P. Appell

Éléments d'Analyse mathématique

3e Édition

GAUTHIER-VILLARS, Éditeur

ÉLÉMENTS
D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

A L'USAGE

DES CANDIDATS AU CERTIFICAT DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES,
DES INGÉNIEURS ET DES PHYSICIENS.

COURS PROFESSÉ A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES

PAR

Paul APPELL,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TROISIÈME ÉDITION,
Entièrement refondue.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1913

PRÉFACE

DE LA TROISIÈME ÉDITION.

La deuxième édition avait été, à peu de choses près, la réimpression de la première, sauf l'addition d'un Chapitre servant d'Introduction et résumant les connaissances nécessaires à la lecture de l'Ouvrage.

Cette nouvelle édition présente, au contraire, des changements notables. De nombreuses additions ont été faites, pour engager encore plus, l'Ouvrage dans la voie de la préparation à l'étude de la Mécanique et de la Physique. Nous avons notamment développé les formules pour la détermination des centres de gravité et des moments d'inertie des lignes, des surfaces et des volumes homogènes, dans les cas qui se rencontrent le plus fréquemment en pratique, en utilisant, autant que possible, la notion d'intégrale prise le long d'une courbe. Nous avons conservé la définition des intégrales elliptiques de première et de deuxième espèce, de Legendre, telle qu'elle est fournie tout naturellement par les problèmes du mouvement du pendule simple et de la rectification de l'ellipse. Comme application de la théorie des intégrales multiples, nous avons ajouté, aux formules fondamentales sur les intégrales eulériennes de première et de seconde espèce, le calcul des intégrales de Fresnel.

Un chapitre entier a été ajouté sur l'analyse vectorielle, dont l'importance augmente de jour en jour; il contient les questions suivantes : formule d'Ostrogradzky ou de Green, flux, divergence, tourbillon; formule de Riemann; formule de Stokes; pour établir cette dernière formule, nous avons adopté un mode de démonstration très élégant, dû au physicien Blondlot (1), qui fait apparaître progressivement, d'une manière simple, les éléments de l'intégrale double. Quelques types nouveaux ont été ajoutés dans la théorie des quadratures et dans celle des équations différentielles du premier et du second ordre.

Les parties relatives aux quadratures approchées ont été conservées, avec la formule de Poncelet (2) qui présente le grand avantage, sur les formules similaires, de donner une limite supérieure de l'erreur commise.

Pour compenser les additions, sans allonger le volume, nous avons fait des suppressions dans les parties trop purement géométriques, en enlevant les questions qui, à l'expérience, nous ont paru inutiles, tant au point de vue de la formation mathématique qu'à celui des applications.

Nous espérons avoir ainsi réalisé un progrès sur les deux éditions précédentes et avoir composé un Ouvrage capable de rendre service aux ingénieurs et aux physiciens, aux élèves des grandes Écoles techniques et aux candidats au certificat de Mathématiques générales.

PAUL APPELL.

Paris, le 12 juin 1913.

---

(1) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. XVI, 1897, p. 501.

(2) PONCELET, *Introduction à la Mécanique industrielle physique ou expérimentale*, 3e édition, publiée par X. Kretz, p. 197; Gauthier-Villars, 1870.

ÉLÉMENTS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE.

CHAPITRE I.

INTRODUCTION.

1. **Fonctions d'une variable.** — On appelle *quantité variable*, ou simplement *variable*, une quantité qui peut prendre à volonté diverses valeurs. On dit qu'une quantité y est *fonction* d'une variable x, *quand*, x *étant donné*, y *est déterminé*. La variable x qu'on peut se donner à volonté s'appelle la *variable indépendante*.

La Géométrie, la Physique, la Mécanique fournissent de nombreux exemples de fonctions. Ainsi l'aire y d'un cercle est une fonction de son rayon x définie par la relation

$$y = \pi x^2;$$

la longueur d'une barre de fer est une fonction de sa température; etc.

Fonctions uniformes. — Une fonction

$$y = f(x)$$

est dite *uniforme* dans un intervalle (a, b) quand, à chaque valeur de x comprise entre a et b, correspond *une seule valeur de* y. Ainsi les fonctions

$$y = x^3 + 1, \quad y = \sin x, \quad y = \operatorname{tang} x$$

sont uniformes dans un intervalle quelconque (a, b).

Fonctions non uniformes. — Si, à une valeur donnée de x, dans un intervalle (a, b), répondent deux ou plusieurs valeurs de y, la fonction y n'est pas uniforme. Par exemple, supposons que y soit lié à x par l'équation

$$y^2 = 1 - x^2;$$

à chaque valeur de x comprise entre -1 et $+1$ correspondent *deux valeurs* de y, égales et de signes contraires,

$$y_1 = +\sqrt{1 - x^2},$$
$$y_2 = -\sqrt{1 - x^2};$$

y n'est donc pas une fonction uniforme de x.

De même la fonction

$$y = \operatorname{arc} \sin x$$

n'est pas uniforme, car, à une valeur donnée de x comprise entre -1 et $+1$, répondent, comme on sait, une infinité de valeurs de y; si y_1 est l'une de ces valeurs, les autres sont de la forme

$$2k\pi + y_1, \qquad (2k+1)\pi - y_1,$$

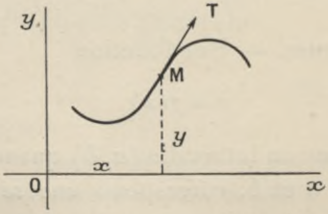
k étant un entier quelconque.

2. Représentation graphique. — Pour représenter par une ligne une fonction

$$y = f(x),$$

on prend deux axes rectangulaires Ox et Oy (*fig.* 1), on donne à x une valeur et l'on construit le point M ayant pour coordon-

Fig. 1.



nées x et y par rapport aux deux axes. Quand on fait varier x, y varie suivant une certaine loi et le point représentatif M décrit une ligne qui représente graphiquement la fonction (*fig.* 1).

Fonctions uniformes. — Si la fonction est uniforme dans un certain intervalle a, b, la ligne correspondante est telle que, sur chaque parallèle à Oy, dans l'intervalle considéré, il se trouve un seul point représentatif M; car à chaque valeur de x, prise dans cet intervalle, ne correspond qu'une valeur de y.

Fonctions non uniformes. — Si l'on prend une fonction non uniforme, comme la fonction y définie par

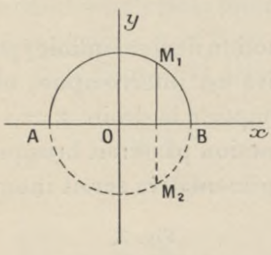
$$y^2 = 1 - x^2, \tag{1}$$

on voit que, sur chaque parallèle à Oy correspondant à une abscisse x entre -1 et $+1$, se trouvent deux points M_1 et M_2 de la ligne représentative, ayant respectivement pour ordonnées

$$y_1 = +\sqrt{1 - x^2},$$
$$y_2 = -\sqrt{1 - x^2}.$$

Quand x varie de -1 à $+1$, le point M_1 décrit une ligne AM_1B (*fig.* 2) constituée par une demi-circonférence de centre O et de

Fig. 2.



rayon 1 située au-dessus de Ox; le point M_2 décrit l'arc pointillé symétrique du premier par rapport à Ox. On peut dire que chacune de ces deux valeurs de y, y_1 et y_2 est une fonction uniforme de x entre -1 et $+1$, représentée soit par la demi-circonférence AM_1B, soit par AM_2B; la circonférence entière est la ligne représentative de la fonction non uniforme y définie par l'équation (1); les deux déterminations y_1 et y_2 de y sont appelées les deux *branches* de la fonction non uniforme y.

D'une façon générale, une fonction non uniforme y de x peut être ainsi décomposée graphiquement en un certain nombre de branches, définissant séparément des fonctions uniformes dont l'ensemble constitue la fonction y.

3. **Fonctions continues.** — Une fonction uniforme

$$y = f(x)$$

est dite *continue* dans un intervalle (a, b), quand, x variant de a à b, le point représentatif décrit une ligne ininterrompue. Ainsi

$$y = \sin x$$

est continu dans tout intervalle;

$$y = \frac{1}{x}$$

est continu dans tout intervalle qui ne contient pas *zéro*.

Une fonction uniforme peut cesser d'être continue, soit en devenant infinie, comme il arrive pour

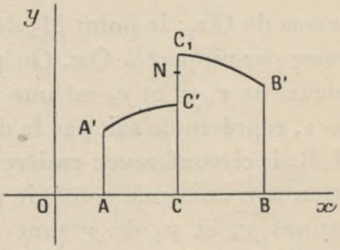
$$y = \frac{1}{x},$$

quand x tend vers zéro, soit en passant brusquement d'une valeur à une autre.

Dans le cas où la fonction devient infinie, pour une valeur $x = \alpha$, la courbe représentative est interrompue; elle s'éloigne à l'infini en admettant pour asymptote la droite $x = \alpha$.

Dans le cas où la fonction passerait brusquement d'une valeur à une autre, la ligne représentative serait interrompue comme dans

Fig. 3.



la figure 3. Dans cette figure on suppose que x variant de $a = \overline{OA}$ à $c = \overline{OC}$, y soit représenté par le trait ininterrompu $A'C'$; puis que x variant de $c = \overline{OC}$ à $b = \overline{OB}$, y soit représenté par le trait ininterrompu C_1B' commençant en un point C_1 autre que C' sur l'ordonnée de C. On dira alors que, pour $x = c$, la fonction y est discontinue. Quand x tend vers c en croissant, y tend vers l'ordonnée $\overline{CC'}$; quand x tend vers c en décroissant, y tend vers $\overline{CC_1}$; enfin, pour $x = c$, il pourrait arriver que y soit égal à une troisième ordonnée $\overline{CN}$ distincte de $\overline{CC'}$ et de $\overline{CC_1}$. Ce genre de discontinuités est très rare; le passage par l'infini est la discontinuité la plus fréquente.

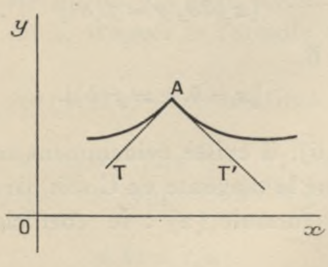
4. **Pente en un point; dérivée.** — Étant donnée une ligne représentant la variation d'une fonction continue $y = f(x)$, on appelle *pente* de cette ligne en un point M la *pente*, c'est-à-dire le *coefficient angulaire*, de la tangente MT en ce point (*fig.* 1).

On démontre en Géométrie analytique que cette pente est la dérivée de y par rapport à x, dérivée que l'on désigne par la notation y'_x ou y' ou $f'(x)$ ou $\frac{dy}{dx}$. Quand une fonction est continue, la pente de sa ligne représentative, c'est-à-dire la dérivée, peut être continue ou discontinue.

Par exemple, sur le demi-cercle de la figure 2, la pente ou dérivée est continue, excepté aux points A et B où elle devient infinie.

Le long de la courbe de la figure 4 la dérivée varie d'une manière

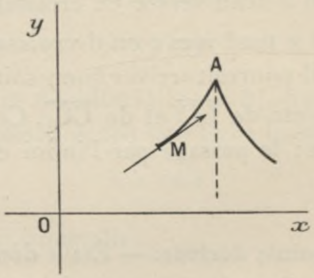
Fig. 4.



continue, excepté au point A où la tangente passe brusquement de la position AT à la position AT'; un point tel que A s'appelle un point *anguleux*.

Sur la courbe de la figure 5, qui présente en A un rebroussement à tangente parallèle à Oy, la dérivée est continue partout, excepté au point A où elle est *infinie*.

Fig. 5.



5. **Théorème des accroissements finis.** — Soit un intervalle a, b dans lequel une fonction uniforme $f(x)$ est continue et admet une dérivée continue. Le théorème des accroissements finis est le suivant :

Il existe, ENTRE a ET b, *au moins une valeur* c *telle qu'on ait*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c). \tag{2}$$

En effet, construisons l'arc de courbe

$$y = f(x)$$

en faisant varier x de a à b. Cet arc part du point A

$$[x = a, y = f(a)]$$

et aboutit au point B

$$[x = b, y = f(b)].$$

Sur l'arc AB (*fig.* 6), il existe évidemment au moins un point C d'abscisse c telle que la tangente en C soit parallèle à AB. C'est ce fait qu'exprime la formule (2) : le coefficient angulaire de la corde AB est

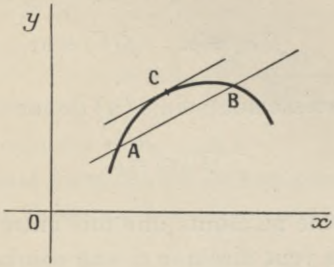
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

celui de la tangente en C est

$$f'(c).$$

En écrivant que ces deux coefficients angulaires sont égaux, on a la formule à démontrer (2).

Fig. 6.



Autre notation. — Soit

$$b - a = h, \qquad b = a + h;$$

la valeur c, qui est comprise entre a et b, peut s'écrire

$$c = a + \theta h,$$

θ *étant un nombre compris entre* o *et* 1. La formule prend alors la forme souvent employée

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h).$$

Applications. — 1° Si une fonction $f(x)$ a sa dérivée constamment nulle, elle est *constante*. En effet, soient a et b deux valeurs quelconques de x; on a, d'après la formule des accroissements finis,

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c),$$

c étant un nombre compris entre a et b; mais, par hypothèse, $f'(c) = 0$, puisque $f'(x)$ est supposée nulle quel que soit x : on a donc

$$f(b) = f(a).$$

La fonction ayant la même valeur pour deux valeurs *quelconques* de la variable x est *constante*.

2° *Théorème de Rolle.* — Soit une fonction uniforme $f(x)$

continue dans un certain intervalle et admettant une dérivée continue : si a et b désignent deux racines consécutives de cette fonction dans l'intervalle considéré, la dérivée $f'(x)$ s'annule *au moins* une fois entre a et b. En effet, par hypothèse,

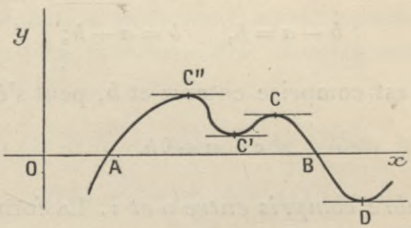
$$f(a) = 0, \qquad f(b) = 0;$$

la formule des accroissements finis (2) donne donc

$$f'(c) = 0,$$

et la dérivée s'annule au moins une fois entre a et b. Graphiquement (*fig.* 7), cela veut dire que si une courbe continue, à pente

Fig. 7.



continue, coupe Ox en deux points A et B, il existe entre A et B au moins un point C où la tangente est parallèle à Ox.

Il va de soi qu'il peut y avoir plusieurs valeurs de x comprises entre a et b et annulant la dérivée, c'est-à-dire plusieurs points où la tangente est parallèle à Ox. Ainsi, dans la courbe de la figure 7, il y a, entre A et B, trois points où la tangente est horizontale.

On conclut immédiatement de ce théorème qu'entre deux racines consécutives de la dérivée $f'(x)$ il y a, *au plus*, *une racine* de la fonction. Ainsi, entre les points C et D (*fig.* 7) où les tangentes sont horizontales et qui se suivent sur la courbe, il y a une racine de $f(x)$ correspondant au point B; entre les points C′ et C, il n'y en a pas.

3° *Formule générale des accroissements finis ou formule de Taylor.* — On peut généraliser la formule précédente comme il suit : soit $f(x)$ une fonction uniforme et continue dans l'intervalle a, b, limites comprises, admettant, dans cet intervalle, des dérivées successives jusqu'à l'ordre n inclus. Nous allons démontrer la formule

$$(3)\qquad f(b)-f(a)-\frac{b-a}{1}f'(a)-\frac{(b-a)^2}{1.2}f''(a)$$
$$-\frac{(b-a)^3}{1.2.3}f'''(a)-\ldots-\frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a)$$
$$=(b-a)\frac{(b-c)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(c),$$

où c est un nombre compris entre a et b.

Pour démontrer cette formule, qui est une généralisation de (2), il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction

$$(4)\qquad \varphi(x)=f(x)+\frac{(b-x)}{1}f'(x)+\frac{(b-x)^2}{1.2}f''(x)$$
$$+\frac{(b-x)^3}{1.2.3}f'''(x)+\ldots+\frac{(b-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(x).$$

D'après les hypothèses faites, cette fonction de x est continue dans l'intervalle (a, b); elle admet une dérivée dans cet intervalle, car chacun des termes, en nombre fini, qui la composent en admet une. On peut donc lui appliquer le théorème précédent des accroissement finis, et l'on a

$$(5)\qquad \varphi(b)-\varphi(a)=(b-a)\varphi'(c),$$

c étant compris entre a et b. Calculons la dérivée $\varphi'(x)$ de (4) en remarquant que chaque terme de la forme $(b-x)^k f_{(x)}^{(k)}$ donne, dans la dérivée, une somme de deux termes que nous mettrons entre crochets ; nous aurons

$$\varphi'(x)=f'(x)+\left[-\qquad f'(x)+\frac{(b-x)}{1}f''(x)\right]$$
$$+\left[-\frac{(b-x)}{1}f''(x)+\frac{(b-x)^2}{1.2}f'''(x)\right]$$
$$+\left[-\frac{(b-x)^2}{1.2}f'''(x)+\frac{(b-x)^3}{1.2.3}f^{\text{IV}}(x)\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left[-\frac{(b-x)^{n-2}}{1.2\ldots(n-2)}f^{(n-1)}(x)+\frac{(b-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(x)\right].$$

Le premier terme de chaque crochet étant détruit par le dernier du précédent, il reste

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(x).$$

Comme on a d'autre part

$$\varphi(b) = f(b),$$
$$\varphi(a) = f(a) + \frac{(b-a)}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a)$$

et que

$$\varphi'(c) = \frac{(b-c)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(c),$$

la formule (5) donne bien la formule à démontrer (3).

Autre notation. — Si l'on fait $b = a + h$, c qui est compris entre a et b a une valeur qu'on peut écrire

$$c = a + \theta h,$$

où θ est un nombre positif compris entre 0 et 1. On a alors la formule suivante [formule (3)]

$$(6)\quad f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f^{(n)}(a+\theta h),$$

puisque

$$b - c = h(1-\theta).$$

6. **Fonctions de deux ou plusieurs variables; dérivées partielles.** — On dit qu'une variable z est fonction de deux variables indépendantes x et y lorsque z dépend de x et y, de telle façon que, x et y étant choisis arbitrairement, z est déterminé. Ainsi, la surface S d'un rectangle de base x et de hauteur y est

$$S = xy;$$

c'est une fonction des deux variables indépendantes x et y.

Le volume V d'un cône circulaire droit est fonction du rayon de base x et de la hauteur y :

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 y.$$

Soit, en général,

$$z = f(x, y)$$

une fonction des deux variables indépendantes x et y. Supposons qu'on donne à y une valeur déterminée et qu'on fasse varier x : z est alors une fonction de x qui admet une certaine dérivée par rapport à x. On désigne cette dérivée de z par rapport à x par les diverses notations

$$z'_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad f'_x, \quad p.$$

De même, si l'on donne à x une valeur déterminée et si l'on fait varier y, z est une fonction de y admettant par rapport à y une dérivée qu'on dénote

$$z'_y, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad f'_y, \quad q.$$

Ces deux dérivées de z, l'une par rapport à x, l'autre par rapport à y, sont les dérivées partielles premières de z.

Exemple. — Soit la fonction

$$z = f(x, y) = 3x^3 + 4x^2y^3 - 6e^x \cos y;$$

on trouve immédiatement

$$p = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2 + 8xy^3 - 6e^x \cos y,$$

$$q = f'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 6e^x \sin y.$$

Dérivées partielles secondes. — Les dérivées partielles premières p et q sont, comme on le voit sur l'exemple précédent, de nouvelles fonctions des deux variables indépendantes x et y. Chacune d'elles admet donc, à son tour, une dérivée partielle par rapport à x et une par rapport à y. Prenons d'abord

$$p = f'_x = \frac{\partial z}{\partial x};$$

cette fonction admet une dérivée par rapport à x qu'on dénote par

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$$

et une dérivée partielle par rapport à y, qu'on dénote par

$$\frac{\partial p}{\partial y} = f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}.$$

De même $q = f'_y = \frac{\partial z}{\partial y}$ admet une dérivée partielle par rapport à x

$$\frac{\partial q}{\partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x}$$

et une dérivée partielle par rapport à y

$$\frac{\partial q}{\partial y} = f''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Exemple. — Si nous reprenons la fonction ci-dessus, dont nous avons calculé les dérivées premières, nous aurons immédiatement les dérivées secondes

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x} &= f''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &&= 18x + 8y^3 - 6e^x \cos y,\\
\frac{\partial p}{\partial y} &= f''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} &&= 24xy^2 + 6e^x \sin y,\\
\frac{\partial q}{\partial x} &= f''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} &&= 24xy^2 + 6e^x \sin y,\\
\frac{\partial q}{\partial y} &= f''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &&= 24x^2y + 6e^x \cos y.
\end{aligned}$$

On remarque sur cet exemple qu'on a trouvé pour f''_{xy} et f''_{yx} *la même expression;* ce fait est *général* et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Dans le calcul des dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations.*

En d'autres termes les dérivées f''_{xy} et f''_{yx} sont *identiques.*

C'est ce que nous allons démontrer, en nous appuyant sur le théorème des accroissements finis.

Donnons à x un accroissement h et considérons l'accroissement correspondant de $f(x, y)$, soit

$$\varphi(x, y) = f(x + h, y) - f(x, y),$$

puis donnons à y un accroissement k et considérons l'accroissement correspondant de $\varphi(x, y)$. On a

$$\begin{aligned}&\varphi(x, y+k)-\varphi(x, y)\\&\quad = f(x+h, y+k)-f(x, y+k)-f(x+h, y)+f(x, y).\end{aligned}$$

Puis recommençons un calcul analogue en donnant aux variables les mêmes accroissements, mais dans un ordre inverse. Nous aurons à considérer les différences

$$\psi(x, y)=f(x, y+k)-f(x, y)$$

et

$$\begin{aligned}&\psi(x+h, y)-\psi(x, y)\\&\quad = f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y).\end{aligned}$$

Les résultats de ces deux calculs étant les mêmes, on est conduit à l'égalité

$$\varphi(x, y+k)-\varphi(x, y)=\psi(x+h, y)-\psi(x, y).$$

Transformons les deux membres d'après la formule des accroissements finis, appliquée à la variable y dans le premier membre et à la variable x dans le deuxième, nous trouvons

$$k\varphi'_y(x, y+\theta k)=h\psi'_x(x+\theta_1 h, y),$$

ou bien, en introduisant de nouveau la fonction $f(x, y)$,

$$\begin{aligned}&k[f'_y(x+h, y+\theta k) \;-f'_y(x, y+\theta k)]\\&\quad = h[f'_x(x+\theta_1 h, y+k)-f'_x(x+\theta_1 h, y)];\end{aligned}$$

transformons enfin chacune des parenthèses d'après la même formule, en considérant dans la première $f'_y(x, y+\theta k)$ comme une fonction de la lettre x et, dans la deuxième, $f'_x(x+\theta_1 h, y)$ comme une fonction de la lettre y; puis supprimons dans les deux membres les facteurs égaux kh et hk, il vient

$$f''_{yx}(x+\theta' h, y+\theta k)=f''_{xy}(x+\theta_1 h, y+\theta'_1 k).$$

Quand h et k tendent tous les deux vers zéro, les accroissements donnés à x et y dans les deux fonctions $f''_{yx}(x, y)$ et $f''_{xy}(x, y)$ tendent vers zéro; si donc nous supposons ces deux fonctions continues par rapport aux deux variables x et y, les deux membres de l'égalité précédente ont respectivement pour limites $f''_{yx}(x, y)$

et $f''_{xy}(x, y)$ et l'on a bien l'égalité

$$f''_{yx}(x, y) = f''_{xy}(x, y)$$

qu'il s'agissait de démontrer.

On emploie ordinairement les notations suivantes pour désigner les dérivées partielles secondes d'une fonction z de deux variables indépendantes. On pose

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} = f''_{xy} = f''_{yx}.$$

7. **Retour aux fonctions d'une variable; théorème des fonctions composées.** — Soient u, v, des fonctions d'une même variable x. Supposons que y soit une fonction de u, v

$$y = f(u, v);$$

alors y est une fonction de x par l'intermédiaire de u, v. Nous nous proposons de calculer la dérivée de y par rapport à x. Nous allons montrer qu'on a

$$y'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x.$$

En effet, donnons à x un accroissement Δx, u et v prennent des accroissements correspondants Δu et Δv, et enfin y un accroissement Δy :

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

Écrivons, en ajoutant et retranchant $f(u, v + \Delta v)$,

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

D'après le théorème des accroissements finis, appliqué à $f(u, v + \Delta v)$ considéré comme fonction de la lettre u, on a

$$f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) = \Delta u\, f'_u(u + \theta\, \Delta u, v + \Delta v).$$

De même, d'après le théorème des accroissements finis appliqué à $f(u, v)$ considéré comme fonction de la lettre v, on a

$$f(u, v + \Delta v) - f(u, v) = \Delta v\, f'_v(u, v + \theta_1\, \Delta v),$$

θ et θ_1 étant des nombres compris entre o et 1. On a donc

$$\Delta y = \Delta u f'_u(u + \theta\,\Delta u,\ v + \Delta v) + \Delta v f'_v(u,\ v + \theta_1\,\Delta v);$$

le rapport de l'accroissement Δy de la fonction y à l'accroissement Δx de la variable indépendante x est donc

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} f'_u(u + \theta\,\Delta u,\ v + \Delta v) + \frac{\Delta v}{\Delta x} f'_v(u,\ v + \theta_1\,\Delta v).$$

Quand Δx tend vers zéro, Δu, Δv, Δy tendent vers zéro; $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ tendent respectivement vers y'_x, u'_x, v'_x; on a donc

$$y'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x.$$

La formule est ainsi démontrée.

Pour obtenir la dérivée y'_x il faut donc prendre la somme des produits obtenus en multipliant la dérivée partielle de y par rapport à chacune des lettres u, v par la dérivée de cette lettre.

Exemple. — Cette règle comprend les règles connues relatives à la dérivée d'un produit, d'un quotient. Par exemple, si

$$y = uv,$$

on a

$$f(u, v) = uv,$$

$$f'_u = v, \qquad f'_v = u;$$

donc

$$y'_x = vu'_x + uv'_x.$$

De même si

$$y = \frac{u}{v},$$

$$f'_u = \frac{1}{v}, \qquad f'_v = -\frac{u}{v^2},$$

$$y'_x = \frac{1}{v}u' - \frac{u}{v^2}v' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Pour prendre un cas nouveau, soit

$$y = u^v,$$

u et v étant des fonctions de x. Ici

$$f(u, v) = u^v.$$

La dérivée partielle f'_u doit être prise en regardant v comme constant; on a donc (dérivée de u^m par rapport à u)

$$f'_u = v u^{v-1}.$$

De même la dérivée partielle par rapport à v est prise en regardant u comme constant; on a donc (dérivée de a^v par rapport à v) :

$$f'_v = u^v \mathrm{L}\, u;$$

donc enfin

$$y'_x = \frac{d(u^v)}{dx} = v u^{v-1} u' + u^v \mathrm{L} u v'.$$

En particulier, soit

$$y = (1 + x^2)^{x^3};$$

alors

$$u = 1 + x^2, \qquad v = x^3,$$
$$u' = 2x, \qquad v' = 3x^2;$$

donc

$$y'_x = x^3 (1 + x^2)^{x^3 - 1}\, 2x + (1 + x^2)^{x^3} \mathrm{L}(1 + x^2)\, 3x^2,$$
$$y'_x = x^2 (1 + x^2)^{x^3} \left[\frac{2x^2}{1 + x^2} + 3\mathrm{L}(1 + x^2) \right].$$

Un théorème analogue a lieu quand y dépend de trois ou d'un nombre quelconque de fonctions de x. Par exemple si

$$y = f(u, v, w),$$

u, v, w étant fonctions de x, on a

$$y'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x + f'_w w'_x.$$

CHAPITRE II.

INFINIMENT PETITS. — DIFFÉRENTIELLES.

I. — INFINIMENT PETITS. — DEUX THÉORÈMES FONDAMENTAUX. — APPLICATION A L'AIRE D'UN SEGMENT DE COURBE PLANE.

8. **Infiniment petits.** — Le calcul différentiel et le calcul intégral reposent sur la notion des quantités infiniment petites et sur l'emploi de deux théorèmes fondamentaux.

On appelle *quantité infiniment petite* une quantité *variable qui tend vers zéro*. Ainsi, pour exprimer ce fait que $\sin x$ tend vers zéro, quand x tend vers zéro, on dit que $\sin x$ est infiniment petit en même temps que x.

Considérons différentes quantités :

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots,$$

qui sont infiniment petites en même temps : cela veut dire que, quand l'une d'elles tend vers zéro, il en est de même des autres. Il est important de comparer ces quantités entre elles : comparons-les, par exemple, à α, que nous nommerons pour cette raison *infiniment petit principal*.

Infiniment petits du premier ordre. — On dit que β est *infiniment petit du premier ordre par rapport à* α, si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, quand α tend vers zéro :

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = k \qquad (k \neq 0).$$

On peut alors poser

$$\frac{\beta}{\alpha} = k + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit en même temps que α; on en conclut

$$\beta = \alpha(k + \varepsilon) = k\alpha + \varepsilon\alpha.$$

On a ainsi l'expression générale des infiniment petits du premier ordre : ce qui varie d'un infiniment petit du premier ordre à un autre, c'est la valeur de la constante k et de l'infiniment petit ε. La quantité αk est appelée *partie principale* de β. On peut remarquer que le rapport de β à sa partie principale tend vers 1, quand α tend vers zéro. On a, en effet,

$$\frac{\beta}{k\alpha} = 1 + \frac{\varepsilon}{k},$$

et le second membre tend évidemment vers 1 quand α tend vers zéro.

Exemples. — Soit α un infiniment petit. La quantité

$$\beta = \sin 2\alpha$$

est infiniment petite avec α; elle est du premier ordre par rapport à α, car le rapport

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} = 2\,\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$$

tend vers 2 quand α tend vers zéro, puisque le rapport du sinus à l'arc tend vers 1. La partie principale de β est 2α : le rapport de β à sa partie principale $\frac{\beta}{2\alpha}$ tend vers 1.

De même

$$\beta = e^{3\alpha} - 1 = 3\alpha + \frac{(3\alpha)^2}{1.2} + \ldots$$

est un infiniment petit du premier ordre, car $\frac{\beta}{\alpha}$ tend vers 3; la partie principale de β est 3α.

Infiniment petits du second ordre. — Soit encore β une quantité infiniment petite en même temps que α; mais supposons que $\frac{\beta}{\alpha}$ tende vers zéro avec α. Alors β est dit *infiniment petit d'ordre supérieur au premier*. On dit que β est *infiniment petit du second ordre* par rapport à α, si le rapport $\frac{\beta}{\alpha^2}$ tend vers une limite différente de zéro :

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^2} = k \qquad (k \neq 0).$$

On peut alors poser

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = k + \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro avec α; d'où

$$\beta = \alpha^2(k + \varepsilon) = k\alpha^2 + \varepsilon\alpha^2.$$

C'est là l'expression générale des infiniment petits du second ordre. La quantité $k\alpha^2$ est la partie principale de β et le rapport $\frac{\beta}{k\alpha^2}$ tend vers 1 quand α tend vers zéro.

Exemple. — Soit

$$\beta = 1 - \cos\alpha;$$

β est infiniment petit avec α. On peut écrire

$$\beta = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}\right)^2.$$

Quand α tend vers zéro, le rapport entre parenthèses tend vers 1 ; donc

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^2} = \frac{1}{2};$$

β est infiniment petit du second ordre par rapport à α et sa partie principale est $\frac{\alpha^2}{2}$.

Infiniment petits d'ordre n. — On peut généraliser ces notions comme il suit :

On dit que β est un infiniment petit d'ordre n, par rapport à α, n étant positif, si le rapport

$$\frac{\beta}{\alpha^n}$$

tend vers une limite k différente de zéro. On peut alors écrire

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = k + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit avec α; d'où

$$\beta = k\alpha^n + \varepsilon\alpha^n;$$

$k\alpha^n$ est la partie principale de β; le rapport de β à sa partie principale

$$\frac{\beta}{k\alpha^n}$$

tend vers 1 quand α tend vers zéro.

Dans cet énoncé général, n est assujetti à être positif; il peut être entier ou fractionnaire.

Exemples. — Soit

$$\beta = e^\alpha - 1 - \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{1.2}.$$

Cette quantité est infiniment petite avec α. En remplaçant e^α par le développement en série connu

$$e^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots,$$

on a

$$\beta = \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^4}{1.2.3.4} + \ldots;$$

donc

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^3} = \frac{1}{6};$$

β est infiniment petit du troisième ordre et sa partie principale est $\frac{\alpha^3}{6}$.

Soit encore

$$\beta = \sqrt[3]{2\alpha + \alpha^2};$$

β est infiniment petit avec α; on a

$$\frac{\beta}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2 + \alpha},$$

donc

$$\lim \frac{\beta}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2};$$

β est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{3}$ par rapport à α, et sa partie principale est

$$\alpha^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{2} \quad \text{ou} \quad \sqrt[3]{2\alpha}.$$

Remarque. — Cette classification n'embrasse pas tous les infiniment petits. Il peut se faire qu'une quantité β soit infiniment petite avec α, mais *ne soit d'aucun ordre*, ni entier, ni fractionnaire. Par exemple

$$\beta = e^{-\frac{1}{\alpha^2}}$$

est infiniment petit avec α, mais le rapport

$$\frac{\beta}{\alpha^n} = \frac{e^{-\frac{1}{\alpha^2}}}{\alpha^n}$$

tend vers zéro avec α quelque grand que soit l'exposant n. On ne peut donc assigner aucun ordre d'infiniment petit à β par rapport à α.

Ordre du produit de deux infiniment petits. — Si β est infiniment petit d'ordre m par rapport à α et γ d'ordre n, le produit $\beta\gamma$ est d'ordre $m+n$. En effet, on a alors

$$\beta = \alpha^m(k+\varepsilon), \qquad \gamma = \alpha^n(k'+\varepsilon'),$$

où k et k' sont des constantes non nulles et ε, ε' des infiniment petits. On en conclut

$$\beta\gamma = \alpha^{m+n}(kk'+\eta),$$

η désignant la quantité infiniment petite $\varepsilon k' + \varepsilon' k + \varepsilon\varepsilon'$. Donc $\beta\gamma$ est d'ordre $m+n$, et sa partie principale est

$$kk'\alpha^{m+n}.$$

9. **Principes de la méthode infinitésimale. Deux points de vue.** — On peut employer, à deux points de vue différents, les quantités infiniment petites, dans la recherche des quantités finies.

Le premier point de vue, que les anciens n'ont pas connu et dont la découverte est due à Newton et à Leibniz, consiste à regarder la quantité qu'on cherche comme la limite du rapport de deux quantités infiniment petites. Par exemple, si l'on considère une courbe ayant pour équation, en coordonnées cartésiennes,

$$y = f(x),$$

et si l'on cherche le coefficient angulaire de la tangente en un point M de coordonnées x et y, on considère un point voisin M′ de coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ et l'on cherche la limite du rapport

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

quand Δx tend vers zéro. On est ainsi amené à la notion de dérivée; de sorte que ce premier point de vue conduit au *calcul des dérivées* ou au *calcul différentiel*.

Le deuxième point de vue, sous lequel on peut employer les infiniment petits, consiste à regarder une quantité finie comme la limite de la somme d'un nombre infiniment grand de quantités infiniment petites. Ce point de vue était connu des anciens. Par exemple, en géométrie élémentaire, on considère la longueur d'une circonférence comme la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro; on définit d'une façon analogue les aires planes ou courbes, certains volumes, etc. Ce second point de vue conduit au *calcul intégral;* nous verrons, en effet, qu'une intégrale est précisément la limite de la somme d'un nombre infiniment grand de quantités infiniment petites.

10. **Deux théorèmes fondamentaux.** — La méthode infinitésimale, envisagée successivement sous ces deux points de vue, repose sur deux théorèmes correspondants.

Théorème I. — *La limite du rapport de deux infiniment petits n'est pas changée, quand on remplace chacun d'eux par un infiniment petit dont le rapport avec lui a pour limite l'unité.*

Soit le rapport de deux infiniment petits

$$\frac{\beta}{\gamma}.$$

Prenons deux autres infiniment petits β' et γ' tels que

$$\lim \frac{\beta'}{\beta} = 1, \qquad \lim \frac{\gamma'}{\gamma} = 1.$$

Il faut montrer que

$$\lim \frac{\beta'}{\gamma'} = \lim \frac{\beta}{\gamma}.$$

Ce fait est évident, car on peut écrire

$$\beta' = \beta(1+\varepsilon), \qquad \gamma' = \gamma(1+\varepsilon'),$$

ε et ε' tendant vers zéro en même temps que β et γ. On a donc

$$\frac{\beta'}{\gamma'} = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'};$$

le rapport $\frac{1+\varepsilon}{1+\varepsilon'}$ tend vers 1 et l'on a bien

$$\lim \frac{\beta'}{\gamma'} = \lim \frac{\beta}{\gamma}.$$

En particulier, pour trouver la limite du rapport de deux infiniment petits β et γ, on peut remplacer chacun d'eux par sa *partie principale*, puisque le rapport d'un infiniment petit à sa partie principale tend vers 1.

Exemple. — Pour évaluer la limite du rapport

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha},$$

quand α tend vers zéro, on peut remplacer respectivement $\sin 3\alpha$ et $\sin 2\alpha$ par 3α et 2α, car les rapports

$$\frac{\sin 3\alpha}{3\alpha}, \quad \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}$$

tendent vers 1. La limite cherchée est donc celle de $\frac{3\alpha}{2\alpha}$ ou $\frac{3}{2}$.

Théorème II. — *La limite de la somme d'un nombre infiniment grand d'infiniment petits*, TOUS DE MÊME SIGNE, *n'est pas changée, quand on remplace chacun d'eux par un autre dont le rapport avec lui a pour limite l'unité.*

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les quantités infiniment petites proposées.

toutes de même signe; supposons qu'on ait

$$\lim(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) = \mathrm{A}$$

quand toutes ces quantités tendent vers zéro, n croissant indéfiniment. Soient maintenant $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ d'autres quantités infiniment petites, en même nombre, telles que

$$\lim\frac{\beta_1}{\alpha_1} = 1, \quad \lim\frac{\beta_2}{\alpha_2} = 1, \quad \ldots, \quad \lim\frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1.$$

Il faut démontrer qu'on a également

$$\lim(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = \mathrm{A}.$$

Considérons les rapports

$$(1) \qquad \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

dont les dénominateurs sont tous *de même signe* par hypothèse. D'après un théorème élémentaire d'algèbre, le rapport

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n},$$

obtenu en divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, est compris entre le plus grand et le plus petit des rapports (1), de sorte qu'on a

$$(2) \qquad \frac{\beta_m}{\alpha_m} < \frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} < \frac{\beta_p}{\alpha_p},$$

$\frac{\beta_m}{\alpha_m}$ étant le plus petit et $\frac{\beta_p}{\alpha_p}$ le plus grand des rapports (1). Quand n augmente indéfiniment, tous les rapports (1) et en particulier $\frac{\beta_m}{\alpha_m}$ et $\frac{\beta_p}{\alpha_p}$ tendent vers 1 par hypothèse. Le rapport

$$\frac{\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}$$

étant compris entre deux quantités qui tendent vers 1, tend lui-même vers 1, et comme le dénominateur tend vers A, il en est de même du numérateur.

Le théorème est donc démontré. On peut, en particulier, pour évaluer la limite de $(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$, remplacer chaque infiniment petit composant la somme par sa partie principale.

Remarque. — Il est essentiel de supposer les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ toutes de même signe; s'il n'en était pas ainsi, on ne pourrait plus faire la démonstration, car le théorème d'algèbre sur lequel nous nous sommes appuyés ne serait plus applicable. Il est facile de montrer, par un exemple, que la proposition n'est plus vraie.

Soit n un nombre pair, $n = 2p$; posons

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad \ldots, \qquad \alpha_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

où tous les α d'indices impairs sont égaux au premier α_1 et tous ceux d'indices pairs au deuxième α_2. La somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ est $\frac{n}{n}$ ou 1. Soit, d'autre part,

$$\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \beta_3 = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\beta_4 = -\frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \ldots, \qquad \beta_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Quand n augmente indéfiniment, toutes ces quantités deviennent infiniment petites et les rapports

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

tendent vers 1. Mais comme les α n'ont pas tous le même signe, on ne peut pas affirmer que la somme

$$\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$$

tende vers la même limite que la somme des α. Effectivement, la somme des β est *nulle* et celle des α *égale* à 1.

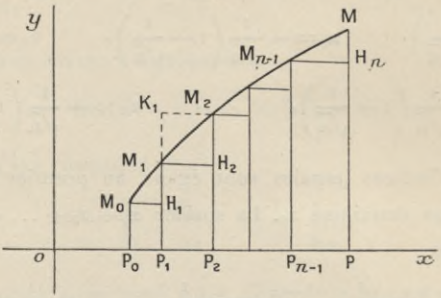
Infiniment petits équivalents. — Deux infiniment petits sont dits *équivalents* quand la limite de leur rapport est égale à l'*unité*. On peut alors substituer ces infiniment petits l'un à l'autre soit dans un rapport (théorème I), soit dans une somme (théorème II) : c'est pour cela qu'on les appelle *équivalents*.

11. Application du théorème II. — *Aire d'un segment de courbe plane.* — Considérons une courbe plane ayant pour équation, par rapport à des axes rectangulaires,

$$y = f(x);$$

prenons un arc continu M_0M (*fig.* 8) de cette courbe et abaissons les perpendiculaires M_0P_0 et MP sur l'axe Ox. Proposons-nous d'évaluer l'aire P_0M_0MP. Nous supposerons d'abord que l'arc

Fig. 8.



M_0M soit au-dessus de Ox et que l'abscisse x de M soit supérieure à l'abscisse a de M_0.

Divisons P_0P en n parties par des points P_1, P_2, ..., P_{n-1} et menons les ordonnées P_1M_1, P_2M_2, ..., $P_{n-1}M_{n-1}$. Ces ordonnées divisent l'aire S en n parties que nous appellerons α_1, α_2, ..., α_n. L'aire A étant évidemment la somme des parties dans lesquelles on l'a divisée, on a

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = A.$$

Inscrivons maintenant dans la courbe des rectangles de la façon suivante. Par le point M_0 menons une parallèle à Ox, M_0H_1, jusqu'à la rencontre de l'ordonnée M_1P_1; par M_1 menons une parallèle à Ox, M_1H_2, jusqu'à la rencontre avec M_2P_2, et ainsi de suite, par M_{n-1} une parallèle à Ox, $M_{n-1}H_n$, jusqu'à la rencontre avec MP. Nous formons ainsi n rectangles inscrits $P_0M_0H_1P_1$, $P_1M_1H_2P_2$, ..., dont nous appellerons les aires β_1, β_2, ..., β_n. Nous allons démontrer que l'aire A est la limite de la somme de ces rectangles quand n augmente indéfiniment, toutes les divisions P_0P_1, P_1P_2, ..., $P_{n-1}P$ tendant vers zéro.

Il s'agit donc de démontrer que

$$\lim(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) = A,$$

ou encore que la somme $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ a même limite que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$. Pour cela, comme les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont toutes positives, il suffit de vérifier que tous les rapports

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\beta_n}{\alpha_n}$$

tendent vers 1.

Supposons d'abord que, le long de l'arc M_0M, l'ordonnée varie toujours dans le même sens, par exemple en croissant, comme dans la figure 8. Considérons le rapport

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2};$$

nous allons démontrer qu'il tend vers 1; la démonstration est la même pour tous les autres. Menons par M_2 une parallèle à Ox vers la gauche, jusqu'à la rencontre avec M_1P_1 en K_1, et appelons y_1 et y_2 les ordonnées M_1P_1 et M_2P_2, Δx l'accroissement P_1P_2 de l'abscisse. L'aire $\alpha_2 = P_1M_1M_2P_2$ est évidemment comprise entre le rectangle $P_1K_1M_2P_2$ de surface $y_2\Delta x$ et le rectangle $P_1M_1H_2P_2$ appelé β_2 de surface $y_1\Delta x$

$$y_1\,\Delta x < \alpha_2 < y_2\,\Delta x.$$

Divisons par $y_1\Delta x = \beta_2$

$$1 < \frac{\alpha_2}{\beta_2} < \frac{y_2}{y_1}.$$

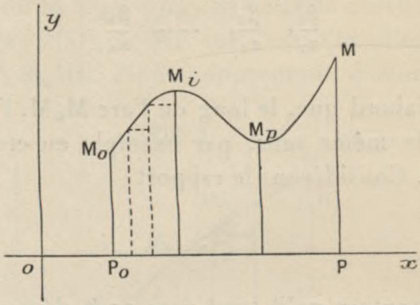
Quand n augmente indéfiniment, Δx tend vers zéro, y_2 tend vers y_1 et le rapport $\frac{y_2}{y_1}$ tend vers 1. Donc $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ étant compris entre 1 et un rapport qui tend vers 1, tend lui-même vers 1:

$$\lim \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 1.$$

La même démonstration s'appliquant à tous les rapports, le théorème est démontré; l'aire A est la limite de la somme des rectangles inscrits.

Si, sur l'arc M_0M, l'ordonnée ne varie pas toujours dans le même sens (*fig.* 9), on peut partager cet arc en parties M_0M_i, M_iM_p, M_pM le long de chacune desquelles l'ordonnée varie dans le même sens. Le raisonnement précédent s'applique alors à chacune des aires partielles limitées par les ordonnées des points intermé-

Fig. 9.



diaires M_i, M_p et, par suite, à l'aire totale A, qui est donc, dans tous les cas, donnée par

$$A = \lim(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n).$$

Expression analytique. — Appelons (*fig.* 8) a et x les abscisses des extrémités M_0 et M, x_1, x_2, ..., x_{n-1} les abscisses des points intermédiaires M_1, M_2, ..., M_{n-1}; les ordonnées M_0P_0, M_1P_1, ..., $M_{n-1}P_{n-1}$ sont $f(a)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_{n-1})$; les segments P_0P_1, P_1P_2, ..., $P_{n-1}P$ servant de bases aux rectangles sont $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., $x - x_{n-1}$, et l'on peut écrire

$$A = \lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

quand n augmente indéfiniment, toutes les différences $x_1 - a$, $x_2 - x_1$, ..., $x - x_{n-1}$ tendant vers zéro. On peut écrire cette expression sous forme abrégée

$$A = \lim \mathrm{S}\, f(x)\,\Delta x,$$

le signe S signifiant qu'il faut faire la somme des produits de chaque ordonnée par l'accroissement correspondant de l'abscisse. On écrit habituellement

$$A = \int f(x)\,dx,$$

où le signe $\int$ qui représente une lettre S s'énonce « somme ». On dit : « A *égale somme* $f(x)dx$ ».

Cette expression $\int f(x)dx$ est ce qu'on appelle une *intégrale simple*. Nous verrons prochainement comment le calcul de ces intégrales simples se ramène à la recherche des fonctions primitives.

12. Valeur algébrique de l'aire d'un segment. — Les raisonnements géométriques que nous avons faits sont indépendants de la disposition de la courbe par rapport aux axes de coordonnées. Mais, quand nous avons établi la formule

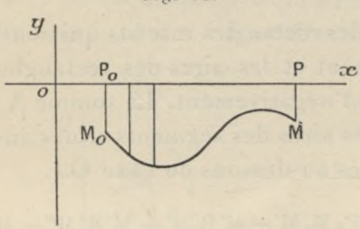
$$A = \lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots] = \lim \mathrm{S} f(x)\,\Delta x$$
$$= \int f(x)\,dx,$$

nous avons supposé que l'arc M_0M était au-dessus de Ox et que x était supérieur à a.

Voyons ce que représente cette même formule quand ces conditions ne sont pas remplies.

Supposons d'abord que x soit supérieur à a, mais que l'arc

Fig. 10.



M_0M soit au-dessous de Ox (*fig.* 10). Alors, dans l'expression analytique que nous avons écrite

$$A = \lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

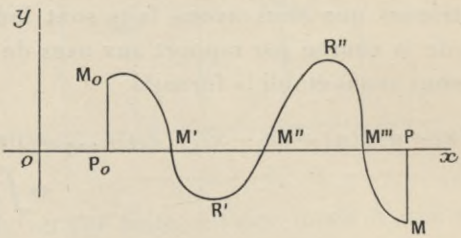
toutes les ordonnées $f(a)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_{n-1})$ sont *négatives;* les produits $(x_1 - a)f(a)$, $(x_2 - x_1)f(x_1)$, ... représentent donc les aires des rectangles inscrits *changées de signe* et la somme de ces produits a pour limite l'aire P_0M_0MP *changée de signe.* Pour ne pas avoir à modifier les formules, il suffit donc de regarder comme négatives les aires des segments situés au-dessous de Ox;

on aura encore, dans ce cas,

$$A = \int f(x)\,dx.$$

Si l'arc M_0M (*fig.* 11) est partiellement au-dessus et partielle-

Fig. 11.



ment au-dessous de l'axe Ox qu'il coupe aux points M', M'', M''', dans l'expression de la somme

$$A = \lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1})]$$
$$= \int f(x)\,dx,$$

les aires de ceux des rectangles inscrits qui sont au-dessus de l'axe entrent positivement et les aires des rectangles inscrits qui sont au-dessous entrent négativement. La somme A représente donc la différence entre les aires des segments situés au-dessus et les aires des segments situés au-dessous de l'axe Ox.

$$A = P_0M_0M' - M'R'M'' + M''R''M''' - M'''MP.$$

Cas où x est inférieur à a. — Si x était inférieur à a (*fig.* 12), les différences

$$x_1 - a,\quad x_2 - x_1,\quad \ldots,\quad x - x_{n-1}$$

représenteraient les bases des rectangles inscrits *changées de signe;* dans la somme

$$S f(x)\,\Delta x,$$

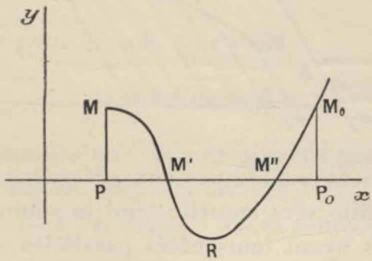
les aires des rectangles à ordonnées positives entreraient donc négativement et inversement.

L'expression

$$\int f(x)\,dx$$

représenterait alors la différence entre les aires inférieures et les aires supérieures : $M'RM'' - PMM' - M''M_0P_0$.

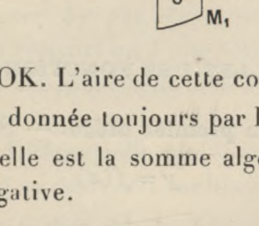
Fig. 12.



Dans tous les cas, nous conviendrons d'appeler chacune des expressions obtenues la *valeur algébrique* de l'aire P_0M_0MP.

Remarque. — Les définitions précédentes s'étendent d'elles-mêmes au cas où la fonction $f(x)$ présente des discontinuités en nombre fini entre a et x. La courbe $y = f(x)$ a alors une forme comme celle de la figure 13, où il y a deux discontinuités pour les

Fig. 13.



deux abscisses OH et OK. L'aire de cette courbe a une valeur parfaitement déterminée, donnée toujours par la formule $\int f(x)\,dx$; en supposant $a < x$, elle est la somme algébrique des aires 1, 2 et 3, où l'aire 3 est négative.

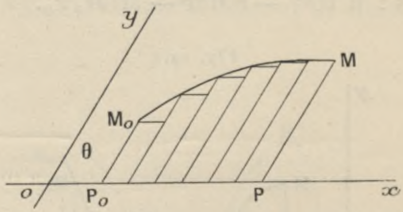
13. **Aire d'un segment en coordonnées obliques.** — Soit une courbe

$$y = f(x)$$

rapportée à des axes Ox et Oy faisant entre eux un angle θ (*fig.* 14).

Considérons un segment limité par un arc de courbe M_0M, les deux ordonnées extrêmes M_0P_0 et MP, et par l'axe Ox. On voit,

Fig. 14.



par des raisonnements identiques aux précédents, que l'aire de ce segment est la limite vers laquelle tend la somme des *parallélogrammes* inscrits ayant leurs côtés parallèles aux axes. Si l'on appelle y l'ordonnée qui constitue un côté d'un de ces parallélogrammes et Δx le segment d'axe Ox qui constitue l'autre côté, l'aire de ce parallélogramme est

$$y\,\Delta x \sin\theta.$$

On en conclut que la valeur algébrique A de l'aire considérée est la limite de la somme

$$S(y\,\Delta x \sin\theta) = \sin\theta\, S y\,\Delta x,$$

car $\sin\theta$ peut être mis en facteur dans la somme. On a donc enfin

$$A = \sin\theta \int y\,dx$$

d'après la notation précédente.

II. — DIFFÉRENTIELLES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

14. **Différentielle du premier ordre.** — Soit

$$y = f(x)$$

une fonction d'une variable indépendante x. Donnons à x un accroissement arbitraire h, y prend un accroissement

$$\Delta y = f(x+h) - f(x),$$

et le rapport

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tend vers la dérivée $f'(x)$ quand h tend vers zéro. On peut donc écrire

$$\frac{\Delta y}{h} = f'(x) + \varepsilon,$$

ε étant infiniment petit avec h, ou encore

$$\Delta y = h f'(x) + h\varepsilon.$$

Cette relation montre que, si x ne possède pas une valeur particulière rendant nulle ou infinie la dérivée $f'(x)$, Δy est infiniment petit du premier ordre par rapport à h et admet pour *partie principale*

$$h f'(x).$$

Cette quantité s'appelle *différentielle* de y; on la désigne par dy.

Définition. — La différentielle d'une fonction y d'une variable indépendante x est égale à la *dérivée de la fonction multipliée par un accroissement arbitraire attribué à la variable*

$$dy = f'(x) h$$

ou encore

$$dy = y'_x h.$$

Cet accroissement h étant supposé infiniment petit, dy est la partie principale de Δy; on peut donc, d'après les deux théorèmes fondamentaux, remplacer Δy par dy, toutes les fois qu'on veut chercher la limite d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits où figure Δy. Quand h est infiniment petit, Δy et dy sont des infiniment petits équivalents.

En particulier, la différentielle de la variable indépendante elle-même x est égale à sa dérivée 1 multipliée par h

$$dx = h.$$

Remplaçant h par dx, on écrira l'expression de dy sous la forme

$$dy = f'(x)\,dx$$

ou

$$dy = y'_x\,dx.$$

Différentielle d'une fonction de fonction. — Soit

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

x étant la variable indépendante. On sait que la dérivée de y par rapport à x est donnée par la formule

$$y'_x = f'(u)\,u'_x.$$

Multiplions les deux membres par dx, et rappelons-nous que, par définition,

$$dy = y'_x\,dx, \qquad du = u'_x\,dx,$$

nous avons

$$dy = f'(u)\,du,$$

comme si u était la variable indépendante. Ainsi, tandis que, dans la notation des dérivées, on a deux formules différentes pour exprimer la dérivée première de y par rapport à x, suivant que y est exprimé directement en x ou est une fonction de fonction de x, dans la notation différentielle on a la même formule pour les deux cas.

15. Différentielle d'une fonction composée. — Pour obtenir les différentielles premières de toutes les fonctions d'une variable, il suffit de reprendre les résultats établis en Algèbre pour la dérivation des fonctions d'une variable et de les traduire dans la notation différentielle.

Somme. — Soient u, v, w des fonctions de x; considérons la somme

$$y = u + v + w.$$

On a

$$y'_x = u'_x + v'_x + w'_x.$$

Multiplions par dx et remplaçons $y'_x\,dx$, $u'_x\,dx$, $v'_x\,dx$, $w'_x\,dx$ par leurs valeurs dy, du, dv, dw, il vient

$$dy = du + dv + dw.$$

Produit. — Considérons le produit

$$y = uv.$$

On a

$$y'_x = uv'_x + vu'_x,$$

et, en multipliant par dx,

$$dy = u\,dv + v\,du.$$

Quotient. — Si l'on a

$$y = \frac{u}{v},$$

on trouve

$$y'_x = \frac{vu'_x - uv'_x}{v^2},$$

et, en multipliant par dx,

$$dy = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

Fonction composée. — Soit enfin le cas général où y est une fonction donnée de u, v, w, ces quantités étant fonctions de x :

$$y = f(u, v, w).$$

En désignant, suivant l'usage, par f'_u, f'_v, f'_w les dérivées partielles de la fonction $f(u, v, w)$ prises successivement par rapport à u, v, w, on a trouvé précédemment (n° 7)

$$y'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x + f'_w w'_x;$$

on en déduit, en multipliant par dx,

$$dy = f'_u\,du + f'_v\,dv + f'_w\,dw.$$

16. Remarques sur les différentielles premières. — On voit, d'après ces règles dont la dernière comprend toutes les précédentes, que, pour prendre la différentielle première d'une fonction d'une variable, il n'est pas nécessaire de savoir *quelle est la variable indépendante choisie;* en effet, si l'on a

$$y = f(u, v, w),$$

il suffit de savoir que u, v, w sont fonctions d'une variable indépendante, d'ailleurs non spécifiée, pour écrire la différentielle

$$dy = f'_u\, du + f'_v\, dv + f'_w\, dw.$$

Cette propriété ne s'étend pas aux différentielles d'ordre supérieur, dont l'expression peut changer avec le choix de la variable indépendante.

17. Tableau de différentielles usuelles. — Nous réunissons dans le Tableau suivant les expressions des différentielles usuelles :

$$dx^m = m x^{m-1}\, dx$$

(*m constante positive ou négative*);

$$de^x = e^x\, dx, \qquad da^x = a^x \operatorname{L} a\, dx,$$

$$d \sin x = \cos x\, dx, \qquad d\cos x = -\sin x\, dx,$$

$$d \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx, \qquad d \operatorname{cotang} x = \frac{-1}{\sin^2 x}\, dx.$$

$$d \operatorname{arc\,tang} x = \frac{1}{1+x^2}\, dx,$$

$$d \operatorname{arc\,cotang} x = \frac{-1}{1+x^2}\, dx,$$

$$d \operatorname{arc\,sin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

$$d \operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Dans les quatre dernières formules, nous prenons pour $\operatorname{arc\,sin} x$ et $\operatorname{arc\,tang} x$ les arcs qui s'annulent avec x, pour $\operatorname{arc\,cos} x$ et $\operatorname{arc\,cotang} x$ les arcs qui sont égaux à $\frac{\pi}{2}$ pour $x = 0$; nous conserverons ces conventions dans tout le cours de l'Ouvrage.

Reste enfin la fonction logarithmique.

Le signe L désignant un logarithme népérien, la fonction $\operatorname{L} x$ n'a un sens que si x est positif; on a alors

$$d\operatorname{L} x = \frac{1}{x}\, dx \qquad (x > 0),$$

la fonction $\operatorname{L}(-x)$ n'a un sens que si x est négatif; on a alors

$$d\operatorname{L}(-x) = \frac{1}{x}\, dx \qquad (x < 0).$$

En général, λ désignant une constante arbitraire, *du même signe que* x, la fonction $L\lambda x$ a un sens et l'on a

$$dL\lambda x = \frac{1}{x}\,dx.$$

On a enfin

$$dL\lambda\frac{x-1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1}\,dx,$$

$$dL\,\lambda\left(x+\sqrt{x^2+l}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+l}}\,dx,$$

où l est une constante positive ou négative et λ une constante du même signe que le facteur qui la suit.

18. **Différentielles d'ordre supérieur.** — Soit y une fonction de la variable indépendante x

$$y = f(x);$$

on a

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Cette différentielle première dy est une fonction de x et de dx. *On convient de regarder l'accroissement* dx, *attribué à la variable indépendante, comme une constante indépendante de* x. Alors dy devient une fonction de x qui admet à son tour une différentielle; la différentielle de dy, $d(dy)$ est, par définition, égale à la dérivée de dy qui est $f''(x)\,dx$ multipliée par l'accroissement dx attribué à x

$$d(dy) = f''(x)\,dx^2.$$

Afin d'abréger l'écriture, on emploie la notation d^2y pour désigner $d(dy)$ et l'on a, pour expression de la *différentielle seconde* de y,

$$d^2y = f''(x)\,dx^2.$$

Cette différentielle est, à son tour, une fonction de x dont la nouvelle différentielle est

$$d^3y = f'''(x)\,dx^3,$$

car dx est constant; on a ainsi l'expression de la différentielle troisième. On obtient de même, n étant un entier positif,

$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Inversement, les dérivées successives de y par rapport à x s'écriront avec la notation différentielle :

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

19. Fonction de fonction. — Soit

$$y = f(u), \qquad u = \varphi(x),$$

x désignant la variable indépendante. On a

$$dy = f'(u)\, du.$$

Pour avoir la différentielle seconde de y il faut donc prendre la différentielle du produit $f'(u)du$ dont les deux facteurs varient avec x. La différentielle de $f'(u)$ est $f''(u)du$; celle de du est d^2u; on a donc

$$d^2y = f''(u)\, du^2 + f'(u)\, d^2u.$$

La différentielle troisième s'obtient de même, en différentiant l'expression précédente et remarquant que chacun de ses termes est un produit. Ce qui donne

$$d^3y = f'''(u)\, du^3 + 3f''(u)\, du\, d^2u + f'(u)\, d^3u;$$

et ainsi de suite.

20. Fonction composée. — Soit

$$y = f(u, v, w),$$

u, v, w étant fonctions de la variable indépendante x. On a

$$dy = f'_u\, du + f'_v\, dv + f'_w\, dw.$$

On obtient la différentielle seconde en remarquant que chaque terme de dy est un produit. Donc

$$d^2y = d(f'_u)\, du + d(f'_v)\, dv + d(f'_w)\, dw + f'_u\, d^2u + f'_v\, d^2v + f'_w\, d^2w.$$

Développant $d(f'_u)$ par la règle de différentiation des fonctions composées, on a

$$d(f'_u) = f''_{u^2}\,du + f''_{uv}\,dv + f''_{uw}\,dw,$$

f''_{u^2} désignant la dérivée partielle de f prise deux fois par rapport à u, f''_{uv} la dérivée partielle de f prise d'abord par rapport à u, puis par rapport à v, ... Calculant de même $d(f'_v)$, $d(f'_w)$ et se rappelant que

$$f''_{vu} = f''_{uv}, \qquad f''_{uw} = f''_{wu}, \qquad \ldots,$$

on a

$$d^2y = f''_{u^2}\,du^2 + f''_{v^2}\,dv^2 + f''_{w^2}\,dw^2 + 2f''_{uv}\,du\,dv + 2f''_{vw}\,dv\,dw$$
$$+ 2f''_{wu}\,dw\,du + f'_u\,d^2u + f'_v\,d^2v + f'_w\,d^2w.$$

On calculera de même les différentielles d'ordre supérieur. Il est inutile de chercher à retenir ces formules générales; car il sera aisé de former les différentielles des fonctions composées de proche en proche, dans chaque cas particulier.

Exemple. — Soit un produit

$$y = uv.$$

On a

$$d(uv) = u\,dv + v\,du, \qquad d^2(uv) = u\,d^2v + 2\,du\,dv + v\,d^2u,$$
$$d^3(uv) = u\,d^3v + 3\,du\,d^2v + 3\,dv\,d^2u + v\,d^3u,$$

où l'on peut remarquer que, dans $d^n(uv)$, les coefficients numériques sont ceux du développement de $(a+b)^n$ par la formule du binome.

21. Remarques sur les différentielles d'ordre supérieur. — Nous avons vu que, pour les différentielles du premier ordre, les formules restent les mêmes *quel que soit le choix de la variable indépendante*. Par exemple si

$$y = f(u),$$

on a

$$dy = f'_u\,du,$$

que u soit la variable indépendante ou non.

Mais, dans les expressions des différentielles d'ordre supérieur, le choix de la variable indépendante joue un rôle, car *cette variable indépendante est caractérisée par ce fait que ses différentielles d'ordre supérieur sont nulles.*

Ainsi, quand on a

$$y = f(u),$$

on trouve

$$d^2y = f''_{u^2}\, du^2 + f'_u\, d^2 u$$

quel que soit le choix de la variable indépendante. Mais si u est pris pour variable indépendante, du est regardé comme une constante, $d^2 u = 0$, et l'on a la formule

$$d^2y = f''_{u^2}\, du^2,$$

qui n'est exacte que si u est la variable indépendante.

III. — FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES. DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES ET DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

22. Dérivées et différentielles partielles. — Soit

$$z = f(x, y)$$

une fonction de deux variables indépendantes x et y. Nous avons au n° 6 donné les définitions et les notations usuelles pour les dérivées partielles de z par rapport à x et à y.

D'après la notation différentielle, y étant regardé comme une constante, les différentielles successives de z par rapport à x seront

$$dz = f'_x\, dx, \qquad d^2 z = f''_{x^2}\, dx^2, \qquad \ldots;$$

ce sont les différentielles partielles de z par rapport à x. Pour éviter toute confusion entre les différentielles partielles et les différentielles totales que nous étudierons plus loin, nous conviendrons d'employer un ∂ de ronde pour désigner les différentielles partielles et nous écrirons

$$\partial z = f'_x\, \partial x, \qquad \partial^2 z = f''_{x^2}\, \partial x^2, \qquad \ldots,$$

ou encore

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = p, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{x^2} = r, \qquad \ldots.$$

Nous avons ainsi, dans la notation différentielle, les expressions des dérivées partielles de z par rapport à x.

De même, z est une fonction de y quand on regarde x comme constant ; ses dérivées partielles successives par rapport à y s'écriront

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = q, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{y^2} = t, \qquad \cdots.$$

La quantité $\frac{\partial z}{\partial y}$ est une fonction de x et y ; si l'on regarde y comme constant, elle a une dérivée partielle par rapport à x

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{xy};$$

de même $\frac{\partial z}{\partial x}$ a une dérivée partielle par rapport à y

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{yx}.$$

Nous avons démontré (n° 6) que ces *deux quantités sont égales*. Nous les écrirons

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = s,$$

où l'ordre des facteurs ∂x et ∂y du dénominateur peut être interverti. D'une manière générale, la dérivée d'ordre k de $\frac{\partial^h z}{\partial x^h}$ par rapport à y

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k}\left(\frac{\partial^h z}{\partial x^h}\right)$$

est identique à la dérivée d'ordre h de $\frac{\partial^k z}{\partial y^k}$ par rapport à x

$$\frac{\partial^h}{\partial x^h}\left(\frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right).$$

Ces deux dérivées partielles identiques se désignent par la notation

$$\frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h\, \partial y^k}.$$

23. **Différentielles totales.** — Soit encore z une fonction de deux variables indépendantes x et y

$$z = f(x, y).$$

La différentielle totale de z est, par définition,

$$dz = f'_x\, dx + f'_y\, dy$$

ou

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy,$$

ou

$$dz = p\, dx + q\, dy,$$

dx et dy étant des accroissements arbitraires attribués aux variables indépendantes, accroissements que nous supposerons habituellement infiniment petits.

Exemple. — Soit, comme au n° 6,

$$z = 3x^3 + 4x^2y^3 - 6e^x \cos y,$$

on a

$$dz = (9x^2 + 8xy^3 - 6e^x \cos y)\, dx + (12x^2y^2 + 6e^x \sin y)\, dy.$$

CHAPITRE III.

FONCTIONS PRIMITIVES. — INTÉGRALES INDÉFINIES. INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES. APPLICATIONS A LA MESURE DES AIRES PLANES.

I. — FONCTIONS PRIMITIVES. — INTÉGRALES INDÉFINIES.

24. Fonction primitive. — Nous venons de voir comment on calcule la différentielle d'une fonction d'une variable indépendante x. On peut se poser le problème inverse de *trouver une fonction d'une variable indépendante x ayant une différentielle donnée $f(x)dx$.*

Remarquons d'abord que, si l'on a trouvé une fonction $\varphi(x)$ répondant à la question, c'est-à-dire telle que

$$d\varphi(x) = f(x)\,dx,$$

ou encore

$$\varphi'(x) = f(x),$$

la fonction la plus générale répondant à la question est

$$\varphi(x) + \text{C},$$

C désignant une *constante arbitraire*. Cela résulte de ce que *deux fonctions ayant la même dérivée ne diffèrent que par une constante.*

La fonction la plus générale $\varphi(x) + \text{C}$, admettant une différentielle donnée $f(x)dx$, s'appelle *fonction primitive* de $f(x)$ ou encore *intégrale indéfinie de la différentielle $f(x)dx$.*

Dans des cas simples, on aperçoit immédiatement cette intégrale indéfinie. Aussi l'intégrale indéfinie de $x\,dx$ est $\frac{x^2}{2} + \text{C}$; celle de $x^2\,dx$ est $\frac{x^3}{3} + \text{C}$; celle de $\cos x\,dx$ est $\sin x + \text{C}$, etc.

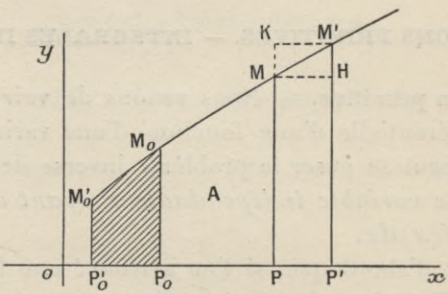
25. **Existence de l'intégrale indéfinie.** — Soit $f(x)dx$ une différentielle donnée, nous allons montrer qu'il existe toujours une fonction $\varphi(x)$ ayant pour différentielle $f(x)dx$; la fonction la plus générale ayant pour différentielle $f(x)dx$ ou l'intégrale indéfinie de $f(x)dx$ est alors $\varphi(x)+C$.

Construisons la courbe ayant pour équation en coordonnées rectangulaires (*fig.* 15)

$$y=f(x).$$

Considérons un arc continu de cette courbe, une ordonnée fixe M_0P_0 d'abscisse a et une ordonnée variable MP d'abscisse x.

Fig. 15.



La valeur algébrique de l'aire A du segment P_0M_0MP est évidemment une fonction de x, car elle est déterminée dès que x est connu :

$$A=\varphi(x).$$

Nous allons démontrer que cette aire a précisément pour différentielle $f(x)dx$,

$$dA=f(x)\,dx.$$

En effet, quand x croît de $PP'=\Delta x$, l'ordonnée $MP=y$ prend une nouvelle position :

$$y+\Delta y=M'P',$$

et l'aire croît d'une quantité ΔA égale à $PMM'P'$.

Menons par M et M' des parallèles MH et M'K à l'axe Ox; l'accroissement ΔA est évidemment compris entre les deux rectangles $PMHP'$ et $PKM'P'$: on a donc

$$y\,\Delta x<\Delta A<(y+\Delta y)\,\Delta x,$$

et, en divisant par Δx que nous supposons positif,

$$y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Quand Δx tend vers zéro, il en est de même de Δy; le rapport $\frac{\Delta A}{\Delta x}$ étant compris entre y et une quantité qui tend vers y, tend lui-même vers y. La dérivée de A par rapport à x est donc y et l'on a

$$\frac{dA}{dx} = y, \qquad dA = f(x)\,dx,$$

puisque $y = f(x)$.

On a donc ainsi défini graphiquement une fonction $A = \varphi(x)$ ayant pour différentielle $f(x)dx$. La fonction la plus générale admettant cette différentielle est $\varphi(x) + C$. Ce fait se conclut d'ailleurs de la figure, car le choix de l'ordonnée initiale M_0P_0 est arbitraire; si l'on prend une autre ordonnée initiale $M'_0P'_0$ et si l'on appelle A' l'aire $P'_0M'_0MP$, cette aire A' est encore une fonction de x ayant pour différentielle $f(x)dx$; elle est égale à A plus la valeur algébrique de l'aire $P'_0M'_0M_0P_0$ qui est une constante.

26. **Notation**. — Nous avons vu (n° 12) que la valeur algébrique de l'aire P_0M_0MP est la limite de la somme des rectangles inscrits

$$A = \lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (x - x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

limite qu'on écrit symboliquement

$$\int f(x)\,dx.$$

D'après cela, pour désigner la fonction la plus générale ayant pour différentielle $f(x)dx$, c'est-à-dire l'intégrale indéfinie de $f(x)dx$, on emploie la notation $\int f(x)dx$. L'on a donc, en appelant $\varphi(x)$ une fonction particulière ayant pour différentielle $f(x)dx$,

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

C désignant une constante arbitraire.

Quand on détermine ainsi l'intégrale indéfinie d'une différentielle donnée $f(x)dx$, on dit qu'on *intègre* cette différentielle; on dit également qu'on fait une *quadrature*, pour rappeler que cette opération revient à déterminer l'aire d'un segment de courbe.

On peut envisager le résultat ainsi obtenu à deux points de vue : 1° Si l'on donne la différentielle $f(x)dx$ et qu'on ne sache pas trouver analytiquement la fonction admettant cette expression pour différentielle, on peut la définir graphiquement comme l'aire du segment de courbe $y=f(x)$; 2° si l'on donne une courbe $y=f(x)$, toutes les fois qu'on sait trouver une fonction $\varphi(x)$ admettant pour différentielle $f(x)dx$, on sait calculer l'aire d'un segment de cette courbe.

27. Tableau d'intégrales indéfinies usuelles. — Dans le Tableau suivant, C désigne la constante arbitraire introduite par l'intégration :

$$(1) \qquad \int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \qquad (n \lesseqgtr -1),$$

$$(2) \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$(3) \qquad \int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{La}a^x + C,$$

$$(4) \qquad \int \frac{dx}{x} = L(\pm x) + C,$$

où il faut mettre $+$ ou $-$, suivant que x est $>$ ou $<$ o. On peut écrire aussi

$$(4\ bis) \qquad \int \frac{dx}{x} = L\lambda x,$$

λ étant une constante arbitraire du même signe que x, car $L\lambda x = L(\pm x) + L(\pm\lambda)$ où il faut prendre les deux signes $+$ si x est positif, et les deux signes $-$ si x est négatif

$$(5) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc}\sin x + C,$$

$$(6) \qquad \int \frac{dx}{x^2+1} = \text{arc}\,\text{tang}\,x + C,$$

$$(7) \qquad \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}L\lambda\frac{x-1}{x+1},$$

$$(8) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+l}} = L\lambda(x+\sqrt{x^2+l}),$$

la constante λ ayant le même signe que le facteur qui la suit, et la constante l étant quelconque.

On ramène immédiatement à ces intégrales les suivantes dans lesquelles k est une constante positive, racine carrée arithmétique de k^2 :

$$(9)\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{k^2-x^2}} = \int \frac{d\frac{x}{k}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{k^2}}} = \arcsin\frac{x}{k} + C,$$

$$(10)\qquad \int \frac{dx}{x^2+k^2} = \frac{1}{k}\int \frac{d\frac{x}{k}}{\frac{x^2}{k^2}+1} = \frac{1}{k}\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{k} + C,$$

$$(11)\qquad \int \frac{dx}{x^2-k^2} = \frac{1}{k}\int \frac{d\frac{x}{k}}{\frac{x^2}{k^2}-1} = \frac{1}{2k}\mathrm{L}\lambda\,\frac{x-k}{x+k}.$$

28. Changement de variable dans une intégrale indéfinie. — Un procédé très important d'intégration est le changement de variable. Soit à calculer l'intégrale indéfinie

$$(12)\qquad \mathrm{I} = \int f(x)\,dx.$$

Par définition I est une fonction de x telle que

$$d\mathrm{I} = f(x)\,dx.$$

Posons

$$x = \psi(t),$$

t étant une nouvelle variable. I devient une fonction de t, par l'intermédiaire de x et l'on a

$$d\mathrm{I} = f[\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt.$$

Donc

$$\mathrm{I} = \int f[\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt.$$

En résumé, pour faire dans une intégrale I telle que (12) le changement de variable $x = \psi(t)$, il suffit de remplacer, sous le signe $\int$, x par $\psi(t)$ et dx par sa valeur $\psi'(t)dt$; l'on est alors ramené à calculer une intégrale en t qui peut être plus simple que la proposée. Si l'on peut la calculer, on aura

$$I = \Phi(t) + C;$$

on obtiendra alors l'intégrale (12) en remplaçant t par sa valeur en x tirée de $x = \psi(t)$.

Soit, par exemple,

$$I = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}};$$

faisons

$$x = a \operatorname{tang} t, \qquad dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t};$$

comme on a

$$x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t},$$

l'intégrale devient

$$I = \frac{1}{a^2} \int \cos t\,dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C,$$

d'où, en revenant à la variable x,

$$I = \frac{1}{a^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$$

29. Quelques intégrales usuelles. — On peut facilement ramener aux intégrales types les suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \int (ax + b)^n\,dx, \qquad \int \frac{dx}{ax + b},$$

$$\text{(II)} \qquad \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$\text{(III)} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

où a, b, c sont des constantes.

I. En effet, dans les deux premières, faisons $ax + b = t$,

$$x = \frac{t - b}{a}, \qquad dx = \frac{dt}{a},$$

elles deviennent

$$\frac{1}{a} \int t^n\,dt = \frac{1}{a} \frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a} \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1);$$

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \mathrm{L}\lambda t = \frac{1}{a} \mathrm{L}\lambda(ax + b).$$

II. Pour évaluer la troisième intégrale, écrivons, en décomposant le trinome $ax^2 + bx + c$ en carrés,

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

Trois cas sont à distinguer suivant que $b^2 - 4ac$ est négatif, positif ou nul. Dans les trois cas, on prend comme nouvelle variable :

$$x + \frac{b}{2a} = t, \qquad dx = dt.$$

1° Si $b^2 - 4ac$ est négatif, on peut poser

$$\frac{4ac-b^2}{4a^2} = k^2, \qquad k = \sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}},$$

et l'intégrale peut s'écrire

$$\frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2+k^2} = \frac{1}{ak}\int \frac{d\frac{t}{k}}{1+\left(\frac{t}{k}\right)^2} = \frac{1}{ak}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{k} + C,$$

où il reste à remplacer t par $x + \frac{b}{2a}$.

2° Si $b^2 - 4ac$ est positif, posons

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2} = k^2, \qquad k = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}};$$

l'intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - k^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2-k^2}$$
$$= \frac{1}{2ak}\,\mathrm{L}\lambda\,\frac{t-k}{t+k} = \frac{1}{2ak}\,\mathrm{L}\lambda\,\frac{x+\frac{b}{2a}-k}{x+\frac{b}{2a}+k}.$$

Dans ce cas, les racines du trinome $ax^2 + bx + c$ sont réelles :

si on les appelle x' et x'' on voit qu'elles sont égales à

$$-\frac{b}{2a}+k \qquad \text{et} \qquad -\frac{b}{2a}-k;$$

on peut donc écrire alors

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\,\mathrm{L}\lambda\,\frac{x-x'}{x-x''}.$$

3° Enfin, si b^2-4ac est nul, on a

$$(13) \qquad \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2} = -\frac{1}{a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)}+\mathrm{C}.$$

III. Passons maintenant à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Deux cas sont à distinguer suivant le signe de a.

Supposons d'abord a positif. Nous mettrons, devant le radical, $\sqrt{a}$ en facteur et nous décomposerons encore le trinome en carrés; il vient ainsi l'intégrale

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}}}.$$

En posant $x+\dfrac{b}{2a}=t$, elle devient

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+l}},$$

où l désigne la constante $-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$. Donc on a dans ce cas, $a>0$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} &= \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{L}\lambda\left(t+\sqrt{t^2+l}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{L}\lambda\left[x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{L}\lambda\left[x+\frac{b}{2a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2+bx+c}\right].
\end{aligned}$$

Soit enfin a négatif. Nous mettrons alors $\sqrt{-a}$ en facteur et nous écrirons

$$\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}.$$

La quantité b^2-4ac est nécessairement positive, car, si elle était négative, la quantité sous le radical serait négative *quel que soit* x et l'intégrale serait *imaginaire*.

Nous pouvons alors poser $x+\frac{b}{2a}=t$,

$$k^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},\qquad k=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

L'intégrale peut s'écrire

$$\frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{t}{k}.$$

Donc, dans ce cas, $a<0$, on a

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{x+\frac{b}{2a}}{k}+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\frac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C.$$

30. Intégrale d'une somme de différentielles. Intégrale de $kf(x)\,dx$. — Soient

$$f_1(x)\,dx,\quad f_2(x)\,dx,\quad f_3(x)\,dx$$

plusieurs différentielles; l'intégrale indéfinie de leur somme

$$\int[f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)]\,dx$$

est égale à la somme des intégrales indéfinies

$$\int f_1(x)\,dx+\int f_2(x)\,dx+\int f_3(x)\,dx;$$

en effet, ces deux expressions ont toutes les deux pour différentielle

$$f_1(x)\,dx+f_2(x)\,dx+f_3(x)\,dx.$$

On voit de même que, k désignant une constante, on a

$$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx,$$

car les deux membres ont la même différentielle $k f(x)\,dx$.

Par exemple, soit à trouver l'intégrale indéfinie d'un polynome

$$\int (ax^2 + bx + c)\,dx,$$

a, b, c étant constants; cette intégrale est égale à

$$\int ax^2\,dx + \int bx\,dx + \int c\,dx,$$

c'est-à-dire à

$$a\int x^2\,dx + b\int x\,dx + c\int dx = \frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C.$$

31. **Intégration par parties.** — Soient u et v deux fonctions de x, on a

$$u\,dv + v\,du = d(uv),$$

d'où, en prenant les intégrales indéfinies des deux membres,

$$\int u\,dv + \int v\,du = uv + C$$

ou encore

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

où il est inutile d'écrire explicitement une constante arbitraire dans un des membres, car chaque intégrale indéfinie n'est déterminée qu'à une constante près.

Quand on peut mettre une différentielle donnée sous forme $u\,dv$, on voit que la relation ci-dessus permet de ramener la recherche de $\int u\,dv$ à celle de $\int v\,du$ qui peut être plus simple. On a ainsi ce qu'on appelle la formule d'intégration par parties.

Exemple I. — Soit

$$\int x\,\mathrm{L}x\,dx;$$

cette intégrale est de la forme $\int u\,dv$ si l'on fait

$$u = \mathrm{L}x, \qquad v = \frac{1}{2}x^2,$$

on a donc

$$\int x\,\mathrm{L}x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{L}x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\mathrm{L}x.$$

La deuxième intégrale est

$$\int x^2\frac{dx}{x} = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Donc

$$\int x\,\mathrm{L}x\,dx = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{L}x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

Exemple II. — Soit de même

$$\int \operatorname{arc}\sin x\,dx;$$

si l'on applique la formule précédente en faisant

$$u = \operatorname{arc}\sin x, \qquad v = x,$$

on voit que cette intégrale est

$$x\operatorname{arc}\sin x - \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

ou

$$x\operatorname{arc}\sin x + \frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(1-x^2),$$

ou enfin

$$x\operatorname{arc}\sin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Exemple III. — Soit à calculer l'intégrale

$$\int\sqrt{ax^2+\alpha}\,dx,$$

où a et α sont des constantes.

Nous appliquerons la formule d'intégration par parties, en faisant

$$u = \sqrt{ax^2+\alpha}, \qquad v = x.$$

Nous aurons

$$\int\sqrt{ax^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{ax^2+\alpha} - \int\frac{ax^2}{\sqrt{ax^2+\alpha}}\,dx.$$

Dans la deuxième intégrale, remplaçons ax^2 par $ax^2 + \alpha - \alpha$, nous aurons identiquement

$$\frac{ax^2}{\sqrt{ax^2+\alpha}} = \sqrt{ax^2+\alpha} - \frac{\alpha}{\sqrt{ax^2+\alpha}},$$

d'où

$$\int \sqrt{ax^2+\alpha}\,dx = x\sqrt{ax^2+\alpha} - \int \sqrt{ax^2+\alpha}\,dx + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+\alpha}}.$$

En faisant passer l'intégrale $\int \sqrt{ax^2+\alpha}\,dx$ dans le premier membre et en divisant par 2, on a enfin

$$(14)\qquad \int \sqrt{ax^2+\alpha}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{ax^2+\alpha} + \frac{\alpha}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+\alpha}}.$$

L'intégrale demandée est ainsi ramenée à l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+\alpha}}$$

qui rentre dans les types du § III du n° 29 suivant le signe de a.

Remarque. — L'intégrale

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

se ramène immédiatement à la précédente. Il suffit pour cela de décomposer en carrés le trinome placé sous le radical

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

L'intégrale s'écrit alors

$$\int \sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}}\,dx,$$

et en posant

$$x+\frac{b}{2a} = t, \qquad -\frac{b^2-4ac}{4a} = \alpha,$$

elle devient

$$\int \sqrt{at^2+\alpha}\,dt,$$

qui est précisément du type de l'exemple III.

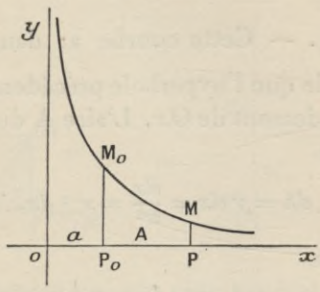
II. — APPLICATION. — ÉVALUATION DE QUELQUES AIRES.

32. 1° **Segment d'hyperbole équilatère compris entre l'hyperbole et son asymptote.** — Soit l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes,

$$y = \frac{1}{x};$$

calculons l'aire A comprise entre une ordonnée fixe $M_0 P_0$ d'ab-

Fig. 16.



scisse positive a, et une ordonnée variable MP d'abscisse positive x. On a trouvé, en général,

$$dA = y\,dx.$$

Comme, actuellement, $y = \frac{1}{x}$,

$$dA = \frac{dx}{x},$$

d'où, puisque x est positif,

$$A = \int \frac{dx}{x} = Lx + C.$$

On détermine la constante en remarquant que l'*aire s'annule quand x est égal à a*; on a donc

$$0 = La + C, \qquad C = -La.$$

Donc enfin

$$A = Lx - La = L\frac{x}{a}.$$

Si l'on suppose $a = 1$, on a, en particulier,

$$A = Lx.$$

On a donc ainsi une représentation graphique simple du logarithme népérien, qu'on appelle pour cette raison *logarithme hyperbolique*.

Quand le point P s'éloigne, x augmente, l'aire A augmente, et, quand x augmente indéfiniment, A devient infinie.

Dans d'autres cas, l'aire comprise entre une courbe et une asymptote peut être *finie;* c'est ce qu'on verra dans l'exemple suivant :

2° **Courbe** $y = \frac{1}{x^2}$. — Cette courbe a, dans l'angle yOx, la même forme générale que l'hyperbole précédente (*fig.* 16); elle se rapproche plus rapidement de Ox. L'aire A du segment P_0M_0MP a pour différentielle

$$dA = y\,dx = \frac{dx}{x^2} = x^{-2}\,dx.$$

En intégrant, on a

$$A = -\frac{1}{x} + C;$$

l'expression de l'aire devant s'annuler pour $x = a$, on a

$$C = \frac{1}{a},$$

d'où

$$A = \frac{1}{a} - \frac{1}{x}.$$

Quand x croît indéfiniment, l'aire du segment tend vers la limite $\frac{1}{a}$; l'aire comprise entre M_0P_0, la courbe et l'asymptote Ox est donc finie.

33. **Aire d'un segment parabolique.** — 1° Soit d'abord une parabole

$$y = kx^2$$

rapportée à son axe comme axe Oy et à la tangente au sommet comme axe Ox. Cherchons l'aire A du segment OMP (*fig.* 17).

On a

$$dA = y\,dx = kx^2\,dx, \qquad A = k\frac{x^3}{3} + C.$$

L'aire devant s'annuler avec x, C est nul, et l'on a

$$A = \frac{kx^3}{3} = \frac{xy}{3}.$$

L'aire OMP est donc le tiers du rectangle OHMP; l'aire comprise entre l'arc OM et sa corde est donc le sixième du même rectangle.

Fig. 17.

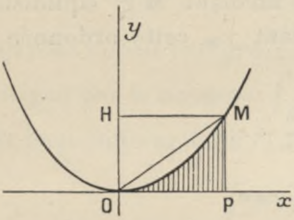
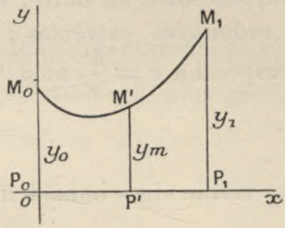


Fig. 18.



2° Prenons maintenant un cas plus général et considérons un segment de parabole limité par un arc de parabole M_0M_1, une perpendiculaire P_0P_1 à l'axe de la parabole et deux parallèles M_0P_0 et M_1P_1 à cet axe (*fig.* 18).

Prenons comme origine le point P_0, comme axe Oy la droite P_0M_0 et comme axe Ox la droite P_0P_1. Appelons h la distance P_0P_1, y_0 et y_1 les deux ordonnées extrêmes M_0P_0 et M_1P_1. L'équation de la courbe est de la forme

$$y = ax^2 + bx + c,$$

a, b, c étant des constantes. Si l'on appelle A l'aire P_0M_0MP comprise entre M_0P_0 et une ordonnée variable MP d'abscisse x, on a

$$dA = y\,dx = ax^2\,dx + bx\,dx + c\,dx,$$

d'où, en intégrant,

$$A = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C.$$

L'aire A devant s'annuler avec x, la constante C est nulle; l'aire

P_0M_0MP est donc

$$A = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx.$$

L'aire demandée $S = P_0M_0M_1P_1$ s'obtient en donnant à x la valeur h

$$S = a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch.$$

Pour interpréter ce résultat, remarquons que les ordonnées y_0 et y_1 correspondant à $x = 0$ et $x = h$ sont

$$y_0 = c, \qquad y_1 = ah^2 + bh + c.$$

Introduisons, en outre, l'ordonnée médiane $M'P'$ équidistante des ordonnées extrêmes ; en appelant y_m cette ordonnée qui correspond à $x = \frac{h}{2}$, on a

$$y_m = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c.$$

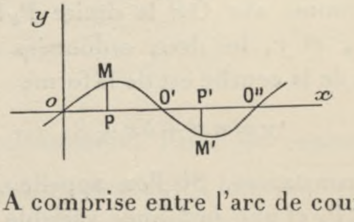
On vérifie alors immédiatement qu'on a

$$S = \frac{h}{6}(y_0 + y_1 + 4y_m).$$

34. **Sinusoïde.** — Prenons enfin la courbe

$$y = \sin x$$

Fig. 19.



et cherchons l'aire A comprise entre l'arc de courbe OM, l'axe Ox et l'ordonnée MP. On a

$$dA = y\,dx = \sin x\,dx, \qquad A = -\cos x + C.$$

L'aire devant s'annuler pour $x = 0$, on a

$$C = 1,$$

d'où

$$A = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}.$$

L'aire de l'onde OMO′ s'obtient en faisant $x = \pi$; elle est donc 2. Si x a une valeur supérieure à π, égale à OP′ par exemple, la formule donne pour A la différence OMO′ — O′M′P′ : en particulier, pour $x = 2\pi$, elle donne zéro, ce qui est bien la différence des ondes OMO′ et O′M′O″.

III. — INTÉGRALES DÉFINIES.

35. **Définition.** — Soit $f(x)$ une fonction continue donnée et $\varphi(x)$ une fonction ayant pour dérivée $f(x)$

$$\varphi'(x) = f(x),$$

nous avons appelé *intégrale indéfinie* de la différentielle $f(x)\,dx$ et désigné par la notation $\int f(x)\,dx$ la fonction la plus générale ayant pour différentielle $f(x)\,dx$; nous avons vu qu'on a

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

où C est une constante arbitraire.

Assujettissons cette intégrale à s'annuler pour une valeur donnée de x, $x = a$; nous aurons

$$0 = \varphi(a) + C, \qquad C = -\varphi(a).$$

Nous affecterons d'un indice inférieur a l'intégrale indéfinie ainsi particularisée, de sorte que nous aurons

$$\int_a f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a).$$

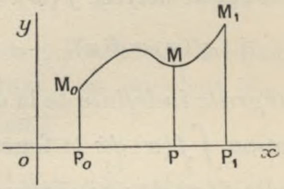
Géométriquement (*fig.* 20), si l'on trace la courbe $y = f(x)$, cette expression donne la valeur algébrique de l'aire du segment P_0M_0MP depuis l'ordonnée M_0P_0, correspondant à l'abscisse a, jusqu'à une ordonnée quelconque MP d'abscisse x. En effet, cette aire s'annule manifestement quand $x = a$, c'est-à-dire quand P coïncide avec P_0.

Cherchons maintenant la valeur de l'intégrale $\int_a f(x)\,dx$, pour une valeur donnée attribuée à x, $x = b$; nous aurons une expression que nous désignerons par $\int_a^b f(x)\,dx$ et qui a pour valeur

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a);$$

cette expression est l'*intégrale définie* de $f(x)\,dx$ *prise entre les limites* a et b. La quantité a est la limite inférieure, b la limite supérieure : l'expression s'énonce *somme* a, b, $f(x)\,dx$.

Fig. 20.



Géométriquement (*fig.* 20), cette intégrale représente la valeur algébrique de l'aire du segment de la courbe $y = f(x)$, depuis l'ordonnée M_0P_0 d'abscisse a, jusqu'à l'ordonnée M_1P_1 d'abscisse b.

Analytiquemeut ce symbole

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est la limite de la somme algébrique des rectangles inscrits :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})].$$

36. **Calcul des intégrales définies.** — D'après la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

si l'on connaît une fonction $\varphi(x)$ ayant pour dérivée $f(x)$, on obtient immédiatement la valeur de l'intégrale en prenant la différence des valeurs de $\varphi(x)$ pour $x = b$ et $x = a$.

Ainsi, $\frac{1}{x}$ étant la dérivée de $\mathrm{L}x$,

$$\int_2^3 \frac{dx}{x} = \mathrm{L}3 - \mathrm{L}2;$$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ étant la dérivée de arc $\sin x$, on a

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2},$$

car, en suivant, par continuité, la variation de $\arcsin x$ quand x varie de 0 à 1, on voit que $\arcsin x$ part de 0 pour arriver à $\frac{\pi}{2}$, de sorte que

$$\arcsin 0 = 0, \qquad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Mais, dans la plupart des cas, on ne peut pas exprimer, à l'aide de fonctions déjà connues, la fonction $\varphi(x)$ dont nous avons seulement prouvé l'existence; on est alors obligé d'avoir recours à d'autres méthodes pour calculer l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Nous donnerons plus tard des méthodes analytiques, graphiques ou mécaniques, pour évaluer les intégrales définies. Nous nous bornerons, pour le moment, à remarquer que le calcul d'une intégrale définie revient toujours à la détermination de l'aire d'un segment de courbe.

37. **Propriétés des intégrales définies.** — Théorème I. — *La valeur d'une intégrale définie ne dépend pas de la variable d'intégration, mais seulement des limites.* — En effet, dans le second membre de la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

ne figure plus la variable x. L'intégrale

$$\int_a^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a)$$

dépend de x qui est la limite supérieure et non de la variable d'intégration ; on aurait aussi

$$\int_a^x f(t)\,dt = \varphi(x) - \varphi(a).$$

Théorème II. — *Une intégrale définie change de signe quand on intervertit les limites.* — En effet, on a, en invertissant a et b,

$$\int_b^a f(x)\,dx = \varphi(a) - \varphi(b),$$

expression qui est de signe contraire à la précédente.

On peut aussi se rendre compte de ce fait d'une autre manière, en se reportant à la définition même de l'intégrale; en effet, en supposant, pour fixer les idées, $a < b$, dans la somme

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

les ordonnées $f(x)$ sont multipliées par des accroissements infiniment petits dx qui sont positifs, car x croît de a à b, et, dans la somme

$$\int_b^a f(x)\,dx,$$

les mêmes ordonnées $f(x)$ sont multipliées par des accroissements infiniment petits dx qui sont négatifs, car x décroît alors de b à a. Les deux sommes sont donc formées d'éléments égaux et de signes contraires; elles sont égales en valeur absolue, mais de signes contraires.

Théorème III. — *Fractionnement de l'intervalle d'intégration.* — Soit c un nombre tel que la fonction $f(x)$ soit continue dans les deux intervalles (a, c) et (c, b); on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

En effet, la première intégrale est $\varphi(b) - \varphi(a)$ et les deux autres $\varphi(c) - \varphi(a)$ et $\varphi(b) - \varphi(c)$; si l'on substitue ces valeurs, le théorème devient évident.

Graphiquement, en supposant c compris entre a et b, ce fractionnement de l'intervalle revient à diviser l'aire du segment $P_0M_0M_1P_1$ (*fig.* 20) en deux autres, à l'aide d'une ordonnée intermédiaire MP d'abscisse c, et à écrire que l'aire totale est la somme des deux aires partielles.

Remarque. — En faisant passer les deux intégrales du second membre de la formule ci-dessus dans le premier, et en intervertissant ensuite leurs limites, on peut écrire la formule

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

Théorème IV. — *La dérivée de l'intégrale* $\int_a^b f(x)\,dx$, *par rapport à la limite supérieure* b, *est* $f(b)$; *sa dérivée, par rapport à la limite inférieure* a, *est* $-f(a)$.

En effet, appelons $\varphi(x)$ une des fonctions primitives de $f(x)$, c'est-à-dire une fonction telle que

$$\varphi'(x) = f(x).$$

On a

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

La dérivée de I, par rapport à b, $\frac{dI}{db}$, est $\varphi'(b)$, c'est-à-dire $f(b)$; et sa dérivée $\frac{dI}{da}$, par rapport à a, est $-\varphi'(a)$, c'est-à-dire $-f(a)$.

Théorème V. — *Supposons que* b *soit supérieur à* a *et que, pour toutes les valeurs de* x *comprises entre* a *et* b, *on ait*

$$f(x) \geqq g(x);$$

$f(x)$ *pouvant être égale à* $g(x)$ *pour certaines valeurs particulières isolées de* x, *on a également*

$$\int_a^b f(x)\,dx > \int_a^b g(x)\,dx.$$

En effet la première intégrale est

$$\lim[(x_1 - a)f(a) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})]$$

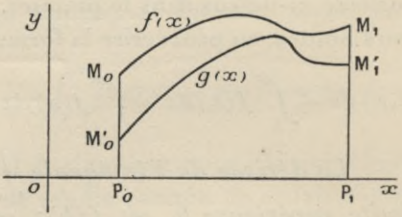
et la deuxième

$$\lim[(x_1 - a)\,g(a) + (x_2 - x_1)\,g(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})\,g(x_{n-1})].$$

Comme $b > a$, les facteurs $(x_1 - a)$, $(x_2 - x_1)$, ..., $(b - x_{n-1})$ sont positifs, et les termes de la première somme sont tous plus grands que ceux de la deuxième. La première somme est donc plus grande que la deuxième.

Graphiquement (*fig.* 21) la première intégrale est l'aire du

Fig. 21.



segment $P_0M_0M_1P_1$ de la courbe $y = f(x)$, la deuxième l'aire du segment de même base $P_0M'_0M'_1P_1$ de la courbe $y = g(x)$; la première courbe étant au-dessus de la deuxième, la première aire est évidemment supérieure à la deuxième.

Application. — Ce théorème permet de comprendre entre des limites une intégrale qu'on ne sait pas trouver exactement : soit par exemple [1]

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^n}},$$

où n est une constante plus grande que 2. Comme x est moindre que 1, on a $x^2 > x^n > 0$.

$$1 - x^2 < 1 - x^n < 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > \frac{1}{\sqrt{1 - x^n}} > 1.$$

L'intégrale I est donc comprise entre

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{1}{2}} dx,$$

(1) *Voir* SERRET, *Calcul intégral.*

c'est-à-dire entre

$$\arcsin \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2},$$

ou encore entre

$$\frac{\pi}{6} = 0,52\ldots \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2} = 0,50.$$

38. **Valeur moyenne d'une fonction dans un intervalle.** — Considérons une intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

et supposons $b > a$. Soit M la plus grande valeur que prenne $f(x)$ quand x varie de a à b, et m la plus petite valeur de $f(x)$ dans le même intervalle. On a

$$M \geqq f(x),$$

donc, d'après le théorème précédent,

$$\int_a^b M\,dx > \int_a^b f(x)\,dx.$$

Or, M étant une constante, l'une des déterminations de l'intégrale indéfinie de $M\,dx$ et Mx et l'intégrale définie, entre les limites a et b, est $M(b-a)$. Donc

$$\int_a^b f(x)\,dx < M(b-a).$$

On trouve de même

$$\int_a^b f(x)\,dx > m(b-a).$$

D'après cela, en appelant μ un nombre convenablement choisi entre M et m, on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu(b-a).$$

Si la fonction est continue dans l'intervalle d'intégration, elle passe au moins une fois par toute valeur comprise entre son maximum M et son minimum m; elle passe donc par la valeur μ pour une valeur de x, $x=c$, comprise entre a et b, et l'on peut écrire

$$\mu=f(c), \qquad a \leqq c \leqq b.$$

D'où la formule

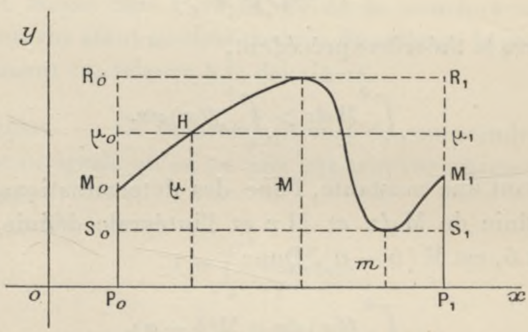
$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)f(c), \qquad a \leqq c \leqq b.$$

Ces formules sont évidentes graphiquement. L'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

représente l'aire du segment $P_0M_0M_1P_1$ (*fig.* 22) de la courbe $y=f(x)$. Cette aire est évidemment comprise entre le rectangle

Fig. 22.



$P_0R_0R_1P_1$, de base $(b-a)$ ayant pour hauteur l'ordonnée maximum M, et le rectangle $P_0S_0S_1P_1$ de même base ayant pour hauteur l'ordonnée minimum m, c'est-à-dire entre $M(b-a)$ et $m(b-a)$. L'aire est donc équivalente à un certain rectangle $P_0\mu_0\mu_1P_1$ de base P_0P_1 ayant une hauteur μ comprise entre M et m; la base supérieure $\mu_0\mu_1$ de ce rectangle coupe la courbe au moins en un point H d'abscisse c comprise entre a et b et l'on peut écrire

$$\mu=f(c),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\mu=(b-a)f(c).$$

On appelle *valeur moyenne de la fonction $f(x)$ de la variable*

x dans l'intervalle (a, b), la quantité μ que nous venons de définir

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

quantité qui est telle que le rectangle de base P_0P_1 et de hauteur μ soit équivalent au segment $P_0M_0M_1P_1$.

Voici comment on peut justifier cette définition. Partageons la droite P_0P_1 en n parties Δx égales à $\frac{b-a}{n}$ par des points de division d'abscisses $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ et considérons les n ordonnées équidistantes :

$$f(a),\quad f(x_1),\quad f(x_2),\quad \ldots,\quad f(x_{n-1}).$$

La valeur moyenne de ces ordonnées est, d'après la définition ordinaire de la moyenne de n quantités,

$$\frac{f(a)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})}{n}$$

ou, en multipliant haut et bas par Δx èt remplaçant $n\Delta x$ par $b-a$,

$$\frac{1}{(b-a)}[f(a)\,\Delta x+f(x_1)\,\Delta x+\ldots+f(x_{n-1})\,\Delta x].$$

Quand n augmente indéfiniment, le numérateur tend vers $\int_a^b f(x)\,dx$ et la moyenne entre les n ordonnées équidistantes tend vers

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx;$$

il est donc naturel d'appeler cette expression la *valeur moyenne de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b).*

Exemples. — 1° La valeur moyenne de $\sin x$ de 0 à π est

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x\,dx = \frac{1}{\pi}[(-\cos\pi)-(-\cos 0)] = \frac{2}{\pi};$$

2° La vitesse d'un mouvement vibratoire simple, comme ceux qu'on étudie en physique, est donnée en fonction du temps t par la formule

$$v = a \sin \frac{2\pi t}{T},$$

où a est une constante linéaire et T une constante donnant la durée de la vibration. La force vive de la molécule vibrante de masse m est

$$mv^2 = ma^2 \sin^2 \frac{2\pi t}{T};$$

la valeur moyenne de cette force vive, pendant que la variable t varie de o à T, durée d'une vibration, est

$$\frac{1}{T}\int_0^T ma^2 \sin^2 \frac{2\pi t}{T}\, dt$$

ou

$$\frac{ma^2}{2T}\int_0^T \left(1 - \cos\frac{4\pi t}{T}\right) dt.$$

L'intégrale indéfinie est

$$t - \frac{T}{4\pi} \sin \frac{4\pi t}{T}$$

(*on n'écrit pas la constante arbitraire* C *qui n'influe pas sur le résultat*) et l'intégrale définie est la différence des valeurs que prend cette fonction pour $t = T$ et $t = 0$, c'est-à-dire T. La valeur moyenne demandée est donc

$$\frac{ma^2}{2}.$$

39. **Formule des accroissements finis.** — La formule

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(c),$$

où c est un nombre compris entre a et b, est identique à la formule qu'on appelle *formule des accroissements finis*. Soit, en effet, $\varphi(x)$ une fonction ayant pour dérivée $f(x)$

$$\varphi'(x) = f(x);$$

l'intégrale définie est égale à $\varphi(b) - \varphi(a)$ et la formule peut s'écrire

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\,\varphi'(c),$$

ce qui est précisément la formule des accroissements finis (n° 5).

40. Intégration par parties. — Soient u et v deux fonctions de x ; considérons une intégrale définie de la forme

$$\int_{x=b}^{x=b} (u\,dv + v\,du).$$

Une des valeurs de l'intégrale indéfinie étant uv, l'intégrale définie est

$$(uv)_b - (uv)_a,$$

où les indices b et a signifient qu'il faut successivement remplacer x par b et par a. On peut donc écrire

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv + \int_{x=a}^{x=b} v\,du = (uv)_b - (uv)_a$$

ou, en transposant,

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = (uv)_b - (uv)_a - \int_{x=a}^{x=b} v\,du.$$

Telle est, pour une intégrale définie, la formule d'intégration par parties.

Notation. — Pour désigner la différence des valeurs que prend une fonction de x, $\mathrm{F}(x)$, pour $x = b$ et $x = a$, on emploie habituellement la notation

$$|\,\mathrm{F}(x)\,|_a^b;$$

de sorte qu'on a, par définition,

$$|\,\mathrm{F}(x)\,|_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Par exemple, dans la formule précédente,

$$(uv)_b - (uv)_a = |\,uv\,|_a^b,$$

et cette formule peut s'écrire

$$\int_{x=a}^{x=b} u\,dv = |\,uv\,|_a^b - \int_{x=a}^{x=b} v\,du.$$

Exemples. — I. Soit à calculer l'intégrale définie

$$(1) \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx,$$

où n est un entier positif ou nul. Remarquons d'abord que $I_0 = \frac{\pi}{2}$, puis écrivons, en supposant n positif,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x \, d(\sin x)$$

et intégrons par parties. Nous aurons

$$I_n = \left| \cos^{2n-1} x \sin x \right|_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x \sin^2 x \, dx.$$

La partie intégrée est nulle; en remplaçant, dans l'intégrale du second membre, $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$, on voit qu'elle est égale à $I_{n-1} - I_n$. On a donc

$$I_n = (2n-1)(I_{n-1} - I_n), \qquad I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

En donnant à n les valeurs successives $1, 2, \ldots, n$, on a

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0, \qquad I_2 = \frac{3}{4} I_1, \qquad \ldots, \qquad I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1};$$

d'où, en multipliant membre à membre et faisant $I_0 = \frac{\pi}{2}$,

$$(2) \qquad I_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx$$

est aussi égale à I_n, comme on le voit en faisant le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$.

II. Soit à calculer

$$(3) \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \, dx$$

(n entier positif ou nul). On a d'abord $J_0 = 1$. La même méthode d'intégration par parties donne ensuite

$$(4) \qquad J_n = 2n(J_{n-1} - J_n), \qquad J_n = \frac{2n}{2n+1} J_{n-1}, \qquad J_n = \frac{2.4.6\ldots 2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}.$$

III. Soit λ une quantité positive, calculons les deux intégrales

$$A = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin x \, dx, \qquad B = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \cos x \, dx,$$

où la limite supérieure est l'infini positif. Nous reviendrons plus tard en détail sur les intégrales dont une limite est infinie. Nous admettrons que les règles précédentes s'appliquent ici. En posant

$$u = e^{-\lambda x}, \qquad v = -\cos x, \qquad v\,du = \lambda\, e^{-\lambda x} \cos x \, dx,$$

on peut écrire

$$A = \int_{x=0}^{x=\infty} u\,dv = (uv)_\infty - (uv)_0 - \int_{x=0}^{x=\infty} v\,du.$$

Or, $(uv)_\infty = 0$, car $e^{-\infty} = 0$, et $(uv)_0 = -1$; on a ainsi la relation

$$A = 1 - \lambda B.$$

En posant ensuite

$$u = e^{-\lambda x}, \qquad v = \sin x, \qquad v\,du = -\lambda\, e^{-\lambda x} \sin x \, dx,$$

et remarquant que maintenant $(uv)_\infty = 0$ et $(uv)_0 = 0$, on a

$$B = \lambda A.$$

Nous avons ainsi, entre A et B, deux équations du premier degré qui donnent

$$A = \frac{1}{1+\lambda^2}, \qquad B = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

IV. — CHANGEMENT DE VARIABLE DANS UNE INTÉGRALE DÉFINIE SIMPLE.

41. Changement de variable. — Soit une intégrale définie

$$(1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Supposons qu'on exprime x en fonction continue d'une variable t

$$x = \psi(t),$$

de telle façon que, t variant de α à β, x varie de a à b, sans passer par l'infini ni par aucune valeur pour laquelle $f(x)$ cesse d'exister. Nous allons démontrer que l'intégrale proposée est égale à la suivante :

$$(2) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} f[\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt,$$

obtenue en remplaçant, sous le signe d'intégration, x par $\psi(t)$, dx par la différentielle $\psi'(t)\,dt$ de $\psi(t)$, et en mettant les nouvelles limites α et β.

Pour démontrer cette règle, nous ferons d'abord deux hypothèses restrictives que nous ferons disparaître ensuite. Supposons : 1° que, t variant de α à β, la dérivée $\psi'(t)$ ait un signe *constant* de telle façon que

$$x = \psi(t)$$

varie toujours dans le même sens de a à b; 2° que la fonction

$$f(x) = f[\psi(t)]$$

conserve également un signe constant quand t varie de α à β.

Intercalons, entre α et β, $n-1$ valeurs de t,

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_{n-1},$$

rangées par ordre de grandeur de α à β; à ces valeurs, la formule $x = \psi(t)$ fait correspondre $n-1$ valeurs de x,

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1},$$

rangées, de même, par ordre de grandeur de a à b.

La première intégrale (1) est, par définition, la limite de la somme d'infiniment petits tous de même signe

$$(x_1 - a) f(a) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (b - x_{n-1}) f(x_{n-1});$$

la deuxième intégrale (2) est, de même, la limite de la somme

$$\begin{aligned}&(t_1 - \alpha) f[\psi(\alpha)]\,\psi'(\alpha)\\ &\quad + (t_2 - t_1) f[\psi(t_1)]\,\psi'(t_1) + \ldots + (\beta - t_{n-1}) f[\psi(t_{n-1})]\,\psi'(t_{n-1}).\end{aligned}$$

D'après le deuxième théorème fondamental (n° 10), pour démontrer que ces deux sommes ont la même limite, il suffit de montrer que le rapport d'un terme de la première somme au terme correspondant de la deuxième a pour limite l'unité. Or, un terme de la première somme est de la forme

$$\Delta x\, f(x)$$

et le terme correspondant de la deuxième

$$\Delta t\, f[\psi(t)]\, \psi'(t),$$

Δx étant l'accroissement de x correspondant à l'accroissement Δt de t. Le rapport de ces deux termes peut s'écrire

$$\frac{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\psi'(t)};$$

comme $x=\psi(t)$, ce rapport tend évidemment vers 1, quand Δt tend vers zéro, puisque $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ tend vers la dérivée $\psi'(t)$.

La règle est donc démontrée.

Nous avons fait deux hypothèses restrictives. Pour les faire disparaître, supposons d'abord que, $f[\psi(t)]$ restant de même signe quand t varie de α à β, $\psi'(t)$ n'ait pas un signe constant, ou, ce qui revient au même, supposons que $x=\psi(t)$ ne varie pas toujours dans le même sens.

Admettons, par exemple, que, t croissant de α à γ, x croisse de a à c, puis que, t continuant à croître de γ à β, x décroisse de c à b. La formule s'applique alors séparément à chacun de ces intervalles : on a

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f[\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt,$$

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_\gamma^\beta f[\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt;$$

en ajoutant, et appliquant le théorème sur le fractionnement de l'intervalle d'intégration, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\psi(t)]\,\psi'(t)\,dt.$$

On lèvera, de même, la deuxième restriction en divisant l'intervalle (α, β) en intervalles dans lesquels $f[\psi(t)]$ conserve un signe constant.

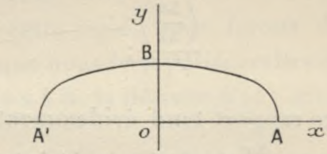
42. Applications. — 1° *Aire d'une demi-ellipse.* — L'équation de l'ellipse étant

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'arc supérieur ABA′ est représenté par l'équation (*fig.* 23)

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Fig. 23.



obtenue en résolvant par rapport à y et prenant la racine positive.

L'aire de la demi-ellipse est alors

$$A = \int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx,$$

x variant de $-a$ (point A′) à $+a$ (point A). On a donc, en faisant sortir le facteur constant $\frac{b}{a}$ du signe d'intégration,

$$A = \frac{b}{a}\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Faisons le changement de variable

$$x = a\cos t,$$

t variant de π à 0, x varie de $-a$ à $+a$. Alors

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\sin t, \qquad dx = -a\sin t\, dt,$$

$$A = -\frac{b}{a}\int_{\pi}^{0} a^2\sin^2 t\, dt = ab\int_{0}^{\pi} \sin^2 t\, dt,$$

en se rappelant qu'on peut intervertir les limites d'intégration, à condition de changer le signe de l'intégrale.

Comme on a

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2},$$

on peut écrire

$$A = ab \int_0^{\pi} \left(\frac{dt}{2} - \frac{\cos 2t \, dt}{2} \right).$$

Une des valeurs de l'intégrale indéfinie est

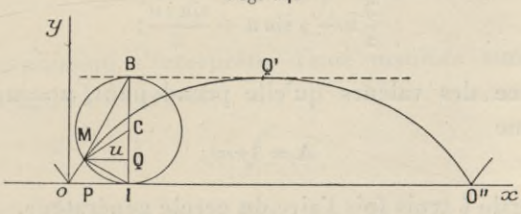
$$\frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4}$$

et l'intégrale définie est la différence des valeurs de l'intégrale indéfinie pour $t = \pi$ et $t = 0$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$A = \frac{\pi ab}{2}.$$

2° *Aire de la cycloïde*. — La cycloïde est la courbe engendrée par un point d'une circonférence qui roule, sans glisser, sur une droite fixe. Soit une circonférence de rayon a roulant sans glisser

Fig. 24.



sur un axe fixe Ox et soit M le point de la circonférence qui décrit la courbe; la circonférence roulant sur la droite, prenons comme origine le point O où le point M a touché l'axe dans le roulement. Joignons le centre C du cercle au point de contact I et au point M, et appelons u l'angle ICM dont le cercle a tourné depuis l'instant où M était en O. A cause du roulement, la longueur OI est égale à l'arc IM, c'est-à-dire à au. L'abscisse de M est OI — IP :

$$x = a(u - \sin u);$$

l'ordonnée est CI — CQ :

$$y = a(1 - \cos u).$$

Pour avoir la cycloïde complète, d'un point de rebroussement O à l'autre O'', il faut faire varier x de o à $2\pi a$ ou u de o à 2π.

Donc l'aire totale est

$$A = \int_0^{2\pi a} y\,dx.$$

Changeons de variable en introduisant la variable u; on a

$$dx = a(1 - \cos u)\,du$$

et les nouvelles limites sont o et 2π:

$$A = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos u)^2\,du.$$

Développant le carré et remplaçant $\cos^2 u$ par $\frac{1 + \cos 2u}{2}$, on a

$$A = a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos u + \frac{\cos 2u}{2}\right) du.$$

L'intégrale indéfinie est

$$\frac{3}{2}u - 2\sin u + \frac{\sin 2u}{4};$$

la différence des valeurs qu'elle prend pour $u = 2\pi$ et $u = 0$ est 3π. Donc

$$A = 3\pi a^2;$$

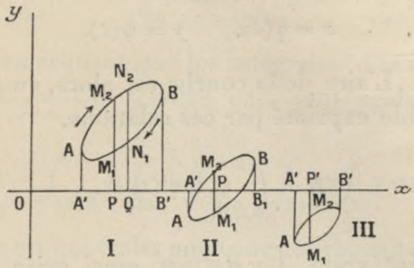
l'aire est égale à trois fois l'aire du cercle générateur.

43. **Aire d'une courbe fermée.** — Supposons d'abord (*fig.* 25) que la courbe ne soit rencontrée qu'en deux points M_1 et M_2 par une parallèle à Oy, et appelons y_1 et y_2 les ordonnées de ces points en supposant $y_2 > y_1$; menons à la courbe les tangentes parallèles à Oy, AA' et BB', d'abscisses a et b. Les ordonnées y_1 et y_2 sont des fonctions de x. Si l'on fait croître $OP = x$ de dx, on obtient une ordonnée infiniment voisine QN_1N_2. Il résulte du théorème fondamental (n° 11) que l'aire de la bande infinitésimale $M_1N_1M_2N_2$ est équivalente à l'aire du rectangle inscrit de hauteur M_1M_2 et de base dx. Or, dans tous les cas de figure possibles (I, II, III) la hauteur M_1M_2 a *pour valeur absolue* $y_2 - y_1$ qui est

positif. L'aire du rectangle est $(y_2 - y_1)\,dx$ et l'aire cherchée A est

$$A = \int_a^b (y_2 - y_1)\,dx = \int_a^b y_2\,dx - \int_a^b y_1\,dx.$$

Fig. 25.



En remarquant que

$$\int_a^b y_1\,dx = -\int_b^a y_1\,dx,$$

on peut écrire encore

$$A = \int_a^b y_2\,dx + \int_b^a y_1\,dx.$$

Cette expression s'interprète d'une manière simple; on dit qu'elle est égale à l'intégrale

$$\int y\,dx$$

prise sur le contour de l'aire C dans le sens de la flèche. En effet, imaginons un point mobile parcourant le contour dans le sens indiqué et multiplions son ordonnée par la projection dx de son déplacement infiniment petit; quand ce point décrit l'arc supérieur AM_2B, la somme des produits ainsi obtenus est

$$\int_a^b y_2\,dx,$$

et, quand il revient de B en A sur l'arc inférieur BM_1A, elle est

$$\int_b^a y_1\,dx;$$

la somme totale est donc bien A.

Pour faire le calcul effectif, supposons qu'on ait exprimé les coordonnées x et y d'un point quelconque M de la courbe en fonction d'une variable auxiliaire t, de telle façon que, t variant de α à β, le point M décrive la courbe une fois et une seule fois dans le sens de la flèche ; soient

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

ces expressions. L'aire de la courbe est alors, en faisant le changement de variable exprimé par ces relations,

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt.$$

Quand une intégrale $\int y\, dx$ est ainsi prise le long d'une courbe C, on convient de la désigner par la notation

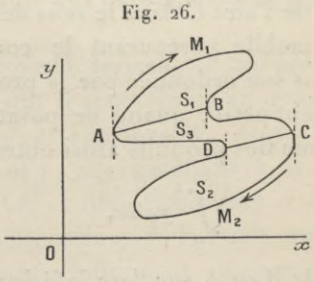
$$\int_{(C)} y\, dx.$$

Si la courbe fermée a une forme plus compliquée (*fig.* 26), *sans points doubles*, l'aire de la courbe est encore égale à l'intégrale

$$\int_{(C)} y\, dx$$

prise sur la courbe dans le sens de la flèche. En effet, on pourra toujours par des lignes transversales, telles que AB, CD, décomposer

Fig. 26.



l'aire A en parties S_1, S_2, S_3 dont le contour n'est rencontré qu'en deux points par une parallèle à Oy. On a alors

$$S_1 = \int_{AM_1B} y\, dx + \int_{BA} y\, dx,$$

l'indice AM_1B signifiant l'intégrale prise sur l'arc AM_1B et l'indice BA l'intégrale prise sur l'arc BA. De même

$$S_2 = \int_{CM_2D} y\,dx + \int_{DC} y\,dx,$$

$$S_3 = \int_{BC} y\,dx + \int_{CD} y\,dx + \int_{DA} y\,dx + \int_{AB} y\,dx.$$

Ajoutant et remarquant que les intégrales d'indices BA et AB d'une part, DC et CD d'autre part sont égales et de signes contraires, on a

$$A = \int_{AM_1B} + \int_{BC} + \int_{CM_2D} + \int_{DA} = \int_{(C)} y\,dx.$$

Cette formule est générale, pour une courbe sans points doubles, dans toutes les positions de la courbe, par rapport aux axes.

Sens positif de circulation sur une courbe fermée sans points doubles. — Les axes Ox et Oy étant disposés comme dans toutes nos figures, nous appellerons *sens positif* de circulation sur un contour fermé, sans points doubles, le sens dans lequel un observateur, debout sur le plan, devrait décrire le contour, pour avoir à *sa gauche* l'aire entourée par le contour. Ce sens est le sens positif sur le cercle trigonométrique. Le sens inverse sera appelé *négatif*. On voit que l'intégrale qui donne l'aire est prise sur le contour *dans le sens négatif :* c'est ce qu'on peut indiquer en mettant un signe — au-dessus du signe $\int$, ce qui donne

$$A = \overset{-}{\int}_{(C)} y\,dx.$$

Si le mobile tournait en sens contraire (sens positif), la somme

$$\overset{+}{\int}_{(C)} y\,dx$$

serait l'aire de la courbe changée de signe.

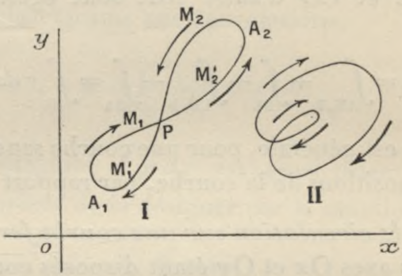
Points doubles. — Examinons le cas où la courbe aurait un point double. Dans la position de la première figure (27, I), l'intégrale

$$\int_{(C)} y\,dx,$$

prise le long de la courbe, dans le sens de circulation indiqué par les flèches, est égale à la différence des aires des deux boucles.

En effet, cette somme se compose de l'intégrale $\int_{(C)} y\,dx$, prise le long du contour $A_1M_1PM'_1A_1$ de la première boucle, et de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long du contour $PM'_2A_2M_2P$ de la deuxième, et ces deux intégrales sont : l'une, l'aire de la première

Fig. 27.

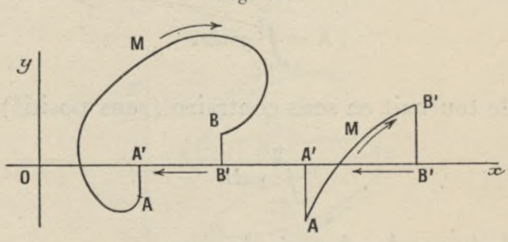


boucle, et l'autre, l'aire de la deuxième prise négativement. Dans la disposition de la deuxième figure (27, II), l'intégrale

$$\int_{(C)} y\,dx$$

est la somme des deux boucles. On étudierait de même le cas où la courbe présenterait plusieurs points doubles.

Fig. 28.



Remarque. — On vérifiera, comme exercice, que l'intégrale

$$\int_{\text{AMB}} y\,dx$$

prise le long d'un arc AMB non fermé est égale à l'intégrale $\int y\,dx$

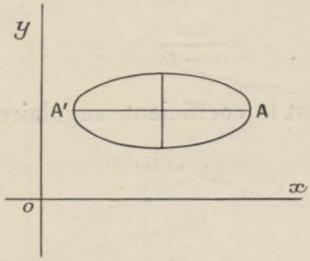
prise le long du contour fermé AMBB'A'A, obtenu en abaissant les perpendiculaires AA' et BB' sur Ox (*fig.* 28). Cela tient à ce que les valeurs de l'intégrale prises sur les droites AA', BB', A'B' sont nulles, puisque dx est nul sur les deux premières et y sur la troisième. L'intégrale s'interprète alors par une aire, d'après ce qui précède.

44. Exemple. — I. *Aire d'une ellipse.* — Soit l'ellipse

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,$$

ayant pour centre un point quelconque (x_0, y_0) et ses axes a et b

Fig. 29.



parallèles aux axes coordonnés (*fig.* 29). On peut exprimer les coordonnées d'un point M de l'ellipse en posant

$$x = x_0 + a\cos t, \qquad y = y_0 + b\sin t.$$

Pour faire décrire au point l'ellipse dans le sens négatif, il suffit de faire décroître t de π à $-\pi$. Comme

$$dx = -a\sin t\,dt,$$

l'intégrale $\int y\,dx$ prise sur le contour, dans le sens indiqué, est

$$-\int_{\pi}^{-\pi}(y_0+b\sin t)a\sin t\,dt.$$

Permutons les limites en changeant le signe et remplaçons $\sin^2 t$ par $\frac{1-\cos 2t}{2}$. Nous avons, pour l'aire,

$$ay_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\,dt+\frac{ab}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dt-\frac{ab}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2t\,dt.$$

La première de ces intégrales est nulle, car l'intégrale indéfinie $-\cos t$ prend la même valeur aux deux limites ; il en est de même de la troisième intégrale ; quant à la deuxième, elle est égale à la différence des valeurs que prend l'intégrale indéfinie t aux limites π et $-\pi$, c'est-à-dire à 2π. On trouve ainsi, pour l'aire, πab.

II. *Aire de la boucle du folium de Descartes.* — Le folium de Descartes a pour équation

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

il a la forme indiquée dans la figure (30), si l'on suppose $a > 0$. Posons

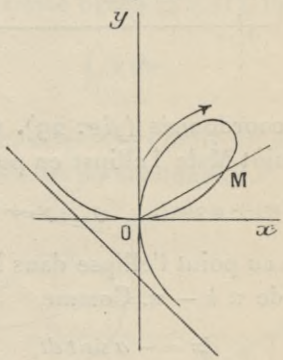
$$\frac{y}{x} = t,$$

nous aurons

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \qquad y = tx.$$

Le paramètre t est le coefficient angulaire de la droite OM;

Fig. 30.



pour que le point M parcoure la boucle dans le sens négatif, il faut faire varier t de $+\infty$ à 0. On a donc pour l'aire A :

$$A = \int y\,dx = \int tx\,dx = \left| t\frac{x^2}{2} \right|_{\infty}^{0} - \frac{1}{2}\int_{\infty}^{0} x^2\,dt.$$

La partie intégrée est nulle car tx^2 s'annule pour $t = \infty$ et pour $t = 0$. On a donc

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{9a^2t^2\,dt}{(1+t^3)^2}.$$

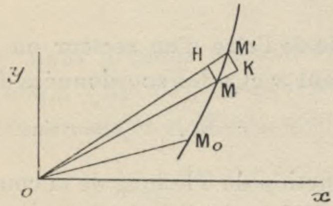
L'intégrale indéfinie est $-\dfrac{3a^2}{2(1+t^3)}$; on a donc

$$A = \frac{3a^2}{2}.$$

V. — DIFFÉRENTIELLE DE L'AIRE D'UN SECTEUR.

45. **Coordonnées polaires.** — Soit une courbe rapportée à un système de coordonnées polaires, r désignant le rayon vecteur OM d'un point, θ l'angle polaire. Considérons le secteur OM_0M, limité par un rayon vecteur fixe OM_0, correspondant à l'angle θ_0, et un rayon vecteur variable OM, correspondant à l'angle θ. Nous nous proposons d'évaluer l'aire A de ce secteur qui est évidemment une fonction de θ (*fig.* 31).

Fig. 31.



Prenons un point M' voisin de M : les coordonnées du point M étant r et θ, celles de M' sont $r+\Delta r$ et $\theta+\Delta\theta$. Soit ΔA l'accroissement MOM' de l'aire du secteur. Si, de O comme centre avec OM comme rayon, on décrit un arc de cercle MH, le secteur OMH est plus petit que ΔA; de même si, de O comme centre avec OM' comme rayon, on décrit un arc de cercle $M'K$, le secteur $OM'K$ est plus grand que ΔA. On a donc, en remarquant que les aires des deux secteurs circulaires OMH et $OM'K$ sont

$$\frac{1}{2}r^2\,\Delta\theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\theta,$$

$$\frac{1}{2}r^2\,\Delta\theta < \Delta A < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\,\Delta\theta.$$

Divisant par $\Delta\theta$, on a

$$\frac{1}{2}r^2 < \frac{\Delta A}{\Delta\theta} < \frac{1}{2}(r+\Delta r)^2.$$

Quand $\Delta\theta$ tend vers zéro, il en est de même de ΔA et Δr. Le rapport $\frac{\Delta A}{\Delta\theta}$, étant compris entre $\frac{1}{2} r^2$ et une quantité qui tend vers $\frac{1}{2} r^2$, tend lui-même vers cette limite et l'on a

$$\lim \frac{\Delta A}{\Delta\theta} = \frac{dA}{d\theta} = \frac{1}{2} r^2,$$

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

En intégrant, et remarquant que A est nul pour $\theta = \theta_0$, on a

$$A = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta.$$

Cette dernière formule est aisée à retenir; elle signifie que l'aire A est la somme des secteurs circulaires infiniment petits inscrits, tels que OMH.

46. **Différentielle de l'aire d'un secteur en coordonnées cartésiennes.** — Appelant x et y les coordonnées du point M, on a

$$x = r\cos\theta. \qquad y = r\sin\theta.$$

Comme r est fonction de θ le long de la courbe, x et y peuvent être regardés comme fonctions de θ. On a

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta, \qquad \theta = \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x},$$

d'où, en différentiant,

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Comme $x^2 + y^2 = r^2$, on voit que

$$r^2\,d\theta = x\,dy - y\,dx$$

et, par suite,

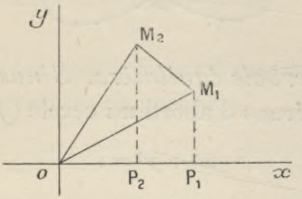
$$dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

On peut facilement retrouver cette formule en se servant de l'expression de l'aire d'un triangle en fonction des coordonnées des sommets. Soit un triangle OM_1M_2, dont les sommets M_1 et M_2 ont pour coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et pour coordonnées polaires r_1, θ_1 et r_2, θ_2 : l'aire OM_1M_2 (*fig.* 32) a pour expression

$$\frac{1}{2} r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2).$$

Cette valeur est positive dans le cas de la figure, c'est-à-dire quand un mobile suivant le côté $M_1 M_2$ tourne autour de O, de Ox vers Oy. Elle serait négative dans le cas contraire.

Fig. 32.



Si, en particulier, nous prenons un secteur de courbe infiniment petit tel que OMM′ (*fig.* 31), on peut assimiler ce secteur à un triangle dont les sommets M et M′ ont pour coordonnées

$$(x, y), \quad (x + dx, y + dy);$$

l'aire dA de ce triangle est donc

$$dA = \frac{1}{2}[x(y + dy) - y(x + dx)] = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

47. Applications. — 1° *Aire de la lemniscate.* — La lemniscate est la courbe qui a pour équation

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

Cette courbe a la forme indiquée dans la figure 33. Appelant A l'aire du secteur M_0OM comptée à partir de l'axe polaire Ox, on a

$$dA = \frac{1}{2} r^2\, d\theta = \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta\, d\theta.$$

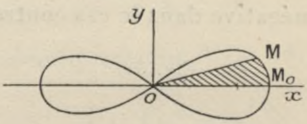
On a donc, en intégrant,

$$A = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\theta,$$

car la constante à ajouter ici est *nulle*, l'aire devant s'annuler avec θ. Quand M vient en O, θ tend vers $\frac{\pi}{4}$ et l'aire du quart de la courbe totale est

$$\frac{1}{4} a^2.$$

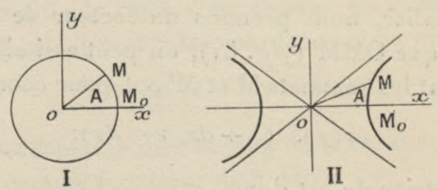
Fig. 33.



2° *Secteur d'hyperbole équilatère. Sinus et cosinus hyperboliques.* — Considérons d'abord un cercle (*fig.* 34, I)

$$x^2 + y^2 = 1$$

Fig. 34.



de rayon 1, et appelons A l'aire du secteur OM_0M comptée depuis l'axe Ox. On a

$$dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

On peut exprimer les coordonnées d'un point du cercle en fonction d'un paramètre t en posant

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t.$$

Alors

$$dx = -\sin t\,dt = -y\,dt, \qquad dy = \cos t\,dt = x\,dt,$$

$$dA = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\,dt = \frac{1}{2}\,dt,$$

car $x^2 + y^2 = 1$. Donc en intégrant

$$A = \frac{1}{2} t,$$

sans ajouter de constante, car A s'annule avec t. On a donc enfin

$$t = 2A.$$

Prenons de même une hyperbole équilatère dont le demi-axe transverse est 1 (*fig.* 34, II)

$$x^2 - y^2 = 1,$$

et appelons A l'aire du secteur M_0OM comptée à partir de l'axe transverse. On a

$$dA = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

On peut exprimer les coordonnées d'un point M de la courbe en fonction d'un paramètre en posant

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad y = \frac{e^t - e^{-t}}{2};$$

en effet, on vérifie immédiatement que, quel que soit t, $x^2 - y^2 = 1$. Quand t est nul, $x = 1$, $y = 0$, le point M part de M_0; quand t augmente jusqu'à l'infini, le point M décrit la branche infinie M_0M. On a

$$dx = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\,dt = y\,dt, \qquad dy = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\,dt = x\,dt;$$

donc

$$dA = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)\,dt = \frac{1}{2}\,dt,$$

car $x^2 - y^2 = 1$. Intégrant et remarquant que A s'annule avec t, on a

$$A = \frac{1}{2}t, \qquad t = 2A.$$

Les coordonnées d'un point M de l'hyperbole s'expriment donc, en fonction de l'aire A du secteur hyperbolique, par des formules analogues à celles qui donnent les coordonnées d'un point d'un cercle en fonction de l'aire A du secteur circulaire.

C'est en raison de cette analogie que les fonctions

$$\frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

s'appellent *cosinus hyperbolique* et *sinus hyperbolique* de t; on les désigne par

$$\cos \operatorname{hyp} t, \quad \sin \operatorname{hyp} t$$

ou par

$$\operatorname{ch} t, \quad \operatorname{sh} t.$$

On peut donc écrire

$$e^{t} = \cos \operatorname{hyp} t + \sin \operatorname{hyp} t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t,$$
$$e^{-t} = \cos \operatorname{hyp} t - \sin \operatorname{hyp} t = \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t.$$

On trouvera dans le *Recueil de formules numériques* de Houël (Gauthier-Villars), XVIII, p. 36-55, une Table donnant les logarithmes de ces fonctions pour des valeurs positives données de t.

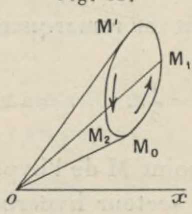
On vérifiera sans peine les formules

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1,$$
$$\frac{d \operatorname{ch} t}{dt} = \operatorname{sh} t, \qquad \frac{d \operatorname{sh} t}{dt} = \operatorname{ch} t,$$
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b,$$

qui achèvent de faire ressortir l'analogie entre ces fonctions et les fonctions circulaires.

3° *Aire d'une courbe fermée.* — Soit une courbe fermée, sans point double, qui n'est rencontrée qu'en deux points M_1 et M_2 par un rayon vecteur (*fig.* 35). Supposons d'abord l'origine hors de la

Fig. 35.



courbe, et menons de O deux tangentes OM_0 et OM' faisant avec Ox les angles θ_0 et θ'. Soient r_1 et r_2 les deux valeurs OM_1 et OM_2 des rayons vecteurs correspondant à un angle polaire θ. Les aires des secteurs OM_0M_1M' et OM_0M_2M' sont respectivement

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta'} r_1^2\, d\theta, \qquad \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta'} r_2^2\, d\theta,$$

et l'aire de la courbe, différence de ces deux secteurs, est

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta'} r_1^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta'} r_2^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta'} (r_1^2 - r_2^2)\,d\theta.$$

On peut écrire aussi, en intervertissant les limites de la deuxième intégrale,

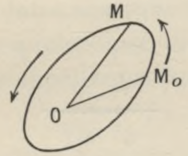
$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta'} r_1^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{\theta'}^{\theta_0} r_2^2\,d\theta,$$

formule qu'on peut interpréter en disant que l'aire est égale à l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx)$$

prise tout le long de la courbe dans le sens positif.

Fig. 36.



Si le point O est intérieur à la courbe (*fig.* 36), l'aire est donnée par l'intégrale

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta,$$

car θ doit varier de 0 à 2π pour que M décrive la courbe. On peut dire encore que l'aire est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int^{+} (x\,dy - y\,dx)$$

prise le long de la courbe dans le sens positif.

On verrait, comme au n° 43, que les mêmes résultats s'appliquent à une courbe fermée, d'une forme quelconque, sans points doubles.

Si la courbe présente un point double (*fig.* 27), l'intégrale

$$I = \frac{1}{2}\int r^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int (x\,dy - y\,dx),$$

prise le long de la courbe représentera, suivant les cas, la *différence* ou la *somme* des aires des deux boucles.

Remarque. — L'intégrale I prise le long d'un arc AMB, *non fermé*, est égale à l'intégrale prise le long du contour fermé OAMBO obtenu en menant les rayons OA et OB, car sur ces rayons, $d\theta$ est nul et les valeurs de l'intégrale sur OA et sur OB sont nulles.

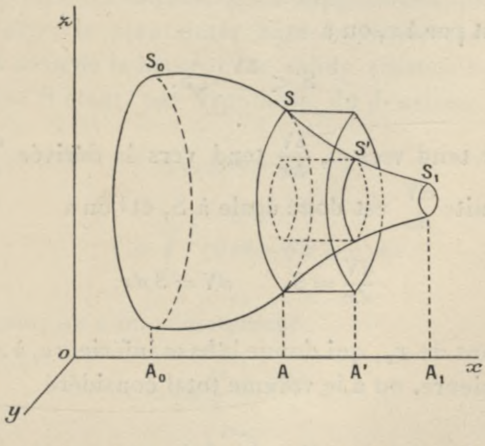
CHAPITRE IV.

VOLUME D'UN SOLIDE A BASES PARALLÈLES, MOMENTS D'INERTIE ET CENTRES DE GRAVITÉ D'AIRES ET DE VOLUMES HOMOGÈNES.

I. – FORMULE GÉNÉRALE.

48. **Formule générale donnant le volume d'un solide à bases parallèles.** — Soit un volume analogue à un tonneau, limité latéralement par une surface quelconque, et aux extrémités, par deux plans parallèles que nous appellerons les *plans de base* (*fig.* 37).

Fig. 37.



Prenons pour plan des yz un plan parallèle aux plans de base, pour axe des x une droite Ox perpendiculaire à ces plans.

Soient x_0 et x_1 les valeurs de x correspondant aux deux bases; A_0 et A_1 les points où ces deux bases prolongées rencontrent Ox.

Coupons par un plan parallèle au plan des yz rencontrant Ox au point A d'abscisse x. Soit S l'aire de la section faite par ce plan : cette aire, qu'on peut évaluer par les méthodes précédentes, est évidemment une fonction de x :

$$S = \varphi(x).$$

Le volume V compris entre le plan de base inférieure S_0 et la section S d'abscisse x est une fonction de x. Nous allons montrer que la différentielle $d\text{V}$ de cette fonction V de x est donnée par la formule

$$d\text{V} = \text{S}\,dx.$$

En effet, supposons, pour fixer les idées, que, quand x augmente, S diminue. Faisons croître x de $\Delta x = \text{AA}'$ et soit

$$\text{S}' = \varphi(x + \Delta x)$$

la nouvelle valeur de l'aire de la section. L'accroissement ΔV du volume est une tranche de hauteur Δx. Cet accroissement est compris entre un cylindre de base S ayant pour hauteur Δx et un cylindre de base S' ayant pour hauteur Δx :

$$\text{S}'\,\Delta x < \Delta\text{V} < \text{S}\,\Delta x.$$

En divisant par Δx, on a

$$\text{S}' < \frac{\Delta\text{V}}{\Delta x} < \text{S}.$$

Quand Δx tend vers o, $\frac{\Delta\text{V}}{\Delta x}$ tend vers la dérivée $\frac{d\text{V}}{dx}$, S' tend vers S; la limite $\frac{d\text{V}}{dx}$ est donc égale à S, et l'on a

$$\frac{d\text{V}}{dx} = \text{S}, \qquad d\text{V} = \text{S}\,dx.$$

En intégrant de x_0, qui donne la base inférieure, à x_1, qui donne la base supérieure, on a le volume total considéré

$$\text{V} = \int_{x_0}^{x_1} \text{S}\,dx.$$

Cette formule est aisée à retenir : elle exprime que le volume V est la somme des cylindres infiniment petits inscrits S dx.

Remarque. — Pour simplifier le raisonnement, nous avons supposé que la projection de S sur le plan de S′ (*fig.* 37) entoure complètement S′. Si cette projection était en partie sur S′ et en partie en dehors, la forme du raisonnement devrait être un peu modifiée, mais le résultat final serait le même : le volume V, limite de la somme des cylindres inscrits $S\,dx$, est toujours donné par la même formule.

49. **Cas particulier où S est fonction du second degré de x.** — Supposons que l'aire S soit une fonction du second degré de x :

$$S = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

α, β, γ désignant des constantes. Cette propriété est indépendante de la position de l'origine. En effet, si l'on prenait une autre origine en conservant la même direction d'axes, les formules de changement de coordonnées donneraient, entre l'ancienne abscisse x d'un point et la nouvelle x', une relation de la forme

$$x = x' + k.$$

Par cette substitution, l'expression S du second degré en x se transforme évidemment en une expression du second degré en x'.

Pour simplifier les calculs, nous supposerons qu'on ait choisi pour plan des yz le plan de la base inférieure; alors $x_0 = 0$ et $x_1 = h$, si h désigne la hauteur du solide (distance des plans des bases). L'aire S étant, par hypothèse, du deuxième degré en x, on a

$$S = ax^2 + bx + c,$$

et

$$V = \int_0^h (ax^2 + bx + c)\,dx.$$

En intégrant, on a immédiatement

$$V = \left(a\frac{h^3}{3} + b\frac{h^2}{2} + ch\right),$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c).$$

L'interprétation géométrique de cette formule est identique à celles de l'expression qui donne le segment parabolique (n° 33).

Appelons S_0 la base inférieure correspondant à $x = 0$; on a

$$S_0 = c;$$

S_1 la base supérieure correspondant à $x = h$,

$$S_1 = ah^2 + bh + c;$$

S_m la section médiane correspondant à $x = \frac{h}{2}$,

$$S_m = a\frac{h^2}{4} + b\frac{h}{2} + c.$$

La parenthèse figurant dans l'expression de V est, comme on le vérifie immédiatement,

$$S_0 + S_1 + 4S_m;$$

on a donc enfin la formule

$$V = \frac{h}{6}(S_0 + S_1 + 4S_m). \tag{1}$$

On vérifiera, comme exercice, que cette même formule (1) s'applique lorsque S s'exprime par un polynome du troisième degré en x.

Cas particulier où S *est linéaire en* x. — Cette formule, établie pour a quelconque, s'applique évidemment quand a est nul, c'est-à-dire quand S est du premier degré en x,

$$S = bx + c.$$

Mais alors

$$S_0 = c, \qquad S_1 = bh + c, \qquad S_m = b\frac{h}{2} + c,$$

donc

$$S_m = \frac{1}{2}(S_0 + S_1)$$

et la formule générale devient

$$V = \frac{h}{2}(S_0 + S_1). \tag{2}$$

50. **Exemples.** — 1° *Solides élémentaires.* — La formule précédente (1) s'applique aux solides élémentaires, tronc de pyramide, tronc de cône, tranche de sphère. En effet, dans un tronc de pyramide ou de cône, les sections faites par des plans parallèles aux bases sont proportionnelles aux carrés de leurs distances x au sommet. S est donc une fonction du second degré de x.

Il en est de même pour une tranche de sphère à bases parallèles. En effet, si l'on prend encore l'axe Ox perpendiculaire aux bases, l'origine étant au centre de la sphère, l'aire S de la section faite par un plan à une distance x du centre est

$$S = \pi(R^2 - x^2),$$

où R désigne le rayon de la sphère. Cette expression est du deuxième degré en x.

2° *Tranche elliptique d'une surface du second ordre.* — La même formule s'applique à une tranche de surface du second ordre comprise entre deux plans parallèles, pourvu que cette tranche ait un volume fini, ce qui ne peut arriver que si les plans de base de la tranche coupent la surface suivant des *ellipses*. C'est ce qu'on pourra vérifier à titre d'exercice.

Nous nous bornerons ici à une tranche d'ellipsoïde comprise entre deux plans parallèles à un plan principal. L'ellipsoïde étant rapporté à ses axes a, b, c a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Un plan $x =$ const., parallèle au plan yOz, le coupe suivant une ellipse dont les axes sont

$$b' = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \qquad c' = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

et dont l'aire

$$S = \pi b' c' = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

est une fonction du second degré de x. La formule (1) s'applique donc à une tranche quelconque limitée par deux plans parallèles $x = x_0$ et $x = x_1$.

Pour avoir l'ellipsoïde entier, nous prendrons comme plan de la base supérieure le plan tangent $x = a$: ce plan coupant la surface suivant un point, on a $S_1 = 0$. Prenons de même comme plan de la base inférieure le plan tangent $x = -a$, alors $S_0 = 0$. La section médiane est dans le plan des yz; elle a pour aire

$$S_m = \pi bc.$$

La distance h des plans de base étant ici $2a$, on a, pour le volume,

$$V = \frac{2a}{6} \cdot 4\pi bc = \frac{4}{3}\pi abc.$$

3° *Paraboloïde elliptique*. — Considérons, dans un paraboloïde elliptique, des sections elliptiques parallèles à un plan donné. En prenant ce plan pour plan des yz on trouve que l'aire S d'une de ces sections est une fonction *linéaire* de son abscisse x; la formule simplifiée (2) s'applique et l'on a, pour le volume d'une tranche,

$$V = \frac{h}{2}(S_0 + S_1).$$

II. — VOLUMES DES SOLIDES DE RÉVOLUTION, CENTRES DE GRAVITÉ DES AIRES PLANES HOMOGÈNES.

51. **Formule.** — Les axes étant rectangulaires, soit, dans le plan xOy, une courbe C ayant pour équation (*fig.* 38)

$$f(x, y) = 0.$$

Cette courbe est considérée comme la méridienne d'une surface de révolution autour de Ox. Prenons sur la courbe C un arc AMB ne traversant pas Ox, et abaissons les perpendiculaires AA' et BB' sur l'axe Ox. Quand on fait tourner le trapèze curviligne $A'AMBB'$ autour de Ox, il engendre un volume limité latéralement par la surface de révolution, à droite et à gauche par deux parallèles de rayons AA' et BB'. Découpons ce solide en tranches infiniment minces par des plans perpendiculaires à l'axe Ox. La section S du solide par un plan perpendiculaire à l'axe, situé à l'abscisse

$OP = x$, est un cercle de rayon $MP = y$, et l'on a

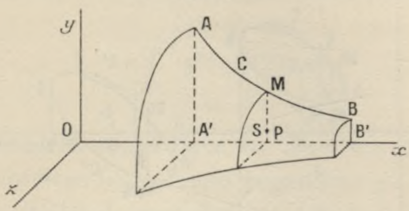
$$S = \pi y^2.$$

Donc d'après la formule générale précédemment établie (n° 48)

$$V = \int_a^b \pi y^2\, dx = \pi \int_a^b y^2\, dx,$$

a et b désignant les abscisses des points A et B.

Fig. 38.



Dans cette intégrale, y est une fonction de x définie par l'équation de la méridienne $f(x, y) = 0$.

On peut dire que le volume est égal à l'intégrale $\pi \int y^2 dx$ prise le long de l'arc de courbe AMB.

52. Exemple. — Supposons que la méridienne soit une hyperbole équilatère ayant les axes pour asymptotes. Son équation est

$$xy = k^2, \qquad y = \frac{k^2}{x}.$$

Le volume de la tranche engendrée par A′AMBB′ est alors (*fig.* 38)

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi k^4 \int_a^b \frac{dx}{x^2}.$$

L'intégrale indéfinie étant $-\frac{1}{x}$, on a

$$V = \pi k^4 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right).$$

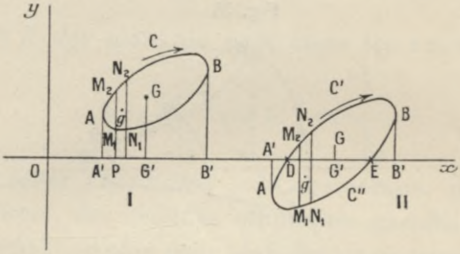
Remarque. — Quand on fait croître b indéfiniment, V tend vers une limite

$$\lim V = \frac{\pi k^4}{a}.$$

Nous avons vu, au contraire, que l'aire du segment plan A'AMBB' augmente indéfiniment, quand B s'éloigne sur l'hyperbole (n° 32).

53. **Volume de révolution engendré par une courbe fermée plane.** — Soit, dans le plan des xy, une courbe fermée C située d'un même côté de l'axe de révolution Ox (*fig.* 39, I).

Fig. 39.



Proposons-nous encore de calculer le volume engendré par la rotation de l'aire C autour de Ox. Pour cela, menons les tangentes à C perpendiculaires à Ox, AA' et BB'. Supposons qu'une parallèle à Oy située à une abscisse $OP = x$ coupe la courbe C en deux points M_1 et M_2 d'ordonnées y_1 et y_2. Le volume cherché V est la différence des volumes engendrés par les segments $A'AM_2BB'$ et $A'AM_1BB'$:

$$V = \pi \int_a^b y_2^2\,dx - \pi \int_a^b y_1^2\,dx.$$

On peut écrire aussi

$$V = \pi\left[\int_a^b y_2^2\,dx + \int_b^a y_1^2\,dx\right],$$

en intervertissant les limites de la deuxième intégrale et changeant son signe. On peut dire alors que le volume V est égal à l'intégrale

$$\pi \overline{\int}_{(C)} y^2\,dx, \tag{3}$$

prise le long de la courbe C dans le sens de la flèche (sens négatif); c'est ce qu'on convient d'indiquer par l'indice (C) et le signe — surmontant l'intégrale.

Le moyen le plus simple de calculer cette intégrale (3) est d'exprimer les coordonnées x et y d'un point de la courbe C en fonction d'un paramètre t,

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

de telle façon que, t variant de α à β, le point de coordonnées x et y fasse une fois le tour de la courbe C, dans le sens de la flèche. On a alors, en prenant t comme variable dans l'intégrale (3),

$$V = \pi \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^2(t) f'(t)\, dt.$$

54. **Cas où la courbe coupe l'axe.** — Dans ce cas (*fig.* 39, II), on évaluera séparément les volumes engendrés par les deux aires DC′E et DC″E, situées de part et d'autre de l'axe Ox.

Il est facile de vérifier que l'intégrale

$$\pi \int_{(C)} y^2\, dx,$$

prise le long de la courbe C dans le sens de la flèche, représente alors la différence $V' - V''$ entre les volumes V' et V'' engendrés par ces deux aires. En effet, le volume engendré par DC′E est

$$V' = \pi \int_{(DC'E)} y^2\, dx,$$

y désignant l'ordonnée d'un point de l'arc DC′E et l'indice (DC′E) de l'intégrale signifiant que cette intégrale est prise le long de l'arc DC′E. De même, le volume V'' est

$$V'' = \pi \int_{(DC''E)} y^2\, dx,$$

y désignant l'ordonnée d'un point de l'arc DC″E.

La différence de ces volumes est

$$V' - V'' = \pi \int_{(DC'E)} y^2\, dx - \pi \int_{(DC''E)} y^2\, dx,$$

ou, en invertissant les limites de la deuxième intégrale et changeant son signe,

$$V' - V'' = \pi \int_{(DC'E)} y^2\,dx + \pi \int_{(EC''D)} y^2\,dx,$$

c'est-à-dire

$$V' - V'' = \pi \overline{\int_{(C)}} y^2\,dx, \tag{4}$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe dans le sens de la flèche.

Ainsi, dans ce cas, l'intégrale prise le long du contour représente la différence des volumes engendrés par la portion d'aire placée au-dessus et la portion d'aire placée au-dessous de l'axe. Ce fait devient d'ailleurs évident si l'on remarque que, x et y désignant les coordonnées d'un point M qui décrit la courbe dans le sens indiqué, dx est positif quand x croît et négatif quand il décroît. La somme

$$\pi \int y^2\,dx$$

contient alors positivement les éléments du volume engendré par l'aire DC'E et négativement les éléments du volume engendré par l'aire DC''E.

Nous avons supposé que la courbe n'est rencontrée qu'en deux points par une parallèle à Oy. Si la courbe a une forme plus compliquée, sans points doubles, on procédera comme pour les aires (*fig.* 26) et l'on montrera que les résultats précédents sont encore applicables : si l'axe ne traverse pas l'aire, le volume engendré est $\pi \int y^2\,dx$ l'intégrale étant prise le long de la courbe dans le sens indiqué. Si l'axe traverse l'aire, cette intégrale donne la différence des volumes engendrés par les aires situées de part et d'autre de l'axe.

55. **Exemple.** — *Volume du tore.* — Le tore est une surface de révolution dont la méridienne est un cercle. L'axe de révolution étant pris pour axe Ox, prenons pour axe des y la perpendiculaire abaissée du centre G du cercle générateur sur Ox. Soit $OG = a$, et soit R le rayon du cercle. Nous supposons que le cercle ne coupe pas l'axe, c'est-à-dire que a est supérieur à R. Le volume V du tore est égal à l'intégrale (*fig.* 40)

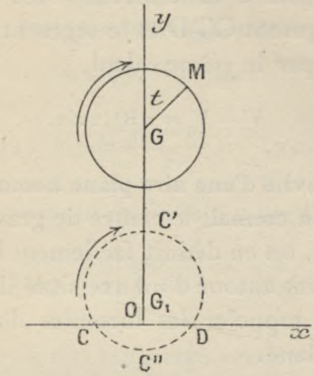
$$V = \pi \overline{\int} y^2\,dx,$$

prise sur la circonférence du cercle générateur. Or les coordonnées x et y d'un point M de cette circonférence sont

$$x = R \sin t, \qquad y = a + R \cos t,$$

t désignant l'angle yGM. Pour que le point M fasse le tour de la

Fig. 40.



circonférence dans le sens négatif, il faut faire varier t de o à 2π. Donc

$$V = \pi R \int_0^{2\pi} (a + R \cos t)^2 \cos t \, dt,$$

$$V = \pi a^2 R \int_0^{2\pi} \cos t \, dt + 2\pi a R^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt + \pi R^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 t \, dt.$$

La première et la dernière intégrale sont nulles; en effet, dans l'intervalle de o à 2π, les fonctions $\cos t$ et $\cos^3 t$ prennent des valeurs deux à deux égales et de signes contraires; les éléments de chacune des deux intégrales ont donc deux à deux des sommes nulles, et les intégrales elles-mêmes sont nulles.

Quant à la deuxième intégrale, en y remplaçant $\cos^2 t$ par $\frac{1 + \cos 2t}{2}$, elle devient

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) \, dt = \left| \frac{1}{2} t + \frac{\sin 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = \pi.$$

On a donc

$$V = 2\pi^2 a R^2 = \pi R^2 . 2\pi a.$$

Cas où le cercle coupe l'axe. — Si le cercle coupe l'axe (cercle pointillé dans la figure 40), a est moindre que R. L'intégrale

$$\pi\int y^2\,dx,$$

prise le long de la circonférence du cercle générateur dans le sens de la flèche, est égale à la différence des volumes V′ et V″ engendrés par le segment CC′D et le segment DC″C.

On a donc alors, par le même calcul,

$$V' - V'' = \pi R^2 . 2\pi a.$$

56. **Centre de gravité d'une aire plane homogène. Théorème de Guldin.** — Quand on connaît le centre de gravité d'une aire plane supposée homogène, on en déduit facilement le volume engendré par cette aire tournant autour d'un axe situé dans son plan.

Commençons par rappeler les formules donnant le centre de gravité d'une aire plane.

Soit une aire plane homogène A, rapportée à deux axes Ox et Oy, G son centre de gravité et Y l'ordonnée GG′ du centre de gravité. Nous allons montrer qu'on a, dans tous les cas de figure,

$$\text{(5)} \qquad AY = \frac{1}{2}\overline{\int_{(C)}} y^2\,dx,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe C qui limite l'aire, dans le sens de la flèche (*fig.* 39).

En effet l'ordonnée Y du centre de gravité d'un système, de masse totale M, est donnée par

$$MY = \Sigma my,$$

quand le système est décomposé en éléments de masses m dont le centre de gravité a pour ordonnée y. L'aire considérée étant homogène, on peut admettre que la masse d'une portion de l'aire est exprimée par le même nombre que son aire.

Décomposons l'aire A par des parallèles à Oy en rectangles infiniment petits $M_1N_1N_2M_2$ de hauteur dx et appelons y_1 et y_2 les ordonnées des deux points M_1 et M_2. Le centre de gravité g

du rectangle, étant au centre de figure, a pour ordonnée

$$y = \frac{y_2 + y_1}{2}.$$

D'ailleurs, quelle que soit la position des deux points M_1 et M_2 par rapport à l'axe, qu'ils soient tous les deux d'un côté comme dans la figure 39, I, ou l'un au-dessus et l'autre au-dessous, comme dans la figure 39, II, l'aire du rectangle est

$$m = (y_2 - y_1)\, dx;$$

on a donc

$$my = (y_2 - y_1)\, dx \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\, dx$$

La somme de ces produits étendue à toute l'aire est

$$\Sigma my = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx$$

en appelant a et b les x des tangentes verticales AA' et BB'.

Cette somme étant égale au produit de l'aire totale A par l'ordonnée Y du centre de gravité, on a

$$AY = \frac{1}{2}\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\, dx.$$

Or, cette dernière intégrale est, comme nous l'avons vu plus haut, égale à l'intégrale

$$\int_{(C)} y^2\, dx,$$

prise le long de la courbe limitant l'aire A, dans le sens de la flèche (sens négatif). La formule (5) est donc démontrée.

On trouverait de même l'abscisse X du centre de gravité G, par la formule

$$AX = \frac{1}{2}\int_{(C)} x^2\, dy,$$

l'intégrale étant prise en sens contraire (sens positif) sur le contour.

Théorème de Guldin. — *Le volume engendré par une aire plane* A *tournant autour d'un axe* Ox *situé dans son plan et* *qui ne la traverse pas, est égal à l'aire* A *multipliée par la circonférence décrite par le centre de gravité de l'aire supposée homogène.*

En effet, nous avons trouvé (nº 53) que le volume engendré V est donné par la formule

$$V = \pi \int_{(C)} y^2\, dx.$$

Mais la formule (5) montre que l'intégrale du deuxième membre est égale à $2AY$, Y désignant l'ordonnée du centre de gravité. On a donc

$$V = A.2\pi Y,$$

ce qui démontre le théorème, car $2\pi Y$ ou $2\pi GG'$ est la circonférence décrite par le centre de gravité.

Cas où la courbe coupe l'axe. — Dans ce cas, la différence des volumes V' et V'' engendrés par les parties de l'aire situées au-dessus et au-dessous de l'axe, est donnée par la formule

$$V' - V'' = \pi \int_{(C)} y^2\, dx.$$

On a donc alors, d'après (5),

$$V' - V'' = A.2\pi Y.$$

Ainsi, en appliquant à une aire qui traverse l'axe la formule fournie par le théorème de Guldin, on trouve la différence $V' - V''$.

En particulier, si l'on fait tourner une aire plane autour d'un axe de son plan passant par le centre de gravité, on a $Y = 0$,

$$V' - V'' = 0,$$

ce qui signifie que les volumes engendrés par les deux parties $EC'D$ et $EC''D$ sont alors équivalents.

Le tore fournit un exemple simple de l'application de ce théorème. Nous avons trouvé en effet que le volume du tore est égal à l'aire $A = \pi R^2$ du cercle générateur multipliée par la circonférence $2\pi a$ décrite par le centre du cercle, qui est évidemment son centre de gravité.

III. — MOMENTS D'INERTIE. CENTRES DE GRAVITÉ DES VOLUMES HOMOGÈNES.

57. **Moments d'inertie.** — Étant donné un système de points matériels, on appelle :

Moment d'inertie du système par rapport à un plan P, la somme $\Sigma m\delta^2$ des produits obtenus en multipliant la masse m de chaque point par le carré de sa distance δ au plan P;

Moment d'inertie du système par rapport à un axe $\alpha\alpha'$, la somme $\Sigma m r^2$ des produits obtenus en multipliant la masse m de chaque point par le carré de sa distance r à l'axe $\alpha\alpha'$;

Moment d'inertie du système, par rapport à un point O, la somme $\Sigma m \mathrm{R}^2$ des produits obtenus en multipliant la masse m de chaque point par le carré de sa distance R au point O.

Prenons trois axes rectangulaires $Oxyz$ et appelons μ_{yz}, μ_{zx}, μ_{xy} les moments d'inertie d'un système par rapport aux trois plans yOz, zOx, xOy, μ_x, μ_y, μ_z ses moments d'inertie par rapport aux trois axes Ox, Oy, Oz, et μ_0 son moment d'inertie par rapport au point O. On a

$$\mu_{yz} = \Sigma m x^2, \qquad \mu_{zx} = \Sigma m y^2, \qquad \mu_{xy} = \Sigma m z^2,$$
$$\mu_x = \Sigma m(y^2 + z^2), \qquad \mu_y = \Sigma m(z^2 + x^2), \qquad \mu_z = \Sigma m(x^2 + y^2),$$
$$\mu_0 = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2).$$

On en conclut immédiatement

$$\mu_x = \mu_{zx} + \mu_{xy},$$
$$\mu_0 = \mu_{yz} + \mu_{zx} + \mu_{xy} = \mu_{yz} + \mu_x;$$

ou, en langage ordinaire : *le moment d'inertie d'un système par rapport à un axe, est égal à la somme de ses moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires passant par l'axe; le moment d'inertie, par rapport à un point, est la somme des moments d'inertie par rapport aux trois faces d'un trièdre trirectangle ayant ce point pour sommet, ou la somme des moments d'inertie par rapport à une face et à l'arête opposée de ce trièdre.*

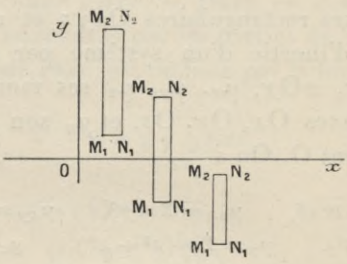
Si l'on veut calculer le moment d'inertie *d'un corps continu* par rapport à un plan, un axe ou un point, on le divise en éléments de masse infiniment petits dm et l'on calcule les sommes *intégrales*

$$\int \delta^2\, dm, \qquad \int r^2\, dm, \qquad \int R^2\, dm,$$

dont chaque terme est le produit de la masse dm d'un élément par le carré de sa distance au plan, à l'axe, ou au point.

58. **Moments d'inertie des aires planes homogènes.** — 1° *Rectangle homogène.* — Soit un rectangle homogène $M_1N_1M_2N_2$: cherchons son moment d'inertie par rapport à un axe Ox parallèle à l'un des côtés M_1N_1, cet axe pouvant d'ailleurs occuper une position quelconque par rapport au rectangle, comme le montrent les trois cas de figures indiqués (*fig.* 41). Appelons h la longueur

Fig. 41.



du côté M_1N_1, y_1 et y_2 les ordonnées des côtés M_1N_1 et M_2N_2 $(y_2 > y_1)$, et ρ la masse de l'unité de surface du rectangle. Si l'on considère, dans le rectangle, une bande infiniment mince comprise entre deux parallèles à Ox d'ordonnées y et $y + dy$, sa masse est $dm = \rho h\, dy$. Le carré de la distance de cette tranche dm à Ox est y^2 : on a donc, pour le moment d'inertie cherché μ_x,

$$\mu_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2\, dm = \rho h \int_{y_1}^{y_2} y^2\, dy = \frac{\rho h}{3}(y_2^3 - y_1^3).$$

2° *Aire plane homogène limitée par une courbe fermée sans points doubles.* — Soit d'abord, comme dans la figure 39, une aire plane homogène limitée par une courbe qui est rencontrée en deux points seulement M_1 et M_2 par une parallèle à Oy : appelons

ρ la masse de l'unité de surface. La bande infiniment mince $M_1N_1N_2M_2$ comprise entre deux ordonnées correspondant aux abscisses x et $x+dx$ peut être assimilée à un rectangle dont la dimension, parallèle à Ox, est $h=dx$. D'après la formule précédente, le moment d'inertie de ce rectangle, par rapport à Ox, est

$$\frac{\rho}{3}(y_2^3-y_1^3)\,dx,$$

y_1 et y_2 désignant les ordonnées des points M_1 et M_2. Le moment d'inertie de l'aire totale, par rapport à Ox, est donc

$$\mu_x=\frac{\rho}{3}\int_a^b(y_2^3-y_1^3)\,dx,$$

a et b désignant les abscisses des tangentes verticales AA' et BB'.

On peut écrire l'intégrale

$$\int_a^b y_2^3\,dx-\int_a^b y_1^3\,dx=\int_a^b y_2^3\,dx+\int_b^a y_1^3\,dx,$$

et l'on voit que la somme des deux dernières intégrales est l'intégrale

$$\overline{\int}_{(C)} y^3\,dx$$

prise sur la courbe limite dans le sens de la flèche (*fig.* 39) (sens négatif). On a donc enfin

$$\mu_x=\frac{\rho}{3}\overline{\int}_{(C)} y^3\,dx. \tag{6}$$

On verra, comme nous l'avons vu pour l'intégrale curviligne donnant l'aire (*fig.* 26), que la même formule s'applique à une aire plane limitée par une courbe fermée quelconque, sans points doubles.

Pour évaluer pratiquement l'intégrale (6), on exprime les coordonnées x et y d'un point du contour, en fonction d'un paramètre t

$$x=f(t),\qquad y=\varphi(t),$$

de telle façon que, t variant de α à β, le point x, y fasse une fois le tour du contour dans le sens indiqué. On a alors, en prenant t

comme variable,

$$\mu_x = \frac{\rho}{3}\int_\alpha^\beta \varphi^3(t) f'(t)\, dt.$$

Exemple. — *Moment d'inertie de l'aire d'une ellipse homogène par rapport au grand axe.* — Si l'on prend le grand axe pour axe Ox (*fig.* 23) on a pour les coordonnées d'un point de l'ellipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t,$$

et il suffit de faire varier t de 2π à 0, pour que le point x, y décrive l'ellipse dans le sens négatif. Donc

$$\mu_x = \frac{\rho}{3}\int_{2\pi}^{0} b^3 \sin^3 t(-a \sin t)\, dt = \rho\frac{ab^3}{3}\int_0^{2\pi} \sin^4 t\, dt.$$

L'intégrale définie qui figure dans cette formule est le quadruple de l'intégrale

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt = \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\pi}{2},$$

calculée au n° 40 (exemple I). Donc elle est égale à $\frac{3\pi}{4}$ et l'on a

$$\mu_x = \rho\frac{\pi ab^3}{4} = M\frac{b^2}{4},$$

M désignant la masse totale de l'ellipse $\pi ab\rho$. De même, par rapport au petit axe, le moment d'inertie de l'ellipse est $M\frac{a^2}{4}$, et par rapport au centre $M\frac{a^2+b^2}{4}$.

59. **Centre de gravité d'un volume homogène.** — Soit un solide homogène de la forme indiquée au n° 48; en adoptant les notations de ce numéro, appelons S l'aire de la section du solide par un plan parallèle à yOz, d'abscisse x : l'aire S est une fonction de x. La tranche infiniment mince, comprise entre les plans d'abscisses x et $x + dx$, peut être assimilée à un cylindre droit de volume $S\,dx$ et de masse

$$dm = \rho S\, dx,$$

ρ désignant la masse de l'unité de volume.

Appelons x_0, y_0, z_0 les coordonnées du centre de gravité de l'aire S supposée homogène; on a d'abord

$$x_0 = x,$$

puis, dans chaque cas particulier, y_0 et z_0 sont des fonctions de x. Le centre de gravité de la tranche diffère infiniment peu de celui du cylindre homogène $S\,dx$, lequel diffère infiniment peu du centre de gravité x_0, y_0, z_0 de la base S. Les coordonnées X, Y, Z du centre de gravité de la masse totale M, sont alors données par les formules

$$MX = \int x_0\, dm, \qquad MY = \int y_0\, dm, \qquad MZ = \int z_0\, dm$$

ou encore

$$MX = \rho \int x_0 S\, dx, \qquad MY = \rho \int y_0 S\, dx, \qquad MZ = \rho \int z_0 S\, dx.$$

où $M = \rho V$, V désignant le volume du solide et $x_0 = x$.

Application : demi-ellipsoïde. — Soit à trouver le centre de gravité de la moitié de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \tag{7}$$

située du côté positif du plan yOz. On a ici (n° 50)

$$S = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Le centre de gravité est évidemment sur Ox. On a

$$M = \frac{2}{3}\pi\rho abc, \qquad MX = \rho \int_0^a \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x\, dx,$$

$$X = \frac{3}{8} a.$$

60. Moment d'inertie du même solide par rapport au plan yOz. — La tranche cylindrique élémentaire, comprise entre les plans x et $x + dx$, a pour masse $dm = \rho S\, dx$. Tous ses éléments sont à la même distance $\pm x$ du plan yOz; le moment d'inertie du solide, par rapport au plan yOz, est donc

$$\mu_{yz} = \int x^2\,dm = \rho\int x^2 S\,dx.$$

Exemple. — *Moment d'inertie d'un ellipsoïde par rapport à un plan principal.* — Le moment d'inertie de l'ellipsoïde (7) par rapport au plan yOz est

$$\mu_{yz} = \rho\int_{-a}^{+a} \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)x^2\,dx,$$

$$\mu_{yz} = \frac{4\pi\rho\,bca^3}{15} = \text{M}\,\frac{a^2}{5},$$

en appelant M la masse totale $\frac{4}{3}\pi\rho\,abc$ de l'ellipsoïde.

61. **Application à un volume de révolution.** — Considérons en particulier le volume homogène engendré par une aire fermée plane (*fig.* 39, I) tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan et ne le traversant pas. Si l'on suppose d'abord, comme dans la figure 39, I, que la courbe limite est rencontrée par une ordonnée en deux points M_1 et M_2, on voit que la section S du solide de révolution par un plan perpendiculaire à Ox, en un point P, est une couronne comprise entre deux cercles concentriques de rayons y_1 et y_2. On a donc

$$S = \pi(y_2^2 - y_1^2).$$

Centre de gravité. — Ce point est sur Ox par raison de symétrie; son abscisse X est donnée par

$$\text{MX} = \pi\rho\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)x\,dx = \pi\rho\left[\int_a^b y_2^2 x\,dx + \int_b^a y_1^2 x\,dx\right] = \pi\rho\overline{\int_{(C)}} y^2 x\,dx,$$

l'intégrale étant prise sur la courbe limite C, dans le sens de la flèche (sens négatif) (*fig.* 39).

Moment d'inertie du même solide par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe (plan yOz). — On a

$$\begin{aligned}\mu_{yz} &= \pi\rho\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)x^2\,dx \\ &= \pi\rho\left[\int_a^b x^2 y_2^2\,dx + \int_b^a x^2 y_1^2\,dx\right] = \pi\rho\overline{\int_{(C)}} x^2 y^2\,dx,\end{aligned}$$

l'intégrale étant encore prise sur le contour, toujours dans le sens négatif.

On verra, comme pour les aires planes (*fig.* 26), que ces deux formules s'appliquent au volume engendré par une aire limitée par une courbe sans points doubles, *pourvu que l'axe* Ox *ne la traverse pas.*

Application à un tore. — Cherchons le moment d'inertie d'un tore *par rapport au plan de son équateur.*

Si nous reprenons la figure (40) du n° 55, le plan des yz, perpendiculaire à Ox en O, est précisément le plan de l'équateur. Les coordonnées d'un point M du cercle générateur sont

$$x = R\sin t, \qquad y = a + R\cos t,$$

$$\mu_{yz} = \pi\rho\int x^2y^2\,dx = \pi\rho\int_0^{2\pi} R^2\sin^2 t(a + R\cos t)^2 R\cos t\,dt.$$

En développant, on voit d'abord que les deux intégrales

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^3 t\,dt$$

sont nulles, car les éléments, dans chacune d'elles, sont deux à deux égaux et de signes contraires pour les valeurs t et $t+\pi$. Ensuite

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 2t}{4}\,dt = \int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{8}\,dt = \frac{\pi}{4}.$$

D'où

$$\mu_{yz} = \frac{\pi^2\rho a R^4}{2} = M\frac{R^2}{4},$$

en désignant par M la masse du tore

$$M = \rho.2\pi^2 a R^2.$$

62. Moment d'inertie d'un solide de révolution homogène par rapport à son axe. — 1° *Moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène par rapport à son axe.* — Soient h la hauteur, R le rayon du cylindre, ρ la masse de l'unité de volume, μ le moment d'inertie cherché. La masse du cylindre est

$$M = \pi R^2 h\rho.$$

Si R croît de dR, la masse M augmente de

$$dM = 2\pi R h \rho \, dR.$$

Cette masse dM forme une couche infiniment mince, comprise entre le cylindre de rayon R et le cylindre de même axe de rayon $R + dR$: tous ses éléments sont à la même distance R de l'axe. L'accroissement $d\mu$ du moment d'inertie est le moment d'inertie de cette couche, c'est-à-dire $R^2 \, dM$. Donc

$$d\mu = R^2 (2\pi R h \rho \, dR).$$

En intégrant et remarquant que μ s'annule avec R

$$\mu = \frac{1}{2} \pi \rho R^4 h. \tag{8}$$

2° *Solide de révolution.* — Soit le solide engendré par une aire plane, tournant autour d'un axe Ox, situé dans son plan et ne la traversant pas. Supposons d'abord, comme dans la figure 39, I, que les parallèles à Oy ne coupent la courbe qu'en deux points M_1 et M_2, d'ordonnées y_1 et y_2. Prenons deux ordonnées infiniment voisines, d'abscisses x et $x + dx$; la tranche engendrée par la révolution de l'aire infiniment petite $M_1 N_1 N_2 M_2$, peut être assimilée à la différence de deux cylindres ayant pour axe Ox, pour hauteur dx et pour rayons y_2 et y_1. Le moment d'inertie $d\mu$ de cette tranche par rapport à Ox est la différence des moments d'inertie des deux cylindres, donnés successivement par la formule (8) où $h = dx$ et où R prend les deux valeurs y_2 et y_1,

$$d\mu = \frac{\pi\rho}{2} (y_2^4 - y_1^4) \, dx.$$

Le moment d'inertie du solide par rapport à Ox est la somme des moments $d\mu$ des tranches. Donc

$$\mu_x = \frac{\pi\rho}{2} \int_a^b (y_2^4 - y_1^4) \, dx = \frac{\pi\rho}{2} \left[\int_a^b y_2^4 \, dx + \int_b^a y_1^4 \, dx \right] = \frac{\pi\rho}{2} \int_{(C)}^{-} y^4 \, dx,$$

l'intégrale étant prise sur la courbe limite (C) dans le sens de la flèche (sens négatif).

Cette formule s'étend, toujours par la même méthode, à une aire plane quelconque ne traversant pas Ox, et limitée par une courbe sans points doubles.

Exemple. — *Moment d'inertie d'un tore par rapport à son axe.* — La figure étant faite comme au n° 55, on a, pour les coordonnées d'un point du contour du cercle générateur,

$$x = \mathrm{R}\sin t, \qquad y = a + \mathrm{R}\cos t.$$

Alors, d'après la formule précédente,

$$\mu_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^{2\pi}(a + \mathrm{R}\cos t)^4\,\mathrm{R}\cos t\,dt.$$

Si l'on développe, les intégrales contenant des puissances impaires de $\cos t$ sont nulles. Il reste

$$\mu_x = 2\pi\rho a^3\mathrm{R}^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt + 2\pi\rho a\mathrm{R}^4\int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt.$$

On a donc, d'après les valeurs des intégrales,

$$\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt = \pi, \qquad \int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\mu_x = 2\pi^2\rho a\mathrm{R}^2\left(a^2 + \frac{3}{4}\mathrm{R}^2\right) = \mathrm{M}\left(a^2 + \frac{3}{4}\mathrm{R}^2\right),$$

en appelant M la masse totale du tore.

63. **Résumé**. — En résumé, on a les résultats suivants pour une aire plane limitée par un contour C, sans points doubles:

1° Aire

$$\mathrm{A} = \overline{\int_{(\mathrm{C})}} y\,dx;$$

2° Ordonnée du centre de gravité de l'aire

$$\mathrm{Y} = \frac{1}{2\mathrm{A}}\overline{\int_{(\mathrm{C})}} y^2\,dx;$$

3° Moment d'inertie par rapport à Ox, de l'aire supposée de densité ρ,

$$\mu_x = \frac{\rho}{3}\overline{\int_{(\mathrm{C})}} y^3\,dx;$$

4° Moment d'inertie, par rapport à Ox, du volume V, de densité ρ engendré par l'aire tournant autour de Ox,

$$\mu_x = \frac{\pi\rho}{2} \overline{\int_{(C)}} y^4 \, dx,$$

les quatre intégrales $\int y^n dx$, où $n = 1, 2, 3, 4$, étant prises le long du contour C dans le sens négatif. Les trois premières formules sont exactes quand l'aire est traversée par l'axe Ox ; la quatrième suppose que l'aire n'est pas traversée par Ox ;

5° Abscisse du centre de gravité du volume V engendré par la rotation de l'aire autour de Ox

$$X = \frac{\pi}{V} \overline{\int_{(C)}} y^2 x \, dx ;$$

6° Moment d'inertie du volume V par rapport au plan yOz :

$$\mu_{yz} = \pi\rho \overline{\int_{(C)}} x^2 y^2 \, dx.$$

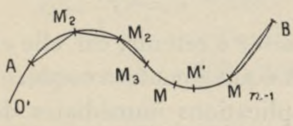
CHAPITRE V.

RECTIFICATION DES COURBES. AIRES DES SURFACES DE RÉVOLUTION ET DES SURFACES CONIQUES.

I. — RECTIFICATION DES COURBES.

64. **Longueur d'un arc de courbe.** — Prenons sur une courbe donnée, plane ou gauche, deux points A et B. Par définition, la longueur de l'arc de courbe AB est la limite vers laquelle tend le périmètre d'une ligne brisée $AM_1 M_2 \ldots M_{n-1} B$ inscrite dans l'arc, quand le nombre des côtés de cette ligne augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro (*fig.* 42) :

Fig. 42.



Nous admettrons que cette limite existe et est indépendante de la loi suivant laquelle on fait tendre les côtés de la ligne brisée vers zéro. Nous admettrons, en outre, que la longueur de l'arc ainsi définie possède, comme un arc de cercle, cette propriété que le rapport de la corde à l'arc tende vers l'unité quand l'arc tend vers zéro. Voici comment on peut alors obtenir facilement la différentielle de l'arc :

Soient

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

les coordonnées d'un point M de la courbe exprimées en fonction d'un paramètre t. Appelons s l'arc de courbe O'M compté à partir d'une origine fixe O', prise sur la courbe, jusqu'au point M : cet arc est évidemment une fonction de t. Quand on fait croître t de Δt, les coordonnées x, y, z subissent des accroissements Δx, Δy, Δz, le point M se déplace de M en M′ et l'arc s croît d'un arc MM′ égal à Δs. On a alors

$$\text{corde MM}' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

d'où

$$\frac{\text{arc MM}'}{\text{corde MM}'} = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \frac{\dfrac{\Delta s}{\Delta t}}{\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}}.$$

Quand Δt tend vers zéro, le rapport de l'arc à la corde tend vers 1, comme nous l'admettons ; $\frac{\Delta s}{\Delta t}, \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$ tendent vers les dérivées $\frac{ds}{dt}, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, et l'on a

$$1 = \frac{\dfrac{ds}{dt}}{\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dz}{dt}\right)^2}};$$

on en déduit, en chassant le dénominateur, puis multipliant par dt,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Cette formule est aisée à retenir, car elle exprime que l'arc infiniment petit MM′ est équivalent à sa corde.

Voici quelques applications immédiates de ces formules. Nous en donnerons d'autres, notamment la rectification de l'ellipse, quand nous aurons étudié les développements en séries de puissances.

65. **Chaînette.** — La courbe appelée *chaînette* est la figure d'équilibre d'un fil homogène pesant suspendu par ses deux extrémités. Elle a pour équation (*fig.* 44)

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a},$$

a désignant une longueur. Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy; elle a la forme indiquée sur la figure 43; l'ordonnée du sommet B est égale à a.

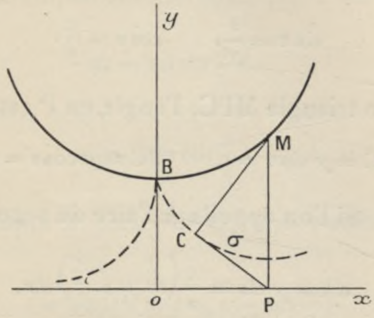
Calculons l'arc $BM = s$. Nous prendrons ici l'abscisse comme le paramètre en fonction duquel s'expriment les coordonnées. On a

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) dx;$$

donc

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}\, dx.$$

Fig. 43.



En développant la quantité sous le radical, on voit qu'elle est le carré de $e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}$. Donc

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) dx.$$

En intégrant et remarquant que s doit s'annuler avec l'abscisse x du point M, on a

$$s = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Il est aisé de construire s : en effet, on vérifie immédiatement la relation

$$y^2 - s^2 = a^2, \qquad s^2 = y^2 - a^2,$$

qui permet de construire s comme côté de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse y et pour autre côté a. Voici comment on peut faire cette construction : menons la tangente en M, l'ordonnée MP, et abaissons la perpendiculaire PC sur la tangente : nous allons montrer que

$$PC = a, \qquad MC = s.$$

En effet, l'angle σ que fait la tangente en M avec Ox est tel que

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right);$$

donc, d'après la valeur de s,

$$\operatorname{tang}\sigma = \frac{s}{a}.$$

On en conclut, comme $a^2 + s^2 = y^2$,

$$\sin\sigma = \frac{s}{y}, \qquad \cos\sigma = \frac{a}{y}.$$

Comme, dans le triangle MPC, l'angle en P est égal à σ, on a

$$\mathrm{MC} = y\sin\sigma = s, \qquad \mathrm{PC} = y\cos\sigma = a.$$

Remarque. — Si l'on appelle A l'aire du segment OBMP, on a

$$d\mathrm{A} = y\,dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx,$$

d'où, en intégrant et remarquant que A s'annule avec x,

$$\mathrm{A} = \frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = as.$$

L'aire A est donc le double de l'aire du triangle MPC.

66. **Cycloïde.** — Calculons l'arc OM de la cycloïde (*fig.* 24). En appelant u l'angle dont le cercle a tourné (n° 42) on a pour les coordonnées du point M

$$x = a(u - \sin u), \qquad y = a(1 - \cos u),$$

a désignant le rayon du cercle roulant. On en conclut

$$dx = a(1 - \cos u)\,du, \qquad dy = a\sin u\,du.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est donc

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \cot\frac{u}{2}.$$

Cette formule montre que la tangente coïncide avec la droite MB joignant M au point B diamétralement opposé au contact. En effet, cette droite MB fait avec BI un angle moitié de ICM, c'est-à-dire égal à $\frac{u}{2}$: elle fait donc avec Ox l'angle $\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}$ et son coefficient angulaire est bien $\cot\frac{u}{2}$.

On a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{(1 - \cos u)^2 + \sin^2 u}\, du.$$

Développant et remplaçant $1 - \cos u$ par $2\sin^2\frac{u}{2}$, on trouve

$$ds = 2a \sin\frac{u}{2}\, du;$$

d'où, en intégrant,

$$s = -4a\cos\frac{u}{2} + C.$$

L'arc, étant compté à partir de O, doit s'annuler pour $u = 0$; donc $C = 4a$ et

$$s = \text{arc}\,OM = 4a\left(1 - \cos\frac{u}{2}\right).$$

En particulier l'arc OO', terminé au point le plus haut O' de la cycloïde, correspond à $u = \pi$. Donc

$$\text{arc}\,OO' = 4a.$$

Remarque. — *L'arc* O'M *est égal au double de la tangente* MB. En effet

$$\text{arc}\,O'M = \text{arc}\,OO' - \text{arc}\,OM = 4a\cos\frac{u}{2},$$

et le triangle rectangle IMB, dans lequel l'angle en B est $\frac{u}{2}$, donne

$$MB = 2a\cos\frac{u}{2};$$

ce qui démontre la proposition.

67. **Parabole**. — Soit une parabole rapportée à son axe Oy et à la tangente au sommet Ox (*fig.* 44) :

$$y = \frac{x^2}{2p}.$$

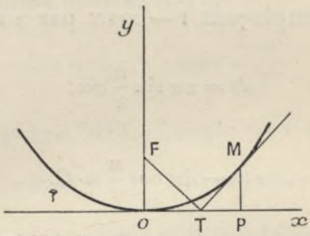
On a

$$dy = \frac{x}{p}\,dx, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx,$$

et, en intégrant,

$$s = \operatorname{arc} \mathrm{OM} = \int \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\,dx = \frac{1}{p}\int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx.$$

Fig. 44.



Appliquons la formule d'intégration par parties

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

en faisant

$$u = \sqrt{p^2 + x^2}, \qquad v = x.$$

Nous avons

$$ps = \int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx = x\sqrt{p^2 + x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{p^2 + x^2}}\,dx.$$

La dernière intégrale peut s'écrire, en remplaçant au numérateur x^2 par $p^2 + x^2 - p^2$,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{p^2 + x^2}}\,dx = \int \sqrt{p^2 + x^2}\,dx - \int \frac{p^2\,dx}{\sqrt{p^2 + x^2}},$$

ou encore

$$ps - p^2\,\mathrm{L}\left(x + \sqrt{p^2 + x^2}\right) + \mathrm{C}.$$

On a donc

$$ps = x\sqrt{p^2 + x^2} - ps + p^2\,\mathrm{L}\left(x + \sqrt{p^2 + x^2}\right) - \mathrm{C},$$

ou, en résolvant par rapport à s et remarquant que la constante C est égale à $p^2\mathrm{L}p$, car s s'annule avec x,

$$s = \frac{1}{2}x\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} + \frac{1}{2}p\,\mathrm{L}\left(\frac{x}{p} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}\right).$$

68. Rectification d'une courbe gauche. — Soit, par exemple, la courbe gauche définie par les équations

$$y = x^2, \qquad z = \frac{2x^3}{3}.$$

Cherchons l'arc s de cette courbe à partir de l'origine. On a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$
$$dy = 2x\,dx, \qquad dz = 2x^2\,dx.$$

Donc

$$ds = \sqrt{1 + 4x^2 + 4x^4}\,dx = (1 + 2x^2)\,dx,$$

et, en intégrant,

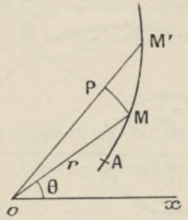
$$s = x + \frac{2}{3}x^3$$

sans ajouter de constante, car on suppose que, pour $x = 0$, $s = 0$. On a donc

$$s = x + z.$$

69. Différentielle d'un arc de courbe plane en coordonnées polaires. — Considérons une courbe plane rapportée à un système de coordonnées polaires r et θ, $OM = r$, $xOM = \theta$ (*fig.* 45).

Fig. 45.



Les coordonnées rectangulaires x et y d'un point M sont données par les formules

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Le long de la courbe, x, y, r, θ sont fonctions d'un même paramètre et l'on a

$$dx = \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta,$$
$$dy = \sin\theta\,dr + r\cos\theta\,d\theta;$$

donc

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}.$$

On peut retrouver rapidement cette formule de la façon suivante : soit M′ un point infiniment voisin de M ayant pour coordonnées $r + dr$ et $\theta + d\theta$. Si l'on décrit de O comme centre un arc de cercle MH de rayon r, on a (*fig.* 31)

$$\mathrm{HM}' = dr, \qquad \operatorname{arc}\mathrm{HM} = r\,d\theta, \qquad \operatorname{arc}\mathrm{MM}' = ds.$$

Comme un arc infiniment petit est équivalent à sa corde, le triangle infinitésimal MHM′, rectangle en H, donne

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = \overline{\mathrm{M}'\mathrm{H}}^2 + \overline{\mathrm{HM}}^2,$$

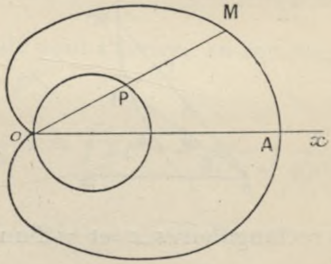
$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2.$$

70. **Exemple.** — *Cardioïde.* — Soient un cercle de diamètre a, O un point de la circonférence. Prolongeons chaque rayon vecteur OP du cercle d'une longueur constante égale au diamètre du cercle (*fig.* 46)

$$\mathrm{PM} = a.$$

Le lieu de M est une courbe appelée *cardioïde*. En prenant le

Fig. 46.



diamètre OA comme axe polaire, l'équation de la courbe est

$$r = a(1 + \cos\theta).$$

Alors

$$ds = a\sqrt{\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)^2}\,d\theta,$$

$$ds = a\sqrt{2(1 + \cos\theta)}\,d\theta = 2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta.$$

L'arc AM $= s$ qui s'annule avec θ est donc

$$s = 4a \sin\frac{\theta}{2}.$$

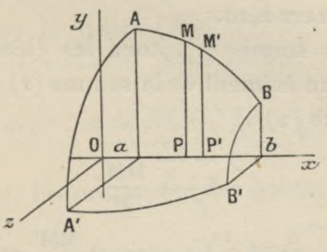
La longueur de l'arc AMO, correspondant à $\theta = \pi$, est

$$\text{arc AMO} = 4a.$$

II. — AIRE D'UNE PORTION DE SURFACE DE RÉVOLUTION COMPRISE ENTRE DEUX PARALLÈLES.

71. **Formule générale.** — Prenons comme axe des x l'axe de la surface de révolution. Le plan des xy coupe la surface suivant une courbe appelée *méridienne* de la surface. Prenons sur cette méridienne un arc continu AB situé du côté des y positifs ; nous nous proposons de calculer l'aire engendrée par la révolution de AB autour de Ox : cette aire est limitée par les deux parallèles

Fig. 47.



AA′ et BB′ décrits par les points A et B. Nous avons représenté sur la figure 47 le quart de l'aire, quart situé dans le dièdre formé par les plans zOx et yOx.

Inscrivons dans l'arc AB une ligne polygonale $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$: quand la ligne AB tourne autour de Ox, la ligne polygonale engendre une aire composée de la somme des surfaces latérales de n troncs de cône. L'aire engendrée par l'arc AB est, par définition, la limite vers laquelle tend l'aire engendrée par la ligne polygonale inscrite quand le nombre n de ses côtés augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro.

Soient M et M′ deux sommets consécutifs de la ligne polygonale ayant pour ordonnées $y = MP$, $y + \Delta y = M'P'$. L'aire engendrée par la droite MM′ est égale à MM′ multipliée par la demi-somme des circonférences des bases du tronc

$$2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\mathrm{MM}'.$$

L'aire cherchée A est la limite de la somme des quantités analogues évaluées successivement pour tous les côtés de la ligne polygonale :

$$(1)\qquad \mathrm{A} = \lim \sum 2\pi\left(y+\frac{\Delta y}{2}\right)\mathrm{MM}',$$

le signe Σ indiquant qu'il faut faire la somme des quantités qui le suivent.

Soit Δs la longueur de l'arc MM′. Considérons la somme

$$(2)\qquad \Sigma\, 2\pi y\,\Delta s$$

étendue aux différents arcs sous-tendus par les côtés de la ligne polygonale. Nous allons montrer que cette nouvelle somme (2) a même limite que la première (1) quand les côtés de la ligne polygonale tendent vers zéro.

En effet, dans la somme (1), tous les éléments ont le même signe; le rapport d'un élément de la somme (1) à l'élément correspondant de la somme (2)

$$\frac{y+\frac{\Delta y}{2}}{y}\,\frac{\mathrm{MM}'}{\Delta s}$$

tend vers 1, car Δy tend vers zéro et $\frac{\mathrm{MM}'}{\Delta s}$ est le rapport d'une corde à l'arc sous-tendu. Donc, d'après le théorème fondamental sur les sommes d'infiniment petits (n° 10), les sommes (1) et (2) ont même limite et l'on a

$$\mathrm{A} = \lim \Sigma\, 2\pi y\,\Delta s.$$

Cette dernière limite est l'intégrale $\int 2\pi y\,ds$ prise le long de l'arc AB : on a donc, en faisant sortir 2π du signe d'intégration,

$$\mathrm{A} = 2\pi \int_{(\mathrm{AB})} y\,ds.$$

Cette dernière formule est aisée à retenir : elle exprime que l'aire A est la somme des aires des troncs de cône engendrés par les éléments d'arcs infiniment petits ds.

Pour calculer effectivement A, on exprimera les coordonnées x et y d'un point M de la méridienne AB en fonction d'un paramètre u, de façon que le point $M(x,y)$ décrive l'arc AB quand u varie de u_0 à u_1 :

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u);$$

on a alors

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{f'^2(u) + \varphi'^2(u)}\, du$$

et

$$A = 2\pi \int_{u_0}^{u_1} \varphi(u)\sqrt{f'^2(u) + \varphi'^2(u)}\, du.$$

72. Aire d'une zone de paraboloïde de révolution. — Soit

$$y^2 - 2px = 0$$

l'équation d'une parabole dans le plan des xy, ayant pour axe Ox. En faisant tourner l'arc AB de cette parabole autour de Ox, on engendre une zone de paraboloïde de révolution analogue à celle dont nous figurons le quart (*fig.* 47) AA'B'B. Prenons ici y comme variable indépendante. Nous aurons :

$$dx = \frac{y}{p}\, dy, \qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\, dy.$$

Appelant y_0 et y_1 les ordonnées des points A et B, on a

$$A = 2\pi \int_{(AB)} y\, ds = 2\pi \int_{y_0}^{y_1} y\sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}}\, dy.$$

En écrivant

$$A = \frac{\pi}{p} \int_{y_0}^{y_1} \sqrt{p^2 + y^2} \,.\, 2y\, dy,$$

nous voyons que l'intégrale indéfinie est $\frac{2}{3}(p^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$; on a donc

$$A = \frac{2\pi}{3p}\left[(p^2 + y_1^2)^{\frac{3}{2}} - (p^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}}\right].$$

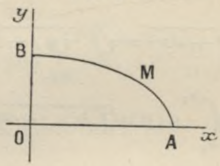
73. Aire d'un ellipsoïde de révolution allongé. — Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipse méridienne OBA dont nous figurons le quart: le grand axe $OA = a$ de cette ellipse est dirigé suivant l'axe de révolution Ox. Nous pouvons exprimer les coordonnées d'un point M de l'ellipse en posant (*fig.* 48)

$$x = a \cos u, \qquad y = b \sin u,$$

Fig. 48.



et, pour que le point M décrive l'arc AB, il faut faire varier u de o à $\frac{\pi}{2}$. On a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}\, du,$$

ou, en remplaçant $\sin^2 u$ par $1 - \cos^2 u$ et introduisant l'excentricité $\varepsilon = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - b^2}$,

$$ds = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\, du.$$

Alors, l'aire $A = 2\pi \int y\, ds$, engendrée par l'arc BA, est

$$A = 2\pi ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\, \sin u\, du.$$

Pour évaluer cette intégrale, faisons un changement de variable en posant

$$\varepsilon \cos u = \sin t;$$

u partant de o, nous prendrons pour t la valeur t_0 comprise entre o et $\frac{\pi}{2}$ définie par $\varepsilon = \sin t_0$; u croissant, t décroît, et, pour $u = \frac{\pi}{2}$, t prend la valeur o.

On a alors

$$-\varepsilon \sin u\, du = \cos t\, dt,$$

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u} = \cos t,$$

$$A = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_0} \cos^2 t\, dt.$$

Remplaçant $\cos^2 t$ par $\frac{1+\cos 2t}{2}$, on voit que l'intégrale indéfinie est $\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}$, et l'on a

$$A = \frac{\pi ab}{\varepsilon}\left(t_0 + \frac{\sin 2t_0}{2}\right).$$

Remettons pour t_0 sa valeur arc sin ε, en remarquant que

$$\sin 2t_0 = 2\sin t_0 \cos t_0 = 2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2},$$

il vient enfin, pour l'aire du demi-ellipsoïde,

$$A = \pi ab\left(\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon} + \sqrt{1-\varepsilon^2}\right).$$

Comme vérification, on doit retrouver l'aire d'un hémisphère de rayon a en faisant $b=a$ et, par suite, $\varepsilon = 0$: effectivement, quand ε tend vers zéro, $\frac{\arcsin\varepsilon}{\varepsilon}$ tend vers 1 et l'aire devient

$$A = 2\pi a^2.$$

Aire d'un ellipsoïde de révolution aplati. — La méridienne étant une ellipse AB ayant pour petit axe l'axe de révolution Ox, un calcul analogue donne pour l'aire du demi-ellipsoïde

$$A = \pi ab\left[\frac{L(\eta+\sqrt{1+\eta^2})}{\eta} + \sqrt{1+\eta^2}\right];$$

où η désigne le rapport $\frac{c}{b}$.

Comme vérification, quand b tend vers a, η tend vers 0, et l'on doit trouver l'aire d'un hémisphère de rayon a. Effectivement, quand η tend vers 0, l'expression entre crochets se réduit à 2 et l'on a

$$A = 2\pi a^2.$$

74. **Aire d'un tore.** — Le tore est engendré par un cercle tournant autour d'un axe Ox. Supposons que le cercle ne coupe pas l'axe (*fig.* 40) et prenons comme origine la projection du centre G du cercle sur l'axe de révolution. Soit $OG = a$ et soit R le rayon GM du cercle générateur. L'aire du tore est égale à l'intégrale

$$2\pi\int y\,ds,$$

prise tout le long du cercle G. En appelant t l'angle de GM avec Oy, on a, pour les coordonnées de M,

$$x = \text{R} \sin t, \qquad y = a + \text{R} \cos t,$$

et, pour que le point M décrive la circonférence entière, il faut faire varier t de 0 à 2π. On a évidemment

$$ds = \text{R}\, dt;$$

donc

$$\text{A} = 2\pi \int y\, ds = 2\pi \text{R} \int_0^{2\pi} (a + \text{R} \cos t)\, dt.$$

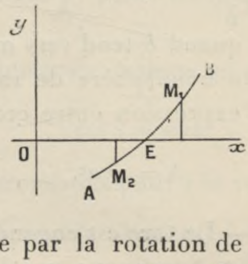
L'intégrale indéfinie est $at + \text{R} \sin t$, et l'intégrale définie $2\pi a$. Donc

$$\text{A} = 2\pi \text{R} . 2\pi a = 4\pi^2 a \text{R}.$$

L'aire A est donc égale à la longueur de la courbe qui tourne $2\pi\text{R}$, multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de cette courbe $2\pi a$. C'est là un cas particulier d'un second théorème de Guldin (n° 76).

75. Cas où la courbe traverse l'axe. — Dans ce qui précède, nous avons supposé que la méridienne AB de la surface ne traverse pas l'axe. Supposons qu'elle le traverse au point E. Alors on évaluera séparément l'aire A_1, engendrée par la rotation de l'arc EB,

Fig. 49.



et l'aire A_2, engendrée par la rotation de AE. Pour un point M_1 de l'arc EB, l'ordonnée y_1 est positive. On a donc (*fig.* 49)

$$\text{A}_1 = 2\pi \int_{(\text{EB})} y_1\, ds,$$

l'intégrale étant prise de E en B. Pour un point M_2 de AE, l'ordonnée y_2 est négative. L'élément ds placé en M_2 engendre la surface latérale d'un tronc de cône, dans lequel le rayon de la circonférence équidistante des bases est $-y_2$. L'aire de ce tronc de cône élémentaire est

$$-2\pi y_2\, ds,$$

et l'aire A_2 engendrée par AE est

$$A_2 = -2\pi \int_{(AE)} y_2\, ds.$$

Calculons la différence $A_1 - A_2$ de ces aires. Nous aurons

$$A_1 - A_2 = 2\pi \int_{(EB)} y_1\, ds + 2\pi \int_{(AE)} y_2\, ds.$$

La somme des deux intégrales du deuxième membre est évidemment l'intégrale $2\pi \int_{(AB)} y\, ds$ prise le long de la courbe de A en B.

Ainsi, dans ce cas, l'intégrale

$$2\pi \int_{(AB)} y\, ds,$$

qui représente l'aire totale quand la méridienne AB ne traverse pas l'axe de révolution, ne représente plus que la différence des aires engendrées par les arcs de méridienne placés de part et d'autre de l'axe. Cela se voit d'ailleurs *a priori*, car, dans la somme

$$2\pi \int y\, ds,$$

le facteur ds est positif, mais y est positif ou négatif suivant que l'élément ds est au-dessus ou au-dessous de l'axe Ox. Par exemple, pour le tore, quand le cercle générateur coupe l'axe (cercle pointillé de la figure 40), l'expression

$$2\pi R . 2\pi a$$

représente la différence des aires engendrées par les arcs C′ et C″.

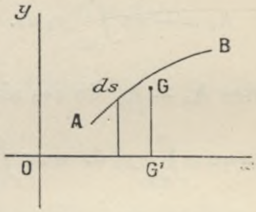
76. **Centre de gravité d'un arc de courbe plane supposé homogène. Théorème de Guldin.** — Soit un arc de courbe plane AB supposé homogène rapporté à deux axes Ox et Oy. Soit G le centre

de gravité de cet arc, X et Y ses coordonnées. Appliquons la formule

$$MY = \Sigma my.$$

Actuellement la masse d'une portion de l'arc de courbe est expri-

Fig. 50.



mée par le même nombre que sa longueur. On a donc $M = l$ (longueur totale) et, en appelant y l'ordonnée d'un élément ds,

$$m = ds, \qquad my = y\,ds.$$

On a donc

$$Yl = \int_{(AB)} y\,ds.$$

On trouverait de même, en prenant les moments par rapport à Oy,

$$Xl = \int_{(AB)} x\,ds.$$

Ces formules déterminent les coordonnées du centre de gravité G de l'arc. Elles conviennent, quelle que soit la position de l'arc AB par rapport aux axes.

Théorème de Guldin. — *L'aire engendrée par une ligne plane, tournant autour d'un axe, situé dans son plan et ne la traversant pas, est égale à la longueur de la ligne multipliée par la circonférence que décrit le centre de gravité de la ligne supposée homogène.*

En effet, l'aire engendrée par la ligne AB tournant autour de Ox est, d'après ce qui précède,

$$A = 2\pi \int_{(AB)} y\,ds;$$

mais l'intégrale du second membre est égale à Yl, on a donc

$$A = l.2\pi Y,$$

ce qui démontre le théorème, car $2\pi Y$ est la circonférence de rayon $Y = GG'$ que décrit le centre de gravité en tournant.

Cas où la méridienne AB *traverse l'axe.* — Dans ce cas, *la différence des aires engendrées par les parties de la méridienne* AB *situées de part et d'autre de l'axe* est donnée par la même intégrale

$$2\pi \int_{(AB)} y\, ds,$$

qui est toujours égale à

$$l.2\pi Y.$$

L'application du théorème de Guldin donne donc alors la différence des aires engendrées par les parties de AB placées de part et d'autre de l'axe.

Par exemple, si le centre de gravité de l'arc AB était sur l'axe, on aurait $Y = 0$: les parties de la méridienne placées de part et d'autre de l'axe engendreraient des aires équivalentes.

III. — AIRE D'UNE PARTIE DE SURFACE CONIQUE OU CYLINDRIQUE COMPRISE ENTRE DEUX GÉNÉRATRICES.

77. **Formule générale pour une surface conique.** — Soit une surface conique (*fig.* 51) dont le sommet est à l'origine O et dont la directrice D est une courbe gauche quelconque, telle que les coordonnées d'un point M de cette courbe s'expriment en fonctions d'un paramètre t par les formules

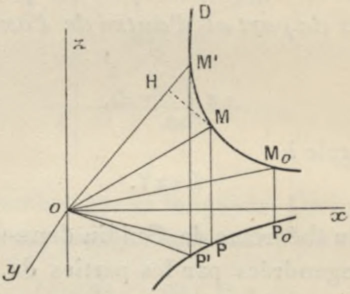
$$(M) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Considérons la portion S de surface conique limitée par une génératrice fixe OM_0, une génératrice variable OM et l'arc M_0M de la directrice D. Cette surface S est évidemment une fonction du paramètre t définissant la position du point M. Quand on fait croître t de dt, le point M se déplace infiniment peu de M en M', les coordonnées de M' sont $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, et la surface S augmente de sa différentielle dS, égale à l'aire du secteur infiniment petit MOM′, qu'on peut confondre avec le triangle MOM′:

$$dS = \mathrm{MOM'}.$$

On sait que l'aire d'un triangle dans l'espace est égale à la racine carrée de la somme des carrés de ses projections sur trois plans

Fig. 51.



rectangulaires. Si donc nous appelons dS_x, dS_y, dS_z les projections du triangle MOM′ sur les trois plans coordonnés yOz, zOx, xOy, nous aurons

$$dS = \sqrt{(dS_x)^2 + (dS_y)^2 + (dS_z)^2}.$$

Évaluons dS_z. La projection de la directrice D sur le plan xOy est une courbe D′, lieu du point P du plan xOy dont les coordonnées sont données par $x = f(t)$, $y = \varphi(t)$. La droite OM se projette en OP. La droite OM′ se projette en OP′; le point P′ ayant pour coordonnées $x + dx$, $y + dy$. Le triangle MOM′ se projette donc suivant le triangle POP′ qui a pour surface (nº 46)

$$dS_z = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx).$$

On trouve de même, en permutant,

$$dS_x = \frac{1}{2}(y\,dz - z\,dy),$$

$$dS_y = \frac{1}{2}(z\,dx - x\,dz).$$

On a donc la formule

$$dS = \frac{1}{2}\sqrt{(y\,dz - z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2},$$

ou encore, en remplaçant x, y, z en fonction de t et dx, dy, dz par $f'(t)\,dt$, $\varphi'(t)\,dt$, $\psi'(t)\,dt$,

$$dS = \frac{1}{2}\sqrt{(\varphi\psi' - \psi\varphi')^2 + (\psi f' - f\psi')^2 + (f\varphi' - \varphi f')^2}\,dt.$$

En intégrant de t_0 à t, on aura l'aire conique limitée par les deux génératrices OM_0 et OM.

Exemple. — Prenons, par exemple, la courbe gauche du troisième ordre définie par les équations

$$x = \frac{1}{2}t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3,$$

et cherchons l'aire de la surface conique ayant son sommet à l'origine, ayant cette courbe pour directrice, et limitée par deux génératrices fixes OM_0, OM et par la directrice.

Actuellement

$$dx = \frac{1}{2}\,dt, \qquad dy = 2t\,dt, \qquad dz = 3t^2\,dt,$$

$$y\,dz - z\,dy = t^4\,dt, \qquad z\,dx - x\,dz = -t^3\,dt,$$

$$x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}t^2\,dt.$$

Donc

$$dS = \frac{1}{2}\sqrt{t^8 + t^6 + \frac{1}{4}t^4}\,dt = \frac{1}{2}\left(t^4 + \frac{1}{2}t^2\right)dt.$$

Intégrant entre t_0, qui donne le point M_0, et t, qui donne le point M, on a

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{6} - \frac{t_0^5}{5} - \frac{t_0^3}{6}\right);$$

ce qu'on peut exprimer comme il suit, à l'aide des coordonnées des deux points M_0 et M,

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{5} + \frac{xy}{3} - \frac{y_0 z_0}{5} - \frac{x_0 y_0}{3}\right).$$

78. **Remarque.** — L'expression de S ne changeant évidemment pas quand on développe le cône, celle de dS ne doit pas changer. C'est ce qu'on vérifie en remarquant que les côtés du triangle MOM' (*fig.* 51) ne changent pas dans le développement. On peut aussi

mettre ce fait en évidence analytiquement, en remarquant qu'on a identiquement

$$dS = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2+y^2+z^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2},$$

ainsi qu'on le vérifie en développant les deux expressions de dS. Or, si l'on fait

$$OM = r,$$

on a

$$r^2 = x^2+y^2+z^2, \qquad r\,dr = x\,dx+y\,dy+z\,dz,$$

donc

$$dS = \frac{1}{2}\sqrt{r^2\,ds^2-r^2\,dr^2} = \frac{r}{2}\sqrt{ds^2-dr^2},$$

formule dont les éléments restent invariables quand on développe le cône, car l'arc s de la directrice ne change pas dans le développement, ni la longueur r de la génératrice OM.

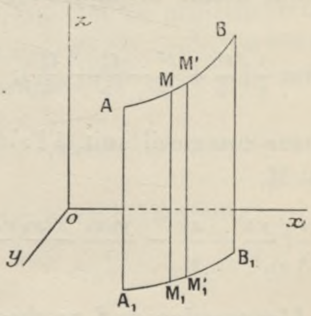
Cette dernière formule peut d'ailleurs s'écrire immédiatement, car la hauteur MH du triangle MOM′ est

$$\sqrt{\overline{MM'}^2-\overline{M'H}^2} = \sqrt{ds^2-dr^2},$$

et sa base $OM' = r+dr$ diffère infiniment peu de r.

79. **Aire d'une partie de surface cylindrique.** — Soit, dans

Fig. 52.



l'espace, un arc de courbe AB décrit par un point M de coordonnées

$$(M) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t).$$

Considérons le cylindre projetant cet arc de courbe sur le plan des xy en $A_1 B_1$. On veut calculer l'aire ABB_1A_1 limitée par les arcs AB, $A_1 B_1$ et les génératrices extrêmes AA_1 et BB_1. Soient M et M′ deux points infiniment voisins de AB correspondant aux valeurs t et $t+dt$ du paramètre. Soient M_1 et M'_1 leurs projections. L'élément MM′ est un élément d'arc ds de AB, l'élément $M_1M'_1$ est un élément d'arcs ds_1 de la projection $A_1 B_1$,

$$ds_1 = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

L'aire du rectangle élémentaire $MM'M'_1M_1$ est

$$z\, ds_1.$$

L'aire, qui est la somme de ces rectangles, est donc

$$S = \int z\, ds_1 = \int z\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Si l'on veut introduire la variable t, on aura

$$S = \int_a^b \psi(t)\sqrt{f'^2(t) + \varphi'^2(t)}\, dt,$$

a et b désignant les valeurs de t donnant les points extrêmes A et B.

Cette formule est d'ailleurs évidente, si l'on développe le cylindre en faisant coïncider $A_1 B_1$ avec une portion de l'axe Ox. L'aire devient plane, et l'on peut lui appliquer tout ce qu'on a vu sur la mesure d'un segment de courbe plane.

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE DE PUISSANCES ENTIÈRES ET POSITIVES DE LA VARIABLE.

I. — EXAMEN DE QUELQUES CAS PARTICULIERS. INTERVALLE DE CONVERGENCE.

80. **Généralités.** — Le développement d'une fonction $f(x)$ en une série de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

où a_0, a_1, ..., a_n, ... sont des coefficients constants, est d'une grande importance aussi bien dans la théorie que dans les applications. Cette importance tient surtout à ce que, dans les limites dans lesquelles elles sont convergentes, les séries de puissances peuvent être différentiées, intégrées, multipliées les unes par les autres comme des polynomes.

81. **Premier exemple.** — *Progression géométrique décroissante.* — La théorie des progressions géométriques donne le développement

$$(1) \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

convergent pour toutes les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$. On a, en effet, en faisant la division et désignant par p un entier positif quelconque,

$$(2) \qquad \frac{1-x^{p+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^p.$$

Si x est moindre que 1 en valeur absolue, x^{p+1} tend vers zéro quand p augmente indéfiniment, le premier membre tend vers $\frac{1}{1-x}$ et l'on obtient le développement (1).

Autres développements en progression géométrique. — Voici quelques développements qui se tirent immédiatement du précédent :

1° Soit a une constante *différente de zéro*, on a

$$(3) \qquad \frac{1}{a-x} = \frac{1}{a\left(1-\frac{x}{a}\right)} = \frac{1}{a} + \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} + \ldots + \frac{x^n}{a^{n+1}} + \ldots,$$

comme on le voit en remplaçant dans (1) x par $\frac{x}{a}$. Ce nouveau développement (3) est convergent quand la valeur absolue de $\frac{x}{a}$ est moindre que 1

$$\left|\frac{x}{a}\right| < 1,$$

c'est-à-dire quand x est compris entre $-a$ et $+a$.

2° Si, dans la formule (1), on change x en $-x^2$, on a

$$(4) \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + x^{4n} - \ldots,$$

développement convergent pour x compris entre -1 et $+1$.

82. Représentation graphique. — Considérons la courbe (*fig.* 53)

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Fig. 53.

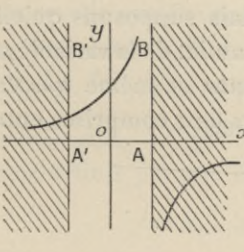
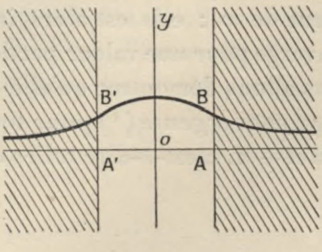


Fig. 54.



Cette courbe est une hyperbole ayant pour asymptote la droite AB, $x = 1$.

Si l'on veut représenter graphiquement la fonction définie par le développement (1)

$$y = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

cette courbe n'existe que pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$, et, dans cet intervalle, elle coïncide avec

$$y = \frac{1}{1-x}.$$

Le développement en série ne représente donc que l'arc de courbe compris entre AB et la droite A'B' symétrique de AB par rapport à Oy.

De même la courbe $y = \frac{1}{1+x^2}$ a la forme indiquée (*fig.* 54); le développement

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots,$$

convergent seulement quand x est compris entre -1 et $+1$, représente l'arc BB' compris entre deux parallèles AB et A'B' à Oy, placées symétriquement par rapport à Oy à une distance 1 de l'origine.

83. Intervalle de convergence d'une série entière. — Théorème. — *Une série entière converge dans un intervalle symétrique par rapport à zéro.*

Considérons une série

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Cette série est toujours convergente pour $x = 0$: sa somme est alors a_0. Il peut se faire qu'elle soit divergente pour toute autre valeur de x : elle est alors inutilisable. Mais supposons qu'elle converge pour une valeur particulière α, non nulle, de la variable x; nous allons démontrer qu'elle est *convergente* et même *absolument convergente* (1) pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$, c'est-à-dire telles que

$$\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1.$$

(1) Une série est *absolument convergente* quand la série des valeurs absolues de ses termes est convergente.

En effet, la série

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_n\alpha^n + \ldots$$

étant convergente par hypothèse, le terme général

$$a_n\alpha^n$$

tend vers zéro. La série proposée peut s'écrire

$$a_0 + a_1\alpha\frac{x}{\alpha} + a_2\alpha^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \ldots + a_n\alpha^n\left(\frac{x}{\alpha}\right)^n + \ldots.$$

Supposons que la valeur absolue de $\frac{x}{\alpha}$ soit moindre que 1,

$$\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1.$$

Comme $a_n\alpha^n$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, il est évident que, pour toutes les valeurs de l'entier n dépassant un nombre fixe suffisamment grand, $a_n\alpha^n$ est, en valeur absolue, moindre que 1. Pour toutes ces valeurs de n, la valeur absolue du terme général de la série proposée

$$|a_n\alpha^n|\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$$

est plus petite que $\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$, c'est-à-dire plus petite que le terme général de la progression géométrique décroissante dont le terme général est $\left|\frac{x}{\alpha}\right|^n$. La série proposée est donc absolument convergente.

D'après cela, on voit que la série converge nécessairement dans un intervalle symétrique par rapport à o, car, dès qu'elle converge pour une valeur α de x, elle converge dans tout l'intervalle de $-\alpha$ à $+\alpha$. Le fait que nous avons vérifié pour les développements de $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{a-x}$, $\frac{1}{1+x^2}$ est donc général. Si l'on veut construire la courbe définie par une équation de la forme

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

cette courbe n'existe qu'entre deux ordonnées symétriques par rapport à l'axe Oy, comme dans les figures 53 et 54.

84. **Intervalle de convergence.** — On appelle *intervalle de convergence* d'une série entière un intervalle $(-a, +a)$ symétrique par rapport à zéro, tel que la série soit convergente pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle, et divergente pour toute valeur extérieure.

A priori on ne peut rien affirmer sur ce qui se passe quand x est égal aux limites mêmes

$$x = \pm a.$$

Il peut arriver que la série converge aux deux limites, ou en une seulement ou en aucune. C'est ce qu'on verra dans les exemples suivants.

Exemples. — 1° La série

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$$

est convergente quand x est compris dans l'intervalle $(-1, +1)$, et divergente quand x est, en valeur absolue, supérieur à 1. En effet, le rapport d'un terme au précédent

$$\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} = \frac{n+1}{n}x$$

tend vers x quand n augmente indéfiniment. Dans cette série, l'intervalle de convergence est l'intervalle allant de -1 à $+1$. La série est divergente pour les valeurs ± 1, car pour $x = \pm 1$, le terme général augmente indéfiniment en valeur absolue.

2° La série

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

est de même convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. L'intervalle de convergence est donc de -1 à $+1$. A l'une des limites $x = -1$, elle est convergente; à l'autre $x = +1$, elle est divergente.

3° La série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

est convergente pour $|x| < 1$, divergente pour $|x| > 1$; l'intervalle de convergence est de -1 à $+1$; elle converge aux deux limites $x = \pm 1$.

4° La série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

est convergente pour toutes les valeurs de x : on peut dire qu'elle converge dans l'intervalle symétrique $-\infty$ à $+\infty$.

5° Le développement de a^x, où a est une constante positive, se ramène immédiatement au précédent. Pour cela, on pose

$$a^x = e^t.$$

t désignant une nouvelle variable ; en prenant les logarithmes népériens des deux membres, on a

$$t = x\,\mathrm{L}a.$$

Alors

$$a^x = e^t = e^{x\mathrm{L}a} = 1 + \frac{x\,\mathrm{L}a}{1} + \frac{x^2(\mathrm{L}a)^2}{1.2} + \ldots.$$

Ce développement converge pour toutes les valeurs de x, de $-\infty$ à $+\infty$.

II. — DIFFÉRENTIATION ET INTÉGRATION DES SÉRIES ENTIÈRES.

85. Théorème. — *Pour obtenir la dérivée ou la fonction primitive d'une fonction définie par une série entière dans l'intervalle de convergence, il suffit de dériver ou d'intégrer la série terme à terme.* C'est là un théorème très important *que nous admettrons* et qui justifie ce que nous avons dit en commençant, c'est que les séries entières peuvent, dans l'intervalle de convergence, être traitées comme des polynomes.

Voici ce qu'il faut entendre d'une façon précise par le théorème que nous venons d'énoncer :

Différentiation d'une série entière. — Soit une série de puissances :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots;$$

dans l'intervalle de convergence, *la dérivée de le fonction $f(x)$*

s'obtient en prenant les dérivées des divers termes de la série, c'est-à-dire que l'on a

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots.$$

Intégration d'une série de puissances. — De même, dans l'intervalle de convergence, *l'intégrale de la fonction $f(x)$ s'obtient en intégrant la série terme à terme*, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_0^x f(x)\,dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \ldots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots.$$

III. — DÉVELOPPEMENTS DE QUELQUES FONCTIONS PARTICULIÈRES.

86. **Développements de** $L(1-x)$, $L(1+x)$, $L\frac{1+x}{1-x}$. — Nous avons rappelé au n° 81 le développement de $\frac{1}{1-x}$ par une progression géométrique

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

convergente entre -1 et $+1$. Multiplions les deux membres par dx et intégrons-les de 0 à x. Nous avons, après avoir changé les signes,

$$L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots,$$

développement convergent également entre -1 et $+1$. Le développement converge encore pour $x=-1$; on peut démontrer et nous admettrons qu'il continue à représenter la fonction; on a donc alors

$$L2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots.$$

En changeant x en $-x$, nous obtenons le développement de $L(1+x)$

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots.$$

Retranchant les deux développements précédents terme à terme et remplaçant la différence des deux logarithmes par le logarithme du quotient, on a

$$\frac{1}{2} \mathrm{L} \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

On ramène aux développements précédents le développement de $\mathrm{L}(a+x)$, où a est une constante positive *différente de* o. En effet, si l'on écrit $a + x = a\left(1 + \frac{x}{a}\right)$, on a

$$\mathrm{L}(a+x) = \mathrm{L}a + \mathrm{L}\left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

On est alors ramené au développement de $\mathrm{L}\left(1 + \frac{x}{a}\right)$, qui se déduit du développement de $\mathrm{L}(1+x)$ par le changement de x en $\frac{x}{a}$; et l'on a

$$\mathrm{L}(a+x) = \mathrm{L}a + \frac{x}{a} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{a^3} - \ldots,$$

développement convergent pour $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$.

87. **Développement de** arc tang x. — Nous avons établi plus haut, comme une conséquence de la théorie élémentaire des progressions géométriques, le développement

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

convergent pour x compris entre -1 et $+1$.

En multipliant par dx et intégrant de o à x, on a

$$\operatorname{arc\,tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

développement qui converge également entre -1 et $+1$. Ce développement converge encore pour la limite $x = 1$; comme arc tang 1 est égal à $\frac{\pi}{4}$, on a, comme dans l'exemple précédent,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

Cette série converge très lentement et ne convient pas pour le calcul de π.

IV. — SÉRIE DE MAC-LAURIN. — APPLICATIONS.

88. **Série de Mac-Laurin.** — Nous venons de développer certaines fonctions particulières en séries de puissances entières et positives de la variable. Nous allons indiquer une formule générale permettant de former le développement en série de puissances d'une fonction quelconque donnée $f(x)$, pourvu que ce développement soit possible.

Soit donc $f(x)$ une fonction donnée : supposons cette fonction développée en une série de la forme

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Comme nous l'avons vu, cette série converge dans un intervalle de $-\alpha$ à $+\alpha$. Dans cet intervalle, la fonction $f(x)$ est continue et a une dérivée

$$(2) \qquad f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots,$$

définie par une nouvelle série de puissances, convergente dans le même intervalle. Cette dérivée première possède alors une dérivée

$$(3) \qquad f''(x) = 2a_2 + 2.3 a_3 x + \ldots + (n-1) n a_n x^{n-2} + \ldots.$$

Cette nouvelle série a, de même, une dérivée

$$(4) \qquad f'''(x) = 2.3 a_3 + \ldots + (n-2)(n-1) n a_n x^{n-3} + \ldots,$$

et ainsi de suite, jusqu'à la dérivée d'ordre n

$$(5) \qquad f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots(n-2)(n-1) n a_n + \ldots.$$

D'après cela, une première condition pour qu'une fonction donnée $f(x)$ puisse être développée en une série de puissances dans un intervalle $-\alpha$, $+\alpha$, est que, dans cet intervalle, elle admette des dérivées de tous les ordres restant toutes finies. Cette condition étant remplie, si le développement est possible, on obtiendra les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, en faisant $x = 0$ dans les formules précédentes (1) à (5). On a ainsi

$$a_0 = f(0), \qquad a_1 = f'(0), \qquad a_2 = \frac{f''(0)}{1.2},$$

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3}, \qquad \ldots, \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2\ldots n}, \qquad \ldots.$$

Portant ces valeurs dans le développement de $f(x)$, on a

$$(6)\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f'''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(0)+\ldots.$$

89. Légitimité du développement. — Telle est la formule de Mac-Laurin. Elle donne le développement de $f(x)$ *quand il est possible.* Mais dans quelles conditions ce développement est-il possible?

Pour cela il faut et il suffit :

1° Que la série du second membre de la formule ait tous ses coefficients finis;

2° Qu'elle soit convergente (dans quelque intervalle symétrique par rapport à l'origine);

3° Que la somme de cette série soit égale à $f(x)$.

Les deux premières conditions sont aisées à vérifier. La troisième est beaucoup plus difficile à vérifier; on y arrive par divers procédés dont on trouvera plus loin des exemples à propos des développements de $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$. On y arrive également, dans certains cas, en évaluant l'erreur commise quand on substitue à la fonction les n premiers termes de la série (6). Cette erreur est fournie par l'application de la formule générale des accroissements finis [formule (6), p. 10], dans laquelle on remplace a par o et h par x : on a ainsi

$$f(x)-f(0)-\frac{x}{1}f'(0)-\frac{x^2}{1.2}f''(0)-\ldots-\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)$$
$$=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x),$$

où $0\leq\theta\leq 1$. L'erreur commise, en remplaçant $f(x)$ par la somme des n premiers termes de la série, est alors

$$\varepsilon_n=\frac{x^n(1-\theta)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n)}(\theta x).$$

90. Développements de $\sin x$ et $\cos x$ — Soit d'abord.

$$f(x)=\sin x;$$

on a, successivement,

$$f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f'''(x) = -\cos x,$$
$$f^{\text{IV}}(x) = \sin x, \qquad \ldots.$$

Faisant $x = 0$, on voit que la fonction et toutes les dérivées d'ordre pair s'annulent; les dérivées d'ordre impair sont alternativement égales à $+1$ et à -1.

On trouve ainsi le développement

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

Ce développement est convergent pour toutes les valeurs de x de $-\infty$ à $+\infty$.

Mais ce fait ne suffit pas pour qu'on puisse affirmer, en toute rigueur, que la somme de la série est bien égale à $\sin x$. C'est ce que nous vérifierons plus loin. On peut aussi vérifier que l'erreur ε_n du n° 89 tend vers zéro.

Pour avoir le développement de $\cos x$, il suffit de prendre la dérivée du développement précédent. On a ainsi

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

91. **Formule d'Euler.** — On peut rattacher ces deux développements à celui de e^x. Soit i l'unité complexe telle que

$$i^2 = -1$$

et, par suite,

$$i^3 = -i, \qquad i^4 = 1, \qquad \ldots,$$

on a, par définition,

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{i^2x^2}{1.2} + \frac{i^3x^3}{1.2.3} + \frac{i^4x^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

En remplaçant les puissances successives de i par leurs valeurs, on voit que les termes de rang impair sont

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

et forment le développement de $\cos x$, puisque les termes de rang pair sont

$$i\left(x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

et forment le développement de $i \sin x$.

On a donc

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Changeant x en $-x$, on a de même

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Si, enfin, l'on ajoute et retranche ces formules membre à membre, on a

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

92. **Vérification.** — Voici comment on peut vérifier que les deux développements ci-dessus représentent bien $\sin x$ et $\cos x$. Posons

$$u = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$v = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

et proposons-nous de déterminer les fonctions u et v de la variable x. On voit immédiatement, en différentiant, que l'on a

$$\frac{du}{dx} = v, \qquad \frac{dv}{dx} = -u.$$

On en conclut, en multipliant la première équation par u et la deuxième par v et ajoutant,

$$u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = 0.$$

Le premier membre de cette relation étant la dérivée de $\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, on en conclut, par l'intégration, que $u^2 + v^2$ est constant

$$u^2 + v^2 = C,$$

C désignant une constante. Pour déterminer cette constante, faisons $x = 0$; alors u se réduit à 0, v à 1, donc $C = 1$ et l'on a

$$u^2 + v^2 = 1.$$

On tire de là

$$v = \pm\sqrt{1 - u^2}$$

et, en portant dans la relation $\frac{du}{dx} = v$,

$$\frac{du}{dx} = \pm\sqrt{1 - u^2}, \qquad \pm\, dx = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Dans cette dernière relation, le premier membre est la différentielle de $\pm x$, le deuxième de $\arcsin u$; on a donc, en prenant le signe $+$,

$$x + \alpha = \arcsin u, \qquad u = \sin(x + \alpha),$$

α désignant une constante arbitraire; en prenant le signe $-$, on a de même

$$-x + \beta = \arcsin u, \qquad u = \sin(-x + \beta),$$

β désignant une constante arbitraire. Ces deux expressions rentrent l'une dans l'autre, car, en posant

$$\beta = -\alpha + \pi,$$

la deuxième devient

$$u = \sin(\pi - x - \alpha) = \sin(x + \alpha).$$

Ensuite la formule $v = \frac{du}{dx}$ donne

$$v = \cos(x + \alpha).$$

Pour déterminer α, remarquons encore que u et v se réduisent, respectivement, à 0 et 1 pour $x = 0$. Nous aurons, en faisant $x = 0$,

$$0 = \sin\alpha, \qquad 1 = \cos\alpha.$$

Donc

$$\alpha = 2k\pi,$$

où k est un entier positif, négatif ou nul, et l'on a enfin

$$u = \sin(x + 2k\pi), \qquad v = \cos(x + 2k\pi),$$

c'est-à-dire

$$u = \sin x, \qquad v = \cos x.$$

93. **Développement de** $(1+x)^m$. — Soit m un nombre quelconque, positif ou négatif, entier ou fractionnaire. Appliquons la formule de Mac-Laurin au développement de

$$f(x) = (1+x)^m.$$

On a immédiatement

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \qquad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2},$$
$$f^{(p)}(x) = m(m-1)\dots(m-p+1)(1+x)^{m-p}.$$

En faisant $x=0$, on en déduit

$$f(0)=1, \qquad f'(0)=m, \qquad f''(0)=m(m-1),$$
$$f^{(p)}(0) = m(m-1)\dots(m-p+1).$$

La formule de Mac-Laurin donne alors

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$
$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-p+1)}{1.2\dots p}x^p + \dots.$$

On a ainsi la formule du binome étendue à un exposant quelconque.

Pour voir dans quelles limites cette série est convergente, prenons le rapport du terme en x^{p+1} au terme précédent en x^p : nous avons pour ce rapport

$$\frac{m-p}{p+1}x.$$

Quand p augmente indéfiniment, ce rapport tend vers $-x$. Donc, quand x est moindre que 1 en valeur absolue, la série est convergente; quand x est supérieur à 1 en valeur absolue, elle est divergente. Nous allons vérifier que, dans l'intervalle de -1 à $+1$, la somme de la série est bien égale à $(1+x)^m$.

94. **Vérification**. — Posons

$$y = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \dots.$$

En prenant la dérivée, on a

$$\frac{dy}{dx} = m\left[1 + \frac{m-1}{1}x + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^2 + \dots\right],$$

puis, en multipliant ce développement par x,

$$x\frac{dy}{dx} = m\left[x + \frac{m-1}{1}x^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}x^3 + \ldots\right].$$

Ajoutons ces deux équations membre à membre, en ordonnant le deuxième membre par rapport à x; il vient

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = m\left[1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots\right],$$

où la série du deuxième membre est y. On a donc

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = my,$$

d'où

$$\frac{dy}{y} = m\frac{dx}{1+x}.$$

Le premier terme est la différentielle de Ly, le deuxième de $mL(1+x)$; les différentielles de ces deux fonctions de x étant égales, ces fonctions diffèrent par une constante et l'on a

$$Ly = mL(1+x) + C.$$

Pour déterminer C, faisons $x = 0$; alors, d'après la série qui définit y, on a

$$y = 1.$$

Comme $L\,1 = 0$, on a

$$C = 0.$$

Donc enfin

$$Ly = mL(1+x), \qquad y = (1+x)^m.$$

95. Développement de $(a+x)^m$, a étant une constante différente de zéro. — On peut écrire

$$(a+x)^m = a^m\left(1+\frac{x}{a}\right)^m.$$

On est donc ramené à développer $\left(1+\frac{x}{a}\right)^m$; ce dernier développement se déduit immédiatement de celui de $(1+x)^m$ en y changeant x en $\frac{x}{a}$:

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^m = 1 + \frac{m}{1}\frac{x}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{x^2}{a^2} + \ldots,$$

développement convergent pour x compris entre $-a$ et $+a$.

96. Développement de arc sin x. — On a

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'après la formule générale précédente, où l'on change x en $-x^2$, on a

$$(1-x^2)^m = 1 - \frac{m}{1}x^2 + \frac{m(m-1)}{1.2}x^4 - \ldots.$$

Faisons $m = -\frac{1}{2}$, alors

$$m-1 = -\frac{3}{2}, \qquad m-2 = -\frac{5}{2}, \qquad \ldots,$$

et l'on trouve

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \ldots.$$

Multiplions les deux membres par dx et intégrons de o à x, il vient

$$\text{arc sin}\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \ldots.$$

Ces développements sont convergents pour x compris entre -1 et $+1$, l'arc étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

97. Méthode des coefficients indéterminés. — Dans les applications, on emploie souvent la méthode des coefficients indéterminés pour calculer les premiers termes du développement d'une fonction en série de puissances.

Prenons par exemple la fonction

$$\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

qui est finie, ainsi que toutes ses dérivées, pour $x = 0$. Posons

$$\frac{\sin x}{\cos x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Le premier membre changeant de signe avec x, il doit en être de même du deuxième. La série ne doit donc contenir que des puissances *impaires* de x. Les coefficients a_0, a_2, a_4, ... sont nuls, et l'on peut, dans la série, mettre x en facteur. On a ainsi, en chassant le dénominateur,

$$\sin x = x \cos x (a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \ldots),$$

et, en remplaçant $\sin x$ et $\cos x$ par leurs développements,

$$x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \ldots\right)$$
$$= x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots\right)(a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \ldots).$$

En faisant le produit des deux séries du deuxième membre et ordonnant suivant les puissances croissantes de x, on doit trouver une série identique au premier membre : on a donc

$$a_1 = 1, \qquad -\frac{a_1}{2} + a_3 = -\frac{1}{6}, \qquad \frac{a_1}{24} - \frac{a_3}{2} + a_5 = \frac{1}{120}, \qquad \ldots,$$

d'où

$$a_1 = 1, \qquad a_3 = \frac{1}{3}, \qquad a_5 = \frac{2}{15}, \qquad \ldots.$$

On a donc

$$\operatorname{tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \ldots$$

V. — SÉRIE DE TAYLOR.

98. **Série de Taylor. Formule.** — La formule de Mac-Laurin permet d'étudier une fonction $f(x)$ dans le voisinage de la valeur $x = 0$; nous avons vu, en effet, que la série de Mac-Laurin converge dans un intervalle symétrique par rapport à zéro.

Pour étudier la fonction $f(x)$ dans le voisinage d'une autre valeur $a \gtrless 0$, on fait un changement de variable en posant

$$x = a + x';$$

alors x étant voisin de a, x' est voisin de zéro; et l'on est ramené à étudier la fonction de x'

$$f(a + x'),$$

dans le voisinage de $x' = 0$. Pour cela, on développe $f(a + x')$ suivant les puissances positives croissantes de x'. La formule qui donne ce développement est la formule de Taylor.

Si, pour un instant, on pose

$$\varphi(x') = f(a + x'),$$

il s'agit de développer $\varphi(x')$ en série de puissances entières et positives de x'. C'est ce qu'on fait en appliquant à $\varphi(x')$ le développement de Mac-Laurin :

$$\varphi(x') = \varphi(0) + \frac{x'}{1}\varphi'(0) + \frac{x'^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots.$$

Or l'identité

$$\varphi(x') = f(a + x')$$

et les identités qu'on en déduit, en prenant les dérivées successives des deux membres par rapport à x', donnent évidemment, pour $x' = 0$,

$$\varphi(0) = f(a), \qquad \varphi'(0) = f'(a), \qquad \varphi''(0) = f''(a), \qquad \ldots.$$

On a donc le développement

$$(\mathrm{T}) \qquad f(a + x') = f(a) + \frac{x'}{1}f'(a) + \frac{x'^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{x'^n}{1.2\ldots n}f^n(a) + \ldots,$$

qui est le développement de Taylor. Pour que ce développement soit applicable, il faut et il suffit que $\varphi(x')$ soit développable par la formule de Mac-Laurin.

Le développement (T) converge pour les valeurs de x' comprises dans un certain intervalle symétrique par rapport à $x' = 0$, c'est-à-dire pour

$$-\alpha < x' < +\alpha.$$

Comme l'on a posé

$$x = a + x',$$

ce développement représente donc la fonction $f(x)$ pour les valeurs de x comprises entre $a - \alpha$ et $a + \alpha$.

En remplaçant, dans le développement (T), a par x et x' par h, on écrit la même formule

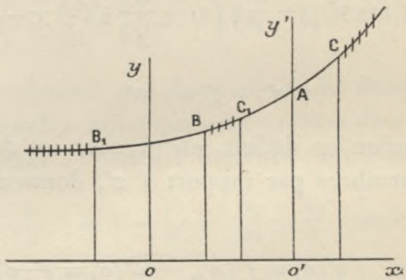
$$f(x + h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots.$$

99. Interprétation géométrique. — Considérons la courbe ayant pour équation

$$y = f(x).$$

Si l'on développe $f(x)$ par la série de Mac-Laurin, on obtient un développement qui représente un arc BB_1 de la courbe, compris entre deux ordonnées symétriques par rapport à Oy (*fig.* 55).

Fig. 55.



Pour étudier la courbe dans le voisinage d'un autre point A, d'abscisse a, on considère l'ordonnée AO' du point A et l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en O' de façon à les amener en $O'x$ et $O'y'$. La nouvelle abscisse x' d'un point de la courbe est liée à l'ancienne x par la formule

$$x = a + x'.$$

L'équation de la courbe devient

$$y = f(a + x'),$$

et, pour étudier la courbe au voisinage du point A, on développe $f(a + x')$ suivant les puissances de x'. La série de Taylor ainsi obtenue représente un nouvel arc CC_1 de la courbe, compris entre deux ordonnées symétriques par rapport à $O'y'$.

Soit, par exemple,

$$y = \frac{1}{1 - x},$$

équation d'une hyperbole ayant pour asymptotes $x = 1$ et $y = 0$. Si l'on forme le développement de Mac-Laurin,

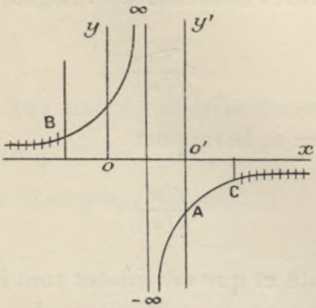
$$y = 1 + x + x^2 + \ldots,$$

il est convergent pour

$$-1 < x < 1;$$

il représente l'arc B∞ compris entre l'asymptote $x = 1$ et la symétrique de l'asymptote par rapport à Oy (*fig.* 56).

Fig. 56.



Pour étudier la courbe au voisinage du point A d'abscisse $OO' = 2$, on fait

$$x = 2 + x';$$

alors

$$y = -\frac{1}{1 + x'} = -1 + x' - x'^2 + \ldots;$$

cette nouvelle série, étant convergente pour

$$-1 < x' < 1,$$

représente l'arc d'hyperbole $-\infty$C compris entre l'asymptote verticale $x' = -1$ et la symétrique $x' = +1$ de cette droite par rapport à la droite $O'y'$.

VI. — APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE PUISSANCES A L'ÉTUDE DES FORMES INDÉTERMINÉES.

100. Formes indéterminées. — Les principaux types de formes indéterminées sont

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \times \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty.$$

Forme $\frac{0}{0}$. — Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions de x qui s'annulent toutes deux pour $x = a$. Le rapport

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

n'a aucun sens pour $x = a$; mais il peut arriver que ce rapport tende vers une limite quand x tend vers a; on dit alors que cette limite est la valeur du rapport pour $x = a$.

On démontre, dans les éléments de l'Algèbre, que si le rapport des dérivées

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

a une limite pour $x = a$, le rapport

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

a également une limite et que ces limites sont les mêmes. Dans un grand nombre de cas, on peut employer les développements en série de la façon suivante : si l'on pose

$$x = a + x',$$

le problème est de voir si le rapport

$$\frac{f(a + x')}{\varphi(a + x')}$$

tend vers une limite quand x' tend vers zéro et de trouver cette limite si elle existe. Si les deux fonctions sont développables par la formule de Taylor, on les développera suivant les puissances de x'; on pourra supprimer une certaine puissance de x', comme facteur commun au numérateur et au dénominateur, et l'on verra immédiatement s'il existe une limite.

Par exemple, prenons le rapport

$$\frac{x - \sin x}{L(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}}$$

pour $x = 0$. Ce rapport prend la forme $\frac{0}{0}\cdot$ Développons les deux termes suivant les puissances de x. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$L(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

Le rapport considéré est donc

$$\frac{\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots}{\frac{x^3}{3}+\ldots}.$$

Divisant haut et bas par x^3 et faisant tendre x vers zéro, on trouve comme limite $\frac{1}{2}$.

Comme deuxième exemple, prenons

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x},$$

pour $x=0$. Ce rapport prend alors la forme $\frac{0}{0}$, car, x tendant vers zéro, $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ tend vers e. On peut encore développer le numérateur suivant les puissances croissantes de x. Il suffit de remarquer que l'on a identiquement

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\mathrm{L}(1+x)},$$

car les deux membres ont même logarithme népérien. Remplaçons $\mathrm{L}(1+x)$ par son développement en série, on a

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e^{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\cdots}=e.e^u,$$

en posant

$$u=-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\ldots.$$

Si, dans la série

$$e^u=1+\frac{u}{1}+\frac{u^2}{1.2}+\ldots,$$

on remplace u par sa valeur et si l'on ordonne le résultat par rapport aux puissances de x, on a

$$e^u=1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2+\ldots.$$

Donc

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2+\ldots\right)$$

et le rapport proposé

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$$

devient, après la suppression du facteur x au numérateur et au dénominateur,

$$-\frac{1}{2}e+\frac{11}{24}ex+\ldots.$$

La limite cherchée est donc $-\frac{1}{2}e$.

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. — Si deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ deviennent infinies pour $x=a$, le rapport

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

prend, pour $x=a$, la forme $\frac{\infty}{\infty}$. En écrivant ce rapport

$$\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

on est ramené à la forme $\frac{0}{0}$.

On peut, dans certains cas, trouver directement la limite, sans passer par cette transformation. Soit, par exemple, le rapport

$$\frac{x^p}{e^{mx}},$$

où p et m sont des nombres positifs. Quand x augmente indéfiniment, ce rapport prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour trouver sa limite, développons e^{mx} en série; le rapport devient

$$\frac{x^p}{1+\frac{mx}{1}+\frac{m^2x^2}{1.2}+\ldots+\frac{m^nx^n}{1.2\ldots n}+\ldots}.$$

Soit n un entier supérieur à p. Divisons le numérateur et le dénominateur par x^n, il vient

$$\frac{x^{p-n}}{\frac{1}{x^n}+\frac{m}{1}\frac{1}{x^{n-1}}+\ldots+\frac{m^n}{1.2\ldots n}+\frac{m^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}x+\ldots}.$$

Quand x augmente indéfiniment, le numérateur tend vers zéro; le dénominateur augmente indéfiniment, car, après les n premiers termes du dénominateur qui tendent vers zéro, viennent des termes tous positifs qui augmentent indéfiniment.

Le rapport tend donc vers zéro.

Forme $0 \times \infty$. — Cette forme se ramène à l'une des précédentes. Soit, en effet, un produit

$$f(x)\,\varphi(x),$$

dans lequel $f(x)$ devient nul pour $x = a$ et $\varphi(x)$ infini. En écrivant ce produit

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}},$$

on voit qu'il prend la forme $\frac{0}{0}$, et en l'écrivant

$$\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

on voit qu'il prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$.

Considérons par exemple le produit

$$x^m \mathrm{L}x,$$

où m est positif. Quand x tend vers zéro, ce produit prend la forme $0 \times \infty$.

La fonction $\mathrm{L}x$ ne peut pas être développée par la formule de Mac-Laurin. Nous ferons un changement de variable en posant

$$x = e^{-t}.$$

Pour faire tendre x vers zéro, il faut faire croître t indéfiniment par valeurs positives. On a alors

$$x^m \mathrm{L}x = -t\,e^{-mt} = -\frac{t}{e^{mt}}.$$

Pour t infini, ce dernier rapport tend vers zéro, d'après l'exemple précédent; le produit $x^m\mathrm{L}x$ tend donc vers zéro avec x.

Formes 0^0, ∞^0, 1^∞. Ces formes se ramènent aux précédentes en prenant les logarithmes des fonctions qui se présentent sous l'une de ces formes.

Ainsi, prenons la fonction

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)},$$

où, pour $x = a$,

$$f(a) = 0, \qquad \varphi(a) = 0.$$

L'expression

$$\mathrm{L}y = \varphi(x)\,\mathrm{L}f(x)$$

prend, pour $x = a$, la forme $0 \times \infty$.

Soit, par exemple, l'expression

$$y = x^x,$$

où x tend vers zéro. On a

$$\mathrm{L}y = x\,\mathrm{L}x.$$

Quand x tend vers zéro, le produit $x\,\mathrm{L}x$ tend vers zéro, comme nous venons de le voir; donc $\mathrm{L}y$ tend vers zéro et y tend vers 1.

Forme $\infty - \infty$. — Soit une différence

$$f(x) - \varphi(x)$$

dans laquelle $f(x)$ et $\varphi(x)$ deviennent infinis pour $x = a$. On écrira cette différence

$$f(x)\left[1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}\right].$$

Quand x tend vers a, le rapport

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}$$

prend la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Si ce rapport tend vers une limite l différente de 1, le facteur $1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ tend vers la limite $1 - l$ différente de zéro, et comme $f(x)$ devient infini, la quantité considérée augmente au delà de toute limite.

Si le rapport $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ tend vers 1, le facteur $1 - \frac{\varphi(x)}{f(x)}$ tend vers zéro; le facteur $f(x)$ devient infini et la quantité considérée prend la forme

$$\infty \times 0;$$

elle peut donc alors avoir une limite.

Prenons, par exemple, la différence

$$\delta = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x}$$

pour $x = +\infty$. Cette différence se présente alors sous la forme $\infty - \infty$. On constate immédiatement que le rapport des deux radicaux tend vers 1. La différence peut donc avoir une limite. Pour la trouver, écrivons

$$\delta = x\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} - x\sqrt{1 + \frac{1}{x}},$$

car, x étant positif,

$$\sqrt{x^2} = x$$

et, dans tous les cas,

$$\sqrt[3]{x^3} = x.$$

On a donc

$$\delta = x(1 + u)^{\frac{1}{3}} - x(1 + v)^{\frac{1}{2}},$$

où

$$u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}, \qquad v = \frac{1}{x}.$$

Quand x est très grand, u et v sont moindres que 1 et l'on peut développer $(1 + u)^{\frac{1}{3}}$ et $(1 + v)^{\frac{1}{2}}$ par la formule du binome

$$(1 + u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} u + \ldots,$$

$$(1 + v)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} v + \ldots.$$

Remplaçant u et v par leurs valeurs et ordonnant les deux séries par rapport aux puissances de $\frac{1}{x}$, on a

$$(1 + u)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3} + \ldots,$$

$$(1 + v)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \frac{A'}{x^2} + \frac{B'}{x^3} + \ldots.$$

La différence δ devient alors

$$\delta = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{A - A'}{x} + \frac{B - B'}{x^2} + \ldots,$$

et, pour $x = +\infty$,

$$\lim \delta = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}.$$

On peut remarquer que, pour $x = -\infty$, la différence δ n'est pas indéterminée ; elle est infiniment grande et négative.

CHAPITRE VII.

QUELQUES MÉTHODES D'INTÉGRATION.

Nous nous occupons, dans ce Chapitre, de quelques catégories de différentielles pour lesquelles il existe des méthodes générales d'intégration. Ce sont les différentielles rationnelles, et celles qui peuvent être rendues rationnelles par un changement de variable.

Nous indiquons, en commençant, quelques cas simples de réduction immédiate aux types élémentaires connus.

I. — RÉDUCTION AUX TYPES ÉLÉMENTAIRES.

101. **Cas de réduction aux types élémentaires.** — Étant donnée une intégrale

$$\int f(x)\,dx,$$

il faut d'abord voir si, par un changement de variable, on ne peut pas la ramener à un des types élémentaires du Tableau (n° 27). En d'autres termes, il faut voir si, en appelant u une certaine fonction de x, l'intégrale ne peut pas se mettre, à un facteur constant près, sous une des formes

$$\int u^m\,du,\quad \int \frac{du}{u},\quad \int \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}},\quad \int \frac{du}{u^2+k^2},$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+l}},\quad \cdots\cdot$$

L'intégration est alors immédiate.

Exemples. — 1° Soit à trouver

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+2}\,dx.$$

On peut remarquer que le numérateur est, au facteur 3 près, la différentielle du dénominateur, car

$$d(x^3+3x+2) = 3(x^2+1)\,dx.$$

En faisant

$$u = x^3+3x+2,$$

on peut donc écrire l'intégrale

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u};$$

comme cette dernière intégrale est égale à $\frac{1}{3}\mathrm{L}u + \mathrm{C}$, l'intégrale proposée est égale à

$$\frac{1}{3}\mathrm{L}(x^3+3x+2)+\mathrm{C}.$$

2° Soit de même

$$\int \operatorname{tang} x\,dx.$$

En écrivant cette intégrale

$$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x},$$

on voit qu'elle est de la forme

$$-\int \frac{du}{u},$$

u étant ici égal à $\cos x$. Donc

$$\int \operatorname{tang} x\,dx = -\mathrm{L}\cos x + \mathrm{C}.$$

On trouve, par un calcul semblable,

$$\int \cot x\,dx = \mathrm{L}\sin x + \mathrm{C}.$$

3° Soit l'intégrale

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+2x+2}};$$

on remarquera que le numérateur est, au facteur 2 près, la différentielle du trinome sous le radical. Si donc on fait

$$x^2+2x+2=u,$$

on a

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}},$$

intégrale qui est égale à

$$\sqrt{u}+\mathrm{C}.$$

4° Soit l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

en divisant haut et bas par x^2, on peut l'écrire

$$-\int \frac{d\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}};$$

on voit qu'elle est

$$-\arcsin\frac{1}{x}+\mathrm{C}.$$

II. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES.

102. Méthode générale. — Une fraction rationnelle $\mathrm{R}(x)$, d'une variable x, est une fonction de x qui peut se mettre sous la forme du quotient de deux polynomes entiers en x :

$$\mathrm{R}(x)=\frac{\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1x+\mathrm{A}_2x^2+\ldots+\mathrm{A}_mx^m}{\mathrm{B}_0+\mathrm{B}_1x+\mathrm{B}_2x^2+\ldots+\mathrm{B}_px^p},$$

m et p désignant deux entiers. Pour calculer l'intégrale

$$\int \mathrm{R}(x)\,dx,$$

on décompose la fraction rationnelle $\mathrm{R}(x)$ en fractions simples et l'on intègre ensuite chaque fraction simple séparément. Comme on l'a vu en Algèbre, pour faire cette décomposition, il faut connaître les racines du dénominateur de $\mathrm{R}(x)$. Ces racines une fois connues, la décomposition de la fraction rationnelle en fractions simples peut se faire par la méthode des coefficients indéterminés et n'exige plus que la résolution d'équations du premier degré.

Les seules difficultés que pourra présenter l'intégration seront donc d'*ordre algébrique;* elles porteront sur le calcul des racines du dénominateur.

Exemples. — I. Soit à calculer

$$\int \frac{x^3+1}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Les racines du dénominateur sont deux racines simples réelles 1 et 2. Comme le degré du numérateur surpasse d'une unité celui du dénominateur, la méthode de décomposition d'une fraction rationnelle en fractions simples donnera la fraction considérée sous forme d'une partie entière du premier degré, suivie de deux fractions simples ayant pour dénominateurs $x-1$ et $x-2$,

$$\frac{x^3+1}{x^2-3x+2} = Ax + B + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-2}.$$

Les coefficients A, B, C, D doivent être choisis de façon à rendre le deuxième membre identique au premier. En chassant les dénominateurs, on a l'identité

$$x^3+1 = (Ax+B)(x^2-3x+2) + C(x-2) + D(x-1).$$

Identifiant les termes en x^3 et en x^2, on a

$$A = 1, \qquad B - 3A = 0, \qquad B = 3.$$

Faisant ensuite $x = 1$, puis $x = 2$, on a

$$C = -2, \qquad D = 9.$$

L'intégrale proposée est donc identique à

$$\int (x+3)\,dx - \int \frac{2\,dx}{x-1} + \int \frac{9\,dx}{x-2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{x^2}{2} + 3x - 2L(x-1) + 9L(x-2) + \text{const.}$$

II. Soit à calculer

$$\int \frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}\,dx.$$

Actuellement, le dénominateur admet la racine triple $x=0$ et deux racines simples imaginaires conjuguées annulant le trinome x^2+x+1.

Comme le numérateur est d'un degré inférieur à celui du dénominateur, il n'y a pas de partie entière dans la formule de décomposition et l'on a une décomposition de la forme

$$\frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)} = \frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

où il reste à déterminer A, B, C, M et N. Pour cela, chassons les dénominateurs, nous aurons l'identité

$$x^4+1 = (A+Bx+Cx^2)(x^2+x+1)+(Mx+N)x^3.$$

Égalons les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, en suivant l'ordre des puissances croissantes : nous avons

$$A=1,\qquad A+B=0,\qquad A+B+C=0,$$
$$B+C+N=0,\qquad C+M=1.$$

D'où l'on tire immédiatement

$$A=1,\qquad B=-1,\qquad C=0,\qquad N=1,\qquad M=1.$$

L'intégrale proposée est donc identique à

$$\int\frac{dx}{x^3}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Les deux premières intégrales s'obtiennent immédiatement : elles sont de la forme

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

où m est égal à -3, puis à -2. Reste à calculer

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Pour cela, décomposons le trinome du dénominateur en carrés, l'intégrale devient

$$\int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx,$$

et, en faisant, pour un instant,

$$x+\frac{1}{2}=t\sqrt{\frac{3}{4}},\qquad dx=\sqrt{\frac{3}{4}}\,dt,$$

de façon à ramener le dénominateur à la forme t^2+1,

$$\int \frac{\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)dt}{t^2+1}.$$

En écrivant cette intégrale

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2+1},$$

on voit qu'elle est égale à

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}(t^2+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang} t+\text{const.},$$

ou, en revenant à la variable x,

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right]+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\text{const.};$$

la quantité soumise au signe L peut s'écrire, un peu plus simplement, $\frac{4}{3}(x^2+x+1)$; en remplaçant le logarithme du produit par la somme des logarithmes des facteurs et fondant la constante $\frac{1}{2}\mathrm{L}\frac{4}{3}$ dans la constante arbitraire, on a enfin

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\text{const.}$$

En résumé,

$$\int\frac{x^4+1}{x^3(x^2+x+1)}\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\mathrm{L}(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tang}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\text{const.}$$

103. Cas général. — Si l'on considère une fraction rationnelle quelconque $R(x)$, et si on la décompose en fractions simples, on trouve des termes des divers types suivants : d'abord une partie entière

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r, \tag{I}$$

quotient du numérateur par le dénominateur; puis des termes de la forme

$$\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A^{(\alpha-1)}}{(x-a)^\alpha}, \tag{II}$$

provenant d'une racine réelle a d'ordre α du dénominateur (A, A', ..., $A^{(\alpha-1)}$ sont des constantes); puis enfin des termes de la forme

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \ldots + \frac{M_\nu x + N_\nu}{(x^2 + px + q)^\nu}, \tag{III}$$

provenant d'un couple de racines imaginaires conjuguées d'ordre ν du dénominateur ($x^2 + px + q$ est un trinome du deuxième degré admettant ces deux racines conjuguées; M_1, N_1, ..., M_ν, N_ν sont des constantes).

Pour calculer l'intégrale

$$\int R(x)\,dx,$$

il suffit de calculer les intégrales des expressions (I), (II) et (III) multipliées par dx. La partie entière (I) donne l'intégrale

$$a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + a_r \frac{x^{r+1}}{r+1} + \text{const.};$$

les fractions simples (II) provenant d'une racine réelle donnent l'intégrale

$$A\,L(x-a) - \frac{A'}{x-a} - \frac{A''}{2(x-a)^2} - \ldots - \frac{A^{(\alpha-1)}}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} + \text{const.}$$

Il reste donc à calculer les termes de l'intégrale provenant des fractions simples telles que (III). Ces termes se calculent par voie récurrente comme il suit.

104. Calcul de $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$. — Chacun des termes de la somme (III) donne une intégrale de la forme

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx,$$

où n a des valeurs entières positives $n=1$, $n=2$, ..., $n=\nu$. Pour calculer cette intégrale, décomposons d'abord le trinome x^2+px+q en carrés :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Les racines du trinome étant imaginaires, $q-\frac{p^2}{4}$ est positif; mais le calcul que nous allons faire pouvant s'appliquer également au cas où les racines seraient réelles, nous ferons

$$q-\frac{p^2}{4}=h,$$

h pouvant être positif ou négatif. L'intégrale s'écrit alors

$$\int \frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+h\right]^n}\,dx,$$

et, en faisant le changement de variable,

$$x+\frac{p}{2}=t,$$

$$\int \frac{Mt+N-M\frac{p}{2}}{(t^2+h)^n}\,dt,$$

intégrale qui se partage en deux parties

$$M\int\frac{t\,dt}{(t^2+h)^n}+\left(N-M\frac{p}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+h)^n}.$$

Comme $2t\,dt$ est la différentielle de t^2+h, la première intégrale est

$$-\frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(t^2+h)^{n-1}},$$

quand n est différent de 1, et

$$\frac{1}{2} \mathrm{L}(t^2 + h),$$

quand $n = 1$.

Reste à calculer l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2 + h)^n}.$$

Nous allons, en supposant n supérieur à 1, établir une formule récurrente entre I_n et I_{n-1}. Pour cela, partons de

$$\mathrm{I}_{n-1} = \int \frac{dt}{(t^2 + h)^{n-1}}$$

et écrivons cette intégrale sous la forme $\int u\, dv$ en posant

$$u = \frac{1}{(t^2 + h)^{n-1}}, \qquad v = t.$$

L'intégration par parties donne

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I}_{n-1} = \frac{t}{(t^2 + h)^{n-1}} + 2(n-1) \int \frac{t^2}{(t^2 + h)^n} dt.$$

Dans la dernière intégrale, écrivons le numérateur sous la forme

$$t^2 + h - h;$$

cette intégrale devient $\mathrm{I}_{n-1} - h\mathrm{I}_n$. On a donc

$$\mathrm{I}_{n-1} = \frac{t}{(t^2 + h)^{n-1}} + 2(n-1)(\mathrm{I}_{n-1} - h\mathrm{I}_n),$$

d'où, en résolvant par rapport à I_n,

$$(1) \qquad 2(n-1)h\mathrm{I}_n = \frac{t}{(t^2 + h)^{n-1}} + (2n-3)\mathrm{I}_{n-1}.$$

Le calcul de I_n est ainsi ramené à celui de I_{n-1}.

Cette formule étant établie, pour calculer une intégrale I_ν, où ν est un entier positif quelconque, on fera successivement, dans la formule récurrente (1),

$$n = \nu, \qquad n = \nu - 1, \qquad n = \nu - 2, \qquad \ldots, \qquad n = 2,$$

et l'on sera ramené finalement à calculer l'intégrale I_1 :

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + h}.$$

Quand h est positif, cette intégrale s'écrit

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{h}} \int \frac{d\frac{t}{\sqrt{h}}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{h}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{h}} \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{h}}.$$

Quand h est négatif, $h = -k^2$, on a

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 - k^2} = \frac{1}{2k} \mathrm{L} \frac{t - k}{t + k}.$$

Remarque. — Au point de vue pratique, il y aura avantage à commencer le calcul par I_1, I_2, etc. Car le calcul de I_1 servira pour celui de I_2; celui de I_2 pour I_3; et ainsi de suite.

Exemples. — 1° Soit à calculer

$$I = \int \frac{x + 1}{(x^2 + 4x + 6)^3} dx.$$

Décomposant le trinome en carrés, on a

$$x^2 + 4x + 6 = (x + 2)^2 + 2;$$

si l'on pose alors

$$x + 2 = t,$$

l'intégrale I devient

$$I = \int \frac{t - 1}{(t^2 + 2)^3} dt = \int \frac{t\,dt}{(t^2 + 2)^3} - \int \frac{dt}{(t^2 + 2)^3},$$

$$I = -\frac{1}{4} \frac{1}{(t^2 + 2)^2} - I_3,$$

en posant, comme plus haut,

$$I_n = \int \frac{dt}{(t^2 + 2)^n},$$

la quantité h est égale à 2. Si, dans la formule récurrente (1), on fait $n=3$, puis $n=2$, on a

$$8\,I_3=\frac{t}{(t^2+2)^2}+3\,I_2,$$

$$4\,I_2=\frac{t}{t^2+2}+I_1.$$

D'où

$$8\,I_3=\frac{t}{(t^2+2)^2}+\frac{3}{4}\,\frac{t}{t^2+2}+\frac{3}{4}\,I_1,$$

$$I_1=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{\sqrt{2}}.$$

L'intégrale proposée I a donc pour valeur, à une constante près,

$$I=-\frac{1}{4}\,\frac{1}{(t^2+2)^2}-\frac{1}{8}\,\frac{t}{(t^2+2)^2}-\frac{3}{32}\,\frac{t}{t^2+2}-\frac{3}{32}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{\sqrt{2}},$$

ou, en revenant à la variable x et réunissant les termes de même dénominateur,

$$I=-\frac{1}{8}\,\frac{ax+4}{(x^2+4x+6)^2}-\frac{3}{32}\,\frac{x+2}{x^2+4x+6}-\frac{3}{32}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\text{arc tang}\,\frac{x+2}{\sqrt{2}}.$$

2° Soit à calculer

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx.$$

On a

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=\left(x^2+1-x\sqrt{2}\right)\left(x^2+1+x\sqrt{2}\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{x^4+1}&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{x}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}-\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right)\\&\quad+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{x^2+x\sqrt{2}+1}\right).\end{aligned}$$

L'intégrale indéfinie est alors

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\,L\,\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

La première partie s'annule aux limites $-\infty$ et $+\infty$, car l'argument du logarithme est égal à 1 pour ces deux limites. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

En faisant, dans la première intégrale $x - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}u$, on voit qu'elle devient

$$\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

La deuxième a la même valeur.

Donc :

$$\mathrm{I} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

III. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES EN $\sin x$ ET $\cos x$.

105. Méthode générale. — Soit une intégrale de la forme

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{R}(\sin x, \cos x)\, dx,$$

où R désigne une fonction rationnelle de $\sin x$ et $\cos x$. On ramène cette intégrale à l'intégrale d'une différentielle rationnelle en faisant le changement de variable

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = t,$$

où t est la nouvelle variable. On tire de là

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \qquad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$
$$\frac{x}{2} = \operatorname{arc\,tang} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1 + t^2}.$$

L'intégrale proposée devient alors

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{R}\left(\frac{2t}{1 + t^2}, \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) \frac{2\,dt}{1 + t^2};$$

c'est l'intégrale d'une différentielle rationnelle en t.

Remarque. — Une fonction rationnelle en $\operatorname{tang} x$, $\cot x$, $\operatorname{séc} x$, $\operatorname{coséc} x$ est aussi une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, puisque

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\operatorname{séc} x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Exemples. — I. Soit à calculer

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Par l'introduction de la variable t, cette intégrale devient

$$\int \frac{dt}{t} = \mathrm{L}\, t + \text{const.}$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \mathrm{L} \operatorname{tang} \frac{x}{2} + \text{const.}$$

On en conclut, en changeant, dans les deux membres, x en $x + \frac{\pi}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \mathrm{L} \operatorname{tang} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \text{const.}$$

II. Soit à calculer

$$\int \frac{\cos x}{2 + \cos x}\, dx.$$

En faisant

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = t, \qquad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad dx = \frac{2\, dt}{1 + t^2},$$

on a à calculer

$$\int \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)(3 + t^2)}\, dt.$$

La fonction sous le signe d'intégration est rationnelle en t^2. En la décomposant en fractions simples, on a une décomposition de la forme

$$\frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)(3 + t^2)} = \frac{A}{1 + t^2} + \frac{B}{3 + t^2}.$$

Chassant les dénominateurs et identifiant, on trouve

$$A = 2, \qquad B = -4.$$

On est donc ramené à calculer

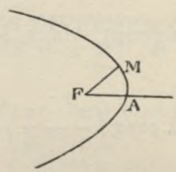
$$2\int\frac{dt}{1+t^2}-4\int\frac{dt}{3+t^2}=2\,\text{arc tang}\,t-\frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{t}{\sqrt{3}}+\text{const.}$$

En revenant à la variable x, on a enfin

$$\int\frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx=x-\frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2}\right)+\text{const.}$$

III. *Aire d'un secteur parabolique compté autour du foyer.* — Considérons une parabole de foyer F et de sommet A. Soient r et θ les coordonnées polaires d'un point M, r désignant le rayon vecteur FM et θ l'angle polaire AFM. Nous nous proposons d'évaluer l'aire du secteur AFM : c'est là une question qui se présente en Mécanique pour le mouvement parabolique des comètes autour du Soleil (*fig.* 57).

Fig. 57.



L'équation de la parabole, rapportée à son foyer et à son axe, est

$$r=\frac{p}{1+\cos\theta}.$$

D'autre part, la différentielle de l'aire S d'un secteur est (n° 45)

$$dS=\frac{1}{2}r^2\,d\theta=\frac{1}{2}\,\frac{p^2}{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta.$$

Donc

$$S=\frac{p^2}{2}\int_0^\theta\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}.$$

La limite inférieure est zéro, car S est nul avec θ. Pour évaluer cette intégrale, faisons

$$\text{tang}\,\frac{\theta}{2}=t,\qquad \cos\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad d\theta=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Il vient, comme t s'annule avec θ,

$$S = \frac{p^2}{4}\int_0^t (1+t^2)\,dt = \frac{p^2}{4}\left(t+\frac{t^3}{3}\right).$$

106. Différentielles rationnelles en $\tan x$. — La méthode générale se simplifie dans le cas où il s'agit de trouver l'intégrale d'une différentielle rationnelle en $\operatorname{tang} x$:

$$\int R(\operatorname{tang} x)\,dx.$$

Dans ce cas, il suffit de poser

$$\operatorname{tang} x = u, \qquad x = \operatorname{arc\,tang} u, \qquad dx = \frac{du}{1+u^2},$$

pour être ramené à l'intégration d'une différentielle rationnelle

$$\int R(u)\frac{du}{1+u^2}.$$

Exemples. — 1° Soit

$$\int \operatorname{tang}^3 x\,dx;$$

par la substitution que nous venons d'indiquer, on trouve, pour cette intégrale,

$$\int \frac{u^3}{1+u^2}\,du = \int\left(u - \frac{u}{1+u^2}\right)du = \frac{u^2}{2} - \frac{1}{2}L(1+u^2) + C.$$

2° Soit à calculer

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tang} x}.$$

Cette intégrale devient

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(1+u)(1+u^2)} &= \int\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\,\frac{1-u}{1+u^2}\right)du\\ &= \frac{1}{2}L(1+u) + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tang} u - \frac{1}{4}L(1+u^2) + C.\end{aligned}$$

Remarque. — Il peut arriver qu'une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, $R(\sin x, \cos x)$, puisse s'exprimer rationnellement en $\operatorname{tang} x$. Dans ce cas l'intégrale

$$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$$

se calculera par la substitution $\operatorname{tang} x = u$.

Le théorème suivant indique immédiatement si l'on se trouve dans ce cas simple :

Pour qu'une fonction rationnelle de $\sin x$ *et de* $\cos x$ *soit une fonction rationnelle de* $\operatorname{tang} x = u$, *il faut et il suffit qu'elle ne change pas quand on change* x *en* $x + \pi$.

La condition est nécessaire, car $u = \operatorname{tang} x$ ne change pas quand on change x en $x + \pi$. Elle est suffisante ; en effet, on a $\sin x = u \cos x$; la fonction s'écrit donc $R(u \cos x, \cos x)$; elle est rationnelle en u et en $\cos x$. Si l'on change x en $x + \pi$, u ne change pas, $\cos x$ devient $-\cos x$; par hypothèse, la fonction $R(u \cos x, \cos x)$ ne change pas : elle ne contient donc *que des puissances paires* de $\cos x$; elle est rationnelle en u, car $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + u^2}\cdot$

Par exemple, la fonction

$$y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos^3 x}$$

ne change pas quand on remplace x par $x + \pi$. Elle est rationnelle en u : $y = \dfrac{u(1 + u^2)}{u^3 + u + 1}\cdot$

IV. — QUELQUES INTÉGRALES SE RATTACHANT AUX PRÉCÉDENTES.

107. Intégrales d'un produit de sinus et de cosinus. — 1° Soit d'abord une intégrale de la forme

$$\int \cos(ax + \alpha) \cos(bx + \beta)\, dx,$$

où a, b, α et β désignent des constantes. On remplacera le produit de cosinus par une somme, d'après l'identité

$$\cos\lambda \cos\mu = \frac{1}{2}[\cos(\lambda + \mu) + \cos(\lambda - \mu)],$$

qui donne

$$(1)\qquad \cos(ax+\alpha)\cos(bx+\beta)=\frac{1}{2}\left\{\cos[(a+b)x+\alpha+\beta] + \cos[(a-b)x+\alpha-\beta]\right\}.$$

D'où l'on tire immédiatement

$$\int\cos(ax+\alpha)\cos(bx+\beta)\,dx = \frac{1}{2}\frac{\sin[(a+b)x+\alpha+\beta]}{a+b} + \frac{1}{2}\frac{\sin[(a-b)x+\alpha-\beta]}{a-b}+C.$$

Cette intégrale change de forme quand $a+b$ ou $a-b$ est nul. Par exemple, si $b=a$, x disparaît dans le deuxième cosinus du second membre de l'identité (1) et l'on a

$$\int\cos(ax+\alpha)\cos(ax+\beta)\,dx = \frac{1}{2}\frac{\sin(2ax+\alpha+\beta)}{2a} + \frac{1}{2}x\cos(\alpha-\beta)+C.$$

2° En partant de l'identité

$$\sin\lambda\sin\mu=\frac{1}{2}[\cos(\lambda-\mu)-\cos(\lambda+\mu)],$$

on trouve de même pour

$$\int\sin(ax+\alpha)\sin(bx+\beta)\,dx,$$

l'expression

$$\frac{1}{2}\frac{\sin[(a-b)x+\alpha-\beta]}{a-b}-\frac{1}{2}\frac{\sin[(a+b)x+\alpha+\beta]}{a+b}+C,$$

qui change de forme, quand $b=a$ ou $b=-a$.

Si $b=a$, on a

$$\int\sin(ax+\alpha)\sin(ax+\beta)\,dx=\frac{1}{2}x\cos(\alpha-\beta)-\frac{1}{2}\frac{\sin(2ax+\alpha+\beta)}{2a}.$$

3° Enfin, l'identité

$$\sin\lambda\cos\mu=\frac{1}{2}[\sin(\lambda+\mu)+\sin(\lambda-\mu)]$$

donne de même, pour l'intégrale

$$\int\sin(ax+\alpha)\cos(bx+\beta)\,dx,$$

l'expression

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos[(a+b)x+\alpha+\beta]}{a+b}-\frac{1}{2}\frac{\cos[(a-b)x+\alpha-\beta]}{a-b}+C,$$

qui change de forme pour $a=\pm b$, et qui devient, pour $a=b$,

$$-\frac{1}{2}\frac{\cos(2ax+\alpha+\beta)}{2a}+\frac{1}{2}x\sin(\alpha-\beta)+C.$$

4° Si l'on a une intégrale portant sur un produit de plusieurs sinus et cosinus d'arcs linéaires en x comme les précédents, on remplace ce produit par une somme de sinus et cosinus : l'intégration est alors immédiate.

Par exemple, si le produit comprend trois facteurs

$$\cos\lambda\cos\mu\cos\nu,$$

où

$$\lambda=ax+\alpha,\qquad \mu=bx+\beta,\qquad \nu=cx+\gamma,$$

on remplace d'abord $\cos\lambda\cos\mu$ par une somme

$$\cos\lambda\cos\mu=\frac{1}{2}\cos(\lambda+\mu)+\frac{1}{2}\cos(\lambda-\mu);$$

en multipliant par $\cos\nu$, on a deux produits qu'on remplace, à leur tour, par des sommes

$$\cos(\lambda+\mu)\cos\nu=\frac{1}{2}\cos(\lambda+\mu+\nu)+\frac{1}{2}\cos(\lambda+\mu-\nu),$$
$$\cos(\lambda-\mu)\cos\nu=\frac{1}{2}\cos(\lambda-\mu+\nu)+\frac{1}{2}\cos(\lambda-\mu-\nu).$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned}\cos\lambda\cos\mu\cos\nu = {} & \frac{1}{4}\cos(\lambda+\mu+\nu)+\frac{1}{4}\cos(\lambda+\mu-\nu)\\ & +\frac{1}{4}\cos(\lambda-\mu+\nu)+\frac{1}{4}\cos(\lambda-\mu-\nu).\end{aligned}$$

L'intégration est alors immédiate.

108. Puissance positive d'un sinus ou d'un cosinus. — La méthode que nous venons de donner, pour trouver l'intégrale d'un produit de sinus et de cosinus, s'applique évidemment quand plusieurs facteurs du produit deviennent égaux. Supposons-les tous égaux, nous aurons une intégrale de la forme

$$\int \cos^m(ax+\alpha)\,dx$$

ou

$$\int \sin^m(ax+\alpha)\,dx,$$

m étant un *entier positif*.

Si l'on fait

$$ax+\alpha=u,$$

ces intégrales deviennent

$$\frac{1}{a}\int \cos^m u\,du,\quad \frac{1}{a}\int \sin^m u\,du.$$

Pour les évaluer on remplace $\cos^m u$ et $\sin^m u$ par une somme de cosinus et de sinus des multiples de u. Les expressions de $\cos^m u$ et de $\sin^m u$ par des sommes peuvent se calculer de proche en proche; par exemple :

$$\cos^2 u = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2u;$$

multipliant par $\cos u$ et remplaçant le produit $\cos u \cos 2u$ par une somme, on a

$$\cos^3 u = \frac{1}{2}\cos u+\frac{1}{4}\cos 3u+\frac{1}{4}\cos u=\frac{3}{4}\cos u+\frac{1}{4}\cos 3u.$$

Multipliant par $\cos u$ et remplaçant chaque terme du second membre par une somme, on a $\cos^4 u$; et ainsi de suite.

On peut opérer plus rapidement comme il suit. Posons

$$e^{ui}=\lambda,\qquad e^{-ui}=\mu;$$

d'où, d'après l'identité d'Euler (n° 91),

$$\cos u\ =\frac{1}{2}(\lambda\ +\mu),\qquad \sin u\ =\frac{1}{2i}(\lambda\ -\mu),$$

$$\cos nu=\frac{1}{2}(\lambda^n+\mu^n),\qquad \sin nu=\frac{1}{2i}(\lambda^n-\mu^n).$$

On a donc, d'après l'expression de $\cos u$,

$$\cos^m u = \frac{1}{2^m}(\lambda+\mu)^m = \frac{1}{2^m}\Big[\lambda^m+\mu^m+\frac{m}{1}\lambda\mu(\lambda^{m-2}+\mu^{m-2}) + \frac{m(m-1)}{1.2}\lambda^2\mu^2(\lambda^{m-4}+\mu^{m-4})+\ldots\Big].$$

Dans cette formule, on développe $(\lambda+\mu)^m$ par la formule du binome et l'on réunit les termes qui ont mêmes coefficients : le premier et le dernier, le deuxième et l'avant-dernier, etc. Or on a

$$\lambda\mu = 1,$$
$$\lambda^m+\mu^m = 2\cos mu,$$
$$\lambda^{m-2}+\mu^{m-2} = 2\cos(m-2)u, \qquad \ldots.$$

On a donc

$$\cos^m u = \frac{1}{2^m}\Big[2\cos mu + 2m\cos(m-2)u + \frac{2m(m-1)}{2}\cos(m-4)u+\ldots\Big].$$

L'intégrale $\int \cos^m u\,du$ s'obtient alors immédiatement.

Exemple. — Soit à calculer

$$\int \cos^4 u\,du.$$

On a

$$\cos^4 u = \frac{1}{16}(\lambda+\mu)^4 = \frac{1}{16}[\lambda^4+\mu^4+4\lambda\mu(\lambda^2+\mu^2)+6\lambda^2\mu^2],$$

d'où

$$\cos^4 u = \frac{1}{8}(\cos 4u + 4\cos 2u + 3).$$

On en déduit immédiatement

$$\int \cos^4 u\,du = \frac{1}{8}\left(\frac{\sin 4u}{4} + 2\sin 2u + 3u\right) + \text{const.}$$

On calcule par la même méthode

$$\int \sin^m u\,du;$$

il suffit de partir de l'identité

$$\sin u = \frac{1}{2i}(\lambda-\mu)$$

et d'élever les deux membres à la puissance m en remplaçant ensuite les termes tels que $\lambda^p + \mu^p$ par $2\cos pu$ et les termes tels que $\lambda^q - \mu^q$ par $2i\sin qu$. On peut aussi changer le sinus en un cosinus en faisant $u = v + \frac{\pi}{2}$.

Formule de récurrence. — On peut encore, en posant

$$I_m = \int \cos^m x\, dx$$

(m entier positif), établir une formule récurrente qui ramène I_m à I_{m-2}. Écrivons

$$I_m = \int \cos^{m-1} x . d \sin x,$$

et intégrons par parties

$$I_m = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) \int \cos^{m-2} x \sin^2 x\, dx.$$

Dans la nouvelle intégrale remplaçons $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$; elle devient $I_{m-2} - I_m$. Donc

$$I_m = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1)(I_{m-2} - I_m);$$

d'où, en transposant,

$$m I_m = \cos^{m-1} x \sin x + (m-1) I_{m-2}.$$

On ramène de même I_{m-2} à I_{m-4}, ... et ainsi de suite, et l'on arrive finalement à

$$I_1 = \int \cos x\, dx = \sin x + C$$

ou à

$$I_0 = \int dx = x + C.$$

Une méthode identique s'applique à

$$J_m = \int \sin^m x\, dx.$$

109. Remarque sur l'intégrale $\int \cos^m u \sin^p u\, du$. — Pour calculer l'intégrale

$$\int \cos^m u \sin^p u\, du,$$

où m et p sont des entiers positifs, on peut remplacer $\cos^m u$ et $\sin^p u$ par des sommes de cosinus et sinus des multiples de u. En faisant le produit de ces deux sommes, on aura à calculer des intégrales de la forme

$$\int \cos nu \cos n'u \, du,$$

$$\int \cos nu \sin n'u \, du.$$

Quand un des exposants m ou p est impair, ou que les deux sont impairs, le calcul se simplifie. Soit, par exemple, m impair, $m = 2n+1$. On écrira l'intégrale

$$\int \cos^{2n} u \sin^p u \, d\sin u,$$

ou, en posant $\sin u = t$,

$$\int (1-t^2)^n t^p \, dt,$$

intégrale qu'on calcule immédiatement après avoir développé $(1-t^2)^n$ par la formule du binome. De même, si p est impair, on fait $\cos u = t$.

Exemple. — Soit

$$\int \cos^5 u \sin^4 u \, du.$$

En posant $\sin u = t$, on a

$$\int (1-t^2)^2 t^4 \, dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) \, dt,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C.$$

V. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES RATIONNELLES PAR RAPPORT A x ET A $\sqrt{ax^2+bx+c}$. COURBES UNICURSALES.

110. Méthode. — Imaginons une fonction rationnelle $R(x, y)$ de x et de

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c}.$$

Nous allons montrer que l'intégrale

$$\int R(x, y)\,dx$$

peut être ramenée à l'intégrale d'une différentielle rationnelle.

Pour cela, nous distinguerons deux cas, suivant que a est positif ou négatif.

111. Cas de a positif. — Supposons $a > 0$. Nous écrirons

$$y = \sqrt{a}\sqrt{x^2 + px + q}.$$

Désignons alors par u une nouvelle variable, et posons

$$(1)\qquad \sqrt{x^2 + px + q} = x - u.$$

Élevant au carré et supprimant x^2 dans les deux membres, on a

$$(2)\qquad px + q = -2ux + u^2, \qquad x = \frac{u^2 - q}{2u + p}.$$

Remplaçant x par cette valeur dans le second membre de l'équation (1), on a

$$(3)\qquad \sqrt{x^2 + px + q} = -\frac{u^2 + pu + q}{2u + p}.$$

De cette façon, x et y sont des fonctions rationnelles de u. En différentiant l'expression (2) de x, on a

$$(4)\qquad dx = 2\frac{u^2 + pu + q}{(2u + p)^2}\,du.$$

Si alors, dans l'intégrale proposée

$$\int R(x, y)\,dx,$$

on remplace x, y et dx par leurs valeurs ci-dessus, elle se transforme en l'intégrale d'une différentielle rationnelle en u.

Exemple. — Soit à trouver l'intégrale

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

Si l'on fait

$$\sqrt{x^2+2x+3} = x-u,$$

on trouve

$$x = \frac{u^2-3}{2+2u}, \qquad \sqrt{x^2+2x+3} = -\frac{u^2+2u+3}{2u+2},$$

$$dx = 2\frac{u^2+2u+3}{(2u+2)^2}du.$$

L'intégrale I devient donc

$$\mathrm{I} = -\int \frac{2\,du}{u^2-3}.$$

Décomposant la fraction rationnelle en fractions simples, on a

$$\frac{2}{u^2-3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{u-\sqrt{3}} - \frac{1}{u+\sqrt{3}}\right),$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{L}\,\frac{u+\sqrt{3}}{u-\sqrt{3}} + \text{const.},$$

ou, en revenant à la variable x,

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{L}\,\frac{x+\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}}{x-\sqrt{3}-\sqrt{x^2+2x+3}} + \text{const.}$$

112. Cas de a négatif. — Quand $a < 0$, on peut écrire

$$y = \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\sqrt{-x^2+px+q},$$

en mettant en facteur $\sqrt{-a}$ qui est réel. Pour que la valeur de y soit réelle, il faut que le trinome $-x^2+px+q$ ait des racines réelles et que x soit compris entre ces racines. Appelons α et β les racines de ce trinome, α étant supposé moindre que β. On peut écrire

$$\sqrt{-x^2+px+q} = \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)},$$

$$\alpha \leqq x \leqq \beta.$$

Posons alors

$$(5) \qquad x-\alpha = (\beta-x)u^2,$$

u désignant une nouvelle variable. Nous avons

$$(6) \qquad x = \frac{\alpha+\beta u^2}{1+u^2};$$

quant au radical, il devient

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (\beta - x)u$$

ou, en remplaçant x par sa valeur (6),

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)} = (\beta-\alpha)\frac{u}{1+u^2}. \tag{7}$$

Enfin, la relation (6) donne

$$dx = 2(\beta-\alpha)\frac{u\,du}{(1+u^2)^2}. \tag{8}$$

Par ce changement de variable, l'intégrale proposée

$$\int R(x, y)\,dx$$

devient donc l'intégrale d'une différentielle rationnelle en u.

Exemple. — Soit à calculer l'intégrale

$$J = \int \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}},$$

où α est inférieur à β et où λ est extérieur à l'intervalle (α, β).

Nous supposons, pour fixer les idées, $\lambda < \alpha$.

En faisant la substitution que nous venons d'indiquer on trouve

$$J = \int \frac{2\,du}{\alpha-\lambda+(\beta-\lambda)u^2},$$

$$J = \frac{2}{\sqrt{(\alpha-\lambda)(\beta-\lambda)}} \operatorname{arc\,tang}\left(u\sqrt{\frac{\beta-\lambda}{\alpha-\lambda}}\right) + \text{const.}$$

En particulier, si l'on voulait l'intégrale définie

$$H = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{(x-\lambda)\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}},$$

la formule du changement de variable

$$x - \alpha = (\beta - x)u^2$$

montre que, u variant de 0 à ∞, x varie de α à β. On a donc

$$H = \int_0^\infty \frac{2\,du}{\alpha-\lambda+(\beta-\lambda)u^2}.$$

Nous venons de calculer l'intégrale indéfinie J : l'intégrale définie H est la différence des valeurs que prend J pour $u = 0$ et pour $u = \infty$. Comme arc tang $0 = 0$, arc tang $\infty = \frac{\pi}{2}$, on a

$$H = \frac{\pi}{\sqrt{(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda)}}.$$

Cas de a **nul.** — Si a est nul, on a

$$y = \sqrt{bx + c}.$$

On fera

$$bx + c = u^2, \qquad y = u, \qquad dx = \frac{2u\,du}{b},$$

et la différentielle

$$R(x, y)\,dx$$

deviendra rationnelle en u.

113. Intégrales se ramenant aux précédentes : différentielles rationnelles en x, $\sqrt{\alpha x + \beta}$, **et** $\sqrt{\gamma x + \delta}$. — Soit

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta})\,dx,$$

R désignant une fonction rationnelle. La substitution

$$\sqrt{\alpha x + \beta} = X, \qquad x = \frac{X^2 - \beta}{\alpha}$$

donne une intégrale de la forme

$$\int \mathcal{R}(X, \sqrt{AX^2 + C})\,dX,$$

où

$$A = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad C = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha},$$

c'est-à-dire une intégrale du type que nous venons d'étudier.

Par exemple, l'intégrale

$$\int \frac{1 + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x}}\,dx,$$

où l'on fait $\sqrt{1 + x} = X$, prend la forme

$$2\int (1 + \sqrt{2 - X^2})\,dX,$$

qui rentre dans le type du n° 112 et qui est égale à

$$2X + X\sqrt{2 - X^2} + 2 \arc \sin \frac{X}{\sqrt{2}}.$$

114. Interprétation géométrique du changement de variable employé. — Voici comment on peut interpréter géométriquement les substitutions qui nous ont servi à ramener l'intégrale

$$\int R(x, y)\,dx,$$

où

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c},$$

à l'intégrale d'une fonction rationnelle de u, et comment on peut trouver d'autres substitutions permettant d'arriver au même résultat.

Si l'on considère x et y comme les coordonnées cartésiennes d'un point M, l'équation

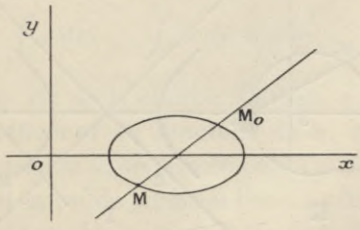
$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

représente une conique. Pour ramener l'intégrale

$$\int R(x, y)\,dx$$

à l'intégrale d'une fonction rationnelle, il suffit d'exprimer les coordonnées x et y d'un point M de cette conique en fonction

Fig. 58.



rationnelle d'un paramètre u. Pour cela, prenons un point fixe quelconque M_0 sur la conique (*fig.* 58), ayant pour abscisse x_0 et pour ordonnée

$$y_0 = \sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c};$$

puis coupons la conique par une sécante variable M_0M passant par M_0. Cette sécante a une équation de la forme

$$y - y_0 = u(x - x_0).$$

Comme elle coupe la conique en un seul point variable M, les ordonnées x et y de ce point M s'expriment rationnellement en fonction de u. On voit qu'il y a une infinité de façons de réaliser la transformation de l'intégrale en une intégrale d'une fonction rationnelle, puisque le choix du point M_0 est arbitraire.

Il est aisé de voir que les substitutions employées dans les numéros précédents rentrent, comme cas particuliers, dans celles que nous venons de définir.

Prenons d'abord la conique

$$y = \sqrt{x^2 + px + q}:$$

c'est une hyperbole équilatère (*fig.* 59, I), dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices des angles des axes. Nous avons posé

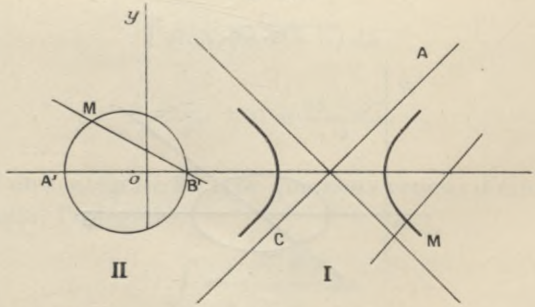
$$\sqrt{x^2 + px + q} = x - u$$

ou

$$y = x - u.$$

Cette dernière équation, dans laquelle u est variable, représente une droite mobile parallèle à l'asymptote CA, c'est-à-dire passant

Fig. 59.



par un point M_0 de l'hyperbole rejeté à l'infini dans la direction CA. Cette droite ne coupe la courbe qu'en un point variable M, dont les coordonnées s'expriment dès lors rationnellement en u.

Prenons ensuite la conique

$$y = \sqrt{-x^2 + px + q}.$$

Pour qu'elle soit réelle, il faut que les racines du trinome soient réelles; on peut alors écrire

$$y = \sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)}.$$

Cette équation représente un cercle (*fig.* 59, II), ayant son centre sur Ox et coupant cet axe aux points $A'(x = \alpha)$ et $B'(x = \beta)$. Nous avons posé

$$x - \alpha = (\beta - x)u^2,$$

d'où

$$y = u(\beta - x).$$

Cette équation représente une droite $B'M$, passant par le point fixe B' du cercle et coupant le cercle en un seul point variable M.

115. **Remarque sur les courbes unicursales en général.** — Étant donnée une courbe plane algébrique

$$f(x, y) = 0,$$

on dit qu'elle est *unicursale*, quand les coordonnées x et y d'un quelconque de ses points peuvent être exprimées en *fonctions rationnelles* d'un paramètre u. Telles sont les coniques, les courbes du troisième ordre avec un point double, les courbes du quatrième ordre avec trois points doubles ou un point triple. Si l'on veut calculer l'aire d'un segment ou d'un secteur d'une de ces courbes, on est conduit à calculer des intégrales de la forme

$$\int y\,dx, \qquad \int (x\,dy - y\,dx),$$

le long d'un certain arc de la courbe. Comme x et y peuvent être exprimés *rationnellement* en fonction de u, on voit que, en introduisant cette variable u, on sera ramené à intégrer des fractions rationnelles en u. Il en est de même si l'on a à calculer, le long d'un arc de la courbe unicursale, une intégrale de la forme

$$\int R(x, y)\,dx,$$

R étant une fonction rationnelle de x et y.

116. Exemple : différentielles rationnelles par rapport à x et à des puissances fractionnaires de $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. — Considérons une intégrale de la forme

$$\int R\left[x, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p}{q}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p'}{q'}}, \left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)^{\frac{p''}{q''}}, \dots\right] dx,$$

où R est une fonction rationnelle de x et de puissances fractionnaires de $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$. On peut rendre cette différentielle rationnelle en réduisant les exposants fractionnaires (positifs ou négatifs) $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, $\frac{p''}{q''}$, ... au même dénominateur m et faisant ensuite

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = u^m, \qquad x = \frac{\delta u^m - \beta}{\alpha - \gamma u^m}.$$

1° Soit, par exemple,

$$I = \int \frac{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{dx}{(x+1)^2}.$$

Les exposants $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ étant égaux à $\frac{2}{6}$ et à $\frac{3}{6}$, on fera

$$\frac{x-1}{x+1} = u^6, \qquad x = -\frac{u^6+1}{u^6-1},$$

$$dx = 12\frac{u^5\,du}{(u^6-1)^2},$$

$$I = 3\int \frac{1+u^3}{1+u^2} u^5\,du,$$

intégrale d'une différentielle rationnelle.

Géométriquement, on peut dire que la courbe

$$y = \frac{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(x+1)^2}$$

est unicursale, car la substitution indiquée exprime x et y en fonctions rationnelles de u. L'intégrale donne l'aire d'un segment de cette courbe.

2° Dans ce type rentrent les intégrales de la forme

$$\int \mathrm{R}\left(x, \sqrt{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right) dx,$$

R désignant une fonction rationnelle de x et de $\sqrt{\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}$. La substitution

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} = u^2$$

rendra la différentielle rationnelle.

3° Soit encore à calculer

$$\int \frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\, dx.$$

Les exposants de x sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$; en les réduisant au même dénominateur, on peut les écrire $\frac{2}{4}$ et $\frac{1}{4}$; on fera alors

$$x = u^4, \qquad dx = 4u^3\, du,$$

et l'intégrale deviendra

$$4\int \frac{1+2u^2}{1+u}\, u^2\, du,$$

qui est l'intégrale d'une fonction rationnelle.

Géométriquement, on peut dire que la courbe

$$y = \frac{1+2\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}$$

est *unicursale*, puisque la substitution $x = u^4$ donne x et y en fonctions rationnelles de u.

VI. — INTÉGRALES DE DIFFÉRENTIELLES BINOMES.

117. Cas d'intégrabilité. — Une différentielle binome est une différentielle de la forme

$$x^m(a+bx^n)^p\, dx,$$

où a et b désignent des constantes quelconques, m, n et p des exposants commensurables, entiers ou fractionnaires, positifs, négatifs ou nuls.

L'intégration d'une différentielle binome

$$\mathrm{I} = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

peut être effectuée, à l'aide des fonctions élémentaires, dans chacun des trois cas suivants :

1° p est un nombre entier, positif, négatif ou nul;

2° $\dfrac{m+1}{n}$ est un nombre entier, positif, négatif ou nul;

3° $\dfrac{m+1}{n}+p$ est un nombre entier, positif, négatif ou nul.

Nous allons traiter le premier cas; puis, nous verrons que le second cas se ramène au premier, et le troisième au second, et par suite au premier.

Premier cas. — Supposons p entier. Tout d'abord, si p est un entier *positif*, on développera $(a+bx^n)^p$ par la formule du binome, on multipliera le développement par $x^m dx$ et l'on sera ramené à l'intégration d'une somme de termes de la forme

$$\int x^q\,dx.$$

Exemple. — Soit à calculer

$$\int x^{-\frac{3}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)^3 dx.$$

Développant le cube

$$\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)^3 = 1+3x^{\frac{1}{6}}+3x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}$$

et multipliant par $x^{-\frac{3}{2}}dx$, on est ramené à calculer

$$\int\left(x^{-\frac{3}{2}}+3x^{-\frac{4}{3}}+3x^{-\frac{7}{6}}+\frac{1}{x}\right)dx,$$

intégrale qui est égale à

$$-2x^{-\frac{1}{2}}-9x^{-\frac{1}{3}}-18x^{-\frac{1}{6}}+\mathrm{L}x+\text{const.}$$

Supposons ensuite p entier, mais *négatif*. On ramène alors l'intégrale 1 à l'intégrale d'une fonction rationnelle comme il suit. Les exposants m et n sont des fractions positives ou négatives; réduisons-les au même dénominateur et soient, après cette réduction,

$$m = \frac{\mu}{\lambda}, \qquad n = \frac{\nu}{\lambda}.$$

Faisons le changement de variable

$$x = u^\lambda,$$

on en conclut

$$x^m = u^\mu, \qquad x^n = u^\nu, \qquad dx = \lambda u^{\lambda-1}\, du,$$

et l'intégrale devient

$$\lambda \int u^{\lambda+\mu-1}(a + bu^\nu)^p\, du,$$

où tous les exposants $\lambda + \mu - 1$, ν, p sont entiers, positifs ou négatifs; on est donc ramené à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple. — Soit à calculer

$$\int x^{-\frac{1}{4}}\left(1 - x^{\frac{1}{6}}\right)^{-2} dx.$$

Actuellement $p = -2$, entier négatif. On réduit les fractions $m = -\frac{1}{4}$, $n = \frac{1}{6}$ au même dénominateur 12 :

$$m = \frac{-3}{12}, \qquad n = \frac{2}{12};$$

on fait, ensuite, $x = u^{12}$ et l'on est ramené à l'intégrale

$$12 \int u^8(1 - u^2)^{-2}\, du = 12 \int \frac{u^8}{(1 - u^2)^2}\, du,$$

qu'on calculera, d'après la méthode du n° 101, en décomposant $\frac{u^8}{(1-u^2)^2}$ en une partie entière du quatrième degré suivie de fractions simples correspondant aux racines du dénominateur.

Deuxième cas. — Supposons maintenant $\frac{m+1}{n}$ entier. On ramène ce cas au précédent (p entier), en prenant comme nouvelle variable le binome $a + bx^n$. Posons donc

$$a + bx^n = t,$$

t désignant une nouvelle variable. On en tire

$$x = b^{-\frac{1}{n}}(t-a)^{\frac{1}{n}},$$

$$x^m = b^{-\frac{m}{n}}(t-a)^{\frac{m}{n}}, \qquad dx = \frac{1}{n} b^{-\frac{1}{n}}(t-a)^{\frac{1}{n}-1}\,dt.$$

L'intégrale

$$I = \int x^m(a + bx^n)^p\,dx$$

devient alors

$$I = \frac{1}{n} b^{-\frac{m+1}{n}} \int t^p (t-a)^{\frac{m+1}{n}-1}\,dt.$$

On est ainsi conduit à l'intégrale d'une différentielle binome en t de la forme

$$I' = \int t^{m'}(a' + b't^{n'})^{p'}\,dt,$$

où $m' = p$, $n' = 1$, $p' = \dfrac{m+1}{n} - 1$.

Comme $\dfrac{m+1}{n}$ est supposé entier, l'exposant p' est entier, et l'intégrale I' rentre dans le premier cas.

Exemple. — Soit

$$I = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1 + x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} dx.$$

Ici $m = \frac{1}{2}$, $n = -\frac{3}{2}$, $\dfrac{m+1}{n} = -1$.

On voit que $\dfrac{m+1}{n}$ est entier. On prend alors comme nouvelle variable le binome

$$1 + x^{-\frac{3}{2}} = t, \qquad x = (t-1)^{-\frac{2}{3}},$$

$$dx = -\frac{2}{3}(t-1)^{-\frac{5}{3}}\,dt,$$

et l'intégrale devient

$$I = -\frac{2}{3}\int t^{\frac{1}{4}}(t-1)^{-2}\,dt.$$

On est donc ramené au premier cas. Pour achever l'intégration, on fait, conformément à la méthode du premier cas,

$$t = u^4,$$

et l'on a

$$I = -\frac{8}{3}\int \frac{u^4}{(u^4-1)^2}\,du,$$

intégrale d'une fonction rationnelle.

Troisième cas. — Supposons enfin $\frac{m+1}{n}+p$ entier. On ramène ce cas au précédent de la façon suivante : on peut écrire

$$a+bx^n = x^n(ax^{-n}+b),$$
$$(a+bx^n)^p = x^{np}(ax^{-n}+b)^p.$$

D'après cela, l'intégrale

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p\,dx$$

peut s'écrire

$$I = \int x^{m+np}(b+ax^{-n})^p\,dx,$$

intégrale de la forme

$$I_1 = \int x^{m_1}(a_1+b_1x^{n_1})^p\,dx,$$

où

$$m_1 = m+np, \qquad n_1 = -n;$$

donc

$$\frac{m_1+1}{n_1} = \frac{m+np+1}{-n} = -\left(\frac{m+1}{n}+p\right).$$

Comme $\frac{m+1}{n}+p$ est supposé entier, $\frac{m_1+1}{n_1}$ est entier, et l'intégrale I_1 rentre dans le deuxième cas. On la ramènera au premier en posant

$$b+ax^{-n} = t.$$

118. **Application.** — *Rectification de la courbe*

$$y = ax^k,$$

où a est une constante et k un exposant quelconque.

On a, en appelant s l'arc de courbe compté à partir d'un certain point fixe,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + k^2 a^2 x^{2k-2}}\, dx,$$

$$s = \int (1 + k^2 a^2 x^{2k-2})^{\frac{1}{2}}\, dx;$$

on a donc l'intégrale d'une différentielle binome où

$$m = 0, \qquad n = 2k - 2, \qquad p = \frac{1}{2}.$$

Examinons les cas d'intégrabilité :

1° p n'est pas entier;

2° $\frac{m+1}{n} = \frac{1}{2k-2}$. On pourra donc intégrer exactement si

$$\frac{1}{2k-2} = \mathrm{E}, \qquad k = \frac{2\mathrm{E}+1}{2\mathrm{E}},$$

E désignant un entier positif ou négatif;

3° $\frac{m+1}{n} + p = \frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2}$. On peut intégrer si

$$\frac{1}{2k-2} + \frac{1}{2} = \mathrm{E}', \qquad k = \frac{2\mathrm{E}'}{2\mathrm{E}'-1},$$

E′ entier positif ou négatif.

En résumé, on peut intégrer à l'aide des fonctions élémentaires, quand k est *le rapport de deux entiers consécutifs*.

Par exemple, pour la parabole semi-cubique

$$y = a x^{\frac{3}{2}}, \qquad k = \frac{3}{2},$$

on est dans le deuxième cas, $\mathrm{E} = 1$; on a alors

$$s = \int \left(1 + \frac{9}{4} a^2 x\right)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{8}{27 a^2}\left(1 + \frac{9}{4} a^2 x\right)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C}.$$

VII. — APPLICATION DES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES DE PUISSANCES AU CALCUL DE CERTAINES INTÉGRALES.

Nous donnerons, à la fin de l'Ouvrage, des méthodes d'approximation et des procédés mécaniques pour évaluer les intégrales.

Nous indiquerons ici comment, dans certains cas, on peut calculer, approximativement, une intégrale en la développant en série.

119. Intégrale $\int_0^x e^{-x^2}dx$. — Cette intégrale, qui représente l'aire de la courbe $y=e^{-x^2}$ depuis l'axe des y jusqu'à une ordonnée d'abscisse x, ne peut pas s'exprimer sous forme finie. Pour de petites valeurs de x, on la calculera approximativement en la développant en série. Comme

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1.2}-\frac{x^6}{1.2.3}+\ldots,$$

on a

$$\int_0^x e^{-x^2}\,dx=x-\frac{1}{3}\frac{x^3}{1}+\frac{1}{5}\frac{x^5}{1.2}-\frac{1}{7}\frac{x^7}{1.2.3}+\ldots.$$

Cette série est convergente pour toutes les valeurs de x; elle converge très rapidement quand x est inférieur à 1.

On a construit des Tables, pour le calcul de cette intégrale, de la façon suivante. Nous démontrons plus loin que l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$$

est égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. On considère alors la fonction positive

$$\varphi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}\,dx,$$

qui croît avec x et qui tend vers 1 quand la limite supérieure x croît indéfiniment.

D'après le développement ci-dessus, on a

$$\varphi(x)=a_1x-a_3x^3+a_5x^5-\ldots,$$

où les coefficients a_1, a_3, ... ont pour valeurs

$$a_1=\frac{2}{\sqrt{\pi}},\qquad a_3=\frac{2}{3\sqrt{\pi}},\qquad \ldots,\qquad a_n=\frac{2}{(2n+1).1.2.3\ldots n\sqrt{\pi}}.$$

On trouvera dans les *Tables de Houël* (p. 61) les logarithmes des coefficients a_1, a_3, ..., a_{15} et les valeurs approchées de la fonction $\varphi(x)$ de $x=0$ à $x=2$.

120. Rectification de l'ellipse. Exemple d'intégrale elliptique. — Soit une ellipse rapportée à ses axes

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad (a > b).$$

On peut exprimer les coordonnées d'un point M de la courbe en fonction d'un paramètre u en posant

$$x = a \cos u, \qquad y = b \sin u.$$

Pour $u = 0$, on a le sommet A, et pour $u = \frac{\pi}{2}$, le sommet B. Calculons l'arc $AM = s$. On a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}\, du.$$

Remplaçons $\sin^2 u$ par $1 - \cos^2 u$, $a^2 - b^2$ par c^2 et désignons par ε l'*excentricité* de l'ellipse

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Nous pourrons écrire

$$ds = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\, du,$$

$$s = a \int_0^u \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\, du.$$

L'intégrale ainsi obtenue ne peut pas être calculée sous forme finie à l'aide des fonctions élémentaires algébriques, exponentielles et logarithmiques, circulaires directes ou inverses. C'est un cas particulier des intégrales elliptiques. On la calculera par les méthodes d'approximation que nous donnerons plus tard; on pourrait aussi la calculer en la développant en série procédant suivant les puissances de ε^2.

Faisons le calcul pour le quadrant d'ellipse AB; il faut intégrer de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On a donc, en appelant l le périmètre de l'ellipse,

$$\frac{l}{4} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\, du.$$

Comme $\varepsilon^2 \cos^2 u$ est moindre que 1, on peut développer

$\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 u}$ par la formule du binome

$$(1-\varepsilon^2\cos^2 u)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2 u - \frac{1}{2.4}\varepsilon^4\cos^4 u$$
$$- \frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6\cos^6 u - \ldots - \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\varepsilon^{2n}\cos^{2n} u - \ldots.$$

En multipliant par $a\,du$ et intégrant terme à terme de o à $\frac{\pi}{2}$, on aura une série donnant $\frac{1}{4}l$. Pour avoir le terme général de cette série, il faut calculer l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} u\,du,$$

qui, d'après le calcul du n° **40**, a pour valeur

$$\mathrm{I}_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

Le coefficient de ε^{2n} dans la série donnant $\frac{l}{4}$ est donc

$$-a\,\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\,\mathrm{I}_n,$$

ou, d'après la valeur de I_n,

$$-\frac{\pi a}{2}\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2(2n-1).$$

On a donc enfin pour $\frac{l}{4}$ la série

$$\frac{l}{4} = \frac{\pi a}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3\varepsilon^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\varepsilon^6 \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 7\varepsilon^8 - \ldots\right].$$

Calculons le rayon R d'une *circonférence* de même longueur que l'ellipse

$$2\pi\mathrm{R} = l, \qquad \mathrm{R} = \frac{l}{2\pi};$$

il vient, en remplaçant l par sa valeur et calculant les coefficients numériques,

$$\mathrm{R} = a\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - \frac{175}{16384}\varepsilon^8 - \ldots\right).$$

On peut obtenir des valeurs approchées de R en fonction des deux demi-axes a et b de la façon suivante.

Une première valeur de R, approchée par défaut, est $\frac{1}{2}(a+b)$. En effet,

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}};$$

développant par la formule du binome, on a

$$b = a\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 - \frac{1}{16}\varepsilon^6 - \frac{5}{128}\varepsilon^8 - \ldots\right).$$

On en conclut la valeur suivante de $\frac{a+b}{2}$ que nous écrivons en réduisant les coefficients numériques aux mêmes dénominateurs que dans le développement de R :

$$\frac{a+b}{2} = a\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{4}{64}\varepsilon^4 - \frac{8}{256}\varepsilon^6 - \frac{320}{16384}\varepsilon^8 - \ldots\right).$$

On voit que $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de R par défaut et que la différence $R - \frac{a+b}{2}$ est de l'ordre de ε^4.

Une deuxième valeur de R, approchée également par défaut, mais un peu moins, est $\sqrt{ab}$. En effet, b étant égal à $a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, on a

$$\sqrt{ab} = a(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}} = a\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{6}{64}\varepsilon^4 - \frac{14}{256}\varepsilon^6 - \frac{616}{16384}\varepsilon^8 - \ldots\right).$$

En combinant ces deux formules donnant $\frac{a+b}{2}$ et $\sqrt{ab}$, on obtient, d'après M. Boussinesq, une valeur de R approchée par excès. On a, en effet,

$$\frac{3}{2}\,\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ab} = a\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 - \frac{172}{16384}\varepsilon^8 - \ldots\right),$$

expression qui ne diffère de R que par le terme en ε^8.

121. Intégrale elliptique $E(\varphi)$. — Nous avons trouvé, dans le numéro précédent, que l'arc d'ellipse AM est donné par

$$s = a\int_0^u \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 u}\,du.$$

Donc l'arc BM, compté à partir du sommet du petit axe, est

$$\operatorname{arc} BM = a \int_u^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 u}\, du.$$

En faisant $u = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $du = - d\varphi$, et remarquant que les limites de φ sont φ et o, on a, après avoir interverti les limites,

$$\operatorname{arc} BM = a \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

On pose habituellement, d'après Legendre,

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi,$$

k étant un nombre positif plus petit que 1.

Avec cette notation

$$\operatorname{arc} BM = a E(\varphi, \varepsilon).$$

L'intégrale $E(\varphi, k)$ est une intégrale elliptique qui a été étudiée par Legendre. Sa valeur dépend des deux nombres φ et k. Comme k est moindre que 1, on peut poser

$$k = \sin \theta.$$

On appelle φ l'amplitude, k le module, θ l'angle du module.

On trouvera dans les *Tables de Houël* (p. 58) les valeurs de $E(\varphi, k)$ et de son logarithme, pour les valeurs successives des angles φ et θ exprimées en parties du quadrant, de dixième en dixième de quadrant.

Ces Tables pourront donc servir à la rectification de l'ellipse.

122. **Autre exemple d'intégrale elliptique. Pendule simple. Intégrale elliptique de première espèce** $F(\varphi)$. — Imaginons un pendule simple de longueur $OM = l$ oscillant dans le vide entre les deux positions extrêmes OA et OB, symétriques par rapport à la verticale OM_0 et faisant avec la verticale l'angle α. Soit λ l'angle zOM que fait le pendule avec la verticale à l'instant t. On démontre, en Mécanique rationnelle, qu'on a

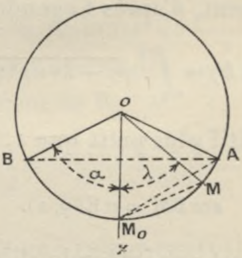
$$\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\lambda}{dt} = \pm \sqrt{2(\cos\lambda - \cos\alpha)}.$$

Remplaçons $\cos\alpha$ et $\cos\lambda$ respectivement par $1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ et $1 - 2\sin^2\frac{\lambda}{2}$, nous aurons

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\lambda}{2}}},$$

où nous prenons le signe $+$, ce qui revient à supposer que le

Fig. 60.



pendule monte. En intégrant et comptant le temps à partir de l'instant où le mobile est en M_0, on a

$$\sqrt{\frac{g}{t}}\,t = \int_0^{\lambda} \frac{d\frac{\lambda}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\lambda}{2}}}.$$

C'est encore là une intégrale elliptique. Elle se ramène facilement à la forme que Legendre a nommée *intégrale elliptique de première espèce*. Faisons un changement de variable en posant

$$\frac{\sin\frac{\lambda}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sin\varphi,$$

φ désignant une nouvelle variable qui part de zéro avec λ et qui devient égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $\lambda = \alpha$. En posant, pour abréger,

$$\sin\frac{\alpha}{2} = k,$$

on a

$$\sin\frac{\lambda}{2} = k\sin\varphi, \qquad \frac{\lambda}{2} = \arcsin(k\sin\varphi),$$

$$d\frac{\lambda}{2} = \frac{k\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad \sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\lambda}{2}} = k\cos\varphi.$$

Donc

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,t = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

C'est là l'intégrale elliptique de première espèce, désignée par Legendre par la notation

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

La quantité k est le module, φ l'amplitude. On trouve dans les *Tables de Houël* (p. 58) les valeurs de cette intégrale : dans ces Tables, on a posé

$$k = \sin\theta$$

et l'on a calculé les valeurs de $F(\varphi, k)$ et de son logarithme pour les valeurs des deux angles φ et θ de dixième en dixième de quadrant. Dans le mouvement du pendule simple, θ est égal à la moitié de l'angle d'écart maximum, $\theta = \frac{\alpha}{2}$.

Durée d'une oscillation du pendule. Développement en série suivant les puissances du sinus du demi-angle d'écart maximum. — Nous avons trouvé plus haut l'expression du temps t que met le pendule à s'écarter de la verticale d'un angle λ. Pour avoir la durée T d'une oscillation simple, il suffit de doubler le temps que met λ à acquérir la valeur α.

On a donc

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,T = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Cette intégrale $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ est ce que Legendre appelle *intégrale complète de première espèce*. On la désigne ordinairement par K :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

On a, avec cette notation,

$$T = 2K\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pour calculer K, nous allons le développer en une série procédant suivant les puissances de $k = \sin\frac{\alpha}{2}$, comme nous avons fait pour développer la longueur d'une ellipse en série procédant suivant les puissances de l'excentricité.

Écrivons

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi$$

et développons, par la formule du binome, la quantité sous le signe d'intégration

$$(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} k^{2n}\sin^{2n}\varphi.$$

Nous aurons à calculer les intégrales (n° 40)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2}.$$

Donc enfin

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right].$$

CHAPITRE VIII.

DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE.

I. — SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

123. **Propriétés générales.** — Soit une fonction $F(t)$ connue dans un intervalle (a, b)

$$a \leqq t \leqq b.$$

On peut toujours, pour simplifier, ramener cet intervalle à être $-\pi$ et $+\pi$ en faisant le changement de variable

$$t = \frac{(b-a)x + (b+a)\pi}{2\pi},$$

d'où l'on tire

$$x = \pi \frac{2t - b - a}{b - a}.$$

On voit, en effet, que pour $t = a$, $x = -\pi$ et pour $t = b$, $x = \pi$.
Nous poserons

$$F(t) = F\left[\frac{(b-a)x + (b+a)\pi}{2\pi}\right] = f(x).$$

La fonction $f(x)$ est alors connue dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$.

Si cette fonction $f(x)$ est finie et continue dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, *on peut toujours, pour toutes les valeurs de x prises dans cet intervalle*

$$-\pi < x < \pi,$$

la développer en une série convergente de la forme

$$(1) \qquad \begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots, \end{aligned}$$

les coefficients a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n, ..., *étant des constantes convenablement choisies.*

Ce développement n'est plus valable pour les valeurs limites $-\pi$ et $+\pi$ de x. Pour ces deux valeurs limites, la série prend la même valeur

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots .$$

On démontre que la somme de cette dernière série n'est égale ni à $f(-\pi)$, ni à $f(+\pi)$, mais à la moyenne arithmétique

$$\frac{1}{2}[f(-\pi) + f(\pi)].$$

On démontre également que la série, obtenue en intégrant terme à terme une série telle que (1), est convergente et que la nouvelle série a pour somme une fonction primitive de $f(x)$ dans le même intervalle de $-\pi$ à $+\pi$.

Mais on ne peut pas affirmer que la série obtenue en différentiant terme à terme une série telle que (1) soit convergence. Nous ne démontrerons pas toutes ces propositions; nous nous contenterons de quelques indications.

124. Détermination des coefficients. — La détermination des coefficients du développement (1) repose sur les faits suivants :

1° Si m et n sont deux entiers positifs *différents*, on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0.$$

En effet, on a identiquement

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x].$$

Les intégrales indéfinies sont donc

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} \pm \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right];$$

elles s'annulent évidemment aux deux limites.

2° Supposons maintenant $m = n$, et considérons les deux intégrales

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx\, dx, \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx\, dx.$$

Deux cas sont à distinguer suivant que n est différent de zéro ou égal à zéro.

A. $n \neq 0$. Les deux intégrales sont égales à π.

En effet,

$$\cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2}, \qquad \sin^2 nx = \frac{1 - \cos 2nx}{2}.$$

Les deux intégrales indéfinies sont donc

$$\frac{x}{2} \pm \frac{\sin 2nx}{4n}.$$

Le sinus s'annule aux limites; chacune des intégrales définies est donc

$$\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

B Si $n = 0$, la première intégrale devient

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi,$$

et la deuxième devient nulle.

3° Quels que soient les entiers positifs m et n, qu'ils soient différents ou non, on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = 0.$$

En effet, on a

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x].$$

Si $m - n$ n'est pas nul, l'intégrale indéfinie est

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n} + \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right];$$

l'intégrale indéfinie prenant les mêmes valeurs pour $x = -\pi$ et $x = \pi$, l'intégrale définie est nulle.

Si $m = n$, on a

$$\sin nx \cos nx = \frac{1}{2} \sin 2nx,$$

et l'intégrale entre les limites $-\pi$ et $+\pi$ est encore nulle.

Ceci posé, prenons le développement supposé

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots \\ + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots.$$

Pour déterminer a_n, $n > 0$, multiplions les deux membres par $\cos nx\,dx$ et intégrons de $-\pi$ à $+\pi$. Nous avons, dans le premier membre,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\,dx.$$

Dans le deuxième membre, nous avons une somme d'intégrales qui *sont toutes nulles*, d'après les remarques précédentes, excepté celle qui multiplie a_n. On a donc

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\,dx = a_n \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 nx\,dx.$$

Le coefficient de a_n étant π :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\,dx.$$

De même, pour avoir b_n, on multiplie par $\sin nx\,dx$ et l'on intègre de $-\pi$ à $+\pi$. Toutes les intégrales du deuxième membre sont nulles, sauf celle qui contient b_n, et l'on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\,dx = b_n \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 nx\,dx.$$

D'où, comme le coefficient de b_n est π,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\,dx.$$

Nous avons ainsi tous les coefficients $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$.

Il reste à calculer a_0. Pour cela, on multiplie par dx les deux membres du développement et l'on intègre de $-\pi$ à $+\pi$. Toutes les intégrales du second membre sont nulles, sauf celle qui contient a_0, et l'on a

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = a_0 \int_{-\pi}^{+\pi} dx = 2\pi a_0,$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx.$$

On voit que a_0 est la *valeur moyenne* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$; a_n et b_n sont les doubles des valeurs moyennes de $f(x)\cos nx$ et $f(x)\sin nx$ dans le même intervalle.

On peut dire que le développement en série trigonométrique d'une fonction $f(x)$ dans un intervalle $-\pi$ à $+\pi$ est connu, *quand on connaît la valeur moyenne de la fonction $f(x)$ et des produits $f(x)\cos nx$, $f(x)\sin nx$ dans cet intervalle.*

Nous admettrons que le développement ainsi obtenu représente bien $f(x)$, entre les limites $-\pi$ et $+\pi$, et est égal à

$$\frac{1}{2}[f(\pi)+f(-\pi)],$$

aux deux limites π et $-\pi$. La démonstration de ces propositions nous entraînerait en dehors du cadre que nous nous sommes tracé.

125. Application. — Soit à développer la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x,$$

entre les limites $-\pi$ et $+\pi$.

Résumons les valeurs des coefficients a_0, a_n, b_n, trouvées plus haut

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx \end{aligned}\right. \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Actuellement

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{2}\,dx = 0,$$

car l'intégrale indéfinie $\frac{x^2}{4}$ prend les mêmes valeurs aux deux limites. En général on aura

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{2}\cos nx\,dx = 0.$$

En effet, la fonction sous le signe $\int$

$$\frac{x}{2}\cos nx$$

est impaire; elle change de signe avec x. Dans l'intégrale définie de $-\pi$ à $+\pi$, la différentielle $\frac{x}{2}\cos nx\,dx$ prend donc des valeurs deux à deux égales et de signes contraires, et la somme de ces valeurs est *nulle*.

Calculons maintenant

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{x}{2}\sin nx\,dx \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Nous intégrerons par parties en faisant

$$u = \frac{x}{2}, \qquad v = -\frac{\cos nx}{n};$$

l'intégrale peut alors s'écrire

$$\int_{-\pi}^{+\pi} u\,dv = \left| uv \right|_{-\pi}^{+\pi} - \int_{-\pi}^{+\pi} v\,du,$$

c'est-à-dire

$$\left| -\frac{x}{2n}\cos nx \right|_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{2n}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\,dx.$$

La dernière intégrale est nulle. La partie intégrée donne

$$-\frac{\pi}{n}(-1)^n,$$

car

$$\cos n\pi = \cos(-n\pi) = (-1)^n.$$

Telle est l'intégrale qui figure dans b_n. Pour avoir b_n, il faut la diviser par π; donc

$$b_n = -\frac{(-1)^n}{n}.$$

Faisant $n = 1, 2, \ldots$, on a

$$b_1 = 1, \qquad b_2 = -\frac{1}{2}, \qquad b_3 = \frac{1}{3}, \qquad \ldots.$$

D'où le développement demandé

$$(3) \qquad \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots \qquad (-\pi < x < \pi).$$

Ce développement représente la fonction $\frac{x}{2}$ entre les limites $-\pi$ et $+\pi$. Aux limites, il ne représente plus la fonction, car la série s'annule pour $x = \pm\pi$. La somme de la série est alors égale à

$$\frac{1}{2}[f(\pi) + f(-\pi)],$$

qui est bien o dans le cas actuel, car

$$f(x) = \frac{x}{2}, \qquad f(\pi) + f(-\pi) = 0.$$

Représentation graphique. — Construisons la courbe définie par l'équation

$$(4) \qquad y = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots,$$

ou, pour abréger,

$$y = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ désignant la fonction *définie par la somme de la série*

$$\varphi(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots.$$

On a évidemment

$$\varphi(x + 2\pi) = \varphi(x),$$
$$\varphi(x - 2\pi) = \varphi(x),$$

d'après les propriétés élémentaires du sinus.

Marquons alors, sur Ox, les points (*fig.* 61)

$$A,\quad A_1,\quad A_2,\quad \ldots,$$

d'abscisses

$$\pi,\quad 3\pi,\quad 5\pi,\quad \ldots,$$

et les points symétriques

$$A',\quad A'_1,\quad A'_2,\quad \ldots,$$

d'abscisses

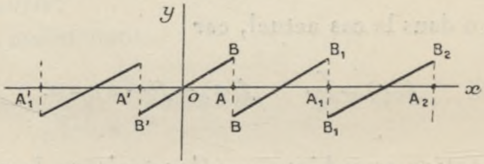
$$-\pi,\quad -3\pi,\quad -5\pi,\quad \ldots.$$

Si l'on connaît la courbe entre les ordonnées des points A' et A, on la connaît pour toutes les valeurs de x, car la relation

$$\varphi(x \pm 2\pi) = \varphi(x)$$

montre que l'ordonnée est la même aux points correspondants de tous les segments $\ldots$, $A'A$, AA_1, A_1A_2, $\ldots$. C'est là un fait analogue à celui qui se présente pour la sinusoïde, dont il suffit

Fig. 61.



d'avoir tracé une ondulation entre $-\pi$ et $+\pi$, pour pouvoir construire toute la courbe en transportant le long de Ox la même ondulation.

Construisons donc la courbe donnée entre les ordonnées des points A' et A, c'est-à-dire pour x compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Dans cet intervalle, la somme de la série est égale à $\frac{x}{2}$, et l'ordonnée y de la courbe est identique à l'ordonnée

$$y = \frac{x}{2}$$

du segment de droite $B'B$, passant par O et ayant pour coefficient angulaire $\frac{1}{2}$. La courbe est donc formée de ce segment de droite *entre les limites* $-\pi$ et $+\pi$, c'est-à-dire *entre les droites* $A'B'$ *et* AB. Quand x est égal à $\pi - \varepsilon$, ε étant positif et très petit, l'ordonnée de la courbe est égale à celle de la droite, quelque petit que soit ε; mais pour

$$x = \pi,$$

l'ordonnée de la droite est $\frac{\pi}{2} = AB$ et celle de la courbe est o. Il y a donc, dans la courbe, une discontinuité pour $x = \pi$. De même, pour x voisin de $-\pi$

$$x = -\pi + \varepsilon,$$

l'ordonnée de la courbe est égale à celle de la droite $B'B$; mais pour

$$x = -\pi,$$

l'ordonnée de la droite est $A'B'$, celle de la courbe o.

En résumé, dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, la courbe

$$y = \varphi(x)$$

se confond avec le segment de droite $B'B$, mais elle s'en sépare brusquement aux limites. Elle se compose de tous les points de la droite $B'B$ *situés entre les extrémités*, mais les points obtenus pour $x = \pm\pi$ ne sont pas les extrémités B' et B; ce sont les points A' et A.

La fonction

$$y = \varphi(x)$$

étant ainsi représentée graphiquement dans l'intervalle $-\pi$, $+\pi$, il suffit, pour avoir la représentation graphique de cette fonction dans tout intervalle, de reproduire périodiquement le même tracé entre les points AA_1, A_1A_2, ..., $A'A'_1$, $A'_1A'_2$, ..., comme le montre la figure 61. La courbe

$$y = \varphi(x)$$

se compose donc d'une infinité de segments de droite égaux et parallèles ..., $B'B$, BB_1, B_1B_2, ..., et des points ..., A', A, A_1, A_2, ..., les extrémités de ces segments n'appartenant pas à la courbe et devant être remplacées par les points ..., A', A, A_1, ...

On voit bien, par cette discussion détaillée, comment la série trouvée représente la fonction $\frac{x}{2}$ entre les limites $-\pi$ et $+\pi$.

Remarque. — L'exemple que nous venons de traiter nous montre que l'on ne peut pas toujours différentier les séries trigonométriques.

En effet, si l'on prenait les dérivées des divers termes de la série (3), on aurait la série

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots,$$

qui est manifestement divergente, car le terme général $\cos nx$ ne tend pas vers zéro.

126. Autre exemple. — *Développement de* $\frac{x^2}{4}$. — On pourra appliquer, de même, la méthode générale au développement de $\frac{x^2}{4}$. Les intégrales donnant les coefficients se calculeront facilement à l'aide de l'intégration par parties.

Mais nous pouvons déduire ce développement de celui de $\frac{x}{2}$:

$$(3)\qquad \frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \ldots,$$

en admettant que, pour intégrer une série trigonométrique, il suffit d'intégrer terme à terme. On a ainsi, en intégrant les deux membres de (3) et désignant par a_0 une constante d'intégration,

$$\frac{x^2}{4} = a_0 - \cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots,$$

où il reste à déterminer a_0. Pour cela, d'après la méthode générale, on multiplie les deux membres par dx et l'on intègre de $-\pi$ à $+\pi$. On a alors, puisque toutes les intégrales du deuxième membre sont nulles, sauf la première,

$$\frac{\pi^3}{6} = 2\pi a_0, \qquad a_0 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Donc

$$(5)\qquad \frac{x^2}{4} = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{1}{2^2}\cos 2x - \frac{1}{3^2}\cos 3x + \ldots,$$

$$-\pi < x < \pi.$$

Actuellement, la fonction développée en série est, entre $-\pi$ et $+\pi$,

$$f(x) = \frac{x^2}{4}.$$

La série est égale à $f(x)$, entre les limites $-\pi$ et $+\pi$. Aux limites, la série prend la valeur

$$\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)];$$

mais, comme

$$f(\pi)=f(-\pi)=\frac{\pi^2}{4},$$

la série pour $x=\pm\pi$ est égale à la fonction. Le développement est donc valable pour

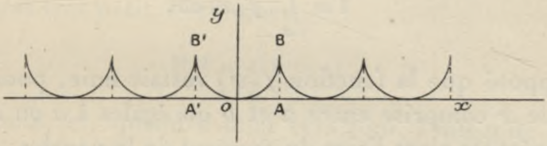
$$-\pi \leqq x \leqq \pi.$$

Représentation graphique. — Si l'on construit la courbe

$$y=\frac{\pi^2}{12}-\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x-\frac{1}{3^2}\cos 3x-\ldots,$$

cette courbe, dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$ et aux limites de

Fig. 62.



l'intervalle, coïncide avec l'arc de parabole B′OB (*fig.* 62).

$$y=\frac{x^2}{4}.$$

La courbe tout entière s'obtient en répétant indéfiniment le même arc de parabole dans tous les intervalles ..., $(\pi, 3\pi)$, $(3\pi, 5\pi)$, ... Les points . . . , B′, B, . . . , sont des points anguleux.

CHAPITRE IX.

INTÉGRALES DÉFINIES DONT L'ÉLÉMENT DIFFÉRENTIEL DEVIENT INFINI, OU DONT UNE LIMITE EST INFINIE.

I. — L'ÉLÉMENT DIFFÉRENTIEL DEVIENT INFINI.

127. L'élément différentiel devient infini pour l'une des limites. — Quand on a défini l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

on a supposé que la fonction $f(x)$ restait finie, pour toutes les valeurs de x comprise entre a et b ou égales à a ou à b. L'intégrale représente alors l'aire du segment de la courbe

$$y = f(x)$$

entre les ordonnées d'abscisses a et b.

Supposons que $f(x)$ reste finie pour $x = a$ et pour x compris entre a et b, mais devienne infinie pour $x = b$. Pour fixer les idées, nous admettrons que la limite supérieure b est plus grande que a, et que $f(x)$ *devienne infini en conservant un signe constant*, le signe $+$ par exemple. La courbe

$$y = f(x)$$

a alors pour asymptote la droite BB′ d'abscisse b, comme le montre la figure 63. Nous supposons que l'ordonnée AA′ a pour abscisse a.

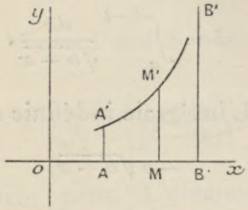
Pour voir si l'on peut attribuer un sens à l'intégrale I, on procède comme il suit. Au lieu d'intégrer de a à b, on intègre de a à un nombre plus petit que b mais très voisin de b, c'est-à-dire de a

à $b-\varepsilon$, ε étant un nombre *positif* très petit. On a alors l'intégrale

$$J = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

qui a un sens parfaitement défini; si M'M est l'ordonnée ayant pour abscisse $b-\varepsilon$, cette intégrale mesure l'aire du segment

Fig. 63.



AA'M'M. On fait ensuite tendre ε vers zéro, c'est-à-dire tendre le point M vers le point B.

Quand ε est très petit, l'ordonnée

$$MM' = f(b-\varepsilon)$$

est très grande, et, quand ε tend vers zéro, l'intégrale J, c'est-à-dire l'aire AA'M'M, va évidemment en augmentant. Deux cas peuvent alors se présenter :

1° Quand ε tend vers zéro, l'intégrale J tend vers une limite : cette limite est, *par définition*, ce qu'on appelle la *valeur de l'intégrale*

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dans ce cas, l'aire comprise entre l'ordonnée AA', la courbe et l'asymptote BB', est finie.

2° Quand ε tend vers zéro, l'intégrale J augmente indéfiniment. On dit alors que l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

est *infinie*. L'aire comprise entre la courbe, l'ordonnée AA' et l'asymptote est infinie.

Exemples. — Soit d'abord

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{b-x}};$$

voyons si l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}}$$

est finie ou non. Pour cela, calculons d'abord

$$J = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{b-x}},$$

ε positif et très petit. L'intégrale indéfinie étant

$$-2\sqrt{b-x},$$

on a

$$J = -2\sqrt{\varepsilon} + 2\sqrt{b-a}.$$

Quand ε tend vers zéro, J tend vers $2\sqrt{b-a}$. L'intégrale proposée a donc un sens et l'on a

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = 2\sqrt{b-a}.$$

Soit maintenant

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)^2}.$$

Nous allons voir que l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^2}$$

est *infinie*. En effet, calculons d'abord

$$J = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^2}.$$

L'intégrale indéfinie étant $\frac{1}{b-x}$, on a

$$J = \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{b-a},$$

expression qui devient *infinie* quand ε tend vers zéro.

128. Cas particulier où l'intégrale est de la forme $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}$. — Soit n un nombre positif, entier ou fractionnaire; considérons l'intégrale définie

$$I = \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n},$$

dont l'élément différentiel devient infini pour $x = b$. Nous allons montrer que cette intégrale est *finie* quand $n < 1$, *infinie* quand $n \geqq 1$.

En effet, supposons d'abord n différent de 1, et calculons l'intégrale

$$J = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{(b-x)^n},$$

où ε est positif et très petit. L'élément différentiel pouvant s'écrire

$$(b-x)^{-n},$$

l'intégrale indéfinie est

$$-\frac{(b-x)^{1-n}}{1-n}.$$

et l'intégrale définie

$$J = -\frac{\varepsilon^{1-n}}{1-n} + \frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}.$$

Si $n < 1$, $1-n$ est positif, ε est élevé à une puissance positive, et, quand ε tend vers zéro, J tend vers la limite

$$\frac{(b-a)^{1-n}}{1-n}.$$

L'intégrale proposée est alors égale à cette limite.

Si $n > 1$, $1-n$ est négatif, ε est élevé à une puissance négative, et, quand ε tend vers zéro, J augmente indéfiniment. L'intégrale proposée est alors infinie.

Nous avons réservé le cas de $n = 1$. On a alors

$$J = \int_a^{b-\varepsilon} \frac{dx}{b-x} = -\mathrm{L}\varepsilon + \mathrm{L}(b-a),$$

car l'intégrale indéfinie est $-\mathrm{L}(b-x)$. Quand ε tend vers zéro, J augmente indéfiniment; l'intégrale proposée est donc infinie pour $n = 1$.

129. Intégrales comparables aux précédentes. — Soit une intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ est finie quand x est égal à a ou compris entre a et b, mais augmente indéfiniment par valeurs positives quand x tend vers b.

Considérons le produit

$$(b-x)^n f(x),$$

où n est un *nombre positif*. Quand x tend vers b, ce produit prend la forme $0 \times \infty$. Supposons que l'on puisse déterminer l'exposant n de telle façon que le produit

$$(b-x)^n f(x)$$

tende vers une limite l quand x tend vers b.

Alors, on peut énoncer la règle suivante :

1° Si, pour une certaine valeur de n moindre que 1, le produit

$$(b-x)^n f(x)$$

a une limite l, l'intégrale proposée est *finie;*

2° Si, pour une certaine valeur de n *supérieure* ou *égale* à 1, le produit

$$(b-x)^n f(x)$$

a une limite l *différente de zéro*, l'intégrale proposée est *infinie*.

Premier cas. — Supposons d'abord qu'il existe un nombre n moindre que 1, tel que le produit

$$(b-x)^n f(x)$$

tende vers une limite l, limite qui peut d'ailleurs être nulle, quand x tend vers b. Dans ces conditions, il est évident que ce produit est très voisin de l quand x est très voisin de b. Partageons alors l'intervalle d'intégration (a, b) en deux parties, l'une de a à c et l'autre de c à b, c étant plus petit que b, mais très voisin de b.

L'intégrale I s'écrit

$$I = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

La première intégrale, prise entre les limites a et c, est finie. Il reste à montrer que l'autre intégrale est aussi *finie*. En effet, le produit

$$(b-x)^n f(x)$$

tendant vers l, si l'on appelle M un nombre positif fixe supérieur à cette limite l, il est évident que, x étant très voisin de b, le produit $(b-x)^n f(x)$, qui est très voisin de l, est inférieur à M. On peut donc choisir c assez voisin de b pour que, x étant compris entre c et b, on ait

$$(b-x)^n f(x) < \mathrm{M},$$

$$f(x) < \frac{\mathrm{M}}{(b-x)^n}.$$

Mais on a alors (n° 37)

$$\int_c^b f(x)\,dx < \int_c^b \frac{\mathrm{M}}{(b-x)^n}\,dx.$$

Comme M est constant, on peut le faire sortir du signe d'intégration, et l'on a, dans le deuxième membre, l'intégrale

$$\int_c^b \frac{dx}{(b-x)^n},$$

qui est finie, car $n < 1$. L'intégrale du premier membre $\int_c^b f(x)\,dx$ étant moindre qu'une quantité finie est *finie*. Donc, dans ce cas, $(n < 1)$ l'intégrale proposée est *finie*.

Deuxième cas. — Supposons maintenant qu'il existe un nombre n supérieur ou égal à 1, tel que le produit

$$(b-x)^n f(x)$$

tende vers une limite l *différente de zéro*, quand x tend vers b.

On pourra écrire, comme plus haut,

$$I = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

c étant moindre que b, mais très rapproché de b. La première intégrale est finie; nous allons montrer que la deuxième est infinie. Soit m un nombre positif moindre que l,

$$0 < m < l.$$

Quand x est très voisin de b, le produit

$$(b - x)^n f(x)$$

est très voisin de l et, par suite, supérieur à m. On peut donc prendre c assez voisin de b pour que, dans tout l'intervalle (c, b), on ait

$$(b - x)^n f(x) > m,$$

c'est-à-dire

$$f(x) > \frac{m}{(b - x)^n}.$$

On a alors

$$\int_c^b f(x)\,dx > \int_c^b \frac{m\,dx}{(b - x)^n}.$$

Or l'intégrale du deuxième membre est *infinie*, car $n \geqq 1$; celle du premier membre est donc également infinie. Dans ce cas, l'intégrale proposée est infinie.

Remarque. — Nous avons supposé, pour fixer les idées, que $f(x)$ devient infinie en restant positive, quand x tend vers b. Les mêmes conclusions s'appliquent au cas où $f(x)$ devient infinie en restant négative quand x tend vers b. En effet, dans cette dernière hypothèse, la courbe

$$y = f(x)$$

s'éloigne à l'infini pour $x = b$ au-dessous de l'axe Ox. Il suffirait donc de changer le sens de Oy pour être ramené au cas précédent.

130. **L'élément différentiel devient infini pour la limite inférieure.** — Nous avons supposé que l'élément différentiel $f(x)$ devient infini quand x est égal à la limite supérieure b. Les mêmes conclusions subsisteraient évidemment si $f(x)$ devenait infinie quand x est égal à la limite inférieure a. Il suffirait, pour ramener ce cas à celui qui a été traité en détail, de changer le sens de l'axe Ox dans le tracé de la courbe $y = f(x)$.

Pour voir si l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

où

$$f(a) = \infty,$$

a un sens $(b > a)$, on considérera le produit

$$(x - a)^n f(x),$$

dans lequel on fera tendre x vers a.

S'il existe un nombre positif n, plus petit que 1, tel que ce produit ait une limite, l'intégrale est finie.

S'il existe un nombre n égal ou supérieur à 1, tel que ce produit ait une limite *différente de* 0, l'intégrale est infinie.

131. Exemples. — I. Soit l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}}.$$

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}$$

devient infinie pour $x = 1$. On cherchera s'il existe un nombre n, tel que le produit

$$(1 - x)^n \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}}$$

tende vers une limite pour $x = 1$.

Comme

$$\sqrt{1 - x^3} = \sqrt{1 - x}\sqrt{1 + x + x^2},$$

on voit qu'en prenant $n = \frac{1}{2}$, le produit

$$(1 - x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x + x^2}}$$

tend vers $\frac{1}{\sqrt{3}}$ quand x tend vers 1.

Le nombre n étant moindre que 1, l'intégrale a un sens.

II. Soit l'intégrale

$$\int_0^1 \mathrm{L}x\,dx,$$

dans laquelle le coefficient de x,

$$f(x) = \mathrm{L}x,$$

est infini négatif pour $x = 0$, cette fontion étant d'ailleurs finie pour toutes les valeurs de x entre 0 et 1. Ici $a = 0$; le produit à considérer $(x - a)^n f(x)$ est donc

$$x^n \mathrm{L}x.$$

Il faut voir comment se comporte ce produit pour $x = 0$. Or, quelle que soit la valeur positive attribuée à n, ce produit tend vers *zéro* (n° 100). En prenant, par exemple, $n = \frac{1}{2}$,

$$x^{\frac{1}{2}} \mathrm{L}x$$

tend donc vers une limite quand x tend vers zéro. L'exposant n étant moindre que 1, l'intégale a un sens.

III. Soit l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 - x^3},$$

où l'élément différentiel devient infini pour $x = 1$. En écrivant

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^3} = \frac{1}{(1 - x)(1 + x + x^2)},$$

on voit immédiatement que le produit

$$(1 - x) f(x)$$

tend vers $\frac{1}{3}$ pour $x = 1$. Cette limite étant différente de zéro, et l'exposant n égal à 1, l'intégrale est *infinie*.

Pour se rendre compte de ce résultat, on peut dire que, dans le voisinage de $x = 1$, la fonction $\frac{1}{1 - x^3}$ devient infinie comme $\frac{1}{3} \frac{1}{1 - x}$ et que son intégrale se comporte comme $\frac{1}{3} \int \frac{dx}{1 - x}$, intégrale qui devient infinie pour $x = 1$.

IV. Soit l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{dx}{\mathrm{L}x}.$$

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{Lx}$$

est nulle pour $x = 0$, car $L0 = -\infty$; elle est finie tant que x va de 0 à 1; elle devient infinie négative quand x tend vers 1. Le produit à considérer est ici

$$(1-x)^n f(x) = \frac{(1-x)^n}{Lx},$$

pour $x = 1$. Faisons $x = 1 - x'$, nous aurons à étudier le rapport

$$\frac{x'^n}{L(1-x')},$$

quand x' tend vers zéro par valeurs positives. Or, x' étant moindre que 1, on a

$$L(1-x') = -x' - \frac{x'^2}{2} - \frac{x'^3}{3} - \ldots;$$

on voit donc que, si l'on prend $n = 1$, le rapport devient

$$-\frac{x'}{x' + \frac{x'^2}{2} + \frac{x'^3}{3} + \ldots} = -\frac{1}{1 + \frac{x'}{2} + \frac{x'^2}{3} + \ldots},$$

et qu'il tend vers -1 pour $x' = 0$. Donc le produit

$$\frac{1-x}{Lx}$$

tend vers -1 quand x tend vers 1. Cette limite étant *différente de zéro* et l'exposant n égal à 1, l'intégrale est *infinie*.

V. Soit enfin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^3 x}$$

où l'élément différentiel

$$f(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$$

devient infini pour $x = \frac{\pi}{2}$. Écrivons

$$f(x) = \frac{1}{\sin^3\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

nous voyons que le produit

$$\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3 f(x)=\left[\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]^3$$

tend vers 1 quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$. Ici l'exposant n est égal à 3; il est supérieur à 1 et le produit tend vers la limite 1 différente de 0. L'intégrale est infinie.

Pour se rendre compte de ce résultat, on peut dire que, dans le voisinage de $\frac{\pi}{2}$, la fonction $\frac{1}{\cos^3 x}$ devient infinie comme $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}$ et que son intégrale se comporte comme

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3},$$

qui est infinie pour $x=\frac{\pi}{2}$.

132. L'élément différentiel devient infini entre les limites. — Soit une intégrale

$$\mathrm{I}=\int_a^b f(x)\,dx,$$

où l'élément différentiel devient infini pour une valeur c comprise entre les limites. Il faudra alors considérer séparément les deux intégrales

$$\int_a^c f(x)\,dx, \qquad \int_c^b f(x)\,dx,$$

dans chacune desquelles l'élément différentiel devient infini pour une limite $x=c$. Pour que l'intégrale proposée ait un sens, il faut que chacune de ces intégrales en ait un, et, alors, l'intégrale proposée est, *par définition*, égale à la somme de ces intégrales :

$$\mathrm{I}=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

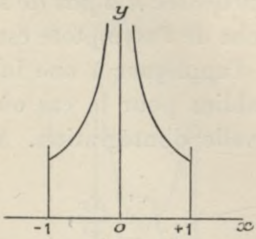
Exemples. — I. Considérons l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}},$$

dans laquelle l'élément différentiel devient infini pour $x = 0$. Construisons la courbe (*fig.* 64)

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}:$$

Fig. 64.



elle a deux branches infinies asymptotes à Oy. On considérera, séparément, les deux intégrales

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ces deux intégrales ont un sens, car elles sont de la forme

$$\int \frac{dx}{x^n},$$

où n a la valeur $\frac{2}{3}$, moindre que 1. L'intégrale indéfinie est, pour chacune d'elles,

$$3x^{\frac{1}{3}},$$

et l'intégrale définie 3. Géométriquement, cela veut dire que l'aire comprise entre la branche de gauche et l'axe Oy est égale à 3; l'aire symétrique également. L'intégrale proposée est alors égale à 6; elle donne l'aire totale.

II. Soit l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}.$$

La courbe

$$y = \frac{1}{x^2}$$

a une forme analogue à la précédente (*fig.* 64). Mais ici les deux intégrales

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2}, \qquad \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

sont infinies toutes les deux, comme on le vérifie immédiatement, et *l'intégrale proposée n'a pas de sens*. Chacune des deux aires à droite et à gauche de l'asymptote est *infinie*.

Il serait absurde d'appliquer à une intégrale de ce genre les règles qui ont été établies pour le cas où la fonction à intégrer est *finie* dans l'intervalle d'intégration. Ainsi, pour cette intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2},$$

il serait absurde de prendre l'intégrale indéfinie $-\frac{1}{x}$ et de dire que l'intégrale définie est égale à la différence des valeurs de $-\frac{1}{x}$ aux deux limites, c'est-à-dire à -2. Cette règle, établie pour calculer les intégrales définies, suppose en effet *essentiellement* que la fonction à intégrer *reste finie* entre les limites, ce qui n'a pas lieu ici.

133. **L'élément différentiel devient infini aux deux limites.** — Ce cas se ramène aux précédents. Soit une intégrale

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

où $f(x)$ devient infinie aux limites a et b, et reste finie entre les limites. Soit c un nombre quelconque compris entre a et b.

On considérera les deux intégrales

$$\int_{a}^{c} f(x)\,dx, \qquad \int_{c}^{b} f(x)\,dx,$$

dans chacune desquelles l'élément différentiel devient infini pour une limite. Pour que l'intégrale proposée ait un sens, il faut que chacune de ces deux intégrales ait un sens et alors la proposée est, *par définition*, égale à leur somme.

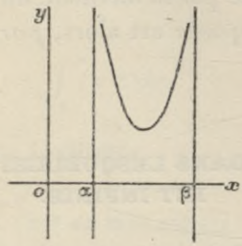
Exemple. — Soit $\alpha < \beta$; l'intégrale

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}$$

a un sens. La courbe

$$y = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = f(x)$$

Fig. 65.



présente deux asymptotes d'abscisses α et β. Si l'on appelle γ un nombre intermédiaire, on considère les deux intégrales

$$\int_{\alpha}^{\gamma} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}, \qquad \int_{\gamma}^{\beta} \frac{dx}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}}.$$

Ces deux intégrales ont chacune un sens, car les produits

$$(x-\alpha)^{\frac{1}{2}} f(x), \quad (\beta - x)^{\frac{1}{2}} f(x)$$

tendent vers des limites pour $x = \alpha$ et $x = \beta$.

L'intégrale proposée a donc un sens; elle représente l'aire comprise entre la courbe, les deux asymptotes et l'axe Ox. Pour la calculer, il suffit d'employer les formules du n° 112 qui donnent $A = \pi$.

134. L'élément différentiel devient infini aux limites et pour des valeurs intermédiaires. — Soit l'intégrale

$$I = \int_{a}^{b} f(x)\, dx,$$

où $f(x)$ devient infinie, pour $x = a$, $x = b$, et des valeurs intermédiaires $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$. Supposons

$$a<\alpha<\beta<\gamma<b.$$

On considérera les intégrales

$$(\mathrm{J})\qquad \int_a^\alpha f(x)\,dx,\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,\qquad \int_\beta^\gamma f(x)\,dx,\qquad \int_\gamma^b f(x)\,dx.$$

Pour que l'intégrale proposée ait un sens, il faut que chacune de ces intégrales, traitée par la méthode du numéro précédent, en ait un. L'intégrale proposée est alors, *par définition,* la somme des intégrales (J).

II. — INTÉGRALES DANS LESQUELLES UNE DES LIMITES EST INFINIE.

135. **Définition.** — Soit une intégrale de la forme

$$\mathrm{I}=\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

Cette notation n'a aucun sens par elle-même, car jusqu'ici nous avons donné toutes les définitions en supposant les limites finies. Pour voir si l'on peut attribuer un sens à l'intégrale considérée, on considère l'intégrale auxiliaire

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

où la limite supérieure est finie. Puis, dans cette intégrale, on fait croître b indéfiniment. Alors deux cas se présentent :

1° Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ tend vers une limite quand b augmente indéfiniment, cette limite est, *par définition*, la valeur de l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx.$$

2° Si l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ ne tend vers aucune limite quand b augmente indéfiniment, soit qu'elle devienne *infinie*, soit qu'elle devienne *indéterminée*, on dit que la notation

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

n'a aucun sens; ou encore on dit, suivant les cas, que l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

est *infinie* ou *indéterminée*.

Exemples. — I. Soit

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx.$$

Considérons l'intégrale auxiliaire

$$\int_0^b e^{-x}\,dx = -e^{-b}+1,$$

comme on le voit immédiatement en remarquant que l'intégrale indéfinie est $-e^{-x}$. Quand b augmente indéfiniment, e^{-b} tend vers zéro. L'intégrale auxiliaire tend donc vers la limite 1; l'on a alors

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

Géométriquement, si l'on construit la courbe

$$y = e^{-x},$$

qui est asymptote à Ox, notre raisonnement montre que l'aire comprise entre la courbe, l'axe Oy et l'asymptote Ox est *finie* et a pour valeur 1.

II. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

On a ici

$$\int_0^b \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{L}(1+b^2),$$

expression qui devient infinie avec b. L'intégrale proposée est donc *infinie*.

La courbe

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

est encore asymptote à Ox; mais l'aire est actuellement *infinie*.

III. Soit enfin

$$\int_0^\infty \cos x \, dx.$$

On a

$$\int_0^b \cos x \, dx = \sin b.$$

Quand b augmente indéfiniment, $\sin b$ n'a aucune limite, tout en restant compris entre -1 et $+1$. L'intégrale proposée est donc *indéterminée*.

136. Examen de quelques cas où la fonction $f(x)$ conserve un signe constant pour de très grandes valeurs de x et tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. — 1° Cas particulier. — Soit l'intégrale

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p},$$

où p est un exposant positif quelconque et a un nombre que nous supposons positif, pour éviter que la valeur zéro, rendant $\frac{1}{x^p}$ infini, soit comprise dans l'intervalle d'intégration.

La fonction $\frac{1}{x^p}$ conserve évidemment un signe constant quand x augmente indéfiniment. Nous allons montrer que : l'intégrale a un sens quand $p > 1$; l'intégrale est infinie quand $p \leqq 1$.

En effet, calculons d'abord l'intégrale auxiliaire

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \int_a^b x^{-p} \, dx = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{a^{1-p}}{1-p}.$$

Si p est plus grand que 1, $1-p$ est négatif et, quand b croît indéfiniment, b^{1-p} tend vers zéro. L'intégrale a donc alors une limite, et l'on peut écrire

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1} \qquad (p > 1).$$

Si p est inférieur à 1, $1-p$ est positif et, quand b croît indéfiniment, b^{1-p} croît aussi au delà de toute limite; l'intégrale proposée est donc alors infinie.

Si $p=1$, on a

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \mathrm{L}\,b - \mathrm{L}\,a,$$

expression qui devient infinie avec b. Donc

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty \qquad (p \leqq 1).$$

Si l'on construit la courbe

$$y = \frac{1}{x^p},$$

cette courbe a pour asymptote Ox : l'aire comprise entre une ordonnée fixe, la courbe et l'asymptote a une valeur finie pour $p>1$; elle est infinie pour $p \leqq 1$.

2° *Intégrales se ramenant aux précédentes.* — Soit une intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^\infty f(x)\,dx,$$

dans laquelle la fonction $f(x)$ conserve un signe constant, le signe $+$ par exemple, quand x augmente indéfiniment; nous supposerons, de plus, que cette fonction tende vers zéro quand x devient infini.

Si l'on construit la courbe $y=f(x)$, cette courbe peut couper Ox un nombre quelconque de fois, mais, à partir d'une abscisse déterminée, suffisamment grande, elle reste d'un même côté de Ox, au-dessus par exemple, et elle est asymptote à Ox. Nous voulons donner une règle pour reconnaître, dans des cas simples, si l'aire comprise entre la courbe et l'axe des x est finie ou non.

Si l'on considère deux points C' et B' de la courbe dans la partie qui est et demeure au-dessus de Ox et si l'on appelle c et b les abscisses de ces deux points, CC' et BB' leurs ordonnées, en supposant

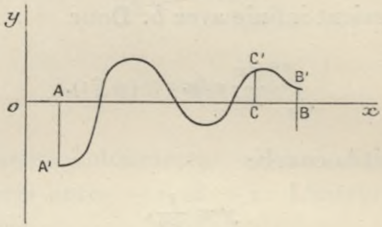
$$b > c,$$

on peut écrire

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

La première intégrale du deuxième membre a un sens bien

Fig. 66.



défini; la deuxième, représentant l'aire CC'B'B, croît constamment avec b; il s'agit de voir si elle reste finie quand b devient infini.

Pour cela, on considère le produit

$$x^p f(x)$$

où p est positif. Ce produit se présente sous la forme

$$\infty \times 0$$

quand x augmente indéfiniment. On cherche si, par un choix convenable de p, on ne peut pas amener ce produit à avoir une limite.

1° Si, p ayant une certaine valeur *supérieure* à 1, le produit $x^p f(x)$ tend vers une limite l, l'intégrale proposée est finie;

2° Si, p ayant une certaine valeur inférieure ou égale à 1, le produit $x^p f(x)$ tend vers une limite l, *différente de zéro*, l'intégrale proposée est infinie.

Premier cas. — Supposons d'abord qu'il existe un nombre p supérieur à 1, tel que le produit

$$x^p f(x)$$

tende vers une limite l, limite qui peut d'ailleurs être nulle, quand x augmente indéfiniment. Dans ces conditions, il est évident que ce produit est très voisin de l quand x est très grand.

Partageons alors l'intervalle de a à ∞ en deux parties de a à c et de c à ∞, c étant très grand. On a

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx.$$

La première intégrale du deuxième membre est finie; il reste à montrer que la deuxième est aussi finie. Or, le produit

$$x^p f(x)$$

tendant vers l pour x infini, si l'on appelle M un nombre positif fixe supérieur à l, il est évident que, x étant très grand, le produit $x^p f(x)$, qui est très voisin de l, est inférieur à M. On peut donc choisir c assez grand pour que, x étant supérieur à c, on ait

$$x^p f(x) < \mathrm{M},$$
$$f(x) < \frac{\mathrm{M}}{x^p}.$$

Mais on a alors (n° 37)

$$\int_c^\infty f(x)\,dx < \mathrm{M}\int_c^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

Comme p est plus grand que 1, la deuxième intégrale est finie; la première, qui est moindre, est finie également, et l'intégrale proposée est finie.

Deuxième cas. — Supposons maintenant qu'il existe un nombre p inférieur ou égal à 1, tel que le produit

$$x^p f(x)$$

tende vers une limite l, *différente de zéro*, pour $x = \infty$. On pourra écrire l'intégrale proposée, comme plus haut,

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^\infty f(x)\,dx,$$

c étant très grand. La première intégrale est finie : nous allons voir que la deuxième est infinie.

Soit m un nombre positif moindre que l

$$0 < m < l.$$

Quand x est très grand, le produit $x^p f(x)$ est très voisin de l et, par suite, supérieur à m. On peut donc prendre c assez grand pour que, x étant supérieur à c, on ait

$$x^p f(x) > m, \qquad f(x) > \frac{m}{x^p}.$$

Alors

$$\int_c^\infty f(x)\,dx > m\int_c^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

Comme $p \leqq 1$, l'intégrale du deuxième membre est infinie, celle du premier également. L'intégrale proposée est donc infinie.

Exemples. — I. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+x^2+1}}.$$

Actuellement

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+x^2+1}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}.$$

Donc le produit

$$x^{\frac{3}{2}} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}}$$

tend vers 1 quand x augmente indéfiniment. L'exposant $\frac{3}{2}$ étant supérieur à 1, l'intégrale est finie.

II. Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx;$$

actuellement

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Or, p étant un exposant positif quelconque, le produit

$$x^p f(x) = x^p e^{-x^2}$$

tend vers zéro pour x infini. On peut donc prendre $p = 2$, pour fixer les idées, et dire que $x^2 e^{-x^2}$ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. L'exposant p étant supérieur à 1, l'intégrale a un sens.

III. Soit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}.$$

On a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \frac{1}{x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}}.$$

Donc le produit

$$x f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}},$$

tend vers 1 quand x augmente indéfiniment. L'exposant p étant égal à 1, et la limite de $xf(x)$ différente de zéro, l'intégrale considérée est infinie.

On peut se rendre compte de ce fait en remarquant que, pour x très grand, la valeur principale de

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

est $\frac{1}{x}$ et que l'intégrale proposée se comporte comme

$$\int \frac{dx}{x},$$

qui est infinie avec x.

137. **Remarque.** — Nous avons, pour simplifier, supposé que $f(x)$ conserve le même signe quand x est supérieur à un nombre fixe suffisamment grand et que $f(x)$ tend vers zéro quand x devient infini. Il ne faudrait pas croire que cette dernière condition est nécessaire pour que l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

soit finie, quand $f(x)$ conserve un signe constant pour x très grand.

Soit, par exemple,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4 \sin^2 x};$$

cette fonction conserve le signe + quand x augmente indéfiniment; mais elle ne tend pas vers zéro, car, si l'on donne à x une valeur de la forme $k\pi$, k étant un entier quelconque aussi grand que l'on veut, on a

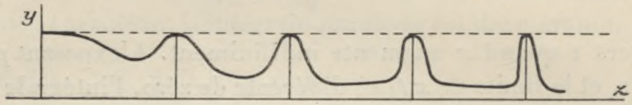
$$f(x) = 1.$$

La courbe

$$y = \frac{1}{1 + x^4 \sin^2 x}$$

est donc au-dessus de Ox; elle n'est pas asymptote à Ox, car elle touche la droite $y = 1$ en tous les points ayant pour abscisses $0, \pi, 2\pi, \ldots, k\pi, \ldots$. Pour la tracer, on peut remarquer qu'elle touche aussi la courbe $y = \frac{1}{1+x^4}$ en tous les points d'abscisses $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ (*fig.* 67).

Fig. 67.



Cependant l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2 x}$$

est finie. Pour le voir, on ne peut pas employer la méthode précédente qui suppose que la courbe est asymptote à Ox.

Nous emploierons une méthode qui réussit dans beaucoup de cas et qui consiste à partager l'aire comprise entre la courbe et l'axe Ox en tranches, par des ordonnées, et à vérifier que la série formée par la somme de ces tranches est convergente. Nous partagerons ici l'aire par les verticales d'abscisses

$$0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \ldots.$$

Nous aurons alors, en appelant $u_0, u_1, \ldots, u_n$ les aires de ces tranches qui sont toutes positives,

$$u_0 = \int_0^{\pi} f(x)\,dx, \qquad u_1 = \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\,dx, \qquad \ldots, \qquad u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(x)\,dx.$$

Mettons à part u_0, nous allons montrer que la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est *convergente*. Pour cela, nous chercherons une limite supérieure de u_n. Si, dans l'intégrale u_n, on fait

$$x = n\pi + t,$$

on a

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi + t)^4 \sin^2 t},$$

et, comme

$$(n\pi + t)^4 > n^4\pi^4 - 1,$$

$$u_n < \int_0^\pi \frac{dt}{1 + (n^4\pi^4 - 1)\sin^2 t},$$

$$u_n < \int_0^\pi \frac{dt}{\cos^2 t + n^4\pi^4 \sin^2 t}.$$

Cette intégrale est égale à

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t + n^4\pi^4 \sin^2 t},$$

car, si l'on partage l'intervalle d'intégration $(0, \pi)$ en deux, le premier de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et le second de $\frac{\pi}{2}$ à π, on voit, en faisant dans la deuxième intégrale $t = \pi - t'$, qu'elle est égale à la première.

On peut donc écrire, en divisant haut et bas par $\cos^2 t$,

$$u_n < \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(n^2\pi^2 \operatorname{tang} t)}{1 + (n^2\pi^2 \operatorname{tang} t)^2}$$

et, en intégrant,

$$u_n < \frac{2}{n^2\pi^2} \Big| \operatorname{arc\,tang}(n^2\pi^2 \operatorname{tang} t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$u_n < \frac{2}{n^2\pi^2}\,\frac{\pi}{2}.$$

La somme

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

a donc ses termes respectivement plus petits que ceux de la série convergente

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\right).$$

Elle est donc convergente et l'aire comprise entre la courbe et Ox a une valeur finie.

Ce résultat tient à ce que, dans la courbe, les ondulations qui vont toucher la droite $y = 1$ deviennent de plus en plus étroites, de telle façon que la somme de leurs aires est finie.

138. Examen de quelques cas où, x croissant indéfiniment, $f(x)$ change constamment de signe. — *Premier exemple.* — Soit l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Actuellement, la fonction à intégrer,

$$f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

est, quelque grand que soit x, tantôt positive et tantôt négative.

Construisons la courbe

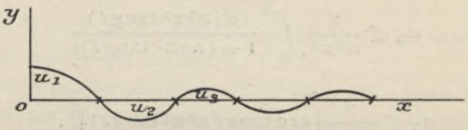
$$y = \frac{\sin x}{x},$$

quand x varie de o à $+\infty$: cette courbe part du point $x = 0$, $y = 1$; elle coupe Ox aux points

$$x = \pi, \quad x = 2\pi, \quad \ldots, \quad x = k\pi, \quad \ldots.$$

La courbe a la forme d'une sinusoïde, mais l'ordonnée maximum de chaque onde est moindre que l'ordonnée maximum de la précédente (*fig.* 68).

Fig. 68.



Appelons u_1, u_2, ..., u_n les valeurs absolues des aires des diverses ondulations. On aura

$$u_1 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad u_2 = -\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad u_3 = \int_{2\pi}^{3\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad \ldots;$$

en général,

$$u_{n+1} = (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

La figure montre que les aires successives u_1, u_2, ..., u_{n+1} vont en décroissant et que l'aire u_{n+1} tend vers zéro, quand n devient infini. C'est ce qu'on vérifie sur l'intégrale précédente donnant u_{n+1}. Faisons-y le changement de variable

$$x = n\pi + t;$$

les nouvelles limites pour t sont o et π; on a de plus

$$\sin x = \sin(n\pi + t) = (-1)^n \sin t;$$

donc

$$u_{n+1} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\, dt.$$

Cette intégrale diminue évidemment quand n augmente, et tend vers zéro quand n devient infini.

D'après cela, l'intégrale proposée

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

qui est la somme algébrique des aires des diverses ondes comprises entre la courbe et l'axe Ox, est la limite de la somme de la série

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots.$$

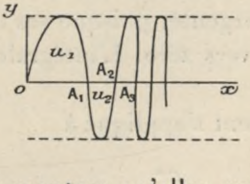
Cette série a ses termes alternativement positifs et négatifs; chaque terme est plus petit que le précédent et le terme général u_n tend vers zéro. La série est donc convergente et l'intégrale considérée a une valeur déterminée égale à la somme de la série. Nous verrons plus loin que cette valeur est $\frac{\pi}{2}$.

Deuxième exemple. — *Intégrales de Fresnel :*

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\, dx.$$

Ces intégrales se présentent dans la théorie de la diffraction de

Fig. 69.



la lumière. Nous allons montrer qu'elles ont un sens. Prenons la première et construisons la courbe

$$y = \sin x^2,$$

pour les valeurs positives de x. La courbe part de l'origine, où elle est tangente à Ox; elle coupe l'axe Ox aux points

$$x = 0, \qquad x = \sqrt{\pi}, \qquad x = \sqrt{2\pi}, \qquad \ldots, \qquad x = \sqrt{k\pi}.$$

Elle est ondulée comme une sinusoïde; chaque ondulation a pour ordonnée maximum ou minimum $+1$ ou -1. Mais les ondulations vont en se resserrant de plus en plus. En effet, la distance de deux points d'intersection consécutifs avec Ox, $A_n A_{n+1}$, est

$$\sqrt{(n+1)\pi} - \sqrt{n\pi},$$

ce qu'on écrit, en multipliant et divisant par la somme des radicaux,

$$A_n A_{n+1} = \frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\pi} + \sqrt{n\pi}}.$$

Cette distance décroît quand n augmente et tend vers zéro. On en conclut, comme le montre la forme de la courbe, que si

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

désignent les valeurs absolues des aires des diverses ondes, on a

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n,$$

et $\lim u_n = 0$ pour $x = \infty$.

L'intégrale $\int_0^\infty \sin x^2 \, dx$, étant égale à la somme algébrique de ces aires, est égale à la somme de la série suivante à termes alternativement positifs et négatifs

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots.$$

Cette série est convergente, puisque ses termes décroissent constamment et tendent vers zéro. L'intégrale considérée a donc un sens.

Le même raisonnement s'applique à

$$\int_0^\infty \cos x^2 \, dx.$$

On démontre (*voir* Intégrales doubles) que la valeur numérique commune des deux intégrales de Fresnel est $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

139. Cas où les deux limites sont infinies. — Si l'on a une intégrale de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

pour voir si elle a un sens, on la partage en deux

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Si chacune de ces intégrales a séparément un sens, la proposée en a un.

CHAPITRE X.

TANGENTE A UNE COURBE PLANE. MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE. COURBURE D'UNE COURBE PLANE.

I. — TANGENTE, NORMALE, SOUS-TANGENTE, SOUS-NORMALE.

140. Tangente. — Soit

$$y=f(x)$$

l'équation d'une courbe plane en coordonnées cartésiennes. L'équation de la tangente au point $M(x, y)$ est

$$Y-y=y'_x(X-x),$$

X, Y désignant les coordonnées courantes et y'_x la dérivée de y par rapport à x. Avec la notation différentielle, cette équation est

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x).$$

141. Cas où l'équation n'est pas résolue. — Soit

$$F(x, y)=0$$

l'équation d'une courbe non résolue par rapport à y. En égalant à zéro la dérivée par rapport à x de la fonction $F(x, y)$ où y est regardé comme une fonction de x, on a

$$F'_x+F'_y\frac{dy}{dx}=0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx}=\quad\frac{F'_x}{F'_y}.$$

L'équation de la tangente au point (x, y) devient alors, si l'on y remplace $\frac{dy}{dx}$ par cette valeur,

$$(X - x) F'_x + (Y - y) F'_y = 0.$$

Points singuliers. — Il peut arriver, exceptionnellement, qu'en un point (x, y) de la courbe les dérivées partielles F'_x et F'_y soient *nulles*

$$F'_x = 0, \qquad F'_y = 0.$$

L'équation précédente de la tangente devient *une identité;* on dit que ces points particuliers sont des *points singuliers.*

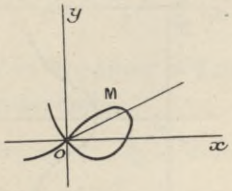
Ce sont ordinairement des points où plusieurs branches de courbe se croisent et où, par suite, il existe plusieurs tangentes.

Exemple. — Prenons l'équation d'une courbe algébrique dans laquelle les termes de moindre degré sont du deuxième degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y) = 0$$

où A, B, C désignent des constantes, $\varphi_3(x, y)$ l'ensemble des termes homogènes du troisième degré en x et y, $\varphi_n(x, y)$ l'ensemble des termes homogènes de degré n en x et y. L'origine $x = 0$, $y = 0$ est un point de la courbe, mais les dérivées partielles du premier membre de l'équation s'annulant pour $x = 0$, $y = 0$, l'origine est un *point singulier.* Pour trouver les tangentes en ce

Fig. 70.



point, nous procéderons comme il suit. Coupons la courbe par une sécante (*fig.* 70)

$$y = mx,$$

passant par O. L'équation aux x des points de rencontre s'obtient en remplaçant y par mx dans l'équation de la courbe. On a ainsi une équation qui, quel que soit m, admet la racine double $x = 0$.

Les autres points d'intersection ont pour abscisses les racines de l'équation

$$(1) \qquad A + 2Bm + Cm^2 + x\varphi_3(1, m) + \ldots + x^{n-2}\varphi_n(1, m) = 0.$$

Ainsi, toute sécante passant par O coupe la courbe en deux points confondus avec O : on dit que ce point est un *point double* de la courbe. Pour que la sécante OM devienne tangente en O, il faut déterminer le coefficient angulaire m de façon qu'un nouveau point M d'intersection vienne se confondre avec O, c'est-à-dire que l'équation (1) ait une nouvelle racine nulle. Pour cela, il faut et il suffit que m soit une racine de l'équation

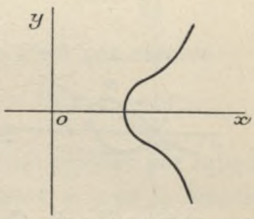
$$A + 2Bm + Cm^2 = 0.$$

On peut donc mener au point O à la courbe deux tangentes qui sont réelles et distinctes, ou confondues, ou imaginaires, suivant que l'équation en m a ses racines réelles et distinctes, ou égales, ou imaginaires. En y remplaçant m par $\frac{y}{x}$ et chassant le dénominateur, on obtient une équation homogène du deuxième degré représentant l'ensemble de ces deux tangentes

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0.$$

Cette équation s'obtient en égalant à zéro l'ensemble des termes de moindre degré dans l'équation de la courbe.

Fig. 71.



Quand les tangentes en O sont imaginaires

$$B^2 - AC < 0,$$

il n'y a pas de points réels appartenant à la courbe dans le voisinage de O : ce point s'appelle alors un point *isolé* de la courbe.

Tel serait le cas de la courbe

$$x^2+y^2=x^3,$$

pour laquelle l'origine est un point isolé (*fig.* 71).

142. Cas où les coordonnées x et y d'un point de la courbe sont fonctions d'un paramètre u. — Si l'on a, le long d'une courbe,

$$x=\varphi(u), \qquad y=\psi(u),$$

on en déduit

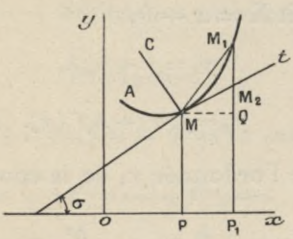
$$dx=\varphi'(u)\,du, \qquad dy=\psi'(u)\,du,$$

et l'équation de la tangente devient

$$\mathrm{Y}-\psi(u)=\frac{\psi'(u)}{\varphi'(u)}[\mathrm{X}-\varphi(u)].$$

143. Cosinus directeurs de la tangente. — Soit s l'arc de courbe AM compté positivement dans le sens AM, à partir d'une origine A prise sur la courbe (*fig.* 72). Menons la tangente Mt

Fig. 72.



dans le sens positif AM et appelons σ l'angle de Mt avec Ox. Nous allons démontrer les formules

$$dx=ds\cos\sigma, \qquad dy=ds\sin\sigma.$$

Pour cela, considérons un point voisin M_1 de la courbe obtenu en faisant croître s d'une quantité positive Δs. Les coordonnées x et y de M subissent des accroissements $\mathrm{MQ}=\Delta x$, $\mathrm{QM}_1=\Delta y$ et le triangle QMM_1 donne

$$\Delta x=\text{corde } \mathrm{MM}_1 \cos(\widehat{\mathrm{MM}_1, \mathrm{O}x}),$$

$$\Delta y=\text{corde } \mathrm{MM}_1 \sin(\widehat{\mathrm{MM}_1, \mathrm{O}x}),$$

où $(\widehat{MM_1, Ox})$ est l'angle de MM_1 avec Ox. Divisons ces deux relations par Δs, et faisons tendre Δs vers zéro en remarquant que $\frac{\text{corde } MM_1}{\Delta s}$ tend vers 1, et que l'angle $(\widehat{MM_1, Ox})$ tend vers σ, nous aurons

$$\frac{dx}{ds} = \cos\sigma, \qquad \frac{dy}{ds} = \sin\sigma.$$

Ce sont les formules à démontrer. On peut facilement les retenir en remarquant qu'elles expriment que les projections d'un élément d'arc ds sur les deux axes sont dx et dy.

144. **Position de la courbe par rapport à la tangente.** — Prenons, sur la courbe, un point M_1 voisin du point de contact M de la tangente Mt ; soient $x+h$ l'abscisse et

$$y_1 = f(x+h)$$

l'ordonnée de ce point. Soient, d'autre part (*fig.* 72), M_2 le point de la tangente ayant même abscisse $x+h$ que M_1 et y_2 l'ordonnée de ce point M_2. Cette ordonnée est fournie par l'équation de la tangente, où l'on fait $X = x+h$,

$$y_2 = y + y'_x h,$$

ou encore

$$y_2 = f(x) + hf'(x).$$

Si l'on développe l'ordonnée y_1 de la courbe par la formule de Taylor, on a

$$y_1 = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots.$$

On remarquera que l'ordonnée y_2 de la tangente s'obtient en limitant le développement de l'ordonnée y_1 de la courbe à ses deux premiers termes.

Pour avoir la position de la courbe par rapport à la tangente, formons la différence $y_1 - y_2$:

$$y_1 - y_2 = \frac{h^2}{2}\left[f''(x) + \frac{h}{3}f'''(x) + \ldots\right].$$

Supposons d'abord, ce qui est le cas général, que $f''(x)$ n'est pas nul au point M. Alors, h étant pris pour infiniment petit principal, la différence $y_1 - y_2$ est infiniment petite du deuxième ordre. Quant au signe de $y_1 - y_2$, il est, pour h, infiniment petit, le même que celui de $f''(x)$, car la parenthèse a évidemment le signe de $f''(x)$ quand h tend vers zéro.

Si donc $f''(x)$ est *positif*, $y_1 - y_2$ est *positif*, quel que soit le signe de h; aux environs du point M, la courbe est *au-dessus* de la tangente; elle tourne, en M, sa concavité vers les y positifs.

Si $f''(x)$ est *négatif*, $y_1 - y_2$ est négatif, quel que soit le signe de h; aux environs du point M, la courbe est *au-dessous* de la tangente; elle tourne, en M, sa concavité vers les y négatifs.

Pour obtenir les points d'intersection de la tangente avec la courbe, il faut chercher les valeurs de h pour lesquelles la différence $y_1 - y_2$ est *nulle*. On a ainsi l'équation

$$0 = \frac{h^2}{2}\left[f''(x) + \frac{h}{3}f'''(x) + \ldots\right],$$

qui admet la racine double $h = 0$. C'est ce qu'on exprime en disant que la tangente coupe la courbe en deux points confondus avec le point de contact.

Points d'inflexion. — Supposons maintenant qu'au point M on ait

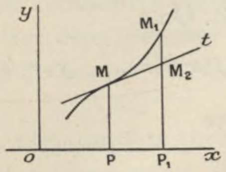
$$f''(x) = 0,$$

$f'''(x)$ étant différent de zéro. On a, dans ce cas,

$$y_1 - y_2 = \frac{h^3}{6}\left[f'''(x) + \frac{h}{4}f^{\text{IV}}(x) + \ldots\right].$$

La différence $y_1 - y_2$ est alors infiniment petite du troisième ordre, quand h est pris pour infiniment petit principal. Le signe

Fig. 73.



de la parenthèse étant celui de $f'''(x)$ pour h suffisamment petit, on voit que $y_1 - y_2$, contenant h^3 en facteur, change de signe avec h. La courbe est donc, à gauche de M, d'un côté de la tangente; à droite de M, de l'autre côté. La tangente Mt traverse la courbe (*fig.* 73); le point M est appelé *point d'inflexion*. La tangente en ce point a *trois points* communs confondus avec la courbe, car l'équation donnant les valeurs de h qui correspondent aux points de rencontre de la tangente avec la courbe

$$y_1 - y_2 = 0,$$

contient, actuellement, h^3 en facteur et admet la racine triple $h = 0$.

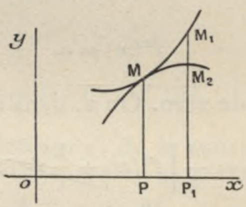
Si $f'''(x)$ était nul en même temps que $f''(x)$, $f^{\text{iv}}(x)$ étant différent de zéro, la courbe serait, aux environs de M, d'un même côté de la tangente, mais cette tangente aurait, avec la courbe, quatre points communs confondus en M.

145. **Ordre de contact de deux courbes.** — Considérons deux courbes planes (*fig.* 74)

$$y = f(x), \qquad y = \psi(x),$$

ayant un point commun M de coordonnées x et y. Soient y_1 et y_2

Fig. 74.



les ordonnées M_1P_1 et M_2P_1 des deux courbes correspondant à une abscisse

$$OP_1 = x + h,$$

h étant infiniment petit. On a

$$y_1 = f(x+h), \qquad y_2 = \psi(x+h).$$

Formons la différence

$$y_1 - y_2$$

des deux ordonnées et développons-la suivant les puissances de h par la formule de Taylor. Comme cette différence s'annule pour

$h = 0$, elle contiendra une certaine puissance de h en facteur et sera de la forme

$$(1) \qquad y_1 - y_2 = h^n(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots),$$

où a_0 est différent de zéro. On dit alors que les courbes ont au point M un contact d'ordre $n - 1$.

D'après les développements de y_1 et de y_2 par la formule de Taylor

$$y_1 = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \ldots,$$
$$y_2 = \psi(x) + \frac{h}{1} \psi'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} \psi^{(n)}(x) + \ldots,$$

pour que les deux courbes aient, au point d'abscisse donnée x, un contact d'ordre $(n - 1)$, il faut et il suffit que, dans la différence $y_1 - y_2$, on puisse mettre h^n en facteur : on a ainsi les n conditions

$$f(x) = \psi(x),$$
$$f'(x) = \psi'(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n-1)}(x) = \psi^{(n-1)}(x).$$

Donc *pour qu'il y ait au point d'abscisse x, entre les deux courbes, un contact d'ordre $(n - 1)$, il faut et il suffit que les ordonnées des deux courbes et leurs dérivées jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ inclus soient égales en ce point.*

Si l'on cherche les valeurs de h donnant les points communs aux deux courbes, il faut déterminer h de façon que M_1 coïncide avec M_2, c'est-à-dire que $y_1 - y_2 = 0$. On a ainsi l'équation

$$0 = h^n(a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots),$$

qui admet la racine nulle d'ordre n, $h = 0$. On peut dire alors que les courbes ont n points communs confondus en M.

L'ordre de contact des deux courbes au point commun M est donc égal au nombre de points d'intersection confondus en M, diminué d'une unité.

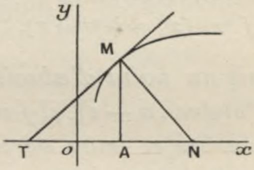
Ainsi, en un point ordinaire, une courbe et sa tangente ont un contact du premier ordre (deux points d'intersection confondus). En un point d'inflexion, une courbe et sa tangente ont un contact du deuxième ordre (trois points d'intersection confondus).

Position relative de deux courbes au voisinage du point de contact. — Si les courbes ont un contact *d'ordre impair*, *elles ne se traversent pas* au point de contact; si elles ont un contact *d'ordre pair*, *elles se traversent* au point de contact.

En effet, on peut toujours déterminer un nombre positif ε assez petit pour que, h variant de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, le signe de $y_1 - y_2$ soit celui du premier terme $a_0 h^n$ de l'expression (1). Alors si le contact est d'ordre impair, n est pair et $y_1 - y_2$ conserve le même signe quand h varie de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$: les courbes ne se traversent pas; c'est le cas de la tangente et d'une courbe en un point ordinaire ($n = 2$). Si, au contraire le contact est d'ordre pair, n est impair et $y_1 - y_2$ change de signe quand h variant de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$ passe par zéro : les courbes se traversent; c'est le cas d'une courbe et d'une tangente d'inflexion ($n = 3$).

146. Sous-tangente, tangente, sous-normale, normale. — Soient $M(x, y)$ un point d'une courbe, MT la tangente limitée à l'axe Ox,

Fig. 75.



MN la normale limitée au même axe et MA l'ordonnée du point M (*fig.* 75).

La *sous-tangente* S_t est le segment TA. L'équation de la tangente étant

$$Y - y = y'(X - x),$$

on aura l'abscisse du point T en faisant $Y = 0$, ce qui donne

$$X - x = -\frac{y}{y'}.$$

L'abscisse de A étant x, la sous-tangente est $x - X$; donc

$$S_t = \frac{y}{y'} = y\frac{dx}{dy}.$$

La *tangente* t est la longueur MT; le triangle rectangle MAT donne immédiatement, d'après la valeur précédente de TA,

$$t = y\sqrt{1+\frac{1}{y'^2}} = y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}.$$

La *sous-normale* S_n est le segment AN. L'équation de la normale étant

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

on a, en faisant $Y = 0$, l'abscisse X du point N : d'où la valeur $X - x$ de la sous-normale

$$S_n = yy' = y\frac{dy}{dx}.$$

La *normale* n est la longueur MN. Le triangle rectangle MAN donne

$$n = y\sqrt{1+y'^2} = y\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}.$$

147. **Courbe aux tangentes égales** (**tractrice**). — Cherchons une courbe plane dans laquelle la longueur TM de la tangente (*fig.* 75) soit *constante*. Supposons la courbe du côté des y positifs ; appelons a la longueur constante TM et u l'angle xTM : le triangle ATM (*fig.* 75) donne immédiatement

$$y = a \sin u. \tag{2}$$

D'autre part, le coefficient angulaire de la tangente étant $\operatorname{tang} u$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} u, \qquad dx = \frac{dy}{\operatorname{tang} u},$$

et en remplaçant dy par sa valeur tirée de (2)

$$dx = a\frac{\cos^2 u}{\sin u}\,du;$$

en remplaçant $\cos^2 u$ par $1 - \sin^2 u$, on a

$$dx = a\left(\frac{1}{\sin u} - \sin u\right)du.$$

L'intégration donne

$$x - x_0 = a\left(\mathrm{L}\,\operatorname{tang}\frac{u}{2} + \cos u\right).$$

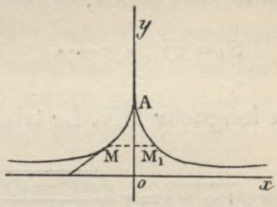
Les coordonnées d'un point de la courbe sont ainsi exprimées en fonction d'un paramètre u.

Construisons celle des courbes qu'on obtient en faisant $x_0 = 0$ (*fig.* 76) :

$$x = a\left(\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\frac{u}{2} + \cos u\right),$$
$$y = a \sin u.$$

Pour que $\mathrm{tang}\frac{u}{2}$ soit positif, il faut faire varier u de 0 à π.

Fig. 76.



Deux valeurs supplémentaires de u donnent deux points de la courbe symétriques par rapport à l'axe Oy. En effet, soient x_1 et y_1 les valeurs des coordonnées correspondant à la valeur

$$u_1 = \pi - u.$$

On a

$$x_1 = a\left[\mathrm{L}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}\right) + \cos(\pi - u)\right],$$
$$y_1 = a\sin(\pi - u).$$

Mais

$$\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u}{2}\right) = \cot\frac{u}{2} = \frac{1}{\mathrm{tang}\frac{u}{2}},$$

$$\cos(\pi - u) = -\cos u, \qquad \sin(\pi - u) = \sin u.$$

Donc

$$x_1 = -x, \qquad y_1 = y.$$

Faisons alors varier u de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Pour $u = 0$, $x = -\infty$, $y = 0$; la courbe est asymptote à Ox. Quand u augmente, x et y augmentent, car $\frac{dx}{du}$ et $\frac{dy}{du}$ sont positifs. Pour $u = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$ et $y = a$: au point A ainsi obtenu, la tangente se confond avec l'axe des y. La courbe s'achève par symétrie par rapport à Oy.

Rectification de la courbe. — Appelons s l'arc de courbe compté à partir du point de rebroussement A dans le sens AM_1. On a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Remplaçant dx et dy par leurs valeurs (12) et (13), on a, après réduction,

$$ds = -a\frac{\cos u}{\sin u}\,du,$$

où il faut mettre le signe $-$, car u est en M_1 supérieur à $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{ds}{du}$ positif.

D'où, en intégrant,

$$s = -a\,\mathrm{L}\sin u,$$

sans ajouter de constante, car, s étant compté à partir du point A, doit s'annuler pour $u = \frac{\pi}{2}$, ce qui a lieu, puisque $\mathrm{L}\,1 = 0$.

II. — MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE.

148. Règle. — Nous rappelons rapidement la règle qui permet de trouver les maxima et minima d'une fonction

$$y = f(x),$$

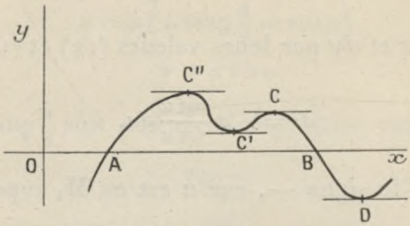
d'une variable x, pour préparer la méthode géométrique que nous emploierons plus loin, au sujet des maxima et minima des fonctions de deux variables.

Si une fonction $f(x)$ qui admet une dérivée continue est maximum ou minimum pour $x = a$, la dérivée $f'(a)$ est nulle, car la tangente au point correspondant de la courbe représentative est *horizontale*.

Pour distinguer le maximum du minimum, on peut donner une règle fondée sur le signe de $f''(a)$, quand cette quantité n'est pas nulle. En effet, en un *maximum* tel que C (*fig.* 77), la tangente est horizontale, $f'(a) = 0$, et *la courbe tourne sa concavité vers les y négatifs :* donc $f''(a) < 0$.

Au contraire, en un *minimum* tel que D, la tangente est horizontale, $f'(a) = 0$, mais *la courbe tourne sa concavité vers les y positifs;* donc $f''(a) > 0$.

Fig. 77.



Donc, *si* $f'(a)$ *étant nul,* $f''(a)$ *est négatif, la fonction est maximum pour* $x = a$; si $f'(a)$ *étant nul,* $f''(a)$ *est positif, la fonction est minimum pour* $x = a$.

Nous n'examinerons pas en détail les cas où $f'(a)$ et $f''(a)$ seraient nuls en même temps. La considération du développement de

$$f(a+h) - f(a),$$

suivant les puissances de h, par la formule de Taylor, conduit à la règle suivante :

Pour que la fonction $f(x)$ soit maximum ou minimum, pour $x = a$, il faut et il suffit que la première dérivée qui ne s'annule pas pour $x = a$ soit *d'ordre pair*. La fonction est maximum ou minimum suivant que cette dérivée prend, pour $x = a$, une valeur négative ou positive.

III. — ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE COURBES PLANES.

149. Équation de l'enveloppe. — Soit

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

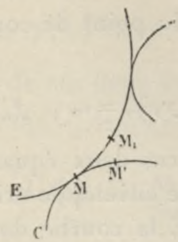
l'équation d'une courbe plane C contenant un paramètre λ. Quand λ varie d'une manière continue, cette courbe se déplace d'une manière continue. On dit qu'elle admet une *enveloppe*, quand il existe une courbe E à laquelle les courbes C sont toutes tangentes. Les courbes C sont les *enveloppées*.

Soit (*fig.* 78) $M(x, y)$ un des points de l'enveloppe et

$$f(x, y, \lambda) = 0$$

l'équation de l'enveloppée C qui touche l'enveloppe E en ce point.

Fig. 78.



Le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppée est donné par

$$(1) \qquad f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0,$$

où dx et dy sont les projections d'un élément d'arc MM' de l'enveloppée.

Pour avoir le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe au même point, remarquons que, le long de l'enveloppe, les coordonnées x et y du point de contact M sont fonctions de λ,

$$x = \varphi(\lambda), \qquad y = \psi(\lambda),$$

car le point de contact M est déterminé quand λ est donné. Ces fonctions de λ vérifient identiquement la relation

$$f(x, y, \lambda) = 0.$$

Quand on fait croître λ de sa différentielle $d\lambda$, le point de contact passe de M en M_1 sur l'enveloppe et ses coordonnées croissent de leurs différentielles $d_1 x$ et $d_1 y$; comme $f(x, y, \lambda)$ est nulle, sa différentielle l'est également; on a donc

$$(2) \qquad f'_x\,d_1 x + f'_y\,d_1 y + f'_\lambda\,d\lambda = 0.$$

Géométriquement, $d_1 x$, $d_1 y$ sont les projections d'un élément d'arc MM_1 de l'enveloppe E. Le coefficient angulaire de la tangente à l'enveloppe en M étant égal à celui de la tangente à l'enveloppée, on doit avoir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d_1 y}{d_1 x}.$$

Les équations (1) et (2) donnent alors

$$f'_\lambda = 0.$$

Donc les coordonnées du point de contact M vérifient les deux relations

$$(3) \qquad f(x, y, \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda = 0.$$

En éliminant λ entre ces deux équations, on a l'équation de l'enveloppe E, quand cette enveloppe existe.

Réciproquement, soit E la courbe dont l'équation est obtenue en éliminant λ entre les deux relations (3); en tout point x, y de cette courbe, qui *n'est pas un point singulier* de l'enveloppée correspondante C, la tangente est la même à E et à C. En effet, comme au point considéré, $f'_\lambda = 0$, les équations (1) et (2) donnant les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes C et E au point x, y sont

$$f'_x\,dx + f'_y\,dy = 0,$$
$$f'_x\,d_1 x + f'_y\,d_1 y = 0,$$

si f'_x et f'_y ne sont pas nuls à la fois, c'est-à-dire si le point (x, y) n'est pas un point singulier de l'enveloppée $f(x, y, \lambda) = 0$, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d_1 y}{d_1 x};$$

ce qui démontre le théorème.

En résumé, la courbe obtenue en éliminant λ entre les deux relations (3) est, ou bien l'enveloppe des courbes

$$f(x, y, \lambda) = 0,$$

ou le lieu de leurs points singuliers.

Remarque. — Éliminer λ entre les deux équations

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad f'_\lambda = 0,$$

revient à exprimer que l'équation $f(x, y, \lambda) = 0$, en λ, admet une *racine double*.

150. Le point de contact de l'enveloppée C avec l'enveloppe E est la limite d'un des points d'intersection de C avec une enveloppée C′ infiniment voisine. — En effet, l'équation de C est

$$(C) \qquad f(x, y, \lambda) = 0;$$

celle d'une enveloppée voisine C′

$$(C') \qquad f(x, y, \lambda + \Delta\lambda) = 0.$$

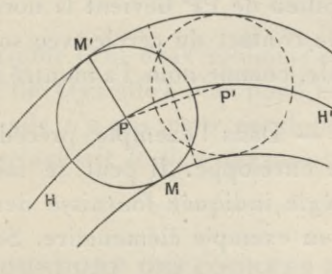
Les points d'intersection de ces deux courbes sont donnés par le système des deux équations (C) et (C′), ou par le système équivalent

$$f(x, y, \lambda) = 0, \qquad \frac{f(x, y, \lambda + \Delta\lambda) - f(x, y, \lambda)}{\Delta\lambda} = 0.$$

Quand $\Delta\lambda$ tend vers zéro, ce système devient précisément le système (3) qui définit les points de contact de l'enveloppée avec l'enveloppe E. Le théorème est donc démontré.

151. Exemple I. — *Enveloppe d'un cercle de rayon constant* R *dont le centre décrit une courbe donnée.* — Soient a et b les coordonnées du centre P du cercle (*fig.* 79); ce point

Fig. 79.



devant décrire une courbe donnée HH′, a et b sont des fonctions données d'un paramètre λ

$$a = \varphi(\lambda), \qquad b = \psi(\lambda).$$

L'équation du cercle mobile est alors

$$(4) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0,$$

R étant constant. Pour avoir les points de contact M et M′ du cercle avec l'enveloppe, il faut associer à l'équation du cercle l'équation obtenue en dérivant par rapport à λ

$$(5)\qquad (x-a)\frac{da}{d\lambda}+(y-b)\frac{db}{d\lambda}=0.$$

Si, dans cette équation, on regarde x et y comme des coordonnées courantes, elle représente une droite passant par le point $P(a, b)$ et *normale* à la courbe HH′ lieu du point P. Les points de contact du cercle avec l'enveloppe sont donc aux extrémités du diamètre MPM′ normal à la courbe lieu des centres. Les points de l'enveloppe s'obtiennent encore en portant sur la normale en P deux longueurs égales à R

$$PM = PM' = R.$$

Les courbes ainsi obtenues s'appellent courbes *parallèles* à la courbe donnée HH′ : les tangentes à ces courbes en M et M′ étant tangentes au cercle sont normales au diamètre MPM′ et, par suite, parallèles à la tangente en P à la courbe donnée HH′.

Géométriquement, si P′ est une position du centre voisine de P, les points communs aux deux cercles de centre P et P′ et de même rayon, sont sur la perpendiculaire à PP′ en son milieu. Quand P′ tend vers P, PP′ devient tangent à la courbe HH′ et la perpendiculaire au milieu de PP′ devient la normale en P à cette courbe. Les points de contact du cercle avec son enveloppe sont donc sur cette normale, comme nous l'a montré le calcul.

152. **Exemple II.** — Dans l'exemple précédent, nous avons trouvé une véritable enveloppe. Il peut se faire, comme nous l'avons dit, que la règle indiquée fournisse des lieux de points singuliers. En voici un exemple élémentaire. Soit à trouver l'enveloppe des courbes

$$(C)\qquad (y-\lambda)^2+x^4-x^2=0.$$

D'après la règle, il faut éliminer λ entre cette équation et la dérivée par rapport à λ

$$y-\lambda=0.$$

L'élimination est immédiate et donne comme enveloppe

$$(E)\qquad x^4-x^2=0,$$

équation qui se décompose en

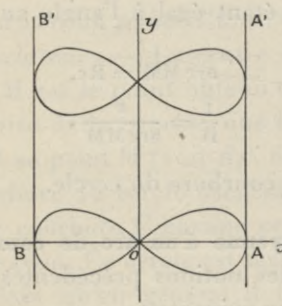
$$x^2 = 0, \qquad x - 1 = 0, \qquad x + 1 = 0,$$

et qui représente l'axe Oy, avec les deux parallèles AA' et BB', à l'unité de distance de cet axe. Construisons les courbes C. Nous voyons que leur équation se déduit de celle de la courbe

$$(6) \qquad y^2 + x^4 - x^2 = 0,$$

en changeant y en $y - \lambda$. Les courbes C s'obtiennent donc en faisant glisser la courbe (6) parallèlement à elle-même le long de Oy. Cette courbe (6) a la forme indiquée (*fig.* 80), avec un

Fig. 80.



point double à l'origine O et deux sommets en A et B. Quand on la déplace le long de Oy, elle a bien pour enveloppe les droites AA' et BB'; mais elle n'a pas pour enveloppe l'axe Oy trouvé dans le calcul. Cet axe *est le lieu des points doubles des enveloppées*.

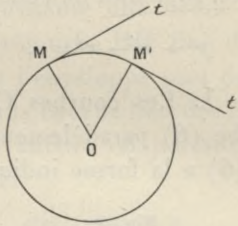
IV. — COURBURE DES COURBES PLANES.

153. **Courbure d'un cercle.** — D'après l'idée vulgaire de courbure, un cercle a une courbure d'autant plus grande qu'il s'éloigne plus rapidement d'une de ses tangentes, c'est-à-dire que son rayon est plus petit. En précisant cette notion, on convient d'appeler *courbure* d'un cercle de rayon R l'inverse du rayon

$$\frac{1}{R}.$$

On peut, comme il suit, évaluer la courbure d'un cercle dont on connaît seulement un arc MM'. Menons les tangentes Mt et M't' au cercle, aux extrémités M et M' de l'arc considéré, dans un même sens de circulation sur le cercle, et appelons ε l'angle de ces deux

Fig. 81.



tangentes. Cet angle étant égal à l'angle au centre MOM', on a (*fig.* 81)

$$\operatorname{arc} MM' = R\varepsilon,$$

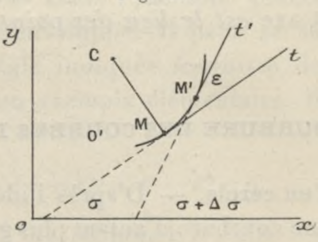
$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon}{\operatorname{arc} MM'},$$

formule qui donne la courbure du cercle.

154. Courbure moyenne d'un arc de courbe. Courbure en un point. — On étend les notions précédentes à une courbe plane quelconque de la façon suivante :

Soient (*fig.* 82) MM' un arc d'une courbe plane, Mt et M't' les tangentes menées, aux extrémités de cet arc, dans un même

Fig. 82.



sens de circulation sur la courbe; désignons par ε l'angle de ces deux tangentes, que l'on nomme l'*angle de contingence*. On appelle *courbure moyenne* de l'arc MM' le rapport

$$\frac{\varepsilon}{\operatorname{arc} MM'}.$$

Quand le point M' se rapproche du point M, ce rapport varie.

On appelle *courbure au point* M la limite vers laquelle tend la courbure moyenne de l'arc MM', quand le point M' tend vers le point M :

$$\text{Courbure en } M = \lim \frac{\varepsilon}{\text{arc}\, MM'}.$$

On désigne cette courbure par $\frac{1}{R}$, et l'on convient d'appeler R le *rayon de courbure* de la courbe au point M. Ainsi, le rayon de courbure en un point est inverse de la courbure en ce point :

$$R = \lim \frac{\text{arc}\, MM'}{\varepsilon}.$$

Centre de courbure en un point d'une courbe; cercle de courbure ou cercle osculateur. — Le centre de courbure C d'une courbe en un point M est le point obtenu en portant, sur la normale, dans la concavité de la courbe, une longueur MC égale au rayon de courbure R au point M (voir *fig.* 82).

Le cercle de courbure ou cercle osculateur en M est le cercle décrit du centre de courbure C comme centre, avec le rayon de courbure R comme rayon. Ce cercle est tangent à la courbe en M; nous verrons plus loin qu'en général il traverse la courbe au point M et que de tous les cercles passant par M, c'est celui qui se rapproche le plus de la courbe, au voisinage du point M.

155. Expression du rayon de courbure en coordonnées rectangulaires. — Soit une courbe plane, sur laquelle nous prendrons une origine O' des arcs s. Désignons par σ l'angle de la tangente Mt à la courbe avec une direction fixe Ox (voir *fig.* 82). Quand le point M se déplace en M', l'arc $O'M$ augmente de l'arc $MM' = \Delta s$, et l'angle σ augmente de $\Delta\sigma$. L'angle ε des tangentes Mt et $M't'$ est égal à la valeur absolue de $\Delta\sigma$. On a donc, pour la courbure moyenne de l'arc MM', l'expression

$$\frac{\varepsilon}{\text{arc}\, MM'} = \pm \frac{\Delta\sigma}{\Delta s},$$

où il faut choisir le signe de façon à avoir un résultat positif. La courbure $\frac{1}{R}$ au point M est alors donnée par la formule

$$\frac{1}{R} = \lim \frac{\varepsilon}{\text{arc}\, MM'} = \pm \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}.$$

Or la limite de $\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ est $\frac{d\sigma}{ds}$; on a donc

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\sigma}{ds},$$

où le signe doit être choisi de façon que $\frac{1}{R}$ soit positif.

En désignant les coordonnées d'un point M de la courbe par x et y, on a

$$\text{tang}\, \sigma = \frac{dy}{dx},$$

d'où

$$\sigma = \text{arc tang} \frac{dy}{dx},$$

et

$$d\sigma = \frac{\dfrac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2}}{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{dx^2 + dy^2}.$$

D'autre part :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\sigma}{ds} = \pm \frac{dx\, d^2y - dy\, d^2x}{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Supposons que les coordonnées d'un point de la courbe soient exprimées en fonction d'un paramètre u par les formules

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u),$$

on aura, en prenant u comme variable indépendante,

$$dx = f'(u)\, du, \qquad dy = \varphi'(u)\, du,$$
$$d^2x = f''(u)\, du^2, \qquad d^2y = \varphi''(u)\, du^2;$$
$$\frac{1}{R} = \pm \frac{f'\varphi'' - \varphi' f''}{(f'^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on suppose l'équation de la courbe résolue par rapport à y, et si l'on prend x comme variable indépendante, on a, en désignant par y' et y'' les dérivées première et deuxième de y par rapport à x,

$$dy = y'\,dx, \qquad d^2y = y''\,dx^2, \qquad d^2x = 0;$$

et, par suite,

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dans toutes ces formules, il faut prendre le signe de telle façon que R soit positif. Par exemple, dans la dernière formule, il faudra prendre le signe $+$ si y'' est positif, c'est-à-dire si la courbe en M tourne sa concavité vers les y positifs; il faudra prendre le signe $-$ dans le cas contraire.

En un point d'inflexion, $y'' = 0$, le rayon de courbure est infini: le cercle osculateur se confond avec la tangente.

Convention sur le signe du rayon de courbure. — Si l'on convient de considérer le rayon de courbure en M comme positif ou comme négatif suivant que la concavité au point M est tournée vers les y positifs ou vers les y négatifs, on a dans tous les cas

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

156. Rayon de courbure d'une conique. — Considérons une conique rapportée à un axe Ox et à la tangente au sommet Oy. L'équation de la courbe est de la forme

$$y^2 = 2px + qx^2; \tag{1}$$

p est le *paramètre* de la conique ; le genre de la conique dépend du signe de q :

Si $q < 0$, la courbe est une *ellipse;*
Si $q > 0$, » *hyperbole;*
Si $q = 0$, » *parabole.*

Appelons n la longueur de la normale MN du point M à l'axe de symétrie Ox; nous allons montrer que le rayon de courbure en M est

$$R = \frac{n^3}{p^2}.$$

En effet, on a (n° 146)

$$n = y\sqrt{1+y'^2}, \qquad \sqrt{1+y'^2} = \frac{n}{y},$$

et, par suite, pour une courbe quelconque,

$$\frac{1}{R} = \frac{\pm y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm y^3 y''}{n^3}.$$

Si nous supposons y positif en M, y'' négatif, on a

$$\frac{1}{R} = -\frac{y^3 y''}{n^3}.$$

Appliquons cette formule aux coniques. En différentiant deux fois l'équation (1), on obtient

$$yy' = p + qx,$$
$$yy'' + y'^2 = q;$$

remplaçant dans la deuxième équation y' par sa valeur tirée de la première

$$y^3 y'' = qy^2 - (p+qx)^2.$$

Remplaçons dans le deuxième membre y^2 par sa valeur (1) et réduisons, il vient

$$y^3 y'' = -p^2.$$

D'où, en substituant dans la valeur de $\frac{1}{R}$,

$$R = \frac{n^3}{p^2}.$$

Ce rayon peut donc être construit graphiquement, à l'aide de deux quatrièmes proportionnelles.

Application aux sommets d'une ellipse. — Soit une ellipse de sommets A, A' et B, B'. Cherchons les rayons de courbure aux sommets. Le grand axe étant pris pour axe des x et la tangente au sommet A' pour axe des y, l'équation de la courbe est

$$y^2 = 2\frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2.$$

Donc

$$p = \frac{b^2}{a}, \qquad q = -\frac{b^2}{a^2}.$$

D'autre part, la longueur n de la normale MN est

$$n = y\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y^2+y^2y'^2}.$$

Comme

$$yy' = p + qx,$$

on voit que, au point A′($x = 0$, $y = 0$), on a

$$(yy')_0 = p$$

et

$$n = p.$$

Alors

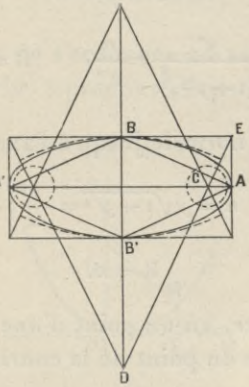
$$R_0 = \frac{n^3}{p^2} = p = \frac{b^2}{a} \qquad \text{(sommets A et A')}.$$

Aux sommets B et B′, la normale MN a pour longueur b; le rayon de courbure est donc

$$R' = \frac{b^3}{p^2} = \frac{a^2}{b} \qquad \text{(sommets B et B')}.$$

Pour construire les centres de courbure correspondants, on trace le rectangle formé par les tangentes aux quatre sommets (*fig.* 83),

Fig. 83.



et, du sommet E de ce rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur la droite AB; les points C et D où cette perpendiculaire coupe les axes sont les centres de courbure relatifs aux sommets A et B. En effet, les triangles semblables AEC et AEB donnent

$$\frac{AC}{b} = \frac{b}{a}, \qquad AC = \frac{b^2}{a} = R_0.$$

De même, les triangles semblables BDE et BAE donnent

$$\frac{BD}{a} = \frac{a}{b}, \qquad BD = \frac{a^2}{b} = R'.$$

Ces points étant construits, on peut tracer les cercles osculateurs à l'ellipse aux quatre sommets et en conclure un tracé approximatif de la courbe qui se rapproche beaucoup de ces cercles au voisinage des sommets.

En A et A', les cercles osculateurs sont intérieurs à l'ellipse; en B et B', c'est l'ellipse qui est intérieure aux cercles osculateurs.

157. **Rayon de courbure de la chaînette.** — Soit

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$$

l'équation d'une chaînette (*fig.* 43). On a

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \qquad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2},$$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a}.$$

Donc

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{y^2}, \qquad R = \frac{y^2}{a}.$$

La longueur n de la normale jusqu'à l'axe Ox est

$$n = y\sqrt{1+y'^2} = \frac{y^2}{a};$$

donc

$$R = n.$$

Le rayon de courbure, en un point d'une chaînette, est égal à la longueur de la normale du point de la courbe jusqu'à l'axe Ox.

Rayon de courbure de la cycloïde. — En calculant l'arc de cycloïde (n° 66), nous avons trouvé

$$ds = 2a \sin\frac{u}{2}\,du.$$

D'autre part, la tangente à la cycloïde au point M, étant la droite MB qui fait avec la verticale IB, c'est-à-dire avec une direction fixe, l'angle $\frac{u}{2}$, l'angle ε de deux tangentes infiniment voisines est

$$\varepsilon = d\,\frac{u}{2}.$$

Le rayon de courbure est donc

$$R = \frac{ds}{\varepsilon} = 4a\sin\frac{u}{2}.$$

Or, dans le triangle BMI, on a la longueur n de la normale (*fig.* 24)

$$n = \overline{MI} = 2a\sin\frac{u}{2};$$

donc

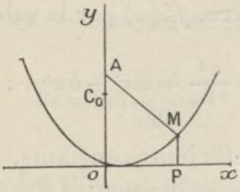
$$R = 2\overline{MI} = 2n.$$

Le rayon de courbure, en M, est égal au double de la normale MI.

V. — ÉTUDE D'UNE COURBE PLANE DANS LE VOISINAGE D'UN POINT.

158. **Développement de l'ordonnée en série.** — Soit O un point quelconque de la courbe : prenons ce point pour origine, pour

Fig. 84.



axe Ox la tangente, pour axe Oy la normale du côté de la concavité de la courbe (*fig.* 84).

Soit

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe. En supposant x suffisamment petit, on pourra, si l'origine n'est pas un point singulier de la courbe, développer y en série par la formule de Mac-Laurin

$$(1) \qquad y = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots.$$

Cette série sera convergente dans un intervalle symétrique par rapport à zéro et représentera, par suite, un arc de la courbe compris entre deux ordonnées placées symétriquement par rapport à Oy.

Comme la courbe passe par l'origine, $f(0) = 0$; et, comme la courbe est tangente à Ox, le coefficient angulaire $f'(x)$ de la tangente est nul au point O : $f'(0) = 0$.

Cherchons le rayon de courbure à l'origine. On a, en général,

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Actuellement, on a

$$y = f(x), \quad y' = f'(x), \quad y'' = f''(x), \quad \ldots.$$

A l'origine, $x = 0$, y' s'annule et y'' devient égal à $f''(0)$. On a donc, en appelant R_0 le rayon de courbure à l'origine,

$$\frac{1}{R_0} = f''(0).$$

On peut alors écrire le développement (1) de y, en y remplaçant $f(0)$ et $f'(0)$ par zéro, $f''(0)$ par la valeur ci-dessus

$$(2) \qquad y = \frac{x^2}{2R_0} + ax^3 + bx^4 + \ldots,$$

où a, b, ... sont des coefficients constants.

Cette formule (2) va nous permettre d'établir divers théorèmes.

159. Le centre de courbure, en un point d'une courbe plane, est la limite du point de rencontre de la normale en ce point et de la normale infiniment voisine. — Démontrons le théorème pour le point O. Le centre de courbure en O est, par définition, le point C_0 obtenu en portant sur la normale Oy, dans le sens de la concavité, une longueur OC_0 égale à R_0 (*fig.* 84).

Soit M un point voisin de O. La normale, en ce point, a pour équation

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

et le point A, où elle coupe la normale Oy ($X = 0$), a pour ordonnée

$$(A) \qquad Y = y + \frac{x}{y'}.$$

Remplaçons la dérivée y' par sa valeur tirée du développement (2); il vient

$$Y = y + \frac{x}{\frac{x}{R_0} + 3ax^2 + \dots},$$

ou, en simplifiant,

$$Y = y + \frac{R_0}{1 + 3aR_0x + \dots}.$$

Quand le point M se rapproche indéfiniment du point O, les coordonnées x et y tendent vers zéro, et l'on a

$$\lim Y = R_0.$$

Le point A tend donc bien vers le centre de courbure C_0.

160. **Si l'on abaisse d'un point M de la courbe la perpendiculaire MP sur la tangente en O, le rayon de courbure en O est donné par la formule**

$$R_0 = \lim \frac{\overline{OP}^2}{2\overline{MP}},$$

quand M tend vers O. — En effet, en désignant par x et y les coordonnées de M, on a (*fig.* 84)

$$\overline{OP}^2 = x^2, \qquad MP = y.$$

Le développement (2) donne immédiatement

$$\frac{2\overline{MP}}{\overline{OP}^2} = \frac{2y}{x^2} = \frac{1}{R_0} + 2ax + \dots,$$

et, si l'on fait tendre x vers zéro,

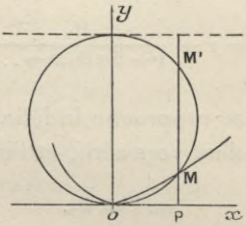
$$\lim \frac{2\overline{MP}}{\overline{OP}^2} = \frac{1}{R_0}.$$

Donc, en prenant les inverses,

$$R_0 = \lim \frac{\overline{OP}^2}{2\overline{MP}}.$$

Le cercle de courbure (ou cercle osculateur), en un point O *d'une courbe, est la limite vers laquelle tend un cercle tangent en* O *à la courbe et passant par un point* M *infiniment voisin de* O. — En effet, figurons le cercle tangent en O à la courbe, c'est-à-dire à Ox, et passant par un point M de la courbe.

Fig. 85.



Soit R le rayon de ce cercle. L'ordonnée MP le coupe en un deuxième point M' et l'on a évidemment (*fig.* 85)

$$PM' = 2R - PM.$$

La relation élémentaire

$$\overline{OP}^2 = PM.PM'$$

s'écrit alors

$$\overline{OP}^2 = PM(2R - PM),$$

d'où

$$R = \frac{PM}{2} + \frac{\overline{OP}^2}{2PM}.$$

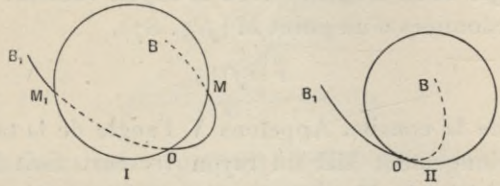
Quand le point M tend vers O, PM tend vers zéro, le rapport $\frac{\overline{OP}^2}{2MP}$ tend vers R_0 et l'on a

$$\lim R = R_0,$$

ce qui démontre le théorème.

161. **Le cercle de courbure, en un point O d'une courbe, est la limite d'un cercle passant par O et par deux points de la courbe infiniment voisins de O.** — Soient M et M_1 deux points de la courbe voisins de O. Les trois points OMM_1 déterminent un cercle. Ce cercle tend vers le cercle de courbure en O, *de quelque manière que l'on fasse tendre les points* M *et* M_1 *vers* O *le long de la courbe* (*fig.* 86, I).

Fig. 86.



Pour simplifier, nous nous bornerons au cas où l'on fait tendre les deux points M et M_1 successivement vers O. Si l'on fait d'abord tendre M_1 vers O en laissant M fixe, le cercle OM_1M devient un cercle tangent en O à la courbe et passant par M. Si, ensuite, l'on fait tendre M vers O, ce cercle devient le cercle de courbure en O, d'après le théorème précédent.

D'après cela, le contact du cercle osculateur et de la courbe est en général d'ordre 2. Il peut exceptionnellement être d'un ordre plus élevé : c'est ce qui a lieu, pour les sommets d'une ellipse, où le contact est d'ordre 3.

162. **Le cercle de courbure, en un point d'une courbe, traverse en général la courbe.** — En effet, considérons d'abord un cercle passant par le point O et par deux points M et M_1 pris sur la courbe dans le voisinage de O (*fig.* 86, I). Si un mobile suit la courbe en marchant de la gauche vers la droite, il est d'abord hors du cercle jusqu'au point M_1; sur l'arc M_1O, il est dans le cercle; sur l'arc OM, en dehors, et, sur l'arc qui suit le point M, il est dans le cercle. Nous avons, sur la figure 86, pointillé les arcs intérieurs au cercle et tracé en traits pleins les arcs extérieurs. Si, maintenant, les points M et M_1 tendent vers O, les arcs M_1O et OM disparaissent, le cercle devient osculateur en O et il ne reste que les deux arcs B_1O et OB qui sont : l'un extérieur, l'autre intérieur au cercle osculateur (*fig.* 86, II). Cette propriété tient à

ce que le contact est en général d'ordre 2 (ordre pair) (n° 145). S'il est d'ordre 3 (sommets d'une ellipse) le cercle osculateur et la courbe ne se traversent pas.

VI. — EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE PLANE EN COORDONNÉES POLAIRES.

163. Angle de la tangente avec le rayon vecteur. — Soient r et θ les coordonnées d'un point M (*fig.* 87),

$$r = f(\theta)$$

l'équation de la courbe. Appelons V l'angle de la tangente en M avec le prolongement MR du rayon vecteur. Soit M' un point infiniment voisin de M, ayant pour coordonnées polaires $r + dr$ et $\theta + d\theta$; décrivons, de O comme centre, avec $\mathrm{OM} = r$ comme rayon, un arc de cercle MP. Quand M' tend vers M, l'angle PM'M tend vers V. Le triangle infinitésimal MPM' est rectangle en P. On a

$$\mathrm{MP} = r\,d\theta, \qquad \mathrm{PM'} = dr, \qquad \widehat{\mathrm{PM'M}} = \mathrm{V}.$$

Donc, d'après les formules élémentaires sur les triangles rectangles,

$$r\,d\theta = dr \operatorname{tang} \mathrm{V}, \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r}{r'},$$

en désignant par r' la dérivée $\frac{dr}{d\theta}$.

Rayon de courbure. — Soit σ l'angle de la tangente Mt avec Ox : on a, d'après le triangle OAM (*fig.* 87),

$$\sigma = \mathrm{V} + \theta,$$

ou, d'après la formule

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{r}{r'},$$

$$\sigma = \operatorname{arc\,tang} \frac{r}{r'} + \theta. \tag{1}$$

D'autre part, la différentielle de l'arc est (n° 69)

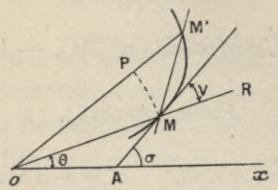
$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2}. \tag{2}$$

Pour avoir le rayon de courbure, il suffit d'appliquer la formule

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\sigma}{ds},$$

telle qu'elle résulte de la définition même (n° 155).

Fig. 87.



Nous ferons le calcul, en prenant θ comme variable indépendante et désignant par r'' la dérivée seconde de r par rapport à θ. Nous écrirons

$$\pm \frac{1}{R} = \frac{\frac{d\sigma}{d\theta}}{\frac{ds}{d\theta}}.$$

Or, d'après (1),

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{r'^2}} \frac{r'^2 - rr''}{r'^2} + 1 = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}$$

et, d'après (2),

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r'^2 + r^2} = (r'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où le signe doit être choisi de façon que $\frac{1}{R}$ soit positif.

Pour la retenir plus facilement, il est commode de mettre cette formule sous la forme suivante :

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)''}{\left[1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

où $\left(\frac{1}{r}\right)''$ désigne la dérivée seconde de $\frac{1}{r}$, par rapport à θ.

Points d'inflexion. — Ce sont les points où $R = \infty$, $\frac{1}{R} = 0$; ils sont donc donnés par l'équation

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$$

ou

$$\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = 0.$$

164. Exemple. — *Cardioïde* (n° 70). — L'équation de la cardioïde est

$$r = a(1 + \cos\theta).$$

On a donc

$$r' = -a\sin\theta, \qquad r'' = -a\cos\theta.$$

Après des réductions évidentes, on a

$$r^2 + 2r'^2 - rr'' = 3a^2(1 + \cos\theta) = 3ar, \qquad r^2 + r'^2 = 2a^2(1 + \cos\theta) = 2ar$$

Donc

$$\frac{1}{R} = \frac{3ar}{(2ar)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{2ar}},$$

$$R = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}.$$

Le rayon de courbure varie proportionnellement à la racine carrée du rayon vecteur r. Il est *nul*, au point de rebroussement.

Le rayon de courbure étant toujours fini, il n'y a pas de points d'inflexion.

165. Spirale logarithmique. — Cette courbe a pour équation

$$r = ae^{m\theta},$$

où a est une longueur donnée et m un nombre constant, que nous supposons *positif*. Elle a la forme indiquée dans la figure 88; elle est asymptote au pôle.

Dans cette courbe

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m};$$

l'angle V est donc constant. Comme

$$\sigma = V + \theta,$$

on a

$$\frac{1}{R} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{d\theta}{ds},$$

$$R = \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Mais

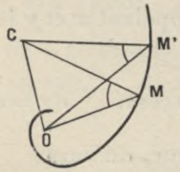
$$r' = mae^{m\theta} = mr,$$

donc

$$R = r\sqrt{1 + m^2}.$$

Le rayon de courbure est proportionnel au rayon vecteur. C'est ce qu'on peut voir géométriquement. Le centre de courbure, en M, est la limite du point de rencontre C de la normale en M et de la normale au point infiniment voisin M'. Les angles OMC et OM'C

Fig. 88.



(*fig.* 88) sont égaux, car l'angle V de la tangente avec le rayon vecteur est constant. Alors

$$\widehat{OMC} = \widehat{OM'C} = \frac{\pi}{2} - V.$$

Le quadrilatère rectiligne OMM'C est inscriptible, et l'angle $\widehat{COM}$ est le supplément de $\widehat{CM'M}$. Mais, quand M' tend vers M, la corde M'M tend vers la tangente, l'angle $\widehat{CM'M}$ devient droit puisque M'C est une normale; donc $\widehat{COM}$ devient droit.

Pour avoir le centre de courbure en M, il suffit donc de prendre l'intersection de la normale en M avec la perpendiculaire OC à OM. Le rayon R = MC est alors, dans le triangle COM,

$$R = \frac{r}{\sin V} = r\sqrt{1 + m^2},$$

car

$$\operatorname{tang} V = \frac{1}{m}.$$

Cette courbe n'a pas de points d'inflexion.

VII. — EXERCICES SUR LES RAYONS DE COURBURE DES COURBES PLANES.

166. Courbe dans laquelle $R = \varphi(\sigma)$. — Supposons qu'on veuille trouver une courbe, dans laquelle le rayon de courbure R est une fonction donnée de l'angle σ, que fait la tangente avec une direction fixe Ox.

Comme $R = \frac{ds}{d\sigma}$, la relation donnée

$$R = \varphi(\sigma)$$

devient

$$ds = \varphi(\sigma)\, d\sigma.$$

D'autre part, on a, en appelant x et y les coordonnées d'un point de la courbe (n° 143),

$$dx = ds \cos\sigma, \qquad dy = ds \sin\sigma.$$

Remplaçant ds par sa valeur, on aura

$$dx = \varphi(\sigma) \cos\sigma\, d\sigma, \qquad dy = \varphi(\sigma) \sin\sigma\, d\sigma.$$

D'où l'on tire x et y en intégrant

$$x - x_0 = \int \varphi(\sigma) \cos\sigma\, d\sigma,$$

$$y - y_0 = \int \varphi(\sigma) \sin\sigma\, d\sigma,$$

x_0 et y_0 désignant des constantes d'intégration.

On a ainsi les coordonnées d'un point de la courbe cherchée en fonction d'un paramètre σ.

Quand on fait varier x_0 et y_0, la courbe ne change pas de forme, elle ne fait que se transporter parallèlement à elle-même. En effet, en portant l'origine au point x_0 et y_0, on réduit les équations à la même forme que si x_0 et y_0 étaient nulles.

Exemples. — 1° Soit à trouver une courbe dont le rayon de courbure est constant et égal à a

$$R = a, \qquad \frac{ds}{d\sigma} = a.$$

On a alors

$$dx = a\cos\sigma\,d\sigma,\qquad dy = a\sin\sigma\,d\sigma.$$

En intégrant

$$x - x_0 = a\sin\sigma,\qquad y - y_0 = -a\cos\sigma.$$

Éliminant σ, on a l'équation de la courbe

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2;$$

c'est un cercle de rayon a.

2° Soit à trouver une courbe telle que

$$R = 4a\sin\sigma,$$

a désignant une constante. On a alors

$$ds = 4a\sin\sigma\,d\sigma,$$
$$dx = 4a\cos\sigma\sin\sigma\,d\sigma,\qquad dy = 4a\sin^2\sigma\,d\sigma,$$

ou encore

$$dx = 2a\sin 2\sigma\,d\sigma,\qquad dy = 2a(1 - \cos 2\sigma)\,d\sigma.$$

Intégrant, on peut écrire

$$x - x_0 = a(1 - \cos 2\sigma),\qquad y - y_0 = a(2\sigma - \sin 2\sigma).$$

En portant l'origine au point x_0, y_0 et remplaçant 2σ par u, on retrouve les équations d'une cycloïde (n° **42**), sauf le changement de x en y et de y en x.

La courbe est donc une cycloïde dont la base est parallèle à Oy.

167. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure est une fonction donnée de l'arc s. — Si l'on donne

$$R = \psi(s),$$

on en déduit, en remplaçant R par sa valeur $\dfrac{ds}{d\sigma}$:

$$\frac{ds}{d\sigma} = \psi(s),\qquad d\sigma = \frac{ds}{\psi(s)}$$

et, en intégrant,

$$\sigma = \int \frac{ds}{\psi(s)}.$$

Cette équation donne s en fonction de σ; on a, par suite, R en fonction de σ, et l'on est ramené au problème précédent.

La quadrature (1) donne σ à une constante arbitraire près; la valeur de cette constante change non la forme, mais seulement la position de la courbe. En effet, en faisant tourner les axes de coordonnées, on ne change pas s, mais on change σ en $\sigma + \text{const.}$, puisque σ est l'angle de la tangente avec Ox.

CHAPITRE XI.

COURBES GAUCHES. — TANGENTE. — PLAN OSCULATEUR. COURBURE ET TORSION.

I. — TANGENTE.

168. **Équations définissant la courbe.** — Pour définir une courbe gauche par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, on peut donner les expressions des coordonnées d'un point M de la courbe en fonction d'un paramètre u :

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u),$$

f, φ, ψ étant des fonctions continues.

169. **Tangente.** — Soient M un point de la courbe dont les coordonnées x, y, z correspondent à la valeur u du paramètre; M_1 un point voisin, dont les coordonnées x_1, y_1, z_1 correspondent à la valeur $u + h$ du paramètre :

$$x_1 = f(u+h), \qquad y_1 = \varphi(u+h), \qquad z_1 = \psi(u+h).$$

Les équations de la sécante MM_1 sont, en désignant par X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$(MM_1) \qquad \frac{X-x}{x_1-x} = \frac{Y-y}{y_1-y} = \frac{Z-z}{z_1-z}.$$

On peut écrire ces équations, en divisant tous les dénominateurs par l'accroissement h de u :

$$(MM_1) \qquad \frac{X-x}{\dfrac{x_1-x}{h}} = \frac{Y-y}{\dfrac{y_1-y}{h}} = \frac{Z-z}{\dfrac{z_1-z}{h}}.$$

Quand h tend vers zéro, le point M_1 se rapproche indéfiniment de M, la sécante MM_1 devient la tangente Mt en M. Le rapport $\frac{x_1 - x}{h}$ ou $\frac{f(u+h)-f(u)}{h}$ tend vers la dérivée $\frac{dx}{du}$ ou $f'(u)$, de même $\frac{y_1 - y}{h}$ et $\frac{z_1 - z}{h}$ tendent vers $\frac{dy}{du}$ et $\frac{dz}{du}$ ou $\varphi'(u)$ et $\psi'(u)$; les équations de la tangente sont donc

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{du}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{du}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{du}},$$

ou

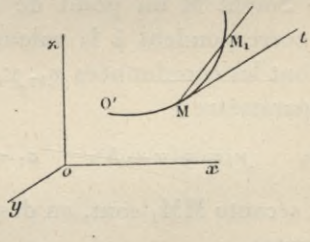
$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

ou encore

$$\frac{X-x}{f'(u)} = \frac{Y-y}{\varphi'(u)} = \frac{Z-z}{\psi'(u)}.$$

170. **Cosinus directeurs de la tangente.** — Prenons (*fig.* 89) sur la courbe une origine des arcs O′ et un sens positif des arcs. Appelons s l'arc O′M regardé comme positif ou comme négatif, suivant que O′M est dirigé dans le sens positif ou en sens contraire.

Fig. 89.



Menons une demi-droite Mt tangente à la courbe *dans le sens dans lequel* se déplace le point M quand s augmente. Nous allons calculer les cosinus directeurs de cette demi-droite Mt. Soit M_1 un point de la courbe correspondant à l'arc $O'M_1 = s + \Delta s$, l'accroissement Δs étant *positif*. Le segment MM_1 compté positivement dans le sens MM_1 a pour projections sur les trois axes :

$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z,$$

en employant les mêmes notations que dans le numéro précédent.

On a donc, en désignant par α, β, γ les cosinus des angles que fait le segment MM_1 avec les trois axes,

$$x_1 - x = MM_1 . \alpha, \qquad y_1 - y = MM_1 . \beta, \qquad z_1 - z = MM_1 . \gamma.$$

On en tire, pour α, β, γ, des expressions qu'on peut écrire

$$\alpha = \frac{x_1 - x}{\Delta s} \frac{\Delta s}{MM_1}, \qquad \beta = \frac{y_1 - y}{\Delta s} \frac{\Delta s}{MM_1}, \qquad \gamma = \frac{z_1 - z}{\Delta s} \frac{MM_1}{\Delta s}.$$

Quand Δs tend vers zéro, M_1 tend vers M, la direction du segment MM_1 tend vers la demi-droite Mt, le rapport $\frac{\Delta s}{MM_1}$ d'un arc à sa corde tend vers 1, et les rapports

$$\frac{x_1 - x}{\Delta s}, \quad \frac{y_1 - y}{\Delta s}, \quad \frac{z_1 - z}{\Delta s}$$

tendent vers les dérivées

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}.$$

Les cosinus directeurs α, β, γ de la tangente Mt sont donc donnés par les équations

$$(Mt) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{dt}.$$

Ces équations sont aisées à retenir : elles expriment qu'un élément infiniment petit d'arc ds, dirigé suivant la tangente Mt, a pour projections, sur les axes, dx, dy, dz.

171. Tangente à une courbe gauche définie par deux équations non résolues. — Soient

$$(1) \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

les équations d'une courbe gauche. Chacune de ces équations, envisagée isolément, définit une surface, et la courbe est l'intersection de ces surfaces. On peut toujours imaginer que l'on ait exprimé les coordonnées d'un point de la courbe en fonction d'un paramètre u :

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u).$$

Si l'on substituait ces expressions dans les fonctions F et G, le résultat serait identiquement nul, quel que soit u, car les coordonnées d'un point quelconque de la courbe vérifient, par hypothèse, les deux équations (1). On a donc, en différentiant ces deux relations par rapport à u,

$$(2)\qquad \begin{cases} F'_x\,dx + F'_y\,dy + F'_z\,dz = 0, \\ G'_x\,dx + G'_y\,dy + G'_z\,dz = 0. \end{cases}$$

Ces deux équations déterminent les rapports de deux des quantités dx, dy, dz à la troisième :

$$(3)\qquad \frac{dx}{F'_y G'_z - F'_z G'_y} = \frac{dy}{F'_z G'_x - F'_x G'_z} = \frac{dz}{F'_x G'_y - F'_y G'_x}.$$

Les équations de la tangente sont alors

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

où il reste à remplacer dx, dy, dz par les valeurs proportionnelles que nous venons de trouver.

Points singuliers. — La tangente est ainsi déterminée en chaque point de la courbe définie par les équations (1).

Il y aurait exception, si les coordonnées du point de contact vérifiaient les relations

$$\frac{F'_x}{G'_x} = \frac{F'_y}{G'_y} = \frac{F'_z}{G'_z},$$

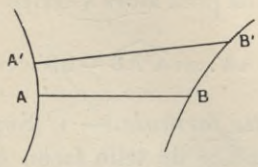
car, dans ce cas, les équations (2) se réduiraient à une seule et les dénominateurs des relations (3) seraient tous nuls. Les deux surfaces (1) qui, par leur intersection, donnent la courbe seraient alors tangentes au point considéré.

Un point de ce genre s'appelle un point *singulier* de la courbe gauche. C'est, en général, un point où se croisent plusieurs branches de la courbe.

Nous reviendrons sur cette question dans la théorie de l'indicatrice.

172. Différentielle de la longueur d'un segment de droite. — Soit un segment de droite AB dont les extrémités A et B ont respectivement pour coordonnées x, y, z et x_1, y_1, z_1. Supposons que ces coordonnées soient fonctions d'un paramètre u, de telle façon que les extrémités A et B décrivent chacune une courbe,

Fig. 90.



quand u varie. Lorsqu'on fait varier infiniment peu u, les points A et B subissent des déplacements infiniment petits AA' et BB' ayant pour projections dx, dy, dz et dx_1, dy_1, dz_1. La longueur l du segment

$$l = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$$

a pour différentielle

$$dl = \frac{(x-x_1)(dx-dx_1) + (y-y_1)(dy-dy_1) + (z-z_1)(dz-dz_1)}{l}.$$

Nous écrirons cette expression

$$dl = -\frac{(x_1-x)\,dx + (y_1-y)\,dy + (z_1-z)\,dz}{l}$$
$$-\frac{(x-x_1)\,dx_1 + (y-y_1)\,dy_1 + (z-z_1)\,dz_1}{l}.$$

Le segment AA', de projections dx, dy, dz, fait avec les axes des angles ayant pour cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, c'est-à-dire

$$\frac{dx}{\mathrm{AA'}}, \quad \frac{dy}{\mathrm{AA'}}, \quad \frac{dz}{\mathrm{AA'}}.$$

Le segment AB, pris dans le sens AB, fait avec les axes des angles ayant pour cosinus

$$\frac{x_1-x}{l}, \quad \frac{y_1-y}{l}, \quad \frac{z_1-z}{l}.$$

On a donc, en prenant le cosinus de l'angle de ces deux directions,

$$\cos\widehat{\mathrm{A'AB}} = \frac{(x_1-x)\,dx + (y_1-y)\,dy + (z_1-z)\,dz}{\mathrm{AA'}.l}.$$

On trouve, de même,

$$\cos\widehat{B'BA} = \frac{(x-x_1)\,dx_1 + (y-y_1)\,dy_1 + (z-z_1)\,dz_1}{BB'.l}.$$

La formule donnant dl peut alors s'écrire

$$dl = -AA'.\cos\widehat{A'AB} - BB'.\cos\widehat{B'BA}.$$

Applications de cette formule. — 1° Supposons, par exemple, que la droite AB se déplace de telle façon qu'elle reste constamment normale aux courbes décrites par les points A et B. On a, alors, $\cos\widehat{A'AB} = 0$, $\cos\widehat{B'BA} = 0$,

$$dl = 0, \qquad l = \text{const}.$$

La droite a donc une longueur constante.

2° Réciproquement, imaginons un segment AB de longueur constante l qui se déplace en restant *normal* à la courbe lieu du point A. Le point B décrit alors une courbe à laquelle la droite AB est *aussi normale*.

En effet, dans la formule générale on a, actuellement, $dl = 0$, $\cos\widehat{A'AB} = 0$. Elle donne donc

$$\cos\widehat{B'BA} = 0,$$

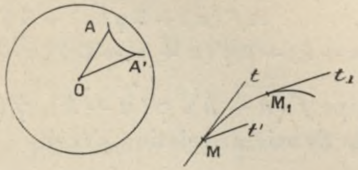
ce qui démontre que AB est normale au lieu du point B.

II. — PLAN OSCULATEUR.

173. **Plan osculateur.** — On démontre, pour les courbes gauches, comme pour les courbes planes, que, de toutes les droites passant par un point M de la courbe, la tangente est celle qui se rapproche le plus de la courbe dans le voisinage du point M. On est naturellement conduit à chercher, de même, quel est, parmi tous les plans passant par un point M d'une courbe gauche, celui qui se rapproche le plus de la courbe dans le voisinage du point M. On est ainsi amené à la notion du plan osculateur que nous définirons comme il suit :

Définition. — Soient M un point de la courbe, M_1 un point voisin, Mt et M_1t_1 les tangentes en ces deux points. *Le plan osculateur en* M *est la limite vers laquelle tend un plan passant par* Mt *et parallèle à* M_1t_1 *quand* M_1 *tend vers* M.

Fig. 91.



Si par M on mène une parallèle Mt' à M_1t_1, on peut dire que le plan osculateur est la limite du plan tMt'.

On peut voir géométriquement que le plan ainsi défini existe. En effet, par un point fixe O, menons des parallèles OA aux différentes tangentes Mt de la courbe : ces parallèles forment un cône qu'on appelle le cône directeur des tangentes. Soit OA_1 la génératrice de ce cône parallèle à M_1t_1, le plan tMt' mené par Mt parallèlement à M_1t_1 est parallèle au plan AOA_1 et, quand M_1 tend vers M, OA_1 tend vers OA et le plan AOA_1 tend vers le plan tangent au cône directeur des tangentes le long de OA. Le plan tMt' tend donc vers une position limite parallèle au plan tangent au cône directeur des tangentes le long de la génératrice OA parallèle à Mt; cette position limite est le plan osculateur en M.

Équation du plan osculateur. — Formons d'abord l'équation du plan tMt'. Soient

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u)$$

les coordonnées du point M,

$$x_1 = f(u+h), \qquad y_1 = \varphi(u+h), \qquad z_1 = \psi(u+h)$$

celles du point M_1. Les cosinus directeurs de la tangente en M sont proportionnels à

$$f'(u), \quad \varphi'(u), \quad \psi'(u);$$

ceux de la tangente en M_1 sont proportionnels à

$$f'(u+h), \quad \varphi'(u+h), \quad \psi'(u+h).$$

Le plan tMt', passant par M, a une équation de la forme

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Ce plan devant contenir Mt et la parallèle Mt' à M_1t_1, on a, pour déterminer A, B, C, les deux conditions

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} Af'(u)+B\varphi'(u)+C\psi'u)&=0,\\ Af'(u+h)+B\varphi'(u+h)+C\psi'(u+h)&=0.\end{aligned}\right.$$

Si l'on développe $f'(u+h)$, $\varphi'(u+h)$, $\psi'(u+h)$ par la formule de Taylor, la deuxième relation s'écrit

$$(2) \quad Af'(u)+B\varphi'(u)+C\psi'(u)+h[Af''(u)+B\varphi''(u)+C\psi''(u)] \\ +\frac{h^2}{1.2}[Af'''(u)+\ldots]=0.$$

D'après la première des conditions (1), le premier terme de cette relation (2) est nul, et l'on peut l'écrire, en divisant par h,

$$Af''(u)+B\varphi''(u)+C\psi''(u)+\frac{h}{2}[Af'''(u)+\ldots]=0.$$

Si, maintenant, on fait tendre h vers zéro, le plan tMt' tend vers le plan osculateur et les deux relations déterminant A, B, C deviennent

$$Af'(u)+B\varphi'(u)+C\psi'(u)=0,$$
$$Af''(u)+B\varphi''(u)+C\psi''(u)=0.$$

On en tire

$$\frac{A}{\varphi'\psi''-\psi'\varphi''}=\frac{B}{\psi'f''-f'\psi''}=\frac{C}{f'\varphi''-\varphi'f''}.$$

L'équation du plan osculateur en M est donc

$$(\varphi'\psi''-\psi'\varphi'')(X-x)+(\psi'f''-f'\psi'')(Y-y) \\ +(f'\varphi''-\varphi'f'')(Z-z)=0.$$

Comme on a, u étant la variable indépendante,

$$dx=f'(u)\,du, \qquad dy=\varphi'(u)\,du, \qquad dz=\psi'(u)\,du,$$
$$d^2x=f''\,du^2, \qquad d^2y=\varphi''\,du^2, \qquad d^2z=\psi''\,du^2,$$

on peut aussi écrire cette équation

$$(dy\,d^2z-dz\,d^2y)(X-x)+(dz\,d^2x-dx\,d^2z)(Y-y) \\ +(dx\,d^2y-dy\,d^2x)(Z-z)=0.$$

174. **Théorème I**. — *Le plan osculateur en un point* M *est la limite vers laquelle tend un plan passant par la tangente* Mt *en ce point et par un point* M_1 *infiniment voisin de* M. — En effet, un plan quelconque passant par le point M a pour équation

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0.$$

Ce plan contenant la tangente Mt, on a

$$(3)\qquad A f'(u)+B\varphi'(u)+C\psi'(u)=0.$$

Exprimons que ce plan contient le point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1; il vient

$$A(x_1-x)+B(y_1-y)+C(z_1-z)=0,$$

ou encore, comme $x=f(u)$, $x_1=f(u+h)$, ...,

$$A[f(u+h)-f(u)]+B[\varphi(u+h)-\varphi(u)] \\ +C[\psi(u+h)-\psi(u)]=0.$$

Développons $f(u+h)$, $\varphi(u+h)$, $\psi(u+h)$ par la formule de Taylor, nous pourrons écrire la dernière condition

$$h[Af'(u)+B\varphi'(u)+C\psi'(u)]+\frac{h^2}{1.2}[Af''(u)+B\varphi''(u)+C\psi''(u)] \\ +\frac{h^3}{1.2.3}[Af'''(u)+\ldots]=0.$$

Le premier terme de cette relation est nul en vertu de (3); supprimant alors le facteur $\frac{h^2}{2}$, on peut écrire

$$Af''(u)+B\varphi''(u)+C\psi''(u)+\frac{h}{3}[Af'''(u)+\ldots]=0.$$

Quand h tend vers zéro, cette relation donne l'équation

$$(4)\qquad Af''(u)+B\varphi''(u)+C\psi''(u)=0$$

qui, jointe à (3), détermine des quantités proportionnelles à A, B, C.

On retrouve ainsi les conditions qui définissent le plan osculateur, et le théorème est démontré.

175. **Théorème II**. — *Le plan osculateur en un point* M *d'une courbe est la limite d'un plan passant par* M *et par deux points*

infiniment voisins M_1 *et* M_2. — Soient

$$x_1 = f(u+h), \qquad y_1 = \varphi(u+h), \qquad z_1 = \psi(u+h)$$

les coordonnées du point M_1 ;

$$x_2 = f(u+k), \qquad y_2 = \varphi(u+k), \qquad z_2 = \psi(u+k)$$

celles du point M_2. L'équation d'un plan passant par le point M de coordonnées x, y, z,

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u),$$

est

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) = 0.$$

En exprimant que ce plan passe par les deux points M_1 et M_2, on a, pour déterminer A, B, C, deux conditions qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} A[f(u+h) - f(u)] + B[\varphi(u+h) - \varphi(u)] \\ + C[\psi(u+h) - \psi(u)] = 0, \\ A[f(u+k) - f(u)] + B[\varphi(u+k) - \varphi(u)] \\ + C[\psi(u+k) - \psi(u)] = 0. \end{aligned}$$

En développant par la formule de Taylor suivant les puissances de h et k, on peut diviser la première condition par h, la deuxième par k, et l'on a

$$(5) \quad \begin{aligned} A f'(u) + B\varphi'(u) + C\psi'(u) + \frac{h}{2}[A f''(u) + B\varphi''(u) + C\psi''(u)] \\ + \frac{h^2}{1.2.3}[A f'''(u) + \ldots] + \ldots = 0, \\ A f'(u) + B\varphi'(u) + C\psi'(u) + \frac{k}{2}[A f''(u) + B\varphi''(u) + C\psi''(u)] \\ + \frac{k^2}{1.2.3}[A f'''(u) + \ldots] + \ldots = 0. \end{aligned}$$

En retranchant ces deux développements membre à membre, on obtient une équation de condition dont tous les termes sont divisibles par $h-k$ et qui s'écrit

$$(6) \quad A f''(u) + B\varphi''(u) + C\psi''(u) + \frac{h+k}{3}[A f'''(u) + \ldots] + \ldots = 0,$$

les termes non écrits contenant tous h ou k en facteur. Si, maintenant, on fait tendre h et k vers zéro, les relations (5) et (6) deviennent

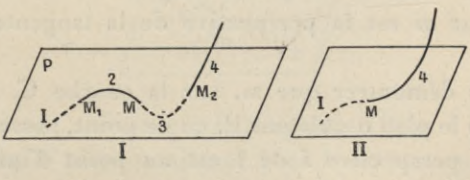
$$A f'(u) + B \varphi'(u) + C \psi'(u) = 0,$$
$$A f''(u) + B \varphi''(u) + C \psi''(u) = 0.$$

Ce sont les relations qui déterminent les coefficients A, B, C de l'équation du plan osculateur. Le théorème est donc démontré.

Ordre de contact du plan osculateur avec la courbe. — On peut dire, d'après le théorème précédent, que le plan osculateur en M coupe la courbe en trois points confondus en M. En appliquant la même locution que pour le contact de deux courbes planes (n° 145), on peut dire que le plan osculateur a, avec la courbe, en M, un contact du *deuxième ordre*.

176. **Le plan osculateur en un point d'une courbe gauche traverse, en général, la courbe.** — En effet, considérons d'abord le plan P déterminé par un point M d'une courbe gauche et deux points voisins M_1 et M_2. Voyons quelle est la disposition de la courbe par rapport au plan P. Nous figurerons en pointillé les arcs de courbe situés au-dessous du plan P et en traits pleins les arcs situés au-dessus. Supposons qu'un mobile parcourant la courbe rencontre les points M_1, M, M_2 dans l'ordre M_1MM_2. Alors, avant d'arriver au point M_1, il décrit d'abord un arc 1 situé au-dessous du plan (*fig.* 92, I); il traverse le plan en M_1 et parcourt

Fig. 92.

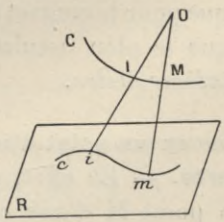


un arc 2, de M_1 en M, situé au-dessus; puis un arc 3, de M en M_2, situé au-dessous; enfin il décrit un arc 4 partant de M_2 et situé au-dessus du plan. Si, maintenant, les deux points M_1 et M_2 tendent vers M, en suivant la courbe, le plan P tend vers le plan osculateur en M, les arcs 2 et 3 deviennent nuls, et la courbe a, par rapport au plan osculateur en M, la disposition de la figure (92, II). L'arc 1 est au-dessous du plan, l'arc 4 au-dessus; le plan osculateur traverse donc la courbe au point M.

Cas d'exception. — Il peut se faire exceptionnellement que le plan osculateur en un point M coupe la courbe en quatre points confondus; on dit alors qu'il est *stationnaire*. Dans ce cas, il ne traverse pas la courbe.

177. **Perspective d'une courbe gauche.** — Soient O un point fixe, R un plan fixe appelé *plan du tableau* : la perspective d'une courbe gauche C se définit comme il suit (*fig.* 93).

Fig. 93.



On joint le point O à un point M de la courbe gauche et l'on prend la trace m de OM sur le plan R. Le lieu des points m est une courbe plane c appelée *perspective* ou *projection centrale* de C.

Quand le point O s'éloigne indéfiniment dans une direction déterminée, la perspective devient la projection de C sur le plan R faite parallèlement à cette direction.

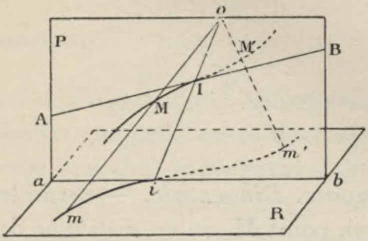
On démontre facilement que la tangente à la courbe perspective c au point m est la perspective de la tangente en M à la courbe C.

Nous allons démontrer que si, sur la courbe C, il existe un point I tel que le plan osculateur P, en ce point, passe par le point de vue O, la perspective i de I est un point d'inflexion de la courbe perspective c.

En effet, soit ab la trace du plan osculateur P en I sur le plan de projection R; O I i la projetante du point I qui est tout entière dans le plan P; le point i est sur ab. Soit AB la tangente en I à la courbe gauche; cette droite étant située dans le plan osculateur P en I a pour perspective ab (*fig.* 94).

Donc la courbe perspective c est tangente en i à ab. Nous allons voir que, au point i, la tangente ab *traverse* la courbe c. En effet, dans l'espace, la courbe C traverse le plan osculateur P; l'arc MI tracé en trait plein est en avant de P et l'arc IM′ tracé en pointillé est en arrière du plan P. Donc, sur la perspective, l'arc *mi* est en

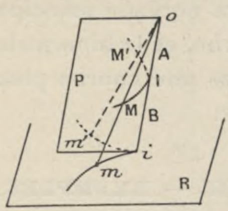
Fig. 94.



avant de *ab* et *im*′ en arrière de *ab*. La tangente *ab* traversant la courbe plane *c* en *i*, le point *i* est un point d'*inflexion* (n° 144).

Cas d'exception. — 1° Nous avons supposé que la tangente AB en I ne va pas passer par le point de vue O. Si cette circonstance se présentait (*fig.* 95), la perspective de AB serait un point *i* et la courbe *c* présenterait, en *i*, un rebroussement.

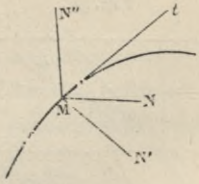
Fig. 95.



2° Il peut encore arriver que la tangente AB en I ne passe pas par O, mais que le plan osculateur P en I soit stationnaire, c'est-à-dire coupe la courbe en quatre points communs confondus. Alors il ne traverse pas la courbe et, en perspective, la tangente *ab* ne traverse pas la projection *c*.

178. Normales à une courbe gauche. Plan normal. — Une droite MN est normale à une courbe gauche, en un point M, quand elle est perpendiculaire à la tangente M*t* en ce point. On peut donc en un point M mener une infinité de normales à une courbe gauche : toutes ces normales sont situées dans un plan passant par M et perpendiculaire à la tangente; ce plan est le plan normal à la courbe (*fig.* 96).

Fig. 96.



Normale principale. Binormale. — Parmi les normales à une courbe gauche en un point M, on en distingue deux qui sont particulièrement importantes.

On appelle *normale principale* la normale MN' à la courbe située dans le plan osculateur; la normale principale est donc l'intersection du plan osculateur et du plan normal.

On appelle *binormale* la normale MN'' perpendiculaire au plan osculateur.

En un point M d'une courbe, la tangente M*t*, la normale principale MN' et la binormale MN'' forment un trièdre trirectangle.

Quand la courbe est *plane*, le plan osculateur se confond avec le plan de la courbe; la normale principale est la normale située dans le plan de la courbe, et la binormale est perpendiculaire au plan de la courbe. Dans une courbe plane, la binormale a donc une direction constante.

III. — EXEMPLES.

179. Hélice circulaire. — Soit une hélice tracée sur un cylindre de révolution de rayon a. Prenons comme axe des z l'axe du cylindre, comme axe des x la perpendiculaire AO abaissée d'un point A de l'hélice sur l'axe du cylindre, comme axe des y une perpendiculaire au plan xOz. Soient M un point de l'hélice, P sa projection sur le plan des xy. Comme le point P se trouve évidemment sur le cercle de base du cylindre dans le plan xOy, on a $OP = a$.

Appelons u l'angle AOP; on a

$$\text{arc AP} = au.$$

D'après la définition de l'hélice, l'ordonnée $z = \mathrm{MP}$ du point est proportionnelle à l'arc AP, c'est-à-dire à u. On a donc, pour les coordonnées du point M,

$$(1) \qquad x = a\cos u, \qquad y = a\sin u, \qquad z = ku,$$

k désignant une constante.

Pas de l'hélice. — Le *pas* d'une *hélice* est la longueur de la génératrice du cylindre comprise entre deux spires consécutives.

On peut dire aussi que c'est la longueur dont croît z quand le point P fait un tour sur le cercle de base, c'est-à-dire quand u croît de 2π. Si l'on désigne le pas par h, on a donc, d'après l'expression (1) de z,

$$h = 2k\pi, \qquad k = \frac{h}{2\pi}.$$

Sens d'enroulement d'une hélice. — Imaginons un observateur placé dans l'intérieur du cylindre suivant l'axe du cylindre,

Fig. 97.

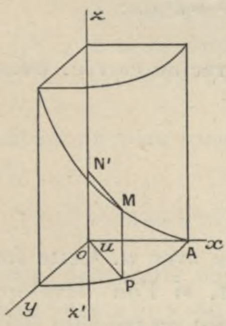
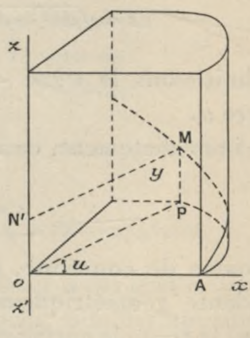


Fig. 98.



ayant, par exemple, les pieds en O et la tête en z. Supposons qu'un mobile parcoure l'hélice dans un sens tel que l'observateur voie ce mobile aller de ses pieds vers sa tête; alors, pour l'hélice représentée dans la figure 97, l'observateur voit ce mobile tourner autour de lui de *sa gauche vers sa droite*. Ce fait est indépendant du sens dans lequel l'observateur se place le long de l'axe. Car si l'on imagine un deuxième observateur ayant les pieds en O, mais la tête en z'; si un mobile suit l'hélice dans un sens tel que cet observateur le voie aller de ses pieds vers sa tête, il le voit encore tourner de sa gauche vers sa droite. Cela tient d'ailleurs à ce que la partie de l'hélice située au-dessous du plan xy et la partie située au-dessus sont *égales* comme symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe Ox. D'après cette propriété, on dit que l'hélice de la figure 97 est *enroulée de gauche à droite* (dextrorsum).

Au contraire l'hélice de la figure 98 est *enroulée de droite à gauche* (sinistrorsum). C'est là le sens ordinaire des vis. Elle est représentée par les mêmes équations (1) à condition qu'on prenne comme sens positif de Oy la perpendiculaire dirigée en arrière du plan xOz.

Ainsi pour passer d'une hélice à l'autre il suffit de changer le sens de Oy en conservant les mêmes formules.

180. Cosinus directeurs de la tangente. Longueur de l'arc d'hélice. — Prenons comme origine des arcs s le point correspondant à $u = 0$ et, comme sens positif des arcs, le sens dans lequel se déplace le point M quand u croît. On a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{a^2 + k^2}\, du;$$

nous choisissons le signe $+$ devant la racine carrée, puisque s croît avec u.

On a immédiatement, en intégrant,

$$s = \sqrt{a^2 + k^2}\, u,$$

sans ajouter de constante, car s s'annule avec u. Cette formule est évidente géométriquement; en effet, si l'on développe le cylindre, le triangle curviligne AMP devient un triangle rectangle ayant pour hypoténuse l'arc $\text{AM} = s$ et pour côtés de l'angle droit l'arc $\text{AP} = au$ et l'ordonnée $\text{MP} = ku$. Donc

$$s^2 = a^2 u^2 + k^2 u^2.$$

Menons la tangente Mt dans le sens des arcs positifs, c'est-à-dire de u croissant; les cosinus α, β, γ des angles de Mt avec les axes sont

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

ou, d'après les valeurs ci-dessus de dx, dy, dz, ds,

$$\alpha = -\frac{a\sin u}{\sqrt{a^2+k^2}}, \qquad \beta = \frac{a\cos u}{\sqrt{a^2+k^2}}, \qquad \gamma = \frac{k}{\sqrt{a^2+k^2}}.$$

Le cosinus appelé γ étant constant, la tangente à l'hélice fait un angle constant avec les génératrices, propriété rendue évidente par le développement du cylindre.

181. Plan osculateur. — Différentiant deux fois les équations de l'hélice (1) où u est variable indépendante, on a

$$\begin{aligned} dx &= -a\sin u\,du, & dy &= a\cos u\,du, & dz &= k\,du,\\ d^2x &= -a\cos u\,du^2, & d^2y &= -a\sin u\,du^2, & d^2z &= 0, \end{aligned}$$

car u étant variable indépendante, d^2u est nul. L'équation du plan osculateur à l'hélice au point x, y, z étant mise sous la forme

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0,$$

les coefficients A, B, C ont pour expressions

$$\begin{aligned} A &= dy\,d^2z - dz\,d^2y = ak\sin u\,du^3,\\ B &= dz\,d^2x - dx\,d^2z = -ak\cos u\,du^3,\\ C &= dx\,d^2y - dy\,d^2x = a^2\,du^3. \end{aligned}$$

L'équation du plan osculateur est donc, en supprimant le facteur du^3,

$$(X-x)ak\sin u - (Y-y)ak\cos u + (Z-z)a^2 = 0.$$

On peut, dans cette équation, remplacer $a\cos u$ et $a\sin u$ par les coordonnées x et y du point de contact. Elle devient alors

$$(X-x)ky - (Y-y)kx + (Z-z)a^2 = 0$$

ou, en développant,

$$(2) \qquad k(yX - xY) + a^2(Z-z) = 0.$$

Telle est l'équation du plan osculateur à l'hélice au point (x, y, z). Cette équation montre que : *Le plan osculateur à l'hélice en un point* M *contient la normale* MN′ *au cylindre*. En effet, la normale MN′ au cylindre se projette horizontalement suivant le rayon OP; elle a donc pour équations

$$yX - xY = 0, \qquad Z - z = 0.$$

Le plan osculateur (2) contient évidemment cette droite.

D'après cela, la normale principale à l'hélice en M est la normale MN' au cylindre.

Problème. — *Déterminer les points de contact des plans osculateurs menés à l'hélice par un point donné* O' *de coordonnées* x', y', z'.

Soient M un des points de contact d'un des plans osculateurs cherchés; x, y, z les coordonnées de ce point. Il faut écrire que le plan osculateur (2) au point M passe par O', ce qui donne la condition

$$\text{(Q)} \qquad k(yx' - xy') + a^2(z' - z) = 0.$$

Il faudra prendre, sur l'hélice, tous les points (x, y, z) vérifiant cette condition. Si l'on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, cette équation représente un plan Q passant par le point O' donné. Les points de contact cherchés étant à l'intersection de ce plan et de l'hélice, on voit que les *points de contact des plans osculateurs à l'hélice, issus d'un point donné* O', *sont sur un plan passant par ce point.*

Si donc on fait la projection conique ou perspective d'une hélice sur un plan donné, le point de vue étant un point quelconque O', les points d'inflexion de la courbe perspective sont en *ligne droite*. En effet, les points d'inflexion de la courbe perspective s'obtiennent en prenant les projections des points de contact $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des plans osculateurs à l'hélice issus du point de vue O'. Ces points de contact $I_1, I_2, \ldots, I_n$ étant sur un plan Q passant par O', les projetantes $O'I_1, O'I_2, \ldots, O'I_n$ sont dans le plan Q et leurs traces sur le plan de projection sont en ligne droite.

Cette propriété subsiste quand le point O' s'éloigne indéfiniment dans une direction donnée, c'est-à-dire quand on projette la courbe sur un plan, parallèlement à une direction donnée. Par exemple, la projection orthogonale de l'hélice sur le plan yOz est la sinusoïde définie par

$$y = a \sin u, \qquad z = ku,$$

d'où

$$y = a \sin \frac{z}{k}.$$

Cette courbe a une infinité de points d'inflexion tous situés sur Oz.

182. Autre exemple. — Cherchons le plan osculateur à la courbe définie par les équations

$$(3) \qquad x = \frac{\lambda^2}{2}, \qquad y = \frac{\lambda^3}{6}, \qquad z = \lambda,$$

où λ est un paramètre variable.

Actuellement

$$dx = \lambda\, d\lambda, \qquad dy = \frac{\lambda^2}{2} d\lambda, \qquad dz = d\lambda,$$

$$d^2x = d\lambda^2, \qquad d^2y = \lambda\, d\lambda^2, \qquad d^2z = 0.$$

Les coefficients de l'équation du plan osculateur sont donc

$$\begin{aligned} A &= dy\, d^2z - dz\, d^2y = -\lambda\, d\lambda^3, \\ B &= dz\, d^2x - dx\, d^2z = d\lambda^3, \\ C &= dx\, d^2y - dy\, d^2x = \frac{\lambda^2}{2} d\lambda^3, \end{aligned}$$

et l'équation du plan osculateur au point (x, y, z) est

$$-\lambda(X - x) + Y - y + \frac{\lambda^2}{2}(Z - z) = 0,$$

ou, en remplaçant x, y, z par leurs valeurs et changeant les signes,

$$\lambda X - Y - \frac{\lambda^2}{2} Z + \frac{\lambda^3}{6} = 0.$$

IV. — ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE COURBES DANS L'ESPACE.

183. Conditions pour qu'il existe une enveloppe. Équations de l'enveloppe. — Soit, dans l'espace, une courbe C définie par deux équations simultanées

$$(\mathrm{C}) \qquad f(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, \lambda) = 0$$

dépendant d'un paramètre λ. Quand on fait varier λ d'une manière continue, la courbe C se déplace d'une manière continue : on peut alors se demander si les diverses positions de la courbe C ont une enveloppe, c'est-à-dire s'il existe une courbe E à laquelle les courbes C soient toutes tangentes. Nous allons voir que cette enveloppe n'existe pas, en général; pour qu'elle existe, il faut qu'une certaine condition soit remplie.

Supposons que l'enveloppe E existe. Soit M (x, y, z) un point de contact d'une courbe C avec l'enveloppe. Les coordonnées d'un point quelconque de C sont des fonctions d'un paramètre u vérifiant identiquement les deux équations (C) où λ a une valeur constante donnée. Quand u varie, les fonctions $f(x, y, z, \lambda)$ et $\varphi(x, y, z, \lambda)$ restent nulles, leurs différentielles sont donc nulles, et l'on a

$$(1) \qquad \begin{cases} f'_x\,dx + f'_y\,dy + f'_z\,dz = 0, \\ \varphi'_x\,dx + \varphi'_y\,dy + \varphi'_z\,dz = 0. \end{cases}$$

Ces équations définissent les projections dx, dy, dz d'un élément d'arc infiniment petit MM′ de la courbe C (*fig.* 78); elles donnent pour les rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ un système de valeurs bien déterminées, tant que l'on n'a pas

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y} = \frac{f'_z}{\varphi'_z}.$$

Si ces dernières conditions étaient remplies, les équations (1) se réduiraient à une seule, le point correspondant x, y, z serait ce que l'on appelle *un point singulier* de la courbe C. Nous supposerons que le point M n'est pas un point singulier; les rapports $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ sont alors déterminés et les équations de la tangente en M à la courbe C sont

$$\frac{\mathrm{X} - x}{dx} = \frac{\mathrm{Y} - y}{dy} = \frac{\mathrm{Z} - z}{dz}.$$

Cherchons maintenant les projections $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ d'un élément d'arc infiniment petit MM_1 de l'enveloppe E. Le long de l'enveloppe, les coordonnées x, y, z d'un point de E sont fonctions de λ, car, pour chaque valeur de λ, il existe, sur l'enveloppe, un point de contact avec l'enveloppée C correspondante; soient

$$x = \psi_1(\lambda), \qquad y = \psi_2(\lambda), \qquad z = \psi_3(\lambda).$$

Ces fonctions de λ vérifient identiquement les deux équations

$$f(x, y, z, \lambda) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Les premiers membres de ces équations restant nuls quand λ varie, leurs différentielles sont nulles. On a donc, en désignant, comme au n° 149, par $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$, les différentielles de x, y, z regardées comme fonctions de λ,

$$(2) \qquad \begin{cases} f'_x \, d_1 x + f'_y \, d_1 y + f'_z \, d_1 z + f'_\lambda \, d\lambda = 0, \\ \varphi'_x \, d_1 x + \varphi'_y \, d_1 y + \varphi'_z \, d_1 z + \varphi'_\lambda \, d\lambda = 0. \end{cases}$$

Les projections de l'élément d'arc infiniment petit MM_1 vérifient ces deux relations. La tangente en M à l'enveloppe E a pour équations

$$\frac{X - x}{d_1 x} = \frac{Y - y}{d_1 y} = \frac{Z - z}{d_1 z}.$$

Pour que cette tangente soit la même que la tangente à la courbe C, il faut et il suffit que l'on ait

$$(3) \qquad \frac{d_1 x}{dx} = \frac{d_1 y}{dy} = \frac{d_1 z}{dz} = k$$

en appelant k la valeur commune des rapports. De ces équations (3) on tire $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ et, en portant dans (2), on a

$$k(f'_x \, dx + f'_y \, dy + f'_z \, dz) + f'_\lambda \, d\lambda = 0,$$
$$k(\varphi'_x \, dx + \varphi'_y \, dy + \varphi'_z \, dz) + \varphi'_\lambda \, d\lambda = 0.$$

Mais, d'après les relations (1), ces équations se réduisent à

$$f'_\lambda = 0, \qquad \varphi'_\lambda = 0.$$

Donc, si les courbes C ont une enveloppe, les coordonnées x, y, z d'un point de cette enveloppe regardées comme fonctions de λ, doivent vérifier les quatre équations simultanées

$$(4)\qquad \begin{cases} f(x, y, z, \lambda) = 0, & \varphi(x, y, z, \lambda) = 0, \\ f'_\lambda = 0, & \varphi'_\lambda = 0. \end{cases}$$

Il faut, par suite, que les valeurs de x, y, z, en fonction de λ, tirées de trois de ces équations, vérifient identiquement la quatrième, quel que soit λ.

Si cette condition n'est pas remplie, l'enveloppe n'existe pas.

Si elle est remplie, soient

$$(5)\qquad x = \psi_1(\lambda), \qquad y = \psi_2(\lambda), \qquad z = \psi_3(\lambda)$$

les valeurs de x, y, z, en fonction de λ, tirées de ces équations (4) et supposées réelles. La courbe définie par les relations (5) est, ou bien l'enveloppe des courbes C, ou le lieu des points singuliers de ces courbes. En effet, appelons $d_1 x$, $d_1 y$, $d_1 z$ les différentielles des fonctions x, y, z de λ définies par les relations (5); ces fonctions rendent identiquement nulles les expressions $f(x, y, z, \lambda)$ et $\varphi(x, y, z, \lambda)$; elles rendent donc nulles leurs différentielles et l'on a les deux équations

$$f'_x\, d_1 x + f'_y\, d_1 y + f'_z\, d_1 z + f'_\lambda\, d\lambda = 0,$$
$$\varphi'_x\, d_1 x + \varphi'_y\, d_1 y + \varphi'_z\, d_1 z + \varphi'_\lambda\, d\lambda = 0.$$

Mais, comme les valeurs (5) de x, y, z s'annulent, par hypothèse, f'_λ et φ'_λ, on a

$$(6)\qquad \begin{cases} f'_x\, d_1 x + f'_y\, d_1 y + f'_z\, d_1 z = 0, \\ \varphi'_x\, d_1 x + \varphi'_y\, d_1 y + \varphi'_z\, d_1 z = 0. \end{cases}$$

Ces relations déterminent les rapports $\dfrac{d_1 y}{d_1 x}$, $\dfrac{d_1 z}{d_1 x}$ si les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z ne sont pas proportionnelles à $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z$, c'est-à-dire si le point x, y, z considéré n'est pas un point singulier de la courbe C. Comme ces relations (6) sont identiques aux relations (1) qui définissent les rapports $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ pour la courbe C, on voit que la courbe (5) est tangente à la courbe C, à condition que le point x, y, z défini par les relations (5) ne soit pas un point singulier de C.

Cas particulier. — Un cas simple où les équations (4) se réduisent à trois est le suivant. Supposons qu'une des équations des courbes mobiles ne contienne pas λ, par exemple la première. Ces deux équations sont alors

$$(7) \qquad \begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ \varphi(x, y, z, \lambda) = 0; \end{cases}$$

les courbes mobiles s'obtiennent en coupant une surface fixe $f(x, y, z) = 0$, par une surface mobile $\varphi(x, y, z, \lambda) = 0$, dépendant d'un paramètre. Comme actuellement f'_λ est identiquement nul, les équations (4) se réduisent à trois :

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad \varphi'_\lambda = 0.$$

On pourra, en général, tirer, de ces équations, x, y, z en fonction de λ,

$$x = \psi_1(\lambda), \qquad y = \psi_2(\lambda), \qquad z = \psi_3(\lambda);$$

la courbe ainsi défini, si elle est réelle, sera ou bien l'enveloppe des courbes considérées ou le lieu de leurs points singuliers.

184. Application à une droite mobile dépendant d'un paramètre. Surfaces gauches. Surfaces développables. Arête de rebroussement. — Soit une droite mobile ayant pour équations

$$(\mathrm{D}) \qquad x = az + h, \qquad y = bz + k,$$

où a, b, h et k sont des fonctions d'un paramètre λ. Quand le paramètre varie, la droite se déplace et engendre une *surface réglée*.

Deux cas sont à distinguer suivant que cette droite a ou non une enveloppe.

Condition pour que la droite ait une enveloppe. Surfaces développables. — Cherchons la condition pour que les droites (D) aient une enveloppe. D'après la règle générale, nous devons associer aux équations (D) les équations obtenues en les dérivant par rapport à λ, c'est-à-dire les équations

$$z\frac{da}{d\lambda} + \frac{dh}{d\lambda} = 0,$$
$$z\frac{db}{d\lambda} + \frac{dk}{d\lambda} = 0.$$

Les quatre équations ainsi obtenues doivent être compatibles en x, y, z. Les deux dernières donnent, pour z, deux valeurs

$$z = -\frac{dh}{da}, \qquad z = -\frac{dk}{db};$$

si ces valeurs ne sont pas identiques entre elles, les droites n'ont pas d'enveloppe.

Pour qu'il y ait une *enveloppe*, il faut et il suffit que les deux valeurs de z soient identiques, c'est-à-dire que l'on ait

$$da\,dk - db\,dh = 0;$$

on dit alors que les droites forment une *surface développable*. Dans ce cas, les coordonnées d'un point de l'enveloppe sont définies par

$$(8) \qquad z = -\frac{dh}{da} = -\frac{dk}{db}, \qquad x = az + h, \qquad y = bz + k.$$

Cette enveloppe s'appelle l'*arête de rebroussement de la surface développable*.

On déduit de là une classification des surfaces réglées.

Quand les droites mobiles (D) *n'ont pas d'enveloppe, elles engendrent une surface gauche.*

Quand elles ont une enveloppe, elles engendrent une surface développable. L'enveloppe est l'arête de rebroussement de la surface.

Nous verrons (n° 186) que le plan tangent à une surface développable est le même tout le long d'une génératrice, comme dans un cône et dans un cylindre, et que ce plan tangent est le plan osculateur à l'arête de rebroussement, au point où la génératrice touche cette arête.

Exemple. — Les droites ayant pour équations

$$x = \lambda z - \frac{\lambda^2}{2}, \qquad y = \frac{\lambda^2}{2} z - \frac{\lambda^3}{3}$$

engendrent une *surface développable*. En effet, en dérivant ces deux équations par rapport à λ, on obtient deux équations qui donnent pour z la même valeur

$$z = \lambda.$$

Portant cette valeur de z dans les deux équations de la droite, on a, pour les coordonnées d'un point de l'enveloppe, c'est-à-dire de l'*arête de rebroussement*,

$$(\mathrm{E}) \qquad x = \frac{\lambda^2}{2}, \qquad y = \frac{\lambda^3}{6}, \qquad z = \lambda.$$

Cette courbe est une courbe gauche du troisième ordre ou cubique gauche.

185. **Cônes et cylindres.** — Les exemples les plus simples de surfaces développables sont les *cônes* et les *cylindres*. Il est aisé de vérifier que, pour ces surfaces, la condition générale $da\,dk - db\,dh = 0$ est remplie. Prenons d'abord un cône et supposons qu'on ait choisi pour origine le sommet du cône. Les génératrices du cône ont alors pour équations

$$x = az, \qquad y = bz,$$

a et b étant fonctions de λ. Comme h et k sont identiquement nuls, la condition est satisfaite. Les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement sont données par

$$z = 0, \qquad x = 0, \qquad y = 0.$$

Cette courbe se réduit à un point, le sommet du cône.

Prenons maintenant un cylindre et choisissons l'axe Oz parallèle aux génératrices. Les droites auront pour équations

$$x = h, \qquad y = k,$$

h et k étant fonctions d'un paramètre λ. La condition est encore remplie, car a et b sont identiquement nuls. En considérant le cylindre comme limite d'un cône dont le sommet s'est éloigné indéfiniment sur Oz, on peut dire que l'arête de rebroussement est un point à l'infini sur Oz.

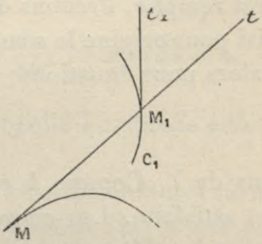
186. **Le plan tangent à une surface développable coïncide avec le plan osculateur à l'arête de rebroussement.** — Soit M un point de l'arête de rebroussement,

$$(9) \qquad x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u)$$

étant les expressions des coordonnées du point M en fonction d'un paramètre u.

Quand le point M décrit l'arête de rebroussement, la tangente Mt engendre la surface développable : nous allons montrer que le plan tangent à la surface développable, en un point quelconque M_1 de la génératrice Mt, est le même, quelle que soit la position du point M_1, et coïncide avec le plan osculateur en M à l'arête de rebroussement. Pour déterminer le plan tangent en un point d'une surface, il suffit de connaître les tangentes à deux courbes passant par ce point sur la surface. Par le point M_1 de la surface développable, passe d'abord la génératrice M_1M (*fig.* 99);

Fig. 99.



le plan tangent en M_1 contient donc cette génératrice. Soit ensuite C_1 une deuxième courbe passant par M_1 sur la surface : quand le point M_1 décrit cette courbe, la longueur MM_1 de la tangente à l'arête de rebroussement varie en fonction du paramètre u qui fixe la position du point M. Les équations de la tangente MM_1 sont

$$\frac{X-x}{f'(u)} = \frac{Y-y}{\varphi'(u)} = \frac{Z-z}{\psi'(u)}. \tag{10}$$

Le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ étant sur cette droite, on a

$$\frac{x_1-x}{f'(u)} = \frac{y_1-y}{\varphi'(u)} = \frac{z_1-z}{\psi'(u)} = \rho, \tag{11}$$

en appelant ρ la valeur commune de ces rapports.

Comme $x=f(u)$, $y=\varphi(u)$, $z=\psi(u)$, on a donc, pour les coordonnées du point M_1 :

$$(M_1) \qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= f(u)+\rho f'(u), \\ y_1 &= \varphi(u)+\rho\varphi'(u), \\ z_1 &= \psi(u)+\rho\psi'(u). \end{aligned}\right.$$

Dans ces expressions, ρ doit être regardé comme une fonction de u, de telle façon que, quand u varie, le point M_1 décrive la courbe C_1. Cela posé, le plan tangent à la surface développable en M_1 contient la génératrice MM_1. Il passe donc par le point M et son équation est de la forme

$$A(X-x)+B(Y-y)+C(Z-z)=0; \tag{12}$$

en écrivant qu'il contient la droite MM_1, tangente à l'arête de rebroussement, on a

$$A f'(u)+B\varphi'(u)+C\psi'(u)=0. \tag{13}$$

Il faut écrire qu'il contient aussi la tangente $M_1 t_1$ à la courbe C_1. Or, d'après les expressions des coordonnées du point M_1, les cosinus directeurs de cette tangente $M_1 t_1$ sont proportionnels aux différentielles, dx_1, dy_1, dz_1 :

$$\begin{aligned}
dx_1 &= f'(u)(du+d\rho)+\rho f''(u)\,du,\\
dy_1 &= \varphi'(u)(du+d\rho)+\rho\varphi''(u)\,du,\\
dz_1 &= \psi'(u)(du+d\rho)+\rho\psi''(u)\,du.
\end{aligned}$$

On doit avoir

$$A\,dx_1+B\,dy_1+C\,dz_1=0.$$

Remplaçant dx_1, dy_1, dz_1 par leurs valeurs, et tenant compte de la condition (13), on voit que le coefficient de $(du+d\rho)$ disparaît et il reste la condition

$$A f''(u)+B\varphi'''(u)+C\psi''(u)=0. \tag{14}$$

Les conditions (13) et (14) déterminent les coefficients A, B, C du plan tangent (12). Mais ce sont précisément les équations déterminant le plan osculateur, en M, à l'arête de rebroussement. Le théorème est donc démontré.

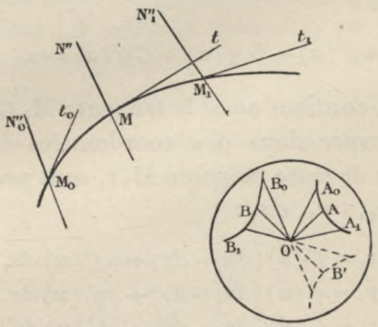
V. — COURBURE ET TORSION DES COURBES GAUCHES.

187. **Courbure.** — Nous avons vu comment, dans une courbe plane, l'idée de la courbure se trouve liée à la variation de la direction de la tangente. On étend cette idée aux courbes gauches. Si la tangente à une ligne dans l'espace conservait une direction

fixe, cette ligne serait une droite. La ligne est donc courbe, parce que la tangente change de direction, et il est naturel de mesurer la courbure par la variation de la direction de la tangente. On définit la courbure d'une courbe gauche de la façon suivante.

Soit une courbe gauche, sur laquelle on a choisi un sens positif pour les arcs s (*fig.* 100), et soit Mt la tangente, menée dans ce

Fig. 100.



sens. En Géométrie plane, on peut évaluer la variation continue d'une direction, en menant par le centre d'un cercle de rayon 1 une parallèle à cette direction et évaluant la variation de la longueur de l'arc découpé par cette parallèle sur la circonférence. Dans l'espace, pour évaluer la variation continue de la direction de la tangente Mt, on considère une sphère de rayon 1 et de centre O; on mène, par le centre, un rayon OA parallèle à Mt. Quand le point M décrit la courbe gauche dans le sens des arcs positifs, à partir d'un point M, la droite OA décrit un cône appelé cône *directeur* des tangentes (n° 173), et l'extrémité A du rayon OA décrit, sur la sphère, une courbe A_0A, dont nous désignerons l'arc par σ, en prenant comme sens positif de σ le sens A_0A. On peut dire que cet arc σ mesure la variation continue de la direction de la tangente depuis la position M_0t_0 jusqu'à Mt.

Courbure moyenne d'un arc MM_1. — Sur la courbe gauche, faisons croître s de Δs; le point M se déplace et vient en M_1 de telle façon que

$$\Delta s = \text{arc } MM_1;$$

la tangente passe de la position Mt à $M_1 t_1$ et, sur la sphère, le point A se déplace jusqu'en A_1, l'arc σ de la courbe sphérique augmente de

$$\Delta\sigma = \text{arc}\, AA_1.$$

On appelle, par analogie avec ce qu'on a vu pour les courbes planes, *courbure moyenne* de l'arc MM_1, le rapport

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$$

quantité positive.

Courbure en un point. — La courbure au point M est la limite vers laquelle tend la courbure moyenne de l'arc MM_1, quand cet arc tend vers zéro. On a donc :

$$\text{courbure en M} = \lim \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}.$$

Le rayon de courbure R, en M, est l'inverse de la courbure; donc

$$R = \lim \frac{\Delta s}{\Delta\sigma} = \frac{ds}{d\sigma}.$$

Cette quantité R est positive.

Remarque. — En désignant par ε l'angle des deux tangentes Mt et $M_1 t_1$, angle qu'on appelle *angle de contingence*, on peut dire aussi que la courbure, en M, est la limite du rapport

$$\frac{\Delta s}{\varepsilon},$$

quand M_1 tend vers M. En effet, l'angle ε des deux tangentes Mt et $M_1 t_1$ est égal à celui de leurs parallèles OA et OA_1 : il est donc mesuré par l'arc de grand cercle joignant les extrémités A et A_1 de l'arc de la courbe sphérique $\Delta\sigma$. On en conclut que le rapport $\frac{\Delta\sigma}{\varepsilon}$ tend vers 1, quand M_1 tend vers M et, par suite, A_1 vers A. En effet, on peut écrire

$$\frac{\Delta\sigma}{\varepsilon} = \frac{\Delta\sigma}{\text{corde}\, AA_1} \, \frac{\text{corde}\, AA_1}{\varepsilon}.$$

Comme le rapport de l'arc $\Delta\sigma$ à sa corde tend vers 1, et que, d'autre part, le rapport de l'arc de grand cercle AA_1, ou ε, à sa corde, tend vers 1, on a bien

$$\lim \frac{\Delta\sigma}{\varepsilon} = 1.$$

Les deux rapports

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}, \quad \frac{\varepsilon}{\Delta s}$$

ont donc même limite, et l'on a

$$\text{courbure en } M = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta s}.$$

188. **Torsion.** — Dans une courbe plane, le plan osculateur est fixe tout le long de la courbe, puisqu'il se confond avec le plan de la courbe. On peut dire également que, dans une courbe plane, la direction de la binormale, perpendiculaire au plan osculateur, est la même tout le long de la courbe; réciproquement, on démontre (n° 200) que toute courbe, dans laquelle la binormale a une direction fixe, est plane. On peut dire qu'une courbe est gauche, parce que la binormale change de direction, et il est naturel d'introduire, pour les courbes gauches, un deuxième élément caractérisé par la variation de direction de la binormale, comme la courbure est caractérisée par la variation de la direction de la tangente.

Ce nouvel élément est la *torsion*.

Soit MN'' la binormale, en M, à la courbe gauche. Nous choisirons plus loin un sens positif sur cette binormale : mais, pour le moment, MN'' est simplement une perpendiculaire indéfinie au plan osculateur. Pour évaluer la variation continue de la direction MN'' quand le point M parcourt la courbe, de M_0 en M, nous mènerons, comme tout à l'heure, par le centre O de la sphère de rayon 1, une parallèle à MN'' : soit BOB' le diamètre parallèle à la droite indéfinie MN'' (*fig.* 100). L'extrémité B de ce diamètre, suivie par continuité, part d'une position B_0 quand M part de M_0, et décrit une courbe sphérique B_0B, dont nous appellerons l'arc τ, en convenant de compter cet arc positivement dans le sens B_0B. En même temps le point B' décrit un arc B'_0B' égal à τ, dans le sens contraire.

Torsion moyenne d'un arc MM_1. — Sur la courbe gauche, faisons croître s de Δs; le point M vient en M_1, de telle façon que

$$\Delta s = \text{arc}\, MM_1;$$

la binormale passe de la position MN'' à la position $M_1N''_1$, et, sur la sphère, le point B se déplace jusqu'en B_1, l'arc τ de la courbe sphérique augmente de

$$\Delta\tau = \text{arc}\, BB_1.$$

On appelle alors *torsion moyenne* de l'arc MM_1, le rapport

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s},$$

quantité positive.

Torsion en un point. — La torsion, *au point* M, est la limite vers laquelle tend la torsion moyenne de l'arc MM_1, quand cet arc tend vers zéro. On a donc

$$\text{torsion en M} = \lim \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \frac{d\tau}{ds}.$$

Le rayon de torsion T, *en* M, *est, par définition, l'inverse de la torsion;* donc

$$T = \lim \frac{\Delta s}{\Delta\tau} = \frac{ds}{d\tau}.$$

Cette quantité T est positive.

Remarque. — En désignant par η l'angle des deux binormales MN'' et $M_1N''_1$, on peut dire aussi que la torsion, en M, est la limite du rapport $\frac{\eta}{\Delta s}$, quand M_1 tend vers M. En effet, l'angle η des deux binormales est mesuré par l'arc de grand cercle de la sphère joignant les extrémités, B et B_1, de l'arc de courbe sphérique $\Delta\tau$. On en conclut que le rapport

$$\frac{\Delta\tau}{\eta} = \frac{\Delta\tau}{\text{corde}\, BB_1} \, \frac{\text{corde}\, BB_1}{\eta}$$

tend vers 1, quand M_1 tend vers M, et, par suite, que les deux rapports

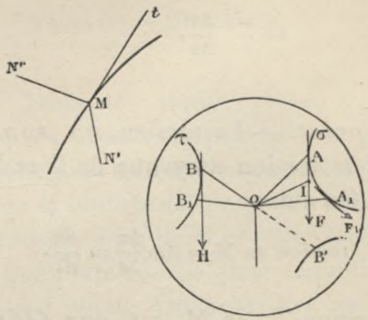
$$\frac{\Delta\tau}{\Delta s}, \quad \frac{\eta}{\Delta s}$$

ont même limite.

189. Propriétés géométriques des courbes σ et τ. — Pour arriver d'une façon simple, aux formules donnant la courbure et la torsion, nous ferons d'abord quelques remarques géométriques sur les courbes σ et τ; ces remarques nous permettront de définir le sens positif de la binormale et de la normale principale.

Soit AF la tangente à la courbe sphérique σ, dans le sens des σ positifs. Cette droite AF est parallèle à la normale principale MN′ (*fig.* 101). En effet, le cône, engendré par les droites OA, est le

Fig. 101.



cône directeur des tangentes à la courbe : le plan tangent OAF à ce cône est parallèle au plan osculateur en M à la courbe (n° 173). La droite AF étant dans un plan parallèle au plan osculateur et étant perpendiculaire à la droite OA parallèle à Mt, est parallèle à la normale principale MN′. Nous choisirons, comme sens positif sur la normale principale, le sens de AF : nous verrons, plus tard, que la partie positive MN′ de la normale principale, ainsi définie, est la partie qui se trouve dirigée vers la concavité de la courbe en M.

Passons maintenant au cône engendré par les parallèles B′OB aux binormales et aux courbes sphériques, lieux des points B et B′ : nous mènerons à ces courbes les tangentes BH et B′H′, dans le sens dans lequel chacune d'elles est décrite. Comme le plan tangent OAF au cône σ est parallèle au plan osculateur en M, la droite B′OB, parallèle à la binormale, est perpendiculaire au plan OAF. Ainsi on obtient le cône décrit par les droites B′OB, en prenant les perpendiculaires élevées par O aux plans tangents OAF du cône σ. Le cône ainsi obtenu, ou cône τ, est dit *supplémentaire* du cône σ. Il est aisé de voir que, réciproquement, le cône σ est supplémentaire du cône τ, c'est-à-dire que la génératrice OA est perpendiculaire au plan tangent OBH du cône τ. En effet, soient OAF et OA_1F_1 deux plans tangents voisins du cône σ : ces deux plans étant perpendiculaires aux génératrices OB et OB_1 du cône τ, leur intersection OI est perpendiculaire au plan BOB_1. Quand OA_1 tend vers OA, l'intersection OI des deux plans tangents tend aussi vers OA, le plan BOB_1 tend vers le plan tangent OBH au cône τ. Comme le plan BOB_1 est perpendiculaire à OI, le plan tangent OBH est perpendiculaire à la limite de OI, c'est-à-dire à OA.

D'après cela, les tangentes AF et BH aux courbes sphériques σ et τ sont parallèles : en effet, AF est perpendiculaire au rayon OA de la sphère et à la droite OB perpendiculaire au plan OAF ; donc AF est perpendiculaire au plan AOB. On voit de même que BH est perpendiculaire au plan AOB. Ces deux droites sont donc parallèles. On peut toujours supposer que ces deux tangentes AF et BH sont parallèles et de *même sens*. En effet, nous avons mené les deux tangentes BH et $B'H'$ aux deux courbes sphériques, lieux des points B et B', dans le sens où chacune d'elles est décrite. Les deux points B et B' étant symétriques par rapport à O, ces deux tangentes BH et $B'H'$ sont *parallèles et de sens contraires*. Comme elles sont parallèles à AF, l'une d'elles est de même sens que AF, l'autre de sens contraire. Nous supposerons qu'on ait appelé B celui des deux points B ou B' qui décrit la courbe τ dont la tangente est de même sens que AF.

Cette convention détermine le sens de la demi-droite OB; c'est ce sens que nous choisirons pour sens positif de la binormale MN''.

Les deux tangentes AF et BH sont alors parallèles, de même sens, et parallèles à la normale principale MN'.

190. Formules de Frenet. — Désignons par

$$(Mt) \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

les cosinus directeurs de la tangente Mt à la courbe gauche, par

$$(MN') \qquad \alpha',\ \beta',\ \gamma'$$

les cosinus directeurs de la normale principale MN', et par

$$(\mathrm{MN}'') \qquad \alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma''$$

ceux de la binormale.

Les cosinus directeurs de la tangente sont donnés par les formules (n° 170)

$$(1) \qquad \alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Si l'on prend le centre O de la sphère comme origine, le point A, décrivant la courbe σ, a pour coordonnées

$$(\mathrm{A}) \qquad x' = \alpha, \qquad y' = \beta, \qquad z' = \gamma,$$

car le rayon OA, parallèle à la tangente, a pour longueur 1 et pour cosinus directeurs α, β, γ. La tangente AF à la courbe, lieu du point A, étant parallèle à la normale principale, a pour cosinus directeurs α', β', γ'. En appliquant les formules générales (1), donnant les cosinus directeurs de la tangente d'une courbe, à la courbe σ, on a donc

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{d\sigma}, \qquad \beta' = \frac{d\beta}{d\sigma}, \qquad \gamma' = \frac{d\gamma}{d\sigma},$$

car les coordonnées d'un point de cette courbe sont α, β, γ, et son arc est σ. Nous écrirons la première de ces formules

$$d\alpha = \alpha'\, d\sigma, \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \alpha' \frac{d\sigma}{ds}.$$

Mais, d'après la définition de la courbure, on a, R désignant le rayon de courbure,

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{\mathrm{R}},$$

donc

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{\mathrm{R}}.$$

On transforme, de même, les deux autres formules et l'on trouve

$$(2) \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{\mathrm{R}}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{\mathrm{R}}.$$

Élevant ces relations au carré et ajoutant, on a, en vertu de la relation $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$,

$$(3) \qquad \frac{1}{R^2} = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2.$$

Passons à la courbe τ, lieu du point B. La droite OB étant parallèle à la binormale MN″, les coordonnées du point B sont

$$(B) \qquad \alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma''.$$

La tangente BH à la courbe τ étant parallèle à la normale principale MN′, ses cosinus directeurs sont α', β', γ'; donc, en appliquant à la courbe τ les formules générales (1) donnant les cosinus directeurs de la tangente à une courbe, on a

$$\alpha' = \frac{d\alpha''}{d\tau}, \qquad \beta' = \frac{d\beta''}{d\tau}, \qquad \gamma' = \frac{d\gamma''}{d\tau}.$$

Nous écrirons la première de ces formules

$$d\alpha'' = \alpha'\, d\tau, \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \alpha' \frac{d\tau}{ds}.$$

Mais, d'après la définition de la torsion et en désignant par T le rayon de torsion, on a

$$\frac{1}{T} = \frac{d\tau}{ds},$$

d'où

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}.$$

On transforme de même les deux autres formules et l'on a

$$(4) \qquad \frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}.$$

Élevant ces relations au carré et ajoutant, on a

$$(5) \qquad \frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma''}{ds}\right)^2.$$

Nous avons ainsi les dérivées de α, β, γ, α'', β'', γ'' par rapport à l'arc s. Pour compléter le Tableau des formules, il reste à calculer les dérivées de α', β', γ' par rapport à s. Or, entre α, α', α'', a lieu la relation

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1,$$

car α, α', α'' sont les cosinus des angles que fait la direction Ox avec les arêtes du trièdre trirectangle Mt, MN', MN''. Différentiant cette relation par rapport à s, on a

$$\alpha \frac{d\alpha}{ds} + \alpha' \frac{d\alpha'}{ds} + \alpha'' \frac{d\alpha''}{ds} = 0.$$

Remplaçons $\frac{d\alpha}{ds}$ et $\frac{d\alpha''}{ds}$ par leurs valeurs précédemment trouvées $\frac{\alpha'}{R}$ et $\frac{\alpha'}{T}$, puis divisons par α', nous aurons

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}.$$

On trouve de même deux autres formules en remplaçant α par β et γ; ce qui donne le nouveau groupe

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\alpha'}{ds} = -\dfrac{\alpha}{R} - \dfrac{\alpha''}{T}, \qquad \dfrac{d\beta'}{ds} = -\dfrac{\beta}{R} - \dfrac{\beta''}{T}, \\ \dfrac{d\gamma'}{ds} = -\dfrac{\gamma}{R} - \dfrac{\gamma''}{T}. \end{array} \right.$$

Élevant ces formules au carré et ajoutant, en tenant compte des relations

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,$$
$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$

on a

$$(7) \quad \frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma'}{ds}\right)^2.$$

Tel est l'ensemble des formules relatives à la courbure et à la torsion des courbes gauches.

191. Usage de ces formules pour le calcul de R et T. — Si l'on donne une courbe gauche définie par les équations

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u), \qquad z = \psi(u),$$

on a

$$dx = f'(u)\,du, \qquad dy = \varphi'(u)\,du, \qquad dz = \psi'(u)\,du,$$
$$ds = \sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}\,du.$$

Le signe du radical dépendra du sens choisi pour les arcs positifs. Par exemple, si l'on convient de compter les arcs s dans le sens dans lequel se déplace le point x, y, z, quand u croît, ds et du sont de même signe, le radical est pris positivement.

Les cosinus directeurs de la tangente α, β, γ sont alors donnés par les formules

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{f'}{\sqrt{f'^2 + \varphi'^2 + \psi'^2}}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds},$$

ce sont donc des fonctions connues de u. Les formules

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{d\alpha}{ds}, \qquad \ldots, \qquad \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2}$$

donnent ensuite $\frac{\alpha'}{R}, \frac{\beta'}{R}, \frac{\gamma'}{R}$ et $\frac{1}{R}$ en fonction de u. Formant ensuite $\frac{d\alpha'}{ds}, \ldots$, on a, par les formules

$$-\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T} = \frac{d\alpha'}{ds}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma'}{ds}\right)^2,$$

$\frac{\alpha''}{T}, \frac{\beta''}{T}, \frac{\gamma''}{T}$ et $\frac{1}{T}$ en fonction de u. On en déduit les cosinus directeurs $\alpha'', \beta'', \gamma''$ de la binormale en fonction de u.

On a ainsi tous les éléments de la courbe au point M exprimés en fonction de u.

Dans certains cas, si l'on connaît le plan osculateur, on connaît directement $\alpha'', \beta'', \gamma''$ en fonction de u et l'on peut calculer α', β', γ', T par les formules

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \ldots, \qquad \frac{1}{T} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma''}{ds}\right)^2}.$$

192. Remarque sur le cas particulier où s est pris comme variable indépendante. — Si l'arc s est pris comme variable indépendante, $d^2 s = 0$; on a alors

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2 x}{ds^2} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \ldots,$$

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2 x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z}{ds^2}\right)^2.$$

Mais cette formule simple ne s'applique que si s est la variable indépendante, cas qui se présente rarement. Dans le cas général, où la variable indépendante serait quelconque, on aurait

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad d\alpha = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^2},$$

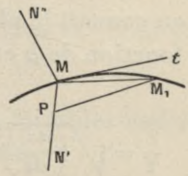
$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{ds\, d^2x - dx\, d^2s}{ds^3}.$$

Les quantités $\frac{\beta'}{R}$, $\frac{\gamma'}{R}$ seraient alors données par des expressions analogues et, en faisant la somme des carrés de ces expressions, on aurait une formule générale donnant $\frac{1}{R^2}$, formule qu'il est inutile d'écrire ici.

193. Normale principale. Centre de courbure. Cercle osculateur. — Avant de faire des applications, il nous reste à vérifier que la direction de la normale principale MN', définie par les cosinus directeurs α', β', γ', est située du côté de la concavité de la courbe.

Pour cela, nous allons montrer que, si M_1 est un point de la courbe infiniment voisin de M, la projection du segment MM_1 sur la direction MN' est positive, c'est-à-dire que le point M_1 se projette sur la partie positive MN' (*fig.* 102).

Fig. 102.



En effet, x, y, z étant les coordonnées du point M et x_1, y_1, z_1 celles de M_1, le segment MM_1 a pour projections sur les axes

$$x_1 - x, \quad y_1 - y, \quad z_1 - z,$$

et, sur la direction MN', la quantité

$$P = \alpha'(x_1 - x) + \beta'(y_1 - y) + \gamma'(z_1 - z).$$

Il faut vérifier que P est positif. Soient

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = \psi(s)$$

les coordonnées de M en fonction de l'arc s : celles de M_1 s'obtiennent en faisant croître s d'une quantité infiniment petite h. On a donc

$$x_1 = f(s+h), \qquad y_1 = \varphi(s+h), \qquad z_1 = \psi(s+h);$$

développons par la formule de Taylor :

$$f(s+h) = f(s) + \frac{h}{1} f'(s) + \frac{h^2}{1.2} f''(s) + \ldots.$$

Nous avons

$$f(s) = x, \qquad f'(s) = \frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad f''(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}.$$

Donc

$$x_1 - x = h\alpha + \frac{h^2}{2}\frac{\alpha'}{R} + \ldots,$$

de même

$$y_1 - y = h\beta + \frac{h^2}{2}\frac{\beta'}{R} + \ldots,$$

$$z_1 - z = h\gamma + \frac{h^2}{2}\frac{\gamma'}{R} + \ldots.$$

Portant dans la valeur de P et tenant compte des relations

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1,$$

on trouve

$$P = \frac{h^2}{2R} + \ldots,$$

quantité positive pour h infiniment petit, positif ou négatif.

Centre de courbure. — Le centre de courbure C s'obtient en portant sur la normale principale MN', dans la concavité de la courbe, une longueur MC égale au rayon de courbure R. Les coordonnées du point C sont égales à celles de M, augmentées des projections de MC sur les trois axes; elles ont donc pour expressions

$$\text{(C)} \qquad x + R\alpha', \quad y + R\beta', \quad z + R\gamma'.$$

Cercle osculateur. — Le cercle osculateur est le cercle situé dans le plan osculateur, décrit du centre de courbure comme centre, avec le rayon de courbure comme rayon.

194. Courbes gauches. Tableau de formules.

(Courbe) $x = f(u), \quad y = \varphi(u), \quad z = \psi(u).$

(Arc) $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$

(Tangente) $\dfrac{X - x}{dx} = \dfrac{Y - y}{dy} = \dfrac{Z - z}{dz}.$

(Plan osculateur) $(X - x)(dy\, d^2z - dz\, d^2y) + \ldots = 0.$

$$\frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \frac{dy}{ds} = \beta, \qquad \frac{dz}{ds} = \gamma;$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R};$$

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2.$$

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T};$$

$$\frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta''}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma''}{ds}\right)^2.$$

$$\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}, \qquad \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T}, \qquad \frac{d\gamma'}{ds} = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T};$$

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \left(\frac{d\alpha'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma'}{ds}\right)^2.$$

VI. — APPLICATION AUX HÉLICES.

195. Hélice circulaire. — Les coordonnées d'un point de cette courbe sont données par les formules suivantes (n° 179) :

$$x = a \cos u, \qquad y = a \sin u, \qquad z = ku,$$

le pas étant égal à $2\pi k$. On a

$$dx = -a \sin u\, du, \qquad dy = a \cos u\, du, \qquad dz = k\, du,$$
$$ds = \sqrt{a^2 + k^2}\, du.$$

Les cosinus directeurs de la tangente sont alors

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{a \sin u}{\sqrt{a^2 + k^2}},$$

$$\beta = \frac{dy}{ds} = \frac{a \cos u}{\sqrt{a^2 + k^2}},$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}}.$$

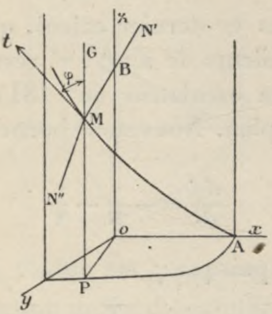
On déduit de ces formules $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$, et l'on a

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{a \cos u}{a^2 + k^2},$$

$$\frac{\beta'}{R} = \frac{d\beta}{ds} = -\frac{a \sin u}{a^2 + k^2},$$

$$\frac{\gamma'}{R} = \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Fig. 103.



Élevant ces équations au carré et ajoutant, on a

$$\frac{1}{R^2} = \frac{a^2}{(a^2 + k^2)^2}, \qquad R = \frac{a^2 + k^2}{a}.$$

Puis, en remplaçant R par cette valeur,

$$\alpha' = -\cos u, \qquad \beta' = -\sin u, \qquad \gamma' = 0.$$

Les cosinus directeurs de la normale principale MN' sont donc égaux et de signes contraires à ceux du rayon OP; cette normale MN' est parallèle à PO; elle est normale au cylindre, comme nous l'avons déjà vu (n° 181).

Nous pouvons maintenant calculer $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$, et, en divisant par ds, nous avons

$$-\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T} = \frac{d\alpha'}{ds} = \frac{\sin u}{\sqrt{a^2 + k^2}},$$

$$-\frac{\beta}{R} - \frac{\beta''}{T} = \frac{d\beta'}{ds} = -\frac{\cos u}{\sqrt{a^2 + k^2}},$$

$$-\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T} = \frac{d\gamma'}{ds} = 0.$$

Faisant la somme des carrés, on a

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{T^2}=\frac{1}{a^2+k^2},$$

d'où, d'après la valeur de R,

$$\frac{1}{T^2}=\frac{k^2}{(a^2+k^2)^2},\qquad T=\frac{a^2+k^2}{k}.$$

Connaissant α, β, γ, R et T, les dernières formules donnent α'', β'', γ''.

Nous ne ferons pas ce dernier calcul, qui serait une simple vérification, car les valeurs de α'', β'', γ'' résultent immédiatement de l'équation du plan osculateur (n° 181), la binormale étant perpendiculaire à ce plan. Nous nous bornerons à remarquer que la formule

$$\frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}-\frac{\gamma''}{T}$$

donne, actuellement, puisque γ' est nul,

$$\gamma''=-\frac{T}{R}\gamma,$$

ou, d'après les valeurs de T, R, γ,

$$\gamma''=-\frac{a}{\sqrt{a^2+k^2}}.$$

Cette valeur étant négative, la binormale MN″ fait avec Oz un angle obtus. Elle est donc dirigée comme le montre la figure 103.

Remarque I. — En partant des valeurs de α'', β'', γ'', telles qu'elles résultent de l'équation du plan osculateur, on pourrait calculer directement T à l'aide des formules

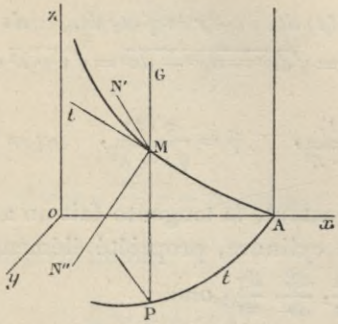
$$\frac{\alpha'}{T}=\frac{d\alpha''}{ds},\qquad \frac{\beta'}{T}=\frac{d\beta''}{ds},\qquad \frac{\gamma'}{T}=\frac{d\gamma''}{ds},$$

$$\frac{1}{T^2}=\left(\frac{d\alpha''}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\beta''}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\gamma''}{ds}\right)^2.$$

Remarque II. — On voit que, dans une hélice circulaire, les rayons de courbure et de torsion sont constants. Nous verrons plus loin que, réciproquement, toute courbe, pour laquelle R et T sont constants, est une hélice circulaire.

196. Hélice quelconque. — Considérons un cylindre quelconque, dont les génératrices sont parallèles à Oz, et, sur ce cylindre, une hélice obtenue en enroulant sur lui un plan dans lequel on a tracé une ligne droite. Prenons pour axe Ox la perpendiculaire abaissée d'un point A de l'hélice sur Oz (*fig.* 104).

Fig. 104.



Soient M un point de l'hélice, P sa projection sur le plan des xy. Le lieu de P est la section droite du cylindre, dont nous désignerons l'arc par t,

$$\text{arc}\, AP = t.$$

Nous appellerons s l'*arc de l'hélice*,

$$\text{arc}\, AM = s.$$

Si l'on exprime les coordonnées du point P en fonction de t, on a

$$\text{(P)} \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = 0.$$

L'arc AP étant égal à t, on a

$$dt^2 = dx^2 + dy^2 = [f'^2(t) + \varphi'^2(t)]\, dt^2,$$

donc

$$f'^2(t) + \varphi'^2(t) = 1.$$

Appelons ρ le rayon de courbure de la section droite AP en P : comme t est l'arc AP, on a (n° 192)

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{\rho^2} = f''^2(t) + \varphi''^2(t).$$

Ceci posé, passons à l'hélice, lieu du point M. Ce point a mêmes coordonnées x et y que P; son ordonnée $MP = z$ est proportionnelle à l'arc AP : donc

$$\text{(M)} \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \lambda t,$$

λ désignant une constante positive. D'après cela,

$$dx = f'(t)\,dt, \qquad dy = \varphi'(t)\,dt, \qquad dz = \lambda\,dt,$$
$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1+\lambda^2}\,dt.$$

On a

$$\alpha = \frac{f'(t)}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \beta = \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \qquad \gamma = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Comme γ est constant, la tangente fait un angle constant avec les génératrices du cylindre, propriété élémentaire bien connue. Formant ensuite $\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\beta}{ds}, \frac{d\gamma}{ds}$, on a

$$\frac{\alpha'}{R} = \frac{f''(t)}{1+\lambda^2}, \qquad \frac{\beta'}{R} = \frac{\varphi''(t)}{1+\lambda^2}, \qquad \frac{\gamma'}{R} = 0.$$

D'où, en ajoutant les carrés,

$$\frac{1}{R^2} = \frac{f''^2(t) + \varphi''^2(t)}{(1+\lambda^2)^2},$$

ou, d'après la valeur de $\frac{1}{\rho^2}$,

$$R = \rho(1+\lambda^2).$$

Le rayon de courbure, en M, varie donc proportionnellement au rayon de courbure correspondant de la section droite.

Comme γ' est nul, la normale principale est perpendiculaire aux génératrices du cylindre, et, comme elle est perpendiculaire à la tangente, en M, à l'hélice, elle est *normale* au cylindre. Le plan osculateur d'une hélice quelconque contient donc la normale au cylindre en ce point. C'est là une propriété qui tient au fond à ce que l'hélice est le plus court chemin d'un point à un autre sur la surface du cylindre. Nous verrons plus tard que, sur une surface quelconque, la ligne la plus courte entre deux points est une courbe telle que la normale principale, en chacun de ses points, coïncide avec la normale à la surface.

Revenons à l'hélice et calculons sa torsion. Comme $\gamma' = 0$, on a

$$\frac{d\gamma'}{ds} = 0$$

et, par suite,

$$-\frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma''}{T} = 0.$$

Le cosinus γ est constant et égal à $\dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$; comme on a

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1,$$

et que γ' est nul, il vient

$$\gamma'' = \pm\sqrt{1-\gamma^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

Alors la dernière formule donne

$$\frac{R}{T} = -\frac{\gamma}{\gamma''} = \lambda;$$

dans cette formule, on voit qu'il faut prendre

$$\gamma'' = -\frac{1}{\sqrt[2]{1+\lambda^2}},$$

puisque R et T sont positifs. On a donc

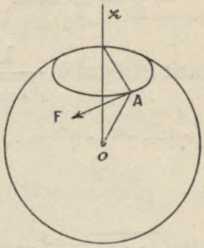
$$T = \rho\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda}.$$

Ainsi, dans une hélice quelconque, le rapport du rayon de courbure au rayon de torsion est *constant*. Nous verrons plus tard que, réciproquement, toute courbe gauche, pour laquelle $\frac{R}{T}$ est constant, est une *hélice*.

Remarquons, en outre, que, γ'' étant négatif, la binormale MN'' est placée comme le montre la figure.

Remarque géométrique. — Il est aisé de démontrer géométriquement que la normale principale d'une hélice est normale au cylindre. En effet, la tangente à l'hélice faisant un angle constant avec la direction fixe Oz des génératrices, le cône directeur des tangentes est un cône de révolution autour de Oz, et la courbe σ, découpée par ce cône sur une sphère de rayon 1, est un petit cercle dont le pôle est sur Oz (*fig.* 105). La tangente AF à la courbe σ est alors perpendiculaire au plan AOz, et, comme elle est parallèle à la normale principale, cette dernière est perpendi-

Fig. 105.



culaire au plan AOz, c'est-à-dire au plan tangent au cylindre sur lequel est tracée l'hélice.

197. **Courbes sinistrorsum et courbes dextrorsum.** — Dans les figures précédentes, nous avons représenté des hélices *dextrorsum* tournant de *gauche à droite*. Pour ces hélices, le trièdre Mt, MN', MN'', formé par la tangente (*fig.* 103 et 104), la normale principale et la binormale, dont les sens positifs sont déterminés par les conventions adoptées, est disposé de telle façon, qu'un observateur, ayant les pieds en M, la tête en t et regardant dans l'angle $N'MN''$, voit MN' à droite et MN'' à gauche. Dans une hélice tournant de droite à gauche, la disposition du trièdre est inverse.

Si l'on considère maintenant une courbe gauche quelconque, on voit, qu'aux environs d'un point M, elle peut affecter deux allures différentes, suivant que le trièdre des directions positives Mt, MN', MN'' présente une disposition ou l'autre. Si cette disposition est la même que dans une hélice sinistrorsum, on dit que la courbe, au point M, est *sinistrorsum;* sinon elle est *dextrorsum.*

On peut se rendre compte aussi de l'existence de ces deux cas, en remarquant que, sur une petite étendue, un arc de courbe gauche quelconque peut être assimilé à un arc d'hélice circulaire ; alors cet arc d'hélice peut tourner de gauche à droite ou de droite à gauche.

VII. — EXERCICES SUR LES COURBES GAUCHES.

198. **Ligne dont la courbure est nulle.** — Si l'on cherche la ligne dont la courbure est nulle, $\frac{1}{R} = 0$, en chaque point, on doit évidemment trouver *une droite*. En effet, les formules

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R}$$

deviennent alors

$$\frac{d\alpha}{ds} = 0, \qquad \frac{d\beta}{ds} = 0, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = 0.$$

Elles montrent que α, β, γ sont constants. La tangente à la ligne ayant une direction fixe, prenons l'axe Oz parallèle à cette direction, nous aurons

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1$$

ou

$$\frac{dx}{ds} = 0, \qquad \frac{dy}{ds} = 0, \qquad \frac{dz}{ds} = 1.$$

On en conclut

$$x = A, \qquad y = B, \qquad z = s + C,$$

A, B, C étant des constantes. La ligne est donc une droite parallèle à Oz.

199. **Ligne dont le plan osculateur est indéterminé en chaque point.** — Pour que le plan osculateur soit indéterminé, il faut et il suffit que les coefficients de l'équation du plan osculateur soient nuls en tous les points de la ligne :

$$\begin{aligned} dy\, d^2 z - dz\, d^2 y &= 0, \\ dz\, d^2 x - dx\, d^2 z &= 0, \\ dx\, d^2 y - dy\, d^2 x &= 0. \end{aligned}$$

On en conclut

$$\frac{d^2 x}{dx} = \frac{d^2 y}{dy} = \frac{d^2 z}{dz}.$$

Tout d'abord la relation

$$\frac{d^2 x}{dx} = \frac{d^2 z}{dz}$$

donne, en intégrant,

$$\mathrm{L}\, dx = \mathrm{L}\, dz + \mathrm{L}\, a,$$

a désignant une constante. On en déduit

$$dx = a\, dz, \qquad x = az + h,$$

h étant une nouvelle constante. De même la relation

$$\frac{d^2 y}{dy} = \frac{d^2 z}{dz}$$

donne

$$y = bz + k,$$

b et k étant deux constantes. Les deux équations ainsi obtenues,

$$x = az + h, \qquad y = bz + k,$$

définissent une *ligne droite*.

200. Courbe dont la torsion est nulle. — Nous allons montrer qu'une courbe, dont la torsion est nulle, en tous ses points, est plane. En effet, si $\frac{1}{\mathrm{T}} = 0$, les formules

$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{\mathrm{T}}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{\mathrm{T}}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{\mathrm{T}}$$

donnent

$$\frac{d\alpha''}{ds} = 0, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = 0, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = 0.$$

Donc α'', β'', γ'' sont *constants* et la binormale a une direction fixe. Prenons l'axe Oz parallèle à cette direction, nous avons

$$\alpha'' = 0, \qquad \beta'' = 0, \qquad \gamma'' = 1.$$

Alors le plan osculateur est perpendiculaire à Oz, et l'on a

$$dy\, d^2 z - dz\, d^2 y = 0,$$
$$dx\, d^2 z - dz\, d^2 x = 0.$$

Ces deux équations sont du premier degré en dz et $d^2 z$; comme le déterminant

$$dy\, d^2 x - dx\, d^2 y$$

ne peut pas être nul, car, s'il était nul, le plan osculateur serait indéterminé, on a

$$dz = 0, \qquad d^2 z = 0,$$

c'est-à-dire

$$z = C;$$

la courbe est donc située dans un plan parallèle au plan des xy.

201. Une courbe, le long de laquelle $\frac{R}{T}$ est constant, est une hélice. — Pour démontrer ce théorème, remarquons que les formules

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R},$$
$$\frac{d\alpha''}{ds} = \frac{\alpha'}{T}, \qquad \frac{d\beta''}{ds} = \frac{\beta'}{T}, \qquad \frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}$$

donnent, par division, en supposant $\frac{R}{T} = \lambda$,

$$d\alpha'' = \lambda\, d\alpha, \qquad d\beta'' = \lambda\, d\beta, \qquad d\gamma'' = \lambda\, d\gamma.$$

Comme λ est supposé constant, on a, par l'intégration,

$$\alpha'' = \lambda\alpha - a, \qquad \beta'' = \lambda\beta - b, \qquad \gamma'' = \lambda\gamma - c,$$

où a, b, c sont des constantes d'intégration. Multipliant la première de ces équations par α, la deuxième par β, la troisième par γ et ajoutant, on a

$$(1) \qquad 0 = \lambda - (a\alpha + b\beta + c\gamma),$$

car

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Cette relation (1) montre que a, b, c ne peuvent pas être nuls en même temps, car elle donnerait $\lambda = 0$. Elle exprime que la tangente à la courbe fait un angle constant avec la direction

$$(\mathrm{D}) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

En effet, appelons θ l'angle de la tangente avec cette direction D, on a

$$\cos\theta = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

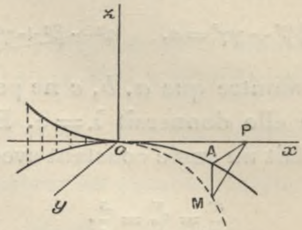
θ est donc constant. On en conclut que la courbe est une hélice tracée sur un cylindre, dont les génératrices sont parallèles à la direction (D). En effet, si, par les différents points de la courbe, on mène des parallèles à (D), l'on obtient un cylindre, dont la courbe coupe les génératrices sous un angle constant. En développant ce cylindre, on transforme la courbe en une droite.

202. **Une courbe, dans laquelle R et T sont constants, est une hélice tracée sur un cylindre de révolution.** — En effet, $\frac{R}{T}$ étant constant, la courbe est une hélice. Or nous avons vu (n° 196) que, dans une hélice tracée sur un cylindre quelconque, le rayon de courbure R, en un point quelconque, est en rapport constant avec le rayon de courbure ρ du point correspondant de la section droite du cylindre. Si donc R est constant, ρ l'est aussi et la section droite du cylindre est un cercle. Ce qui démontre le théorème.

VIII. — ÉTUDE D'UNE COURBE GAUCHE DANS LE VOISINAGE D'UN POINT NON SINGULIER.

203. **Développements des coordonnées en fonction de l'arc.** — Prenons comme origine un point O de la courbe, pour axe des x la tangente, pour axe des y la normale principale, pour axe des z la binormale. Soit M un point de la courbe voisin de O, s l'arc OM,

Fig. 106.



α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale et de la binormale en ce point, R et T les rayons de courbure et de torsion au même point. Au point O, s est nul, R et T prennent les valeurs R_0 et T_0, et les neuf cosinus prennent, à cause du choix des axes, les valeurs suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_0 = 1, & \beta_0 = 0. & \gamma_0 = 0, \\ \alpha'_0 = 0, & \beta'_0 = 1, & \gamma'_0 = 0, \\ \alpha''_0 = 0, & \beta''_0 = 0, & \gamma''_0 = 1. \end{cases}$$

Les coordonnées x, y, z du point M sont des fonctions de s

$$x = f(s), \qquad y = \varphi(s), \qquad z = \psi(s),$$

que nous développerons par la formule de Mac-Laurin en remarquant que $f(0)$, $\varphi(0)$, $\psi(0)$ sont nuls :

$$x = sf'(0) + \frac{s^2}{2} f''(0) + \frac{s^3}{6} f'''(0) + \ldots,$$

$$y = s\varphi'(0) + \frac{s^2}{2} \varphi''(0) + \frac{s^3}{6} \varphi'''(0) + \ldots,$$

$$z = s\psi'(0) + \frac{s^2}{2} \psi''(0) + \frac{s^3}{6} \psi'''(0) + \ldots.$$

Calculons les premiers coefficients de ces développements. On a d'abord, en écrivant que $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ sont égaux à α, β, γ,

$$f'(s) = \alpha, \qquad \varphi'(s) = \beta, \qquad \psi'(s) = \gamma;$$

dérivant encore par rapport à s, et remplaçant $\frac{d\alpha}{ds}$ par $\frac{\alpha'}{R}, \ldots$, on a

$$f''(s) = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \varphi''(s) = \frac{\beta'}{R}, \qquad \psi''(s) = \frac{\gamma'}{R};$$

dérivant encore une fois, en désignant par R' la dérivée de R par rapport à s et rappelant que $\frac{d\alpha'}{ds} = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\alpha''}{T}$, etc., il vient

$$f'''(s) = -\frac{\alpha'}{R^2}R' - \frac{\alpha}{R^2} - \frac{\alpha''}{RT},$$

$$\varphi'''(s) = -\frac{\beta'}{R^2}R' - \frac{\beta}{R^2} - \frac{\beta''}{RT},$$

$$\varphi'''(s) = -\frac{\gamma'}{R^2}R' - \frac{\gamma}{R^2} - \frac{\gamma''}{RT}.$$

Si l'on fait, dans ces formules, $s = 0$, les neuf cosinus se réduisent aux valeurs du Tableau (1) et l'on a

$$f'(0)=1,\qquad \varphi'(0)=0,\qquad \psi'(0)=0,$$
$$f''(0)=0,\qquad \varphi''(0)=\frac{1}{R_0},\qquad \psi''(0)=0,$$
$$f'''(0)=-\frac{1}{R_0^2},\qquad \varphi'''(0)=-\frac{R_0'}{R_0^2},\qquad \psi'''(0)=-\frac{1}{R_0T_0}.$$

Les développements x, y, z sont donc

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= s-\frac{s^3}{6R_0^2}+\ldots,\\ y &= \frac{s^2}{2R_0}-\frac{s^3}{6}\frac{R_0'}{R_0^2}+\ldots,\\ z &= -\frac{s^3}{6R_0T_0}+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Si l'arc, $s=\text{OM}$, est infiniment petit, x est, par rapport à s, du premier ordre, y du second, z du troisième; x a le signe de s, y a le signe $+$ et z celui de $-s^3$. La courbe a donc la disposition indiquée sur la figure 106, où l'on a ponctué la partie de courbe située au-dessous du plan des xy. Comme z change de signe avec s, on retrouve ce théorème que le *plan osculateur traverse la courbe.*

204. De tous les plans passant par O, le plan osculateur en O est celui qui se rapproche le plus de la courbe. — En effet, un plan passant par O a pour équation

$$AX+BY+CZ=0.$$

La distance du point $M(x, y, z)$ à ce plan est

$$\delta=\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

En remplaçant x, y, z par les développements (2), on voit que, si A n'est pas nul, δ est infiniment petit du premier ordre par rapport à s; si A est nul, sans que B le soit, le plan passe par la tangente et ne coïncide pas avec le plan osculateur, δ est du deuxième ordre; si A et B sont nuls, le plan coïncide avec le plan osculateur en O, δ est du troisième ordre. Le théorème est donc démontré.

205. Cercle osculateur ou cercle de courbure. — Soit M un point de la courbe (*fig.* 106), A sa projection sur le plan osculateur xOy, en O, P sa projection sur la tangente Ox. Nous allons d'abord démontrer, comme pour une courbe plane, que le rayon de courbure R_0, au point O, est donné par

$$R_0 = \lim \frac{\overline{OP}^2}{2MP},$$

quand M tend vers O. Pour cela, remarquons que, dans le triangle rectangle MAP, l'angle en P, que nous appellerons θ, mesure l'angle du plan OPM avec le plan xOy, osculateur en O. Quand M tend vers O, le plan OPM, passant par la tangente Ox et le point M infiniment voisin de O, tend vers le plan osculateur en O, xOy, et θ tend vers zéro.

Comme on a

$$AP = MP\cos\theta,$$

on voit que

$$\frac{\overline{OP}^2}{2MP} = \frac{\overline{OP}^2}{2AP}\cos\theta,$$

et, comme $\cos\theta$ tend vers 1,

$$\lim \frac{\overline{OP}^2}{2MP} = \lim \frac{\overline{OP}^2}{2AP} = \lim \frac{x^2}{2y},$$

car $OP = x$, $AP = y$. D'après les développements (2), on a

$$\frac{x^2}{2y} = \frac{s^2 - \dfrac{s^4}{3R_0^2} + \dots}{\dfrac{s^2}{R_0} - \dfrac{s^2}{3}\dfrac{R_0'}{R_0^2} + \dots};$$

en divisant le numérateur et le dénominateur par s^2 et faisant tendre ensuite s vers zéro, on trouve

$$\lim \frac{x^2}{2y} = R_0,$$

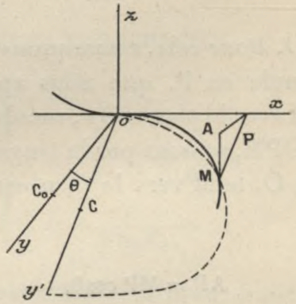
ce qui démontre la proposition que nous avions en vue.

Nous conclurons facilement de ce résultat le suivant, que nous avons déjà établi pour les courbes planes :

Le cercle de courbure, en un point O *d'une courbe, est la* *limite d'un cercle tangent en* O *à la courbe et passant par un point* M *infiniment voisin de* O.

En effet, soit Oy' l'intersection du plan OPM avec le plan des yz; le centre C du cercle tangent à Ox et passant par M

Fig. 107.



se trouve sur Oy'. Appelons R' le rayon de ce cercle et M' le deuxième point où PM rencontre ce cercle : on a

$$\overline{OP}^2 = PM \times PM';$$

mais PM' est égal à $2R' - PM$; donc

$$\overline{OP}^2 = PM(2R' - PM),$$

$$R' = \frac{PM}{2} + \frac{\overline{OP}^2}{2PM}.$$

Quand M tend vers O, le plan OPM tend vers le plan osculateur xOy au point O, Oy' tend vers Oy, le centre C tend vers un point C_0 de Oy et le rayon R' tend vers le rayon de courbure R_0, car, dans la formule donnant R', PM tend vers zéro, et $\frac{\overline{OP}^2}{2PM}$ tend vers R_0.

Le cercle considéré tend donc vers le cercle de courbure en O.

Remarque. — De même que dans les courbes planes, le cercle osculateur, en un point O, est la limite vers laquelle tend un cercle passant par le point O et par deux points de la courbe infiniment voisins de O. Nous nous bornerons à énoncer ce théorème.

IX. — DÉVELOPPEMENT D'UNE SURFACE DÉVELOPPABLE SUR UN PLAN.

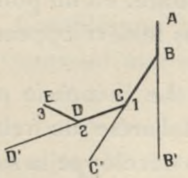
206. Figure schématique d'une courbe gauche. — On peut se représenter une courbe gauche comme un polygone gauche ABCDE... d'un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits. Les tangentes sont alors les prolongements des côtés BB′, CC′, ...; les plans osculateurs sont les plans de trois sommets consécutifs ABC, BCD, ...; les cercles de courbure, les cercles passant par trois sommets consécutifs ABC, BCD, ...

207. Une surface développable peut être exactement appliquée sur un plan. — C'est cette propriété qui est l'origine du nom de *surface développable :* l'opération qui consiste à appliquer la surface sur un plan s'appelle le *développement* de la surface.

Pour démontrer cette propriété, nous généraliserons le mode de raisonnement employé, dans les éléments, pour développer les cônes et les cylindres.

Considérons l'arête de rebroussement comme un polygone ABCDE... d'un nombre infiniment grand de côtés infiniment petits. Les tangentes successives à l'arête de rebroussement sont les prolongements des côtés du polygone; une première tangente est ABB′, une deuxième BCC′, une troisième CDD′, ... Les tangentes définissent une surface polyédrale dont les faces sont les angles B′BC′, C′CD′, D′DE′, ... que nous numérotons 1, 2, 3, ... (*fig.* 108). Cette surface polyédrale a pour limite la surface

Fig. 108.



développable quand le polygone ABCDE... devient une courbe. On peut développer, sur un plan, cette surface polyédrale de la façon suivante :

Faisons tourner le plan de la face 1 autour de BCC′, de façon à l'amener dans le prolongement de la face 2. Faisons ensuite tourner l'ensemble des faces 1 et 2 ainsi obtenu, autour de CDD', jusqu'à ce qu'il se place dans le prolongement de la face 3. Puis, faisons tourner l'ensemble des faces 1, 2 et 3 ainsi obtenu autour de DEE' jusqu'à ce qu'il se place dans le prolongement du plan de la face 4, et ainsi de suite. Nous arriverons finalement à mettre toutes les faces de la surface polyédrale dans un même plan, et nous aurons ainsi le *développement* de la surface sur un plan.

208. **Quand on applique sur un plan une surface développable, le rayon de courbure, en un point de l'arête de rebroussement, ne change pas.** — Pour démontrer ce théorème, remarquons que, dans l'opération que nous venons de faire pour développer la surface polyédrale, dont les faces sont 1, 2, 3, ..., les côtés et les angles du polygone ABCDE... restent les mêmes. Pour les côtés, la proposition est évidente. Pour les angles, quand on amène, par une rotation autour de BCC', la face 1 sur le prolongement de la face 2, l'angle ABC du polygone ne change pas, car le côté AB, tournant autour de BC, décrit un cône de révolution d'axe BC. De même, quand on amène les faces de l'ensemble 1 et 2, ainsi obtenu, à coïncider avec le prolongement de la face 3, par une rotation autour de CDD', l'angle BCD ne change pas, et ainsi de suite. Il résulte de là que les rayons des cercles, passant par trois sommets consécutifs du polygone, ABC, BCD, ... ne changent pas. Quand les côtés du polygone tendent vers zéro, le polygone devient une courbe et les cercles, passant par trois sommets consécutifs, deviennent les cercles de courbure aux différents points de la courbe. Comme ces cercles ne changent pas dans le développement, le rayon de courbure, en un point de l'arête de rebroussement, reste inaltéré dans le développement.

209. **Application.** — Le théorème précédent donne un moyen de voir ce que devient l'arête de rebroussement d'une surface développable, quand on développe la surface.

Pour cela, on prendra un point O' comme origine des arcs, $O'M = s$, sur l'arête de rebroussement, et l'on calculera l'expression du rayon de courbure R de l'arête, en un point quelconque M, en fonction de l'arc s :

$$R = \varphi(s).$$

Par le développement, l'arête de rebroussement devient une courbe plane $\omega\mu$, ω étant ce que devient le point O' et μ ce que devient le point M. La courbe plane $\omega\mu$ a même longueur d'arc que l'arête de rebroussement

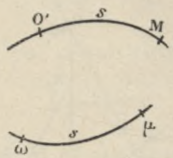
$$\text{arc}\,\omega\mu = s$$

et même rayon de courbure en μ :

$$R = \varphi(s).$$

Pour trouver la courbe $\omega\mu$, on est donc ramené à trouver une

Fig. 109.



courbe plane, connaissant le rayon de courbure en fonction de l'arc, problème que nous avons résolu au n° 167.

Par exemple, si l'arête de rebroussement est une hélice circulaire, R est constant (n° 195); donc, par le développement de la surface développable formée par ses tangentes, l'hélice circulaire se transforme en une *courbe plane ayant un rayon de courbure constant* R, c'est-à-dire en un cercle de rayon R.

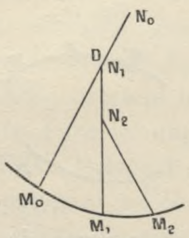
X. — DÉVELOPPÉES ET DÉVELOPPANTES.

210. **Développées.** — Considérons une courbe quelconque, plane ou gauche C, et menons-lui une suite de normales formant une surface développable, c'est-à-dire *admettant une enveloppe.* Cette enveloppe (arête de rebroussement de la surface développable formée par les normales considérées) s'appelle une *développée* de la courbe.

D'après cela, une courbe a une infinité de développées. En effet, prenons arbitrairement une normale M_0N_0 au point M_0. Au point voisin M_1, on peut mener une normale M_1N_1 rencontrant M_0N_0 en un point N_1; il suffit, pour cela, de joindre M_1 au point N_1, où le plan normal, en M_1, coupe M_0N_0. De même, au point M_2, voisin de M_1, on peut mener une normale M_2N_2 rencontrant M_1N_1 en un point N_2, ..., et ainsi de suite. On obtient, de cette façon, une surface polyédrale dont les arêtes, constituées par les prolongements des côtés du polygone $N_0N_1N_2N_3\ldots$, sont toutes *normales* à la courbe.

Si l'on suppose que les points $M_0, M_1, M_2, M_3, \ldots$ se rapprochent indéfiniment, cette surface polyédrale devient une surface développable dont toutes les génératrices sont normales à la courbe;

Fig. 110.

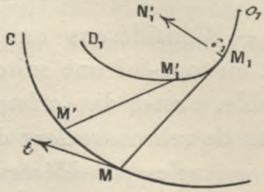


le polygone $N_0N_1N_2N_3\ldots$ devient l'arête de rebroussement de la surface développable, c'est-à-dire une développée de la courbe.

On a donc ainsi une développée tangente à une normale initiale M_0N_0 arbitrairement choisie.

211. Propriété fondamentale des développées. — Considérons une développée D_1 de la courbe C; soit MM_1 une normale à C,

Fig. 111.



en M, tangente à D_1, en M_1 (*fig.* 111). Désignons par l la longueur de cette normale

$$l = M_1M,$$

et par s_1 l'arc de développée O_1M_1, compté à partir d'une origine fixe O_1, de telle façon que la tangente M_1M soit menée dans le sens des arcs s_1 positifs. Soit M'_1M' une normale infiniment voisine à C tangente à D_1, en M'_1, $l + dl$ la longueur de M'_1M'.

D'après la formule générale donnant la différentielle de la longueur d'un segment de droite (n° 172), on a

$$dl = -\,MM' \cos \widehat{M'MM_1} - M_1M'_1 \cos \widehat{M'_1M_1M}.$$

Mais $\cos \widehat{M'MM_1} = 0$, car MM_1 est normale à MM'; $\cos \widehat{M'_1M_1M} = 1$, car M_1M est tangente à la développée D_1 ; enfin

$$M_1M'_1 = ds_1.$$

On a donc

$$dl = -\,ds_1.$$

Intégrant et désignant par c une constante

$$l + s_1 = c.$$

Donc la somme de M_1M *et de l'arc* O_1M_1 *est constante.* La développée étant supposée connue, on peut tracer mécaniquement la courbe C en prenant un fil inextensible de longueur c, attachant ce fil en O_1 et l'enroulant partiellement sur la développée de O_1 en M_1, en le maintenant tendu de M_1 en M. L'extrémité M du fil décrit la courbe C.

On pourra démontrer, comme exercice, que la normale principale $M_1N'_1$ à la développée au point M_1 est parallèle à la tangente Mt en M à la courbe.

212. **Courbes planes**. — Une courbe plane possède une développée située dans son plan; elle possède, en outre, une infinité de développées, dans l'espace, qui sont des hélices tracées sur le cylindre droit, ayant pour base la développée plane.

Développée plane. — Les normales à la courbe, situées dans le plan de la courbe, ont évidemment une enveloppe qui est la développée plane. *Le point de contact* M_1 *d'une de ces normales avec la développée est le centre de courbure* M_1 *de la courbe donnée, relativement au pied* M *de la normale.* En effet, ce point de contact M_1 est le point de rencontre de deux normales infiniment voisines, c'est donc (n° 159) le centre de courbure. Ainsi la développée plane d'une courbe plane est aussi le lieu des centres de courbure de la courbe. Le tracé de cette courbe donne donc la représentation graphique de la variation du rayon de courbure.

Exemples. — *Ellipse.* — Soit l'ellipse, rapportée à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Les coordonnées d'un point $M(x, y)$ de la courbe, en fonction d'un paramètre u, sont

$$x = a \cos u, \qquad y = b \sin u.$$

L'équation de la normale à l'ellipse, au point $M(x, y)$, est

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0$$

ou

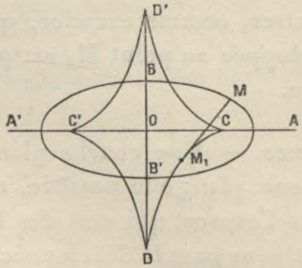
$$-(X - a\cos u)a \sin u + (Y - b \sin u)b \cos u = 0,$$

ou enfin, en remplaçant $a^2 - b^2$ par c^2 et divisant par $\cos u \sin u$,

$$\frac{aX}{\cos u} - \frac{bY}{\sin u} - c^2 = 0.$$

Pour obtenir le point de contact de cette droite avec son enve-

Fig. 112.



loppe, il faut associer à l'équation précédente sa dérivée par rapport au paramètre u :

$$\frac{aX \sin u}{\cos^2 u} + \frac{bY \cos u}{\sin^2 u} = 0.$$

En résolvant ces deux équations par rapport à X et Y, on a les coordonnées du point de contact M_1, c'est-à-dire du centre de courbure de l'ellipse, relatif au point M (*fig.* 112).

On trouve ainsi

$$(M_1) \qquad X = \frac{c^2}{a}\cos^3 u, \qquad Y = -\frac{c^2}{b}\sin^3 u.$$

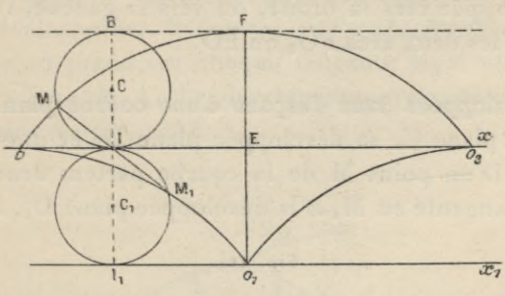
Quand u varie de o à $\frac{\pi}{2}$, le point M_1 décrit un arc de courbe, situé au-dessous de Ox, tangent à Ox au point $C\left(X = \frac{c^2}{a}, Y = 0\right)$, qui est le centre de courbure relatif au sommet A, et tangent à Oy au point $D\left(X = 0,\ Y = -\frac{c^2}{b}\right)$, qui est le centre de courbure relatif à B.

On achève ensuite la courbe par symétrie.

On pourrait décrire l'ellipse avec un fil; en prenant un fil attaché en D, enroulé sur l'arc DM_1C, puis tendu jusqu'à A extrémité du fil. Si l'on déroule ce fil, en le maintenant tendu, son extrémité décrit l'arc AMB; elle arrive en B quand le fil est entièrement déroulé.

Cycloïde. — La cycloïde est engendrée par un point M d'une circonférence, de rayon a, roulant sur un axe fixe Ox (*fig.* 113).

Fig. 113.



Supposons que le point qui décrit la courbe parte de O : alors, quand le cercle roulant est dans une position quelconque, on a, en appelant I le point de contact, OI = arc IM. Quand le cercle roulant a fait un demi-tour, le point M est au point le plus haut F de l'arc de courbe et le point de contact est en E à une distance $OE = \pi a$, égale à la demi-circonférence roulante.

Ceci posé, la normale en M est MI et le centre de courbure M_1 s'obtient en prenant $IM_1 = IM$ (n° 157). La développée est le lieu du point M_1.

Prolongeons FE d'une longueur $EO_1 = 2a = FE$ et menons par O_1 une parallèle O_1x_1 à Ox. Puis considérons le cercle symétrique du cercle roulant, par rapport à Ox; ce cercle touche O_1x_1 en un point I_1; il passe évidemment par M_1. Nous allons montrer que

$$\text{arc}\, I_1M_1 = O_1I_1.$$

En effet,

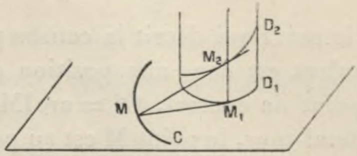
$$\text{arc}\, I_1M_1 = \pi a - \text{arc}\, IM_1 = OE - \text{arc}\, IM = OE - OI = EI = O_1I_1.$$

L'arc I_1M_1 étant égal à O_1I_1, on peut considérer le lieu du point M_1, comme décrit par un point d'une circonférence I_1M_1I, de rayon a, roulant sur O_1x_1. Quand la circonférence IMB roule sur Ox, la circonférence I_1M_1I roule sur O_1x_1 dans le même sens, et quand M arrive en F, M_1 arrive en O_1; le mouvement continuant, M va de F en O_2 et M_1 remonte de O_1 en O_2. La développée de la cycloïde OFO_2 est donc formée des deux moitiés d'une cycloïde égale à la proposée, l'arc OM_1O_1 étant égal à FO_2 et l'arc O_1O_2 à OMF; ces deux arcs sont d'ailleurs égaux entre eux.

En attachant en O_1 un fil O_1F de longueur O_1F et l'enroulant sur la développée vers la droite, ou vers la gauche, l'extrémité F du fil décrit les deux arcs FO_2 ou FO.

213. Développées dans l'espace d'une courbe plane. — Soient une courbe plane C, sa développée plane D_1 et une développée gauche D_2. D'un point M de la courbe partent deux normales, l'une MM_1 tangente en M_1 à la développée plane D_1, l'autre MM_2

Fig. 114.



tangente en M_2 à la développée D_2. Tout d'abord, la projection de D_2 sur le plan de la courbe coïncide avec D_1. En effet, la projection de la normale MM_2 se fait sur MM_1; si des droites sont tangentes à une courbe dans l'espace, il est évident que leurs projections sur un plan sont tangentes à la projection de la courbe; actuellement les droites MM_2 sont tangentes à D_2, leurs projections MM_1 sont donc tangentes à la projection de D_2. Ainsi D_1 est la projection de D_2; le point de contact M_1 est la projection du point de contact M_2. La développée gauche est donc tracée sur le cylindre droit, ayant pour base la développée plane D_1.

Quand le point M décrit la courbe plane donnée, le plan MM_1M_2, tangent au cylindre le long de M_1M_2, s'enroule sur le cylindre et les deux droites MM_1 et MM_2 s'enroulent sur les développées D_1 et D_2. La développée D_2 est donc une hélice tracée sur le cylindre droit de base D_1.

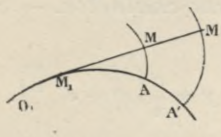
214. Développantes. — On appelle *développante* d'une courbe une autre courbe dont elle est la développée. Étant donnée une courbe C_1, pour construire une de ses développantes, il suffit de porter sur chaque tangente M_1M de la courbe une longueur l telle que

$$\text{arc}\, O_1M_1 + l = c,$$

c désignant une constante (n° 211).

En faisant varier la valeur de cette constante, on obtient une infinité de développantes. Si l'on choisit l'arc O_1A égal à c, on peut dire aussi qu'on prend sur chaque tangente M_1M une longueur M_1M égale à l'arc M_1A. La développante considérée coupe la courbe au point A (*fig.* 115).

Fig. 115.



Les diverses développantes d'une même courbe sont des courbes parallèles : en effet, si l'on considère une deuxième développante $A'M'$, les tangentes aux deux développantes, en M et M', sont perpendiculaires à M_1MM' et, par suite, parallèles. La longueur MM' est constante et égale à l'arc AA'.

La détermination analytique des développantes d'une courbe exige une intégration, car elle exige le calcul de la longueur s_1 de l'arc O_1M_1.

215. Exemples de développantes. — 1° *Développante de cercle.* — Considérons la développante qui part du point A, situé sur Ox; on l'obtient en portant, sur chaque tangente M_1M, une longueur M_1M, égale à l'arc AM_1. Soient u l'angle AOM_1, a le rayon du cercle, les coordonnées du point M_1 sont

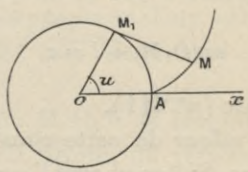
$$x_1 = a\cos u, \qquad y_1 = a\sin u.$$

L'arc AM_1 étant égal à au, on a $M_1M = au$. En projetant OM_1M sur les axes, on a les coordonnées x et y du point M

$$x = a\cos u + au\sin u,$$
$$y = a\sin u - au\cos u.$$

On peut, avec ces formules, construire la courbe. La tangente, en M, est parallèle au rayon OM_1.

Fig. 116.



La courbe AM, ainsi trouvée, a pour développée plane le cercle donné : elle a donc (n° 213) pour développées gauches des hélices tracées sur le cylindre droit ayant pour base le cercle.

2° *Développante d'une chaînette.* — Soit une chaînette ayant pour équation

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Nous allons déterminer la développante partant du sommet B de la courbe sur l'axe Oy (*voyez* la figure 43 du n° 65).

Soit M un point de la chaînette. On obtient le point correspondant de la développante en portant, sur la tangente, une longueur MC égale à l'arc BM. Or nous avons vu (n° 65) que le point C s'obtient en abaissant du pied P de l'ordonnée de M une perpendiculaire PC sur la tangente et que la longueur PC est égale à a. La tangente, en C, à la développante, étant perpendiculaire à CM, se confond avec CP. La développante, partant de B, est donc une courbe telle que la longueur de ses tangentes CP jusqu'à l'axe Ox soit *constante*. C'est la courbe aux tangentes égales étudiée au n° 147.

Les autres développantes de la chaînette sont des courbes parallèles à la courbe aux tangentes égales.

216. **Remarque sur le lieu des centres de courbure d'une courbe gauche.** — Nous avons vu plus haut que, dans une courbe plane, le lieu des centres de courbure est une développée de la courbe.

Mais il faut remarquer que, *pour une courbe gauche, le lieu des centres de courbure n'est jamais une développée de la courbe*. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette proposition. On pourra vérifier facilement que *les normales principales à une courbe gauche n'ont pas d'enveloppe*, ce qui démontre la proposition énoncée.

CHAPITRE XII.

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.
PLAN TANGENT A UNE SURFACE. — MAXIMA ET MINIMA.
ENVELOPPES. — COURBURE.

I. — SÉRIES DE MAC-LAURIN ET DE TAYLOR.

217. **Représentation géométrique d'une fonction de deux variables.** — Soit une fonction z des deux variables indépendantes x et y,

$$z = f(x, y).$$

Par rapport à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, cette équation représente une surface, qui figure géométriquement la variation de la fonction z.

218. **Développements en séries de puissances entières et positives des variables.** — Soit d'abord la fonction

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)},$$

à développer suivant les puissances entières et positives de x et y. Les identités

$$\frac{1-x^p}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1},$$

$$\frac{1-y^q}{1-y} = 1 + y + y^2 + \ldots + y^{q-1}$$

donnent, en multipliant membre à membre,

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} - \frac{x^p + y^q - x^p y^q}{(1-x)(1-y)}$$
$$= 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2 y + xy^2 + y^3 + \ldots + x^{p-1} y^{q-1}.$$

Si l'on fait croître p et q indéfiniment, en supposant x et y moindres que 1 en valeur absolue, x^p, y^q tendent vers zéro et l'on a le développement

$$\frac{1}{(1-x)(1-y)} = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + \ldots + x^m y^n + \ldots,$$

où les exposants m et n prennent toutes les valeurs positives entières. Ce développement est absolument convergent pour

$$-1 < x < 1, \qquad -1 < y < 1.$$

Cas général. — Prenons maintenant une série ordonnée par rapport aux puissances positives croissantes de deux variables x et y

$$(1) \quad a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \ldots + a_{m,n}x^m y^n + \ldots,$$

où m et n prennent toutes les valeurs entières et positives, les coefficients constants $a_{0,0}$, $a_{1,0}$, $a_{0,1}$, ..., $a_{m,n}$ se succédant suivant une loi déterminée.

On a alors le théorème suivant :

Une série de la forme (1) *est convergente pour des valeurs de x et y comprises dans des intervalles symétriques par rapport à zéro.*

On démontre ce théorème par un raisonnement qui est l'extension naturelle de celui qui a été employé au n° 83.

Supposons, en effet, que la série (1) soit convergente pour $x = \alpha$, $y = \beta$; nous allons démontrer qu'elle est convergente et même *absolument convergente* pour toutes les valeurs de x et y, telles que

$$\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1, \qquad \left|\frac{y}{\beta}\right| < 1,$$

$\left|\frac{x}{\alpha}\right|$ et $\left|\frac{y}{\beta}\right|$ désignant les valeurs absolues de $\frac{x}{\alpha}$ et $\frac{y}{\beta}$.

En effet, la série étant convergente pour $x = \alpha$, $y = \beta$, le terme général

$$a_{m,n}\alpha^m \beta^n$$

tend vers zéro, quand l'un des entiers m et n croît indéfiniment, ou quand ces deux entiers croissent indéfiniment suivant une loi quelconque,

$$\lim a_{m,n}\alpha^m\beta^n = 0.$$

On peut donc assigner des valeurs m' et n' assez grandes pour qu'on ait

$$|a_{m,n}\alpha^m\beta^n| < 1$$

pour toutes les valeurs de m et n telles que

$$m \geqq m', \qquad n \geqq n'.$$

Cela posé, écrivons la série (1) sous la forme suivante :

$$a_{0,0} + a_{1,0}\alpha\left(\frac{x}{\alpha}\right) + a_{0,1}\beta\left(\frac{y}{\beta}\right) + \ldots + a_{m,n}\alpha^m\beta^n\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m\left(\frac{y}{\beta}\right)^n + \ldots.$$

La série se compose d'abord d'un nombre limité de termes pour lesquels les exposants m et n sont moindres que m' et n' ; pour les autres termes, en nombre illimité,

$$m \geqq m', \qquad n \geqq n',$$

on a

$$|a_{m,n}\alpha^m\beta^n| < 1,$$

et, par suite, pour la valeur absolue du terme général,

$$\left|a_{m,n}\alpha^m\beta^n\left(\frac{x}{\alpha}\right)^m\left(\frac{y}{\beta}\right)^n\right| < \left|\frac{x}{\alpha}\right|^m\left|\frac{y}{\beta}\right|^n.$$

Or la série, dont le terme général est

$$\left|\frac{x}{\alpha}\right|^m\left|\frac{y}{\beta}\right|^n,$$

est convergente, d'après le cas particulier précédent, et a pour somme

$$\frac{1}{\left[1 - \left|\frac{x}{\alpha}\right|\right]\left[1 - \left|\frac{y}{\beta}\right|\right]},$$

dès que

$$\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1, \qquad \left|\frac{y}{\beta}\right| < 1.$$

La série proposée est donc absolument convergente, dès que x

et y possèdent des valeurs telles que

$$\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1, \qquad \left|\frac{y}{\beta}\right| < 1;$$

ce qui démontre le théorème.

219. Interprétation géométrique. — Si l'on appelle z la somme de la série

$$(2) \qquad z = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + \ldots + a_{m,n}x^m y^n + \ldots,$$

la fonction z définie par cette relation existe pour

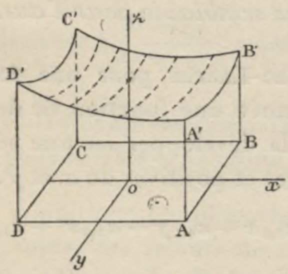
$$\left|\frac{x}{\alpha}\right| < 1, \qquad \left|\frac{y}{\beta}\right| < 1.$$

Si donc l'on considère dans le plan des xy les quatre droites

$$x = \pm\alpha, \qquad y = \pm\beta,$$

ces quatre droites forment un rectangle ABCD (*fig.* 117), et, pour

Fig. 117.



tout point P de coordonnées x et y situé dans ce rectangle, la valeur de z existe. On peut donc dire que l'équation (2) définit une portion de surface courbe A'B'C'D' se projetant horizontalement sur le rectangle ABCD.

On a ainsi l'extension aux fonctions de deux variables du théorème rencontré antérieurement pour les fonctions d'une variable (n° 83).

On peut appeler ABCD le *rectangle de convergence* de la série (1).

220. Différentiation et intégration des séries de puissances entières et positives de deux variables. — Une série telle que (1) définit, dans le rectangle de convergence, une fonction de x et y,

$$f(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + \ldots + a_{m,n}x^m y^n + \ldots.$$

On peut démontrer, comme pour le cas d'une variable, les deux théorèmes suivants que nous énonçons seulement :

1° *Si l'on prend les dérivées partielles de tous les termes de la série $f(x, y)$ par rapport à x ou à y, la nouvelle série obtenue converge dans le même rectangle que la première et a pour somme la dérivée partielle*

$$f'_x \quad \text{ou} \quad f'_y.$$

2° *Si l'on multiplie tous les termes de la série par dx et si l'on intègre, par rapport à x, de 0 à x, la nouvelle série obtenue est convergente dans le même rectangle que la proposée et a pour somme*

$$\int_0^x f(x,y)\,dx.$$

On a un théorème semblable pour l'autre variable y.

221. Série de Mac-Laurin pour une fonction de deux variables. — Étant donnée une fonction de deux variables $f(x, y)$, proposons-nous de la développer en une série procédant suivant les puissances entières et positives de x et y.

$$f(x,y) = a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + \ldots.$$

Le problème est de calculer les coefficients $a_{m,n}$ quand la fonction est donnée. Pour cela, prenons les dérivées successives des deux membres par rapport à x et y :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a_{1,0} + 2a_{2,0}x + a_{1,1}y + \ldots,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a_{0,1} + a_{1,1}x + 2a_{0,2}y + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a_{2,0} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = a_{1,1} + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2a_{0,2} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les termes non écrits contenant x ou y en facteur. Dans tous ces développements, faisons $x = 0$, $y = 0$; nous avons

$$a_{0,0} = f(0, 0), \qquad a_{1,0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \qquad a_{0,1} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0,$$

$$a_{2,0} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0, \qquad a_{1,1} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0, \qquad a_{0,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0.$$

On a ainsi le développement demandé

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(0,0) + x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \\ & + \frac{1}{1.2}\left[x^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 + 2xy\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + y^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0\right] + \ldots, \end{aligned}$$

où les indices o signifient que, après avoir pris les dérivées, il faut y remplacer x et y par o.

On a ainsi l'extension à deux variables de la série de Mac-Laurin.

Pour que ce développement soit applicable, il faut :

1° Que toutes les dérivées $\left(\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}\right)_0$ soient finies et déterminées;

2° Que la série soit convergente pour certaines valeurs de x et y;

3° Qu'elle ait alors pour somme la fonction donnée $f(x, y)$.

Si l'on suppose ces conditions remplies, la série représente la fonction $f(x, y)$ pour toutes les valeurs de x et y qui la rendent convergente, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x et y comprises, respectivement, dans des intervalles symétriques par rapport à zero.

Géométriquement, si l'on considère la surface

$$z = f(x, y),$$

la série

$$z = f(0, 0) + x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 + y\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 + \ldots$$

représente la portion de cette surface qui se projette sur le plan des xy dans un certain rectangle ABCD (*fig.* 117).

Autres notations. — Désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles de z par rapport à x et y (*voyez* n° 6).

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}.$$

Convenons en outre de désigner par z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 les valeurs de la fonction et de ses dérivées pour $x = 0$, $y = 0$. Nous pourrons alors écrire les premiers termes du développement de la façon suivante :

$$z = z_0 + p_0 x + q_0 y + \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \ldots.$$

222. Série de Taylor. — La série de Mac-Laurin permet de développer la fonction

$$(3) \qquad z = f(x, y),$$

pour les valeurs de x et y situées dans un rectangle ayant pour sommet l'origine, et, par suite, d'étudier la surface représentée par l'équation (3), dans le voisinage du point où elle coupe l'axe Oz.

Si l'on veut étudier la même fonction $f(x, y)$ dans le voisinage d'autres valeurs

$$x = a, \qquad y = b,$$

on ramène ce cas au précédent en posant

$$x = a + x', \qquad y = b + y',$$

et l'on étudie la fonction

$$f(a + x', b + y'),$$

pour des valeurs de x' et y' voisines de zéro. Si l'on développe cette fonction de x' et y' suivant les puissances positives et croissantes de x' et y', on doit, pour former les coefficients du développement, calculer les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x'}, \quad \frac{\partial f}{\partial y'}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x'\,\partial y'}, \quad \ldots$$

pour $x' = y' = 0$, c'est-à-dire les valeurs des dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}, \quad \cdots$$

pour $x = a$, $y = b$; nous désignerons ces valeurs par

$$\frac{\partial f}{\partial a}, \quad \frac{\partial f}{\partial b}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b}, \quad \cdots.$$

On a alors le développement

$$\begin{aligned} f(a+x', b+y') &= f(a,b) + x'\frac{\partial f}{\partial a} + y'\frac{\partial f}{\partial b} \\ &+ \frac{1}{2}\left(x'^2\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} + 2x'y'\frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial b} + y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}\right) + \ldots, \end{aligned}$$

ou encore, en appelant

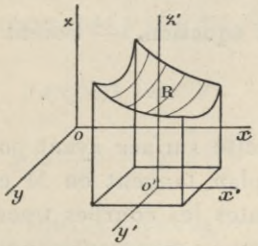
$$p, \quad q, \quad r, \quad s, \quad t$$

les valeurs des dérivées premières et deuxièmes de $f(x, y)$ pour $x = a$, $y = b$,

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} &f(a+x', b+y') = f(a,b) + px' + qy' \\ &\quad + \frac{1}{2}(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Ces développements sont convergents pour les valeurs de x' et y' comprises dans des intervalles symétriques par rapport à zéro.

Fig. 118.



Au point de vue géométrique, considérons, sur la surface, le point R dont la projection O′ sur le plan xOy a pour coordonnées a et b. Le changement de variables

$$x = a + x', \qquad y = b + y',$$

revient à transporter les axes de coordonnées, parallèlement à eux-mêmes, au point O′, en $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ (*fig.* 118).

Par rapport à ces nouveaux axes, la surface a pour équation

$$z = f(a + x', b + y').$$

Le développement en série (4) suivant les puissances de x' et y' est convergent dans un rectangle situé dans le plan des $x'y'$, ayant son centre en O′ et ses côtés parallèles aux axes; ce développement représente donc la portion de surface qui se projette horizontalement dans ce rectangle.

Autre notation. — Changeant, dans le développement (4), a et b en x et y, x' et y' en h et k, on a le développement

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) + \ldots,$$

ou encore

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + ph + qk$$
$$+ \frac{1}{2}(rh^2 + 2shk + tk^2) + \ldots,$$

développement convergent pour des valeurs de h et k suffisamment petites en valeur absolue.

II. — PLAN TANGENT A UNE SURFACE.

223. Définition et équation. — Soient une surface ayant pour équation

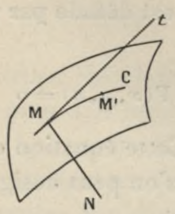
$$z = f(x,y),$$

et un point M de cette surface ayant pour coordonnées x, y, z. Par définition, le plan tangent en M est le lieu des tangentes menées, en M, à toutes les courbes tracées sur la surface par le point M. Imaginons une courbe quelconque MC tracée sur la surface et passant par M (*fig.* 119). Le long de cette courbe, les coordonnées d'un point sont des fonctions d'un paramètre u vérifiant identiquement la relation

$$z = f(x,y).$$

Quand on fait varier u infiniment peu, le point M subit, sur la courbe C, un déplacement infiniment petit MM′ ayant pour projections les différentielles dx, dy, dz des coordonnées regardées comme fonctions de u. Les équations de la tangente Mt à la

Fig. 119.



courbe C sont alors, en appelant X, Y, Z les coordonnées courantes,

$$(1) \qquad \frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}.$$

Comme les fonctions x, y, z de la variable u vérifient identiquement la relation

$$z = f(x, y),$$

on a, en appliquant la règle de différentiation des fonctions composées,

$$dz = f'_x\,dx + f'_y\,dy,$$

relation que nous écrirons

$$(2) \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

en désignant, pour abréger, par p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y :

$$p = f'_x, \qquad q = f'_y,$$

ou encore

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

En remplaçant dans l'équation homogène (2) dx, dy, dz par les quantités proportionnelles $X-x$, $Y-y$, $Z-z$ tirées des équations (1) de la tangente, on a l'équation du lieu des tangentes

$$(3) \qquad Z - z = p(X-x) + q(Y-y).$$

Telle est l'équation du plan tangent au point (x, y, z).

224. Normale. — La normale au point (x, y, z) à la surface, étant la perpendiculaire au plan tangent, a pour équations

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}. \tag{4}$$

225. Cas où la surface est définie par une équation non résolue. — Soit

$$F(x, y, z) = 0 \tag{5}$$

l'équation de la surface. Cette équation définit z comme une fonction implicite de x et y qu'on peut désigner par

$$z = f(x, y).$$

Pour calculer la dérivée partielle de z par rapport à x, $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, on prendra la dérivée du premier membre de (5) par rapport à x, en y regardant z comme fonction de x : on a ainsi

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

ou

$$F'_x + F'_z p = 0.$$

On a, de même, en différentiant par rapport à y,

$$F'_y + F'_z q = 0.$$

Ces relations donnent les valeurs de p et q : en les portant dans les équations du plan tangent et de la normale, on obtient les équations

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{(Plan tangent)} & (X-x) F'_x + (Y-y) F'_y + (Z-z) F'_z = 0; \\ \text{(Normale)} & \dfrac{X-x}{F'_x} = \dfrac{Y-y}{F'_y} = \dfrac{Z-z}{F'_z}. \end{array}\right. \tag{6}$$

Nous prendrons, ordinairement, les équations du plan tangent et de la normale sous les formes (3) et (4). Quand l'équation de la surface n'est pas résolue par rapport à z, on se rappellera que p et q sont définis par les relations

$$p = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad q = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

226. **Points singuliers.** — Il peut se faire qu'en un point (x, y, z) de la surface définie par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

les trois dérivées partielles

$$F'_x, \quad F'_y, \quad F'_z$$

soient nulles toutes les trois. Alors l'équation du plan tangent sous la forme (6) n'existe plus. Les valeurs de p et q apparaissent sous forme *indéterminée*. Les points spéciaux pour lesquels cette circonstance se présente s'appellent *points singuliers de la surface*. En un tel point, les tangentes aux diverses lignes tracées sur la surface ne forment plus un plan, mais un cône dont le degré peut être plus ou moins élevé. Par exemple, le sommet d'une surface conique est un point singulier de la surface : les tangentes aux diverses courbes tracées par ce point sur la surface conique forment évidemment un cône qui se confond ici avec la surface conique elle-même.

227. **Remarque.** — La tangente à une courbe en un point M est la limite d'une droite joignant le point M à un point M′ infiniment voisin. Il ne faudrait pas croire que le plan tangent à une surface en un point M est la limite d'un plan passant par M et par deux points infiniment voisins M′ et M″ pris sur la surface. Le plan MM′M″ tend vers des positions limites diverses qui dépendent de la façon dont les points M′ et M″ tendent vers M en se déplaçant sur la surface.

Par exemple, si les points M′ et M″ tendent vers M de façon que les droites MM′ et MM″ tendent vers deux tangentes *distinctes* à la surface, le plan MM′M″ tend vers le plan tangent, car sa position limite contient deux tangentes à la surface. Mais si les points M′ et M″ tendent vers M en suivant tous deux une même courbe tracée sur la surface par M, le plan MM′M″ tend vers le plan osculateur à cette courbe et non vers le plan tangent à la surface.

228. **Position d'une surface par rapport au plan tangent dans le voisinage du point de contact.** — Prenons, sur une surface

$$z = f(x, y),$$

un point déterminé A de coordonnées a, b, c

$$c=f(a,b),$$

ayant pour projection O′ sur le plan des xy; appelons p et q les valeurs des dérivées $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en ce point, r, s et t les valeurs des dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ au même point. Soient M un point de la surface, voisin du point A, P sa projection sur le plan des xy; pour étudier la surface dans le voisinage du point A, transportons l'origine au point O′, projection du point A sur le plan xOy, et prenons de nouveaux axes $O'x'y'z'$ parallèles aux anciens (*fig.* 120). Nous aurons

$$x=a+x', \qquad y=b+y',$$

et l'ordonnée z conservera la même valeur.

Les quantités x' et y' sont les coordonnées du point P par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$. La valeur de z en fonction de x et y devient

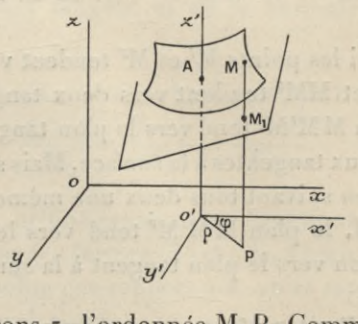
$$z=f(a+x', b+y'),$$

ou, en développant par la formule de Taylor,

$$(7) \qquad z=f(a,b)+px'+qy'+\frac{1}{2}(rx'^2+2sx'y'+ty'^2)+\ldots.$$

L'ordonnée MP rencontre le plan tangent en A en un point M_1

Fig. 120.



dont nous appellerons z_1 l'ordonnée M_1P. Comme le plan tangent en A a pour équation, par rapport aux anciens axes,

$$Z-c=p(X-a)+q(Y-b),$$

et que les coordonnées du point P sont

$$X = a + x', \qquad Y = b + y',$$

l'ordonnée z_1 du plan tangent est

$$z_1 = c + px' + qy'.$$

La quantité c étant égale à $f(a, b)$, on voit que l'ordonnée z_1 du plan tangent s'obtient en s'arrêtant aux termes du premier degré inclus, dans le développement de l'ordonnée z d'un point M de la surface suivant les puissances de x' et y'.

Pour voir comment la surface est placée par rapport au plan tangent, faisons la différence $z - z_1$ des ordonnées MP et M_1P. On a

$$(8) \qquad z - z_1 = \frac{1}{2}(rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2) + \ldots,$$

où les premiers termes non écrits sont du troisième degré en x' et y'.

A chaque position du point P voisine de O' dans le plan $x'O'y'$ correspond ainsi une valeur de la différence $z - z_1$. Si cette différence est *positive*, le point M de la surface est *au-dessus* du plan tangent en A; si elle est *négative*, il est *au-dessous;* si elle est *nulle*, le point M est *dans le plan tangent*, car il se confond alors avec M_1.

Intersection de la surface avec le plan tangent. — Pour obtenir la projection horizontale de l'intersection de la surface avec le plan tangent en A, il suffit de chercher le lieu des points $P(x', y')$ tels que la valeur correspondante de $z - z_1$ soit nulle :

$$z - z_1 = 0.$$

La projection de l'intersection sur le plan des $x'y'$ a donc pour équation

$$(9) \qquad 0 = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du troisième degré en x' et y'. Cette équation ayant, comme termes de moindre degré, des termes du second degré, représente une courbe *ayant un point double* *à l'origine* O'. Pour voir quelle est la nature de ce point double écrivons l'équation du faisceau des tangentes à l'origine

$$rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 = 0. \tag{9 bis}$$

Cette équation représente deux droites qui peuvent être *imaginaires*, ou *réelles et distinctes*, ou *réelles et confondues*. De là trois cas à distinguer :

Premier cas. — Soit d'abord $rt - s^2$ *positif*. — L'équation (9 *bis*) représente alors deux droites *imaginaires* : la courbe d'intersection de la surface avec le plan tangent en A présente donc en projection un point isolé en O'; elle a, dans l'espace, un point isolé en A. Dans ce cas, le plan tangent n'a donc, dans le voisinage immédiat du point A, d'autre point commun avec la surface que le point de contact A lui-même.

Si le point P(x', y') se déplace dans le voisinage immédiat du point O', par exemple en tournant autour du point O', la différence $z - z_1$ ne s'annule pas, puisque la projection de la courbe d'intersection n'a aucune branche réelle passant par le point O'; cette différence conserve donc un signe constant et la surface est, dans le voisinage immédiat du point A, *d'un même côté du plan tangent*.

Pour se rendre compte du signe constant de $z - z_1$, il suffit de remarquer que, x' et y' étant très petits, le signe de $z - z_1$ est le même que le signe du groupe des termes de moindre degré

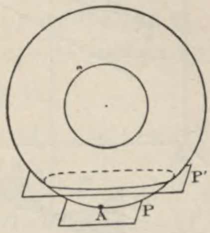
$$rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2;$$

ces termes forment un trinome en x', dont les racines sont imaginaires, car $rt - s^2 > 0$; ce trinome est constamment du signe de r et aussi du signe de t, car r et t ont nécessairement le même signe. Si donc $r > 0$, $z - z_1$ est *positif* au voisinage de O', et la surface est, aux environs du point A, *au-dessus* du plan tangent; si $r < 0$, $z - z_1$ est *négatif;* la surface est, aux environs du point A, *au-dessous* du plan tangent.

On dit, dans ce cas, que la surface possède, au point A, une *courbure totale positive*, ou encore qu'elle est *convexe* en ce point.

Exemples. — Par exemple, un ellipsoïde, un hyperboloïde à deux nappes, un paraboloïde elliptique sont des surfaces *convexes en chacun de leurs points*. Un tore est convexe en tous les points de la partie engendrée par la moitié de la circonférence génératrice (*fig.* 121) opposée à l'axe. Quand une surface est convexe, en un point A, si l'on mène un plan P′ parallèle au plan tangent en A à une distance très petite du plan tangent du côté où

Fig. 121.

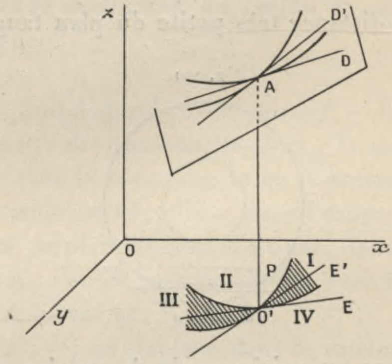


se trouve la surface au voisinage de A, ce plan coupe la surface suivant une petite courbe fermée. C'est ce qu'on voit sur la figure 121 qui représente un tore, le point A étant pris sur la partie convexe du tore. Un plan parallèle au plan tangent, très voisin de ce plan et placé de l'autre côté, ne coupe pas la surface au voisinage de A.

Deuxième cas. — Supposons $rt - s^2$ *négatif*. — Dans ce cas la projection horizontale (9), de la courbe d'intersection du plan tangent avec la surface, présente en O′ un point double où se croisent deux branches dont les tangentes O′E et O′E′ sont données par l'équation (9 *bis*) (voir *fig.* 122). Dans l'espace le plan tangent coupe la surface suivant une courbe ayant, au point de contact A, un point double où se croisent deux branches dont les tangentes AD et AD′ ont pour projections horizontales O′E et O′E′; ces deux tangentes AD et AD′ s'appellent les *directions asymptotiques* de la surface au point A.

En projection horizontale, les deux branches de la courbe d'intersection passant par O′ déterminent quatre angles curvilignes I, II, III, IV. Quand le point $P(x', y')$ se déplace au voisinage de O′, la différence $z - z_1$ garde un signe constant, tant qu'elle ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que le point P ne passe pas d'un de ces angles dans l'angle voisin, en traversant une des branches de la courbe. Cette différence change de signe au contraire chaque fois que le point P traverse une des branches. Supposons par exemple que, le point P se trouvant dans la région I, $z - z_1$ soit positive

Fig. 122.



(région hachurée); alors dans II, $z - z_1$ sera négative; dans III, elle sera positive (région hachurée); dans IV, négative. La partie de la surface qui se projette horizontalement en I et III est *au-dessus* du plan tangent; celle qui se projette en II et IV *au-dessous*. La surface traverse le plan aux points qui se projettent sur la courbe.

On dit, dans ce cas, que la surface possède en A une *courbure totale négative*.

Un plan parallèle au plan tangent, placé très près de ce plan, *d'un côté ou de l'autre*, coupe toujours la surface.

Exemples. — Par exemple, un hyperboloïde à une nappe, un

Fig. 123.

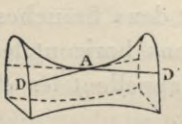
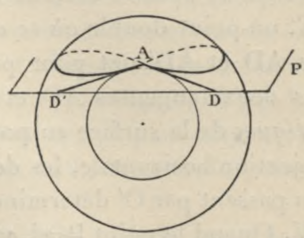


Fig. 124.



paraboloïde hyperbolique sont des surfaces dont la courbure totale est négative en chaque point. Le plan tangent à un paraboloïde hyperbolique en un point A le coupe suivant deux droites AD et AD′ (*fig.* 123).

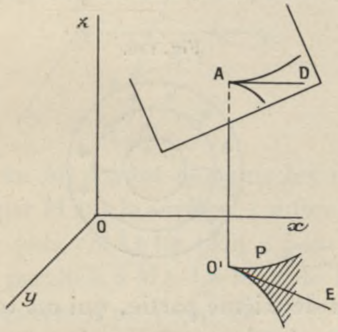
Un tore est à courbure totale négative, en tous les points de la partie de surface engendrée par la moitié de la circonférence génératrice (*fig.* 124) tournée vers l'axe. Le plan tangent P, en un de ces points A, coupe le tore suivant une courbe ayant un point double en A. Si l'on mène les tangentes AD et AD′ au point double A, on obtient les directions asymptotiques au point A.

Troisième cas. — Supposons enfin $rt - s^2$ *nul*. — Dans ce cas, le plan tangent en A coupe la surface suivant une courbe, dont la projection a pour équation

$$(9) \qquad 0 = rx'^2 + 2sx'y' + ty'^2 + \ldots.$$

Actuellement, cette courbe possède en O′ un point double *à tangentes confondues* en une seule O′E (*fig.* 125), car l'équa-

Fig. 125.



tion (9 *bis*) représente deux droites confondues. Le plan tangent en A coupe donc la surface suivant une courbe ayant en A un point de rebroussement de tangente AD, ou, plus généralement, un point singulier où deux branches de courbe sont tangentes entre elles et à la droite AD. Les deux directions asymptotiques, au point A, sont alors confondues avec cette droite AD.

Le signe de $z - z_1$ sera positif ou négatif suivant que le point $P(x', y')$ sera dans l'une ou l'autre des régions délimitées par la courbe (9), projection de l'intersection de la surface et du plan tangent.

On dit alors que la surface a une *courbure nulle* au point A.

Exemples. — Dans une surface conique ou cylindrique, la courbure totale est nulle en chaque point A; en effet, le plan tangent à une de ces surfaces en un point A, étant tangent tout le long de la génératrice AD du point A, coupe la surface suivant deux droites confondues avec AD. Cette droite est la direction asymptotique en A. Ainsi la quantité $rt - s^2$ est nulle en tous les points d'une surface conique ou cylindrique. Nous verrons plus tard que cette propriété est caractéristique des *surfaces développables*.

Dans un tore, le plan tangent perpendiculaire à l'axe touche la surface tout le long d'un cercle C. En un point A de ce cercle la courbure totale est nulle : le plan tangent en A coupe la surface suivant deux circonférences confondues avec C, c'est-à-dire deux courbes tangentes en A. La tangente AD à ce cercle C est la direction asymptotique en A. Le cercle C et son symétrique par rapport au plan de l'équateur du tore partagent la surface en deux parties. Sur la première partie qui est opposée à l'axe, la courbure totale est positive; cette partie est marquée (*fig.* 126) sur la figure

Fig. 126.

par des +. Sur la deuxième partie, qui est tournée vers l'axe, la courbure totale est négative; cette partie est marquée sur la figure par les signes —. Le cercle C est marqué par des o.

III. — APPLICATION. — PLAN TANGENT AUX SURFACES RÉGLÉES.

229. Formules générales. — Considérons une droite mobile ayant pour équations

$$(G) \qquad x = az + h, \qquad y = bz + k,$$

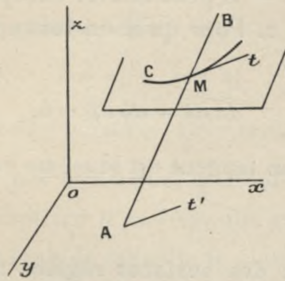
où les coefficients a, b, h, k sont des fonctions continues d'un paramètre u :

$$a = f(u), \qquad h = \varphi(u), \qquad b = f_1(u), \qquad k = \varphi_1(u).$$

Quand u varie, cette droite engendre une *surface réglée*. Les droites G sont les *génératrices* de la surface. Soit AB une position de la génératrice, nous nous proposons d'étudier les variations du plan tangent à la surface en un point M qui se déplace sur cette génératrice.

Considérons la section C de la surface par un plan P parallèle au plan des xy et menons la tangente Mt à cette section au point M où le plan P rencontre la génératrice AB (*fig.* 127).

Fig. 127.



Le plan tangent en M, devant contenir les tangentes à toutes les courbes passant par M sur la surface, contient les deux droites Mt et MA : c'est le plan tMA. Ce plan a pour trace sur le plan des xy la droite At' parallèle à Mt. Le long de la courbe C, z est constant : les coordonnées d'un point de cette courbe sont donc exprimées en fonctions de u par les formules

$$x = az + h, \qquad y = bz + k,$$

où z est constant; et le coefficient angulaire m de la tangente Mt à cette courbe est

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{z\,db + dk}{z\,da + dh}.$$

Cette même quantité m est le coefficient angulaire de la trace At' du plan tangent en M sur le plan des xy.

Quand le point M se déplace le long de la génératrice AB, u garde une valeur constante, ainsi que da, db, dh et dk, tandis que z varie de $-\infty$ à $+\infty$. On voit que m varie avec z toujours dans le même sens et prend une fois, et une seule fois, toutes les valeurs possibles de $-\infty$ à $+\infty$. Cela résulte de ce que

$$\frac{dm}{dz} = -\frac{da\,dk - db\,dh}{(z\,da + dh)^2}$$

conserve un signe constant quel que soit z.

Le plan tangent, quand le point M décrit la génératrice AB, d'un bout à l'autre, tourne donc toujours dans le même sens autour de AB et prend une fois, et une seule fois, toutes les positions possibles.

Cas exceptionnel. — Il peut arriver exceptionnellement que m soit indépendant de z. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on ait

$$da\,dk - db\,dh = 0. \tag{1}$$

Dans ce cas, le plan tangent est le même en tous les points de la génératrice AB.

230. Classification des surfaces réglées : surfaces gauches et surfaces développables. — Lorsque la condition (1) est remplie pour toutes les génératrices d'une surface réglée, c'est-à-dire est remplie quel que soit u, on dit, comme nous l'avons déjà indiqué (n° 184), que la surface est *développable;* les génératrices ont alors une enveloppe, appelée *arête de rebroussement.*

Si, au contraire, cette condition n'est pas remplie, quel que soit u, on dit que la surface réglée est *gauche;* les génératrices n'ont pas d'enveloppe.

D'après cela, une surface développable est caractérisée par ce fait que le plan tangent est le même tout le long de chaque génératrice, comme pour un cône ou un cylindre : nous avons vu que ce plan tangent coïncide avec le plan osculateur à l'arête de rebroussement (n° 186). Pour une surface gauche, au contraire, le plan tangent varie quand le point de contact se déplace le long d'une génératrice : il peut exister sur la surface gauche des génératrices particulières pour lesquelles la condition (1) est vérifiée, mais ce sont des génératrices exceptionnelles.

Par exemple, la droite

$$x = \frac{u^3}{3} z + u, \qquad y = \frac{u^4}{4} z + \frac{u^2}{2},$$

engendre, quand u varie, une surface développable, car on a

$$a = \frac{u^3}{3}, \qquad b = \frac{u^4}{4}, \qquad h = u, \qquad k = \frac{u^2}{2};$$

donc

$$da\, dk - db\, dh = 0$$

identiquement : la droite a une enveloppe.

Au contraire, la droite

$$x = u^2 z + u, \qquad y = uz + u,$$

engendre une surface gauche, car

$$a = u^2, \qquad b = u, \qquad h = u, \qquad k = u;$$

donc

$$da\, dk - db\, dh = (2u - 1)\, du^2,$$

expression qui n'est pas nulle quel que soit u : la droite n'a pas d'enveloppe. La génératrice $u = \frac{1}{2}$ est une génératrice exceptionnelle de la surface, le long de laquelle le plan tangent est le même. Parmi les surfaces du deuxième ordre, le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe sont des surfaces réglées gauches.

Remarque. — Les surfaces développables ont en tous leurs points leur *courbure totale nulle* ($rt - s^2 = 0$), car le plan tangent en chacun de leurs points coupe la surface suivant deux droites confondues avec la génératrice de contact, comme dans les cônes et les cylindres.

Les surfaces réglées gauches ont, au contraire, en chacun de leurs points leur courbure totale négative ($rt - s^2 < 0$), comme il arrive pour l'hyperboloïde à une nappe.

IV. — MAXIMUM OU MINIMUM D'UNE FONCTION DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

231. Recherche du maximum ou du minimum. — Soit

$$f(x, y)$$

une fonction des deux variables indépendantes x et y, on dit que cette fonction est *maximum* pour $x = a$, $y = b$, quand, *pour toutes les valeurs de x et de y voisines de a et b respectivement, on a*

$$f(x, y) < f(a, b).$$

De même la fonction est *minimum* pour $x = a$, $y = b$, quand, *pour toutes les valeurs de x et y voisines de a et b, on a*

$$f(x, y) > f(a, b).$$

Cherchons les conditions du *maximum*.

Pour donner à x et y des valeurs voisines de a et b, nous poserons

$$x = a + x', \qquad y = b + y',$$

où x' et y' sont assujettis *à rester voisins de zéro*. On doit avoir alors

$$f(a + x', b + y') - f(a, b) < 0$$

pour toutes les valeurs de x', y' voisines de zéro. Développons le premier membre par la formule de Taylor, en appelant p, q, r, s, t les valeurs que prennent, pour $x = a$, $y = b$, les dérivées partielles premières et deuxièmes de $f(x, y)$. Nous avons

$$(1) \qquad \begin{aligned} &f(a + x', b + y') - f(a, b) \\ &\quad = p x' + q y' + \frac{1}{2}(r x'^2 + 2 s x' y' + t y'^2) + \dots \end{aligned}$$

Pour qu'il y ait un maximum, quand $x = a$, $y = b$, il faut et il suffit que cette différence (1) soit négative pour toutes les valeurs de x' et y' voisines de zéro et qu'elle s'annule seulement pour $x' = 0$, $y' = 0$. Pour plus de symétrie, posons

$$x' = \rho \cos\varphi, \qquad y' = \rho \sin\varphi,$$

φ étant un angle quelconque et ρ une quantité positive ou négative assujettie à rester très petite en valeur absolue. La différence (1) prend alors la forme

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\rho(p \cos\varphi + q \sin\varphi) \\ &\quad + \frac{1}{2}\rho^2(r \cos^2\varphi + 2s \cos\varphi \sin\varphi + t \sin^2\varphi) + \rho^3(\dots). \end{aligned}$$

Pour qu'elle puisse conserver un signe constant pour toutes les valeurs de ρ voisines de zéro, et pour toutes les valeurs de φ, il faut que p et q *soient nuls*. Car, si p et q n'étaient pas nuls tous deux, $p\cos\varphi + q\sin\varphi$ ne serait pas nul, puisque φ est quelconque, et, pour de petites valeurs de ρ, le terme du premier degré en ρ donnerait son signe à l'expression (2); cette expression changerait donc de signe avec ρ.

Ainsi p et q doivent être nuls. Supposons cette condition remplie et admettons que r, s, t ne soient pas tous nuls, nous voyons qu'alors la différence (2) se met sous la forme

$$\frac{1}{2}\rho^2(r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi) + \rho^3(\ldots),$$

dans laquelle le terme en ρ^2 donne son signe pour les petites valeurs de ρ. Pour qu'il y ait maximum pour $x = a$, $y = b$, il faut que le trinome

$$r\cos^2\varphi + 2s\sin\varphi\cos\varphi + t\sin^2\varphi$$

soit *négatif* pour toutes les valeurs de φ qui ne l'annulent pas. Il faut donc, en général, que le trinome ait ses racines imaginaires ou égales et que son premier terme soit négatif.

Laissons de côté le cas des racines égales qui est un cas douteux. Alors il faut

$$rt - s^2 > 0,$$

avec

$$r < 0, \qquad \text{ou} \qquad t < 0:$$

ces deux dernières conditions s'entraînent évidemment l'une l'autre, car rt est positif. Les conditions ainsi trouvées

$$\text{(Max.)} \quad p = 0, \quad q = 0, \quad rt - s^2 > 0, \quad r < 0 \quad \text{ou} \quad t < 0,$$

comme nécessaires, sont évidemment suffisantes pour l'existence d'un maximum, car si elles sont remplies la différence

$$f(a + x', b + y') - f(a, b)$$

est négative pour toutes les valeurs de x' et y' voisines de zéro. On trouve de même que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un minimum sont

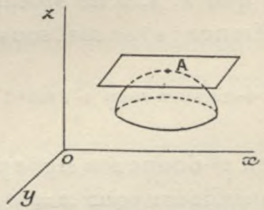
$$\text{(Min.)} \quad p = 0, \quad q = 0, \quad rt - s^2 > 0, \quad r > 0 \quad \text{ou} \quad t > 0.$$

232. Interprétation géométrique. — Considérons la surface

$$z = f(x, y),$$

où l'axe des z est supposé vertical. Chercher les maxima et minima de z revient à chercher sur la surface les points qui sont plus haut ou plus bas que tous les points infiniment voisins. Soit a, b un système de valeurs de x et y donnant un maximum. Le point A

Fig. 128.



correspondant de la surface est plus haut que les points infiniment voisins (*fig.* 128). Les conditions

$$p = 0, \qquad q = 0$$

expriment qu'en ce point A le plan tangent est horizontal, car ce plan, ayant en général pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

se réduit actuellement à

$$Z - z = 0.$$

La condition

$$rt - s^2 > 0$$

exprime que, au point A, la surface a une *courbure totale positive*, c'est-à-dire qu'elle est, au voisinage de A, d'un même côté du plan tangent. Enfin

$$r < 0$$

signifie qu'elle est, au voisinage de A, *au-dessous* du plan tangent en A : il y a alors un maximum en A. Toutes ces conditions sont évidentes *a priori* par la géométrie.

Si l'on avait, au contraire, $r > 0$, la surface au voisinage de A serait *au-dessus* du plan tangent : il y aurait un minimum en A.

233. **Exemple**. — Soit à chercher les maxima et minima de la fonction

$$z = xy(x + y - 1).$$

Calculons p, q, r, s, t :

$$p = y(x + y - 1) + xy, \qquad q = x(x + y - 1) + xy,$$
$$r = 2y, \qquad s = 2x + 2y - 1, \qquad t = 2x.$$

Commençons par chercher les valeurs de x et y qui annulent p et q : nous aurons à résoudre le système

$$y(x + y - 1) + xy = 0,$$
$$x(x + y - 1) + xy = 0,$$

qui donne, par soustraction,

$$(y - x)(x + y - 1) = 0.$$

Prenons d'abord $y - x = 0$; nous trouverons, en portant dans les deux équations,

(I) $$x = \frac{1}{3}, \qquad y = \frac{1}{3},$$
(II) $$x = 0, \qquad y = 0;$$

prenons ensuite $x + y - 1 = 0$, nous aurons de même

(III) $$x = 0, \qquad y = 1,$$
(IV) $$x = 1, \qquad y = 0.$$

On a ainsi quatre couples de valeurs de x et y, annulant p et q. Il faut maintenant voir, successivement, quel signe chacun de ces couples de valeurs fait prendre à $rt - s^2$. On a

$$rt - s^2 = 4xy - (2x + 2y - 1)^2.$$

Le couple (I), $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, donne

$$rt - s^2 = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3},$$
$$rt - s^2 > 0, \qquad r = \frac{2}{3}, \qquad r > 0;$$

à ce couple correspond un minimum de z

$$z = -\frac{1}{27}.$$

Les autres couples (II), (III), (IV) donnent tous

$$rt - s^2 < 0;$$

ils ne correspondent donc ni à un maximum ni à un minimum.

234. Remarque sur le cas $rt - s^2 = 0$. — Lorsque, pour $x = a$, $y = b$, on a

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad rt - s^2 = 0,$$

sans que r, s, t soient nuls tous trois, nous avons dit qu'il y a doute. Cela tient à ce que, dans l'expression de la différence

$$f(a + x', b + y') - f(a, b),$$

le trinome

$$r \cos^2\varphi + 2s \cos\varphi \sin\varphi + t \sin^2\varphi$$

est alors un *carré parfait*. Ce trinome conserve donc un signe constant, *excepté* pour la valeur φ_0 de φ qui l'annule. Si donc l'on attribue à φ cette valeur spéciale, le signe de la différence dépend des termes suivants du développement, termes qu'il faudra étudier dans chaque cas particulier.

Exemple I. — Prenons, par exemple, la fonction

$$f(x, y) = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^3.$$

Actuellement,

$$p = 2(x - y), \qquad q = -2(x - y) + 3(y - 1)^2.$$

Donc p et q s'annulent pour $x = 1$, $y = 1$; la valeur correspondante de la fonction est

$$f(1, 1) = 2.$$

De plus, en ce point $x = 1$, $y = 1$,

$$r = 2, \qquad s = -2, \qquad t = 2,$$
$$rt - s^2 = 0, \qquad r > 0.$$

Nous allons voir que la fonction n'est pas minimum. Pour l'étudier dans le voisinage des valeurs 1 et 1, employons la méthode générale; faisons

$$x = 1 + x', \qquad y = 1 + y',$$
$$x' = \rho \cos\varphi, \qquad y' = \rho \sin\varphi.$$

Nous avons

$$f(1+x', 1+y') - f(1, 1) = (x'-y')^2 + y'^3 = \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2 + \rho^3 \sin^3\varphi.$$

Tant que φ n'a pas une valeur particulière telle que

$$\cos\varphi - \sin\varphi = 0, \qquad \operatorname{tang}\varphi = 1,$$

la différence est *positive*, pour de petites valeurs de ρ, car le premier terme donne son signe. Mais, pour $\operatorname{tang}\varphi = 1$, la différence prend le signe du terme $\rho^3 \sin^3\varphi$: elle change de signe avec ρ et, par suite, ne conserve plus un signe constant.

Donc, dans le voisinage de $x = 1$, $y = 1$, la différence

$$f(1+x', 1+y') - f(1, 1)$$

ne conserve pas un *signe constant* quel que soit φ pour de petites valeurs de ρ : il n'y a ni maximum ni minimum en ce point.

Exemple II. — Prenons, comme deuxième exemple, la fonction

$$f(x, y) = 2 + (x-y)^2 + (y-1)^4.$$

Nous verrons, de même, qu'au point $x = 1$, $y = 1$, on a

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad rt - s^2 = 0,$$
$$r > 0.$$

Pour étudier la fonction au voisinage de ce point, faisons

$$x = 1 + \rho\cos\varphi, \qquad y = 1 + \rho\sin\varphi;$$

nous avons

$$f(1+x', 1+y') - f(1, 1) = \rho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^2 + \rho^4 \sin^4\varphi.$$

Pour de petites valeurs de ρ, cette différence a le signe du terme en ρ^2 tant que $\operatorname{tang}\varphi$ est différent de 1, c'est-à-dire le signe $+$.

Pour $\operatorname{tang}\varphi = 1$, elle a le signe du terme $\rho^4 \sin^4\varphi$, c'est-à-dire $+$ encore. Donc cette différence est constamment positive : la fonction est minimum pour $x = 1$, $y = 1$.

V. — ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE SURFACES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE.

235. Équation de l'enveloppe; caractéristiques; arête de rebroussement. — Soit

$$\text{(S)} \qquad F(x, y, z, \lambda) = 0$$

l'équation d'une surface S contenant un paramètre variable λ. On peut se proposer de chercher une surface E à laquelle chacune des surfaces S soit tangente tout le long d'une courbe C.

Cette surface E, quand elle existe, est l'*enveloppe* des surfaces S; les surfaces S sont les *enveloppées* et la courbe C, suivant laquelle chaque surface S touche l'enveloppe E, est la *caractéristique* de la surface S.

On démontre, par une méthode analogue à celle que nous avons suivie au n° **149** pour l'enveloppe d'une famille de courbes dans un plan, les théorèmes suivants :

Si les surfaces S *ont une enveloppe* E, *la courbe caractéristique, suivant laquelle chaque surface* S *touche l'enveloppe, est définie par les deux équations*

$$(C) \qquad F(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad F'_\lambda = 0.$$

L'enveloppe est le lieu géométrique de ces courbes C : *on obtient son équation en éliminant* λ *entre les deux équations* (C).

Dans tous les cas, l'équation résultant de cette élimination représente, ou l'enveloppe des surfaces S, *ou le lieu de leurs points singuliers.*

La caractéristique C, *suivant laquelle une surface* S *touche l'enveloppe, est la limite de la courbe d'intersection de la surface* S, *avec la surface infiniment voisine* S_1 *obtenue en faisant varier infiniment peu le paramètre* λ.

Nous nous contenterons d'énoncer ces théorèmes; mais il est important de faire la remarque suivante :

Quand le paramètre λ *varie, les courbes caractéristiques* C *ont une enveloppe* A : *cette enveloppe s'appelle l'arête de rebroussement de la surface enveloppe.*

Les caractéristiques sont des courbes de l'espace définies par les deux équations simultanées :

$$F(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad F'_\lambda = 0.$$

Pour montrer qu'elles ont une enveloppe, il faut montrer que le système de quatre équations obtenu en associant aux deux précédentes les équations dérivées par rapport à λ :

$$F'_\lambda = 0, \qquad F''_\lambda = 0,$$

se réduit à *trois*.

Or cela est évident, car ces équations se réduisent aux trois suivantes :

$$\text{(A)} \qquad F(x, y, z, \lambda) = 0, \qquad F'_\lambda = 0, \qquad F''_\lambda = 0.$$

Ces équations déterminent x, y, z en fonction de λ. Lorsque λ varie, le point ainsi déterminé décrit l'enveloppe des caractéristiques, c'est-à-dire l'arête de rebroussement A de la surface enveloppe. Il peut arriver que les valeurs de x, y, z tirées des équations (A) soient *imaginaires* : l'arête de rebroussement n'existe pas dans ce cas.

236. Exemple. — *Enveloppe d'un plan mobile à un paramètre : surfaces développables.* — Soit

$$\text{(1)} \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

l'équation d'un plan mobile, dont les coefficients A, B, C, D sont fonctions d'un paramètre λ. Cherchons l'enveloppe de ce plan.

D'abord, pour avoir la caractéristique suivant laquelle le plan touche son enveloppe, il faut joindre, à l'équation du plan, l'équation dérivée par rapport à λ :

$$\text{(2)} \qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

A', B', C', D' désignant les dérivées des coefficients par rapport à λ.

La caractéristique est donc une *droite*. L'enveloppe est le lieu de ces caractéristiques ; c'est donc une surface réglée. Cette surface est développable, car le plan mobile touchant son enveloppe tout le long de la caractéristique, le plan tangent à la surface réglée est le même tout le long de la génératrice. Enfin les caractéristiques (génératrices rectilignes de la surface) ont une enveloppe A, dont les points sont définis par les trois équations

$$\text{(A)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} A\,x + B\,y + C\,z + D\, = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0, \end{array} \right.$$

où les dérivées secondes des coefficients par rapport à λ sont désignées par deux accents. Ces équations déterminent x, y, z en fonction de λ, et, quand λ varie, le point ainsi défini décrit l'enveloppe des génératrices de la surface développable, c'est-à-dire l'arête de rebroussement de la surface.

Nous avons vu que le plan tangent à une surface développable est le plan osculateur à l'arête de rebroussement de la surface; actuellement, le plan donné

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

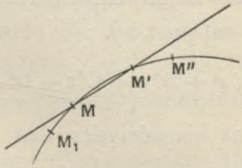
est donc le plan osculateur à l'arête de rebroussement définie par les trois relations (A).

En résumé, on voit qu'un plan mobile, à un paramètre, enveloppe une surface développable, et que ce plan est osculateur à l'arête de rebroussement de la surface.

Réciproquement, toute surface développable peut être considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile à un paramètre : en effet, elle est l'enveloppe de son plan tangent, c'est-à-dire du plan osculateur à son arête de rebroussement.

On peut également présenter ce résultat en disant que l'enveloppe du plan osculateur d'une courbe gauche est la surface

Fig. 129.



développable engendrée par les tangentes à cette courbe : la caractéristique du plan osculateur à une courbe (intersection d'un plan osculateur avec un plan osculateur infiniment voisin) est donc la tangente à la courbe. On se rappellera ce fait par le procédé mnémonique suivant : le plan osculateur en M à une courbe gauche est le plan du point M et de deux points infiniment voisins M_1 et M'; le plan osculateur en M' est le plan du point M' et de deux points infiniment voisins M et M''. L'intersection de ces deux plans est la corde MM' joignant deux points infiniment voisins, c'est-à-dire la tangente à la courbe en M.

237. Exemple de l'enveloppe d'un plan à un paramètre. — Soit à trouver l'enveloppe du plan

$$\lambda x - y - \frac{\lambda^2}{2} z + \frac{\lambda^3}{6} = 0. \tag{3}$$

La caractéristique s'obtient en associant à cette équation l'équation dérivée

$$x - \lambda z + \frac{\lambda^2}{2} = 0. \tag{4}$$

Pour avoir l'enveloppe, il faudrait éliminer λ entre ces équations (3) et (4). On aurait ainsi une surface développable.

L'arête de rebroussement A de la surface s'obtient en associant aux équations (3) et (4) la nouvelle équation dérivée

$$-z + \lambda = 0. \tag{5}$$

Les trois équations (3), (4) et (5) donnent les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement ; en les résolvant, on a

$$x = \frac{\lambda^2}{2}, \qquad y = \frac{\lambda^3}{6}, \qquad z = \lambda. \tag{A}$$

Le plan mobile est alors le plan osculateur à cette courbe : c'est ce qu'on vérifiera en se reportant au calcul du n° **182**.

La caractéristique définie par les équations (3) et (4) est la tangente à la courbe A.

238. Autre exemple. — *Enveloppe d'une sphère de rayon constant dont le centre décrit une courbe donnée.* — Soient a, b, c les coordonnées du centre M de la sphère : ce point décrivant une courbe donnée Γ, ses coordonnées sont fonctions d'un paramètre u :

$$a = f(u), \qquad b = \varphi(u), \qquad c = \psi(u). \tag{Γ}$$

L'équation de la sphère mobile est donc

$$[x - f(u)]^2 + [y - \varphi(u)]^2 + [z - \psi(u)]^2 - R^2 = 0. \tag{S}$$

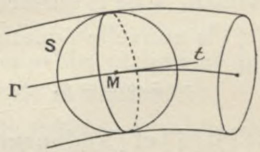
Pour avoir la courbe caractéristique suivant laquelle cette sphère touche son enveloppe, il faut associer à cette équation l'équation dérivée par rapport au paramètre u

$$(6)\quad [x-f(u)]f'(u)+[y-\varphi(u)]\varphi'(u)+[z-\psi(u)]\psi'(u)=0.$$

Si l'on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, cette équation représente un plan passant par le point M (a, b, c) de la courbe Γ et perpendiculaire à la tangente Mt à cette courbe, car les cosinus directeurs de cette tangente sont proportionnels à $f'(u)$, $\varphi'(u)$, $\psi'(u)$ (*fig.* 130).

La caractéristique de la sphère S est donc à l'intersection de cette sphère avec le plan normal à la courbe Γ, au point M, centre

Fig. 130.



de la sphère : on peut dire que cette caractéristique est le cercle obtenu en portant sur les normales à la courbe Γ, au point M, des longueurs constantes égales à R. L'enveloppe est le lieu de ces caractéristiques, c'est-à-dire le lieu obtenu en portant sur toutes les normales à la courbe Γ' des longueurs constantes égales à R : ces normales sont aussi les normales à la surface enveloppe.

La surface enveloppe ainsi obtenue est une *surface canal*. Par exemple, si la ligne Γ est une ligne droite, la surface canal devient un cylindre de révolution autour de cette droite : les caractéristiques sont les parallèles du cylindre.

Dans le cas général, les caractéristiques ont une enveloppe *arête de rebroussement* de la surface canal, mais cette enveloppe peut être imaginaire, quand R est suffisamment petit.

VI. — ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE SURFACES A DEUX PARAMÈTRES.

239. Équation de l'enveloppe. — Soit

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

l'équation d'une surface mobile S, contenant deux paramètres variables λ et μ. On peut chercher à déterminer une surface E à laquelle toutes les surfaces S sont tangentes. Nous nous bornerons à énoncer les résultats suivants, analogues à ceux qu'on a démontrés pour l'enveloppe des courbes. *Si la surface enveloppe existe, on obtient son équation en éliminant λ et μ entre les trois équations*

$$(1) \qquad F(x, y, z, \lambda, \mu) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0.$$

Chacune des surfaces S *touche, actuellement, son enveloppe en des points isolés définis par l'ensemble des équations* (1).

Il peut se faire que l'élimination de λ et μ entre les trois équations (1) *donne soit une enveloppe, soit un lieu de points singuliers des surfaces mobiles.*

Exemple I. — Cherchons l'enveloppe du plan

$$\lambda x + \mu y + z + \lambda\mu = 0.$$

Le point de contact du plan avec l'enveloppe s'obtient en associant à cette équation les deux équations dérivées par rapport à λ et μ :

$$x + \mu = 0, \qquad y + \lambda = 0.$$

L'enveloppe s'obtient en éliminant λ et μ entre les trois équations, ce qui donne le paraboloïde

$$z - xy = 0.$$

Exemple II. — *Enveloppe d'une sphère de rayon constant* S, *dont le centre décrit une surface fixe donnée.* — Soient a, b, c les coordonnées du centre de la sphère,

$$(\Sigma) \qquad c = f(a, b)$$

l'équation de la surface Σ que décrit ce point. L'équation de la sphère mobile est

$$(S) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 + [z - f(a, b)]^2 - R^2 = 0,$$

avec deux paramètres a et b. Pour avoir les points de contact de la sphère S avec son enveloppe, il faut associer à l'équation (S) les deux équations dérivées par rapport à a et à b.

Ces deux équations s'écrivent comme il suit, en désignant par p et q les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial a}$ et $\frac{\partial f}{\partial b}$:

$$(2)\quad x-a+p[z-f(a,b)]=0, \qquad y-b+q[z-f(a,b)]=0.$$

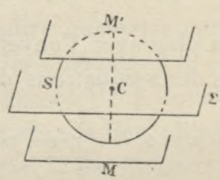
Voici comment on peut interpréter géométriquement ces équations : si l'on regarde x, y, z comme des coordonnées courantes, ces deux équations représentent la normale à la surface Σ, au point C (a, b, c). En effet, les équations de la normale à cette surface sont

$$\frac{x-a}{p}=\frac{y-b}{q}=\frac{z-c}{-1};$$

en y remplaçant c par $f(a, b)$ et chassant les dénominateurs, on obtient les deux équations (2).

Ainsi, la sphère touche son enveloppe en deux points M et M′,

Fig. 131.



situés à l'intersection de la sphère avec le diamètre normal à la surface Σ (*fig.* 131).

On peut dire aussi qu'on obtient l'enveloppe, en portant sur les normales aux divers points C de la surface Σ des longueurs CM = CM′ = R. La surface enveloppe, lieu des points M et M′, s'appelle *surface parallèle* à Σ : cette dénomination tient à ce que, les plans tangents en M et M′ à la surface enveloppe, étant tangents à la sphère, sont parallèles au plan tangent en C à Σ, parce que ces trois plans sont perpendiculaires au diamètre MCM′.

VII. — COURBURE DES COURBES TRACÉES PAR UN POINT DONNÉ SUR UNE SURFACE.

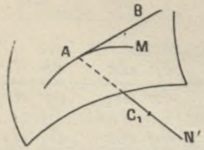
240. Formules générales. — Soit une surface ayant pour équation

$$z=f(x,y).$$

Désignons par p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de z par rapport à x et y.

Prenons sur cette surface un point A et considérons une courbe AM tracée par ce point sur la surface. Appelons s_1 l'arc de cette

Fig. 132.



courbe compté à partir d'un point déterminé de la courbe; α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente AB; α', β', γ' ceux de la normale principale AN′ à cette courbe ; enfin R_1 le rayon de courbure de cette courbe en A. Le centre de courbure en A est alors un point C_1 de AN′ tel que

$$AC_1 = R_1.$$

Le long de cette courbe on peut regarder les coordonnées d'un point x, y, z comme fonctions de s_1, et l'on a, d'après les formules de Frenet,

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds_1} = \alpha, & \dfrac{dy}{ds_1} = \beta, & \dfrac{dz}{ds_1} = \gamma, \\[2ex] \dfrac{d\alpha}{ds_1} = \dfrac{\alpha'}{R_1}, & \dfrac{d\beta}{ds_1} = \dfrac{\beta'}{R_1}, & \dfrac{d\gamma}{ds_1} = \dfrac{\gamma'}{R_1}. \end{cases}$$

Mais, comme la courbe est sur la surface donnée, ces fonctions x, y, z de s_1 vérifient identiquement l'équation

$$z = f(x, y).$$

Différentions les deux membres par rapport à s_1, nous aurons

$$\frac{dz}{ds_1} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds_1} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds_1}$$

ou

$$(2) \qquad \gamma = p\alpha + q\beta.$$

Cette relation a d'ailleurs une signification géométrique évidente; elle exprime que la tangente AB est située dans le plan tangent en A à la surface.

Dans cette équation (2), γ, α, β sont fonctions de s_1 le long de la courbe. D'ailleurs p et q sont des fonctions de x et y qui dépendent également de s_1 le long de la courbe. On a donc, en dérivant par rapport à s_1,

$$(3)\qquad \frac{d\gamma}{ds_1} = p\frac{d\alpha}{ds_1} + q\frac{d\beta}{ds_1} + \alpha\frac{dp}{ds_1} + \beta\frac{dq}{ds_1}.$$

Or

$$\frac{dp}{ds_1} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{ds_1} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{ds_1},$$

$$\frac{dq}{ds_1} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dx}{ds_1} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{ds_1},$$

ou encore, d'après les notations adoptées pour les dérivées partielles,

$$\frac{dp}{ds_1} = r\alpha + s\beta, \qquad \frac{dq}{ds_1} = s\alpha + t\beta.$$

Portant ces expressions dans la formule (3), et tenant compte des formules de Frenet (1), on a

$$\frac{\gamma'}{R_1} = p\frac{\alpha'}{R_1} + q\frac{\beta'}{R_1} + r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2,$$

et, en résolvant par rapport à R_1,

$$(4)\qquad R_1 = \frac{\gamma' - p\alpha' - q\beta'}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}.$$

Dans cette formule, les valeurs numériques de p, q, r, s, t dépendent seulement des coordonnées x et y, c'est-à-dire du choix du point A sur la surface, et non de la courbe particulière AM tracée par ce point sur la surface. Les quantités α, β, γ sont connues quand on connaît la tangente à la courbe et α', β', γ', quand on connaît sa normale principale.

241. Théorème I. — *Si, par un point d'une surface, on trace une courbe quelconque, le rayon de courbure de cette courbe, en ce point, est égal à celui de la section plane de la surface par le plan osculateur à la courbe.*

En effet, d'après la formule (4), une fois le point A choisi, R_1 ne dépend que de α, β, γ, α', β', γ' : R_1 est donc le même pour toutes les courbes passant par A, pour lesquelles ces six quantités sont les mêmes. En particulier, si l'on considère la section de la surface par le plan osculateur en A à la courbe AM, cette section plane est une courbe tracée sur la surface, ayant en A même tangente et même normale principale que la courbe AM. Elle a donc même rayon de courbure R_1.

Ce théorème ramène l'étude des rayons de courbure en A des courbes passant par A, sur la surface, à l'étude des rayons de courbure des sections planes.

Nous allons établir maintenant un deuxième théorème, appelé *Théorème de Meusnier*, qui ramène l'étude des rayons de courbure en A des sections planes passant par A, à l'étude des rayons de courbure des sections normales.

242. Théorème II. — Considérons une tangente AB à une surface en A, et une section de la surface par un plan BAN′ passant par cette tangente (*fig.* 133) : soit AN′ la normale principale à cette section, c'est-à-dire la normale située dans le plan de la section; désignons par C_1 le centre de courbure de cette section. D'autre part, menons en A la normale AN à la surface et considérons le plan BAN; ce plan, passant par la normale à la surface, détermine dans la surface une section plane qu'on appelle une *section normale*. Soit C le centre de courbure de la section normale, point qui est situé sur la normale à la surface. On a alors le théorème :

Théorème de Meusnier. — *Le centre de courbure* C_1 *d'une section oblique est la projection, sur le plan de cette section, du centre de courbure* C *de la section normale correspondante.*

Pour démontrer ce théorème, reprenons les équations de la normale en A

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-z}{-1}.$$

Choisissons arbitrairement, sur cette normale, un sens positif. Pour fixer les idées, nous prendrons comme sens positif la demi-droite AN ayant pour cosinus directeurs

$$\lambda=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \mu=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \nu=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

le radical étant pris positivement. Appelons θ l'angle de la direction AN, ainsi définie, avec la normale principale AN′ à la section oblique. L'angle θ est aussi l'angle dièdre des deux plans BAN et BAN′ de la section droite et de la section oblique. Il est donné par la formule

$$\cos\theta = \lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma';$$

ou bien

$$\cos\theta = \frac{-p\alpha' - q\beta' + \gamma'}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

En remplaçant, dans la formule (4), $\gamma' - p\alpha' - q\beta'$ par sa valeur tirée de la relation ci-dessus, on a

$$(5) \qquad R_1 = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}\cos\theta.$$

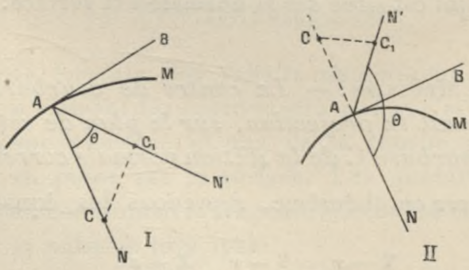
L'angle θ peut être aigu ou obtus, le dénominateur

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$$

peut être positif ou négatif, mais, comme R_1 est positif, $\cos\theta$ a le même signe que $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$.

1° Supposons $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 > 0$, alors θ (*fig.* 133, I) est aigu. Quand on fait diminuer θ, c'est-à-dire quand on fait tourner

Fig. 133.



le plan sécant autour de la tangente AB, de façon à le rapprocher de la section normale, R_1 augmente, et, pour $\theta = 0$, le rayon de courbure prend la valeur

$$(6) \qquad R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}.$$

Le centre de courbure de la section normale s'obtient en portant sur AN une longueur $AC = R$. La comparaison des formules (5) et (6) donne

$$R_1 = R\cos\theta.$$

Cette relation démontre le théorème, car elle montre que AC_1 est la projection de AC sur AN'.

2° Supposons $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 < 0$. Alors $\cos\theta$ est négatif, θ est obtus (*fig.* 133, II).

Si l'on fait tourner le plan de la section oblique BAN' autour de BA, en faisant croître θ, on voit que, pour $\theta = \pi$, le plan de la section oblique coïncide avec celui de la section normale, et la normale principale AN' de la section oblique vient coïncider avec le prolongement de AN au delà du point A. Le rayon R_1 donné par la formule (5) tend alors vers

$$R = -\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2},$$

et le centre de courbure C_1 de la section oblique tend vers un point C situé sur le prolongement de AN, à une distance $AC = R$. Dans cette hypothèse, la formule (5) donne

$$R_1 = -R\cos\theta$$

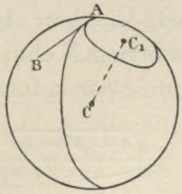
ou

$$R_1 = R\cos(\pi - \theta),$$

relation qui démontre le théorème de Meusnier dans ce cas, puisque, dans le triangle CAC_1, l'angle $CAC_1 = \pi - \theta$.

La droite AC_1 est donc la projection de AC sur AN'.

Fig. 134.



En résumé, dans tous les cas, on obtient C_1 en projetant C sur le plan de la section oblique.

C'est là l'extension, à une surface quelconque, d'un théorème évident pour la sphère. Soit AB une tangente à la sphère en A :

une section oblique, passant par AB, coupe la sphère suivant un petit cercle de centre C_1 ; la section normale, passant par la même tangente, est un grand cercle de centre C; il est évident que le centre de courbure C_1 du petit cercle est la projection de C sur le plan de la section oblique (*fig.* 134).

243. Convention pour le signe des rayons de courbure des sections normales. — D'après le théorème précédent, il suffit de connaître les centres de courbure des sections normales en A pour connaître les centres de courbure des sections obliques.

Nous sommes donc ramenés à étudier la position des centres de courbure des diverses sections normales en A, c'est-à-dire des sections obtenues en faisant tourner le plan BAN autour de la normale AN.

Nous avons vu que le centre de courbure d'une section normale peut se trouver, soit sur la partie positive AN de la normale à la surface, soit sur le prolongement de AN (*fig.* 133, I et II). Dans le premier cas, le rayon de courbure de la section normale est

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2};$$

dans le deuxième,

$$R = -\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}.$$

Pour avoir une formule unique dans les deux cas, nous conviendrons de donner un signe au rayon de courbure d'une section normale, en regardant le rayon de courbure comme positif, quand le centre de courbure correspondant C est sur la partie positive AN de la normale, et comme négatif, dans le cas contraire. Avec cette convention, R désignera la valeur algébrique du segment AC estimé positivement dans le sens AN choisi sur la normale, et cette valeur algébrique R est donnée par la formule unique

$$R = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}. \tag{7}$$

Dans cette formule, le numérateur est positif; le dénominateur dépend de α, β; il varie quand le plan de la section normale tourne autour de AN, car α, β, γ sont les cosinus directeurs de AB. Le signe de R dépend donc uniquement du signe du dénominateur.

Si $rt - s^2$ est positif (surface à courbure totale positive en A), le dénominateur de R a un signe constant, quels que soient α et β; toutes les sections normales ont leurs centres de courbure d'un même côté de A. Ce fait peut être prévu, car, dans ce cas, la surface est tout entière d'un même côté du plan tangent en A, et toutes les sections normales tournent leur concavité dans le même sens.

Si $rt - s^2 < 0$ (surface à courbure totale négative en A), le trinome du dénominateur est tantôt positif, tantôt négatif; certaines sections normales ont leurs centres de courbure d'un côté de A, d'autres de l'autre côté. Il existe alors deux sections normales particulières, pour lesquelles R est *infini :* ce sont les sections normales, passant par les deux directions asymptotiques AD et AD', précédemment définies comme les tangentes en A à la courbe d'intersection de la surface par le plan tangent (voyez *fig.* 122).

En effet, pour que R soit infini, il faut et il suffit que les cosinus directeurs de la tangente AB vérifient la relation

$$r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 = 0.$$

Or $\frac{\beta}{\alpha}$ est le coefficient angulaire de la projection de la tangente AB sur le plan xOy. Si donc on appelle φ l'angle de cette projection avec Ox,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tang}\varphi,$$

on a, pour déterminer φ, l'équation

$$t \operatorname{tang}^2\varphi + 2s \operatorname{tang}\varphi + r = 0;$$

cette équation est précisément celle qui détermine les projections des directions asymptotiques, au point A (n° 228).

Si $rt - s^2 = 0$ (surface à courbure totale nulle en A), R est toujours de même signe, car le trinome $r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2$ est un carré parfait. Mais R devient infini, pour une direction particulière de la tangente AB, qui est la direction asymptotique unique AD, existant actuellement en A.

244. Variation du rayon de courbure d'une section normale, en un point d'une surface. Indicatrice. Directions principales. — Il nous reste à étudier la variation des rayons de courbure des sections normales, en un point A. Nous allons montrer que, pour connaître les rayons de courbure de toutes les sections normales en un point, il suffit de connaître les rayons de courbure de deux sections déterminées, rectangulaires, appelées *sections principales*.

Pour simplifier cette étude, prenons le point A comme origine, comme plan des xy le plan tangent en A, comme axe des z la normale en A. On a alors, en appelant p_0, q_0, r_0, s_0, t_0 les valeurs des dérivées p, q, r, s, t à l'origine,

$$p_0 = 0. \qquad q_0 = 0,$$

car le plan tangent, en A, coïncide avec xOy. L'équation de la surface étant

$$z = f(x, y),$$

si l'on développe z par la formule de Mac-Laurin, le développement commence par les termes du deuxième ordre, car la fonction z et ses deux dérivées premières p et q sont nulles à l'origine. On obtient donc le développement

$$z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \ldots.$$

Comme nous le savons, le plan tangent, en A, coupe la surface suivant une courbe ayant, en A, un point double à tangentes réelles ou imaginaires, suivant la nature de la surface. C'est ce que nous pouvons vérifier. En coupant la surface par le plan $z = 0$, on a la courbe

$$0 = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \ldots.$$

Les termes de moindre degré dans cette équation étant du deuxième degré, l'origine A est un point double de l'intersection, et les tangentes, en ce point, ont pour équation

$$r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 = 0.$$

Elles sont imaginaires, réelles ou confondues, suivant que $r_0 t_0 - s_0^2$ est positif, négatif ou nul, c'est-à-dire suivant qu'au point A. la courbure totale est positive, négative ou nulle. Ces deux tangentes AD et AD' donnent ce que nous avons appelé les *directions asymptotiques*, au point A.

Rayon de courbure d'une section normale. — Considérons la section normale, faite par un plan zAB déterminé par la normale Az et une droite AB, située dans le plan tangent xAy. Si l'on appelle φ l'angle de cette droite avec Ax, les cosinus directeurs α, β, γ de AB sont

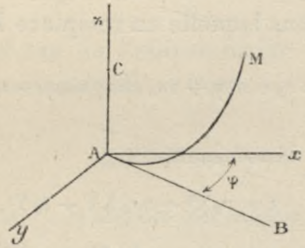
$$(8) \qquad \alpha = \cos\varphi, \qquad \beta = \sin\varphi, \qquad \gamma = 0.$$

La valeur algébrique R du rayon de courbure, comptée positivement dans le sens Az, est donnée par la formule (7), où l'on fait $p = q = 0$, où l'on remplace r, s, t par r_0, s_0, t_0 et α, β, γ par leurs valeurs (8). On a ainsi

$$(9) \qquad \frac{1}{R} = r_0 \cos^2\varphi + 2 s_0 \cos\varphi \sin\varphi + t_0 \sin^2\varphi.$$

Si C est le centre de courbure de la section normale considérée, R est le z du point C, de sorte que C est au-dessus du plan des xy

Fig. 135.



quand $R > 0$, au-dessous quand $R < 0$. En faisant varier φ, on peut étudier, d'une manière simple, la variation de R.

Nous examinerons successivement trois cas, suivant que $r_0 t_0 - s_0^2$ est positif, négatif ou nul.

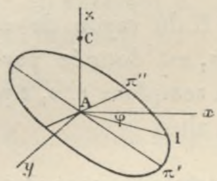
Premier cas : $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$. — Dans ce cas, $\frac{1}{R}$ conserve un signe constant, quel que soit φ.

Supposons $r_0 > 0$, alors $\frac{1}{R}$ est positif, tous les centres de courbure C des sections normales sont au-dessus de A : ce qu'on pouvait prévoir, car, dans ce cas, la surface étant, aux environs de A, au-dessus du plan tangent xAy, toutes les sections normales tournent leur concavité vers les z positifs. Pour représenter géométriquement la variation du rayon de courbure R, nous porterons (*fig.* 136), sur la trace AB de la section normale, une longueur

$$\rho = AI = \sqrt{R};$$

cette longueur est réelle, quel que soit φ, car R est toujours posi-

Fig. 136.



tif. Le lieu du point I, quand φ varie, est une ellipse de centre A. En effet, les coordonnées du point I sont

$$X = \rho \cos\varphi, \qquad Y = \rho \sin\varphi,$$

et l'équation (9), dans laquelle on remplace R par ρ^2, donne

$$\frac{1}{\rho^2} = r_0 \cos^2\varphi + 2 s_0 \cos\varphi \sin\varphi + t_0 \sin^2\varphi,$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$1 = r_0 X^2 + 2 s_0 XY + t_0 Y^2,$$

équation d'une ellipse de centre A. Cette ellipse étant tracée, pour avoir le rayon de courbure d'une section normale zAB, il suffit de prendre l'intersection de AB avec l'ellipse en I, le rayon de courbure demandé est $\overline{AI}^2$. Cette ellipse s'appelle l'*indicatrice* relative au point A. Les deux directions d'axes $A\pi'$ et $A\pi''$ de cette ellipse s'appellent les *directions principales au point* A.

Comme, dans une ellipse, les diamètres maximum ou minimum sont le grand et le petit axe, les sections, ayant pour traces les directions principales, sont celles qui ont le plus grand et le plus petit rayon de courbure. Les rayons de courbure maximum et minimum, R′ et R″, correspondant aux directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$, s'appellent les *rayons de courbure principaux au point* A.

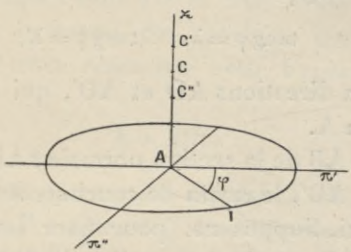
Les centres de courbure C′ et C″ des sections principales $zA\pi'$

et $z\text{A}\pi''$ s'appelent les *centres de courbure principaux relatifs au point* A.

Nous pouvons encore simplifier les équations, en prenant pour axes Ax et Ay les axes de l'indicatrice Aπ' et Aπ''. Alors l'équation de l'indicatrice ne contient plus de rectangle XY et s_0 devient nul. On a donc, avec ce choix d'axes (*fig.* 137),

$$\frac{1}{\text{R}} = r_0 \cos^2\varphi + t_0 \sin^2\varphi, \qquad \text{R} = \overline{\text{AI}}^2.$$

Fig. 137.



Supposons le grand axe de l'ellipse dirigé suivant Ax : pour $\varphi = 0$, R atteint son maximum R$'$ et l'on a

$$\frac{1}{\text{R}'} = r_0.$$

De même, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, R atteint son minimum R$''$ et l'on a

$$\frac{1}{\text{R}''} = t_0.$$

La formule donnant R s'écrit alors

$$\frac{1}{\text{R}} = \frac{1}{\text{R}'} \cos^2\varphi + \frac{1}{\text{R}''} \sin^2\varphi.$$

Quand le plan de la section normale zAI tourne de $z\text{A}\pi$ vers $z\text{A}\pi''$, le centre de la courbure de la section part de C$'$, descend d'une manière continue, pour arriver en C$''$, quand AB coïncide avec Aπ''. Ce plan continuant à tourner, R repasse par les mêmes valeurs dans l'ordre inverse.

Il peut arriver, en particulier, que les deux rayons de courbure principaux en un point A soient égaux : R$'$ = R$''$. L'indicatrice en ce point est alors un *cercle*. Toutes les sections normales en un pareil point ont même rayon de courbure. On appelle un point de cette nature un *ombilic* de la surface.

Deuxième cas : $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$. — Reprenons la valeur de $\frac{1}{R}$,

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\varphi + 2 s_0 \cos\varphi \sin\varphi + t_0 \sin^2\varphi. \tag{9}$$

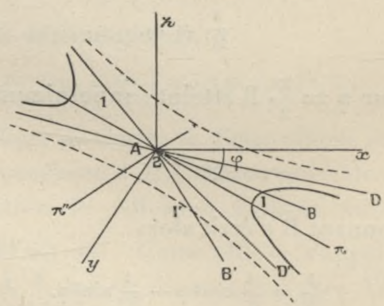
Dans le cas actuel, la surface est à courbure totale négative au point A : le trinome, qui donne l'expression de $\frac{1}{R}$, s'annule pour deux valeurs de $\tan\varphi$,

$$\tan\varphi = \lambda, \qquad \tan\varphi = \lambda',$$

déterminant deux directions AD et AD′, qui sont les directions asymptotiques en A.

Quand la trace AB de la section normale zAB passe par une des positions AD ou AD′, le rayon de courbure R change de signe en passant par l'infini. Supposons, pour fixer les idées, que R soit positif, lorsque AB est situé dans l'angle DAD′, appelé 1 sur la figure 138, et négatif dans l'angle adjacent appelé 2. Les sections

Fig. 138.



normales, dont la trace AB est dans l'angle 1, ont leur centre de courbure sur Az; celles dont la trace est dans l'angle 2 ont leur centre de courbure au-dessous de A. Cela tient à ce que la portion de surface, voisine de A, qui se projette sur l'angle 1 et son opposé au sommet, est au-dessus du plan des xy; celle qui se projette sur les angles 2, au-dessous. La surface traverse le plan suivant une courbe tangente, en A, aux droites AD et AD′.

Supposons d'abord la trace AB dans l'angle 1, alors R est positif. Pour étudier la variation de R, nous prendrons encore, sur AB, une longueur

$$\rho = \mathrm{AI} = \sqrt{\mathrm{R}}.$$

Le lieu du point I, quand AB varie de AD à AD′, est une hyperbole ayant pour asymptotes AD et AD′. En effet, l'équation du lieu du point I est, comme dans le cas précédent,

$$(\mathrm{I}) \qquad 1 = r_0 \mathrm{X}^2 + 2 s_0 \mathrm{XY} + t_0 \mathrm{Y}^2;$$

équation d'une hyperbole ($r_0 t_0 - s_0^2 < 0$) de centre A, dont les directions asymptotiques sont AD et AD′. Cette hyperbole étant tracée, pour avoir le rayon de courbure d'une section normale zAB, dont la trace rencontre cette hyperbole en I, il suffit de prendre

$$\mathrm{R} = \overline{\mathrm{AI}}^2.$$

Prenons maintenant une section normale zAB′, dont la trace est dans l'angle 2. Alors R est *négatif*. Pour étudier la variation de R, nous prendrons, sur AB′, un point I′ situé à une distance de A, telle que

$$\rho' = \mathrm{AI}' = \sqrt{-\mathrm{R}}.$$

Cette longueur est réelle, car R est négatif; le point I′, ayant pour coordonnées polaires ρ' et φ, a pour coordonnées cartésiennes

$$\mathrm{X}' = \rho' \cos\varphi, \qquad \mathrm{Y}' = \rho' \sin\varphi.$$

L'équation (9), dans laquelle on remplace R par $-\rho'^2$, donne, pour le lieu du point I′,

$$-\frac{1}{\rho'^2} = r_0 \cos^2\varphi + 2 s_0 \cos\varphi \sin\varphi + t_0 \sin^2\varphi,$$

ou, en passant aux coordonnées cartésiennes,

$$(\mathrm{I}') \qquad -1 = r_0 \mathrm{X}'^2 + 2 s_0 \mathrm{X}'\mathrm{Y}' + t_0 \mathrm{Y}'^2.$$

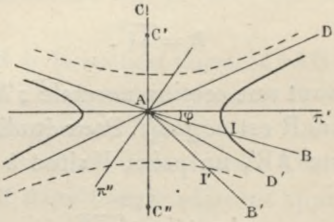
C'est là l'équation d'une nouvelle hyperbole conjuguée de la précédente (I), tracée en pointillé sur la figure 138. Cette hyperbole étant tracée, pour avoir le rayon de courbure d'une section normale zAB′, dont la trace rencontre cette hyperbole en I′, il suffit de prendre

$$\mathrm{R} = -\overline{\mathrm{AI}'}^2.$$

Ainsi, le rayon de courbure d'une section normale quelconque est déterminé en grandeur et en signe, dès qu'on a tracé ces deux hyperboles conjuguées, asymptotes aux directions asymptotiques AD et AD′. L'ensemble de ces deux hyperboles s'appelle encore l'*indicatrice* relative au point A. Les directions des axes des deux hyperboles, $A\pi'$ et $A\pi''$ sont les *directions principales* en A, les rayons de courbure correspondants R′ et R″ (l'un positif, l'autre négatif) sont les *rayons de courbure principaux;* les centres de courbure correspondants C′ et C″ (l'un au-dessus, l'autre au-dessous de A) sont les centres de courbure principaux.

Si nous prenons comme axes de coordonnées (*fig.* 139) les axes

Fig. 139.



de l'indicatrice, $A\pi'$ et $A\pi''$, la quantité s_0 s'annule et la formule, donnant R, devient

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\varphi + t_0 \sin^2\varphi.$$

Dans la figure, nous supposons $r_0 > 0$; alors t_0 est négatif. Pour $\varphi = 0$, le rayon R a un minimum R′ donné par

$$\frac{1}{R'} = r_0;$$

le centre de courbure correspondant est en C′. Quand φ augmente à partir de zéro, le rayon $R = \overline{AI}^2$ augmente, le centre de courbure C de la section zAB va en montant sur Az. Quand la trace AB du plan de la section normale coïncide avec la direction asymptotique AD′, R devient infini, C s'éloigne indéfiniment sur Az.

Si le plan zAB continue à tourner dans le même sens, sa trace AB′ rencontre ensuite l'hyperbole conjuguée I′ et l'on a

$$R = -\overline{AI'}^2.$$

Le rayon R est d'abord négatif et très grand, puis il diminue en valeur absolue et, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, il prend la valeur négative donnée par la formule

$$\frac{1}{R''} = t_0;$$

le centre de courbure de la section zAB, d'abord à l'infini au-dessous de A, monte jusqu'à la position C'', correspondant à la section $z\mathrm{A}\pi''$. La valeur de R'' est donc un maximum relatif pour R. Si le plan normal continue à tourner, R repasse par les mêmes valeurs dans l'ordre inverse.

La formule donnant R s'écrit encore

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'}\cos^2\varphi + \frac{1}{R''}\sin^2\varphi.$$

Il peut arriver, en particulier, que $R'' = -R'$; alors l'indicatrice est formée de deux hyperboles équilatères conjuguées.

Troisième cas : $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$. — Dans ce cas, la courbure totale est nulle en A. Les deux directions asymptotiques, définies par l'équation

$$r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2 = 0,$$

se confondent en une seule AD. Si nous nous reportons à l'expression de $\frac{1}{R}$

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\varphi + 2 s_0 \cos\varphi \sin\varphi + t_0 \sin^2\varphi,$$

nous voyons que le trinome du deuxième membre est un *carré parfait* qui conserve un signe constant quand φ varie. Ce trinome s'annule pour une seule valeur de $\operatorname{tang}\varphi$, correspondant précisément à la direction asymptotique unique AD.

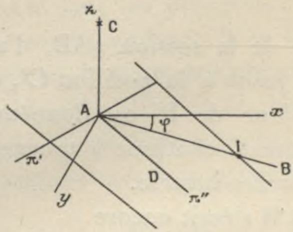
Supposons, pour fixer les idées, $r_0 > 0$. Alors $\frac{1}{R}$ est toujours positif; toutes les sections normales zAB ont leur centre de courbure au-dessus du plan tangent $x\mathrm{A}y$. Pour étudier la variation de R, portons, sur la trace AB du plan de la section normale, une longueur

$$\rho = \mathrm{AI} = \sqrt{R},$$

et cherchons le lieu du point I. On trouve, comme plus haut, que ce lieu a pour équation

$$(1) \qquad 1 = r_0 X^2 + 2 s_0 XY + t_0 Y^2.$$

Fig. 140.



Ce lieu est encore une conique ayant son centre en A; mais, comme cette conique est du genre parabole,

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0,$$

elle se compose de deux droites parallèles. C'est ce qu'il est aisé de vérifier en multipliant l'équation par r_0 et remplaçant $r_0 t_0$ par s_0^2; l'équation devient

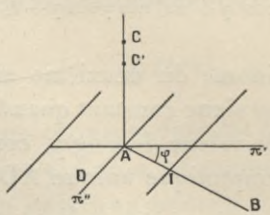
$$r_0 = (r_0 X + s_0 Y)^2,$$

d'où

$$r_0 X + s_0 Y = \pm \sqrt{r_0},$$

équation de deux droites parallèles. Ces deux droites sont, d'ail-

Fig. 141.



leurs, parallèles à la direction asymptotique unique AD qui existe dans ce cas. On appelle ce système de deux droites l'*indicatrice* relative au point A. Cette indicatrice étant tracée, le rayon de courbure de la section normale zAB s'obtient en prenant

$$R = \overline{AI}^2,$$

I désignant le point de rencontre de l'indicatrice avec AB. L'indicatrice a encore deux axes de symétrie, l'un $A\pi'$ perpendiculaire aux deux droites, l'autre $A\pi''$ parallèle aux deux droites et, par suite, confondu avec AD. Ce sont les directions principales : les rayons de courbure et les centres de courbure correspondants sont les rayons de courbure et les centres de courbure principaux.

Prenons les directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$ pour axes (*fig.* 141). Alors $s_0 = 0$, et comme

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0,$$

le produit $r_0 t_0$ est nul.

Supposons $r_0 > 0$, alors $t_0 = 0$. On a donc

$$\frac{1}{R} = r_0 \cos^2\varphi, \qquad R = \overline{AI}^2.$$

Pour $\varphi = 0$, R passe par un minimum R' donné par

$$\frac{1}{R'} = r_0;$$

le centre de courbure correspondant est en C'. Quand φ augmente, R augmente, le centre de courbure C de la section zAB monte sur Az, et, pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, R est infini. Quand φ croît de $\frac{\pi}{2}$ à π, R repasse par les mêmes valeurs en sens inverse. Actuellement, R a donc un minimum R', qui est l'un des rayons de courbure principaux, et pas de maximum. On peut dire qu'il a un maximum $R'' = \infty$, ou encore que l'autre rayon de courbure principal est infini.

La formule qui donne R devient, dans ce cas,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'}\cos^2\varphi.$$

Résumé. — En résumé, si l'on prend pour axes les deux directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$, et si l'on appelle R' et R'' les rayons de courbure principaux correspondants, avec leur signe, le rayon de courbure R d'une section normale, dont la trace AB, sur le plan tangent, fait avec $A\pi'$ un angle φ, est donné par la formule

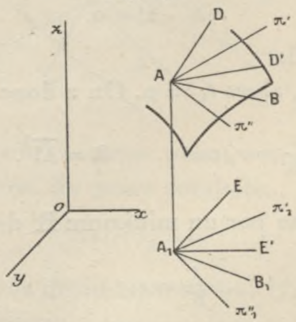
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'}\cos^2\varphi + \frac{1}{R''}\sin^2\varphi.$$

Dans le dernier cas que nous venons d'examiner, $R'' = \infty$; la formule devient alors

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R'} \cos^2 \varphi.$$

245. Détermination des directions principales et des rayons de courbure principaux en un point. — Nous venons de voir que, pour connaître le rayon de courbure d'une section normale quelconque

Fig. 142.



passant par un point A, il suffit de connaître les directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$, en A, et les rayons de courbure principaux R' et R'' correspondants. Voici comment on peut calculer ces éléments :

Les axes étant supposés rectangulaires, mais choisis d'une manière quelconque, nous avons trouvé, pour la valeur algébrique du rayon de courbure R d'une section normale, dont la trace AB sur le plan tangent a pour cosinus directeurs α, β, γ :

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}.$$

Quand on fait tourner AB autour de A, R varie et il s'agit de trouver les directions de AB rendant R maximum ou minimum (ce seront les directions principales) et les valeurs maximum et minimum de R (ce seront les rayons de courbure principaux). Ce problème se ramène au problème élémentaire de la recherche du maximum et du minimum du quotient de deux trinomes. En effet, on a, entre les trois cosinus α, β, γ, la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

nous pouvons donc écrire

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}.$$

Mais on a (n° 240)

$$\gamma = p\alpha + q\beta,$$

relation qui exprime que AB est dans le plan tangent en A. On a donc

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\alpha^2+\beta^2+(p\alpha+q\beta)^2}{r\alpha^2+2s\alpha\beta+t\beta^2}.$$

Le deuxième membre étant homogène en α et β, divisons haut et bas par α et faisons

$$\frac{\beta}{\alpha} = m,$$

il vient

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{(1+q^2)m^2+2pqm+1+p^2}{tm^2+2sm+r},$$

quotient de deux trinomes du deuxième degré en m.

La quantité m est le coefficient angulaire de la projection A_1B_1 de AB sur le plan horizontal. Quand le plan de la section normale tourne autour de la normale en A, sa trace AB sur le plan tangent tourne autour de A et la projection A_1B_1 de cette trace tourne autour de A_1. La quantité m varie de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'agit de trouver les valeurs de m, rendant R maximum ou minimum, et les valeurs maximum ou minimum de R.

Directions principales. — Les valeurs de m, rendant R maximum ou minimum, s'obtiennent en égalant à zéro la dérivée du deuxième membre par rapport à m :

$$\begin{aligned}&[(1+q^2)m+pq](tm^2+2sm+r)\\ &\quad-(tm+s)[(1+q^2)m^2+2pqm+(1+p^2)]=0,\end{aligned}$$

ou, en réduisant,

$$\begin{aligned}(10)\qquad &m^2[s(1+q^2)-pqt]\\ &\quad+m[r(1+q^2)-t(1+p^2)]+pqr-s(1+p^2)=0.\end{aligned}$$

Cette équation en m a deux racines réelles, m' et m'', qui sont les coefficients angulaires des projections $A_1\pi'_1$ et $A_1\pi''_1$ des directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$ sur le plan des xy.

On peut déterminer les directions principales par une autre méthode, quand on connaît les directions asymptotiques AD et AD′ au point A. Les directions principales sont alors les bissectrices des angles formés par les directions asymptotiques.

Rayons de courbure principaux. — Si l'on fait

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = S,$$

la quantité S est maximum ou minimum en même temps que R. Or on a

$$S = \frac{(1+q^2)m^2 + 2pqm + 1 + p^2}{tm^2 + 2sm + r}, \tag{11}$$

et il faut trouver le maximum et le minimum de S quand m varie de $-\infty$ à $+\infty$. A une valeur donnée de S, la relation (11) fait correspondre deux valeurs de m. Pour qu'une valeur donnée de S soit un maximum ou un minimum, il faut et il suffit que les valeurs correspondantes de m soient égales.

L'équation en m est

$$m^2[(1+q^2) - tS] + 2m[pq - sS] + (1+p^2) - rS = 0.$$

Pour qu'elle ait ses racines égales, il faut et il suffit que l'on ait

$$(pq - sS)^2 - [(1+q^2) - tS][(1+p^2) - rS] = 0,$$

ou, en ordonnant et changeant les signes,

$$S^2(rt - s^2) - S[(1+p^2)t + (1+q^2)r - 2pqs)] + 1 + p^2 + q^2 = 0. \tag{12}$$

Cette équation en S a deux racines, S′ et S″, qui sont le maximum et le minimum de S, c'est-à-dire de $\dfrac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

Le maximum et le minimum de R sont donc

$$R' = \sqrt{1+p^2+q^2}\,S', \qquad R'' = \sqrt{1+p^2+q^2}\,S''.$$

On a ainsi les deux rayons de courbure principaux.

246. Courbure totale et courbure moyenne. — On appelle *cour-*

bure totale, en un point d'une surface, la quantité

$$\frac{1}{R'R''}.$$

Cette quantité est égale à

$$\frac{1}{S'S''(1+p^2+q^2)},$$

c'est-à-dire, en remplaçant $S'S''$ par le produit des racines de l'équation (12),

$$\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

On voit donc que, conformément aux définitions déjà posées, la courbure totale est positive, négative ou nulle, en même temps que $rt-s^2$.

Les surfaces, qui sont à courbure totale nulle, en tous leurs points, sont telles qu'en tous leurs points on ait

$$rt-s^2=0.$$

Nous verrons plus tard que ce sont les *surfaces développables*.

Courbure moyenne. — On appelle *courbure moyenne* d'une surface, en un point, la quantité

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''},$$

facile à exprimer à l'aide des coefficients de l'équation donnant S.

Les surfaces à courbure *moyenne nulle*

$$\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=0 \qquad \text{ou} \qquad R'+R''=0$$

sont les *surfaces d'étendue minimum*.

On les rencontre dans le problème de Géométrie suivant :

Étant donné un contour fermé dans l'espace, trouver, parmi toutes les surfaces continues passant par ce contour et limitées par lui, celle qui a l'aire la plus petite possible.

On démontre que la surface répondant à la question est une surface à courbure moyenne nulle, en chaque point. On peut réaliser physiquement cette surface, en construisant le contour en fil métallique fin, et en plongeant ce contour dans un liquide visqueux comme de l'eau de savon; si l'on retire ensuite le contour, on trouve la surface d'aire minimum réalisée par une lame liquide fermant le contour.

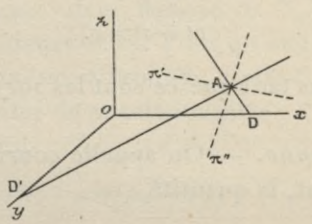
On peut remarquer que, pour une de ces surfaces, l'indicatrice, en chaque point, est formée de deux hyperboles équilatères conjuguées : ses directions asymptotiques sont rectangulaires.

247. Exemple. — Soit le paraboloïde hyperbolique équilatère

$$z = \frac{xy}{a}.$$

Cherchons les directions principales et les rayons de courbure principaux, en un point A quelconque de la surface (*fig.* 143).

Fig. 143.



Actuellement, nous connaissons les directions asymptotiques en chaque point : en effet, le plan tangent, en un point A, coupe la surface suivant deux génératrices rectilignes AD et AD′ passant par A. Cette intersection est une courbe à point double et les tangentes, en A, à cette courbe, c'est-à-dire les droites AD et AD′ elles-mêmes forment les directions asymptotiques. Les directions principales, en A, sont donc les bissectrices $A\pi'$ et $A\pi''$ des angles formés par les génératrices rectilignes passant par A. Nous avons actuellement

$$p = \frac{y}{a}, \qquad q = \frac{x}{a},$$

$$r = 0, \qquad s = \frac{1}{a}, \qquad t = 0.$$

L'équation donnant

$$S = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = \frac{aR}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}$$

est ici

$$-aS^2+2Sxy+a(a^2+x^2+y^2)=0.$$

Elle a pour racines

$$aS'=xy+\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)},$$
$$aS''=xy-\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+y^2)}.$$

Les deux rayons de courbure principaux sont alors

$$R'=\frac{S'}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2},\qquad R''=\frac{S''}{a}\sqrt{a^2+x^2+y^2}.$$

La surface a, en tous ses points, une courbure totale négative, car

$$rt-s^2=-\frac{1}{a^2}.$$

Elle a une courbure moyenne nulle, aux points appartenant aux deux axes Ox et Oy. En effet, si $x=0$ ou $y=0$, on a

$$S'+S''=0,\qquad \frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=0.$$

Ce fait est aisé à vérifier géométriquement, car, en un point A de Ox, par exemple, il passe deux génératrices du paraboloïde : l'une AD′ coïncide avec Ox, l'autre AD est perpendiculaire à Ox.

En ce point A, les directions asymptotiques sont donc rectangulaires. L'indicatrice est formée de deux *hyperboles équilatères* et l'on a $R'+R''=0$.

VIII. — ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE D'UNE SURFACE AUTOUR D'UN POINT. AUTRE DÉFINITION DE L'INDICATRICE.

248. **Définition géométrique de l'indicatrice.** — Soit, comme plus haut,

$$z=\frac{1}{2}(r_0x^2+2s_0xy+t_0y^2)+\ldots,$$

l'équation d'une surface rapportée à une normale Az en un point quelconque et au plan tangent en ce point.

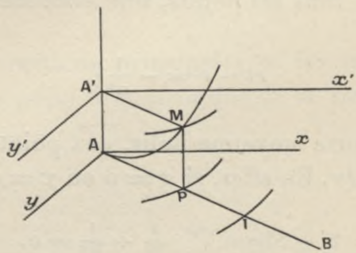
Soit un plan A′, parallèle au plan tangent xAy, situé au-dessus de ce plan à une distance infiniment petite $AA' = z$. Ce plan coupe la surface suivant une certaine courbe, qui se projette en vraie grandeur sur le plan horizontal (*fig.* 144).

L'équation de cette projection est

$$(\mathrm{P}) \qquad z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \ldots,$$

où z est une constante positive infiniment petite. Soit M un point de cette courbe voisin de A', P sa projection sur le plan tangent

Fig 144.



xAy : construisons la figure homothétique du lieu du point P, en prenant comme centre d'homothétie A et comme rapport d'homothétie la quantité $\frac{1}{\sqrt{2AA'}} = \frac{1}{\sqrt{2z}}\cdot$ Alors, sur chaque rayon AP, il faut prendre un point I tel que

$$\frac{AI}{AP} = \frac{1}{\sqrt{2z}}, \qquad \overline{AI}^2 = \frac{\overline{AP}^2}{2z}.$$

Nous allons vérifier que, z étant infiniment petit, le lieu du point I est une conique ayant pour équation

$$(\mathrm{I}) \qquad r_0 X^2 + 2 s_0 XY + t_0 Y^2 = 1.$$

En effet, le point P ayant pour coordonnées x et y, et le point I pour coordonnées X et Y, la relation

$$AP = AI\sqrt{2z}$$

donne immédiatement

$$x = X\sqrt{2z}, \qquad y = Y\sqrt{2z};$$

en portant ces valeurs de x et y dans l'équation (P), du lieu du point P, on a, pour lieu du point I,

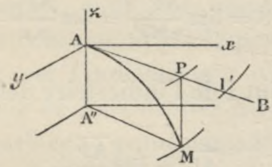
$$z = z(r_0 X^2 + 2 s_0 XY + t_0 Y^2) + z^{\frac{3}{2}}(\ldots) = 0,$$

où tous les termes non écrits contiennent $z^{\frac{3}{2}}$ en facteur. Divisant cette équation par z et faisant tendre z vers zéro, on obtient, comme lieu du point I, la conique (I).

Dans ce qui précède, nous avons coupé la surface par un plan parallèle au plan tangent, placé du côté des z positifs.

Prenons de même un plan A″, parallèle au plan tangent $x\mathrm{A}y$, mais du côté des z négatifs; ce plan coupe la surface suivant une courbe, dont la projection est représentée par l'équation (P), où z a une valeur constante *négative* (*fig.* 145).

Fig. 145.



Soit M un point de cette courbe, P sa projection horizontale; amplifions encore le rayon vecteur AP dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{AA}''}}$ en prenant

$$\frac{\mathrm{AI}'}{\mathrm{AP}} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{AA}''}} = \frac{1}{\sqrt{-2z}},$$

$$\overline{\mathrm{AI}'}^2 = \frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{-2z},$$

ca

$$\mathrm{AA}'' = -z,$$

nous aurons, comme lieu du point I′, la conique

$$(\mathrm{I}') \qquad r_0 X^2 + 2 s_0 XY + t_0 Y^2 = -1.$$

En effet, on a actuellement

$$x = X\sqrt{-2z}, \qquad y = Y\sqrt{-2z};$$

en portant dans l'équation (P), divisant par z et faisant tendre z vers zéro, on obtient l'équation de la conique (I′). L'ensemble des deux coniques (I) et (I′) forme l'indicatrice de la surface au point A. La partie (I) de l'indicatrice provient des plans sécants, parallèles au plan $x\mathrm{A}y$ du côté des z positifs; l'autre partie (I′) provient des plans sécants, parallèles au plan $x\mathrm{A}y$ du côté des z négatifs.

On a donc ainsi un moyen simple de définir l'indicatrice en un point.

249. Rayon de courbure d'une section normale. — Soit AB la trace d'une section normale et supposons que cette section soit une courbe AM tournant sa concavité vers le haut (*fig.* 144). La droite AB étant tangente en A à la courbe, et MP étant la distance de M au plan des xy, le rayon de courbure en A est positif et a pour valeur (n° 160)

$$\mathrm{R} = \lim \frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{2\,\mathrm{MP}} = \lim \frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{2z}.$$

Soit, sur AB, le point I de l'indicatrice défini par la relation

$$\overline{\mathrm{AI}}^2 = \lim \frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{2z}.$$

On a alors

$$\mathrm{R} = \overline{\mathrm{AI}}^2;$$

on retrouve ainsi la représentation du rayon de courbure, à l'aide de l'indicatrice.

Soient, de même, AB la trace d'une section normale tournant sa concavité vers le bas (*fig.* 145), M un point de cette section voisin de A, P sa projection. La valeur absolue du rayon de courbure de cette section, en A, est

$$\lim \frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{2\,\mathrm{MP}}.$$

Mais, d'après nos conventions, ce rayon de courbure doit être regardé comme négatif. On a donc

$$\mathrm{R} = -\lim \frac{\overline{\mathrm{AP}}^2}{2\,\mathrm{MP}}.$$

Comme la distance MP est égale à $-z$, z désignant l'ordonnée de M qui est négative, on a encore

$$R = \lim \frac{\overline{AP}^2}{2\varepsilon}.$$

Mais, pour définir le point I′ de l'indicatrice, on a pris

$$\overline{AI'}^2 = \lim \frac{\overline{AP}^2}{-2\varepsilon}.$$

On a donc

$$R = -\overline{AI'}^2.$$

250. **Remarque.** — On peut présenter ces résultats de la façon suivante. En coupant une surface par un plan parallèle au plan tangent, en un point non singulier, à une distance infiniment petite de ce plan, et regardant la courbe d'intersection, au voisinage du point de contact, avec une loupe d'un grossissement infini, on aperçoit une conique, ayant le point de contact comme centre. Cette conique est l'indicatrice : c'est une ellipse, une hyperbole ou un système de deux droites parallèles, suivant que la courbure totale de la surface au point considéré est positive, négative ou nulle. Les axes de cette conique donnent les directions principales de la surface au point considéré; ses directions asymptotiques donnent les directions asymptotiques de la surface au point considéré : elles coïncident avec les tangentes, au point de contact, à l'intersection de la surface par le plan tangent.

251. **Cas particulier des surfaces du deuxième ordre.** — Les théorèmes précédents sont alors évidents, car, dans une surface du deuxième ordre, les sections faites par des plans parallèles sont homothétiques. Donc, dans une de ces surfaces, pour obtenir une courbe homothétique de la section de la surface par un plan parallèle à un plan tangent et infiniment voisin de ce plan, il suffit de prendre la section de la surface par un plan parallèle au plan tangent, à une distance finie de ce point convenablement choisie, *et de part et d'autre*.

Il est évident, d'après cela, que, pour un ellipsoïde, l'indicatrice en un point est une ellipse; pour un hyperboloïde à une nappe, elle est formée de deux hyperboles conjuguées, ayant pour directions asymptotiques les génératrices du point de contact;

pour un cylindre, elle est formée de deux droites parallèles à la génératrice de contact.

252. Usage de l'indicatrice pour la détermination des tangentes à l'intersection de deux surfaces tangentes en un point. — Quand deux surfaces sont tangentes, en un point A, elles se coupent, en général, suivant une courbe ayant un point double en A. Supposons qu'on ait construit les indicatrices des deux surfaces en ce point, courbes qui sont situées dans le plan tangent commun en A. On a alors le théorème suivant :

Les tangentes à l'intersection, au point A, *sont les diamètres communs aux indicatrices des deux surfaces.*

En effet, prenons le point A comme origine et comme axe Az la normale commune aux deux surfaces. Les équations de ces surfaces sont :

$$(S) \qquad z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \ldots,$$

$$(S_1) \qquad z = \frac{1}{2}(r_1 x^2 + 2 s_1 xy + t_1 y^2) + \ldots.$$

Pour obtenir la projection de l'intersection de ces deux surfaces sur le plan des xy, il faut éliminer z entre ces deux équations, ce qui se fait en les retranchant membre à membre. On a ainsi, comme projection de l'intersection,

$$0 = (r_0 - r_1)x^2 + 2(s_0 - s_1)xy + (t_0 - t_1)y^2 + \ldots.$$

Les termes de moindre degré étant du deuxième degré, la courbe présente un point double à l'origine A. Le plan des xy étant tangent aux surfaces en A, les tangentes à la courbe d'intersection dans l'espace, au point A, se confondent avec les tangentes à sa projection : ce sont donc deux droites représentées par l'équation

$$(r_0 - r_1)x^2 + 2(s_0 - s_1)xy + (t_0 - t_1)y^2 = 0.$$

Or ces droites sont précisément les diamètres communs aux deux indicatrices

$$r_0 X^2 + 2 s_0 XY + t_0 Y^2 = \pm 1,$$
$$r_1 X^2 + 2 s_1 XY + t_1 Y^2 = \pm 1,$$

où les signes des deuxièmes membres se correspondent. En effet, pour avoir les diamètres communs à ces deux coniques, il suffit de retrancher leurs équations membre à membre, ce qui donne l'équation des tangentes écrite plus haut.

Si les indicatrices des deux surfaces, en A, n'ont pas de points réels communs, les deux tangentes sont imaginaires, le point A est un point isolé pour l'intersection des deux surfaces.

253. **Paraboloïde osculateur. Tore osculateur.** — Une surface étant rapportée à un de ses points A, pris comme origine, et à la normale en ce point comme axe des z, on peut, en développant z par la formule de Mac-Laurin, écrire l'équation de la surface sous la forme

$$(\mathrm{S}) \qquad z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2) + \ldots.$$

La loi de la courbure des sections normales faites autour du point A et, par conséquent, la loi de la courbure de toutes les sections planes passant par A, ne dépend que des coefficients r_0, s_0, t_0. Cette loi est donc la même pour une deuxième surface tangente à la première au point A et pour laquelle r_0, s_0, t_0 ont les mêmes valeurs. C'est ce qu'on voit aussi par la géométrie, en remarquant que la variation du rayon de courbure des sections normales est représentée à l'aide de l'indicatrice

$$r_0 X^2 + 2 s_0 XY + t_0 Y^2 = \pm 1;$$

cette indicatrice ne dépendant que de r_0, s_0, t_0, deux surfaces tangentes en A, pour lesquelles ces trois coefficients ont les mêmes valeurs, ont les mêmes indicatrices, et, par suite, deux sections normales ou deux sections planes quelconques, faites par un même plan passant par A dans les deux surfaces, ont même rayon de courbure, en A.

Ainsi, au point de vue de l'étude de la courbure des sections planes passant par A, on peut substituer à une surface une autre surface tangente, pourvu que r_0, s_0, t_0 soient les mêmes, ou encore pourvu que les directions principales et les rayons de courbure principaux en A soient les mêmes.

Voici deux façons simples de réaliser cette substitution.

Paraboloïde osculateur. — Considérons la surface

$$(P) \qquad z = \frac{1}{2}(r_0 x^2 + 2 s_0 xy + t_0 y^2),$$

obtenue en supprimant dans le développement (S) tous les termes suivant le groupe des termes du deuxième degré. Cette équation définit un paraboloïde qu'on nomme *paraboloïde osculateur* à la surface en A. Dans le voisinage de A, on peut substituer à la surface un petit fragment de ce paraboloïde; la loi de la courbure des sections planes n'est pas altérée.

Si l'on prend pour axes Ax et Ay, les directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$ et si l'on appelle R' et R'' les deux rayons de courbure principaux, on a

$$s_0 = 0, \qquad r_0 = \frac{1}{R'}, \qquad t_0 = \frac{1}{R''};$$

l'équation du paraboloïde osculateur est donc alors

$$(P) \qquad z = \frac{x^2}{2R'} + \frac{y^2}{2R''}.$$

Ce paraboloïde est elliptique ou hyperbolique, suivant que la surface est à courbure totale positive ou négative. Dans le cas où la courbure totale est négative, les directions asymptotiques de la surface S, en A, coïncident avec les génératrices rectilignes du paraboloïde osculateur P passant par A.

Si la courbure totale de la surface S au point A est nulle, $R' = \infty$ et le paraboloïde osculateur devient un cylindre parabolique

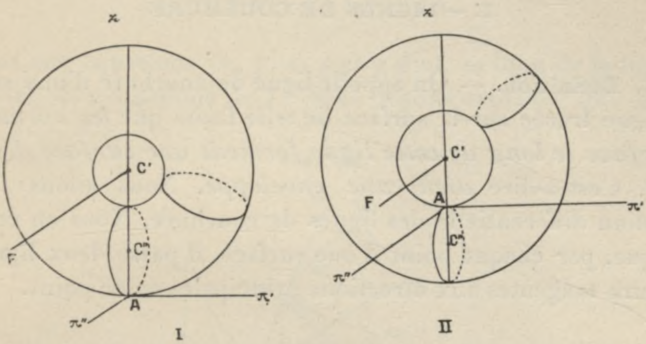
$$z = \frac{x^2}{2R''},$$

tangent au plan des xy suivant la droite unique avec laquelle se confondent alors les deux directions asymptotiques de la surface donnée S.

Tore osculateur. — On peut aussi construire facilement un tore ayant, en A, mêmes directions principales et mêmes rayons de courbure principaux que la surface donnée.

Soient $A\pi'$ et $A\pi''$ les directions principales, C' et C'' les centres de courbure principaux correspondants. Dans le plan de section principale $zA\pi'$, traçons le cercle de centre C' et de rayon $C'A = R'$. Dans le plan de section principale $zA\pi''$, traçons, de même, le cercle de centre C'' et de rayon $C''A = R''$. Supposons ensuite qu'on fasse tourner le cercle C'' autour d'un axe C'F, mené par C' perpendiculairement au plan du cercle C'. Nous engendrons ainsi un tore, qui est tangent à la surface donnée en A. En outre, ce tore a, en A, les mêmes directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$ que la surface donnée : cela est évident, par raison de symétrie, car la droite $A\pi'$ est tangente à l'équateur du tore en A et $A\pi''$ au méridien. Enfin ce tore a, en A, les mêmes rayons de

Fig. 146.



courbure principaux que la surface proposée, car les deux sections principales, en A, étant l'équateur et le méridien, leurs centres de courbure sont les centres C' et C'' de ces deux cercles.

Nous avons figuré ce tore (*fig.* 146, I et II), en supposant successivement que la surface est à courbure totale positive ou négative.

Si la surface est à courbure totale nulle, $R' = \infty$, le tore se réduit à un cylindre de révolution ayant pour base le cercle C'', tangent au plan des xy le long de $A\pi'$.

CHAPITRE XIII.

LIGNES PARTICULIÈRES TRACÉES SUR UNE SURFACE.

I. — LIGNES DE COURBURE.

254. **Définition.** — On appelle ligne de courbure d'une surface une ligne tracée sur la surface de telle façon que *les normales à la surface le long de cette ligne forment une surface développable*, c'est-à-dire *aient une enveloppe*. Nous allons former l'équation différentielle des lignes de courbure. Nous en conclurons que, par chaque point d'une surface, il passe deux lignes de courbure tangentes aux directions principales en ce point.

255. **Équation différentielle des projections horizontales des lignes de courbure.** — Soit une surface ayant pour équation

$$z = f(x, y);$$

si, sur cette surface, on considère une ligne de courbure L′, les coordonnées d'un point A de cette ligne peuvent être regardées comme des fonctions d'un même paramètre λ

$$x = \varphi(\lambda), \qquad y = \psi(\lambda), \qquad z = f(x, y).$$

Appelons, comme précédemment, p, q, r, s, t les dérivées partielles premières et secondes de z, par rapport à x et y. Ces dérivées sont des fonctions de x et y, et, par suite, le long de la ligne de courbure, des fonctions de λ par l'intermédiaire de x et y. Quand λ croît de $d\lambda$, le point A subit un déplacement infiniment petit AA′, x et y croissent de dx et dy, z, p et q croissent de leurs différentielles :

$$\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy. \end{aligned}$$

Les équations de la normale AN à la surface, au point $A(x, y, z)$, sont

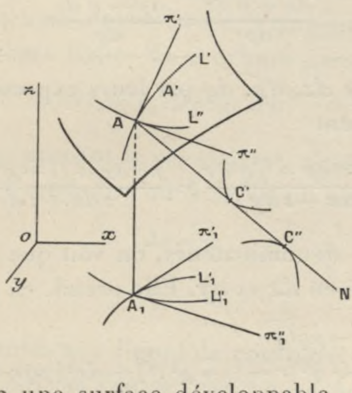
$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}$$

ou, en égalant les deux premiers rapports au troisième,

$$(1) \qquad \begin{cases} X = -pZ + x + pz, \\ Y = -qZ + y + qz. \end{cases}$$

Dans ces équations, x, y, z, p et q sont, le long de la ligne de courbure, des fonctions de λ. Nous devons exprimer que la normale (1) engendre une surface développable.

Fig. 147.



Or, les équations d'une droite étant mises sous la forme

$$X = aZ + h, \qquad Y = bZ + k,$$

où a, b, h, k sont fonctions d'un paramètre λ, pour que cette droite engendre une surface développable, il faut et il suffit que les deux équations dérivées par rapport à λ

$$(2) \qquad o = Z\frac{da}{d\lambda} + \frac{dh}{d\lambda}, \qquad o = Z\frac{db}{d\lambda} + \frac{dk}{d\lambda},$$

donnent, pour Z, la même valeur, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dh}{da}=\frac{dk}{db}.$$

Comme, dans les équations (1), on a

$$a=-p,\qquad b=-q,\qquad h=x+pz,\qquad k=y+qz,$$

la condition cherchée est

$$\frac{d(x+pz)}{dp}=\frac{d(y+qz)}{dq}.$$

En développant on a

$$\frac{dx+p\,dz+z\,dp}{dp}=\frac{dy+q\,dz+z\,dq}{dq}$$

ou, en supprimant les deux termes égaux $\frac{z\,dp}{dp}$ et $\frac{z\,dq}{dq}$,

$$\frac{dx+p\,dz}{dp}=\frac{dy+q\,dz}{dq}. \tag{3}$$

Si l'on remplace dz, dp, dq par leurs expressions ci-dessus, la condition (3) devient

$$\frac{(1+p^2)\,dx+pq\,dy}{r\,dx+s\,dy}=\frac{pq\,dx+(1+q^2)\,dy}{s\,dx+t\,dy}.$$

En chassant les dénominateurs, on voit que cette équation est du deuxième degré en dx et dy. Elle prend, en effet, la forme

$$\begin{aligned}(4)\qquad & dy^2[(1+q^2)s-pqt]\\ & +dx\,dy[(1+q^2)r-(1+p^2)t]+dx^2[pqr-(1+p^2)s]=0.\end{aligned}$$

En divisant par dx^2, on obtient une équation du deuxième degré en $\frac{dy}{dx}\cdot$ Ce résultat montre que, *par chaque point de la surface, il passe deux lignes de courbure*. En effet, si l'on projette le point A sur le plan horizontal, en A_1, et la ligne de courbure en L'_1, la tangente $A\pi'$ à la ligne de courbure, en A, se projette horizontalement, suivant la tangente $A_1\pi'_1$ à la projection L'_1. Le rapport $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient angulaire de la tangente, en A_1, à la projection L'_1 de la ligne. Les coordonnées x et y du point A_1 étant données, les quantités z, p, q, r, s, t sont déterminées, et l'équation (4) donne pour $\frac{dy}{dx}$ deux valeurs : par le point A_1, passent donc les projections L'_1 et L''_1, de deux lignes de courbure, tangentes aux deux droites $A_1\pi'_1$ et $A_1\pi''_1$, dont les coefficients angulaires sont racines de l'équation (4). Cette équation s'appelle l'*équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy*.

256. Théorème I. — *Les deux lignes de courbure, passant par un point A d'une surface, ont pour tangentes, en ce point, les deux directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$.*

Pour démontrer ce théorème, portons l'origine au point A (voyez *fig.* 137 ou 139 ou 141) en prenant comme axe des z la normale en A, comme axes des x et des y, les directions principales au point A. Alors (n° **244**) p, q, s deviennent nuls, r et t prennent des valeurs r_0 et t_0. L'équation du deuxième degré (4), donnant les coefficients angulaires des tangentes aux projections horizontales des deux lignes de courbure passant par A, devient

$$(t_0 - r_0)\,dx\,dy = 0;$$

elle donne donc en prenant le cas général, c'est-à-dire en écartant le cas où $t_0 = r_0$, c'est-à-dire où A serait un *ombilic :* ou bien

$$dx = 0,$$

ou bien

$$dy = 0.$$

L'une des tangentes aux lignes de courbure, passant par A, est donc l'axe Ay ou $A\pi''$, et l'autre l'axe Ax ou $A\pi'$.

Autre démonstration. — Sans faire le changement d'axes ci-dessus, nous pouvons démontrer le théorème comme il suit. Si, dans l'équation du deuxième degré (4), nous remplaçons $\frac{dy}{dx}$ par m, cette équation devient

$$m^2[(1+q^2)s - pqt] + m[(1+q^2)r - (1+p^2)t] + pqr - (1+p^2)s = 0.$$

On reconnaît alors qu'elle est identique à l'équation (10) du n° **245**, donnant les coefficients angulaires des projections $A_1\pi'_1$, et $A_1\pi''_1$ des directions principales sur le plan des xy (*fig.* 142

et 147). Les lignes de courbure sont donc, en projection, tangentes à $A_1\pi_1'$ et $A_1\pi_1''$ et, sur la surface, elles sont tangentes aux directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$.

257. Théorème II. — Soit AN la normale, en A, à la surface : par le point A passent deux lignes de courbure L′ et L″ (*fig.* 147). Si le point A décrit la ligne L′, la normale à la surface enveloppe une certaine courbe : soit C′ le point de contact de AN avec cette enveloppe. Si le point A décrit la ligne L″, la normale à la surface a, de même, une enveloppe : soit C″, le point de contact de AN avec cette deuxième enveloppe.

Les points C′ *et* C″ *sont les deux centres de courbure principaux relatifs au point* A.

Quand une droite mobile

$$X = aZ + h, \qquad Y = bZ + k,$$

dont les coefficients dépendent d'un paramètre λ, a une enveloppe, les coordonnées du point de contact de la droite avec son enveloppe vérifient les équations dérivées par rapport à λ

$$0 = Z\frac{da}{d\lambda} + \frac{dh}{d\lambda}, \qquad 0 = Z\frac{db}{d\lambda} + \frac{dk}{d\lambda}.$$

Le Z du point de contact est donc donné par les deux équations compatibles

$$(5) \qquad 0 = Z\,da + dh, \qquad 0 = Z\,db + dk.$$

Actuellement, il s'agit de l'enveloppe des normales

$$X = -pZ + x + pz, \qquad Y = -qZ + y + qz.$$

Le Z du point de contact de la normale avec son enveloppe est donc fourni par les équations compatibles

$$0 = -Z\,dp + d(x + pz), \qquad 0 = -Z\,dq + d(y + qz),$$

ou, en développant,

$$(6) \qquad \begin{cases} 0 = -Z(r\,dx + s\,dy) + dx + p\,dz + z\,dp, \\ 0 = -Z(s\,dx + t\,dy) + dy + q\,dz + z\,dq. \end{cases}$$

Portons alors l'origine au point A et prenons, comme plus haut, pour axes la normale AN et les deux directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$. Nous aurons

$$z = 0, \qquad p = 0, \qquad q = 0, \qquad s = 0,$$

r et t prenant les valeurs r_0 et t_0.

Les équations (6), donnant le Z du point de contact de la normale AN avec son enveloppe, deviendront alors

$$(7) \qquad 0 = -Zr_0\,dx + dx, \qquad 0 = -Zt_0\,dy + dy.$$

Si l'on déplace la normale le long de la ligne de courbure L', tangente à l'axe des x, on a $dy = 0$, dx étant différent de zéro. La deuxième des équations (7) est identiquement satisfaite, et la première donne, pour le Z du point de contact C',

$$Z = \frac{1}{r_9},$$

c'est-à-dire

$$Z = R',$$

R' étant le rayon de courbure principal correspondant à la direction principale $A\pi'$. Le point de contact C' est donc bien le centre de courbure principal relatif à la direction principale $A\pi'$.

De même, si l'on déplace la normale le long de la ligne L'', on a

$$dx = 0, \qquad dy \neq 0;$$

la première des équations (7) est identique, la deuxième donne

$$Z = \frac{1}{t_0},$$

c'est-à-dire

$$Z = R''.$$

Le théorème est donc démontré.

258. **Résumé.** — En résumé, les lignes de courbure d'une surface forment deux familles de courbes L' et L'', se coupant respectivement à angle droit. En chaque point A de la surface, les directions principales $A\pi'$ et $A\pi''$ sont les tangentes aux deux lignes de courbure passant par ce point, et les centres de courbure principaux de la surface en A sont les points où la normale en A touche

les deux courbes qu'elle enveloppe, suivant qu'on déplace son pied sur la ligne L' ou la ligne L''.

On voit que la connaissance des lignes de courbure d'une surface entraîne la connaissance de tous les éléments nécessaires à l'étude de la courbure de la surface en chacun de ses points.

Remarque. — Il faut bien remarquer que C' et C'' sont les centres de courbure des sections normales de la surface menées par $A\pi'$ et $A\pi''$ (*fig.* 147) et non les centres de courbure des deux lignes de courbure. D'après le théorème de Meusnier, pour déterminer le centre de courbure de la ligne L' en A, il faudrait connaître le plan osculateur P à cette courbe en A et projeter ensuite le point C', centre de courbure de la section normale, sur le plan P.

Le lieu des points C' est une développée de la ligne de courbure L', puisque ce lieu est l'enveloppe d'une suite de normales à L'. De même, le lieu des points C'' est une développée de L''.

259. **Lignes de courbure d'un paraboloïde hyperbolique équilatère.** — Soit la surface

$$z = \frac{xy}{a}.$$

Actuellement,

$$p = \frac{y}{a}, \qquad q = \frac{x}{a}.$$

L'équation différentielle de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy étant, en général,

$$\frac{dx + p\,dz}{dp} = \frac{dy + q\,dz}{dq},$$

devient actuellement

$$\frac{dx + \frac{y}{a}\left(\frac{y}{a}dx + \frac{x}{a}dy\right)}{\frac{dy}{a}} = \frac{dy + \frac{x}{a}\left(\frac{y}{a}dx + \frac{x}{a}dy\right)}{\frac{dx}{a}}.$$

Chassant le dénominateur et réduisant, nous avons

$$(a^2 + x^2)\,dy^2 - (a^2 + y^2)\,dx^2 = 0,$$

équation du deuxième degré en $\frac{dy}{dx}$. On en tire

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{a^2 + x^2}{a^2 + y^2}}.$$

En intégrant cette équation différentielle, on a l'équation, en termes finis, de la projection des lignes de courbure sur le plan des xy. En séparant les variables, on peut écrire

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a^2+y^2}} = 0,$$

ou, en intégrant,

$$\mathrm{L}(x+\sqrt{a^2+x^2}) \pm \mathrm{L}(y+\sqrt{a^2+y^2}) = \mathrm{LK},$$

K désignant une constante arbitraire.

Suivant le signe choisi, on a l'un ou l'autre des deux systèmes de lignes de courbure.

Le signe $+$ donne, en passant des logarithmes aux nombres,

$$(x+\sqrt{a^2+x^2})(y+\sqrt{a^2+y^2}) = \mathrm{K},$$

et le signe —

$$\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{y+\sqrt{a^2+y^2}} = \mathrm{K}'.$$

En faisant varier K et K′, on a ainsi les projections horizontales des deux familles de lignes de courbure.

260. **Lignes de courbure des surfaces de révolution.** — Dans une surface de révolution, les lignes de courbure sont les *parallèles* et les *méridiens*.

En effet, considérons une surface de révolution d'axe Ox et de méridienne AM. Les normales à la surface, le long d'un parallèle quelconque AP, forment un cône dont le sommet C′ est sur l'axe de révolution. Elles engendrent donc une surface développable dont l'arête de rebroussement est le point C′ (*fig.* 148).

De même, les normales à la surface, le long d'un méridien AM, sont dans le plan du méridien. Elles ont donc une enveloppe, qui n'est autre chose que la développée plane de la méridienne, et le point de contact C″ d'une normale AN avec cette enveloppe est le centre de courbure de la méridienne au point A (n° 212).

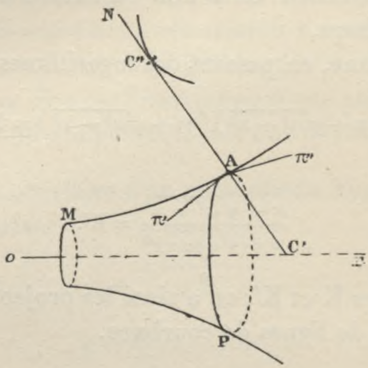
D'après cela, en un point A d'une surface de révolution, les directions principales sont les tangentes Aπ' et Aπ'' au méridien et au parallèle passant par A, et les centres de courbure principaux sont : 1° le point C′, où la normale en A coupe l'axe de révolution ; 2° le point C″, centre de courbure de la méridienne au point A.

Par exemple, si l'on considère la surface de révolution engendrée par une chaînette

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

tournant autour de l'axe Ox, les centres de courbure principaux en un point A sont : l'un sur l'axe Ox en C′, l'autre au centre de

Fig. 148.



courbure C″ de la chaînette. Comme le rayon de courbure d'une chaînette est égal à la normale (n° 157), on a $AC' = AC''$, les deux rayons de courbure principaux sont égaux et de signes contraires,

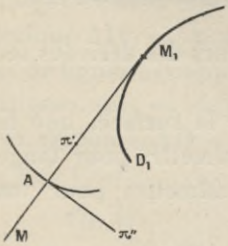
$$\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = 0,$$

et la surface a *une courbure moyenne nulle* en chaque point. On a ainsi un exemple simple de surface d'étendue minimum (n° 246).

261. Surfaces développables. — Sur une surface développable, les lignes de courbure sont constituées par les génératrices rectilignes et les trajectoires orthogonales de ces génératrices, c'est-à-dire les développantes de l'arête de rebroussement.

En effet, le plan tangent étant le même tout le long d'une génératrice M_1M, les normales à la surface le long de la ligne M_1M (*fig.* 149) engendrent un plan : on peut dire qu'elles ont pour enveloppe un point C' rejeté à l'infini sur une des normales. Nous connaissons ainsi un des systèmes de lignes de courbure. L'autre système est alors formé des courbes tracées sur la surface et coupant les lignes du premier système, c'est-à-dire les génératrices rectilignes, à angle droit. Ces courbes sont les développantes de

Fig. 149.



l'arête de rebroussement M_1D_1. On peut les tracer en déroulant un fil enroulé sur l'arête de rebroussement M_1D_1 : un point du fil décrit une ligne de courbure de la deuxième famille.

On voit que l'un des rayons de courbure principaux, en chaque point, est *infini;* la courbure totale $\frac{1}{R'R''}$ est donc nulle, en chaque point. Nous verrons plus loin que, réciproquement, une surface dont la courbure totale est nulle en chaque point est une *surface développable*.

II. — LIGNES ASYMPTOTIQUES.

262. **Définition.** — Les lignes de courbure possèdent la propriété d'être tangentes en chacun de leurs points A à l'une des directions principales en ce point. On appelle *lignes asymptotiques d'une surface des lignes tracées sur la surface, de telle façon qu'en chacun de leurs points* A *elles soient tangentes à l'une des directions asymptotiques en ce point.*

Comme les directions asymptotiques en un point A ne sont réelles que si, en ce point, la courbure totale est *négative ou nulle*, les lignes asymptotiques ne peuvent exister que sur les portions de la surface formées par les points A où la courbure totale est négative ou nulle.

263. Équation différentielle des lignes asymptotiques projetées sur le plan des xy. — Nous avons vu (n° 228) qu'en un point A d'une surface, il existe deux directions asymptotiques AD ou AD′, réelles ou imaginaires, ayant pour projections horizontales deux droites dont les coefficients angulaires sont racines de l'équation

$$tm^2 + 2sm + r = 0, \tag{1}$$

r, s, t désignant les valeurs des dérivées secondes de z par rapport à x et y, au point A.

Si l'on considère, sur la surface, une ligne asymptotique passant par A, cette ligne admettra pour tangente AD ou AD′, et sa projection horizontale admettra pour tangente O′E ou O′E′ (*fig.* 122).

Le coefficient angulaire de la tangente à une courbe, dans le plan des xy, est $\frac{dy}{dx}$. Pour que cette courbe soit la projection d'une ligne asymptotique, il faut et il suffit que ce coefficient soit racine de l'équation (1), c'est-à-dire que l'on ait

$$t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r = 0 \tag{2}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{3}$$

Telle est l'équation différentielle des projections des *lignes asymptotiques* sur le plan xOy. Elle est du deuxième degré en $\frac{dy}{dx}$: pour que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ soient réelles, il faut et il suffit que l'on ait

$$rt - s^2 \leqq 0,$$

c'est-à-dire que la courbure totale soit négative.

En intégrant cette équation, on trouvera, sur la surface, deux systèmes de lignes asymptotiques correspondant aux deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$.

Remarque. — L'équation différentielle des lignes asymptotiques peut s'écrire sous la forme simple

$$dp\,dx + dq\,dy = 0. \tag{4}$$

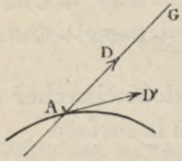
En effet, on a

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy;$$

en remplaçant dans (4), on retrouve bien l'équation (3).

264. **Lignes asymptotiques d'une surface réglée gauche.** — Sur une surface réglée gauche, une des directions asymptotiques AD, en chaque point A, est la génératrice AG passant par ce point : l'autre direction asymptotique AD′, en A, est alors nécessairement réelle. L'un des systèmes de lignes asymptotiques est donc formé par les génératrices rectilignes, car, en chaque point A d'une génératrice rectiligne AG, la tangente AD à la génératrice est une direction asymptotique (*fig.* 150).

Fig. 150.



L'autre système est formé par les courbes admettant pour tangentes les droites telles que AD′, qui donnent, en chaque point, la deuxième direction asymptotique.

265. **Lignes asymptotiques d'une surface développable.** — Comme, en tout point d'une surface développable, $rt - s^2$ est nul, les deux directions asymptotiques en tout point sont *confondues*. Les deux systèmes de lignes asymptotiques se confondent en un seul qui est formé par les génératrices rectilignes.

266. **Théorème.** — *Pour qu'une ligne soit une ligne asymptotique d'une surface, il faut et il suffit, qu'en chacun de ses points, son plan osculateur soit tangent à la surface.*

En effet, imaginons d'abord une ligne quelconque tracée sur une surface. Le long de cette ligne, x, y, z sont des fonctions d'un paramètre λ vérifiant identiquement l'équation

$$z = f(x, y)$$

de la surface et toutes celles qu'on en déduit par différentiation.

Une première différentiation donne, avec les notations précédentes,

$$(5) \qquad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Une nouvelle différentiation donne

$$(6) \qquad d^2z = p\,d^2x + q\,d^2y + dp\,dx + dq\,dy.$$

En général, pour qu'un plan

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0$$

soit osculateur à une courbe, au point x, y, z, il faut et il suffit (nº **173**) que l'on ait les deux conditions

$$(7) \qquad \begin{cases} A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0, \\ A\,d^2x + B\,d^2y + C\,d^2z = 0. \end{cases}$$

Actuellement, nous voulons chercher ce que doit être la courbe pour que le plan tangent à la surface

$$-p(X - x) - q(Y - y) + Z - z = 0$$

soit osculateur à cette courbe. Les conditions (7) que doit remplir la courbe cherchée deviennent alors

$$(8) \qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ d^2z - p\,d^2x - q\,d^2y = 0; \end{cases}$$

en les rapprochant des relations (5) et (6), qui ont lieu pour une courbe quelconque tracée sur la surface, on voit que la courbe cherchée doit vérifier la condition

$$dp\,dx + dq\,dy = 0.$$

C'est donc une ligne asymptotique.

Par exemple, si l'on considère la surface réglée S, engendrée par les normales principales MN′ d'une courbe gauche, cette courbe gauche est une ligne asymptotique de la surface S, car son plan osculateur, en un point M, est évidemment tangent à la surface, en ce point, comme contenant la tangente à la courbe, en M, et la génératrice MN′.

III. — LIGNES DE NIVEAU ET LIGNES DE PLUS GRANDE PENTE.

267. Définition. — Considérons une surface quelconque rapportée à trois axes rectangulaires, le plan des xy étant horizontal. On appelle *lignes de niveau* de la surface les sections de la surface par des plans horizontaux.

$$z = \text{const.}$$

Ces lignes se projettent en vraie grandeur sur le plan des xy : si la surface a pour équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

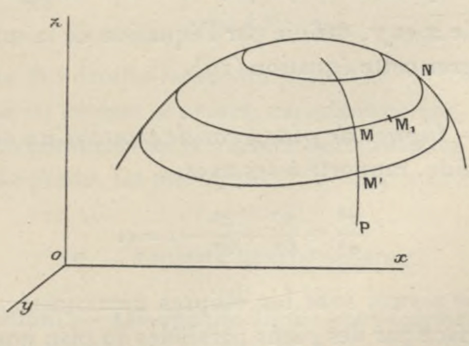
les projections horizontales des lignes de niveau ont pour équation

$$F(x, y, C) = 0.$$

268. Équation différentielle des lignes de plus grande pente. — On appelle *lignes de plus grande pente* les lignes tracées sur la surface et coupant à angle droit les lignes de niveau. Ces lignes sont, en chacun de leurs points, tangentes à la droite de plus grande pente du plan tangent à la surface en ce point.

On obtient l'équation différentielle des projections horizontales

Fig. 151.



des lignes de plus grande pente, en remarquant qu'elles coupent orthogonalement les projections des lignes de niveau. En effet, par un point M (x, y, z) de la surface, il passe une ligne de niveau et une ligne de pente (*fig.* 151). Les deux éléments infiniment petits MM_1 et MM' de ces deux lignes sont orthogonaux ; comme l'élément MM_1 est parallèle au plan de projection, les projections horizontales de MM_1 et MM' sont rectangulaires ; ce qui démontre la proposition.

Appelons $d_1 x$, $d_1 y$, o les projections de MM_1 sur les axes et dx, dy, dz celles de MM'. On aura

$$dx\, d_1 x + dy\, d_1 y = 0. \tag{9}$$

Mais l'équation de la ligne de niveau passant par M est

$$F(x, y, z) = 0,$$

où z est *constant*. Le coefficient angulaire $\frac{d_1 y}{d_1 x}$ de la tangente à la projection horizontale de cette courbe est

$$\frac{d_1 y}{d_1 x} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

D'après la condition (9), on a donc pour coefficient angulaire de la tangente à la projection de la ligne de pente au même point

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F'_y}{F'_x}. \tag{10}$$

On a ainsi l'équation différentielle cherchée, dans laquelle il faut regarder la quantité z, qui peut rester dans $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$, comme une fonction de x et y, définie par l'équation de la surface. Il faudra alors intégrer cette équation (10).

Exemple. — *Lignes de plus grande pente d'un ellipsoïde.* — Soit un ellipsoïde, rapporté à ses axes,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Les lignes de niveau sont les ellipses $z = \text{const.}$, obtenues en coupant la surface par des plans parallèles au plan horizontal.

Comme on a

$$F'_x = \frac{2x}{a^2}, \qquad F'_y = \frac{2y}{b^2},$$

l'équation différentielle

$$F'_x\,dy - F'_y\,dx = 0$$

de la projection horizontale des lignes de plus grande pente est

$$\frac{x}{a^2}\,dy - \frac{y}{b^2}\,dx = 0.$$

Cette équation peut être intégrée immédiatement : en effet, on peut séparer les variables x et y en écrivant

$$\frac{dy}{y} = m\frac{dx}{x},$$

où m est la constante $\frac{a^2}{b^2}\cdot$ On a alors, en intégrant et désignant par k une constante d'intégration,

$$\mathrm{L}y = m\,\mathrm{L}x + \mathrm{L}k$$

ou

$$y = kx^m.$$

Telle est, en termes finis, l'équation de la projection horizontale des lignes de plus grande pente.

Comme vérification, supposons l'ellipsoïde de révolution autour de Oz. Alors

$$a = b, \qquad m = 1,$$

et la projection horizontale des lignes de plus grande pente est donnée par l'équation

$$y = kx,$$

qui représente des droites issues du point O.

C'est ce qui est évident *a priori*, car, dans ce cas, les lignes de niveau sont les parallèles de la surface de révolution et les lignes de plus grande pente, les méridiens.

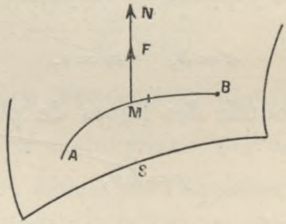
IV. — LIGNES GÉODÉSIQUES.

269. Définition. — On appelle ligne *géodésique* d'une surface une ligne tracée sur la surface, de telle façon que son plan osculateur en chacun de ses points soit *normal* à la surface. On peut dire aussi que le plan osculateur, en chaque point, contient la normale à la surface, en ce point; ou encore que la normale principale à la courbe, en chaque point, est normale à la surface. On rencontre ces lignes, quand on cherche le *chemin le plus court d'un point à un autre, sur une surface donnée*. Ce chemin est nécessairement formé d'un ou de plusieurs arcs de lignes géodésiques.

Pour nous rendre compte de cette propriété, nous emploierons des considérations tirées de la mécanique. Si l'on voulait pratiquement déterminer le plus court chemin, entre deux points A et B, sur une surface parfaitement polie S, on tendrait entre les deux points, sur la surface, un fil assez fin pour que son poids soit négligeable par rapport à sa tension. Il est évident que toute position d'équilibre stable de ce fil donnerait une ligne joignant ces deux points et plus courte que les lignes infiniment voisines.

Nous allons montrer que cette figure d'équilibre est une ligne géodésique, c'est-à-dire une courbe telle que le plan osculateur, en chacun de ses points M, contienne la normale MN à la surface. En effet, si l'on considère un élément ds du fil, placé en M, la seule force extérieure, agissant sur cet élément, est la réaction F de la surface, réaction dirigée suivant la normale MN (*fig.* 152), car la

Fig. 152.



surface est supposée parfaitement polie. Or, on démontre en mécanique que, si un fil est en équilibre, la résultante F des forces extérieures appliquées à l'élément ds est située dans le plan osculateur au fil. Actuellement, la force F étant dirigée suivant la normale MN, cette normale est située dans le plan osculateur, en M, à la courbe d'équilibre. C'est ce que nous voulions démontrer.

Les deux points A et B étant donnés, il peut exister plusieurs positions d'équilibre stable d'un fil tendu sur la surface, entre les deux points. Chacune d'elles donne une ligne réalisant un minimum, pour la distance curviligne entre les deux points sur la surface : ce minimum est relatif, c'est-à-dire que chacune des positions d'équilibre stable donne une ligne plus courte que toutes les lignes infiniment voisines tracées sur la surface entre les deux points A et B. Si l'on voulait la ligne donnant, sur la surface, le minimum absolu de la distance curviligne des deux points, il faudrait prendre la plus courte de toutes les lignes précédentes donnant des minimums relatifs.

Ainsi les chemins les plus courts, entre deux points, sur une surface, sont formés par des lignes géodésiques, joignant les deux points. Mais la réciproque n'est pas exacte : une ligne géodésique, joignant deux points donnés, n'est pas nécessairement plus courte que les courbes infiniment voisines, tracées sur la surface entre ces deux mêmes points.

Imaginons, entre deux points A et B, une ligne géodésique de cette nature, c'est-à-dire une ligne qui n'est pas plus courte que toutes les courbes infiniment voisines tracées sur la surface entre les deux points ; cette ligne est encore une position d'équilibre d'un fil tendu sur la surface entre les deux points, mais *c'est une position d'équilibre instable :* c'est une position d'équilibre qui serait irréalisable si la surface était parfaitement polie et qui ne peut être réalisée physiquement que grâce au frottement.

270. **Lignes géodésiques du plan.** — On peut dire que les lignes géodésiques du plan sont les *droites du plan*. En effet, le plus court chemin d'un point A à un point B, sur un plan, est la droite AB. Cette droite est la position d'équilibre d'un fil tendu sur le plan de A en B.

271. **Lignes géodésiques d'une sphère.** — Les lignes géodésiques d'une sphère sont les grands cercles de la sphère. En effet, le plan osculateur, en un point quelconque d'un grand cercle, étant le plan de ce grand cercle, ce plan osculateur passe par le centre de la sphère : il contient donc la normale à la sphère.

Si l'on prend, sur la sphère, deux points A et B, il existe deux lignes géodésiques joignant ces deux points (*fig.* 153) :

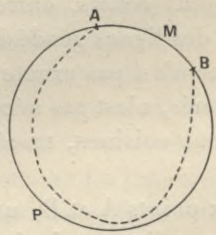
1° L'arc de grand cercle AMB plus petit qu'une demi-circonférence ;

2° L'arc de grand cercle APB supérieur à une demi-circonférence.

Ces deux arcs réunis forment un grand cercle complet. Prenons-les l'un après l'autre.

L'arc AMB est le plus court chemin, de A en B, sur la sphère :

Fig. 153.



c'est une position d'équilibre stable, pour un fil tendu sur la sphère, entre les deux points.

L'arc APB, au contraire, n'est pas un minimum relatif pour la distance entre les deux points A et B sur la sphère, car il est possible de trouver, de A en B, un chemin infiniment voisin et plus court, comme celui qui est figuré en pointillé. Cet arc APB serait encore une position d'équilibre d'un fil tendu sur la sphère entre les deux points A et B; mais ce serait une position d'équilibre instable, car, pour peu qu'on écarte le fil de cette position, il glisse sur la sphère et se détend.

272. **Lignes géodésiques d'un cylindre.** — Les lignes géodésiques d'un cylindre sont les *hélices* tracées sur ce cylindre. Nous avons vu, en effet, que le plan osculateur à une hélice quelconque contient la normale au cylindre.

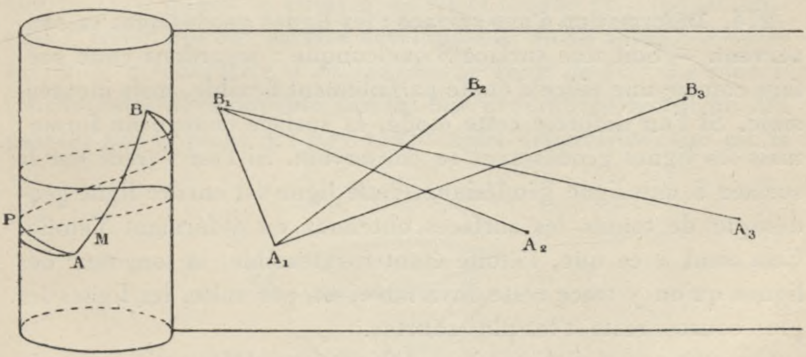
Nous pouvons vérifier ce résultat d'une autre façon :

Soient deux points A et B sur la surface : imaginons une ligne plus courte que les lignes infiniment voisines tracée sur le cylindre de A en B. Si l'on développe le cylindre sur un plan, comme les longueurs des courbes tracées sur le cylindre ne changent pas, la ligne considérée deviendra la ligne la plus courte entre deux points d'un plan, c'est-à-dire *une ligne droite*. La ligne considérée sur le cylindre est donc un *arc d'hélice*. Cette ligne est la figure d'équilibre stable d'un fil tendu sur le cylindre entre les deux points.

Supposons que le cylindre ait pour section droite une courbe fermée comme un cylindre de révolution. Alors, *par deux points donnés* A *et* B *de la surface, il passe une infinité de lignes géodésiques qui donnent chacune un minimum relatif pour la distance curviligne des deux points sur la surface.*

En effet, représentons-nous la surface du cylindre comme un rouleau de papier d'une longueur indéfinie, l'épaisseur du papier étant infiniment petite. Supposons, en outre, que les points A et B soient marqués sur toutes les feuilles superposées du rouleau ; c'est ce qu'on réaliserait, par exemple, en perçant, avec une épingle, toutes ces feuilles superposées aux points A et B. Alors, en déroulant ce rouleau de papier sur un plan, on obtiendrait une bande de papier portant des points A_1, B_1, A_2, B_2, ..., A_n, B_n, ... (*fig.* 154),

Fig. 154.



en nombre indéfini, provenant tous des traces des deux points A et B ; en enroulant de nouveau le papier, tous les points A_1, A_2, ..., A_n iraient se placer sur A, tous les points B_1, B_2, ..., B_n sur B. La droite $A_1 B_1$ donnera, après l'enroulement, un arc d'hélice joignant les deux points A et B, et cet arc sera plus court que tout arc de courbe infiniment voisin tracé entre A et B, sur le cylindre, puisqu'il se développe suivant une droite. De même les droites $A_1 B_2$, $A_1 B_3$, ..., $B_1 A_2$, $B_1 A_3$ donnent, après l'enroulement, des arcs d'hélice joignant les deux points, chacun de ces arcs étant plus court que toute courbe infiniment voisine entre A et B.

On arriverait à ce même résultat avec des fils tendus sur le cylindre, entre les deux points. En effet, on pourrait tendre directement un fil sur le cylindre entre les deux points A et B, suivant AMB ou APB, en le faisant tourner devant ou derrière; mais on pourrait aussi tendre des fils entre A et B, après les avoir enroulés sur le cylindre, une, deux, ..., n fois, dans un sens ou dans l'autre.

273. **Lignes géodésiques des surfaces développables.** — Dans le développement d'une surface développable sur un plan, les lignes les plus courtes de la surface doivent devenir les lignes les plus courtes du plan, c'est-à-dire des droites.

Ainsi, les lignes géodésiques d'une surface développable sont les lignes de la surface qui, dans le développement, deviennent des *droites*.

274. **Déformation d'une surface : les lignes géodésiques se conservent.** — Soit une surface S quelconque : regardons cette surface comme une pièce d'étoffe parfaitement flexible, mais inextensible. Si l'on déforme cette étoffe, la surface change de forme; mais les lignes géodésiques se conservent. Si l'on a tracé sur la surface S une ligne géodésique, cette ligne est encore ligne géodésique de toutes les surfaces obtenues en déformant l'étoffe. Cela tient à ce que, l'étoffe étant inextensible, la longueur des lignes qu'on y trace reste invariable, et, par suite, les lignes les plus courtes restent les plus courtes.

On peut remarquer aussi que, dans cette déformation, l'angle sous lequel se coupent deux lignes tracées sur la surface ne change pas, car un triangle infiniment petit se transforme en un triangle dont la longueur des côtés est conservée.

V. — DIRECTIONS CONJUGUÉES. — RÉSEAUX CONJUGUÉS. — THÉORÈME DES TANGENTES CONJUGUÉES.

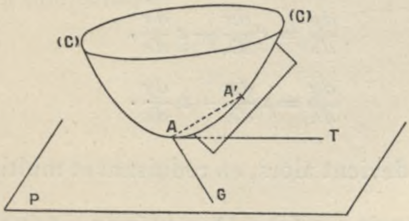
275. **Directions conjuguées.** — Soient une surface quelconque S, A un point sur cette surface. On dit que deux droites AB et AB′,

passant par A, sont des directions conjuguées, quand elles sont situées dans le plan tangent en A, et forment un système de deux diamètres conjugués de l'indicatrice relative au point A. Par exemple, les directions principales, en un point A d'une surface, sont conjuguées, car elles coïncident avec les axes de l'indicatrice.

276. **Réseaux conjugués.** — Imaginons, sur une surface, deux familles de courbes telles que, par chaque point A de la surface, il passe une courbe de chaque famille et que les tangentes menées à ces deux courbes, au point A, aient des directions conjuguées. On dit que ces deux familles de courbes forment un *réseau conjugué*. Par exemple, les lignes de courbure forment un réseau conjugué.

277. **Théorème des tangentes conjuguées.** — Soit une courbe quelconque (C), tracée sur une surface S : considérons le plan tangent P à la surface, en un point quelconque A de cette courbe (C); quand le point A décrit la courbe (C), le plan tangent P enveloppe une surface développable, qu'on appelle la *développable circonscrite à la surface le long de* (C). Le plan P touche cette développable suivant une génératrice rectiligne AG passant par le point A (*fig.* 155) : cette génératrice, qui est la

Fig. 155.



caractéristique du plan mobile, est l'intersection du plan tangent à la surface, en A, et du plan tangent au point A' de (C), infiniment voisin de A. On peut alors énoncer le théorème suivant, qui est constamment employé dans la théorie des lignes d'ombre :

La direction AG *de la génératrice de contact est conjuguée de la direction* AT *de la tangente à la courbe* (C).

Pour le démontrer, remarquons que, le long de (C), les coordonnées x, y, z d'un point A sont des fonctions d'un paramètre λ, qui vérifient identiquement l'équation de la surface donnée

$$z = f(x, y).$$

Le plan tangent P, à la surface, au point $A(x, y, z)$, a pour équation

$$\text{(P)} \qquad Z - z - p(X - x) - q(Y - y) = 0,$$

où p et q sont fonctions de λ, par l'intermédiaire de x et y. L'équation du plan P dépend donc d'un paramètre λ; ce plan enveloppe, quand λ varie, c'est-à-dire quand le point A décrit (C), une surface développable (n° 236). Pour avoir la droite AG, suivant laquelle ce plan touche son enveloppe, c'est-à-dire la caractéristique du plan P, il suffit d'associer à l'équation (P) celle qu'on en déduit en la différentiant par rapport à λ.

On a ainsi, puisque x, y, z, p, q dépendent de λ,

$$\text{(Q)} \qquad -\frac{dz}{d\lambda} - \frac{dp}{d\lambda}(X - x) - \frac{dq}{d\lambda}(Y - y) + p\frac{dx}{d\lambda} + q\frac{dy}{d\lambda} = 0.$$

Or, z, p et q dépendent de λ, par l'intermédiaire de x et y; on a donc, comme plus haut (n° 255),

$$\frac{dz}{d\lambda} = p\frac{dx}{d\lambda} + q\frac{dy}{d\lambda},$$

$$\frac{dp}{d\lambda} = r\frac{dx}{d\lambda} + s\frac{dy}{d\lambda},$$

$$\frac{dq}{d\lambda} = s\frac{dx}{d\lambda} + t\frac{dy}{d\lambda}.$$

L'équation (Q) devient alors, en réduisant et multipliant par $d\lambda$,

$$\text{(R)} \qquad (X - x)(r\,dx + s\,dy) + (Y - y)(s\,dx + t\,dy) = 0,$$

équation d'un plan passant par le point $A(x, y, z)$. La caractéristique du plan P, définie par les équations (P) et (R), est donc une droite AG, passant par A. Il reste à montrer que cette droite AG est conjuguée de AT.

Les cosinus directeurs de la tangente AT à la courbe (C), lieu du point x, y, z, sont proportionnels à dx, dy, dz. Prenons le point A pour origine, pour axe des z la normale, pour axes des x et des y les directions principales, en A. Alors x, y, z, p, q, s s'annulent; r et t prennent des valeurs r_0 et t_0. L'équation du plan tangent P devient

$$(\mathrm{P}') \qquad Z = 0;$$

celle du plan R devient

$$(\mathrm{R}') \qquad X r_0\, dx + Y t_0\, dy = 0.$$

La droite AG est alors définie par cette dernière équation, puisqu'elle est dans le plan des xy, $Z = 0$. La tangente AT est également dans le plan des xy et a pour coefficient angulaire

$$m = \frac{dy}{dx}.$$

L'équation de la droite AG peut donc s'écrire

$$X r_0 + Y t_0 m = 0.$$

C'est bien le diamètre conjugué de AT, par rapport à l'indicatrice

$$r_0 X^2 + t_0 Y^2 = \pm 1.$$

On sait, en effet, que le diamètre conjugué de la droite

$$Y = mX,$$

par rapport à une conique

$$\varphi(X, Y) = 0,$$

est

$$\varphi'_X + m\varphi'_Y = 0.$$

CHAPITRE XIV.

DIFFÉRENTIATION SOUS LE SIGNE $\int$. INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES. INTÉGRALES PRISES LE LONG D'UNE COURBE.

I. — DIFFÉRENTIATION SOUS LE SIGNE $\int$.

278. **Règle.** — Considérons une intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x, \lambda)\, dx,$$

dans laquelle la fonction, soumise à l'intégration, dépend d'un paramètre λ, indépendant de x, les limites a et b étant des quantités indépendantes de λ. Cette intégrale définie I est alors une fonction de λ et, dans certains cas, on peut avoir à calculer la dérivée de I par rapport à λ.

On peut, dans un grand nombre de cas, obtenir cette dérivée par l'application de la règle suivante :

La dérivée de l'intégrale I, *par rapport à* λ, *est égale à l'intégrale de la dérivée de* $f(x, \lambda)$ *par rapport à* λ

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx,$$

pourvu que la nouvelle intégrale, ainsi définie, ait un sens.

En effet, par hypothèse, on a

$$I = \int_a^b f(x, \lambda)\, dx.$$

Donnons à λ un accroissement $\Delta\lambda$; I prend un accroissement ΔI et les limites ne changent pas, car elles sont supposées indépendantes de λ. On a donc

$$I + \Delta I = \int_a^b f(x, \lambda + \Delta\lambda)\, dx,$$

d'où

$$\Delta I = \int_a^b [f(x, \lambda + \Delta\lambda) - f(x, \lambda)]\, dx.$$

Divisant par $\Delta\lambda$, on a

$$\frac{\Delta I}{\Delta\lambda} = \int_a^b \frac{f(x, \lambda + \Delta\lambda) - f(x, \lambda)}{\Delta\lambda}\, dx.$$

Si nous admettons que l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial\lambda}\, dx$$

a un sens, nous voyons que, $\Delta\lambda$ tendant vers zéro, l'expression de $\frac{\Delta I}{\Delta\lambda}$ tend vers $\int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\, dx$. On a donc, d'après la définition même de la dérivée,

$$\frac{dI}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial\lambda}\, dx.$$

On peut dire que l'on obtient la dérivée de I, par rapport à λ, en dérivant par rapport à λ sous le signe $\int$.

En appliquant de nouveau la même règle, on a ensuite

$$\frac{d^2 I}{d\lambda^2} = \int_a^b \frac{\partial^2 f(x, \lambda)}{\partial\lambda^2}\, dx,$$

pourvu que cette nouvelle intégrale ait un sens. Et ainsi de suite.

279. **Exemple I.** — Cette règle permet de déduire d'une intégrale connue d'autres intégrales. Ainsi, considérons l'intégrale

$$I = \int_a^b \cos \lambda x\, dx. \tag{1}$$

Cette intégrale est aisée à calculer, car l'intégrale indéfinie est $\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x$; on a donc

$$(2) \qquad I = \frac{1}{\lambda}(\sin\lambda b - \sin\lambda a).$$

Calculons les dérivées successives de l'intégrale (1); d'après la règle précédente, nous aurons

$$\frac{dI}{d\lambda} = -\int_a^b x\sin\lambda x\,dx, \qquad \frac{d^2I}{d\lambda^2} = -\int_a^b x^2\cos\lambda x\,dx, \qquad \ldots.$$

D'autre part, comme I est connue explicitement par la formule (2), on peut calculer directement ces dérivées. On a ainsi les formules

$$-\int_a^b x\sin\lambda x\,dx = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\sin\lambda b - \sin\lambda a}{\lambda}\right),$$
$$-\int_a^b x^2\cos\lambda x\,dx = \frac{d^2}{d\lambda^2}\left(\frac{\sin\lambda b - \sin\lambda a}{\lambda}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces formules peuvent, d'ailleurs, être aisément vérifiées, car les intégrales des premiers membres peuvent être obtenues par l'intégration par parties.

280. Exemple II. — On peut dans certains cas, par l'application de cette règle, déterminer des intégrales définies, qu'il serait difficile de trouver directement. Soit, par exemple, l'intégrale

$$(3) \qquad I = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda x}\sin x}{x}\,dx,$$

qui a un sens, tant que λ est positif. Pour calculer cette intégrale, remarquons qu'elle est une fonction du paramètre λ et calculons la dérivée $\frac{dI}{d\lambda}$: nous aurons

$$\frac{dI}{d\lambda} = -\int_0^\infty e^{-\lambda x}\sin x\,dx,$$

car la nouvelle intégrale a un sens. Cette nouvelle intégrale est, au signe près, celle que nous avons calculée au n° 40 et que nous avons désignée par A. Nous avons trouvé, dans ce numéro,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin x \, dx = \frac{1}{1+\lambda^2}.$$

On a donc

$$\frac{dI}{d\lambda} = -\frac{1}{1+\lambda^2}.$$

Connaissant la dérivée de I par rapport à λ, nous aurons I en prenant les fonctions primitives des deux membres regardés comme fonctions de λ,

$$(4) \qquad I = -\operatorname{arc\,tang} \lambda + C,$$

C désignant une constante indépendante de λ.

Il reste à déterminer cette constante. Pour cela, remarquons que l'intégrale I, définie par la relation (3), s'annule quand λ augmente indéfiniment, car le facteur $e^{-\lambda x}$ tend vers zéro. La nouvelle expression (4) de cette même intégrale doit également s'annuler, pour $\lambda = \infty$. Comme $\operatorname{arc\,tang} \infty = \frac{\pi}{2}$, on doit donc avoir

$$C = \frac{\pi}{2},$$

ce qui donne, définitivement,

$$I = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang} \lambda.$$

L'intégrale I est ainsi calculée en fonction de λ.

Cas particulier. — Faisons tendre λ vers zéro. Le facteur $e^{-\lambda x}$ tend vers 1 : on peut démontrer rigoureusement que l'intégrale I tend vers $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$; d'autre part $\operatorname{arc\,tang} \lambda$ tend vers zéro, on a donc

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons étudié cette intégrale, définie dans le n° 138, pour montrer qu'elle a un sens ; mais jusqu'ici nous n'avions pas donné sa valeur numérique.

281. **Exemple d'un cas où la règle ne peut s'appliquer.** — Comme nous l'avons dit, la règle exige que l'intégrale

$$\int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx$$

ait un sens. Si cette intégrale n'a pas de sens, cela ne veut pas dire que l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x, \lambda)\, dx$$

n'a pas de dérivée, mais seulement que cette dérivée n'est plus fournie par la règle simple que nous avons donnée.

Prenons, par exemple, l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\, dx.$$

En prenant la dérivée par rapport à λ sous le signe $\int$, on est conduit à l'intégrale

$$\int_0^\infty \cos \lambda x\, dx,$$

qui n'a pas de sens. C'est ce qu'on verrait, en construisant la courbe sinusoïdale

$$y = \cos \lambda x,$$

qui se compose d'ondes toutes égales entre elles, et en remarquant que l'aire de cette courbe, de o à ∞, n'a pas de valeur déterminée. (*Voyez* n° 135.)

On ne peut donc pas, actuellement, calculer la dérivée $\frac{d\mathrm{I}}{d\lambda}$ par la règle de la différentiation sous le signe $\int$. Mais cela ne veut pas dire que cette dérivée n'existe pas. Nous allons voir, en effet, que cette dérivée est *nulle*.

Supposons, pour fixer les idées, $\lambda > 0$, et faisons, dans J, le changement de variable

$$\lambda x = u, \qquad \lambda\, dx = du;$$

les nouvelles limites, pour u, sont encore o et $+\infty$; on a donc

$$\mathrm{J} = \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\, du,$$

expression indépendante de λ. Donc, quand λ varie d'une manière continue par valeurs positives, J reste constant et l'on a

$$\frac{dJ}{d\lambda} = 0.$$

On arrive à un résultat analogue pour $\lambda < 0$. On fera alors

$$\lambda x = -u, \qquad dx = -\frac{du}{\lambda}.$$

Quand x varie de 0 à $+\infty$, u varie aussi de 0 à $+\infty$ et l'on a

$$J = -\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du,$$

expression indépendante de λ.

Il se présente ici une circonstance curieuse, sur laquelle il est bon d'attirer l'attention. L'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \qquad \text{ou} \qquad \int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$$

est, d'après le numéro précédent, égale à $\frac{\pi}{2}$. L'intégrale

$$J = \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{x}\,dx$$

dépend de λ de telle sorte que :

λ ayant une valeur *positive quelconque*, $J = \frac{\pi}{2}$;

λ ayant une valeur *négative quelconque*, $J = -\frac{\pi}{2}$;

λ ayant une valeur *nulle*, $J = 0$.

Ce dernier point est évident, car, pour $\lambda = 0$, tous les éléments de l'intégrale sont nuls.

282. Différentiation d'une intégrale définie par rapport à un paramètre qui figure sous le signe $\int$ et dans les limites. — Considérons une intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x, \lambda)\,dx,$$

où λ est un paramètre indépendant de x. Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les limites a et b étaient indépendantes de λ. Supposons maintenant que a et b soient des fonctions de λ et proposons-nous de calculer la dérivée de I par rapport à λ.

Appelons $\varphi(x, \lambda)$ une fonction primitive de $f(x, \lambda)$ par rapport à x, c'est-à-dire une fonction telle que

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi(x, \lambda)}{\partial x} = f(x, \lambda).$$

Par définition, l'intégrale définie I a pour la valeur

$$(6) \qquad \mathrm{I} = \varphi(b, \lambda) - \varphi(a, \lambda);$$

on voit qu'elle dépend de λ directement et par l'intermédiaire de a et b, qui sont supposés fonctions de λ. On a donc, d'après la règle de dérivation des fonctions composées,

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\lambda} = \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a}\frac{da}{d\lambda} + \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial b}\frac{db}{d\lambda} + \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \lambda}.$$

Calculons successivement ces trois termes. La dérivée partielle de I, par rapport à a, $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a}$, est égale à $-\frac{\partial \varphi(a, \lambda)}{\partial a}$, c'est-à-dire, d'après l'identité (5), à $-f(a, \lambda)$; la dérivée partielle de I, par rapport à b, $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial b}$, est $\frac{\partial \varphi(b, \lambda)}{\partial b}$, c'est-à-dire, d'après l'identité (5), $f(b, \lambda)$; enfin, la dérivée partielle de I, par rapport à la lettre λ, qui figure explicitement dans l'expression (6), $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \lambda}$, c'est la dérivée de l'intégrale I, par rapport à λ, quand on regarde les limites a et b comme des constantes; cette dérivée, $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \lambda}$, est donnée par la règle de dérivation sous le signe $\int$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial \lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx.$$

En définitive, on a la formule suivante :

$$\frac{d\mathrm{I}}{d\lambda} = -f(a, \lambda)\frac{da}{d\lambda} + f(b, \lambda)\frac{db}{d\lambda} + \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda}\, dx.$$

II. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES TOTALES.

283. **Différentielles totales à deux variables.** — Soit

$$u = F(x, y)$$

une fonction de deux variables indépendantes x et y : nous avons appelé *différentielle totale de u* l'expression

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Dans cette expression, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont des fonctions connues de x et y; ce sont les dérivées partielles de u, par rapport à x et à y.

Problème inverse. — Inversement, étant donnée une expression de la forme

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy, \tag{7}$$

on peut se demander s'il existe une fonction u, de x et y, admettant cette expression pour différentielle totale, c'est-à-dire s'il existe une fonction u telle que l'on ait identiquement

$$du = f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy.$$

Cette question peut aussi être posée sous une autre forme : comme

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

la question revient à demander s'il existe une fonction u, de x et y, telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y).$$

Lorsque la fonction u existe, on dit que l'expression (7) est une *différentielle totale exacte*. La fonction u est l'*intégrale* de cette différentielle totale.

Nous allons montrer que, les fonctions f et φ étant quelconques, l'expression (7) n'est pas, en général, une différentielle totale exacte : pour qu'elle en soit une, il faut et il suffit que les fonctions f et φ remplissent une condition donnée par le théorème suivant :

Théorème. — *Pour que l'expression*

$$f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy$$

soit une différentielle totale exacte, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$(8)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, supposons qu'il existe une fonction u, de x et y, telle que

$$du = f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy,$$

ou, ce qui revient au même, telle que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x,y).$$

En dérivant la première de ces relations par rapport à x, la deuxième par rapport à y, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

et comme $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$, on a

$$(8)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

2° *La condition est suffisante.* — Soient deux fonctions $f(x,y)$ et $\varphi(x,y)$, vérifiant cette condition (8); nous allons montrer qu'il existe une fonction u, admettant

$$f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy$$

pour différentielle totale, c'est-à-dire vérifiant les deux relations

$$(9)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x,y),$$

et déterminer cette fonction.

Pour cela, cherchons d'abord la fonction u, de x et y, la plus générale, vérifiant seulement la première des conditions (9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y).$$

Comme, dans la dérivation par rapport à x, y est traité comme une constante, la fonction la plus générale u, vérifiant cette dernière condition, est une fonction primitive de $f(x,y)$, par rapport à x, augmentée d'une constante arbitraire indépendante de x. On a donc

$$(10) \qquad u = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx + g(y),$$

où la constante arbitraire indépendante de x est une fonction quelconque de y que nous désignons par $g(y)$. La limite inférieure x_0 de l'intégrale est un nombre quelconque que, dans chaque cas particulier, on choisira de façon à simplifier les calculs.

La fonction u, ainsi calculée, est la fonction la plus générale vérifiant la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y).$$

Nous allons maintenant déterminer $g(y)$, de façon que cette fonction u vérifie aussi la relation

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x,y).$$

Pour calculer la dérivée de la fonction (10) par rapport à y, remarquons que, sous le signe $\int$, la lettre y figure comme un paramètre indépendant de x et que les limites x_0 et x sont indépendantes de y; on peut donc appliquer la règle de la dérivation sous le signe $\int$ et l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + \frac{dg(y)}{dy}.$$

On doit donc avoir

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx + \frac{dg(y)}{dy} = \varphi(x,y).$$

Remplaçons $\frac{\partial f}{\partial y}$ par la quantité identique, par hypothèse, $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$. La relation devient

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} dx + \frac{dg(y)}{dy} = \varphi(x,y).$$

Mais l'intégrale indéfinie de $\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} dx$ est $\varphi(x,y)$; l'intégrale définie, entre les limites x_0 et x, est donc

$$\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y),$$

et l'équation à vérifier devient

$$\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) + \frac{dg(y)}{dy} = \varphi(x,y)$$

ou, en réduisant,

$$\frac{dg(y)}{dy} = \varphi(x_0,y).$$

En intégrant par rapport à y, nous aurons $g(y)$:

$$g(y) = \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0,y)\,dy + \mathrm{C},$$

où C est une constante, ne dépendant plus ni de x, ni de y; la limite inférieure y_0 est un nombre quelconque. Remplaçant $g(y)$ par cette détermination dans l'expression (10), on a enfin

$$(11) \qquad u = \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0,y)\,dy + \mathrm{C}.$$

Dans cette formule, la première intégration est faite, en regardant y comme constant.

Le problème est ainsi résolu : en supposant remplie la condition

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

nous venons de trouver l'expression générale des fonctions u, ayant pour différentielle totale $f\,dx + \varphi\,dy$; cette expression contient une constante arbitraire C.

284. Exemples. — 1° Prenons d'abord un exemple tout à fait élémentaire en considérant l'expression

$$y\,dx + x\,dy.$$

Actuellement,

$$f(x,y) = y, \qquad \varphi(x,y) = x.$$

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 1,$$

et la condition d'intégrabilité

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

est remplie. L'expression proposée est une différentielle exacte et son intégrale u est donnée par la formule

$$u = \int_{x_0}^{x} y\,dx + \int_{y_0}^{y} x_0\,dy + C.$$

Effectuons les intégrations, nous avons

$$u = xy - x_0 y + x_0 y - x_0 y_0 + C$$

ou, après réduction,

$$u = xy + K,$$

K désignant une constante. La vérification est immédiate : on a évidemment

$$du = y\,dx + x\,dy.$$

Dans ces calculs, le choix de x_0 et y_0 est arbitraire. On pourrait, par exemple, faire $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Alors la formule donne

$$u = \int_{0}^{x} y\,dx + C = xy + C.$$

2° Considérons l'expression

$$(2x^2 + 2xy + y^2)\,dx + (x^2 + 2xy + 3y^2)\,dy.$$

Cette expression est une différentielle totale exacte, car la dérivée du coefficient de dx, par rapport à y,

$$2x + 2y$$

est égale à la dérivée du coefficient de dy, par rapport à x. L'intégrale de cette différentielle totale est alors

$$u = \int_{x_0}^{x} (2x^2 + 2xy + y^2)\,dx + \int_{y_0}^{y} (x_0^2 + 2x_0 y + 3y^2)\,dy + C.$$

La première intégrale, dans laquelle y est traité comme une constante, est

$$\frac{2x^3}{3} + x^2 y + xy^2 - \frac{2x_0^3}{3} - x_0^2 y - x_0 y^2;$$

la deuxième est

$$x_0^2 y + x_0 y^2 + y^3 - x_0^2 y_0 - x_0 y_0^2 - y_0^3.$$

Remplaçant et simplifiant, on a

$$u = \frac{2x^3}{3} + x^2 y + y^2 x + y^3 + K,$$

où K est une constante. Les constantes x_0 et y_0 étant quelconques, on pourrait, en les supposant nulles, simplifier le calcul.

III. — INTÉGRATION LE LONG D'UNE COURBE PLANE.

285. **Définition.** — Soit dans un plan xOy, une courbe C (*fig.* 156); prenons, sur cette courbe, deux points M_0 et M, de coordonnées x_0, y_0 et x, y. Considérons, d'autre part, une expression de la forme

$$f(x,y)\,dx + \varphi(x,y)\,dy,$$

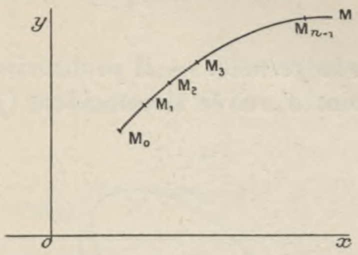
où f et φ sont deux fonctions données de x et y. Nous allons définir ce qu'il faut entendre par *intégrale de* $f(x,y)dx + \varphi(x,y)dy$ *prise le long de la courbe* C *de* M_0 *en* M.

Divisons l'arc M_0M en n parties par des points intermédiaires $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, ayant pour coordonnées respectives (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), et considérons la somme

$$\begin{aligned}
&f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) + \varphi(x_0, y_0)(y_1 - y_0)\\
&+ f(x_1, y_1)(x_2 - x_1) + \varphi(x_1, y_1)(y_2 - y_1)\\
&+ f(x_2, y_2)(x_3 - x_2) + \varphi(x_2, y_2)(y_3 - y_2)\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ f(x_{n-1}, y_{n-1})(x - x_{n-1}) + \varphi(x_{n-1}, y_{n-1})(y - y_{n-1}).
\end{aligned}$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, de telle façon que toutes les distances M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M$ tendent vers zéro, cette somme

Fig. 156.



tend vers une limite qui est, par définition, l'*intégrale de*

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy,$$

prise, de M_0 *en* M, *le long de la courbe* C.

On désigne cette intégrale par la notation

$$(1) \qquad \int_{(M_0)\text{ le long de C}}^{(M)} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy.$$

286. Expression par une intégrale simple ordinaire. — Il est facile de ramener le calcul d'une intégrale de ce genre à celui d'une intégrale simple ordinaire. Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe C peuvent s'exprimer, en fonction d'un paramètre t,

$$(2) \qquad x = \lambda(t), \qquad y = \mu(t),$$

de telle façon que, t variant d'une manière continue de t_0 à t_1, le point (x, y) décrive l'arc M_0M, de M_0 en M. En faisant, dans l'intégrale (1), le changement de variable défini par les formules (2), on a

$$dx = \lambda'(t)\,dt, \qquad dy = \mu'(t)\,dt,$$

et l'intégrale devient

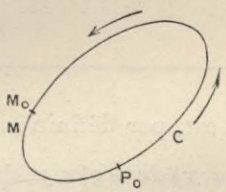
$$(3) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \{ f[\lambda(t), \mu(t)]\lambda'(t) + \varphi[\lambda(t), \mu(t)]\,\mu'(t) \}\,dt;$$

on est donc ramené à une intégrale simple ordinaire.

Si l'on prend l'intégrale de la même expression $f\,dx + \varphi\,dy$ le long de la même courbe, mais en sens contraire de M en M_0, on obtient le même résultat *changé* de signe. La nouvelle intégrale obtenue se déduit, en effet, de l'intégrale (3) par l'*interversion des limites*.

Cas d'une courbe fermée. — Il peut arriver que le point de départ M_0 et le point d'arrivée M coïncident (*fig.* 157). L'inté-

Fig. 157.



grale est alors prise le long d'un contour fermé C, dans un sens déterminé, positif si l'aire enveloppée est à gauche du mobile (sens indiqué par la flèche), négatif dans le cas contraire.

En exprimant les coordonnées d'un point du contour C en fonction d'un paramètre t par les formules (2), de telle façon que, t variant de t_0 à t_1, le point décrive le contour une fois de M_0 en M_0, dans le sens voulu, on transforme l'intégrale en une intégrale simple (3). Si l'on prend l'intégrale de la même expression $f\,dx + \varphi\,dy$ sur le même contour de M_0 en M_0, mais en sens contraire, on obtient un résultat égal et de signe contraire au précédent, car dans l'intégrale finale (3) les limites sont interverties.

Mais il est important de remarquer que, le contour fermé C et le sens de parcours étant donnés, la valeur de l'intégrale est déterminée : elle est indépendante du point de départ M_0.

En effet, prenons un autre point de départ P_0 et adoptons le sens positif de la figure (157). On a pour l'intégrale prise en partant de M_0

$$I = \int_{(M_0)}^{(P_0)} f\,dx + \varphi\,dy + \int_{(P_0)}^{(M_0)} f\,dx + \varphi\,dy,$$

et pour l'intégrale prise en partant de P_0

$$I' = \int_{(P_0)}^{(M_0)} + \int_{(M_0)}^{(P_0)};$$

les intégrales I et I' sont donc égales comme sommes des deux mêmes intégrales.

En résumé, une intégrale curviligne

$$\int f\,dx + \varphi\,dy$$

prise le long d'un contour fermé C est définie quand on donne le contour et le sens du parcours. Si le sens est positif, on désigne l'intégrale par

$$\overset{+}{\int}_{(C)} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy,$$

l'indice inférieur (C) indiquant le contour et le signe + placé au-dessus du signe d'intégration indiquant que l'intégrale est prise dans le sens positif.

La même intégrale prise dans le sens négatif, sur le même contour, serait

$$\overset{-}{\int}_{(C)} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy.$$

Ces deux intégrales sont égales et de signes contraires.

287. Quelques exemples d'intégrales prises le long d'une courbe plane. — Nous avons déjà rencontré plusieurs exemples d'intégrales de la nature de celles que nous venons de définir.

Ainsi, l'aire d'un segment de courbe limité par un arc de courbe M_0M_1, par l'axe Ox et par les deux ordonnées extrêmes est égale à l'intégrale

$$\int y\,dx,$$

prise le long de l'arc M_0M_1. En particulier, l'aire d'une courbe fermée C (n° 43) est donnée par l'intégrale

$$\overset{-}{\int}_{C} y\,dx,$$

prise le long de la courbe. Dans cet exemple on a

$$f(x, y) = y, \qquad \varphi(x, y) = 0.$$

L'aire d'un secteur de courbe, limité par un arc M_0M et deux rayons vecteurs OM_0 et OM (n° 46), est donnée par l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int(x\,dy - y\,dx),$$

prise le long de l'arc M_0M, et, en particulier, l'aire d'une courbe fermée est donnée par cette même intégrale prise le long de la courbe fermée dans le sens positif (n° 47). Dans ce deuxième exemple,

$$f(x, y) = -y, \qquad \varphi(x, y) = x.$$

Nous avons trouvé de même, dans la théorie des centres de gravité et des moments d'inertie, des intégrales de la forme

$$\int y^2\,dx, \quad \int y^3\,dx, \quad \int y^4\,dx, \quad \int x^2y^2\,dx, \quad \ldots$$

prises le long de courbes planes.

288. Condition pour qu'une intégrale

$$\int_{(M_0)}^{(M)} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy$$

dépende seulement du point de départ M_0 et du point d'arrivée M, et non du chemin suivi. — En général, une intégrale

$$I = \int_{(M_0)}^{(M)} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy$$

prise de M_0 en M, le long d'une courbe C, change de valeur quand, laissant fixes les points de départ et d'arrivée, on fait varier la courbe C, c'est-à-dire le chemin d'intégration. Ainsi l'intégrale

$$\frac{1}{2}\int_{(M_0)}^{(M)} (x\,dy - y\,dx)$$

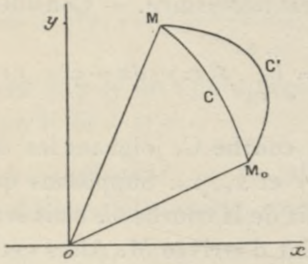
prise le long d'une courbe C représente l'aire du secteur OM_0CM (*fig.* 158). Si l'on prend la même intégrale, le long d'une autre courbe C', joignant les deux points, elle prend une autre valeur, égale à l'aire du secteur $OM_0C'M$.

Mais il peut arriver qu'une intégrale telle que I dépende seulement du point de départ M_0 et du point d'arrivée M, sans dépendre du chemin suivi C. Prenons, par exemple, l'intégrale

$$\int_{(M_0)}^{(M)} (x\,dy + y\,dx),$$

prise le long d'une courbe C joignant les deux points M_0 et M.

Fig. 158.



Comme la quantité sous le signe d'intégration est la différentielle totale de xy, on peut écrire cette intégrale

$$\int_{(M_0)}^{(M)} d(xy).$$

L'intégrale indéfinie est donc xy et l'intégrale définie, différence des valeurs que prend xy aux deux points M et M_0, est

$$xy - x_0 y_0.$$

On voit que cette intégrale ne dépend que des coordonnées des points M_0 et M, et non du choix de la courbe C : elle conserve la même valeur, quand on change la forme de C entre les deux points.

Nous allons généraliser ce fait en démontrant la proposition suivante :

Théorème. — *Pour qu'une intégrale*

$$\int_{(M_0)}^{(M)} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy,$$

prise, de M_0 *en* M, *le long d'une courbe* C, *dépende uniquement du point de départ* M_0 *et du point d'arrivée* M, *et non du* *chemin suivi, il faut et il suffit que l'expression*

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy,$$

soit une différentielle totale exacte d'une fonction uniforme de x et y; c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

1° *La condition est nécessaire.* — Considérons l'intégrale

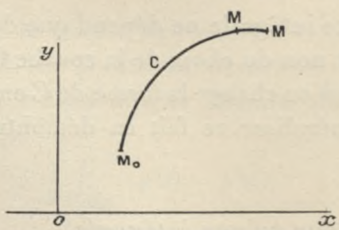
$$\mathrm{I} = \int_{(\mathrm{M}_0)}^{(\mathrm{M})} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy,$$

prise le long d'une courbe C, joignant les deux points M_0 et M, de coordonnées x, y et x_0, y_0. Supposons que cette intégrale ne dépende pas du choix de la courbe C, mais seulement du point de départ M_0 et du point d'arrivée M. Alors cette intégrale est une fonction de x, y, x_0, y_0 : en effet, la valeur de l'intégrale est déterminée, dès que l'on connaît les coordonnées x, y et x_0, y_0 des deux points M et M_0. On peut donc écrire

$$\int_{(\mathrm{M}_0)}^{(\mathrm{M})} f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy = \mathrm{F}(x, y, x_0, y_0). \tag{4}$$

Laissons fixe le point M_0 et déplaçons infiniment peu le point M (*fig.* 159) en lui faisant subir un déplacement arbitraire MM′, de

Fig. 159.



projections dx et dy. Alors, le premier membre de l'équation (4) croît de la quantité

$$f(x, y)\,dx + \varphi(x, y)\,dy, \tag{5}$$

car l'intégrale prise de M_0 en M′ se compose de l'intégrale prise de

M_0 en M, plus l'élément d'intégrale provenant du déplacement MM′, élément qui est précisément l'expression (5). En même temps, le deuxième membre $F(x, y, x_0, y_0)$ croît de sa différentielle

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.$$

Ces deux accroissements sont égaux : on a donc, identiquement, quels que soient dx et dy,

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

ce qui montre que $f\, dx + \varphi\, dy$ est une différentielle totale exacte d'une certaine fonction F de x et y.

2° *La condition est suffisante.* — En effet, supposons que $f\, dx + \varphi\, dy$ soit une différentielle exacte, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

On a alors

$$f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy = du(x, y),$$

$u(x, y)$ désignant une certaine fonction de x et y. L'intégrale I est, dans ce cas,

$$\int_{(M_0)}^{(M)} f(x, y)\, dx + \varphi(x, y)\, dy = \int_{(M_0)}^{(M)} du.$$

L'intégrale indéfinie est u, ou, en mettant les coordonnées en évidence, $u(x, y)$ et l'intégrale définie, différence des valeurs de u, aux deux points M et M_0,

$$I = u(x, y) - u(x_0, y_0).$$

L'intégrale a donc alors une valeur indépendante du chemin et dépendant seulement du choix des points M_0 et M. Le théorème est démontré.

Remarque. — On peut, à l'aide de ce qui précède, interpréter géométriquement la formule (11) du n° 283 donnant l'intégrale d'une différentielle totale. En effet, pour calculer la différence $u(x, y) - u(x_0, y_0)$, il suffit de calculer l'intégrale I le long d'un chemin particulier. Prenons alors le chemin suivant : en partant de M_0 nous suivrons une parallèle M_0M' à Oy depuis le point M_0 d'ordonnée y_0 jusqu'au point M' d'ordonnée y; puis, de là, une parallèle $M'M$ à Ox depuis le point M' d'abscisse x_0 jusqu'au point M d'abscisse x. La première partie de l'intégrale de M_0 en M' est

$$\int_{y_0}^{y} \varphi(x_0, y)\, dy,$$

car, sur M_0M', dx est nul; la deuxième, de M' en M, est

$$\int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx,$$

car, sur $M'M$, dy est nul.

On a donc

$$u - u_0 = \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0, y)\, dy + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx,$$

ce qui est la formule (11), à l'ordre des termes près.

On pourrait également obtenir une autre formule commode donnant $u - u_0$, en calculant l'intégrale le long de la droite M_0M.

289. **Exemple tiré de la théorie mécanique de la chaleur.** — Considérons un corps déterminé, par exemple une masse d'air, ou d'eau, ou de fer. La densité de ce corps dépend de sa température t et de sa pression p; par suite, le volume v occupé par l'unité de masse du corps (quantité qu'on appelle *volume spécifique*) dépend aussi de ces deux quantités.

Il existe donc, pour chaque sorte de corps, une relation déterminée entre p, v, t :

$$(6) \qquad F(p, v, t) = 0,$$

qui est la *relation fondamentale* du corps.

Par exemple, pour les gaz parfaits obéissant aux lois de Mariotte et de Gay-Lussac, la relation fondamentale est

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = \frac{p_0 v_0}{1 + \alpha t_0}$$

ou

$$\frac{pv}{1 + \alpha t} = \text{const.},$$

α désignant le coefficient de dilatation des gaz,

$$\alpha = \frac{1}{273}.$$

Nous pouvons toujours imaginer qu'on ait résolu l'équation *fondamentale* d'un corps (6) par rapport à t, de façon à la mettre sous la forme

$$t = \psi(p, v).$$

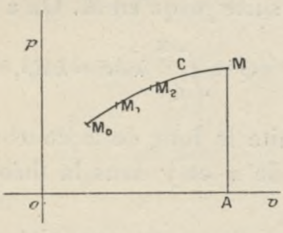
D'après cela, l'état d'un corps déterminé dépend de deux variables indépendantes, la pression p et le volume spécifique v; t est une fonction déterminée de p et v.

On peut alors représenter graphiquement l'état du corps par un point M d'un plan, ayant pour coordonnées (*fig.* 160)

$$\mathrm{OA} = v, \qquad \mathrm{AM} = p,$$

par rapport à deux axes rectangulaires Ov et Op. A chaque état du corps répond un point M dans le plan, et, inversement, à chaque point M répond un état du corps. Ce point M est le point

Fig. 160.



représentatif de l'état du corps. Quand le corps change d'état, sa pression et son volume spécifique varient d'une manière continue, le point représentatif M se déplace dans le plan en décrivant une certaine courbe M_0M. Supposons que le corps soit dans un certain état, représenté par un point M, de coordonnées v et p; proposons-nous d'amener le corps, de cet état, à un état infiniment voisin, représenté par un point M′, de coordonnées $v + dv$ et $p + dp$. Il faut, pour cela, lui communiquer une certaine quantité de chaleur infiniment petite δQ, dont l'expression est de la forme

$$\delta Q = \lambda\, dv + k\, dp,$$

où les coefficients λ et k sont des fonctions de v et p déterminées pour chaque corps :

$$\lambda = f(v, p), \qquad k = \varphi(v, p).$$

Nous ne nous occuperons pas ici de la signification physique de ces coefficients; mais voici maintenant le point capital dans la théorie de la chaleur, où se rencontre une application de la théorie précédente. Considérons deux états déterminés du corps représentés par les points M_0 et M de coordonnées v_0, p_0 et v, p. Supposons qu'on veuille faire passer le corps de l'état M_0 à l'état M, par une suite d'états intermédiaires représentés successivement par les divers points d'une courbe continue C, joignant les points M_0 et M (*fig.* 160). Cherchons la quantité totale de chaleur Q (positive ou négative) qu'il faut communiquer au corps pour réaliser cette transformation.

Pour cela, divisons l'arc M_0M par des points M_1, M_2, ..., M_{n-1}, infiniment rapprochés et en nombre infiniment grand. La quantité de chaleur cherchée Q est la somme des quantités de chaleur infiniment petites qu'il faut communiquer au corps pour l'amener successivement de l'état M_0 à l'état M_1, puis de l'état M_1 à l'état M_2, et ainsi de suite jusqu'en M. On a donc

$$Q = \int_{(M_0)}^{(M)} \lambda\, dv + k\, dp,$$

l'intégration étant faite le long de la courbe C. (Actuellement, v et p jouent le rôle de x et y dans la théorie analytique précédente.)

On a cru longtemps que cette quantité de chaleur Q dépendait uniquement de l'état initial M_0 et de l'état final M, et non de la suite C des états intermédiaires : cela revenait à admettre que la quantité sous le signe d'intégration est une différentielle exacte. Mais on a reconnu que cette manière de voir était inexacte. L'expression

$$\lambda\, dv + k\, dp$$

n'est pas une différentielle totale exacte : la dérivée partielle $\dfrac{\partial \lambda}{\partial p}$ *n'est pas* égale à $\dfrac{\partial k}{\partial v}$. Dès lors, la quantité Q ne dépend pas seulement des états initial et final M_0 et M, mais de la suite des états intermédiaires. La quantité de chaleur nécessaire pour faire passer un corps d'un état à un autre n'est pas déterminée par la seule connaissance de ces deux états; elle ne l'est que si l'on donne la suite des états intermédiaires, c'est-à-dire la courbe C. Il se passe, pour cette quantité de chaleur, quelque chose d'analogue à ce qui se passe pour l'aire d'un secteur M_0OM (*fig.* 158) ; cette aire n'est pas déterminée quand on connaît seulement le point de départ M_0 et le point d'arrivée M de l'arc M_0M : elle ne l'est que si l'on donne l'arc de courbe C joignant les deux points, et elle change avec le choix de cette courbe.

La théorie mécanique de la chaleur va maintenant nous fournir un exemple de différentielle totale exacte. On appelle température absolue d'un corps, à t degrés centigrades, la quantité

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273.$$

Cette quantité est, pour un corps donné, une fonction déterminée de v et p, car t est une fonction connue de v et p. Ceci posé, on démontre en physique que l'expression

$$\frac{\delta Q}{T} = \frac{\lambda}{T}\,dv + \frac{k}{T}\,dp$$

est une différentielle totale exacte, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial\left(\frac{\lambda}{T}\right)}{\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{k}{T}\right)}{\partial v}.$$

On peut alors poser

$$\frac{\lambda}{T}\,dv + \frac{k}{T}\,dp = d\mathrm{S}(v, p),$$

S étant une certaine fonction de v et p. Cette fonction S s'appelle l'*entropie* du corps. Si l'on considère l'intégrale

$$\int_{(M_0)}^{(M)} \frac{\lambda}{T}\,dv + \frac{k}{T}\,dp,$$

prise, de M_0 en M, le long d'une courbe quelconque, cette intégrale est égale à

$$\int_{(M_0)}^{(M)} d\mathrm{S} = \mathrm{S}(v, p) - \mathrm{S}(v_0, p_0).$$

Elle est donc indépendante des transformations subies par le corps, pour passer du premier état au deuxième.

IV. — DIFFÉRENTIELLES TOTALES A TROIS VARIABLES INDÉPENDANTES. — INTÉGRALES PRISES LE LONG D'UNE COURBE DANS L'ESPACE.

290. Conditions pour qu'une expression différentielle à trois variables indépendantes soit une différentielle totale exacte. — Il est aisé d'étendre, à des expressions différentielles à trois variables, la théorie du paragraphe précédent, relative à des expressions à deux variables.

Considérons une expression de la forme

$$f(x,y,z)\,dx + \varphi(x,y,z)\,dy + \psi(x,y,z)\,dz, \tag{1}$$

où $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ et $\psi(x,y,z)$ sont des fonctions données de x, y, z. On peut se demander sous quelles conditions cette expression est la différentielle totale d'une fonction $U(x,y,z)$, c'est-à-dire peut être identifiée avec l'expression

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \tag{2}$$

La réponse à cette question est donnée par le théorème suivant:

Théorème. — *Pour que l'expression* (1) *soit une différentielle totale, il faut et il suffit que les fonctions f, φ, ψ vérifient les trois identités*

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}. \tag{3}$$

1° *Ces conditions sont nécessaires.* — En effet, si l'expression (1) peut être identifiée avec une différentielle totale telle que (2), on a, identiquement,

$$f(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \varphi(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \psi(x,y,z) = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4}$$

On vérifie alors, immédiatement, que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est égal à $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, car ces deux expressions sont égales à $\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}$; on vérifie, de même, les deux autres conditions.

2° *Les conditions* (3) *sont suffisantes.* — Nous allons montrer que, si ces conditions sont satisfaites, il existe une fonction U, de x, y, z, vérifiant les trois relations (4), et déterminer cette fonction.

Pour cela, regardons d'abord z comme constant et commençons par chercher la fonction la plus générale

$$U(x, y, z),$$

vérifiant seulement les deux premières relations (4)

$$(5) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = f(x, y, z), \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(x, y, z).$$

Comme z est, provisoirement, regardé comme constant, U est une fonction des deux variables indépendantes x et y; d'après la théorie du paragraphe précédent, il existe une fonction U de x et y vérifiant les relations (5), car on a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

et cette fonction est donnée par la formule

$$(6) \qquad U = \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0, y, z)\, dy + C(z),$$

$C(z)$ étant une constante par rapport à x et y. On pourra donc prendre, pour $C(z)$, une fonction quelconque de z : quelle que soit cette fonction, la fonction U, de x, y, z, définie par (6), vérifie les deux premières relations (4). Il reste maintenant à déterminer C, en fonction de z, de telle façon que l'on ait

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \psi(x, y, z).$$

En calculant $\frac{\partial U}{\partial z}$ par la règle de différentiation sous le signe $\int$, et tenant compte de ce que C est fonction de z, nous aurons à vérifier l'équation

$$(7) \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \varphi(x_0, y, z)}{\partial z}\, dy + \frac{dC}{dz} = \psi(x, y, z).$$

Mais, d'après les conditions (3) supposées remplies identiquement, on a :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x},$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \psi(x, y, z)}{\partial x}\, dx = \psi(x, y, z) - \psi(x_0, y, z);$$

de même,

$$\frac{\partial \varphi(x_0, y, z)}{\partial z} = \frac{\partial \psi(x_0, y, z)}{\partial y}.$$

$$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial \varphi(x_0, y, z)}{\partial z}\, dy = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial \psi(x_0, y, z)}{\partial y}\, dy = \psi(x_0, y, z) - \psi(x_0, y_0, z).$$

En remplaçant les intégrales par ces valeurs et réduisant, on voit que la relation (7) devient

$$\frac{dC}{dz} = \psi(x_0, y_0, z),$$

d'où

$$C(z) = \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z)\, dz + K,$$

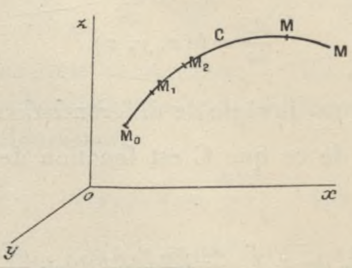
K étant une constante indépendante de x, y, z.

Finalement la fonction U, admettant pour différentielle totale l'expression (1), est donnée par la formule

$$U = \int_{x_0}^{x} f(x, y, z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0, y, z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z)\, dz + K.$$

291. Intégrale prise le long d'une courbe dans l'espace. — Imaginons, dans l'espace, une courbe C (*fig.* 161), joignant deux points M_0 et M, de coordonnées x_0, y_0, z_0 et x, y, z; on peut

Fig. 161.



définir, comme dans le plan, l'intégrale

$$I = \int_{(M_0)}^{(M)} f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz,$$

prise le long de C, de M_0 en M. Pour cela, on prend, sur la courbe C, des points intermédiaires M_1, M_2, ..., M_n, infiniment rapprochés et en nombre infiniment grand. L'intégrale est, par définition, la limite de la somme

$$\begin{aligned}
&f(x_0, y_0, z_0)(x_1 - x_0) + \varphi(x_0, y_0, z_0)(y_1 - y_0) + \psi(x_0, y_0, z_0)(z_1 - z_0)\\
&+ f(x_1, y_1, z_1)(x_2 - x_1) + \varphi(x_1, y_1, z_1)(y_2 - y_1) + \psi(x_1, y_1, z_1)(z_2 - z_1)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&+ f(x_n, y_n, z_n)(x - x_n) + \varphi(x_n, y_n, z_n)(y - y_n) + \psi(x_n, y_n, z_n)(z - z_n),
\end{aligned}$$

où n augmente indéfiniment, toutes les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, ..., $z_1 - z_0$, $z_2 - z_1$, ... tendant vers zéro.

L'intégrale I, ainsi définie, peut facilement être ramenée à une intégrale simple ordinaire. En effet, le long de la courbe C, on peut exprimer les coordonnées x, y, z d'un point, en fonction d'un paramètre t

$$x = \lambda(t), \qquad y = \mu(t), \qquad z = \nu(t),$$

qui varie de t_0 à t_1, quand le point (x, y, z) décrit la courbe, de M_0 en M. On a alors, d'après la règle du changement de variable dans une intégrale,

$$I = \int_{t_0}^{t_1} [f(\lambda, \mu, \nu)\lambda' + \varphi(\lambda, \mu, \nu)\mu' + \psi(\lambda, \mu, \nu)\nu']\,dt,$$

où nous écrivons pour abréger λ, μ, ν, λ', μ', ν' au lieu de $\lambda(t)$, $\mu(t)$, $\nu(t)$, et des dérivées $\lambda'(t)$, $\mu'(t)$, $\nu'(t)$.

292. Conditions pour qu'une intégrale prise, le long d'une courbe dans l'espace, ne dépende que des points de départ et d'arrivée et non du chemin suivi. — Considérons l'intégrale

$$I = \int_{(M_0)}^{(M)} f(x, y, z)\,dx + \varphi(x, y, z)\,dy + \psi(x, y, z)\,dz,$$

prise, de M_0 en M, le long d'une courbe C. En général, les deux points M_0 et M étant donnés, la valeur de l'intégrale change avec la courbe C, le long de laquelle on intègre. Pour que l'intégrale I soit indépendante de la courbe C et dépende uniquement des points de départ et d'arrivée, il faut et il suffit que la quantité sous le signe $\int$ soit une différentielle totale exacte d'une fonction uniforme de x, y, z, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z},$$

et que l'intégrale U soit uniforme dans la région considérée.

La démonstration de cette proposition est identique à celle que nous avons donnée (n° 288) pour le cas des intégrales prises le long d'une courbe plane.

Remarque. — La formule qui termine le n° 290 et qui donne l'intégrale U d'une différentielle totale, peut s'interpréter géométriquement en remarquant que la différence $U - U_0$ des valeurs de U aux points $M(x, y, z)$ et $M_0(x_0, y_0, z_0)$ s'obtient en calculant l'intégrale I le long du chemin suivant : 1° un segment M_0M' parallèle à Oz du point M_0 de cote z_0 au point M' de cote z; 2° un segment $M'M''$ parallèle à Oy, du point M' d'ordonnée y_0 au point M'' d'ordonnée y; 3° un segment $M''M$ parallèle à Ox du point M'' d'abscisse x_0 au point M d'abscisse x.

293. **Exemple tiré de la Mécanique. Travail.** — Considérons un point matériel M de coordonnées x, y, z, sollicité par une force F ayant pour projections X, Y, Z. Si le point M subit un déplacement infiniment petit MM' de projections dx, dy, dz, on sait que le travail élémentaire correspondant de la force F est donné par l'expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \tag{8}$$

Supposons que la force dépende seulement de la position du point; dans ce cas X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \varphi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z);$$

le travail élémentaire est alors une expression différentielle comme celles que nous venons d'étudier.

Imaginons que le point matériel passe d'une position M_0 à une position M, en suivant une courbe C (*fig.* 161) : on définit alors le travail total $\mathfrak{T}$ de la force F, correspondant à ce déplacement, de la façon suivante : on divise l'arc M_0M en une infinité de parties infiniment petites par des points intermédiaires $M_1, M_2, \ldots, M_n$ et l'on dit que le travail total $\mathfrak{T}$ est la somme des travaux élémentaires de la force, pour les déplacements successifs M_0M_1, $M_1M_2, \ldots, M_nM$. On a ainsi

$$\mathfrak{T} = \int_{(M_0)}^{(M)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz,$$

l'intégrale étant prise le long de la courbe C.

En général, ce travail total $\mathfrak{T}$ dépend, non seulement du point de départ M_0 et du point d'arrivée M, mais aussi du chemin C suivi par le mobile. Pour que $\mathfrak{T}$ soit indépendant du chemin suivi, il faut et il suffit que l'expression $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ soit la différentielle totale exacte d'une fonction uniforme U, c'est-à-dire qu'il existe une fonction uniforme $U(x, y, z)$, telle que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU(x, y, z)$$

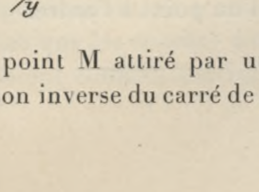
ou, encore,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Quand cette fonction U existe, on l'appelle *fonction des forces*, et l'on dit que les forces *dérivent* d'une fonction des forces. Dans ce cas particulier, le travail total est donné par la formule

$$\mathfrak{T} = \int_{(M_0)}^{(M)} dU = U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0).$$

Fig. 162.



Ainsi, prenons un point M attiré par un centre fixe O, pris comme origine, en raison inverse du carré de la distance (*fig.* 162).

Si l'on appelle r la distance OM, la force F a pour intensité

$$F = \frac{k}{r^2},$$

k désignant une constante positive. Les projections de cette force sur les axes sont

$$X = -\frac{k}{r^2}\frac{x}{r}, \qquad Y = -\frac{k}{r^2}\frac{y}{r}, \qquad X = -\frac{k}{r^2}\frac{z}{r},$$

car les cosinus directeurs de OM sont $\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}$. Actuellement, le travail élémentaire a pour expression

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\frac{k}{r^3}(x\,dx + y\,dy + z\,dz).$$

Mais, comme on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

on en déduit, en différentiant,

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = r\,dr,$$

d'où

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\frac{k}{r^2}\,dr = d\left(\frac{k}{r}\right).$$

Cette expression est donc la différentielle exacte de la fonction

$$U(x, y, z) = \frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Il serait d'ailleurs facile de vérifier que les projections X, Y, Z de la force sont égales aux dérivées partielles de cette fonction U, par rapport à x, y, z respectivement.

Quand, dans cet exemple, le point matériel passe d'une position M_0 à une autre M, le travail total de la force attractive F est

$$\mathfrak{T} = \int_{(M_0)}^{(M)} d\left(\frac{k}{r}\right) = \frac{k}{r} - \frac{k}{r_0},$$

r et r_0 désignant les distances OM et OM_0. Ce travail est indépendant du chemin suivi d'un point à l'autre.

CHAPITRE XV.

INTÉGRALES DOUBLES ET TRIPLES. — APPLICATIONS.

I. — INTÉGRALES DOUBLES.

294. Définition : Évaluation d'un volume. — Nous sommes arrivés à la notion d'intégrale simple, en évaluant l'aire d'un segment de courbe plane et en démontrant que cette aire est la limite de la somme des rectangles infiniment petits inscrits. Nous avons vu d'ailleurs que, réciproquement, toute intégrale simple peut être graphiquement représentée par l'aire d'un segment de courbe plane.

Nous arriverons, de même, à la notion d'intégrale double, en cherchant à évaluer un volume défini comme il suit : considérons, dans le plan des xy, une courbe fermée C, servant de directrice à une surface cylindrique, dont les génératrices sont parallèles à Oz, et proposons-nous de calculer le volume V limité, latéralement, par cette surface cylindrique, inférieurement, par le plan des xy et, supérieurement, par une portion de surface courbe continue S ayant pour équation

$$z = f(x, y).$$

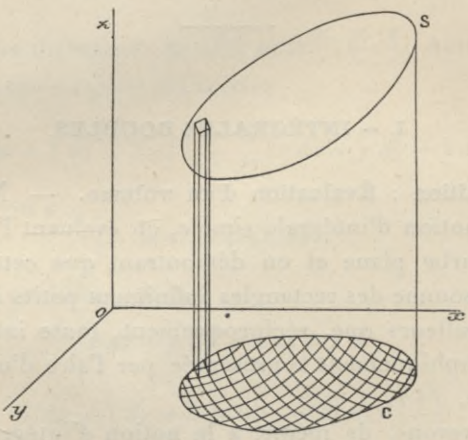
Nous supposerons d'abord que cette portion de surface S est tout entière au-dessus du plan des xy.

Divisons l'aire de la base C en un nombre très grand d'éléments superficiels très petits $\Delta\omega$ (*fig.* 163). Pour effectuer cette division, il suffira d'imaginer qu'on ait tracé sur la base C deux systèmes de courbes telles que les courbes d'un même système soient très rapprochées et soient coupées par les courbes de l'autre : on obtient ainsi une sorte de quadrillage divisant l'aire C en éléments $\Delta\omega$. Soient

$$\Delta\omega_1, \quad \Delta\omega_2, \quad \ldots, \quad \Delta\omega_n$$

les éléments superficiels de l'aire C, obtenus de cette façon. Construisons ensuite des surfaces cylindriques verticales ayant respectivement pour bases les éléments superficiels $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$, ..., et

Fig. 163.



considérons les volumes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ limités, latéralement, par ces surfaces cylindriques, inférieurement, par les éléments plans $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$, ..., $\Delta\omega_n$ et, supérieurement, par la surface courbe donnée S. Il est évident que le volume cherché V est la somme des diverses parties de même nature $v_1, v_2, \ldots, v_n$, dans lesquelles on l'a ainsi divisé :

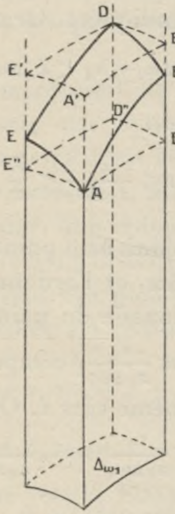
$$\text{(1)} \qquad V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

On peut écrire aussi

$$V = \lim(v_1 + v_2 + \ldots + v_n),$$

car la somme du deuxième membre est constante quel que soit n, et égale à V. Cela posé, nous allons remplacer chacun des volumes élémentaires $v_1, v_2, \ldots, v_n$ par un cylindre élémentaire inscrit de la façon suivante (*fig.* 164). Le volume v_1 est limité inférieurement par l'élément $\Delta\omega_1$ et supérieurement par la portion ABDE de la surface S qui se projette sur $\Delta\omega_1$; appelons Z_1 et z_1 la plus grande et la plus petite valeur que prend l'ordonnée z aux divers points de la portion ABDE de surface S; sur la figure 164, Z_1 serait l'ordonnée du point D et z_1 celle du point A. Menons, par les points D et A, d'ordonnées Z_1 et z_1, des plans horizontaux

Fig. 164.



DE′A′B′ et AB″D″E″; nous formons ainsi deux cylindres ayant pour base commune $\Delta\omega_1$ et pour hauteurs, l'un Z_1, l'autre z_1; le premier de ces cylindres a un volume $Z_1\Delta\omega_1$ supérieur à v_1, on peut l'appeler *cylindre circonscrit;* le deuxième a un volume $z_1\Delta\omega_1$ inférieur à v_1, on peut l'appeler *cylindre inscrit*. De même, nous comprendrons le volume v_2 entre deux cylindres de base $\Delta\omega_2$, l'un circonscrit ayant pour hauteur Z_2, l'autre inscrit ayant pour hauteur z_2, et ainsi de suite.

Nous allons démontrer que le volume V *est la limite de la somme des cylindres inscrits* quand le nombre des divisions $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$, ..., $\Delta\omega_n$, de la base, augmente indéfiniment, chacune de ces aires élémentaires se réduisant *à un point*

$$(2) \qquad V = \lim(z_1\,\Delta\omega_1 + z_2\,\Delta\omega_2 + \ldots + z_n\,\Delta\omega_n).$$

En effet, les sommes

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

$$z_1\,\Delta\omega_1 + z_2\,\Delta\omega_2 + \ldots + z_n\,\Delta\omega_n$$

sont composées d'un même nombre de termes, tous de même signe; pour démontrer qu'elles ont même limite, il suffit de démontrer que le rapport d'un terme de l'une des sommes au terme correspondant de l'autre tend vers 1 quand n augmente indéfiniment dans les conditions indiquées. Or on a

$$z_1\,\Delta\omega_1 < v_1 < Z_1\,\Delta\omega_1;$$

d'où, en divisant par $z_1\,\Delta\omega_1$,

$$1 < \frac{v_1}{z_1\,\Delta\omega_1} < \frac{Z_1}{z_1}.$$

Quand l'élément $\Delta\omega_1$ se réduit à un point P_1, l'ordonnée maximum Z_1 de la surface S dans $\Delta\omega_1$ et l'ordonnée minimum z_1 tendent, l'une et l'autre, vers l'ordonnée du point P_1, P_1M_1, et le rapport $\frac{Z_1}{z_1}$ tend vers 1. Le rapport $\frac{v_1}{z_1\,\Delta\omega_1}$, compris entre 1 et un rapport tendant vers 1, tend lui-même vers 1. On ferait la même démonstration pour les rapports $\frac{v_2}{z_2\,\Delta\omega_2}, \ldots, \frac{v_n}{z_n\,\Delta\omega_n}$. On peut donc écrire

$$V = \lim(z_1\,\Delta\omega_1 + z_2\,\Delta\omega_2 + \ldots + z_n\,\Delta\omega_n),$$

ce qui démontre bien que le volume est la limite vers laquelle tend la somme des cylindres inscrits. On voit que nous sommes ainsi arrivés, par une voie analogue à celle que nous avons suivie pour évaluer l'aire d'un segment de courbe plane (n° 11), à un théorème analogue à celui qui consiste à dire que l'aire d'un segment est la limite de la somme des rectangles inscrits.

Notation. — Pour exprimer que V est la limite de la somme

$$z_1\,\Delta\omega_1 + z_2\,\Delta\omega_2 + \ldots + z_n\,\Delta\omega_n,$$

on écrit

$$V = \int\int z\,d\omega,$$

en mettant deux signes $\int$. On répète deux fois le signe d'intégration parce que, comme nous le verrons plus loin, quand on veut calculer numériquement un volume par cette méthode, on est conduit à calculer successivement deux intégrales simples.

On appelle l'expression

$$\int\int z\,d\omega$$

une *intégrale double* et, pour exprimer qu'il faut faire la somme des produits $z\,d\omega$ correspondant à tous les éléments superficiels de l'aire de la courbe C, on dit que l'*intégrale double est étendue à l'aire de la courbe* C.

Remarque. — On démontrerait de même, que le volume V est la limite de la somme des cylindres circonscrits $Z_1\Delta\omega_1$, $Z_2\Delta\omega_2$, ... On en conclut qu'il est aussi la limite de la somme des cylindres ayant pour bases $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$, ..., $\Delta\omega_n$ et, pour hauteurs respectives, le premier, une ordonnée quelconque de la surface S ayant son pied dans $\Delta\omega_1$; le deuxième, une ordonnée quelconque de la surface S ayant son pied dans $\Delta\omega_2$, ... En effet, la nouvelle somme ainsi formée est comprise évidemment entre les deux sommes

$$z_1\,\Delta\omega_1 + z_2\,\Delta\omega_2 + \ldots + z_n\,\Delta\omega_n$$

et

$$Z_1\,\Delta\omega_1 + Z_2\,\Delta\omega_2 + \ldots + Z_n\,\Delta\omega_n,$$

qui tendent l'une et l'autre vers V. Elle tend donc aussi vers V.

Toutes ces propositions sont résumées par l'équation unique

$$V = \int\int z\,d\omega,$$

qui exprime que, pour avoir le volume, il faut multiplier chaque élément de base infiniment petit $d\omega$ par l'ordonnée correspondante z de la surface et faire la somme des produits ainsi obtenus.

295. **Positions diverses de la surface** S. — Nous avons supposé S, au-dessus du plan xOy, dans l'étendue considérée. Si S était tout entière au-dessous, tous les z seraient négatifs, et, comme les éléments superficiels $d\omega$ sont essentiellement positifs, la somme

$$\int\int z\,d\omega$$

représenterait le volume changé de signe.

Si la surface S était partiellement au-dessus, partiellement au-dessous du plan xOy, la somme

$$\int\int z\, d\omega$$

représenterait la différence entre les deux volumes correspondant aux portions de la surface situées au-dessus du plan des xy et aux portions de cette surface situées au-dessous de ce plan.

Ces considérations sont entièrement analogues à celles que nous avons développées quand nous avons défini la valeur algébrique de l'aire d'un segment de courbe plane (nº 12).

II. — CALCUL D'UNE INTÉGRALE DOUBLE EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES.

296. Méthode générale. — Pour évaluer le volume V limité par la surface

$$z = f(x, y)$$

et la surface cylindrique de base C, nous avons été conduits à l'intégrale double

$$V = \int\int z\, d\omega,$$

étendue à l'aire C. Quand on emploie des coordonnées rectangulaires dans le plan des xy, on divise l'aire C en rectangles infiniment petits par les lignes $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$, c'est-à-dire par des parallèles aux axes de coordonnées, comme le montre la figure 165.

Si l'on appelle Δx et Δy les dimensions d'un de ces rectangles parallèles aux axes Ox et Oy, l'aire $\Delta\omega$ de ce rectangle est

$$\Delta\omega = \Delta x\, \Delta y;$$

le volume V, qui est, en général, la limite de la somme des produitz $z\Delta\omega$, est alors la limite de la somme des produits $z\, \Delta x\, \Delta y$. On écrit dans ce cas

$$V = \int\int z\, dx\, dy$$

ou, en remplaçant z par sa valeur,

$$z = f(x, y),$$

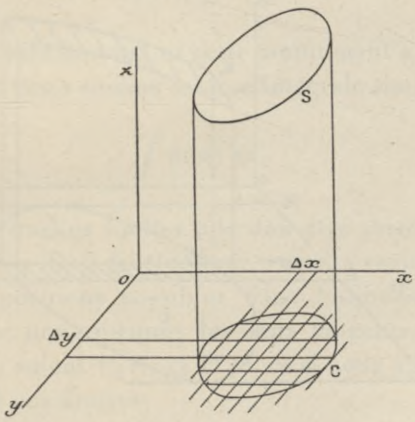
tirée de l'équation de la surface S,

$$V = \int\int f(x, y)\, dx\, dy,$$

l'intégration étant étendue à l'aire de C.

Voici comment on conduira le calcul pour évaluer cette double somme. Le problème est de calculer la somme des volumes des cylindres $z\, dx\, dy$, en prenant successivement pour base, $dx\, dy$, de ces cylindres, tous les rectangles infiniment petits, dans lesquels on a divisé la base C. Commençons (*fig.* 166) par évaluer la

Fig. 165.



somme T de ceux de ces cylindres, qui ont pour bases les éléments superficiels $dx\, dy$, compris entre les deux parallèles PA et P_1A_1, à l'axe Ox, ces parallèles étant supposés infiniment rapprochées et situées à une distance dy l'une de l'autre,

$$OP = y, \qquad OP_1 = y + dy, \qquad dy > 0.$$

La somme T de ces cylindres forme une tranche du volume V, comprise entre les deux plans verticaux, ayant pour traces PA et P_1A_1. L'un quelconque des cylindres de cette tranche a pour volume $z\, dx\, dy$, ou

$$f(x, y)\, dx\, dy;$$

y et dy sont les mêmes, pour tous ces cylindres; on peut donc, dans leur somme, mettre dy en facteur et regarder y comme constant; ce qui donne, pour le volume de la tranche T,

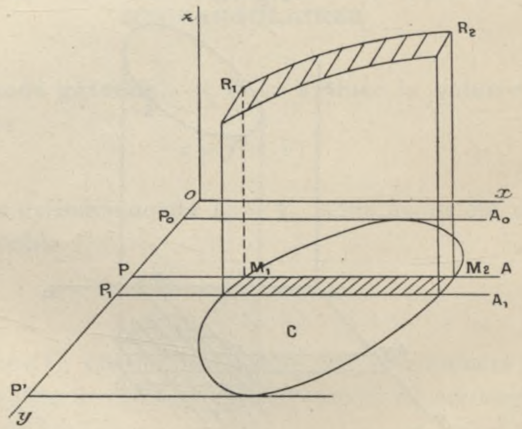
$$T = dy.\ \textit{somme des produits}\ f(x, y)\, dx.$$

Cette somme est une intégrale simple prise par rapport à x, donc

$$T = dy \int f(x, y)\, dx.$$

Il reste à voir entre quelles limites doit être prise cette intégrale simple par rapport à x. La droite AP, située à une distance

Fig. 166.



$OP = y$, entre dans l'aire C par un point M_1, d'abscisse x_1, et en sort par un point M_2, d'abscisse x_2 : ces deux abscisses sont connues, en fonction de y, puisque la courbe C est donnée. Pour obtenir tous les cylindres contenus dans la tranche T, il faut faire la somme des produits $f(x, y)\, dy\, dx$, en laissant dy et y constants et faisant varier x de x_1 à x_2 : on a donc

$$T = dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx.$$

Ainsi la tranche T s'obtient par une quadrature. Cette quadrature étant supposée faite, l'intégrale simple

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx$$

est une fonction connue de y, car y figure sous le signe $\int$ et les limites x_1 et x_2 sont fonctions de y. On peut donc poser, pour abréger,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx = \psi(y).$$

La tranche considérée T, comprise entre les plans verticaux ayant pour traces PA et P_1A_1, est donc

$$T = \psi(y)\,dy.$$

Pour avoir le volume total, il reste maintenant à faire la somme de ces tranches : cette somme est une intégrale simple

$$\int \psi(y)\,dy.$$

Voyons entre quelles limites elle doit être prise. Pour obtenir toutes les tranches T, il faut donner, successivement, à la droite PA toutes les positions possibles dans lesquelles elle traverse l'aire C. Si donc nous menons les deux tangentes à la courbe C parallèles à Ox, soient P_0A_0 et $P'A'$, et si nous appelons y_0 et y' les ordonnées de ces droites

$$\overline{OP_0} = y_0, \qquad \overline{OP'} = y',$$

il faut faire varier $\overline{OP} = y$ entre ces deux limites. On a donc, finalement, pour V, somme de toutes les tranches T,

$$V = \int_{y_0}^{y'} \psi(y)\,dy,$$

où $\psi(y)$ a la signification suivante :

$$\psi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx.$$

On peut écrire aussi la formule finale

$$V = \int_{y_0}^{y'} dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx,$$

formule qu'il faut comprendre comme il suit : on calcule d'abord $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx$; cette intégrale est une fonction de y; on multiplie ensuite cette fonction de y par dy et l'on intègre de y_0 à y'.

Quand on évalue ainsi le volume, en rangeant les cylindres élémentaires $z\, dx\, dy$, par files parallèles au plan des zx, on dit qu'on intègre d'abord par rapport à x, parce que la première intégrale à calculer,

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)\, dx,$$

est une intégrale par rapport à x. La deuxième intégration se fait par rapport à y.

Il est évident qu'on pourrait opérer dans un ordre inverse, en intégrant d'abord par rapport à y, c'est-à-dire en calculant d'abord une tranche du solide comprise entre deux plans parallèles au plan yOz, d'abscisses x et $x + dx$, puis en faisant la somme de ces tranches.

297. **Premier exemple.** — Considérons la surface

$$z = xy.$$

Prenons comme courbe C, dans le plan des xy, un demi-cercle DEF, ayant son centre H sur Ox, à une distance $OH = 2$ et pour rayon 1 (*fig.* 167). Le demi-cercle a pour équation

$$\text{(C)} \qquad (x - 2)^2 + y^2 = 1.$$

Le volume cherché V est limité, latéralement, par la surface cylindrique ayant ce demi-cercle pour directrice, en bas par le plan des xy, en haut par la surface

$$z = xy.$$

On a

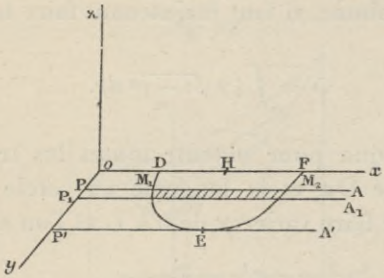
$$V = \int\int z\, dx\, dy = \int\int xy\, dx\, dy,$$

l'intégrale étant étendue au demi-cercle C. Prenons d'abord la somme T des cylindres élémentaires

$$xy\,dx\,dy,$$

dont les bases $dx\,dy$ sont comprises entre les deux parallèles

Fig. 167.



à Ox, PA et P_1A_1, d'ordonnées y et $y+dy$. Nous aurons ainsi une tranche du solide

$$T = dy\int xy\,dx;$$

dans cette tranche, y et dy sont constants; x varie depuis x_1, abscisse du point d'entrée M_1 de la droite PA, jusqu'à x_2, abscisse du point de sortie. Donc

$$T = dy\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx.$$

Les limites x_1 et x_2 sont des fonctions de y, fournies par l'équation du demi-cercle C,

$$x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0,$$

dans laquelle y a la valeur OP. On a donc

$$x_1 = 2 - \sqrt{1-y^2}, \qquad x_2 = 2 + \sqrt{1-y^2},$$
$$x_2 + x_1 = 4, \qquad x_2 - x_1 = 2\sqrt{1-y^2}.$$

L'intégrale indéfinie $\int xy\,dx$ est $\frac{x^2y}{2}$ et l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2} xy\,dx = \frac{y}{2}(x_2^2 - x_1^2).$$

Remplaçant x_1 et x_2 par leur valeurs, on a

$$4y\sqrt{1-y^2}.$$

C'est là la fonction $\psi(y)$ du cas général. La tranche T est donc

$$T = 4y\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

Pour avoir le volume, il faut maintenant faire la somme de ces tranches,

$$V = \int 4y\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

On remarque que pour obtenir toutes les tranches, il faut déplacer PA entre Ox et la tangente au cercle P′A′, parallèle à Ox; il faut donc faire varier y de 0 à 1, et l'on a

$$V = \int_0^1 4y\sqrt{1-y^2}\,dy.$$

L'intégrale indéfinie s'obtient immédiatement, car $4y\,dy$ est, à un facteur numérique près, la différentielle de $1-y^2$, de sorte qu'on peut écrire

$$-2\int (1-y^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1-y^2);$$

l'intégrale indéfinie est donc

$$-\frac{4}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}};$$

et l'intégrale définie entre les limites $y=0$ et $y=1$, est

$$V = \frac{4}{3}.$$

298. Deuxième exemple. — Prenons comme base d'une surface cylindrique le triangle OEF, limité par les axes Ox, Oy et par la droite EF (*fig.* 168) ayant pour équation

$$x+y-1=0;$$

puis, considérons le volume limité par cette surface cylindrique, le plan des xy et la surface

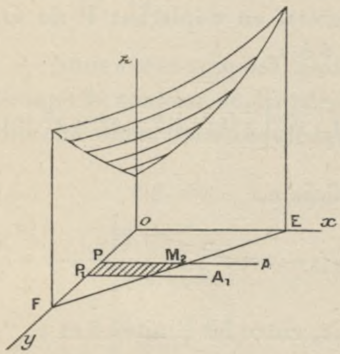
$$z = 2x^2+y^2+1.$$

Le volume V est donné par la formule

$$V = \int\int (2x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire du triangle OEF. Évaluons d'abord la somme des cylindres élémentaires $(2x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy$, compris

Fig. 168.



entre les deux droites PA et P_1A_1, parallèles à Ox, ayant pour ordonnées y et $y + dy$. Cette somme est une tranche T du volume donnée par

$$dy \int (2x^2 + y^2 + 1)\, dx;$$

les limites de cette intégrale sont les abscisses x_1 et x_2 des points P et M_2 où la droite PA, d'ordonnée y, coupe le contour de l'aire de base OEF; on a donc

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 1 - y,$$

comme il résulte de l'équation de la droite EF. Ainsi,

$$T = dy \int_0^{1-y} (2x^2 + y^2 + 1)\, dx.$$

L'intégrale indéfinie est

$$\frac{2x^3}{3} + y^2 x + x,$$

et l'intégrale définie, entre les limites o et $1 - y$,

$$\frac{2}{3}(1-y)^3 + y^2(1-y) + 1 - y.$$

Donc

$$T = dy\left[\frac{2}{3}(1-y)^3 + y^2 - y^3 + 1 - y\right].$$

Pour avoir le volume tout entier, il faut faire la somme de toutes les tranches analogues, en déplaçant P de O en F, c'est-à-dire faisant varier y de o à 1,

$$V = \int_0^1 dy\left[\frac{2}{3}(1-y)^3 + y^2 - y^3 + 1 - y\right].$$

L'intégrale indéfinie est

$$-\frac{1}{6}(1-y)^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + y - \frac{1}{2}y^2,$$

et l'intégrale définie, entre les limites o et 1,

$$V = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

299. Interprétation géométrique du calcul. — Si nous reprenons le cas général, nous pouvons vérifier que la méthode actuelle, pour le calcul des volumes, revient au fond à celle qui a été exposée au n° 48 et qui consiste à regarder un volume comme la somme des tranches infiniment minces, obtenues en le coupant par des plans parallèles à un plan fixe.

En effet, l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx,$$

ou

$$\int_{x_1}^{x_2} z\,dx,$$

représente l'aire de la section $M_1R_1R_2M_2$, faite dans le volume V, par le plan vertical, de trace PA (*fig.* 166). Cette aire est une fonction $\psi(y)$ de l'ordonnée $OP = y$. La tranche comprise entre les deux plans verticaux de traces AP et A_1P_1 peut être assimilée à un cylindre ayant pour base la section $\psi(y)$ et pour hauteur $PP_1 = dy$; son volume est donc

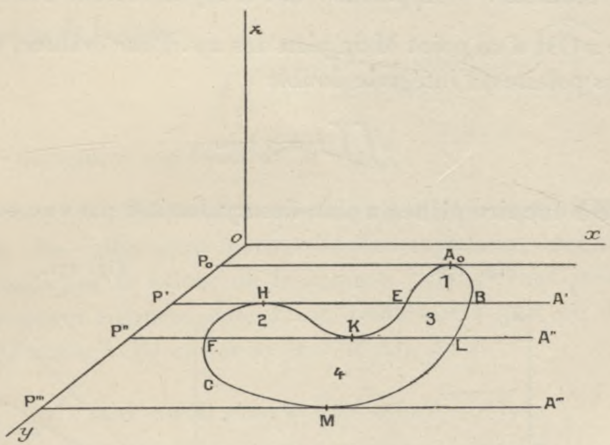
$$T = \psi(y)\,dy.$$

Le volume V est alors la somme de ces tranches

$$V = \int_{y_0}^{y'} \psi(y)\,dy.$$

300. **Remarque.** — Nous avons supposé, pour simplifier, qu'une parallèle PA à Ox coupe le contour de l'aire, à laquelle est étendue l'intégrale double, en deux points seulement, M_1 et M_2. Si la

Fig. 169.



courbe C a une forme plus compliquée, il peut arriver que la parallèle PA à Ox la coupe en un nombre quelconque de points nécessairement pair.

Mais alors on peut toujours, par des lignes transversales, décomposer l'aire C en d'autres $C_1, C_2, \ldots, C_n$ limitées par des contours, qui sont rencontrés chacun en deux points seulement par des parallèles à Ox. On calculera les valeurs $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de l'intégrale double, pour chacune de ces aires partielles, et il ne restera plus qu'à faire la somme des résultats, $I_1 + I_2 + \ldots + I_n$.

Supposons, par exemple, que la courbe C ait la forme de la figure 169. Menons à cette courbe des tangentes $P_0 A_0$, $P' A'$, $P'' A''$,

$P'''A'''$, parallèles à Ox : elles partagent l'aire en quatre parties 1, 2, 3, 4, qui sont : 1, la partie EA_0B; 2, la partie FHK; 3, la partie KEBL; 4, la partie FKLM.

Le contour de chacune de ces parties n'est rencontré qu'en deux points par les parallèles à Ox. On calculera les valeurs I_1, I_2, I_3, I_4 de l'intégrale double étendue successivement à ces quatre parties. L'intégrale étendue à l'aire entière sera

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

III. — CALCUL D'UNE INTÉGRALE DOUBLE EN COORDONNÉES POLAIRES.

301. **Méthode.** — Appelons r et θ le rayon vecteur OM et l'angle polaire $\widehat{xOM}$ d'un point M du plan des xy. Pour évaluer, en coordonnées polaires, l'intégrale double

$$\iint f(x, y)\, d\omega,$$

étendue à une aire plane du plan des xy, limitée par une courbe C,

Fig. 170.

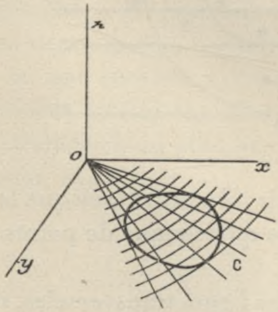
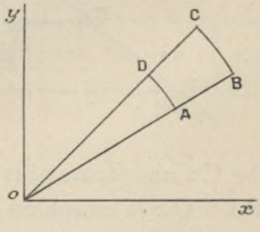


Fig. 171.



on décompose cette aire en éléments superficiels infiniment petits $d\omega$ par les deux familles de courbes (*fig.* 170)

$$r = \text{const.}, \qquad \theta = \text{const.}$$

Les courbes $r = \text{const.}$ sont des cercles de centre O; les courbes $\theta = \text{const.}$ sont des droites issues de l'origine. Un élément superficiel $d\omega$ ainsi obtenu est un rectangle curviligne ABCD (*fig.* 171) limité par deux droites OAB et ODC, faisant entre elles l'angle infiniment petit $d\theta$, et par deux arcs de cercle BC et AD, ayant pour centre O et pour rayons respectifs $r + dr$ et r. Cet élément infiniment petit peut être assimilé à un rectangle ABCD, dont les côtés sont $AB = dr$ et $AD = r\,d\theta$; sa surface est donc

$$d\omega = r\,d\theta\,dr.$$

Comme, d'ailleurs,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

l'intégrale double s'écrit

$$\iint f(x,y)\,d\omega = \iint f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)r\,d\theta\,dr,$$

expression de la forme

$$\iint \varphi(r,\ \theta)r\,d\theta\,dr,$$

$\varphi(r,\ \theta)$ désignant une fonction de r et θ.

Remarque. — En écrivant que l'aire ABCD est égale à AB.AD on néglige des infiniment petits d'ordre supérieur, qui n'ont pas d'influence sur la valeur de la somme. Si l'on veut présenter le raisonnement rigoureusement, on remarquera que, en désignant par $\Delta\theta$ l'angle AOD et par Δr le côté AB, on a

$$\text{aire ABCD} = \Delta\omega = \frac{1}{2}[(r+\Delta r)^2 - r^2]\Delta\theta,$$

car l'aire $\Delta\omega$ est la différence des deux secteurs OBC et OAD. En réduisant,

$$\Delta\omega = \left(r\,\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r^2\right)\Delta\theta.$$

L'intégrale

$$\iint \varphi(r,\ \theta)\,d\omega$$

est alors la limite de la somme

$$\Sigma\varphi(r,\ \theta)\left(r\,\Delta r + \frac{1}{2}\Delta r^2\right)\Delta\theta.$$

Cette limite est la même que celle de la somme plus simple

$$\Sigma \varphi(r, \theta) r \Delta r \Delta\theta,$$

car le rapport de deux termes correspondants de ces deux sommes

$$\frac{r \Delta r + \frac{1}{2} \Delta r^2}{r \Delta r} = 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta r}{r}$$

tend vers 1, quand Δr et $\Delta\theta$ tendent vers zéro. Le volume est donc donné par la limite de la somme

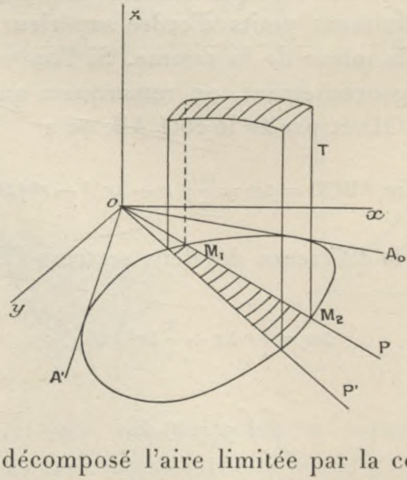
$$\Sigma \varphi(r, \theta) r \Delta r \Delta\theta,$$

ce qu'on exprime en disant qu'il est donné par l'intégrale double

$$\iint \varphi(r, \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Calcul de l'intégrale. — Pour calculer, effectivement, l'intégrale, c'est-à-dire pour faire la somme des cylindres élémentaires $\varphi(r, \theta) r \, d\theta \, dr$, relatifs à toutes les aires élémentaires $d\omega$ dans

Fig. 172.



lesquelles on a décomposé l'aire limitée par la courbe C, faisons d'abord la somme des cylindres compris, entre deux rayons OP et OP', faisant, avec Ox, les angles polaires xOP $= \theta$, xOP' $= \theta + d\theta$, où $d\theta$ est infiniment petit positif (*fig.* 172).

Nous obtiendrons ainsi une tranche T du volume, tranche comprise entre les deux plans zOP et zOP'. Cette tranche est une somme de termes de la forme

$$T = \Sigma \varphi(r, \theta) r\, d\theta\, dr,$$

dans laquelle $d\theta$ est le même pour tous les termes ainsi que θ. On peut donc écrire

$$T = d\theta\, \Sigma \varphi(r, \theta) r\, dr,$$

r seul variant d'un terme au suivant.

Supposons l'origine O extérieure à la base C ou située sur la courbe limite C. Si l'on appelle M_1 et M_2 les points où le rayon OP coupe la courbe limite C, r_1 et r_2 les rayons vecteurs OM_1 et OM_2 de ces deux points, il faudra, dans la somme

$$d\theta\, \Sigma \varphi(r, \theta) r\, dr,$$

faire varier r de r_1 à r_2 : cette somme Σ est alors une intégrale simple prise, par rapport à r, de r_1 à r_2, et l'on a

$$T = d\theta \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r, \theta) r\, dr.$$

Les limites r_1 et r_2 sont des fonctions de θ, définies par la forme de la courbe limite. L'intégrale

$$\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r, \theta) r\, dr$$

est donc une fonction $\psi(\theta)$ et l'on a finalement

$$T = d\theta\, \psi(\theta).$$

Après avoir évalué ainsi la tranche T, il faut faire la somme de toutes les tranches analogues, obtenues en faisant varier θ. Si l'on mène, de l'origine, les tangentes à la courbe C, OA_0 et OA', faisant avec Ox des angles θ_0 et θ', il faudra faire varier θ de θ_0 à θ'. La somme des tranches T, c'est-à-dire le volume V, est alors

$$V = \Sigma T = \int_{\theta_0}^{\theta'} \psi(\theta)\, d\theta.$$

Le volume s'obtient donc par deux quadratures successives.

En remplaçant $\psi(\theta)$ par sa valeur

$$\int_{r_1}^{r_2} \varphi(r, \theta) r \, dr,$$

on peut écrire

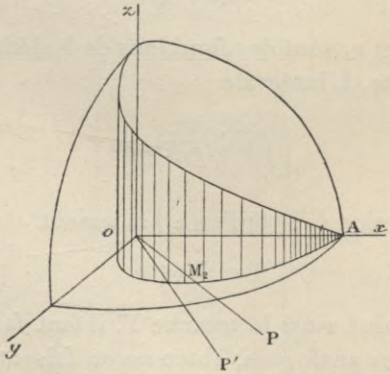
$$V = \int_{\theta_0}^{\theta'} d\theta \int_{r_1}^{r_2} \varphi(r, \theta) r \, dr,$$

où il faut commencer par calculer l'intégrale de droite : cette intégrale étant calculée, on la multiplie par $d\theta$ et l'on intègre par rapport à θ, de θ_0 à θ'.

Quand on opère ainsi, on dit qu'on intègre d'abord par rapport à r, puis par rapport à θ.

302. Exemple. — Soit une sphère, dont le centre est à l'origine et dont le rayon a une longueur a. La figure 173 représente le huitième de cette sphère. Dans le plan des xy, sur le rayon OA (dirigé suivant Ox) comme diamètre, décrivons un demi-cercle C.

Fig. 173.



Nous allons calculer le volume du cylindre qui a pour base ce demi-cercle et qui est limité supérieurement par la sphère. L'équation de la surface étant

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

on a

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

et, en coordonnées polaires dans le plan des xy,

$$z = \sqrt{a^2 - r^2}.$$

Le volume V est alors

$$V = \iint z\,d\omega = \iint \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr\,d\theta,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire du demi-cercle de base. Soient OP et OP′ deux rayons infiniment voisins faisant, avec Ox, les angles θ et $\theta + d\theta$. La tranche T du solide, comprise entre les plans zOP et zOP′, est

$$T = d\theta \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr,$$

r_1 et r_2 étant les rayons vecteurs des deux points M_1 et M_2 où OP rencontre la demi-circonférence limite. Le point M_1 est évidemment en O, $r_1 = 0$. Quant au rayon vecteur $r_2 = OM_2$, le triangle rectangle AOM_2 donne immédiatement

$$r_2 = a\cos\theta$$

(équation polaire de la demi-circonférence de base). On a donc

$$T = d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2 - r^2}\,r\,dr.$$

L'intégrale indéfinie étant

$$-\frac{1}{3}(a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}},$$

l'intégrale définie est

$$-\frac{1}{3}a^3\sin^3\theta + \frac{1}{3}a^3.$$

Donc

$$T = \frac{1}{3}a^3(1 - \sin^3\theta)\,d\theta.$$

Le volume est la somme des tranches T : pour les obtenir toutes il faut faire tourner le rayon OP de Ox jusqu'à Oy, c'est-à-dire faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Donc

$$V = \Sigma T = \frac{1}{3}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\theta)\,d\theta.$$

En écrivant

$$\sin^3\theta = (1 - \cos^2\theta)\sin\theta,$$

on voit que l'intégrale indéfinie est

$$\theta + \cos\theta - \frac{1}{3}\cos^3\theta$$

et l'intégrale définie

$$\frac{\pi}{2} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}.$$

Donc, enfin,

$$V = \frac{1}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

La différence entre le huitième de la sphère, figuré dans la figure 173, et ce volume est

$$\frac{\pi a^3}{6} - V = \frac{2}{9}a^3.$$

303. **Remarque.** — Si un rayon vecteur, issu de O, coupait la courbe C en plus de deux points, il la couperait en un nombre pair de points : il entrerait dans C en M_1, sortirait en M_2, rentrerait en M_3, ressortirait en M_4, ... Il faudrait alors intégrer par rapport à r de r_1 à r_2, puis de r_3 à r_4, ...

304. **Modifications à apporter au calcul précédent, quand l'origine est dans le champ d'intégration.** — Nous avons supposé O en dehors de la base C; quand O est dans la base, il faut modifier évidemment les valeurs des limites des deux intégrations. Tout d'abord (*fig.* 174), pour avoir une tranche du volume comprise entre deux rayons vecteurs OP et OP′, faisant entre eux l'angle $d\theta$, il faut faire la somme des cylindres $\varphi(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr$, en faisant varier r de o (point O) jusqu'à r_2 (point M_2 où OP sort de l'aire C),

$$T = d\theta\int_0^{r_2}\varphi(r,\theta)\,r\,dr.$$

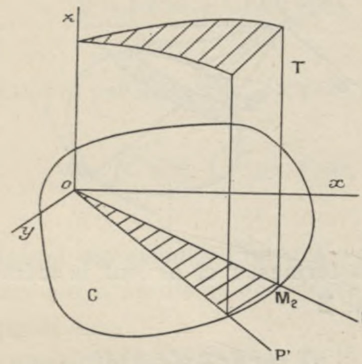
Dans cette intégrale, r_2 est une fonction de θ donnée par l'équation de la courbe C. On trouve donc, en supposant l'intégration faite,

$$T = \psi(\theta)\,d\theta.$$

Il faut ensuite faire la somme de toutes les tranches analogues. Il est évident que, pour les obtenir toutes, il faut maintenant faire varier θ de o à 2π. On a donc finalement

$$V = \int_0^{2\pi} \psi(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r_2} \varphi(r, \theta)\, r\, dr,$$

Fig. 174.



où il faut calculer d'abord *l'intégrale de droite*, prise par rapport à r.

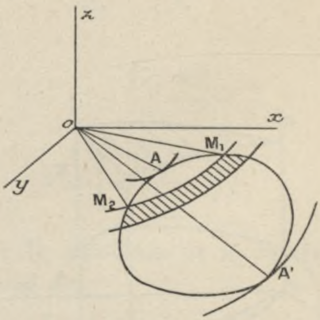
305. **Autre façon de calculer une intégrale double en coordonnées polaires.** — Au lieu de commencer par faire la somme des éléments compris entre deux rayons faisant entre eux un angle infiniment petit $d\theta$, on peut commencer par faire la somme des éléments de l'intégrale compris entre deux cercles de centre O et de rayons r et $r + dr$. Supposons, pour fixer les idées, O extérieur à la base ou situé sur la courbe limite. Considérons (*fig.* 175) un cercle de rayon r, coupant la courbe limite C aux deux points M_1 et M_2, et appelons θ_1 et θ_2 les angles polaires correspondants xOM_1 et xOM_2. Considérons ensuite le cercle infiniment voisin de rayon $r + dr$. Ces deux cercles découpent, dans la courbe de base, une tranche ayant la forme d'une couronne; nous allons calculer d'abord la somme des éléments de l'intégrale

$$\varphi(r, \theta)\, r\, d\theta\, dr,$$

situés dans cette tranche. Il faudra faire une somme de termes tels que

$$T = \Sigma\, \varphi(r, \theta) r\, d\theta\, dr;$$

Fig. 175.



mais, pour tous ces termes, r et dr ont la même valeur, et l'on peut écrire la somme Σ

$$T = r\, dr \Sigma\, \varphi(r, \theta)\, d\theta;$$

l'angle polaire θ varie seul d'un élément à l'autre de la tranche T, et il varie de θ_1 à θ_2. On a donc

$$T = r\, dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi(r, \theta)\, d\theta.$$

Les angles limites θ_1 et θ_2 sont des fonctions du rayon r du cercle $M_1 M_2$; l'intégrale

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi(r, \theta)\, d\theta$$

est donc une fonction de r, $\psi(r)$, et l'on a

$$T = r\, dr\, \psi(r).$$

On a ainsi la partie T de la somme correspondant à la couronne considérée; il faut ensuite faire la somme de toutes les couronnes ainsi obtenues, en faisant varier r de façon à balayer toute l'aire de la courbe C. Si l'on fait décroître r, on voit que la plus petite valeur de r est le rayon r_0 d'un cercle tangent, en A, à la courbe du côté de O; si, au contraire, on fait croître r, on voit que la plus grande valeur de r est le rayon r' d'un cercle tangent en A' à la courbe du côté opposé à O. On aura donc toutes les tranches auxiliaires telles que T, en faisant varier r de r_0 à r', et la somme de toutes ces tranches sera

$$V = \Sigma T = \int_{r_0}^{r'} r\,dr\,\psi(r).$$

En remplaçant $\psi(r)$ par sa valeur, on peut écrire aussi

$$V = \int_{r_0}^{r'} r\,dr \int_{\theta_1}^{\theta_2} \varphi(r, \theta)\,d\theta,$$

où il faut commencer par calculer l'intégrale de droite.

Quand on opère ainsi, on dit qu'on intègre d'abord par rapport à θ, puis par rapport à r.

Nous avons supposé le pôle O hors de la courbe C ou sur la courbe. S'il était dans l'intérieur, il y aurait deux sortes de couronnes suivant les valeurs attribuées à r :

1° Pour r pris au-dessous d'une certaine limite r_0, on aurait des couronnes fermées situées tout entières dans l'aire. Pour évaluer la tranche correspondante T, il faudra intégrer par rapport à θ de o à 2π

$$T = r\,dr \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta)\,d\theta;$$

on fera ensuite la somme des tranches annulaires T de cette première sorte, en faisant varier r de o à r_0,

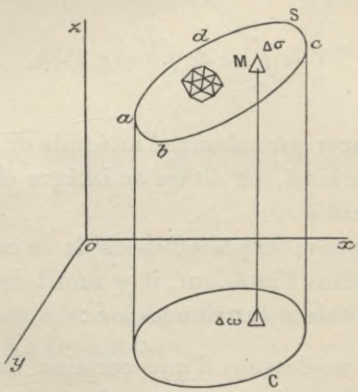
$$\int_0^{r_0} r\,dr \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta)\,dr.$$

2° Si l'on prend ensuite r plus grand que r_0, on obtient des cercles coupant la courbe en deux points M_1 et M_2, et la partie correspondante du volume s'évalue comme dans le cas de la figure 175.

IV. — AIRE D'UNE SURFACE COURBE.

306. Aire d'une surface courbe. — L'évaluation de l'aire d'une portion quelconque d'une surface courbe conduit au calcul d'une intégrale double étendue à une aire plane. Considérons une portion de surface courbe, limitée par un contour *abcd* : pour évaluer l'aire de cette surface, inscrivons dans la surface une surface polyédrale à facettes planes (*fig.* 176). L'aire de la surface courbe

Fig. 176.



est la limite vers laquelle tend la surface du polyèdre inscrit quand, le nombre des faces augmentant indéfiniment, chacune d'elles tend vers zéro en se réduisant à un point M, de telle façon que son plan tende vers le plan tangent, en M, à la surface courbe.

Soit $\Delta\sigma$ l'aire d'une des facettes du polyèdre, l'aire S de la surface courbe est

$$S = \lim \Sigma\, \Delta\sigma,$$

le signe Σ indiquant qu'il faut faire la somme de toutes les facettes du polyèdre. On écrit, pour abréger,

$$S = \iint d\sigma,$$

$d\sigma$ désignant une facette infiniment petite.

Si l'on projette la surface courbe sur le plan des xy, le contour *abcd* se projette suivant une courbe C. Nous supposerons, pour simplifier, que la surface courbe se projette tout entière dans l'intérieur de C et que toute parallèle à Oz, ayant son pied à l'intérieur de C, coupe la surface courbe en un seul point. Si ces conditions n'étaient pas remplies, on pourrait toujours découper la surface courbe, en morceaux remplissant séparément ces conditions.

Les faces du polyèdre inscrit se projettent suivant des éléments d'aire du contour fermé C. La face $\Delta\sigma$, par exemple, se projette sur le plan des xy suivant une aire plane $\Delta\omega$, et l'on a

$$\Delta\omega = \Delta\sigma \cos\alpha, \qquad \Delta\sigma = \frac{\Delta\omega}{\cos\alpha},$$

α désignant l'angle aigu du plan de la face $\Delta\sigma$ avec le plan des xy; on a alors

$$S = \lim \Sigma\, \Delta\sigma = \lim \sum \frac{\Delta\omega}{\cos\alpha}.$$

Quand la face $\Delta\sigma$ se réduit à un point M de la surface courbe et que le plan de $\Delta\sigma$ tend vers le plan tangent en M, α tend vers l'angle que fait le plan tangent en M avec le plan des xy, c'est-à-dire l'angle aigu $\widehat{N, z}$ que fait la normale en M à la surface avec l'axe Oz. On en conclut que l'on a aussi

$$S = \lim \sum \frac{\Delta\omega}{\cos(N, z)},$$

la somme étant étendue à tous les éléments superficiels de la courbe plane C. En effet, dans ces deux sommes,

$$\sum \frac{\Delta\omega}{\cos\alpha}, \quad \sum \frac{\Delta\omega}{\cos(N, z)},$$

le rapport des termes correspondants est $\frac{\cos\alpha}{\cos(N, z)}$; il tend vers 1, quand les éléments $\Delta\omega$ tendent vers zéro, en se réduisant à des points, car α tend vers (N, z). On a donc

$$S = \int\!\!\int \frac{d\omega}{\cos(N, z)},$$

l'intégrale étant étendue à l'aire de la courbe fermée C.

Le facteur $\frac{1}{\cos(N, z)}$ est aisé à évaluer. En effet, l'équation du plan tangent, en un point de la surface courbe, étant

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

le cosinus de l'angle aigu de ce plan avec le plan des xy, est

$$\cos(N, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

on a donc

$$S = \int\int \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\omega.$$

Comme z est une fonction donnée de x et y,

$$z = f(x, y),$$

p et q sont des fonctions connues de x et y, et l'on a

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = F(x, y),$$

$F(x, y)$ étant une fonction connue. L'aire courbe est alors une intégrale de la forme

$$S = \int\int F(x, y)\, d\omega,$$

étendue à l'aire plane C. On évaluera cette intégrale comme nous l'avons fait plus haut, en prenant soit des coordonnées rectangulaires, soit des coordonnées polaires.

307. **Exemple : Aire d'une portion de surface sphérique.** — Prenons une sphère de centre O et de rayon a

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$

et, sur cette sphère, un contour fermé E, se projetant sur le plan des xy, suivant la courbe fermée C. Évaluons l'aire S située dans ce contour E. Actuellement, en différentiant le premier membre de l'équation de la sphère par rapport à x, on a

$$x + pz = 0;$$

et, en différentiant par rapport à y,

$$y + qz = 0.$$

Donc

$$p = -\frac{x}{z}, \qquad q = -\frac{y}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}} = \frac{a}{z},$$

en supposant, comme dans la figure 173, z positif pour les points de l'aire E. Alors

$$S = a \int\int \frac{1}{z}\, d\omega = a \int\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\, d\omega,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire plane C.

Il est d'ailleurs évident, géométriquement, que $\cos(N, z) = \frac{z}{a}$, car, en joignant le point O à un point M de la surface sphérique, on obtient la normale, en M, faisant avec Oz un angle (N, z). Écrivant que la projection de OM sur Oz est z, on a

$$z = a \cos(N, z), \qquad \frac{1}{\cos(N, z)} = \frac{a}{z}.$$

Supposons, par exemple, que la courbe C soit la demi-circonférence décrite, dans le plan des xy, sur OA comme diamètre (*fig.* 173). Pour évaluer l'aire sphérique qui se projette dans cette demi-circonférence C, nous calculerons l'intégrale double précédente, en prenant des coordonnées polaires r et θ dans le plan des xy. Nous aurons

$$z = \sqrt{a^2-r^2}, \qquad d\omega = r\, d\theta\, dr,$$

$$S = a \int\int \frac{r\, d\theta\, dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

Intégrons d'abord, par rapport à r, en évaluant la partie T de la somme correspondant aux éléments situés entre deux rayons OP et OP′ faisant avec Ox les angles θ et $\theta + d\theta$. Pour tous ces éléments, θ et $d\theta$ sont les mêmes et r varie de o à $OM_2 = a\cos\theta$, M_2 étant le point où OP rencontre la demi-circonférence; la somme des éléments considérés est donc

$$T = a\, d\theta \int_0^{a\cos\theta} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2-r^2}}.$$

L'intégrale indéfinie étant $-\sqrt{a^2-r^2}$, on a

$$T = a\,d\theta(-a\sin\theta + a).$$

Reste à faire la somme des tranches d'éléments telles que T en faisant varier le rayon OP depuis la position Ox jusqu'à Oy, de façon à balayer toute l'aire du demi-cercle. Il faut, pour cela, faire varier θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$. On a donc enfin

$$S = \Sigma T = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\,d\theta.$$

L'intégrale indéfinie est $\theta + \cos\theta$ et l'intégrale définie $\frac{\pi}{2} - 1$. Donc

$$S = a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Théorème de Viviani. — *La courbe* E, *limitant sur la sphère l'aire* S, *divise le huitième de la sphère représentée sur la figure* 173 *en deux parties : la partie intérieure à* E *a pour surface* S ; *la partie extérieure a pour surface le huitième de la surface sphérique totale, moins* S,

$$\frac{\pi a^2}{2} - S = a^2.$$

Cette partie extérieure est donc équivalente au carré de côté a.

308. **Autre exemple général d'intégrale double.** — Soit une portion de surface courbe, limitée par un contour *abcd* (*fig.* 176) qui se projette horizontalement en C. Soit, d'autre part, ψ une fonction continue, ayant une valeur déterminée, en chaque point de la surface. Divisons la surface en éléments superficiels infiniment petits $d\sigma$ et considérons la somme des produits obtenus, en multipliant l'étendue $d\sigma$ de chaque élément par la valeur de ψ sur cet élément. Cette somme est une intégrale double

$$\int\int \psi\,d\sigma.$$

On peut la ramener à une intégrale double étendue à la projection de la surface sur le plan des xy, projection limitée par la courbe C.

En effet, en appelant $d\omega$ la projection de $d\sigma$ sur le plan des xy et (N, z) l'angle aigu du plan tangent à la surface au point limite de $d\sigma$ avec le plan des xy, on a

$$d\omega = d\sigma \cos(N, z);$$

d'où

$$\int\int \psi \, d\sigma = \int\int \frac{\psi}{\cos(N, z)} d\omega.$$

Comme plus haut,

$$\cos(N, z) = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

est une fonction de x et y; la fonction ψ, étant connue en chaque point M de la surface, est aussi une fonction des coordonnées x et y de ce point. Donc on a, finalement, à calculer une intégrale double de la forme

$$\int\int F(x, y) \, d\omega,$$

étendue à l'aire plane limitée par la courbe C. On la calculera, comme précédemment, en employant des coordonnées rectangulaires ou des coordonnées polaires.

V. — APPLICATION. — INTÉGRALES EULÉRIENNES. INTÉGRALES DE FRESNEL.

309. **Intégrale eulérienne de première espèce.** — Soient a et b deux constantes positives; on appelle *intégrale eulérienne de première espèce* l'intégrale

$$(1) \qquad B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1} \, du.$$

Cette intégrale a un sens tant que a et b sont positifs : elle devient infinie si l'un des nombres a et b est *nul* ou *négatif* (n[os] 128 et 129).

La valeur de l'intégrale ne change pas, quand on permute a

et b. En effet, si l'on change de variable en faisant

$$u = 1 - v, \qquad du = -dv,$$

les limites deviennent 1 et 0; en intervertissant ces limites et changeant le signe, on a l'intégrale

$$B(a, b) = \int_0^1 v^{b-1}(1-v)^{a-1}\,dv,$$

c'est-à-dire, puisque la valeur d'une intégrale définie ne dépend pas de la variable d'intégration,

$$B(a, b) = B(b, a).$$

Faisons encore le changement de variable

$$u = \sin^2\theta, \qquad du = 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta.$$

Les limites deviennent 0 et $\frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$B(a, b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\theta\cos^{2b-1}\theta\,d\theta.$$

Par exemple, en faisant

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \frac{1}{2},$$

on a

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

On ramène le calcul de ces intégrales au calcul d'intégrales ne dépendant que d'un paramètre de la façon suivante.

310. Intégrale eulérienne de deuxième espèce. — Soit a une constante positive; on appelle *intégrale eulérienne de deuxième espèce* l'intégrale définie

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty u^{a-1}e^{-u}\,du. \tag{2}$$

Cette intégrale devient *infinie*, quand a est nul ou négatif (n° 129). En faisant

$$u = x^2, \qquad du = 2x\,dx,$$

on a aussi

$$\Gamma(a) = 2\int_0^\infty x^{2a-1} e^{-x^2}\, dx.$$

Voici quelques théorèmes sur ces intégrales :

1° *On a*

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1). \tag{3}$$

En effet, supposons $(a-1)$ positif, écrivons

$$\Gamma(a) = -\int_0^\infty u^{a-1}\, de^{-u},$$

et intégrons par parties, nous aurons

$$\Gamma(a) = -\left| e^{-u} u^{a-1} \right|_0^\infty + (a-1)\int_0^\infty u^{a-2} e^{-u}\, du.$$

La partie intégrée est nulle, car u^{a-1} s'annule pour $u = 0$ et e^{-u} pour $u = \infty$. D'ailleurs, l'intégrale $\int_0^\infty u^{a-2} e^{-u} du$ est égale à $\Gamma(a-1)$. Le théorème est donc démontré.

Par l'application répétée de ce théorème, on ramène le calcul d'une intégrale eulérienne $\Gamma(a)$ au calcul d'une intégrale analogue, dans laquelle a est compris entre 1 et 2. En effet, a étant compris entre 4 et 5, par exemple, on écrira :

$$\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1), \qquad \Gamma(a-1) = (a-2)\Gamma(a-2),$$
$$\Gamma(a-2) = (a-3)\Gamma(a-3),$$

et l'on sera ramené à une intégrale, où le paramètre $a-3$ est compris entre 1 et 2.

2° *Si a est un entier positif, on a*

$$\Gamma(a) = 1.2.3\ldots(a-1).$$

En effet, d'après la propriété précédente, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma(a) &= (a-1)\,\Gamma(a-1),\\
\Gamma(a-1) &= (a-2)\,\Gamma(a-2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\Gamma(2) &= 1\,\Gamma(1).
\end{aligned}$$

Donc, quand a est entier positif,

$$\Gamma(a) = 1.2\ldots(a-2)(a-1)\Gamma(1).$$

Reste à calculer

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-u}\,du;$$

l'intégrale indéfinie est $-e^{-u}$ et l'intégrale définie 1. Donc $\Gamma(1) = 1$, ce qui démontre la formule.

On peut remarquer que $\Gamma(0)$ est infini : en effet

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du;$$

cette intégrale est infinie, car l'élément différentiel devient infini pour la limite inférieure $u = 0$, comme $\frac{1}{u}$ (n° 129).

Ainsi, on a

$$\Gamma(0) = \infty, \qquad \Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(2) = 1, \qquad \Gamma(3) = 1.2, \qquad \Gamma(4) = 1.2.3, \qquad \ldots.$$

311. Réduction des fonctions $B(a, b)$ aux fonctions Γ. — Soient a et b deux nombres positifs, considérons la surface ayant pour équation

$$(4) \qquad z = x^{2a-1}e^{-x^2}y^{2b-1}e^{-y^2}.$$

Proposons-nous d'évaluer le volume limité, latéralement, par les plans xOz et yOz; inférieurement, par la partie indéfinie du plan des xy située dans l'angle positif xOy et, supérieurement, par la surface (4). Ce volume est

$$V = \int\int z\,d\omega,$$

l'intégration étant étendue à l'angle indéfini xOy. Nous obtiendrons la formule que nous avons en vue, en employant, successivement, pour évaluer ce volume, les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires dans le plan des xy.

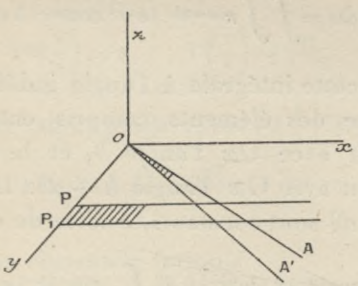
En coordonnées cartésiennes, on a

$$\int\int x^{2a-1}e^{-x^2}y^{2b-1}e^{-y^2}\,dx\,dy.$$

Si nous intégrons d'abord par rapport à x, en donnant à y une valeur constante OP et à dy une valeur constante PP_1 (*fig.* 177), nous avons à faire la somme

$$T = y^{2b-1} e^{-y^2} dy \int x^{2a-1} e^{-x^2} dx,$$

Fig. 177.



x variant de o à ∞, car l'aire qui sert de base au volume est l'angle indéfini xOy. Comme on a

$$\Gamma(a) = 2\int_0^\infty x^{2a-1} e^{-x^2} dx,$$

la tranche T est donnée par

$$T = y^{2b-1} e^{-y^2} dy \frac{1}{2}\Gamma(a).$$

Il faut maintenant faire la somme de ces tranches en faisant varier

$$y = OP$$

de o à ∞; ce qui donne, pour le volume,

$$V = \frac{1}{2}\Gamma(a)\int_0^\infty y^{2b-1} e^{-y^2} dy.$$

Cette nouvelle intégrale étant $\frac{1}{2}\Gamma(b)$, on a enfin

$$V = \frac{1}{4}\Gamma(a)\Gamma(b).$$

Prenons maintenant des coordonnées polaires dans le plan des xy. L'élément superficiel $d\omega$ doit, alors, être pris égal à $r\,d\theta\,dr$. L'équation de la surface devient, en faisant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$z = r^{2a+2b-2}e^{-r^2}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta,$$

et le volume V est donné par

$$V = \int\int z\,d\omega = \int\int r^{2a+2b-1}e^{-r^2}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta\,d\theta\,dr.$$

Il faut étendre cette intégrale à l'angle indéfini xOy. Prenons d'abord la somme des éléments compris entre un rayon vecteur OA, faisant avec Ox l'angle θ, et le rayon infiniment voisin OA$'$, faisant avec Ox l'angle $\theta + d\theta$. Dans la tranche T, ainsi définie, θ et $d\theta$ sont constants, r varie de o à ∞. On a donc

$$T = \cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta\,d\theta\int_0^\infty r^{2a+2b-1}e^{-r^2}\,dr.$$

Cette dernière intégrale est $\frac{1}{2}\Gamma(a+b)$, comme on le voit, en changeant dans l'expression

$$\Gamma(a) = 2\int_0^\infty x^{2a-1}e^{-x^2}\,dx$$

a en $a+b$. Donc

$$T = \frac{1}{2}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta\,d\theta\,\Gamma(a+b).$$

Le volume entier est la somme de ces tranches, étendue à tout l'angle xOy, c'est-à-dire obtenue en faisant varier θ de o à $\frac{\pi}{2}$:

$$V = \frac{1}{2}\Gamma(a+b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta\,d\theta.$$

Mais la dernière intégrale est $\frac{1}{2}$ B(a, b); donc

$$V = \frac{1}{4}\Gamma(a+b)\,B(a, b).$$

Égalant ces deux valeurs de V, on a la formule cherchée :

$$(5) \qquad B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Comme application de cette formule, faisons $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, nous aurons

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}.$$

Mais $\Gamma(1) = 1$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$, comme nous l'avons vu; donc

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \pi, \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

où il faut prendre la valeur positive, car $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est positif. Comme

$$\Gamma(a) = 2\int_0^\infty x^{2a-1} e^{-x^2}\, dx,$$

en faisant $a = \frac{1}{2}$, on obtient la formule

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

312. **Tables numériques.** — On trouvera, à la page 60 des *Tables de Houël*, déjà citées, une Table donnant les valeurs de $L\Gamma(1+x)$ pour les valeurs de x comprises entre 0 et 1. Cette Table permet de calculer la valeur de $\Gamma(a)$ pour a quelconque, car, à l'aide de la relation

$$\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1),$$

on peut toujours ramener l'argument à être compris entre 1 et 2.

La même Table permet de calculer les intégrales B, car ces intégrales sont exprimées par des fonctions Γ par la formule (5).

313. **Intégrales de Fresnel.** — Cherchons à calculer les deux intégrales

$$I = \int_0^\infty \cos x^2\, dx, \qquad J = \int_0^\infty \sin^2 dx.$$

Pour la première, considérons la surface

$$z = e^{-y^2} \cos x^2, \tag{6}$$

et calculons, comme dans l'exercice 311, le volume limité latéralement par les plans xOz et yOz, inférieurement par la partie indéfinie du plan des xy située dans l'angle positif xOy, et supérieurement par la surface. En évaluant le volume V successivement en coordonnées rectangulaires et en coordonnées polaires, nous obtiendrons la formule cherchée.

Coordonnées rectangulaires. — On a

$$V = \int \int e^{-y^2} \cos x^2 \, dx \, dy.$$

Si on laisse y et dy constants (*fig.* 177), on a la tranche

$$T = e^{-y^2} dy \int_0^\infty \cos x^2 \, dx = I e^{-y^2} dy,$$

I désignant la valeur numérique de la première intégrale de Fresnel. Le volume entier est

$$V = \int_0^\infty I e^{-y^2} dy = I \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \frac{I\sqrt{\pi}}{2},$$

d'après le résultat du n° 311.

Coordonnées polaires. — On a

$$V = \int \int e^{-r^2 \sin^2 \theta} \cos(r^2 \cos^2 \theta) r \, d\theta \, dr.$$

La tranche T (*fig.* 177) comprise entre les deux rayons vecteurs indéfinis correspondant aux angles θ et $\theta + d\theta$ est

$$T = d\theta \int_0^\infty e^{-r^2 \sin^2 \theta} \cos(r^2 \cos^2 \theta) r \, dr$$

ou en faisant

$$r^2 \cos^2 \theta = u,$$

u étant une nouvelle variable qui remplace r (θ constant dans T)

$$T = \frac{d\theta}{2 \cos^2 \theta} \int_0^\infty e^{-u \operatorname{tang}^2 \theta} \cos u \, du;$$

la nouvelle intégrale est de la forme

$$\int_0^\infty e^{-\lambda u} \cos u \, du = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2},$$

d'après le n° 40. Donc

$$T = \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^4\theta}\,\frac{d\theta}{2\cos^2\theta},$$

et enfin

$$V = \int T = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta}{1+\tan^4\theta}\,\frac{d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Si l'on pose $\tan\theta = t$, on a

$$V = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{t^2\,dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$

comme on le voit en remarquant que l'intégrale définie qui figure dans cette formule est la moitié de celle que nous avons calculée à la page 173. Donc, en égalant ces deux valeurs de V,

$$\frac{I\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}, \qquad I = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

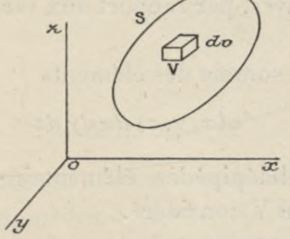
Un calcul identique donne pour la deuxième intégrale la même valeur

$$J = \int_0^{\infty} \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

VI. — INTÉGRALES TRIPLES.

314. **Définition.** — Considérons une surface fermée S et une fonction $\varphi(x, y, z)$ ayant une valeur déterminée, en chaque point

Fig. 178.



du volume V limité par cette surface. Divisons le volume intérieur en éléments de volume infiniment petits, dv, tendant vers zéro en se réduisant à des points (*fig.* 178). Imaginons qu'on multiplie chaque élément de volume dv par la valeur de la fonction

$$\varphi(x, y, z),$$

au point auquel se réduit cet élément et qu'on fasse la somme des produits ainsi obtenus, on aura une somme qu'on désigne par

$$\int\int\int \varphi(x, y, z)\, dv,$$

et qui est le type des intégrales triples.

On dit que l'intégrale triple est étendue au volume V limité par la surface S.

L'expression de dv est différente, suivant le système de coordonnées qu'on emploie, pour décomposer le volume en éléments infiniment petits.

315. **Coordonnées rectangulaires**. — Décomposons le volume en parallélépipèdes infiniment petits, par des plans parallèles aux trois plans coordonnés, infiniment rapprochés les uns des autres. Un de ces parallélépipèdes a pour dimensions, parallèles aux axes, des longueurs infiniment petites dx, dy et dz. Son volume dv est donc

$$dv = dx\, dy\, dz,$$

et l'intégrale triple devient

$$\mathrm{I} = \int\int\int \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Pour calculer effectivement cette intégrale, il faudra faire trois intégrations successives, par rapport aux variables x, y et z. Voici de quelle façon :

Il s'agit de faire la somme des éléments

$$\varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

pour tous les parallélépipèdes élémentaires, dans lesquels on décompose le volume V considéré.

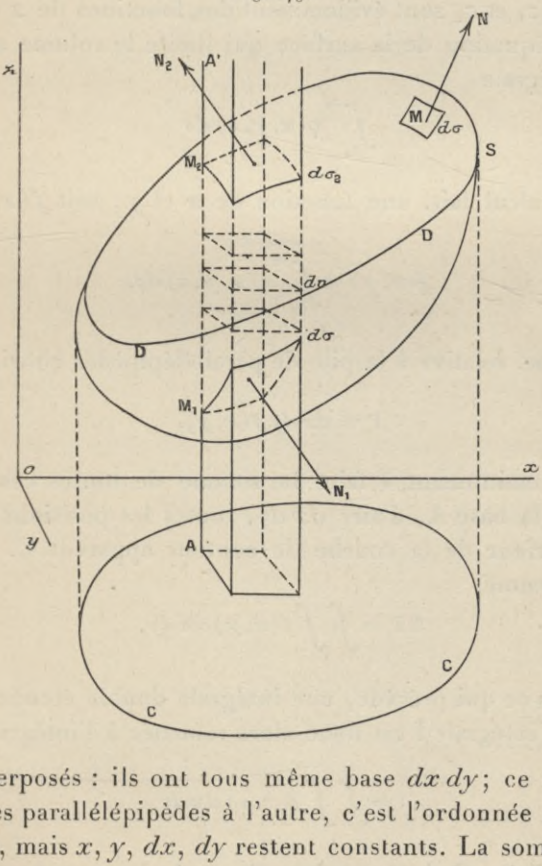
Soit C le contour apparent de la surface S sur le plan des xy. Dans ce contour apparent, prenons un rectangle élémentaire dont un sommet A a pour coordonnées x, y, les trois autres ayant pour coordonnées $x + dx, y$; $x, y + dy$; $x + dx, y + dy$ (*fig.* 179). L'aire de ce rectangle est $dx\,dy$; considérons le prisme, ayant ce rectangle pour base et ses arêtes parallèles à Oz. L'arête AA' de ce prisme entre dans le volume V par un point M_1 d'ordonnée z_1, et en sort par un point M_2, d'ordonnée z_2.

Nous commencerons par faire la somme des éléments

$$\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

pour tous les parallélépipèdes élémentaires $dx\,dy\,dz$ situés dans ce prisme. Ces parallélépipèdes forment une pile de parallélépi-

Fig. 179.



pèdes superposés : ils ont tous même base $dx\,dy$; ce qui varie, d'un de ces parallélépipèdes à l'autre, c'est l'ordonnée z et la valeur de dz, mais x, y, dx, dy restent constants. La somme P des éléments

$$\varphi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

correspondant à cette pile de parallélépipèdes, s'obtient donc en laissant x, y, dx, dy constants et faisant varier z de z_1 à z_2. On a ainsi

$$P = dx\,dy\,\Sigma\,\varphi(x, y, z)\,dz.$$

Cette somme est une intégrale définie prise par rapport à z de z_1 à z_2 :

$$P = dx\,dy\int_{z_1}^{z_2}\varphi(x, y, z)\,dz.$$

La quantité soumise au signe $\int$ dépend de x et y. D'autre part, les limites z_1 et z_2 sont évidemment des fonctions de x et y, définies par l'équation de la surface qui limite le volume considéré. Donc l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z_2}\varphi(x, y, z)\,dz$$

est, tout calcul fait, une fonction de x et y; soit $f(x, y)$ cette fonction :

$$f(x, y) = \int_{z_1}^{z_2}\varphi(x, y, z)\,dz.$$

La somme, relative à la pile de parallélépipèdes considérée, est donc

$$P = dx\,dy\,f(x, y).$$

Il reste maintenant à faire la somme de toutes ces piles en donnant à la base A, d'aire $dx\,dy$, toutes les positions possibles dans l'intérieur de la courbe de contour apparent C. Or, cette dernière somme,

$$\Sigma P = \int\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

est, d'après ce qui précède, une intégrale double étendue à l'aire plane C. L'intégrale I est donc alors ramenée à l'intégrale double

$$I = \int\int f(x, y)\,dx\,dy,$$

étendue à l'aire C, intégrale que l'on calculera par les méthodes précédentes.

Remarque. — Dans cette façon de calculer l'intégrale I, nous avons d'abord intégré par rapport à z en rangeant les parallélépipèdes élémentaires $dx\,dy\,dz$ par piles parallèles à Oz. On pourrait, de même, intégrer d'abord par rapport à x ou à y, en rangeant les parallélépipèdes par piles parallèles à l'un des axes Ox ou Oy.

CHAPITRE XVI.

FORMULES FONDAMENTALES DE L'ANALYSE VECTORIELLE. INTÉGRALES DE VOLUMES, DE SURFACES ET DE LIGNES.

Nous établirons, dans ce Chapitre, quelques formules d'un usage constant en Mécanique et en Physique mathématique.

I. — FORMULE D'OSTROGRADZKY OU DE GREEN.

316. **Formule.** — Soit un champ de forces défini dans une région continue de l'espace. A chaque point (x, y, z) de cette région correspond une force ou un vecteur F appliqué au point. Les projections

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \varphi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z)$$

de ce vecteur F sont supposées être, dans la région considérée, des fonctions uniformes et continues de x, y, z, admettant des dérivées partielles du premier ordre.

Considérons, dans le champ de forces, un volume V, composé d'une ou de plusieurs parties, limité par une surface S. Nous supposerons d'abord, pour simplifier, que la surface S est rencontrée en deux points au plus par une parallèle à Oz (*fig.* 179).

Appelons dv un élément du volume V et $d\sigma$ un élément de la surface S, placé en M, sur la surface. Désignons par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale MN à la surface menée vers l'extérieur.

Nous allons établir la formule générale

$$(1) \qquad \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dv = \iint_S (\alpha X + \beta Y + \gamma Z)\, d\sigma.$$

L'intégrale triple du premier membre est étendue au volume V : on l'obtient en multipliant chaque élément infinitésimal dv du volume V par la valeur de $\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)$ dans cet élément, et faisant la somme de tous ces produits. L'intégrale double est étendue à la surface S ; on l'obtient en multipliant chaque élément infinitésimal $d\sigma$ de la surface S par la valeur de $(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)$ sur cet élément et faisant la somme de ces produits.

Pour obtenir cette formule générale, nous établirons d'abord la formule

$$(2) \qquad \int\int\int_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dv=\int\int_S \gamma Z\,d\sigma.$$

Pour cela, comme $Z=\psi(x,y,z)$, nous allons d'abord calculer, en coordonnées rectangulaires, l'intégrale triple

$$I=\int\int\int_V \frac{\partial Z}{\partial z}\,dv=\int\int\int_V \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Effectuons d'abord l'intégration par rapport à z. Soit, dans le plan des xy, $dx\,dy$ un élément de surface choisi à l'intérieur de la projection C du contour apparent D de la surface S sur le plan des xy (*fig.* 179). Considérons le prisme ayant cet élément pour base, et dont les arêtes sont parallèles à Oz ; ce prisme entre dans le volume par le point M_1 en découpant sur la surface un élément $d\sigma_1$, et sort du volume par le point M_2 en découpant sur la surface un élément d'étendue $d\sigma_2$. Appelons α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs de la normale extérieure M_1N_1 en M_1 ; α_2, β_2, γ_2 ceux de la normale extérieure M_2N_2 en M_2. Le rectangle $dx\,dy$ du plan des xy est la projection horizontale de $d\sigma_1$ et de $d\sigma_2$. Donc $dx\,dy$ est égal à $d\sigma_1$ multiplié par le cosinus de l'angle aigu que fait le plan de l'élément $d\sigma_1$ avec le plan des xy, angle qui est égal à l'angle aigu de la normale indéfinie à $d\sigma_1$ avec Oz. Comme la normale extérieure M_1N_1 fait avec Oz un angle obtus, γ_1 est négatif, et le cosinus de l'angle aigu de la normale indéfinie avec Oz est $-\gamma_1$. Donc

$$(3) \qquad dx\,dy=-\gamma_1\,d\sigma_1.$$

De même, comme l'angle de la normale extérieure M_2N_2 avec

Oz est aigu, γ_2 est positif, et l'on a

$$dx\,dy = \gamma_2\,d\sigma_2. \tag{4}$$

Ceci posé, un élément de l'intégrale triple est

$$\frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Faisons la somme P de ces éléments pour tous les parallélépipèdes $dx\,dy\,dz$ situés dans le prisme AM_1M_2; nous devons laisser x, y, dx, dy constants et sommer par rapport à z; ce qui donne

$$P = dx\,dy\int_{z_1}^{z_2}\frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}\,dz,$$

en appelant z_1 et z_2 les coordonnées z des points M_1 et M_2. L'intégrale indéfinie est $\psi(x, y, z)$ et l'intégrale définie

$$\psi(x,y,z_2) - \psi(x,y,z_1),$$

ou, en abrégeant,

$$Z_2 - Z_1,$$

Z_2 et Z_1 étant les valeurs de Z sur les éléments $d\sigma_2$ et $d\sigma_1$. Donc

$$P = \quad dx\,dy(Z_2 - Z_1),$$
$$P = -Z_1\,dx\,dy + Z_2\,dx\,dy.$$

Telle est la somme des éléments de l'intégrale triple, correspondant aux parallélépipèdes situés dans le prisme de base $dx\,dy$. Pour avoir l'intégrale triple I, il reste à faire la somme de toutes les expressions telles que P, en faisant coïncider successivement $dx\,dy$ avec tous les éléments du plan des xy situés dans l'intérieur du contour apparent C. On a ainsi

$$I = \int\int(-Z_1\,dx\,dy + Z_2\,dx\,dy),$$

l'intégrale étant étendue à l'aire C. Mais, dans le premier terme, sous le signe d'intégration, remplaçons $dx\,dy$ par sa valeur (3), $-\gamma_1\,d\sigma_1$, et, dans le second, remplaçons $dx\,dy$ par sa valeur (4) $\gamma_2\,d\sigma_2$; il vient

$$I = \int\int \gamma_1 Z_1\,d\sigma_1 + \gamma_2 Z_2\,d\sigma_2.$$

Dans cette somme, l'élément $d\sigma_1$ prend successivement toutes les positions possibles sur la partie de la surface située au-dessous du contour apparent D, et $d\sigma_2$ toutes les positions sur la partie de la surface située au-dessus du contour apparent. On peut donc écrire enfin

$$I = \int\int \gamma Z \, d\sigma,$$

la somme étant étendue à tous les éléments superficiels $d\sigma$.

La formule est donc démontrée.

Dans cette formule partielle, l'axe des z joue un rôle particulier. En faisant jouer le même rôle successivement aux axes Ox et Oy, on établira de même les deux formules partielles

$$(5) \qquad \int\int\int_V \frac{\partial X}{\partial x} dv = \int\int_S \alpha X \, d\sigma,$$

$$(6) \qquad \int\int\int_V \frac{\partial Y}{\partial y} dv = \int\int_S \beta Y \, d\sigma.$$

La somme des trois formules partielles (2), (5) et (6) donne la formule générale (1).

Dans la démonstration de la formule (2) nous avons supposé que la surface S n'est rencontrée qu'en deux points par une parallèle à Oz. La formule est encore exacte, comme on s'en assurera, si la surface est rencontrée en un nombre quelconque, forcément pair, de points par une parallèle à Oz.

La formule (1) est donc vraie pour une surface fermée S quelconque.

Premières applications. — Par exemple, si l'on fait

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 1,$$

on a

$$0 = \int\int \gamma \, d\sigma,$$

relation évidente, car elle exprime que la somme des valeurs algébriques des projections horizontales de tous les éléments superficiels $d\sigma$ d'une surface fermée est *nulle*.

Si l'on fait

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = z,$$

la formule devient

$$\iiint dv = \iint \gamma z \, d\sigma.$$

L'intégrale du premier membre, somme des éléments du volume, est évidemment le volume total V : donc

$$V = \iint_S \gamma z \, d\sigma,$$

formule qui exprime un volume par une intégrale double étendue à la surface qui limite le volume.

On aurait de même

$$V = \iint_S \alpha x \, d\sigma = \iint_S \beta y \, d\sigma.$$

317. Interprétation géométrique. — La quantité

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

s'appelle la *divergence* du vecteur F de projections X, Y, Z; on la désigne par

$$\text{div. F.}$$

Soient, au point M de la surface S, le vecteur MF correspondant à ce point et F_n sa projection sur la normale extérieure MN; on a

$$F_n = \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$

car la projection de F sur MN est la somme des projections des trois composantes X, Y, Z. La formule s'écrit donc

$$(7) \qquad \iiint_V \text{div. F} \, dv = \iint_S F_n \, d\sigma.$$

Le produit $F_n d\sigma$ s'appelle le *flux élémentaire* de la force F ou du vecteur F à travers l'élément $d\sigma$, de l'intérieur vers l'extérieur, et la somme de tous ces flux élémentaires

$$\iint_S F_n \, d\sigma$$

s'appelle le *flux total* de la force F ou du vecteur F à travers la surface S, de l'intérieur vers l'extérieur.

318. **Tourbillon du vecteur** F. — On appelle *tourbillon du vecteur* F le nouveau vecteur ω, ayant pour projections ξ, η, ζ :

$$(\omega) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}\right), \\ \eta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}\right), \\ \zeta = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Ce vecteur apparaît, comme nous allons le voir, dans divers théorèmes.

319. **Cas particulier où les forces du champ sont normales en leurs points d'application à une famille de surfaces.** — Soit une famille de surfaces ayant pour équation

$$(8) \qquad U(x, y, z) = C,$$

où C est une constante arbitraire. Par chaque point de l'espace où la fonction U existe, il passe une surface de la famille, car on peut toujours déterminer C de façon que la surface (8) passe par un point donné x_0, y_0, z_0 : il faut et il suffit, pour cela, que $C = U(x_0, y_0, z_0)$.

Ceci posé, nous supposons le champ de forces tel, que la force (X, Y, Z), appliquée au point $M(x, y, z)$ du champ, soit normale à celle des surfaces (8) qui passe par ce point. Comme les cosinus directeurs de la normale à la surface

$$U(x, y, z) - C = 0$$

au point x, y, z sont proportionnels aux dérivées partielles du premier membre

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z},$$

on doit avoir

$$\frac{X}{\dfrac{\partial U}{\partial x}} = \frac{Y}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = \frac{Z}{\dfrac{\partial U}{\partial z}} = \lambda,$$

en appelant λ la valeur commune des rapports : cette quantité λ est fonction de x, y, z, puisque les deux termes des trois rapports sont fonctions de x, y, z. On a donc, dans ce cas, pour les expressions des forces du champ

$$X = \lambda \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \lambda \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \lambda \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{9}$$

λ et U étant des fonctions de x, y, z. Réciproquement, si les forces d'un champ sont de cette forme, chacune d'elles est normale, en son point d'application, à celle des surfaces (8) qui passe par ce point.

On peut également caractériser analytiquement ce cas en disant que l'expression

$$\frac{1}{\lambda}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) \tag{10}$$

est une différentielle totale exacte; cette expression s'écrit, en effet,

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU.$$

Pour que ce cas se présente, il faut et il suffit qu'en chaque point du champ le tourbillon soit perpendiculaire à la force du champ

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0. \tag{11}$$

La condition est nécessaire. — En effet, nous devons exprimer que l'expression (10) est une différentielle totale. On a donc

$$\frac{\partial\left(\frac{Y}{\lambda}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{Z}{\lambda}\right)}{\partial y},$$

ce qu'on écrit en effectuant et multipliant par λ^2

$$Z\frac{\partial \lambda}{\partial y} - Y\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \lambda\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right);$$

les deux autres conditions d'intégrabilité donnent de même

$$X\frac{\partial \lambda}{\partial z} - Z\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \lambda\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right),$$

$$Y\frac{\partial \lambda}{\partial x} - X\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \lambda\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right).$$

Dans les seconds membres, les coefficients de λ sont précisément

2ξ, 2η, 2ζ. Multiplions alors ces trois relations respectivement par X, Y, Z et ajoutons; les premiers membres ont une somme nulle : on a donc, puisque λ est différent de zéro, la relation (11) à démontrer.

La condition (11) *est suffisante.* — On démontre que, si cette condition (11) est remplie, il existe une infinité de facteurs λ tels que

$$\frac{1}{\lambda}(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

soit une différentielle totale dU; ce qui montre qu'elle est suffisante. Le cadre de cet Ouvrage ne nous permet pas de donner cette démonstration.

Nous nous bornerons à voir comment se simplifie alors la formule générale d'Ostrogradzky (1). En substituant, dans cette formule, à la place de X, Y, Z, les expressions (9), on voit qu'elle devient

$$(12)\quad \begin{aligned}&\iiint_V \left[\lambda\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right] dv \\ &\quad = \iint_S \lambda\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma\frac{\partial U}{\partial z}\right) d\sigma.\end{aligned}$$

La quantité

$$(13)\qquad \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma\frac{\partial U}{\partial z}$$

est appelée ordinairement *dérivée de* U *suivant la normale extérieure à la surface et désignée par* $\frac{dU}{dn}$. Voici la raison de cette dénomination. Menons la normale extérieure MN, de cosinus directeurs α, β, γ (*fig.* 180); prenons sur cette normale une longueur $MN' = \Delta n$, et appelons x, y, z, x', y', z' les coordonnées des points M et N'. Quand on passe de M en N', la fonction U subit un accroissement

$$\Delta U = U(x', y', z') - U(x, y, z).$$

Prenons le rapport

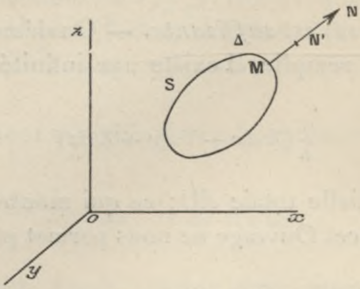
$$\frac{\Delta U}{\Delta n};$$

quand Δn tend vers zéro, ce rapport tend vers la quantité (13).

En effet, on a, pour les coordonnées de N′,

$$x' = x + \alpha\,\Delta n, \qquad y' = y + \beta\,\Delta n, \qquad z' = z + \gamma\,\Delta n.$$

Fig. 180.



Donc

$$\begin{aligned} U(x', y', z') &= U(x + \alpha\,\Delta n, y + \beta\,\Delta n, z + \gamma\,\Delta n) \\ &= U(x, y, z) + \Delta n\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma\frac{\partial U}{\partial z}\right) + \Delta n^2(\ldots) \end{aligned}$$

en développant par la série de Taylor. On en conclut

$$\frac{\Delta U}{\Delta n} = \alpha\frac{\partial U}{\partial x} + \beta\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma\frac{\partial U}{\partial z} + \Delta n(\ldots).$$

Faisant tendre Δn vers zéro, on voit que la limite de $\frac{\Delta U}{\Delta n}$ est la quantité (13). On désigne cette limite par $\frac{dU}{dn}$; le second membre de la relation (6) s'écrit alors

$$\int\int_S \lambda\frac{dU}{dn}\,d\sigma.$$

320. Cas plus particulier encore où les forces dérivent d'une fonction de forces U. — On a alors

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU,$$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Pour que ce cas se présente, il faut et il suffit que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle totale, c'est-à-dire que l'on ait

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

d'après les conditions indiquées au n° 290.

On peut donc dire que *la condition nécessaire et suffisante pour que le champ dérive d'une fonction de forces est que le vecteur tourbillon soit* NUL *en tous les points du champ.*

Dans ce cas particulier, le facteur λ du numéro précédent est égal à 1, et la formule générale d'Ostrogradzky prend la forme suivante, déduite de (12) en faisant $\lambda = 1$,

$$\int\int\int_{V}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)dv = \int\int_{S}\left(\alpha\frac{\partial U}{\partial x}+\beta\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma\frac{\partial U}{\partial z}\right)d\sigma,$$

où le second membre est

$$\int\int_{S}\frac{dU}{dn}\,d\sigma.$$

II. — FORMULE DE RIEMANN.

Les formules que nous allons maintenant établir transforment des intégrales de surfaces (intégrales doubles) en intégrales de lignes (intégrales simples).

Nous commencerons par la formule de Riemann.

321. Formule de Riemann. — Soit un champ de forces plan constitué par des forces F situées dans une certaine région du plan xOy, telles que la force appliquée en un point x, y de cette région ait pour projections

$$X = f(x, y), \qquad Y = \varphi(x, y),$$

les fonctions f et φ étant uniformes, finies, et admettant des dérivées partielles du premier ordre dans la région considérée.

Traçons, dans cette région, un contour fermé quelconque, limitant une aire S. La formule de Riemann est la suivante :

$$(14) \qquad \int\int_{S}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)d\sigma = \int_{C}^{+} X\,dx + Y\,dy,$$

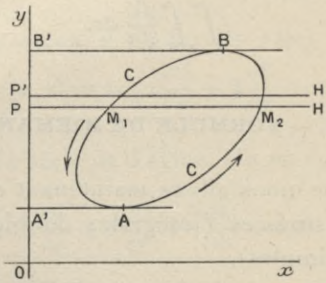
où $d\sigma$ est un élément de l'aire S et où l'intégrale double est étendue à cette aire, tandis que l'intégrale simple, analogue à un travail, est prise sur le contour C dans le sens positif.

Pour démontrer cette formule, remplaçons $d\sigma$ par l'élément d'aire en coordonnées rectangulaires $dx\,dy$ et calculons d'abord l'intégrale double

$$I = \int\int_S \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx\,dy.$$

Nous supposerons, pour simplifier, que le contour n'est rencontré qu'en deux points, au plus, par une parallèle à Ox : on fera ensuite facilement disparaître cette restriction, comme nous l'avons fait déjà (n° 43) pour le calcul de l'aire d'une courbe fermée. Soient $OP = y$, $OP' = y + dy$ (*fig.* 181); menons par les points

Fig. 181.



P et P' des parallèles PH et P'H' à Ox, et appelons x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M_2 où PH coupe le contour C. Calculons la tranche T d'intégrale, comprise entre les deux droites infiniment voisines PH et P'H',

$$T = dy \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial Y}{\partial x}\,dx.$$

L'intégrale indéfinie est Y et l'intégrale définie est $Y_2 - Y_1$, si l'on appelle Y_2 et Y_1 les valeurs $\varphi(x_2, y)$ et $\varphi(x_1, y)$ de Y, aux points M_2 et M_1. On a donc

$$T = (Y_2 - Y_1)\,dy;$$

$$I = \int T = \int_a^b (Y_2 - Y_1)\,dy,$$

a et b désignant les ordonnées OA' et OB' des tangentes AA' et

BB' parallèles à Ox. En écrivant

$$I = \int_a^b Y_2\, dy + \int_b^a Y_1\, dy,$$

on voit que

$$\int\int_S \frac{\partial Y}{\partial x} d\sigma = \int_C^{+} Y\, dy, \tag{15}$$

l'intégrale étant prise sur le contour C, *dans le sens positif*.

On démontre, de même, en intégrant d'abord, par rapport à y, la relation

$$-\int\int_S \frac{\partial X}{\partial y} d\sigma = \int_C^{+} X\, dx. \tag{16}$$

En ajoutant les formules (15) et (16), on obtient la formule générale (14) de Riemann.

Exemple élémentaire. — Supposons

$$X = -\frac{y}{2}, \qquad Y = \frac{x}{2},$$

la formule devient

$$\int\int_S d\sigma = \frac{1}{2}\int_C^{+} x\, dy - y\, dx,$$

où le premier membre est évidemment l'aire totale limitée par le contour C. On retrouve ainsi la formule élémentaire établie à la fin du n° 47.

Remarque. — Dans la formule de Riemann, apparaît encore le vecteur tourbillon du champ de forces considéré. En effet, actuellement, le champ est plan, X et Y ne dépendent pas de z et $Z = 0$. Donc le vecteur tourbillon ω, en un point du plan xOy, a actuellement pour projections

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

et la formule de Riemann s'écrit

$$2\int\int_S \zeta\, d\sigma = \int_C^{+} X\, dx + Y\, dy.$$

322. Application à la théorie des différentielles totales. — Nous pouvons retrouver, à l'aide de la formule de Riemann, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une intégrale de la forme

$$\int_{(A)}^{(B)} X\,dx + Y\,dy, \tag{15}$$

prise le long d'une courbe plane, du point A au point B, soit indépendante de la courbe suivie.

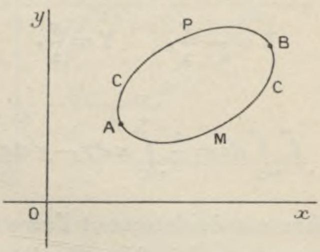
D'abord, pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que l'intégrale*

$$\int_C X\,dx + Y\,dy, \tag{16}$$

prise le long d'un contour fermé quelconque C, dans le champ considéré, *soit nulle.*

En effet, soient (*fig.* 182) deux chemins différents AMB et

Fig. 182.



APB ayant les mêmes extrémités; la différence des deux intégrales, prises de A en B par les deux chemins, peut s'écrire

$$\begin{aligned}(17)\qquad &\int_{AMB} X\,dx + Y\,dy - \int_{APB} X\,dx + Y\,dy \\ &= \int_{AMB} + \int_{BPA} = \int_{AMBPA} X\,dx + Y\,dy,\end{aligned}$$

où AMBPA est le contour fermé C formé par les deux chemins. Alors, si l'intégrale est indépendante du chemin, elle est nulle le long d'un contour quelconque C : en effet, sur ce contour C, on pourra toujours marquer deux points A et B; dans l'identité (17), le premier membre est nul par hypothèse; donc il en est de même du second, ce qu'il faut démontrer.

Réciproquement, si l'intégrale est nulle le long d'un contour fermé quelconque, elle est la même sur deux chemins différents AMB et APB : en effet, ces deux chemins forment un contour AMBPA ; par hypothèse l'intégrale du second membre de (17) est nulle, donc la différence formant le premier membre est *nulle*, ce qu'il faut démontrer.

Revenant alors à notre problème, nous sommes ramenés à chercher la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale (16) prise le long d'un contour fermé *quelconque* C soit nulle. En appliquant à cette intégrale la formule de Riemann, il faut chercher la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale double

$$\int\int_S \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma \tag{18}$$

étendue à une aire plane *quelconque* soit nulle. Mais il est évident que cette condition est que l'élément placé sous le signe d'intégration double soit *nul identiquement :*

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0; \tag{19}$$

car s'il n'en était pas ainsi, on pourrait choisir l'aire S de telle façon que $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$ ait un même signe aux divers points de S et alors l'intégrale (18) ne serait pas nulle, comme formée d'éléments tous de même signe.

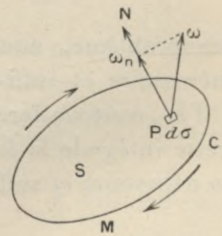
En résumé, pour que l'intégrale curviligne (16) soit indépendante du chemin, il faut et il suffit que l'on ait la condition (19) *qui exprime que* $X\,dx + Y\,dy$ *est une différentielle totale.* Nous retrouvons ainsi, d'une façon plus rigoureuse, la condition trouvée précédemment (n° 288).

III. — FORMULE D'AMPÈRE ET DE STOKES.

323. **Formule.** — La formule générale que nous allons indiquer a été donnée par Stokes : elle avait déjà été employée par Ampère en Électromagnétisme dans un cas particulier.

Imaginons dans le champ de vecteurs ou de forces précédemment défini (n° 316) une portion de surface S, non fermée, ayant deux faces et limitée par un contour fermé C (*fig.* 183). Choisissons arbitrairement une des deux faces de S et menons la normale PN à S du côté choisi : concevons ensuite un mobile M parcourant le contour C dans un sens tel que, si l'on mène les normales

Fig. 183.



telles que PN à la surface, voisines du contour, le mobile, en passant près de ces normales, tourne autour d'elles dans le sens positif (de gauche à droite pour un observateur debout sur la surface du côté choisi et regardant le mobile); ce sens de circulation est indiqué par une flèche sur la figure.

Cela posé, appelons $d\sigma$ un élément superficiel de S, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale PN à cet élément; on a la formule

$$(20)\quad \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\int_S \left[\alpha\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) + \beta\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) + \gamma\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\right] d\sigma,$$

où l'intégrale du premier membre (analogue à un travail) est prise le long du contour C dans le sens indiqué et où celle du second membre est étendue à l'aire de la surface S. (Les axes Ox, Oy, Oz sont supposés orientés comme dans tout le cours de l'Ouvrage.)

324. Démonstration. — Nous allons indiquer une démonstration dont le principe a été donné par M. Blondlot dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3[e] série, t. XVI, 1897, p. 501).

Établissons d'abord la formule pour le cas où Y et Z seraient nuls

$$(21)\qquad \int_C X\,dx = \int\int_S \left(\beta\frac{\partial X}{\partial z} - \gamma\frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma.$$

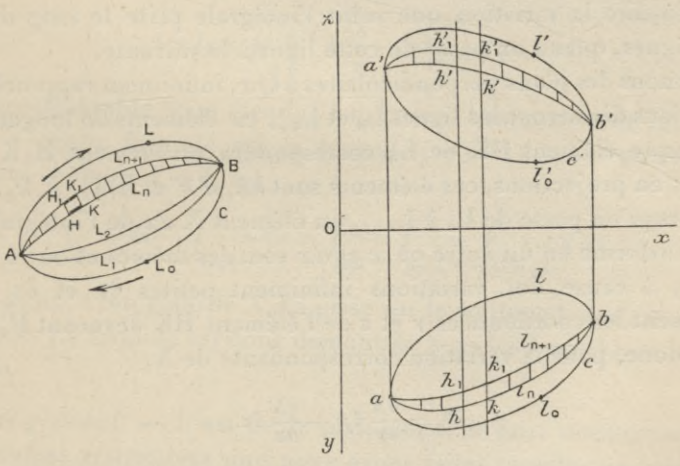
Pour cela, nous ferons trois hypothèses restrictives qu'il est aisé de faire disparaître ensuite :

1° Nous admettrons que, en tous les points P de S, le cosinus β de l'angle de la normale avec Oy conserve un signe constant, le signe $+$ par exemple, β pouvant d'ailleurs devenir nul; l'angle de PN avec Oy est alors aigu ou droit en tous les points P de S;

2° Nous supposerons de même que γ conserve un signe constant, $+$ par exemple;

3° Nous admettrons que le contour C n'est rencontré qu'en deux points au plus, tels que L_0 et L, par un plan perpendiculaire à Ox. (Dans la figure 184, nous appelons L_0 celui des deux points L_0 et L qui a l'y le plus grand; alors, d'après les hypothèses faites, le z de L_0 est plus petit que celui de L.)

Fig. 184.



Prenons alors sur le contour C le point A dont l'abscisse est minimum et le point B dont l'abscisse est maximum (*fig.* 184, I). Divisons la surface S en bandes infiniment étroites par des lignes transversales successives, ne se coupant pas, tracées sur la surface; la première de ces lignes sera le bord AL_0B, la deuxième la ligne AL_1B infiniment voisine, la troisième la ligne AL_2B infiniment voisine de la précédente, ... et ainsi de suite, l'avant-dernière la ligne AL_pB et la dernière le bord ALB.

La figure 184-I donne la disposition des lignes dans l'espace.

Pour préciser, représentons les deux projections de cette figure, comme en géométrie descriptive, en prenant comme ligne de terre Ox, comme plan vertical le plan zOx et comme plan horizontal le plan yOx supposé rabattu sur le prolongement du plan zOx (*fig.* 184, II).

Le contour C se projettera en c et c', les points A et B en a, b et a', b'; les lignes L_n en $l_0, \ldots, l_n, l_{n+1}, \ldots, l$ et $l'_0, \ldots, l'_n, l'_{n+1}, \ldots, l'$.

Appelons I_n l'intégrale

$$I_n = \int_{AL_nB} X\,dx$$

prise de A en B sur L_n. Nous allons calculer la différence

$$\delta I_n = I_{n+1} - I_n,$$

c'est-à-dire la variation que subit l'intégrale prise le long d'une des lignes, quand on passe de cette ligne à la suivante.

Menons des plans perpendiculaires à Ox, infiniment rapprochés; ces plans diviseront les lignes L_n et L_{n+1} en éléments de longueur : à chaque élément HK de L_n correspondra un élément H_1K_1 de L_{n+1}; en projections, ces éléments sont hk, $h'k'$ et h_1k_1, $h'_1k'_1$.

Lorsqu'on passe de L_n à L_{n+1}, un élément $X\,dx$ de l'intégrale I_n se transforme en un autre où x et dx sont les mêmes et où X seul varie, à cause des variations infiniment petites δy et δz que subissent les coordonnées y et z de l'élément HK devenant H_1K_1; on a donc, pour la variation correspondante de X,

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial y}\delta y + \frac{\partial X}{\partial z}\delta z.$$

La variation de I_n est alors

$$\delta I_n = I_{n+1} - I_n = \int_{L_n}\left(\frac{\partial X}{\partial y}\delta y + \frac{\partial X}{\partial z}\delta z\right)dx.$$

Dans le produit $\delta y\,dx$, le facteur dx est positif et δy négatif (*voir* la figure 184, II). Or l'aire $d\sigma_z$ de la projection de l'élément $d\sigma = HKH_1K_1$ de la surface sur le plan xOy est un parallélogramme infinitésimal de hauteur dx et de base $hh_1 = -\delta y$; donc

$$d\sigma_z = -\delta y\,dx.$$

Comme, d'autre part, $d\sigma_z = \gamma\, d\sigma$, on voit que

$$\delta y\, dx = -\gamma\, d\sigma.$$

De même $\delta z\, dx = +\beta\, d\sigma$. Donc

$$(22)\qquad I_{n+1} - I_n = \int \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma,$$

la somme étant étendue aux éléments $d\sigma$ de la bande de surface comprise entre les deux lignes L_n et L_{n+1}. En appliquant cette formule successivement à toutes les bandes, on obtient successivement les différences

$$I_1 - I_0,\quad I_2 - I_1,\quad \ldots,\quad I - I_p,$$

I désignant l'intégrale $\int X\, dx$ le long de ALB. En ajoutant membre à membre toutes les formules analogues à (22), on a enfin

$$(23)\qquad I - I_0 = \int\int_S \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma,$$

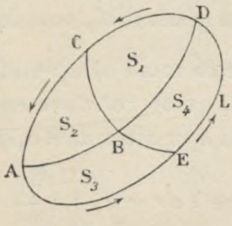
l'intégrale double étant étendue à tous les éléments $d\sigma$ de la surface S. Cette formule est la formule (21) à démontrer, car le premier membre $I - I_0$ est

$$\int_{ALB} X\, dx - \int_{AL_0B} X\, dx = \int_{ALB} + \int_{BL_0A} = \int_{ALBL_0A} X\, dx,$$

c'est-à-dire l'intégrale de $X\, dx$ prise sur le contour C dans le sens indiqué. La formule est donc démontrée sous les hypothèses indiquées.

Cas général. — Il est facile maintenant de faire disparaître les hypothèses restrictives que nous avons faites : quelle que soit la

Fig. 185.



surface S, on peut la diviser par des courbes auxiliaires en parties telles que, sur chacune d'elles, β et γ aient des signes constants et que le contour de chacune d'elles soit rencontré en deux points, au plus, par un plan perpendiculaire à Ox. Supposons, pour fixer les idées, qu'il faille ainsi diviser la surface S en quatre parties, S_1, S_2, S_3, S_4 (*fig.* 185) par les courbes ABD, CBE. La formule s'applique à chacune de ces parties :

$$\int_{\mathrm{CBDC}} X\,dx = \int\int_{S_1} \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma,$$

$$\int_{\mathrm{ABCA}} X\,dx = \int\int_{S_2} \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma,$$

$$\int_{\mathrm{EBAE}} X\,dx = \int\int_{S_3} \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma,$$

$$\int_{\mathrm{DBED}} X\,dx = \int\int_{S_4} \left(\beta \frac{\partial X}{\partial z} - \gamma \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma.$$

Ajoutant ces formules membre à membre, et remarquant que, dans la somme des premiers membres, les intégrales telles que $\int_{\mathrm{AB}} X\,dx$ et $\int_{\mathrm{BA}} X\,dx$, prises en sens contraires sur la même courbe, ont une somme nulle, on obtient la formule à démontrer.

Comme la valeur d'une intégrale de surface ne dépend pas de la façon dont la surface a été divisée en éléments infiniment petits $d\sigma$, on pourra, en faisant un raisonnement analogue au précédent, établir les formules

$$\int_{C} Y\,dy = \int\int_{S} \left(\gamma \frac{\partial Y}{\partial x} - \alpha \frac{\partial Y}{\partial z}\right) d\sigma,$$

$$\int_{C} Z\,dz = \int\int_{S} \left(\alpha \frac{\partial Z}{\partial y} - \beta \frac{\partial Z}{\partial x}\right) d\sigma.$$

Ajoutons ces formules à la formule (21) nous obtenons la formule de Stokes, dans sa généralité, sous la forme à démontrer.

Remarque. — Cette formule comprend, comme cas particulier, la formule de Riemann, qu'on retrouve en réduisant la surface S à une portion du plan des xy; alors $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, et l'on a

$$\int_{C} X\,dx + Y\,dy = \int\int_{S} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) d\sigma,$$

ce qui est bien la formule de Riemann.

325. Interprétation géométrique de la formule de Stokes. — Dans la formule (20), le premier membre

$$\int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

représente le travail total $\mathcal{C}_C$ de la force ou du vecteur F du champ, quand le mobile M décrit le contour dans le sens indiqué : il a une signification indépendante du choix des axes.

Le second membre a donc aussi une signification indépendante du choix des axes. En effet, le vecteur tourbillon ω au point P (*fig.* 183) a pour projections les quantités ξ, η, ζ définies au n° 318. Le second membre de la formule (20) est donc

$$2\int\int_S (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\,d\sigma;$$

mais $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$ est la projection ω_n, du vecteur ω, sur la normale PN. On peut donc écrire la formule (20)

$$\mathcal{C}_C = 2\int\int_S \omega_n\,d\sigma; \tag{24}$$

elle signifie que : *le travail* $\mathcal{C}_C$ *de la force* F *appliquée à un mobile qui décrit le contour* C *est le double du flux du vecteur tourbillon à travers la surface* S, *dans le sens positif.*

326. Application à la théorie des différentielles totales dans l'espace. — La formule de Stokes permet de retrouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale curviligne, dans l'espace,

$$\int_{(A)}^{(B)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz, \tag{25}$$

prise du point A au point B, le long d'une certaine courbe, soit indépendante du chemin.

Pour cela, on montre d'abord, comme au n° 322, que, pour qu'il en soit ainsi, *il faut et il suffit que l'intégrale curviligne*

$$\mathcal{C}_C = \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

prise sur un contour fermé quelconque soit nulle. On en conclut, par la formule de Stokes, qu'il faut et il suffit que le flux du tourbillon

$$\int\int_S \omega_n \, d\sigma,$$

à travers une portion de surface quelconque S, soit *nul*. Cette condition ne peut être remplie que si l'élément différentiel est nul

$$\omega_n = 0$$

ou

$$(26) \qquad \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta = 0.$$

Comme la surface est quelconque, les cosinus directeurs de la normale peuvent être pris arbitrairement : la condition (26), ayant lieu quels que soient α, β, γ, entraîne

$$\xi = 0, \qquad \eta = 0, \qquad \zeta = 0,$$

conditions qui signifient que

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

est une différentielle totale.

CHAPITRE XVII.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

327. **Ordre d'une équation différentielle.** — Soit y une fonction inconnue de x : supposons qu'on donne une relation entre x, y et les dérivées de y par rapport à x jusqu'à un certain ordre n,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

ou, avec la notation des dérivées, $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Une relation de ce genre s'appelle *une équation différentielle d'ordre n.*

Intégrer l'équation, c'est trouver toutes les fonctions y de la variable x qui vérifient l'équation. Quand on a trouvé une fonction y vérifiant l'équation, on dit qu'on a trouvé une *fonction intégrale* ou, sous forme abrégée, une *intégrale.*

Au point de vue géométrique, on peut regarder x et y comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un plan. Intégrer l'équation, c'est alors trouver toutes les courbes, dont l'ordonnée y, regardée comme fonction de x, vérifie l'équation différentielle donnée. Quand on a trouvé une courbe dont l'ordonnée vérifie l'équation, on dit qu'on a trouvé une *courbe intégrale.*

328. **Exemples.** — La géométrie fournit de nombreux exemples d'équations différentielles.

Par exemple, pour déterminer une courbe ayant une normale constante ou une sous-normale constante, ou une tangente constante, ou une sous-tangente constante (n^os 146-147), on est conduit à intégrer une équation différentielle du premier ordre. Dans chacun de ces problèmes on trouve que les courbes, répondant à la question, contiennent, dans leur équation générale, *une constante arbitraire*. Ainsi, les courbes ayant une normale de longueur constante donnée, a, sont définies par l'équation différentielle

$$(1) \qquad y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=a,$$

qui est du *premier ordre*. En l'intégrant, on trouve, pour équation générale des courbes demandées, la suivante :

$$(2) \qquad (x-x_0)^2+y^2=a^2,$$

contenant *une constante* arbitraire x_0. Ces courbes sont, comme on pouvait le prévoir géométriquement, des cercles, de rayon donné a, dont le centre est un point quelconque de Ox.

On a à intégrer des équations du *deuxième ordre*, quand on cherche les courbes planes, pour lesquelles le rayon de courbure est proportionnel à la normale

$$R = kn.$$

On trouve, en intégrant ces équations, des courbes dans l'équation desquelles figurent *deux constantes arbitraires*. Par exemple, si l'on prend $k=\pm 1$, en cherchant les courbes dans lesquelles le rayon de courbure égale la normale, on est conduit à intégrer l'une des équations différentielles du deuxième ordre

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}=\pm y\sqrt{1+y'^2}.$$

En prenant le signe $+$, on trouve la chaînette

$$y=\frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x-\beta}{\alpha}}+e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}\right),$$

où α et β sont *deux constantes quelconques*, et, en prenant le signe —, les cercles

$$(x-\alpha)^2+y^2-\beta^2=0,$$

où α et β sont *deux constantes quelconques*.

329. **Intégrale générale d'une équation différentielle.** — Le fait, observé dans les exemples que nous venons de rappeler, est général. Étant donnée une équation différentielle d'ordre n, il existe une famille de courbes, dont l'équation contient n constantes arbitraires

$$\psi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{3}$$

et qui sont telles que leur ordonnée y, considérée comme fonction de l'abscisse, vérifie l'équation différentielle, *quelles que soient* les n constantes arbitraires. Cette équation (3) est ce qu'on appelle l'*intégrale générale* de l'équation différentielle. On peut, théoriquement, la supposer résolue par rapport à y et l'écrire

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Ainsi, dans les exemples que nous venons de rappeler, l'intégrale générale de l'équation du premier ordre

$$y\sqrt{1+y'^2} = a$$

est

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2,$$

avec une constante arbitraire x_0.

L'intégrale générale de l'équation du deuxième ordre

$$\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = y\sqrt{1+y'^2}$$

est

$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x-\beta}{\alpha}} + e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}\right),$$

avec deux constantes arbitraires α et β.

Nous allons maintenant nous occuper en détail des équations du *premier ordre*.

II. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE. ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'UNE FAMILLE DE COURBES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE. INTÉGRALE GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION DU PREMIER ORDRE.

330. **Équation différentielle du premier ordre** — Une équation différentielle du premier ordre est de la forme

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0. \tag{1}$$

Nous regarderons x et y comme les coordonnées cartésiennes d'un point d'un plan.

Nous allons démontrer les deux théorèmes suivants :

1° *Étant donnée dans le plan des xy une famille de courbes*

$$\psi(x, y, C) = 0, \tag{2}$$

dont l'équation contient une constante arbitraire C, *l'ordonnée d'une quelconque de ces courbes, considérée comme fonction de l'abscisse, vérifie une équation différentielle du premier ordre, indépendante de* C.

Cette équation différentielle est ce qu'on appelle l'*équation différentielle des courbes* (2). Sa formation n'exige que des dérivations et des éliminations.

2° *Réciproquement, étant donnée une équation différentielle du premier ordre*

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

il existe toujours une famille de courbes planes

$$\psi(x, y, C) = 0,$$

dépendant d'une constante arbitraire C, *telle que l'ordonnée d'une de ces courbes, considérée comme fonction de l'abscisse, vérifie l'équation différentielle, quelle que soit* C.

L'équation de ces courbes

$$\psi(x, y, C) = 0$$

donne ce qu'on appelle l'*intégrale générale* de l'équation différentielle. La formation de cette équation $\psi = 0$ constitue *l'intégration* de l'équation.

331. Équation différentielle d'une famille de courbes planes dépendant d'une constante arbitraire. — Soit

$$\psi(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

l'équation d'une famille de courbes, où C désigne une constante arbitraire. Quand C varie, ces courbes se déplacent et recouvrent une certaine région du plan. Par un point M, pris dans cette région, passent une ou plusieurs des courbes, car, si l'on assujettit la courbe (2) à passer par un point donné, on a une équation déterminant C et donnant pour C une, deux, ..., p valeurs, suivant qu'elle est, par rapport à C, du premier, deuxième, ..., $p^{\text{ième}}$ degré. Cherchons le coefficient angulaire de la tangente à une des courbes passant par le point M (x, y). Ce coefficient angulaire est défini par l'équation

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0, \tag{3}$$

obtenue en dérivant (2) par rapport à x et regardant y comme fonction de x. Si, entre les équations (2) et (3), l'on élimine C, on obtient une équation

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{4}$$

définissant $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x et y. C'est là l'équation différentielle des courbes (2).

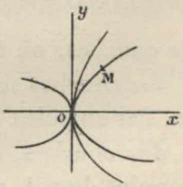
On peut interpréter cette équation en disant qu'elle détermine le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à celles des courbes (2), passant par le point M de coordonnées x et y. Cette équation (4) peut être d'un degré quelconque en $\frac{dy}{dx}$. Elle donne alors plusieurs valeurs pour $\frac{dy}{dx}$ quand x et y sont donnés : cela veut dire que, par le point donné M (x, y), passent plusieurs courbes de la famille considérée, et l'équation fournit les coefficients angulaires des tangentes à ces diverses courbes, au point M.

Exemple I. — Considérons l'équation

$$y^2 - 2Cx = 0 \tag{5}$$

qui représente des paraboles, ayant pour axe Ox et pour tangente au sommet Oy (*fig.* 186). Par un point quelconque $M(x, y)$ du

Fig. 186.



plan, il passe une de ces paraboles, car on peut toujours déterminer C de façon que l'équation (5) soit satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque. En différentiant l'équation (5), on a la relation

$$y\frac{dy}{dx} - C = 0, \tag{6}$$

définissant le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la tangente à l'une des paraboles au point (x, y). L'élimination de C entre les équations (5) et (6) donne l'équation différentielle des paraboles considérées

$$2x\frac{dy}{dx} - y = 0. \tag{7}$$

Cette dernière équation peut être regardée comme donnant directement le coefficient angulaire de la tangente à celle des paraboles qui passe par le point (x, y).

Inversement, en partant de cette équation différentielle (7) et en l'intégrant, on peut remonter à l'équation générale (5) des paraboles. En effet, écrivons cette équation différentielle

$$\frac{2\,dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Nous remarquons alors que le premier membre est la différentielle de $2\,\mathrm{L}y$, le deuxième de $\mathrm{L}x$, et nous avons, en intégrant,

$$2\,\mathrm{L}y = \mathrm{L}x + \mathrm{L}\,2C,$$

L 2C désignant une constante arbitraire. On peut écrire

$$L y^2 = L 2 C x,$$
$$y^2 = 2 C x.$$

Les paraboles, ainsi retrouvées, fournissent l'intégrale générale de l'équation différentielle (7).

Exemple II. — Considérons les cercles ayant pour équation

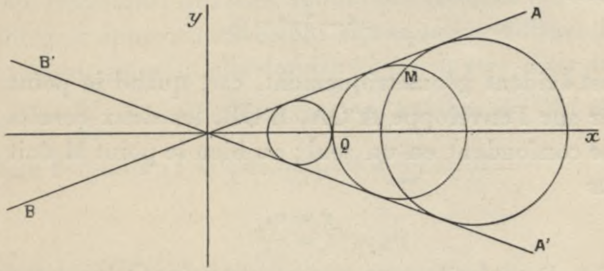
$$(x - 2C)^2 + y^2 - C^2 = 0, \tag{8}$$

où C est une constante arbitraire. Ces cercles ont leur centre sur Ox, et le rayon de chacun d'eux est égal à la moitié de l'abscisse du centre. Ils recouvrent toute la portion du plan située dans les angles aigus des deux droites AOA′, BOB′ (*fig.* 187), ayant pour équation

$$x^2 - 3y^2 = 0. \tag{9}$$

Ces deux droites constituent l'enveloppe des cercles, quand C varie de $-\infty$ à $+\infty$. Par chaque point M (x, y), situé dans l'un

Fig. 189.



des angles AOB ou A′OB′, il passe deux des cercles (8). Cherchons les coefficients angulaires des tangentes à ces deux cercles. En différentiant l'équation (8) par rapport à x, en y regardant y comme fonction de x, on a

$$x - 2C + yy' = 0, \tag{10}$$

y' désignant la dérivée de y par rapport à x. L'élimination de C, entre les deux équations (8) et (10), donne

$$4y^2y'^2 + 4y^2 - (x + yy')^2 = 0. \tag{11}$$

C'est là l'équation différentielle des cercles considérés (8); elle est du deuxième degré en y' : cela tient à ce que, par un point $M(x, y)$ du plan, il passe deux de ces cercles. Comme les cercles considérés recouvrent la partie du plan, située dans les angles AOB et A'OB', on peut prévoir que l'équation différentielle (11) donnera pour y' des valeurs réelles, seulement quand le point $M(x, y)$ sera dans l'un de ces angles. En effet, pour que l'équation (11) en y' ait ses racines réelles, il faut et il suffit que

$$y^2(x^2 - 3y^2) \geqq 0;$$

ce qui montre que les coordonnées x et y du point M doivent rendre positif le facteur $x^2 - 3y^2$, ou encore que ce point doit être situé, par rapport au système des deux droites $x^2 - 3y^2 = 0$, dans la même région que l'axe Ox : ce qui vérifie bien la proposition. Il est intéressant de voir quelles sont les positions que doit prendre le point M, pour que l'équation en y' ait une racine double. Alors le produit

$$y^2(x^2 - 3y^2)$$

doit être nul. Donc, ou bien le point M doit être sur l'enveloppe des cercles

$$x^2 - 3y^2 = 0,$$

ce qui est évident géométriquement, car, quand le point M vient se placer sur l'enveloppe A'OA, B'OB, les deux cercles passant par M se confondent en un seul ; ou bien le point M doit être sur l'axe Ox

$$y = 0,$$

ce qui s'explique facilement, car, par un point Q de cet axe, passent deux cercles du système tangents entre eux en Q : les coefficients angulaires des tangentes à ces deux cercles, au point Q, sont donc égaux. L'axe des x est, pour les cercles considérés, ce qu'on appelle un *lieu de contact*, lieu des points tels que les deux cercles de la famille, qui passent par un de ces points, soient distincts, mais tangents entre eux au point.

Nous avons ainsi étudié en détail l'équation différentielle des cercles (8). On pourrait remonter de cette équation différentielle à celle des cercles, c'est-à-dire à l'intégrale générale de l'équation différentielle. Nous ferons ce calcul plus tard, à propos de l'intégration des équations différentielles homogènes.

332. Existence de l'intégrale générale. Méthode graphique. — Nous venons de voir que, si l'on considère une famille de courbes planes dont l'équation dépend d'une constante arbitraire, l'ordonnée d'une de ces courbes, considérée comme fonction de l'abscisse, vérifie une équation différentielle du premier ordre, indépendante de la constante.

Il s'agit maintenant de démontrer la réciproque. *Étant donnée une équation différentielle du premier ordre*

$$\text{(A)} \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

il existe une famille de courbes, dont l'équation dépend d'une constante, et telle que l'ordonnée d'une quelconque de ces courbes, regardée comme fonction de l'abscisse, vérifie l'équation différentielle donnée.

Pour démontrer ce théorème, nous emploierons d'abord une méthode graphique, qui peut rendre des services dans la pratique pour intégrer approximativement une équation différentielle.

L'équation différentielle donnée (A) peut être d'un degré quelconque en $\frac{dy}{dx}$. Considérons une des valeurs de $\frac{dy}{dx}$, obtenue en résolvant l'équation (A) par rapport à $\frac{dy}{dx}$: soit

$$\text{(12)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

cette valeur.

Il peut arriver que cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ ne soit réelle que si le point M (x, y) est situé dans une certaine région du plan. Alors, il est évident que les courbes, vérifiant l'équation, seront nécessairement situées dans cette région. C'est ce qu'on a observé, dans l'exemple II du numéro précédent, où $\frac{dy}{dx}$ n'est réelle que si le point M est situé dans l'un des angles AOA' et BOB'.

Nous allons montrer que, par chaque point $M_0(x_0, y_0)$ situé dans la région où la valeur considérée

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{12}$$

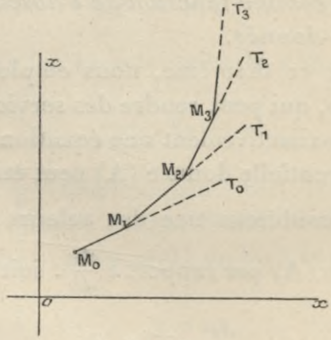
est réelle, il passe une courbe intégrale. Pour cela, remarquons que $\frac{dy}{dx}$ est le coefficient angulaire de la tangente au point x, y de la courbe cherchée : il s'agit donc de construire une courbe, passant par un point donné M_0, et telle que le coefficient angulaire de la tangente, en chacun de ses points, soit donné par la relation (12).

Tout d'abord le coefficient angulaire y'_0 de la tangente à la courbe cherchée, au point donné M_0, est connu ; il a pour valeur

$$y'_0 = f(x_0, y_0).$$

On connaît donc la tangente $M_0 T_0$ en ce point (*fig.* 188). Si,

Fig. 188.



sur cette tangente, on prend une longueur très petite $M_0 M_1$, on obtient un point M_1 de coordonnées x_1, y_1, qui est, approximativement, un point de la courbe voisin de M_0. Le coefficient angulaire y'_1 de la tangente en M_1 est alors donné par l'équation (12) :

$$y'_1 = f(x_1, y_1),$$

et l'on peut tracer la tangente $M_1 T_1$ en M_1. Si, sur cette tangente, on prend une longueur très petite $M_1 M_2$, on obtient un point M_2, de coordonnées x_2, y_2, qui est, approximativement, un point de la courbe voisin de M_1. Le coefficient angulaire y'_2 de la tangente en M_2 est alors donné par

$$y'_2 = f(x_2, y_2),$$

et ainsi de suite.

En continuant de cette façon, on construira un polygone $M_0 M_1 M_2 \ldots$, dont la forme donnera une idée approchée de la forme de la courbe intégrale. On peut démontrer rigoureusement, et nous admettrons que, si l'on fait tendre vers zéro tous les côtés $M_0 M_1$, $M_1 M_2$, ..., le polygone tend vers une courbe vérifiant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

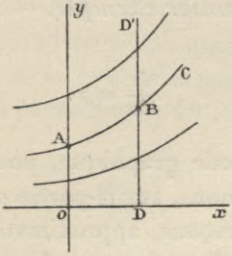
On voit, ainsi, qu'il existe une courbe intégrale passant par un point arbitrairement choisi M_0, et l'on a un moyen de la construire approximativement.

Il reste à voir que l'équation générale de ces courbes intégrales contient une constante arbitraire. Supposons, pour fixer les idées, que l'axe Oy traverse la région du plan, où existent les courbes intégrales. D'après ce qui précède, si l'on prend sur Oy un point quelconque A (*fig.* 189), d'ordonnée

$$OA = y_0,$$

il passe, par ce point, une courbe intégrale C. Cette courbe change

Fig. 189.



de forme et de position quand le point A se déplace sur Oy : son équation contient la constante arbitraire y_0.

Si l'axe Oy ne traverse pas la région du plan où $\frac{dy}{dx}$ est réel, on peut prendre une autre droite DD' parallèle à Oy, traversant cette région, et se donner arbitrairement le point B où une courbe intégrale rencontre DD′ ; l'équation de la courbe contient alors, comme constante arbitraire, l'ordonnée du point B.

Lignes de forces d'un champ plan. — La définition géométrique que nous venons de donner, des courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre, revient à dire que les courbes intégrales sont les *lignes de forces* d'un certain champ plan. Soit, en effet, un champ plan dont les forces F ont pour projections X et Y sur Ox et Oy. Les lignes de forces sont des lignes telles *que la force agissant en un point* M *d'une de ces lignes lui soit tangente*. L'élément dx, dy de la ligne en un point M a donc même direction que la force X, Y en ce point, et l'on a, tout le long d'une de ces lignes,

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X}.$$

Comme X et Y sont des fonctions de x et de y, on obtient une équation différentielle de la forme (12).

Réciproquement, toute équation de cette forme définit les lignes de forces d'un champ pour lequel on aurait $\frac{Y}{X} = f(x, y)$.

333. **Exemples** : *Premier exemple.* — Soit à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = y. \tag{13}$$

Employons la méthode graphique, pour obtenir la forme des courbes intégrales. Prenons, sur la partie positive de Oy, un point A, d'ordonnée y_0, et traçons, approximativement, la courbe intégrale, passant par ce point (*fig.* 190, I).

Le coefficient angulaire y'_0 de la tangente AT_1 à la courbe, en A, est positif :

$$y'_0 = y_0.$$

Si l'on prend, sur cette tangente, une petite longueur AM_1 du côté des x positifs, l'ordonnée y_1 de M_1 est supérieure à y_0, le coefficient angulaire y'_1 de la tangente M_1T_2 en ce point est

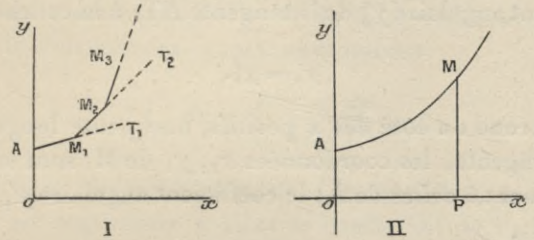
$$y'_1 = y_1;$$

cette tangente fait donc avec Ox un angle plus grand que la tangente M_1T_1. Si l'on prend sur M_1T_2 une petite longueur M_1M_2, l'ordonnée y_2 de M_2 est plus grande que y_1; le coefficient angulaire y'_2 de la tangente en M_2

$$y'_2 = y_2$$

est donc plus grand que y'_1 et M_2T_3 est au-dessus de M_1T_2. On

Fig. 190.



continuera de cette façon et l'on obtiendra un polygone dont les côtés se relèvent de plus en plus et tendent à devenir verticaux. La courbe intégrale AM (*fig.* 190, II), limite de ce polygone, a donc une ordonnée qui croît constamment et indéfiniment : elle présente, vers la droite, la forme d'une branche infinie, dont la tangente tend à devenir parallèle à Oy, quand y augmente indéfiniment. Il reste à voir si la courbe a une asymptote verticale ou si la branche infinie est parabolique. Or, on peut écrire l'équation (13) sous la forme

$$dx = \frac{dy}{y}; \tag{14}$$

intégrons, le long de la courbe, du point A au point M : x varie de o à x et y de y_0 à y :

$$\int_0^x dx = \int_{y_0}^y \frac{dy}{y},$$

$$x = \mathrm{L}\frac{y}{y_0}, \qquad y = y_0 e^x. \tag{15}$$

Quand y croît indéfiniment, il en est de même de x ; la branche infinie est parabolique. On pourrait, de même, tracer approximativement la courbe vers la gauche.

Dans cet exemple très simple, nous avons une vérification de la méthode, puisque l'équation (15) donne l'intégrale générale de l'équation différentielle, avec une constante arbitraire y_0.

Deuxième exemple. — Soit l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

Construisons, encore approximativement, la courbe intégrale, qui part d'un point A de Oy, d'ordonnée y_0. Au point A (*fig.* 190, I), le coefficient angulaire y'_0 de la tangente AT_1 à la courbe intégrale est positif,

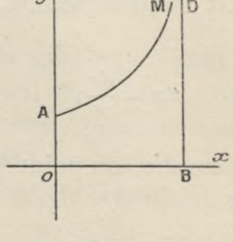
$$y'_0 = y_0^2.$$

Si l'on prend du côté des x positifs, une petite longueur AM_1, sur cette tangente, les coordonnées x_1, y_1 de M_1 sont supérieures respectivement à celles de A ; le coefficient angulaire y'_1 de la tangente en M_1,

$$y'_1 = x_1^2 + y_1^2,$$

est donc supérieur à y'_0, et cette tangente M_1T_2 est au-dessus de M_1T_1 ; en continuant de cette façon, on obtiendra un polygone $AM_1M_2\ldots$, dont les côtés successifs se relèvent et tendent à devenir verticaux. La courbe intégrale AM (*fig.* 191) présente

Fig. 191.



donc une branche infinie, le long de laquelle la tangente tend à devenir verticale quand y augmente indéfiniment. Actuellement, cette branche admet une asymptote verticale, c'est-à-dire que x

tend vers une limite, quand y augmente indéfiniment. Pour le voir, remarquons que, le long de la courbe, x est une fonction déterminée de y

$$x = \varphi(y).$$

L'équation différentielle peut s'écrire

$$dx = \frac{dy}{x^2 + y^2}.$$

On a donc, le long de la courbe,

$$dx = \frac{dy}{[\varphi(y)]^2 + y^2}.$$

Intégrons maintenant du point A, de coordonnées $(0, y_0)$, au point M de coordonnées (x, y), nous aurons

$$\int_0^x dx = \int_{y_0}^y \frac{dy}{[\varphi(y)]^2 + y^2}.$$

La première intégrale est x; dans la deuxième, la limite supérieure y est supérieure à y_0 et le coefficient de dy est moindre que $\frac{1}{y^2}$. D'après un théorème sur les intégrales définies (n° 37), cette intégrale est moindre que

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y^2}.$$

On a donc

$$x < \int_{y_0}^y \frac{dy}{y^2},$$

$$x < \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y}.$$

Quand y augmente indéfiniment, x croît constamment le long de la courbe, mais il tend vers une limite, car l'inégalité montre que x reste inférieur à la quantité fixe $\frac{1}{y_0}$. La courbe a donc une asymptote verticale BD, dont l'abscisse OB est moindre que $\frac{1}{y_0}$.

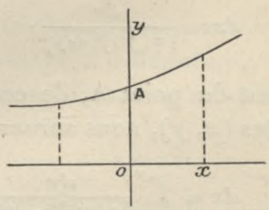
334. **Démonstration analytique de l'existence de l'intégrale générale.** — Considérons une équation différentielle du premier ordre

supposée, comme plus haut, résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

On peut, en s'appuyant sur la formule de Mac-Laurin, définir, à l'aide d'une série, l'intégrale générale de l'équation. Imaginons une courbe intégrale, passant par le point A de Oy, d'ordonnée y_0, (*fig.* 192). Le long de cette courbe, y est une fonction de x qui

Fig. 192.



peut, sauf dans des cas exceptionnels dont nous ne nous occuperons pas, être développée par la formule de Mac-Laurin en une série

$$(16) \qquad y = y_0 + \frac{x}{1} y'_0 + \frac{x^2}{1.2} y''_0 + \frac{x^2}{1.2.3} y'''_0 + \ldots,$$

convergente dans un intervalle symétrique par rapport à o. Dans ce développement, $y'_0, y''_0, \ldots$ désignent les valeurs que prennent, pour $x = 0$, les dérivées successives de y par rapport à x. Nous allons voir que tous les coefficients de la série (16) peuvent être exprimés à l'aide de y_0. D'abord on a, d'après l'équation donnée,

$$(17) \qquad y' = f(x, y);$$

faisant $x = 0$, y prend la valeur y_0 et l'on a

$$y'_0 = f(0, y_0).$$

Si, ensuite, on dérive les deux membres de (17) par rapport à x, en se rappelant que y est une fonction de x, on a

$$(18) \qquad y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'.$$

Si, dans cette relation, on fait $x = 0$, $y = y_0$, y' prend la valeur y'_0 précédemment calculée et y'' prend une valeur y''_0, donnée par l'équation (18); cette valeur est fonction de y_0.

En dérivant les deux membres de (18) par rapport à x, on a

$$(19) \qquad y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y}y'';$$

cette relation, où l'on fait $x = 0$, $y = y_0$ et où l'on remplace y'_0, y''_0 par leurs valeurs précédemment calculées, donne y'''_0, en fonction de y_0. En continuant ainsi, on calculera autant de coefficients y'_0, $y''_0, y'''_0, \ldots$ que l'on voudra de la série (16), en fonction de y_0. Cette série définira alors, dans son intervalle de convergence, une fonction y de x, contenant la constante arbitraire y_0

$$y = \Phi(x, y_0),$$

et vérifiant l'équation différentielle : cette fonction est l'intégrale générale de l'équation différentielle.

En limitant le développement aux premiers termes, on a une expression approchée de l'intégrale générale, pour de petites valeurs de x.

Il est évident qu'on peut introduire, dans l'intégrale générale, une constante quelconque C : il suffit d'y remplacer y_0 par une fonction quelconque de C

$$y_0 = \psi(C);$$

alors y devient fonction de x et C : $y = \varphi(x, C)$.

On pourra, de même, à l'aide de la série de Taylor, former l'équation de la courbe intégrale, passant par un point donné $(x = x_0, y = y_0)$, ou, ce qui revient au même, obtenir l'expression de la fonction y de x qui vérifie l'équation différentielle et se réduit à y_0 pour $x = x_0$. Cette expression est de la forme

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1}y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}y''_0 + \ldots,$$

$y'_0, y''_0, \ldots$ désignant ici les valeurs des dérivées de y pour $x = x_0$. Ces valeurs se calculent, de proche en proche, à l'aide des équations obtenues en dérivant une, deux, trois, ... fois l'équation différentielle et faisant ensuite $x = x_0$, $y = y_0$.

La série obtenue converge dans un intervalle symétrique par rapport à x_0.

Pour certaines positions spéciales du point x_0, y_0 les séries peuvent être divergentes : le cadre de ces leçons ne nous permet pas de faire une étude détaillée de ces cas. Nous nous bornerons à remarquer que ces cas exceptionnels se présentent, en particulier, toutes les fois qu'un des coefficients y'_0, y''_0, ... est infini.

335. **Exemple**. — Appliquons la méthode ci-dessus à l'équation

$$y' = y,$$

déjà considérée. Si l'on dérive cette équation, on a successivement

$$y'' = y',$$
$$y''' = y'',$$
$$\dots\dots\dots$$

On voit que toutes les dérivées sont égales entre elles et égales à y. Si donc nous voulons développer l'intégrale générale à l'aide de la série de Mac-Laurin

$$y = y_0 + \frac{x}{1} y'_0 + \frac{x^2}{1.2} y''_0 + \dots,$$

nous voyons que tous les coefficients y'_0, y''_0, ... sont égaux à y_0 et nous obtenons l'intégrale générale

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \dots \right)$$

sous forme d'une série convergente. On voit que l'on a

$$y = y_0 \, e^x,$$

comme nous l'avons vu par un calcul direct.

336. **Coefficients indéterminés.** — Au lieu de calculer, de proche en proche, les valeurs des dérivées successives y'_0, y''_0, ... correspondant à $x = 0$, $y = y_0$, on peut employer la méthode des coefficients indéterminés et essayer de vérifier l'équation différentielle à l'aide d'une série de la forme

$$(20) \qquad y = y_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots.$$

En substituant dans l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

et écrivant que les deux membres sont identiques, on obtient une suite de relations permettant de calculer $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en fonction de y_0. Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

En y substituant le développement (20), nous avons

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots = x^2 + (y_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots)^2.$$

Si l'on identifie les termes contenant les mêmes puissances de x dans les deux membres, on a

$$\begin{aligned} a_1 &= y_0^2, \\ 2a_2 &= 2a_1y_0, \\ 3a_3 &= 1 + a_1^2 + 2a_2y_0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, de proche en proche,

$$\begin{aligned} a_1 &= y_0^2, \\ a_2 &= y_0^3, \\ a_3 &= \frac{1}{3}(1 + 3y_0^4), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On obtient ainsi le développement

$$y = y_0 + xy_0^2 + x^2y_0^3 + \frac{x^3}{3}(1 + 3y_0^4) + \ldots,$$

qui donne l'intégrale générale de l'équation pour de petites valeurs de x.

III. — TYPES D'ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE INTÉGRABLES PAR DES QUADRATURES.

337. **Premier type : Les variables se séparent.** — Soit une équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y). \tag{1}$$

On peut séparer les variables en mettant, dans un membre, un terme contenant uniquement y et, dans l'autre, un terme contenant uniquement x : pour cela, il suffit d'écrire

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)\,dx.$$

On a alors, en intégrant,

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C,$$

où C désigne une constante arbitraire.

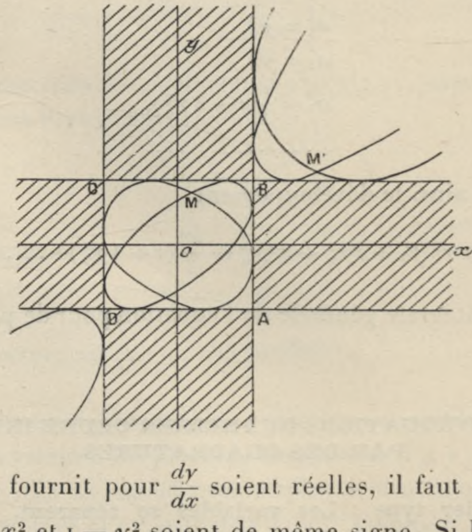
Cette relation donne l'intégrale générale de l'équation différentielle (1).

Exemple. — Considérons l'équation

$$(1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2.$$

Cette équation est du deuxième degré en $\frac{dy}{dx}$. Pour que les va-

Fig. 193.



leurs qu'elle fournit pour $\frac{dy}{dx}$ soient réelles, il faut que les deux facteurs $1 - x^2$ et $1 - y^2$ soient de même signe. Si l'on construit les quatre droites $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, elles forment un carré ABCD (*fig.* 193); les deux facteurs $1 - x^2$ et $1 - y^2$ sont positifs, quand le point (x, y) est dans l'intérieur du carré; ils sont tous deux négatifs, dans les angles opposés par le sommet aux angles du carré; ils sont de signes contraires, dans les régions indéfinies couvertes de hachures dans la figure 193. Les courbes intégrales sont donc situées dans les régions blanches.

Supposons d'abord $1 - x^2$ et $1 - y^2$ positifs : nous écrirons, en extrayant les racines,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}},$$

équation du type (1). Séparons les variables, nous avons

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

d'où, en intégrant,

$$\text{arc sin}\, y = \pm\, \text{arc sin}\, x + C.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation. Pour voir quelles sont les courbes qu'elle représente, prenons les sinus des deux membres : comme on a

$$\sin(\text{arc sin}\, x) = x, \qquad \cos(\text{arc sin}\, x) = \pm\sqrt{1-x^2},$$

il vient

$$y = \pm x \cos C \pm \sqrt{1-x^2}\sin C.$$

On peut se contenter de prendre les deux signes $+$, car, C étant une constante arbitraire, on peut, en changeant C en $-C$, changer à volonté le signe du deuxième terme, et, en changeant C en $\pi - C$, changer, à volonté, le signe du premier. L'intégrale générale est donc

$$y = x\cos C + \sqrt{1-x^2}\sin C$$

ou, en rendant rationnel,

$$(y - x\cos C)^2 = (1 - x^2)\sin^2 C,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos C = \sin^2 C. \tag{2}$$

Cette équation, où C est une constante, représente des ellipses, ayant pour centre l'origine et inscrites dans le carré ABCD; en posant

$$\cos C = a,$$

on peut l'écrire

$$(3) \qquad x^2 + y^2 - 2axy = 1 - a^2,$$

où la constante arbitraire a est *moindre* que 1, en valeur absolue.

Si nous supposons maintenant $1 - x^2$ et $1 - y^2$ négatifs, c'est-à-dire le point x, y placé, en M′, dans l'un des angles opposés par le sommet aux angles du carré, nous devrons, pour éviter les imaginaires, écrire l'équation différentielle,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

et, en séparant les variables,

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} = \pm \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

L'intégration est immédiate et donne pour l'intégrale générale

$$\mathrm{L}(y + \sqrt{y^2 - 1}) = \mathrm{L}(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) + \mathrm{D},$$

D désignant une constante arbitraire. Si l'on passe des logarithmes aux nombres, on peut écrire

$$(4) \qquad y + \sqrt{y^2 - 1} = (x \pm \sqrt{x^2 - 1})e^{\mathrm{D}}.$$

Pour rendre cette intégrale rationnelle, remarquons qu'on peut l'écrire aussi

$$(5) \qquad y - \sqrt{y^2 - 1} = (x \mp \sqrt{x^2 - 1})e^{-\mathrm{D}},$$

car, en multipliant membre à membre les équations (4) et (5), on obtient une identité $1 = 1$. Ajoutons les équations (4) et (5), il vient

$$y = x\,\frac{e^{\mathrm{D}} + e^{\mathrm{D}}}{2} \pm \sqrt{x^2 - 1}\,\frac{e^{\mathrm{D}} - e^{-\mathrm{D}}}{2},$$

ou, en isolant le radical, élevant au carré et réduisant,

$$(6) \qquad x^2 + y^2 - 2xy\,\frac{e^{\mathrm{D}} + e^{-\mathrm{D}}}{2} = 1 - \left(\frac{e^{\mathrm{D}} + e^{-\mathrm{D}}}{2}\right)^2.$$

Cette équation, dans laquelle on fait

$$\frac{e^{\mathrm{D}} + e^{-\mathrm{D}}}{2} = a,$$

prend la forme déjà trouvée (3) avec cette différence que maintenant a est *supérieur* à 1. Elle représente des hyperboles tangentes aux prolongements des côtés du carré.

En résumé, l'intégrale générale de l'équation

$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1-y^2$$

est

$$x^2+y^2-2axy = 1-a^2,$$

a désignant une constante arbitraire qui est *inférieure* à 1 quand $1-x^2$ et $1-y^2$ sont positifs, *supérieure* à 1 quand $1-x^2$ et $1-y^2$ sont négatifs. Par tout point $M(x, y)$, pris dans le carré ABCD, passent deux courbes intégrales qui sont des ellipses; par tout point M', pris dans les angles indéfinis, passent deux courbes intégrales, qui sont des hyperboles (*fig.* 193).

Remarque. — On peut passer également de la forme (2) de l'intégrale générale à la forme (6), en supposant C imaginaire et posant

$$C = iD;$$

en effet, on a alors (n° 91)

$$\cos C = \cos iD = \frac{e^{D}+e^{-D}}{2},$$

$$\sin C = \sin iD = -\frac{e^{D}-e^{-D}}{2i}.$$

Le fait qui se présente ici est général. Lorsque les courbes intégrales, trouvées par un certain procédé de calcul, restent réelles quand la constante arbitraire qui s'est introduite prend des valeurs imaginaires, les nouvelles courbes ainsi obtenues sont encore des intégrales de l'équation différentielle, puisque cette équation se déduit de l'intégrale générale par l'élimination de la constante.

338. **Deuxième type : Équations homogènes.** — Une équation différentielle *homogène* du premier ordre est de la forme

$$(7) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cette équation est dite *homogène*, car elle ne change pas quand on remplace x par kx et y par ky, k désignant une constante quelconque.

On la ramène au type précédent en faisant le changement de fonction

$$\frac{y}{x} = z,$$

d'où

(8) $$y = xz.$$

Il est évident que, pour connaître y en fonction de x, il suffit de connaître z en fonction de x. Comme on a, d'après (8),

$$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx},$$

l'équation différentielle proposée devient

(9) $$z + x\frac{dz}{dx} = f(z).$$

Les variables peuvent alors se séparer, et l'on peut écrire

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x},$$

d'où, en intégrant,

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \mathrm{L}x + \mathrm{C}.$$

Cette relation donne l'intégrale générale de l'équation (9). En y remplaçant, après l'intégration, z par $\frac{y}{x}$, on a l'intégrale générale de l'équation (7).

Exemple. — Soit l'équation

(10) $$4y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y^2 - \left(x + y\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Cette équation, ordonnée par rapport à $\frac{dy}{dx}$, s'écrit

$$3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 - x^2 = 0;$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3y} \pm \frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 3},$$

Cette équation est une équation *homogène*.

Faisons $y = xz$ et prenons le radical positivement, l'équation devient

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1}{3z} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{z^2} - 3}$$

ou, en séparant les variables et intégrant,

$$\int \frac{3z\,dz}{1 - 3z^2 + 2\sqrt{1 - 3z^2}} = \mathrm{L}x - \mathrm{L}\,\mathrm{D}, \tag{11}$$

D désignant une constante arbitraire. Pour effectuer la quadrature, faisons

$$1 - 3z^2 = u^2,$$

d'où

$$-3z\,dz = u\,du.$$

L'intégrale du premier membre devient

$$\int \frac{-u\,du}{u^2 + 2u} = -\int \frac{du}{u+2} = -\mathrm{L}(u+2),$$

c'est-à-dire

$$-\mathrm{L}\left(\sqrt{1 - 3z^2} + 2\right).$$

L'équation (11) s'écrit donc

$$-\mathrm{L}\left(\sqrt{1 - 3z^2} + 2\right) = \mathrm{L}x - \mathrm{L}\,\mathrm{D}$$

ou, en passant des logarithmes aux nombres,

$$x\left(\sqrt{1 - 3z^2} + 2\right) = \mathrm{D}.$$

Il reste à remplacer z par $\frac{y}{x}$; on a ainsi

$$\sqrt{x^2 - 3y^2} + 2x = \mathrm{D}$$

ou, en rendant rationnel,

$$3(x^2 + y^2) - 4\mathrm{D}x + \mathrm{D}^2 = 0. \tag{12}$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (10) avec la constante D. On voit que les courbes intégrales sont des cercles.

En faisant un changement de notation et posant

$$\frac{\mathrm{D}}{3} = \mathrm{C},$$

nous pouvons écrire l'intégrale générale

$$x^2 + y^2 - 4Cx + 3C^2 = 0$$

ou

$$(x - 2C)^2 + y^2 - C^2 = 0.$$

Nous retrouvons ainsi les cercles dont nous sommes partis dans l'exemple II du n° 331 pour former l'équation différentielle que nous venons d'intégrer.

Exercice. — L'équation homogène

$$y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{y^2 - x^2}$$

a pour intégrale générale

$$x^2 - 2Cy + C^2 = 0,$$

C désignant une constante arbitraire.

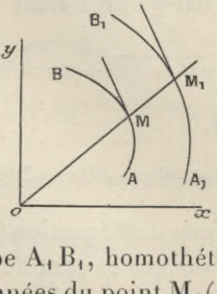
Remarque. — *Les courbes, représentées par l'intégrale générale d'une équation différentielle homogène, sont homothétiques de l'une quelconque d'entre elles par rapport à l'origine.*

En effet, soient AB une courbe satisfaisant à l'équation

$$(13) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

M(x, y) un point de cette courbe (*fig.* 194).

Fig. 194.



Construisons la courbe A_1B_1, homothétique de AB par rapport au point O. Les coordonnées du point $M_1(x_1, y_1)$ de cette courbe, homologue de M, sont données par les équations

$$\overline{OM_1} = k\overline{OM}, \qquad x_1 = kx, \qquad y_1 = ky,$$

k désignant une constante. On a donc

$$dx_1 = k\,dx, \qquad dy_1 = k\,dy,$$
$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{dy}{dx}, \qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x};$$

l'équation (13), supposée vérifiée, entraîne donc

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

et la nouvelle courbe A_1B_1 vérifie la même équation, quel que soit k.

La proposition est donc établie.

Par exemple, les cercles trouvés plus haut,

$$(x - 2\,C)^2 + y^2 - C^2 = 0,$$

sont homothétiques de l'un d'entre eux par rapport à O.

339. **Troisième type : Équations de la forme**

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}\right), \tag{14}$$

a, b, c, a', b', c' **désignant des constantes**. — On peut rendre *homogène* une équation de ce type en portant l'origine au point de rencontre des deux droites obtenues en égalant à zéro les deux expressions $ax + bx + c$ et $a'x + b'y + c'$. En effet, appelons α et β les coordonnées du point de rencontre de ces deux droites; on a

$$a\alpha + b\beta + c = 0,$$
$$a'\alpha + b'\beta + c' = 0.$$

Faisons alors le changement de variables

$$x = x_1 + \alpha, \qquad y = y_1 + \beta,$$

qui revient à transporter l'origine des axes au point (α, β); il vient

$$dx = dx_1, \qquad dy = dy_1,$$
$$ax + by + c = ax_1 + by_1,$$
$$a'x + b'y + c' = a'x_1 + b'y_1,$$

et l'équation devient

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{ax_1 + by_1}{a'x_1 + b'y_1}\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{dy_1}{dx_1} = f\left(\frac{a + b\,\dfrac{y_1}{x_1}}{a' + b'\,\dfrac{y_1}{x_1}}\right).$$

Le deuxième membre étant fonction du seul rapport $\frac{y_1}{x_1}$, on est ramené à une équation homogène qu'on peut intégrer en faisant

$$\frac{y_1}{x_1} = z.$$

Cas exceptionnel. — La méthode précédente suppose que les droites obtenues en égalant à zéro les deux expressions $ax + by + c$ et $a'x + b'y + c'$ *ne sont pas parallèles*. Quand elles sont parallèles, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \lambda,$$

λ désignant une constante. L'équation proposée s'écrit alors

$$\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c'}\right].$$

Dans ce cas, on conserve la variable x, et l'on pose

$$ax + by = y_1,$$

y_1 étant une nouvelle fonction de x. On en déduit

$$y = \frac{1}{b}(y_1 - ax),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\frac{dy_1}{dx} - \frac{a}{b},$$

et l'équation devient

$$\frac{1}{b}\frac{dy_1}{dx} - \frac{a}{b} = f\left(\frac{y_1 + c}{\lambda y_1 + c'}\right),$$

où les variables se séparent quand on résout par rapport à dx.

Exemple I. — Soit à intégrer l'équation

$$(2x+3y+1)\,dx+(3x+4y+1)\,dy=0. \tag{15}$$

De cette équation on tire

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x+3y+1}{3x+4y+1};$$

$\dfrac{dy}{dx}$ est donc une fonction du rapport de deux expressions linéaires en x et y.

Déterminons les nombres α et β qui annulent ces deux expressions :

$$2\alpha+3\beta+1=0,$$
$$3\alpha+4\beta+1=0,$$

on trouve

$$\alpha=1, \qquad \beta=-1.$$

Faisons alors

$$x=x_1+1, \qquad y=y_1-1; \tag{16}$$

l'équation devient

$$\frac{dy_1}{dx_1}=-\frac{2x_1+3y_1}{3x_1+4y_1},$$

équation *homogène*. Posons

$$\frac{y_1}{x_1}=z, \qquad y_1=x_1z, \tag{17}$$

nous avons l'équation

$$z+x_1\frac{dz}{dx_1}=-\frac{2+3z}{3+4z},$$

et, en séparant les variables,

$$2\frac{dx_1}{x_1}=-\frac{(3+4z)\,dz}{1+3z+2z^2}.$$

Dans le deuxième membre, le numérateur est la différentielle du dénominateur; on a donc, en intégrant,

$$2\,\mathrm{L}x_1=-\mathrm{L}(1+3z+2z^2)+\mathrm{L}\,\mathrm{C};$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathrm{L}x_1^2(1+3z+2z^2)=\mathrm{L}\,\mathrm{C},$$

d'où

$$x_1^2(1+3z+2z^2)=\mathrm{C}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation. Revenons d'abord aux variables x_1 et y_1 en remplaçant z par $\frac{y_1}{x_1}$, l'intégrale trouvée devient

$$x_1^2 + 3x_1 y_1 + 2y_1^2 = C.$$

Si, enfin, on revient aux variables x et y par les formules (16),

$$x_1 = x - 1, \qquad y_1 = y + 1,$$

on a l'intégrale générale de l'équation proposée (15) sous la forme

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y = C. \tag{18}$$

Vérification. — Dans cette équation (15), le premier membre est une différentielle totale exacte, car la dérivée du coefficient de dx, par rapport à y, est égale à la dérivée du coefficient de dy par rapport à x. La théorie des différentielles totales à deux variables (n° 283) nous montre alors que l'équation peut s'écrire

$$d(x^2 + 3xy + 2y^2 + x + y) = 0.$$

La fonction soumise à la différentiation est donc constante le long d'une courbe intégrale ; ce qui donne l'intégrale générale (18).

Exemple II. — Soit à intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x - y - 1}{2x - 2y + 1}\right)^2. \tag{19}$$

Actuellement, les deux droites obtenues, en égalant à zéro le numérateur et le dénominateur, sont parallèles : les coefficients de x et y sont proportionnels, dans les deux termes du rapport. Nous ferons alors

$$x - y = y_1, \qquad y = -y_1 + x;$$

l'équation devient

$$-\frac{dy_1}{dx} + 1 = \left(\frac{y_1 - 1}{2y_1 + 1}\right)^2$$

ou, en séparant les variables,

$$dx = \frac{(2y_1 + 1)^2}{(2y_1 + 1)^2 - (y_1 - 1)^2}\, dy_1,$$

$$dx = \frac{(2y_1 + 1)^2}{3y_1(y_1 + 2)}\, dy_1.$$

Pour intégrer le deuxième membre, on décompose la fraction rationnelle, en y_1, en fractions simples. On a ainsi

$$dx = \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\frac{1}{y_1} - \frac{3}{2}\frac{1}{y_1+2}\right) dy_1,$$

$$x = \frac{4}{3} y_1 + \frac{1}{6} \mathrm{L} y_1 - \frac{3}{2} \mathrm{L}(y_1+2) + \mathrm{C},$$

ou, en revenant aux variables x et y par la substitution

$$y_1 = x - y$$

et réduisant, après avoir chassé les dénominateurs,

$$8y - 2x - \mathrm{L}(x-y) + 9\mathrm{L}(x-y+2) = \mathrm{C}',$$

C' désignant une constante arbitraire.

On a ainsi l'intégrale générale de l'équation (19).

340. Quatrième type : Équations linéaires. — Une équation différentielle *linéaire* du premier ordre est de la forme

$$(20) \qquad f(x)\frac{dy}{dx} + y\varphi(x) = \psi(x);$$

on la nomme *linéaire*, car elle contient linéairement y et $\frac{dy}{dx}$. Pour intégrer une équation de cette nature, posons

$$(21) \qquad y = uz,$$

où z est la nouvelle fonction inconnue de x et u une fonction auxiliaire de x, dont nous disposerons, de façon à simplifier l'équation en z. Par la substitution (21), l'équation devient

$$(22) \qquad f(x)\left(u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx}\right) + uz\varphi(x) = \psi(x).$$

Disposons maintenant de u, de façon à annuler le coefficient de z : il suffit, pour cela, de prendre pour u une fonction particulière vérifiant la condition

$$f(x)\frac{du}{dx} + u\varphi(x) = 0,$$

qui donne

$$\frac{du}{u} = -\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx$$

et, en intégrant,

$$\mathrm{L}\,u = -\int \frac{\varphi(x)}{f(x)}\,dx.$$

La fonction u étant déterminée par cette relation, l'équation (22) devient

$$u\,f(x)\frac{dz}{dx} = \psi(x),$$

où u est maintenant connu en fonction de x. On en déduit

$$dz = \frac{\psi(x)}{u\,f(x)}\,dx,$$

$$z = \int \frac{\psi(x)}{u\,f(x)}\,dx + \mathrm{C}.$$

En revenant à la variable y, par la substitution $y = uz$, on a l'intégrale générale de l'équation linéaire (20)

$$y = u\int \frac{\psi(x)}{u\,f(x)}\,dx + \mathrm{C}\,u,$$

avec une constante arbitraire C.

Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sin x} = \cos x - 1. \tag{23}$$

Faisons $y = uz$: nous avons

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dx} - \frac{uz}{\sin x} = \cos x - 1.$$

Déterminons u de façon à annuler le coefficient de z :

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{\sin x} = 0,$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{\sin x},$$

$$\mathrm{L}\,u = \mathrm{L}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}.$$

Il est inutile d'ajouter une constante, car nous ne voulons pas la fonction la plus générale annulant le coefficient de z : une détermination particulière de u nous suffit. En passant des logarithmes aux nombres, on a

$$u = \operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

L'équation en z devient alors

$$dz = \frac{\cos x - 1}{\operatorname{tang}\frac{x}{2}}\,dx$$

ou, en remplaçant $1 - \cos x$ par $2\sin^2\frac{x}{2}$,

$$dz = -2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx.$$

En intégrant, on a

$$z = 2\cos^2\frac{x}{2} + C.$$

Comme on a posé $y = uz$, on a, enfin, pour l'intégrale de l'équation proposée,

$$y = 2\operatorname{tang}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} + C\operatorname{tang}\frac{x}{2}$$

ou encore, en remplaçant $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ par $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$ et réduisant,

$$y = \sin x + C\operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

Il est facile de vérifier que cette fonction rend identiques les deux membres de l'équation proposée (23).

341. Cinquième type : Équation de Bernoulli. — Soit une équation de la forme

$$f(x)\frac{dy}{dx} + y\,\varphi(x) = y^n\,\psi(x),$$

où n est un exposant constant quelconque. Une pareille équation se ramène à une équation linéaire.

En effet, on peut l'écrire, en divisant par y^n :

$$f(x)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} + y^{1-n}\,\varphi(x) = \psi(x),$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{1}{1-n}f(x)\frac{d(y^{1-n})}{dx}+y^{1-n}\varphi(x)=\psi(x).$$

L'équation prend alors la forme linéaire si l'on y considère y^{1-n} comme l'inconnue

$$y^{1-n}=Y.$$

On a, en effet,

$$\frac{1}{1-n}f(x)\frac{dY}{dx}+Y\varphi(x)=\psi(x),$$

équation qui est linéaire.

Le calcul précédent est en défaut, quand $n=1$, mais alors l'équation proposée s'écrit

$$f(x)\frac{dy}{dx}=y[\psi(x)-\varphi(x)],$$

et les variables se séparent.

Exemple. — Soit l'équation

$$x\frac{dy}{dx}+y=y^2\mathrm{L}x. \tag{24}$$

Divisons par y^2 :

$$xy^{-2}\frac{dy}{dx}+y^{-1}=\mathrm{L}x.$$

En posant

$$y^{-1}=Y,$$

d'où

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx}=\frac{dY}{dx},$$

on est ramené à l'équation linéaire

$$-x\frac{dY}{dx}+Y=\mathrm{L}x.$$

Posons alors

$$Y=uz,$$

il vient

$$-x\left(u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}\right)+uz=\mathrm{L}x.$$

Annulant le coefficient de z, on a

$$-x\frac{du}{dx}+u=0,$$

$$\frac{du}{u}=\frac{dx}{x}.$$

Pour vérifier cette équation, il suffit de prendre

$$\mathrm{L}u=\mathrm{L}x,$$

$$u=x.$$

On a alors, pour déterminer z, la relation

$$-x^2\frac{dz}{dx}=\mathrm{L}x,$$

$$dz=-\frac{1}{x^2}\mathrm{L}x\,dx,$$

$$z=-\int\frac{1}{x^2}\mathrm{L}x\,dx+\mathrm{C}.$$

Cette intégrale s'obtient facilement par l'intégration par parties : on peut l'écrire

$$\int \mathrm{L}x\,d\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\mathrm{L}x-\int\frac{1}{x}d\mathrm{L}x=\frac{1}{x}\mathrm{L}x-\int\frac{dx}{x^2}.$$

Donc

$$z=\frac{1}{x}\mathrm{L}x+\frac{1}{x}+\mathrm{C}.$$

Alors

$$\mathrm{Y}=xz=\mathrm{L}x+1+\mathrm{C}x,$$

et, comme

$$y=\frac{1}{\mathrm{Y}},$$

$$y=\frac{1}{\mathrm{L}x+1+\mathrm{C}x}.$$

C'est là l'intégrale générale de l'équation (24), avec une constante arbitraire C.

IV. — INTÉGRALES SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE. ÉQUATION DE CLAIRAUT.

342. Intégrales particulières et intégrales singulières. — Étant donnée une équation différentielle du premier ordre

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

nous avons vu que l'intégrale générale de cette équation est définie par une relation

$$\varphi(x, y, C) = 0,$$

contenant une constante arbitraire. Géométriquement, on peut dire que l'intégrale générale représente une famille de courbes planes, dépendant d'une constante arbitraire.

Quand on donne à la constante C une valeur numérique, on obtient une intégrale, qui prend le nom d'*intégrale particulière*. Par exemple, l'équation

$$(1) \qquad (1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2,$$

étudiée au n° 337, a pour intégrale générale

$$(2) \qquad x^2 - 2axy + y^2 = 1 - a^2,$$

a désignant une constante arbitraire.

Si l'on donne à a une valeur numérique, $a = 3$ par exemple, on a une courbe particulière

$$x^2 - 6xy + y^2 = -8$$

vérifiant l'équation différentielle : c'est une *intégrale particulière*. Si l'on fait $a = 1$, on a une autre intégrale particulière

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$

ou

$$(x - y)^2 = 0$$

qui est représentée par une diagonale du carré ABCD (*fig.* 193).

On appelle *intégrale singulière* d'une équation différentielle toute solution de l'équation qui n'est pas une intégrale particulière. De telles solutions n'existent qu'exceptionnellement. Par exemple, l'équation (1) que nous venons de rappeler admet la solution

$$y = 1$$

représentée, sur la figure 193, par un des côtés du carré ABCD. Cette solution ne peut pas être obtenue en particularisant la constante a qui figure dans l'intégrale (2) : c'est donc une *intégrale singulière.*

343. **Théorème.** — *Quand les courbes représentées par l'intégrale générale*

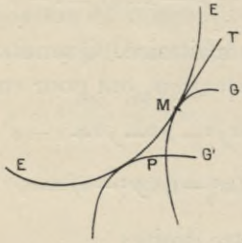
$$\varphi(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

d'une équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

ont une enveloppe, cette enveloppe est, elle-même, une intégrale de l'équation différentielle; c'est, en général, une intégrale singulière.

Fig. 195.



En effet, soit E (*fig.* 195) l'enveloppe des courbes (3) : prenons un point $M(x, y)$ sur cette enveloppe; appelons

$$\frac{d_1 y}{d_1 x}$$

le coefficient angulaire de la tangente MT à l'enveloppe, $d_1 y$ et $d_1 x$ désignant les différentielles des coordonnées correspondant à un déplacement infiniment petit sur l'enveloppe.

Par le point M il passe une courbe G, représentée par l'équation (3); cette courbe G étant une courbe intégrale, l'équation différentielle est vérifiée tout le long de cette courbe, et, en particulier, au point M; de sorte qu'en appelant $\frac{dy}{dx}$ le coefficient angulaire de la tangente MT à la courbe G en M, on a

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Mais les deux courbes E et G étant tangentes en M, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d_1 y}{d_1 x}.$$

On a donc aussi

$$F\left(x, y, \frac{d_1 y}{d_1 x}\right) = 0$$

et cela, pour tous les points M de l'enveloppe E : cette enveloppe est donc une courbe intégrale.

Exemples. — 1° L'équation

$$(1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2$$

a pour intégrale générale

$$x^2 + y^2 - 2axy = 1 - a^2,$$

a étant une constante arbitraire. Quand a varie, les coniques, représentées par cette équation, ont pour enveloppe la courbe

$$x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 = 0$$

ou

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = 0,$$

qui se compose des quatre droites

$$x = \pm 1, \qquad y = \pm 1,$$

formant les côtés du carré ABCD (*fig.* 193). Ces quatre droites sont des courbes intégrales, comme on le voit en écrivant l'équation

$$(1 - x^2)\,dy^2 = (1 - y^2)\,dx^2;$$

pour $x = \pm 1$, les deux membres sont nuls; de même pour $y = \pm 1$. On a ainsi quatre intégrales singulières.

2° L'équation différentielle homogène du n° 338

$$3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 4y^2 - x^2 = 0$$

a pour intégrale générale

$$x^2 + y^2 - 4Cx + 3C^2 = 0.$$

Quand C varie, les cercles représentés par cette équation ont pour enveloppe les deux droites

$$4x^2 - 3(x^2 + y^2) = 0$$

ou

$$y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Il est aisé de vérifier que chacune de ces droites est une courbe intégrale. Par exemple, en substituant, dans le premier membre de l'équation différentielle, la fonction

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

on obtient un résultat identiquement nul.

344. Sixième type : Équation de Clairaut. — On appelle *équation de Clairaut* une équation différentielle de la forme

$$F\left(y - x\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Supposons qu'on résolve cette équation par rapport à $y - x\frac{dy}{dx}$, on pourra l'écrire

$$(4) \qquad y = xy' + f(y'),$$

en employant la notation des dérivées. Nous allons intégrer cette équation (4). Pour cela, dérivons le premier membre par rapport à x : nous aurons

$$y' = xy'' + y' + f'(y')y'',$$

ce qui peut s'écrire

$$(5) \qquad y''[x + f'(y')] = 0.$$

On voit alors que les fonctions y de x, vérifiant l'équation, sont telles que l'un des facteurs du produit précédent soit nul.

Supposons d'abord

$$y'' = 0,$$

alors

$$y' = C,$$

et, comme la fonction doit vérifier l'équation (4), on a, en y remplaçant y' par C,

$$y = Cx + f(C). \tag{6}$$

C'est là l'intégrale générale : elle est constituée géométriquement par des *droites*. On vérifie immédiatement que la fonction (6) rend identiques les deux membres de l'équation proposée.

Supposons maintenant que la fonction y annule l'autre facteur du produit (5) :

$$x + f'(y') = 0.$$

Comme cette fonction doit vérifier aussi l'équation donnée, on l'obtiendra en éliminant l'inconnue auxiliaire y' entre les deux relations

$$\left\{\begin{aligned} y &= xy' + f(y'), \\ 0 &= x \quad + f'(y'). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

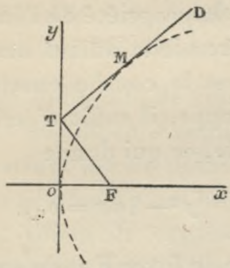
L'équation entre x et y ainsi obtenue donne une intégrale singulière de l'équation différentielle. La courbe représentative de cette intégrale singulière est l'enveloppe des droites (6) qui constituent l'intégrale générale. En effet, pour obtenir l'enveloppe des droites (6), quand C varie, il faut éliminer C entre l'équations (6) et sa dérivée par rapport à C :

$$\left\{\begin{aligned} y &= Cx + f(C), \\ 0 &= x \quad + f'(C). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

L'élimination de C, entre ces deux équations, conduit au même résultat que l'élimination de y' entre les deux équations (7), car le deuxième groupe d'équations ne diffère du premier que par la substitution de C à y'.

Exemple. — Soit un point fixe F sur l'axe Ox (*fig.* 196) : trouver une ligne telle qu'en menant la tangente en un quelconque M de ses points et joignant au point F le point T où cette tangente coupe Oy l'angle MTF soit droit.

Fig. 196.



Appelons a l'abscisse constante du point F. L'équation de la tangente, en $M(x, y)$, étant

$$Y - y = y'(X - x),$$

le point T a pour coordonnées

$$X = 0, \qquad Y = y - xy';$$

le point F a pour coordonnées

$$X = a, \qquad Y = 0.$$

Le coefficient angulaire de TF est donc

$$\frac{y - xy'}{-a},$$

celui de MT est y'. Écrivant que ces directions sont rectangulaires, on a

$$\frac{y - xy'}{-a} y' = -1,$$

d'où l'équation de Clairaut

$$y = xy' + \frac{a}{y'}. \tag{9}$$

L'intégrale générale s'obtient en remplaçant y' par C : elle est représentée par des droites

$$y = Cx + \frac{a}{C}. \tag{10}$$

Ces droites sont les perpendiculaires indéfinies TMD élevées par les divers points T de Oy aux droites TF : chacune de ces droites répond à la question; c'est une ligne telle que la tangente, en un point quelconque M de cette ligne (tangente qui se confond avec la droite), possède la propriété de l'énoncé.

Mais l'équation différentielle admet une autre solution (intégrale singulière), qui est la courbe enveloppe des droites (10). Pour avoir cette enveloppe, il suffit d'écrire que l'équation (10) en C a une racine double, ce qui donne

$$y^2 - 4ax = 0,$$

équation d'une parabole de foyer F et de sommet O.

Remarque. — On est conduit à une équation de Clairaut toutes les fois qu'on cherche une courbe plane, dont les tangentes possèdent une propriété, dans l'énoncé de laquelle ne figure pas le point de contact. L'intégrale générale est alors formée par les droites du plan qui possèdent la propriété en question, et l'intégrale singulière est l'enveloppe de ces droites.

345. **L'intégrale singulière déduite de l'équation différentielle.** — D'après ce qui précède, si l'intégrale générale d'une équation du premier ordre

$$F(x, y, y') = 0$$

a une enveloppe, quand la constante arbitraire varie, cette enveloppe est une intégrale de l'équation, et, en général, une intégrale singulière. Mais, pour obtenir ainsi des intégrales singulières, il faut connaître l'intégrale générale. Il est utile d'avoir une méthode pour trouver directement les intégrales singulières, quand elles existent, à l'aide de la seule équation différentielle et sans connaître l'intégrale générale. Voici, à cet égard, la règle que nous allons démontrer.

S'il existe des intégrales singulières, enveloppes des intégrales générales, elles se trouvent parmi les courbes obtenues, en éliminant y' entre l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0$$

et l'équation dérivée par rapport à y'

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

c'est-à-dire en exprimant que l'équation différentielle, où l'on regarde y' comme une inconnue, admet une racine double.

En effet, l'équation différentielle, où l'on regarde y' comme l'inconnue, donne les coefficients angulaires des tangentes aux courbes intégrales, passant par un point $P(x, y)$ du plan. Supposons que les intégrales générales aient une enveloppe E (*fig.* 195); quand le point P est voisin de l'enveloppe, parmi les courbes intégrales générales, passant par P, il s'en trouve deux, G et G', très voisines l'une de l'autre, de sorte que les coefficients angulaires des tangentes, en P, à ces deux courbes ont des valeurs très voisines; quand le point P tend vers un point M de l'enveloppe, les deux courbes G et G' se confondent en une seule G, tangente, en M, à l'enveloppe et les deux coefficients angulaires des tangentes, en P, deviennent égaux entre eux et égaux au coefficient angulaire de la tangente en M.

Donc, si le point $M(x, y)$ appartient à l'enveloppe des intégrales générales, l'équation

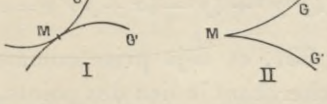
$$F(x, y, y') = 0,$$

où y' est regardée comme l'inconnue, admet *une racine double.*

La proposition est donc démontrée.

Mais la réciproque n'est pas exacte. Un point $M(x, y)$, tel que l'équation $F(x, y, y') = 0$ ait une racine double en y', n'est pas nécessairement un point de l'enveloppe des intégrales générales. Ce peut être un point tel que, parmi les intégrales générales passant par ce point, il y en ait deux distinctes, G et G', tangentes

Fig. 197.



entre elles (*fig.* 197, I). Ce peut être aussi un point M tel que, parmi les courbes intégrales générales passant par ce point, il y en ait une présentant, au point M, un point singulier avec deux tangentes confondues, un rebroussement, par exemple (*fig.* 197, II).

D'après cela, si l'on cherche le lieu des points (x, y) pour lesquels l'équation $F(x, y, y') = 0$ admet une racine double en y', on trouve à la fois : 1° l'enveloppe des intégrales générales, quand elle existe; 2° le lieu des points par lesquels passent deux courbes intégrales distinctes tangentes, lieu qu'on appelle *lieu de contact;* 3° le lieu des points singuliers, à tangentes confondues, des intégrales générales.

Pratiquement, pour obtenir l'intégrale singulière enveloppe des intégrales générales, quand elle existe, on commence donc par chercher le lieu des points (x, y), pour lesquels l'équation différentielle admet une racine double en y', c'est-à-dire qu'on élimine y' entre les deux équations

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Soit

$$\Phi(x, y) = 0$$

le lieu obtenu : en général, le premier membre de cette équation se décompose en plusieurs facteurs, et le lieu, en plusieurs courbes distinctes. La solution singulière cherchée se trouve parmi ces courbes; on la reconnaît en essayant successivement ces diverses courbes et en voyant laquelle d'entre elles vérifie l'équation différentielle. Cette courbe spéciale est, en général, une intégrale singulière. Les autres courbes trouvées sont des lieux de contact ou des lieux de points singuliers.

Il peut arriver qu'aucune des courbes ainsi obtenues ne vérifie l'équation différentielle; il faut en conclure que l'intégrale générale n'a pas d'enveloppe.

Exemples. — 1° Un premier exemple simple est fourni par l'équation différentielle

$$4y^2y'^2 + 4y^2 - (x + yy')^2 = 0,$$

formée dans le n° 331, et déjà prise comme exemple dans les n°s 338 et 343. En cherchant le lieu des points, pour lesquels cette équation en y' a une racine double, on trouve

$$y^2(x^2 - 3y^2) = 0.$$

Ce lieu se décompose en trois :

1° $$y = \frac{x}{\sqrt{3}};$$

2° $$y = -\frac{x}{\sqrt{3}};$$

3° $$y = 0.$$

Les deux premières fonctions vérifient l'équation; ce sont des intégrales singulières. La troisième $y = 0$ ne la vérifie pas : elle définit un lieu de contact, comme nous l'avons vu (n° 331).

2° Soit l'équation différentielle

(11) $$y(3-4y)^2y'^2 - 4(1-y) = 0.$$

En écrivant que cette équation du deuxième degré en y' a ses racines égales, on a la condition

$$y(3-4y)^2(1-y) = 0.$$

Le lieu, ainsi défini, se compose de trois droites :

1° $$y = 1;$$

2° $$y = 0;$$

3° $$y = \frac{3}{4}.$$

La première fonction $y = 1$ vérifie l'équation, car si l'on substitue $y = 1$, on a $y' = 0$; on a ainsi une intégrale singulière.

Les fonctions $y = 0$ et $y = \frac{3}{4}$ ne la vérifient pas : nous allons voir que l'une définit un *lieu de points de rebroussement* de l'intégrale générale et l'autre un *lieu de contact*. Pour cela, intégrons l'équation différentielle. En remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$, on peut séparer les variables et écrire

$$dx = \pm\frac{(3-4y)}{2}\sqrt{\frac{y}{1-y}}\,dy;$$

d'où

$$x = \pm\frac{1}{2}\int(3-4y)\sqrt{\frac{y}{1-y}}\,dy + C.$$

On vérifie, sans peine, que l'intégrale indéfinie du deuxième membre est

$$y^{\frac{3}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}};$$

on a donc

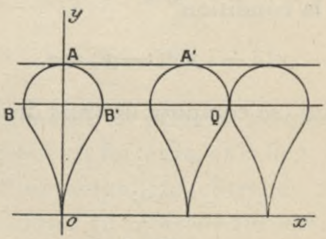
$$x = \pm y\sqrt{y(1-y)} + C$$

ou, en rendant rationnel,

$$(x - C)^2 - y^3 + y^4 = 0.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation. Quand C varie, la courbe représentée par cette équation ne change pas de forme : elle se transporte, parallèlement à elle-même, le long de l'axe Ox. Construisons la courbe obtenue en faisant $C = 0$; cette courbe (*fig.* 198) a un rebroussement en O, avec tangente verticale; le

Fig. 198.



point le plus haut A correspond à $x = 0, y = 1$; les points B et B', à tangentes verticales, ont pour coordonnées $x = \pm \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $y = \frac{3}{4}$. Quand C varie, c'est-à-dire quand cette courbe se transporte le long de Ox, son enveloppe est la droite AA', $y = 1$ (intégrale singulière); le lieu du point de rebroussement est l'axe $Ox, y = 0$; enfin le lieu des points Q, où deux positions différentes de la courbe peuvent être tangentes, est la droite BB', $y = \frac{3}{4}$ (lieu de contact).

V. — REMARQUES SUR LE CHANGEMENT DE VARIABLES.

346. Échange de la fonction et de la variable indépendante. — Dans ce qui précède, nous avons constamment considéré y comme la fonction et x comme la variable indépendante. Mais il va de soi que, dans une équation différentielle,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

on peut considérer x comme la fonction et y comme la variable indépendante.

Par exemple, l'équation

$$(y^3 + x)\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

où l'on regarde y comme la fonction inconnue, ne rentre dans aucun des types que nous avons indiqués. Mais, si l'on y regarde x comme la fonction et y comme la variable, on peut l'écrire, en multipliant par $\frac{dx}{dy}$,

$$\frac{dx}{dy} + x + y^3 = 0,$$

et l'on a une équation *linéaire*, par rapport à la fonction inconnue et à sa dérivée.

Pour l'intégrer, on suivra la méthode générale indiquée, on fera

$$x = uz,$$

u étant une fonction auxiliaire de y, et z la nouvelle fonction inconnue. L'équation devient

$$u\frac{dz}{dy} + z\frac{du}{dy} + uz + y^3 = 0.$$

Déterminons u de façon à annuler le coefficient de z

$$\frac{du}{dy} + u = 0$$

ou bien

$$\frac{du}{u} = -dy;$$

en intégrant, il suffit de prendre, sans ajouter de constante,

$$\mathrm{L}u = -y, \qquad u = e^{-y}.$$

L'équation devient alors

$$e^{-y}\frac{dz}{dy}+y^3=0,$$

$$dz=-\,y^3e^y\,dy,$$

$$z=-\int y^3e^y\,dy+\mathrm{C}.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int y^3e^y\,dy=\int y^3\,de^y=y^3e^y-3\int y^2e^y\,dy,$$

$$\int y^2e^y\,dy=\int y^2\,de^y=y^2e^y-2\int y\;e^y\,dy,$$

$$\int y\;e^y\,dy=\int y\;\;de^y=y\;e^y-\int\;\;e^y\,dy,$$

$$\int e^y\,dy=e^y.$$

On a donc, en remontant de proche en proche,

$$\int y^3e^y\,dy=e^y(y^3-3y^2+6y-6).$$

Comme on a posé $x=uz$, on a enfin, pour l'intégrale générale de l'équation différentielle donnée,

$$x=6-6y+3y^2-y^3+\mathrm{C}e^{-y}.$$

347. **Septième type : Équation de Clairaut généralisée.** (**Équation de Lagrange.**) — Soit une équation de la forme

$$y=x\varphi(y')+f(y'), \tag{12}$$

qui se réduit à l'équation de Clairaut quand $\varphi(y')=y'$. Prenons encore les dérivées des deux membres par rapport à x : il vient

$$y'=\varphi(y')+[x\varphi'(y')+f'(y')]\frac{dy'}{dx}.$$

Si, dans cette équation, l'on regarde x comme la fonction inconnue et y' comme la variable, c'est une équation linéaire.

Il suffit d'intégrer cette nouvelle équation, puis de remplacer y' par la valeur ainsi trouvée, en fonction de x, dans l'équation (12), pour avoir l'intégrale générale de cette équation.

348. Changement de variables en général. — Étant donnée une équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{13}$$

on peut essayer de la simplifier, en prenant de nouvelles variables u et v, liées à x et y, par des relations de la forme

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v). \tag{14}$$

Le long d'une courbe intégrale, x et y peuvent être regardés comme fonctions d'un même paramètre t; les formules (14), résolues par rapport à u et v,

$$u = f_1(x, y), \qquad v = \varphi_1(x, y), \tag{15}$$

montrent que u et v sont également des fonctions de ce paramètre. On a donc, d'après (14), en faisant varier ce paramètre de dt,

$$dx = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv.$$

En portant les valeurs de x, y, dx, dy dans l'équation différentielle, on la transforme en une équation différentielle entre u et v. Si l'on sait trouver l'intégrale générale

$$\Phi(u, v, C) = 0$$

de cette équation, on en déduit l'intégrale de la proposée en y remplaçant u et v par leurs valeurs (15).

Exemple. — Soit, par exemple, l'équation

$$(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) = (x^2 + y^2 + x)(x\,dy - y\,dx). \tag{16}$$

Si l'on prend des coordonnées polaires r et θ, liées aux coordonnées cartésiennes par les formules

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

cette équation devient

$$dr = (r + \cos\theta)\,d\theta$$

ou

$$\frac{dr}{d\theta} - r = \cos\theta;$$

équation linéaire en r dont l'intégrale générale est

$$r = \mathrm{C}e^{\theta} + \frac{1}{2}(\sin\theta - \cos\theta).$$

L'intégrale générale de l'équation (16) est donc

$$x^2 + y^2 = \mathrm{C}\sqrt{x^2+y^2}\, e^{\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}} + \frac{1}{2}(y - x).$$

CHAPITRE XVIII.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE ET D'ORDRE SUPÉRIEUR.

I. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE.

349. **Existence de l'intégrale générale.** — Une équation différentielle du deuxième ordre est de la forme

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0. \tag{1}$$

On appelle *intégrale générale* de cette équation une fonction y de x et de deux constantes arbitraires C_1 et C_2,

$$y = \varphi(x, C_1, C_2),$$

vérifiant identiquement l'équation. On peut se rendre compte de l'existence de cette intégrale générale par les considérations suivantes, analogues à celles que nous avons développées à propos de l'équation du premier ordre (n° 334).

Employons, pour simplifier l'écriture, la notation des dérivées. L'équation (1) définit $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou y'' en fonction de x, y, y'. Soit

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1 bis}$$

une des valeurs y'', tirée de l'équation (1). Cherchons à former, à l'aide de la formule de Mac-Laurin, une série ordonnée, suivant les puissances entières et positives de x, vérifiant l'équation (1). Cette série sera de la forme

$$y = y_0 + \frac{x}{1} y'_0 + \frac{x^2}{1.2} y''_0 + \frac{x^3}{1.2.3} y'''_0 + \dots \tag{2}$$

Il s'agit de calculer les coefficients $y_0, y'_0, y''_0, \ldots$ qui sont les valeurs de la fonction y et de ses dérivées successives pour $x = 0$. Nous allons voir que tous ces coefficients s'expriment, en fonction des deux premiers, qui *restent arbitraires*. En effet, dans l'équation différentielle donnée (1 *bis*), faisons $x = 0$; y, y', y'' prennent des valeurs y_0, y'_0, y''_0 et l'on a

$$y''_0 = f(0, y_0, y'_0).$$

Pour avoir y'''_0 différentions l'équation (1 *bis*) par rapport à x, en nous rappelant que y et y' sont fonctions de x; il vient

$$y''' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y''. \tag{3}$$

En faisant dans cette relation $x = 0$, on a y'''_0 en fonction de y_0 et y'_0, car y''_0 est connu, en fonction de ces deux quantités. Dérivant de nouveau la relation (3) par rapport à x et faisant ensuite $x = 0$, on a y^{IV}_0 en fonction de y_0 et y'_0; et ainsi de suite.

On voit donc que tous les coefficients de la série (2) sont des fonctions connues des deux premiers y_0 et y'_0. Si cette série est convergente, elle converge dans un intervalle symétrique par rapport à 0, et, dans cet intervalle, elle définit une fonction de x, y_0, y'_0,

$$y = \Phi(x, y_0, y'_0), \tag{4}$$

vérifiant l'équation et contenant les deux constantes arbitraires y_0 et y'_0. Il peut se faire que cette série diverge; cela arriverait, par exemple, si le calcul donnait, pour une des quantités $y''_0, y'''_0, \ldots$, une valeur infinie. Nous n'examinerons pas les difficultés qui se présentent alors et nous nous contenterons des considérations ci-dessus, pour établir l'existence de l'intégrale générale.

Ces considérations montrent que, en général, une solution y de l'équation (1) est déterminée quand on connaît les valeurs que prennent cette fonction y et sa dérivée y' pour $x = 0$. En regardant x et y comme les coordonnées d'un point, on peut dire qu'une courbe intégrale est, en général, déterminée quand on connaît le point où elle coupe l'axe des y et le coefficient angulaire y'_0 de la tangente en ce point.

Au lieu des constantes arbitraires y_0 et y'_0, qui figurent dans l'intégrale générale, on peut évidemment en faire figurer d'autres C_1 et C_2, en remplaçant y_0 et y'_0 par des fonctions de deux constantes arbitraires C_1 et C_2 :

$$y_0 = \psi_1(C_1, C_2), \qquad y'_0 = \psi_2(C_1, C_2),$$

ces expressions étant assujetties à la seule condition que l'on peut choisir C_1 et C_2, de telle façon que y_0 et y'_0 puissent prendre des valeurs quelconques données. L'intégrale générale (4) devient alors une fonction de x et des deux constantes C_1 et C_2,

$$y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Remarque. — On pourrait, de même, par l'emploi de la série de Taylor, former une fonction

$$y = y_0 + \frac{(x - x_0)}{1} y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} y''_0 + \ldots,$$

qui vérifie l'équation et qui soit telle que cette fonction y et sa dérivée y' prennent, pour $x = x_0$, des valeurs arbitraires y_0 et y'_0. On calculera, par le même procédé que plus haut, les valeurs y''_0, y'''_0, ... que prennent les dérivées successives pour $x = x_0$ et l'on vérifiera, de même, qu'elles s'expriment toutes en fonctions de y_0 et y'_0.

Intégrales particulières; intégrales singulières. — Les intégrales particulières sont celles qu'on obtient en particularisant les constantes arbitraires figurant dans l'intégrale générale. Il peut exister d'autres solutions qu'on appelle *singulières*.

Exemples d'intégration par séries. — 1° Soit l'équation

$$y'' = -y. \tag{5}$$

Supposons la fonction inconnue y développée en série par la formule de Mac-Laurin :

$$y = y_0 + \frac{x}{1} y'_0 + \frac{x^2}{1.2} y''_0 + \frac{x^3}{1.2.3} y'''_0 + \ldots.$$

L'équation (5) dérivée, par rapport à x, un nombre quelconque de fois, donne

$$\begin{aligned} y''' &= -y', \\ y^{\text{IV}} &= -y'' = y, \\ y^{\text{V}} &= y', \\ y^{\text{VI}} &= y'' = -y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

en faisant $x = 0$ dans ces relations, on voit que les dérivées d'ordre pair sont, pour $x = 0$, alternativement égales à $-y_0$ et $+y_0$, les dérivées d'ordre impair à y'_0 et $-y'_0$.

On a donc

$$y = y_0 + \frac{x}{1} y'_0 - \frac{x^2}{1.2} y_0 - \frac{x^3}{1.2.3} y'_0 + \frac{x^4}{1.2.3.4} y_0 + \ldots.$$

En réunissant les termes en y_0, on voit que le coefficient de y_0 est

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

c'est-à-dire $\cos x$; et, en réunissant les termes en y'_0, on voit que leur coefficient est

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

c'est-à-dire $\sin x$. On a donc l'intégrale générale de l'équation (5) sous la forme

$$y = y_0 \cos x + y'_0 \sin x,$$

avec deux constantes arbitraires y_0 et y'_0. Il est facile de vérifier que cette fonction y substituée dans l'équation différentielle (5) rend les deux membres identiques, quels que soient y_0 et y'_0.

On arrivera au même résultat, par la méthode des coefficients indéterminés, en substituant, dans l'équation différentielle, une série de la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

et écrivant que l'équation est identiquement vérifiée : on trouve que tous les coefficients $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ s'expriment à l'aide des deux premiers et que l'intégrale générale est

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x,$$

a_0 et a_1 désignant des constantes arbitraires.

2° Soit l'équation

$$y'' - xy' - y = 0. \tag{6}$$

Actuellement, si l'on calcule, de proche en proche, toutes les valeurs des dérivées y''_0, y'''_0, ... correspondant à $x = 0$, aucune de ces valeurs n'est infinie. On est donc conduit à penser que, dans le voisinage de $x = 0$, l'intégrale générale est développable par la formule de Mac-Laurin en une série de la forme

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Substituons ce développement dans l'équation (6) et écrivons que, après la substitution, le coefficient de x^n est nul; il vient

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - a_n = 0,$$

d'où

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}.$$

Faisant successivement, $n = 1, 2, 3, \ldots$, on voit que cette relation donne tous les coefficients d'indices pairs, en fonction de a_0 :

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \qquad a_4 = \frac{a_0}{2.4}, \qquad a_6 = \frac{a_0}{2.4.6}, \qquad \ldots$$

et tous les coefficients d'indices impairs, en fonction de a_1 :

$$a_3 = \frac{a_1}{3}, \qquad a_5 = \frac{a_1}{3.5}, \qquad a_7 = \frac{a_1}{3.5.7}, \qquad \ldots.$$

Donc l'expression de y devient

$$\begin{aligned} y = {} & a_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6} + \ldots\right) \\ & + a_1\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3.5} + \frac{x^7}{3.5.7} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Les deux séries, entre parenthèses, sont convergentes pour toutes les valeurs de x : on a donc l'intégrale générale de l'équation (6), avec deux constantes a_0 et a_1. On peut remarquer que la série qui multiplie a_0 est $e^{\frac{x^2}{2}}$: en donnant à a_0 la valeur 1 et à a_1 la valeur 0, on voit donc que l'équation admet l'intégrale particulière $e^{\frac{x^2}{2}}$, ce qu'il est aisé de vérifier.

II. — CAS DE RÉDUCTION AU PREMIER ORDRE.

350. **Cas de réduction au premier ordre.** — Nous allons indiquer trois cas dans lesquels l'intégration d'une équation différentielle du deuxième ordre se ramène à l'intégration d'une équation du premier ordre, suivie d'une quadrature. On peut alors terminer l'intégration toutes les fois que l'équation différentielle du premier ordre, à laquelle on est conduit, rentre dans un des types intégrables que nous avons indiqués. Ces trois cas sont les suivants :

1° L'équation ne contient pas y;
2° L'équation ne contient pas x;
3° L'équation est homogène en y, y', y''.

351. **Premier type : L'équation différentielle ne contient pas** y. — Soit une équation différentielle de la forme

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{7}$$

où manque y. Dans ce cas, on prend comme fonction inconnue y' et l'on remarque que

$$y'' = \frac{dy'}{dx}.$$

L'équation s'écrit alors

$$F\left(x, y', \frac{dy'}{dx}\right) = 0. \tag{8}$$

Elle est du *premier ordre* en y'. Supposons qu'on sache intégrer cette équation et soit

$$y' = \varphi(x, C)$$

son intégrale générale, C désignant une constante arbitraire. D'après la signification de y', on peut écrire

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C),$$

$$y = \int \varphi(x, C)\, dx + C'.$$

On a ainsi l'intégrale générale de l'équation (7) avec deux constantes arbitraires C et C'.

Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$3x^2y'' = y'^2 + 2x^2. \tag{9}$$

Comme y manque, on prend y' comme inconnue auxiliaire; remplaçant y'' par $\frac{dy'}{dx}$, on a l'équation du premier ordre en y'

$$3\frac{dy'}{dx} = \left(\frac{y'}{x}\right)^2 + 2, \tag{10}$$

équation homogène. Pour l'intégrer, on fait

$$\frac{y'}{x} = z, \qquad y' = zx;$$

elle devient

$$3z + 3x\frac{dz}{dx} = z^2 + 2$$

ou, en séparant les variables x et z,

$$\frac{1}{3}\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2 - 3z + 2}.$$

Décomposons la fraction rationnelle du deuxième membre en fractions simples; nous avons

$$\frac{1}{3}\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z-2} - \frac{dz}{z-1}.$$

En intégrant, on a

$$\frac{1}{3}(\mathrm{L}x - \mathrm{L}c) = \mathrm{L}(z-2) - \mathrm{L}(z-1),$$

$$\frac{1}{3}\mathrm{L}\frac{x}{c} = \mathrm{L}\frac{z-2}{z-1},$$

c désignant une constante. On tire de là

$$\frac{z-2}{z-1} = \left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad z = \frac{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - 2}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}.$$

Comme on a posé $y' = zx$ et que y' est égal à $\frac{dy}{dx}$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - 2}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}.$$

(11) $$y = \int x\frac{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - 2}{\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - 1}dx + c'.$$

On a ainsi l'intégrale générale de l'équation donnée avec deux constantes arbitraires c et c'.

Il est facile d'effectuer la quadrature qui figure dans l'expression (11) de y; il suffit de poser

$$\frac{x}{c} = u^3, \qquad dx = 3cu^2\,du,$$

ce qui donne

$$y = 3c^2\int\frac{u^5(u-2)}{u-1}du + c';$$

on est ainsi ramené à l'intégration d'une fraction rationnelle en u. La décomposition en fractions simples donne

$$\frac{u^5(u-2)}{u-1} = u^5 - u^4 - u^3 - u^2 - u - 1 - \frac{1}{u-1}.$$

On a donc

$$y = 3c^2\left[\frac{u^6}{6} - \frac{u^5}{5} - \frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} - u - \mathrm{L}(u-1)\right] + c',$$

et, en revenant à la variable x par la formule

$$\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} = u,$$

$$y = 3c^2\left[\frac{1}{6}\frac{x^2}{c^2} - \frac{1}{5}\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{4}\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{3}\frac{x}{c} - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}}\right]$$
$$- 3c^2\mathrm{L}\left[\left(\frac{x}{c}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] + c'.$$

Remarque. — Dans certains cas, en intégrant l'équation du premier ordre (8), il est plus commode d'exprimer x en fonction de y' et de mettre l'intégrale générale de cette équation sous la forme

$$x = \psi(y', C). \tag{12}$$

On peut alors exprimer y à l'aide de y' en partant de la relation

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

qui donne, en tirant dx de (12),

$$dy = y'\psi'(y', C)\,dy',$$

où ψ' désigne la dérivée de $\psi(y', C)$ par rapport à y'. On a donc

$$y = \int y'\psi'(y', C)\,dy' + C'. \tag{13}$$

Les équations (12) et (13) définissent x et y en fonction de y'; l'élimination de y' donnerait l'intégrale générale de l'équation avec les deux constantes C et C'.

352. **Deuxième type : L'équation ne contient pas x.** — Soit une équation différentielle du deuxième ordre de la forme

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{14}$$

ne contenant pas x. On la ramène à une équation du premier ordre entre y et y'.

Il suffit de remarquer que l'on peut écrire

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}$$

ou, comme $\frac{dy}{dx} = y'$,

$$y'' = \frac{dy'}{dy}y'.$$

L'équation devient alors

$$F\left(y, y', y'\frac{dy'}{dy}\right) = 0, \tag{15}$$

équation du premier ordre entre y et y'.

Si l'on sait intégrer cette équation, on en tire

$$y' = \varphi(y, C)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C).$$

On a alors

$$dx = \frac{dy}{\varphi(y, C)},$$

$$(16) \qquad x = \int \frac{dy}{\varphi(y, C)} + C'.$$

On a ainsi l'intégrale générale de l'équation donnée (14) avec deux constantes arbitraires C et C'.

Remarque. — Pratiquement, il peut arriver qu'il soit plus commode de tirer y, en fonction de y', de l'équation (15); on trouve alors

$$(17) \qquad y = \psi(y', C).$$

Dans ce cas, on exprime aussi x en fonction de y'. Pour cela, on part de la relation

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

d'où l'on déduit

$$dx = \frac{dy}{y'};$$

et, en remplaçant y par son expression (17),

$$dx = \frac{\psi'(y', C)\, dy'}{y'},$$

ψ' désignant la dérivée de ψ par rapport à y'. On a alors

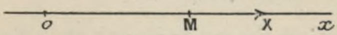
$$(18) \qquad x = \int \frac{\psi'(y', C)\, dy'}{y'} + C'.$$

Les deux expressions (17) et (18) donnent x et y exprimés en fonction de la variable auxiliaire y'. L'élimination de y', entre ces deux équations, donne une relation entre x, y, C et C' : c'est l'intégrale générale de l'équation différentielle.

Exemples : *Premier exemple.* — On est conduit, en Mécanique, à des équations de ce type quand on cherche le mouvement rectiligne d'un point sollicité par une force dont l'intensité dépend seulement de la *position* du point et de sa *vitesse*.

En effet, considérons un point M, de masse m, qui se meut sur

Fig. 199.



un axe Ox (*fig.* 199) sous l'action d'une force X, dont la valeur est fonction de l'abscisse x du point et de sa vitesse $v = \frac{dx}{dt}$,

$$X = f\left(x, \frac{dr}{dt}\right).$$

L'équation du mouvement est alors

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(x, \frac{dx}{dt}\right),$$

équation différentielle du deuxième ordre dans laquelle manque la variable indépendante t. D'après la méthode générale, on ramène cette équation au premier ordre en prenant comme inconnue auxiliaire la dérivée

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

On a alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v,$$

et l'équation s'écrit

$$mv\frac{dv}{dx} = f(x, v),$$

équation du premier ordre définissant v en fonction de x.

On peut remarquer qu'en chassant le dénominateur dx on peut écrire l'équation sous la forme

$$d\frac{mv^2}{2} = f(x, v)\,dx,$$

qui est la relation fournie par le théorème des forces vives.

Une fois v trouvé en fonction de x par l'intégration de cette équation,

$$v = \varphi(x, C),$$

on a, comme $v = \frac{dx}{dt}$,

$$dt = \frac{dx}{\varphi(x, C)},$$

$$t = \int \frac{dx}{\varphi(x, C)} + C'.$$

On a ainsi l'équation du mouvement avec deux constantes arbitraires qu'on détermine quand on connaît, à l'instant initial $t = t_0$, l'abscisse initiale x_0 et la vitesse initiale v_0 du mobile.

Deuxième exemple : Courbe élastique plane. — Cherchons une courbe plane dans laquelle la courbure en chaque point varie proportionnellement à l'ordonnée de ce point. Cette courbe est la figure d'équilibre d'une lame élastique dont la fibre moyenne est rectiligne à l'état naturel et que l'on courbe en faisant agir sur les deux extrémités des forces et des couples.

Le rayon de courbure en un point de la courbe étant R, on doit avoir

$$\frac{1}{R} = \frac{y}{a^2},$$

a désignant une constante. Remplaçant R par son expression, on a l'équation du deuxième ordre

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y}{a^2},$$

dans laquelle manque la variable indépendante x.

Remplaçant alors y'' par $\frac{dy'}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}$, il vient

$$\frac{y'\,dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y\,dy}{a^2},$$

d'où, en intégrant les deux membres,

$$-\frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y^2}{2a^2} + C.$$

On tire de là, en résolvant par rapport à y',

$$y' = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{2a^2} + C\right)^2}}{\frac{y^2}{2a^2} + C}.$$

Remplaçant y' par $\frac{dy}{dx}$ et résolvant par rapport à dx, on a, après intégration,

$$(19) \qquad x = \int \frac{\frac{y^2}{2a^2} + C}{\sqrt{1 - \left(\frac{y^2}{2a^2} + C\right)^2}} dy + C'.$$

Telle est l'équation de la courbe. La valeur de la constante C' n'influe pas sur la forme de la courbe, car cette constante vient simplement s'ajouter à x; quand C' varie, la courbe se transporte parallèlement à Ox. La constante C influe, au contraire, sur la forme de la courbe : si C^2 est supérieur à 1, la courbe ne peut pas couper l'axe Ox, car, dans ce cas, pour $y = 0$, y' est imaginaire ; si C^2 est inférieur à 1, la courbe coupe l'axe Ox et, aux points d'intersection, elle présente des inflexions, car, y étant nul, y'' l'est aussi, en vertu de l'équation différentielle.

L'intégrale figurant dans l'équation (19) ne peut pas être calculée exactement par les méthodes élémentaires : on la calculera par les méthodes d'approximation.

353. **Troisième type : L'équation est homogène en y, y', y''.** — Soit une équation de la forme

$$(20) \qquad F(x, y, y', y'') = 0,$$

qui contient x d'une façon quelconque, mais qui est *homogène* en y, y', y'', de telle façon que l'on ait identiquement

$$(21) \qquad F(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'') \equiv \lambda^n F(x, y, y', y''),$$

λ étant un facteur quelconque.

Dans ce cas, en désignant par z une nouvelle fonction inconnue de x, on fera

$$(22) \qquad y = e^{\int z\,dx}, \qquad y' = z e^{\int z\,dx}, \qquad y'' = (z' + z^2) e^{\int z\,dx}.$$

En substituant et supprimant le facteur $e^{n\int z\,dx}$, on a, pour déterminer z, l'équation de premier ordre

$$F(x, 1, z, z' + z^2) = 0;$$

cette équation donne z en x; la première des relations (22) donne ensuite y par une quadrature.

Exemple. — Soit l'équation

$$yy'' - y'^2 - 6xy^2 = 0.$$

Par le changement (22) elle devient

$$z' - 6x = 0;$$

d'où

$$z = 3x^2 + C$$

et

$$y = C_1 e^{x^3 + Cx}.$$

III. — ÉQUATIONS D'ORDRE QUELCONQUE.

354. **Intégrale générale.** — Soit une équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{1}$$

d'ordre n. On démontre, par une méthode analytique analogue à celle que nous avons suivie pour les deux premiers ordres, que cette équation admet toujours une solution y fonction de x et de n constantes arbitraires :

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n). \tag{2}$$

Ces constantes doivent pouvoir être déterminées de telle façon que, pour une valeur particulière de la variable x, 0 par exemple, la fonction y et ses $(n-1)$ premières dérivées, par rapport à x, prennent des valeurs arbitrairement choisies.

Cette solution (2) s'appelle l'*intégrale générale* de l'équation.

En donnant à certaines constantes des valeurs numériques, dans l'expression (2), on obtient des *solutions ou intégrales particulières*.

L'équation différentielle peut admettre quelquefois d'autres solutions que l'intégrale générale et les intégrales particulières : ces solutions, quand elles existent, s'appellent, comme pour le premier ordre, *intégrales singulières*.

355. Type d'équation réductible au premier ordre. — Une équation d'ordre n est réductible au premier ordre quand elle ne contient ni la fonction inconnue, ni ses dérivées d'ordre $1, 2, \ldots, (n-2)$. En effet, l'équation est alors de la forme

$$F\left(x, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

En posant

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = v,$$

on la ramène à la forme

$$F\left(x, v, \frac{dv}{dx}\right) = 0,$$

équation du premier ordre. Cette équation, étant intégrée, a pour intégrale générale

$$v = \varphi(x, C).$$

Pour avoir y, on est ensuite ramené à trouver une fonction y telle que

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varphi(x, C),$$

ce qui se fera en intégrant, successivement $(n-1)$ fois par rapport à x et ajoutant, chaque fois, une constante arbitraire.

Exemple. — Soit à intégrer l'équation

$$x\frac{d^4y}{dx^4} - 3\frac{d^3y}{dx^3} - x^4 = 0.$$

Posons

$$\frac{d^3y}{dx^3} = v,$$

l'équation devient

$$x\frac{dv}{dx} - 3v - x^4 = 0,$$

équation linéaire en v. Pour l'intégrer, faisons

$$v = uz,$$

et déterminons u de façon à faire disparaître les termes en z; il vient

$$x\frac{du}{dx} - 3u = 0,$$

$$ux\frac{dz}{dx} - x^4 = 0.$$

La première de ces équations est satisfaite par

$$u = x^3.$$

La deuxième donne alors

$$\frac{dz}{dx} = 1, \qquad z = x + C.$$

On a donc

$$v = uz = x^4 + Cx^3.$$

Pour déterminer y en fonction de x, revenons à l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} = v;$$

nous avons

$$\frac{d^3y}{dx^3} = x^4 + Cx^3,$$

Multiplions par dx et intégrons, nous avons

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^5}{5} + C\frac{x^4}{4} + C_1.$$

Multiplions par dx et intégrons :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^6}{30} + C\frac{x^5}{20} + C_1 x + C_2.$$

Enfin, multiplions par dx et intégrons, nous avons l'intégrale générale de l'équation (3)

$$(4) \qquad y = \frac{x^7}{210} + C\frac{x^6}{120} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3,$$

avec quatre constantes arbitraires C, C_1, C_2, C_3.

CHAPITRE XIX.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES.

I. — GÉNÉRALITÉS.

356. **Équations linéaires d'ordre** n. — Une équation différentielle d'ordre n est dite *linéaire* quand elle est linéaire, par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. Une équation linéaire est donc de la forme

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = X,$$

où $a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n$, X sont des fonctions de x. Le terme X s'appelle *le second membre* de l'équation. Quand le second membre est nul, on dit que l'équation est *sans second membre;* on dit aussi, dans ce cas, que l'équation est *linéaire et homogène* par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées.

L'étude des équations linéaires a une grande importance pour les applications à la Physique et à la Mécanique.

357. **Théorèmes généraux.** — Posons, pour abréger,

$$(1) \qquad \varphi(y) = a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y.$$

L'équation s'écrit alors

$$\varphi(y) = X.$$

Voici quelques propriétés qui résultent immédiatement de la forme linéaire de $\varphi(y)$.

Théorème I. — *Soient y une fonction quelconque de x, C une constante; on a, identiquement,*

$$\varphi(Cy) = C\,\varphi(y).$$

En effet,

$$\varphi(Cy) = a_0 C\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 C\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n C y,$$

expression qui est évidemment identique à $C\varphi(y)$.

Théorème II. — *Soient u et v deux fonctions quelconques de x, on a*

$$\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

En effet,

$$\varphi(u+v) = a_0\frac{d^n(u+v)}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}(u+v)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(u+v).$$

Comme la dérivée d'une somme est la somme des dérivées de ses termes, on a

$$\begin{aligned}\varphi(u+v) = {} & a_0\frac{d^n u}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n u \\ & + a_0\frac{d^n v}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n v,\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\varphi(u) + \varphi(v)$.

En général, quel que soit le nombre des fonctions u_1, u_2, u_3, ..., u_p, on a

$$\varphi(u_1 + u_2 + \ldots + u_p) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \ldots + \varphi(u_p).$$

Théorème III. — *Soient y_1, y_2, ..., y_p des fonctions de x; C_1, C_2, ..., C_p des constantes, on a identiquement*

$$\varphi(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_py_p) = C_1\,\varphi(y_1) + C_2\,\varphi(y_2) + \ldots + C_p\,\varphi(y_p).$$

Ce théorème se vérifie immédiatement : il est une conséquence des deux précédents. On a, en effet, d'après le théorème II,

$$\varphi(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_py_p) = \varphi(C_1y_1) + \varphi(C_2y_2) + \ldots + \varphi(C_py_p);$$

mais, d'après le théorème I,

$$\varphi(C_1y_1) = C_1\,\varphi(y_1), \quad \varphi(C_2y_2) = C_2\,\varphi(y_2), \quad \ldots,$$

et le théorème, que nous avons en vue, est démontré.

II. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE.

358. **Théorèmes généraux. Forme de l'intégrale générale.** — Une équation différentielle linéaire sans second membre,

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0, \tag{1}$$

s'écrit avec la notation précédente

$$\varphi(y) = 0.$$

359. **Théorème I.** — *Soient $y_1, y_2, \ldots, y_p$ des solutions de cette équation, c'est-à-dire des fonctions de x, telles que*

$$\varphi(y_1) = 0, \qquad \varphi(y_2) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi(y_p) = 0;$$

la fonction

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_p y_p,$$

où $C_1, C_2, \ldots, C_p$ sont des constantes quelconques, est encore une solution.

On a, en effet,

$$\varphi(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_p y_p) = C_1 \varphi(y_1) + C_2 \varphi(y_2) + \ldots + C_p \varphi(y_p),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_p y_p) = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

360. **Solutions distinctes. Fonctions linéairement indépendantes.** — Soit y_1, une solution de l'équation; une deuxième solution y_2 est dite *distincte* de y_1, si elle n'est pas de la forme ky_1, où k est une constante déterminée. Si les deux solutions y_1 et y_2 sont distinctes, une troisième solution y_3 est dite distincte des deux premières, si elle n'est pas de la forme

$$k_1 y_1 + k_2 y_2,$$

k_1 et k_2 étant des constantes. Si les trois solutions y_1, y_2, y_3 sont distinctes, une quatrième y_4 est dite *distincte* de ces trois, quand elle n'est pas de la forme

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3,$$

k_1, k_2, k_3 étant des constantes.

En général, p solutions

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_p$$

sont dites *distinctes*, quand la deuxième y_2 est distincte de la première, la troisième y_3 des deux premières, la quatrième y_4 des trois premières, etc.

On dit aussi, pour exprimer le même fait, que les p solutions sont *linéairement indépendantes*.

Ainsi les solutions

$$e^x, \quad \sin^2 x, \quad \cos^2 x$$

sont distinctes ou linéairement indépendantes ; il est *impossible* de trouver des constantes numériques, telles que l'on ait identiquement

$$\sin^2 x = k e^x \qquad \text{ou} \qquad \cos^2 x = k_1 e^x + k_2 \sin^2 x.$$

Les solutions

$$y_1 = \cos 2x, \qquad y_2 = \cos^2 x, \qquad y_3 = \sin^2 x$$

ne sont pas distinctes : la deuxième est distincte de la première, mais la troisième, pouvant s'exprimer en fonction linéaire et homogène des deux premières, avec des coefficients constants,

$$\sin^2 x = \cos^2 x - \cos 2x$$

ou

$$y_3 = y_2 - y_1,$$

n'est pas distincte des deux premières.

361. Théorème II. — Intégrale générale. — *Si l'on a trouvé n solutions distinctes*

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n$$

de l'équation différentielle, cette équation admet l'intégrale

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \tag{2}$$

qui est l'intégrale générale.

En effet, cette intégrale contient n constantes arbitraires C_1, C_2, ..., C_n, que l'on peut déterminer par la condition que, pour une valeur particulière x_0 de x, la fonction (2) et ses $(n-1)$ premières dérivées prennent des valeurs arbitrairement choisies, ce qui caractérise l'intégrale générale (n° 354).

Si les solutions y_1, y_2, ..., y_n n'étaient pas distinctes, l'expression (2) ne contiendrait qu'en apparence n constantes : par exemple, supposons que y_n ne soit pas distincte de $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$; il existerait alors des constantes numériques k_1, k_2, ..., k_{n-1}, telles que

$$y_n = k_1 y_1 + k_2 y_2 + \ldots + k_{n-1} y_{n-1},$$

et l'expression (2) deviendrait

$$y = (C_1 + k_1 C_n) y_1 + (C_2 + k_2 C_n) y_2 + \ldots + (C_{n-1} + k_{n-1} C_n) y_{n-1},$$

expression de la forme

$$y = D_1 y_1 + D_2 y_2 + \ldots + D_{n-1} y_{n-1},$$

contenant seulement $n-1$ constantes arbitraires.

On démontre, mais nous n'insisterons pas sur cette démonstration, qu'une équation différentielle linéaire n'a pas d'intégrale singulière : toutes les solutions possibles de l'équation sont données par l'intégrale générale (2).

362. Abaissement de l'ordre de l'équation, quand une solution est connue. — De même que l'on peut abaisser le degré d'une équation algébrique, quand on en connaît une racine, de même on peut abaisser l'ordre d'une équation différentielle linéaire, sans second membre, quand on en connaît une solution. Soit, par exemple, l'équation du troisième ordre :

$$(3) \qquad a_0 \frac{d^3 y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = 0.$$

Soit u une fonction de x, supposée connue et vérifiant l'équation, c'est-à-dire telle que

$$(4) \qquad a_0 \frac{d^3 u}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + a_2 \frac{du}{dx} + a_3 u = 0.$$

Faisons alors le changement de fonction

$$y = u\mathrm{Y},$$

Y étant la nouvelle fonction inconnue ; il vient :

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \mathrm{Y}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + 2\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\frac{du}{dx} + \mathrm{Y}\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = u\frac{d^3\mathrm{Y}}{dx^3} + 3\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2}\frac{du}{dx} + 3\frac{d\mathrm{Y}}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + \mathrm{Y}\frac{d^3u}{dx^3}.$$

Si l'on substitue dans l'équation (3), on voit qu'elle se transforme en une équation linéaire en Y, dans laquelle le coefficient de Y est le premier membre de (4), c'est-à-dire o.

On a donc, pour déterminer Y, une équation de la forme

$$a_0 u\frac{d^3\mathrm{Y}}{dx^3} + \mathrm{A}_1\frac{d^2\mathrm{Y}}{dx^2} + \mathrm{A}_2\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = 0.$$

En prenant alors pour inconnue

$$\frac{d\mathrm{Y}}{dx} = \mathrm{Y}', \tag{5}$$

on est ramené à l'équation du *deuxième ordre*

$$a_0 u\frac{d^2\mathrm{Y}'}{dx^2} + \mathrm{A}_1\frac{d\mathrm{Y}'}{dx} + \mathrm{A}_2\mathrm{Y}' = 0. \tag{6}$$

Le théorème est donc démontré.

On voit comment y s'exprime en fonction de Y' : la relation (5) donne

$$\mathrm{Y} = \int \mathrm{Y}'\,dx,$$

puis, comme on a posé $y = u\mathrm{Y}$, on a

$$y = u\int \mathrm{Y}'\,dx.$$

Donc, si l'on sait intégrer l'équation du deuxième ordre (6), on en déduira l'intégrale générale de l'équation proposée (3) par une quadrature.

Inversement, Y' s'exprime en fonction de y par la formule

$$Y' = \frac{d\left(\frac{y}{u}\right)}{dx},$$

qui montre que la connaissance d'une solution de l'équation en y entraîne la connaissance d'une solution de l'équation en Y'.

Si, outre la solution $y = u$, on connaît une autre solution $y = y_1$ de l'équation proposée, on en déduit une solution

$$Y'_1 = \frac{d\left(\frac{y_1}{u}\right)}{dx}$$

de l'équation (6). On peut alors, par le même procédé, abaisser encore d'une unité l'ordre de l'équation en Y'; et ainsi de suite.

Exemple. — Nous avons trouvé (349) que l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - y = 0 \tag{7}$$

admet la solution

$$u = e^{\frac{x^2}{2}} Y.$$

Supposons qu'on ait constaté ce fait, on peut alors abaisser l'ordre d'une unité, en posant

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{\frac{x^2}{2}}\frac{dY}{dx} + xe^{\frac{x^2}{2}}Y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^2Y}{dx^2} + 2xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{dY}{dx} + (x^2+1)e^{\frac{x^2}{2}}Y.$$

Substituant dans l'équation donnée, on voit que le coefficient de Y est nul et l'on a l'équation

$$e^{\frac{x^2}{2}}\frac{d^2Y}{dx^2} + xe^{\frac{x^2}{2}}\frac{dY}{dx} = 0,$$

qu'on réduit au premier ordre en faisant

$$\frac{dY}{dx} = Y'.$$

On est donc ramené, après suppression du facteur $e^{\frac{x^2}{2}}$, à intégrer l'équation du premier ordre

$$\frac{dY'}{dx} + xY' = 0.$$

On en tire

$$\frac{dY'}{Y'} = -x\,dx, \qquad LY' = -\frac{x^2}{2} + LC,$$

$$Y' = Ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

On en déduit

$$Y = \int Y'\,dx = C\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + C_1,$$

C_1 étant une nouvelle constante et, par suite,

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}Y = Ce^{\frac{x^2}{2}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + C_1 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation (7).

III. — ÉQUATIONS A COEFFICIENTS CONSTANTS SANS SECOND MEMBRE.

363. **Méthode générale.** — Considérons une équation

$$(1)\qquad \varphi(y) = a_0\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = 0,$$

où les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes. Cette équation peut toujours être intégrée par la méthode suivante. On cherche d'abord des solutions particulières de la forme

$$y = e^{rx},$$

r désignant une constante. On a

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2e^{rx}, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^ny}{dx^n} = r^ne^{rx}.$$

Donc, en substituant dans le premier membre de l'équation,

$$\varphi(e^{rx}) = e^{rx}(a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n).$$

Le résultat de la substitution est donc égal à e^{rx}, multiplié par un polynome de degré n en r, que nous appellerons $\psi(r)$:

$$\psi(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_n;$$

d'où, sous forme abrégée,

$$\varphi(e^{rx}) = e^{rx}\psi(r),$$

Pour que e^{rx} soit une solution de l'équation différentielle, il faut et il suffit que $\varphi(e^{rx})$ soit nul, c'est-à-dire que r soit une racine du polynome $\psi(r)$. Le polynome $\psi(r)$ a, en général, n racines *distinctes* $r_1, r_2, \ldots, r_n$. A chaque racine correspond une solution e^{rx} de l'équation : on a ainsi les n solutions particulières

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x}, \qquad \ldots, \qquad y_n = e^{r_n x},$$

d'où l'on déduit l'*intégrale générale*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

avec n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

364. **Exemples** : *Premier exemple.* — Soit à intégrer l'équation du deuxième ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0;$$

cette équation est *linéaire*, *à coefficients constants* sans second membre : essayons de la vérifier à l'aide de la fonction

$$y = e^{rx};$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = re^{rx}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = r^2 e^{rx}.$$

On a donc, en substituant,

$$e^{rx}(r^2 - 4) = 0;$$

dans cet exemple, le polynome $\psi(r)$ est $r^2 - 4$.

Pour que l'équation différentielle soit vérifiée par e^{rx}, il faut et il suffit qu'on ait

$$r^2 - 4 = 0;$$

c'est-à-dire

$$r = 2 \quad \text{ou} \quad r = -2.$$

On a ainsi les deux solutions

$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{-2x};$$

d'où l'on déduit l'intégrale générale

$$(2) \qquad y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x},$$

avec deux constantes arbitraires. On peut déterminer ces constantes de telle façon que, pour $x = x_0$, la fonction (2) et sa dérivée $\frac{dy}{dx}$ prennent des valeurs données à l'avance : c'est ce qu'il est aisé de vérifier.

Deuxième exemple. — Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0.$$

Faisant

$$y = e^{rx},$$

on a

$$e^{rx}(r^2 + 4) = 0,$$

d'où

$$r_1 = 2i, \qquad r_2 = -2i.$$

On a donc les deux solutions

$$y_1 = e^{2ix}, \qquad y_2 = e^{-2ix},$$

d'où l'intégrale générale

$$(3) \qquad y = C_1 e^{2ix} + C_2 e^{-2ix},$$

avec deux constantes arbitraires C_1 et C_2. Cette forme de l'intégrale générale est compliquée d'imaginaires; on les fera disparaître en prenant, pour C_1 et C_2, des constantes arbitraires *imaginaires conjuguées*. En effet, d'après l'identité d'Euler (n° 191)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

on a

$$e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x,$$
$$e^{-2ix} = \cos 2x - i \sin 2x,$$

d'où, en remplaçant dans (3),

$$y = (C_1 + C_2)\cos 2x + i(C_1 - C_2)\sin 2x;$$

on prend alors C_1 et C_2 de telle façon que les coefficients de

$\cos 2x$ et $\sin 2x$ soient des constantes arbitraires réelles A et B :

$$C_1 + C_2 = A, \qquad i(C_1 - C_2) = B,$$

ce qui donne pour C_1 et C_2 deux constantes imaginaires conjuguées, et l'expression de l'intégrale générale devient

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

avec deux constantes A et B.

Troisième exemple : Galvanomètre. — Dans la théorie du galvanomètre, on rencontre l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\theta}{dt} + \beta^2\theta = 0,$$

où α et β sont des constantes réelles, θ un angle inconnu, t la variable indépendante. Cette équation est linéaire, à coefficients constants, sans second membre. Si nous essayons de la vérifier en prenant

$$\theta = e^{rt},$$

nous obtenons la condition

$$r^2 + 2\alpha r + \beta^2 = 0;$$

cette équation a pour racines

$$r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, \qquad r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2},$$

et l'intégrale générale est

$$\theta = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}. \tag{4}$$

Discussion. — Quand $\alpha^2 - \beta^2 > 0$, r_1 et r_2 sont réels, l'intégrale générale se présente sous forme réelle.

Quand $\alpha^2 - \beta^2$ est négatif, r_1 et r_2 sont imaginaires : pour faire disparaître les imaginaires, posons

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\gamma^2.$$

Alors

$$r_1 = -\alpha + i\gamma, \qquad r_2 = -\alpha - i\gamma,$$
$$\theta = e^{-\alpha t}(C_1 e^{i\gamma t} + C_2 e^{-i\gamma t}).$$

Remplaçant $e^{i\gamma t}$ et $e^{-i\gamma t}$ par $\cos\gamma t + i\sin\gamma t$ et $\cos\gamma t - i\sin\gamma t$, on a

$$\theta = e^{-\alpha t}[(C_1 + C_2)\cos\gamma t + i(C_1 - C_2)\sin\gamma t];$$

et, en prenant pour C_1 et C_2 des constantes imaginaires conjuguées, on a, finalement,

$$\theta = e^{-\alpha t}(A\cos\gamma t + B\sin\gamma t).$$

Quatrième exemple. — Soit enfin l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 8y = 0.$$

Faisant

$$y = e^{rx};$$

on a

$$r^3 - 8 = 0,$$

équation qui a pour racines

$$r_1 = 2, \qquad r_2 = -1 + i\sqrt{3}, \qquad r_3 = -1 - i\sqrt{3}.$$

L'équation différentielle admet donc les trois solutions

$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{-x+ix\sqrt{3}}, \qquad y_3 = e^{-x-ix\sqrt{3}},$$

d'où l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 e^{ix\sqrt{3}} + C_3 e^{-ix\sqrt{3}}\right).$$

Si l'on veut faire disparaître les imaginaires, on se sert des identités

$$e^{ix\sqrt{3}} = \cos x\sqrt{3} + i\sin x\sqrt{3},$$
$$e^{-ix\sqrt{3}} = \cos x\sqrt{3} - i\sin x\sqrt{3}.$$

L'intégrale générale prend alors la forme

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(A\cos x\sqrt{3} + B\sin x\sqrt{3}\right),$$

avec trois constantes arbitraires A, B, C_1.

365. **Cas où le polynome $\psi(r)$ a des racines multiples.** — En appelant $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les n racines du polynome $\psi(r)$, nous avons obtenu les n solutions

$$e^{r_1x}, \quad e^{r_2x}, \quad \ldots, \quad e^{r_nx},$$

avec lesquelles nous avons construit l'intégrale générale de l'équation différentielle.

Si l'équation $\psi(r) = 0$ admet des racines égales, les n solutions ci-dessus ne sont plus distinctes : par exemple, si $r_1 = r_2$, la deuxième solution est identique à la première.

Dans ce cas, on ne peut donc plus appliquer la méthode précédente pour former l'intégrale générale. Mais nous allons montrer comment on peut encore, dans ce cas, obtenir n solutions distinctes.

Pour cela, nous démontrerons le théorème suivant :

Si r_1 est une racine double de $\psi(r)$, l'équation différentielle admet les deux solutions $e^{r_1 x}$ et $x e^{r_1 x}$;

Si r_1 est une racine triple de $\psi(r)$, l'équation différentielle admet les trois solutions $e^{r_1 x}$, $x e^{r_1 x}$, $x^2 e^{r_1 x}$; et ainsi de suite;

Si r_1 est racine d'ordre p de $\psi(r)$, l'équation différentielle admet les p solutions $e^{r_1 x}$, $x^2 e^{r_1 x}$, .., $x^{p-1} e^{r_1 x}$.

La démonstration de ce théorème se déduit de la remarque suivante. Soit v une fonction de x et d'une autre variable r : en substituant v dans le premier membre $\varphi(y)$ de l'équation différentielle, on a un certain résultat

$$\varphi(v) = a_0 \frac{d^n v}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n v;$$

si, ensuite, on substitue, dans le premier membre de la même équation, la fonction $\dfrac{\partial v}{\partial r}$, on a

$$\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = a_0 \frac{d^n \left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

Ces deux expressions montrent que

$$(5) \qquad \varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{\partial[\varphi(v)]}{\partial r}.$$

En effet, comme on peut intervertir l'ordre des dérivées partielles, on peut écrire

$$\begin{aligned}\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{d^n v}{dx^n}\right) + a_1 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + a_n \frac{\partial v}{\partial r} \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left[a_0 \frac{d^n v}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n v\right],\end{aligned}$$

ce qui démontre l'identité (5). En appliquant deux fois de suite cette même identité, on a

$$\varphi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right] = \frac{\partial^2}{\partial r^2}[\varphi(v)],$$

et, en général,

$$\varphi\left(\frac{\partial^p v}{\partial r^p}\right) = \frac{\partial^p}{\partial r^p}[\varphi(v)].$$

Voici maintenant l'application de cette remarque au problème qui nous occupe. Prenons

$$v = e^{rx},$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial r} = x e^{rx}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = x^2 e^{rx}, \qquad \frac{\partial^3 v}{\partial r^3} = x^3 e^{rx}, \qquad \ldots.$$

On a, quels que soient x et r, les identités

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(v) = \varphi(e^{rx}) = e^{rx}\psi(r),\\ &\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \varphi(xe^{rx}) = \frac{\partial}{\partial r}[\varphi(v)] = e^{rx}[x\psi(r) + \psi'(r)],\\ &\varphi\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) = \varphi(x^2 e^{rx}) = \frac{\partial}{\partial r}\left[\varphi\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\right] = e^{rx}[x^2\psi(r) + 2x\psi'(r) + \psi''(r)],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}\right.$$

où le dernier terme de chaque ligne est la dérivée, par rapport à r, du dernier terme de la ligne précédente.

Supposons que r_1 soit une racine double de $\psi(r)$, on a

$$\psi(r_1) = 0, \qquad \psi'(r_1) = 0.$$

Les deux premières des identités (6), où l'on remplace r par r_1, montrent qu'alors

$$\varphi(e^{r_1 x}) = 0, \qquad \varphi(xe^{r_1 x}) = 0;$$

l'équation admet donc bien les deux solutions $e^{r_1 x}$, $xe^{r_1 x}$.

Supposons que r_1 soit racine triple, c'est-à-dire annule $\psi(r)$ et ses deux premières dérivées :

$$\psi(r_1) = 0, \qquad \psi'(r_1) = 0, \qquad \psi''(r_1) = 0.$$

Les trois premières identités (6), où l'on remplace r par r_1, montrent qu'alors

$$\varphi(e^{r_1 x}) = 0, \quad \varphi(x e^{r_1 x}) = 0, \quad \varphi(x^2 e^{r_1 x}) = 0;$$

l'équation admet donc bien les trois solutions $e^{r_1 x}$, $x e^{r_1 x}$, $x^2 e^{r_1 x}$. Et ainsi de suite.

En résumé, chaque racine de $\psi(r)$ donne un nombre de solutions distinctes, égal à son degré de multiplicité : on aura donc, dans tous les cas, n solutions distinctes $y_1, y_2, \ldots, y_n$, avec lesquelles on formera l'intégrale générale par la formule

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

366. **Exemples.** — *Premier exemple : équation du galvanomètre.* — Reprenons l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\theta}{dt} + \beta^2 \theta = 0; \tag{7}$$

faisant $\theta = e^{rt}$, on a ici

$$\psi(r) = r^2 + 2\alpha r + \beta^2.$$

Nous avons supposé, antérieurement, les deux racines de $\psi(r)$ distinctes : supposons maintenant qu'on ait $\beta^2 = \alpha^2$; alors $\psi(r)$ a une racine *double*

$$r_1 = -\alpha;$$

dans ce cas, l'équation admet donc les deux solutions

$$e^{r_1 t}, \quad t e^{r_1 t},$$

ou

$$e^{-\alpha t}, \quad t e^{-\alpha t},$$

et l'intégrale générale est

$$\theta = C_1 e^{-\alpha t} + C_2 t e^{-\alpha t}. \tag{8}$$

Remarque. — C'est d'ailleurs un résultat que l'on pourrait déduire par continuité du cas général, en supposant que les deux racines, r_1 et r_2, d'abord distinctes, tendent l'une vers l'autre. Ainsi, en posant $\beta^2 - \alpha^2 = \gamma^2$, nous avons trouvé (n° 364) pour intégrale générale de l'équation (7)

$$\theta = e^{-\alpha t}(A \cos\gamma t + B \sin\gamma t),$$

où A et B sont des constantes arbitraires : nous pouvons remplacer B par $\frac{C}{\gamma}$, C étant une constante arbitraire ; nous mettrons donc l'intégrale générale sous la forme

$$\theta = e^{-\alpha t}\left(A\cos\gamma t + C\frac{\sin\gamma t}{\gamma}\right),$$

A et C étant deux constantes arbitraires. Pour rendre les racines égales, il suffit de faire tendre γ vers zéro ; alors $\frac{\sin\gamma t}{\gamma}$ tend vers t et l'intégrale devient

$$\theta = e^{-\alpha t}(A + Ct);$$

c'est bien la forme (8) que nous avons obtenue par l'application des règles générales.

Deuxième exemple. — Soit l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Faisant

$$y = e^{rx},$$

on a

$$e^{rx}(r^3 - 3r^2 + 3r - 1) = 0.$$

Le polynome $\psi(r)$ est donc ici $(r-1)^3$: il admet la racine triple $r = 1$. Il en résulte les trois solutions

$$e^x, \quad xe^x, \quad x^2e^x,$$

et l'intégrale générale

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

Troisième exemple. — Soit l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Faisant $y = e^{rx}$, on est conduit à l'équation

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0$$

ou

$$(r^2+1)^2 = 0,$$

qui admet $r = i$ comme racine double et $r = -i$ comme racine double. Il en résulte les quatre solutions

$$e^{ix}, \quad x e^{ix}, \quad e^{-ix}, \quad x e^{-ix},$$

et l'intégrale générale

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 x e^{ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix},$$

ou

$$y = C_1 e^{ix} + C_3 e^{-ix} + x(C_2 e^{ix} + C_4 e^{-ix}).$$

Pour faire disparaître les imaginaires on fera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

on remplacera C_1 et C_3 par deux constantes imaginaires conjuguées, C_2 et C_4 également, et l'on aura l'intégrale générale

$$y = A \cos x + B \sin x + x(A_1 \cos x + B_1 \sin x).$$

IV. — ÉQUATIONS LINÉAIRES AVEC SECOND MEMBRE.

367. **Théorème.** — *Soit une équation différentielle linéaire avec second membre*

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = X$$

ou, sous forme abrégée,

$$\varphi(y) = X; \tag{1}$$

si l'on connaît une intégrale particulière de cette équation, on peut ramener son intégration à l'intégration de la même équation sans second membre.

En effet, supposons que l'on connaisse une fonction particulière u vérifiant l'équation, c'est-à-dire telle que

$$\varphi(u) = X;$$

prenons une nouvelle fonction inconnue Y liée à y par la relation

$$y = Y + u. \tag{2}$$

L'équation (1) devient

$$\varphi(Y + u) = X;$$

or

$$\varphi(Y + u) = \varphi(Y) + \varphi(u);$$

on a donc l'équation

$$\varphi(Y) + \varphi(u) = X,$$

et, comme par hypothèse $\varphi(u) = X$, il reste

$$\varphi(Y) = 0. \tag{3}$$

La fonction Y satisfait donc à la même équation *sans second membre*. Si l'on sait intégrer cette équation (3), on trouvera, pour son intégrale générale, une expression de la forme

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n.$$

En revenant à la fonction y par la formule $y = Y + u$, on a alors, pour l'intégrale générale de l'équation donnée (1),

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \ldots + C_n Y_n + u,$$

avec n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Exemple. — Soit l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = e^x; \tag{4}$$

on vérifie immédiatement que la fonction

$$u = \frac{1}{2} e^x$$

est une solution de l'équation. Faisant alors

$$y = Y + \frac{1}{2} e^x,$$

on obtient, pour déterminer Y, l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + Y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée (4) est donc

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} e^x.$$

368. **Cas particulier des équations à coefficients constants.** — Quand les coefficients sont constants, on peut trouver facilement une solution particulière de l'équation, avec un second membre X, lorsque ce second membre est un polynome par rapport à la variable indépendante x, augmenté d'une somme d'exponentielles linéaires en x

$$X = P(x) + A e^{ax} + B e^{bx} + \ldots + L e^{lx},$$

$P(x)$ désignant un polynome, A, B, ..., L, a, b, ..., l des constantes.

Pour le démontrer, nous examinerons d'abord deux cas simples :

1° Le second membre est uniquement un polynome $P(x)$;
2° Le second membre est une seule exponentielle Ae^{ax}.

369. **Premier cas. Le second membre est un polynome.** — Si l'on a une équation à coefficients constants, de la forme

$$a_0 \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n y = P(x),$$

où le second membre est un polynome $P(x)$ de degré p, il existe une solution particulière u, de cette équation, qui est un polynome en x de degré égal ou supérieur à p.

En effet, supposons d'abord a_n différent de zéro : si l'on substitue, dans l'équation, un polynome u de degré p, à coefficients indéterminés

$$u = \lambda_0 x^p + \lambda_1 x^{p-1} + \ldots + \lambda_p,$$

on voit que le premier membre devient un polynome de degré p : on identifie ce polynome avec $P(x)$, en déterminant convenablement $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Si a_n est nul, a_{n-1} étant différent de zéro, c'est un polynome de degré $p+1$ qu'il faut essayer, et ainsi de suite.

Exemple I. — Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^2 + 1.$$

Le second membre étant un polynome de degré 2, essayons de vérifier l'équation par un polynome

$$u = \lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2.$$

Écrivant qu'on a identiquement

$$\frac{d^2u}{dx^2} - u = x^2 + 1,$$

on a

$$2\lambda_0 - (\lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2) = x^2 + 1.$$

ce qui exige

$$\lambda_0 = -1, \qquad \lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -3$$

On a donc la solution particulière

$$u = -x^2 - 3.$$

Faisant alors

$$y = Y + u = Y - x^2 - 3,$$

on est ramené à l'équation, sans second membre,

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - Y = 0,$$

qui a pour intégrale générale

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

Donc la proposée a pour intégrale générale

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 - 3.$$

Exemple II. — Soit l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = x^4.$$

On voit qu'en substituant, dans le premier membre, un polynome du quatrième degré, le résultat serait du troisième degré seulement : substituons alors un polynome du cinquième degré

$$u = \lambda_0 x^5 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5;$$

en écrivant que ce polynome vérifie identiquement la relation

$$\frac{d^3 u}{dx^3} + \frac{du}{dx} = x^4,$$

on a

$$5\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 0, \quad 60\lambda_0 + 3\lambda_2 = 0, \quad 24\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0,$$
$$6\lambda_2 + \lambda_4 = 0;$$

d'où

$$\lambda_0 = \frac{1}{5}, \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = 0, \quad \lambda_4 = 24.$$

Le coefficient λ_5 peut être pris arbitrairement; comme, pour le moment, il s'agit seulement de trouver *une solution* de l'équation, nous prendrons

$$\lambda_5 = 0.$$

Nous avons ainsi la solution

$$u = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x.$$

Faisant alors

$$y = Y + u,$$

on a, pour déterminer Y, l'équation sans second membre

$$\frac{d^3 Y}{dx^3} + \frac{dY}{dx} = 0.$$

Faisant $Y = e^{rx}$, on a à résoudre l'équation

$$r^3 + r = 0,$$

dont les racines sont

$$0, \quad i, \quad -i.$$

On en conclut les trois solutions

$$1, \quad e^{ix}, \quad e^{-ix},$$

et l'intégrale générale

$$Y = C_1 + C_2 e^{ix} + C_3 e^{-ix},$$

ou

$$Y = C_1 + A\cos x + B\sin x.$$

L'équation donnée en y a donc pour intégrale générale

$$y = Y + u,$$

$$y = C_1 + A\cos x + B\sin x + \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 24x.$$

Remarque. — On pourrait aussi, dans l'équation que nous venons de traiter,

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = x^4,$$

prendre pour inconnue

$$\frac{dy}{dx} = z;$$

on aurait alors à intégrer l'équation du deuxième ordre

$$\frac{d^2z}{dx^2} + z = x^4.$$

Une fois z trouvé, on en conclut y par une quadrature

$$y = \int z\,dx.$$

370. **Deuxième cas. Le second membre est une exponentielle Ae^{ax}, où A et a sont des constantes.** — Dans ce cas l'équation est de la forme

$$\varphi(y) = Ae^{ax}. \tag{5}$$

En général, on pourra obtenir une solution de la forme

$$u = \lambda e^{ax},$$

λ étant une constante à déterminer.

En effet, écrivant que u vérifie l'équation, on a

$$\varphi(\lambda e^{ax}) = Ae^{ax}$$

ou

$$\lambda\varphi(e^{ax}) = Ae^{ax}. \tag{6}$$

Mais, nous avons trouvé, quel que soit r,

$$\varphi(e^{rx}) = e^{rx}\psi(r);$$

on a donc, en remplaçant r par a,

$$\varphi(e^{ax}) = e^{ax}\psi(a),$$

et la condition (6) donne

$$\lambda\psi(a) = A, \qquad \lambda = \frac{A}{\psi(a)}.$$

On a donc ainsi la solution

$$u = \frac{A}{\psi(a)} e^{ax}.$$

Cas d'exception. — Le calcul précédent serait en défaut, si a était une racine du polynome $\psi(r)$, car, dans ce cas, $\varphi(\lambda e^{ax})$ serait nul, quel que soit λ. Voici comment on obtient alors une solution :

Si a est racine simple de $\psi(r)$, l'équation avec second membre admet une solution de la forme $\lambda x e^{ax}$;

Si a est racine double de $\psi(r)$, l'équation avec second membre admet une solution de la forme $\lambda x^2 e^{ax}$;

Et si a est racine d'ordre p, l'équation avec second membre admet une solution de la forme $\lambda x^p e^{ax}$.

C'est ce qu'on voit immédiatement en se servant des identités établies plus haut (n° 365) :

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi(e^{rx}) \;\;= e^{rx}\psi(r), \\ \varphi(xe^{rx}) \;= e^{rx}[\psi'(r) + x\,\psi(r)], \\ \varphi(x^2e^{rx}) = e^{rx}[\psi''(r) + 2x\,\psi'(r) + x^2\psi(r)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Supposons que a soit racine simple de $\psi(r)$; alors $\psi(a) = 0$, $\psi'(a)$ étant différent de zéro. On a donc, en essayant de vérifier l'équation par

$$u = \lambda x e^{ax},$$

$$\varphi(\lambda x e^{ax}) = A e^{ax},$$

ou

$$\lambda\,\varphi(x e^{ax}) = A e^{ax}.$$

Mais, d'après la deuxième des identités (7),

$$\varphi(x e^{ax}) = e^{ax}\psi'(a).$$

On a donc

$$\lambda e^{ax}\psi'(a) = A e^{ax},$$

$$\lambda = \frac{A}{\psi'(a)};$$

on obtient ainsi la solution

$$u = \frac{Ax}{\psi'(a)} e^{ax}.$$

Si a est racine double de $\psi(r)$ on a

$$\psi(a) = 0, \qquad \psi'(a) = 0, \qquad \psi''(a) \neq 0;$$

essayant la solution

$$u = \lambda x^2 e^{ax},$$

on a

$$\varphi(\lambda x^2 e^{ax}) = \mathrm{A} e^{ax},$$

$$\lambda\, \varphi(x^2 e^{ax}) = \mathrm{A} e^{ax},$$

d'où, d'après la troisième des identités (7),

$$\lambda e^{ax} \psi''(a) = \mathrm{A} e^{ax},$$

$$\lambda = \frac{\mathrm{A}}{\psi''(a)};$$

on obtient ainsi la solution

$$u = \frac{\mathrm{A} x^2}{\psi''(a)} e^{ax}.$$

Et ainsi de suite.

En général, si a est racine d'ordre p de $\psi(r)$, l'équation *sans second membre* admet les p intégrales e^{ax}, xe^{ax}, ..., $x^{p-1} e^{ax}$, et l'équation, avec le second membre $\mathrm{A}e^{ax}$, admet l'intégrale

$$\frac{\mathrm{A} x^p}{\psi^{(p)}(a)} e^{ax}.$$

Exemple I. — Soit l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{3x},$$

le polynome $\psi(r)$ est ici

$$\psi(r) = r^2 - 3r + 2,$$

ses racines sont 1 et 2. Le second membre contient l'exponentielle e^{3x}; comme 3 n'est pas racine de $\psi(r)$, l'équation admet une solution de la forme

$$u = \lambda e^{3x};$$

en substituant, on trouve, après réduction,

$$2\lambda = 1, \qquad \lambda = \frac{1}{2}.$$

On a donc la solution

$$u = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Faisant alors

$$y = Y + \frac{1}{2}e^{3x},$$

on est ramené à l'équation sans second membre

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - 3\frac{dY}{dx} + 2Y = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

L'intégrale générale de la proposée est donc

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Exemple II. — Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x, \tag{8}$$

où le premier membre est le même que dans l'exemple I. Le second membre est e^x et le coefficient 1 de x est *racine simple* de $\psi(r)$. L'équation admet donc une solution de la forme

$$u = \lambda x e^x.$$

C'est ce qu'on vérifiera directement : la valeur de λ est

$$\lambda = \frac{1}{\psi'(1)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

L'intégrale générale de l'équation (8) est alors

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x.$$

371. **Cas général où le second membre est un polynome** $\mathrm{P}(x)$ **suivi d'une somme d'exponentielles.** — Soit maintenant une équation de la forme

$$\varphi(y) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{A}e^{ax} + \mathrm{B}e^{bx} + \ldots + \mathrm{L}e^{lx}. \tag{9}$$

Pour trouver une solution particulière u de cette équation, on détermine d'abord des fonctions $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_p$, vérifiant les relations

$$\varphi(u_1) = P(x),$$
$$\varphi(u_2) = A e^{ax},$$
$$\varphi(u_3) = B e^{bx},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi(u_p) = L e^{lx}.$$

On sait trouver ces fonctions, d'après les deux cas précédents : u_1 est un polynome, u_2, u_3, ..., u_p des exponentielles multipliées ou non par des puissances de x suivant que a, b, ..., l sont ou non des racines de $\psi(r)$.

Une fois u_1, u_2, ..., u_p trouvées, l'équation proposée (9) admet la solution

$$u = u_1 + u_2 + \ldots + u_p.$$

On a, en effet (n° 357),

$$\varphi(u) = \varphi(u_1 + u_2 + \ldots + u_p) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \ldots + \varphi(u_p)$$

ou

$$\varphi(u) = P(x) + A e^{ax} + B e^{bx} + \ldots + L e^{lx},$$

Ayant trouvé u, on pose

$$y = Y + u$$

et l'on est ramené à l'équation sans second membre

$$\varphi(Y) = 0.$$

Exemple. — Soit l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2x + \cos x. \tag{10}$$

Comme $\cos x = \frac{1}{2} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-ix}$, on peut écrire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 2x + \frac{1}{2} e^{ix} + \frac{1}{2} e^{-ix},$$

ce qui rentre bien dans le type précédent. On cherche alors des fonctions particulières u_1, u_2, u_3 vérifiant respectivement les trois relations

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + u_1 = 2x,$$
$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} + u_2 = \frac{1}{2} e^{ix},$$
$$\frac{d^2 u_3}{dx^2} + u_3 = \frac{1}{2} e^{-ix}.$$

On obtient une fonction u_1, remplissant la première condition, en essayant un polynome du premier degré ; on trouve ainsi

$$u_1 = 2x.$$

On obtient une fonction u_2 vérifiant la deuxième relation, en remarquant que le second membre

$$\frac{1}{2} e^{ix}$$

est de la forme Ae^{ax}, où $a = i$ est racine simple de $\psi(r) = r^2 + 1$; on peut donc prendre pour u_2 une expression de la forme

$$u_2 = \lambda x e^{ix};$$

en substituant, on trouve

$$\lambda = \frac{A}{\psi'(a)} = \frac{\frac{1}{2}}{\psi'(i)} = \frac{1}{4i},$$

d'où

$$u_2 = \frac{1}{4i} x e^{ix}.$$

Pour vérifier la troisième relation, on peut, de même, prendre

$$u_3 = -\frac{1}{4i} x e^{-ix}.$$

L'équation proposée (10) admet alors la solution

$$u = u_1 + u_2 + u_3 = 2x + \frac{1}{4i} x(e^{ix} - e^{-ix}) = 2x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

Faisant alors

$$y = Y + u,$$

on est ramené à l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} + Y = 0$$

dont l'intégrale générale est

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée est donc

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2x + \frac{1}{2} x \sin x.$$

CHAPITRE XX.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES A UNE VARIABLE INDÉPENDANTE.

372. **Problème général.** — Il peut arriver, et cela se présente notamment en Mécanique, que l'on ait à intégrer un système de n équations différentielles simultanées d'ordres divers, définissant n fonctions inconnues d'une même variable indépendante. Nous allons montrer que l'intégration d'un pareil système peut toujours se ramener à l'intégration d'une seule équation différentielle à une fonction inconnue.

Nous commencerons d'abord par quelques cas simples.

I. — DEUX ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER ORDRE A DEUX FONCTIONS INCONNUES.

373. **Méthode.** — Soient deux équations de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= F(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= F_1(x, y, z), \end{aligned}\right.$$

définissant les deux fonctions inconnues y et z de la variable indépendante x.

On peut ramener l'intégration de ce système à l'intégration d'une équation du deuxième ordre. En effet, dérivons la première équation par rapport à x en y regardant y et z comme fonctions de x; il vient

$$(2)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

Si, entre les trois équations (1) et (2), on élimine z et $\frac{dz}{dx}$, on obtient une équation différentielle du deuxième ordre,

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

définissant y en fonction de x. Soit

$$y = \varphi_1(x, C_1, C_2)$$

l'intégrale générale de cette équation; cette intégrale étant supposée trouvée, on obtient également z en fonction de x, C_1 et C_2 *sans aucune intégration*, en faisant seulement des calculs algébriques. En effet, si, dans la première des équations (1), on remplace y par son expression, on obtient une relation contenant uniquement x, z, C_1 et C_2; en la résolvant par rapport à z, on a

$$z = \varphi_2(x, C_1, C_2),$$

avec les deux mêmes constantes C_1 et C_2.

374. **Interprétation géométrique.** — Si l'on regarde x, y, z comme les coordonnées d'un point M de l'espace, on sait que le lieu des points pour lesquels y et z sont des fonctions déterminées de x est une courbe dans l'espace; d'autre part, les coefficients directeurs de la tangente à une courbe gauche au point (x, y, z) sont proportionnels à dx, dy, dz ou à $1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$. Intégrer les équations différentielles (1), c'est donc chercher des courbes gauches telles que la tangente au point (x, y, z) à une de ces courbes ait ses coefficients directeurs proportionnels à

$$1, \quad F(x, y, z), \quad F_1(x, y, z).$$

L'intégration des équations (1) donne les équations de ces courbes sous forme finie

$$(3) \qquad \begin{cases} y = \varphi_1(x, C_1, C_2), \\ z = \varphi_2(x, C_1, C_2), \end{cases}$$

avec deux constantes arbitraires.

Par un point donné x_0, y_0, z_0 de l'espace, il passe une de ces courbes, car on peut toujours déterminer C_1 et C_2 par les conditions que les deux équations (3) soient vérifiées quand on y remplace x, y, z par x_0, y_0, z_0.

375. **Exemple.** — Soit à intégrer les équations

$$\frac{dy}{dx} = x + y + 2z, \qquad \frac{dz}{dx} = x + z + 2y.$$

Dérivons la première par rapport à x :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \frac{dy}{dx} + 2\frac{dz}{dx}.$$

Entre ces trois équations, éliminons z et $\frac{dz}{dx}$; la première donne

$$z = \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y;$$

portant cette expression de z dans la deuxième, on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\frac{dy}{dx};$$

enfin, en portant cette expression de $\frac{dz}{dx}$ dans la troisième, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + x + 3y + 2\frac{dy}{dx},$$

équation du deuxième ordre en y. Cette équation s'écrit

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 1 + x.$$

C'est une équation linéaire, à coefficients constants, avec second membre. Elle admet la solution particulière

$$u = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9};$$

par la substitution

$$y = Y + u,$$

elle devient

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - 2\frac{dY}{dx} - 3Y = 0,$$

équation qui admet les deux intégrales particulières

$$e^{-x}, \quad e^{3x}$$

et dont l'intégrale générale est

$$Y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}.$$

L'intégrale générale de l'équation en y est donc

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}.$$

Pour avoir z, il suffit de le tirer de la première équation qui donne

$$z = \frac{1}{2}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y,$$

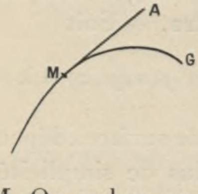
ou, en remplaçant y par son expression et réduisant,

$$z = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{x}{3} - \frac{1}{9}.$$

On a ainsi les expressions générales de z et y avec deux constantes arbitraires C_1 et C_2.

376. **Application : Lignes de forces.** — Imaginons une loi de force telle que, sur l'unité de masse placée en un point quelconque M (x, y, z), agisse une force F (*fig.* 200) dépendant uniquement

Fig. 200.



de la position du point M. On a alors ce qu'on appelle *un champ de forces* déjà considéré au Chapitre XVI; les projections X, Y, Z de la force F agissant en un point M (x, y, z) du champ sont des fonctions supposées connues des coordonnées du point

$$X = f(x, y, z), \qquad Y = \varphi(x, y, z), \qquad Z = \psi(x, y, z).$$

On appelle *lignes de forces* les courbes telles que, en chacun de leurs points M, elles admettent comme tangente la force agissant en ce point. Cherchons les équations différentielles de ces lignes.

Un élément dx, dy, dz de la courbe placé au point M doit avoir même direction que la force F agissant en ce point. Les projections de l'élément sont donc proportionnelles à celles de la force et l'on a

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

ou

$$\frac{dx}{f(x, y, z)} = \frac{dy}{\varphi(x, y, z)} = \frac{dz}{\psi(x, y, z)}.$$

Telles sont les équations différentielles des lignes de forces. En prenant x comme variable indépendante, on peut les écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\varphi(x, y, z)}{f(x, y, z)}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\psi(x, y, z)}{f(x, y, z)}.$$

Ce sont bien des équations de la forme (1) traitées dans le n° 373. En les intégrant, on obtient les équations des lignes de forces avec deux paramètres C_1 et C_2.

Inversement, intégrer des équations telles que (1), c'est chercher les lignes de forces d'un champ dans lequel on a

$$\frac{Y}{X} = F(x, y, z), \qquad \frac{Z}{X} = F_1(x, y, z).$$

377. **Autre exemple : Trajectoires orthogonales d'une famille de surfaces à un paramètre.** — Soit

$$f(x, y, z) = \lambda \tag{4}$$

l'équation d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre λ; nous supposons, pour plus de simplicité, cette équation résolue par rapport à λ. Quand on fait varier λ, la surface (4) change de forme et de position de telle façon qu'il passe une de ces surfaces par un point quelconque de l'espace x_0, y_0, z_0, choisi dans la portion de l'espace où la fonction $f(x, y, z)$ existe. En effet, on peut toujours déterminer λ de façon que l'équation (4) soit vérifiée quand on y fait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Nous voulons trouver les courbes qui coupent ces surfaces à angle droit, c'est-à-dire les courbes telles que la tangente en chacun de leurs points M (x, y, z) coïncide avec la normale à celle des surfaces (4) qui passe par ce point.

Les équations de la tangente à une courbe sont

$$\frac{X-x}{dx}=\frac{Y-y}{dy}=\frac{Z-z}{dz};$$

celles de la normale au même point x, y, z à la surface (4) sont

$$\frac{X-x}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{Y-y}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{Z-z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Ces deux droites devant coïncider, on a les conditions

$$\frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{dy}{\frac{\partial f}{\partial y}}=\frac{dz}{\frac{\partial f}{\partial z}},$$

qui sont les équations différentielles des courbes cherchées. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont connus en fonction de x, y, z, ces équations, où l'on prend x comme variable indépendante, sont de la forme (1).

En les intégrant, on obtient les équations des trajectoires orthogonales demandées avec deux constantes arbitraires C_1 et C_2.

On peut remarquer que ces courbes sont les lignes de forces correspondant à une loi de force F dont les projections seraient

$$X=\frac{\partial f}{\partial x},\qquad Y=\frac{\partial f}{\partial y},\qquad Z=\frac{\partial f}{\partial z}.$$

On dit alors que la force F *dérive d'une fonction de forces* $f(x, y, z)$; les surfaces

$$f(x,y,z)=\lambda$$

s'appellent les *surfaces de niveau*.

Exemple. — Trouver les trajectoires orthogonales des paraboloïdes

$$\frac{xy}{z}-\lambda=0,$$

où λ est un paramètre variable.

Les courbes cherchées ont pour équations différentielles

$$\frac{dx}{\frac{y}{z}}=\frac{dy}{\frac{x}{z}}=\frac{dz}{\frac{-xy}{z^2}},$$

car ici

$$f(x, y, z) = \frac{xy}{z}.$$

Égalant chacun des deux premiers rapports au dernier, on a les deux équations

$$x\,dx + z\,dz = 0, \qquad y\,dv + z\,dz = 0,$$

qui s'intègrent immédiatement et donnent

$$x^2 + z^2 = C_1, \qquad y^2 + z^2 = C_2.$$

On a ainsi les équations des courbes cherchées, avec les deux constantes C_1 et C_2. On voit que ces courbes peuvent être regardées comme l'intersection d'un cylindre de révolution, de rayon quelconque, autour de Oy

$$x^2 + z^2 = C_1.$$

avec un cylindre de révolution autour de Ox

$$y^2 + z^2 = C_2.$$

II. — SYSTÈME DE n ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER ORDRE A n FONCTIONS INCONNUES.

378. **Méthode générale.** — Soient n équations simultanées du premier ordre

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right.$$

définissant n inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en fonction de x.

Nous allons voir que les intégrales générales de ce système sont de la forme

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ y_2 &= \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n &= \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n), \end{aligned}\right.$$

avec n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Pour cela, nous montrerons que l'intégration du système (5) se ramène à l'intégration d'une équation différentielle d'ordre n, suivie d'opérations algébriques.

En effet, dérivons la première équation par rapport à x, en nous rappelant que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont fonctions de x. Il vient

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx};$$

si, dans cette équation, on remplace les dérivées $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ du deuxième membre par leurs valeurs (5), on a, pour $\frac{d^2 y_1}{dx^2}$, une expression contenant uniquement $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = G_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Dérivant de nouveau cette équation par rapport à x, il vient

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = \frac{\partial G_2}{\partial x} + \frac{\partial G_2}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial G_2}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx},$$

et, en remplaçant $\frac{dy_1}{dx}, \frac{dy_2}{dx}, \ldots, \frac{dy_n}{dx}$ par leurs valeurs (5), on a

$$\frac{d^3 y_1}{dx^3} = G_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

On continue ainsi, de proche en proche, jusqu'à

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = G_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

On a ainsi le Tableau suivant :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dx} = F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{d^2 y_1}{dx^2} = G_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{d^n y_1}{dx^n} = G_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{array}\right.$$

Si, entre ces n équations, on élimine les $n-1$ inconnues y_2,

$y_3, \ldots, y_n$, on obtient une relation de la forme

$$f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny_1}{dx^n}\right) = 0.$$

C'est là une équation différentielle d'ordre n, définissant y_1 en fonction de x. En la supposant intégrée, on en tire

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Les $(n-1)$ premières relations (7), dans lesquelles on remplace y_1 par cette expression, forment alors un système de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues $y_2, y_3, \ldots, y_n$: la résolution de ces équations donne, par des calculs algébriques, sans intégration nouvelle, $y_2, y_3, \ldots, y_n$ en fonction de x et des n constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Le système est ainsi intégré.

Remarque. — Il peut arriver, dans certains cas particuliers, que l'une des fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifie une équation différentielle d'ordre moindre que n ; il figurera alors, dans l'expression de cette fonction particulière, moins de n constantes : mais il en figurera d'autres dans les expressions de $y_2, y_3, \ldots, y_n$, de façon à compléter le nombre n de constantes arbitraires. En effet, on peut démontrer comme il suit que, dans tous les cas, il existe un système de fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de x, vérifiant le système (5) et contenant, en tout, n constantes arbitraires.

379. **Intégration par séries.** — Reprenons le système (5) et cherchons à l'intégrer par des séries de Mac-Laurin

$$(8)\quad \begin{cases} y_1 = (y_1)_0 + (y'_1)_0 \dfrac{x}{1} + (y''_1)_0 \dfrac{x^2}{1.2} + \ldots, \\ y_2 = (y_2)_0 + (y'_2)_0 \dfrac{x}{1} + (y''_2)_0 \dfrac{x^2}{1.2} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = (y_n)_0 + (y'_n)_0 \dfrac{x}{1} + (y''_n)_0 \dfrac{x^2}{1.2} + \ldots, \end{cases}$$

où $(y_1)_0, (y'_1)_0, (y''_1)_0, \ldots$ sont les valeurs que prennent y_1 et ses dérivées successives pour $x = 0$, etc.

Nous allons montrer que les coefficients de ces séries sont des fonctions de n constantes arbitraires $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$. Il suffit de le montrer pour y_1 ; le raisonnement est le même pour les autres fonctions. Or, d'après le calcul du numéro précédent, les dérivées successives $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{d^2y_1}{dx^2}$, ... sont des fonctions connues de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, et ce calcul peut être prolongé, de proche en proche, jusqu'à une dérivée d'ordre quelconque de y_1. Si, dans ces expressions des dérivées successives de y_1, prolongées indéfiniment, on fait $x = 0$, $y_1 = (y_1)_0$, $y_2 = (y_2)_0$, ..., $y_n = (y_n)_0$, on voit que toutes ces dérivées deviennent fonctions de $(y_1)_0$, $(y_2)_0$, $(y_3)_0$, ..., $(y_n)_0$.

Les coefficients de la série, donnant y_1, sont donc fonctions des n constantes arbitraires $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$; ceux des autres séries sont fonctions des mêmes constantes. Si donc ces séries sont convergentes, elles définissent un système de fonctions vérifiant les équations et contenant n constantes arbitraires.

Ce raisonnement montre que, en général, les fonctions y_1, $y_2, \ldots, y_n$, vérifiant les relations (5), sont déterminées quand on se donne les valeurs

$$(y_1)_0, \quad (y_2)_0, \quad \ldots, \quad (y_n)_0,$$

qu'elles doivent prendre, pour une valeur déterminée $x = 0$ de la variable.

On démontrerait, de même, en prenant des séries de Taylor procédant suivant les puissances de $x - x_0$, que les intégrales des équations (5) sont déterminées, quand on connaît les valeurs qu'elles prennent pour $x = x_0$.

380. **Intégrales premières.** — On appelle *intégrale première* d'un système d'équations

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= F_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{dy_n}{dx} &= F_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{aligned}\right.$$

une équation entre la variable indépendante x, les fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et une *constante arbitraire*, qui se trouve satisfaite, en vertu des équations (5), quelles que soient les valeurs initiales $(y_1)_0$, $(y_2)_0$, ..., $(y_n)_0$ que l'on donne aux fonctions inconnues pour $x = x_0$.

Une intégrale première est donc une relation de la forme

$$\Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, C) = 0.$$

On peut toujours imaginer cette équation résolue par rapport à la constante arbitraire C et l'écrire

$$(9) \qquad f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C.$$

Voici comment on peut vérifier immédiatement qu'une équation, telle que (9) est une intégrale première. Pour que la fonction f reste constante en vertu des équations (5), il faut et il suffit que sa dérivée par rapport à x soit nulle :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx} = 0,$$

ou, en remplaçant les dérivées $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$, ..., par leurs expressions (5)

$$(10) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1}F_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}F_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n}F_n = 0.$$

Cette dernière condition ne contient alors que $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$: elle doit être vérifiée par tous les systèmes de fonctions satisfaisant aux équations (5) ; mais, comme, dans l'intégration de ces équations, on peut, pour une valeur arbitraire x_0 donnée à x, prendre, pour $y_1, y_2, \ldots, y_n$, des valeurs également arbitraires $(y_1)_0, (y_2)_0, \ldots, (y_n)_0$, cette condition (10) doit être satisfaite quelles que soient les valeurs données à x, y_1, y_2, ..., y_n ; elle doit être satisfaite *identiquement*.

Exemple. — Les équations

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 - y_1, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 - y_2 \end{cases}$$

admettent l'intégrale première

$$y_1 + y_2 + y_3 = C.$$

En effet, différentiant cette relation, on doit avoir

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} = 0,$$

ou, en remplaçant ces dérivées par leurs expressions (11),

$$y_2 - y_3 + y_3 - y_1 + y_1 - y_2 = 0,$$

ce qui a lieu identiquement.

De même,

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C'$$

est une autre intégrale première de ces équations différentielles.

381. Usage des intégrales premières. — Deux intégrales premières

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2 \end{cases}$$

sont dites *distinctes* quand f_2 n'est pas une fonction de f_1 : autrement, il est évident que les deux relations (12) se réduiraient à une seule. Il est clair, par exemple, qu'écrire

$$f_1 = C_1,$$

puis

$$f_1^2 = C_2$$

ou

$$\sin f_1 = C_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

c'est exprimer un seul et même fait, à savoir que f_1 reste constant.

Les deux intégrales premières (12) étant supposées distinctes, une troisième intégrale première,

$$f_3(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_3,$$

est dite *distincte des deux premières* quand f_3 n'est pas une fonction de f_1 et f_2 ; et ainsi de suite.

Ainsi, dans l'exemple précédent,

$$(13)\qquad \begin{cases} y_1+y_2+y_3=C_1, \\ y_1^2+y_2^2+y_3^2=C_2 \end{cases}$$

sont deux intégrales premières distinctes. La relation

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=C_3$$

est aussi une intégrale première des équations (11), comme il est aisé de le vérifier; mais *elle n'est pas distincte des deux précédentes*, car on a identiquement

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1=\frac{1}{2}[(y_1+y_2+y_3)^2-(y_1^2+y_2^2+y_3^2)];$$

donc le fait que

$$y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1$$

est constant résulte des deux relations (13).

Revenons au cas général. Si l'on connaît une intégrale première

$$(14)\qquad f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=C_1$$

des équations différentielles (5), on peut simplifier l'intégration du système en diminuant d'une unité le nombre des fonctions inconnues. En effet, on peut, de cette relation (14), tirer y_n en fonction de $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, y_{n-1}$ et C_1; en portant cette expression de y_n dans les $(n-1)$ premières équations différentielles, on les transforme en un système de $n-1$ équations simultanées à $n-1$ inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$.

Si l'on connaît deux intégrales premières distinctes

$$f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=C_1,$$
$$f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)=C_2,$$

on peut en tirer y_{n-1} et y_n en fonction de $x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}, C_1$ et C_2. En portant ces expressions de y_{n-1} et y_n dans les $n-2$ premières équations différentielles (5), on les transforme en un système de $n-2$ équations simultanées à $n-2$ fonctions inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$.

Et ainsi de suite. La connaissance de chaque intégrale première nouvelle sert à abaisser d'une unité le nombre des fonctions inconnues.

Si l'on connaît n intégrales premières distinctes des équations (5),

$$(15)\quad \begin{cases} f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_1, \\ f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = C_n, \end{cases}$$

le système est intégré : de ces n relations (15) on tirera $y_1, y_2, \ldots, y_n$ en fonction de x et de n constantes arbitraires $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Par exemple, pour le système

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 - y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 - y_1, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 - y_2, \end{cases}$$

nous avons trouvé deux intégrales premières

$$(13)\quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = C_1, \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = C_2; \end{cases}$$

nous pouvons alors abaisser de deux unités le nombre des fonctions inconnues. Résolvons les équations (13) par rapport à y_2 et y_3 : nous avons

$$y_2^2 + y_3^2 = C_2 - y_1^2,$$
$$y_2 + y_3 = C_1 - y_1,$$

d'où l'on conclut facilement

$$(y_2 - y_3)^2 = 2(C_2 - y_1^2) - (C_1 - y_1)^2$$

et

$$y_2 - y_3 = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_1 - 3y_1^2}.$$

Portant dans la première équation, on a

$$\frac{dy_1}{dx} = \sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_1 - 3y_1^2},$$

$$x = \int \frac{dy_1}{\sqrt{2C_2 - C_1^2 + 2C_1 y_1 - 3y_1^2}} + C_3.$$

Cette dernière quadrature s'effectue facilement à l'aide d'un arc sinus : on a alors y_1 en fonction de x, C_1, C_2, C_3, et, en remontant, on a y_2 et y_3.

III. — ÉQUATIONS SIMULTANÉES D'ORDRE QUELCONQUE. RÉDUCTION A UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

382. **Méthode générale.** — Si l'on a à intégrer un système de n équations simultanées d'ordres divers, à n fonctions inconnues, on le ramène à un système d'équations du premier ordre, à un nombre plus grand de fonctions inconnues, en prenant pour inconnues auxiliaires les dérivées successives des fonctions inconnues primitives.

Exemple tiré de la Mécanique. — Considérons un point matériel libre de masse m et de coordonnées x, y, z soumis à une force F dépendant du temps t, de la position du mobile et de sa vitesse. On sait que les équations du mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

X, Y, Z désignant les projections de la force. Ces projections sont des fonctions données de t, x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Les équations du mouvement sont donc de la forme

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = \varphi\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right), \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = \psi\left(t, x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right). \end{cases}$$

Elles constituent un système de trois équations du deuxième ordre à trois fonctions inconnues x, y, z de la variable indépendante t.

Pour les ramener à un système d'équations du premier ordre, prenons, comme fonctions inconnues auxiliaires, les dérivées de x, y, z, en posant

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dz}{dt} = z'.$$

On a, alors, le système

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x', \\ \frac{dy}{dt} &= y', \\ \frac{dz}{dt} &= z', \\ \frac{dx'}{dt} &= f(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \frac{dy'}{dt} &= \varphi(t, x, y, z, x', y', z'), \\ \frac{dz'}{dt} &= \psi(t, x, y, z, x', y', z'), \end{aligned}\right.$$

formé de *six* équations du premier ordre, définissant les *six* fonctions inconnues x, y, z, x', y', z', en fonction de t. Les intégrales générales de ce système sont déterminées, quand on connaît les valeurs $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$ des six fonctions inconnues, pour $t = t_0$. Cela veut dire, au point de vue mécanique, que le mouvement du point est déterminé, quand on connaît les coordonnées x_0, y_0, z_0 du point, à un instant initial t_0, et les projections x'_0, y'_0, z'_0 de sa vitesse, au même instant.

Dans cet exemple, une intégrale première est une relation de la forme

$$g(t, x, y, z, x', y', z') = C,$$

entre la variable indépendante t et les six fonctions, c'est-à-dire entre t, les coordonnées du point et les projections de la vitesse. La connaissance d'une intégrale première permet de ramener l'intégration du système (17) à celle d'un système de cinq équations du premier ordre à cinq inconnues ; chaque nouvelle intégrale première permet d'effectuer un abaissement d'une unité dans le nombre des inconnues.

On donne, en Dynamique, des théorèmes généraux, tels que le théorème des forces vives, le théorème des aires, etc., qui permettent, dans certains cas, d'obtenir des intégrales premières.

CHAPITRE XXI.

QUELQUES EXEMPLES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES. ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE.

383. **Forme générale.** — Soient z une fonction des deux variables indépendantes x et y, p et q les dérivées premières de z par rapport à x et y respectivement; on appelle *équation aux dérivées partielles du premier ordre, à deux variables indépendantes*, une équation de la forme

$$F(x, y, z, p, q) = 0. \tag{1}$$

Intégrer cette équation, c'est trouver toutes les fonctions z de x et y qui la vérifient.

En considérant x, y, z comme les coordonnées d'un point dans l'espace, toute relation entre x, y, z définit une surface, et l'on peut dire qu'il s'agit de trouver toutes les surfaces vérifiant la condition (1). On appelle ces surfaces les *surfaces intégrales*.

La différence essentielle, qui sépare l'intégration des équations aux dérivées partielles de l'intégration des équations différentielles à une variable indépendante, est que l'intégrale générale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre contient *une fonction arbitraire*, tandis que l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, à une variable indépendante, contient une *constante arbitraire*. Cette fonction arbitraire doit être telle qu'on puisse en disposer de façon à faire passer la surface intégrale par une courbe donnée à l'avance.

Par exemple, l'équation

$$p + q = 0$$

admet comme intégrale générale

$$z = \varphi(x - y),$$

φ étant une *fonction arbitraire* : toute surface définie par une relation entre z et $x-y$ est une surface intégrale ; par exemple on peut prendre

$$z=(x-y)^2,$$
$$z=e^{x-y},$$
$$z=\mathrm{L}(x-y), \qquad \ldots.$$

En effet, si l'on prend la surface

$$z=\varphi(x-y),$$

on en conclut

$$p=\varphi'(x-y),$$
$$q=-\varphi'(x-y),$$

d'où

$$p+q=0,$$

quelle que soit la nature de la fonction φ.

Les surfaces

$$z=\varphi(x-y) \tag{2}$$

sont des cylindres dont les génératrices sont parallèles à la droite

$$z=0, \qquad x-y=0. \tag{3}$$

On peut déterminer la fonction φ, de façon que la surface intégrale (2) passe par une courbe quelconque donnée D. Il suffit, pour cela, de former l'équation du cylindre, ayant pour directrice la courbe D et ayant ses génératrices parallèles à la droite (3).

I. — EXEMPLES DE FORMATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

384. **Objet du paragraphe.** — Nous avons vu que, étant donnée une famille de courbes planes dont l'équation dépend d'une *constante* arbitraire, l'ordonnée d'un point d'une de ces courbes, considérée comme fonction de l'abscisse, vérifie une équation différentielle du premier ordre (n° 331). Nous allons montrer, par des exemples, que, étant donnée une famille de surfaces dont l'équation dépend d'une *fonction* arbitraire, le z d'un point d'une de ces surfaces, considéré comme fonction des deux autres coordonnées, x et y, vérifie une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous allons traiter successivement, à ce point de vue, les surfaces cylindriques, les surfaces coniques, les surfaces de révolution.

385. Équation aux dérivées partielles des surfaces cylindriques. — On sait qu'un cylindre est engendré par une droite G, parallèle à une direction fixe OG′, s'appuyant sur une directrice donnée D (*fig.* 201). Soient

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

ou

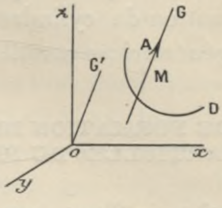
$$(\mathrm{G}') \qquad \left\{ \begin{aligned} az - cx &= 0, \\ bz - cy &= 0, \end{aligned} \right.$$

les équations de la droite OG′ à laquelle les génératrices restent parallèles. Les équations d'une génératrice sont de la forme

$$(\mathrm{G}) \qquad \left\{ \begin{aligned} az - cx &= C_1, \\ bz - cy &= C_2, \end{aligned} \right.$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires. En faisant varier C_1 et C_2 d'une manière quelconque, on arriverait à faire passer la

Fig. 201.



droite G par un point quelconque de l'espace. Mais il faut exprimer que cette droite G s'appuie sur une directrice donnée D : cette condition se traduit analytiquement par une relation entre les deux constantes arbitraires :

$$(4) \qquad F(C_1, C_2) = 0.$$

Pour avoir l'équation du cylindre, il faut chercher le lieu des droites (G) dont les coefficients C_1 et C_2 vérifient la condition (4). L'équation du cylindre s'obtient alors en éliminant C_1 et C_2 entre les équations de la génératrice G et l'équation de condition (4). On obtient ainsi l'équation

$$(5) \qquad F(az - cx,\ bz - cy) = 0,$$

qui est l'*équation générale des cylindres*, dont les génératrices ont la direction donnée. Pour obtenir tous ces cylindres il suffit de faire varier la forme de la fonction F ; on peut donc dire que l'équation générale des cylindres est (5), F étant une *fonction arbitraire*.

Nous allons montrer que toutes ces surfaces cylindriques satisfont à une même équation aux dérivées partielles, indépendante de la fonction F. On sait que, si une surface a pour équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

les dérivées partielles p et q de z par rapport à x et y sont données par les deux relations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

obtenues en dérivant successivement par rapport à x et y, et regardant z comme fonction de x et y. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$az - cx = u, \qquad bz - cy = v,$$

l'équation des cylindres devient

$$F(u, v) = 0$$

La fonction $F(u, v)$, dépendant de x, y, z par l'intermédiaire de u et v, a pour dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -c\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -c\frac{\partial F}{\partial v},$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}.$$

Les valeurs de p et q sont donc données par

$$-c\frac{\partial F}{\partial u} + p\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0,$$
$$-c\frac{\partial F}{\partial v} + q\left(a\frac{\partial F}{\partial u} + b\frac{\partial F}{\partial v}\right) = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$,

$$(ap - c)\frac{\partial F}{\partial u} + bp\frac{\partial F}{\partial v} = 0,$$

$$aq\frac{\partial F}{\partial u} + (bq - c)\frac{\partial F}{\partial v} = 0.$$

Entre ces deux dernières équations, on peut éliminer le rapport de $\frac{\partial F}{\partial u}$ à $\frac{\partial F}{\partial v}$, et l'on obtient la relation

$$(ap - c)(bq - c) - abpq = 0$$

ou

$$ap + bq = c. \tag{6}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des cylindres.

Interprétation géométrique. — Cette équation exprime une propriété du plan tangent qui est évidente géométriquement. Elle exprime que le plan tangent en un point M de la surface (*fig.* 201), contient la génératrice MG, passant par ce point, ou encore, ce qui revient au même, que la normale en M à la surface est perpendiculaire à la génératrice MG du point M : en effet, les cosinus directeurs de la normale étant proportionnels à p, q, -1 et ceux de la génératrice à a, b, c, la condition de perpendicularité de ces deux directions donne l'équation

$$ap + bq = c.$$

386. Équation aux dérivées partielles des surfaces coniques. — Une surface conique, ayant son sommet à l'origine, est engendrée par une droite mobile G, passant par O (*fig.* 202) : les équations de cette génératrice sont de la forme

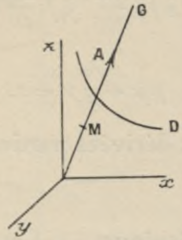
$$\frac{z}{x} = C_1, \qquad \frac{z}{y} = C_2, \tag{G}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires. Pour engendrer un cône, il faut assujettir cette génératrice G à s'appuyer sur une directrice D, ce qui s'exprime analytiquement par une équation de condition entre C_1 et C_2

$$F(C_1, C_2) = 0. \tag{7}$$

Pour obtenir l'équation du cône, il suffit d'éliminer C_1 et C_2 entre les équations (G) de la génératrice et l'équation de condi-

Fig. 202.



tion (7). On a ainsi, pour l'équation générale des cônes de sommet O,

$$F\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right) = 0,$$

F désignant une *fonction arbitraire*. Posons

$$u = \frac{z}{x}, \qquad v = \frac{z}{y};$$

la fonction $F\left(\frac{z}{x}, \frac{z}{y}\right)$ prend la forme $F(u, v)$, et ses dérivées partielles, par rapport à x et y, sont données par les formules

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial u}\frac{z}{x^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial v}\frac{z}{y^2},$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{1}{x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{y}.$$

Les équations $\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, qui donnent p et q, deviennent donc

$$-\frac{\partial F}{\partial u}\frac{z}{x^2} + p\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{1}{x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{y}\right) = 0,$$
$$-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{z}{y^2} + q\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{1}{x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{1}{y}\right) = 0;$$

ou, en ordonnant,

$$\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial u}\left(p - \frac{z}{x}\right) + \frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial v}p = 0,$$
$$\frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial u}q + \frac{1}{y}\frac{\partial F}{\partial v}\left(q - \frac{z}{y}\right) = 0.$$

Entre ces deux équations, éliminons le rapport de $\frac{\partial F}{\partial u}$ à $\frac{\partial F}{\partial v}$, nous avons

$$\left(p-\frac{z}{x}\right)\left(q-\frac{z}{y}\right)-pq=0$$

ou

$$px+qy=z. \tag{8}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces coniques ayant leur sommet en O.

Interprétation géométrique. — Cette équation exprime que le plan tangent, en M, à la surface, contient la génératrice G passant par ce point, ou encore, ce qui revient au même, que la normale en M à la surface est perpendiculaire à la génératrice OMG du point M. En effet, les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à p, q, -1; ceux de la génératrice OMG à x, y, z; la condition de perpendicularité

$$px+qy-z=0$$

donne l'équation (8).

387. **Équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution.** — Une surface de révolution autour de Oz est engendrée par un cercle G (*fig.* 203), dont le centre est sur l'axe et le plan perpendiculaire à l'axe; cette courbe génératrice a pour équations

$$z=C_1, \qquad x^2+y^2=C_2, \tag{G}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires. Pour que le cercle engendre une surface, il faut l'assujettir à s'appuyer sur une courbe directrice donnée D. Analytiquement, ce fait s'exprime par une relation

$$F(C_1, C_2)=0.$$

On obtient alors l'équation générale des surfaces de révolution, en éliminant C_1 et C_2 entre cette équation de condition et les équations (G) de la génératrice. On obtient ainsi

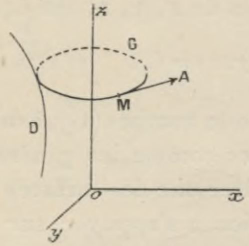
$$F(z, x^2+y^2)=0,$$

où F est une fonction arbitraire.

Si l'on pose $x^2+y^2=u$, on voit que $F(z, u)$ dépend de x et y par l'intermédiaire de u et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x\frac{\partial F}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=2y\frac{\partial F}{\partial u}.$$

Fig. 203.



Les dérivées partielles p et q sont donc données par les relations

$$2x\frac{\partial F}{\partial u}+p\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$
$$2y\frac{\partial F}{\partial u}+q\frac{\partial F}{\partial z}=0,$$

d'où, en éliminant le rapport de $\frac{\partial F}{\partial z}$ à $\frac{\partial F}{\partial u}$,

(9) $$py-qx=0.$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces de révolution autour de Oz.

Interprétation géométrique. — Cette équation exprime que le plan tangent, en M, à la surface contient la tangente MA à la courbe génératrice passant par ce point, ce qui est évident géométriquement ou, ce qui revient au même, que la normale en M à la surface est normale au cercle générateur MG passant par ce point. En effet, la tangente au cercle G

$$z=C_1, \qquad x^2+y^2=C_2,$$

en un point $M(x, y, z)$, a pour paramètres directeurs dx, dy, dz des quantités vérifiant les deux équations

$$dz=0, \qquad \frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x}.$$

En écrivant que cette tangente est perpendiculaire à la normale de coefficients directeurs p, q, -1, on a la condition

$$py - qx = 0.$$

388. **Généralisation des résultats précédents.** — Soient u et v deux fonctions données de x, y, z ; les équations

$$(G) \qquad u(x, y, z) = C_1, \qquad v(x, y, z) = C_2$$

définissent une famille de courbes (G), à deux paramètres C_1 et C_2. Regardons ces courbes comme les génératrices d'une famille de surfaces. Pour engendrer une des surfaces de cette famille, il faut assujettir la génératrice à s'appuyer sur une courbe directrice donnée D.

Cette condition géométrique se traduit analytiquement par une relation de condition

$$(10) \qquad F(C_1, C_2) = 0,$$

entre les arbitraires C_1 et C_2. L'équation de la surface engendrée par les courbes (G), sous la condition (10), est alors

$$(11) \qquad F(u, v) = 0,$$

où F est une fonction arbitraire, qu'on peut faire varier à volonté en modifiant la directrice D.

On peut alors former une équation aux dérivées partielles indépendante de la forme de F. En effet, on a ici

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z},$$

car F dépend de x, y, z, par l'intermédiaire de u et v. Les équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

sont donc, en ordonnant par rapport à $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$,

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0;$$

d'où, en éliminant $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial u}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+q\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial v}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+q\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0,$$

$$p\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{12}$$

Telle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces considérées. Cette équation est linéaire en p et q.

Interprétation géométrique. — On vérifiera que cette équation exprime qu'en chaque point M d'une des surfaces considérées, le plan tangent contient la tangente MA à celle des génératrices (G) qui passe par ce point, ou encore que la normale en M à la surface est normale à la courbe génératrice passant par M : propriété évidente géométriquement, car le plan tangent, en M, contient les tangentes à toutes les courbes, passant par M et situées sur la surface.

On retrouvera tout ce qui a été dit en particulier pour les cylindres, cônes, surfaces de révolution, en particularisant les fonctions u et v :

(Cylindres)	$u = az - cx,$	$v = bz - cy;$
(Cônes)	$u = \frac{z}{x},$	$v = \frac{z}{y};$
(Surfaces de révolution)	$u = x^2 + y^2,$	$v = z.$

En prenant

$$u = \frac{y}{x}, \qquad v = z,$$

on aurait des conoïdes ayant pour arête Oz et pour plan directeur xOy.

II. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE, LINÉAIRES EN p ET q.

389. **Forme d'équation; interprétation géométrique.** — Une équation linéaire en p et q est de la forme

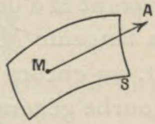
$$p\,f(x,y,z)+q\,\varphi(x,y,z)=\psi(x,y,z). \tag{1}$$

où z est une fonction de x et y, p et q désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$; les coefficients $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ et $\psi(x,y,z)$ sont des fonctions données de x, y, z.

Nous nous proposons d'intégrer cette équation, c'est-à-dire de trouver toutes les surfaces vérifiant cette condition (1).

Pour cela, nous commencerons par interpréter géométriquement la relation donnée (1). Soit M un point quelconque de l'espace ayant pour coordonnées x, y, z; faisons correspondre à ce point

Fig. 204.



(*fig.* 204) un vecteur MA, ayant pour origine le point M et pour *projections* sur les trois axes

$$\text{(MA)}\qquad X=f(x,y,z),\qquad Y=\varphi(x,y,z),\qquad Z=\psi(x,y,z).$$

De cette façon, on fait correspondre à chaque point M de l'espace un segment MA appliqué à ce point.

Soit S *une surface : pour qu'elle vérifie l'équation aux dérivées partielles donnée, il faut et il suffit qu'en chacun de ses points* M *le vecteur correspondant* MA *soit tangent à la surface.*

En effet, pour exprimer cette propriété, il suffit d'écrire que la normale en M à la surface (coefficients directeurs p, q, -1) est perpendiculaire au vecteur MA (coefficients directeurs X, Y, Z), ce qui donne la condition

$$pX + qY - Z = 0$$

ou encore

$$pf(x, y, z) + q\,\varphi(x, y, z) = \psi(x, y, z),$$

ce qui est précisément l'équation à intégrer.

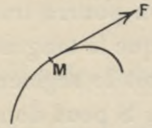
Les surfaces cherchées sont donc ce qu'on peut appeler les *surfaces de forces* du champ de forces (X, Y, Z), par analogie avec les lignes de forces *qui sont des lignes telles que le vecteur* MA *correspondant à chacun de leurs points leur soit tangent.*

390. **Intégration.** — D'après ce qui précède, intégrer l'équation (1), c'est trouver les surfaces de forces S du champ X, Y, Z.

Pour cela, nous commencerons par chercher les lignes de forces G du champ qui seront les *courbes génératrices* des surfaces S (*fig.* 205).

Soient dx, dy, dz les projections d'un déplacement infiniment

Fig. 205.



petit effectué sur une ligne de forces G, à partir d'un point $M(x, y, z)$; la tangente, en ce point, devant coïncider avec le segment de projections $f(x, y, z)$, $\varphi(x, y, z)$ et $\psi(x, y, z)$, il faut et il suffit qu'on ait, tout le long de la courbe,

$$\text{(G)} \qquad \frac{dx}{f(x, y, z)} = \frac{dy}{\varphi(x, y, z)} = \frac{dz}{\psi(x, y, z)}.$$

Telles sont les équations différentielles des courbes cherchées.

L'intégration de ces équations (G) conduit, comme nous l'avons vu (nos 374 et 376), aux équations des lignes de forces G sous la forme

$$(2) \qquad y = \varphi_1(x, C_1, C_2), \qquad z = \varphi_2(x, C_1, C_2),$$

avec deux constantes arbitraires. Résolvant ces équations par rapport aux deux constantes, on mettra les équations des courbes génératrices G sous la forme

$$(3) \qquad u(x, y, z) = C_1, \qquad v(x, y, z) = C_2.$$

Ces équations définissent une famille de courbes à deux paramètres C_1 et C_2, telle que, par chaque point de l'espace, il passe une de ces courbes.

Les lignes de forces ou courbes génératrices étant trouvées, pour engendrer une surface S répondant à la question, c'est-à-dire une surface intégrale, il suffit d'assujettir les lignes de forces (3) à se déplacer en s'appuyant sur une directrice donnée D. Elles engendrent alors une surface intégrale S : en effet, soit M un point quelconque de la surface S ainsi engendrée, MG la courbe génératrice passant par M, le segment MA correspondant au point M est tangent en M à la surface S, car il est tangent à la courbe MG située sur la surface.

En outre, en faisant varier la forme et la position de la directrice D, on obtient ainsi toutes les surfaces intégrales S : en effet, étant donnée une surface intégrale S, c'est-à-dire une surface telle que le segment MA correspondant à chacun de ses points lui soit tangent, il est évident qu'on pourra tracer sur cette surface une famille de courbes G telles que la tangente, en chaque point M de chacune de ces courbes, soit le segment correspondant MA. La surface intégrale considérée S peut donc être considérée comme engendrée par une suite de lignes de forces G.

Analytiquement, si l'on assujettit la ligne de forces

$$(4) \qquad u(x, y, z) = C_1, \qquad v(x, y, z) = C_2$$

à s'appuyer sur une directrice donnée D, cette condition s'exprime par une relation

$$(5) \qquad F(C_1, C_2) = 0$$

entre les deux constantes. L'équation de la surface intégrale ainsi engendrée s'obtient en éliminant C_1 et C_2 entre les équations de la génératrice (4) et l'équation de condition (5). On obtient ainsi l'équation générale des surfaces intégrales sous la forme

$$(\mathrm{S}) \qquad F(u, v) = 0,$$

où F désigne une fonction arbitraire.

Remarque. — On voit que la surface intégrale S est déterminée quand on l'assujettit à passer par une courbe donnée D : elle est, en effet, engendrée par les génératrices (4) s'appuyant sur D.

Il y a exception quand la courbe donnée, par laquelle doit passer la surface intégrale, est une ligne de forces G_0. Il existe, en effet, une infinité de surfaces intégrales passant par une courbe génératrice donnée G_0 ; ce sont toutes les surfaces que l'on obtient, en déplaçant la courbe génératrice G d'une manière continue, à partir de la position G_0, ce qui peut être réalisé d'une infinité de manières.

391. **Premier exemple.** — Intégrer l'équation

$$py - qx = 0. \tag{6}$$

Cette équation rentre dans le type général (1), où l'on fait

$$f(x, y, z) = y, \qquad \varphi(x, y, z) = -x, \qquad \psi(x, y, z) = 0.$$

Il faut alors considérer le champ de forces

$$X = y, \qquad Y = -x, \qquad Z = 0.$$

Les équations différentielles des lignes de forces sont

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} = \frac{dz}{0}.$$

Elles s'écrivent

$$x\,dx + y\,dy = 0, \qquad dz = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x^2 + y^2 = C_1, \qquad z = C_2, \tag{7}$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires. Actuellement, les équations des lignes de forces se présentent toutes résolues par rapport aux constantes arbitraires.

Quand C_1 et C_2 varient, on voit que ces courbes sont des cercles dont le plan est perpendiculaire à Oz et le centre sur Oz.

Les surfaces intégrales sont engendrées par ces courbes, s'appuyant sur une directrice quelconque : ce sont des surfaces de révolution autour de Oz. Leur équation générale est

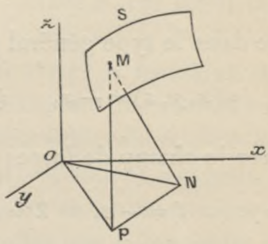
$$F(x^2+y^2, z) = 0,$$

F désignant une fonction arbitraire.

Une de ces surfaces intégrales est déterminée quand on donne une courbe D, par laquelle elle doit passer, excepté dans le cas où cette courbe D serait une ligne de forces, c'est-à-dire un cercle dont le plan est perpendiculaire à Oz et le centre sur Oz.

392. **Deuxième exemple.** — Soit S une surface : prenons un point M de la surface, menons la perpendiculaire MP au plan des xy (*fig.* 206) et la normale MN à la surface jusqu'au point N

Fig. 206.



où elle rencontre le plan xOy : on demande de *déterminer la surface de telle façon que l'aire du triangle* OPN *soit proportionnelle à l'abscisse du point* M.

Soient x, y, z les coordonnées du point M. Le point P, dans le plan xOy, a pour coordonnées x et y. D'autre part, la normale en M a pour équations, en appelant X, Y, Z les coordonnées courantes

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1},$$

et le point N où elle perce le plan xOy, $Z=0$, a pour coordonnées

$$X = x + pz, \qquad Y = y + qz.$$

La surface du triangle OPN dont les sommets ont pour coordonnées (x, y) et (X, Y) est donc (n° 46)

$$\frac{1}{2}(xY - yX)$$

ou

$$\frac{1}{2}(qzx - pzy).$$

La condition

$$\text{aire OPN} = kx$$

(k constante) conduit donc à l'équation différentielle

$$(8) \qquad qzx - pzy = 2kx,$$

équation du type (1) où

$$f(x, y, z) = -zy, \qquad \varphi(x, y, z) = zx, \qquad \psi(x, y, z) = 2kx.$$

Il faudra donc considérer ici le champ de forces

$$X = -zy, \qquad Y = zx, \qquad Z = 2kx.$$

Intégrons cette équation. Les équations différentielles des lignes de forces G sont

$$\frac{dx}{-zy} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{2kx}.$$

Égalant les rapports extrêmes au deuxième, on a les deux équations

$$x\,dx + y\,dy = 0, \qquad z\,dz - 2k\,dy = 0$$

ou, en intégrant,

$$(9) \qquad x^2 + y^2 = C_1, \qquad z^2 - 4ky = C_2.$$

Telles sont les équations des lignes de forces, avec deux constantes arbitraires C_1 et C_2 : ces équations se présentent toutes résolues par rapport à C_1 et C_2.

Les surfaces intégrales sont engendrées par les courbes (9) assujetties à la condition de s'appuyer sur une directrice donnée D. Leur équation générale est donc

$$F(x^2 + y^2, z^2 - 4ky) = 0,$$

F désignant une fonction arbitraire.

Par exemple, on aura des surfaces intégrales en prenant

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4ky = a^2,$$
$$x^2 + y^2 - (z^2 - 4ky) = b^2,$$
$$(x^2 + y^2)(z^2 - 4ky) = c^4,$$

a, b, c désignant des constantes, et, d'une manière générale, en établissant une relation quelconque, à coefficients constants, entre x^2+y^2 et z^2-4ky.

Une surface intégrale est déterminée, quand on l'assujettit à passer par une courbe donnée D. Cherchons, par exemple, celle qui passe par l'axe Oy. Elle est engendrée par les courbes (9) assujetties à s'appuyer sur l'axe Oy, ayant pour équations

$$x = 0, \qquad z = 0. \tag{10}$$

Pour exprimer que la courbe (9) rencontre la courbe (10), il faut éliminer x, y, z entre les quatre équations (9) et (10). Ce qui donne immédiatement

$$16k^2C_1 - C_2^2 = 0. \tag{11}$$

Il reste alors à chercher la surface engendrée par les courbes (9), quand C_1 et C_2 sont assujettis à cette condition (11). L'équation de cette surface s'obtient en éliminant C_1 et C_2 entre les équations (9) et (11), elle est

$$16k^2(x^2+y^2) - (z^2-4ky)^2 = 0.$$

393. **Troisième exemple.** — Soit $g(x, y)$ une fonction donnée de x et y; proposons-nous d'intégrer l'équation

$$p\frac{\partial g}{\partial y} - q\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

ou

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = 0. \tag{13}$$

Le champ de forces est ici

$$X = \frac{\partial g}{\partial y}, \qquad Y = -\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad Z = 0.$$

D'après la méthode générale, les équations des lignes de forces sont

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial g}{\partial y}} = -\frac{dy}{\dfrac{\partial g}{\partial x}} = \frac{dz}{0};$$

ou

$$dz = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy = 0.$$

Ces équations s'intègrent immédiatement et donnent

$$z = C_1, \qquad g(x, y) = C_2.$$

L'équation donnant l'intégrale générale demandée est donc

$$F[z, g(x, y)] = 0$$

ou, en résolvant par rapport à z,

$$z = \Phi(g).$$

Ainsi, toutes les fois que deux fonctions de x et y vérifient identiquement la relation (13), l'une d'elles est une *fonction* de l'autre

$$z = \Phi(g).$$

Remarque. — Le premier membre de l'équation (13) s'appelle *le déterminant fonctionnel* ou *le jacobien* des deux fonctions z et g.

III. — ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU DEUXIÈME ORDRE.

394. **Forme générale.** — Une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, à deux variables indépendantes x et y, est de la forme

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \tag{1}$$

où p, q, r, s, t sont les dérivées partielles premières et deuxièmes de z par rapport à x et y.

Intégrer cette équation, c'est trouver les fonctions z de x et y vérifiant cette équation. La fonction z, la plus générale, satisfaisant à l'équation dépend de *deux fonctions arbitraires*, de telle façon qu'une surface S, vérifiant l'équation, est déterminée, quand on se donne une courbe par laquelle elle doit passer et la loi des plans tangents à S le long de cette courbe.

Nous traiterons un seul exemple, en cherchant les surfaces pour lesquelles la courbure totale est nulle en chaque point. Pour ces surfaces, le z d'un point, considéré comme fonction de x et y, vérifie l'équation

$$rt - s^2 = 0. \tag{2}$$

C'est cette équation que nous allons intégrer : nous allons montrer que les surfaces intégrales sont les surfaces développables. En effet, en introduisant les dérivées premières

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

on peut écrire l'équation (2)

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Or, nous avons vu (n° 393) que, quand deux fonctions z et g vérifient la relation

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} = 0,$$

l'une est une fonction de l'autre. Donc, actuellement, p est une fonction de q

$$p = \varphi(q).$$

Cela posé, l'équation du plan tangent en un point de la surface est

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

ou

$$pX + qY - Z + z - px - qy = 0.$$

Dans cette équation, on a

$$p = \varphi(q);$$

en outre, le terme

$$u = z - px - qy$$

est aussi une fonction de q. En effet, prenons la différentielle totale de u correspondant à un déplacement quelconque dx, dy effectué sur la surface,

$$du = dz - p\,dx - q\,dy - x\,dp - y\,dq.$$

Comme

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$p = \varphi(q), \qquad dp = \varphi'(q)\,dq,$$

on a

$$du = -[x\varphi'(q) + y]\,dq.$$

Cette relation montre que u est fonction de q seul, car quand

q ne varie pas $dq = 0$, $du = 0$ et u reste constant; et si q varie, u varie. Donc

$$u = \psi(q).$$

L'équation du plan tangent à la surface cherchée est donc

$$X\varphi(q) + Yq - Z + \psi(q) = 0.$$

La surface est alors l'enveloppe de ce plan, dont l'équation ne dépend que d'un paramètre q : c'est une surface développable (n° 236).

CHAPITRE XXII.

VALEUR NUMÉRIQUE D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE. MÉTHODES D'APPROXIMATION. INTÉGRATEURS ET INTÉGRAPHES.

I. — MÉTHODES D'APPROXIMATION.

395. **Méthode générale.** — Une intégrale définie

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

représente l'aire comprise entre l'axe des x, la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est

$$y = f(x)$$

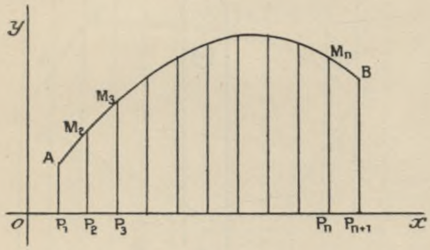
et les deux ordonnées qui correspondent aux abscisses a et b. Lorsqu'on ne sait pas calculer exactement cette aire, on en obtient une valeur approchée en remplaçant la courbe $y = f(x)$ par une autre courbe qui s'en écarte très peu et dont on sait calculer l'aire.

396. **Méthode des trapèzes.** — Une première méthode consiste à substituer à la courbe AB (*fig.* 207) un polygone inscrit $AM_2M_3\ldots M_nB$ et à remplacer la surface cherchée par une somme de trapèzes limités par les ordonnées AP_1, M_2P_2, M_3P_3, ..., BP_{n+1}. Pour obtenir une formule simple, on suppose ces ordonnées équidistantes : la distance ε de deux ordonnées consécutives est alors la $n^{\text{ième}}$ partie de P_1P_{n+1} et, en appelant y_1, y_2, ..., y_{n+1} les ordonnées AP_1, M_2P_2, ..., BP_{n+1}, on a, pour la surface, l'expres-

sion approchée

$$\varepsilon\left(\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_2+y_3}{2}+\ldots+\frac{y_n+y_{n+1}}{2}\right)$$

Fig. 207.



ou

$$\frac{\varepsilon}{2}(y_1+2y_2+2y_3+\ldots+2y_n+y_{n+1}).$$

Cette formule donnera, pour l'aire, une valeur d'autant plus approchée que n sera plus grand.

397. **Emploi de la roulette Dupuit** ([1]). — Cet appareil est formé de deux roues graduées R et R′ (*fig.* 208), réunies à un manche M. La première a 100^{mm} de circonférence et son axe porte un pignon engrenant avec la seconde qui a dix fois plus de dents que le pignon. La circonférence de R est divisée en 100 divisions, chacune de 1^{mm}, celle de R′, en 10 divisions, dont chacune correspond à un tour complet de R. Un index I, fixé au manche, est placé en regard de R, un index analogue en regard de R′.

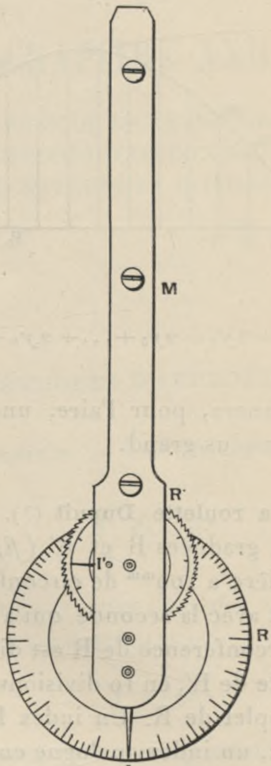
Pour mesurer la longueur d'une droite, on ramène d'abord chaque index sur le zéro de la graduation correspondante : on place ensuite l'appareil verticalement, de façon que le zéro de R coïncide avec l'une des extrémités de la droite et l'on pousse l'appareil de façon que la roulette roule sur la droite jusqu'à l'autre extrémité. Si, à la fin, l'index I′ est entre 3 et 4 et si I indique 25 divisions, la longueur mesurée est 325^{mm}.

Cela posé, pour mesurer avec cet appareil l'aire d'un contour

([1]) *Voyez* Dariès, *Cubature des terrasses et mouvement des terres*, p. 71. Gauthier-Villars.

fermé quelconque, par exemple, l'aire du segment P_1ABP_{n+1} considéré dans le numéro précédent, on prend un papier transparent, sur lequel on a tracé un réseau de parallèles équidistantes dont la distance commune est une quantité connue ε (*fig.* 209).

Fig. 208.



On dispose ce papier sur le contour dont on cherche l'aire, de façon que deux des droites parallèles viennent se placer tangentiellement au contour en a et l : si bc, de, ..., hk sont les points où les parallèles intermédiaires coupent le contour, on substitue à ce contour le polygone inscrit abd, ..., hlk, ..., eca dont l'aire est évidemment

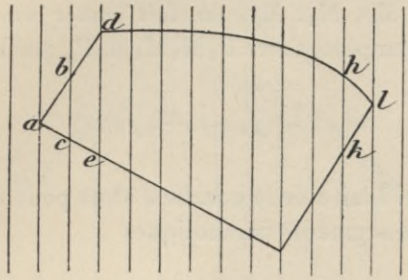
$$\varepsilon\left(\frac{bc}{2}+\frac{bc+de}{2}+\ldots+\frac{hk}{2}\right)$$

ou

$$\varepsilon(bc + de + \ldots + hk).$$

En promenant la roulette successivement le long des droites bc, de, ..., hk, on lit sur l'appareil la somme de ces droites, et,

Fig. 209.



en multipliant par la quantité connue ε, on a une valeur approchée de l'aire.

Si le contour présente des points anguleux, comme dans la figure, il faut autant que possible placer le papier transparent de façon que chacun de ces points se trouve sur une des parallèles.

398. **Méthode de Simpson.** — La méthode de Simpson repose sur ce fait qu'on peut faire passer une parabole dont l'axe est parallèle à Oy par trois points donnés. En effet, l'équation d'une telle parabole étant

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

on peut disposer des coefficients α, β, γ, de façon que la parabole passe par trois points.

Ceci posé, pour évaluer l'aire d'un segment P_1ABP_{n+1} (*fig.* 207), on divise la base P_1P_{n+1} en un nombre *pair* ($n = 2p$) de parties égales et l'on mène les ordonnées correspondant aux points de division P_1, P_2, ..., P_{n+1} : soient, comme précédemment, y_1, y_2, y_3, ..., y_{n+1}, ces ordonnées, ε la distance de deux ordonnées consécutives.

Dans la méthode de Simpson, on substitue à l'arc de courbe AM_2M_3 un arc de parabole d'axe vertical, passant par les trois mêmes points. L'aire du segment parabolique $P_1AM_2M_3P_3$ ainsi défini est (nº 33)

$$\frac{2\varepsilon}{6}(y_1+y_3+4y_2),$$

car la distance h des ordonnées extrêmes est ici 2ε. De même, par les trois points M_3, M_4, M_5, on fait passer une parabole d'axe vertical et l'on remplace l'aire $P_3M_3M_4M_5P_5$ par l'aire du segment parabolique

$$\frac{2\varepsilon}{6}(y_3+y_5+4y_4),$$

et ainsi de suite. L'aire de la courbe a alors pour valeur approchée la somme de ces segments paraboliques

$$\frac{\varepsilon}{3}[y_1+y_{n+1}+2(y_3+y_5+\ldots+y_{n-1})+4(y_2+y_4+\ldots+y_n)].$$

Si la courbe et les ordonnées sont tracées avec soin, on peut évaluer la somme entre parenthèses à l'aide de la roulette de Dupuit.

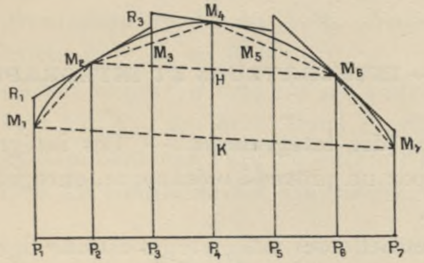
399. **Formule de Poncelet.** — Les formules précédentes ont le désavantage de ne pas donner de limite pour l'erreur commise : cet inconvénient disparaît avec la méthode de Poncelet. Dans cette méthode, on commence par diviser l'arc de courbe considéré en arcs tels que, le long de chacun d'eux, la concavité soit dirigée dans le même sens : on évalue ensuite séparément l'aire de chacun des segments limités par ces arcs.

Soit alors M_1M_7 un de ces arcs : admettons qu'il tourne sa concavité vers l'axe Ox. Divisons la base P_1P_7 du segment en un nombre pair de parties égales à ε, en six parties, pour fixer les idées (*fig.* 210). Soient M_2P_2, M_3P_3, ..., M_6P_6 les ordonnées intermédiaires. Menons par les points M, d'indices pairs, des tangentes à la courbe, en limitant ces tangentes aux points où elles rencontrent les prolongements des ordonnées voisines, d'indices impairs : ainsi la tangente, en M_2, est limitée aux points R_1 et R_3, où elle rencontre les ordonnées P_1M_1 et P_3M_3. D'autre part, menons les cordes M_1M_2, M_2M_4, M_4M_6, M_6M_7. L'aire cherchée S est comprise entre l'aire circonscrite C, formée par les trapèzes tels que $P_1R_1R_3P_3$, et l'aire inscrite I limitée aux cordes : ces aires sont des sommes de trapèzes

$$C = 2\varepsilon(y_2 + y_4 + y_6),$$

$$I = \varepsilon\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + y_2 + 2y_4 + y_6 + \frac{y_6 + y_7}{2}\right).$$

Fig. 210.



Nous aurons une valeur approchée de l'aire cherchée S, en prenant la demi-somme de ces deux grandeurs

$$\frac{C + I}{2} = \varepsilon\left[\frac{y_1 + y_7}{4} - \frac{y_2 + y_6}{4} + 2(y_2 + y_4 + y_6)\right].$$

L'erreur commise sera inférieure à la demi-différence $\frac{C - I}{2}$: en effet, supposons par exemple $S > \frac{C + I}{2}$; l'erreur commise est

$$S \quad \frac{C + I}{2}$$

et, comme $S < C$, elle est inférieure à $C - \frac{C + I}{2}$ ou à $\frac{C - I}{2}$. On a donc

$$\textit{erreur} < \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{y_2 + y_6}{2} - \frac{y_1 + y_7}{2}\right).$$

On peut interpréter géométriquement cette valeur : soient H et K (*fig.* 210) les points de rencontre de l'ordonnée du milieu M_4P_4 avec les droites M_2M_6 et M_1M_7, on a

$$HP_4 = \frac{y_2 + y_6}{2}, \qquad KP_4 = \frac{y_1 + y_7}{2},$$

$$\textit{erreur} < \frac{\varepsilon}{2}\overline{HK}.$$

En général, si, au lieu de 7 ordonnées, on en mène un nombre impair $2n+1$, la valeur approchée de l'aire est

$$\varepsilon\left[\frac{y_1+y_{2n+1}}{4}-\frac{y_2+y_{2n}}{4}+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2n})\right]$$

et l'erreur commise est moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{y_2+y_{2n}}{2}-\frac{y_1+y_{2n+1}}{2}\right).$$

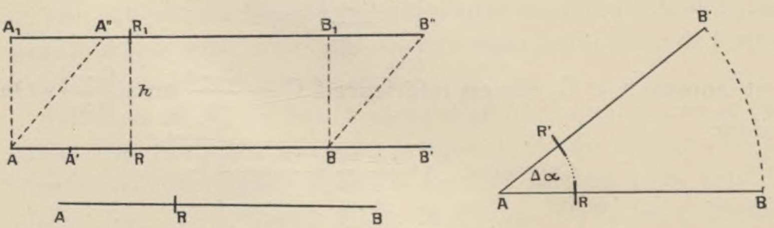
II. — INTÉGRATEURS ET INTÉGRAPHES.

400. **Principe des intégrateurs.** — Les intégrateurs sont des appareils qui, par un procédé mécanique, enregistrent l'aire d'un contour fermé.

La pièce essentielle des intégrateurs est une tige rectiligne AB, qui se déplace parallèlement au papier portant l'aire à évaluer et sur laquelle est fixée une roulette circulaire R, mobile autour de l'axe de la tige. Quand on déplace la tige d'une manière continue en appuyant la roulette sur le papier, celle-ci roule suivant une certaine loi, et un compteur enregistre le nombre de tours et de fractions de tour qu'elle accomplit.

Examinons d'abord quelques déplacements élémentaires de la tige AB (*fig.* 211).

Fig. 211.



1° *La tige glisse sur elle-même,* de AB à A'B' par exemple; il est évident que la roulette ne tourne pas.

2° *La tige se déplace parallèlement à elle-même,* de façon à balayer l'aire d'un rectangle AA_1B_1B : la roulette roule constamment de R en R_1 ; si l'on appelle s l'arc de la circonférence de la roulette, compté, à partir d'une origine fixe, sur la roulette jusqu'au point de contact avec le papier, l'accroissement Δs de cet arc est égal à RR_1, c'est-à-dire à la *hauteur* h du rectangle.

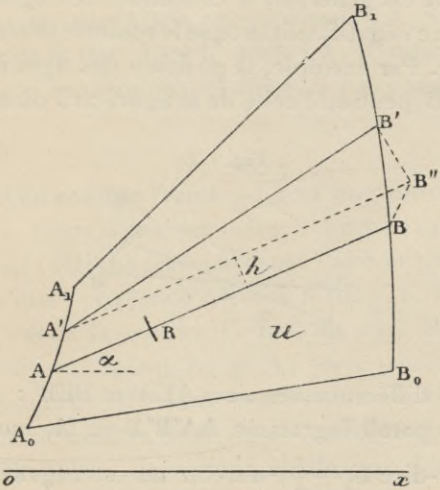
3° *La tige se déplace parallèlement à elle-même*, de façon à balayer l'aire $AA''BB''$ d'un parallélogramme (*fig.* 211) : l'expérience montre que la roulette enregistre seulement le déplacement normal à son axe, c'est-à-dire que l'arc Δs de circonférence, qui vient en contact avec le papier, est égal à la *hauteur* h du parallélogramme. Cet arc est le même que si l'on amenait la tige de AB à $A''B''$, par une translation de AB en A_1B_1 normalement à AB, suivie d'un glissement de A_1B_1 en $A''B''$.

4° *La tige tourne autour d'une de ses extrémités*, A par exemple, d'un angle $\Delta\alpha$ (*fig.* 211 *bis*). Dans ce déplacement, la roulette roule constamment sur l'arc de cercle RR', décrit de A comme centre, avec AR comme rayon. On a donc, en appelant λ la distance AR,

$$\Delta s = \lambda\,\Delta\alpha.$$

401. **Mesure des aires.** — Imprimons maintenant à la tige AB un déplacement continu qui l'amène de A_0B_0 en A_1B_1 en faisant

Fig. 212.



décrire à ses deux extrémités les arcs de courbe A_0AA_1 et B_0BB_1 (*fig.* 212). Appelons l la longueur AB, λ la distance AR et α l'angle que fait la tige dans une position quelconque AB avec une direction fixe Ox. Soit u l'aire A_0B_0BA ; quand la tige subit le déplacement infiniment petit qui l'amène de AB en A'B', l'aire u croît de $du = ABB'A'$. Si, par A', on mène une droite A'B'', égale et parallèle à AB, on peut regarder l'aire infiniment petite du comme égale à la somme du parallélogramme ABB''A' de hauteur h et du secteur B''A'B' dont l'angle est $d\alpha$:

$$du = lh + \frac{1}{2} l^2 \, d\alpha.$$

Calculons l'arc ds de roulette, qui s'est appuyé sur le papier dans le mouvement de AB en A'B' : cet arc est la somme de deux arcs : l'un h, provenant du déplacement de AB en A'B'', et l'autre $\lambda \, d\alpha$, provenant du déplacement de A'B'' en A'B' (déplacements élémentaires 3° et 4°). On a donc

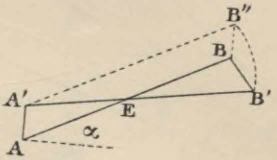
$$ds = h + \lambda \, d\alpha.$$

L'élimination de h entre ces deux relations donne

$$(1) \qquad du = l \, ds + \left(\frac{1}{2} l^2 - l\lambda\right) d\alpha.$$

Cette formule est générale, à condition de regarder h comme positif ou comme négatif, suivant que la roulette tourne dans un sens ou dans l'autre. Par exemple, la position des tiges infiniment voisines AB et A'B' peut être celle de la figure 213 où $d\alpha$ est négatif :

Fig. 213.



du est alors la différence des aires AEA' et BEB' : son expression se compose du parallélogramme AA'B''B ou lh, moins le secteur B''A'B', c'est-à-dire $lh + \frac{1}{2} l^2 \, d\alpha$, car $d\alpha$ est négatif; d'autre part, on a encore $ds = h + \lambda \, d\alpha$; on retrouve donc la formule (1).

Pour avoir l'aire totale $A_0B_0A_1B_1$ (*fig.* 212), balayée par la tige, il faut faire la somme algébrique des éléments du, c'est-à-dire intégrer le deuxième membre de la formule (1), depuis la position A_0B_0 jusqu'à A_1B_1. On a donc, en appelant s l'arc total de la roulette qui s'est appuyé sur le papier, α_1 et α_0 les angles des directions A_0B_0 et A_1B_1 avec Ox :

$$(2)\qquad \text{Aire } A_0B_0B_1A_1 = ls + \left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)(\alpha_1 - \alpha_0).$$

La quantité s se lit sur le compteur qui enregistre le nombre de tours de la roulette : $\alpha_1 - \alpha_0$ est l'angle des deux positions extrêmes de la tige.

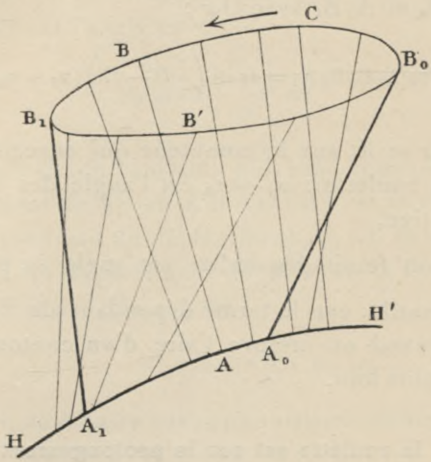
On voit qu'on ferait disparaître cet angle en prenant $\lambda = \frac{l}{2}$, mais cela est inutile, car le terme dépendant de l'angle disparaît de lui-même quand on mesure l'aire d'un contour fermé, ainsi qu'on le verra plus loin.

402. **Cas où la roulette est sur le prolongement de la tige.** — Nous avons supposé, dans ce qui précède, la roulette placée entre A et B. Les formules seraient les mêmes, si la roulette était fixée sur le prolongement de la tige. Si la roulette est sur le prolongement de la tige dans le sens AB, λ est supérieur à l. Si elle est sur le prolongement de la tige dans le sens BA, il suffit de supposer λ négatif. Avec ces conventions, la formule (2) s'applique à tous les cas.

403. **Aire d'un contour fermé.** — Soit une courbe fermée quelconque dont il s'agit d'évaluer l'aire S (*fig.* 214). Traçons une courbe auxiliaire HH' ne traversant pas l'aire et plaçons la tige AB de telle façon que l'extrémité A glisse le long de HH', tandis que l'extrémité B décrit la courbe C dans le sens de la flèche d'un mouvement continu. Soient A_0 et A_1 les positions extrêmes du point A sur la courbe HH' dans ce mouvement, A_0B_0 et A_1B_1 les positions correspondantes de la tige. Quand B va de B_0 à B_1 par l'arc supérieur B_0BB_1, la somme algébrique des aires élémentaires du, balayées par la tige, est $A_0B_0BB_1A_1$; quand le point B revient de B_1 en B_0 par l'arc inférieur $B_1B'B_0$, le point A revient

de A_1 en A_0 et la somme algébrique des aires du balayées par la tige est l'aire $A_1 B_1 B' B_0 A_0$ changée de signe. Donc, quand le tour

Fig. 214.



est complet, la somme algébrique $\int du$ est égale à l'aire S de la courbe C,

$$S = \int du = \int l\, ds + \int \left(\frac{1}{2} l^2 - l\lambda\right) d\alpha.$$

Comme, dans ce mouvement, la tige reprend la même direction qu'au départ après une suite d'oscillations entre deux directions limites, la somme $\int d\alpha$ des variations angulaires est nulle et l'on a

$$S = ls.$$

Soient n le nombre de tours et de fractions de tours effectués par la roulette, r son rayon, on a

$$s = 2\pi r n,$$
$$S = 2\pi r l n.$$

Si l'on construit l'appareil de façon que $2\pi r l = 1$, on a

$$S = n.$$

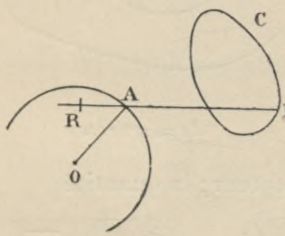
L'aire cherchée se lit donc directement sur le compteur.

Il est essentiel, pour que cette formule soit exacte, que le point A ne fasse qu'aller et venir le long d'un arc de HH′ et que $\int d\alpha$ soit nul.

Théoriquement, cette courbe HH′ est quelconque. Pratiquement, on lui donne la forme soit d'un arc de cercle, soit d'un segment de droite.

404. Planimètre d'Amsler. — Dans cet appareil, la courbe HH′ est un arc de cercle (*fig.* 215). On oblige le point A à décrire un

Fig. 215.



arc de cercle, au moyen d'une bride OA, rattachant l'extrémité A à un point fixe O; le point B décrit la courbe C dont on veut évaluer l'aire. Pour que la formule

$$S = 2\pi r l n$$

s'applique, il faut que, après un tour complet de B sur la courbe, le point A ait décrit deux fois, en sens inverses, le même arc de cercle et que la tige revienne à sa direction première sans avoir fait de tour sur elle-même.

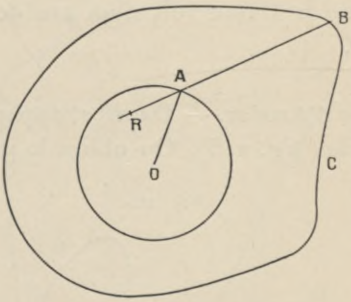
Quand la courbe C est trop grande par rapport aux dimensions de l'appareil, on peut la fractionner. On peut aussi placer le point fixe O dans l'intérieur de C (*fig.* 216), de telle façon que le cercle, lieu du point A, soit dans l'aire cherchée, et faire décrire au point B la courbe C. L'aire balayée par la tige AB est alors l'aire de la couronne comprise entre le cercle et la courbe. On a donc, en appliquant la formule (2) et remarquant que, la direction de la tige faisant un tour complet, la différence $\alpha_1 - \alpha_0 = 2\pi$,

$$couronne = ls + \left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)2\pi.$$

L'aire de C est alors

$$S = ls + \left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)2\pi + \pi\overline{OA}^2.$$

Fig. 216.



La quantité

$$ls = 2\pi rln$$

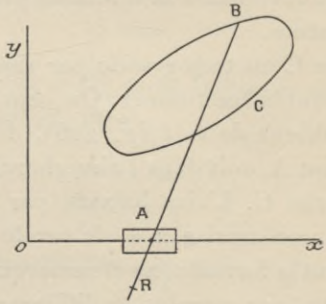
est donnée par le compteur; la quantité

$$\left(\frac{1}{2}l^2 - l\lambda\right)2\pi + \pi\overline{OA}^2$$

est une constante de l'appareil calculée une fois pour toutes. On a donc l'aire immédiatement.

405. Deuxième forme du planimètre. — On a construit également des planimètres ou intégrateurs, dans lesquels la courbe HH'

Fig. 217.



est une droite Ox (*fig.* 217). La tige AB est articulée, par A, à un chariot assujetti à glisser le long d'une rainure rectiligne; le point B parcourt la courbe C, dont on veut déterminer l'aire S. La roulette R enregistre cette aire d'après la formule précédente

$$S = ls = 2\pi r l n.$$

On peut dire que cet appareil donne la valeur de l'intégrale $\int y\,dx$, prise le long de C.

D'autres roulettes fixées sur l'appareil, par l'intermédiaire de multiplicateurs d'angles, donnent en outre les intégrales

$$\int y^2\,dx, \quad \int y^3\,dx$$

qui se présentent dans le calcul des centres de gravité et des moments d'inertie.

406. **Exercice.** — On considère une tige AB qui porte une roulette, comme dans le n° 401, et l'on suppose que ses deux extrémités A et B décrivent des courbes fermées d'aires S et Σ. Démontrer les résultats suivants :

1° Si la tige revient à sa position primitive, sans avoir fait un tour sur elle-même, on a

$$\Sigma - S = ls;$$

2° Si elle revient à sa position primitive après avoir fait un tour, on a

$$\Sigma - S = ls + 2\pi\left(\frac{l^2}{2} - l\lambda\right);$$

3° Si elle fait k tours,

$$\Sigma - S = ls + 2k\pi\left(\frac{l^2}{2} - l\lambda\right).$$

Lorsque l'extrémité A ne fait qu'aller et venir sur un arc HH' (n° 403), l'aire S décrite par A est nulle; les formules donnent alors l'aire Σ décrite par B.

407. **Intégraphes.** — Les appareils que nous venons de décrire donnent la valeur numérique d'une aire. Il existe d'autres appareils appelés *intégraphes* représentant graphiquement la variation de l'aire d'un segment de courbe donnée.

Soit (*fig.* 218) une courbe

$$y = f(x), \tag{3}$$

coupant Oy en a. Cherchons une autre courbe dont l'ordonnée Y vérifie l'équation

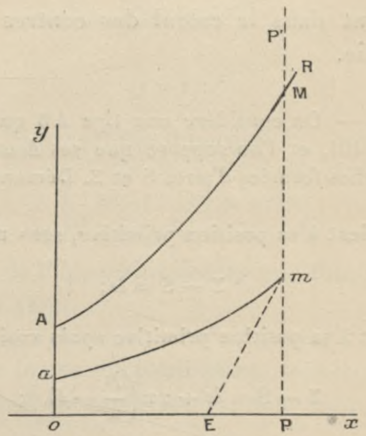
$$(4) \qquad \frac{dY}{dx} = f(x).$$

L'ordonnée Y de cette nouvelle courbe est donnée par la formule

$$(5) \qquad Y = C + \int_0^x f(x)\,dx,$$

où C est une constante arbitraire.

Fig. 218.



Soient $x = OP$ une valeur attribuée à x, m le point correspondant de la courbe (3), M le point correspondant de (5),

$$y = mP, \qquad Y = MP.$$

On a

$$Y = C + \text{aire } OamP.$$

Pour $x = 0$, $Y = C$; on a ainsi le point A, d'ordonnée arbitraire C; x croissant, le point M décrit une courbe AM, appelée *courbe intégrale*. Les intégraphes tracent mécaniquement cette courbe intégrale, quand un traceur parcourt la courbe donnée (3).

Le principe de ces appareils est le suivant : prenons $PE = 1$, le coefficient angulaire de la droite Em est $\frac{mP}{PE}$, c'est-à-dire y ou

$f(x)$. Dans l'appareil, une tige rigide PP′ est assujettie à se déplacer perpendiculairement à Ox : le long de cette tige, glissent librement : 1° un traceur m, qui décrit la courbe donnée; 2° une roulette M, qui ne peut que rouler et non glisser sur le papier, et dont le plan perpendiculaire au papier peut prendre toutes les orientations possibles.

Le traceur m et la roulette sont reliés par un mécanisme tel que, dans chaque position du traceur, le plan de la roulette a pour trace sur le papier une parallèle R à Em. Dans ces conditions, quand le point m décrit la courbe

$$y=f(x),$$

la roulette roule sur le papier, en suivant une courbe, dont la tangente est, à chaque instant, la trace R de la roulette. Comme R est parallèle à Em, le coefficient angulaire $\frac{dY}{dx}$ de la tangente à la courbe, lieu de M, est égal à celui de Em : on a donc

$$\frac{dY}{dx}=f(x),$$

et le point M décrit une courbe intégrale. On règle l'appareil de façon que, pour $x=0$, la roulette soit en A; on obtient alors la courbe intégrale partant de A.

Nous renverrons pour la description de ces appareils à l'Ouvrage intitulé : *les Intégraphes, la courbe intégrale et ses applications*, par Abdank-Abakanowicz (Gauthier-Villars, 1886). On a fait également diverses tentatives pour construire des machines permettant de tracer l'intégrale générale de certaines équations différentielles du premier ordre. On trouvera une énumération détaillée de ces appareils dans une publication faite en Allemagne sous le titre suivant : *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, von Walther von Dyck (München, Universitätsbuchdruckerei von Dr. C. Wolf und Sohn, 1892).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

Introduction.

CHAPITRE II.

Infiniment petits. — Différentielles.

I. — Infiniment petits. Deux théorèmes fondamentaux. Application a l'aire d'un segment de courbe plane.

II. — Différentielles des fonctions d'une variable.

CHAPITRE III.

Fonctions primitives. — Intégrales indéfinies. Intégrales définies simples. Applications à la mesure des aires planes.

IV. — Changement de variable dans une intégrale définie simple.

V. — Différentielle de l'aire d'un secteur.

CHAPITRE IV.

Volume d'un solide à bases parallèles. Moments d'inertie et centres de gravité d'aires et de volumes homogènes.

I. — Formule générale.

II. — Volumes des solides de révolution. Centres de gravité des aires planes homogènes.

III. — Moments d'inertie. Centres de gravité des volumes homogènes.

CHAPITRE V.

Rectification des courbes. — Aires des surfaces de révolution et des surfaces coniques.

I. — Rectification des courbes.

II. — Aire d'une portion de surface de révolution comprise entre deux parallèles.

III. — Aire d'une partie de surface conique ou cylindrique comprise entre deux génératrices.

CHAPITRE VI.

Développement d'une fonction en série de puissances entières et positives de la variable.

I. — Examen de quelques cas particuliers. Intervalle de convergence.

II. — Différentiation et intégration des séries entières.

III. — Développements de quelques fonctions particulières.

IV. — Série de Mac-Laurin. Applications.

V. — Série de Taylor.

VI. — Application des développements en séries de puissances a l'étude des formes indéterminées.

CHAPITRE VII.

Quelques méthodes d'intégration.

I. — Réduction aux types élémentaires.

II. — Intégration des différentielles rationnelles.

III. — Intégration des différentielles rationnelles en $\sin x$ et $\cos x$.

IV. — Quelques intégrales se rattachant aux précédentes.

V. — Intégration des différentielles rationnelles par rapport a x et a $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

CHAPITRE VIII.

Développement d'une fonction en série trigonométrique.

CHAPITRE IX.

Intégrales définies dont l'élément différentiel devient infini, ou dont une limite est infinie.

CHAPITRE XI.

Courbes gauches. — Tangente. — Plan osculateur. Courbure et Torsion.

I. — Tangente.

II. — Plan osculateur.

III. — Exemples.

IV. — Enveloppe d'une famille de courbes dans l'espace.

V. — Courbure et torsion des courbes gauches.

VI. — Application aux hélices.

VII. — Exercices sur les courbes gauches.

VIII. — Étude d'une courbe gauche dans le voisinage d'un point non singulier.

IX. — Développement d'une surface développable sur un plan.

X. — Développées et développantes.

CHAPITRE XII.

Fonctions de deux variables. — Plan tangent à une surface. Maxima et minima. — Enveloppes. — Courbure.

I. — Séries de Mac-Laurin et de Taylor.

II. — Plan tangent a une surface.

III. — Application. Plan tangent aux surfaces réglées.

IV. — Maximum ou minimum d'une fonction de deux variables indépendantes.

V. — Enveloppe d'une famille de surfaces dépendant d'un paramètre.

VI. — Enveloppe d'une famille de surfaces a deux paramètres.

VII. — Courbure des courbes tracées par un point donné sur une surface.

CHAPITRE XIII.

Lignes particulières tracées sur une surface.

III. — Lignes de niveau et lignes de plus grande pente.

IV. — Lignes géodésiques.

V. — Directions conjuguées. Réseaux conjugués. Théorème des tangentes conjuguées.

CHAPITRE XIV.

Différentiation sous le signe $\int$.
Intégration des différentielles totales.
Intégrales prises le long d'une courbe.

I. — Différentiation sous le signe $\int$.

II. — Intégration des différentielles totales.

III. — Intégration le long d'une courbe plane.

IV. — Différentielles totales a trois variables indépendantes. Intégrales prises le long d'une courbe dans l'espace.

CHAPITRE XV.

Intégrales doubles et triples. — Applications.

I. — Intégrales doubles.

II. — Calcul d'une intégrale double en coordonnées rectangulaires.

III. — Calcul d'une intégrale double en coordonnées polaires.

IV. — Aire d'une surface courbe.

V. — Applications. Intégrales eulériennes. Intégrales de Fresnel.

VI. — Intégrales triples.

CHAPITRE XVI.

Formules fondamentales de l'analyse vectorielle. Intégrales de volumes, de surfaces et de lignes.

I. — Formule d'Ostrogradzky ou de Green.

II. — Formule de Riemann.

III. — Formule d'Ampère et de Stokes.

CHAPITRE XVII.

Équations différentielles du premier ordre.

I. — Généralités sur les équations différentielles.

II. — Équations différentielles du premier ordre. Équation différentielle d'une famille de courbes dépendant d'un paramètre. Intégrale générale d'une équation du premier ordre.

III. — Types d'équations du premier ordre intégrables par des quadratures.

IV. — Intégrales singulières des équations du premier ordre. Équation de Clairaut.

V. — Remarques sur le changement de variables.

CHAPITRE XVIII.

Équations différentielles du deuxième ordre et d'ordre supérieur.

I. — Équations différentielles du deuxième ordre.

II. — Cas de réduction au premier ordre.

III. — Équations d'ordre quelconque.

CHAPITRE XIX.

Équations différentielles linéaires.

I. — Généralités.

II. — Équations différentielles linéaires sans second membre.

III. — Équations a coefficients constants sans second membre.

IV. — Équations linéaires avec second membre.

CHAPITRE XX.

Systèmes d'équations différentielles simultanées à une variable indépendante.

I. — Deux équations simultanées du premier ordre a deux fonctions inconnues.

II. — Système de n équations simultanées du premier ordre a n fonctions inconnues.

III. — Équations simultanées d'ordre quelconque. Réduction a un système d'équations du premier ordre.

CHAPITRE XXI.

Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles. Équations du premier ordre.

I. — Exemples de formation des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

CHAPITRE XXII.

Valeur numérique d'une intégrale définie. Méthodes d'approximation. Intégrateurs et intégraphes.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

50595 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

24^{00} -