LEÇONS

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS

36526 Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES,

PAR

Jules TANNERY.

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS.
SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE.

TOME PREMIER.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1906

PRÉFACE.

J'ai essayé de rédiger les présentes *Leçons* dans un esprit conforme à celui des programmes de la classe de Mathématiques spéciales, tels qu'ils ont été arrêtés, en 1904, après entente entre les représentants des Ministères intéressés. Je me suis appliqué, de mon mieux, à rendre les choses visibles, à éviter les détours subtils et l'abus du formalisme, à écarter les propositions particulières qui n'intéressent que les curieux, ou les généralités sans application, à pousser enfin les théories jusqu'à la réalisation numérique.

Toutefois, lorsqu'il m'est arrivé de laisser de côté certains raisonnements, indispensables pour établir un théorème en toute rigueur logique, j'ai cru devoir en avertir le lecteur et lui signaler les difficultés ou les lacunes. J'ai horreur d'un enseignement qui n'est pas toujours sincère : le respect de la vérité est la première leçon morale, sinon la seule, qu'on puisse tirer de l'étude des sciences. Sans doute, il y a des démonstrations qui ne sont pas rigoureuses et qui sont excellentes, parce qu'elles laissent dans l'esprit une image qui ne s'efface pas, que l'on voit en même temps que la proposition, et dont la clarté suffit à guider dans les applications; si elles présentent quelque lacune, il faut le savoir, et il est bon de savoir où est cette lacune. Aussi bien dans la vie pratique que dans la spéculation, il importe de distinguer ce que l'on comprend avec certitude, ce dont on est justement persuadé, ce que l'on croit; il est bon de distinguer les choses que l'on possède entièrement et celles dont on peut user, sous certaines conditions.

Je n'avais ni la place, ni les connaissances nécessaires pour indiquer partout, d'une façon sûre, la filiation historique des idées : je n'ai fait nulle histoire et je le regrette. Sauf quelques noms consacrés par l'usage, j'ai évité les noms propres; l'habitude d'accoler un nom à toutes les propositions me semble un abus qui n'a rien à faire avec l'histoire. Lors même que cette habitude est consacrée, elle ne va pas sans inconvénient : il est fâcheux qu'un élève de Mathématiques spéciales ne connaisse Descartes que par la règle des signes, Newton que par la méthode d'approximation ou la formule du binome et qu'il soit tenté de regarder Rolle comme un aussi grand mathématicien que Descartes ou Newton. Je n'ai point cité davantage, bien qu'ils fussent souvent d'excellents géomètres, les auteurs des démonstrations ou des améliorations à des démonstrations antérieures : il m'aurait été parfois difficile de distinguer entre les souvenirs de mes lectures, de mes conversations avec mes maîtres, mes collègues ou mes élèves (1). Ne pouvant le faire partout, je ne l'ai fait nulle part.

N'ayant cité personne, je dois m'excuser d'autant plus d'avoir souvent renvoyé le lecteur à mon *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* (2). Ce dernier livre a été écrit avec des préoccupations tout autres que les présentes *Leçons*. Je me

---

(1) Ceux-ci ont été naturellement mes collaborateurs par les leçons que je leur entends faire à l'École normale, depuis plus de vingt ans. Par exemple, les nos 84 et 165-170 ont été rédigés d'après une leçon de M. Sibuet, que la mort a enlevé très jeune à l'enseignement et à la Science.

(2) Je dois remercier M. Hermann, l'éditeur de cette *Introduction*, pour la liberté qu'il m'a laissée de développer à nouveau plusieurs sujets que j'y avais traités.

suis proposé d'y présenter les choses, sous une forme abstraite, avec une entière rigueur logique : cette rigueur est indispensable quand on veut pénétrer dans certains domaines de la Science, où celui qui prétendrait s'en passer commettrait à coup sûr les plus lourdes erreurs ; celles-ci ne sont guère à craindre, au moins actuellement, dans les applications des Mathématiques, et il n'est pas mauvais, en commençant, de ne pas se laisser paralyser par la terreur d'y tomber : quelques lecteurs, toutefois, peuvent désirer connaître le complément d'un raisonnement, la suite d'une théorie : c'est à ce désir possible que j'ai voulu répondre.

En achevant la rédaction, j'ai été quelque peu effrayé de la longueur de mon manuscrit : je voudrais me persuader que cette longueur tient à l'abondance des explications et au nombre des exemples : je serai heureux si le lecteur trouve trop facile la lecture de ces Leçons et s'il juge qu'il aurait bien pu traiter seul les exemples que j'ai développés. Toute brièveté a son mérite, même la brièveté verbale, que je n'ai nullement cherchée ; mais la véritable brièveté n'est pas celle-là : le parfait enseignement serait, à mon sens, un enseignement tel que celui qui l'a reçu et qui se l'est complètement assimilé s'étonne du peu de place que tiennent dans sa propre pensée les principes fondamentaux, les théories qui s'en déduisent, les méthodes qui en résultent, parce que ces principes sont si clairs, ces déductions si naturelles, ces méthodes si aisées qu'il peut à chaque instant les retrouver sans effort. Est-il besoin de dire que je n'ai nullement la prétention de m'être approché de cet idéal, même de loin ?

Jules TANNERY.

Bertholène, 16 septembre 1905.

LEÇONS

D'ALGÈBRE ET D'ANALYSE.

CHAPITRE I.

NOTION DE COUPURE. NOMBRES IRRATIONNELS. CALCUL DES RADICAUX. EXPOSANTS FRACTIONNAIRES, NÉGATIFS, IRRATIONNELS.

§ 1. — DÉFINITION DES NOMBRES IRRATIONNELS. OPÉRATIONS SUR CES NOMBRES.

1. Je suppose acquises les règles relatives au calcul des nombres *entiers*, des nombres *fractionnaires*, des nombres *relatifs* [1] dont la valeur absolue est un nombre entier ou une fraction à termes entiers. Ces nombres, y compris o, sont dits *rationnels*. De tels nombres, si on les combine par addition, soustraction, multiplication, division (la division par o étant exclue) reproduisent toujours des nombres rationnels.

Au point de vue pratique, ces nombres suffisent à la mesure des grandeurs; le problème pratique de la mesure d'une grandeur, de la longueur d'une droite limitée, par exemple, n'est pas complètement déterminé : on peut substituer à cette droite, qui n'est d'ailleurs qu'imparfaitement délimitée, une autre droite qu'on ne saurait discerner de la première : il y a ainsi une infinité de nombres rationnels, très rapprochés les uns des autres, qui peuvent servir à mesurer la

[1] C'est sous ce nom que je désignerai les nombres positifs et négatifs.

même longueur; comme le résultat des opérations arithmétiques change très peu quand on change très peu les données, peu importe celui des nombres que l'on choisit pour la mesure, lors même que ce nombre doit être soumis à certains calculs : c'est par des raisons de commodité qu'on décide le choix ; on ne conserve, par exemple, qu'un certain nombre de décimales.

Les nombres rationnels permettent aussi de résoudre avec telle approximation qu'on voudra des problèmes comme celui-ci : trouver un nombre dont le carré soit égal à 2; mais les nombres rationnels ne suffisent à résoudre exactement ni ce dernier problème, ni le problème théorique de la mesure des grandeurs, puisque la Géométrie met en évidence l'existence de grandeurs incommensurables entre elles.

Les explications qui suivent (n^{os} **2**, **3**, ..., **7**) ont pour but de préparer la définition des nombres irrationnels, dont l'introduction conduit à une solution exacte de ces problèmes et d'autres analogues : ces nombres sont, comme on le verra, une *façon de parler* plutôt qu'une réalité; cette façon de parler, qui condense en un seul mot l'infinité des solutions approchées, permet de donner une forme simple à des raisonnements parfaitement rigoureux. Jusqu'à ce que la définition des nombres irrationnels ait été donnée (n^{os} **8**, **9**), les nombres dont il sera question seront des nombres rationnels.

2. Étant donné un nombre rationnel positif (non nul), il est toujours possible de trouver un nombre rationnel positif plus petit que lui; il suffit, en effet, si le nombre proposé est donné sous forme d'une fraction à termes entiers, d'augmenter le dénominateur de cette fraction.

Il y a en particulier des nombres *décimaux,* autres que o, comportant un nombre limité de chiffres décimaux et plus petits que tel nombre positif a que l'on voudra : on peut prendre en effet le nombre naturel (¹) n assez grand pour que l'on ait $10^n > \frac{1}{a}$, $\frac{1}{10^n} < a$.

Entre deux nombres rationnels distincts a, b, il y a d'autres

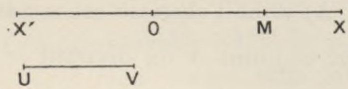
(¹) Les nombres *naturels* sous les nombres de la suite *naturelle* 1, 2, 3, ..., à l'exclusion du nombre o. Les nombres *entiers* sous les nombres o et ± 1, ± 2, ± 3, ...

nombres rationnels; si l'on suppose $a < b$, on les obtiendra en ajoutant à a un nombre rationnel plus petit que le nombre positif $b - a$.

Soit c un nombre rationnel compris entre a et b; l'Arithmétique enseigne à trouver des nombres décimaux [1] qui diffèrent de c aussi peu qu'on veut, dont la différence avec c soit en particulier moindre que $c - a$ et que $b - c$: un tel nombre est forcément compris entre a et b; entre deux nombres rationnels quelconques il y a des nombres décimaux.

3. Considérons un axe X′X, c'est-à-dire une droite indéfinie sur laquelle on a fixé l'unité de longueur et le sens positif. Cette unité et ce sens sont représentés par un *vecteur unité* UV placé sur la

Fig. 1



droite X′X ou sur une parallèle à cette droite : la longueur de ce vecteur est l'unité de longueur, son sens (de U vers V) est le sens positif; je supposerai que ce sens soit celui de la gauche vers la droite. Je supposerai enfin qu'on ait pris sur l'axe une origine O. Un tel axe nous servira, tout le long de ce Chapitre, à figurer soit les nombres rationnels, soit ces nombres irrationnels qu'on se propose de définir.

Si l'on considère un point M de l'axe, autre que le point O, deux cas peuvent se présenter : ou le segment [2] OM est commensurable au segment UV, ou il lui est incommensurable.

Dire que les deux segments OM et UV sont commensurables, c'est dire qu'il existe un segment (leur commune mesure) qui est contenu

(1) En parlant ici et plus loin d'un *nombre décimal*, j'entends toujours parler d'un nombre comportant un nombre limité de chiffres décimaux. Un nombre décimal est de la forme $\frac{A}{10^n}$, où A est un nombre entier et n un nombre naturel.

(2) Dans le cours de ce Livre, les mots *segment de droite* ou *segment* seront pris avec la signification de *droite limitée*, abstraction faite de tout sens de parcours. Un segment dont on distingue l'origine et l'extrémité, auquel on attribue ainsi un sens de parcours, devient un *vecteur*.

exactement un nombre entier de fois dans OM et dans UV, par exemple p fois dans OM et q fois dans UV; la mesure du segment OM est alors $\frac{p}{q}$.

Le nombre relatif dont la valeur absolue est $\frac{p}{q}$ et dont le signe est $+$ ou $-$, suivant que le point M est à droite ou à gauche du point O, est l'*abscisse* du point M : cette abscisse est rationnelle.

Dire que les segments OM et UV sont incommensurables entre eux, c'est dire qu'il n'existe aucun segment de droite qui soit contenu exactement un nombre entier de fois dans OM et dans UV : s'il en est ainsi, l'abscisse du point M n'est pas définie pour le moment.

A chaque point M, tel que le segment OM soit commensurable à UV, correspond un nombre relatif, son abscisse : ce nombre serait o si le point M était en O. Inversement, à chaque nombre relatif a correspond un point A, dont l'abscisse est a : si la valeur absolue de a est $\frac{p}{q}$, on obtient ce point A en divisant le segment unité UV en q parties égales et en portant bout à bout sur l'axe p de ces parties, à partir du point O, vers la droite ou vers la gauche, suivant que a est positif ou négatif; l'extrémité de la $p^{\text{ième}}$ partie est le point A. Si a, b sont deux nombres rationnels et A, B les points dont ils sont les abscisses, le point A sera à droite ou à gauche du point B suivant que l'on aura $a > b$, ou $a < b$. Le nombre $b - a$ est dans tous les cas l'équivalent algébrique du vecteur AB, c'est-à-dire l'abscisse de B quand on prend A pour origine sur l'axe. Si A, B, C sont trois points d'abcisses rationnelles, on a

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC},$$

en désignant par $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ les équivalents algébriques des vecteurs AB, BC, AC.

4. Supposons que le segment OM soit incommensurable à UV. Si a est un nombre rationnel quelconque, il sera l'abscisse d'un point A qui ne pourra coïncider avec M, qui sera donc à gauche de M, ou à

---

(1) J'emploierai, à l'occasion, les mots *au delà* ou *en deçà* avec la même signification que *à droite* ou *à gauche*.

droite : rangeons dans une première classe tous les nombres rationnels qui sont les abscisses de points situés à gauche de M, dans une seconde classe, tous les nombres rationnels qui sont les abscisses de points situés à droite de M ; il est clair que chaque nombre rationnel a sa place dans l'une ou l'autre des deux classes, et que chaque nombre de la première classe est plus petit que chaque nombre de la seconde classe.

Je désignerai sous le nom de *coupure* (des nombres rationnels) tout procédé qui permet de séparer *tous* les nombres rationnels en deux classes, telles que chaque nombre de la première soit inférieur à chaque nombre de la seconde.

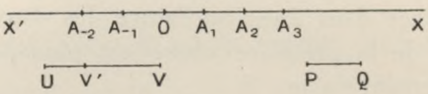
On verra tout à l'heure que, lorsque OM est incommensurable à UV, il n'y a pas dans la première classe de nombre qui soit plus grand que les autres nombres de cette classe, et qu'il n'y a pas dans la seconde classe de nombre qui soit plus petit que les autres nombres de cette classe.

Lorsque OM est commensurable à UV, le point M a une abscisse rationnelle m; on peut bien ranger tous les nombres rationnels *autres* que m en deux classes, contenant, comme tout à l'heure, l'une tous les nombres rationnels qui sont les abscisses de points situés à gauche de M, c'est-à-dire les nombres rationnels plus petits que m, et l'autre tous les nombres rationnels qui sont les abscisses de points situés à droite de M, c'est-à-dire les nombres rationnels plus grands que m; mais le nombre rationnel m échappe lui-même à la classification : on n'a pas une *coupure* au sens qui vient d'être donné à ce mot; pour obtenir une telle coupure, il faut placer le nombre rationnel m, soit dans la première classe, soit dans la seconde; tous les nombres rationnels sont alors séparés en deux classes, et chaque nombre de la première est plus petit que n'importe quel nombre de la seconde : dans le premier cas m est le plus grand des nombres de la première classe, dans le second, m est le plus petit des nombres de la seconde classe.

5. Soit UV′ un segment commensurable à UV et α le nombre rationnel positif qui en mesure la longueur; si l'on se donne le nombre α, on peut construire le segment UV′. On a vu plus haut que, si petit que soit un nombre rationnel ε, il y a des nombres rationnels α plus petits que lui. De même, si l'on se donne un

segment de droite quelconque PQ, on peut trouver un segment UV′, commensurable à UV, qui soit plus petit que PQ; il suffira pour

Fig. 2.



cela de diviser UV en un nombre k de parties égales, assez grand pour que ces parties soient plus petites que PQ ([1]); l'une d'elles pourra être prise pour UV′, sa mesure sera $\alpha = \frac{1}{k}\cdot$

Ceci posé, imaginons qu'on ait marqué sur l'axe tous les points dont l'abscisse est de la forme $n\alpha$, n étant un nombre entier positif, nul, ou négatif : je désignerai en général par A_n, le point dont l'abscisse est $n\alpha$; A_0 n'est autre que le point O, les points A_1, A_2, A_3, ..., d'une part, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}, ..., de l'autre, s'obtiennent en portant bout à bout à partir du point O, vers la droite, ou vers la gauche, des segments égaux à UV′; j'appellerai tous ces points les *points* A. Il y a des points A en deçà et au delà de n'importe quel point de l'axe ([2]). Un point quelconque de l'axe est compris entre deux points A consécutifs ou coïncide avec un point A.

Considérons sur l'axe deux points quelconques R, S; on peut supposer le segment UV′ (commensurable à UV) plus petit que le segment RS; s'il en est ainsi, il y a forcément un point A entre R et S; l'abscisse de ce point étant rationnelle, on voit qu'il y a sur l'axe, entre deux points quelconques, aussi rapprochés qu'on veut, des points d'abscisse rationnelle; il y a donc de tels points aussi près qu'on voudra d'un point de l'axe, soit en deçà, soit au delà. En particulier, en prenant le nombre α de la forme $\frac{1}{10^p}$, on voit qu'il y a, aussi près qu'on voudra de n'importe quel point de l'axe, des points dont l'abscisse est un nombre décimal, avec un nombre limité de chiffres; c'est d'ailleurs ce qui apparaîtra clairement au lecteur s'il veut bien se

---

([1]) Que cela soit possible, c'est un postulat qui est contenu dans l'idée vague de ligne droite.

([2]) C'est encore là un postulat du même genre que celui qui a été signalé plus haut.

représenter l'axe $X'X$ comme une sorte de règle divisée en mètres, décimètres, centimètres, etc. Le mot *mètre* est pris ici avec le sens d'unité de longueur.

Soit M un point quelconque de la droite; on vient de dire que ce point tombe entre deux points A consécutifs, ou sur un point A. Ce dernier cas ne peut pas se présenter quand OM est incommensurable à UV, et cela quels que soient le segment UV' (commensurable à UV), ou le nombre rationnel α.

Si le point M tombe entre deux points A consécutifs, je désignerai par A_n celui qui est en deçà de M, par A_{n+1} celui qui est au delà; les abscisses de ces points, situés l'un et l'autre à une distance du point M inférieure à UV', seront $n\alpha$ et $(n+1)\alpha$; $n\alpha$ est, par définition, la valeur approchée de l'abscisse du point M, à α près, par défaut; $(n+1)\alpha$ est la valeur approchée de l'abscisse du point M, à α près, par excès. Dans le cas exceptionnel où le point M tombe sur l'un des points A, sur le point A_n, par exemple, dont l'abscisse est $n\alpha$, on confond la valeur approchée de l'abscisse à α près, par défaut, avec la valeur exacte de cette abscisse; la valeur approchée, à α près, par excès, est toujours $(n+1)\alpha$. Dans tous les cas la valeur approchée de l'abscisse du point M, à α près, par défaut, est le plus grand multiple de α qui soit l'abscisse d'un point de l'axe situé en deçà du point M, ou coïncidant avec le point M; la valeur approchée, à α près, par excès, est le plus petit multiple de α qui soit l'abscisse d'un point de l'axe, situé au delà du point M.

Dans les expressions $n\alpha$, $(n+1)\alpha$ de ces valeurs approchées, n est un entier positif, nul ou négatif; les mots *plus grand* et *plus petit* qu'on a employés plus haut ont leur signification algébrique, en sorte que, si n est négatif, la valeur approchée par excès, $(n+1)\alpha$, est plus petite, en valeur absolue, que la valeur approchée par défaut.

Il convient encore de remarquer que les valeurs approchées, à α près, de l'abscisse du point M sont ainsi définies avant que cette abscisse ait elle-même été définie, lorsque OM est incommensurable à UV. Lorsque OM est commensurable à UV, les nombres $n\alpha$, $(n+1)\alpha$ sont bien les valeurs approchées du nombre m, abscisse du point M, au sens de l'Arithmétique, au moins lorsque m est positif; lorsque m est négatif, l'extension est toute naturelle.

Plaçons-nous dans le cas où OM est incommensurable à UV, et reportons-nous à la séparation des nombres rationnels en deux classes, qui a été décrite au n° 4; quel que soit le nombre rationnel positif α, ou le segment UV' commensurable à UV, la valeur approchée par défaut, $n\alpha$, sera l'abscisse d'un point A_n situé en deçà de M; la valeur approchée par excès, $(n+1)\alpha$, sera l'abscisse d'un point A_{n+1} situé au delà de M : $n\alpha$ appartiendra à la première classe, ce sera le plus grand multiple de α contenu dans cette classe; $(n+1)\alpha$ appartiendra à la seconde classe, ce sera le plus petit multiple de α contenu dans cette classe; puisque α peut être pris aussi petit qu'on le veut, on voit qu'il y a dans la première classe d'une part, dans la seconde classe de l'autre, des nombres qui diffèrent entre eux aussi peu qu'on le veut.

Il n'y a pas dans la première classe de nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de cette classe. Un nombre r de cette classe est en effet l'abscisse d'un point R de l'axe situé en deçà du point M; entre R et M, il y a des points d'abscisse rationnelle : or l'abscisse d'un tel point est plus grande que r, et elle appartient à la première classe. De même, il n'y a pas, dans la seconde classe, de nombre qui soit plus petit que tous les autres nombres de cette classe.

6. Les considérations qui précèdent sont purement théoriques : les opérations que l'on a décrites ne sont pas réalisables; on ne peut pas diviser effectivement un segment donné en un nombre de parties égales aussi grand qu'on le veut : au-dessous d'un certain degré de petitesse on ne pourra plus distinguer le segment UV'; on ne pourra plus distinguer les points A_n, A_{n+1} du point M; les segments UV, OM ne peuvent pas être délimités exactement. C'est sur une droite idéale, sur une droite et des points géométriques, que l'on a raisonné, non sur des éléments réalisables.

Il y a quelque chose d'un peu choquant à parler d'opérations irréalisables comme si l'on pouvait les effectuer, et il y a lieu de reprendre les considérations précédentes sur un problème purement arithmétique, où on les retrouvera dans tout ce qu'elles ont d'essentiel. La définition des nombres irrationnels se trouvera ainsi convenablement préparée.

Dans le numéro qui suit, les nombres dont il sera question seront de ceux que l'on considère en Arithmétique; ils ne seront jamais négatifs; je me dispenserai de toujours dire nombres *positifs;* quand il sera question d'une différence entre deux nombres, on devra entendre la différence entre le plus grand et le plus petit.

7. J'emprunterai à l'Arithmétique les propositions et notions que voici :

Il y a des nombres rationnels qui ne sont le carré d'aucun nombre rationnel;

Étant donné un nombre quelconque, on sait trouver sa racine carrée à une unité près, par défaut, c'est-à-dire le plus grand nombre entier dont le carré soit inférieur ou égal au nombre donné;

La racine carrée d'un nombre A, à α près, par défaut, est un nombre de la forme $n\alpha$, où n est un nombre entier positif ou nul, qui vérifie les inégalités

$$(n\alpha)^2 \leqq A < [(n+1)\alpha]^2;$$

ce nombre entier n est entièrement déterminé quand on se donne A et α; c'est la racine carrée, à une unité près, par défaut, du nombre $\frac{A}{\alpha^2}$ ou de sa partie entière; $(n+1)\alpha$ est la racine carrée à α près, par excès.

Supposons, par exemple, qu'on prenne $A = 2$, le problème qui consiste à trouver un nombre rationnel dont le carré soit égal à 2 est insoluble.

Le carré d'un nombre rationnel quelconque étant plus petit ou plus grand que 2, on peut ranger les nombres rationnels en deux classes dont la première contient tous les nombres dont le carré est moindre que 2, dont la seconde contient tous les nombres dont le carré est plus grand que 2; il est clair que tout nombre de la première classe est moindre que n'importe quel nombre de la seconde, puisque le carré du premier nombre est moindre que le carré du second.

Soit α un nombre rationnel quelconque; les racines carrées de 2, à α près par défaut et par excès, sont les nombres $n\alpha$, $(n+1)\alpha$, où n est un nombre entier positif ou nul tel que l'on ait

$$(n\alpha)^2 < 2 < [(n+1)\alpha]^2.$$

[Il n'y a pas lieu, ici, d'écrire $(n\alpha)^2 \leqq 2$, puisque l'égalité $(n\alpha)^2 = 2$ est impossible.] $n\alpha$ est le plus grand multiple de α qui figure dans la première classe, $(n+1)\alpha$ le plus petit multiple de α qui figure dans la seconde; puisque α peut être supposé aussi petit qu'on veut, il y a des nombres appartenant à l'une et à l'autre classe et qui diffèrent entre eux aussi peu qu'on le veut.

Les différences entre 2 et les nombres $(n\alpha)^2$ et $[(n+1)\alpha]^2$ sont moindres que $(n+1)^2\alpha^2 - n^2\alpha^2 = (2n\alpha+\alpha)\alpha$, moindres par conséquent que $(2n\alpha+1)\alpha$, si l'on suppose $\alpha < 1$ et, *a fortiori*, que $(2a+1)\alpha$, si l'on désigne par a un nombre dont le carré est plus grand que 2 et qui, par suite, est plus grand que $n\alpha$. Dans les raisonnements qui suivent on prendra pour a un nombre fixe quelconque, qui satisfasse à la condition précédente.

Pour que $(2a+1)\alpha$ soit inférieur à un nombre ε, il suffit de prendre $\alpha < \frac{1}{2a+1}$; pourvu qu'il en soit ainsi, la différence entre 2 et $(n\alpha)^2$, ou $(n+1)^2\alpha^2$, sera moindre que ε; on peut donc trouver, tant dans la première classe que dans la seconde, des nombres dont le carré diffère de 2 aussi peu qu'on le veut : si le problème qui consiste à trouver un nombre dont le carré soit égal à 2 est insoluble, il peut cependant être résolu avec l'approximation qu'on veut.

Il n'y a pas dans la première classe de nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de cette classe, car s'il y avait un tel nombre r, on aurait $r^2 < 2$, puisque le nombre r appartient à la première classe; or, on pourrait trouver dans cette même classe un nombre r' tel que l'on eût $2 - r'^2 < 2 - r^2$, puisqu'on peut trouver des nombres dont le carré approche de 2 plus que ne fait r^2 : cette inégalité implique $r' > r$. On démontrerait de même qu'il ne peut y avoir dans la seconde classe de nombre qui soit plus petit que tous les autres nombres de cette classe.

Lorsque l'on se donne le nombre α, le nombre entier positif n qui vérifie la condition $(n\alpha)^2 < 2 < [(n+1)\alpha]^2$ est parfaitement déterminé, ainsi que les nombres $n\alpha$, $(n+1)\alpha$, les racines carrées de 2, par défaut et par excès à α près; quand α change, tous ces nombres n, $n\alpha$, $(n+1)\alpha$ changent : les quantités $2 - n^2\alpha^2$, $(n+1)\alpha^2 - 2$ moindres que $(2a+1)\alpha$, si α est moindre que 1, restent aussi petites qu'on le veut, pourvu qu'on prenne α suffisamment petit; c'est ce qu'on exprime en disant que 2 est la *limite* des quantités $(n\alpha)^2$, $(n+1)^2\alpha^2$ quand α tend vers 0.

8. Définition des nombres irrationnels. — J'arrive maintenant à la définition des nombres irrationnels. Supposons qu'on donne une règle qui permette de décomposer *tous* les nombres rationnels en deux classes, telles que les nombres de la première classe soient plus petits que n'importe quel nombre de la seconde classe; on aura réalisé ce qui a été appelé plus haut une *coupure*. Il est à peine utile de formuler les trois observations suivantes, tant elles sont évidentes : si un nombre rationnel a appartient à la première classe, il en sera de même de tout nombre rationnel b plus petit que a; car si b n'appartenait pas à la première classe il appartiendrait à la seconde et, par conséquent, a devrait être plus petit que lui. Si un nombre rationnel a' appartient à la classe supérieure, il en est de même de tout nombre rationnel b' plus grand que a'. Tout nombre de la seconde classe est plus grand que n'importe quel nombre de la première.

Divers cas peuvent maintenant se présenter.

I. Il peut se faire qu'il n'y ait pas, dans la première classe, de nombre plus grand que tous les autres nombres de cette classe et qu'il n'y ait pas dans la seconde classe de nombre plus petit que tous les autres nombres de cette classe; c'est ce qui arrive quand on range dans la première classe les nombres rationnels négatifs, le nombre 0, tous les nombres rationnels positifs dont le carré est moindre que 2; dans la seconde classe tous les nombres rationnels positifs dont le carré est plus grand que 2.

II. Il peut se faire qu'il y ait dans la première classe un nombre plus grand que tous les autres nombres de cette classe et qu'il n'y ait pas dans la seconde classe de nombre plus petit que tous les autres nombres de cette classe. C'est ce qui arrivera si l'on range dans la première classe le nombre 3 et tous les nombres rationnels plus petits que 3, dans la seconde classe tous les nombres rationnels plus grands que 3.

Soit A un nombre quelconque de cette seconde classe : entre A et 3 il y a des nombres rationnels, qui appartiennent à la seconde classe puisqu'ils sont plus grands que 3; il y a donc, dans la seconde classe, des nombres plus petits que A : il ne peut pas y avoir, dans la seconde classe, de nombre qui soit plus petit que tous les autres nombres de cette classe.

III. Il peut se faire qu'il n'y ait pas dans la première classe de nombre plus grand que les autres nombres de cette classe, mais qu'il y ait dans la seconde classe un nombre plus petit que tous les autres nombres de cette classe. C'est ce qui arriverait si l'on rangeait dans la première classe tous les nombres rationnels plus petits que 3, dans la seconde le nombre 3 et tous les nombres rationnels plus grands que lui. Le même raisonnement que tout à l'heure montrerait alors qu'il ne peut y avoir dans la première classe de nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de cette classe.

IV. Il ne peut pas se faire qu'il y ait à la fois dans la première classe un nombre A plus grand que tous les autres nombres de cette classe, et dans la seconde classe un nombre B plus petit que tous les autres nombres de cette classe. S'il en était ainsi, en effet, le nombre B, de la seconde classe, serait plus grand que le nombre A, de la première classe. Entre les nombres rationnels A et B il y aurait des nombres rationnels qui ne pourraient appartenir ni à la première classe, puisqu'ils dépassent le plus grand A des nombres de cette classe, ni à la seconde classe, puisqu'ils sont moindres que le plus petit B des nombres de cette classe. *Tous* les nombres rationnels n'auraient donc pas été rangés dans les deux classes.

9. Il convient de dire que, dans le cas II, la coupure définit précisément le nombre rationnel qui est le plus grand des nombres de la première classe; que, dans le cas III, la coupure définit précisément le nombre rationnel qui est le plus petit des nombres de la seconde classe; que, dans le cas I, la coupure définit un *nombre irrationnel* qui, par définition, est regardé comme *plus grand* que tous les nombres de la première classe, et comme *plus petit* que tous les nombres de la seconde classe, comme *compris* entre un nombre quelconque de la première classe et un nombre quelconque de la seconde classe.

Ainsi la séparation de tous les nombres rationnels en deux classes, dont la première comprend les nombres négatifs, le nombre 0, les nombres positifs qui ont un carré moindre que 2, et dont la seconde contient tous les nombres positifs dont le carré est plus grand que 2, définit un nombre irrationnel, que l'on appelle la *racine carrée* de 2, et que l'on représente par le symbole $\sqrt{2}$.

Bien entendu, il n'est pas actuellement permis de dire que le carré de ce nombre soit égal à 2 : on n'a pas encore dit ce qu'était le carré d'un nombre irrationnel.

De même, si l'on considère sur l'axe X′X un point M tel que le segment OM soit incommensurable à UV, ce point permet de définir une coupure appartenant au type I et, par conséquent, un nombre irrationnel : ce nombre est l'abscisse du point M.

Il ne sera pas inutile de remarquer qu'un point quelconque M sur l'axe X′X partage cet axe en deux demi-droites (D), (D′) qui s'étendent indéfiniment, l'une vers la droite, l'autre vers la gauche : si l'on veut considérer ces deux demi-droites comme entièrement distinctes, comme n'ayant aucun point commun, il faut regarder le point M lui-même comme appartenant à l'une des demi-droites et n'appartenant pas à l'autre, ou bien comme n'appartenant ni à l'une ni à l'autre. Dans le premier cas, chaque point de l'axe X′X appartient à l'une des demi-droites, et seulement à une. Dans le second cas, chaque point de l'axe, *sauf le point* M, appartient à l'une des demi-droites et seulement à une.

10. En adoptant la façon de parler que l'on a expliquée plus haut, on voit qu'à chaque point M de l'axe X′X correspond un nombre rationnel ou irrationnel. A un nombre rationnel donné correspond de même un point que l'on sait construire. Y a-t-il aussi un point qui corresponde à un nombre irrationnel donné, c'est-à-dire à une coupure du type I?

La réponse affirmative à cette question est, au fond, un postulat qu'il n'y a pas lieu de démontrer, mais que l'on peut illustrer par une image, un peu grossière, qui suffira, sans doute, à convaincre le lecteur que ce postulat est conforme à l'intuition vague que nous avons de la ligne droite. Dans cette image, on parlera de points bleus, blancs, rouges. Il est à peine utile d'insister sur ce qu'il y a de vicieux dans cette façon de parler : un point géométrique, sans dimensions, ne peut être coloré.

Quoi qu'il en soit, supposons qu'on ait défini une coupure quelconque, qui permette de séparer tous les nombres rationnels en deux classes, chaque nombre de la première étant plus petit que n'importe quel nombre de la seconde. Cette coupure peut d'ailleurs appartenir à l'un ou l'autre des types I, II, III.

J'imagine qu'on marque en bleu chaque point de l'axe X′X dont l'abscisse est un nombre (rationnel) de la première classe, et qu'on colore en bleu toute la partie de l'axe qui est en deçà d'un tel point, puis qu'on marque en rouge chaque point de l'axe dont l'abscisse est un nombre (rationnel) de la seconde classe, et qu'on colore en rouge toute la partie de l'axe qui est au delà d'un tel point; enfin, que l'on appelle *point blanc,* tout *point* (s'il y en a) qui n'a été coloré ni en bleu ni en rouge.

Tout point d'abscisse rationnelle est rouge ou bleu.

Chaque point bleu est en deçà de n'importe quel point rouge; la partie bleue et la partie rouge n'empiètent pas l'une sur l'autre. Entre ces deux parties de la droite il n'y a pas d'intervalle blanc, il ne peut même pas y avoir deux points blancs, car entre ces deux points, s'ils existaient, devraient se trouver des points d'abscisses rationnelles, rouges ou bleus; s'il y avait, par exemple, un point bleu, celui des deux points blancs qui est en deçà de ce point bleu aurait dû être coloré en bleu :il ne peut donc y avoir sur l'axe qu'un seul point blanc.

Quoi qu'il en soit, la façon même dont la droite est séparée en une partie bleue et une partie rouge définit un point, soit qu'on regarde ce point comme étant bleu et limitant à droite la partie bleue (coupure du type II), soit qu'on le regarde comme étant rouge et limitant à gauche la partie rouge (coupure du type III), soit qu'on le regarde enfin comme étant blanc et séparant la partie bleue de la partie rouge (coupure du type I). Dans ce dernier cas, le seul qui nous intéresse pour la réponse à la question posée, le postulat que j'ai prétendu illustrer par cette image revient à affirmer l'existence de ce point blanc. Dans ce cas, au delà de chaque point bleu, il y a encore des points bleus; en deçà de chaque point rouge, il y a des points rouges.

11. J'ai supposé jusqu'ici que les coupures que l'on considérait, permettaient de séparer *tous* les nombres rationnels en deux classes : il est manifeste que, si l'on définit un moyen de partager tous les nombres rationnels compris entre les deux nombres rationnels a et b ($a < b$) en deux classes telles que chaque nombre de la première classe soit plus petit que n'importe quel nombre de la seconde classe, il suffira d'adjoindre à la première classe le nombre a et les nombres rationnels plus petits que lui, d'adjoindre à la seconde classe le nombre b et les nombres rationnels plus grands que b pour compléter les deux classes du n° 8, et définir ainsi un nombre rationnel ou irrationnel.

12. Il sera avantageux, pour l'uniformité du langage, de réunir en un même type les coupures des types II et III et de ne plus considérer que deux modes de décomposition des nombres rationnels : l'un en deux classes, l'autre en trois classes.

Si l'on a affaire à une coupure du type II ou du type III, on sépare les nombres rationnels en trois classes, dont l'une ne contient qu'un seul nombre, à savoir le nombre rationnel que définit la coupure, le plus grand de la première classe (type II), ou le plus petit de la seconde classe (type III) : ce nombre rationnel est alors supprimé soit de la première classe, qui ne contient plus que des nombres rationnels plus petits que lui, soit de la seconde classe, qui ne contient plus que des nombres plus grands que lui.

Je donnerai respectivement le nom de *classe inférieure* et de *classe supérieure*, à la première et à la seconde classe ainsi modifiées, et j'emploierai les mêmes mots pour désigner la première et la seconde classe d'une coupure du type I; la classe inférieure, telle qu'elle vient d'être définie, ne contient jamais de nombre plus grand que tous les autres nombres de cette classe, la classe supérieure ne contient jamais de nombre plus petit que tous les autres nombres de cette classe. Si l'on a affaire à une coupure du type I, les nombres rationnels sont ainsi séparés en deux classes; c'est cette séparation qui définit un nombre irrationnel. Si l'on a affaire à une coupure du type II, ou du type III, les nombres rationnels sont séparés en trois classes : la classe inférieure, la classe supérieure, et la classe intermédiaire composée d'un seul nombre, le nombre rationnel que définit la coupure.

On peut modifier légèrement l'image du n° 10 de manière qu'elle corresponde à ce nouveau point de vue; s'il s'agit d'une séparation en trois classes, on imaginera que le point d'abscisse rationnelle que définit cette séparation soit blanc, que tout point dont l'abscisse appartient à la classe inférieure soit bleu ainsi que tous les points situés à sa gauche, que tout point dont l'abscisse appartient à la classe supérieure soit rouge ainsi que tous les points situés à sa droite.

Qu'il s'agisse d'un nombre rationnel ou d'un nombre irrationnel, ce nombre est l'abscisse d'un point blanc, à gauche et à droite duquel s'étendent une demi-droite bleue et une demi-droite rouge; le point blanc limite, en quelque sorte, ces deux demi-droites colorées, auxquelles il n'appartient pas. L'image est la même dans les deux cas. L'analogie entre les deux sortes de nombres ressort mieux, mais elle ne doit pas faire oublier leur différence essentielle : un nombre rationnel est un nombre entier, ou une fraction à termes entiers, qui n'est autre chose qu'un système de *deux* nombres entiers; il s'exprime ainsi au moyen d'un nombre limité de chiffres. Un nombre irrationnel n'est pas susceptible d'une pareille représentation, ce n'est qu'une *coupure*, une règle pour séparer les nombres rationnels en deux classes; ce n'est pas un ou deux nombres entiers, c'est une infinité de nombres entiers ou fractionnaires, une infinité de chiffres qu'il faut pour le définir. Afin de pouvoir raisonner à la fois sur les nombres rationnels et irrationnels, ou, comme on dit, sur les nombres *réels*, on a introduit plus haut les classes inférieure et supérieure relatives à un nombre rationnel; mais cette introduction n'ajoute rien à l'idée d'un tel nombre et lui est, en quelque sorte, postérieure. Au contraire, il n'y a rien de plus, dans l'idée d'un nombre irrationnel, que ces deux classes inférieure et supérieure : c'est elles qui le constituent. On ne peut représenter un tel nombre que par un symbole, une lettre par exemple, ou une façon d'écrire, comme $\sqrt{2}$, qui, lorsqu'on va au fond des choses, doit toujours rappeler cette décomposition en classes à laquelle les pages précédentes ont été consacrées. Quand on a dénommé ainsi un nombre irrationnel, en parlant des classes inférieure ou supérieure relatives à ce nombre, on entendra parler des classes qui le définissent.

En disant qu'il est plus grand que le nombre rationnel a, et plus petit que le nombre rationnel b, ou encore qu'il est compris entre a et b, que la coupure qui le définit tombe entre a et b, au delà de a, en deçà de b, on entend simplement que a appartient à la classe inférieure, que b appartient à la classe supérieure. Au reste ces façons de parler peuvent évidemment s'employer pour un nombre rationnel aussi bien que pour un nombre irrationnel.

13. Je dois m'arrêter un peu sur la représentation décimale d'un nombre irrationnel; le lecteur suivra sans peine les explications relatives à ce sujet, s'il veut bien se représenter l'axe $X'X$ comme une sorte de règle divisée, indéfinie dans les deux sens, se reporter à la

façon dont on mesure effectivement une longueur et imaginer qu'on puisse poursuivre indéfiniment des opérations qui, dans la pratique, sont forcément limitées. Pour nous conformer à des habitudes de langage qui lui sont familières, appelons *mètre* l'unité de longueur : sur l'axe $X'X$, on a marqué o à l'origine, puis 1, 2, 3, ... à droite, — 1, — 2, — 3, ... à gauche, afin de distinguer les points qui sont à une distance de l'origine égale à un, deux, trois, ..., mètres. L'axe est ainsi divisé en une infinité d'intervalles égaux chacun à un mètre; chacun de ces intervalles est ensuite divisé en dix décimètres, chaque décimètre en dix centimètres, chaque centimètre en dix millimètres, ... Si l'on considère un point quelconque A de l'axe, on pourra lire facilement sur la règle divisée les valeurs approchées par défaut ou par excès de de son abscisse à un mètre, un décimètre, un centimère, un millimètre près. Il est d'ailleurs clair qu'au lieu de diviser l'axe de cette façon, on peut le diviser et le subdiviser autrement; je supposerai toutefois que les subdivisions d'un certain ordre soient toujours égales entre elles.

Soit A un nombre irrationnel donné : il faut, comme on l'a déjà dit, entendre par là qu'on se donne un moyen pour pratiquer une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, pour reconnaître si tel nombre rationnel que l'on veut appartient à la classe inférieure ou à la classe supérieure. Considérons la progression arithmétique indéfinie dans les deux sens dont le nombre rationnel positif α est la raison et dont o est un terme. La coupure qui définit A tombe forcément entre deux termes consécutifs $n\alpha$, $(n+1)\alpha$ de cette progression; le premier de ces nombres est le plus grand multiple de α qui appartienne à la classe inférieure relative à A, c'est par définition la valeur approchée de A à α près, par défaut; le second $(n+1)\alpha$ est le plus petit multiple de α qui appartienne à la classe supérieure, c'est la valeur approchée de A à α près, par excès.

Entre deux termes consécutifs quelconques de cette progression, insérons $k-1$ moyens, de manière à former une nouvelle progression arithmétique indéfinie dans les deux sens dont la raison soit $\beta = \frac{\alpha}{k}$, et qui englobe la progression arithmétique de raison α; la coupure qui définit A tombera entre deux termes consécutifs de cette nouvelle progression; le plus grand de ces deux termes doit appartenir à la classe supérieure; il est, par conséquent, plus grand que $n\alpha$; le plus petit doit appartenir à la classe inférieure; il est donc moindre que $(n+1)\alpha$; autrement dit, il n'y a pas lieu de considérer les termes de la progression *indéfinie*, de raison $\beta = \frac{\alpha}{k}$, qui précèdent $n\alpha$ ou qui suivent $(n+1)\alpha$, mais seulement la progression limitée

$$nk\beta, \quad (nk+1)\beta, \quad \ldots, \quad (nk+k)\beta,$$

que l'on obtient en insérant $k-1$ moyens entre $n\alpha = nk\beta$ et $(n+1)\alpha = (nk+k)\beta$. La coupure qui définit A tombe nécessairement entre deux termes consécutifs de cette progression limitée : si l'on désigne ces deux termes par $(nk+r)\beta$ et $(nk+r+1)\beta$, le premier est au moins égal à $n\alpha$, le second est au plus égal à $(n+1)\alpha$; ces termes sont les valeurs approchées de A, à β près, par défaut et par excès.

Remarquons en passant que, si l'on désigne par $p\beta$ la valeur approchée de A à β près par défaut, on a

$$p = nk + r, \qquad 0 \leqq r < k,$$

en sorte que n est le quotient entier de la division de p par k et r le reste [1].

Il est clair qu'on peut continuer ainsi, insérer $l-1$ moyens arithmétiques entre $p\beta$ et $(p+1)\beta$, et former une progression arithmétique dont la raison soit $\gamma = \frac{\beta}{l}$, ...

14. Arrêtons-nous sur le cas où l'on prend

$$\alpha = 1, \qquad k = l = \ldots = 10;$$

il correspond à cette sorte de règle divisée, dont on a parlé au début du précédent numéro.

Le plus grand nombre entier n qui appartienne à la classe inférieure est la valeur approchée de A à une unité près, par défaut (ou la partie entière de A); elle peut être positive, nulle ou négative; dans ce dernier cas, au lieu de placer le signe — en avant, il est

---

[1] Lorsque p est négatif et n'est pas divisible par k, n s'obtient en prenant le quotient entier de la division par k de la valeur absolue de p, en augmentant d'une unité ce quotient entier et en affectant le résultat du signe —.

commode de placer le signe — au-dessus du dernier chiffre ; c'est une notation à laquelle le lecteur est sans doute habitué par l'usage des tables de logarithmes. La valeur approchée à un dixième près, par défaut, s'obtiendra en ajoutant à cette partie entière un certain nombre entier de dixièmes, 9 au plus ; on l'écrira en plaçant une virgule à la suite de la partie entière et en faisant suivre cette virgule d'un chiffre représentant le nombre de dixièmes que l'on doit ajouter à la partie entière ; le chiffre des dixièmes peut d'ailleurs être un zéro ; la valeur approchée à un centième près, par défaut, s'obtiendra en ajoutant à la valeur approchée à un dixième près un certain nombre de centièmes ; on l'écrira en plaçant, à la suite de la valeur approchée à un dixième près, un chiffre représentant les centièmes, etc. On obtiendra ainsi une suite indéfinie de nombres décimaux

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots,$$

dont chacun se déduit du précédent par l'adjonction d'un chiffre de plus, dont chacun est ainsi égal ou supérieur à celui qui le précède ; c'est la suite des valeurs approchées de A, par défaut, à 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ... près. L'égalité entre deux termes consécutifs a lieu quand le dernier chiffre du second terme est un zéro. La suite des valeurs approchées de A par excès à 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... près se déduit de la précédente en ajoutant respectivement à ses termes 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... ou, comme l'on dit, en forçant le dernier chiffre de chacun des termes, écrits sous la forme décimale. En vertu des explications données dans le numéro précédent, pour le cas général, on voit que chaque terme de la nouvelle suite est supérieur à n'importe quel terme de la première et que chaque terme de la nouvelle suite est supérieur ou égal à ceux qui viennent après lui ; l'égalité entre deux termes consécutifs de la nouvelle suite a lieu quand, des deux termes correspondants de la suite des valeurs approchées par défaut, le second se termine par un 9. Les termes de la première suite appartiennent tous à la classe inférieure relative à A, les termes de la seconde appartiennent tous à la classe supérieure.

Au lieu d'écrire successivement les termes u_0, u_1, u_2, ... de la suite des valeurs approchées par défaut à 1, à 0,1, à 0,01, ... près, on se borne habituellement à écrire l'un de ces termes u_n, en prenant n suffisamment grand et en faisant suivre de points suspensifs le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal. Ainsi, pour le nombre π que l'on définit en Géométrie, on écrira, en prenant $n = 10$,

$$3,1415926535\ldots.$$

Cette notation, avec ses points suspensifs, est faite pour éveiller l'idée d'un symbole qui commencerait par les chiffres que l'on a écrits et qui se poursuivrait indéfiniment, de façon qu'en l'arrêtant à un chiffre décimal quelconque on obtînt la valeur approchée du nombre considéré A, par défaut, à une unité près de l'ordre de ce chiffre; en forçant ce chiffre, on obtiendrait la valeur approchée, par excès, à une unité près du même ordre. Un tel symbole, avec son infinité de chiffres décimaux, est ce qu'on appelle *la représentation décimale du nombre* A; lorsqu'on se donne la coupure qui définit ce nombre A, chaque chiffre de la représentation décimale peut être calculé quand on connaît son rang.

Il convient de remarquer qu'en allant assez loin dans la suite u_1, u_2, ..., u_n, ... des valeurs approchées de A à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10^2}$, ..., $\frac{1}{10^n}$, ... près, par défaut, on finit par dépasser tel nombre a de la classe inférieure qu'on voudra; car on peut trouver un nombre b de cette même classe qui soit plus grand que a, puis, entre a et b, un nombre décimal δ; si le nombre δ, plus grand que a, comporte n chiffres décimaux, il sera inférieur ou égal à u_n qui sera par conséquent plus grand que a, ainsi que u_{n+1}, u_{n+2}, ...; en particulier, il y a dans la suite u_1, u_2, ..., u_n, ... un terme plus grand que n'importe quel terme u_p de cette suite qu'on voudra; il est donc impossible que, dans la représentation décimale de A, tous les chiffres qui suivent le $p^{\text{ième}}$ soient des zéros, car, si tous ces chiffres étaient des zéros, on aurait

$$u_p = u_{p+1} = u_{p+2} = \ldots.$$

On voit de la même façon que, en allant assez loin dans la suite des valeurs approchées par excès, on finit par descendre au-dessous de tel nombre de la classe supérieure qu'on voudra; que, en particulier, il y a forcément, dans cette suite, des termes qui sont plus petits que tel terme que l'on voudra; que, ainsi, il est impossible que tous les termes de cette suite, à partir de l'un d'entre eux, soient égaux; que, enfin, il est impossible que, dans la représentation décimale de A, tous les chiffres à partir de l'un d'entre eux soient des 9.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que A était irrationnel; les raisonnements s'appliquent lorsque A est rationnel; si ce n'est que, en procédant comme on l'a expliqué, il peut arriver, sous des conditions que le lecteur connaît, qu'on tombe sur une valeur approchée par défaut qui soit égale à A; les suivantes se déduisent de celles-là en la faisant suivre de zéros; elle est la représentation décimale de A. Lorsque A ne peut pas être exactement converti en fraction décimale, sa représentation décimale est *périodique,* ainsi qu'on l'enseigne en Arithmétique. Il ne peut jamais arriver que tous les chiffres de cette représentation décimale, à partir de l'un d'eux, soient des 9.

15. Inversement, imaginons qu'on se donne un symbole tel que ceux qu'on vient de décrire, formé d'une partie entière, qui peut d'ailleurs être positive, nulle ou négative, suivie d'une infinité de chiffres décimaux : dire qu'on se donne un pareil symbole, c'est dire qu'on se donne le moyen d'en trouver le $n^{\text{ième}}$ chiffre, quel que soit n.

Tel serait par exemple le symbole

$$0,123456789101112\ldots,$$

où la partie décimale est obtenue en écrivant, sans séparation, la suite naturelle des nombres.

En excluant, conformément à ce qui a été dit dans le précédent numéro, le cas où tous les chiffres à partir de l'un d'eux seraient tous des zéros ou tous des 9, je vais indiquer comment un tel symbole permet de définir une séparation des nombres rationnels en classes, séparation qui définit elle-même un nombre rationnel ou irrationnel A, dont le symbole donné est la représentation décimale.

Après le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal donné, il peut y avoir quelques zéros, mais on finira par rencontrer un autre chiffre; le nombre décimal que l'on obtient en limitant le symbole après ce chiffre est alors plus grand que le nombre décimal obtenu en le limitant au $n^{\text{ième}}$ chiffre; ainsi chaque nombre décimal déduit du symbole, en le limitant quelque part, est certainement surpassé par un nombre décimal obtenu en le limitant plus loin. De même, après le $n^{\text{ième}}$ chiffre, il peut bien y avoir quelques 9, mais en continuant assez loin on rencontre un autre chiffre; en forçant ce chiffre et en s'arrêtant là, on obtient un nombre décimal plus petit que le nombre décimal obtenu en forçant le $n^{\text{ième}}$ chiffre et en s'arrêtant là.

Ces remarques faites, j'arrive à la séparation des nombres rationnels en classes, que l'on déduit du symbole donné.

On rangera dans la première classe tous les nombres rationnels inférieurs ou égaux à l'un des nombres décimaux obtenus en limitant quelque part le symbole donné et dans la seconde classe tous les nombres rationnels supérieurs ou égaux à l'un des nombres décimaux obtenus en limitant le symbole quelque part et en forçant le dernier chiffre.

On voit de suite que chaque nombre de la première classe est inférieur à n'importe quel nombre de la seconde classe, et qu'il y a des nombres appartenant, l'un à la seconde classe, l'autre à la première, qui diffèrent aussi peu qu'on veut.

D'autre part, il n'y a pas, dans la première classe, de nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de cette classe, car un nombre quelconque a de cette classe est inférieur ou égal à quelqu'un des nombres décimaux obtenus en limitant le symbole quelque part; en limitant le symbole plus loin, on trouve un nombre plus grand et, par conséquent, plus grand que a. De même il n'y a pas, dans la seconde classe, de nombre qui soit plus petit que tous les autres nombres de cette classe.

On serait sûr d'avoir défini une coupure et, par conséquent, un nombre A s'il était certain que la classification précédente n'a laissé échapper aucun nombre rationnel.

Or, si un nombre rationnel échappe à cette classification, c'est qu'il est, d'une part, plus grand que tous les nombres qui figurent dans la première classe, d'autre part, plus petit que tous ceux qui figurent dans la seconde : il est alors seul de son espèce, car, s'il y avait deux tels nombres α, β ($\alpha < \beta$), la différence entre un nombre de la seconde classe et un nombre de la première serait toujours supérieure à $\beta - \alpha$.

Si un nombre rationnel échappe à la classification, on a affaire à une séparation de tous les nombres rationnels en trois classes, telle qu'elle a été décrite au n° 12; le nombre rationnel unique qui échappe à la classification constitue précisément la classe intermédiaire : c'est lui qui est défini par la séparation précédente. Désignons-le par A. Puisque A est compris entre le nombre décimal obtenu en limitant le symbole donné au $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal, et le même nombre dont on a forcé le dernier chiffre, ces deux nombres décimaux sont les valeurs approchées de A, par défaut et par excès, à $\frac{1}{10^n}$ près; le symbole donné est donc la représentation décimale du nombre rationnel A; le symbole donné ne peut être que la fraction décimale périodique dont A est la fraction génératrice.

Si aucun nombre rationnel n'échappe à la classification, on a bien affaire à une coupure proprement dite. Cette coupure définit un nombre irrationnel A, puisqu'elle appartient au type I et, dans ce cas encore, on voit de suite que le symbole donné est la représentation décimale de A.

Le mode de raisonnement qu'on vient d'employer se rencontre assez fréquemment; en y réfléchissant un peu, le lecteur apercevra ce qu'il comporte d'essentiel, à savoir, les deux ensembles de nombres formés, dans ce cas particulier, l'un par les nombres décimaux déduits du symbole proposé en le limitant quelque part, l'autre par ces mêmes nombres dont on a forcé le dernier chiffre; tout nombre du premier ensemble est plus petit que chaque nombre du second; il y a des nombres pris respectivement dans les deux ensembles qui diffèrent aussi peu qu'on le veut : la coupure est formée en considérant d'une part les nombres rationnels inférieurs ou égaux aux éléments du premier ensemble, d'autre part les nombres rationnels supérieurs ou égaux aux éléments du second ensemble. On touche ici à une théorie très importante, celle des ensembles infinis, dans laquelle je ne pénétrerai pas davantage.

Il est à peine utile de parler des deux cas exclus au commencement du numéro. Si, dans le symbole donné, à partir d'un certain chiffre décimal, tous les chiffres sont des zéros, on ne tiendra aucun compte de ces zéros; on obtient ainsi un nombre décimal limité; c'est ce nombre que définit le symbole donné et dont ce symbole est la représentation décimale. Si tous les chiffres, à partir d'un certain rang, étaient des 9, comme dans le symbole 0,36999..., on reconnaît de suite que les termes de la suite indéfinie

$$0,369; \quad 0,3699; \quad 0,36999; \quad \ldots$$

s'approchent autant qu'on veut, pourvu qu'on aille assez loin dans cette suite, du nombre 0,37, obtenu en forçant le dernier des chiffres décimaux du symbole qui n'est pas un 9; c'est ce qu'on exprime en disant que cette suite a le nombre 0,37 pour limite : on pourrait bien dire qu'elle définit ce nombre; mais alors il ne serait plus exact de dire que le symbole, en le limitant au $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal, fournit la valeur approchée, par défaut, du nombre 0,37 qu'il définit : le symbole donné ne serait plus la représentation décimale du nombre qu'il définit. Aussi convient-il d'exclure complètement les symboles de cette sorte.

16. Égalité, inégalité des nombres irrationnels. — Ni l'égalité ou l'inégalité de deux nombres irrationnels, ni leur somme, leur différence, etc., n'ont encore été définies. Dans une exposition purement logique, toutes ces notions doivent être reprises l'une après l'autre, en s'appuyant uniquement sur cette notion de coupure qui sert à définir un nombre irrationnel [1]; je ne toucherai que quelques points de cette théorie, de manière à faire comprendre comment elle peut se développer, et je ne craindrai pas d'avoir recours, au besoin, à l'intuition géométrique qui résulte de la représentation, sur l'axe X'X, des nombres rationnels ou non.

Je me placerai, dans ce qui suit, au point de vue du n° **12**, où la définition d'un nombre A est obtenue par la séparation de tous les nombres rationnels en deux classes, s'il s'agit d'un nombre irrationnel, en trois classes, s'il s'agit d'un nombre rationnel. Je pourrai ainsi raisonner à la fois sur les nombres rationnels et les nombres irrationnels.

Deux nombres A, B sont dits *égaux* quand leur définition est la même, quand les deux ou trois classes qui définissent l'un sont composées respectivement des mêmes nombres rationnels que les deux ou trois classes qui définissent l'autre. Ils sont le même nombre, ce que l'on marque en écrivant $A = B$. Ils sont représentés, sur l'axe X'X, par le même point, dont l'un ou l'autre est l'abscisse. Inversement, on a vu qu'à un point de cet axe ne correspond qu'un seul nombre,

---

[1] C'est dans ce sens qu'elle est développée dans le premier Chapitre de mon *Introduction à la Théorie des fonctions*, 2e édition, t. I, A. Hermann, 1904. J'aurai plusieurs fois à renvoyer le lecteur à cet Ouvrage, où les démonstrations sont présentées à un autre point de vue que dans les présentes *Leçons*. Ces renvois seront faits sous la rubrique : *Intr.*

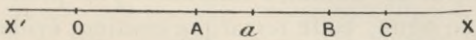
son abscisse. Lorsque deux nombres sont égaux ils ont même représentation décimale : réciproquement, quand les représentations décimales de deux nombres sont les mêmes, ces deux nombres sont égaux.

Lorsque la définition des nombres A et B n'est pas la même, c'est que les classes qui définissent l'un des nombres ne sont pas les mêmes que celles qui définissent l'autre, que les points de l'axe X′X dont ces nombres sont les abscisses respectives ne sont pas les mêmes.

J'introduis ici la convention commode d'employer le même symbole, numérique ou littéral, pour désigner à la fois un nombre et le point de l'axe X′X dont ce nombre est l'abscisse. En mettant le mot *nombre* ou le mot *point* devant ce symbole, on évite toute confusion.

Si les deux nombres A, B ne sont pas égaux, c'est que les deux points A, B ne coïncident pas ; l'un de ces points, B par exemple, est au delà de l'autre A ; on dit alors que le nombre B est plus grand

Fig. 3.



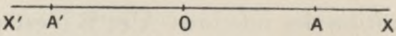
que le nombre A, que le nombre A est plus petit que le nombre B, et l'on écrit $B > A$ ou $A < B$; il y a entre les points A, B des points d'abscisse rationnelle ; si a est un tel point, on voit que le nombre rationnel a appartient à la classe supérieure relative à A, à la classe inférieure relative à B ; réciproquement, s'il existe un tel nombre, le point dont il est l'abscisse est à droite du point A, à gauche du point B ; le point B est à droite de A, le nombre B est plus grand que le nombre A. L'existence d'un nombre rationnel plus grand que le nombre A, plus petit que le nombre B, peut donc être prise pour la définition *abstraite* (1) de l'inégalité $B > A$. Les inégalités $B > A$, $C > B$ entraînent $C > A$, car le point B étant à droite du point A, le point C étant à droite du point B, il faut bien que le point C soit à droite du point A.

Un nombre est dit *positif* s'il est plus grand que zéro, *négatif* s'il est plus petit que zéro ; les nombres positifs sont représentés par des

(1) C'est sur cette définition *abstraite* que, logiquement, la théorie de l'inégalité doit être fondée (*Intr.*, p. 17).

points situés à droite du point O ; les nombres négatifs, par des points situés à gauche du point O.

Fig. 4.



A tout point de l'axe correspond un point A′, symétrique de A par rapport au point O. Les nombres A et A′ sont dits *symétriques* (¹); chacun d'eux est le symétrique de l'autre ; le nombre zéro doit être regardé comme son propre symétrique. Des deux nombres A, A′, s'ils ne sont pas nuls tous deux, l'un est positif, l'autre est négatif.

Si A désigne un nombre, on convient de représenter par $+$ A le même nombre que A, par $-$ A le symétrique de A.

Si le nombre A est défini par une coupure, il est bien aisé de voir quelle est la coupure qui définit le nombre symétrique A′ : les nombres rationnels plus petits que A′ sont les nombres rationnels plus grands que A changés de signe ; les nombres rationnels plus grands que A′ sont les nombres rationnels plus petits que A, également changés de signe ; cette remarque contient évidemment la définition abstraite de deux nombres symétriques.

Celui des deux nombres A, $-$ A qui est positif peut être regardé comme la valeur absolue commune à ces deux nombres.

17. **Addition, soustraction.** — Soient A, B deux nombres quelconques ; la somme A $+$ B de ces deux nombres est, par définition, un nombre plus grand que la somme de deux nombres rationnels quelconques, respectivement plus petits que A, B et plus petit que la somme de deux nombres rationnels quelconques, respectivement plus grands que A, B.

Voici comment on doit pratiquer la séparation des nombres rationnels en deux ou trois classes qui définit cette somme au sens du n° 12.

On range dans une première classe tout nombre rationnel égal ou inférieur à la somme de deux nombres rationnels, respectivement plus petits que A et

(¹) On dit plus souvent *égaux et de signes contraires* : outre qu'elle est longue, cette façon de parler est contradictoire ; si deux nombres sont égaux, ils ne sont pas de signes contraires. Il faudrait, pour la rendre correcte, l'allonger encore et dire *égaux en valeur absolue et de signes contraires*. Enfin on verra plus loin qu'elle ne peut s'appliquer aux nombres imaginaires, qui n'ont pas de *signe*.

que B : dans une seconde classe tout nombre rationnel égal ou supérieur à la somme de deux nombres, respectivement plus grands que A et que B. Il est clair que chaque nombre de la première classe est inférieur à n'importe quel nombre de la seconde classe.

Il n'y a pas, dans la première classe, de nombre plus grand que tous les autres nombres de cette classe, car, si le nombre c a été rangé dans la première classe, c'est qu'il est inférieur ou égal à la somme de deux nombres rationnels a, b, respectivement plus petits que A, B ; or, dans la classe inférieure relative à A, il y a un nombre rationnel a' plus grand que a, dans la classe inférieure relative à B, il y a un nombre rationnel b' plus grand que b ; leur somme $a'+b'$ a dû être rangée dans la première classe de notre classification : or, elle est plus grande que $a+b$ et, par suite que c. De même, il n'y a pas, dans la seconde classe, de nombre qui soit plus petit que tous les autres nombres de cette classe.

Enfin il y a des nombres pris respectivement dans la première et dans la seconde classe, qui diffèrent aussi peu qu'on le veut : si l'on veut avoir deux pareils nombres, dont la différence soit moindre que ε, il suffira de choisir deux nombres rationnels a et a_1, l'un plus petit, l'autre plus grand que A et tels que l'on ait $a_1 - a < \frac{\varepsilon}{2}$, puis deux nombres rationnels b, b_1 l'un plus petit, l'autre plus grand que B et tels que l'on ait $b_1 - b < \frac{\varepsilon}{2}$; $a+b$ appartiendra à la première classe, a_1+b_1 à la seconde, et l'on aura $(a_1+b_1)-(a+b) < \varepsilon$.

D'après cela, il ne peut échapper qu'un seul nombre rationnel à notre classification : en effet, un nombre rationnel α qui échappe à cette classification est forcément plus grand que la somme de deux nombres rationnels quelconques, respectivement plus petits que A, B, c'est-à-dire que n'importe quel nombre de la première classe, et plus petit que n'importe quel nombre de la seconde classe ; il ne peut donc y avoir deux nombres rationnels α, β $(\alpha < \beta)$ qui échappent à la classification, puisque alors la différence entre un nombre de la seconde classe (plus grand que β) et un nombre de la première (plus petit que α) devrait être supérieure à $\beta - \alpha$.

S'il n'échappe aucun nombre à la classification, celle-ci définit une coupure du type I, c'est-à-dire un nombre irrationnel, qui satisfait manifestement à la définition de la somme qu'on a donnée au début.

S'il échappe un seul nombre rationnel à cette classification, c'est ce nombre rationnel lui-même qui est la somme des nombres A, B. On est dans le cas de la séparation en trois classes.

La définition adoptée pour la somme de deux nombres A, B s'étend de suite à la somme d'autant de nombres A, B, C, ..., L que l'on voudra. Celle-ci est plus grande que la somme de nombres rationnels quelconques, respectivement plus petits que A, B, C, ..., L, et plus petite que la somme de nombres rationnels quelconques, respectivement plus grands que A, B, C, ..., L.

Que cette condition définisse une séparation des nombres rationnels en deux ou trois classes (n° 12), c'est-à-dire un nombre irrationnel ou rationnel, c'est ce qui résulte évidemment des raisonnements employés pour le cas de deux nombres.

Il résulte de cette définition, et de ce fait que la somme de plusieurs nombres rationnels ne dépend pas de l'ordre de ces nombres, que la somme des nombres A, B, C, ..., L ne dépend pas non plus de leur ordre, puisque, quel que soit cet ordre, les classes inférieure ou supérieure relatives à la somme seront constituées de la même façon.

Au lieu de définir tout d'un coup la somme des nombres A, B, ..., L, on peut les supposer rangés dans un certain ordre, ajouter le second au premier, le troisième au résultat, le quatrième au nouveau résultat, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les nombres. En se reportant au cas de deux nombres, on reconnaît de suite que la somme, ainsi définie, satisfait à la condition imposée par la première définition, en sorte que les deux définitions sont équivalentes.

Comme on peut amener aux premiers rangs tels termes de la somme que l'on veut, et que, d'après la seconde définition, on doit, pour effectuer la somme, ajouter d'abord entre eux ces premiers termes, on voit que, dans une somme quelconque, on peut remplacer tels termes que l'on veut par leur somme effectuée.

Pour figurer la somme de nombres représentés par des lettres ou des symboles quelconques, rangés dans un ordre déterminé, on commence par placer le signe $+$ devant ceux de ces symboles qui n'ont pas de signe apparent, et l'on écrit les uns à la suite des autres ces symboles ainsi affectés de signes : toutefois l'habitude est de supprimer le signe qui précède le premier symbole, si c'est un signe $+$. Ainsi $A - B + C$ représente la somme obtenue en ajoutant à A le nombre $-B$, puis le nombre C au résultat.

Les propriétés fondamentales de l'addition peuvent être résumées dans les formules suivantes :

$$A + B = B + A, \tag{1}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \tag{2}$$

$$A + 0 = A, \tag{3}$$

$$A - A = 0. \tag{4}$$

Les deux premières se trouvent avoir été démontrées par ce qui précède : elle constituent ce que l'on appelle la propriété *commutative* et la propriété *associative* de l'addition.

En les admettant, et en regardant une somme d'un nombre quelconque de termes comme obtenue en ajoutant le second au premier, le troisième au résultat, etc., elles suffisent à montrer que, dans une pareille somme, on peut intervertir l'ordre des deux premiers termes, des deux derniers, de deux termes consécutifs; qu'on peut ranger les termes dans l'ordre qu'on veut, remplacer enfin tels termes que l'on veut par leur somme effectuée. A cause des égalités (3) et (4), qui se démontrent sans peine en recourant aux définitions, on peut, dans une somme quelconque, supprimer des termes dont la somme est nulle et, en particulier, deux termes symétriques.

Deux nombres A et B étant donnés, la différence entre le nombre A et le nombre B est, par définition, un nombre x tel que l'on ait

$$\mathrm{B} + x = \mathrm{A}.$$

Supposons que ce nombre x existe, en ajoutant $-\mathrm{B}$ aux deux membres de l'égalité précédente, on voit qu'on doit avoir

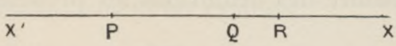
$$\mathrm{B} + x - \mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{B};$$

or, le premier membre est égal à x, d'après les remarques précédentes; le nombre x, s'il existe, est la somme du nombre A et du symétrique $-\mathrm{B}$ du nombre B; d'ailleurs, si l'on ajoute B à cette somme $\mathrm{A} - \mathrm{B}$, elle devient $\mathrm{A} - \mathrm{B} + \mathrm{B}$ ou A, en vertu des mêmes remarques; le nombre x existe, il est unique, et égal à $\mathrm{A} - \mathrm{B}$; ce dernier symbole représente aussi bien la différence entre A et B que la somme de A et de $-\mathrm{B}$.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer l'égalité

$$\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}},$$

Fig. 5.



où $\overline{\mathrm{PR}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$ sont les équivalents algébriques des vecteurs PR, PQ, QR situés sur l'axe X′X, dans le cas où ces vecteurs ne sont pas tous commensurables à l'unité de longueur. Cette démonstration, lorsque les nombres $\overline{\mathrm{PR}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{QR}}$ sont positifs et mesurent ainsi les longueurs des segments PR, PQ, QR, résulte de ce que le segment PR est plus grand que les segments obtenus en plaçant bout à bout deux segments respectivement plus petits que PQ, QR et plus petit que le segment obtenu en plaçant bout à bout deux segments respectivement plus grands que PQ, QR, en sorte que le nombre qui mesure la longueur de PR doit être plus grand que la somme de deux nombres rationnels mesurant les longueurs de deux segments, commensurables à l'unité de longueur, respectivement plus petits que PQ, QR, ... On reconnaît la définition de la somme des deux nombres $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$. La proposition, démontrée dans ce cas, s'étend ensuite, comme on le sait, à tous les autres, en examinant les diverses dispositions que peuvent avoir les points P, Q, R sur l'axe X'X.

18. **Multiplication, division.** — Pour définir le produit de deux nombres A et B, je supposerai d'abord que ces deux nombres soient positifs ; alors le produit AB de ces deux nombres est, par définition, un nombre positif plus grand que le produit de deux nombres rationnels positifs plus petits respectivement que A, B et plus petit que le produit de deux nombres rationnels plus grands que A, B.

La séparation des nombres rationnels en deux ou trois classes, qui, d'après cela, définit le nombre AB, est pareille à celle qu'on a expliquée tout au long pour l'addition ; elle repose sur ce qu'un produit de deux facteurs augmente quand on augmente ces facteurs et sur ce qu'il varie très peu quand on modifie très peu les facteurs ; je ne m'y arrêterai pas davantage.

Quand l'un des nombres A, B est nul, le produit AB est nul par définition.

Quand l'un ou l'autre des nombres A, B est négatif, on définit la valeur absolue du produit comme le produit des valeurs absolues de ces deux nombres, et l'on complète la définition du produit AB par la règle des signes, telle qu'on l'enseigne au début de l'Algèbre. Pour définir le produit de plusieurs nombres positifs A, B, C, ..., L rangés (ou non) dans un certain ordre, on peut procéder comme pour l'addition, définir ce produit tout d'un coup, ou de proche en proche. Dans le premier cas on suppose d'abord, comme pour deux facteurs, que les nombres A, B, C, ..., L sont positifs et l'on complète la définition encore par la règle des signes.

Il est aisé de déduire des définitions les propriétés qu'expriment les égalités

$$AB = BA, \tag{1}$$

$$A(BC) = (AB)C, \tag{2}$$

$$(A + B)C = AC + CB, \tag{3}$$

$$A \times 1 = A, \tag{4}$$

auxquelles je joins encore celle-ci :

$$A \times 0 = 0, \tag{5}$$

que j'ai signalée plus haut comme une définition.

Les égalités (1), (2) expriment ce que l'on appelle les propriétés *commutative* et *associative* de la multiplication, l'égalité (3) la propriété *distributive* relativement à l'addition.

Les propositions bien connues relatives à un produit de plusieurs facteurs se déduisent sans peine de celles qu'on vient d'écrire. Il en est de même de celles qui concernent les *exposants*.

A chaque nombre A, non nul, correspond son inverse B, tel que l'on ait $AB = 1$. Supposons d'abord que A soit positif, la séparation des nombres rationnels en classes qui définit le nombre B s'obtiendra comme il suit : dans la première classe on range tout nombre qui est l'inverse d'un nombre rationnel plus grand que A, le nombre o et les nombres négatifs ; dans la seconde classe, tout nombre qui est l'inverse d'un nombre rationnel positif plus petit que A.

Il est bien aisé de voir que cette définition implique l'égalité $AB = 1$ et qu'elle est nécessitée par cette égalité.

Si le nombre A est négatif, son inverse est un nombre négatif dont la valeur absolue est l'inverse de la valeur absolue du nombre A.

Si B est l'inverse de A, A est l'inverse de B. L'inverse de A se représente par $\frac{1}{A}\cdot$

Le nombre o ne peut avoir d'inverse, à cause de l'égalité (5).

Les deux nombres A, B étant donnés, et le second n'étant pas nul, le rapport de A à B, ou le quotient (exact) de A par B, est, par définition, un nombre x tel que l'on ait

$$Bx = A.$$

Ce nombre est unique et s'obtient en multipliant A par l'inverse de B ; c'est ce qu'on reconnaît sans peine en copiant le raisonnement qui a été fait pour la soustraction : il se représente par $\frac{A}{B}$ ou $A : B$.

Les propriétés qu'expriment les égalités

$$\frac{Am}{Bm} = \frac{A}{B},$$

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C},$$

$$\frac{A}{B} \times \frac{A'}{B'} = \frac{AA'}{BB'},$$

$$\frac{A}{B} : \frac{A'}{B'} = \frac{AB'}{A'B'}$$

se démontrent comme dans les éléments de l'Algèbre.

19. Le lecteur n'a pas manqué de remarquer que les définitions et démonstrations ont été données de façon à s'appliquer aussi bien aux nombres rationnels qu'aux nombres irrationnels, et que, quand il s'agit de nombres rationnels, les définitions des opérations sont d'accord avec les définitions classiques.

Les propositions fondamentales relatives au calcul des nombres rationnels s'étendent donc au calcul des nombres irrationnels ; il en est de même de toutes les conséquences qu'on en déduit dans les éléments de l'Algèbre, conséquences sur lesquelles je crois inutile d'insister.

En particulier, les règles élémentaires relatives aux combinaisons d'inégalités résultent de ces propositions. Voici quelques applications importantes de ces règles au sujet qui nous occupe.

Si A est un nombre quelconque, il y a, parmi les nombres (rationnels) de la classe inférieure relative à A et ceux de la classe supérieure relative à A, des nombres qui diffèrent de A aussi peu qu'on le veut : en effet, il y a dans les deux classes des nombres qui diffèrent entre eux aussi peu qu'on le veut et leur différence mutuelle est plus grande, en valeur absolue, que la différence de l'un ou l'autre d'entre eux avec A.

Si, en représentant par α un nombre rationnel positif, on désigne par $n\alpha$ et $(n+1)\alpha$ les valeurs approchées de A à α près par défaut et par excès, il est maintenant permis d'écrire, quel que soit A, les inégalités $n\alpha \leqq A < (n+1)\alpha$ et de dire que la différence entre $n\alpha$ ou $(n+1)\alpha$ et A est, en valeur absolue, au plus égale à α. Chacune de ces différences, évidemment variables avec α, reste plus petite que tel nombre positif qu'on voudra, pourvu que α reste lui-même suffisamment petit; c'est ce qu'on exprime en disant que les valeurs approchées de A à α près, par défaut ou par excès, ont pour limite A, quand α tend vers *zéro*.

Plus particulièrement, si l'on désigne par u_n la valeur approchée de A à $\frac{1}{10^n}$ près, par défaut, on dira que u_n a pour limite A, quand n augmente indéfiniment, ou que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite A, pour dire que la différence entre A et u_n reste, en valeur absolue, plus petite que tel nombre positif qu'on veut, pourvu que n soit suffisamment grand. La même façon de parler s'applique naturellement aux valeurs approchées, à $\frac{1}{10^n}$ près, par excès.

On est assuré que les deux nombres A, B sont égaux lorsqu'on peut prouver que leur différence A — B est moindre, en valeur absolue, que tel nombre positif ε que l'on veut. En effet, si les deux nombres n'étaient pas égaux, leur différence ne serait pas nulle et, en prenant ε inférieur à la valeur absolue de cette différence, il serait impossible que la valeur absolue de A — B fût moindre que ε.

Plus particulièrement, comme l'on a, quel que soit a,

$$A - B = (A - a) - (B - a),$$

on est assuré de l'égalité des deux nombres A, B, quand on est assuré de pouvoir trouver des nombres a dont la différence avec A et B soit moindre, en valeur absolue, que tel nombre positif que l'on voudra. Par exemple, si l'on sait seulement que les classes inférieures relatives aux nombres A, B sont identiques, sans rien savoir sur les autres classes relatives à ces deux nombres, on peut affirmer que ces deux nombres sont égaux; il y a, en effet, dans la classe inférieure commune à A et à B, des nombres rationnels a qui approchent autant qu'on le veut de A et de B.

C'est sur les propriétés fondamentales des opérations, ou sur les combinaisons d'inégalités résultant de ces propriétés, qu'on fonde en arithmétique la théorie des erreurs et des calculs approchés; cette théorie s'applique sans difficulté aux nombres irrationnels dont on a des valeurs approchées ([1]). Connaissant des valeurs rationnelles a,

---

([1]) Les mots *valeur approchée* peuvent être pris dans des sens différents, qu'il importe de distinguer.

Les valeurs approchées d'un nombre a, à α près, par défaut et par excès, ont été définies d'une façon précise aux numéros 5, 13.

Quand on dit une valeur *approchée* du nombre A, sans épithète, on entend simplement un nombre a qui diffère peu de A, un nombre tel que la valeur absolue de l'*erreur* $A - a$ que l'on commet en remplaçant A par a soit *petite :* Sur le sens des mots *petit* et *grand*, je donnerai tout à l'heure quelques explications. Si l'on dit d'un nombre a qu'il est une valeur approchée de A avec une erreur moindre que le nombre positif α, on entend que la valeur absolue de la différence $A - a$ est moindre que α ou, ce qui revient au même, que A est compris entre $a - \alpha$ et $a + \alpha$: a n'est pas nécessairement alors une valeur approchée de A à α près, sauf dans le cas où a est de la forme $n\alpha$, n étant un nombre entier, positif ou nul; si les représentations décimales des nombres $a - \alpha$, $a + \alpha$ coïncident dans leurs premiers chiffres, ceux-ci appartiennent à la représentation décimale de A.

Voici maintenant quelques observations sur la signification des mots *petit, grand,* auxquels le lecteur est prié de se reporter à l'occasion : *il ne s'agit ici que des va-*

b, c, ..., approchées de nombres quelconques A, B, C, ... et des limites supérieures des valeurs absolues des erreurs $A-a$, $B-b$, $C-c$, ..., on sait calculer une limite supérieure des erreurs commises en remplaçant dans une addition, une soustraction, une multiplication, une division, les nombres exacts par leurs valeurs approchées; on sait trouver aussi, pour ces diverses opérations, une limite de l'erreur qu'il est permis de commettre sur les nombres approchés pour que l'erreur sur le résultat ne dépasse pas une limite donnée.

Si, par exemple, on veut avoir le produit du nombre

$$e = 2,7182818\ldots, \qquad \pi = 3,1415926\ldots,$$

avec une erreur moindre que $\frac{1}{1000}$, on pourra substituer à ces nombres les valeurs $e' = 2,7183$, $\pi' = 3,1416$, approchées toutes les deux par excès avec une

---

leurs absolues. Il restera d'ailleurs, dans l'emploi de ces termes, une certaine imprécision.

Tout d'abord il est nécessaire de distinguer le sens absolu et le sens relatif des mots *petit* et *grand*. Quand ces mots sont employés au sens absolu, on doit regarder le nombre 1 comme n'étant ni petit ni grand; si maintenant il s'agit d'un nombre positif a, le plus simple pour évaluer, dans quelque mesure, sa petitesse ou sa grandeur, paraît être de se reporter à sa représentation décimale : si cette représentation comporte une partie entière, non nulle, le nombre a ne sera pas *petit;* il ne conviendrait guère de le regarder comme grand si cette partie entière ne comporte qu'un chiffre; le nombre de chiffres de cette partie entière fournira une évaluation grossière de l'ordre de grandeur de a. On voit le vague qui subsiste dans cette définition, puisque deux nombres entiers, l'un de trois chiffres, par exemple, l'autre de quatre, peuvent différer très peu. Lorsque la partie entière est nulle, le nombre n'est pas *grand*. Il ne conviendra guère de le regarder comme petit si le premier chiffre décimal n'est pas un zéro : le nombre de zéros qui suivent la virgule avant qu'on rencontre un chiffre autre qu'un zéro fournira de même une évaluation grossière de l'ordre de petitesse du nombre, avec la même restriction que tout à l'heure. Il est clair que l'inverse d'un grand nombre doit être regardé comme petit, que l'inverse d'un petit nombre doit être regardé comme grand. En disant qu'un nombre a est voisin d'un nombre b, on entend que la valeur absolue de la différence $a-b$ est petite. J'emploierai souvent l'expression *un nombre voisin de* 0, pour dire un nombre dont la valeur absolue est petite, afin d'éviter la confusion entre les deux sens du mot *petit,* suivant qu'il s'agit, ou non, des valeurs absolues.

En disant maintenant qu'un nombre (positif) a est *petit* ou *grand* par rapport à un nombre (positif) b, on entend que le rapport $\frac{a}{b}$ est petit, ou grand, au sens absolu que l'on vient d'essayer de préciser.

Disons de suite que les mots *infiniment petit, infiniment grand,* dont on fera ultérieurement usage, ont une signification tout autre; ils ne s'appliquent qu'à des *variables :* il s'agissait ici de nombres fixes.

erreur moindre que $\frac{1}{2.10^4}$, l'erreur sur le produit 8,53981128 sera en trop et moindre que

$$\frac{3+4}{2.10^4} < \frac{4}{10^4};$$

le produit cherché sera inférieur à 8,53982 et supérieur à 8,5394; la valeur 8,539 est approchée à un millième près par défaut. On aurait pu se servir aussi, pour atteindre le même but, de la règle de la multiplication abrégée.

J'ajoute enfin une dernière remarque.

Si l'on combine par addition, soustraction, multiplication ou division un nombre rationnel non nul a et un nombre irrationnel A, le résultat est un nombre irrationnel, comme on le voit de suite en raisonnant par l'absurde : si le produit aA, par exemple, était un nombre rationnel b, l'égalité $aA = b$ entraînerait $A = \frac{b}{a}$; A serait rationnel.

La proposition subsiste pour l'addition et la soustraction lors même que a est nul.

Si les deux nombres que l'on combine sont irrationnels, le résultat peut être rationnel ou irrationnel. Par exemple le produit de $\sqrt{2}$ par $\sqrt{2}$ est 2, comme on le reconnaît en se reportant aux définitions de $\sqrt{2}$ et du produit de deux nombres irrationnels : ce fait est d'ailleurs un cas particulier d'une proposition générale, qui sera démontrée au numéro suivant.

§ 2. — CALCUL DES RADICAUX. EXPOSANTS FRACTIONNAIRES, NÉGATIFS, IRRATIONNELS.

20. Définition de la racine $m^{\text{ième}}$. — Soient m un nombre naturel autre que 1 et A un nombre positif quelconque, la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique de A est un nombre positif qui, élevé à la puissance m, reproduit A. Un tel nombre, s'il existe, est évidemment unique, puisque la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre positif, plus petit ou plus grand que lui, est évidemment plus petite ou plus grande que A.

S'il y a un nombre rationnel dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale à A, c'est le nombre cherché : ceci ne peut arriver que si A est lui-même rationnel, puisque le produit de plusieurs nombres rationnels est toujours rationnel.

Supposons maintenant qu'il n'y ait aucun nombre rationnel positif dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale à A; alors les nombres rationnels positifs pourront se séparer en deux classes; on mettra dans la première tous ceux dont la $m^{\text{ième}}$ puissance est moindre que A, dans la seconde tous ceux dont la $m^{\text{ième}}$ puissance dépasse A : les nombres de la première classe sont tous plus petits que n'importe quel nombre de la seconde classe; on a donc défini une coupure dans l'ensemble des nombres rationnels positifs; cette coupure définit elle-même un nombre B; le produit de m nombres rationnels positifs plus petits que B est au plus égal à la puissance $m^{\text{ième}}$ du plus grand d'entre eux, qui appartient à la première classe : cette puissance $m^{\text{ième}}$ est donc moindre que A : le produit de m nombres rationnels positifs moindres que B est inférieur à A; de même le produit de m nombres rationnels plus grands que B dépasse A. A est donc, en vertu de la définition de la multiplication, égal au produit de m nombres égaux à B, égal à B^m. B est la racine $m^{\text{ième}}$ de A; cette racine se représente par $\sqrt[m]{A}$; l'*indice* m se supprime habituellement quand il est égal à 2.

Lorsque A est nul, sa racine $m^{\text{ième}}$ est nulle aussi.

Lorsque A est négatif, il y a lieu de distinguer deux cas, suivant que m est pair ou impair.

Si A est négatif et m pair, il n'y a pas de nombre réel (¹) dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale à A, puisque la puissance $m^{\text{ième}}$ de 0 est 0, et que la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un nombre positif ou négatif est un nombre positif. Le symbole $\sqrt[m]{A}$ est dénué de sens.

Si A est négatif et m impair, il y a un nombre et un seul dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est égale à A, c'est le nombre négatif $-\sqrt[m]{|A|}$ (²); il serait légitime de remplacer ce symbole par $\sqrt[m]{A}$; toutefois il nous sera commode, dans ce qui suit, de supposer que les nombres dont on prend la racine ne sont jamais négatifs.

Remarquons enfin que, si A est positif, et si m est pair, il y a deux nombres réels dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est égale à A, et seulement deux. $\sqrt[m]{A}$ représentera toujours dans ce qui suit le nombre *positif* unique dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est égale à A ou, comme on dit, la racine $m^{\text{ième}}$

(¹) Je rappelle que les nombres *réels* sont le nombre 0 et les nombres relatifs dont la valeur absolue est un nombre rationnel ou irrationnel; les nombres *réels* ont seuls été définis jusqu'ici.

(²) Le symbole $|A|$ s'énonce et veut dire valeur absolue de A.

arithmétique de A; la puissance $m^{\text{ième}}$ du nombre négatif $-\sqrt[m]{A}$ est aussi égale à A; c'est d'ailleurs le seul nombre négatif qui jouisse de cette propriété, puisque la puissance $m^{\text{ième}}$ de la valeur absolue d'un tel nombre doit être égale à A, en sorte que cette valeur absolue est le nombre $\sqrt[m]{A}$, défini plus haut. Lorsque m est impair, il n'y a pas de nombre négatif dont la puissance $m^{\text{ième}}$ soit égale au nombre positif A.

D'après les conventions qui précèdent, on doit écrire $\sqrt{a^2} = a$ ou $\sqrt{a^2} = -a$, suivant que a est positif ou négatif : on a, dans tous les cas, $\sqrt{a^2} = |a|$.

21. Je répète encore une fois que, dans ce qui suit, les nombres dont on écrira les racines seront toujours supposés positifs ou nuls, ainsi que les racines elles-mêmes. Pour prouver qu'un nombre B est la racine $m^{\text{ième}}$ arithmétique d'un nombre positif A, il suffira de prouver que ce nombre est positif et que sa puissance $m^{\text{ième}}$ est égale à A.

Pour extraire la racine $m^{\text{ième}}$ d'un produit de nombres positifs, ou du rapport de deux nombres positifs, on peut extraire la racine $m^{\text{ième}}$ de chacun des facteurs du produit, ou de chacun des termes du rapport : en d'autres termes, si $a, b, c, \ldots, l$ représentent des nombres positifs, on a

$$(1) \qquad \sqrt[m]{abc\ldots l} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}\,\sqrt[m]{c}\ldots\sqrt[m]{l},$$

$$(2) \qquad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}};$$

Dans les deux égalités, les deux membres sont essentiellement positifs; pour démontrer la première il suffit de prouver que la puissance $m^{\text{ième}}$ du second membre est égale à $abc\ldots l$; or, cela résulte de ce que la puissance $m^{\text{ième}}$ d'un produit s'obtient en élevant chacun des facteurs à la puissance m. La seconde résulte de même de la règle pour élever un rapport à la puissance m.

Si a et k sont des nombres positifs, on a

$$(3) \qquad k\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{k^m a};$$

en effet, le second membre d'après l'égalité (1) est égal à $\sqrt[m]{k^m}\sqrt[m]{a}$, et par conséquent à $k\sqrt[m]{a}$.

Par exemple $2\sqrt{2}$ est égal à $\sqrt{8}$.

L'égalité (3) permet de faire *entrer* un facteur positif sous un radical qui le multiplie; on fait passer le facteur sous le radical, en l'élevant à la puissance marquée par l'indice du radical; inversement on peut faire *sortir* d'un radical, dont l'indice est m, un facteur qui est une puissance $m^{\text{ième}}$ exacte, en extrayant la racine $m^{\text{ième}}$ de ce facteur.

Si, a étant toujours positif, k était négatif et si m était pair, k^m serait positif; on aurait alors

$$\sqrt[m]{k^m a} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{k^m} = -k\sqrt[m]{a};$$

le dernier membre est positif comme le premier.

Si dans l'égalité (1) on suppose que les nombres a, b, ..., l soient égaux et qu'il y ait p de ces nombres, elle devient

$$(4) \qquad \sqrt[m]{a^p} = (\sqrt[m]{a})^p.$$

Ainsi, pour élever à la puissance $p^{\text{ième}}$ la racine $m^{\text{ième}}$ d'un nombre positif, on peut élever ce nombre à la puissance p, et en extraire ensuite la racine $m^{\text{ième}}$; on dit, dans le même sens, que, pour élever un radical d'indice m à la puissance p, il suffit d'élever à la puissance p la quantité sous le radical ou, ce qui revient au même, de multiplier par p l'exposant dont est affectée cette quantité sous le radical.

Pour le même objet, on peut tout aussi bien, lorsque l'indice du radical est un multiple de p, diviser cet indice par p; en d'autres termes, si l'on suppose $m = pq$, q étant entier, on a

$$(5) \qquad \left(\sqrt[pq]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a};$$

les deux membres de cette égalité étant positifs, il suffit, pour prouver leur égalité, de montrer que leurs puissances $q^{\text{ièmes}}$ sont égales; la puissance $q^{\text{ième}}$ du second membre est a, celle du premier est $\left(\sqrt[pq]{a}\right)^{pq}$ ou a.

Pour extraire la racine $p^{\text{ième}}$ d'un radical, il suffit d'en multiplier l'indice par p; en d'autres termes, on a

$$(6) \qquad \sqrt[p]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mp]{a}.$$

Il suffit en effet de prouver que les puissances $mp^{\text{ièmes}}$ des deux membres sont égales; celle du second membre est évidemment a; celle du premier peut s'obtenir en l'élevant d'abord à la puissance p, ce qui donne $\sqrt[m]{a}$, puis en élevant le résultat à la puissance m, ce qui donne encore a. L'égalité (6) entraîne évidemment la suivante

$$(7) \qquad \sqrt[p]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{a}},$$

qui peut s'énoncer ainsi : pour extraire la racine $p^{\text{ième}}$ d'un radical d'indice m, il suffit d'extraire la racine $p^{\text{ième}}$ de la quantité sous ce radical. Si la quantité sous le radical est une puissance $p^{\text{ième}}$; si, en particulier, elle est mise sous la forme d'une quantité affectée d'un exposant qui soit un multiple de p, il suffira, pour extraire la racine $p^{\text{ième}}$, de diviser cet exposant par p. On a, en d'autres termes,

$$(8) \qquad \sqrt[p]{\sqrt[m]{b^{pq}}} = \sqrt[m]{\sqrt[p]{b^{pq}}} = \sqrt[m]{b^q}.$$

Par exemple : $\sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2}} = \sqrt[3]{2}$.

Si un radical porte sur une quantité affectée d'un exposant, si l'indice du radical et l'exposant de la quantité sous le radical ont un facteur commun, on peut supprimer ce facteur; en d'autres termes, on a

$$\sqrt[pq]{a^{rq}} = \sqrt[p]{a^r};$$

le premier membre est en effet égal à la racine $p^{\text{ième}}$ de $\sqrt[q]{a^{rq}}$ ou de a^r. Cette proposition permet de *simplifier* un radical en divisant l'indice du radical et l'exposant de la quantité sous le radical par leur plus grand commun diviseur.

On a par exemple

$$\sqrt[24]{2^{18}} = \sqrt[4]{2^3}.$$

Inversement, on peut évidemment multiplier par un même nombre naturel l'indice d'un radical et l'exposant de la quantité sous le radical.

Cette remarque permet, étant donnés plusieurs radicaux d'indices différents, de les remplacer par des radicaux égaux, et de même indice. On peut prendre pour l'indice commun le plus petit commun multiple des indices donnés. On élèvera la quantité placée sous chaque radical à une puissance dont l'exposant est le quotient du plus petit commun multiple par l'indice de ce radical.

Si, par exemple, on considère les radicaux $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[6]{5}$, $\sqrt[8]{7}$, on pourra les remplacer par

$$\sqrt[24]{3^{12}},\quad \sqrt[24]{2^8},\quad \sqrt[24]{5^4},\quad \sqrt[24]{7^3};$$

on aura, d'après l'égalité (1),

$$\sqrt{3}\,\sqrt[3]{2}\,\sqrt[6]{5}\,\sqrt[8]{7} = \sqrt[24]{3^{12}.2^8.5^4.7^3};$$

on aurait de même

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{2^2}}.$$

22. Exposants fractionnaires. — L'analogie entre la simplification des radicaux, la réduction de plusieurs radicaux à un même indice et la simplification des fractions, la réduction des fractions au même dénominateur est bien évidente; elle suggère naturellement la notation des exposants fractionnaires, que je vais expliquer.

Soit a un nombre positif : l'expression a^n est définie en Arithmétique comme le produit de n facteurs égaux à a; elle n'a de sens que si n est un nombre naturel; on va lui en donner un quand n est une fraction $\frac{p}{q}$ dont les termes sont des nombres naturels p, q : on a alors, par définition,

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p},$$

si q est plus grand que 1; lorsque q est égal à 1, on donne à $a^{\frac{p}{1}}$ la même signifiration qu'à a^p.

Le symbole $a^{\frac{p}{q}}$ conserve la même valeur quand on remplace $\frac{p}{q}$ par une fraction égale.

En effet, supposons d'abord que p soit divisible par q et que l'on ait $p = nq$, n étant un nombre naturel; on a, par définition,

$$a^{\frac{nq}{q}} = \sqrt[q]{a^{nq}},$$

et le second membre est égal à a^n : le résultat sera évidemment le même si l'on remplace la fraction $\frac{p}{q}$ par une autre fraction égale à n.

Si p n'est pas divisible par q, soit $\frac{p'}{q'}$ la fraction irréductible égale à $\frac{p}{q}$, on aura $p = p'r$, $q = q'r$, en désignant par r un nombre naturel; par définition, $a^{\frac{p}{q}}$ ou $a^{\frac{p'r}{q'r}}$ est égal à $\sqrt[q'r]{a^{p'r}} = \sqrt[q']{a^{p'}}$; le résultat sera évidemment le même si l'on remplace $\frac{p}{q}$ par n'importe quelle autre fraction égale, puisque celle-ci devra être égale à la même fraction irréductible $\frac{p'}{q'}$.

Avec cette notation, les règles relatives à la simplification d'un radical, ou à la réduction de plusieurs radicaux au même indice sont les mêmes que les règles relatives à la simplification d'une fraction, à la réduction de plusieurs fractions au même dénominateur.

Mais il y a plus, les autres règles relatives au calcul des exposants s'étendent à ces exposants fractionnaires : ces règles, que le lecteur traduira s'il le veut en langage ordinaire, s'expriment par les égalités suivantes, où a désigne toujours un nombre positif, où p, q, p', q' désignent des nombres naturels, d'ailleurs quelconques,

$$a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}}, \tag{1}$$

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}}, \tag{2}$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = a^{\frac{pp'}{qq'}}. \tag{3}$$

Considérons d'abord la première de ces égalités, elle a besoin de quelque explication : le second membre en effet n'a pas été défini : on n'a défini que les quantités affectées d'un exposant représenté par une fraction à termes entiers. Il faut entendre que $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}$ est remplacé par la fraction à termes entiers $\frac{pq' + p'q}{qq'}$, qui, en vertu des règles de l'Arithmétique, est la somme des deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$, ou par une fraction égale à $\frac{pq' + p'q}{qq'}$. Ces explications une fois comprises, la démonstration de l'égalité (1) est immédiate : le second membre est, par définition,

$$\sqrt[qq']{a^{pq'} . a^{p'q}} = \sqrt[qq']{a^{pq'}} . \sqrt[qq']{a^{p'q}} = \sqrt[q]{a^{p}} . \sqrt[q']{a^{p'}};$$

le dernier membre, d'après la définition des exposants fractionnaires, n'est autre chose que le premier membre de l'égalité à démontrer.

Il est bien aisé de voir que la règle qu'exprime l'égalité (1) pour deux facteurs s'étend à un produit de 3, 4, ... facteurs.

L'égalité (2) suppose, pour qu'elle ait un sens, que l'on ait $\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}$, ou $pq' > p'q$; on doit entendre le second membre, de la même façon que le second membre de l'égalité (1), c'est-à-dire que l'exposant $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}$ doit être remplacé par la fraction à termes entiers $\frac{pq' - p'q}{qq'}$, ou par une fraction égale; elle se démontre soit comme l'égalité (1), soit en constatant que, en vertu de l'égalité (1), les deux membres deviennent égaux quand on les multiplie par $a^{\frac{p'}{q'}}$.

L'égalité (3) est évidente si q et q' sont égaux à 1; la démonstration est immédiate si q' est égal à 1.

Je me borne au cas où q et q' sont plus grands que 1, le premier membre de l'égalité (3) représente, en vertu des définitions, la puissance p' de la racine q' de la quantité $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$; en d'autres termes, ce premier membre est égal à

$$\left[\sqrt[q']{\sqrt[q]{a^p}}\right]^{p'};$$

or, la quantité élevée à la puissance p' n'est autre chose que $\sqrt[qq']{a^p}$, et, pour élever cette quantité à la puissance p', il suffit de multiplier par p' l'exposant p de la quantité sous le radical; on obtient ainsi $\sqrt[qq']{a^{pp'}}$, qui est la définition même du second membre.

Cette égalité (3) contient, comme cas particuliers, les règles suivantes, où r désigne un nombre naturel.

Pour élever une quantité affectée d'un exposant fractionnaire à la puissance r, il suffit de multiplier par r le numérateur de l'exposant.

Pour extraire la racine $r^{\text{ième}}$ d'une quantité affectée d'un exposant fractionnaire, il suffit de multiplier par r le dénominateur de l'exposant.

Exposant zéro. — L'égalité (2) n'a pas de sens quand on a $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$: elle reste toutefois vraie si l'on convient de regarder a^0 comme égal à 1; c'est une convention qui sera adoptée dorénavant. Il est clair qu'en adoptant cette convention, on a les égalités analogues aux égalités (1), (2), (3)

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^0 = a^{\frac{p}{q}+0} = a^{\frac{p}{q}},$$

$$a^{\frac{p}{q}} : a^0 = a^{\frac{p}{q}-0} = a^{\frac{p}{q}}.$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^0 = a^{\frac{p}{q}\times 0} = a^0 = 1 = (a^0)^{\frac{p}{q}},$$

$$a^0 \times a^0 = a^{0+0} = a^0 = 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

en d'autres termes, les règles de calcul relatives aux exposants se conservent, avec cette nouvelle extension.

Exposants négatifs. — Les exposants rationnels que l'on a considérés étaient des nombres absolus, entiers, fractionnaires ou nuls. Conformément aux conventions de l'algèbre, on confond, ici encore, les nombres positifs avec leurs valeurs absolues; a^{+2}, $a^{+\frac{1}{2}}$ ont, par définition, le même sens que a^2, $a^{\frac{1}{2}}$.

On va, maintenant, définir les puissances négatives d'un nombre positif a.

On a, par définition, en désignant par α un nombre rationnel positif (ou absolu)

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^{\alpha}}; \tag{4}$$

d'une façon plus explicite, si $\frac{p}{q}$ est une fraction égale à α dont les termes soient des nombres naturels, on a

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}};$$

l'égalité (4), qui peut s'écrire $a^{-\alpha} . a^{\alpha} = 1$, pour s'énoncer en disant que, si l'on élève un même nombre positif a à deux puissances rationnelles qui soient des nombres symétriques α et $-\alpha$, on obtient deux nombres inverses l'un de l'autre; on voit dès lors qu'elle subsiste, lors même que α est négatif. En se reportant à la définition de l'exposant 0, on voit qu'elle est encore vraie quand α est nul.

Les règles relatives au calcul des exposants subsistent avec cette nouvelle extension, c'est-à-dire que l'on a, quels que soient les nombres *rationnels* α, β positifs, nuls ou négatifs,

$$a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}, \tag{5}$$

$$a^{\alpha}:a^{\beta}=a^{\alpha-\beta}, \tag{6}$$

$$(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha\beta}. \tag{7}$$

On doit entendre la première égalité, par exemple, de la façon suivante : dans le second membre, $\alpha+\beta$ doit être remplacé par la fraction $\pm\frac{p}{q}$, à termes entiers positifs p, q que l'on obtient en effectuant la somme $\alpha+\beta$, d'après les règles de l'arithmétique et de l'algèbre élémentaire, et $a^{\alpha+\beta}$ doit être regardé comme égal à $\sqrt[q]{a^p}$ ou à $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ suivant que la somme $\alpha+\beta$ est égale à $+\frac{p}{q}$ ou à $-\frac{p}{q}$. Si $\alpha+\beta$ était nul, $a^{\alpha+\beta}$ devrait être regardé comme égal à 1. Les autres égalités s'interprètent de la même façon.

Lorsque α et β sont positifs ou nuls, l'égalité (5) résulte des règles relatives aux exposants positifs ou nuls.

Si α est positif et si $\beta=-\beta'$ est négatif, le premier membre de l'égalité (5) est, par définition, égal à

$$a^{\alpha}.\frac{1}{a^{\beta'}}=a^{\alpha}:a^{\beta'}.$$

Si β' est égal ou inférieur à α, le second membre est égal à $a^{\alpha-\beta'}$; mais $\alpha-\beta'$ est alors égal à $\alpha+\beta$, l'égalité (5) est vérifiée. Si β' était supérieur à α, on aurait

$$a^{\alpha}:a^{\beta'}=\frac{1}{a^{\beta'-\alpha}}=a^{-(\beta'-\alpha)},$$

la dernière égalité résultant de la définition des exposants négatifs, puisque $\beta'-\alpha$ est positif; mais $-(\beta'-\alpha)$ n'est autre chose que $\alpha+\beta$; l'égalité (5) est encore vérifiée.

Si α est négatif et β positif, l'égalité (5) est encore vraie, comme on le voit en échangeant les deux nombres α, β : on est ramené au cas précédent.

Si $\alpha = -\alpha'$ et $\beta = -\beta'$ sont tous deux négatifs, le premier membre de l'égalité (5) est, par définition, égal à

$$\frac{1}{a^{\alpha'}} \cdot \frac{1}{a^{\beta'}} = \frac{1}{a^{\alpha'+\beta'}} = a^{-(\alpha'+\beta')} = a^{\alpha+\beta}.$$

Enfin, on reconnaît sans peine que l'égalité (5) est encore vraie quand l'un ou l'autre des nombres α, β est nul.

L'égalité (6) est contenue dans l'égalité (5) : en effet, on a, dans tous les cas,

$$\frac{1}{a^{\beta}} = a^{-\beta},$$

et, par suite,

$$\frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}} = a^{\alpha}.a^{-\beta};$$

or le second nombre, en vertu de l'égalité (5), est égal à a élevé à la puissance $\alpha + (-\beta) = \alpha - \beta$.

Enfin l'égalité (7) se démontre encore, dans tous les cas, en remontant aux définitions et aux règles pour la multiplication des nombres relatifs.

23. Exposants irrationnels. — Il reste, pour compléter ce sujet, à définir a^{α} quand α est irrationnel : on suppose toujours $a > 0$; je vais commencer par supposer $a > 1$. Le nombre irrationnel α est défini par une *coupure* qui sépare les nombres rationnels en deux classes, la classe inférieure qui comprend tous les nombres rationnels plus petits que α, la classe supérieure qui comprend tous les nombres rationnels plus grands que α. Par définition, a^{α} sera un nombre plus grand que tout nombre obtenu en élevant a à une puissance dont l'exposant est un nombre (rationnel) de la classe inférieure, relative à α, plus petit que tout nombre obtenu en élevant a à une puissance dont l'exposant est un nombre (rationnel) de la classe supérieure, relative à α.

On montrera qu'il y a bien là une définition du nombre a^{α}, en prouvant que chaque nombre obtenu en élevant a à une puissance rationnelle $\alpha' < \alpha$ est inférieur à n'importe quel nombre obtenu en élevant a à une puissance rationnelle $\alpha'' > \alpha$, et que, parmi les nombres de la première et de la seconde espèce, il s'en trouve qui diffèrent aussi peu qu'on le veut; on s'aidera enfin, pour compléter la démonstration, d'une image analogue à celle du n° **10**.

24. 1° Je vais prouver que, si α' et α'' sont deux nombres rationnels, dont le premier est inférieur au second, on a

(1) $a^{\alpha'} < a^{\alpha''}$ $$a^{\alpha'} > a^{\alpha''};$$

cette inégalité équivaut évidemment à la suivante :

$$\frac{a^{\alpha''}}{a^{\alpha'}} = a^{\alpha''-\alpha'} > 1;$$

$\alpha'' - \alpha'$ est un nombre rationnel positif : l'égalité précédente sera donc établie si l'on montre qu'en élevant un nombre a plus grand que 1 à une puissance rationnelle positive $\frac{p}{q}$, on obtient un nombre plus grand que 1 ; en d'autres termes, on a

$$\sqrt[q]{a^p} > 1;$$

a^p est le produit de p facteurs égaux à a, donc plus grands que 1; a^p est plus grand que 1 : l'inégalité précédente sera établie si l'on prouve que la racine $q^{\text{ième}}$ d'un nombre A plus grand que 1 est elle-même plus grande que 1; or elle ne peut être plus petite que 1, puisque la puissance $q^{\text{ième}}$ d'un nombre plus petit que 1 est plus petite que 1 et ne peut donc être égale à A; la racine $q^{\text{ième}}$ de A ne peut pas non plus être égale à 1 puisque la puissance $q^{\text{ième}}$ de 1 est 1. La racine $q^{\text{ième}}$ de A est donc plus grande que 1. La proposition énoncée et l'inégalité (1) sont établies.

2° Je vais prouver, en désignant par α', α'' des nombres rationnels assujettis seulement à être inférieurs, en valeur absolue, à un nombre positif fixe r, que les nombres $a^{\alpha'}$, $a^{\alpha''}$ sont aussi voisins qu'on le veut, pourvu que α' soit suffisamment voisin de α'' : on a, en supposant $\alpha' < \alpha''$,

$$a^{\alpha''} - a^{\alpha'} = a^{\alpha'}(a^{\alpha''-\alpha'} - 1);$$

les deux facteurs du second membre sont positifs, puisque, $\alpha'' - \alpha'$ étant positif, on a $a^{\alpha''-\alpha'} - 1 > 0$; le facteur $a^{\alpha'}$ est d'ailleurs moindre que a^r, puisque α' est plus petit que r; on a donc en posant, pour abréger, $\alpha'' - \alpha' = \beta$,

$$0 < a^{\alpha''} - a^{\alpha'} < a^r(a^\beta - 1);$$

pour établir la proposition énoncée, il suffit de prouver que la quantité qui figure dans le dernier membre des inégalités précédentes est plus petite que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que β soit suffisamment petit.

Or, si l'on désigne par m la valeur approchée de $\frac{1}{\beta}$ par excès, à une unité près, on aura

$$m > \frac{1}{\beta}, \qquad \beta < \frac{1}{m}, \qquad a^\beta < a^{\frac{1}{m}} \text{ ou } \sqrt[m]{a}$$

et, par conséquent,

$$0 < a^\beta - 1 < \sqrt[m]{a} - 1;$$

tout est donc ramené à montrer que le nombre positif $\sqrt[m]{a} - 1$ est plus petit que $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{a^r}$, pourvu que l'on prenne m assez grand; en d'autres termes, que l'une ou l'autre des inégalités équivalentes

$$\sqrt[m]{a} - 1 < \varepsilon', \quad \sqrt[m]{a} < 1 + \varepsilon', \quad a < (1 + \varepsilon')^m$$

est vérifiée, pourvu que l'on prenne le nombre naturel m assez grand.

Le nombre $(1 + \varepsilon')^m$ étant supérieur à $1 + m\varepsilon'$ [1], il suffira de

---

[1] Ceci se démontre de proche en proche : on a évidemment

$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 < 1 + 2\varepsilon$$

en admettant que, pour le nombre naturel n, on ait

$$(1 + \varepsilon)^n > 1 + n\varepsilon,$$

on en conclut, en multipliant les deux membres par $(1 + \varepsilon)$, que l'on a

$$(1 + \varepsilon)^{n+1} > (1 + n\varepsilon)(1 + \varepsilon) \qquad \text{ou} \qquad 1 + (n + 1)\varepsilon + n\varepsilon^2$$

et, par suite,

$$(1 + n)^{n+1} > 1 + (n + 1)\varepsilon;$$

la proposition est vraie pour $n = 2, 3, \ldots$; elle est générale.

prendre m assez grand pour avoir $1 + m\varepsilon' > a$; de prendre, par exemple, m supérieur à la partie entière de

$$\frac{a-1}{\varepsilon'} = \frac{(a-1)a^r}{\varepsilon}.$$

Notons en passant que l'on a établi la proposition suivante :

Si α', α'' sont des nombres rationnels plus petits en valeur absolue que le nombre positif r, on aura

$$|a^{\alpha''} - a^{\alpha'}| < \varepsilon$$

pourvu que la valeur absolue de $\alpha'' - \alpha'$ soit inférieure à $\frac{1}{m}$, en désignant par m la partie entière de $\frac{(a-1)a^r}{\varepsilon}$, augmentée d'une unité.

Sous cette forme la proposition ne suppose pas $\alpha' < \alpha''$.

25. Revenons à la définition de a^α, quand α est un nombre quelconque. Si l'on désigne par α', α'' des nombres rationnels tels que l'on ait

$$(1) \qquad \alpha' < \alpha < \alpha'',$$

et d'ailleurs quelconques, on aura

$$a^{\alpha'} < a^{\alpha''};$$

il y a des nombres rationnels α', α'' satisfaisant à la condition (1) qui sont aussi voisins qu'on le veut, et tels, par conséquent, que $a^{\alpha'}$ et $a^{\alpha''}$ soient aussi voisins qu'on le veut.

Imaginons que, sur l'axe X'X, on ait marqué en bleu tous les points dont l'abscisse est de la forme $a^{\alpha'}$, en rouge tous les points dont l'abscisse est de la forme $a^{\alpha''}$; chaque point bleu est en deçà de chaque point rouge. Au delà de chaque point bleu, par exemple du point $a^{\alpha'}$, il y a d'autres points bleus, par exemple le point $a^{\alpha'_1}$, en prenant pour α'_1 un nombre rationnel satisfaisant aux conditions

$$\alpha' < \alpha'_1 < \alpha;$$

de même, en deçà de chaque point rouge, il y a d'autres points rouges.

Colorons en bleu la partie de l'axe qui est à gauche de n'importe quel point bleu, en rouge la partie de l'axe qui est à gauche de n'importe quel point rouge. Appelons point blanc tout point (s'il y en a) qui n'est coloré ni en bleu ni en rouge. La partie bleue n'empiète pas sur la partie rouge; entre les parties rouge et bleue il n'y a pas d'intervalle blanc, puisqu'il y a des points bleus et des points rouges aussi voisins qu'on le veut.

La partie bleue et la partie rouge ne peuvent être séparées que par un point, en deçà duquel sont les points bleus, au delà duquel sont les points rouges, qui ne peut être un point bleu, puisque au delà de tout point bleu il y a encore des points bleus, qui ne peut être un point rouge, puisqu'en deçà de tout point rouge il y a encore des points rouges. C'est ce point de séparation dont l'abscisse est, par définition, le nombre a^α.

Cette image, toute grossière qu'elle est, donnera au lecteur une idée suffisante de ce qu'est le nombre a^α quand α est irrationnel.

Quant à la définition abstraite de la coupure qui constitue la définition abstraite de a^α, il suffira de dire, en conservant aux nombres α', α'' la même signification que plus haut, qu'on range dans la classe inférieure tout nombre rationnel qui est inférieur ou égal à un nombre de la forme $a^{\alpha'}$, dans la classe supérieure tout nombre rationnel qui est supérieur ou égal à un nombre de la forme $a^{\alpha''}$. De ce qu'il y a des nombres de la première et de la seconde forme qui sont aussi voisins qu'on veut, on déduit sans peine que, si un nombre rationnel échappe à la classification, il est seul à échapper à cette classification, et constitue la classe intermédiaire du n° 12; ce nombre rationnel unique est alors a^α. Si aucun nombre rationnel n'échappe à la classification, on a affaire au premier mode de classification du n° 12; il définit alors le nombre irrationnel a^α. Il est aisé de démontrer, sous forme abstraite, que, dans un cas comme dans l'autre, le nombre a^α est plus grand que tous les nombres de la forme $a^{\alpha'}$, plus petit que tous les nombres de la forme $a^{\alpha''}$.

Lorsque α' et α'' sont très voisins de α, et, par conséquent, très voisins l'un de l'autre, les nombres $a^{\alpha'}$, $a^{\alpha''}$ fournissent des valeurs approchées de a^α, par défaut et par excès, avec une errreur moindre que $a^{\alpha''} - a^{\alpha'}$; on a donné à la fin du numéro précédent une limite supérieure de cette erreur, qui peut être supposée aussi petite qu'on le veut, pourvu qu'on prenne α' et α'' suffisamment voisins. Quant aux nombres $a^{\alpha'}$, $a^{\alpha''}$, on peut les calculer avec telle approximation que l'on veut, par des extractions de racines. La définition du nombre a^α fournit ainsi un moyen de le calculer approximativement.

Quand on se donne l'un des nombres rationnels α', α'', très voisin de α, on peut choisir l'autre aussi très voisin de α et, par conséquent, très voisin du premier. Il suit de là que l'erreur qui consiste à remplacer a^α par $a^{\alpha'}$, ou $a^{\alpha''}$, peut être supposée aussi petite qu'on le veut, pourvu qu'on suppose α', ou α'', suffisamment voisin de α.

La propriété fondamentale qu'exprime l'égalité

$$a^\alpha . a^\beta = a^{\alpha+\beta} \tag{1}$$

subsiste quels que soient les nombres α, β. Si l'on désigne, en effet, par α', α'' et β', β'' des nombres rationnels tels que l'on ait

$$\alpha' < \alpha < \alpha'', \qquad \beta' < \beta < \beta'',$$

on aura, en vertu de ces inégalités et de la définition de a^α, a^β,

$$a^{\alpha'} < a^\alpha < a^{\alpha''}, \qquad a^{\beta'} < a^\beta < a^{\beta''},$$

d'où il résulte que le produit $a^\alpha . a^\beta$ est compris entre les produits $a^{\alpha'} . a^{\beta'} = a^{\alpha'+\beta'}$ et $a^{\alpha''} . a^{\beta''} = a^{\alpha''+\beta''}$; mais $\alpha' + \beta'$ et $\alpha'' + \beta''$ sont des nombres rationnels qui vérifient les inégalités

$$\alpha' + \beta' < \alpha + \beta < \alpha'' + \beta'',$$

et il résulte de la définition de $a^{\alpha+\beta}$ que ce nombre doit, comme le produit $a^\alpha . a^\beta$, être compris entre $a^{\alpha'+\beta'}$ et $a^{\alpha''+\beta''}$; or, les nombres α' et α'' d'une part, β' et β'' de l'autre peuvent être pris assez voisins pour que les deux nombres $\alpha' + \beta'$ et $\alpha'' + \beta''$ et, par suite, les nombres $a^{\alpha'+\beta'}$ et $a^{\alpha''+\beta''}$ diffèrent aussi peu qu'on le veut : il ne peut donc y avoir aucune différence entre les deux nombres $a^\alpha . a^\beta$ et $a^{\alpha+\beta}$, qui peuvent être compris entre des nombres aussi voisins qu'on voudra.

En supposant $\beta = -\alpha$ dans l'égalité (1) et en se rappelant qu'on a $a^0 = 1$, on obtient

$$a^\alpha . a^{-\alpha} = 1, \qquad a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha};$$

puis, en changeant dans la même égalité β en $-\beta$, et tenant compte de la propriété qu'on vient d'établir,

$$a^\alpha . a^{-\beta} = \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}.$$

Pour la définition de a^α, j'ai supposé $a > 1$; cette supposition n'a rien d'essentiel. Si a est un nombre *positif* plus petit que 1, on peut reprendre la suite des propositions qui aboutit à la définition de a^α avec quelques modifications, dont la principale consiste en ce que l'on a, en désignant par α', α'' deux nombres rationnels, dont le premier est le plus petit, $a^{\alpha'} > a^{\alpha''}$ au lieu d'avoir $a^{\alpha'} < a^{\alpha''}$. On évitera ce recommencement en remarquant que, si a est un nombre positif plus petit que 1, il est l'inverse d'un nombre b plus grand que 1, et, en définissant a^α par l'égalité

$$a^\alpha = \frac{1}{b^\alpha},$$

la propriété fondamentale (1) subsiste encore.

Si a est égal à 1, 1^α est regardé comme égal à 1, quel que soit α; 0^α est regardé comme égal à 0 si α est positif; ce symbole n'a pas de sens quand α est nul ou négatif. Lorsque a est négatif, le symbole a^α n'a de sens que si α est un nombre entier, ou une fraction irréductible à dénominateur impair; il n'a pas de sens, en particulier, quand α est irrationnel.

Il resterait à montrer que la propriété qu'exprime l'égalité

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta},$$

établie lorsque α, β sont des nombres rationnels, subsiste dans tous les cas; afin d'éviter quelques longueurs, je renverrai cette démonstration à un autre Chapitre.

On peut enfin remarquer, en revenant au cas où a est plus grand que 1, que la proposition qui termine le numéro précédent ne suppose nullement que les nombres α', α'' soient rationnels; la démonstration de cette proposition repose, en effet, sur des propriétés qui ont maintenant été étendues au cas des exposants irrationnels. Il en est de même de cette inégalité

$$a^{\alpha'} < a^{\alpha''},$$

qui a été le point de départ des explications du n° 25; elle reste vraie, en supposant $\alpha' < \alpha''$, lors même que α' et α'' seraient irrationnels; elle équivaut, en effet, à l'inégalité $a^{\alpha''-\alpha'} > 1$, dans laquelle $\alpha'' - \alpha'$ est positif; or a^β, si β est positif, est plus grand que 1, puisque l'on a, en désignant par β' un nombre rationnel positif plus petit que β, $a^\beta > a^{\beta'}$ et que $a^{\beta'}$ est plus grand que 1.

§ 3. — EXTENSION DE L'IDÉE DE COUPURE : ARCS, AIRES.

26. Le lecteur n'a pas manqué de remarquer que la définition de a^α, pour α irrationnel, reposait sur une extension de la notion de coupure; je n'exposerai pas ici les théorèmes généraux auxquels donne lieu cette extension, dont je me contenterai de donner tout à l'heure quelques exemples.

Auparavant, je veux faire une remarque. On n'a considéré jusqu'ici que des coupures pratiquées dans l'ensemble des nombres rationnels; on pourrait, tout aussi bien, considérer unc coupure pratiquée dans l'ensemble des nombres *réels,* ranger tous ces nombres dans une première et dans une seconde classes, tous les membres de la première classe étant plus petits que chaque nombre de la seconde classe; une pareille coupure définit encore un nombre, comme on le voit, par exemple, en pensant à l'image qui nous a servi plusieurs fois : seulement, ici, ce nombre a dû forcément être rangé soit dans la première, soit dans la seconde classe. On voit sans peine que, dans le premier cas, il est le plus grand des nombres de la première classe et que, dans le second, il est le plus petit des nombres de la seconde classe.

Arcs et aires. — Soit à définir la longueur de la circonférence d'un cercle (C). Désignons, en général, par p le périmètre d'un polygone (p) convexe inscrit dans le cercle, par p' le périmètre d'un polygone (p') circonscrit au cercle; une proposition classique de géométrie élémentaire fournit de suite l'inégalité $p < p'$; d'autre part, un raisonnement bien connu permet de montrer que, en choisissant pour les polygones (p) et (p') des polygones *réguliers* d'un même nombre de côtés, suffisamment grand, la différence $p' - p$ peut être supposée aussi petite qu'on le veut. Ces deux remarques, en s'aidant de la même image qui nous a déjà servi aux n^{os} 10 et 25, suffisent à définir la longueur de la circonférence comme un nombre plus grand que le périmètre d'un polygone convexe quelconque inscrit dans le cercle, plus petit que le périmètre d'un polygone quelconque circonscrit au cercle. Il suffira, en effet, d'imaginer que sur l'axe $X'X$ on ait figuré en bleu, d'une part, les points dont l'abscisse est égale au périmètre d'un polygone convexe inscrit; qu'on ait figuré en rouge, d'autre part, les points dont l'abscisse est égale au périmètre d'un polygone circonscrit, qu'on ait coloré en bleu toute la partie de l'axe qui est en deçà d'un point bleu, en rouge toute la partie de la droite qui est au delà d'un point rouge, pour reconnaître que la partie bleue ne peut empiéter sur la partie rouge, et qu'il ne peut y avoir aucun intervalle entre la partie bleue et la partie rouge; ces deux parties sont séparées par un point dont l'abscisse est la longueur de la circonférence. Un polygone inscrit et un polygone circonscrit fournissent des valeurs approchées, par défaut et par excès, de cette longueur avec une erreur moindre que la différence entre les deux périmètres. Il va de soi que cette définition pourrait être présentée sous forme abstraite.

Elle s'étend à la définition de la longueur d'une courbe fermée convexe, pourvu qu'on sache établir l'existence de polygones inscrits et circonscrits dont les périmètres diffèrent aussi peu qu'on le veut.

Elle s'étend aussi à la définition de la longueur d'un arc de courbe convexe, en particulier à la définition de la longueur d'un arc de cercle AB, celle-ci étant plus grande que la longueur de toute ligne brisée convexe inscrite dans AB, commençant en A, finissant en B, et plus petite que la longueur de toute ligne brisée circonscrite à l'arc et limitée aux mêmes points A, B.

Si l'on considère un troisième point C du cercle, tel que B soit compris entre A et C, et si l'on désigne respectivement par a, b, c les longueurs des arcs AC, AB, BC, on aura $a = b + c$.

Considérons, en effet, une ligne brisée convexe incrite dans l'arc AB, commençant en A, finissant en B, une ligne brisée convexe inscrite dans l'arc BC, commençant en B, finissant en C, leur réunion constituera une ligne brisée inscrite dans l'arc AC; désignons respectivement par b', c', a' les longueurs des lignes brisées inscrites dans les arcs AB, BC, AC; on aura $a' = b' + c'$; or, en choisissant pour les lignes brisées des lignes brisées régulières d'un nombre de côtés suffisamment grand, on peut faire en sorte que a', b', c' diffèrent aussi peu qu'on le veut de a, b, c; les deux nombres a et $b+c$ sont donc égaux, puisqu'il y a des nombres $a'=b'+c'$ qui diffèrent aussi peu qu'on le veut de l'un ou de l'autre.

L'aire d'un cercle (C) peut se définir de la même façon. Désignons par p l'aire d'un polygone (p) dont la ligne fermée qui le limite ait tous ses points à l'intérieur du cercle C ou sur sa circonférence; par p' l'aire d'un polygone (p') dont la ligne fermée qui le limite ait tous ses points à l'extérieur du cercle (C) ou sur sa circonférence; on aura $p < p'$. D'un autre côté, en prenant pour les polygones (p) et (p') des polygones réguliers d'un même nombre de côtés, suffisamment grand, il est aisé de voir que la différence $p'-p$ peut être supposée aussi petite qu'on le veut.

L'aire du cercle peut, d'après cela, être regardée comme un nombre plus grand que l'aire de n'importe quel polygone (p), plus petit que l'aire de n'importe quel polygone (p'). Cette propriété, en vertu d'une démonstration que je crois inutile de répéter, suffit à définir cette aire. Les nombres p et p' en fournissent des valeurs approchées avec une erreur moindre que $p'-p$.

Il est évident que ce mode de définition s'étend à l'aire d'une courbe fermée quelconque, pourvu qu'on sache prouver que, parmi les polygones intérieurs à la courbe et les polygones extérieurs, il y en a dont les aires diffèrent aussi peu qu'on veut.

On pourrait ensuite démontrer, d'une façon analogue à celle dont on s'est servi pour les arcs, que, si l'on considère deux aires P, Q, limitées respectivement par les lignes ABC, DBC, qui ont une partie commune, les deux aires n'ayant pas de points communs en dehors de la limite commune BC, le nombre $P+Q$ mesure l'aire totale, obtenue en supprimant la limite commune BC, et limitée ainsi par la courbe ABDC. On suppose, bien entendu, que la définition qui a été précédemment esquissée s'applique aux aires considérées.

EXERCICES.

1. Calculer les valeurs approchées à 0,01 près, par défaut, des nombres

$$\frac{1}{\pi}, \quad \pi^2, \quad \frac{1}{e}, \quad e^2, \quad \sqrt{\pi}-\sqrt{e},$$

en supposant

$$\pi = 3,14159\ldots, \qquad e = 2,71828\ldots.$$

2. Soit a un nombre entier plus grand que 1 et n un nombre naturel quelconque; la valeur approchée à $\frac{1}{a^n}$ près, par défaut, d'un nombre quelconque A peut se mettre sous la forme

$$A_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a^n},$$

en désignant par α_0 un nombre entier et par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des nombres entiers positifs ou nuls, moindres que a, et ne peut être mise sous cette forme que d'une seule façon.

En supposant $a = 2$, $A = \sqrt{2}$, $n = 10$, calculer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_{10}$.

3. En supposant qu'on ait obtenu, sous la forme indiquée dans l'exercice précédent, la valeur approchée à $\frac{1}{a^n}$ près de A, par défaut, quelle est la valeur approchée de A, par excès, à $\frac{1}{a^n}$ près? quelle est la valeur approchée de A par défaut, à $\frac{1}{a^p}$ près, en supposant que le nombre naturel p soit inférieur à n?

4. En conservant les mêmes notations que dans l'exercice (2), il est clair que, si l'on se donne les nombres A et a, le nombre α_n est déterminé, quelque grand que soit le nombre naturel n : Dans quel cas arrive-t-il que tous les nombres α_n soient nuls à partir de l'un d'eux? Dans quel cas arrive-t-il qu'ils se reproduisent périodiquement, à partir de l'un d'eux?

Quelle est la période des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, quand on prend $a = 2$, $A = \frac{1}{7}$?

Il ne peut pas arriver que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient tous égaux à $a - 1$, à partir de l'un d'eux.

5. Si l'on se donne, d'une part, le nombre entier a plus grand que 1 et, d'autre part, le nombre entier positif, nul ou négatif α_0, et la suite infinie [1] de nombres entiers positifs ou nuls et tous inférieurs à a,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n, \quad \ldots,$$

---

[1] En disant que la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ est *infinie*, on entend que chaque terme de cette suite est suivi d'un autre terme; en disant qu'on se *donne* cette suite, on entend qu'on se donne le moyen de calculer n'importe quel terme de cette suite quand on connaît son rang.

il existe un nombre rationnel ou irrationnel A dont la valeur approchée à $\frac{1}{a^n}$ près, par défaut, est

$$A_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a^n},$$

et cela quel que soit le nombre naturel n, pourvu toutefois que les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ne soient pas, à partir de l'un d'eux, toujours égaux à $a-1$. Si pour $n \geqq p$ on a $\alpha_n = a - 1$, le nombre A_n, quand n grandit indéfiniment, s'approche indéfiniment de la limite $A_p + \frac{1}{a^p}$.

6. On peut calculer la valeur de a^α où a et α sont des nombres positifs donnés, avec telle approximation que l'on veut, par des multiplications et des extractions de racines carrées : il suffit pour cela de remplacer α par sa valeur approchée à $\frac{1}{2^n}$ en prenant n suffisamment grand. Montrer comment le calcul peut se faire en profitant de la forme indiquée à l'exercice 2.

Calculer de cette façon $3^{\sqrt{2}}$ en se servant de la valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $\frac{1}{2^{10}}$ près : Sur quelle approximation peut-on compter ?

7. On donne une suite infinie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres entiers, tous plus grands que 1.

La valeur approchée d'un nombre A à $\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$ près, par défaut, peut se mettre, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$A_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_1 a_2} + \frac{\alpha_3}{a_1 a_2 a_3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

où α_0 désigne un nombre entier et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ des nombres entiers tous positifs ou nuls, respectivement inférieurs à $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Calculer les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ en supposant $A = 2{,}7182818\ldots$ et $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ \ldots,\ a_n = n+1,\ \ldots$.

Supposons, en revenant au cas général, qu'on ait mis la valeur approchée de A à $\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$ près, par défaut, sous la forme indiquée plus haut, comment peut-on mettre sous la même forme, la valeur approchée de A à $\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$ près, par excès, la valeur approchée de A à $\frac{1}{a_1 a_2 \ldots a_p}$ près, par défaut, en supposant le nombre naturel p inférieur à n ?

8. Si, dans l'exercice précédent, on suppose que n croisse indéfiniment, le nombre α_n est évidemment déterminé, pour chaque valeur de n, quand on se

donne A. Montrer qu'il ne peut pas arriver que l'on ait pour toutes les valeurs de n égales ou supérieures à p, $\alpha_n = a_n - 1$.

Si l'on suppose, comme dans l'exemple numérique de l'exercice précédent, que l'on ait

$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 3, \qquad \ldots, \qquad a_n = n + 1, \qquad \ldots,$$

les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seront tous nuls à partir de l'un d'entre eux si A est rationnel, et seulement dans ce cas.

9. Si l'on se donne, d'une part, la suite infinie de nombres entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tous plus grands que 1, d'autre part le nombre entier α_0, et la suite infinie de nombres entiers positifs ou nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ respectivement plus petits que $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il existe un nombre A tel que la valeur approchée de ce nombre à $\dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_n}$ près, par défaut, soit égale à

$$A_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_n}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

et cela quel que soit n, pourvu que l'on n'ait pas $\alpha_n = a_n - 1$ pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à un nombre naturel p.

Dans le cas où l'on a $\alpha_n = a_n - 1$ pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à p, le nombre A_n, quand n grandit indéfiniment, s'approche indéfiniment de la limite $A_p + \dfrac{1}{a_1 a_2 \ldots a_p}$.

10. A quelle condition les nombres rationnels a, b, a', b' doivent-ils satisfaire pour que l'expression

$$\frac{aA + b}{a'A + b'},$$

où A est un nombre irrationnel, soit un nombre rationnel ?

11. Si a et b sont des nombres rationnels positifs, le nombre $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ ne peut être rationnel si a et b ne sont pas les carrés de nombres rationnels. Il en est de même de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, en supposant a différent de b.

12. Si a, b sont des nombres rationnels et si l'on a $b > 0$, les expressions $(a + \sqrt{b})^3$, $(a - \sqrt{b})^3$ ne peuvent pas être des nombres rationnels, à moins que b ne soit le carré d'un nombre rationnel.

13. On ne peut pas avoir une relation de la forme

$$a\sqrt[3]{\alpha^2} + b\sqrt[3]{\alpha} + c = 0,$$

où a, b, c, α sont des nombres rationnels si α n'est pas le cube d'un nombre rationnel ou si a, b, c ne sont pas nuls à la fois.

14. En désignant par a, b des nombres rationnels satisfaisant aux conditions $a > 0$, $a^2 > b$, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'expression $\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}}$ soit un nombre rationnel consistent en ce que a^2-b doit être, ainsi que $\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}$, le carré d'un nombre rationnel.

15. On a

$$\sqrt{a+2m\sqrt{a-m^2}}+\sqrt{a-2m\sqrt{a-m^2}}=2m$$

ou

$$\sqrt{a+2m\sqrt{a-m^2}}+\sqrt{a-2m\sqrt{a-m^2}}=2\sqrt{a-m^2},$$

suivant que l'on a $2m^2 > a > m^2$ ou $a > 2m^2$.

16. Trouver deux nombres entiers α, β tels que l'on ait

$$\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}=\alpha+\beta\sqrt{2}.$$

17. Si a, b sont des nombres rationnels tels que $(a-b^3)b$ soit positif, le nombre

$$\sqrt[3]{a+\frac{2b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}+\sqrt[3]{a-\frac{2b^3+a}{3b}\sqrt{\frac{a-b^3}{3b}}}$$

est rationnel. On montrera que les quantités qui figurent sous les racines cubiques sont les cubes d'expressions de la forme $\alpha+\beta\sqrt{\dfrac{a-b^3}{3b}}$, en désignant par α, β des nombres rationnels.

CHAPITRE II.

POLYNOMES.

§ 1. — PRÉLIMINAIRES.

27. Je rappelle tout d'abord quelques définitions.

Si l'on considère une ou plusieurs lettres $x, y, z, \ldots$ susceptibles de prendre telles valeurs qu'on voudra, un monome en $x, y, z, \ldots$ est un produit de facteurs dont l'un (coefficient) est un nombre, dont chacun des autres est représenté par quelqu'une des lettres $x, y, z, \ldots$: le nombre de ces derniers facteurs est le degré du monome. Le monome prend une valeur numérique déterminée quand on attribue des valeurs numériques déterminées aux *variables* $x, y, z, \ldots$: c'est ce qu'on entend en disant qu'il est une *fonction* de ces variables. Si l'on n'attribue pas une valeur numérique déterminée à ces variables, le monome est une simple écriture, caractérisée, d'une part par son coefficient, d'autre part par le nombre de facteurs x, le nombre de facteurs $y, \ldots$.

Lorsque le monome est précédé du signe + ou du signe —, on regarde ce signe comme attaché au coefficient, que l'on écrit d'habitude avant les variables : $-3xxy$ est un monome dont le coefficient est -3. Le coefficient d'un monome peut d'ailleurs être 1 ou -1 : tel serait le cas pour les monomes xx, $-xy$.

Le coefficient d'un monome peut être représenté par une lettre que l'on choisira habituellement parmi les lettres de l'alphabet éloignées de celles qui représentent les variables. $Axxy$ est un monome dont le coefficient est A. Sans doute cette lettre peut représenter des nombres distincts; mais, si on lui attribue des valeurs distinctes, on aura affaire à des monomes distincts. Dans un même monome, le coefficient, s'il est représenté par une lettre, est une *constante;* cette lettre joue un rôle tout à fait différent de celles qui figurent les variables.

Deux monomes qui ne diffèrent que par le coefficient sont dits *semblables*. Deux monomes sont identiques si les coefficients sont les mêmes, et s'ils contiennent le même nombre de facteurs x, le même nombre de facteurs y, ...

Il est naturel de grouper ensemble les facteurs égaux à x, ceux qui sont égaux à y, ..., et d'employer la notation des exposants pour représenter les produits partiels des facteurs x, des facteurs y, ... : ces exposants sont des nombres naturels : si le facteur x entre n fois dans un monome, si le facteur y entre p fois, ..., le monome est dit du *degré* n en x, du *degré* p en y, ... Le degré du monome en x, y, z, ... est la somme des exposants dont sont affectées ces lettres.

Une lettre x, y, z, ... qui n'entre qu'une fois comme facteur doit être regardée comme affectée de l'exposant 1, qui ne s'écrit pas.

Il peut être commode de regarder celles des lettres x, y, z, ... qui n'entrent pas effectivement dans le monome comme y figurant cependant et comme étant affectées de l'exposant 0 (n° 22).

Enfin, il peut encore être commode de regarder un nombre, ou une constante, comme étant aussi un monome en x, y, z, ..., de degré 0 par rapport à chacune de ces variables.

La somme de plusieurs monomes en x, y, z, ... est, par définition, un polynome en x, y, z, ... ; un polynome peut d'ailleurs se réduire à un seul monome; parmi les monomes qui constituent un polynome (les *termes* du polynome) peut figurer une constante. Un polynome prend une valeur numérique déterminée quand on attribue des valeurs numériques aux variables $x, y, z, \ldots$; c'est une *fonction* de ces variables. Quand on n'attribue pas de valeurs déterminées à ces variables, le polynome est une simple écriture dont les éléments essentiels sont les coefficients et les exposants qui caractérisent chacun de ses termes. Le polynome est dit *réduit* lorsqu'il ne contient pas deux monomes semblables; étant donné un polynome, on peut toujours effectuer la réduction des termes semblables, c'est-à-dire remplacer l'ensemble des monomes semblables par un seul monome qui leur soit semblable et dans lequel le coefficient est la somme algébrique des coefficients des termes semblables, et supprimer les termes dont le coefficient serait nul : le polynome que l'on obtient ainsi prend la même valeur numérique que le proposé quand on attribue aux variables x, y, z, ... des valeurs numériques, d'ailleurs quelconques.

Lorsqu'un polynome en x, y, z, ... est réduit, son degré, en x, est l'exposant le plus élevé dont est affectée la lettre x dans celui ou ceux des monomes constitutifs du polynome qui la contiennent avec le plus fort exposant. De même pour les degrés en y, en z, ... Relativement à l'ensemble des variables $x, y, z, \ldots$, chaque terme du polynome, que je suppose toujours réduit, a un degré, la somme des exposants dont sont affectées, dans ce terme, les lettres x, y, z, ... Le plus grand de ces degrés est le degré du polynome en $x, y, z, \ldots$; quand tous ses termes sont de même degré, le polynome est dit *homogène*.

Deux polynomes sont dits *identiques* lorsque, étant réduits, ils sont composés des mêmes monomes. Leurs valeurs numériques sont alors les mêmes quand on attribue aux variables un système de valeurs numériques.

L'ordre dans lequel sont écrits les termes du polynome réduit n'importe pas. Toutefois, il est souvent commode de ranger ces termes dans un ordre déterminé, d'*ordonner* le polynome. Quand il ne contient qu'une variable, on range les termes par degrés croissants, ou décroissants; c'est ce qu'on appelle *ordonner* le polynome par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de la variable.

On déduit des règles relatives à l'addition, à la soustraction, à la multiplication des nombres des règles qui permettent, deux polynomes étant donnés, de trouver un polynome réduit dont la valeur numérique soit toujours égale, quel que soit le système de valeurs numériques attribuées aux variables, à la somme, à la différence, ou au produit des valeurs numériques des polynomes donnés. Je ne reviens pas sur ces règles, bien connues du lecteur. Que la solution qu'elles fournissent des problèmes posés soit la seule possible, c'est ce qui sera établi tout à l'heure.

L'objet propre de l'Algèbre est l'étude des polynomes à différents points de vue; une des parties les plus importantes de cette étude est la recherche des systèmes de valeurs qu'il faut attribuer aux variables pour que la valeur du polynome soit nulle : c'est la théorie des équations algébriques. Je commencerai par l'étude des polynomes à une variable, en me plaçant surtout au point de vue de la façon dont la valeur du polynome dépend de la valeur de la variable. Il est intéressant, en particulier, de savoir si la valeur du polynome croît ou décroît, quand la valeur de la variable croît; quel est le signe de la valeur du polynome, etc.

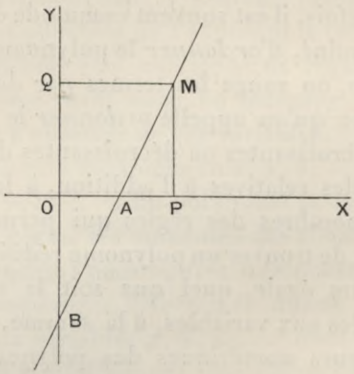
Au lieu de dire *valeur du polynome* pour une valeur déterminée de la variable, il m'arrivera fréquemment de dire simplement *le polynome* par une ellipse un peu incorrecte. C'est ainsi qu'on dit : *le polynome est nul, il croît, il décroît, ...*

28. L'étude de la variation a été faite dans les éléments pour les polynomes en x du premier et du second degré $ax+b$, ax^2+bx+c (a, b, c sont les coefficients; a est supposé différent de o).

On sait de quelle commodité, pour cette étude, est la représentation graphique.

Après avoir fait choix d'un système d'axes coordonnés rectangulaires OX, OY, dont l'origine est le point d'intersection O, d'une

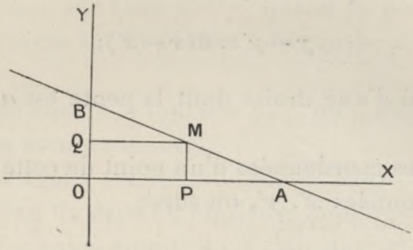
Fig. 6.



unité de longueur, d'un sens positif sur chacun des axes, on fait correspondre à chaque point M du plan ses coordonnées x, y, c'est-à-dire les deux équivalents algébriques des vecteurs OP, OQ dont les extrémités sont les projections orthogonales P, Q du point M sur les axes, et à chaque système de nombres relatifs x, y le point dont ces nombres sont les coordonnées, le premier étant l'*abscisse*, le second l'*ordonnée*.

On sait que le lieu des points M, de coordonnées x, y, pour lesquels on a $y = ax + b$ est une droite (dont on dit que $y = ax + b$ est l'équation) : a est le coefficient angulaire ou la pente de cette droite et de toutes ses parallèles; c'est l'ordonnée du point d'abscisse égale à 1, pour la parallèle à la droite considérée qui passe par l'origine, parallèle dont l'équation est $y = ax$: cette parallèle est, ou non, située dans l'angle des coordonnées positives et dans l'angle opposé par le sommet suivant que a est positif ou négatif.

Fig. 7.



Si l'on suppose que le point variable P, d'abscisse x, se déplace sur l'axe des x de gauche à droite, que x croisse de $-\infty$ à $+\infty$, on voit sur les figures comment l'ordonnée $y = ax + b$ du point M croît de $-\infty$ à $+\infty$, ou décroît de $+\infty$ à $-\infty$, suivant que a est positif ou négatif. Le nombre $y = ax + b$ est de signe contraire à a, tant que x n'a pas atteint la valeur $-\frac{b}{a}$ pour laquelle y est nul, c'est-à-dire tant que le point P est à gauche du point A, où la droite rencontre l'axe des x ; y est au contraire du même signe que a lorsque x a dépassé la valeur $-\frac{b}{a}$, quand le point P est à droite de A.

Il est commode d'imaginer que le point variable P, d'abscisse x, se meut sur l'axe des x d'un mouvement uniforme avec une vitesse égale à 1, en passant à l'origine à l'époque 0, en sorte que cette abscisse x représente le *temps*, mesuré avec une unité convenable. Le point Q, correspondant à x, se meut alors d'un mouvement uniforme sur l'axe des y, avec une vitesse égale à a, en montant ou en descendant constamment suivant que a est positif ou négatif : il est en O quant le point P est en A : il se déplace plus ou moins vite suivant que la valeur absolue de a est plus ou moins grande, que la pente de la droite est plus ou moins forte.

Si l'on considère une droite quelconque (D), non parallèle à l'axe des y, les coordonnées x, y d'un point quelconque de cette droite vérifieront une équation $y = ax + b$, dans laquelle les constantes a et b (la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite) caractérisent la position de la droite. Si celle-ci doit passer par un point de coordonnées x', y', on doit avoir

$$y' = ax' + b, \qquad b = y' - ax',$$

et son équation peut, par suite, s'écrire

$$y - y' = a(x - x');$$

telle est l'équation d'une droite dont la pente est a et qui passe par le point x', y'.

Si x'', y'' sont les coordonnées d'un point de cette droite, autre que le point de coordonnées x', y', on aura

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'};$$

ainsi la pente d'une droite qui joint deux points est égale à la différence des ordonnées de ces deux points, divisée par la différence de leurs abscisses. En particulier, la pente d'une droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont x', y' est $\frac{y'}{x'}$.

La formule $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$, qui donne la pente de la droite qui joint les deux points de coordonnées x', y' et x'', y'' représente aussi la vitesse d'un point qui se mouvrait uniformément sur l'axe des y et qui, aux époques x', x'', passerait aux points dont les ordonnées sont y', y''.

L'équation de la droite qui joint les deux points de coordonnées x', y' et x'', y'', ou l'équation du mouvement uniforme sur l'axe des y du point qui, aux époques x', x'', passe aux points dont les ordonnées sont y', y'', est

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(x - x');$$

dans le dernier cas, x représente le temps.

La variation du trinome du second degré $ax^2 + bx + c$, la forme et la disposition de la parabole lieu des points dont les coordonnées x, y vérifient l'équation

$$y = ax^2 + bx + c,$$

résultent aisément de ce qu'on vient de dire sur la variation d'un binome du premier degré et de l'identité

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right];$$

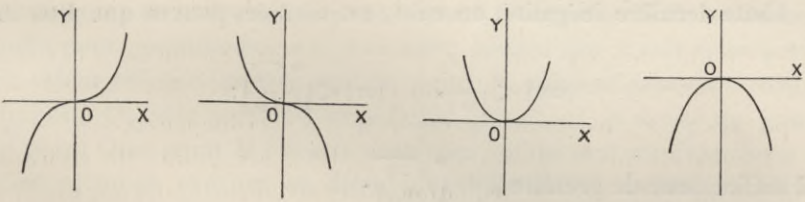
je ne m'y arrêterai pas, non plus qu'à la façon dont le point Q, d'ordonnée y, se déplace sur l'axe des y, quand le point P d'abscisse x se meut uniformément sur l'axe de x, de gauche à droite.

29. Considérons encore la fonction ax^n, où a est un nombre différent de o, et n un nombre naturel.

Le cas où n est égal à 1 a été étudié plus haut : on peut l'écarter.

Comme le produit de deux ou plusieurs nombres positifs augmente quand ces nombres augmentent, il est clair que x^n croît de o à $+\infty$, quand x croît de o à $+\infty$: d'un autre côté, quand on change x en $-x$, x^n se change en $-x^n$, ou ne change pas, suivant que n est impair ou pair. Il suffit de ces remarques pour reconnaître, grossièrement, que la courbe définie par l'équation $y = ax^n$ a l'une des quatre formes figurées ici.

Fig. 8, 9, 10, 11.



Les deux premières figures se rapportent au cas où n est impair, la première au cas où a est positif, la seconde au cas où a est négatif; l'origine est alors un centre de symétrie pour la courbe, parce que deux points, dont les coordonnées sont des nombres symétriques, sont eux-mêmes symétriques par rapport à l'origine.

Les deux dernières figures se rapportent au cas où n est pair, la troisième au cas où a est positif, la quatrième au cas où a est négatif. Dans ce cas l'axe des y est, pour la courbe, un axe de symétrie.

Dans tous les cas, ax^n est nul pour $x = 0$; dans le premier cas (n impair, $a > 0$), pour $x = 0$, ax^n est plus petit que pour les valeurs de x un peu plus grandes que o, et plus grand que pour les valeurs de x un peu plus petites que o : on dit que ax^n, pour $x = 0$, est une fonction *croissante*. Dans le second cas (n impair, $a < 0$) pour $x = 0$, ax^n est plus grand que pour les valeurs de x un peu plus grandes que o, et plus petit que pour les valeurs de x un peu plus petites que o : on dit que ax^n, pour $x = 0$, est une fonction *décroissante*.

Dans le troisième cas (n pair, $a > 0$), pour $x = 0$, ax^n est plus petit que pour les valeurs de x voisines de o, positives ou négatives : on dit que pour $x = 0$, ax^n passe par un *minimum*; dans le quatrième cas, enfin (n pair, $a < 0$), pour $x = 0$, ax^n est plus grand que pour les valeurs de x voisines de o, positives ou négatives : on dit que ax^n, pour $x = 0$, passe par un *maximum*.

Lorsque x est nul, ax^n est nul; quand x est voisin de o, ax^n est voisin de o. Il est aussi voisin de o qu'on veut, pourvu que x soit lui-même suffisamment voisin de o. D'une façon précise, si l'on se donne un nombre positif α, aussi petit que l'on veut, on peut trouver un nombre positif β, tel que ax^n soit certainement plus petit que α, en valeur absolue, pourvu que x soit plus petit que β, en valeur absolue, tel, en d'autres termes, que la condition $|x| < \beta$ entraîne l'inégalité $|ax^n| < \alpha$.

Cette dernière inégalité, en effet, est vérifiée, pourvu que l'on ait

$$|x^n| < \frac{\alpha}{|a|}, \qquad |x| < \sqrt[n]{\frac{\alpha}{|a|}};$$

il suffira donc de prendre $\beta = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{|a|}}$.

Le fait que ax^n est aussi petit que l'on veut, en valeur absolue, pourvu que x soit suffisamment petit en valeur absolue, s'exprime en disant que ax^n est *infiniment petit* avec x.

En supposant que le nombre naturel p soit plus grand que n, bx^p est infiniment petit avec x, de même que ax^n. On dit que bx^p est infiniment petit par rapport à ax^n, en entendant par là que le rapport $\frac{bx^p}{ax^n} = \frac{b}{a}x^{p-n}$ est infiniment petit avec x.

Pourvu que x soit suffisamment petit, bx^p est petit par rapport à ax^n (note du n° 19). Il est à peine utile de dire que les nombres a, b sont supposés différents de o.

Considérons, par exemple, les expressions $2x^2$, $1000x^5$ et ne considérons que des valeurs de x moindres que 0,01 en valeur absolue; $2x^2$ restera, en valeur absolue, moindre que 0,0002 et $1000x^5$, moindre que 0,0000001; si, sur une feuille de dessin, on voulait figurer les deux courbes dont les équations sont $y = 2x^2$, $y = 1000x^5$, en prenant le mètre pour unité de longueur, la portion de la première courbe dont les points ont une abscisse moindre qu'un centimètre, en valeur absolue, ne pourrait guère se distinguer de l'axe des x; la portion analogue, pour la seconde courbe, ne s'en distinguerait nullement; cette courbe ne paraîtrait guère se séparer de l'axe des x que pour les points dont l'abscisse serait comprise entre quatre et cinq centimètres.

En particulier, si n est plus grand que 1, ax^n est infiniment petit par rapport à x, ou un infiniment petit d'ordre supérieur à x. Quand x est suffisamment petit, en valeur absolue, ax^n est, en valeur absolue, beaucoup plus petit que x.

Considérons la courbe dont l'équation est $y = ax^n$; le rapport

$$\frac{y}{x} = ax^{n-1}$$

est la pente de la droite qui joint le point O au point M de la courbe, qui a pour coordonnées x et $y = ax^n$; pourvu que x soit assez petit en valeur absolue, pourvu que le point M soit suffisamment voisin du point O, cette pente est aussi faible qu'on veut, la droite qui joint le point O au point M s'écarte aussi peu qu'on veut de l'axe des x : c'est ce qu'on exprime en disant que l'axe des x est tangent à la courbe au point O. Ceci suppose $n > 1$.

Lorsque n est impair la courbe traverse la tangente en O : le point O est un point d'*inflexion*.

Lorsque n est pair, aux environs du point O, la courbe est tout entière d'un côté ou de l'autre de l'axe de x : c'était pour les anciens la propriété caractéristique de la tangente.

Dans tous les cas, la distance MP du point M à la tangente est beaucoup plus petite que OP, pourvu que P soit assez près de O.

Quand x est très grand en valeur absolue, ax^n est lui-même très grand en valeur absolue. D'une façon précise :

Quelque grand que soit le nombre positif A, on peut trouver un nombre positif B tel que la condition $|x| > B$, entraîne l'inégalité

$|ax^n| > A$. On pourra prendre

$$B = \sqrt[n]{\frac{A}{|a|}}.$$

On dit que ax^n est infiniment grand avec x.

Si l'on suppose $p > n$, bx^p est infiniment grand par rapport à ax^n, c'est-à-dire que le rapport de bx^p à ax^n finit par être aussi grand qu'on le veut, en valeur absolue, pourvu que x soit suffisamment grand, en valeur absolue. En particulier, si n est plus grand que 1, ax^n est infiniment grand, par rapport à x.

Par exemple, on a vu que, pour les valeurs de x suffisamment voisines de 0, la courbe dont l'équation est $y = 1000x^3$ est située entre l'axe des x et la courbe dont l'équation est $y = 2x^2$, beaucoup plus près de l'axe que cette dernière; pour les grandes valeurs positives de x, au contraire, la première courbe monte beaucoup au-dessus de la seconde.

§ 2. — ÉTUDE D'UN POLYNOME A UNE VARIABLE POUR LES VALEURS DE LA VARIABLE VOISINES DE ZÉRO.

30. On verra tout à l'heure comment l'étude d'un polynome en x, pour les valeurs de x qui avoisinent un nombre quelconque x_0, se ramène à l'étude d'un autre polynome pour les valeurs de la variable qui sont voisines de 0. C'est sur cette étude fort importante que je vais m'arrêter.

Lorsqu'on veut étudier un polynome en x pour les valeurs de x voisines de 0, il convient d'ordonner ce polynome par rapport aux puissances croissantes de x, parce que, alors, chaque terme est petit, en valeur absolue, par rapport à ceux qui le précèdent, pourvu que x soit suffisamment petit en valeur absolue.

Considérons, par exemple, le polynome

$$3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4;$$

chaque terme sera plus petit, en valeur absolue, que le terme qui le précède, si x est, en valeur absolue, inférieur au plus petit des nombres

$$\tfrac{3}{2},\quad \tfrac{2}{4},\quad \tfrac{4}{5},\quad 5,$$

c'est-à-dire plus petit que $\frac{1}{2}$. Supposons qu'on n'ait affaire qu'aux valeurs de x qui vont de $-\frac{1}{100}$ à $+\frac{1}{100}$, ou, comme on dit, qui appartiennent à l'intervalle [1] $\left(-\frac{1}{100}, +\frac{1}{100}\right)$; les termes $-2x$, $4x^2$, $-5x^3$, x^4 resteront tous petits; la valeur du polynome sera à peu près égale à 3, c'est une première valeur approchée. Une valeur plus approchée sera fournie par celle de $3-2x$, car l'erreur que l'on commet en substituant la valeur de $3-2x$ à celle du polynome, c'est-à-dire la valeur du polynome $4x^2-5x^3+x^4$, sera très petite; puisque les valeurs (absolues) de $4x^2$, $-5x^3$, x^4 sont petites par rapport à celle de x. $3-2x$ est une expression approchée du polynome, beaucoup plus facile à calculer que ce polynome lui-même, et dont il suffira, dans bien des cas, de connaître la valeur. L'expression $3-2x+4x^2$ sera de même une expression plus approchée du polynome, etc.

Si, par exemple, on veut calculer la valeur du polynome pour $x=0,0025$, en se servant des expressions approchées 3, $3-2x$, $3-2x+4x^2$, on trouvera les valeurs approchées

$$3, \quad 2,9950, \quad 2,99502500;$$

tandis que la valeur exacte est $2,995024921914062$5. Il n'y a pas de science d'observation, si précise soit-elle, où cette valeur exacte importe, ait même quelque signification; la première valeur approchée, bien souvent, et la seconde, presque toujours, suffiront amplement dans la pratique.

Ces observations semblent n'avoir qu'une valeur pratique; on va voir qu'elles ont une très grande importance théorique. Il est d'ailleurs clair qu'elles ont besoin d'être précisées, car elles tomberaient en défaut s'il y avait dans le polynome un coefficient très grand; $3-2x$ ne fournirait pas, pour $x=0,0025$, une valeur approchée du polynome $3-2x+4x^2-5x^3+10^{20}x^4$.

Observons d'abord que si, dans un polynome, on remplace tous les coefficients par leur valeur absolue et x par sa valeur absolue, ou un nombre plus grand, on ne peut qu'augmenter la valeur absolue du polynome. Si, en particulier, on ne veut considérer que des valeurs

---

[1] Si a, b sont des nombres distincts l'*intervalle* (a, b) est l'ensemble des nombres a, b et des nombres réels compris entre a, b.

de la variable qui soient, en valeur absolue, au plus égales à 1, il est clair que la valeur absolue du polynome sera au plus égale à la somme des valeurs absolues de ces coefficients. D'un autre côté lorsque, dans un produit de facteurs positifs, on remplace un des facteurs par un nombre plus grand, on ne peut qu'augmenter le produit.

Ces simples remarques nous fournissent un moyen simple d'évaluer des limites des erreurs que l'on commet en procédant comme on vient de l'expliquer.

Si, par exemple, on revient au polynome

$$3-2x+4x^2-5x^3+x^4,$$

et si l'on désigne par x' la valeur absolue de x, supposée inférieure à 1, on voit que les erreurs que l'on commet quand on substitue au polynome les expressions approchées 3, $3-2x$, $3-2x+4x^2$, à savoir les valeurs des polynomes

$$\begin{aligned} -2x+4x^2-5x^3+x^4 &= x(-2-4x-5x^2+x^3),\\ 4x^2-5x^3+x^4 &= x^2(4-5x+x^2),\\ -5x^3+x^4 &= x^3(-5+x), \end{aligned}$$

sont respectivement moindres, en valeur absolue, que

$$\begin{aligned} x'(2+4+5+1) &= 12x',\\ x'^2(4+5+1) &= 10x'^2,\\ x'^3(5+1) &= 6x'^3, \end{aligned}$$

et par conséquent, si x' est moindre que $0,01$, respectivement moindres que

$$0,12, \quad 0,001, \quad 0,000006.$$

Si l'on prenait le mètre pour unité de longueur, et si l'on voulait construire, sur une feuille de papier à dessin, la partie de la courbe définie par l'équation

$$y=3-2x+4x^2-5x^3+x^4$$

qui correspond aux valeurs de x comprises entre $-0,01$ et $0,01$, cette partie de courbe différerait peu de la droite dont l'équation est

$$y=3-2x,$$

et ne pourrait pas se distinguer de la parabole dont l'équation est

$$y = 3 - 2x + 4x^2.$$

31. Les propriétés des polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x vont toutes se déduire du théorème suivant :

Si un polynome en x ne contient pas de terme constant, ce polynome, qui s'annule pour $x = 0$, reste aussi petit qu'on veut, en valeur absolue, pourvu que x soit suffisamment petit en valeur absolue. En d'autres termes, un tel polynome est infiniment petit avec x.

Quand il ne contient pas de terme constant, un polynome est nul pour $x = 0$; réciproquement, pour que la valeur d'un polynome réduit soit nulle pour $x = 0$, il faut évidemment que le terme constant soit nul; tel est, par exemple, le polynome, ordonné suivant les puissances croissantes de x,

$$2x^3 - x^4 + 3x^5 - 4x^6.$$

Si l'on désigne par x' la valeur absolue de x, la valeur absolue du polynome ne peut dépasser

$$2x'^3 + x'^4 + 3x'^5 + 4x'^6 = x'^3(2 + x' + 3x'^2 + 4x'^3),$$

ni *a fortiori*

$$(2 + 1 + 3 + 4)x'^3 = 10x'^3,$$

si x' est moindre que 1.

Si x' est très petit, il en sera de même de $10x'^3$, *a fortiori* de la valeur absolue du polynome; quand x reste voisin de 0, la valeur du polynome reste elle-même voisine de 0; d'une façon précise :

Si l'on considère un polynome en x, sans terme constant, et si l'on se donne un nombre positif α, aussi petit qu'on le veut, on peut fixer un nombre positif β, tel que le polynome reste, en valeur absolue, moindre que α, pourvu que x soit moindre que β en valeur absolue.

Pour que le précédent polynome, par exemple, reste moindre que 0,01, en valeur absolue, il suffira de supposer $x' < 0{,}1$.

Si un polynome en x contient un terme constant, sa valeur, pour $x = 0$, est celle de ce terme constant : je vais montrer que, si x reste voisin de o, la valeur du polynome reste voisine de celle de ce terme constant.

Considérons, par exemple, le polynome ordonné suivant les puissances croissantes de x,

$$-5 + 2x^3 - x^4 + 3x^5 - 4x^6;$$

sa valeur, pour $x = 0$, est -5; sa valeur, pour n'importe quelle valeur x_0 de x, s'obtient en faisant la somme de -5 et de la valeur, pour $x = x_0$, du polynome $2x^3 - x^4 + 3x^5 - 4x^6$, qui ne contient pas de terme constant; cette dernière valeur sera voisine de o, si x est voisin de o. La différence entre la valeur du polynome proposé et la valeur -5 qu'il prend pour $x = 0$ reste, en valeur absolue, aussi petite qu'on le veut, pourvu que x reste suffisamment voisin de o. En d'autres termes, qui s'appliquent d'ailleurs, soit que le polynome comporte un terme constant, soit qu'il n'en comporte pas :

Si l'on se donne un nombre positif α, on peut lui faire correspondre un nombre positif β tel que la différence entre les valeurs que le polynome prend pour $x = 0$ et pour $x = x_0$ soit moindre que α en valeur absolue, pourvu que x_0 soit lui-même moindre que β en valeur absolue.

C'est ce que l'on exprime d'une façon abrégée en disant que tout polynome en x est une *fonction continue* de x, pour $x = 0$.

Un polynome en x, qui contient un terme constant, ne s'annule pas pour les valeurs de x suffisamment voisines de o; *pour ces mêmes valeurs, il est de même signe que son premier terme.*

Il suffira de prendre, dans l'exemple précédent, α inférieur à la valeur absolue 5 du terme constant, et de déterminer β de façon que la valeur absolue du polynome $2x^3 - x^4 + 3x^5 - 4x^6$ soit moindre que α; on sera certain que, si x est moindre en valeur absolue que β, le polynome

$$-5 + 2x^3 - x^4 + 3x^5 - 4x^6$$

ne sera jamais nul, et qu'il sera toujours du signe de -5.

C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend

$$\alpha = 4, \qquad \beta = 0{,}7 < \sqrt[3]{\tfrac{1}{10}}.$$

Pour les valeurs de x, autres que 0, mais suffisamment voisines de 0, un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de x et ne contenant pas de terme constant ne s'annule pas et est du même signe que son premier terme.

Considérons, par exemple, le polynome

$$2x^3 - 4x^4 + 5x^6.$$

Sa valeur est égale au produit de x^3 par celle du polynome

$$2 - 4x + 5x^2;$$

celle-ci, pourvu que x ne soit pas nul et soit moindre, en valeur absolue, qu'un nombre positif convenablement choisi, est différente de 0 et du même signe que 2; son produit par x^3 sera donc, dans les mêmes conditions, du même signe que $2x^3$, et ne s'annulera que pour $x = 0$.

Le polynome $2x^3 - 4x^4 + 5x^5$ est nul pour $x = 0$, positif pour x un peu plus grand que 0, négatif pour x un peu plus petit que 0, de même que $2x^3$; les valeurs qu'il prend pour des valeurs de x un peu plus grandes ou un peu plus petites que 0 sont respectivement plus grandes ou plus petites que celles qu'il prend pour $x = 0$. C'est ce qu'on exprime en disant que le polynome est, pour $x = 0$, une fonction croissante de x (n° 29).

Soit, en général, ax^m le premier terme d'un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de x, dans lequel ne figure pas de terme constant. Pour $x = 0$, le polynome sera nul, comme ax^m; pour x voisin de 0, le polynome sera du même signe que ax^m : le polynome sera, comme ax^m, plus grand ou plus petit que la valeur qu'il prend pour $x = 0$; le polynome, au point de vue de la variation, se comporte, pour $x = 0$, comme son premier terme ax^m. Si m est impair, il sera croissant ou décroissant, suivant que a sera positif ou négatif. Si m est pair, le polynome, suivant que a sera positif ou négatif, passera, pour $x = 0$, par un minimum ou un maximum, c'est-à-dire qu'il sera, pour les valeurs de x voisines de 0, positives ou négatives, plus grand que pour $x = 0$, dans le premier cas; plus petit que pour $x = 0$, dans le second cas.

Si le polynome contient un terme constant, ce terme constant n'influe pas sur le sens de la variation : on n'en tiendra pas compte, et l'on regardera seulement le terme ax^m, du plus bas degré, en dehors du terme constant. Pour $x = 0$, le polynome sera croissant ou décroissant, présentera un minimum ou un maximum, dans les mêmes conditions que ax^m. Seulement, sa valeur, pour $x = 0$, sera le terme constant, au lieu d'être 0, comme dans le cas précédent.

Considérons, par exemple, le polynome

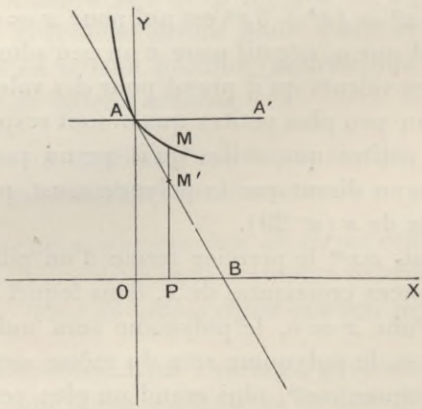
$$2 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4$$

et la courbe définie par l'équation

$$y = 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4,$$

ou plutôt la portion de cette courbe qui correspond à des valeurs de x voisines de 0.

Fig. 12.



Pour $x = 0$, y est égal à 3; 3 est l'ordonnée du point A de la courbe situé sur l'axe des y; pour avoir les ordonnées des autres points il faut ajouter à 3 la valeur de $-2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4$; pour les valeurs de x voisines de 0, la valeur de ce polynome est positive si x est négatif, négative si x est positif; la valeur de y est d'abord un peu plus grande que 3, puis un peu plus petite; à gauche de l'axe des y la courbe est au-dessus de la droite AA′; à droite, elle est au-dessous : pour $x = 0$, le polynome est décroissant. Considérons la droite dont l'équation est $y = 3 - 2x$, droite que le lecteur sait tracer; pour les valeurs de x voisines de o, l'ordonnée de cette droite diffère peu de celle de la courbe; à un point M′ de la droite correspond un point M de la courbe, de même abscisse x; on obtient l'ordonnée de ce point M en ajoutant à l'ordonnée $3 - 2x$ du point M′ la valeur du polynome $4x^2 - 5x^3 + x^4$: cette valeur est l'équivalent algébrique du vecteur M′M, en prenant pour direction positive, sur les parallèles à l'axe des y, la même direction que sur cet axe.

Le polynome $4x^2 - 5x^3 + x^4$ est positif, quand x est voisin de o : la courbe est au-dessus de la droite AB, de part et d'autre de A. Cette droite est tangente à la courbe, au sens que les anciens donnaient à ce mot; elle lui est encore tangente, dans le sens des modernes; en effet, la pente de la droite qui joint au point A, dont les coordonnées sont o et 3, le point de la courbe dont les coordonnées sont x et

$$3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4,$$

est (n° 28)

$$\frac{3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4 - 3}{x} = -2 + 4x + 5x^2 + x^3;$$

cette pente diffère aussi peu qu'on le veut de la pente de la droite AB, qui est égale à -2, pourvu que x soit suffisamment voisin de o. C'est ce qu'on exprime en disant que la droite AB est la limite d'une sécante qui joint le point A à un point voisin de la courbe, quand ce point se rapproche du point A, ou encore en disant que la droite AB est tangente en A à la courbe.

Je n'ai pas tracé, pour ne pas compliquer la figure, la parabole dont l'équation est $y = 3 - 2x + 4x^2$, qui, pour les valeurs de x voisines de o, semblerait presque se confondre avec la courbe, et qui est, elle aussi, tangente à la droite AB, en A; pour une même valeur de x l'ordonnée de la courbe s'obtient en ajoutant à l'ordonnée de la parabole la valeur du polynome $-5x^3 + x^4$, qui, pour les valeurs de x voisines de o, est positive si x est négatif, négative si x est positif. A droite de l'axe des y, la courbe est au-dessus de la parabole, à gauche elle est au-dessous : les deux courbes se traversent au point A, où elles sont tangentes.

La signification des expressions approchées que l'on peut substituer au polynome apparaît clairement.

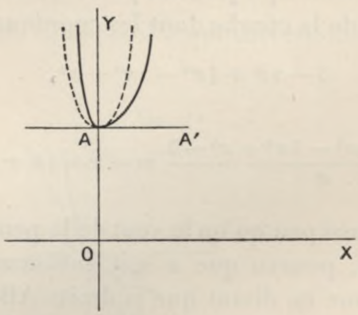
Dans le polynome qu'on vient d'étudier, il y avait un terme du premier degré. Les choses se passeraient un peu différemment si ce terme n'existait pas, et suivant que le premier terme qui ne manquerait pas serait de degré pair ou de degré impair. Je me contente d'indiquer les résultats sur un exemple.

Si l'on considère le polynome $2+4x^2-5x^3+x^4$, ou la courbe définie par l'équation

$$y = 2 + 4x^2 - 5x^3 + x^4,$$

on voit que, pour $x = 0$, le polynome passe par un minimum, dont la valeur est 2; la tangente en A à la courbe est parallèle à l'axe des y;

Fig. 13.



la courbe est, dans le voisinage du point A, au-dessus de sa tangente; la parabole dont l'équation est $y = 2 + 4x^2$ a été figurée en ponctué; elle traverse la courbe en A tout en lui étant tangente.

Enfin, si l'on considérait le polynome $2 - 5x^3 + x^4$ ou la courbe définie par l'équation

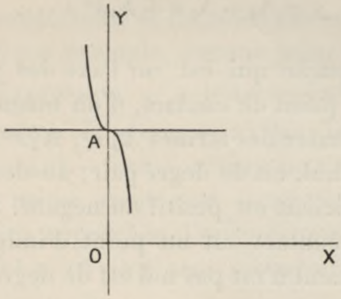
$$y = 2 - 5x^3 + 4x^4,$$

on voit encore que le polynome est décroissant pour $x = 0$; la tangente à la courbe au point A, dont les coordonnées sont 0 et 3, est encore parallèle à l'axe des x; la courbe est au-dessus de la tangente à droite de l'axe des y, elle est au-dessous, à gauche. Elle serait au-dessus de la courbe, facile à tracer, dont l'équation est

$$y = 3 - 5x^3.$$

Le point A est un point d'inflexion des deux courbes.

Fig. 14.



Si l'on considère, d'une façon générale, le polynome

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots,$$

dans lequel on admet que certains des coefficients A_0, A_1, ... puissent être nuls; la valeur du polynome, pour $x = 0$, est A_0; elle est voisine de A_0, pour les valeurs de x voisines de o.

Pour ces valeurs le signe du polynome est le même que celui du premier des termes A_0, $A_1 x$, $A_2 x^2$, ..., dont le coefficient n'est pas nul. Le sens de la variation du polynome pour $x = 0$ est donné par le premier de ces termes, *autres que* A_0, dont le coefficient n'est pas nul. Si le premier de ces termes est de degré impair, le polynome, pour $x = 0$, est croissant ou décroissant, suivant que le coefficient du premier terme est positif ou négatif; si le premier de ces termes est de degré pair, le polynome, pour $x = 0$, passe par un minimum ou un maximum suivant que le coefficient du premier terme est positif ou négatif.

Les expressions

$$A_0, \quad A_0 + A_1 x, \quad A_0 + A_1 x + A_2 x^2, \quad \ldots$$

sont des expressions approchées du polynome, pour les valeurs de x voisines de o; on sait calculer une limite de l'erreur que l'on commet quand on substitue à la valeur du polynome l'une de ces expressions approchées.

L'équation

$$y = A_0 + A_1 x$$

est l'équation de la tangente à la courbe définie par l'équation

$$y = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$

au point de cette courbe qui est sur l'axe des y. Cette courbe est, dans le voisinage du point de contact, d'un même côté par rapport à sa tangente, si le premier des termes $A_2 x^2$, $A_3 x^3$, $A_4 x^4$, ..., dont le coefficient n'est pas nul, est de degré pair; au-dessus, ou au-dessous, suivant que ce coefficient est positif ou négatif. Elle traverse sa tangente, le point de contact est un point d'inflexion, si le premier terme dont le coefficient n'est pas nul est de degré impair.

32. Il nous sera très utile plus tard d'avoir observé que ces propositions s'étendent à des expressions qui ne sont pas des polynomes, mais qui peuvent être mises sous une forme analogue à celle que nous venons de considérer.

Reprenons l'expression

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n,$$

qui nous a servi jusqu'ici à représenter un polynome. Je suppose que toutes les quantités A_0, A_1 soient des constantes, sauf la dernière A_n; quant à cette dernière, qui peut maintenant dépendre de x, je fais seulement sur elle l'hypothèse suivante : en désignant par α un nombre positif plus petit que 1, convenablement choisi, A_n reste, en valeur absolue, moindre qu'un certain nombre positif fixe B, pourvu que x soit lui-même moindre que α, en valeur absolue. Telle serait, par exemple, l'expression

$$3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4 \sin x,$$

puisque la valeur absolue de $\sin x$ est, au plus, égale à 1.

Alors toutes les conclusions précédentes subsistent : en effet, si l'on désigne par x' la valeur absolue de x et par A'_0, A'_1, ..., A'_{n-1} les valeurs absolues des coefficients constants A_0, A_1, ..., A_{n-1}, il est clair que, si l'on suppose x' plus petit que α, la valeur absolue de l'expression

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n$$

sera moindre que S en désignant maintenant par S la somme des nombres $A'_0, A'_1, \ldots, A'_{n-1}$ et B. C'est une remarque de cette nature qui a été notre point de départ; toutes les démonstrations peuvent être reprises sans changement, et les conclusions sont les mêmes.

Le lecteur n'aura, par exemple, aucune peine à prouver que, si l'on suppose $x' < \frac{1}{5}$, l'expression $-2 + 4x + 5x^2 + x^3 \sin x$ ne peut s'annuler et est du même signe que -2; dans les mêmes conditions, l'expression $-2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4 \sin x$ ne s'annule pas, sauf pour $x = 0$; elle est du même signe que $-2x$; si l'on regarde $-2x$ comme une expression approchée, l'erreur commise en la substituant à $-2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4 \sin x$ sera moindre, en valeur absolue, que $x'^2(4 + 5 + 1) = 10x'^2$.

On voit se reproduire toutes les circonstances des démonstrations précédentes, et je crois inutile d'insister davantage, pour montrer que les conclusions relatives à la continuité, à la croissance ou à la décroissance pour $x = 0$, au signe pour les valeurs de x voisines de 0 subsistent : les mots *continuité, croissance, décroissance* doivent être entendus dans le même sens qu'on leur a attribué quand il s'agissait des polynomes.

Il convient toutefois de remarquer que les conclusions relatives au signe ou à la variation de l'expression considérée n'offrent d'intérêt que si, dans cette expression, le terme qui détermine soit le signe, soit le sens de la variation, n'est pas le dernier terme $A_n x^n$, dont on sait seulement que le coefficient A_n reste compris entre certaines limites quand x est suffisamment petit, mais bien un des termes précédents, à coefficient différent de 0.

§ 3. — POLYNOMES IDENTIQUES.

33. *Un polynome réduit, à une variable, ne peut être nul pour toutes les valeurs de la variable que si tous les coefficients sont nuls :* on dit alors que le polynome est identiquement nul.

Cette proposition résulte immédiatement de ce qui précède.

Deux polynomes en x, réduits, ne peuvent prendre des valeurs égales, quelle que soit la valeur de x, sans être composés exactement des mêmes termes.

En effet, la différence des valeurs de ces deux polynomes est la valeur d'un polynome dont les coefficients sont les différences des coefficients respectifs des polynomes proposés : ces différences doivent être nulles d'après la proposition précédente (¹).

Ces propositions, qui sont capitales, s'étendent de suite aux polynomes à deux, trois, ... variables.

Par exemple, un polynome réduit à deux variables x, y ne peut être nul pour tous les systèmes de valeurs attribuées à la variable sans que tous ses coefficients soient nuls.

Un polynome en x, y, en effet, peut être ordonné suivant les puissances d'une des variables, de y par exemple ; en réunissant ensemble tous les termes qui contiennent y au même degré et en mettant en facteur la puissance de y qui figure dans tous ces termes, on parviendra à une expression de la forme

$$P_0 + P_1 y + P_2 y^2 + \ldots + P_n y^n,$$

(¹) Les propositions et leurs démonstrations subsistent pour ces sortes de polynomes que l'on a considérés dans le numéro précédent : Une expression de la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des constantes et où l'on sait que A_n, qui peut d'ailleurs dépendre de x, reste compris entre deux nombres fixes, quand x reste compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, ne peut être nulle pour toutes les valeurs de x comprises entre $-\alpha$ et $+\alpha$ que si les coefficients constants $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont nuls et si A_n est nul pour toutes ces valeurs de x.

Deux expressions de la forme

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n,$$
$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_{n-1} x^{n-1} + B_n x^n,$$

où les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ sont constants, et où l'on sait que les quantités A_n, B_n, qui peuvent dépendre de x, sont comprises entre des nombres fixes quand x reste compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, ne peuvent être égales pour toutes ces valeurs de x que si l'on a $A_0 = B_0$, $A_1 = B_1$, ..., $A_{n-1} = B_{n-1}$, et si, en outre, A_n et B_n ont toujours des valeurs égales. Il convient toutefois d'observer que cette dernière proposition suppose que le nombre naturel n est le même dans les deux expressions. Il est aisé de s'arranger pour qu'il en soit ainsi, en mettant dans les derniers termes de l'une des expressions une puissance convenable de x en facteur.

où P_0, P_1, P_2, ..., P_n sont des polynomes en x, dont les coefficients sont manifestement les coefficients du polynome proposé en x, y. Supposons que ce dernier polynome soit nul quelles que soient les valeurs attribuées à x, y. Si l'on attribue à x une valeur numérique x', les polynomes (en x) P_0, P_1, ..., P_n prendront des valeurs numériques P'_0, P'_1, ..., P'_n et l'expression précédente deviendra un polynome à une variable y

$$P'_0 + P'_1 y + P'_2 y^2 + \ldots + P'_n y^n.$$

La valeur de ce polynome en y doit être nulle pour une valeur quelconque y' de y, puisqu'elle est évidemment la même que celle du polynome proposé (en x, y) pour $x = x'$, $y = y'$; il faut donc que l'on ait $P'_0 = 0$, $P'_1 = 0$, ..., $P'_n = 0$, c'est-à-dire que chacun des polynomes (en x) P_0, P_1, ..., P_n doit s'annuler quand on remplace x par un nombre quelconque x', c'est-à-dire encore que chacun de ces polynomes est identiquement nul : tous les coefficients du polynome proposé (en x, y) sont nuls.

Du cas de deux variables on passe au cas de trois variables, puis de quatre, etc.... Le théorème est général.

On en déduit que deux polynomes réduits, à n variables, ne peuvent prendre la même valeur pour tout système de valeurs de ces variables sans être identiques terme à terme.

34. La portée de cette proposition est considérable; elle éclaire tout d'un coup les opérations de l'addition, de la soustraction, de la multiplication des polynomes, en montrant que ces opérations jouissent de propriétés que l'on a établies pour les nombres :

En parlant du polynome qui est la somme, la différence, le produit de deux polynomes donnés, j'entendrai toujours parler du polynome *réduit* que l'on sait former par les éléments de l'Algèbre et dont la valeur est égale, comme on sait, à la somme, à la différence, ou au produit des valeurs des polynomes proposés, quelles que soient les valeurs attribuées aux variables; d'après ce qu'on vient de dire, il n'y a qu'un seul polynome qui puisse avoir cette propriété; tous les autres lui sont identiques terme à terme. Je me borne à énoncer les propositions suivantes, en me contentant de donner quelques explications sur la dernière, afin de bien fixer le sens qu'il faut leur attribuer à toutes.

Plusieurs polynomes étant donnés, on peut les ajouter dans l'ordre qu'on voudra, on retombera toujours sur le même polynome (réduit).

Dans une somme de plusieurs polynomes, on peut remplacer tels polynomes que l'on veut par leur somme effectuée.

On peut multiplier plusieurs polynomes dans l'ordre que l'on veut; le polynome produit, après qu'on l'a réduit, est toujours le même.

Dans un produit de polynomes, on peut remplacer tels facteurs (polynomes) que l'on veut par leur produit effectué; le produit final est toujours le même polynome.

Le produit de plusieurs polynomes ne peut être identiquement nul que si l'un des facteurs est identiquement nul [1].

Pour multiplier la somme de deux polynomes P, Q par un polynome R, on peut multiplier par R chacun des polynomes P, Q et ajouter les deux produits.

Ce dernier théorème s'exprime par l'identité

$$(P+Q)R = PR + QR.$$

Dans le premier membre, $P+Q$ représente le polynome obtenu en ajoutant, d'après la règle élémentaire, les polynomes P, Q; $(P+Q)R$ représente le polynome (réduit) obtenu en multipliant, d'après la règle élémentaire, le polynome $P+Q$ par le polynome R; dans le second membre PR, QR représentent de même les polynomes obtenus en multipliant le polynome P par le polynome R, le polynome Q par le polynome R; $PR+QR$ représente le polynome (réduit) obtenu en ajoutant les deux polynomes PR, QR; en disant que l'égalité écrite est une *identité,* on entend que le polynome (réduit) $(P+Q)R$ est le même polynome que le polynome (réduit) $PR+QR$.

Qu'il en soit ainsi, c'est ce qui résulte évidemment de la proposition précédente; en effet, si l'on attribue aux variables des valeurs numériques quelconques, les polynomes P, Q, R prennent des valeurs numériques P', Q', R' et le nombre $(P'+Q')R'$ est certainenement égal au nombre $P'R'+Q'R'$. Cela revient à dire que les deux

(1) Je rappelle à ce propos que, lorsqu'on fait le produit de deux ou plusieurs polynomes en x, le terme du plus bas degré s'obtient en faisant le produit des termes du plus bas degré dans les différents facteurs; le terme du plus haut degré s'obtient de même en faisant le produit des termes du plus haut degré dans les différents facteurs.

polynomes $(P+Q)R$ et $PR+QR$ prennent les mêmes valeurs numériques pour un système quelconque de valeurs numériques attribuées aux variables ; les deux polynomes, lorsqu'ils sont réduits, sont donc identiques terme à terme.

Il est à peine utile d'appeler l'attention du lecteur sur les conséquences de ce dernier théorème : si dans une somme de produits de polynomes figure, dans chaque terme de la somme, un même polynome, on peut le mettre en facteur ; pour multiplier une somme de polynomes par une somme de polynomes, on peut multiplier chaque terme de la première somme par chaque terme de la seconde et ajouter les produits partiels ; le polynome ainsi obtenu est le même que celui qu'on aurait obtenu en effectuant la première somme, puis la seconde et en multipliant les résultats.

Si, en multipliant les deux polynomes A, B par le polynome C, non identiquement nul, on trouve le même produit, c'est que les deux polynomes A, B étaient identiques ; en effet, le polynome $AC - BC$ étant, par hypothèse, identiquement nul, il en est de même du produit $(A-B)C$, qui lui est identique ; si donc le polynome C n'est pas identiquement nul, c'est que la différence $A - B$ est identiquement nulle, ou que le polynome A est identique au polynome B.

§ 4. — ÉTUDE D'UN POLYNOME POUR LES VALEURS DE x VOISINES DE a.

35. Après cette digression, arrivons à l'étude des valeurs d'un polynome en x, pour les valeurs de x voisines d'un nombre donné a.

Soit

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$$

le polynome proposé, ordonné suivant les puissances croissantes de x ; je suppose qu'il soit de degré n, c'est-à-dire que le dernier coefficient A_n ne soit pas nul. Quelques-uns des autres coefficients A_0, A_1, ..., A_{n-1} peuvent d'ailleurs être nuls.

Pour ramener l'étude qu'on veut faire au cas, déjà traité, où la variable reste voisine de o, il suffit de poser $x = a + h$, en regardant h comme une variable qui restera voisine de o ; la valeur de $a+h$, ou de x, restera voisine de a. Le polynome proposé deviendra alors

$$f(a+h) = A_0 + A_1(a+h) + A_2(a+h)^2 + \ldots + A_n(a+h)^n.$$

On sait, par de simples additions et multiplications de polynomes, *développer* le second membre et l'ordonner suivant les puissances ascendantes de h, de manière à le mettre sous la forme

$$B_0 + B_1 h + B_2 h^2 + \ldots.$$

Relativement à ce développement, je ferai d'abord quelques remarques, qui concernent surtout les deux premiers coefficients et le dernier.

Lorsque, en désignant par r un nombre naturel quelconque, on développe $(a+h)^r$ et qu'on l'ordonne suivant les puissances ascendantes de h, c'est-à-dire lorsqu'on effectue le produit de r polynomes égaux à $a+h$, le premier terme (le terme de moindre degré) est égal à a^r, le terme du plus haut degré est h^r, puisque ces termes s'obtiennent respectivement en multipliant les termes du plus bas degré, ou du plus haut degré dans les r facteurs; il est aisé d'avoir aussi le terme du premier degré en h : il est $2ah$, $3a^2h$, $4a^3h$, ... dans les développements de $(a+h)^2$, $(a+h)^3$, $(a+h)^4$, ...; il est $ra^{r-1}h$ dans le développement de $(a+h)^r$; si l'on admet, en effet, que la proposition soit vraie pour le nombre r, on aura

$$(a+h)^r = a^r + ra^{r-1}h + \ldots,$$

les termes non écrits au second membre contenant h^2, h^3, ...; si l'on multiplie les deux membres par $a+h$, les termes non écrits dans le second membre ne fourniront pas de termes du premier degré en h. Le terme du premier degré en h, dans le développement de $(a+h)^{r+1}$ proviendra exclusivement du produit de $a^r + ra^{r-1}h$ par $a+h$ [1]; il est $(r+1)a^r h$; la loi se continue donc.

Il résulte des remarques précédentes que, si l'on ordonne le poly-

---

[1] Il y a là une remarque générale qu'il est bon de faire : Lorsqu'on a à effectuer le produit de deux polynomes ordonnés par rapport aux puissances ascendantes de x,

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

et qu'on ne veut conserver au produit que les termes de degré m ou de degré inférieur, on pourra, dans les deux facteurs, effacer les termes de degré supérieur à m, faire ensuite le produit, en supprimant, dans ce produit, les termes qui sont de degré supérieur à m.

nome

$$f(a+h) = A_0 + A_1(a+h) + A_2(a+h)^2 + \ldots + A_n(a+h)^n$$

suivant les puissances ascendantes de h, on tombera sur un polynome de la forme

$$(1) \qquad f(a+h) = B_0 + B_1 h + B_2 h^2 + \ldots + B_n h^n,$$

où B_n est égal à A_n, puisque $A_n(a+h)^n$ est le seul terme qui fournisse un terme en h^n, et où l'on a

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 + A_1 a + A_2 a^2 + \ldots + A_n a^n, \\ B_1 &= A_1 + 2A_2 a + 3A_3 a^2 + \ldots + nA_n a^{n-1}; \end{aligned}$$

quant aux autres coefficients, on donnera, un peu plus tard, une règle simple pour les calculer.

Dans le développement de $f(a+h)$, ordonné suivant les puissances croissantes de h, le terme constant B_0 est $f(a)$; il s'obtient en remplaçant x par a dans le polynome proposé $f(x)$: ce résultat est d'ailleurs évident sur l'identité (1) elle-même ; il suffit, pour l'obtenir, de faire $h = 0$ dans cette identité.

Le coefficient B_1 de h, dont on verra bientôt toute l'importance, s'obtient en remplaçant x par a dans le polynome

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1},$$

qu'on appelle la *dérivée* [1] du polynome $f(x)$, ou le polynome dérivé de $f(x)$, et qui se déduit de ce dernier polynome par la règle suivante :

On supprime le terme constant dans le polynome proposé ; on multiplie chaque coefficient par l'exposant de x dans le terme correspondant [2]. On diminue enfin cet exposant d'une unité.

Au lieu de dire que $f(a+h)$ se met sous la forme (1), il revient au même, en remettant $x-a$ à la place de h, de dire que le poly-

---

[1] La notion de dérivée a été déjà introduite dans les éléments, à un autre point de vue auquel je reviendrai plus tard. On verra, lorsqu'il sera question de polynomes à variables imaginaires, l'intérêt de la définition actuelle.

[2] Cette dernière règle, appliquée au terme A_0 ou $A_0 x^0$, conduirait à supprimer ce terme, comme on doit le faire effectivement.

nome $f(x)$ peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad f(x) = B_0 + B_1(x-a) + B_2(x-a)^2 + \ldots + B_n(x-a)^n.$$

C'est ce qu'on appelle ordonner le polynome $f(x)$ suivant les puissances de $x - a$.

Les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ peuvent être nuls, mais non le dernier coefficient B_n, qui est égal à A_n.

Quand h est voisin de o, la valeur du polynome (en h), $f(a+h)$, est voisine de la valeur B_0 que prend ce polynome pour $h = 0$; le polynome $f(x)$ est voisin de la valeur $B_0 = f(a)$ qu'il prend pour $x = a$; la valeur du polynome reste aussi voisine qu'on veut de B_0 pourvu que x reste suffisamment voisin de a; c'est ce qu'on exprime en disant que le polynome $f(x)$ est une *fonction continue* [1] de x pour $x = a$.

Pour les valeurs de h suffisamment voisines de o, le polynome $f(a+h)$ est du signe du premier de ses termes B_0, $B_1 h$, $B_2 h^2$, ..., dont le coefficient n'est pas nul; pour les valeurs de x suffisamment voisines de a, le polynome $f(x)$ est du signe du premier des termes B_0, $B_1(x-a)$, $B_2(x-a)^2$, ... dont le coefficient n'est pas nul.

Laissons, pour le moment, B_0 de côté. Le premier des coefficients suivants $B_1, B_2, \ldots, B_n$, qui n'est pas nul, joue un rôle important, c'est lui qui fixe en quelque sorte la façon dont le polynome se comporte, pour les valeurs de x voisines de a. Soit B_r ce coefficient : si r est impair, en sorte que le terme $B_r h^r$, ou $B_r(x-a)^r$ soit de degré impair, le polynome $f(x)$, lorsque B_r est positif, est plus grand pour $x = a$ que pour les valeurs de x un peu plus petites que a, plus petit que pour les valeurs de x un peu plus grandes que a : le polynome $f(x)$ est alors croissant pour $x = a$; quand, au contraire, B_r est négatif, le polynome $f(x)$ est décroissant pour $x = a$.

Si r est pair, en sorte que $B_r h^r$ ou $B_r(x-a)^r$ soit de degré pair, le polynome $f(x)$ est plus petit, ou plus grand, pour $x = a$, que pour les valeurs voisines, suivant que B_r est positif ou négatif; suivant

---

(1) Pour peu qu'il veuille y réfléchir, le lecteur reconnaîtra que cette continuité est admise implicitement quand on admet que l'équation $y = f(x)$ peut être représentée par une *courbe*. Quand un point décrit une *courbe*, l'ordonnée varie très peu, lorsque l'abscisse varie très peu. C'est donc prématurément que j'ai parlé de la courbe qui représente un polynome.

les cas, le polynome $f(x)$ passe, pour $x=a$, par un minimum ou un maximum.

Les expressions

$$B_0, \quad B_0+B_1(x-a), \quad B_0+B_1(x-a)+B_2(x-a)^2, \quad \ldots$$

fournissent des expressions approchées de la valeur du polynome $f(x)$ pour les valeurs de x voisines de a; on sait calculer une limite de l'erreur commise en substituant au polynome l'une de ces expressions : par exemple, si l'on choisit la dernière, et si l'on suppose que la valeur absolue de $x-a$ soit inférieure à 1, l'erreur commise sera moindre en valeur absolue que $S(x-a)^3$, en désignant par S la somme des valeurs absolues des coefficients $B_3, B_4, \ldots, B_n$.

Pour les valeurs de x voisines de a, la courbe dont l'équation est $y=f(x)$ se rapproche de la droite dont l'équation est

$$y=B_0+B_1(x-a);$$

quand B_2 n'est pas nul, suivant que B_2 est positif ou négatif, la courbe est au-dessus ou au-dessous de cette droite, qu'elle affleure au point dont les coordonnées sont $x=a$, $y=B_0=f(a)$; si B_2 est nul sans que B_3 le soit, la courbe traverse la droite au même point.

Dans tous les cas, la droite est tangente à la courbe : en effet, la pente de la droite qui joint les deux points dont les coordonnées sont respectivement a et $f(a)=B_0$, $a+h$ et $f(a+h)=B_0+B_1h+\ldots$ est (n° 28)

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{B_1h+B_2h^2+B_3h^3+\ldots}{h}=B_1+B_2h+B_3h^2+\ldots;$$

et cette dernière quantité est aussi voisine de B_1 qu'on le veut, pourvu que h soit suffisamment petit; en d'autres termes, B_1 est la limite de la pente d'une sécante joignant les deux points, quand le second se rapproche du premier. C'est la pente de la tangente (¹) au point dont les coordonnées sont a et $f(a)=B_0$; l'équation de cette tangente est

(¹) Par définition, la *pente d'une courbe* en un point de cette courbe est la pente de la tangente en ce point : on peut donc dire que la pente de la courbe définie par l'équation $y=f(x)$, au point de cette courbe dont les coordonnées sont a et $f(a)$, est

$$B_1=A_1+2A_2a+3A_3a^2+\ldots+nA_na^{n-1}.$$

bien $y - B_0 = B_1(x - a)$ (n° 28). Ce résultat subsiste, ainsi que la démonstration, lors même que l'un ou l'autre des coefficients B_0, B_1 est nul. S'ils sont nuls tous deux, l'axe des x est la tangente à la courbe.

Pour les valeurs de x voisines de a, la parabole dont l'équation est

$$y = B_0 + B_1(x - a) + B_2(x - a)^2$$

est très voisine de la courbe dont l'équation est $y = f(x)$, etc.

Si, par exemple, le lecteur veut étudier le polynome

$$f(x) = 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4,$$

pour les valeurs de x voisines de 1, il trouvera, en effectuant les calculs,

$$f(1 + h) = 1 - 5h + 5h^2 - h^3 + h^4,$$
$$f(x) = 1 - 5(x - 1) - 5(x - 1)^2 - (x - 1)^3 + (x - 1)^4.$$

Pour $x = 1$, le polynome prend la valeur 1; pour cette valeur il est décroissant; au point dont les coordonnées sont $x = 1$, $y = 1$, la tangente à la courbe définie par l'équation

$$y = 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4 = 1 - 5(x - 1) - \ldots$$

a elle-même pour équation $y = 1 - 5(x - 1)$.

36. Il importe de se rappeler le rôle du coefficient B_1 dont la valeur s'obtient en remplaçant x par a dans la dérivée $f'(x)$ du polynome $f(x)$:

La pente de la tangente en un point de la courbe définie par l'équation $y = f(x)$, dont l'abscisse est a, s'obtient en remplaçant x par a dans la dérivée $f'(x)$ du polynome $f(x)$.

Lorsque le résultat $f'(a)$ de cette substitution n'est pas nul, le polynome $f(x)$ est croissant ou décroissant pour $x = a$ suivant que $f'(a)$ est positif ou négatif.

37. Le cas particulier où le polynome $f(x)$ s'annule pour $x = a$ mérite qu'on s'y arrête; on dit alors que a est une racine du polynome $f(x)$; B_0 est alors nul, et il peut se faire que plusieurs des coefficients suivants $B_1, B_2, \ldots, B_{\alpha-1}$ soient nuls; je suppose que B_α soit différent de 0. (On sait que tous les coefficients ne peuvent être

nuls.) On a alors

$$f(a+h) = B_\alpha h^\alpha + B_{\alpha+1} h^{\alpha+1} + \ldots + B_n h^n = h^\alpha (B_\alpha + B_{\alpha+1} h + \ldots + B_n h^{n-\alpha}),$$
$$f(x) = (x-a)^\alpha [B_\alpha + B_{\alpha+1}(x-a) + \ldots + B_n (x-a)^{n-\alpha}] = (x-a)^\alpha g(x),$$

en posant

$$g(x) = B_\alpha + B_{\alpha+1}(x-a) + \ldots + B_n (x-a)^{n-\alpha};$$

le polynome (en h)

$$g(a+h) = B_\alpha + B_{\alpha+1} h + \ldots + B_n h^{n-\alpha}$$

ne s'annule ni pour $h = 0$, ni pour les valeurs de h voisines de 0; le polynome $g(x)$ ne s'annule ni pour $x = a$, ni pour les valeurs de x voisines de a.

Dans ces conditions, on dit que a est une racine d'ordre de multiplicité α du polynome $f(x)$. Si α est égal à 1, la racine a est dite *simple*. Si α est plus grand que 1, la racine a est dite *multiple* : elle est double, triple, quadruple, ..., si α est égal à $2, 3, 4, \ldots$; c'est par un abus de langage, quand la racine est simple, que l'on dit que son ordre de *multiplicité* est 1.

Un polynome en x étant donné, on appelle racine *de ce polynome toute valeur de x pour laquelle il s'annule; si a est une racine, en remplaçant x par $a+h$ dans le polynome, en ordonnant ensuite suivant les puissances croissantes de h, on obtient un polynome en h, sans terme constant : le degré du premier terme de ce polynome est, par définition, l'ordre de multiplicité de la racine a.*

Le polynome $2x^3 \mp 5x^2 + 4x - 1$, par exemple, s'annule pour $x = 1$. 1 est une racine; en remplaçant x par $1 + h$, le polynome devient $h^2 + 2h^3$. 1 est une racine d'ordre de multiplicité 2, ou, si l'on veut, une racine *double*.

Lorsqu'un polynome, ordonné par rapport aux puissances croissantes de x, ne contient pas de terme constant, 0 est une racine de ce polynome. L'ordre de multiplicité de cette racine est le degré du premier terme.

On a vu plus haut que, si a était une racine du polynome $f(x)$, d'ordre de multiplicité α, on pouvait mettre $f(x)$ sous la forme (1)

$$f(x) = (x-a)^{\alpha} g(x)$$

$g(x)$ étant un polynome qui ne s'annule pas pour $x = a$, et que l'on a d'ailleurs appris à former.

Inversement cette forme même caractérise une racine d'ordre α de multiplicité : en d'autres termes, si l'on a réussi, n'importe comment, à mettre le polynome $f(x)$ sous la forme $(x-a)^{\alpha} g(x)$, $g(x)$ étant un polynome en x qui ne s'annule pas pour $x = a$, on peut affirmer que a est une racine de $f(x)$, d'ordre α de multiplicité.

En effet, si, dans l'identité $f(x) = (x-a)^{\alpha} g(x)$, on remplace x par $a+h$, elle devient

$$f(a+h) = h^{\alpha} g(a+h);$$

si l'on développe le polynome $g(a+h)$ et qu'on l'ordonne suivant les puissances croissantes de h, le développement commence par un terme constant, $g(a)$, qui, par hypothèse, n'est pas nul. Le développement de $f(a+h)$ commencera donc par le terme $h^{\alpha} g(a)$, qui est de degré α en h.

On peut tirer d'autres conséquences de ce dernier résultat : c'est précisément ce premier terme du développement de $f(a+h)$ qui, d'après le numéro précédent, détermine la façon dont varie $f(x)$ pour $x = a$, et la forme de la courbe dont l'équation est $y = f(x)$ aux environs du point A, d'abscisse a, où cette courbe rencontre l'axe des x. Si α est impair, en particulier si a est racine simple, elle traverse cet axe en montant (lorsque x croît), ou en descendant, suivant que $g(a)$ est positif ou négatif. Si α est pair, la courbe, aux environs du point A, reste au-dessus ou au-dessous de l'axe des x, suivant que $g(a)$ est positif ou négatif. Si α est plus grand que 1, elle est tangente à l'axe, au point A. Si α est égal à 1, si a est racine simple, la pente de la tangente en A, ou de la courbe, est $g(a)$. Tout ceci résulte de la règle générale pour la détermination de la tangente.

38. Décomposition en facteurs d'un polynome dont on connaît les racines. — Supposons toujours que a soit une racine d'ordre de

(1) On entend par là que les deux polynomes $f(x)$ et $(x-a)^{\alpha} g(x)$ sont identiques.

multiplicité α du polynome

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n,$$

en sorte que l'on ait, avec les mêmes notations que précédemment,

$$f(x) = (x-a)^\alpha g(x),$$

le polynome $g(x)$ ne s'annulant pas pour $x = a$; puisque le produit des termes du plus haut degré dans $(x-a)^\alpha$ et dans $g(x)$ doit reproduire $A_n x^n$, on voit que le terme du plus haut degré dans $g(x)$ est $A_n x^{n-\alpha}$ et que $g(x)$ est de degré $n - \alpha$.

Supposons maintenant que $f(x)$ s'annule pour un nombre b, autre que a; il faudra que $(b-a)^\alpha g(b)$ soit nul et, comme le premier facteur n'est pas nul, que le second $g(b)$ le soit; b est donc racine de $g(x)$; je dis que b est une racine du même ordre de multiplicité pour $g(x)$ que pour $f(x)$.

Si, en effet, b est d'ordre de multiplicité β pour $g(x)$, c'est que l'on peut poser

$$g(x) = (x-b)^\beta h(x),$$

$h(x)$ étant un polynome qui ne s'annule pas pour $x = b$; le polynome $f(x)$ pourra donc se mettre sous la forme

$$f(x) = (x-b)^\beta [(x-a)^\alpha h(x)],$$

et comme le polynome entre crochets ne s'annule pas pour $x = b$, b est bien une racine d'ordre de multiplicité β pour $f(x)$. Le polynome $h(x)$ ne s'annule pas non plus pour $x = a$, sans quoi a serait une racine de $g(x)$; s'il y a un nombre c, différent de a et de b, qui annule $f(x)$, ce nombre est aussi une racine de $h(x)$, du même ordre de multiplicité γ pour $f(x)$ que pour $h(x)$, et l'on peut poser

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^r k(x),$$

$k(x)$ étant un polynome qui ne s'annule pour aucune des trois valeurs a, b, c de x.

$g(x)$ étant de degré $n - \alpha$, $h(x)$ est de degré $n - \alpha - \beta$, $k(x)$ de degré $n - \alpha - \beta - \gamma$; dans chacun de ces polynomes, le terme du plus haut degré en x a toujours pour coefficient A_n.

Il est clair que le raisonnement peut se continuer, et que, si le polynome $f(x)$ admet les racines distinctes a, b, ..., l avec les ordres de multiplicité respectifs α, β, ... λ et n'en admet pas d'autres, on aura

$$f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré $n-\alpha-\beta-\ldots-\lambda$ qui ne s'annule plus pour aucune valeur de x, et dans lequel le coefficient de la plus haute puissance de x est A_n; si l'on avait

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda = n,$$

on aurait identiquement

$$f(x) = A_n (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda.$$

Il est bien clair que $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ ne peut dépasser n et que, en particulier, le nombre des racines distinctes d'un polynome de degré n ne peut dépasser n.

Ceci complète une proposition établie au n° 33; non seulement un polynome en x, qui n'est pas identiquement nul, ne peut être nul pour toutes les valeurs de x, mais il ne peut pas avoir plus de racines différentes qu'il y a d'unités dans son degré. Il en résulte que deux polynomes dont le degré est inférieur ou égal à n ne peuvent pas, sans être identiques, être égaux pour plus de n valeurs distinctes de x, puisque leur différence s'annulerait pour ces valeurs de x.

39. Grandes valeurs de la variable. — Il me reste à dire quelques mots de l'étude des valeurs d'un polynome pour de très grandes valeurs absolues de la variable.

Pour cette étude, il convient d'ordonner le polynome par rapport aux puissances descendantes de la variable et de porter son attention sur les premiers termes, qui importent le plus; si la valeur absolue de la variable est assez grande, chaque terme est plus grand que ceux qui le suivent, et l'erreur *relative* que l'on commet en ne conservant que les premiers termes est faible.

Si l'on veut avoir par exemple la valeur pour $x = 10000$ du polynome $3x^3 - 2x^2 + x - 1$, les erreurs relatives que l'on commettra en calculant, au lieu de la valeur du polynome proposé, celle des polynomes $3x^3$, $3x^3 - 2x^2$ seront respectivement plus petites que $\frac{5}{2.10^4}$, $\frac{1}{2.10^8}$. Ceci va d'ailleurs être précisé.

Considérons en général le polynome, ordonné suivant les puissances décroissantes de x,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n;$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les coefficients : je suppose que le premier a_0 ne soit pas nul.

La valeur de ce polynome, pour une valeur quelconque de x, autre que o, est égale au produit de la valeur de x^n par celle de l'expression

$$a_0 + a_1 \frac{1}{x} + a_2 \frac{1}{x^2} + \ldots + a_{n+1} \frac{1}{x^{n+1}} + a_n \frac{1}{x^n};$$

qui peut être regardée comme un polynome, dont la variable s'appellerait $\frac{1}{x}$, ordonné suivant les puissances croissantes de cette variable; quand x est très grand en valeur absolue, $\frac{1}{x}$ est très petit en valeur absolue, le lecteur prévoit bien qu'il va être ramené à un cas qu'il connaît déjà.

Posons

$$\frac{1}{x} = z, \qquad \varphi(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n;$$

on aura, pour toutes les valeurs de x autres que o,

$$f(x) = x^n [a_0 + \varphi(z)];$$

le polynome $\varphi(z)$ s'annule pour $z = 0$; sa valeur absolue reste aussi petite qu'on veut pourvu que la valeur absolue de z soit assez petite, que celle de x soit assez grande.

Désignons par x', z', a'_0 les valeurs absolues de x, z, a_0. Donnons-nous un nombre positif ε aussi petit qu'on voudra, moindre en particulier que a'_0. Supposons qu'on ne considère que des valeurs de x assez grandes absolument pour que la valeur absolue de $\varphi(z)$ soit moindre que ε. Il suffit pour cela que z' soit inférieur à un nombre positif que l'on sait calculer, que x' soit supérieur à l'inverse de ce dernier nombre. Dans ces conditions, la valeur absolue de $a_0 + \varphi(z)$ sera évidemment supérieure au nombre positif $a'_0 - \varepsilon$; $a_0 + \varphi(z)$ ne s'annulera pas et sera toujours du signe de a_0; le produit $x^n[a_0 + \varphi(z)]$ ne s'annulera pas non plus et sera du signe de $a_0 x^n$, la valeur absolue de ce produit est supérieure à $(a'_0 - \varepsilon)x'^n$ et ce dernier nombre peut évidemment être supposé aussi grand qu'on veut pourvu que x' soit suffisamment grand.

Pourvu que la valeur absolue de x soit plus grande qu'un nombre positif P *qu'on sait calculer, le polynome $f(x)$ ne s'annule pas, il est du même signe que son premier terme $a_0 x^n$; sa valeur absolue est aussi grande qu'on veut, pourvu que la valeur absolue de x soit suffisamment grande.*

Si l'on considère par exemple le polynome

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 5x^2 - 8x + 2,$$

le polynome $\varphi(z)$ sera ici

$$-4z^2 + 5z^3 + 8z^4 + 2z^5 = z^2(-4 + 5z - 8z^2 + 2z^3);$$

pourvu que z' soit plus petit que 1, il est plus petit en valeur absolue que $19z'^2$, que 2 par conséquent, si l'on suppose $z' < \frac{1}{4}$, $x' > 4$. Si la valeur absolue de x est plus grande que 4, le polynome $f(x)$ ne sera jamais nul, il sera du signe de son premier terme $2x^5$, positif si x est positif, négatif dans le cas contraire, plus grand en valeur absolue que

$$x'\left(2 - \frac{19}{16}\right) = x'^5 \frac{13}{16};$$

si l'on voulait déterminer un nombre positif B tel que la condition $x' > \text{B}$ entraînât $|f(x)| > 1000$, il suffirait de prendre $\text{B} > \sqrt[5]{\frac{16000}{13}}$, par exemple $\text{B} = 4,2$.

En supposant $x' > 4,2$ le polynome sera plus grand que 1000 si x est positif, plus petit que -1000 si x est négatif.

L'erreur commise en remplaçant $f(x)$ par son premier terme $2x^5$ est $x^5\varphi(z)$; l'erreur relative

$$\frac{x^5\varphi(z)}{x^5[2 + \varphi(z)]} = \frac{\varphi(z)}{2 + \varphi(z)}$$

est moindre en valeur absolue que

$$\frac{19z'^2}{2 - 19z'^2},$$

pourvu que $19z'^2$ soit plus petit que 2, ce qui arrivera sûrement si z' est plus petit que $\frac{1}{4}$. Si l'on voulait que cette erreur fût moindre que le nombre positif η, il suffirait de supposer z' plus petit que $\frac{1}{4}$ et que

$$\sqrt{\frac{2\eta}{19(1+\eta)}};$$

elle serait, par exemple, moindre que 0,001 si l'on supposait $x' > 100$.

Pour en revenir au cas général où l'on a

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

on voit qu'on aura, comme au n° 31, à distinguer quatre cas suivant que n est impair ou pair et que a_0 est positif ou négatif.

Lorsque n est impair le polynome est de signes contraires pour les valeurs positives ou négatives de x assez grandes en valeur absolue. Je me permettrai d'employer les expressions suivantes, suffisamment éclaircies par ce que je viens de dire :

Si l'on a $a_0 > 0$, le polynome est égal à $+\infty$ si x est égal à $+\infty$, à $-\infty$ si x est égal à $-\infty$. Si l'on $a_0 < 0$, il est égal à $-\infty$ ou à $+\infty$, suivant que x est égal à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Au contraire, lorsque n est pair, le polynome est du signe de a_0, pour les grandes valeurs absolues de x; il est égal à $+\infty$ ou à $-\infty$, pour $x = \pm\infty$, suivant que l'on a $a_0 > 0$ ou $a_0 < 0$.

Il est évident que ces dernières conclusions subsisteraient si le dernier terme a_n de l'expression $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, au lieu d'être une constante, dépendait de x et si l'on savait que pour les grandes valeurs de x, ce dernier terme reste, en valeur absolue, inférieur à un nombre fixe. L'analogie avec ce que l'on a dit au n° 32 pour les petites valeurs de x est évidente.

Si l'on veut reconnaître le sens de la variation du polynome $f(x)$ pour de grandes valeurs (absolues) de x, il n'y a qu'à appliquer la règle du n° 35. La dérivée du polynome $f(x)$ est

$$f'(x) = na_0 x^{n-1} + (n-1)a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1};$$

suivant que pour une valeur x_0 de x ce dernier polynome est positif ou négatif, le polynome proposé est croissant, ou décroissant, pour $x = x_0$. Or, si x est suffisamment grand en valeur absolue, le polynome dérivé $f'(x)$ est du signe de son premier terme $na_0 x^{n-1}$, qui n'est autre chose que la dérivée du premier terme $a_0 x^n$ du polynome proposé. Par conséquent, pour x suffisamment grand en valeur absolue, le polynome $f(x)$ est croissant ou décroissant suivant que son premier terme est croissant ou décroissant; on voit l'importance de ce premier terme qui fournit une valeur grossièrement approchée du polynome, le signe et le sens de la variation du polynome.

Remarquons enfin, en supposant le degré du polynome $f(x)$ supésieur à 1, que, si x est grand en valeur absolue, il en est de même de la valeur absolue de la dérivée; or la valeur de cette dérivée est la pente de la tangente, au point de la courbe, définie par l'équation $y=f(x)$, dont l'abscisse est x; cette tangente est donc presque parallèle à l'axe des y, et cela est d'autant plus vrai que la valeur absolue de x est plus grande.

Le lecteur a tout ce qu'il faut pour comprendre les schémas suivants qui donnent quelque idée de la partie de la courbe qui corres-

Fig. 15.

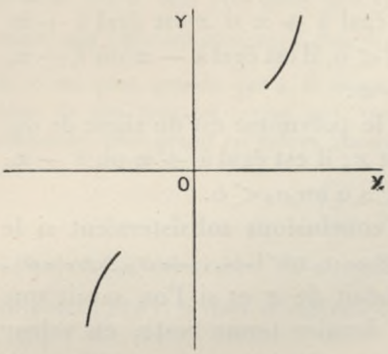


Fig. 16.

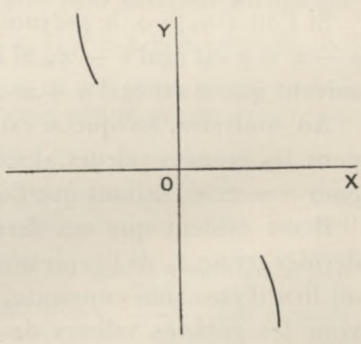


Fig. 17.

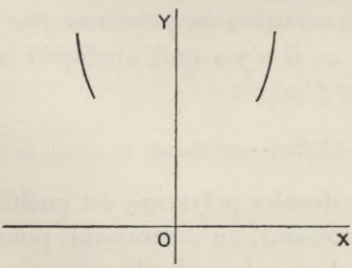
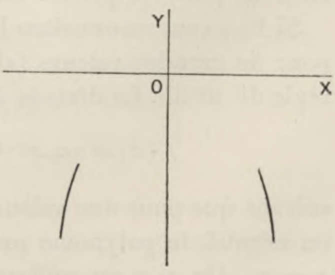


Fig. 18.



pond à de grandes valeurs de l'abscisse suivant les quatre cas considérés : n impair, $a_0 > 0$ et $a_0 < 0$; n pair, $a_0 > 0$ et $a_0 < 0$.

Il convient de signaler ce qui manque à l'étude précédente : on a appris à reconnaître comment se comportait un polynome pour les valeurs de x voisines d'une valeur donnée, en particulier pour les valeurs de x voisines de o, comment aussi il se comportait pour les grandes valeurs absolues de x ; on n'a pas appris à suivre ses variations comme on l'apprend dans les éléments pour les polynomes $ax+b$, ax^2+bx+c, ax^n ; sans traiter ce problème, sur lequel j'aurai à revenir, je crois pouvoir dire de suite que la question de savoir comment varie un polynome $f(x)$ quand x croît depuis A jusqu'à B revient à reconnaître quel est, dans ces conditions, le signe du polynome $f'(x)$. Si, par exemple, ce polynome $f'(x)$ est toujours positif dans ces conditions, c'est que pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (A, B) le polynome est croissant pour chacune de ces valeurs.

Est-il permis d'en conclure que le polynome est croissant dans cet intervalle, c'est-à-dire que la plus grande valeur du polynome correspond toujours à la plus grande valeur de la variable, ou encore que le rapport

$$\frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$$

est toujours positif pourvu que les nombres x', x'' appartiennent à l'intervalle (A, B)? Le lecteur, s'il veut bien y réfléchir, reconnaîtra que ce point n'a pas été *démontré*, mais il sera certainement très disposé à l'admettre. Dès lors, il voit qu'il sera en mesure de suivre complètement la variation d'un polynome dans tous les cas où il saura reconnaître quelles sont les valeurs de la variable pour lesquelles la dérivée est positive, celles pour lesquelles elle est négative ; dans le cas, par exemple, où la dérivée est un trinome du second degré, ou un trinome bicarré ; dans le cas où cette dérivée peut se mettre sous la forme

$$A(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}(x-c)^{\gamma}\ldots(x-l)^{\lambda},$$

où A, a, b, c, ..., l sont des nombres quelconques et α, β, γ, ..., λ des nombres naturels.

§ 5. — DÉRIVÉES D'UN POLYNOME. PUISSANCES D'UN BINOME.

40. On a défini au n° 35 la dérivée d'un polynome en x

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n :$$

Lorsque, dans ce polynome, on remplace x par $x + h$, que l'on developpe et que l'on ordonne suivant les puissances de h, de manière à mettre $f(x+h)$ sous la forme

$$(1) \qquad f(x+h) = P_0(x) + h P_1(x) + h^2 P_2(x) + \ldots + h^n P_n,$$

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $\ldots$, P_n sont des polynomes en x dont le premier est identique à $f(x)$, dont le dernier se réduit à la constante A_n, dont le second $P_1(x)$ est, par définition, la dérivée du polynome $f(x)$, et se représente habituellement par $f'(x)$; son expression, comme on l'a vu au n° 35, est

$$P_1(x) = f'(x) = A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \ldots + n A_n x^{n-1}.$$

On dit aussi que $f'(x)$ est la dérivée du polynome $f(x)$ *par rapport à* x, pour rappeler simplement que x est le nom de la variable qui figure dans le polynome $f(x)$. On verra plus tard l'utilité de cette façon de parler.

Si l'on veut regarder une constante numérique comme un polynome en x, de degré 0, il faut regarder la dérivée d'un tel polynome comme identiquement nulle, puisqu'il ne change pas quand on y remplace x par $x + h$ et qu'ainsi le terme en h fait alors défaut dans le second membre de l'identité (1).

La définition de la dérivée d'un polynome permet de justifier immédiatement certaines règles de calcul, sur lesquelles j'insiste d'autant moins que j'aurai à y revenir en considérant les dérivées à un autre point de vue; je me contente de signaler celles qui suivent, où $f(x)$, $\varphi(x)$ désignent des polynomes en x dont les dérivées sont $f'(x)$, $\varphi'(x)$ et où A, B désignent des constantes.

La dérivée du polynome $A f(x) + B \varphi(x)$ est $A f'(x) + B \varphi'(x)$;

La dérivée du produit $f(x) \varphi(x)$ est $f'(x) \varphi(x) + f(x) \varphi'(x)$.

On a, en effet, en remplaçant x par $x + h$, et en ordonnant suivant les puissances croissantes de la variable h,

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\ldots,$$
$$\varphi(x+h)=\varphi(x)+h\,\varphi'(x)+\ldots;$$

les points suspensifs sont mis à la place des termes en h^2, h^3, ...; on en conclut que, dans le développement de $\mathrm{A}f(x+h)+\mathrm{B}\,\varphi(x+h)$, ordonné suivant les puissances croissantes de h, le coefficient de h est $\mathrm{A}f'(x)+\mathrm{B}\,\varphi'(x)$; que, dans le développement du produit $f(x+h)\,\varphi(x+h)$ ordonné de même suivant les puissances croissantes de h, le coefficient de h est $f(x)\,\varphi'(x)+\varphi(x)f'(x)$: ces remarques, si l'on se reporte à la définition de la dérivée, justifient les propositions énoncées.

La première proposition contient comme cas particuliers les suivantes : la dérivée de $\mathrm{A}f(x)$ est $\mathrm{A}f'(x)$; la dérivée de la somme de deux polynomes est la somme des dérivées de ces polynomes. Cette proposition et sa démonstration s'étendent évidemment au cas où la somme comporte trois, quatre, ..., un nombre quelconque de polynomes. La règle même du n° 35 pour former la dérivée d'un polynome consiste à faire la somme des dérivées des termes de ces polynomes; il convient de remarquer qu'elle conduirait à un résultat exact lors même que le polynome proposé ne serait pas réduit.

De la règle relative à la dérivée d'un produit de deux polynomes on déduit sans peine une règle pour le calcul de la dérivée d'un produit d'autant de polynomes que l'on veut, d'une puissance naturelle d'un polynome, etc.

J'ai besoin, pour ce qui suit, de la proposition que voici :

Soit a un nombre quelconque, je considère le polynome en x

$$f(x+a)=\mathrm{A}_0+\mathrm{A}_1(x+a)+\mathrm{A}_2(x+a)^2+\ldots+\mathrm{A}_n(x+a)^n,$$

obtenu en remplaçant, dans le polynome $f(x)$, x par $x+a$: la dérivée de ce polynome s'obtient en remplaçant x par $x+a$ dans la dérivée $f'(x)$ du polynome $f(x)$; en d'autres termes, cette dérivée est le polynome en x

$$f'(x+a)=\mathrm{A}_1+2\,\mathrm{A}_2(x+a)+3\,\mathrm{A}_3(x+a)^2+\ldots+n\,\mathrm{A}_n(x+a)^{n-1}.$$

Si, en effet, dans l'identité (1), qui doit avoir lieu pour toutes les valeurs de x, on remplace x par $x+a$, elle devient

$$f(x+a+h) = P_0(x+a) + hP_1(x+a) + h^2P_2(x+a) + \ldots + h^nP_n;$$

la forme même du second membre montre que $P_1(x+a)$ est le coefficient de h dans le développement, ordonné suivant les puissances croissantes de h, du polynome qu'on obtient en remplaçant x par $x+h$ dans le polynome $f(x+a)$; c'est la définition même de la dérivée de ce dernier polynome.

Par exemple, la dérivée du polynome $1-3x+x^2$ est $-3+2x$; d'après la règle précédente, la dérivée du polynome

$$1-3(x-2)+(x-2)^2 = 10-7x+x^2$$

doit être

$$-3+2(x-2) = -7+2x.$$

C'est, en effet, le résultat qu'on trouve en appliquant au polynome $10-7x+x^2$ la règle du n° 35 pour obtenir sa dérivée.

41. Le polynome $f'(x)$ ou $P_1(x)$, dérivée du polynome

$$f(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n,$$

a lui-même une dérivée, qui se déduit de $f'(x)$ par la même règle qui permet de déduire $f'(x)$ de $f(x)$; cette dérivée du polynome $f'(x)$ s'appelle aussi la *dérivée seconde* de $f(x)$ et se représente par $f''(x)$, elle est

$$f''(x) = 1.2A_2 + 2.3A_3x + 3.4A_4x^2 + \ldots + (n-1)nA_nx^{n-2};$$

ce polynome $f''(x)$, du degré $n-2$, a lui-même une dérivée, la dérivée deuxième de $f'(x)$, la dérivée troisième de $f(x)$, à savoir :

$$f'''(x) = 1.2.3A_3 + 2.3.4A_4x + 3.4.5A_5x^2 + \ldots \\ + (n-2)(n-1)nA_nx^{n-3};$$

ce polynome a une dérivée, la dérivée quatrième de $f(x)$, à savoir :

$$f^{\text{IV}}(x) = 1.2.3.4A_4 + 2.3.4.5A_5x + 3.4.5.6A_6x^2 + \ldots \\ + (n-3)(n-2)(n-1)nA_nx^{n-4}.$$

La dérivée $p^{\text{ième}}$ $(p<n)$ du polynome $f(x)$, définie de la même

façon, de proche en proche, serait

$$\begin{aligned} f^{(p)}(x) = {} & 1.2.3\ldots p A_p \\ & + 2.3.4\ldots(p+1)A_{p+1}x + 3.4.5\ldots(p+2)A_{p+2}x^2 + \ldots \\ & + (n-p+1)(n-p+2)\ldots(n-1)nA_n x^{n-p}; \end{aligned}$$

c'est un polynome de degré $n-p$; ses termes proviennent des monomes de $f(x)$ dont le degré est au moins égal à p.

La dérivée $(n-1)^{\text{ième}}$ est du premier degré; elle est

$$f^{(n-1)}(x) = 1.2.3\ldots(n-1)A_{n-1} + 2.3.4\ldots nA_n x.$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$ est, toujours d'après la même règle,

$$f^{(n)}(x) = 1.2.3\ldots nA_n;$$

elle ne contient plus x, sa dérivée, ainsi que les dérivées suivantes du polynome $f(x)$, si l'on voulait les considérer, devraient être regardées comme nulles; un polynome du $n^{\text{ième}}$ degré n'a que n dérivées (non identiquement nulles); par exemple si l'on prend

$$f(x) = 4 - 5x + 7x^3 - x^5 + 8x^6,$$

les dérivées successives seront

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5 + 21x^2 - 5x^4 + 48x^5, \\ f''(x) &= 42x - 20x^3 + 240x^4, \\ f'''(x) &= 42 - 60x^2 + 960x^3, \\ f^{\text{IV}}(x) &= -120x + 2880x^2, \\ f^{\text{V}}(x) &= -120 + 5760x, \\ f^{\text{VI}}(x) &= 5760. \end{aligned}$$

Dans le polynome $f(x)$, le premier coefficient est A_0, de même dans les polynomes $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(p)}(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ ordonnés suivant les puissances ascendantes de x, les premiers coefficients, ou les valeurs de ces polynomes, pour $x=0$, sont les coefficients A_1, $A_2, \ldots, A_p, \ldots, A_n$, du polynome $f(x)$, respectivement multipliés par les facteurs numériques $1, 1.2, \ldots, 1.2\ldots p, \ldots, 1.2\ldots n$; en d'autres termes, on a

$$A_0 = f(0), \qquad A_1 = \frac{f'(0)}{1}, \qquad A_2 = \frac{f''(0)}{1.2}, \qquad \ldots,$$

$$A_p = \frac{f^{(p)}(0)}{1.2\ldots p}, \qquad \ldots, \qquad A_n = \frac{f^{n}(0)}{1.2\ldots n};$$

lors donc que l'on connaît les valeurs, pour $x=0$, d'un polynome et de ses dérivées, on connaît, par cela même, les coefficients de ce polynome.

42. Cette remarque, et celle qu'on a faite plus haut, relativement à la dérivée du polynome $f(a+x)$, dérivée qui s'obtient en remplaçant x par $a+x$, dans la dérivée $f'(x)$ du polynome $f(x)$, va nous permettre de résoudre immédiatement la question posée au n° 35 :

Étant donnés un polynome

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n,$$

et un nombre a, trouver les coefficients B_0, B_1, ..., B_n du polynome

$$f(a+x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n,$$

obtenu en remplaçant, dans le polynome $f(x)$, x par $a+x$ et en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x.

Ces coefficients sont les valeurs pour $x=0$ du polynome $f(a+x)$ et de ses dérivées ; on a vu au n° 40 que la dérivée $f'(a+x)$ de ce polynome s'obtenait en remplaçant x par $a+x$ dans la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$; la dérivée de $f'(a+x)$ s'obtiendra de même en remplaçant x par $a+x$ dans la dérivée $f''(x)$ de $f'(x)$, ...

Les dérivées successives du polynome $f(a+x)$ sont $f'(a+x)$, $f''(a+x)$, ..., $f^{(n)}(a+x)$; leurs valeurs, pour $x=0$, sont les valeurs $f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ que prennent les dérivées successives $f'(x), f''(x), \ldots, f^{n}(x)$ du polynome $f(x)$ quand on y remplace x par a, on a donc

$$B_0 = f(a), \qquad B_1 = \frac{f'(a)}{1}, \qquad B_2 = \frac{f''(a)}{1.2}, \qquad \ldots,$$

$$B_p = \frac{f^{(p)}(a)}{1.2\ldots p}, \qquad \ldots, \qquad B_n = \frac{f^{(n)}(a)}{1.2\ldots n} = A_n,$$

et, par suite,

$$(1) \qquad f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1} f'(a) + \frac{x^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(a) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a).$$

Dans cette formule, les lettres a et x désignent des nombres quelconques. Elle restera vraie si l'on remplace les lettres par d'autres; en particulier, si l'on remplace a par x et x par h elle s'écrit alors

$$(2)\qquad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\dots \\ +\frac{h^p}{1.2\dots p}f^{(p)}(x)+\dots+\frac{h^n}{1.2\dots n}f^{(n)}(x).$$

Si l'on reprend les notations du n° 40, on voit que les polynomes $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_p(x)$, ..., $P_n(x)$ de la formule (1) de ce numéro ne sont autre chose que les polynomes

$$f(x),\quad \frac{f'(x)}{1},\quad \dots,\quad \frac{f^{(p)}(x)}{1.2\dots p},\quad \dots,\quad \frac{f^{(n)}(x)}{1.2\dots n}=A_n.$$

On voit apparaître en dénominateur, dans ces expressions, les produits tels que $1.2\dots p$ des p premiers nombres naturels : ces produits figurent dans beaucoup de formules, et il est commode d'avoir une manière abrégée de les énoncer et de les écrire : une des habitudes les plus répandues consiste à appeler *factorielle p* le produit $1.2\dots p$ des p premiers nombres naturels et de le désigner par la notation $p!$. Par convention, le symbole $1!$ désigne la même chose que 1 ; enfin, par une autre convention, qui ne sera justifiée que plus loin, on pose aussi $0!=1$.

Voici, à titre d'exemple, une application de la formule précédente :
On a donné plus haut les expressions des six dérivées du polynome

$$f(x)=4-5x+7x^3-x^5+8x^6;$$

les valeurs, pour $x=1$, de ce polynome et de ses dérivées, respectivement divisées par $1!$, $2!$, ..., $6!$, sont 13, 59, 131, 137, 92, 8 : on a donc

$$4-5(1+x)+7(1+x)^3-(1+x)^5+8(1+x)^6 \\ =13+59x+131x^2+157x^3+92x^4+47x^5+8x^6;$$

ainsi qu'on pourrait d'ailleurs le trouver par un calcul direct ne comportant que des additions ou des multiplications de polynomes : ce dernier mode de calcul permet de prévoir que les coefficients du résultat sont des nombres entiers.

43. Formule du binome. — On peut appliquer la formule qui donne le développement de $f(a+x)$ au développement de $(a+x)^n$;

le polynome $f(x)$ est alors le monome x^n, dont les dérivées successives sont

$$nx^{n-1},\quad n(n-1)x^{n-2},\quad \ldots,\quad n(n-1)\ldots(n-p+1)x^{n-p},\quad n(n-1)\ldots 1$$

et l'on a, par conséquent, en vertu de la formule (1) du numéro précédent,

$$(1)\quad (a+x)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}x^2 + \ldots \\ + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}a^{n-p}x^p + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}x^n.$$

Cette formule est connue sous l'appellation, un peu impropre, de *formule du binome*. Je vais m'y arrêter un instant, en raison de son importance.

Il me sera commode d'y regarder les lettres a et x comme y désignant des variables; à ce point de vue, $a+x$, $(a+x)^n$ sont des polynomes à deux variables; $a+x$ est un polynome homogène du premier degré; le produit de deux ou plusieurs polynomes homogènes étant évidemment un polynome homogène dont le degré est la somme des degrés des facteurs, on peut prévoir que le développement de $(a+x)^n$ sera un polynome homogène du degré n, qui ne pourra pas contenir d'autres monomes que les monomes du degré n

$$a^n,\quad a^{n-1}x,\quad a^{n-2}x^2,\quad \ldots,\quad a^{n-p}x^p,\quad \ldots,\quad x^n,$$

multipliés par certains coefficients numériques; ces monomes, d'après la formule (1), figurent tous dans le développement; il y en a $n+1$; chacun d'eux contient autant de facteurs x qu'il y a de termes avant lui, autant de facteurs a qu'il y a de termes après lui.

Les coefficients numériques doivent être évidemment entiers, puisque $(a+x)^n$ est le produit de n facteurs égaux à $a+x$. Dans le second membre de la formule (1), le coefficient de $a^{n-p}x^p$, à savoir

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p},$$

est le quotient par le produit des p premiers nombres naturels du produit de p nombres naturels consécutifs dont le plus grand est n et le plus petit $n-p+1$, d'où ce théorème d'Arithmétique :

Le produit de p nombres naturels consécutifs est divisible par le produit des p premiers nombres naturels.

Les coefficients numériques des monomes qui figurent dans le second membre de l'égalité (1) sont respectivement

$$1,\quad \frac{n}{1},\quad \frac{n(n-1)}{1.2},\quad \ldots,$$
$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p},\quad \ldots,\quad \frac{n(n-1)\ldots 1}{1.2\ldots n}=1;$$

ils se retrouvent dans un assez grand nombre de formules et on les désigne souvent par les symboles

$$C_0^n,\quad C_1^n,\quad C_2^n,\quad \ldots,\quad C_p^n,\quad \ldots,\quad C_n^n,$$

C_p^n désignant (¹), en général, le coefficient du monome $a^{n-p}x^p$, ou le $(p+1)^{\text{ième}}$ coefficient numérique, celui qui en a p avant lui. Il est à peine utile de dire que la lettre n qui figure en haut dans le symbole C_p^n n'est pas un *exposant*, mais un *indice*, destiné à rappeler la puissance à laquelle on élève le binome $a+x$. On a $C_0^n=C_n^n=1$. Avec cette notation l'identité (1) s'écrit

$$(a+x)^n=C_0^n a^n+C_1^n a^{n-1}x+\ldots+C_p^n a^{n-p}x^p+\ldots+C_n^n x^n;$$

en y échangeant les lettres a et x, elle devient

$$(x+a)^n=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}a+\ldots+C_p^n x^{n-p}a^p+\ldots+C_n^n a^n;$$

les deux premiers membres sont identiques ; il doit en être de même des seconds, qui doivent donc être les mêmes, terme par terme ; on en conclut $C_0^n=C_n^n$, $C_1^n=C_{n-1}^n$, $C_2^n=C_{n-2}^n$, ..., et, d'une façon générale, $C_p^n=C_{n-p}^n$; cette dernière égalité, en recourant à la définition des symboles qui y figurent, s'écrit

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}=\frac{n(n-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots(n-p)};$$

(¹) On emploie aussi, avec le même sens, les notations (n_p), $\binom{n}{p}$.

elle devient évidente, en réduisant les deux membres au même dénominateur; C_p^n et C_{n-p}^n se présentent alors sous la forme

$$(2) \qquad C_p^n = C_{n-p}^n = \frac{1.2...n}{1.2...p \times 1.2...(n-p)} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Cette formule s'applique même dans le cas où p est égal à o ou à n, si l'on convient de poser $0! = 1$.

La forme primitive de C_p^n, savoir

$$\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{1.2...p} = \frac{n(n-1)...(n-p+2)}{1.2...(p-1)} \frac{n-p+1}{p},$$

montre que l'on a

$$(3) \qquad C_p^n = C_{p-1}^n \frac{n-p+1}{p};$$

d'où un moyen simple pour le calcul des coefficients numériques : le premier est 1, le deuxième est n, le troisième s'obtient en multipliant n par $\frac{n-1}{2}$, le suivant en multipliant le résultat par $\frac{n-2}{3}$, le suivant en multipliant le résultat par $\frac{n-3}{4}$, ...; par exemple, si l'on prend $n = 10$, les deux premiers coefficients sont 1, 10, les suivants s'obtiennent en multipliant successivement par $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{10}$; ils sont 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 : on a donc

$$(a+x)^{10} = a^{10} + 10a^9x + 45a^8x^2 + 120a^7x^3 + 210a^6x^4 + 252a^5x^5 \\ + 210a^4x^6 + 120a^3x^7 + 45a^2x^8 + 10ax^9 + x^{10}.$$

On vérifie, sur cet exemple, ce fait que les coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux, en sorte qu'il suffit pour les avoir tous d'en calculer la moitié.

C_n^p est plus grand que le coefficient précédent, égal à ce coefficient ou plus petit, suivant que $\frac{n-p+1}{p}$ est plus grand que 1, égal à 1, plus petit que 1, ou suivant que l'on a

$$p > \frac{n+1}{2}, \qquad p = \frac{n+1}{2}, \qquad p < \frac{n+1}{2}.$$

On doit distinguer deux cas, suivant que n est pair ou impair.

Si n est pair, il y a un nombre impair de termes dans le développement : il y a donc un terme au milieu, qui en a $\frac{n}{2}$ avant lui, $\frac{n}{2}$ après lui. Tant que p est inférieur ou égal à $\frac{n}{2}$, le coefficient du terme qui en a p avant lui est plus grand que le coefficient précédent; les coefficients vont en augmentant jusqu'au coefficient du terme du milieu, qui est le plus grand; ils diminuent ensuite, en reprenant les mêmes valeurs, en ordre inverse; c'est ce qu'on observe dans les développements

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$
$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si n est impair, il y a un nombre pair de termes dans le développement, il y a deux termes au milieu dont l'un a $\frac{n+1}{2}$ termes avant lui, dont l'autre a $\frac{n+1}{2}$ termes après lui. Jusqu'au premier de ces termes, les coefficients vont en augmentant; le second est égal au premier, puisqu'il y a précisément $\frac{n+1}{2}$ termes avant ce premier, puis les coefficients suivants vont en diminuant, c'est ce qu'on observe sur les développements

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$
$$(a+x)^5 = a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5.$$

Si l'on multiplie par $a+x$ les deux membres de la formule

$$(a+x)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}x + \ldots + C_p^n a^{n-p}x^p + \ldots + C_n^n x^n,$$

on trouve

$$(a+x)^{n+1} = C_0^n a^{n+1} + (C_1^n + C_0^n)a^n x + \ldots + (C_p^n + C_{p-1}^n)a^{n-p+1}x^p + \ldots;$$

comme on doit avoir d'ailleurs

$$(a+x)^{n+1} = C_0^{n+1} a^{n+1} + C_1^{n+1} a^n x + \ldots + C_p^{n+1} a^{n-p+1} x^p + \ldots;$$

on voit qu'on a, en général, pour $p = 1, 2, \ldots, n$,

$$C_p^{n+1} = C_p^n + C_{p-1}^n; \tag{4}$$

formule qui donne une règle simple pour déduire le développement de $(a+x)^{n+1}$ du développement de $(a+x)^n$, et pour obtenir les coefficients numériques dans les puissances successives du binome, lesquels figurent dans les lignes du *triangle de Pascal :*

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
. & . & .. & .. & . & .
\end{array}$$

A partir de la seconde ligne, chaque élément, autre que le premier et le dernier, toujours égaux à 1, est la somme de deux éléments consécutifs de la ligne supérieure, à savoir l'élément qui est placé sur la même verticale, et celui qui précède cet élément.

Si, dans la formule (1), on fait successivement $a=1$, $x=1$, puis $a=1$, $x=-1$, on trouve

$$2^n = C_0^n + C_1^n + \ldots + C_p^n + \ldots + C_n^n,$$
$$0 = C_0^n - C_1^n + C_2^n + \ldots + (-1)^p C_p^n + \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

la somme des coefficients est égale à 2^n; la somme des coefficients de rang pair est égale à la somme des coefficients de rang impair; chacune de ces sommes est égale à la moitié de la somme totale, c'est-à-dire à 2^{n-1}.

§ 6. — POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES.

44. En ce qui concerne la continuité, la méthode suivie pour les polynomes à une variable s'étend sans peine aux polynomes à plusieurs variables; c'est ce que je vais expliquer sommairement dans le cas de deux variables.

Supposons qu'un polynome à deux variables $f(x, y)$ soit ordonné de la façon suivante : on écrit d'abord le terme constant, s'il y en a un, puis, s'il y en a, les termes du premier degré en x, y, puis les termes du second degré, puis les termes du troisième degré, etc. Quant aux termes d'un même degré, qui forment un groupe homogène, on pourra, pour y mettre de l'ordre, les ordonner par rapport aux puissances ascendantes de l'une des variables, aux puissances descendantes de l'autre variable : J'écris ci-dessous un polynome du cinquième degré ordonné de cette manière,

$$3 + 2x - y + x^2 - y^2 + x^3 + x^2y - x^5 + xy^4 - y^5;$$

les groupes homogènes dont j'ai parlé plus haut, et qui sont respectivement des degrés o, 1, 2, 3, 5, sont

$$3, \quad 2x - y, \quad x^2 - y^2, \quad x^3 + x^2y, \quad -x^5 + xy^4 - y^5 :$$

les termes du quatrième degré font défaut.

Si l'on ne considère que des nombres x, y dont les valeurs absolues soient, au plus, égales à 1, la valeur absolue du polynome est, au plus, égale à la somme de ses coefficients, pris en valeur absolue.

Un polynome homogène en x, y, de degré p, dans lequel x, y sont moindres en valeur absolue qu'un nombre positif α, est plus petit en valeur absolue que la somme de ses coefficients multipliée par α^p.

Par exemple, dans le polynome en x, y précédemment écrit, si les variables x, y sont plus petites en valeur absolue que le nombre positif α, les groupes du premier, du second, du troisième, du cinquième degré ont des valeurs qui restent respectivement moindres que 3α, $2\alpha^2$, $2\alpha^3$, $3\alpha^5$.

Le lecteur doit se rendre compte que, d'une façon générale, si les variables sont suffisamment petites en valeur absolue, le groupe des termes du premier degré est plus petit que le groupe des termes du second degré, celui-ci que le groupe du troisième degré, etc. Toutefois, il n'en est pas toujours ainsi : si l'on suppose, dans l'exemple précédent, que x soit égal à y, l'ensemble des termes du second degré sera nul et aura ainsi une valeur absolue moindre que celle des termes du premier degré, si petits que soient x et y en valeur absolue. Il y a là une différence essentielle avec les polynomes à une variable.

Un polynome en x, y est nul pour $x = 0$, $y = 0$ lorsqu'il ne contient pas de terme constant, il n'est nul que dans ce cas.

Quand un polynome $f(x, y)$ ne contient pas de terme constant, sa valeur reste aussi voisine de o que l'on veut, pourvu que x, y restent suffisamment voisins de o.

Par exemple, si x, y sont assujettis a être moindres en valeur absolue que η, le polynome

$$2x - y + x^2 - y^2 + x^3 + x^2y - x^5 + xy^4 - y^5$$

est moindre en valeur absolue que

$$3\eta + 2\eta^2 + 2\eta^3 + 3\eta^5$$

et, par conséquent, si l'on suppose $\eta < 1$, moindre que 10η; si l'on veut que le polynome reste plus petit que ε, il suffira de prendre $\eta < \frac{\varepsilon}{10}$.

Pour des valeurs de x, y voisines de 0, un polynome en x, y reste voisin de la valeur qu'il prend pour $x = 0$, $y = 0$, à savoir de la valeur (nulle ou non) de son terme constant. D'une façon précise, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut assigner un nombre positif η tel que les conditions $|x| < \eta$, $|y| < \eta$ entraînent l'inégalité $|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$. Dans cette inégalité, $f(0, 0)$ désigne la valeur que prend le polynome pour $x = 0$, $y = 0$. La proposition est évidente puisque le polynome $f(x, y) - f(0, 0)$ ne contient pas de terme constant.

C'est ce que l'on exprime en disant qu'un polynome est une fonction continue de x, y pour $x = 0, y = 0$.

Quand le terme constant n'est pas nul, on peut assigner un nombre positif α, tel que si x, y sont moindres en valeur absolue que α, le polynome ne soit pas nul et soit du signe de son terme constant.

Si maintenant on veut étudier un polynome $f(x, y)$ pour les valeurs de x, y respectivement voisines des nombres a, b, on posera

$$x = a + h, \qquad y = b + k,$$

et l'on transformera le polynome en un polynome à deux variables h, k, qui ne devront prendre que des valeurs voisines de 0. Le terme constant du nouveau polynome sera la valeur qu'il doit prendre pour $h = 0$, $k = 0$, c'est-à-dire $f(a, b)$.

Un polynome $f(x, y)$ est une fonction continue de x, y pour $x = a$, $y = b$. Voici, au juste, ce qu'il faut entendre par là : quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre positif η tel que les conditions

$$|x - a| < \eta, \qquad |y - b| < \eta$$

entraînent l'inégalité

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

45. Un polynome à plusieurs variables, par exemple un polynome $f(x, y, z)$ à trois variables x, y, z, donne naissance à des dérivées *partielles*, prises par rapport à ces diverses variables. On peut, si l'on veut, l'ordonner par rapport à x, le considérer comme un polynome en x, et prendre sa dérivée, par rapport à x, d'après la règle du n° 35. On pourra l'ordonner par rapport à y, le regarder comme un polynome dont la variable s'appellerait y et appliquer la même règle, pour obtenir la dérivée par rapport à y. De même, pour la dérivée partielle par rapport à z, ... Au reste, il n'est nullement nécessaire d'ordonner, comme je viens de le dire, le polynome successivement par rapport à chacune des variables, puisque, en vertu d'une remarque antérieure, on peut appliquer la règle relative à la formation de la dérivée d'un polynome à une variable sans avoir réduit ce polynome.

Le polynome proposé, s'il a trois variables, sera formé d'une somme de monomes dont chacun sera de la forme $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, α, β, γ étant des nombres entiers, positifs ou nuls : ce terme fournira dans les dérivées partielles, prises respectivement par rapport à x, y, z, des termes qui seront respectivement égaux à

$$\alpha A x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma, \quad \beta A x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma, \quad \gamma A x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1};$$

pour avoir l'une des dérivées partielles, la dérivée par rapport à x, par exemple, on fera la somme de tous les termes analogues à $\alpha A x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma$, déduits de chaque monome.

Il est à peine utile d'observer que si α était nul, si la variable x ne figurait pas effectivement dans le monome considéré, celui-ci n'introduirait aucun terme dans la dérivée partielle prise par rapport à x.

Les dérivées prises par rapport à x, y, z du polynome $f(x, y, z)$ dont on vient d'expliquer la formation se désignent respectivement par f'_x, f'_y, f'_z.

Si l'on a, par exemple,

$$f(x, y, z) = 3 + 2x + y + x^2 - z^2 + 3y^2 z,$$

on aura

$$f'_x = 2 + 2x, \qquad f'_y = 1 + 6yz, \qquad f'_z = -2z + 3y^2.$$

Les dérivées du monome $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, qui est du degré $\alpha + \beta + \gamma$, sont évidemment du degré $\alpha + \beta + \gamma - 1$, si aucun des exposants α, β, γ n'est nul; si quelqu'un des exposants est nul, une des dérivées partielles est identiquement nulle; on déduit de là facilement que, si un polynome est de degré n, ses dérivées partielles sont au plus de degré $n-1$.

La définition des dérivées partielles d'un polynome à plusieurs variables peut être rattachée à la définition de la dérivée d'un polynome à une seule variable.

Je continue de raisonner sur un polynome $f(x, y, z)$ à trois variables x, y, z. Je suppose que, dans ce polynome, on remplace x, x, z respectivement par $x+h$, $y+k$, $z+l$; on peut développer chaque terme, et réduire ensuite le polynome comme si x, y, z étaient les constantes et h, k, l les variables; c'est-à-dire qu'on réunit ensemble les termes qui contiennent un même monome en h, k, l : on parvient ainsi à une identité de la forme

$$(1) \qquad f(x+h, y+k, z+l) = \mathrm{N} + \mathrm{P}h + \mathrm{Q}k + \mathrm{R}l + \ldots,$$

où N, P, Q, R, ... sont des polynomes en x, y, z qui ne contiennent pas h, k, l; les termes non écrits contiendraient des monomes en h, k, l qui seraient du deuxième, du troisième, ... degré. Cette identité, devant avoir lieu quels que soient h, k, l, a lieu pour $h=0$, $k=0$, $l=0$, ce qui montre que N n'est autre chose que le polynome $f(x, y, z)$ lui-même; elle doit avoir lieu, quel que soit h, quand on suppose $k=0$, $l=0$; il en résulte que P est le coefficient de h, dans le développement, ordonné suivant les puissances croissantes de h, du polynome $f(x+h, y, z)$ obtenu en remplaçant x par $x+h$, dans le polynome $f(x, y, z)$: P est donc, par définition, la dérivée partielle dn polynome $f(x, y, z)$ prise par rapport à x; de même Q et R sont les dérivées partielles du même polynome prises par rapport à y et à z.

Ainsi les dérivées partielles d'un polynome $f(x, y, z)$ sont les coefficients respectifs des termes du premier degré en h, k, l dans le développement du polynome en h, k, l obtenu en remplaçant dans $f(x, y, z)$ x, y, z par $x+h, y+k$, $z+l$.

Si l'on désigne par a, b, c des nombres quelconques, et si l'on remplace, dans l'identité (1), x, y, z respectivement par $a+x$, $b+y$, $c+z$, on voit apparaître immédiatement la proposition suivante :

Les dérivées partielles du polynome $f(a+x, b+y, c+z)$ par rapport à x, y, z s'obtiennent en remplaçant dans les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z du polynome $f(x, y, z)$ x, y, z par $a+x$, $b+y$, $c+z$.

46. Les dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z du polynome $f(x, y, z)$ sont dites du *premier ordre*; f'_x, f'_y, f'_z sont des polynomes en x, y, z, admettant eux-mêmes des dérivées partielles par rapport à x, y, z : ces dérivées partielles sont dites les *dérivées partielles du second ordre* de $f(x, y, z)$: elles engendreront à leur tour des dérivées partielles du troisième ordre, etc.

Si le polynome $f(x, y, z)$ est du degré n, ses dérivées partielles du premier ordre sont au plus de degré $n-1$, ses dérivées partielles du second ordre sont au plus du degré $n-2$, ...; ses dérivées partielles du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre sont au plus du premier degré; quelques-unes de ces dérivées peuvent d'ailleurs être des constantes ou être identiquement nulles; en tous cas les dérivées partielles du $n^{\text{ième}}$ ordre sont certainement des constantes, dont quelques-unes peuvent être nulles; les dérivées partielles d'ordre $n+1$ sont identiquement nulles ainsi que toutes celles d'ordre supérieur à n.

La dérivée partielle f'_x, du premier ordre, admet trois dérivées partielles prises respectivement par rapport à x, y, z; on les désigne respectivement par

$$f''_{xx},\quad f''_{xy},\quad f''_{xz}.$$

Les dérivées partielles de f'_y, prises respectivement par rapport à x, y, z se désigneront de même par

$$f''_{yx},\quad f''_{yy},\quad f''_{yz},$$

les dérivées partielles de f'_z par rapport à x, y, z se désigneront enfin par

$$f''_{zx},\quad f''_{zy},\quad f''_{z}\ .$$

Il semble donc qu'un polynome à trois variables admette neuf dérivées partielles du deuxième ordre, vingt-sept du troisième, etc. Toutefois, tous les polynomes que l'on obtient ainsi ne sont pas distincts : par exemple, les deux polynomes f''_{xy} et f''_{yx} sont identiques.

En d'autres termes, on peut, dans une dérivée seconde, intervertir l'ordre dans lequel on prend les dérivées.

Comme la dérivée d'un polynome s'obtient en faisant la somme des dérivées de ses termes, il suffit évidemment de constater la vérité de la proposition énoncée sur un terme $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$ du polynome ou, si l'on veut, sur un polynome réduit à ce terme.

La dérivée partielle prise par rapport à x est $\alpha A x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma$; la dérivée partielle de ce résultat, par rapport à y, est $\alpha\beta A x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^\gamma$; on serait arrivé évidemment au même résultat en prenant d'abord la dérivée partielle par rapport à y, et la dérivée partielle du résultat par rapport à x. On a donc $f''_{yx} = f''_{xy}$, $f''_{zx} = f''_{xz}$, ...

Il n'y a, pour un polynome en x, y, z, que six dérivées partielles du second ordre, que l'on peut désigner par

$$f''_{x^2},\quad f''_{y^2},\quad f''_{z^2},\quad f''_{yz},\quad f''_{zx},\quad f''_{xy},$$

en donnant respectivement à f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2} le même sens qu'à f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{zz}.

Si l'on considère, par exemple, le polynome homogène du second degré à trois variables x, y, z,

$$\varphi(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

on aura

$$\begin{aligned}
\varphi'_x &= 2(ax + b''y + b'z),\\
\varphi'_y &= 2(b''x + a'y + bz),\\
\varphi'_z &= 2(b'x + by + a''z),
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\varphi''_{x^2} = 2a, & \varphi''_{y^2} = 2a', & \varphi''_{z^2} = 2a'',\\
\varphi''_{yz} = 2b, & \varphi''_{zx} = 2b', & \varphi''_{xy} = 2b''.
\end{array}$$

Une dérivée partielle $p^{\text{ième}}$ du polynome $f(x, y, z)$ sera définie quand on dira par rapport à quelles variables on doit successivement prendre chacune des dérivées : pour que l'on ait affaire à une dérivée $p^{\text{ième}}$, il faut que l'on prenne p dérivées; mais peu importe l'ordre dans lequel se prennent ces dérivées, pourvu que l'on prenne toujours le nombre indiqué de fois la dérivée par rapport à x, par rapport à y, etc. Le théorème relatif à la possibilité d'intervertir l'ordre de deux dérivées s'étend en effet absolument comme le théorème relatif à l'interversion des facteurs dans un produit. La démonstration comporte les étapes suivantes :

Dans une dérivée partielle quelconque, on peut intervertir l'ordre dans lequel on prend les deux premières dérivées, l'ordre dans lequel on prend les deux dernières, l'ordre dans lequel on prend deux dérivées consécutives quelconques, l'ordre dans lequel on prend les diverses dérivées.

De cette proposition résulte la notation pour désigner une dérivée $p^{\text{ième}}$; on la représentera par un symbole tel que

$$f^{(p)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma},$$

où α, β, γ sont des entiers positifs ou nuls dont la somme est p; supposons d'abord qu'aucun des nombres α, β, γ ne soit nul. On devra partir de $f(x, y, z)$, prendre la dérivée par rapport à x, la dérivée du résultat par rapport à x, etc., et ainsi de suite α fois. On forme ainsi successivement les polynomes

$$f'_x, \quad f''_{x^2}, \quad f'''_{x^3}, \quad \ldots, \quad f^{(\alpha)}_{x^\alpha};$$

on part du dernier, on en prend la dérivée par rapport à y, la dérivée du résultat par rapport à y, etc., et ainsi de suite β de fois; on forme ainsi les polynomes

$$f^{(\alpha+1)}_{x^\alpha y}, \quad f^{(\alpha+2)}_{x^\alpha y^2}, \quad \ldots, \quad f^{(\alpha+\beta)}_{x^\alpha y^\beta};$$

on prend ensuite les dérivées par rapport à z, et l'on forme les polynomes

$$f^{(\alpha+\beta+1)}_{x^\alpha y^\beta z}, \quad f^{(\alpha+\beta+2)}_{x^\alpha y^\beta z^2}, \quad \ldots, \quad f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma},$$

dont le dernier est celui que l'on cherche.

Si α était nul, le symbole $f^{(p)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$, où l'on devrait alors avoir $\beta + \gamma = p$, aurait, par définition, le même sens que $f^{(p)}_{y^\beta z^\gamma}$, etc.

47. Cherchons la valeur, pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, de la dérivée $p^{\text{ième}}$ d'un monome $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, où α, β, γ sont des nombres entiers positifs ou nuls; il est clair que, si l'on doit prendre la dérivée par rapport à x plus de α fois, ou la dérivée par rapport à y plus de β fois, etc., le résultat sera identiquement nul; si l'on doit prendre la dérivée par rapport à x moins de α fois, il restera dans le résultat un ou plusieurs facteurs x; ce résultat sera donc nul pour $x = 0$.

Si donc aucun des nombres α, β, γ n'est égal à 0, la seule dérivée du monome $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$ qui ne soit pas nulle pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ s'obtient en prenant α fois la dérivée par rapport à x, β fois la dérivée par rapport à y, γ fois par rapport à z; sa valeur est

$$\alpha(\alpha-1)\ldots1\times\beta(\beta-1)\ldots1\times\gamma(\gamma-1)\ldots1\times A;$$

si α était nul sans que β, γ le fussent, la dérivée devrait être prise β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z; elle serait

$$\beta(\beta-1)\ldots1\times\gamma(\gamma-1)\ldots1\times A.$$

On peut la représenter dans tous les cas, avec les conventions expliquées au n° 43 par le symbole $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\,A$.

Un polynome réduit $f(x, y, z)$ est la somme de monomes tels que $Ax^\alpha y^\beta z^\gamma$, tous distincts. Il résulte de la remarque précédente que la dérivée d'ordre $\alpha+\beta+\gamma$ de ce polynome, que l'on est convenu de représenter par le symbole $f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$, même dans le cas où l'un des nombres entiers α, β, γ est nul, se réduit pour $x=0$, $y=0$, $z=0$ à $\alpha!\ \beta!\ \gamma!\ A$; inversement le coefficient numérique du monome $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ qui figure dans le polynome s'obtient en divisant par $\alpha!\ \beta!\ \gamma!$ la dérivée $f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$ dans laquelle on a remplacé x, y, z par 0.

48. Je vais appliquer cette règle à la recherche des coefficients du développement du polynome $(x+y+z)^n$, n étant un nombre naturel. Ce polynome en x, y, z est évidemment homogène et du degré n; quand il est développé, il est la somme de termes de la forme $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, où α, β, γ sont des entiers positifs ou nuls, dont la somme est égale à n, multipliés par des coefficients numériques que l'on détermine par la règle précédente.

Les dérivées premières de $(x+y+z)^n$, par rapport à x, y, z, s'obtiennent par la règle d'après laquelle la dérivée de $(x+a)^n$, quand a est une constante, est égale à $n(x+a)^{n-1}$. Ces trois dérivées partielles du premier ordre sont égales à $n(x+y+z)^{n-1}$, les dérivées secondes sont de même toutes égales à $n(n-1)(x+y+z)^{n-2}$, etc.; toutes les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ sont égales à $n(n-1)(n-2)\ldots1=n!$ Le coefficient de $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ est donc égal à

$$\frac{n!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!},$$

et le développement du polynome $(x+y+z)^n$ est égal à la somme de tous les monomes distincts de la forme

$$\frac{n!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma$$

que l'on peut former en prenant pour α, β, γ des nombres entiers positifs ou nuls dont la somme soit égale à n.

Si, par exemple, n est égal à 2, la somme des nombres $\alpha+\beta+\gamma$ devant être égale à 2, l'un de ces nombres peut être égal à 2, les deux autres étant nuls; deux des nombres peuvent être égaux à un, l'autre étant nul.

Autrement dit, il peut y avoir, dans le développement, des termes en x^2, en y^2, en z^2, en yz, en zx, en xy; il ne peut y en avoir d'autres. Le coefficient numérique des termes en x^2, y^2, z^2 est égal à $\frac{2!}{0!\,0!\,2!}=1$; le coefficient numérique des termes en yz, zx, xy est égal à $\frac{2!}{1!\,1!\,0}=2$.

On a

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2yz+2zx+2xy.$$

Si l'on suppose $n=3$, on reconnaît de même qu'il doit y avoir, dans le développement, des termes en x^3, y^3, z^3 dont le coefficient est 1, des termes en y^2z, z^2y, x^2z, z^2x, x^2y, y^2x dont le coefficient est 3; un terme en xyz dont le coefficient est 6. On a donc

$$(x+y+z)^3 = x^3+y^3+z^3+3y^2z+3z^2y+3z^2x+3x^2z \\ +3x^2y+3y^2x+6xyz.$$

Le lecteur reconnaîtra sans peine que la méthode donnée pour obtenir le développement de $(x+y+z)^n$ s'applique au développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la somme d'autant de variables que l'on veut; il pourra aussi retrouver par cette voie la formule

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}y}{(n-1)!\,1!} + \frac{x^{n-2}y^2}{(n-2)!\,2!} + \frac{x^{n-3}y^3}{(n-3)!\,3!} + \ldots + \frac{y^n}{n!}$$

qui résulte d'ailleurs des formules (1) et (2) du n° 43.

49. Enfin, si l'on désigne par a, b, c trois nombres quelconques, la même méthode s'applique à trouver le développement du polynome en $x, y, z, f(a+x,\ b+y,\ c+z)$, obtenu en remplaçant les variables x, y, z par $a+x$, $b+y$, $c+z$ dans le polynome $f(x, y, z)$.

Le coefficient du terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ s'obtiendra en divisant par

$\alpha!\,\beta!\,\gamma!$ la valeur pour $x=0$, $y=0$, $z=0$ de la dérivée d'ordre $\alpha+\beta+\gamma$ du polynome $f(a+x,\ b+y,\ c+z)$ prise α fois par rapport à x, β fois par rapport à y, γ fois par rapport à z. Or, en vertu d'une remarque antérieurement faite pour les dérivées du premier ordre, et qui s'étend de suite aux dérivées d'ordre quelconque, cette dérivée se déduit de la dérivée $f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$ en y remplaçant x, y, z respectivement par $a+x$, $b+y$, $c+z$. Sa valeur pour $x=0$, $y=0$, $z=0$ s'obtiendra donc en remplaçant, dans cette même expression $f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{x^\alpha y^\beta z^\gamma}$, x, y, z par a, b, c; on convient de représenter le résultat par le symbole

$$f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{a^\alpha b^\beta c^\gamma}.$$

Avec cette notation, on voit que le coefficient du terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ s'écrit

$$\frac{1}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{a^\alpha b^\beta c^\gamma}$$

et le terme lui-même peut s'écrire

$$(1)\qquad \frac{f^{(\alpha+\beta+\gamma)}_{a^\alpha b^\beta c^\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\,x^\alpha y^\beta z^\gamma;$$

le développement cherché est la somme de tous les termes distincts de cette forme qui ne sont pas identiquement nuls.

Il est clair que l'on n'aura pas à écrire de termes pour lesquels $\alpha+\beta+\gamma$ dépasse le degré n du polynome $f(x,\ y,\ z)$.

La règle précédente ne s'applique pas au terme indépendant de x, y, z, mais on sait déjà que ce terme, qui peut s'obtenir simplement en remplaçant x, y, z par o dans $f(a+x,\ b+y,\ c+z)$ est $f(a, b, c)$.

Il est naturel de grouper ensemble tous les termes qui ont le même degré $p \leqq n$ en x, y, z : ces termes sont de la forme (1), en supposant $\alpha+\beta+\gamma=p$.

En supposant $p=1$, leur ensemble est

$$xf'_a + yf'_b + zf'_c,$$

où f'_a, f'_b, f'_c désignent les valeurs de f'_x, f'_y, f'_z quand on y remplace x, y, z respectivement par a, b, c; c'est, à part la différence des notations, une observation qui a déjà été faite au nº 45; l'ensemble des termes du second degré est

$$\tfrac{1}{2}(x^2f''_{a^2} + y^2f''_{b^2} + z^2f''_{c^2} + 2yzf''_{bc} + 2zxf''_{ca} + 2xyf''_{ab}),$$

où $f''_{a^2}, f''_{b^2}, f''_{c^2}, f''_{bc}, f''_{ca}, f''_{ab}$ représentent respectivement les valeurs des dérivées secondes $f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{z^2}, f''_{yz}, f''_{zx}, f''_{xy}$ quand on y remplace x, y, z par a, b, c; cet ensemble pourrait s'écrire symboliquement

$$\tfrac{1}{2}(xf'_a + yf'_b + zf'_c)^2,$$

à la condition de remplacer, dans le développement de ce carré, effectué par la règle donnée dans le numéro précédent,

$$(f'_a)^2,\quad (f'_b)^2,\quad (f'_c)^2,\quad f'_bf'_c,\quad f'_cf'_a,\quad f'_af'_b$$

par

$$f''_{a^2},\quad f''_{b^2},\quad f''_{c^2},\quad f''_{bc},\quad f''_{ca},\quad f''_{ab}.$$

Cette observation est générale, comme on le reconnaît en se reportant à la règle pour obtenir le développement de la puissance $p^{\text{ième}}$ d'une somme de trois termes; l'ensemble des termes du $p^{\text{ième}}$ degré en x, y, z peut s'écrire symboliquement

$$\frac{1}{p!}(xf'_a + yf'_b + zf'_c)^p,$$

en supposant que l'on a d'abord effectué le développement de la puissance $p^{\text{ième}}$, puis que l'on y a remplacé le terme

$$\frac{(f'_a)^\alpha (f'_b)^\beta (f'_c)^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma,$$

où $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à p, par

$$\frac{f^{(p)}_{a^\alpha b^\beta c^\gamma}}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, x^\alpha y^\beta z^\gamma;$$

on est enfin parvenu à la formule symbolique

$$(2)\qquad \begin{aligned} f(a+x, b+y, c+z) = f(a, b, c) &+ xf'_a + yf'_b + zf'_c \\ &+ \frac{1}{1.2}\quad (xf'_a + yf'_b + zf'_c)^2 \\ &+ \frac{1}{1.2.3}\quad (xf'_a + yf'_b + zf'_c)^3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{1.2\ldots p}\,(xf'_a + yf'_b + zf'_c)^p \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{1.2\ldots n}\,(xf'_a + yf'_b + zf'_c)^n. \end{aligned}$$

Cette formule, avec des modifications insignifiantes, s'applique à des polynomes à autant de variables que l'on veut.

Si on l'applique, par exemple, au polynome du second degré à deux variables

$$f(x, y) = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F},$$

dans lequel on a

$$f'_x = 2(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{D}) \qquad f'_y = 2(\mathrm{B}x + \mathrm{C}y + \mathrm{E}),$$
$$f''_{x^2} = 2\mathrm{A}, \qquad f''_{xy} = 2\mathrm{B}, \qquad f''_{y^2} = 2\mathrm{C},$$

on aura, symboliquement,

$$f(a + x, b + y) = f(a, b) + xf'_a + yf'_b + \tfrac{1}{2}(xf'_a + yf'_b)^2,$$

et, d'une façon explicite,

$$\begin{aligned} f(a + x, b + y) &= f(a, b) + xf'_a + yf'_b + \tfrac{1}{2}(x^2 f''_{a^2} + 2xyf''_{ab} + y^2 f''_{b^2}) \\ &= f(a, b) + 2x(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{D}) + 2y(\mathrm{B}a + \mathrm{C}b + \mathrm{E}) \\ &\quad + \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2; \end{aligned}$$

on voit, par cette formule, que l'ensemble des termes du second degré est le même dans le polynome

$$\begin{aligned} f(a + x, b + y) = \mathrm{A}(x + a)^2 + 2\mathrm{B}(x + a)(y + b) + \mathrm{C}(y + b)^2 \\ + 2\mathrm{D}(x + a) + 2\mathrm{E}(y + b) + \mathrm{F}, \end{aligned}$$

que dans le polynome $f(x, y)$: cela était aisé à prévoir, les termes du second degré dans le développement de $f(a + x, b + y)$ proviennent des termes du second degré de $f(x, y)$. Or, quand on développe $\mathrm{A}(x + a)^2$, le seul terme du second degré est évidemment $\mathrm{A}x^2$; quand on développe $2\mathrm{B}(x + a)(y + b)$, le seul terme du second degré est $2\mathrm{B}xy$, etc. Ce résultat est général : si $f(x, y, z)$ est un polynome du degré n, l'ensemble des termes du degré n dans le développement du polynome $f(a + x, b + y, c + z)$ est identique à l'ensemble des termes du degré n dans $f(x, y, z)$.

La formule (2) s'applique sans modification à un polynome homogène du $n^{\text{ième}}$ degré.

Je vais l'appliquer au polynome homogène du second degré

$$\varphi(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy,$$

en y remplaçant toutefois les lettres a, b, c par $x_0, y_0. z_0$ et en remplaçant x, y, z par kx, ky, kz : elle donne alors pour l'expression de $\varphi(x_0+kx, y_0+ky, z_0+kz)$

$$\begin{aligned}&\varphi(x_0, y_0, z_0)+k(x\varphi'_{x_0}+y\varphi'_{y_0}+z\varphi'_{z_0})\\&+\frac{k^2}{2}(x^2\varphi''_{x_0^2}+y^2\varphi''_{y_0^2}+z^2\varphi''_{z_0^2}+2yz\varphi''_{y_0z_0}+2zx\varphi''_{z_0x_0}+2xy\varphi''_{x_0y_0}),\end{aligned}$$

ou $\varphi'_{x_0}, \varphi'_{y_0}, \ldots, \varphi''_{x_0y_0}$ désignent ce que deviennent les dérivées partielles $\varphi'_x, \varphi'_y, \ldots, \varphi''_{xy}$ quand on y remplace x, y, z par x_0, y_0, z_0.

On a donné au n° 41 les valeurs de ces dérivées; en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs, on obtient l'identité

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned}&\varphi(x_0+kx, y_0+ky, z_0+kz)\\&\quad=\varphi(x_0, y_0, z_0)+k(x\varphi'_{x_0}+y\varphi'_{y_0}+z\varphi'_{z_0})+k^2\varphi(x, y, z);\end{aligned}\right.$$

au reste, que l'ensemble des termes du second degré en x, y, z dans le développement de $\varphi(x_0+kx,\ y_0+ky,\ z_0+kz)$, soit égal à $k^2\varphi(x,\ y,\ z)$, c'est ce qu'on pouvait prévoir par le raisonnement utilisé à la fin du précédent numéro.

L'identité (1) a lieu quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres x_0, y_0, z_0, x, y, z : supposons qu'on prenne $x_0=x, y_0=y$, $z_0=z$. Le premier membre $\varphi[x(1+k), y(1+k), z(1+k)]$ s'obtient en remplaçant, dans le polynome homogène $\varphi(x,\ y,\ z)$, x, y, z par $x(1+k)$, $y(1+k)$, $z(1+k)$; chacun des monomes qui constituent $\varphi(x, y, z)$ se trouve alors multiplié par $(1+k)^2$, en sorte que le premier membre de notre identité n'est autre chose que $\varphi(x, y, z)(1+k)^2$; elle devient donc

$$\varphi(x, y, z)(1+k)^2=\varphi(x, y, z)+k(x\varphi'_x+y\varphi'_y+z\varphi'_z)+k^2\varphi(x, y, z);$$

cette dernière identité doit avoir lieu quel que soit le nombre k; si donc on ordonne suivant les puissances de k, les coefficients d'une même puissance de k doivent être les mêmes dans les deux membres. La comparaison des termes indépendants de k et des termes en k^2 n'apprend rien : la comparaison des termes en k donne l'identité

$$(2)\qquad 2\varphi(x, y, z)=x\varphi'_x+y\varphi'_y+z\varphi'_z,$$

qui se vérifie immédiatement en remplaçant φ'_x, φ'_y, φ'_z par leurs expressions développées.

Le même mode de raisonnement s'applique à un polynome homogène $f(x, y, z)$ de degré n et conduit, comme le lecteur n'aura aucune peine à le voir, à l'identité symbolique

$$(3) \qquad (xf'_x + yf'_y + zf'_z)^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)f(x, y, z),$$

où p est l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$. En particulier, pour $p = 1$, on obtient l'identité suivante, qui est une généralisation immédiate de l'identité (2),

$$(4) \qquad xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf(x, y, z).$$

En raison de l'importance de cette identité, j'en indique une autre démonstration :

Elle se vérifie de suite en prenant pour $f(x, y, z)$ un monome du degré n, $A x^\alpha y^\beta z^\gamma$, dont les dérivées sont respectivement

$$\alpha A x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma, \quad \beta A x^\alpha y^{\beta-1} z^\gamma, \quad \gamma A x^\alpha y^\beta z^{\gamma-1},$$

en sorte que le premier membre se réduit à

$$(\alpha + \beta + \gamma) A x^\alpha y^\beta z^\gamma;$$

comme un polynome homogène $f(x, y, z)$ est la somme de pareils monomes la proposition est évidente.

Le lecteur reconnaîtra sans peine que si un polynome $f(x, y, z)$ vérifie l'identité (4) il est homogène et de degré n; il suffit, pour cela, de décomposer le polynome en groupes homogènes.

Revenons à l'identité (1) relative à un polynome homogène du second degré; le premier membre s'obtient en remplaçant dans

$$\varphi(x, y, z)$$

x, y, z par

$$x_0 + kx, \quad y_0 + ky, \quad z_0 + kz,$$

ou, ce qui revient au même, par

$$k\left(x + \frac{x_0}{k}\right), \quad k\left(y + \frac{y_0}{k}\right), \quad k\left(z + \frac{z_0}{k}\right),$$

ou encore, en multipliant chacun des monomes qui constituent

$\varphi(x, y, z)$ par k^2 et en y remplaçant ensuite x, y, z par

$$x + \frac{x_0}{k}, \qquad y + \frac{y_0}{k}, \qquad z + \frac{z_0}{k};$$

en d'autres termes, le premier membre peut s'écrire

$$k^2\varphi\left(x + \frac{x_0}{k}, y + \frac{y_0}{k}, z + \frac{z_0}{k}\right);$$

mais en vertu de l'identité (1) elle-même, dans laquelle on remplace k par $\frac{1}{k}$, x, y, z par x_0, y_0, z_0 et x_0, y_0, z_0 par x, y, z, on a

$$\begin{aligned}&\varphi\left(x + \frac{x_0}{k}, y + \frac{y_0}{k}, z + \frac{z_0}{k}\right)\\ &= \varphi(x, y, z) + \frac{1}{k}(x_0\varphi'_x + y_0\varphi'_y + z_0\varphi'_z) + \frac{1}{k^2}\varphi(x_0, y_0, z_0):\end{aligned}$$

l'identité (1) peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned}&k^2\varphi(x, y, z) \quad + k(x_0\varphi'_x + y_0\varphi'_y + z_0\varphi'_z) + \varphi(x_0, y_0, z_0)\\ = \; &\varphi(x_0, y_0, z_0) + k(x\varphi'_{x_0} + y\varphi'_{y_0} + z\varphi'_{z_0}) + k^2\varphi(x, y, z).\end{aligned}$$

On en conclut, en comparant les termes en k, que l'on a identiquement, quels que soient x, y, z, x_0, y_0, z_0,

$$(5) \qquad x_0\varphi'_x + y_0\varphi'_y + z_0\varphi'_z = x\varphi'_{x_0} + y\varphi'_{y_0} + z\varphi'_{z_0}.$$

Ce résultat, qui a une grande importance en Géométrie analytique, se vérifie d'ailleurs immédiatement en remplaçant φ'_x, φ'_y, φ'_z par leurs expressions explicites; le premier membre devient alors

$$2x_0(ax + b''y + b'z) + 2y_0(b''x + a'y + bz) + 2z_0(b'x + by + a''z);$$

il peut s'écrire

$$\begin{aligned}&2ax_0x + 2a'y_0y + 2a''z_0z + 2b(y_0z + z_0y)\\ &\qquad + 2b'(z_0x + x_0z) + 2b''(x_0y + y_0x);\end{aligned}$$

sous cette forme, on reconnaît de suite que ce polynome en x, y, z, x_0, y_0, z_0 reste le même quand on échange les lettres x, y, z et x_0, y_0, z_0. Cette même forme, d'ailleurs, met de suite en évidence l'identité (2), en supposant $x_0 = x$, $y_0 = y$, $z_0 = z$.

L'identité (5) est spéciale aux polynomes homogènes du second degré; elle est toutefois un cas particulier d'identités concernant les polynomes homogènes du $n^{\text{ième}}$ degré, qui se démontrent par la même méthode qui nous a conduits à l'identité (5) et que je me contente de transcrire. On a pour les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ du nombre p

$$(6) \qquad \frac{1}{p!}(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})^p = \frac{1}{(n-p)!}(x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z)^{n-p},$$

où les puissances ont le caractère symbolique sur lequel on a insisté à plusieurs reprises.

On a encore

$$\frac{1}{n!}(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})^n = f(x, y, z).$$

EXERCICES.

18. Soit a un nombre positif moindre que 1, on a

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n < \frac{1}{1-a}.$$

Soient A la plus grande des valeurs absolues des coefficients du polynome $f(x)$, x' la valeur absolue de x, B un nombre positif quelconque : la valeur absolue de $f(x)$ est moindre que $\dfrac{A}{1-x'}$, si x' est moindre que 1 ; elle est moindre que B, si l'on a $x' < \dfrac{B}{A+B}$.

La valeur absolue de $x^2 f(x)$ est moindre que B si l'on a

$$x' < \frac{-B + \sqrt{B(B+4A)}}{2A}.$$

19. Pour quelles valeurs de x la courbe (C), définie par l'équation (n° 31)

$$y = 3 - 2x + 4x^2 + 5x^3 + x^4,$$

est-elle au-dessus ou au-dessous de la tangente au point de la courbe située sur l'axe des y, au-dessus ou au-dessous de la parabole définie par l'équation

$$y = 3 - 2x + 4x^2?$$

Déterminer la tangente à la courbe (C) aux points d'abscisses 1 et 4.

20. Déterminer un nombre positif a tel que, si la valeur absolue de x est supérieure à a, la valeur absolue du polynome $3 - 2x + 4x^2 - 5x^3 + x^4$ soit plus grande que 1000.

21. Si un polynome $f(x)$ a tous ses coefficients positifs, sa valeur augmente avec celle de x, quand x est positif. S'il ne contient que des termes de degré impair, sa valeur augmente avec celle de x, quel que soit x; s'il ne contient que des termes de degré pair sa valeur diminue quand x augmente en restant négatif.

Si le nombre A est positif, la valeur de l'expression $(x + A)^n - x^n$ augmente avec celle de x quand x est positif.

22. Si un polynome $f(x)$, de degré n, est positif ainsi que ses n dérivées, pour $x = a$, sa valeur va en croissant avec celle de x, quand x est plus grand que a : cette valeur, quand x est plus grand que a, reste donc toujours positive.

23. Il est souvent commode d'introduire en avant des coefficients d'un polynome de degré n les coefficients numériques $C_1^n, C_2^n, \ldots, C_n^n$ de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un binome; d'écrire, par exemple, les polynomes du deuxième et du troisième degré sous les formes

$$ax^2 + 2bx + c, \quad ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d,$$

et le polynome du $n^{\text{ième}}$ degré sous la forme

$$f(x) = a_0 x^n + C_1^n a_1 x^{n-1} + C_2^n a_2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n a_n,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes.

Montrer que l'on a, en désignant par $f^{(p)}(x)$ la dérivée $p^{\text{ième}}$ de $f(x)$,

$$\frac{f^{(p)}(x)}{1.2\ldots p} = C_p^n(a_0 x^{n-p} + C_1^{n-p} a_1 x^{n-p-1} + C_2^{n-p} a_2 x^{n-p-2} + \ldots + C_{n-p}^{n-p} a_{n-p}).$$

24. En conservant les notations de l'exercice précédent, soit a la plus grande des valeurs absolues des constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$; soient x' et h' les valeurs absolues de x et de h, on a

$$|f(x)| \leqq a(x' + 1)^n, \qquad \frac{|f^p(x)|}{1.2\ldots p} \leqq C_p^n a(x' + 1)^{n-p},$$

$$|f(x + h) - f(x)| \leqq a[(x' + h' + 1)^n - (x' + 1)^n].$$

Si l'on suppose que la valeur absolue de x reste inférieure au nombre positif A, le second membre de la dernière inégalité est plus petit que

$$a[(A+h'+1)^n-(A+1)^n].$$

Dans les mêmes conditions on aura, en désignant par ε un nombre positif quelconque,

$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon;$$

si l'on a

$$h'<\sqrt[n]{(A+1)^n+\frac{\varepsilon}{a}}-A-1.$$

25. Soit a la plus grande des valeurs absolues des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dans le polynome

$$f(x)=x^n+C_1^n a_1 x^{n-1}+C_2^n a_2 x^{n-2}+\ldots+C_n^n a_n;$$

on a, pour toutes les valeurs positives de x,

$$f(x)\geqq(a+1)x^n-a(x+1)^n;$$

le polynome $f(x)$ est positif pour toutes les valeurs de x qui vérifient l'inégalité

$$x>\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{a+1}-\sqrt[n]{a}}.$$

26. Montrer que la somme

$$K_n=(C_0^n)^2+(C_1^n)^2+\ldots+(C_n^n)^2$$

des carrés des coefficients numériques du développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un binome est égale au coefficient numérique maximum dans le développement de la puissance $2n^{\text{ième}}$ de ce binome.

Il suffit de multiplier membre à membre les deux égalités

$$\begin{aligned}(1+x)^n&=C_0^n+C_1^n x+C_2^n x^2+\ldots+C_n^n x^n,\\(x+1)^n&=C_0^n x^n+C_1^n x^{n-1}+C_2^n x^{n-1}+\ldots+C_n^n,\end{aligned}$$

et de constater que, dans le produit des seconds membres, le coefficient de x^n est précisément la somme cherchée.

Calculer le rapport $\dfrac{K_{n+1}}{K_n}$.

27. Dans l'identité

$$(x+1)(x+2)(x+3)-x(x+1)(x+2)=3(x^2+3x+2),$$

on remplace x successivement par 1, 2, 3, $\ldots p$ et l'on ajoute les p égalités ainsi obtenues. Déduire du résultat la formule

$$S_2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6},$$

où S_2 désigne la somme des carrés des p premiers nombres naturels. Cette même formule peut se déduire, d'une façon analogue, de l'identité

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1.$$

Montrer que p est la racine cubique, à une unité près, de $3S_2$.

Montrer que la somme des cubes des p premiers nombres naturels est

$$\frac{p^2(p+1)^2}{4}.$$

28. Si l'on pose $F_0(x) = 1$, $F_1(x) = x$ et, en désignant par n un nombre naturel quelconque,

$$F_n(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1),$$

on a, quels que soient x et a,

$$\begin{aligned} F_n(x+a) = {} & C_0^n F_0(a) F_n(x) + C_1^n F_1(a) F_{n-1}(x) + \ldots \\ & + C_p^n F_p(a) F_{n-p}(x) + \ldots + C_n^n F_n(a) F_0(x). \end{aligned}$$

On constate que cette identité est vraie pour $n = 1$; on démontre que, si elle est vraie pour le nombre naturel n, elle est vraie pour le nombre suivant $n+1$, ce qui résulte sans peine de l'identité

$$\begin{aligned} F_p(a) F_{n-p}(x)(a+x+n) = {} & F_{p+1}(a) F_{n-p}(x) \\ & + F_p(a) F_{n-p+1}(x). \end{aligned}$$

29. En posant

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = \frac{x}{1}, \qquad P_2(x) = \frac{x(x+1)}{1.2}, \qquad \ldots,$$

$$P_n = \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}{1.2.3\ldots n},$$

on a identiquement

$$\begin{aligned} P_n(x+1) = {} & P_n(x) + P_{n-1}(x-1), \\ P_n(x+1) = {} & P_0 + P_1(x) + P_2(x) + \ldots + P_n(x), \\ P_n(a+x) = {} & P_0(a) P_n(x) + P_1(a) P_{n-1}(x) \\ & + P_2(a) P_{n-2}(x) + \ldots + P_n(a) P_0(x). \end{aligned}$$

30. Si l'on pose

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) = {} & x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots \\ & + A_p x^{n-p-1} + \ldots + A_{n-1}, \end{aligned}$$

on a

$$(x+1)^n + A_1(x+1)^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x+1)$$
$$= (x+n)(x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}).$$

Déduire de là les égalités

$$C_2^n = A_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$C_p^n + C_{p-1}^{n-1} A_1 + C_{p-2}^{n-2} A_2 + \ldots + C_2^{n-p+2} A_{p-2} = (p-1) A_{p-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1 + A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-2} = (n-1) A_{n-1}.$$

Exprimer A_1, A_2, A_3 au moyen de n.

Montrer, en supposant que n soit un nombre premier impair, que les nombres entiers A_1, A_2, ..., A_{n-2} sont divisibles par n ainsi que $A_{n-1}+1$; dans les mêmes conditions, si x est un nombre entier non divisible par n, $x^{n-1}-1$ est divisible par n.

31. En conservant aux lettres A_1, A_2, ..., A_{n-1} la signification de l'exercice précédent et en désignant en général par S_r la somme des $r^{\text{ièmes}}$ puissances des p premiers nombres naturels, on a

$$S_{n-1} + A_1 S_{n-2} + \ldots + A_{n-2} S_1 + p A_{n-1} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n) - 1.2.3\ldots n}{n}.$$

32. En conservant les mêmes notations que dans l'exercice précédent, montrer que l'on a

$$C_1^n S_{n-1} + C_2^n S_{n-2} + \ldots + C_{n-1}^n S_1 + p = (p+1)^n - p^n.$$

Calculer S_2, S_3, S_4 en partant soit de cette relation, soit de la relation analogue indiquée dans l'exercice précédent.

33. Ordonner, suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x, le carré du polynome $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$. Quel est, dans le développement, le plus grand coefficient numérique ?

34. Trouver un polynome $f(x)$ tel que l'on ait identiquement, en désignant par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$,

$$f(x) - f'(x) = \frac{x^n}{1.2.3\ldots n}. \tag{1}$$

On reconnaît aisément que le polynome $f(x)$ ne peut être d'un degré supérieur à n. On applique ensuite la *méthode des coefficients indéterminés*, c'est-à-dire qu'on pose $f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n$; en remplaçant ensuite, dans l'équation (1), $f(x)$ et $f'(x)$ par leurs expressions développées, et en écrivant que, dans les deux membres, les coefficients d'une même puissance de x sont égaux, on trouve les relations

$$A_0 - A_1 = 0, \quad A_1 - 2A_2 = 0, \quad \ldots, \quad A_{n-1} - nA_n = 0, \quad A_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n},$$

qui permettent de déterminer les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

35. Ordonner suivant les puissances de x le polynome

$$f(x) = (1 + ax)(1 + a^2x)(1 + a^3x)\ldots(1 + a^nx).$$

En changeant x en ax dans cette égalité, on trouve aisément la relation

$$f(x)(1 + a^{n+1}x) = f(ax)(1 + ax),$$

qui doit avoir lieu quel que soit x.

En remplaçant dans cette égalité $f(x)$ et $f(ax)$ par

$$A_0 + A_1x + \ldots + A_nx^n, \quad A_0 + A_1ax + \ldots + A_na^nx^n,$$

égalant, dans les deux membres, les coefficients de x^p, on trouve une relation entre A_p et A_{p-1}, d'où, en tenant compte de l'égalité $A_0 = 1$, on tire aisément

$$A_p = a^{\frac{p(p+1)}{2}} \frac{(1 - a^n)(1 - a^{n-1})\ldots(1 - a^{n-p+1})}{(1 - a)(1 - a^2)\ldots(1 - a^p)}.$$

La définition même du polynome $f(x)$ montre que A_p doit pouvoir se mettre sous la forme d'un polynome entier en a.

36. La relation

$$X_n - 2xX_{n-1} + X_{n-2} = 0,$$

où n désigne un nombre entier au moins égal à 2, permet, quand on se donne deux polynomes X_0, X_1, de trouver successivement les polynomes

$$X_2 = 2xX_1 - X_0, \qquad X_3 = 2xX_2 - X_1, \qquad X_4 = \ldots,$$

qui la vérifient identiquement.

On supposera dans ce qui suit $X_0 = 1$, $X_1 = x$.

Former explicitement les polynomes X_2, X_3, X_4, X_5.

Montrer que X_n est un polynome de degré n, ne contenant que des termes dont le degré est pair ou impair suivant que n est pair ou impair.

Trouver pour X_n le coefficient de x^n et celui de x^{n-2}.

Quelle est la valeur du polynome X_n pour $x = 1$ et $x = -1$?

Montrer que X_n, quand on y remplace x par $\cos\alpha$, devient égal à $\cos n\alpha$.

37. Trouver tous les polynomes $f(x)$, de degré n, qui satisfont identiquement à la relation

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + n^2 f(x) = 0,$$

où $f'(x)$, $f''(x)$ désignent les dérivées, première et seconde, de $f(x)$.

On posera $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$. En remplaçant, dans la relation précédente $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, par leurs expressions développées et en écrivant que, dans le premier membre, les coefficients de x^n, x^{n-1}, ..., x^{n-p}, ... sont nuls, on aura tout ce qu'il faut pour montrer que A_1, A_3, A_5, ... sont nuls et pour déterminer A_2, A_4, A_6, ... au moyen de A_0; le polynome $f(x)$ est ainsi déterminé à un facteur constant près.

Montrer que, si l'on prend $A_0 = 2^{n-1}$, le polynome $f(x)$ n'est autre chose que le polynome X_n de l'exercice précédent.

38. Ordonner, suivant la puissance de x, le polynome que l'on obtient en prenant la dérivée n^2 de $(x^2-1)^n$ et en divisant le résultat par le produit $2.4\ldots 2n$ des n premiers nombres pairs. En désignant ce polynome par $P_n(x)$, montrer que l'on a identiquement en x

$$nP_n(x) - (2n+1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0,$$
$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0.$$

La première de ces relations permet de calculer successivement les polynomes P_2, P_3, P_4, ..., quand on suppose $P_0 = 1$, $P_1 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

Dans la seconde, $P'_n(x)$, $P''_n(x)$ désignent les dérivées première et seconde de $P_n(x)$. Tout polynome $f(x)$ qui vérifie identiquement la relation

$$(1-x^2)f''(x) - 2xf'(x) + n(n+1)f(x) = 0$$

est de la forme $AP_n(x)$, en désignant par A une constante.

Quelle est la valeur de $P_n(x)$ pour $x = 1$, pour $x = -1$?

39. Combien y a-t-il de termes, en supposant qu'il n'en manque aucun, dans un polynome homogène du $n^{\text{ième}}$ degré, à deux, trois ou quatre variables? Dans un polynome non homogène? Combien dans un polynome non homogène de degré n, à trois variables, y a-t-il de termes où l'une des variables entre au degré p? On suppose toujours qu'aucun terme ne manque.

40. Soit $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ un polynome réduit à n variables; soit g un nombre naturel supérieur au degré du polynome $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ par rapport à l'une quelconque des variables; dans ce polynome on remplace respectivement [1] $x_0, x_1, \ldots, x_2, x_{n-1}$ par $x, x^g, x^{g^2}, \ldots, x^{g^{n-1}}$; soit $F(x)$

---

[1] Dans x^{g^2}, x^{g^3}, ..., g^2 et g^3 sont les exposants de la puissance à laquelle on élève x; le carré, ou le cube de x^g se représentent par $(x^g)^2 = x^{2g}$, $(x^g)^3 = x^{3g}$.

le polynome en x auquel on parvient ainsi. Montrer, en s'appuyant sur ce qu'un nombre naturel ne peut s'écrire que d'une seule façon dans un système de numération dont la base est g, qu'à deux termes distincts du polynome $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$, correspondent deux termes distincts du polynome $F(x)$ et comment, connaissant le polynome $F(x)$, on peut retrouver, terme par terme, le polynome $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$.

41. Un polynome $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ ne peut être nul pour toutes les valeurs entières attribuées aux variables sans être identiquement nul.

42. Un polynome $f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ ne peut être nul pour toutes les valeurs des variables qui satisfont à la condition $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) > 0$, où $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ désigne un polynome donné, sans être identiquement nul.

La démonstration des propositions énoncées dans les exercices 41, 42 est immédiate quand il s'agit de polynomes à une variable.

L'artifice indiqué dans l'exercice 40 permet, en prenant g assez grand, de ramener à ce cas le cas d'un polynome à n variables.

43. Montrer que tout polynome $f(x, y)$ à deux variables x, y tel que l'on ait identiquement $f''_{xy} = 0$ est la somme d'un polynome en x, et d'un polynome en y.

44. Déterminer le polynome le plus général $f(x, y)$ homogène en x, y, du degré n, tel que l'on ait identiquement en x, y

$$f''_{x^2} + f''_{y^2} = 0.$$

Même question, en supprimant la condition relative à l'homogénéité.

CHAPITRE III.

DIVISION DES POLYNOMES.

§ 1. — DIVISION PAR UN MONOME.

50. Les monomes et polynomes que l'on considérera dans ce Chapitre seront toujours, sauf au n° 58, des monomes ou polynomes à *une* variable, que l'on désignera par la lettre x.

Si l'on considère deux monomes ax^n, bx^p, dont le premier est dit *dividende,* et le second *diviseur,* il n'y a évidemment pas de polynome, contenant deux termes ou davantage, qui, multiplié par le second, reproduise le premier. Il existe un monome qui, multiplié par bx^p, reproduise ax^n si p est inférieur ou égal à n, à savoir le monome $\frac{a}{b}x^{n-p}$, qui se réduit à $\frac{a}{b}$ si n est égal à p; on dit alors que le monome ax^n est *divisible* par bx^p, et le monome $\frac{a}{b}x^{n-p}$ est le *quotient* de la division de ax^n par bx^p : sa valeur est toujours égale au quotient exact de la division de la valeur du monome dividende par la valeur du monome diviseur, sauf lorsque x est nul, auquel cas l'expression $\frac{ax^n}{bx^p}$ n'a pas de sens.

Quand n est plus petit que p, il n'y a ni monome ni polynome qui, multiplié par bx^p, reproduise ax^n : ax^n n'est pas divisible par bx^p. Toutefois, il y a une expression, d'une forme analogue à un monome, qui jouit de cette propriété : c'est l'expression

$$\frac{a}{b}\frac{1}{x^{p-n}} = \frac{a}{b}x^{-(n-p)} = \frac{a}{b}x^{-m},$$

en posant $m = n - p$.

Malgré son analogie avec les monomes, on ne donnera pas le nom de *monome* à l'expression ax^{-m}; il sera toutefois commode, à l'occasion, de dire qu'elle est de degré négatif $-m$.

Considérons un polynome A et un monome B. Existe-t-il un polynome Q, tel que le produit par B de ce polynome soit identique à A?

S'il existe un tel polynome, le produit de chacun de ses termes par B devra reproduire identiquement un terme de A; chaque terme de A est donc divisible par le monome B, c'est-à-dire qu'il est de degré égal ou supérieur au degré du monome B : S'il en est ainsi, en divisant, comme on vient de l'expliquer, chaque terme de A par B, on obtient évidemment un polynome Q qui, multiplié par B, reproduit le polynome A : celui-ci est divisible par le polynome B; le polynome Q est le quotient de la division.

Sa valeur, quel que soit le nombre x (différent de o), est égale au quotient exact obtenu en divisant la valeur du polynome A par la valeur du polynome B.

Ainsi le polynome $5x^7 - 3x^6 + 4x^5$ est divisible par le monome $3x^3$, le quotient est $\frac{5}{3}x^4 - x^3 + \frac{4}{3}x^2$.

Lorsque A contient un terme de degré inférieur au degré de B, la division n'est plus possible, au sens que l'on vient de dire; toutefois, on peut encore diviser, comme on l'a expliqué plus haut, chaque terme de A par le monome B, quitte à introduire des termes ayant un exposant négatif. On obtient ainsi une expression analogue à un polynome (à laquelle, toutefois, je ne donnerai pas le nom de *polynome*), qui reproduit identiquement A quand on la multiplie par B, et dont la valeur, sauf pour $x = 0$, est toujours égale au rapport de la valeur de A à celle de B. On l'appellera, si l'on veut, le quotient exact de la division de A par B.

En divisant, par exemple, le polynome $2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ par $3x^2$, on obtient ainsi l'expression

$$\frac{2}{3}x - 1 + \frac{4}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2} = \frac{2}{3}x - 1 + \frac{4}{3}x^{-1} - \frac{1}{3}x^{-2}.$$

Les expressions de la forme

$$Ax^\alpha + Bx^\beta + \ldots + Lx^\lambda,$$

où A, B, ..., L sont des constantes, et où α, β, ..., λ sont des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, jouissent de propriétés analogues à celles des polynomes (on ne leur donne pas toutefois le nom de *polynomes* quand l'un des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ est négatif).

On peut les réduire, les ordonner par rapport aux puissances croissantes ou décroissantes de la variable. Par exemple, l'expression précédente sera ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de x si l'on a $\alpha > \beta > \ldots > \lambda$. Ax^α sera alors le terme du plus haut degré, Lx^λ le terme du plus bas degré.

On peut ajouter, retrancher, multiplier des expressions de cette nature, en opérant comme pour les polynomes ordonnés. On reconnaîtra même, dans le cours de ce Chapitre, sans que j'y insiste davantage, qu'on peut les diviser par les mêmes règles que les polynomes.

Je laisse au lecteur le soin de reconnaître qu'une expression de cette nature, quand elle est réduite, ne peut être nulle pour toutes les valeurs de x, sans être identiquement nulle; que deux expressions réduites de cette nature ne peuvent être égales pour toutes les valeurs de x sans être identiques terme à terme; qu'une telle expression, quand elle est réduite et qu'elle contient effectivement des termes de degré négatif, est très grande en valeur absolue, pour les valeurs de x voisines de 0; qu'elle est, pour de telles valeurs, du signe de son terme du plus bas degré; que, si elle contient effectivement des termes de degré positif, elle est, pour les très grandes valeurs absolues de x, très grande en valeur absolue, et du signe de son terme du plus haut degré.

§ 2. — POLYNOMES ORDONNÉS SUIVANT LES PUISSANCES DÉCROISSANTES DE LA VARIABLE.

51. La division des polynomes à une variable peut être considérée de plusieurs points de vue; du premier de ces points de vue l'opération, parfaitement déterminée, est analogue à l'opération de la division arithmétique au sens de la théorie des nombres entiers.

Étant donnés deux polynomes en x, A et B, dont on appellera le premier *dividende* et le second *diviseur,* on se propose de trouver deux polynomes Q et R, dont le second soit de degré inférieur au degré de B, et tels que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad A = BQ + R;$$

le polynome Q s'appelle le *quotient,* le polynome R s'appelle le *reste.*

Si, par exemple, on avait

$$A = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 8x - 1, \qquad B = x^3,$$

on satisferait évidemment à l'identité $A = BQ + R$ en prenant

$$Q = 3x^2 - 2x + 5, \qquad R = -7x^2 + 8x - 1.$$

La règle pour diviser un polynome quelconque de degré n par un monome x^p de degré inférieur ou égal à n est évidente.

Comme on le verra, le problème général que l'on a posé admet toujours une solution et une seule. Suivant l'ordre des questions auxquelles on a affaire, c'est le quotient, ou le reste, qui importe le plus.

L'analogie de cette opération avec la division des nombres entiers est évidente : on verra, d'ailleurs, qu'elle conduit à une théorie de la divisibilité des polynomes qui suit pas à pas la théorie de la divisibilité des nombres entiers.

Je supposerai le problème résolu et les polynomes A, B, Q, R ordonnés suivant les puissances descendantes de x.

Il importe d'abord de remarquer que, si le polynome Q n'est pas identiquement nul, le terme du plus haut degré dans le produit BQ, terme qui s'obtient en multipliant les deux premiers termes de B et de Q, est de degré au moins égal au degré de B et ne peut, par conséquent, se réduire avec aucun terme de R : on voit alors que le produit des deux premiers termes de B et de Q doit être identique au premier terme de A.

Lorsque A est de degré inférieur à B, il ne peut pas y avoir de polynome Q contenant effectivement x, ou même se réduisant à une constante non nulle pour lequel l'identité (1) puisse avoir lieu, puisque, autrement, le polynome BQ, et, par suite, le polynome $BQ + R$, serait de degré supérieur à A : la seule solution du problème posé est évidemment $Q = 0$, $R = A$. Il faut, pour l'admettre, convenir de regarder 0 comme un polynome (identiquement nul).

Je suppose maintenant que A soit de degré n supérieur ou égal au degré p de B.

Le produit du premier terme de B par le premier terme de Q étant identique au premier terme de A, le premier terme de Q s'obtiendra en divisant, comme on l'a expliqué dans le n° 50, le premier terme de A par le premier terme de B. En désignant le monome quotient par q_0, et par Q_1 le polynome qu'il faudrait ajouter à q_0 pour reproduire Q, on devra avoir identiquement

$$A = B(q_0 + Q_1) + R, \qquad A - Bq_0 = BQ_1 + R;$$

comme R est toujours de degré inférieur à B, la détermination de Q_1 est ramenée à la division du polynome $A_1 = A - Bq_0$ par B. Dans le polynome A_1, ordonné suivant les puissances descendantes de x, ne figure plus de terme de degré n : si ce polynome est de degré inférieur au degré de B, l'opération est terminée, on a $Q_1 = 0$, $R = A_1$, $Q = q_0$. Si A_1 est de degré supérieur au degré de B, on déterminera le premier terme q_1 de Q_1 de la même façon, et l'on aura

$$Q_1 = q_1 + Q_2, \qquad A_1 - Bq_1 = BQ_2 + R = A_2.$$

On continuera de même jusqu'à ce qu'on parvienne à un polynome A_r qui soit de degré inférieur à B, ce qui ne manquera pas d'arriver, puisque les degrés des polynomes $A, A_1, A_2, \ldots, A_r$ vont en diminuant d'une unité, au moins, à chaque fois.

D'ailleurs, d'après la façon même dont on a opéré, on a identiquement

$$\begin{aligned} A \quad &= Bq_0 \quad + A_1, \\ A_1 \quad &= Bq_1 \quad + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{r-1} &= Bq_{r-1} + A_r, \end{aligned}$$

et, par suite, en ajoutant,

$$A = B(q_0 + q_1 + \ldots + q_{r-1}) + A_r,$$

et cette identité montre bien, puisque A_r est de degré inférieur au degré de B, qu'on est parvenu à la solution du problème posé, que le polynome $q_0 + q_1 + \ldots + q_{r-1}$ est le quotient Q, et le polynome A_r le reste R, que l'on cherche.

Chacun des termes du polynome Q a été déterminé d'une façon *nécessaire,* le polynome Q étant déterminé, le polynome $R = A - BQ$ est lui-même déterminé; on voit bien que le problème ne peut admettre qu'une solution.

Le degré du quotient Q, dont le premier terme s'obtient en divisant le premier terme de A par le premier terme de B, est toujours égal à la différence entre les degrés de A et de B, sauf dans le cas où le degré de A serait inférieur au degré de B et où, alors, Q serait identiquement nul.

La règle pour faire la division résulte des explications précédentes.

On écrit sur une même ligne horizontale le dividende à gauche, le diviseur à droite en les séparant par un trait vertical ; ces deux polynomes sont ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x ; on trace une barre horizontale sous le diviseur, pour le séparer du quotient que l'on écrira au-dessous de cette barre.

Le premier terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur : ce terme étant écrit, on écrit au-dessous du dividende les produits, changés de signe, des termes du diviseur par le terme obtenu au quotient, en ayant soin de placer chaque produit partiel au-dessous du terme du diviseur qui a le même degré. On écrit la somme du dividende et des termes écrits au-dessous de lui : cette somme est le premier reste partiel. Il convient d'avoir séparé ce reste partiel des deux lignes qui le précèdent en plaçant au-dessous de ces lignes un trait horizontal.

Le second terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme du reste partiel par le premier terme du diviseur; au-dessous du reste partiel, on écrit les produits, tous changés de signe, des termes du diviseur par le second terme du quotient, et l'on ajoute au premier reste partiel; la somme est le second reste partiel, qui fournira le troisième terme du quotient, etc.

On continue de la même façon, en s'arrêtant quand on ne peut plus continuer, c'est-à-dire quand le premier terme du reste partiel auquel on est parvenu est de degré inférieur au diviseur. L'opération est alors terminée : le quotient est formé par l'ensemble des termes obtenus, le reste est le dernier reste partiel.

Il convient de remarquer que, chaque fois qu'on a obtenu un reste partiel, le dividende est égal au produit du diviseur par le polynome écrit au quotient, plus le reste partiel. La différence entre le degré du reste partiel et le degré du diviseur est moindre que le degré du dernier terme écrit au quotient.

Le lecteur pourra suivre cette règle sur l'opération écrite ci-dessous, que je crois inutile de détailler davantage.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
3x^5 & -2x^4 & & +x^2 & -x & & 2x^3-5x+3 \\
\cline{7-7}
-3x^5 & & +\frac{15}{2}x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & & & \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{15}{4} \\
\cline{1-5}
 & -2x^4 & +\frac{15}{2}x^3 & -\frac{7}{2}x^2 & -x & & \\
 & +2x^4 & & -5x^2 & +3x & & \\
\cline{2-5}
 & & \frac{15}{2}x^3 & -\frac{17}{2}x^2 & +2x & & \\
 & & -\frac{15}{2}x^3 & & +\frac{75}{4}x & -\frac{45}{4} & \\
\cline{3-6}
 & & & -\frac{17}{2}x^2 & +\frac{83}{4}x & -\frac{45}{4} &
\end{array}
$$

Quand le reste de l'opération est nul, on dit que la division se fait exactement, que le polynome dividende est *divisible* par le polynome diviseur, ou encore que le polynome diviseur divise (exactement) le polynome dividende. Le dividende est alors identiquement égal au produit du diviseur par le quotient (¹).

S'il en est ainsi, le dernier terme du dividende doit être égal au produit du dernier terme du diviseur par le dernier terme du quotient. Si donc on est amené à écrire au quotient un terme de degré moindre que le degré du quotient du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur, ou un terme qui soit précisément de ce degré, mais qui ne soit pas égal au quotient du dernier terme du dividende par le dernier terme du diviseur, on est sûr que l'opération ne pourra se faire exactement; par exemple, dans l'opération écrite plus haut, dès qu'on a écrit au quotient le terme $-x$, et non $-\frac{2}{3}x$, on est certain que la division ne se fera pas exactement.

Lors même que la division de A par B ne se fait pas exactement, il peut être utile de mettre le polynome A sous la forme $BQ+R$, ou, ce qui revient au même, la fraction $\frac{A}{B}$ sous la forme $Q+\frac{R}{B}$.

(¹) Quand le polynome A est divisible par le polynome B, on dit que B est un *diviseur* de A. J'écarterai, *dans ce Chapitre,* cette forme de langage qui pourrait créer des confusions.

On a souvent à calculer la valeur numérique que prend le polynome A pour une valeur de x qui annule un autre polynome B; au lieu de substituer cette valeur dans A, il est plus commode, surtout si elle est irrationnelle, de la substituer dans R, ce qui donne le même résultat, et est plus aisé. Le lecteur s'en rendra compte en pensant au cas où B est du second degré et où R est, par conséquent, au plus du premier degré.

D'un autre côté, on verra plus tard que pour les valeurs de x, qui sont très grandes en valeur absolue, la valeur de la fraction $\frac{R}{B}$ est très petite, en sorte que la valeur de $\frac{A}{B}$ est à peu près égale à celle de Q, dont le calcul est plus facile.

Enfin, les notions qui précèdent conduisent à des propositions qui sont l'extension manifeste, aux polynomes, de théorèmes bien connus d'Arithmétique, concernant les nombres entiers.

52. Quand on multiplie le dividende A et le diviseur B par un même polynome C, le quotient Q n'est pas changé et le reste R est multiplié par le polynome C. En d'autres termes, le quotient de la division de AC par BC est Q, comme celui de A par B, et le reste est RC.

L'identité $A = BQ + R$ entraîne, en effet, $AC = BCQ + RC$ et cette dernière identité, où le degré du polynome RC est moindre que le degré du polynome BC, permet d'affirmer que Q et RC sont le quotient et le reste de la division de AC par BC.

Quand le dividende A et le diviseur B sont divisibles par le diviseur C, le reste R de la division de A par B est aussi divisible par C; quand on divise le dividende A et le diviseur B par C, le quotient Q n'est pas changé et le reste est divisé par C.

Puisque C divise exactement A et B, par hypothèse, soient A' et B' les quotients, on aura identiquement $A = A'C$, $B = B'C$, et l'identité $A = BQ + R$ pourra s'écrire

$$A'C = B'CQ + R, \qquad R = (A' - B'Q)C;$$

la dernière forme montre bien que R est divisible par C et que le quotient de la division est le polynome $R' = A' - B'Q$; cette identité, qui sert de définition au polynome R', peut s'écrire $A' = B'Q + R'$;

le degré de R', égal au degré de R diminué du degré de C, est inférieur au degré de B', qui est égal au degré de B diminué du degré de C; Q et R' sont donc bien le quotient et le reste de la division de A' par B'.

Remarquons en passant que le polynome C peut se réduire à une constante (non nulle); la division est toujours possible. Si l'on prend pour cette constante C le coefficient de la plus haute puissance de x dans B, on ramènera la division proposée à une autre dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de x, dans le diviseur, sera l'unité, ce qui peut être commode. On peut d'ailleurs se borner à diviser tous les coefficients du diviseur par le premier, sans toucher au dividende : le quotient est alors multiplié par le premier coefficient et le reste n'est pas changé.

On ne change pas le reste d'une division quand on ajoute [1] au dividende un multiple du diviseur :

L'identité $A = BQ + R$ implique en effet l'identité

$$A + BC = B(Q + C) + R,$$

où C est un polynome quelconque, et cette dernière identité montre que le quotient de la division de $A + BC$ par B est $Q + C$, et que le reste est R, puisque le degré de R est inférieur au degré de B.

Si le dividende est une somme ou un produit de deux polynomes, le reste de la division par un polynome quelconque n'est pas changé, quand on ajoute un multiple du diviseur à l'un des termes de la somme ou à l'un des facteurs du produit. C'est une conséquence immédiate du théorème précédent. On voit ensuite qu'on peut aussi bien, sans changer le reste, ajouter aux deux termes de la somme, ou aux deux facteurs du produit, tels multiples du diviseur que l'on veut, puis que le théorème s'étend au cas où le dividende est une somme ou un produit d'autant de polynomes que l'on veut, ou encore une somme dont les termes seraient des produits de polynomes : on peut, sans changer le reste, ajouter un multiple du diviseur à l'un quelconque de ces polynomes et, en particulier, remplacer chacun d'eux par son propre reste, dont il ne diffère que par un multiple du diviseur.

---

(1) Il est inutile de dire *ou qu'on retranche,* puisque la soustraction peut toujours être regardée comme une addition.

En particulier, si les deux termes d'une somme sont divisibles par un polynome, il en est de même de la somme. Si un polynome divise une somme et l'une de ses parties, le reste de la division de la somme et de l'autre partie seront les mêmes, puisque, lorsqu'on ne s'occupe que du reste, on peut supprimer la première partie. Si un polynome divise une somme et l'une de ses parties, il divise l'autre. Tout multiple d'un multiple du diviseur est un multiple de ce diviseur, etc.

On voit combien toute cette théorie ressemble à la théorie de la divisibilité, en Arithmétique : on verra plus tard que l'analogie s'étend très loin.

53. Les remarques précédentes permettent, dans bien des cas, de simplifier la recherche du reste dans une division.

Si, par exemple, le diviseur est $x - a$, on remarquera d'abord que le reste de la division de x par $x - a$ est a, puis qu'on ne change pas le reste de la division par $x - a$ d'un polynome quelconque en remplaçant, dans chacun des monomes qui constituent le polynome, chacun des facteurs x par son reste a, c'est-à-dire en remplaçant x par a dans le polynome; le résultat que l'on obtient ainsi est de degré 0, inférieur au degré 1 du diviseur; c'est donc le reste cherché.

Supposons que le diviseur soit $x^\alpha - 1$, α étant un nombre naturel quelconque; le reste de la division de x^α par $x^\alpha - 1$ est 1; on en conclut que le reste de la division par $x^\alpha - 1$ d'un monome x^n est $x^{\alpha'}$, en désignant par α' le reste de la division du nombre entier n par α; car, si le quotient de cette division est q, on aura

$$x^n = (x^\alpha)^q . x^{\alpha'}, \qquad n = \alpha q + \alpha',$$

et l'on peut, sans changer le reste dans la division de $(x^\alpha)^q . x^{\alpha'}$ par $x^\alpha - 1$, remplacer x^α par 1; le résultat $x^{\alpha'}$ est de degré inférieur au degré du diviseur. Le reste de la division d'un polynome par $x^\alpha - 1$ s'obtient en remplaçant, dans chacun des monomes qui constituent le dividende, l'exposant de x par le reste que l'on trouve en divisant cet exposant par α. En appliquant cette règle au cas où le dividende est $x^n - 1$, on reconnaît que la condition nécessaire et suffisante pour que $x^n - 1$ soit exactement divisible par $x^\alpha - 1$ est que le nombre naturel n soit divisible par α.

Soit encore à chercher le reste de la division par $x^2 + 1$ d'un polynome A; on verra au Chapitre VI l'intérêt de ce reste. Dans chacun des monomes ax^p qui constituent A, il est permis, quand on ne se préoccupe que du reste, de remplacer tels facteurs que l'on veut par leurs restes : suivant que p est pair ou impair, est de la forme $2k$ ou $2k+1$, on peut regarder x^p comme le produit de k facteurs x^2, ou de $k+1$ facteurs dont l'un est x et dont les autres sont égaux à x^2; puisque -1 est précisément le reste de la division de x^2 par x^2+1, on remplace chacun des facteurs x^2 par -1, c'est-à-dire x^p par $(-1)^k$ ou par $(-1)^k x$, ou encore x^p par 1, x, -1, $-x$, suivant que p est un multiple de 4, un multiple de 4 augmenté de 1, de 2 ou de 3; le reste ne sera pas changé; mais, après cette opération faite sur tous les termes de A, on obtient un résultat qui est au plus du premier degré en x; c'est le reste cherché.

L'opération que l'on vient de décrire s'appelle *remplacer* x^2 *par* -1 *dans* A. La signification qu'il faut donner à ces mots est suffisamment éclaircie par ce qui précède.

Si l'on considère, par exemple, le polynome

$$7x^6-8x^5+x^4-2x^3-x^2+1,$$

on voit que le reste de la division par x^2+1 est

$$-7-8x+1+2x+1+1=-4-6x.$$

On observera, en passant, que si l'on considère la suite des puissances successives de x

$$x^0=1,\quad x,\quad x^2,\quad x^3,\quad x^4,\quad x^5,\quad \ldots,$$

les restes de la division par x^2+1, à savoir

$$1,\quad x,\quad -1,\quad -x,\quad 1,\quad x,\quad \ldots,$$

se reproduisent périodiquement de quatre en quatre : cela résulte aussi de ce que $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$ est divisible par x^2+1, en sorte que le reste de la division par x^2+1 de x^4 est 1, d'où il suit que les restes de la division par x^2+1 sont les mêmes pour x^p et $x^{p+4}=x^p.x^4$.

54. Division par $x-a$. — Il convient de s'arrêter sur le cas où le diviseur est du premier degré en x : s'il est égal à $\alpha x+\beta$, on peut, en vertu d'une remarque précédente, le remplacer par $x + \frac{\beta}{\alpha}$ ou par $x - a$: on vient de voir comment on obtenait le reste de la division d'un polynome par $x - a$; on va retrouver ce résultat et montrer aussi comment on obtient le quotient.

Soit $f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ le polynome proposé, que l'on veut diviser par $x - a$.

On a vu, au n° 51, comment, lorsque a est nul, le quotient et le reste s'obtiennent immédiatement. On ramène le cas général à celui-là en ordonnant le polynome par rapport aux puissances de $x - a$; il s'écrit alors

$$f(x) = A'_0(x-a)^n + A'_1(x-a)^{n-1} + \ldots + A'_{n-1}(x-a) + A'_n;$$

on voit de suite que le quotient est

$$A'_0(x-a)^{n-1} + A'_1(x-a)^{n-2} + \ldots + A'_{n-1}$$

et que le reste est A'_n, c'est-à-dire la valeur $f(a)$ que le polynome prend pour $x = a$: la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynome soit divisible par $x - a$ est qu'il s'annule quand on y remplace x par a.

La valeur du reste s'aperçoit aussi bien sur l'identité fondamentale

$$f(x) = (x-a)\,Q(x) + R,$$

où $Q(x)$ désigne le quotient de la division du polynome $f(x)$ par $x - a$ et R le reste. Ce reste, en effet, doit être de degré o, puisque le diviseur est du premier degré; il ne contient pas x effectivement, c'est une constante, dont la valeur $f(a)$ s'obtient en remplaçant x par a dans l'identité précédente. Au fond, ce raisonnement ne diffère pas de celui qu'on a fait au n° 35.

Quoique le procédé précédent fournisse l'expression du quotient et du reste, il y a lieu d'appliquer une autre méthode, ne fût-ce que pour avoir le quotient ordonné suivant les puissances de x et non de $x - a$.

Le lecteur pourra, sans difficulté, appliquer simplement la règle de la division, il retrouvera ainsi les résultats que je vais obtenir par la méthode des *coefficients indéterminés*.

Le quotient doit être du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré; désignons-le par

$$B_0 x^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-2} x + B_{n-1},$$

et désignons le reste (une constante) par B_n. $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}, B_n$ sont des coefficients qu'il faut déterminer. On y arrive en écrivant que le produit du quotient par $x - a$, augmenté de B_n, est identique terme à terme au dividende $A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x + A_n$. On trouvera ainsi, en égalant à chaque coefficient de ce dividende, le coefficient de la même puissance de x dans le produit,

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_0 a - B_1 &= A_1, \\ B_1 a - B_2 &= A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_{n-2} a - B_{n-1} &= A_{n-1}, \\ B_{n-1} a - B_n &= A_n; \end{aligned}$$

ces égalités peuvent être regardées comme des équations qui permettent de déterminer successivement $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ et B_n; on en tire

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_1 &= B_0 a + A_1, \\ B_2 &= B_1 a + A_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ B_{n-1} &= B_{n-2} a + A_{n-1}, \\ B_n &= B_{n-1} a + A_n; \end{aligned}$$

on en tirerait, tout aussi bien, en général,

$$B_r = A_0 a^r + A_1 a^{r-1} + \ldots + A_{r-1} a + A_r,$$

r étant l'un quelconque des indices $1, 2, \ldots, n$; mais cette formule, quoique plus explicite, est moins avantageuse dans la pratique que les formules précédentes, qui permettent le calcul successif des quantités $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ et B_n, dont chacune s'obtient en multipliant la précédente par a, et en ajoutant le coefficient correspondant du dividende.

Soit, par exemple, à diviser par $x - 3$ le polynome

$$2x^5 - 3x^3 + x^2 - 7.$$

J'écris la suite des coefficients, en remplaçant par des zéros ceux qui manquent

$$2, \quad 0, \quad -3, \quad 1, \quad 0, \quad -7,$$

et je trouve successivement, en appliquant la règle précédente, les coefficients du quotient

$$2, \quad 6, \quad 15, \quad 46, \quad 138$$

et le reste $138 \times 3 - 7 = 407$.

En appliquant ce procédé, le reste doit être égal à la valeur du dividende pour $x = a$; c'est la meilleure manière pour calculer la valeur exacte d'un polynome pour une valeur donnée de la variable.

Pour reconnaître si un polynome est divisible par $x + a$, ou pour faire la division d'un polynome par $x + a$, on n'aura qu'à changer a en $-a$ dans les raisonnements ou les calculs qui précèdent.

$x^n - a^n$ est toujours divisible par $x - a$; le quotient est égal à

$$x^{n-1} + a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} + \ldots + a^{n-1} x + a^n;$$

$x^n + a^n = x^n - a^n + 2a^n$ n'est pas divisible par $x - a$, le quotient est le même polynome qu'on vient d'écrire et le reste est $2a^n$. $x^n - a^n$ est divisible par $x + a$ quand n est pair et n'est pas divisible quand n est impair; dans les deux cas le quotient est

$$x^{n-1} - a x^{n-2} + a^2 x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2} a^{n-2} x + (-1)^{n-1} a^{n-1},$$

et, dans le second cas, le reste est $-2a^n$.

$x^n + a^n$ est divisible par $x + a$ quand n est impair et ne l'est pas quand n est pair; le quotient est, dans les deux cas, le polynome que l'on vient d'écrire et, dans le second cas, le reste est $2a^n$.

Si un polynome est divisible séparément par les binomes $x - a$, $x - b$, ..., $x - l$, où a, b, ..., l sont des nombres distincts, il est divisible par le produit $(x - a)(x - b) \ldots (x - l)$ de ces binomes.

Il suffit de remarquer que le polynome s'annule alors pour les nombres différents a, b, ..., l; dès lors la proposition a été démontrée, sous une forme plus complète, au n° 38.

55. Cas où les coefficients sont entiers. — Le cas où, dans une division, le dividende et le diviseur sont des polynomes à coefficients entiers, offre un intérêt particulier. On a alors à sa disposition un théorème qui permet souvent de reconnaître, sans la pousser jusqu'au bout, qu'une division ne peut s'effectuer exactement, et qui est d'ailleurs très utile quand on veut chercher quels sont les polynomes à coefficients entiers qui divisent exactement un polynome à coefficients entiers. Je vais m'arrêter un instant sur ce sujet, où le lemme suivant, relatif à la théorie de la multiplication de deux polynomes, est fondamental :

Le plus grand commun diviseur des coefficients du produit (réduit) de deux polynomes (réduits) P, Q, à coefficients entiers, est égal au produit du plus grand commun diviseur des coefficients du polynome P et du plus grand commun diviseur des coefficients du polynome Q.

Dans ce numéro, je désignerai sous le nom de *polynome primitif*, un polynome à coefficients entiers, dont les coefficients n'ont pas d'autre commun diviseur que 1.

Je commencerai par établir la proposition suivante : Le produit de deux polynomes primitifs P, Q est un polynome primitif.

Supposons, en effet, que les coefficients du produit (réduit) PQ aient un diviseur commun autre que 1; ce diviseur admettra un diviseur premier α qui divisera aussi tous les termes du produit PQ. Posons

$$P = P_1 + P_2, \qquad Q = Q_1 + Q_2,$$

en désignant par P_1 l'ensemble des termes de P dont les coefficients sont divisibles par α, par Q_1 l'ensemble des termes de Q dont les coefficients sont divisibles par α; au contraire, aucun terme de P_2, ni de Q_2, n'est divisible par α. Il y a certainement des termes dans P_2 et dans Q_2, car s'il n'y avait pas de termes dans P_2, par exemple, c'est que tous les coefficients du polynome P seraient divisibles par α : le polynome P ne serait pas primitif.

D'ailleurs, on a identiquement

$$PQ = P_1 Q_1 + P_1 Q_2 + P_2 Q_1 + P_2 Q_2;$$

tous les coefficients des termes de $P_1 Q_1$, $P_1 Q_2$. $P_2 Q_1$ sont évidemment divisibles par α; si tous les coefficients du produit réduit PQ sont divisibles par α, c'est qu'il en est de même des coefficients du produit réduit $P_2 Q_2$, puisque chacun de ces coefficients, augmenté peut-être d'un multiple entier de α, provenant des autres produits partiels, fournit un coefficient de PQ. Or, le coefficient du premier terme de P_2Q_2, ordonné suivant les puissances descendantes de x, est le produit des deux premiers coefficients de P_2 et de Q_2, ordonnés de même : aucun de ces coefficients n'est divisible par le nombre *premier* α; leur produit n'est pas divisible par α. Les coefficients du produit PQ ne peuvent être tous divisibles par un nombre premier α, ni, par conséquent, par aucun nombre entier, autre que 1. Le produit PQ est primitif.

La proposition générale se déduit immédiatement du cas particulier qu'on vient d'établir.

Soient P, Q deux polynomes à coefficients entiers; soient p et q les plus grands communs diviseurs respectifs des coefficients de P d'une part, des coefficients de Q d'autre part. En désignant par P′ et Q′ les deux polynomes à coefficients entiers que l'on obtient en divisant par p les coefficients de P, par q les coefficients de Q, on aura

$$P = pP', \qquad Q = qQ', \qquad PQ = pq\,P'Q';$$

mais les polynomes P′ et Q′ sont primitifs, puisque, quand on divise un groupe de nombres entiers par leur plus grand commun diviseur, on obtient comme quotients des nombres entiers qui ont 1 pour plus grand commun diviseur. Le polynome P′Q′, lorsqu'il est réduit, est primitif, comme on vient de le démontrer : les coefficients ont 1 pour plus grand commun diviseur, les produits par pq de ces coefficients, ou les coefficients du produit réduit PQ ont donc pq pour plus grand commun diviseur.

Voici maintenant quelques conséquences de ce lemme dans la théorie de la division.

Convenons de dire, pour un instant, qu'un polynome A, à coefficients entiers, est entièrement divisible par un polynome B à coefficients entiers, s'il existe un polynome C, à coefficients entiers, tel que l'on ait identiquement $A = BC$.

Désignons, en supposant qu'il en soit ainsi, par a, b, c les plus grands communs diviseurs respectifs des coefficients de A, des coefficients de B, des coefficients de C, en sorte qu'on puisse poser

$$A = aA', \qquad B = bB', \qquad C = cC',$$

en désignant par A′, B′, C′ des polynomes primitifs; l'identité $A = BC$ entraîne l'identité $aA' = bcB'C'$; le polynome (réduit) B′C′ est primitif comme A′; a est le plus grand commun diviseur des coefficients du polynome $a\mathrm{A}'$, bc est le plus grand commun diviseur des coefficients du polynome $bc\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ qui est identique à $a\mathrm{A}'$; on a donc

$$a = bc, \qquad \mathrm{A}' = \mathrm{B}'\mathrm{C}'.$$

Ainsi le nombre b divise le nombre a et le polynome B′ divise entièrement le polynome A′.

Lorsque B est primitif, b est égal à 1, B est identique à B′ : un polynome primitif ne peut donc diviser entièrement un polynome à coefficients entiers, sans diviser entièrement le polynome primitif que l'on en déduit en divisant tous ses coefficients par leur plus grand commun diviseur.

Lorsque A est primitif, a est égal à 1; les deux nombres naturels b, c, dont le produit est égal à 1, sont certainement tous les deux égaux à 1. Donc :

Un polynome primitif ne peut être entièrement divisible par un autre polynome à coefficients entiers que si ce dernier est primitif. Alors, le quotient, lui aussi, est primitif.

Supposons seulement, en désignant toujours par A et B des polynomes à coefficients entiers, que A soit divisible par B, sans l'être entièrement : le quotient Q sera un polynome à coefficients rationnels, comme il résulte évidemment de la façon dont se fait la division [1].

---

[1] Les remarques suivantes, qui ne supposent pas que A soit divisible par B, nous seront utiles :

Désignons par b_0 le premier coefficient de B; dans chaque division partielle, on a à diviser par b_0 soit le premier coefficient de A, soit le premier coefficient d'un reste partiel, en sorte qu'il s'introduit, en général, des coefficients fractionnaires dans le quotient : les dénominateurs de ces fractions sont des puissances de b_0. De pareils coefficients fractionnaires s'introduisent aussi dans le reste. Mais si, avant de faire la division, on multiplie A par un nombre convenable α, on peut éviter tous les coefficients fractionnaires, tant dans les restes partiels que dans le quotient et le reste final. Observons d'abord que le nombre de divisions partielles est au plus égal à la différence entre le degré de A et le degré de B, augmentée d'une unité : désignons par p cette différence augmentée de 1; multiplions A par b_0^p et divisons par B; le premier terme du quotient est entier et divisible par b_0^{p-1} : il en est de même de tous les termes du premier reste partiel; le second terme du quotient est entier et divisible par b_0^{p-2}, ainsi que tous les termes du second reste partiel, etc. Le quotient et le reste ont maintenant tous leurs coefficients entiers. On peut donc prendre $\alpha = b_0^p$; d'ailleurs il peut arriver qu'on atteigne le but en prenant pour α un nombre moindre. Dans tous les cas, les restes partiels, le reste final, le quotient de la division de αA par B sont les produits par α des restes partiels, du reste final, du quotient de la division de A par B, comme il résulte de l'opération même.

En réduisant tous les coefficients au même dénominateur q, on voit que Q peut se mettre sous la forme $\frac{Q_1}{q}$, où Q_1 désigne un polynome à coefficients entiers; l'identité $A = BQ$ entraîne $qA = BQ_1$: donc B divise entièrement qA.

Soit maintenant, comme plus haut, a le plus grand commun diviseur des coefficients de A et soit $A = aA'$; le polynome primitif B devant diviser entièrement le polynome qaA', doit diviser entièrement le polynome primitif A' et, *a fortiori*, le polynome aA' ou A. Donc :

Si un polynome primitif à coefficients entiers divise un polynome A à coefficients entiers, les coefficients du quotient doivent être des nombres entiers; si, dans le courant de la division, on est amené à écrire, au quotient, comme coefficient, une fraction irréductible, la division ne peut se faire exactement.

56. Extension de la division. — Revenons au cas général. Quand on a terminé, conformément aux explications données dans le n° 51, la division du polynome A, de degré a, par le polynome B, de degré b, que l'on est parvenu au quotient Q et au reste R, de degré $r < b$, on peut, si l'on veut, continuer l'opération, de la même façon, en introduisant au quotient un terme de degré négatif $r - b$, et en suivant toujours la même règle; le nouveau terme du quotient s'obtient en divisant le premier terme de R par le premier terme du diviseur, le nouveau reste partiel s'obtient en retranchant de R le produit du nouveau terme écrit au quotient par le diviseur, etc. On peut continuer et l'on s'arrête quand on veut : Si l'on désigne par Q' l'expression écrite alors au quotient, et par R' l'expression écrite au reste, on a, toujours identiquement, $A = BQ' + R'$, en ce sens que, si l'on fait la multiplication et l'addition indiquée au second membre, comme si l'on avait affaire à de véritables polynomes, on retombe sur A.

Cette identité montre, lorsque B se termine par une constante, non nulle, que R' ne peut être identiquement nul : si, en effet, R' était identiquement nul, le produit du dernier terme de B par le dernier terme de Q' serait de degré négatif, et devrait être identique au dernier terme de A. R' n'étant pas nul, on peut continuer l'opération qui, ainsi, ne se termine jamais.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer que l'opération ne peut se terminer que dans le cas où B est de la forme $B'x^n$, B' étant un polynome qui divise exactement A.

J'ai reproduit ci-dessous une division ainsi continuée.

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 3x - 1 & x^2 - 3x + 1 \\ \cline{2-2}
-x^3 + 3x^2 - x & x + 1 + 5x^{-1} + 13x^{-2} \\ \cline{1-1}
\qquad x^2 + 2x - 1 & \\
\qquad -x^2 + 3x - 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 5x - 2 & \\
\qquad\qquad -5x + 15 - 5x^{-1} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 13 - 5x^{-1} & \\
\qquad\qquad\qquad -13 + 39x^{-1} - 13x^{-2} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\qquad 34x^{-1} - 13x^{-2} &
\end{array}$$

au moment où elle est ainsi arrêtée, on est parvenu à l'identité

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = (x^2 - 3x + 1)(x + 1 + 5x^{-1} + 13x^{-2}) + 34x^{-1} - 13x^{-2};$$

je ne veux que faire pressentir ici l'utilité que peuvent présenter de pareils calculs, qui apparaîtra nettement plus tard. De l'exemple qu'on vient de traiter, on peut conclure que, pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $x^2 - 3x + 1$, on a

$$\frac{x^3 - 2x^2 + + 3x - 1}{x^2 - 3x + 1} = x + 1 + 5x^{-1} + 13x^{-2} + \frac{34x^{-1} - 13x^{-2}}{x^2 - 3x + 1};$$

si x est très grand en valeur absolue, on voit sans peine que la fraction qui figure dans le second membre est très petite en valeur absolue; en sorte que le premier membre aura à peu près la même valeur que l'expression

$$x + 1 + 5x^{-1} + 13x^{-2},$$

plus facile à calculer. Si l'on suppose que la valeur absolue de x soit supérieure à 1000, l'erreur sera moindre que

$$\frac{\dfrac{34}{10^3} + \dfrac{13}{10^6}}{10^6 - 3.10^3 - 1} < \frac{5}{10^8};$$

le premier membre de l'inégalité précédente est, en effet, plus grand que la fraction qu'on veut évaluer, puisque l'on a remplacé le numérateur par un nombre plus grand, le dénominateur par un nombre plus petit.

Lorsque l'on effectue une division sur les polynomes A, B ordonnés suivant les puissances décroissantes de x, d'après le procédé que l'on a d'abord expliqué au n° 51 et dont on vient de montrer comment il pouvait être poursuivi, on peut s'arrêter quand on veut, soit avant d'être parvenu au reste proprement dit, soit quand on a fini l'opération au sens du n° 51, soit après l'avoir poursuivie, lorsque la division ne peut se faire exactement : dans tous les cas on parvient, au moment où l'on s'arrête, à une identité de la forme $A = BQ' + R'$, où les expressions Q' et R' qui figurent respectivement à la place du quotient et du reste sont, soit de véritables polynomes, soit de ces expressions analogues à des polynomes qui contiennent des termes de degré négatif : Q' et R' sont aussi ordonnés suivant les puissances descendantes de x. Dans le cas où l'opération peut se poursuivre indéfiniment, on peut toujours s'arranger pour que le degré du premier terme de R' soit inférieur à tel nombre entier ρ, positif, nul ou négatif que l'on voudra, inférieur toutefois au degré a de A : imaginons qu'on s'arrête dès que cette circonstance se présente.

Soit toujours b le degré de B. Dans le reste partiel qui précédait R', le premier terme était, par hypothèse, au moins de degré ρ ; le dernier terme de Q' a été obtenu en divisant par le premier terme de B le premier terme de ce reste partiel : le dernier terme de Q' est donc au moins de degré $\rho - b$: en résumé, si l'on se donne le nombre entier $\rho < a$, on peut trouver un polynome ou une expression analogue R' dont le premier terme soit de degré inférieur à ρ et un polynome ou une expression analogue Q' dont le dernier terme soit au moins de degré $\rho - b$, tels que l'on ait identiquement $A = BQ' + R'$.

D'un autre côté, si l'on cherche à déterminer des expressions Q' et R' qui satisfassent à ces diverses conditions, le raisonnement du n° 51 montre que les termes de Q' s'obtiennent les uns après les autres d'une façon nécessaire. Cela est évident pour le premier terme de Q' dont le produit par le premier terme de B, étant de degré supérieur à $\rho - b + b = \rho$, ne peut se réduire avec aucun terme de R' et doit par conséquent reproduire le premier terme de A ; c'est à ce cas qu'on est toujours ramené par le raisonnement du n° 51, que l'introduction de termes à degré négatif n'infirme en rien. Q' est donc entièrement déterminé, ainsi que $R' = A - BQ'$.

Il est aisé de voir que la proposition subsiste quand A est divisible par B, pourvu que l'on ait $a > \rho \geqq b$.

Enfin, on voit encore que la division peut se faire de la même façon quand A et B, au lieu d'être des polynomes ([1]), sont des expressions contenant des termes de degré négatif. La proposition qu'on vient de démontrer subsiste, en regardant alors a, b comme les degrés, d'ailleurs positifs ou négatifs, des premiers termes des expressions A, B que l'on suppose toujours ordonnées suivant les puissances descendantes de x.

§ 3. — POLYNOMES ORDONNÉS SUIVANT LES PUISSANCES CROISSANTES DE LA VARIABLE.

57. Deux polynomes A et B étant donnés, au lieu de les ordonner par rapport aux puissances décroissantes de la variable, et de les diviser d'après la règle du n° 51, étendue, si l'on veut, comme on vient de l'expliquer, on peut les ordonner par rapport aux puissances croissantes de la variable et faire la division de manière à obtenir les quotients et les restes partiels ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x.

Pour simplifier un peu, je supposerai que le premier terme de B soit une constante.

Le premier terme qu'on écrit au quotient s'obtient en divisant le premier terme de A par le premier terme de B; on retranche ensuite de A le produit par B du terme écrit au quotient; on obtient ainsi le premier reste partiel, dont le premier terme est de degré supérieur au degré du premier terme de A; le premier terme de ce reste partiel, divisé par le premier terme de B, fournit le second terme qu'on écrit au quotient; on retranche ensuite du reste partiel le produit par B du second terme écrit au quotient; on obtient ainsi le second reste

---

([1]) En se bornant au cas où A, B sont des polynomes, on peut procéder un peu autrement, de façon à éviter, dans le courant de l'opération, les termes à exposants négatifs. On multiplie d'abord A par x^m, m étant un nombre naturel arbitraire, puis on fait la division par B du polynome Ax^m par la règle ordinaire, de manière à parvenir à l'identité

$$Ax^m = BQ_1 + R_1,$$

où R_1 commence par un terme de degré inférieur au degré de B; on divise ensuite chaque terme de Q_1 et de R_1 par x^m. L'analogie avec l'opération d'arithmétique qui consiste à réduire en fraction décimale une fraction ordinaire est évidente.

partiel, et l'on continue de la même façon, aussi longtemps qu'on le veut, pourvu toutefois qu'on ne rencontre pas de reste nul.

Les degrés des premiers termes des restes partiels vont en augmentant à chaque fois d'une unité au moins, ainsi que les degrés des termes que l'on écrit successivement au quotient : au moment où l'on arrête l'opération, on a, en désignant par Q le polynome écrit au quotient, par R le polynome écrit au reste, l'identité $A = BQ + R$; dans le cas ou l'opération ne se termine pas, on peut s'arranger pour que le degré du premier terme de R dépasse tel nombre entier ρ que l'on voudra; imaginons, en supposant toutefois ρ supérieur au degré α du premier terme de A, que l'on s'arrête dès que cette circonstance se présente; alors le degré du premier terme du reste partiel qui précédait R était inférieur ou égal à ρ, il en est donc de même du dernier terme de Q obtenu en divisant le premier terme de ce reste partiel par le premier terme de B, qui est une constante.

On peut donc alors, si l'on se donne le nombre entier $\rho > \alpha$, trouver deux polynomes Q, R tels que le premier terme de R soit de degré supérieur à ρ, que le dernier terme de Q soit de degré inférieur ou égal à ρ, tels enfin que l'on ait identiquement $A = BQ + R$. Si l'on se propose maintenant de déterminer les polynomes Q, R satisfaisant à ces diverses conditions, on reconnaît que le problème n'admet qu'une solution : il suffit de reprendre, comme tout à l'heure, le raisonnement du n° 51, mais en faisant porter ce raisonnement sur les termes du plus bas degré au lieu de le faire porter sur les termes du plus haut degré, on voit que les termes de Q se déterminent les uns après les autres, d'une façon nécessaire.

On a reproduit ci-dessous une division effectuée de la façon qu'on vient d'expliquer.

$$\begin{array}{l|l}
3 - 2x + x^2 - x^3 & 1 - x + 2x^2 \\
\cline{2-2}
-3 + 3x - 6x^2 & 3 + x - 4x^2 - 7x^3 \\
\cline{1-1}
\quad x - 5x^2 - x^3 & \\
\quad - x + x^2 - 2x^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad -4x^2 - 3x^3 & \\
\qquad 4x^2 - 4x^3 + 8x^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad -7x^3 + 8x^4 & \\
\qquad\quad +7x^3 - 7x^4 + 14x^5 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad x^4 + 14x^5 &
\end{array}$$

Au moment où l'on s'est arrêté, le polynome écrit au quotient est $3 + x - 4x^2 - 7x^3$ et le reste $4x + 14x^5$; on a l'identité

$$3 - 2x + x^2 - x^3 = (1 - x + 2x^2)(3 + x - 4x^2 - 7x^3) + x^4 + 14x^5.$$

On en conclut, par exemple, que pour toutes les valeurs de x, qui n'annulent pas le diviseur, on a

$$\frac{3 - 2x + x^2 - x^3}{1 - x + 2x^2} = 3 + x - 4x^2 - 7x^3 + \frac{x^4 + 14x^5}{1 - x + 2x^2};$$

pour les valeurs de x voisines de 0, la fraction qui figure dans le second membre est très petite en valeur absolue, en sorte qu'on commet une faible erreur si, au lieu de calculer le premier membre, on calcule la valeur du polynome $3 + x - 4x^2 - 7x^3$. Si, par exemple, on suppose la valeur absolue x' de x moindre que $\frac{1}{100}$, l'erreur sera moindre que

$$\frac{\dfrac{1}{10^8} + \dfrac{14}{10^{10}}}{1 - \dfrac{1}{10^2} - \dfrac{2}{10^4}} < \frac{2}{10^8}.$$

Si l'on divise 1 par $1 - x$ par ce procédé, on parvient à l'identité

$$1 = (1 + x + x^2 + \ldots + x^n)(1 - x) + x^{n+1},$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x};$$

de même

$$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que si, dans une pareille division, on veut obtenir les termes qui, dans le quotient, sont de degré inférieur ou égal à n, on peut, dans le dividende et dans le diviseur, négliger les termes de degré supérieur à n, qui n'interviennent pas dans l'opération ainsi limitée.

Les polynomes A et B étant ordonnés par rapport aux puissances croissantes de x, la division de A par B, effectuée par le procédé qu'on vient d'expliquer, ne se termine (on ne peut trouver un reste nul) que s'il existe un polynome Q tel que l'on ait $A = BQ$; réciproquement, s'il existe un tel polynome Q, on le trouvera nécessairement par le procédé précédent : le même raisonnement qu'au n° 51 montre que les termes de ce polynome doivent s'obtenir l'un après l'autre par le procédé qu'on vient d'indiquer, et cela d'une façon nécessaire : l'opération se terminera quand on sera amené à écrire au quotient un terme dont le degré sera égal à la différence entre les degrés de A et de B : il devra être égal au quotient du dernier terme de A par le dernier terme de B et le reste correspondant doit être nul. Si quelqu'une de ces conditions n'est pas vérifiée, l'opération peut se continuer indéfiniment.

§ 4. — POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES.

58. Dans tout le cours de ce Chapitre, on a regardé les coefficients du dividende et du diviseur comme des nombres, mais cette supposition n'est pas nécessaire pour effectuer, par exemple, les calculs décrits au n° 51.

Supposons maintenant que A, B soient des polynomes à plusieurs variables; on dira que le polynome A est divisible par le polynome B, s'il existe un polynome C tel que l'on ait identiquement $A = BC$. La méthode du n° 51 permet toujours de reconnaître s'il en est ainsi, et de trouver le polynome C.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où A, B sont des polynomes à deux variables x, y; rien n'empêche d'ordonner les polynomes A, B suivant les puissances décroissantes de x, et d'imaginer que C soit ordonné de la même façon; les polynomes A, B, C apparaîtront ainsi comme des polynomes en x dont les coefficients seraient des polynomes en y.

Supposons que l'on ait identiquement $A = BC$; le coefficient de la plus haute puissance de x dans A doit être identiquement égal au produit des coefficients des plus hautes puissances de x dans B et dans C; le coefficient de la plus haute puissance de x dans C s'obtiendra donc en divisant le coefficient de la plus haute puissance de x dans A, par le coefficient de la plus haute puissance de x dans B : on a à diviser l'un par l'autre deux polynomes en y, opération que l'on sait faire : la division doit se faire exactement; on obtient ainsi le premier terme de C : c'est le produit du coefficient qu'on vient de calculer par une puissance de x dont l'exposant est la différence des degrés des plus hautes puissances de x dans A et dans B. On retranche ensuite de A le produit de B par le premier terme de C, on obtient le reste partiel, sur lequel on raisonne comme sur A. Chaque terme de C se détermine ainsi d'une façon nécessaire; à chaque division partielle, la division du polynome en y qui constitue le coefficient de la plus haute puissance de x, par le polynome en y qui constitue le premier coefficient de B, doit se faire exactement. Enfin l'opération doit se terminer avant que l'on ne trouve un reste dont le degré en x soit inférieur au degré de B, en x. Autrement A n'est pas divisible par B. Deux polynomes à deux variables étant donnés, on sait reconnaître si le premier est divisible par le second. Du cas de deux variables, on passe successivement au cas de trois, quatre, ..., variables.

Dans ce qui suit, je ne suppose plus que le polynome A soit divisible par le polynome B. Pour simplifier l'écriture, je raisonnerai sur des polynomes à trois variables x, y, z; mais les raisonnements s'appliqueront sans difficulté quel que soit le nombre des variables.

Quels que soient les polynomes A, B, en x, y, z, on peut toujours les ordonner par rapport aux puissances décroissantes de x; les coefficients des diverses puissances de x (parmi lesquels on range le terme indépendant de x, le coefficient de x^0) sont des polynomes en y, z; rien n'empêche de faire sur A et B, regardés comme des polynomes en x, les calculs indiqués au n° 51; ces calculs conduiront à une relation de la forme $A = BQ + R$, où Q et R auront la forme de polynomes en x dont les coefficients seraient, en général, des fractions dont les termes sont des polynomes en y, z : les dénominateurs de ces fractions seront, en général, des puissances de ce polynome en y, z qui est le coefficient de la plus haute puissance de x dans B. Le plus haut degré de x dans R sera inférieur au degré, en x, du polynome B. La relation $A = BQ + R$ aura lieu quelles que soient la valeur numérique de x et les valeurs numériques de y, z, pourvu que ces dernières n'annulent pas le coefficient de la plus haute puissance de x dans B.

Les calculs se simplifient dans un cas auquel je vais maintenant me limiter, celui où le coefficient de la plus haute puissance de x, dans B, au lieu d'être un polynome en y, z, se réduit à une constante numérique. Dans ce cas, les calculs n'introduisent en dénominateur aucun polynome en y, z et, dans l'identité $A = BQ + R$, à laquelle on parvient, Q et R sont de véritables polynomes en x, y, z; les raisonnements du n° 51 s'appliquent sans difficulté pour prouver qu'ils sont les seuls polynomes dont le second soit, en x, de degré inférieur au degré de B qui satisfassent à cette identité : dans ce cas, la condition pour que A soit divisible par B est évidente : R doit être identiquement nul.

Si, en particulier, on suppose que B soit de la forme $x - a$, a étant un polynome en y, z, le polynome R ne devra plus contenir x, ce sera un polynome en y, z et le même raisonnement qu'au n° 53 montre que ce polynome s'obtient en remplaçant x par a dans A. Si le résultat est identiquement nul en y, z, ..., et seulement dans ce cas, A sera divisible par $x - a$. Plus particulièrement, la condition nécessaire et suffisante pour que le polynome A (en x, y, z) soit divisible par $x - y$ est que le polynome en y, z, ..., que l'on obtient en remplaçant x par y dans A, soit identiquement nul.

Supposons que le polynome A s'annule identiquement quand on remplace x soit par y, soit par z, ou encore quand on remplace y par z. Puisqu'il s'annule quand on remplace x par y, il est divisible par $x - y$, et l'on peut poser $A = (x - y)A_1$, en désignant par A_1 un polynome en x, y, z dont le produit par $x - y$ est identiquement égal à A; si, dans l'identité précédente, on remplace y par z, le premier membre est identiquement nul; le produit de $y - z$ par le polynome A'_1 (en x, z) que l'on obtient en remplaçant dans A_1 y par z est donc identiquement nul; il faut, pour cela, que A'_1 soit identiquement nul et, par suite, que A_1 soit divisible par $y - z$; on peut alors poser $A_1 = (y - z)A_2$, A_2 étant un polynome en x, y, z. Le raisonnement précédent prouve d'ailleurs que A_2 s'annule identiquement quand on remplace z par x; il en résulte que A_2 est divisible par $z - x$, et que l'on peut poser $A_2 = (z - x)A_3$; des identités

$$A = (x - y)A_1, \qquad A_1 = (y - z)A_2, \qquad A_2 = (z - x)A_3,$$

il résulte qu'on a identiquement

$$A = (x - y)(y - z)(z - x)A_3;$$

ainsi A est divisible par le produit $(x - y)(y - z)(z - x)$.

D'une façon générale : si un polynome à n variables devient identiquement nul quand on suppose que deux quelconques de ces variables soient égales, il est divisible par le produit de toutes les différences entre deux quelconques de ces variables.

EXERCICES.

45. Vérifier que, si dans le polynome x^3+x^2-2x-1 on remplace x par x^2-2, le polynome du sixième degré que l'on obtient ainsi est divisible par x^3+x^2-2x-1.

Démontrer que si l'on forme la suite des polynomes

$$x, \quad x^2-2, \quad (x^2-2)^2-2, \quad \ldots,$$

dont chacun s'obtient en remplaçant dans le précédent x par x^2-2, et que l'on divise ces polynomes par x^3+x^2-2x-1, les restes se reproduisent périodiquement de trois en trois.

46. Déterminer a : 1° de façon que les deux racines de l'équation $x^2-x+a=0$ vérifient la condition $x^4-2x^3+x^2+2x+1-a^2>0$; 2° de façon que la plus grande de ces deux racines vérifie seule cette inégalité.

47. Tout polynome qui prend des valeurs égales quand on y remplace x par les nombres inégaux a_1, a_3, ..., a_n est de la forme

$$Q(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)+R,$$

où R est une constante.

48. Calculer les valeurs que prend le polynome

$$16x^5-20x^3+5x-\frac{1}{2}$$

quand on y remplace x par une des racines de sa dérivée.

49. Effectuer la division du polynome $nx^n-(n+1)x^n+1$, où n désigne un nombre naturel, par $(x-1)^2$.

50. Soient A, B, C, P des polynomes ; si l'on divise P par A (au sens du n° 51), puis le quotient par B, puis le quotient par C, on trouvera le même quotient final qu'en divisant P par le produit ABC.

51. Montrer que si $P = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ est un polynome donné de degré n, on peut mettre, et cela d'une seule façon, un polynome quelconque $f(x)$ sous la forme $A_0 + A_1 P + A_2 P^2 + \ldots$, où $A_0, A_1, A_2, \ldots$ sont des polynomes en x de degré moindre que n. En supposant que le polynome $f(x)$ ait été mis sous cette forme, quel est le quotient et quel est le reste de la division de $f(x)$ par P ?

Pour obtenir les polynomes $A_0, A_1, A_2, \ldots$, on peut procéder comme il suit : partant de l'identité

$$x^n = -a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots - a_n + P, \tag{1}$$

on en conclut, en multipliant par x et en remplaçant, dans le second membre, x^n par le second membre de l'identité (1),

$$x^{n+1} = (a_1^2 - a_2) x^{n-1} + (a_1 a_2 - a_3) x^{n-2} + \ldots + Px;$$

multipliant encore par x et remplaçant toujours x^n, dans le second membre, par $-a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - \ldots, \ldots$, on voit qu'on obtient aisément les expressions de $x^n, x^{n+1}, x^{n+2}, \ldots$, puis de $f(x)$ sous la forme désirée. Les calculs se simplifient si l'on veut seulement avoir le reste de la division de $f(x)$ par P ; on remplace alors partout P par o ; les calculs sont indiqués ci-dessous en supposant $P = x^2 - x + 1$, $f(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 - 1$; le signe $\equiv$ veut dire que les deux membres que séparent ce signe sont identiques, à un multiple près de P.

$$x^2 \equiv x - 1, \quad x^3 \equiv -1, \quad x^4 \equiv -x, \quad x^5 \equiv -x + 1, \quad x^6 \equiv 1,$$
$$f(x) \equiv 1 - 2(-x+1) + 3(-x) + 1 + x - 1 - 1 \equiv -2.$$

52. Déterminer les coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots$ d'un polynome

$$f(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$$

qui soit exactement divisible par sa dérivée.

Le quotient ne peut être que du premier degré; on peut le mettre sous la forme $\frac{1}{n}(x+a)$; l'identité

$$n f(x) = (x+a) f'(x)$$

permet ensuite de trouver les coefficients $A_1, A_2, \ldots$: on trouve ainsi

$$f(x) = (x+a)^n.$$

53. On se donne la suite des nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Montrer qu'un poly-

nome donné $f(x)$ peut se mettre, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$A_0+A_1(x-a_0)+A_2(x-a_0)(x-a_1)+\ldots+A_n(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1}),$$

où A_0, A_1, ..., A_n désignent des constantes et n le degré de $f(x)$: A_0 est le reste de la division de $f(x)$ par $x-a_0$; si $f_1(x)$ est le quotient de cette division, A_1 est le reste de la division de $f_1(x)$ par $x-a_1$, etc.... Ceci ne suppose pas que les nombres a_1, a_2, a_3, ... soient distincts.

Si l'on se donne les nombres distincts a_0, a_1, a_2, ..., a_n, on peut calculer A_0, A_1, ..., A_n sachant que le polynome $f(x)$ est au plus du degré n et connaissant les valeurs qu'il prend pour $x=a_0$, $x=a_1$, ..., $x=a_n$. En supposant $p<n$, les coefficients A_0, A_1, ..., A_p ne dépendent que de a_0, a_1, ..., a_p et des valeurs correspondantes du polynome.

Trouver un polynome de degré au plus égal à 3 qui prenne la même valeur que $\sqrt{x}$ pour $x=0$, $x=\frac{1}{9}$, $x=\frac{1}{4}$, $x=1$.

54. Montrer que le polynome

$$yz^n+zx^n+xy^n-y^nx-z^nx-x^ny,$$

où n est un nombre naturel, est divisible par le produit $(y-z)(z-x)(x-y)$; trouver le quotient pour $n=2$, $n=3$.

55. Montrer que le polynome $x^3+y^3+z^3-3xyz$ est divisible par $x+y+z$. Trouver le quotient.

Le polynome proposé peut-il s'annuler pour des valeurs de x, y, z qui ne vérifient pas la condition $x+y+z=0$?

56. Si les deux polynomes $f(x, y)$, $g(x, y)$ deviennent identiques à un facteur constant près quand on y remplace y par $ax+b$, il existe une constante k et un polynome $h(x, y)$ tels que l'on ait identiquement

$$f(x,y)-kg(x,y)=(y-ax-b)\,h(x,y).$$

57. Diviser 1 par $(1-x)^2$ en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x et en s'arrêtant, au quotient, au terme en x^n.

58. Effectuer la division de $1-abx^2$ par $1-(a+b)x+abx^2$ en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x et en s'arrêtant, au quotient, au terme en x^n.

On trouve, pour le quotient,

$$1+(a+b)x+(a^2+b^2)x^2+\ldots+(a^n+b^n)x^n$$

et, pour le reste,

$$x^{n+1}[(1-bx)a^{n+1}+(1-ax)b^{n+1}].$$

59. Effectuer la division de $1 - x^2$ par $1 - 2x\cos\theta + x^2$ en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x et en s'arrêtant au quotient, au terme en x^n.

On trouve, pour le quotient,

$$1 + 2x\cos\theta + 2x^2\cos 2\theta + \ldots + 2x^n\cos n\theta$$

et, pour le reste,

$$2x^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2x^{n+2}\cos n\theta.$$

Montrer que l'on a

$$\tfrac{1}{2} + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

60. Effectuer la division de $\cos\alpha - x\cos(\alpha-\theta)$ par $1 - 2x\cos\theta + x^2$ en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de x et en s'arrêtant, au quotient, au terme en x^n.

On trouve, pour le quotient,

$$\cos\alpha + x\cos(\alpha+\theta) + x^2\cos(\alpha+2\theta) + \ldots + x^n\cos(\alpha+n\theta)$$

et, pour le reste,

$$x^{n+1}\cos[\alpha+(n+1)\theta] - x^{n+2}\cos(\alpha+n\theta).$$

Déduire de là des expressions simples de

$$\begin{aligned}
&\cos\alpha + \cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+2\theta) + \ldots + \cos(\alpha+n\theta),\\
&\cos\alpha - \cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+2\theta) - \ldots + (-1)^n\cos(\alpha+n\theta),\\
&\sin\alpha + \sin(\alpha+\theta) + \sin(\alpha+2\theta) + \ldots + \sin(\alpha+n\theta),\\
&\sin\alpha - \sin(\alpha+\theta) + \sin(\alpha+2\theta) - \ldots + (-1)^n\sin(\alpha+n\theta).
\end{aligned}$$

CHAPITRE IV.

DES FRACTIONS RATIONNELLES.

§ 1. — ÉTUDE D'UNE FRACTION RATIONNELLE EN x POUR LES VALEURS DE x VOISINES D'UNE VALEUR DONNÉE.

59. On appelle fraction rationnelle en x une fraction dont les deux termes sont deux polynomes en x. La valeur d'une telle fraction pour $x = x_0$ n'est définie que si x_0 n'annule pas le dénominateur.

Si x_0 n'annule pas le dénominateur, et si l'on donne à x des valeurs très voisines de x_0, le numérateur et le dénominateur prendront, comme on l'a vu au Chapitre II, des valeurs très voisines de celles qu'ils prennent pour $x = x_0$; or, en général, quand les deux termes d'une fraction varient très peu, la valeur de la fraction varie très peu; on prévoit qu'une fraction rationnelle doit être une fonction continue de x pour les valeurs qui n'annulent pas le dénominateur. Il convient d'ailleurs de préciser ceci, afin d'éviter sûrement les valeurs exceptionnelles : on y parviendra en faisant pour les fractions rationnelles la même étude qu'on a faite pour les polynomes; on y gagnera d'ailleurs le moyen d'avoir des expressions approchées de la fraction, de reconnaître si elle est croissante ou décroissante, etc.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de valeurs de x voisines de o; on ordonnera le numérateur et le dénominateur suivant les puissances ascendantes de x.

Si le dénominateur de la fraction n'est pas nul ponr $x = 0$, la valeur de la fraction, quand x est suffisamment voisin de o, reste moindre, en valeur absolue, qu'un nombre positif fixe qu'il est facile d'évaluer. C'est ce qu'on exprime brièvement en disant que la fraction reste *bornée* pour les valeurs de x qui sont voisines de o.

Considérons par exemple la fraction

$$\frac{2 + 3x - 5x^3 - 7x^4}{-3 + 4x - 6x^2 + x^3}.$$

On choisira un nombre positif α plus petit que la valeur absolue du premier terme -3 du dénominateur; puis on déterminera un nombre positif β tel que la condition $|x| < \beta$ entraîne l'inégalité

$$|4x - 6x^2 + x^3| < \alpha.$$

Le dénominateur ne pourra pas s'annuler et sera plus grand, en valeur absolue, que $3 - \alpha$; le numérateur sera plus petit, en valeur absolue, que $2 + 3\alpha + 5\alpha^3 + 7\alpha^4$, et la valeur de la fraction plus petite, en valeur absolue, que

$$\frac{2 + 3\alpha + 5\alpha^3 + 7\alpha^4}{3 - \alpha},$$

pourvu que x soit moindre que β, en valeur absolue.

Si, par exemple, on prend $\alpha = 2$, on pourra prendre $\beta = \frac{2}{11}$ et être sûr que la fraction, pourvu que x soit moindre en valeur absolue que $\frac{2}{11}$, sera certainement moindre en valeur absolue que

$$2 + \frac{6}{11} + \frac{40}{11^3} + \frac{112}{11^4} < 3.$$

Ceci posé, si l'on veut étudier, pour les valeurs voisines de o, une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$, dont les deux termes sont des polynomes ordonnés suivant les puissances ascendantes de x,

$$A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$B = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

dans le second desquels on suppose essentiellement que b_0 ne soit pas nul, on effectuera la division de A par B, au sens du n° 57; on trouvera un quotient

$$Q = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$

ordonné par rapport aux puissances croissantes de x et un reste R dans lequel on pourra mettre en facteur une certaine puissance de x, x^{n+1} par exemple, et que l'on pourra écrire sous la forme Sx^{n+1}, en désignant par S un polynome. Q sera d'un degré au plus égal à n et l'on aura

$$A = BQ + Sx^{n+1},$$

puis, pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas B,

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{S}{B}x^{n+1} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + \frac{S}{B}x^{n+1}.$$

Pour les valeurs de x suffisamment voisines de o, la fraction rationnelle $\frac{S}{B}$, dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x = 0$, reste moindre en valeur absolue qu'un nombre positif fixe. Pour ces valeurs le second membre a donc cette forme qui ne diffère que par le dernier terme d'un polynome de degré $n+1$, sur laquelle on a apppelé l'attention au n° 32 (¹); pour $x = 0$ le dernier membre est égal à c_0; pour les valeurs de x voisines de o, il est voisin de c_0; pour $x = 0$, au point de vue de la variation, il se comporte comme le premier des termes c_1x, c_2x^2, c_3x^3, ..., c_nx^n qui n'a pas un coefficient nul.

On a d'ailleurs

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, \qquad c_1 = \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{b_0}, \qquad \ldots.$$

La fraction rationnelle proposée est continue pour $x = 0$, c'est-à-dire qu'elle reste aussi voisine qu'on veut de la valeur $\frac{a_0}{b_0}$ qu'elle prend pour $x = 0$, pourvu que x reste suffisamment voisin de o.

Les polynomes c_0, $c_0 + c_1x$, $c_0 + c_1x + c_2x^2$, ... fournissent des expressions approchées de la fraction $\frac{A}{B}$, et l'on a le moyen de calculer une limite de l'erreur que l'on commet en substituant l'une d'elles à la fraction.

Si l'on considère, par exemple, la fraction

$$\frac{1 - x + x^3}{1 - 2x^2 + x^3} = 1 - x + 2x^2 + \frac{-2 + 5x - 2x^2}{1 - 2x^2 + x^3}x^3,$$

on voit d'abord que le dénominateur n'est pas nul si l'on suppose

---

(¹) Il résulte de la note du n° 32 que la fraction $\frac{A}{B}$ ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule façon, quand on se donne le nombre n.

$|x| < \sqrt{\frac{1}{3}}$; si l'on suppose x plus petit que $0,1$ en valeur absolue, la fraction

$$\frac{-2+5x-2x^2}{1-2x^2+x^3}$$

sera moindre que $\frac{2+0,5+0,002}{1-0,02-0,003} < 3$, en valeur absolue; l'erreur commise en remplaçant la fraction proposée par $1-x+2x^2$ sera moindre que $0,003$. Pour $x=0$, cette fraction est égale à 1, elle est décroissante, puisque $-x$ est décroissant.

Si l'on considère la portion correspondante à de petites abscisses de la courbe définie par l'équation $y = \frac{1-x+x^3}{1-2x^2+x^3}$, on reconnaît qu'elle passe par le point de l'axe des y dont l'ordonnée est 1, et que la tangente en ce point a pour équation $y = 1-x$ (comme on le voit sans peine par un raisonnement analogue à celui du n° 31); la courbe est au-dessus de sa tangente; dans le voisinage du point de contact, elle se confond presque avec la parabole définie par l'équation $y = 1-x+2x^2$.

Le cas où le numérateur de la fraction $\frac{A}{B}$ s'annule pour $x=0$, sans que le dénominateur s'annule, est compris dans ce qui précède; il convient de remarquer alors que la fraction est nulle pour $x=0$, et que c'est le monome obtenu en divisant le premier terme de A par le premier terme de B qui renseigne sur le signe de la fraction, pour les petites valeurs de x, et sur le sens de la variation.

Ainsi la fraction $\frac{2x^3-5x^4}{3-2x^2}$ se comporte, pour x très petit en valeur absolue, comme $\frac{2}{3}x^3$; elle est croissante pour $x=0$, du même signe que x, pour les valeurs de x voisines de 0.

Les polynomes $\frac{2}{3}x^2$, $\frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{9}x^4$, ... sont des expressions approchées de cette fraction.

60. Examinons maintenant le cas où le dénominateur B s'annule pour $x=0$, et supposons d'abord que le numérateur ne s'annule pas.

En posant comme plus haut $A = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$, a_0 devra être supposé différent de 0. Au contraire, B commencera par un terme contenant une certaine puissance de x que l'on pourra mettre en facteur; en d'autres termes, on pourra mettre B sous la forme $B = B' x^r$, où $B' = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$ est un polynome en x qui ne s'annule pas pour $x = 0$.

Je suppose qu'on fasse la division de A par B' en s'arrêtant dès que le reste est divisible par x^r; la partie écrite au quotient sera alors un polynome de degré $r - 1$ au plus, et l'on parviendra à une identité de la forme

$$A = B'Q + Sx^r,$$

où $Q = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{r-1} x^{r-1}$ est un polynome en x, dans lequel le premier terme $c_0 = \frac{a_0}{b_0}$ n'est pas nul, et où S est un polynome en x; on en conclura

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = \frac{A}{B' x^r} = c_0 \frac{1}{x^r} + c_1 \frac{1}{x^{r-1}} + c_2 \frac{1}{x^{r-2}} + \ldots + c_{r-1} \frac{1}{x} + \frac{S}{B'}$$

(on parviendrait d'ailleurs tout aussi bien à cette identité en faisant directement la division de A par B, quitte à introduire des termes de degré négatif, on s'arrête alors dès que le premier terme du reste est de degré nul ou positif).

L'égalité précédente suppose que x ne soit pas nul; il est d'ailleurs clair que la fraction proposée n'a pas de sens pour $x = 0$; on se propose seulement de reconnaître comment elle se comporte pour des valeurs de x voisines de 0; dans ces conditions, B' n'est pas nul, et, pourvu que x reste suffisamment près de 0, la fraction rationnelle $\frac{S}{B'}$, dont le dénominateur n'est pas nul pour $x = 0$, reste aussi voisine qu'on le veut de la valeur qu'elle prend pour $x = 0$.

Si l'on pose $\frac{1}{x} = z$, l'expression

$$c_0 \frac{1}{x^r} + c_1 \frac{1}{x^{r-1}} + \ldots + c_{r-1} \frac{1}{x}$$

prend la forme

$$P(z) = c_0 z^r + c_1 z^{r-1} + \ldots + c_{r-1} z.$$

C'est un polynome en z, de degré r, ordonné suivant les puissances descendantes de z et ne contenant pas de terme constant.

Quand x est petit en valeur absolue, z est grand en valeur absolue; il en est de même du polynome $P(z)$, lequel est alors du signe de son premier terme $c_0 z^r = \frac{c_0}{x^r}$; il en est de même de la fraction $\frac{A}{B}$.

Pourvu que z soit assez grand, en valeur absolue, ou, ce qui revient au même, pourvu que x soit suffisamment voisin de o, la valeur absolue de $P(z)$ est aussi grande qu'on le veut. Il en est de même de la fraction $\frac{A}{B}$; c'est ce qu'on exprime en disant que cette fraction devient infinie quand x tend vers o (on dit aussi, plus brièvement, qu'elle est infinie pour $x = 0$).

Quant au signe, tout dépend de la parité de r et du signe de c_0.

Supposons r impair; si c_0 est positif, la fraction est négative pour x négatif, positive pour x positif; on dit que, x croissant, elle passe, pour $x = 0$, de $-\infty$ à $+\infty$. Si c_0 est négatif, elle passe, au contraire, de $+\infty$ à $-\infty$.

Lorsque r est pair, la fraction, pour des valeurs de x voisines de o, est du signe de c_0, que x soit positif ou négatif. On dit qu'elle passe par $+\infty$ ou $-\infty$ suivant que c_0 est positif ou négatif.

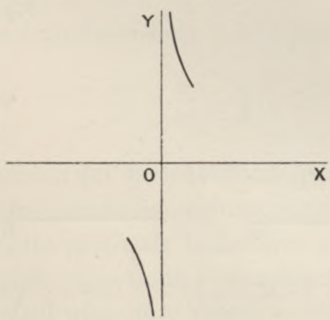
Considérons, par exemple, la fraction

$$\frac{1+x}{x^3(1-x)} = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x},$$

ou la courbe définie par l'équation $y = \frac{1+x}{x^3(1-x)}$.

Lorsque x est très petit en valeur absolue, y est très grand en valeur absolue; le point de coordonnées x, y est très près de l'axe des y, très

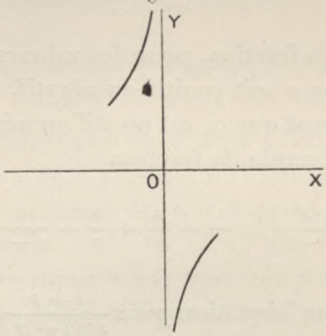
Fig. 19.



loin de l'axe des x; la courbe, quand x est voisin de o, offre une disposition analogue à celle qu'indique la figure. Elle présente deux branches infinies, dont on dit qu'elles sont *asymptotes* à l'axe des y, l'une vers le bas, à gauche de l'axe des y, l'autre vers le haut, à droite : en disant qu'une branche de courbe est infinie, on entend qu'elle comporte des points dont l'une des coordonnées, au moins, est aussi grande qu'on le veut, en valeur absolue; en disant qu'une branche infinie est asymptote à une droite, on entend que ses points se rapprochent autant que l'on veut de cette droite, pourvu que leurs coordonnées, ou l'une au moins de leurs coordonnées, soient suffisamment grandes en valeur absolue.

On aura une disposition analogue, dans le cas général, pour les

Fig. 20.



valeurs de x voisines de o, si r est impair et si c_0 est positif; si r est impair et c_0 négatif, la disposition sera celle de la figure ci-dessus.

Fig. 21.

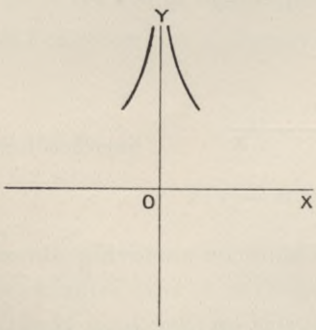
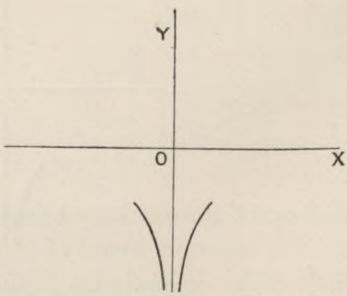


Fig. 22.



Si r est pair, on aura l'une ou l'autre des dispositions ci-dessus, suivant que c_0 est positif ou négatif.

61. Revenons au cas général et à l'égalité (1) du numéro précédent; la différence

$$\frac{A}{B} - c_0 \frac{1}{x^r} - c_1 \frac{1}{x^{r-1}} - \ldots - c_{r-1} \frac{1}{x}$$

est égale à la fraction rationnelle $\frac{S}{B'}$, dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x = 0$ et qui, ainsi, est une fonction continue de x pour $x = 0$. La différence précédente n'a pas, par elle-même, de sens pour $x = 0$, mais il suffit de lui attribuer, pour $x = 0$, la valeur que prend, pour $x = 0$, la fraction $\frac{S}{B'}$, pour qu'elle devienne une fonction continue de x, pour $x = 0$.

Ainsi, dans l'exemple traité un peu plus haut, la différence

$$\frac{1+x}{x^3(1-x)} - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x},$$

égale (sauf pour $x = 0$) à la fraction $\frac{2}{1-x}$, tend vers 2 quand x tend vers 0; si, pour $x = 0$, on lui attribue la valeur 2, elle devient, pour $x = 0$, une fonction continue de x.

En écrivant

$$\frac{1+x}{x^3(1-x)} = \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{2}{1-x},$$

on a décomposé le premier membre en deux parties, dont l'une, le polynome en $\frac{1}{x}$ sans terme constant

$$\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x},$$

est la partie de la fraction qui devient infinie quand x tend vers 0, dont l'autre partie, dans les mêmes conditions, reste bornée et tend vers 2.

Il est clair que cette partie de la fraction rationnelle qui devient ainsi infinie est la plus importante à considérer pour les valeurs de x voisines de 0; en en substituant la valeur à celle de la fraction, on ne commet qu'une faible erreur relative, et c'est pour cela que j'ai supposé la division de A par B' arrêtée au moment où l'on avait obtenu cette partie. On peut, d'ailleurs, si cela est utile, pousser la division plus loin, de manière à obtenir des expressions de plus en plus rapprochées de la fraction. Je n'insiste pas sur ce sujet, qui a été suffisamment éclairci.

Les explications qui précèdent permettent d'énoncer la proposition suivante :

Si, dans la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$, *le numérateur est différent de* o *pour* $x=0$, *tandis que le dénominateur s'annule pour* $x=0$, *en sorte qu'il soit divisible par* x^r (*et non par une puissance de* x *plus élevée*), *cette fraction devient infinie quand* x *tend vers* o. *Il existe un polynome en* z, $P(z)$, de degré r, *ne contenant pas de terme constant, tel que l'expression* $\left(\textit{le polynome en } \frac{1}{x}\right)$, $P\left(\frac{1}{x}\right)$ *soit la partie de la fraction* $\frac{A}{B}$ *qui devient infinie quand* x *tend vers* o : la différence $\frac{A}{B} - P\left(\frac{1}{x}\right)$ s'approche indéfiniment d'un nombre fixe [1], quand x tend vers o, nombre auquel on donne souvent le nom de *vraie valeur*, pour $x=0$, de la différence $\frac{A}{B} - P\left(\frac{1}{x}\right)$. En attribuant sa *vraie valeur*, pour $x=0$, à cette différence, elle devient une fonction continue de x, pour $x=0$.

Le polynome $P(z)$, défini plus haut, est le seul polynome en z sans terme constant, tel que la différence $\frac{A}{B} - P\left(\frac{1}{x}\right)$ reste bornée quand x tend vers o : si, en effet, un autre polynome $P'(z)$, sans terme constant, jouissait de la même propriété, la différence

$$\frac{A}{B} - P\left(\frac{1}{x}\right) - \left[\frac{A}{B} - P'\left(\frac{1}{x}\right)\right] = P'(z) - P(z)$$

resterait aussi bornée quand x tendrait vers o, ou quand z deviendrait infini ; or cela est impossible si les deux polynomes $P'(z)$ et $P(z)$ ne sont pas identiques.

---

(1) Il suffit, pour plusieurs raisonnements qui suivent, d'observer que cette différence *reste bornée* quand x tend vers o, c'est-à-dire qu'il y a un nombre positif auquel elle reste inférieure, en valeur absolue, pour toutes les valeurs de x, autres que o, qui sont suffisamment voisines de o. Il est à peine utile de dire que, lorsque deux fonctions de x restent bornées, dans certaines conditions, il en est de même de leur somme, de leur différence, de leur produit, et que les mots « reste bornée » s'opposent à l'expression « devient infinie ».

62. Considérons enfin le cas où le numérateur et le dénominateur de la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$ s'annulent pour $x = 0$; on pourra alors poser $A = A'x^q$, $B = B'x^r$, en désignant par q, r des nombres naturels, par A', B' des polynomes en x qui ne s'annulent pas pour $x = 0$. La fraction $\frac{A}{B}$ n'a pas de sens pour $x = 0$; pour les autres valeurs de x, elle est égale à

$$\frac{A'x^{q-r}}{B'}, \quad \frac{A'}{B'}, \quad \frac{A'}{B'x^{r-q}},$$

suivant que l'on a $q > r$, $q = r$, $q < r$. On est ramené aux cas précédemment étudiés : dans les deux premiers cas, la fraction $\frac{A}{B}$ a une *vraie valeur* pour $x = 0$ (nulle si q est plus grand que r), dont elle s'approche indéfiniment quand x tend vers o; en lui attribuant, pour $x = 0$, cette vraie valeur, elle devient une fonction continue de x, pour $x = 0$. Dans le troisième cas, la fraction augmente indéfiniment en valeur absolue, quand x tend vers o; il existe un polynome $P(z)$ de degré $r - q$, sans terme constant, tel que $P\left(\frac{1}{x}\right)$ soit la partie de la fraction qui devient infinie pour $x = 0$, en entendant les choses comme on a fait plus haut.

63. Supposons maintenant que l'on veuille étudier la fraction $\frac{A}{B}$ pour les valeurs voisines du nombre x_0; on remplacera dans les polynomes A, B, x par $x_0 + h$, et l'on ordonnera suivant les puissances ascendantes de h. On est ramené à étudier une fraction rationnelle en h pour les valeurs de $h = x - x_0$ qui sont voisines de o. Les résultats suivants deviennent évidents.

Si x_0 n'est pas racine de B, la fraction $\frac{A}{B}$, pour les valeurs de x voisines de x_0, restera voisine de la valeur qu'elle prend pour $x = x_0$; elle sera une fonction continue de x, pour $x = x_0$. Les méthodes précédentes permettent de reconnaître si elle est croissante ou décroissante pour $x = x_0$, si elle passe par un maximum ou un minimum, quel est son signe quand x est voisin de x_0; elles permettent aussi de trouver des polynomes ordonnés suivant les puissances ascendantes de h ou de $x - x_0$, qui la représentent d'une façon très approchée, pourvu que x soit suffisamment voisin de x_0.

Si x_0 est une racine de B, d'ordre de multiplicité r, et si x_0 n'est pas racine de A, la fraction devient infinie pour $x = x_0$, et il existe un polynome $P(z)$ de degré r, sans terme constant, tel que la différence

$$\frac{A}{B} - P\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$$

tende vers une valeur finie quand x tend vers x_0 ; il n'existe d'ailleurs qu'un seul polynome, sans terme constant, qui jouisse de cette propriété.

Si x_0 est en même temps racine d'ordre de multiplicité q pour le numérateur A, les choses se passent de la même façon lorsque q est plus petit que r, si ce n'est que le polynome $P(z)$ n'est plus que du degré $r - q$. Si q est égal à r, la fraction, quand x tend vers o, tend vers une valeur différente de o; si q est plus grand que r, elle tend vers o. On peut, dans les différents cas, reconnaître son signe, le sens de sa variation, on peut en former des expressions approchées, etc.

64. Supposons enfin qu'on veuille étudier la fraction lorsque x est très grand en valeur absolue. Appelons n et p les degrés respectifs des deux polynomes A et B et écrivons la fraction, en ordonnant ces polynomes suivant les puissances descendantes de x,

$$\frac{A}{B} = \frac{\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n}{\beta_0 x^p + \beta_1 x^{p-1} + \ldots + \beta_{p-1} x + \beta_p};$$

on changera x en $\frac{1}{z}$, et l'on aura

$$\frac{A}{B} = \frac{\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n}{z^n}}{\dfrac{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots + \beta_p z^p}{z^p}}$$

ou, suivant que l'on aura $n < p$, $n = p$, $n > p$,

$$\frac{z^{p-n}(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots)}{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots},$$

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots}{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots},$$

$$\frac{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots}{z^{n-p}(\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \ldots)};$$

on est ramené à des cas déjà étudiés, puisque, lorsque x est très grand en valeur absolue, z est très voisin de o.

On voit de suite que, si le degré du dénominateur de la fraction proposée (en x) est supérieur au degré du numérateur, la fraction tend vers o quand x augmente indéfiniment; sa vraie valeur est o pour x infini. Son signe est le signe de $\frac{\alpha_0}{\beta_0}z^{p-n}$ ou de $\frac{\alpha_0}{\beta_0 x^{n-p}}\cdot$ Si le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, la fraction s'approche de $\frac{\alpha_0}{\beta_0}$ quand x augmente indéfiniment en valeur absolue; la *vraie valeur* de la fraction est le rapport des coefficients des termes du plus haut degré; enfin, quand le degré du numérateur l'emporte sur le degré du dénominateur, la fraction augmente indéfiniment, en valeur absolue, quand x augmente indéfiniment, en valeur absolue; elle est du signe de $\frac{\alpha_0}{\beta_0}x^{n-p}$.

Dans ce dernier cas, il convient d'effectuer la division du numérateur par le dénominateur au sens du n° 51; on a alors $A = BQ + R$, R étant un polynome de degré moindre que B; on peut écrire encore

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B},$$

et, d'après ce qu'on vient de dire, $\frac{R}{B}$ tend vers o quand x augmente indéfiniment, en sorte que le polynome Q, pour x très grand, est une expression approchée de $\frac{A}{C}\cdot$ C'est le seul polynome dont la différence avec $\frac{A}{B}$ tende vers o quand x augmente indéfiniment en valeur absolue.

Considérons, par exemple, la fraction

$$y = \frac{x^4 + x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1} = x^2 + x - 1 + \frac{x}{x^2 + 1},$$

et la courbe définie par cette équation, y s'obtient en ajoutant à $x^2 + x - 1$ la quantité $-\frac{x}{x^2+1}$ qui est, en valeur absolue, très petite pour x très grand, qui est, d'ailleurs, du même signe que x. La courbe, quand x est très grand, en valeur absolue, est très voisine de la parabole dont l'équation est $y = x^2 + x - 1$, un peu au-dessus pour x positif, un peu au-dessous pour x négatif; on dit que la courbe est *asymptote* à la parabole. Je laisse au lecteur le soin de la construire.

On obtiendrait une droite pour asymptote si le degré du numérateur était égal, ou supérieur d'une unité, au degré du dénominateur.

65. **Décomposition en éléments simples.** — Considérons une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{f(x)}{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}},$$

où le numérateur $f(x)$ est un polynome quelconque, pouvant même se réduire à une constante, où $a, b, \ldots, l$ sont des nombres distincts et $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ des nombres naturels; en sorte que a est une racine du dénominateur d'ordre de multiplicité α, b une racine d'ordre de multiplicité β, etc. Pour abréger, je désignerai le dénominateur par $\varphi(x)$. Quoique cela ne soit pas indispensable, je supposerai, afin de simplifier un peu ce qui suit, qu'aucun des nombres $a, b, \ldots, l$ n'annule $f(x)$.

On a vu qu'à la racine a de $\varphi(x)$, par exemple, correspondait un polynome en z, sans terme constant, qui, lorsqu'on y regarde z comme égal à $\frac{1}{x-a}$, constitue la partie de la fraction qui devient infinie quand x s'approche de a, la différence entre la fraction et ce polynome restant bornée : il est le seul à jouir de cette propriété. Ce polynome est de degré α si l'on suppose que a n'est pas racine de $f(x)$: après qu'on y a remplacé z par $\frac{1}{x-a}$, il est de la forme

$$\frac{A_0}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha-1}}{x-a},$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$ sont des constantes que l'on a appris à calculer, et dont la première A_0 n'est pas nulle; je désignerai cette expression par $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$. C'est la partie de la fraction qui devient infinie quand x s'approche de a.

Aux autres racines $b, c, \ldots, l$ de x correspondent de même des expressions

$$\mathrm{P}_b\left(\frac{1}{x-b}\right),\quad \mathrm{P}_c\left(\frac{1}{x-c}\right),\quad \ldots,\quad \mathrm{P}_l\left(\frac{1}{x-l}\right),$$

obtenues en remplaçant z par $\frac{1}{x-b}, \frac{1}{x-c}, \ldots, \frac{1}{x-l}$ dans des polynomes $\mathrm{P}_b(z)$, $\mathrm{P}_c(z)$, ..., $\mathrm{P}_l(z)$, dont les degrés sont respectivement $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, et qui, tous, manquent de termes constants. Chacune de ces expressions est la partie de la fraction rationnelle donnée qui devient infinie quand x s'approche de la racine de $\varphi(x)$ qui lui correspond.

Si le numérateur $f(x)$ est de degré supérieur ou égal au degré $\alpha+\beta+\ldots+\lambda$ de $\varphi(x)$, il existe un polynome $\mathrm{E}(x)$, la partie entière de la fraction rationnelle, que l'on obtient en prenant le quotient de la division de $f(x)$ par $\varphi(x)$, dont la valeur, quand x augmente indéfiniment, s'approche autant qu'on le veut de la valeur de la fraction proposée : c'est le seul polynome qui jouisse de cette propriété. Quand le degré de $f(x)$ est inférieur au degré de $\varphi(x)$, ce polynome $\mathrm{E}(x)$ doit être regardé comme identiquement nul.

Mon objet est maintenant de montrer que la fraction proposée est égale, pour toutes les valeurs de x, à

$$\mathrm{P}_a\left(\frac{1}{x-a}\right)+\mathrm{P}_b\left(\frac{1}{x-b}\right)+\ldots+\mathrm{P}_l\left(\frac{1}{x-l}\right)+\mathrm{E}(x).$$

Cette forme de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, si l'on en admet pour un instant la légitimité, met bien en évidence la façon dont elle se comporte quand x s'approche d'une des valeurs a, b, ..., l qui annulent son dénominateur, ou lorsque x devient infini. Lorsque x, par exemple, s'approche de a, les parties autres que $\mathrm{P}_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ restent bornées. Lorsque x augmente indéfiniment, c'est la partie $\mathrm{E}(x)$ qui devient infinie; les autres parties deviennent nulles ou, plutôt, tendent vers 0. Il est bien clair, par ce qui précède, que la fraction proposée ne peut être mise sous une pareille forme que d'une seule façon.

On va établir la légitimité de ce mode de décomposition en expliquant en même temps le procédé le plus pratique pour le réaliser.

Je rappelle d'abord que, pour obtenir $\mathrm{P}_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, on procède comme il suit : en posant $x = a + h$ et

$$\varphi_1(x) = (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda,$$

on a

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)^\alpha \varphi_1(x)} = \frac{f(a+h)}{h^\alpha \varphi_1(a+h)}.$$

On effectue la division de $f(a+h)$ par $\varphi_1(a+h)$, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de h et en s'arrêtant dès que le reste est divisible par h^α; l'opération même conduit à une identité de la forme

$$\frac{f(a+h)}{\varphi_1(a+h)} = A_0 + A_1 h + \ldots + A_{\alpha-1} h^{\alpha-1} + \frac{h^\alpha R(h)}{\varphi_1(a+h)},$$

où $R(h)$ est un polynome en h; en divisant les deux membres par h^α, on obtient [1]

$$\frac{f(a+h)}{h^\alpha \varphi_1(a+h)} = \frac{A_0}{h^\alpha} + \frac{A_1}{h^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{h} + \frac{R(h)}{\varphi_1(a+h)}.$$

En remettant dans cette identité $x - a$ à la place de h et en désignant par $f_1(x)$ ce que devient $R(h)$, on obtient

$$(1) \qquad \begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \frac{A_0}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} \\ &= P_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}. \end{aligned}$$

On opère sur la fraction $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$, relativement à la racine b de $\varphi_1(x)$, comme on a opéré sur la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ relativement à la racine a de $\varphi(x)$, c'est-à-dire qu'on cherche la partie de $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ qui devient infinie quand x s'approche de b : c'est certainement $P_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$, puisque, la différence $\frac{f(x)}{\varphi(x)} - P_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$ restant bornée quand x s'ap-

---

[1] On peut tout aussi bien parvenir à cette dernière identité en effectuant la division de $f(a+h)$ par $h^\alpha \varphi_1(a+h)$, les deux polynomes étant ordonnés par rapport aux puissances croissantes de h : on introduit alors au quotient des puissances négatives de h, et l'on s'arrête dès que le reste commence par un terme en h dont l'exposant est égal ou supérieur à α.

proche de b, il en est de même, en vertu de l'identité (1), de la différence

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} - P_b\left(\frac{1}{x-b}\right) = \frac{f(x)}{\varphi(x)} - P_b\left(\frac{1}{x-b}\right) - P_a\left(\frac{1}{x-a}\right).$$

Or il n'y a qu'un seul polynome en $\frac{1}{x-b}$, sans terme constant, dont la différence avec $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ puisse rester bornée quand x s'approche de b.

Le calcul de la partie de $\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}$ qui devient infinie quand x s'approche de b, conduira donc à une identité analogue à l'identité (1)

$$(2) \qquad \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)} = P_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}.$$

On continue de la même façon; on détermine la partie de $\frac{f_2(x)}{\varphi_2(x)}$ qui devient infinie quand x s'approche de c; c'est $P_c\left(\frac{1}{x-c}\right)$, etc.

Finalement, en supposant qu'il y ait r nombres a, b, ..., l, on arrive à une fraction $\frac{f_r(x)}{(x-l)^\lambda}$, dont le dénominateur n'aura plus qu'une seule racine distincte : on la traitera de la même façon; mais les calculs sont ici particulièrement simples : on ordonne $f_r(x)$ suivant les puissances de $x-l$; les premiers termes, de degré inférieur à λ, donneront en divisant par $(x-l)^\lambda$ les termes de $P_l\left(\frac{1}{x-l}\right)$, les termes suivants, s'il y en a, divisés par $(x-l)^\lambda$, fourniront un polynome en x, que je désignerai par $E(x)$, et l'on obtiendra l'identité

$$(3) \qquad \frac{f_r(x)}{(x-l)^\lambda} = P_l\left(\frac{1}{x-l}\right) + E(x);$$

en ajoutant membre à membre les identités (1), (2), ..., (3), on arrive à l'identité

$$(4) \quad \frac{f(x)}{\varphi(x)} = P_a\left(\frac{1}{x-a}\right) + P_b\left(\frac{1}{x-b}\right) + \ldots + P_l\left(\frac{1}{x-l}\right) + E(x).$$

En vertu d'une remarque déjà faite, le polynome $E(x)$ ne peut différer de la partie entière de la fraction proposée, puisque la différence entre $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ et $E(x)$ tend vers o quand x devient infini.

Si le degré de $f(x)$ est égal ou supérieur à celui de $\varphi(x)$, il est commode de commencer par déterminer cette partie entière $E(x)$ en divisant, au sens du n° 51, $f(x)$ par $\varphi(x)$, ce qui conduit, en désignant par $F(x)$ le reste, à l'identité

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = E(x) + \frac{F(x)}{\varphi(x)};$$

on opère ensuite, pour trouver $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, $P_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$, $\ldots$ sur la fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$, plus simple que la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$: le résultat est le même, toujours pour la même raison; la différence

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

restant bornée quand x s'approche de a, il en est de même de la différence $\frac{F(x)}{\varphi(x)} - P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, $\ldots$.

Mettre la fraction rationnelle $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ sous la forme (4), c'est ce qu'on appelle la décomposer en *éléments simples :* ces éléments simples sont, d'une part, les termes du polynome $E(x)$ et, d'autre part, les termes des parties fractionnaires $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$, $P_b\left(\frac{1}{x-b}\right)$, $\ldots$; à chacun de ces termes, formé d'une fraction dont le numérateur est une constante et le dénominateur une puissance de $x-a$, $x-b$, $\ldots$, on donne le nom de *fraction simple*. La puissance la plus élevée à laquelle est élevé chacun de ces binomes est l'ordre de multiplicité de la racine correspondante dans $\varphi(x)$, à supposer, comme on l'a fait, que cette racine n'annule pas $f(x)$. Si l'on supprime cette restriction et si a, par exemple, était une racine de $f(x)$, d'ordre de multiplicité $\alpha' < \alpha$, la partie de la fraction qui devient infinie quand x s'approche de a commencerait par un terme de la forme $\frac{A}{(x-a)^{\alpha-\alpha'}}$, au lieu de commencer par un terme de la forme $\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}$; et, lors même qu'on n'aurait pas supprimé d'abord le facteur commun à $f(x)$ et à $\varphi(x)$, les calculs pourraient s'effectuer de la façon même que l'on a expliquée.

Soit, par exemple, à effectuer la décomposition de la fraction

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^3(x-1)^2(x-2)}.$$

On a ici $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$. Il n'y a pas de partie entière. Pour déterminer la partie $P_0\left(\frac{1}{x}\right)$, qui devient infinie pour $x = 0$, on doit diviser, en ordonnant suivant les puissances croissantes, $1 - x^2 + x^3$ par $-2 + 5x - 4x^2 + x^3$; on s'arrête dès que le reste est divisible par x^3 et l'on parvient ainsi à l'identité

$$\frac{1 - x^2 + x^3}{-2 + 5x - 4x^2 + x^3} = -\frac{1}{2} - \frac{5}{4}x - \frac{13}{8}x^2 + \frac{\frac{x^3}{8}(37 - 42x + 13x^2)}{-2 + 5x - 4x^2 + x^3},$$

ou, en divisant par x^3,

$$\frac{1 - x^2 + x^3}{x^3(x-1)^2(x-2)} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^3} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{x^2} - \frac{13}{8}\,\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{8}(37 - 42x + 13x^2)}{(x-1)^2(x-2)}.$$

On va maintenant, en partant de la fraction qui figure à la fin du second membre, déterminer la partie $P_1\left(\frac{1}{x-1}\right)$, qui devient infinie pour $x = 1$. Faisons abstraction, pour un instant, du facteur $\frac{1}{8}$; on pose, dans la fraction

$$\frac{37 - 42x + 13x^2}{-2 + x},$$

$x = 1 + h$, et l'on ordonne par rapport aux puissances croissantes de h, elle devient

$$\frac{8 - 16h + 13h^2}{-1 + h},$$

on effectue la division, en s'arrêtant dès que le reste est divisible par h^2; on parvient ainsi à l'identité

$$\frac{8 - 16h + 13h^2}{-1 + h} = -8 + 8h + \frac{5h^2}{-1 + h};$$

en divisant par h^2, remettant $x - 1$ à la place de h et multipliant par $\frac{1}{8}$, on trouve

$$\frac{\frac{1}{8}(37 - 42x + 13x^2)}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{5}{8}\,\frac{1}{x-2};$$

il n'y a pas lieu d'aller plus loin, puisque la dernière fraction est sous la forme voulue, et l'on a

$$\frac{x^3-x^2+1}{x^3(x-1)^2(x-2)}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^3}-\frac{5}{4}\frac{1}{x^2}-\frac{13}{8}\frac{1}{x}-\frac{1}{(2-1)^2}+\frac{1}{x-1}+\frac{5}{8}\frac{1}{x-2}.$$

66. Il convient de s'arrêter sur le cas où, a, b, c, ..., l étant toujours des nombres distincts, on a affaire à une fraction de la forme

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)},$$

les nombres que l'on désignait dans le numéro précédent par α, β, γ, ..., λ étant tous égaux à 1. Dans ce cas, le polynome en $\frac{1}{x-a}$ que l'on désignait par $P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)$ se réduit à la fraction simple $\frac{A_0}{x-a}$. Le polynome que l'on désignait par $\varphi_1(x)$ se réduit à

$$(x-b)(x-c)\ldots(x-l);$$

A_0 est le premier terme du quotient de la division des polynomes (en h) $f(a+h)$, $\varphi_1(a+h)$, ordonnés suivant les puissances croissantes de h, polynomes dont les premiers termes sont respectivement $f(a)$ et $\varphi_1(a)$, en sorte que l'on a

$$A_0=\frac{f(a)}{\varphi_1(a)}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)};$$

le nombre $\varphi_1(a)$ est la valeur, pour $x=a$, de la dérivée $\varphi'(x)$ du polynome $\varphi(x)$: on a, en effet, $\varphi(x)=(x-a)\varphi_1(x)$ et, par suite,

$$\varphi(a+h)=h\varphi_1(a+h)=h\varphi_1(a)+\ldots$$

en n'écrivant pas les termes h^2, h^3, ...; on voit bien que le coefficient de h dans le développement de $\varphi(a+h)$, ordonné suivant les puissances croissantes de h, c'est-à-dire (n° 35) la valeur, pour $x=a$, de la dérivée de $\varphi(x)$, est $\varphi_1(a)$. On peut donc écrire aussi :

$$A_0=\frac{f(a)}{\varphi'(a)}.$$

Comme le même raisonnement s'applique aux autres racines b,

$c, \ldots, k, l$ de $\varphi(x)$, on peut écrire, en désignant par $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de la fraction $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$,

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = {} & \frac{f(a)}{\varphi'(a)}\,\frac{1}{x-a} + \frac{f(b)}{\varphi'(b)}\,\frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{f(l)}{\varphi'(l)}\,\frac{1}{x-l} + \mathrm{E}(x) \\ = {} & \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}\,\frac{1}{x-a} \\ & + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)}\,\frac{1}{x-b} + \ldots \\ & + \frac{f(l)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)}\,\frac{1}{x-l} + \mathrm{E}(x). \end{aligned}$$

67. En multipliant par $\varphi(x)$ les deux membres de cette identité, elle devient

$$(1)\quad \begin{aligned} f(x) = {} & \frac{f(a)}{\varphi'(a)}\,\frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{f(b)}{\varphi'(b)}\,\frac{\varphi(x)}{x-b} + \ldots + \frac{\varphi(l)}{\varphi'(l)}\,\frac{\varphi(x)}{x-l} + \mathrm{E}(x)\varphi(x) \\ = {} & f(a)\frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)} \\ & + f(b)\frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} + \ldots \\ & + f(l)\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)} \\ & + (x-a)(x-b)\ldots(x-l)\,\mathrm{E}(x); \end{aligned}$$

cette formule, qui joue un rôle considérable dans diverses questions d'ordre pratique ou théorique, est connue sous le nom de *formule d'interpolation de Lagrange*. Il ne faut pas oublier que le polynome $\mathrm{E}(x)$ doit être regardé comme identiquement nul quand le degré de $\varphi(x)$ dépasse celui de $f(x)$.

Elle fournit immédiatement la solution du problème suivant :

Étant donnés n nombres distincts $a, b, \ldots, l$, déterminer tous les polynomes en x qui prennent des valeurs prescrites $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{L}$ pour $x = a, x = b, \ldots, x = l$.

Si l'on pose, en effet, $\varphi(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, et si l'on désigne par $f(x)$ un des polynomes cherchés, on devra avoir

$$f(a) = \mathrm{A}, \qquad f(b) = \mathrm{B}, \qquad \ldots, \qquad f(l) = \mathrm{L},$$

et, par suite,

$$(2)\quad f(x) = \frac{A}{\varphi'(a)}\frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{B}{\varphi'(b)}\frac{\varphi(x)}{x-b} + \ldots + \frac{L}{\varphi'(l)}\frac{\varphi(x)}{x-l} + E(x)\varphi(x)$$
$$= A\frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}$$
$$+ B\frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} + \ldots$$
$$+ L\frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-k)}{(l-a)(l-c)\ldots(l-k)} + E(x)\varphi(x).$$

Le raisonnement même montre que le polynome cherché $f(x)$ doit nécessairement avoir la forme qu'exprime le second ou le troisième membre de cette égalité, et la forme même du troisième membre montre effectivement qu'il prend les valeurs A, B, ..., L quand on y fait $x = a, b, \ldots, l$. Pour $x = a$, par exemple, le polynome qui multiplie A se réduit à 1, les polynomes qui multiplient B, ..., L s'annulent, ainsi que $\varphi(x)$, et cela quel que soit le polynome $E(x)$. Ce dernier peut donc être choisi arbitrairement.

Le produit $E(x)\varphi(x)$, quand $E(x)$ n'est pas identiquement nul, est de degré au moins égal à n ; son terme du plus haut degré ne peut être détruit par les termes du second membre de l'identité (2) qui précèdent $E(x)\varphi(x)$, termes qui sont au plus du degré $n-1$.

Si donc on impose à $f(x)$ la condition d'être de degré inférieur à n, $E(x)$ doit être identiquement nul, en sorte qu'il y a un seul polynome $g(x)$, de degré inférieur à n, qui prenne des valeurs prescrites A, B, ..., L pour $x = a, b, \ldots, l$, à savoir le polynome

$$(3)\qquad g(x) = A\frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}{(a-b)(a-c)\ldots(a-l)}$$
$$+ B\frac{(x-a)(x-c)\ldots(x-l)}{(b-a)(b-c)\ldots(b-l)} + \ldots$$
$$+ L\frac{(x-a)(x-b)\ldots(x-k)}{(l-a)(l-b)\ldots(l-k)};$$

un polynome quelconque qui prend ces valeurs prescrites est de la forme $g(x) + E(x)\varphi(x)$, le polynome $E(x)$ étant arbitraire.

Au reste, on reconnaît directement que si les deux polynomes $g(x)$, $f(x)$ prennent l'un et l'autre les valeurs prescrites A, B, ..., L pour $x = a, b, \ldots, l$, leur différence $f(x) - g(x)$ doit être divisible par $\varphi(x)$ (n° 38); si les polynomes $f(x)$ et $g(x)$ doivent être de degré inférieur à n, cette différence doit être identiquement nulle : on voit ainsi que le problème consistant à trouver un polynome de degré inférieur à n qui prenne les n valeurs prescrites A, B, ..., L pour les n valeurs distinctes $a, b, \ldots, l$ de x ne peut admettre qu'une solution, solution qui est évidemment fournie par la formule (3), et que tous les polynomes, de degré quelconque, qui prennent ces valeurs prescrites, se déduisent de l'un d'eux comme on l'a expliqué.

Le problème de l'*interpolation* consiste, en général, à trouver une fonction qui prenne des valeurs prescrites pour des valeurs données de la variable. C'est un problème capital pour les sciences d'observation, où la loi d'un phénomène ne peut jamais être obtenue que par un nombre fini d'expériences : une série d'expériences, par lesquelles on cherche à reconnaître comment une variable y dépend d'une variable x, fournit un tableau de nombres où figurent les valeurs y_1, $y_2, \ldots, y_n$ de y qui correspondent aux valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de x. Si l'on a déterminé une fonction $g(x)$, par exemple, comme tout à l'heure, un polynome, qui pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ prend des valeurs $y_1, y_2, \ldots, y_n$, on admet que cette fonction $g(x)$ fournira les valeurs de y pour les valeurs de x qui ne s'écartent pas trop des nombres x_1, $x_2, \ldots. x_n$, soit que ces valeurs soient comprises entre le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (interpolation proprement dite), soit qu'elles dépassent un peu, en dessus ou en dessous, le plus petit ou le plus grand de ces nombres (extrapolation).

On a vu, par la théorie précédente, comment, lors même qu'on se borne à des polynomes, le problème posé est indéterminé : il en est de même, d'ailleurs, du problème qui consiste à trouver une loi : deux lois d'un même phénomène, exprimées par des formules différentes, sont également vraies, lorsque les différences entre les nombres que fournissent ces formules sont de l'ordre de grandeur des erreurs d'observation. Parmi ces lois, on choisira celle qui est susceptible de l'expression la plus *simple*. Ce dernier mot aurait d'ailleurs besoin d'être précisé. S'il s'agit, par exemple, de deux polynomes, il est naturel de choisir celui des deux qui est de moindre degré.

Le lecteur, enfin, ne peut manquer de se demander s'il est vrai que deux fonctions qui prennent les valeurs prescrites pour $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ aient toujours des valeurs voisines quand x n'est pas égal à l'un de ces nombres, et sous quelles conditions cela est vrai. Je me borne à soulever ces questions qui ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux.

68. La formule (1) du numéro précédent, qui suppose seulement que les nombres a, b, ..., l soient distincts, fournit une suite d'identités en égalant dans les deux membres les coefficients d'une même puissance de x ; je me borne à celle qui provient de l'identification des termes en x^{n-1}, lorsque le polynome $f(x)$ est de degré inférieur à n, et que, par conséquent, le polynome $\mathrm{E}(x)$ est identiquement nul ; les coefficients de x^{n-1} dans les polynomes $\frac{\varphi(x)}{x-a}$, $\frac{\varphi(x)}{x-b}$, ..., $\frac{\varphi(x)}{x-l}$ étant évidemment égaux à 1, on voit que, dans le second membre, le coefficient de x^{n-1} est la somme

$$\frac{f(a)}{\varphi'(a)}+\frac{f(b)}{\varphi'(b)}+\ldots+\frac{f(l)}{\varphi'(l)}:$$

cette somme, lorsque le polynome $f(x)$ est de degré inférieur à n, est donc égale au coefficient de x^{n-1} dans $f(x)$; elle est nulle en particulier quand $f(x)$ est de degré inférieur à $n-1$; en prenant $f(x)=x^r$, où r est l'un des nombres 0, 1, 2, ..., $n-1$, on a

$$\frac{a^r}{\varphi'(a)}+\frac{b^r}{\varphi'(b)}+\ldots+\frac{l^r}{\varphi'(l)}=0$$

pour $r=0, 1, 2, \ldots, n-2$, et, pour $r=n-1$,

$$\frac{a^{n-1}}{\varphi'(a)}+\frac{b^{n-1}}{\varphi'(b)}+\ldots+\frac{l^{n-1}}{\varphi'(l)}=1,$$

et cela, quels que soient les n nombres distincts a, b, ..., l.

§ 3. — FONCTION HOMOGRAPHIQUE.

69. Je terminerai ce Chapitre par l'étude de la plus simple des fonctions rationnelles, à savoir la fraction

$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'},$$

où a, b, a', b' sont des constantes et dont les termes sont du premier degré en x. Elle joue un rôle considérable tant en Algèbre qu'en Géométrie.

En faisant la division du numérateur par le dénominateur (n^{os} 51, 64) et en posant, pour abréger,

$$\beta = \frac{a'b - ab'}{a'^2}, \qquad \alpha = -\frac{b'}{a'},$$

on la met sous la forme

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{a'b - ab'}{a'(a'x + b')} = \frac{a}{a'} + \frac{\beta}{x - \alpha}.$$

C'est l'application, à ce cas simple, de la méthode de décomposition en éléments simples exposée plus haut. Sur cette forme, la façon dont y varie avec x apparaît de suite.

Le binome $x - \alpha$ croît depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. Il s'annule pour $x = \alpha$; pour cette seule valeur de x, y n'est pas une fonction continue de x. Quand x croît de $-\infty$ à une valeur $\alpha - \varepsilon$, un peu plus petite que α, $\frac{1}{x - \alpha}$ décroît de 0 (¹) jusqu'au nombre $-\frac{1}{\varepsilon}$ très grand en valeur absolue, quand x traverse la valeur α, $\frac{1}{x - \alpha}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$; quand x croît de $\alpha + \varepsilon$ à $+\infty$, $\frac{1}{x - \alpha}$ décroît encore de $\frac{1}{\varepsilon}$ jusqu'à 0. La fraction $\frac{\beta}{x - \alpha}$ varie dans le même sens que $\frac{1}{x - \alpha}$, ou dans le sens contraire, suivant que β est positif ou négatif : la partie constante $\frac{a}{a'}$ n'influe pas sur le sens de la variation. Par conséquent :

Lorsque x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ croît toujours, ou décroît toujours, suivant que $ab' - a'b$ est positif ou négatif : dans le premier cas, elle croît de $\frac{a}{a'}$ à $+\infty$, puis de $-\infty$ à $\frac{a}{a'}$; elle passe de $+\infty$ à $-\infty$ quand x traverse la valeur $-\frac{b'}{a'}$; dans le second cas, elle décroît de $\frac{a}{a'}$ à $-\infty$, puis de $+\infty$ à $\frac{a}{a'}$; elle passe de $-\infty$

(¹) C'est une façon de parler pour dire que, lorsque x est très grand en valeur absolue, $\frac{1}{x - \alpha}$ est très petit en valeur absolue.

à $+\infty$ quand x traverse la valeur $-\frac{b'}{a'}$. Les variations de cette fonction sont figurées ci-dessous ; la courbe est asymptote aux deux parallèles aux axes dont les équations sont $y=\frac{a}{a'}$, $x=-\frac{b'}{a'}$. A deux valeurs différentes de x correspondent toujours deux valeurs différentes de $\frac{ax+b}{a'x+b'}$.

Fig. 23.

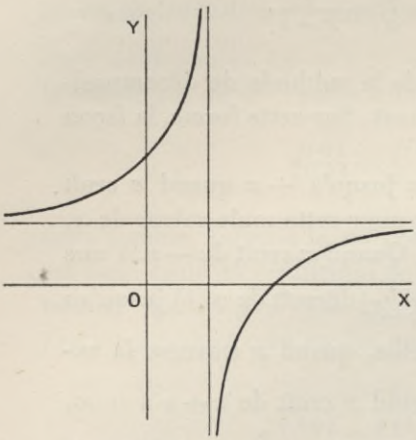
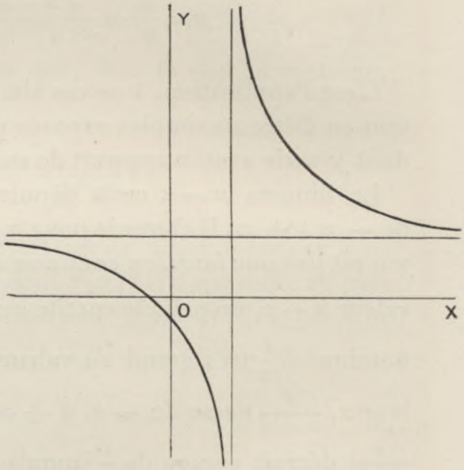


Fig. 24.



Tout ceci suppose que $\beta = a'b - ab'$ n'est pas nul ; dans le cas où β serait nul, $\frac{ax+b}{a'x+b'}$ serait toujours égal à $\frac{a}{a'}$, et ainsi ne dépendrait pas de x : toutefois, pour $x=-\frac{b'}{a'}$, la fraction proposée n'a pas de sens, et $\frac{a}{a'}$ n'est la valeur de cette fraction que par convention (¹).

Lorsque les variables x, y sont liées par la relation

$$y=\frac{ax+b}{a'x+b'},$$

et que β n'est pas nul, on dit que y est une fonction homographique

(¹) Quand β devient de plus en plus petit, en valeur absolue, la courbe se rapproche de plus en plus de ses asymptotes ; jusqu'à se confondre avec elles pour $\beta = 0$.

de x, où encore que la valeur de y est la valeur de x à laquelle elle correspond, transformée par l'homographie que déterminent les nombres a, b, a', b'.

Une des propriétés les plus importantes des fonctions homographiques apparaît sous la forme, précédemment obtenue, de l'équation qui lie x et y,

$$y = \frac{a}{a'} + \frac{\beta}{x - \alpha}.$$

En désignant par x_1, x_2, x_3, x_4 quatre valeurs distinctes de x, par y_1, y_2, y_3, y_4 les valeurs correspondantes de y, qui sont aussi différentes entre elles, on a évidemment

$$y_1 - y_3 = \frac{-\beta(x_1 - x_3)}{(x_1 - \alpha)(x_3 - \alpha)}, \qquad y_1 - y_4 = \frac{-\beta(x_1 - x_4)}{(x_1 - \alpha)(x_4 - \alpha)},$$
$$y_2 - y_3 = \frac{-\beta(x_2 - x_3)}{(x_2 - \alpha)(x_3 - \alpha)}, \qquad y_2 - y_4 = \frac{-\beta(x_2 - x_4)}{(x_2 - \alpha)(x_4 - \alpha)},$$
$$\frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_4} : \frac{y_2 - y_3}{y_2 - y_4} = \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4};$$

on désigne sous le nom de rapport anharmonique des quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4 rangés dans l'ordre qu'on vient d'écrire, la quantité

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4} = \frac{(x_1 - x_3)(x_2 - x_4)}{(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)},$$

et l'on exprime la propriété précédente en disant que, quand y est une fonction homographique de x, le rapport anharmonique de quatre valeurs de x est égal au rapport anharmonique des valeurs correspondantes de y. La proposition subsiste, comme il est aisé de le voir, dans le cas où a' est nul, qui échappe à la démonstration précédente.

L'intérêt de cette propriété consiste en ce qu'elle ne dépend que de la forme de la relation entre x et y, nullement des valeurs particulières des coefficients a, b, a', b'. Elle caractérise d'ailleurs la correspondance homographique : en d'autres termes, si à chaque valeur de x correspond une valeur de y, de façon que le rapport anharmonique de quatre valeurs quelconques de x soit toujours égal au rapport anharmonique des valeurs correspondantes de y, y est une fonction homographique de x.

Cela résulte de ce que, si l'on considère trois valeurs fixes de x, à savoir x_1, x_2, x_3 et les valeurs correspondantes y_1, y_2, y_3 de y, on doit avoir, entre une valeur quelconque de x et la valeur correspondante de y, la relation

$$\frac{(y-y_2)(y_1-y_3)}{(y-y_3)(y_1-y_2)} = \frac{(x-x_2)(x_1-x_2)}{(x-x_3)(x_1-x_2)},$$

qui, résolue par rapport à y, permet d'exprimer y en fonction de x sous la forme

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}.$$

La démonstration même que l'on vient de faire prouve que, si l'on se donne trois couples de nombres correspondants (x_1, y_1), $(x_2 y_2)$, (x_3, y_3), tels que les nombres x_1, x_2, x_3 soient distincts, ainsi que les nombres y_1, y_2, y_3, il existe une fonction homographique de x, et une seule, celle-là même qu'on vient de déterminer, qui prend les valeurs y_1, y_2, y_3 pour $x = x_1$, x_2, x_3.

Au lieu de dire que y est une fonction homographique de x quand y s'exprime au moyen de x par la formule

$$y = \frac{ax+b}{a'x+b'},$$

où a, b, a', b' sont des constantes, on dit souvent que les deux variables x, y se correspondent homographiquement lorsqu'elles sont liées par une équation de la forme

$$Axy + Bx + Cy + D = 0,$$

où A, B, C, D sont des constantes ([1]) dont quelques-unes peuvent d'ailleurs être nulles : cette équation, qui est du premier degré, soit

([1]) Il est bien entendu qu'on a affaire à la même fonction homographique quand on remplace les coefficients a, b, a', b' par des coefficients proportionnels, qu'on a affaire à la même correspondance homographique quand on remplace les coefficients A, B, C, D par des coefficients proportionnels. Je laisse au lecteur le soin de démontrer que les deux fractions $\frac{ax+b}{a'x+b'}$, $\frac{\alpha x+\beta}{\alpha' x+\beta'}$ ne peuvent être égales pour toutes les valeurs de x sans que les coefficients α, β, α', β' soient proportionnels aux coefficients a, b, a', b'.

par rapport à y, soit par rapport à x, détermine l'une des variables, lorsqu'on se donne l'autre. On en tire

$$y = \frac{-Bx - D}{Ax + C}, \qquad x = \frac{-Cy - D}{Ay + B}.$$

Chacune des deux variables est bien une fonction homographique de l'autre; mais, sauf le cas où l'on aurait $B = C$, chacune d'elles n'est pas la même fonction de l'autre. Si l'on a $B = C$, la relation est dite *involutive*.

Dans le cas où l'on aurait $BC - AD = 0$, qui correspond au cas où l'on aurait, avec les notations antérieures, $ab' - a'b = 0$, la correspondance homographique est dite *impropre*. Dans ce cas, l'équation d'homographie qui, lorsque A n'est pas nul, peut toujours s'écrire

$$\frac{1}{A}[(Ax + C)(Ay + B) + AD - BC] = 0,$$

se réduit à $(Ax + C)(Ay + B) = 0$. Elle est vérifiée en prenant $x = -\frac{C}{A}$ et y quelconque, ou en prenant $y = -\frac{B}{A}$ et x quelconque, elle ne peut être vérifiée autrement : A une valeur quelconque de x, autre que $-\frac{C}{A}$, correspond la valeur unique de y, $y = -\frac{B}{A}$; à la valeur $-\frac{C}{A}$ de x correspond une valeur quelconque de y. A une valeur quelconque de y, autre que $-\frac{B}{A}$, correspond la valeur unique de x, $x = -\frac{C}{A}$; à la valeur $-\frac{B}{A}$ de y correspond une valeur quelconque de x. Ces résultats sont d'ailleurs conformes à ceux que l'on a obtenus en étudiant la fonction homographique $\frac{ax + b}{a'x + b'}$ lorsque $ab' - a'b$ est nul.

Dans le cas où l'on a à la fois $AD - BC = 0$, $A = 0$; il faut que B, ou C, soit nul; l'une des variables disparaît de l'équation d'homographie, et peut être supposée quelconque, l'autre variable est déterminée.

Si l'on écarte les homographies impropres, on voit que la valeur de l'une des variables est déterminée par l'équation d'homographie quand on se donne l'autre et qu'à deux valeurs distinctes d'une variable correspondent deux valeurs distinctes de l'autre : afin d'éviter les exceptions résultant de la discontinuité, il est commode de dire, lorsque A n'est pas nul, que la valeur ∞ de y correspond à la valeur $-\frac{C}{A}$ de x, que la valeur $-\frac{B}{A}$ de y correspond à la valeur ∞ de x. Les valeurs de l'une ou de l'autre des variables qui correspondent à la valeur infinie de l'autre sont égales dans le cas d'une relation involutive et seulement dans ce cas. Lorsque A est nul, les valeurs correspondantes de x, y deviennent infinies en même temps. De même, lorsque D est nul, les valeurs correspondantes de x, y deviennent nulles en même temps.

Si la variable z est une fonction homographique de la variable y, si cette variable y est une fonction homographique de x, à chaque valeur de x correspond une valeur de y, à celle-là une valeur de z, qui ainsi correspond à la valeur de x. La variable z est une fonction homographique de x, car des égalités

$$z = \frac{\alpha y + \beta}{\alpha' y + \beta'}, \qquad y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

résulte l'égalité

$$z = \frac{\alpha \dfrac{ax + b}{a'x + b'} + \beta}{\alpha' \dfrac{ax + b}{a'x + b'} + \beta'} = \frac{(\alpha a + \beta a')x + \alpha b + \beta b'}{(\alpha' a + \beta' a')x + \alpha' b + \beta' b'};$$

on n'a pas à craindre que la dernière homographie soit impropre lorsque les deux homographies proposées sont propres, puisque, alors, à deux valeurs distinctes de x correspondent deux valeurs distinctes de y, auxquelles correspondent deux valeurs distinctes de z.

On peut dire encore que deux variables sont liées homographiquement entre elles quand chacune d'elles est liée homographiquement à une troisième : ainsi, dans la démonstration précédente, les variables x et z sont liées homographiquement entre elles, parce qu'elles sont liées homographiquement à y.

Plus généralement, si chacune des variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$ est une fonction homographique (propre) de celle qui la suit, la première x_n est une fonction homographique (propre) de x_1. Le théorème général résulte évidemment de celui qu'on a démontré.

Un cas particulier est le suivant : si deux variables sont des fonctions homographiques de deux variables qui sont liées homographiquement, les deux premières variables sont elles-même liées homographiquement.

Lorsque dans l'équation d'homographie

$$Axy + Bx + Cy + D = 0,$$

on suppose $x = y$, on obtient l'équation du second degré

$$Ax^2 + (B + C)x + D = 0,$$

dont les racines s'appellent les *éléments doubles* de l'homographie.

Lorsque A est nul, il n'y a plus qu'un élément double, qui disparaît lui-même si $B + C$ est nul ainsi que A, auquel cas la différence $x - y$ est constante. Conformément à des propriétés bien connues des équations du second et du premier degré, on dit, lorsque A est nul, qu'un des éléments doubles est infini, lorsque A et $B + C$ sont nuls que les deux éléments doubles sont infinis.

Supposons que les racines de l'équation du second degré soient réelles et distinctes; désignons-les par α, β; soient x, x' deux valeurs de la première variable, y, y' les valeurs correspondantes de la seconde : le rapport anharmonique des quatre nombres x, x', α, β doit être égal au rapport anharmonique des quatre nombres y, y', α, β : c'est-à-dire qu'on doit avoir

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} : \frac{x' - \alpha}{x' - \beta} = \frac{y - \alpha}{y - \beta} : \frac{y' - \alpha}{y' - \beta},$$

ou encore

$$\frac{x - \alpha}{x - \beta} : \frac{y - \alpha}{y - \beta} = \frac{x' - \alpha}{x' - \beta} : \frac{y' - \alpha}{y' - \beta},$$

cette relation doit subsister en laissant x', y' constants et en faisant varier les nombres x, y, que l'on suppose toujours vérifier l'équation d'homographie; d'où la conclusion suivante :

Le rapport anharmonique de deux nombres correspondants et des deux éléments doubles est constant.

EXERCICES.

61. On donne une sphère, un diamètre de cette sphère et un point M sur ce diamètre. On mène un plan perpendiculaire au diamètre qui rencontre la sphère suivant un cercle (C). Soient V le volume de la plus petite des deux parties dans lesquelles la sphère est décomposée par le plan sécant et V′ le volume du cône ayant le point M pour sommet et le cercle (C) pour base; on demande la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{V}{V'}$ quand le plan sécant tend à devenir tangent à la sphère.

62. Décomposer en éléments simples les fractions

$$\frac{1-abx^2}{(1-ax)(1-bx)},\quad \frac{x^5-x^2+1}{(x-1)^3(x-2)},\quad \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2},\quad \frac{(x^2-1)^2(x^2-4)}{x^6},$$

$$\frac{1}{x^n(1-x)},\quad \frac{1}{(x-a)^n(x-b)}.$$

a, b désignent des constantes.

Dans les deux dernières, n désigne un nombre naturel quelconque.

63. Démontrer l'identité

$$\frac{1.2\ldots n}{x(x+1)\ldots(x+n)} = \frac{C_0^n}{x} - \frac{C_1^n}{x+1} + \frac{C_2^n}{x+2} - \ldots + (-1)^n\frac{C_n^n}{x+n}.$$

Écrire explicitement cette identité pour $n=1$, 2 et en déduire les formules

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = 1-\frac{1}{n+1},$$

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)},$$

où n désigne un nombre naturel.

64. Si α, β, ..., λ sont des nombres naturels impairs et A, B, ..., L des nombres positifs, l'expression

$$\frac{A}{(x-a)^\alpha}+\frac{B}{(x-b)^\beta}+\ldots+\frac{L}{(x-l)^\lambda}$$

décroît quand x croît, dans tout intervalle qui ne contient aucun des nombres a, b, ..., l.

Il en est de même, plus généralement, de l'expression (n° 65)

$$P_a\left(\frac{1}{x-a}\right)+P_b\left(\frac{1}{x-b}\right)+\ldots+P_l\left(\frac{1}{x-l}\right),$$

si $P_a(z)$, $P_b(z)$, ..., $P_l(z)$ désignent des polynomes en z, sans terme constant, ne contenant que des termes de degré impair, à coefficients positifs.

65. On suppose que dans la fraction

$$\frac{f(x)}{(x^2-a^2)^n\varphi(x)},$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ désignent deux polynomes en x qui ne contiennent que des termes de degré pair, et qu'aucun de ces polynomes ne s'annule pour $x=a$. Montrer que, si la partie de la fraction qui devient infinie quand x tend vers a est

$$\frac{A}{(x-a)^n}+\frac{A_1}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_n}{x-a},$$

la partie qui devient infinie quand x tend vers $-a$ est

$$(-1)^n\left[\frac{A}{(x+a)^n}-\frac{A_1}{(x+a)^{n-1}}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{A_1}{x-a}\right].$$

66. Décomposer en éléments simples l'expression

$$\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right)^2;$$

en regardant les nombres a, b, c comme donnés, déterminer les constantes A, B, C de manière que, parmi les fractions simples, il n'y en ait aucune dont le dénominateur soit du premier degré.

67. Si a est une racine simple du polynome $\varphi(x)$ qui n'annule pas le polynome $f(x)$, la partie de la fraction $\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^2}$ qui devient infinie quand x tend vers a est

$$\frac{f(a)}{[\varphi'(a)]^2}\,\frac{1}{(x-a)^2}+\frac{f'(a)\varphi'(a)-f(a)\varphi''(a)}{[\varphi'(a)]^3}\,\frac{1}{x-a},$$

en désignant par $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$, par $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ les dérivées première et seconde de $\varphi(x)$.

68. Si l'on suppose $\varphi(x)=(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, les nombres a, b, ..., l étant différents, la condition pour que la formule de décomposition en éléments simples de la fraction $\frac{f(x)}{[\varphi(x)]^2}$ ne contienne aucune fraction simple

dont le dénominateur soit du premier degré est que le polynome

$$f'(x)\varphi'(x) - f(x)\varphi''(x)$$

soit divisible par $\varphi(x)$.

69. Déterminer un polynome $g(x)$ du troisième degré au plus qui, pour les valeurs données a, b de la variable, prenne des valeurs données A et B, tandis que sa dérivée prend les valeurs aussi données A′ et B′.

La solution résulte immédiatement de la formule

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{(x-a)^2(x-b)^2} &= \frac{g(a)}{(a-b)^2}\,\frac{1}{(x-a)^2} + \frac{g'(a)(a-b)-2g(a)}{(a-b)^3}\,\frac{1}{x-a}\\ &\quad + \frac{g(b)}{(a-b)^2}\,\frac{1}{(x-b)^2} + \frac{g'(b)(a-b)+2g(b)}{(a-b)^3}\,\frac{1}{x-b}.\end{aligned}$$

Généraliser le problème posé et sa solution.

70. En supposant que les $n+p$ nombres

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_p$$

soient distincts et en posant

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n),\\ \varphi(x) &= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_p),\end{aligned}$$

montrer qu'il existe un système de polynomes $F(x)$ et $\Phi(x)$, et un seul, dont le premier soit de degré inférieur à n et le second de degré inférieur à p, tels que l'on ait identiquement

$$F(x)\varphi(x) + \Phi(x)f(x) = 1;$$

montrer qu'on peut obtenir ces polynomes en décomposant la fraction $\dfrac{1}{f(x)\varphi(x)}$ en fractions simples.

71. En regardant x, a_1, a_2, α_1, α_2 comme des variables et en posant

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2),\qquad \varphi(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2),$$
$$\Delta = (\alpha_1 - a_1)(\alpha_1 - a_2)(\alpha_2 - a_1)(\alpha_2 - a_2),$$

il existe des polynomes $F(x)$, $\Phi(x)$, en x, a_1, a_2, α_1, α_2, du premier degré en x, tels que l'on ait identiquement, en x, a_1, a_2, α_1, α_2,

$$F(x)\varphi(x) + \Phi(x)f(x) = \Delta.$$

Cet énoncé se généralise facilement : la démonstration générale peut se faire au moyen de l'exercice précédent et d'une identité établie au n° 68.

72. Considérons l'équation

$$(ay + a')x^2 + (by + b')x + cy + c' = 0;$$

à chaque valeur x' de x correspond une valeur y' de y telle que l'équation soit vérifiée pour $x = x'$, $y = y'$; réciproquement, si l'on donne à y la valeur y', l'équation du second degré en x admet la racine x' et une seconde racine x'' que l'on peut faire correspondre à x'. Montrer qu'il y a une relation involutive $Ax'x'' + B(x' + x'') + C = 0$ entre x' et x''. Exprimer A, B, C au moyen de a, b, c, a', b', c'.

CHAPITRE V.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

§ 1. — DÉFINITION ET RECHERCHE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

70. Sauf dans le n° 81, les polynomes que l'on considérera dans le présent Chapitre seront des polynomes à une seule variable, que l'on désignera habituellement par x.

La recherche des polynomes qui divisent exactement un polynome, ou, comme on dit, la recherche des diviseurs d'un polynome est un des problèmes les plus importants de l'Algèbre : en particulier, la recherche des diviseurs du premier degré revient à la recherche des racines de ce polynome (n^os 37, 38).

Si cette dernière recherche est difficile, il est au contraire aisé de ramener la recherche des diviseurs communs à plusieurs polynomes donnés, c'est-à-dire des polynomes qui divisent à la fois ces polynomes donnés, à la recherche des diviseurs d'un seul polynome, auquel on donne le nom de *plus grand commun diviseur* des polynomes donnés.

On est ainsi conduit à une théorie toute pareille à celle que l'on fait en Arithmétique, sur le plus grand commun diviseur de deux ou plusieurs nombres entiers donnés, théorie qui, comme on sait, conduit naturellement à des propositions capitales concernant la divisibilité. Il en sera de même en Algèbre.

Il est clair que, si le polynome B est un diviseur du polynome A, le polynome B multiplié par une constante quelconque non nulle sera encore un diviseur de A; on ne distinguera pas, dans ce qui suit, entre deux pareils diviseurs, qui ne diffèrent que par un facteur constant : ils seront regardés comme le *même* diviseur.

71. Occupons-nous maintenant de la recherche des diviseurs communs à deux polynomes donnés A et B, pour prouver que ces diviseurs sont les mêmes que ceux d'un certain polynome.

Si B divise A, en sorte que l'on ait $A = BQ$, en désignant par Q un polynome en x, il est clair que tout polynome qui divise B divise BQ ou A; en sorte que les diviseurs communs à A et à B sont les mêmes que les diviseurs de B; tout est ramené à la recherche des diviseurs de B.

Si B ne divise pas A et est d'un degré inférieur ou égal au degré de A, la division de A par B, au sens du n° 51, conduit à une identité de la forme $A = BQ + R$, où Q est le quotient et R le reste, de degré inférieur au degré de B.

Les diviseurs communs à A *et à* B *sont les mêmes que les diviseurs communs à* B *et à* R.

En effet tout diviseur de A et de B est un diviseur de A et de BQ, donc un diviseur de $A - BQ$ ou de R; tout diviseur de B et de R est un diviseur de BQ et de R, donc un diviseur de $BQ + R$ ou de A. Les diviseurs communs à A et à B sont communs à B et à R; les diviseurs communs à B et à R sont communs à A et à B; les diviseurs communs à A et à B sont les mêmes polynomes que les diviseurs communs à B et à R.

Le problème est ramené à un problème plus simple, puisque R est de degré inférieur au degré de B et, par suite, au degré de A.

Si R ne divise pas B, la recherche des diviseurs communs à R et à B se ramène de même à la recherche des diviseurs communs à R et au reste R_1 de la division de B par R; celle-ci, lorsque R_1 ne divise pas R, se ramène à la recherche des diviseurs communs à R_1 et au reste R_2 de la division de R par R_1, et ainsi de suite.

Si R divise B, les diviseurs communs à B et à R et, par suite, les diviseurs communs à A et à B, sont les mêmes que les diviseurs de R; si c'était R_1 qui divisât R, les diviseurs communs à R_1 et à R, les diviseurs communs à R et à B, les diviseurs communs à B et à A, seraient les mêmes que les diviseurs de R_1; d'une façon générale, dès que l'on trouve un reste R_n qui divise le reste précédent R_{n-1}, l'opération est terminée : les diviseurs communs à A et à B sont les mêmes polynomes que les diviseurs de R_n.

On finit d'ailleurs par trouver un reste R_n qui divise le précédent, puisque les degrés des polynomes B, R, R_1, R_2, ... vont en diminuant au moins d'une unité à chaque fois; il est impossible qu'on puisse faire plus de divisions qu'il y a d'unités dans le degré de B : le degré d'un reste ne peut tomber au-dessous de o; ou bien on trouvera un reste, contenant effectivement x, qui divisera le précédent; ou bien on arrivera à un reste constant, non nul, dont on peut dire qu'il divise exactement le précédent; dans ce cas, les polynomes qui divisent à la fois A et B, devant diviser une constante, ne peuvent être eux-mêmes que des constantes; à proprement parler, A et B n'ont pas de diviseurs communs, on dit qu'ils sont *premiers* entre eux.

Dans tous les cas, le polynome R_n, le premier reste qui divise le reste précédent, jouit de la propriété annoncée : les diviseurs communs à A et à B sont les mêmes polynomes que les diviseurs de R_n. Il est le seul polynome qui jouisse de cette propriété, car un autre polynome S, qui jouirait de cette propriété, devrait diviser R_n et être divisible par R_n; il ne pourrait être d'un degré supérieur au degré de R_n, ni de degré inférieur; il serait de même degré; le quotient de la division de S par R_n se réduirait à une constante, S serait identique à R_n, à un facteur constant près.

Tout polynome qui divise A et B devant diviser R_n est au plus du même degré que R_n; s'il est du même degré que R_n, il lui est identique à un facteur constant près.

Le polynome R_n, trouvé par la méthode précédente, est le polynome du plus haut degré possible qui divise A et B; c'est pour cette raison qu'on l'appelle le *plus grand commun diviseur* de A et de B.

Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes donnés A, B, dont le premier est de degré au moins égal au degré de B, on divise le premier par le second, puis le second par le reste obtenu dans la première division, puis ce reste par le reste de la deuxième division, puis le reste de la deuxième division par le reste de la troisième, et ainsi de suite : le premier des restes qui divise le reste précédent est le plus grand commun diviseur des deux polynomes proposés. Lorsque les deux polynomes A, B sont premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur est une constante quelconque, non nulle. On choisit d'ordinaire cette constante égale à 1.

72. La remarque suivante, qui concerne la nature des coefficients du plus grand commun diviseur de deux polynomes A, B, est, dans

certaines parties de l'Algèbre, d'une importance capitale : dans une division, les coefficients, soit du quotient, soit du reste, se déduisent des coefficients du dividende et du diviseur par des combinaisons d'additions, soustractions, multiplications, divisions effectuées soit sur les coefficients, soit sur les résultats d'opérations de la même nature déjà effectuées sur ces coefficients; il en sera de même des coefficients du plus grand commun diviseur, qui n'est que le dernier des restes d'une suite de divisions : c'est ce qu'on exprime en disant que les coefficients du plus grand commun diviseur sont composés *rationnellement* avec les coefficients des polynomes donnés, parce que les opérations précédemment énumérées sont qualifiées de rationnelles, par opposition à celles des opérations qui ne peuvent pas se réduire à une suite d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions, en nombre fini.

Par exemple, si les coefficients des polynomes A, B sont des nombres rationnels, il en sera de même des coefficients du plus grand commun diviseur. Si, en particulier, celui-ci est du premier degré, c'est que les deux polynomes A, B auront une racine commune, qui sera un nombre rationnel : on obtiendra cette racine par la résolution de l'équation du premier degré obtenue en égalant à o le plus grand commun diviseur.

Si les coefficients des polynomes A, B sont des nombres irrationnels de la forme $\alpha + \beta\sqrt{2}$, où α, β sont des nombres rationnels, les coefficients du plus grand commun diviseur sont aussi de la même forme; puisqu'il en est évidemment ainsi des nombres obtenus en ajoutant, retranchant, multipliant des nombres de la forme précédente, ou encore en divisant deux pareils nombres : on a, en effet,

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{2}}{\alpha' + \beta'\sqrt{2}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha' - \beta'\sqrt{2})}{\alpha'^2 - 2\beta'^2}.$$

73. L'opération décrite au numéro précédent peut être un peu simplifiée par la remarque suivante : dans chaque division, c'est le reste, non le quotient, qui importe; il n'y a pas d'inconvénient à fausser le quotient. D'autre part, quand on multiplie le dividende d'une division par une constante, sans toucher au diviseur, on multiplie le quotient et le reste par ce facteur constant. Cette remarque est utile si l'on veut éviter les dénominateurs dans les coefficients du

quotient et du reste (n° 55, note); on peut l'utiliser au cours d'une division, et multiplier, ou diviser un reste partiel par un facteur constant, quitte à fausser le quotient.

Si, toutefois, on veut conserver aux coefficients du plus grand commun diviseur la propriété établie au numéro précédent, il importe de n'employer comme multiplicateurs que des nombres qui soient composés rationnellement avec les coefficients des polynomes proposés.

Les calculs pour la recherche du plus grand commun diviseur entre les polynomes

$$2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4, \qquad x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

sont faits ci-dessous tout au long; en suivant ces calculs, le lecteur reconnaîtra qu'on a faussé les quotients, en multipliant ou divisant certains restes par des facteurs numériques.

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 4x + 4 & x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 8 \\ \cline{2-2}
-2x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 8x - 16 & 2 \\ \cline{1-1}
-2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 6x^3 + 4x^2 - 8x + 16 & 2x^3 - 5x^2 - 4x + 12 \\ \cline{2-2}
-2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 12x & x - 1 \\ \cline{1-1}
-x^3 + 8x^2 - 20x + 16 & \\
-2x^3 + 16x^2 - 40x + 32 & \\
+2x^3 - 5x^2 - 4x + 12 & \\ \cline{1-1}
11x^2 - 44x + 44 & \\
x^2 - 4x + 4 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
2x^3 - 5x^2 + 4x + 12 & x^2 - 4x + 4 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + 8x^2 - 8x & 2x + 3 \\ \cline{1-1}
3x^2 - 12x + 12 & \\
-3x^2 + 12x - 12 & \\ \cline{1-1}
\end{array}$$

Le plus grand commun diviseur cherché est $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Dans l'exemple suivant, relatif au plus grand commun diviseur entre les polynomes $x^3 + px + q$, $3x^2 + p$, les divisions sont faites régulièrement : on suppose p différent de o.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + px + q & 3x^2 + p \\
\cline{2-2}
-x^3 - \dfrac{px}{3} & \dfrac{1}{3}x \\
\cline{1-1}
\dfrac{2px}{3} + q &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^2 \qquad + p & \dfrac{2p}{3}x + q \\
\cline{2-2}
-3x^2 - \dfrac{9q}{2p}x & \dfrac{9}{2p}x - \dfrac{27q}{4p^2} \\
\cline{1-1}
-\dfrac{9q}{2p}x + p & \\
+\dfrac{9q}{2p}x + \dfrac{27q^2}{4p^2} & \\
\cline{1-1}
\dfrac{4p^3 + 27q^2}{4p^2} &
\end{array}
$$

Si le nombre $4p^3 + 27q^2$ n'est pas nul, les deux polynomes sont premiers entre eux; s'il est nul, leur plus grand commun diviseur est $\frac{2p}{3}x + q$. Si p était nul, il est manifeste que les deux polynomes proposés ne pourraient avoir de diviseur commun que si q était nul; dans ce cas le diviseur commun serait x^2 : la condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes aient un diviseur commun dépendant de x est $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Soit encore à chercher le plus grand commun diviseur de $x^\alpha - 1$ et de $x^\beta - 1$; on sait trouver le reste de la division de $x^\alpha - 1$ par $x^\beta - 1$; en appliquant la règle donnée au n° 34, on voit de suite qu'on est conduit à faire sur les nombres naturels α, β les opérations relatives à la recherche du plus grand commun diviseur de ces deux nombres, au sens de l'Arithmétique. Si δ est ce plus grand commun diviseur, $x^\delta - 1$ est le plus grand commun diviseur algébrique de $x^\alpha - 1$ et de $x^\beta - 1$.

74. Si l'on considère trois polynomes A, B, C, on peut, dans la recherche des communs diviseurs à ces polynomes, remplacer deux d'entre eux, A et B par exemple, par leur plus grand commun diviseur Δ; les diviseurs communs à A, B, C seront les mêmes que les diviseurs communs aux polynomes Δ, C, puisque les diviseurs communs à A, B sont les mêmes que les diviseurs de Δ; les diviseurs communs à Δ, C sont les mêmes que les diviseurs du plus grand

commun diviseur Δ' de Δ et de C; les diviseurs communs à A, B, C seront donc les mêmes que les diviseurs de Δ'; il y a donc un polynome Δ' dont les diviseurs sont les mêmes que les diviseurs communs à A, B, C; ce polynome, évidemment unique d'après les raisonnements précédents, est, par définition, le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, C.

Du cas de trois polynomes, on passe à celui de quatre, cinq, etc. Étant donnés des polynomes A, B, ..., L en nombre quelconque, il existe un polynome (leur plus grand commun diviseur) tel que les diviseurs de ces polynomes soient les mêmes que les diviseurs de ce plus grand commun diviseur.

Pour l'obtenir on peut remplacer tels des polynomes donnés que l'on veut par leur plus grand commun diviseur Δ, et chercher ensuite le plus grand commun diviseur de Δ et des polynomes que l'on a laissés de côté. Comme on sait trouver le plus grand commun diviseur de deux polynomes, on sait trouver le plus grand commun diviseur de trois, quatre, etc., polynomes.

Quand le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, ..., L est une constante (l'unité si l'on veut), on dit que ces polynomes sont premiers entre eux, dans leur ensemble. On dit qu'ils sont premiers deux à deux, quand chacun des polynomes est premier à chacun des autres.

§ 2. — PROPRIÉTÉS DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR. DIVISIBILITÉ.

75. *Si* Δ *est le plus grand commun diviseur des polynomes* A, B, *et si* C *est un polynome quelconque, le plus grand commun diviseur des polynomes* AC *et* BC *est* ΔC.

La proposition est évidente si B divise A; dans le cas contraire, reprenons les notations du n° 71; et supposons que les restes successifs, dans l'opération du plus grand commun diviseur, soient R, R_1, ..., R_n, le dernier reste R_n étant le plus grand commun diviseur. Le reste de la division de AC par BC sera RC (n° 52); le reste de la division de BC par RC sera R_1C, etc.; tous les restes sont multipliés par C, le dernier reste R_nC sera le plus grand commun diviseur de AC et de BC.

Si Δ est le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, *si* C *est un polynome qui divise à la fois* A *et* B, *et si l'on désigne par* A′ *et* B′ *les quotients de la division de* A *et* B *par* C, *le polynome* Δ *sera divisible par* C, *et le quotient* Δ' *sera le plus grand commun diviseur entre* A′ *et* B′.

Conservons en effet les même notations, pour ce qui concerne les polynomes A, B; R sera divisible par C (n° 52) et le quotient R′ sera le reste de la division de A′ par B′; B et R étant divisibles par C, R_1 sera divisible par C, et le quotient R'_1 sera le reste de la division de B′ par R′, etc., tous les restes seront divisés par C, le dernier reste R_n sera comme les précédents divisible par C et le quotient R'_n sera le dernier reste dans la recherche du plus grand commun diviseur de A′ et de B′; c'est ce qu'il fallait établir.

On énonce ces deux propositions sous une forme un peu abrégée en disant :

Quand on multiplie ou que l'on divise deux polynomes par un troisième, le plus grand commun diviseur des deux premiers polynomes est multiplié ou divisé par ce troisième polynome.

Ce théorème s'étend de suite à un nombre quelconque de polynomes.

En particulier les quotients de deux ou plusieurs polynomes par leur plus grand commun diviseur sont premiers entre eux, puisque le plus grand commun diviseur de ces quotients est 1.

Si les polynomes A, B, C, ... sont premiers entre eux, les produits de ces deux polynomes par un polynome P ont ce polynome P pour plus grand commun diviseur. En effet, puisque les polynomes A, B, C, ... sont premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur est 1, le plus grand commun diviseur des polynomes AP, BP, CP, ... est donc P.

76. *Si* C *est un polynome premier au polynome* B, *le plus grand commun diviseur des deux polynomes* A *et* B *est le même que le plus grand commun diviseur des polynomes* AC *et* B : *En d'autres termes, on ne change pas le plus grand commun diviseur de deux polynomes en multipliant l'un d'eux par un polynome premier à l'autre.*

Soient en effet Δ le plus grand commun diviseur de A et de B, Δ' le plus grand commun diviseur de AC et de B ; il faut prouver que Δ est le même polynome que Δ' ; or Δ, divisant A et B, par suite AC et B, divise leur plus grand commun diviseur Δ' ; il suffit donc de prouver que Δ' divise Δ, c'est-à-dire A et B. On sait déjà qu'il divise B ; il suffit de prouver qu'il divise A : on y arrive en faisant intervenir l'hypothèse d'après laquelle C est premier à B, en sorte que B et C ont 1 pour plus grand commun diviseur : AB et AC ont donc A pour plus grand commun diviseur : Δ' qui divise AC et B, donc AC et AB, divise leur plus grand commun diviseur A.

Le plus grand commun diviseur de AC et de B étant le même que le plus grand commun diviseur de A et de B, on peut dire encore :

On ne change pas le plus grand commun diviseur de deux polynomes quand on divise l'un d'eux par un polynome premier à l'autre : il est sous-entendu que la division se fait exactement.

77. Le théorème du numéro précédent contient deux cas particuliers importants, celui où B divise AC et se trouve ainsi être le plus grand commun diviseur de AC et de B et celui où B est premier à A.

Dans le premier cas, B étant le plus grand commun diviseur de AC et de B, qui est le même que celui de A et de B, doit diviser A.

En d'autres termes :

Si un polynome B *divise le produit* AC *de deux polynomes* A, C *et s'il est premier avec l'un d'eux* C, *il divise l'autre* A.

Dans le second cas, B étant premier à A, le plus grand commun diviseur des deux polynomes AC et B est 1, comme celui des polynomes A et B. En d'autres termes :

Si les deux polynomes A *et* C *sont premiers au polynome* B, *il en est de même de leur produit.*

Ce dernier théorème s'étend immédiatement : si un polynome P est premier aux polynomes $Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, il est premier au produit $QQ_1Q_2\ldots Q_n$; car étant premier à Q et à Q_1, il est premier au produit QQ_1 ; étant premier aux polynomes QQ_1 et Q_2 il est premier à leur produit QQ_1Q_2, puis au produit $QQ_1Q_2Q_3, \ldots,$ au produit $QQ_1Q_2\ldots Q_n$: si chacun des polynomes $P, P_1, P_2, \ldots, P_m$ est premier à chacun des polynomes $Q, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, le produit $PP_1\ldots P_m$ est premier au produit $QQ_1Q_2\ldots Q_n$, puisque ce dernier produit, étant premier à chacun des polynomes $P, P_1, P_2, \ldots, P_m$, est premier à leur produit $PP_1P_2\ldots P_m$.

En particulier, si les polynomes P, Q sont premiers entre eux, il en est de même de P^m et de Q^n, en désignant par m, n des nombres naturels.

78. **Plus petit commun multiple.** — Le lecteur n'a pas manqué de reconnaître l'identité de ces raisonnements avec ceux de l'Arithmétique. Je me contente de signaler les théorèmes suivants dont la démonstration peut encore se copier sur celle des propositions analogues de l'Arithmétique.

Si un polynome P est divisible séparément par deux ou plusieurs polynomes premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.

Si les polynomes A, B, ..., L sont premiers entre eux deux à deux, tout polynome divisible par chacun de ces polynomes, ou, comme on dit, tout multiple commun de ces polynomes est, d'après ce que l'on vient de dire, un multiple de leur produit. On peut dire encore que les multiples communs des polynomes A, B, C, ..., L sont les mêmes que les multiples du polynome produit ABC...L.

Quels que soient les polynomes A, B, ..., L, il existe un polynome M tel que les multiples communs des polynomes A, B, ..., L soient les mêmes que les multiples de M. En d'autres termes, les polynomes divisibles à la fois par A, B, ..., L sont les mêmes que les polynomes divisibles par M; ce polynome s'appelle le *plus petit commun multiple* des polynomes A, B, C, ..., L; à supposer qu'il existe, ce polynome M est évidemment seul à jouir de la propriété qui le définit : car, si un autre polynome M′ jouissait de la propriété qui définit M, M′ devrait être divisible par M et M par M′.

Pour établir l'existence du plus petit commun multiple, on procède encore comme en Arithmétique :

On établit cette existence dans le cas de deux polynomes A, B, et l'on prouve, en désignant par Δ leur plus grand commun diviseur, que les multiples communs de A, B sont les mêmes que les multiples du polynome $\frac{AB}{\Delta}$ qui, ainsi, est le plus petit commun multiple de A, B.

Les communs multiples de trois polynomes A, B, C sont les mêmes que les multiples communs de $\frac{AB}{\Delta}$ et de C, ou que les multiples du plus petit commun multiple de ces deux derniers polynomes ; on continue ainsi. Au reste, en général, on peut, dans la recherche du plus petit commun multiple de plusieurs polynomes, remplacer tels polynomes que l'on veut par leur plus petit commun multiple.

79. **Fractions rationnelles.** — J'ajoute quelques mots concernant les fractions dont les termes sont des polynomes en x.

Deux fractions rationnelles en x, $\frac{A}{B}$ et $\frac{A'}{B'}$, sont dites *identiques* lorsqu'elles prennent les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas B ou B'; l'égalité $AB' = A'B$ devant alors avoir lieu pour une infinité de valeurs de x, doit être une identité (nº 33) : qu'il en soit ainsi, c'est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux fractions proposées soient identiques.

Une fraction $\frac{A}{B}$, rationnelle en x, est dite irréductible, si les deux polynomes A, B sont premiers entre eux.

On peut toujours remplacer une fraction rationnelle par une fraction irréductible qui lui soit identique, en divisant le numérateur et le dénominateur par leur plus grand commmun diviseur. Une fraction rationnelle en x ne peut être identique à une fraction irréductible que si ses termes se déduisent respectivement des termes de cette dernière en les multipliant par un même polynome.

La théorie de la réduction au même dénominateur de deux ou plusieurs fractions rationnelles se transporte, à peu près sans changement, de l'Arithmétique à l'Algèbre.

80. **Polynomes premiers.** — Pour continuer une théorie de la divisibilité parallèle à celle que l'on développe en Arithmétique, il serait nécessaire d'introduire la notion qui correspond à celle du nombre premier absolu ; toutefois, cette généralisation, si naturelle qu'elle soit, comporte quelques difficultés.

S'il est, en effet, facile, au moyen d'un nombre fini d'opérations, de reconnaître si un nombre entier est ou non décomposable en facteurs, la recherche de la décomposition d'un polynome en un produit de facteurs est beaucoup moins aisée : On peut d'ailleurs diriger cette recherche dans des sens très différents suivant la nature des nombres que l'on admet comme pouvant être les coefficients des polynomes diviseurs. On touche ici à un ordre d'idées qui a donné lieu à des développements considérables et dont je ne puis dire qu'un mot.

Supposons par exemple que l'on considère un polynome en x, à coefficients rationnels : on peut convenir de dire que ce polynome est premier s'il n'admet pas de diviseurs à coefficients rationnels. Le polynome x^2-2x-1, dans ces conditions, serait un polynome premier.

Il y a toute une branche de l'Algèbre, dont je ne m'occuperai pas ici, où l'on s'occupe de la recherche des diviseurs d'un polynome donné, dont les coefficients sont composés rationnellement (n° 72) au moyen de nombres fixés à l'avance.

Je me bornerai ici à indiquer l'*une* des significations qu'on peut attribuer à ces mots *polynome premier*, de manière à montrer comment, en adoptant cette définition, on peut étendre la théorie de la divisibilité.

Un polynome P dont les coefficients sont des nombres réels, d'ailleurs quelconques, sera dit *premier*, s'il n'est divisible par aucun polynome de degré inférieur à lui, à coefficients réels, et ne se réduisant pas à une constante.

Tel est évidemment un polynome du premier degré, ou un polynome du second degré qui n'a pas de racines réelles. On verra plus tard qu'il n'y a pas d'autres polynomes premiers que ces deux-là, dans le sens qu'on vient de dire.

Quoi qu'il en soit, il est clair que si un polynome A, à coefficients numériques réels, n'est pas premier, il admet un diviseur premier; il admet en effet un diviseur B de degré inférieur à lui; si B n'est pas premier, B admet un diviseur C de degré inférieur à lui; en continuant de cette façon, puisque les degrés des polynomes A, B, C, ... vont en diminuant, il faudra qu'on parvienne à un diviseur premier.

La détermination, exacte ou approchée, de ces diviseurs premiers est un problème qui nous occupera ultérieurement. Quoi qu'il en soit, il est clair qu'un polynome qui n'est pas premier peut se décomposer en un produit de polynomes premiers. La décomposition ne peut se faire que d'une seule façon si l'on convient, comme on l'a fait déjà, de ne pas distinguer entre deux diviseurs qui ne diffèrent que par un facteur numérique.

La démonstration est la même qu'en Arithmétique et repose sur ce fait qu'un polynome premier est premier à tout polynome qu'il ne divise pas et ne peut par conséquent diviser un produit de plusieurs polynomes sans diviser l'un d'eux.

Lorsque deux polynomes A, B sont décomposés en facteurs premiers, on sait reconnaître immédiatement si l'un est divisible par l'autre, ou non.

Les règles que l'on donne en Arithmétique pour la composition du plus grand commun diviseur ou du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs nombres décomposés en facteurs premiers s'étendent évidemment à l'Algèbre.

§ 3. — POLYNOMES A PLUSIEURS VARIABLES.

81. Je joindrai à ce qui précède quelques indications rapides sur la façon dont la théorie de la divisibilité s'étend aux polynomes à deux variables x, y.

On a expliqué au n° 58 comment on pouvait reconnaître si un polynome $f(x, y)$ à deux variables était ou non divisible par un autre polynome $g(x, y)$ à deux variables. Les propositions qui suivent sont évidentes.

Si le polynome $f(x, y)$ est divisible par le polynome $g(x, y)$, il en sera de même du produit du polynome $f(x, y)$ par un polynome quelconque en x, y. Si deux polynomes $f(x, y)$, $f_1(x, y)$ sont divisibles par le polynome $g(x, y)$, il en est de même de leur somme, ou de leur différence.

Convenons de dire qu'un polynome à deux variables x, y, ordonné par rapport aux puissances de y, est *primitif* [1], quand les polynomes en x, coefficients [2] des diverses puissances de y dans ce polynome ainsi ordonné, sont premiers entre eux dans leur ensemble. Puisqu'on sait trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs polynomes, on sait reconnaître si un polynome donné en x, y est primitif ou non, et, lorsqu'il n'est pas primitif, le mettre sous la forme d'un polynome primitif, multiplié par un certain polynome en x, qui n'est autre que le plus grand commun diviseur des coefficients des diverses puissances de y dans le polynome proposé.

Ceci posé, on montrera, comme au n° 55, que le produit de deux polynomes en x, y ordonnés suivant les puissances de y, et que l'on ordonne lui-même suivant ces puissances, est primitif, ou non, suivant que les deux facteurs proposés sont, ou non, primitifs tous les deux. Dans le cas où ces deux poly-

---

(1) Ce mot a été employé dans un autre sens au n° 55. Les polynomes en x tiennent ici le même rôle que tenaient alors les nombres entiers.

(2) Parmi ces coefficients, il faut ranger le terme indépendant de y, le coefficient de y^0, si l'on veut. Il m'arrivera de dire, dans le même sens, les *coefficients* du polynome en y : il est bien entendu que ces *coefficients* sont, à la vérité, des polynomes en x.

nomes ne sont pas primitifs, le plus grand commun diviseur des coefficients des puissances de y, dans le polynome produit, est le produit des plus grands communs diviseurs des coefficients dans le premier facteur par le plus grand commun diviseur des coefficients dans le second.

La démonstration, en effet, repose uniquement sur des notions et propositions qui ont été transportées de la théorie des nombres entiers à celle des polynomes en x. Parmi ces notions figure la notion de polynome *premier*, que l'on entendra comme au n° 80.

Cette proposition une fois établie, les conséquences s'en dérouleront comme au n° 55. Je me contente de les énoncer.

Soient A, B des polynomes en x, y ordonnés par rapport aux puissances de y, et regardés comme des polynomes en y, dont les coefficients sont des polynomes en x.

Soient $A = aA'$, $B = bB'$, en désignant par A', B' des polynomes primitifs et par a, b les plus grands communs diviseurs des coefficients des puissances de y dans A d'une part, dans B de l'autre. Si B divise A, le polynome a est divisible par le polynome b, le polynome A' est divisible par le polynome B'.

Lorsque B est primitif, le polynome B ne peut diviser le polynome A sans diviser le polynome primitif A'.

Lorsque A est primitif, B ne peut diviser A sans être lui-même primitif.

En divisant le polynome A par le polynome B, supposé primitif, on ne peut arriver à un reste nul que si les coefficients du quotient sont des polynomes en x (et non des fractions rationnelles irréductibles).

Arrivons maintenant à la recherche des diviseurs communs aux polynomes A, B; désignons par C un tel diviseur. Posons $A = aA'$, $B = bB'$, $C = cC'$ en conservant les notations expliquées plus haut pour A, B et en désignant par c le plus grand commun diviseur des coefficients de C, regardé comme un polynome en y. C' est primitif.

Puisque cC' divise aA' et bB'; c est un diviseur commun de a et de b; C' est un diviseur commun de A' et de B'.

On obtiendra donc les diviseurs communs de A et de B en multipliant un diviseur commun des polynomes primitifs A' et B' par un diviseur commun de a et de b; puisqu'on sait former ces derniers diviseurs, la solution du problème posé est ramenée à la recherche des diviseurs communs de deux polynomes primitifs.

Je suppose maintenant que les polynomes A et B soient primitifs.

Supposons que A soit, en y, de degré au moins égal au degré de B en y. Si B divise A, il est clair que les diviseurs communs à A et à B sont les mêmes que les diviseurs de B.

Si B ne divise pas A, effectuons la division de A par B, les deux polynomes étant ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de y, ou plutôt commençons, avant de faire cette division, par multiplier A par un polynome α choisi de manière à éviter les coefficients fractionnaires, ainsi qu'on l'a expliqué dans la note du n° 55; α représentait alors un nombre, c'est maintenant un polynome en x, par exemple une puissance convenable du premier coefficient de B. On arrivera à une identité de la forme $\alpha A = BQ + R$, où, dans Q et dans R, les coefficients des puissances de y sont des *polynomes* en x; si R n'est pas primitif, mettons-le sous la forme rR', où R' est primitif; on aura $\alpha A = BQ + rR'$.

Un polynome en x, y, qui divise à la fois A, B, est nécessairement primitif, quand on l'a ordonné par rapport à y; d'après l'identité précédente, il divise rR', et, puisqu'il est primitif, il divise R'; tout polynome en x, y qui divise A et B divise aussi B et R'; un polynome en x, y qui divise B et R' est primitif, il divise αA, donc A; les polynomes en x, y qui divisent B et R' divisent aussi A et B.

Les diviseurs communs à A et à B sont les mêmes que les diviseurs communs à B et à R'.

Il est manifeste que, si R' ne divise pas B, on pourra continuer l'opération sur les deux polynomes B et R', primitifs comme étaient A et B, et l'on prouvera ainsi l'existence d'un polynome primitif R'_n tel que les diviseurs communs de A et de B soient les mêmes que ceux de R'_n.

Ce sera, par définition, le plus grand commun diviseur des polynomes A et B, supposés primitifs.

Si les deux polynomes A, B n'étaient pas primitifs, on les mettrait sous les formes $A = aA'$, $B = bB'$, a et b étant des polynomes en x, A' et B' des polynomes primitifs. En formant ensuite le produit du plus grand commun diviseur des deux polynomes a, b et du plus grand commun diviseur des polynomes primitifs A', B', on obtiendra un polynome dont les diviseurs sont les mêmes que les diviseurs communs à A et à B; ce produit sera le plus grand commun diviseur de ces deux derniers polynomes.

Cette notion une fois acquise, l'extension aux polynomes à deux variables de toute la théorie développée dans les n^{os} 74, 75, ..., 80 se fait sans aucune difficulté. Et cette théorie, par voie d'induction, s'étend ensuite aux polynomes à trois, quatre, ... variables.

§ 4. — CONDITION POUR QUE DEUX POLYNOMES EN x SOIENT PREMIERS ENTRE EUX, POUR QU'ILS AIENT UN DIVISEUR DE DEGRÉ ÉGAL OU SUPÉRIEUR A UN NOMBRE DONNÉ.

82. *Soient* A, B *deux polynomes en x et* Δ *leur plus grand commun diviseur : il existe deux polynomes* P, Q *tels que l'on ait identiquement*

$$PA + QB = \Delta.$$

Supposons, en effet, qu'on ait fait sur les polynomes A, B la suite de divisions qui conduisent au plus grand commun diviseur (n° 71); ces opérations se traduisent par la suite d'identités

$$A = BQ + R, \qquad B = RQ_1 + R_1, \qquad \ldots, \qquad R_{n-2} = R_{n-1}Q_n + R_n;$$

$R, R_1, \ldots, R_n$ sont les restes successifs; le dernier $R_n = \Delta$ divise le précédent R_{n-1} : c'est le plus grand commun diviseur entre A et B.

On en tire

$$\begin{aligned} R &= A - QB, \\ R_1 &= B - RQ_1 = B - (A - BQ)Q_1 = -Q_1A + (QQ_1 + 1)B. \end{aligned}$$

R et R_1 se mettent ainsi respectivement sous les formes

$$R = pA + qB, \qquad R_1 = p_1A + q_1B,$$

p, q, p_1, q_1 étant des polynomes; en transportant ces expressions de R et de R_1 dans le second membre de l'identité

$$R_2 = R - R_1Q_2,$$

on met R_2 sous la forme $p_2A + q_2B$, en posant

$$p_2 = p - Q_2p_1, \qquad q_2 = q_1 - Q_2q_1,$$

et l'on peut évidemment continuer de proche en proche jusqu'à $R_n = \Delta$, que l'on mettra sous la forme voulue.

Le cas où les polynomes A, B sont premiers entre eux, en sorte que Δ se réduit à une constante que l'on peut prendre égale à 1, est particulièrement intéressant :

Il existe alors deux polynomes P, Q, tels que l'on ait identiquement

$$PA + QB = 1; \tag{1}$$

réciproquement, l'existence d'une telle identité prouve que les deux polynomes A, B sont premiers entre eux, puisqu'un diviseur commun à ces deux polynomes devrait diviser 1.

Si l'on applique la méthode précédente au second exemple [1] traité au n° 73, où l'on avait

$$A = x^3 + px + q, \qquad B = 3x^2 + p,$$

[1] On ne pourrait l'appliquer au premier exemple, où les quotients ont été faussés.

on trouvera

$$P = \frac{9(3q - 2px)}{4p^3 + 27q^2}, \qquad Q = \frac{4p^2 - 9qx + 6px^2}{4p^3 + 27q^2}.$$

La méthode précédente permet de déterminer un couple de polynomes P, Q qui vérifient l'identité (1), lorsqu'on se donne les deux polynomes A, B premiers entre eux. On va voir qu'il y en a une infinité d'autres, aisés à trouver dès que l'on connaît un couple, et qu'on peut s'arranger pour que le polynome qui multiplie A soit de degré inférieur au degré de B et que le polynome qui multiplie B soit de degré inférieur au degré de A.

Si l'on désigne, en effet, par P', Q' deux autres polynomes, tels que l'on ait

$$(2) \qquad P'A + Q'B = 1,$$

on en déduira, en retranchant membre à membre les identités (1) et (2),

$$(3) \qquad (P - P')A = (Q' - Q)B :$$

A doit diviser le second membre comme le premier; il est premier avec B, il doit donc diviser $Q' - Q$; en d'autres termes, il existe un polynome λ, tel que l'on ait identiquement $Q' - Q = \lambda A$, et, par suite, en remplaçant dans l'identité (3) $Q' - Q$ par λA,

$$(P - P')A = \lambda BA;$$

les deux polynomes qui multiplient A doivent être identiques, comme les deux membres; on a donc identiquement $P' - P = -\lambda B$. Réciproquement, si les deux polynomes P, Q vérifient l'identité (1) et si l'on prend $P' = P - \lambda B$, $Q' = Q + \lambda A$, en désignant par λ un polynome quelconque, les deux polynomes P', Q' vérifieront l'identité $P'A + Q'B = 1$.

Si l'on veut que P' soit de degré inférieur au degré de B, on doit prendre pour λ le quotient entier de la division de P par B, P' est le reste de cette division : Q' est alors de degré inférieur au degré de A; car, autrement, le degré de Q'B serait supérieur au degré de P'A; dans le polynome $P'A + Q'B$, le terme du plus haut degré provenant de Q'B ne pourrait se réduire avec aucun autre, le résultat ne pourrait se réduire à 1. Il résulte de là que, lorsque λ est le quotient de la division de P par B, $-\lambda$ est le quotient de la division de Q par A.

Ainsi, quand A et B sont premiers entre eux, il existe deux polynomes P' et Q', dont les degrés respectifs sont inférieurs aux degrés de B et de A, et tels que l'on ait identiquement $P'A + Q'B = 1$. Il résulte de ce qui précède, et il est aisé de montrer directement qu'il n'y a qu'un seul couple de polynomes à jouir de cette propriété.

En fait, c'est à ces polynomes, dont les degrés sont moindres que ceux de B et de A, que l'on parvient par la méthode même que l'on a expliquée, comme il est assez facile de le voir en comptant, à chaque opération, les degrés des polynomes auxquels on parvient. Je ne m'y arrêterai pas.

83. Supposons que les deux polynomes A et B, de degrés respectifs α et β, aient un diviseur commun C de degré γ; on aura identiquement

$$A = A'C, \qquad B = B'C.$$

A' et B' étant des polynomes dont les degrés respectifs sont $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$, on en conclut l'identité

$$B'A - A'B = 0;$$

réciproquement, si l'on a une identité de cette nature, les deux polynomes A' et B' étant de degrés respectifs $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$, on peut affirmer que les deux polynomes ont un diviseur commun dont le degré est au moins égal à γ (1).

Supposons, en effet, d'abord, que les deux polynomes A', B' soient premiers entre eux; le polynome A', en vertu de l'identité $A'B = B'A$, divise le produit $B'A$, il est premier avec B', il divise donc A; soit C le quotient, en sorte qu'on ait $A = A'C$, C est de degré

$$\alpha - (\alpha - \gamma) = \gamma;$$

en remplaçant dans l'identité précédente, et supprimant le facteur A' commun aux deux membres, on en conclut $B = B'C$. Les deux polynomes A, B ont un diviseur commun de degré γ. Si A' et B' n'étaient

(1) Quand on aura introduit les nombres complexes, il en résultera immédiatement l'existence d'un diviseur de degré γ.

pas premiers entre eux, ils auraient un plus grand commun diviseur Δ de degré δ au moins égal à 1, et l'on pourrait poser $A' = A''\Delta$, $B' = B''\Delta$, A'' et B'' étant de degrés respectifs $\alpha - \gamma - \delta$, $\beta - \gamma - \delta$; en remplaçant A' et B' par les expressions précédentes dans l'identité $A'B = B'A$, et supprimant le facteur commun Δ, on obtient l'identité $A''B = B''A$; comme A'' et B'' sont premiers entre eux, cette identité prouve l'existence d'un diviseur commun à A et à B de degré $\gamma + \delta$.

84. Il convient d'établir la proposition précédente sous une forme un peu différente, dont tout l'intérêt n'apparaîtra que plus tard.

Supposons que les coefficients des polynomes A et B, ordonnés suivant les puissances descendantes de x, contiennent un ou plusieurs paramètres variables représentés par des lettres; on est déjà convenu de conserver le nom de *polynomes* en x à de pareilles expressions; quoique, à proprement parler, A, par exemple, ne soit pas le même polynome (en x) quand on attribue aux paramètres qui figurent dans ses coefficients des systèmes différents de valeurs numériques, il est commode d'attribuer à l'expression A une sorte d'individualité, de la regarder, si l'on veut, comme un même polynome à des états différents; ce que l'on vient de dire s'applique aussi bien à B.

Dans ces conditions, il peut arriver que, pour certaines valeurs des paramètres, le degré de A, ou de B, s'abaisse, parce que les premiers coefficients sont nuls. Je suppose que les degrés de A et de B soient, en général, α et β, mais qu'ils puissent descendre au-dessous de ces nombres.

Dans diverses circonstances, que l'on précisera plus tard, on est amené à regarder deux pareils polynomes dont les degrés s'abaissent respectivement aux nombres $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$ comme ayant, de ce fait, une sorte de diviseur commun dont le degré serait le plus petit des nombres α', β', ou, si l'on veut, dont le degré serait le nombre des coefficients qui, à partir du premier, seraient nuls à la fois dans les deux polynomes A, B; dans ce compte, il ne faut pas oublier les termes qui manqueraient dans A ou dans B, et qui doivent être regardés comme affectés du coefficient 0.

Ainsi, les deux polynomes en x

$$(m^3 - 1)x^5 + (m^2 - 1)x^3 + mx^2 + 3x - 4,$$
$$(m - 1)x^6 + (m^2 - 1)x^4 + (m^3 - 1)x^3 - 2x + 2,$$

dont les coefficients contiennent le paramètre m, sont, en général, l'un du cinquième, l'autre du sixième degré; pour $m = 1$, ils se réduisent l'un au second, l'autre au premier degré. Le premier doit être regardé comme ayant trois coefficients nuls, au commencement, les coefficients de x^5, de x^4, de x^3, le second comme ayant ses quatre premiers coefficients nuls, ceux de x^6, x^5, x^4, x^3. On aurait ici $\alpha = 5$, $\beta = 6$, $\alpha' = 3$, $\beta' = 4$.

Pour $m = 1$, les deux polynomes doivent être regardés comme les analogues de polynomes ayant un diviseur commun du degré 3, du fait que dans chacun d'eux les trois premiers coefficients sont nuls. D'ailleurs, pour $m = 1$, les polynomes proposés deviennent respectivement

$$x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4), \qquad -2(x-1),$$

et ils ont encore le diviseur commun $x - 1$ qui est du premier degré. Dans l'ordre d'idées que je viens d'expliquer, on les regarde comme les analogues de polynomes qui auraient un diviseur commun du degré $4 = 3 + 1$.

Ces considérations prêtent à une ambiguïté de langage, qu'il faut éviter.

Convenons de dire, en général, que les deux polynomes A, B, dont les degrés respectifs sont inférieurs ou égaux aux nombres α, β, ont un diviseur commun de degré *rectifié* $\gamma = \gamma' + r$ quand ils ont un diviseur commun de degré vrai γ', et quand, en outre, si l'on désigne par $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$ les degrés vrais des polynomes A, B, le plus petit des nombres α', β' est égal à r, en sorte qu'il y aurait r coefficients nuls au commencement de A et de B, si ces polynomes étaient écrits comme des polynomes complets de degrés α et β. Ces conventions subsistent, même quand γ' sera nul, et que, ainsi, les polynomes A, B n'ont pas, à vrai dire, de diviseur commun, mais qu'il y a r coefficients nuls au commencement de A et de B.

En adoptant ce langage, on peut remplacer le théorème du numéro précédent par celui-ci :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes A et B aient un diviseur commun de degré rectifié au moins égal à γ consiste dans l'existence de polynomes A', B' dont les degrés (vrais) soient égaux ou inférieurs à $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$, et tels que l'on ait identiquement

$$A'B - B'A = 0.$$

La condition est nécessaire : car, si les polynomes A, B ont un diviseur de degré rectifié $\gamma = \gamma' + r$, c'est, d'une part, que dans l'un et dans l'autre les r premiers coefficients sont nuls, en sorte que leurs degrés vrais sont respectivement égaux ou inférieurs à $\alpha - r$, $\beta - r$, et que, d'autre part, ils ont un diviseur commun C de degré (vrai) γ'; dès lors, les degrés (vrais) des quotients A', B' obtenus en divisant ces polynomes par C sont au plus égaux à

$$\alpha - \gamma' - r, \qquad \beta - \gamma' - r$$

ou à $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$. Il en serait de même, *a fortiori*, si le degré rectifié du diviseur commun était supérieur à $\gamma' + r$.

La condition est suffisante : supposons, en effet, que l'on ait identiquement $A'B - B'A = 0$, et que les degrés (vrais) $\alpha - \alpha''$, $\beta - \beta''$ des polynomes A' et B' soient respectivement inférieurs ou égaux à $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$, en sorte que l'on ait $\alpha'' \geqq \gamma$, $\beta'' \geqq \gamma$. Il suffira, dans la démonstration, de considérer le cas où A' et B' sont premiers entre eux; car, s'ils avaient un diviseur commun, on pourrait, comme au numéro précédent, les remplacer par des polynomes dont les degrés seraient moindres, et, par conséquent, moindres que $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$. Si A' et B' sont premiers entre eux, l'identité $A'B = B'A$ implique l'existence d'un diviseur C commun à A et à B, le quotient de A par A′ ou de B par B′, dont le degré vrai est

$$\alpha - \alpha' - (\alpha - \alpha'') = \beta - \beta' - (\beta - \beta'');$$

le degré rectifié de C s'obtiendra en ajoutant à l'un ou à l'autre des nombres égaux $\alpha'' - \alpha'$ ou $\beta'' - \beta'$ le plus petit des nombres α', β' : ce sera α'', si, par exemple, α' est inférieur ou égal à β'. Comme α'' est supérieur ou égal à γ, la proposition est démontrée.

On a supposé, sans le dire, que les polynomes A′, B′ qui vérifient l'identité $A'B - AB' = 0$ n'étaient pas nuls identiquement. Si tous les deux étaient identiquement nuls, il n'y aurait rien à tirer de l'identité $A'B - AB' = 0$. Si l'on supposait, par exemple, que A′ fût identiquement nul, mais non B′, l'identité $A'B - AB' = 0$ entraînerait l'identité $AB' = 0$ et, par conséquent, l'identité $A = 0$, puisque B′ n'est pas identiquement nul. Les deux polynomes A et B, dont le premier est identiquement nul, pourraient être regardés comme ayant le diviseur commun B de degré rectifié β; puisque γ ne peut dépasser β, le théorème subsiste, même dans ce cas, en l'entendant comme on vient de l'expliquer.

EXERCICES.

73. Chercher le plus grand commun diviseur des polynomes

$$x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2, \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1;$$

quelles sont les valeurs de x qui annulent l'un ou l'autre de ces polynomes?

74. Trouver les racines communes aux deux polynomes

$$x^4 - 2x^3 - x + 2, \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2.$$

75. Il résulte de l'exercice 45 que, si a est une racine de l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0, \tag{1}$$

les nombres $a^2 - 2$, $(a^2 - 2)^2 - 2$ sont aussi des racines de cette équation. Peut-il arriver, en supposant toujours que a soit une racine de l'équation (1), que deux des nombres

$$a, \quad a^2 - 2, \quad (a^2 - 2)^2 - 2$$

soient égaux?

Le nombre $[(a^2-2)^2-2]^2-2$ est aussi une racine de l'équation (1); il est forcément égal à l'un des nombres a, a^2-2, $(a^2-2)^2-2$. Auquel?

76. Quel est le plus petit commun multiple des polynomes

$$x^3-1, \quad x^6-1, \quad x^{12}-1\,?$$

77. Quel est le plus grand commun diviseur des deux polynomes

$$(x^2-3x+2)^2(x^2+3x+2)^2(x^2-1)(x+3),$$
$$(x^4-1)^3(x^2-4)^3(x^2+2x-3)\,?$$

78. Si l'on désigne par $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_p$ des polynomes en x, le plus grand commun diviseur (ou le plus petit commun multiple) des polynomes

$$\begin{array}{llll} A_1 B_1, & A_1 B_2, & \ldots, & A_1 B_p, \\ A_2 B_1, & A_2 B_2, & \ldots, & A_2 B_p, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, \\ A_n B_1, & A_n B_2, & \ldots, & A_n B_p \end{array}$$

est le produit du plus grand commun diviseur (ou du plus petit commun multiple) des polynomes $A_1, A_2, \ldots, A_n$, par le plus grand commun diviseur (ou le plus petit commun multiple) des polynomes $B_1, B_2, \ldots, B_p$.

79. Le plus grand commun diviseur des polynomes A^2 et B^2 est le carré du plus grand commun diviseur des polynomes A, B.

80. En désignant par A, B, A', B' des polynomes, le plus grand commun diviseur des polynomes

$$AA', \quad AB'+A'B, \quad BB'$$

est le produit du plus grand commun diviseur des polynomes A, B par le plus grand commun diviseur des polynomes A', B'.

81. Si A et B sont deux polynomes en x premiers entre eux, et $g(x)$ un polynome quelconque, il existe deux polynomes A_1, B_1 tels que l'on ait identiquement

$$g(x) = B_1 A + A_1 B$$

ou

$$\frac{g(x)}{AB} = \frac{A_1}{A} + \frac{B_1}{B}.$$

C'est une conséquence immédiate de l'identité (1) du n° 82, en multipliant les deux membres par $g(x)$ et en posant

$$P\,g(x) = A_1, \qquad Q\,g(x) = B_1.$$

Si A, B, ..., L sont des polynomes en x, premiers deux à deux, et $g(x)$ un polynome quelconque, il existe des polynomes A_1, B_1, ..., L_1, tels que l'on ait identiquement

$$\frac{g(x)}{AB\ldots L} = \frac{A_1}{A} + \frac{B_1}{B} + \ldots + \frac{L_1}{L}.$$

82. Quels que soient les polynomes $g(x)$ et A, on peut mettre la fraction rationnelle $\frac{g(x)}{A^\alpha}$, où α désigne un nombre naturel, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$\frac{a_0}{A^\alpha} + \frac{a_1}{A^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{a_{\alpha-1}}{A} + E(x),$$

où a_0, a_1, ..., $a_{\alpha-1}$ désignent des polynomes en x, dont les degrés sont inférieurs à celui de A et où $E(x)$ est le quotient entier de la division de $g(x)$ par A^α (*voir* Ex. 51).

Si A, B, C, ..., L sont des polynomes premiers entre eux deux à deux et α, β, ..., λ des nombres naturels, on peut mettre la fraction rationnelle $\frac{g(x)}{A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda}$ sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda} = & \frac{a_0}{A^\alpha} + \frac{a_1}{A^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{a_{\alpha-1}}{A} \\ & + \frac{b_0}{B^\beta} + \frac{b_1}{B^{\beta-1}} + \ldots + \frac{b_{\beta-1}}{B} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \frac{l_0}{L^\lambda} + \frac{l_1}{L^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{l_{\lambda-1}}{L} + E(x), \end{aligned}$$

où $E(x)$ désigne le quotient entier de la division de $g(x)$ par $A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda$, et où a_0, ..., $a_{\alpha-1}$ sont des polynomes don le degré est inférieur à celui de A, b_0, ..., $b_{\beta-1}$ des polynomes dont le degré est inférieur à celui de B, etc....

Que devient cette proposition quand les polynomes A, B, ..., L sont du premier degré ?

83. Étant donnés le polynome $g(x)$ d'une part et, d'autre part, les polynomes $\varphi(x)$ et A, premiers entre eux, il existe un polynome a, de degré inférieur à A, et un seul, tel que $g(x) - a\,\varphi(x)$ soit divisible par A.

Déduire de là que la fraction rationnelle $\frac{g(x)}{A^\alpha\,\varphi(x)}$, où α désigne un nombre naturel, peut se mettre sous la forme

$$\frac{g(x)}{A^\alpha \varphi(x)} = \frac{a_0}{A^\alpha} + \frac{a_1}{A^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{a_{\alpha-1}}{A} + \frac{g_1(x)}{\varphi(x)},$$

où $g_1(x)$, a_0, a_1, ..., $a_{\alpha-1}$ sont des polynomes en x dont les α derniers sont de degré inférieur au degré de A. Il n'existe qu'un seul système de polynomes $g_1(x)$, a_0, a_1, ..., $a_{\alpha-1}$, satisfaisant à cette dernière condition, tels que l'égalité précédente soit une identité.

En conclure une nouvelle démonstration de la proposition principale de l'exercice précédent, et montrer que, lorsqu'on se donne les polynomes $g(x)$, A, B, ..., L et les nombres naturels α, β, ..., λ, la fraction

$$\frac{g(x)}{A^\alpha B^\beta \ldots L^\lambda}$$

ne peut se mettre sous la forme indiquée que d'une seule façon, c'est-à-dire que les polynomes a_0, ..., $a_{\alpha-1}$, ..., $l_{\lambda-1}$ sont entièrement déterminés, en supposant que la condition relative au degré de ces polynomes soit vérifiée.

84. Si A et B sont deux polynomes en x premiers entre eux, il ne peut exister de polynomes en x, y (dont l'un ne se réduise pas à une constante) tels que leur produit soit identique à $Ay + B$.

85. Si A, B, C sont trois polynomes en x, premiers entre eux dans leur ensemble, et tels que le polynome $B^2 - 4AC$ ne soit pas le carré d'un polynome en x, il ne peut exister deux polynomes en x, y (dont l'un ne se réduise pas à une constante) tels que leur produit soit identique à $Ay^2 + By + C$.

86. En désignant par m un nombre naturel, il y a deux polynomes (n° 82) $f(x)$ et $g(x)$ de degré $m - 1$, tels que l'on ait identiquement,

$$x^m f(x) + (1 - x)^m g(x) = 1;$$

montrer que l'on a identiquement

$$f(1 - x) = g(x), \qquad g(1 - x) = f(x).$$

87. Si Δ est le plus grand commun diviseur des polynomes A, B, C, ..., L, il existe des polynomes A′, B′, C′, ..., L′ tels que l'on ait identiquement

$$AA' + BB' + CC' + \ldots + LL' = \Delta.$$

88. Si les polynomes A_1, A_2, A_3 ont le même plus grand commun diviseur que les polynomes B_1, B_2, il existe des polynomes α_1, α_2, α_3, α'_1, α'_2, α'_3, β_1, β_2,

β_1', β_2', β_1'', β_2'' tels que l'on ait

$$\begin{aligned}
B_1 &= \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3,\\
B_2 &= \alpha_1' A_1 + \alpha_2' A_2 + \alpha_3' A_3,\\
A_1 &= \beta_1 B_1 + \beta_2 B_2,\\
A_2 &= \beta_1' B_1 + \beta_2' B_2,\\
A_3 &= \beta_1'' B_1 + \beta_2'' B_2\,;
\end{aligned}$$

réciproquement, l'existence de polynomes $\alpha_1, \ldots, \beta_2''$ vérifiant ces identités, implique que les polynomes A_1, A_2, A_3 aient le même plus grand commun diviseur que les polynomes B_1, B_2.

Généraliser cette proposition.

CHAPITRE VI.

NOMBRES IMAGINAIRES.

§ 1. — DÉFINITIONS : OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES IMAGINAIRES.

85. Les théories précédentes sont susceptibles de recevoir une extension considérable par l'introduction des nombres *complexes* [1] ou *imaginaires,* dont je vais maintenant m'occuper.

Ces nombres ont leur origine dans la résolution de l'équation du second degré.

Soit

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

une telle équation, à coefficients réels. On sait que, si ces coefficients vérifient la condition $b^2 - 4ac > 0$, l'équation a deux racines distinctes

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \tag{2}$$

ces deux racines deviennent égales quand $b^2 - 4ac$ est nul; lorsque $b^2 - 4ac$ est négatif, les formules (2) n'ont plus de sens, et il n'y a aucun nombre réel qui vérifie l'équation (1).

Si, dans le premier membre de l'équation (1), on remplace x par l'une ou l'autre des expressions (2) et que l'on développe les calculs en remplaçant le carré de $\sqrt{b^2 - 4ac}$ par $b^2 - 4ac$, on trouve identiquement 0; lorsque $b^2 - 4ac$ est négatif et que, par conséquent, le calcul que l'on vient de décrire n'a pas de sens, peut-on attribuer quelque signification à ce résultat?

---

[1] L'expression *nombre complexe* s'emploie dans un sens plus général que celui qui sera défini dans le présent Chapitre.

Dans ce cas, $b^2 - 4ac$ peut s'écrire $(-1)(4ac - b^2)$; le facteur $4ac - b^2$ est positif.

Lorsque α, β sont des nombres positifs, on peut écrire, en donnant aux radicaux leur signification arithmétique, $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$. On a eu l'idée d'employer la même formule lorsque α est négatif, plus particulièrement égal à -1, et d'écrire

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2};$$

le premier membre n'a pas de sens; dans le second membre, le facteur $\sqrt{-1}$ n'en a pas non plus; quoi qu'il en soit, les expressions (2), avec cette notation dénuée de sens, s'écrivent

$$\frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

En remplaçant, dans $ax^2 + bx + c$, x par l'une ou l'autre de ces expressions, en calculant, d'après les règles ordinaires, et en remplaçant, dans le résultat, $(\sqrt{-1})^2$ par -1, on trouve encore 0; ce calcul n'a pas plus de signification que le précédent, dont au fond il ne diffère pas; mais il devient facile de lui en donner une.

Le résultat de ce calcul peut en effet s'exprimer en disant que, si l'on désigne par i une variable réelle quelconque, et si l'on remplace, dans $ax^2 + bx + c$, x par l'expression

$$\frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

qui a une signification très claire dans le cas où nous nous plaçons $(4ac - b^2 > 0)$, le résultat, qui est évidemment un polynome du second degré en i, s'annule identiquement quand on y remplace i^2 par -1, c'est-à-dire (n° 53) qu'il est divisible par $i^2 + 1$. Au reste, la vérification est immédiate et l'on trouve que l'on a, identiquement en i,

$$ax^2 + bx + c = \frac{4ac - b^2}{4}(i^2 + 1),$$

quand on remplace dans le premier membre x par $\dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$.

Cette remarque, au premier abord, paraît bien peu importante;

mais le lecteur soupçonnera tout au moins sa portée en lisant l'affirmation suivante, qui est une des formes que l'on peut donner à la proposition connue sous le nom de *théorème fondamental de l'Algèbre* et sur la démonstration de laquelle je reviendrai plus tard.

Étant donné un polynome à deux variables x et i, dont les coefficients sont des nombres réels, il existe un binome $\alpha + \beta i$, à coefficients réels α et β, tel que si, dans le polynome donné, on remplace x par $\alpha + \beta i$, le résultat soit divisible par $i^2 + 1$. La proposition subsiste quand, dans le polynome donné, tous les termes qui contiennent i disparaissent, c'est-à-dire quand ce polynome se réduit à un polynome en x, à coefficients réels.

Le simple énoncé de ce théorème montre suffisamment que l'observation faite sur le cas d'un trinome du second degré est loin d'être isolée.

Si, par exemple, dans le polynome $x^3 - 2x + 4$, on remplace x par $1 + i$, il devient

$$\begin{aligned}(1+i)^3 - 2(1+i) + 4 &= i^3 + 3i^2 + i + 3\\ &= (i^2+1)(i+3);\end{aligned}$$

en y remplaçant de même x par $1 - i$, il deviendrait évidemment $(i^2+1)(-i+3)$. Le polynome proposé devient divisible par i^2+1 quand on y remplace x par $1+i$ ou $1-i$.

Ainsi, quand on remplace dans le polynome $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels vérifiant la condition $4ac - b^2 > 0$, x par $\dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, ou, dans le polynome $x^3 - 2x + 4$, x par $1 \pm i$, c'est le reste de la division par $i^2 + 1$ du résultat de la substitution qui est nul. On sera en droit de dire que les polynomes s'annulent respectivement quand on y remplace x par $\dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, ou x par $1 \pm i$, à condition de remplacer le résultat de la substitution par ce reste.

86. On est ainsi amené à développer des règles de calcul relatives à des expressions de la forme $a + a'i$, où a et a' sont des nombres réels quelconques et où i désigne, *pour le moment*, une variable réelle, règles dans lesquelles les résultats obtenus d'abord en suivant les règles ordinaires du calcul algébrique sont systématiquement remplacés par les restes d'une division par $i^2 + 1$.

Les expressions de la forme $a + a'i$, lorsque l'on convient de les soumettre à ces règles de calcul, prennent le nom de nombres *complexes* ou de nombres *imaginaires*.

Règle générale. — Si l'on a à effectuer des additions, des soustractions, des multiplications sur des expressions de la forme $a+a'i$, où a et a' sont des nombres réels, on commencera par effectuer ces opérations, d'après les règles habituelles du calcul des polynomes, comme si i désignait une variable réelle, puis on cherchera le reste de la division du résultat par i^2+1; ce reste sera, par définition, le résultat des opérations à effectuer sur les expressions de la forme $a+a'i$.

Si le reste est nul, le résultat sera regardé comme égal à o.

On trouve, par exemple, un résultat nul quand on remplace x par $1+i$ ou par $1-i$ dans le polynome x^3-2x+4; c'est ce qu'on entend en disant que ce polynome admet les racines imaginaires $1+i$, $1-i$. On trouve encore un résultat nul lorsque, dans le polynome ax^2+bx+c, où a, b, c sont des nombres réels vérifiant la condition $4ac-b^2>0$, on remplace x par l'un ou l'autre des deux nombres

$$-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i,$$

et c'est ce qu'on entend en disant que, dans ce cas, l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines imaginaires, dont l'expression est écrite plus haut.

La lettre i tient ainsi un rôle très particulier : dans un polynome où elle figure à la place d'une variable, on ne s'inquiète que du reste de la division par i^2+1; deux pareils polynomes sont regardés comme égaux quand les restes sont les mêmes, ou, ce qui revient au même, quand leur différence est divisible par i^2+1 [1]. En particulier, un polynome en i est regardé comme égal à son reste. Plus particulièrement le polynome i^2 est regardé comme égal à -1, qui est le reste de la division de i^2 par i^2+1. Dès que l'on fait cette con-

[1] Cette définition de l'égalité satisfait aux trois conditions que doit vérifier toute définition de l'égalité : un objet est égal à lui-même; si un premier objet est égal à un second, le second objet est égal au premier; si deux objets sont égaux à un troisième, ils sont égaux entre eux.

vention, il est clair qu'on ne peut plus regarder la lettre i comme une variable réelle.

Il faut se garder, partout où quelque confusion serait possible, d'employer la lettre i avec le sens qu'on vient de spécifier et un autre sens.

Un nombre imaginaire $a + a'i$ est défini quand on donne les deux nombres réels a, a' au moyen desquels il est formé : ces deux nombres jouent un rôle très différent; l'un a s'appelle la *partie réelle* du nombre imaginaire, l'autre a' s'appelle le *coefficient* de i.

Deux nombres imaginaires formés avec la même partie réelle et le même coefficient de i doivent naturellement être regardés comme le *même* nombre imaginaire; si, dans les deux nombres, les parties réelles ou les coefficients de i ne sont pas les mêmes, les deux nombres sont *distincts*.

En d'autres termes, deux nombres imaginaires $a + a'i$, $b + b'i$, où a, a', b, b' sont des nombres réels, sont dits *égaux* et l'on écrit

$$a + a'i = b + b'i,$$

lorsque l'on a $a = a'$, $b = b'$ et seulement dans ce cas; l'égalité unique $a + a'i = b + b'i$ remplace en réalité deux égalités.

Cette définition de l'égalité de deux nombres imaginaires est la même que celle qu'on a adoptée plus haut pour deux polynomes en i, puisqu'un binome $a + a'i$, du premier degré en i, est le reste de la division de ce binome par $i^2 + 1$.

Lorsque, dans l'expression $a + a'i$, le coefficient de i est nul, on la confond avec le nombre réel a : les nombres complexes comprennent donc les nombres réels comme cas particulier. De même, en Arithmétique, une fraction dont le dénominateur est 1 est regardée comme la même chose que son numérateur.

Cette convention est légitime, puisque les calculs sur des nombres imaginaires dans lesquels les coefficients de i seraient nuls, effectués d'après la règle qu'on a donnée plus haut, se réduisent évidemment aux calculs effectués sur des nombres réels, d'après les règles qui concernent ces nombres. Cette observation s'appliquera à la division quand on l'aura définie.

Les nombres imaginaires comprenant les nombres réels, il est permis de dire un nombre, au lieu de dire un nombre imaginaire; cette convention, toute pareille à celle qu'on fait en Arithmétique quand on passe des nombres entiers aux fractions, est d'autant plus avantageuse qu'il est naturel d'opposer dans une certaine mesure les nombres *imaginaires* aux nombres réels, c'est-à-dire de sous-entendre, quand on parle d'un nombre imaginaire, que le coefficient de i, dans ce nombre, n'est pas nul.

Un nombre imaginaire dans lequel la partie réelle est nulle et qui, ainsi, est représenté par un symbole tel que $a'i$ est dit *purement imaginaire*.

Lorsque la partie réelle et le coefficient de i d'un nombre imaginaire sont nuls l'un et l'autre, et seulement dans ce cas, le nombre imaginaire est dit *nul;* on le représente par o. Cette convention est contenue dans celle qui fait comprendre les nombres réels dans les nombres imaginaires.

Deux nombres imaginaires $a + a'i$, $a - a'i$ dans lesquels les parties réelles sont les mêmes et les coefficients de i des nombres symétriques sont dits *conjugués :* deux nombres imaginaires conjugués ne peuvent être égaux sans que les coefficients de i soient nuls; un nombre réel est son propre conjugué.

Deux nombres imaginaires $a + a'i$, $-a - a'i$ dans l'un desquels la partie réelle et le coefficient de i se déduisent de la partie réelle et du coefficient de i dans l'autre en les changeant de signe sont dits *symétriques*. L'expression *égaux et de signes contraires* que l'on emploie quelquefois est incorrecte, puisque le signe d'un nombre imaginaire n'est pas quelque chose de défini ([1]). Deux nombres symétriques ne peuvent être égaux que s'ils sont nuls l'un et l'autre. Deux nombres purement imaginaires conjugués sont symétriques.

87. D'après ce qu'on vient de dire, un nombre imaginaire est entièrement défini par deux nombres réels a, a' qui jouent un rôle distinct; rien n'empêche, si on le veut, de regarder la lettre i comme un simple signe accolé à l'un des deux nombres a, a' pour le distinguer de l'autre : on peut même la supprimer et, au lieu de $a + a'i$, écrire

---

([1]) Il y a en réalité *deux* signes à considérer : le signe de la partie réelle, le signe de la partie imaginaire. Toutefois, j'emploierai à l'occasion l'expression *changer de signe un nombre imaginaire* avec le même sens que *remplacer un nombre imaginaire par son symétrique*.

par exemple (a, a'), en convenant d'écrire toujours le premier le nombre qui tiendra le rôle de la partie réelle et, le second, le nombre qui tiendra le rôle du coefficient de i; dans cette notation, le nombre réel a se représenterait par $(a, 0)$, le nombre purement imaginaire $a'i$ par la notation $(0, a')$, le nombre i par la notation $(0, 1)$, le nombre 0 par la notation $(0, 0)$.

Le lecteur peut, s'il le veut, se représenter ainsi un nombre imaginaire comme un couple de nombres réels, de même qu'on peut, en Arithmétique, se représenter une fraction comme un couple de deux nombres entiers. Naturellement, sur ces nouveaux nombres (ces couples de nombres réels), toutes les définitions relatives à l'égalité, à l'addition, à la soustraction, à la multiplication, à la division doivent alors être reprises l'une après l'autre. Ce qui précède suffit évidemment à la définition de l'égalité.

Quant aux opérations d'addition, de soustraction, de multiplication sur les nombres réels ou imaginaires, je les définirai toutes par la règle du numéro précédent en insistant, pour chacune de ces opérations, sur la façon dont on calcule la partie réelle et le coefficient de i dans le résultat.

Rien n'empêcherait de prendre chacune des règles particulières à laquelle je parviendrai ainsi comme la définition, au point de vue qu'on vient d'indiquer, de l'opération correspondante, effectuée sur des couples de nombres réels, et d'établir ensuite les propriétés fondamentales de cette opération, qui, pour nous, résulteront de la considération des restes de la division par i^2+1.

Avant d'entrer dans le détail des opérations, je dois faire observer qu'il n'y a aucun inconvénient à représenter par une seule lettre un nombre imaginaire : on s'est déjà souvent servi d'une lettre pour désigner tout un polynome; il s'agira maintenant d'un polynome en i, ou plutôt du reste de la division de ce polynome par i^2+1.

88. **Addition et soustraction.** — Étant donnés deux ou plusieurs nombres (réels ou imaginaires)

$$\mathrm{A} = a + a'i, \qquad \mathrm{B} = b + b'i, \qquad \mathrm{C} = c + c'i, \qquad \ldots,$$

où $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots$ sont des nombres réels, on doit, pour effectuer leur somme, faire la somme

$$a + a'i + b + b'i + c + c'i + \ldots = (a + b + c + \ldots) + (a' + b' + c' + \ldots)i,$$

comme si i était une variable réelle, puis prendre le reste de la division par $i^2 + 1$; puisque la somme est du premier degré, au plus, en i, elle est précisément le reste cherché : la partie réelle de la somme est la somme des parties réelles; le coefficient de i est la somme des coefficients de i. En se plaçant au point de vue du numéro précédent, ce serait là la *définition* de l'addition des nombres imaginaires.

Par exemple, la somme des nombres $2 + 3i$, $-i$, $\frac{1}{3}$, $4i$ est $\frac{7}{3} + 6i$; la somme des nombres $2i$, $1 - i$, $-i$ est 1.

Il est manifeste que, dans une somme de deux ou plusieurs nombres, on peut ranger les termes dans l'ordre qu'on veut, remplacer tels termes que l'on veut par leur somme effectuée, ajouter 0 à un nombre sans le changer, supprimer les termes qui se détruisent. On peut dire encore que l'addition des nombres réels ou imaginaires, pour laquelle on adopte le même signe $+$ que pour les nombres réels, obéit aux lois qu'expriment les égalités qui suivent :

$$\begin{aligned} A + B &= B + A, \\ A + (B + C) &= (A + B) + C, \\ A + 0 &= A, \end{aligned}$$

qui constituent les propriétés fondamentales de l'addition.

Un nombre $a + a'i$ peut être regardé comme la somme de sa partie réelle a et de sa partie (purement) imaginaire $a'i$.

La somme de deux nombres imaginaires conjugués est le double de la partie réelle de ces nombres.

La somme de deux nombres symétriques (réels ou imaginaires) est 0; la somme de deux nombres ne peut être 0 que s'ils sont symétriques.

La différence $A - B$ des deux nombres $a + a'i$, $b + b'i$ est le nombre $a - b + (a' - b')i$; c'est le seul nombre qui, ajouté à B, reproduise A; elle est nulle si A est égal à B, et seulement dans ce cas.

On peut affecter du signe $+$ ou du signe $-$ une lettre qui représente un nombre imaginaire; $+A$ désigne le même nombre que A, $-A$ le nombre symétrique de A.

Dans une expression telle que $A - B + C - D$, les signes $-$, $+$, $-$ peuvent être regardés comme des signes d'opération : on a à retrancher B de A, à ajouter C au résultat, puis à retrancher D; ces signes peuvent être attachés aux lettres qui les suivent; l'expression précédente représente alors la somme des nombres A, $-B$, $+C$, $-D$; les deux significations sont équivalentes.

89. **Multiplication.** — Pour faire le produit de deux ou plusieurs nombres, des nombres

$$A = a + a'i, \qquad B = b + b'i, \qquad C = c + c'i,$$

par exemple, on doit faire le produit des trois binomes, comme si i était une variable réelle; on obtient ainsi

$$abc + (a'bc + ab'c + abc')i + (ab'c' + a'bc' + a'b'c)i^2 + a'b'c'i^3;$$

on a ensuite à chercher le reste de la division par $i^2 + 1$, ou à remplacer i^2 par -1, i^3 par $-i$, ce qui donne

$$(abc - ab'c' - a'bc' - a'b'c) + (a'bc + ab'c + abc' - a'b'c')i.$$

On ne modifie pas le reste de la division par $i^2 + 1$ quand on intervertit l'ordre des facteurs, ou que l'on remplace deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué, ou encore par le reste de la division par $i^2 + 1$ de ce produit partiel : dans un produit de facteurs imaginaires on peut intervertir l'ordre des termes, grouper les facteurs comme on veut. On ne change pas un produit en introduisant ou en supprimant un facteur égal à 1, ou en supprimant un groupe de facteurs dont le produit est égal à 1.

Lorsque, dans un produit de nombres réels ou imaginaires, un facteur est nul, le produit est nul : car le polynome en i, obtenu en faisant la multiplication comme si i était une variable réelle, est divisible par $i^2 + 1$.

Réciproquement, si un produit de facteurs est nul, l'un des facteurs est nul. En effet, dire que le produit des nombres imaginaires $a + a'i$, $b + b'i$, $c + c'i$, par exemple, est nul, c'est dire que le polynome en i

obtenu en développant

$$(a+a'i)(b+b'i)(c+c'i)$$

comme si i était une variable réelle, est divisible par i^2+1. Restons un moment à ce point de vue; si aucun des binomes $a+a'i$, $b+b'i$, $c+c'i$ n'est identiquement nul, c'est que chacun d'eux est premier avec i^2+1; il en est de même de leur produit (n° 76), qui, ainsi, ne peut être divisible par i^2+1; le produit ne peut donc être nul, si l'on se place au point de vue du calcul des nombres imaginaires.

Pour multiplier une somme de deux nombres imaginaires A, B par un troisième C, on peut multiplier successivement les deux nombres A, B par C et faire la somme des produits. En d'autres termes on peut écrire, en employant pour les nombres imaginaires les mêmes notations que pour les nombres réels,

$$(A+B)C = AC+BC.$$

L'égalité est en effet évidente, quand on effectue simplement les opérations sur les binomes $a+a'i$, $b+b'i$, $c+c'i$, comme si i était une variable quelconque (n° 33); les restes de la division par i^2+1 des deux membres sont les mêmes; et le reste relatif au premier membre n'est pas changé quand on remplace $A+B$ par son reste, le reste relatif au second membre n'est pas changé quand on y remplace A, B, C par leurs restes (n° 76).

La proposition et la démonstration s'étendent au cas où la somme contient autant de termes qu'on veut; elle s'applique aussi bien à une différence qu'à une somme, puisqu'une différence peut être regardée comme une somme. Elle s'applique en particulier à la multiplication d'un nombre imaginaire, $3-5i$ par exemple, par un nombre réel -2, ou purement imaginaire $3i$; le produit est dans le premier cas, $-6+10i$, et, dans le second cas, $9i-15i^2$, que l'on doit remplacer par $15+9i$.

90. Arrêtons-nous sur le cas où il s'agit du produit de deux facteurs $A=a+a'i$, $B=b+b'i$.

Le produit développé de ces deux nombres est

$$ab+(ab'+a'b)i+a'b'i^2$$

ou, en remplaçant i^2 par -1,

$$ab - a'b' + (ab' + a'b)i;$$

par exemple, le produit de $7 - 5i$ par $1 + i$ est $12 + 2i$.

L'expression obtenue pour le produit des deux nombres imaginaires $a + a'i$, $b + b'i$ pourrait, en se plaçant au point de vue du n° 87, être regardée comme la définition du produit de deux nombres imaginaires; le produit de deux nombres imaginaires A, B étant défini, le produit de trois nombres A, B, C s'obtiendrait, par définition, en faisant le produit des deux premiers par le troisième d'après la même règle; ainsi, en supposant comme plus haut $C = c + c'i$, on aurait par définition

$$ABC = (ab - a'b')c - (ab' + a'b)c' + [(ab - a'b')c' + (ab' + a'b)c]i;$$

le résultat est naturellement le même que plus haut. En se plaçant à ce point de vue, on aurait à vérifier les égalités

$$\begin{gathered} AB = BA, \\ (AB)C = A(BC), \\ A \times 1 = A, \\ A(B + C) = AB + AC, \end{gathered}$$

qui constituent les propriétés fondamentales de la multiplication, et qui sont comprises dans les propositions générales établies au numéro précédent; ces propositions peuvent, inversement, être déduites des égalités qu'on vient d'écrire.

Signalons quelques cas particuliers :

Le produit de i par i est -1; en d'autres termes on a $i^2 = -1$.

Le carré d'un nombre imaginaire $a + a'i$ est $a^2 - a'^2 + 2aa'i$. Il est réel quand le nombre dont on fait le carré est ou réel, ou purement imaginaire et seulement dans ces deux cas; il est positif dans le premier, négatif dans le second.

91. **Valeur absolue d'un nombre imaginaire.** — Le produit de deux nombres imaginaires conjugués $a + a'i$, $a - a'i$ est réel : c'est la somme $a^2 + a'^2$ du carré de la partie réelle et du carré du coefficient de i.

On désigne sous le nom de *module* ou de *valeur absolue* [1] d'un nombre imaginaire $a + a'i$, la racine carrée prise avec le sens arithmétique de la somme des carrés de la partie réelle et du coefficient de i. La valeur absolue de $a + a'i$ est donc le nombre positif $\sqrt{a^2 + a'^2}$; si le nombre $a + a'i$ est réel, c'est-à-dire si a' est nul, la valeur absolue se réduit au nombre positif $\sqrt{a^2}$, c'est $+a$, ou $-a$ suivant que a est positif ou négatif; c'est, pour les nombres réels, la signification à laquelle le lecteur est habitué; la valeur absolue du nombre réel ou imaginaire $A = a + a'i$ se représente par le symbole $|A|$ ou $|a + a'i|$.

La valeur absolue d'un nombre nul est o; si la valeur absolue d'un nombre réel ou imaginaire est nulle, on peut affirmer que ce nombre est o, puisque $\sqrt{a^2 + a'^2}$, où a, a' sont des nombres réels, ne peut être nul que si l'on a séparément $a = 0$, $a' = 0$.

Les valeurs absolues de deux nombres conjugués sont égales.

Le produit de deux nombres conjugués est égal au carré de la valeur absolue de l'un ou de l'autre.

La valeur absolue du produit de deux nombres est égale au produit des valeurs absolues de ces nombres. On vérifie en effet de suite l'identité

$$(ab - a'b')^2 + (ab' + a'b)^2 = (a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2)$$

qui exprime que le carré de la valeur absolue du produit des deux nombres $a + a'i$, $b + b'i$ est égal au produit des carrés des valeurs absolues de ces deux nombres : comme la valeur absolue est essentiellement positive, le théorème énoncé est démontré.

Il s'étend évidemment, de proche en proche, au cas de trois, quatre, ..., nombres : au reste, on peut démontrer directement que, pour un nombre quelconque de facteurs, le carré de la valeur absolue du produit est égal au produit des carrés des valeurs absolues des facteurs, en faisant d'abord la remarque suivante, qui est importante par elle-même.

---

[1] C'est le terme dont je me servirai, d'autant que le mot *module* a une foule de significations en mathématiques. Il est désirable d'en supprimer au moins une. Autrement on est amené à dire le *module* du *module*, en employant le mot module dans deux sens absolument différents.

La *norme* d'un nombre imaginaire $a + a'i$ est $a^2 + a'^2$; c'est le carré de sa valeur absolue.

Si, en effectuant des additions, soustractions, multiplications, sur des nombres imaginaires, on a trouvé comme résultat le nombre imaginaire $p+p'i$, (p et p' réels), et que l'on effectue ensuite les mêmes opérations sur les nombres conjugués, on trouvera comme nouveau résultat le nombre $p-p'i$, conjugué du premier résultat.

Cette proposition devient évidente si l'on se reporte à la règle du n° 86, et qu'on regarde i comme une variable réelle. Les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, effectuées sur les nombres imaginaires donnés conduisent à un certain polynome $f(i)$ à coefficients réels; les mêmes opérations effectuées sur les nombres conjugués, qui se déduisent des premiers en changeant i en $-i$, conduiraient au polynome $f(-i)$, obtenu en changeant i en $-i$ dans $f(i)$; dire que le résultat des premières opérations, effectuées d'après la règle du n° 86, est $p+p'i$, cela revient à dire que $p+p'i$ est le reste de la division par i^2+1 de $f(i)$, en d'autres termes que l'on a, en désignant par $\varphi(i)$ un polynome en i à coefficients réels, l'identité en i,

$$f(i)=p+p'i+(i^2+i)\varphi(i);$$

si l'on change dans cette identité i en $-i$, elle devient

$$f(-i)=p-p'i+(i^2+i)\varphi(-i);$$

elle montre que $p-p'i$ est le reste de la division de $f(-i)$ par i^2+1; c'est ce qu'il fallait établir.

Revenons, après cette remarque générale, au théorème concernant le produit de plusieurs facteurs. Considérons, par exemple, les trois facteurs $a+a'i$, $b+b'i$, $c+c'i$ et désignons leur produit par $p+p'i$; l'égalité

$$(a+a'i)(b+b'i)(c+c'i)=p+p'i$$

entraîne

$$(a-a'i)(b-b'i)(c-c'i)=p-p'i;$$

en multipliant membre à membre et en groupant ensemble les facteurs conjugués, on a

$$(a^2+a'^2)(b^2+b'^2)(c^2+c'^2)=p^2+p'^2.$$

C'est ce qu'il fallait établir.

Cette proposition fournit une seconde démonstration de ce fait qu'un produit ne peut être nul sans qu'un facteur soit nul; en effet, si $p+p'i$ est nul, c'est-à-dire si l'on a $p=0$, $p'=0$, le produit des nombres réels, $a^2+a'^2$, $b^2+b'^2$, $c^2+c'^2$, est nul; l'un de ces nombres est nul; si c'est $a^2+a'^2$, par exemple, il faut que l'on ait $a=0$, $a'=0$, c'est-à-dire que $a+a'i$ est nul.

92. Il me reste à définir la division de deux nombres imaginaires :

On appellera quotient de la division du nombre imaginaire $a+a'i$ par le nombre $b+b'i$ un nombre imaginaire $c+c'i$ dont le produit par $b+b'i$ soit égal à $a+a'i$.

L'égalité

$$(b+b'i)(c+c'i)=a+a'i$$

équivaut aux deux égalités

$$\begin{aligned} bc-b'c'&=a,\\ b'c+bc'&=a'; \end{aligned}$$

ces deux égalités peuvent être regardées comme deux équations du premier degré dont les deux inconnues seraient c, c'; le déterminant des deux équations est $b^2+b'^2$; il n'est pas nul, sauf dans le cas où le diviseur $b+b'i$ serait nul; si l'on exclut ce cas, les deux équations admettent une solution et une seule; le problème posé admet une solution et une seule, à savoir le nombre imaginaire

$$\frac{ab+a'b'}{b^2+b'^2}+\frac{a'b-ab'}{b^2+b'^2}\,i;$$

par exemple, le quotient de la division de $3+i$ par $1+i$ est $2-i$.

L'égalité

$$(b+b'i)(c+c'i)=a+a'i,$$

en y changeant i en $-i$ montre que, si $c+c'i$ est le quotient de la division de $a+a'i$ par $b+b'i$, le quotient de la division de $a-a'i$ par $b-b'i$ sera $c-c'i$.

Au lieu de dire « le quotient de la division de A par B » je dirai le plus souvent « rapport de A à B » et je représenterai ce rapport par la notation $\frac{A}{B}$: c'est le nombre qui, multiplié par B, reproduit A. Les mots *dividende* et *diviseur* sont remplacés alors par les mots *numérateur, dénominateur*.

La valeur absolue d'un rapport est le rapport des valeurs absolues du numérateur et du dénominateur, ainsi qu'il résulte du théorème analogue relatif à la multiplication.

L'inverse d'un nombre non nul B, ou le nombre qu'il faut multiplier par B pour que le produit soit 1, se représente, d'après la notation précédemment expliquée, par $\frac{1}{B}$.

En supposant $B = b + b'i$, on a

$$\frac{1}{B} = \frac{b}{b^2 + b'^2} - \frac{b'}{b^2 + b'^2} i;$$

le rapport C de A à B est le produit de A par $\frac{1}{B}$, comme on le vérifie sans peine et comme il résulte de l'égalité

$$B\left(\frac{1}{B} A\right) = \left(B \frac{1}{B}\right) A = A.$$

Les propriétés des fractions à termes réels qui reposent sur la définition, en vertu de laquelle le numérateur est égal au produit du dénominateur par la valeur de la fraction, s'étendent sans changement aux fractions à termes imaginaires.

On peut, par exemple, multiplier ou diviser les termes d'une fraction à termes réels ou imaginaires, par un même nombre non nul.

Ce théorème donne le moyen le plus commode pour effectuer une division; considérons par exemple la fraction $\frac{a + a'i}{b + b'i}$, on multipliera le numérateur et le dénominateur par le nombre $b - b'i$ conjugué du dénominateur; on trouve ainsi

$$\frac{(a + a'i)(b - b'i)}{b^2 + b'^2} = \frac{ab + a'b' + (a'b - ab')i}{b^2 + b'^2}.$$

On peut réduire deux ou plusieurs fractions au même dénominateur, ajouter des fractions qui ont même dénominateur.

Le produit de deux fractions se fait en divisant le produit des numérateurs par le produit des dénominateurs. Pour obtenir l'inverse d'une fraction, il suffit de la renverser. Pour diviser une fraction par une fraction, on multiplie la fraction dividende par l'inverse du diviseur.

93. **Racine carrée.** — On montrera bientôt comment on peut obtenir, en général, la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre imaginaire ; je veux dire ici un mot de la racine carrée :

La racine carrée d'un nombre imaginaire $a + bi$ (a, b réels) sera, par définition, un nombre imaginaire $x + iy$ (x, y réels) tel que l'on ait $(x + iy)^2 = a + bi$, ou

$$x^2 - y^2 = a, \qquad 2xy = b. \tag{1}$$

Supposons b différent de 0, x et y devront être différents de 0 ; on tire de la seconde équation

$$y = \frac{b}{2x}, \tag{2}$$

et en portant dans la première,

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0.$$

L'équation en x^2 ainsi obtenue a une racine positive

$$x^2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

et une racine négative, qu'il faut écarter, puisqu'on veut avoir pour x une valeur réelle ; on aura ainsi deux valeurs symétriques pour x, à savoir

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}};$$

à chacune desquelles correspond une valeur de y par l'équation (2). On reconnaît immédiatement, en remontant la suite des calculs, que les valeurs ainsi trouvées pour x, y vérifient les équations (1).

Le problème admet deux solutions et deux solutions seulement : ces deux solutions sont des nombres symétriques qu'on peut écrire sous la forme

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{bi}{\sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}}}\right), \tag{3}$$

en donnant aux radicaux la signification arithmétique.

De l'égalité

$$(a+\sqrt{a^2+b^2})(-a+\sqrt{a^2+b^2}) = b^2,$$

on tire de suite

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}} = \varepsilon b,$$

en désignant par ε un nombre égal à $+1$ ou à -1, suivant que b est positif ou négatif; le facteur ε a été introduit afin que le second membre soit positif comme le premier [1]; on en déduit

$$\frac{b}{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}} = \varepsilon\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}};$$

d'où cette seconde forme de la solution

$$(4) \qquad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}+i\varepsilon\sqrt{-a+\sqrt{a^2+b^2}}\right),$$

qui est plus élégante, mais moins avantageuse pour le calcul numérique, puisqu'elle exige une extraction de racine carrée de plus que la première.

Enfin, si b est nul, c'est-à-dire si le nombre proposé est réel, la seconde équation (1) montre que l'un des nombres y, x doit être nul; en vertu de la première équation, on doit avoir alors soit $x^2 = a$, soit $y^2 = -a$; puisque x, y doivent être réels, on prendra $y = 0$, $x = \pm\sqrt{a}$ si a est positif, $x = 0$, $y = \pm\sqrt{-a}$ si a est négatif; dans le premier cas, les deux solutions du problème proposé sont les nombres réels $\pm\sqrt{a}$; dans le second cas, les deux nombres purement imaginaires $\pm i\sqrt{-a}$.

Ces deux solutions sont d'ailleurs comprises dans la formule (4), puisque $\sqrt{a^2+b^2}$ se réduit alors à $\sqrt{a^2}$, c'est-à-dire à a si a est positif, à $-a$ si a est négatif.

---

(1) Le nombre ε ainsi défini se représente souvent par le symbole sgn b (signe de b).

Exemple. — Les deux nombres dont le carré est $1 + i$ sont

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\sqrt{2}} + i\sqrt{-1+\sqrt{2}}\right);$$

les deux nombres dont le carré est i sont $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

Si l'on applique les formules précédentes, dans le cas où $a = -1$, $b = 0$, on trouve que les deux nombres dont le carré est -1 sont $\pm i$. Si l'on convient de représenter en général par $\sqrt{a + bi}$ un nombre imaginaire dont le carré est $a + bi$, on sera conduit à poser

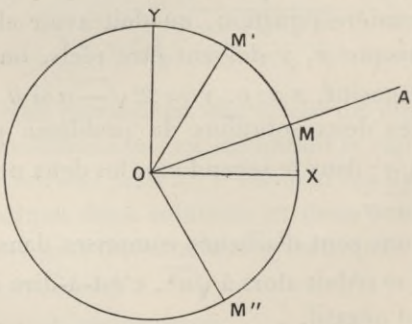
$$\sqrt{-1} = i$$

et à écrire un nombre imaginaire $\alpha + \beta i$ (α, β réels) sous la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$. On est ainsi ramené à la notation qui nous a servi de point de départ, mais qui, maintenant, est justifiée.

§ 2. — REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES IMAGINAIRES.

94. Les nombres imaginaires sont susceptibles d'une représentation géométrique sur laquelle je vais maintenant insister. Mais, auparavant, je rappellerai quelques définitions.

Fig. 25.



Considérons un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires. Pour fixer, dans ce plan, une direction, il suffit évidemment de fixer la parallèle menée à cette direction, dans le même sens, à partir de l'origine : je ne considérerai donc que des directions partant de ce point; en particulier l'angle de deux directions sera l'angle des deux parallèles à ces directions, à partir de l'origine.

Pour fixer une direction à partir de l'origine O, ou, si l'on veut, une demi-droite ayant son origine au point O, il suffit évidemment de se donner un point A situé sur cette demi-droite (et non sur la demi-droite opposée), ou, ce qui revient au même, les coordonnées a, b de ce point. Le point unique M où la demi-droite considérée rencontre le cercle décrit de O comme centre avec un rayon égal à l'unité de longueur est particulièrement utile à considérer; ses coordonnées α, β s'appellent les *cosinus directeurs* de la demi-droite considérée; elles vérifient la relation $\alpha^2+\beta^2=1$. Inversement, deux nombres réels quelconques vérifiant cette relation sont les coordonnées d'un point unique sur le cercle et sont les cosinus directeurs de la demi-droite qui part de l'origine et aboutit en ce point.

Si l'on désigne par r le nombre positif qui mesure la longueur OA, on a

$$a=\alpha r, \qquad b=\beta r, \qquad r=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \alpha=\frac{a}{r}, \qquad \beta=\frac{b}{r};$$

le radical est pris avec son sens arithmétique. Ces formules permettent, quand on se donne a, b, de calculer r, α, β sans ambiguïté.

Soient X, Y les points où les directions positives des axes des x et des y rencontrent le cercle; un mobile M, qui se meut sur le cercle toujours dans le même sens (sans oscillations), se meut dans le sens *direct* ou *positif* s'il se meut dans le même sens qu'un mobile qui partirait du point X pour aller vers le point Y en décrivant le quart du cercle; dans le cas contraire, il se meut dans le sens *indirect* ou *négatif*. Dans les mêmes conditions, on dit que le rayon OM, ou une parallèle quelconque à ce rayon, menée dans le même sens à partir d'un point fixe, tourne dans le sens direct ou dans le sens indirect.

Un nombre θ quelconque peut être regardé comme l'*abscisse circulaire* d'un point M sur le cercle : on obtient ce point M en imaginant un mobile qui se meuve sur le cercle, sans osciller, en partant du point X (origine des arcs), dans le sens positif ou dans le sens négatif, suivant que θ est positif ou négatif, et qui s'arrête lorsqu'il a parcouru, sur le cercle, un chemin dont la longueur est la valeur absolue de θ. Le point où le mobile s'arrête est le point M dont l'abscisse circulaire est θ. Son abscisse et son ordonnée sont, par définition, les nombres $\cos\theta$ et $\sin\theta$; $\operatorname{tang}\theta$ est, par définition, la pente de la droite qui joint le point O au point M.

Inversement, à chaque position du point M sur le cercle correspondent une infinité de nombres dont chacun peut être regardé comme l'abscisse circulaire du point M : ces nombres forment une progression arithmétique, indéfinie dans les deux sens, dont la raison est 2π. Tous ces nombres ont même cosinus, même sinus, même tangente.

Si l'on considère deux directions OM, OM′, définies, comme on l'a expliqué plus haut, par deux points M, M′ du cercle, et si l'on attribue un ordre à ces deux directions, en sorte que OM soit la première et OM′ la seconde, l'angle (OM, OM′) de ces deux directions, ou l'arc MM′, sera, par définition, l'abscisse circulaire du point M′, définie comme plus haut, mais en prenant le point M comme origine des arcs (et non le point X). Le sens positif reste celui qu'on a défini plus haut. Cet angle ou cet arc ne sont définis qu'à un multiple près de 2π.

En d'autres termes, toutes leurs déterminations s'obtiennent en ajoutant à l'une quelconque d'entre elles le produit de 2π par un nombre entier quelconque : la *valeur principale* de l'angle (OM, OM′) ou de l'arc MM′ est celle de ces déterminations qui est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$; elle est entièrement déterminée, sauf dans le cas où les deux directions sont *opposées,* où les deux points M, M′ sont diamétralement opposés; elle peut alors être prise, à volonté, égale à π ou à $-\pi$. En écartant ce cas d'exception, la valeur principale de l'angle (OM, OM′) est positive ou négative, suivant que l'angle de OM et de OM′ considéré comme une figure géométrique a, ou non, la même disposition que l'angle (OX, OY) considéré aussi comme une figure géométrique.

La somme des deux angles (OM, OM′) et (OM′, OM) est nulle ou égale à un multiple de 2π.

Si l'on considère trois directions à partir du point O ou, si l'on veut, trois points M, M′, M″ sur le cercle, il est clair qu'on peut se mouvoir sur le cercle, à partir du point M, de manière à rencontrer d'abord le point M′, puis le point M″; on voit ainsi qu'il existe une détermination des angles telle que l'on ait

$$(\mathrm{OM}, \mathrm{OM}'') = (\mathrm{OM}, \mathrm{OM}') + (\mathrm{OM}', \mathrm{OM}''),$$

et, par conséquent, on aura, pour n'importe quelle détermination des angles,

$$\begin{gathered}(\mathrm{OM}, \mathrm{OM}'') = (\mathrm{OM}, \mathrm{OM}') + (\mathrm{OM}', \mathrm{OM}'') + 2k\pi,\\ (\mathrm{OM}', \mathrm{OM}'') + (\mathrm{OM}'', \mathrm{OM}) + (\mathrm{OM}, \mathrm{OM}') = 2h\pi,\end{gathered}$$

k et h étant des nombres entiers dont la valeur dépend des déterminations choisies pour les angles, ou les arcs.

Si l'on se donne la direction OM, ou le point M, et l'une des déterminations de l'angle (OM, OM′), la direction OM′, ou le point M′, sont déterminés sans ambiguïté.

En particulier, la direction OM, elle-même, peut être déterminée par l'angle $\theta = (\mathrm{OX}, \mathrm{OM})$; $\frac{\pi}{2} - \theta$ est alors une des déterminations de l'angle (OM, OY); les cosinus directeurs de OM sont

$$\alpha = \cos\theta, \qquad \beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta.$$

Lorsqu'on se donne les coordonnées a et b du point A, on a vu plus haut comment on pouvait calculer les cosinus directeurs de la direction OA ou OM, en désignant par M le point unique où le cercle est rencontré par la demi-droite OM; l'angle θ est alors déterminé, à un multiple près de 2π, par les formules

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Cela revient à dire que, si l'on se donne deux nombres a, b qui ne soient pas nuls à la fois, il existe un seul nombre positif r et un seul angle θ (abstraction faite des multiples de 2π) tels que l'on ait $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$. Si l'on veut choisir pour θ sa détermination principale, comprise entre $-\pi$ et π, θ devra être pris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ si a est positif, entre o et $\frac{\pi}{2}$ ou entre o et $-\frac{\pi}{2}$ suivant que b est positif ou négatif; entre $\frac{\pi}{2}$ et π ou entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$ si a est négatif; dans le premier intervalle si b est positif, dans le second si b est négatif; si b est nul et a négatif, la détermination principale peut être prise égale à π ou à $-\pi$. Dans ces conditions, les tables trigonométriques (centésimales, par exemple) permettent de trouver un angle exprimé en grades, compris entre o et 100, dont le cosinus ou le sinus aient la même valeur absolue que $\cos\theta$ ou $\sin\theta$, et les remarques précédentes permettent de calculer ensuite l'angle θ.

Toutefois, il est préférable, quand on se donne les valeurs numériques de a et de b et que l'on veut calculer r et θ, de faire le calcul en partant de la formule

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{b}{a}.$$

On cherche dans la table le nombre g de grades compris entre o et 100, tel que la tangente correspondante soit la valeur absolue de $\frac{b}{a}$; on prend à la même page le logarithme du cosinus ou du sinus du même arc, en sorte que l'on ait en posant $\theta' = \frac{g\pi}{200}$,

$$\operatorname{tang}\theta' = \left|\frac{b}{a}\right|, \qquad \cos\theta' = \frac{|a|}{r}, \qquad \sin\theta' = \frac{|b|}{r};$$

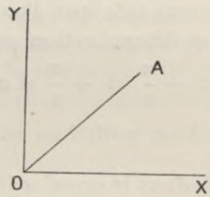
l'une des deux dernières formules donnera r par un calcul facile, puisque l'on a déjà les logarithmes de $|a|$ et de $|b|$. D'après les règles précédentes, si a est positif, on prendra $\theta = \theta'$ ou $\theta = -\theta'$ suivant que b sera positif ou négatif, et, si a est négatif, $\theta = \pi - \theta'$ ou $\theta = -\pi + \theta'$ suivant que b sera positif on négatif [1].

---

[1] Il convient de prévenir le lecteur, une fois pour toutes, que les angles ou arcs dont il sera question dans le présent Livre seront toujours exprimés en radiants (ou en parties du rayon) et non en grades ni en degrés. C'est pour appeler son attention sur ce point et sur les précautions à prendre dans les calculs numériques, que j'ai insisté sur les détails que l'on vient de lire.

J'ai cru utile de rappeler les définitions et propositions fondamentales qui précèdent; je me servirai d'ailleurs, sans revenir sur leur démonstration, des formules de trigonométrie élémentaire qui reposent sur ces définitions et sur l'emploi du théorème des projections.

Fig. 26.



95. Imaginons un plan rapporté à deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy.

Un nombre imaginaire $a+bi$ est déterminé si l'on se donne les deux nombres réels a, b; à ce couple de deux nombres réels a, b correspond un point A dont l'abscisse est la partie réelle a et l'ordonnée le coefficient de i dans le nombre $a+bi$. Le point A sera, si l'on veut, l'*image* du nombre $a+bi$. Inversement, à un point A, dont les coordonnées sont a, b, correspond le nombre imaginaire $a+bi$, qui est dit l'*affixe* du point A.

Si b est nul, le nombre $a+bi$ est réel : les nombres réels sont représentés par des points situés sur l'axe des abscisses; de même les nombres purement imaginaires sont représentés par des points situés sur l'axe des ordonnées : aussi ces axes sont-ils souvent appelés respectivement *axe des quantités réelles, axe des quantités purement imaginaires,* ou, plus brièvement, *axe réel, axe imaginaire*. Au nombre o correspond l'origine O des coordonnées. Le nombre positif $r=\sqrt{a^2+b^2}$, qui mesure la longueur du vecteur OA, est ce qu'on a appelé plus haut la valeur absolue du nombre $a+bi$, l'angle (OX, OA) de la direction positive prise sur l'axe des abscisses et de la direction du vecteur OA qui va de l'origine au point A, est l'*argument* trigonométrique (¹) du nombre $a+bi$. Cet argument est déterminé à un multiple près de 2π, pourvu que $a+bi$ ne soit pas nul, que le point A

(¹) On supprime cette épithète quand il n'y a pas de confusion possible avec quelque autre *argument*.

ne coïncide pas avec le point O. Quand $a + bi$ est nul, la valeur absolue est nulle, et l'argument complètement indéterminé.

La *valeur principale* de l'argument est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$; elle est complètement déterminée, sauf dans le cas où b est nul et a négatif ou nul. Elle est nulle ou égale à $\pm\pi$ si $a + bi$ est réel ($b = 0$), nulle si l'on a affaire à un nombre positif, égale à $\pm\pi$ si l'on a affaire à un nombre négatif.

Elle est égale à $\pm\frac{\pi}{2}$ si $a + bi$ est purement imaginaire ($a = 0$), à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$ suivant que b est positif ou négatif.

Elle est, en général, du même signe que b; elle est comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ si a est positif, entre $+\frac{\pi}{2}$ et π, ou entre $-\frac{\pi}{2}$ et $-\pi$ si a est négatif.

Puisque l'on a $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$, on peut écrire

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

le second membre, où la valeur absolue r et l'argument θ sont mis en évidence, est ce qu'on appelle la *forme trigonométrique* du nombre $a + bi$.

En particulier, tout nombre dont la valeur absolue est 1 peut se mettre sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$; pour mettre le nombre 1 sous cette forme, on pourra prendre $\theta = 0$, ou θ égal à un multiple de 2π; pour mettre le nombre -1 sous cette forme, on prendra $\theta = \pi$ ou θ égal à un multiple impair de π.

Deux nombres imaginaires égaux sont représentés par le même point; leurs valeurs absolues sont égales et leurs arguments ne peuvent différer que d'un multiple de 2π; ces dernières conditions sont nécessaires et suffisantes pour que deux nombres imaginaires mis sous forme trigonométrique soient égaux, sauf dans le cas où l'une des valeurs absolues est nulle; dans ce cas, l'autre valeur absolue doit aussi être nulle; cela suffit pour que les deux nombres soient nuls.

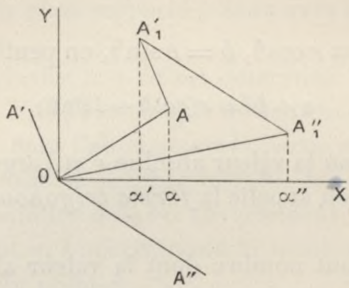
Deux nombres imaginaires symétriques sont représentés par deux points symétriques par rapport à l'origine. Deux nombres imaginaires conjugués sont représentés par deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

96. Pour faire la somme de plusieurs nombres imaginaires $a + bi$,

$a' + b'i$, $a'' + b''i$, ..., représentés par des points A, A', A'', ..., il suffit de faire la somme géométrique des vecteurs OA, OA', OA'', ... en lui donnant pour origine le point O; je rappelle la construction de cette somme géométrique : on regarde le point A comme l'origine d'un vecteur AA'_1 équipollent au vecteur OA', le point A'_1 comme l'origine d'un vecteur $A'_1A''_1$ équipollent au vecteur OA'', etc.; l'extrémité du dernier vecteur est l'extrémité de la somme géométrique cherchée; c'est le point qui figure la somme des nombres représentés par les points A, A', A'', ...

Il suffira, pour démontrer cette proposition, de raisonner sur trois nombres $a + bi$, $a' + b'i$, $a'' + b''i$, représentés par les trois points A,

Fig. 27.



A', A''. L'extrémité A''_1 de la somme géométrique OA''_1 des trois vecteurs OA, OA', OA'' est, d'après la construction précédente, l'extrémité d'une ligne brisée $OAA'_1A''_1$ dont les côtés OA, AA'_1, $A'_1A''_1$ sont respectivement équipollents aux vecteurs OA, OA', OA''; les projections $O\alpha$, $\alpha\alpha'$, $\alpha'\alpha''$ des côtés de la ligne brisée sur l'axe des x sont respectivement équipollentes aux projections sur cet axe des vecteurs OA, OA', OA'', projections dont les équivalents algébriques sont respectivement a, a', a''. On a d'ailleurs, entre les équivalents algébriques $\overline{O\alpha}$, $\overline{\alpha\alpha'}$, $\overline{\alpha'\alpha''}$, $\overline{O\alpha''}$ des vecteurs $O\alpha$, $\alpha\alpha'$, $\alpha'\alpha''$, $O\alpha''$, la relation

$$\overline{O\alpha''} = \overline{O\alpha} + \overline{\alpha\alpha'} + \overline{\alpha'\alpha''} = a + a' + a''.$$

L'abscisse $\overline{O\alpha''}$ du point A''_1 est donc $a + a' + a''$; son ordonnée est de même $b + b' + b''$; c'est bien là l'abscisse et l'ordonnée du point qui représente la somme $a + a' + a'' + (b + b' + b'')i$ des trois nombres $a + bi$, $a' + b'i$, $a'' + b''i$.

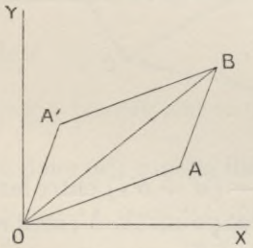
On sait qu'une somme géométrique est indépendante de l'ordre de ses éléments; au reste, ce résultat apparaît immédiatement sur la démonstration, puisque les coordonnées $a + a' + a''$, $b + b' + b''$ de l'extrémité de la somme ne dépendent pas de l'ordre des nombres réels a, a', a''; b, b', b''.

Le nombre (positif) qui mesure la longueur du vecteur OA''_1, c'est-à-dire la valeur absolue de la somme des nombres imaginaires donnés, est inférieur ou égal à la somme des nombres positifs qui mesurent les côtés de la ligne brisée $OAA'_1A''_1$, c'est-à-dire à la somme des valeurs absolues des nombres donnés; pour qu'il y eût égalité, il faudrait que la ligne brisée se réduisît à une ligne droite et que les points A, A'_1 fussent entre O et A''_1 : il faudrait pour cela que les points A, A', A'' fussent sur une même demi-droite partant du point O, c'est-à-dire que les arguments des nombres $a + bi$, $a' + b'i$, $a' + b''i$ fussent égaux (à un multiple près de 2π); l'argument commun de ces nombres serait aussi l'argument de leur somme.

D'après la notation adoptée au n° 91, on peut écrire

$$| a + bi + a' + b'i + a'' + b''i | \leqq | a + bi | + | a' + b'i | + | a'' + b''i |.$$

Fig. 28.



Dans le cas où l'on veut faire la somme de deux nombres $a + bi$, $a' + b'i$, représentés par les points A, A', cette somme est représentée par le point B, sommet opposé au point O du parallélogramme dont OA, OA' sont deux côtés. Dans le triangle OAB le côté OB est plus petit que la somme des deux côtés OA, AB plus grand que leur différence. Outre cette proposition déjà connue *la valeur absolue de la somme de deux nombres est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces deux nombres,* nous obtenons donc celle-ci :

La valeur absolue de la somme de deux nombres est supérieure ou égale à la différence entre la plus grande et la plus petite des valeurs absolues de ces deux nombres.

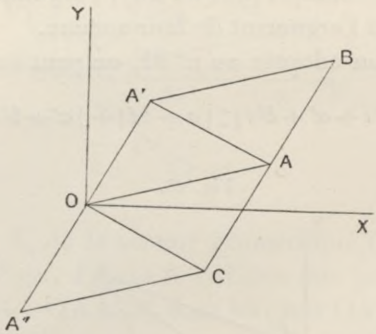
Il y aurait égalité dans le cas où les points A, A′ seraient en ligne droite avec le point O, mais de part et d'autre du point O, ou, ce qui revient au même, quand les arguments des nombres $a+bi$, $a'+b'i$ diffèrent d'un multiple impair de π.

On peut écrire

$$|a+bi+a'+b'i| \geqq |a+bi| - |a'+b'i|;$$

cette égalité restant vraie quand on a $|a+bi| < |a'+b'i|$, puisque, alors, le second membre de l'inégalité est négatif.

Fig. 29.



La différence $(a+bi)-(a'+b'i)$ entre les deux nombres $a+bi$, $a'+b'i$, représentés par les points A, A′, sera représentée par l'extrémité C d'un vecteur OC, différence géométrique des vecteurs OA et OA′; ce vecteur est équipollent au vecteur A′A dont l'origine représente le point qui figure le nombre à soustraire, dont l'extrémité figure le nombre dont on soustrait. La figure montre nettement que le point A représente la somme des nombres représentés par A′ et par C, que le point C représente la somme des nombres représentés d'une part par le point A, d'autre part par le point A″ symétrique du point A′ par rapport au point O, c'est-à-dire la somme des nombres $a+bi$, $-a'-b'i$.

Deux nombres imaginaires sont regardés comme voisins, comme différant peu l'un de l'autre, quand la valeur absolue de leur différence est petite. Cette valeur absolue est mesurée par la distance des deux points qui représentent ces deux nombres : ces deux points sont donc voisins; *a fortiori*, la différence entre les abscisses des deux points, ou entre leurs ordonnées, qui est inférieure à leur distance, est petite, en valeur absolue.

La valeur absolue d'une différence est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ses termes, supérieure ou égale à leur différence.

Cette proposition ne diffère pas de celle qui concerne une somme, puisque les deux nombres symétriques $a + bi$, $-a - bi$ ont même valeur absolue.

97. Considérons maintenant le produit des deux nombres imaginaires mis sous la forme trigonométrique (n° 96)

$$r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad r'(\cos\theta' + i\sin\theta').$$

En effectuant leur produit par la règle du n° 90, on trouve pour la partie réelle

$$rr'\cos\theta\cos\theta' - rr'\sin\theta\sin\theta' = rr'\cos(\theta + \theta'),$$

et pour le coefficient de i

$$rr'\cos\theta\sin\theta' + rr'\cos\theta'\sin\theta = rr'\sin(\theta + \theta').$$

Le produit se trouve donc mis sous la forme trigonométrique

$$rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')].$$

C'est un nombre dont la valeur absolue rr' est le produit des valeurs absolues r, r' des deux facteurs, dont l'argument $\theta + \theta'$ est la somme des arguments des facteurs.

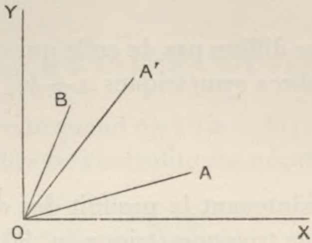
Du cas de deux facteurs on s'élève immédiatement au cas de trois facteurs $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, $r''(\cos\theta'' + i\sin\theta'')$; la valeur absolue du produit est le produit de rr' par r'', l'argument du produit est la somme de $\theta + \theta'$ et de θ''.

D'une façon générale, le produit d'autant de nombres que l'on veut, mis sous forme trigonométrique, est un nombre dont la valeur absolue est le produit des valeurs absolues des facteurs et dont l'argument est la somme des arguments des facteurs.

Sur cette forme donnée à un produit, la possibilité d'intervertir les facteurs, de grouper ces facteurs comme on veut, est évidente.

Supposons que le nombre $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, que l'on veut multiplier par le nombre $r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, soit représenté par le point A,

Fig. 30.



le multiplicateur étant représenté par le point A′. On aura alors

$$(OX, OA) = \theta, \qquad (OX, OA') = \theta'.$$

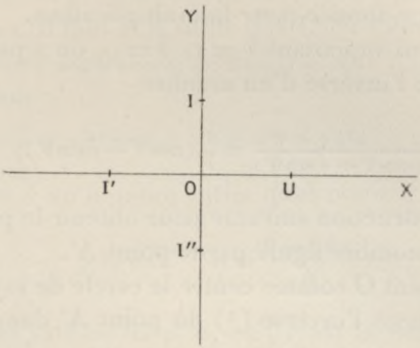
On fera tourner la demi-droite qui porte le vecteur OA d'un angle égal à θ'; elle prend alors une position OB telle que l'angle (OA, OB) soit égal à θ'; on prend ensuite un point B tel que le nombre positif qui mesure la longueur OB soit égal au produit des nombres r, r' qui mesurent les longueurs OA, OA′. B représentera le produit

$$rr'[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')].$$

Si, en particulier, la valeur absolue du multiplicateur est égale à 1, la multiplication par $\cos\theta' + i\sin\theta'$ revient à faire tourner de l'angle θ' le vecteur dont l'extrémité représente le multiplicande; l'extrémité du nouveau vecteur représente le produit.

Plus particulièrement, la multiplication par le nombre i, dont la valeur absolue est 1 et l'argument $\frac{\pi}{2}$, revient à faire tourner le vecteur qui aboutit au point qui représente le multiplicande d'un angle droit, dans le sens direct; la multiplication par -1, dont la valeur absolue est 1 et l'argument $\pm\pi$, revient à faire tourner le même vecteur de deux angles droits dans un sens ou dans l'autre; la multiplication par $-i$, dont la valeur absolue est 1 et l'argument $-\frac{\pi}{2}$, revient à faire tourner le même vecteur d'un angle droit dans le sens indirect.

Fig. 31.



Le nombre i est représenté par le point I situé sur la partie positive de l'axe des ordonnées à l'unité de distance de l'origine. En faisant tourner le vecteur OI d'un angle droit, dans le sens direct, puis encore d'un angle droit dans le même sens, etc., on l'amène successivement en OI', en OI'', en OU, puis on le ramène en OI, etc.; c'est la traduction géométrique des égalités numériques

$$i^2 = i \times i = -1, \qquad i^3 = i^2 \times i = -i, \qquad i^4 = i^3 \times i = 1, \qquad i^5 = i, \qquad \ldots$$

Lorsque le multiplicateur est un nombre réel, l'argument du produit est égal à l'argument du multiplicande si le multiplicateur est positif, à l'argument du multiplicande augmenté ou diminué de π si le multiplicateur est négatif.

98. En regardant la division comme l'opération inverse de la multiplication, on voit de suite que la valeur absolue d'un rapport doit être le rapport de la valeur absolue du dividende à la valeur absolue du diviseur, et que l'argument du rapport doit être égal à la différence entre l'argument du dividende et l'argument du diviseur, afin que le produit du quotient par le diviseur soit égal au dividende; en d'autres

termes, on peut écrire

$$\frac{r(\cos\theta + i\sin\theta)}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{r}{r'}[\cos(\theta - \theta') + i\sin(\theta - \theta')],$$

et cette égalité est susceptible d'une interprétation géométrique analogue à celle qu'on a donnée pour la multiplication.

En particulier, en supposant $r = 1$, $\theta = 0$, on a pour l'expression trigonométrique de l'inverse d'un nombre

$$\frac{1}{r'(\cos\theta' + i\sin\theta')} = \frac{1}{r'}(\cos\theta' - i\sin\theta');$$

d'où résulte la construction suivante pour obtenir le point qui représente l'inverse du nombre figuré par le point A'.

On décrit du point O comme centre le cercle de rayon 1; on prend le point A'_1 qui serait l'inverse [1] du point A' dans une inversion faite par rapport à ce cercle; l'affixe du point A'_1 est $\frac{1}{r'}(\cos\theta' + i\sin\theta')$; le point cherché A'', dont l'affixe est $\frac{1}{r'}(\cos\theta' - i\sin\theta')$, est le symétrique du point A'_1 par rapport à l'axe des abscisses.

Plus particulièrement encore, en supposant $r' = 1$, on voit que l'inverse d'un nombre dont la valeur absolue est 1 est le conjugué de ce nombre; pour que deux nombres conjugués soient inverses l'un de l'autre, il faut et il suffit que leurs valeurs absolues soient égales à 1. Dans ce cas, les deux points A', A'_1 de la figure précédente sont confondus sur le cercle.

§ 3. — RACINES $n^{\text{ièmes}}$.

99. Cherchons à déterminer la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre donné, que l'on peut toujours supposer mis sous la forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$; il s'agit de trouver, s'il est possible, un nombre dont la puissance $n^{\text{ième}}$ soit égale à $r(\cos\theta + i\sin\theta)$; en supposant ce nombre mis lui-même sous la forme trigonométrique $\rho(\cos\omega + i\sin\omega)$

---

[1] C'est, comme on sait, le point où la polaire du point A' par rapport au cercle rencontre la droite qui joint les deux points O, A'; c'est encore le second point commun à tous les cercles qui passent par le point A' et qui sont orthogonaux au cercle de centre O : au lieu de dire que les points A', A'_1 sont inverses par rapport à ce cercle, on dit souvent qu'ils sont *symétriques* par rapport à ce cercle.

il s'agit de déterminer ρ et ω de façon que l'on ait

$$[\rho(\cos\omega + i\sin\omega)]^n = r(\cos\theta + i\sin\theta);$$

mais, d'après la théorie de la multiplication, la valeur absolue du premier membre est ρ^n, son argument est $n\omega$; pour que deux nombres soient égaux, il faut et il suffit que leurs valeurs absolues soient égales et que leurs arguments ne diffèrent que d'un multiple de 2π; on doit donc avoir

$$\rho^n = r, \qquad n\omega = \theta + 2k\pi,$$

en désignant par k un nombre entier quelconque; on en déduit

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \omega = \frac{\theta + 2k\pi}{n}:$$

inversement, ces valeurs de ρ, ω, où $\sqrt[n]{r}$ est la racine $n^{\text{ième}}$ arithmétique de r, répondent à la question; en d'autres termes, la formule

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

fournit toutes les solutions du problème posé. Si, dans cette formule, on remplaçait θ par quelque autre valeur de l'argument du nombre donné, on ne ferait que modifier le nombre entier k; on ne changerait pas l'ensemble des résultats, puisque, pour avoir toutes les solutions du problème posé, on doit remplacer k par tous les nombres entiers possibles.

Si le nombre dont on veut chercher la racine $n^{\text{ième}}$ était 1, il n'y aurait qu'à faire dans la formule précédente $r = 1$, $\theta = 0$; on trouverait ainsi, pour l'expression des nombres dont la puissance $n^{\text{ième}}$ est 1, ou, comme l'on dit, des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité, la formule

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

où k est un nombre entier quelconque.

On a d'ailleurs, en général (nº 97),

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\\ &\quad = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) \times \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right);\end{aligned}$$

dans le second membre, le facteur $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)$, est l'un des nombres dont la puissance $n^{\text{ième}}$ reproduit $r(\cos\theta+i\sin\theta)$; c'est l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ du nombre donné; l'autre facteur

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

est l'une des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité; on obtient toutes ces racines en donnant à k toutes les valeurs entières possibles. En d'autres termes :

On obtient toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre en multipliant l'une d'elles, choisie arbitrairement, par les diverses racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

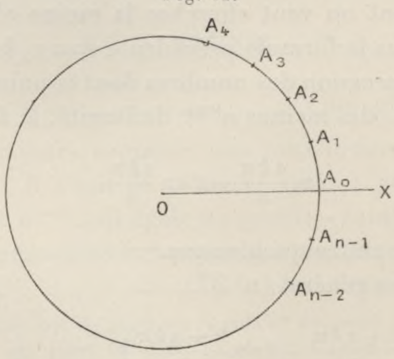
100. Racines de l'unité. — C'est de ces dernières racines que je vais m'occuper maintenant.

Le nombre $\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$ a 1 pour valeur absolue et $\frac{2k\pi}{n}$ pour argument : les divers points qui figurent les nombres de cette sorte, où k est entier, sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon 1; ils correspondent aux arguments

$$0,\quad \frac{2\pi}{n},\quad \frac{4\pi}{n},\quad \frac{6\pi}{n},\quad \ldots,$$
$$-\frac{2\pi}{n},\quad -\frac{4\pi}{n},\quad -\frac{6\pi}{n},\quad \ldots.$$

C'est d'abord les points A_0, A_1, A_2, A_3, ... dont le premier, qui

Fig. 32.



correspond à l'argument 0, est le point du cercle qui se trouve sur la partie positive de l'axe des abscisses, point dont l'affixe est 1; les suivants A_1, A_2, A_3 s'obtiennent en portant bout à bout, à partir de A_0, dans le sens positif, des arcs égaux à $\frac{2\pi}{n}$, à la $n^{\text{ième}}$ partie de la circonférence du cercle. Quand on a porté ainsi bout à bout n de ces arcs, on retombe sur le point A_0, puis, en continuant à tourner dans le même sens, les points A_1, A_2, A_3, ... En portant bout à bout des arcs de la même longueur $\frac{2\pi}{n}$, dans le sens négatif on retombe sur des points déjà obtenus A_{n-1}, A_{n-2}, ..., mais on les rencontre successivement dans le sens inverse de celui où on les a obtenus d'abord; les points A_0, A_1, ... A_{n-1} ainsi obtenus, qui représentent toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes de l'unité, sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés. On voit ainsi qu'il y a n racines distinctes de l'unité, dont l'une, qui correspond au sommet A_0, est elle-même égale à 1. Le polygone n'existe, à proprement parler, que pour $n > 2$; pour $n = 2$, la figure se réduirait au point A_0 et au point diamétralement opposé; les deux racines carrées de 1 sont

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1, \qquad \cos\pi + i\sin\pi = -1;$$

pour $n = 3$, la figure formerait un triangle équilatéral, les trois racines cubiques de l'unité sont

$$\begin{aligned}
&1,\\
&\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
&\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};
\end{aligned}$$

pour $n = 4$, la figure serait un carré, les quatre racines quatrièmes de 1 seraient $1, i, -1, -i$, ...

Les résultats précédents, et quelques autres, s'obtiennent encore comme il suit :

Observons d'abord que la valeur absolue d'une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité étant toujours égale à 1, il suffit de s'occuper de l'argument qui est de la forme $\frac{2k\pi}{n}$. A chaque valeur entière de k correspond une racine; pour que les deux racines qui correspondent à deux valeurs k_1 et k_2 de k soient égales, il faut et il suffit que la différence entre les deux arguments soit un nombre entier de fois 2π, c'est-à-dire que la différence $k_2 - k_1$ soit un multiple de n; en particulier, on ne change pas la racine dont l'argument est $\frac{2k\pi}{n}$, quand on remplace k par le reste de sa division par n; on obtiendra donc les arguments des racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes en remplaçant dans l'expression $\frac{2k\pi}{n}$, k par $0, 1, 2, \ldots, n-1$, ou par n nombres entiers consécutifs quelconques, ou encore par n valeurs entières $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ qui, divisées par n, donnent n restes distincts, à savoir les restes $0, 1, 2, \ldots, n-1$, dans un certain ordre.

Pour qu'une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité soit réelle, il faut et il suffit que son argument $\frac{2k\pi}{n}$ soit un multiple de π, c'est-à-dire que $2k$ soit un multiple de n; si l'on donne à k les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, les seules valeurs de k telles que $2k$ soit divisible par n seront $k=0$, et, dans le cas où n est pair, $k = \frac{n}{2}$; à ces valeurs de k correspondent les arguments 0 et π, auxquels correspondent les nombres 1 et -1; 1 est toujours une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité; c'est la seule racine $n^{\text{ième}}$ réelle si n est impair; si n est pair, -1 est une autre racine réelle; il ne peut pas y avoir d'autres racines réelles que 1 et -1.

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ imaginaires sont conjuguées deux par deux : la racine dont l'argument est $\frac{2(n-k)\pi}{n}$ est conjuguée de la racine dont l'argument est $\frac{2k\pi}{n}$; le produit de ces deux racines est 1.

101. Une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité peut aussi être une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité; il faut et il suffit pour cela que l'argument $\frac{2k\pi}{n}$ de cette racine puisse être mis sous la forme $\frac{2h\pi}{p}$, h étant un nombre entier comme k; ceci exige que l'on ait

$$\frac{k}{n} = \frac{h}{p};$$

on pourra toujours vérifier cette égalité en prenant pour p et h des équi-multiples de n et de k; on ne pourra la vérifier autrement si n et k sont premiers entre eux; d'où une distinction importante entre les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité :

La racine $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ *est dite une racine* $n^{\text{ième}}$ *primitive* *lorsque k est premier avec n*; elle ne peut alors être une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité que si p est un multiple de n; en particulier, elle ne peut être une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité pour $p < n$.

La racine $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ non primitive si k et n ne sont pas premiers entre eux; si l'on désigne par d le plus grand commun diviseur de k et de n et si l'on pose $k = k'd$, $n = n'd$, on aura

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{2k'\pi}{n'} + i\sin\frac{2k'\pi}{n'},$$

en sorte que la racine $n^{\text{ième}}$ considérée sera aussi une racine $n'^{\text{ième}}$ de l'unité, n' étant moindre que n. Considérée comme racine $n'^{\text{ième}}$ elle est d'ailleurs primitive puisque k' est premier à n'. Par exemple, -1 est une racine quatrième de l'unité, c'en est aussi une racine carrée; ce n'est pas une racine quatrième primitive. 1 est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, quel que soit $n > 1$, ce n'est jamais une racine primitive.

102. Si l'on multiplie les deux racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité dont les arguments sont $\frac{2k\pi}{n}$, $\frac{2k'\pi}{n}$, le produit aura une valeur absolue égale à 1, comme les deux facteurs, et son argument sera la somme $\frac{2(k+k')\pi}{n}$ des arguments des deux facteurs, c'est une autre racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Le produit de deux racines $n^{\text{ièmes}}$ est une racine $n^{\text{ième}}$; en particulier, le produit de deux racines conjuguées est 1. Le produit d'autant de racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité que l'on veut est une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité.

Les puissances d'une racine $n^{\text{ième}}$ sont aussi des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

En particulier, si l'on élève à la puissance r la racine d'argument $\frac{2\pi}{n}$, on trouvera la racine d'argument $\frac{2r\pi}{n}$; on obtiendra donc toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité en élevant aux puissances 0, 1, 2, ..., $n-1$ la racine d'argument $\frac{2\pi}{n}$.

Si, plus généralement, on élève à la puissance r la racine d'argument $\frac{2k\pi}{n}$, on trouve une racine d'argument $\frac{2kr\pi}{n}$; dans cet argument, on peut remplacer kr par le reste obtenu en divisant kr par n;

or, si l'on considère la suite de nombres

$$0, \; k, \; 2k, \; 3k, \; \ldots, \; (n-1)k,$$

obtenus en remplaçant dans kr, r par $0, 1, 2, \ldots, n-1$; les restes de la division de ces nombres par n, seront dans un certain ordre les nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$, en supposant que k soit premier à n.

C'est-à-dire que, en supposant k premier à n, les n valeurs de $\frac{2kr\pi}{n}$, quand on donne à r les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$, peuvent être regardées comme les arguments des n racines de l'unité. Donc :

Lorsque l'on élève une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de l'unité aux puissances $0, 1, 2, \ldots, n-1$, on reproduit les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Si l'on multiplie une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité d'argument $\frac{2h\pi}{n}$ par une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, d'argument $\frac{2k\pi}{p}$, on obtient un nombre dont la valeur absolue est 1, dont l'argument est $\frac{2(hp+h'n)\pi}{np}$: le produit est donc une racine $(np)^{\text{ième}}$ de l'unité.

Je me borne à énoncer les propositions suivantes, d'ailleurs aisées à démontrer : elles supposent que les nombres naturels n, p soient premiers entre eux.

En multipliant chacune des n racines $n^{\text{ièmes}}$ distinctes de 1 par chacune des p racines distinctes $p^{\text{ièmes}}$ de 1 on obtient les np racines $(np)^{\text{ièmes}}$ distinctes de 1.

Le produit d'une racine $n^{\text{ième}}$ primitive par une racine $p^{\text{ième}}$ primitive est une racine $(np)^{\text{ième}}$ primitive.

En multipliant chacune des racines $n^{\text{ièmes}}$ primitives par chacune des racines $p^{\text{ièmes}}$ primitives, on trouve toutes les racines $(np)^{\text{ièmes}}$ primitives.

Le lecteur voit que la recherche des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est liée à certaines propositions d'arithmétique et à la théorie des polygones réguliers. L'étude approfondie de ce problème comporte de très beaux développements que je laisse de côté.

EXERCICES.

89. Montrer que l'on a

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Quels sont les nombres z tels que z^2 soit égal au conjugué de z? Y a-t-il des nombres z tels que z^3 soit égal au conjugué de z?

90. En posant

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},$$

montrer que l'on a, quels que soient les nombres réels x, y, z,

$$(x - \alpha)(x - \alpha^2) = x^2 + x + 1,$$
$$(x - 1)(x - \alpha)(x - \alpha^2) = x^3 - 1,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z) \quad (^1).$$

91. Dans quel cas le quotient de deux nombres imaginaires est-il un nombre réel?

92. Y a-t-il un nombre purement imaginaire dont la puissance $n^{\text{ième}}$ soit égale à 1?

93. Si le cube du nombre $a + bi$ (a, b réels) est réel, ou bien b est nul, ou bien $\frac{b}{a}$ est égal à $\pm\sqrt{3}$. Le cube de $a + bi$ peut-il être purement imaginaire?

94. Montrer, sans considérations géométriques, que l'on a, en désignant par a, b, a', b' des nombres réels,

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} \leqq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2},$$
$$\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} \geqq \left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a'^2 + b'^2} \right|.$$

95. De l'identité (n° 91)

$$(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) = (ab' + a'b)^2 + (ab - a'b')^2,$$

déduire la proposition suivante :

Le produit de plusieurs nombres entiers dont chacun est la somme des carrés de deux nombres entiers est lui-même la somme des carrés de deux nombres entiers.

96. Quelles sont les racines carrées du nombre $12i - 5$? Calculer approximativement les racines quatrièmes du même nombre. On calculera les valeurs

---

(1) On reconnaîtra de suite, après avoir lu le Chapitre suivant, que ces identités ne supposent nullement la réalité des nombres x, y, z.

approchées à 0,01 près de la partie réelle et du coefficient de i, pour chaque racine.

97. Calculer avec la même approximation les racines cinquièmes de $9+10i$.

98. La condition nécessaire et suffisante pour que la racine carrée de $1-x^2$ soit réelle est que x soit réel et appartienne à l'intervalle $(-1, +1)$, ou que x soit purement imaginaire. Conditions analogues pour que la racine carrée de $1-x^2$ soit purement imaginaire.

99. En désignant par k un nombre réel positif, plus petit que 1, à quelles conditions doit satisfaire le nombre x pour que la racine carrée de

$$(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

soit réelle, pour qu'elle soit purement imaginaire?

CHAPITRE VII.

ÉTUDE DES POLYNOMES A COEFFICIENTS ET A VARIABLES IMAGINAIRES.

§ 1. — DÉFINITIONS. INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE.

103. Le Chapitre précédent, consacré aux opérations sur les nombres imaginaires, a montré que les calculs effectués sur ces nombres se faisaient d'après les mêmes lois que les calculs sur les nombres réels. Les conséquences qui se déduisent de ces lois, établies pour les nombres réels, s'étendront naturellement aux nombres imaginaires.

On a rappelé au n° 27 la définition d'un monome, ou d'un polynome, à variables réelles. Ces définitions s'étendent immédiatement, en admettant que les *coefficients* et les *variables* puissent être imaginaires. Chacune des variables x, y, z, ... pourra représenter un nombre imaginaire quelconque, c'est-à-dire que sa partie réelle et le coefficient de i pourront être des nombres réels quelconques. Les coefficients seront des nombres réels ou imaginaires fixes, qui peuvent d'ailleurs être représentés par des lettres. Quand on attribue aux variables des valeurs déterminées, le monome ou le polynome prend une valeur déterminée que l'on sait calculer par les règles précédentes. Ainsi le polynome en x, y,

$$(1+i)x^2 - ixy + y - i,$$

si l'on attribue à x la valeur i, à y la valeur $1+i$, prend la valeur 1.

Il n'y a rien à changer à la définition du degré.

La valeur absolue d'un monome s'obtient en remplaçant dans ce monome le coefficient et les variables par leurs valeurs absolues.

La valeur absolue d'un polynome est au plus égale à la somme des valeurs absolues des monomes qui le constituent; elle est au plus égale à la somme des valeurs absolues de tous les coefficients, si les valeurs absolues des variables sont inférieures ou égales à 1. Si, dans un polynome, tous les coefficients sont des nombres réels et positifs, et si les variables $x, y, z, \ldots$ sont assujetties à avoir respectivement des valeurs absolues inférieures ou égales aux nombres positifs a, b, c, ..., la valeur absolue du polynome sera inférieure ou égale au nombre positif obtenu en remplaçant les variables x, y, z, ... par a, b, c, ...

Par exemple, le polynome $2x^2 + 3y^2 + 2xy + x + 1$, si l'on suppose $|x| < 1$, $|y| < 2$, sera moindre, en valeur absolue, que 20.

C'est surtout des polynomes à une variable que j'aurai à m'occuper : d'ordinaire, je désignerai la variable par la lettre z, et je poserai $z = x + iy$, en désignant par x et y des variables réelles. Cette convention, qui est d'accord avec l'habitude qu'on a de désigner par x, y les coordonnées d'un point, du point qui, suivant les conventions du n° 95, représente z, n'a évidemment rien de nécessaire. Elle est commode en commençant; le lecteur, une fois habitué à l'emploi des variables imaginaires, ne craindra pas de les désigner par $x, y, \ldots$, ou n'importe quelles autres lettres.

Une habitude commode, généralisation immédiate de celle qu'on a introduite au n° 10, consiste à employer la même lettre ou le même symbole pour désigner le nombre imaginaire d'une part et, d'autre part, le point dont ce nombre est l'affixe.

Par exemple, $1 + 2i$ désignera à la fois le nombre imaginaire dont la partie réelle est 1 et dont le coefficient de i est 2, ou le point dont l'abscisse est 1, l'ordonnée 2. S'il y a lieu de craindre quelque confusion, il suffira, pour l'éviter, de dire le *nombre* $1 + 2i$, dans le premier sens, le *point* $1 + 2i$, dans le second sens. Cette façon de parler s'appliquera naturellement soit aux nombres réels, soit aux nombres purement imaginaires. Pour les nombres réels, représentés par des points de l'axe des abscisses, c'est la même convention qu'au n° 10. Le point O est l'origine des coordonnées.

Un polynome

$$f(z) = (a_0 + ib_0)z^n + (a_1 + ib_1)z^{n-1} + \ldots + a_n + ib_n,$$

où a_0, b_0, ..., a_n, b_n sont des nombres réels, est une *fonction* de la variable $z = x + iy$, c'est-à-dire que, si l'on se donne la valeur numérique de z (ou plutôt les valeurs numériques réelles de x, y), on sait calculer la valeur numérique de $f(z)$ (la partie réelle et le coefficient de i). L'étude de la façon dont varie $f(z)$ avec z revient à l'étude de la variation simultanée de deux polynomes à coefficients réels en x, y, quand ces deux variables varient simultanément. Ces deux polynomes s'obtiennent en remplaçant z par $x+iy$, dans le précédent polynome en z, en effectuant les calculs indiqués, et en séparant la partie réelle et la partie imaginaire : $f(z)$ se met alors sous la forme

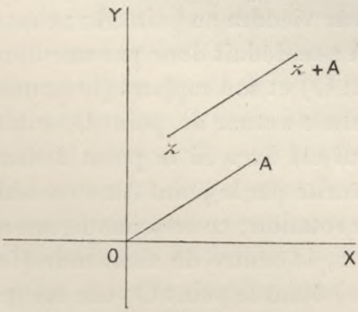
$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y):$$

$\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$ sont les deux polynomes en question.

Au lieu de dire qu'à chaque valeur de z correspond une valeur de $f(z)$, il revient au même de dire qu'à chaque point z (de coordonnées x, y) correspond un point $f(z)$ [de coordonnées $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$], ou que la fonction donnée (le polynome) définit une *correspondance* entre le point z et le point $f(z)$, un mode de transformation qui permet de passer du point z au point $f(z)$: étudier la fonction, c'est au fond étudier cette correspondance, ou cette transformation : on aura, en particulier, à traiter des questions comme celles-ci : quand le point z décrit un certain lieu, quel est le lieu correspondant décrit par le point $f(z)$; quand le point z est assujetti à rester dans une certaine région, dans quelle région le point correspondant $f(z)$ est-il assujetti à rester?

104. Considérons quelques exemples simples :

Fig. 33.

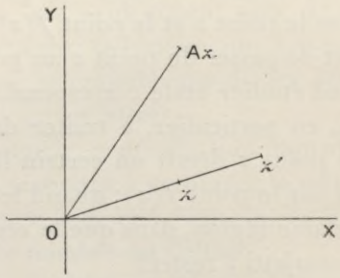


Soit d'abord $f(z)=z+A$, A étant un nombre imaginaire quelconque; d'après le n° 97, le point $z+A$ se déduira du point z en lui faisant subir une translation définie par le vecteur qui va du point O au point A : En d'autres termes, le vecteur qui va du point z au point $z+A$ est équipollent au vecteur fixe qui va du point O au point A.

Quand le point z décrit une courbe quelconque, le point $z+A$ décrit une courbe égale : on passe de la première courbe à la seconde par la translation qu'on vient d'expliquer; de même, quand le point z est assujetti à rester dans une certaine région, le point $z+A$ est assujetti par là à rester dans une région égale, qui se déduit de la première par cette même translation.

Soit $f(z)=Az$. Désignons par a la valeur absolue de A : On commencera par déduire du point z un point z', homothétique du point z

Fig. 34.



par rapport au centre O, le rapport d'homothétie étant a; le point z' sera l'image du nombre az; puis on fera tourner le vecteur qui part du point O pour aboutir au point z' d'un angle égal à l'argument de A; l'extrémité du vecteur viendra au point Az; c'est ce qui a été expliqué au n° 97; le point Az se déduit donc par une homothétie, définie par son centre (le point O) et son rapport (le nombre positif a), suivie d'une rotation effectuée autour du point O, rotation dont l'angle est l'argument de A, qui est fixe. Si le point z décrit une figure quelconque, la figure décrite par le point Az s'en déduira par une homothétie, suivie d'une rotation; ce sera une figure *semblable* à la figure décrite par le point z, le centre de similitude (le point qui coïncide avec son homologue) étant le point O; elle lui serait homothétique si A était réel, directement si A était positif, inversement si A était négatif. Si le point z décrivait, dans le sens direct, un cercle ayant son centre au point O, le point Az décrirait, dans le même sens, un cercle concentrique; le rapport des rayons des deux cercles serait a. Si le point z était assujetti à rester dans le premier cercle, le point Az serait assujetti à rester dans le second.

Soit $f(z) = Az + B$. On déduira le point Az du point z, comme on vient de l'expliquer, puis on fera subir à ce point Az une translation égale au vecteur qui part du point O et aboutit au point B; si le point z décrit une figure quelconque, le point $Az + B$ décrira une figure semblable, mais le centre de similitude ne sera plus le point O. Si le point z décrivait, dans le sens direct, un cercle ayant son centre en O, et de rayon égal à ρ, le point $Az + B$ décrirait, dans le sens direct, un cercle ayant pour centre le point B, et un rayon égal à $a\rho$, en continuant de désigner par a la valeur absolue de A. Si le point z était assujetti à rester à l'intérieur du premier cercle, le point $Az + B$ serait assujetti à rester à l'intérieur du second.

Soit $f(z) = z^n$. Désignons par ρ et par θ la valeur absolue et l'argument de z; la valeur absolue et l'argument de z^n seront respectivement ρ^n et $n\theta$; si l'on considère les deux cercles décrits du point O comme centre avec les rayons ρ et ρ^n, le point z sera sur le premier, le point z^n sur le second; s'il faut faire tourner de l'angle θ la direction positive de l'axe des abscisses pour l'amener à passer par le point z, il faudra la faire tourner de l'angle $n\theta$ pour l'amener à passer par le point z^n.

Supposons que ρ, et par conséquent ρ^n, soit constant, et que le point z se meuve sur le cercle de rayon ρ, le point z^n se mouvra sur le cercle de rayon ρ^n. Si le point z se meut dans le sens direct, il en sera de même du point z^n; si le point z décrit la $n^{\text{ième}}$ partie du premier cercle, dans le sens direct, le point z^n décrira, dans le sens direct, le second cercle tout entier; si le point z décrit le premier cercle tout entier dans le sens direct, le point z^n décrira n fois le second cercle, dans le même sens; il passe alors n fois par un point quelconque de ce second cercle. Si, pour la position z_0 du point z sur le premier cercle, le point z^n est au point Z_0 sur le second cercle, lorsque le point z aura décrit sur le premier cercle, à partir de z_0, la $n^{\text{ième}}$ partie de la circonférence, le point z^n se retrouvera en Z_0, ..., les n positions du point z sur le premier cercle pour lesquelles le point z^n coïncide avec le point Z_0 sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans ce premier cercle; ils figurent les n valeurs de z pour lesquelles le nombre z^n est égal à Z_0, les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de Z_0, ces résultats sont bien conformes avec ceux des nos 99, 100. Si le point z était assujetti à rester à l'intérieur du premier cercle, le point z^n serait assujetti à rester à l'intérieur du second. Les deux cercles coïncident si l'on suppose $\rho = 1$; le second cercle est intérieur au premier si ρ est plus petit que 1, extérieur si ρ est plus grand que 1.

Soit $f(z) = Az^n$; après avoir déduit le point z^n du point z, on déduira le point Az^n du point z^n par une homothétie, dont le centre est le point O, dont le rapport est le nombre $a = |A|$, suivie d'une rotation autour du point O, rotation dont l'angle est l'argument de A. Si l'on suppose encore que le point z décrive, dans le sens direct, le cercle de rayon ρ dont le centre est le point O, le point Az^n décrira, dans le sens direct, le cercle concentrique, dont le rayon est $a\rho^n$; il le décrira n fois si le point z décrit une fois le premier cercle.

Soit enfin $f(z) = Az^n + B$. Ayant construit, comme on vient de l'expliquer, le point Az^n en partant du point z, on lui fera subir une translation définie par le vecteur qui va du point O au point B, et l'on aura ainsi le point $Az^n + B$. Si l'on suppose toujours que le point z décrive, une fois autour du point O, le cercle de rayon ρ, dans le sens direct, le point $Az^n + B$ décrira n fois, dans le sens direct, le cercle déduit du point B comme centre avec le rayon $a\rho^n$, en passant n fois par chaque point de ce cercle; si le point z est assujetti à rester à l'intérieur du premier cercle, le point $Az^n + B$ sera assujetti à rester à l'intérieur du second.

§ 2. — ÉTUDE D'UN POLYNOME POUR LES VALEURS DE LA VARIABLE VOISINES D'UNE VALEUR DONNÉE.

105. Soit maintenant

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n,$$

un polynome en z, ordonné suivant les puissances ascendantes de z, que l'on veut étudier pour les valeurs de z voisines de 0. Désignons par ρ la valeur absolue de z et par $a_0, a_1, \ldots, a_n$ les valeurs absolues des coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$: La valeur absolue de $f(z)$

sera au plus égale au nombre $a_0 + a_1\rho + \ldots + a_n\rho^n$, au nombre $S_0 = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, si ρ est inférieur ou égal à 1. L'expression $a_0 + a_1\rho + \ldots$ est un polynome en ρ à coefficients réels et positifs; on sait comment elle varie avec ρ.

Si, en particulier, les premiers termes du polynome $f(z)$ manquent, si ce polynome commence par le terme $A_p z^p$, on pourra l'écrire

$$z^p(A_p + A_{p+1}z + \ldots + A_n z^{n-p}).$$

Supposons ρ inférieur ou égal à 1, la valeur absolue du polynome qui multiplie z^n sera au plus égale à $S_p = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_n$; la valeur absolue du polynome proposé sera au plus égale à $S_p\rho^p$; si l'on veut qu'elle reste inférieure à un nombre positif ε, arbitrairement donné, il suffira de prendre

$$\rho < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon}{S_p}}.$$

Revenons au polynome

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

en supposant toujours qu'on ne considère que des valeurs de z voisines de o; de même que dans le cas où il ne s'agit que de variables réelles, les expressions

$$A_0, \quad A_0 + A_1 z, \quad A_0 + A_1 z + A_2 z^2, \quad \ldots$$

constituent des expressions approchées de $f(z)$. Considérons par exemple la dernière : la différence $f(z) - (A_0 + A_1 z + A_2 z^2)$ n'est autre chose que le polynome, commençant par un terme en z^3,

$$A_3 z^3 + A_4 z^4 + \ldots + A_n z^n,$$

dont la valeur absolue, pourvu qu'on ait $|z| \leqq 1$, est au plus égale à $S_3\rho^3$, et reste inférieure à ε si l'on suppose $\rho < \sqrt[3]{\frac{\varepsilon}{S_3}}$.

Notons encore que le polynome $f(z)$ pourra être mis sous la forme

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + M z^3,$$

M étant un polynome en z dont on sait que la valeur absolue, pourvu que la valeur absolue de z reste inférieure à un nombre positif fixe, reste elle-même inférieure à un nombre positif fixe que l'on sait calculer.

En particulier, pourvu que z soit suffisamment voisin de o, la différence entre $f(z)$ et A_0 est petite en valeur absolue : le point $f(z)$ est aussi voisin qu'on le veut du point A_0, avec lequel il se confond quand z est nul, pourvu que le point z soit suffisamment voisin du point O : c'est ce qu'on exprime en disant que le polynome $f(z)$ est une fonction continue de z, pour $z = 0$. Pourvu que ρ soit moindre que $\frac{\varepsilon}{S_1}$, on a

$$|f(z) - A_0| < \varepsilon,$$

et le point $f(z)$ reste à l'intérieur d'un cercle décrit du point A_0 comme centre avec un rayon égal à ε. Supposons que A_0 ne soit pas nul; on a pu alors choisir $\varepsilon < a_0$; dans ces conditions le point O est extérieur au cercle de rayon ε décrit de A_0 comme centre; le point $f(z)$ ne peut donc venir au point O : En d'autres termes, s'il y a un terme constant dans un polynome, ce polynome ne peut s'annuler lorsque la valeur absolue de z reste inférieure à un nombre positif que l'on sait fixer.

Un polynome, dont tous les coefficients ne sont pas nuls et qui s'annule pour $z = 0$, ne peut être nul pour les valeurs de z suffisamment voisines de o.

Un polynome, dont tous les coefficients ne sont pas nuls, ne peut être nul pour toutes les valeurs de z. Deux polynomes ne peuvent prendre les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de z sans être identiques terme à terme (nº 33).

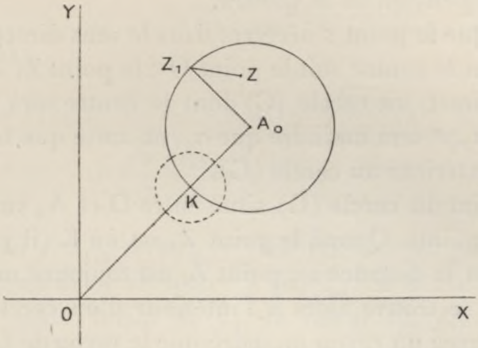
106. Je vais maintenant montrer que si un polynome $f(z)$ contient un terme constant A_0, on peut trouver des valeurs de z, aussi voisines de o qu'on le veut, telles que, pour ces valeurs, on ait

$$|f(z)| < |A_0|.$$

Cette proposition nous sera utile un peu plus loin.

Par hypothèse, le polynome, ordonné suivant les puissances ascendantes de z, commence par un terme constant A_0; il peut manquer ensuite plusieurs termes; je suppose que le premier terme (non nul) qui suive A_0 soit $A_p z^p$; le polynome peut se réduire à ces deux termes et avoir la forme $A_0 + A_p z^p$; s'il y a d'autres termes, on pourra dans

Fig. 35.



tous ces termes mettre z^{p+1}, au moins, en facteur et écrire le polynome sous la forme

$$Z = A_0 + A_p z^p + M z^{p+1};$$

je ne considérerai que des valeurs de z telles que l'on ait $|z| < 1$; alors la valeur absolue du polynome M restera inférieure à un nombre positif fixe m, à la somme des valeurs absolues de ses termes, par exemple. Je continuerai de désigner par a_0, a_p, ρ les valeurs absolues des coefficients A_0, A_p et de la variable z.

Quand z est petit en valeur absolue, les expressions

$$A_0, \qquad Z_1 = A_0 + A_p z^p$$

constituent des expressions approchées de Z. Lorsqu'on donne à z une valeur numérique, la valeur absolue de la différence entre les deux nombres Z_1 et A_0, la distance entre les deux points Z_1 et A_0 est égale à $a_p \rho^p$; on peut la supposer moindre que a_0; il suffit de prendre pour cela $\rho < \sqrt[p]{\frac{a_0}{a_p}}$; l'erreur commise en substituant Z_1 à Z, c'est-à-dire $M z^{p+1}$, est moindre en valeur absolue que $m \rho^{p+1}$; en d'autres termes, la distance entre les deux points Z_1 et Z est moindre que $m \rho^{p+1}$; on peut la supposer moindre que $a_p \rho^p$; il suffit de prendre $\rho < \frac{a_p}{m}$; je supposerai ρ inférieur au plus petit des nombres positifs

$$\sqrt[p]{\frac{a_0}{a_p}}, \quad \frac{a_p}{m},$$

d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra.

Supposons que le point z décrive, dans le sens direct, un cercle de rayon ρ, et dont le centre soit le point O : le point Z_1 décrira p fois, dans le sens direct, un cercle (C) dont le centre sera le point A_0 et dont le rayon $a_p\rho^p$ sera moindre que a_0, en sorte que le point O sera certainement extérieur au cercle (C).

Soit K le point du cercle (C) situé entre O et A_0 sur la droite qui joint ces deux points. Quand le point Z_1 est en K (il y passe p fois), le point Z, dont la distance au point Z_1 est toujours moindre que le rayon de (C), se trouve alors à l'intérieur d'un cercle décrit de K comme centre avec un rayon moindre que le rayon de (C) : ce cercle, de centre K, sera donc intérieur au cercle décrit du point O comme centre avec un rayon égal à a_0; cela revient à dire que le point Z est à une distance du point O moindre que a_0, ou que la valeur absolue du nombre Z est moindre que a_0, lorsque le point z est dans l'une des p positions pour lesquelles Z_1 est en K.

107. Lorsqu'on veut étudier un polynome

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots + A_n z^n,$$

pour les valeurs de z voisines d'un nombre donné z_0, on ramène (nos 35, etc.) cette étude au cas où la variable est voisine de o, en posant $z = z_0 + h$, puis en ordonnant le polynome

$$f(z_0 + h) = A_0 + A_1(z_0 + h) + A_2(z_0 + h)^2 + \ldots + A_n(z_0 + h)^n,$$

suivant les puissances ascendantes de h ; h sera alors regardé comme une variable imaginaire, petite en valeur absolue. Les résultats du Chapitre II, fondés uniquement sur les règles relatives à l'addition et à la multiplication, s'appliquent sans changement. Si l'on désigne par

$$\begin{aligned}
f'(z) &= A_1 + 2A_2 z + 3A_3 z^2 + \ldots + nA_n z^{n-1},\\
f''(z) &= 1.2A_2 + 2.3A_2 z + \ldots + (n-1)nA_n z^{n-2},\\
f^{(p)}(z) &= 1.2\ldots pA_p + 2.3\ldots(p+1)A_{p+1}z + \ldots\\
&\quad + (n-p+1)(n-p+2)\ldots nA_n z^{n-p},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f^{(n)}(z) &= 1.2\ldots nA_n,
\end{aligned}$$

les n dérivées du polynome $f(z)$, dont la $n^{\text{ième}}$ est une constante, on a

$$f(z_0+h)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1}h+\frac{f''(z_0)}{1.2}h^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(p)}(z_0)}{1.2\ldots p}h^p+\ldots+\frac{f^{(n)}(z_0)}{1.2\ldots n}h^n.$$

ou, si l'on veut,

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{1.2}(z-z_0)^2+\ldots$$
$$+\frac{f^{(n)}(z_0)}{1.2\ldots n}(z-z_0)^n;$$

en désignant par $f(z_0)$, $f'(z_0)$, ... les valeurs des polynomes $f(z)$, $f'(z)$, ..., quand on y remplace z par z_0. Si h est petit en valeur absolue, si z reste voisin de z_0, la valeur de $f(z)$ reste voisine de $f(z_0)$, aussi voisine qu'on le veut, pourvu que la valeur absolue de h soit suffisamment petite : c'est ce qu'on exprime en disant que le polynome est une fonction continue de z, pour $z=z_0$.

Si le polynome $f(z)$ s'annule pour $z=z_0$, z_0 est une *racine* de ce polynome; l'ordre de multiplicité de cette racine est la plus haute puissance de h que l'on puisse mettre en facteur dans le polynome $f(z_0+h)$ ordonné suivant les puissances de h; c'est le degré du premier terme de ce polynome qui n'est pas nul; pour que z_0 soit une racine d'ordre de multiplicité p du polynome $f(z)$, il faut et il suffit que ce polynome s'annule pour $z=z_0$ ainsi que ses $p-1$ premières dérivées, et que la $p^{\text{ième}}$ dérivée ne s'annule pas. Si l'ordre de multiplicité p, défini comme plus haut, était égal à 1, la racine z_0 n'est pas multiple; elle est *simple;* dans ce cas la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas pour $z=z_0$. Si z_0 est une racine d'ordre de multiplicité p pour le polynome $f(z)$, c'est une racine multiple d'ordre $p-1$ pour $f'(z)$; puisque les $p-2$ premières dérivées du polynome $f'(z)$ s'annulent pour $z=z_0$, et que sa $(p-1)^{\text{ième}}$ dérivée ne s'annule pas; elle est d'ordre $p-2$ pour $f''(z)$, d'ordre 1 (une racine simple) pour $f^{(p-1)}(z)$; ce n'est pas une racine pour $f^{(p)}(z)$. On peut mettre alors le polynome $f(z)$ sous la forme $f(z)=(z-z_0)^p\varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant un polynome qui ne s'annule pas pour $z=z_0$. Réciproquement, si l'on peut mettre $f(z)$ sous cette forme, le polynome $\varphi(z)$ ne s'annulant pas pour $z=z_0$, on peut affirmer que z_0 est une racine de $f(z)$, d'ordre de multiplicité p. Si z_1 est une racine de $f(z)$, autre que z_0, z_1 est une racine de $\varphi(z)$, elle est du même ordre de multiplicité dans $f(z)$ et dans $\varphi(z)$.

Si le polynome $f(z)$ ne s'annule pas pour $z = z_0$, il ne s'annule pas non plus pour les valeurs de z suffisamment voisines de z_0; mais on peut, d'après le numéro précédent, trouver de telles valeurs pour lesquelles on ait

$$|f(z)| < |f(z_0)|.$$

108. Considérons maintenant les valeurs de la variable qui sont grandes en valeur absolue. Pour de telles valeurs, le polynome est lui-même très grand en valeur absolue.

Supposons, en effet, que ce polynome soit de degré n; en l'ordonnant suivant les puissances descendantes de z on pourra l'écrire

$$\begin{aligned} f(z) &= B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_{n-1} z + B_n \\ &= z^n \left[B_0 + B_1 \left(\frac{1}{z}\right) + \ldots + B_{n-1} \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + B_n \left(\frac{1}{z}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

Le polynome entre crochets, dans le dernier membre, est un polynome en $\frac{1}{z}$, ordonné suivant les puissances de $\frac{1}{z}$, dans lequel le premier terme B_0 n'est pas nul.

On peut choisir la valeur absolue ρ de z assez grande, ou la valeur absolue $\frac{1}{\rho}$ de $\frac{1}{z}$ assez petite, pour que la différence entre le polynome en $\frac{1}{z}$ qui est entre crochets et son premier terme B_0 soit moindre en valeur absolue que tel nombre positif ε que l'on voudra. Dans ces conditions la valeur absolue de $f(z)$ sera supérieure à $\rho^n(b_0 - \varepsilon)$, en désignant par b_0 la valeur absolue de B_0, que l'on peut supposer plus grande que ε. Or, il est clair que, pourvu que ρ soit assez grand, la valeur de $\rho^n(b_0 - \varepsilon)$ peut dépasser tel nombre positif que l'on voudra.

On voit, en particulier, que, lorsque le point z est à l'extérieur d'un cercle décrit du point O comme centre avec un rayon suffisamment grand, le polynome $f(z)$ ne peut pas s'annuler.

§ 3. — EXTENSION DE DIVERS RÉSULTATS.

109. La formule du binome (n° 43) s'applique aussi bien, qu'il s'agisse de nombres réels ou de nombres imaginaires. On peut, en particulier, l'appliquer au développement de $(a+bi)^n$, en supposant que a, b soient réels; on trouve ainsi

$$(a+bi)^n = A + Bi,$$

A et B étant des nombres réels définis par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} A = \quad a^n \quad - C_2^n a^{n-2} b^2 + C_4^n a^{n-4} b^4 - \ldots + (-1)^p C_{2p}^n \quad a^{n-2p} \quad b^{2p} \quad + \ldots, \\ B = C_1^n a^{n-1} b - C_3^n a^{n-3} b^3 + C_5^n a^{n-5} b^5 - \ldots - (-1)^p C_{2p-1}^n a^{n-2p+1} b^{2p-1} + \ldots; \end{cases}$$

les coefficients numériques C_1^n, C_2^n, ... ont été définis au n° 43. Les derniers termes de A, B sont respectivement

$$(-1)^{\frac{n}{2}} b^n, \quad -(-1)^{\frac{n}{2}} nab^{n-1},$$

si n est pair et

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} nab^{n-1}, \quad -(-1)^{\frac{n+1}{2}} b^n,$$

si n est impair.

En prenant en particulier $a = \cos\theta$, $b = \sin\theta$ et en se rappelant (n° 97) la formule de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

on obtient les relations

$$(2)\quad \begin{cases} \cos n\theta = \cos^n\theta - C_2^n \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + C_4^n \cos^{n-4}\theta \sin^4\theta - \ldots, \\ \sin n\theta = C_1^n \cos^{n-1} \sin\theta - C_3^n \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \ldots, \end{cases}$$

dont les seconds membres sont des polynomes homogènes en $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

En posant $\cos\theta = x$, on a

$$\sin\theta = \pm\sqrt{1-x^2},$$

et l'on reconnaît, puisqu'il n'entre dans le développement de $\cos n\theta$ que des puissances paires de $\sin\theta$, dans le développement de $\sin\theta$ que des puissances impaires, que $\cos n\theta$ est un polynome en x et que $\sin n\theta$ est un polynome en x multiplié par $\sqrt{1-x^2}$; ces deux polynomes sont de degrés respectifs n et $n-1$; les coefficients numériques des termes du plus haut degré sont respectivement

$$C_0 + C_2 + C_4 + \ldots,$$
$$C_1 + C_3 + C_5 + \ldots,$$

c'est-à-dire qu'ils sont tous deux égaux à 2^{n-1} (n° 43).

Enfin, en divisant membre à membre les égalités (2) et en divisant par $\cos^n\theta$ les deux termes de la fraction que l'on obtient alors au second membre, on trouve

$$\operatorname{tang} n\theta = \frac{C_1^n \operatorname{tang}\theta - C_3^n \operatorname{tang}^3\theta + C_5^n \operatorname{tang}^5\theta - \ldots}{1 - C_2^n \operatorname{tang}^2\theta + C_4^n \operatorname{tang}^4\theta + \ldots};$$

$\operatorname{tang} n\theta$ est une fraction rationnelle en $\operatorname{tang}\theta$.

En combinant la formule de Moivre avec celle qu'on en déduit en changeant θ en $-\theta$, on voit qu'on peut aussi écrire

$$\cos n\theta = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n}{2},$$

$$\sin n\theta = \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)^n - (\cos\theta - i\sin\theta)^n}{2i},$$

$$\operatorname{tang} n\theta = \frac{(1 + i\operatorname{tang}\theta)^n - (1 - i\operatorname{tang}\theta)^n}{i[(1 + i\operatorname{tang}\theta)^n + (1 - i\operatorname{tang}\theta)^n]}.$$

110. La théorie de la division des polynomes ordonnés s'étend sans aucun changement aux polynomes à coefficients et à variables imaginaires, puisqu'elle est fondée uniquement sur des règles de calcul qui s'appliquent aussi bien aux nombres imaginaires qu'aux nombres réels.

On appelle *fonction rationnelle de z* ou *fraction rationnelle en z* une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynomes en z. Les explications qui précèdent suffiront au lecteur pour étendre à ces fractions la plupart des propriétés qui ont été établies au Chapitre IV; il verra de suite, en particulier, comment, lorsque le dénominateur ne s'annule pas pour $z = 0$, on obtient des polynomes simples qui représentent, avec telle approximation que l'on veut, la fraction rationnelle; une fraction rationnelle est continue pour toute valeur de z qui n'annule pas le dénominateur. Si z_0 est une valeur de z qui annule le dénominateur sans annuler le numérateur, la fonction est très grande en valeur absolue pour les valeurs de z suffisamment voisines de z_0 ; il en est de même si z_0 annule le numérateur comme le dénominateur, lorsque z_0 est pour le dénominateur une racine d'ordre de multiplicité plus grand que pour le numérateur. On dit alors que la fonction est infinie pour $z = z_0$, et que z_0 est un pôle de cette fonction ; l'ordre de multiplicité du pôle est la différence des ordres de multiplicité de z_0 considéré comme racine du dénominateur et du numérateur. Si z_0 n'était racine que du dénominateur, l'ordre de multiplicité du pôle serait l'ordre de multiplicité de z_0 considéré comme racine du dénominateur. Si l'ordre de multiplicité du pôle z_0 était 1, ce pôle ne devrait pas être regardé comme multiple, mais bien comme *simple*.

Si z_0 est un pôle d'ordre de multiplicité p, il existe un polynome en $\frac{1}{z - z_0}$, de degré p, sans terme constant, et, par conséquent, de la forme

$$\frac{A_0}{(z - z_0)^p} + \frac{A_1}{(z - z_0)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{z - z_0},$$

tel que la différence entre la fraction rationnelle et le polynome peut être regardée comme une fonction continue de z pour $z = z_0$; ce polynome en $\frac{1}{z - z_0}$, qui est d'ailleurs unique, se calcule comme il a été expliqué au n° 65. Je continuerai de le désigner comme la partie de la fraction qui devient infinie pour $z = z_0$. Le coefficient A_{p-1} du terme en $\frac{1}{z - z_0}$ s'appelle le *résidu* du pôle z_0.

La théorie de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle de la forme $\frac{f(z)}{(z-a)^\alpha (z-b)^\beta \ldots (z-l)^\lambda}$ subsiste sans changements.

Il en est de même pour les théories de la divisibilité des polynomes, du plus grand commun diviseur, du plus petit commun multiple de deux ou plusieurs polynomes. Toutefois l'introduction des nombres imaginaires modifie profondément la notion de polynome premier telle qu'elle a été présentée au n° 80.

On y considérait alors comme *premier* tout polynome qui ne pouvait se décomposer en un produit de polynomes : tel était par exemple le polynome $x^2 + 1$, impossible à décomposer lorsqu'on ne considère que des polynomes à coefficients réels, qui est égal au produit des facteurs du premier degré $x - i$, $x + i$, quand on introduit les nombres imaginaires. On verra tout à l'heure qu'au point de vue où nous sommes, les seuls polynomes indécomposables sont les polynomes du premier degré.

§ 4. — THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE.

111. La proposition connue sous ce nom peut s'énoncer sous la forme suivante :

Tout polynome en z du degré n est le produit de n facteurs du premier degré en z, à coefficients réels ou imaginaires.

La démonstration de cette proposition se ramène aisément à la démonstration de la suivante :

Tout polynome en z à coefficients réels ou imaginaires admet au moins une racine réelle ou imaginaire.

Avant d'indiquer une démonstration de cette dernière proposition il convient d'en rappeler le sens précis.

Soit

$$f(z) = (a_0 + b_0 i)\, z^n + (a_1 + b_1 i)\, z^{n-1} + \ldots + (a_n + b_n i)$$

un polynome en z du degré n dont les coefficients sont les nombres complexes $a_0 + b_0 i$, $a_1 + b_1 i$, $\ldots$, $a_n + b_n i$, a_0, a_1, $\ldots$, a_n, b_0, b_1, $\ldots$, b_n étant des nombres réels; je n'exclus pas le cas où, b_0, b_1, $\ldots$, b_n étant nuls, les coefficients seraient réels.

Le théorème précédent veut dire qu'il existe un nombre $z_1 = x_1 + iy_1$, ou plutôt deux nombres réels x_1, y_1 tels que si l'on remplace dans $f(z)$ z par $x_1 + iy_1$, et que l'on effectue les calculs d'après les règles du Chapitre précédent, le résultat soit nul, la partie réelle et le coefficient de i étant nuls séparément.

On peut encore présenter les choses ainsi : dans $f(z)$ remplaçons z par $x + iy$, en désignant par x et y deux variables réelles.

Le polynome $f(z)$ prendra la forme (n° 103)

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

en désignant par $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ des polynomes à deux variables réelles x, y et à coefficients réels. La proposition énoncée veut dire qu'il y a un couple de nombres réels x_1, y_1 qui annulent les polynomes $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ ou encore que les deux équations, à coefficients *réels*

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \psi(x, y) = 0,$$

admettent une solution *réelle* $x = x_1$, $y = y_1$.

112. La démonstration que je donnerai de ce théorème repose sur le postulat suivant que je prierai le lecteur d'admettre : il est d'ailleurs susceptible d'une démonstration parfaitement rigoureuse : c'est un cas particulier d'une proposition beaucoup plus générale.

Soit $g(x, y)$ un polynome à deux variables réelles x, y et à coefficients réels; parmi les couples de valeurs (réelles) de x, y qui satisfont à la condition $x^2 + y^2 \leqq R^2$, où R est un nombre positif donné, il y en a un x_1, y_1 qui fait acquérir au polynome $g(x, y)$ une valeur minimum $g(x_1, y_1)$: c'est-à-dire que, pour tous les couples de valeurs de x, y qui vérifient l'inégalité précédente, on a certainement

$$g(x_1, y_1) \leqq g(x, y).$$

En d'autres termes, à l'intérieur du cercle (C) décrit de l'origine des coordonnées comme centre, avec le rayon R, ou sur la circonférence de ce cercle, il y a un point dont les coordonnées vérifient l'inégalité précédente.

La démonstration rigoureuse de ce théorème repose essentiellement sur ce qu'un polynome est une fonction continue des variables qui y figurent : elle s'étend par conséquent aux fonctions continues autres que les polynomes. Quant au théorème lui-même, il paraît peut-être au lecteur plus évident qu'il n'est en réalité : on sentira bien la nécessité de cette démonstration que je supprime, en observant que la proposition cesserait d'être vraie si l'on remplaçait l'inégalité $x^2 + y^2 \leqq R^2$ par l'inégalité $x^2 + y^2 < R^2$, et ce dernier point est assez clair, puisqu'il peut arriver que ce soit précisément pour un couple de valeurs x_1, y_1 vérifiant la condition $x_1^2 + y_1^2 = R^2$ [pour un point situé sur la circonférence du cercle (C)], que le polynome atteigne la plus petite valeur possible.

Quoi qu'il en soit, si l'on admet ce postulat (1), la démonstration de

---

(1) J'aurai l'occasion d'admettre plus tard la proposition analogue pour les fonctions continues à une seule variable (*Introduction*, p. 237).

l'existence d'une racine pour le polynome

$$f(z) = (a_0 + b_0 i) z^n + (a_1 + b_1 i) z^{n-1} + \ldots + a_n + b_n i$$

repose sur ce que, dans le voisinage de chaque valeur z qui n'annule pas $f(z)$, il y a des valeurs de z pour lesquelles on a $|f(z)| < |f(z_1)|$ (n^{os} **105**, **107**).

Le postulat qu'on vient d'énoncer va être appliqué, en choisissant convenablement le cercle (C), au polynome

$$g(x, y) = \varphi^2(x, y) + \psi^2(r, y),$$

où $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sont les polynomes à coefficients réels et à variables réelles que l'on déduit du polynome $f(z)$ quand on remplace z par $x + iy$, et qu'on sépare la partie réelle et la partie imaginaire, ainsi qu'on l'a expliqué au numéro précédent : le polynome $g(x, y)$ représente le carré de la valeur absolue de $f(z)$, pour $z = x + iy$, ou, si l'on veut, le carré de la distance à l'origine du point $f(z)$. Dire qu'il y a un point, de coordonnées x_1, y_1, situé soit à l'intérieur, soit sur la circonférence de (C) tel que l'on ait $g(x_1, y_1) \leqq g(x, y)$ pour tous les points de coordonnées x, y, situés soit à l'intérieur de (C) soit sur sa circonférence, revient à dire qu'il y a un point $z_1 = x_1 + iy_1$, situé à l'intérieur ou sur la circonférence de (C), tel que l'on ait, pour tous les points $z = x + iy$ situés à l'intérieur ou sur la circonférence de (C), $|f(z_1)| \leqq |f(z)|$. Ceci posé, soit z' une valeur quelconque de z qui n'annule pas $f(z)$; soit P un nombre positif quelconque supérieur à $|f(z')|$; soit R un nombre positif, tel que l'on ait $|f(z)| > \text{P}$, si la valeur absolue de z est égale ou supérieure à R. On a montré, au n° **108**, comment, lorsqu'on se donnait le nombre P, on pouvait déterminer R. On va prendre pour le cercle (C) le cercle de rayon R, dont le centre est à l'origine. Pour tout point z situé à l'extérieur ou sur la circonférence de (C), on a $|f(z)| > \text{P}$; tous les points z pour lesquels on a $|f(z)| < \text{P}$ sont donc à l'intérieur de (C); tels sont en particulier le point z', les points z pour lesquels on a $|f(z)| \leqq |f(z')|$, le point z_1 défini plus haut; pour ce point la valeur absolue de $f(z_1)$ est certainement inférieure ou égale à $|f(z')|$, puisque le point z' est à l'intérieur de (C).

Il en résulte que $f(z_1)$ est nul; si, en effet, $f(z_1)$ n'était pas nul, il y aurait un point z pour lequel on aurait $|f(z)| < |f(z_1)$. Cette inégalité entraîne $|f(z)| < P$, elle exige donc que le point z soit à l'intérieur de (C); mais alors elle contredit la supposition en vertu de laquelle on a $|f(z_1)| \leqq |f(z)|$ pour tous les points z situés à l'intérieur de (C).

Il faut donc que l'on ait $f(z_1) = 0$, ou

$$\varphi(x_1, y_1) = 0, \qquad \psi(x_1, y_1) = 0,$$

et la proposition énoncée est établie.

113. On va maintenant montrer que tout polynome du degré n à coefficients réels ou imaginaires est le produit de n facteurs de la forme $z - a$, où a est un nombre réel ou imaginaire, et d'un facteur numérique égal au coefficient de z^n dans le polynome.

Soit en effet

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n$$

le polynome proposé. En vertu du numéro précédent il admet une racine z_1; il est donc divisible par $z - z_1$; le quotient est un polynome $f_1(z)$ de degré $n - 1$, qui commense par le terme $A_0 z^{n-1}$; ce polynome $f_1(z)$ admet lui-même une racine z_2; il est divisible par $z - z_2$, et le quotient est un polynome du degré $n - 2$ qui commence par le terme $A_0 z^{n-2}$; en continuant ainsi, de proche en proche, on arrive à un polynome f_{n-1} du premier degré qui commence par le terme $A_0 z$ et que l'on peut écrire $A_0(z - z_n)$ en désignant sa racine par z_n; la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
f(z) \quad &= (z - z_1) f_1(z), \\
f_1(z) \quad &= (z - z_2) f_2(z), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_{n-1}(z) &= A_0(z - z_n),
\end{aligned}$$

en remplaçant dans la première $f_1(z)$ par $(z - z_2) f_2(z)$, puis dans le résultat $f_2(z)$ par $(z - z_3) f_3(z)$, ..., entraîne l'identité

$$f(z) = A_0(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\ldots(z - z_n),$$

que l'on avait annoncée.

Rien ne suppose dans le raisonnement précédent que les nombres z_1, z_2, ..., z_n soient distincts. Si l'on désigne par a, b, ..., l les nombres différents qu'on peut tirer de la suite $z_1, z_2, \ldots, z_n$; si l'on suppose que a figure α fois dans cette suite, que b y figure β fois, ..., que l y figure λ fois, on peut écrire l'identité précédente sous la forme

$$(1) \qquad f(z) = A_0(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta}\ldots(z-l)^{\lambda};$$

les nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont des nombres naturels; mais rien n'empêche qu'ils soient égaux à 1 ; on a d'ailleurs

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda = n.$$

Supposons qu'on se donne un polynome $f(z)$, c'est-à-dire qu'on se donne ses coefficients, et qu'on l'ait mis sous la forme précédente.

On voit, puisqu'un produit ne peut être nul sans qu'un de ses facteurs soit nul, que le polynome $f(z)$ ne peut s'annuler que pour les seuls nombres $a, b, c, \ldots, l$, qui sont en nombre au plus égal à n.

On voit aussi que le polynome $f(z)$ ne peut être mis que d'une seule façon sous cette forme, où tout est déterminé, les nombres $a, b, c, \ldots, l$, qui sont les racines distinctes de $f(z)$, les exposants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, dont chacun indique l'ordre de multiplicité de la racine correspondante, le facteur constant A, nécessairement égal au coefficient de z^n dans le polynome $f(z)$.

Au reste, on pourrait invoquer encore le théorème du n° 80, sur l'impossibilité de décomposer de deux façons différentes un polynome en un produit de facteurs premiers : ces facteurs premiers sont ici, comme on l'a dit plus haut, les polynomes du premier degré.

Un polynome de degré n ne peut s'annuler pour plus de n valeurs distinctes de la variable.

Si l'on sait d'un polynome en z qu'il n'est pas de degré supérieur à n et qu'il s'annule pour plus de n valeurs distinctes de z, on peut affirmer que tous ses coefficients sont nuls, car, si l'un de ces coefficients n'était pas nul, le polynome serait d'un certain degré $p < n$, ou bien il se réduirait à une constante, dans le cas où tous les coefficients seraient nuls, sauf le terme constant. Dans le premier cas il ne pourrait s'annuler pour plus de p valeurs distinctes de z ; dans le second cas, il ne serait jamais nul.

Deux polynomes en z du degré n au plus ne peuvent prendre des valeurs égales pour plus de n valeurs distinctes de z sans être identiques terme à terme, puisque leur différence est un polynome en z de degré n au plus qui s'annulerait pour plus de n valeurs de la variable. En d'autres termes, il n'existe qu'un polynome de degré inférieur ou égal à n qui prenne $n+1$ valeurs données pour $n+1$ valeurs données distinctes de la variable.

On a appris à former ce polynome au n° 67, dont les conclusions s'étendent immédiatement au cas d'un polynome à coefficients et à variable imaginaires.

114. Lorsqu'un polynome a ses coefficients réels, à chaque racine imaginaire de ce polynome correspond une racine imaginaire conjuguée, pour laquelle l'ordre de multiplicité est le même.

Soit

$$f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n,$$

le polynome donné dans lequel les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont réels; supposons-le, en désignant par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ses racines, chacune étant répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, mis sous la forme

$$f(z) = A_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n);$$

dans cette identité, qui a lieu quel que soit z, regardons z comme un nombre réel; $f(z)$ est alors un nombre réel.

Désignons par $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ les nombres conjugués de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Le nombre $A_0(z - z'_1)(z - z'_2)\ldots(z - z'_n)$ est le nombre conjugué du nombre $A_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$ (n° **91**) : comme le dernier nombre est réel, le premier lui est égal; l'égalité

$$A_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n) = A_0(z - z'_1)(z - z'_2)\ldots(z - z'_n),$$

devant avoir lieu pour toutes les valeurs réelles de z, est une identité en z. En d'autres termes, le polynome $f(z)$ peut aussi bien être mis sous la seconde forme que sous la première. Tout facteur qui se trouve dans un membre doit se trouver dans l'autre et le même nombre de fois. Cette remarque n'apprend rien pour ce qui concerne les racines réelles, identiques à leurs conjuguées. Mais si z_1, par exemple, est une racine imaginaire d'ordre de multiplicité α, c'est-à-dire s'il y a dans le premier membre α facteurs identiques à $z - z_1$, il y en a le même nombre α qui sont identiques à $z - z'_1$; en d'autres termes le polynome admet le nombre z'_1, conjugué de z_1, comme racine du même ordre de multiplicité que z_1.

Il est alors naturel de grouper ensemble les facteurs qui correspondent à deux racines conjuguées $a + bi$, $a - bi$; le produit

$$(z - a - bi)(z - a + bi)$$

de ces deux facteurs est égal à

$$(z - a)^2 + b^2 = z^2 - 2az + a^2 + b^2;$$

c'est le trinome du second degré en z à coefficients réels, dont les racines sont $a + bi$, $a - bi$. En faisant de même pour chaque couple de racines conjuguées, on voit que tout polynome $f(z)$ peut se mettre sous forme d'un produit de facteurs réels; les uns sont du premier degré, ils correspondent aux racines réelles; les autres sont des trinomes du second degré à racines imaginaires; chacun d'eux a pour racines un couple de racines imaginaires conjuguées du polynome proposé. Si, par exemple, le polynome $f(z)$, du degré n, à coefficients réels, admet r racines réelles $z_1, z_2, \ldots, z_r$ et $2s$ racines imaginaires, conjuguées deux par deux, et si l'on désigne par

$$z^2 + p_1 z + q_1, \quad z^2 + p_2 z + q_2, \quad \ldots, \quad z^2 + p_s z + q_s,$$

les trinomes du second degré dont chacun admet comme racines un des s couples de racines imaginaires conjuguées, le polynome peut se mettre sous la forme

$$A_0(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_r)(z^2 + p_1 z + q_1)(z^2 + p_2 z + q_2)\ldots(z^2 + p_s z + q_s).$$

A_0 est toujours le coefficient de z^n dans $f(z)$. Ici encore, on ne suppose pas que les facteurs du premier degré ou ceux du second soient nécessairement distincts : chacun figure autant de fois qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de la racine correspondante, si elle est réelle, dans l'ordre de multiplicité commun aux deux racines conjuguées, s'il s'agit d'un facteur du second degré.

Ici encore, tout est déterminé dans ce mode de décomposition, lorsqu'on suppose que les facteurs du second degré n'ont pas de racines réelles. Au reste, on peut encore invoquer l'impossibilité de décomposer de deux façons un polynome en facteurs premiers. Si l'on se place en effet au point de vue des nombres réels, si l'on ne veut considérer que des polynomes à variables réelles et à coefficients réels, il est clair que les facteurs du premier et du second degré qui figurent dans la formule précédente doivent être regardés comme des facteurs premiers.

115. La recherche des racines d'un polynome donné $f(x)$ est identique à la recherche des solutions de l'équation $f(z) = 0$, ou, comme on dit, à la résolution de cette équation.

On sait effectuer cette résolution dans le cas où l'équation est du premier ou du second degré; dans ce dernier cas, en effet, la méthode que l'on enseigne dans les Éléments s'applique, que les coefficients soient réels ou imaginaires; on a à extraire une racine carrée, ce que l'on a appris à faire au n° 93.

Soit par exemple à résoudre l'équation

$$z^2 - (2+i)z + 3 + i = 0;$$

on trouvera

$$z = \frac{2 + i \pm \sqrt{-9}}{2},$$

les deux racines sont

$$z' = \frac{2 + i + 3i}{2} = 1 + 2i,$$

$$z'' = \frac{2 + i + 3i}{2} = 1 - i,$$

et l'on peut écrire l'identité en z

$$z^2 - (2+i)z + 3 + i = (z - 1 - 2i)(z - 1 + i).$$

116. On sait encore effectuer la résolution pour une équation binome, c'est-à-dire pour une équation de la forme $x^n - A = 0$, c'est le problème qui a été traité aux n^os 99, 100, etc. Bornons-nous au cas ou A est égal à 1.

Les n racines de l'équation

$$z^n - 1 = 0$$

ou les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité s'obtiennent (n° 100) en donnant à k, dans l'expression $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, n valeurs consécutives. Elles sont toutes simples, puisqu'il y en a n qui sont distinctes.

Le polynome $z^n - 1$ est donc le produit de n facteurs de la forme

$$z - \cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

où k a n valeurs consécutives. On peut aussi appliquer la formule du n° **114** et obtenir une décomposition en facteurs réels. Supposons d'abord n impair; on pourra prendre pour les n valeurs du nombre k les n nombres consécutifs

$$-\frac{n-1}{2}, \quad -\frac{n-1}{2}+1, \quad \ldots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{2}-1, \quad \frac{n-1}{2};$$

la valeur 0 attribuée à k fournit la seule racine réelle de l'équation proposée, savoir $z = 1$; d'ailleurs, à deux valeurs symétriques de k répondent deux racines conjuguées : on peut dire que la racine réelle unique de l'équation proposée est $z = 1$, et que les $n - 1$ racines imaginaires, conjuguées deux par deux, sont contenues dans la formule

$$\cos\frac{2k\pi}{n} \pm i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

où k doit prendre les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$. Le produit de deux facteurs binomes correspondant à deux racines conjuguées est d'ailleurs

$$\left(z - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2k\pi}{n} = z^2 - 2z\cos\frac{2k\pi}{n} + 1.$$

On a donc identiquement en z,

$$\begin{aligned} z^n - 1 = (z-1)&\left(z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{n} + 1\right) \\ &\times\left(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{n} + 1\right)\cdots\left(z^2 - 2z\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1\right), \end{aligned}$$

ce que l'on écrit souvent sous la forme

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}}\left(z^2 - 2z\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right);$$

le signe $\prod$ indique qu'on doit faire le produit de facteurs qui se déduisent de l'expression écrite après ce signe, en donnant à k des valeurs consécutives, à partir de la valeur $k = 1$, placée au-dessous du signe, jusqu'à la valeur $k = \frac{n-1}{2}$, placée au-dessus.

Lorsque n est pair on peut prendre pour k les valeurs

$$-\frac{n}{2}+1, \quad -\frac{n}{2}+2, \quad \ldots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \frac{n}{2}-1, \quad \frac{n}{2};$$

les racines 1 et -1, qui correspondent aux valeurs 0 et $\frac{n}{2}$, sont alors réelles, les autres sont imaginaires conjuguées, et l'on peut écrire

$$z^n - 1 = (z^2 - 1) \prod_{k=1}^{k=\frac{n}{2}-1} \left(z^2 - 2z\cos\frac{2k\pi}{n} + 1\right).$$

Le problème de la résolution des équations ou de la décomposition des polynomes en facteurs du premier degré sera repris ultérieurement; je me borne pour le moment aux exemples qui précèdent et je vais poursuivre quelques conséquences de cette décomposition supposée effectuée.

117. Quand deux polynomes $f(z)$ et $\varphi(z)$ sont décomposés en facteurs du premier degré, on sait reconnaître immédiatement si l'un est divisible par l'autre : $f(z)$ sera divisible par $\varphi(z)$ si tous les facteurs du premier degré qui figurent dans le polynome $\varphi(z)$ figurent dans le polynome $f(z)$, autant de fois au moins : cette condition est nécessaire, comme on le voit de suite en supposant $f(z) = \varphi(z)\psi(z)$, et le polynome $\psi(z)$ aussi décomposé en facteurs du premier degré; elle est évidemment suffisante.

Dès lors, étant donnés deux ou plusieurs polynomes en z, décomposés en facteurs du premier degré, on saura former soit leur plus grand commun diviseur, soit leur plus petit commun multiple.

Le plus grand commun diviseur des polynomes P, Q, R, ... sera le produit des facteurs binomes qui figurent à la fois dans tous ces polynomes, chacun étant répété autant de fois que dans celui des polynomes P, Q, R,, .., où il est répété le plus petit nombre de fois.

Le plus petit commun multiple de deux ou plusieurs polynomes P, Q, R, ... décomposés en facteurs du premier degré s'obtiendra en faisant le produit des différents facteurs qui figurent dans ces différents polynomes, chacun de ces facteurs étant répété autant de fois que dans le polynome où il est répété le plus grand nombre de fois.

Les démonstrations sont identiques à celles de l'Arithmétique, pour les théorèmes analogues concernant la recherche du plus grand commun diviseur des nombres entiers décomposés en facteurs premiers : ceux-ci sont remplacés, dans la théorie qui nous occupe, par les facteurs binomes.

Par exemple, le plus grand commun diviseur des polynomes

$$x^3(x-1)^2(x+i)^4(x-1-i),$$
$$x^2(x-1)(x+i)^3(x-1+i),$$
$$(x-1)^3(x+i)^2(x-i)$$

est

$$(x-1)(x+i)^2.$$

Leur plus petit commun multiple est

$$x^3(x-1)^2(x+i)^4(x-1-i)(x-1+i)(x-i).$$

118. Racines multiples. — La théorie précédente permet de reconnaître la composition du plus grand commun diviseur entre un polynome $f(z)$ et sa dérivée et de décomposer effectivement un polynome donné $f(z)$ en un produit de polynomes dont chacun n'admet plus que des racines simples.

On a vu plus haut qu'une racine z_1 du polynome $f(z)$, d'ordre de multiplicité α, est une racine de la dérivée $f'(z)$ avec l'ordre de multiplicité $\alpha-1$; dans le cas où α est égal à 1, où z_1 est une racine simple de $f(z)$, z_1 n'est pas racine de la dérivée. Réciproquement, si z_1 est une racine de la dérivée $f'(z)$, d'ordre de multiplicité α', pour cette dérivée, et si z_1 est racine de $f(z)$, on peut affirmer qu'elle est une racine d'ordre de multiplicité $\alpha'+1$ pour $f(z)$: en effet, si α est son ordre de multiplicité pour $f(z)$, cet ordre de multiplicité pour $f'(z)$ doit être $\alpha-1$; on doit donc avoir $\alpha-1=\alpha'$ (¹).

(¹) Un nombre peut être racine multiple de la dérivée d'un polynome sans être racine de ce polynome : ainsi le polynome z^4-1 a pour dérivée $4z^3$: 0 est une racine triple de cette dérivée et n'est pas racine de z^4-1.

D'après cela, si un polynome $f(z)$ n'a que des racines simples, il n'a pas de racine commune avec sa dérivée $f'(z)$; le plus grand commun diviseur de $f(z)$ et de $f'(z)$ est 1. Réciproquement, si le plus grand commun diviseur d'un polynome et de sa dérivée est 1, on peut affirmer que ce polynome n'a que des racines simples. Tel est, par exemple, le polynome $z^n - 1$.

Si un polynome $f(z)$ a des racines multiples, et si on le suppose décomposé en facteurs du premier degré, on voit que le plus grand commun diviseur de ce polynome et de sa dérivée est formé des facteurs correspondant aux racines multiples, chaque facteur figurant une fois de moins dans le plus grand commun diviseur que dans $f(z)$.

119. Supposons que le polynome $f(z)$ admette des racines simples, doubles, triples, ..., p^{uples}, mais non d'ordre de multiplicité supérieur à p. Groupons ensemble les facteurs binomes qui correspondent aux racines simples, facteurs dont chacun ne figure qu'une fois dans $f(z)$ et soit Z_1 leur produit; soit de même Z_2 le produit des facteurs binomes qui correspondent aux racines doubles, ..., Z_p le produit des facteurs binomes qui correspondent aux racines d'ordre de multiplicité p, chacun de ces facteurs n'étant pris qu'une fois. On aura identiquement

$$f(z) = Z_1 Z_2^2 Z_3^3 \ldots Z_p^p.$$

Le polynome $f(z)$, tout en admettant des racines multiples, peut fort bien ne pas avoir de racines multiples de tous les ordres, comme on l'a supposé dans la formule précédente : pour que celle-ci puisse embrasser tous les cas, il suffit de convenir qu'on remplacera par l'unité celui ou ceux des facteurs Z_1, Z_2, ..., qui doit manquer, Z_2, par exemple, s'il n'y a pas de racines doubles.

On peut, par une suite d'opérations rationnelles effectuées en partant de $f(z)$, déterminer chacun des polynomes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$.

En effet, d'après ce qu'on a dit plus haut, le plus grand commun diviseur entre $f(z)$ et sa dérivée $f'(z)$ doit admettre comme racines simples les racines doubles de $f(z)$, comme racines doubles les racines triples de $f(z)$, etc. Il est donc identique à $Z_2 Z_3^2 Z_4^3 Z_p^{p-1}$, en continuant d'adopter la convention par laquelle un facteur qui n'existe pas dans $f(z)$ doit être remplacé par l'unité.

Désignons par $f_1(z)$ ce plus grand commun diviseur, on a

$$f_1(z) = Z_2 Z_3^2 \ldots Z_p^{p-1};$$

le plus grand commun diviseur entre $f_1(z)$ et sa dérivée sera de même

$$f_2(z) = Z_3 Z_4^2 \ldots Z_p^{p-2},$$

et ainsi de suite. Le plus grand commun diviseur entre $f_{p-2}(z)$ et sa dérivée sera

$$f_{p-1}(z) = Z_p;$$

on sera prévenu qu'il faut s'arrêter, parce que, en cherchant le plus grand commun diviseur entre $f_{p-1}(z)$ et sa dérivée, on n'en trouvera pas, puisque le polynome Z_p n'a pas de racines multiples. En d'autres termes l'ordre de multiplicité le plus élevé des racines de $f(z)$ (le mombre p) sera le nombre de plus grands communs diviseurs qu'on aura eu à chercher, en comptant celui qui est égal à une constante.

Les identités

$$\begin{aligned}
f(z) &= Z_1 Z_2^2 Z_3^3 \ldots Z_p^p,\\
f_1(z) &= Z_2 Z_3^2 \ldots Z_p^{p-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_{p-2}(z) &= Z_{p-1} Z_p^2,\\
f_{p-1}(z) &= Z_p
\end{aligned}$$

conduisent aux suivantes

$$\begin{aligned}
\varphi_1(z) &= \frac{f_1(z)}{f(z)} = Z_1 Z_2 Z_3 \ldots Z_p,\\
\varphi_2(z) &= \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = Z_2 Z_3 \ldots Z_p,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi_{p-1}(z) &= \frac{f_{p-2}(z)}{f_{p-1}(z)} = Z_{p-1} Z_p,\\
\varphi_p(z) &= f_{p-1}(z) = Z_p,
\end{aligned}$$

puis à celles-ci

$$\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} = Z_1, \qquad \frac{\varphi_2(z)}{\varphi_3(z)} = Z_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\varphi_{p-1}(z)}{\varphi_p(z)} = Z_{p-1}, \qquad \varphi_p(z) = Z_p.$$

En sorte que, par suite de divisions, on trouve isolément les polynomes $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{p-1}, Z_p$. Par conséquent le problème qui consiste à trouver les racines d'un polynome peut toujours être ramené au cas où le polynome n'a que des racines simples.

Supposons que $f(z)$ ait ses coefficients rationnels ; il en sera de même de la dérivée $f'(z)$, et des coefficients des polynomes qu'on obtient par une suite de divisions ; dans ce cas, tous les polynomes Z_1, $Z_2, \ldots, Z_p$ ont leurs coefficients rationnels. Si l'un de ces polynomes se réduit au premier degré, sa racine sera donc un nombre rationnel. En d'autres termes, si un polynome a ses coefficients rationnels, et s'il n'y a qu'une seule racine de ce polynome à avoir un certain ordre de multiplicité, cette racine sera rationnelle.

Un polynome du troisième degré, s'il a des racines multiples, ne peut avoir qu'une racine simple et une racine double, ou bien une racine triple : si les coefficients du polynome sont rationnels, il en est de même de ces racines.

Un polynome du quatrième degré, à racines multiples, peut avoir deux racines simples et une double, deux racines doubles, une racine simple et une racine triple, ou encore une racine quadruple. Si le polynome a ses coefficients rationnels, la racine double dans le premier cas, toutes les racines dans le troisième et le quatrième cas, seront rationnelles ; dans le second cas, le polynome sera un carré parfait et il sera aisé de s'en apercevoir.

Appliquons par exemple la méthode exposée plus haut au polynome

$$f(z) = z^8 - z^6 - 2z^5 + 2z^3 + z^2 - 1;$$

on trouvera que le plus grand commun diviseur entre ce polynome et sa dérivée est

$$z^4 - z^3 - z + 1.$$

Le plus grand commun diviseur entre ce polynome et sa dérivée est $z - 1$. Ce dernier polynome est premier avec sa dérivée. L'ordre de multiplicité le plus élevé est ici $p = 3$, et l'on a, en employant les notations précédemment expliquées,

$$f(z) = Z_1 Z_2^2 Z_3^3 \qquad = z^8 - z^6 - 2z^5 + 2z^3 + z^2 - 1,$$

$$f_1(z) = Z_2 Z_3^2 \qquad = z^4 - z^3 - z + 1,$$

$$f_2(z) = Z_3 \qquad = z - 1,$$

$$\varphi_1(z) = Z_1 Z_2 Z_3 \qquad = \frac{z^8 - z^6 - 2z^5 + 2z^3 + z^2 - 1}{z^4 - z^3 - z + 1} = z^4 + z^3 - z - 1.$$

$$\varphi_2(z) = Z_2 Z_3 \qquad = \frac{z^4 + z^3 - z - 1}{z - 1} \qquad = z^3 - 1,$$

$$\varphi_3(z) = Z_3 \qquad = z - 1,$$

$$Z_1 = \frac{z^4 + z^3 - z - 1}{z^3 - 1} = z + 1,$$

$$Z_2 = \frac{z^3 - 1}{z + 1} \qquad = z^2 + z + 1,$$

$$Z_3 = z - 1,$$

$$f(z) = (z-1)^3 (z^2 + z + 1)^2 (z + 1):$$

ainsi 1 est racine triple, les deux racines du trinome $z^2 + z + 1$, à savoir

$$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2},$$

sont racines doubles de $f(z)$, -1 est racine simple.

EXERCICES.

100. Le point $a - z$ est le point symétrique du point z par rapport au point $\frac{a}{2}$.

101. Lorsque t varie par valeurs réelles de 0 à 1, le point $z_0 + tz_1$ décrit le vecteur qui va du point z_0 au point z_1 ; pour quelle valeur de t le point

$$z_0 + tz_1$$

est-il au milieu de ce vecteur ?

102. Soient (C_0) et (C_1) les cercles de rayon 1, dont les centres sont les points 0 et 1, et (D) la corde commune, supposée indéfinie, à ces deux cercles ; en supposant que le point z décrive l'un des lieux (C_0), (C_1), (D), quels sont

les lieux décrits par les points

$$1 - z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{1}{1-z}?$$

Les lignes (C_0), (C_1), (D) partagent le plan en six régions; en supposant que l'un des six points

$$z, \quad 1-z, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z}, \quad \frac{z}{z-1}, \quad \frac{1}{1-z}$$

soit dans l'une de ces régions, où sont les cinq autres?

103. La valeur absolue du rapport $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ est le rapport des distances du point z aux points z_1 et z_2; la valeur principale de l'argument de ce rapport est l'angle (compris entre $-\pi$ et $+\pi$) sous lequel on voit du point z le vecteur qui va du point z_2 au point z_1, cet angle étant regardé comme positif ou comme négatif suivant que le point z est situé d'un côté ou de l'autre de la droite qui joint les deux points z_1, z_2. Reconnaître le signe d'après la disposition de l'angle. — Où le point z doit-il se trouver pour que l'argument du rapport soit nul, égal à $\pm\pi$? Quel est, en supposant fixes les points z_1 et z_2, le lieu des points z tel que la valeur absolue de $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ soit constante, tel que la valeur principale de l'argument de $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$ soit constante?

104. Appelons transformé du point z le point z' tel que l'on ait

$$z' = \frac{az+b}{a'z+b'},$$

en désignant par a, b, a', b' des constantes réelles ou imaginaires telles que $ab' - a'b$ soit différent de o; appelons transformée d'une figure décrite par le point z la figure décrite par le point z'.

Quelles relations entre les distances des points z, z_1, z_2, z_3 et les distances de leurs transformées z', z'_1, z'_2, z'_3, quelles relations entre les angles que font entre elles les droites qui joignent le point z et le point z_1 aux points z_2 et z_3, et les angles que font entre elles les droites qui joignent le point z' et le point z'_1 aux points z'_2 et z'_3 résultent de la relation

$$\frac{z'-z'_2}{z'-z'_3} : \frac{z'_1-z'_2}{z'_1-z'_3} = \frac{z-z_2}{z-z_3} : \frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}?$$

On suppose que le point z décrive un cercle par rapport auquel les points z_2

et z_3 soient symétriques ([1]), le point transformé décrira un cercle par rapport auquel les deux points z'_2, z'_3 seront symétriques. Cas particulier où le point z décrit une droite.

Quel est le transformé d'un cercle (ou d'une droite) qui passe par les trois points z_1, z_2, z_3?

Les transformées de toutes les droites du plan sont des cercles ou des droites qui passent par le point $\frac{a}{a'}$. Les cercles et les droites dont les transformées sont des droites passent par le point $\frac{b'}{a'}$.

Si le cercle (c') est le transformé du cercle (c), le centre du cercle (c') est le transformé du point inverse du point $-\frac{b'}{a'}$ par rapport au cercle (c).

105. La relation

$$z' = \frac{az+b}{a'z+b'} = \frac{\dfrac{a'b-ab'}{a'^2}}{z+\dfrac{a'}{b'}} + \frac{a}{a'}$$

montre que, si l'on fait subir au point z une translation définie par le vecteur qui va du point o au point $\frac{a'}{b'}$, si l'on prend le symétrique du point ainsi obtenu par rapport au cercle dont le point o est le centre et dont le rayon est $\sqrt{\left|\frac{a'b-ab'}{a'^2}\right|}$, le symétrique du nouveau point par rapport à l'axe des abscisses, si, enfin, on fait subir au point ainsi obtenu une translation définie par le vecteur qui va du point o au point $\frac{a}{a'}$, on tombe sur le point z'.

La transformation considérée conserve les angles.

106. En conservant les mêmes notations que dans les deux exercices précédents et en désignant par α, β les racines supposées distinctes de l'équation du second degré

$$a'z^2+(b'-a)z-b=0,$$

montrer que le rapport des distances du point z' aux points α, β est égal au rapport des distances du point z aux mêmes points multiplié par une constante, que l'angle sous lequel on voit, du point z', le vecteur qui va du point α au point β est égal à l'angle sous lequel on voit le même vecteur du point z, augmenté d'une constante.

([1]) *Voir* la note du n° 98.

107. Quelles sont les propositions qui, pour les polynomes à coefficients et à variables imaginaires, correspondent aux propositions énoncées dans les exercices 18, 24, 25?

108. En désignant par x, y des variables réelles, on suppose que $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ soient des polynomes du second degré à coefficients réels

$$\varphi(x, y) = \mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + \mathrm{F},$$
$$\psi(x, y) = \mathrm{A}'x^2 + 2\mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2 + 2\mathrm{D}'x + 2\mathrm{E}'y + \mathrm{F}';$$

quelles relations doit-il y avoir entre les coefficients de ces polynomes pour que l'expression

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

puisse être regardée comme un polynome en $z = x + iy$, à coefficients imaginaires?

109. De la formule

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

déduire des expressions simples des sommes

$$\mathrm{C}_0^n + \mathrm{C}_4^n + \mathrm{C}_8^n + \ldots,$$
$$\mathrm{C}_1^n + \mathrm{C}_5^n + \mathrm{C}_9^n + \ldots,$$
$$\mathrm{C}_2^n + \mathrm{C}_6^n + \mathrm{C}_{10}^n + \ldots,$$
$$\mathrm{C}_3^n + \mathrm{C}_7^n + \mathrm{C}_{11}^n + \ldots.$$

110. Montrer que, si l'on pose $\cos n\theta = \mathrm{A}$, les expressions

$$\cos\theta + i\sin\theta, \qquad \cos\theta - i\sin\theta = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

sont des racines de l'équation

$$z^{2n} - 2\mathrm{A}z^n + 1 = 0.$$

Les diverses valeurs de $\cos\theta$ telles que l'on ait $\cos n\theta = \mathrm{A}$ sont données par la formule

$$(1) \qquad \sqrt[n]{\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{A}^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{A}^2 - 1}}},$$

dans laquelle on choisit arbitrairement la détermination de $\sqrt{\mathrm{A}^2 - 1}$ et où l'on remplace successivement $\sqrt[n]{\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{A}^2 - 1}}$ par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de $\mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{A}^2 - 1}$.

Montrer que les n valeurs ainsi obtenues sont réelles si A est réel et moindre que 1 en valeur absolue. Combien y en a-t-il de réelles quand A est réel et plus grand que 1 en valeur absolue?

Qu'arrive-t-il quand on change la détermination de $\sqrt{A^2-1}$?

111. Les valeurs de $\tan\theta$ telles que $\tan n\theta$ soit égale au nombre A vérifient l'équation

$$iA = \frac{(1+ix)^n-(1-ix)^n}{(1+ix)^n+(1+ix)^n};$$

on les obtient en résolvant l'équation du premier degré en x

$$\frac{1-ix}{1+ix} = \sqrt[n]{\frac{1-iA}{1+iA}},$$

où le second membre doit être remplacé successivement par les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de $\frac{1-iA}{1+iA}$; elles sont toutes inégales.

Montrer que les n valeurs que l'on obtient ainsi pour x sont réelles pourvu que A soit un nombre réel.

112. Décomposer z^4+1 en facteurs réels du second degré, soit en résolvant l'équation

$$z^4+1=0,$$

soit en partant de l'identité

$$z^4+1=(z^2+1)^2-\left(z\sqrt{2}\right)^2.$$

113. Résoudre l'équation

$$z^4-3(2i-1)z^2-2(3i+4)=0.$$

114. Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{(z^4+1)^2[z^6-3(2i-1)z^2-2(3i+4)]}.$$

115. Décomposer en fractions simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{z^8-z^5-2z^3+2z^3+z^2-1},$$

dont le dénominateur a été décomposé en facteurs au n° 119.

116. Décomposer, en appliquant la méthode du n° 119, le polynome

$$z^{10}+3z^8+5z^6+5z^4+3z^2+1.$$

CHAPITRE VIII.

ARRANGEMENTS, COMBINAISONS, PERMUTATIONS, INVERSIONS. FORMULE DU BINOME.

120. Si l'on considère n objets distincts, il y a lieu souvent de considérer les différents groupes formés avec p de ces objets $(p \leqq n)$ rangés dans un certain ordre; les p objets qui figurent dans un groupe sont supposés différents; deux groupes sont regardés comme distincts s'ils diffèrent soit par la nature des objets qui y figurent, soit seulement par leur ordre. Tous ces groupes forment ce que l'on appelle les *arrangements* des n objets pris p à p; chacun d'eux s'appelle aussi un *arrangement* p à p des n objets; il est bien compris qu'il faut entendre par là un arrangement où figurent p des n objets et p seulement.

Il importe de savoir former, sans omission ni répétition, tous les arrangements p à p, et de savoir en calculer le nombre, que je désignerai par A_p^n. (L'indice supérieur n n'est pas un exposant.)

On peut spécifier chaque objet par un signe, numéroter les objets au moyen des nombres $1, 2, \ldots, n$, les désigner par les lettres a, $b, c, \ldots, l$ supposées en nombre égal à n, puis substituer dans les raisonnements les signes aux objets : je me servirai ici des lettres a, $b, \ldots, l$.

Si dans l'un quelconque des arrangements p à p de ces n lettres, on supprime la dernière lettre de l'arrangement, il reste les $p-1$ premières, qui sont toutes distinctes, c'est-à-dire un arrangement $p-1$ à $p-1$ des lettres $a, b, \ldots, l$. Chaque arrangement p à p se déduit d'un arrangement $p-1$ à $p-1$ en le faisant suivre de l'une des $n-(p-1)$ lettres qui n'y figurent pas : De cette façon chaque arrangement $p-1$ à $p-1$ donne naissance à $n-p+1$ arrangements p à p, que l'on peut disposer sur des lignes horizontales, en plaçant sur des lignes différentes les arrangements qui proviennent de deux arrangements $p - 1$ à $p - 1$, distincts l'un de l'autre. Le tableau ainsi formé contient tous les arrangements p à p : aucun n'a été omis.

Aucun n'a été répété : car les arrangements qui sont sur une même ligne diffèrent par la dernière lettre, ceux qui sont sur des lignes différentes diffèrent par l'ordre ou la nature des $p - 1$ premières lettres.

Puisque le tableau contient A_{p-1}^n lignes et que chaque ligne contient $n - p + 1$ arrangements, on a

$$A_p^n = (n - p + 1) A_{p-1}^n.$$

Les relations

$$\begin{aligned} A_1^n &= n, \\ A_2^n &= (n - 1) A_1^n, \\ A_3^n &= (n - 2) A_2^n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots, \\ A_p^n &= (n - p + 1) A_{p-1}^n, \end{aligned}$$

dont la première est évidente et dont les autres se déduisent de la dernière en remplaçant p par 2, 3, 4, ..., donnent, en remplaçant de proche en proche A_1^n par n, A_2^n par $(n - 1)n$, ..., la formule

$$A_p^n = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$$

qui fournit l'expression cherchée du nombre A_p^n.

Si, par exemple, $n = 3$, les trois, six et six arrangements un à un, deux à deux, trois à trois des lettres a, b, c sont donnés par le tableau suivant

$$\begin{array}{llll} a, & ab, & ac, & abc, \\ b, & ba, & bc. & acb, \\ c, & ca, & cb; & bac, \\ & & & bca, \\ & & & cab, \\ & & & cba. \end{array}$$

Lorsque p est égal à n, les arrangements des n lettres ne peuvent différer que par l'ordre de ces lettres, qui figurent toutes dans chaque arrangement. Ces arrangements reçoivent alors le nom de *permutations*. On en désigne le nombre par la notation P_n; c'est la même chose que A_n^n; ce nombre est donné par la formule précédente en y faisant $p = n$, il est

$$P_n = n(n-1)\ldots2.1 = n!$$

Ce nombre augmente rapidement avec n; il est égal à 3628800 pour $n = 10$; ainsi il y a plus de trois millions de manières de ranger 10 objets sur une même ligne. Le nombre 100! comporterait 158 chiffres.

121. Les groupes de p lettres distinctes prises parmi n lettres données, quand, pour chaque groupe, on ne tient pas compte de l'ordre mais seulement de la nature des lettres qui y figurent, s'appellent les *combinaisons* des n lettres prises p à p, ou les combinaisons p à p des n lettres. Chaque groupe est une combinaison p à p; on dit aussi un *produit différent* p à p, parce que ce groupe peut s'écrire comme un produit et qu'un produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs.

Je désignerai par C_p^n le nombre des combinaisons distinctes des n lettres prises p à p.

Dans le tableau des arrangements de n objets p à p figurent évidemment les combinaisons p à p; chaque combinaison se trouve même répétée autant de fois qu'il y a de manières de ranger les p objets qui la constituent, c'est-à-dire $1.2.3\ldots p$ fois; les deux nombres A_p^n, C_p^n sont donc liés par la relation $1.2.3\ldots p\, C_p^n = A_p^n$; d'où l'on déduit, en se reportant à la valeur de A_p^n,

$$C_p^n = \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

Le nombre C_p^n figure comme coefficient numérique dans la formule du binome : la définition qu'on vient d'en donner montre qu'il est essentiellement entier (n° 43).

A chaque combinaison formée avec p des n objets considérés correspond évidemment la combinaison formée avec $n-p$ objets qui n'y figurent pas; on doit donc avoir $C_p^n = C_{n-p}^n$. C'est ce qu'on a déjà vu au n° 43.

En adoptant la définition précédente de C_p^n, la formule $C_p^n = C_{n-p}^n$ n'a de sens que si p est au moins égal à 1 et au plus égal à $n-1$. Elle subsiste pour $p = 0$ ou $p = n$ en convenant de prendre $C_0^n = 1$ (n° 43).

Pour former effectivement le tableau des combinaisons de n objets

p à p, il serait assez fastidieux de former les arrangements p à p. On peut procéder autrement.

Supposons formées les C_p^n combinaisons p à p des n objets a, b, ..., l. Parmi ces combinaisons, les unes ne contiennent pas l'objet a, par exemple : ce sont évidemment les C_p^{n-1} combinaisons p à p des objets b, c, ..., l, autres que a. Les autres contiennent a; si l'on supprime l'objet a, il reste évidemment les combinaisons de $n-1$ objets b, c, ..., l pris $p-1$ à $p-1$: en formant ces combinaisons en nombre C_{p-1}^{n-1}, et en y introduisant la lettre a, puis en leur adjoignant les C_p^{n-1} combinaisons p à p des objets b, c, ..., k on obtiendra les C_p^n combinaisons cherchées.

On peut d'ailleurs se borner à former les combinaisons p à p pour lesquelles p est au plus égal à $\frac{n}{2}\cdot$ Si l'on avait $p > \frac{n}{2}$, il serait, en effet, plus facile, pour former les combinaisons p à p, de former d'abord les combinaisons $n-p$ à $n-p$, puis de remplacer chacune de ces combinaisons par la combinaison des p objets qui y manquent.

Par exemple, si l'on veut former les $C_2^4 = 6$ combinaisons des quatre objets a, b, c, d deux à deux, on mettra la lettre a avant les combinaisons b, c, d des trois objets b, c, d, autres que a, pris un à un ; on obtiendra ainsi les combinaisons ab, ac, ad; on leur adjoindra les trois combinaisons des mêmes objets b, c, d pris deux à deux ; à l'une doit manquer b, à l'autre c, à l'autre d; elles sont cd, bd, bc. Les six combinaisons cherchées sont

$$ab, \quad ac, \quad ad, \quad cd, \quad bd, \quad bc.$$

Quant aux $C_3^4 = 4$ combinaisons des objets a, b, c, d trois à trois, on peut les écrire immédiatement : l'une ne contient pas a, une autre ne contient pas b, etc. : elles sont bcd, acd, abd, abc. L'unique combinaison des quatre lettres a, b, c, d quatre à quatre est $abcd$.

La façon même dont on vient d'expliquer la formation des combinaisons de n objets p à p, met en évidence la relation (n° 43)

$$C_p^n = C_{p-1}^{n-1} + C_p^{n-1}.$$

122. Le mot *permutation* est pris quelquefois dans un sens un peu différent de celui qu'on a indiqué au n° 120; c'est ce qui arrive quand on parle d'*effectuer une permutation*.

Considérons n objets distincts $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui figurent en totalité ou en partie dans une ou plusieurs expressions quelconques; si $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ désignent ces mêmes objets rangés dans un certain ordre, remplacer dans ces expressions a_1 par a'_1, a_2 par a'_2, ..., a_n par a'_n s'appelle *effectuer une permutation* : l'acte lui-même prend aussi le nom de permutation, une telle permutation s'exprime d'une façon claire en écrivant sur une ligne horizontale les objets $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et au-dessous de chacun d'eux l'objet qui doit le remplacer :

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_n \\ a'_1, a'_2, \ldots, a'_n \end{pmatrix}.$$

L'ordre dans lequel sont inscrits les objets $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n'importe pas, ce qui importe, c'est la correspondance entre l'objet supérieur et l'objet placé au-dessous, qui doit le remplacer.

La permutation *inverse* de la précédente consisterait à remplacer a'_1 par a_1, a'_2 par a_2, ..., a'_n par a_n.

Pour former chacun des symboles possibles de permutations, dans le sens que l'on vient d'expliquer, on écrira sur une ligne horizontale les objets $a_1, a_2, \ldots, a_k$ rangés de toutes les manières possibles; puis au-dessus de chaque arrangement les mêmes lettres rangées dans un ordre arbitraire, mais toujours le même. On obtiendra ainsi $1.2.3\ldots n$ symboles.

Par exemple, tous les symboles de permutation pour les trois lettres a, b, c seront

$$\begin{pmatrix} a, b, c \\ a, b, c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a, b, c \\ b, c, a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a, b, c \\ c, a, b \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} a, b, c \\ a, c, b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a, b, c \\ c, b, a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a, b, c \\ b, a, c \end{pmatrix}.$$

Parmi ces symboles il y en a un qui signifie l'action de remplacer a par a, b par b, c par c : c'est ce qu'on appelle la permutation *identique,* par laquelle rien n'est changé.

Si l'on a dressé le tableau des arrangements, ou des combinaisons, p à p de n objets distincts quelconques, puis que l'on effectue, sur chacun de ces arrangements ou de ces combinaisons, une permutation quelconque, il est clair que le tableau ne sera pas changé dans son ensemble. En effet, tous les arrangements étaient distincts avant qu'on effectuât la permutation, ils le resteront après : naturellement, si ces arrangements étaient placés dans un certain ordre, cet ordre sera modifié par la permutation.

Parmi les permutations, il convient de distinguer les permutations *circulaires :* les objets $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant rangés dans un certain ordre, une permutation circulaire effectuée sur ces objets consiste à remplacer le premier par le second, le second par le troisième, etc., l'avant-dernier par le dernier, le dernier par le premier.

Au lieu du symbole

$$\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n \\ a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \quad a_1 \end{pmatrix}$$

qui, d'après les conventions précédentes, devrait représenter une telle permutation, on emploie souvent le symbole

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

avec le même sens. C'est l'ordre seul dans lequel sont rangés les éléments qui importe dans ce dernier symbole, non l'élément qui figure le premier. Ainsi, s'il s'agit de trois éléments a_1, a_2, a_3, les trois symboles

$$(a_1, a_2, a_3), \quad (a_2, a_3, a_1), \quad (a_3, a_1, a_2)$$

ont le même sens.

Il peut être commode de se figurer les objets $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rangés sur un cercle sur lequel on a choisi un sens de parcours, placés par exemple aux sommets d'un polygone régulier de n côtés. Alors il n'y a plus ni premier objet ni dernier, et la permutation circulaire revient à remplacer chaque objet par le suivant.

Enfin, parmi les permutations circulaires, il convient de signaler la plus simple, celle qui porte sur deux éléments seulement a_1, a_2 ; elle consiste à remplacer a_1 par a_2 et a_2 par a_1 ; il n'y a évidemment pas, comme dans les permutations circulaires qui portent sur plus de deux éléments, à tenir compte d'un ordre quelconque attribué aux éléments a_1, a_2 ; on donne souvent le nom de *transpositions* aux permutations de cette sorte : la transposition qui porte sur les éléments a_1, a_2 se représente par le symbole (a_1, a_2) ou (a_2, a_1).

Étant données deux permutations de n objets distincts au sens du n° 120, c'est-à-dire deux arrangements n à n de ces n objets, on peut passer de l'une à l'autre par une suite de transpositions, puisque, par une transposition, on peut amener un objet quelconque à la place qu'il doit occuper. On peut parvenir au même résultat en ne faisant jamais que des transpositions qui portent sur deux éléments consécutifs de l'arrangement auquel on est parvenu : c'est là une observation que l'on fait déjà dans les éléments de l'Arithmétique lorsqu'on veut prouver que, dans un produit de plusieurs facteurs, on peut intervertir comme on veut l'ordre de ces facteurs.

Par exemple, pour passer de l'arrangement 1, 2, 3, 4 à l'arrangement 2, 4, 3, 1 ; on peut effectuer successivement les transpositions (1, 2), (1, 4), ce qui donne successivement les arrangements

$$2, 1, 3, 4; \quad 2, 4, 3, 1$$

ou les transpositions successives (1, 2), (3, 4), (1, 4), (1, 3), ce qui donne les arrangements successifs

$$2, 1, 3, 4; \quad 2, 1, 4, 3; \quad 2, 4, 1, 3; \quad 2, 4, 3, 1.$$

Pour arriver au même arrangement 2, 4, 3, 1 en partant du même arrangement 1, 2, 3, 4, on a fait dans le premier cas deux transpositions successives, quatre dans le second.

On voit que pour effectuer la permutation

$$\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 2, & 4, & 3, & 1 \end{pmatrix}$$

qui consiste à remplacer 1 par 2, 2 par 4, à laisser 3, à remplacer 4 par 1, on peut transposer d'abord les éléments 1 et 2, puis les éléments 1, 4 ; ou bien transposer d'abord les éléments 1 et 2, puis les éléments 3 et 4, puis les éléments 1 et 4, puis les éléments 1 et 3.

Pour effectuer une permutation quelconque on peut effectuer une suite de transpositions.

Par exemple encore, la permutation circulaire (1, 2, 3, 4, 5) revient à la suite de transpositions (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5). En général une permutation circulaire, portant sur n éléments, équivaut à une suite de $n - 1$ transpositions.

123. Étant donné un arrangement quelconque $a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n$ de n objets, la transposition qui consiste à échanger les deux éléments

extrêmes et qui conduit ainsi à l'arrangement $a_n a_2 \ldots a_{n-1} a_1$ revient à une suite de $2n-3$ transpositions, dont chacune porte sur deux éléments consécutifs de l'arrangement auquel on vient de parvenir, à savoir d'abord les $n-1$ transpositions $(a_1, a_2), (a_1, a_3), \ldots, (a_1, a_{n-1})$, (a_1, a_n) qui amènent successivement l'élément a_1, à la seconde, à la troisième, etc., à la dernière place, en sorte qu'après avoir effectué ces transpositions successives on est parvenu à l'arrangement

$$a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1} a_n a_1,$$

puis les $n-2$ transpositions successives, $(a_n, a_{n-1}), (a_n, a_{n-2})$, (a_n, a_2) qui amènent l'élément a_n de l'avant-dernière place à la précédente et, finalement, à la première. Les $n-1$ premières transpositions équivalent à la permutation circulaire

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n).$$

Si l'on effectue maintenant une transposition quelconque dans un arrangement, on voit que cette transposition équivaudra toujours à un nombre impair de transpositions portant, chaque fois, sur deux éléments consécutifs de l'arrangement auquel on vient de parvenir. Il suffit de négliger, par la pensée, les objets qui précèdent le premier des objets que l'on transpose et ceux qui suivent le second : on est ramené au cas précédent.

124. Considérons n objets distincts auxquels on attribue un ordre naturel; par exemple, n numéros différents dont on dira qu'ils sont rangés dans l'ordre naturel, s'ils sont rangés par ordre de grandeur croissante, ou n lettres dont on dira qu'elles sont rangées dans l'ordre naturel, si elles sont rangées dans l'ordre alphabétique. Je raisonnerai en supposant qu'il s'agisse de n numéros distincts.

Si, dans un arrangement quelconque de ces numéros, qu'on lit, suivant l'habitude, de gauche à droite, on considère deux d'entre eux, le premier que l'on rencontre peut être le plus petit, ou le plus grand; dans le premier cas on dit que, dans l'arrangement considéré, les deux numéros ne présentent pas d'inversion; dans le second cas, on dit qu'ils présentent une inversion. On dit aussi que l'arrangement ne comporte pas d'inversion, ou comporte une inversion relativement à ce couple de numéros. Le nombre total d'inversions que comporte l'arrangement est le nombre de couples de numéros qui présentent une inversion.

Pour compter ce nombre d'inversions, on procédera comme il suit : on partira du premier élément (à gauche) de l'arrangement, et l'on comptera les inversions qu'il peut présenter avec le second, le troisième, etc., le dernier élément; on passera ensuite au second élément et l'on comptera le nombre d'inversions qu'il présente avec le troisième, le quatrième, etc., le dernier élément, etc.; enfin on examinera si l'avant-dernier élément et le dernier présentent une inversion : la somme de tous les nombres ainsi obtenus est le nombre total d'inversions présenté par l'arrangement.

Considérons par exemple l'arrangement 5, 3, 2, 1, 4, 6, le premier élément 5 présente une inversion avec chacun des éléments 3, 2, 1, 4 qui le suivent; il n'en présente pas avec 6; le second élément 3 présente une inversion avec 2, 1; le troisième élément 2 présente une inversion avec 1; aucun des éléments 1, 4 ne présente d'inversion avec ceux qui le suivent; on a en tout $4+2+1+0+0=7$ inversions.

L'arrangement $(1, 2, 3, \ldots, n)$ ne comporte aucune inversion; l'arrangement $(n, n-1, \ldots, 3, 2, 1)$ comporte

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

inversions; c'est évidemment l'arrangement de n nombres qui comporte le plus d'inversions.

125. Convenons de dire qu'un arrangement est de première classe s'il comporte 0 ou un nombre pair d'inversions, qu'il est de seconde classe s'il présente un nombre impair d'inversions.

Un arrangement change de classe quand on effectue une transposition entre deux éléments de cet arrangement.

Par exemple l'arrangement 5, 3, 2, 1, 4, 6 est de seconde classe; transposons les éléments 3, 4, on obtiendra l'arrangement 5, 4, 2, 1, 3, 6 et, en comptant les inversions d'après la règle du numéro précédent, on en trouve $4+3+1=8$; le nouvel arrangement est de première classe.

La proposition est évidente quand on transpose deux éléments consécutifs; en effet, on ne modifie pas alors les inversions que ces deux éléments présentent, soit avec les éléments qui précèdent leur couple, soit avec ceux qui le suivent. Si dans l'arrangement considéré le premier élément du couple était plus grand que le second, il y avait, de ce fait, une inversion qu'on supprime par la transposition; au contraire, si les deux éléments du couple ne présentaient pas d'inversion, la transposition en introduit évidemment une. Dans les deux cas le nombre d'inversions est modifié d'une unité, l'arrangement a changé de classe.

Supposons que les deux éléments qu'on transpose ne soient pas consécutifs; on a vu plus haut que leur transposition équivaut à un nombre *impair* de transpositions, effectuées chaque fois sur deux éléments consécutifs de l'arrangement auquel on vient de parvenir; par chaque transposition, l'arrangement a changé de classe; il a changé un nombre impair de fois, il a finalement changé de classe.

Il résulte immédiatement de là que, si l'on considère les $n!$ arrangements possibles n à n des n numéros $1, 2, 3, \ldots, n$, il y a autant d'arrangements de la première classe que d'arrangements de la seconde classe. Car, si l'on suppose les arrangements distribués dans les deux classes et que l'on effectue une transposition quelconque, l'ensemble de tous ces arrangements ne sera pas changé par cette transposition; mais elle fera passer les arrangements de la première classe dans la seconde, ceux de la seconde dans la première : or il doit y avoir maintenant autant d'arrangements dans la première classe, ou dans la seconde, qu'auparavant.

On a vu au n° **123** qu'on pouvait passer d'un arrangement de n numéros n à n à un autre de ces arrangements par une suite de transpositions. Cela peut se faire d'une infinité de façons; mais, de quelque façon que l'on opère, le nombre de transpositions que l'on effectue conserve la même parité. Il est pair si les deux arrangements sont de même classe, impair s'ils sont de classe différente.

Considérons un arrangement (n à n) $a_1 a_2 \ldots a_n$ des n numéros $1, 2, \ldots, n$. Si, de cet arrangement, on supprime le premier élément a_1, comment sera modifié le nombre d'inversions?

Il y a, dans l'arrangement, $a_1 - 1$ numéros plus petits que a_1, à savoir les numéros $1, 2, 3, \ldots, a_1 - 1$; ils sont tous placés après a_1; avec chacun d'eux a_1 présente une inversion, et toutes ces inversions ont disparu de l'arrangement $a_2 a_3 \ldots a_n$. On a donc supprimé $a_1 - 1$ inversions.

126. Si l'on considère un polynome à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et si l'on effectue sur ces variables les $n!$ permutations possibles, y compris la permutation identique, qui laisse le polynome tel qu'il était, divers cas peuvent se présenter. Il peut se faire que les $n!$ permutations conduisent à des polynomes qui soient tous distincts : c'est ce qui arrive, par exemple, pour le polynome

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

si ses coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont tous différents, ou encore pour le monome $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$, si tous les exposants sont différents.

Il peut se faire, au contraire, que tous les polynomes auxquels on parvient ainsi soient identiques ; ce serait le cas pour le polynome

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

ou pour le monome

$$x_1 x_2 \ldots x_n.$$

S'il en est ainsi le polynome est dit *symétrique* par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Pour reconnaître qu'un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (dans lequel je suppose qu'on ait effectué la réduction des termes semblables) est symétrique par rapport à ces variables, il suffit de constater que le polynome reste identique à lui-même quand on transpose deux quelconques des variables, puisqu'une permutation quelconque peut toujours être remplacée par une suite de transpositions.

On a remarqué plus haut que l'ensemble des combinaisons p à p de n objets ne changeait pas quand on effectuait sur ces combinaisons un arrangement quelconque ; en supposant que ces objets soient les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chaque combinaison p à p peut être regardée comme le produit de p de ces variables ; il est clair, d'après cela, que la somme des C_p^n produits différents, p à p, des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ constitue un polynome symétrique par rapport à ces n variables. Les polynomes que l'on peut ainsi former, à savoir

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n,$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \ldots + x_{n-2} x_{n-1} x_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_n,$$

sont au nombre de n, on leur donne le nom de *fonctions symétriques élémentaires* des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Par exemple, les fonctions symétriques élémentaires des quatre variables a, b, c, d sont

$$\begin{aligned}
&a+b+c+d,\\
&ab+ac+ad+bc+bd+cd,\\
&bcd+acd+abd+abc,\\
&abcd.
\end{aligned}$$

Il est manifeste que, si l'on désigne par $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n fonctions symétriques élémentaires des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tout polynome en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sera, si l'on y remplace $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par leurs expressions en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, un polynome symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On montrera plus tard que, réciproquement, tout polynome symétrique en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut se mettre sous la forme d'un polynome en $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Le cas où un polynome en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne change pas quand on effectue une permutation sur les lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, celui où il change toujours, sont deux cas extrêmes. Voici quelques exemples importants de cas intermédiaires.

Considérons le produit

$$\begin{array}{r}
(x_2-x_1)\\
(x_3-x_2)(x_3-x_1)\\
(x_4-x_3)(x_4-x_2)(x_4-x_1)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(x_n-x_{n-1})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-3})\ldots(x_n-x_1)
\end{array}$$

des $\dfrac{n(n-1)}{2}$ différences que l'on peut former entre l'une quelconque des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et celles qui la précèdent.

Ces $\dfrac{n(n-1)}{2}$ facteurs peuvent être regardés comme provenant des combinaisons deux à deux des n lettres $x_1, x_2, \ldots, x_n$; une permutation quelconque effectuée sur ces lettres ne change pas l'ensemble de ces combinaisons, mais peut changer l'ordre des lettres qui figurent dans l'une d'elles, c'est-à-dire ici le signe d'un facteur, ou remplacer un facteur par quelque autre facteur, peut-être changé de signe. On voit donc que, par toutes les permutations possibles, le précédent polynome ou bien se reproduira, ou bien se reproduira changé de signe. Toutes les $n!$ permutations ne produisent que deux polynomes distincts. Il est d'ailleurs bien aisé de distinguer les permutations qui ne changent pas le polynome de celles qui le font changer de signe. Si l'on attribue aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs numériques quelconques, mais distinctes, et que l'on convienne de dire, comme au n° **124**, que, dans la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deux éléments x_p, x_q $(p < q)$ présentent ou non une inversion suivant que le premier de ces éléments est plus petit ou plus grand que le second, on reconnaît immédiatement que, dans le produit de différences, le nombre de facteurs négatifs est égal au nombre d'inversions de la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$; une transposition effectuée sur deux éléments de la suite modifie d'une unité le nombre des inversions et change le signe du produit. Les permutations qui ne le changent pas sont celles qui équivalent à un nombre pair de transpositions, celles qui lui font changer son signe équivalent à un nombre impair de transpositions.

Considérons encore, dans le cas de quatre variables a, b, c, d, le polynome $ab + cd$. Le lecteur reconnaîtra sans peine que les vingt-quatre permutations possibles ne produisent que les trois polynomes distincts

$$ab + cd, \qquad ac + bd, \qquad ad + bc;$$

huit permutations conservent le polynome $ab + cd$, huit autres le changent en $ac + bd$, les huit restantes le changent en $ad + bc$.

Les propositions qui précèdent constituent le point de départ de recherches qui ont été poussées très loin et qui ont la plus grande importance pour la théorie de la résolution des équations algébriques.

127. Le lecteur n'a pas manqué de remarquer que les nombres C_p^n de combinaisons de n objets p à p sont précisément les coefficients numériques du développement de $(x + a)^n$; c'est ce qu'il est aisé de voir directement, en fondant sur la théorie qui précède une nouvelle démonstration de la formule du binome : cette démonstration s'appuie sur une formule qui a d'ailleurs de l'intérêt par elle-même.

Au lieu de considérer le produit $(x + a)^n$ de n facteurs identiques à $x + a$, considérons le produit de n facteurs distincts

$$(x + a)(x + b)\ldots(x + k);$$

développons ce produit et ordonnons-le suivant les puissances descendantes de x.

On obtient un terme quelconque du produit, en faisant le produit de n facteurs dont chacun est l'un des termes des binomes $x+a$, $x+b$, ..., $x+k$.

Le terme du plus haut degré s'obtiendra en faisant le produit de n facteurs égaux à x, c'est x^n; les termes de degré $n-1$ s'obtiendront en prenant dans $n-1$ binomes le premier terme, et dans le $n^{\text{ième}}$ binome le second. D'une façon générale, les termes du $p^{\text{ième}}$ degré s'obtiendront en considérant une combinaison p à p des binomes $x+a$, $x+b$, ..., $x+k$ et la combinaison complémentaire formée des $n+p$ binomes restants. Le produit des premiers termes des binomes qui figurent dans la première combinaison, multiplié par les seconds termes des binomes qui figurent dans la combinaison complémentaire, fournira un terme de degré p, en x. Dans tous les termes analogues on mettra x^p en facteur; le coefficient de x^p sera la somme des produits différents $n-p$ à $n-p$ des termes a, b, c, ..., k.

On aura ainsi

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+k)\\ = x^n+(a+b+c+\ldots+k)x^{n-1}+(ab+ac+\ldots+hk)x^{n-2}+\ldots+ab\ldots k.\end{aligned}$$

En supposant maintenant que tous les nombres a, b, c, ..., k soient égaux et en se rappelant que C_p^n désigne le nombre des combinaisons de n objets p à p, on obtient la formule

$$(x+a)^n = x^n + C_1^n a x^{n-1} + C_2^n a^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n a^n.$$

EXERCICES.

117. Considérons n lettres a, b, ..., l et un groupe de p lettres dont chacune soit une des lettres a, b, ..., l, en sorte qu'une même lettre puisse être répétée plusieurs fois dans un même groupe. Ces groupes prennent le nom d'*arrangements avec répétition* de n lettres p à p, si l'on regarde comme distincts deux groupes qui diffèrent soit par la nature, soit par l'ordre des lettres qui y figurent, et de *combinaisons avec répétition* de n lettres p à p, si l'on ne regarde comme distincts que les groupes qui diffèrent par la nature des lettres qui y figurent.

Le nombre d'arrangements avec répétition de n lettres p à p est n^p.

118. Le nombre $\mathcal{G}_p^n$ de combinaisons avec répétition de n lettres p à p est C_p^{n+p}.

On peut parvenir comme il suit à l'évaluation du nombre $\mathcal{G}_p^n$.

Les $\mathcal{G}_p^n$ combinaisons avec répétition contiennent en tout $p\mathcal{G}_p^n$ lettres; chacune des n lettres devant figurer le même nombre de fois, la lettre a doit figurer, en tout, $\frac{p}{n}\mathcal{G}_p^n$ fois : d'autre part, si on la retire une fois de l'une des combinaisons qui la contiennent, il restera une des $\mathcal{G}_{p-1}^n$ combinaisons des n lettres $p-1$ à $p-1$; dans ces $\mathcal{G}_{p-1}^n$ combinaisons la lettre a figure en tout $\frac{p-1}{n}\mathcal{G}_{p-1}^n$ fois; d'où la relation

$$\frac{p}{n}\mathcal{G}_p^n = \mathcal{G}_{p-1}^n + \frac{p-1}{n}\mathcal{G}_{p-1}^n.$$

119. Appliquer un raisonnement de la même nature que le précédent à la démonstration de la formule

$$\frac{p}{n}C_p^n = C_{p-1}^{n-1}$$

et à la détermination du nombre C_p^n.

120. Lorsqu'il peut se produire, en tout, n événements que l'on regarde comme également probables et que p de ces n événements satisfont à une certaine condition, la probabilité pour que l'un des n événements, se produisant au hasard, satisfasse à la condition considérée est, par définition, la fraction $\frac{p}{n}\cdot$

Par exemple, la probabilité pour que, en jetant un dé au hasard, on amène un nombre donné est $\frac{1}{6}\cdot$

On jette deux dés : quelle est la probabilité pour que les nombres marqués par les dés soient deux nombres donnés? Il y a lieu de distinguer le cas où les deux nombres donnés sont pareils, et celui où ils diffèrent.

Quelle est la probabilité pour amener deux nombres formant une somme donnée (au plus égale à douze)? Pour amener deux nombres formant une somme supérieure à un nombre donné, inférieure à un nombre donné?

121. Une urne contient n boules marquées 1, 2, 3, .., n. On prend p de ces boules; quelle est la probabilité pour qu'on amène les numéros 1, 2, ..., p? Si l'on prend ces p boules successivement, quelle est la probabilité pour qu'on amène successivement ces numéros 1, 2, ..., p dans l'ordre 1, 2, ..., p?

122. Parmi les C_p^n combinaisons des n nombres 1, 2, ..., n pris p à p, combien y en a-t-il qui soient formées avec α des nombres 1, 2, ..., k et $p-\alpha$ des nombres $k+1$, $k+2$, ..., n?

Établir la formule

$$C_p^n = C_p^{n-k} C_0^k + C_{p-1}^{n-k} C_1^k + \ldots + C_{p-\alpha}^{n-k} C_\alpha^k + \ldots + C_{p-k}^{n-k} C_k^k.$$

123. Une urne contient n boules, dont k blanches et $n - k$ noires, on prend au hasard p de ces boules; quelle est la probabilité pour qu'il y ait α boules blanches et $p - \alpha$ boules noires?

124. Dans un jeu de 32 cartes on prend 12 cartes au hasard: quelle est la probabilité de trouver parmi ces 12 cartes 8 cartes de la même couleur?

125. Dans un jeu de 32 cartes on prend 12 cartes, puis 5; on regarde les 12 premières cartes et l'on désire trouver a cartes déterminées parmi les 5 cartes; quelle est la probabilité pour qu'elles s'y trouvent effectivement?

126. En désignant par a, p deux nombres naturels premiers entre eux, on sait que, si l'on divise par p les termes de la suite

$$a, \quad 2a, \quad 3a, \quad \ldots, \quad (p-1)a,$$

on trouve les nombres $1, 2, \ldots, p-1$ rangés dans un certain ordre. On peut se proposer de trouver le nombre d'inversions contenues dans cette suite. En supposant donné le nombre p, résoudre le problème pour $a = 2$, $a = 3$.

127. Soit $a_1 a_2 \ldots a_n$ un arrangement n à n des numéros $1, 2, 3, \ldots, n$. Soient I le nombre d'inversions contenues dans cet arrangement, A et A′ les nombres respectifs d'inversions contenues dans les arrangements $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$ d'une part et $a_{\alpha+1} a_{\alpha+2} \ldots a_n$ de l'autre; montrer que l'on a

$$I = A + A' + a_1 + a_2 + \ldots + a_\alpha - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}.$$

On reconnaît sans peine que la différence $I - A - A'$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont rangés les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$, et que, si l'on snppose les nombres rangés par ordre de grandeur, il y a, parmi les nombres $a_{\alpha+1}, a_{\alpha+2}, \ldots, a_n$, $a_1 - 1$ nombres plus petits que a_1, $a_2 - 2$ nombres plus petits que a_2, etc.

128. Montrer qu'une permutation donnée (au sens du n° 122), portant sur n éléments, peut être remplacée par un certain nombre de permutations circulaires dont chacune ne porte, en général, que sur une partie des n éléments, les éléments qui sont changés par une de ces permutations restant inaltérés par toutes les autres. Si parmi ces permutations circulaires il y en a k qui portent sur un nombre pair d'éléments, le nombre de transpositions qui équivalent à la permutation donnée est de même parité que $k - 1$.

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

128. Je commence par rappeler quelques notions et principes concernant les systèmes d'équations; je crois inutile de revenir sur les principes qui se rapportent à une seule équation.

Étant donné un système d'équations [1]

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n = 0,$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des expressions dont on sait calculer la valeur numérique quand on connaît les valeurs numériques des inconnues $x, y, z, \ldots$, par exemple des polynomes en $x, y, z, \ldots$; on sait qu'on appelle solution de ce système d'équations tout système de nombres $x_0, y_0, z_0, \ldots$ qui, substitués à la place de $x, y, z, \ldots$ dans $X_1, X_2, \ldots, X_n$, annulent ces expressions.

Cette définition s'applique quand on a affaire à des équations purement numériques; mais il peut se faire que les expressions X_1, $X_2, \ldots, X_n$ contiennent des coefficients représentés par des lettres $a, b, c, \ldots$ que l'on regarde comme des données : les coefficients a, $b, c, \ldots$ sont susceptibles soit de prendre toutes les valeurs possibles, soit de prendre seulement les valeurs qui satisfont à certaines conditions.

Dans ce cas on appellera solution du système proposé un système d'expressions en $a, b, c, \ldots$ telles qu'en remplaçant $x, y, z, \ldots$ par

[1] Pour simplifier un peu, j'ai supposé qu'on avait fait passer tous les termes dans un membre, mais cette supposition n'a rien d'essentiel, et le lecteur verra sans peine les légères modifications qu'il faudrait apporter au texte, si elle n'était pas réalisée.

ces expressions, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ deviennent nuls, quelles que soient les valeurs numériques de a, b, c, ..., vérifiant toutefois les conditions imposées à ces coefficients.

Il peut aussi arriver qu'une solution du système proposé soit formée par des expressions qui contiennent une ou plusieurs indéterminées : on doit alors entendre que $X_1, X_2, \ldots, X_n$, quand on y remplace $x, y, z, \ldots$ par ces expressions, s'annulent quelles que soient les valeurs numériques de ces indéterminées, au moins lorsque ces valeurs satisfont à certaines conditions qui peuvent leur être imposées.

Au fond, tous ces cas ne diffèrent pas essentiellement; on peut, afin de regarder une solution comme formée d'un système de nombres, imaginer qu'on a attribué soit aux coefficients, soit à ces indéterminées dont je viens de parler, des valeurs numériques; les expressions des inconnues $x, y, z, \ldots$, au moyen des coefficients ou des indéterminées, deviennent alors des nombres qui doivent annuler X_1, $X_2, \ldots, X_n$.

On dit que deux systèmes d'équations en $x, y, z, \ldots$

$$(1) \qquad X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots,$$

$$(2) \qquad Y_1 = 0, \qquad Y_2 = 0, \qquad \ldots,$$

sont équivalents quand les solutions de l'un sont les mêmes que les solutions de l'autre; pour prouver l'équivalence de deux systèmes, il faut prouver que toute solution du premier est une solution du second, que toute solution du second est une solution du premier.

Lorsque toute solution du premier vérifie le second, on dit que le premier système *entraîne* le second. Pour prouver que deux systèmes sont équivalents, il faut prouver que chacun d'eux entraîne l'autre.

Il est clair que si, dans un système d'équations, on remplace une équation par une équation équivalente, on obtient un système équivalent au premier; de même encore, en remplaçant dans le système proposé un système partiel d'équations par un système équivalent.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres dont le dernier n'est pas nul, le système

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{n-1} = 0, \qquad X_n = 0$$

est équivalent au système

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{n-1} = 0,$$
$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n = 0.$$

Il est clair, en effet, quels que soient les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, que le premier système entraîne le second; quant au second, il entraîne évidemment le suivant

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{n-1} = 0, \qquad a_n X_n = 0,$$

c'est-à-dire le premier, lorsqu'on suppose que a_n n'est pas nul.

Cette proposition sera généralisée plus tard ([1]).

Considérons un système, dont l'une des équations, la première par exemple, soit résolue par rapport à l'une des inconnues x, laquelle se trouve ainsi, en général, exprimée au moyen des données et des autres inconnues $y, z, \ldots$. On obtient un système équivalent au proposé, en reproduisant d'abord la première équation, puis en remplaçant dans les autres équations l'inconnue x par son expression en $y, z, \ldots$.

En effet, si l'on considère une solution quelconque de l'un ou de l'autre système, la valeur de x et celle de son expression au moyen des autres inconnues $y, z, \ldots$ qu'on a substituée à x dans les équations du premier système pour former le second sont les mêmes, en vertu de la première équation commune aux deux systèmes; dire que les équations de l'un ou de l'autre des systèmes sont vérifiées, c'est dire la même chose ([2]).

([1]) On peut observer de suite que la démonstration ne suppose nullement que les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ soient des nombres : elle subsisterait évidemment si ces quantités étaient des polynomes contenant les inconnues.

([2]) La proposition se généralise aisément; si l'on considère, par exemple, les équations

$$x - y = 2, \qquad x^2 - y^2 = 8 ;$$

donc la seconde peut s'écrire $(x-y)(x+y) = 8$, on formera un système équivalent au système proposé en remplaçant dans cette seconde équation $x - y$ par 2 ; ce n'est pas une inconnue que l'on a remplacée par sa valeur, ou par une fonction des autres inconnues, c'est une fonction de deux inconnues, $x - y$, que l'on a remplacée par un nombre qui doit lui être égal en vertu de la première équation. On peut aussi supposer que 2, 3, ... équations du système aient été résolues par rapport à 2, 3, ... inconnues, que l'on remplacerait par leurs expressions dans les autres équations.

129. Mon objet essentiel est ici l'étude des équations du premier degré par rapport aux inconnues. Si l'on a fait passer tous les termes d'une telle équation dans le premier membre, ce premier membre est un polynome du premier degré par rapport aux inconnues regardées comme les variables du polynome ; il pourra s'écrire

$$ax + by + cz + \ldots + l,$$
$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + a_{n+1},$$

en désignant les inconnues par $x, y, z, \ldots$, ou par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et les coefficients, que l'on regardera comme numériques, par a, b, $c, \ldots, l$ ou par $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Le terme l ou a_{n+1}, qui ne contient pas d'inconnue (ou de variable) en facteur, s'appelle le terme indépendant des inconnues, le terme constant ou le terme tout connu. Ce terme peut être nul ; le polynome est alors homogène ; je le désignerai dans ce cas sous le nom de *forme linéaire* en $x, y, z, \ldots$ ou en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ([1]).

Il m'arrivera souvent, comme je l'ai déjà fait d'ailleurs, de désigner les premiers membres par de grandes lettres telles que X, Y, Z, ... ou $X_1, X_2, \ldots, X_p$; il doit être bien entendu que ce n'est là qu'une abréviation, et que le lecteur doit substituer, par la pensée, le polynome tout entier à la grande lettre qui le représente.

On a souvent, en désignant en général par $X_1, X_2, \ldots, X_p$ des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_p$, l'occasion de considérer des expressions telles que

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p,$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres : une telle expression est *linéaire*

([1]) Le sens des mots *forme* et *linéaire* varie un peu suivant les auteurs ; souvent le mot *forme* est pris simplement comme synonyme de polynome et le mot *linéaire* comme synonyme de *du premier degré*. L'origine de ce dernier mot est dans la signification des équations du premier degré, en Géométrie analytique. Il ne me paraît pas que ces synonymes soient nécessaires, et, conformément à un usage d'ailleurs très répandu, je réserverai, dans le présent livre, le mot *forme* pour les polynomes homogènes, le mot *linéaire* pour les polynomes homogènes et du premier degré. Un polynome du premier degré devra ainsi être regardé comme une forme linéaire à laquelle on a ajouté une constante. L'emploi des mots *forme* et *linéaire* me dispensera donc d'ajouter l'épithète *homogène*. Une équation linéaire sera une équation du premier degré sans terme constant ; souvent on fait passer le terme constant dans le second membre ; le premier membre est alors linéaire par rapport aux inconnues.

en $X_1, X_2, \ldots, X_p$; elle est obtenue en *combinant linéairement* $X_1, X_2, \ldots, X_p$: c'est une *combinaison linéaire* de $X_1, X_2, \ldots, X_p$; en combinant linéairement plusieurs combinaisons linéaires de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ on retombe évidemment sur une combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Si l'on considère les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$, toute équation obtenue en égalant à o une combinaison linéaire de $X_1, X_2, \ldots, X_p$ s'appelle aussi une *combinaison linéaire de ces équations*

Si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont des polynomes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'expression $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p$ est évidemment aussi, en général, un polynome du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; c'est une expression linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ lorsque $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il faut, toutefois, remarquer que les variables peuvent disparaître de la combinaison linéaire $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_p X_p$ des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Si par exemple on pose

$$\begin{aligned} X &= 2x - 3y + z - 1, \\ Y &= x - 2y - z + 2, \\ Z &= x + 5z - 10, \end{aligned}$$

et si l'on forme la combinaison linéaire en X, Y, Z

$$2X - 3Y - Z,$$

on voit de suite, en remplaçant X, Y, Z par leurs expressions, en ordonnant par rapport à x, y, z, que les coefficients de ces variables sont nuls et que l'on a, identiquement en x, y, z,

$$2X - 3Y - Z = 2;$$

notons en passant que cette identité montre clairement qu'il ne peut exister aucun système de valeurs pour x, y, z telles que X, Y, Z s'annulent pour ces valeurs : en d'autres termes, on ne peut satisfaire à la fois aux équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$. Si, au contraire, en conservant à X, Y leur signification, on avait supposé $Z = x + 5z - 8$, on aurait eu, identiquement en x, y, z,

$$2X - 3Y - Z = 0,$$

et il serait évident par là que tout système de valeurs de x, y, z qui annule X et Y, annule aussi Z; en d'autres termes, les équations $X = 0$, $Y = 0$ entraîneraient l'équation $Z = 0$.

Remarquons encore que, si X, Y, Z désignent en général des polynomes du premier degré en x, y, z, savoir

$$ax + by + cz + d, \qquad a'x + b'y + c'z + d', \qquad a''x + b''y + c''z + d'',$$

et s'il existe une combinaison linéaire $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$, de X, Y, Z d'où les variables x, y, z disparaissent, la combinaison linéaire $\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z'$ des polynomes linéaires en x, y, z,

$$X' = ax + by + cz, \qquad Y' = a'x + b'y + c'z, \qquad Z' = a''x + b''y + c''z,$$

obtenus en supprimant les termes constants d, d', d'' des polynomes X, Y, Z, est identiquement nulle. En effet, dans les deux expressions

$$\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z'$$

et

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

les coefficients de x, y, z sont évidemment les mêmes : or, par hypothèse, ces coefficients sont nuls dans la première expression. Inversement, l'existence d'une relation de la forme $\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' = 0$, identique en x, y, z, implique évidemment l'existence d'une combinaison linéaire $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ des polynomes du premier degré X, Y, Z, d'où les variables x, y, z disparaissent.

Ces résultats s'étendent à des polynomes du premier degré comportant autant de variables que l'on veut.

130. Il importe, pour ce qui suit, d'étudier l'application aux équations du premier degré du second principe que l'on a rappelé au n° 128; si l'on veut appliquer ce principe, il est clair qu'on a à effectuer successivement les deux opérations suivantes :

1° Résoudre l'une des équations données par rapport à l'une des inconnues x, qui, après cette résolution, se trouve, en général, exprimée au moyen des autres inconnues y, z, ...

2° Substituer dans les autres équations, à la place de x, son expression au moyen de y, z....

On est ainsi amené à étudier ce que devient, par cette substitution, le premier membre de l'une quelconque de ces autres équations, lequel était primitivement un polynome du premier degré en x, y, z, ...

Je vais raisonner en supposant qu'il y ait trois inconnues x, y et z; le lecteur reconnaîtra immédiatement que les résultats qui suivent ne dépendent pas du nombre des inconnues.

Considérons l'équation du premier degré

$$X = ax + by + cz + d = 0,$$

et soit

$$Y = a'x + b'y + c'z + d'$$

un polynome du premier degré en x, y, z; on va voir ce qu'il devient quand on résout l'équation $X = 0$ par rapport à l'une des inconnues et que l'on y remplace cette inconnue par l'expression que l'on a trouvée; a, b, c, d, a', b', c', d' seront regardés comme des coefficients numériques.

Si le coefficient a n'est pas nul, l'équation $X = 0$ est équivalente à l'équation $\frac{1}{a} X = 0$, ou

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a};$$

sous cette forme, *elle est résolue par rapport à x* (¹). On observera que les coefficients de y, z dans le second membre ne dépendent pas du terme constant d.

Si l'on remplace x par cette expression dans Y, on obtiendra un polynome Y_1, du premier degré en y, z, à savoir

$$\begin{aligned} Y_1 &= a'\left(-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}\right) + b'y + c'z + d' \\ &= \left(b' - \frac{ba'}{a}\right)y + \left(c' - \frac{ca'}{a}\right)z + d' - \frac{da'}{a}, \end{aligned}$$

et l'on vérifie de suite que l'on a identiquement en x, y, z

$$Y_1 = Y - \frac{a'}{a}X;$$

(¹) Il nous sera utile plus tard d'avoir remarqué que, quand on laisse tous les termes dans un même membre, la résolution d'une équation du premier degré par rapport à une inconnue revient à diviser le premier membre de cette équation par le coefficient de cette inconnue.

en d'autres termes, le polynome Y_1 est une forme linéaire en X, Y, dont les coefficients sont $-\frac{a'}{a}$ et 1. Dans ce polynome, les coefficients des variables y, z ne dépendent nullement des termes constants d, d', mais seulement de la valeur des coefficients de x, y, z dans X et dans Y.

Si l'on considère les deux équations du premier degré $X = 0$, $Y = 0$, il est clair que leur système est équivalent au système $X = 0$, $Y - \frac{a'}{a}X = 0$, en sorte que, dans le cas des équations du premier degré, la seconde proposition du n° **128** est une conséquence de la première; mais c'est sur un autre point que je désire appeler l'attention du lecteur.

Il peut se faire, après la substitution, que les inconnues y, z disparaissent, en sorte que Y_1 ne soit plus, à proprement parler, un polynome en y et z, mais se réduise à un nombre μ, qui peut d'ailleurs être différent de 0, ou nul. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, dans l'exemple précédent, que l'on ait

$$b' - \frac{a'b}{a} = 0, \qquad c' - \frac{a'c}{a} = 0,$$

Y_1 se réduit alors au nombre $d' - \frac{a'd}{a}$, et l'on a identiquement en x, y, z,

$$Y - \frac{a'}{a}X = d' - \frac{a'd}{a}.$$

Si le second membre de cette identité n'est pas nul, il est clair qu'on ne peut avoir à la fois $X = 0$, $Y = 0$ pour aucune valeur de x, y, z; les deux équations $X = 0$, $Y = 0$ sont incompatibles. Si, au contraire, le second membre est nul, il est clair que la supposition $X = 0$ entraîne $Y = 0$; on vérifiera alors les deux équations $X = 0$, $Y = 0$, en attribuant à y et z des valeurs quelconques et en attribuant à x la valeur qui en résulte pour $-\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$.

Il convient de remarquer que ce fait exceptionnel, la disparition des inconnues dans Y_1, ne dépend en aucune façon des termes constants d, d', mais seulement des valeurs des coefficients a, b, c, a', b', c' des inconnues x, y, z.

131. Ces remarques faites, j'expliquerai la méthode de résolution des équations linéaires par substitution sur le cas de trois équations du premier degré à trois inconnues.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} X = ax + by + cz + d = 0, \\ Y = a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ Z = a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

ces trois équations. Elles peuvent s'écrire encore

$$X' + d = 0, \qquad Y' + d' = 0, \qquad Z' + d'' = 0,$$

en désignant par X', Y', Z' les polynomes linéaires en x, y, z

$$ax + by + cz, \qquad a'x + b'y + c'z, \qquad a''x + b''y + c''z,$$

que l'on obtient en supprimant les termes constants d, d', d'' des polynomes X, Y, Z.

Supposons que l'un des coefficients des inconnues, a par exemple, ne soit pas nul; en résolvant l'équation $X = 0$ et en portant l'expression trouvée

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}$$

dans les deux autres équations, on parviendra aux équations

$$(2)\qquad \begin{cases} Y_1 = Ay + Bz + C = 0, \\ Z_1 = A'y + B'z + C' = 0, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$A = b' - \frac{b}{a}a', \qquad B = c' - \frac{c}{a}a', \qquad C = d' - \frac{d}{a}a',$$

$$A' = b'' - \frac{b}{a}a'', \qquad B' = c'' - \frac{c}{a}a'', \qquad C' = d'' - \frac{d}{a}a''.$$

Ainsi qu'on l'a déjà fait observer, les valeurs des coefficients A, B, A', B' de y, z dans Y_1 et Z_1 ne dépendent nullement des termes constants d, d', d''.

On a d'ailleurs identiquement en x, y, z

$$(3)\qquad Y_1 = Y - \frac{a'}{a}X, \qquad Z_1 = Z - \frac{a''}{a}X,$$

et le système des équations proposé est équivalent au système

$$Y_1 = 0, \qquad Z_1 = 0, \qquad x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - d,$$

dont la dernière équivaut à $X = 0$.

En général, les inconnues y, z figurent dans Y_1, Z_1; si, par exemple, A n'est pas nul, on résoudra l'équation $Y_1 = 0$, par rapport à y et l'on remplacera, dans l'équation $Z_1 = 0$, y par $-\frac{B}{A}z - \frac{C}{A}$; Z_1, après la substitution, deviendra

$$Z_2 = Z_1 - \frac{A'}{A}Y_1 = \left(B' - \frac{A'B}{A}\right)z + C' - \frac{A'C}{A}.$$

La valeur du coefficient de z dans Z_2 ne dépend que de la valeur des coefficients A, B, A', B', et, par suite, des coefficients a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', nullement de la valeur des termes constants d, d', d''.

A cause des relations (3), on a, identiquement, en x, y, z,

$$(4) \qquad Z_2 = Z - \frac{a''}{a}X - \frac{A'}{A}\left(Y - \frac{a'}{a}X\right) = \left(\frac{a'A'}{aA} - \frac{a''}{a}\right)X - \frac{A'}{A}Y + Z;$$

Z_2 est donc une forme linéaire en X, Y, Z dans laquelle le coefficient de Z est 1.

Le système proposé est équivalent au système

$$\begin{aligned} Z_2 &= 0, \\ y &= -\frac{B}{A}z - \frac{C}{A}, \\ x &= -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Si, dans la première équation, le coefficient de z n'est pas nul, on pourra résoudre cette équation par rapport à z, et l'on en tirera une valeur unique $z = \lambda$; le système proposé est équivalent au système

$$\begin{aligned} z &= \lambda, \\ y &= -\frac{B}{A}\lambda - \frac{C}{A}, \\ x &= \frac{b}{a}\left(\frac{B}{A}\lambda + \frac{C}{A}\right) - \frac{c}{a}\lambda - \frac{d}{a}, \end{aligned}$$

dont la solution est mise en évidence : dans ce cas le système proposé admet une solution, et une seule.

Tout en continuant de supposer que, dans Y_1, Z_1, l'un des coefficients des inconnues, A par exemple, ne soit pas nul, supposons que l'inconnue z disparaisse de Z_2 qui se réduit alors au nombre $C' - \frac{A'C}{A}$; le raisonnement du numéro précédent montre que, si ce nombre n'est pas nul, les équations $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$ sont incompatibles, et le système proposé impossible; si, au contraire, $C' - \frac{A'C}{A}$ est nul, on n'aura plus à tenir compte de l'équation $Z_2 = 0$, qui se réduit à $0 = 0$, et l'on pourra dire que le système des *trois* équations proposées est équivalent au système des *deux* équations

$$y = -\frac{B}{A}z - \frac{C}{A},$$

$$x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a},$$

ou encore au système

$$y = -\frac{B}{A}z - \frac{C}{A},$$

$$x = \frac{b}{a}\left(\frac{B}{A}z + \frac{C}{A}\right) - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a} = \left(\frac{bB}{aA} - \frac{c}{a}\right)z + \frac{bC}{aA} - \frac{d}{a}.$$

Deux des inconnues y et x s'expriment alors comme des polynomes du premier degré en z, qui reste indéterminé. On peut attribuer à z une valeur numérique arbitraire; les valeurs de y, x qui résultent des formules ci-dessus satisfont aux équations proposées : inversement, dans toute solution du système proposé, les valeurs de y, x s'expriment par les formules précédentes au moyen de la valeur de z.

Dans le cas où z ne figure pas dans Z_2, qui se réduit alors au nombre $C' - \frac{C}{A}A'$, on a identiquement en x, y, z, en vertu de (4),

$$Z - \frac{A'}{A}Y + \left(\frac{A'a'}{Aa} - \frac{a''}{a}\right)X = C' - \frac{A'C}{A};$$

il y a une combinaison linéaire de X, Y, Z qui se réduit identiquement au nombre $C' - \frac{A'C}{A}$. L'identité précédente montre bien, quand

$C' - \frac{A'C}{A}$ n'est pas nul, que les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sont incompatibles, et, quand $C' - \frac{A'C}{A}$ est nul, que les deux premières entraînent la troisième.

S'il arrivait que les inconnues y, z ne figurassent ni l'une ni l'autre dans les équations $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, c'est-à-dire si l'on avait

$$b' - \frac{b}{a} a' = 0, \qquad c' - \frac{c}{a} a' = 0,$$

$$b'' - \frac{b}{a} a'' = 0, \qquad c'' - \frac{c}{a} a'' = 0,$$

auquel cas Y_1, Z_1 se réduiraient aux nombres $d' - \frac{d}{a} a'$, $d'' - \frac{d}{a} a''$, ou bien ces derniers nombres ne seraient pas nuls à la fois, et l'une des équations $Y = 0$, $Z = 0$ serait incompatible avec l'équation $X = 0$, ou bien les deux nombres $d' - \frac{d}{a} a'$, $d'' - \frac{d}{a} a''$ seraient nuls, et alors l'équation $X = 0$ entraînerait les deux équations $Y = 0$, $Z = 0$. Dans ce dernier cas, le système des *trois* équations proposées serait équivalent à l'unique équation

$$x = -\frac{b}{a} y - \frac{c}{a} z - \frac{d}{a};$$

y et z resteraient indéterminés; on peut leur attribuer telles valeurs que l'on veut, la valeur de x est donnée par la formule précédente; inversement, dans toute solution du système proposé, la valeur de x est liée par la relation précédente aux valeurs de y et de z.

Lorsque y, z disparaissent des équations $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$, on a entre X, Y, Z, à cause des identités (3), les relations, identiques en x, y, z,

$$Y - \frac{a'}{a} X = d' - \frac{d}{a} a',$$

$$Z - \frac{a''}{a} X = d'' - \frac{d}{a} a'',$$

qui mettent en évidence, quand les seconds membres ne sont pas nuls tous deux, l'incompatibilité de l'équation $X = 0$ avec l'une au moins des équations $Y = 0$, $Z = 0$, et qui, lorsque les seconds membres sont nuls, montrent que l'équation $X = 0$ entraîne les deux équations $Y = 0$, $Z = 0$.

Enfin, si dans les équations proposées, les coefficients de toutes les inconnues étaient nuls, en sorte que ces équations se réduiraient à $d = 0$, $d' = 0$, $d'' = 0$, ou bien l'un des nombres d, d', d'' ne serait pas nul, et le système proposé serait manifestement impossible, ou bien d, d', d'' seraient nuls et le système proposé serait vérifié quelles que fussent les valeurs de x, y, z.

En résumé, ou bien il y a une solution, et une seule; ou bien il y a impossibilité; ou bien une ou deux inconnues peuvent être prises arbitrairement, les deux autres ou la troisième s'exprimant au moyen de cette inconnue ou de ces inconnues arbitraires, ou encore, dans le cas très exceptionnel signalé tout à l'heure, les trois inconnues sont indéterminées. Enfin, dans les cas d'impossibilité ou d'indétermination, il y a entre les premiers membres des équations des relations (identiques en x, y, z), qui manifestent cette impossibilité ou cette indétermination. Ces relations sont de la forme

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0,$$

l'un des coefficients numériques α, β, γ n'étant pas nul, puisque, dans les relations de cette nature que l'on a obtenues dans le cours de la démonstration, l'un de ces coefficients était toujours égal à 1. On peut dire encore qu'il existe une combinaison linéaire $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ des premiers membres des équations dans laquelle les coefficients α, β, γ ne sont pas tous nuls et d'où les inconnues disparaissent. Dans le cas très exceptionnel où ces inconnues ne figureraient pas dans X, Y, Z, on peut prendre pour α, β, γ des nombres quelconques. Ces relations identiques mettent en évidence l'impossibilité ou l'indétermination du système. On est certainement dans le cas de l'impossibilité si δ n'est pas nul.

D'autre part, l'impossibilité ou l'indétermination se manifestent toujours, après l'une des substitutions dont la méthode se compose, par la disparition totale des inconnues dans l'une des équations où l'on a fait cette substitution, et, ainsi qu'on l'a fait observer, cette disparition ne dépend en aucune façon des termes constants, mais seulement des valeurs attribuées aux coefficients des inconnues. Il suffit de se reporter aux raisonnements précédents pour reconnaître que l'indétermination apparaît en quelque sorte comme un cas particulier de l'impossibilité : qu'on laisse leurs valeurs aux coefficients de x, y, z, dans les équations proposées, et qu'on modifie seulement les termes constants, le système, s'il était impossible, peut, pour certaines valeurs de ces termes constants, devenir indéterminé.

Considérons les équations linéaires en x, y, z

$$X' = 0, \qquad Y' = 0, \qquad Z' = 0,$$

obtenues en supprimant les termes constants d, d', d'' des premiers membres X, Y, Z des équations proposées. Ce système n'est jamais impossible : il est, en effet, évidemment vérifié pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, en sorte qu'il arrivera de deux choses l'une : ou bien le système $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$ n'admettra que cette solution, ou bien ce système sera indéterminé, et deux inconnues s'exprimeront linéairement au moyen de la troisième; ou bien une inconnue s'exprimera linéairement au moyen des deux autres. Dans le cas où tous les coefficients seraient nuls, les trois inconnues seraient évidemment indéterminées. S'il y a indétermination, il existe entre X', Y', Z' au moins une relation linéaire, identique en x, y, z, de la forme $\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' = 0$, relation dans laquelle l'un des coefficients numériques α, β, γ n'est pas nul. Si, par exemple, γ n'est pas nul, la relation précédente peut être résolue par rapport à Z' qui apparaît ainsi comme une combinaison linéaire de X' et Y'. Enfin, je rappelle que l'existence d'une relation, identique en x, y, z, de la forme $\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta = 0$, entraîne nécessairement l'identité $\alpha X' + \beta Y' + \gamma Z' = 0$, et réciproquement.

Si les équations $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$ n'admettent pas d'autre solution que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, le système n'est pas indéterminé et, quand on appliquera, pour résoudre les équations, la méthode de substitution, on ne se trouvera point dans le cas exceptionnel où les inconnues disparaissent totalement de quelqu'une des équations où l'on a fait la substitution; on ne se trouvera pas non plus dans ce cas exceptionnel pour les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et cela quelles que soient les valeurs numériques des termes constants d, d', d''. Ces dernières équations admettront une solution et une seule. Si le système $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$ est indéterminé, c'est qu'après une des substitutions les inconnues disparaissent totalement de l'une des équations où l'on a fait la substitution. Il en est de même pour les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ dont le système est alors impossible ou indéterminé; on se trouvera dans un cas ou dans l'autre suivant les valeurs de d, d', d''. Réciproquement, si le système $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ admet une solution unique, le système $X'=0$, $Y'=0$, $Z'=0$ n'admet pas d'autre solution que $x=0$, $y=0$, $z=0$. Si le système $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ est impossible ou indéterminé, le système $X'=0$, $Y'=0$, $Z'=0$ est indéterminé.

132. Supposons qu'on applique la méthode de substitution aux équations du premier degré

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=0,$$

telle qu'elle a été décrite au numéro précédent, mais en ayant soin, quand on résout une équation, de tout laisser dans le premier membre, ce qui revient alors à diviser simplement par le coefficient d'une inconnue, et, quand on a fait une substitution, de tout laisser encore dans le premier membre. Le premier membre de l'équation qu'on vient d'écrire est une combinaison linéaire des deux premiers membres de deux équations, celle d'où l'on a tiré l'inconnue et celle où l'on a fait la substitution. Puisque, en combinant linéairement des combinaisons linéaires de X, Y, Z, on retombe toujours sur des combinaisons linéaires de ces expressions, il est clair que les premiers membres de toutes les équations que l'on écrit sont toujours des combinaisons linéaires de X, Y, Z, c'est-à-dire des expressions de la forme $\alpha X+\beta Y+\gamma Z$, α, β, γ étant des coefficients purement numériques.

Supposons maintenant qu'on soit dans le cas où les équations $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ admettent une solution x_0, y_0, z_0, et une seule, la méthode conduit, uniquement par des résolutions d'équations du premier degré et des substitutions, à ces valeurs des inconnues, c'est-à-dire que son résultat final est de la forme

$$x-x_0=0, \qquad y-y_0=0, \qquad z-z_0=0.$$

Les premiers membres de ces dernières équations doivent être, eux aussi, des combinaisons linéaires de X, Y, Z, c'est-à-dire qu'il doit exister neuf nombres α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' tels que l'on ait identiquement en x, y, z

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} x-x_0&=\alpha\, X+\beta\, Y+\gamma\, Z,\\ y-y_0&=\alpha' X+\beta' Y+\gamma' Z,\\ z-z_0&=\alpha'' X+\beta'' Y+\gamma'' Z.\end{aligned}\right.$$

Réciproquement, supposons qu'on ait trouvé neuf nombres α, β, ..., γ'' tels que les relations précédentes aient lieu identiquement en x, y, z; il est clair qu'on ne peut avoir à la fois $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ sans que l'on ait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$; si les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ont une solution, celle-ci ne peut être que x_0, y_0, z_0; mais on n'aperçoit pas de suite que ces nombres annulent effectivement X, Y, Z; c'est pour l'établir que j'ai fait les remarques qui terminent le numéro précédent. En désignant encore par X', Y', Z' les formes linéaires en x, y, z qui deviennent X, Y, Z quand on supprime les termes constants d, d', d'', les identités précédentes, supposées vraies, impliquent celles que voici

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, X' + \beta\, Y' + \gamma\, Z', \\ y &= \alpha' X' + \beta' Y' + \gamma' Z', \\ z &= \alpha'' X' + \beta'' Y' + \gamma'' Z', \end{aligned}$$

puisque, dans les deux membres de chacune de ces égalités, les coefficients de x, y, z doivent être égaux en vertu des identités (1). Dès lors, X', Y', Z' ne pouvant, en vertu de ces identités, être nuls simultanément sans que l'on ait $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, il est clair qu'il n'y a pas indétermination pour les équations $X' = 0$, $Y' = 0$, $Z' = 0$ et que, par conséquent, il ne peut y avoir ni impossibilité, ni indétermination pour les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; elles admettent une solution, et une seule, qui est certainement $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

De là une méthode pour la résolution des équations du premier degré, qui consiste à déterminer les coefficients α, β, γ de manière que, dans $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$, les coefficients de y et de z soient nuls. Avant de donner un exemple de cette méthode (n° **134**), je veux faire les remarques suivantes :

Quand on cherche à résoudre les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, on n'applique pas toujours la méthode régulière de substitution telle qu'elle a été décrite au n° **130**; on cherche à profiter de la forme spéciale de ces équations, on les combine par addition, après les avoir multipliées par certains facteurs; quelquefois, après avoir résolu par rapport à une inconnue, on fait une substitution. Tout cela revient, au fond, à former des combinaisons linéaires des équations; car le fait, que, dans le cours des calculs, on fait passer des termes d'un membre dans un autre, est évidemment insignifiant. Si, en faisant toutes ces opérations dans un ordre quelconque, on arrive à un système d'équations de la forme

$$x = x_0, \qquad y = y_0, \qquad z = z_0,$$

où x_0, y_0, z_0 sont des nombres, il est bien clair que le système proposé ne peut admettre d'autre solution que x_0, y_0, z_0; mais le raisonnement précédent montre que x_0, y_0, z_0 constituent effectivement une solution, et il n'est pas nécessaire, au point de vue théorique, de constater que x_0, y_0, z_0 annulent effectivement X, Y, Z. Cette vérification reste utile pour s'assurer qu'on n'a point commis de faute de calcul.

Pour peu que le lecteur veuille y réfléchir, il reconnaîtra sans peine que la méthode de substitution et les résultats qui précèdent s'étendent à la résolution d'un système de n équations du premier degré à n inconnues, et même, sauf quelques modifications, de n équations du premier degré à p inconnues; elle permettra toujours soit de parvenir à la solution unique si le système n'admet qu'une solution (ce qui suppose le nombre des équations au moins égal à celui des inconnues), soit de mettre en évidence l'impossibilité ou l'indétermination du système; dans le cas d'indétermination, certaines inconnues s'expriment par des polynomes du premier degré, dont les autres inconnues sont les variables. Les conclusions qu'on vient d'établir relativement aux combinaisons linéaires subsistent pour n équations du premier degré à n inconnues. Lorsque, en combinant linéairement ces équations, on parvient à n égalités, conséquences nécessaires des n équations, dont chacune fournit la valeur d'une inconnue, on est sûr que ces valeurs vérifient effectivement les équations. C'est d'ailleurs ce qui ressortira du Chapitre suivant.

Considérons, par exemple, les équations

$$\begin{aligned} -x + y + z &= a, \\ x - y + z &= b, \\ x + y - z &= c, \end{aligned}$$

on en tire, en ajoutant membre à membre,

$$x + y + z = a + b + c,$$

puis en retranchant membre à membre de celle-là chacune des équations proposées et en divisant par 2,

$$x = \frac{b+c-a}{2}, \qquad y = \frac{c+a-b}{2}, \qquad z = \frac{a+b-c}{2};$$

on n'a fait, au fond, que des combinaisons linéaires des équations; sans la théorie précédente, on pouvait affirmer évidemment que les équations proposées n'avaient pas d'autre solution que celle qu'on vient d'écrire; la théorie précédente montre qu'on a bien effectivement là une solution.

133. La méthode de substitution appliquée à deux équations du premier degré à deux inconnues

$$(1) \qquad \begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0, \\ a'x + b'y + c' = 0, \end{cases}$$

conduit à ce résultat essentiel, bien connu du lecteur : Lorsque la quantité $ab' - ba'$ n'est pas nulle, le système (1) admet une solution, et une seule, qui s'exprime par les formules

$$(2) \qquad x = \frac{bc' - cb'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ca' - ac'}{ab' - ba'}.$$

Notons en passant que, d'après cela, les équations linéaires en x, y

$$ax + by = 0, \qquad a'x + b'y = 0$$

n'admettent dans ce cas que la solution évidente $x = 0$, $y = 0$. En d'autres termes, si l'on sait que x, y sont des nombres qui vérifient ces équations, on a, ou $x = 0$, $y = 0$, ou $ab' - ba' = 0$.

Dans le cas où cette dernière relation est vérifiée, il y a des valeurs de x, y qui ne sont pas nulles toutes les deux et qui vérifient les équations proposées.

Considérons maintenant les deux équations linéaires en x, y, z

$$(3) \qquad \begin{cases} a\,x + b\,y + c\,z = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0, \end{cases}$$

et cherchons à déterminer toutes les valeurs de x, y, z qui vérifient ces équations. Supposons d'abord $ab' - ba'$ différent de 0. Le système (3), d'après ce qu'on vient de dire, équivaut au système

$$(4) \qquad x = \frac{(bc' - cb')z}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{(ca' - ac')z}{ab' - ba'},$$

c'est-à-dire qu'on obtiendra n'importe quelle solution du système (3) en donnant à z une valeur quelconque et en prenant pour x, y les valeurs qui résultent des formules (4); réciproquement, toute solution du système (3) peut s'obtenir de cette façon. Les formules (4) fournissent, en y laissant z indéterminé, la solution générale du système (3). Si nous posons $z = (ab' - ba')t$, il est clair qu'à chaque valeur de t correspond une valeur de z et que, réciproquement, à chaque valeur de z correspond une valeur de t; on peut donc tout aussi bien dire qu'on obtient la solution générale du système (3) en prenant

$$(5) \qquad x = (bc' - cb')t, \qquad y = (ca' - ac')t, \qquad z = (ab' - ba')t,$$

où t est une indéterminée. Les coefficients de t, dans les seconds membres, se déduisent du premier par une permutation circulaire des lettres a, b, c.

Notre raisonnement suppose que $ab' - ba'$ n'est pas nul; mais, pourvu qu'une des trois quantités

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'$$

ne soit pas nulle, le résultat subsiste; si, par exemple, c'est $bc' - cb'$ dont on sait qu'il n'est pas nul, on résoudra les équations (3) par rapport à y, z au lieu de les résoudre par rapport à x, y, on retombera sur le même résultat.

Au lieu d'écrire la solution générale des équations (3) sous la forme (5), on peut, dans le cas où l'une des quantités $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ n'est pas nulle, dire qu'on obtient cette solution générale en prenant x, y, z respectivement proportionnels à ces quantités, et écrire

$$\frac{x}{bc' - cb'} = \frac{y}{ca' - ac'} = \frac{z}{ab' - ba'}.$$

On doit donner à ces équations le même sens qu'aux équations (5); si, par exemple, l'un des dénominateurs est nul, il faut entendre que le numérateur correspondant doit être nul aussi.

Observons ce qui arrive quand deux des trois quantités $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$, les deux dernières par exemple, sont nulles : en regardant les deux égalités

$$\begin{gathered} ca' - c'a = 0, \\ ba' - b'a = 0, \end{gathered}$$

comme des équations linéaires par rapport à deux inconnues a, a', on voit, d'après une remarque antérieure, qu'elles entraînent soit $a = 0$, $a' = 0$, soit $c(-b') - b(-c')$ ou $bc' - b'c = 0$. Si l'une des inconnues x, y, z ne disparaît pas à la fois des deux équations (3), on peut dire que l'évanouissement de deux des quantités $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$ entraîne l'évanouissement de la troisième.

Lorsque ces trois quantités sont nulles, c'est que les coefficients de l'une des équations (3) sont proportionnels aux coefficients de l'autre; l'une des équations entraîne l'autre. Deux des inconnues x, y, z peuvent alors être laissées arbitraires; la troisième, que l'on choisira de manière que son coefficient ne soit pas nul, s'exprime au moyen de ces deux-là.

Dans tous les cas les équations (3) admettent des solutions dans lesquelles les inconnues x, y, z ne sont pas nulles toutes les trois.

134. Les résultats précédents, relatifs à la résolution de deux équations linéaires à trois inconnues, sont souvent utilisés. Je vais les appliquer à la résolution des trois équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \\ Y &= a'x + b'y + c'z + d' = 0, \\ Z &= a''x + b''y + c''z + d'' = 0, \end{aligned} \right.$$

en cherchant à déterminer trois nombres A, A', A'', tels que, dans la combinaison linéaire $AX + A'Y + A''Z$ des premiers membres, les termes en y, z disparaissent : il faut pour cela que les deux équations linéaires en A, A', A''

$$\begin{gathered} bA + b'A' + b''A'' = 0, \\ cA + c'A' + c''A'' = 0 \end{gathered}$$

soient vérifiées; il faut donc, d'après le numéro précédent, prendre A, A', A'' proportionnels à $b'c'' - b''c'$, $b''c - bc''$, $bc' - b'c$; rien n'empêche de prendre A, A′, A″ égaux à ces quantités. On a alors identiquement

$$(2)\qquad AX + A'Y + A''Z = (Aa + A'a' + A''a'')x + Ad + A'd' + A''d''.$$

On déterminera de même deux systèmes de nombres B, B′, B″ et C, C′, C″ tels que, dans les combinaisons linéaires $BX + B'Y + B''Z$, $CX + C'Y + C''Z$, les termes en x et z, les termes en x, y disparaissent, et l'on sera ainsi conduit aux identités

$$(2)\qquad \begin{cases} BX + B'Y + B''Z = (Bb + B'b' + B''b'')y + Bd + B'd' + B''d'', \\ CX + C'Y + C''Z = (Cc + C'c' + C''c'')z + Cd + C'd' + C''d''. \end{cases}$$

J'écris ci-dessous le tableau qui donne les expressions, au moyen des neuf coefficients a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', des neuf quantités A, B, ..., C″

$$(3)\qquad \begin{cases} A = b'c'' - b''c', & B = c'a'' - c''a', & C = a'b'' - a''b', \\ A' = b''c - b\,c''. & B' = c''a - c\,a'', & C' = a''b - a\,b'', \\ A'' = b\,c' - b'c, & B'' = c\,a' - c'a, & C'' = a\,b' - a'b; \end{cases}$$

pour retrouver rapidement ces formules, il convient de faire les remarques suivantes : dans l'expression de l'une quelconque des quantités A, ..., C″ ne figurent que les petites lettres autres que la grande lettre dont on veut l'expression et autrement accentuées que cette dernière; ainsi, dans l'expression de A ne figurent que les lettres b, c (autres que a) et affectées d'un ou deux accents, tandis qu'il n'y en a pas dans A; en faisant une permutation circulaire sur les petites lettres, on produit une permutation circulaire sur les grandes lettres; ainsi B se déduit de A par une permutation circulaire effectuée sur les petites lettres. Une permutation circulaire sur les accents des petites lettres, ou, si l'on veut, une permutation circulaire effectuée à la fois sur les lettres a, a', a'', sur les lettres b, b', b'', sur les lettres c, c', c'', produit une permutation circulaire sur les lettres A, A′, A″, sur les lettres B, B′, B″, sur les lettres C, C′, C″.

Enfin, on vérifie immédiatement que, dans les seconds membres des identités (2), les coefficients respectifs de x, y, z, c'est-à-dire

$$Aa + A'a' + A''a'',\quad Bb + B'b' + B''b'',\quad Cc + C'c' + C''c'',$$

sont égaux : leur valeur commune est

$$\Delta = ab'c'' - ab''c' + a'b''c - a'bc'' + a''bc' - a''b'c. \tag{4}$$

Supposons que Δ ne soit pas nul, ce qui implique évidemment que les trois quantités A, A′, A″ ou B, B′, B″, ou C, C′, C″ ne soient pas nulles à la fois : on voit qu'on est conduit, par des combinaisons linéaires des équations proposées, aux suivantes

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{\mathrm{A}d + \mathrm{A}'d' + \mathrm{A}''d''}{\Delta} = -\frac{\mathrm{A}d + \mathrm{A}'d' + \mathrm{A}''d''}{\mathrm{A}a + \mathrm{A}'a' + \mathrm{A}''a''}, \\ y &= -\frac{\mathrm{B}d + \mathrm{B}'d' + \mathrm{B}''d''}{\Delta} = -\frac{\mathrm{B}d + \mathrm{B}'d' + \mathrm{B}''d''}{\mathrm{B}b + \mathrm{B}'b' + \mathrm{B}''b''}, \\ z &= -\frac{\mathrm{C}d + \mathrm{C}'d' + \mathrm{C}''d''}{\Delta} = -\frac{\mathrm{C}d + \mathrm{C}'d' + \mathrm{C}''d''}{\mathrm{C}c + \mathrm{C}'c' + \mathrm{C}''c''}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Il résulte du calcul même que, si les équations (1) admettent une solution, cette solution ne peut être autre que celle que donnent ces formules; mais le raisonnement du n° 132 s'applique ici et l'on est certain que les valeurs trouvées pour x, y, z vérifient les équations (1), et cela quels que soient les coefficients $a, \ldots, c''$, pourvu que Δ ne soit pas nul.

Ainsi, lorsque Δ n'est pas nul, les équations (1) admettent une solution, et une seule, que donnent les formules (5).

Il convient de remarquer, relativement à ces formules, que les trois dénominateurs sont les mêmes, et que les numérateurs se déduisent de Δ en y remplaçant, pour chaque inconnue, les coefficients de cette inconnue par les termes constants : ainsi le numérateur de la fraction qui, lorsqu'on en a changé le signe, donne la valeur de x, s'obtient en remplaçant, dans Δ, a, a', a'' par d, d', d''; cela résulte évidemment de la seconde forme de cette fraction et de ce que a, a', a'' ne figurent pas dans les expressions de A, A′, A″.

135. Regardons les quantités A, ..., C″, Δ comme définies au moyen des données $a, \ldots, c''$ par les formules (3) et (4) du numéro précédent, elles pourront être regardées comme des polynomes où $a, \ldots, c''$ seraient les variables; A, ..., C″ sont alors des polynomes homogènes du second degré, Δ est un polynome homogène du troisième degré : ces polynomes sont liés entre eux par des relations identiques très remarquables : les premières que je vais écrire se trouvent avoir été démontrées par la façon même dont on a été conduit aux expressions de A, ..., C″, ou reproduisent une observation déjà faite sur les trois formes que peut affecter le dénominateur commun Δ des valeurs trouvées pour x, y, z

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} Aa + A'a' + A''a'' = \Delta, & Ba + B'a' + B''a'' = 0, & Ca + C'a' + C''a'' = 0 \\ Ab + A'b' + A''b'' = 0, & Bb + B'b' + B''b'' = \Delta, & Cb + C'b' + C''b'' = 0 \\ Ac + A'c' + A''c'' = 0, & Bc + B'c' + B''c'' = 0, & Cc + C'c' + C''c'' = \Delta. \end{array}\right.$$

A ces neuf identités, il convient d'en adjoindre neuf autres analogues, auxquelles on serait parvenu en suivant exactement la même marche que plus haut, si, au lieu d'écrire les équations à résoudre sous la forme (1) du numéro précédent, on les avait écrites sous la forme

$$\begin{aligned} ax + a'y + a''z + \alpha &= 0, \\ bx + b'y + b''z + \beta &= 0, \\ cx + c'y + c''z + \delta &= 0. \end{aligned}$$

Au reste, le lecteur n'aura aucune peine à les vérifier sur la définition même des polynomes A, ..., C″, Δ.

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} Aa + Bb + Cc = \Delta, & A'a + B'b + C'c = 0, & A''a + B''b + C''c = 0, \\ Aa' + Bb' + Cc' = 0, & A'a' + B'b' + C'c' = \Delta, & A''a' + B''b' + C''c' = 0, \\ Aa'' + Bb'' + Cc'' = 0, & A'a'' + B'b'' + C'c'' = 0, & A''a'' + B''b'' + C''c'' = \Delta. \end{array}\right.$$

Si l'on regarde pour un instant les deux égalités

$$\begin{aligned} Ba + B'a' + B''a'' &= 0, \\ Ca + C'a' + C''a'' &= 0. \end{aligned}$$

comme des équations linéaires où B, B′, B″, C, C′, C″ seraient les coefficients et a, a', a'' les inconnues, on en conclut, d'après le n° 133, que a, a', a'' doivent être proportionnels aux quantités $B'C'' - B''C'$, $B''C - BC''$, $BC' - B'C$; il est aisé de constater que le facteur de proportionnalité est Δ : en effet, si l'on remplace, dans $B'C'' - B''C'$, par exemple, B′, C″, B″, C′ par leurs expressions au moyen de a, ..., c'', on reconnaît de suite que, dans l'expression développée, les monomes où a ne figure pas se détruisent, en sorte que a se met en facteur dans les termes restants et l'on constate que $B'C'' - B''C'$ est égal à Δa. C'est la première des neuf identités qui suivent, les autres s'en déduisent par des permutations circulaires, lesquelles n'altèrent pas Δ,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} B'C''-B''C'=\Delta a, & C'A''-C''A'=\Delta b, & A'B''-A''B'=\Delta c, \\ B''C-B\,C''=\Delta a', & C''A-C\,A''=\Delta b', & A''B-A\,B''=\Delta c', \\ B\,C'-B'C=\Delta a'', & C\,A'-C'A=\Delta b'', & A\,B'-A'B=\Delta c''. \end{array}\right.$$

Le lecteur ne peut manquer d'être frappé par l'analogie qu'il y a entre ces relations et celles qui définissent les polynomes $A, \ldots, C''$.

Enfin, si l'on multiplie par A, A', A'' les identités qui figurent dans la première colonne du tableau précédent et que l'on ajoute membre à membre, on trouve, en tenant compte de la première des identités (6)

$$(4)\qquad A(B'C''-B''C')+A'(B''C-BC'')+A''(BC'-B'C)=\Delta^2.$$

Le premier membre est formé au moyen des quantités $A, \ldots, C''$ exactement comme Δ est formé au moyen des quantités $a, \ldots, c''$.

Il résulte des identités (8) que, si Δ est nul, en vertu des valeurs attribuées à $a, \ldots, c''$, les éléments de l'une quelconque des lignes horizontales qui figurent dans le tableau

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{array}$$

sont proportionnels aux éléments correspondants qui figurent dans une autre ligne horizontale; de même, pour les lignes verticales; plus particulièrement, en supposant toujours que Δ soit nul, si l'un des éléments du tableau précédent est nul, ou bien tous les éléments de la ligne horizontale qui contient cet élément, ou bien tous les éléments de la ligne verticale qui le contient, sont nuls.

Les diverses propriétés des polynomes $A, \ldots, C''$, Δ que l'on vient de développer appartiennent à une théorie dont on développera les éléments dans le Chapitre suivant; elles interviennent assez souvent pour qu'il soit utile de se familiariser avec elles, indépendamment du symbolisme propre à cette théorie.

136. Je me bornerai à faire une application des identités (2) du numéro précédent à la question même qui a été mon point de départ, à savoir la résolution des équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ dans le cas où Δ n'est pas nul. Récrivons les identités (2) (en x, y, z) du n° **134** sous la forme

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} AX + A'Y + A''Z &= \Delta x + P, \\ BX + B'Y + B''Z &= \Delta y + Q, \\ CX + C'Y + C''Z &= \Delta z + R, \end{aligned} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} P &= A d + A' d' + A'' d'', \\ Q &= B d + B' d' + B'' d'', \\ R &= C d + C' d' + C'' d''. \end{aligned}$$

Les identités (1) montrent, comme je l'ai déjà fait observer, que les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ ne peuvent être vérifiées si l'on ne prend pas

$$x = -\frac{P}{\Delta}, \qquad y = -\frac{Q}{\Delta}, \qquad z = -\frac{R}{\Delta};$$

si l'on ne veut pas faire appel au raisonnement du n° **132**, il resterait à vérifier que ces valeurs de x, y, z satisfont aux équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$; on peut éviter cette vérification, d'ailleurs aisée, comme il suit :

En multipliant les égalités (10) respectivement par a, b, c, ou par a', b', c', ou par a'', b'', c'', en les ajoutant et en tenant compte des relations (2), du numéro précédent, on trouve

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta X &= a\,(\Delta x + P) + b\,(\Delta y + Q) + c\,(\Delta z + R), \\ \Delta Y &= a'(\Delta x + P) + b'(\Delta y + Q) + c'(\Delta z + R), \\ \Delta Z &= a''(\Delta x + P) + b''(\Delta y + Q) + c''(\Delta z + R), \end{aligned} \right.$$

ces égalités, où, comme dans les égalités (1), X, Y, Z doivent être remplacés par

$$ax + by + cz + d, \quad a'x + b'y + c'z + d', \quad a''x + b''y + c''z + d'',$$

sont, comme les égalités (1) d'où elles ont été déduites, des identités en x, y, z; elles montrent évidemment, sous la condition que Δ ne soit pas nul, que, si l'on attribue à x, y, z les valeurs qui annulent $\Delta x + P$, $\Delta y + Q$, $\Delta z + R$, les polynomes X, Y, Z sont certainement nuls.

En résumé, quand Δ n'est pas nul, le système

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0,$$

et le système

$$\Delta x + P = 0, \qquad \Delta y + Q = 0, \qquad \Delta z + R = 0,$$

sont équivalents. Plus particulièrement, quand Δ n'est pas nul le système

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ a''x + b''y + c''z &= 0, \end{aligned}$$

et le système $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sont équivalents.

137. Si les formules générales qui donnent, en fonction des coefficients, les trois inconnues d'un système de trois équations du premier degré, ou plus généralement les n inconnues d'un système de n équations, conduisent, comme on vient de le voir et comme on le verra plus tard, à d'intéressants développements théoriques, il est très souvent avantageux, lorsqu'on a à résoudre un système particulier d'équations, de le traiter directement, sans avoir recours à ces formules générales, et de profiter de la forme particulière de ces équations.

Celles-ci peuvent présenter quelque symétrie dont on puisse tirer parti; on en a vu un exemple au n° **132**; souvent, c'est une inconnue auxiliaire qu'on est amené à prendre.

Si l'on a affaire, par exemple, au système

$$\begin{gathered} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \\ Ax + By + Cz = D, \end{gathered}$$

on prendra pour inconnue auxiliaire la valeur t commune aux trois rapports qui figurent dans les deux premières équations, d'où l'on tirera

$$x = at, \qquad y = bt, \qquad z = ct,$$

et, en portant dans la dernière, on aura

$$(Aa + Bb + Cc)t = D,$$

en sorte que la solution des équations proposées sera

$$x = \frac{aD}{Aa + Bb + Cc}, \qquad y = \frac{bD}{Aa + Bb + Cc}, \qquad z = \frac{cD}{Aa + Bb + Cc},$$

en supposant que $Aa + Bb + Cc$ soit différent de o.

Considérons encore les équations

$$\begin{aligned} Ax - \alpha(ax + by + cz + d) &= P, \\ By - \beta(ax + by + cz + d) &= Q, \\ Cz - \gamma(ax + by + cz + d) &= R. \end{aligned}$$

On voit que, si l'on connaissait la valeur de

$$ax + by + cz + d,$$

on obtiendrait de suite les valeurs de x, y, z ; on est donc amené à substituer au système précédent le système d'équations à quatre inconnues

$$ax + by + cz + d = u.$$
$$Ax - \alpha u = P, \qquad By - \beta u = Q, \qquad Cz - \gamma u = R;$$

ou, en supposant A, B, C différents de o,

$$x = \frac{\alpha u + P}{A}, \qquad y = \frac{\beta u + Q}{B}, \qquad z = \frac{\gamma u + R}{C},$$
$$a\frac{\alpha u + P}{A} + b\frac{\beta u + Q}{B} + c\frac{\gamma u + R}{C} = u;$$

la dernière équation détermine la valeur de u, en supposant toutefois que $\frac{a\alpha}{A} + \frac{b\beta}{B} + \frac{c\gamma}{C} - 1$ soit différent de o ; il ne reste plus qu'à substituer cette valeur de u dans les expressions de x, y, z.

Lorsqu'on applique, soit partiellement, soit d'une façon régulière, la méthode de substitution à un système d'équations données, il y a évidemment intérêt à commencer la résolution par celle des inconnues qui fournira l'expression la plus simple au moyen des autres inconnues, soit parce que cette expression contiendra moins d'inconnues, soit parce que les coefficients se trouvent être des nombres entiers, ou pour toute autre raison analogue.

Considérons, par exemple, le système

$$y = x,$$
$$x + y - z = 3,$$
$$3z + 2y - 2x = 6,$$

on le remplacera de suite par les systèmes

$$\begin{aligned} y &= x, & z &= 2. \\ 2x - z &= 3, & x &= y = \frac{5}{2}\cdot \\ 3z &= 6, \end{aligned}$$

Le lecteur reconnaît combien l'emploi des formules générales pour des cas comme ceux qu'on vient de traiter serait peu avantageux.

138. Je ne me suis occupé dans ce qui précède que de la résolution *exacte* d'un système d'équations. Dans la pratique, il arrive fréquemment, d'une part, que les coefficients ne soient connus qu'imparfaitement et, d'autre part, que ces coefficients, mis sous forme entière ou décimale, comportent un assez grand nombre de chiffres. Même lorsqu'il s'agit de questions purement théoriques, si les coefficients se trouvent être des nombres irrationnels, il faudra bien, pour effectuer les calculs, les remplacer par des valeurs approchées, et il est clair qu'on ne pourra obtenir que des résultats approchés pour les valeurs des inconnues. Enfin, il est à remarquer que si, en partant d'équations dont les coefficients, écrits sous forme décimale, comportent seulement quatre chiffres significatifs, par exemple, et qu'on effectue tous les calculs exactement, on obtiendra les inconnues sous forme de fractions dans lesquelles le numérateur et le dénominateur comporteront un très grand nombre de chiffres, chiffres dont les derniers n'auront aucune valeur, si les données dont on est parti ne sont pas sûres.

Il est alors raisonnable d'employer la méthode de substitution, en faisant au fur et à mesure les divisions, multiplications et additions dont on a besoin et en ne conservant pour chaque résultat qu'un certain nombre de chiffres; ce nombre de chiffres dépendra naturellement de l'approximation avec laquelle sont connus les coefficients et de celle qu'on veut obtenir : il est assez naturel de conserver, à chaque fois, un peu plus de chiffres qu'il n'est nécessaire, en sorte que les erreurs qui résultent des chiffres négligés soient petites devant l'erreur qui résulte de l'imperfection des données, ou au moins du même ordre. D'ailleurs, si l'on a des limites pour les erreurs dont sont entachées les données, des règles d'arithmétique bien connues ([1]) permettent d'évaluer, à chaque opération, une limite de l'erreur dont est entaché le résultat, soit à cause des erreurs primordiales, soit à cause des chiffres négligés, en sorte qu'on parvient finalement à une limite de l'erreur dont peuvent être entachées les valeurs des inconnues.

Quand on procède de cette façon, il est recommandé, contrairement à ce qu'il est naturel de faire lorsqu'on procède à la résolution exacte, de résoudre d'abord par rapport à celle des inconnues qui a le plus gros coefficient, en sorte que, dans les formules intermédiaires que l'on obtient ainsi, les coefficients des autres inconnues soient des

---

([1]) Imaginons qu'on opère sur deux nombres (positifs) *approchés* A, B, au lieu d'opérer sur les nombres *exacts* $A+\alpha$, $B+\beta$ et désignons par α', β' des nombres positifs dont on sait qu'ils sont égaux ou supérieurs aux valeurs absolues des *erreurs* α, β : α', β' sont des *limites supérieures* de ces erreurs. On doit supposer α', β' petits par rapport à A, B; lorsque A, B sont écrits sous forme décimale, α', β' sont, d'ordinaire, à peu près de l'ordre des unités des derniers chiffres. S'il s'agit d'une addition ou d'une soustraction, l'erreur commise sera moindre (en valeur absolue) que $\alpha'+\beta'$; s'il s'agit d'une multiplication, l'erreur commise sera moindre que $(B+\beta')\alpha'+A\beta'$; on calcule grossièrement cette erreur en remplaçant A et $B+\beta'$ par des valeurs plus simples, notoirement trop fortes, obtenues, par exemple, en forçant le premier chiffre significatif de A et de B. S'il s'agit d'une division, l'erreur

$$\frac{A+\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}=\frac{B\alpha-A\beta}{B(B+\beta)}=\frac{\alpha}{B+\beta}-\frac{A}{B}\,\frac{\beta}{B+\beta}$$

est moindre en valeur absolue que

$$\frac{1}{B'}\left(\alpha'+\frac{A}{B}\,\beta'\right),$$

où B' désigne un nombre positif inférieur ou égal à $B+\beta$; pour calculer cette erreur, on remplacera B' par un nombre notoirement trop petit : on pourra, par exemple le plus souvent, ne conserver que le premier chiffre significatif de B et remplacer les suivants par des zéros; on remplacera $\frac{A}{B}$ par un nombre notoirement plus grand, obtenu, par exemple, en forçant le premier chiffre du quotient.

Ces formules se simplifient un peu si l'on remplace α', β' par le plus grand de ces deux nombres. On peut d'ailleurs obtenir des résultats plus précis lorsque l'on connaît le signe de α et de β.

Enfin, il ne faut pas oublier d'ajouter à ces erreurs celle qui provient de ce que l'opération ne se fait pas exactement, de ce qu'on supprime les chiffres à partir d'un certain rang.

nombres décimaux sans partie entière : on sait, en effet, que l'erreur (absolue) dont est entaché le quotient d'une division dont le diviseur est inexact est d'autant plus faible que ce diviseur est plus grand.

Afin de mieux faire comprendre tout ceci, je vais faire les calculs sur un exemple numérique, dans lequel les coefficients ont d'ailleurs été pris au hasard.

Soit à résoudre les deux équations en x, y

$$3275x - 8243y - 7425 = 0,$$
$$6287x + 2724y - 6232 = 0.$$

Je suppose que les erreurs commises sur les coefficients soient moindres que $\frac{1}{2} = 0,5$. On tire de la première de ces équations

$$y = ax - b, \qquad a = \frac{3275}{8243}, \qquad b = \frac{7425}{8243},$$

puis, en substituant dans la seconde,

$$Ax = B. \qquad x = \frac{B}{A},$$
$$A = 6287 + 2724a, \qquad B = 6232 + 2724b.$$

En appliquant au calcul de a et de b la règle que l'on a rappelée dans la note précédente, on voit de suite que les erreurs dont seront entachés les résultats, par suite de l'inexactitude des termes des deux fractions, seront moindres respectivement que les nombres

$$\frac{1}{8000}(0,5 + 0,4 \times 0,5), \qquad \frac{1}{8000}(0,5 + 0,5),$$

et, par conséquent, moindres que $\frac{1}{8000}$. En calculant les quotients avec une erreur au plus égale à $\frac{1}{20000}$, l'erreur finale, pour chacun des nombres cherchés, sera moindre que

$$\frac{1}{8000} + \frac{1}{20000} < \frac{1}{5000};$$

on trouve ainsi

$$a = 0,3973, \qquad b = 0,9008.$$

Pour calculer A et B, on a à faire deux multiplications. Si on les faisait exactement, les erreurs sur les produits, provenant de l'inexactitude des facteurs, seraient moindres que

$$\frac{3000}{5000} + 0,4 \times 0,5, \qquad \frac{3000}{5000} + 0,5,$$

moindres, par conséquent, que 0,8 et 1,1. Il ne serait guère raisonnable, dans les produits, de chercher une approximation meilleure que $\frac{1}{20} = 0,05$; on pourra, pour les évaluer, se servir de la méthode abrégée. En tenant compte de toutes les erreurs, on voit que A, B peuvent être connus ainsi avec des erreurs moindres respectivement que

$$0,5 + 0,8 + 0,05 = 1,35,$$
$$0,5 + 1,1 + 0,05 = 1,65.$$

On trouve en procédant ainsi $A = 7369,2$, $B = 8685,8$. Si donc on prend $A = 7369$, $B = 8686$, les erreurs seront moindres que $1,35 + 0,2$ et $1,65 + 0,2$; elles seront moindres que 2.

On aura ensuite à calculer $x = \frac{B}{A}$; l'erreur qui résulte de l'inexactitude des valeurs précédentes de B et de A sera moindre que

$$\frac{2}{7000}(1 + 1,2) < 0,00063.$$

En calculant le quotient de la division de 8686 par 7369 avec une erreur moindre que 0,00005 on trouve 1,1787 : si donc on prend pour x la valeur 1,179, l'erreur sera moindre que

$$0,00063 + 0.00005 + 0,0003 < 0.001.$$

Il reste, en adoptant cette valeur pour x, à calculer

$$y = 0,3972x - 0,9008;$$

dans le second membre, les coefficients sont connus avec une erreur moindre que $\frac{1}{5000}$; l'erreur totale, en supposant la multiplication faite exactement, serait donc moindre que

$$\frac{1}{5000} \times 1,2 + 0,001 \times 0,4 + \frac{1}{5000} = 0,0002 \times 2,2 + 0,0004 = 0,00084.$$

En calculant le produit $0,3973 \times 1,179$ de manière que l'erreur, sur ce produit, soit au plus égale à 0,00005, on trouve 0,4684, d'où, pour y, une valeur $-0,4324$ approchée avec une erreur moindre que 0,0009 ; si l'on prend $y = -0,432$ l'erreur sera sûrement moindre que 0,0013.

En substituant à la place de x, y dans les premiers membres des équations proposées les valeurs 1,179 et 0,432 on trouve (approximativement) 2,8 et 3,5 : ces nombres sont petits par rapport aux coefficients et le résultat est satisfaisant.

Les calculs ont été dirigés de manière, d'une part, à éviter l'emploi de trop de chiffres, d'autre part, à tirer des données, je ne dis pas tout le parti possible, au point de vue de l'approximation des résultats, mais au moins un bon parti. Il y a évidemment quelque arbitraire dans la façon dont l'on peut apprécier ces deux avantages. On aurait pu, en poussant plus loin les opérations, avoir une approximation légèrement meilleure ; on aurait pu faire les calculs plus grossièrement en se contentant d'une approximation moindre.

Dans la pratique, les calculs de cette sorte se feront le plus souvent en s'aidant soit d'une table de logarithmes, soit d'une règle à calcul. Si l'on se sert d'une table et qu'on veuille une bonne approximation, il sera naturel de faire les calculs avec un peu plus de précision qu'il n'est nécessaire. L'emploi d'une table à cinq décimales serait, pour l'exemple précédent, assez raisonnable, mais non d'une table à sept décimales. Les calculs faits au moyen d'une table de logarithmes et d'antilogarithmes à quatre décimales, dont on connaît la grande commodité, sont indiqués ci-dessous ; on constate que le résultat est satisfaisant.

$$\log a = 3,5154 - 3,9161 = \bar{1},5993,$$
$$\log b = 3,8707 - 3.9161 = \bar{1},9546;$$
$$\log(2724a) = 3,4352 + \bar{1},5993 = 3,0345,$$
$$\log(2724b) = 3,4352 + \bar{1},9546 = 3,3898;$$
$$2724a = 1083, \qquad A = 1083 + 6287 = 7370,$$
$$2724b = 2454, \qquad B = 2454 + 6232 = 8686;$$
$$\log B = 3,9388, \qquad \log x = \log B - \log A = 0,0713,$$
$$\log A = 3,8675, \qquad x = 1,179;$$
$$\log(ax) = \bar{1},5993 + 0,0713 = \bar{1},6706, \quad ax = 4,4684, \quad y = ax - b = 0,4323.$$

Revenons au calcul comme on l'a fait tout d'abord, de manière à obtenir une limite certaine de l'erreur commise sur les résultats, quand on connaît une limite de l'erreur commise sur les données ; cette dernière limite, dans l'exemple traité, est voisine de 0,001 : il ne faut pas croire qu'on obtienne toujours d'aussi bons résultats quand on résout des équations du premier degré dont les coefficients ne sont connus qu'approximativement. Conservons les mêmes notations que plus haut,

$$x = \frac{B}{A}, \qquad y = ax - b,$$

pour les deux équations auxquelles on est amené en cherchant à résoudre un système de deux équations à deux inconnues : s'il arrivait que le nombre calculé pour A fût du même ordre de petitesse que l'erreur possible, il n'y aurait à peu près rien à tirer du résultat, puisque o se trouverait être une valeur possible de A ; les équations pourraient être impossibles, ou, si B était aussi du même ordre de petitesse que A, indéterminées. Dans tous les cas, la petitesse du nombre trouvé pour A doit éveiller l'attention : elle introduit, d'ordinaire, une incertitude notable dans les résultats.

Il est à peine utile de dire que, si l'on a traité un exemple relatif à deux équations, la méthode s'applique à la résolution numérique d'un système de n équations à n inconnues ; en procédant d'une façon analogue à celle que j'ai indiquée, on sait, à chaque pas, sur quelle approximation on peut compter.

EXERCICES.

129. Résoudre les systèmes

I. $$\left\{\begin{aligned} &x + y + 2(z + u) = 1,\\ &x + y = z + u,\\ &y = 2x,\\ &y + z + 1. \end{aligned}\right.$$

II. $$\left\{\begin{aligned} &a\,(x + u) + b\,(y + z) = c,\\ &a'(v + u) + b'(z + x) = c',\\ &a''(z + u) + b''(x + y) = c'',\\ &\quad x + y + z + u = d. \end{aligned}\right.$$

130. Résoudre le système

$$\begin{aligned} x + y \quad + z \quad &= a, \\ x + \alpha\, y + \alpha^2 z &= b, \\ x + \alpha^2 y + \alpha\, z &= c, \end{aligned}$$

où a, b, c désignent des nombres réels ou imaginaires donnés et où l'on suppose $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

131. Résoudre le système

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \\ x^3 \;\; + y^2 \;\; + z^2 &= R^2. \end{aligned}$$

132. Le système

$$\begin{aligned} qz - ry &= a, \\ rx - pz &= b, \\ py - qx &= c \end{aligned}$$

admet-il des solutions ?

133. Résoudre le système

$$\begin{aligned} qz - ry &= a + t, \\ rx - pz &= b + t, \\ py - qx &= c + t, \\ ax + by + cz + d &= 0. \end{aligned}$$

134. Résoudre le système

$$\begin{aligned} x + ay + a^2 z + a^3 &= 0, \\ x + by + b^2 z + b^3 &= 0, \\ x + cy + c^2 x + c^3 &= 0. \end{aligned}$$

135. Si l'on regarde x, y, z comme une solution de ce dernier système, le polynome f en t, $t^3 + t^2 z + ty + x$ admet les racines a, b, c.

De l'identité

$$t^3 + t^2 z + ty + x = (t - a)(t - b)(t - c),$$

on tire les valeurs de x, y, z en égalant dans les deux membres les coefficients des termes en t^2, en t et le terme constant.

136. Résoudre le système

$$\frac{x}{\lambda+a}+\frac{y}{\lambda+b}+\frac{z}{\lambda+c}-1=0,$$
$$\frac{x}{\mu+a}+\frac{y}{\mu+b}+\frac{z}{\mu+c}-1=0,$$
$$\frac{x}{\nu+a}+\frac{y}{\nu+b}+\frac{z}{\nu+c}-1=0.$$

En regardant x, y, z comme une solution de ce système, on reconnaît que la fraction rationnelle en t

$$\frac{x}{t+a}+\frac{y}{t+b}+\frac{z}{t+c}-1$$

doit s'annuler pour $t=\lambda$, $t=\mu$, $t=\nu$: on en conclut l'identité

$$t-\frac{x}{t+a}-\frac{y}{t+b}-\frac{z}{t+c}=\frac{(t-\lambda)(t-\mu)(t-\nu)}{(t+a)(t+b)(t+c)};$$

en décomposant le second membre en fractions simples et en identifiant avec le premier membre, on trouve les expressions de x, y, z.

137. Dans les neuf égalités (3) du n° 134, on regarde les neuf nombres $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$ comme des données, et les neuf quantités $a.b, c$, a', b', c', a'', b'', c'' comme des inconnues. Résoudre ces équations; le problème n'admet, en général, que deux solutions.

138. Résoudre par rapport à x, y, z les trois équations

$$(1)\qquad \frac{1}{2}\varphi'_x=X,\qquad \frac{1}{2}\varphi'_y=Y,\qquad \frac{1}{2}\varphi'_z=Z,$$

où φ'_x, φ'_y, φ'_z désignent les dérivées partielles par rapport à x, y, z du polynome homogène et du second degré

$$\varphi(x, v, z)=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
A &= a'a''-b^2, & B &= b'b''-ab,\\
A' &= a''a-B'^2, & B' &= b''b-a'b',\\
A'' &= aa'-b''^2, & B'' &= bb'-a''b'',
\end{aligned}$$
$$\Delta = aa'a''+2bb'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2,$$

et si l'on désigne par $\Phi(X, Y, Z)$ le polynome en X, Y, Z

$$AX^2+A'Y^2+A''Z^2+2BYZ+2B'ZX+2B''XY,$$

on tire des équations (1), dans le cas où Δ n'est pas nul,

$$\Delta x = \frac{1}{2}\Phi'_X, \qquad \Delta y = \frac{1}{2}\Phi'_Y, \qquad \Delta z = \frac{1}{2}\Phi'_Z.$$

Sous la même supposition (Δ différent de o), montrer que, si l'on regarde X, Y, Z comme représentant les premiers membres des équations (1), on a identiquement

$$\Delta\varphi(x, y, z) = \Phi(X, Y, Z).$$

139. En conservant les notations de l'exercice précédent, on a identiquement en a, a', a'', b, b', b''

$$\Delta a = A'A'' - B^2, \qquad \Delta b = B'B'' - AB,$$
$$\Delta a' = A''A - B'^2, \qquad \Delta b' = B''B - A'B',$$
$$\Delta a'' = AA' - B''^2, \qquad \Delta b'' = BB' - A''B'',$$
$$\Delta^2 = AA'A'' + 2BB'B'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2,$$
$$\Delta = Aa + B''b' + B'b' = B''b'' + A'a' + Bb = B'b' + Bb + A''a'',$$
$$0 = Ab'' + B''a + B'b = Ab' + B''b + B'a'',$$
$$0 = B''a + A'b'' + Bb' = B''b' + A'b + Ba'',$$
$$0 = B'a + Bb'' + A''b' = B'b'' + Ba' + A''b.$$

Toutes ces identités sont contenues, comme cas particulier, dans celles qu'on a démontrées aux n^{os} 134 et 135.

Montrer que si a, a', a'', b, b', b'' sont des nombres réels et si Δ est nul, les quantités A, A', A'' sont de même signe et que les égalités

$$\Delta = 0, \qquad A + A' + A'' = 0$$

entraînent

$$A = 0, \qquad A' = 0, \qquad A'' = 0, \qquad B = 0, \qquad B' = 0, \qquad B'' = 0.$$

Résoudre par rapport à a, a', a'', b, b', b'' les équations

$$A = a'a'' - b^2, \qquad B = b'b'' - ab,$$
$$A' = a''a - b'^2, \qquad B' = b''b - a'b',$$
$$A'' = aa' - b''^2, \qquad B'' = bb' - a''b'',$$

où l'on regarde A, A', A'', B, B', B'' comme des données.

140. En désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres donnés dont les n premiers sont différents de o, on propose de trouver la solution la

plus générale des n équations à $n+1$ inconnues $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$x_r = a_r x_{r-1} + b_r$$

(où r prend les valeurs $1, 2, \ldots n$).

Après avoir observé que cette solution, si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ étaient nuls, serait donnée par la formule

$$x_r = a_1 a_2 \ldots a_r x_0, \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

où x_0 reste arbitraire, on changera d'inconnue en posant

$$x_r = a_1 a_2, \ldots, a_r y_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots n).$$

Les équations proposées prennent alors la forme

$$y_r = y_{r-1} + \frac{b_r}{a_1 a_2 \ldots a_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

d'où l'on déduit sans peine

$$y_r = y_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{b_r}{a_1 a_2 \ldots a_r};$$

la solution la plus générale des équations proposées est donnée par la formule

$$x_r = a_1 a_2 \ldots a_r \left(x_0 + \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_1 a_2} + \ldots + \frac{b_r}{a_1 a_2 \ldots a_r} \right).$$

141. Trouver toutes les valeurs de x, y, z, s qui vérifient les trois équations

$$\begin{aligned} ax + cy + bz &= sz, \\ cx + by + az &= sy, \\ bx + ay + cz &= sz, \end{aligned}$$

où l'on suppose qu'aucun des coefficients a, b, c n'est nul. En ajoutant ces trois équations on trouve

$$(a + b + c - s)(x + y + z) = 0;$$

il faut donc que l'on ait soit $s = a + b + c$, soit $x + y + z = 0$.

Dans le premier cas, si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ n'est pas nul, on satisfait aux équations en prenant $x = y = z$; si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ est nul, on peut prendre arbitrairement deux des inconnues x, y, z.

Si l'on suppose s différent de $a + b + c$, les trois équations proposées équivalent aux équations

$$z = -x - y,$$
$$(a - b - s)x + (c - b)y = 0,$$
$$(c - a)x + (b - a - s)y = 0.$$

On peut satisfaire à ces équations en prenant s quelconque et x, y, z nuls, on en supposant

$$(a - b - s)(b - a - s) - (c - a)(c - b) = 0.$$

....

CHAPITRE X.

DÉTERMINANTS; ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

§ 1. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES DÉTERMINANTS.

139. Imaginons un carré, analogue à une table de multiplication, décomposé en n^2 petits carrés ou *cases*. Ces n^2 cases forment n files ou colonnes verticales : imaginons que chaque ligne horizontale soit affectée d'un numéro, et que ces numéros aillent en croissant quand on descend vers le bas du carré : les numéros seront, le plus souvent, les nombres $1, 2, \ldots, n$; dans tous les cas, la ligne du haut, celle qui est immédiatement en dessous, ..., la ligne du bas s'appelleront respectivement la première ligne horizontale, la seconde ligne, ..., la $n^{\text{ième}}$ ligne. Imaginons de même que chaque colonne verticale soit affectée d'un numéro et que ces numéros aillent en croissant quand on va de gauche à droite : ces numéros seront, le plus souvent, les nombres $1, 2, \ldots, n$; dans tous les cas la colonne de gauche, celle qui la suit, ..., la colonne de droite s'appelleront respectivement la première, la seconde, ..., la $n^{\text{ième}}$ colonne verticale.

Chaque case est alors déterminée par deux numéros : le premier sera le numéro de la file horizontale, le second sera le numéro de la file verticale, qui contiennent cette case. Je désignerai souvent une case par ces deux numéros mis entre parenthèses; si, par exemple, on se sert des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$ pour numéroter les lignes et les colonnes, la case $(2, 3)$ appartiendra à la seconde ligne et à la troisième colonne; les cases $(1, 1), (2, 2), \ldots, (n, n)$ seraient traversées toutes par la diagonale qui va du sommet en haut et à gauche au sommet en bas et à droite; on dit souvent qu'elles appartiennent à la *diagonale principale* du carré.

Imaginons maintenant que, dans chaque case, soit placé un nombre : on a ainsi un tableau formé de n^2 nombres, distribués dans le grand carré. On va apprendre à déduire de ces n^2 nombres un autre nombre qui dépendra de leurs valeurs et de la place qu'il occupera : ce sera le *déterminant* des n^2 nombres.

Ces n^2 nombres, ou quelques-uns d'entre eux, pourront être représentés par des lettres : la loi de formation du déterminant, que l'on va décrire, est indépendante de valeurs numériques attribuées à ces lettres ; si l'on regarde les n^2 éléments [1] du déterminant comme des variables distinctes, l'expression qu'on va apprendre à former sera un polynome du premier degré par rapport à chacune des variables, un polynome homogène et du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport à l'ensemble des n^2 variables.

Un déterminant formé au moyen de n^2 éléments rangés, comme on vient de l'expliquer, dans n lignes et n colonnes, est dit du $n^{\text{ième}}$ ordre.

Il est la somme de *termes* formés comme on va le dire.

Chaque terme est le produit, tel quel ou changé de signe, de n éléments pris respectivement dans n cases différentes du carré, deux de ces cases ne devant jamais appartenir ni à la même ligne horizontale ni à la même colonne verticale. Pour obtenir un système de cases qui satisfassent aux conditions que je viens de dire et qui, ainsi, renferment les facteurs d'un terme du déterminant, on peut procéder comme il suit : On choisit tout d'abord arbitrairement une première case; les autres cases ne devront plus jamais être prises ni dans la ligne ni dans la colonne qui contenaient cette première case ; sauf cette restriction, le choix de la seconde case est arbitraire ; les cases suivantes ne devront plus être prises ni dans la ligne ni dans la colonne qui contenaient cette seconde case ; sauf les restrictions imposées ainsi par le choix des deux premières cases, le choix de la troisième est arbitraire, etc. Il est clair d'après cela que parmi les n cases d'où sortent les éléments qui sont les facteurs d'un terme, il y en a une, et une seule, qui appartient à la première ligne, une, et une seule, qui appartient à la seconde ligne, . . . ; il y en a de même une, et une seule, qui appartient à telle colonne verticale que l'on veut.

---

[1] J'emploie à dessein ce mot vague, qui peut désigner aussi bien un nombre, une lettre, une variable, une fonction.

Autrement dit, si les cases où sont pris les n facteurs sont respectivement déterminées par les n couples de numéros

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n),$$

la première lettre de chaque couple α étant réservée aux numéros des lignes, et la seconde aux numéros des colonnes, les numéros α_1, α_2, .. , α_n doivent être tous distincts et coïncider, abstraction faite de leur ordre, avec l'ensemble des numéros des lignes horizontales, en sorte que la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ constitue un *arrangement* (n à n) de ces numéros; de même les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ne sont autre chose, dans leur ensemble, que les numéros des colonnes verticales; la suite $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ est un arrangement (n à n) de ces numéros.

Ceci posé, le produit considéré, tel quel, est un terme du déterminant si les deux arrangements $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ appartiennent à la même classe (n° 125); si ces deux arrangements appartiennent à des classes différentes, c'est ce produit multiplié par -1 qui constitue un terme du déterminant. Il revient au même de dire que, dans tous les cas, le produit considéré doit être multiplié par $(-1)^{a+b}$, en désignant par a le nombre des inversions contenues dans l'arrangement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et par b le nombre des inversions contenues dans l'arrangement $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$. J'appellerai ce nombre $(-1)^{a+b}$ le *coefficient* du terme considéré.

Le produit des éléments contenus dans les cases

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n)$$

ne dépend évidemment pas de l'ordre dans lequel se succèdent ces cases ou les facteurs du produit; il en est de même du coefficient $(-1)^{a+b}$ dont ce produit doit être affecté.

Si, en effet, on transpose deux facteurs, on transpose par là même, dans l'arrangement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, les deux numéros des lignes horizontales qui contiennent ces deux facteurs, et dans l'arrangement β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_n$ les deux numéros des colonnes verticales qui contiennent ces deux facteurs : chaque arrangement change de classe; les deux arrangements, s'ils étaient de même classe, restent de même classe; ils restent de classes différentes s'ils étaient de classes différentes. Or, on peut, par de pareilles transpositions, amener tel facteur qu'on veut à la place qu'on veut.

On voit aussi qu'un terme du déterminant n'est nullement changé si, en laissant chaque élément à sa place, on modifie les numéros des lignes ou des colonnes, pourvu qu'on observe la règle relative à la façon dont ces numéros doivent croître : une telle modification, en effet, ne change point les nombres d'inversions contenues dans l'arrangement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ou $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Le déterminant est la somme de tous les termes distincts que l'on peut former d'après la règle précédente.

Sont regardés comme distincts deux termes tels que tous les facteurs du premier ne proviennent pas des mêmes cases que tous les facteurs du second. Si tous les facteurs d'un terme proviennent des mêmes cases que les facteurs d'un autre terme, les deux termes sont regardés comme identiques, lors même que l'ordre des facteurs diffère : l'un d'eux seulement doit figurer dans le déterminant.

Le carré, avec ces n^2 cases dont chacune contient un élément du déterminant, sert à représenter celui-ci. Toutefois, on se dispense de figurer les lignes horizontales et verticales qui délimiteraient les n^2 cases : on ne conserve que les deux barres verticales qui limitent le carré à droite et à gauche. La place des cases, dont rien n'empêche de continuer à parler comme si elles existaient réellement, est suffisamment déterminée par la place qu'occupent les éléments. Par exemple, les symboles

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

sont des déterminants du second et du troisième ordre. Pour en obtenir le développement, d'après la règle précédente, je supposerai que les lignes et les colonnes soient numérotées au moyen des nombres 1, 2 pour le premier, au moyen des nombres 1, 2, 3 pour le second.

Considérons d'abord le premier : Un terme du développement doit contenir deux facteurs dont l'un appartient à la première ligne, l'autre à la seconde, dont l'un appartient à la première colonne, l'autre à la seconde. L'élément 3 placé dans la case (1, 1) ne peut être associé, pour former un terme du déterminant, qu'à l'élément -2 placé dans la case (2, 2); le coefficient de ce terme est 1, puisque les arrangements formés respectivement par les premiers numéros des deux couples (1, 1), (2, 2) et par les deux seconds numéros de ces mêmes couples, ne comportent pas d'inversions; l'élément 4 placé dans la case (2, 1) ne peut être associé qu'avec l'élément 7 placé dans la case (1, 2); le coefficient du produit est -1, puisque les deux arrangements 2, 1 et 1, 2 comportent en tout une inversion. La valeur du déterminant est $3 \times (-2) - 7 \times 4 = -34$. La valeur d'un déterminant du second ordre est la différence entre le produit des éléments de la diagonale principale et le produit des deux autres éléments.

Considérons de même le second déterminant : l'élément a de la case (1, 1) ne peut être associé qu'avec des éléments appartenant l'un à la seconde ligne, l'autre à la troisième ligne, l'un à la seconde colonne, l'autre à la troisième; c'est-à-dire ou avec les éléments b', c'' appartenant aux cases (2, 2), (3, 3), ou avec les éléments b'', c' appartenant aux cases (3, 2), (2, 3); le produit $ab'c''$ formé avec les éléments appartenant aux cases (1, 1), (2, 2), (3, 3) doit être affecté du coefficient 1; le produit $ab''c'$ formé avec les éléments appartenant aux cases (1, 1), (3, 2), (2, 3) doit être affecté du coefficient -1, puisque les arrangements 1, 3, 2, et 1, 2, 3 comportent en tout une inversion : les autres termes du déterminant doivent contenir soit l'élément a', soit l'élément a''. L'élément a' ne peut être associé qu'avec les éléments b et c'' ou les éléments b'' et c; le produit $a'bc''$ formé d'éléments appartenant aux cases (2, 1), (1, 2), (3, 3) doit être affecté du coefficient -1; le produit $a'b''c$ doit être affecté du coefficient $+1$; enfin l'élément a'' ne peut être associé qu'avec les éléments b et c', ou b' et c; les produits $a''bc'$ et $a''b'c$ doivent être affectés des coefficients 1 et -1; le déterminant est

$$ab'c'' - ab''c' - a'bc'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c;$$

c'est l'expression déjà étudiée au n° 135.

140. Revenons au cas général, à un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre; je suppose que les lignes horizontales et les colonnes verticales soient numérotées au moyen des nombres $1, 2, \ldots, n$. Considérons un terme quelconque du déterminant. Puisqu'on peut ranger comme on veut les facteurs de ce terme, on peut s'arranger pour que les premiers numéros, tous distincts, des cases qui contiennent ces facteurs se succèdent dans un ordre déterminé, par exemple, dans l'ordre $1, 2, \ldots,$

n; les couples de numéros dont sont affectées les cases, rangées comme le sont les facteurs qu'elles contiennent, seront alors $(1, \beta_1)$, $(2, \beta_2)$, ..., (n, β_n) en désignant par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les numéros 1, 2, ..., n rangés dans un certain ordre, ou, si l'on veut, un arrangement (n à n) de ces numéros. Suivant que cet arrangement contiendra un nombre pair ou impair d'inversions, le produit des facteurs contenus dans les cases devra être affecté du coefficient 1 ou du coefficient -1. Supposons que dans chaque terme du déterminant, les facteurs soient ainsi rangés.

A chaque arrangement $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (n à n) des n numéros 1, 2, ..., n correspondra un système de cases $(1, \beta_1)$, $(2, \beta_2)$, ..., (n, β_n), un terme du déterminant; à deux arrangements distincts correspondront deux termes distincts; il y a autant de termes que d'arrangements, c'est-à-dire $1 . 2 \ldots n$. Comme il y a autant d'arrangements de première classe que d'arrangements de seconde classe, il y a autant de termes affectés du coefficient 1 que de termes affectés du coefficient -1.

Le terme dont les facteurs sont contenus dans les cases $(1, 1)$, $(2, 2)$, ..., (n, n), que l'on appelle souvent *terme principal* du déterminant, a pour coefficient 1.

Si l'on considère deux systèmes de cases

$$\begin{array}{llll} (1, \beta_1), & (2, \beta_2), & \ldots, & (n, \beta_n), \\ (1, \beta'_1), & (2, \beta'_2), & \ldots, & (n, \beta'_n), \end{array}$$

rangées comme on l'a expliqué, les termes correspondants du déterminant auront le même coefficient, ou des coefficients symétriques, suivant que les deux arrangements (n à n) $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n$ seront, ou non, de mêmes classes ou de classes différentes, ou, si l'on veut (nos **124**, **125**), suivant que l'on peut passer de l'un à l'autre par un nombre pair, ou un nombre impair de transpositions. Cette remarque est souvent commode pour reconnaître le coefficient d'un terme en le comparant à un autre terme, de coefficient connu, en particulier au terme principal.

Au lieu de ranger les facteurs d'un terme de manière que les premiers numéros des cases qui contiennent ces facteurs forment la suite 1, 2, ..., n, on peut les ranger de manière que ce soient les seconds numéros qui forment cette même suite; les couples de numéros, dont sont affectées les cases, rangées comme le sont les facteurs qu'elles contiennent, sont alors $(\alpha_1, 1)$, $(\alpha_2, 2)$, ..., (α_n, n), en désignant par α_1, α_2, ..., α_n un arrangement (n à n) des nombres 1, 2, ..., n. On pourrait répéter, sur cette seconde façon de ranger les facteurs de chaque terme de déterminant, ce que l'on a dit sur le premier mode.

141. Étant donné un déterminant, on peut en déduire un second déterminant en remplaçant l'élément situé dans une case quelconque par l'élément situé dans la case symétrique par rapport à la diagonale principale, ou, comme on dit d'une façon un peu brève, en échangeant les lignes et les colonnes : on entend par là qu'on remplace les éléments de la $p^{\text{ième}}$ ligne par les éléments de la $p^{\text{ième}}$ colonne et réciproquement. Bien entendu, après le changement, les éléments d'une ligne se trouvent rangés dans l'ordre qu'ils occupaient dans la colonne, etc.

Il est à peine utile de faire remarquer que, dans les deux déterminants, les éléments de la diagonale sont les mêmes.

Les deux déterminants, une fois développés, sont identiques terme à terme. Je suppose en effet que, dans les deux déterminants, les lignes et les colonnes soient numérotées au moyen des nombres 1, 2, ..., n. L'élément qui, dans le premier déterminant, appartenait à la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et à la $\beta^{\text{ième}}$ colonne, appartiendra, dans le second, à la $\beta^{\text{ième}}$ ligne et à la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne; si l'on considère un terme du premier déterminant dont les facteurs figurent dans les cases (α_1, β_1), (α_2, β_2), ..., (α_n, β_n) du premier déterminant, ces mêmes facteurs figureront dans les cases (β_1, α_1), (β_2, α_2), .. , (β_n, α_n) du second déterminant; ils fourniront, dans les deux développements, deux termes identiques, affectés du même coefficient $(-1)^{a+b} = (-1)^{b+a}$; à chaque terme d'un déterminant correspond un terme identique de l'autre déterminant. Les deux développements sont identiques terme à terme.

On désigne sous le nom de déterminant *symétrique* un déterminant dans lequel les éléments placés symétriquement par rapport à la diagonale principale [les éléments placés dans les cases (α, β), (β, α)] sont égaux : tel est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Pour un pareil déterminant, le théorème précédent n'apprend évidemment rien. L'aspect de ce déterminant n'est pas changé quand on y échange les lignes et les colonnes.

On désigne sous le nom de déterminant *symétrique gauche,* un déterminant dans lequel les éléments de la diagonale principale sont nuls et dans lequel, de deux éléments placés symétriquement par rapport à la diagonale, l'un se déduit de l'autre en le multipliant par -1; tel est le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{vmatrix}.$$

Le théorème précédent montre qu'un déterminant symétrique gauche ne change pas quand on en multiplie tous les éléments par -1. Cela revient en effet, pour un tel déterminant, à échanger les lignes et les colonnes.

142. Lorsque, dans un déterminant quelconque, on remplace les éléments qui figurent dans une ligne par les éléments correspondants [1] d'une autre ligne, et, réciproquement, les éléments de cette autre ligne par ceux qui occupaient la place qu'on vient de leur attribuer, on forme un nouveau déterminant qui est égal au premier changé de signe.

Je vais montrer, en effet, que chaque terme de l'un des déterminants est identique à un terme de l'autre, changé de signe.

Supposons que les lignes et les colonnes soient numérotées au moyen des nombres $1, 2, \ldots, n$ et qu'on échange entre elles, au sens qu'on vient de dire, la $\alpha_p^{\text{ième}}$ ligne et la $\alpha_q^{\text{ième}}$ ligne.

Considérons un terme quelconque du déterminant proposé, dont les facteurs appartiennent aux cases

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_p, \beta_p), \quad \ldots, \quad (\alpha_q, \beta_q), \quad \ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n),$$

---

[1] En disant de deux éléments appartenant à deux lignes distinctes qu'ils sont *correspondants,* j'entends qu'ils appartiennent à la même colonne; de même, deux éléments correspondants de deux colonnes différentes appartiennent à une même ligne.

ces mêmes éléments, dans le second déterminant, figureront dans les cases

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_q, \beta_p), \quad \ldots, \quad (\alpha_p, \beta_q), \quad \ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n);$$

ils seront encore les facteurs d'un terme du second déterminant, puisque les numéros α_1, α_2, ..., α_n sont distincts, ainsi que les numéros β_1, β_2, ..., β_n; mais le coefficient de ce terme, dans le second déterminant, ne sera pas le même que dans le premier; en effet, l'arrangement (n à n) formé par les seconds numéros est le même, soit pour le premier déterminant, soit pour le second; mais les deux arrangements $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, \ldots, \alpha_p, \ldots, \alpha_n$ n'appartiennent pas à la même classe (n° **124**).

On énonce brièvement ce théorème en disant qu'on multiplie un déterminant par -1 quand on échange entre elles deux lignes ou deux colonnes.

Il en résulte qu'un déterminant est nul lorsque les éléments qui figurent dans une ligne sont respectivement égaux aux éléments correspondants d'une autre ligne, ou, comme l'on dit, lorsqu'il a deux lignes identiques.

Si l'on considère, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

la valeur numérique de ce déterminant doit, quelles que soient les valeurs numériques attribuées aux lettres a, b, c, a'', b'', c'', être multipliée par -1 quand on échange entre elles deux lignes quelconques; mais, si l'on échange entre elles les deux premières lignes, qui sont identiques, cette valeur numérique ne peut évidemment être changée; or, un nombre égal à son symétrique est nul; le déterminant proposé est donc nul quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres a, b, c, a'', b'', c'' : il est identiquement nul; tous les termes de son développement doivent se détruire.

Au reste, on voit très bien comment les termes se détruisent. D'une part, le déterminant proposé et le déterminant qu'on en déduit en échangeant les deux premières lignes conduisent évidemment au même développement; d'autre part, en vertu de ce qu'on vient de dire, chaque terme du second développement se déduit d'un terme du premier en changeant de signe son coefficient, c'est-à-dire qu'à chaque terme du déterminant proposé correspond un terme qui le détruit.

Le raisonnement est évidemment général; la vérification, pour l'exemple cité, est immédiate sur les formules du n° 135.

143. Considérons un déterminant Δ, d'ordre n, dont les lignes et les colonnes soient numérotées au moyen des nombres $1, 2, \ldots, n$; et regardons tous les éléments comme distincts; un élément de ce déterminant entre comme facteur dans plusieurs termes; il n'y entre d'ailleurs qu'une fois, en sorte que, si l'on regarde cet élément comme une variable et qu'on le désigne pour un instant par x, le déterminant sera du premier degré en x, et pourra se mettre, en l'ordonnant par rapport à x, sous la forme $Ax + B$.

On appelle *mineur* d'un déterminant, relatif à un élément de ce déterminant, le coefficient de cet élément dans le développement du déterminant, ordonné par rapport à ce même élément.

Dans la notation précédente, A est le mineur relatif à l'élément x. Je vais donner une règle pour le calculer.

Considérons les termes du développement qui contiennent en facteur l'élément dont on cherche le mineur, et supposons qu'on ait, dans tous ces termes, placé en tête l'élément considéré. Les facteurs qui entrent dans un de ces termes appartiendront aux cases

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n),$$

et, en vertu de l'hypothèse qu'on vient de faire, la case (α_1, β_1) sera la même pour tous les termes considérés.

Les numéros $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ sont, dans leur ensemble, les nombres $1, 2, \ldots, n$, d'où l'on a retiré α_1; les numéros $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$ sont, de même, les nombres $1, 2, \ldots, n$, d'où l'on a retiré β_1. Soient, comme plus haut, a et b les nombres respectifs d'inversions contenues dans les arrangements $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$; soient a' et b' les nombres respectifs d'inversions contenues dans les arrangements $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$; on a $a = a' + \alpha_1 - 1$, $b = b' + \beta_1 - 1$ (n° **125**). Le coefficient du terme considéré est

$$(-1)^{a+b} = (-1)^{\alpha_1+\beta_1} \times (-1)^{a'+b'}.$$

Le produit par $(-1)^{a'+b'}$ des éléments contenus dans les cases

$$(\alpha_2, \beta_2), \quad (\alpha_3, \beta_3), \quad \ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n)$$

est un terme du déterminant Δ', d'ordre $n-1$, qui se déduit du déterminant Δ en supprimant la ligne de rang α_1 et la colonne de rang β_1. Il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à la définition générale en supposant que, dans le déterminant du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre, les lignes et les colonnes conservent chacune le même numéro d'ordre qu'elles avaient dans le déterminant primitif. Cette même définition montre que, en prenant dans le développement de Δ tous les termes qui contiennent en facteur l'élément de la case (α_1, β_1), on obtient, de la façon qu'on vient de dire, tous les termes de Δ'. Le coefficient de l'élément de la case (α_1, β_1), dans le développement de Δ, est donc

$$(-1)^{\alpha_1+\beta_1}\Delta'.$$

Ainsi, le mineur d'un déterminant relatif à un élément quelconque s'obtient en multipliant par une puissance de -1 dont l'exposant est la somme des numéros d'ordre respectifs de la ligne et de la colonne qui contiennent cet élément le déterminant qui se déduit du proposé par la suppression de cette ligne et de cette colonne. Je rappelle que, dans le déterminant proposé, les lignes et les colonnes sont numérotées $1, 2, \ldots, n$.

On reconnaît de suite, en se reportant à la façon, expliquée plus haut, de développer un déterminant du second ordre

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b,$$

que cette règle s'applique encore à un tel déterminant, si l'on convient de regarder un déterminant du *premier ordre*, qui se réduit à un seul élément, comme égal à cet élément.

144. D'après la définition d'un déterminant, il y a dans chaque terme un élément qui appartient, par exemple, à la $p^{\text{ième}}$ ligne; si l'on regarde les éléments de la $p^{\text{ième}}$ ligne comme des variables, le déterminant proposé sera une fonction linéaire des éléments de cette $p^{\text{ième}}$ ligne, et l'on vient d'apprendre à déterminer les coefficients de cette fonction.

Considérons, par exemple, le déterminant du troisième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

Développons-le suivant les éléments de la première ligne, de la seconde ligne, de la troisième ligne, on trouvera

$$\Delta = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c = \mathrm{A}'a' + \mathrm{B}'b' + \mathrm{C}'c' = \mathrm{A}''a'' + \mathrm{B}''b'' + c''c'',$$

en posant, d'après la règle précédente,

$$\mathrm{A} = \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \mathrm{B} = -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{A}' = -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \mathrm{B}' = \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}' = -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{A}'' = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, \quad \mathrm{B}'' = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \quad \mathrm{C}'' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

On retrouve, en se reportant à la règle pour développer un déterminant du second ordre, les mêmes notations qu'au n° 135 et quelques-unes des identités établies dans ce même numéro.

Si l'on considère l'une des expressions de Δ, $\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c$ par exemple, on sait que les éléments a, b, c qu'on y a mis en évidence ne figurent pas dans les mineurs A, B, C, en sorte que, si, dans cette expression, on conserve la même signification aux lettres A, B, C et qu'on remplace a, b, c par α, β, γ, le résultat $\mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\beta + \mathrm{C}\gamma$ ne sera autre chose que le déterminant proposé, où l'on a remplacé a, b, c par α, β, γ, c'est-à-dire le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

en particulier l'expression $\mathrm{A}a' + \mathrm{B}b' + \mathrm{C}c'$ n'est autre chose que le déterminant à deux lignes identiques

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire o. On aura donc

$$\begin{gathered} A a' + B b' + C c' = 0, \\ A a'' + B b'' + C c'' = 0, \end{gathered}$$

et les identités analogues (n° 135).

Ce que l'on a dit des lignes vaut pour les colonnes et l'on aura de même

$$\begin{gathered} \Delta = A a + A' a' + A'' a'' = B b + B' b' + B'' b'' = C c + C' c' + C'' c'', \\ A b + A' b' + A'' b'' = 0, \end{gathered}$$

etc.

Le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

serait de même égal à $A a + B b + C c + D d$, en posant

$$A = \begin{vmatrix} b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \\ b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}, \qquad B = -\begin{vmatrix} a' & c' & d' \\ a'' & c'' & d'' \\ a''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} a' & b' & d' \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \end{vmatrix}, \qquad D = -\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix};$$

puisqu'on sait développer chacun de ces déterminants du troisième ordre, on n'aura aucune peine à obtenir le développement complet du déterminant du quatrième ordre. On pourra tout aussi bien le mettre sous l'une ou l'autre des formes

$$\begin{gathered} A' a' + B' b' + C' c' + D' d', \\ A'' a'' + B'' b'' + C'' c'' + D'' d'', \\ A''' a''' + B''' b''' + C''' c''' + D''' d'''. \end{gathered}$$

Si l'on veut par exemple l'expression de C', c'est-à-dire du mineur relatif à l'élément c' qui figure dans la seconde ligne et la troisième colonne; on voit, puisque $(-1)^{2+3}$ est égal à -1, que ce mineur est

$$C' = -\begin{vmatrix} a & b & d \\ a'' & b'' & d'' \\ a''' & b''' & d''' \end{vmatrix},$$

etc.

Δ peut, de même, en le développant suivant les éléments d'une colonne, être mis sous l'une ou l'autre des formes

$$\begin{array}{l} A a + A' a' + A'' a'' + A''' a''', \\ B b + B' b' + B'' b'' + B''' b''', \\ C c + C' c' + C'' c'' + C''' c''', \\ D d + D' d' + D'' d'' + D''' d'''. \end{array}$$

Enfin il y a douze identités, analogues à celles qu'on a obtenues pour le déterminant du troisième ordre et s'établissant de même, telles que

$$\begin{array}{c} A a' + B b' + C c' + D d' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

et douze autres du type

$$A b + A' b' + A'' b'' + A''' b''' = 0.$$

En d'autres termes, la somme des éléments d'une colonne, respectivement multipliés par les mineurs relatifs aux éléments correspondants d'une autre colonne est nulle, ainsi que la somme des éléments d'une ligne, respectivement multipliés par les mineurs relatifs aux éléments correspondants d'une autre ligne. On rappelle que le mineur relatif à un élément de Δ ne contient aucun élément représenté par la même lettre, ou accentué de la même façon que cet élément.

Lorsque tous les éléments d'une ligne, ou d'une colonne, sont nuls, il est clair, d'après ce qu'on vient de dire, que le déterminant est nul. Si tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne, sauf un, sont nuls, le déterminant se ramène immédiatement à un déterminant dont l'ordre est moindre d'une unité, comme on le voit de suite en le développant suivant les éléments de la ligne ou de la colonne considérée. Si, par exemple, on développe le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

suivant les éléments de la dernière ligne, on voit que le mineur relatif à l'élément 2 de cette ligne est le produit de $(-1)^{3+4} = -1$ par le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant admet encore une ligne dont les éléments sont nuls, sauf l'élément 4 auquel correspond le mineur

$$-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2;$$

la valeur du déterminant du quatrième ordre est $2 \times 4 \times 2 = 16$.

145. Jusqu'à présent, lorsqu'un déterminant n'était pas écrit tout au long, je ne me suis servi, pour en désigner un élément, que du couple de numéros qui désigne la case où figure cet élément. Une notation fréquemment employée, et d'ailleurs très voisine de celle-là, consiste à désigner chaque élément par une même lettre affectée de deux indices, dont le premier est le premier numéro de la case correspondante, dont le second est le second numéro. Ainsi, en supposant que les cases et les colonnes soient numérotées au moyen des nombres $1, 2, \ldots, n$, l'élément appartenant à la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et à la $\beta^{\text{ième}}$ colonne pourra se représenter par $a_{\alpha,\beta}$ ou a_β^α; dans la seconde notation, α n'est pas un exposant, mais un *indice* supérieur. C'est de la première notation que je me servirai le plus souvent. Avec cette notation, un déterminant du second ordre, ou du troisième, s'écriront

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}.$$

On supprime souvent les virgules entre les deux indices, quand il n'y a pas de confusion à craindre.

Il importe toutefois de remarquer que l'on peut avoir d'autres raisons pour introduire ces symboles formés d'une lettre affectée de deux indices, afin de représenter certains nombres, ou certaines variables, et qu'on peut avoir à faire figurer ces symboles dans un déterminant écrit à la façon ordinaire; on peut se trouver alors en contradiction avec la règle précédente : *c'est toujours à la disposition des éléments dans le carré qui représente le déterminant et à la définition du n° 139 qu'il faut se reporter,* et non à la règle que je viens de donner. Ainsi le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,1} \end{vmatrix}$$

est, quand on le développe, égal à $a_{1,2}a_{2,1} - a_{1,1}a_{2,2}$ (n° 139). L'égalité

$$\begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,1} \\ a_{2,2} & a_{2,1} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

exprime, pour un déterminant du second ordre, le théorème d'après lequel un déterminant change de signe quand on échange entre elles deux colonnes.

Cette observation s'applique en particulier quand, un déterminant étant écrit d'après la règle donnée au commencement de ce numéro, on le développe suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, quand on écrit par exemple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Dans le second membre, les déterminants qui multiplient respectivement a_{11}, a_{21}, a_{31} ont pour valeurs respectives

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, \quad a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}, \quad a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}.$$

Il convient d'adopter pour les mineurs relatifs à un élément une notation qui rappelle cet élément. C'est ce qu'on a fait, pour les déterminants du troisième et du quatrième ordre, en employant la même lettre (mais d'un autre type) et le même accent que pour l'élément.

Quand on emploie la notation précédemment expliquée qui consiste à désigner par $a_{\alpha,\beta}$ l'élément qui appartient à la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et à la $\beta^{\text{ième}}$ colonne, il convient, de même, de désigner par $A_{\alpha,\beta}$ le mineur correspondant. $A_{\alpha,\beta}$ sera le produit par $(-1)^{\alpha+\beta}$ du déterminant obtenu en supprimant la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et la $\beta^{\text{ième}}$ colonne.

Les éléments de la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne sont respectivement $a_{\alpha,1}$, $a_{\alpha,2}$, ..., $a_{\alpha,n}$ et les mineurs correspondants $A_{\alpha,1}$, $A_{\alpha,2}$, ..., $A_{\alpha,n}$. Les éléments de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne sont respectivement $a_{1,\beta}$, $a_{2,\beta}$, ..., $a_{n,\beta}$, et les mineurs correspondants $A_{1,\beta}$, $A_{2,\beta}$, ..., $A_{n,\beta}$; la règle précédemment établie pour développer un déterminant suivant les éléments d'une ligne ou d'une colonne, le fait qu'un déterminant est nul quand il a deux lignes identiques ou deux colonnes identiques, s'expriment par les identités suivantes, dans lesquelles Δ désigne le déterminant considéré, et dans lesquelles on suppose essentiellement, pour les deux dernières, que α est différent de β,

$$\begin{aligned}
&A_{\alpha,1}a_{\alpha,1}+A_{\alpha,2}a_{\alpha,2}+\ldots+A_{\alpha,n}a_{\alpha,n}=\Delta,\\
&A_{1,\alpha}a_{1,\alpha}+A_{2,\alpha}a_{2,\alpha}+\ldots+A_{n,\alpha}a_{n,\alpha}=\Delta,\\
&A_{\alpha,1}a_{\beta,1}+A_{\alpha,2}a_{\beta,2}+\ldots+A_{\alpha,n}a_{\beta,n}=0,\\
&A_{1,\alpha}a_{1,\beta}+A_{2,\alpha}a_{2,\beta}+\ldots+A_{n,\alpha}a_{n,\beta}=0.
\end{aligned}$$

On peut condenser encore ces $2n^2$ identités en les écrivant sous la forme

$$\begin{aligned}
&A_{\alpha,1}a_{\beta,1}+A_{\alpha,2}a_{\beta,2}+\ldots+A_{\alpha,n}a_{\beta,n}=\varepsilon_{\alpha,\beta}\Delta,\\
&A_{1,\alpha}a_{1,\beta}+A_{2,\alpha}a_{2,\beta}+\ldots+A_{n,\alpha}a_{n,\beta}=\varepsilon_{\alpha,\beta}\Delta,
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_{\alpha,\beta}$ représente 1 ou 0, suivant que α est égal à β ou que α est différent de β.

On écrit encore, plus brièvement,

$$\sum_{r=1}^{r=n}A_{\alpha,r}a_{\beta,r}=\varepsilon_{\alpha,\beta}\Delta,\qquad \sum_{r=1}^{r=n}A_{r,\alpha}a_{r,\beta}=\varepsilon_{\alpha,\beta}\Delta.$$

Dans les premiers membres, le signe $\sum\limits_{r=1}^{r=n}$, qui s'énonce sigma depuis $r=1$ jusqu'à $r=n$, veut dire qu'on doit faire la somme des termes qui se déduisent du terme écrit à la suite de $\sum$, en y remplaçant successivement r par 1, 2, ..., n.

146. On a déjà fait ressortir quelques conséquences de ce fait qu'un déterminant est une fonction linéaire des éléments d'une ligne ou d'une colonne. En voici quelques autres.

Quand on multiplie tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même facteur, le déterminant est multiplié par ce facteur. En particulier, si tous les éléments d'une ligne sont égaux, ou tous les éléments d'une colonne, on peut remplacer tous ces éléments par 1, quitte à mettre en facteur l'élément qui se répète tout le long de la ligne ou de la colonne.

On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En multipliant successivement les éléments de la première, de la deuxième, ..., de la $n^{\text{ième}}$ ligne d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre par un même facteur k, il est clair que le déterminant est multiplié par k^n; au reste, cela est évident sur la définition même d'un déterminant : si, en particulier, on multiplie par -1 tous les éléments, le déterminant reste invariable quand n est pair, il est multiplié par -1 quand n est impair. Il en résulte (n° **141**) qu'un déterminant symétrique gauche d'ordre impair est nul, puisque la multiplication par -1 de tous les éléments revient à changer les lignes en colonnes. et inversement, ce qui ne change pas le déterminant.

Quand les éléments d'une même ligne sont proportionnels aux éléments correspondants d'une autre ligne, le déterminant est nul. En effet, les éléments de l'une des lignes s'obtiennent alors en multipliant respectivement les éléments de l'autre ligne par un même facteur k; en divisant ces derniers éléments par k, le déterminant est divisé par k; mais il a alors deux lignes identiques : il est nul, ainsi que le proposé. Ce que l'on vient de dire des lignes s'applique évidemment aux colonnes; on a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

puisque les deux premières colonnes du second déterminant sont identiques.

Quand chacun des éléments d'une certaine ligne est la somme de p quantités, que j'appellerai *éléments partiels* de cette ligne, le déterminant proposé est la somme de p déterminants du même ordre que le proposé, qui s'obtiennent respectivement en ne conservant dans la ligne considérée que les premiers éléments partiels, les deuxièmes éléments partiels, ..., les p^{iemes} éléments partiels.

Supposons, par exemple, que dans le déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

on ait

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \\ b &= \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \\ c &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \\ d &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3, \end{aligned}$$

je dis que l'on a

$$(1) \quad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

Si, en effet, on conserve les notations du n° **144**, le déterminant Δ pourra s'écrire

$$\begin{aligned} \Delta = \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + \mathrm{C}c + \mathrm{D}d = \; & \mathrm{A}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \mathrm{B}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \\ & + \mathrm{C}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) + \mathrm{D}(\delta_1 + \delta_2 + \delta_3) \\ = \; & \mathrm{A}\alpha_1 + \mathrm{B}\beta_1 + \mathrm{C}\gamma_1 + \mathrm{D}\delta_1 \\ & + \mathrm{A}\alpha_2 + \mathrm{B}\beta_2 + \mathrm{C}\gamma_2 + \mathrm{D}\delta_2 \\ & + \mathrm{A}\alpha_3 + \mathrm{B}\beta_3 + \mathrm{C}\gamma_3 + \mathrm{D}\delta_3. \end{aligned}$$

Mais, dans la dernière forme obtenue, les quantités

$$\mathrm{A}\alpha_1 + \mathrm{B}\beta_1 + \mathrm{C}\gamma_1 + \mathrm{D}\delta_1, \quad \mathrm{A}\alpha_2 + \mathrm{B}\beta_2 + \mathrm{C}\gamma_2 + \mathrm{D}\delta_2, \quad \mathrm{A}\alpha_3 + \mathrm{B}\beta_3 + \mathrm{C}\gamma_3 + \mathrm{D}\delta_3$$

ne sont autre chose que les déterminants qui figurent dans le second membre de l'égalité (1), développés suivant les éléments de la première ligne.

Il est clair qu'il y a un théorème tout pareil pour les colonnes; la décomposition du déterminant est même plus visible; les éléments partiels forment alors, par leur disposition, des colonnes partielles, en quelque sorte, qui deviennent les colonnes des déterminants partiels : on a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & b & c \\ \alpha'+\beta'+\gamma' & b' & c' \\ \alpha''+\beta''+\gamma'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & b & c \\ \alpha' & b' & c' \\ \alpha'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta & b & c \\ \beta' & b' & c' \\ \beta'' & b'' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma & b & c \\ \gamma' & b' & c' \\ \gamma'' & b'' & c'' \end{vmatrix}.$$

S'il n'y avait pas le même nombre d'éléments partiels dans les éléments d'une colonne (par exemple), on pourrait introduire des éléments partiels nuls et parvenir à une décomposition analogue.

On a ainsi

$$\begin{vmatrix} 2+3+4 & 2 & 4 \\ 5+6 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Le lecteur n'aura aucune peine à reconnaître que le second membre est égal à

$$0 - 7(3\times 8 - 6\times 4) - 4\times 7\times 8 = -224.$$

Si les éléments d'une colonne étaient chacun égal à la somme de p éléments partiels, si les éléments d'une autre colonne sont égaux chacun à la somme de q éléments partiels, il est clair que le déterminant sera la somme de pq déterminants.

147. On ne change pas un déterminant quand on ajoute aux éléments d'une ligne les éléments correspondants d'une autre ligne respectivement multipliés par un même facteur, les éléments correspondants d'une autre ligne encore aussi multipliés par un même facteur, etc. Je me dispense d'énoncer le théorème analogue pour les colonnes, que je vais démontrer sur un exemple.

Considérons le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix};$$

je dis qu'il est identique au déterminant

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b+\lambda a+\mu d & c & d \\ a' & b'+\lambda a'+\mu d' & c' & d' \\ a'' & b''+\lambda a''+\mu d'' & c'' & d'' \\ a''' & b''+\lambda a'''+\mu d''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant, d'après les explications qui précèdent, est en effet égal à

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \lambda a & c & d \\ a' & \lambda a' & c' & d' \\ a'' & \lambda a'' & c'' & d'' \\ a''' & \lambda a''' & c''' & d''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & \mu d & c & d \\ a' & \mu d' & c' & d' \\ a'' & \mu d'' & c'' & d'' \\ a''' & \mu d''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

le premier déterminant est Δ, les deux autres sont nuls identiquement parce que, dans le deuxième, les éléments de la deuxième colonne sont proportionnels aux éléments de la première, et que, dans le troisième, les éléments de la deuxième colonne sont proportionnels aux éléments de la quatrième. Les deux déterminants Δ et Δ', développés, sont identiques.

148. Lorsque, dans un déterminant, il y a une même relation linéaire entre les éléments correspondants de la première ligne, de la deuxième ligne, ..., de la dernière ligne, ce déterminant est nul. Le déterminant est encore nul quand il y a une même relation linéaire entre les éléments correspondants de la première colonne, de la deuxième colonne, ..., de la dernière colonne. On suppose, bien entendu, que les coefficients de la relation linéaire ne soient pas tous nuls.

Si, par exemple, la relation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0$$

est vérifiée quand on y remplace respectivement x, y, z, t par a, b, c, d, par a', b', c', d', par a'', b'', c'', d'', par a''', b''', c''', d''', le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

est nul.

Supposons en effet que α ne soit pas nul, on aura, en vertu de l'hypothèse

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0,$$

d'où

$$a = -\frac{\beta}{\alpha}b - \frac{\gamma}{\alpha}c - \frac{\delta}{\alpha}d$$

et, de même,

$$a' = -\frac{\beta}{\alpha}b' - \frac{\gamma}{\alpha}c' - \frac{\delta}{\alpha}d',$$

$$a'' = -\frac{\beta}{\alpha}b'' - \frac{\gamma}{\alpha}c'' - \frac{\delta}{\alpha}d'',$$

$$a''' = -\frac{\beta}{\alpha}b''' - \frac{\gamma}{\alpha}c''' - \frac{\delta}{\alpha}d'''.$$

On peut donc écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{\beta}{\alpha}b - \frac{\gamma}{\alpha}c - \frac{\delta}{\alpha}d & b & c & d \\ -\frac{\beta}{\alpha}b' - \frac{\gamma}{\alpha}c' - \frac{\delta}{\alpha}d' & b' & c' & d' \\ -\frac{\beta}{\alpha}b'' - \frac{\gamma}{\alpha}c'' - \frac{\delta}{\alpha}d'' & b'' & c'' & d'' \\ -\frac{\beta}{\alpha}b''' - \frac{\gamma}{\alpha}c''' - \frac{\delta}{\alpha}d''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}$$

Ce déterminant, d'après la règle du n° **146**, se décompose en trois autres, dont chacun est nul parce que les éléments correspondants de deux colonnes sont proportionnels.

La réciproque de cette proposition est vraie : si un déterminant du n^e ordre est nul, il existe n coefficients, dont l'un au moins n'est pas nul, tels que, si l'on ajoute les éléments d'une ligne quelconque respectivement multipliés par ces coefficients, on obtient une somme nulle. De même, il existe n coefficients, dont l'un au moins n'est pas nul, tels que, si l'on ajoute les éléments d'une colonne quelconque respectivement multipliés par ces coefficients, la somme soit nulle.

La proposition est évidente lorsqu'il y a un mineur relatif à quelque élément du déterminant proposé qui n'est pas nul. Si, par exemple, il s'agit du déterminant du quatrième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix},$$

où $a, b, \ldots, d'''$ désignent des nombres quelconques, on a

$$\begin{aligned} A a + B b + C c + D d &= \Delta, \\ A a' + B b' + C c' + D d' &= 0, \\ A a'' + B b'' + C c'' + D d'' &= 0, \\ A a''' + B b''' + C c''' + D d''' &= 0, \end{aligned}$$

en désignant par A, B, C, D les valeurs numériques des mineurs relatifs aux éléments a, b, c, d. Si Δ est nul et si l'un des mineurs A, B, C, D n'est pas nul, il est clair que les éléments d'une même ligne vérifieront la relation $Ax + By + Cz + Du = 0$. Comme on peut remplacer A, B, C, D par les mineurs relatifs aux éléments d'une ligne quelconque, la proposition est bien claire, pourvu que l'un des seize mineurs A, B, ..., D''' ne soit pas nul.

Si tous les mineurs sont nuls, la démonstration est en défaut. La proposition subsiste, comme on le verra plus tard (n° **159**).

149. Voici maintenant quelques conséquences de la proposition établie au n° **147**, d'après laquelle on peut retrancher des éléments d'une ou de plusieurs lignes (ou colonnes) les éléments correspondants d'une autre ligne (ou d'une autre colonne).

On peut ramener à un déterminant d'ordre $n-1$ un déterminant d'ordre n dans lequel tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) sont égaux.

Considérons par exemple le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix}.$$

On peut retrancher les éléments de la première colonne des éléments de la seconde et de la troisième : on obtient ainsi le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a' & b'-a' & c'-a' \end{vmatrix} = (b-a)(c'-a') - (c-a)(b'-a').$$

La même proposition permet parfois de faire apparaître un facteur dans un déterminant dépendant de deux ou plusieurs variables.

Désignons par exemple par $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ trois polynomes en x et par a, b, c trois variables quelconques, et considérons le déterminant

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(c) & g(c) & h(c) \end{vmatrix}.$$

On reconnaît de suite que le déterminant est divisible par $b-a$, car il s'annule identiquement quand on y remplace b par a, comme ayant alors deux colonnes identiques; il est de même divisible par $c-b$, $a-c$ et, par conséquent, (n° 158), par $(b-a)(c-b)(a-c)$. On fera, si l'on veut, apparaître successivement ces facteurs en écrivant d'abord le déterminant sous la forme

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b)-f(a) & g(b)-g(a) & h(b)-h(a) \\ f(c)-f(a) & g(c)-g(a) & h(c)-h(a) \end{vmatrix}.$$

En désignant par $\mathrm{F}(a, b)$, $\mathrm{G}(a, b)$, $\mathrm{H}(a, b)$ les quotients, évidemment entiers, de la division par $b-a$ des polynomes $f(b)-f(a)$, $g(b)-g(a)$, $h(b)-h(a)$, on voit que le déterminant proposé peut s'écrire

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ \mathrm{F}(a,b) & \mathrm{G}(a,b) & \mathrm{H}(a,b) \\ \mathrm{F}(a,c) & \mathrm{G}(a,c) & \mathrm{H}(a,c) \end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant qui figure dans cette expression on peut remplacer les éléments de la seconde ligne par

$$\mathrm{F}(a,b)-\mathrm{F}(a,c), \qquad \mathrm{G}(a,b)-\mathrm{G}(a,c), \qquad \mathrm{H}(a,b)-\mathrm{H}(a,c),$$

et ces nouveaux éléments sont tous divisibles par $b-c$; le reste est évident.

Cette méthode s'applique, par exemple, au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix};$$

mais il est plus simple de remarquer ici que le déterminant est du troisième degré en a, b, c comme le produit $(b-c)(c-a)(a-b)$;

le quotient du déterminant par ce produit, qui doit être entier en a, b, c, ne peut donc être qu'une constante; la comparaison d'un même terme bc^2, par exemple, dans les deux développements montre que l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b) = bc^2 + ca^2 + ab^2 - b^2c - c^2a - a^2b.$$

Cette identité n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de l'identité que je vais énoncer.

Le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ . & .. & .. & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

dont la loi de formation est suffisamment évidente, est identique au produit

$$\begin{aligned} (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})(x_n - x_{n-3}) \dots (x_n - x_1),& \\ (x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-3}) \dots (x_{n-1} - x_1),& \\ (x_{n-2} - x_{n-3}) \dots (x_{n-2} - x_1),& \\ \dots\dots\dots\dots,& \\ (x_2 - x_1)& \end{aligned}$$

de toutes les différences que l'on peut former entre l'une quelconque des quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$ et celles qui la précèdent. On reconnaît comme plus haut que le déterminant s'annule si l'on suppose $x_p = x_q$, par exemple, en supposant que les nombres naturels p, q soient différents entre eux et au plus égaux à n, qu'il est divisible par le produit de toutes les différences, enfin que le déterminant et le produit développés contiennent un même terme $x_2 x_3^2 \dots x_n^{n-1}$. On a rencontré déjà ce produit au n° 126.

§ 2. — ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

150. Soient données n équations du premier degré à n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$,

$$(1) \qquad X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \dots, \qquad X_n = 0,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des polynomes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que j'écrirai sous la forme suivante :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} X_1 = a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \ldots + a_{1,n}\,x_n + a_{1,n+1}, \\ X_2 = a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \ldots + a_{2,n}\,x_n + a_{2,n+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_n = a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \ldots + a_{n,n}\,x_n + a_{n,n+1}. \end{array}\right.$$

Les coefficients des inconnues, d'une part, les termes tout connus $a_{1,n+1}, \ldots, a_{n,n+1}$, de l'autre, sont regardés comme des nombres donnés.

Désignons par Δ le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

que l'on appelle habituellement *le déterminant des équations* (1); désignons, comme au n° 145, par $A_{\alpha,\beta}$ le mineur de Δ relatif à l'élément $a_{\alpha,\beta}$, et supposons Δ différent de o. Si l'on multiplie respectivement par $A_{1,\beta}, A_{2,\beta}, \ldots, A_{n,\beta}$ les égalités qui définissent $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et que l'on tienne compte des identités du n° 145, on trouve

$$(3)\quad A_{1,\beta}X_1 + A_{2,\beta}X_2 + \ldots + A_{n,\beta}X_n = \Delta x_\beta + B_\beta,$$

en posant, pour abréger,

$$(4)\quad B_\beta = A_{1,\beta}\,a_{1,n+1} + A_{2,\beta}\,a_{2,n+1} + \ldots + A_{n,\beta}\,a_{n,n+1}.$$

L'égalité (3) valable pour $\beta = 1, 2, \ldots, n$ est une identité en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, quand on regarde $X_1, X_2, \ldots, X_n$ comme étant mis, seulement pour abréger, à la place des seconds membres des égalités (2). Elle met en évidence ce fait que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ne peuvent être nuls sans que x_β soit égal à $-\frac{B_\beta}{\Delta}$; en d'autres termes, les équations

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_n = 0$$

entraînent les équations

$$(5)\quad x_1 = -\frac{B_1}{\Delta}, \qquad x_2 = -\frac{B_2}{\Delta}, \qquad \ldots, \qquad x_n = -\frac{B_n}{\Delta}$$

et ne peuvent donc avoir d'autre solution que celle de ces dernières, qui est évidente. Il reste à savoir si les valeurs trouvées ainsi satisfont effectivement aux équations proposées; c'est ce que l'on vérifie en y remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les seconds membres des égalités (4) ou par le calcul suivant, qui revient au même :

Récrivons plus explicitement les n identités (3), à savoir

$$\begin{gathered}
A_{1,1} X_1 + A_{2,1} X_2 + \ldots + A_{n,1} X_n = \Delta x_1 + B_1, \\
A_{1,2} X_1 + A_{2,2} X_2 + \ldots + A_{n,2} X_n = \Delta x_2 + B_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_{1,n} X_1 + A_{2,n} X_2 + \ldots + A_{n,n} X_n = \Delta x_n + B_n;
\end{gathered}$$

multiplions-les respectivement par $a_{\alpha,1}, a_{\alpha,2}, \ldots, a_{\alpha,n}$ et ajoutons-les; on obtiendra, en tenant compte des identités du n° 145,

$$(6) \qquad \Delta X_\alpha = a_{\alpha,1}(\Delta x_1 + B_1) + a_{\alpha,2}(\Delta x_2 + B_2) + \ldots + a_{\alpha,n}(\Delta x_n + B_n).$$

On a encore affaire ici à une identité en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, quand on suppose $X_1, X_2, \ldots, X_n$ remplacés par leurs expressions explicites (2). L'identité (6) montre que, si l'on suppose nulles les quantités $\Delta x_1 + B_1$, $\Delta x_2 + B_2$, ..., $\Delta x_n + B_n$, X_α est nécessairement nul, et ceci, d'ailleurs, quelle que soit la valeur 1, 2, ..., n attribuée à l'indice α. En d'autres termes, les équations

$$(4) \qquad \Delta x_1 + B_1 = 0, \qquad \Delta x_2 + B_2 = 0, \qquad \Delta x_n + B_n = 0$$

entraînent les équations

$$(1) \qquad X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_n = 0.$$

Les deux systèmes (1) et (4), lorsque Δ n'est pas nul, sont donc équivalents.

Lorsque le déterminant d'un système de n équations à n inconnues est différent de 0, ce système admet une solution, et une seule.

Cette solution est formée d'un système de n fractions, toutes précédées du signe —. Le dénominateur commun de ces fractions est le déterminant Δ des équations, lequel ne dépend que des coefficients des inconnues, nullement des termes tout connus $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n,n+1}$. Le numérateur de la fraction qui donne la valeur de x_β s'obtient en remplaçant dans Δ les coefficients $a_{1,\beta}, a_{2,\beta}, \ldots, a_{n,\beta}$ de cette inconnue par les termes tout connus $a_{1,n+1}, a_{2,n+1}, \ldots, a_{n,n+1}$.

Ce dernier point résulte de l'expression de B_β, qui s'obtient en remplaçant dans le développement

$$A_{1,\beta}a_{1,\beta}+A_{2,\beta}a_{2,\beta}+\ldots+A_{n,\beta}a_{n,\beta}$$

du déterminant Δ suivant les éléments de la $\beta^{\text{ième}}$ colonne, les éléments $a_{1,\beta}$, $a_{2,\beta}$, ..., $a_{n,\beta}$ de cette colonne, dont aucun ne figure dans les mineurs $A_{1,\beta}$, $A_{2,\beta}$, ..., $A_{n,\beta}$, par les termes tout connus $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, ..., $a_{n,n+1}$.

J'ai supposé, dans ce qui précède, que les coefficients des inconnues $a_{1,1}$, ..., $a_{n,n}$ et les termes tout connus $a_{1,n+1}$, ..., $a_{n,n+1}$ étaient des *nombres;* il est clair que les résultats subsistent si l'on regarde les lettres $a_{1,1}$, ..., $a_{n,n}$, ..., $a_{n,n+1}$ comme désignant des variables, pour toutes les valeurs de ces variables qui n'annulent pas Δ; au reste, il convient de remarquer que les égalités (3) et (6), d'où le résultat essentiel a été tiré, sont non seulement des identités en x_1, x_2, ..., x_n, mais encore des identités en x_1, x_2, ..., x_n, $a_{1,1}$, ..., $a_{n,n}$, $a_{1,n+1}$, ..., $a_{n,n+1}$, pourvu qu'on y remplace non seulement X_1, X_2, ..., X_n par leurs expressions explicites (2), mais encore le déterminant Δ et ses mineurs $A_{\alpha,\beta}$ par leurs expressions explicites en $a_{1,1}$, ..., $a_{n,n}$ et les quantités B_1, B_2, ..., B_n par les seconds membres des égalités (4). Cela résulte clairement de la démonstration.

Il convient encore de remarquer, sur les formules (4), que les expressions des quantités B_1, B_2, ..., B_n sont linéaires en $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, ..., $a_{n,n+1}$; il en est de même, évidemment, des quotients de B_1, B_2, ..., B_n par le déterminant Δ, supposé différent de o, où ne figurent pas $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, ..., $a_{n,n+1}$; il en est de même encore des inconnues x_1, x_2, ..., x_n. Celles-ci peuvent être regardées comme des formes linéaires en $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, ..., $a_{n,n+1}$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, ... $a_{n,n}$. Si, en particulier, on attribue à ces dernières lettres des valeurs numériques qui n'annulent pas Δ, et si l'on regarde $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, ..., $a_{n,n+1}$ comme des variables, les expressions de x_1, x_2, ..., x_n sont des formes linéaires en $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, $a_{n,n+1}$ à coefficients numériques.

Enfin, il est à peine utile de dire que, lorsqu'il s'agit d'équations purement numériques, on peut, si l'on veut, se servir des formules générales établies plus haut (en supposant toujours Δ différent de o) pour calculer les valeurs numériques des inconnues. A la vérité, les simplifications dont les équations proposées sont susceptibles en raison de la forme spéciale qu'elles peuvent affecter, apparaissent souvent d'une façon moins facile sur ces formules que sur les équations proposées elles-mêmes, au moins quand on n'a pas l'habitude de manier les déterminants. Il convient de remarquer, toutefois, qu'aux combinaisons des équations dont on peut apercevoir la convenance sur les équations correspondent, le plus souvent, des combinaisons des lignes des déterminants qui conduisent à des simplifications équivalentes.

Les formules générales, quand on les applique à des équations numériques dont les coefficients ne sont connus qu'imparfaitement, montrent que, lorsque Δ est très petit, les erreurs sur les résultats qu'entraînent les erreurs sur les données peuvent être très considérables; si, par exemple, Δ se trouvait être du même ordre de petitesse que les erreurs possibles sur les données, il n'y aurait rien à tirer des équations.

Avant d'étudier le cas où Δ est nul et le cas où le nombre des équations diffère du nombre des inconnues, il convient d'introduire une notion nouvelle.

151. Rang d'un tableau rectangulaire. — Considérons, en général, un tableau rectangulaire comprenant np éléments distribués dans p lignes horizontales, et n colonnes verticales

$$\begin{array}{llll} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & \ldots, & a_{p,n}. \end{array}$$

Désignons par α un nombre naturel au plus égal au plus petit des nombres n, p, et supposons qu'on supprime $n-\alpha$ colonnes et $p-\alpha$ lignes du tableau, il restera α^2 éléments distribués dans α lignes et α colonnes; dans le cas où α serait égal à n, ce qui suppose $n \leqq p$, il faut entendre qu'on ne supprime aucune colonne et qu'on supprime $p-n$ lignes; de même, dans le cas où α serait égal à p, ce qui suppose $p \leqq n$, il faut entendre qu'on ne supprime aucune ligne et qu'on supprime $n-p$ colonnes; si l'on avait $\alpha = p = n$, on laisserait le tableau carré tel quel.

Dans tous les cas, les α^2 éléments restants peuvent être regardés comme les éléments d'un déterminant du $\alpha^{\text{ième}}$ ordre; je dirai d'un pareil déterminant qu'il est *tiré* du tableau, en sous-entendant le procédé que je viens de décrire; les éléments mêmes du tableau seront regardés comme des déterminants tirés du tableau par la suppression de $n-1$ lignes et de $p-1$ colonnes.

Si l'on considère, par exemple, le tableau

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'', \end{matrix}$$

on peut en tirer quatre déterminants du troisième ordre par la suppression de la première, de la seconde, de la troisième ou de la quatrième ligne; le premier de ces déterminants est

$$\begin{vmatrix} b & c & d \\ b' & c' & d' \\ b'' & c'' & d'' \end{vmatrix}.$$

On peut en tirer dix-huit déterminants du second ordre par la suppression d'une ligne et de deux colonnes; tel est, par exemple, le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

On peut en tirer enfin douze déterminants du premier ordre, à savoir les éléments mêmes du tableau.

Revenons au cas général, et observons d'abord que, si l'on considère un déterminant d'ordre $\alpha > 1$ tiré du tableau, les mineurs relatifs aux éléments de ce déterminant seront des déterminants d'ordre $\alpha - 1$ tirés eux-mêmes du tableau; inversement, tout déterminant d'ordre $\alpha - 1$ tiré du tableau peut évidemment être regardé comme un mineur relatif à un élément de quelque déterminant d'ordre α tiré de ce tableau.

Ceci posé, supposons que les éléments du tableau soient des nombres. La plus grande valeur possible du nombre α telle qu'un déterminant d'ordre α tiré du tableau ne soit pas nul joue, comme on le verra, un rôle important : on appelle ce nombre le *rang* du tableau. On voit de suite comment se détermine ce rang :

On donne d'abord à α la plus grande valeur possible, à savoir le plus petit des nombres n, p; supposons, pour fixer les idées, $p \leqq n$. Si l'un des déterminants d'ordre p tirés du tableau n'est pas nul, le tableau est de rang p. (Il n'y aurait qu'un pareil déterminant si l'on avait $p = n$.) Supposons que tous les déterminants d'ordre p tirés du tableau soient nuls, on examinera les déterminants d'ordre $p - 1$ qu'on peut tirer du tableau; s'il y en a un qui soit différent de o, le tableau est de rang $p - 1$. Lorsque tous les déterminants d'ordre $p - 1$ sont nuls, on examine tous les déterminants d'ordre $p - 2$; si l'un d'eux n'est pas nul, le tableau est de rang $p - 2$, ...

On observera que, si un déterminant d'ordre α tiré du tableau n'est pas nul, le tableau est certainement de rang égal ou supérieur à α; si, en particulier, l'un des éléments du tableau n'est pas nul, le rang du tableau est au moins égal à 1; le cas où tous les éléments du tableau seraient nuls échappe à la définition précédente, puisque alors, tous les déterminants tirés du tableau sont manifestement nuls; on dit alors que le tableau est de rang o.

Si tous les déterminants d'ordre α que l'on peut tirer du tableau sont nuls, on peut affirmer que le rang du tableau est inférieur à α; en effet, tout déterminant d'ordre $\alpha + 1$ que l'on peut tirer du tableau est nul comme ayant ses mineurs nuls; de même tout déterminant d'ordre $\alpha + 2$, ...

Si le tableau est de rang α, un déterminant quelconque, non nul, d'ordre α, tiré du tableau comme on vient de dire, s'appelle un *déterminant principal* du tableau.

On voit, d'après ce qui vient d'être dit, comment écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un tableau de np éléments, rangés dans n colonnes et dans p lignes, soit de rang inférieur ou égal à α : on écrira que tous les déterminants d'ordre $\alpha + 1$ tirés du tableau sont nuls. Quelques-unes de ces conditions peuvent d'ailleurs rentrer dans les autres. Si l'un des déterminants d'ordre α tirés du tableau est différent de o, le tableau sera de rang α; si tous ces déterminants sont nuls, le tableau sera de rang inférieur à α.

Il est clair que le rang d'un tableau ne change pas quand on échange les lignes entre elles, ou les colonnes entre elles; supposons qu'on ait affaire à un tableau de rang $\alpha > 0$: fixons notre attention sur un des déterminants principaux; on peut, par des échanges successifs, amener les α lignes qui en contiennent les éléments à être les α premières lignes du tableau, les α lignes du haut; on peut, de même, par des échanges successifs de colonnes, amener les α colonnes qui contiennent les éléments du déterminant principal à être les α premières colonnes du tableau, les α colonnes de gauche; on voit ainsi que l'on peut s'arranger pour que le déterminant principal occupe le coin supérieur, à gauche du tableau.

Si l'on supprime d'un tableau rectangulaire quelques lignes ou quelques colonnes, le rang du tableau ainsi modifié sera égal ou inférieur à celui du tableau proposé : il lui sera égal, lorsque la suppression des lignes ou des colonnes aura laissé inaltéré quelque déterminant principal.

Lorsque le rang d'un tableau est égal à 2, les éléments de chaque ligne sont proportionnels aux éléments correspondants d'une ligne quelconque, de même pour les colonnes.

Il résulte évidemment de la définition du rang d'un tableau, qu'on ne modifie pas ce rang en introduisant dans le tableau des colonnes, ou des lignes, formées d'éléments tous nuls.

152. Si l'on considère un déterminant Δ, d'ordre n, le rang de ce déterminant n'est autre chose que le rang du tableau carré formé par ses éléments. On a désigné, au nº 143, sous le nom de *mineur de* Δ *relatif à un élément* de ce déterminant, le déterminant (affecté d'un signe convenable) que l'on déduit de Δ par la suppression de la ligne et de la colonne qui contiennent l'élément considéré; on désigne aussi sous le nom de *mineur de* Δ tout déterminant qu'on en déduit par la suppression de α lignes et de α colonnes. Il est nécessaire de distinguer tous ces mineurs. Ceux que j'ai désignés jusqu'ici comme les mineurs relatifs à un élément sont ce qu'on appelle aussi *les premiers mineurs;* les mineurs obtenus par la suppression de α lignes et de α colonnes sont les $\alpha^{\text{ièmes}}$ mineurs; ils sont des déterminants d'ordre $n - \alpha$. Au lieu de premier, second, ..., $\alpha^{\text{ième}}$ mineur, on dit aussi mineur du premier, du second, ..., du $\alpha^{\text{ième}}$ ordre; la confusion qui peut résulter, dans cette façon de parler, de l'ordre d'un mineur et de l'ordre du déterminant qu'est ce mineur rend cette façon de parler un peu gênante. Au lieu du mot *mineur,* quelques auteurs emploient le mot *sous-déterminant.*

Quoi qu'il en soit, dire qu'un déterminant d'ordre n est de rang r, c'est dire qu'il y a un mineur du déterminant qui, en tant que déterminant, est d'ordre r, un $(n - r)^{\text{ième}}$ mineur, si l'on veut, qui n'est pas nul, tandis que tous les déterminants d'ordre supérieur à r qu'on peut tirer du déterminant par la suppression de lignes ou de colonnes sont nuls. Dire que le déterminant est de rang n, c'est dire qu'il n'est pas nul; dire qu'il est de rang o, c'est dire que tous ses éléments sont nuls.

153. Considérons p polynomes du premier degré $X_1, X_2, \ldots, X_p$ à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$: on dit que ces polynomes sont indépendants lorsque l'on peut attribuer aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs qui fassent acquérir aux polynomes telles valeurs que l'on voudra. En particulier un polynome du premier degré est indépendant quand le coefficient de l'une des variables, dans ce polynome, n'est pas nul; on pourra, en effet, donner aux autres variables telles valeurs que l'on voudra; il restera, pour lui faire acquérir la valeur A, à résoudre une équation du premier degré dans laquelle le coefficient de l'inconnue n'est pas nul.

Si les p polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont indépendants, r polynomes choisis parmi ceux-là sont évidemment indépendants.

En conservant la même supposition, et en supposant de plus que $X'_1, X'_2, \ldots. X'_p$ désignent soit des constantes, soit des polynomes du premier degré par rapport à des variables qui ne figurent pas dans $X_1, X_2, \ldots, X_p$, les polynomes

$$X_1 + X'_1, \quad X_2 + X'_2, \quad \ldots, \quad X_p + X'_p$$

sont indépendants; en effet, on peut attribuer aux variables qui figurent dans $X'_1, X'_2, \ldots, X'_n$ des valeurs numériques arbitraires, puis à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs qui satisfassent aux équations

$$X_1 = A_1 - X'_1, \qquad X_2 = A_2 - X'_2, \qquad \ldots, \qquad X_n = A_n - X'_n,$$

quels que soient les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Les p polynomes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_p$,

$$\begin{array}{r}
x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots + a_{1,p} \quad x_p, \\
x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots + a_{2,p} \quad x_p, \\
x_3 + \ldots + a_{3,p} \quad x_p, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x_{p-1} + a_{p-1,p}x_p, \\
x_p,
\end{array}$$

où $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, ... sont des constantes, sont indépendants : si, en effet, on égale ces différents polynomes à des constantes arbitraires, la dernière équation, qui ne contient que x_p, sera toute résolue; la précédente donnera la valeur de x_{p-1}, la précédente celle de x_{p-2}, ...; la même conclusion subsisterait évidemment si, la forme des polynomes restant la même, les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$, au lieu d'avoir des coefficients égaux à 1, avaient des coefficients numériques quelconques, dont aucun ne serait nul. Elle subsisterait encore, en vertu d'une remarque précédente, si l'on ajoutait aux polynomes considérés, soit des constantes numériques, soit d'autres polynomes du premier degré par rapport à d'autres variables.

154. On va apprendre à reconnaître si p polynomes du premier degré donnés sont indépendants ou non, et, plus généralement, combien, parmi eux, il y a de polynomes indépendants. Cela, comme on va le voir, ne dépend que des coefficients des variables, nullement des termes constants.

Supposons les polynomes du premier degré écrits les uns au-dessous des autres de manière que les coefficients d'une même variable figurent dans une même colonne verticale : les coefficients qui manquent étant remplacés par des zéros. Les coefficients de toutes les variables forment alors un tableau rectangulaire tel que ceux que nous avons considérés dans le n° 151. J'appellerai *rang du système de polynomes* ou, plus brièvement, *rang des polynomes,* le rang de ce tableau. Je vais montrer que le rang d'un système de polynomes est égal au nombre des polynomes de ce système qui sont indépendants.

Je supposerai d'abord que ce rang soit égal au nombre des polynomes, pour montrer que, dans ce cas, les polynomes sont indépendants.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de trois polynomes : si le rang du tableau est 3, ces polynomes contiennent au moins trois variables, puisque le rang du tableau ne peut être inférieur au nombre des colonnes, c'est-à-dire au nombre des variables dans les polynomes; supposons que ceux-ci contiennent cinq variables, et soient

$$\begin{aligned} X &= ax + by + cz + dt + eu + p, \\ Y &= a'x + b'y + c'z + d't + e'u + p', \\ Z &= a''x + b''y + c''z + d''t + e''u + p'' \end{aligned}$$

les trois polynomes : le tableau des coefficients est alors

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e, \\ a' & b' & c' & d' & e', \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e''; \end{array}$$

et, par hypothèse, l'un des déterminants du troisième ordre tiré de ce tableau, par exemple le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

n'est pas nul; si l'on veut que les polynomes X, Y, Z acquièrent les valeurs numériques A, A′, A″, on attribuera aux variables t, u, dont les coefficients ne figurent pas dans le précédent déterminant, des valeurs numériques quelconques et l'on résoudra les trois équations en x, y, z

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt + eu + p - \mathrm{A} &= 0, \\ a'x + b'y + c'z + d't + e'u + p' - \mathrm{A}' &= 0, \\ a''x + b''y + c''z + d''t + e''u + p'' - \mathrm{A}'' &= 0, \end{aligned}$$

dont le déterminant n'est pas nul, et qui, par conséquent, admettent une solution. La proposition est démontrée. Il est clair qu'il n'y aurait rien à changer dans la démonstration, s'il n'y avait que trois variables x, y, z, si ce n'est qu'on n'aurait pas eu à attribuer à t, u de valeurs numériques.

155. Considérons maintenant le cas où le rang du tableau est inférieur d'une unité au nombre des polynomes; je vais prouver que les polynomes ne sont pas indépendants et qu'il existe entre eux une relation identique du premier degré.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de quatre polynomes, et que leur rang soit égal à 3 : ces polynomes devront contenir au moins trois variables. Soient

$$\begin{aligned} \mathrm{X} &= ax + by + cz + dt + eu + p, \\ \mathrm{Y} &= a'x + b'y + c'z + d't + e'u + p', \\ \mathrm{Z} &= a''x + b''y + c''z + d''t + e''u + p'', \\ \mathrm{T} &= a'''x + b'''y + c'''z + d'''t + e'''u + p''' \end{aligned}$$

ces polynomes : le tableau des coefficients est ici

$$(1)\qquad \left\{\begin{matrix} a & b & c & d & e, \\ a' & b' & c' & d' & e', \\ a'' & b'' & c'' & d'' & e'', \\ a''' & b''' & c''' & d''' & e'''. \end{matrix}\right.$$

Il est, par hypothèse, de rang 3, c'est-à-dire que l'on peut en tirer un déterminant du troisième ordre qui ne soit pas nul et que tous les déterminants du quatrième ordre que l'on peut en tirer sont nuls ; je suppose que le déterminant du troisième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul : on peut, comme on l'a expliqué plus haut, en changeant au besoin l'ordre des polynomes et des variables, supposer que ce soit ce déterminant-là qui ne soit pas nul, du moment qu'il y a un déterminant du troisième ordre qui est différent de o.

Il résulte de l'hypothèse faite sur le déterminant Δ que les polynomes X, Y, Z sont indépendants.

Considérons le tableau

$$(2)\qquad \left\{\begin{matrix} a & b & c, \\ a' & b' & c', \\ a'' & b'' & c'', \\ a''' & b''' & c''', \end{matrix}\right.$$

obtenu en plaçant sous le déterminant considéré les coefficients a''', b''', c''' qui, dans le polynome T, multiplient les variables x, y, z dont les coefficients figurent dans le déterminant principal Δ. Les trois colonnes de ce tableau peuvent être regardées comme les trois premières colonnes d'un déterminant du quatrième ordre, déterminant dont la quatrième colonne serait formée d'éléments arbitraires ; désignons par λ, λ', λ'', λ''' les mineurs de ce déterminant relatif aux éléments de cette quatrième colonne, à savoir

$$\lambda = -\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \end{vmatrix}, \qquad \ldots, \qquad \lambda''' = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta.$$

Il importe de remarquer, d'une part, que le mineur $\lambda''' = \Delta$ n'est pas nul, par hypothèse, d'autre part que l'on a

$$\lambda d + \lambda' d' + \lambda'' d'' + \lambda''' d''' = 0,$$
$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \lambda''' e''' = 0,$$

puisque les premiers membres de ces égalités ne sont autre chose que les déterminants du *quatrième* ordre

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & e \\ a' & b' & c' & e' \\ a'' & b'' & c'' & e'' \\ a''' & b''' & c''' & e''' \end{vmatrix}$$

tirés du tableau.

Ceci posé, multiplions les égalités qui définissent les polynomes X, Y, Z, T par λ, λ', λ'', λ''' et ajoutons-les : dans le second membre, les coefficients des variables t, u seront nuls, en vertu de la remarque qu'on vient de faire (¹), il en serait de même des coefficients de x, y, z, en vertu des relations entre les éléments d'un déterminant et les mineurs établies au n° 145. On parvient donc à la relation

$$(3) \qquad \lambda X + \lambda' Y + \lambda'' Z + \lambda''' T = \lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'' + \lambda''' p''';$$

cette relation est une identité en x, y, z, t, u, quand on remplace, dans le premier membre, X, Y, Z, T par leurs expressions explicites. Dans cette identité λ''' n'est pas nul. Le second membre n'est autre chose que le déterminant que l'on obtient en adjoignant au tableau (2) une quatrième colonne formée des termes constants p, p', p'', p'''.

On tire de l'identité (3) la suivante

$$(4) \qquad T = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta,$$

(¹) Si les polynomes X, Y, Z, T ne contenaient que les trois variables x, y, z, il n'y aurait pas lieu de considérer les variables t, u; mais tout le reste de la démonstration subsisterait.

en posant

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\lambda'''}, \qquad \beta = -\frac{\lambda'}{\lambda'''}, \qquad \gamma = -\frac{\lambda''}{\lambda'''},$$

$$\delta = \frac{\lambda p + \lambda' p' + \lambda'' p'' + \lambda''' p'''}{\lambda'''} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & c & p \\ a' & b' & c' & p' \\ a'' & b'' & c'' & p'' \\ a''' & b''' & c''' & p''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

Si, par exemple, on considère les polynomes

$$\begin{aligned} X &= x + y - z + t + 1, \\ Y &= x - y + z + u - 2, \\ Z &= -x + y + z - u - t - 3, \\ T &= x + y + z + 5, \end{aligned}$$

on reconnaît de suite que les trois premiers sont indépendants et que l'on a identiquement, en x, y, z, t, u,

$$T = X + Y + Z + 9.$$

Le lecteur n'aura d'ailleurs aucune peine à retrouver cette relation par la méthode qu'on vient d'expliquer.

On observera que, dans l'expression (4) de T, les coefficients α, β, γ de X, Y, Z ne dépendent que des coefficients des variables dans les quatre polynomes, nullement des termes constants, qui n'interviennent que dans δ.

De cette expression de T, il résulte évidemment que les quatre polynomes X, Y, Z, T ne sont pas indépendants, puisque la valeur de T résulte de celles des trois polynomes indépendants X, Y, Z. En particulier, pour des valeurs des variables qui annulent X, Y, Z, il est clair que T prendra la valeur δ, en sorte que, si δ n'est pas nul, les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$ sont certainement incompatibles; c'est ce qui arriverait dans l'exemple numérique que l'on a donné. Au contraire, si δ est nul, les trois premières entraînent la dernière.

Dans ce qu'on vient de dire, se trouve contenue la solution de la question suivante :

156. On donne n équations du premier degré à n inconnues, dont le déterminant n'est pas nul, et un polynome du premier degré dont les n variables sont désignées par les mêmes lettres que les inconnues des n équations, calculer ce que devient le polynome quand on y remplace les variables par les valeurs des inconnues qui vérifient les équations.

Les $n+1$ polynomes du premier degré à n variables formés par le polynome et les premiers membres des équations, dont le second membre est supposé nul, forment un système de rang n; il ne peut, en effet, être de rang supérieur, puisqu'il n'y a que n variables; il est bien de rang n, puisque le déterminant des n équations n'est pas nul. La relation qu'on vient d'apprendre à former entre ces $n+1$ polynomes fournit la réponse à la question posée.

Supposons, par exemple, qu'on donne les trois équations en x, y, z

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z + p &= 0, \\ a'x + b'y + c'z + p' &= 0, \\ a''x + b''y + c''z + p'' &= 0, \end{aligned}$$

dont on suppose que le déterminant ne soit pas nul, et qu'on veuille calculer la valeur du polynome $a'''x + b'''y + c'''z + p'''$. Désignons par T ce dernier polynome et par X, Y, Z les premiers membres des équations; on est dans le cas qu'on vient d'étudier, de quatre polynomes de rang 3; il suffit, en conservant les mêmes notations que dans le numéro précédent, de supposer nuls les coefficients d, d', d'', d''', e, e', e'', e''', pour voir que les polynomes X, Y, Z, T sont liés par la relation identique en x, y, z,

$$T = \alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta$$

et que la valeur cherchée de T est δ ou

$$\frac{\begin{vmatrix} a & b & c & p \\ a' & b' & c' & p' \\ a'' & b'' & c'' & p'' \\ a''' & b''' & c''' & p''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}}.$$

On voit, en supposant toujours que le dénominateur de la fraction précédente ne soit pas nul, que la condition nécessaire et suffisante pour que les quatre équations, à trois inconnues,

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0,$$

admettent une solution est que l'on ait

$$\begin{vmatrix} a & b & c & p \\ a' & b' & c' & p' \\ a'' & b'' & c'' & p'' \\ a''' & b''' & c''' & p''' \end{vmatrix} = 0,$$

et cela reste évidemment vrai, lors même que le déterminant des trois équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ serait nul, pourvu que, parmi les quatre équations, il y en ait trois dont le déterminant ne soit pas nul, pourvu, en d'autres termes, que le système des quatre polynomes X, Y, Z, T soit de rang 3.

On dit souvent que l'équation précédemment obtenue est le *résultat de l'élimination* de x, y, z entre les quatre équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $T = 0$, c'est-à-dire la condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire les coefficients de ces quatre équations pour qu'elles admettent une solution en x, y, z. Ceci, toutefois, n'est exact que si les quatre polynomes du premier degré X, Y, Z, T sont de rang 3.

Ces résultats s'étendent, évidemment, à un système de $n+1$ équations du premier degré à n inconnues, quand le système des $n+1$ premiers membres est de rang n.

157. Revenons au cas général; considérons les p polynomes du premier degré $X_1, X_2, \ldots, X_p$ à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, savoir :

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1}, \\ X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n + a_{2,n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ X_p &= a_{p,1}x_1 + a_{p,2}x_2 + \ldots + a_{p,n}x_n + a_{p,n+1}, \end{aligned}$$

et le tableau

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n}, \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ a_{p,1}, & a_{p,2}, & \ldots, & a_{p,n} \end{array}$$

des coefficients des variables; soit r le rang de ce tableau, rang qui est au plus égal au plus petit des nombres n, p. Je vais montrer, d'une part, que, parmi les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, il y en a r, et seulement r, qui sont indépendants, et, d'autre part, que tous les polynomes s'expriment au moyen de ceux d'entre eux qui sont indépendants.

Si r est nul, tous ces polynomes se réduisent à des constantes; aucun n'est indépendant. Supposons $r > 0$. Parmi les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, il y en a certainement r qui sont indépendants; à savoir ceux qui correspondent aux lignes du tableau où figurent les éléments de ce déterminant du $r^{\text{ième}}$ ordre qui, par hypothèse, n'est pas nul. Rien n'empêche, quitte à changer l'ordre des variables et des polynomes, de supposer que ce déterminant soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,r} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \ldots & a_{r,r} \end{vmatrix}.$$

Les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_r$ seront alors indépendants; si r est égal à p, les p polynomes considérés sont indépendants et l'on a certainement $p \leqq n$. Supposons $r < p$; si, aux r polynomes indépendants $X_1, X_2, \ldots, X_r$, on associe l'un des polynomes $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_n$, par exemple le polynome X_s, les $r+1$ polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_r$, X_s ne seront pas indépendants, puisque le rang r du tableau de leurs coefficients est inférieur d'une unité à leur nombre, et le dernier X_s pourra s'exprimer au moyen des r premiers par une formule telle que

$$X_s = \alpha_{s,1} X_1 + \alpha_{s,2} X_2 + \ldots + \alpha_{s,r} X_r + \alpha_{s,r+1},$$

où $\alpha_{s,1}, \alpha_{s,2}, \ldots, \alpha_{s,r}, \alpha_{s,r+1}$ désignent des constantes numériques que l'on déterminera par le procédé expliqué plus haut; les deux membres de l'égalité précédente sont identiques en $x_1, x_1. \ldots, x_n$ quand on remplace $X_1, X_2, \ldots, X_r$, X_s par leurs expressions explicites. En d'autres termes, X_s peut être regardé comme un polynome du premier degré, dont les r variables s'appelleraient $X_1, X_2, \ldots, X_r$. Je dirai, dans le même sens, que X_s *s'exprime* au moyen de $X_1, X_2, \ldots, X_r$ en sous-entendant que l'*expression* est un polynome du premier degré. Cette formule met en évidence la dépendance des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_r, X_s$, le fait que la valeur numérique de X_s est déterminée quand les valeurs des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont déterminées. En particulier, il est clair que, si l'on attribue aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_r$, la valeur de X_s se réduira à $\alpha_{s,r+1}$, en sorte que, si $\alpha_{s,r+1}$ n'est pas nul, les équations

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_r = 0, \qquad X_s = 0$$

sont incompatibles, et que, si $\alpha_{s,r+1}$ est nul, les r premières équations entraînent la dernière. Je rappelle que $\alpha_{s,r+1}$ est égal à une fraction dont le dénominateur est le déterminant Δ, et dont le numérateur est le déterminant du $(r+1)^{\text{ième}}$ ordre

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,r} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,r} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \ldots & a_{r,r} & a_{r,n+1} \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \ldots & a_{s,r} & a_{s,n+1} \end{vmatrix};$$

s est un quelconque des nombres $r+1, r+2, \ldots, n$.

Les remarques que voici sont des conséquences faciles des explications qui précèdent :

La condition nécessaire et suffisante pour que p polynomes du premier degré soient indépendants est qu'ils soient de rang p. En particulier, s'il y a plus de polynomes que de variables, les polynomes ne peuvent être indépendants.

Si p polynomes du premier degré à n variables sont de rang r, r de ces polynomes sont indépendants; il peut se faire qu'on puisse, avec ces p polynomes, former plusieurs systèmes de r polynomes indépendants, mais on ne peut en trouver $r+1$ qui soient indépendants, car, s'il y avait un système de $r+1$ polynomes qui fussent indépendants, ce système serait de rang $r+1$: il y aurait donc un déterminant non nul d'ordre $r+1$ tiré du tableau des coefficients des n variables. En d'autres termes, le rang d'un système de polynomes du premier degré est le nombre maximum de polynomes indépendants que l'on puisse trouver parmi eux.

Si le système de polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est de rang r et si $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont indépendants, les autres polynomes X_{r+1}, X_{r+2}, ..., X_p s'expriment au moyen de ceux-là, comme on l'a vu, par des formules telles que

$$X_s = \alpha_{s,1}X_1 + \alpha_{s,2}X_2 + \ldots + \alpha_{s,r}X_r + \alpha_{s,r+1}.$$

Les $p-r$ polynomes du premier degré en X_1, X_2, ..., X_p

$$X_s - \alpha_{s,1}X_1 - \alpha_{s,2}X_2 - \ldots - \alpha_{s,r}X_r - \alpha_{s,r+1}$$
$$(s = r+1, r+2, \ldots, p),$$

qui deviennent identiquement nuls quand on y remplace X_1, X_2, ..., X_r par leurs expressions explicites en x_1, x_2, ..., x_n sont indépendants, *lorsqu'on y regarde les lettres* X_1, X_2, ..., X_p *comme désignant des variables,* comme il résulte du n° 153. Ainsi, quand le système X_1, X_2, ..., X_p est de rang $r < p$, il y a $p-r$ polynomes du premier degré en X_1, X_2, ..., X_p, indépendants quand on regarde ces lettres comme représentant des variables, et qui s'annulent identiquement lorsqu'on remplace X_1, X_2, ..., X_p par leurs expressions explicites en x_1, x_2, ..., x_n.

Réciproquement, l'existence d'un seul polynome du premier degré en X_1, X_2, ..., X_p, à coefficients non tous nuls, qui devienne identiquement nul quand on y remplace X_1, X_2, ..., X_p par leurs expressions x_1, x_2, ..., x_n, ou, ce qui revient au même, l'existence d'une seule relation de la forme

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p + \lambda_{p+1} = 0,$$

dans laquelle tous les nombres λ_1, λ_2, ..., λ_{p+1} ne sont pas nuls, et qui est identiquement vérifiée quand on y remplace X_1, X_2, ..., X_p par leurs expressions explicites en x_1, x_2, ..., x_n, entraîne la dépendance de X_1, X_2, ..., X_p; car, si, dans cette relation, le coefficient de l'un des polynomes X_1, X_2, ..., X_p n'est pas nul, la valeur de ce polynome-là, en vertu de l'identité supposée, est déterminée par la valeur de tous les autres polynomes. D'ailleurs, dans cette identité, les coefficients de X_1, X_2, ..., X_p ne peuvent être tous nuls, puisque, s'il en était ainsi, l'identité même exigerait que λ_{p+1} fût nul.

Désignons par P_1, P_2, ..., P_ν ν polynomes du premier degré en X_1, X_2, ..., X_p, de rang ρ, quand on y regarde X_1, X_2, ..., X_p comme les variables; lorsque, dans P_1, P_2, ..., P_ν, on remplace X_1,

$X_2, \ldots, X_p$ par leurs expressions explicites en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ deviennent des polynomes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si, comme je le suppose dans ce qui suit, les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont indépendants, les polynomes P_1, $P_2, \ldots, P_\nu$, regardés comme des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont encore de rang ρ. C'est ce que je vais établir.

Supposons d'abord que $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, regardés comme des polynomes en $X_1, X_2, \ldots, X_p$, soient indépendants; je vais montrer qu'ils sont encore indépendants quand on les regarde comme des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En effet, on peut alors trouver des valeurs $A_1, A_2, \ldots, A_p$, pour $X_1, X_2, \ldots, X_p$, qui fassent acquérir à $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ telles valeurs que l'on voudra, puis des valeurs pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui fassent acquérir à $X_1, X_2, \ldots, X_p$ les valeurs $A_1, A_2, \ldots, A_p$, et, par suite, à $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ telles valeurs que l'on veut.

Si, maintenant, $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, regardés comme des polynomes en $X_1, X_2, \ldots, X_p$, sont de rang ρ, on peut, en restant au même point de vue, supposer que $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$ soient indépendants; les autres polynomes $P_{\rho+1}, P_{\rho+2}, \ldots, P_\nu$ s'expriment alors au moyen de P_1, $P_2, \ldots, P_\rho$ par des relations qui sont identiques en $X_1, X_2, \ldots, X_p$, qui le sont encore en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, quand on a remplacé X_1, $X_2, \ldots, X_p$ par leurs expressions explicites. Mais $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$, regardés comme des polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont indépendants, d'après ce qu'on vient de dire; les autres polynomes $P_{\rho+1}, \ldots, P_\nu$ dépendent de ceux-là; la proposition énoncée est donc démontrée.

Le rang ρ des polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ est égal ou inférieur à p, ainsi qu'il est évident lorsqu'on regarde, dans ces polynomes, $X_1, X_2, \ldots, X_p$ comme les variables : ceci subsiste, lors même que les polynomes (en $x_1, x_2, \ldots, x_n$) $X_1, X_2, \ldots, X_p$ ne sont pas indépendants, car s'ils sont de rang r, on peut, en supposant $X_1, X_2, \ldots$, X_r indépendants, exprimer les polynomes suivants $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots$, X_p au moyen de $X_1, X_2, \ldots, X_r$, puis remplacer $X_{r+1}, X_{r+2}, \ldots, X_p$ par leurs expressions dans $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$, qui deviennent alors des polynomes du premier degré en $X_1, X_2, \ldots, X_r$, polynomes dont le rang, si on les considère comme des polynomes en $X_1, X_2, \ldots, X_r$, ne peut dépasser r; or ce rang reste le même quand on remplace les polynomes indépendants $X_1, X_2, \ldots, X_r$ par leurs expressions explicites en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Il résulte de là que p polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et de rang r, qui, comme on l'a vu, peuvent s'exprimer au moyen de r polynomes indépendants, des r polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_r$ par exemple, si ceux-là sont indépendants, ne peuvent certainement pas s'exprimer au moyen d'un moindre nombre de polynomes, puisque, si $X_1, X_2, \ldots, X_r$ s'exprimaient au moyen de moins de r polynomes, ils ne seraient pas indépendants. Le rang d'un système de polynomes du premier degré est le nombre minimum de polynomes du premier degré au moyen desquels ils puissent s'exprimer.

158. Ce qui précède permet de compléter ce que l'on a dit plus haut de la résolution d'un système d'équations du premier degré.

Plaçons-nous de suite dans le cas le plus général, celui où l'on a affaire à p équations à n inconnues. Je désignerai, en conservant d'ailleurs les notations précédentes, par $X_1, X_2, \ldots, X_p$ les premiers membres de ces équations, et je désignerai par r le rang de ce système de polynomes du premier degré.

Si r est égal à p, les équations admettent certainement une solution; dans ce cas, on a nécessairement $n \geqq p$. Si n est égal à p, il y a une solution et une seule. Si le nombre n des inconnues dépasse le nombre p des équations, on considérera celles des inconnues dont les coefficients sont les éléments de ce déterminant du $p^{\text{ième}}$ ordre qui, par hypothèse, n'est pas nul : supposons que ces inconnues soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$; on résoudra les équations par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$, comme si les $n-p$ autres inconnues $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ étaient connues, en appliquant la méthode du n° 150; c'est alors, dans chaque équation, un polynome en $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ qui joue le rôle de terme tout connu; les expressions que l'on trouve ainsi pour $x_1, x_2, \ldots, x_p$ étant linéaires par rapport aux termes tout connus, sont des polynomes du premier degré en $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots. x_n$. D'ailleurs, d'après le n° 150, les équations qui expriment ainsi $x_1, x_2, \ldots, x_p$ au moyen de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ sont équivalentes au système proposé; en sorte qu'on vérifie ce système en attribuant à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ des valeurs arbitraires et en prenant pour x_1, $x_2, \ldots, x_p$ les valeurs qui en résultent et que, réciproquement, dans toute solution du système, les valeurs des inconnues doivent être liées par les relations auxquelles on est ainsi parvenu. En d'autres termes, les équations qui expriment $x_1, x_2, \ldots, x_p$ au moyen de $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n$ fournissent la *solution la plus générale* du système proposé.

Supposons $r < p$; il y a, parmi les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, r polynomes indépendants; je suppose que ce soient les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_r$, et que le déterminant des coefficients des inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_r$ dans ces polynomes ne soit pas nul; on résoudra, comme on vient de l'expliquer, les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_r = 0$ par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_r$, qui, dans le cas où r est inférieur à n, s'exprimeront ainsi par des polynomes du premier degré en $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, et l'on substituera ces polynomes, à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_r$, dans les équations restantes $X_{r+1} = 0$, $X_{r+2} = 0$, ..., $X_p = 0$. Les inconnues $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ disparaîtront d'elles-mêmes; en effet, si l'on désigne par X_s l'un des polynomes $X_{r+1}, \ldots, X_p$, on a entre ce polynome et les polynomes indépendants X_1, $X_2, \ldots, X_r$ une relation identique, à coefficients constants, de la forme

$$X_s = \alpha_{s,1} X_1 + \alpha_{s,2} X_2 + \ldots + \alpha_{s,r} X_r + \alpha_{s,r+1}.$$

Quand on fait la substitution, $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont nuls, quelles que soient les valeurs attribuées à $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$; X_s se réduit donc identiquement à la constante $\alpha_{s,r+1}$. Si l'une des constantes $\alpha_{s,r+1}$, où s désigne l'un quelconque des nombres $r+1$, $r+2$, ..., n, n'est pas nulle, les équations proposées sont incompatibles; si toutes les constantes $\alpha_{s,r+1}$, ou tous les déterminants du $(r+1)^{\text{ième}}$ ordre :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,r} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,r} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r,1} & a_{r,2} & \ldots & a_{r,r} & a_{r,n+1} \\ a_{s,1} & a_{s,2} & \ldots & a_{s,r} & a_{s,n+1} \end{vmatrix},$$

auxquels on donne quelquefois le nom de *déterminants caractéristiques* du système d'équations, sont nuls, les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_r = 0$ entraînent les équations $X_{r+1} = 0$, $X_{r+2} = 0$, ..., $X_p = 0$: donc la solution la plus générale est fournie par les expressions de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ au moyen de $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$, que l'on a commencé par former.

On n'oubliera pas qu'on est certainement dans le cas $r < p$, si l'on a $n < p$.

En résumé, un système d'équations du premier degré peut avoir une solution et une seule ($p = n = r$), peut être impossible ($r < p$, un déterminant caractéristique non nul), peut admettre une infinité de solutions; dans ce dernier cas, la solution la plus générale s'obtient en laissant $n - r$ inconnues arbitraires, les r autres s'expriment au moyen de celles-là.

159. Les théories précédentes, relatives aux systèmes de polynomes du premier degré et aux équations du premier degré, se simplifient notablement quand on suppose homogènes tous les polynomes auxquels on a affaire, quand on suppose que, dans les équations, les termes tout connus sont nuls : les équations sont dites alors *linéaires;* au lieu de l'expression *polynomes homogènes du premier degré* j'emploierai l'expression *formes linéaires*. Il suffira, pour se placer dans ce cas, sur lequel je vais maintenant m'arrêter, de supposer, dans les notations antérieures, que les quantités $a_{1,n+1}$, $a_{2,n+1}$, ..., $a_{p,n+1}$ sont toutes nulles. Les définitions de l'indépendance et du rang subsistent sans modifications.

On remarquera d'abord que, si les équations en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_p = 0$$

sont linéaires, au sens que je viens de dire, le cas d'impossibilité ne peut se présenter, puisque ces équations sont évidemment vérifiées quand on suppose toutes les variables nulles. Au surplus, on reconnaît immédiatement que, dans ce cas, les déterminants que l'on a appelés *caractéristiques* sont tous nuls.

On remarquera ensuite que, si les formes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il ne peut exister entre elles de relation identique, à coefficients constants, de la forme

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p + \lambda_{p+1} = 0,$$

sans que λ_{p+1} soit nul : en effet, la relation précédente doit être vérifiée quand on suppose nulles toutes les variables et, par conséquent, toutes les formes $X_1, X_2, \ldots, X_p$; en d'autres termes, la relation considérée doit être elle-même *linéaire* en $X_1, X_2, \ldots, X_p$:

on peut donc énoncer la proposition suivante : la condition nécessaire et suffisante pour que les formes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ soient indépendantes est qu'il n'existe pas de constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non toutes nulles telles que l'on ait identiquement, en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p = 0.$$

Au contraire l'existence de telles constantes est la condition nécessaire et suffisante pour que les formes considérées soient dépendantes.

En particulier, si les formes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont de rang $r < p$ et si les r formes $X_1, X_2, \ldots, X_r$ sont indépendantes, les $p - r$ autres s'exprimeront *linéairement* au moyen de celles-là, et seront nulles pour toutes les valeurs des variables qui annulent $X_1, X_2, \ldots, X_r$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que p formes linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ soient de rang inférieur ou égal à r consistent en ce que les déterminants du $(r+1)^{\text{ième}}$ ordre tirés du Tableau des coefficients soient tous nuls.

Revenons aux équations linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_p = 0.$$

Supposons d'abord que les formes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ soient indépendantes, ce qui exige $p \leqq n$. Si l'on a $p = n$, les équations n'admettent qu'une solution, à savoir la solution évidente $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots$, $x_n = 0$:

n équations linéaires à n inconnues dont le déterminant n'est pas nul n'admettent pas d'autre solution que la solution où toutes les inconnues sont nulles.

Si l'on a $p < n$, p inconnues, dont les coefficients, dans les formes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, sont les éléments d'un déterminant non nul du $p^{\text{ième}}$ ordre, s'expriment *linéairement* au moyen des $n - p$ autres, qui restent arbitraires, et l'on obtient ainsi la solution la plus générale du système d'équations. Que les expressions des p inconnues au moyen des $n - p$ autres soient effectivement linéaires, c'est ce qui résulte évidemment des formules du n° 150.

Supposons maintenant que les p formes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ soient de rang $r < p$, et que les r formes $X_1, X_2, \ldots, X_r$ soient indépendantes.

Les $p - r$ autres s'expriment linéairement au moyen de celles-là et s'annulent toutes quand les r premières sont nulles; le système des équations proposées est équivalent au système

$$X_1 = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad X_r = 0;$$

r inconnues s'expriment linéairement au moyen des $n - r$ autres, et l'on obtient ainsi la solution la plus générale des équations proposées.

En particulier, si l'on a n équations linéaires à n inconnues, dont le déterminant soit nul, on peut satisfaire à ces équations en laissant certaines inconnues arbitraires. Le système proposé admet des solutions où toutes les inconnues ne sont pas nulles. La condition nécessaire et suffisante pour que n équations linéaires à n inconnues admettent une solution où toutes les inconnues ne sont pas nulles est que le déterminant de ces équations soit nul. C'est le sens précis qu'il faut attribuer à cette proposition : la condition obtenue en écrivant que le déterminant de n équations linéaires à n inconnues est nul est le résultat de l'élimination de ces n inconnues entre les n équations.

On observera qu'une proposition énoncée au n° 148 se trouve maintenant entièrement démontrée :

Quand un déterminant est nul, les éléments de toutes les lignes de ce déterminant vérifient une même équation linéaire, dont tous les coefficients ne sont pas nuls.

Il convient de remarquer que, si p est plus petit que n, les équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $\ldots$, $X_p = 0$ admettent toujours des solutions où les inconnues ne sont pas toutes nulles.

160. Le cas où l'on a affaire à $n - 1$ équations linéaires à n inconnues se présente fréquemment et il convient de s'y arrêter un instant.

On a déjà traité au n° 133 des équations

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 0, \\ a'x + b'y + c'z &= 0, \end{aligned}$$

et l'on a vu que la solution la plus générale de ces équations, dans le cas où les trois déterminants $bc' - b'c$, $ca' - c'a$, $ab' - a'b$ ne sont pas nuls à la fois, c'est-à-dire dans le cas où les deux formes linéaires égalées à o sont du rang 2, s'obtenait en prenant x, y, z proportionnels à ces déterminants. Ceux-ci ne sont autre chose que les mineurs relatifs aux éléments de la troisième ligne d'un déterminant du troisième ordre dont les deux premières lignes sont

$$\begin{matrix} a & b & c, \\ a' & b' & c'. \end{matrix}$$

Le fait que les trois mineurs, mis à la place de x, y, z, vérifient les équations proposées est un cas particulier des relations entre les éléments d'un déterminant et ses premiers mineurs (n° 144). Si l'un des trois déterminants est nul, sans que les trois soient nuls, l'inconnue qui devrait être proportionnelle à ce mineur est nulle.

Si les trois mineurs sont nuls, et si l'on écarte le cas où tous les coefficients sont nuls, les deux formes linéaires sont de rang 1 ; on peut résoudre l'une d'elles par rapport à une inconnue dont le coefficient ne soit pas nul, en laissant les deux autres arbitraires, on obtient ainsi la solution la plus générale des équations proposées.

Considérons maintenant trois équations à quatre inconnues

$$\begin{aligned} ax + by + cz + dt &= 0, \\ a'x + b'y + c'z + d't &= 0, \\ a''x + b''y + c''z + d''t &= 0, \end{aligned}$$

et supposons que le tableau des coefficients

$$\begin{matrix} a & b & c & d, \\ a' & b' & c' & d', \\ a'' & b'' & c'' & d'', \end{matrix}$$

ou les trois formes linéaires égalées à o, soit de rang 3. En regardant les trois lignes de ce tableau comme les trois premières lignes d'un déterminant du quatrième ordre, et en désignant par A''', B''', C''', D''' les mineurs de ce déterminant relatifs aux éléments de la quatrième ligne, mineurs qui, par hypothèse, ne sont pas tous nuls, il résulte des identités établies au n° 144 que les équations proposées sont vérifiées quand on prend x, y, z, t égaux à A''', B''', C''', D''' et par conséquent aussi, à cause de l'homogénéité des équations, quand on prend x,

y, z, t proportionnels à A''', B''', C''', D'''; c'est là d'ailleurs la solution la plus générale; dans cette solution, en effet, l'une des inconnues x, y, z, t doit rester arbitraire; or, on peut choisir le facteur de proportionnalité de manière à faire acquérir à cette inconnue telle valeur qu'on voudra. Si l'un des déterminants A''', B''', C''', D''' est nul sans que tous les autres le soient, cela signifie que l'inconnue qui lui est proportionnelle doit être nulle.

Si le tableau des coefficients était de rang 2, il y aurait, parmi les trois formes linéaires, deux formes qui seraient indépendantes, les deux dernières par exemple; l'un des six déterminants du second ordre qu'on peut tirer du tableau de leurs coefficients, par exemple le déterminant $b'c'' - b''c'$, ne serait pas nul; on résoudrait alors les deux dernières équations par rapport à y et à z; on en tirerait des formules telles que

$$\begin{aligned} y &= \alpha x + \beta t, \\ z &= \alpha' x + \beta' t, \end{aligned}$$

qui, en laissant x et t indéterminés, fourniraient la solution la plus générale des équations proposées. Si le tableau des coefficients des trois formes était de rang 1, il n'y aurait qu'une forme indépendante; on résoudrait l'équation obtenue en l'égalant à 0 par rapport à l'une des inconnues, dont le coefficient n'est pas nul, cette inconnue s'exprimerait linéairement au moyen des trois autres, qui resteraient arbitraires.

§ 3. — MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS.

161. Considérons les trois formes linéaires en x_1, x_2, x_3

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ X_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{aligned}$$

et supposons qu'on y remplace respectivement x_1, x_2, x_3 par

$$\begin{aligned} &b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + b_{31}y_3, \\ &b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + b_{32}y_3, \\ &b_{13}y_1 + b_{23}y_2 + b_{33}y_3; \end{aligned}$$

elles se changeront en des formes linéaires en y_1, y_2, y_3, savoir :

$$\begin{aligned}
Y_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3,\\
Y_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3,\\
Y_3 &= c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13},\\
c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13},\\
c_{31} &= a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13},\\[4pt]
c_{12} &= a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{23},\\
c_{22} &= a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{23},\\
c_{32} &= a_{31}b_{21} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{23},\\[4pt]
c_{13} &= a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33},\\
c_{23} &= a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33},\\
c_{33} &= a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33}\,;
\end{aligned}$$

soient maintenant

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{vmatrix}.$$

Les formes Y_1, Y_2, Y_3 en y_1, y_2, y_3 sont indépendantes, lorsque les formes X_1, X_2, X_3 en x_1, x_2, x_3 sont indépendantes ainsi que les formes en y_1, y_2, y_3 qu'on substitue à x_1, x_2, x_3 (n° 157) ; elles ne le sont pas quand les formes X_1, X_2, X_3 ne sont pas indépendantes ; elles ne le sont pas non plus quand les formes en y_1, y_2, y_3 que l'on substitue à x_1, x_2, x_3 ne sont pas indépendantes ; car, si ces dernières formes ne sont pas indépendantes, elles peuvent s'annuler pour des valeurs non nulles de y_1, y_2, y_3 et ces valeurs annulent aussi, nécessairement, les formes Y_1, Y_2, Y_3 [1].

En d'autres termes le déterminant C n'est pas nul quand les deux déterminants A, B sont différents de zéro ; C est nul quand l'un de ces déterminants est nul. En d'autres termes encore, les valeurs des

[1] On arrive à la même conclusion (n° 157) en remarquant que les trois formes y_1, y_2, y_3 étant dépendantes peuvent s'exprimer au moyen de deux d'entre elles, au plus, en sorte que Y_1, Y_2, Y_3, s'exprimant linéairement au moyen de deux formes, ne peuvent être indépendantes.

coefficients $a_{11}, \ldots, a_{33}, b_{11}, \ldots, b_{33}$ qui annulent C, ou le produit AB, sont les mêmes.

On peut, en suivant la voie que je me contente d'indiquer, montrer que l'on a $C = AB$; mais je préfère établir cette égalité en partant de la façon dont le déterminant C est formé au moyen des éléments de A et de B.

162. Chaque élément de ce déterminant C est la somme des produits des éléments d'une ligne de A par les éléments correspondants d'une ligne de B; l'élément c_{rs}, par exemple, est la somme $a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + a_{r3}b_{s3}$ des éléments de la $r^{\text{ième}}$ ligne de A respectivement multipliés par les éléments correspondants de la $s^{\text{ième}}$ ligne de B : cet élément c_{rs} appartient à la $r^{\text{ième}}$ ligne et à la $s^{\text{ième}}$ colonne de C.

Supposons C écrit explicitement, c'est-à-dire chaque lettre c_{rs} remplacée par la somme $a_{r1}b_{s1} + a_{r2}b_{s2} + a_{r3}b_{s3}$ qu'elle représente : chaque élément de C est ainsi la somme de trois termes. Convenons de regarder, dans une même colonne de C, dans la $s^{\text{ième}}$, par exemple,

$$\begin{array}{l} a_{11}b_{s1} + a_{12}b_{s2} + a_{13}b_{s3}, \\ a_{21}b_{s1} + a_{22}b_{s2} + a_{23}b_{s3}, \\ a_{31}b_{s1} + a_{32}b_{s2} + a_{33}b_{s3}, \end{array}$$

les éléments écrits les uns sous les autres comme formant une colonne partielle, et de regarder ainsi cette $s^{\text{ième}}$ colonne de C comme la réunion de trois colonnes partielles. On voit que chacune de ces colonnes partielles provient d'une colonne de A, dont les éléments sont tous multipliés par un même élément (b_{s1}, b_{s2}, ou b_{s3}) de B.

D'après ce que l'on a dit au nº 146, C peut être regardé comme la somme de $3 \times 3 \times 3 = 27$ déterminants, dont chacun est formé en associant trois colonnes partielles prises respectivement dans la première, la seconde, la troisième colonne de C. L'un de ces déterminants sera, par exemple,

$$C_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} a_{1\alpha}b_{1\alpha} & a_{1\beta}b_{2\beta} & a_{1\gamma}b_{3\gamma} \\ a_{2\alpha}b_{1\alpha} & a_{2\beta}b_{2\beta} & a_{2\gamma}b_{3\gamma} \\ a_{3\alpha}b_{1\alpha} & a_{3\beta}b_{2\beta} & a_{3\gamma}b_{3\gamma} \end{vmatrix}.$$

Il a été formé en associant la $\alpha^{\text{ième}}$ colonne partielle de la première colonne de C, la $\beta^{\text{ième}}$ colonne partielle de la seconde colonne de C, la $\gamma^{\text{ième}}$ colonne partielle de la troisième colonne de C; chacun des indices α, β, γ est susceptible de prendre les valeurs 1, 2, 3. Le précédent déterminant est égal au produit de $b_{1\alpha}b_{2\beta}b_{3\gamma}$ par le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & a_{1\gamma} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & a_{2\gamma} \\ a_{3\alpha} & a_{3\beta} & a_{3\gamma} \end{vmatrix};$$

si deux des indices α, β, γ sont égaux, le déterminant a deux colonnes identiques; il est identiquement nul. Les seuls déterminants de cette sorte qui ne sont pas nuls s'obtiennent en supposant distinctes les valeurs de α, β, γ : chacun d'eux correspond ainsi à l'un des arrangements trois à trois des nombres 1, 2, 3 : ils sont au nombre de six.

Le précédent déterminant, si l'on suppose que α, β, γ soient les nombres 1, 2, 3 rangés dans un certain ordre, n'est autre chose que le déterminant A, dont on a rangé les colonnes dans un certain ordre; pour ramener ces colonnes à occuper le même ordre que dans A, il faut opérer sur les numéros α, β, γ un certain nombre de transpositions, nombre qui ne diffère que par un nombre pair du nombre d'inversions qui se trouvent dans l'arrangement $\alpha\beta\gamma$. Si l'on désigne par i ce nombre d'inversions, on voit que l'on aura

$$C_{\alpha\beta\gamma} = (-1)^i b_{1\alpha}b_{2\beta}b_{3\gamma}A;$$

dans les six déterminants non identiquement nuls $C_{\alpha\beta\gamma}$, qui correspondent aux six arrangements trois à trois des numéros 1, 2, 3, on peut mettre ainsi A en facteur, l'autre facteur $(-1)^i b_{1\alpha}b_{2\beta}b_{3\gamma}$, où i est le nombre d'inversions de l'arrangement $\alpha\beta\gamma$, est un terme de B; on obtient les six termes de B en considérant successivement les six arrangements trois à trois; l'égalité $C = BA$ est donc démontrée.

La démonstration, bien que faite sur deux déterminants du troisième ordre, est générale, et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Si l'on considère les deux déterminants du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

leur produit AB peut être mis sous forme d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

dans lequel chaque élément

$$c_{rs} = a_{r1} b_{s1} + a_{r2} b_{s2} + \dots + a_{rn} b_{sn}$$

s'obtient en ajoutant les produits des éléments de la $r^{\text{ième}}$ ligne de A par les éléments correspondants de la $s^{\text{ième}}$ ligne de B.

Il convient de s'habituer à appliquer cette règle, indépendamment de la notation précédente. On a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\,\alpha + b\,\beta & a\,\alpha' + b\,\beta' \\ a'\alpha + b'\beta & a'\alpha' + b'\beta' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma & a\,\alpha' + b\,\beta' + c\,\gamma' & a\,\alpha'' + b\,\beta'' + c\,\gamma'' \\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma & a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' & a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma & a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma' & a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' \end{vmatrix}.$$

Puisque, dans un déterminant, on peut intervertir les lignes et les colonnes, on voit que le produit de deux déterminants pourra s'écrire de façons diverses; on aura par exemple

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha + a'\alpha' & a\beta + a'\beta' \\ b\alpha + b'\alpha' & b\beta + b'\beta' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\alpha + a'\beta & b\alpha + b'\beta \\ a\beta + a'\beta' & b\beta + b'\beta' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\,\alpha + b\,\alpha' & a\,\beta + b\,\beta' \\ a'\alpha + b'\alpha' & a'\beta + b'\beta' \end{vmatrix}.$$

La formule qui donne l'expression du produit de deux déterminants s'applique évidemment au carré d'un déterminant; on a, par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & aa'+bb' \\ aa'+bb' & a'^2+b'^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+a'^2 & ab+a'b' \\ ab+a'b' & b^2+b'^2 \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}(ab'-a'b)^2 &= (a^2+b^2)(a'^2+b'^2)-(aa'+bb')^2 \\ &= (a^2+a'^2)(b^2+b'^2)-(ab+a'b')^2;\end{aligned}$$

de même

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & aa'+bb'+cc' & aa''+bb''+cc'' \\ aa'+bb'+cc' & a'^2+b'^2+c'^2 & a'a''+b'b''+c'c'' \\ aa''+bb''+cc'' & a'a''+b'b''+c'c'' & a''^2+b''^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+a'^2+a''^2 & ab+a'b'+a''b'' & ac+a'c'+a''c'' \\ ab+a'b'+a''b'' & b^2+b'^2+b''^2 & bc+b'c'+b''c'' \\ ac+a'c'+a''c'' & bc+b'c'+b''c'' & c^2+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}.$$

Il est clair que le carré d'un déterminant peut être mis sous la forme d'un déterminant symétrique du même ordre.

163. Le théorème sur la multiplication des déterminants est d'ailleurs susceptible d'extension. La même loi de formation qui permet de déduire les éléments du déterminant produit de deux tableaux carrés, peut s'appliquer à deux tableaux rectangulaires comprenant respectivement le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes.

Considérons par exemple les deux tableaux

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{matrix}$$

dont chacun comporte deux lignes et deux colonnes; on peut en déduire un déterminant du second ordre

$$\begin{vmatrix} a\alpha+b\beta+c\gamma & a\alpha'+b\beta'+c\gamma' \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma & a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma' \end{vmatrix},$$

dont chaque élément est la somme des éléments d'une ligne du premier tableau respectivement multipliés par les éléments correspondants d'une ligne du second tableau. Ce déterminant du second ordre peut être décomposé en neuf déterminants, par un procédé analogue à celui que l'on a employé dans la démonstration du théorème fondamental. En n'écrivant que les déterminants qui ne sont pas nuls identiquement, on trouve que le déterminant proposé est égal à

$$\begin{vmatrix} a\alpha & b\beta' \\ a'\alpha & b'\beta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a\alpha & c\gamma' \\ a'\alpha & c'\gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b\beta & a\alpha' \\ b'\beta & a'\alpha' \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} b\beta & c\gamma' \\ b'\beta & c'\gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c\gamma & a\alpha' \\ c'\gamma & a'\alpha' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c\gamma & b\beta' \\ c'\gamma & b'\beta' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}.$$

En d'autres termes, on a l'identité

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)(a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma') - (a\alpha' + b\beta' + c\gamma')(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma)$$
$$= (bc' - b'c)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + (ca' - c'a)(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + (ab' - a'b)(\alpha\beta' - \alpha'\beta);$$

et, en particulier,

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$
$$= (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2.$$

Cette dernière identité tient un rôle assez important en Géométrie analytique. Celle d'où elle a été déduite permet d'ajouter, à la formule du n° 161 relative au produit de deux déterminants du troisième ordre, des identités intéressantes concernant les premiers mineurs du déterminant produit. Si, en effet, on reprend les notations de ce n° 161 et si l'on désigne par A_{rs}, B_{rs}, C_{rs} les mineurs des déterminants A, B, C relatifs aux éléments a_{rs}, b_{rs}, c_{rs} des déterminants A, B, C, on trouve sans peine la relation

$$C_{rs} = A_{r1} B_{s1} + A_{r2} B_{s2} + A_{r3} B_{s3},$$

qui en résume neuf autres, puisqu'on peut donner séparément aux indices r, s la valeur 1, 2, 3.

On désigne sous le nom de déterminant *adjoint* d'un déterminant donné le déterminant du même ordre dont les éléments sont les premiers mineurs du déterminant donné.

Ainsi, en désignant, comme au n° 144, par A, B, C; A', B', C';

A'', B'', C'' les mineurs du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix},$$

relatifs aux éléments a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''; le déterminant adjoint de Δ sera

$$D = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}.$$

Le produit de ces deux déterminants est

$$\Delta D = \begin{vmatrix} A\,a + B\,b + C\,c & A\,a' + B\,b' + C\,c' & A\,a'' + B\,b'' + C\,c'' \\ A'a + B'b + C'c & A'a' + B'b' + C'c' & A'a'' + B'b'' + C'c'' \\ A''a + B''b + C''c & A''a' + B''b' + C''c' & A''a'' + B''b'' + C''c'' \end{vmatrix}$$

ou, en tenant compte des identités du n° 144,

$$\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix} = \Delta^3.$$

Si donc Δ n'est pas nul, on a $D = \Delta^2$. Cette égalité, établie pour toutes les valeurs de a, b, $\ldots$, c'' qui n'annulent pas Δ, a lieu identiquement en a, b, $\ldots$, c''.

L'adjoint d'un déterminant du troisième ordre est égal au carré de ce déterminant : l'adjoint d'un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre est la puissance $(n-1)^{\text{ième}}$ de ce déterminant; la démonstration est la même.

On a signalé au n° 135 les relations de la forme

$$B'C'' - B''C' = \Delta a,$$

qui lient les premiers mineurs du déterminant adjoint de Δ aux éléments de Δ. On démontre, d'une façon générale, que tous les mineurs du déterminant adjoint d'un déterminant Δ du $n^{\text{ième}}$ ordre, sauf les éléments mêmes de ce déterminant adjoint, sont divisibles par Δ. En particulier, si Δ est nul, tous les mineurs (sauf les éléments) du déterminant adjoint sont nuls.

§ 4. — MÉTHODES D'ÉLIMINATION D'EULER, SYLVESTER ET BÉZOUT.

164. Un polynome en x, de degré n,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x^1 + a_n x^0,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des constantes numériques a le même aspect qu'une forme linéaire à $n+1$ variables, qui s'appelleraient $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$, et où les exposants seraient regardés comme des indices. Dans certaines questions, les relations qui existent entre ces variables et le fait que la première $x^0 = 1$ n'est pas une variable, n'interviennent pas. Quelques propositions de la théorie des systèmes de formes linéaires s'appliquent ainsi à la théorie des systèmes de polynomes en x.

Lorsque, en se plaçant à ce point de vue, on considère un système de polynomes en x comme un système de formes linéaires en $x^0, x^1, x^2, \ldots$, le nombre de ces variables est le degré, augmenté d'une unité, de celui de ces polynomes qui a le plus haut degré; quelques-unes de ces variables manqueront dans ceux de ces polynomes qui seront d'un degré moindre, c'est-à-dire que leurs coefficients devront être regardés comme égaux à 0. Il est commode de regarder tous les polynomes d'un système comme étant d'un même degré, égal ou supérieur au plus haut degré de tous ces polynomes, quelques-uns de leurs premiers coefficients pouvant être nuls. Quand on parle du tableau des coefficients de ce système de polynomes, on suppose qu'ils soient tous écrits les uns sous les autres, de manière que les termes de même degré soient dans une même colonne verticale, et que les coefficients des termes manquants soient remplacés par des zéros. S'il s'agit par exemple des polynomes

$$x^4 + 1, \quad x^3 + 2x^2, \quad x^2 - x + 3$$

le tableau des coefficients sera

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{matrix}$$

S'il plaît de regarder les mêmes polynomes comme des polynomes du sixième degré dans lesquels les termes du sixième et du cinquième degré manqueraient toujours, dans lesquels les variables x^6 et x^5 auraient toujours des coefficients égaux à 0, le tableau des coefficients sera

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{matrix}$$

Ce second tableau est du même rang que le premier (n° 151).

165. On dit que p polynomes (en x), $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont *linéairement* indépendants quand il n'existe pas de constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non toutes nulles, telles que l'on ait identiquement en x

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_p X_p = 0.$$

Si de telles constantes existent, les polynomes sont *linéairement dépendants*. Cette identité implique que, dans le premier membre, les coefficients des diverses puissances de x, et le terme indépendant de x, soient nuls séparément. C'est exactement les mêmes conditions que l'on trouverait si l'on considérait les polynomes comme formant un système de formes linéaires en $x^0, x^1, x^2, \ldots$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ soient linéairement indépendants est que le tableau de leurs coefficients soit de rang p; la condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes soient linéairement dépendants est que ce tableau soit de rang inférieur à p.

Supposons tous les polynomes de degré inférieur à n, et regardons-les, conformément à une convention antérieurement expliquée, comme étant tous du degré $n-1$.

Si l'on a $p > n$, les polynomes sont linéairement dépendants. Si l'on a $p = n$, le tableau des coefficients est un carré, que l'on peut regarder comme un déterminant; en écrivant que ce déterminant est nul, on écrit la condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes soient linéairement dépendants.

Si l'on a $p < n$, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les polynomes soient linéairement dépendants s'obtiendront en écrivant que tous les déterminants d'ordre p tirés du tableau sont nuls. Ces conditions étant vérifiées, si l'on veut déterminer les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, on a à résoudre un système d'équations linéaires dont ces constantes sont les inconnues, et qui admet certainement un système de solutions qui ne sont pas toutes nulles.

Considérons n polynomes (en x), $X_1, X_2, \ldots, X_n$ tous de degré inférieur à n, que nous traiterons encore comme étant tous de degré $n-1$; supposons qu'ils aient un diviseur commun A de degré k; les quotients $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ obtenus en divisant $X_1, X_2, \ldots, X_n$ par A seront de degré inférieur à $n-k$; par conséquent $n-k+1$ d'entre eux seront liés par une relation linéaire telle que

$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_{n-k+1} Y_{n-k+1} = 0,$$

cette relation, identique en x, restera telle si l'on en multiplie le premier membre par A; donc $n-k+1$ quelconques des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont linéairement dépendants; par suite, le déterminant, d'ordre n, formé avec les coefficients des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, sera au plus de rang $n-k$.

Qu'il en soit ainsi, c'est une condition *nécessaire* pour que les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ aient un diviseur commun de degré égal ou supérieur à k.

Si, en regardant toujours les n polynomes comme étant de degré $n-1$, on convient de dire qu'ils ont un diviseur commun de degré *rectifié* égal à k (n° 84), pour dire qu'ils ont un diviseur commun de degré vrai $k-\alpha$, et que les α premiers coefficients sont nuls dans tous les polynomes à la fois, en sorte que chacun d'eux soit d'un degré vrai au plus égal à $n-\alpha-1$, on peut encore affirmer que le tableau des coefficients des polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ doit être au plus du rang $n-\alpha-(k-\alpha)=n-k$ pour qu'ils admettent un diviseur de degré rectifié égal à k; *a fortiori* cette condition doit-elle être vérifiée si les polynomes ont un diviseur de degré rectifié supérieur à k.

166. Mon but est maintenant d'obtenir, sous forme explicite, les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coefficients de deux polynomes

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
$$g(x)=b_0x^p+b_1x^{p-1}+\ldots+b_{p-1}x+b_p$$

pour que ces deux polynomes aient un diviseur commun de degré rectifié au moins égal à r; on entend ici, par le degré rectifié d'un diviseur commun des deux polynomes, le degré *vrai* du diviseur augmenté du nombre de coefficients qui sont nuls *à la fois* au début des deux polynomes regardés comme étant respectivement des degrés n et p (n° 84). Si, par exemple, le polynome $f(x)$ était réellement du degré $n-3$, le polynome $g(x)$ du degré $p-2$, il y aurait deux coefficients nuls à la fois au début des deux polynomes; alors, s'ils étaient premiers entre eux, ils devraient être regardés comme ayant un diviseur commun de degré rectifié égal à 2, et, s'ils avaient un diviseur commun, de degré vrai égal à 3, ils devraient être regardés comme ayant un diviseur de degré rectifié égal à $3+2=5$.

On a démontré au n° 84 la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ aient un diviseur commun de degré rectifié, égal ou supérieur à r, est qu'il existe deux polynomes $F_{n-r}(x)$, $G_{p-r}(x)$, non identiquement nuls, dont les degrés (vrais) respectifs soient au plus égaux à $n-r$, $p-r$ et tels que l'on ait identiquement, en x,

$$F_{n-r}(x)\,g(x)+G_{p-r}(x)\,f(x)=0. \qquad (1)$$

Cette identité, si l'on y remplace $F_{n-r}(x)$ et $G_{p-r}(x)$ par des polynomes à coefficients indéterminés

$$F_{n-r}(x)=\lambda_0x^{n-r}+\lambda_1x^{n-r-1}+\ldots+\lambda_{n-r},$$
$$G_{p-r}(x)=\mu_0x^{p-r}+\mu_1x^{p-r-1}+\ldots+\mu_{p-r},$$

équivaut à $n+p-r+1$ équations linéaires en $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-r}, \mu_0, \mu_1, \ldots,$

μ_{p-r}; les conditions cherchées s'exprimeront donc en écrivant qu'un système de $n+p-r+1$ équations linéaires à $n+p-2r+2$ inconnues admet une solution où toutes les inconnues ne sont pas nulles. C'est ce que l'on sait faire.

Il revient au même, pour obtenir ces conditions, de raisonner comme il suit :

L'identité (1) peut s'écrire

$$\begin{aligned}\mu_0 x^{p-r} f(x) + \mu_1 x^{p-r-1} f(x) + \ldots + \mu_{p-r} f(x) \\ + \lambda_{n-r}\, g(x) + \lambda_{n-r-1}\, x\, g(x) + \ldots + \lambda_0 x^{n-r} g(x) = 0;\end{aligned}$$

elle exprime donc que les polynomes

$$x^{p-r} f(x), \quad x^{p-r-1} f(x), \quad \ldots, \quad f(x), \quad g(x), \quad x\,g(x), \quad \ldots, \quad x^{n-r} g(x)$$

sont linéairement dépendants : en exprimant qu'il en est ainsi, on aura les conditions cherchées. Ces polynomes sont tous de degré inférieur à $n+p-r+1$; ils sont en nombre égal à $n+p-2r+2$; on a donc à écrire qu'un tableau de $n+p-2r+2$ lignes et de $n+p-r+1$ colonnes est de rang inférieur à $n+p-2r+2$.

En particulier, si l'on suppose $r=1$, on aura, en écrivant que les $n+p$ polynomes, de degré inférieur à $n+p$

$$x^{p-1} f(x), \quad x^{p-2} f(x), \quad \ldots, \quad f(x), \quad g(x), \quad \ldots, \quad x^{n-1} g(x)$$

sont linéairement dépendants, la condition nécessaire et suffisante pour que les deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ aient un diviseur commun de degré rectifié au moins égal à 1. Cette condition s'exprime en annulant le déterminant d'ordre $n+p$, dont les éléments sont les coefficients des polynomes précédents regardés comme des polynomes de degré $n+p-1$.

167. Ce déterminant, dont l'introduction est due à Sylvester, tient un rôle essentiel dans la théorie qui nous occupe. On peut lui rattacher les conditions nécessaires et suffisantes pour que les polynomes $f(x)$ et $g(x)$ aient un diviseur de degré rectifié au moins égal à r.

Il faut et il suffit pour cela que le déterminant de Sylvester soit de rang au plus égal à $n+p-r$. La condition est nécessaire : en effet, si l'on regarde les $n+p$ polynomes

$$x^{p-1} f(x), \quad \ldots, \quad f(x), \quad g(x), \quad \ldots, \quad x^{n-1} g(x)$$

comme étant de degré égal à $n+p-1$, on voit de suite que, si les polynomes $f(x)$ et $g(x)$ ont un diviseur commun de degré rectifié égal à r, les $n+p$ polynomes ont aussi un diviseur commun de degré rectifié égal à r, au sens qu'on a donné à ce mot à la fin du n° 166; le rang du tableau de ces coefficients des $n+p$ polynomes doit donc être au plus égal à $n+p-r$.

La condition est suffisante, car, si le rang du tableau est égal ou inférieur à $n+p-r$, il ne peut y avoir, parmi les $n+p$ polynomes, plus de $n+p-r$ polynomes qui soient linéairement indépendants : $n+p-r+1$ polynomes pris parmi eux, par exemple les polynomes

$$x^{p-1}f(x),\quad x^{p-2}f(x),\quad \ldots,\quad f(x),\quad g(x),\quad xg(x),\quad \ldots,\quad x^{n-r}g(x),$$

ou les polynomes

$$x^{n-1}g(x),\quad x^{n-2}g(x),\quad \ldots,\quad g(x),\quad f(x),\quad xf(x),\quad \ldots,\quad x^{p-r}f(x)$$

sont linéairement dépendants ; en écrivant qu'il en est ainsi, on parvient à des identités de la forme

$$g_{p-1}(x)f(x)+f_{n-r}(x)g(x)=0,$$
$$f_{n-1}(x)g(x)+g_{p-r}(x)f(x)=0,$$

où les deux polynomes $g_{p-1}(x)$, $f_{n-r}(x)$, dont les degrés (vrais) respectifs sont au plus égaux à $p-1$ et à $n-r$, ne sont pas identiquement nuls tous les deux : de même, les polynomes $f_{n-1}(x)$, $g_{p-r}(x)$.

Ces deux identités vont nous permettre de reconnaître que les deux polynomes $f(x)$, $g(x)$ ont un diviseur commun de degré rectifié au moins égal à r, par un raisonnement pareil à celui du n° 84. Supposons qu'il y ait α coefficients nuls au début des deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$: je suppose qu'il y en ait exactement α au début de $f(x)$: il peut y en avoir davantage au début de $g(x)$: c'est à la première identité que j'aurai recours : si, au contraire, il y avait moins de coefficients nuls au début de $g(x)$ qu'au début de $f(x)$, c'est à la seconde qu'on recourrait.

Si les deux polynomes $g_{p-1}(x)$, $f_{n-r}(x)$ sont premiers entre eux, on voit, comme au n° 84, que la première identité entraîne l'existence d'un diviseur commun $\theta(x)$ aux deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$, tel que l'on ait

$$f(x)=f_{n-r}(x)\,\theta(x),\qquad g(x)=g_{p-1}(x)\,\theta(x);$$

le degré vrai de $\theta(x)$ est égal à la différence entre le degré $n-\alpha$ de $f(x)$ et le degré de $f_{n-r}(x)$, qui est égal ou inférieur à $n-r$: il est donc égal ou supérieur à $(n-\alpha)-(n-r)=r-\alpha$; par conséquent, $\theta(x)$ doit être regardé comme un diviseur commun à $f(x)$ et à $g(x)$ de degré rectifié égal ou supérieur à r.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ aient un diviseur commun de degré rectifié égal ou supérieur à r, fournissent évidemment, lorsque l'un des deux coefficients a_0, b_0 ne peut s'annuler, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux polynomes aient un diviseur commun de degré vrai au moins égal à r. On montre, dans ce cas, que les conditions nécessaires et suffisantes peuvent être réduites à r ; mais je ne m'y arrêterai pas.

168. Je me contente aussi d'indiquer les résultats suivants qui s'établissent à peu près comme ceux qui précèdent.

Supposons, en conservant les mêmes notations, que l'on ait $n \geqq p$, et posons, pour abréger l'écriture,

$$\begin{array}{ll} f_0 = a_0, & g_0 = b_0, \\ f_1 = a_0 x + a_1, & g_1 = b_0 x + b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_k = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k, & g_k = b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \ldots + b_k. \end{array}$$

Considérons les n polynomes, dont il est aisé de voir qu'ils sont tous de degré inférieur à n,

$$g(x), \quad x g(x), \quad \ldots, \quad x^{n-p-1} g(x),$$
$$x^{n-p} f_0 g(x) - g_0 f(x), \quad x^{n-p} f_1 g(x) - g_1 f(x),$$
$$x^{n-p} f_2 g(x) - g_2 f(x), \quad \ldots, \quad x^{n-p} f_{p-1} g(x) - g_{p-1} f(x).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les polynomes $f(x)$ et $g(x)$ aient un diviseur de degré rectifié égal à r est que le tableau des coefficients des n polynomes soit de rang égal ou inférieur à $n-r$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un diviseur commun de degré rectifié au moins égal à 1 s'exprime donc en égalant à o un déterminant d'ordre n (déterminant de Bézout); la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un diviseur commun de degré rectifié au moins égal à 2 s'exprime en écrivant que tous les premiers mineurs de ce déterminant soit nuls, etc. Le déterminant de Bézout est d'ordre moins élevé que celui de Sylvester, et il est, à cet égard, plus commode à manier; mais, d'un autre côté, sa forme est moins simple que celle du déterminant de Sylvester.

Lorsque les conditions pour l'existence d'un diviseur commun de degré rectifié égal à r sont vérifiées, on peut toujours trouver ce diviseur commun en cherchant le plus grand commun diviseur des polynomes $f(x)$ et $g(x)$; à la vérité, il est préférable, lorsqu'on applique l'une des méthodes précédentes, de profiter des calculs qu'on a faits pour obtenir le diviseur commun, mais je ne m'arrêterai pas à cette question.

Il convient de remarquer que les démonstrations qui précèdent ne supposent en aucune façon qu'on ait établi le théorème fondamental de l'Algèbre (n° 111).

169. Éliminer x entre les deux équations $f(x) = o$, $g(x) = o$, c'est, par définition, trouver la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux équations aient une solution commune. S'il en est ainsi, les deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ ont un diviseur commun; réciproquement, si ces polynomes ont un diviseur commun de degré (vrai) égal à r, les deux équations $f(x) = o$, $g(x) = o$ ont r racines communes, à savoir les r racines du diviseur commun. Si les deux polynomes $f(x)$ et $g(x)$ ont un diviseur commun de degré

vrai $r-\alpha$, et si les α premiers coefficients de $f(x)$ et de $g(x)$ sont nuls, en sorte que les deux polynomes aient un diviseur commun de degré rectifié égal à r, on dit souvent que les deux équations $f(x)=0$, $g(x)=0$ ont $r-\alpha$ racines communes qui sont finies, à savoir les racines de leur commun diviseur, et α racines communes infinies; cette dernière façon de parler, sur laquelle j'aurai à revenir, ne signifie rien de plus que ceci : les α premiers coefficients de $f(x)$ et les α premiers coefficients de $g(x)$ sont nuls. En adoptant cette façon de parler, on peut énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations $f(x)=0$, $g(x)$ aient (au moins) une racine commune finie ou infinie, ou, si l'on veut, le résultat de l'élimination de x entre ces deux équations, s'obtient en égalant à o le déterminant de Sylvester, ou celui de Bézout, formé avec les coefficients des polynomes $f(x)$ et $g(x)$. Les racines (finies) communes aux deux équations s'obtiennent en cherchant le plus grand commun diviseur aux deux polynomes et en résolvant l'équation obtenue en égalant à o ce plus grand commun diviseur.

EXERCICES.

142. Quel est, dans le déterminant général de $n^{\text{ième}}$ ordre, le coefficient du terme dont les facteurs sont les éléments situés sur la diagonale autre que la diagonale principale ?

143. Un déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre dans lequel tous les éléments situés au-dessus (ou au-dessous) de la diagonale principale sont nuls est égal au produit des éléments de la diagonale principale.

144. Développer le déterminant symétrique gauche

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & t & u \\ -y & -t & 0 & v \\ -z & -u & -v & 0 \end{vmatrix}$$

et montrer qu'il est le carré d'un polynome en x, y, z, t, u, v.

145. Résoudre les équations

$$\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} a+x & x & x & x \\ x & b+x & x & x \\ x & x & c+x & x \\ x & x & x & d+x \end{vmatrix} = 0.$$

146. On a, quels que soient x, y, z.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+\alpha y+\alpha^2 z & y & z \\ y+\alpha z+\alpha^2 x & z & x \\ z+\alpha x+\alpha^2 y & x & y \end{vmatrix};$$

montrer qu'on peut déterminer le nombre α de manière que les coefficients des trois formes linéaires

$$x+\alpha y+\alpha^2 z,\quad \alpha^2 x+y+\alpha z,\quad \alpha x+\alpha^2 y+z$$

soient proportionnels. Le problème admet trois solutions dont deux sont imaginaires. Décomposer le déterminant proposé en un produit de trois facteurs du premier degré en x, y, z.

147. Décomposer le déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ y & z & u & x \\ z & u & x & y \\ u & x & y & z \end{vmatrix}$$

en un produit de quatre facteurs du premier degré.

148. Mettre les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+x} & \frac{1}{a+y} & \frac{1}{a+z} \\ \frac{1}{b+x} & \frac{1}{b+y} & \frac{1}{b+z} \\ \frac{1}{c+x} & \frac{1}{c+y} & \frac{1}{c+z} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \operatorname{tang} a \\ 1 & \sin b & \operatorname{tang} b \\ 1 & \sin c & \operatorname{tang} c \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix},$$

sous forme d'un produit de trois facteurs s'annulant respectivement quand on suppose $b=c$, $c=a$, $a=b$.

Montrer, en s'appuyant sur l'identité à laquelle on est conduit en considérant le dernier déterminant que, si α, β, γ sont trois nombres dont la somme est nulle, on a

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 0.$$

149. La trigonométrie fournit, entre les éléments d'un triangle, les relations

$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B, \\ b &= c\cos A + a\cos C, \\ c &= a\cos B + b\cos A; \end{aligned}$$

quelle relation doit-il y avoir entre A, B, C pour que les égalités précédentes, regardées comme des équations linéaires en a, b, c, admettent une solution autre que $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$?

150. Montrer que les relations

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 + c^2 = 1, &\quad &a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ &a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, &\quad &a''a + b''b + c''c = 0, \\ &a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, &\quad &a\,a' + b\,b' + c\,c' = 0 \end{aligned}$$

entraînent, en désignant par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

et par A, B, ..., C″ ses mineurs, les relations

$$\begin{aligned} &A = \Delta a, &\quad &B = \Delta b, &\quad &C = \Delta c, &\quad &\Delta = \pm 1, \\ &A' = \Delta a', &\quad &B' = \Delta b', &\quad &C' = \Delta c', \\ &A'' = \Delta a'', &\quad &B'' = \Delta b'', &\quad &C'' = \Delta c'', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, &\quad &bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ &b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, &\quad &ca + c'a' + c''a'' = 0, \\ &c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, &\quad &ab + a'b' + a''b'' = 0, \end{aligned}$$

inversement les six dernières relations entraînent celles qui précèdent.

On peut prendre comme point de départ le fait que les trois équations

$$\begin{aligned} a\,a + b\,b + c\,c &= 1, \\ a'a + b'b + c'c &= 0, \\ a''a + b''b + c''c &= 0, \end{aligned}$$

traitées comme des équations du premier degré dont les inconnues seraient a, b, c et dont les coefficients seraient les éléments du déterminant Δ, entraînent les relations

$$a\Delta = A, \qquad b\Delta = B, \qquad c\Delta = C.$$

151. D'un tableau rectangulaire de np éléments rangés dans p lignes et n colonnes, combien peut-on tirer de déterminants d'ordre r, en désignant par r un nombre au plus égal au plus petit des nombres n, p?

152. Quelle relation y a-t-il entre les polynomes

$$X = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda\left(\frac{z}{c} + 1\right), \qquad Z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \mu\left(\frac{z}{c} - 1\right),$$
$$Y = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{z}{c} - 1\right), \qquad T = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{z}{c} + 1\right),$$

où a, b, c, λ, μ sont des constantes différentes de o?

Au lieu d'appliquer la méthode développée dans le n° 153, il est plus commode ici d'employer le procédé suivant qu'on généralisera sans peine; on regardera les égalités précédentes comme des équations en x, y, z et X, Y, Z, T comme des quantités connues; on résoudra trois de ces équations par rapport à x, y, z et l'on portera les valeurs trouvées dans la quatrième. Les calculs qui suivent équivalent à ceux qu'on vient de dire.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = X + \lambda\left(\frac{z}{c} + 1\right) = Z + \mu\left(\frac{z}{c} - 1\right),$$
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = Y + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{z}{c} - 1\right) = T + \frac{1}{\mu}\left(\frac{z}{c} + 1\right),$$
$$(\lambda - \mu)\frac{z}{c} + X - Z + \lambda + \mu = 0,$$
$$(\mu - \lambda)\frac{z}{c} + \lambda\mu(Y - T) - \lambda - \mu = 0,$$
$$X - Z + \lambda\mu(Y - T) = 0.$$

Résoudre la même question en cherchant cinq nombres α, β, γ, δ, ε tels que l'on ait identiquement, en x, y, z,

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta T + \varepsilon = 0.$$

153. Soient X_1, X_2, ..., X_p des formes linéaires en x_1, x_2, ..., x_n. Si l'on connaît, d'une part, la solution la plus générale des équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, ..., $X_p = 0$ et, d'autre part, une solution particulière des équations $X_1 = \alpha_1$, $X_2 = \alpha_2$, ..., $X_p = \alpha_p$, où α_1, α_2, ..., α_p sont des nombres donnés, comment pourra-t-on en déduire la solution la plus générale des dernières équations?

154. Si les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont de rang r, il ne peut exister plus de $p - r$ polynomes du premier degré en $X_1, X_2, \ldots, X_p$, indépendants quand on regarde ces dernières lettres comme figurant des variables, qui s'annulent identiquement quand on remplace $X_1, X_2, \ldots, X_p$ par leurs expressions explicites en $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

155. Si $X_1, X_2, \ldots, X_p$ désignent des polynomes du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et s'il existe q polynomes (et non davantage) du premier degré en $X_1, X_2, \ldots, X_p$, indépendants quand on regarde ces lettres comme figurant des variables, qui s'annulent identiquement lorsqu'on remplace $X_1, X_2, \ldots, X_p$ par leurs expressions explicites en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les p polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$ sont de rang $p - q$.

156. Si les polynomes $X_1, X_2, \ldots, X_p$, du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont de rang r et si l'on peut les exprimer tous au moyen de r polynomes $X'_1, X'_2, \ldots, X'_r$ du premier degré en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par des formules telles que

$$X_i = \alpha_{i,1} X'_1 + \alpha_{i,2} X'_2 + \ldots + \alpha_{i,r} X'_r + \alpha_{i,r+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

où $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \ldots$ sont des coefficients constants, les polynomes $X'_1, X'_2, \ldots, X'_r$ sont indépendants.

157. Si le tableau

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1, \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{matrix}$$

est de rang 2 et si les nombres situés dans une même ligne de ce tableau vérifient l'équation $ax + by + cz = 0$, la solution la plus générale de cette équation est donnée par les formules

$$\begin{aligned} x &= x_1 t_1 + x_2 t_2, \\ y &= y_1 t_1 + y_2 t_2, \\ z &= z_1 t_1 + z_2 t_2, \end{aligned}$$

où t_1, t_2 sont arbitraires.

Si le tableau

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1, \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2, \\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3 \end{matrix}$$

est de rang 3 et si les nombres situés dans une même ligne de ce tableau vérifient l'équation $ax + by + cz + du = 0$, la solution la plus générale de cette équation est donnée par les formules

$$x = x_1 t_1 + x_2 t_2 + x_3 t_3,$$
$$y = y_1 t_1 + y_2 t_2 + y_3 t_3,$$
$$z = z_1 t_1 + z_2 t_2 + z_3 t_3,$$
$$u = u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3,$$

où t_1, t_2, t_3 sont arbitraires.

158. Si le tableau

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & u_1, \\ x_2 & y_2 & z_2 & u_2 \end{matrix}$$

est de rang 2, et si les nombres situés dans une même ligne de ce tableau vérifient les deux équations indépendantes

$$ax + bx + cz + du = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z + d'u = 0,$$

la solution la plus générale de ces équations est donnée par les formules

$$x = x_1 t_1 + x_2 t_2,$$
$$y = y_1 t_1 + y_2 t_2,$$
$$z = z_1 t_1 + z_2 t_2,$$
$$u = u_1 t_1 + u_2 t_2,$$

où t_1 et t_2 sont arbitraires.

159. On considère les p équations $X_1 = 0$, $X_2 = 0, \ldots, X_p = 0$, linéaires en $x_1, x_2, \ldots, x_n$; convenons de dire qu'un système de n formes $T_1, T_2, \ldots, T_n$ linéaires en $t_1, t_2, \ldots, t_m$ vérifie ces p équations lorsque celles-ci sont vérifiées quelles que soient les valeurs de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ quand on y remplace respectivement $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $T_1, T_2, \ldots, T_n$.

Si les équations données sont de rang $r < n$, on a vu au n° 159 que la solution la plus générale s'obtient en laissant $n - r$ inconnues arbitraires, les autres inconnues s'exprimant linéairement au moyen de celles-ci. Cela revient à dire que la solution la plus générale est fournie par un certain système de n formes linéaires de rang $n - r$. Montrer que tout système de n formes T_1, $T_2, \ldots, T_n$, linéaires en $t_1, t_2, \ldots, t_m$ et de rang $n - r$, qui vérifient les équations proposées, en constitue la solution la plus générale.

160. Sauf dans le cas où l'on a $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, le polynome du premier degré en x, y, le plus général, qui s'annule quand on remplace x, y respecti-

vement par les nombres x_1, y_1 ou x_2, y_2 est, à un facteur numérique près,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

161. Lorsque le tableau

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 & y_1 & z_1 & 1, \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1, \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1, \end{cases}$$

est de rang 3, tout polynome du premier degré en x, y, z qui s'annule quand on y remplace x, y, z par x_1, y_1, z_1, ou par x_2, y_2, z_2, est, à un facteur numérique près, de la forme

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Quelle est la forme la plus générale d'un pareil polynome quand le tableau (1) est de rang 2? — Ce tableau peut-il être de rang 1?

162. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) des nombres réels ou imaginaires. On considère le tableau

$$\begin{matrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1, \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1, \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1, \end{matrix}$$

en écartant le cas où ce tableau aurait deux lignes identiques.

Montrer que, lorsque x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 sont réels, le tableau est de rang 3.

Le rang ne peut se réduire à 2 que si les trois rapports

$$\frac{y_2-y_3}{x_1-x_3}, \qquad \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}, \qquad \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

sont égaux à i ou à $-i$.

163. Trouver tous les polynomes de la forme

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d$$

ou de la forme

$$axy + bx + cy + d$$

qui s'annulent quand on remplace x, y par x_1, y_1 ou par x_2, y_2 ou par x_3, y_3.

164. Dans un déterminant d'ordre n, dont les lignes et les colonnes sont numérotées $1, 2, \ldots, n$, on considère le terme dont les facteurs appartiennent aux cases

$$(\alpha_1, \beta_1), \quad (\alpha_2, \beta_2), \quad \ldots, \quad (\alpha_p, \beta_p),$$
$$(\alpha_{p+1}, \beta_{p+1}), \quad (\alpha_{p+2}, \beta_{p+2}), \quad \ldots, \quad (\alpha_n, \beta_n).$$

Il résulte de la proposition énoncée dans l'exercice 127 que le coefficient de ce terme est une puissance de -1 dont l'exposant est

$$A + B + A' + B' + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_p,$$

en désignant par A, B, A', B' les nombres d'inversion contenus dans les arrangements

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p), \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p),$$
$$(\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_n), \quad (\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_n).$$

Montrer que la somme de tous les termes du déterminant dont p facteurs appartiennent à des cases qui se trouvent à la fois dans quelqu'une des lignes numérotées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, et dans quelqu'une des colonnes numérotées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ est égale à

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p+\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_p}\,PP',$$

en désignant par P le déterminant qui se déduit du déterminant proposé en supprimant les lignes numérotées $\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_n$ et les colonnes numérotées $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_n$, et par P' le déterminant qui se déduit du proposé en supprimant les lignes numérotées $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et les colonnes numérotées $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$.

165. Soit Δ un déterminant d'ordre n, dont les lignes et les colonnes sont numérotées $1, 2, \ldots, n$. Supposons qu'on ait rangé sur une même ligne toutes les $\nu = C_p^n$ combinaisons des n nombres $1, 2, \ldots, n$ pris p à p. Chacune de ces combinaisons se trouve ainsi avoir un numéro d'ordre. Considérons la $\alpha^{\text{ième}}$ et la $\beta^{\text{ième}}$ de ces combinaisons; soient respectivement a et b les sommes de ceux des nombres $1, 2, \ldots, n$ qui entrent dans ces dernières combinaisons. Soit $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ le déterminant déduit de Δ en supprimant toutes les lignes dont les numéros ne figurent pas dans la $\alpha^{\text{ième}}$ combinaison et toutes les colonnes dont les numéros ne figurent pas dans la $\beta^{\text{ième}}$ combinaison. Soit $\mathcal{A}'_{\alpha,\beta}$ le produit par $(-1)^{a+b}$ du déterminant déduit de Δ en supprimant au contraire toutes les lignes dont les numéros figurent dans la $\alpha^{\text{ième}}$ combinaison et toutes les colonnes dont les numéros figurent dans la $\beta^{\text{ième}}$ combinaison.

On a

$$\mathcal{A}_{1,\alpha}\mathcal{A}'_{1,\beta}+\mathcal{A}_{2,\alpha}\mathcal{A}'_{2,\beta}+\ldots+\mathcal{A}_{\nu,\alpha}\mathcal{A}'_{\nu,\beta}=\varepsilon\Delta,$$

$$\mathcal{A}_{\alpha,1}\mathcal{A}'_{\beta,1}+\mathcal{A}_{\alpha,2}\mathcal{A}'_{\beta,2}+\ldots+\mathcal{A}_{\alpha,\nu}\mathcal{A}'_{\beta,\nu}=\varepsilon\Delta,$$

en désignant par ε un nombre égal à o si α est différent de β, à 1 si $\alpha=\beta$.

Écrire explicitement ces relations, dans le cas où l'on a $n=4$, $p=2$.

166. On considère deux tableaux (A) et (B) comprenant p lignes et n colonnes, numérotées au moyen des nombres $1, 2, \ldots, p$, d'une part, $1, 2, \ldots, n$ de l'autre. Soient, en général, $a_{r,s}$ et $b_{r,s}$ les éléments de ces tableaux qui appartiennent à la $r^{\text{ième}}$ ligne et à la $s^{\text{ième}}$ colonne, et soit, en désignant par α, β deux des nombres $1, 2, \ldots, p$

$$c_{\alpha,\beta}=a_{\alpha,1}b_{\beta,1}+a_{\alpha,2}b_{\beta,2}+\ldots+a_{\alpha,n}b_{\beta,n}.$$

Soit C le déterminant du $p^{\text{ième}}$ ordre dans lequel $c_{\alpha,\beta}$ est l'élément qui appartient à la $\alpha^{\text{ième}}$ ligne et à la $\beta^{\text{ième}}$ colonne. Il résulte du nº 162 que, si l'on a $n=p$, le déterminant C est le produit des déterminants A, B que définissent les tableaux (A), (B).

Montrer que C est nul, si l'on a $n<p$.

Dans le cas où n est plus grand que p, imaginons que toutes les $\nu=C_p^n$ combinaisons des n nombres $1, 2, \ldots, n$ pris p à p soient rangées sur une même ligne et affectées ainsi chacune d'un numéro d'ordre. Désignons en général par A_r, B_r les déterminants du $p^{\text{ième}}$ ordre qui se déduisent respectivement des tableaux (A), (B) en ne conservant que les colonnes dont les numéros figurent dans la $r^{\text{ième}}$ combinaison, on a

$$C=A_1B_1+A_2B_2+\ldots+A_\nu B_\nu.$$

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

CHAPITRE IV.

DES FRACTIONS RATIONNELLES.

CHAPITRE V.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR.

CHAPITRE VI.

NOMBRES IMAGINAIRES.

CHAPITRE VII.

ÉTUDE DES POLYNOMES A COEFFICIENTS ET A VARIABLE IMAGINAIRES.

CHAPITRE VIII.

ARRANGEMENTS, COMBINAISONS, PERMUTATIONS, INVERSIONS. FORMULE DU BINOME.

CHAPITRE IX.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

CHAPITRE X.

DÉTERMINANTS; ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

Paris — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS.
36526 Quai des Grands-Augustins, 55.

0,01