender Gleichungen die Angriffsmomente für alle Werte von x berechnet und als Ordinaten aufgetragen, so wird die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Momentenordinaten ein Polygon AC'D'E'F'B sein, dessen Eckpunkte in den Kräftegeraden sich befinden. Daraus geht hervor, dass  $\mathcal{M}_{\max.}$  nur am Angriffsort irgend einer der gegebenen Lasten auftreten kann. Es wird daher in jedem gegebenen Falle ein Leichtes sein,  $\mathcal{M}_{\max.}$  zu finden.

Ist beispielsweise  $P_1 = 100$  kg,  $P_2 = 400$  kg,  $P_3 = 200$  kg,  $P_4 = 50$  kg und  $e_1 = 2$  m,  $e_2 = 4$  m,  $e_3 = 6$  m,  $e_4 = 8$  m,  $l = 10$  m, so ist

$\mathcal{M}_{(x-2)} = 820 \text{ mkg}$ ,  $\mathcal{M}_{(x-4)} = 1440 \text{ mkg}$ ,  $\mathcal{M}_{(x-6)} = 1260 \text{ mkg}$   
 und  $\mathcal{M}_{(x-8)} = 680 \text{ mkg}$ , daher  $\mathcal{M}_{\text{max}}$ . (zusammenfallend mit dem Angriffsort der Last 400) = 1440.

Die Werte der Verticalkräfte sind aus den Gleichungen:

- für AC  $V_x = A$ ,
- „ CD  $V_x = A - P_1$ ,
- „ DE  $V_x = A - (P_1 + P_2)$ ,
- „ EF  $V_x = A - (P_1 + P_2 + P_3)$ ,
- „ FB  $V_x = A - (P_1 + P_2 + P_3 + P_4)$

zu ermitteln. Auf Grund dieser Gleichungen ergibt sich die treppenförmige Linie  $Aa c c' d d' e e' f f' b$  (mit  $Aa = A$  und  $Bb = B$ ) als Linie der Verticalkräfte, welche, da nach Gl. 5:

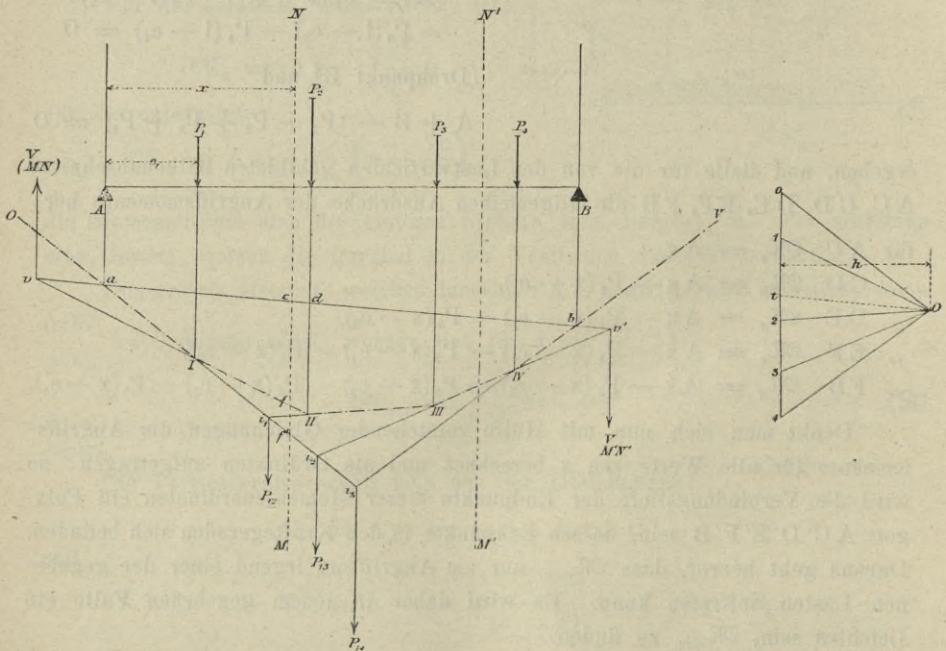
$$V_x = \frac{d\mathcal{M}_x}{dx},$$

die X-Axe an derjenigen Stelle schneidet, wo das Angriffsmoment seinen grössten Wert erreicht.

*Graphische Lösung.* Man trage die gegebenen Lasten in bestimmtem Kräfte-*masstab* zu einem Kräftezug 01234 (Fig. 74<sup>a</sup>) zusammen, ziehe vom

Fig. 74.

Fig. 74<sup>a</sup>.



beliebig angenommenen Pol O die Strahlen 00, 01, 02, 03, 04 des Kräftepolygons und construiren das zugehörige Seilpolygon (Fig. 74), indem man



dessen erste Seite  $O I$  durch den auf der Lastverticalen  $P_1$  willkürlich gewählten Punkt  $I$  legt, die übrigen Seilpolygonseiten aber  $I II$ ,  $II III$ ,  $III IV$ ,  $IV V$  parallel den Strahlen  $O 1$ ,  $O 2$ ,  $O 3$ ,  $O 4$  zieht. Kräfte- und Seilpolygon, auf solche Weise gebildet, dienen:

a) Zur Bestimmung der Auflagerdrücke. Ein zur Schlusslinie  $ab$  des Seilpolygons paralleler Strahl  $O t$  schneidet auf der Verticalen des Kräftezuges die beiden Auflagerreactionen  $t O = A$  und  $4 t = B$  ab.

b) Zur Bestimmung der Resultirenden mehrerer auf einander folgender Kräfte. Es ergibt sich die Resultirende  $P_{12}$  der Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  nach Richtung und Grösse als Länge  $O 2$  des Kräftepolygons, ihrer wirklichen Lage nach aber in derjenigen Verticalen, welche durch den Schnittpunkt  $i_1$  der der ersten Last vorhergehenden und der zweiten Last nachfolgenden Seilpolygonseiten gelegt ist. Ebenso erhält man  $P_{13}$  und  $P_{14}$  als Längenabschnitte  $O 3$  und  $O 4$ , und ihre Angriffsorte als Verticale durch  $i_2$  und  $i_3$ , d. i. als Verticale durch die Schnittpunkte der die betreffenden Lastlinien einschliessenden Seilpolygonseiten.

c) Zur Bestimmung der Verticalkraft für jeden Trägerquerschnitt. Für  $M N$  ist  $V = A - P_1 = t 1$ , gleich dem Abschnitt, welcher auf dem Kräftezug des Kräftepolygons gebildet wird durch eine Parallele zur Schlusslinie des Seilpolygons und einen parallelen Strahl zu jener Tangente an Letzterem, deren Berührungspunkt auf der Querschnittsverticalen liegt. Der Lage nach wird  $V$  erhalten in der Verticalen durch den Schnittpunkt  $v$  der der Kraft  $A$  vorhergehenden und der Kraft  $P_1$  nachfolgenden Seilpolygonseiten. Rückt der Querschnitt vom linken gegen das rechte Auflager weiter vor, z. B. nach  $M' N'$ , so ändert die Verticalkraft Richtung und Vorzeichen und ihr Angriffsort geht von der linken auf die rechte Trägerseite über. Während  $V_{M N}$  aufwärts gerichtet (positiv) und in der Lotlinie durch  $v$  (links von  $A$ ) wirksam war, ergibt sich  $V_{M' N'}$  =  $t 3$  abwärts gerichtet (negativ) mit der Kraftverticalen durch  $v'$  auf der rechten Trägerseite. Es ist leicht einzusehen, dass diejenige Stelle, wo das Seilpolygon den grössten verticalen Abstand von der Schlusslinie besitzt, die Grenze bildet zwischen den Querschnitten mit positiven und negativen Verticalkräften und dass hier zugleich ein Überspringen des Angriffsortes derselben von der linken auf die rechte Trägerseite stattfindet.

d) Zur Bestimmung des Angriffsmomentes für jeden Trägerquerschnitt. Für  $M N$  ist  $\mathcal{M}_x = A x - P_1(x - e_1)$ . Da  $\triangle acf' \sim \triangle O O t$ , so ist  $cf' \cdot h = A x$ , ferner ist wegen  $I f' \sim O O 1$   $ff' \cdot h = P_1(x - e_1)$ , daher  $\mathcal{M} = (cf' - ff') h = cf \cdot h$ ; das Seilpolygon ist also zugleich Momentenlinie: seine verticalen Abstände von der Schlusslinie geben für alle Werte von  $x$  die auf die Poldistanz  $h$  reducirten Angriffsmomente. Das Maximalmoment wird erhalten in dem grössten jener Abstände, welcher, da die Belastung aus concentrirten Kräften besteht,



nur an einem Eckpunkt des Seilpolygons, also nur in einer Lastverticalen auftreten kann. Im vorliegenden Falle ist  $\mathcal{M}_{\max.} = d_{II} \cdot h$ .

C) Ein durch feststehende, lotrechte Einzellasten beanspruchter Träger  $A_1 B_1$  (Fig. 75) liegt auf zwei Stützen A und B frei auf, welche von den Trägerenden um die Strecken  $e_1$  und  $e_2$  abstehen.

Aus den statischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$A + B - P_1 - P_2 - P_3 - P_4 = 0$$

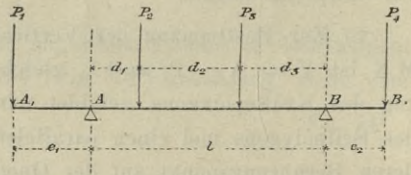
und

$$-P_1(1 + e_1) + A \cdot l - P_2(1 - d_1) - P_3[1 - (d_1 + d_2)] + P_4 e_2 = 0$$

(Drehpunkt B)

finden sich die Auflagerreaktionen, nach deren Bestimmung die Momente und Vertikalkräfte aller Querschnitte sich leicht ergeben.  $\mathcal{M}_{\max.}$  kann nur mit einer der Last- oder Auflagerverticalen zusammenfallen.

Fig. 75.

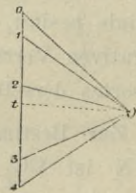
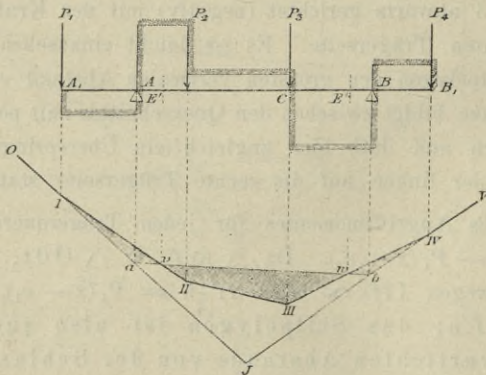


*Graphische Lösung.* Die Schlusslinie des Seilpolygons O I II III IV V der gegebenen Kräfte  $P_1 \dots P_4$  (Fig. 76), welche in der Verbindungslinie a b der

Schnittpunkte der Auflagerverticalen mit den äussersten Seilpolygonseiten erhalten wird, lässt erkennen, dass die Momentenflächen Ia v und wb IV der Trägerstrecken  $A_1 E'$  und  $E'' B_1$  negativ, diejenige der Trägerstrecke  $E' E''$  positiv.  $\mathcal{M}_{\max.}$ , welches entweder an einem Lastangriffsort oder an einem der

Fig. 76.

Fig. 76<sup>a</sup>.



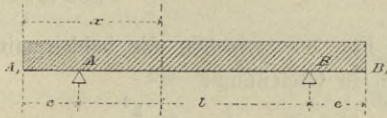
beiden Stützpunkte auftritt (in letzterem Falle negativ), ist in Fig. 76 positiv und fällt mit  $P_3$  zusammen. Dieselbe Figur enthält die Darstellung der Linie



der Vertikalkräfte, welche in den Punkten A, B und C, woselbst die beiden negativen und das positive Maximum des Angriffsmomentes stattfinden, die Axe schneidet.

D) Ein frei aufliegender Träger, dessen Enden beiderseits um die Länge e von den Auflagern abstehen (Fig. 77), ist durch gleichmässig verteilte Last beansprucht.

Fig. 77.



Da  $A = B = q \left( e + \frac{l}{2} \right)$ , so ist für den Punkt A:

$$\mathfrak{M}_{x=e} = -\frac{q e^2}{2}, \quad (91)$$

für den Punkt B:

$$\mathfrak{M}_{x=e+l} = -\frac{q e^2}{2} \quad (91')$$

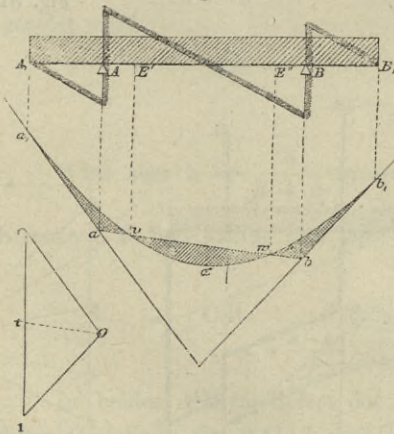
und für einen beliebigen Querschnitt x der Strecke AB:

$$\mathfrak{M}_x = A(x - e) - \frac{q x^2}{2};$$

hieraus folgt für die Trägermitte:

$$+ \mathfrak{M}_{\max.} = \frac{q}{8} (l^2 - 4e^2). \quad (92)$$

Fig. 78.



Aus der Gleichsetzung der Ausdrücke  $\frac{q}{8} (l^2 - 4e^2)$  und  $\frac{q e^2}{2}$  ergibt sich derjenige Wert  $e = \frac{l}{2\sqrt{2}}$ , der gleich grosse Angriffsmomente bei A, B und in der Trägermitte zur Folge hat.

*Graphische Lösung.* Man trägt  $q(1 + 2e)$  gleich 01 im Kräftepolygon (Fig. 78) auf und zeichnet die der Gesamtbelastung entsprechende Seilparabel  $a_1 \alpha b_1$ . Die Verbindungslinie ab der Schnittpunkte der Auflagerverticalen mit den End-Seilpolygonseiten gibt die Schlusslinie und zugleich die Momentenflächen.

E) Der Träger ist durch feststehende Einzellasten und gleichmässig verteilte Last q per Längeneinheit beansprucht.

Die Momentenlinie setzt sich in diesem Falle aus Parabelstücken zusammen, welche durch die Lastverticalen begrenzt sind, und es hängt von der Grösse der gleichmässig verteilten Last und der Lage der Einzellasten

ab, ob das grösste Angriffsmoment auf eine der Letzteren oder zwischen zwei solche trifft. Die Entscheidung dieser Frage wird in jedem gegebenen Falle leicht möglich sein. So entspricht dem in Fig. 79 gegebenen Belastungsfall ein grösstes Moment bei  $x = 4$  unter der Last 600:  $\mathcal{M}_{\max.} = 2520 \text{ mkg}$ ,

Fig. 79.

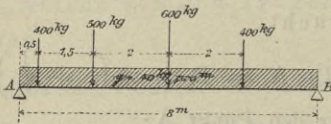
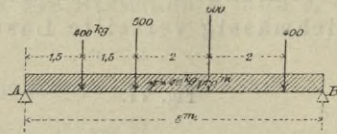


Fig. 80.



während das Maximalmoment des Trägers Fig. 80 zwischen die beiden mittleren Lasten fällt und erhalten wird, wenn in Gleichung:

$$\mathcal{M} = Ax - 400(x - 1,5) - 500(x - 3) - 40 \frac{x^2}{2}$$

$\frac{d\mathcal{M}}{dx} = 0$  gesetzt wird. Es ergibt sich für  $x = 4,3$ :

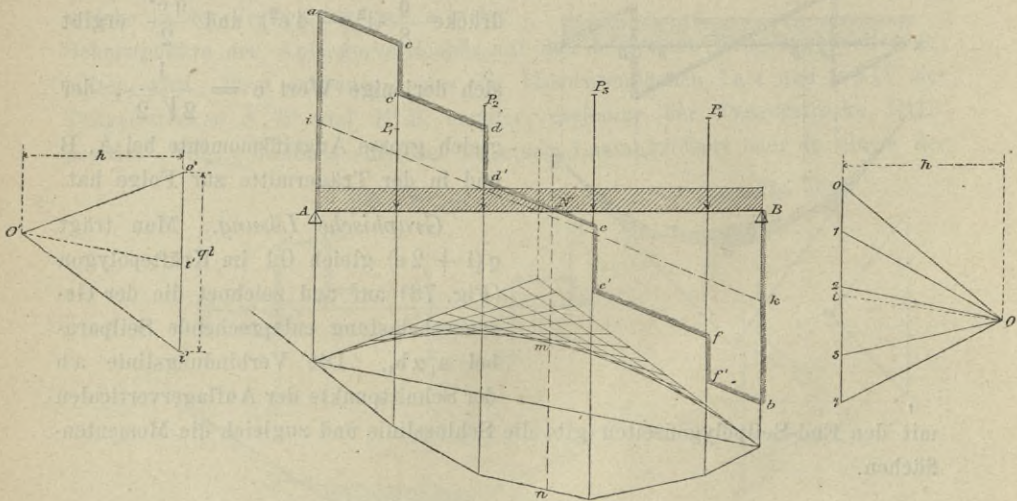
$$\mathcal{M}_{\max.} = 2471,9 \text{ mkg}.$$

Den besten Aufschluss über den Ort des grössten Angriffsmomentes liefert die Construction der Linie der Verticalkräfte. Dieselbe, einen treppenförmigen Verlauf nehmend, setzt sich aus geneigten Geraden zusammen, deren Richt-

Fig. 81<sup>a</sup>.

Fig. 81.

Fig. 81<sup>b</sup>.



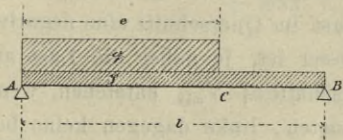
ungen der Geraden  $ik$  parallel sind, welche erhalten wird, wenn  $Ai = +\frac{ql}{2}$  um  $Bk = -\frac{ql}{2}$  aufgetragen wird (Fig. 81). Der Schnittpunkt  $N$  der Linie der Verticalkräfte mit der Axe  $x$  ist der Ort von  $\mathcal{M}_{\max.}$



*Graphische Lösung.* Man zeichnet getrennt die Seilpolygone Fig. 81<sup>a</sup> und 81<sup>b</sup> der gleichmässig verteilten Belastung und der concentrirten Kräfte in der Weise, dass dieselben zu beiden Seiten einer gemeinschaftlichen Schlusslinie zu liegen kommen. Der grösste verticale Abstand  $mn$  beider Polygone gibt Ort und Grösse des grössten Angriffsmomentes (Fig. 81).

F) Der Träger ist durch sein Eigengewicht  $p$  und eine gleichmässig verteilte Verkehrslast  $q$  per Längeneinheit belastet (Fig. 82), welche sich nur über einen Teil  $e$  der Länge des Trägers erstreckt.

Fig. 82.



Die Momentenlinie des Trägers besteht aus zwei Parabelstücken, deren Gleichungen für AC

$$\mathcal{M}_x = Ax - (p + q) \frac{x^2}{2}$$

und für CB

$$\mathcal{M}'_x = Ax - p \frac{x^2}{2} - qe \left( x - \frac{e}{2} \right)$$

sind.

Liegt das grösste Moment innerhalb der belasteten Trägerstrecke AC, so wird es erhalten, wenn in der Momentengleichung dieser Strecke  $\frac{d\mathcal{M}}{dx} = 0$  gesetzt wird:

$$AC \quad \dots \quad \mathcal{M}_{\max.} = \frac{A^2}{2(p + q)} \quad (93)$$

$$x = \frac{A}{p + q}$$

Wird aber  $x = \frac{A}{p + q}$  grösser als  $e$  gefunden, so liegt  $\mathcal{M}_{\max.}$  auf der Strecke CB und ergibt sich aus  $\frac{d\mathcal{M}'_x}{dx} = 0$ :

$$CB \quad \dots \quad \mathcal{M}'_{\max.} = \frac{(A - qe)^2}{2p} + \frac{qe^2}{2} \quad (94)$$

$$x = \frac{A - qe}{p}$$

In beiden Fällen liefert der Schnittpunkt der Linie der Verticalkräfte, deren Gleichung für AC

$$V_x = A - (p + q)x$$

und für BC

$$V_x = A - qe - px$$

ist, mit der Trägeraxe den Ort des grössten Angriffsmomentes.

Auf graphischem Wege erhält man Ort und Grösse von  $\mathcal{M}_{\max.}$  analog dem Verfahren sub E) durch Construction der Seilpolygone des Eigengewichtes und der Verkehrslast.



G) Der Träger ist durch bewegliche, gleichmässig verteilte Last  $q$  beansprucht, welche, von einem der beiden Auflager eintretend, allmählich bis zum andern vorrückt.

Es sind hier unendlich viele Laststellungen, also für jeden Querschnitt unendlich viele Werte von  $V_x$  und  $\mathcal{M}_x$  möglich. Um  $V_{\max.}$  und  $\mathcal{M}_{\max.}$  eines gegebenen Querschnitts zu finden, untersuche man den Einfluss, welchen eine Einzellast ausübt, je nachdem sie rechts oder links vom Querschnitt sich befindet. Man wird erkennen, dass jede solche zwischen dem Querschnitt und dem rechtsseitigen Widerlager aufgebrauchte Last eine positive Vertikalkraft erzeugt, welche mit der Annäherung an den Querschnitt stetig wächst und ihren Maximalwert in dem Augenblick erreicht, in welchem die Last über den Querschnitt selbst tritt. Dagegen wird jede zwischen dem Querschnitt und dem linksseitigen Auflager befindliche Einzellast im Querschnitt eine negative Vertikalkraft hervorbringen, welche um so grösser ist, je näher die Last am Querschnitt sich befindet. Daher wird im Querschnitt  $+V_{\max.}$  entstehen, wenn sich rechts vom Querschnitt möglichst viele Lasten, links dagegen keine befinden und  $-V_{\max.}$ , wenn das rechtsseitige Trägerstück nicht, das linksseitige aber total belastet ist.

Mit Rücksicht hierauf wird bei gleichmässig verteilter beweglicher Belastung in einem gegebenen Querschnitt  $+V_{\max.}$  entstehen, wenn der

Fig. 83.

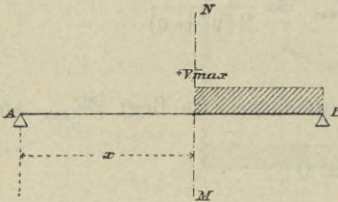
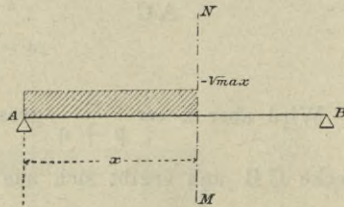


Fig. 84.



rechts vom Querschnitt befindliche Trägerteil (Fig. 83) und  $-V_{\max.}$ , wenn der linksseitige Trägerteil (Fig. 84) belastet ist.

Bezüglich des Angriffsmomentes ist klar, dass jede Einzellast, ob rechts oder links vom Querschnitt gelegen, in diesem ein positives Angriffsmoment erzeugt. Dasselbe wächst mit der Grösse und mit der Annäherung der Last an den Querschnitt und erreicht den höchsten Wert, wenn die Last über diesem selbst sich befindet. Es wird daher das grösste Moment eines Querschnittes bei vollständiger Belastung des Trägers und dann auftreten, wenn über dem Querschnitt eine schwerste Last steht und ausserdem rechts und links von demselben möglichst viele solche sich befinden. Bei gleichmässig verteilter beweglicher Last findet  $\mathcal{M}_{\max.}$  statt, wenn die Last über den ganzen Träger sich erstreckt. Man hat also:



$$+ V_{\max.} = \frac{q(1-x)^2}{2l}, \quad (95)$$

$$- V_{\max.} = -\frac{qx^2}{2l} \quad (96)$$

und

$$\mathcal{M}_{\max.} = \frac{qx}{2}(1-x). \quad (97)$$

Aus vorstehenden Gleichungen ergeben sich nun leicht die grössten von sämtlichen Maximalwerten der Verticalkräfte und Angriffsmomente des Trägers, d. i. das sog. absolute Maximum von  $V$  und  $\mathcal{M}$ :

$$+ \max. V_{\max.} = +\frac{ql}{2} \text{ für } x = 0, \quad (98)$$

$$- \max. V_{\max.} = -\frac{ql}{2} \text{ für } x = l \quad (99)$$

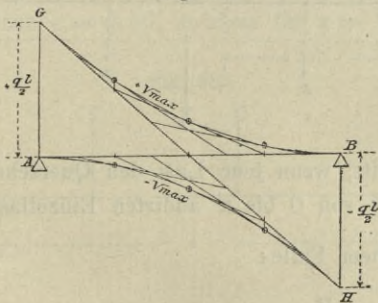
und

$$\max. \mathcal{M}_{\max.} = \frac{ql^2}{8} \text{ für } x = \frac{l}{2}, \quad (100)$$

sämtliche bei totaler Trägerbelastung.

Die Gleichungen 95 und 96 der Linien der grössten positiven und negativen Verticalkräfte sind Gleichungen von Parabeln mit Scheiteln in  $B$  und  $A$ ,

Fig. 85.



welche eine gemeinschaftliche Tangente in der  $X$ -Axe besitzen und deren andere gemeinschaftliche Tangente  $GH$  mit ihren Berührungspunkten  $G$  und  $H$  sich ergibt, wenn  $AG = +\frac{ql}{2}$  und

$BH = -\frac{ql}{2}$  aufgetragen wird. Hieraus folgt eine einfache, durch Fig. 85 erläuterte Construction der Linien der grössten positiven und negativen Verticalkräfte.

Diejenige der grössten Angriffsmomente ist identisch mit der Momentenparabel der totalen Belastung (Fig. 68).

H) Der Träger ist durch ein bewegliches System von unter sich fest verbundenen Einzellasten beansprucht.

a) Verticalkräfte.

In einem gegebenen Querschnitt  $x$  entsteht  $+V_{\max.}$ , wenn das Lastensystem, von rechts eintretend, so weit vorgerückt ist, dass die erste Last über dem Querschnitt sich befindet. Bezeichnet dann  $R$  die Resultierende der

innerhalb der Strecke  $l - x$  befindlichen Lasten und  $r_1$  deren Abstand von B, so ist

$$+ V_{\max.} = \frac{Rr_1}{l}. \quad (101)$$

Das Maximum der negativen Vertikalkraft für denselben Querschnitt tritt auf, wenn das Lastensystem, vom linken Auflager eintretend, mit der ersten Last über dem Querschnitt angelangt ist. Ist  $L$  die Resultierende der dann auf dem Träger befindlichen Lasten und  $r_2$  ihr Abstand von A, so ist:

$$- V_{\max.} = \frac{Lr_2}{l}. \quad (102)$$

Das absolute Maximum der positiven und negativen Vertikalkraft tritt über den Auflagern auf.

### b) Angriffsmomente.

Für einen beliebigen Querschnitt (Fig. 86) ist:

$$\mathcal{M}_x = Ax - \sum_0^x P(x - e) = \frac{x}{l} \sum_0^1 P(1 - e) - \sum_0^x P(x - e).$$

Wird das Lastensystem um  $de$  verschoben, so ändert sich  $\mathcal{M}_x$  mit den Abscissen  $e$  und wird zum Maximum, wenn  $\frac{d\mathcal{M}_x}{de} = 0$ .

Da

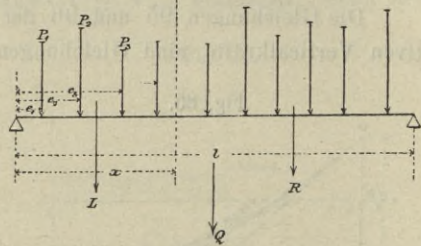
$$\frac{d\mathcal{M}_x}{de} = -\frac{x}{l} \sum_0^1 P + \sum_0^x P,$$

so ist ersichtlich, dass  $\mathcal{M}_{\max.}$  für einen gegebenen Querschnitt  $x$  dann eintritt, wenn jene Last den Querschnitt überschreitet, für welche die Summe der von 0 bis  $x$  addirten Einzellasten den Wert  $\frac{x}{l} \sum_0^1 (P)$  überschreitet, in welchem Falle:

$$\frac{Q}{l} = \frac{L}{x} = \frac{R}{l-x}, \quad (103)$$

d. h. die durchschnittliche Belastung des Trägerteiles links, beziehungsweise rechts vom Querschnitte muss gleich sein der durchschnittlichen Belastung des ganzen Trägers zwischen den Auflagern. ( $L$  Resultierende der links,  $R$  Resultierende der rechts vom Querschnitt befindlichen Lasten,  $Q$  Resultierende der Gesamtbelastung des Trägers.)

Fig. 86.

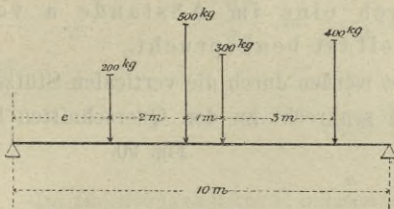




Das absolute Maximum des Angriffsmomentes wird auf folgende Weise ermittelt:

Das bewegliche Lastensystem bestehe aus den Lasten  $P_1 = 200$ ,  $P_2 = 500$ ,  $P_3 = 300$  und  $P_4 = 400$  kg, deren Entfernungen in Fig. 87 eingeschrieben sind. Man bezeichne den vorläufig un-

Fig. 87.



bestimmten Abstand der ersten Last vom linken Auflager mit  $e$ , so dass

$$A = 970 - 140 e.$$

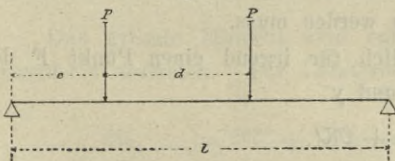
Derjenigen Laststellung nun, welcher das absolute Maximum des Angriffsmomentes entspricht, werden einige vorausgehen und einige nachfolgen, deren

Maximalmoment durch die das absolut grösste Moment erzeugende Last hervorgebracht wird. In allen praktischen Fällen wird leicht zu übersehen sein, unter welchem Lastangriffspunkt  $\max. \mathcal{M}_{\max.}$  auftritt. Im vorliegenden erkennt man sofort  $P_2 = 500$  kg als die fragliche Last, und es gilt als allgemeiner Ausdruck für die Maximalmomente derjenigen Laststellungen, welche auch die gefährlichste einschliessen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\max.} &= A(e + 2) - 200 \cdot 2 \\ &= (970 - 140 e) \cdot (e + 2) - 200 \cdot 2. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck erreicht seinen grössten Wert, wenn  $\frac{d \mathcal{M}_{\max.}}{d e} = 0$ , d. h. wenn  $e = 2,46$ , so dass für  $x = 4,46$   $\max. \mathcal{M}_{\max.} = 2390,2$  mkg sich ergibt.

Fig. 88.



Sollte ein Zweifel möglich sein, unter welchem Lastpunkt das absolut grösste Moment eintritt, so müssen die  $\max. \mathcal{M}_{\max.}$  für alle jene  $P$  bestimmt werden, unter welchen der absolut grösste Wert des Angriffsmomentes vermutet wird. Besteht das Lastensystem aus zwei gleich grossen, um die Länge  $d$

von einander entfernten Lasten (Fig. 88), so kann  $\max. \mathcal{M}_{\max.}$  sowohl durch die erste als durch die zweite entstehen, im einen Fall, wie aus Obigem leicht nachzuweisen, für

$$e = \frac{1}{2} - \frac{d}{4},$$

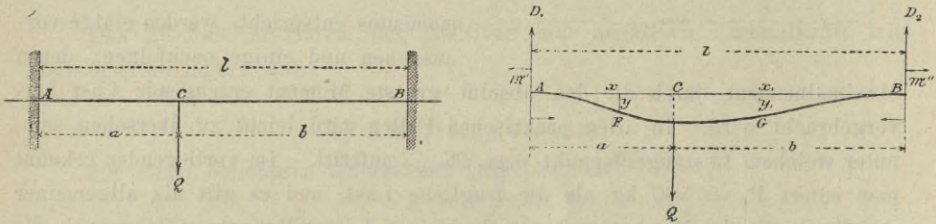
im andern für

$$e = \frac{1}{2} + \frac{d}{4}.$$

### § 3. Der mit beiden Enden horizontal eingespannte Tragbalken unter Einwirkung von ruhender und beweglicher Belastung.

A) Ein mit beiden Enden horizontal eingespannter Balken von der Länge  $l$  (Fig. 89) ist durch eine im Abstände  $a$  vom linken Auflager befindliche Einzellast beansprucht.

Die Befestigung kann ersetzt gedacht werden durch die verticalen Stützenreactionen  $D_1$  und  $D_2$ , sowie durch zwei senkrecht zu den Querschnitten bei Fig. 89. Fig. 90.



A und B befindliche Kräftepaare (Fig. 90), deren Momente (Auflagermomente)  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}''$ . Unbekannt sind demnach die Grössen  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $\mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}''$ , für deren Bestimmung die statischen Gleichgewichtsbedingungen zwischen den äusseren Kräften:

$$D_1 + D_2 - Q = 0 \tag{105}$$

und

$$\mathfrak{M}' + D_1 a - D_2 b - \mathfrak{M}'' = 0 \tag{106}$$

(Drehpunkt C)

nicht ausreichen, so dass zur Ermittlung der Auflagermomente die Gleichung der elastischen Linie zu Hülfe genommen werden muss.

Innerhalb der Strecke AC ist nämlich für irgend einen Punkt F der elastischen Linie mit den Coordinaten  $x$  und  $y$

$$\mathfrak{M}_x = D_1 x + \mathfrak{M}',$$

daher

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{D_1 x + \mathfrak{M}'}{\varepsilon \Theta},$$

aus welcher Gleichung durch zweimalige Integration, wobei die Constanten gleich 0 werden, weil für  $x = 0$   $\frac{dy}{dx} = 0$  und  $y = 0$ , erhalten wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \varepsilon \Theta} (D_1 x + 2 \mathfrak{M}') x$$

und

$$y = \frac{1}{6 \varepsilon \Theta} (D_1 x + 3 \mathfrak{M}') x^2.$$



Ebenso ist für einen Punkt G der Strecke BC mit den auf den Anfangspunkt B bezogenen Coordinaten  $x_1$  und  $y_1$ :

$$\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{D_2 x_1 + \mathfrak{N}''}{\varepsilon \Theta},$$

somit

$$\frac{d y_1}{d x_1} = \frac{1}{2 \varepsilon \Theta} (D_2 x_1 + 2 \mathfrak{N}'') x_1$$

und

$$y_1 = \frac{1}{6 \varepsilon \Theta} (D_2 x_1 + 3 \mathfrak{N}'') x_1^2.$$

Im Belastungspunkte C müssen  $\frac{d y}{d x} = -\frac{d y_1}{d x_1}$  und  $y = y_1$  werden, weshalb

$$(D_1 a + 2 \mathfrak{N}') a = -(D_2 b + 2 \mathfrak{N}'') b \quad (107)$$

und

$$(D_1 a + 3 \mathfrak{N}') a^2 = (D_2 b + 3 \mathfrak{N}'') b^2. \quad (108)$$

Aus den vier Gleichungen 105 bis 108 erhält man jetzt die Werte:

$$\mathfrak{N}' = -\frac{Q a b^2}{l^2}, \quad (109)$$

$$\mathfrak{N}'' = -\frac{Q a^2 b}{l^2}, \quad (110)$$

$$D_1 = \frac{Q b^2 (3 a + b)}{l^3}, \quad (111)$$

$$D_2 = \frac{Q a^2 (a + 3 b)}{l^3}. \quad (112)$$

Das grösste Moment wird entweder an den Auflagern oder am Lastangriffsort auftreten. Für Letzteren ergibt sich das Angriffsmoment (positiv):

$$\mathfrak{M}_{x=a} = \mathfrak{N}' + D_1 a = -\frac{Q a b^2}{l^2} + D_1 a = 2 \frac{Q a^2 b^2}{l^3} \quad (113)$$

und da

$$\mathfrak{N}' : \mathfrak{M}_{x=a} : \mathfrak{N}'' = \frac{1}{2 a} : \frac{1}{1} : \frac{1}{2 b},$$

so ist ersichtlich, dass das grösste Moment nicht in C, sondern über einem der Stützpunkte und zwar an demjenigen auftritt, welcher der Last Q näher liegt. Befindet sich Q in der Mitte des Trägers, ist also  $a = b = \frac{l}{2}$ , so

ist der Grösse nach

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{M}_{x=a} = \mathfrak{N}'' = \frac{Q l}{8}. \quad (114)$$

Die Verticalkraft ist für alle Querschnitte der Strecke AC:

$$V_x = D_1 = \frac{Q b^2 (3 a + b)}{l^3} \tag{115}$$

und positiv; dagegen für die Querschnitte der Strecke CB:

$$V_x = D_1 - Q = -\frac{Q a^2 (a + 3 b)}{l^3}, \tag{116}$$

also negativ. Demnach gilt auch hier, wie beim frei aufliegenden Träger das Gesetz, dass eine Einzellast in einem gegebenen Querschnitte eine positive Verticalkraft erzeugt, wenn sie rechts und eine negative, wenn sie links vom Querschnitt sich befindet.

Ist die Last  $Q$  beweglich, so wird die gefährlichste Laststellung für denjenigen Wert von  $a$  eintreten, welcher

$$\mathcal{M}' = -\frac{Q a b^2}{l^2} = -\frac{Q a (1 - a)^2}{l^2}$$

zum Maximum macht.

Man erhält  $a = \frac{1}{3}$  und mit Berücksichtigung des Drehsinnes:

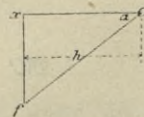
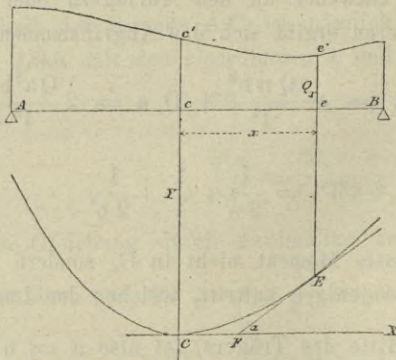
$$\max \mathcal{M}_{\max.} = -\frac{4}{27} Ql. \tag{117}$$

*Graphische Lösung.* Zur graphischen Lösung derselben Aufgabe dient folgende Betrachtung:

Ist AB ein durch stetige Belastung beanspruchter Träger und denkt man an die Seilcurve der Belastung eine wagrechte Tangente CX, sowie im

Fig. 91.

Fig. 91<sup>a</sup>.



Punkt E eine andere Tangente EF gelegt (Fig. 91), so schneiden die durch den Pol des Kräftepolygons zu den beiden Tangenten parallel gezogenen Strahlen Ox und Of auf der Verticalen des Kräftepolygons eine Strecke x f



ab, welche gleich der Resultirenden der zwischen den Punkten C und E befindlichen Belastung, oder gleich der durch die Fläche  $cee'e'$  repräsentirten Last ist. Bezieht man nun die Seilcurve auf ein rechtwinkliges Axenkreuz YCX, so gilt für jeden beliebigen Punkt E mit den Coordinaten  $x, y$  die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \tan \alpha = \frac{fx}{h} = \frac{\text{Fläche } cee'e'}{h} = \frac{1}{h} \int_0^x Q_x dx,$$

woraus durch Differenzirung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Q_x}{h} \tag{118}$$

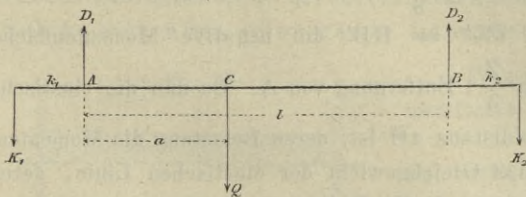
als zweite Differentialgleichung der Seilcurve hervorgeht. Vergleicht man dieselbe mit der bekannten Gleichung der elastischen Linie:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathcal{M}_x}{\varepsilon \Theta},$$

so erkennt man, dass die elastische Linie eines jeden Trägers als Seilcurve betrachtet und construirt werden kann. Man erhält sie, wenn die der Belastung entsprechende Momentenfläche selbst wieder als Belastungsfläche angesehen wird und wenn mit dieser Belastungsfläche ein Seilpolygon von der Poldistanz  $\varepsilon \Theta$  gezeichnet wird, welches durch die Stützpunkte des Trägers geht.\*) Da die Momentenfläche immer stetig ist, wie auch die Belastung beschaffen sein möge, so folgt, dass die elastische Linie eine stetige Curve oder aus stetigen Curven zusammengesetzt sein muss.

Die Auflagermomente  $\mathcal{M}'$  und  $\mathcal{M}''$  des eingespannten Trägers können hervorgebracht werden durch vertical abwärts wirkende Kräfte  $K_1$  und  $K_2$

Fig. 92.



(Fig. 92), die man an den Enden des über die Stützpunkte A und B hinaus verlängert gedachten Balkens anbringt und für deren Grösse und Hebelarme  $k_1$  und  $k_2$  die Bedingung massgebend ist, dass die Tan-

genten an der elastischen Linie in A und B wagrecht seien.

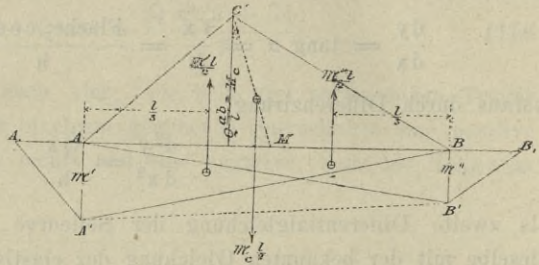
Da das Angriffsmoment für irgend einen Querschnitt eines beliebig belasteten Trägers als Summe der Momente erhalten wird, welche die einzelnen Lasten im Querschnitt hervorbringen, so wird man bei vorliegendem Träger, welcher nicht nur von oben durch  $Q$ , sondern auch von unten durch  $D_1$  und

\*) Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructions. Zeitschr. des Arch.- und Ing.-Vereins zu Hannover, 1868.



$D_2$  belastet erscheint, die Momente aller Querschnitte auch durch getrennte Behandlung der einzelnen Lasten erhalten, indem man zuerst den einfachen frei aufliegenden, durch  $Q$  belasteten Träger  $AB$  für sich in's Auge fasst, dann den einfachen frei aufliegenden, durch  $D_1$  in der Richtung nach aufwärts in Angriff genommenen Träger  $A_1B$  (Fig. 93), endlich den ebenso durch  $D_2$  belasteten Balken  $AB_1$ , und indem man schliesslich die diesen Belastungen entsprechenden Momentenflächen bestimmt und die Resultate summiert.

Fig. 93.



Die Momentenfläche von  $Q$  ist positiv und ein Dreieck, dessen Spitze die Abscisse  $a$  und die Ordinate  $Q \frac{ab}{l} = \mathfrak{N}_c$  hat (Fig. 93). Der Schwerpunkt dieser Momentenfläche liegt auf dem zweiten Drittel von  $C'M$  im Abstände

$$\frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2} - a}{3} = \frac{1 + a}{3} \text{ von A.}$$

Was den durch  $D_1$  in aufwärts gerichtetem Sinne beanspruchten einfachen Träger  $A_1B$  anlangt, so wird im Punkte  $A$  desselben durch  $D_1$  ein grösstes Moment erzeugt, welches offenbar gleich dem Auflagermomente  $\mathfrak{N}' = AA'$  des gegebenen Trägers ist. Von der durch  $D_1$  erzeugten negativen Momentenfläche kommt für die Spannweite  $AB$  nur in Betracht  $AA'B = \frac{\mathfrak{N}' l}{2}$ ,

deren Schwerpunkt in der Entfernung  $\frac{1}{3}$  von  $A$  gelegen ist; desgleichen von  $D_2$  mit dem Auflagermoment  $\mathfrak{N}'' = BB'$  die negative Momentenfläche  $ABB' = \frac{\mathfrak{N}'' l}{2}$ , angreifend in  $\frac{2}{3}l$  Entfernung von  $A$ . Da nun die elastische

Linie eine Seilcurve mit der Poldistanz  $\varepsilon \Theta$  ist, deren Belastung die Momentenfläche vorstellt, so erfordert das Gleichgewicht der elastischen Linie, deren Tangenten in  $A$  und  $B$  wagrecht sind, die Bedingungsgleichungen:

$$\varepsilon \Theta \cdot 0 - \frac{\mathfrak{N}' l}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{\mathfrak{N}'' l}{2} \cdot \frac{2}{3} + \mathfrak{N}_c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + a}{3} = 0$$

(Drehpunkt A)

und

$$\varepsilon \Theta \cdot 0 + \frac{\mathfrak{N}' l}{2} \cdot \frac{2l}{3} + \frac{\mathfrak{N}'' l}{2} \cdot \frac{l}{3} - \mathfrak{N}_c \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2l - a}{3} = 0$$

(Drehpunkt B).



Aus diesen Gleichungen folgt, dass

$$\varpi \mathcal{N}' = \varpi \mathcal{N}_0 \frac{b}{l} = \frac{Q a b^2}{l^2}$$

und

$$\varpi \mathcal{N}'' = \varpi \mathcal{N}_0 \frac{a}{l} = \frac{Q a^2 b}{l^2},$$

also auch

$$\varpi \mathcal{N}' + \varpi \mathcal{N}'' = \varpi \mathcal{N}_0$$

oder

$$\varpi \mathcal{N}' \frac{1}{2} + \varpi \mathcal{N}'' \frac{1}{2} = \varpi \mathcal{N}_0 \frac{1}{2},$$

daher

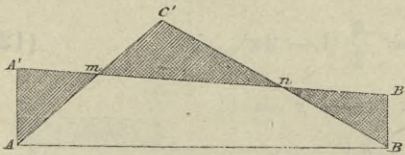
$$\triangle A B A' + \triangle B A B' = \triangle A C' B$$

oder

$$\text{Trapez } A B B' A' = \triangle A C' B \text{ (Fig. 93).}$$

Legt man daher, um in der algebraischen Summe der positiven und negativen Flächen die wirkliche Momentenfläche zu erhalten, beide auf eine und dieselbe Seite (Fig. 94), so zeigt

Fig. 94.

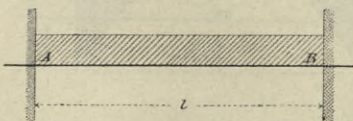


sich, dass Fläche  $mC'n =$  Fläche  $AA'm +$  Fläche  $BB'n$  ist, und es ergeben die verticalen Ordinaten der Linie  $AC'B$  bezogen auf  $A'B'$  als Abscisse die Momentenwerte für alle Querschnitte. Der Einfluss der Ein-

spannung des Trägers auf die Momentenfigur äussert sich also in der Verschiebung der Schlusslinie des Seilpolygons der einfachen Belastung.

B) Der mit beiden Enden wagrecht eingespannte Träger ist durch gleichmässig verteilte Belastung  $q$  per Längeneinheit, welche sich über seine ganze Länge erstreckt, beansprucht.

Fig. 95.



Wegen der zur Trägermittellinie symmetrischen Belastung ist hier offenbar

$$D_1 = D_2 = \frac{q l}{2} \quad \text{und} \quad \varpi \mathcal{N}' = \varpi \mathcal{N}''$$

Da man sich nun die stetige Belastung durch eine Aneinanderreihung von lauter Einzellasten  $q dx$  ersetzt denken kann, so ist nach Gleichung 109:

$$\varpi \mathcal{N}' = \varpi \mathcal{N}'' = - \int_0^l \frac{q dx x (l-x)^2}{l^2},$$

also

$$\varpi \mathcal{N}' = \varpi \mathcal{N}'' = - \frac{1}{12} q l^2.$$

(119)

Für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung  $x$  von A wird

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_x &= -\mathfrak{M}' + D_1 x - \frac{q x^2}{2}, \\ \mathfrak{M}_x &= \frac{q}{12} [6(1-x)x - l^2].\end{aligned}\quad (120)$$

Hienach wird  $\mathfrak{M}_x = 0$  für  $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{12}}$ , also für  $x = 0,2113 l$  und für  $x = 0,7887 l$ .

Das positive Maximum erreicht  $\mathfrak{M}_x$  in der Mitte:

$$\mathfrak{M}_{x=\frac{1}{2}} = \frac{q l^2}{24}.\quad (121)$$

Der gefährliche Querschnitt mit dem grössten Angriffsmoment tritt auch hier über den Stützpunkten auf:

$$\mathfrak{M}_{\max.} = -\frac{q l^2}{12} = \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}''.\quad (119')$$

Die Verticalkräfte ergeben sich aus der Gleichung:

$$V = D_1 - qx = \frac{q}{2}(1 - 2x),\quad (122)$$

wonach  $V$  zum Maximum wird für  $x = 0$  und  $x = 1$ :

$$V_{\max.} = \pm \frac{q l}{2}.\quad (123)$$

*Graphische Lösung.* Die Momentenfläche der eigentlichen Belastung ist ein Parabelsegment mit der Scheitelordinate  $\mathfrak{M}_0 = \frac{q l^2}{8}$  und dem Flächen-

inhalt  $\frac{2}{3} \mathfrak{M}_0 l$  (Fig. 96). Da die negativen Momentenflächen von  $D_1$  und  $D_2$  in 2 Dreiecken vom Flächeninhalt  $\frac{\mathfrak{M}' l}{2}$  und  $\frac{\mathfrak{M}'' l}{2}$  bestehen, so hat man als Gleichgewichtsgleichung der elastischen Linie:

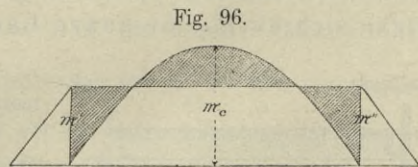


Fig. 96.

$$\varepsilon \Theta \cdot 0 - \mathfrak{M}' \frac{1}{2} \frac{1}{3} - \frac{\mathfrak{M}'' l}{2} \frac{2}{3} l + \frac{2}{3} \mathfrak{M}_0 l \frac{1}{2} = 0$$

oder

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{2}{3} \mathfrak{M}_0 = \frac{q l^2}{12}.\quad (119'')$$

Zugleich geht aus Fig. 96 hervor, dass

$$\mathfrak{M}_{x=\frac{1}{2}} = \mathfrak{M}_0 - \mathfrak{M}' = \frac{q l^2}{8} - \frac{q l^2}{12} = \frac{q l^2}{24}.\quad (121')$$



C) Der mit beiden Enden wagrecht eingespannte Träger ist durch bewegliche, gleichmässig verteilte Last  $q$  beansprucht.

Denkt man sich die gegebene Belastung aus an einander gereihten Einzellasten  $q dx$  bestehend, so kann bezüglich der Bestimmung der grössten Verticalkräfte eines jeden Querschnitts der gefundene Satz unmittelbar angewendet werden, dem zu Folge eine Einzellast in einem Querschnitte eine positive oder negative Verticalkraft erzeugt, je nachdem sie rechts oder links vom Querschnitt liegt (vgl. S. 110). Es wird nämlich für den beliebigen, um  $a$  von A entfernten Querschnitt C  $+V_{\max.}$  oder  $-V_{\max.}$  auftreten, je nachdem die Last von C aus bis zum rechten oder zum linken Auflager reicht.

Fig. 97.

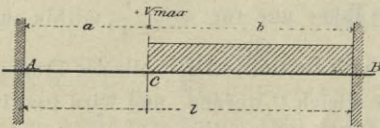
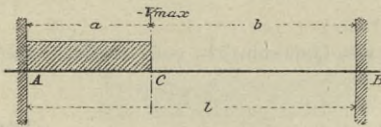


Fig. 98.



Ist Ersteres der Fall (Fig. 97), so ist  $+V_{\max.}$  gleich der Auflagerreaction  $D_1$  und wird erhalten, wenn in Gl. 111  $q b$  für  $Q$ ,  $a + \frac{b}{2}$  für  $a$  und  $\frac{b}{2}$  für  $b$  gesetzt wird:

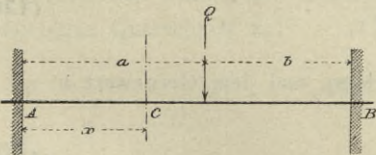
$$+V_{\max.} = \frac{q b^3}{4 l^3} (3l - b). \quad (124)$$

Analog ergibt sich bei linksseitiger Belastung (Fig. 98) aus Gl. 112 mit  $\frac{a}{2}$  für  $a$  und  $b + \frac{a}{2}$  für  $b$ :

$$-V_{\max.} = \frac{q a^3}{4 l^3} (3l - a). \quad (125)$$

Um die gefährlichste Belastungsweise bezüglich der Biegemomente kennen zu lernen, betrachtet man zunächst die Einwirkung einer Einzellast  $Q$  auf einen Querschnitt C, je nachdem sie rechts oder links von demselben liegt.

Fig. 99.



a)  $Q$  liegt rechts vom Querschnitt  $x$  (Fig. 99).

In diesem Falle ist

$$\mathcal{M}_x = -\mathcal{M}' + D_1 x$$

$$\mathcal{M}_x = \frac{Q b^2}{l^3} [(3a + b)x - a l] \quad (126)$$

und  $\mathcal{M}_x$  wird für jene Entfernung  $a'$  der Last  $Q$  von A gleich 0 (Fig. 100), welche die Bedingung

$$(3a' + b)x = a'l$$

Fig. 100.

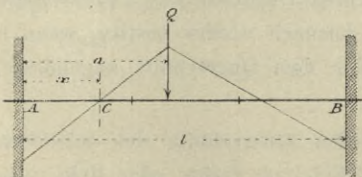


Fig. 101.

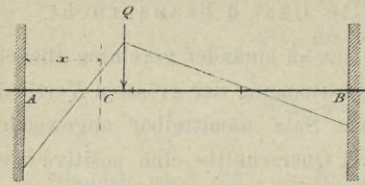
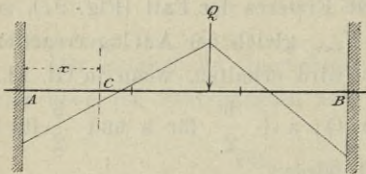


Fig 102.



erfüllt, also für

$$a' = \frac{1x}{1 - 2x}. \quad (127)$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass, wenn der Ort  $\mathfrak{N}_x = 0$  von links nach rechts vorrückt, auch  $Q$  dem rechten Auflager sich nähert, so dass für den Grenzfall  $a' = 1$

$$x = \frac{1}{3}. \quad (128)$$

Für jeden grösseren Wert von  $x$  wird  $a' > 1$ , d. h. unmöglich.  $\mathfrak{N}_x$  kann daher nur für  $x \leq \frac{1}{3}$ , mithin nur innerhalb des linken Drittels der Trägerlänge gleich 0 werden, und wird positiv (Fig. 101) sein, wenn  $a$  kleiner als der

dem Querschnitt zugehörige, durch Gl. 127 bestimmte Wert von  $a'$ , negativ (Fig. 102), wenn  $a > a'$ .

b)  $Q$  liegt links vom Querschnitt.

Bezeichnet man mit  $x_1$  die Entfernung des Querschnitts vom rechten Auflager, so wird

$$\mathfrak{N}_{x_1} = \frac{Q a^2}{l^3} [(3b + a)x_1 - bl] \quad (129)$$

und auch hier gibt es eine bestimmte Entfernung  $b'$  der Last  $Q$  von  $B$ , welche  $\mathfrak{N}_{x_1}$  zu 0 macht:

$$b' = \frac{1x_1}{1 - 2x_1}. \quad (130)$$

Für zunehmendes  $x_1$  wird auch  $b'$  wachsen, und dem Grenzwert  $b' = 1$  entspricht

$$x_1 = \frac{1}{3}. \quad (128^1)$$

Für jeden grösseren Wert von  $x_1$  wird  $b' > 1$ , also unmöglich.  $\mathfrak{N}_x$  kann also nur Null werden innerhalb des rechten Drittels der Trägerlänge. Das  $\mathfrak{N}$  des gegebenen Querschnittes wird demnach wieder positiv, wenn  $b$  kleiner, und negativ, wenn  $b$  grösser als der dem Querschnitt zugehörige, durch Gl. 130 bestimmte Wert von  $b'$  ist.

Aus Vorstehendem erhellt, dass für jeden Querschnitt des mittleren Drittels der Trägerlänge jede Einzellast, gleichviel ob rechts oder links vom



Querschnitt befindlich, nur ein positives Moment hervorbringen kann und folglich für sämtliche Querschnitte dieses Trägerteils  $+\mathfrak{M}_{\max.}$  bei totaler Belastung des Balkens entsteht. Dagegen wird  $\mathfrak{M}_x$  zum positiven oder negativen Maximum

a) im linken Drittel, wenn die Belastung von  $a'$  bis zum linken oder rechten Auflager reicht,

b) im rechten Drittel, je nachdem  $b'$  oder  $l - b'$  belastet wird.

#### § 4. Der mit einem Ende wagrecht eingespannte Balken (Kragträger).

A) Ein mit dem einen Ende wagrecht eingespannter, mit dem anderen Ende frei schwebender Träger (Fig. 103) ist durch gleichmässig verteilte Last  $q$  pro Längeneinheit beansprucht.

Fig. 103.

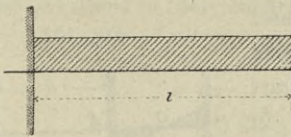
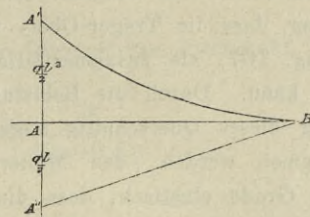


Fig. 104.



Aus den Werten des Angriffsmomentes und der Verticalkraft für einen beliebigen Querschnitt  $x$ :

$$\mathfrak{M}_x = q \frac{(l - x)^2}{2} \quad (131)$$

und

$$V_x = q(l - x) \quad (132)$$

erhält, dass die Momentenlinie eine Parabel A'B mit dem Scheitel in B (Fig. 104) und die Linie der Verticalkräfte eine Gerade A'B.

Daher:

$$\mathfrak{M}_{\max.} = \frac{ql^2}{2} \quad (133)$$

und

$$V_{\max.} = ql. \quad (134)$$

B) Der mit einem Ende wagrecht eingespannte Träger ist am freien Ende durch eine Einzellast  $Q$  beansprucht (Fig. 105).

Fig. 105.

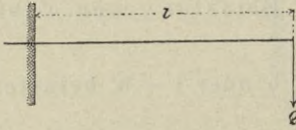
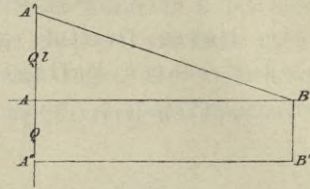


Fig. 106.



Die Gleichung der Momentenlinie

$$\mathcal{M}_x = Q(1 - x) \quad (135)$$

ist hier die einer zur Axe geneigten Geraden  $A'B$ , die Gleichung der Linie der Verticalkräfte die einer zur Axe parallelen Geraden  $A''B''$  (Fig. 106), daher

$$\mathcal{M}_{\max.} = Ql \quad (136)$$

und

$$V_{\max.} = Q. \quad (137)$$

### C) Einmuerungstiefe der Kragträger.

Man denke sich zunächst den Träger plattenförmig, d. h. die Trägerhöhe so gering, dass die Träger-Ober- und Unterfläche mit dem Mauerquerschnitt  $AC$  (Fig. 107) als zusammenfallend betrachtet werden kann. Durch die Belastung wird eine Drehung dieses Querschnitts angestrebt. Darf angenommen werden, das Mauerwerk sei in solchem Grade elastisch, dass die in den einzelnen Flächenelementen des Mauerquerschnitts auftretenden Spannungen proportional sind den Abständen der betreffenden Flächenelemente von der Neutralaxe, und bezeichnen:

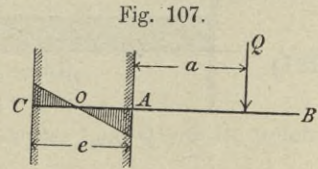


Fig. 107.

$Q$  die resultirende Trägerbelastung,

$a$  den Abstand derselben von der Mauer,

$b$  die Trägerbreite,

$e$  die Einmuerungstiefe,

$F = e \cdot b$  den der Einmuerungstiefe und der Trägerbreite entsprechenden Mauerquerschnitt,

$\Theta$  das Trägheitsmoment dieses Mauerquerschnitts bezüglich seiner Schwerpunktsaxe,

$\mathcal{M}$  das Drehmoment von  $Q$  bezüglich der Schwerpunktsaxe des Mauerquerschnitts,

$y$  die Entfernung eines Flächenelementes von der Schwerpunktsaxe,

so dient zur Bestimmung der Druckspannung an irgend einer Stelle Gl. 28:



$$\beta = \frac{Q}{F} \pm \frac{\mathcal{M}y}{\Theta},$$

wobei  $+$  oder  $-$  Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem das betreffende Querschnittselement und  $Q$  auf einer und derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten der Schwerpunktsaxe des Mauerquerschnitts sich befinden.

Hieraus ergibt sich die Druckspannung  $\beta'$  am Querschnittsrande bei A:

$$\beta' = \frac{Q}{be} + \frac{Q \left( a + \frac{e}{2} \right) \frac{e}{2}}{\frac{1}{2} be^3}$$

oder

$$\beta' = \frac{2Q}{be^2} (3a + 2e) \quad (138)$$

und die Spannung  $\beta''$  am Querschnittsrande bei C:

$$\beta'' = \frac{Q}{be} - \frac{Q \left( a + \frac{e}{2} \right) \frac{e}{2}}{\frac{1}{2} be^3}$$

oder

$$\beta'' = -\frac{2Q}{be^2} (3a + e). \quad (139)$$

Der Abstand  $v$  der Neutralaxe vom Querschnittsschwerpunkt ist nach Gl. 33:

$$v = \frac{\Theta}{F \left( a + \frac{e}{2} \right)} = \frac{e^2}{12a + 6e},$$

daher

$$AO = \frac{e}{2} + v = \frac{e(3a + 2e)}{6a + 3e} \quad (140)$$

und

$$CO = \frac{e}{2} - v = \frac{e(3a + e)}{6a + 3e}, \quad (141)$$

auch ist

$$\frac{AO}{CO} = \frac{\beta'}{\beta''}$$

Da  $\beta'$  die grösste innerhalb des Mauerquerschnitts auftretende Druckspannung ist, welche die zulässige nicht überschreiten soll, so findet sich, wenn  $\beta' = \beta$  gesetzt wird, aus Gl. 138 die erforderliche Tiefe der Einmauerung:

$$e = \frac{2Q + \sqrt{Q(6ab\beta + 4Q)}}{\beta b}. \quad (142)$$

Wenn die Trägerhöhe nicht, wie im Vorgehenden, als verschwindend klein angenommen wird, so handelt es sich darum, die Mauerquerschnitte  $AC$  unmittelbar oberhalb und  $A'C'$  unmittelbar unterhalb des Balkens (Fig. 108) getrennt zu betrachten. Nimmt man an, dass für  $CA$  die Neutralaxe mit  $A$ , für  $C'A'$  aber die Neutralaxe mit  $C'$  zusammenfallen, so wird die Druckverteilung durch die beiden Dreiecke  $ACD$  und  $A'C'D'$  repräsentirt sein, in deren Schwerlinien die betreffenden Mauerreactionen  $P$  und  $V$  wirksam sind.

Da

$$V = P + Q$$

und

$$P \cdot \frac{e}{3} = Q \left( a + \frac{e}{3} \right), \quad (143)$$

so ist

$$V = Q + \frac{3Q}{e} \left( a + \frac{e}{3} \right).$$

Da nun

$$V = \frac{be}{2} \beta,$$

so erhält man aus der Gleichung:

$$\frac{be}{2} \beta = Q + \frac{3Q}{e} \left( a + \frac{e}{3} \right)$$

$$e = \frac{2Q + \sqrt{Q(6ab\beta + 4Q)}}{\beta b},$$

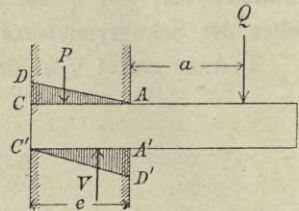
übereinstimmend mit Gl. 142.

Auch die Werte der Spannungen bei  $A'$  und  $C$  ergeben sich identisch mit den Gleichungen 138 und 139.

Die bezüglich des Falls Fig. 108 gemachten Voraussetzungen sind gleichbedeutend mit jenen der Gl. 28, und wenn man von den Druckflächen der Fig. 108, welche entgegengesetzte Vorzeichen haben, die algebraische Summe herstellt, so kommt man auf die Druckfläche der Fig. 107.

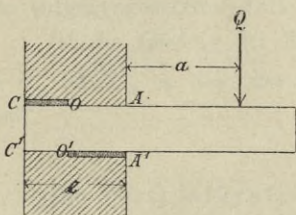
Nicht immer ist die über dem eingespannten Träger-Ende befindliche Mauer hoch genug, um die für den Einspannungszustand erforderliche und durch Gl. 143 gegebene Belastung hervorzubringen; auch kann es vorkommen, dass die Mauerstärke von vorneherein geringer ist als die notwendige und aus Gl. 142 sich berechnende Einspannungstiefe. In solchen Fällen ist es angezeigt, zum Zweck der Befestigung des Trägers einen grösseren Mauer-

Fig. 108.





körper in Mitleidenschaft zu ziehen, als er der eigentlichen Trägerbreite entspricht, was durch Anordnung von Auflagerplatten (Fig. 109) erreicht werden kann. Ist e gegeben, so gibt man der unteren Auflagerplatte die Länge A'O' (Gleichung 140), der oberen die Länge CO (Gleichung 141) und erhält die erforderliche Breite der Auflagerplatten aus Gleichung 138:

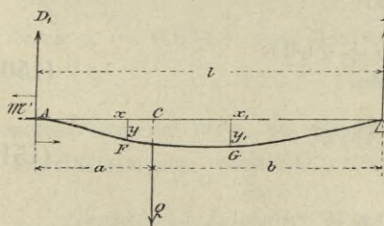


$$b' = \frac{2 Q}{\beta e^2} (3 a + 2 e). \quad (144)$$

### § 5. Der mit einem Ende eingespannte, mit dem anderen frei aufliegende Träger.

A) Ein bei A wagrecht eingespannter, bei B einfach unterstützter Träger (Fig. 110) ist durch eine im Abstand a von A befindliche Einzellast Q beansprucht.

Fig. 110.



Die Befestigung bei A wird ersetzt durch die lotrechte Stützenreaction  $D_1$  und das Kräftepaar  $\mathfrak{M}'$ ; an Stelle der Unterlage bei B tritt die Auflagerreaction  $D_2$ . Zur Bestimmung der Unbekannten  $\mathfrak{M}'$ ,  $D_1$  und  $D_2$  hat man die Gleichungen:

$$D_1 + D_2 - Q = 0, \quad (145)$$

$$\mathfrak{M}' + D_1 a - D_2 b = 0. \quad (146)$$

Ferner gilt für jeden innerhalb der Strecke AC befindlichen Punkt F der elastischen Linie:

$$\mathfrak{M}_x = D_1 x + \mathfrak{M}',$$

daher

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{D_1 x + \mathfrak{M}'}{\varepsilon \Theta}$$

und nach zweimaliger Integration:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 \varepsilon \Theta} (D_1 x + 2 \mathfrak{M}') x$$

und

$$y = \frac{1}{6 \varepsilon \Theta} (D_1 x + 3 \mathfrak{M}') x^2.$$

Für jeden Punkt G der Strecke BC hat man ferner:

$$\frac{d^2 y_1}{d x_1^2} = \frac{D_2 x_1}{\varepsilon \Theta},$$

woraus durch Integration:

$$\frac{d y_1}{d x_1} = \frac{D_2 x_1^2}{2 \varepsilon \Theta} + m$$

und

$$y_1 = \frac{D_2 x_1^3}{6 \varepsilon \Theta} + m x_1,$$

wenn  $m$  die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die Auflager-tangente der elastischen Linie bei B mit der Horizontalen bildet.

Da für den Lastangriffspunkt C

$$\frac{d y}{d x} = - \frac{d y_1}{d x_1}$$

und  $y = y_1$ , so erhält man:

$$(D_1 a + 2 \mathcal{N}') a = - (D_2 b^2 + 2 m \varepsilon \Theta) \quad (147)$$

und

$$(D_1 a + 3 \mathcal{N}') a^2 = D_2 b^3 + 6 b m \varepsilon \Theta. \quad (148)$$

Aus den vier Gleichungen 145 bis 148 findet sich:

$$\mathcal{N}' = - Q \frac{a b (a + 2 b)}{2 l^2}, \quad (149)$$

$$D_1 = Q \frac{(3 a^2 + 6 a b + 2 b^2) b}{2 l^3}, \quad (150)$$

$$D_2 = Q \frac{(2 a + 3 b) a^2}{2 l^3}, \quad (151)$$

$$\varepsilon \Theta m = Q \frac{a^2 b}{4 l}. \quad (152)$$

Als grösstes Moment kann nur das (negative) Auflagermoment oder das (positive) Moment am Lastangriffsort in Frage kommen.

Das Verhältniss aber der Momente bei A und C ist folgendes:

$$\frac{\mathcal{N}'}{D_2 b} = \frac{(a + 2 b) l}{(2 a + 3 b) a}, \quad (153)$$

daher liegt der gefährliche Querschnitt im Einklemmungspunkt A, wenn

$$(a + 2 b) l > (2 a + 3 b) a,$$

d. h.

$$a < b \sqrt{2},$$



oder

$$a < 1,4142 b$$

$$a < 0,5858 l;$$

im entgegengesetzten Falle tritt  $\mathfrak{M}_{\max}$  bei C auf.

Ist die Last in der Mitte des Trägers wirksam, so dass  $a = b$ , also  $a < b\sqrt{2}$ , so liegt der gefährliche Querschnitt an der Einklemmungsstelle und

$$\mathfrak{M}_{\max} = -\frac{2}{15} Ql. \tag{154}$$

Die Vertikalkraft ist für alle Querschnitte der Strecke AC  $V_x = D_1$ , positiv; für die Strecke BC  $V_x = D_3 - Q$ , negativ.

Ist die Last beweglich, so hat man zwischen derjenigen Gruppe von Laststellungen zu unterscheiden, welche das Maximalmoment an der Einklemmungsstelle zur Folge hat, und derjenigen, bei welcher  $\mathfrak{M}_{\max}$  mit dem Lastangriffsort zusammenfällt. Im ersteren Falle erreicht

$$\mathfrak{M}' = \frac{Qab(a+2b)}{2l^2} = \frac{Q}{2l^2}(a^3 - 3a^2l + 2al^2)$$

für  $a = 0,4226 l$  seinen grössten Wert

$$= -0,192 Ql; \tag{155}$$

im letzteren Falle wird

$$\mathfrak{M}_c = \frac{Q(2a+3b)a^2}{2l^3} b = \frac{Q}{2l^3}(3a^2l^2 - 4a^3l + a^4)$$

durch  $a = 0,634 l$  zum Maximum

$$= +0,2745 Ql, \tag{156}$$

welch' letzterer Wert, als der grössere von beiden, das absolute Maximum des Angriffsmomentes vorstellt.

*Graphische Lösung.* Man setzt an Stelle der Einspannung am linken Auflager die im Abstand  $k$  von A anzubringende Kraft  $K$  (Fig. 111) und

Fig. 111.

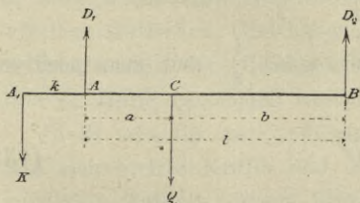
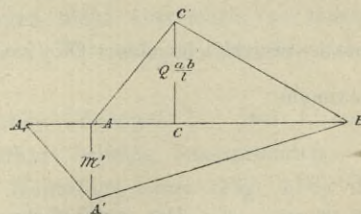


Fig. 112.

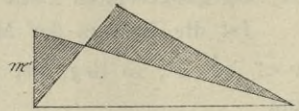


bestimmt getrennt die der Last  $Q$  und die der Auflagerreaction  $D_1$ , entsprechende Belastungsfläche. Die erstere ist ein Dreieck AC'B (Fig. 112

und Fig. 113) von der Fläche  $Q \frac{ab}{1} \frac{1}{2}$ , die letztere ein Dreieck  $AA'B$ , dessen Fläche  $\frac{\mathcal{N}'1}{2}$ .

Fig. 113.

Das Gleichgewicht der elastischen Linie ist demnach, weil  $\mathcal{N}'' = 0$ , bestimmt durch die Momentengleichung um B:



$$\varepsilon 0 \cdot 0 + \frac{\mathcal{N}'1}{2} \cdot \frac{21}{3} - \frac{Qab}{2} \cdot \frac{21-a}{3} = 0,$$

woraus sich ergibt

$$\mathcal{N}' = Q \frac{ab(21-a)}{21^2}$$

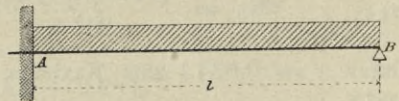
oder

$$\mathcal{N}' = \frac{Qab(a+2b)}{21^2}. \quad (149')$$

B) Der bei A wagrecht eingespannte, bei B unterstützte Träger ist durch gleichmässig verteilte Last  $q$  per Längeneinheit beansprucht, welche sich über die ganze Länge des Trägers erstreckt (Fig. 114).

Man denkt sich die stetige Belastung durch aneinandergereihte, gleichgrosse Einzellasten  $q dx$  ersetzt und erhält nach Gl. 149:

Fig. 114.



$$\mathcal{N}' = - \int_0^l \frac{q dx (21-x)(1-x)x}{21^2} = - \frac{q l^2}{8}. \quad (157)$$

Ebenso findet sich  $D_1 = \frac{5}{8} ql$  und  $D_2 = \frac{3}{8} ql$ .

Für jeden Querschnitt  $x$  gilt:

$$\mathcal{N}_x = \frac{5}{8} qlx - \frac{q l^2}{8} - \frac{q x^2}{2},$$

woraus ersichtlich, dass  $\mathcal{N}_x = 0$  wird für  $x = \frac{1}{4}$  und zum positiven Maximum

$$= + \frac{9}{128} ql^2 \quad (158)$$

für  $x = \frac{5}{8} l$ . Der gefährliche Querschnitt befindet sich also an der Einklemmungsstelle mit  $\mathcal{N}_{\max.} = - \frac{q l^2}{8}$ .



Die Verticalkräfte werden aus der Gleichung:

$$V = q \left( \frac{5}{8} l - x \right) \quad (159)$$

bestimmt, mithin

$$V_{\max.} = \frac{5}{8} q l. \quad (160)$$

Fig. 115.



Bei gleichmässig verteilter Belastung ist die Momentenfläche von  $q l$  ein Parabelsegment (Fig. 115) vom Flächeninhalt  $\frac{q l^3}{12}$ , daher die Momentengleichung um B:

$$e \Theta \cdot 0 + \frac{\mathcal{M}' l}{2} \cdot \frac{2}{3} l - \frac{q l^3}{12} \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

woraus gleichfalls

$$\mathcal{M}' = \frac{q l^2}{8}. \quad (157')$$

Das Auflagermoment bei A ist also dem Angriffsmoment in der Trägermitte des mit beiden Enden frei aufliegenden Trägers gleich und das Moment in der Trägermitte wird, wie aus Fig. 115 ersichtlich, durch die einseitige Einspannung des Balkens auf die Hälfte reducirt.

## § 6. Der continuirliche Träger.

### A) Auflagermomente und Stützendrücke bei beliebiger ruhender Belastung.

Der continuirliche Träger unterscheidet sich vom einfachen frei aufliegenden dadurch, dass er mehr als zwei Stützen besitzt. Da somit auch mehr als zwei unbekannte Stützenreactionen auftreten, für deren Ermittlung die einfachen statischen Gleichgewichtsbedingungen nicht ausreichen, so müssen zur Bestimmung des Gleichgewichtszustandes die Gleichungen der elastischen Linie zu Hülfe genommen werden.

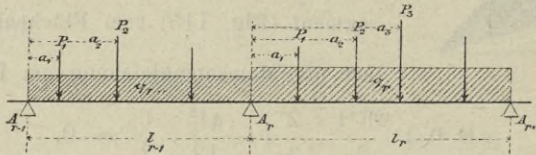
Stellt man für zwei auf einander folgende Öffnungen  $l_{r-1}$  und  $l_r$  eines durch concentrirte Kräfte und stetige Belastung beliebig beanspruchten continuirlichen Trägers, dessen Stützen gleiche Höhenlage haben (Fig. 116), die Gleichungen der elastischen Linie auf und eliminirt man aus ihnen die Werte  $\tan \alpha_{r-1}$ ,  $\tan \alpha_r$  und  $\tan \alpha_{r+1}$  (wenn  $\alpha_{r-1}$ ,  $\alpha_r$  und  $\alpha_{r+1}$  die Winkel der elastischen Linie bei  $A_{r-1}$ ,  $A_r$  und  $A_{r+1}$  mit dem Horizonte), so erhält man die

allgemeine Momentengleichung für die drei Auflagermomente je zweier aufeinander folgender Felder:

$$\mathfrak{M}_{r-1} l_{r-1} + 2 \mathfrak{M}_r (l_{r-1} + l_r) + \mathfrak{M}_{r+1} l_r = -\frac{1}{l_{r-1}} \sum_{r-1} [P a (1-a) (1+a)] - \frac{1}{l_r} \sum_r [P a (1-a) (2l-a)] - \frac{1}{4} q_{r-1} l_{r-1}^3 - \frac{1}{4} q_r l_r^3, \quad (161)$$

wobei sich  $\sum_r$  auf alle Einzellasten in  $l_r$  bezieht.\*)

Fig. 116.



Bei  $n$  vorhandenen Öffnungen erhält man also  $n-1$  Bedingungsgleichungen, aus welchen sich die Auflagermomente ergeben.

Wenn ferner die resultierende Vertikalkraft unmittelbar rechts vom Auflager  $A'$  einer Öffnung  $l$  (Fig. 117) mit  $V'$  bezeichnet wird, so ist:

$$\mathfrak{M}' + V' l - \sum_0^l P (l-a) - \frac{q l^2}{2} - \mathfrak{M}'' = 0 \quad (162)$$

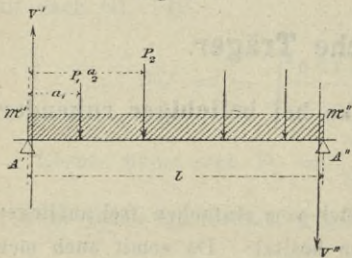
und hieraus

$$V' = \frac{1}{l} \left[ \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}' + \sum_0^l P (l-a) + \frac{q l^2}{2} \right], \quad (163)$$

Fig. 117.

daher für irgend einen Querschnitt  $x$

$$V_x = V' - \sum_0^x P - q x \quad (164)$$



und die Vertikalkraft unmittelbar links vom Auflager  $A''$ :

$$V'' = V' - \sum_0^l P - q l,$$

$$V'' = \frac{1}{l} \left[ \mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}' - \sum_0^l P a - \frac{q l^2}{2} \right]. \quad (165)$$

Das Moment des Querschnitts  $x$  berechnet sich aus:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}' + V' x - \sum_0^x P (x-a) - \frac{q x^2}{2}$$

oder

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\mathfrak{M}'(1-x)}{1} + \frac{\mathfrak{M}''x}{1} + \frac{x}{1} \sum P (l-a) - \sum P (x-a) + \frac{q x}{2} (1-x). \quad (166)$$

\*) S. Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der continurlichen und einfachen Träger. Leipzig, 1873.



Die Auflagerreactionen endlich sind gleich den Differenzen der Verticalkräfte unmittelbar rechts und links von dem betreffenden Stützpunkt oder gleich der Summe der absoluten Werte derselben:

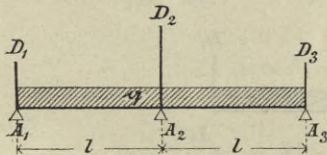
$$D_r = V'_r - V''_{r-1}. \quad (167)$$

*Specielle Fälle.*

I. Der Träger besteht aus zwei Feldern von gleicher Spannweite  $l$  und ist durch gleichmässig verteilte Belastung  $q$  beansprucht (Fig. 118).

Die Auflagermomente der Endstützen  $A_1$  und  $A_3$  sind gleich Null; zur Bestimmung des Momentes  $\mathfrak{M}_2$  über der Mittelstütze  $A_2$  dient Gl. 161, in welcher

Fig. 118.



$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{r-1} &= 0, & l_{r-1} &= l_r = l, \\ \mathfrak{M}_r &= \mathfrak{M}_2, & q_{r-1} &= q_r = q \\ \mathfrak{M}_{r+1} &= 0, & \text{und } P &= 0 \end{aligned}$$

zu setzen ist:

$$2\mathfrak{M}_2 \cdot 2l = -\frac{q l^3}{4} - \frac{q l^3}{4},$$

also

$$\mathfrak{M}_2 = -\frac{q l^2}{8} = \mathfrak{M}_{\max}. \quad (168)$$

Die Auflagerreactionen werden mittels der Gleichungen 163, 165 und 167 erhalten.

Für die Öffnung  $A_1 A_2$  ist nämlich:

$$V'_{A_1 A_2} = \frac{1}{l} \left[ -\frac{q l^2}{8} + \frac{q l^2}{2} \right] = \frac{3}{8} q l$$

und

$$V''_{A_1 A_2} = \frac{1}{l} \left[ -\frac{q l^2}{8} - \frac{q l^2}{2} \right] = -\frac{5}{8} q l.$$

Ferner hat man für die Öffnung  $A_2 A_3$ :

$$V'_{A_2 A_3} = \frac{1}{l} \left[ \frac{q l^2}{8} + \frac{q l^2}{2} \right] = +\frac{5}{8} q l$$

und

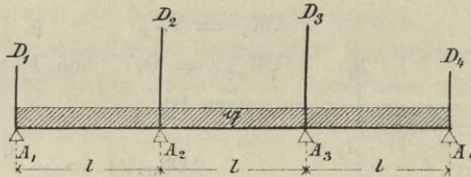
$$V''_{A_2 A_3} = \frac{1}{l} \left[ \frac{q l^2}{8} - \frac{q l^2}{2} \right] = -\frac{3}{8} q l.$$

Daher nach Gl. 167:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= V'_{A_1 A_2} = \frac{3}{8} q l, \\ D_2 &= V'_{A_2 A_3} - V''_{A_1 A_2} = \frac{10}{8} q l \\ \text{und} \\ D_3 &= -V''_{A_2 A_3} = \frac{3}{8} q l. \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

II. Der Träger besteht aus drei Feldern von gleicher Spannweite  $l$  und ist durch gleichmässig verteilte Belastung  $q$  beansprucht (Fig. 119).

Fig. 119.



Betrachtet man zuerst die beiden auf einander folgenden Öffnungen  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$ , so ist nach Gl. 161, wenn

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{r-1} &= 0, & l_{r-1} &= l_r = l, \\ \mathcal{N}_r &= \mathcal{N}_2, & q_{r-1} &= q_r = q \\ \mathcal{N}_{r+1} &= \mathcal{N}_3, & \text{und } P &= 0 \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$4 \mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_3 = -\frac{q l^2}{2}.$$

Für die beiden Öffnungen  $A_2 A_3$  und  $A_3 A_4$ , für welche

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{r-1} &= \mathcal{N}_2, & l_{r-1} &= l_r = l, \\ \mathcal{N}_r &= \mathcal{N}_3, & q_{r-1} &= q_r = q \\ \mathcal{N}_{r+1} &= 0, & \text{und } P &= 0 \end{aligned}$$

einzuführen ist, folgt aus Gl. 161:

$$\mathcal{N}_2 + 4 \mathcal{N}_3 = -\frac{q l^2}{2}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_3 = -\frac{q l^2}{10} = \mathcal{N}_{\max}. \quad (170)$$



Ferner ist für  $A_1 A_2$  nach Gl. 163:

$$V'_{A_1 A_2} = \frac{1}{l} \left[ -\frac{ql^2}{10} + \frac{ql^2}{2} \right] = \frac{4}{10} ql$$

und nach Gl. 165:

$$V''_{A_1 A_2} = \frac{1}{l} \left[ -\frac{ql^2}{10} - \frac{ql^2}{2} \right] = -\frac{6}{10} ql.$$

Bezüglich  $A_2 A_3$  hat man:

$$V'_{A_2 A_3} = \frac{1}{l} \cdot \frac{ql^2}{2} = \frac{ql}{2}$$

und

$$V''_{A_2 A_3} = \frac{1}{l} \cdot \left[ -\frac{ql^2}{2} \right] = -\frac{ql}{2}.$$

Für  $A_3 A_4$  ist:

$$V'_{A_3 A_4} = \frac{1}{l} \left[ \frac{ql^2}{10} + \frac{ql^2}{2} \right] = \frac{6}{10} ql$$

und

$$V''_{A_3 A_4} = \frac{1}{l} \left[ \frac{ql^2}{10} - \frac{ql^2}{2} \right] = -\frac{4}{10} ql.$$

Daher nach Gl. 167:

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= V'_{A_1 A_2} = \frac{4}{10} ql, \\ D_2 &= V'_{A_2 A_3} - V''_{A_1 A_2} = \frac{11}{10} ql, \\ D_3 &= V'_{A_3 A_4} - V''_{A_2 A_3} = \frac{11}{10} ql, \\ D_4 &= -V''_{A_3 A_4} = \frac{4}{10} ql. \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

Nachstehende Tabelle gibt für continuirliche Träger von gleicher Felderlänge, welche durch gleichmässig verteilte Belastung beansprucht sind, die Stützendrücke.

Es bezeichnen hiebei  $l$  die Felderlänge,  $q$  die Last pro Längeneinheit und  $D_1, D_2, D_3 \dots$  die auf einander folgenden Auflagerdrücke.

In der zweiten Tabelle sind die Auflagerdrücke berechnet, welche bei gleicher Felderlänge entstehen, wenn in der Mitte einer jeden Öffnung eine Einzellast  $Q$  wirksam ist.

**Auflagerdrücke continuirlicher Träger bei gleicher Felderlänge und gleichmässig verteilter Belastung.**

Zahl der Felder.	$\frac{D_1}{q l}$	$\frac{D_2}{q l}$	$\frac{D_3}{q l}$	$\frac{D_4}{q l}$	$\frac{D_5}{q l}$	$\frac{D_6}{q l}$	$\frac{D_7}{q l}$	$\frac{D_8}{q l}$	$\frac{D_9}{q l}$	$\frac{D_{10}}{q l}$
2	$\frac{3}{8}$ 0.3750	$\frac{10}{8}$ 1.2500	$\frac{3}{8}$ 0.3750							
3	$\frac{4}{10}$ 0.4000	$\frac{11}{10}$ 1.1000	$\frac{11}{10}$ 1.1000	$\frac{4}{10}$ 0.4000						
4	$\frac{11}{28}$ 0.3929	$\frac{32}{28}$ 1.1428	$\frac{26}{28}$ 0.9286	$\frac{32}{28}$ 1.1428	$\frac{11}{28}$ 0.3929					
5	$\frac{15}{38}$ 0.3947	$\frac{43}{38}$ 1.1316	$\frac{37}{38}$ 0.9737	$\frac{37}{38}$ 0.9737	$\frac{43}{38}$ 1.1316	$\frac{15}{38}$ 0.3947				
6	$\frac{41}{104}$ 0.3942	$\frac{118}{104}$ 1.1327	$\frac{100}{104}$ 0.9616	$\frac{106}{104}$ 1.0192	$\frac{100}{104}$ 0.9616	$\frac{118}{104}$ 1.1327	$\frac{41}{104}$ 0.3942			
7	$\frac{56}{142}$ 0.3944	$\frac{161}{142}$ 1.1338	$\frac{137}{142}$ 0.9648	$\frac{143}{142}$ 1.0070	$\frac{143}{142}$ 1.0070	$\frac{137}{142}$ 0.9648	$\frac{161}{142}$ 1.1338	$\frac{56}{142}$ 0.3944		
8	$\frac{153}{388}$ 0.3943	$\frac{440}{388}$ 1.1340	$\frac{374}{388}$ 0.9639	$\frac{392}{388}$ 1.0103	$\frac{386}{388}$ 0.9949	$\frac{392}{388}$ 1.0103	$\frac{374}{388}$ 0.9639	$\frac{440}{388}$ 1.1340	$\frac{153}{388}$ 0.3943	
9	$\frac{209}{530}$ 0.3943	$\frac{601}{530}$ 1.1340	$\frac{511}{530}$ 0.9642	$\frac{535}{530}$ 1.0094	$\frac{520}{530}$ 0.9981	$\frac{520}{530}$ 0.9981	$\frac{535}{530}$ 1.0094	$\frac{601}{530}$ 1.1340	$\frac{209}{530}$ 0.3943	

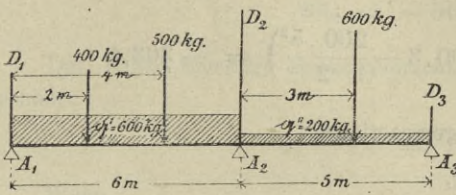
**Auflagerdrücke continuirlicher Träger bei gleicher Felderlänge und Belastung sämtlicher Öffnungen durch in der Mitte wirkende Einzellasten.**

Zahl der Felder.	$\frac{D_1}{Q}$	$\frac{D_2}{Q}$	$\frac{D_3}{Q}$	$\frac{D_4}{Q}$	$\frac{D_5}{Q}$	$\frac{D_6}{Q}$	$\frac{D_7}{Q}$	$\frac{D_8}{Q}$	$\frac{D_9}{Q}$	$\frac{D_{10}}{Q}$
2	$\frac{5}{16}$ 0.3125	$\frac{22}{16}$ 1.3750	$\frac{5}{16}$ 0.3125							
3	$\frac{7}{20}$ 0.3500	$\frac{23}{20}$ 1.1500	$\frac{23}{20}$ 1.1500	$\frac{7}{20}$ 0.3500						
4	$\frac{19}{56}$ 0.3393	$\frac{68}{56}$ 1.2143	$\frac{50}{56}$ 0.8928	$\frac{68}{56}$ 1.2143	$\frac{19}{56}$ 0.3393					
5	$\frac{26}{76}$ 0.3421	$\frac{91}{76}$ 1.1974	$\frac{73}{76}$ 0.9605	$\frac{73}{76}$ 0.9605	$\frac{91}{76}$ 1.1974	$\frac{26}{76}$ 0.3421				
6	$\frac{71}{208}$ 0.3413	$\frac{250}{208}$ 1.2019	$\frac{196}{208}$ 0.9423	$\frac{214}{208}$ 1.0290	$\frac{196}{208}$ 0.9423	$\frac{250}{208}$ 1.2019	$\frac{71}{208}$ 0.3413			
7	$\frac{97}{284}$ 0.3415	$\frac{341}{284}$ 1.2007	$\frac{269}{284}$ 0.9472	$\frac{287}{284}$ 1.0106	$\frac{287}{284}$ 1.0106	$\frac{269}{284}$ 0.9472	$\frac{341}{284}$ 1.2007	$\frac{97}{284}$ 0.3415		
8	$\frac{265}{776}$ 0.3415	$\frac{932}{776}$ 1.2010	$\frac{734}{776}$ 0.9459	$\frac{788}{776}$ 1.0155	$\frac{770}{776}$ 0.9922	$\frac{788}{776}$ 1.0155	$\frac{734}{776}$ 0.9459	$\frac{932}{776}$ 1.2010	$\frac{265}{776}$ 0.3415	
9	$\frac{362}{1060}$ 0.3415	$\frac{1273}{1060}$ 1.2009	$\frac{1003}{1060}$ 0.9462	$\frac{1075}{1060}$ 0.0142	$\frac{1057}{1060}$ 0.9972	$\frac{1057}{1060}$ 0.9972	$\frac{1003}{1060}$ 0.9462	$\frac{1273}{1060}$ 1.2009	$\frac{362}{1060}$ 0.3415	



*Beispiel 1.* Ein kontinuierlicher Träger mit zwei Öffnungen von 6 m und 5 m Spannweite (Fig. 120) ist durch gleichmässig verteilte Belastung beansprucht, welche für die erste Öffnung  $q' = 600$  kg und für die zweite Öffnung  $q'' = 200$  kg pro m Trägerlänge beträgt. Ausserdem sind in der ersten Öffnung zwei feststehende Einzellasten 400 und 500 kg vorhanden, 2 bzw. 4 m vom linken Auflager  $A_1$  entfernt, während das zweite Feld durch eine Einzellast 600 kg beansprucht ist, deren Entfernung von  $A_2$  3 m beträgt.

Fig. 120.



während das zweite Feld durch eine Einzellast 600 kg beansprucht ist, deren Entfernung von  $A_2$  3 m beträgt.

Es ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{r-1} &= 0, & l_{r-1} &= 6 \text{ m}, & q_{r-1} &= 600 \text{ kg pro m}, \\ \mathcal{N}_r &= \mathcal{N}_2, & l_r &= 5 \text{ m}, & q_r &= 200, \\ \mathcal{N}_{r+1} &= 0, \end{aligned}$$

daher nach Gl. 161:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{N}_2(6 + 5) &= -\frac{1}{6}(400 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 + 500 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10) - \frac{1}{5}(600 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7) \\ &\quad - \frac{1}{4}600 \cdot 6^3 - \frac{1}{4}200 \cdot 5^3 \end{aligned}$$

oder

$$\mathcal{N}_2 = -2482,9 \text{ mkg} = \mathcal{N}_{\max}$$

Soll der Balken als I-Träger ausgeführt werden, und wird als zulässige Bieigungsbeanspruchung  $\delta = 750$  kg pro qcm angenommen, so hat man

$$\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} \cdot 750 = 248290 \text{ kgcm},$$

daher für den Träger ein Profil mit  $\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 331$  erforderlich ist. Mithin

ist von den Profilen der Tabelle S. 30 Nro. 24 mit dem nächsthöheren Werte:

$$\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 357 \text{ zu wählen.}$$

Ferner ist nach Gl. 163 und 165:

$$V'_{A_1 A_2} = \frac{1}{6} \left( -2482,9 + 400 \cdot 4 + 500 \cdot 2 + \frac{600 \cdot 6^2}{2} \right) = 1819,5,$$

$$V''_{A_1 A_2} = \frac{1}{6} \left( -2482,9 - 400 \cdot 2 - 500 \cdot 4 - \frac{600 \cdot 6^2}{2} \right) = -2680,5$$

und

$$V'_{A_2 A_3} = \frac{1}{5} \left( 2482,9 + 600 \cdot 2 + \frac{200 \cdot 5^3}{2} \right) = + 1236,6,$$

$$V''_{A_2 A_3} = \frac{1}{5} \left( 2482,9 - 600 \cdot 3 - \frac{200 \cdot 5^3}{2} \right) = - 363,4.$$

Daher nach Gl. 167 die Auflagerreactionen:

$$D_1 = 1819,5 \text{ kg},$$

$$D_2 = V'_{A_2 A_3} - V''_{A_1 A_2} = 3917,1 \text{ kg},$$

$$D_3 = 363,4 \text{ kg}.$$

*Beispiel 2.* Ein continuirlicher Balkenträger aus Fichtenholz (Fig. 121) besteht aus drei Feldern von 5, 2 und 4 m Spannweite und ist durch gleichmässig verteilte Belastung  $q = 500 \text{ kg pro m}$  beansprucht.

Für die beiden ersten Öffnungen  $A_1 A_2$  und  $A_2 A_3$  ist nach Gl. 161, wenn

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{r-1} &= 0, & l_{r-1} &= 5, & q_{r-1} &= q_r = 500 \\ \mathfrak{N}_r &= \mathfrak{N}_2, & l_r &= 2, & \text{und } P &= 0 \\ \mathfrak{N}_{r+1} &= \mathfrak{N}_3, \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$2 \mathfrak{N}_2 \cdot 7 + \mathfrak{N}_3 \cdot 2 = -\frac{1}{4} 500 \cdot 5^3 - \frac{1}{4} 500 \cdot 2^3$$

oder

$$7 \mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_3 = - 8312,5.$$

Für die beiden Öffnungen  $A_2 A_3$  und  $A_3 A_4$  ist, wenn

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{r-1} &= \mathfrak{N}_2, & l_{r-1} &= 2, & q_{r-1} &= q_r = q \\ \mathfrak{N}_r &= \mathfrak{N}_3, & l_r &= 4, & \text{und } P &= 0 \\ \mathfrak{N}_{r+1} &= 0 \end{aligned}$$

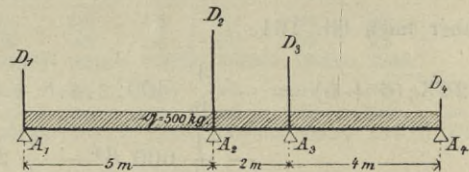
gesetzt wird:

$$\mathfrak{N}_2 \cdot 2 + 2 \mathfrak{N}_3 \cdot 6 = -\frac{1}{4} 500 \cdot 2^3 - \frac{1}{4} 500 \cdot 4^3$$

oder

$$\mathfrak{N}_2 + 6 \mathfrak{N}_3 = - 4500.$$

Fig. 121.





Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$\mathfrak{N}_2 = -1106,7 \text{ mkg} = \mathfrak{N}_{\text{max.}}$$

und

$$\mathfrak{N}_3 = -565,5 \text{ mkg.}$$

Der rechteckförmige Balkenquerschnitt wird auf Grund von Gl. 84 berechnet:

$$\delta \cdot \frac{1}{6} b h^3 = 1106,7 \text{ mkg.}$$

Wenn

$$\delta = 42 \text{ kg pro qem}$$

und

$$b = \frac{5}{7} h$$

gesetzt wird, ergibt sich:

$$5 h^3 = 110670 \text{ cmkg}$$

oder

$$h = 28,1 \text{ cm} \quad \text{und} \quad b = 20 \text{ cm.}$$

Was die Bestimmung der Auflagerdrücke anlangt, so ist nach Gl. 163 und 165:

$$V'_{A_1 A_2} = \frac{1}{5} \left( -1106,7 + 500 \cdot \frac{5^2}{2} \right) = 1028,7,$$

$$V''_{A_1 A_2} = \frac{1}{5} \left( -1106,7 - 500 \cdot \frac{5^2}{2} \right) = -1471,3,$$

ferner:

$$V'_{A_2 A_3} = \frac{1}{2} \left( -565,5 + 1106,7 + \frac{500 \cdot 4}{2} \right) = 770,6,$$

$$V''_{A_2 A_3} = \frac{1}{2} \left( -565,5 + 1106,7 - \frac{500 \cdot 4}{2} \right) = -229,4,$$

endlich:

$$V'_{A_3 A_4} = \frac{1}{4} \left( 565,5 + \frac{500 \cdot 16}{2} \right) = 1141,4,$$

$$V''_{A_3 A_4} = \frac{1}{4} \left( 565,5 - \frac{500 \cdot 16}{2} \right) = -858,6.$$

Daher nach Gl. 167:

$$D_1 = 1028,7 \text{ kg,}$$

$$D_2 = V'_{A_2 A_3} - V''_{A_1 A_2} = 2241,9 \text{ kg,}$$

$$D_3 = V'_{A_3 A_4} - V''_{A_2 A_3} = 1370,8 \text{ kg,}$$

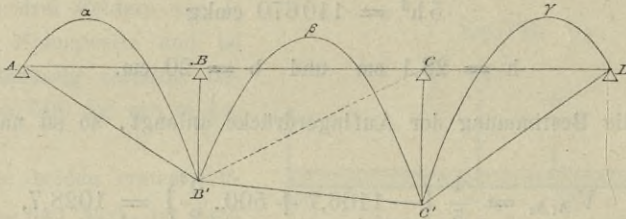
und

$$D_4 = 858,6 \text{ kg.}$$

## B. Graphische Bestimmung der Auflagermomente und Stützendrücke.\*)

Bestimmt man für einen continuirlichen Träger von gegebener Belastung die Momentenlinie, so wird man eine Curve von der Form Fig. 122 erhalten, welche in den Auflagerverticalen Brechungspunkte hat. Die Momente aller Querschnitte einer beliebigen Öffnung, z. B. BC werden hier durch die auf BC als Grundlinie bezogenen Ordinaten der Momentenlinie  $B'\beta C'$  dargestellt. Werden dagegen die Ordinaten von  $B'\beta C'$  auf  $B'C'$  als Grundlinie bezogen, so erhält man die Momente eines einfachen, auf den Stützen B und C frei aufliegenden Trägers, welcher auf gleiche Weise wie die Öffnung BC belastet ist, da  $B'\beta C'$  das Seilpolygon der zwischen den Stützen B und C befindlichen Belastung.

Fig. 122.



Der Einfluss der Continuität des Trägers äussert sich demnach in der Verschiebung der Schlusslinie des Seilpolygons der einfachen Belastung und es kann diese Verschiebung auch als Resultat der Addition der Flächen  $B'\beta C'$  und  $BB'C'C$  angesehen werden, der (positiven) Momentenfläche der einfachen Belastung und des (negativen) Trapezes  $BB'C'C$ , in welchem  $BB'$  und  $CC'$  die Auflagermomente vorstellen.

Die Bezeichnung „Trapez“ ist dabei in weiterem Sinne aufzufassen, da sich die Seiten BC und  $B'C'$  auch schneiden können, was bei unbelastetem Zustande mehrerer an einander grenzender Felder mit abwechselnd positiven und negativen Auflagermomenten der Fall ist.

Da nun für jedes Feld die einfache Momentenfigur oder das Seilpolygon der positiven Belastung sehr leicht gezeichnet werden kann, so wird es sich bei der statischen Bestimmung des continuirlichen Trägers nur um die Verschiebung der Grundlinie handeln und es beruht die geometrische Lösung der Aufgabe auf dem S. 111 angeführten Fundamentalsatz, dass die elastische Linie des Trägers als eine Seilcurve betrachtet werden kann, welche dem durch die Momentenfläche des Balkens dargestellten Kräftesystem entspricht und, mit der Poldistanz  $\varepsilon\Theta$  construirt, durch die Stützpunkte des Trägers geht.

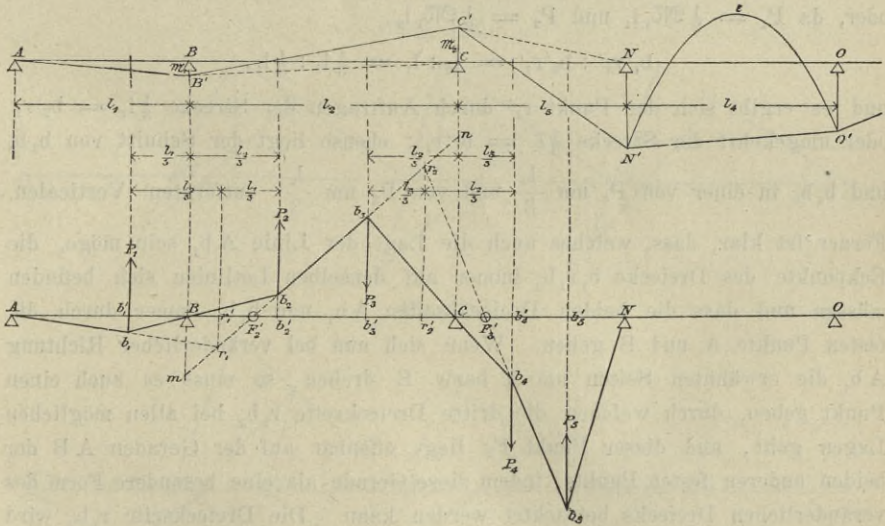
\*) Siehe Mohr, Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenconstructions, Zeitschr. d. Arch.- u. Ingen.-Vereins zu Hannover, 1868.



Am einfachsten kommt man zum Ziel, wenn man zunächst annimmt, dass vom kontinuierlichen Träger nicht mehr als ein Feld belastet, der übrige Träger aber nicht durch Lasten beansprucht sei. Ist man im Stande, die Momente zu bestimmen, welche in beliebigen Querschnitten des kontinuierlichen Trägers durch dieses eine belastete Feld hervorgebracht werden, so hat es keine Schwierigkeit, auch die Momente zu finden, welche in gegebenen Querschnitten entstehen, wenn mehrere Öffnungen gleichzeitig belastet sind. Denn da das Gesamtmoment, welches in einem gegebenen Querschnitt durch mehrere Lasten (oder belastete Felder) hervorgebracht wird, gleich ist der Summe der durch die einzelnen Lasten (oder belasteten Felder) erzeugten Momente, so braucht man nur die Aufgabe in soviel Teile zu trennen, als belastete Felder vorhanden sind und sodann die hiebei erhaltenen Momentenwerte zu summieren.

Von dem Träger Fig. 123 sei nur eine Öffnung NO auf beliebige Weise belastet, die übrigen Öffnungen rechts und links seien unbelastet. Im belasteten Felde wird die Momentenfläche durch Summierung der positiven Fläche

Fig. 123.



$N' \varepsilon O'$  und der negativen Fläche  $NN'O'O'$  erhalten werden, während im unbelasteten Trägerteil, in welchem als äussere Kräfte nur die Stützreaktionen auftreten, die Momentenlinie aus einem Polygon  $AB'C'N'$  besteht, dessen Eckpunkte in den Stützenverticalen liegen. Soll für den Trägerteil  $AN$  die Biegelinie konstruiert werden, so muss das der Momentenfläche zugehörige Seilpolygon gezeichnet werden. Im Endfelde  $AB$  besteht die Momentenfläche aus dem Dreieck  $ABB' = \frac{\varpi l_1}{2} = P_1$ , dessen Schwerlinie durch den Endpunkt  $b_1'$  des zweiten Drittels der Länge  $AB$  geht. Im



zweiten Felde kann die Momentenfläche  $BB'C'C$  in das positive Dreieck  $B'CC' = \frac{\mathcal{M}_2 l_2}{2} = P_3$  und das negative Dreieck  $BB'C = \frac{\mathcal{M}_1 l_2}{2} = P_2$  zerlegt werden, deren Schwerlinien durch die Begrenzungspunkte  $b_3'$  und  $b_2'$  des mittleren Dritttheils von  $BC$  gehen. Dasselbe gilt von den übrigen Feldern des unbelasteten Trägerteils, so dass jetzt der ungefähre Verlauf des den Kräften  $P_1, P_2, P_3 \dots$  entsprechenden Seilpolygons angegeben werden kann. Dieses Seilpolygon wird der Biegungscurve umschrieben sein, denn die Endlinien eines Seilpolygons sind unabhängig von der Einteilung der erzeugenden Belastungsfläche. Daher müssen die Seiten  $b_1 b_2, b_3 b_4, b_5 N$  des Seilpolygons durch die Auflagerpunkte gehen, was zugleich das Vorzeichen der Kräfte  $P_1, P_2, P_3$  etc. bestimmt und erkennen lässt, dass die Auflagermomente des unbelasteten Trägerteils abwechselnd positiv und negativ sind.

Verlängert man die Seilpolygonseiten  $Ab_1$  und  $b_2 b_3$ , so ist durch ihren Schnitt  $r_1$  offenbar die Resultirende von  $P_1$  und  $P_2$  bestimmt. Daher ist:

$$P_1 \cdot b_1' r_1' = P_2 \cdot b_2' r_1'$$

oder, da  $P_1 = \frac{1}{2} \mathcal{M}_1 l_1$  und  $P_2 = \frac{1}{2} \mathcal{M}_1 l_2$ ,

$$b_1' r_1' : b_2' r_1' = l_2 : l_1 = \frac{1}{3} l_2 : \frac{1}{3} l_1,$$

und es ergibt sich der Punkt  $r_1'$  durch Auftragen der Strecke  $\frac{1}{3} l_1 = b_2' r_1'$  oder umgekehrt der Strecke  $\frac{1}{3} l_2 = b_1' r_1'$ ; ebenso liegt der Schnitt von  $b_2 b_3$  und  $b_4 b_5$  in einer von  $P_4$  um  $\frac{l_2}{3}$  und von  $P_3$  um  $\frac{l_3}{3}$  entfernten Verticalen.

Ferner ist klar, dass, welches auch die Lage der Linie  $Ab_1$  sein möge, die Eckpunkte des Dreiecks  $b_1 r_1 b_2$  immer auf denselben Lotlinien sich befinden müssen und dass die beiden Dreiecksseiten  $Ab_1$  und  $b_1 b_2$  immer durch die festen Punkte A und B gehen. Wenn sich nun bei veränderlicher Richtung  $Ab_1$  die erwähnten Seiten um A bzw. B drehen, so muss es auch einen Punkt geben, durch welchen die dritte Dreiecksseite  $r_1 b_2$  bei allen möglichen Lagen geht, und dieser Punkt  $F_2'$  liegt offenbar auf der Geraden AB der beiden anderen festen Punkte, indem diese Gerade als eine besondere Form des veränderlichen Dreiecks betrachtet werden kann. Die Dreiecksseite  $r_1 b_2$  wird also immer die Trägeraxe im Punkte  $F_2'$  schneiden und ebenso wird die Trägeraxe von der Dreiecksseite  $r_2 b_4$  in dem unter allen Umständen gleich bleibenden Punkte  $F_3'$  getroffen werden. Diese von der Belastung unabhängigen Punkte  $F_2', F_3'$  etc. werden als Fixpunkte bezeichnet.

Aus den Gleichungen:

$$P_2 \cdot b_2' B = Bm \cdot \varepsilon \Theta$$

und

$$P_3 \cdot b_3' C = Cn \cdot \varepsilon \Theta$$

oder

$$P_2 : P_3 = Bm : Cn = BF_2' : CF_3',$$



daher

$$BF_2' : CF_2' = BB' : CC' \quad (172)$$

geht hervor, dass die Punkte  $F_2'$ ,  $F_3'$  etc. die Schnittpunkte der Momentenlinie mit der Trägeraxe sind, also Inflexionspunkte der elastischen Linie bezeichnen und die dargelegte Construction zeigt, dass dieselben immer im äusseren Drittel der betreffenden Felder liegen, sowie dass die abwechselnd positiven und negativen Auflagermomente der unbelasteten Felder gegen das Trägerende hin kleiner sind, als je das halbe vorhergehende Moment.

Fig. 124.

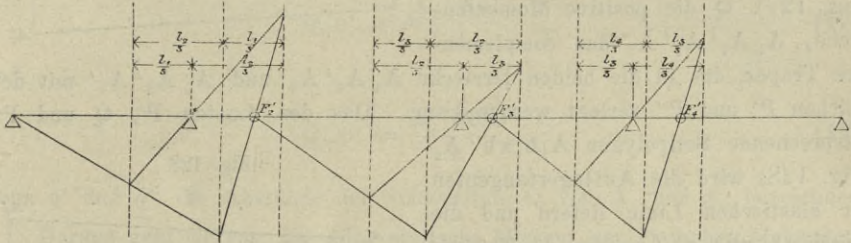


Fig. 125.

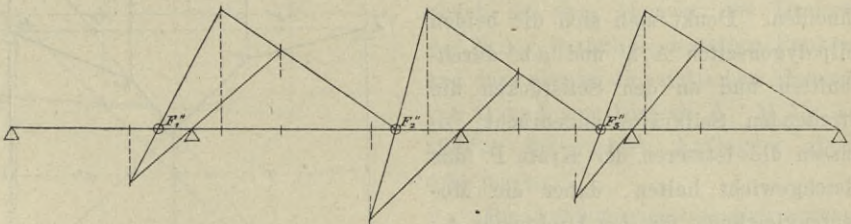
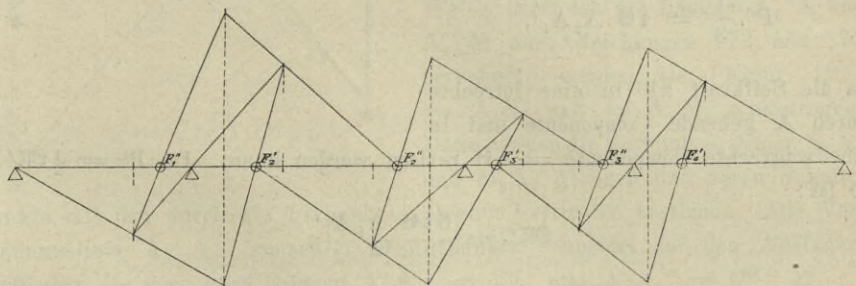


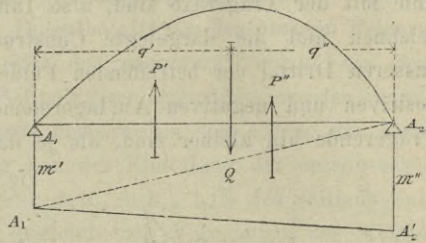
Fig. 126.



Geradeso wie die Punkte  $F_1'$  und  $F_2'$ .. ausgehend vom linken Trägerende gefunden wurden, ebenso ergeben sich die rechten Fixpunkte  $F_1''$ ,  $F_2''$ .., wenn dieselbe Construction vom rechten gegen das linke Endauflager ausgeführt wird. Fig. 124 zeigt die Bestimmung der linken, Fig. 125 die der rechten Fixpunkte; in Fig. 126 wurden der Einfachheit wegen die zur Bestimmung der Punkte  $F'$  dienenden Geraden auch zur Auffindung der Punkte  $F''$  benützt.

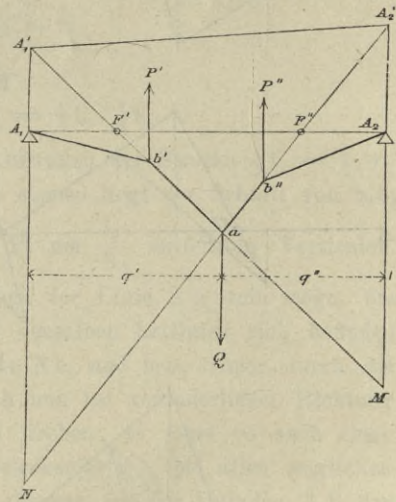
Mittels der Fixpunkte können nun die Momente bestimmt werden, welche die Belastung irgend eines Feldes in den übrigen erzeugt, wenn die über den Stützen des belasteten Feldes hervor-gebrachten Momente bekannt sind. Es ist deshalb noch zu untersuchen, in welcher Weise die Auflagermomente des belasteten Feldes durch Construction bestimmt werden können.

Fig. 127.



$A_1 A_2$  sei die belastete Öffnung (Fig. 127),  $Q$  die positive Momentenfläche,  $A_1 A_1' A_2' A_2$  das complementäre Trapez, das in die beiden Dreiecke  $A_1 A_1' A_2$  und  $A_2 A_2' A_1'$  mit den Flächen  $P'$  und  $P''$  zerlegt werden kann. Das den Lasten  $P'$ ,  $Q$  und  $P''$

Fig. 128.



entsprechende Seilpolygon  $A_1 b' a b'' A_2$  (Fig. 128) wird die Auflager tangente der elastischen Linie liefern und die Seiten  $ab'$  und  $ab''$  werden die Trägeraxe in den Fixpunkten  $F'$  und  $F''$  schneiden. Denkt man sich die beiden Seilpolygonseiten  $A_1 b'$  und  $ab'$  durchschnitten und an den Seilstücken die betreffenden Seilkräfte angebracht, so müssen die letzteren der Kraft  $P'$  das Gleichgewicht halten, daher die Momentengleichung für den Drehpunkt  $A$ :

$$P' \cdot \frac{1}{3} = \varepsilon \Theta \cdot A_1 A_1',$$

da die Seilkraft  $ab'$  in eine lotrechte durch  $A$  gehende Componente und in eine wagrechte Componente  $= \varepsilon \Theta$  zerlegt werden kann. Da  $P' = \frac{1}{2} \Theta \mathcal{N}'$ , so ist:

$$\Theta \mathcal{N}' = \frac{6 \varepsilon \Theta \cdot A_1 A_1'}{1^2}.$$

Die Längen  $A_1 A_1'$  und  $A_2 A_2'$  repräsentiren also in bestimmtem Massstab die Auflagermomente  $\Theta \mathcal{N}'$  und  $\Theta \mathcal{N}''$ . Würde man die Poldistanz  $\varepsilon \Theta = 1$  angenommen und den Kräfte massstab von  $P'$  und  $P''$  so gewählt haben, dass  $\frac{6 P'}{1}$  die Kraftlänge  $P'$  und  $\frac{6 P''}{1}$  die Kraftlänge  $P''$  darstellen, so würden  $\Theta \mathcal{N}'$  und  $\Theta \mathcal{N}''$  unmittelbar als Längen  $A_1 A_1'$  und  $A_2 A_2'$  erhalten worden sein. Gesetzt, die Construction wäre unter diesen Annahmen ausgeführt, so



wird man mittels Durchschneidens der Seilpolygonseiten  $b'a$  und  $ab''$  und Aufstellung der Momentengleichungen um  $A_1'$  und  $A_2'$  erhalten:

$$\frac{6 Q}{1} q' = \overline{A_1' N} \cdot 1$$

und

$$\frac{6 Q}{1} q'' = \overline{A_2' M} \cdot 1$$

oder

$$Q \cdot q' = \frac{\overline{A_1' N} \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3} \tag{173}$$

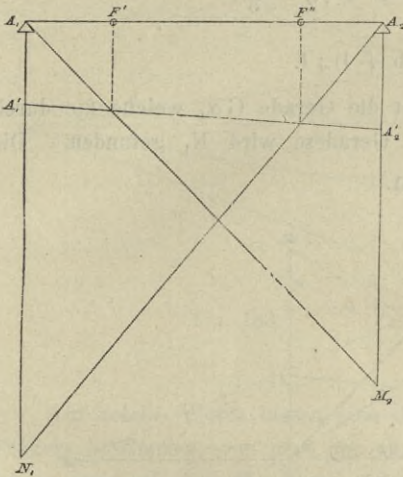
und

$$Q \cdot q'' = \frac{\overline{A_2' M} \cdot 1}{2} \cdot \frac{1}{3}, \tag{174}$$

wenn  $q'$  und  $q''$  die Abstände der Schwerlinie  $Q$  von  $A_1$  und  $A_2$  bezeichnen.

Daraus geht hervor, dass das statische Moment der einfachen Momenten-

Fig. 129.



fläche bezüglich des Auflagerpunktes  $A_1$  gleich ist dem Moment des Dreiecks  $A_1' N A_2'$  bezüglich desselben Punktes, und dass ebenso die statischen Momente von  $Q$  und vom Dreieck  $A_1' M A_2'$  bezüglich des rechten Auflagers gleich sein müssen.

Die Auflagermomente aber ergeben sich jetzt am einfachsten auf folgende Weise: Nachdem die Längen  $A_1' N$  und  $A_2' M$  aus Gleichungen 173 und 174 berechnet, werden sie (Figur 129)  $= A_1 N_1$  und  $= A_2 M_2$  aufgetragen. Dann werden die Verbindungslinien  $N_1 A_2$  und  $M_2 A_1$  gezogen und deren Schnittpunkte mit den durch die Fixpunkte gelegten Verticalen bestimmt. Die Verbindungslinie  $A_1' A_2'$  genannter Schnittpunkte schneidet auf den Auflagerverticalen die gesuchten Grössen  $A_1 A_1' = \mathfrak{N}'$  und  $A_2 A_2' = \mathfrak{N}''$  ab.

### Specielle Fälle.

a) Das Feld ist auf seine ganze Länge gleichmässig belastet. Die positive Belastungsfläche ist hier eine Parabel  $A_1 \alpha A_2$  (Fig. 130), daher

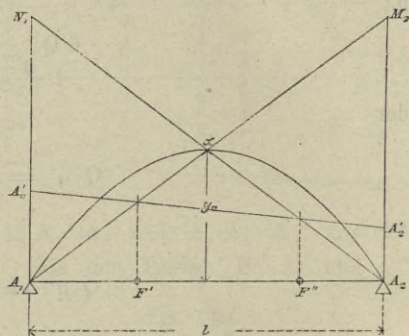
$$Q = \frac{2}{3} l y_0,$$

wenn  $y_0$  die Scheitelordinate der Parabel. Daher nach Gleichung 173:

$$A_1 N_1 = A_2 M_2 = \frac{2}{3} l y_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{l^2} = 2 y_0.$$

Die Seiten  $A_1 M_2$  und  $A_2 N_1$  müssen sich also im Scheitel  $\alpha$  der Parabel schneiden, wodurch ihre Lage bestimmt ist. Ihre Schnittpunkte mit den Verticalen durch die Fixpunkte bestimmen die verschobene Grundlinie und die Auflagermomente.

Fig. 130.



b) Das Feld ist durch eine Einzellast beansprucht (Fig. 131). Um  $A_2 M_2$  zu erhalten, hat man die Bedingung zu erfüllen, dass

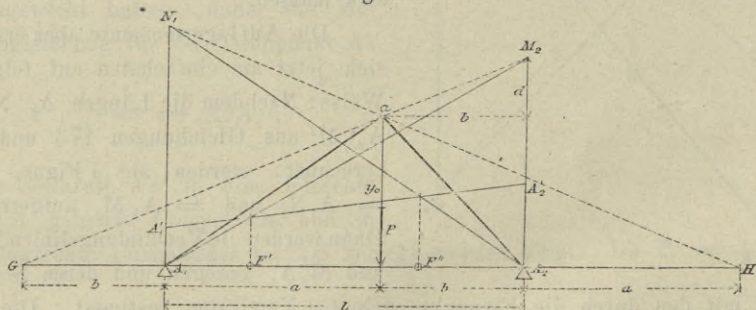
$$y_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{b+1}{3} = A_2 M_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3},$$

d. h.

$$A_2 M_2 : y_0 = (b+1) : 1.$$

Man macht also  $A_1 G = b$  und zieht die Gerade  $G \alpha$ , welche die durch  $A_2$  gelegte Lotrechte in  $M_2$  schneidet. Geradeso wird  $N_1$  gefunden. Die

Fig. 131.



Schnittpunkte der Verbindungslinien  $A_1 M_2$  und  $A_2 N_1$  mit den Verticalen durch die Fixpunkte bestimmen sodann die verschobene Grundlinie  $A_1' A_2'$ .

c) Das Feld ist durch mehrere Einzellasten  $P_1, P_2, P_3$  beansprucht. Die einfache Momentenfigur der gegebenen Belastung ist  $A_1 I II III A_2$  (Fig. 132). Den einzelnen Lasten entsprechen die Momentendreiecke  $A_1 I I$ ,  $2 II 2'$ ,  $3 III A_2$  mit den Ordinaten  $y_1 = I' I$ ,  $y_2 = II' II$ ,  $y_3 = III' III$ . Berücksichtigt man nun, dass in Fig. 131  $d : b = y_0 : 1$  oder  $1 \cdot d = b \cdot y_0$ , so ergibt sich die Strecke  $d_1$ , um welche  $y_1$  zu vermehren ist, wenn der der Einzellast  $P_1$



entsprechende Wert von  $A_2 M_2$  erhalten werden soll, aus der Gleichung  $d_1 \cdot l = b_1 \cdot y_1$  und analog für die übrigen Lasten  $d_2 \cdot l = b_2 \cdot y_2$  und  $d_3 \cdot l = b_3 \cdot y_3$ . Man sieht hieraus, dass, wenn  $y_1, y_2, y_3$  als Kräfte aufgefasst werden, dann  $d_1 l, d_2 l, d_3 l$  die Momente dieser Kräfte bezüglich  $A_2$  vorstellen und bestimmt man diese Momente mittels eines Seilpolygons von der Poldistanz  $l$ , so werden die gesuchten Werte  $d_1, d_2, d_3$  offenbar als entsprechende Ordinaten erhalten werden. Man trägt also die Längen  $y_1, y_2, y_3$  auf der rechtsseitigen Auflagerverticalen auf (Fig. 133), zeichnet für einen in der Poldistanz  $l$  angenommenen Pol  $O$  Kräfte- und Seilpolygon, so schneiden die äussersten Seilpolygonseiten auf den beiden Auflagerverticalen die Strecken  $m_1 m_2$  und  $n_1 n_2$  ab, welche zu der Länge  $y_1 + y_2 + y_3$  zu addiren sind, um die der Gesamtbelastung entsprechenden Grössen  $A_1 N_1$  und  $A_2 M_2$  zu erhalten. Letztere dienen dann in bekannter Weise zur Bestimmung der Auflagermomente.

Fig. 132.

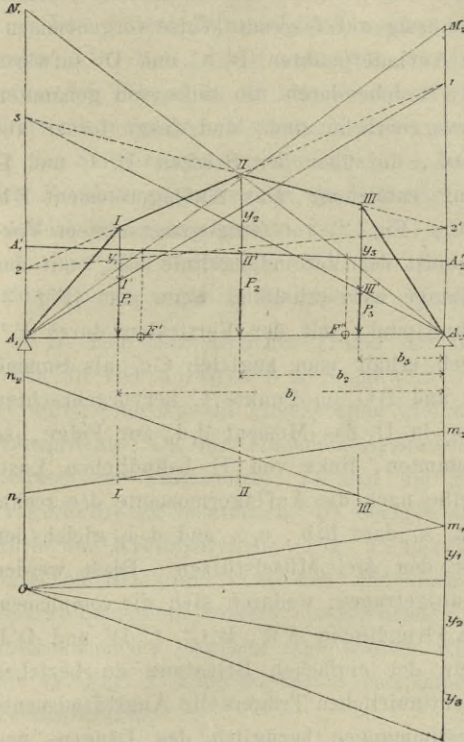


Fig. 133.

Auf solche Weise lassen sich die Auflagermomente eines kontinuierlichen Trägers bestimmen, von dem nur eine Öffnung belastet ist. Wie dieses Verfahren zur einfachen Ermittlung der Momente, Verticalkräfte und Auflagerdrücke von ganz beliebig belasteten kontinuierlichen Trägern Verwendung finden kann, mögen nachfolgende Beispiele zeigen:

I. Ein kontinuierlicher Träger von vier Öffnungen à 5 m, 6 m, 5,5 m und 6,5 m Spannweite ist durch gleichmässig verteilte Last von 400 kg per Meter total belastet. Man bestimmt zunächst die Fixpunkte des Trägers (Fig. 1 Taf. I), zeichnet mit Hülfe der Kräftepolygone (Fig. 2<sup>a</sup> bis Fig. 2<sup>d</sup>), welchen bei einer Poldistanz = 15 mm ein Kräftemassstab 1 mm = 40 kg zu Grunde gelegt wurde, die Momentenflächen der einfachen Belastung (Fig. 2) und construiert nach S. 140 für jede Öffnung die durch die Belastung des



betreffenden Feldes bei sonst unbelastet gedachtem Träger hervorgebrachten Auflagermomente. Auf Grund letzterer können nun nach Fig. 123 mit Hilfe der Fixpunkte die durch dieselben an sämtlichen übrigen Stützpunkten erzeugten Momente bestimmt und somit die Auflagermomente der Gesamtbelastung in der Summe der zusammengehörigen Einzelmomente erhalten werden. Die Summierung wird zweckmässig auf folgende Weise vorgenommen: Man trägt (Fig. 3 Taf. I) von den Auflagerpunkten B, C und D aufwärts an die Momente  $Bb_1$ ,  $Cc_1$ ,  $Dd_1$  auf, welche durch die links von genannten Stützpunkten befindlichen Lasten hervorgebracht sind, und trägt ferner abwärts an die Momente  $Bb_r$ ,  $Cc_r$ ,  $Dd_r$ , die über den Stützen B, C und D durch die rechts befindliche Belastung entstehen. Das Auflagermoment  $Bb_1$  erzeugt in C ein Auflagermoment  $C\gamma$  (Fig. 2) von entgegengesetztem Vorzeichen, welches sich durch den Schnitt der Verbindungslinie  $b_1F_2''$  mit der Verticalen bei C ergibt. Dieselbe Länge wird erhalten, wenn man (Fig. 3) die Gerade  $Bc_1$  zieht und deren Schnittpunkt mit der Verticalen durch  $F_2''$  mit dem Punkte  $b_1$  verbindet; dadurch erhält man zugleich  $Cc_1$  als Summe der durch die Belastungen von AB und BC im Punkte C hervorgebrachten Auflagermomente. Letztere hat nun in D das Moment  $d_1d_1$  zur Folge, so dass  $Dd_1$  Auflagermoment der gesamten, links von D befindlichen Last. Ebenso sind  $Dd_r$ ,  $Cc_2$ ,  $Bb_2$  der Reihe nach die Auflagermomente der rechts von D, C und B vorhandenen Lasten, so dass  $b_1b_1$ ,  $c_2c_1$  und  $d_r d_1$  gleich den resultirenden Auflagermomenten über den drei Mittelstützen. Diese werden (Fig. 2) nach  $BB'$ ,  $CC'$  und  $DD'$  aufgetragen, wodurch sich die complementären Trapeze und die verschobenen Grundlinien  $AB'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$  und  $D'E$  ergeben, auf welche die Seilparabeln der einfachen Belastung zu beziehen sind, um für alle Querschnitte des kontinuierlichen Trägers die Angriffsmomente zu erhalten. Entsprechend den Bestimmungen bezüglich des Längen- und Kräftemasstabes und der Poldistanz sind die Momente im Masstab 1 mm = 60 mkg zu entnehmen.

Um die Verticalkräfte für alle Querschnitte zu erhalten, bestimmt man zunächst diejenigen der Auflagerpunkte. Sie ergeben sich, wenn man in den einzelnen Kräftepolygonen Parallele zu den entsprechenden Schlusslinien zieht, nämlich  $O_1t_1 \parallel AB'$ ,  $O_2t_2 \parallel B'C'$  u. s. f. Es ist  $t_1v_1$  gleich der Verticalkraft bei A, gleich der Stützenreaction daselbst;  $t_1w_1$  gleich der Verticalkraft unmittelbar vor,  $t_2v_2$  gleich der Verticalkraft unmittelbar nach B u. s. f., und wenn (Fig. 4)  $Aa = t_1v_1$ ,  $Bb' = t_1w_1$ ,  $Bb'' = t_2v_2$ ,  $Cc' = t_2w_2$  etc. aufgetragen werden, so erhält man die Linie  $Aab'b''c'c''d'd''eE$  der Verticalkräfte. Damit sind zugleich auch sämtliche Stützendrücke bestimmt; denn bezeichnet  $V''$  die Verticalkraft unmittelbar links einer der Mittelstützen, z. B. B, und  $V'$  die Verticalkraft unmittelbar rechts derselben, so muss

$$V' = V'' + B \quad \text{oder} \quad B = V' - V''$$

sein. Daher



$$B = Bb'' - Bb' = Bb'' + b'B = b'b'',$$

ebenso

$$C = c'c''$$

und

$$D = d'd''.$$

Die Inflexionsquerschnitte werden durch die Schnittpunkte der Grundlinien  $AB'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$  und  $D'E$  mit den Momentenparabeln bestimmt; sie teilen den Träger in die sog. inneren Teile mit positiven und in die äusseren Teile mit negativen Momenten. Zieht man parallel den Grundlinien Tangenten an die Seilparabeln der Belastung, so bestimmen die Verticalen der betreffenden Berührungspunkte die Querschnitte der grössten positiven Momente und zugleich die Schnittpunkte der Linie der Verticalkräfte mit der Axe  $X$ . Die negativen Maxima der Momente entsprechen offenbar den Auflagerquerschnitten, wo zugleich die grössten Werte der Verticalkräfte auftreten.

II. Ein continuirlicher Träger mit fünf Öffnungen (Fig. 1 Taf. II), von denen die vier äusseren 3 m Spannweite haben, die Mittelöffnung aber 3,75 m, ist durch eine Anzahl gleicher und gleichweit von einander entfernter Lasten beansprucht. Da die einzelnen Spannweiten sammt ihren Belastungen symmetrisch zur Trägermitte, so sind die Fixpunkte (Fig. 1) nur für die eine Trägerhälfte zu bestimmen, die übrigen ergeben sich aus der Symmetrie. Mit Hilfe der Kräftepolygone (Fig. 2<sup>a</sup> und 2<sup>b</sup>) werden die Momentenfiguren der einfachen Belastung construiert und nach S. 141 in Fig. 2<sup>d</sup> und 2<sup>e</sup> die den separat belasteten Feldern entsprechenden Auflagermomente. Die resultirenden Stützenmomente ergeben sich sodann wie oben aus Fig. 3 und hiernach die in Fig. 2 eingezeichneten complementären Trapeze und die Linie der Verticalkräfte.

### C. Maximalmomente und Verticalkräfte bei beweglicher Belastung.

Um für jeden Querschnitt  $\mathcal{M}_{\max.}$  und  $V_{\max.}$  zu erhalten, untersuche man ähnlich wie S. 104 und 115 den Einfluss, welchen eine Einzellast je nach ihrer Stellung auf einen gegebenen Querschnitt äussert. Sobald dies festgestellt ist, lässt sich hieraus auf jene Art der Verteilung einer grösseren Anzahl von Lasten schliessen, welche in einem gegebenen Querschnitt  $\pm \mathcal{M}_{\max.}$  und  $\pm V_{\max.}$  zur Folge hat.

#### 1. Momente:

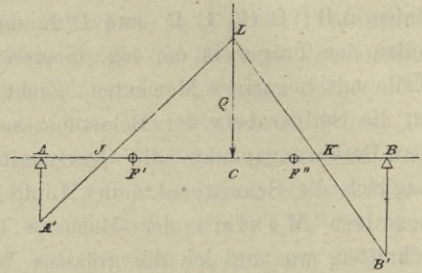
a) Der Querschnitt befindet sich zwischen den Fixpunkten einer Öffnung.

Wenn in diesem Falle die Last einen beliebigen Punkt  $C$  derselben Öffnung zum Angriffsort hat (Fig. 134), so entsteht eine nach oben zu bestimmende Momentenfigur, bestehend aus den negativen Teilen  $AA'J$ ,  $BB'K$



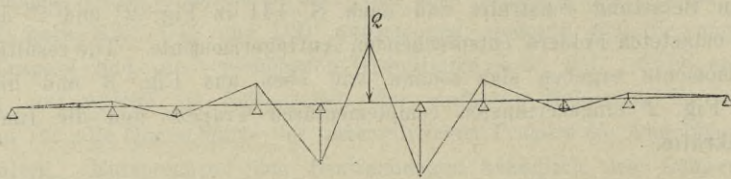
und dem positiven Teil J L K. Sind  $F'$  und  $F''$  die Fixpunkte, so geht aus der Construction der Momentenfigur hervor, dass, welches auch die Lage von Q innerhalb der Spannweite sein möge, die Inflexionspunkte J und K immer nur zwischen A und  $F'$  beziehungsweise  $F''$  und B sich bewegen, niemals aber in den von den Fixpunkten eingeschlossenen Trägerteil  $F'F''$  eintreten können. Deshalb wird jede in die Spannweite AB eintretende Last zur Vermehrung der positiven Momente sämtlicher Querschnitte der Strecke  $F'F''$  beitragen und  $M_{\max.}$  eines jeden Querschnittes genannter Strecke bei totaler Belastung der Öffnung erhalten werden.

Fig. 134.



Wenn die Last ausserhalb des Feldes steht, in welchem sich der gegebene Querschnitt befindet, so hat man zunächst die stets negativen Auflagermomente der belasteten Öffnung zu bestimmen und findet hieraus die Momente sämtlicher übrigen. In jedem der unbelasteten Felder tritt nur ein Inflexionspunkt auf und zwar sind die Fixpunkte  $F'$  zugleich Inflexionspunkte für die links von der belasteten Öffnung gelegenen Felder, die Fix-

Fig. 135.



punkte  $F''$  aber Inflexionspunkte für die rechts sich anschliessenden Öffnungen. Die Vorzeichen der Momente zwischen je zwei solchen Inflexionspunkten wechseln regelmässig ab, so dass in dem inneren Trägerteil einer Öffnung Momente von gleichem Vorzeichen niemals bei gleichzeitiger Belastung zweier angrenzender Öffnungen entstehen können, sondern nur wenn auf einander folgende Felder abwechselnd belastet sind.

Es entstehen also in dem zwischen den Fixpunkten einer Öffnung gelegenen Trägerteil die grössten **positiven** Momente,

Fig. 136.

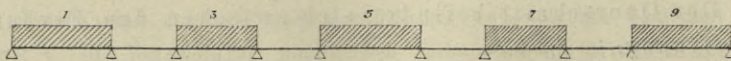
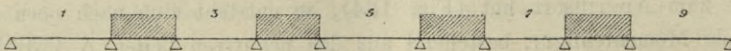


Fig. 137.





wenn die Öffnung voll belastet ist und die übrigen Öffnungen abwechselnd teils vollständig, teils gar nicht belastet sind (Fig. 136), dagegen treten die grössten **negativen** Momente desselben Trägerteiles auf, wenn innerhalb der betrachteten Öffnung keine Last sich befindet und die übrigen Felder abwechselnd durch Vollbelastung beansprucht werden (Fig. 137).

b) Der Querschnitt befindet sich zwischen dem Auflager und dem Fixpunkte  $F'$  eines Feldes.

Hier treten je nach der Lage von  $Q$  bald positive, bald negative Momente auf. Sind  $J$  und  $K$  die Inflexionspunkte, welche dem Lastangriffsorte  $C$  entsprechen (Fig. 134), so wird eine Verschiebung der Last  $Q$  nach rechts in  $J$  ein negatives, in  $K$  ein positives Moment erzeugen, während eine Verückung der Last nach links ein umgekehrtes Resultat zur Folge haben wird. Ist  $J$  ein gegebener Querschnitt, so stellt deshalb  $C$  für denselben eine Belastungsgrenze in der Weise vor, dass, wenn die Strecke  $AC$  möglichst stark belastet wird,  $CB$  aber nicht, in  $J$  ein positives Maximum des Momentes entsteht, dass dagegen in  $J$  das grösste negative Moment hervorgebracht wird, wenn  $CB$  ausschliesslich belastet erscheint. Für den Querschnitt  $K$  gilt das Umgekehrte.

Für jeden Querschnitt  $J$  eines äusseren (zwischen Fixpunkt und Auflager befindlichen) Trägerteils existirt also ein bestimmter Punkt  $C$ , welcher die betrachtete Spannweite in zwei Teile teilt; die Lasten desjenigen Teils, welcher den Querschnitt enthält, bringen im Querschnitt positive, die Lasten des anderen Teils negative Momente hervor. Die übrigen Felder sind derart abwechselnd zu belasten, dass an den unbelasteten Teil des betreffenden Feldes ein belastetes und an den belasteten Teil ein unbelastetes Feld sich anschliesst (Fig. 138 und 139).

Fig. 138.

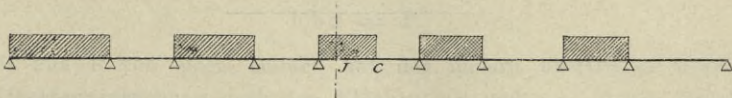
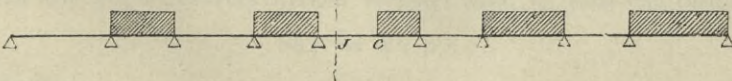


Fig. 139.



Bei gleichmässig verteilter Belastung findet das grösste Moment des Trägers immer über einer Stütze statt, und man hat daher nur die Maximalwerte der Stützenmomente zu untersuchen. Das Moment über einer Stütze aber wird zum Maximum, wenn die beiden angrenzenden Felder belastet und die folgenden Felder abwechselnd belastet sind.



## 2. Verticalkräfte.

Wirkt eine Einzellast  $Q$  rechts von einem gegebenen Querschnitt  $C$  eines bestimmten Feldes, so entsteht im Querschnitt eine positive Verticalkraft; wirkt sie links, so ist die Verticalkraft negativ. Es wird deshalb (wie beim einfachen Träger) die Verticalkraft für einen Querschnitt zum positiven oder negativen Maximum, wenn sich die Belastung vom Querschnitt bis zum rechten oder linken Ende des Feldes erstreckt.

Gehört der Querschnitt einem der übrigen Felder an und denkt man sich dasselbe nicht belastet, so ist für jeden Querschnitt des Feldes  $V$  gleich  $V'$ .  $V'$  aber ist positiv, wenn das links neben dem fraglichen Felde liegende Feld belastet, das rechts neben demselben liegende aber nicht belastet ist und wenn ausserdem alle übrigen Felder abwechselnd belastet sind. Negativ wird  $V'$ , wenn die umgekehrte Belastungsweise stattfindet. Hieraus folgt: Die Transversalkraft wird zum positiven Maximum, wenn der rechts vom gegebenen Querschnitt befindliche Trägerteil und das links anstossende Feld belastet sind, wenn ferner das rechts angrenzende Feld nicht belastet ist und alle übrigen Felder abwechselnde Belastung zeigen. Zum negativen Maximum wird die Verticalkraft eines Querschnitts bei umgekehrter Belastung.

Die positive (nach aufwärts gerichtete) Reaction einer Stütze wird zum Maximum, wenn das Moment über dieser Stütze seinen grössten Wert erreicht, zum Minimum, wenn die beiden angrenzenden Felder unbelastet sind und von da abwechselnd je ein Feld belastet und das folgende unbelastet ist.



### III. Abschnitt.

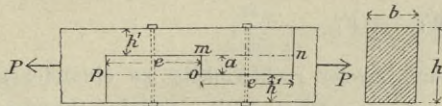
#### Verbindungen der Constructionsteile, einfache Constructionen.

#### § 1. Holzverbindungen.

Verlängerungen. Zur Verbindung zweier Balken nach ihrer Längsrichtung wird häufig das sog. Hackenblatt (Fig. 140) angewendet, welches sowohl zur Übertragung von Zug- als Druckkräften dient.

Im ersteren Falle, bei Zugbeanspruchung, ist zu berücksichtigen, dass die Balken auch an der durch

Fig. 140.



die Überblattung am meisten ver-  
schwächten Stelle Querschnitts-  
fläche genug besitzen müssen, um  
die Zugkraft P ohne Überschreit-

ung der zulässigen Beanspruchung aufzunehmen. Massgebend für die Berechnung des Balkenquerschnitts ist daher die Gleichung:

$$h'b\alpha = P.$$

Soll nun P von einem Balken auf den andern übertragen werden, so findet Scherbeanspruchung nach den Flächen mn und op, ferner Druckbeanspruchung bezüglich der Fläche mo statt. Wenn gleiche Sicherheit gegen Abscheren wie gegen Zerdrücktwerden verlangt wird, so muss die Bedingung:

$$eb\gamma = ab.\beta$$

erfüllt werden.

Da für Holz annähernd  $\gamma = \frac{1}{5}\beta$  (s. S. 79), so ergibt sich:

$$e = 5a.$$

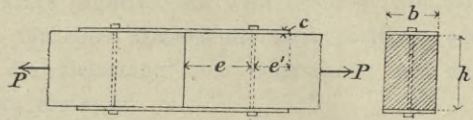
Gewöhnlich wird  $a = \frac{h}{4}$  gewählt, dann folgt:

$$e = 1,25h.$$

Häufig wird, um Lockerungen durch Formänderungen des Holzes auszu-schliessen, die Verbindung durch Schraubenbolzen noch weiter verstärkt.

Wenn bedeutende Zug-kräfte zu übertragen sind, so wird die Verbindung beider Bal-ken mittels schmiedeiserner Schie-nen (Laschen) und Bolzen bewerk-stelligt (Fig. 141).

Fig. 141.



Ist  $b$  die Breite der Laschen und  $c$  die Stärke derselben, bezeichnet ferner  $d$  den Bolzendurchmesser, so ergeben sich die Dimensionen der Laschen und der Bolzen aus den Gleichungen:

$$bc\alpha = \frac{1}{2}P$$

und

$$\frac{d^2 \pi}{4} \gamma = \frac{1}{2}P.$$

Ist endlich  $e$  der Abstand der Bolzenmitte vom Stoss und  $e'$  der Ab-stand der Bolzenmitte vom Ende der Lasche und bezeichnet  $\gamma'$  die zulässige Scherbeanspruchung des Holzes, so müssen, wenn ein Ausschlitzen der Balken-enden sowie der Laschenenden vermieden werden soll, die Bedingungen er-füllt werden:

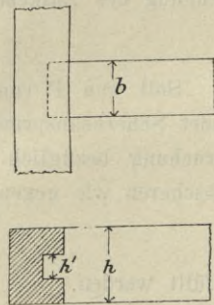
$$2eh.\gamma' = P$$

und

$$4e'.c\gamma = P.$$

Verzapfungen. Zur Verbindung zweier rechtwinklig zu einander ge-stellten Balken dient der sog. gerade Zapfen (Fig. 142), welcher besonders bei den Etagenbalkenlagen gewöhnlich zur Auflagerung der Wechselbalken in den Hauptbalhen verwendet wird. Ist der Wechselbalken belastet, also auf Biegung be-anspruchung, so ist der auf den Hauptbalken übertragene Auflagerdruck zugleich die Scherkraft, welche den Zapfen angreift.

Fig. 142.



Bekanntlich verteilen sich die lotrechten (gleich-wie die wagrechten) Scherspannungen nicht gleich-mässig über den Balkenquerschnitt, vielmehr ist das Verteilungsgesetz gegeben durch Gl. 39 S. 58. Die grösste Schubspannung findet in der Neutralaxe statt; hier darf die zulässige Scherbeanspruchung des Materials nicht überschritten werden.

Ist  $b$  die Breite und  $h'$  die Höhe des Zapfens, so hat man nach Gl. 40:

$$\gamma = \frac{3V}{2bh'}$$



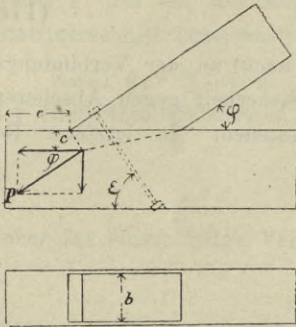
oder

$$h' = \frac{3V}{2b\gamma}$$

Über den schrägen Zapfen, der zur Verbindung von Balken dient, welche unter einem spitzen Winkel zusammenstossen, siehe S. 5.

Ist die von der Strebe übertragene Kraft  $P$  sehr bedeutend, so wird die Verbindung mit dem Tramen durch Versatzung bewerkstelligt, d. h. die Strebe wird ihrer ganzen Breite nach in den Tramen eingelassen und durch einen Bolzen mit demselben verbunden (Fig. 143).

Fig. 143.



Zur Aufnahme der Horizontalcomponente  $P \cos \varphi$  des Strebendruckes  $P$  dient der Scherwiderstand des Bolzens und des vor der Versatzung befindlichen Balkenstücks.

Die Abscherungsfläche des Bolzens, dessen Durchmesser  $d$ , ist eine Ellipse von der Fläche  $\frac{d^2 \pi}{4 \sin \varepsilon}$ , wenn  $\varepsilon$  den Winkel des Bolzens mit der

Horizontalen bezeichnet. Die auf Abscheren beanspruchten Holzflächen, aus drei Rechtecken bestehend, sind zusammen:  $eb + 2ec$ . Unter Vernachlässigung der Reibung hat man daher:

$$\frac{d^2 \pi}{4 \sin \varepsilon} \gamma + e(b + 2c) \gamma' = P \cos \varphi$$

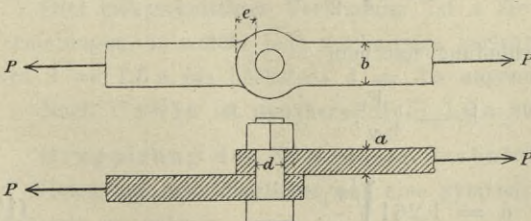
oder

$$d^2 = \frac{4 \sin \varepsilon}{\pi \gamma} [P \cos \varphi - e(b + 2c) \gamma']$$

wobei  $\gamma$  die zulässige Scherbeanspruchung des Schmiede Eisens und  $\gamma'$  diejenige des Holzes bezeichnet.

## § 2. Schraubenbolzen- und Nietverbindungen.

Fig. 144.



Sind zwei auf Zug beanspruchte Stäbe durch einen Schraubenbolzen verbunden (Fig. 144), so wird letzterer auf Abscherung beansprucht. Wenn nun  $F_1$  den mit Rücksicht auf die vorhandene Krafteinwirkung  $P$

erforderlichen Stabquerschnitt (die Zugfläche) bezeichnet, so bestimmt sich, da die Scherfestigkeit gleich  $\frac{1}{5}$  der Zugfestigkeit, der Querschnitt  $F$  des Bolzens aus:

$$F = \frac{5}{4} F_1, \quad (175)$$

oder, wenn  $d$  der Bolzendurchmesser,

$$\frac{d^2 \pi}{4} = \frac{5}{4} F_1,$$

d. i.

$$d = 1,261 \sqrt{F_1}. \quad (175^1)$$

Selbstverständlich muss der Stabquerschnitt auch an der Verbindungsstelle mindestens gleich  $F_1$  sein und ferner auch Sicherheit gegen Abscheren, d. h. Ausschlitzen der ringförmigen Stabenden bestehen. In letzterer Beziehung gilt:

$$2 a e \gamma = F_1 \alpha$$

oder

$$2 a e \frac{4}{5} \alpha = F_1 \alpha,$$

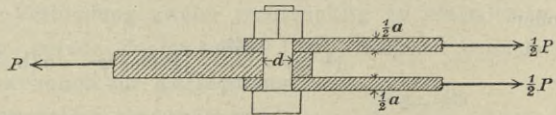
d. i.

$$e = \frac{5}{8} \frac{F_1}{a} = \frac{5}{8} \frac{a b}{a} = \frac{5}{8} b. \quad (176)$$

Die Bolzenverbindung Fig. 144 wird einschnittig genannt, indem hier der Bolzen nur nach einer Schnittfläche auf Abscheren beansprucht wird.

Bei der Anordnung Fig. 145 wird im Falle des Abscherens der Bolzen nach zwei Schnittflächen getrennt, weshalb diese Verbindung doppelschnittig genannt wird.

Fig. 145.



Hier ist:

$$2 F = \frac{5}{4} F_1$$

oder

$$F = \frac{5}{4} \frac{F_1}{2},$$

d. i.

$$d = 1,261 \sqrt{\frac{F_1}{2}}.$$

Bei  $\nu$ -schnittiger Verbindung hat man:

$$F = \frac{5}{4} \frac{F_1}{\nu},$$

d. i.

$$d = 1,261 \sqrt{\frac{F_1}{\nu}}. \quad (177)$$



### Nietverbindungen.

Gesamt-Querschnitt der Nieten. Die gesammte Querschnittsfläche  $F$  der für irgend eine Verbindung von Stäben oder Blechen erforderlichen Nieten ergibt sich analog den Gleichungen 175 und 177

$$\text{bei einschnittiger Vernietung: } F = \frac{5}{4} F_1,$$

$$\text{bei } \nu\text{-schnittiger Vernietung: } F = \frac{5}{4\nu} F_1,$$

wobei  $F_1$  den mit Rücksicht auf die vorhandene Beanspruchung erforderlichen Stabquerschnitt bezeichnet.

Zahl der Nieten. Die nötige Zahl  $\varepsilon$  der Nieten folgt dann, wenn  $d$  der Nietbolzendurchmesser, aus:

$$\varepsilon \frac{d^2 \pi}{4} = F,$$

daher für einschnittige Vernietung:

$$\varepsilon = \frac{5}{\pi} \frac{F_1}{d^2} = 1,591 \frac{F_1}{d^2} \quad (178)$$

und für  $\nu$ -schnittige Vernietung:

$$\varepsilon = \frac{5}{\pi} \frac{F_1}{\nu d^2} = 1,591 \frac{F_1}{\nu d^2} \quad (179)$$

Durchmesser der Nietbolzen. Je grösser der Durchmesser  $d$  der Nietbolzen gewählt wird, desto mehr Kraft wird auf die Lochwandungen übertragen, desto mehr wächst also die Gefahr des Aufquetschens der Lochränder und des Stauchens der zu verbindenden Bleche. Wird nach den Versuchen von Gerber angenommen, dass die Flächeneinheit der Projection der Lochwandung (auf eine senkrecht zur Längsaxe der verbundenen Stäbe oder Bleche befindliche Ebene) nicht über das Doppelte der Zugbeanspruchung angestrengt werde, so ergibt sich, wenn  $a$  die Blechdicke,

$$\frac{d^2 \pi}{4} \frac{1}{5} \alpha \leq da \cdot 2 \alpha,$$

d. i.

$$d \leq 3,2 a. \quad (180)$$

(Bei mehrschnittiger Verbindung ist  $a$  die Blechdicke der einschnittigen Vernietungen, in welche jede  $\nu$ -schnittige zerlegt werden kann). In der Regel wird  $d = 1,5 a$  bis höchstens  $d = 3 a$  angenommen.

Nach Unwin ist annähernd  $d \leq 1,9 a$  zu setzen.

Gruppierung der Nieten bei Stabnietungen. Bei der Verteilung der Nieten hat man möglichst auf eine symmetrische Anordnung zur Stabaxe Rücksicht zu nehmen.



Die Vernietung wird einfach, doppelt oder  $\mu$ -fach genannt, je nachdem in der Krafrichtung ein, zwei oder  $\mu$  Niete (resp. Nietreihen) auf einander folgen.

Ist ein Stab mit einem unelastischen Körper mehrfach vernietet, so nimmt nur die nach der Krafrichtung hin gelegene äusserste Niete oder Nietreihe die ganze Kraft auf, während die übrigen wirkungslos bleiben. Es ist daher bei Verbindung von ungleich elastischen Materialien oder auch von solchen Stäben, welche zwar gleiche Elasticität besitzen, aber in Folge ungleicher Stärke oder Befestigungsweise verschieden nachgeben, die einfache Vernietung die zweckmässigste. Bei gleicher Elasticität und Formänderung der verbundenen Stäbe kann nach den hierüber vorhandenen Versuchen angenommen werden, dass, wenn die Vernietung doppelt ist, noch eine gleichmässige Anstrengung der einzelnen Niete stattfindet. Ist die Vernietung eine drei- oder mehrfache, so tritt eine ungleichmässige Verteilung der Beanspruchung zu Ungunsten der (nach der Krafrichtung) äussersten Niete ein.

Als nutzbare Querschnittsfläche eines Stabes ist der Stabquerschnitt nach Abzug der Nietöffnungen im ungünstigsten Schnitt zu betrachten. Bei der Ermittlung des letzteren hat man nicht allein die Nietlöcher des Querschnitts, sondern auch die auf denselben wirkende

Kraft ins Auge zu fassen. So ist beispielsweise in der Verbindung Fig. 146 der Querschnitt 2 II nicht ungünstiger beansprucht, als die Querschnitte 1 I und 3 III. Denn wenn auch Schnitt 2 II zwei Nietöffnungen, also eine um  $d$  geringere effective Breite als Schnitt 1 I besitzt, so

ist doch auch die auf 2 II wirkende Kraft um denjenigen Teil vermindert, welcher von der Niete des Querschnitts 1 I aufgenommen wurde, so dass für sämtliche Querschnitte nur je eine Nietöffnung als Schwächung zu rechnen ist und  $F_1 = (b - d) a$  als nutzbare Querschnittsfläche gilt.

Mit Rücksicht hierauf sollte die Anzahl der Niete in zwei auf einander folgenden Reihen nie um mehr wachsen, als die Anzahl der Niete in der äussersten Reihe beträgt. In letzterer werden alsdann zweckmässig möglichst wenig Niete angeordnet.

Unter der Voraussetzung, dass die Kraftverteilung über die einzelnen Nietquerschnitte eine gleichmässige ist, kann angenommen werden, dass auf jede Niete die Beanspruchung eines Stabstreifens wirke, dessen Breite  $b'$  bestimmt ist durch:

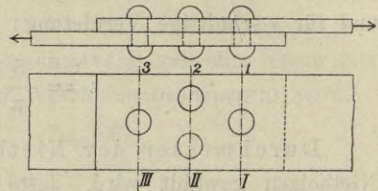
$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \alpha = b' a \alpha,$$

d. i.

$$b' = \frac{\pi}{5} \frac{d^2}{a} = 0,628 \frac{d^2}{a}, \quad (181)$$

wenn  $d$  Nietdurchmesser und  $a$  Blechdicke bezeichnen.

Fig. 146.





Man kann sich nun vorstellen, der Stab sei in Stränge von der Breite  $\frac{1}{2} b'$  zerlegt, welche sich in der aus den Figuren 147 und 148 ersichtlichen Weise um die einzelnen Nieten schlingen. Es wird hiedurch die Beurteilung

Fig. 147.

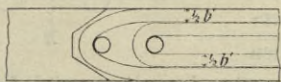
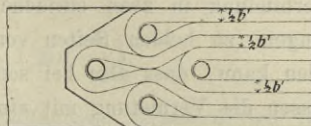


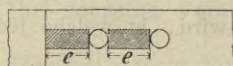
Fig. 148.



über die Zweckmässigkeit der Anordnung einer Nietengruppe wesentlich erleichtert.

Die Minimaldistanz  $e$  der Nieten (oder Nietreihen) in der Kraffrichtung sowie der Abstand der letzten Niete vom Blechrande bestimmt sich mit Rücksicht auf Sicherheit gegen Ausschlitzen der Stäbe, und es wird in der Regel angenommen, dass die Nieten die Stäbe nach Ebenen, parallel zur Kraffrichtung abzuscheren versuchen. In diesem Falle hat man, wenn als abzuscherende Stabtheile nur die in Fig. 149 schraffirten Flächen zwischen Tangenten an den Nietlöchern betrachtet werden,

Fig. 149.



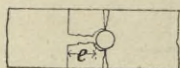
$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{1}{5} \alpha = 2ea \frac{1}{5} \alpha,$$

d. i.

$$e = \frac{d^2 \pi}{8a} \quad (182)$$

Nach Versuchen von Unwin erfolgte der Bruch gleichzeitig nach den in Fig. 150 angedeuteten Richtungen. Angenommen, das Metall vor dem Niet befindet sich in der Lage eines mit beiden Enden eingespannten Balkens von der Stützweite  $d$ , so ist das grösste Biegemoment bei concen-

Fig. 150.



trirter Belastung gleich

$$\frac{Qd}{8} = \frac{d^2 \pi}{4} \frac{1}{5} \alpha \frac{d}{8},$$

während das Widerstandsmoment des Querschnitts vor dem Niet gleich

$$\alpha \frac{1}{8} a e^2.$$

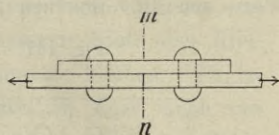
Aus der Gleichsetzung beider Werte folgt:

$$e = 0,686 d \sqrt{\frac{d}{a}} \quad (183)$$

Laschen-Nietung. Dieselben Regeln, welche für die einfache Überplattungsnietung (Fig. 146) gelten, finden Anwendung auch für die Laschennietung

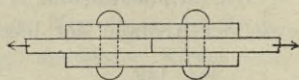
(Fig. 151), bei welcher die zusammzusetzenden Bleche zwischen denselben Ebenen liegen und die Verbindung mit Hilfe einer Stossplatte (Lasche) bewerkstelligt wird. Es ist leicht einzusehen, dass jede einfache Laschenverbindung in zwei einfache Überplattungs-nietungen (zu beiden Seiten von  $mn$ ) zerlegt werden kann, dass also bei sonst gleichen Verhältnissen die Vernietung mit einfacher Lasche doppelt so viel Niete erfordert als die einfache Überplattungs-nietung.

Fig. 151.



Die Doppellaschen-Nietung (Fig. 152) gewährt ausser dem Vorzug einer gleichmässigeren Kraftübertragung auch den Vorteil, dass die Niete als doppelschnittige auftreten. Für doppel- und mehrschnittige Vernietungen sind, wie oben erwähnt, alle vorstehenden Formeln anwendbar, wenn für  $a$  die Plattendicke der einschnittigen Vernietungen eingeführt wird, in welche jede mehrschnittige zerlegt werden kann.

Fig. 152.



Vernietung ganzer Bleche. Die doppelte Vernietung (zwei Nietreihen) ist hier der einfachen (eine Reihe Niete) vorzuziehen, indem die Kraftverteilung noch gleichmässig bleibt, die Verminderung des nutzbaren Querschnitts durch die Nietöffnungen aber geringer ist.

Fig. 153.

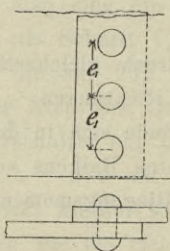
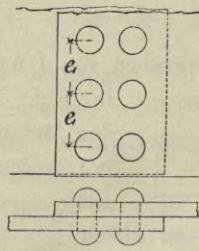


Fig. 154.



Die Entfernung  $e_1$  der Niete (also hier auch die Nietzahl) folgt aus der Bedingung, dass gleiche Sicherheit gegen Abscheren der Nietbolzen wie gegen Zerreißen der Bleche stattfinden soll. Es gilt daher:

für einfache Vernietung (Fig. 153):

$$\frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \alpha = (e_1 - d) a \alpha,$$

und für doppelte Vernietung (Fig. 154):

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \alpha = (e_1 - d) a \alpha,$$



daher für einfache Vernietung:

$$e_1 = d \left( 1 + 0,628 \frac{d}{a} \right) \quad (184)$$

und für doppelte Vernietung:

$$e_1 = d \left( 1 + 1,256 \frac{d}{a} \right). \quad (185)$$

Das Verhältniss des durch die Nietöffnungen verschwächten (nutzbaren) Querschnitts zu dem ursprünglichen ist

bei einfacher Vernietung:

$$\frac{e_1 - d}{e_1} = \frac{1}{1 + 1,592 \frac{a}{d}}, \quad (186)$$

bei doppelter Vernietung:

$$\frac{e_1 - d}{e_1} = \frac{1}{1 + 0,796 \frac{a}{d}}. \quad (187)$$

Bei Constructionsteilen, die auf Druck beansprucht sind, tritt, streng genommen, eine Querschnittsverminderung durch Niete nicht ein. Es empfiehlt sich indessen, da ein vollständiges Anliegen der Nietbolzen an den Lochwänden nicht zu erwarten ist, wenigstens einen Teil der Nietlöcher, etwa die Hälfte, von dem vollen Querschnitt in Abzug zu bringen.

### § 3. Unterlagsplatten für Träger und Säulen.

Träger erhalten häufig, Säulen immer Unterlagsplatten, deren Zweck es ist, den vom Träger oder von der Säule ausgeübten Druck auf eine grössere Fläche des darunter befindlichen Mauerwerks zu übertragen und auf solche Weise übermässige Beanspruchungen desselben zu vermeiden. Die Grösse der Unterlagsplatte muss so bemessen werden, dass die zulässige Druckbeanspruchung des Mauerwerks nicht überschritten wird; für die Bestimmung der Stärke der Unterlagsplatte sind die in derselben auftretenden Schub- und Biegungsspannungen massgebend.

Ist  $P$  der Auflagerdruck eines  $\bar{\text{I}}$ -Trägers (Fig. 155), so wird, wenn  $P$  in der lotrechten Schweraxe der Unterlagsplatte wirkt, eine gleichmässige Druckverteilung stattfinden und die Fläche  $F$  der Platte aus der Gleichung:

$$F = \frac{P}{\beta}$$

zu bestimmen sein, wobei  $\beta$  die zulässige Beanspruchung des Mauerwerks bezeichnet.

Es erleiden nun die über den Trägerkanten beiderseits vorstehenden Teile der Unterlagsplatte Schub- und Biegebungsbeanspruchungen, welche ihren grössten Betrag in den beiden Querschnitten MN erreichen. Der Querschnittsbestimmung sind die Biegungsspannungen als die stärkeren zu Grund zu legen.

Das grösste Biegemoment ergibt sich, da der Fall des einseitig eingespannten und durch gleichmässig verteilte Last beanspruchten Trägers vorliegt:

$$\mathcal{M}_{\max.} = ea \beta \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 e}{2} \beta,$$

daher, wenn  $d$  die Plattendicke und  $\delta$  die zulässige Biegebungsbeanspruchung des Plattenmaterials,

$$\delta \cdot \frac{1}{8} e d^2 = \frac{a^2 e}{2} \beta$$

oder

$$d = a \sqrt{3 \frac{\beta}{\delta}}. \tag{188}$$

Bei gusseisernen Unterlagsplatten ist  $\delta = 250$  kg pro qem zu setzen.

Gusseiserne Säulen erhalten Fussplatten, welche gleichfalls aus Gusseisen bestehen. Wenn die Ausladung der Platte gering ist, wird Säule und Fuss aus einem Stück gegossen, wobei jedoch der Hohlraum der Säule auch durch die Fussplatte fortgesetzt wird. Bei grösseren Dimensionen der Platte wird diese besonders gegossen und die Säule stumpf aufgesetzt.

Ist die Fussplatte der Säule quadratisch, so erhält man für den Querschnitt MM (Fig. 156) wie oben das grösste Biegemoment:

$$\mathcal{M}_{\max.} = \frac{a^2 e}{2} \beta$$

und die Plattendicke:

$$d = a \sqrt{3 \frac{\beta}{\delta}}, \tag{189}$$

Fig. 155.

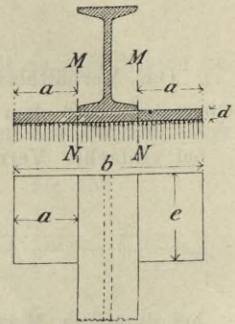
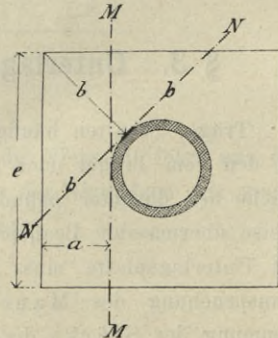


Fig. 156.





für den Querschnitt NN aber ist:

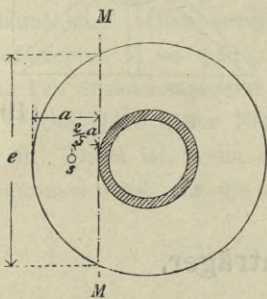
$$\sigma_{\max.} = \frac{b^3 \beta}{3}$$

und

$$d = b \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \quad (190)$$

Bezüglich des Querschnitts NN ergibt sich eine geringere Plattendicke als bezüglich des Querschnitts MM', weshalb Gl. 189 für die Berechnung von d massgebend ist.

Fig. 157.



Bei kreisförmiger Fussplatte (Fig. 157) ist für den Querschnitt MM annähernd:

$$\sigma_{\max.} = \frac{2}{3} a e \beta \cdot \frac{2}{3} a,$$

daher

$$\delta \cdot \frac{1}{6} e \cdot d^2 = \frac{4}{15} a^2 e \beta$$

und

$$d = 1,265 a \sqrt{\frac{\beta}{\delta}} \quad (191)$$

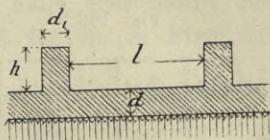
Die Werte von d, welche sich aus den Gleichungen 189 bis 191 ergeben, beziehen sich nur auf diejenigen lotrechten Plattenquerschnitte, welche sich unmittelbar an die Peripherie der darüber befindlichen Säule anschliessen. Am Rande der Platte hätte deren Stärke, streng genommen, gleich Null zu sein, wird aber gewöhnlich gleich  $\frac{2}{3} d$  angenommen.

Für Gusseisen ist es üblich, d von 2 cm bis zu 5 cm anzunehmen, bei Schmiedeeisen variiert d zwischen 1 und 3 cm.

Wächst die Beanspruchung derart, dass grössere Dimensionen erforderlich werden, so ist es angezeigt, die Fussplatten mit Verstärkungsrippen zu versehen.

Hier hat man vor Allem zu berücksichtigen, dass die Entfernung der Rippen eine gewisse Grenze nicht überschreite, damit in den zwischen den Rippen befindlichen Plattenteilen keine grössere Biegebungsbeanspruchung als die zulässige auftritt.

Fig. 158.



Ist l die grösste Entfernung zweier benachbarter Rippen und d die Plattendicke (Fig. 158), so ist, da die Platte als ein zwischen den Rippen eingespannter Träger angesehen werden kann,

$$\delta \cdot \frac{1}{6} d^2 = \frac{\beta l^2}{12},$$

daher

$$l = 1,414 d \sqrt{\frac{\delta}{\beta}} \quad (192)$$



oder

$$d = 1.0,71 \sqrt{\frac{\beta}{\delta}}. \quad (193)$$

Zur Berechnung der Rippen selbst bestimme man den Schwerpunkt  $s$  der durch eine Rippe zu unterstützenden (in Figur 159 durch Schraffierung bezeichneten) Fläche  $F$ . Ist  $a$  die Entfernung des Schwerpunktes dieser Fläche von der Säule, so ist das Maximalmoment  $F \cdot \beta \cdot a$ , und wenn angenommen wird, dass dasselbe von der Rippe allein, mit Vernachlässigung der Grundplatte aufgenommen wird, so ergibt sich für die Rippen-dimensionen  $d_1$  und  $h$  die Gleichung:

$$\delta \cdot \frac{1}{6} d_1 h^2 = F \beta a. \quad (194)$$

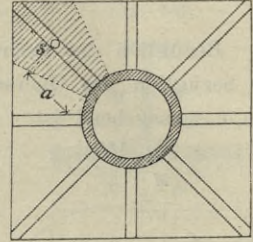


Fig. 159.

#### § 4. Verstärkte Holzbalkenträger.

Wenn ein Träger derart beansprucht ist, dass nicht leicht aus einem Baumstamm ein Balken von der erforderlichen Stärke hergestellt werden kann, so vereinigt man zwei oder mehrere bearbeitete Hölzer zu einem Ganzen, indem man sie an den Berührungsstellen mit zusammengepassten sägezahnförmigen Ausschnitten versieht und durch Bolzen verbindet (verzahnte Träger, Fig. 160). Da es leicht vorkommt, dass in Folge ungenauer Arbeit zwischen den einzelnen Zähnen Lücken bleiben, so pflegt man letztere durch seitlich eingetriebene Keile von hartem Holz auszufüllen (Fig. 161).

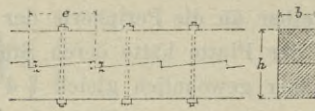


Fig. 160.

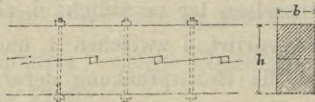
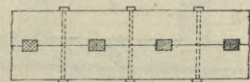


Fig. 161.

Die correcte Bearbeitung der gezahnten Flächen ist immerhin mit Schwierigkeiten verbunden, daher man sich häufig darauf beschränkt, die Balken mit einander zu verdübeln (Figur 162). Hier werden zwischen die Berührungsflächen der zu verbindenden Hölzer prismatische oder schwach keilförmige Stücke (Dübel) aus hartem Holz eingebracht, wobei der Zweck der Dübel ist, gerade so wie bei der Verzahnung, die Verschiebung der Balken längs ihrer Berührungsflächen zu verhindern. Die Dübel werden abwechselnd bald von der einen, bald von der anderen Seite eingetrieben.

Fig. 162.





Wäre es möglich, die beiden Hölzer so innig mit einander zu vereinigen, dass die dadurch entstehende Verbindung als homogener Körper betrachtet werden könnte, so würde das Widerstandsmoment des verzahnten oder verdübelten Balkens gleich  $\delta \cdot \frac{1}{6} b h^2$  zu setzen sein. Wären aber die beiden Hölzer ohne jedwelche Verbindung nur lose auf einander gelegt, so würde das Widerstandsmoment gleich  $2 \delta \cdot \frac{1}{6} b \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \delta \cdot \frac{1}{2} b h^2$  sein.

Demgemäss erscheint es als zulässig, das Widerstandsmoment des verzahnten oder verdübelten Trägers, welches offenbar grösser als  $\delta \cdot \frac{1}{2} b h^2$ , jedoch kleiner als  $\delta \cdot \frac{1}{6} b h^2$  ist, gleich dem Mittelwert aus beiden, gleich  $\delta \cdot \frac{1}{8} b h^2$  anzunehmen. Dies entspricht der Einführung eines verminderten Festigkeitscoefficienten  $\delta' = \frac{3}{4} \delta$ . Ist der Balken aus drei verzahnten oder verdübelten Stücken zusammengesetzt und verbolzt, so ist  $\delta' = \frac{4}{5} \delta$  zu setzen.

Die Höhe  $z$  der Zähne berechnet sich nach der aufzunehmenden Schubkraft. Diese ist, wenn die Schubspannung auf die Zahnlänge  $e$  constant angenommen wird, für die neutrale Faserschicht nach Gleichung 40<sup>1</sup>:

$$S = \frac{3}{2} \frac{V}{h} e,$$

wobei für  $V$  der auf die Strecke  $e$  entfallende Mittelwert zu nehmen ist. Zur Bestimmung von  $z$  und  $e$  dienen sodann die Gleichungen:

$$S = b z \cdot \beta$$

und

$$S = b e \cdot \gamma.$$

Häufig sucht man die Tragfähigkeit von zusammengesetzten Trägern dadurch zu erhöhen, dass man die Balken, aus welchen er besteht, durch Holzklötze trennt, welche in entsprechenden Zwischenräumen eingebracht werden.

Fig. 163.

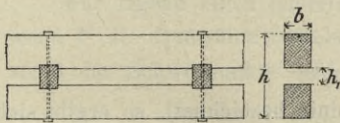
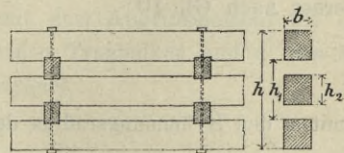


Fig. 164.

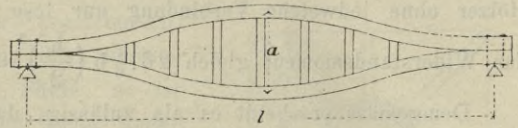


Im Falle einer durch Bolzen hergestellten unverrückbaren Verbindung wird sich für die in Figur 163 dargestellte Anordnung das Widerstandsmoment  $\frac{\delta}{h} \cdot \frac{1}{6} b (h^3 - h_1^3)$  und für den dreifach zusammengesetzten Träger (Fig. 164)

das Widerstandsmoment  $\frac{\delta}{h} \cdot \frac{1}{6} b (h^3 - h_1^3 + h_2^3)$  ergeben. Da indessen eine Lockerung der Klötze durch Schwinden zu berücksichtigen ist, so pflegt man für die Anwendung nur  $\frac{2}{3}$  dieser Werte in Rechnung zu bringen.

Eine andere Construction des zusammengesetzten Trägers ist der sogenannte linsenförmige oder gesprengte Träger (Fig. 165). Hier sind die beiden Balken, aus welchen sich der Träger zusammensetzt, so gebogen, dass eine Berührung, nur an den Enden stattfindet, wo die Verbindung durch Schraubenbolzen und eiserne Bänder hergestellt ist. Auf

Fig. 165.



die übrige Länge werden die Trägerhälften durch kurze eingeschaltete Balkenstücke in bestimmten Abständen gehalten, von welchen der in der Mitte am grössten ist. Um die Tragkraft eines solchen Trägers zu ermitteln, hat man zu berücksichtigen, dass für beide Balken auch ohne Belastung allein durch die Art ihrer Zusammensetzung eine bestimmte Beanspruchung auf Biegung bedingt ist. Eine weitere Angriffnahme entsteht durch die Belastung und beide zusammengenommen dürfen die zulässige Biegungsspannung nicht überschreiten.

Wenn die Hölzer gleichmässig gebogen sind und  $a$  den Abstand ihrer Längsachsen in der Trägermitte bezeichnet, so kann jedes derselben als ein mit beiden Enden horizontal eingespannter Träger angesehen werden, dessen grösste Durchbiegung  $\frac{a}{2}$  durch eine in der Mitte wirkende Kraft  $K$  hervorbracht ist. Da unter dieser Voraussetzung

$$\frac{a}{2} = \frac{K l^3}{192 \varepsilon \Theta}$$

und nach Gl. 114:

$$\Theta \chi_x - \frac{1}{2} = \frac{K l}{8},$$

ferner nach Gl. 10:

$$\frac{K l}{8} \cdot r = \varepsilon \Theta,$$

(mit  $r$  den Krümmungsradius der elastischen Linie bezeichnet), so ergibt sich:

$$\frac{a}{2} = \frac{l^2}{24 r}$$

oder

$$r = \frac{l^2}{12 a}$$

Ist nun  $\triangle l$  die Ausdehnung, welche die äusserste Faser in der Entfernung  $m = \frac{h'}{2}$  von der neutralen Faser durch die Sprengung erlitten hat, so muss:



$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{m}{r}$$

oder

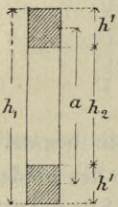
$$\Delta l = \frac{6 a h'}{l}$$

sein, daher die durch Sprengung entstehende grösste Spannung :

$$\delta' = \frac{\Delta l}{l} \varepsilon = \frac{6 a h' \varepsilon}{l^2}$$

Zur Bestimmung der durch die Belastung herbeigeführten Spannung  $\delta''$  der äussersten Fasern dient, wenn  $\mathcal{M}$  das Angriffsmoment für die Trägermitte (Fig. 166) bezeichnet, die Gleichung :

Fig. 166.



oder

$$\frac{\delta''}{\frac{1}{2} h_1} \mathcal{M} = \mathcal{M}$$

daher

$$\frac{2 \delta''}{h_1} \cdot \frac{b}{12} (h_1^3 - h_2^3) = \mathcal{M},$$

$$\delta'' = \frac{6 \mathcal{M} h_1}{b (h_1^3 - h_2^3)}$$

Da nun  $\delta \geq \delta' + \delta''$  zu sein hat, so erhält man :

$$\delta = \frac{6 a h' \varepsilon}{l^2} + \frac{6 \mathcal{M} h_1}{b (h_1^3 - h_2^3)}$$

oder, da  $a = h_1 - h'$ ,

$$\delta = \frac{6 (h_1 - h') h' \varepsilon}{l^2} + \frac{6 \mathcal{M} h_1}{b (h_1^3 - h_2^3)}, \quad (195)$$

welche Gleichung zur Bestimmung des Querschnitts der Trägermitte benützt werden kann.

Für irgend einen anderen Querschnitt mit dem Angriffsmoment  $\mathcal{M}'$  ist, wenn  $F$  die Querschnittsfläche eines der beiden Tragbalken und  $a'$  den Abstand der Schwerpunkte beider Flächen bezeichnet,

$$F \delta a' = \mathcal{M}'$$

oder

$$a' = \frac{\mathcal{M}'}{F \delta}$$

Da für den Querschnitt der Trägermitte in gleicher Weise

$$a = \frac{\mathcal{M}}{F \delta}$$

so ergibt sich :

$$\frac{a'}{a} = \frac{\mathcal{M}'}{\mathcal{M}}$$

d. h. die Trägerhöhen sollen sich verhalten wie die Angriffsmomente.

## § 5. Balkenträger mit Sattelhölzern.

Wenn Balken über Stützen gestossen werden, so verbindet man dieselben häufig durch kurze, unter dem Stoss anzubringende Balkenstücke, welche Sattelhölzer genannt werden, und mit dem Balken durch Schraubenbolzen verbunden sind (Fig. 167). Könnten dieselben so unbiegsam construiert und mit den Balken so fest verbunden werden, dass die Enden derselben in horizontaler Lage erhalten würden, so wäre offenbar jedes Feld des Balkens als Träger mit wagrecht eingespannten Enden zu betrachten und zu berechnen. Weil jedoch das Sattelholz elastisch ist und die Biegung des mit ihm fest verbundenen Balkens teilt, derart, dass die eine Hälfte desselben nicht abwärts gebogen werden kann, ohne dass die andere Hälfte einen Druck nach oben ausübt, so muss die Combination auf den continuirlichen Träger zurückgeführt werden. Das grösste negative Moment tritt dann über den Stützen, das grösste positive innerhalb des Feldes auf. Wird ersteres mit  $\mathcal{M}_1$ , letzteres mit  $\mathcal{M}_2$  bezeichnet, so ist bekanntlich  $\mathcal{M}_1 > \mathcal{M}_2$ . Da nun an der Stelle des Stosses über der Stütze der widerstandsfähige Querschnitt lediglich aus dem des Sattelholzes besteht, so berechnen sich Höhe  $h_1$  und Breite  $b$  desselben aus der Gleichung:

$$\mathcal{M}_1 = \delta \cdot \frac{1}{6} b h_1^2,$$

während die Höhe  $h_2$  des Tragens durch

$$\mathcal{M}_2 = \delta \cdot \frac{1}{6} b h_2^2$$

bestimmt ist. Hieraus ergibt sich:

$$h_1^2 : h_2^2 = \mathcal{M}_1 : \mathcal{M}_2,$$

und die Querschnittshöhe des Sattelholzes:

$$h_1 = h_2 \sqrt{\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2}}. \quad (196)$$

Berechnung der Schraubenbolzen. Ist jede Hälfte des Sattelholzes durch zwei Schraubenbolzen mit dem Tragen verbunden und bezeichnen  $a_1$  und  $a_2$  die Abstände der Schraubenbolzen vom Ende des Sattelholzes,  $Z_1$  und  $Z_2$  aber die durch das Biegemoment in denselben entstehenden Zugkräfte, so ist:

$$\mathcal{M}_1 = Z_1 a_1 + Z_2 a_2.$$

Aus dieser Gleichung in Verbindung mit:

$$Z_1 : Z_2 = a_1 : a_2$$

ergibt sich:

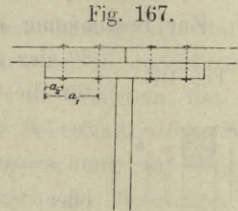


Fig. 167.

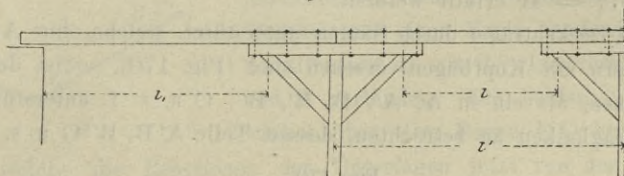


und

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}_1 a_1}{a_1^2 + a_2^2} \\ Z_2 &= \frac{\partial \mathcal{L}_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \end{aligned} \right\} (197)$$

Sattelhölzer und Streben. Zur Unterstützung der Unterzüge und Sattelhölzer werden sehr oft kurze, in schräger Richtung gegen die Säulen sich stemmende Streben, Kopfbügen genannt, angebracht (Fig. 168). Die-

Fig. 168.



selben erhalten das Sattelholz in horizontaler Lage, so dass der darüber befindliche Tramen als ein über den Stützen wagrecht eingespannter Balken zu betrachten ist. Demnach ist bei gleichmässig verteilter Belastung für die Endfelder:

$$\partial \mathcal{L}_{\max.} = \frac{q l_1^2}{8}$$

und für die Zwischenfelder:

$$\partial \mathcal{L}_{\max.} = \frac{q l^2}{12},$$

wobei  $l_1$  und  $l$  die freie Spannweite der Felder je zwischen den Kopfenden der Streben bezeichnen. Wenn die Tragbäume über den Sattelhölzern gestossen sind, so haben letztere das Auflagermoment  $\frac{q l^2}{12}$  allein aufzunehmen und es bestimmt sich daher der Querschnitt der Sattelhölzer aus der Gleichung:

$$\delta \cdot \frac{1}{6} b h^2 = \frac{q l^2}{12}.$$

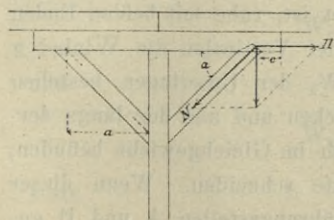
Der von jeder Strebe aufzunehmende Verticaldruck ist gleich  $\frac{q l'}{2}$ , wenn

mit  $l'$  die Entfernung der Stuhlsäulen bezeichnet wird. Dieser Druck zerlegt sich in zwei nach der Richtung der Kopfbüge und des Sattelholzes wirkende Componenten  $N$  und  $H$  (Fig. 169):

$$N = \frac{q l'}{2 \sin \alpha},$$

$$H = \frac{q l'}{2} \cotg \alpha.$$

Fig. 169.



Bezeichnet  $F$  den Querschnitt der Büge, so ist das Volumen derselben gleich

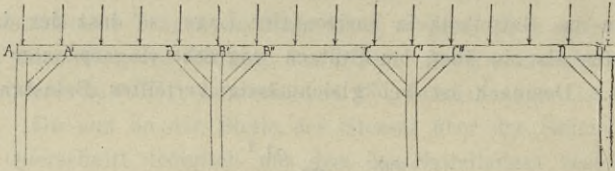
$$F \cdot \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{N a}{\beta \cos \alpha} = \frac{q l' a}{\beta \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{q l' a}{\beta \sin 2 \alpha}$$

Das Volumen ist also variabel mit dem Neigungswinkel  $\alpha$  und wird ein Minimum, wenn  $\sin 2 \alpha$  seinen grössten Wert erreicht, d. i. für  $\alpha = 45^\circ$ .

Durch  $H$  wird das Ende des Sattelholzes auf Schubfestigkeit beansprucht, und es muss, damit ein Ausschlitzen dieses Balkenkopfes nicht eintrete, die Bedingung  $e b \cdot \gamma = H$  erfüllt werden.

Wird ein Deckenträger durch Säulen unterstützt, welche ohne Anwendung von Sattelhölzern mit Kopfbügen versehen sind (Fig. 170), so ist der Träger, streng genommen, als ein in  $A, A', B, B', B'', C$  u. s. f. unterstützter continuirlicher Tragbalken zu betrachten, dessen Teile  $A'B, B''C$  u. s. f. gleich-

Fig. 170.



zeitig durch die Horizontalprojectionen der Strebendrucke auf Pressung in der Längenrichtung beansprucht sind. Man begnügt sich in solchen Fällen, die Dimensionen unter der Voraussetzung zu berechnen, dass der Tragbalken aus mehreren Stücken zusammengesetzt sei, wobei sich dessen Querschnitt nach Massgabe der am meisten beanspruchten Teile  $A'B, B''C$  etc., welche jetzt als einfache, frei aufliegende Träger erscheinen, bestimmt.

## § 6. Balken in geneigter Lage bei verschiedener Art der Unterstützung.

Ein schwerloser Balken  $AB$  (Fig. 171), welcher in einem bestimmten Punkte  $E$  durch ein angehängtes Gewicht belastet ist, ruhe mit beiden Enden auf zwei festen Ebenen  $CA$  und  $CB$ , die mit der Verticalen die Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  einschliessen. Die Reactionen  $W_1$  und  $W_2$  der Unterlagen bestehen aus den normal zu denselben wirkenden Gegendrückten und aus der längs derselben auftretenden Reibung. Soll der Balken sich im Gleichgewicht befinden, so müssen  $W_1, W_2$  und  $Q$  sich in einem Punkte schneiden. Wenn dieser Punkt  $D'$  so gelegen ist, dass die nach den Berührungsstellen  $A$  und  $B$  ge-

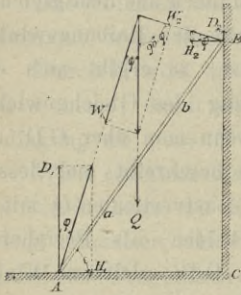




Wird  $\beta = 0$  und  $\alpha = 90^\circ$  (Fig. 172), so ist, wenn  $a + b = l$  gesetzt wird:

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{a - b \text{ tang}^2 \varphi}{l \text{ tang } \varphi}, \quad (201)$$

Fig. 172.



und

$$W_1 = Q \text{ Cos } \varphi \quad (202)$$

$$W_2 = Q \text{ Sin } \varphi. \quad (203)$$

Bezeichnen  $D_1, D_2$  und  $H_1, H_2$  die Vertical- und Horizontalcomponenten von  $W_1$  und  $W_2$ , so ist:

$$D_1 = Q \text{ Cos}^2 \varphi, \quad (204)$$

$$D_2 = Q \text{ Sin}^2 \varphi, \quad (205)$$

$$H_1 = \frac{Q}{2} \text{ Sin } 2\varphi, \quad (206)$$

$$H_2 = \frac{Q}{2} \text{ Sin } 2\varphi. \quad (207)$$

*Beispiel.*

Welches ist der kleinste Winkel  $\varepsilon$ , welchen eine in der Mitte belastete Leiter mit dem Horizonte bilden darf, ohne zu gleiten, wenn der Reibungscoefficient, entsprechend einem Reibungswinkel  $\varphi$  von  $31^\circ$ ,  $\mu = 0,6$  ist?

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{a - a \cdot 0,6^2}{0,6 \cdot 2a} = 0,533, \\ \varepsilon = 28^\circ 4'.$$

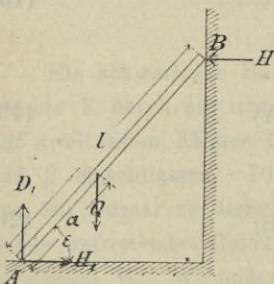
Je mehr der Lastangriffsort nach oben rückt, d. h. je kleiner  $b$ , desto grösser wird  $\varepsilon$ . Für  $b = 0$  erhält man

$$\text{tang } \varepsilon = \frac{1}{\text{tang } \varphi} \text{ oder } \varepsilon = 59^\circ 3'.$$

Vorstehende Formeln entsprechen, wie erwähnt, dem Grenzzustande des Gleichgewichtes der gleitenden Reibung.

Stützt sich der mit seinem einen Ende  $A$  auf wagrechter Unterlage ruhende Balken  $AB$  (Fig. 173) mit dem anderen

Fig. 173.



Ende  $B$  gegen eine lotrechte Wand und wird die Reibung vernachlässigt, so kann die Reaction der lotrechten Wand nur in einer wagrechten Kraft  $H$  bestehen, und es erfordert der Gleichgewichtszustand in diesem Falle, dass die Gegenwirkung der Stütze bei  $A$  aus zwei Componenten  $H_1$  und  $D_1$  sich zusammensetzt, welche durch die Gleichungen:

$$H - H_1 = 0$$



und

$$D_1 - Q = 0$$

bestimmt sind.

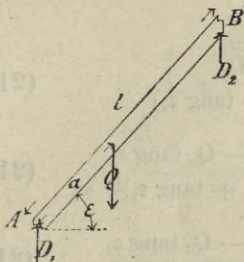
Aus der Momentengleichung bezüglich des Punktes A:

$$H l \sin \varepsilon = Q a \cos \varepsilon$$

ergibt sich:

$$H_1 = Q \frac{a}{l} \cotg \varepsilon. \quad (208)$$

Fig. 174.



Ist der schräg aufgestellte und durch Q belastete Balken an beiden Enden mit horizontalen Auflagerflächen versehen (wie z. B. die Wange einer Holzterappe), so entstehen in A und B (Fig. 174) die verticalen Auflagerreactionen  $D_1$  und  $D_2$ :

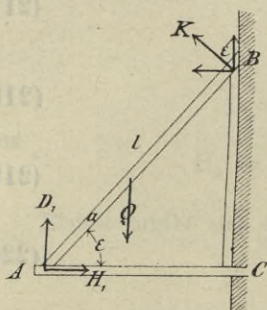
$$D_1 = \frac{Q(1-a)}{l} \quad (209)$$

und

$$D_2 = Q \frac{a}{l}. \quad (210)$$

Wird endlich angenommen, der Balken AB sei unten mit dem horizontalen

Fig. 175.



Tramen AC durch Verzapfung oder Versatzung oder Aufklauen verbunden, am anderen Ende aber sei der Balken auf dem verticalen Pfosten BC so aufgelagert, dass die Auflagerfläche parallel AB ist (Fig. 175), so wird ein zu AB normal gerichteter Widerstand geleistet werden, welcher sich aus der Gleichung:

$$K = Q \frac{a}{l} \cos \varepsilon \quad (211)$$

ergibt.

Demnach:

$$H_1 = \frac{Q a}{2l} \sin 2\varepsilon \quad (212)$$

und

$$D_1 = Q \left( 1 - \frac{a}{l} \cos^2 \varepsilon \right). \quad (213)$$

Für das Gleichgewicht der Balkenverbindung (Fig. 176) bestehen die Bedingungen:

$$T_1 l_1 \cos(\alpha_1 - \varepsilon_1) = Q_1 \frac{l_1}{2} \cos \varepsilon_1 \quad (\text{Drehpunkt A}),$$

$$T_2 l_2 \cos(\alpha_2 - \varepsilon_2) = Q_2 \frac{l_2}{2} \cos \varepsilon_2 \quad (\text{Drehpunkt C})$$

und

$$T_1 = T_2,$$

daher:

$$\frac{Q_1 \cos \varepsilon_1}{\cos(\alpha_1 - \varepsilon_1)} = \frac{Q_2 \cos \varepsilon_2}{\cos(\alpha_2 - \varepsilon_2)}.$$

Sind  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  gegeben, so findet sich, da  $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ :

$$\tan \alpha_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1 \tan \varepsilon_2 - Q_2 \tan \varepsilon_1},$$

ferner:

$$H_1 = H_2 = T_1 \sin \alpha_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{2(\tan \varepsilon_1 + \tan \varepsilon_2)}, \quad (214)$$

$$D_1 = Q_1 - T_1 \cos \alpha_1 = Q_1 - \frac{Q_1 \tan \varepsilon_2 - Q_2 \tan \varepsilon_1}{2(\tan \varepsilon_1 + \tan \varepsilon_2)}, \quad (215)$$

$$D_2 = Q_2 + T_1 \cos \alpha_1 = Q_2 + \frac{Q_1 \tan \varepsilon_2 - Q_2 \tan \varepsilon_1}{2(\tan \varepsilon_1 + \tan \varepsilon_2)}. \quad (216)$$

Ist  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ , so ist:

$$\tan \alpha_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{(Q_1 - Q_2) \tan \varepsilon} \quad (217)$$

und

$$H_1 = \frac{Q_1 + Q_2}{4 \tan \varepsilon} = H_2, \quad (218)$$

$$D_1 = \frac{3Q_1 + Q_2}{4}, \quad (219)$$

$$D_2 = \frac{3Q_2 + Q_1}{4}; \quad (220)$$

ist auch  $Q_1 = Q_2 = Q$ , so ist:

$$\alpha_1 = 90^\circ$$

und

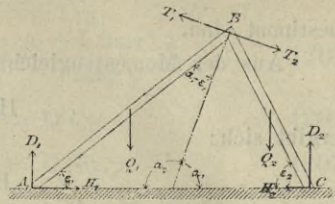
$$H_1 = H_2 = \frac{Q}{2} \cotg \varepsilon = T_1 = T_2, \quad (221)$$

$$D_1 = D_2 = Q.$$

Das Gleichgewicht des aus mehreren Balken zusammengesetzten Systems (Fig. 177) ist von der Lage der einzelnen Hölzer zu einander abhängig.

Denkt man den Sparren CD aus der Verbindung herausgenommen, die verticale Wand ED durch die Horizontalkraft  $H_1$  ersetzt und die Wirkung des Balkens BC durch die Reactionen  $H_2$  und  $D_2$  (Fig. 178), so sind die Gleichgewichtsbedingungen für CD:

Fig. 176.





$$H_1 = H_2,$$

$$D_2 = Q_1 + Q_2$$

und

$$H_1 l_1 \sin \alpha_1 = Q_1 l_1 \cos \alpha_1$$

oder

$$H_1 = Q_1 \cotg \alpha_1. \quad (222)$$

Fig. 177.

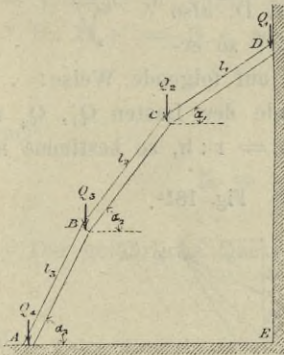


Fig. 178.

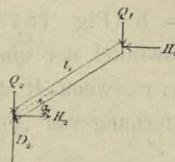
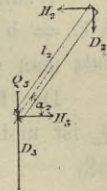


Fig. 179.



Die Reactionen  $H_2$  und  $D_2$ , in entgegengesetztem Sinne angebracht, ersetzen für den Balken BC die Wirkung des oberhalb befindlichen, so dass für BC (Fig. 179):

$$H_3 = H_2 = H_1,$$

$$D_3 = D_2 + Q_3 = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

und

$$H_2 = D_2 \cotg \alpha_2 = (Q_1 + Q_2) \cotg \alpha_2. \quad (223)$$

Ebenso ergibt sich für das Gleichgewicht des dritten Balkens:

$$H_4 = H_1,$$

$$D_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4,$$

$$H_3 = (Q_1 + Q_2 + Q_3) \cotg \alpha_3. \quad (224)$$

Demnach sind die Neigungswinkel  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$\cotg \alpha_1 = \frac{H_1}{Q_1}, \quad (225)$$

$$\cotg \alpha_2 = \frac{H_1}{Q_1 + Q_2}, \quad (226)$$

$$\cotg \alpha_3 = \frac{H_1}{Q_1 + Q_2 + Q_3}. \quad (227)$$





und

$$Q(1 - e) = V e,$$

daher

$$D = \frac{Ql}{e}. \quad (228)$$

Bei E erzeugt der Strebendruck N wieder die Horizontalkraft H und die Verticalkraft D, so dass, während der obere Teil BE des Pfostens durch V auf Zug beansprucht ist, dessen unterer Teil EA auf Druck durch  $D - V = Q$  in Angriff genommen wird.

Da  $H \cdot e' = D \cdot e$ , so ist:

$$H = \frac{Ql}{e'}, \quad (229)$$

ferner

$$N = \frac{D}{\sin \alpha} = \frac{Ql}{e \sin \alpha} = \frac{2 Ql}{a \sin 2\alpha}. \quad (230)$$

Der gefährliche Querschnitt für BC befindet sich bei D; da hier

$$\alpha' \cdot \frac{1}{6} b h^2 = Q(1 - e)$$

und

$$\alpha'' \cdot b h = H' = \frac{Ql}{e'},$$

so finden sich die Dimensionen des Balkens BC aus der Gleichung:

$$\alpha = \frac{6 Q(1 - e)}{b h^2} + \frac{Ql}{e' b h}.$$

Die Querschnitte von Kopfbüge und Pfosten sind mit Berücksichtigung ihrer Beanspruchung auf Knickfestigkeit zu bestimmen.

## § 7. Blechträger.

Unter Blechbalken versteht man solche Balken, welche aus einzelnen Blechen (gewalzten Eisenplatten) zusammengesetzt sind und wobei die Verbindung der Bleche unter sich durch Winkeleisen und Vernietung bewerkstelligt ist. Jeder Blechträger besteht aus der Blechwand, auch Verticalrippe oder Steg genannt, ferner aus den Gurtungsplatten oder Flacheisen und aus den oben und unten beiderseits angebrachten Winkeleisen, welche die Blechwand mit den Gurtungsplatten unter Zuhilfenahme von Nieten verbinden. Die Gurtungsplatten lässt man nicht mehr als um das Sechsfache ihrer Dicke

über die Winkeleisen vorragen; sind mehrere vorhanden, so werden alle gleich breit gemacht. Durch Vermehrung der Zahl und Stärke der Gurtungsplatten und der Dimensionen der Winkeleisen hat man es in der Hand, die Tragfähigkeit des Trägers nach Bedarf zu steigern.

Zur Verstärkung und Absteifung der Blechwand müssen über den Auflagern und auch an den Angriffsstellen von Einzellasten Winkel-eisen angebracht werden, welche mit der Blechwand und mit den verticalen Schenkeln der Gurtungswinkeleisen vernietet sind (Fig. 183).

Die Trägerhöhe wird so gewählt, dass bei gleicher Widerstandsfähigkeit der Materialaufwand möglichst klein ausfällt.

Denkt man den Schwerpunkt der Gurtungen an den Enden des Wandbleches befindlich und bezeichnet man die Höhe des letzteren mit  $h$ , die Stärke desselben mit  $d$  und die Fläche des gesammten Trägerquerschnitts mit  $F$ , so ist annähernd:

$$\Theta = \frac{d h^3}{12} + 2 \left( \frac{F}{2} - \frac{d h}{2} \right) \frac{h^2}{4} = \frac{h^2}{4} \left( F - \frac{2}{3} d h \right),$$

daher:

$$\varpi \mathcal{N} = \delta \frac{h}{2} \left( F - \frac{2}{3} d h \right)$$

oder

$$F = \frac{2 \varpi \mathcal{N}}{\delta h} + \frac{2}{3} d h. \quad (231)$$

Bei gegebenem  $\varpi \mathcal{N}$  wird  $F$  ein Minimum, wenn

$$\frac{dF}{dh} = - \frac{2 \varpi \mathcal{N}}{\delta h^2} + \frac{2}{3} d = 0,$$

d. h., wenn

$$h = \sqrt{\frac{3 \varpi \mathcal{N}}{\delta d}}.$$

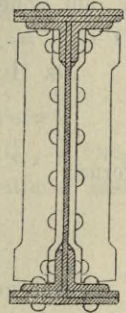
Im Hochbau ist es üblich, die Trägerhöhe zwischen  $\frac{1}{12}$  und  $\frac{1}{15}$  der Spannweite zu wählen.

Ist die Trägerhöhe festgesetzt und das Maximalmoment bekannt, so ergibt sich der Trägerquerschnitt aus der Gleichung:

$$\frac{\delta}{h} \Theta = \varpi \mathcal{N}_{\max}.$$

Blechwandstärke. In der Neutralaxe sind die Schubspannungen am grössten, und es ist deshalb die Blechwand zunächst auf Festigkeit gegen Abscheren zu untersuchen, indem nach Gl. 40 die in der Neutralaxe des betrachteten Querschnitts auftretende Schubspannung

Fig. 183.





$$\sigma = \frac{V}{\Theta d} \int_0^{\frac{h}{2}} y \, dF$$

die zulässige Beanspruchung  $\gamma$  auf Abscheren nicht überschreiten darf.

Da

$$\frac{\int_0^{\frac{h}{2}} y \, dF}{\Theta} = \frac{1}{h},$$

wenn  $h$  annähernd gleich der Entfernung der Gurtungsschwerpunkte gesetzt wird, so ist

$$d = \frac{V}{\gamma h}. \quad (232)$$

Beim Blechträgerquerschnitt ist nun, wie aus Gl. 39 hervorgeht, die Verteilung der wagrechten und lotrechten Schubspannungen in der Richtung von  $y = 0$  bis  $y = +\frac{h}{2}$  oder  $y = -\frac{h}{2}$  eine solche, dass eine wesentliche Verminderung des Maximalwertes von  $\sigma$  nicht eintritt bis zu jener Stelle, wo gegen das Ende der Mittelrippe eine Verbreiterung des Querschnitts durch die Gurtungen stattfindet. An dieser Stelle kann daher nahezu von einem Zusammenfallen der grössten Werte von Schub- und Normalspannung (Gl. 45) die Rede sein, und es ist für vorläufig angenommene Dimensionen zu untersuchen, ob die zulässige Beanspruchung in Bezug auf Schubfestigkeit und Zug- resp. Druckfestigkeit nicht überschritten wird.

Mit Rücksicht hierauf ist es gebräuchlich, in Gleichung 232 anstatt des gewöhnlichen Wertes der zulässigen Schubbeanspruchung den verringerten Wert  $\gamma = 350$  kg pro qcm einzuführen\*), so dass sich hiernach die Blechwandstärke berechnet aus:

$$d = \frac{V}{350 h}. \quad (233)$$

Im Hochbau wird  $d$  in der Regel nicht unter 0,8 cm bis 1 cm angenommen, auch wenn Gl. 233 einen kleineren Wert ergeben sollte.

\*) Dieser empirische Wert entstand ursprünglich aus der Bedingung, dass, wenn in Gl. 45  $\delta = \sigma$  gesetzt wird,  $v_{\max}$  nicht grösser werden solle, als 600 kg pro qcm, so dass

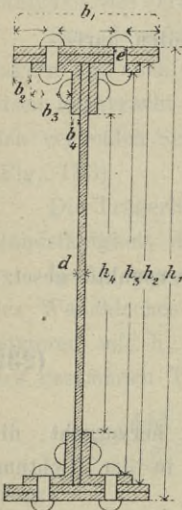
$$600 = \frac{\sigma}{2} (1 + \sqrt{5})$$

oder

$$\sigma = 370 \text{ kg pro qcm.}$$

Das Trägheitsmoment für den Blechträgerquerschnitt (Fig. 184) ist mit Berücksichtigung einer Verschwächung des Profils durch zwei Niete oben und unten:

Fig. 184.



$$\Theta = \frac{1}{12} (b_1 h_1^3 - 2 b_2 h_2^3 - 2 b_3 h_3^3 - 2 b_4 h_4^3). \quad (234)$$

Hiebei bedeuten  $b_1$  und  $b_3$  die betreffenden wagrechten Abmessungen nach Abzug der Nietdurchmesser.

Handelt es sich darum, das Trägheitsmoment des Blechträgerquerschnitts rasch, wenn auch nur annäherungsweise zu erhalten, so bedient man sich des folgenden Verfahrens:

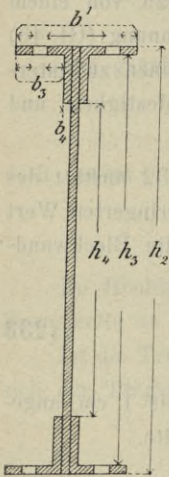
F bezeichne den Gesamtquerschnitt der Flacheisen einer Gurtung,  $\Theta'$  das Trägheitsmoment der Blechwand und der vier Winkeleisen excl. der Gurtbleche, dann hat man annähernd, wenn  $h$  die Höhe des Wandbleches,

$$\Theta = \Theta' + F \frac{h^2}{2}$$

und

$$\frac{\delta}{h} \left( \Theta' + F \frac{h^2}{2} \right) = \mathcal{N}_{\max.}$$

Fig. 185.



somit

$$F = \frac{\mathcal{N}_{\max.}}{\delta} \frac{2\Theta'}{h^2}. \quad (235)$$

$\Theta'$  berechnet sich mit Rücksicht auf Fig. 185 aus der Formel:

$$\Theta' = \frac{1}{12} (b' h_1^3 - 2 b_3 h_3^3 - 2 b_4 h_4^3). \quad (236)$$

Ist mittels dieses Ausdrucks und auf Grund von Gl. 235 F bestimmt und die Zahl und Stärke der Gurtbleche festgestellt, so kann die erforderliche Breite  $b$  derselben durch Gleichung:

$$b = \frac{12 (\Theta - \Theta')}{h_1^3 - h_2^3}$$

erhalten werden, wobei

$$\Theta = \frac{\mathcal{N}_{\max.} h}{2\delta}.$$

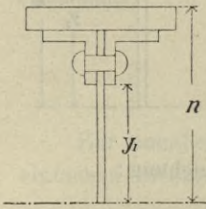
Entfernung der Niete. Die in den Gurtungen befindlichen Niete mit Bolzen senkrecht zur Blechwand (Fig. 186) dienen ausschliesslich zur festen Verbindung zwischen Blechwand und Gurtung. Die Schubkraft, welche die Gurtung gegen die Blechwand zu verschieben sucht, ist nach Gl. 38 pro Längeneinheit des Trägers:



$$S_{y_1} = \frac{V}{\Theta} \int_{x_1}^n y \, dF,$$

und wenn  $d$  den Nietdurchmesser und  $e_1$  die Entfernung der Niete bezeichnen, so ist  $e_1 S_{y_1}$  die auf je eine Niete wirkende Schubkraft, daher, weil die Niete doppelschnittig sind,

Fig. 186.



$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \alpha = e_1 \frac{V}{\Theta} \int_{x_1}^n y \, dF.$$

Von  $y = 0$  bis  $y = y_1$  nimmt die wagrechte Schubkraft nur wenig ab, so dass man der Schubkraft in der Entfernung  $y_1$  von der Neutralaxe diejenige der Neutral-

axe selbst,  $e_1 \frac{V}{\Theta} \int_0^n y \, dF$ , substituiren kann. Dadurch ergibt sich, wenn berück-

sichtigt wird, dass  $\frac{\int_0^n y \, dF}{\Theta} = \frac{1}{h}$ :

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \alpha = e_1 \frac{V}{h}$$

oder

$$e_1 = 0,4 \pi \cdot \frac{h d^2 \alpha}{V}. \quad (237)$$

Es ist indessen bei der verhältnissmässig geringen Stärke der Blechwand auch zu berücksichtigen, dass der Druck auf die Lochwand nicht zu gross wird. In dieser Richtung muss nach Gl. 180 die Bedingung erfüllt werden, dass, wenn  $a$  die Blechwanddicke bezeichnet,

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{5} \alpha = d a \cdot 2 \alpha,$$

daher

$$e_1 \frac{V}{h} = 2 d a \alpha,$$

oder

$$e_1 = \frac{2 d a h \alpha}{V}. \quad (238)$$

Von den aus Gl. 237 und 238 sich ergebenden Werten  $e_1$  ist der kleinere zu benützen. Gleiche Werte für  $e_1$  liefern beide Formeln, wenn:

$$d = \frac{5a}{\pi}$$

oder rund

$$d = 1,6 a.$$

Die Nieten mit Bolzen parallel zum Steg, welche die Gurtungsplatten mit den Winkeln verbinden (Fig. 187), werden durch die wagrechte Schubkraft

$$S_{y_2} = \frac{V}{\Theta} \int_{y_2}^n y \, dF$$

auf Abscheren beansprucht. Diese Nieten sind einschrittig, indessen sind nach der gewöhnlich befolgten Anordnung (Fig. 187) in je einem Querschnitt zwei Nieten zur Aufnahme von  $S_{y_2}$  vorhanden.

Die Nietentfernung  $e_2$  berechnet sich daher aus der Gleichung:

$$2 \frac{d^2 \pi}{4} \cdot \frac{4}{3} \alpha = e_2 S_{y_2}$$

oder

$$e_2 = 1,256 \frac{d^2 \alpha}{S_{y_2}} \quad (239)$$

Die Entfernung  $e_2$  der Nieten in den Gurtblechen wird theoretisch grösser als die Entfernung  $e_1$  der Nieten in den verticalen Winkelschenkeln. Wenn man also die für verticalen Winkelschenkel berechnete Nietdistanz  $e_1$  auch für die Gurtnieten beibehält, so wird jedenfalls hinreichende Sicherheit vorhanden sein.

Auf Grund empirischer Regeln wird  $e_1 = 4d$  bis  $5d$  gemacht, jedenfalls soll  $e$  nicht grösser als  $8d$  sein.

Der kastenförmige Blechträger. Die Tragfähigkeit des Blechträgers und dessen Widerstandsfähigkeit gegen seitliche Ausbiegungen wird bedeutend erhöht, wenn derselbe mit zwei Blechwänden versehen wird, welche, in einem Abstand von  $\frac{1}{3}$  bis  $\frac{1}{2} h$  befindlich, mit den Gurtplatten durch Winkeleisen verbunden werden. Der auf solche Weise entstehende Träger wird als kastenförmiger Blechträger bezeichnet. Derselbe eignet sich, abgesehen von seiner grösseren Tragfähigkeit, besonders auch zur Anwendung in solchen Fällen, in welchen die für einen gewöhnlichen Blechträger erforderliche Constructionshöhe nicht vorhanden ist, oder wenn eine breitere Auflagerfläche geschaffen werden soll, als sie der einfache Blechträger darbietet.

Die Trägerhöhe  $h$  wählt man hier zwischen  $\frac{1}{15}$  bis  $\frac{1}{24}$  der Spannweite, die Breite der Gurtungsplatten zwischen  $\frac{2}{3}$  und  $\frac{3}{4}$  der Trägerhöhe.

Fig. 187.

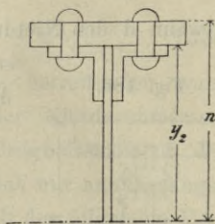
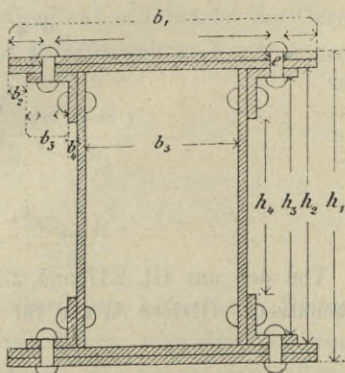


Fig. 188.





Das Trägheitsmoment des Querschnittes (Fig. 188) ist:

$$\Theta = \frac{1}{12} [b_1 h_1^3 - (2 b_2 + b_5) h_2^3 - 2 b_3 h_3^3 - 2 b_4 h_4^3]. \quad (240)$$

$b_1$  und  $b_3$  sind die betr. wagrechten Dimensionen nach Abzug der Nietdurchmesser.

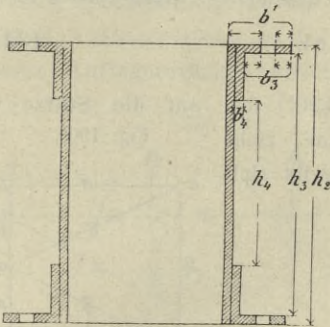
Daher ergibt sich der Querschnitt des kastenförmigen Trägers aus der Gleichung:

$$\frac{\delta}{h} \Theta = \mathfrak{N}_{\max.} \frac{2}{2}$$

Zur annähernden Bestimmung der Querschnittsdimensionen kann, wie beim einfachen Blechträger, die Gleichung:

$$F = \frac{\mathfrak{N}_{\max.}}{\delta h} - \frac{2 \Theta'}{h^2} \quad (241)$$

Fig. 189.



benützt werden, in welcher  $F$  den Gesamtquerschnitt der Flacheisen einer Gurtung und  $\Theta'$  das Trägheitsmoment der beiden Blechwände und der Winkeleisen bezeichnen. Hiefür hat man mit Bezug auf Fig. 189 die Formel:

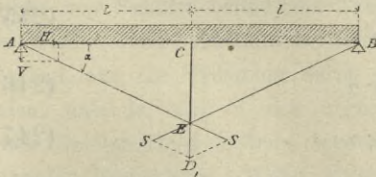
$$\Theta' = \frac{1}{6} (b' h_2^3 - b_3 h_3^3 - b_4 h_4^3).$$

Zur Bestimmung der Blechwandstärken und der Nietentfernungen gelten die für den einfachen Blechträger angegebenen Regeln.

## § 8. Armirte Träger.

Der armirte Träger entsteht, wenn man dem Balken  $AB$  (Fig. 190) zwischen den Endauflagern eine weitere Unterstützung durch den Pfosten  $CE$  gibt und den Pfostendruck durch (eiserne) Zugstangen  $AE$  und  $BE$  auf die Stützpunkte  $A$  und  $B$  überträgt.

Fig. 190.



Bei gleichmäßig verteilter Belastung ist der Stützendruck in  $A$  und  $B$

$$D = \frac{3}{8} ql$$

und in  $C$

$$D_1 = \frac{10}{8} ql.$$

Letztere Kraft, welche den Pfosten auf Knickung beansprucht, zerlegt sich in  $E$  in zwei Componenten:

$$S = \frac{D_1}{2 \sin \alpha}, \tag{242}$$

welche die Stangen AE und BE auf Zug in Angriff nehmen. Die Zugwirkungen S pflanzen sich nach den Stützpunkten A und B fort und sind hier nach den Richtungen der geleisteten Widerstände in wagrechte und lotrechte Componenten

$$H = \frac{D_1}{2} \operatorname{Cotg} \alpha \tag{243}$$

und

$$V = \frac{D_1}{2}$$

zu zerlegen. Der Horizontalkraft H hat der gleichzeitig auf Biegung beanspruchte Balken mit seiner Druckfestigkeit Widerstand zu leisten, die Verticalcomponente V aber addirt sich zu D, so dass der gesammte Auflagerdruck in A

$$= \frac{3}{8} q l + \frac{5}{8} q l = q l. \tag{244}$$

*Graphische Lösung.* Man trägt (Fig. 190<sup>a</sup>) den auf die Stütze C wirkenden Auflagerdruck  $D_1$  als Länge 01 auf, zieht durch 0 und 1 Parallele zu AE und BE, so ergibt sich

$$S = 0a = a1,$$

während

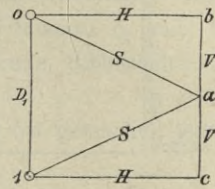
$$V = ba = ac$$

und

$$H = 0b = c1$$

erhalten wird.

Fig. 190<sup>a</sup>.



Wird der Balken ausser an den Enden in zwei Punkten  $C_1$  und  $C_2$  unterstützt, welche seine Länge in drei gleiche Teile teilen (Fig. 191), so ist bei gleichmässig verteilter Belastung:

$$D = \frac{4}{10} q l$$

und

$$D_1 = D_2 = \frac{11}{10} q l;$$

daher:

$$S_1 = \frac{11}{10} \frac{q l}{\sin \alpha}, \tag{245}$$

$$S_2 = \frac{11}{10} q l \operatorname{Cotg} \alpha, \tag{246}$$

$$H = \frac{11}{10} q l \operatorname{Cotg} \alpha \tag{247}$$

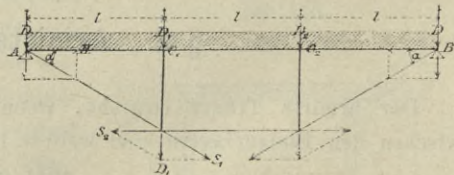
und

$$V = \frac{11}{10} q l,$$

somit

$$A = D + V = 1,5 q l. \tag{248}$$

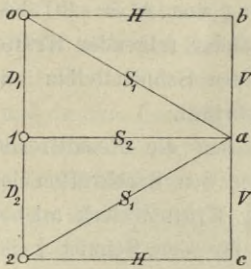
Fig. 191.





*Graphische Lösung.* Man trägt  $D_1 = 01$  und  $D_2 = 12$  auf (Fig. 191<sup>a</sup>), zieht durch 0 und 2 Parallele  $0a$  und  $2a$  zu den Richtungen der geneigten Zugstangen, durch 1 aber eine Parallele  $1a$  zum wagrechten Stab, welcher die unteren Pfostenenden verbindet, so ergibt sich  $S_1 = 0a = a2$ ,  $S_2 = a1$ ,  $V = ba = ac$  und  $H = 0b = c2$ . Die Richtungen dieser Kräfte sind durch die Pfeile in den Kräfteparallelogrammen der Fig. 191 gegeben, daher ersichtlich, dass  $S_1$  und  $S_2$  Zugkräfte sind, während durch  $H$  der Balken  $AB$  auf Druck beansprucht wird.

Fig. 191<sup>a</sup>.



Die gleich grossen Stützendrücke  $D_1 = 01$  in  $C_1$  und  $D_2 = 12$  in  $C_2$  erzeugen in  $A$  und  $B$  Auflagerdrücke  $= 01 = 12$  (Fig. 192 und 192<sup>a</sup>). Indem man die diesen Auflagerdrücken gleichen und entgegengesetzten Auflagerreactionen  $A = 10$  und  $B = 21$  anbringt, wird der Träger ins freie Gleichgewicht gebracht. Um beispielsweise die in den Stäben  $AC_1$  und  $AE_1$  wirkenden Kräfte zu erhalten, denke man einen Schnitt  $\alpha$  durch den Träger so gelegt, dass die betreffenden Stäbe von dem Schnitt getroffen werden. Den rechts vom Schnitt befindlichen Trägerteil denke man weggenommen, dessen Wirksamkeit aber ersetzt durch die Kräfte  $H_1$  und  $S_1$ , welche in den Längsrichtungen der durchschnittenen Stäbe anzubringen sind. Wenn nun  $H_1$  und  $S_1$  nach Grösse und Richtung so angeordnet werden, dass das

links vom Schnitt befindliche Trägerteil im Gleichgewicht erhalten wird, so wird derselbe Zustand hergestellt sein, in welchem sich das Trägerteil befand, ehe die Trennung durch den Schnitt  $\alpha$  erfolgte. Aus der Bedingung also, dass  $H_1$  und  $S_1$  den übrigen, am Trägerteil wirkenden Kräften das Gleichgewicht halten, ergeben sich die Grössen und Pfeilrichtungen genannter Stabkräfte. Wenn eine Anzahl von zu einem System vereinigten Kräften im Gleichgewicht sein soll, so müssen dieselben ein geschlossenes Kräftepolygon bilden. Für den Schnitt  $\alpha$  hat man als Aussenkraft:  $A = 10$

Fig. 192.

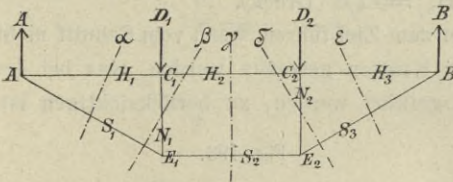
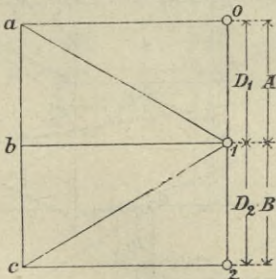


Fig. 192<sup>a</sup>.



links vom Schnitt befindliche Trägerteil im Gleichgewicht erhalten wird, so wird derselbe Zustand hergestellt sein, in welchem sich das Trägerteil befand, ehe die Trennung durch den Schnitt  $\alpha$  erfolgte. Aus der Bedingung also, dass  $H_1$  und  $S_1$  den übrigen, am Trägerteil wirkenden Kräften das Gleichgewicht halten, ergeben sich die Grössen und Pfeilrichtungen genannter Stabkräfte. Wenn eine Anzahl von zu einem System vereinigten Kräften im Gleichgewicht sein soll, so müssen dieselben ein geschlossenes Kräftepolygon bilden. Für den Schnitt  $\alpha$  hat man als Aussenkraft:  $A = 10$



und als zu bestimmende Stabkräfte:  $H_1$  und  $S_1$ . Zieht man durch die Endpunkte 0 und 1 der bekannten Kraftlänge 10 Parallele zu den Richtungen von  $H_1$  und  $S_1$ , so ergibt sich das Kräfte-dreieck 10 a 1, durch welches  $H_1 = 0a$  und  $S_1 = a1$  erhalten wird. Die Richtung von  $A = 10$  bestimmt die Pfeilrichtungen der im Kräfte-dreieck auf einander folgenden Kräfte und bringt man die entsprechenden Pfeilrichtungen an den Schnittstellen an, so wird ersichtlich, dass  $H_1$  Druck und  $S_1$  Zug hervorbringt.

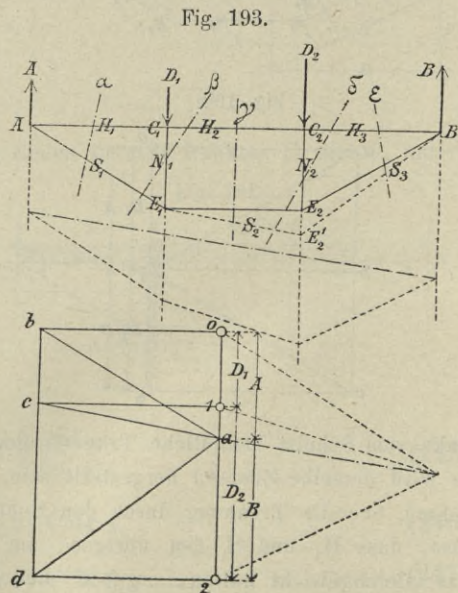
Dem Schnitt  $\alpha$  folgt der Schnitt  $\beta$ , bezüglich dessen die Resultierende der äusseren Kräfte  $R = A - D_1 = \text{Null}$  ist. Von den Stabkräften ist bekannt:  $S_1 = a1$ , unbekannt sind:  $H_2$  und  $N_1$ , daher Kräfte-dreieck a 1 b a mit  $H_2 = 1b$  (Druck) und  $N_1 = ba$  Druck. Auch für den Schnitt  $\gamma$  ist  $R = A - D_1 = 0$ , somit für den Gleichgewichtszustand erforderlich, dass  $S_2$  gleich und entgegengesetzt  $H_2$ , mithin:  $S_2 = b1$  (Zug). Bezüglich des Schnittes  $\delta$ , für welchen gleichfalls  $R = A - D_1 = 0$ , hat man als bekannte Stabkraft  $H_2 = 1b$ , unbekannt sind  $N_2$  und  $S_3$ ; daher aus dem Kräfte-dreieck 1 b c 1:  $N_2 = bc$  (Druck) und  $S_3 = c1$  (Zug). Dem Schnitt  $\epsilon$  endlich entspricht als Resultierende der äusseren Kräfte:  $R = A - D_1 - D_2 = 12$  und das Kräfte-dreieck c 1 2 c liefert  $H_3 = 2c$  (Druck).

Vorstehendes Verfahren wird immer zum Ziel führen, wenn vom Schnitt nicht mehr als zwei Stäbe mit unbekanntenen Kräften getroffen werden, was bei der Reihenfolge, in welcher die Schnitte geführt werden, zu berücksichtigen ist.

Der armierte Träger (Fig. 192) ist ein Beispiel eines statisch bestimmten, labilen Trägers. Labil ist der Träger, weil bei veränderter Belastung (abgesehen von elastischen Formänderungen) auch die gegenseitige Lage der einzelnen Constructionsteile sich ändert.\*)

Sind nämlich die Lasten  $D_1$  und  $D_2$  in  $C_1$  und  $C_2$  nicht gleich gross, sondern  $D_1 = 01$  und  $D_2 = 12$  (Fig. 193<sup>a</sup>), so bestimme man zunächst mittels Kräfte- und Seilpolygons die Auflagerreactionen  $A = a0$  und  $B = 2a$ .

Führt man den Schnitt  $\alpha$ , so ergibt sich  $H_1 = 0b$  (Druck)

Fig. 193<sup>a</sup>.

\*) Vgl. § 12, Kennzeichen statisch bestimmter Fachwerke und Trägerarten.



und  $S_1 = ba$  (Zug). Schnitt  $\beta$ , für welchen die Resultirende der äusseren Kräfte  $R = A - D_1 = a1$  ist, liefert bei bekanntem  $S_1 = ba$  das Kräftepolygon  $ba1cb$ , daher  $H_2 = 1c$  (Druck) und  $N_1 = cb$  (Druck). Bezüglich des Schnittes  $\gamma$  sind bekannt:  $R = a1$ ,  $H_2 = 1c$ , unbekannt  $S_2$ . Es ergibt sich das Kräftedreieck  $a1ca$ , dessen Seite  $ca$  nicht parallel  $E_1E_2$  ist. Soll die Construction im Gleichgewichte sein, so muss der Stab  $E_1E_2$  geändert und in eine Lage  $E_1E_2'$  gebracht werden, welche parallel zu  $ca$  ist. Schnitt  $\delta$  mit  $R = A - D_1 - D_2 = a2$  und bekanntem  $S_2 = ca$  ergibt das Kräftepolygon  $ca2dc$  mit  $H_3 = 2d$  (Druck) und  $N_2 = cd$  (Druck), und endlich folgt aus Schnitt  $\varepsilon$  mit  $R = a2$  und bekanntem  $H_3 = 2d$  das Kräftedreieck  $a2da$  und  $S_3 = da$  (Zug).

Man sieht, dass die gegebenen Lasten  $D_1$  und  $D_2$  eine bestimmte, in angegebener Weise zu ermittelnde Trägerform bedingen und dass diese, der Gleichgewichtslage entsprechende Trägerform mit wechselnder Belastung veränderlich ist. Die Abhängigkeit der Trägerform von wechselnder Belastung kann aber beseitigt und der Träger statisch bestimmt stabil gemacht werden, wenn dem Mittelfelde  $C_1E_1E_2C_2$  ein Diagonalstab eingefügt wird (Fig. 194).

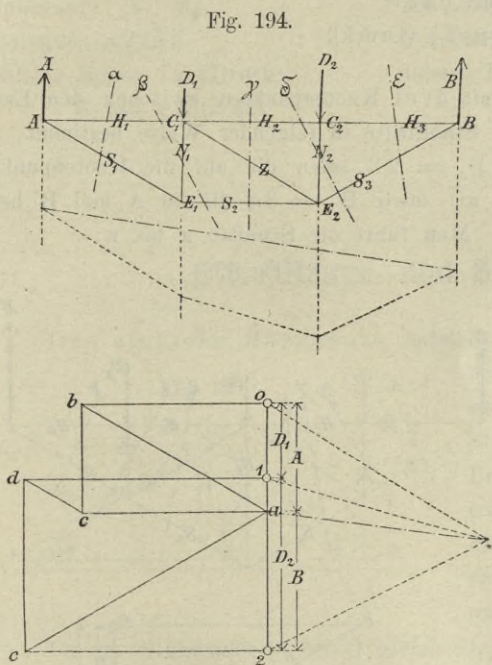


Fig. 194<sup>a</sup>.

Die Stabkräfte ergeben sich mittels der Schnitte  $\alpha$  bis  $\varepsilon$  in folgender Weise

Schnitt  $\alpha$ .

Bekannt:  $R = a0$ ,  
 unbekannt:  $H_1, S_1$ ,  
 Kräftepolygon:  $a0ba$ ,  
 daher:  $H_1 = 0b$  (Druck),  
 $S_1 = ba$  (Zug).

Schnitt  $\beta$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = a0, \\ H_1 = 0b, \end{cases}$   
 unbekannt:  $N_1, S_2$ ,  
 Kräftepolygon:  $a0bca$ ,  
 daher:  $N_1 = bc$  (Druck),  
 $S_2 = ca$  (Zug).

Schnitt  $\gamma$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = A - D_1 = a1, \\ S_2 = ca, \end{cases}$   
 unbekannt:  $H_2, Z,$   
 Kräftepolygon:  $ca1dc,$   
 daher:  $H_2 = 1d$  (Druck),  
 $Z = dc$  (Zug).

Schnitt  $\delta$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = a1, \\ H_2 = 1d, \end{cases}$   
 unbekannt:  $N_2, S_3,$   
 Kräftepolygon:  $a1dea,$   
 daher:  $N_2 = de$  (Druck),  
 $S_3 = ea$  (Zug).

Schnitt  $\varepsilon$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = A - D_1 - D_2 = a2, \\ S_3 = ea, \end{cases}$   
 unbekannt:  $H_3,$   
 Kräftepolygon:  $ea2e,$   
 daher:  $H_3 = 2e$  (Druck).

Für den armierten Träger mit drei Knotenpunkten zwischen den Endauflagern (Fig. 195) werden die Stabkräfte in folgender Weise bestimmt:

$D_1 = 01, D_2 = 12$  und  $D_3 = 23$  seien die auf die Knotenpunkte übertragenen Lasten und  $A = a0$  sowie  $B = 3a$  die in A und B hervorgerufenen Auflagerreactionen. Man führt die Schnitte  $\alpha$  bis  $\varepsilon$ :

Fig. 195.

Schnitt  $\alpha$ .

Bekannt:  $R = a0,$   
 unbekannt:  $H_1, S_1,$   
 Polygon:  $a0ba,$   
 daher:  $H_1 = 0b$  (Druck),  
 $S_1 = ba$  (Zug).

Schnitt  $\beta$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = A - D_1 = a1, \\ S_1 = ba, \end{cases}$   
 unbekannt:  $H_2, N_1,$   
 Polygon:  $ba1cb,$   
 daher:  $H_2 = 1c$  (Druck),  
 $N_1 = cb$  (Druck).

Schnitt  $\gamma$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = a1, \\ H_2 = 1c, \end{cases}$   
 unbekannt:  $Z_1, S_2,$   
 Polygon:  $a1cda,$   
 daher:  $Z_1 = cd,$   
 $S_2 = da.$

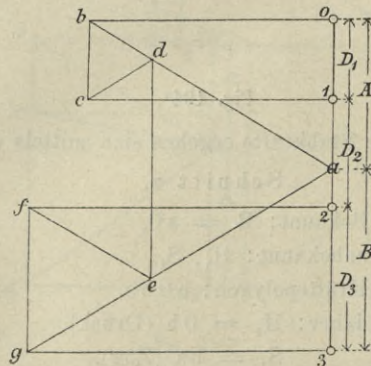
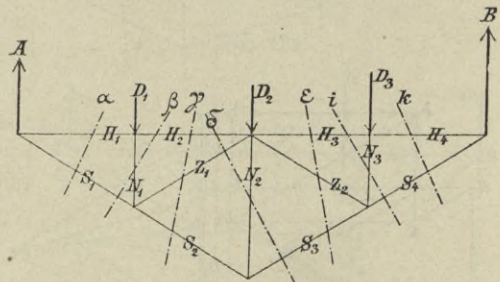


Fig. 195\*.



Schnitt  $\delta$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} R = a1, \\ H_2 = 1c, \\ Z_1 = cd, \end{cases}$$

unbekannt:  $N_2, S_3,$   
 Polygon:  $a1cdea,$   
 daher:  $N_2 = de$  (Druck),  
 $S_3 = ea$  (Zug).

Schnitt  $i$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} R = a2, \\ H_3 = 2f, \end{cases}$$

unbekannt:  $N_3, S_4,$   
 Polygon:  $a2fga,$   
 daher:  $N_3 = fg$  (Druck),  
 $S_4 = ga$  (Zug).

Schnitt  $\epsilon$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} R = A - D_1 - D_2 = a2, \\ S_3 = ea, \end{cases}$$

unbekannt:  $H_3, Z_2,$   
 Polygon:  $ea2fe,$   
 daher:  $H_3 = 2f$  (Druck),  
 $Z_2 = fe$  (Zug).

Schnitt  $\alpha$ .

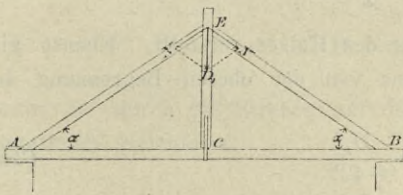
$$\text{Bekannt: } \begin{cases} R = A - D_1 - D_2 - D_3 = a3, \\ S_4 = ga, \end{cases}$$

unbekannt:  $H_4,$   
 Polygon:  $ga3g,$   
 daher:  $H_4 = 3g$  (Druck).

## § 9. Hänge- und Sprengwerke.

Das einfache Hängewerk entsteht, wenn der Tramen AB zwischen

Fig. 196.



den Endauflagern durch eine Hängesäule unterstützt wird, welche durch Streben EA und EB (Fig. 196) ihre Befestigung erhält. Letztere übertragen die aufgenommene Last auf die Enden des Balkens, mit welchen sie durch Versatzung oder Verzapfung verbunden sind.

Ist der Stützendruck bei C gleich  $D_1$ , so ist der Zug in der Hängesäule:

$$Z = D_1,$$

der Strebendruck:

$$N = \frac{D_1}{2 \sin \alpha}, \quad (249)$$

dessen Horizontalcomponente bei A:

$$H = \frac{D_1}{2} \cotg \alpha \quad (250)$$

und die Verticalcomponente

$$V = \frac{D_1}{2},$$

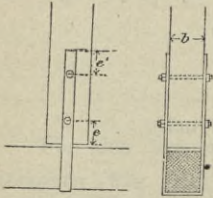
daher Gesamtauflegerdruck bei A:

$$A = D + \frac{D_1}{2}, \quad (251)$$

wenn D den durch den Tramen AB auf A übertragenen Stützendruck bezeichnet.

Bei der Querschnittsbestimmung der Hängesäule ist zu berücksichtigen, dass der Querschnitt derselben auch an der durch die Verbindung mit den Streben am meisten verschwächten Stelle bei E der Zugkraft Z zu entsprechen hat.

Fig. 197.



Die Verbindung der Hängesäule mit dem Tramen wird in der Regel durch Flacheisen und Schraubenbolzen (Fig. 197) bewerkstelligt. Werden zwei Bolzen angeordnet, so bestimmt sich ihr Durchmesser  $d$  aus der Gleichung:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \gamma' = \frac{D_1}{4} \quad (252)$$

und der Querschnitt  $F$  des Flacheisens aus:

$$F \alpha' = \frac{D_1}{2}, \quad (253)$$

wenn  $\gamma'$  und  $\alpha'$  die zulässige Scher- und Zugbeanspruchung des Eisens bezeichnen.

Damit ein Ausschlitzten des unteren Endes der Hängesäule nicht erfolge, muss der Abstand  $e$  des unteren Bolzens vom Ende der Hängesäule der Bedingung entsprechen:

$$2eb \cdot \gamma = \frac{D_1}{2}, \quad (254)$$

wobei  $\gamma$  die zulässige Scherbeanspruchung des Holzes vorstellt. Ebenso gilt für die Entfernung  $e'$  des oberen Bolzens von der oberen Begrenzung des Flacheisens:

$$2e' \cdot c \gamma' = \frac{D_1}{4}, \quad (255)$$

wenn  $c$  die Dicke des Flacheisens.

An der Verbindung der Hängesäulen mit den Streben, welche häufig durch Versatzung (Fig. 198) erfolgt, tritt eine Beanspruchung des oberen

Fig. 198.

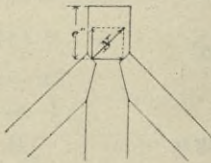
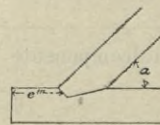


Fig. 199.



Endes der Hängesäule auf Abscheren auf, und es hat die Länge  $e''$  der Forderung zu genügen, dass



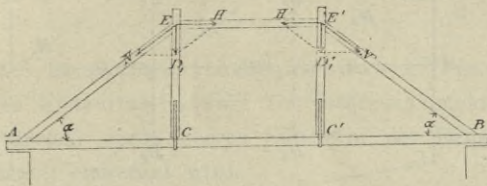
$$e'' b \gamma = N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha, \quad (256)$$

wenn  $\mu$  der Reibungscoefficient. (Für Holz auf Holz ungefähr 0,3 bis 0,4.) Analog berechnet sich die Länge  $e''$  des Balkenkopfes am Tramen bis zum Eingriff in die Strebe (Fig. 199) aus der Gleichung:

$$e'' b \gamma = \frac{D_1}{2} \operatorname{Cotg} \alpha - \mu \frac{D_1}{2}. \quad (257)$$

Das doppelte Hängewerk. Wenn der Balken AB (Fig. 200) zwischen den Endauflagern zwei Unterstüzungen erhält durch Hängesäulen

Fig. 200.



EC und E'C' und wenn letztere durch das Sprengwerk AEE'B getragen werden, so entsteht das doppelte Hängewerk. Bei gleicher Grösse der vom Tramen AB auf die Stützpunkte C und C' über-

tragenen Auflagerdrücke  $D_1, D_2$  sind auch die Strebendrucke in EA und E'B gleich. Dieselben ergeben sich:

$$N = \frac{D_1}{\sin \alpha}. \quad (258)$$

Der Druck im Spannriegel EE' ist:

$$H = D_1 \operatorname{Cotg} \alpha; \quad (259)$$

ferner die durch die Streben auf die Enden des Tramens übertragene Horizontalkraft gleichfalls:

$$H' = D_1 \operatorname{Cotg} \alpha. \quad (260)$$

Das doppelte Hängewerk ist gleich dem armirten Träger (Fig. 191) statisch bestimmt labil, denn wenn die Stützendrücke  $D_1, D_2$  ungleich werden, so erfordert der Gleichgewichtszustand eine Änderung in den Richtungen des Spannriegels und einer Strebe und auch jeder folgende Wechsel in der Belastung bedingt weitere Abänderungen der Trägerform.

Statisch bestimmt stabil wird das doppelte Hängewerk durch Einfügung eines Diagonalstabes in das Mittelfeld (Fig. 201).

Sind  $D_1 = 0$  und  $D_2 = 12$  die in den Punkten C und C' wirkenden Lasten, so bestimmt man mittels Kräfte- und Seilpolygons die Auflagerreactionen  $A = a_0$  und  $B = 2a$  und erhält auf Grund der Schnitte  $\alpha$  bis  $\epsilon$  die Stabkräfte wie folgt:

Schnitt  $\alpha$ .

Bekannt:  $R = A = a0$ ,  
 unbekannt:  $N_1, H_1$ ,  
 Kräftepolygon:  $a0ba$ ,  
 daher:  $H_1 = 0b$  (Zug)  
 und  $N_1 = ba$  (Druck).

Schnitt  $\beta$ .

Bekannt:  $\left\{ \begin{array}{l} R = A - D_1 = a1, \\ N_1 = ba, \end{array} \right.$   
 unbekannt:  $H_2, Z_1$ ,  
 Kräftepolygon:  $ba1cb$ ,  
 daher:  $H_2 = 1c$  (Zug)  
 und  $Z_1 = cb$  (Zug).

Schnitt  $\gamma$ .

Bekannt:  $\left\{ \begin{array}{l} R = a1, \\ H_2 = 1c, \end{array} \right.$   
 unbekannt:  $S, K$ ,  
 Kräftepolygon:  $a1cda$ ,  
 daher:  $S = cd$  (Druck),  
 und  $K = da$  (Druck).

Schnitt  $\delta$ .

Bekannt:  $\left\{ \begin{array}{l} R = A - D_1 - D_2 = a2, \\ K = da, \end{array} \right.$   
 unbekannt:  $H_3, Z_2$ ,  
 Kräftepolygon:  $da2ed$ ,  
 daher:  $H_3 = 2e$  (Zug)  
 und  $Z_2 = ed$  (Zug).

Schnitt  $\epsilon$ .

Bekannt:  $\left\{ \begin{array}{l} R = a2, \\ H_3 = 2e, \end{array} \right.$   
 unbekannt:  $N_2$ ,  
 Kräftepolygon:  $a2ea$ ,  
 daher:  $N_2 = ea$  (Druck).

Fig. 201.

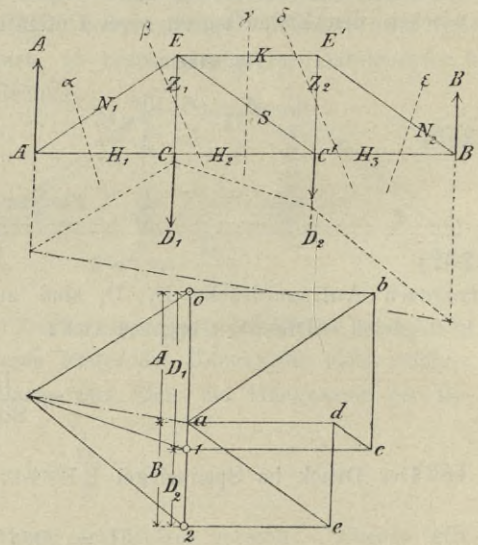
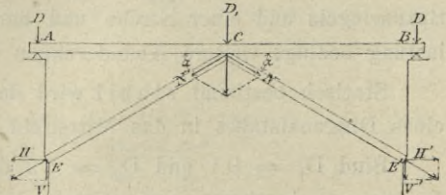


Fig. 201a.

Das Sprengwerk. Wenn ein an den Enden A und B unterstützter Tramen im Punkte C (Fig. 202) eine weitere Unterstützung durch Streben erhält, welche die von ihnen aufgenommenen Pressungen auf die Widerlager übertragen, so entsteht das einfache Sprengwerk.

Gewöhnlich befindet sich die Stütze C in der Mitte zwischen A und B, wobei der Tramen als kontinuierlicher Träger angeordnet wird. Ist  $D_1$  der Stützendruck in C, so ist der in den Streben CE und CE' auftretende Druck:

Fig. 202.





$$N = \frac{D_1}{2 \sin \alpha} \quad (261)$$

Am Kopffende werden die Streben mit einer Kraft

$$H = N \cos \alpha = \frac{D_1}{2} \cotg \alpha \quad (262)$$

an einander gepresst. An den Widerlagern entstehen durch die Streben die Horizontalkräfte und Verticalkräfte

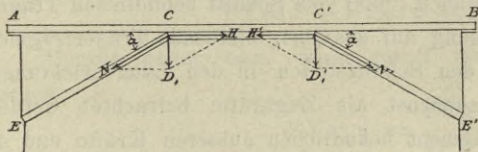
$$H = \frac{D_1}{2} \cotg \alpha$$

und

$$V = \frac{D_1}{2} \quad (263)$$

Beim doppelten Sprengwerk (Fig. 203) erhält der Tramen zwischen den Endauflagern zwei Unterstützungspunkte durch Streben CE und C'E', zwischen deren oberen Enden in der Regel ein wagrechter Balken (Spannriegel) eingefügt wird.

Fig. 203.



Nach Ermittlung der Stützendrücke  $D_1$  und  $D_1'$  erhält man die Beanspruchung der Streben:

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{D_1}{\sin \alpha} \\ N' &= \frac{D_1'}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (264)$$

Die Pressung des Spannriegels ist gegeben durch

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} H &= D_1 \cotg \alpha \\ H' &= D_1' \cotg \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (265)$$

welche Kräfte zugleich die wagrechten Widerlagerreactionen bei E und E' vorstellen, während die verticalen Componenten der Widerlagerdrücke durch

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} V &= D_1 \\ V' &= D_1' \end{aligned} \right\} \quad (266)$$

gegeben sind.

Sind die Stützendrücke  $D_1$  und  $D_1'$  ungleich, so sind auch H und H' verschieden. Die Differenz  $H - H'$  der im Spannriegel wirkenden Kräfte muss vom Tramen AB aufgenommen werden, welcher in diesem Falle einer Verankerung bedarf.

## § 10. Fachwerkträger.

Fachwerkträger sind aus einzelnen Stäben zusammengesetzte Träger, bei welchen die Enden der Stäbe in den Schnittpunkten ihrer Axen (Knotenpunkten) mit einander verbunden sind.

Wenn die Stäbe des Fachwerks nur Beanspruchungen in ihren Längenrichtungen erleiden sollen, so ist es notwendig, dass sie um ihre Endpunkte drehbar sind, was eine gelenkartige Verbindung der Stäbe an den Knotenpunkten voraussetzt. Da dieser Forderung nicht in allen Fällen (am wenigsten bei den Holzfachwerken) entsprochen werden kann, so ist das übliche, im Nachstehenden beschriebene Verfahren zur Bestimmung der Stabkräfte, welches das Auftreten von axialen Kräften voraussetzt, als Näherungsverfahren zu betrachten.

Ein Fachwerkträger von beliebiger Form sei durch Einzellasten beansprucht, welche in den Knotenpunkten des Systems angebracht sind. Zur Bestimmung der irgend einen Stab treffenden Beanspruchung denkt man die Construction durch einen Schnitt getrennt, welcher so zu legen ist, dass ausser dem fraglichen Stab nicht mehr als zwei weitere Stäbe getroffen werden. Ferner denkt man den rechts (oder auch links) vom Schnitt befindlichen Trägertheil weggenommen und dessen Wirkung auf das übrig bleibende Trägerfragment durch Kräfte ersetzt, welche, an den Schnittstellen in den Längenrichtungen der betreffenden Stäbe wirkend, zunächst als Zugkräfte betrachtet werden. Die an dem vorhandenen Trägerfragment befindlichen äusseren Kräfte und die Stabkräfte müssen sich nun im Gleichgewicht befinden, und wenn man, um die Beanspruchung eines zu untersuchenden Stabes zu erhalten, als Momentendrehpunkt den Schnitt der beiden anderen Stäbe wählt, so ergibt sich eine Gleichung, aus welcher die verlangte Stabkraft unmittelbar hervorgeht. Fällt das Vorzeichen positiv aus, so ist Zug vorhanden, im gegenteiligen Falle tritt Druckbeanspruchung auf. (Ritter's Methode.)

Auf Grund dieser Betrachtung findet man die Stabkräfte eines Feldes (Fig. 204) wie folgt:

Gurtungsstab I II, Schnitt  $\alpha\alpha$ , Momentenpunkt 2:

$$D_1 (d_1 + d_2) - (P_1 + p_1) d_2 + T t = 0$$

oder, wenn das Moment der äusseren Kräfte bezüglich des Knotenpunktes 2 mit  $\mathfrak{M}_2$  bezeichnet wird,

$$T = -\frac{\mathfrak{M}_2}{t} = -\frac{\mathfrak{M}_2}{II \cdot 2 \cos \varepsilon} \quad (267)$$

Die Spannung ist Druck, so lange das Moment positiv.



Gurtungsstab I 2, Schnitt  $\alpha\alpha$ , Momentenpunkt I:

$$D_1 d_1 - S \cdot s = 0$$

oder

$$S = \frac{\mathcal{M}_1}{s} = \frac{\mathcal{M}_1}{I I \cos \delta} \quad (268)$$

Die Spannung ist Zug, so lange das Moment positiv.

Diagonalstab I 2, Schnitt  $\alpha\alpha$ , Momentenpunkt c:

$$-D_1 e + (P_1 + p_1)(e + d_1) + Z \cdot z = 0,$$

daher

$$Z = \frac{D_1 e - (P_1 + p_1)(e + d_1)}{z}$$

oder, wenn die Resultirende von  $D_1$ ,  $P_1$  und  $p_1$  mit  $V$  bezeichnet wird und  $v$  ihr Abstand von  $c$ ,

$$Z = \frac{V \cdot v}{z} \quad (269)$$

Die Lage von  $V$ , ob links oder rechts von  $c$ , ist für das Vorzeichen von  $Z$  massgebend.

Einen anderen Ausdruck für  $Z$  liefert die Bedingung, dass die Summe der Horizontalcomponenten der Stabkräfte  $T$ ,  $S$  und  $Z$  gleich Null sein müsse:

$$T \cos \varepsilon + S \cos \delta + Z \cos \gamma = 0.$$

Hieraus findet man, wenn für  $T$  und  $S$  die obigen Werte eingesetzt werden:

$$Z \cos \gamma = \frac{\mathcal{M}_2}{II \cdot 2} - \frac{\mathcal{M}_1}{I I} \quad (270)$$

Fig. 204.

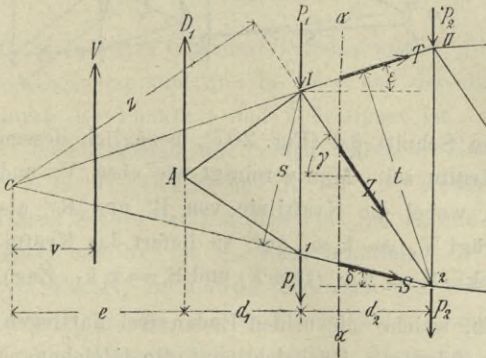
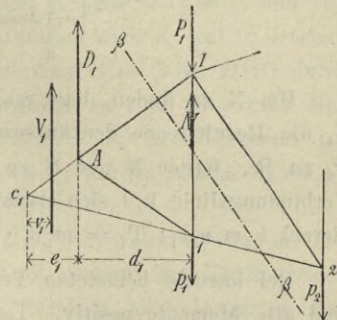


Fig. 205.



Verticalstab I 1, Schnitt  $\beta\beta$  (Fig. 205), Momentendrehpunkt c:

$$-D_1 e_1 + p_1(e_1 + d_1) - N(e_1 + d_1) = 0,$$

hieraus

$$N = \frac{-D_1 e_1 + p_1(e_1 + d_1)}{e_1 + d_1}$$

Bezeichnet  $V_1$  die Resultierende der äusseren Kräfte, hier von  $D_1$  und  $p_1$ , und ist  $v_1$  ihr Abstand von  $e_1$ , so ist

$$N = - \frac{V_1 v_1}{e_1 + d_1} \tag{271}$$

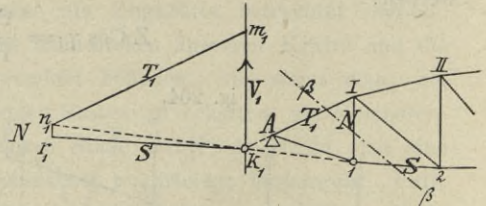
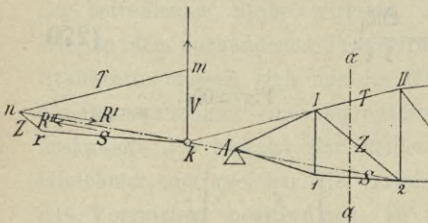
auch hier also die Lage von  $V_1$ , ob rechts oder links von  $e_1$ , für das Vorzeichen von  $N$  massgebend.

### Graphische Ermittlung der Stabkräfte (nach Culmann).

Für den Schnitt  $\alpha\alpha$  (Fig. 206) müssen die Stabkräfte  $T$ ,  $Z$ ,  $S$  und die Resultierende  $V$  der links vom Schnitt vorhandenen äusseren Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Vereint man  $V$  und  $T$  zu einer Resultierenden  $R'$ , ferner  $Z$  und  $S$  zu einer Resultierenden  $R''$ , so müssen  $R'$  und  $R''$  gleich und entgegengesetzt sein und in eine Gerade zusammenfallen. Da  $R'$  durch  $k$  geht und  $R''$  durch  $2$ , so ist  $k2$  die gemeinschaftliche Kraftlinie von  $R'$  und  $R''$ . Man trägt also  $km$  nach Grösse und Richtung gleich  $V$  an und zieht durch  $m$   $mn$  parallel  $T$ , so ist  $kmn$  das Kräfte-dreieck der drei Kräfte  $V$ ,  $T$ ,  $R'$ , daher  $T$  nach Grösse und Richtung gleich  $mn$  (Druck), sowie  $R' = nk$ . Hiemit ist auch  $R'' = kn$  gegeben und die Parallelen zu  $Z$  und  $S$  durch  $n$  und  $k$  schneiden  $Z = nr$  (Zug) und  $S = rk$  (Zug) ab.

Fig. 206.

Fig. 207.



Um  $N$  zu finden, lege man den Schnitt  $\beta\beta$  (Fig. 207), bezüglich dessen  $V_1$  die Resultierende der äusseren Kräfte sei. Man vereint wie oben  $V_1$  und  $T_1$  zu  $R'$ , ferner  $N$  und  $S$  zu  $R''$ , wobei die Kraftlinie von  $R'$  und  $R''$  als Verbindungslinie  $k_1 1$  sich ergibt, trägt  $V_1 = k_1 m_1$  auf, so liefert das Kräfte-viereck  $k_1 m_1 n_1 r_1$ :  $T_1 = m_1 n_1$  (Druck),  $N = n_1 r_1$  (Druck) und  $S = r_1 k_1$  (Zug).

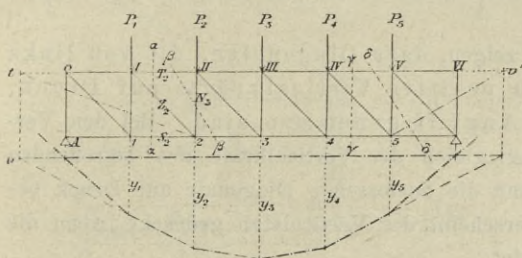
Bei lotrecht belasteten Trägern, welche mit beiden Enden frei aufliegen, sind alle Momente positiv. Daraus folgt mit Rücksicht auf die Gleichungen 267 und 268, dass in den Stäben der oberen Gurtung nur Druck, in denjenigen der unteren nur Zug stattfinden kann. Die Beanspruchung eines Gurtstabes wird erhalten, wenn man das Angriffsmoment des dem Stabe gegenüber liegenden Knotenpunktes dividirt durch die senkrechte Entfernung des Stabes von dem betreffenden



Knotenpunkte. Dieser Satz gilt natürlich auch für den speciellen Fall des Fachwerkträgers mit parallelen Gurtungen. Denselben kommen einige weitere Eigentümlichkeiten zu, welche auf Grund des beschriebenen graphischen Verfahrens leicht klar werden.

Der Fachwerkträger (Fig. 208) sei durch beliebige Einzellasten  $P_1$  bis  $P_5$  beansprucht, welche in den oberen Knotenpunkten des Trägers angebracht sind. Man bildet aus den gegebenen Lasten Kräfte- und Seilpolygon und erhält dadurch die Auflagerreactionen  $A = c'O$  und  $B = 5'e'$ . Es ist nun

Fig. 208.



beispielsweise für den Schnitt  $\alpha$ , der die Stäbe des zweiten Feldes trifft, die Resultirende der äusseren Kräfte gleich  $V = A - P_1 = c'1'$ , ihrer Lage nach als Lotlinie durch  $v$  bestimmt.

Diese Resultirende und die Stabkräfte  $T_2$ ,  $Z_2$  und  $S_2$  müssen sich im Gleichgewicht befinden. Denkt man sich zuerst  $V$  und  $T_2$  zu einer Mittelkraft  $R'$  vereinigt, so muss  $R'$  durch den Schnitt  $t$  der Kraftlinien  $V$  und  $T_2$  gehen. Ebenso wird, wenn man  $Z_2$  und  $S_2$  zu einer Mittelkraft  $R''$  zusammenfasst, der Punkt 2 ein Punkt der Kraftlinie  $R''$  sein.

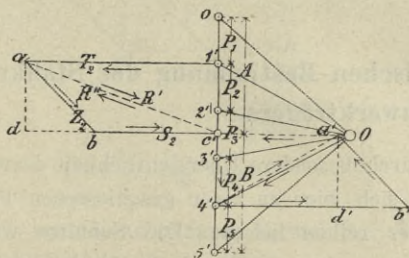


Fig. 208<sup>a</sup>.

Als Gleichgewichtsbedingung gilt, dass  $R'$  und  $R''$  gleich und entgegengesetzt sind und in einer und derselben Geraden wirken, welche letztere durch die Punkte  $t$  und  $2$  bestimmt ist. Zieht man also (Fig. 208<sup>a</sup>) durch  $1'$  eine Parallele zu  $T_2$  und durch  $c'$  eine Parallele zu  $t2$ , so ergibt sich  $1'a = T_2$  (Druck) und  $R' = ac'$ , wodurch auch  $R'' = c'a$  bestimmt ist. Durch Ziehen der Parallelen  $ab$  zu  $Z_2$  und  $bc'$  zu  $S_2$  werden sodann  $Z_2 = ab$  (Zug) und  $bc' = S_2$  (Zug) erhalten.

Um  $N_3$  zu finden, lege man den Schnitt  $\beta\beta$ , für welchen, da die Belastung in den oberen Knotenpunkten angreift,  $V$  sammt dem Kräfedreieck  $V$ ,  $T_2$ ,  $R'$  unverändert bleibt. Man hat also durch  $a$  eine Lotrechte und durch  $c'$  eine Wagrechte zu legen, um  $N_3 = ad$  (Druck) und  $dc = S_3$  (Zug) zu erhalten.

In gleicher Weise werden die Kräfte sämtlicher übriger Stäbe ermittelt. Es ergeben sich beispielsweise für Schnitt  $\gamma$  mit der negativen Verticalkraft  $V' = c'4'$  die Stabkräfte:  $T_5 = a'e'$  (Druck),  $S_5 = 4'b'$  (Zug)  $Z_5 = b'a'$



(Druck) und mittels des Schnittes  $\delta$ :  $N_6 = d'a'$  (Zug) und  $S_6 = 4'd'$  (Zug). Aus dieser Darstellung der Kräftevierecke geht unmittelbar hervor, dass beim Fachwerkträger mit geraden wagrechten Gurtungen die Verticalprojectionen der Stabkräfte in den Füllungsgliedern gleich den Verticalkräften der betreffenden Felder sind, dass also diese Stabkräfte, ohne besondere Construction der Kräftevierecke  $c'1'abc'$  unmittelbar als Projectionen der Verticalkräfte auf die Füllungsglieder erhalten werden.

Ferner ist ersichtlich, dass Füllungsglieder, welche in der Richtung von links nach rechts **fallend** angeordnet sind, durch positive Verticalkräfte auf Zug, durch negative auf Druck beansprucht werden.

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass Diagonalen, die von links nach rechts **steigen**, durch positive Verticalkräfte auf Druck, durch negative auf Zug in Angriff genommen sind. Bei den Verticalstäben, deren Beanspruchung gleich der Verticalkraft des betreffenden Feldes ist, findet Zug statt, wenn die anstossende Diagonale auf Druck beansprucht wird, und umgekehrt erscheint der Verticalstab gedrückt, wenn die anstossende Diagonale Zug erleidet.

### Cremona's Verfahren zur graphischen Bestimmung der Stabkräfte eines Fachwerkträgers.

Dieses Verfahren zeichnet sich durch besondere Übersichtlichkeit deswegen aus, weil sämtliche Kräftepolygone sich hier zu einer geschlossenen Figur, dem sog. Spannungsnetz, an einander reihen lassen. Die Schnitte werden krummlinig um die einzelnen Knotenpunkte gelegt, d. h. durch die in je einem Knotenpunkte sich treffenden Stäbe geführt. Für jeden Schnitt müssen bei Gleichgewichtszustand des Fachwerkträgers die im Knotenpunkt wirkende Last und die Stabkräfte im Gleichgewicht sein, es muss also das aus diesen Kräften gebildete Kräftepolygon sich schliessen.

Der Fachwerkträger (Fig. 209) sei durch ruhende, in den Knotenpunkten der oberen Gurtung wirkende Lasten  $P_0, P_1 \dots P_6$  beansprucht. Nachdem mittels Kräfte- und Seilpolygons die Auflagerreactionen  $A = c0$  und  $B = 6c$  bestimmt sind, legt man den ersten Schnitt um den Punkt  $a$  so, dass die hier zusammentreffenden Stäbe  $a0$  und  $a1$  getroffen werden. Die Stabkräfte  $N_1$  und  $S_1$  müssen der Aussenkraft  $c0$  das Gleichgewicht halten. Hieraus folgt  $S_1 = 0$  und  $N_1 = 0c$ , gleich und entgegengesetzt  $A$ . Denkt man sich die durch  $0c$  bestimmte Pfeilrichtung an dem durchschnittenen Stab angebracht, so ist ersichtlich, dass derselbe auf Druck beansprucht ist.

Legt man den zweiten Schnitt um den Knotenpunkt  $0$ , so ist von den hier vorhandenen Stabkräften  $N_1$  bekannt. Diese Kraft, welche Druckkraft ist, muss jetzt mit entgegengesetztem Pfeil gegenüber dem vorher behandelten



Schnitt in Betracht gezogen werden. Man hat also  $N_1 = c0$ . Die im Knotenpunkt vorhandene Last ist  $P_0 = 00'$ , daher als Resultirende von  $N_1$  und  $P_0$  die Kraftlänge  $c0'$  sich ergibt. Zieht man durch  $0'$  und  $c$  Parallele zu den Richtungen der unbekannt Stabkräfte  $T_1$  und  $Z_1$ , so erhält man das Kräfdreieck  $c0'dc$ , wobei die Pfeilrichtungen der den Umfang desselben bildenden Kräfte durch die bekannte Kraftrichtung  $c0'$  bestimmt sind. Somit wird  $T_1 = 0'd$  (Druck) und  $Z_1 = dc$  (Zug) erhalten.

Fig. 209.

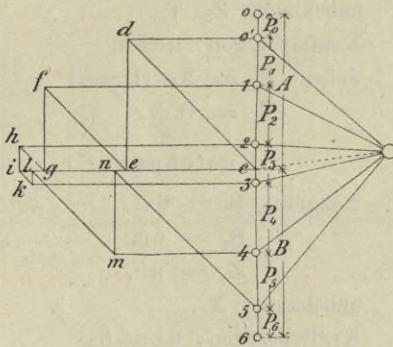
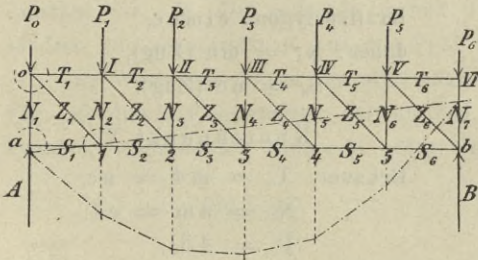


Fig. 209<sup>a</sup>.

und  $Z_1 = cd$ , unbekannt:  $N_2$  und  $S_2$ . Kräftepolygon:  $cdec$ , daher  $N_1 = de$  (Druck) und  $S_2 = ec$  (Zug).

Knotenpunkt I.

Bekannt:  $T_1 = d0' = ec$ ,  
 $N_2 = ed = c0'$ ,  
 $P_1 = 0'1$ ,

unbekannt:  $T_2, Z_2$ ,

Kräftepolygon:  $ec1fe$ ,

daher:  $T_2 = 1f$  (Druck),

$Z_2 = fe$  (Zug).

Knotenpunkt 2.

Bekannt:  $S_2 = ce$ ,

$Z_2 = ef$ ,

unbekannt:  $N_3, S_3$ ,

Kräftepolygon:  $cefgc$ ,

daher:  $N_3 = fg$  (Druck),

$S_3 = gc$  (Zug).

Knotenpunkt II.

Bekannt:  $T_2 = f1 = ge$ ,

$N_3 = gf = c1$ ,

$P_2 = 12$ ,

unbekannt:  $T_3, Z_3$ ,

Kräftepolygon:  $gc2hg$ ,

daher:  $T_3 = 2h$  (Druck),

$Z_3 = hg$  (Zug).

Knotenpunkt 3.

Bekannt:  $S_3 = cg$ ,

$Z_3 = gh$ ,

unbekannt:  $N_4, S_4$ ,

Kräftepolygon:  $eghic$ ,

daher:  $N_4 = hi$  (Druck),

$S_4 = ic$  (Zug).

## Knotenpunkt III.

Bekannt:  $T_3 = h2 = ic$ ,  
 $N_4 = ih = c2$ ,  
 $P_3 = 23$ ,  
 unbekannt:  $T_4, Z_4$ ,  
 Kräftepolygon:  $ic3ki$ ,  
 daher:  $T_4 = 3k$  (Druck),  
 $Z_4 = ki$  (Druck).

## Knotenpunkt 4.

Bekannt:  $S_4 = ci$ ,  
 $Z_4 = ik$ ,  
 unbekannt:  $N_5, S_5$ ,  
 Kräftepolygon:  $eiklc$ ,  
 daher:  $N_5 = kl$  (Zug),  
 $S_5 = lc$  (Zug).

## Knotenpunkt IV.

Bekannt:  $T_4 = k3 = lc$ ,  
 $N_5 = lk = c3$ ,  
 $P_4 = 34$ ,  
 unbekannt:  $T_5, Z_5$ ,  
 Kräftepolygon:  $lc4ml$ ,  
 daher:  $T_5 = 4m$  (Druck),  
 $Z_5 = ml$  (Druck).

## Knotenpunkt 5.

Bekannt:  $S_5 = cl$ ,  
 $Z_5 = lm$ ,  
 unbekannt:  $N_6, S_6$ ,  
 Kräftepolygon:  $clmnc$ ,  
 daher:  $N_6 = mn$  (Zug),  
 $S_6 = nc$  (Zug).

## Knotenpunkt V.

Bekannt:  $T_5 = m4 = nc$ ,  
 $N_6 = nm = c4$ ,  
 $P_5 = 45$ ,  
 unbekannt:  $Z_6, T_6$ ,  
 Kräftepolygon:  $nc5n$ ,  
 daher:  $Z_6 = 5n$  (Druck),  
 $T_6 = 0$ .

## Knotenpunkt b.

Bekannt:  $B = 6c$ ,  
 $S_6 = cn$ ,  
 $Z_6 = n5$ ,  
 unbekannt:  $N_7$ ,  
 Kräftepolygon:  $6cn56$ ,  
 daher:  $N_7 = 56$  (Druck).

### Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen bei beweglicher Belastung.

a) Gurtungsstäbe. Man bestimmt die Maximalmomente für sämtliche Knotenpunkte, welche Aufgabe, da diese Momente identisch sind mit den Momenten der gleichen Querschnitte des einfachen homogenen Trägers, zusammenfällt mit dem auf Seite 105 und 106 gezeigten Verfahren, und erhält in den betreffenden Momentenordinaten die in bestimmtem Kräftemassstab repräsentierten Gurtungskräfte.

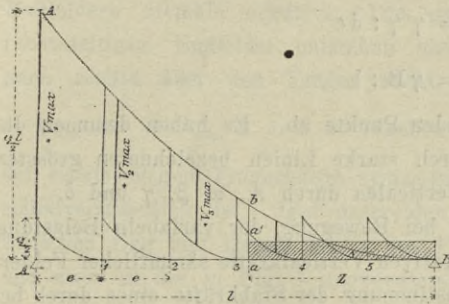
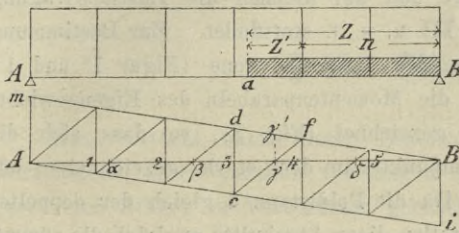
b) Füllungsglieder. Die grösste Beanspruchung eines Füllungsgliedes wird erhalten in der Projection der grössten Verticalkraft des betreffenden Feldes auf die Richtung des Füllungsgliedes. Es handelt sich also um die Bestimmung der grössten Verticalkräfte der einzelnen Felder, wobei zu berücksichtigen ist, dass eine Lastübertragung auf den Fachwerkträger als solchen nur in den Knotenpunkten vermittelt wird. Wenn angenommen wird, dass die Last eine gleichmässig verteilte sei ( $q$ ) und vom rechten gegen das linke Auflager vorrücke, so wird beispielsweise die Verticalkraft  $V$ , welche im vierten Felde durch die in Fig. 210 angedeutete beliebige Laststellung



hervorgebracht wird, gleich  $A - K$  sein, wobei  $A$  die Auflagerreaction am linken Auflager und  $K$  den Knotendruck am linksseitigen Knotenpunkt 3 des betrachteten Feldes bezeichnen. Es ist nicht notwendig, hiebei besonders hervorzuheben, dass der Wert von  $V$  für alle Querschnitte zwischen 3 und 4 constant ist, da die zwischen  $a$  und 4 befindliche Last nicht unmittelbar, sondern nur mittelst  $K$  auf das Feld 34 einwirkt.

Die Werte von  $A$  nun für alle möglichen Laststellungen erhält man nach Fig. 85 durch Construction der an den Geraden  $BA$  und  $A'3$  tangirenden Parabel, während die Linien  $K$  jedes einzelnen Feldes für sämtliche Last-

Fig. 210.

Fig. 210<sup>a</sup>.

stellungen, bei welchen sich der Anfang der Last innerhalb des Feldes befindet, offenbar analog als Linien der linksseitigen Auflagerdrücke eines Trägers von der Spannweite  $e$  erhalten werden. Indem man nun die für alle Felder gleichen Curven  $K$  construirt, erhält man in den durch letztere und durch die Linie  $A$  begrenzten lotrechten Abschnitten die in den einzelnen Feldern auftretenden Verticalkräfte.  $a'b$  ist beispielsweise die Verticalkraft, welche im vierten Felde derjenigen Laststellung entspricht, bei der die Trägerstrecke  $aB$  belastet ist, und in den grössten verticalen Abschnitten zwischen der Curve  $A$  und den Linien  $K$  erhält man die grössten Werte von  $V$  für

alle Felder und die Laststellungen, durch welche dieselben hervorgebracht werden.

Um diejenigen Orte, wo jene grössten verticalen Abstände auftreten, genauer zu bestimmen, als es durch Abgreifen mit dem Zirkel möglich, berücksichtige man Folgendes:

$z$  sei der von der Last bedeckte Trägerteil und  $z'$  (Fig. 210<sup>a</sup>) die Strecke, auf welche die Last in eines der Felder vorgerückt ist. Die Verticalkraft  $V$  desFeldes ist dann:

$$V = A - K = \frac{q z^2}{21} - \frac{q z'^2}{2e}$$

oder

$$V = \frac{q z^2}{21} - \frac{q (z - n)^2}{2e};$$



da  $\frac{dV}{dz} = 0$ , wenn  $\frac{z}{l} = \frac{z-n}{e}$  oder  $\frac{z'}{z} = \frac{e}{l}$ , so ist ersichtlich, dass  $V_{\max.}$  eines Feldes dann entsteht, wenn die variable Belastung bis zu jenem Punkte vorgerückt ist, welcher das Feld und den Träger nach dem Verhältniss  $e:l$  teilt. Trägt man (Fig. 210<sup>a</sup>) in der Auflagerverticalen A den beliebigen Längenabschnitt Am aufwärts und die gleiche Länge Bi von B aus abwärts an und zieht man die kürzeren Diagonalen der durch die Verbindungslinien Ai und Bm, sowie durch die Knotenpunktverticalen gebildeten Parallelegramme, so schneiden letztere, weil

$$\Delta \gamma' \gamma f \sim d c f,$$

und

$$\gamma 4 : e = \gamma' \gamma : d c$$

oder

$$\gamma 4 : e = \gamma B : l,$$

auf der Trägeraxe die in Rede stehenden Punkte ab. Es haben demnach die Curven K der Reihe nach ihre, durch starke Linien bezeichneten grössten Abstände von der Curve A in den Verticalen durch A,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$ .

In gleicher Weise ergeben sich bei Bewegung der variabeln Belastung von links nach rechts die grössten negativen Verticalkräfte sämtlicher Felder.

Taf. III zeigt die graphische Bestimmung der Stabkräfte eines durch bewegliche, gleichmässig verteilte Verkehrslast  $q = 1200$  kg per m beanspruchten Fachwerkträgers von 16 m Stützweite und 2 m Höhe, dessen Eigengewicht  $p = 500$  kg per m beträgt und auf welchen die Lastübertragung in den oberen Knotenpunkten I, II, III u. s. f. stattfindet. Zur Bestimmung der Gurtungskräfte sind mit Hülfe der Kräftepolygone (Figur 1<sup>a</sup> und 1<sup>b</sup>) (Kräftemassstab 1 mm = 200 kg), die Momentenparabeln des Eigengewichts und der totalen Verkehrsbelastung gezeichnet (Fig. 2), so dass sich die Maximalmomente sämtlicher Knotenpunkte in den stark gezeichneten lotrechten Längenabschnitten ergeben. Da die Poldistanz  $d$  gleich der doppelten Trägerhöhe angenommen wurde, so stellen diese Abschnitte zugleich die sämtlichen in den oberen und unteren Gurtstäben herrschenden Stabkräfte im Massstabe 1 mm = 400 kg vor und es bezeichnen die unterhalb der Trägeraxe befindlichen Stücke die vom Eigengewicht, dagegen die oberhalb befindlichen die von der Verkehrslast herrührenden Beträge. In Fig. 3 und 4 ist für sämtliche Felder die Bestimmung der grössten positiven Verticalkräfte der Verkehrslast durchgeführt. Die erhaltenen Werte, welche bei den ihnen entsprechenden Belastungen in den einzelnen Feldern constant sind, wurden in Fig. 5 besonders aufgetragen; in letztere Figur wurde auch die Linie der Verticalkräfte des Eigengewichtes eingezeichnet, deren positive Ordinaten der leichteren Summierung von  $V_q$  und  $V_p$  wegen nach abwärts, die negativen Ordinaten nach aufwärts angetragen wurden. Nun ergeben sich in den Projectionen der grössten resultirenden Verticalkräfte  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  etc. auf die



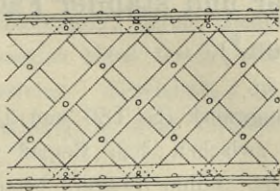
Richtungen der Füllungsglieder die in denselben herrschenden Spannungen:  $S_1 = a\alpha$ ,  $S_2 = b\beta$ ,  $S_3 = c\gamma$ ,  $S_4 = d\delta$ , sämtliche Zugwirkungen, während die in denselben Feldern von links nach rechts steigend angeordneten Diagonalen die gleichen, aber auf Druck gerichteten Beanspruchungen erleiden. Die Horizontale 08 (Fig. 5) grenzt auf den betreffenden Kraftlängen die von Eigengewicht und Verkehrslast herrührenden Beträge ab.

In den drei an das rechtsseitige Auflager angrenzenden Feldern werden die negativen Verticalkräfte des Eigengewichtes grösser als die grössten positiven Verticalkräfte der Verkehrslast; hier können also niemals positive resultirende Verticalkräfte auftreten, gerade so wie in den drei linksseitigen Endfeldern niemals negative. Die grössten negativen Verticalkräfte der rechtsseitigen Endfelder entstehen aber, wenn die Verkehrslast von links nach rechts über den Träger rückt, und da hiebei  $-V_{\max.} = +V_{\max.}$ ,  $-V_{\max.} = +V_{\max.}$  u. s. f., so ergeben sich die grössten Diagonalspannungen der rechtsseitigen Trägerhälfte symmetrisch zu denjenigen der linken, wobei selbstverständlich ist, dass unter den gegebenen Verhältnissen ein Wechsel zwischen Zug und Druck nur in den Füllungsgliedern der beiden Mittelfelder und zwar in der in Fig. 1 angedeuteten Weise stattfinden kann.

## § 11. Gitterträger.

Man versteht unter dieser Bezeichnung eine besondere Art von Fachwerkträgern, deren parallele Gurtungen durch ein System von kreuzweise angeordneten Stäben in Verbindung gebracht sind (Fig. 211). Die Gurtungen

Fig. 211.



bestehen aus doppelten Winkelisen oder aus je zwei Winkelisen und einem Stehblech dazwischen. Die Gitterstäbe werden häufig als Flacheisen hergestellt. Da ein Teil dieser Stäbe, nämlich die gegen die Trägermitte ansteigenden, auf Druck beansprucht ist, so werden dieselben zur Absteifung gegen Knickung mit den übrigen Stäben durch Nietung verbunden. Besser ist es, die gedrückten Stäbe als Winkelisen oder I-Eisen anzuordnen.

Die annähernde Berechnung der Querschnittsdimensionen eines Gitterträgers erfolgt auf Grund der für den Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen entwickelten Gesetze. Man erhält die Stabkräfte  $T$  und  $S$  in der oberen und unteren Gurtung für irgend einen Trägerquerschnitt, wenn man das Maximal-



moment der betreffenden Trägerstelle mit der verticalen Entfernung der Gurtungsschwerpunkte dividirt:

$$T = \frac{\partial \mathcal{L}_{\max.}}{h} = S.$$

Was die Füllungsglieder anlangt, so würde, wenn der Fall des einfachen Fachwerkträgers (Fig. 208) vorliegen würde, die Stabkraft irgend eines Diagonalstabes als Projection der Verticalkraft  $V$  des betreffenden Feldes auf die Richtung des Stabes erhalten werden. Indem man nun den Gitterträger als mehrfaches Fachwerk auffasst, kann man annehmen, dass  $V$  sich gleichmässig auf  $n$  Stäbe verteile, wenn  $n$  die Zahl der Teile ist, in welche je ein Gitterstab durch die ihn kreuzenden Stäbe geteilt wird. Man erhält daher, wenn  $V$  die der einfachen Fachwerksteilung entsprechende Verticalkraft eines Feldes ist und  $\varepsilon$  (Fig. 212) der Neigungswinkel der Stäbe mit dem Horizont, die Stabkräfte der hier vorhandenen Gitterstäbe aus der Gleichung:

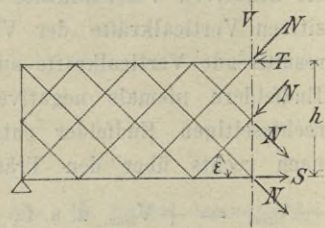
$$N \sin \varepsilon = \frac{V}{n}$$

oder

$$N = \frac{V}{n \sin \varepsilon}.$$

Ausser den Axialkräften kommen in Folge der Vernietung der Gitterstäbe untereinander noch Biegungsbeanspruchungen vor, welche bei vorstehender Gleichung nicht in Betracht gezogen sind.

Fig. 212.



## § 12. Kennzeichen statisch bestimmter und stabiler Fachwerke und Trägerarten.\*)

Beim armirten Träger und dem doppelten Hängewerk (S. 180 und 185) wurde auf den Unterschied hingewiesen, welcher zwischen dem Begriff des statisch bestimmt stabilen und des statisch bestimmt labilen Trägers besteht.

Eine Trägerart ist statisch bestimmt, wenn bei gegebener Belastung die Stützenreactionen und sämtliche Stabkräfte durch Anwendung der statischen Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden können. Reichen die statischen

\*) Weyrauch, Kennzeichen statisch bestimmter und stabiler Fachwerke, Zeitschr. für Baukunde, 1880, S. 247, und 1881, S. 55.



Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Stützenreactionen und Stabkräfte nicht aus, so wird der Träger statisch unbestimmt genannt. Im letzteren Fall wird die Trägerberechnung auf Grund der Gesetze der elastischen Formänderung oder auf irgend einem anderen Wege vorgenommen.

Stabil heisst der Träger, wenn, abgesehen von elastischen Formänderungen, die Lage des Trägers gegenüber den Stützpunkten und die gegenseitige Lage der einzelnen Trägerteile fest und unveränderlich ist, labil hingegen, wenn die Trägerform oder Lage derart von der Belastung abhängig wird, dass jeder Wechsel in der Belastung eine Veränderung in der Trägerform oder eine Verschiebung des ganzen Trägers zur Folge hat.

Da es erwünscht ist, von vorneherein beurteilen zu können, wie ein gegebener Träger in Bezug auf die in Rede stehende Frage sich verhält, so sollen die allgemeinen Unterscheidungsmerkmale zwischen statisch bestimmten und unbestimmten, sowie stabilen und labilen Trägersystemen kurz angegeben werden.

Soll ein ebener fachwerkförmiger Träger, aus unelastischen Stäben bestehend gedacht, ohne Verschiebung bleiben, auch wenn die Belastung desselben beliebigen Änderungen unterworfen ist, so müssen die jeweiligen, in je einem Knotenpunkt angreifenden äusseren und inneren Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Kräfte aber, welche in einem und demselben Punkt wirken, müssen im Gleichgewichtsfall der Bedingung Genüge leisten, dass die Summe ihrer Projectionen auf zwei Richtungslinien der Kraftebene gleich Null ist. Hat also der Träger  $k$  Knotenpunkte, so erhält man  $2k$  Bedingungsbedingungen. Sind nun  $s$  Stäbe, also auch unbekannte Stabkräfte und  $a$  Auflagerreactionen vorhanden, so können sämtliche Unbekannte gefunden werden, wenn

$$s + a = 2k.$$

Der Träger ist in diesem Falle statisch bestimmt stabil.

Bezüglich der Auflagerreactionen hat man zwischen verschiebbaren Auflagern (Rollenauflagern) und festen (auch gelenkartigen) Auflagern zu unterscheiden. Die Reaction eines verschiebbaren Auflagers ist selbst gegenüber Belastungen, deren Richtung wechselt, immer durch eine Componente, die Reaction eines festen oder gelenkartigen Auflagers durch zwei Componenten bestimmt. Bezeichnet  $v$  die Zahl der verschiebbaren und  $f$  diejenige der festen Auflagern, so geht vorstehende Gleichung über in:

$$s + v + 2f = 2k. \quad (272)$$

Beispielsweise sind für die beiden Träger (Fig. 213 und 214):

$$s = 9, v = 1, f = 1 \text{ und } k = 6,$$

daher

$$9 + 1 + 2 = 12$$

und somit die Träger statisch bestimmt stabil.

Bemerkt sei, dass, wenn beide Auflagerreactionen lotrecht wirkende Kräfte wären, dass dann unter Einfluss schiefer Belastung zwar keine Verschiebung der Trägerteile, aber eine Verschiebung des gesammten Trägers gegenüber den Stützen eintreten, der Träger also mit Rücksicht auf diesen allgemeineren Belastungsfall labil werden würde.

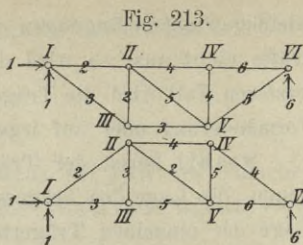


Fig. 214.

Auch nachstehende Träger sind Beispiele von statisch bestimmten, stabilen Systemen.

Beim Träger (Fig. 215) ist:

$$s = 11, v = 1, f = 1 \text{ und } k = 7,$$

mithin:

$$11 + 1 + 2 = 14.$$

Fig. 215.

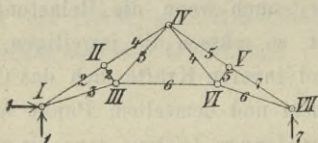
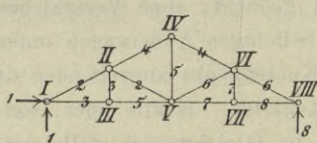


Fig. 216.



Für den Träger (Fig. 216) ist:

$$s = 13, v = 1, f = 1 \text{ und } k = 8,$$

daher:

$$13 + 1 + 2 = 16.$$

Bezüglich des Trägers (Fig. 217) hat man:

$$s = 9, v = 1, f = 1, k = 6,$$

also:

$$9 + 1 + 2 = 12.$$

Fig. 217.

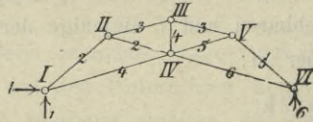
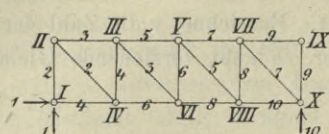


Fig. 218.



Beim Träger (Fig. 218) ist:

$$s = 17, v = 1, f = 1, k = 10,$$

daher:

$$17 + 1 + 2 = 20.$$



Die Gl. 272 ist indessen nicht allein und ausschliesslich massgebend für die Beurteilung der Frage, ob ein Träger statisch bestimmt und stabil ist, denn nicht nur die Zahl der Stäbe, sondern auch die Art ihrer Anordnung und Aufeinanderfolge ist von Einfluss. Würde man z. B. dem Fachwerkträger

Fig. 219.

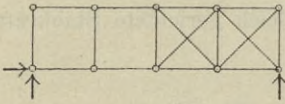


Fig. 218 die Anordnung geben, wie sie Fig. 219 zeigt, so würde zwar, da keine von den Grössen  $s$ ,  $v$ ,  $f$  und  $k$  geändert ist, der Gl. 272 Genüge geleistet werden, trotzdem aber der Träger weder statisch bestimmt noch stabil sein. Es entsprechen nämlich den für jeden Knotenpunkt vorhandenen zwei Bedingungsgleichungen in der linken Trägerhälfte der Fig. 219 zu wenig, in der rechten Trägerhälfte zu viel Stäbe, so dass das System links statisch bestimmt labil, rechts statisch unbestimmt stabil wird.

Die Stäbe dürfen also nicht beliebig gruppirt werden, sondern sie müssen eine solche Aufeinanderfolge zeigen, dass, wenn man, indem man die Unbekannten den einzelnen Knotenpunkten zuteilt, von irgend einem Knotenpunkt beginnend, zu den folgenden der Reihe nach übergeht, auf jeden Knotenpunkt gerade zwei Stabkräfte resp. Auflagerreactionen kommen.

Soll daher die Gl. 272 als Kriterium statisch bestimmter, stabiler Trägersysteme gelten, so bedarf sie des ergänzenden Zusatzes: Die  $s + v + 2f$  Unbekannten müssen sich auf die Knotenpunkte derart verteilen lassen, dass auf jeden Knotenpunkt gerade zwei daselbst eintreffende, nicht gleich gerichtete Stäbe oder Auflagerreactionen kommen.

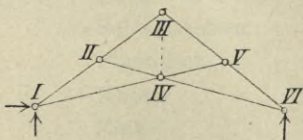
In den Figuren 213 bis 218 ist diese Verteilung der Unbekannten dadurch gekennzeichnet, dass je zwei zusammengehörige Unbekannte und der Knotenpunkt, welchem sie zugehören, mit gleichen Ziffern benannt sind.

Ist bei einem Träger die Zahl der Stabkräfte und Auflagerreactionen kleiner als die Zahl der statischen Gleichgewichtsbedingungen, also:

$$s + v + 2f < 2k, \quad (273)$$

so ist der Träger labil, dabei statisch bestimmt, wenn auf jeden Knotenpunkt nicht mehr als zwei nicht gleich gerichtete Stäbe oder Auflagerreactionen kommen. Für das in Figur 220 gezeichnete System ist z. B.

Fig. 220.



$$s = 8, \quad v = 1, \quad f = 1 \quad \text{und} \quad k = 6,$$

d. h.

$$8 + 1 + 2 < 12.$$

Der Träger ist statisch bestimmt labil, kann aber durch Einfügung eines Stabes, nämlich der punktirten Mittelverticalen III IV stabil gemacht werden.

Wenn endlich bei einem Träger die Zahl der Stabkräfte und Auflagerreactionen grösser ist als die Zahl der statischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$s + v + 2f > 2k, \tag{274}$$

so ist der Träger statisch unbestimmt, dabei auch stabil, wenn die Grössen  $s + v + 2f$  auf die Knotenpunkte derart verteilt werden können, dass auf jeden Knotenpunkt nicht weniger als zwei nicht gleich gerichtete Stabkräfte oder Auflagerreactionen kommen.

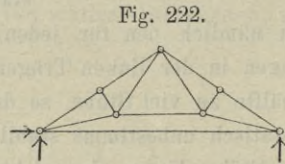
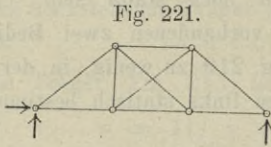


Fig. 223.

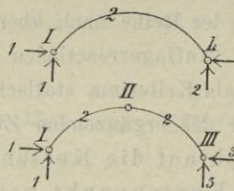


Fig. 224.

Beispiele von statisch unbestimmt stabilen Systemen sind die Träger Fig. 221 und Fig. 222, ferner der Bogenträger mit und ohne Kämpfegelenke (Fig. 223), während der Bogenträger mit drei Gelenken (Fig. 224), für den  $s = 2$ ,  $v = 0$ ,  $f = 2$  und  $k = 3$ , zu den statisch bestimmten stabilen Trägerarten gehört.



## IV. Abschnitt.

### *Decken - Constructionen.*

#### § 1. Belastung der Decken.

##### Gewichte einiger Baumaterialien.

	Gewicht in kg für 1 cbm
Erde, Lehm, Sand . . . . .	1600
Ziegelmauerwerk aus Vollsteinen . . . . .	1600
Ziegelmauerwerk aus Lochsteinen . . . . .	1300
Mauerwerk aus Kalk- und Sandsteinen . . . . .	2400
Mauerwerk aus Granit und Syenit . . . . .	2700
Beton je nach dem Steinmaterial . . . . .	2000 bis 2200
Kalkmörtel . . . . .	2000
Gypsguss . . . . .	1000
Gypsdielen . . . . .	700
Rabitzputz . . . . .	1400
Gussasphalt . . . . .	1500
Glas . . . . .	2600
Fichtenholz, lufttrocken . . . . .	550
Föhrenholz, „ . . . . .	580
Lärchenholz, „ . . . . .	620
Eichenholz, „ . . . . .	800
Buchenholz, „ . . . . .	750
Gusseisen . . . . .	7200
Schweisseisen . . . . .	7800
Flusseisen . . . . .	7850
Kupfer . . . . .	8900
Zink . . . . .	7150
Blei . . . . .	11350
Aluminium . . . . .	2660
Statuenbronze . . . . .	8600

**Eigengewichte der Zwischendecken.**

	kg pro qm
1) Balken mit Fussbodendielen, die Balken ca. 1 m von Mitte zu Mitte entfernt . . . . .	60 bis 80
2) Balken mit Fussbodendielen und unten mit Schalung und Putz, die Balken ca. 1 m von Mitte zu Mitte entfernt . . . . .	160
3) Fehlbodendecke, bestehend aus: Balken mit Fussbodendielen, Fehlbodenbrettern auf angenagelten Latten, Fehlbodenauffüllung, Schalung und Putz . . . . .	260
4) Gestaaakte Decke, bestehend aus: Balken mit Fussbodendielen, Staakhölzern mit Lehmstroh umwickelt, Lehmschlag und Sandschüttung 11 cm stark, Schalung und Putz . . . . .	260
5) Decke wie unter 3, jedoch statt Fehlbodenbrettern und Auffüllung: 7 cm starke Hohlgypsdielen . . . . .	180
6) Decke wie unter 3, jedoch an der Unterfläche der Balken statt Schalung: Rabitzputz . . . . .	270
7) Decke mit Fehlboden, Kassetten und reicher Stuckverkleidung . . . . .	376
8) Decke mit flachen, $\frac{1}{2}$ Stein starken Kappengewölben von 1 bis 2 m Spannweite zwischen Eisenträgern mit Sandschüttung, Lagerhölzern und Dielenfussboden . . . . .	500
9) Decke mit Betonfeldern zwischen Eisenträgern, Sandschüttung, Lagerhölzern, Dielenfussboden . . . . .	500
10) Decke mit Eisenträgern, Fehlbodenbrettern auf Querhölzern, Sandschüttung, Lagerhölzern, Dielenfussboden, unten Schalung mit Putz . . . . .	300
11) Decke mit Eisenträgern, Wellenblech, Sandschüttung, Lagerhölzern, Dielenfussboden, unten Schalung und Putz . . . . .	350

**Nutzlast der Zwischendecken.**

	kg pro qm
Wohnräume . . . . .	150
Tanzsäle . . . . .	400
Heuböden . . . . .	500
Kornböden . . . . .	500
Kaufmannsspeicher . . . . .	750
Belastung durch Menschengedränge . . . . .	400



## § 2. Berechnungen von Deckenconstructionen.

1) Die Balkenlage für einen Tanzsaal wird aus 5 m langen, mit den Enden frei aufliegenden Trägern aus Fichtenholz hergestellt. Welche Querschnittsdimensionen müssen dieselben bei Anordnung einer Fehlbodendecke erhalten, wenn die Balkenentfernung 0,8 m beträgt?

Nach S. 204 kann das Eigengewicht zu 260, die zufällige Last zu 400 kg angenommen werden, daher Last pro m Trägerlänge =  $660 \cdot 0,8 = 528$  kg.

Die grösste Beanspruchung erleidet jeder Träger (vgl. S. 104) bei totaler Belastung, für welche nach Gl. 100:

$$\mathfrak{N}_{\max.} = \frac{q l^2}{8} = 1650 \text{ mkg.}$$

Setzt man  $\delta = 42$  kg pro qcm und  $b = \frac{5}{7} h$ , so ergibt sich:

$$5 h^3 = 165000 \text{ cmkg,}$$

daher:

$$h = 32,1 \text{ und } b = 22,9 \text{ cm.}$$

2) Zur Herstellung der Zwischendecke für einen Wohnraum stehen Fichtenrundhölzer von 30 cm kleinstem Durchmesser am Zopfende zur Verfügung. In welchem Abstand  $e$  sind die daraus zu schneidenden Balken anzuordnen, wenn dieselben bei einer freien Länge von 4 m einen Fehlboden aufzunehmen haben?

Da  $d = 30$  cm, so berechnen sich die Querschnittsdimensionen der aus den Rundhölzern herzustellenden vierkantigen Balken grösster Tragfähigkeit nach S. 88:

$$b = \frac{30}{\sqrt{3}} = 17,3 \text{ cm}$$

und

$$h = 30 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 24,5 \text{ cm,}$$

daher nach Gl. 84 das Widerstandsmoment:

$$42 \cdot \frac{1}{8} 17,3 \cdot 24,5^2 \text{ cmkg} = 726,9 \text{ mkg.}$$

Auf Grund von Gl. 100:

$$726,9 = \frac{q \cdot 4^2}{8},$$

in welche  $q = e(260 + 150)$  einzuführen ist, erhält man:

$$e = 0,886 \text{ m.}$$

3) Welche Last pro qm kann eine Balkenlage aufnehmen, welche aus  $23/32$  cm starken, 1 m von einander entfernten Balken besteht, wenn die Stützweite derselben 5 m beträgt und wenn die zulässige Biegebungsbeanspruchung des Fichtenholzes von 42 kg pro qcm nicht überschritten werden soll?

Nach Gl. 84 ist das Widerstandsmoment des Balkenquerschnitts:

$$42 \cdot \frac{1}{6} 23 \cdot 32^3 \text{ emkg} = 1648,6 \text{ mkg.}$$

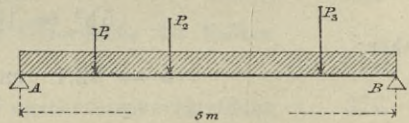
Daher ergibt sich nach Gl. 87:

$$1648,6 = \frac{q \cdot 5^3}{8}$$

$$q = 527 \text{ kg pro qm.}$$

4) Die Balkenlage der Fehlbodendecke eines Wohnraums besteht aus 5 m langen, 0,8 m von einander entfernten Fichtenholzträgern. Einer dieser Träger (Fig. 225) hat ausser der gewöhnlichen zufälligen Belastung noch drei feststehende Einzellasten  $P_1 = 60$  kg,  $P_2 = 80$  kg,  $P_3 = 100$  kg aufzunehmen, welche 1, 2 und 4 m vom Auflager bei A entfernt sind. Es ist der Querschnitt des Tragbalkens zu ermitteln.

Fig. 225.



Das Eigengewicht der Decke kann nach S. 204 zu 260, die zufällige Last zu 150 kg pro qm angenommen werden, daher AB ein durch totale gleichmässige Last  $q = 410 \cdot 0,8 = 328$  kg pro m und durch drei Einzellasten beanspruchter Träger.

Die Auflagerreactionen sind:  $A = 936$  und  $B = 944$  kg.

Das grösste Moment kann im vorliegenden Falle entweder mit dem Angriffsort einer der Einzellasten, hier  $P_2$ , zusammenfallen, oder es kann wegen des verhältnissmässig hohen Betrages der stetigen Belastung in dem Trägertheil zwischen  $P_2$  und  $P_3$  auftreten (vgl. S. 102).

Man berechnet daher zunächst:

$$\mathfrak{M}_{x=2} = 936 \cdot 2 - 60 \cdot 1 - 328 \cdot 2 = 1156 \text{ mkg,}$$

sodann untersucht man, ob für die Strecke zwischen  $x = 2$  und  $x = 4$  ein grösserer Wert für  $\mathfrak{M}_x$  als der eben erhaltene möglich ist.

Für alle Querschnitte genannter Strecke gilt als allgemeiner Ausdruck des Angriffsmomentes:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= 936x - 60(x-1) - 80(x-2) - 328 \frac{x^2}{2} \\ &= -164x^2 + 796x + 220. \end{aligned}$$



$$\frac{d\mathcal{M}}{dx} = 328x + 796 \text{ wird Null für } x = \frac{796}{328} = 2,426.$$

Führt man letzteren Wert in den Ausdruck für  $\mathcal{M}_x$  ein, so ergibt sich:

$$\mathcal{M}_{\max} = 1186 \text{ mkg}$$

und hieraus

$$h = 28,7 \text{ und } b = 20,5 \text{ cm.}$$

5) Die stärksten Bauhölzer, welche im Handel vorkommen, haben ca. 26/36 cm Stärke des rechteckförmigen Querschnitts. Solche Balken seien als Träger für eine Decke zu verwenden, deren Eigengewicht 260 kg und deren zufällige Belastung 150 kg pro qm beträgt. Welche freie Länge dürfen die Deckenträger erhalten, wenn ihr Abstand von einander 1 m von Mitte zu Mitte beträgt?

Das Widerstandsmoment des Balkenquerschnitts ist:

$$42 \cdot \frac{1}{6} \cdot 26 \cdot 36^2 \text{ cmkg, demnach } 2358,72 \text{ mkg.}$$

Das grösste Angriffsmoment ist:

$$\frac{410 l^2}{8} = 51,25 l^2,$$

daher

$$51,25 l^2 = 2358,72$$

und

$$l = 6,78 \text{ m, rund: } l = 7 \text{ m.}$$

Beträgt die zufällige Belastung einer solchen Decke 500 kg pro qm und liegen die Balken 1 m von einander entfernt, so ist

$$q = 760 \text{ und } \mathcal{M}_{\max.} = \frac{760 l^2}{8} = 95 l^2.$$

Man hat

$$95 l^2 = 2358,72$$

und

$$l = 4,98 \text{ m, rund: } l = 5 \text{ m.}$$

Man kann indessen eine grössere Stützweite der Deckenträger dadurch erzielen, dass man ihre Abstände kleiner macht, wodurch die Belastung je eines Trägers vermindert wird. Ist die Balkendistanz gleich 0,5 m, so ist

$$q = 380 \text{ und } \mathcal{M}_{\max.} = \frac{380 l^2}{8} = 47,5 l^2,$$

daher

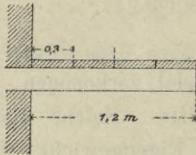
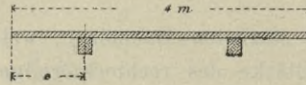
$$47,5 l^2 = 2358,72$$

und

$$l = 7,05 \text{ m.}$$

6) Ein Balken von 4 m Länge und 1,2 m Breite wird durch zwei wagrecht eingespannte Balken getragen, über welche 0,3 m breite Dielen gelegt sind (Fig. 226). Welche Stärken müssen Dielen und Balken erhalten, wenn eine grösste Last von 150 kg pro qm aufzunehmen ist?

Fig. 226.

Fig. 226<sup>a</sup>.

Jede der fünf Dielen ist ein auf zwei Stützen mit vortragenden Trägerenden aufliegender Träger, welcher durch gleichmässig verteilte Last  $q = 45$  kg pro m beansprucht ist.

Man ordne die Stützen so an, dass die Momente über denselben gleich dem Moment in der Dielenmitte werden. Dies wird nach S. 101 (Fig. 77) erreicht, wenn

$$e = \frac{l}{2\sqrt{2}}$$

oder, da  $l = 4 - 2e$ , wenn

$$e = 0,828 \text{ m.}$$

Demnach

$$\mathcal{M}_{\max.} = \frac{q e^2}{2} = 15,4 \text{ mkg.}$$

Mithin ergibt sich die Dielenstärke  $d$  aus:

$$42 \cdot \frac{1}{8} \cdot 30 d^2 = 1540$$

$$d = 2,7 \text{ cm.}$$

Als Dimensionen der Träger, welche mit 300 kg pro m belastet sind, erhält man, da

$$\mathcal{M}_{\max.} = \frac{300 \cdot 1,2^2}{2} = 216 \text{ mkg,}$$

$$h = 16,3 \text{ und } b = 11,6 \text{ cm.}$$

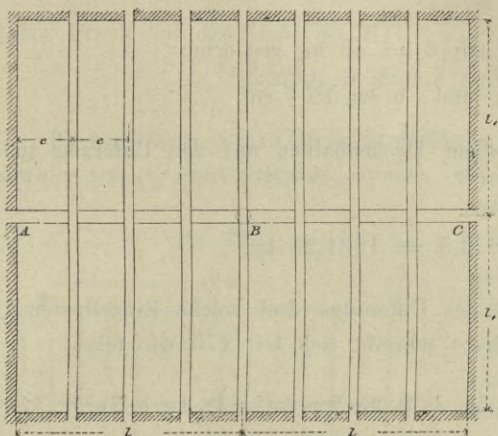
7) Die Balkenlage der Decke eines Raumes von 21 m Länge und 21 m Breite soll durch einen in der Mitte angeordneten Unterzug AC (Fig. 227) getragen werden, welcher mit den Enden auf den Umfassungsmauern aufliegt und bei B durch eine Säule unterstützt ist.

Wird angenommen, die Balken der Balkenlage seien auf dem Unterzug nicht gestossen, so sind sie kontinuierliche Träger von zwei Öffnungen.



Bezeichnet  $p$  das Eigengewicht der Decke sammt Nutzlast,  $e$  die Entfernung

Fig. 227.



der Balken, so ist die Belastung eines Deckenbalkens pro Längeneinheit  $= p e = q$ , daher dessen Endauflagerdrücke nach S. 128  $= \frac{3}{8} q l_1$  und der Druck auf den Unterzug  $\frac{10}{8} q l_1 = P$ .

Das grösste Moment, über der Unterstützung am Unterzug auftretend, ist  $-\frac{q l_1^2}{8}$  und hienach der Querschnitt der Balken zu berechnen.

Der Unterzug ist ein durch Einzellasten, die Auflagerdrücke der Deckenbalken, beanspruchter continuirlicher Träger von zwei Öffnungen, dessen Maximalmoment, über der Stütze bei B auftretend, mittels Gl. 161 bestimmt wird. Letztere geht, da  $\mathfrak{N}_{r-1} = 0 = \mathfrak{N}_{r+1}$  und  $l_{r-1} = l_r = l$ , über in:

$$4 \mathfrak{N} l = -\frac{1}{l} \Sigma [P a (l - a) (l + a)] - \frac{1}{l} \Sigma [P a (l - a) (2l - a)]. \quad (275)$$

Nachdem  $\mathfrak{N}$  aus vorstehendem Ausdruck gefunden, ergeben sich nach Gl. 163 die Auflagerdrücke  $D_1$  und  $D_3$  des Unterzugs auf die Endstützen A und C:

$$D_1 = \frac{1}{l} [\mathfrak{N} + \Sigma P (l - a)] = D_2. \quad (276)$$

Ferner erhält man mittels der Gleichungen 165 und 163 die Verticalkräfte unmittelbar links und rechts von B:

$$V''_{AB} = \frac{1}{l} [\mathfrak{N} - \Sigma P a] \quad (277)$$

und

$$V'_{BC} = \frac{1}{l} [-\mathfrak{N} + \Sigma P (l - a)], \quad (278)$$

daher nach Gl. 167 der Auflagerdruck bei B:

$$D_2 = V'_{BC} - V''_{AB},$$

auf Grund dessen der Säulenquerschnitt berechnet werden kann.

Es sei  $2l_1 = 7$  m,  $2l = 8$  m und  $e = 1$  m, die Belastung der Decke incl. Eigengewicht sei 350 kg pro qm.

a) Deckenbalken. Man hat:

$$\mathfrak{N}_{\max.} = \frac{350 \cdot 3,5^2}{8} = 535,94 \text{ mkg},$$

daher die Querschnittsdimensionen mit  $\delta = 42 \text{ kg pro qcm}$ :

$$h = 22 \text{ cm} \quad \text{und} \quad b = 15,7 \text{ cm}.$$

b) Unterzug. Der von je einem Deckenbalken auf den Unterzug ausgeübte Auflagerdruck ist

$$P = \frac{10}{8} \cdot 350 \cdot 3,5 = 1531,25 \text{ kg}.$$

Da jedes der beiden Felder des Unterzugs drei solche Einzellasten P aufzunehmen hat und da  $l = 4e$ , so schreibt sich Gl. 275 wie folgt:

$$4 \mathfrak{N}_1 = -\frac{1}{1} [P \cdot 3e \cdot 5e + P \cdot 2e \cdot 2e \cdot 6e + P \cdot 3e \cdot e \cdot 7e] \\ -\frac{1}{1} [P \cdot 3e \cdot 7e + P \cdot 2e \cdot 2e \cdot 6e + P \cdot 3e \cdot e \cdot 5e] = -\frac{120 P e^3}{1},$$

daher

$$\mathfrak{N} = -\frac{30 P e^3}{l^3} = -\frac{15}{8} P e,$$

oder, da  $e = 1 \text{ m}$ ,

$$\mathfrak{N} = -\frac{15}{8} P = 2871,1 \text{ mkg}.$$

Wenn der Unterzug als verzahnter Träger ausgeführt wird, so erhält man nach S. 159 die Breite  $b$  und die Höhe  $h$  des rechteckförmigen Querschnitts aus der Gleichung:

$$\delta \cdot \frac{1}{8} b h^2 = \mathfrak{N}_{\max.}$$

Nimmt man  $b = 18 \text{ cm}$  an, so ist

$$42 \cdot \frac{1}{8} \cdot 18 h^2 = 287110 \text{ cmkg}$$

und hieraus

$$h = 55,1 \text{ cm}.$$

Die Auflagerdrücke des Unterzugs an den Enden erhält man nach Gl. 276:

$$D_1 = \frac{1}{1} \left[ -\frac{15}{32} P l + P 3e + P 2e + P e \right] = \frac{33}{32} P.$$

Da ferner nach Gl. 277 und 278

$$V''_{AB} = \frac{1}{1} \left[ -\frac{15}{32} P l - 6 P e \right] = -\frac{63}{32} P$$

und

$$V'_{BC} = \frac{1}{1} \left[ \frac{15}{32} P l + 6 P e \right] = +\frac{63}{32} P,$$



so ist Auflagerdruck bei B:

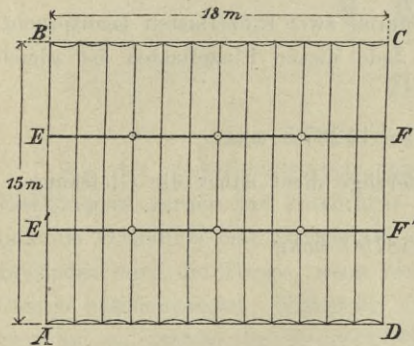
$$D_2 = V'_{BC} - V''_{AB} = \frac{63}{16} P = 6029,3 \text{ kg,}$$

daher Druck auf die Säule bei B:

$$6029,3 + 1531,2 = 7560,5 \text{ kg.}$$

8) Ein Raum von 15/18 m Grundfläche soll durch  $\frac{1}{2}$  Stein starke Kappengewölbe von  $\frac{1}{10}$  Pfeil überdeckt werden, welche zwischen  $\bar{\Gamma}$ -Träger eingespannt sind. Die  $\bar{\Gamma}$ -Träger, parallel den kleineren Umfassungsseiten AB, CD der Grundfläche und in Abständen von 1,5 m von einander angeordnet, seien durch zwei, den Langseiten der Grundfläche parallele Unterzüge EF und E'F' (Fig. 228) unterstützt, die unter sich sowie von den Umfassungsmauern je 5 m entfernt sind. Jeder Unterzug ist zwischen den Umfassungsmauern durch drei gusseiserne Säulen getragen, und es wird angenommen, dass über den 6 Säulen des

Fig. 228.



betrachteten Geschosses 6 weitere Säulen im Obergeschoss sich befinden. Die oberen Säulen sitzen direct auf den unteren auf, woraus folgt, dass die Unterzüge nicht als continuirliche Träger ausgeführt werden können, sondern frei aufliegende Balken von 4,5 m Stützweite sind. Gleiches gilt für diejenigen Gewölbeträger, welche sich in den Ebenen je zweier Säulen befinden. Diese sind frei aufliegende Balken von 5 m Stützweite, und man wird das für sie erforderliche Profil auch für die übrigen Gewölbeträger beibehalten.

a) Gewölbeträger. Das Gewicht einer Kappe einschliesslich Hintermauerung, Auffüllung, Lagerhölzer und Dielenfussboden beträgt pro laufenden m Kappe 700 kg, die Nutzlast sei pro qm 500 kg, daher pro laufenden m Kappe 750 kg. Mithin Belastung eines Gewölbeträgers =  $1450 + p$  pro m, wenn  $p$  das Eigengewicht des Trägers. Wird  $p = 55$  kg pro m angenommen, so ist für die Gewölbeträger:

$$\mathcal{N}_{\max.} = \frac{1505 \cdot 5^2}{8} \text{ mkg} = 470312,5 \text{ cmkg.}$$

Man hat daher zur Berechnung des Trägerquerschnitts die Gleichung:

$$750 \frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 470312,5$$

oder

$$\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 627,08.$$

Diesem erforderlichen Werte  $\frac{\Theta}{\frac{h}{2}}$  kommt am nächsten das Profil Nr. 30

des deutschen Normalprofilbuches mit  $\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 659$  und  $p = 54,1$ .

b) Unterzüge. Jeder Unterzug ist durch zwei Einzellasten beansprucht, die Auflagerdrücke der Gewölbeträger. Jede dieser Einzellasten ist gleich  $1505.5 = 7525$ , daher

$$\mathcal{M}_{\max.} = 7525 \cdot 1.5 = 11287,5 \text{ mkg.}$$

Zur Querschnittsberechnung der Unterzüge dient daher die Gleichung:

$$750 \frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 1128750 \text{ cmkg}$$

und hieraus

$$\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 1505.$$

In der Tabelle der  $\bar{\Gamma}$ -Profile des deutschen Normalprofilbuches findet sich in der Columnne der Widerstandsmomente als nächsthöhere Zahl  $\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = 1754$ ,

dem Profil Nr.  $42\frac{1}{2}$  zugehörig. Das Eigengewicht dieses Trägers ist  $103,7 \text{ kg pro m}$ , daher Maximalmoment des Eigengewichtes:

$$\frac{103,7 \cdot 4,5^2}{8} = 262,49 \text{ mkg} = 26249 \text{ cmkg.}$$

Demnach erhält man als grösstes Moment mit Berücksichtigung des Gewichtes des Trägers Nr.  $42\frac{1}{2}$ :  $1128750 + 26249 = 1154999 \text{ cmkg}$ , und auch diesem Angriffsmoment, welches einen Wert

$$\frac{\Theta}{\frac{h}{2}} = \frac{1154999}{750} = 1539,9$$

erfordert, genügt das Trägerprofil Nr.  $42\frac{1}{2}$ .



## V. Abschnitt.

### *Treppen.*

Wie bei den Steintreppen unterscheidet man auch bei den Holz- und Eisentreppen gerade und gebrochene Treppen, je nachdem die Treppennittellinie im Grundriss eine Gerade ist oder eine gebrochene Gerade. Teilweise gewunden wird die Treppe, wenn die Treppennittellinie sich aus Geraden und Curven zusammensetzt. Nimmt die Treppennittellinie im Grundriss die Bogenform an, so entsteht die Wendeltreppe.

Die Construction der hölzernen Treppen beruht darauf, dass die Stufen je aus einer wagrechten Diele (Trittstufe) und aus einer lotrechten Diele (Setzstufe) bestehen und dass diese, die Stufen bildenden Dielen mit ihren Enden beiderseits in Balken (Wangen) ihr Auflager finden, welche eine dem Steigungsverhältniss der Treppe entsprechende Neigung haben. Alle Holztreppen sind also Wangentreppen, und wenn es sich darum handelt, die Standfestigkeit einer Treppe festzustellen, so ist zu untersuchen, 1) ob die Stufen im Stand sind, die sie treffenden Lasten aufzunehmen und auf die Wangen zu übertragen, 2) ob die Wangen befähigt sind, die aufgenommene Last den vorhandenen Stützen zu übermitteln und 3) ob diese Stützen die nötige Sicherheit gewähren.

Was die Stufen anlangt, so hängt es von der zwischen Trittstufen und Setzstufen gewählten Verbindung ab, ob erstere oder letztere für die Lastübertragung auf die Wange vorzugsweise in Betracht kommen. Bei der Verbindung (Fig. 229) ist anzunehmen, dass vornehmlich die Trittstufen die Last aufnehmen und auf die Wangen übertragen. Dieselben sind annähernd als frei aufliegende Träger, deren Stützweite die Stufenlänge oder Treppenbreite ist, zu betrachten.

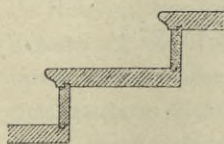


Fig. 229.

Wird die Verbindung derart bewerkstelligt, dass jede Trittstufe nicht nur vorne auf der Setzstufe aufruht, sondern auch rückwärts

mittels Holzschrauben an der jeweiligen nächsthöheren Setzstufe befestigt erscheint (Fig. 230), so ist die Stützweite der Trittstufe nur gleich der Stufenbreite und die Lastübertragung auf die Wangen erfolgt durch die Setzstufen. Letztere Verbindung ist natürlich vorzuziehen.

Die Wangen, als eigentliche Treppenträger dienend, übertragen die von den Stufen übernommene Last auf die an ihren Enden vorhandenen Stützen. Bei geraden oder geradläufigen gebrochenen Treppen sind die Wangen gerade Balken, deren Neigungswinkel gegen den Horizont der Treppensteigung entspricht.

Bezeichnet  $2Q$  die Gesamtlast eines von zwei geraden Wangen eingeschlossenen Treppenlaufes und ist diese Last gleichmässig verteilt, so ist  $Q$  die Belastung einer Wange und  $\frac{Q}{l} = q$  die Be-

Fig. 230.

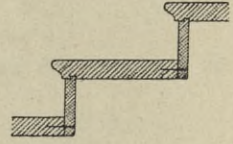
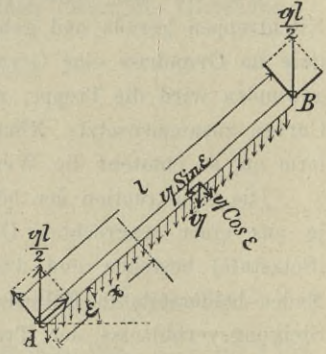


Fig. 231.

lastung derselben pro Einheit der Wangenlänge. Die Enden der Wangen sind mit den zu ihrer Unterstützung dienenden Constructionsteilen gewöhnlich durch Aufklauen oder Verzapfung verbunden, so dass bei lotrechter Belastung auch lotrechte Stützenreactionen je gleich  $\frac{q l}{2}$  hervorge-



rufen werden. Indem nun die Wange AB (Fig. 231) die Last auf A und B überträgt, wird sie auf Biegung und ausserdem auf rückwirkende Festigkeit beansprucht. Die Last pro Längeneinheit  $q$  nämlich lässt sich in eine normal zur Wangenaxe gerichtete Componente  $q \text{ Cos } \epsilon$  und eine in der Längenaxe der Wange wirkende Componente  $q \text{ Sin } \epsilon$  zerlegen. Auch die Auflagerreactionen  $\frac{q l}{2}$  werden durch ihre Seitenkräfte senkrecht zur Wange  $\frac{q l}{2} \text{ Cos } \epsilon$  und parallel der Axe derselben  $\frac{q l}{2} \text{ Sin } \epsilon$  ersetzt.

Für irgend einen Querschnitt in der Entfernung  $x$  von A ist das Biegemoment:

$$\mathfrak{M}_x = \frac{q l}{2} \text{ Cos } \epsilon x - q \text{ Cos } \epsilon \frac{x^2}{2} = \frac{q}{2} \text{ Cos } \epsilon x (l - x)$$

und die durch die Biegung entstehende Druckspannung:

$$\beta' = \frac{3 q \text{ Cos } \epsilon x (l - x)}{b h^2}$$



Derselbe Querschnitt wird durch die axiale Componente der Auflagerreaction und durch die sich summirenden Componenten  $q \sin \varepsilon$  direct auf Druck beansprucht mit der Kraft:  $\frac{q l}{2} \sin \varepsilon - q \sin \varepsilon \cdot x$ , daher die damit erzeugte Druckspannung:

$$\beta'' = \frac{q \sin \varepsilon (1 - 2x)}{2 b h}$$

Die Gesamtspannung in den äussersten gepressten Fasern des betrachteten Querschnitts ist somit:

$$\beta = \beta' + \beta'' = \frac{3 q x \cos \varepsilon (1 - x)}{b h^2} + \frac{q \sin \varepsilon (1 - 2x)}{2 b h} \quad (279)$$

Diese Spannung wird ein Maximum für:

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{3 q \cos \varepsilon (1 - 2x)}{b h^2} - \frac{q \sin \varepsilon}{b h} = 0$$

oder für

$$x = \frac{1}{2} - \frac{h \tan \varepsilon}{6}$$

Dieser Wert von  $x$  ist so wenig von  $\frac{1}{2}$  verschieden, dass der am meisten beanspruchte Wangenquerschnitt mit der Mitte der Wange als zusammenfallend angenommen werden kann.

Für  $x = \frac{1}{2}$  aber geht Gleichung 279 über in:

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{q l^2 \cos \varepsilon}{b h^2} = \delta \quad (279^1)$$

oder, da  $q l = Q$ , und wenn die Horizontalprojection  $l \cos \varepsilon = l_1$  gesetzt wird:

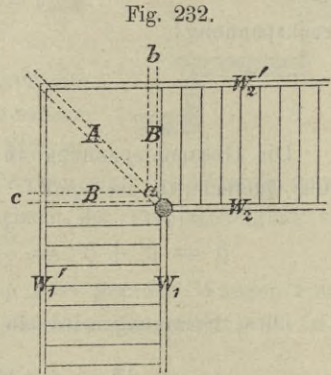
$$\delta = \frac{3}{4} \frac{Q l_1}{b h^2} \quad (279^2)$$

mittels welcher Gleichung der Wangenquerschnitt zu berechnen ist.

Was die Unterstützung der Wangen anlangt, so unterscheidet man in Bezug hierauf gestützte und freitragende Holztreppe. Gestützt nennt man die Holztreppe, wenn die Wangen zwischen den beiden Stockwerken, zu deren Verbindung die Treppe dient, (in Podesthöhe) weitere feste Auflager erhalten durch Pfosten oder Balken. Freitragend aber wird die Treppe, wenn bei gleichzeitiger Richtungsänderung des Treppenlaufes die Wangen zwischen den beiden Stockwerken keine weitere Unterstützung erhalten, vielmehr nur auf den Balken der unteren und oberen Etage aufruhren.

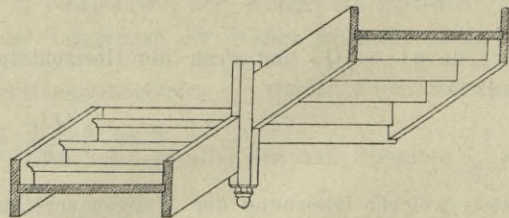


Fig. 232 zeigt eine geradläufige, einmal um  $90^\circ$  gebrochene Holzterrappe. Die Wangen  $W_1$  und  $W_1'$ , die den unteren Treppenlauf einschliessen, ruhen mit ihrem unteren Ende auf der Antrittsstufe auf, während die Wangen  $W_2$  und  $W_2'$  des anderen Treppenlaufes ihr oberes Auflager im Etagenbalken oder Wechselbalken des Obergeschosses finden. Bezüglich der weiteren Unterstützung der Wangen erscheint es einfach und nächstliegend, im Punkte a, wo die beiden inneren Wangen  $W_1$  und  $W_2$  zusammentreffen, eine hölzerne Säule anzuordnen, welche bis zum Fussboden herabreicht. In diese Säule greifen die bezeichneten Wangen mittels Verzapfung ein und finden auf solche Weise ihre Unterstützung. Um auch eine Unterlage für den Podest und die beiden äusseren Wangen  $W_1'$  und  $W_2'$  zu erhalten, wird ein wagrechter Balken A (Podestriegel) nach der Diagonale des Podestes angelegt, welcher mit seinem einen Ende in der Mauer aufliegt und an seinem anderen Ende mit der Säule verzapft ist. Genannter Balken A dient zwei weiteren Podestriegeln B zum Auflager, welche nach den Podestkanten angeordnet sind und welche den äusseren Wangen  $W_1'$  und  $W_2'$  zur Unterstützung dienen, da wo diese den Podest treffen.



Setzt sich die Treppe durch mehrere Etagen fort, so muss der Pfosten durch die ganze Höhe des Treppenhauses durchgeführt werden. Das schwerfällige Aussehen, das die Treppe dadurch erhält, kann man vermeiden, wenn man die Säule ober- und unterhalb des Eingriffs der Wangen abschneidet (Fig. 233). Natürlich verliert dann der Pfosten seine tragende Eigenschaft, er wird freischwebend, und sein Zweck ist es, jetzt nur, den inneren Wangen

Fig. 233.



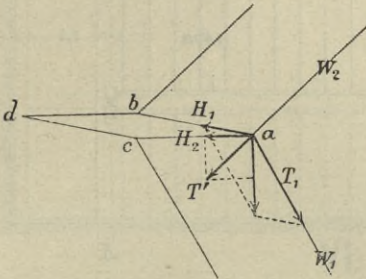
$W_1$  und  $W_2$  zum Abschluss zu dienen; die Treppe, welche vorher eine unterstützte gewesen ist, geht in die freitragende über.

Dass die Treppe auch bei dieser Anordnung stabil bleibt, ist leicht einzusehen. Der lotrechte Gesamtauflegerdruck nämlich der inneren Wangen im Punkte a zerlegt sich in eine wagrechte Komponente  $H_1$  nach der Richtung des Podestriegels a b und in eine Komponente  $T_1$  nach der Richtung der unteren Wange  $W_1$ , wird also von diesen Constructionsteilen aufgenommen. Ist der von der oberen Wange  $W_2$  nach a übertragene Auflagerdruck  $T'$  schief gerichtet



(Fig. 234), so zerlegt sich  $T'$  in eine wagrechte Componente  $H_2$  nach der Richtung des Podestriegels  $ac$  und in eine lotrechte Componente. Letztere,

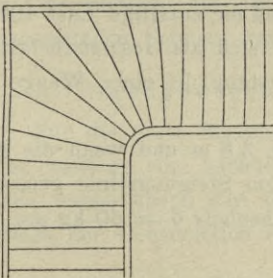
Fig. 234.



vermehrt durch den Auflagerdruck von  $W_1$ , zerlegt sich in die wagrechte Componente  $H_1$  nach der Richtung des anderen Podestriegels  $ab$  und eine in der Richtung von  $W_1$  abwärts wirkende Componente  $T_1$ . Die im Punkte  $a$  zusammenschliessenden Constructionsteile nehmen also die Belastung auf, ohne dass die Biegefestigkeit der Podestriegel in Anspruch genommen wird und zugleich ist ersichtlich, dass bei der freitragenden Treppe auch die Umfassungsmauern in Folge der durch die Podestriegel übertragenen wagrechten Kräfte auf Schub beansprucht werden.

Ein Schritt weiter in der Entwicklung dieser Treppe ist der, dass auch der sog. Hängepfosten bei  $a$  wegfällt und der Übergang von der unteren zur oberen Wange durch ein gekrümmtes Wangenstück (Wangenkropfstück) bewerkstelligt wird. Der Podest wird jetzt durch Winkelstufen ersetzt, und die Treppe geht aus der geradläufigen gebrochenen Treppe in die geradläufige teilweise gewundene über (Fig. 235).

Fig. 235.



Mit der Beseitigung des Podestes kommen natürlich auch die Podestriegel in Wegfall. Letztere hatten die statische Function zu erfüllen, die in ihren Längenrichtungen aufgenommenen Kräfte auf die Umfassungsmauern zu übertragen. Diese Leistung muss jetzt durch die Winkelstufen übernommen werden, deren Trittstufen wie Setzstufen

zur Aufnahme von Kräften in ihrer Längenrichtung befähigt sind. Die auf die Winkelstufen wirkenden Kräfte lassen sich als äussere Kräfte eines räumlichen Seilpolygons auffassen, dessen Polygonseiten den in den einzelnen Elementen des gekrümmten Wangenstückes herrschenden Drücken entsprechen. Damit die einzelnen Winkelstufen keine zu starke Beanspruchung erleiden, wird die empirische Regel befolgt, das gekrümmte Wangenstück so gross zu machen, dass mindestens vier Stufen in dasselbe eingreifen können.

Was die geradläufige, einmal um  $180^\circ$  gebrochene Treppe anlangt, welche aus zwei, im Grundriss einander parallelen Treppenläufen besteht, so ruhen die Wangen des unteren Treppenlaufes mit ihren unteren Enden auf der Antrittsstufe auf, mit ihren oberen Enden aber auf einem in Podesthöhe angebrachten Balken (Podestriegel)  $AA$  (Fig. 236), welcher in die Umfassungsmauern des Treppenhauses eingreift und eine solche Lage erhält, dass die oberste Setzstufe



an seine vordere Seitenfläche sich anschliesst. Derselbe Podestriegel dient den Wangen des oberen Treppenarmes zum unteren Auflager, während die Unterstützung dieser Wangen an ihren oberen Enden mittels eines Etagenbalkens oder eines entsprechend angebrachten Wechselbalkens bewerkstelligt wird.

*Beispiel.* Eine geradläufige, einmal um  $180^\circ$  gebrochene, 1,4 m breite Treppe aus Eichenholz dient zur Verbindung zweier Stockwerke, deren Abstand, von Fussboden zu Fussboden gemessen, 3,9 m beträgt. Bei 26 angenommenen Steigungen ergibt sich die Stufenhöhe  $h = \frac{390}{26} = 15$  cm und nach der Formel  $b + 2h = 63$  cm, die Breite  $b$  der Stufenauflrittsfläche = 33 cm. Da auf jeden der beiden Treppenläufe 12 Stufenauflrittsflächen kommen, so ist die wagrechte Länge jedes Treppenlaufes =  $12 \cdot 33 = 396$  cm und die Grundfläche desselben =  $3,96 \cdot 1,4 = 5,544$  qm.

Wird das Eigengewicht der Treppe 120 kg und die zufällige Last 400 kg pro qm Horizontalprojection angenommen, so ergibt sich als Gesamtbelastung eines Treppenlaufes rund 2880 kg und als Belastung je einer Wange die Hälfte:  $Q = 1440$  kg.

Die Horizontalprojection der Wangenlänge ist 3,8 m und wenn die Höhe des rechteckförmigen Wangenquerschnitts (normal zur Steigungslinie gemessen) 36 cm angenommen wird, so ergibt sich, da für Eichenholz  $\delta = 60$  kg pro qcm, die erforderliche Wangenbreite  $b$  aus Gl. 279<sup>2</sup>:

$$b = \frac{3}{4} \cdot \frac{1440 \cdot 380}{60 \cdot 36^2} = 5,3 \text{ cm.}$$

Der Podestriegel AA, ein mit beiden Enden frei aufliegender Träger, ist durch zwei Einzellasten je gleich 720 kg, die Auflagerdrücke der Wangen, und durch die gleichmässige Podestbelastung  $q = 0,7 \cdot 400 = 280$  kg pro m Trägerlänge beansprucht (Fig. 237). Man hat:

$$\mathcal{N}_{\text{max.}} = 720 \cdot 1,6 - 720 \cdot 0,125 + \frac{280 \cdot 3,2^2}{8} = 1420,4 \text{ mkg.}$$

Daher ergibt sich der rechteckförmige Querschnitt des Balkens aus:

$$\delta \cdot \frac{1}{6} b h^2 = 142040 \text{ cmkg}$$

und mit  $b = \frac{5}{7} h$  und  $\delta = 42$  kg pro qcm:

$$5 h^3 = 142040$$

somit  $h = 30,5$  und  $b = 21,8$  cm.

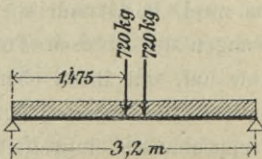
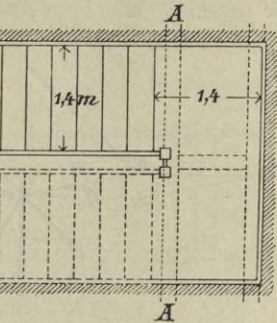


Fig. 237.





## VI. Abschnitt.

### *Dach - Constructionen.*

#### § 1. Belastung der Dächer.

Die Belastung der Dächer setzt sich zusammen aus dem Eigengewichte der Construction, aus dem Gewichte des im Winter auf der Dachfläche sich ansammelnden Schnees und aus der Angriffnahme durch den Wind.

##### A) Eigengewicht.

Für die erste Berechnung können die folgenden Durchschnittszahlen benützt werden; eine nachherige Gewichtsrechnung muss ergeben, ob die Annahme entsprechend war oder ob auf Grund des jetzt genauer bestimmten Gewichtes der Construction eine zweite Berechnung durchzuführen ist.

##### *Dächer mit hölzernem Dachgerüste.*

	Gewicht $p$ in kg pro qm geneigter Dachfläche incl. Latten, Schalung und Sparren.
Einfaches Ziegeldach . . . . .	105
Doppel- und Kronenziegeldach . . . . .	130
Hohlziegeldach . . . . .	130
Falzziegeldach . . . . .	120
Schieferdach . . . . .	75
Metallblech auf Schalung . . . . .	40
Pappdach auf Schalung . . . . .	30
Holzementdach . . . . .	160
Asphaltdach mit Lehm-Unterlage . . . . .	80
Asphaltdach mit Cement-Unterlage . . . . .	105

*Dächer mit eisernem Dachgerüste.*

	Gewicht p in kg pro qm geneigter Dachfläche incl. Winkel- eisen.
Schiefer auf Winkeleisen . . . . .	50
Ebenes Eisenblech auf Winkeleisen . . . . .	25
Ebenes Zinkblech auf Schalung und Profileisen . . . . .	48
Eisenwellenblech auf Winkeleisen . . . . .	22
Zinkwellenblech auf Winkeleisen . . . . .	18
Glas auf Winkeleisen . . . . .	50 bis 60

Die Zahlen dieser Tabellen enthalten die Eigengewichte der Binder noch nicht. Diese können wie folgt angenommen werden:

Für Holzdächer, welche durch Zwischenmauern unterstützt sind, 10 bis 20 kg pro qm geneigter Dachfläche,

für Holzdächer, welche nicht durch Zwischenmauern unterstützt sind (Spreng- und Hängewerke), 20 bis 30 kg pro qm geneigter Dachfläche,

für Eisendächer 15 bis 30 kg pro qm Horizontalprojection.

## B) Schneelast.

Die durchschnittliche, lotrecht gemessene Höhe der Schneeschichte, welche in unseren Gegenden auf einem Dach sich ansammeln kann, ohne dass inzwischen eine Beseitigung des gefallenen Schnees eintritt, beträgt erfahrungsgemäss 0,6 m. Da das spezifische Gewicht des Schnees 0,125 ist, so entsteht dadurch pro qm Horizontalprojection der Dachfläche eine Belastung  $0,125 \cdot 0,6 \cdot 1000 = 75$  kg.

Bezeichnet  $\varepsilon$  den Neigungswinkel der Dachfläche gegen den Horizont, so ist die Schneelast  $q$  pro qm geneigter Dachfläche  $= 75 \cos \varepsilon$  und man erhält für verschiedene Verhältnisse der Firsthöhe  $h$  zur Stützweite  $a$  des Daches folgende Belastungen durch den Schneedruck:

$\frac{h}{a} = \frac{1}{2},$	$\varepsilon = 45^{\circ}$	$q = 53$ kg pro qm,
$\frac{h}{a} = \frac{1}{3},$	$\varepsilon = 33^{\circ}41'$	$q = 62$ „ „ „
$\frac{h}{a} = \frac{1}{4},$	$\varepsilon = 26^{\circ}34'$	$q = 67$ „ „ „
$\frac{h}{a} = \frac{1}{5},$	$\varepsilon = 21^{\circ}48'$	$q = 70$ „ „ „
$\frac{h}{a} = \frac{1}{6},$	$\varepsilon = 18^{\circ}26'$	$q = 71$ „ „ „
$\frac{h}{a} = \frac{1}{7},$	$\varepsilon = 15^{\circ}57'$	$q = 72$ „ „ „

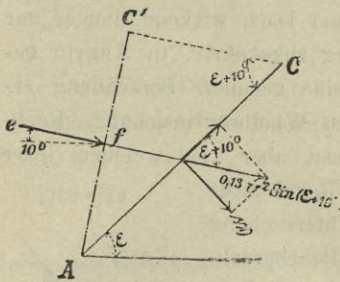


$\frac{h}{a} = \frac{1}{8},$	$\varepsilon = 14^{\circ}2'$	$q = 73$ kg pro qm,
$\frac{h}{a} = \frac{1}{9},$	$\varepsilon = 12^{\circ}32'$	$q = 73$ " " "
$\frac{h}{a} = \frac{1}{10},$	$\varepsilon = 11^{\circ}18'$	$q = 73,5$ " " "
$\frac{h}{a} = 0,$	$\varepsilon = 0$	$q = 75$ " " "

## C) Winddruck.

Was zunächst die Richtung des Windangriffes anlangt, so ist dieselbe niemals ganz horizontal, sondern die Windrichtung bildet immer einen kleinen Winkel mit dem Horizont. Dieser Neigungswinkel beträgt im Mittel etwa  $10^{\circ}$ .

Fig. 238.



Man hat nun gefunden, dass der Druck, welcher durch den Wind pro qm einer zur Windrichtung senkrechten Ebene hervorgebracht wird,  $0,13 v^2$  kg beträgt, wenn  $v$  die Geschwindigkeit des Windes in Metern pro Secunde. Ist demnach  $AC'$  (Fig. 238) eine zur Windrichtung senkrechte ebene Fläche von der zur Zeichnungsebene senkrechten Tiefe = 1, so ist der auf diese Fläche wirkende Winddruck:

$$AC' \cdot 0,13 v^2.$$

Ist  $\varepsilon$  der Neigungswinkel der Dachfläche mit dem Horizont und zieht man  $C'C$  senkrecht zu  $AC'$ , so entspricht der auf die Dachfläche  $AC$  treffende Druck gleichfalls dem vorstehenden Ausdruck, oder man hat, da

$$AC' = AC \sin(\varepsilon + 10),$$

als Winddruck auf  $AC$ :

$$AC \cdot 0,13 v^2 \sin(\varepsilon + 10^{\circ})$$

und Druck pro Flächeneinheit der Dachfläche:

$$0,13 v^2 \sin(\varepsilon + 10^{\circ}).$$

Von diesem in der Richtung des Windes angestrebten Druck kann nach dem Gesetze der Wechselwirkung nur diejenige Componente zur Wirkung kommen, welcher ein gleich grosser Gegendruck entspricht. Widerstand wird aber von der Dachfläche (da die Reibung zwischen Luft und Dach verschwindend klein) nur in der Richtung senkrecht zur Dachfläche geleistet. Man hat daher obigen Druck in eine zur Dachfläche normale Componente und in eine Componente nach der Richtung der Dachfläche zu zerlegen. Letztere bleibt ausser Wirkung; die erstere ist:

$$w = 0,13 v^2 \sin^2(\varepsilon + 10^{\circ}).$$

Die Geschwindigkeit des Windes, starken Stürmen entsprechend, kann  $v = 30$  m per Secunde angenommen werden, so dass abgerundet

$$w = 120 \sin^2 (\varepsilon + 10) \tag{280}$$

erhalten wird.

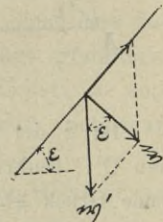
Aus dieser Gleichung ergeben sich bei verschiedenen Dachneigungen nachstehende Werte für den

**Winddruck normal zur Dachfläche:**

$\frac{h}{a}$	$= \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\varepsilon$	$= 45^\circ$	$33^\circ 41'$	$26^\circ 34'$	$21^\circ 48'$	$18^\circ 26'$	$15^\circ 57'$	$14^\circ 2'$	$12^\circ 32'$	$11^\circ 18'$
$w$	$= 80,5$	$57$	$43$	$33$	$27$	$23$	$20$	$18$	$16$ kg.

Eigengewicht und Schnee beanspruchen die Dachflächen in lotrechtem Sinne, während durch den Winddruck, normal zum Dach wirkend, immer nur je eine Dachfläche, nämlich die der Windrichtung zugekehrte, in Angriff genommen wird. Bei eisernen Dächern, welche eine genauere Berechnung ermöglichen, wird diesem Umstand, der einseitigen Windbeanspruchung, Rechnung getragen. Bei hölzernen Dachconstructions aber, bei welchen jener Genauigkeitsgrad wie bei den eisernen in der Regel nicht erreichbar ist, nimmt man, um die statische Untersuchung zu vereinfachen, gewöhnlich eine gleichzeitige Beanspruchung beider Dachflächen durch den Winddruck an, berücksichtigt aber hiebei nur die lotrechte Seitenkraft des Winddrucks.

Fig. 239.



Durch Zerlegung nämlich von  $w$  in eine lotrechte Komponente und eine Komponente nach der Sparrenrichtung (Fig. 239) ergibt sich erstere:

$$w' = \frac{w}{\cos \varepsilon} = \frac{120 \sin^2 (\varepsilon + 10)}{\cos \varepsilon} \tag{281}$$

und man erhält bei verschiedenen Dachneigungen nachstehende Werte für die

**lotrechte Komponente des Winddruckes:**

$\frac{h}{a}$	$= \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$
$\varepsilon$	$= 45^\circ$	$33^\circ 41'$	$26^\circ 34'$	$21^\circ 48'$	$18^\circ 26'$	$15^\circ 57'$	$14^\circ 2'$	$12^\circ 32'$	$11^\circ 18'$
$w'$	$= 114$	$68$	$48$	$35$	$28$	$24$	$21$	$18$	$16$ kg.

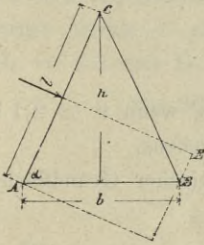
Bei offenen Hallen ist zu berücksichtigen, dass der Wind, seitlich oder von unten kommend, die inneren Dachflächen angreift. Die Grösse dieser Beanspruchung, über welche genauere Erfahrungsergebnisse z. Z. noch fehlen, kann zu 60 kg pro qm angenommen werden.



Möglichkeit des Umkantens oder der Verschiebung von Dächern durch den Winddruck.

Bei Dächern von bedeutender Höhe liegt die Frage nahe, ob nicht die Gefahr eines Umkantens der gesammten Dachconstruction oder die Gefahr der wagrechten Verschiebung derselben vorhanden sei. Zur Beantwortung dieser Frage kann Folgendes dienen:

Fig. 240.



Die Resultirende des Winddrucks äussert das Bestreben, das Dach um die der Windrichtung gegenüber liegende Kante B (Fig. 240) zu drehen. Beim Satteldach von der Länge  $l$  und der Tiefe  $e$  ist das Drehmoment:

$$\begin{aligned} M &= l e w \cdot B E \\ &= l e w \left( \frac{l}{2} - b \cos \alpha \right) \\ &= l e w \left( \frac{l}{2} - \frac{b^2}{2l} \right). \end{aligned}$$

Das Moment des Dachgewichtes, wenn dasselbe pro qm Dachfläche  $p$  beträgt, ist:

$$2 l e p \frac{b}{2},$$

daher als Gleichgewichtsbedingung gegen Umkanten erhalten wird:

$$l e b p \geq l e w \left( \frac{l}{2} - \frac{b^2}{2l} \right)$$

oder

$$p \geq \frac{w}{2 b l} (l^2 - b^2). \quad (282)$$

Auf Verschieben in wagrechtem Sinne wird das Dach beansprucht durch die Horizontalcomponente des Winddrucks  $l e w \sin \alpha$ , welcher die dem Dachgewichte  $2 l e p$  und der Verticalcomponente des Winddrucks  $l e w \cos \alpha$  entsprechende Reibung entgegenwirkt. Demgemäss ist, wenn  $\mu$  der Reibungscoefficient,

$$\mu (2 l e p + l e w \cos \alpha) \geq l e w \sin \alpha$$

oder

$$p \geq \frac{w}{4 \mu l} (2h - \mu b). \quad (283)$$

Aus Gl. 282 ist

$$w = \frac{2 b l p}{l^2 - b^2}$$

oder, wenn  $l$  durch  $h$  und  $b$  ausgedrückt und  $h = n b$  gesetzt wird:

$$w = \frac{4 p \sqrt{1 + 4 n^2}}{4 n^2 - 3}$$

Setzt man auch in Gl. 283  $l = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$  und  $h = nb$ , so erhält man:

$$w = \frac{2\mu p \sqrt{1 + 4n^2}}{2n - \mu}$$

Die Gefahr des Umkantens und des Verschiebens ist gleich gross, wenn

$$\frac{4p \sqrt{1 + 4n^2}}{4n^2 - 3} = \frac{2\mu p \sqrt{1 + 4n^2}}{2n - \mu}$$

oder

$$n^2 - \frac{n}{\mu} = \frac{1}{4}$$

Für  $\mu = 0,5$  wird  $n = 2,1$ , woraus ersichtlich, dass, wenn  $h > 2,1 b$ , die Gefahr des Umkantens näher liegt als die des Verschiebens.

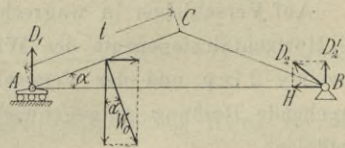
Hat das Dach die Form einer Pyramide von quadratischer Grundfläche, so erhält man  $n = 3,2$ .

## § 2. Auflagerreactionen bei einseitiger Beanspruchung durch den Winddruck.

Die Auflagerdrücke der schiefen Windbelastung werden wie folgt bestimmt:

Vom Dachbinder ABC, der in A mit einem beweglichen und in B mit einem unverrückbaren Auflager versehen ist (Fig. 241), sei die Seite AC durch den Winddruck beansprucht, dessen zu AC senkrechte Resultirende mit  $W_0$  bezeichnet werde. Die Reibung am beweglichen

Fig. 241.



Auflager kann, ohne einen grossen Fehler zu begehen, vernachlässigt werden, in welchem Falle die Auflagerreaction  $D_1$  daselbst lotrecht wirkend auftritt. Da der Winddruck gegen den Horizont geneigt ist, so kann nur Gleichgewicht stattfinden, wenn die rechtsseitige Widerlagerreaction  $D_2$  eine geneigte Lage einnimmt, und es sollen deren Horizontal- und Verticalprojection mit  $H$  und  $D'_2$  bezeichnet werden. Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$W_0 \sin \alpha - H = 0,$$

$$D_1 - W_0 \cos \alpha + D'_2 = 0$$

und

$$D'_2 \cdot 2l \cos \alpha - W_0 \cdot \frac{l}{2} = 0$$

ergeben sich die Unbekannten:



$$H = W_0 \sin \alpha, \quad (284)$$

$$D'_2 = \frac{W_0}{4 \cos \alpha} \quad (285)$$

und

$$D_1 = \frac{W_0 \cos \alpha}{4} (3 - \tan^2 \alpha). \quad (286)$$

*Graphische Lösung.* Die Kräfte  $W_0$ ,  $D_1$  und  $D_2$ , welche sich im Gleichgewicht halten, schneiden sich in einem Punkte  $J$  (Fig. 242). Indem man  $01$  nach Grösse und Richtung gleich  $W_0$  aufträgt und durch  $0$  eine Lotrechte, ferner durch  $1$  eine Parallele zur Verbindungslinie  $BJ$  zieht, erhält man  $D_1 = 20$  und  $D_2 = 12$ .

Fig. 242.

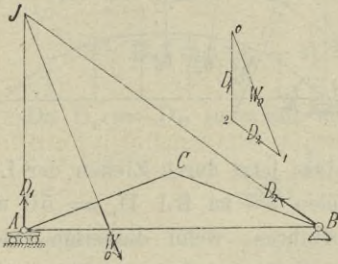
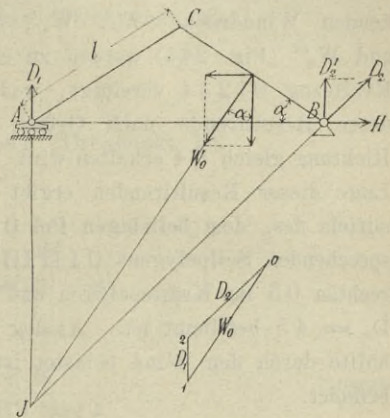


Fig. 243.



Ist durch den Wind die Dachfläche  $CB$  auf Seite des festen Auflagers beansprucht (Fig. 243), so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$W_0 \sin \alpha - H = 0,$$

$$D_1 - W_0 \cos \alpha + D'_2 = 0,$$

$$D_1 \cdot 2l \cos \alpha - W_0 \frac{l}{2} = 0,$$

woraus:

$$H = W_0 \sin \alpha, \quad (287)$$

$$D_1 = \frac{W_0}{4 \cos \alpha}, \quad (288)$$

$$D'_2 = \frac{W_0 \cos \alpha}{4} (3 - \tan^2 \alpha). \quad (289)$$

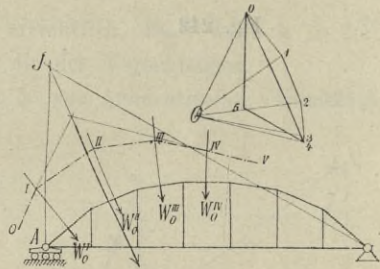
$D_1$  und  $D'_2$  wechseln die Werte und  $H$  erhält entgegengesetzte Richtung gegenüber dem vorigen Fall.

Durch Auftragen von  $W_0 = 01$  (Fig. 243) und durch Ziehen der Lotrechten 12 und der Parallelen 02 zu BJ wird auf graphischem Wege  $D_1 = 12$  und  $D_2 = 20$  nach Grösse und Richtung erhalten.

Bei gekrümmter Dachfläche haben die Normalcomponenten des Winddruckes an verschiedenen Stellen verschiedene Richtungen. Man zerlegt daher die Begrenzungslinie des Daches in mehrere Abteilungen, bestimmt die Winddrücke für dieselben unter Zugrundlegung eines mittleren Neigungswinkels und erhält nach Gl. 284 bis 286 Horizontalschub und resultierende Verticalauflagerreactionen durch Summiring der den einzelnen Abteilungen entsprechenden Werte von  $H$ ,  $D_1$  und  $D'_2$ .

Vorzuziehen ist hier das einfachere graphische Verfahren. Die auf die einzelnen Abteilungen der Dachfläche wirkenden Winddrücke  $W_0^I$ ,  $W_0^{II}$ ,  $W_0^{III}$  und  $W_0^{IV}$  (Fig. 244) werden zu einem Kräftezug 01234 vereinigt, wodurch deren Resultierende nach Grösse und Richtung gleich 04 erhalten wird. Die Lage dieser Resultierenden ergibt sich mittels des, dem beliebigen Pol O entsprechenden Seilpolygons 0 I II III IV V, so dass jetzt durch Ziehen der Lotrechten 05 im Kräftepolygon und der Parallelen 45 zu BJ  $D_1 = 50$  und  $D_2 = 45$  bestimmt ist. Analog ist das Verfahren, wenn diejenige Dachhälfte durch den Wind belastet ist, auf deren Seite das feste Auflager sich befindet.

Fig. 244.

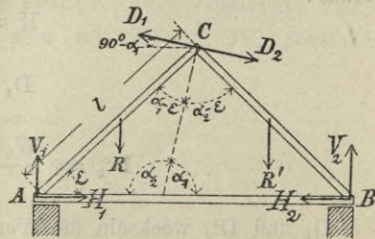


### § 3. Das einfache Sparrendach.

Das einfache Sparrendach entsteht, wenn man zwei gleich lange Balken, Sparren, AC und BC oben unter sich und unten mit dem wagrechten Balken AB (Fig. 245) verbindet und wenn man mehrere solche Gerüste, welche Gebinde genannt werden, hinter einander aufstellt. Das Gebinde des einfachen Sparrendaches ist ein statisch bestimmtes, stabiles System (vgl. S. 198), welches auch unter Einwirkung einseitiger und beliebiger Belastung im Gleichgewicht sich befinden kann.

Auf jeden Sparren eines Gebindes, welche in den gleichen Abständen  $e$  von einander angeordnet seien, wirkt das

Fig. 245.





Eigengewicht  $ple = P$  und die Schneelast  $qle = Q$ . Vom Winddruck wird eine der beiden Dachflächen, z. B. AC beansprucht, und es wird, wie bei Holzdächern üblich, ausschliesslich die lotrechte Componente  $w'$  des Winddrucks berücksichtigt, da die genauere Behandlung nur unwesentlich verschiedene Ergebnisse liefert. Wird  $w'le = W$  gesetzt, so hat der Sparren AC im Ganzen die Last  $P + Q + W = R$  und der Sparren BC die Last  $P + Q = R'$  aufzunehmen, beide in den lotrechten Halbirungslinien der Sparrenlängen wirkend.

Indem die Sparren im Firstpunkt sich gegenseitig stützen, empfängt der Sparren AC von BC den Gegendruck  $D_1$ , der Sparren BC von AC den Gegendruck  $D_2$ , und  $D_1 - D_2 = 0$ . Denkt man BC weggenommen und durch  $D_1$  ersetzt, so erfordert das Gleichgewicht des Sparrens AC:

$$D_1 l \cos(\alpha_1 - \varepsilon) = R \frac{1}{2} \cos \varepsilon \quad (\text{Drehpunkt A}),$$

und ebenso gilt für den Sparren BC:

$$D_2 l \cos(\alpha_2 - \varepsilon) = R' \frac{1}{2} \cos \varepsilon \quad (\text{Drehpunkt B}).$$

Da  $D_1 = D_2$ , so erhält man:

$$\frac{R}{\cos(\alpha_1 - \varepsilon)} = \frac{R'}{\cos(\alpha_2 - \varepsilon)}$$

und, weil  $\alpha_2 = 180^\circ - \alpha_1$ ,

$$\tan \alpha_1 = \frac{R + R'}{(R - R') \tan \varepsilon}. \quad (290)$$

Die Reactionen der Stützen bei A und B können für beide Sparren durch je eine Verticalkraft ( $V_1$  bezw.  $V_2$ ) und eine Horizontalkraft ( $H_1$  bezw.  $H_2$ ) ersetzt werden. Da der Gleichgewichtszustand beider Sparren weiter bedingt, dass je die Summe der Horizontal- und der Verticalprojectionen der an denselben wirkenden Kräfte gleich Null ist, so ergibt sich:

$$H_1 = H_2 = D_1 \sin \alpha_1 = \frac{R + R'}{4 \tan \varepsilon} = H, \quad (291)$$

ferner:

$$V_1 = R - D_1 \cos \alpha_1 = \frac{3R + R'}{4} *) \quad (292)$$

und

$$V_2 = R' + D_1 \cos \alpha_1 = \frac{3R' + R}{4}. \quad (293)$$

\*) Zu dem nämlichen Ergebniss kommt man auch auf folgende Weise:

Man denkt sich den Sparren AC aus seiner Verbindung mit den übrigen Balken herausgenommen, nachdem zuvor die Wirksamkeit der Unterstützung bei A durch die

Was die Beanspruchung der Sparren anlangt, so setzt sich dieselbe zusammen aus den Stabkräften, welche in den Sparren als Teilen eines Stabsystems auftreten, dessen Belastung in den Knotenpunkten angebracht ist und ferner aus der Beanspruchung, welche dadurch entsteht, dass die Sparren zugleich zur Übertragung der zwischen den Knotenpunkten vorhandenen Last auf diese dienen.

Erstgenannte, in der Längsrichtung des Sparrens wirkende Beanspruchung  $T$  wird erhalten, wenn man die Kräfte, welche an dem einen oder anderen Ende des in's freie Gleichgewicht gesetzten Stabes wirken, auf die Sparrenrichtung projicirt, nachdem zuvor  $R$  durch die in  $A$  und  $C$  erzeugten Auflagerdrücke von je gleich  $\frac{R}{2}$  ersetzt worden:

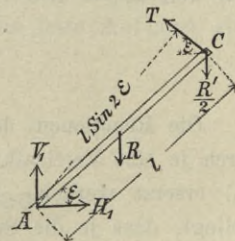
$$T = \frac{R + R'}{4 \tan \varepsilon} \cos \varepsilon + \frac{3R + R'}{4} \sin \varepsilon - \frac{R}{2} \sin \varepsilon = \frac{R + R'}{4 \sin \varepsilon} \quad (\text{im Punkte A})$$

oder

$$T = D_1 \sin (\alpha_1 - \varepsilon) + \frac{R}{2} \sin \varepsilon = \frac{R + R'}{4 \sin \varepsilon} \quad (\text{im Punkte C})$$
(294)

Kräfte  $H_1$  und  $V_1$  und die Gegenwirkung des Sparrens  $BC$  in  $C$  durch  $D_1$  ersetzt worden. Letztere kann aber aufgefasst werden als die Resultirende aus dem von  $BC$  nach  $C$  übertragenen lotrechten Auflagerdruck  $\frac{R'}{2}$  und aus dem von dem Sparren  $BC$  in seiner Längsrichtung geleisteten Druckwiderstand  $T$  (Fig. 246).

Fig. 246.



Es bestehen sonach die Bedingungsgleichungen:

$$V_1 + T \sin \varepsilon - R - \frac{R'}{2} = 0,$$

und

$$H_1 - T \cos \varepsilon = 0$$

$$\frac{R'}{2} \cos \varepsilon + R \frac{1}{2} \cos \varepsilon - T \sin 2\varepsilon = 0.$$

Aus letzterer Gleichung ist:

$$T = \frac{R + R'}{4 \sin \varepsilon},$$

daher

$$H_1 = \frac{R + R'}{4 \tan \varepsilon}$$

und

$$V_1 = \frac{3R + R'}{4}.$$

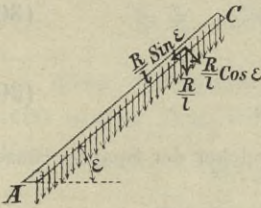
Selbstverständlich muss die algebraische Summe sämtlicher an dem Sparren wirkenden Kräfte auf die Sparrenrichtung gleich Null sein:

$$H_1 \cos \varepsilon + V_1 \sin \varepsilon - R \sin \varepsilon - \frac{R'}{2} \sin \varepsilon - T \cos 2\varepsilon = 0.$$



Die Beanspruchung, die z. B. dem Sparren AC ausserdem noch durch die Lastübertragung erwächst, ergibt sich, wenn man die Last  $\frac{R}{l}$  pro Längeneinheit in Componenten  $\frac{R}{l} \sin \varepsilon$  nach der Längsrichtung des Sparrens und in Componenten  $\frac{R}{l} \cos \varepsilon$  senkrecht dazu zerlegt (Fig. 247). (Vgl. S. 214).

Fig. 247.



Durch letztere wird der Sparren auf Biegung beansprucht. Das grösste Biegemoment in der Sparrenmitte ist:

$$\frac{R l \cos \alpha}{8},$$

daher die durch die Biegung entstehende Druckspannung:

$$\beta' = \frac{3}{4} \frac{R l \cos \alpha}{b h^2}.$$

Derselbe Querschnitt ist durch T direct auf Druck beansprucht, wodurch die Druckspannung:

$$\beta'' = \frac{R + R'}{4 b h \sin \varepsilon}$$

hervorgebracht wird.

Die Gesamtspannung in der äussersten gepressten Faser der Sparrenmitte ist somit:

$$\beta = \beta' + \beta'' = \frac{3}{4} \frac{R l \cos \varepsilon}{b h^2} + \frac{R + R'}{4 b h \sin \varepsilon}. \quad (295)$$

Will man die durch T bedingte Knickbeanspruchung berücksichtigen, so hat man nach Gl. 55:

$$\beta'' = \frac{R + R'}{4 b h \sin \varepsilon} \left( 1 + \frac{\alpha b h l^2}{12 b h^3} \right)$$

und

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{R l \cos \varepsilon}{b h^2} + \frac{R + R'}{4 b h \sin \varepsilon} \left( 1 + \frac{0,00016 l^2}{h^2} \right). \quad (296)$$

Der wagrechte Balken AB des einfachen Sparrengebindes hat in A und B den Sparrenschub  $\frac{R + R'}{4 \tan \varepsilon}$  aufzunehmen. Der Balken ist als ein durch sein Eigengewicht (und etwaige sonstige Belastung) auf Biegung und durch H auf Zug beanspruchter Balken zu behandeln. Ist  $l_1$  die Länge des Balkens und  $q_1$  die Belastung pro Längeneinheit, so dient zur Berechnung die Gleichung:

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{q_1 l_1^2}{b h^2} + \frac{H}{b h}. \quad (297)$$

Gewöhnlich wird bei der Berechnung der Holzdächer eine für beide Dachflächen gleichzeitig stattfindende Belastung durch den Winddruck angenommen. In diesem Falle ist  $R' = R$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$  und die Gleichungen 291 bis 296 gehen über in:

$$H_1 = H_2 = H = \frac{R}{2 \tan \varepsilon}, \quad (298)$$

$$V_1 = V_2 = R, \quad (299)$$

$$T = \frac{R}{2 \sin \varepsilon}, \quad (300)$$

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{R l \cos \varepsilon}{b h^2} + \frac{R}{2 b h \sin \varepsilon} \quad (301)$$

oder bei Berücksichtigung der Knickbeanspruchung, welcher der Sparren durch T unterworfen ist,

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{R l \cos \varepsilon}{b h^2} + \frac{R}{2 b h \sin \varepsilon} \left( 1 + \frac{0,00016 l^2}{h^2} \right). \quad (302)$$

Aus Gl. 301 oder 302 kann man die Sparrendimensionen berechnen, wenn ein bestimmtes Verhältniss der Breite zur Höhe des Sparrenquerschnitts angenommen wird. Noch einfacher gestaltet sich das Verfahren, wenn man die Querschnittsdimensionen  $b$  und  $h$  annimmt und durch Gl. 301 oder 302 ermittelt, welche grösste Druckspannung bei gegebener Belastung auftritt.

*Beispiel.* Die Dachfläche eines einfachen Sparrendaches mit Falzziegeldeckung sei unter  $45^\circ$  gegen den Horizont geneigt, die Sparrenlänge sei 4 m, die Entfernung der Sparren von einander 1 m. Das Eigengewicht kann nach S. 219  $p = 120$  angenommen werden, die Schneelast nach S. 220  $q = 53$ , die lotrechte Komponente des Winddrucks nach S. 222  $w' = 114$ , daher  $p + q + w' = 287$ , rund 290 und  $R = 4.290 = 1160$  kg. Welche grösste Druckspannung findet im Sparren statt, wenn die Breite des rechteckförmigen Querschnitts  $b = 14$  und die Höhe  $h = 20$  m angenommen wird?

Aus Gl. 301 ergibt sich:

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{1160 \cdot 400 \cdot 0,707}{14 \cdot 20^2} + \frac{1160}{2 \cdot 14 \cdot 20 \cdot 0,707},$$

daher

$$\beta = 44 + 3 = 47 \text{ kg pro qcm.}$$

Unter Benützung der Gl. 302 wird

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{3}{4} \frac{1160 \cdot 400 \cdot 0,707}{14 \cdot 20^2} + \frac{1160}{2 \cdot 14 \cdot 20 \cdot 0,707} \left( 1 + \frac{0,00016 \cdot 400^2}{20^2} \right) \\ &= 44 + 5 = 49 \text{ kg pro qcm.} \end{aligned}$$

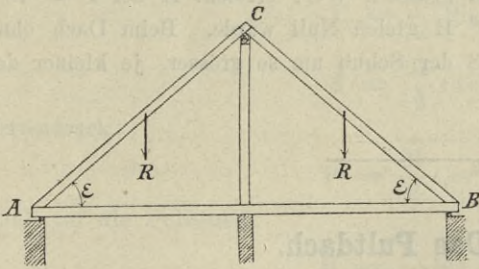


Aus diesen beiden, wenig von einander verschiedenen Resultaten ist ersichtlich, dass der Beitrag, welchen die Axialkraft zur Gesamtspannung liefert, verhältnissmässig gering ist und dass es daher für approximative Berechnungen zulässig ist, die zweiten Summanden der Formeln 301 und 302 zu vernachlässigen.

#### § 4. Das Sparrendach mit Firstpfette.

Wenn die Sparren an ihrem oberen Ende durch eine Firstpfette unterstützt werden (Fig. 248), so gestaltet sich die Kräftewirkung in folgender Weise:

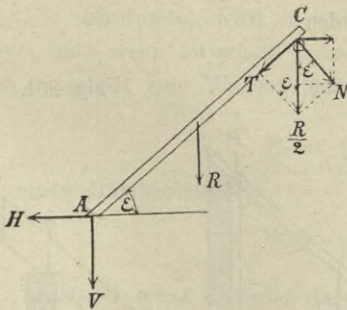
Fig. 248.



Ist jeder Sparren mit  $R$  belastet und fasst man zunächst den Sparren  $AC$  ins Auge, so überträgt derselbe auf seine Stützen  $A$  und  $C$  zwei lotrechte Auflagerdrücke je gleich  $\frac{R}{2}$ .

Da die Reaction der Firstpfette normal zur Auflagerfläche, d. i. zur Sparrenrichtung wirksam ist, so hat man in  $C$   $\frac{R}{2}$  in eine Componente  $T$  nach der Sparrenrichtung und in eine Componente  $N$  senkrecht dazu (Fig. 249) zu zerlegen:

Fig. 249.



$$T = \frac{R}{2} \sin \varepsilon, \quad (303)$$

$$N = \frac{R}{2} \cos \varepsilon. \quad (304)$$

Durch weitere Zerlegung von  $N$  in eine lotrechte und eine wagrechte Componente  $N \cos \varepsilon$  und  $N \sin \varepsilon$  erhält man die durch  $AC$  für die Firstpfette entstehende lotrechte Belastung, zu welcher der nämliche Betrag seitens des Sparrens  $BC$  hinzukommt, so dass der lotrechte Druck  $P$  auf die Firstpfette in jedem Gebinde gleich ist

$$P = 2 N \cos \varepsilon = R \cos^2 \varepsilon, \quad (305)$$

während  $N \sin \varepsilon$  von der gleichen und entgegengesetzten wagrechten Componente

des anderen Sparrens im Gleichgewicht gehalten wird. (Bei ungleicher Belastung beider Sparren wird die Differenz beider Horizontalcomponenten von den beiden Sparren aufgenommen und ist in Componenten nach den Richtungen derselben zu zerlegen.)

Der Auflagerdruck am unteren Sparrenende ist:

$$V = \frac{R}{2} + T \sin \varepsilon = \frac{R}{2} (1 + \sin^2 \varepsilon) \quad (306)$$

und der daselbst entstehende Horizontalschub:

$$H = T \cos \varepsilon = \frac{R}{4} \sin 2\varepsilon. \quad (307)$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit Gl. 298 lässt erkennen, dass bei Anordnung von Firstpfetten ein geringerer Sparrenschub entsteht als beim Sparrendach ohne Firstpfette. Den grössten Wert erreicht  $H$  bei  $\varepsilon = 45^\circ$ , während für  $\varepsilon = 0$  und  $\varepsilon = 90^\circ$   $H$  gleich Null würde. Beim Dach ohne Firstpfette aber wird nach Gl. 298 der Schub um so grösser, je kleiner der Neigungswinkel  $\varepsilon$  ist.

## § 5. Das Pultdach.

Beim Pultdach (Fig. 250) besteht die Dachfläche aus einer Ebene, die, an eine der Umfassungsmauern des Gebäudes, die sog. Pultwand, sich anschliessend, nach der gegenüberliegenden fallend angeordnet ist. Die Rücksicht auf die Stabilität der Pultwand macht es wünschenswert, dass die Sparren im First nur Verticaldrücke, nicht aber Seitenwirkungen äussern. Dies kann durch Anbringung einer Firstpfette und entsprechende Verbindung zwischen Sparren und Firstpfette erreicht werden.

a) Ist die Reaction der Firstpfette lotrecht (Fig. 250 u. 251), so liegt der auf S. 167 behandelte Fall vor: der Druck auf die Firstpfette und der Druck des Sparrenfusses auf den Tramen ist je gleich  $\frac{R}{2}$ :

$$P = \frac{R}{2},$$

$$V = \frac{R}{2}.$$

Fig. 250.

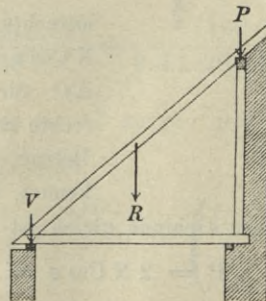
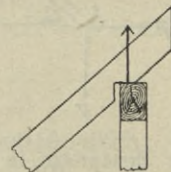


Fig. 251.





Zur Querschnittsbestimmung des Sparrens dient Gleichung 279<sup>1</sup>:

$$\beta = \frac{3}{4} \frac{q l^2 \cos \epsilon}{b h^2}.$$

b) Wenn die Verbindung zwischen Sparren und Firstpfette derart ist, dass die Reaction N der letzteren normal zur Dachneigung gerichtet ist (Fig. 252 und 253), so hat man nach S. 231:

Sparrendruck:

$$T = \frac{R}{2} \sin \epsilon,$$

$$N = \frac{R}{2} \cos \epsilon,$$

Pfettendruck:

$$P = \frac{R}{2} \cos^2 \epsilon,$$

Schub auf die Pultwand:

$$H = \frac{R}{4} \sin 2 \epsilon,$$

Sparrenschub:

$$H = \frac{R}{4} \sin 2 \epsilon$$

und Auflagerdruck am Fussende des Sparrens:

$$V = \frac{R}{2} (1 + \sin^2 \epsilon).$$

Die Firstpfette wird in den Hauptgebinden durch Wandsäulen unterstützt, und wenn zwischen je zwei Hauptgebinden  $n$  Leergebinde vorhanden sind, so erhält jede Wandsäule von der Pfette einen Verticaldruck

$$P_1 = (n + 1) \frac{R}{2} \cos^2 \epsilon \quad (308)$$

und einen Horizontalschub:

$$H_1 = (n + 1) \frac{R}{4} \sin 2 \epsilon. \quad (309)$$

Letzterer muss entweder durch die Pultmauer oder durch ein nach Fig. 253 anzuordnendes Zugband DE aufgenommen werden. Der in letzterem auftretende Zug ist:

$$Z = \frac{H_1 a}{a_1 \cos \gamma} \quad (310)$$

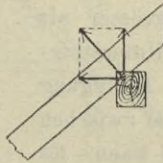


Fig. 252.

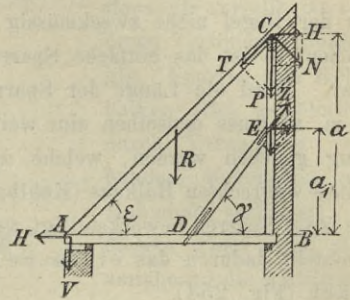
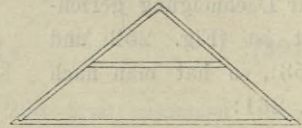


Fig. 253.

## § 6. Das Kehlbalkendach.

Da es bei den für die Sparren zur Anwendung kommenden Holzstärken in der Regel nicht zweckmässig ist, denselben mehr als 4 m freie Länge zu geben, so ist das einfache Sparrendach nur für geringe Spannweiten anwendbar. Wird die Länge der Sparren grösser als 4 m, so muss denselben eine weitere Unterstützung gegeben werden, welche durch Einfügung eines wagrechten Balkens (Kehlbalkens) zwischen je zwei Sparren bewerkstelligt werden kann. Es entsteht dadurch das einfache Kehlbalkendach (Fig. 254).

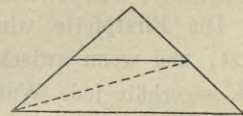
Fig. 254.



Da die Unterstützung der Sparren hier wegen möglicher Lockerung der Verbindung mit den Kehlbalken mehr oder weniger mangelhaft ist, so bringt man unter dem Kehlbalken entweder in der Mitte (Kehlbalkendach mit einfachem Stuhl) oder an den beiden Enden (Kehlbalkendach mit doppeltem Stuhl) (Fig. 256) Träger (Rahmhölzer) parallel der Längsrichtung des Daches an, welche den Kehlbalken zum Auflager dienen. Diese Rahmhölzer werden durch lotrechte Pfosten (Stuhlsäulen) getragen, welche in Abständen von ca. 4 m angeordnet sind, und es heissen diejenigen Gebinde, in welchen eine solche Unterstützung stattfindet, Hauptgebinde, während die übrigen Leergebinde genannt werden. Zur Verminderung der freien Stützweite der Rahmhölzer werden zwischen diese und die Stuhlsäulen häufig Kopfbügen eingefügt.

Das einfache Kehlbalkendach ist nach S. 201 Gl. 273 ein statisch bestimmt labiler Träger; Gleichgewicht kann nur bei symmetrischer Belastung stattfinden, während einseitige Belastung veränderte Trägerform erfordert. Durch Einfügung eines Diagonalstabes in den trapezförmigen Trägerteil (Figur 255) kann das System statisch bestimmt stabil gemacht werden.

Fig. 255.



Leergebinde des Kehlbalkenstuhldaches. Die einzelnen Sparren erscheinen, da die Kehlbalken meist in der Mitte derselben angebracht werden, als continuirliche Träger von zwei gleichen Öffnungen, wobei auf die Unterstützungen, wenn  $R$  die Gesamtbelastung je eines Sparrens bezeichnet, die in Fig. 256 bezeichneten Auflagerdrücke ausgeübt werden.

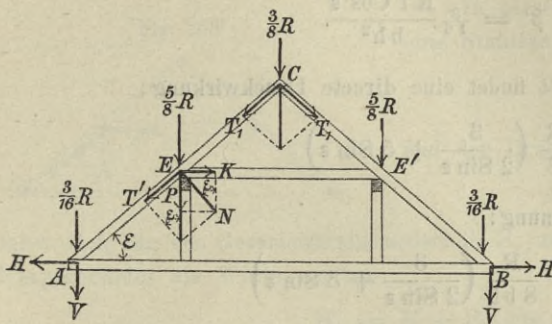
Man erhält daher die in den oberen Sparrenteilen wirkenden Axialkräfte  $T_1$  durch Zerlegung von  $\frac{2}{3} R$  in zwei Componenten nach den Sparrenrichtungen:

$$T_1 = \frac{\frac{2}{3} R}{\sin \epsilon} \quad (311)$$



In E und E' sind zur Aufnahme des Auflagerdruckes  $\frac{5}{8} R$  gleichzeitig Sparren, Kehlbalcken und Rahmholz vorhanden. Die Art und Weise, in der

Fig. 256.



sich die vorhandene Last auf genannte Constructionsteile verteilt, ist von deren Verbindung abhängig. Sparren und Kehlbalcken sind gewöhnlich durch Verzapfung verbunden, Kehlbalcken mit Rahmholz verkämmt. In diesem Falle wird man annähernd die wirklichen

Beanspruchungen erhalten, wenn man  $\frac{5}{8} R$  in eine Componente  $T'$  nach der Richtung des Sparrens und in eine solche senkrecht dazu zerlegt:

$$\left( T' = \frac{5}{8} R \sin \varepsilon \right) \quad \text{und} \quad N = \frac{5}{8} R \cos \varepsilon.$$

Wird letztere in eine wagrechte und eine lotrechte Componente zerlegt, so erhält man als Kehlbalckendruck:

$$K = \frac{5}{8} R \cos \varepsilon \sin \varepsilon = \frac{5}{16} R \sin 2 \varepsilon \quad (312)$$

und als Druck auf das Rahmholz:

$$P = \frac{5}{8} R \cos^2 \varepsilon. \quad (313)$$

Demnach ist der Druck in der unteren Sparrenhälfte:

$$\begin{aligned} T_2 &= T_1 + T', \\ T_2 &= \frac{3}{16} \frac{R}{\sin \varepsilon} + \frac{5}{8} R \sin \varepsilon \\ &= \frac{R}{8} \left( \frac{3}{2 \sin \varepsilon} + 5 \sin \varepsilon \right), \end{aligned} \quad (314)$$

der Horizontalschub des Sparrens:

$$H = \frac{R}{16} (3 \cotg \varepsilon + 5 \sin 2 \varepsilon) \quad (315)$$

und dessen Auflagerdruck bei A:

$$\begin{aligned} V &= \frac{3}{16} R + T_2 \sin \varepsilon = \frac{3}{8} R + \frac{5}{8} R \sin^2 \varepsilon \\ &= \frac{R}{8} (3 + 5 \sin^2 \varepsilon). \end{aligned} \quad (316)$$

Was die Querschnittsbestimmung des Sparrens anlangt, so ist, wenn  $AC = 1$ , das grösste Biegemoment bei E gleich  $\frac{1}{32} R l \cos \epsilon$ , daher die demselben entsprechende Druckspannung:

$$\beta' = \frac{3}{16} \frac{R l \cos \epsilon}{b h^2}.$$

In demselben Querschnitt findet eine directe Druckwirkung:

$$\frac{R}{8} \left( \frac{3}{2 \sin \epsilon} + 5 \sin \epsilon \right)$$

statt, welcher die Druckspannung:

$$\beta'' = \frac{R}{8 b h} \left( \frac{3}{2 \sin \epsilon} + 5 \sin \epsilon \right)$$

entspricht.

Daher ergeben sich die Querschnittsdimensionen  $b$  und  $h$  des Sparrens aus der Gleichung:

$$\beta = \frac{3}{16} \frac{R l \cos \epsilon}{b h^2} + \frac{R}{8 b h} \left( \frac{3}{2 \sin \epsilon} + 5 \sin \epsilon \right). \quad (317)$$

Die Kehlbalcken sind durch  $K$  auf Knickfestigkeit beansprucht und werden nach Gl. 51 oder 55 berechnet.

**Rahmhölzer und Stuhlsäulen.** Die Rahmhölzer sind Träger, welche in den Hauptgebinden unterstützt und durch ebensoviele lotrechte Lasten  $P = \frac{5}{8} R \cos^2 \epsilon$  beansprucht sind, als Sparren auf ihnen aufrufen (Fig. 257).

Hienach ist ihr Querschnitt bestimmt. Die Kopfbügen, welche die Rahmhölzer unterstützen, erleiden einen Axialdruck

$$= \frac{n P}{2 \sin \gamma}, \text{ wenn } \gamma \text{ der}$$

Winkel der Kopfbüge

mit dem Rahmholz und  $n$  die Zahl der zwischen je zwei Hauptgebinden befindlichen Leergebinde. Die zwischen den Kopfbügen befindlichen Abteilungen der Rahmhölzer sind, abgesehen von ihrer Biegebungsbeanspruchung, auch einer

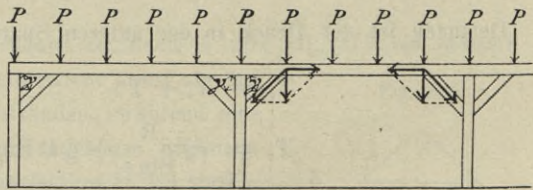
axialen Druckkraft  $= \frac{n P}{2} \cotg \gamma$  ausgesetzt. Der Druck auf die erste und

letzte Stuhlsäule ist  $\frac{n+2}{2} P$ , in den übrigen Stuhlsäulen gleich  $(n+1) P = P_0$ .

Zu berücksichtigen ist, dass auf die erste und letzte Stuhlsäule am Eingriff der Kopfbüge eine Horizontalkraft  $\frac{n P \cotg \gamma}{2}$  wirkt, welche die Säule auf

Biegung beansprucht.

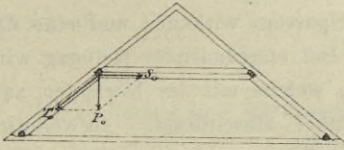
Fig. 257.





Beim Kehl balkendach mit liegendem Stuhl (Fig. 258) werden die Rahmhölzer durch geneigte Stuhlsäulen getragen, welche oben durch einen, unmittelbar unter dem Kehlbalken befindlichen Spannriegel abgesteift sind.

Fig. 258.



In diesem Falle ist der Druck auf eine Stuhlsäule:

$$T_0 = \frac{P_0}{\sin \epsilon} \quad (318)$$

und der Druck im Spannriegel:

$$S_0 = P_0 \cotg \epsilon, \quad (319)$$

daher sich für den Gesamthorizontalschub  $H_0$  und den Auflagerdruck  $V_0$  des Hauptgebindes die Werte ergeben:

$$H_0 = H + P_0 \cotg \epsilon \quad (320)$$

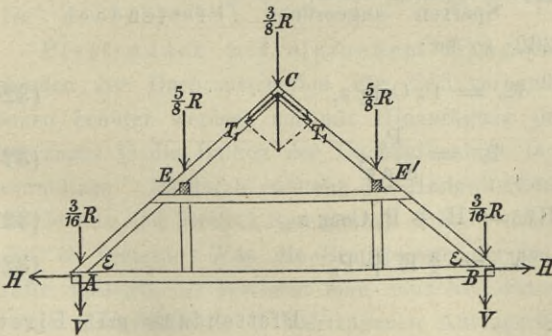
und

$$V_0 = V + P_0. \quad (321)$$

## § 7. Das Pfettendach.

Die Sparren liegen auf den der Längsrichtung des Daches nach durchlaufenden Hölzern, welche hier Pfetten genannt werden, unmittelbar auf (Fig.

Fig. 259.



259), und die Pfetten sind durch Stuhlsäulen unterstützt. Als Quer-Verbindung des Daches dienen in allen jenen Gebinden, in welchen Stuhlsäulen vorhanden sind (Hauptgebinden), wagrechte, unmittelbar unter den Pfetten befindliche Balken (Spannriegel), die gewöhnlich als Doppel-

hölzer angeordnet werden, indem sie Stuhlsäulen und Sparren beiderseits umfassen.

Die in den oberen Sparrenhälften herrschenden Drücke ergeben sich wie beim Kehlbalkendach:

$$T_1 = \frac{3}{16} \frac{R}{\sin \epsilon}. \quad (322)$$

In E und E' sind die Sparren durch die Pfetten unterstützt. Würden die ersteren ohne weitere Verbindung auf der Pfette frei aufliegen (Fig. 260), so würde bei vernachlässigter Reibung der Widerstand der Pfette in normaler Richtung mn zum Sparren wirken, in welchem Falle  $\frac{5}{8} R$  zu zerlegen wäre in eine nach der Richtung des Sparrens wirkende und eine dazu senkrechte Komponente. Bei stattfindender Reibung wird die Pfettenreaction die Richtung mn' erhalten, welche mit der Normalen zum Sparren den Reibungswinkel einschliesst. Gewöhnlich aber ist die Pfette mit dem Sparren verkämmt (Fig. 261), in welchem Falle die Pfettenreaction als lotrecht wirkend einzuführen ist.

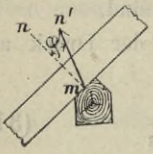


Fig. 260.

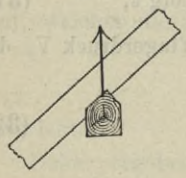


Fig. 261.

Daher hat man als Druck auf die Pfette:

$$P = \frac{5}{8} R, \tag{323}$$

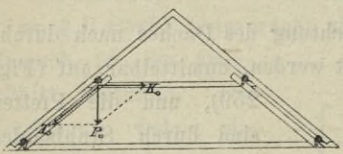
ohne dass in E für die untere Sparrenhälfte eine weitere Axialkraft hinzukäme. Daher Sparrenschub bei A ist:

$$H = \frac{3}{16} R \operatorname{Cotg} \varepsilon \tag{324}$$

und Auflagerdruck daselbst:

$$V = \frac{3}{8} R. \tag{325}$$

Fig. 262.



Bezeichnet  $P_0$  den Auflagerdruck der Pfette im Hauptgebände, so ist beim Pfettendach mit stehendem Stuhl (Fig. 259)  $P_0$  auch der Druck in der Stuhlsäule; ist aber die Stuhlsäule in geneigter Lage parallel zum Sparren angeordnet (Pfettendach mit liegendem Stuhl) (Fig. 262) so ist:

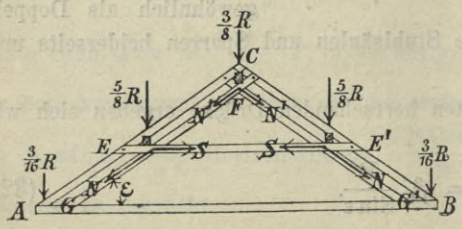
$$K_0 = P_0 \operatorname{Cotg} \varepsilon, \tag{326}$$

$$T_0 = \frac{P_0}{\operatorname{Sin} \varepsilon}, \tag{327}$$

$$H_0' = H + P_0 \operatorname{Cotg} \varepsilon \tag{328}$$

$$V_0 = \frac{3}{8} R + P_0. \tag{329}$$

Fig. 263.



Pfettendach mit Firstpfette. Dasselbe entsteht, wenn die Stuhlsäulen des Pfettendaches mit liegendem Stuhl bis zum First verlängert werden und hier zur Aufnahme einer Firstpfette dienen (Fig. 263).



Man kann annehmen, dass sämtliche Pfetten nur lotrechte Drücke erleiden, daher in jedem Gebinde Druck auf die Firstpfette  $P_1' = \frac{3}{8} R$  und Druck auf die Mittelpfetten bei E und E':  $P = \frac{5}{8} R$ .

Ist  $P_0'$  der von der Firstpfette auf je ein Hauptgebände übertragene Auflagerdruck, so ist die im oberen Teil der Streben GF und G'F herrschende Druckkraft:

$$N' = \frac{P_0'}{2 \sin \varepsilon}. \quad (330)$$

Hiezu kommt in E die Komponente des Auflagerdruckes  $P_0''$  der Mittelpfette nach der Strebenrichtung:  $\frac{P_0''}{\sin \varepsilon}$ , so dass Gesamtdruck in den unteren Hälften genannter Streben:

$$N = \frac{1}{2 \sin \varepsilon} (P_0' + 2 P_0''). \quad (331)$$

und Druck im Spannriegel EE':

$$S = P_0'' \cotg \varepsilon. \quad (332)$$

Der Horizontalschub eines Hauptgebändes in A und B ist:

$$H_0 = \frac{1}{2} (P_0' + 2 P_0'') \cotg \varepsilon + \frac{3}{16} R \cotg \varepsilon \quad (333)$$

und der Auflagerdruck daselbst:

$$V_0 = \frac{P_0'}{2} + P_0'' + \frac{3}{8} R. \quad (334)$$

## § 8. Das Hängewerkdach.

Pfettendach mit einfachem Hängewerk. Die in den Hauptgebänden der Dachconstruktion Fig. 263 vorhandenen Streben GF und G'F können benützt werden, um mit Hinzufügung der Hängesäule FJ und des Unterzuges U die Balken der Dachbalkenlage in der Mitte ihrer Länge zu unterstützen. Hiedurch entsteht das Hängewerkdach Fig. 264, dessen Hauptgebände aus dem Dreieck-Sprengwerk GFG' und aus dem Trapez-Sprengwerk GEE'G' besteht. Was die Ermittlung der in dem Dachbinder wirkenden Kräfte anlangt, so bestimmt man zunächst den von der Dachbalkenlage auf je eine Hängesäule in J übertragenen Auflagerdruck D. Durch diesen entsteht in der Hängesäule die Zugkraft  $Z = D$ . Bezeichnet ferner  $P_1$  den von der Firstpfette auf ein Hauptgebände übertragenen Druck, so ist  $P_1 + Z$  die von den Streben GF und G'F des Hauptgebändes aufzunehmende Last, welche in Componenten  $0a$  und  $a1$  nach den Richtungen genannter Streben zu zerlegen ist. Daher  $N_1 = 0a = a1$  der Druck im oberen Teil je einer Strebe. In den Punkten E und E' kommen die Auflagerdrücke  $P_2 = a2$



hinzu, welche die Mittelpfetten auf die Hauptgebände ausüben. Zur Aufnahme derselben sind die Streben  $GE$ ,  $G'E'$  und der Spannriegel  $EE'$  vorhanden, daher sich  $S = b_2$  als Druck im Spannriegel ergibt und  $N' = ab$  als derjenige Druck, welcher von  $E$  aus zu dem in der Strebe schon vorhandenen Druck hinzukommt. Es ist somit die gesammte Druckbeanspruchung der unteren Strebenabteilungen  $EG$  und  $E'G'$ :  $N_2 = N_1 + N' = 0b$ , welche in  $G$  den Horizontal-schub  $H = cb$  und den Auflagerdruck  $V = 0c$  erzeugt.

Das Trapezsprengwerk  $GE E'G'$ , welches einen Teil dieses Dachbinders bildet, ist nach S. 201 ein labiles Trägersystem, und es tritt bei ungleicher Grösse der Pfettendrucke in  $E$  und  $E'$  eine Verschiebung dieses Trapezes ein, soferne nicht durch die Biegungsfestigkeit der Streben  $GF$  und  $G'F'$  sowie der benachbarten Sparren die Differenz der Spannriegelkräfte aufgenommen wird. Stabil wird das Sprengwerk  $GE E'G'$  durch Einfügung eines Diagonalstabes  $GE'$ , welche Anordnung indessen wegen der grossen Länge, die ein solcher Stab erhalten müsste, und wegen seines geringen Neigungswinkels gegen den Horizont im Allgemeinen nicht zu empfehlen ist.

Derselbe Zweck aber wird durch Anbringung zweier Stäbe  $EJ$  und  $E'J$  erreicht, wodurch zugleich der Spannriegel  $EE'$  überflüssig wird. Hiedurch geht der bisher behandelte Dachbinder in den Dachbinder Fig. 265 über.

Fig. 264.

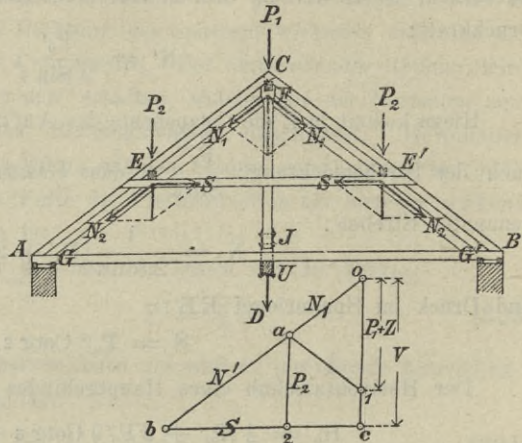
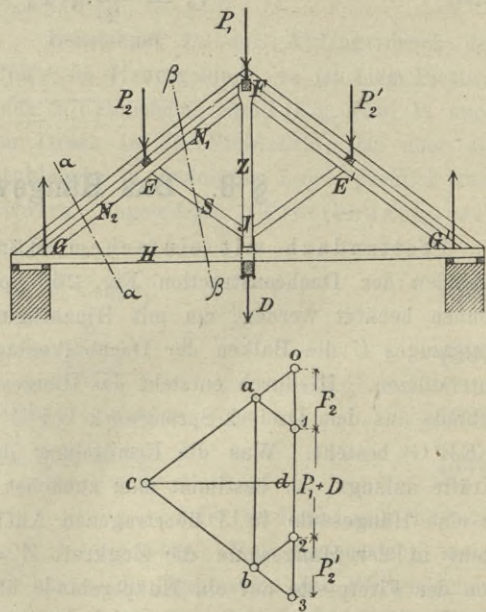


Fig. 265.





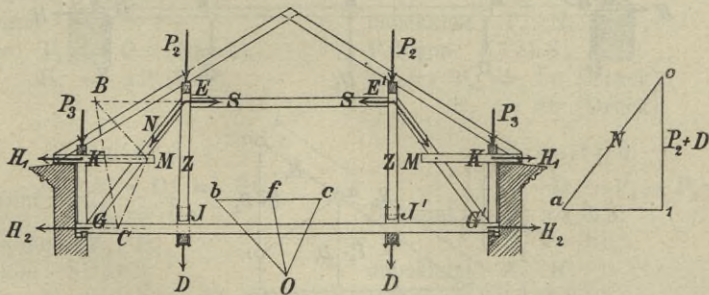
Man trage  $P_2 = 01$ ,  $P_1 + D = 12$ ,  $P_2' = 23$  auf und ziehe durch 0 und 3 Parallele zu den Richtungen der Hauptstreben  $FG$ ,  $FG'$ , ferner durch 1 und 2 Parallele zu den Richtungen der Gegenstreben  $EJ$  und  $E'J'$ , so ergeben die Abschnitte  $0a$  und  $b3$  die in den unteren Strebenhälften durch  $P_2$  und  $P_2'$  hervorgerufenen Drücke, während die Längen  $a1$  und  $2b$  die in den Gegenstreben entstehenden axialen Druckkräfte vorstellen. Die Zugkraft  $Z$  in der Hängesäule ist gleich  $ab - P_1$  und die Componenten  $ac$  und  $cb$  von  $ab$  nach den Richtungen der Hauptstreben liefern die Druckkräfte in den oberen Hälften derselben. Daher Gesamtdruckwirkungen in den unteren Teilen  $EG$  und  $E'G'$  der Hauptstreben gleich  $0c$  und  $c3$ , ferner  $H = dc$  und  $V = 0d$ .

Zu demselben Resultat führt die Schnittmethode (vgl. S. 179). Bezüglich des Schnittes  $\alpha$  ist als äussere Kraft vorhanden die Auflagerreaction  $d0$ . Unbekannt sind die Stabkräfte  $N_2$  und  $H$ , welche das Kräftedreieck  $d0cd$  ergibt:  $N_2 = 0c$  (Druck) und  $H = cd$  (Zug).

Schnitt  $\beta$ , bezüglich dessen bekannt ist die Resultirende der äusseren Kräfte  $d0 - 01 = d1$  und  $H = cd$ , unbekannt dagegen:  $S$  und  $N_1$ , liefert mittels des Kräftepolygons  $d1acd$  die Stabkräfte  $S = 1a$  (Druck) und  $N_1 = ac$  (Druck).

Pfettendach mit doppeltem Hängewerk und Kniestock (Fig. 266). Die Beanspruchung der Sparren und Pfetten entspricht jener beim Pfettendach mit Stuhl (Fig. 259). Demnach wirken, wenn zwischen zwei Hauptgebinden  $n$  Leergebinde liegen, auf je ein Hauptgebinde folgende äussere Kräfte: Die

Fig. 266.



Auflagerdrücke  $D$  der Balkenlage, die Auflagerdrücke  $P_2 = (n + 1)P$  der Mittelpfetten, die Auflagerdrücke  $P_3 = (n + 1)V$  der Fusschwellen und die durch letztere übertragenen Horizontalkräfte  $H_1 = (n + 1)H$ , wobei für  $P$ ,  $V$  und  $H$  die durch die Gleichungen 323, 325 und 324 gegebenen Werte gelten. Die Hängesäulen  $EJ$  und  $E'J'$  werden durch die Zugkräfte  $Z = D$  beansprucht. Man trägt  $P_2 + D = 01$  auf, zieht durch  $O$  die Parallele  $0a$  zu  $EG$  und durch  $1$  eine Horizontale, so ist  $0a = N$ , Strebendruck in  $EG$ , und  $a1$  der Druck  $S$  im Spannriegel  $EE'$ .  $P_3$  wirkt mittels des Kniestock-

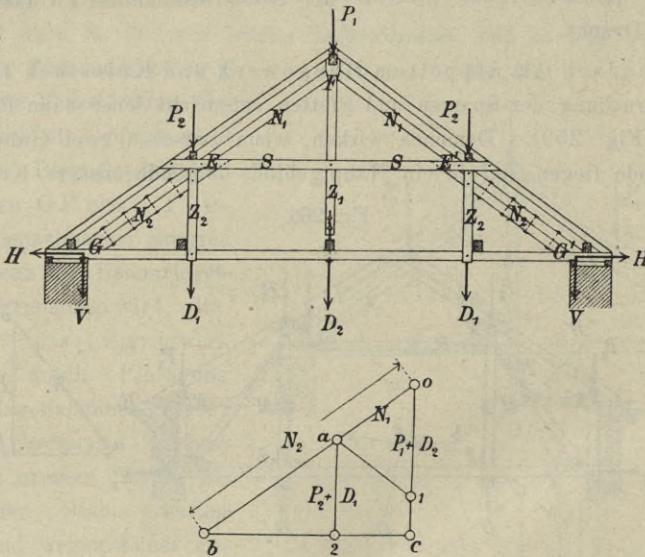


pfostens auf die darunter befindliche Mauer; zur Aufnahme aber des Horizontalschubes  $H_1$ , welcher andernfalls die Kniestockwand auf Umkanten beanspruchen würde, dienen die Zangenhölzer KM, die diesen Horizontalschub auf die Streben übertragen. Demzufolge entstehen durch  $H_1$  in E und G zwei wagrechte Auflagerdrücke, welche man mittels des Kräftepolygons  $Obc$ , in dem  $H_1 = cb$  aufgetragen wurde, und des in Fig. 266 punctirten Seilpolygons  $MBC$  leicht erhält. Somit ergibt sich als resultirender Druck im Spannriegel:  $N = a1 - fb$ , während in G ein gesamtter Horizontalschub  $H_2 = 1a + cf$  erhalten wird.

Vorstehender Dachbinder ist gleich dem doppelten Hängewerk (Fig. 264) statisch bestimmt labil und kann durch Einfügung eines Diagonalstabes in das Mittelfeld stabil gemacht werden.

Beim dreifachen Hängewerkdach (Fig. 267) erhalten die Tramen der Balkenlage zwischen den Endauflagern drei Unterstüzungen. Das Hauptgebände besteht aus der Vereinigung eines einfachen Hängewerks  $GFG'$  und eines doppelten Hängewerks  $GEE'G'$ .

Fig. 267.



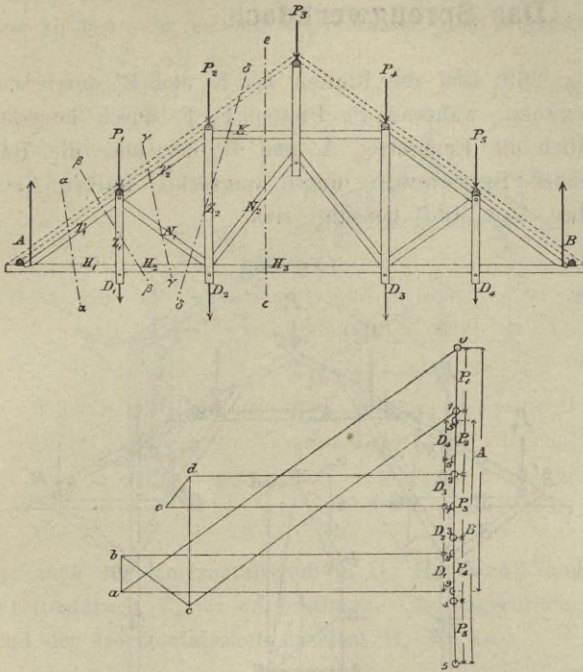
Die Zugkräfte in den Hängesäulen sind gleich den zugehörigen Auflagerdrücken der Balkenlage:  $Z_1 = D_2$ ,  $Z_2 = D_1$ .

Sind  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  die Auflagerdrücke der Pfetten und macht man:  $P_1 + D_2 = 01$  und  $P_2 + D_1 = a2$ , so ergibt sich  $N_1 = 0a = a1$ ,  $N_2 = 0b$ ,  $S = b2$ ,  $H = cb$  und  $V = 0c$ .

Fig. 268 zeigt ein Hängewerkdach mit vierfacher Unterstützung der Dachbalken zwischen deren Endauflagern. Die Kräfte, welche in diesem Dach-



Fig. 268.



binder auftreten, können wie folgt bestimmt werden :

Man trage die äusseren Kräfte des Systems in derselben Reihenfolge, in der sie an dem Umfange desselben wirken, zu einem Kräftezug zusammen, so dass (Fig. 268<sup>a</sup>) 01 = P<sub>1</sub>, 12 = P<sub>2</sub> . . . . . 45 = P<sub>5</sub>, 55' = Auflagerreaction B, 5'6 = D<sub>4</sub>, 67 = D<sub>3</sub>, 78 = D<sub>2</sub>, 89 = D<sub>1</sub> und 90 = A. In dem man nun der Reihe nach die Schnitte α, β u. s. f. führt, ergeben sich die Stabkräfte wie folgt:

Fig. 268<sup>a</sup>.

Schnitt α.

Bekannt: A = 90,  
 unbekannt: H<sub>1</sub>, T<sub>1</sub>,  
 Polygon: 90 a 9,  
 daher: T<sub>1</sub> = 0 a (Druck),  
 H<sub>1</sub> = a 9 (Zug).

Schnitt β.

Bekannt: { A - D<sub>1</sub> = 80,  
 T<sub>1</sub> = 0 a,  
 unbekannt: Z<sub>1</sub>, H<sub>2</sub>,  
 Polygon: 80 a b 8,  
 daher: Z<sub>1</sub> = a b = D<sub>4</sub> (Zug),  
 H<sub>2</sub> = b 8 = H<sub>1</sub> (Zug).

Schnitt ε.

Bekannt: { A - D<sub>1</sub> - D<sub>2</sub> - P<sub>1</sub> - P<sub>2</sub> = 72,  
 K = 2 d,  
 unbekannt: H<sub>3</sub>, N<sub>2</sub>,  
 Polygon: 72 d e 7,  
 daher: N<sub>2</sub> = d e (Druck),  
 H<sub>3</sub> = e 7 (Zug).

Schnitt γ.

Bekannt: { A - D<sub>1</sub> - P<sub>1</sub> = 81,  
 H<sub>2</sub> = b 8,  
 unbekannt: T<sub>2</sub>, N<sub>1</sub>,  
 Polygon: 81 c b 8,  
 daher: T<sub>2</sub> = 1 c (Druck),  
 N<sub>1</sub> = c b (Druck).

Schnitt δ.

Bekannt: { A - D<sub>1</sub> - P<sub>1</sub> - P<sub>2</sub> = 82,  
 H<sub>2</sub> = b 8,  
 N<sub>1</sub> = b c,  
 unbekannt: Z<sub>2</sub>, K,  
 Polygon: 82 d c b 8,  
 daher: Z<sub>2</sub> = d c (Zug),  
 K = 2 d (Druck).



## § 9. Das Sprengwerkdach.

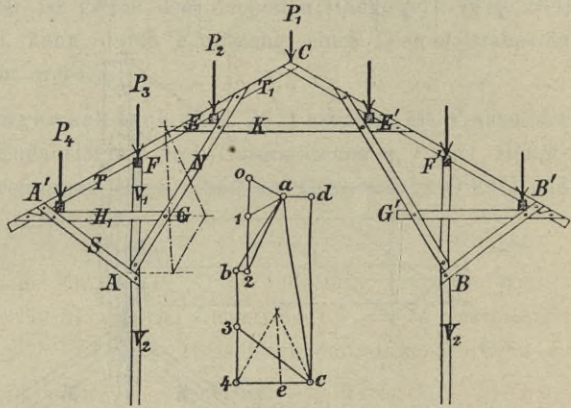
Beim Dachbinder Fig. 269 sind die Pfetten bei E und E' durch das Sprengwerk AEE'B unterstützt, während die Pfetten F, F' durch lotrechte Säulen getragen und endlich die Endpfetten A' und B' der über die Umfassungswände vorspringenden Sparrenenden durch wagrechte Balken A'G, B'G' und durch die Streben A'A, B'B befestigt sind.

Wenn nun  $P_1 = 01$  die Firstbelastung vorstellt und  $P_2 = 12$ ,  $P_3 = b3$ ,  $P_4 = 34$  die von den Pfetten auf das Hauptgebände übertragenen Lasten sind, so erhält man die Sparrendrücke  $T_1$  in CE und CE' durch Zerlegung von  $P_1$  in Componenten nach den Sparrenrichtungen, daher  $T_1 = a1$ .

In E wird  $P_2$  vom Spannriegel EE' und der Strebe EA aufgenommen und es bedingt gleichzeitig die Art der Befestigung der letzteren mit dem Sparren eine Übertragung des Sparrendruckes  $T_1$  auf den Knotenpunkt E. Man hat deshalb die Resultierende a2 aus  $T_1$  und  $P_2$  in Componenten nach EE' und EA zu zerlegen, so dass  $K = b2$  (Druck) und  $N = ab$  (Druck). Die Beanspruchung der Säule FA ist  $V_1 = P_3 = b3$ . In A' sind zur Unterstützung der Last  $P_4 = 34$  die Constructionsteile A'G und A'A vorhanden, daher sich für A'G eine Zugwirkung  $H_1 = c4$  und für A'A ein Druck  $S = 3c$  ergibt. Letzterer setzt sich in A mit  $P_3$  und  $N$  zur Resultierenden ac zusammen, so dass Stützendruck  $V_2$  im unteren Teil der Säule gleich ist dc und der Horizontalschub in A:  $H_2 = ad$ . Die Kraft  $H_1$ , welche auf die Strebe AE übertragen wird, erzeugt mittels derselben in A und E die wagrechten Auflagerdrücke e4 und ce, so dass resultirender Horizontalschub in A gleich  $e4 - ad$  und resultierende Beanspruchung des Spannriegels gleich  $ce - b2$ .

Der Dachbinder Fig. 270 setzt sich aus den drei Sprengwerken ACB, AEE'B und GFEE'F'G' zusammen. Der Firstbelastung  $P_1 = 01$  entspricht in CE der Druck  $T_1 = 0a$ , welcher sich in E mit  $P_2 = a2$  zur Resultierenden 02 vereinigt, so dass für den Spannriegel EE' der Druck  $S = b2$  und für den Strebenteil EF der Druck  $T_2 = 0b$  entsteht.  $P_3 = b3$

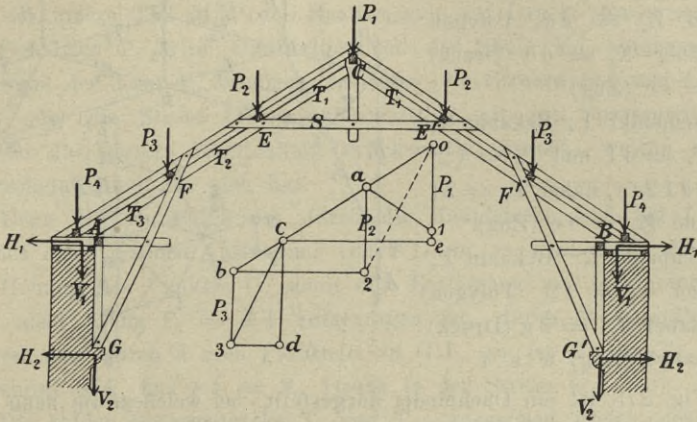
Fig. 269.





zerlegt sich in Componenten nach den Richtungen FE und FG, daher Pressung in FA:  $T_3 = 0b - bc = 0c$  und Pressung in FG =  $c\beta$ . Hiemit

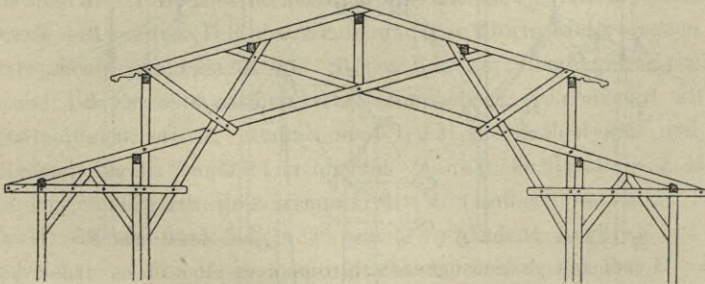
Fig. 270.



ist auch der Horizontalschub in G:  $H_2 = d\beta$  und der daselbst herrschende Verticaldruck  $V_2 = cd$  bestimmt. Auflagerdruck in A ist  $V_1 = 0e + P_4$  und der Horizontalschub daselbst  $H_1 = ec$ .

Für die Beurteilung der Dachconstruction Fig. 271 sind folgende Gesichtspunkte massgebend: Das Dachgerüste des Mittelschiffes kann als Fachwerkträger von der in Fig. 272 skizzirten Form betrachtet werden. Derselbe

Fig. 271.



ist nach III, § 12 statisch bestimmt und stabil und überträgt bei lotrechter Belastung auf die Stützpunkte A und B nur lotrechte Auflagerdrücke.

Wenn angenommen werden darf, dass die bezüglich der Verbindungen der Stäbe an den Knotenpunkten erforderlichen Voraussetzungen erfüllt werden, so ergeben sich die Stabkräfte nach Fig. 272 wie folgt:

Knotenpunkt a: Bekannt  $A = c0$ , daher  $N_1 = 0c$  (Druck) und  $S_1 = 0$ .



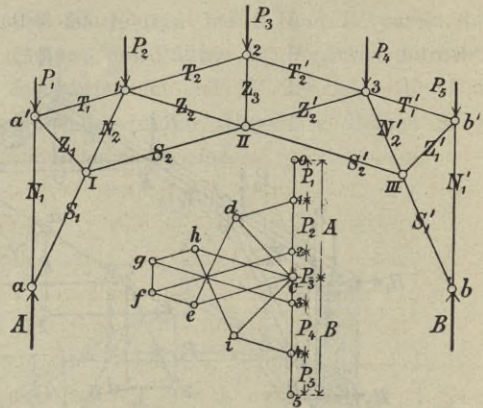
Knotenpunkt  $a'$ : Bekannt  $N_1 = c0$  und  $P_1 = 01$ , Polygon  $e1d$ : daher  $T_1 = 1d$  (Druck) und  $Z_1 = dc$  (Zug).

Knotenpunkt I: Bekannt  $S_1 = 0$  und  $Z_1 = cd$ , Polygon  $cdec$ , daher  $N_2 = de$  (Druck) und  $S_2 = ec$  (Zug).

Knotenpunkt 1: Bekannt  $N_2 = ed$ ,  $T_1 = d1$  und  $P_2 = 12$ , Polygon  $ed12fe$ , daher  $T_2 = 2f$  (Druck) und  $Z_2 = fe$  (Zug).

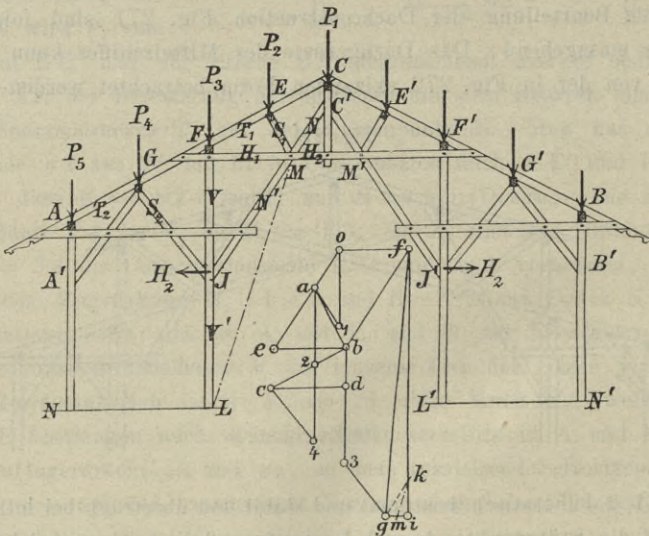
Knotenpunkt 2: Bekannt  $P_3 = 23$  und  $T_2 = f2$ , Polygon  $f23gf$ , daher  $T_2' = 3g$  (Druck) und  $Z_3 = gf$  (Zug) u. s. f.

Fig. 272.



In Fig. 273 ist ein Dachbinder dargestellt, bei welchem die neun Pfetten, die den Sparren zum Auflager dienen, durch drei in den Punkten  $A', B', J$  und  $J'$  unterstützte Sprengwerke getragen werden.  $P_1, P_2 \dots P_5$  seien die Auflagerdrücke der Pfetten. Der Firstpfettendruck  $P_1$ , welcher von den beiden

Fig. 273.



Hauptstreben  $C'J$  und  $C'J'$  aufgenommen wird, zerlegt sich in zwei Componenten  $N = 0a = a1$  nach den Richtungen derselben. Die Last  $P_2 = a2$  wirkt auf den Sparren  $EF$  und auf die Strebe  $EM$ , mithin ergibt sich, wenn  $ab$  parallel  $EM$  und  $2b$  parallel der Sparrenrichtung gezogen wird, Strebendruck  $S_1 = ab$  und Sparrendruck  $T_1 = b2$ .  $S_1$  pflanzt sich nach dem



Punkte M fort, in welchem die Hauptstrebe und der Spannriegel zusammenstossen. Die Zerlegung nach den Richtungen genannter Stäbe ergibt die Componente  $ae$ , welche, zu  $0a$  addirt, die Gesamtpressung  $N' = 0e$  des unteren Teiles MJ der Hauptstrebe liefert; durch die andere Componente  $eb$  wird der innere Teil MM' des Spannriegels auf Druck beansprucht.

Die Last  $P_3$  wird unmittelbar von der Säule FJ aufgenommen. Zur Aufnahme der Last  $P_4$  kommen entweder die Streben GJ und GA' in Betracht oder die Strebe GJ gemeinschaftlich mit dem Sparrenteil GA. Es soll hier die letztere Möglichkeit berücksichtigt werden, welche die grössere Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Denn tritt in Folge des durch die Hauptstrebe C'J bei J ausgeübten Schubes eine seitliche Ausbiegung von FL ein, so wird durch die Strebe JG eine Hebung des Punktes G, somit eine Entlastung von GA' eintreten. Man zieht also, wenn  $P_4 = 24$  aufgetragen ist, durch 2 eine Parallele zum Sparren und durch 4 eine Parallele zu GJ, so ist  $2c = T_2$ , Druck im Sparrenteil GA, und  $c4 = S_2$ , Druck in der Strebe GJ.

Die beiden Sparrendrücke  $T_1$  und  $T_2$ , zusammen gleich der Kraftlänge  $bc$ , mit den Vertical- und Horizontalprojectionen  $bd$  und  $dc$ , werden auf den Punkt F übertragen, den einzigen, in welchem eine Befestigung in wagrechtem Sinne vorhanden, und es entsteht hier für die Säule die Druckkraft  $bd$ , zu welcher sich  $P_3 = d3$  addirt, so dass die Beanspruchung V des Säulenstückes FJ  $= b3$ . Die Horizontalcomponente  $dc$  von  $bc$  beansprucht den äusseren Teil MF des Spannriegels auf Zug.

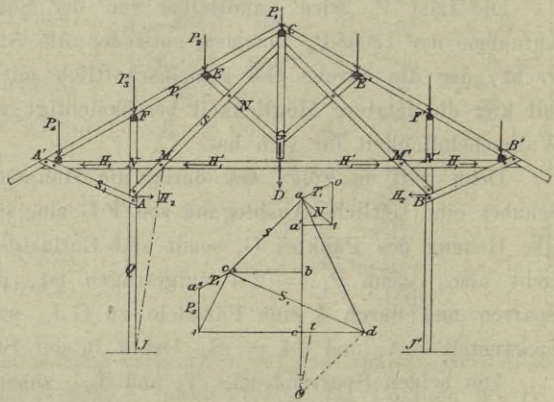
Im Punkte J treffen sich drei Stäbe. Trägt man  $fb$  gleich und parallel  $0e$  auf, ferner  $3g$  gleich und parallel  $c4$ , so ergibt sich  $fg$  als Resultirende der in den drei Stäben wirkenden Kräfte mit der Verticalprojection  $fi = V' =$  Druck im unteren Teil der Säule und der Horizontalprojection  $ig = H_2$ . Letztere Kraft beansprucht die Stütze FL auf Biegungsfestigkeit; sie ruft in F und L wagrechte Auflagerreactionen hervor, welche man mittels Kräfte- und Seilpolygons erhält. Indem man LJM als Seilpolygon und k als Pol des Kräftepolygons benützt, schneidet ein zur Schlusslinie LM paralleler Strahl km die Horizontalreactionen  $H' = mg$  und  $H'' = im$  in F und L ab. Durch  $H' = mg$  wird die in F schon vorhandene Zugkraft  $dc$  des Teiles FM vermehrt, so dass die gesammte Zugbeanspruchung daselbst  $H_1 = dc + mg$ . Da diese Zugkraft sich auf den inneren Teil MM' des Spannriegels fortpflanzt, in welchem durch EM eine Axialkraft  $eb$  von entgegengesetztem Vorzeichen hervorgebracht wird, so ist die resultirende Stabkraft in MM':  $H_2 = dc + mg - eb$ .

Der Dachbinder Fig. 274 besteht aus einem Hängewerk A'CB', das mittels der Streben A'A und B'B durch Säulen FJ, F'J' unterstützt und mit dem Sprengwerk ACB combinirt ist. Zur Befestigung der Pfetten E und E' dienen die Streben EG und E'G.



Man zerlegt  $P_2 = 01$  in Componenten nach den Richtungen  $EF$  und  $EG$  und erhält dadurch Strebendruck  $T_1 = 0a$  und Strebendruck  $N = a1$ . Die Verticalprojection  $aa'$  des letzteren vermehrt durch die gleiche, von  $E'G$  herrührende Beanspruchung, sowie durch den Auflagerdruck  $D$  des Tramens  $MM'$  liefert den in  $CG$  herrschenden Zug  $Z$ . Letzterer sammt dem Pfettendruck  $P_1$  ist in Componenten nach  $CM$  und  $CM'$  zu zerlegen. Macht man also  $a'b = \frac{P_1 + Z}{2}$  und zieht man durch  $b$  die Horizontale  $bc$ , ferner durch  $a$  die Parallele  $ac$  zu  $CM$ , so ergibt sich Strebendruck  $S = ac$ .

Fig. 274.



Der Auflagerdruck  $P_3$  der Pfette bei  $F$  wird unmittelbar von der Stütze  $FA$  aufgenommen, während Strebendruck  $T_1 = 0a = ca''$  sich nach  $A'$  fortsetzt und dortselbst mit  $P_4 = a''4$  zur Resultirenden  $c4$  vereinigt. Diese wird aufgenommen von  $A'N$  und  $A'A$  und ruft in ersterem Constructionsteil die Horizontalzugkraft  $H_1 = d4$ , in letzterem die Druckkraft  $S_1 = cd$  hervor.

Nun vereinigt man  $S_1$  und  $S$  zu ihrer Resultirenden  $ad$ , wodurch die in  $A$  auftretende Horizontalkraft  $ed = H_2$  und der Stützendruck  $Q$  in  $AJ$  gleich  $ae + P_3$  erhalten wird.  $H_2$  ruft in den Befestigungspunkten  $N$  und  $J$  Auflagerreactionen hervor, welche sich mit Hilfe des Kräftepolygons  $eOd$  und des Seilpolygons  $JAM$  als Längen  $td$  und  $et$  ergeben, so dass jetzt Zugspannung  $H_1'$  in  $MM'$  gleich  $d4 - td = t4$  erhalten wird.

## § 10. Das Mansard-Dach.

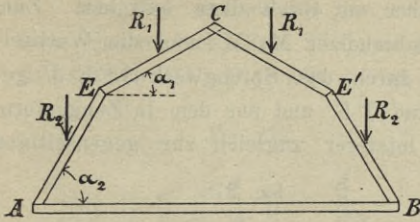
Das Gebinde des Mansard-Daches hat zu beiden Seiten des Firstes zwei unter einem Winkel zusammenstossende Sparren, wodurch gebrochene Dachflächen gebildet werden.

Die für die Standfestigkeit günstigste Form der Begrenzung des Daches ist offenbar jene, bei welcher das Sparrengerüst  $AECE'B$  (Fig. 275) unter Einwirkung der vorhandenen Belastung und ohne Verbindung der Sparren



durch weitere Constructionsteile im Gleichgewicht erhalten werden kann.

Fig. 275.



Die hierzu erforderlichen Bedingungen sind durch die Gleichungen 225 und 226, S. 169, gegeben, in welchen

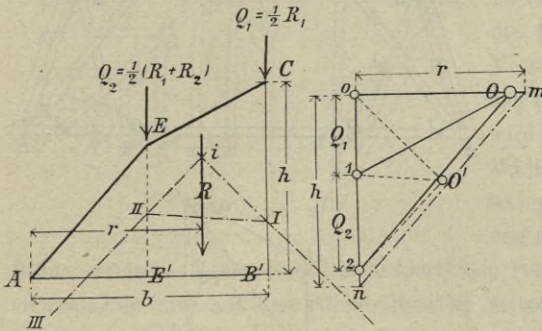
$$Q_1 = \frac{R_1}{2} \text{ und } Q_2 = \frac{R_1 + R_2}{2} \text{ zu}$$

setzen ist. Man erhält:

$$\frac{\text{Cotg } \alpha_1}{\text{Cotg } \alpha_2} = \frac{2 R_1 + R_2}{R_1}.$$

*Graphische Lösung.* Ist  $AB' = b$  die halbe Spannweite,  $B'C = h$  die Höhe des Daches und soll der Brechungspunkt E des Sparrengebindes in die Verticale durch E' (Fig. 276) zu liegen kommen, so erhält man nach S. 170 die der Gleichgewichtslage der Sparren entsprechenden Richtungen derselben, wenn man  $01 = Q_1$ ,  $12 = Q_2$  aufträgt und das einem beliebig angenommenen Pol O' entsprechende Kräfte- und Seilpolygon construiert.

Fig. 276.



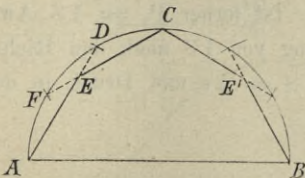
Der Schnittpunkt i der äussersten Seiten des letzteren liefert den Abstand r der Resultirenden R der Kräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  vom Punkte A, und indem man  $0n = h$  und  $0m = r$  aufträgt und zur Verbindungslinie mn die Parallele 2O zieht, ergibt sich in dem zum Pole O construirten Seilpolygon CEA die gesuchte Lage der Sparren.

Für den besonderen Fall, dass  $R_1 = R_2$  gesetzt werden darf, hat man:

$$\frac{\text{Cotg } \alpha_1}{\text{Cotg } \alpha_2} = \frac{3}{1}.$$

Ist auch  $AB' = B'C$  und soll  $AE = EC$  sein, so beschreibe man den Halbkreis ACB (Fig. 277), trage den Radius AD von A nach D auf und ebenso von C nach F, dann ergeben die Geraden AE und EC die geforderte Dachbegrenzung.

Fig. 277.



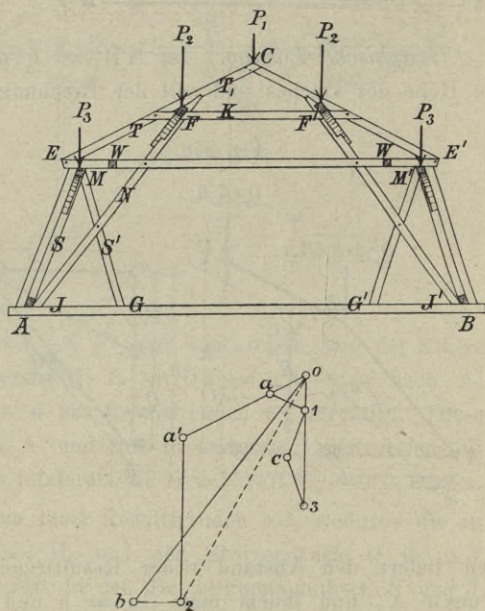
Wenn das Mansard-Dach nicht die der Gleichgewichtslage des Sparrengebindes entsprechende Form erhalten kann, so ist für eine hinreichende Befestigung der Punkte E und E' zu sorgen, was in der Regel mittels eines stehenden oder liegenden Stuhls geschieht.



Fig. 278 zeigt ein Mansard-Dach, bei welchem die Sparren des oberen Dachgerüsts  $ECE'$  in der Mitte ihrer Länge durch Pfetten  $F$  und  $F'$  unterstützt sind, mit ihren unteren Enden aber auf Stichbalken aufrufen. Zum Auflager für die letzteren dienen die Rahmhölzer  $M, M'$  und die Wechselbalken  $W$ . Die Pfetten  $F, F'$  werden durch das Sprengwerk  $JFF'J'$  getragen, bestehend aus den Streben  $JF$  und  $J'F'$  und aus dem in Zangenform angeordneten Spannriegel  $FF'$ , welcher letzterer zugleich zur gegenseitigen Absteifung der beiden oberen Dachflächen dient. Das untere Dachgerüste besteht in den Hauptgebänden aus den wagrechten Tramen  $AB$ , aus den geneigten Stuhlsäulen  $AM$  und  $BM'$ , welche oben und unten in Rahmhölzer eingreifen, und ist oben durch den in Zangenform angeordneten Spannriegel  $EE'$  abgeschlossen. Zur Versteifung der Stuhlsäulen und zum Zweck der Verringerung der freien Länge der Streben  $JF$  und  $J'F'$  sind die Gegenstreben  $MG$  und  $M'G'$  angebracht.

Ist  $P_1 = 01$  die Firstbelastung, so erhält man die Sparrendrücke  $T_1$  durch Zerlegung von  $01$  in die Componenten  $0a$  und  $a1$  nach den Richtungen der Sparren. Diese Sparrendrücke pflanzen sich nach  $F$  und  $F'$  fort und werden vom Sprengwerk  $JFF'J'$  aufgenommen. Ist  $aa'$  der (durch die Pfette auf das Hauptgebäude übertragene) Sparrenschub der Leergebinde und  $a'2$  die von der Pfette auf das Hauptgebäude übermittelte lotrechte Last, so hat man die Mittelkraft  $02$  aus  $0a'$  und  $a'2$  in Componenten nach den Richtungen  $FF'$  und  $F'J$  zu zerlegen, um den Druck im Spannriegel  $K = b2$  und den Druck in der Strebe  $FJ: N = 0b$  zu erhalten. Ist ferner  $P_3 = 13$  Auflagerdruck in  $M$ , so ergeben sich durch Zerlegung von  $13$  nach den Richtungen  $MA$  und  $MG$  Druck in der Stuhlsäule  $S = 1c$  und Druck in der Gegenstrebe  $S' = c3$ .

Fig. 278.

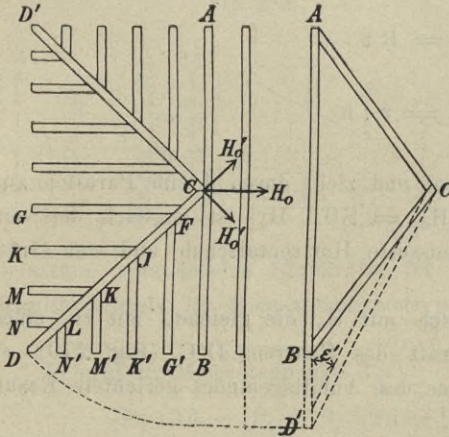




### § 11. Das Walmdach.

Das über einem Raum von rechteckförmiger Grundfläche angeordnete einfache Sparrendach (Fig. 279) sei mit einem Walm versehen, der durch die Gratsparren DC, D'C und die an dieselben sich anschliessenden Schiftsparren gebildet ist. Jeder Schiftsparren ist

Fig. 279.



Jeder Schiftsparren ist durch eine gleichmässig über seine Länge verteilte Belastung beansprucht, welche einer Belastungsfläche von der Länge des Schifters und Breite gleich der Entfernung der Schifter entspricht.

Da die Flächen (Schmiegen), nach welchen die Schiftsparren an die Gratsparren sich anschliessen, Verticalebenen sind und die Befestigung durch Nagelung bewerkstelligt wird, so ist anzunehmen, dass der Widerstand der Gratsparren lotrecht ist, d. h. dass eine Druckübertragung auf die Gratsparren in lotrechtem Sinne erfolgt.

Jeder Schifter äussert also (vergl. S. 232, Fig. 250) auf den Gratsparren und auf den Stichbalken an seinem unteren Ende Auflagerdrücke je gleich der Hälfte seiner Belastung und übt keinerlei Schub gegen jenen Stichbalken aus.

Demnach kommen, wenn in jedem der Gratpunkte F, J, K und L zwei Schifter zusammentreffen, auf die genannten Punkte bestimmte, leicht zu er-

Fig. 280.

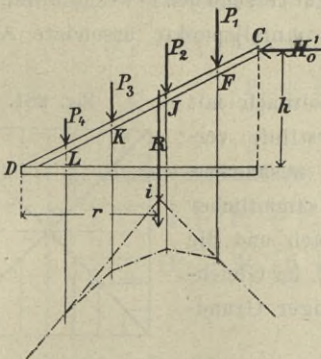
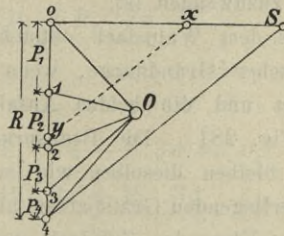


Fig. 280<sup>a</sup>.



mittelnde Verticaldrücke  $P_1, P_2, P_3$  und  $P_4$  (Fig. 280). Man trägt nun (Fig. 280<sup>a</sup>)  $P_1 = 01, P_2 = 12, P_3 = 23$  und  $P_4 = 34$  auf, zeichnet für den



in O angenommenen Pol O Kräfte- und Seilpolygon und erhält im Schnitt i der äussersten Seilpolygonseiten den Angriffsort der Resultirenden R der Gratbelastung mit der Entfernung r von D. Da sich der Gratsparren DC an seinem oberen Ende an das Anfallsgebilde AB und den anderen Gratsparren mit zwei zu einander senkrechten Verticalebenen anlehnt, so besteht für denselben die resultierende Gegenwirkung an der Walmspitze in einer Horizontalkraft  $H_0'$ , welche in der Lotebene des Grates wirkt und der Bedingung:

$$H_0' h = R r$$

oder

$$H_0' : R = r : h$$

zu genügen hat.

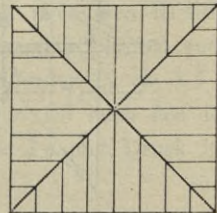
Man trägt  $Oy = h$ ,  $Ox = r$  auf und zieht durch 4 eine Parallele zur Verbindungslinie xy, so erhält man  $H_0' = SO$ .  $H_0'$  ist zugleich der vom Gratsparren an seinem Fussende geäusserte Horizontalschub und vom Gratschub balken aufzunehmen.

An der Walmspitze vereinigt sich mit  $H_0'$  die gleiche, mit  $H_0'$  einen rechten Winkel bildende Horizontalkraft des Sparrens D'C (Fig. 279), so dass aus beiden eine normal zur Ebene des Anfallsgebildes gerichtete Resultirende  $H_0$  sich ergibt.

Der so erhaltene Gesamtschub  $H_0$  muss durch geeignete Längsverbindungen (Firstpfette) des Daches auf entsprechend feste Punkte übergeführt oder durch den gleichen und entgegengesetzten Schub eines gegenüberliegenden Walms aufgehoben werden. Sind bei unsymmetrisch zur Firstlinie angeordnetem Walm die Kräfte  $H_0'$  ungleich, so ist die Resultirende beider schräg gegen die Ebene des Anfallsgebildes gerichtet, kann daher in eine Componente senkrecht zu jener Ebene und eine in der Ebene des Anfallsgebildes wirkende Componente zerlegt werden. Letztere sucht den Anfallspunkt in der Ebene des Anfallsgebildes wagrecht zu verschieben, weshalb in solchem Falle der Befestigung der Gratsparren am Anfallspunkte besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden ist.

Aus dem Walmdach entsteht ein Zeldach mit quadratischer Grundfläche, wenn die Firstlinie verschwindet und die beiden Anfallspunkte zusammenfallen (Fig. 281). Die Beanspruchungen sämtlicher Sparren bleiben dieselben wie im Walmdach und die gegenüberliegenden Gratsparren halten sich im Gleichgewicht. Über das Zeldach mit vieleckiger Grundfläche siehe § 20.

Fig. 281.



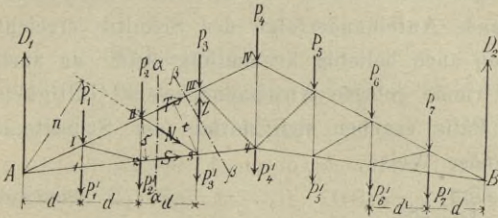


## § 12. Dachbinder nach dem englischen System.

### A) Beanspruchung durch Eigengewicht.

Es wird angenommen, dass das Eigengewicht in Form von concentrirten Kräften in den Knotenpunkten des Dachbinders wirke und in solcher Weise

Fig. 282.



sowohl auf die oberen als auf die unteren Knotenpunkte entsprechend verteilt sei. Hienach seien  $P_1, P_2, P_3, \dots$  die in den oberen Knotenpunkten des Dachbinders (Fig. 282) angreifenden Lasten. Rechnerisch erhält man die in Folge dieser

Belastung entstehenden Stabkräfte für jedes beliebige Feld durch geführte Schnitte mittels der Momentenmethode nach S. 188 wie folgt:

Schnitt  $\alpha$ , Momentenpunkt 3:

$$D_1 \cdot 3d - (P_1 + P_1') \cdot 2d - (P_2 + P_2') \cdot d + T \cdot t = 0,$$

$$T = - \frac{D_1 \cdot 3d - (P_1 + P_1') \cdot 2d - (P_2 + P_2') \cdot d}{t}; \quad (335)$$

Schnitt  $\alpha$ , Momentenpunkt II:

$$D_1 \cdot 2d - (P_1 + P_1') \cdot d - S \cdot s = 0,$$

$$S = \frac{D_1 \cdot 2d - (P_1 + P_1') \cdot d}{s}; \quad (336)$$

Schnitt  $\alpha$ , Momentenpunkt A:

$$(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d + N \cdot n = 0,$$

$$N = - \frac{(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d}{n}; \quad (337)$$

Schnitt  $\beta$ , Momentenpunkt A:

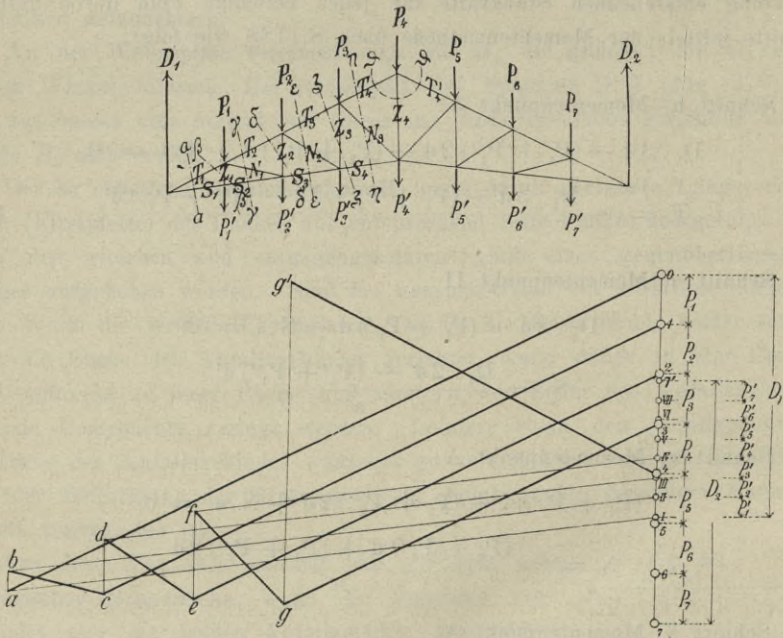
$$(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d + P_3' \cdot 3d - Z \cdot 3d = 0,$$

$$Z = \frac{(P_1 + P_1') \cdot d + (P_2 + P_2') \cdot 2d + P_3' \cdot 3d}{3d}. \quad (338)$$

Graphische Bestimmung der Stabkräfte. Man trägt die den Dachbinder angreifenden äusseren Kräfte in derselben Reihenfolge, in welcher sie an dem Umfang desselben wirken, zu einem Kräftezug zusammen, so dass

01 =  $P_1$ , 12 =  $P_2 \dots 67 = P_7$ ,  $77' = D_2$ ,  $7'VII = P_7'$ ,  $VII VI = P_6'$ ,  $VIV = P_5'$ ... III =  $P_1'$ , endlich  $IO = D_1$  (Fig. 283). Dann führt man nach dem auf S. 179 dargelegten Verfahren eine Anzahl Schnitte, bringt die an den bezüglichen Trägerfragmenten wirkenden äusseren und inneren Kräfte ins Gleichgewicht und erhält aus den hierbei gebildeten Kräftepolygone die unbekannt Stabkräfte. Die Anwendbarkeit des Verfahrens hängt von der Möglichkeit ab, die Schnitte so zu führen, dass immer nur zwei Constructions-  
 teile mit unbekannt Stabkräften getroffen werden, was in vielen Fällen (Ausnahme S. § 13) durch entsprechende Aufeinanderfolge der Schnitte erreicht werden kann. Die Schnitte können auch beliebig krummlinig sein, da auch für solche die dem Verfahren zu Grunde gelegte Anschauungsweise Gültigkeit behalten muss. Im vorliegenden Falle ergeben sich mittels der Schnitte  $\alpha$  bis  $\vartheta$  die Stabkräfte in nachstehender Weise:

Fig. 283.



Schnitt  $\alpha$ .

Bekannt:  $D_1 = IO$ ,  
 unbekannt:  $T_1, S_1$ ,  
 Polygon:  $IOaI$ ,  
 daher:  $T_1 = 0a$  (Druck),  
 $S_1 = aI$  (Zug).

Schnitt  $\beta$ .

Bekannt:  $\begin{cases} D_1 - P_1' = II0, \\ T_1 = 0a, \end{cases}$   
 unbekannt:  $Z_1, S_2$ ,  
 Polygon:  $II0abII$ ,  
 daher:  $Z_1 = ab$  (Zug),  
 $S_2 = bII = aI$  (Zug).



Schnitt  $\gamma$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} D_1 - (P_1 + P_1') = \text{II } 1, \\ S_2 = b \text{ II}, \end{cases}$$

unbekannt:  $T_2, N_1$ ,

Polygon: II 1 c b II,

daher:  $T_2 = 1c$  (Druck),

$N_2 = cb$  (Druck).

Schnitt  $\delta$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} D_1 - (P_1 + P_1' + P_2') \\ \quad \quad \quad = \text{III } 1, \\ T_2 = 1c, \end{cases}$$

unbekannt:  $Z_2, S_3$ ,

Polygon: III 1 c d III,

daher:  $Z_2 = cd$  (Zug),

$S_3 = d \text{ III}$  (Zug).

Schnitt  $\varepsilon$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} D_1 - (P_1 + P_2 + P_1' \\ \quad \quad \quad + P_2') = \text{III } 2, \\ S_3 = d \text{ III}, \end{cases}$$

unbekannt:  $T_3, N_2$ ,

Polygon: III 2 e d III,

daher:  $T_3 = 2e$  (Druck),

$N_2 = ed$  (Druck).

Schnitt  $\zeta$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} D_1 - (P_1 + P_2 + P_1' + P_2' \\ \quad \quad \quad + P_3') = \text{IV } 2. \end{cases}$$

$T_3 = 2e$ ,

unbekannt:  $Z_3, S_4$ ,

Polygon: IV 2 e f IV,

daher:  $Z_3 = ef$  (Zug),

$S_4 = f \text{ IV}$  (Zug).

Schnitt  $\eta$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} D_1 - (P_1 + P_2 + P_3 + P_1' \\ \quad \quad \quad + P_2' + P_3') = \text{IV } 3, \\ S_4 = f \text{ IV}, \end{cases}$$

unbekannt:  $T_4, N_3$ ,

Polygon: IV 3 g f IV,

daher:  $T_4 = 3g$  (Druck),

$N_3 = gf$  (Druck).

Schnitt  $\vartheta$ .

$$\text{Bekannt: } \begin{cases} P_4 = 34, \\ T_4 = g3, \end{cases}$$

unbekannt:  $T_4', Z_4$ ,

Polygon: g 3 4 g' g,

daher:  $T_4' = 4g'$  (Druck),

$Z_4 = g'g$  (Zug).

Die Stabkräfte der rechtsseitigen Trägerhälfte sind bei symmetrischer Belastung gleich den entsprechenden der linken Trägerhälfte. Aus der Construction geht unmittelbar hervor, dass die Kräfte in den Gurtungsstäben bei gleichbleibenden übrigen Verhältnissen sich verringern, wenn der Neigungswinkel der oberen Gurtung gegen den Horizont wächst, dass dagegen mit zunehmender Neigung der unteren Gurtung, wodurch der Vorteil verminderter Länge der Füllungsglieder gewonnen wird, diese Stabkräfte vergrößert werden.

## B) Beanspruchung durch Schneelast.

Die Schneelast, welche selbstverständlich nur in der oberen Gurtung des Dachbinders als angreifend zu betrachten ist, kann sich sowohl über die ganze Dachfläche als auch nur über einzelne Teile derselben erstrecken. Es handelt sich also darum zu untersuchen, welche Lastverteilung für die einzelnen Stäbe die gefährlichste ist.







Stabkräften  $N$ ,  $S$ ,  $T$ , nur die Auflagerreaction  $D_1$ , und es ist sonach, da für den Drehpunkt  $A$  die Momentengleichung:

$$Nn = 0,$$

die Stabkraft

$$N = 0.$$

Jede links vom Knotenpunkt  $III$ , welcher für die Diagonale  $II3$  die Belastungsscheide bildet, aufgebrachte Einzellast erzeugt also in der Diagonale Druckspannung, während alle rechts von  $III$  befindlichen Lasten keine Wirkung auf den Diagonalstab äussern. Dies gilt indessen nur für die Diagonalen der linken Trägerhälfte. Gehört die Diagonale, wie z. B.  $II'3'$  (Fig. 286) der rechtsseitigen Trägerhälfte an, und fällt dieselbe gegen die Trägermitte hin, so hat man für jede links von  $III'$  befindliche Last  $P$  bezüglich des Momentenpunktes  $B$  die Gleichung:

$$D_1 a - P(a - 2d) + Nn = 0.$$

Da nun, weil  $D_1$  die Auflagerreaction von  $P$  in  $A$ ,

$$D_1 a - P(a - 2d) = 0,$$

so ist

$$N = 0.$$

Greift  $P$  rechts vom betrachteten Feld  $III'II'$  an (Fig. 287), so ergibt sich aus der Momentengleichung:

$$D_1 a - N.n = 0$$

$$N = -\frac{D_1.n}{a},$$

d. h. rechts von dem Feld, dem die Diagonale angehört, bewirkt  $P$  Druck, und ein Gleiches gilt, wenn sie innerhalb des Feldes sich befindet. Die Belastungsscheide ist hier  $III'$ .

Demnach gilt für Diagonalen, welche gegen die Trägermitte fallend angeordnet sind, Folgendes:

a) linksseitige Trägerhälfte: Jede links von der Belastungsscheide befindliche Einzellast erzeugt in der Diagonale Druck, jede rechts davon befindliche lässt dieselbe spannungslos;

b) rechtsseitige Trägerhälfte: Jede links von der Belastungsscheide befindliche Last lässt die Diagonale spannungslos, jede rechts davon befindliche Last erzeugt Druck.

Sind die Diagonalen gegen die Trägermitte hin steigend angeordnet, so gelten die gleichen Resultate mit dem Unterschied, dass statt Druck überall Zug zu setzen ist.

Verticalstäbe. Für die lotrechten Füllungsglieder erhält man auf Grund der gleichen Betrachtungsweise das nämliche Gesetz, nur ist der Sinn



der Beanspruchung der Verticalen immer demjenigen der angrenzenden Diagonalen entgegengesetzt.

Die ungünstigste Angriffnahme eines Füllungsgliedes findet also jederzeit bei einseitiger Trägerbelastung statt. Da aber die Belastung der übrigen Trägteile keinen Einfluss auf die betreffende Stabspannung äussert, so kann man auch sagen:

Die ungünstigste Beanspruchung sämtlicher Füllungsglieder des Dachbinders nach dem englischen System oder überhaupt jedes Dachbinders mit geraden, in den Auflagerpunkten sich schneidenden Gurtungen tritt bei totaler Belastung des Trägers ein.

Demnach kann die Ermittlung der durch die Schneelast hervorgerufenen maximalen Beanspruchungen sämtlicher Stäbe unter Zugrundlegung einer vollen Belastung des Trägers vorgenommen werden.

### C) Beanspruchung durch Winddruck.

Der Dachbinder Fig. 288 mit einem beweglichen Auflager in A und einem festen in B sei auf der Seite des beweglichen Auflagers durch den

Fig. 288.

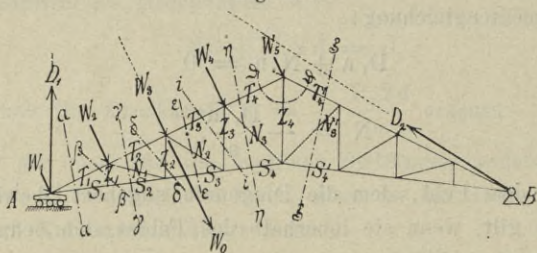
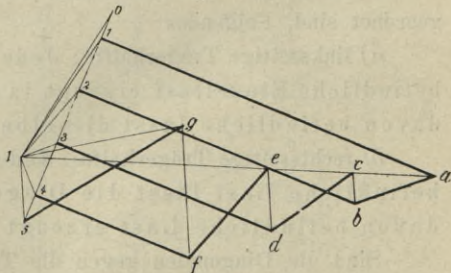
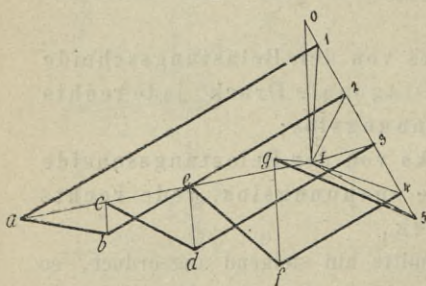


Fig. 288<sup>a</sup>.

Fig. 288<sup>b</sup>.



Wind beansprucht. Die auf die einzelnen Knotenpunkte verteilten Drücke seien  $W_1 = 0.1$ ,  $W_2 = 1.2 \dots W_5 = 4.5$ , demnach die Resultierende  $W_0 = 0.5$  (Fig. 288<sup>a</sup>), deren Zerlegung in die Auflagerreactionen  $D_1 = 1.0$  und  $D_2 =$



5I nach S. 225 erfolgt. Mit Hülfe der auf einander folgenden Schnitte  $\alpha$  bis  $\zeta$  ergeben sich nach Fig. 288<sup>a</sup> sämtliche Stabkräfte:

Schnitt  $\alpha$ .

Bekannt: Resultirende der äusseren  
Kräfte = I I,

unbekannt:  $T_1, S_1$ ,

Polygon: I I a I,

daher:  $T_1 = 1 a$  (Druck),

$S_1 = a I$  (Zug).

Schnitt  $\varepsilon$ .

Bekannt: { Result. d. äuss. Kr. = I 3,  
 $S_3 = c I$ ,

unbekannt:  $T_3, N_2$ ,

Polygon: c I 3 d c,

daher:  $T_3 = 3 d$  (Druck),

$N_2 = d c$  (Druck).

Schnitt  $\beta$ .

Bekannt: { Result. d. äuss. Kr. = I 1,  
 $T_1 = 1 a$ ,

unbekannt:  $Z_1, S_2$ .

Polygon: I I a I,

daher:  $Z_1 = 0$ ,

$S_2 = a I = S_1$  (Zug).

Schnitt  $\iota$ .

Bekannt: { Result. d. äuss. Kr. = I 3,  
 $T_3 = 3 d$ ,

unbekannt:  $Z_3, S_4$ ,

Polygon: I 3 d e I,

daher:  $Z_3 = d e$  (Zug),

$S_4 = e I$  (Zug).

Schnitt  $\gamma$ .

Bekannt: { Result. d. äuss. Kr. = I 2,  
 $S_2 = a I$ ,

unbekannt:  $T_2, N_1$ ,

Polygon: a I 2 b a,

daher:  $T_2 = 2 b$  (Druck),

$N_1 = b a$  (Druck).

Schnitt  $\eta$ .

Bekannt: { Result. d. äuss. Kr. = I 4,  
 $S_4 = e I$ ,

unbekannt:  $T_4, N_3$ ,

Polygon: I 4 f e I,

daher:  $T_4 = 4 f$  (Druck),

$N_3 = f e$  (Druck).

Schnitt  $\delta$ .

Bekannt: { Result. d. äuss. Kr. = I 2,  
 $T_2 = 2 b$ ,

unbekannt:  $Z_2, S_3$ ,

Polygon: I 2 b c I,

daher:  $Z_2 = b c$  (Zug),

$S_3 = c I$  (Zug).

Schnitt  $\vartheta$ .

Bekannt: {  $W_5 = 45$ ,  
 $T_4 = f 4$ ,

unbekannt:  $T_4', Z_4$ ,

Polygon: f 4 5 g f,

daher:  $T_4' = 5 g$  (Druck),

$Z_4 = g f$  (Zug).

Schnitt  $\zeta$ .

Bekannt: { Result. d. äuss. Kr. = I 5,  
 $T_4' = 5 g$ ,

unbekannt:  $N_3', S_4'$ ,

Polygon: I 5 g I,

daher:  $N_3' = 0$ ,

$S_4' = g I$  (Zug).

Für alle folgenden Schnitte ändert sich die Resultierende der äusseren Kräfte nicht mehr, weshalb die Gurtungskräfte der rechtsseitigen Trägerhälfte constant (gleich  $5g$  beziehungsweise  $gI$ ) und die Stabkräfte in den Diagonalen und Verticalen gleich Null sind.

Im Fall der Wind die Dachfläche  $BC$  angreift, ergeben sich in ähnlicher Weise die Beanspruchungen sämtlicher Stäbe aus dem Kräfteplan (Fig. 288<sup>b</sup>).

### § 13. Der Polonceau'sche Dachbinder.

*Einfache Form* (Fig. 289).

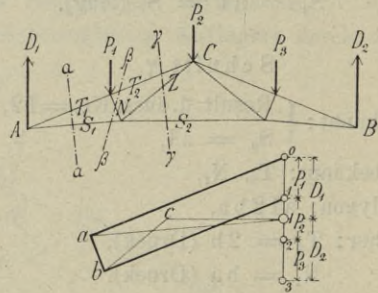
#### A) Beanspruchung durch das Eigengewicht.

Durch Rechnung werden die Stabkräfte nach S. 188 bestimmt. Graphisch ergeben sich dieselben mittels der in Figur 289 angedeuteten Schnitte aus dem Kräfteplan:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 0a \\ T_2 = 1b \\ N = ba \end{array} \right\} \text{Druck,}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = aI \\ S_2 = cI \\ Z = bc \end{array} \right\} \text{Zug.}$$

Fig. 289.



#### B) Beanspruchung durch Schneelast.

Auf Grund ähnlicher Beweisführung\*) wie S. 256 kann angenommen werden, dass die Beanspruchungen sämtlicher Stäbe bei vollständiger Belastung des Dachbinders eintreten, weshalb die Bestimmung der durch Schneelast erzeugten grössten Spannungen wie beim Eigengewicht erfolgt.

#### C) Beanspruchung durch Winddruck.

Wirkt der Wind auf die Dachfläche  $AC$ , auf deren Seite sich das bewegliche Auflager befindet, so erhält man die Stabkräfte nach Fig. 290 und 290<sup>a</sup> wie folgt:

\*) Nur wenn die untere Gurtung wie Fig. 289 polygonal angeordnet ist, tritt die Änderung ein, dass in beiden  $Z$  Stäben jede auf dem Dachbinder befindliche Last zur Vermehrung der Zugspannungen dieser Stäbe beiträgt.



Schnitt  $\alpha$ .

Bekannt: Resultirende der äusseren Kräfte =  $I1$ ,  
 unbekannt:  $T_1, S_1$ ,  
 Polygon:  $I1aI$ ,  
 daher:  $T_1 = 1a$  (Druck),  
 $S_1 = aI$  (Zug).

Schnitt  $\beta$ .

Bekannt:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Res. d. äuss. Kr.} = I2, \\ S_1 = aI, \end{array} \right.$   
 unbekannt:  $T_2, N$ ,  
 Polygon:  $aI2ba$ ,  
 daher:  $T_2 = 2b$  (Druck),  
 $N = ba$  (Druck).

Schnitt  $\gamma$ .

Bekannt:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Res. d. äuss. Kr.} = I2, \\ T_2 = 2b, \end{array} \right.$   
 unbekannt:  $Z, S_2$ ,  
 Polygon:  $I2bceI$ ,  
 daher:  $Z = bc$  (Zug),  
 $S_2 = cI$  (Zug).

Schnitt  $\delta$ .

Bekannt:  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Res. d. äuss. Kr.} = I3, \\ S_2 = cI, \end{array} \right.$   
 unbekannt:  $T_2', Z'$ ,  
 Polygon:  $cI3dc$ ,  
 daher:  $T_2' = 3d$  (Druck),  
 $Z' = dc$  (Zug).

Schnitt  $\epsilon$ .

Bekannt: Res. d. äuss. Kr. =  $I3$ ,  
 unbekannt:  $T_1', S_1'$ ,  
 Polygon:  $I3dI$ ,  
 daher:  $T_1' = 3d$  (Druck) =  $T_2'$ ,  
 $S_1' = dI$  (Zug).

Fig. 290.

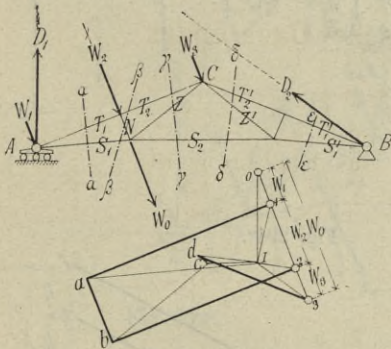
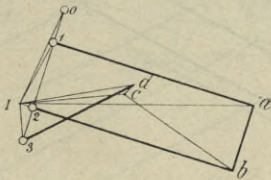


Fig. 290<sup>a</sup>.

Fig. 290<sup>b</sup>.



Die Bestimmung der Stabkräfte bei Beanspruchung der anderen Dachfläche BC durch den Wind zeigt Fig. 290<sup>b</sup>.

*Polonceau'sches Dach mit eingeschalteten Systemen* (Fig. 291).

**A) Beanspruchung durch Eigengewicht beziehungsweise Schneelast.**

Mittels der Schnitte  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$  erhält man (Fig. 291<sup>a</sup>) die Stabkräfte:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 0a \\ T_2 = 1b \\ N_1 = ba \end{array} \right\} \text{Druck,} \quad \left. \begin{array}{l} S_1 = aI \\ S_2 = cI \\ Z_1 = bc \end{array} \right\} \text{Zug.}$$

Weitergehend findet man, dass alle folgenden durch den Träger zu führenden Schnitte mehr als zwei Stäbe mit unbekanntenen Kräften treffen, weshalb



hier zur Vervollständigung des Spannungsnetzes erforderlich ist, die Ermittlung einer der folgenden Stabkräfte auf anderem Wege, z. B. wie folgt, vorzunehmen:

Man denkt sich den Schnitt  $\delta$  geführt, welcher die Stäbe mit den Kräften  $T_3, Z_2, Z_3, Z_4'$  und  $T_4'$  trifft. Letztere halten den am Trägerfragment befindlichen äusseren Kräften  $P_3$  und  $P_4$  das Gleichgewicht. Die Resultierende  $R_1$  der genannten fünf Stabkräfte fällt also mit der

Fig. 291.

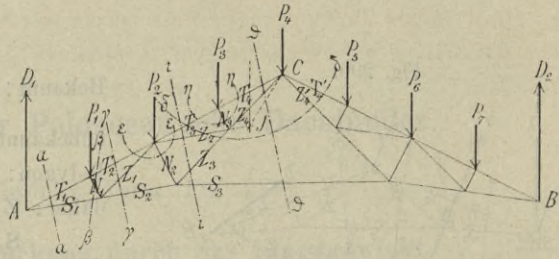
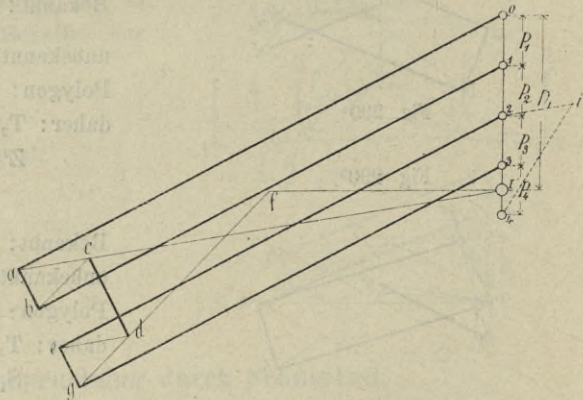


Fig. 291<sup>a</sup>.



Resultierenden von  $P_3$  und  $P_4$  in eine und dieselbe Gerade. Da mit Hilfe eines Seilpolygons die Lage der Resultierenden von  $P_3$  und  $P_4$  leicht bestimmt werden kann (bei  $P_3 = P_4$  befindet sie sich in der Mitte zwischen beiden Lasten), so ist damit auch die Kraftlinie  $R_1$  bekannt. Es kann nun  $R_1$  als Mittelkraft aus  $Z_2$  und der Resultierenden  $R'$  der vier übrigen Stabkräfte  $T_3, Z_3, Z_4'$  und  $T_4'$  angesehen werden, und es müssen sich demnach  $R_1, Z_2$  und  $R'$  in einem Punkte schneiden, d. h.

es muss  $R'$  durch den Schnittpunkt  $J$  von  $Z_2$  und  $R_1$  gehen. Ein anderer Punkt der Kraftlinie  $R'$  ist der Punkt  $C$ , in welchem sich die vier Kräfte, deren Resultierende sie ist, schneiden, so dass sich genannte Kraftlinie in der Verbindungslinie  $JC$  ergibt. Man braucht also nur durch 2 (Fig. 291<sup>a</sup>) eine Parallele zu  $Z_2$  und durch 4 eine Parallele zu  $JC$  zu ziehen, um  $R' = 4i$  und  $Z_2 = i2$  (Zug) zu erhalten.

Nachdem  $Z_2$  bestimmt, kann, dem Schnitt  $\gamma$  folgend, der Schnitt  $\epsilon$  gelegt werden, für welchen  $T_2, Z_1$  und  $Z_2$  bekannt und nur  $T_3$  und  $N_2$  unbekannt sind. Da  $Z_1, T_2$  und  $P_2$  im Kräftezug  $cb12$  schon an einander gereiht sind, so zieht man durch  $c$  eine Parallele zu  $N_2$ , ferner durch 2 eine Parallele zu  $T_3$  und schaltet nun zwischen den Richtungslinien  $N_2$  und  $T_3$  das nach Grösse und Richtung bekannte  $Z_2 = i2 = ed$  ein. Das Kräftepolygon  $cb12edc$  ergibt jetzt  $T_2 = 2e$  (Druck) und  $N_2 = dc$  (Druck).



Die übrigen Stabkräfte lassen sich auf gewöhnliche Weise mit Hülfe der Schnitte  $\iota$ ,  $\eta$  und  $\vartheta$  ermitteln. Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} T_4 &= 3g \\ N_3 &= ge \end{aligned} \right\} \text{ Druck,} \quad \left. \begin{aligned} S_3 &= fI \\ Z_3 &= df \\ Z_4 &= gf \end{aligned} \right\} \text{ Zug.}$$

**B) Beanspruchung durch den Winddruck.**

Fig. 292 und 292<sup>a</sup> zeigen die Bestimmung der Stabkräfte, wenn die Dachfläche auf Seite des beweglichen Auflagers durch den Wind beansprucht wird.

Fig. 292.

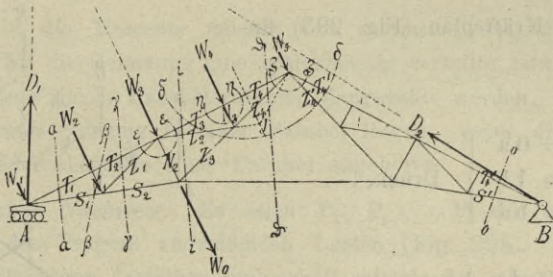
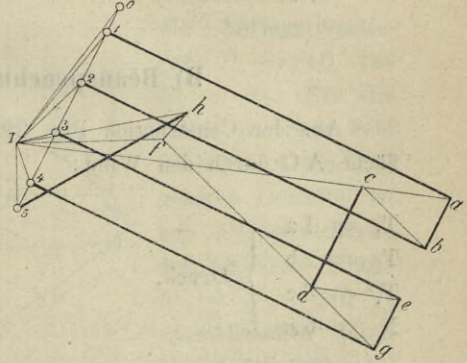
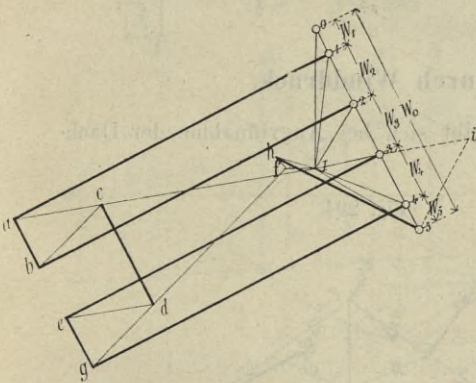


Fig. 292<sup>a</sup>.

Fig. 292<sup>b</sup>.



Ähnlich wie oben wird mittels des Schnittes  $\delta$   $Z_2 = 3i$  gefunden. Man

erhält sonach:	$S_1 = aI$	} Zug (Fig. 292 <sup>a</sup> ).
$T_1 = 1a$	$S_2 = cI$	
$T_2 = 2b$	$S_3 = fI$	
$T_3 = 3e$	$S_{1'} = hI$	
$T_4 = 4g$	$Z_1 = bc$	
$T_{4'} = 5h$	$Z_2 = 3i = ed$	
$N_1 = ba$	$Z_3 = df$	
$N_2 = dc$	$Z_4 = gf$	
$N_3 = ge$	$Z_{4'} = hf$	

Die Bestimmung der Stabkräfte, wenn der Wind die andere Dachfläche angreift, ist durch Fig. 292<sup>b</sup> dargestellt.

### § 14. Der deutsche Dachbinder.

Der deutsche Dachbinder (Fig. 293) unterliegt in statischer Beziehung der gleichen Betrachtungsweise wie das englische Dach, von dem er einen speciellen Fall bildet. Rechnerisch ergeben sich die Stabkräfte nach der Momentenmethode, wie oben angegeben, graphisch wie folgt:

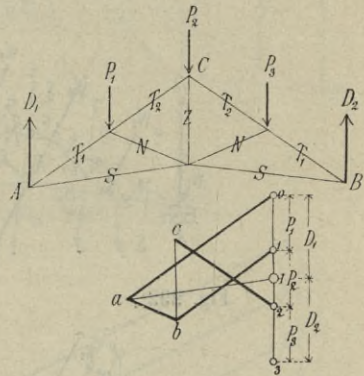
#### A) Beanspruchung durch Eigengewicht bezw. totale Schneelast.

Fig. 293.

Aus dem Kräfteplan (Fig. 293) findet man:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 0a \\ T_2 &= 1b \\ N &= ba \end{aligned} \right\} \text{ Druck,}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= aI \\ Z &= cb \end{aligned} \right\} \text{ Zug.}$$



#### B) Beanspruchung durch Winddruck.

Aus der Construction Fig. 294<sup>a</sup> ergibt sich bei Angriffnahme der Dachfläche AC durch den Wind:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1a \\ T_2 &= 2b \\ T_2' &= 3c \\ N &= ba \end{aligned} \right\} \text{ Druck,}$$

$$\left. \begin{aligned} S &= aI \\ S' &= Ic \\ Z &= cb \end{aligned} \right\} \text{ Zug.}$$

Fig. 294.

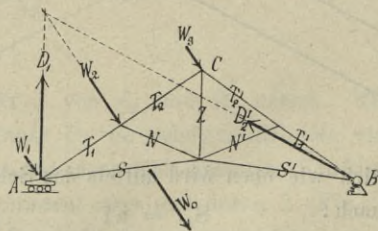
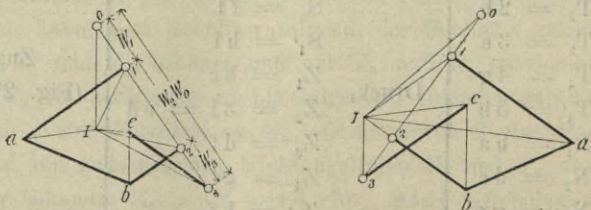


Fig. 294<sup>a</sup>.

Fig. 294<sup>b</sup>.

$N' = 0.$

Fig. 294<sup>b</sup> zeigt die Beanspruchung bei entgegengesetzter Windrichtung.





### § 15. Der parabolische Dachbinder.

Stellt man die Bedingung, dass eine gegebene Belastung keine Beanspruchung der Diagonalen eines fachwerkförmigen Balkenträgers veranlassen solle, so muss nach Gl. 270:

$$\frac{\mathcal{M}_2}{h_2} - \frac{\mathcal{M}_1}{h_1} = 0$$

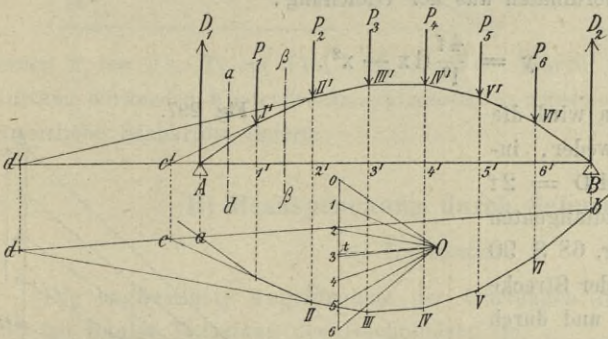
oder

$$\mathcal{M}_1 : \mathcal{M}_2 = h_1 : h_2$$

stattfinden, d. h. die Momente müssen sich verhalten wie die Längen der Verticalstäbe. Ist die Belastung eine gleichmässig verteilte totale, in welchem Falle die Momente durch Parabelordinaten dargestellt werden, so müssen die Knotenpunkte einer Gurtung in einer Parabel liegen, wenn die der anderen einer Geraden oder ebenfalls einer Parabel angehören.

*Geometrischer Nachweis.* Es seien  $P_1, P_2 \dots P_6$  die in den oberen Knotenpunkten des Trägers angreifenden Lasten (Fig. 295). Man zeichnet Kräfte- und Seilpolygon derselben und erhält mittels des zur Schlusslinie ab

Fig. 295.



parallelen Strahles  $Ot$  die Auflagerreaktionen  $D_1 = 6t$  und  $D_2 = 6t$ . Für alle durch das erste Feld (zwischen A und I' I') gelegte Schnitte ist nun die Resultierende der äusseren Kräfte  $R = D_1$ . Soll R ausschliesslich durch die Gurtungsstäbe auf-

genommen werden, so müssen diese sich im Auflagerpunkt A schneiden. Für alle durch das zweite Feld gelegten Schnitte ist  $R = D_1 - P_1$ , wirkend in der Verticalen durch c. In dieser Verticalen müssen sich die Gurtungsstäbe des zweiten Feldes schneiden, wenn die Beanspruchung der Füllungsglieder dieses Feldes gleich Null sein soll, und hiedurch ist die Lage von I' II' bestimmt. Ebenso muss II' III' durch den Punkt d' gehen, in welchem die Kraftlinie dd' der Resultierenden der äusseren Kräfte für das dritte Feld die verlängerte untere Gurtung schneidet u. s. f.

Sind die Lasten  $P_1, P_2 \dots$  gleich und gleichweit von einander entfernt, so liegen die Eckpunkte I, II... des Seilpolygons in einer Parabel, daher auch die Punkte I', II'... einer Parabel angehören. Es ist klar, dass, da



AI' beliebig angenommen werden kann, unendlich viele Parabeln möglich sind. Durch Annahme der Trägerhöhe wird in der Regel die zugehörige Parabel bestimmt.

Beim Parabelträger, dessen Belastung gleichmässig verteilt ist oder aus gleichen und gleichweit von einander entfernten, in den Knotenpunkten angreifenden Kräften besteht, ist also die Spannung in der geraden Gurtung constant, in den Füllungsmitgliedern gleich Null.

Es gilt dieser Satz für Parabelträger sowohl mit gekrümmter oberer bei gerader unterer Gurtung als auch für die umgekehrte Anordnung, endlich auch für Parabelträger mit beiderseits gekrümmten Gurtungen. Im Folgenden sollen nur die erstgenannten Träger einer näheren Betrachtung unterzogen werden; die für die andern erforderlichen Modificationen sind leicht zu finden.

Ist  $l$  die Spannweite und  $f$  die Trägerhöhe im Scheitel (Fig. 296), so erhält man die Parabelordinaten aus der Gleichung:

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2).$$

Durch Construction wird die Parabel bestimmt entweder, indem man (Fig. 296)  $MD = 2f$  aufträgt, mittels der Endtangenten DA und DB nach Fig. 68 S. 90 oder durch Auftragen der Strecke  $BE = 4f$  (Fig. 297) und durch Teilen genannter Strecke, sowie der Trägerlänge in  $n$  Teile. Die Strahlen A 1, A 2, . . . schneiden auf den lotrechten Teilungslinien der Spannweite die entsprechenden Parabelpunkte ab.

Fig. 296.

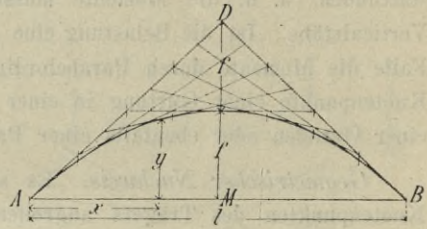
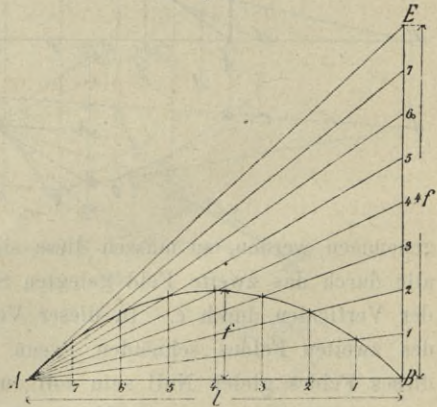


Fig. 297.



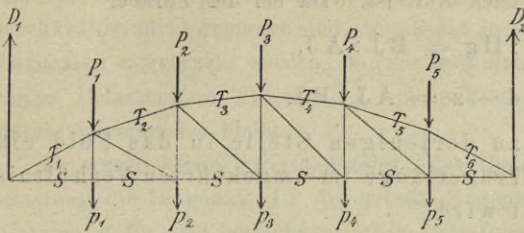
### A) Beanspruchung durch Eigengewicht.

Wir denken das Eigengewicht auf die oberen und unteren Knotenpunkte des Trägers verteilt und bezeichnen (Fig. 298) mit  $P_1 = P_2 = \dots P_5$  die oberen und mit  $p_1 = p_2 = \dots p_5$  die unteren Knotendrücke. Man trägt



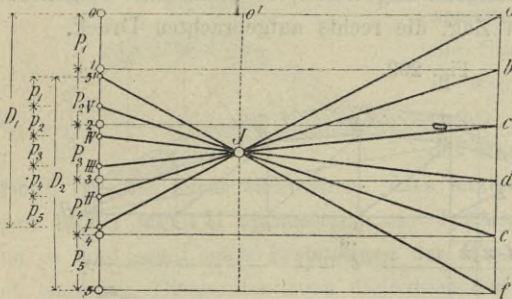
(Fig. 298<sup>a</sup>)  $01 = P_1, 12 = P_2 \dots 45 = P_5, 55' = D_2, 5'V = p_5, VIV = p_4 \dots III = p_1$  auf, so sind die Strahlen Ia, II b... 5'f gleich

Fig. 298.



den Druckkräften  $T_1, T_2 \dots T_6$  der ihnen parallelen Gurtungsstäbe, während die für alle Felder constante Zugkraft der unteren Gurtung  $S = 0$  erhalten wird. Die Beanspruchung der Diagonalen ist gleich Null, die der Verticalstäbe besteht in den als Zugwirkungen auftretenden unteren Knotendrücken. Sind diese unteren Knotendrücke nicht vorhanden (totale Schneebelastung), so ist auch die Beanspruchung der Verticalstäbe gleich Null und man erhält  $S = 0$  a,

Fig. 298<sup>a</sup>.



ferner  $T_1 = Ja, T_2 = Jb \dots T_6 = Jf$ . Wären nur die in der unteren Gurtung wirkenden Knotendrücke vorhanden, so würde das Kräftepolygon  $J5'I$  sämtliche Stabkräfte liefern.

## B) Beanspruchung durch Schneelast.

### a) Gurtungen.

Die ungünstigste Angriffnahme der Gurtungen tritt nach Gl. 267 und 268 bei totaler Belastung des Dachbinders ein.

### b) Füllungsglieder.

Die Maximalbeanspruchungen in den Füllungsgliedern finden bei einseitiger Belastung des Trägers statt. Für die Bestimmung ist Folgendes massgebend:

#### Diagonalen.

Die Belastungsscheide für irgend eine Diagonale I2 wird durch den Schnitt i der von den Auflagern A und B nach den oberen Knotenpunkten des die Diagonale enthaltenden Feldes gezogenen Geraden bestimmt (Fig. 299). Denkt man sich nämlich eine in der Lotlinie durch i wirkende Einzellast durch ihre in I und II hervorgebrachten Knotendrücke ersetzt, so kann A I I B als Seilpolygon der Auflagerreactionen A und B und der erwähnten Knotendrücke



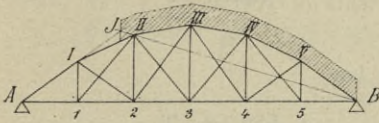




**Gekreuzte Diagonalen.** Beim Träger mit je einer Diagonale in jedem Felde wechselt nach Vorstehendem die Diagonalkraft zwischen einer grössten Zug- und einer grössten Druckbeanspruchung. Wird aber der Träger mit schlaffen Diagonalen ausgeführt, d. h. mit solchen, welche zur Aufnahme von Druckkräften nicht geeignet sind, so müssen in jedem Felde zwei sich kreuzende Diagonalen angebracht werden, und es tritt dann jede von beiden nur bei derjenigen Belastung in Thätigkeit, welche Zug in ihr erzeugt, während die andere spannungslos bleibt.

Es wurde beispielsweise gezeigt, dass bei der in Fig. 300 angegebenen Belastung die Diagonale I 2 die grösste Zugspannung erleidet. Im entgegengesetzten Falle, bei ausschliesslicher Belastung der Strecke A J, würde die Diagonale I 2 die grösste Druckspannung erleiden. Da sie zur Aufnahme von

Fig. 300.



Druck nicht geeignet ist, so bleibt sie spannungslos, während an ihrer Stelle die Diagonale I II in Thätigkeit tritt, in welcher, weil sie von links nach rechts steigt, die Belastung von A J das Maximum der Zugspannung hervor-

bringt. Es ist leicht einzusehen, dass letztere gleich ist der grössten Zugkraft in der mit I II symmetrisch zur Trägermitte liegenden Diagonale IV 5, und es sind somit nach Feststellung der Maximal-Zugspannungen des Trägers mit einfachen Diagonalen auch diejenigen der Gegendiagonalen bekannt.

**Analytische Behandlung.** Man nehme an, dass die Last, von einem der beiden Auflager kommend, auf die Strecke z in das Fach eingerückt sei, und bestimme für diese Laststellung die Momente der angrenzenden Knotenpunkte, so ergibt sich nach Gl. 270 ein Ausdruck für die der vorhandenen Belastung entsprechende Diagonalkraft. Ermittelt man nun durch Differenziren denjenigen Wert von z, welcher jenen Ausdruck zum Maximum macht, so kommt man auf das schon oben erwähnte Gesetz:

$$z : d - z = A J : B J.$$

Wird der so erhaltene Wert von z in den Ausdruck für die Diagonalkraft eingeführt, so ergibt sich das weitere Gesetz, dass die Horizontalcomponenten der maximalen Diagonalkräfte sämtlicher Felder gleich gross sind.\*)

#### Verticalstäbe.

Für einen Verticalstab II 2 (Fig. 299) erhält man, wenn man einen schiefen Schnitt durch denselben gelegt denkt, nach S. 268 die Belastungsscheide i, bei wagrechter unterer Gurtung zusammenfallend mit der Belastungs-

\*) Loewe, Über eine Eigenschaft der Parabelträger, Zeitschr. d. Bayer. Arch.- und Ing.-Vereins, 1876



grenze der Diagonale I2. Jede Last rechts von i erzeugt Druck in dem Stab, jede links befindliche Last Zug. Die grösste Druckbeanspruchung,  $N_{max}$  für II2, findet also bei der in Fig. 299 bezeichneten Laststellung statt, welcher  $V = eb$ , wirkend in der Verticalen durch III', entspricht. Nach S. 190 liefert das Kräfteviereck  $k_1' m_1 n_1 r_1$ :

$$N_{max} = n_1 r_1.$$

### C) Beanspruchung durch den Winddruck.

Der Wind wirke gegen die auf der Seite des beweglichen Auflagers gelegene Dachfläche, deren einzelnen Abteilungen AI, I II, II III die Windpressungen  $W_0' = 01$ ,  $W_0'' = 12$ ,  $W_0''' = 23$  (Fig. 301) entsprechen. Die Resultirende  $W_0$  und deren Auflagerreactionen  $D_1 = 10$  und  $D_2 = 3I$

Fig. 301.

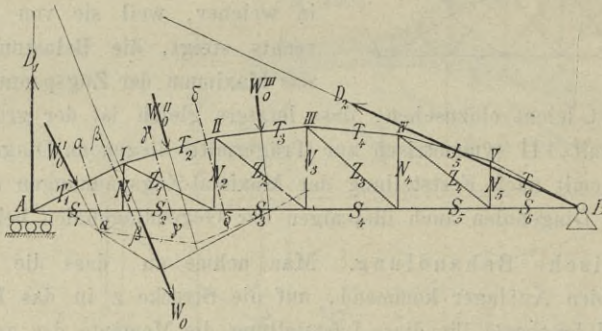
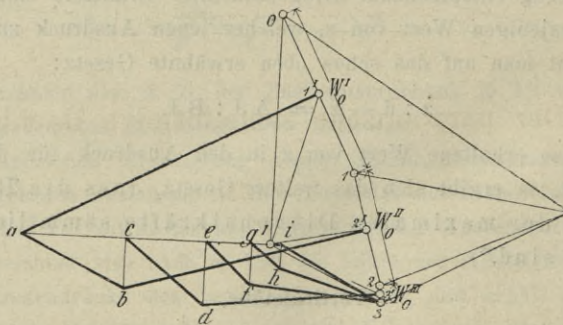


Fig. 301<sup>a</sup>.



werden nach S. 226 gefunden; 01' und 1'1 seien ferner die durch  $W_0'$  auf A und I übertragenen Knotendrucke, desgleichen 12' und 2'2 die Knotendrucke von  $W_0''$  in I und II, endlich 23' und 3'3 die Knotendrucke von  $W_0'''$  in II und III. Die bei dieser Belastung entstehenden Stabkräfte erhält man wie folgt:



Schnitt  $\alpha$ .

Bekannt: Res. d. äuss. Kr.  $R = I1'$ ,  
 unbekannt:  $T_1, S_1$ ,  
 Polygon:  $I1'aI$ ,  
 daher:  $T_1 = 1'a$  (Druck),  
 $S_1 = aI$  (Zug).

Schnitt  $\gamma$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = I2', \\ S_2 = aI, \end{cases}$   
 unbekannt:  $T_2, Z_1$ ,  
 Polygon:  $I2'baI$ ,  
 daher:  $T_2 = 2'b$  (Druck),  
 $Z_1 = ba$  (Druck).

Schnitt  $\beta$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = I1', \\ T_1 = 1'a, \end{cases}$   
 unbekannt:  $S_2, N_1$ ,  
 Polygon:  $I1'aI$ ,  
 daher:  $S_2 = aI$  (Zug),  
 $N_1 = 0$ .

Schnitt  $\delta$ .

Bekannt:  $\begin{cases} R = I2', \\ T_2 = 2'b, \end{cases}$   
 unbekannt:  $N_2, S_3$ ,  
 Polygon:  $I2'bcI$ ,  
 daher:  $N_2 = bc$  (Zug),  
 $S_3 = cI$  (Zug).

und so fortfahrend:

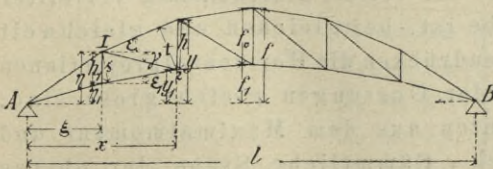
$$\left. \begin{array}{l} T_3 = 3'd \\ T_4 = 3f \\ T_5 = 3h \\ T_6 = 3i \\ Z_2 = dc \\ Z_3 = fe \\ Z_4 = hg \\ S_6 = iI \end{array} \right\} \text{Druck,}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_4 = eI \\ S_5 = gI \\ N_3 = de \\ N_4 = fg \\ N_5 = hi \end{array} \right\} \text{Zug.}$$

### § 16. Der parabolische sichelförmige Dachbinder.

Der Parabelträger geht in den sichelförmigen Träger über, wenn man auch der unteren Gurtung die Form eines gegen die Verbindungslinie der

Fig. 302.



Anlagerpunkte concaven Polygons gibt, dessen Eckpunkte in einer Parabel liegen. Ist  $f$  die Scheitelhöhe der oberen und  $f_1$  die der unteren Gurtung (Fig. 302), so bestimmen sich die Parabelordinaten beider

Gurtungen aus den Gleichungen:

$$y = \frac{4f}{l^2} (lx - x^2),$$

$$y_1 = \frac{4f_1}{l^2} (lx - x^2)$$

Die Beanspruchung irgend eines Stabes I II der oberen Gurtung ist nach Gl. 267:

$$T = -\frac{\mathcal{M}_2}{t} = -\frac{\mathcal{M}_2}{h \cos \varepsilon} \text{ (Druck),}$$

diejenige irgend eines Stabes 1 2 der unteren Gurtung nach Gl. 268:

$$S = \frac{\mathcal{M}_1}{s} = \frac{\mathcal{M}_1}{h_1 \cos \varepsilon_1} \text{ (Zug).}$$

Da

$$h = y - y_1$$

oder, wenn für  $y$  und  $y_1$  die obigen Werte eingeführt werden,

$$h = \frac{4}{l^2} (f - f_1) (lx - x^2) = \frac{4}{l^2} f_0 (lx - x^2),$$

so ist

$$T \cos \varepsilon = -\frac{\mathcal{M}_2 l^2}{4 f_0 (lx - x^2)}$$

und bei gleichmässig verteilter Totalbelastung, in welchem Falle

$$\mathcal{M}_2 = \frac{q}{2} (lx - x^2),$$

$$T \cos \varepsilon = -\frac{q l^2}{8 f_0}.$$

(339)

Ebenso erhält man, da

$$h_1 = \eta - \eta_1 = \frac{4}{l^2} f_0 (l\xi - \xi^2),$$

$$S \cos \varepsilon_1 = \frac{\mathcal{M}_1 l^2}{4 f_0 (l\xi - \xi^2)}$$

und bei gleichmässig verteilter Totalbelastung:

$$S \cos \varepsilon_1 = \frac{q l^2}{8 f_0}.$$

(340)

Daraus geht hervor, dass bei voller, gleichmässig verteilter Belastung oder, was dasselbe ist, bei gleichen und gleichweit von einander entfernten Knotendrücken die Horizontalprojektionen sämtlicher Stabkräfte beider Gurtungen gleich gross sind, nämlich gleich dem Quotienten aus dem Maximalmoment und der Trägerhöhe im Scheitel. Sämtliche Stäbe der oberen Gurtung sind auf Druck, die der unteren auf Zug beansprucht.



Die Stabkraft irgend einer Diagonale, z. B. I2, ist nach Gl. 270:

$$Z = \frac{1}{\cos \gamma} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial h} - \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial h_1} \right);$$

für die angegebene Belastung ist

$$\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial h} = \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial h_1},$$

daher

$$Z = 0,$$

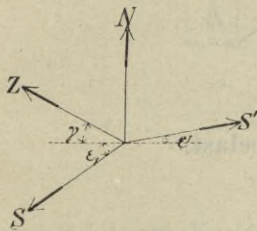
d. h. die Beanspruchung sämtlicher Diagonalen ist bei gleichmässig verteilter totaler Belastung gleich Null.

Um endlich über die Beanspruchung der Verticalstäbe Aufschluss zu erhalten, denke man einen Knotenpunkt der unteren Gurtung von dem übrigen Träger getrennt (Fig. 303) und bringe die an demselben wirkenden Kräfte ins Gleichgewicht. Man erhält als Gleichgewichtsbedingung:

$$N + Z \sin \gamma + S' \sin \varepsilon' - S \sin \varepsilon_1 = 0.$$

Für gleichmässig verteilte Totalbelastung ist:

Fig. 303.



und

$$Z = 0,$$

$$S = \frac{q l^2}{8 f_0 \cos \varepsilon_1}$$

daher

$$S' = \frac{q l^2}{8 f_0 \cos \varepsilon'}$$

$$N = \frac{q l^2}{8 f_0} (\tan \varepsilon_1 - \tan \varepsilon'), \quad (341)$$

woraus ersichtlich, dass bei gleichmässig verteilter Totalbelastung die Verticalstäbe auf Zug beansprucht sind.

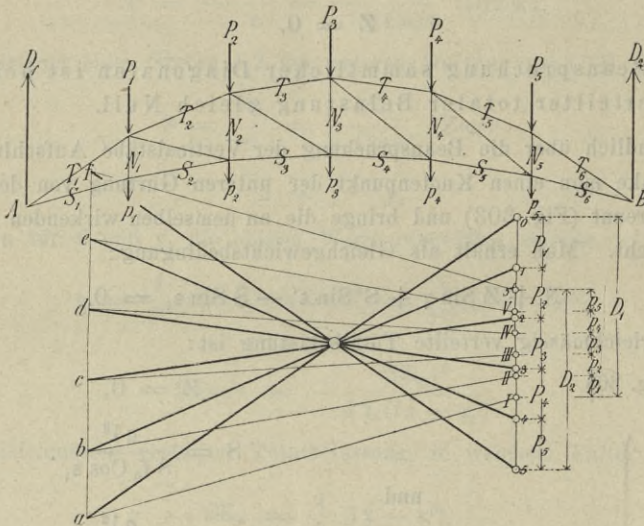
### A) Beanspruchung durch Eigengewicht.

Man trage wie früher die auf die oberen und unteren Knotenpunkte treffenden Lasten auf der Lotlinie (Fig. 304) zu dem Kräftezug 055'10 zusammen, so ergibt das Kräftepolygon sämtliche Stabkräfte wie folgt:

$$\left. \begin{array}{l} T_1 = 0 a \\ T_2 = 1 b \\ T_3 = 2 c \\ T_4 = 3 d \\ T_5 = 4 e \\ T_6 = 5 f \end{array} \right\} \text{Druck,}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = a \text{ I} \\ S_2 = b \text{ II} \\ S_3 = c \text{ III} \\ S_4 = d \text{ IV} \\ S_5 = e \text{ V} \\ S_6 = f 5' \end{array} \right\} \text{Zug,} \quad \left. \begin{array}{l} N_1 = a b \\ N_2 = b c \\ N_3 = c d \\ N_4 = d e \\ N_5 = e f \end{array} \right\} \text{Zug.}$$

Fig. 304.



**B) Beanspruchung durch Schneelast.**

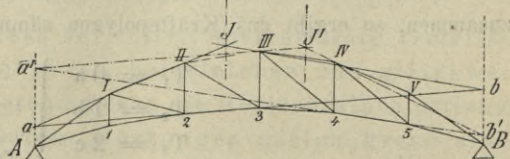
a) Gurtungen.

Die grössten Stabkräfte in den beiden Gurtungen entstehen bei totaler Belastung. Sie werden gerade so wie beim Eigengewicht (Fig. 304) gefunden, indem nur die Knotendrucke der unteren Gurtung in Wegfall kommen.

b) Füllungsglieder.

Diagonalen. Die Belastungsscheide für jeden Stab kann nach S. 267 sofort angegeben werden. Für die Diagonale II 3 z. B. (Fig. 305) wird sie erhalten durch Verlängerung von 2 3 bis zum Schnitt a und b mit den Auf lagerverticalen und durch Ziehen der Verbindungslinien a II und b III. Sind damit die Belastungen bekannt, welche die Maximal-Zug- oder Druckbeanspruchung im Stab erzeugen, so können letztere durch Rechnung

Fig. 305.





oder graphisch leicht ermittelt werden. Das hiebei angewendete, des Näheren beim parabolischen Träger angegebene graphische Verfahren (Fig. 299) vereinfacht sich besonders, wenn die Annahme gemacht wird, dass die Last statt bis zur Belastungsscheide J, nur bis an die Grenze des Feldes, welchem der Stab angehört, sich erstrecke, welche Annahme in vielen Fällen der Anwendung statthaft sein wird. Für die ins Auge gefasste Diagonale II 3 würde demnach  $+ Z_{\max.}$  entstehen bei Belastung des Trägerteils vom rechten Auf-

Fig. 306.

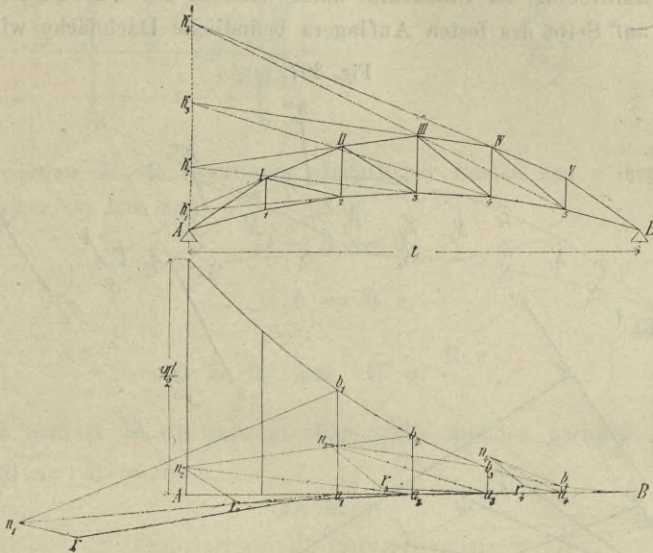


Fig. 306<sup>a</sup>.

lager B bis zum Knotenpunkt III. Bei dieser Laststellung besteht aber für sämtliche durch Feld II III gelegte Schnitte die Resultierende der äusseren Kräfte in der linksseitigen Auflagerreaction, der Grösse nach durch  $a_2 b_2$  (Fig. 306<sup>a</sup>) bestimmt. Indem man diese, wie S. 190 angegeben, nach den Richtungen T, S, Z zerlegt, ergibt sich für den Stab II 3:  $+ Z_{\max.} = n_2 r_2$ . In Fig. 306 und 306<sup>a</sup> sind auf solche Weise die grössten Zugkräfte  $n_1 r_1$ ,  $n_3 r_3$ ,  $n_4 r_4$  auch für die übrigen Diagonalen bestimmt.

Bezüglich gekreuzter Diagonalen gilt das beim parabolischen Träger Gesagte.

Verticalstäbe. Die Belastungsscheide für irgend einen Stab IV 4 (Fig. 305) ergibt sich, wenn man den Gurtungsteil 45, welcher von dem durch den Stab zu legenden Schnitt getroffen wird, bis zu den Schnittpunkten a' und b' mit den Auflagerverticalen verlängert, und wenn man die Punkte a' und b' mit den Eckpunkten III und IV des gegenüberliegenden Gurtungsstabes verbindet. Jede rechts von dem so erhaltenen Verticalschnitt J' auf-





die beiden gleich grossen und entgegengesetzten Horizontalreactionen  $H$  der Wandfläche (Fig. 308) auf die Gurtungsenden. Bezeichnet  $D$  die lotrechte

Fig. 308.

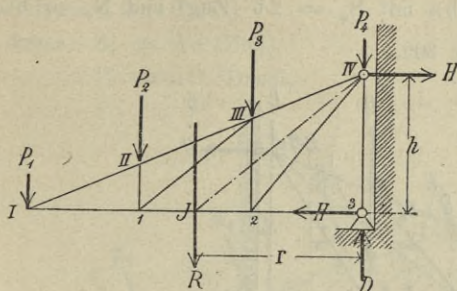
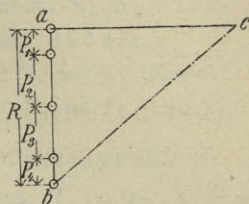


Fig. 308<sup>a</sup>.



Auflagerreaction,  $R$  die Resultante sämmtlicher Lasten und  $r$  ihren Abstand vom Auflager, so hat man

$$D - R = 0$$

und

$$H \cdot h = R \cdot r$$

oder

$$D = R \quad \text{und} \quad H = \frac{R \cdot r}{h}.$$

Wenn man  $R = ab$  aufträgt (Fig. 308<sup>a</sup>) und  $bc$  parallel  $JIV$  zieht so ist, weil  $ac : R = r : h$ ,

$$ac = H.$$

### A) Beanspruchung durch Eigengewicht und totale Schneelast.

Man trägt die Knotendrucke  $P_1$  bis  $P_5$  auf der Lotlinie  $05$  (Fig. 309<sup>a</sup>) auf und erhält durch die Schnitte  $\alpha$  bis  $\eta$  die nachverzeichneten Stabkräfte. Der letzte Schnitt  $\eta$  ist, wie in Fig. 309 angegeben, krummlinig zu legen, wobei sich bei bekanntem  $S_4 = 0e$ ,  $Z_3 = ef$  und  $P_5 = fg$ , sodann  $H = g5$  und  $N_4 = 50 = D$  ergibt.

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = a0 \\ S_2 = a0 \\ S_3 = c0 \\ S_4 = e0 \\ Z_1 = ba \\ Z_2 = dc \\ Z_3 = fe \end{array} \right\} \text{Zug,} \quad \left. \begin{array}{l} T_1 = 1a \\ T_2 = 2b \\ T_3 = 3d \\ T_4 = 4f = H \\ N_1 = a'a \\ N_2 = b'c \\ N_3 = d'e \\ N_4 = 50 = D \end{array} \right\} \text{Druck.}$$

Nach Cremona's Verfahren beginnt man mit dem um den Knotenpunkt  $l$  gelegten Schnitt und trägt die Knotenlast  $P_1 = 01$  (Fig. 309<sup>b</sup>) auf. Die

Parallelen 1 a und 0 a zu den beiden Gurtungen liefern das Kräfte-dreieck 01 a 0, welches  $S_1 = 1 a$  (Zug) und  $T_1 = a 0$  (Druck) ergibt. Bezüglich des zweiten, um den Knotenpunkt II gelegten Schnittes sind bekannt  $P_2 = 1 2$  und  $S_1 = a 1$ , daher Polygon: a 1 2 b a mit  $S_2 = 2 b$  (Zug) und  $N_1 = b a$

Fig. 309.

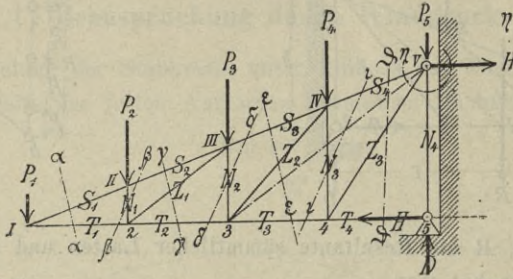


Fig. 309<sup>a</sup>.

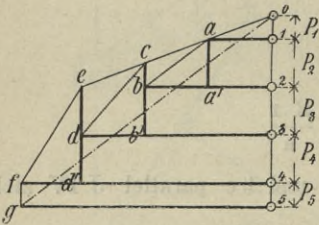
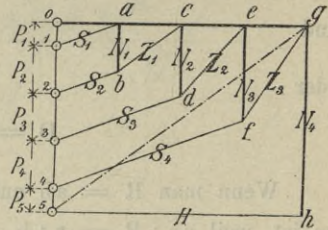


Fig. 309<sup>b</sup>.



(Druck). Beim Knotenpunkt 2 sind  $T_1 = 0 a$  und  $N_1 = a b$  bekannt. Die Resultierende 0 b aus beiden, nach den Richtungen von 2 III und 2 3 zerlegt, liefert  $Z_1 = b c$  (Zug) und  $T_2 = c 0$  (Druck) u. s. f.

### B) Beanspruchung durch Winddruck.

(Fig. 310).

#### Knotenpunkt I.

Bekannt:  $W_1 = 0 1$ ,  
 unbekannt:  $S_1, T_1$ ,  
 Polygon: 0 1 a 0,  
 daher:  $S_1 = 1 a$  (Zug),  
 $T_1 = a 0$  (Druck).

#### Knotenpunkt II.

Bekannt:  $W_2 = 1 2, S_1 = a 1$ ,  
 unbekannt:  $S_2, N_1$ ,  
 Polygon: a 1 2 b a,  
 daher:  $S_2 = 2 b$  (Zug),  
 $N_1 = b a$  (Druck).

#### Knotenpunkt 2.

Bekannt:  $T_1 = 0 a, N_1 = a b$ ,  
 unbekannt:  $Z_1, T_2$ ,  
 Polygon: 0 b c 0,  
 daher:  $Z_1 = b c$  (Zug),  
 $T_2 = c 0$  (Druck).

#### Knotenpunkt III.

Bekannt:  $W_3 = 2 3, S_2 = b 2, Z_1 = c b$ ,  
 unbekannt:  $S_3, N_2$ ,  
 Polygon: c b 2 3 d c,  
 daher:  $S_3 = 3 d$  (Zug),  
 $N_2 = d c$  (Druck).



Knotenpunkt 3.

Bekannt:  $T_2 = 0c$ ,  $N_2 = cd$ ,

unbekannt:  $Z_2, T_3$ ,

Polygon:  $0de0$ ,

daher:  $Z_2 = de$  (Zug),

$T_3 = e0$  (Druck).

Knotenpunkt IV.

Bekannt:  $\begin{cases} W_4 = 34, \\ S_3 = d3, \\ Z_2 = ed, \end{cases}$

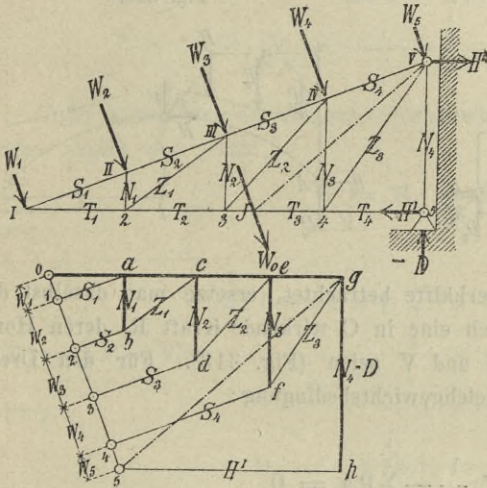
unbekannt:  $S_4, N_3$ ,

Polygon:  $ed34fe$ ,

daher:  $S_4 = 4f$  (Zug),

$N_3 = fe$  (Druck).

Fig. 310.



Knotenpunkt 4.

Bekannt:  $T_3 = 0e$ ,  $N_3 = ef$ ,

unbekannt:  $Z_3, T_4$ ,

Polygon:  $0fg0$ ,

daher:  $Z_3 = fg$  (Zug),

$T_4 = g0$  (Druck) =  $H'$ .

Knotenpunkt V.

Bekannt:  $\begin{cases} W_5 = 45, \\ S_4 = f4, \\ Z_3 = gf, \end{cases}$

unbekannt:  $H'', N_4$ ,

Polygon:  $gf45hg$ ,

daher:  $H'' = 5h$ ,

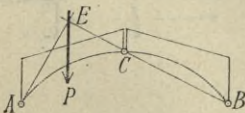
$N_4 = hg$  (Druck) =  $D$ .

## § 18. Der Bogenträger mit drei Gelenken.

### A) Bestimmung der Auflagerreactionen.

Jede Einzellast  $P$ , welche sich an irgend einer Stelle des Trägers befindet, erzeugt Widerlagerreactionen  $W_1$  und  $W_2$ , in den Gelenkpunkten  $A$  und  $B$  (Fig. 311) angreifend, welche, da sie der Last  $P$  das Gleichgewicht halten, in einem Punkte  $E$  der Kraftlinie  $P$  sich schneiden.

Fig. 311.



Steht die Last innerhalb der linksseitigen Trägerhälfte, so geht die rechtsseitige Widerlagerreaction ausser durch  $B$  zugleich auch durch den Gelenkpunkt  $C$ , da nur durch diesen Punkt eine Wirkung der rechten auf die linke Trägerhälfte möglich ist. Durch Verlängerung von  $BC$  bis zum Schnitt  $E$  mit  $P$  ergibt sich auch die Richtung  $AE$  der linken Widerlagerreaction.

Befindet sich umgekehrt die Last auf der rechtsseitigen Trägerhälfte, so wirkt die linke Widerlagerreaction in der Geraden AC und der Schnitt E dieser Geraden mit der Lastverticalen bestimmt die Richtung EB der rechtsseitigen Widerlagerreaction.

Um bei beliebiger lotrechter Belastung (Fig. 312) die Auflagerreactionen  $W_1$  und  $W_2$  zu bestimmen, zerlege man dieselben zunächst in ihre Horizontal- und Verticalcomponenten  $H_1, D_1$  und  $H_2, D_2$ . Indem man sodann den Gleich-

Fig. 312.

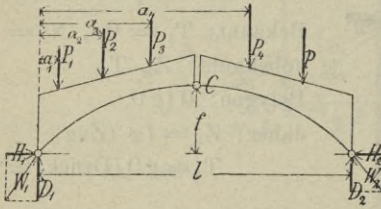
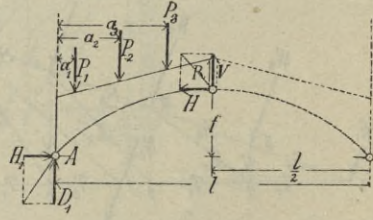


Fig. 313.



gewichtszustand der linken Trägerhälfte betrachtet, ersetze man daselbst die Wirkung der rechten Hälfte durch eine in C wirkende Kraft R, deren Horizontal- und Verticalprojection H und V seien (Fig. 313). Für den Drehpunkt A hat man sodann als Gleichgewichtsbedingung:

$$Hf + V \cdot \frac{1}{2} - \sum_0^{\frac{1}{2}} P a = 0,$$

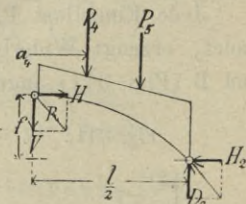
wobei die Entfernungen der einzelnen Lasten vom linken Auflager mit  $a_1, a_2, \dots$  bezeichnet sind und demnach  $\sum_0^{\frac{1}{2}} P a$  die Summe der statischen Momente sämtlicher Lasten der linken Trägerhälfte bezüglich des linken Auflagers vorstellt.

Denkt man sich hierauf auch die rechtsseitige Trägerhälfte ins freie Gleichgewicht gebracht, wobei, um die Wirkung des linken Trägerteils zu ersetzen, in C die nämliche Kraft R, nur in entgegengesetztem Sinne, anzubringen ist (Fig. 314), so erhält man für den Drehpunkt B (rechtes Auflager):

$$Hf - V \cdot \frac{1}{2} - \sum_{\frac{1}{2}}^1 P (l - a) = 0,$$

worin  $\sum_{\frac{1}{2}}^1 P (l - a)$  die Summe der statischen Momente sämtlicher Lasten der rechten Trägerhälfte bezüglich des rechten Auflagers bedeutet.

Fig. 314.





Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$H = \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}} P a + \sum_0^1 P (1 - a)}{2 f} \quad (342)$$

und

$$V = \frac{\sum_0^{\frac{1}{2}} P a - \sum_0^1 P (1 - a)}{1} \quad (343)$$

Unter Anwendung der übrigen Gleichgewichtsbedingungen auf beide Trägerhälften ergibt sich jetzt:

$$H = H_1 = H_2, \quad (344)$$

ferner

$$D_1 = \sum_0^{\frac{1}{2}} P - V = \frac{\sum_0^{\frac{1}{3}} P l - \sum_0^{\frac{1}{2}} P a + \sum_0^1 P (1 - a)}{1} = \frac{1}{l} \sum_0^1 P (1 - a), \quad (345)$$

endlich

$$D_2 = \sum_0^1 P + V = \frac{1}{l} \sum_0^1 P a. \quad (346)$$

Die Verticalcomponenten der Auflagerreactionen sind somit gleich den Auflagerreactionen des gleich belasteten Balkenträgers von der Stützweite 1.

Nachdem  $H_1$ ,  $D_1$ ,  $H_2$  und  $D_2$  durch die Gleichungen 342 bis 346 bestimmt, ergeben sich die Widerlagerreactionen  $W_1$  und  $W_2$  und deren Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  gegen den Horizont wie folgt:

$$W_1 = \sqrt{H^2 + D_1^2}, \quad W_2 = \sqrt{H^2 + D_2^2},$$

$$\text{tang } \alpha_1 = \frac{D_1}{H}, \quad \text{tang } \alpha_2 = \frac{D_2}{H}.$$

Bei voller Belastung des Trägers durch gleichmässig verteilte Last  $q$  pro Längeneinheit ist:

$$\sum_0^{\frac{1}{2}} P a = \frac{q l^2}{8} = \sum_0^1 P (1 - a),$$

und

$$\sum_0^1 P a = \frac{q l^2}{2} = \sum_0^1 P (1 - a),$$

daher

$$H = \frac{ql^2}{8f}, \tag{347}$$

$$D_1 = \frac{ql}{2} = D_2$$

und

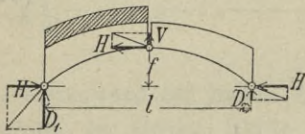
$$V = 0.$$

Ist nur eine Trägerhälfte, z. B. die linke, AC belastet (Fig. 315), so ist:

$$\sum_0^{\frac{1}{2}} Pa = \frac{ql^2}{8}, \quad \sum_0^{\frac{1}{2}} P(1-a) = 0, \quad \sum_0^1 Pa = \frac{ql^2}{8}, \quad \sum_0^1 P(1-a) = 3\frac{ql^2}{8},$$

daher

Fig. 315.



$$H = \frac{ql^2}{16f}, \tag{348}$$

$$D_1 = \frac{2}{3} ql, \tag{349}$$

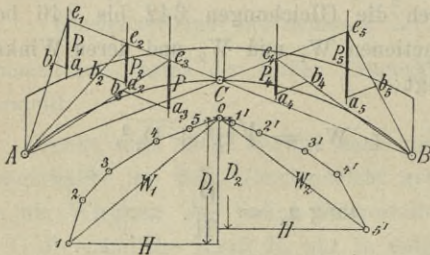
$$D_2 = \frac{1}{3} ql, \tag{350}$$

$$V = \frac{1}{8} ql. \tag{351}$$

*Graphische Bestimmung der Auflagerreactionen.*

Man bestimmt für sämtliche Lasten einzeln die beiderseitigen Widerlagerreactionen ( $b_1e_1$  und  $a_1b_1$  für  $P_1$ ,  $b_2e_2$  und  $a_2b_2$  für  $P_2$  . . .  $a_5b_5$  und  $b_5e_5$  für  $P_5$ ) (Fig. 316) und erhält durch

Fig. 316.



Aneinanderreihung der zusammengehörigen Kraftlangen  $W_1 = 10$  und  $W_2 = 5'0$ . Zur Controle dient, dass die Horizontalprojektionen von  $W_1$  und  $W_2$  gleich sein müssen.

Ist die Belastung gleichmässig verteilt oder besteht sie aus gleichen und gleichweit entfernten Einzel-

lasten, so empfiehlt es sich, die Lasten der linken sowie die der rechten Trägerhälfte zu ihren Resultirenden zusammenzufassen und im übrigen wie angegeben zu verfahren.

*Auflagerreactionen des Winddrucks.*

Man zerlegt die Resultirende  $W_0$  des auf die Dachfläche wirkenden Winddruckes in  $W_0 \cos \alpha$  und  $W_0 \sin \alpha$  (Fig. 317) und erhält wie oben durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen beider Trägerhälften:



$$Hf + V \frac{1}{2} - W_0 y_0 \sin \alpha - W_0 x_0 \cos \alpha = 0$$

und

$$Hf - V \frac{1}{2} = 0,$$

daher

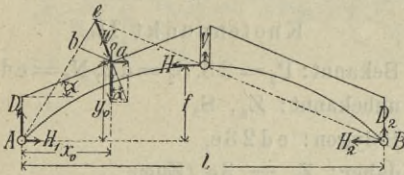
$$H = \frac{W_0 y_0 \sin \alpha + W_0 x_0 \cos \alpha}{2f} \tag{352}$$

und

$$V = \frac{W_0 y_0 \sin \alpha + W_0 x_0 \cos \alpha}{1} \tag{353}$$

Ferner

Fig. 317.



$$H_1 = H - W_0 \sin \alpha, \tag{354}$$

$$H_2 = H, \tag{355}$$

$$D_1 = W_0 \cos \alpha - V \tag{356}$$

$$D_2 = V. \tag{357}$$

und

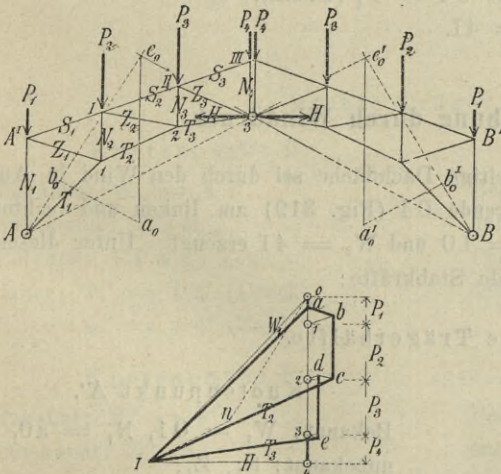
Durch Construction findet man

die durch  $W_0$  erzeugten Widerlager-

reactionen  $W_1 = be$  und  $W_2 = ab$ , wie in Fig. 317 angegeben.

### B) Beanspruchung durch Eigengewicht und totale Schneelast.

Fig. 318.



Durch Rechnung können die Stabkräfte nach vorheriger Bestimmung der Widerlagerreactionen mittels der Momentenmethode gefunden werden, deren Anwendung hier keiner weiteren Erklärung bedarf. Das graphische Verfahren ist in Fig. 318 zur Darstellung gebracht. Hier wurden die Auflagerdrücke für die Belastungen beider Trägerhälften zuerst getrennt bestimmt und so die gesamte linksseitige Widerlagerreaction  $W_1$  durch Vereinigung von  $In = a_0'b_0'$  und  $n0 = b_0'e_0$  als Länge  $IO$  gefunden.

Nachfolgend sind die nach der Cremona'schen Methode ermittelten Stabkräfte zusammengestellt;

## Knotenpunkt A.

Bekannt:  $W_1 = IO$ ,  
 unbekannt:  $N_1, T_1$ ,  
 Polygon:  $IOaI$ ,  
 daher:  $N_1 = 0a$  (Druck),  
 $T_1 = aI$  (Druck).

## Knotenpunkt A'.

Bekannt:  $P_1 = 0I, N_1 = a0$ ,  
 unbekannt:  $S_1, Z_1$ ,  
 Polygon:  $a1ba$ ,  
 daher:  $S_1 = 1b$  (Zug),  
 $Z_1 = ba$  (Druck).

## Knotenpunkt I.

Bekannt:  $T_1 = Ia, Z_1 = ab$ ,  
 unbekannt:  $N_2, T_2$ ,  
 Polygon:  $IabcI$ ,  
 daher:  $N_2 = bc$  (Druck),  
 $T_2 = cI$  (Druck).

## Knotenpunkt I.

Bekannt:  $P_2 = 12, S_1 = b1, N_2 = cb$ ,  
 unbekannt:  $S_2, Z_2$ ,  
 Polygon:  $cb12dc$ ,  
 daher:  $S_2 = 2d$  (Zug),  
 $Z_2 = dc$  (Zug).

## Knotenpunkt 2.

Bekannt:  $T_2 = Ic, Z_2 = cd$ ,  
 unbekannt:  $N_3, T_3$ ,  
 Polygon:  $IcdeI$ ,  
 daher:  $N_3 = de$  (Druck),  
 $T_3 = eI$  (Druck).

## Knotenpunkt II.

Bekannt:  $P_3 = 23, S_2 = d2, N_3 = ed$ ,  
 unbekannt:  $Z_3, S_3$ ,  
 Polygon:  $ed23e$ ,  
 daher:  $Z_3 = 3e$  (Zug),  
 $S_3 = 0$ .

## Knotenpunkt 3.

Bekannt:  $T_3 = Ie, Z_3 = e3$ ,  
 unbekannt:  $N_4, H$ ,  
 Polygon:  $Ie34I$ ,  
 daher:  $N_4 = 34 = P_4$  (Druck),  
 $H = 4I$ .

## C) Beanspruchung durch Winddruck.

Wir nehmen an, die linksseitige Dachfläche sei durch den Wind in Angriff genommen, dessen Resultierende  $04$  (Fig. 319) am linken und rechten Widerlager die Reactionen  $W_1 = IO$  und  $W_2 = 4I$  erzeugt. Unter diesem Einfluss ergeben sich nachstehende Stabkräfte:

## Linke Trägerhälfte.

## Knotenpunkt A.

Bekannt:  $W_1 = IO$ ,  
 unbekannt:  $N_1, T_1$ ,  
 Polygon:  $IOaI$ ,  
 daher:  $N_1 = 0a$  (Druck),  
 $T_1 = aI$  (Druck).

## Knotenpunkt A'.

Bekannt:  $W_1 = 0I, N_1 = a0$ ,  
 unbekannt:  $S_1, Z_1$ ,  
 Polygon:  $a01ba$ ,  
 daher:  $S_1 = 1b$  (Druck),  
 $Z_1 = ba$  (Zug).





Knotenpunkt 2'.

Bekannt:  $Z_2' = d'c'$ ,  $T_2' = c'I'$ ,  
 unbekannt:  $T_3'$ ,  $N_3'$ ,  
 Polygon:  $d'e'I'e'd'$ ,  
 daher:  $T_3' = I'e'$  (Druck),  
 $N_3' = e'd'$  (Druck).

Knotenpunkt II'.

Bekannt:  $S_2' = 4'd'$ ,  $N_3' = d'e'$ ,  
 unbekannt:  $Z_3'$ ,  $S_3'$ ,  
 Polygon:  $4'd'e'4'$ ,  
 daher:  $Z_3' = e'4'$  (Zug),  
 $S_3' = 0$ .

Knotenpunkt 3'.

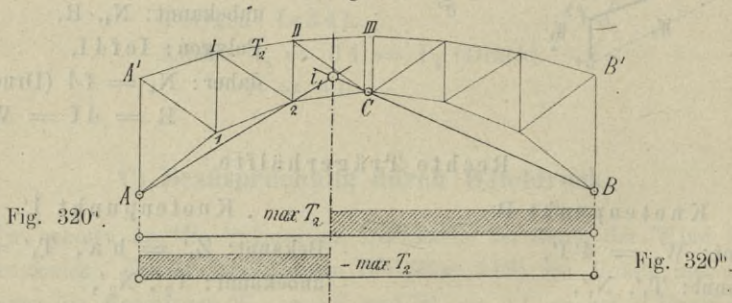
Bekannt:  $Z_3' = 4'e'$ ,  $T_3' = e'I'$ ,  
 unbekannt:  $N_4'$ ,  $R$ ,  
 Polygon:  $4'e'I'4'$ ,  
 daher:  $N_4' = 0$ ,  
 $R = I'4'$ .

**D) Ungünstigste Beanspruchung durch teilweise Schneebelastung.**

*Obere Gurtung.*

Um für einen Stab III (Fig. 320) der oberen Gurtung eines Feldes die Belastungsscheide zu erhalten, ziehe man eine Gerade vom zunächst gelegenen Widerlager A nach dem Schnitt 2 der beiden anderen Stäbe des betreffenden Feldes und bestimme den Schnittpunkt  $i_1$  dieser Geraden mit der Verbindungslinie BC. Jede in der Verticalen durch  $i_1$  wirkende Einzellast bewirkt in

Fig. 320.



III die Spannung gleich Null, jede Last rechts von  $i_1$  erzeugt Zug, jede Last links von  $i_1$  Druck, was auf Grund der Momentenmethode leicht bewiesen werden kann. Die grösste Zugbeanspruchung erleidet demnach der betrachtete Gurtstab bei Belastung des Trägerteils zwischen  $i_1$  und B (Fig. 320<sup>a</sup>), die grösste Druckbeanspruchung bei Belastung der Trägerstrecke  $i_1A$  (Fig. 320<sup>b</sup>).

*Untere Gurtung.*

Die Belastungsscheide eines Gurtstabes 12 (Fig. 321) befindet sich hier im Schnitt  $i_2$  von AI mit BC. Jede Einzellast bringt in 12 Druck oder



Zug hervor, jenachdem sie rechts oder links von  $i_2$  aufgebracht wird. Demnach entsprechen der grössten Zug- oder Druckbeanspruchung von 12 die in

Fig. 321.

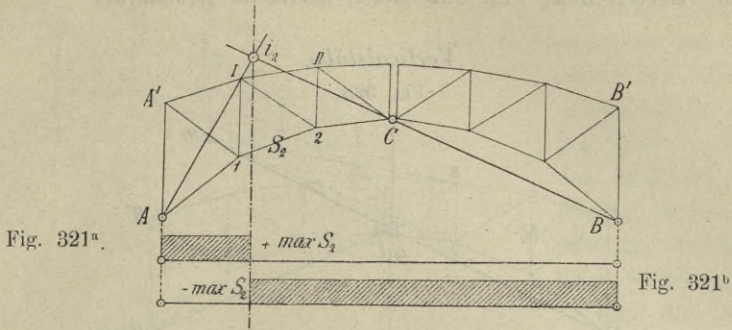
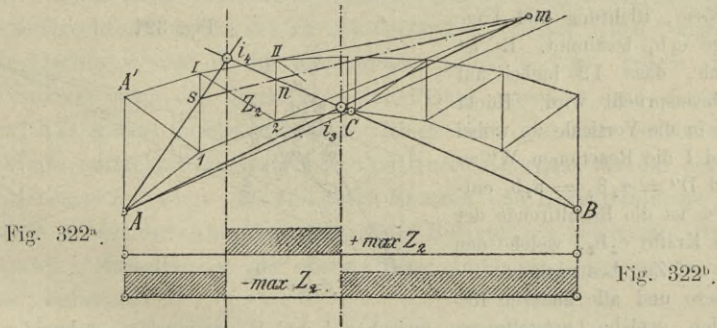


Fig. 321<sup>a</sup> und 321<sup>b</sup> angedeuteten Belastungen.

*Diagonalen.*

Es sei die ungünstigste Angriffnahme der Diagonale I2 (Fig. 322) zu bestimmen. Die beiden anderen, demselben Felde angehörigen Stäbe III und 12 schneiden sich in  $m$ , welcher Punkt entweder über, auf oder unterhalb der Verbindungslinie AC gelegen sein kann. Wenn das Erstere der Fall ist,

Fig. 322.



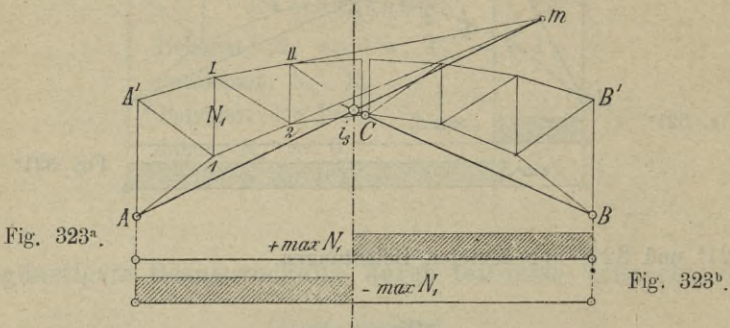
wie in Fig. 322, so beansprucht jede rechts vom Schnitt  $i_3$  der Geraden Am und BC befindliche Einzellast die Diagonale auf Druck. Desgleichen bewirkt jede Last, welche sich zwischen A und der linksseitigen Begrenzung I1 des betrachteten Feldes befindet, Druck, dagegen jede Last zwischen der rechtsseitigen Begrenzung II2 des Feldes und  $i_3$  Zug. Innerhalb des Feldes befindet sich eine weitere Belastungsscheide  $i_4$ , welche man erhält, wenn man  $m$  n bis zum Schnitt  $s$  mit I1 verlängert und den Schnitt  $i_4$  von As mit BC



aufsucht.<sup>\*)</sup> Jede innerhalb des Feldes links von  $i_1$  aufgebrauchte Last erzeugt Druck, jede Last rechts von  $i_1$  Zug. Demnach ergibt eine Lastverteilung wie in Fig. 322<sup>a</sup> die grösste Zugbeanspruchung  $+Z_{\max}$  der Diagonale I2, dagegen die Lastverteilung Fig. 322<sup>b</sup> deren maximale Druckkraft.

Verticalstäbe.

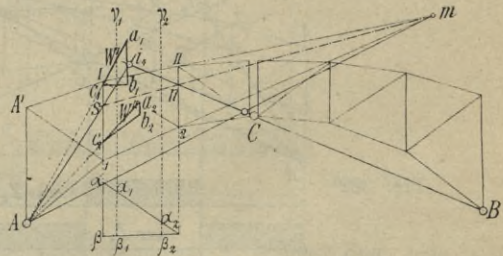
Fig. 323.



Die ungünstigsten Belastungen für einen Verticalstab I1 (Fig. 323) sind aus den Figuren 323<sup>a</sup> und 323<sup>b</sup> zu ersehen. Der Nachweis hiefür, sowie die

<sup>\*)</sup> Beweis. Man denke sich eine beliebige Einzellast  $P = \alpha\beta$  in der Lotrechten  $v_1$  innerhalb des betrachteten Feldes auf den Träger wirkend (Fig. 324), so erzeugt sie in A eine auf bekannte Weise zu bestimmende Widerlagerreaction  $W'$  sowie in I einen lotrechten Knotendruck  $D'$ , der mittels einfacher Hilfsconstruction als Länge  $a_1\beta_1$  erhalten wird. Die Resultirende der äusseren Kräfte, welche bei dieser Belastung für alle Querschnitte des Feldes entsteht, setzt sich zusammen aus  $W'$  und  $D'$  und ist in Fig. 324

Fig. 324.



nach Grösse, Richtung und Lage als Länge  $c_1b_1$  bestimmt. Es ist ersichtlich, dass I2 hiebei auf Druck beansprucht wird. Rückt die Last in die Verticale  $v_2$ , wobei in A und I die Reactionen  $W'' = c_2a_2$  und  $D'' = a_2\beta_2 = a_2b_2$  entstehen, so ist die Resultirende der äusseren Kräfte  $c_2b_2$ , welche den Stab I2 auf Zug beansprucht.

Diese und alle anderen Resultirenden, welche Laststellungen zwischen I und II entsprechen, schneiden sich im Durchschnittspunkt n von BC und II2, was sofort klar ist, wenn man bedenkt, dass die Resultirenden des linken Trägerfragments zusammenfallen mit den Resultirenden des rechten Trägerfragments, letztere aber, sich zusammensetzend aus der rechtsseitigen Widerlagerreaction und dem jeweiligen Knotendruck in II, durch den Schnittpunkt n beider Kraftlinien gehen müssen.

Derjenigen Grenz-Laststellung nun, welche die Spannung Null im Stab hervorbringt, entspricht offenbar eine durch den Punkt m gehende Resultirende. Folglich hat man nur m n bis zum Schnitt s mit I1 zu verlängern, um im Schnitt  $i_1$  der Geraden As und BC die fragliche Belastungsscheide zu erhalten.







ist. Sind  $n$  Sparren vorhanden und ist der Grundriss der Kuppel ein reguläres  $n$ -Eck, so entfallen auf die Knotenpunkte eines Sparrens der Reihe nach die Lasten:  $\frac{1}{n} P_1, \frac{1}{n} P_2, \frac{1}{n} P_3 \dots$  (Fig. 326 und 326<sup>a</sup>), und sämtliche Sparren sind in gleicher Weise belastet.

Fig. 326.

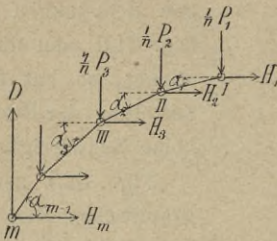
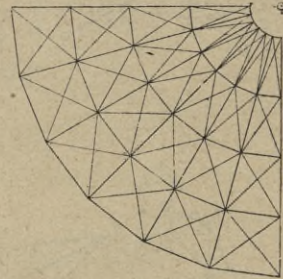


Fig. 326<sup>a</sup>.



Die unteren Enden der Sparren stützen sich gegen einen Horizontalring, den sog. Mauerring, welcher den Horizontalschub der Kuppel aufnimmt, so dass eine Reaction der Unterlage nur in lotrechtem Sinne entwickelt wird. Diese Reaction ist für jeden Sparren:

$$D = \frac{1}{n} (P_1 + P_2 + P_3 + \dots).$$

Die Stabkräfte bestimmen sich auf folgende Weise:

Sparren. Am Knotenpunkt I halten sich die Kräfte:

$\frac{1}{n} P_1$ , ferner die Stabkraft  $T_1$  des Sparrenteils III und die beiden Ringstabkräfte  $R_1$  im Gleichgewicht. Letztere können durch die in der Sparren-Meridianebene wirkende Resultierende  $H_1$  ersetzt werden (Fig. 327). Die Summe der Verticalprojections der Kräfte ist gleich Null, daher:

$$\frac{1}{n} P_1 + T_1 \sin \alpha_1 = 0$$

oder

$$T_1 = -\frac{1}{n} \frac{P_1}{\sin \alpha_1} \text{ (Druck).}$$

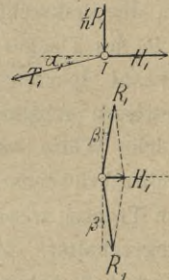
Für den zweiten Knotenpunkt (Fig. 328) ist:

$$\frac{1}{n} P_2 - T_1 \sin \alpha_1 + T_2 \sin \alpha_2 = 0$$

oder

$$T_2 = -\frac{1}{n \sin \alpha_2} (P_1 + P_2) \text{ (Druck),}$$

Fig. 327.



(358)

(359)



desgleichen für den Knotenpunkt III:

$$T_3 = -\frac{1}{n \sin \alpha_3} (P_1 + P_2 + P_3) \text{ (Druck)} \quad (360)$$

u. s. f.)\*

Fig. 328.

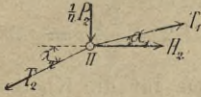


Fig. 329.

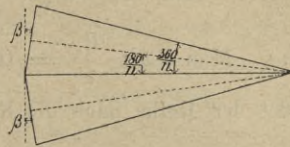
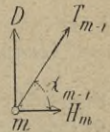


Fig. 330.



Horizontalringe. Zum Gleichgewicht der am Knotenpunkt I wirkenden Kräfte (Fig. 327) ist auch erforderlich, dass die Horizontalprojectionen derselben gleich Null sind. Daher hat man:

$$H_1 - T_1 \cos \alpha_1 = 0,$$

oder, da  $H_1 = 2 R_1 \sin \beta$  und, wie aus Fig. 329 ersichtlich,  $\beta = \frac{360}{2n} = \frac{\pi}{n}$ ,

$$R_1 = -\frac{P_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \text{ (Druck);} \quad (361)$$

ebenso ist für Knotenpunkt II (Fig. 328):

$$H_2 + T_1 \cos \alpha_1 - T_2 \cos \alpha_2 = 0$$

oder

$$R_2 = -\frac{(P_1 + P_2) \cotg \alpha_2 - P_1 \cotg \alpha_1}{2 n \sin \frac{\pi}{n}}, \quad (362)$$

desgleichen für den Knotenpunkt III:

$$R_3 = -\frac{(P_1 + P_2 + P_3) \cotg \alpha_3 - (P_1 + P_2) \cotg \alpha_2}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (363)$$

u. s. f.

\*) Soll der Sparrendruck überall gleich (= T) sein, so bestimmen sich hienach die Neigungswinkel:

$$\sin \alpha_1 = \frac{P_1}{nT}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{P_1 + P_2}{nT}$$

$$\sin \alpha_3 = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{nT}$$

u. s. f.



Bezüglich des untersten Knotenpunktes  $m$  (Fig. 330) am Mauerring besteht die Gleichgewichtsgleichung:

$$H_m + T_{m-1} \cos \alpha_{m-1} = 0,$$

daher

$$R_m = + \frac{(P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{m-1}) \operatorname{Cotg} \alpha_{m-1}}{2n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Zug}). \quad (364)$$

*Graphische Lösung.* Man trägt  $\frac{P_1}{n} = 01$ ,  $\frac{P_2}{n} = 12$  ..  $\frac{P_4}{n} = 34$

(Fig. 331) auf und bildet der Reihe nach die Kräftepolygone für die Knotenpunkte I, II...V:

Fig. 331.

**Knotenpunkt I.**

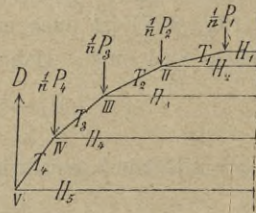
Bekannt:  $\frac{P_1}{n} = 01$ ,

unbekannt:  $T_1, H_1$ ,

Polygon: 01a0,

daher:  $T_1 = 1a$  (Druck),

$H_1 = a0$ .



**Knotenpunkt II.**

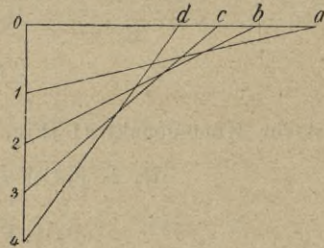
Bekannt:  $\frac{P_2}{n} = 12$ ,  $T_1 = a1$ ,

unbekannt:  $T_2, H_2$ ,

Polygon: a12ba,

daher:  $T_2 = 2b$  (Druck),

$H_2 = ba$ .



**Knotenpunkt III.**

Bekannt:  $\frac{P_3}{n} = 23$ ,  $T_2 = b2$ ,

unbekannt:  $T_3, H_3$ ,

Polygon: b23cb,

daher:  $T_3 = 3c$  (Druck),

$H_3 = cb$ .

**Knotenpunkt IV.**

Bekannt:  $\frac{P_4}{n} = 34$ ,  $T_3 = c3$ ,

unbekannt:  $T_4, H_4$ ,

Polygon: c34dc,

daher:  $T_4 = 4d$  (Druck),

$H_4 = dc$ .

**Knotenpunkt V.**

Bekannt:  $D = 40$ ,  $T_4 = d4$ ,

unbekannt:  $H_5$ ,

Polygon: 40d4,

daher:  $H_5 = 0d$ .

Nachdem  $H_1, H_2 \dots H_5$  bekannt, ergeben sich nach Fig. 327 leicht die Stabkräfte in den Ringen. Es zeigt sich, dass im Laternenring Druck, in den übrigen Ringen Zug herrscht.



**B) Beanspruchung durch veränderliche Last (Schnee- u. Winddruck).**

Die Kuppelconstructionen sind in der Regel so flach, dass es genügt, nur die lotrechte Componente des Winddrucks einzuführen, daher Schnee- und Windbelastung gemeinschaftlich behandelt werden können.

Bei Vollbelastung der gesammten Dachfläche sind die für Eigengewicht entwickelten Formeln unmittelbar anwendbar und deshalb hier nur diejenigen einseitigen Belastungen festzustellen, welche die ungünstigste Angriffnahme der einzelnen Constructionsteile zur Folge haben. Unter  $Q_1, Q_2 \dots$  sollen die Schnee- und Windbelastungen verstanden werden, welche dem ersten, zweiten u. s. f. Ring zukommen.

**Sparren.** Die Sparren werden durch vorhandene Lasten immer in demselben Sinn, nämlich auf Druck beansprucht. Die Gleichungen 358 bis 360 ergeben daher, wenn man die entsprechenden Lastenwerte einführt, zugleich auch die grössten Stabkräfte, welche bei wechselnder Belastung möglich sind.

**Ring.** Ein Blick auf die Gleichungen 362 und 363, in welchen die beiden Summanden der Zähler verschiedene Vorzeichen haben, lehrt, dass die Stäbe in den Ringen je nach der Verteilung der Last in verschiedenem Sinn beansprucht werden können. So findet z. B. in den Stäben des dritten Ringes die grösste Druckspannung statt, wenn in Gl. 363 der erste Summand möglichst gross, der zweite möglichst klein ist. Dies ist der Fall, wenn die Zonen I und II, also die innerhalb des betrachteten Ringes befindlichen Kuppelteile nicht belastet sind, der Ring selbst aber voll belastet erscheint.

Dagegen bewirkt jede Belastung der Kuppel oberhalb der zum dritten Ring gehörigen Zone ein Wachsen des zweiten Summanden in verstärktem Grade gegenüber dem ersten, da  $\text{Cotg } \alpha_2$  immer grösser als  $\text{Cotg } \alpha_3$ . Somit erhält man das Zugmaximum für  $R_3$ , wenn die Zone III nicht, dagegen der innerhalb befindliche Kuppelteil voll belastet ist. Unter Berücksichtigung dessen ergeben sich nachstehende Maximalwerte der Stabkräfte in den Ringen:

grösster Druck:	grösster Zug:	
Laternenring:		
$\max R_1 = - \frac{Q_1 \text{ Cotg } \alpha_1}{2 n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}}$	$R_1 = 0$	} (365)
Ring II:		
$\max R_2 = - \frac{Q_2 \text{ Cotg } \alpha_2}{2 n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}}$	$\max R_2 = \frac{Q_1 (\text{Cotg } \alpha_1 - \text{Cotg } \alpha_2)}{2 n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}}$	
Ring III:		
$\max R_3 = - \frac{Q_3 \text{ Cotg } \alpha_3}{2 n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}}$	$\max R_3 = \frac{(Q_1 + Q_2) (\text{Cotg } \alpha_2 - \text{Cotg } \alpha_3)}{2 n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}}$ u. s. f.	
Mauerring:		
$\max R_m = 0$	$\max R_m = \frac{(Q_1 + Q_2 + \dots) \text{ Cotg } \alpha_{m-1}}{2 n \text{ Sin } \frac{\pi}{n}}$	



Diagonalen. Denkt man sich durch die Mitte der sich kreuzenden Diagonalen eines Feldes eine Meridianebene gelegt, welche die Kuppel in zwei Hälften trennt, und die eine Hälfte nur durch Eigengewicht, die andere aber durch Eigengewicht und mobile Last voll beansprucht, so wird in Folge der hiebei stattfindenden grössten Differenz der Sparrendrücke die grösste Beanspruchung in den Diagonalen eintreten. Einer Belastung nun der ganzen Kuppel nur durch Eigengewicht entspricht der Sparrendruck im obersten Ring

$\frac{P_1}{n \sin \alpha_1}$ , während der Sparrendruck bei durch Eigengewicht und veränderliche

Last total belasteter Kuppel  $\frac{P_1 + Q_1}{n \sin \alpha_1}$  ist. Deren Differenz:

$$\frac{P_1 + Q_1}{n \sin \alpha_1} - \frac{P_1}{n \sin \alpha_1} = \frac{Q_1}{n \sin \alpha_1}$$

wird grösser sein als der vorerwähnte wirklich vorkommende Unterschied in den Sparrendrücken, und wenn man, um complicirtere Rechnungen zu vermeiden, die Differenz der Berechnung der Diagonalen zu Grunde legt, so wird eine jedenfalls mehr als ausreichende Stärke vorhanden sein. Ist somit der Winkel zwischen Diagonale und mehrbelastetem Sparren  $\gamma_1$ , so ist die Diagonalkraft annähernd:

$$Z_1 = \frac{Q_1}{n \sin \alpha_1 \cos \gamma_1}$$

und ebenso für die Diagonalen der übrigen Zonen:

$$Z_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{n \sin \alpha_2 \cos \gamma_2}$$

$$Z_3 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \sin \alpha_3 \cos \gamma_3}$$

u. s. f.

(366

Über die genauere Bestimmung der bei beliebiger Belastung einer Kuppel auftretenden Stabkräfte Siehe: Föppl, Das Fachwerk im Raume, Leipzig, 1892, und Müller-Breslau, Beitrag zur Theorie des räumlichen Fachwerks, Berlin, 1892.

## § 20. Das Zeltdach.

Dächer mit pyramidenförmiger Oberfläche werden Zeltdächer genannt. Man construirt sie entweder, indem man eine Anzahl radial gestellter selbstständiger Binder anordnet, welche die Dachfläche tragen, oder in der Weise, dass wie bei den Kuppeln eine gegenseitige Verspannung der Sparren durch polygonale Horizontalringe eintritt, wobei der Innenraum frei bleibt und



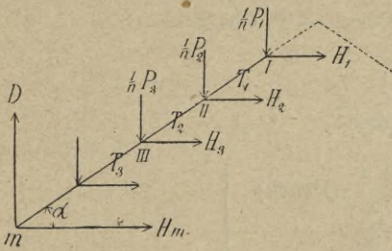
sämmtliche Constructionsteile in die Dachfläche zu liegen kommen. Im ersten Falle sind die Binder unter Einfluss der auf sie treffenden Belastung wie bei den Balkendächern zu berechnen; bei letzterer Anordnung schliesst sich der Gang der Untersuchung dem der Kuppeldächer an.

Bei flachen Zeldächern kommt als veränderliche Last ausser dem Schneeeindruck nur die lotrechte Componente des Winddruckes in Betracht, und es kann die einseitige Beanspruchung durch den Wind als unwesentlich vernachlässigt werden, dagegen spielt dieselbe eine bedeutende Rolle bei steilen Dächern, bei welchen hinwiederum von der Schneelast abgesehen werden kann.

### A) Beanspruchung durch Eigengewicht.

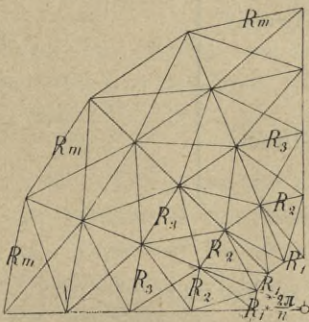
Die den einzelnen Ringzonen entsprechenden Belastungen seien  $P_1, P_2,$

Fig. 332.



$P_3 \dots$  Dient zum Abschluss des Daches im First eine Laterne, so ist im Wert von  $P_1$  das Gewicht derselben mit einzuschliessen. Bei  $n$  vorhandenen Sparren treffen auf die einzelnen Knotenpunkte derselben die Lasten  $\frac{1}{n} P_1, \frac{1}{n} P_2, \frac{1}{n} P_3 \dots$

(Fig. 332). Der Sparrenschieb am unteren Ende der Sparren wird durch den Auflagerring aufgenommen, und es besteht somit die Wirkung der Unterlage in einer Verticalreaction gleich der Summe der von den Sparren aufgenommenen Lasten.



Sparren. Ähnlich wie S. 290 lassen sich für die einzelnen Knotenpunkte die Gleichgewichtsbedingungen aufstellen:

Knotenpunkt I:

$$\frac{1}{n} P_1 + T_1 \sin \alpha = 0,$$

Knotenpunkt II:

$$\frac{1}{n} P_1 + T_2 \sin \alpha - T_1 \sin \alpha = 0,$$

Knotenpunkt III:

$$\frac{1}{n} P_3 + T_3 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha = 0$$

u. s. f.



Hieraus ergeben sich die Stabkräfte in den Sparren:

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{P_1}{n \sin \alpha} \quad (\text{Druck}) \\ T_2 &= -\frac{P_1 + P_2}{n \sin \alpha} \quad (\text{Druck}) \\ T_3 &= -\frac{P_1 + P_2 + P_3}{n \sin \alpha} \quad (\text{Druck}) \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

u. s. f.

Ringe. Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\text{Knotenpunkt I: } H_1 - T_1 \cos \alpha = 0,$$

$$\text{Knotenpunkt II: } H_2 + T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\text{Knotenpunkt III: } H_3 + T_2 \cos \alpha - T_3 \cos \alpha = 0$$

u. s. f.

bestimmen sich die Stabkräfte in den Ringen:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= -\frac{P_1 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Druck}) \\ R_2 &= -\frac{P_2 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Druck}) \\ R_3 &= -\frac{P_3 \cotg \alpha}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \quad (\text{Druck}) \end{aligned} \right\} \quad (368)$$

u. s. f.

Bezüglich des Mauerringes (Knotenpunkt m) hat man:

$$H_m + T_{m-1} \cos \alpha = 0,$$

daher

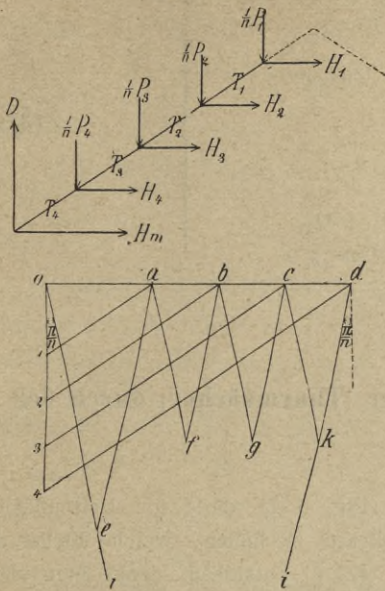
$$R_m = \frac{P_1 + P_2 + \dots + P_{m-1}}{2 n \sin \frac{\pi}{n}} \cotg \alpha \quad (\text{Zug}). \quad (369)$$

*Graphische Lösung.* Man trage (Fig. 333)  $\frac{1}{n} P_1 = 01$ ,  $\frac{1}{n} P_2 = 12 \dots$

$\frac{1}{n} P_4 = 34$  auf, so dass  $D = 40$ , und bilde wie S. 292 für die Knotenpunkte I, II... die Kräftepolygone  $01a0$ ,  $a12ba$  u. s. f., so findet man:



Fig. 333.



$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 1 a \\ T_2 &= 2 b \\ T_3 &= 3 c \\ T_4 &= 4 d \end{aligned} \right\} \text{ Druck,}$$

$$\begin{aligned} H_1 &= a 0 \\ H_2 &= b a \\ H_3 &= c b \\ H_4 &= d c \\ H_m &= 0 d. \end{aligned}$$

Aus den Werten für die Radialkräfte ergeben sich nun leicht die Stabkräfte in den Ringen:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= e 0 = a e \\ R_2 &= f a = b f \\ R_3 &= g b = c g \\ R_4 &= h c = d h \\ R_m &= 0 i = i d \quad (\text{Zug}). \end{aligned} \right\} \text{ Druck,}$$

### B) Beanspruchung durch Schnee und (lotrechten) Winddruck.

**Sparren.** Zuzolge den Gleichungen 367 entstehen die grössten, durch veränderliche Last erzeugten Stabkräfte, welche immer als Druckkräfte auftreten, dann, wenn die mobile Belastung eine totale ist.

**Ringe.** Die Stabkräfte eines Ringes erreichen gemäss den Gleichungen 368 ihre grössten Werte, wenn die Zone des betreffenden Ringes ganz belastet ist. Dieselben sind sämtlich Druckkräfte mit Ausnahme des Mauer ringes, dessen Stäbe auf Zug beansprucht werden. Der grösste Zug findet bei voller Belastung des Daches statt.

**Diagonalen.** Die grösste Differenz in den Stabkräften zweier benachbarter Sparren des ersten Ringes kann unter Beibehaltung der beim Kuppeldach gemachten Belastungsannahmen zu

$$\frac{P_1 + Q_1}{n \sin \alpha} - \frac{P_1}{n \sin \alpha} = \frac{Q_1}{n \sin \alpha}$$

festgesetzt werden.

Ist  $\gamma_1$  der Winkel der Diagonale mit dem Sparren, so ist die Zugbeanspruchung der Diagonale



$$Z_1 = \frac{Q_1}{n \sin \alpha \cos \gamma_1}$$

und ebenso für die Diagonalen der übrigen Zonen:

$$Z_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{n \sin \alpha \cos \gamma_2}$$

$$Z_3 = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{n \sin \alpha \cos \gamma_3}$$

u. s. f.

(370)

### C) Beanspruchung steiler Zeltdächer (Thurmdächer) durch den Wind.

Von dem vierseitigen Pyramidendach (Fig. 334) werde die Seitenfläche AEC vom Wind getroffen. Um die Stabkräfte zu finden, welche hiebei in den Stäben der Seitenflächen ABC und EDC entstehen, denke man sich in der Symmetrieebene MN einen Dachbinder, dessen Verticalprojection sich mit denjenigen der Dachflächen ABC und EDC deckt und lasse in den Knotenpunkten dieses gedachten Binders die Winddrücke  $W_1, W_2, W_3, W_4$  wirken (Fig. 335), welche nach den diesen Knotenpunkten entsprechenden Dachflächen zu bestimmen sind.

Fig. 334.

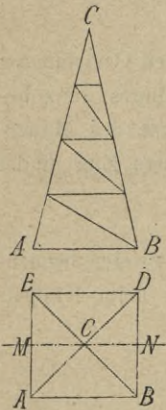
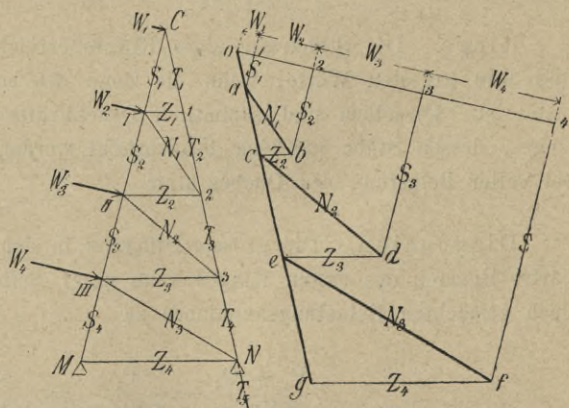


Fig. 335.



Die Stabkräfte des gedachten Binders können rechnerisch mittels der Momentenmethode ermittelt werden; graphisch ergeben sie sich nach Fig. 335 wie folgt:



Knotenpunkt C.

Bekannt:  $W_1 = 01$ ,  
 unbekannt:  $S_1, T_1$ ,  
 Polygon:  $01a0$ ,  
 daher:  $S_1 = 1a$  (Zug),  
 $T_1 = a0$  (Druck).

Knotenpunkt I.

Bekannt:  $\begin{cases} W_2 = 12, \\ S_1 = a1, \\ Z_1 = 0, \end{cases}$   
 unbekannt:  $S_2, N_1$ ,  
 Polygon:  $a12ba$ ,  
 daher:  $S_2 = 2b$  (Zug),  
 $N_1 = ba$  (Druck).

Knotenpunkt 1.

Bekannt:  $T_1 = 0a$ ,  
 unbekannt:  $T_2, Z_1$ ,  
 Polygon:  $0a0$ ,  
 daher:  $T_2 = a0 = T_1$  (Druck),  
 $Z_1 = 0$ .

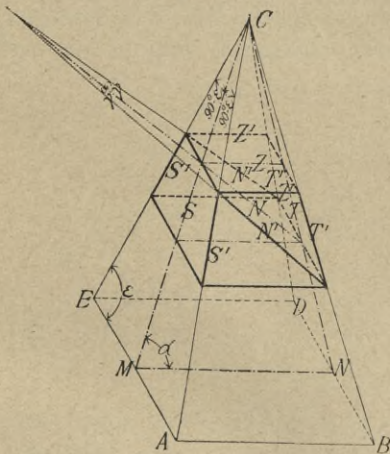
Knotenpunkt 2.

Bekannt:  $\begin{cases} T_2 = 0a, \\ N_1 = ab, \end{cases}$   
 unbekannt:  $Z_2, T_3$ ,  
 Polygon:  $0abc0$ ,  
 daher:  $Z_2 = bc$  (Zug),  
 $T_3 = c0$  (Druck)

u. s. f.

Auf Grund der so bestimmten Stabkräfte des in der Ebene MN gedachten Binders findet man leicht die in den Stäben der Dachflächen ABC und EDC wirklich auftretenden Kräfte.

Fig. 336.



Die Stabkraft  $S$  z. B. des ideellen Binders wird ersetzt durch die Stabkräfte  $S', S'$  des nämlichen Feldes in den Sparren  $AC$  und  $EC$  (Fig. 336). Diese schliessen mit  $MC$  die Winkel  $90^\circ - \epsilon$  ein, daher:

$$S' = \frac{S}{2 \sin \epsilon}, \quad (371)$$

desgleichen die correspondirenden Stabkräfte in den Sparren  $BC$  und  $DC$ :

$$T' = \frac{T}{2 \sin \epsilon}. \quad (372)$$

Ferner ist:

$$Z' = \frac{1}{2} Z \quad (373)$$

und

$$N' = \frac{N}{2 \cos \gamma}. \quad (374)$$

Durch die Gleichungen 371 bis 374 ist auch der Weg zur graphischen Reduction der Stabkräfte des gedachten Binders auf die wirklichen Stabkräfte vorgezeichnet.

Trifft der Wind die Dachfläche BDC, so tritt ein Wechsel in der Art der Beanspruchung ein: die Kräfte T und N gehen in Zug über, während Z und S Druckkräfte werden. Erhalten die Diagonalen durchgängig Zugquer-schnitte, so sind in jedem Feld gekreuzte Diagonalen anzuordnen, und über die Berechnung derselben gilt das S. 269 Gesagte.



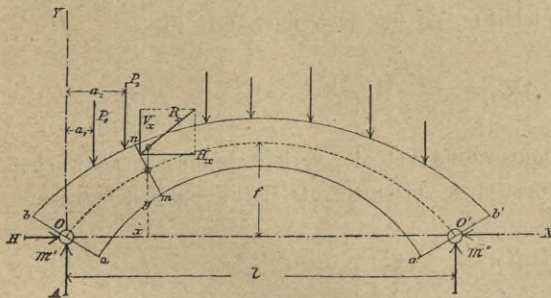
## VII. Abschnitt.

### Der elastische Bogenträger.

#### § 1. Der stabförmige elastische Bogenträger unter Einfluss von ruhender Belastung.

Ein Bogenträger (Fig. 337), symmetrisch zur Scheitelverticalen, sei durch feststehende lotrechte Lasten  $P_1, P_2 \dots$ , beansprucht, deren Entfernungen vom Schwerpunkt des linken Kämpferquerschnitts mit  $a_1, a_2 \dots$  bezeichnet seien. Die Widerlagerreactionen  $W'$  und  $W''$ , welche dieser Belastung das Gleichgewicht halten, werden im Allgemeinen die Kämpferquerschnitte nicht in deren Schwerpunkten (Auflagerpunkten) schneiden. Man verlege daher jede derselben parallel ihrer anfänglichen Richtung nach diesen Schwerpunkten, indem

Fig. 337.



man Kräftepaare hinzufügt, deren Momente bezüglich der betreffenden Auflagerpunkte  $\mathcal{N}'$  beziehungsweise  $\mathcal{N}''$  seien.

Die so verschobenen Widerlagerreactionen zerlege man in ihre Horizontal- und Verticalcomponenten, welche bezüglich

des linken Auflagers mit  $H$  und  $A$  bezeichnet seien.

Es stelle nun  $m$  einen beliebigen Querschnitt vor, dessen Schwerpunkt bezüglich des rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 337) mit dem Anfangspunkt in  $O$  die Coordinaten  $x$  und  $y$  habe. Bezeichnet  $R_x$  die Mittelkraft der rechts vom Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte,  $\mathcal{N}_x$  das Moment derselben bezüglich des Querschnittschwerpunktes und  $H_x, V_x$  ihre Horizontal- und Verticalcomponente, so ergibt sich auf Grund der statischen Gleichgewichtsbedingungen:



$$H_x = H, \quad (375)$$

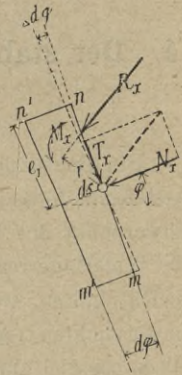
$$V_x = A - \sum_0^x P, \quad (376)$$

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{M}' + Ax - Hy - \sum_0^x P(x-a). \quad (377)$$

Diese Gleichungen reichen zur Bestimmung der Unbekannten nicht aus, weshalb zur Aufstellung weiterer Bedingungsgleichungen die Gesetze der elastischen Formänderung zu Hülfe genommen werden müssen.

Es sei zu diesem Ende  $mnn'm'$  (Fig. 338) ein Bogenelement von der sehr kleinen Länge  $ds$ , dessen Begrenzungsquerschnitte den Winkel  $d\varphi$  bilden und welches sich unmittelbar an den betrachteten Querschnitt anschliesst. Unter Hinzufügung eines Kräftepaars vom Momente  $\mathcal{M}_x = R_x \cdot r$  verlege man die Mittelkraft  $R_x$  nach dem Schwerpunkt des Querschnitts und zerlege dieselbe hier in eine Normalcomponente  $N_x$  und eine parallel zum Querschnitt wirkende Scheerkraft  $T_x$ . Durch die Axialkraft  $N_x$  wird eine parallele Verschiebung des Querschnitts  $mn$  angestrebt, während  $\mathcal{M}_x$  eine Drehung desselben um den Winkel  $\Delta d\varphi$  bezüglich seiner Schwerpunktsaxe bewirkt.

Fig. 338.



Bezeichnet  $\beta'$  die Spannung, welche durch die angestrebte Drehung, also durch  $\mathcal{M}_x$  in der äussersten, um  $e_1$  vom Schwerpunkt abstehenden Faser entsteht, ist ferner  $\Delta ds'$  die hiedurch hervorgebrachte Längenänderung dieser Faser, endlich  $\Theta$  das Trägheitsmoment des Querschnitts, so hat man nach Gl 11:

$$\mathcal{M}_x = \frac{\beta'}{e_1} \Theta,$$

und wenn bei grossem Krümmungsradius von der verhältnissmässig schwachen Krümmung des Balkens abgesehen, d. h.  $mnn'm'$  als Parallelepipet betrachtet wird, nach Gl. 2:

$$\frac{\Delta ds'}{ds} = \frac{\beta'}{\varepsilon},$$

oder, da  $\Delta ds' = e_1 \Delta d\varphi$ :

$$\beta' = \frac{\varepsilon e_1 \Delta d\varphi}{ds}.$$

Dieser Wert in den Ausdruck für  $\mathcal{M}_x$  eingeführt, gibt:

$$\Delta d\varphi = \frac{\mathcal{M}_x}{\varepsilon \Theta} ds. \quad (378)$$



Da für jedes Element eine solche Drehung stattfindet und diese Winkeländerung zugleich eine Drehung aller folgenden Elemente veranlasst, so erhält man die gesammte Winkeländerung zwischen den Querschnitten  $x_1$  und  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{x_2} - \Delta \varphi_{x_1} &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathcal{N}_x}{\varepsilon \Theta} ds, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathcal{N}_x}{\varepsilon \Theta} \frac{dx}{ds}, \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathcal{N}_x}{\varepsilon \Theta} \frac{dx}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

oder, wenn  $\Theta \cos \varphi$  constant angenommen, und

$$\varepsilon \Theta \cos \varphi = K \tag{379}$$

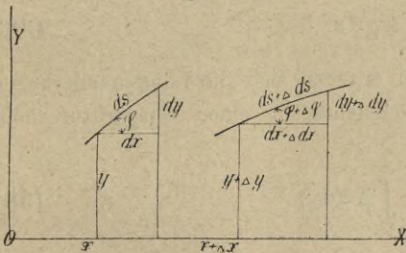
gesetzt wird:

$$\Delta \varphi_{x_2} - \Delta \varphi_{x_1} = \frac{1}{K} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{N}_x dx. \tag{380}$$

Die durch  $N_x$  erzeugte Längenänderung  $\Delta ds$  des Elements  $ds$  der Axe ergibt sich nach Gl. 1:

Fig. 339.

$$\Delta ds = \frac{N_x}{E \varepsilon} ds. \tag{381}$$



Durch die Winkeländerungen sowie durch  $N_x$  entstehen Verschiebungen, welche auf folgende Weise bestimmt werden können.

Bezeichnen  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die Verrückung eines beliebigen Axen-

punktes  $x, y$  parallel den Coordinatenachsen, und sind die Änderungen von  $ds, dx, dy$  analog der obigen Bezeichnungsweise:  $\Delta ds, \Delta dx, \Delta dy$  (Fig. 339), so bestehen nach der Formänderung die Gleichungen:

$$dx + \Delta dx = (ds + \Delta ds) \cos(\varphi + \Delta \varphi)$$

und

$$dy + \Delta dy = (ds + \Delta ds) \sin(\varphi + \Delta \varphi)$$

oder

$$dx + \Delta dx = (ds + \Delta ds) (\cos \varphi \cos \Delta \varphi - \sin \varphi \sin \Delta \varphi)$$

und

$$dy + \Delta dy = (ds + \Delta ds) (\sin \varphi \cos \Delta \varphi + \cos \varphi \sin \Delta \varphi)$$



oder, wenn bei den in der Regel geringen Formänderungen die Vereinfachung  $\cos \Delta \varphi = 1$ ,  $\sin \Delta \varphi = \Delta \varphi$  eingeführt wird,

$$dx + \Delta dx = (ds + \Delta ds) \left( \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds} \Delta \varphi \right)$$

und

$$dy + \Delta dy = (ds + \Delta ds) \left( \frac{dy}{ds} + \frac{dx}{ds} \Delta \varphi \right),$$

daher:

$$\Delta dx = -\Delta \varphi dy + \frac{\Delta ds}{ds} dx - dy \frac{\Delta ds}{ds} \Delta \varphi$$

und

$$\Delta dy = \Delta \varphi dx + \frac{\Delta ds}{ds} dy + dx \frac{\Delta ds}{ds} \Delta \varphi.$$

Die Glieder zweiter Ordnung:  $dy \frac{\Delta ds}{ds} \Delta \varphi$  und  $dx \frac{\Delta ds}{ds} \Delta \varphi$  können wegen verschwindender Kleinheit ausser Berücksichtigung bleiben. Sodann vernachlässigen wir den in der That untergeordneten Einfluss der Axialkraft auf die Formänderung\*), so dass auch die Glieder mit  $\frac{\Delta ds}{ds}$  in Wegfall kommen und letztere Gleichungen übergehen in:

$$\Delta dx = -\Delta \varphi dy, \quad (382)$$

$$\Delta dy = \Delta \varphi dx. \quad (383)$$

Durch Integration dieser Gleichungen ergeben sich die Längenänderungen der Coordinaten unter gleichzeitiger Berücksichtigung einer Temperaturerhöhung um  $t^0$ :

$$\Delta x = etx - \int_0^x \Delta \varphi dy, \quad (384)$$

$$\Delta y = ety + \int_0^x \Delta \varphi dx, \quad (385)$$

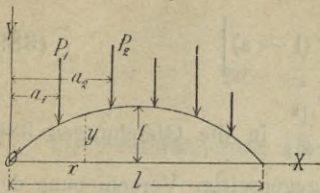
wobei  $e$  die Längenänderung pro Längeneinheit bezeichnet, die einer Temperaturdifferenz von  $1^0 \text{ C.}$  entspricht.

\*) Die Genauigkeit der Rechnung wird in höherem Grad schon durch den Umstand beeinträchtigt, dass Bogenträger mit absolut festen Enden in Wirklichkeit nicht vorkommen, der Grad der Verrückbarkeit aber niemals mit Bestimmtheit vorher festgestellt werden kann. Dies rechtfertigt die vorstehend im Interesse einer möglichst einfachen Darstellung begangenen Vernachlässigungen.



Für den Träger mit parabelförmiger Achse\*) hat man als Gleichung der letzteren (Fig. 340):

Fig. 340.



$$y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$$

oder, da der Parameter  $p = \frac{l^2}{8f}$ ,

$$y = \frac{lx - x^2}{2p}$$

und

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}l - x}{p}$$

Nach Gl. 377 ist

$$\mathcal{N}_x = \mathcal{N}' + Ax - Hy - \sum_0^x P(x - a),$$

daher nach Gl. 380 die Winkeländerung zwischen den Querschnitten 0 und x:

$$\Delta\varphi_x - \Delta\varphi_0 = \frac{1}{K} \int_0^x \left[ \mathcal{N}' + Ax - H \frac{lx - x^2}{2p} - \sum_0^x P(x - a) \right] dx$$

oder

$$\Delta\varphi_x = \Delta\varphi_0 + \frac{1}{2K} \left[ 2\mathcal{N}'_x + Ax^2 - \frac{H}{p} \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) - \sum_0^x P(x - a)^2 \right] \quad (386)$$

Wird dieser Wert in die Ausdrücke für  $\Delta x$  und  $\Delta y$  (Gleichungen 384 und 385) eingeführt und nochmals integriert, so folgt:

$$\Delta x = etx - y\Delta\varphi_0 - \frac{x^2}{6pK} \left[ \mathcal{N}' \left( \frac{3}{2} - 2x \right) + Ax \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x \right) - \frac{H}{p} x \left( \frac{l^2}{4} - \frac{lx}{2} + \frac{x^2}{5} \right) - \frac{1}{4x^2} \sum_0^x P(2l - 3x - a)(x - a)^3 \right] \quad (387)$$

und

$$\Delta y = ety + x\Delta\varphi_0 + \frac{x^2}{6K} \left[ 3\mathcal{N}' + Ax - \frac{Hx}{p} \left( \frac{1}{2} - \frac{x}{4} \right) - \frac{1}{x^2} \sum_0^x P(x - a)^3 \right]. \quad (388)$$

\*) S. Weyrauch, Theorie der Bogenträger, Zeitschrift für Baukunde, 1878, und Separatabdruck, München bei Ackermann, 1879. Die Integration der vorkommenden Summenausdrücke:  $\sum_0^x P(x - a)$ ,  $\sum_0^x P(x - a)^2$  und ähnlicher anderer ist zuerst von Weyrauch, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 1874, gezeigt worden.

Für  $x = 1$  wird  $y = 0$ , und Gl. 377 geht über in:

$$\mathfrak{N}'' = \mathfrak{N}' + A l - \sum_0^1 P (1 - a),$$

daher

$$A = \frac{1}{l} \left[ \mathfrak{N}'' - \mathfrak{N}' + \sum_0^1 P (1 - a) \right]. \quad (389)$$

Führt man diese Werte zugleich mit  $p = \frac{l^2}{8f}$  in die Gleichungen 386 bis 388 ein, so erhält man, wenn  $d_0$  und  $c_0$  die gegenseitige Verschiebung der Auflagerpunkte in wagrechtem und lotrechtem Sinne bezeichnen:

$$\Delta \varphi_1 = \Delta \varphi_0 + \frac{1}{2K} \left[ \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' - \frac{1}{3} H f + \frac{1}{l} \sum_0^1 P (1 - a) a \right], \quad (390)$$

$$\begin{aligned} \Delta l = d_0 = e t l + \frac{l f}{3K} \left[ \mathfrak{N}' + \mathfrak{N}'' - \frac{2}{3} H f \right. \\ \left. + \frac{1}{l^3} \sum_0^1 P (a l^3 - 2 a^3 l + a^4) \right], \end{aligned} \quad (391)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{x=1} = c_0 = l \Delta \varphi_0 + \frac{l^2}{3K} \left[ \mathfrak{N}' + \frac{1}{2} \mathfrak{N}'' - H f \right. \\ \left. + \frac{1}{2 l^2} \sum_0^1 P (2 a l^2 - 3 a^3 l + a^3) \right]. \end{aligned} \quad (392)$$

Aus diesen drei Gleichungen ergeben sich die drei Unbekannten:

$$H = \frac{15}{4 f l^3} \sum_0^1 P a^2 (1 - a)^2 + \frac{45 K e t}{4 f^2} - \frac{15 K}{2 l f} \left( \frac{3 d_0}{2 f} + \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1 \right), \quad (393)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}' = \frac{1}{2 l^3} \sum_0^1 P a (1 - a)^2 (5 a - 2 l) + \frac{15 K e t}{2 f} \\ - \frac{3 K}{l} \left( \frac{5 d_0}{2 f} - \frac{2 c_0}{l} + 3 \Delta \varphi_0 - \Delta \varphi_1 \right), \end{aligned} \quad (394)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}'' = \frac{1}{2 l^3} \sum_0^1 P a^2 (1 - a) (3 l - 5 a) + \frac{15 K e t}{2 f} \\ - \frac{3 K}{l} \left( \frac{5 d_0}{2 f} + \frac{2 c_0}{l} - 3 \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_0 \right). \end{aligned} \quad (395)$$

Sind die Auflager unverrückbar fest und werden Temperatureinflüsse nicht berücksichtigt, so erhält man, da  $\Delta \varphi_0 = 0$ ,  $\Delta \varphi_1 = 0$ ,  $d_0 = 0$ ,  $c_0 = 0$ ,  $t_0 = 0$ ,



$$H = \frac{15}{4 f l^3} \sum_0^1 P a^2 (1-a)^2, \quad (396)$$

$$\mathfrak{N}' = \frac{1}{2 l^3} \sum_0^1 P a (1-a)^2 (5a-2l), \quad (397)$$

$$\mathfrak{N}'' = \frac{1}{2 l^3} \sum_0^1 P a^2 (1-a) (3l-5a). \quad (398)$$

Temperaturänderung allein um  $t^0$  bewirkt:

$$H_{(t)} = \frac{45 K e t}{4 f^2}, \quad (399)$$

$$\mathfrak{N}'_{(t)} = \mathfrak{N}''_{(t)} = \frac{15 K e t}{2 f} = \frac{2}{3} H_{(t)} f. \quad (400)$$

Ein Ausweichen der Trägerenden bewirkt (wenn, wie früher,  $\Delta\varphi_0$  die Drehung des linken,  $\Delta\varphi_1$  die des rechten Kämpferquerschnitts,  $d_0$  die wagrechte und  $c_0$  die lotrechte Verschiebung der Auflagerpunkte bezeichnen):

$$H = -\frac{15 K}{2 l f} \left( \frac{3}{2} d_0 + \Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_1 \right), \quad (401)$$

$$\mathfrak{N}' = -\frac{3 K}{l} \left( \frac{5}{2} d_0 - \frac{2}{1} c_0 + 3 \Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_1 \right), \quad (402)$$

$$\mathfrak{N}'' = -\frac{3 K}{l} \left( \frac{5}{2} d_0 + \frac{2}{1} c_0 - 3 \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_0 \right). \quad (403)$$

Tritt aber nur eine Änderung der Spannweite um  $d_0$  ein, keine Drehung und Senkung der Widerlager, so ist:

$$H_{(d_0)} = -\frac{45 K d_0}{4 l f^2} \quad (404)$$

und

$$\mathfrak{N}'_{(d_0)} = \mathfrak{N}''_{(d_0)} = -\frac{15 K d_0}{2 l f} = \frac{2}{3} H_{(d_0)} f. \quad (405)$$

Besteht die Gesamtbelastung des Bogens aus einer an beliebiger Stelle  $a$  angreifenden Einzellast, so ist nach Gl. 396 bis 398:

$$H = \frac{15}{4 f l^3} P a^2 (1-a)^2, \quad (406)$$

$$\mathfrak{N}' = \frac{1}{2 l^3} P a (1-a)^2 (5a-2l), \quad (407)$$

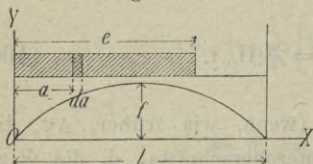
$$\mathfrak{N}'' = \frac{1}{2 l^3} P a^2 (1-a) (3l-5a) \quad (408)$$

und nach Gl. 389:

$$A = \frac{1}{l^3} P (1 - a)^2 (1 + 2a). \quad (409)$$

Vorstehende Gleichungen können benützt werden, um die einer gleichmäßig verteilten Belastung entsprechenden Werte des Horizontalschubes, der Auflagermomente und Auflagerreactionen abzuleiten. Erstreckt sich die Last ( $q$  pro Längeneinheit) vom linken Auflager anfangend, auf die Länge  $e$  des Trägers (Fig. 341), so ist in den Gleichungen 406 bis 409:  $P = qda$  zu setzen und zwischen den Grenzen 0 und  $e$  zu integrieren. Man erhält:

Fig. 341.



$$H = \frac{q e^3}{8 f l^3} (10 l^2 - 15 e l + 6 e^2), \quad (410)$$

$$\mathcal{N}' = \frac{q e^2}{2 l^3} (3 l^2 e - 3 l e^2 - l^3 + e^3), \quad (411)$$

$$\mathcal{N}'' = \frac{q e^3}{2 l^3} (l^2 - 2 e l + e^2), \quad (412)$$

$$A = \frac{q e}{l^3} \left( l^3 - l e^2 + \frac{e^3}{2} \right). \quad (413)$$

Für  $e = l$  ergibt sich:

$$H = \frac{q l^2}{8 f}, \quad A = \frac{q l}{2}, \quad \mathcal{N}' = \mathcal{N}'' = 0.$$

Durch  $\mathcal{N}'$  und  $H$ , beziehungsweise  $\mathcal{N}''$  und  $H$  sind auch die Angriffsorte der Widerlagerreactionen  $W'$  und  $W''$  bestimmt. Denn bezeichnen  $w'$  und  $w''$  die Ordinaten derjenigen Punkte, in welchen  $W'$  und  $W''$  die Auflagerverticalen schneiden, so hat man:

$$w' = \frac{\mathcal{N}'}{H} \quad \text{und} \quad w'' = \frac{\mathcal{N}''}{H}. \quad (414)$$

*Graphische Lösung.* Für einen mit den Enden befestigten Bogenträger ist, wenn Temperatureinflüsse unberücksichtigt bleiben, zufolge den Gleichungen 380, 384 und 385:

$$\Delta \varphi_1 - \Delta \varphi_0 = \frac{1}{K} \int_0^1 \mathcal{N}_x dx = 0, \quad (415)$$

$$d_0 = - \int_0^1 \Delta \varphi dy = 0, \quad (416)$$

$$c_0 = \int_0^1 \Delta \varphi dx = 0. \quad (417)$$



Es ist nun allgemein bei teilweiser Integration:

$$\int \Delta \varphi dy = y \Delta \varphi - \int y d \Delta \varphi,$$

daher nach Einführung der Grenzen (für  $x = 0$  und  $x = 1$  ist  $y$  und  $\Delta \varphi$  gleich 0):

$$\int_0^1 \Delta \varphi dy = \int_0^1 y d \Delta \varphi -$$

und

$$\int_0^1 \Delta \varphi dx = \int_0^1 x d \Delta \varphi.$$

$d \Delta \varphi$  oder, was dasselbe ist,  $\Delta d \varphi$  ist nach Gl. 378 gleich:

$$\frac{\mathcal{N}_x}{\varepsilon \Theta} \frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{1}{K} \mathcal{N}_x dx;$$

somit gehen die Gleichungen über in:

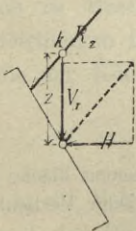
$$\int_0^1 \mathcal{N}_x dx = 0,$$

$$\int_0^1 \mathcal{N}_{xy} dx = 0,$$

$$\int_0^1 \mathcal{N}_{xx} dx = 0.$$

Bezeichnet man ferner den lotrechten Abstand eines jeden Querschnittschwerpunktes von der zugehörigen  $R_x$  mit  $z$ , welche Strecke als Verticalabstand zwischen Drucklinie und Bogenaxe an der betreffenden Stelle angesehen werden kann (Fig. 342), so ist  $\mathcal{N}_x = H \cdot z$  ( $\mathcal{N}_x$ ,  $V$  und  $H$  ersetzen  $R_x$ ; da das Moment von  $R_x$  bezüglich des Punktes  $k$  gleich Null, so ist auch  $\mathcal{N}_x - H \cdot z = 0$ ), so dass vorstehende Gleichungen geschrieben werden können:

Fig. 342.



$$\int_0^1 z dx = 0, \tag{418}$$

$$\int_0^1 z y dx = 0, \tag{419}$$

$$\int_0^1 z x dx = 0. \tag{420}$$

1. Die erste dieser Gleichungen sagt, dass die Summe der zwischen Bogenaxe (starkgezeichnete Linie, Fig. 343) und Drucklinie  $\alpha\beta\gamma\delta$  liegenden Flächen gleich Null ist, wenn die auf verschiedenen Seiten der Bogenaxe befindlichen Flächen mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden.

Fig. 343.



2. Gleichung 420 bringt zum Ausdruck, dass das statische Moment der gesammten, zwischen Bogenaxe und Drucklinie befindlichen Fläche bezüglich der Y-Axe gleich Null ist. Mit Rücksicht auf Gl. 418 folgt daraus, dass die Schwerpunkte des negativen und des positiven Teiles jener Fläche in eine und dieselbe Verticale fallen.

3. Um Gl. 419 zu deuten, denke man sich die zwischen Bogenaxe und Drucklinie gelegenen Flächenelemente von der Höhe  $z$  in lotrechttem Sinne so verschoben, dass ihre Mitten in die Bogenaxe zu liegen kommen. Das statische Moment der so entstehenden Fläche ist dann, wenn für deren einzelne Abteilungen die früheren Vorzeichen beibehalten werden, bezüglich der X-Axe gleich Null und positiver und negativer Teil dieser Fläche haben eine gemeinsame wagrechte Schweraxe.

Da auch für die so verschobene Fläche die Sätze 1 und 2 Gültigkeit haben, so folgt, dass positiver und negativer Teil letztgedachter Fläche, an Grösse einander gleich, einen gemeinschaftlichen Schwerpunkt besitzen.\*)

Aus den drei Gleichungen 418 bis 420 geht also hervor, dass Drucklinie und Bogenaxe sich mindestens dreimal schneiden müssen.

Ein Schnittpunkt nämlich muss zunächst vorhanden sein, damit die Fläche zwischen Bogenaxe und Drucklinie nach Gl. 418 in einen positiven und einen negativen Teil getrennt werde. Nach Gl. 420 ist aber ein einziger Schnittpunkt nicht möglich, weil dann die beiden Flächen zu beiden Seiten desselben gleich gross sein müssten, folglich ihr statisches Moment bezüglich der Y-Axe nicht gleich Null sein könnte. Nimmt man sonach zwei Schnittpunkte als vorhanden an, so würde die fragliche Fläche zwischen Bogenaxe und Drucklinie in drei Teile, zwei negative und einen positiven zerfallen, von welchen

\*) Bei parabolförmiger Bogenaxe geht Gl. 419 über in:

$$\int_0^1 \frac{4f}{l^2} (1x - x^2) z dx = 0,$$

oder, da  $\int_0^1 z x dx = 0$ , in:

$$\int_0^1 z x^2 dx = 0,$$

d. h. das Trägheitsmoment der von Bogenaxe und Drucklinie eingeschlossenen Fläche bezüglich der Y-Axe oder mit Rücksicht auf Gl. 418 und 420 bezüglich jeder Verticalaxe ist gleich Null.

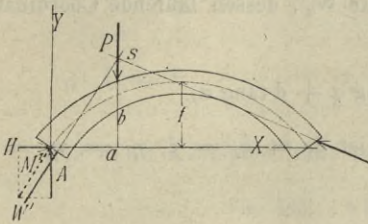


das mittlere Stück doppelt so gross sein müsste als die beiden anderen. Die Summe der  $\int zy dx$  dieser drei Teile kann unmöglich, wie Gl. 419 bedingt, gleich Null sein, weil die dem mittleren Flächenteile entsprechenden  $y$ -Werte grösser sind als diejenigen der beiden äusseren Flächenteile, und es wird daher die Axe von der Drucklinie mindestens dreimal geschnitten.

Bei der graphostatischen Bestimmung des elastischen Bogenträgers kommt es darauf an, diejenige Drucklinie zu finden, welche Seilpolygon der Belastung ist und zugleich den Bedingungen Gl. 418 bis 420 entspricht. Die bis jetzt bekannt gewordenen Lösungen dieser Aufgabe erreichen nur einen sehr geringen Grad von Genauigkeit, indem sie auf der Vergleichung der Grösse und gegenseitigen Lage der von Drucklinie und Bogenaxe eingeschlossenen und in allen Fällen sehr schmalen Flächenstreifen beruhen. Es soll daher auf jene Methoden hier nicht näher eingegangen und nur das gemischt rechnerisch-graphische Verfahren erwähnt werden, welches auf der Bestimmung der Schnittlinie der Kämpferdrücke und der Umhüllungsline der Kämpferdrücke basirt.

Es wirke auf den Bogenträger eine Einzellast  $P$  (Fig. 344), welche die Entfernung  $a$  vom linken Auflager hat. Dieselbe wird zwei Widerlagerreactionen  $W'$ ,  $W''$  hervorbringen, die sich, da sie der Einzellast das Gleichgewicht halten, in einem Punkte  $s$  der Kraftlinie  $P$  schneiden. Da das Moment von  $W'$  bezüglich des Punktes  $s$ , dessen Coordinaten  $a$  und  $b$  seien, gleich Null ist,  $\mathcal{N}'$ ,  $A$  und  $H$  aber  $W'$  ersetzen, so ist

Fig. 344.



$$\mathcal{N}' + Aa - Hb = 0$$

oder

$$b = \frac{\mathcal{N}' + Aa}{H}. \tag{421}$$

Lässt man  $P$  nach einander alle Lagen von  $a = 0$  bis  $a = 1$  einnehmen, so beschreibt der Punkt  $s$  eine stetige Curve, die „Schnittlinie der Kämpferdrücke“, deren Gleichung durch 421 gegeben ist. Führt man in dieselbe die einer Einzellast entsprechenden Werte  $H$ ,  $\mathcal{N}'$ ,  $A$  der Gleichungen 406, 407 und 409 ein, so erhält man als Gleichung der Schnittlinie der Kämpferdrücke für den Parabelbogen:

$$b = \frac{6}{5} f, \tag{422}$$

d. h. die Schnittlinie der Kämpferdrücke ist hier eine wagrechte Gerade, die um  $\frac{1}{5}$  der Pfeilhöhe über dem Scheitel der Bogenaxe liegt.

Mit dem Fortschreiten der Einzellast P nimmt nicht nur der Punkt s andere Lagen ein, sondern es ändern sich auch die Kraftlinien der Widerlagerreactionen. Letztere umhüllen hiebei zwei Curven, welche „Umhüllungslinien der Kämpferdrücke“ genannt werden. Jede derselben kann als der geometrische Ort des Schnittpunktes zweier sehr nahe auf einander folgender Kämpferdrücke betrachtet werden.

Demnach sei  $W_1'$  (Fig. 345) linksseitiger Kämpferdruck der um  $a$  von Y entfernten Einzellast P,  $\xi_1$  und  $\eta_1$  seien die fortlaufenden Coordinaten dieser Geraden  $W_1'$ ,  $\alpha$  ihr Neigungswinkel gegen den Horizont und  $e$  die Ordinate ihres Schnittpunktes mit der Auflagerverticalen, so hat man als Gleichung von  $W_1'$ :

$$\eta_1 = e + \xi_1 \tan \alpha.$$

Rückt P um  $da$  weiter, so ändert sich  $e$  um  $de$ ,  $\tan \alpha$  um  $d \tan \alpha$ , und die Gleichung des neuen Kämpferdrucks  $W_2'$ , dessen laufende Coordinaten mit  $\xi_2$  und  $\eta_2$  bezeichnet seien, lautet:

$$\eta_2 = e + de + \xi_2 (\tan \alpha + d \tan \alpha).$$

Für den Schnittpunkt beider Geraden ist  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ , daher durch Subtraction:

$$\xi = - \frac{de}{d \tan \alpha}$$

und

$$\eta = e - de \frac{\tan \alpha}{d \tan \alpha}.$$

Da  $\tan \alpha = \frac{A}{H}$  und  $e = \frac{\mathcal{N}'}{H}$  (Gl. 414), so erhält man:

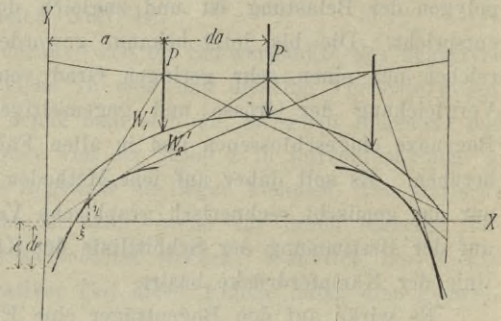
$$\xi = \frac{H d \mathcal{N}' - \mathcal{N}' d H}{A d H - H d A} \quad (423)$$

und

$$\eta = \frac{A d \mathcal{N}' - \mathcal{N}' d A}{A d H - H d A}. \quad (424)$$

Substituirt man die dem Parabelbogen entsprechenden Werte  $H$ ,  $A$ ,  $\mathcal{N}'$  der Gleichungen 406, 407 und 409 und die Differentiale dieser Werte nach  $a$ , so ergibt sich:

Fig. 345.





$$\xi = \frac{a l}{2(a+1)} \tag{425}$$

$$\eta = \frac{(6 a l^2 - 5 a^3 - l^3) 2 f}{(l^2 - a^2) 15 a} \tag{426}$$

und wenn der aus den ersten dieser Gleichungen folgende Wert von  $a$  in die zweite eingesetzt wird:

$$\eta = \frac{f}{15 l \xi} (14 l \xi - 4 \xi^2 - l^2) \tag{427}$$

als Gleichung der Umhüllungslinie der linken Kämpferdrücke. Diese Curve ist eine Hyperbel.

Da

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{f}{15} \left( \frac{1}{\xi^2} - \frac{4}{l} \right)$$

so ist:

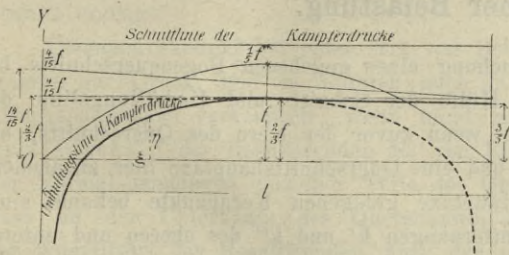
für  $\xi = 0$ ,  $\eta = -\infty$  und  $\frac{d\eta}{d\xi} = \infty$ ,

„  $\xi = \frac{l}{2}$ ,  $\eta = \frac{2}{3} f$  „  $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ ,

„  $\xi = l$ ,  $\eta = \frac{3}{5} f$  „  $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{f}{5 l}$ .

Die eine Asymptote fällt mit der Y-Axe zusammen, die andere ist eine geneigte Gerade, bei  $x = 0$  durch die Ordinate  $\frac{1}{15} f$  und bei  $x = l$  durch die Ordinate  $\frac{2}{3} f$  bestimmt (Fig. 346). Die Hyperbel hat für  $\xi = \frac{l}{2}$  im

Fig. 346.



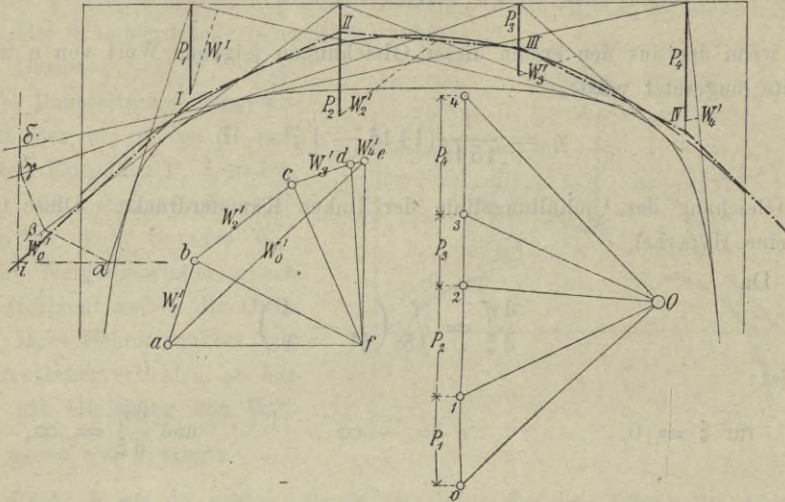
Abstand  $\frac{2}{3} f$  von der X-Axe eine wagrechte Tangente, mit welcher sie in

die symmetrisch zur Scheitelverticalen gelegene Umhüllungslinie der rechtsseitigen Kämpferdrücke übergeht.

Sind Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke auf solche Weise festgestellt, so kann man, auch wenn der Träger durch eine grössere Anzahl Lasten beliebig beansprucht ist, die Widerlagerreactionen jeder Einzelast (Fig. 347) durch Zerlegung derselben nach den jetzt bekannten Richtungen der Kämpferdrücke graphisch sofort angeben. Durch Vereinigung der

zusammengehörigen Einzelreactionen ergeben sich die resultirenden Widerlagerreactionen, z. B. die linksseitige  $W_0'$  als Länge  $ae$  und deren Angriffsort mittels des Seilpolygons  $\alpha\beta\gamma\delta$  in der Geraden  $iI$ . Trägt man die Lasten in

Fig. 347.



der Fig. 347 angegebenen Weise auf und macht man  $OO = ae = W_0'$ , so ist das mit Pol  $O$  von  $iI$  aus construirte Seilpolygon die Drucklinie des Bogens.

## § 2. Der stabförmige elastische Bogenträger bei beweglicher Belastung.

Die ungünstigste Beanspruchung eines gegebenen Bogenquerschnitts bei variabler Belastung kann mit Hülfe der Schnitt- und Umhüllungsline der Kämpferdrücke gefunden werden, wenn zuvor der Kern des Querschnitts, beziehungsweise, weil Kräftebene und eine Querschnittshauptaxe hier zusammenfallen, die beiden in dieser Hauptaxe gelegenen Kernpunkte bekannt sind. Nach Gl. 33 erhält man die Entfernungen  $k'$  und  $k''$  des oberen und unteren Kernpunktes ( $K'$ ,  $K''$ ) vom Schwerpunkt aus den Formeln:

$$k' = \frac{\Theta}{Fn} \quad \text{und} \quad k'' = \frac{\Theta}{Fm},$$

in welchen  $n$  und  $m$  die Abstände der unteren und der oberen Querschnittskante vom Schwerpunkt bezeichnen. Bestimmt man hienach die Kernpunkte für alle Querschnitte, so erhält man als Verbindungslinien zwei Curven, welche Kernlinien genannt werden.



*Ungünstigste Beanspruchung bezüglich der Normalkräfte und Normalspannungen.*

Wir haben mit  $R_x$  die Resultierende der rechts von dem Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte bezeichnet und nennen dieselbe positiv, wenn sie gegen das linksseitige Trägerfragment drückend wirkt, hingegen negativ, wenn das Umgekehrte der Fall ist.

Hat man nun einen Querschnitt  $mn$  (Fig. 348) und links von demselben, d. h. links von der durch die obere Querschnittsgrenze gelegten Verticalen, eine Einzellast  $P$ , so besteht die Resultierende der äusseren Kräfte für den Querschnitt in der rechtsseitigen Widerlagerreaction, positiv, wie die Pfeilrichtung (Fig. 348) andeutet, und es ergeben sich aus derselben durch Zerlegung in Componenten senkrecht und parallel zum Querschnitt nach Grösse, Richtung und Lage auch  $N_x$  und  $T_x$ .

Fig. 348.

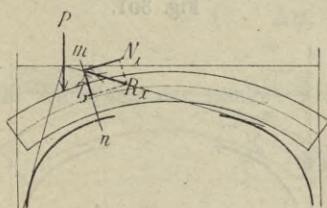
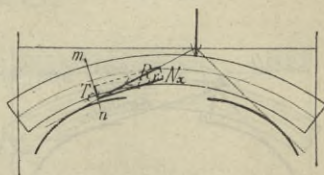


Fig 349.



Befindet sich  $P$  rechts vom Querschnitt (Fig. 349), so erhält man die Resultierende der äusseren Kräfte des Querschnitts als umgekehrte linke Widerlagerreaction, demnach mit demselben Vorzeichen wie im vorbetrachteten Fall. Daraus ist zu entnehmen, dass jede Last, ob rechts oder links vom Querschnitt befindlich, positive  $R_x$ , also auch positive Normalkräfte  $N_x$  im Querschnitt erzeugt.

Demnach entsteht bei jeder Art von Belastung in der Axe des Bogenträgers nur Druck, und es könnten auch in allen übrigen Bogenteilen nur Druckspannungen vorkommen, wenn nicht zugleich auch die Lage des Angriffsortes  $J$  der Resultierenden  $R_x$  von Einfluss wäre auf das Vorzeichen der Normalspannungen einzelner Teile des Querschnitts. Man weiss nämlich, dass an der Unterkante des Querschnitts Zugspannungen auftreten, wenn der Angriffsort der Resultierenden über den oberen Kernpunkt  $K'$  nach aufwärts hinausrückt. Die Grenzstellungen also der Einzellast, welchen die Normalspannung gleich Null an der Querschnittsunterkante entspricht, werden erhalten, wenn man vom genannten Kernpunkt  $K'$  Tangenten an die Umhüllungslinien der Kämpferdrücke zieht und bis zum Schnitt mit der Schnittlinie der Kämpferdrücke verlängert. Jede innerhalb der mittleren Strecke  $DE$  aufgebrachte Einzellast erzeugt Zug-, jede Last in den beiden äusseren Strecken Druckspannung in der Unterkante des Querschnitts. Daher wird hier das



Maximum der Druckspannung bei der in Fig. 350 angedeuteten Lastverteilung, die grösste Zugspannung bei umgekehrter Belastung entstehen. In ähnlicher Weise können die den Maximalspannungen am oberen Querschnittsrand entsprechenden Belastungen gefunden werden.

*Ungünstigste Beanspruchung bezüglich der Schubkräfte.*

Aus den Figuren 348 und 349 ist ersichtlich, dass bei den dort bezeichneten Laststellungen im Querschnitt  $m n$  Schubkräfte von verschiedenem Vorzeichen entstehen. Diejenige Lage von  $P$ , bei welcher ein Überspringen von einem Vorzeichen zum andern stattfindet, erhält man in der durch den oberen Querschnittsrand  $m$  gelegten Verticalen (Fig. 351). Links von  $m D$  erzeugt  $P$  positive (aufwärts gerichtete), rechts von  $m D$  negative und positive Schubkräfte. Eine weitere Grenzlage der Einzellast ergibt sich im Schnitt-

Fig. 350.

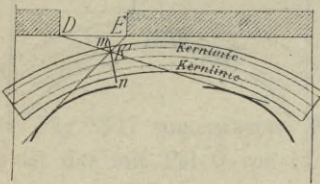
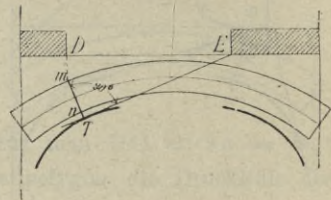


Fig. 351.



punkt  $E$  einer normal zu  $m n$  gerichteten Tangente  $T E$  an der linken Kämpferdruckumhüllungslinie, denn für jede Last in  $E$  ist  $R_x$  senkrecht zu  $m n$ , also  $T_x = 0$ . Daher erzeugt im betrachteten Querschnitt die Belastung (Fig. 351) das Maximum der positiven, die entgegengesetzte Belastung das Maximum der negativen Schubkraft. Das Gesagte gilt nur für Querschnitte der linken Trägerhälfte. Gehört der Querschnitt der rechtsseitigen Trägerhälfte an, so tritt das Umgekehrte ein.

### § 3. Der stabförmige elastische Bogen mit Kämpfergelenken.

Dieser unterscheidet sich von dem vorher behandelten Träger dadurch, dass eine Berührung des eigentlichen Bogens und der Widerlager nur vermittelt der Gelenke stattfindet, welche in der Regel in den wagrechten Schwerachsen der Kämpferquerschnitte angebracht werden, so dass die Auflagermomente  $\mathcal{M}'$ ,  $\mathcal{M}''$  gleich Null sind. Hiernach bestehen für den Gelenkbogenträger die Gleichgewichtsbedingungen:



$$H_x = H, \quad (428)$$

$$V_x = A - \sum_0^x P, \quad (429)$$

$$\mathcal{N}_x = Ax - Hy - \sum_0^x P(x - a) \quad (430)$$

und da  $\mathcal{N}_{x-1} = 0$ , sowie  $y_{x-1} = 0$ , nach Gl. 430:

$$A = \frac{1}{l} \sum_0^l P(l - a), \quad (431)$$

d. h. die Verticalcomponenten der Auflagerreactionen sind identisch mit den Auflagerreactionen des geraden, mit beiden Enden frei aufliegenden, gleich langen und gleich belasteten Tragbalkens.

Die Winkeländerung zwischen den Querschnitten 0 und x ist nach Gl. 380:

$$\Delta \varphi_x - \Delta \varphi_0 = \frac{1}{K} \int_0^x \mathcal{N}_x dx,$$

die Änderung der Längen x und y nach Gl. 384 und 385:

$$\Delta x = etx - \int_0^x \Delta \varphi dy,$$

$$\Delta y = ety + \int_0^x \Delta \varphi dx.$$

Hieraus können  $\Delta \varphi_0$ ,  $\Delta \varphi_l$  und H unter Berücksichtigung von Gl. 431 bestimmt werden.

Für den symmetrischen Parabelbogenträger folgt, wenn  $d_0$  als gegeben zu betrachten ist,

$$H = \frac{5}{8 fl^3} \sum_0^l P a (l^3 - 2 a^2 l + a^3) + \frac{15 K}{8 f^2 l} (etl - d_0). \quad (432)$$

Wenn Temperatureinflüsse nicht berücksichtigt werden und eine Änderung der Spannweite nicht eintritt, ist:

$$H = \frac{5}{8 fl^3} \sum_0^l P a (l^3 - 2 a^2 l + a^3). \quad (433)$$

Der Einfluss einer Temperaturdifferenz um  $t^0$  allein erzeugt:

$$H_{(t)} = \frac{15 K et}{8 f^2 l}; \quad (434)$$

und der Einfluss des Ausweichens der Widerlager allein:

$$H_{(d_0)} = - \frac{15 K d_0}{8 f^2 l}. \quad (435)$$

Für eine an beliebiger Stelle angreifende Einzellast hat man:

$$H = \frac{5}{8 fl^3} P a (l^3 - 2 a^2 l + a^3) \quad (436)$$

und

$$A = \frac{1}{l} P (l - a). \quad (437)$$

Einer, die Strecke  $x = e$  bedeckenden, gleichförmig verteilten Belastung entspricht:

$$\begin{aligned} H &= \frac{5}{8 fl^3} \int_0^e q da a (l^3 - 2 a^2 l + a^3), \\ &= \frac{q e^2}{16 fl^3} (5 l^3 - 5 e^2 l + 2 e^3). \end{aligned} \quad (438)$$

Wenn  $e = l$ , ist

$$H = \frac{q l^2}{8 f}. \quad (439)$$

Die Gleichung der Schnittlinie der Kämpferdrücke wird nach Gl. 421:

$$b = \frac{A a}{H} \quad (440)$$

oder nach Einführung der Werte aus Gl. 436 und 437:

$$b = \frac{8 fl^2}{5 (l^2 + la - a^2)}. \quad (441)$$

An die Stelle der Umhüllungslinien der Kämpferdrücke treten hier die Gelenkpunkte, in welchen sich sämtliche (zusammengehörige) Widerlagerreactionen schneiden. Die ungünstigsten Belastungen werden unter Berücksichtigung dieser Vereinfachung wie beim Bogenträger ohne Gelenk festgestellt.

#### § 4. Der stabförmige elastische Bogenträger mit drei Gelenken.

Derselbe entsteht, wenn zu den Kämpfergelenken noch ein Gelenk im Scheitel hinzukommt (Fig. 352).

Die Gleichgewichtsbedingungen sind:

$$H_x = H, \quad (442)$$

$$V_x = A - \sum_0^x P, \quad (443)$$

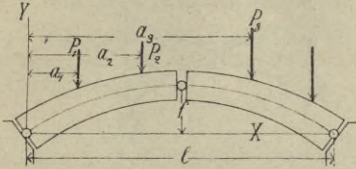


$$\mathcal{O}\mathcal{K}_x = Ax - Hy - \sum_0^x P(x - a). \quad (444)$$

Da  $\mathcal{O}\mathcal{K}_{x-1} = 0$  und  $y_{x-1} = 0$ , so folgt aus Gl. 444:

Fig. 352.

$$A = \frac{1}{1} \sum_0^1 P(1 - a). \quad (445)$$



Eine weitere Gleichung liefert die Bedingung, dass  $\mathcal{O}\mathcal{K}_{x=\frac{1}{2}} = 0$  und  $y_{x=\frac{1}{2}} = f$  ist.

Diese Werte in Gl. 444 eingeführt, ergeben:

$$H = \frac{1}{f} \left( A \frac{1}{2} - \sum_0^{\frac{1}{2}} P \left( \frac{1}{2} - a \right) \right)$$

oder, wenn der Ausdruck für A aus Gl. 445 eingesetzt wird,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{f} \left( \frac{1}{2} \sum_0^1 P 1 - \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P a - \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P 1 + \sum_0^{\frac{1}{2}} P a \right) \\ &= \frac{1}{f} \left( \frac{1}{2} \sum_0^1 P 1 - \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P a - \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P 1 + \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P a + \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P a \right). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassen des ersten und dritten, sowie des zweiten und vierten Summanden ergibt sich:

$$H = \frac{1}{f} \left( \frac{1}{2} \sum_0^{\frac{1}{2}} P a + \frac{1}{2} \sum_{\frac{1}{2}}^1 P 1 - \frac{1}{2} \sum_{\frac{1}{2}}^1 P a \right)$$

oder

$$H = \frac{1}{2f} \left( \sum_0^{\frac{1}{2}} P a + \sum_{\frac{1}{2}}^1 P (1 - a) \right), \quad (446)$$

welcher Ausdruck gleichlautend ist mit Gl. 342, S. 281.

Bei gleichmässig verteilter Belastung (Fig. 353) ist:

$$A = \frac{q e}{1} \left( 1 - \frac{e}{2} \right)$$

und nach Gl. 446:

$$H = \frac{q}{2f} \left[ \frac{l^2}{8} + \left( e - \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] = \frac{q}{2f} \left( e 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{l^2}{4} \right). \quad (447)$$

Für  $e = 1$  ist

$$H = \frac{q l^2}{8f}. \quad (448)$$

Die elastischen Formveränderungen können aus den Gleichungen 380, 384 und 385 gefunden werden. Die Umhüllungslinien der Kämpferdrücke gehen in die Kämpfergelenkpunkte über und die Schnittlinien der Kämpfer-

Fig. 353.

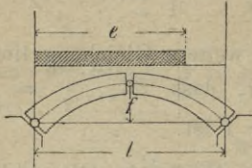


Fig. 354.



drücke bestehen, wie leicht einzusehen, aus zwei sich im Scheitelgelenk schneidenden Geraden, den Verlängerungen der Verbindungslinien von Scheitel- und Kämpfergelenken (Fig. 354).

## § 5. Der fachwerkförmige Bogenträger mit Kämpfergelenken.

Die Verticalcomponenten der Widerlagerreactionen sind (Vgl. S. 317) dieselben wie beim gleichbelasteten, mit den Enden frei aufliegenden Balkenträger. Zur Bestimmung des Horizontalschubes dient folgende Überlegung:

Die Belastung des Bogenträgers erzeugt in den einzelnen Constructions- theilen desselben Stabkräfte, durch welche Längenänderungen der Stäbe hervor- gebracht resp. angestrebt werden. Die Formänderung jedes einzelnen Stabes hat eine Änderung der Lage sämtlicher übriger Stäbe zur Folge, und die Summe sämtlicher Deformationen wird sich in einer Verschiebung der Wider- lager äussern. Sind die Widerlager unverrückbar, so ergibt sich aus der Bedingung, dass diese Verschiebung gleich Null sei, eine Beziehung zur Be- stimmung von  $H$ .

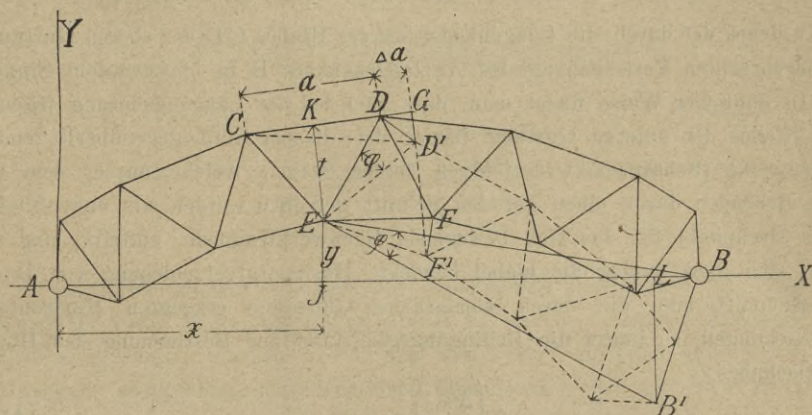
Bei den hier in Frage kommenden Trägern, welche aus Gurtungen und Füllungsgliedern bestehen, sind die von den letzteren herrührenden Form- änderungen gegenüber der Gesamtdeformation so gering, dass sie vernach- lässigt werden können und demnach nur die Gurtungen als elastisch, die Füllungsglieder aber als starr zu betrachten sind.

Wir nehmen nun an, der Träger (Fig. 355) sei am linken Auflager  $A$  unbeweglich festgehalten, so dass die gesammte Formänderung in der Ver- änderung der Lage des rechtsseitigen Gelenkpunktes  $B$  zum Ausdruck kommt. Dehnt sich nun ein Gurtungsstab  $CD$  von der Länge  $a$  um die Strecke  $DG = \Delta a$  aus, und wird zunächst noch vorausgesetzt, dass eine Längenänderung



der übrigen Stäbe nicht eintrete, so findet man die neue Lage des Knotenpunktes D als Schnitt D' der beiden, von E mit dem Radius ED und von C mit dem Radius  $a + \Delta a$  beschriebenen Kreisbögen. Wegen der Kleinheit von DG genügt es indessen, statt der Kreisbögen die beiden Geraden GD' senkrecht zu CG und DD' senkrecht zu ED zu ziehen. Die neue Lage des folgenden Knotenpunktes F ergibt sich jetzt, wenn von E aus mit der Länge EF und von D' aus mit der Länge D'F Kreisbögen beschrieben werden, oder

Fig. 355.



wenn statt dessen FF' senkrecht zu EF gezogen und die unveränderte Länge  $DF = D'F'$  eingetragen wird. Durch D'F' ist auch die Lage der übrigen Knotenpunkte bestimmt, und man erkennt, dass der Punkt E (Schnittpunkt der Senkrechten ED und EF auf die augenblicklichen Bewegungsrichtungen der Punkte D und F) als augenblicklicher Drehpunkt für die Lagenänderung des rechts von ED befindlichen Trägerfragments auftritt.\*)

Der Winkel  $\varphi$ , welchen D'E mit DE einschliesst, ergibt sich, wenn  $EK = t$  senkrecht auf CD gefällt wird, aus der Ähnlichkeit der Dreiecke DD'G und DEK.

Es ist nämlich;

$$\frac{DD'}{DE} = \frac{DG}{EK}$$

oder da  $\frac{DD'}{DE} = \varphi$ ,

$$\varphi = \frac{\Delta a}{t}.$$

Ist B' die neue Lage des Punktes B, so hat man, da auch Winkel  $BEB' = \varphi$ ,

\*) S. Fränkel, Anwendung der Theorie des augenblicklichen Drehpunktes auf die Bestimmung der Formänderung von Fachwerken. Civilingenieur, 1875.



$$\triangle BLB' \approx \triangle JEB$$

und

$$BL = \frac{BB'}{BE} JE = \varphi y,$$

wenn mit  $y$  die Ordinate des Drehpunktes  $E$  bezeichnet wird.

Setzt man für  $\varphi$  den obigen Wert ein, so erhält man:

$$BL = \frac{\Delta a}{t} y \quad (449)$$

als Ausdruck der durch die Längenänderung des Stabes  $CD$  der oberen Gurtung hervorgebrachten Verschiebung des Auflagerpunktes  $B$  in horizontalem Sinne.

In ähnlicher Weise findet man, dass auch bei der Längenänderung irgend eines Stabes der unteren Gurtung immer der diesem Stab gegenüberliegende Knotenpunkt (Schnittpunkt derjenigen beiden Stäbe, welche ausser dem in Rede stehenden durch einen geraden Schnitt getroffen werden) als augenblicklicher Drehpunkt für das sich bewegende Fachwerkfragment auftritt, und es ergibt sich ganz analog die hierbei bewirkte Horizontalverschiebung von  $B$ .

Summirt man die durch sämtliche Gurtstäbe erzeugten Horizontalverschiebungen, so lautet die Bedingungsgleichung zur Bestimmung des Horizontalschubes:

$$\Sigma \left[ \frac{\Delta a}{t} y \right] = 0. \quad (450)$$

Wenn  $F$  den Querschnitt des Stabes bezeichnet und  $T$  die in demselben wirkende Kraft, so ist nach Gl. 1:

$$\Delta a = \frac{T a}{F \varepsilon}$$

oder, da

$$T = \frac{\mathcal{M}}{t},$$

wenn  $\mathcal{M}$  das Moment der äusseren Kräfte bezüglich des dem Stab zugehörigen Drehpunktes (gegenüberliegenden Knotenpunktes),

$$\Delta a = \frac{\mathcal{M} a}{F t \varepsilon}. \quad (451)$$

Setzt man diesen Wert in Gl. 450 ein, so erhält man:

$$\Sigma \left[ \frac{\mathcal{M} a y}{\varepsilon F t^2} \right] = 0 \quad (452)$$

oder bei constantem Elasticitätsmodul  $\varepsilon$ :

$$\Sigma \left[ \frac{\mathcal{M} a y}{F t^2} \right] = 0.$$



Das Angriffsmoment ist gegeben durch:

$$\mathcal{M} = Ax - Hy - \sum_0^x P(x - a)$$

oder, wenn  $Ax - \sum_0^x P(x - a) = \mathcal{M}^*$  (Moment des gleichbelasteten Balkenträgers für  $x$ ) gesetzt wird:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^* - Hy.$$

Durch Einführung dieses Wertes in vorstehende Gleichung erhält man:

$$\sum \left[ \frac{\mathcal{M}^* a y}{F t^2} \right] - H \sum \left[ \frac{a y^2}{F t^2} \right] = 0$$

oder

$$H = \frac{\sum \left[ \frac{\mathcal{M}^* a y}{F t^2} \right]}{\sum \left[ \frac{a y^2}{F t^2} \right]}. \quad (453)$$

In dieser Formel kommen die unbekanntenen Querschnitte  $F$  sämtlicher Gurtstäbe vor. Man muss daher, um  $H$  zu finden, vorläufige Annahmen über diese Querschnitte machen, indem man den Träger entweder provisorisch, nach Massgabe ausgeführter Constructionen dimensionirt oder für die erste Berechnung einen Bogenträger mit drei Gelenken voraussetzt.

#### *Einfluss der Temperatur.*

Bezeichnet wie früher  $e$  die Längenänderung, welche ein Stab von der Länge  $= 1$  durch eine Temperaturdifferenz von  $1^{\circ}$  C. erleidet, dann ist die durch einen Temperaturwechsel von  $\pm t^{\circ}$  bewirkte Längenänderung  $\Delta l$  der Spannweite  $l$ :

$$\Delta l = \pm l e t^{\circ}.$$

Bei unverrückbaren Widerlagern tritt diese Änderung der Spannweite nicht ein, wogegen an den Gelenkpunkten Reactionen entwickelt werden, welche, wenn die Auflagerpunkte gleich hoch, als Horizontalkräfte  $= H$  auftreten.

Dabei finden in sämtlichen Gurtstäben Spannungen statt, welche man sich auch dadurch entstanden denken kann, dass auf den einen Gelenkpunkt des mit dem anderen befestigten Bogens die Aussenkraft  $H$  wirkt. Die hiedurch hervorgebrachte Horizontalverschiebung der Widerlager ist nach Gl. 449 und 451:

$$\Delta l = \sum \left[ \frac{\mathcal{M} a y}{e F t^2} \right]$$

oder, da  $\mathcal{M} = Hy$ ,

$$\Delta l = \frac{H}{e} \sum \left[ \frac{a y^2}{F t^2} \right].$$







Erleidet ein Gurtstab  $CD$  von der Länge  $a$  (Fig. 356) die Längenänderung  $\Delta a$  und bezeichnet  $t$  die Entfernung dieses Stabes vom Drehpunkt  $E$ , so ist wie früher der Winkel, um welchen sich  $ED$ , also auch  $BM$  dreht, gegeben durch  $\varphi = \frac{\Delta a}{t}$  und die horizontale und verticale Verschiebung des Punktes  $B$  ist  $\frac{\Delta a}{t}y$  resp.  $\frac{\Delta a}{t}x$ , wenn  $y$  und  $x$  die in Fig. 356 angegebene Bedeutung haben.

Man hat daher die Bedingungsgleichungen:

$$\sum \left[ \frac{\Delta a}{t} \right] = 0,$$

$$\sum \left[ \frac{\Delta a}{t} y \right] = 0,$$

$$\sum \left[ \frac{\Delta a}{t} x \right] = 0.$$

wobei die Summirung sich über sämtliche Gurtstäbe zu erstrecken hat.

Nach Gl. 451 ist:

$$\Delta a = \frac{\partial \mathcal{L} a}{\varepsilon F t},$$

daher, wenn  $\varepsilon$  constant,

$$\sum \left[ \frac{\partial \mathcal{L} a}{F t^2} \right] = 0,$$

$$\sum \left[ \frac{\partial \mathcal{L} a y}{F t^2} \right] = 0,$$

$$\sum \left[ \frac{\partial \mathcal{L} a x}{F t^2} \right] = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{a}{F t^2} = k, \tag{456}$$

welche Grösse ausschliesslich von der Form und den Dimensionen des Bogenträgers abhängig ist, so schreiben sich die vorstehenden Gleichungen: \*)

$$\sum [\partial \mathcal{L} k] = 0, \tag{457}$$

$$\sum [\partial \mathcal{L} k y] = 0, \tag{458}$$

$$\sum [\partial \mathcal{L} k x] = 0. \tag{459}$$

\*) Winkler, Beitrag zur Theorie der Bogenträger, Zeitschr. d. Arch.- u. Ing.-Ver. zu Hannover, 1879, und Krohn, Beitrag zur Theorie der elastischen Bogenträger, Zeitschrift f. Baukunde, 1880.



Der Coordinatenursprung kann beliebig angenommen werden. Denn denkt man sich z. B. die X-Axe parallel der anfänglichen Richtung um die Länge n verschoben, so geht Gl. 458 über in:

d. i. 
$$\sum [\mathcal{M}k(y+n)] = 0,$$

$$\sum [\mathcal{M}ky] + n \sum [\mathcal{M}k] = 0,$$

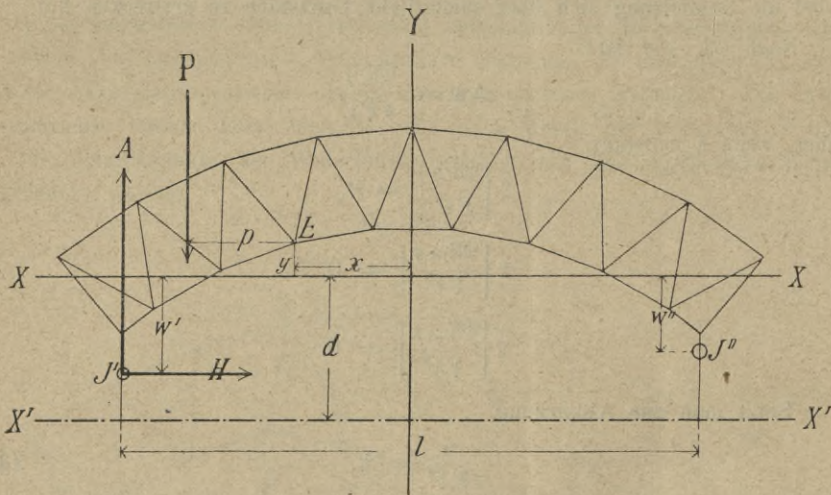
welche Gleichung, da  $\sum [\mathcal{M}k] = 0$ , identisch ist mit Gl. 458. Dasselbe gilt für eine beliebige parallele Verschiebung der Y-Axe.

Man berechne daher für eine vorläufig ganz beliebig angenommene Axe X'X' (Fig. 357) die Werte ky' sämtlicher Gurtstäbe, wobei y' für jeden Stab die Ordinate des zugehörigen Drehpunktes bezeichnet, und nehme dann die definitive Axe X in einem Abstände

$$d = \frac{\sum [ky']}{\sum [k]} \tag{460}$$

über X'X', die Axe Y aber in der Scheitelverticalen des Bogens an.

Fig. 357.



Das Moment für irgend einen Drehpunkt E ist jetzt:

$$\mathcal{M} = A \left( \frac{1}{2} - x \right) - Pp - H(w' + y), \tag{461}$$

wenn P die Resultierende der äusseren Kräfte der links von E befindlichen Lasten und p ihr Abstand von E.

Für den Angriffspunkt J'' der rechtsseitigen Widerlagerreaction ist  $\mathcal{M} = 0$ , daher:

$$A l - P_0 p_0 - H(w' - w'') = 0,$$

wenn P<sub>0</sub> die Resultierende der Gesamtbelastung des Bogens und p<sub>0</sub> ihr Abstand von J''.



Setzt man den hieraus sich ergebenden Wert von  $A$  in Gl. 461 ein, so ist:

$$\mathcal{M} = \frac{P_0 P_0}{1} \left( \frac{1}{2} - x \right) - P p - H \left[ (w'' - w') \frac{1 - 2x}{21} + w' + y \right].$$

Der Wert:  $\frac{P_0 P_0}{1} \left( \frac{1}{2} - x \right) - P p$  ist identisch mit dem entsprechenden Angriffsmoment eines gleich belasteten, mit den Enden frei aufruhenden Balkenträgers; wir bezeichnen denselben mit  $\mathcal{M}^*$ , dann ist:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^* - H \left[ (w'' - w') \frac{1 - 2x}{21} + w' + y \right].$$

Setzt man diesen Wert in die Gleichungen 457, 458 und 459 ein, so erhält man:

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathcal{M}^* k] - \frac{w'' - w'}{21} \Sigma [(1 - 2x) k] - w' \Sigma [k] - \Sigma [k y] = 0,$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathcal{M}^* k y] - \frac{w'' - w'}{21} \Sigma [(1 - 2x) k y] - w' \Sigma [k y] - \Sigma [k y^2] = 0,$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathcal{M}^* k x] - \frac{w'' - w'}{21} \Sigma [(1 - 2x) k x] - w' \Sigma [k x] - \Sigma [k y x] = 0.$$

Da nach Gl. 460:  $d \Sigma [k] = \Sigma [k y']$  und  $y' = y + d$ , so ist:

$$d \Sigma [k] = \Sigma [k y] + d \Sigma [k] \quad \text{oder} \quad \Sigma [k y] = 0.$$

Da ferner, wenn der Bogen symmetrisch zur  $Y$ -Axe, auch  $\Sigma [k x y] = 0$  und  $Z [k x] = 0$ , so gehen vorstehende Gleichungen über in:

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathcal{M}^* k] - \frac{w' + w''}{2} \Sigma [k] = 0,$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathcal{M}^* k y] - \Sigma [k y^2] = 0,$$

$$\frac{1}{H} \Sigma [\mathcal{M}^* k x] - \frac{w' - w''}{1} \Sigma [k x^2] = 0,$$

daher

$$H = \frac{\Sigma [\mathcal{M}^* k y]}{\Sigma [k y^2]}, \quad (462)$$

$$w' + w'' = \frac{2 \Sigma [\mathcal{M}^* k]}{H \Sigma [k]}, \quad (463)$$

$$w' - w'' = \frac{1 \Sigma [\mathcal{M}^* k x]}{H \Sigma [k x^2]}, \quad (464)$$

aus welchen Gleichungen bei gegebener Belastung die Werte  $H$ ,  $w'$  und  $w''$  berechnet werden können.





## LITERATUR.

---

- Culmann, Graphische Statik. Zürich, 1866.  
Winkler, Festigkeitslehre. Prag, 1867.  
Weyrauch, Allgemeine Theorie und Berechnung der continuirlichen und einfachen Träger.  
Leipzig, 1873.  
„ Theorie der elastischen Bogenträger. München, 1879.  
„ Die Festigkeitseigenschaften und Methoden der Dimensionenberechnung von  
Eisen- und Stahlconstruktionen. Leipzig, 1889.  
Grashof, Theorie der Elasticität und Festigkeit. Berlin, 1878.  
Bauschinger, Elemente der graphischen Statik. München, 1880.  
Bresse, Cours de mécanique appliquée. Paris, 1880.  
Müller-Breslau, Graphische Statik der Bauconstruktionen. Leipzig, 1887 und 1892.  
„ Resultate für die Berechnung eiserner Träger und Stützen. Berlin.  
Ritter, Anwendungen der graphischen Statik. Zürich, 1888.  
Tetmajer, Die Baumechanik. Zürich, 1889.  
Landsberg, Statik der Hochbauconstruktionen (Handbuch der Architectur, I. Teil, 1. Band,  
zweite Hälfte). Darmstadt, 1889.  
Bach, Elasticität und Festigkeit. Berlin, 1889/90.  
v. Ott, Vorträge über Baumechanik. Prag, 1890/91.  
Keck, Vorträge über Elasticitätslehre. Hannover, 1892.  
Claussen, Statik und Festigkeitslehre in ihrer Anwendung auf Bauconstruktionen.  
Berlin, 1893.
-



Fig. 1.

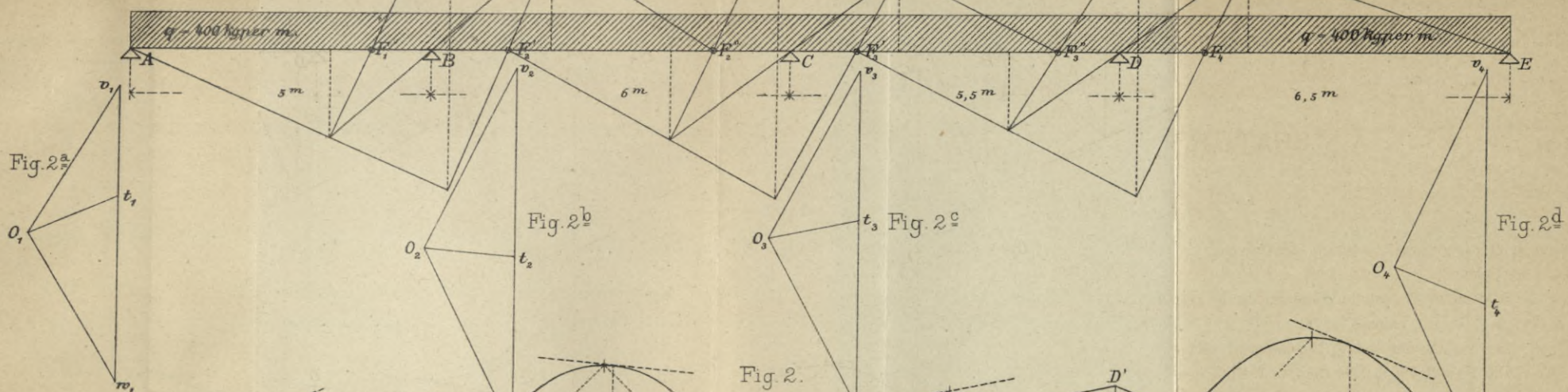


Fig. 2<sup>a</sup>

Fig. 2<sup>b</sup>

Fig. 2<sup>c</sup>

Fig. 2<sup>d</sup>

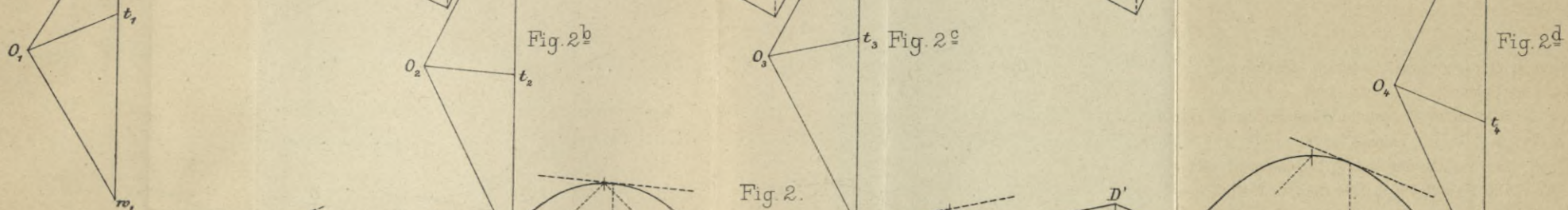


Fig. 2.

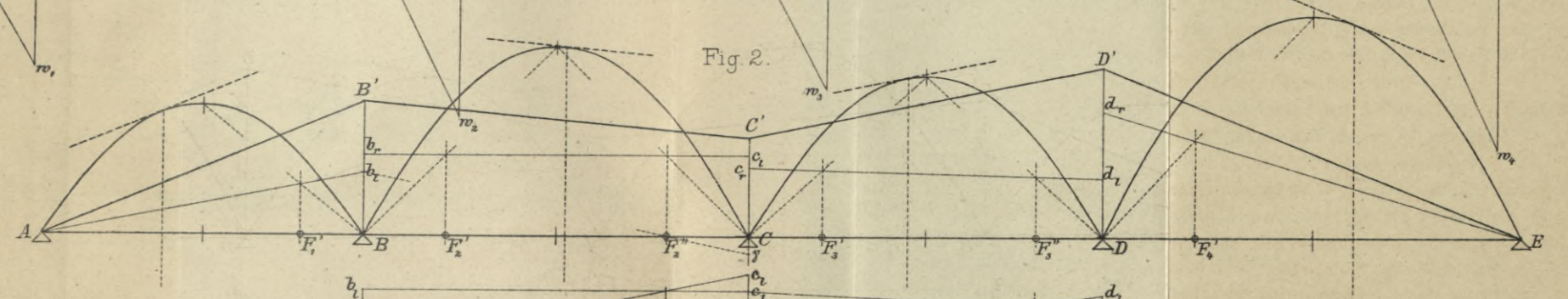


Fig. 3.

Maaßstab der Längen 1<sup>mm</sup> = 0,1<sup>m</sup> (1:100).  
 „ der Kräfte 1<sup>mm</sup> = 40 kg.  
 „ der Momente 1<sup>mm</sup> = 60 mkg.

Fig. 4.

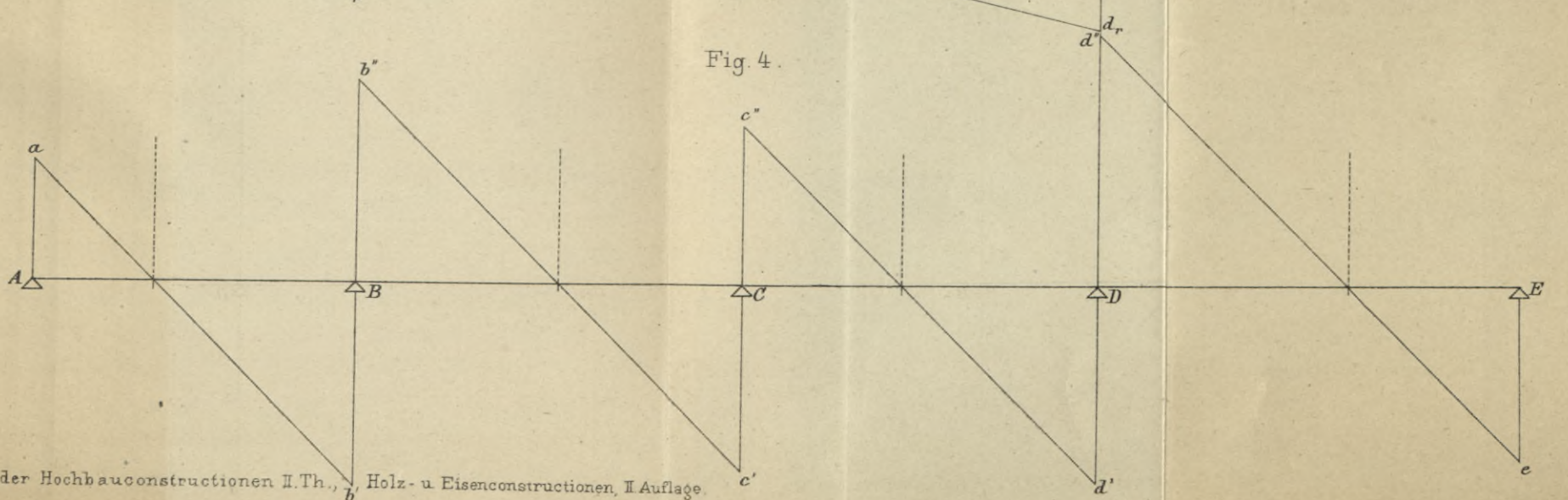








Fig. 1.

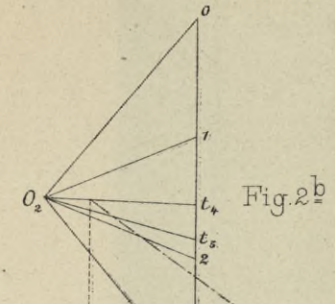
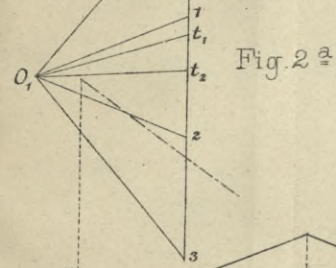
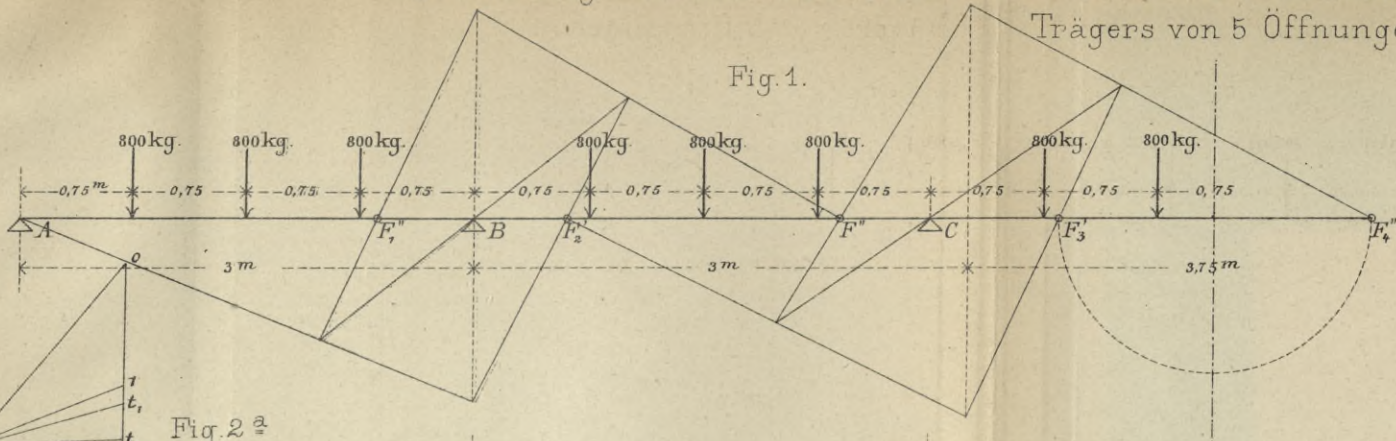


Fig. 2.

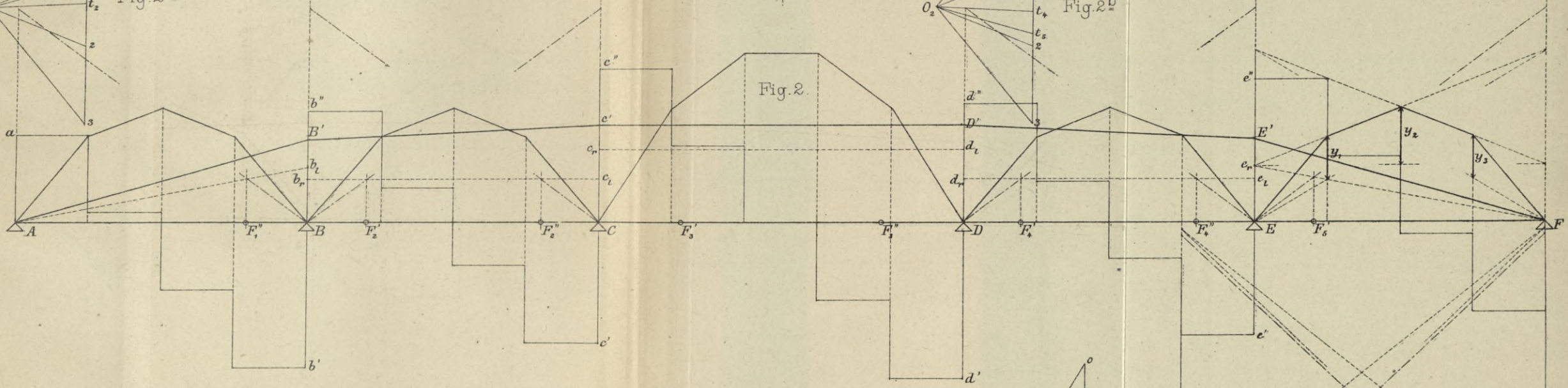


Fig. 3.

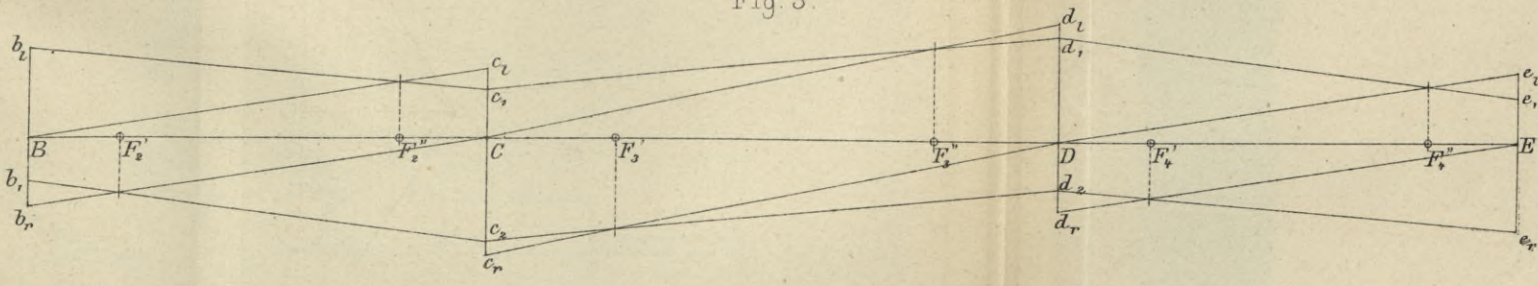


Fig. 2c.

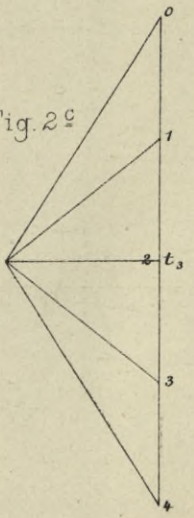
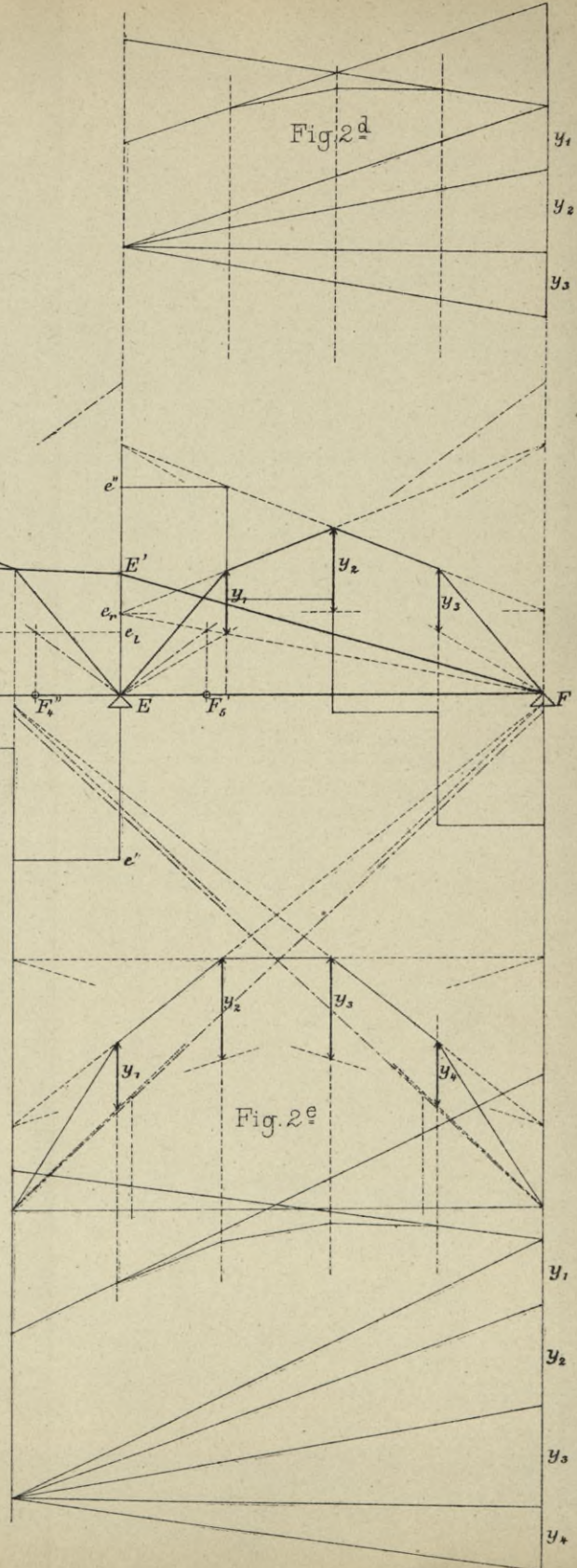


Fig. 2d.

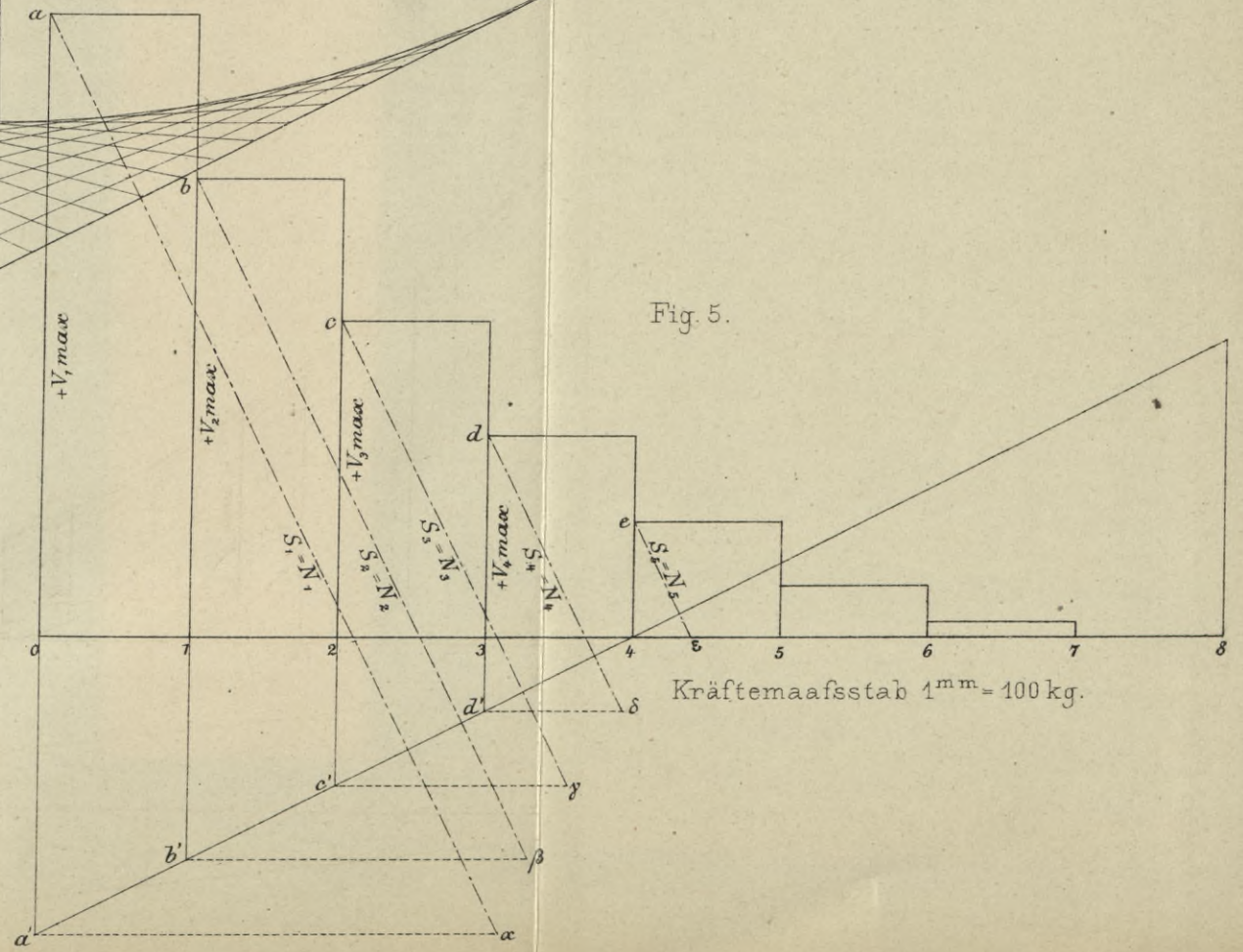
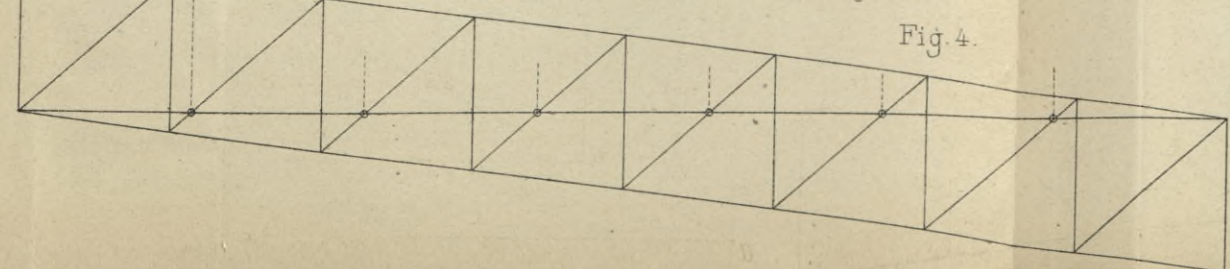
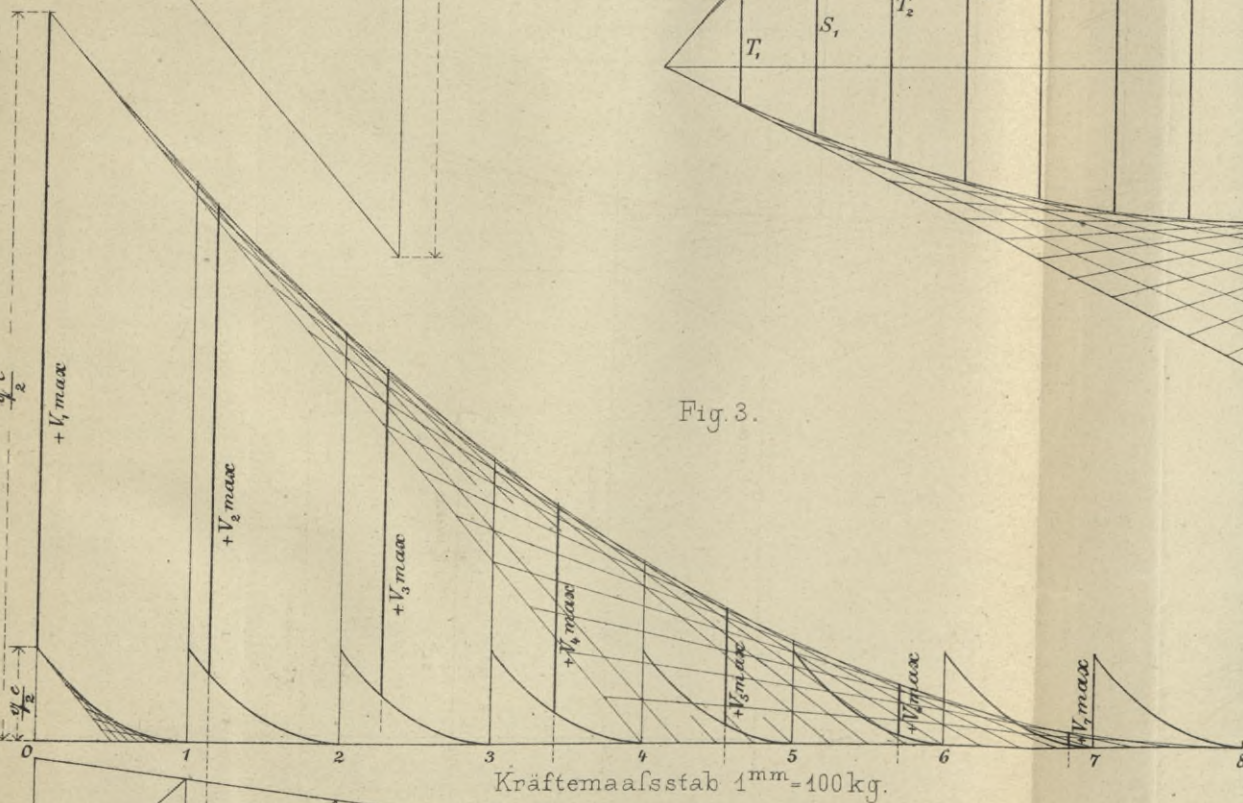
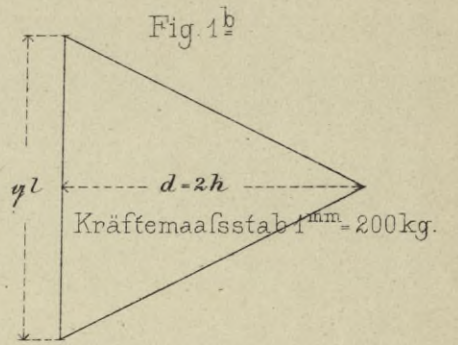
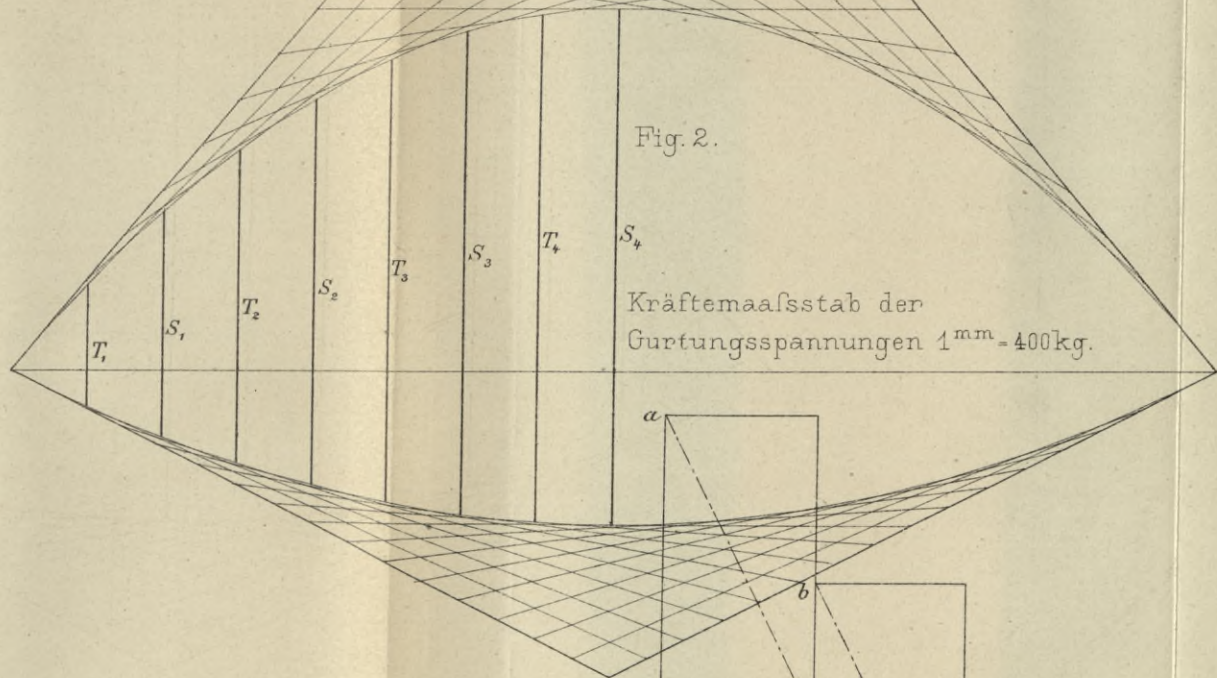
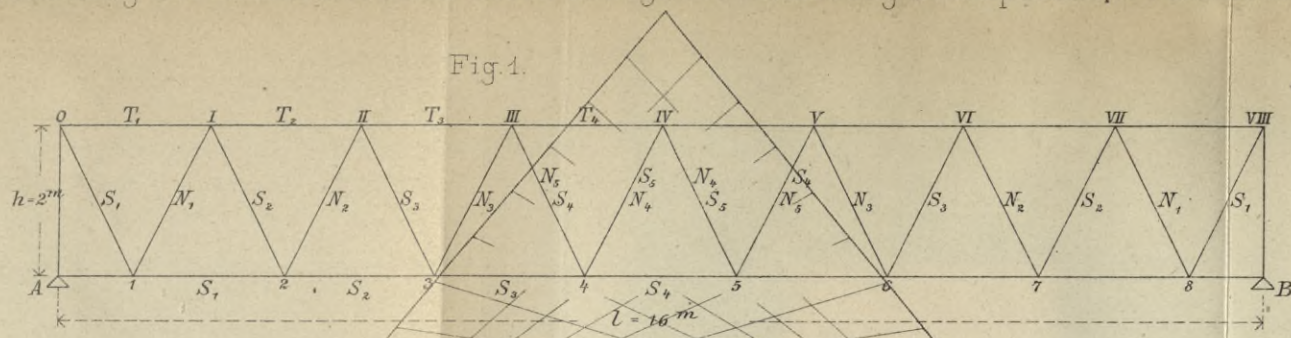


Maafsstab der Längen 1<sup>mm</sup> = 0,05<sup>m</sup> (1:50)  
 » der Kräfte 1<sup>mm</sup> = 50 kg.  
 » der Momente 1<sup>mm</sup> = 50 mkg.







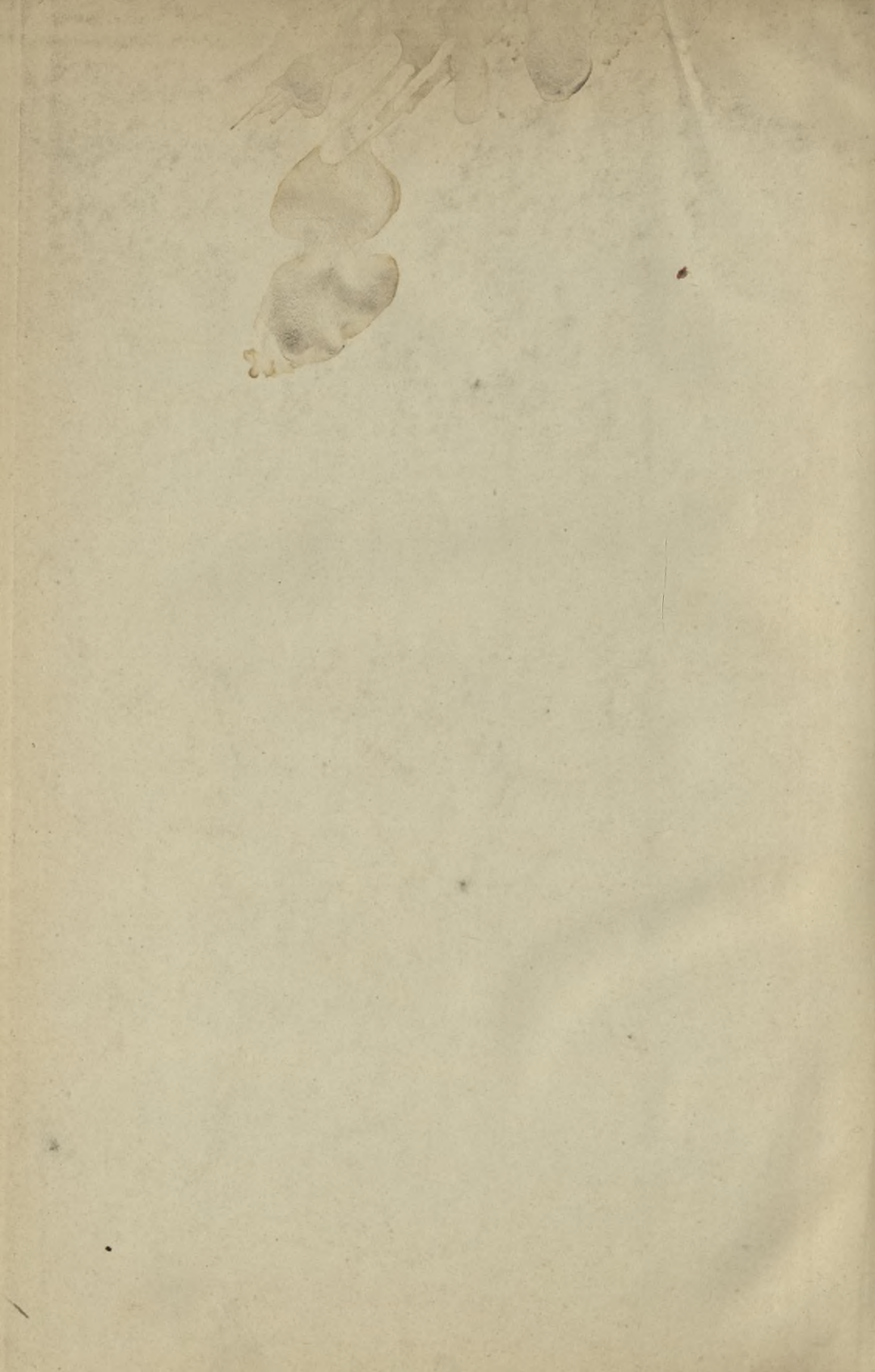




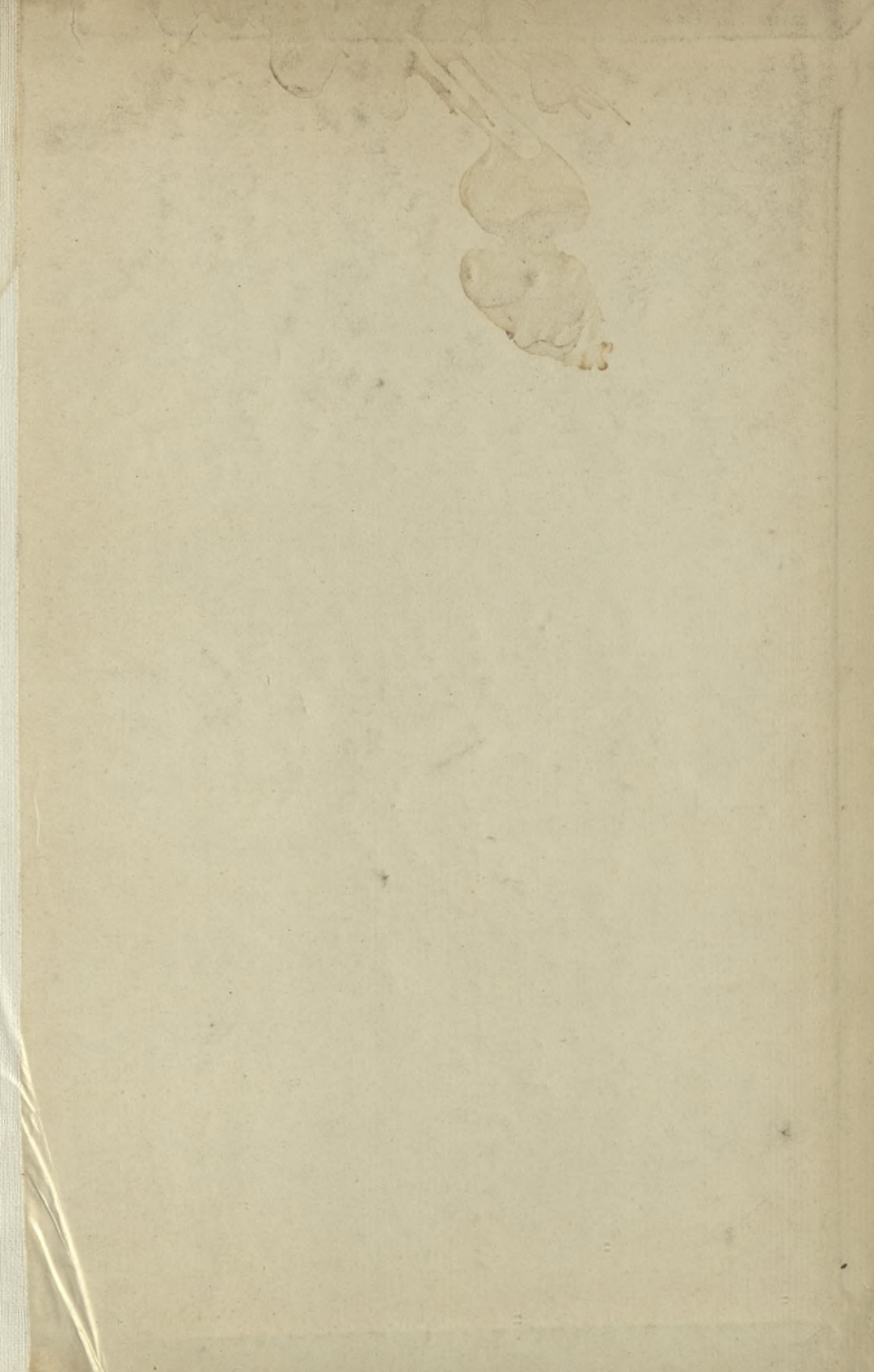
S. 61









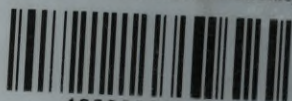


Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-352611

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313477

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299641

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



7891

L. inv.