Seibt, W. Sammlung seiner Aufsätze im Zivilingenieur (Dresden 1878) u. im Zentralblatt der Bauverwaltung (Berlin 1893–1906) Kanal- u. Wasserbau betreffend.

Inhalt:

Der selbsttätige hydrostatische Regel für Wasserhaltungen u. die hydrostatische Differenzialbremse (System Feibt = Fuchs). 1896. — Beseitigung von Fehlerquellen bei pneumatischen Regeln. 1896. — Ablesevorrichtung für Aufzeichnungen selbsttätiger Regel. 1896. — Rollbandregel, System Feibt = Fuchs. Selbsttätiger Lichtbildregel, System Feibt = Fuchs. 1897. — Der selbsttätige Anzeigeregel, System Feibt = Fuchs. 1897. — Selbsttätiger elektrischer Fernregel. 1900. — Der selbsttätige Druckluftregel, System Feibt = Fuchs. 1902. — Die rigallitische Prüfung der selbsttätigen Apparate des Regelsystems Feibt = Fuchs. 1905. — Erhitzungserscheinungen beim wässrigen Regelhuhn im Wasserbehälter bei Licht auf Dyk. 1907.

Verf. = Abkürzung v. d. Zentralbl. d. Bauverwa. Berlin. — 1 Bd. —

G. 38. 150.

Sonderdruck aus dem „Civilingenieur“ — Dresden 1878. —1906.

Genauigkeit geometrischer Nivellements.

Von

Wilhelm Seibt,

Assistent im Königlichen geodätischen Institut zu Berlin.

Die Meinungsdifferenzen, welche über die zu erreichende Genauigkeit der Höhenbestimmung durch geometrisches Nivellement laut geworden sind, haben mich veranlasst, diesem Gegenstande eine möglichst eingehende Behandlung zu Theil werden zu lassen. Vielleicht gelingt es mir, durch die vorliegenden Untersuchungen zu einem befriedigenden Schlusse zu kommen und auf die noch immer offenen Fragen über die den höchst möglichen Genauigkeitsgrad herbeiführende Beobachtungsmethode, über die für geometrische Nivellements günstigste Zielweite und über die geeignetste Gewichtsbestimmung in überzeugender Weise zu antworten.

Von den Resultaten aus den zur Genauigkeitsbestimmung geometrischer Nivellements angestellten Beobachtungen sind meines Wissens nur diejenigen von Hagen („Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung“, 1867, Seite 167 bis 170), von Jordan („Zeitschrift für Vermessungswesen“, 1877, Seite 115, und „Handbuch der Vermessungskunde“, 1877, Seite 424) und diejenigen von Seibt („Präcisions-Nivellement der Elbe“, 1878, Seite 44, und „Zeitschrift für Vermessungswesen“, 1878, Seite 510, bearbeitet von Börsch) veröffentlicht worden, und fast allen über die Genauigkeit geometrischer Nivellements geführten theoretischen Untersuchungen liegen entweder die von Hagen oder die von Jordan gefundenen Resultate zu Grunde. Es erscheint daher geboten, zunächst diesen bekannt gewordenen Resultaten hinsichtlich der zu ihrer Ermittelung angewendeten Instrumente und Beobachtungsmethoden, sowie hinsichtlich der Umstände, unter welchen die bezüglichen Beobachtungen ausgeführt wurden, näher zu treten, um durch diese Voruntersuchungen über den Werth jener Resultate und den durch sie ausgesprochenen Genauigkeitsgrad zu einem richtigen Urtheile zu gelangen.

Die Versuche von Hagen ergaben:

Zielweite		Mittlerer Fehler einer Visur in Zoll μ	Mittlerer Fehler einer aus zwei Visuren (Rückblick und Vorblick) zusammengesetzten Stationsbeobachtung $m = \mu\sqrt{2}$		
			beobachtet		ausgeglichen
Ruthen	Meter		in Zoll	in Millimetern	
5	19	0,0418	0,0592	1,55	1,4
10	38	0,0418	0,0592	1,55	2,0
20	75	0,0548	0,0775	2,03	3,1
30	113	0,0518	0,0732	1,91	4,2
35	132	0,0816	0,1155	3,02	4,8
40	151	0,1036	0,1466	3,83	5,3
50	188	0,1713	0,2422	6,33	6,5
60	226	0,3079	0,4354	11,39	7,6

Das Fernrohr des von Hagen zu seinen Beobachtungen verwendeten Nivellirinstrumentes hatte eine nur fünffache Vergrösserung, die Oeffnung des Objectivs betrug nur acht Linien und die zum Instrumente gehörige Libelle zeigte, da „sich die Visirlinie im Abstande von 30 Ruthen um 0,2 Zoll oder im Winkel von 9,5 Secunden hob, wenn die Lage der Blase sich um $^1/_3$ Linie veränderte“, eine Empfindlichkeit von rund 30 Secunden pro pars = 1 Pariser Linie.

Die Nivellirlatte war durch schwarze und weisse Felder in ganze Zolle getheilt. Die Beobachtungen erfolgten bei einspielender Libellenblase durch Ablesen der ganzen Zolle und Abschätzen ihrer Unterabtheilungen bis auf halbe Zehntheile derselben.

Wenn man bedenkt, dass jetzt zu Präcisionsnivellements fast durchweg Fernröhre mit 30- bis 40 facher Vergrösserung zur Verwendung kommen, dass die zugehörigen Libellen eine Empfindlichkeit von 3 bis 5 Secunden pro pars = 1 Pariser Linie zeigen, dass also der von Hagen benutzte Nivellirapparat im Vergleiche zu den jetzt für Präcisionsmessungen in Anwendung kommenden ein höchst unvollkommener war, dann muss sich uns die Ueberzeugung aufdrängen, dass die von Hagen gefundenen Resultate zu Schlüssen auf die Genauigkeit der mit Präcisionsinstrumenten ausgeführten Nivellements nicht mehr berechtigen. Dieselben genügten einzig und allein dem Zwecke, welchen Hagen mit

ihnen erstrebte, und der nach seiner eigenen Aeusserung keineswegs darin bestand, für weitere theoretische Untersuchungen über die Genauigkeit geometrischer Nivellements eine allgemeine brauchbare Grundlage zu liefern, sondern vielmehr darin, ihm Aufschluss darüber zu geben, in welcher Weise sein Instrument am passendsten Verwendung finden könne. Da überdies während der Beobachtungen auf Zielweiten von 19 bis 226 Meter ein Verstellen der Ocularröhre nicht stattfand, und daher nothwendiger Weise nur bei einer einzigen der acht verschiedenen Zielweiten völlig klare und deutliche Bilder erhalten werden konnten, so bleibt es nicht recht erklärlich, wie trotz alledem noch in neuere geodätische Lehrbücher die Hagen'schen Resultate Eingang finden konnten, um mit ihrer Hilfe Hypothesen haltbar zu machen und aus ihnen Schlüsse auf die für Präcisionsnivellements günstigste Zielweite zu ziehen.

Die Versuche von Jordan lieferten folgende Resultate:

Zielweite in Meter	Mittlerer Fehler der Differenz zwischen je einer Ablesung am oberen und je einer Ablesung am unteren Faden des Distanzmesserfernrohres in Millimetern	
	ohne Berücksichtigung des Libellenschätzungsfehlers μ	unter Einschluss des Libellenschätzungsfehlers $\sqrt{\mu^2 + 2l^2}$
30	0,39	0,44
60	0,90	0,99
90	1,56	1,68
120	2,32	2,46
150	3,20	3,36
180	4,20	4,38
210	5,39	5,58

Jordan verwendete zu diesen Beobachtungen ein Fernrohr mit 38^{mm} Objectivöffnung und 25facher Vergrösserung. Eine Angabe über die Empfindlichkeit der zum Instrumente gehörigen Libelle, welche übrigens, wie sich später zeigen wird, gar nicht zur Verwendung gekommen ist, konnte nicht aufgefunden werden.

Die Jordan'schen Resultate rühren nicht eigentlich von Beobachtungen her, welche besonders zu dem Zwecke angestellt wurden, über die zu erreichende Genauigkeit geometrischer Nivellements Aufschluss zu geben; Jordan benutzte vielmehr

hierzu Beobachtungen, welche zur Bestimmung der Constanten für ein Distanzmesserfernrohr ausgeführt worden waren. Die in der Tabelle gegebenen mittleren Fehler μ gehören zu den bei verschiedenen Zielweiten erhaltenen Differenzen der am oberen und der am unteren Ocularfaden des Distanzmesserfernrohres abgelesenen Lattentheile, und diese Differenzen sind nur insofern mit der nivellitischen Bestimmung eines Höhenunterschiedes zu vergleichen, als jede derselben, ebenso wie jeder Höhenunterschied, durch zwei Visuren erhalten werden. Bei der Bestimmung eines Höhenunterschiedes geht aber der Lichtstrahl beim Rückblick durch eine ganz andere Luftschicht wie beim Vorblick, während zur Bestimmung der zwischen den beiden äussersten Ocularfäden erscheinenden Lattentheile die Visuren in einer und derselben Richtung beziehungsweise Luftschicht erfolgen und daher bei Verwendung der von Jordan angestellten Distanzmesserbeobachtungen der Einfluss der Refractionsdifferenz auf den mittleren Fehler einer Stationsbeobachtung von vornherein ausgeschlossen bleibt.

Die Beobachtungen erfolgten bei unberührt bleibendem Instrumente durch Ablesen resp. Abschätzen der in Centimeter getheilten Nivellirlatte, ohne dass die Libelle des Fernrohres für jede einzelne Beobachtung neu eingestellt oder abgelesen wurde. Wenn auch Jordan in seinem „Handbuche der Vermessungskunde“ dieses Verfahrens nicht besonders Erwähnung thut, so lässt sich dasselbe doch mit aller Bestimmtheit aus seiner Abhandlung: „Ueber die Abhängigkeit des mittleren Lattenablesungsfehlers von der Entfernung“ (Zeitschrift für Vermessungswesen, 1877, Seite 115) erkennen, in welcher er bei Bearbeitung derselben hier in Betracht kommenden Beobachtungen dem gefundenen Lattenablesungsfehler noch den Libellenschätzungsfehler, welchen er zu einer Secunde veranschlagt, zugefügt wissen will, wenn diese Distanzmesserbeobachtungen zu nivellitischen Fehlerberechnungen Verwendung finden sollen.

Da die von Jordan gegebenen mittleren Fehler μ zu je zwei Lattenablesungen, welche beziehungsweise am oberen und am unteren Ocularfaden des Distanzmesserfernrohres gemacht wurden, gehören, so erhalten wir als mittleres Fehlerquadrat einer Lattenablesung an einem der beiden äusseren Fäden ohne Libellenanwendung

$$\mu_1^2 = \frac{\mu^2}{2}$$

und, wenn unter l der Libellenschätzungsfehler einer Ablesung

verstanden wird, das mittlere Fehlerquadrat einer Lattenablesung unter Benutzung der Libelle

$$m_1^2 = \frac{\mu^2}{2} + l^2.$$

Für zwei Lattenablesungen (am oberen und am unteren Ocularfaden), welche nach Jordan einer nivellitischen Stationsbeobachtung entsprechen sollen, ergiebt sich das mittlere Fehlerquadrat zu

$$m^2 = 2\left(\frac{\mu^2}{2} + l^2\right) = \mu^2 + 2\,l^2$$

und der mittlere Fehler einer Stationsbeobachtung zu

$$m = \sqrt{\mu^2 + 2\,l^2}.$$

In dieser Weise sind die Jordan'schen Resultate von mir vervollständigt worden, um sie zu einer Vergleichung mit den mittleren Fehlern einer Stationsbeobachtung, wie dieselbe von Hagen und mir erhalten wurden, geeignet zu machen.

Weil nun bei den Jordan'schen Beobachtungen stets nur nach ein und derselben Seite visirt wurde, weil ferner für die Beobachtungen die Libelle gar nicht zur Verwendung kam und die Ablesungen ausschliesslich an den äusseren Ocularfäden erfolgten, weil endlich überhaupt unter Verhältnissen beobachtet wurde, welche beim Nivellement gar nicht stattfinden, kann den Jordan'schen Resultaten kein besonderer Werth beigemessen werden, wenn es sich um ihre Verwendbarkeit zu Untersuchungen handelt, welche über den zu erreichenden Genauigkeitsgrad geometrischer Nivellements, über die beste Beobachtungsmethode, über die günstigste Zielweite u. s. w. Aufschluss verschaffen sollen.

Endlich gehören hierher die in der Publication des Königlichen geodätischen Instituts „Präcisionsnivellement der Elbe", Seite 44, mitgetheilten Resultate, welche ich aus Originalbeobachtungen des von mir in den Jahren 1876 und 1877 ausgeführten Präcisionsnivellements der Elbe berechnet habe.

Für diese Beobachtungen kam ein Fernrohr mit 32 facher Vergrösserung, 42^{mm} Objectivöffnung und einer Libelle, deren Empfindlichkeit $5{,}_{16}$ Secunden pro pars = 1 Pariser Linie betrug, zur Verwendung.

Die Beobachtungen erfolgten in der Weise, dass zur Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier vom Instrumente gleich weit entfernt liegender Punkte der horizontale Mittelfaden

Länge der Visirlinie in Metern	Mittlerer Fehler einer aus einfachem Rück- und einfachem Vorblick zusammengesetzten Stationsbeobachtung in Millimetern	Länge der Visirlinie in Metern	Mittlerer Fehler einer aus einfachem Rück- und einfachem Vorblick zusammengesetzten Stationsbeobachtung in Millimetern
10	0,37	70	0,46
20	0,40	80	0,58
30	0,40	90	0,51
40	0,47	100	0,50
50	0,18	110	0,52
60	0,71	120	0,50

des Fadenkreuzes auf die Mitte des, bei horizontirtem Instrumente dem Horizontalfaden zunächst liegenden, vier Millimeter breiten Feldes der Lattentheilung eingestellt, hierauf die Libellenblase an ihren beiden Enden abgelesen, und der auf diese Weise erhaltenen Lattenablesung die dem Niveauausschlage und der Visirlänge entsprechende Correction zur Reduction auf eine bestimmte Horizontale hinzugefügt wurde.

Die den Hagen'schen und Jordan'schen Zahlen gegenüber ganz ausserordentlich klein ausfallenden Beträge stellen die grosse Genauigkeit, welche mit dem hier verwendeten Nivellirapparate und durch die angedeutete Beobachtungsmethode erzielt wurde, ausser Frage, dennoch wurde für mich der Umstand, dass jeder der oben angegebenen mittleren Stationsfehler insofern aus 20 Stationsbeobachtungen abgeleitet wurde, als für jeden Fehler die je viermalige unabhängige Beobachtung von fünf verschiedenen Höhenunterschieden das Berechnungsmaterial lieferte und die Wahrscheinlichkeit, dass die 20 fache Beobachtung ein und desselben Höhenunterschiedes noch zuverlässigere Ausdrücke für die zu erreichende Genauigkeit geliefert haben würde, die Veranlassung, dass ich gelegentlich des von mir im Sommer 1878 für das Königliche geodätische Institut ausgeführten Präcisionsnivellements durch das Grossherzogthum Baden eine Reihe von Beobachtungen eigens zu dem Zwecke anstellte, einerseits über die Abhängigkeit der mittleren Stationsfehler von den angewendeten Zielweiten Aufschluss zu erhalten und andererseits zu einem zuverlässig begründeten Urtheile über die für Präcisionsnivellements günstigste und rationellste Zielweite zu gelangen.

Meine Beobachtungen sind auf resp. 50, 100, 150 und 200 Meter Zielweite ausgeführt, wobei ich von der Annahme ausging, dass in die hierbei gefundenen Resultate ein Interpoliren für andere Zielweiten unbedenklich zulässig sei.

Alle Verhältnisse sind für die Versuchsstationen so gewählt worden, dass sich die angestellten Beobachtungen in keiner Weise von den bei Ausführung eines Nivellements wirklich vorkommenden unterschieden; ich erwähne dieses Umstandes ausdrücklich, um nicht den Glauben aufkommen zu lassen, dass die erreichten Resultate aus Beobachtungen, welche unter besonders günstigen Verhältnissen stattfanden, erzielt wurden.

Das Instrument stand während der Beobachtungen auf seinem fest in die Erde getretenen Stative seitlich des Eisenbahndammes zwischen zwei auf den Schienengeleisen markirten Punkten, auf denen die Nivellirlatten von je einem Arbeiter gehalten und mittels der an den Latten befindlichen Dosenlibellen senkrecht gestellt wurden. Die Entfernung der Latten vom Instrumente zu resp. 50, 100, 150 und 200 Meter wurde einmal durch Aneinanderlegen der Nivellirlatten und zur Controle mittelst des dem Instrumente beigegebenen Reichenbach'schen Distanzmessers ermittelt.

Das Fernrohr des aus dem mathematisch-mechanischen Institute der Herren F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel hervorgegangenen Instrumentes hatte ein Objectiv von 42^{mm} Oeffnung und 460^{mm} Brennweite, sowie ein orthoskopisches Ocular mit 42 facher Vergrösserung. Das Fadenkreuz ersetzten zwei auf ein Glasplättchen eingerissene, senkrecht zu einander stehende Striche.

Die Empfindlichkeit der mit einer in Pariser Linien getheilten Scala versehenen Libelle wurde zu $5{,}_{16}$ Secunden pro pars = 1 Pariser Linie ermittelt.

Die Theilung der Nivellirlatten zeigte 4 Millimeter breite, abwechselnd weiss und schwarz gemalte Felder; der mittlere Fehler eines Theilpunktes der Latten betrug nach der von der eidgenössischen Aichstätte zu Bern ausgeführten Untersuchung $0{,}_{04}$ Millimeter.

Die Beobachtungen erfolgten in der auf Seite 8 bis 14 und Seite 41 bis 45 meines „Präcisionsnivellement der Elbe" eingehend beschriebenen Weise durch Einstellen des Horizontalstriches des Glaskreuzes auf die Lattentheilung und Ablesen beider Enden der Libellenblase bis auf Zehntheile einer Pariser Linie. Nur bei ruhiger, klarer Luft und einem sonstigen Zustande der

Atmosphäre, welche ein völliges Zurruhekommen der Libelle zuliess, ist beobachtet worden.

Ein vier Millimeter breites Feld der Lattentheilung erschien bei der grössten angewandten Zielweite von 200 Meter im Fernrohre noch 5 bis 6 mal so breit, als die scheinbare Dicke des Horizontalstriches des Glaskreuzes austrug, und die stets gut beleuchtete Latte lieferte bei jeder der angewendeten Zielweiten ein bis in die kleinsten Theile aufs Schärfste erkennbares Bild.

Hierauf glaube ich mit besonderem Nachdrucke hinweisen zu müssen, da ich bei Vielen der Ansicht begegnete, dass bei Zielweiten über 50 Meter, in Folge der dann nach ihrer Meinung unter allen Umständen sichtbaren und störend auftretenden Luftwallungen, ein klares, ruhiges und scharf begrenztes Bild der Latte überhaupt nicht erhalten werden könne. Die Maximalzielweite, bei welcher beispielsweise mit dem zu den vorliegenden Beobachtungen benutzten Fernrohre von Luftwallungen keine Spur bemerkt wird, ist je nach der Tageszeit und dem allgemeinen Zustande der Atmosphäre variabel und liegt in den Grenzen von 20 bis rund 250 Meter.

Bald nach Sonnenaufgang herrscht bei wolkenlosem, oder bei theilweise bedecktem Himmel auf Zielweiten bis zu 200 Meter fast immer völlige Ruhe, etwa eine Stunde nach Sonnenaufgang wird ein Verkürzen der Zielweiten auf 150 Meter zur Erlangung eines ruhigen, von Luftwallungen unbeeinflussten Bildes nöthig sein, während abermals nach einer Stunde nur noch bei Zielweiten von 100 Meter und nach zwei weiteren Stunden nur noch bei solchen von 50 Meter für die Beobachtung brauchbare Lattenbilder zu erhalten sein werden.

In den Mittagstunden reicht endlich auch ein Verkürzen der Zielweite bis zu 40 Meter zur Erlangung völlig klarer und ruhiger Bilder nicht mehr aus; dagegen habe ich bei bedecktem, regnerischem Himmel sehr häufig bis nach 10 Uhr Morgens bei Zielweiten bis zu 200 Meter Lattenbilder von der allerschärfsten Begrenzung ohne jeden merkbaren, von Luftwallungen herrührenden störenden Einfluss erhalten, und nur in den Mittagstunden war ein Heruntergehen mit der Zielweite bis auf 100 Meter erforderlich. Für die Nachmittagstunden ist das eben Gesagte übertragbar, wenn man in der angedeuteten Weise, vom Sonnenuntergange ausgehend, rückwärts rechnet.

Dem Instrumente ist bei den Beobachtungen auf 200 Meter Zielweite nach jeder aus Rück- und Vorblick bestehenden Station, bei allen übrigen Beobachtungen etwa nach drei- oder viermaliger

Wiederholung der zusammengehörigen Rück- und Vorblicke, eine neue Aufstellung gegeben worden; für jede Lattenablesung wurde aber das Fernrohr auf's Neue eingestellt und der zugehörige Libellenstand abgelesen, so dass die einzelnen Beobachtungspaare als vollständig unabhängig von einander zu gelten haben.

Rück- und Vorblick sind unmittelbar hinter einander beobachtet worden, es liegt hier nur so viel Zeit dazwischen, als gerade nöthig war, um die Stellung des Beobachters zu wechseln. Zwischen den einzelnen Stationsbeobachtungen liegen etwa 5 bis 7 Minuten, so dass zwischen der ersten und letzten Beobachtung jeder aus 24 Paaren bestehenden Reihe ein Zeitraum von ca. 2 bis 3 Stunden liegt.

Eine Reduction der Beobachtungen im Felde ist, um jede Beeinflussung des Beobachters zu vermeiden, unterblieben, und es bleibt noch zu erwähnen, dass von allen angestellten Beobachtungen keine einzige von der Berechnung ausgeschlossen wurde, wie sehr eine solche auch von den ihr zunächst liegenden abweichen mochte.

Als Erläuterung zu den folgenden Tabellen sei bemerkt, dass die Bezifferung der Libellenscala fortlaufend von 0 bis 50 in der Richtung vom Ocular nach dem Objectiv zu denken ist.

Verstehen wir dann unter

N_r = Niveausumme rückwärts,
N_v = desgl. vorwärts,
k = Correction für einen Niveautheil und 100m Distanz = 2,5mm,
e = Entfernung des Instrumentes vom Lattenstande,

dann ist

$$\frac{N_r - N_v}{2} \cdot k \cdot \frac{e}{100}$$ = dem beim Messen eines Höhenunterschiedes begangenen Fehler, den wir vom Höhenunterschiede algebraisch zu subtrahiren haben.

Setzen wir nun für k seinen Wert = 2,5mm und für e resp. 50, 100, 150 und 200m, dann ergiebt sich

für 50m Zielweite $c = (N_r - N_v) \cdot 0{,}625^{mm}$,
„ 100m „ $c = (N_r - N_v) \cdot 1{,}25^{mm}$,
„ 150m „ $c = (N_r - N_v) \cdot 1{,}875^{mm}$,
„ 200m „ $c = (N_r - N_v) \cdot 2{,}5^{mm}$.

Bezeichnet endlich noch

l = Lattenablesung beim Rückblick,
l' = desgl. beim Vorblick,

(Fortsetzung auf Seite 26.)

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Millim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)$ $0{,}625 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv

I. Beobachtungen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer einfachen Stationsbeobachtung bei einer Visirlänge von 50 Metern.

Temperatur während der Beobachtung: 15,5° R.
Zustand der Atmosphäre während der Beobachtung: Sonnenschein, schwacher Wind.
Zeit der Beobachtung: September 1878.

1	994	8,8 41,2 50,0	1322	7,7 40,2 47,9	— 328			— 329,3		+ 0,09	0,0081
						+ 2,1	+ 1,3				
2	998	12,0 44,4 56,4	1326	11,0 43,5 54,5	— 328			— 329,2		+ 0,19	0,0361
						+ 1,9	+ 1,2				
3	990	5,6 38,0 43,6	1322	7,7 40,2 47,9	— 332			— 329,3		+ 0,09	0,0081
						— 4,3	— 2,7				
4	1038	9,6 42,3 51,9	1366	8,7 41,3 50,0	— 328			— 329,2		+ 0,19	0,0361
						+ 1,9	+ 1,2				
5	1042	12,7 45,4 58,1	1370	11,8 44,4 56,2	— 328			— 329,2		+ 0,19	0,0361
						+ 1,9	+ 1,2				
6	1034	6,3 39,0 45,3	1362	5,0 37,6 42,6	— 328			— 329,7		— 0,31	0,0961
						+ 2,7	+ 1,7				
7	1086	7,2 40,2 47,4	1414	5,8 39,0 44,8	— 328			— 329,6		— 0,21	0,0441
						+ 2,6	+ 1,6				
8	1090	10,4 43,4 53,8	1418	9,0 42,2 51,2	— 328			— 329,6		— 0,21	0,0441
						+ 2,6	+ 1,6				
9	1094	13,6 46,6 60,2	1422	12,4 45,6 58,0	— 328			— 329,4		— 0,01	0,0001
						+ 2,2	+ 1,4				
10	1002	7,4 40,8 48,2	1330	6,6 40,0 46,6	— 328			— 329,0	— 329,39	+ 0,39	0,1521
						+ 1,6	+ 1,0				
11	1006	10,5 44,0 54,5	1334	9,6 43,0 52,6	— 328			— 329,2		+ 0,19	0,0361
						+ 1,9	+ 1,2				
12	1010	13,7 47,3 61,0	1338	12,8 46,2 59,0	— 328			— 329,3		+ 0,09	0,0081
						+ 2,0	+ 1,3				
13	1062	6,5 40,5 47,0	1394	8,2 42,2 50,4	— 332			— 329,9		— 0,51	0,2601
						— 3,4	— 2,1				
14	1066	10,0 44,0 54,0	1398	11,8 45,8 57,6	— 332			— 329,7		— 0,31	0,0961
						— 3,6	— 2,3				
15	1070	13,0 47,0 60,0	1390	5,0 39,0 44,0	— 320			— 330,0		— 0,61	0,3721
						+ 16,0	+ 10,0				

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Millim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)\ 0{,}625 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv
16	1014	12,0 46,6 58,6	1338	7,8 42,2 50,0	— 324			— 329,4		— 0,01	0,0001
17	1010	8,8 43,4 52,2	1342	11,0 45,4 56,4	— 332	+ 8,6	+ 5,4	— 329,4		— 0,01	0,0001
18	1006	5,4 40,0 45,4	1334	4,8 39,2 44,0	— 328	— 4,2	— 2,6	— 328,9		+ 0,49	0,2401
19	1050	5,3 40,0 45,3	1382	7,4 42,2 49,6	— 332	+ 1,4	+ 0,9	— 329,3		+ 0,09	0,0081
20	1054	8,5 43,2 51,7	1386	10,4 45,3 55,7	— 332	— 4,3	— 2,7	— 329,5		— 0,11	0,0121
21	1058	11,6 46,3 57,9	1378	4,0 38,8 42,8	— 320	— 4,0	— 2,5	— 329,4		— 0,01	0,0001
22	998	4,0 39,0 43,0	1330	6,0 41,0 47,0	— 332	+ 15,1	+ 9,4	— 329,5		— 0,11	0,0121
23	1002	7,4 42,4 49,8	1334	9,4 44,4 53,8	— 332	— 4,0	— 2,5	— 329,5		— 0,11	0,0121
24	1006	10,0 45,0 55,0	1338	12,5 47,5 60,0	— 332	— 4,0	— 2,5	— 328,9		+ 0,49	0,2401
						— 5,0	— 3,1				
							$[l - l' - c] =$	— 7905,4		$[vv] =$	1,7584

$$\frac{[l - l' - c]}{n} = \frac{-7905{,}4}{12} = -329{,}39 \text{ Millimeter.}$$

$$\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{1{,}7584}{23}} = \pm 0{,}28 \text{ Millimeter.}$$

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Millim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)$ $1{,}25 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv

II. Beobachtungen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer einfachen Stationsbeobachtung bei einer Visirlänge von 100 Metern.

Temperatur während der Beobachtung: 15° R.
Zustand der Atmosphäre während der Beobachtung: Theilweise bedeckter Himmel, Windstille.
Zeit der Beobachtung: September 1878.

1	1130	9,4 50,5 49,9	1490	8,0 39,2 47,2	— 360			— 363,4		+ 0,36	0,1296
						+ 2,7	+ 3,4				
2	1126	7,8 39,0 46,8	1486	5,8 37,0 42,8	— 360			— 365,0		— 1,24	1,5376
						+ 4,0	+ 5,0				
3	1134	10,8 42,0 52,8	1494	9,8 41,0 50,8	— 360			— 362,5		+ 1,26	1,5876
						+ 2,0	+ 2,5				
4	1138	12,6 43,8 56,4	1498	11,0 42,2 53,2	— 360			— 364,0		— 0,24	0,0576
						+ 3,2	+ 4,0				
5	1090	8,6 40,0 48,6	1458	10,0 41,4 51,4	— 368			— 364,5		— 0,74	0,5476
						— 2,8	— 3,5				
6	1094	10,0 41,4 51,4	1454	8,0 39,4 47,4	— 360			— 365,0		— 1,24	1,5376
						+ 4,0	+ 5,0				
7	1178	8,0 39,8 47,8	1546	10,0 41,6 51,6	— 368			— 363,2		+ 0,56	0,3136
						— 3,8	— 4,8				
8	1182	9,8 41,6 51,4	1542	8,4 40,0 48,4	— 360			— 363,8		— 0,04	0,0016
						+ 3,0	+ 3,8				
9	1126	8,0 40,7 48,7	1486	6,5 39,2 45,7	— 360			— 363,8		— 0,04	0,0016
						+ 3,0	+ 3,8				
10	1130	9,6 42,3 51,9	1490	8,2 40,9 49,1	— 360			— 363,5	— 363,76	+ 0,26	0,0676
						+ 2,8	+ 3,5				
11	1134	11,0 43,7 54,7	1494	9,6 42,3 51,9	— 360			— 363,5		+ 0,26	0,0676
						+ 2,8	+ 3,5				
12	1098	10,0 42,9 52,9	1462	10,0 42,9 52,9	— 364			— 364,0		— 0,24	0,0576
						0,0	0,0				
13	1086	4,7 37,6 42,3	1458	8,2 41,1 49,3	— 372			— 363,2		+ 0,56	0,3136
						— 7,0	— 8,8				
14	1090	6,4 39,3 45,7	1454	6,7 39,6 46,3	— 364			— 363,2		+ 0,56	0,3136
						— 0,6	— 0,8				
15	1166	9,3 42,3 51,6	1530	9,6 42,6 52,2	— 364			— 363,2		+ 0,56	0,3136
						— 0,6	— 0,8				

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Millim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)$ $1{,}25 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv
16	1158	6,0 39,0 45,0	1526	7,8 40,8 48,6	— 368			— 363,5		+ 0,26	0,0676
						— 3,6	— 4,5				
17	1162	8,0 41,0 49,0	1534	11,4 44,0 55,4	— 372			— 364,0		— 0,24	0,0576
						— 6.4	— 8,0				
18	1186	11,4 43,2 54,6	1550	11,4 43,0 54,4	— 364			— 364,3		— 0,54	0,2916
						+ 0,2	+ 0,3				
19	1158	9,2 41,2 50,4	1522	9,5 41,5 51,0	— 364			— 363,2		+ 0,56	0,3136
						— 0,6	— 0,8				
20	1154	7,6 39,6 47,2	1518	7,6 39,6 47,2	— 364			— 364,0		— 0,24	0,0576
						0,0	0,0				
21	1134	6,8 39,0 45,8	1502	8,8 41,0 49,8	— 368			— 363,0		+ 0,76	0,5776
						— 4,0	— 5,0				
22	1138	9,0 41,2 50,2	1506	10,5 42,5 53,0	— 368			— 364,5		— 0,74	0,5476
						— 2,8	— 3,5				
23	1130	9,0 41,4 50,4	1494	9,0 41,5 50,5	— 364			— 363,9		— 0,14	0,0196
						— 0,1	— 0,1				
24	1126	7,5 40,0 47,5	1490	7,5 40,0 47,5	— 364			— 364,0		— 0,24	0,0576
						0,0	0,0				
						$[l - l' - c] =$		— 8730,2		$[vv] =$	8,8384

$$\frac{[l - l' - c]}{n} = \frac{-8730{,}2}{24} = -363{,}76 \text{ Millimeter.}$$

$$\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{8{,}8384}{23}} = \pm 0{,}62 \text{ Millimeter.}$$

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Millim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)$ $1{,}875 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv

III. Beobachtungen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer einfachen Stationsbeobachtung bei einer Visirlänge von 150 Metern.

Temperatur während der Beobachtung: 15,5° R.
Zustand der Atmosphäre während der Beobachtung: Bedeckter Himmel, leiser Wind.
Zeit der Beobachtung: August 1878.

1	1654	8,2 38,5 46,7	1670	8,0 38,3 46,3	— 16	+ 0,4	+ 0,8	— 16,8		+ 1,17	1,3689
2	1658	9,3 39,7 49,0	1674	9,0 39,4 48,4	— 16	+ 0,6	+ 1,1	— 17,1		+ 0,87	0,7569
3	1662	10,6 41,0 51,6	1682	11,2 41,6 52,8	— 20	— 1,2	— 2,3	— 17,7		+ 0,27	0,0729
4	1614	9,4 40,0 49,4	1634	10,0 40,6 50,6	— 20	— 1,2	— 2,3	— 17,7		+ 0,27	0,0729
5	1618	10,7 41.3 52,0	1630	9,0 39,6 48,6	— 12	+ 3,4	+ 6,4	— 18,4		— 0,43	0,1849
6	1622	11,6 42,2 53,8	1626	7,6 38,2 45,8	— 4	+ 8,0	+ 15,0	— 19,0		— 1,03	1,0609
7	1610	8,6 39,2 47,8	1638	11,2 42,0 53,2	— 28	— 5,4	— 10,1	— 17,9		+ 0,07	0,0049
8	1538	9,2 40,2 49,4	1558	9,7 40,7 50,4	— 20	— 1,0	— 1,9	— 18,1		— 0,13	0,0169
9	1534	8,0 39,0 47,0	1562	11,0 42,0 53,0	— 28	— 6,0	— 11,3	— 16,7		+ 1,27	1,6129
10	1546	11,4 42,4 53,8	1542	5,4 36,4 41,8	+ 4	+ 12,0	+ 22,5	— 18,5		— 0,53	0,2809
11	1550	12,5 43,6 56,1	1558	9,6 40,7 50,3	— 8	+ 5,8	+ 10,9	— 18,9		— 0,93	0,8649
12	1182	10,3 41,5 51,8	1198	9,6 40,8 50,4	— 16	+ 1,4	+ 2,6	— 18,6	— 17,97	— 0,63	0,3969
13	1174	8,0 39,2 47,2	1194	8,7 40,0 48,7	— 20	— 1,5	— 2,8	— 17,2		+ 0,77	0,5929
14	1174	8,0 39,3 47,3	1190	7,5 38,8 46,3	— 16	+ 1,0	+ 1,9	— 17,9		+ 0,07	0,0049
15	1170	7,0 38,3 45,3	1194	8,7 40,0 48,7	— 24	— 3,4	— 6,4	— 17,6		+ 0,37	0,1369

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Millim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)$ $1{,}875 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv
16	1102	9,0 40,4 49,4	1118	8,6 40,0 48,6	−16			−17,5		+0,47	0,2209
						+ 0,8	+ 1,5				
17	1106	10,6 42,0 52,6	1114	7,6 39,0 46,6	− 8			−19,3		−1,33	1,7689
						+ 6,0	+11,3				
18	1110	11,0 42,5 53,5	1122	9,6 41,0 50,6	−12			−17,4		+0,57	0,3249
						+ 2,9	+ 5,4				
19	1102	9,0 40,5 49,5	1126	10,6 42,0 52,6	−24			−18,2		−0,23	0,0529
						− 3,1	− 5,8				
20	1606	10,7 42,2 52,9	1622	10,0 41,5 51,5	−16			−18,6		−0,63	0,3969
						+ 1,4	+ 2,6				
21	1598	8,7 40,2 48,9	1618	9,0 40,5 49,5	−20			−18,9		−0,93	0,8649
						− 0,6	− 1,1				
22	1594	7,5 39,0 46,5	1614	8,0 39,5 47,5	−20			−18,1		−0,13	0,0169
						− 1,0	− 1,9				
23	1606	10,7 42,2 52,9	1622	10,3 41,8 52,1	−16			−17,5		+0,47	0,2209
						+ 0,8	+ 1,5				
24	1590	8,8 40,3 49,1	1614	10,5 42,0 52,5	−24			−17,6		+0,37	0,1369
						− 3,4	− 6,4				
						$[l - l' - c] =$		−431,2		$[vv] =$	11,4336

$$\frac{[l - l' - c]}{n} = \frac{-431{,}2}{24} = -17{,}97 \text{ Millimeter.}$$

$$\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{11{,}4336}{23}} = \pm 0{,}71 \text{ Millimeter.}$$

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Millim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)$ $2{,}5 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv

IV. Beobachtungen zur Bestimmung des mittleren Fehlers einer einfachen Stationsbeobachtung bei einer Visirlänge von 200 Metern.

Temperatur während der Beobachtung: 16° R.
Zustand der Atmosphäre während der Beobachtung: Bedeckter Himmel, Windstille.
Zeit der Beobachtung: August 1878.

1	1110	12,0 37,7 49,7	1406	11,8 37,5 49,3	— 296			— 297,0		— 2,11	4,4521
						+ 0,4	+ 1,0				
2	1102	10,8 36,5 47,3	1406	12,7 38,4 51,1	— 304			— 294,5		+ 0,39	0,1521
						— 3,8	— 9,5				
3	1102	11,8 37,6 49,4	1398	12,0 37,8 49,8	— 296			— 295,0		— 0,11	0,0121
						— 0,4	— 1,0				
4	1102	12,0 37,9 49,9	1390	10,6 36,4 47,0	— 288			— 295,3		— 0,41	0,1681
						+ 2,9	+ 7,3				
5	1086	12,5 38,5 51,0	1374	11,6 37,5 49,1	— 288			— 292,8		+ 2,09	4,3681
						+ 1,9	+ 4,8				
6	1038	12,3 38,3 50,6	1334	12,3 38,3 50,6	— 296			— 296,0		— 1,11	1,2321
						0,0	0,0				
7	1198	12,9 38,9 51,8	1494	13,0 39,0 52,0	— 296			— 295,5		— 0,61	0,3721
						— 0,2	— 0,5				
8	1134	12,5 38,5 51,0	1430	12,7 38,7 51,4	— 296			— 295,0		— 0,11	0,0121
						— 0,4	— 1,0				
9	1030	11,7 37,7 49,4	1326	11,9 37,9 49,8	— 296			— 295,0		— 0,11	0,0121
						— 0,4	— 1,0				
10	1118	12,4 38,4 50,8	1414	12,6 38,6 51,2	— 296			— 295,0		— 0,11	0,0121
						— 0,4	— 1,0				
11	1110	13,1 39,1 52,2	1382	8,7 34,7 43,4	— 272			— 294,0		+ 0,89	0,7921
						+ 8,8	+ 22,0				
12	1078	12,5 38,5 51,0	1366	11,0 37,0 48,0	— 288			— 295,5	— 294,89	— 0,61	0,3721
						+ 3,0	+ 7,5				
13	1070	12,2 38,2 50,4	1366	12,4 38,4 50,8	— 296			— 295,0		— 0,11	0,0121
						— 0,4	— 1,0				
14	894	13,2 39,4 52,6	1182	12,0 38,1 50,1	— 288			— 294,3		+ 0,59	0,3481
						+ 2,5	+ 6,3				
15	846	13,5 39,8 53,3	1126	10,7 36,9 47,6	— 280			— 294,3		+ 0,59	0,3481
						+ 5,7	+ 14,3				

Laufende Nummer der einzelnen Beobachtungen	Rückblick		Vorblick		Höhenunterschied in Millim.	Differenz der Niveausummen des Rück- und Vorblickes	Correction in Miilim.	Corrigirter Höhenunterschied in Millim.	Arithmetisches Mittel des Höhenunterschiedes aus allen Beobachtungen in Millim.	Abweichung der einzelnen beobachteten Höhenunterschiede von deren arithmetischem Mittel	
	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe	Lattenablesung in Millim.	Abgelesene Niveautheile und deren Summe							
n	l	N_r	l'	N_v	$l - l'$	$N_r - N_v$	$(N_r - N_v)$ $2{,}5 = c$	$l - l' - c$	$\frac{[l - l' - c]}{n}$	v	vv
16	838	12,4 38,6	1134	12,7 38,9	— 296			— 294,5		+ 0,39	0,1521
		51,0		51,6		— 0,6	— 1,5				
17	798	12,1 38,3	1094	12,0 38,2	— 296			— 296,5		— 1,61	2,5921
		50,4		50,2		+ 0,2	+ 0,5				
18	782	12,0 38,3	1070	10,8 37,1	— 288			— 294,0		+ 0,89	0,7921
		50,3		47,9		+ 2,4	+ 6,0				
19	1094	11,5 37,7	1390	11,7 38,0	— 296			— 294,7		+ 0,19	0,0361
		49,2		49,7		— 0,5	— 1,3				
20	1070	11,0 37,2	1366	11,4 37,6	— 296			— 294,0		+ 0,89	0,7921
		48,2		49,0		— 0,8	— 2,0				
21	1062	9,6 35,9	1366	11,5 37,8	— 304			— 294,5		+ 0,39	0,1521
		45,5		49,3		— 3,8	— 9,5				
22	1070	11,3 37,6	1366	11,7 38,0	— 296			— 294,0		+ 0,89	0,7921
		48,9		49,7		— 0,8	— 2,0				
23	1046	10,4 36,8	1350	12,0 38,4	— 304			— 296,0		— 1,11	1,2321
		47,2		50,4		— 3,2	— 8,0				
24	1054	11,5 38,0	1350	11,7 38,2	— 296			— 295,0		— 0,11	0,0121
		49,5		49,9		— 0,4	— 1,0				
							$[l - l' - c] =$	— 7077,4		$[vv] =$	19,2184

$$\frac{[l - l' - c]}{n} = \frac{-7077{,}4}{24} = -294{,}89 \text{ Millimeter.}$$

$$\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{19{,}2184}{23}} = \pm 0{,}91 \text{ Millimeter.}$$

dann ist der corrigirte Höhenunterschied

$$h = l - l' - c$$

und

$$\frac{[h]}{n} = \frac{[l - l' - c]}{n}$$

der wahrscheinlichste Werth desselben aus allen Beobachtungen, während dessen Abweichungen v von den Einzelbeobachtungen h, quadrirt, addirt und durch $n - 1$ dividirt, in

$$m^2 = \frac{[vv]}{n-1}$$

das mittlere Fehlerquadrat und in

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

den mittleren Fehler einer aus einfachem Rück- und einfachem Vorblick zusammengesetzten Stationsbeobachtung liefern.

Ich habe mich nicht, wie dies von Jordan befolgt wurde, dafür entscheiden können, aus einer Reihe einfacher Lattenablesungen bei unberührt bleibendem Instrumente zunächst den mittleren Lattenablesungsfehler zu errechnen und mittelst desselben nach Hinzufügen des mittleren Libellenschätzungsfehlers und Multiplication mit $\sqrt{2}$ den mittleren Fehler für die sich aus zwei Latten- und zwei Libellenablesungen zusammensetzende Stationsbeobachtung herzuleiten; es schien mir um so richtiger, die Anordnung der Beobachtungen so zu treffen, dass die Summation obiger Fehler durch die Beobachtungen selbst erfolge, und dass der gesuchte mittlere Stationsfehler sich als unmittelbares Beobachtungsresultat ergebe, als durch das erstere Verfahren, wie sich gleich zeigen wird, eine ganze Reihe von Fehlerquellen (2, 4, 6 und 8) vollständig unberücksichtigt bleibt.

Jeder von mir bestimmte Höhenunterschied h enthält

1) den Zielfehler,
2) den Libellenschätzungsfehler,
3) den Theilungsfehler der Latten,
4) den Theilungsfehler der Libellenscala,
5) die Refractionsdifferenz,
6) den durch das Schwanken der Latte bedingten Fehler,
7) den Fehler der Distanzbestimmung,
8) den Fehler der Empfindlichkeitsbestimmung der Libelle,

welche Fehlerquellen in ihrem Zusammenfliessen den wahren Stationsfehler bilden.

Die in den Tabellen I bis IV errechneten mittleren Stationsfehler müssen, da uns die wahren unerreichbar bleiben, für die letzteren Ersatz leisten, und wir werden zu überlegen haben, inwieweit eine Annäherung an die Wahrheit erreicht scheint.

In den errechneten mittleren Stationsfehlern sprechen sich die ad 1 und ad 2 genannten Fehler vollständig aus, während die Fehler ad 3, 4 und 5 insofern mit eingeschlossen erscheinen, als an verschiedenen Stellen der Latten resp. Libellentheilung abgelesen wurde, und sich die Beobachtungen ein und desselben Höhenunterschiedes auf einen mehrere Stunden umfassenden Zeitraum erstreckten.

Der ad 6 genannte Fehler, seiner Natur nach einseitig wirkend, ist zum Theil in den errechneten mittleren Stationsfehlern enthalten und die übrig gebliebenen Differenzen, ebenso wie der ad 7 genannte Fehler, (die Zielweiten wurden bis auf wenige Centimeter genau gemessen) sind so gut wie einflusslos. Da endlich der mittlere Fehler der Empfindlichkeitsbestimmung der Libelle nur $0{,}_{03}$ Secunden beträgt, so lässt sich leicht übersehen, dass die den errechneten mittleren Stationsfehlern hierdurch zufallende Correction ganz unerheblich ist und völlig unbeachtet bleiben darf.

Die mittleren Stationsfehler bedürfen also keiner irgend wie nennenswerthen Verbesserung, und die Untersuchung kann mit den unmittelbar gefundenen Resultaten für die mittleren Stationsfehler an Stelle der wahren, ohne einen merkbaren Fehler befürchten zu müssen, weiter geführt werden.

Kurz wiedergegeben lieferten die Tabellen:

Länge der Visirlinie in Metern z	Mittlerer Fehler einer aus einfachem Rückblick und einfachem Vorblick zusammengesetzten Stationsbeobachtung in Millimetern m
50	$\pm 0{,}28$
100	$\pm 0{,}62$
150	$\pm 0{,}71$
200	$\pm 0{,}91$

Von Jordan und auch von Hagen wurden für die Beobachtungen andere Zielweiten als von mir gewählt; es ist deshalb,

um eine unmittelbare Vergleichung zwischen den Resultaten der verschiedenen Beobachter anstellen zu können, erforderlich, die wahrscheinlichsten Werthe der mittleren Stationsfehler für Zielweiten, auf denen nicht beobachtet wurde, kennen zu lernen. Wir finden dieselben durch die Methode der kleinsten Quadrate, indem wir annehmen, dass die zwischen dem mittleren Stationsfehler m als abhängiger und der Zielweite z als unabhängiger Variabeln bestehende Relation sich als eine nach steigenden Potenzen von z fortlaufende Reihe von der Form:

$$m = az^n + bz^{n+1} + cz^{n+2} + \ldots.$$

darstellen lässt.

In dieser Reihe unterdrücken wir das vierte und die folgenden Glieder der Reihe in der Absicht, die Anzahl der unbekannten und zu bestimmenden Coëfficienten a, b, c kleiner als die Anzahl der Beobachtungsgruppen zu erhalten.

Für die Coëfficienten a, b und c der so vereinfachten und nach vorausgegangener Division durch z^n auf Null gebrachten Gleichung

$$\frac{m}{z^n} - a - bz - cz^2 = 0$$

erhalten wir nun, wenn n als bestimmte Zahl eingeführt wird, aus den in überschüssiger Anzahl vorhandenen Beobachtungen den wahrscheinlichsten Werth, wenn wir nach der Methode der kleinsten Quadrate die in der angenommenen Gleichung sich aussprechenden Widersprüche der vier Gruppenbeobachtungsresultate quadriren, die erhaltenen Quadrate mit ihren Gewichten p (der Anzahl der Einzelbeobachtungen jeder Gruppe) multipliciren und die Summe dieser Producte zu einem Minimum machen, d. h.

$$\left[p\left(\frac{m}{z^n} - a - bz - cz^2\right)^2\right] = \text{Minimum}.$$

Hierin ist p, da es für jede Gruppe $= 24$, zu unterdrücken und die partielle Differentiation nach a, dann nach b und nach c ergiebt, wenn die erhaltenen Differentialquotienten $= 0$ gesetzt werden, die drei Normalgleichungen:

$$-\left[\frac{m}{z^n}\right] + [1]\,a + [z]\,b + [z^2]\,c = 0,$$
$$-[z^{1-n}m] + [z]\,a + [z^2]\,b + [z^3]\,c = 0,$$
$$-[z^{2-n}m] + [z^2]\,a + [z^3]\,b + [z^4]\,c = 0,$$

aus welchen die Coëfficienten a, b und c durch Elimination zu berechnen sind.

Es käme nun darauf an, in der Gleichung

$$m = az^n + bz^{n+1} + cz^{n+2}$$

für n den geeignetsten Werth zu finden, d. h. denjenigen, welcher die mit ihm berechneten m so ergiebt, dass die Quadrate ihrer Abweichungen von den durch die Beobachtungen erhaltenen m in ihrer Summe ein Minimum liefern.

Dass nun zunächst n nicht wohl grösser als 1 sein kann, vermögen wir durch einen Blick auf die Beobachtungsresultate ohne Weiteres festzusetzen, da sich eine so starke Zunahme der mittleren Stationsfehler mit der Zielweite nicht erkennen lässt.

Wir setzen daher versuchsweise $n = 1$ und dann $n = 0$ und erhalten, wenn z in Einheiten von 50 m eingeführt wird, aus den oben gegebenen Normalgleichungen

für $n = 1$	für $n = 0$
$a = +0{,}216$,	$a = -0{,}040$,
$b = +0{,}083$,	$b = +0{,}373$,
$c = -0{,}021$,	$c = -0{,}035$,

und, diese Werthe in die Gleichung

$$m = az^n + bz^{n+1} + cz^{n+2}$$

einsetzend, die beiden nachstehenden Tabellen.

$$m = +0{,}216\,z + 0{,}083\,z^2 - 0{,}021\,z^3$$

Zielweite in Metern	m beobachtet	m berechnet	v	vv
50 (1)	0,28	0,28	± 0,00	0,0000
100 (2)	0,62	0,60	+ 0,02	0,0004
150 (3)	0,71	0,83	− 0,12	0,0144
200 (4)	0,91	0,85	+ 0,06	0,0036
			$[vv] =$	0,0184

$$m = -0{,}040 + 0{,}373\,z - 0{,}035\,z^2$$

Zielweite in Metern	m beobachtet	m berechnet	v	vv
50	0,28	0,30	− 0,02	0,0004
100	0,62	0,57	+ 0,05	0,0025
150	0,71	0,76	− 0,05	0,0025
200	0,91	0,89	+ 0,02	0,0004
			$[vv] =$	0,0058

Die Gleichung mit $n = 0$ liefert eine wesentlich kleinere Quadratsumme als diejenige mit $n = 1$, und es spricht ausserdem für den Ausdruck

$$m = a + bz + cz^2$$

der Umstand, dass wir uns seine Form nach den uns bekannten, den mittleren Stationsfehler beeinflussenden Vorgängen beim Nivellement hinreichend zu erklären vermögen. Die mittleren Stationsfehler m erscheinen in demselben mit einer Constanten behaftet und wachsen, wenn das dritte, von geringem Einfluss bleibende Glied für diese Betrachtung unterdrückt gedacht wird, unter Einführung jener Constanten proportional den angewendeten Zielweiten.

Dass aber den mittleren Stationsfehlern ein solches Verhalten inne wohnt, wird durch folgende Ueberlegung höchst wahrscheinlich.

Die Hauptfehlerquelle, gegen welche alle übrigen als verschwindend klein erscheinen, entspringt aus dem ungenauen Ablesen der Libelle, und die hieraus resultirenden Fehler wachsen der Zielweite proportional, denn bezeichnet α den einem Libellenschätzungsfehler l entsprechenden Winkel, ferner f das an der Latte durch diese Neigung vom Horizontalfaden des Oculars durchlaufene Lattenstück, und wie immer z die Zielweite, dann ist

$$f = tang\, \alpha \,.\, z.$$

Der mittlere Libellenablesungsfehler l beträgt nun erfahrungsgemäss etwa $0{,}_1$ Theilstrich oder, da die Empfindlichkeit der verwendeten Libelle $= 5{,}_{16}$ Secunden für einen pars, rund $0{,}_5$ Secunden. Für den Rückblick sowohl wie für den Vorblick sind jedesmal zwei Libellenablesungen (an beiden Blasenenden), in Summa für eine Station also vier Ablesungen erforderlich, und der mittlere Libellenschätzungsfehler für eine Stationsbeobachtung ist daher

$$l_1 = \sqrt{4 \,.\, (0{,}5)^2} = 1 \text{ Secunde.}$$

Wenn also weiter keine Fehlerquelle vorhanden wäre, als das ungenaue Ablesen der Libelle, dann erhielten wir die mittleren Stationsfehler für die verschiedenen Zielweiten aus

$$m = tang\, 1'' \,.\, z,$$

und zwar für die Zielweiten

50 m	100 m	150 m	200 m
$m = 0{,}24$ mm;	$m = 0{,}48$ mm;	$m = 0{,}73$ mm;	$m = 0{,}97$ mm.

Dagegen ergeben die vorliegenden Beobachtungen für dieselben Zielweiten

$m = 0{,}28$ mm; $m = 0{,}62$ mm; $m = 0{,}71$ mm; $m = 0{,}91$ mm,

und die geringen Abweichungen in den Differenzen:

0,04 mm 0,14 mm 0,02 mm 0,06 mm

zeigen, dass das aus rein theoretischen Gründen gefolgerte Wachsen der mittleren Stationsfehler proportional den angewendeten Zielweiten durch die von mir angestellten Beobachtungen zur Genüge Bestätigung findet.

Wegen der constanten Grösse a bleibt daran zu erinnern, dass bereits früher eines dem Nivellement anhaftenden constanten Fehlers in dem seiner Natur nach einseitig wirkenden, durch das Schwanken der Latten bedingten Fehler Erwähnung gethan worden ist, und dass bei der Schärfe der angestellten Beobachtungen sein Bemerkbarwerden nicht gerade unmöglich erscheint.

Wenn wir nun mit Hülfe der Gleichung

$$m = -0{,}04 + 0{,}373\, z - 0{,}035\, z^2$$

die gefundenen Beobachtungsresultate ausgleichen, ferner die mittleren Stationsfehler für Zielweiten, auf denen nicht beobachtet wurde, berechnen und in ganz ähnlicher Weise auch die Hagen'schen und Jordan'schen Resultate behandeln, dann wird die auf der nächsten Seite stehende vergleichende Zusammenstellung der von Hagen, Jordan und mir erreichten Genauigkeitsgrade möglich.

Durch diese Zusammenstellung ist nachgewiesen, dass mit dem von mir benutzten Nivellirapparate unter Anwendung der angegebenen Beobachtungsmethode ein Genauigkeitsgrad erreicht werden kann, an welchen weder die von Hagen, noch die von Jordan gefundenen Resultate auch nur im Entferntesten heranzureichen vermögen. Die Eingangs aufgeworfene Frage nach der besten nivellitischen Beobachtungsmethode darf daher als erledigt angesehen werden, und wir wenden uns nunmehr der zweiten Frage über die für Präcisionsnivellements günstigste Zielweite zu.

Vorerst möge jedoch hier nachgewiesen werden, bis zu welcher Grösse der mittlere Fehler pro Kilometer, abgeleitet aus

Zielweite in Metern	Mittlerer Fehler in Millimetern einer aus einfachem Rück- und einfachem Vorblick zusammengesetzten Stationsbeobachtung nach		
	Hagen	Jordan	Seibt
	* = beobachtet u. ausgeglichen † = interpolirt	* = beobachtet u. ausgeglichen † = interpolirt	* = beobachtet u. ausgeglichen † = interpolirt
19	1,4 *	—	—
30	1,7 †	0,44 *	0,17 †
38	2,0 *	—	—
50	2,3 †	0,80 †	0,30 *
60	2,6 †	0,99 *	0,36 †
75	3,1 *	—	—
90	3,5 †	1,68 *	0,52 †
100	3,8 †	1,91 †	0,57 *
113	4,2 *	—	—
120	4,4 †	2,46 *	0,65 †
132	4,8 *	—	—
150	5,3 †	3,36 *	0,76 *
151	5,3 *	—	—
180	6,2 †	4,38 *	0,85 †
188	6,5 *	—	—
200	6,7 †	5,16 †	0,89 *
210	7,0 †	5,58 *	0,91 †
226	7,6 *	—	—

den Resultaten der verschiedenen Beobachter, anwächst, da uns diese Grösse besonders deshalb interessirt, weil der mittlere Fehler pro Kilometer als Genauigkeitsmaass der zu Gradmessungszwecken als brauchbar zu erklärenden Nivellements eingeführt ist.

Da nach einem Fundamentalsatze der Methode der kleinsten Quadrate das mittlere zu fürchtende Fehlerquadrat der Summe mehrerer mit unregelmässigen Fehlern behafteten Grössen gleich der Quadratsumme der mittleren Einzelfehler ist, so finden wir das mittlere Fehlerquadrat $\mu\mu$ einer aus n Stationen zusammengesetzten Strecke gleich der Summe der mittleren Fehlerquadrate der einzelnen Stationsbeobachtungen $m_1 m_1$, $m_2 m_2$, $m_3 m_3$, also

$$\mu\mu = m_1 m_1 + m_2 m_2 + m_3 m_3 + \ldots . m_n m_n$$

und daher das mittlere Fehlerquadrat $\mu_1 \mu_1$ einer aus n Stationen mit gleichlangen Zielweiten zusammengesetzten Strecke

$$\mu_1 \mu_1 = [m m] = n m^2.$$

Ist nun die Länge der Strecke = 1 Kilometer, dann ist

$$n = \frac{1000}{2z}$$

und das mittlere Fehlerquadrat MM pro Kilometer bei Anwendung gleich langer Zielweiten

$$MM = m^2 \frac{1000}{2z} = \frac{500\, m^2}{z}$$

und der mittlere Fehler pro Kilometer bei Anwendung gleich langer Zielweiten

$$M = \sqrt{\frac{500\, m^2}{z}} = 22{,}36 \frac{m}{z} \sqrt{z}\,.$$

Mit dieser Formel berechnen wir nun für die verschiedenen Zielweiten die mittleren Fehler pro Kilometer bei je einmaliger Beobachtung des Rück- und Vorblicks und, indem wir dieselben durch 2 dividiren, die mittleren Fehler pro Kilometer bei je viermaliger unabhängiger Stationsbeobachtung und erhalten:

Zielweite in Metern	Mittlerer Fehler pro Kilometer in Millimetern, wenn sich die einzelnen Stationsbeobachtungen aus einfachem Rück- und einfachem Vorblick zusammensetzen nach			wenn sich die einzelnen Stationsbeobachtungen aus viermaligem Rück- und viermaligem Vorblick zusammensetzen nach		
	Hagen	Jordan	Seibt	Hagen	Jordan	Seibt
50	7,3	2,53	0,95	3,6	1,26	0,47
100	8,5	4,27	1,27	4,3	2,14	0,64
150	9,7	6,13	1,39	4,8	3,07	0,69
200	10,6	8,16	1,41	5,3	4,08	0,70

Die zweite allgemeine Conferenz der europäischen Gradmessung hat die Bestimmung getroffen, dass der wahrscheinliche Fehler des Höhenunterschiedes zweier um ein Kilometer entfernter Punkte im Allgemeinen nicht 3 mm (mittlerer Fehler = 4,45 mm) und in keinem Falle 5 mm (mittlerer Fehler = 7,41 mm) überschreiten darf. Aus vorstehender Zusammenstellung ist aber zu entnehmen, dass der mittlere Fehler pro Kilometer, wie er sich aus den von mir angestellten Beobachtungen ergiebt, selbst bei der grössten angewendeten Zielweite von 200 Metern die Grösse eines Millimeters

bei einfacher Beobachtung des Rück- und Vorblickes nur wenig überschreitet, während bei viermaliger Stationsbeobachtung, wie solche ausschliesslich für die Präcisionsnivellements des Königlichen geodätischen Instituts stattfinden, die Grösse eines Millimeters noch lange nicht erreicht wird.

Wenn nun auch nach diesen Untersuchungen zugegeben werden muss, dass im Allgemeinen durch Stationen mit kurzen Zielweiten eine grössere Genauigkeit zu erreichen ist, als durch solche mit langen, so ist doch auch zur Evidenz nachgewiesen, dass die Genauigkeit, welche selbst bei Zielweiten von 200 m noch erreicht werden kann, eine so ausserordentlich grosse ist, dass jeder, auch der höchsten Anforderung, die billiger Weise an Präcisionsnivellements gestellt werden kann, weit mehr als Genüge geleistet wird. Was hier durch Verkürzen der Zielweiten hinsichtlich der Genauigkeitserhöhung noch zu erreichen bleibt, muss rundweg als irrelevant, und das Verfahren, durch Einhaltung möglichst kurzer Zielweiten den Genauigkeitsgrad um ein ganz unscheinbares Maass unter unverhältnissmässiger Vermehrung des Aufwandes an Zeit, Mühen und Kosten zu erhöhen, als irrationell bezeichnet werden. Es versteht sich von selbst, dass ich hierbei nur die von mir gefundenen Genauigkeitsresultate im Auge habe, und dass beispielsweise Jordan niemals Zielweiten von mehr als 50 m Länge anwenden dürfte, um ein zu Gradmessungszwecken noch einigermassen brauchbares Nivellement zu liefern.

In richtiger Erwägung des Erreichbaren sehen wir daher von der Wahl einer „günstigsten“ Zielweite ganz ab und halten nur fest, dass die Zielweite niemals eine bestimmte, je nach der Leistungsfähigkeit des betreffenden Beobachters und seines Instrumentes verschieden liegende Grenze übersteigt. Richtig gewählt wird die jedesmalige Zielweite dann sein, wenn dieselbe innerhalb jener Grenze einerseits so weit ausgedehnt wurde, wie es das Terrain, in welchem das Nivellement geführt wird, irgend zulässt, und andererseits so weit verkürzt wurde, dass sich im Fernrohre keine Spur von Luftwallungen bemerkbar macht und die Lattentheilung sich als ein vollkommen ruhiges und aufs Schärfste begrenztes Bild dem Auge darstellt.

Lässt man sich von diesem Grundsatze streng leiten, dann muss der durchschnittliche mittlere Kilometerfehler eines grösseren Nivellements stets noch um ein gutes Stück unter 0,70 mm herabsinken, da sowohl in Rücksicht auf Witterungsverhältnisse, als

auch in Rücksicht auf das Terrain niemals grössere Strecken andauernd mit der Maximalzielweite von 200 m zur Erledigung kommen können. Wir werden daher der Wahrheit gewiss sehr nahe kommen, wenn wir, um einen allgemeinen Ausdruck für die Genauigkeit der in unserem Sinne geführten Nivellements zu erhalten, den durchschnittlichen mittleren Kilometerfehler gleich dem mittleren Kilometerfehler für 100 m Zielweite

zu 0,64 Millimetern

annehmen, da bei einem grösseren Nivellement erfahrungsgemäss die durchschnittliche Visirlänge die Grenze von 100 m nicht übersteigt.

Hiermit wäre aber ausgesprochen, dass jene für die Genauigkeit der zu Gradmessungszwecken zu verwendenden Nivellements gestattete Grenze, in Rücksicht auf die dem Nivellirapparate und der nivellitischen Beobachtungsmethode seit jenem Conferenzbeschlusse (cfr. Seite 375) zu Theil gewordene wesentliche Vervollkommnung, um mindestens das 3- bis 4fache enger gezogen werden darf.

Dass ein solcher Grad von Genauigkeit nicht etwa bei der wirklichen Ausführung eines exacten Nivellements illusorisch wird, dafür möge folgendes, aus der Praxis herausgegriffene Beispiel beweisführend an dieser Stelle eingeschaltet werden.

Von der 566,21 Kilometer langen Hauptlinie des von der sächsisch-preussischen Grenze bei Riesa bis zur Seevemündung unterhalb Geesthacht von mir ausgeführten Elbpräcisionsnivellements ist die 332,46 Kilometer lange Strecke von Magdeburg bis zur Seevemündung genau in der für die vorliegenden Untersuchungen angewendeten Beobachtungsmethode nivellirt worden.

Der mittlere Fehler des einfachen Nivellements pro Kilometer ist hierfür aus der auf Seite 15 des mehrfach genannten „Präcisionsnivellement der Elbe“ entwickelten Formel

$$k = \sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{2vv}{s}\right]}$$

zu berechnen, für welche, da s die Länge der Strecke in Kilometern ausdrückt, die Annahme zu Grunde liegt, dass das Gewicht einer nivellirten Strecke deren Länge umgekehrt proportional zu setzen sei.

Entnehmen wir ferner den Seiten 23 und 24 der obigen Publication die Werthe

$$n = 291 \text{ und } \left[\frac{2vv}{s}\right] = 382{,}75,$$

dann ergiebt sich:

der mittlere Fehler des einfachen Nivellements pro Kilometer, abgeleitet aus der 332,46 Kilometer langen Strecke Magdeburg-Seevemündung,

$$= \sqrt{\frac{382{,}75}{291}} = 1{,}15 \text{ mm}.$$

Da sich nun hier das einfache Nivellement aus Doppelstationen zusammensetzt (cfr. Seite 9 des betreffenden Werkes), so setzen wir, um einen Vergleich jener Grösse mit den Resultaten der vorliegenden Untersuchung zu ermöglichen,

1) den mittleren Fehler pro Kilometer bei einfacher Stationsbeobachtung $= 1{,}15 \text{ mm} \sqrt{2} = 1{,}6 \text{ mm}$,
2) den mittleren Fehler pro Kilometer bei vierfacher Stationsbeobachtung $= \frac{1{,}15 \text{ mm}}{\sqrt{2}} = 0{,}8 \text{ mm}$.

Dagegen ist nach den vorliegenden Beobachtungen für eine durchschnittliche Visirlänge von 82 m, wie sich eine solche für die durch 2037 Stationen erledigte 332,46 Kilometer lange Strecke ergiebt,

1) der mittlere Fehler pro Kilometer bei einfacher Stationsbeobachtung $= \sqrt{\frac{500 \,.\, 0{,}48^2}{82}} = 1{,}2 \text{ mm}$,
2) der mittlere Fehler pro Kilometer bei vierfacher Stationsbeobachtung $= 0{,}6 \text{ mm}$,

was mit den eben gegebenen mittleren Fehlern eine Uebereinstimmung zeigt, die kaum zu wünschen übrig lassen dürfte.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten, wie gross das Gewicht einer in der von mir angewendeten Beobachtungsmethode erledigten, aus mehreren Stationen zusammengesetzten Strecke zu setzen ist.

Liegt eine grössere Strecke S vor, welche sich aus

a_1	Stationen	mit	Zielweiten	$= z_1$	und	dem	mittleren	Fehler	$= m_1$,
a_2	,,	,,	,,	$= z_2$	,,	,,	,,	,,	$= m_2$,
a_3	,,	,,	,,	$= z_3$	,,	,,	,,	,,	$= m_3$,
a_n	,,	,,	,,	$= z_n$	,,	,,	,,	,,	$= m_n$,

zusammensetzt, dann ist das mittlere Fehlerquadrat der

a_1 Stationen mit Zielweiten $= z_1 = m_1^2 + m_1^2 + m_1^2 + \ldots = a_1 m_1^2$,
a_2 „ „ „ $= z_2 = m_2^2 + m_2^2 + m_2^2 + \ldots = a_2 m_2^2$,
a_3 „ „ „ $= z_3 = m_3^2 + m_3^2 + m_3^2 + \ldots = a_3 m_3^2$,
a_n „ „ „ $= z_n = m_n^2 + m_n^2 + m_n^2 + \ldots = a_n m_n^2$,

und daher

das mittlere Fehlerquadrat der aus $[a]$ Stationen zusammengesetzten Strecke $= [a m^2]$,

der mittlere Fehler der aus $[a]$ Stationen zusammengesetzten Strecke $= \sqrt{[a m^2]}$.

Das Gewicht p der Strecke S ist nun nach einem bekannten Satze der Methode der kleinsten Quadrate gleich dem reciproken Werthe ihres mittleren Fehlerquadrates zu setzen, daher

$$p = \frac{1}{[a m^2]}.$$

Sind für die ganze Strecke gleiche Zielweiten in Anwendung gekommen, dann wird, wenn A die Gesamtanzahl der Stationen und m den mittleren Stationsfehler für die betreffende Zielweite bezeichnen,

das mittlere Fehlerquadrat der aus A Stationen zusammengesetzten Strecke $= A m^2$,

der mittlere Fehler der aus A Stationen zusammengesetzten Strecke $= m\sqrt{A}$ und

$$p = \frac{1}{A m^2}.$$

Wir sehen, dass, wenn aus besonders angestellten Beobachtungen die Genauigkeit bekannt ist, mit welcher ein bestimmter Beobachter eine Station von bestimmter Zielweite zu erledigen vermag, in sehr einfacher Weise für jede in derselben Beobachtungsmethode und von demselben Beobachter geführte Messung ein Gewicht herzuleiten ist, in welchem sowohl die Leistungsfähigkeit des Beobachters und des von ihm benutzten Instrumentes als auch die Güte des Nivellements selbst sich vollständig ausspricht. Während wir also bisher gezwungen waren, bei Betimmung des Gewichtes geometrischer Nivellements zu Hypothesen zu greifen, sind wir jetzt im Stande, jedes Nivellement mit dem ihm wirklich zukommenden Gewichte belegen zu können und Messungen, welche von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Instrumenten und nach verschiedenen Beobachtungsmethoden ausgeführt wurden, ihrem wahren Werthe nach mit einander zu vereinigen.

Sei beispielsweise die 5 Kilometer lange Strecke S von den Beobachtern A und B unabhängig von einander gemessen worden.

A habe den Höhenunterschied h'

durch 30 Stationen mit 50 m Zielweite
und 10 „ „ 100 m „

erhalten. B dagegen erhielt den Höhenunterschied h''

durch 5 Stationen mit 200 m Zielweite
und 15 „ „ 100 m „ .

Ferner sei durch vorausgegangene Beobachtungen ermittelt worden

für A der mittlere Fehler einer Stationsbeobachtung

bei 50 m Zielweite $= m_1$,
„ 100 m „ $= m_2$;

für B der mittlere Fehler einer Stationsbeobachtung

bei 200 m Zielweite $= m_3$,
„ 100 m „ $= m_4$,

dann sind die Gewichte p' und p'' der von A und B gefundenen Höhenunterschiede h' und h''

$$p' = \frac{1}{30\,m_1^2 + 10\,m_2^2},$$

$$p'' = \frac{1}{5\,m_3^2 + 15\,m_4^2}$$

und der wahrscheinlichste Werth des Höhenunterschiedes nach den Messungen von A und B

$$h = \frac{h'p' + h''p''}{p' + p''}.$$

Es muss der Praxis vorbehalten bleiben, zu entscheiden, ob eine solche consequente Gewichtseinführung auf die Uebereinstimmung des sich aus zusammengesetzten grösseren Nivellementszügen ergebenden Fehlergesetzes mit dem theoretisch entwickelten begünstigend und so befriedigend einwirkt, dass ein weiteres Suchen nach der geeignetsten Gewichtsbestimmung geometrischer Nivellements unnöthig wird.

Druckfehlerberichtigung.

Auf Seite 1 ist statt: „Dresden 1878“ zu lesen: „Leipzig 1879“.

10,00

5.00

Pozostałe sygn. na odwrotnej str. okładki