M

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

M. A. BARANIECKIEGO.

ROZWIĄZYWANIE

RÓWNAŃ LICZEBNYCH.

NAPISAŁ

Dr. JULIJAN SOCHOCKI.

WARSZAWA.

BIBLIJOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

WYDAWANA POD REDAKCYJĄ

M. A. BARANIECKIEGO

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB, PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWYM, IMIENIA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

SERYJA IV. TOM II.

ROZWIĄZYWANIE
RÓWNAŃ LICZEBNYCH.

NAPISAŁ

Dr. JULIJAN SOCHOCKI,

PROFESOR UNIWERSYTETU W PETERSBURGU.

WARSZAWA.

W DRUKARNI NOSKOWSKIEGO.

1884.

Дозволено Цензурою.
Варшава 23 Октября 1884 г.

Składał zecer F. Lewandowski.
Drzeworyty ciął W. Bojarski.
Papiér z papiérni w Pilicy.

SPIS RZECZY.

Krótki zarys historyczny rozwoju nauki o równaniach algiebraicznych, który zostanie pomieszczony w tomie następnym «Bibl.», obejmie równania liczebne. Tu zaś, w odsyłaczach do odpowiednich miejsc «Spisu», podane są (przez Redakcyją) tylko wskazówki, gdzie można znaléść prace spółczesnych matematyków, uwzględnione w tym tomie. *Red.*

ROZDZIAŁ III.

ROZDZIAŁ IV.

ROZDZIAŁ V.

---

[1]) Hermite w *Comptes rendus* akademii nauk w Paryżu (t. LVIII, r. 1864).

[2]) Czebyszew w «*Zapiskach*» akademii nauk w Petersburgu (t. XVI, 1870).

[3]) Hermite w *Bulletin de la société mathématique* (t. VII, r. 1879); Biehler w *Journal f. d. reine u. ang. Math* (t. LXXXVII, r. 1879).

[4]) Laguerre w *Nouvelles annales de mathématiques* (seryja 2-ga, t. XVIII i XIX, l. 1879 i 1880).

---

[1]) Sylvester w *Proceedings of the London mathematical society* (tom I, 1865) (oraz w *Les Mondes*, t. XI, 1866).

---

[1] Hermite l. c. (*Bull.*)

ROZDZIAŁ X.

---

[1]) Darboux w *Journal de mathématiques* (seryja 3-cia, t. II, 1876).

ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ LICZEBNYCH.

ROZDZIAŁ I.

RÓWNANIA I ICH PIERWIASTKI. — UWAGI O WARTOŚCIACH SZCZEGÓLNYCH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH. — RÓWNANIA ZE SPÓŁCZYNNIKAMI ZESPOLONYMI. — KRAŃCE DLA PIERWIASTKÓW RZECZYWISTYCH.

§ I. O PEWNYCH WŁASNOŚCIACH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH.

1. Wielomian

$$Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}x + A_n,$$

w którym A, A_1, A_2, ... są spółczynnikami stałymi, x liczbą zmienną, n zaś liczbą dodatną całkowitą, nazywa się funkcyją całkowitą stopnia n-go zmiennéj x. Przyjmujemy, że spółczynnik A jest różny od zera, gdyż inaczéj funkcyja nie byłaby n-go, lecz niższego stopnia.

Przedstawiwszy jakąkolwiek funkcyją całkowitą stopnia n-go przez $f(x)$, nazwiemy równanie $f(x) = 0$ równaniem stopnia n-go, każdą zaś wartość na x, czyniącą zadość temu równaniu, pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, albo pierwiastkiem funkcyi $f(x)$.

2. Dzieląc funkcyją całkowitą

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

przez dwumian $x - a$, gdzie a jest liczbą dowolną, otrzymujemy, jako iloraz, funkcyją całkowitą

$$\varphi(x) = Ax^{n-1} + \left.\begin{array}{l} Aa \\ +A_1 \end{array}\right| x^{n-2} + \left.\begin{array}{l} Aa^2 \\ +A_1a \\ +A_2 \end{array}\right| x^{n-3} + \ldots + \begin{array}{l} Aa^{n-1} \\ +A_1a^{n-2} \\ +\ldots \\ +A_{n-1} \end{array}$$

i, jako resztę, liczbę stałą

$$f(a) = Aa^n + A_1a^{n-1} + \ldots + A_n.$$

Stąd wynika, że funkcyja $f(x)$ tylko wtedy jest podzielna przez $x-a$, kiedy $f(a)=0$, t. j. kiedy a jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$. A zatym np. funkcyja x^n-a^n jest podzielna przez $x-a$, funkcyja $x^n+2x^{n-1}-2^{n+1}$ przez $x-2$, i t. d.

3. Przyjmijmy, że funkcyja całkowita stopnia n-go,

$$f(x)=\mathrm{A}x^n+\mathrm{A}_1x^{n-1}+\ldots+\mathrm{A}_n,$$

staje się równą zeru przy pewnych n różnych od siebie wartościach $x=a_0$, $a_1,\ldots,a_{n-1}$.

Dzieląc funkcyją $f(x)$ przez $x-a_0$, otrzymujemy

$$f(x)=(x-a_0)\varphi(x),$$

gdzie $\varphi(x)$ przedstawia funkcyją całkowitą stopnia $(n-1)$-go ze spółczynnikiem A przy x^{n-1}. Przyjmując tu kolejno $x=a_1, a_2,\ldots,a_{n-1}$ i zważając, że $f(a_1)=f(a_2)=\ldots=f(a_{n-1})=0$, otrzymujemy

$$\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=\ldots=\varphi(a_{n-1})=0.$$

Piérwsze z tych równań, t. j. $\varphi(a_1)=0$, wskazuje, że funkcyja $\varphi(x)$ jest podzielna przez $x-a_1$; możemy zatym napisać

$$\varphi(x)=(x-a_1)\varphi_1(x),$$

gdzie $\varphi_1(x)$ przedstawia funkcyją całkowitą stopnia $(n-2)$-go ze spółczynnikiem A przy x^{n-2}, czyniącą zadość warunkom

$$\varphi_1(a_2)=\varphi_1(a_3)=\ldots=\varphi_1(a_{n-1})=0.$$

Podobnie równanie $\varphi_1(a_2)=0$ wskazuje, że funkcyja $\varphi_1(x)$ jest podzielna przez $x-a_2$, tak iż możemy napisać

$$\varphi_1(x)=(x-a_2)\varphi_2(x),$$

gdzie $\varphi_2(x)$ przedstawia funkcyją całkowitą stopnia $(n-3)$-go z tymże spółczynnikiem A przy x^{n-3}. W tenże sposób prowadząc daléj rozumowanie, dojdziemy do związków:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(x-a_0)\,\varphi(x),\\
\varphi(x)&=(x-a_1)\,\varphi_1(x),\\
\varphi_1(x)&=(x-a_2)\,\varphi_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_{n-2}(x)&=(x-a_{n-1})\,\mathrm{A},
\end{aligned}$$

z których wynika

$$f(x)=\mathrm{A}(x-a_0)\,(x-a_1)\ldots(x-a_{n-1}). \tag{1}$$

Przypuśćmy, że funkcyja $f(x)$ otrzymuje wartość zero przy innéj jeszcze wartości zmiennéj x, różnéj od wartości $a_0, a_1, a_2,\ldots,a_{n-1}$. Nazwawszy owę szczególną wartość przez a_n, otrzymamy, według (1),

$$\mathrm{A}(a_n-a_0)\,(a_n-a_1)\ldots(a_n-a_{n-1})=0.$$

Lecz, zgodnie z naszym przypuszczeniem, żaden z czynników $a_n - a_0$, $a_n - a_1$,... nie jest równy zeru; przeto

$$A = 0.$$

A zatym, jeżeli funkcyja stopnia n-go $f(x)$ jest równą zeru przy $n+1$ różnych wartościach zmiennéj x, to w téj funkcyi spółczynnik przy x^n jest równy zeru, t. j. stopień funkcyj jest w rzeczywistości niższy, niż n-ty. Ale wtedy także $A_1 = 0$, gdyż inaczéj mielibyśmy funkcyją stopnia $(n-1)$-go, która byłaby równą zeru przy pewnych n różnych wartościach zmiennéj x. Z tegoż powodu i $A_2 = 0$. Słowem: wszystkie spółczynniki $A, A_1, \ldots$, aż do ostatniego A_n włącznie, są równe zeru. A więc

T w i e r d z e n i e. *Jeżeli funkcyja całkowita $f(x)$, stopnia conajwyżéj n-go, staje się równą zeru przy $n+1$ różnych od siebie wartościach zmiennéj x, to wszystkie spółczynniki téj funkcyi przy rozmaitych potęgach zmiennéj x są równe zeru, t. j. funkcyja $f(x)$ jest tożsamościowo równą zeru.*

W n i o s e k. *Dwie funkcyje całkowite, z których każda jest stopnia conajwyżéj n-go, otrzymujące wartości równe przy $n+1$ różnych wartościach zmiennéj niezależnéj, są tożsamościowo sobie równe, t. j. w tych funkcyjach spółczynniki przy jednakowych potęgach zmiennéj niezależnéj są sobie równe.* Różnica bowiém dwu takich funkcyj jest funkcyją całkowitą, stopnia conajwyżéj n-go, która, otrzymując wartość zero przy $n+1$ różnych wartościach zmiennéj niezależnéj, jest zerem dla wszelkiéj wartości zmiennéj niezależnej.

W n i o s e k 2. Jeżeli $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *są $n+1$ dowolnie wziętymi i różnymi od siebie liczbami i jeżeli utworzymy funkcyją stopnia $(n+1)$-go,*

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

a przez $\varphi_i(x)$ oznaczymy funkcyją stopnia n-go,

$$\varphi_i(x) = \frac{\varphi(x)}{x - x_i} = (x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n),$$

natenczas każda funkcyja całkowita $f(x)$, stopnia conajwyżéj n-go, może być tak przedstawioną:

$$f(x) = \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_0(x_0)} f(x_0) + \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_1)} f(x_1) + \ldots + \frac{\varphi_n(x)}{\varphi_n(x_n)} f(x_n)$$

(wzór Lagrange'a). Dwie bowiém strony powyższego równania przedstawiają funkcyje całkowite, stopnia conajwyżéj n-go, wartości zaś tych funkcyj przy $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ są sobie równe.

4. T w i e r d z e n i e. *Jeżeli mamy funkcyją całkowitą*

$$f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} x,$$

w któréj wyraz stały $A_n = 0$, jeżeli a oznacza jakąkolwiek liczbę dodatną, nie mniejszą od modułu każdego ze spółczynników $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, i jeżeli k oznacza jakąkolwiek liczbę dodatną, natenczas przy każdéj oddzielnéj wartości x takiéj, iż

$$\operatorname{mod} x \leqq \frac{k}{a+k},$$

istnieje nierówność

$$\operatorname{mod} f(x) < k.$$

Oznaczając, dla krótkości, $\operatorname{mod} x$ literą r, i biorąc pod uwagę, że moduł sumy nie jest większy od sumy modułów, mamy

$$\operatorname{mod} f(x) \leqq r^n \operatorname{mod} \mathrm{A} + r^{n-1} \operatorname{mod} \mathrm{A}_1 + \ldots + r \operatorname{mod} \mathrm{A}_{n-1}.$$

Gdy po prawéj stronie téj nierówności, zamiast $\operatorname{mod} \mathrm{A}$, $\operatorname{mod} \mathrm{A}_1, \ldots$, podstawimy liczbę a, to

$$\operatorname{mod} f(x) \leqq ar^n + ar^{n-1} + \ldots + ar,$$

czyli

$$\operatorname{mod} f(x) \leqq \frac{ar}{1-r} - \frac{ar^{n-1}}{1-r}.$$

Ponieważ, wskutek naszego założenia co do modułu zmiennéj x, jest $r < 1$, więc, według ostatniéj nierówności,

$$\operatorname{mod} f(x) < \frac{ar}{1-r}.$$

Z nierówności zaś $r \leqq \dfrac{k}{a+k}$ wynika

$$\frac{ar}{1-r} \leqq k;$$

zatym

$$\operatorname{mod} f(x) < k.$$

Wniosek. *Każda funkcyja całkowita ze spółczynnikami rzeczywistymi*

$$f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_m x^{n-m}, \qquad (m \leqq n),$$

w któréj A *i* A_m *są różne od zera, jest, przy wartościach rzeczywistych zmiennéj* x, *bezwzględnie dostatecznie wielkich, tegoż znaku, co wyraz piérwszy* $\mathrm{A}x^n$, *a przy wartościach rzeczywistych, bezwzgędnie dostatecznie małych, tegoż znaku, co wyraz ostatni* $\mathrm{A}_m x^{n-m}$. Nadając bowiém funkcyi $f(x)$ taką postać:

$$f(x) = \mathrm{A}x^n \left(1 + \frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}} \frac{1}{x} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_m}{\mathrm{A}} \frac{1}{x^m}\right),$$

na mocy ostatniego twierdzenia widzimy bezpośrednio, że wrazie, gdy

$$\text{wartość bezwzględna } \frac{1}{x} \leqq \frac{1}{a+1},$$

gdzie a jest jakąkolwiek liczbą dodatną, nie mniejszą jednak od wartości bezwzględnéj każdego ze spółczynników $\dfrac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}}, \dfrac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}}, \ldots, \dfrac{\mathrm{A}_m}{\mathrm{A}}$, wartość wielomianu w nawiasie jest dodatna, i funkcyja $f(x)$ jest tegoż znaku, co wyraz piérwszy Ax^n. Warunek, jakiemu x zadość czynić powinno, może być wyrażony w postaci:

$$\text{wartość bezw. } x \geqq a+1.$$

Mamy więc stwierdzoną piérwszą część wniosku. — Nadając zaś funkcyi $f(x)$ postać:

$$f(x)=\left(\frac{A}{A_m}x^m+\frac{A_1}{A_m}x^{m-1}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{A_m}x+1\right)A_m x^{n-m},$$

również na mocy ostatniego twierdzenia wnosimy, że jeżeli

$$\text{wart. bezw. } x \leqq \frac{1}{b+1},$$

gdzie b oznacza jakąkolwiek liczbę dodatną, nie mniejszą jednak od wartości bezwzględnéj każdego ze spółczynników $\frac{A}{A_m}, \frac{A_1}{A_m}, \ldots, \frac{A^{m-1}}{A_m}$, to wartość wielomianu w nawiasie jest dodatna, a funkcyja $f(x)$ takiegoż znaku, co czynnik $A_m x^{n-m}$ — co okazuje prawdziwość drugiéj części wniosku.

Przykład 1. Dla funkcyi

$$f(x)=x^5-(2+3i)x^3-2x^2+5ix$$

można przyjąć $a=5$; wskutek tego mamy

$$\text{dla mod } x \leqq \frac{1}{6} \qquad \text{mod } f(x) < 1;$$

$$\text{dla mod } x \leqq \frac{1}{11} \qquad \text{mod } f(x) < \frac{1}{2};$$

$$\text{dla mod } x \leqq \frac{1}{5m+1} \qquad \text{mod } f(x) < \frac{1}{m}.$$

Przykład 2. Dla funkcyi

$$f(x)=2x^7-3x^5+9x^2-4x$$

możemy wziąć $a=9$; wtedy

$$\text{wart. bezw. } f\left(\pm\frac{1}{10}\right)<1,$$

$$\text{wart. bezw. } f\left(\pm\frac{1}{9m+1}\right)<\frac{1}{m}.$$

Przykład 3. Funkcyja

$$3x^6-7x^4+16x^3-5x$$

dla wartości zmiennéj x, czyniących zadość nierówności $x \geqq 6\frac{1}{3}$, otrzymuje wartości dodatne; dla wartości dodatnych zmiennéj x, czyniących zadość nierówności $x \leqq \frac{5}{21}$, otrzymuje wartości ujemne, a dla wartości ujemnych zmiennéj x, które czynią zadość nierówności $x \geqq -\frac{5}{21}$, otrzymuje wartości dodatne.

Przykład 4. Funkcyja

$$7x^5-7x^4+6x^3-5x-2$$

dla $x \geqq 2$ otrzymuje wartości dodatne, dla $x \leqq -2$ otrzymuje wartości ujemne, dla wartości zaś zmiennéj x, zawartych między $-\frac{2}{9}$ a $+\frac{2}{9}$, otrzymuje wartości ujemne.

5. Twierdzenie. *Jeżeli, mając funkcyją całkowitą stopnia n-ego,*

$$f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n,$$

w któréj wyraz stały A_n *jest różny od zera, przyjmiemy, że a jest jakąkolwiek liczbą dodatną, nie mniejszą od modułu każdego ze spółczynników* $A, A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$, *że b jest jakąkolwiek liczbą dodatną, nie mniejszą od modułu każdego ze spółczynników* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *a k jest jakąkolwiek liczbą dodatną, to dla każdéj wartości zmiennéj x, któréj moduł czyni zadość nierówności*

$$\operatorname{mod} x \leqq \frac{k}{k+a},$$

będziemy mieli

$$\operatorname{mod} f(x) > \operatorname{mod} A_n - k,$$

dla każdéj zaś wartości x, któréj moduł czyni zadość nierówności

$$\operatorname{mod} x \geqq 1+\frac{b}{k},$$

będziemy mieli

$$\frac{\operatorname{mod} f(x)}{\operatorname{mod} x^n} > \operatorname{mod} A - k.$$

Rozważając funkcyją $f(x)$ jako summę dwu wyrazów

$$f(x)=A_n+(Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x),$$

mamy

$$\operatorname{mod} f(x) \geqq \operatorname{mod} A_n - \operatorname{mod}(Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x).$$

Jeżeli przyjmiemy, że $\operatorname{mod} x \leqq \frac{k}{k+a}$, to, na zasadzie twierdzenia art. 4-go, będziemy mieli

$$\operatorname{mod}(Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x) < k,$$

a zatym

$$\operatorname{mod} f(x) > \operatorname{mod} A_n - k.$$

Ażeby udowodnić drugą część naszego twierdzenia, napiszmy wielomian $f(x)$ tak:

$$f(x)=x^n\left(A+A_1\frac{1}{x}+\ldots+A_n\frac{1}{x^n}\right).$$

Z tego wnosimy, że

$$\frac{\operatorname{mod} f(x)}{\operatorname{mod} x^n} \geqslant \operatorname{mod} \mathrm{A} - \operatorname{mod}\left(\mathrm{A}_1 \frac{1}{x} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{1}{x^n}\right).$$

Przyjmując zaś $\operatorname{mod} \frac{1}{x} \leqslant \frac{k}{b+k}$, czyli $\operatorname{mod} x \geqslant 1 + \frac{b}{k}$, według twierdzenia art. 4-go, mamy

$$\operatorname{mod}\left(\mathrm{A}_1 \frac{1}{x} + \ldots + \mathrm{A}_n \frac{1}{x^n}\right) < k.$$

A zatym

$$\frac{\operatorname{mod} f(x)}{\operatorname{mod} x^n} > \operatorname{mod} \mathrm{A} - k.$$

Wniosek 1. *Jeżeli x jest pierwiastkiem równania stopnia n-go*

$$f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}x + \mathrm{A}_n = 0,$$

w którym wyraz stały A_n jest różny od zera, to

$$\frac{\operatorname{mod} \mathrm{A}_n}{a + \operatorname{mod} \mathrm{A}_n} < \operatorname{mod} x < 1 + \frac{b}{\operatorname{mod} \mathrm{A}}.$$

Gdy bowiém w poprzedzającym twierdzeniu przyjmiemy $k = \operatorname{mod} \mathrm{A}_n$, to dla wartości zmiennéj x, czyniących zadość nierówności

$$\operatorname{mod} x \leqslant \frac{\operatorname{mod} \mathrm{A}_n}{a + \operatorname{mod} \mathrm{A}_n},$$

istnieje nierówność

$$\operatorname{mod} f(x) > 0;$$

wtedy więc liczba x nie może być pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Przyjąwszy zaś $k = \operatorname{mod} \mathrm{A}$, dostrzeżemy, że, przy

$$\operatorname{mod} x \geqslant 1 + \frac{b}{\operatorname{mod} \mathrm{A}},$$

ma miejsce nierówność

$$\operatorname{mod} f(x) > 0,$$

wskutek któréj w tym przypadku liczba x także nie może być pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

Wniosek 2. *Jeżeli wrazie, gdy* H *jest jakąkolwiek liczbą dodatną, a dowolna liczba dodatna k jest mniejsza od* mod A, mod x *jednocześnie zadość czyni dwu nierównościom:*

$$\operatorname{mod} x \geqslant 1 + \frac{b}{k}, \quad \operatorname{mod} x \geqslant \sqrt[n]{\frac{\mathrm{H}}{\operatorname{mod} \mathrm{A} - k}},$$

to

$$\operatorname{mod} f(x) > \mathrm{H}.$$

Wtedy bowiém z drugiéj z wypisanych nierówności wypada

$$\text{mod}\, x^n (\text{mod A} - k) \geqq \text{H},$$

wskutek zaś piérwszéj nierówności mieliśmy poprzednio

$$\frac{\text{mod}\, f(x)}{\text{mod}\, x^n} > \text{mod A} - k.$$

Z tego wynika, że, z powiększaniem się wartości zmiennéj x do ∞, wartości funkcyi $f(x)$ również powiększają się do ∞.

Przykład 1. $f(x) = 7x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 5x + 16$.

Jeżeli mod $x \leqq \frac{k}{8+k}$, to mod $f(x) > 16 - k$; jeżeli mod $x \geqq 1 + \frac{16}{k}$, to mod $f(x) > (7 - k)$ mod x^n. Oznaczając przez x pierwiastek równania

$$7x^5 - 3x^4 + 8x^3 - 5x + 16 = 0,$$

mamy

$$\frac{16}{24} < \text{mod}\, x < 1 + \frac{16}{7},$$

a więc tymwięcéj

$$\frac{2}{3} < \text{mod}\, x < 3\frac{1}{2}.$$

Przykład 2. Jeżeli przez x oznaczymy pierwiastek równania

$$3x^7 - 5x^5 + 16x^4 - 5x + 18 = 0,$$

to

$$\frac{1}{2} < \text{mod}\, x < 7.$$

Następnie, kładąc

$$f(x) = 3x^7 - 5x^5 + 16x^4 - 5x + 18,$$

dla wszelkich wartości zmiennéj x, jednocześnie czyniących zadość dwu warunkom:

$$\text{mod}\, x \geqq 10, \quad \text{mod}\, x \geqq \sqrt[7]{\text{H}},$$

będziemy mieli nierówność

$$\text{mod}\, f(x) \geqq \text{H}.$$

§ II. RÓWNANIA ZE SPÓŁCZYNNIKAMI ZESPOLONYMI.

6. Rozwiązanie równania ze spółczynnikami zespolonymi może być sprowadzone do rozwiązania równania ze spółczynnikami rzeczywistymi, i dlatego, ilekroć to się okaże pożytecznym, możemy ograniczyć się do przypuszczenia, że spółczynniki równania są rzeczywiste.

Istotnie, przyjmijmy, że spółczynniki równania

$$(1) \qquad Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0$$

są liczbami zespolonymi, a mianowicie:

$$A_m = a_m + b_m i, \quad (m = 0, 1, \ldots, n),$$

gdzie a_m i b_m oznaczają liczby rzeczywiste, oznaczmy przez $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ dwie funkcyje

$$\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$
$$\psi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$$

i napiszmy dane równanie tak:

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0.$$

Stąd

$$\varphi(x) = -i\psi(x),$$

a po podniesieniu obu stron do kwadratu,

$$\varphi(x)^2 = -\psi(x)^2,$$

albo

$$(2) \qquad \varphi(x)^2 + \psi(x)^2 = 0.$$

Stopień ostatniego równania jest dwa razy wyższy, niż stopień danego, ale za to wszystkie jego spółczynniki są rzeczywiste.

Jeżeli zaś znajdziemy jaki pierwiastek tego ostatniego równania, to on będzie pierwiastkiem równania (1). Gdy bowiém liczba x, zadość czyniąca równaniu (2), jest rzeczywista, to wtedy, oczywiście,

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{i} \quad \psi(x) = 0,$$

wskutek czego

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0.$$

Gdy zaś pierwiastek równania (2) jest postaci $p + qi$, to, przywodząc do zera iloczyn

$$[\varphi(x) + i\psi(x)]\,[\varphi(x) - i\psi(x)] = \varphi(x)^2 + \psi(x)^2,$$

przywodzi zarazem do zera jeden z jego czynników, t. j. albo

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0,$$

albo

$$\varphi(x) - i\psi(x) = 0;$$

w piérwszym przypadku pierwiastkiem danego równania będzie liczba $p + qi$, zaś w drugim liczba $p - qi$, sprzężona z $p + qi$.

7. Wyznaczenie pierwiastków rzeczywistych równania ze spółczynnikami zespolonymi

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0,$$

albo, co wychodzi na jedno, pierwiastków równania

$$\varphi(x)^2 + \psi(x)^2 = 0,$$

sprowadza się do rozwiązania innego równania, stopnia niższego niż n-ty, ze spółczynnikami rzeczywistymi. To wynika z tego, że każdy z takich pierwiastków powinien jednocześnie zadość czynić dwu równaniom:

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{i} \quad \psi(x) = 0.$$

Oznaczywszy przez D największy spólny dzielnik funkcyj $\varphi(x)$ i $\psi(x)$, mamy trzy równania następujące:

$$\varphi(x)\,\mathrm{X} + \psi(x)\,\mathrm{Y} = \mathrm{D}, \quad \varphi(x) = \mathrm{DU}, \quad \psi(x) = \mathrm{DV},$$

gdzie X, Y, U, V oznaczają funkcyje całkowite, łatwo wyznaczyć się dające zapomocą zwyczajnego dzielenia. Piérwsze z tych równań wskazuje, że każda liczba x, czyniąca zadość dwu równaniom: $\varphi(x) = 0$ i $\psi(x) = 0$, czyni także zadość równaniu $\mathrm{D} = 0$; dwa zaś ostatnie z wypisanych równań wskazują, że, nawzajem, pierwiastek równania $\mathrm{D} = 0$ czyni zadość jednocześnie obu równaniom $\varphi(x) = 0$ i $\psi(x) = 0$.

A więc, *wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania ze spółczynnikami zespolonymi*

$$\varphi(x) + i\psi(x) = 0$$

czynią zadość równaniu

$$\mathrm{D} = 0,$$

i nawzajem.

Jeżeli dwie funkcyje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ okażą się piérwszymi względem siebie, to $\mathrm{D} = 1$ i równanie $\varphi(x) + i\psi(x) = 0$ nie ma pierwiastku rzeczywistego. Jeżeli zaś D jest funkcyją stopnia piérwszego lub wyższego zmiennéj x, to równanie $\varphi(x) + i\psi(x) = 0$ możemy napisać tak:

$$\mathrm{D}(\mathrm{U} + i\mathrm{V}) = 0,$$

a rozwiązanie tego równania sprowadzi się do rozwiązania każdego z dwu równań:

$$\mathrm{D} = 0,$$
$$\mathrm{U} + i\mathrm{V} = 0,$$

z których drugie nie ma pierwiastka rzeczywistego.

Przykład. Mamy równanie

$$x^5 + ix^4 + 2x^3 - (3 + 5i)x^2 - 6 - 14i = 0.$$

Oznaczywszy

$$\varphi(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 6, \quad \psi(x) = x^4 - 5x^2 - 14,$$

znajdziemy, jako największy spólny dzielnik funkcyj $\varphi(x)$ i $\psi(x)$,

$$\mathrm{D} = x^2 + 2.$$

Równanie $x^2+2=0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, zatym także równanie dane ich nie ma. Rozwiązanie zaś równania danego sprowadza się do rozwiązania równania

$$x^2+2=0$$

i równania

$$x^3-3+i(x^2-7)=0.$$

§ III. KRAŃCE DLA PIERWIASTKÓW RZECZYWISTYCH.

8. Ograniczając się do rozważania przypadku, kiedy wszystkie spółczynniki równania danego są rzeczywiste (art. 6), możemy wskazać kilka sposobów odnajdywania krańców, obejmujących pierwiastki rzeczywiste, dodatne lub ujemne, któreto krańce będą bliższe siebie, niż wynikające z twierdzenia art. 5-go (wniosek 1).

TWIERDZENIE. *Jeżeli w równaniu*

(1) $$\mathrm{A}x^n+\mathrm{A}_1x^{n-1}+\ldots-\mathrm{A}_mx^{n-m}\pm\ldots\pm\mathrm{A}_n=0$$

spółczynnik A *jest dodatny, zaś* $-\mathrm{A}_m$ *jest pierwszym spółczynnikiem ujemnym, to wartość dwumianu*

$$1+\sqrt[m]{\frac{a}{\mathrm{A}}},$$

gdzie a oznacza liczbę dodatną, nie mniejszą od wartości bezwzględnej każdego z ujemnych spółczynników równania danego, może być przyjęta za kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych.

Oznaczmy przez $f(x)$ funkcyją, stanowiącą stronę lewą równania danego, i przypuśćmy, że zmiennéj x nadaliśmy jakąkolwiek wartość dodatną; wtedy

$$f(x)\geqq \mathrm{A}x^n-ax^{n-m}-ax^{n-m-1}-ax^{n-m-2}-\ldots-a,$$

albo

$$f(x)\geqq \mathrm{A}x^n-a\frac{x^{n-m+1}-1}{x-1},$$

albo jeszcze

$$f(x)\geqq \mathrm{A}x^n-\frac{ax^{n-m+1}}{x-1}+\frac{a}{x-1}.$$

Przypuśćmy następnie, że $x>1$, i odrzućmy tu wyraz ostatni na stronie prawéj; otrzymamy

$$f(x)>\frac{\mathrm{A}x^n(x-1)-ax^{n-m+1}}{x-1},$$

albo

$$f(x)>x^{n-m+1}\frac{\mathrm{A}x^{m-1}(x-1)-a}{x-1}.$$

Ponieważ jednak, według założenia, $x > x-1 > 0$, przeto $x^{m-1} \geqq (x-1)^{m-1}$, gdzie znak $=$ ma miejsce wrazie, gdy $m-1=0$; wskutek tego,

$$f(x) > x^{n-m+1}\frac{A(x-1)^m - a}{x-1}, \qquad (x>1).$$

Ta nierówność wskazuje, że jeżeli

$$A(x-1)^m - a \geqq 0,$$

czyli

$$x \geqq 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}},$$

to wtedy

$$f(x) > 0,$$

t. j. x nie może być pierwiastkiem równania (1). Innymi słowy, każdy pierwiastek dodatny równania $f(x)=0$, jeżeli istnieje, jest mniejszy od

$$1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}}.$$

Przykład 1. Pierwiastki dodatne równania

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x - 27 = 0$$

są mniejsze od od $1 + \sqrt{27}$, a więc mniejsze od 7.

Przykład 2. Pierwiastki dodatne równania

$$x^5 + x^4 + x^2 + 5x - 109 = 0$$

są mniejsze od $1 + \sqrt[5]{109}$, a więc mniejsze od 4.

9. Inny sposób odnajdywania krańca wyższego dla pierwiastków dodatnych równania ze spółczynnikami rzeczywistymi opiéra się na następującym twierdzeniu.

Twierdzenie. *Niech* $A, A_1, A_2, \ldots, A_n$ *będą jakimikolwiek liczbami, nie mniejszymi od zera, i* $\varphi(x)$ *funkcyją postaci*

$$\varphi(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_mx^{n-m} - A_{m+1}x^{n-m-1} - \ldots - A_n,$$

gdzie m *oznacza jednę z liczb* $1, 2, \ldots, n$. *Jeżeli dla jakiéjkolwiek wartości dodatnéj* a *zmiennéj* x *jest* $\varphi(a) \geqq 0$, *to dla każdéj wartości zmiennéj* x, *większéj od* a, *ma miejsce nierówność* $\varphi(x) > \varphi(a)$, *tak iż, tymwięcéj,* $\varphi(x) > 0$.

Zważmy bowiém, że dla $x > a > 0$, mają miejsce obie nierówności:

$$Ax^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m > Aa^m + A_1a^{m-1} + \ldots + A_m,$$

$$\frac{A_{m+1}}{x} + \frac{A_{m+2}}{x^2} + \ldots + \frac{A_n}{x^{n-m}} < \frac{A_{m+1}}{a} + \frac{A_{m+2}}{a^2} + \ldots + \frac{A_n}{a^{n-m}},$$

a odejmując drugą od piérwszéj, otrzymujemy

$$Ax^m + \ldots + A_m - \frac{A_{m+1}}{x} - \ldots - \frac{A_n}{x^{n-m}} > Aa^m + \ldots + A_m - \frac{A_{m+1}}{a} - \ldots - \frac{A_n}{a^{n-m}},$$

czyli

$$\frac{\varphi(x)}{x^{n-m}} > \frac{\varphi(a)}{a^{n-m}},$$

skąd

$$\varphi(x) > \left(\frac{x}{a}\right)^{n-m} \varphi(a).$$

Ponieważ zaś, według założenia, $\varphi(a) \geqq 0$ i $\frac{x}{a} > 1$, przeto

$$\varphi(x) > \varphi(a).$$

Wniosek. *Jeżeli* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ *są funkcyjami takiéj postaci, jak funkcyja* $\varphi(x)$ *w twierdzeniu poprzedzającym; jeżeli* $a, b, c, \ldots, d$ *oznaczają takie liczby dodatne, iż odpowiednio mają miejsce nierówności*

$$\varphi_1(a) \geqq 0, \ \varphi_2(b) \geqq 0, \ldots, \varphi_m(d) \geqq 0,$$

k zaś jest liczbą dodatną, nie mniejszą od każdéj z liczb $a, b, c, \ldots, d$, *to każdéj wartości zmiennéj* x, *większéj od* k, *odpowiadająca wartość funkcyi*

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_m(x)$$

jest dodatna. Istotnie, według twierdzenia ostatniego, dla $x > k$ każda z funkcyj $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$, a zatym i ich suma, otrzymują wartości dodatne. —

Przechodząc do jakiegokolwiek równania ze spółczynnikami rzeczywistymi, zakładamy, że spółczynnik najwyższéj potęgi zmiennéj x jest dodatny.

Jeżeli wszystkie pozostałe spółczynniki są również dodatne, to wtedy równanie $f(x) = 0$ oczywiście nie posiada całkiem pierwiastków dodatnych, a zatym w tym przypadku niémaco odszukiwać dla nich wyższego krańca dodatnego.

Jeżeli zaś równanie $f(x) = 0$ posiada jeden lub więcéj spółczynników ujemnych, to wtedy możemy funkcyją $f(x)$ przedstawić jako sumę kilku funkcyj,

$$f(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots,$$

z których każda jest takiéj postaci, jak funkcyja $\varphi(x)$ w twierdzeniu ostatnim, a następnie możemy już łatwo znaléść takie liczby dodatne $a, b, c, \ldots$, któreby czyniły zadość odpowiednim warunkom

$$\varphi_1(a) \geqq 0, \ \varphi_2(b) \geqq 0, \ \varphi_3(c) \geqq 0, \ldots$$

(patrz art. 4, wniosek). Największa z tych liczb może być przyjęta jako wyższy kraniec dla pierwiastków dodatnych równania $f(x) = 0$.

Przykład 1. Dla równania

$$x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 6x - 27 = 0$$

mamy

$$\varphi_1(x)=(x^2+5x-12)x^2, \quad \varphi_2(x)=3(2x-9);$$
$$\varphi_1(2)>0, \quad \varphi_2\left(\frac{9}{2}\right)=0;$$

a zatym, jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych można przyjąć liczbę $4\frac{1}{2}$ — gdy w art. 8-ym, mając toż samo równanie, mieliśmy, jako ów kraniec, liczbę 7. — Zważmy, że jeżelibyśmy tu oznaczyli

$$\varphi_1(x)=x(x^3+5x^2-12x-6), \quad \varphi_2(x)=3(4x-9),$$

to wtedy byłoby

$$\varphi_1\left(\frac{5}{2}\right)>0, \quad \varphi_2\left(\frac{9}{4}\right)=0,$$

a przeto już liczbę $2\frac{1}{2}$ można przyjąć jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych danego równania — zamiast liczby $4\frac{1}{2}$.

Przykład 2. Strona lewa równania

$$x^5+x^4+x^2+5x-109=0$$

otrzymuje wartości dodatne przy $x=3$; a więc liczbę 3 można tu przyjąć jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych.

10. Wyznaczenie krańca niższego dla pierwiastków rzeczywistych równania ze spółczynnikami rzeczywistymi bardzo łatwo sprowadzić można do zadania, rozwiązanego w art. poprzedzającym, t. j. do wyznaczenia krańca wyższego dla takich pierwiastków. Przyjmując bowiém, że x jest liczbą dodatną, zadość czyniącą równaniu

$$\text{(1)} \qquad Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,$$

po podzieleniu obu jego stron przez x^n, otrzymujemy

$$A_n\frac{1}{x^n}+A_{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}+\ldots+A_1\frac{1}{x}+A=0,$$

czyli, kładąc $\frac{1}{x}=y$,

$$A_ny^n+A_{n-1}y^{n-1}+\ldots+A_1y+A=0.$$

Oznaczając zaś przez L kraniec wyższy dla pierwiastków rzeczywistych równania ostatniego, mamy $y<L$, czyli $\frac{1}{x}<L$, skąd

$$x>\frac{1}{L}.$$

Ta nierówność wskazuje, że każdy pierwiastek dodatny równania (jeżeli równanie go posiada) jest większy od liczby $\frac{1}{L}$; dlatego liczba $\frac{1}{L}$ może być uważana za kraniec niższy dla pierwiastków dodatnych równania (1).

Przykład. Chcemy znaléść kraniec niższy dla pierwiastków dodatnych równania

$$x^4+5x^3-12x^2+6x-27=0.$$

W tym celu znajdziemy naprzód kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych równania

$$27y^4-6y^3+12y^2-5y-1=0.$$

Kładąc

$$\varphi_1(y)=3y^3(9y-2),\quad \varphi_2(y)=12y^2-5y-1,$$

znajdujemy

$$\varphi_1\left(\frac{1}{3}\right)>0,\quad \varphi_2\left(\frac{2}{3}\right)>0;$$

zatym $\frac{2}{3}$ jest krańcem wyższym dla pierwiastków dodatnych równania z niewiadomą y, a $\frac{3}{2}$ jest krańcem niższym dla pierwiastków dodatnych równania danego.

11. Ażeby wyznaczyć krańce dla pierwiastków ujemnych równania

$$Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_{n-1}x+A_n=0,$$

w lewéj jego stronie, zamiast x, podstawimy $-y$. Dla otrzymanego zaś równania

$$Ay^n-A_1y^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}A_{n-1}y+(-1)^nA_n=0$$

znajdziemy, zapomocą powyżéj wyłożonych sposobów, wyższy i niższy kraniec dla jego pierwiastków dodatnych. Jeżeli owe krańce są np. L i M, to, oczywiście, wszystkie pierwiastki ujemne równania danego (jeżeli tylko one istnieją) są zawarte między krańcami — L i — M.

Przykład. Pierwiastki ujemne równania

$$x^4+5x^3-12x^2+6x-27=0$$

są zawarte między krańcami — 5 i — 7.

Uwaga. Zdarza się niekiedy, że kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych jest mniejszy od niższego dla nich krańca. Wskazuje to, iż dane równanie nie ma żadnego pierwiastka dodatnego. Toż samo można powiedziéć i o krańcach dla pierwiastków ujemnych.

Np. Ażeby mieć kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych równania

$$x^5-x^4-x^2+5x+109=0,$$

kładąc

$$\varphi_1(x)=x^2(x^3-x^2-1),\quad \varphi_2(x)=5x+109,$$

znajdujemy $\varphi_1\left(\frac{3}{2}\right)>0$; można więc $\frac{3}{2}$ przyjąć jako szukany kraniec wyższy. Ażeby zaś otrzymać kraniec niższy dla pierwiastków dodatnych tegoż równania, utworzymy równanie

$$109y^5+5y^4-y^3-y+1=0$$

i, kładąc

$$\varphi(y)=y(109y^4+5y^3-y^2-1),$$

znajdziemy $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)>0$; zatym liczba 3 może być przyjęta jako kraniec niższy dla pierwiastków dodatnych. Wypadło nam przeto, iż każdy pierwiastek dodatny równania

$$x^5-x^4-x^2+5x+109=0$$

powinien być mniejszy od $\frac{3}{2}$ i większy od 3. Ponieważ te warunki są z sobą sprzeczne, zatym powyższe równanie wcale nie ma pierwiastków dodatnych. Stąd także wynika, że równanie

$$x^5+x^4+x^2+5x-109=0$$

wcale nie ma pierwiastków ujemnych.

ROZDZIAŁ II.

WZÓR TAYLOR'A. — OBLICZANIE WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITÉJ I JÉJ POCHODNYCH. — PIERWIASTKI WIELOKROTNE. — PRAWO CIĄGŁOŚCI I NIEKTÓRE JEGO NASTĘPSTWA. — DOWÓD ISTNIENIA PIERWIASTKA.

§ 1. WZÓR TAYLOR'A.

12. Mnożąc wyrazy funkcyi całkowitéj

$$f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-m} x^m + \ldots + A_n$$

odpowiednio przez

$$nx^{-1},\ (n-1)x^{-1}, \ldots, mx^{-1}, \ldots, 0x^{-1},$$

otrzymujemy nową funkcyją stopnia o jedność niższego

$$f'(x) = nAx^{n-1} + (n-1)A_1 x^{n-2} + \ldots + mA_{n-m} x^{m-1} + \ldots + A_{n-1},$$

która się nazywa p i é r w s z ą p o c h o d n ą funkcyi danéj $f(x)$.

Piérwsza pochodna funkcyi $f'(x)$ nazywa się d r u g ą p o c h o d n ą funkcyi $f(x)$ i wyraża się tak:

$$f''(x) = n(n-1)Ax^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1 x^{n-3} + \ldots + 2A_{n-2}.$$

Trzecia pochodna funkcyi $f(x)$ jest funkcyją stopnia $(n-3)$-go,

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)Ax^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)A_1 x^{n-4} + \ldots + 3.2A_{n-3}.$$

Wogóle funkcyja stopnia $(n-m)$-go,

$$f^{m)}(x) = n(n-1)\ldots(n-m+1)Ax^{n-m} + (n-1)(n-2)\ldots(n-m)A_1 x^{n-m-1} + \ldots + \\ + m(m-1)\ldots 2.1A_{n-m},$$

nazywa się m - t ą p o c h o d n ą funkcyi danéj $f(x)$.

Z określenia bezpośrednio wynika, że n-ta pochodna danéj funkcyi $f(x)$ jest liczbą stałą,

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2.1A,$$

i że wszystkie następne pochodne są tożsamościowo równe zeru.

Funkcyje pochodne powstają same przez się, jeżeli w danéj funkcyi $f(x)$ zamiast x podstawimy $x+h$, a wynik podstawienia,

$$f(x+h)=A(x+h)^n+A_1(x+h)^{n-1}+\ldots+A_n,$$

uporządkujemy według potęg rosnących litery h. Jakoż, rozkładając każdy wyraz po stronie prawéj według dwumianu Newton'a i łącząc wyrazy podobne, otrzymujemy

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x).$$

Jest to wzór Taylor'a.

Pisząc a zamiast x, zaś $x-a$ zamiast h, możemy ten wzór tak przedstawić:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(a).$$

Przykład. Kładąc

$$f(x)=x^3-2x+5,$$

mamy równość

$$f(x)=a^3-2a+5+(x-a)(3a^2-2)+3(x-a)^2a+(x-a)^3.$$

13. W przypadku szczególnym, kiedy wszystkie spółczynniki w wyrażeniu funkcyi $f(x)$ są rzeczywiste, wzór

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)$$

wskazuje, że, wrazie gdy dla pewnéj wartości rzeczywistéj a na zmienną x wszystkie liczby

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$$

nie są mniejsze od zera, mamy, przy każdéj dodatnéj wartości h,

$$f(a+h)>0,$$

i dlatego żadna liczba większa od a nie może być pierwiastkiem równania $f(x)=0$.

Ta uwaga nasuwa nowy sposób odnajdywania krańca wyższego dla pierwiastków dodatnych równania o spółczynnikach rzeczywistych, znany jako sposób Newton'a. Żeby zaś wyznaczyć liczbę a, zadość czyniącą powyżéj wskazanym warunkom, należy uprzednio założyć, że spółczynnik najwyższéj potęgi niewiadoméj x w równaniu $f(x)=0$ jest liczbą dodatną; wtedy bowiém spółczynniki najwyższych potęg zmiennéj x w wyrażeniu każdéj z funkcyj

$$f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x), f^{(n)}(x)$$

będą dodatne, a, przy dość wielkiéj wartości dodatnéj $x=a$, wszystkie liczby

$$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n-1)}(a), f^{(n)}(a)$$

będą również dodatne.

Najprostszy sposób, zwykle używany do wyznaczenia liczby a, jest następujący. Odnajdujemy naprzód taką liczbę dodatną a_{n-1}, dla któréjby funkcyja stopnia piérwszego, $f^{(n-1)}(x)$, była nie mniejszą od zera. Następnie wyznaczamy znak liczby $f^{(n-2)}(a_{n-1})$; jeżeli ta liczba jest ujemną, to szukamy innéj liczby $a_{n-2} > a_{n-1}$, która czyniłaby zadość nierówności $f^{(n-2)}(a_{n-2}) \geqq 0$; jeżeli zaś $f^{(n-2)}(a_{n-1}) \geqq 0$, to zostawiamy poprzednią liczbę a_{n-1}, t. j. przyjmujemy $a_{n-2} = a_{n-1}$. Podobnie daléj; obliczamy $f^{(n-3)}(a_{n-2})$; jeżeli ta liczba jest ujemna, to wyznaczamy nową liczbę $a_{n-3} > a_{n-2}$ taką, iżby $f^{(n-3)}(a_{n-3}) \geqq 0$; jeżeli zaś $f^{(n-3)}(a_{n-2}) \geqq 0$, to przyjmujemy $a_{n-3} = a_{n-2}$. Postępując wciąż w podobny sposób, znajdziemy żądaną liczbę a, zadość czyniącą warunkom

$$f(a) \geqq 0,\ f'(a) \geqq 0, \ldots, f^{(n-1)}(a) \geqq 0.$$

Co się zaś tyczy liczby $f^{(n)}(a)$, to ona nie zależy od a, gdyż jest nią iloczyn $1.2.3\ldots n\mathrm{A}$, a więc ta liczba jest dodatna, gdyż, według założenia, $\mathrm{A} > 0$.

Przykład. Znaléść kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych równania

$$x^6 + 3x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 481 = 0.$$

Następująca tablica wskazuje sposób wyznaczenia tu liczby a.

$f = x^6 + 3x^5 - 12x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 481$			—	+
$f' = 6x^5 + 15x^4 - 48x^3 + 18x^2 - 34x$			+	
$\frac{1}{2} f'' = 15x^4 + 30x^3 - 72x^2 + 18x - 17$		—	+	
$\frac{1}{6} f''' = 20x^3 + 30x^2 - 48x + 6$		+		
$\frac{1}{24} f^{\mathrm{IV}} = 15x^2 + 15x - 12$	—	+		
$\frac{1}{120} f^{\mathrm{V}} = 6x + 3$	+			
$x =$	0	1	2	3

Zaczynamy z dołu; przy $x = 0$, znajdujemy $f^{\mathrm{V}}(0) > 0$, $f^{\mathrm{IV}}(0) < 0$; przyjmujemy następnie $x = 1$ i znajdujemy $f^{\mathrm{IV}}(1) > 0$, $f'''(1) > 0$, $f''(1) < 0$; przy $x = 2$, $f''(2) > 0$, $f'(2) > 0$, $f(2) < 0$; przy $x = 3$, $f(3) > 0$; a zatym liczbę 3 można przyjąć jako kraniec wyższy dla pierwiastków dodatnych równania danego.

§ II. OBLICZANIE WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITÉJ I JÉJ POCHODNYCH.

14. Dzieląc funkcyją

$$\mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} x + \mathrm{A}_n$$

przez $x-a$ i przedstawiając iloraz przez

$$Bx^{n-1}+B_1x^{n-1}+\ldots+B_{n-2}x+B_{n-1},$$

a resztę przez B_n, mamy następujące równania dla kolejnego wyznaczenia spółczynników $B, B_1, \ldots, B_n$:

$$B=A,\ B_1=aB+A_1,\ B_2=aB_1+A_2, \ldots, B_{n-1}=aB_{n-2}+A_{n-1},\ B_n=aB_{n-1}+A_n.$$

Stąd wynika bardzo łatwy sposób otrzymania ilorazu i reszty z podzielenia funkcyi $f(x)$ przez $x-a$.

Wypiszmy wszystkie spółczynniki danéj funkcyi $f(x)$ obok siebie, jeden za drugim, i pod piérwszym z nich, w drugim wiérszu, napiszmy jeszcze raz piérwszy spółczynnik A. Uczyniwszy to, mnożymy liczbę A przez a i iloczyn dodajemy do drugiéj liczby wiérsza piérwszego, t. j. do A_1; otrzymaną sumę przyjmujemy jako drugą liczbę wiérsza drugiego. Tę liczbę mnożymy przez a i iloczyn dodajemy do trzeciéj liczby wiérsza piérwszego; suma będzie trzecią liczbą wiérsza drugiego. Postępując w ten sposób do końca, otrzymamy w wiérszu drugim wszystkie szukane liczby $B, B_1, \ldots, B_n$; ostatnia z nich jest wartością funkcyi $f(x)$ przy $x=a$, a najczęściéj o tę tylko wartość nam idzie.

Przykład. Obliczyć wartości funkcyi

$$f(x)=x^6+3x^5-12x^4+6x^3-17x^2-481$$

dla $x=3$. — Postępując według powyższéj reguły, znajdujemy

1	3	—12	6	—17	0	—481,
1	6	6	24	55	165	14.

Iloraz z podzielenia $f(x)$ przez $x-3$ jest

$$x^5+6x^4+6x^3+24x^2+55x+165,$$

a reszta

$$f(3)=14.$$

15. Wzór Taylor'a, przedstawiony w postaci

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)+\ldots,$$

okazuje, iż:

Wskutek podzielenia funkcyi $f(x)$ przez $x-a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi(x)=f'(a)+\frac{x-a}{1.2}f''(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2.3}f'''(a)+\ldots$$

i resztę

$$R=f(a).$$

Wskutek podzielenia funkcyi $\varphi(x)$ przez $x-a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{1.2}f''(a)+\frac{x-a}{1.2.3}f'''(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2.3.4}f^{IV}(a)+\ldots$$

i resztę

$$R_1=f'(a).$$

Wskutek podzielenia funkcyi $\varphi_1(x)$ przez $x-a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{1.2.3}f'''(a)+\frac{x-a}{1.2.3.4}f^{\text{IV}}(a)+\ldots$$

i resztę

$$\mathrm{R}_2=\frac{1}{1.2}f''(a).$$

I tak daléj, tak iż nakoniec, wskutek podzielenia funkcyi $\varphi_{n-2}(x)$ przez $x-a$, otrzymujemy iloraz

$$\varphi_{n-1}(x)=1$$

i resztę

$$\mathrm{R}_{n-1}=\frac{1}{1.2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(a).$$

Ta uwaga często ułatwia wyznaczenie spółczynników rożmaitych potęg dwumianu $x-a$ w rozwinięciu funkcyi według wzoru Taylor'a. W tym celu należy tylko n razy zrzędu zastosować prawidło, podane w art. poprzednim.

Przykład. Rozwinąć funkcyją

$$f(x)=x^5+2x^4-13x^3-x^2-25x+100$$

według potęg dwumianu $x+5$. — Należy przyjąć $a=-5$, co doprowadza do następującéj tablicy:

1	2	−13	−1	−25	100
1	−3	2	−11	30	<u>−50</u>
1	−8	42	−221	<u>1135</u>	
1	−13	107	<u>−756</u>		
1	−18	<u>197</u>			
1	<u>−23</u>				

Liczby podkréślone są spółczynnikami szukanymi, t. j.

$$f(-5)=-50,\quad f'(-5)=1135,\quad \frac{1}{2}f''(-5)=-756,$$

$$\frac{1}{6}f'''(-5)=197,\quad \frac{1}{24}f^{\text{IV}}(-5)=-23.$$

Taki sposób obliczania wartości $f(a)$, $f'(a)$, $\frac{1}{2}f''(a),\ldots$ podał Horner.

§ III. PIERWIASTKI WIELOKROTNE.

16. Jeżeli m oznacza którąkolwiek z liczb $1, 2, 3, \ldots, n$, to ze wzoru

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)+\ldots$$

widoczna, że resztą z podzielenia funkcyi $f(x)$ przez $(x-a)^m$ jest

$$f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(a);$$

ażeby więc funkcyja $f(x)$ była podzielną przez $(x-a)^m$, potrzeba i wystarcza, aby

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0.$$

Jeżeli a czyni zadość tym warunkom i, prócz tego, $f^{(m)}(a)$ nie równa się zeru, to funkcyja $f(x)$, podzielna przez $(x-a)^m$, nie będzie podzielną przez $(x-a)^{m+1}$. W takim razie funkcyja linijowa $x-a$ nazywa się czynnikiem m-krotnym funkcyi $f(x)$, a liczba a pierwiastkiem m-krotnym równania $f(x)=0$.

Jeżeli $m=1$, to liczba a jest pierwiastkiem pojedyńczym równania $f(x)=0$, a funkcyja $x-a$ czynnikiem pojedyńczym funkcyi $f(x)$.

Z tego, co wyżéj powiedziano, wynika, że pierwiastek m-krotny równania $f(x)=0$ jest pierwiastkiem $(m-1)$-krotnym równania $f'(x)=0$, $(m-2)$-krotnym równania $f''(x)=0$, i t. d., nakoniec pojedyńczym równania $f^{(m-1)}(x)=0$, a nie czyni już zadość równaniu $f^m(x)=0$. Innymi słowy, jeżeli dwumian $x-a$ jest czynnikiem m-krotnym funkcyi $f(x)$, to jest zarazem czynnikiem $(m-1)$-krotnym funkcyi $f'(x)$ i t. d.

Przykład 1. Równanie

$$f(x)=x^4+4x^3-18x^2+20x-7=0$$

posiada pierwiastek, równy jedności; zważając, iż

$$f(1)=f'(1)=f''(1)=0, \quad \frac{1}{6}f'''(1)=8,$$

wnosimy, że 1 jest pierwiastkiem trzykrotnym równania danego. Wskutek tego możemy je tak napisać:

$$(x-1)^3(x+7)=0.$$

Przykład 2. Równanie stopnia n-go

$$\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}+\ldots+\frac{x}{1}+1=0$$

nie ma pierwiastka wielokrotnego. — Oznaczając stronę lewą tego równania przez $f(x)$, mamy tożsamość:

$$f'(x)=f(x)-\frac{x^n}{1.2\ldots n};$$

a zatym, jeżeli a jest pierwiastkiem równania danego, to

$$f'(a)=-\frac{a^n}{1.2\ldots n},$$

i, jeżeli ten pierwiastek byłby wielokrotnym, to byłoby $a=0$, a to być nie może, gdyż $f(0)=1$.

Przykład 3. Jeżeli A nie jest różne od zera, to równanie $x^n-A=0$ nie ma pierwiastka wielokrotnego.

Przykład 4. Aby równanie $x^n - px + q = 0$ miało pierwiastek dwukrotny, czyli, aby temu równaniu zadość czynił pierwiastek równania $nx^{n-1} - p = 0$, t. j.

$$x = \left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

potrzeba, aby

$$\left(\frac{p}{n}\right)^n = \left(\frac{q}{n-1}\right)^{n-1};$$

wtedy $\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \frac{q}{n-1}$, czyli $\frac{p}{n}\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{q}{n-1}$, tak iż zamiast $\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ możemy pisać $\frac{nq}{(n-1)p}$.

17. Niech $a + bi$ będzie jakąkolwiek liczbą zespoloną. Według wzoru Taylor'a mamy

$$f(a+bi) = f(a) + \frac{bi}{1} f'(a) - \frac{b^2}{1.2} f''(a) - \frac{b^3 i}{1.2.3} f'''(a) + \ldots,$$

a wprowadziwszy oznaczenia:

$$\mathrm{M} = f(a) - \frac{b^2}{1.2} f''(a) + \frac{b^4}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(a) - \ldots,$$

$$\mathrm{N} = \frac{b}{1} f'(a) - \frac{b^3}{1.2.3} f'''(a) + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} f^{\mathrm{V}}(a) - \ldots,$$

otrzymujemy

$$f(a+bi) = \mathrm{M} + \mathrm{N}i,$$
$$f(a-bi) = \mathrm{M} - \mathrm{N}i.$$

Jeżeli w wyrażeniu funkcyi $f(x)$ spółczynniki są rzeczywiste, to, oczywiście, liczby M i N są również rzeczywiste; wówczas dwie liczby $f(a+bi)$ i $f(a-bi)$ będą zespolone sprzężone, a jeżeli $f(a+bi) = 0$, to także $f(a-bi) = 0$. Gdyby się zdarzyło, że i $f'(a+bi) = 0$, to, dla tejże przyczyny, byłoby również $f'(a-bi) = 0$, i t. d.; jeżeli $f^{(m)}(a+bi)$ nie równa się zeru, to i $f^{(m)}(a-bi)$ także nie jest równe zeru. A więc:

Twierdzenie. *Jeżeli równanie ze spółczynnikami rzeczywistymi posiada pierwiastek m-krotny zespolony $a+bi$, to posiada ono także drugi pierwiastek $a-bi$, sprzężony z poprzednim i również m-krotny.*

§ IV. PRAWO CIĄGŁOŚCI.

18. Wzór Taylor'a, napisany w postaci

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x),$$

daje wyrażenie przyrostka, jaki otrzymuje wartość funkcyi całkowitéj $f(x)$, gdy zmienna x otrzymuje przyrostek dowolny h.

Rozważając to wyrażenie jako funkcyją jednéj zmiennéj h, spostrzegamy, iż w nim niéma wyrazu stałego, a więc do tego wyrażenia można zastosować twierdzenie art. 4-go. Oznaczając więc przez k dowolną liczbę dodatną, a przez a liczbę dodatną, nie mniejszą od każdéj z liczb: $\operatorname{mod} f'(x)$, $\frac{1}{1.2}\operatorname{mod} f''(x)$, ..., dla wszystkich wartości h, czyniących zadość nierówności

$$\operatorname{mod} h < \frac{k}{k+a},$$

mamy

$$\operatorname{mod}\,[f(x+h)-f(x)] < k.$$

Stąd bezpośrednio wynika następujące

Twierdzenie. *Przyrostek modułu funkcyi całkowitéj $f(x)$, odpowiadający przyrostkowi dowolnemu h zmiennéj niezależnéj x, jest mniejszy od dowolnie wziętéj liczby dodatnéj, jeżeli wartość* mod h *jest dostatecznie mała.*

Własność funkcyi, którą powyższe twierdzenie wyraża, nazywa się **prawem ciągłości**; ma ono miejsce dla wszystkich funkcyj całkowitych, przy wszelkich możliwych wartościach zmiennéj niezależnéj.

Prawo to może być wyrażone inaczéj w ten sposób:

Gdy przyrostek zmiennéj niezależnéj zdąża do granicy równéj zeru, to odpowiadający przyrostek funkcyi całkowitéj $f(x)$ również zdąża do granicy równéj zeru.

Albo jeszcze:

Nieskończenie małemu przyrostkowi zmiennéj niezależnéj x odpowiada nieskończenie mały przyrostek funkcyi całkowitéj $f(x)$.

19. Ułamek, powstający wskutek podzielenia funkcyi całkowitéj

$$f = Ax^n + A_1x^{n-1} + \ldots$$

przez jakąkolwiek inną funkcyją całkowitą

$$\varphi = Bx^m + B_1x^{m-1} + \ldots$$

(wrazie jeżeli funkcyja f nie jest podzielna przez funkcyją φ), nazywa się **funkcyją ułamkową**. Weźmy jakąkolwiek funkcyją ułamkową

$$F = \frac{f}{\varphi},$$

któréj licznik i mianownik są piérwsze względem siebie, co zawsze możemy przypuszczać, gdyż, wrazie przeciwnym, moglibyśmy ułamek skrócić.

Dla wartości zmiennéj x, zadość czyniącéj równaniu $\varphi = 0$, wartość odpowiednia funkcyi F równa się ∞. Wyłączmy spod uwagi takie wartości i przyjmijmy, że zmiennéj x nadano wartość, przy któréj funkcyja φ nie równa się zeru. Jeżeli, zamiast poprzedniéj wartości x przyjmiemy nową $x+h$, to f, φ i F otrzymują nowe wartości, które możemy odpowiednio tak oznaczyć:

$f+\Delta f$, $\varphi+\Delta\varphi$, $F+\Delta F$; będziemy więc mieli

$$\Delta F=\frac{\varphi\Delta f-f\Delta\varphi}{\varphi(\varphi+\Delta\varphi)}.$$

Przypuśćmy, że α i k są dwiema liczbami dodatnymi, czyniącymi zadość nierównościom

$$\alpha \geqq \mathrm{mod}\, f, \quad \alpha \geqq \mathrm{mod}\,\varphi, \quad k \leqq \frac{2\alpha}{\mathrm{mod}\,\varphi}.$$

Na zasadzie twierdzenia art. 18-go, przy dostatecznie małéj wartości mod h możemy przyjąć, iż jednocześnie

$$\mathrm{mod}\,\Delta f<\frac{\mathrm{mod}^2\varphi}{4\alpha}k, \quad \mathrm{mod}\,\Delta\varphi<\frac{\mathrm{mod}^2\varphi}{4\alpha}k.$$

Z tych nierówności i z obu nierówności, którym, według przypuszczenia, czyni zadość liczba α, wynika, iż

$$\mathrm{mod}\,\varphi\Delta f<\frac{\mathrm{mod}^2\varphi}{4}k, \quad \mathrm{mod}\, f\Delta\varphi<\frac{\mathrm{mod}^2\varphi}{4}k,$$

wskutek czego

$$\mathrm{mod}\,(\varphi\Delta f-f\Delta\varphi)<\frac{\mathrm{mod}^2\varphi}{2}k.$$

Ponieważ zaś z nierówności dla $\Delta\varphi$ i z nierówności, któréj, według przypuszczenia, czyni zadość liczba k, wynika, iż $\mathrm{mod}\,\Delta\varphi<\frac{\mathrm{mod}\,\varphi}{2}$, a wogóle jest

$\mathrm{mod}\,(\varphi+\Delta\varphi)\geqq \mathrm{mod}\,\varphi-\mathrm{mod}\,\Delta\varphi$, przeto $\mathrm{mod}\,(\varphi+\Delta\varphi)>\frac{\mathrm{mod}\,\varphi}{2}$, albo, po pomnożeniu obu stron przez mod φ,

$$\mathrm{mod}\,\varphi(\varphi+\Delta\varphi)>\frac{\mathrm{mod}^2\varphi}{2}.$$

Dzieląc tak otrzymane nierówności przez siebie, mamy

$$\mathrm{mod}\,\frac{\varphi\Delta f-f\Delta\varphi}{\varphi(\varphi+\Delta\varphi)}<k,$$

albo

$$\mathrm{mod}\,\Delta F<k.$$

Stąd wynika, że przyrostek funkcyi F może być tak małym, jak się podoba, byle wartość mod h była dostatecznie małą. Innymi słowy: *funkcyja ułamkowa* $\frac{f}{\varphi}$ *dla wszelkich wartości zmiennéj niezależnéj* x, *nie przywodzących mianownika téj funkcyi do zera, jest ciągłą.*

Jeżeli funkcyja $\frac{f}{\varphi}$ dla pewnéj szczególnéj wartości x staje się ∞, to w tym wykładzie mówić będziemy, że wtedy ma miejsce przerwa ciągłości.

§ V. PRZYPADEK, KIEDY ZMIENNE x I $f(x)$ SĄ RZECZYWISTE.

20. Przystępując do wyprowadzenia kilku wniosków, które wprost wynikają z prawa ciągłości, przyjmiemy naprzód, że wszystkie spółczynniki funkcyi

$$f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n$$

są rzeczywiste, oraz że zmienna x otrzymuje tylko wartości rzeczywiste.

Jeżeli jakakolwiek liczba zmienna rzeczywista zmienia swoje wartości tak, że, przechodząc od pewnéj wartości szczególnéj do innéj, otrzymuje wszystkie wartości pośrednie, to wtedy mówimy, że ona zmienia się w sposób ciągły.

Z twierdzenia, udowodnionego w art. 18-ym, bezpośrednio wnosimy, że jeżeli zmienna niezależna x zmienia się w sposób ciągły, to i funkcyja całkowita $f(x)$ zmienia się również w sposób ciągły.

Toż samo wyraża twierdzenie następujące:

Twierdzenie. *Jeżeli k jest jakąkolwiek liczbą pośrednią między dwiema wartościami $f(a)$ i $f(b)$ funkcyi całkowitéj $f(x)$, to istnieje liczba c, pośrednia między a i b, która zadość czyni równaniu $f(c) = k$.*

Wniosek 1. *Jeżeli dwie jakiekolwiek wartości $f(a)$ i $f(b)$ funkcyi całkowitéj $f(x)$ są znaków różnych, to między krańcami a i b znajduje się taka liczba c, która czyni zadość równaniu $f(x) = 0$.*

Wniosek 2. *Każde równanie stopnia nieparzystego ze spółczynnikami rzeczywistymi ma przynajmniéj jeden pierwiastek rzeczywisty.* Wartości bowiém funkcyi, stanowiącéj stronę lewą takiego równania, przy dwu różnego znaku wartościach zmiennéj x, bezwzględnie dostatecznie wielkich, są różnego znaku.

Wniosek 3. *Każde równanie stopnia parzystego ze spółczynnikami rzeczywistymi, w którym spółczynniki wyrazów skrajnych są różnego znaku, ma przynajmniéj dwa pierwiastki rzeczywiste, które wtedy są różnego znaku.* Albowiém wartości funkcyi, stanowiącéj stronę lewą takiego równania, przy $x = 0$ i przy x dostatecznie wielkim dodatnym, jakotéż jéj wartości przy $x = 0$ i przy x ujemnym, bezwzględnie dostatecznie wielkim, są różnego znaku.

Wniosek 4. *Jeżeli funkcyja $f(x)$ nie staje się zerem dla żadnéj wartości zmiennéj x, pośredniéj między liczbami a i b, to ona przy wszystkich tych wartościach zmiennéj x jest wciąż tego samego znaku.* W przeciwnym bowiém razie posiadałaby pierwiastek zawarty między liczbami a i b.

21. Twierdzenie. *Gdy zmienna x przechodzi przez wartośćr zeczywistą a* (czyto od wartości mniejszych do większych, czytéż od większych do mniejszych), *będącą pierwiastkiem m-krotnym równania $f(x) = 0$, wtedy funkcyja $f(x)$ zmienia swój znak, albo go nie zmienia, stosownie do tego, czy liczba m jest nieparzysta, czytéż parzysta.*

Wskutek założenia o liczbie a, według wzoru Taylor'a mamy

$$f(a+h) = \frac{h^m}{1.2 \ldots m}\left[f^{(m)}(a) + \frac{h}{m+1} f^{(m+1)}(a) + \ldots\right],$$

gdzie $f^{(m)}(a)$ jest różne od zera. Z tego zaś wynika, iż, przy wartościach h, bezwzględnie dostatecznie małych, znak wartości $f(a+h)$ będzie taki, jak znak iloczynu $h^m f^{(m)}(a)$; a więc, jeżeli m jest liczbą nieparzystą, to $f(a-h)$ i $f(a+h)$ są różnego znaku, jeżeli zaś m jest liczbą parzystą, to $f(a-h)$ i $f(a+h)$ są tegoż samego znaku. —

Mając wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania $f(x)=0$ i wiedząc, jaka jest wielokrotność każdego z nich, możemy wprost określić znak wartości funkcyi $f(x)$ przy jakiéjkolwiek szczególnéj wartości zmiennéj x. Jakoż, niech

$$a_1, a_2, \ldots a_r$$

oznaczają wszystkie r pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$, uporządkowane według ich wartości rosnących, i niech

$$m_1, m_2, \ldots m_r$$

oznaczają odpowiednie wielokrotności tych pierwiastków. Biorąc pod uwagę $r+1$ przedziałów, wyznaczonych przez każde dwie sąsiednie z $r+2$ liczb

$$-\infty, a_1, a_2, \ldots, a_r, +\infty,$$

zauważymy naprzód, że znak funkcyi $f(x)$, przy wszelkich wartościach zmiennéj x, zawartych w przedziale piérwszym $(-\infty, a_1)$, jest taki sam, jak znak piérwszego jéj wyrazu przy $x=-\infty$, przy wartościach zaś zmiennéj x, zawartych w przedziale ostatnim $(a_r, +\infty)$, znak funkcyi $f(x)$ jest taki sam, jak znak piérwszego jéj wyrazu przy $x=+\infty$. Przy wszelkich zaś wartościach zmiennéj x, zawartych w drugim przedziale (a_1, a_2), wartości funkcyi $f(x)$ są tegoż samego lub innego znaku, niż wartości jéj, odpowiadające przedziałowi piérwszemu $(-\infty, a_1)$, stosownie do tego, czy liczba m_1 jest parzysta, czytéż nieparzysta; dla wszelkich wartości x, zawartych w trzecim przedziale (a_2, a_3), znak funkcyi $f(x)$ jest taki sam, jak znak jéj w przedziale poprzednim, lubtéż inny, stosownie do tego, czy m_2 jest liczbą parzystą, czytéż nieparzystą. Tym sposobem, przechodząc od jednego przedziału do drugiego, z łatwością wyznaczymy znak funkcyi $f(x)$ dla wszelkiéj wartości zmiennéj x.

22. Twierdzenie. *Jeżeli dla każdéj wartości zmiennéj x, zawartéj między dwiema liczbami danymi a i b, wartość funkcyi pochodnéj $f'(x)$ utrzymuje wciąż tenże znak, to, wmiarę powiększania się wartości zmiennéj x od krańca niższego a do wyższego b, wartości odpowiednie funkcyi $f(x)$ wzrastają lub maleją, stosownie do tego, czy wartości funkcyi $f'(x)$ są w owym przedziale dodatne, czytéż ujemne.*

Przyjmijmy naprzód, że funkcyja pochodna $f'(x)$ jest wciąż dodatna dla wartości x, zawartych w przedziale od $x=a$ do $x=b$, i że c przedstawia jakąkolwiek liczbę pośrednią między a i b; wtedy równanie

$$f(x)-f(c)=0$$

w przedziale od $x=a$ do $x=b$ ma tylko pierwiastek $x=c$. Gdyby bowiém to równanie miało w owym przedziale od $x=a$ do $x=b$ pierwiastek różny od c, i gdybyśmy taki pierwiastek, najbliższy liczby c, nazwali d, przez h zaś oznaczyli liczbę dowolną, bezwzględnie dostatecznie małą, a tegoż znaku, co różnica $d-c$, to dwie różnice

$$f(c+h)-f(c) \quad \text{i} \quad f(d-h)-f(c)$$

byłyby jednakowego znaku, gdyż funkcyja $f(x)-f(c)$ nie ma pierwiastka między $x=c$ i $x=d$ — gdy tymczasem równości

$$f(c+h)-f(c)=hf'(c)+\frac{h^2}{2}f''(c)+\ldots,$$

$$f(d-h)-f(c)=-hf'(d)+\frac{h^2}{2}f''(d)+\ldots$$

wskazują, iż owe dwie różnice są różnego znaku, albowiem, według założenia, wartości $f'(c)$ i $f'(d)$ są tegoż samego znaku. — Gdy więc funkcyja $f(x)-f(c)$ nie staje się zerem dla wartości x w przedziale między $x=c$ i $x=b$, przeto od $x=c$ do $x=b$ utrzymuje ona wciąż tenże sam znak. Że zaś, przy h dodatnym i dostatecznie małym, jest

$$f(c+h)-f(c)=hf'(c)+\frac{h^2}{2}f''(c)+\ldots>0,$$

zatym, dla wszelkich wartości x od $x=c$ do $x=b$, mamy $f(x)-f(c)>0$, czyli

$$f(x)>f(c).$$

A więc, z uwagi, że c jest jakąkolwiek liczbą pośrednią między a i b, funkcyja $f(x)$ w przedziale od $x=a$ do $x=b$ wciąż wzrasta.

Przyjmijmy następnie, że funkcyja $f'(x)$ od $x=a$ do $x=b$ jest wciąż ujemna. Wtedy funkcyja $-f'(x)$ od $x=a$ do $x=b$ jest wciąż ujemną, i dlatego funkcyja $-f(x)$ w tym przedziale wciąż wzrasta, funkcyja zaś $f(x)$ w tymże przedziale wciąż maleje.

23. Jeżeli funkcyja całkowita $f(x)$ dla wartości, zawartych w przedziale pomiędzy a i b, wciąż wzrasta albo wciąż maleje, to równanie $f(x)=0$ nie może mieć więcéj, jak jeden pierwiastek w przedziale między a i b, a jeżeli taki pierwiastek istnieje, to jego wielokrotność jest nieparzysta. Może się zdarzyć, że $f(x)$ ma pierwiastek równy jednemu z tych krańców, np. liczbie a; wtedy wielokrotność tego pierwiastka może być albo parzysta, albo nieparzysta, ale już innego pierwiastka w przedziale między a i b, włączając w to i kraniec drugi b, być nie może.

Ażeby się dowiedzieć, który z tych przypadków ma miejsce, należy określić znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$. Jeżeli każda z wartości $f(a)$ i $f(b)$ jest różna od zera i jeżeli one są jednakowego znaku, to równanie $f(x)=0$ nie ma ani jednego pierwiastka, zawartego w przedziale a, b; jeżeli zaś owe wartości są różnego znaku, to w przedziale a, b równanie $f(x)=0$ posiada jeden pierwiastek wielokrotności nieparzystéj.

24. Jeżeli wiadome są wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania $f'(x)=0$, to łatwo można znaléść wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania $f(x)=0$.

Niech $a, b, c, \ldots, d$ będą tymi pierwiastkami rzeczywistymi równania $f'(x)=0$, których wielokrotność jest nieparzysta, i przyjmijmy, że $a<b<c \ldots <d$. Ponieważ w każdym z przedziałów

$$-\infty, a; \quad a, b; \quad b, c; \ldots; d, +\infty,$$

funkcyja $f(x)$ albo wciąż wzrasta, albo wciąż maleje, przeto łatwo się dowiedzieć, w którym z tych przedziałów przypada pierwiastek równania $f(x)=0$, a w którym niéma pierwiastka. Wskutek tego będziemy wiedzieli ilość wszystkich pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$, a dla każdego z nich będziemy mieli dwa krańce, oddzielające go od innych pierwiastków, jeżeli one istnieją.

Jeżeli w przedziale a, b przypada pierwiastek, to, dzieląc ten przedział na dowolną ilość nowych przedziałów, możemy się dowiedzieć, w którym mianowicie z tych ostatnich przedziałów pierwiastek się znajduje; otrzymamy więc dla niego krańce więcéj zbliżone, niż pierwotne a i b. Podobnie postępując daléj, będziemy coraz więcéj zbliżali krańce dla szukanego pierwiastka i możemy otrzymać jego wartość przybliżoną z błędem, nieprzewyższającym dowolnie wziętéj liczby, jakkolwiek małéj.

25. Przykład 1. Oznaczyć ilość pierwiastków rzeczywistych równania stopnia parzystego

$$x^{2n}+px+q=0. \tag{1}$$

Jeżeli stronę lewą tego równania nazwiemy $f(x)$, to równanie $f'(x)=0$ ma jeden tylko i pojedyńczy pierwiastek rzeczywisty

$$a=\left(-\frac{p}{2n}\right)^{\frac{1}{2n-1}}.$$

Mamy więc tu do rozważenia dwa przedziały:

$$-\infty, a; \quad a, +\infty;$$

w każdym z nich funkcyja $f(x)$ albo wciąż wzrasta, albo wciąż maleje. Zważmy, że

$$f(a)=-(2n-1)\left\{\left(-\frac{p}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}-\frac{q}{2n-1}\right\},$$

tak iż, jeżeli np. $f(a)>0$, to wtedy

$$\left(-\frac{p}{2n}\right)^{\frac{2n}{2n-1}}-\frac{q}{2n-1}<0,$$

czyli

$$\left(\frac{p}{2n}\right)^{2n}-\left(\frac{q}{2n-1}\right)^{2n-1}<0;$$

albo, oznaczywszy stronę lewą téj nierówności przez R,

$$R<0.$$

Rozważyć należy następujące przypadki:

1) kiedy $R < 0$, wtedy

$$f(-\infty) = +\infty,\quad f(a) > 0,\quad f(+\infty) = +\infty,$$

t. j. równanie (1) nie ma pierwiastka rzeczywistego.

2) kiedy $R = 0$, wtedy równanie (1) posiada jeden tylko pierwiastek rzeczywisty; jest on dwukrotny, jeżeli obie liczby: p i q są różne od zera.

3) kiedy $R > 0$, wtedy równanie (1) posiada tylko dwa różne pierwiastki rzeczywiste, a każdy z nich jest pojedyńczy.

26. Przykład 2. Oznaczyć ilość pierwiastków rzeczywistych równania stopnia nieparzystego

$$(2) \qquad x^{2n+1} + px + q = 0.$$

Jeżeli stronę lewą tego równania nazwiemy $f(x)$, to równanie $f'(x) = 0$, ma tylko dwa i pojedyńcze pierwiastki rzeczywiste różniące się znakiem, wrazie gdy liczba p jest ujemną; nazwijmy je wtedy a i b i niech $a < b$. Jeżeli więc w równaniu (2) spółczynnik p jest ujemny, to wypadnie nam rozważać przedziały

$$-\infty, a;\quad a, b;\quad b, +\infty.$$

Jeżeli wprowadzimy oznaczenie

$$R = \left(\frac{p}{2n+1}\right)^{2n+1} + \left(\frac{q}{2n}\right)^{2n},$$

to przekonamy się, że wrazie:

1) kiedy $R < 0$, to $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, tak iż równanie (2) ma trzy różne pierwiastki rzeczywiste, z których każdy jest pojedyńczy.

2) kiedy $R = 0$, to jedna tylko z dwu wartości $f(a)$ i $f(b)$ jest równą zeru, i równanie (2) posiada wszystkiego dwa różne pierwiastki rzeczywiste, z których jeden jest pojedyńczy, a pozostały dwukrotny — jeżeli obie liczby: p i q są różne od zera.

3) kiedy $R > 0$, to $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, i równanie (2) posiada jeden tylko pierwiastek rzeczywisty.

27. Przykład 3. Równanie

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} = 0$$

ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, jeżeli n jest liczbą nieparzystą; jeżeli zaś n jest parzyste, to równanie wcale nie ma pierwiastka rzeczywistego.—Przypuściwszy, że to ma miejsce dla pewnego n, można łatwo się przekonać, że ma to również miejsce dla wartości n o jedność większéj.

28. Przykład 4. Dowiedzieć się, ile pierwiastków rzeczywistych posiada równanie

$$f(x) = x^5 - 7x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Równanie pochodne

$$\frac{1}{5} f'(x) = x^4 - 2{,}8x + 1 = 0$$

posiada dwa pierwiastki rzeczywiste (art. 25); oznaczmy je przez a i b i przyjmijmy, że $a>b$.—Ażeby określić znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$, napiszmy tożsamość

$$5f(x)-xf'(x)=-21x^2+20x-5,$$

z któréj wynika

$$5f(a)=-21a^2+20a-5,$$

$$5f(b)=-21b^2+20b-5.$$

Z tego zaś, wziąwszy pod uwagę, że równanie

$$-21x^2+20x-5=0$$

nie posiada pierwiastków rzeczywistych, wnosimy, że obie wartości $f(a)$ i $f(b)$ są ujemne. Wiedząc to, łatwo okazać, że równanie dane ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, pojedyńczy i większy od b.

§ VI. PRZYPADEK, KIEDY ZMIENNE x I $f(x)$ SĄ ZESPOLONE.

29. W tym paragrafie wrócimy do przypuszczenia, że spółczynniki funkcyi

$$f(x)=\mathrm{A}x^n+\mathrm{A}_1x^{n-1}+\ldots+\mathrm{A}_n$$

są jakiekolwiek, rzeczywiste lub zespolone, i że zmienna niezależna otrzymuje wartości zespolone.

Weźmy dwa układy spółrzędnych. Jeden z nich, XY, będzie nam służył do przedstawiania zapomocą punktów rozmaitych wartości zmiennéj x, a drugi, UV, do przedstawiania odpowiadających wartości funkcyi $f(x)$, tak iż każdemu punktowi x na piérwszéj płaszczyźnie odpowiada jeden i tylko jeden punkt f na płaszczyźnie drugiéj. Jeżeli punkt x porusza się po jakiéjkolwiek krzywéj ciągłéj $x\,x'\,x''$, to jednocześnie punkt f opisuje pewną odpowiadającą krzywą $f\,f'\,f''$, również ciągłą, gdyż dwu nieskończenie bliskim punktom krzywéj $x\,x'\,x''$ odpowiadać winny dwa nieskończenie bliskie punkty krzywéj $f\,f'\,f''$.

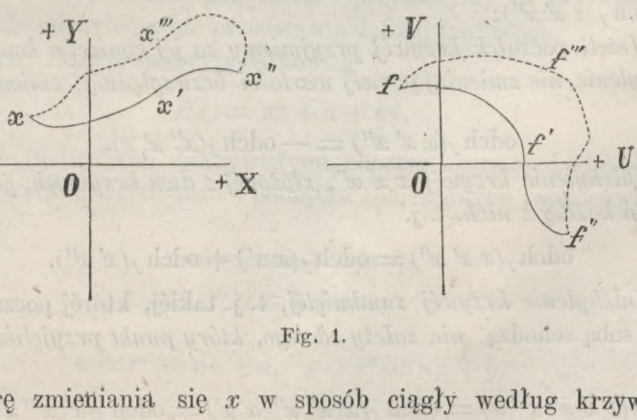

Fig. 1.

Wmiarę zmieniania się x w sposób ciągły według krzywéj $x\,x'\,x''$, od x do x'', mod $f(x)$ będzie się zmieniał także w sposób ciągły i nakoniec dosięgnie wartości mod $f(x'')$, którą można wyznaczyć według wzoru wiadomego. Co się zaś tyczy drugiego argumentu funkcyi $f(x)$, odchylenia, to on, oczywiście, także będzie się zmieniał w sposób ciągły, jeżeli wyłączymy wartości zmiennéj x, przy których funkcyja $f(x)$ staje się równą zeru. Odchylenie bowiém wartości zero jest nieoznaczone, tak iż, przy przejściu zmiennéj x przez taką wartość, może zachodzić przerwa ciągłości odchylenia funkcyi $f(x)$. Ażeby uniknąć takich przypadków, przyjmiemy nadal, że pośród punktów krzywéj $x\,x'\,x''$ niéma takiego, w którymby odpowiednia wartość funkcyi $f(x)$ była równą zeru.

Wyznaczenie wartości odch $f(x'')$ przedstawia, wogóle mówiąc, więcéj trudności, niż wyznaczenie wartości mod $f(x'')$, i zwykle wymaga roztrząsań szczególnych. Odchylenie bowiém jakiéjkolwiek liczby zespolonéj zawiéra w sobie, jak wiadomo, dowolną wielokrotność liczby 2π. Lecz, jeżeli za początkową wartość odch $f(x)$ w punkcie x przyjmiemy pewną jednę z nieskończenie wielu owych wartości, różniących się o wielokrotność 2π, to natenczas wszystkim już następnym wartościom zmiennéj x na krzywéj $x\,x'\,x''$ będą odpowiadały zupełnie określone wartości odch $f(x)$. Jakoż, każdemu nieskończenie małemu poruszeniu się punktu x odpowiada nieskończenie mała zmiana wartości odch $f(x)$, a całkowity przyrost odchylenia, odpowiadający skończonemu poruszeniu się punktu x na krzywéj $x\,x'\,x''$, może być uważany jako suma nieskończenie wielkiéj ilości nieskończenie małych przyrostków tego odchylenia.

Wielokrotność liczby 2π, zawarta w wartości odch $f(x'')$, zależy od postaci krzywéj $x\,x'\,x''$, a wyznaczenie téj wartości przedstawia owę trudność, o któréj wyżéj wspomnieliśmy.

30. Różnicę odch $f(x'')$ — odch $f(x)$, wyznaczoną w tym przypuszczeniu, iż zmienna x, zmieniając się w sposób ciągły, przechodzi przez wszystkie punkty krzywéj $x\,x'\,x''$ od x do x'', nazywać będziemy odchyleniem krzywéj $x\,x'\,x''$ względem funkcyi $f(x)$, a dla skrócenia oznaczać ją będziemy przez odch$_f(x\,x'\,x'')$, gdzie znak f oznaczacza funkcyją $f(x)$. Samo się przez się rozumié, że linija $x\,x'\,x''$ może być, w przypadku szczególnym, prostą lub łamaną.

Z określenia odchylenia krzywéj wynikają wprost następujące własności symbolu odch$_f(x\,x'\,x'')$:

1). *Jeżeli początek krzywéj przyjmiemy za jéj koniec, a koniec za początek, to odchylenie, nie zmieniając swéj wartości bezwzględnéj, zmieni swój znak;* a zatym

$$\text{odch}_f(x\,x'\,x'') = -\,\text{odch}_f(x''\,x'\,x).$$

2). *Odchylenie krzywéj $x\,x'\,x''$, złożonéj z dwu krzywych, jest równe sumie odchyleń każdéj z nich*, t. j.

$$\text{odch}_f(x\,x'\,x'') = \text{odch}_f(x\,x') + \text{odch}_f(x'\,x'').$$

3). *Odchylenie krzywéj zamkniętéj*, t. j. takiéj, któréj początek i koniec razem się z sobą schodzą, *nie zależy od tego, który punkt przyjęliśmy za jéj początek;* np.

$$\text{odch}_f(x\,x'\,x''\,x'''\,x) = \text{odch}_f(x'\,x''\,x'''\,x\,x') = \text{odch}_f(x''\,x'''\,x\,x'\,x'').$$

4). *Odchylenie każdéj krzywéj zamkniętéj jest* $2k\pi$, *gdzie* k *jest liczbą całkowitą, dodatną lub ujemną, albo zerem.*

5). *Jeżeli krzywą zamkniętą* $abca$ (fig. 2) *rozdzielimy na dwie części, a punkty podziału* b i c *połączymy z sobą krzywą dowolną* cdb, *to*

$$\text{odch}_f(abca) = \text{odch}_f(abdca) + \text{odch}_f(bcdb).$$

Podobnie

$$\text{odch}_f(abca) = \text{odch}_f(abda) + \text{odch}_f(bcdb) + \\ + \text{odch}_f(cadc),$$

i t. d.

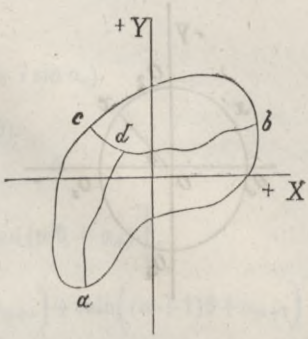

Fig. 2.

6). *Jeżeli funkcyja, wyznaczająca* $f(x)$, *jest iloczynem dwu innych funkcyj,* $f_1(x)$ i $f_2(x)$, *to*

$$\text{odch}_f(ab) = \text{odch}_{f_1}(ab) + \text{odch}_{f_2}(ab),$$

jakąkolwiekby była krzywa ab.

Biorąc pod uwagę ciągłość funkcyj ułamkowych (por. art. 19), wnosimy, iż wszystko powyżéj powiedziane o odchyleniu krzywéj ma miejsce również w tym przypadku, kiedy zamiast funkcyi całkowitéj $f(x)$ weźmiemy jakąkolwiek funkcyją ułamkową $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, pod warunkiem jednak, żeby ani $\varphi(x)$, ani $\psi(x)$ nie stawały się równe zeru w żadnym punkcie rozważanéj krzywéj. Wskutek tego, kładąc

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

mamy, pod warunkiem wypowiedzianym,

$$\text{odch}_f(ab) = \text{odch}_\varphi(ab) - \text{odch}_\psi(ab).$$

31. W celu wyjaśnienia powyższego, przytoczymy tu przykład, w którym wyznaczenie odchylenia nie przedstawia żadnéj trudności.

Przykład. Mając funkcyją całkowitą

$$f(x) = x^n + a + bi,$$

w któréj a i b są liczbami rzeczywistymi, chcemy wyznaczyć odchylenie łuku xx' na okręgu koła, nakréślonego z początku spółrzędnych promieniem r. Kładąc

$$x = r(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$f(x) = u + iv,$$

znajdujemy

$$u = r^n\cos n\alpha + a, \quad v = r^n\sin n\alpha + b;$$

skąd

$$(u-a)^2 + (v-b)^2 = r^{2n}.$$

Powyższe równanie wskazuje, że wtedy, kiedy punkt porusza się po okręgu koła $O_1O_2O_3O_4$ (fig. 3), nakréślonego z początku spółrzędnych promieniem r, to

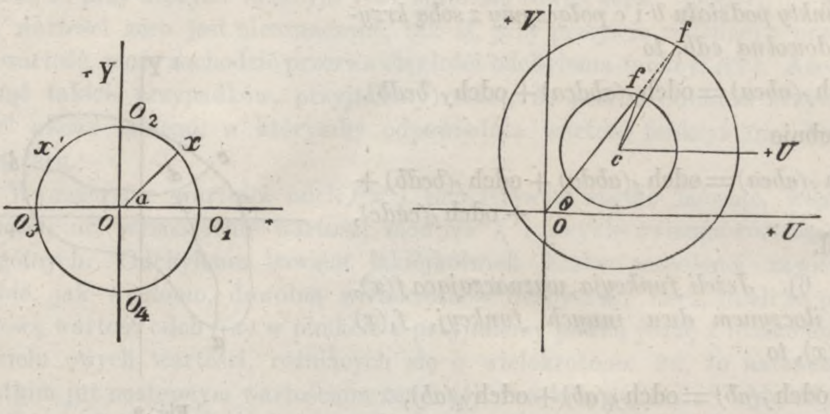

Fig. 3.

odpowiadający mu punkt f w drugim układzie jednocześnie poruszać się będzie po okręgu koła, nakréślonego z punktu c promieniem r^n. Oznaczając zaś kąt UCf przez β, widzimy, iż

$$\beta = n\alpha.$$

Biorąc to pod uwagę i zważając, że $\text{odch} f(x) = fOU = \theta$, możemy łatwo wyznaczyć odchylenie jakiegokolwiek łuku na okręgu $O_1O_2O_3O_4$ względem funkcyi $f(x)$. — Np. dla całego okręgu znajdujemy:

$$\text{jeżeli } r^n < \sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{to } \text{odch}_f(O_1O_2O_3O_4O_1) = 0,$$

$$\text{jeżeli } r^n > \sqrt{a^2+b^2}, \quad \text{to } \text{odch}_f(O_1O_2O_3O_4O_1) = 2n\pi.$$

32. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli funkcyja całkowita $f(x)$ dla pewnéj wartości zmiennéj niezależnéj, $x = a$, przyjmuje wartość $f(a)$ różną od zera, to zawsze można znaléść taką liczbę h, żeby wartość* $\text{mod} f(a+h)$ *była mniejsza od wartości* $\text{mod} f(a)$.

Przypuśćmy, że pośród liczb

$$f'(a),\quad f''(a), \ldots, f^{(m)}(a), \ldots, f^{(n)}(a),$$

piérwsza, licząc od strony lewéj, która nie jest równą zeru, jest $f^{(m)}(a)$; jeżeli więc $f'(a)$ jest już różna od zera, to $m = 1$. Gdy przez h oznaczymy przyrostek dowolny, to

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(m)}(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a),$$

skąd, po podzieleniu obu stron przez $f(a)$, otrzymujemy

$$(1)\qquad \frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 + \frac{h^m}{1.2\ldots m}\,\frac{f^{(m)}(a)}{f(a)} + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n}\,\frac{f^{(n)}(a)}{f(a)}.$$

Wyznaczywszy moduły i odchylenia spółczynników rozmaitych potęg h na stronie lewéj równania (1) i nazwawszy przez R i θ moduł i odchylenie przyrostka dowolnego h, mamy

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\,\frac{f^{(m)}(a)}{f(a)} = r_m(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{f^{(n)}(a)}{f(a)} = r_n(\cos\alpha_n + i\sin\alpha_n),$$

$$h = \mathrm{R}(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Wskutek tego, można równanie (1) tak napisać:

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 + \mathrm{R}^m r_m\Big[\cos(m\theta+\alpha_m) + i\sin(m\theta+\alpha_m)\Big]$$
$$+ \mathrm{R}^{m+1} r_{m+1}\Big[\cos\Big((m+1)\theta+\alpha_{m+1}\Big) + i\sin\Big((m+1)\theta+\alpha_{m+1}\Big)\Big]$$
$$+ \ldots + \mathrm{R}^n r_n\Big[\cos(n\theta+\alpha_n) + i\sin(n\theta+\alpha_n)\Big].$$

Ponieważ odchylenie θ dotąd pozostawało dowolne, przeto nadajmy mu wartość

$$\theta = \frac{\pi - \alpha_m}{m},$$

a jéj odpowiednie wartości odchyleń $(m+1)\theta + \alpha_{m+1}, \ldots, n\theta + \alpha_n$ oznaczmy przez $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m}$; w takim razie

$$\frac{f(a+h)}{f(a)} = 1 - \mathrm{R}^m r_m + \mathrm{R}^{m+1} r_{m+1}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + \ldots + \mathrm{R}^n r_n(\cos\varphi_{n-m} + i\sin\varphi_{n-m}).$$

Co do modułu R zaś zróbmy przypuszczenie, że

$$\mathrm{R} < \frac{1}{\sqrt[m]{r_m}},$$

skąd mamy

$$(2) \qquad 1 - \mathrm{R}^m r_m > 0;$$

a według ostatniego równania jest

$$\frac{\mathrm{mod}\, f(a+h)}{\mathrm{mod}\, f(a)} \leqq 1 - \mathrm{R}^m r_m + \mathrm{R}^{m+1} r_{m+1} + \ldots + \mathrm{R}^n r_n.$$

Lecz z drugiéj strony, jeżeli przyjmiemy, że R, prócz nierówności (2), czyni jeszcze zadość nierówności

$$\mathrm{R} \leqq \frac{k}{b+k},$$

gdzie k oznacza jakąkolwiek liczbę dodatną, a b jakąkolwiek liczbę, nie mniejszą od największéj z liczb $r_{m+1}, r_{m+2}, \ldots, r_n$, to

$$\mathrm{R} r_{m+1} + \ldots + \mathrm{R}^{n-m} r_n < k;$$

zatym

$$\frac{\operatorname{mod} f(a+h)}{\operatorname{mod} f(a)} < 1 - \mathrm{R}^m (r_m - k).$$

To wskazuje, iż wystarcza przyjąć

$$k \leq r_m,$$

aby istniała nierówność

$$\operatorname{mod} f(a+h) < \operatorname{mod} f(a).$$

A więc, dla wszystkich wartości h takich, że

$$\operatorname{odch} h = \frac{\pi - \alpha_m}{m},$$

a $\operatorname{mod} h$ nie jest większy od mniejszéj z dwu liczb

$$\frac{1}{\sqrt[m]{r_m}}, \qquad \frac{r_m}{b + r_m},$$

mamy

$$\operatorname{mod} f(a+h) < \operatorname{mod} f(a),$$

co okazuje prawdziwość wypowiedzianego twierdzenia.

33. Twierdzenie pomocnicze 2. *Jeżeli we wszystkich punktach, leżących na krzywéj zamkniętéj, albo wewnątrz niéj, wartość modułu funkcyi całkowitéj $f(x)$ nie jest mniejszą od liczby dodatnéj k, to odchylenie téj krzywéj względem funkcyi $f(x)$ jest równe zeru.*

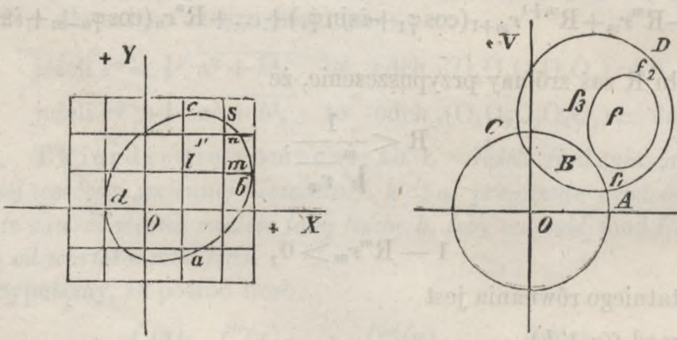

Fig. 4.

Oznaczmy przez R taką liczbę dodatną, żeby cała krzywa zamknięta *abcda* (fig. 4) znajdowała się wewnątrz okręgu koła, nakreślonego z początku promieniem R, i, kładąc

$$f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n,$$
$$\operatorname{mod} \mathrm{A} = a, \quad \operatorname{mod} \mathrm{A}_1 = a_1, \ldots,$$

wyznaczmy wartości:

$$L_1 = naR^{n-1} + (n-1)a_1R^{n-2} + \ldots,$$
$$L_2 = \frac{n(n-1)}{1.2}aR^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}a_1R^{n-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_n = a.$$

Wówczas, oznaczając przez L jakąkolwiek liczbę dodatną, nie mniejszą od każdéj z liczb $L_1, L_2, \ldots, L_n$, w każdym punkcie x na linji *abcda*, albo wewnątrz niéj, będą miały miejsce następujące nierówności:

$$\operatorname{mod} f'(x) \leq L, \quad \operatorname{mod} \frac{f''(x)}{1.2} \leq L, \ldots, \quad \operatorname{mod} \frac{f^{(n)}(x)}{1.2\ldots n} \leq L.$$

Poprowadźmy na płaszczyznie spółrzędnych układ linij prostych, równoległych do osi odciętych, z którychby każda od bezpośrednio sąsiednich była oddalona niewięcéj niż na

$$\frac{k}{\sqrt{2}(k+L)},$$

i drugi układ prostych, równoległych do osi rzędnych, zadość czyniących podobnemu warunkowi. Wskutek tego, pole, ograniczone krzywą *abcda*, podzieli się na pewną ilość elementów, pól składowych, jak *rnsc*, *lmnr* i t. d. Rozpatrzmy jeden z takich elementów, np. pole *lmnr*; to, co o polu tym powiemy, będzie się stosować do innych.

Jeżeli x i $x+h$ są dwiema wartościami zmiennéj x, odpowiadającymi dwu punktom na płaszczyznie spółrzędnych XOY, z których piérwszy leży wewnątrz prostokątu *lmnr*, a drugi na jego obwodzie, to ma miejsce nierówność:

$$\operatorname{mod}[f(x+h) - f(x)] < k.$$

Istotnie, ponieważ

$$\operatorname{mod} h < \sqrt{lm^2 + mn^2},$$

i

$$lm \leq \frac{k}{\sqrt{2}(k+L)}, \quad mn \leq \frac{k}{\sqrt{2}(k+L)},$$

to

$$\operatorname{mod} h < \frac{k}{k+L};$$

Na téj zasadzie, zważywszy, że liczba L jest mniejszą od każdéj z liczb

$$\operatorname{mod} f'(x), \quad \operatorname{mod} \frac{f''(x)}{1.2}, \ldots,$$

wnosimy, iż wartość modułu wielomianu

$$hf'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)$$

jest mniejsza od k, czyli

$$\mathrm{mod}\,[f(x+h)-f(x)]<k.$$

Zestawiając tę nierówność z dwiema nierównościami

$$\mathrm{mod}\,f(x)\geqq k,\qquad \mathrm{mod}\,f(x+h)\geqq k,$$

wynikającymi z założenia, widzimy, że punkt f, przedstawiający na płaszczyźnie spółrzędnych UOV wartości funkcyi $f(x)$, znajdzie się albo na, albo zewnątrz okręgu koła, zakréślonego z punktu O, jako środka, promieniem równym k, a wszystkim punktom, leżącym na obwodzie $lmnr$, odpowiadać będą punkty, leżące jednocześnie zewnątrz owego koła i wewnątrz okręgu koła, zakréślonego z punktu f, jako środka, promieniem k. Innymi słowy, linii łamanéj zamkniętéj $lmnrl$ odpowiada pewna zamknięta krzywa $f_1f_2f_3f_1$, cała zawarta wewnątrz pola ABCDA. To dowodzi, że odchylenie linii $lmnr$ jest równe zeru; gdyż przy ruchu ciągłym punktu f po krzywéj $f_1f_2f_3f_1$ kąt f_1OU, zmieniając się także w sposób ciągły, nie może powiększać się lub zmniejszać o 2π, tak iż, gdy punkt f_1, przeszedszy całą długość krzywéj $f_1f_2f_3f_1$, powróci do swego stanowiska początkowego, kąt f_1OU dosięgnie także swojéj wartości początkowéj.

Na zasadzie jednéj ze wzmiankowanych wyżéj własności odchylenia jakiéjkolwiek krzywéj, mamy

$$\mathrm{odch}_f(abcda)=\sum\mathrm{odch}_f(lmnrl),$$

gdzie znak sumy na stronie prawéj rozciąga się na odchylenia obwodów wszystkich pól składowych. A ponieważ, na mocy powyższego, dla każdego obwodu $lmnrl$ mamy

$$\mathrm{odch}_f(lmnrl)=0,$$

przeto

$$\mathrm{odch}_f(abcda)=0,$$

czego należało dowiéść.

34. Twierdzenie pomocnicze 3. *Jeżeli mamy funkcyją całkowitą stopnia n-tego,*

$$f=\mathrm{A}x^n+\mathrm{A}_1x^{n-1}+\ldots+\mathrm{A}_n,$$

jeżeli przez a oznaczymy dowolną liczbę dodatną, nie mniejszą od każdéj z liczb

$$\mathrm{mod}\,\mathrm{A}_1,\ \mathrm{mod}\,\mathrm{A}_2,\ldots,\ \mathrm{mod}\,\mathrm{A}_n,$$

a przez k dowolną liczbę dodatną mniejszą od mod A, *to, zakréśliwszy około początku spółrzędnych krzywą zamkniętą* $\mathrm{O_1O_2O_3O_4O_1}$, *jakiegokolwiek kształtu, lecz taką, żeby odległość każdego jéj punktu od początku spółrzędnych była* $\geqq 1+\frac{a}{k}$, *będziemy mieli*

$$\mathrm{odch}_f(\mathrm{O_1O_2O_3O_4O_1})=2n\pi.$$

Weźmiemy pod uwagę funkcyją ułamkową

$$F = \frac{f}{x^n} = A + A_1 \frac{1}{x} + \ldots + A_n \frac{1}{x^n},$$

i wyznaczmy odchylenie krzywéj $O_1O_2O_3O_4O_1$ (fig. 5) względem funkcyi $F(x)$.

Przyjąwszy $\frac{1}{x} = y$, zauważymy, że dowolnie wybranemu punktowi x odpowiada punkt y, leżący po drugiéj stronie osi odciętych tak, iż kąt $O_1Ox = -O_1Oy$, a odległość $Oy = \frac{1}{Ox}$. Dlatego, gdy punkt x, poruszając się w sposób ciągły, opisuje krzywą $O_1O_2O_3O_4O_1$ w kierunku strzałki, to odpowiadający mu punkt y opisze krzywą $B_1B_2B_3B_4B_1$ w kierunku przeciwnym, a jego odległość od początku O, zgodnie z założeniem, będzie wciąż $\leq \frac{k}{a+k}$.

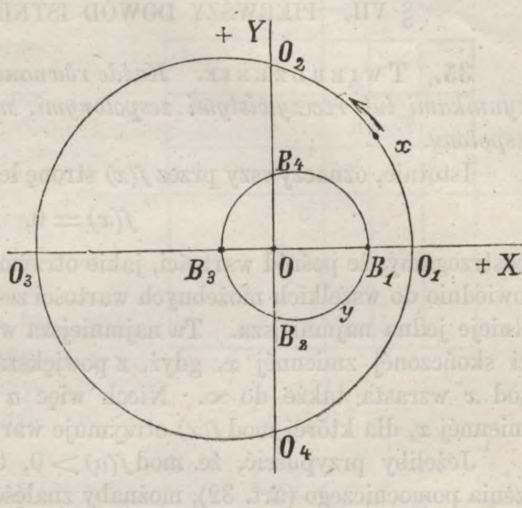

Fig 5.

Oznaczywszy przez φ funkcyją

$$\varphi = A + A_1 y + \ldots + A_n y^n,$$

która zależy od nowéj zmiennéj y, mamy

$$\text{odch}_F(O_1O_2O_3O_4O_1) = \text{odch}_\varphi(B_1B_2B_3B_4B_1),$$

gdyż wartość funkcyi F w punkcie x na krzywéj $O_1O_2O_3O_4O_1$ jest równa wartości funkcyi φ w odpowiadającym punkcie y na krzywéj $B_1B_2B_3B_4B_1$. A nadto wiadomo, że jeżeli

$$\text{mod}\, y \leq \frac{k}{a+h},$$

to

$$\text{mod}\, \varphi(y) > \text{mod}\, A - k;$$

wskutek czego, na mocy 2-go twierdzenia pomocniczego, wnosimy, że

$$\text{odch}_\varphi(B_1B_2B_3B_4B_1) = 0.$$

A zatym także

$$\text{odch}_F(O_1O_2O_3O_4O_1) = 0,$$

albo, co wychodzi na jedno,

$$\text{odch}_f(O_1O_2O_3O_4O_1) - \text{odch}_{x^n}(O_1O_2O_3O_4O_1) = 0.$$

Stąd zaś, gdy oczywiście

$$\text{odch}_{x^n}(O_1O_2O_3O_4O_1) = 2n\pi,$$

otrzymujemy

$$\text{odch}_f(O_1O_2O_3O_4O_1) = 2n\pi,$$

c. n. d.

§ VII. PIÉRWSZY DOWÓD ISTNIENIA PIERWIASTKA.

35. Twierdzenie. *Każde równanie jakiegokolwiek stopnia, ze spółczynnikami lub rzeczywistymi zespolonymi, ma pierwiastek, rzeczywisty albo zespolony.*

Istotnie, oznaczywszy przez $f(x)$ stronę lewą równania danego,

$$f(x) = 0,$$

spostrzegamy, że pośród wartości, jakie otrzymuje liczba dodatna mod $f(x)$, odpowiednio do wszelkich możebnych wartości zespolonych zmiennéj niezależnéj x, istnieje jedna najmniejsza. Ta najmniejsza wartość odpowiada pewnéj wartości skończonéj zmiennéj x, gdyż, z powiększaniem się liczby x do ∞, wartość mod x wzrasta także do ∞. Niech więc a oznacza tę szczególną wartość zmiennéj x, dla któréj mod $f(x)$ otrzymuje wartość najmniejszą.

Jeżeliby przypuścić, że mod $f(a) > 0$, to natenczas, według 1-go twierdzenia pomocniczego (art. 32), możnaby znaléść taką inną wartość $a + h$ zmiennéj niezależnéj, dla której miałaby miejsce nierówność

$$\text{mod}\, f(a+h) < \text{mod}\, f(a).$$

Lecz to przeczyłoby przypuszczeniu, że mod $f(a)$ jest możebnie najmniejszą wartością mod $f(x)$; a zatym

$$\text{mod}\, f(a) = 0,$$

a liczba a jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

§ VIII. DRUGI DOWÓD ISTNIENIA PIERWIASTKA.

36. Mając funkcyją całkowitą

$$f(x) = Ax^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \ldots + A_n,$$

oznaczmy przez a i k toż samo, co w 3-im twierdzeniu pomocniczym (art. 34), t. j.

przez k dowolną liczbę dodatną, mniejszą od wartości mod A,

przez a dowolną liczbę dodatną większą od każdéj z liczb: mod A_1, mod A_2, . . . , mod A_n,

a prócz tego, przez m oznaczmy liczbę dodatną, całkowitą, nie mniejszą od wartości $1 + \frac{a}{k}$. Odłóżmy tak na osi odciętych, jak i na osi rzędnych, od początku spółrzędnych w obie strony, po m jedności, a przez tak wyznaczone punkty poprowadźmy dwa układy prostych, równoległych odpowiednio do osi rzędnych i odciętych. Skrajne z tych linij (t. j. m-te od początku) utworzą kwadrat, który nazwijmy ABCD.

Ponieważ odległość każdego punktu na obwodzie kwadratu ABCD od początku spółrzędnych nie jest mniejszą od $1+\frac{k}{a}$, przeto, na mocy 3-go twierdzenia pomocniczego (art. 34), mamy

$$\text{odch}_f(\text{ABCDA}) = 2n\pi.$$

Jeżeliby się zdarzyło, że na jednéj z $4m-2$ prostych, dzielących kwadrat ABCD, funkcyja $f(x)$ stawałaby się równą zeru, to wtedy nie byłoby potrzeby dowodzić istnienia pierwiastka. Przypuśćmy więc, że to nie zachodzi; w takim razie zważmy, że

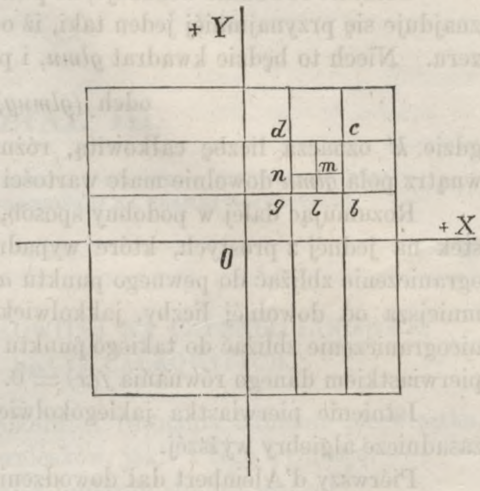

Fig. 6.

$$\text{odch}_f(\text{ABCDA}) = \sum \text{odch}_f(gbcdg),$$

gdzie znak sumy na stronie lewéj rozciąga się na obwody wszystkich $4m^2$ kwadratów takich, jak $gbcd$; a zatym

$$\sum \text{odch}_f(gbcdg) = 2n\pi.$$

Stąd wnosimy, że pośród $4m^2$ kwadratów takich, jak $gbcd$, znajduje się przynajmniéj jeden taki, iż odchylenie jego obwodu jest różne od zera. Niechże to będzie kwadrat $gbcd$; przyjmujemy więc, że odchylenie jego obwodu jest $2k\pi$, gdzie k oznacza pewną liczbę całkowitą, różną od zera.

Wartości mod $f(x)$ wewnątrz kwadratu $gbcd$ i na jego obwodzie nie mogą być wciąż większe od dowolnie wziętéj liczby dodatnéj, gdyż w takim razie, wskutek 2-go twierdzenia pomocniczego (art. 33), mielibyśmy

$$\text{odch}_f(gbcdg) = 0,$$

co przeczy tylkoco zrobionemu przypuszczeniu. A więc znajdują się wewnątrz pola $gbcd$ dowolnie małe wartości modułu funkcyi $f(x)$.

Podzielmy każdy z boków gb i gd np. na dziesięć równych części i przez punkty podziału przeprowadźmy dwa układy prostych, równoległych do osi spółrzędnych, ażeby pole $gbcd$ rozłożyć na sto mniejszych kwadratów, takich jak $glmn$. Jeżeliby się zdarzyło, że na jednéj z poprowadzonych teraz linij funkcyja $f(x)$ staje się równą zeru, to nie mielibyśmy potrzeby dowodzić, że pierwiastek istnieje. Przypuśćmy więc, że to nie zachodzi; w takim razie

$$\text{odch}_f(gbcdg) = \sum \text{odch}_f(glmng),$$

a wskutek tego

$$\sum \mathrm{odch}_f(glmng) = 2k\pi,$$

gdzie znak $\sum$ rozciąga się na obwody wszystkich stu kwadracików, wchodzących wskład kwadratu *abcd*.

Ostatnie równanie wskazuje, że pośród stu kwadratów, takich, jak *glmn*, znajduje się przynajmniéj jeden taki, iż odchylenie jego obwodu nie jest równe zeru. Niech to będzie kwadrat *glmn*, i przypuśćmy, że

$$\mathrm{odch}_f(glmng) = 2k'\pi,$$

gdzie k' oznacza liczbę całkowitą, różną od zera. A więc znajdują się wewnątrz pola *glmn* dowolnie małe wartości modułu funkcyi $f(x)$.

Rozumując daléj w podobny sposób, otrzymamy oczywiście: albo pierwiastek na jednéj z prostych, które wypadnie prowadzić, albo będziemy się nieograniczenie zbliżać do pewnego punktu a takiego, iż wartość $\mathrm{mod} f(a)$ będzie mniejsza od dowolnéj liczby, jakkolwiek małéj, innymi słowy, będziemy się nieograniczenie zbliżać do takiego punktu a, iż $\mathrm{mod} f(a) = 0$. Liczba a będzie pierwiastkiem danego równania $f(x) = 0$.

Istnienie pierwiastka jakiegokolwiek równania przedstawia twierdzenie zasadnicze algiebry wyższéj.

Piérwszy d'Alembert dał dowodzenie istnienia pierwiastka. Po nim należy zaznaczyć dowodzenia Euler'a, Lagrange'a, a szczególniéj dowodzenia Gauss'a i Cauchy'ego. Piérwszy z wyłożonych tu dowodów podał Cauchy.

ROZDZIAŁ III.

ROZKŁAD FUNKCYI CAŁKOWITÉJ NA CZYNNIKI LINIJOWE. — PIERWIASTKI WIELOKROTNE. — ROZKŁAD FUNKCYI UŁAMKOWÉJ NA UŁAMKI NAJPROSTSZE.

---

§ I. ROZKŁAD FUNKCYI CAŁKOWITÉJ NA CZYNNIKI LINIJOWE. O DZIELNIKACH FUNKCYJ CAŁKOWITYCH.

37. Udowodniwszy dla jakiegokolwiek równania istnienie pierwiastka, zajmiemy się teraz wyprowadzeniem wniosków, jakie z tego wynikają.

Niech $f(x)$ przedstawia jakąkolwiek funkcyją stopnia n-tego,

$$f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n,$$

a liczba a_1 niech będzie jéj pierwiastkiem. Funkcyja $f(x)$ jest podzielna przez $x - a_1$; oznaczywszy iloraz przez $f_1(x)$, będziemy mieli

$$f(x) = (x - a_1) f_1(x).$$

Funkcyja $f_1 x)$, stopnia $(n - 1)$-go, posiada pierwiastek. Nazwawszy go a_2, będziemy mieli tożsamość

$$f_1(x) = (x - a_2) f_2(x),$$

w któréj $f_2(x)$ oznacza funkcyją całkowitą, stopnia $(n - 2)$-go. Podobnie postępując daléj, otrzymamy nowe tożsamości:

$$f_2(x) = (x - a_3) f_3(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-1}(x) = (x - a_n) f_n(x),$$

w których $a_3, a_4, \ldots$ są liczbami stałymi, zaś $f_3(x), f_4(x), \ldots$ funkcyjami całkowitymi stopnia odpowiednio $(n - 3)$-go, $(n - 4)$-go, ... Łatwo tu zauważyć, że w wyrażeniu każdéj z funkcyj $f_1(x), f_2(x), \ldots$ spółczynnikiem najwyższéj potęgi zmiennéj x jest liczba A, tak iż ostatnia funkcyja $f^{(n)}(x)$, będąc stopnia zero, jest równa A.

Z powyższych tożsamości wynika

$$f(x) = \mathrm{A}(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$

co wyraża następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Każda funkcyja całkowita stopnia n-go jest równa iloczynowi n czynników linijowych postaci $x - a$, pomnożonemu przez spółczynnik najwyższéj potęgi zmiennéj x w wyrażeniu téj funkcyi.*

Taki rozkład funkcyi na czynniki linijowe może być wykonany w jeden tylko sposób. Jakoż, przypuściwszy, iż jest możliwą tożsamość

$$A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = B(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n),$$

wnosimy wprost, iż pośród liczb $b_1, b_2, \ldots$ znajduje się liczba a_1, gdyż strona prawa, a więc jeden z jéj czynników jest zerem przy $x = a_1$; niech np. $a_1 = b_1$. Dzieląc obie strony przez $x - a_1$, otrzymamy nową tożsamość

$$A(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n) = B(x-b_2)(x-b_3)\ldots(x-b_n),$$

która wskazuje, że pośród liczb $b_2, b_3, \ldots$ znajduje się liczba a_2. I t. d. W ten sposób przekonywamy się, że liczby

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_n$$

mogą od liczb

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots, b_n$$

różnić się tylko następstwem, a nadto, że spółczynniki B i A są sobie równe.

38. Z równości

$$f(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

widoczna, iż funkcyja $f(x)$ staje się równą zeru tylko przy następujących wartościach zmiennéj x:

$$x = a_1,\ a_2, \ldots, a_n;$$

a ponieważ ich jest n, przeto *równanie stopnia n-go $f(x) = 0$ nie może mieć więcéj niż n pierwiastków.*

Tylko w tym przypadku, kiedy wszystkie liczby

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_n$$

są różne od siebie, równanie $f(x) = 0$ ma istotnie n pierwiastków; w przypadku przeciwnym ilość pierwiastków równania jest mniejsza od n. — Jeżeli się zdarzy, że wszystkie liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są sobie równe, to wtedy równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek. Wogóle, przypuściwszy, że pośród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \text{liczb} & a, \\ \beta & \text{„} & b, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda & \text{„} & l, \end{array}$$

gdy już każde dwie z liczb $a, b, \ldots, l$ są różne od siebie, możemy napisać

$$f(x) = A(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\ldots(x-l)^{\lambda}.$$

Wtedy czynnik $x-a$ nazywa się α-krotnym czynnikiem funkcyi $f(x)$, czynnik $x-b$ jéj β-krotnym czynnikiem i t. d.

Oczywiście, że to określenie wielokrotności czynników linijowych funkcyi $f(x)$, wychodzi na toż samo, co określenie podane w art. 16-ym.

Przypomnimy, że pierwiastek a nazywa się α-krotnym pierwiastkiem równania $f(x)=0$, a wrazie gdy $\alpha=1$ pierwiastkiem pojedyńczym. —

Jeżeli przyjmujemy w rachubę wielokrotność każdego pierwiastka, to ilość wszystkich pierwiastków równania $f(x)=0$ jest równa jego stopniowi, gdyż $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n$.

39. Wykonawszy mnożenie, otrzymujemy

$$A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=Ax^n-A\Sigma_1x^{n-1}+A\Sigma_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^nA\Sigma_n,$$

gdzie, przez skrócenie, wprowadziliśmy oznaczenia:

$$\Sigma_1=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n,$$
$$\Sigma_2=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Sigma_n=a_1a_2a_3\ldots a_n.$$

Ponieważ wyrażenie ostatnie jest tożsamościowo równe wyrażeniu

$$Ax^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots+A_n,$$

przeto

$$\Sigma_1=-\frac{A_1}{A},\quad \Sigma_2=\frac{A_2}{A},\ldots,\Sigma_n=(-1)^n\frac{A_n}{A},$$

t. j. wogóle

$$\Sigma_m=(-1)^m\frac{A_m}{A},$$

dla wszystkich wartości wskaźnika m, od jedności do n.

Równania te wyrażają związki, zachodzące między pierwiastkami równania i jego spółczynnikami, i dają możność napisania równania, gdy jego pierwiastki są dane.

Wskazują też one, że, jeżeli wszystkie pierwiastki równania są rzeczywiste i dodatne, to ani jeden spółczynnik w równaniu nie jest równy zeru, a każde dwa spółczynniki sąsiednie są różnego znaku.

40. Przypuśćmy, że wszystkie spółczynniki w równaniu $f(x)=0$ są rzeczywiste; wtenczas ono albo nie ma pierwiastków zespolonych, albo ich ilość jest parzysta. W ostatnim przypadku pierwiastki zespolone grupują się parami, po dwa sprzężone, których wielokrotność jest takaż sama.

Podanie to, które wypowiedział d'Alembert, udowodniliśmy już w art. 17-ym; ono staje się prawie oczywistym (art. 6), jeżeli przyjmiemy na uwagę rozkład funkcyi $f(x)$ na czynniki linijowe.

Przypuśćmy, że równanie $f(x)=0$ posiada jednę, albo kilka par pierwiastków zespolonych sprzężonych, i weźmy pod uwagę jednę taką parę,

$$a_1=p+qi,\quad a_2=p-qi.$$

Iloczyn odpowiadających im dwu czynników linijowych

$$(x-a_1)(x-a_2)=(x-p)^2+q^2$$

przedstawia funkcyją stopnia 2-go ze spółczynnikami rzeczywistymi, która pozostaje dodatną przy wszelkich wartościach rzeczywistych zmiennéj x; tak, iż zamiast każdéj pary czynników linijowych zespolonych możemy napisać jeden czynnik stopnia 2-go, który zawsze jest dodatny. Stąd wynika, że *każda funkcyja całkowita ze spółczynnikami rzeczywistymi rozkłada się na iloczyn czynników linijowych stopnia 2-go ze spółczynnikami rzeczywistymi*, a przytym możemy przyjąć, że każdy z czynników stopnia 2-go jest dodatny przy wszelkich wartościach zmiennéj niezależnéj.

Taki rozkład funkcyi całkowitéj jest dogodny w przypadku, kiedy chcemy uniknąć liczb zespolonych.

Przy jego pomocy, łatwo sprawdzić twierdzenie, udowodnione w art. 21-ym.

41. Funkcyja całkowita $\varphi(x)$, która dzieli bez reszty inną funkcyją całkowitą $f(x)$, nazywa się jéj dzielnikiem.

Oczywiście, że, jeżeli nie będziemy zwracać uwagi na czynnik stały, każdy dzielnik funkcyi $f(x)$ jest iloczynem czynników linijowych, wchodzących do rozkładu funkcyi $f(x)$. Jeżeli więc mamy rozkład funkcyi $f(x)$ na czynniki linijowe, to możemy wypisać wszystkie możebne dzielniki téj funkcyi, poczynając od linijowych, a kończąc na saméj funkcyi $f(x)$.

Istotnie, kładąc

$$f(x)=\mathrm{A}(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$$

i tworząc wszelkie możebne iloczyny m czynników spośród funkcyj linijowych

$$x-a_1,\quad x-a_2,\ldots,x-a_n,$$

otrzymamy wszystkie możebne dzielniki stopnia m-go funkcyi $f(x)$. Ilość takich dzielników jest równa ilości kombinacyj z n elementów po m. Będą one wtedy tylko różnymi dzielnikami, kiedy wszystkie pierwiastki $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są różne; w przeciwnym razie ilość dzielników stopnia m-go będzie mniejsza.

Mając dwie funkcyje całkowite, $\mathrm{F}(x)$ i $f(x)$, i dane wszystkie czynniki linijowe każdéj z nich, możemy wypisać wszystkie dzielniki spólne tych dwu funkcyj, a więc i największy ich spólny dzielnik.

Wyrażenie największego spólnego dzielnika może być otrzymane inaczéj, bez pomocy czynników linijowych danych funkcyj, według wiadomego sposobu Euklidesa. Dlatego, wyznaczenie wszystkich spólnych dzielników dwu funkcyj sprowadza się do rozłożenia największego spólnego dzielnika tych funkcyj na czynniki linijowe.

Jeżeli największy spólny dzielnik dwu funkcyj $\mathrm{F}(x)$ i $f(x)$ jest jednością, to takie funkcyje nazywają się piérwszymi względem siebie; natenczas równania $\mathrm{F}(x)=0$ i $f(x)=0$ nie mają pierwiastka spólnego.

Wogóle, jeżeli największy spólny dzielnik dwu funkcyj $\mathrm{F}(x)$ i $f(x)$ jest funkcyją stopnia m-go, którą oznaczmy przez D, to dwa równania

$$\mathrm{F}(x)=0,\quad f(x)=0$$

mają m pierwiastków spólnych, czyniących zadość równaniu stopnia m-go

$$D=0;$$

z tych pierwiastków niektóre mogą być równe sobie.

Podobne uwagi możnaby zrobić o trzech, cztérech i t. d. równaniach.

42. Znajdziemy największy spólny dzielnik funkcyi

$$f(x)=Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$$

i jéj pochodnéj

$$f'(x)=nAx^{n-1}+(n-1)A_1x^{n-2}+\ldots+A_{n-1}$$

w przypuszczeniu, że rozkład funkcyi $f(x)$ na czynniki linijowe jest dany, mianowicie

$$f(x)=A(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\ldots(x-l)^\lambda,$$

gdzie każde dwie z liczb $a, b, \ldots, l$ są różne od siebie.

W tym celu, nie biorąc pod uwagę wielokrotności czynników linijowych, napiszemy powyższe równanie tak:

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Wstawiając w obu stronach $x+h$ zamiast x, a strony tak otrzymanéj równości dzieląc przez strony poprzedniéj, będziemy mieli:

$$\frac{f(x+h)}{f(x)}=\left(1+\frac{h}{x-a_1}\right)\left(1+\frac{h}{x-a_2}\right)\ldots\left(1+\frac{h}{x-a_n}\right).$$

Obie strony téj tożsamości są funkcyjami całkowitymi względem h; spółczynniki przeto jednakowych potęg h są sobie równe. A gdy

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots,$$

zatym spółczynnik piérwszéj potęgi h na stronie lewéj poprzedniéj tożsamości jest

$$\frac{f'(x)}{f(x)},$$

a na drugiéj

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots+\frac{1}{x-a_n};$$

jest więc

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\ldots+\frac{1}{x-a_n}.$$

Przyjmując na uwagę wielokrotność pierwiastków, możemy tę równość tak napisać:

$$(1)\qquad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{\alpha}{x-a}+\frac{\beta}{x-b}+\ldots+\frac{\lambda}{x-l};$$

kładąc zaś, przez skrócenie,

$$(x-a)(x-b)\ldots(x-l)=\varphi(x)$$

i mnożąc obie strony równości (1) przez

$$f(x) = \mathrm{A}(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \ldots (x-l)^{\lambda-1}\varphi(x),$$

otrzymamy

$$f'(x) = \mathrm{A}(x-a)^{\alpha-1} \ldots (x-l)^{\lambda-1}\left[\frac{\alpha\varphi(x)}{x-a} + \frac{\beta\varphi(x)}{x-b} + \ldots + \frac{\lambda\varphi(x)}{x-l}\right].$$

Dla ostatecznego rozłożenia funkcyi $f'(x)$, należałoby otrzymać rozkład funkcyi całkowitéj

$$\frac{\alpha\varphi(x)}{x-a} + \frac{\beta\varphi(x)}{x-b} + \ldots + \frac{\lambda\varphi(x)}{x-l} = \psi(x)$$

na czynniki linijowe. Lecz dla naszego celu, dla odnalezienia największego spólnego dzielnika funkcyj $f(x)$ i $f'(x)$, dostatecznym będzie, gdy dowiedziemy, że do tego rozkładu nie wejdzie żadna z funkcyj linijowych

$$x-a, \quad x-b, \ldots, x-l,$$

czyli, innymi słowy, że funkcyje $f(x)$ i $\psi(x)$ są piérwsze względem siebie. Jakoż, jeżeliby te dwie funkcyje miały spólny dzielnik linijowy, np. $x-a$, to mielibyśmy $\psi(a) = 0$, czyli

$$(a-b)(a-c) \ldots (a-l) = 0,$$

co niemożebna, gdyż liczba a jest różną od liczb $b, c, \ldots, l$.

Zestawiając z sobą dwa wyrażenia:

$$f(x) = \mathrm{A}(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta} \ldots (x-l)^{\lambda},$$
$$f'(x) = \mathrm{A}(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \ldots (x-l)^{\lambda-1}\psi(x),$$

i biorąc pod uwagę, że funkcyje $f(x)$ i $\psi(x)$ są piérwsze względem siebie, wnosimy, że największy spólny dzielnik funkcyi $f(x)$ i jéj pochodnéj $f'(x)$ jest

$$(x-a)^{\alpha-1}(x-b)^{\beta-1} \ldots (x-l)^{\lambda-1}.$$

Tym sposobem dochodzimy do następującego twierdzenia.

TWIERDZENIE. *Największy spólny dzielnik funkcyi całkowitéj $f(x)$ i jéj pochodnéj $f'(x)$ jest iloczynem wszystkich różnych czynników linijowych, wchodzących do rozkładu funkcyi $f(x)$, wziętych w potędze o jedność niższéj od téj, w jakiéj one wchodzą do rozkładu funkcyi $f(x)$.*

Wniosek 1. *m-krotny pierwiastek równania $f(x) = 0$ jest $(m-1)$-krotnym pierwiastkiem równania $f'(x) = 0$.*

Wniosek 2. *Ażeby równanie $f(x) = 0$ nie miało ani jednego pierwiastka wielokrotnego, jest warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcyje $f(x)$ i $f'(x)$ były piérwsze względem siebie.*

§ II. O PIERWIASTKACH WIELOKROTNYCH.

43. TWIERDZENIE. *Jeżeli równanie stopnia n-ego $f(x) = 0$ ma pierwiastki wielokrotne, to rozwiązanie jego można sprowadzić do rozwiązania* *jednego lub kilku równań, mających tylko pierwiastki pojedyńcze i będących stopnia niższego niż n.*

Oznaczmy przez X_1 iloczyn wszystkich różnych czynników linijowych pojedyńczych, wchodzących do rozkładu funkcyi $f(x)$, przez X_2 iloczyn wszystkich różnych czynników linijowych dwukrotnych i, wogóle, przez X_m iloczyn wszystkich różnych m-krotnych czynników linijowych. Jeżeli zaś się zdarzy, że pośród czynników linijowych funkcyi $f(x)$ niéma m-krotnych, to przez X_m będziemy rozumiéć jedność. Przyjmijmy jeszcze, dla uproszczenia, że spółczynnik najwyższéj potęgi zmiennéj x jest jednością. Mamy więc równość

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \dots X_m^m,$$

w któréj m oznacza największą wielokrotność różnych pierwiastków równania danego.

Oznaczymy przez $D_1, D_2, \dots, D_m$ największe spólne dzielniki, utworzone w taki sposób:

D_1 dla funkcyi $f(x)$ i jéj pochodnéj $f'(x)$,
D_2 „ D_1 „ D_1',
D_3 „ D_2 „ D_2',
. . . . ,
D_m „ D_{m-1} „ D_{m-1}'.

Otrzymując zaś, na mocy twierdzenia art. 42-go, oddzielne wyrażenia każdéj z tych funkcyj, wypiszmy je wraz z powyższym wyrażeniem funkcyi $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= X_1 X_2^2 X_3^3 \dots X_m^m, \\
D_1 &= X_2 X_3^2 \dots X_m^{m-1}, \\
D_2 &= X_3 X_4^2 \dots X_m^{m-2}, \\
&\dots\dots\dots, \\
D_{m-1} &= X_m, \\
D_m &= 1.
\end{aligned}$$

Ilość tych równań jest określona przez to, że ostatni spólny dzielnik jest jednością; na nim przerywa się odszukiwanie funkcyj D. Lecz ilość tak otrzymanych równań równa się ilości niewiadomych funkcyj $X_1, X_2, \dots, X_m$; więc wszystkie mogą być stąd otrzymane, i oto w jaki sposób.

Podzielmy kolejno: funkcyją $f(x)$ przez D_1, funkcyją D_1 przez D_2, i t. d.; oznaczywszy ilorazy otrzymywane odpowiednio przez $U_1, U_2, \dots$, będziemy mieli:

$$\begin{aligned}
U_1 &= X_1 X_2 \dots X_m, \\
U_2 &= X_2 X_3 \dots X_m, \\
&\dots\dots\dots, \\
U_m &= X_m.
\end{aligned}$$

Stąd widzimy, że funkcyja U_1 jest podzielna przez U_2, funkcyja U_2 przez U_3, i t. d.; uskuteczniając dzielenie otrzymujemy:

$$\frac{U_1}{U_2}=X_1,\quad \frac{U_2}{U_3}=X_2,\ldots,\frac{U_{m-1}}{U_m}=X_{m-1},\quad U_m=X_m.$$

Takimto sposobem otrzymujemy wyrażenia wszystkich funkcyj $X_1, X_2,\ldots,X_m$, a możemy zauważyć, że otrzymujemy je zapomocą zwyczajnego dzielenia algiebraicznego.

Rozwiązanie więc równania $f(x)=0$ sprowadza się do rozwiązania następujących równań:

$$X_1=0,\quad X_2=0,\ldots,X_m=0.$$

Piérwsze z nich określa wszystkie pierwiastki pojedyńcze, drugie określa wszystkie pierwiastki dwukrotne i t. d.

Jeżeliby się zdarzyło, że równanie $f(x)=0$ nie ma pierwiastków pojedyńczych, to wtedy mielibyśmy $X_1=1$, i nie możnaby napisać równania $X_1=0$. Toż samo można powiedziéć o pierwiastkach dwukrotnych i t. d.

44. Przykład. Dowiedziéć się, czy równanie

$$x^8-x^7-4x^6+6x^5-12x^3+16x^2+8x-16=0$$

posiada pierwiastki wielokrotne.

Największy spólny dzielnik dwu funkcyj:

$$f(x)=x^8-x^7-4x^6+6x^5-12x^3+16x^2+8x-16,$$
$$f'(x)=8x^7-7x^6-24x^5+30x^4-36x^2+32x+8$$

jest

$$D_1=x^4-4x^2+4;$$

największy spólny dzielnik funkcyj

$$D_1=x^4-4x^2+4,\quad D_1'=4x^3-8x$$

jest

$$D_2=x^2-2;$$

nakoniec, największy spólny dzielnik funkcyj

$$D_2=x^2-2,\quad D_2'=2x$$

jest

$$D_3=1.$$

Wskutek tego, mamy

$$U_1=x^4-x^3+2x-4,\quad U_2=x^2-2,\quad U_3=x^2-2,$$

a stąd

$$X_1=x^2-x+2,\quad X_2=1,\quad X_3=x^2-2.$$

A więc równanie dane posiada dwa pierwiastki pojedyńcze, zadość czyniące równaniu

$$x^2-x+2=0,$$

i dwa trzykrotne, zadość czyniące równaniu

$$x^2-2=0,$$

tak, iż możemy napisać:

$$f(x)=(x^2-2)^3\,(x^2-x+2).$$

§ III. ROZKŁAD FUNKCYI UŁAMKOWÉJ NA UŁAMKI NAJPROSTSZE.

45. Z rozkładu funkcyi całkowitéj na czynniki linijowe wynika, jako wniosek, rozkład funkcyi ułamkowéj na ułamki najprostsze («cząstkowe»).

Zauważymy naprzód, że jeżeli w wyrażeniu funkcyi ułamkowéj $\frac{F}{f}$ stopień licznika jest większy albo równy stopniowi mianownika, to zapomocą zwyczajnego dzielenia algiebraicznego można rozłożyć funkcyją $\frac{F}{f}$ na sumę dwu innych funkcyj, z których piérwsza będzie całkowita, a druga ułamkowa z licznikiem stopnia niższego od stopnia mianownika. Samo się przez się rozumié, że takie rozłożenie jednym tylko sposobem uskutecznione być może.

Weźmiemy pod uwagę taką funkcyją ułamkową

$$\frac{F}{PQ},$$

któréj mianownik jest iloczynem dwu funkcyj całkowitych, piérwszych względem siebie, a stopień licznika F jest niższy od stopnia mianownika PQ. Zauważmy, że, zapomocą zwykłego dzielenia algiebraicznego, możemy znaléść dwie funkcyje całkowite X i Y, zadość czyniące równości

$$QX + PY = 1.$$

Rozważając zaś te funkcyje jako wiadome, otrzymujemy

$$\frac{1}{PQ} = \frac{X}{P} + \frac{Y}{Q};$$

a więc

$$\frac{F}{PQ} = \frac{FX}{P} + \frac{FY}{Q}.$$

Oznaczając przez E i A część całkowitą i resztę, wynikające z podzielenia funkcyi FX przez P, a przez H i B część całkowitą i resztę z podzielenia funkcyi FY przez Q, możemy poprzedzającą równość tak wyrazić:

$$\frac{F}{PQ} = E + H + \frac{A}{P} + \frac{B}{Q}.$$

Lecz, według założenia, funkcyja $\frac{F}{PQ}$ nie przedstawia części całkowitéj: więc suma E + H jest tożsamościowo równa zeru; wskutek tego

$$\frac{F}{PQ} = \frac{A}{P} + \frac{B}{Q},$$

gdzie A i B są funkcyjami całkowitymi stopni odpowiednio niższych, niż funkcyje P i Q.

Rozkład funkcyi ułamkowéj $\frac{F}{PQ}$ według poprzedzającego wzoru jest możebny w jeden tylko sposób. Istotnie, jeżeli przypuścimy, że istnieją dwie funkcyje A' i B' stopni odpowiednio niższych niż funkcyje P i Q, a takie, iż ma miejsce równość

$$\frac{F}{PQ}=\frac{A'}{P}+\frac{B'}{Q},$$

to wtedy ma także miejsce równość

$$\frac{A}{P}+\frac{B}{Q}=\frac{A'}{P}+\frac{B'}{Q},$$

z któréj otrzymujemy

$$(A-A')\,Q=(B'-B)\,P.$$

Gdy zaś funkcyje P i Q są piérwsze względem siebie, przeto z ostatniéj równości wynika, że funkcyja $A-A'$ jest podzielna przez P; a że nadto obie funkcyje A i A', a więc i ich różnica, są niższego stopnia niż funkcyja P, zatym różnica $A-A'$ jest tożsamościowo równa zeru, t. j.

$$A'=A,$$

wskutek tego, również i

$$B'=B.$$

A więc nie można przypuścić, że funkcyje A' i B' różnią się od funkcyj A i B.

Z tego wynika następujące

Twierdzenie pomocnicze 1. *Każda funkcyja ułamkowa, nie zawiérająca w sobie części całkowitéj, mająca jako mianownik iloczyn dwu funkcyj P i Q, piérwszych względem siebie, może być przedstawiona jako suma dwu ułamków, których mianownikami są funkcyje P i Q, a licznikami funkcyje stopni niższych niż odpowiednie mianowniki; taki rozkład funkcyi ułamkowéj może być uskuteczniony w jeden tylko sposób.*

46. Przykład. Rozłożyć funkcyją

$$\frac{x}{(x^2+5)\,(x^3+x-1)}.$$

Rozwijając stosunek dwu czynników mianownika na ułamek ciągły, znajdziemy

$$\frac{x^3+x-1}{x^2+5}=x-\cfrac{16}{4x-1+\cfrac{81}{4x+1}};$$

przedostatni ułamek zbliżony («redukt») jest

$$x-\frac{16}{4x-1}=\frac{4x^2-x-16}{4x-1};$$

jest więc

$$(x^3+x-1)\,(4x-1)-(4x^2-x-16)\,(x^2+5)=81,$$

skąd

$$\frac{81}{(x^2+5)(x^3+x-1)}=\frac{4x-1}{x^2+5}-\frac{4x^2-x-16}{x^3+x-1}.$$

Pomnożywszy obie strony przez x i oddzieliwszy części całkowite w wyrazach na stronie drugiéj, otrzymamy

$$\frac{81x}{(x^2+5)(x^3+x-1)}=\frac{-x-20}{x^2+5}+\frac{x^2+20x-4}{x^3+x-1}.$$

Można to otrzymać inaczéj. Kładąc

$$\frac{x}{(x^3+x-1)(x^2+5)}=\frac{ax^2+a_1x+a_2}{x^3+x-1}+\frac{bx+b_1}{x^2+5},$$

gdzie a, a_1, a_2, b, i b_1 oznaczają szukane spółczynniki liczebne, i znosząc mianowniki, otrzymamy

$$x=(a+b)x^4+(a_1+b_1)x^3+(5a+a_2+b)x^2+(5a_1-b+b_1)x+5a_2-b_1.$$

Wskutek zaś przyrównania spółczynników jednakowych potęg x po obu stronach, mieć będziemy na wyznaczenie wprowadzonych pięciu spółczynników liczebnych układ pięciu równań:

$$\begin{aligned} a+b&=0,\\ a_1+b_1&=0,\\ 5a+a_2+b&=0,\\ 5a_1-b+b_1&=1,\\ 5a_2-b_1&=0 \end{aligned}$$

z których znajdziemy:

$$a=\frac{1}{81},\quad a_1=\frac{20}{81},\quad b=-\frac{1}{81},\quad b_1=-\frac{20}{81},\quad a_2=-\frac{4}{81}.$$

47. Każda funkcyja ułamkowa

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{PQR}\ldots\mathrm{T}},$$

któréj licznik jest stopnia niższego niż mianownik, a któréj mianownik jest iloczynem kilku funkcyj P, Q, R, . . . , T, piérwszych względem siebie, rozkłada się na sumę ułamków

$$\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{PQR}\ldots\mathrm{T}}=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{P}}+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{Q}}+\ldots+\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{T}},$$

w których A, B, . . . przedstawiają funkcyje całkowite stopni niższych niż odpowiadające im mianowniki.

Taki rozkład może być uskuteczniony w jeden tylko sposób. — Opiéra się on na kolejnym stosowaniu twierdzenia, udowodnionego w art. 45-ym.

Przykład. Kładąc

$$(1)\qquad \frac{72}{x^3(x-1)^2(x+2)}=\frac{a+a_1x+a_2x^2}{x^3}+\frac{b+b_1x}{(x-1)^2}+\frac{c}{x+2},$$

możemy wyznaczyć wszystkie spółczynniki $a, a_1, \ldots$ w sposób następujący.

Mnożąc naprzód obie strony równości (1) przez $x^3(x-1)^2(x+2)$, otrzymamy

$$72=(a+a_1x+a_2x^2)(x-1)^2(x+2)+x^3\varphi(x),$$

gdzie φ oznacza pewną funkcyją całkowitą. Z téj równości widoczna, że reszta z podzielenia funkcyi

$$(a+a_1x+a_2x^2)(x-1)^2(x+2)$$

przez x^3 jest 72. Dzieląc zaś funkcyją $(x-1)^2(x+2)$ przez x^3, otrzymujemy resztę $-3x+2$; a więc reszta z podzielenia iloczynu

$$(a+a_1x+a_2x^2)(-3x+2)$$

przez x^3 jest 72. Tworząc istotnie tę resztę, otrzymujemy równość

$$(-3a_1+2a_2)x^2-(3a-2a_1)x+2a=72,$$

z któréj wynikają równania

$$3a_1-2a_2=0,$$
$$3a-2a_1=0,$$
$$2a=72,$$

a z nich

$$a=36,\quad a_1=54,\quad a_2=81.$$

Pomnożywszy obie strony równości (1) przez $x^3(x-1)^2(x+2)$, możemy podobnie otrzymany wypadek tak przedstawić:

$$72=(b+b_1x)x^3(x+2)+(x-1)^2\psi(x),$$

gdzie ψ oznacza pewną funkcyją całkowitą. Stąd widoczna, że reszta z podzielenia funkcyi

$$(b+b_1x)x^3(x+2)$$

przez $(x-1)^2$ jest 72; a gdy reszta z podzielenia funkcyi $x^3(x+2)$ przez $(x-1)^2$ jest $10x-7$, przeto reszta z podzielenia iloczynu

$$(b+b_1x)(10x-7)$$

przez $(x-1)^2$ jest 72. Uskuteczniwszy istotnie dzielenie, otrzymujemy

$$(10b+13b_1)x-7b-10b_1=72;$$

stąd

$$10b+13b_1=0,$$
$$7b+10b_1=-72,$$

i

$$b=104,\quad b_1=-80.$$

Ażeby, nakoniec, wyznaczyć wartość spółczynnika c, zauważmy, że z podzielenia funkcyi $cx^3(x-1)^2$ przez $x+2$ jako resztę otrzymamy 72; a więc

$$c(-2)^3(-2-1)^2 = 72,$$

i

$$c = -1.$$

Tym sposobem otrzymujemy następujący rozkład danego ułamka:

$$\frac{72}{x^3(x-1)^2(x+2)} = \frac{36+54x+81x^2}{x^3} + \frac{104-80x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+2}.$$

48. Twierdzenie pomocnicze 2. *Każdą funkcyją ułamkową postaci* $\frac{F}{f^m}$, *nie zawiérającą części całkowitéj, można rozłożyć na sumę* m *składników, według wzoru:*

$$\frac{F}{f^m} = \frac{A}{f^m} + \frac{A_1}{f^{m-1}} + \frac{A_2}{f^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{f},$$

gdzie $A, A_1, A_2, \ldots, A_{m-1}$ *przedstawiają funkcyje całkowite, stopni niższych niż* f; *taki rozkład może być uskuteczniony w jeden tylko sposób.*

Jakoż, podzielmy funkcyją F przez f; część całkowitą oznaczmy przez Q, a resztę przez A; będzie więc

$$F = fQ + A.$$

Następnie podzielmy funkcyją Q przez f; iloraz nazwijmy Q_1, a resztę A_1; a więc będziemy mieli

$$Q = fQ_1 + A_1.$$

Dzieląc daléj w podobny sposób przez funkcyją f, otrzymamy szereg następujących tożsamości:

$$\begin{aligned} Q_1 &= fQ_2 + A_2, \\ Q_2 &= fQ_3 + A_3, \\ &\ldots\ldots \\ Q_{m-3} &= fQ_{m-2} + A_{m-2}, \\ Q_{m-2} &= A_{m-1}, \end{aligned}$$

których ilość, wogóle mówiąc, jest m — co wynika z następującéj uwagi.

Ponieważ stopień funkcyi F jest niższy od mn, gdzie n przedstawia stopień funkcyi f, przeto

stopień funkcyi Q jest niższy od $(m-1)n$,
„ „ Q_1 „ „ „ $(m-2)n$,
„ „ Q_2 „ „ „ $(m-3)n$,
. . . .
„ „ Q_{m-2} „ „ „ n,

tak iż nie będziemy mogli funkcyi Q_{m-2} dzielić przez f, i na niéj musimy działanie zakończyć. Lecz może się wydarzyć, że już wcześniéj trzeba będzie zaprzestać dzielenia, jeżeli któraś z poprzednich funkcyj Q_i jest stopnia niższego od n.

Dzieląc powyżéj otrzymane tożsamości przez f^m, f^{m-1}, f^{m-2}, . . . , otrzymamy

$$\frac{F}{f^m}=\frac{Q}{f^{m-1}}+\frac{A}{f^m},$$
$$\frac{Q}{f^{m-1}}=\frac{Q_1}{f^{m-2}}+\frac{A_1}{f^{m-1}},$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\frac{Q_{m-3}}{f^2}=\frac{Q_{m-2}}{f}+\frac{A_{m-2}}{f^2},$$
$$\frac{Q_{m-2}}{f}=\frac{A_{m-1}}{f}.$$

Stąd zaś, wskutek dodania i zniesienia w obu stronach wyrazów jednakowych, otrzymamy żądany rozkład funkcyi $\frac{F}{f^m}$.

Należy jeszcze udowodnić, że taki rozkład może być dokonany w jeden tylko sposób. Jest to prawie oczywiste. Jakoż, przypuśćmy, że istnieją dwa rozkłady,

$$\frac{F}{f^m}=\frac{A}{f^m}+\frac{A_1}{f^{m-1}}+\ldots+\frac{A_{m-1}}{f},$$
$$\frac{F}{f^m}=\frac{B}{f^m}+\frac{B_1}{f^{m-1}}+\ldots+\frac{B_{m-1}}{f},$$

w których stopień każdéj z funkcyj $B, B_1, \ldots, B_{m-1}$, równie jak i stopień każdéj z funkcyj $A, A_1, \ldots, A_{m-1}$, jest niższy niż stopień funkcyi f. Odjąwszy je od siebie, otrzymamy,

$$\frac{A-B}{f^m}+\frac{A_1-B_1}{f^{m-1}}+\ldots+\frac{A_{m-1}-B_{m-1}}{f}=0;$$

czyli, po pomnożeniu obu stron przez f^m,

$$A-B+(A_1-B_1)f+(A_2-B_2)f^2+\ldots=0.$$

Ta zaś równość wskazuje, że różnica $A-B$ jest podzielna przez f, a gdy obie funkcyje A i B są stopnia niższego od n, przeto ma miejsce tożsamość

$$B=A.$$

Wskutek tego, poprzednią równość można napisać tak:

$$A_1-B_1+(A_2-B_2)f+(A_3-B_3)f^2+\ldots=0,$$

z któréj bezpośrednio wynika, że

$$B_1=A_1.$$

Podobnie daléj $B_2=A_2$, i t. d.

Zauważymy tu jeszcze, że w szczególnym przypadku, kiedy $f = x - a$, rozkład funkcyi $\frac{F}{(x-a)^m}$ według powyższego wzoru wychodzi na jedno z rozkładem funkcyi F według wzoru Taylor'a.

PRZYKŁAD.

$$\frac{x^5}{(x^2+x+1)^3} = \frac{-x-1}{(x^2+x+1)^3} + \frac{x+3}{(x^2+x+1)^2} + \frac{x-2}{x^2+x+1}.$$

49. Niech będzie funkcyja ułamkowa $\frac{F(x)}{f(x)}$, któréj część całkowitą nazwiemy E, tak iż

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

gdzie już stopień funkcyi $\varphi(x)$ jest niższy od stopnia funkcyi $f(x)$.

W art. 43-im pokazaliśmy, że przy pomocy zwyczajnego dzielenia algiebraicznego można wyznaczyć funkcyje całkowite $X_1, X_2, X_3, \ldots$, stanowiące iloczyny wszystkich pojedyńczych, dwukrotnych, trzykrotnych i t. d. czynników linijowych, wchodzących do rozkładu funkcyi $f(x)$. Przypuśćmy, żeśmy istotnie wyznaczyli wszystkie te funkcyje, że więc mamy

$$f(x) = X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots X_m^m.$$

Ponieważ każde dwie z funkcyj $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ są piérwsze względem siebie, przeto, na mocy 1-go twierdzenia pomocniczego (art. 45), możemy ułamek $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ przedstawić tak:

$$\text{(1)} \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\varphi_1(x)}{X_1} + \frac{\varphi_2(x)}{X_2^2} + \frac{\varphi_3(x)}{X_3^3} + \ldots,$$

gdzie $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ oznaczają funkcyje całkowite stopni odpowiednio niższych niż $X_1, X_2^2, X_3^3, \ldots$. Taki rozkład jest jeden tylko możliwy, a jeżeli się zdarzy, że jedna z funkcyj X, np. X_i, jest tożsamościowo równa 1, to wtedy $\varphi_i(x) = 0$.

Dotychczas nie potrzebowaliśmy wyznaczać piérwiastków równania $f(x) = 0$; ale jeżeli, nie zadawalniając się rozkładem dopiéroco otrzymanym, zechcemy rozłożyć daną funkcyją na ułamki jeszcze prostsze, to koniecznie potrzeba wyznaczyć pierwiastki funkcyj $X_1, X_2, \ldots$.

Weźmy pod uwagę jeden z wyrazów w rozkładzie (1), np. $\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m}$; to, co o nim powiemy, będzie się stosować i do wszystkich innych. Oznaczywszy przez $a_1, a_2, \ldots, a_i$ pierwiastki funkcyi X_m, mamy

$$X_m = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_i),$$

skąd, na mocy 1-go twierdzenia pomocniczego (art. 45),

$$\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m} = \frac{\psi_1(x)}{(x-a_1)^m} + \frac{\psi_2(x)}{(x-a_2)^m} + \ldots + \frac{\psi_i(x)}{(x-a_i)^m},$$

gdzie $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... oznaczają funkcyje całkowite stopni niższych od m; taki rozkład tylko jeden jest możliwy. Wprowadzając następnie do drugiéj strony ostatniéj równości zamiast funkcyj $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$, ... ich rozkłady według wzoru Taylor'a,

$$\psi_1(x) = \psi_1(a_1) + \frac{x-a_1}{1}\psi'_1(a_1) + \ldots,$$

$$\psi_2(x) = \psi_2(a_2) + \frac{x-a_2}{1}\psi'_2(a_2) + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

i nazwawszy, dla krótkości,

$$A_h = \frac{\psi_1^{(h)}(a_1)}{1.2\ldots h}, \quad B_h = \frac{\psi_2^{(h)}(a_2)}{1.2\ldots h}, \ldots,$$

otrzymujemy

$$\frac{\varphi_m(x)}{X_m^m} = \frac{A}{(x-a_1)^m} + \frac{A_1}{(x-a_1)^{m-1}} + \frac{A_2}{(x-a_1)^{m-2}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a_1}$$
$$+ \frac{B}{(x-a_2)^m} + \frac{B_1}{(x-a_2)^{m-1}} + \frac{B_2}{(x-a_2)^{m-2}} + \ldots + \frac{B_{m-1}}{x-a_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jest to właśnie ostateczny rozkład funkcyi ułamkowéj na ułamki najprostsze.

Stąd wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Każda funkcyja ułamkowa postaci*

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda},$$

w któréj $a, b, \ldots, l$ *są liczbami od siebie różnymi, może być rozłożona, jednym tylko sposobem, na sumę następujących ułamków najprostszych:*

$$\frac{F(x)}{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda} = E + \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a}$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{L}{(x-l)^\lambda} + \frac{L_1}{(x-l)^{\lambda-1}} + \ldots + \frac{L_{\lambda-1}}{x-l},$$

gdzie $A, B, \ldots, L, A_1, \ldots$ *oznaczają liczby stałe, a* E *część całkowitą funkcyi danéj.*

50. Wyznaczenie niewiadomych spółczynników w powyższym rozkładzie może być uskutecznione rozmaitymi sposobami, innymi niż sposób, wynikający z teoryi ogólnéj.

Tak np., mnożąc obie strony wzoru powyższego przez iloczyn

$$(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda$$

i kładąc, dla krótkości,

$$(x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda = \varphi(x),$$
$$F(x)-(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda E = \Phi(x),$$

mieć będziemy

$$\Phi(x) = [A + A_1(x-a) + \ldots + A_{\alpha-1}(x-a)^{\alpha-1}]\varphi(x) + (x-a)^\alpha \theta(x),$$

gdzie $\theta(x)$ przedstawia pewną funkcyją całkowitą, któréj wyrażenia niémaco wypisywać. Podstawmy w obu stronach ostatniéj równości $a+h$ zamiast x i rozłóżmy funkcyje $\Phi(a+h)$ i $\varphi(a+h)$ według potęg h; otrzymamy

$$\Phi(a) + \frac{h}{1}\Phi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\Phi''(a) + \ldots$$
$$= \left[A + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots\right]\left[\varphi(a) + \frac{h}{1}\varphi'(a) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(a) + \ldots\right] + h^\alpha \theta(a+h).$$

Stąd, przyrównywając spółczynniki jednakowych potęg h w obu stronach, wyprowadzimy następujący układ równości:

$$A\varphi(a) = \Phi(a),$$
$$A_1\varphi(a) + A\varphi'(a) = \Phi'(a),$$
$$A_2\varphi(a) + A_1\varphi'(a) + \frac{1}{1.2}A\varphi''(a) = \Phi''(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{\alpha-1}\varphi(a) + A_{\alpha-2}\varphi'(a) + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots(\alpha-1)}A\varphi^{\alpha-1}(a) = \Phi^{(\alpha-1)}(a),$$

zapomocą których można kolejno obliczyć wszystkie spółczynniki $A, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}$. — W podobny sposób należy utworzyć równania w celu wyznaczenia grupy spółczynników $B, B_1, \ldots, B_{\beta-1}$, i t. d.

Przykład. Kładąc

$$\frac{27}{(x+1)^3(x-2)^2} = \frac{A}{(x+1)^3} + \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{B_1}{x-2},$$

znajdujemy następujące równania dla wyznaczenia spółczynników A, A_1 i A_2, B i B_1:

$$9A = 27, \qquad 27B = 27,$$
$$9A_1 - 6A = 0, \qquad 27B + 27B_1 = 0;$$
$$9A_2 - 6A_1 + A = 0,$$

stąd

$$A = 3,\ A_1 = 2,\ A_2 = 1;\quad B = 1,\ B_1 = -1.$$

51. Jeżeli wszystkie spółczynniki w wyrażeniach dwu funkcyj całkowitych $F(x)$ i $f(x)$ są rzeczywiste, a jeżeli, prócz tego, równanie $f(x)=0$ ma jednę albo kilka par pierwiastków zespolonych, to do rozkładu funkcyi $\frac{F(x)}{f(x)}$ na ułamki najprostsze, według twierdzenia art. 49-go, wejdą oczywiście liczby urojone. Sumę tych ułamków najprostszych, które zawiérają w mianownikach pierwiastki zespolone, można przedstawić inaczéj, bez liczb urojonych; należy tylko, zamiast czynników linijowych zespolonych, wprowadzić czynniki rzeczywiste stopnia 2-go (art. 40).

Jakoż, weźmy pod uwagę jakikolwiek wyraz na stronie drugiéj równości

$$\frac{F(x)}{f(x)} = E + \frac{\varphi_1(x)}{X_1} + \frac{\varphi_2(x)}{X_2^{\,2}} + \ldots,$$

np. $\frac{\varphi_m(x)}{X_m^{\,m}}$, i przypuśćmy, że funkcyja X_m rozkłada się na takie czynniki:

$$X_m = (x-a)\ldots(x-b)\,(x^2+px+q)\ldots(x^2+rx+s),$$

gdzie $(x-a), \ldots, (x-b)$ są wszystkie czynnikami rzeczywistymi linijowymi funkcyi X_m, a $x^2+px+q, \ldots, x^2+rx+s$ są iloczynami jéj zespolonych sprzężonych czynników linijowych; wtedy będziemy mieli (art. 47)

$$\frac{\varphi_m(x)}{X_m^{\,m}} = \frac{\psi(x)}{(x-a)^m} + \ldots + \frac{\psi_1(x)}{(x-b)^m} + \frac{\theta(x)}{(x^2+px+q)^m} + \ldots + \frac{\theta_1(x)}{x^2+rx+s}.$$

Rozwińmy na stronie prawéj wyrazy piérwszéj grupy według wzoru Taylor'a:

$$\frac{\psi(x)}{(x-a)^m} = \frac{A}{(x-a)^m} + \frac{A_1}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}}{x-a},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

gdzie $A, A_1, \ldots$ są liczbami stałymi. — Co się tyczy wyrazów drugiéj grupy, które w mianownikach mają czynniki stopnia 2-go, to rozłożymy każdy z nich tak, jak było wskazane w 2-im twierdzeniu pomocniczym (art. 48). A zatym, będziemy mieli

$$\frac{\theta(x)}{(x^2+px+q)^m} = \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{m-1}} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

gdzie $M, N, M_1, \ldots$ oznaczają liczby stałe. — Tak postępując, otrzymamy rozkład wyrazu $\frac{\varphi_m(x)}{X_m^{\,m}}$ na takie najprostsze ułamki, do których nie wejdą liczby urojone.

Z powyższego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie. *Jeżeli każde dwie z funkcyj*

$$x-a, \ldots, x-b, \quad x^2+px+q, \ldots, x^2+rx+s$$

są piérwsze względem siebie, to każda funkcyja ułamkowa Φ, postaci

$$\Phi = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha \ldots (x-b)^\beta\,(x^2+px+q)^\lambda \ldots (x^2+rx+s)^\mu},$$

rozkłada się na sumę ułamków najprostszych według wzoru:

$$\Phi = \mathrm{E} + \frac{\mathrm{A}}{(x-a)^\alpha} + \frac{\mathrm{A}_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\mathrm{B}}{(x-b)^\beta} + \frac{\mathrm{B}_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots$$
$$+ \frac{\mathrm{M}x+\mathrm{N}}{(x^2+px+q)^\lambda} + \frac{\mathrm{M}_1x+\mathrm{N}_1}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{\mathrm{P}x+\mathrm{Q}}{(x^2+rx+s)^\mu} + \frac{\mathrm{P}_1x+\mathrm{Q}_1}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}} + \ldots,$$

gdzie E *przedstawia część całkowitą funkcyi* Φ, *a* $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \ldots$ *są liczbami stałymi. Taki rozkład może być uskuteczniony w jeden tylko sposób; — do niego nie wchodzą liczby urojone, jeżeli ich niéma w pierwotnym wyrażeniu funkcyi* Φ.

PRZYKŁAD. Kładąc

$$\Phi = \frac{27}{(x^2+2)^2\,(x-1)^3},$$

znajdujemy naprzód

$$\Phi = \frac{9-5x+2x^2-2x^3}{(x^2+2)^2} + \frac{9-8x+2x^2}{(x-1)^3},$$

a następnie,

$$\frac{9-5x+2x^2-2x^3}{(x^2+2)^2} = \frac{5-x}{(x^2+2)^2} + \frac{2-2x}{x^2+2},$$

$$\frac{9-8x+2x^2}{(x-1)^3} = \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1},$$

tak iż ostatecznie

$$\Phi = \frac{5-x}{(x^2+2)^2} + \frac{2-2x}{x^2+2} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

ROZDZIAŁ IV.

O ILOŚCI PIERWIASTKÓW RZECZYWISTYCH RÓWNANIA, ZAWARTYCH MIĘDZY KRAŃCAMI DANYMI. — WARUNKI KONIECZNE I DOSTATECZNE, ABY PIERWIASTKI DWU RÓWNAŃ BYŁY RZECZYWISTE, NIERÓWNE I PRZEGRADZAJĄCE SIĘ. — TWIERDZENIE ROLLE'A. — WZÓR LAGRANGE'A. — TWIERDZENIE FOURIER'GO. — WARUNKI KONIECZNE I DOSTATECZNE, ABY PIERWIASTKI RÓWNANIA BYŁY RZECZYWISTE I RÓŻNE.

---

§ I. O ILOŚCI PIERWIASTKÓW RZECZYWISTYCH RÓWNANIA, ZAWARTYCH MIĘDZY DANYMI KRAŃCAMI.

52. Odtąd będziemy wciąż przyjmowali — chyba, że wyraźnie zrobimy inne zastrzeżenie — iż wszystkie spółczynniki równania danego są rzeczywiste (art. 6).

Niech będzie równanie $f(x) = 0$ stopnia n-tego, którego pierwiastki oznaczmy przez $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, i przyjmijmy, że pośród nich jest m pierwiastków rzeczywistych, mianowicie: $a_1, a_2, \ldots, a_m$, pozostałe zaś są zespolone.

Funkcyją $f(x)$ możemy napisać tak:

$$f(x) = \mathrm{A}(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_m)\,\mathrm{F}(x),$$

gdzie A przedstawia spółczynnik przy x^n w danym równaniu, $\mathrm{F}(x)$ zaś przedstawia iloczyn wszystkich czynników linijowych zespolonych, wchodzących do rozkładu funkcyi $f(x)$. Funkcyja $\mathrm{F}(x)$ otrzymuje wartości dodatne przy wszelkich wartościach rzeczywistych zmiennéj niezależnéj x (art. 40).

Nazwijmy przez a dowolną liczbę rzeczywistą, nie równą żadnemu z pierwiastków $a_1, a_2, \ldots, a_m$, a przez r ilość tych pierwiastków równania $f(x) = 0$, które są większe od a. Z równości

$$f(a) = \mathrm{A}(a - a_1)(a - a_2) \ldots (a - a_m)\,\mathrm{F}(a)$$

widoczna, że znak wartości $f(a)$ jest takiż, jak znak liczby $\mathrm{A}(-1)^r$. — Taksamo, jeżeli przez b nazwiemy jakąkolwiek liczbę rzeczywistą, nie równą ani a, ani żadnemu z pierwiastków równania $f(x) = 0$, a przez r' ilość tych pierwiastków tegoż równania, większych od b, to znak wartości $f(b)$ jest takiż, jak liczby $\mathrm{A}(-1)^{r'}$. — A więc znak stosunku $\dfrac{f(a)}{f(b)}$ jest określony przez $(-1)^{r-r'}$.

Stąd zaś, gdy zważymy, że bezwzględna wartość różnicy $r - r'$ przedstawia ilość pierwiastków rzeczywistych równania $f(x) = 0$, zawartych w przedziale między a i b, dochodzimy do następującego twierdzenia.

Twierdzenie. *Przy jakichkolwiek dwu liczbach rzeczywistych a i b, wrazie, kiedy dwie wartości $f(a)$ i $f(b)$ funkcyi całkowitéj $f(x)$, są tegoż samego znaku, równanie $f(x) = 0$ posiada parzystą ilość pierwiastków, zawartych między a i b, t. j. albo ani jednego, albo dwa i t. d.; wrazie zaś, kiedy wartości $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku, równanie $f(x) = 0$ posiada między a i b nieparzystą ilość pierwiastków, t. j. albo jeden, albo trzy i t. d.*

Albo odwrotnie:

Jeżeli równanie $f(x) = 0$ posiada parzystą ilość pierwiastków, zawartych między a i b, to wartości $f(a)$ i $f(b)$ są tegoż samego znaku; w przeciwnym zaś razie znaki tych wartości są różne.

Należy pamiętać, że w rachubie pierwiastków, zawartych pomiędzy a i b, powinna być uwzględniona wielokrotność każdego z nich: pierwiastek dwukrotny liczy się jako dwa pierwiastki; trzykrotny jako trzy i t. d.; to wypada wprost z dowodzenia twierdzenia.

Zauważymy jeszcze, że powyższe twierdzenie można wyprowadzić, jako wniosek, z twierdzenia art. 21-go.

§ II. O RÓWNANIACH Z PIERWIASTKAMI RZECZYWISTYMI I PRZEGRADZAJĄCYMI SIĘ.

53. Jeżeli pierwiastki rzeczywiste każdéj z dwu funkcyj $F(x)$ i $f(x)$ są pojedyńcze i tak rozłożone, że między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami funkcyi $F(x)$ znajduje się, lecz tylko jeden, pierwiastek funkcyi $f(x)$, i nawzajem, między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami funkcyi $f(x)$ znajduje się, jeden tylko, pierwiastek funkcyi $F(x)$, to natenczas będziemy mówili, że pierwiastki rzeczywiste dwu równań $F(x) = 0$ i $f(x) = 0$ przegradzają się.

W tym paragrafie wyprowadzimy wskazówki, przy pomocy których w każdym przypadku szczególnym będziemy mogli się dowiedzieć, czy dwa równania dane mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste, od siebie różne, a nadto przegradzające się. — Takie dwa równania, oczywiście, albo będą jednakowego stopnia, albotéż stopień jednego będzie się różnił o jedność od stopnia drugiego z tych równań.

54. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli dwa równania $F(x) = 0$ i $f(x) = 0$, z których drugie jest stopnia niewyższego, niż piérwsze, mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste, różne i przegradzające się, i jeżeli spółczynniki najwyższych potęg zmiennéj x w wyrażeniach funkcyj $F(x)$ i $f(x)$ są dodatne, to po podzieleniu funkcyi $F(x)$ przez $f(x)$ otrzymamy w reszcie funkcyją stopnia o jedność niższego, niż stopień funkcyi $f(x)$, a wszystkie jéj pierwiastki będą rzeczywiste, różne i przegradzające się nawzajem z pierwiastkami funkcyi $f(x)$.*

Prócz tego, jeżeli stopień funkcyi $f(x)$ jest niższy niż funkcyi $F(x)$, to spółczynnik najwyższéj potęgi zmiennéj x w wyrażeniu reszty jest ujemny.

Oznaczmy przez $-f_1(x)$ resztę z podzielenia $F(x)$ przez $f(x)$, przez Q zaś część całkowitą; będzie więc

(1) $$F(x)=f(x)Q-f_1(x).$$

Nazwawszy pierwiastki funkcyj $F(x)$ i $f(x)$ odpowiednio $a_1, a_2, \ldots; b_1, b_2, \ldots$, i przyjąwszy, że one są ustawione w porządku rosnącym, mieć będziemy $a_1<b_1<a_2<b_2\ldots$, albo $b_1<a_1<b_2<a_2\ldots$.

Kładąc w równości (1) $x=b_i$, a następnie $x=b_{i+1}$, otrzymamy

$$F(b_i)=-f_1(b_i),\quad F(b_{i+1})=-f_1(b_{i+1}).$$

Stąd, zważywszy, że wartości $F(b_i)$ i $F(b_{i+1})$ są różnego znaku, spostrzegamy, że wartości $f_1(b_i)$ i $f(b_{i+1})$ są także różnego znaku; równanie przeto $f_1(x)=0$ ma przynajmniéj jeden pierwiastek, zawarty w przedziale b_i, b_{i+1}. Gdy zaś ilość przedziałów $b_1, b_2; b_2, b_3; \ldots$ jest o jedność mniejsza od stopnia m funkcyi $f(x)$, zatym równanie $f_1(x)=0$ ma conajmniéj $m-1$ różnych pierwiastków rzeczywistych, wskutek czego stopień funkcyi $f_1(x)$ nie może być niższy od $m-1$. Lecz stopień funkcyi $f_1(x)$ nie może być wyższy od $m-1$; stopień bowiém reszty jest niższy od stopnia dzielnika. A więc funkcyja $f_1(x)$ jest $(m-1)$-go stopnia.

Pozostaje jeszcze do udowodnienia druga część twierdzenia, odnosząca się do tego przypadku, kiedy funkcyja $F(x)$ jest stopnia wyższego niż funkcyja $f(x)$.

Z równości

$$f_1(b_m)=-F(b_m)$$

widoczna, że znaki wartości $f_1(b_m)$ i $F(b_m)$ są różne. Lecz $F(b_m)<0$, bo w przedziale b_m, $+\infty$ równanie $F(x)=0$ ma tylko jeden pierwiastek a_{m+1}; a więc $f_1(b_m)>0$. Gdy zaś równanie $f_1(x)=0$ nie ma ani jednego pierwiastka w przedziale b_m, $+\infty$, przeto $f_1(+\infty)>0$. To wskazuje, że spółczynnik przy x^{m-1} w wyrażeniu $f_1(x)$ jest dodatny, czego należało dowieść.

W przypadku, kiedy funkcyje $F(x)$ i $f(x)$ są tegoż samego stopnia, jest rzeczą obojętną, czy funkcyją $F(x)$ dzielimy przez $f(x)$, czyteż $f(x)$ przez $F(x)$; reszty otrzymywane z dzielenia, oczywiście, będą miały spółczynniki jednakowych potęg zmiennéj x proporcyjonalne i różnego znaku, tak iż spółczynnik najwyższéj potęgi x w wyrażeniu reszty może być dodatny lub ujemny, stosownie do tego, którą z dwu funkcyj $F(x)$ i $f(x)$ przyjmiemy za dzielną.

55. Twierdzenie pomocnicze 2. *Niech dwa równania: $f(x)=0$ i $f_1(x)=0$ mają pierwiastki rzeczywiste, różne i przegradzające się, a stopień równania $f(x)=0$ przewyższa o jedność stopień równania $f_1(x)=0$, spółczynniki zaś najwyższych potęg zmiennéj x w wyrażeniach funkcyj $f(x)$ i $f_1(x)$ niech będą dodatne. Gdy utworzymy nową funkcyją $F(x)$ według wzoru*

$$F(x)=f(x)Q-f_1(x),$$

w którym Q *oznacza jakąkolwiek funkcyją stopnia piérwszego o dodatnym spółczynniku przy* x, *to wtedy równanie* $F(x) = 0$ *będzie miało wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się nawzajem z pierwiastkami równania* $f(x) = 0$.

Oznaczmy przez $n - 1$ stopień funkcyi $f(x)$, a przez

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1},$$
$$c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-2},$$

pierwiastki równań odpowiednio $f(x) = 0$ i $f_1(x) = 0$, przyjmując przytym, że

$$b_1 < c_1 < b_2 < c_2 \ldots < b_{n-2} < c_{n-2} < b_{n-1}.$$

Z równości

$$(1) \qquad F(x) = f(x)Q - f_1(x)$$

otrzymujemy

$$F(b_1) = -f_1(b_1).$$

To wskazuje, że wartości $F(b_1)$ i $f_1(b_1)$ są różnego znaku. Lecz znak wartości $f_1(b_1)$ wyznacza $(-1)^{n-2}$, a przeto znak wartości $F(b_1)$ wyznacza $(-1)^{n-1}$. Zważmy jeszcze, że znak $F(-\infty)$ jest takiż, jak znak $(-1)^n$; spółczynnik bowiém przy x^n w wyrażeniu funkcyi $F(x)$ jest dodatny. A więc wartości $F(b_1)$ i $F(-\infty)$ są różnego znaku. Stąd wynika, że równanie $F(x) = 0$ posiada przynajmniéj jeden pierwiastek mniejszy od b_1.

W podobnyż sposób przekonamy się, że równanie $F(x) = 0$ posiada przynajmniéj jeden pierwiastek większy od b_{n-1}.

Należy jeszcze dowieść, że równanie $F(x) = 0$ ma po jednym pierwiastku w każdym z przedziałów b_1, b_2; b_2, b_3; $\ldots$; b_{n-2}, b_{n-1}.

Z równania (1) otrzymujemy

$$F(b_i) = -f_1(b_i), \quad F(b_{i+1}) = -f_1(b_{i+1}).$$

Zważmy, że funkcyja $f_1(x)$ w przedziale b_i, b_{i+1} posiada jeden tylko pierwiastek c_i; wartości przeto $f_1(b_i)$ i $f_1(b_{i+1})$ są różnego znaku, a zatym i $F(b_i)$ i $F(b_{i+1})$ są także różnego znaku. To wskazuje, że funkcyja $F(x)$ posiada przynajmniéj jeden pierwiastek w przedziale b_i, b_{i+1}.

Z powyższego wynika, że równanie $F(x) = 0$, mając przynajmniej po jednym pierwiastku w każdym z $n + 1$ przedziałów, utworzonych przez szereg liczb

$$-\infty, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, +\infty,$$

i będąc stopnia równego ilości tych przedziałów, ma w każdym z nich po jednym pierwiastku.

Uwaga. Taksamo możemy się przekonać, że funkcyja $F_1(x)$, utworzona według wzoru

$$F_1(x) = f(x) + Qf_1(x),$$

będzie miała wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami funkcyi $f_1(x)$.

56. Twierdzenie pomocnicze 3. *Jeżeli dwa równania; $f(x)=0$ i $f_1(x)=0$ posiadają pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i wzajemnie przegradzające się, i jeżeli utworzymy funkcyją* $F(x)$ *według wzoru*

$$F(x)=Af(x)+Bf_1(x),$$

gdzie A *i* B *są jakimikolwiek liczbami rzeczywistymi, to wszystkie pierwiastki równania* $F(x)=0$ *będą pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się tak z pierwiastkami równania $f(x)=0$, jak i z pierwiastkami równania $f_1(x)=0$.*

Przyjmujemy, że stopień n funkcyi $f(x)$ nie jest niższy od stopnia funkcyi $f_1(x)$, i oznaczamy przez b_i i b_{i+1} dwa po sobie następujące pierwiastki funkcyi $f(x)$. Z równań

$$F(b_i)=Bf_1(b_i),\quad F(b_{i+1})=Bf_1(b_{i+1})$$

widoczna, że wartości $F(b_i)$ i $F(b_{i+1})$ są różnego znaku. Stąd wynika, że w każdym z $n-1$ przedziałów: $b_1, b_2; b_2, b_3; \ldots; b_{n-1}, b_n$ równanie $F(x)=0$ posiada po jednym pierwiastku pojedyńczym. Innymi słowy, wszystkie pierwiastki równania $F(x)=0$ są pojedyńcze, rzeczywiste i wzajemnie się przegradzają z pierwiastkami równania $f(x)=0$.

Toż samo stosuje się do pierwiastków równań $F(x)=0$ i $f_1(x)=0$, jeżeli ostatnie z tych równań jest n-go stopnia.

Jeżeli funkcyja $F(x)$ jest wyższego stopnia niż funkcyja $f_1(x)$, to należy jeszcze okazać, że między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami funkcyi $F(x)$, np. między c_i i c_{i+1}, znajduje się jeden pierwiastek funkcyi $f_1(x)$; gdyż tylko wówczas będziemy przekonani, że pierwiastki funkcyj $F(x)$ i $f_1(x)$ istotnie się przegradzają.—Gdy wartości $f(c_i)$ i $f(c_{i+1})$ są różnego znaku, przeto z równań

$$0=Af(c_i)+Bf_1(c_i),$$
$$0=Af(c_{i+1})+Bf_1(c_{i+1})$$

widoczna, że wartości $f_1(c_i)$ i $f_1(c_{i+1})$ są także różnego znaku. A zatym, w każdym z przedziałów $c_1, c_2; c_2, c_3; \ldots$ funkcyja $f_1(x)$ ma po jednym pierwiastku pojedyńczym, c. n. d.

57. Twierdzenie 1. *Mając dwie funkcyje całkowite:* $F(x)$ *i* $f(x)$, *stopni odpowiednio n-go i $(n-1)$-go, ze spółczynnikami dodatnymi w piérwszych wyrazach, podzielmy funkcyją* $F(x)$ *przez* $f(x)$ *i oznaczmy część całkowitą ilorazu przez* Q, *a resztę przez* $-f_1(x)$; *podzielmy następnie funkcyją* $f(x)$ *przez* $f_1(x)$, *część całkowitą oznaczmy przez* Q_1, *a resztę przez* $-f_2(x)$, *i t. d., dopóki w reszcie nie otrzymamy liczby stałéj. Ażeby pierwiastki dwu równań:* $F(x)=0$ *i* $f(x)=0$ *były pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się, potrzeba i wystarcza: popiérwsze, żeby stopnie funkcyj $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... stopniowo się o jedność zmniejszały, i powtóre, żeby spółczynniki najwyższych potęg zmiennéj x w wyrażeniu każdéj z funkcyj $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_{n-2}(x)$, f_{n-1} były dodatne.*

Wypiszmy wszystkie tożsamości, wynikające z wykonania wzmiankowanych dzieleń:

$$F(x)=f(x)Q-f_1(x),$$
$$f(x)=f_1(x)Q_1-f_2(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{n-3}(x)=f_{n-2}(x)Q_{n-2}-f_{n-1},$$

i zastosujmy kolejno do każdego z nich piérwsze twierdzenie pomocnicze. Tą drogą bezpośrednio przekonywamy się, że stopnie funkcyj $f_1(x), f_2(x), \ldots$ są odpowiednio: $n-2$, $n-3, \ldots$, oraz, że spółczynniki najwyższych potęg zmiennéj x są dodatne.

Dla udowodnienia, iż owe warunki są wystarczające, zauważmy naprzód, że spółczynniki zmiennéj x w wyrażeniach funkcyj linijowych $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ są oczywiście dodatne; następnie, wypisawszy poprzednie równości w porządku odwrotnym:

$$f_{n-3}(x)=f_{n-2}(x)Q_{n-2}-f_{n-1},$$
$$f_{n-4}(x)=f_{n-3}(x)Q_{n-3}-f_{n-2}(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(x)=f(x)Q-f_1(x),$$

zastosujemy do nich kolejno twierdzenie pomocnicze drugie. Spostrzeżemy, że każde dwie po sobie następujące funkcyje:

$$f_{n-3}(x),\ f_{n-4}(x), \ldots, f(x),\ F(x)$$

mają wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i nawzajem się przegradzające.

Uwaga. Jeżeli dwie funkcyje: $f(x)$ i $F(x)$ są jednakowego stopnia, to, podzieliwszy jednę z nich przez drugą i oznaczywszy resztę przez $f_1(x)$, na mocy piérwszego i trzeciego twierdzenia pomocniczego wnosimy, że dwa równania:

$$f(x)=0, \quad F(x)=0$$

tylko wtedy będą posiadały wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się, kiedy wszystkie pierwiastki równań

$$f(x)=0, \quad f_1(x)=0$$

są pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się. — A więc, przypadek, kiedy funkcyje $f(x)$ i $F(x)$ są jednakowego stopnia, sprowadza się w ten sposób do przypadku, kiedy te stopnie różnią się o jedność.

58. Twierdzenie 2. *Mając ułamek ciągły*

$$ax+b-\cfrac{c}{a_1x+b_1-\cfrac{c_1}{a_2x+b_2-\ldots}},$$

skończony lub nieskończony, w którym x oznacza zmienną niezależną, $a, b, c, \ldots$ są liczbami stałymi rzeczywistymi, każda zaś z liczb $a, a_1, a_2, \ldots, c, c_1, c_2, \ldots$

jest większa od zera, — oznaczmy przez $P_n(x)$, $Q_n(x)$, *albo, krócéj, przez* P_n, Q_n *licznik i mianownik n-go ułamka zbliżonego. Pierwiastki każdéj pary równań:* $P_n=0$ *i* $P_{n-1}=0$, $Q_n=0$ *i* $Q_{n-1}=0$, $P_n=0$ *i* $Q_n=0$ *są pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się.*

Istotnie,

$$P_1=ax+b, \qquad Q_1=1,$$
$$P_2=(a_1x+b_1)(ax+b)-c, \qquad Q_2=a_1x+b_1,$$
$$P_3=(a_2x+b_2)P_2-c_1P_1, \qquad Q_3=(a_2x+b_2)Q_2-c_1Q_1$$

i wogóle

$$P_n=(a_{n-1}x+b_{n-1})P_{n-1}-c_{n-2}P_{n-2},$$
$$Q_n=(a_{n-1}x+b_{n-1})Q_{n-1}-c_{n-2}Q_{n-2}.$$

Stąd, na mocy twierdzenia piérwszego, wnosimy, że pierwiastki dwu równań: $P_n=0$ i $P_{n-1}=0$, również jak i pierwiastki dwu równań: $Q_n=0$ i $Q_{n-1}=0$ są pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się.

Ażeby dowiéść tegoż samego dla pierwiastków równań $P_n=0$ i $Q_n=0$, weźmy pod uwagę równość

$$P_nQ_{n-1}-P_{n-1}Q_n=C,$$

gdzie C jest liczbą stałą, różną od zera, któréj wyrażenia niémaco wypisywać. Oznaczmy przez x_i, x_{i+1} dwa po sobie następujące pierwiastki równania $Q_n=0$. Według ostatniéj równości,

$$P_n(x_i)\,Q_{n-1}(x_i)=P_n(x_{i+1})\,Q_{n-1}(x_{i+1})=C.$$

A gdy wartości $Q_{n-1}(x_i)$ i $Q_{n-1}(x_{i+1})$ są różnego znaku, w przedziale bowiém między x_i i x_{i+1} funkcyja $Q_{n-1}(x)$ posiada jeden tylko pierwiastek pojedyńczy, przeto wartości $P_n(x_i)$ i $P_n(x_{i+1})$ są także różnego znaku, a zatym między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami równania $Q_n=0$ znajduje się przynajmniéj jeden pierwiastek równania $P_n=0$. — Taksamo możemy się przekonać, że w przedziale między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami równania $P_n=0$ znajduje się przynajmniéj jeden pierwiastek równania $Q_n=0$. — Widzimy więc, że pierwiastki równań $P_n=0$ i $Q_n=0$ wzajemnie się przegradzają.

59. Przykład 1. Równość

$$\sqrt{x^2-1}=x-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

prowadzi do następującego rozwinięcia funkcyi $\sqrt{x^2-1}$ na ułamek ciągły:

$$\sqrt{x^2-1}=x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{2x-\cfrac{1}{2x-\cdots}}}$$

Oznaczywszy przez V_n i U_n licznik i mianownik n-go ułamka zbliżonego, mamy

$$\begin{aligned}
V_1 &= x, & U_1 &= 1, \\
V_2 &= 2x^2 - 1, & U_2 &= 2x, \\
V_3 &= 4x^3 - 3x, & U_3 &= 4x^2 - 1, \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\
V_n &= 2xV_{n-1} - V_{n-2}, & U_n &= 2xU_{n-1} - U_{n-2}.
\end{aligned}$$

Każde z równań

$$V_n = 0 \text{ i } U_n = 0$$

ma wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami odpowiedniego z równań

$$V_{n-1} = 0 \text{ i } U_{n-1} = 0.$$

Prócz tego pierwiastki równania $V_n = 0$ przegradzają się z pierwiastkami równania $U_n = 0$.

Łatwo okazać, iż wszystkie pierwiastki równania $V_n = 0$ są zawarte w przedziale między -1 i $+1$. Wtym celu zauważymy naprzód, że

$$V_n(+1) = 1, \quad V_n(-1) = (-1)^n;$$

co można sprawdzić bezpośrednio, zapomocą powyżéj wypisanych równości. Następnie, przypuściwszy, że wszystkie pierwiastki równania $V_{n-1} = 0$ są zawarte między -1 i $+1$, postaramy się udowodnić, że wówczas pierwiastki równania $V_n = 0$ są również zawarte między -1 i $+1$. Jakoż, gdy między każdymi dwoma po sobie następującymi pierwiastkami równania $V_{n-1} = 0$ przypada jeden pierwiastek równania $V_n = 0$, przeto tylko dwa pierwiastki skrajne tego ostatniego równania, t. j. największy dodatny i najmniejszy ujemny, mogą się znajdować zewnątrz przedziału -1, $+1$. Jeżeliby największy pierwiastek dodatny równania $V_n = 0$ był większy od jedności, to równanie owo miałoby w przedziale między $+1$ i $+\infty$ jeden pierwiastek pojedyńczy, i liczba $V_n(+1)$ byłaby ujemna, co się sprzeciwia temu, że $V_n(+1) = 1$. Taksamo możemy się przekonać, że najmniejszy pierwiastek ujemny równania $V_n = 0$ nie może być mniejszy od -1. — Gdy zaś, istotnie, pierwiastek równania $V_1 = 0$, $x = 0$, jest zawarty w przedziale -1, $+1$, przeto, na mocy powyższego, wnosimy, że pierwiastki każdego z równań $V_2 = 0$, $V_3 = 0, \ldots$ są zawarte w tymże przedziale.

Funkcyje V_n i U_n są znane w teoryi funkcyj kołowych, w któréj się dowodzi (zob. «*Wstęp do analizy*»), że

$$V_n = \cos(n \arccos x), \quad U_n = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

co, zresztą, łatwo sprawdzić zapomocą związków, istniejących między trzema po sobie następującymi funkcyjami albo V_n albo U_n.

Ostatnie wyrażenia funkcyj V_n i U_n pozwalają nam ponownie przekonać się o prawdziwości tego, cośmy powiedzieli o pierwiastkach równań $V_n = 0$ i $U_n = 0$.

Ostateczne wyrażenia funkcyj V_n i U_n są następujące:

$$2V_n = (2x)^n - \frac{n}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2x)^{n-6} + \\ + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}(2x)^{n-8} - \ldots;$$

$$U_n = (2x)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2x)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2}(2x)^{n-5} - \\ - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}(2x)^{n-7} + \ldots$$

60. Przykład 2. n-ta pochodna funkcyi

$$\frac{1}{1.2.3\ldots n.2^n}(x^2-1)^n$$

nazywa się funkcyją Legendre'a. Nazywając ją X_n, będziemy mieli

$$X_n = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots(2n)}x^n - \ldots \\ + (-1)^k \frac{(2n-2k)(2n-2k-1)\ldots(n+1-2k)}{2.4\ldots(2k).2.4\ldots(2n-2k)}x^{n-2k} + \ldots,$$

czyli

$$X_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \right. \\ \left. - \frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{2.4.6(2n-1)(2n-3)(2n-5)}x^{n-6} + \ldots\right];$$

dla $n = 0$ przyjmuje się

$$X_0 = 1.$$

Przy pomocy ostatniego wyrażenia funkcyi X_n, łatwo możemy się przekonać, iż ma miejsce tożsamość:

$$(1) \qquad nX_n - (2n-1)xX_{n-1} + (n-1)X_{n-2} = 0,$$

dla wszelkiéj wartości wskaźnika n, poczynając od $n = 2$. Ta tożsamość wskazuje, że z podzielenia funkcyi X_n przez X_{n-1} otrzymujemy w ilorazie $\frac{(2n-1)x}{n}$, i resztę $-\frac{n-1}{n}X_{n-2}$, tak iż stopień reszty jest o jedność niższy od stopnia dzielnika, a spółczynnik najwyższéj potęgi x w wyrażeniu reszty jest ujemny. Na zasadzie tego wprost wnosimy, iż równanie $X_n = 0$ ma wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami równania $X_{n-1} = 0$.

Możemy dowieść, że wszystkie pierwiastki równania $X_n = 0$ są zawarte między -1 i $+1$. — Aby tego dowieść, zauważymy naprzód, że

$$X_n(+1) = 1, \quad X_n(-1) = (-1)^n,$$

gdyż równość (1) wskazuje, że każde z tych równań, mając miejsce dla dwu funkcyj X_{n-2} i X_{n-1}, ma miejsce i dla funkcyi X_n; o tym zaś, że one oba mają miejsce dla $n = 1$ i 2, można się przekonać bezpośrednio. — Przypuśćmy, że wszystkie pierwiastki równania $X_{n-1} = 0$ są zawarte między -1 i $+1$, a dowiedziemy, że wszystkie pierwiastki równania $X_n = 0$ są zawarte także między -1 i $+1$. Jakoż, wobec tego, że pierwiastki równania $X_n = 0$ przegradzają się z pierwiastkami równania $X_{n-1} = 0$, tylko dwa pierwiastki skrajne równania $X_n = 0$ mogłyby być bezwzględnie większe od jedności. Przypuśćmy, że największy pierwiastek równania $X_n = 0$ jest większy od jedności; wówczas w przedziale $+1$, $+\infty$ równanie to miałoby tylko jeden pierwiastek pojedyńczy; gdy zaś $X_n(+\infty) > 0$, zatym mielibyśmy $X_n(+1) < 0$, co być nie może, bowiem $X_n(+1) = +1$. Jeżeli przypuścimy, że równanie $X_n = 0$ ma jeden pierwiastek ujemny, bezwzględnie większy od jedności, to wówczas wartość $X_n(-1)$ powinna być innego znaku, niż wartość $X_n(-\infty)$, a więc innego, niż $(-1)^n$, co być nie może, gdyż $X_n(-1) = (-1)^n$. Funkcyje Legendre'a mają bardzo ważne zastosowania w wielu zagadnieniach matematyki stosowanéj. Gauss wskazał na inne ich zastosowanie przy przybliżonym obliczaniu pól (zob. «*Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi*»).

61. Przykład 3. Hermite wskazał na funkcyją

$$U_n = x^n - \frac{n(n-1)}{1} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} x^{n-4} - \\ - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} x^{n-6} + \ldots,$$

która z wielu własności jest podobną do funkcyi Legendre'a (otrzymuje się ona z funkcyi przestępnéj e^{-x^2} przez zwykłe różniczkowanie).

Między trzema po sobie następującymi funkcyjami U_{n-2}, U_{n-1}, U_n istnieje związek linijowy

$$U_n - xU_{n-1} + 2(n-1)U_{n-2} = 0,$$

przy wszelkich wartościach wskaźnika n, poczynając od $n = 2$, jeżeli przyjmiemy $U_0 = 1$. Stąd widzimy, że z podzielenia U_n przez U_{n-1} otrzymujemy w ilorazie x i resztę $-2(n-1)U_{n-2}$. A ponieważ spółczynnik przy x^n w wyrażeniu U_n jest zawsze dodatny, zatym równanie $U_n = 0$ ma wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i nadto przegradzające się z pierwiastkami równania $U_{n-1} = 0$.

Wartość bezwzględną wyrazu z x^{n-2k} w wyrażeniu funkcyi U_n nazwawszy u_k, mamy

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{kx^2}.$$

Ponieważ liczba k jest zawarta między krańcami

$$1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2},$$

przeto

$$2 \leqslant (n-2k+1)(n-2k+2) \leqslant n(n-1),$$

a zatym

$$\frac{4}{n} \leqslant \frac{(n-2k+1)(n-2k+2)}{k} \leqslant n(n-1);$$

wskutek tego

$$\frac{4}{nx^2} \leqslant \frac{u_k}{u_{k-1}} \leqslant \frac{n(n-1)}{x^2},$$

gdzie piérwszy znak równości ma miejsce dla $k = \frac{n}{2}$, a drugi dla $k = 1$.

Dla wartości zmiennéj x, czyniących zadość warunkowi $\frac{n(n-1)}{x^2} \leqslant 1$, czyli

$$x \geqslant \sqrt{n(n-1)},$$

będziemy mieli

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} \leqslant 1,$$

gdzie znak równości odnosi się tylko do $k = \frac{n}{2}$. To wskazuje, że wartość funkcyi

$$U_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots,$$

jeżeli ją przedstawimy tak:

$$U_n = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots,$$

jako złożona z samych tylko składników dodatnych, jest dodatna, $U_n > 0$, a liczbę $\sqrt{n(n-1)}$ można przyjąć jako wyższy kraniec dla pierwiastków dodatnych równania $U_n = 0$.

Dla wartości dodatnych zmiennéj x, czyniących zadość warunkowi

$$x \leqslant \frac{2}{\sqrt{n}},$$

otrzymujemy

$$\frac{u_k}{u_{k-1}} \geqslant 1,$$

gdzie znak równości odnosi się tylko do $k = 1$. Jeżeli przedstawimy funkcyją U_n w postaci

$$U_n = u_0 - (u_1 - u_2) - (u_3 - u_4) - \ldots,$$

albotéż w postaci

$$U_n = (u_0 - u_1) + (u_2 - u_3) + \ldots,$$

stosownie do tego, czy liczba wszystkich wyrazów $u_0, u_1, u_2, \ldots$ jest nieparzysta czytéż parzysta, to spostrzeżemy, że w piérwszym przypadku funkcyja U_n jest złożona z samych tylko składników dodatnych: u_0, $-(u_1-u_2)$, . . . , a w drugim razie z samych tylko składników ujemnych: u_0-u_1, u_2-u_3, . . . ; w obu więc razach wartości funkcyi U_n nie mogą być równe zeru, a liczbę $\frac{2}{\sqrt{n}}$ można przyjąć jako niższy kraniec dla pierwiastków dodatnych równania $U_n=0$.

Co się tyczy pierwiastków ujemnych równania $U_n=0$, to niémaco nad nimi się zatrzymywać: co do wartości bezwzględnéj są one równe pierwiastkom dodatnym.

Rozpatrywane tu funkcyje są szczególnymi przypadkami pewnéj grupy fuukcyj całkowitych, doniosłego znaczenia przy rozwiązywaniu pewnych zagadnień, i dlatego dobrze znanych w analizie. Są to tak zwane «funkcyje podobne do funkcyj Legendre'a».

62. Zakończymy ten paragraf wzmianką o pewnym układzie równań z pierwiastkami przegradzającymi się, zauważonymi prawie jednocześnie przez Hermite'a i Biehler'a.

Niech będą dwa równania: jedno $F(x)=0$ stopnia n-go, drugie $f(x)=0$ stopnia $(n-1)$-go, których wszystkie pierwiastki są pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się nawzajem. Przyjąwszy, że spółczynnik przy x^n w wyrażeniu funkcyi $F(x)$ jest dodatny, i oznaczywszy przez a i b dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste, z których druga jest tegoż samego znaku, co spółczynnik przy x^{n-1} w wyrażeniu funkcyi $f(x)$, tworzymy iloczyn

$$[F(x)+if(x)](x+a+bi)=F_1(x)+if_1(x).$$

Otrzymujemy tu dwie nowe funkcyje, $F_1(x)$ i $f_1(x)$, stopnia odpowiednio $(n+1)$-go i n-go, które są określone zapomocą wzorów:

$$F_1(x)=F(x)(x+a)-bf(x), \tag{1}$$
$$f_1(x)=bF(x)+f(x)(x+a). \tag{2}$$

Z nich wynika

$$F(x)f_1(x)-F_1(x)f(x)=b(f(x)^2+F(x)^2). \tag{3}$$

Z równości (1) widzimy, że wszystkie pierwiastki równania $F_1(x)=0$ są pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami równania $F(x)=0$ (art. 55). Równość zaś (2) wskazuje, że wszystkie pierwiastki równania $f_1(x)=0$ są pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się z pierwiastkami równania $f(x)=0$. Nakoniec, według równości (3), pierwiastki równania $F_1(x)=0$ przegradzają się z pierwiastkami równania $f_1(x)=0$.

Uważmy iloczyn

$$(x+a_1+b_1i)(x+a_2+b_2i)\ldots(x+a_n+b_ni),$$

złożony z n dowolnych czynników linijowych, i przypuśćmy, że wszystkie liczby $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ są tegoż samego znaku. Wówczas, kładąc

$$(x+a_1+b_1i)(x+a_2+b_2i)\ldots(x+a_n+b_ni)=F_n(x)+if_n(x),$$

dochodzimy do dwu równań $F_n(x)=0$ i $f_n(x)=0$, mających wszystkie pierwiastki pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się. Wynika to bezpośrednio z uwagi poprzedzającéj, gdyż pierwiastki dwu równań:

$$F_2(x)=(x+a_1)(x+a_2)-b_1b_2=0,$$
$$f_2(x)=(b_1+b_2)x+a_1b_2+a_2b_1=0$$

są oczywiście rzeczywiste i przegradzające się; takąż więc własność posiadają również pierwiastki dwu równań: $F_3(x)=0$ i $f_3(x)=0$, i t. d.

Podobnie łatwo można dowiéść twierdzenia odwrotnego:

Jeżeli pierwiastki równań $F(x)=0$ i $f(x)=0$, z których drugie jest stopnia o jedność niższego, niż piérwsze, są pojedyńcze, rzeczywiste i przegradzające się, to wszystkie pierwiastki równania

$$F(x)+if(x)=0$$

będą zespolone, a spółczynniki w składnikach urojonych będą jednakowego znaku.

§ III. TWIERDZENIE ROLLE'A.

63. Twierdzenie pomocnicze. *Przy przejściu zmiennéj x przez pierwiastek rzeczywisty równania $f(x)=0$, od wartości mniejszych do większych, funkcyja ułamkowa $\frac{f(x)}{f'(x)}$, zmieniając odpowiednio swoję wartość, przechodzi od ujemnych przez zero do dodatnych wartości.*

Oznaczając przez a jakikolwiek pierwiastek rzeczywisty równania $f(x)=0$, przez m jego wielokrotność, a przez h dowolną liczbę rzeczywistą, wypiszmy następujące dwa rozwinięcia według wzoru Taylor'a:

$$(1)\qquad f(a+h)=\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(a)+\frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)}f^{(m+1)}(a)+\ldots,$$

$$(2)\qquad f'(a+h)=\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m)}(a)+\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m+1)}(a)+\ldots,$$

w których wartość $f^{(m)}(a)$ jest różna od zera, gdyż, w razie przeciwnym, pierwiastek a byłby już większéj, niż m-ta wielokrotności. Dzieląc zaś obie strony równości (1) i (2) przez siebie i skracając, otrzymujemy

$$(3)\qquad \frac{f(a+h)}{f'(a+h)}=\frac{h}{m}\,\frac{f^{(m)}(a)+\frac{h}{m+1}f^{(m+1)}(a)+\ldots}{f^{(m)}(a)+\frac{h}{m}f^{(m+1)}(a)+\ldots}.$$

Stąd widoczna, że, przy dostatecznie małych wartościach bezwzględnych liczby h, znak ułamka $\frac{f(a+h)}{f'(a+h)}$ jest takiż sam, jak znak liczby h, tak iż, jeżeli znak téj liczby h uwidocznimy, otrzymamy dwie nierówności:

$$\frac{f(a-h)}{f'(a-h)} < 0, \quad \frac{f(a+h)}{f'(a+h)} > 0,$$

w których h oznacza już tylko dostatecznie małą liczbę dodatną. Jeżeli zaś w równości (3) uczynimy $h = 0$, to otrzymamy

$$\frac{f(a)}{f'(a)} = 0.$$

64. Przechodząc do udowodnienia twierdzenia Rolle'a, które się opiéra na poprzedzającym twierdzeniu pomocniczym, zauważymy, że ono może być także wyprowadzone, jako wniosek z prawa ciągłości, i dlatego stosuje się ono do wszystkich funkcyj ciągłych.

TWIERDZENIE. *Jeżeli a i b są dwoma po sobie następującymi pierwiastkami rzeczywistymi równania $f(x)=0$, to równanie pochodne $f'(x)=0$ posiada nieparzystą ilość pierwiastków, zawartych pomiędzy a i b.*

Załóżmy, że $a < b$, i oznaczmy przez h nieskończenie małą liczbę dodatną. Na mocy udowodnionego twierdzenia pomocniczego, mamy

$$\frac{f(a+h)}{f'(a+h)} > 0, \qquad \frac{f(b-h)}{f'(b-h)} < 0.$$

Wartości $f(a+h)$ i $f(b-h)$ są jednakowego znaku, bo, według założenia, równanie $f(x) = 0$ nie posiada ani jednego pierwiastka między $a+h$ i $b-h$; ażeby więc powyższe nierówności miały miejsce, należy przyjąć, że wartości $f'(a+h)$ i $f'(b-h)$ są różnego znaku. Stąd zaś wynika, że równanie $f'(x)=0$ między $a+h$ i $b-h$, albo, co wychodzi na jedno, między a i b, posiada nieparzystą ilość pierwiastków.

Jeżeli niewiadomo, czy a i b są bezpośrednio po sobie następującymi pierwiastkami równania $f(x) = 0$, t. j. jeżeli niewiadomo, czy w przedziale między a i b znajdują się jeszcze inne pierwiastki równania $f(x) = 0$, czyteż ich już tam niéma, to, w każdym razie, na mocy twierdzenia Rolle'a, wnosimy, że równanie pochodne $f'(x) = 0$ między a i b posiada conajmniéj jeden pierwiastek wielokrotności nieparzystéj.

§ IV. WZÓR LAGRANGE'A.

65. Niech $f(x)$ i $F(x)$ oznaczają dwie jakiekolwiek funkcyje całkowite, zaś a i b dwie dowolnie wzięte liczby rzeczywiste. Przyjmiemy, że równanie pochodne $F'(x) = 0$ nie posiada ani jednego pierwiastka, któryby był zawartym między a i b, i oznaczymy przez A wartość ułamka

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)}.$$

Nie może być $A = \infty$, gdyż wówczas mielibyśmy $F(b) = F(a)$ i równanie $F(x) - F(a) = 0$ miałoby dwa pierwiastki: $x = a$ i $x = b$, wskutek czego równanie pochodne $F'(x)=0$ miałoby między a i b przynajmniéj jeden pierwiastek, co się sprzeciwia założeniu. Równanie

$$f(x)-f(a)-A[F(x)-F(a)]=0$$

ma dwa pierwiastki: $x=a$ i $x=b$, a więc równanie pochodne, które można napisać tak:

$$f'(x)-AF'(x)=0,$$

ma przynajmniéj jeden pierwiastek, zawarty między a i b. Oznaczywszy go przez c, będziemy mieli tożsamość

$$f'(c)-AF'(c)=0,$$

z któréj wynika

$$A=\frac{f'(c)}{F'(c)},$$

albo, po podstawieniu zamiast A jego wyrażenia,

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-f(a)}=\frac{f'(c)}{F'(c)}.$$

Jeżeli jeszcze wprowadzimy oznaczenia:

$$b-a=h,\quad c-a=h_1,$$

to h_1 będzie przedstawiać liczbę, zawartą między 0 i h, a równość poprzedzającą możemy napisać tak:

$$(1)\qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{F(a+h)-F(a)}=\frac{F'(a+h_1)}{f'(a+h_1)}.$$

Stąd wynikają godne uwagi wnioski.

Przypuśćmy, że a jest spólnym pierwiastkiem obu równań: $f(x)=0$ i $F(x)=0$, wielokrotności nie mniejszéj, niż m-ta, t. j. przypuśćmy, że mają miejsce równania:

$$f(a)=f'(a)=f''(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0,$$
$$F(a)=F'(a)=F''(a)=\ldots=F^{(m-1)}(a)=0,$$

i, prócz tego, przypuśćmy, że ani jedno z równań

$$F'(x)=0,\quad F''(x)=0,\ldots,F^{(m)}(x)=0$$

nie ma pierwiastka, zawartego między a i $a+h$. W takim razie, stosując wzór (1) kilka razy zrzędu, otrzymamy następujący szereg równań:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+h_1)}{F'(a+h_1)}=\frac{f''(a+h_2)}{F''(a+h_2)}=\ldots=\frac{f^{(m)}(a+h_m)}{F^{(m)}(a+h_m)},$$

w których $h,\ h_1,\ h_2,\ldots,h_m$ są liczbami jednakowego znaku, o zmniejszających się wartościach bezwzględnych. — Oznaczając przez θ pewną liczbę dodatną mniejszą od jedności, możemy przyjąć

$$h_m=\theta h,$$

i wtedy będziemy mieli

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f^{(m)}(a+\theta h)}{F^{(m)}(a+\theta h)}.$$

Kładąc

$$F(x)=(x-a)^m,$$

mamy

$$F'(x)=m(x-a)^{m-1},$$

$$F''(x)=m(m-1)(x-a)^{m-2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F^{(m)}(x)=m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.$$

Funkcyja $F(x)$ czyni zadość wszystkim wymaganym warunkom, a więc

$$\frac{f(a+h)}{h^m}=\frac{f^{(m)}(a+\theta h)}{1.2.3\ldots m},$$

czyli

$$f(a+h)=\frac{h^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(a+\theta h). \tag{2}$$

Ten wzór ma miejsce dla wszelkiéj funkcyi całkowitéj $f(x)$, jeżeli tylko liczba a czyni zadość warunkom:

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(m-1)}(a)=0.$$

66. Weźmy pod uwagę wzór Taylor'a:

$$f(x)=f(a)+\frac{x-a}{1}f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(a)+\frac{(x-a)^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(a)+\ldots$$

i przyjmijmy, że

$$\varphi(x)=\frac{(x-a)^m}{1.2.3\ldots m}f^{(m)}(a)+\frac{(x-a)^{m+1}}{1.2.3\ldots(m+1)}f^{(m+1)}(a)+\ldots$$

Do rozkładu funkcyi $\varphi(x)$ na czynniki linijowe czynnik $x-a$ wejdzie z wykładnikiem conajmniéj m; a zatym mamy

$$\varphi(a)=\varphi'(a)=\ldots=\varphi^{(m-1)}(a)=0,$$

a to nam pozwala zastosować wzór (2) art. poprzedniego do funkcyi $\varphi(x)$ i napisać

$$\varphi(a+h)=\frac{h^m}{1.2\ldots m}\varphi^{(m)}(a+\theta h). \tag{1}$$

Z równości zaś

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{x-a}{1}f'(a)-\ldots-\frac{(x-a)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(a)$$

znajdujemy

$$\varphi(a+h)=f(a+h)-f(a)-\frac{h}{1}f'(a)-\ldots-\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(a).$$

Nadto, pochodne m-go rzędu funkcyj $\varphi(x)$ i $f(x)$ są tożsamościowo równe sobie, gdyż w wyrażeniach funkcyj $f(x)$ i $\varphi(x)$ wyrazy, zawiérające zmienną x z wykładnikami większymi od $m-1$, są jednakowe; dlategotéż

$$\varphi^{(m)}(a+\theta h)=f^{(m)}(a+\theta h).$$

Wprowadzając do równania (1) zamiast $\varphi(a+h)$ i $\varphi^{m}(a+\theta h)$ powyższe wyrażenia i przenosząc niektóre wyrazy ze strony lewéj na prawą, otrzymujemy

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\ldots+\frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}f^{(m-1)}(a)+\frac{h^m}{1.2\ldots m}f^{(m)}(a+\theta h),$$

gdzie θ oznacza pewną liczbę dodatną, mniejszą od jedności.

Jest to wzór Taylor'a z wyrazem dopełniającym Lagrange'a. Dla $m=1, 2, \ldots$ z tego wzoru wynikają równania:

$$(2)\begin{cases} f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a+\theta h), \\ f(a+h)=f(a)+\frac{h}{1}f'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a+\theta h), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

a w każdym z nich θ oznacza pewną liczbę dodatną, mniejszą od jedności.

Zauważymy tu, że cechy wzrastania i zmniejszania się funkcyi całkowitéj $f(x)$, wyłożone w art. 22-im, można wprost otrzymać z piérwszego z równań (2).

§ V. TWIERDZENIE FOURIER'GO.

67. Przechodzimy do innych zastosowań twierdzenia Rolle'a.

Jeżeli funkcyja pochodna $f'(x)$ dla wartości zmiennéj x od $x=a$ do $x=b$ nie zmienia znaku, to funkcyja pierwotna $f(x)$ w przedziale a, b, włączając w to i te krańce, albo zupełnie nie ma pierwiastków, albo ma tylko jeden, który, zresztą, może być wielokrotnym (nieparzystéj wielokrotności).

To podanie, wynikające wprost z tego, co było powiedziane w art. 22-im i 23-im, można także wyprowadzić z twierdzenia Rolle'a.

Istotnie, jeżeliby równanie $f(x)=0$ miało dwa, albo więcéj różnych pierwiastków, zawartych we wzmiankowanym przedziale, i jeżeliby dwa z tych pierwiastków, bezpośrednio po sobie następujące, były a' i b', to, na mocy twierdzenia Rolle'a, wnieślibyśmy, iż równanie $f'(x)=0$ ma między a' i b' nieparzystą ilość pierwiastków, wskutek czego funkcyja $f'(x)$ zmieniałaby swój znak w przedziale a, b, co się sprzeciwia założeniu.

Ażeby oznaczyć, który z wyżéj wymienionych przypadków ma miejsce w rzeczywistości, potrzeba określić znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$. I jeżeli jedna z tych wartości będzie równa zeru, to jeden z krańców, a albo b, będzie jedynym pierwiastkiem równania $f(x)=0$, zawartym w przedziale a, b; jeżeli $f(a)$ i $f(b)$ są jednakowego znaku, to równanie $f(x)=0$ nie posiada pierwiastka między a i b; jeżeli, nakoniec, $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku, to równanie $f(x)=0$ ma między a i b jeden pierwiastek wielokrotności nieparzystéj.

68. Weźmy pod uwagę trzy równania:

$$f(x)=0,\quad f'(x)=0,\quad f''(x)=0,$$

i przyjmijmy, że w przedziale między a i b druga pochodna $f''(x)$ nie zmienia swego znaku, a równanie $f'(x)=0$ w tymże przedziale posiada jeden pierwiastek c, różny tak od a, jak i od b. Ten pierwiastek może być wielokrotny, lecz wtedy wielokrotność jego jest nieparzysta.

Zachodzi pytanie: co wtedy, opiérając się na twierdzeniu Rolle'a, możemy powiedziéć o pierwiastkach równania $f(x)=0$, zawartych między a i b?

Równanie $f(x)=0$ w przedziale a, b, włączając w to i te krańce, nie może miéć więcéj niż dwa różne pierwiastki. W przeciwnym bowiém razie równanie $f'(x)=0$ w tymże przedziale miałoby przynajmniéj dwa różne pierwiastki, co się sprzeciwia założeniu.

Jeżeli równanie $f(x)=0$ w przedziale a, b, włączając w to i te krańce, nie ma ani jednego pierwiastka, to $f(a)$ i $f(b)$ są jednakowego znaku.

Jeżeli równanie $f(x)=0$ w przedziale a, b, włączając w to i te krańce, ma tylko jeden pierwiastek, równy liczbie c, to jego wielokrotność jest parzysta, a $f(a)$ i $f(b)$ są jednakowego znaku.

Jeżeli równanie $f(x)=0$ w przedziale a, b, włączając w to i te krańce, ma jeden tylko pierwiastek, różny od liczby c, natenczas ten pierwiastek jest pojedyńczy, i, wrazie gdy on jest różny od każdego z krańców a i b, wartości $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku.

Nakoniec, jeżeli równanie $f(x)=0$ w przedziale a, b, włączając tu i te krańce, ma dwa pierwiastki od siebie różne, to żaden z nich nie równa się liczbie c, lecz jeden jest zawarty w przedziale a, c i może się równać liczbie a, drugi zaś jest zawarty w przedziale c, b i może się równać liczbie b. Obadwa są pierwiastkami pojedyńczymi, a wartości $f(a)$ i $f(b)$, jeżeli tylko różnią się od zera, są jednakowego znaku.

Z wszystkiego, co wyżéj powiedziano, wypada, że jeżeli dwie wartości: $f(a)$ i $f(b)$ są różnego znaku, to równanie $f(x)=0$ między a i b posiada jeden tylko pierwiastek pojedyńczy; jeżeli zaś wartości $f(a)$ i $f(b)$ są tegoż samego znaku, to równanie $f(x)=0$ między a i b albo zupełnie nie posiada pierwiastka, albo ma dwa pierwiastki pojedyńcze, albo, nakoniec, ma jeden tylko pierwiastek parzystéj wielokrotności. Przypadek, kiedy $f(a)$ albo $f(b)$ są równe zeru, możemy usunąć spod uwagi: można go bowiém uniknąć, zmieniając nieco jeden albo oba krańce a i b.

69. Szczególnie ważnym jest tylko ten przypadek, kiedy z funkcyj $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ ostatnia nie zmienia znaku w przedziale a, b, i kiedy wartości $f'(a)$ i $f'(b)$ są różnego, a $f(a)$ i $f(b)$ tegoż samego znaku.

Przyjmiemy, że funkcyja $f''(x)$ od $x=a$ do $x=b$ jest wciąż dodatna: w razie przeciwnym, zamiast funkcyi $f(x)$, wzięlibyśmy funkcyją $-f(x)$.

Kładąc w równaniu

$$f'(x+h)=f'(x)+hf''(x+\theta h)$$

naprzód $x=a$, $h=c-a$, a następnie $x=b$, $h=c-b$, gdzie c przedstawia pierwiastek równania $f'(x)=0$, zawarty między a i b, otrzymamy

$$(1)\left\{\begin{aligned} 0&=f'(a)+(c-a)f''(a+\theta(c-a)),\\ 0&=f'(b)+(c-b)f''(b+\theta_1(c-b)).\end{aligned}\right.$$

Przypuszczając zaś, że $b>a$, i biorąc pod uwagę nierówności

$$f''(a+\theta\,(c-a))>0,\quad f''(b+\theta_1\,(c-b))>0,\quad (a<c<b),$$

z równań (1) wnosimy, że

$$f'(a)<0,\quad f'(b)>0.$$

Co się tyczy wartości $f(a)$ i $f(b)$, które, według założenia, są jednakowego znaku, to mogą zajść dwa odrębne przypadki: albo obie liczby $f(a)$ i $f(b)$ są ujemne, albo obie są dodatne.

Jeżeli wartości $f(a)$ i $f(b)$ są ujemne, to równanie $f(x)=0$ nie ma zupełnie pierwiastka w przedziale a, b. To wynika z tego, że strona prawa równania

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h),$$

dla wartości h od 0 do $c-a$, składa się z dwu wyrazów ujemnych, jak również z tego, że strona prawa równania

$$f(b-h)=f(b)-hf'(b-\theta h),$$

dla wartości h od 0 do $b-c$, jest sumą dwu wyrazów ujemnych; tak iż ani w przedziale a, c, ani w przedziale c, b, funkcyja $f(x)$ nie staje się równą zeru.

Jeżeli wartości $f(a)$ i (b) są dodatne, to równanie $f(x)=0$ w przedziale a, b albo zupełnie nie ma pierwiastka, albo ma dwa pierwiastki pojedyńcze, albo ma jeden pierwiastek parzystéj wielokrotności. Oznaczenie, który z tych trzech przypadków ma w rzeczywistości miejsce, jest zadaniem, które często spotkać można przy oddzielaniu pierwiastków równania. To oznaczenie bywa zwykle dość kłopotliwe.

Udowodnimy pewne twierdzenie Fourier'go, które dozwala, w bardzo wielu przypadkach, dokonać owego oznaczenia.

70. Twierdzenie. *Jeżeli druga pochodna $f''(x)$ nie zmienia znaku dla wartości zmiennéj od $x=a$ do $x=b$ i jeżeli, prócz tego, równanie dane $f(x)=0$ między a i b posiada dwa pierwiastki różne, lub jeden pierwiastek parzystéj wielokrotności, to wtedy ma miejsce następująca nierówność:*

$$\text{wart. bezwzg. } \frac{f(a)}{f'(a)}+\text{wart. bezw. }\frac{f(b)}{f'(b)}<\text{wart. bezw. }(b-a).$$

W omówionym przypadku równanie $f(x)=0$ ma między a i b albo dwa pierwiastki pojedyńcze, α i β, albo jeden pierwiastek wielokrotności parzystéj, $\alpha=\beta$.

Niech α oznacza ten pierwiastek, który jest bliższy a, a, tymsamym, β niech oznacza ten pierwiastek, który jest bliższy b, jeżeli tylko α nie $=\beta$.

Kładąc w równaniu

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x+\theta h)$$

$x=a$, $h=\alpha-a$, otrzymamy

$$0=f(a)+(\alpha-a)f'(a)+\frac{(\alpha-a)^2}{2}f''(a+\theta(\alpha-a)),$$

skąd

$$\alpha-a=-\frac{f(a)}{f'(a)}-\frac{(\alpha-a)^2}{2}\frac{f''(a+\theta(\alpha-a))}{f'(a)}.$$

Ponieważ wartości $f(a)$ i $f''(a+\theta(\alpha-a))$ są tegoż samego znaku, przeto także oba wyrazy na stronie prawéj są jednakowego znaku; wskutek tego, mamy

(1) $$\text{wart. bezw.}(\alpha-a)=\text{wart. bezw.}\frac{f(a)}{f'(a)}+\text{wart. bezw.}\frac{(\alpha-a)^2}{2}\frac{f''(a+\theta(\alpha-a))}{f'(a)}.$$

Nietrudno się przekonać, że liczba $f''(a+\theta(\alpha-a))$, zachodząca w wyrażeniu po prawéj, jest różna od zera. Istotnie, w razie przeciwnym, będziemy mieli

$$f(a)+(\alpha-a)f'(a)=0,$$

a wtedy równanie

$$f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)=0$$

miałoby dwa pierwiastki: jeden $x=a$, a drugi $x=\alpha$. A zatym równanie pochodne,

$$f'(x)-f'(a)=0,$$

między a i b miałoby przynajmniéj jeden pierwiastek, prócz widocznego $x=a$. Drugie zaś równanie pochodne, $f''(x)=0$, powinnoby mieć pomiędzy a i b jeden pierwiastek pojedyńczy, albo, wogóle, wielokrotności nieparzystéj, co się sprzeciwia założeniu o stałości znaku funkcyi $f''(x)$ od $x=a$ do $x=b$. A więc wartość $f''(a+\theta(\alpha-a))$ jest różna od zera.

Wskutek tego, z równania (1) wynika, że

$$\text{wart. bezw.}(\alpha-a)>\text{wart. bezw.}\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

W podobny sposób można dowiéść, że

$$\text{wart. bezw.}(b-\beta)>\text{wart. bezw.}\frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Dodając zaś do siebie dwie ostatnie nierówności i zważając, że

$$\text{wart. bezw.}(\alpha-a)+\text{wart. bezw.}(b-\beta)\leq\text{wart. bezw.}(b-a),$$

otrzymujemy:

$$\text{wart. bezw.}\frac{f(a)}{f'(a)}+\text{wart. bezw.}\frac{f(b)}{f'(b)}<\text{wart. bezw.}(b-a),$$

czego należało dowiéść.

Wniosek. *Jeżeli, przy istnieniu wszystkich warunków twierdzenia poprzedzającego, okaże się, że*

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{f'(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{f'(b)} \geqq \text{wart. bezw. } (b-a),$$

to wtedy równanie $f(x)=0$ *między* a *i* b *nie ma pierwiastka.*

71. Przykład 1. Weźmy funkcyją

$$f(x)=5x^4+4x^3+3x^2-4x+2;$$

tu

$$\frac{1}{2}f'(x)=10x^3+6x^2+3x-2,\quad \frac{1}{6}f''(x)=10x^2+4x+1.$$

Równanie $f''(x)=0$ nie posiada pierwiastków rzeczywistych; równanie $f'(x)=0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, zawarty między 0 i $\frac{1}{2}$, gdyż $f'(0)<0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$. A gdy $f(0)>0$ i $f\left(\frac{1}{2}\right)>0$, przeto równanie $f(x)=0$ albo zupełnie nie ma pierwiastków rzeczywistych, albo ma ich dwa; one mogą być różne lub równe sobie, a oba są zawarte między 0 i $\frac{1}{2}$. Lecz mamy tu $f(0)=2$, $f'(0)=-4$,

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{1}{2};$$

a więc

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)}+\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}>\frac{1}{2}.$$

Widocznie więc równanie $f(x)=0$ nie ma pierwiastka w przedziale 0, $\frac{1}{2}$; wskutek tego, ono zupełnie nie ma pierwiastków rzeczywistych.

72. Przykład 2. Dane jest równanie

$$f(x)=x^6-5x^4+15x^2-10x+4=0.$$

Tu

$$\frac{1}{2}f'(x)=3x^5-10x^3+15x-5,\quad \frac{1}{30}f''(x)=x^4-2x^2+1.$$

Druga pochodna $f''(x)$ otrzymuje wartości dodatne przy wszelkich wartościach zmiennéj x. Dlatego, funkcyja $f'(x)$ może mieć jeden tylko pierwiastek rzeczywisty (pojedyńczy lub nieparzystéj wielokrotności); pierwiastek ten rzeczywiście istnieje, jest pojedyńczy i zawarty między 0 i $\frac{1}{2}$. Zważmy jeszcze, że $f(0)=4$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{157}{64}$; przeto równanie $f(x)=0$ albo nie ma pierwiastków między 0 i $\frac{1}{2}$, albo ma ich dwa. Żeby tę wątpliwość rozstrzygnąć, obliczamy:

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{2}{5},\quad \text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{157}{172};$$

stąd znajdujemy

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} > \frac{1}{2}.$$

A zatym, równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastków w przedziale $0, \frac{1}{2}$. Łatwo się przekonać, że ono wcale nie ma pierwiastków rzeczywistych.

73. Przykład 3. Dla równania

$$f(x) = x^4 - 14x^3 + 24x^2 - 288x - 101$$

mamy

$$\frac{1}{2}f'(x) = 2x^3 - 21x^2 + 24x - 144, \quad \frac{1}{12}f''(x) = x^2 - 7x + 4.$$

Równanie $f''(x) = 0$ ma dwa pierwiastki:

$$c_1 = \frac{7 - \sqrt{33}}{2}, \quad c_2 = \frac{7 + \sqrt{33}}{2}.$$

Przyjmując to na uwagę, rozpatrzmy trzy przedziały: $-\infty, c_1$; c_1, c_2; $c_2, +\infty$.

W przedziale $-\infty, c_1$ funkcyja $f''(x)$ zachowuje wciąż znak dodatny. A gdy $f'(-\infty) < 0$ i $f'(c_1) < 0$, to funkcyja $f'(x)$ w tym przedziale utrzymuje ciągle znak ujemny, wskutek czego funkcyja $f(x)$ może mieć conajwięcéj jeden pierwiastek, nie większy od c_1. — Ale $f(-\infty) > 0$, zaś $f(c_1) < 0$; a zatym równanie $f(x) = 0$ istotnie ma pierwiastek pojedyńczy mniejszy od c_1. — Pierwiastek ten jest zawarty między 0 i -1, gdyż $f(0) < 0$, a $f(-1) > 0$.

Zauważmy, że, dla określenia znaków wartości $f(c_1)$, $f(c_2)$, $f'(c_1)$, $f'(c_2)$, należy uprzednio podzielić funkcyje $f(x)$ i $f'(x)$ przez $f''(x)$; otrzymamy tą drogą równości:

$$f(x) = Qf''(x) - 463x + 15, \quad \frac{1}{2}f'(x) = Q_1 f''(x) - 33x - 116,$$

w których Q i Q_1 oznaczają części całkowite. Stąd, oznaczywszy przez c_i jednę z liczb c_1, c_2, znajdujemy

$$f(c_i) = -463c_i + 15, \quad \frac{1}{2}f'(c_i) = -33c_i - 116.$$

Zapomocą tych dwu równań łatwo możemy się przekonać, że dla obu wartości wskaźnika i jest

$$f(c_i) < 0, \quad f'(c_i) < 0.$$

Teraz rozważmy drugi przedział c_1, c_2. W nim funkcyja $f''(x)$ jest wciąż ujemna. A gdy $f'(c_1) < 0$ i $f'(c_2) < 0$, przeto także funkcyja $f'(x)$ jest stale ujemna. Nakoniec, nierówności $f(c_1) < 0$ i $f(c_2) < 0$ wskazują, że funkcyja $f(x)$ wcale nie ma pierwiastków w przedziale c_1, c_2.

W ostatnim przedziale $c_2, +\infty$ funkcyja $f''(x)$ jest wciąż dodatna. Z nierówności zaś $f'(c_2) < 0$ i $f'(+\infty) > 0$ wynika, że funkcyja $f'(x)$ ma tylko jeden pierwiastek, większy od c_2. Nakoniec, z nierówności $f(c_2) < 0$, $f(+\infty) > 0$ wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek większy od c_2. Ten pierwiastek jest pojedyńczy i zawarty między 13 i 14, gdyż $f(13) < 0$, $f(14) > 0$.

A zatym, równanie dane ma tylko dwa pierwiastki rzeczywiste; oba są pojedyńcze, jeden z nich ujemny, zawarty między 0 i -1, a drugi dodatny, zawarty między 13 i 14.

74. Przykład 4. Weźmy równanie

$$f(x) = x^5 + 10x^2 - 71x - 81 = 0;$$

tu

$$f'(x) = 5x^4 + 20x - 71, \quad f''(x) = 20(x^3 + 1).$$

Biorąc pod uwagę, że funkcyja $f''(x)$ od $x = -\infty$ do $x = -1$ jest wciąż ujemna i że

$$f'(-\infty) > 0, \quad f'(-1) < 0,$$
$$f(-\infty) < 0, \quad f(-1) < 0,$$

wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ albo nie ma pierwiastków mniejszych od -1, albo ma ich dwa, które zresztą mogą być równe. — Obliczając wartość $f(-2)$, znajdujemy $f(-2) > 0$; to wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ w przedziale $-\infty$, -1 posiada dwa pierwiastki pojedyńcze. Jeden z nich zawiéra się między -2 i -3, a drugi między -1 i -2.

W przedziale -1, $+\infty$ funkcyja $f''(x)$ jest wciąż dodatna. A ponieważ wartości $f'(-1)$ i $f'(+\infty)$ są różnego znaku, zatym funkcyja $f'(x)$ posiada jeden tylko pierwiastek pojedyńczy, większy od -1. Nakoniec, ze względu na to, że $f(-1) < 0$, $f(+\infty) > 0$, wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek większy od -1. Pierwiastek ten zawiéra się między 2 i 3.

A więc, równanie dane ma trzy pierwiastki rzeczywiste: dwa ujemne i jeden dodatny; wszystkie trzy są pojedyńcze. Pozostałe dwa pierwiastki są zespolone.

§ VI. O RÓWNANIACH, NIE MAJĄCYCH PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH.

75. Twierdzenie. *Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są rzeczywiste, to wszystkie pierwiastki równania pochodnego $f'(x) = 0$ są także rzeczywiste.*

Wynika to wprost z twierdzenia Rolle'a. Jakoż, przypuśćmy, że $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ oznaczają pierwiastki różne równania $f(x) = 0$, $m_1, m_2, \ldots, m_k$, odpowiednie ich wielokrotności, a n oznacza stopień równania $f(x) = 0$. Mamy więc

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n.$$

Równanie pochodne $f'(x) = 0$ ma $m_1 - 1$ pierwiastków równych a_1, $m_2 - 1$ pierwiastków równych $a_2, \ldots, m_k - 1$ pierwiastków równych m_k, i, prócz tego, posiada przynajmniéj po jednym pierwiastku w każdym z przedziałów:

$a_1, a_2; a_2, a_3; \ldots; a_{k-1}, a_k$. A ponieważ ilość tak wyliczonych pierwiastków,

$$m_1 - 1 + m_2 - 1 + \ldots + m_k - 1 + k - 1 = n - 1$$

równa jest stopniowi równania $f'(x) = 0$, przeto równanie $f'(x)$ ma wszystkie pierwiastki rzeczywiste, a w każdym z przedziałów

$$a_1, a_2; a_2, a_3; \ldots; a_{k-1}, a_k,$$

posiada tylko po jednym pierwiastku pojedyńczym.

Uwaga. Z powyższego rozumowania okazuje się, że jeżeli m oznacza ilość pierwiastków jakiegokolwiek równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b, a m' ilość pierwiastków równania pochodnego $f'(x) = 0$, zawartych także między a i b, to zawsze

$$m' \geq m - 1.$$

76. Niech

$$f(x) = (x^2 - 1)^n = x^{2n} - \frac{n}{1} x^{2n-2} + \ldots;$$

równanie $f(x) = 0$ ma dwa n-krotne pierwiastki: jeden $x = -1$, drugi $x = 1$. Równanie pochodne, $f'(x) = 0$, ma dwa $(n-1)$-krotne pierwiastki: $x = -1$ i $x = 1$, i, prócz tego, jeden pierwiastek pojedyńczy, zawarty między -1 i $+1$. Drugie równanie pochodne, $f''(x) = 0$, ma dwa $(n-2)$-krotne pierwiastki, i, prócz tego, dwa pierwiastki pojedyńcze, zawarte między -1 i $+1$. Prowadząc dalej w ten sposób rozumowanie, dojdziemy do równania n-go stopnia, $f^{(n)}(x) = 0$, i dowiedziemy, że wszystkie jego pierwiastki są pojedyńcze, rzeczywiste i zawarte między -1 i $+1$.

Zauważmy, że funkcyja $f^{(n)}(x)$ różni się tylko czynnikiem stałym od funkcyi Legendre'a X_n (art. 60).

77. Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są rzeczywiste i pojedyńcze, to wszystkie pierwiastki równania pochodnego, $f'(x) = 0$, są także pojedyńcze, rzeczywiste i, prócz tego, przegradzające się z pierwiastkami równania $f(x) = 0$. Dlategotéż warunki konieczne i dostateczne na to, ażeby pierwiastki równań $f(x) = 0$ i $f'(x) = 0$ były rzeczywiste i przegradzające się (art. 57), są jednocześnie warunkami koniecznymi i dostatecznymi na to, ażeby wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ były rzeczywiste i pojedyńcze.

Te warunki, jak nam już wiadomo, wyrażają się zapomocą nierówności, których ilość równa się stopniowi równania, zmniejszonemu o jedność. Należy jednak zauważyć, że niektóre z tych nierówności mogą wynikać, jako następstwa, z pozostałych, tak iż ilość warunków *niezależnych* może być w rzeczywistości mniejsza od $n - 1$. Naprzykład, dla równania trzeciego stopnia istnieje tylko jedna nierówność warunkowa. —

Jeżeli jedna z pochodnych funkcyi $f(x)$ ma przynajmniéj jednę parę pierwiastków zespolonych, to równanie $f(x) = 0$ ma także przynajmniéj jednę parę pierwiastków zespolonych. Tak np. równanie

$$Ax^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0$$

będzie miało jednę albo więcéj par pierwiastków zespolonych, jeżeli ma miejsce nierówność

$$(n-1)A_1^2 - 2nAA_2 < 0;$$

wówczas bowiém $(n-2)$-gie równanie pochodne,

$$n(n-1)Ax^2 + 2(n-1)A_1x + 2A_2 = 0$$

ma pierwiastki zespolone.

ROZDZIAŁ V.

TWIERDZENIE DESCARTES'A. — O PEWNÉJ GRUPIE RÓWNAŃ Z PIERWIASTKAMI ZESPOLONYMI. — ODDZIELENIE PIERWIASTKÓW RÓWNANIA, MAJĄCEGO WSZYSTKIE PIERWIASTKI RZECZYWISTE. — TWIERDZENIA LAGUERRE'A.

---

§ I. O ILOŚCI ZMIAN ZNAKU W RÓWNANIU.

78. W wyrażeniu jakiéjkolwiek funkcyi całkowitéj $f(x)$, uporządkowanym według rosnących lub malejących potęg zmiennéj x, każde dwa wyrazy sąsiednie mają spółczynniki albo jednakowego, albotéż różnego znaku; w piérwszym razie one przedstawiają p o w t ó r z e n i e z n a k u, w drugim zaś z m i a n ę z n a k u.

Zestawiając piérwszy wyraz z drugim, drugi z trzecim i t. d., naliczymy pewną ilość zmian znaku i pewną ilość powtórzeń znaku. Np. w piérwszéj z funkcyj

$$7-3x+5x^2-8x^3+x^5-\frac{1}{3}x^9,$$

$$x^4+\frac{3}{4}x+12,$$

$$-7-3x^2-x^3+10x^4,$$

jest 5 zmian, 0 powtórzeń; w drugiéj 0 zmian, 2 powtórzenia; w trzeciéj 1 zmiana, 2 powtórzenia.

Pod wyrażeniem: ilość zmian albo powtórzeń znaku w równaniu $f(x)=0$ rozumiemy ilość zmian albo powtórzeń znaku w wyrażeniu funkcyi $f(x)$.

Z powyższego wynika, że:

ilość zmian (albo powtórzeń) znaku w wyrażeniach dwu funkcyj: $f(x)$ i $-f(x)$ jest zawsze taż sama;

suma liczb, wyrażajacych ilość zmian i ilość powtórzeń znaku w wyrażeniu funkcyi $f(x)$, jest równa liczbie, wyrażającéj ilość wyrazów téj funkcyi, zmniejszonéj o jedność;

jeżeli dwa wyrazy skrajne funkcyi $f(x)$ są jednakowego znaku, to liczba zmian w jéj wyrażeniu jest parzysta, i przeciwnie.

79. T w i e r d z e n i e p o m o c n i c z e 1. *Jeżeli a jest liczbą dodatną, a $f(x)$ jakąkolwiek funkcyją całkowitą, to ilość zmian znaku w iloczynie*

$(x-a)f(x)$ jest większa od ilości zmian w $f(x)$, a różnica tych dwu liczb jest nieparzysta.

Przyjmijmy, że funkcyja $f(x)$ przedstawia v zmian znaku, i napiszmy ją tak:

$$f(x)=(\mathrm{A}x^n+\ldots)-(\mathrm{A}_1x^{n_1}+\ldots)+(\mathrm{A}_2x^{n_2}+\ldots)-\ldots+(-1)^v(\mathrm{A}_vx^{n_v}+\ldots),$$

umówiwszy się, że spółczynniki we wszystkich wyrazach w każdym nawiasie są jednakowego znaku. Możemy przypuścić, że one są dodatne, w przeciwnym bowiém razie zamiast $f(x)$ moglibyśmy wziąć $-f(x)$ Prócz tego, przyjmujemy, że wyrazy są uporządkowane według malejących potęg x, tak iż $n>n_1>n_2>\ldots$ $\ldots>n_v$. — W iloczynie $(x-a)f(x)$ jest $v+2$ wyrazów, mających znaki określone i niezależne od liczby a; owe wyrazy są na stronie prawéj równości

$$(x-a)f(x)=\mathrm{A}x^{n+1}\pm\ldots-\mathrm{B}x^{n_1+1}\pm\ldots+\mathrm{C}x^{n_2+1}\pm\ldots$$
$$+(-1)^v\mathrm{K}x^{n_v+1}\pm\ldots+(-1)^{v+1}\mathrm{L}ax^l,$$

w któréj A, B, C, ..., K, L są liczbami dodatnymi, wyraźnie wypisane. Ostatni wyraz ostatniéj grupy,

$$\mathrm{A}^v x^{n_v}+\ldots,$$

oznaczyliśmy tu przez $\mathrm{L}x^l$; jeżeliby więc ta grupa składała się z jednego tylko wyrazu, to mielibyśmy $\mathrm{L}=\mathrm{A}_v$, $l=n_v$. — Nazywając odpowiednio $w_1, w_2,\ldots,$ w_v, w_{v+1} ilość zmian znaku w wielomianach:

$$(1)\left\{\begin{array}{l}\mathrm{A}x^{n+1}\pm\ldots-\mathrm{B}x^{n_1+1},\\ -\mathrm{B}x^{n_1+1}\pm\ldots+\mathrm{C}x^{n_2+1},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (-1)^v\mathrm{K}x^{n_v+1}\pm\ldots(-1)^{v+1}\mathrm{L}ax^l,\end{array}\right.$$

a przez v' ilość zmian znaku w iloczynie $(x-a)f(x)$, spostrzegamy naprzód, że każda z liczb $w_1, w_2, \ldots$ jest nieparzysta, gdyż w każdym z wielomianów (1) dwa wyrazy skrajne są różnego znaku, i, powtóre, że liczba v' równa się sumie $w_1+w_2+\ldots+w_{v+1}$. Kładąc

$$w_1=2h_1+1,$$
$$w_2=2h_2+1,$$
$$\ldots\ldots$$
$$w_{v+1}=2h_{v+1}+1,$$
$$\mathrm{H}=h_1+h_2+\ldots+h_{v+1},$$

gdzie każda z liczb $h_1, h_2,\ldots,h_{v+1}$, H oznacza liczbę dodatną, całkowitą, albo zero, znajdujemy

$$w_1+w_2+\ldots+w_{v+1}=2\mathrm{H}+v+1,$$

czyli

$$v'=2\mathrm{H}+v+1.$$

Stąd

$$v'-v=2\mathrm{H}+1,$$

c. n. d.

80. Twierdzenie pomocnicze 2. *Jeżeli a jest liczbą dodatną, a $f(x)$ funkcyją całkowitą, to liczba, wyrażająca ilość zmian znaku w iloczynie $(x+a)f(x)$, nie jest większa od liczby, wyrażającéj ilość zmian znaku w $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.*

Przypuściwszy, że to ma miejsce dla każdéj funkcyi $f(x)$, któréj stopień jest mniejszy od n, dowiedziemy, że ono ma miejsce i wtedy, kiedy stopień funkcyi $f(x)$ równa się n. Tym sposobem twierdzenie owo będzie udowodnione, gdyż widoczna, że ono ma miejsce wtedy, kiedy funkcyja $f(x)$ jest stopnia piérwszego.

Jeżeli Nx^n jest w wyrażeniu funkcyi $f(x)$ wyrazem o największym wykładniku przy x, to różnica

$$f(x) - Nx^n = \varphi(x)$$

jest funkcyją stopnia niższego od n; niech Mx^m przedstawia jéj wyraz o najwyższym wykładniku przy x. Weźmy teraz pod uwagę wyrażenia cztérech następujących funkcyj, przypuszczając, że wyrazy są uporządkowane według rosnących potęg zmiennéj x:

$$(1)\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= Ax^a + \ldots + Mx^m, \\ f(x) &= Ax^a + \ldots + Mx^m + Nx^n, \\ (x+a)\varphi(x) &= A_1x^a + \ldots + Mx^{m+1}, \\ (x+a)f(x) &= A_1x^a + \ldots + Mx^{m+1} + aNx^n + Nx^{n+1}. \end{aligned}\right.$$

Nazwijmy liczby, przedstawiające ilość zmian znaku w każdéj z tych funkcyj, odpowiednio v, w, v', w', i zważając na to, że, według założenia, różnica $v - v'$ jest liczbą dodatną, parzystą, lub zerem, oznaczmy $v - v' = 2h$.

Dla ułatwienia dowodzenia, lepiéj oddzielnie rozważyć dwa przypuszczenia: kiedy $m+1 < n$ i kiedy $m+1 = n$.

Zacznijmy od piérwszego: $m+1 < n$. Wtedy mogą miéć miejsce dwa przypadki, które będziemy roztrząsać osobno:

a. Spółczynniki M i N są jednakowego znaku. Wtedy równania (1) wprost wskazują, że

$$w = v, \quad w' = v',$$

skąd

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

b. Spółczynniki M i N są różnego znaku. Wtedy z równań (1) otrzymujemy

$$w = v + 1, \quad w' = v' + 1;$$

a więc

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

Przeszedszy do drugiego przypuszczenia: $m+1 = n$, zauważmy, że teraz, na stronie prawéj ostatniego z równań (1), dwa wyrazy: Mx^{m+1} i aNx^n są podobne i stanowią jeden wyraz $(M+aN)x^{m+1}$, tak iż zamiast równań (1) mamy teraz grupę następującą:

$$(2)\begin{cases} \varphi(x) = Ax^a + \ldots + Mx^m, \\ f(x) = Ax^a + \ldots + Mx^m + Nx^{m+1}, \\ (x+a)\varphi(x) = A_1x^a + \ldots + K_1x^k + Mx^{m+1}, \\ (x+a)f(x) = A_1x^a + \ldots + K_1x^k + (M+aN)x^{m+1} + Nx^{m+2}. \end{cases}$$

Ażeby dowieść, że nasze twierdzenie ma teraz miejsce, rozpatrzmy oddzielnie cztéry następujące przypadki, jedyne, jakie tu mogą zachodzić:

a. Spółczynniki M i N są jednakowego znaku. Równania (2) wskazują, że

$$w = v, \quad w' = v';$$

a zatym

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

b. Spółczynniki M i N są różnego, a M i $M + aN$ jednakowego znaku. Wówczas

$$w = v + 1, \quad w' = v' + 1;$$

a zatym

$$w - w' = v - v' = 2h, \quad \text{c. n. d.}$$

c. Spółczynniki M i N są różnego, a N i $M + aN$ jednakowego znaku. Mamy wtedy

$$w = v + 1, \quad w' = v' \pm 1;$$

znak przy jedności na stronie prawéj równania ostatniego zależy od tego, czy dwa ostatnie wyrazy w wyrażeniu $(x+a)\,\varphi(x)$ są jednakowego, czytéż różnego znaku. Odejmując, otrzymujemy: wtedy, kiedy zachodzi znak górny,

$$w - w' = v - v' = 2h,$$

a jeżeli dolny,

$$w - w' = v - v' + 2 = 2(h+1), \quad \text{c. n. d.}$$

d. Spółczynniki M i N są różnego znaku, zaś $M + aN = 0$. Natenczas

$$w = v + 1; \quad w' = v' \pm 1;$$

znak przy jedności w równaniu ostatnim zależy znowu od tego, czy dwa ostatnie wyrazy iloczynu $(x+a)\,\varphi(x)$ są jednakowego, czytéż różnego znaku. Odejmując, dojdziemy do tegoż samego wyniku, co w przypadku poprzednim; a więc i teraz twierdzenie nasze ma miejsce.

81. Twierdzenie pomocnicze 3. *Jeżeli wyraz stały w wyrażeniu funkcyi całkowitéj $f(x)$ nie równa się zeru, to suma dwu liczb, wyrażających ilość zmian znaku w $f(x)$ i ilość zmian znaku w $f(-x)$, nie przewyższa stopnia funkcyi $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.*

Niech będzie funkcyja

$$f(x) = Ax^n + Bx^m + Cx^r + \ldots Kx^s + L,$$

w któréj ani jeden ze spółczynników A, B, C, . . . , K, L nie równa się zeru i $n > m > r > \ldots$. Każda z liczb

$$\alpha = n - m - 1, \quad \beta = m - r - 1, \ldots, \quad \lambda = s - 1$$

wyrażać będzie ilość wyrazów, brakujących między odpowiedniemi po sobie następującymi wyrazami funkcyi $f(x)$. Oznaczmy jeszcze przez ρ_α resztę pozostałą z podzielenia α przez 2, wziętą ze znakiem takim, jaki ma iloczyn AB; przez ρ_β resztę pozostałą z podzielenia β przez 2, wziętą ze znakiem takim, jaki ma iloczyn BC, i t. d. Nadto, oznaczmy odpowiednio przez $v_1, v_2, \ldots, v_i$ ilość zmian znaku w każdym z dwumianów

$$Ax^n + Bx^m, \quad Bx^m + Cx^r, \ldots, Kx^s + L,$$

a przez $v_1', v_2', \ldots, v_i'$ ilość zmian znaku w każdym z dwumianów

$$(-1)^n Ax^n + (-1)^m Bx^m, \quad (-1)^m Bx^m + (-1)^r Cx^r, \ldots, (-1)^s Kx^s + L.$$

Między liczbami v_1, v_1', α, ρ_α zachodzi związek:

$$(1) \qquad n - m - (v_1 + v_1') = \alpha + \rho_\alpha.$$

Zauważmy bowiém, że jeżeli α jest parzyste, to przy n parzystym, m jest nieparzyste, i naodwrót; wskutek tego iloczyny AB i $(-1)^{m+n}$ AB są różnego znaku; a zatym, albo: $\rho_\alpha = 0$, $v_1 = 1$, $v_1' = 0$, albotéż: $\rho_\alpha = 0$, $v_1 = 0$, $v_1' = 1$; stosownie do tego, czy iloczyn AB jest ujemny, czytéż dodatny. A jeżeli α jest nieparzyste, to liczby m i n są albo obie parzyste, albotéż obie nieparzyste, tak iż iloczyny AB i $(-1)^{m+n}$ AB są jednakowego znaku, i, gdy iloczyn AB jest dodatny, mamy $\rho_\alpha = 1$, $v_1 = v_1' = 0$, gdy zaś iloczyn AB jest ujemny, mamy $\rho_\alpha = -1$, $v_1 = v_1' = 1$. Jest więc zawsze $v_1 + v_1' + \rho_\alpha = 1$, skąd, z uwagi, że $\alpha = n - m - 1$, dochodzimy do związku (1).

Wskutek związku (1), mają miejsce równania

$$(2)\left\{\begin{array}{l} m - r - (v_2 + v_2') = \beta + \rho_\beta, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ s - (v_i + v_i') = \lambda + \rho_\lambda. \end{array}\right.$$

Dodając do siebie związki (1) i (2) i zważając, że suma

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_i$$

wyraża ilość zmian znaku w $f(x)$, a suma

$$v' = v_1' + v_2' + \ldots + v_i'$$

ilość zmian znaku w $f(-x)$, otrzymujemy

$$n - (v + v') = \alpha + \rho_\alpha + \beta + \rho_\beta + \ldots + \lambda + \rho_\lambda.$$

A gdy każdy z dwumianów $\alpha + \rho_\alpha$, $\beta + \rho_\beta, \ldots$ widocznie jest liczbą parzystą, dodatną, lub zerem, przeto nasze twierdzenie jest udowodnione.

§ II. TWIERDZENIE DESCARTES'A.

82. Opiérając się na twierdzeniach pomocniczych, udowodnionych w paragrafie poprzedzającym, łatwo możemy dowiéść następującego twierdzenia Descartes'a i, prócz tego, dodać kilka uwag, które w praktyce często wypada miéć na względzie.

Twierdzenie. *Ilość wszystkich pierwiastków dodatnych równania $f(x)=0$ nie jest większa od ilości zmian znaku w funkcyi $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.*

Oczywiście, że pierwiastek równy zeru nie powinien być zaliczany do pierwiastków dodatnych, bo, wskutek pomnożenia równania przez $x, x^2, x^3, \ldots$, nie powiększy się ilość zmian znaku.

Niech m oznacza ilość pierwiastków dodatnych danego równania, któreto pierwiastki nazwijmy $a_1, a_2, \ldots, a_m$.

Funkcyja całkowita

$$F(x)=\frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)}$$

nie ma ani jednego pierwiastka dodatnego; z tego wnosimy, że spółczynniki w dwu skrajnych jéj wyrazach będą jednakowego znaku, gdyż przy dwu wartościach dodatnych zmiennéj x, z których jedna jest dość mała, a druga dość wielka, odpowiednie wartości funkcyi $F(x)$ powinny mieć znaki jednakowe. Stąd wynika, że ilość zmian znaku w wyrażeniu funkcyi $F(x)$ jest parzysta albo równa zeru.

Oznaczając ilość zmian znaku w wyrażeniu każdéj z funkcyj

$$F(x), (x-a_1)F(x), (x-a_1)(x-a_2)F(x), \ldots, (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)F(x)$$

odpowiednio przez $v_m, v_{m-1}, \ldots, v$ i przyjmując pod uwagę piérwsze twierdzenie pomocnicze paragrafu poprzedzającego, otrzymujemy równania:

$$v_m=2h,$$

$$v_{m-1}-v_m=2h_1+1,$$

$$v_{m-2}-v_{m-1}=2h_2+1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$v-v_1=2h_m+1,$$

w których $h, h_1, h_2, \ldots$ są liczbami całkowitymi, dodatnymi, albo zerami. Stąd, dodając, znajdujemy

$$(1) \qquad v=m+2H,$$

gdzie $H=h+h_1+\ldots+h_m$ jest liczbą całkowitą, dodatną, albo zerem.

Zważmy, że v oznacza ilość zmian znaku w iloczynie

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_m)F(x),$$

albo, co toż samo, w funkcyi $f(x)$; równanie (1) przeto wyraża twierdzenie Descartes'a.

83. Drugie z twierdzeń pomocniczych paragrafu poprzedzającego często daje możność otrzymania wyższego krańca dla liczby, wyrażającéj ilość pierwiastków dodatnych równania $f(x)=0$, mniejszego od tego, jakie daje twierdzenie Descartes'a.

Weźmy np. równanie

$$f(x)=x^8-x^7+4x^6-8x^5-x^4+7x^3-22x^2-152x-450=0.$$

Według twierdzenia Descartes'a, ilość jego pierwiastków dodatnych jest nieparzysta i nie przewyższa 5-u. Mnożąc jednak obie strony przez $x+1$, otrzymujemy

$$(x+1)f(x)=x^9+3x^7-4x^6-9x^5+6x^4-15x^3-174x^2-602x-450=0,$$

skąd wnosimy, że ilość pierwiastków dodatnych równania $f(x)=0$ nie przechodzi 3-ch. Mnożąc zaś powyższe równanie jeszcze raz przez $x+1$, otrzymujemy

$$(x+1)^2f(x)=x^{10}+x^9+3x^8-x^7-13x^6-3x^5-9x^4-189x^3-776x^2-$$
$$-1052x-450=0,$$

z którego widzimy, że ilość pierwiastków dodatnych równania $f(x)=0$ nie jest większa od 1. A więc, równanie $f(x)=0$ ma jeden tylko pierwiastek dodatny.

Weźmy jeszcze jeden przykład. Równanie

$$\mathrm{F}(x)=x^5+2x^4-7x^3+30x^2+6=0,$$

według twierdzenia Descartes'a, albo zupełnie nie ma pierwiastków dodatnych, albo ma ich dwa. Pomnożywszy jednak obie jego strony przez $x+4$, otrzymujemy

$$x^6+6x^5+x^4+2x^3+120x^2+6x+24=0,$$

skąd widzimy, że równanie $f(x)=0$ wcale nie ma pierwiastków dodatnych.

84. Ilość pierwiastków dodatnych równania $f(-x)=0$ jest oczywiście równa ilości pierwiastków ujemnych równania $f(x)=0$. Oznaczywszy tę ilość przez m', a przez v' ilość zmian znaku w funkcyi $f(-x)$, na mocy twierdzenia Descartes'a mamy

$$m'=v'-2h',$$

gdzie h' jest liczbą całkowitą, dodatną, albo zerem. Dodając do tego równania stronami odpowiednimi równanie

$$m=v-2h,$$

które się odnosi do funkcyi $f(x)$, otrzymujemy

$$m+m'=v+v'-2(h+h'),$$

skąd widzimy, że *ilość wszystkich pierwiastków rzeczywistych równania $f(x)=0$, różnych od zera, nie przewyższa sumy $v+v'$ i jest parzysta albo nieparzysta, stosownie do tego, jaką jest suma $v+v'$.*

Jeżeli ostatni wyraz w $f(x)$ nie równa się zeru, to suma $v+v'$ nie jest większa od stopnia równania $f(x)=0$ i jest jednakowéj z nim parzystości (art. 81).

Dla przykładu, weźmiemy równanie

$$f(x)=x^8-x^7+4x^6-8x^5-x^4+7x^3-22x^2-152x-450=0.$$

Podstawiając w nim $-x$ zamiast x, otrzymamy

$$f(-x)=x^8+x^7+4x^6+8x^5-x^4-7x^3-22x^2+152x-450=0;$$

skąd widzimy, że równanie $f(x)=0$ posiada albo jeden tylko, albotéż trzy pierwiastki ujemne.

Weźmy drugi przykład.

$$F(x)=x^5+2x^4-7x^3+30x^2+6=0.$$

Biorąc $-x$ zamiast x, otrzymamy

$$F(-x)=-x^5+2x^4+7x^3+30x^2+6=0,$$

skąd widzimy, że równanie $F(x)=0$ posiada jeden tylko pierwiastek ujemny.

§ III. KRANIEC NIŻSZY DLA ILOŚCI PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH. ZASTOSOWANIA.

85. Oznaczywszy odpowiednio przez m, m', $2J$ ilość pierwiastków dodatnych, ujemnych i zespolonych równania

$$f(x)=Ax^n+Bx^p+\ldots+L=0,$$

a przez v i v' ilość zmian znaku w $f(x)$ i w $f(-x)$, na mocy twierdzenia Descartes'a mamy

$$v+v'=m+m'+2h,$$

gdzie h oznacza pewną liczbę dodatną, lub zero. Zważywszy, że $m+m'=n-2J$, z ostatniego równania otrzymujemy

$$2J=n-(v+v')+2h. \tag{1}$$

W art. 81-ym zaś znaleźliśmy, że

$$n-(v+v')=\alpha+\rho_\alpha+\beta+\rho_\beta+\ldots. \tag{2}$$

Z równań (1) i (2) wynika:

$$2J=\alpha+\rho_\alpha+\beta+\rho_\beta+\ldots+2h.$$

Stąd widzimy, że

$$2J\geqq\alpha+\rho_\alpha+\beta+\rho_\beta+\ldots, \tag{3}$$

i dlatego liczba $\alpha+\rho_\alpha+\beta+\rho_\beta+\ldots$ może być przyjęta jako kraniec niższy dla ilości pierwiastków zespolonych równania danego.

Ze związku (3) wynikają nierówności

$$2J\geqq\alpha+\rho_\alpha,\quad 2J\geqq\beta+\rho_\beta,\ \ldots,$$

albo jeszcze, zważywszy, że każda z liczb ρ_α, ρ_β może mieć jednę z trzech wartości $0, 1, -1$, mamy

$$2J\geqq\alpha-1,\quad 2J\geqq\beta-1,\ \ldots.$$

86. Weźmy pod uwagę funkcyją całkowitą $f(x)$ stopnia n-go, nie posiadającą pierwiastków zespolonych, i, oznaczywszy przez m jakąkolwiek liczbę całkowitą większą od 1, podzielmy funkcyją x^{n+m} przez $f(x)$. Wyrażając część całkowitą przez $\varphi(x)$, a resztę przez $\psi(x)$, mieć będziemy

$$x^{n+m}=f(x)\,\varphi(x)+\psi(x),$$

czyli

$$x^{n+m} - \psi(x) = f(x)\,\varphi(x).$$

Na stronie lewéj téj równości brak przynajmniéj m wyrazów, gdyż stopień funkcyi $\psi(x)$ jest mniejszy od n; i dlatego równanie

$$x^{n+m} - \psi(x) = 0,$$

albo, co toż samo, równanie

$$f(x)\,\varphi(x) = 0$$

ma przynajmniéj $m-1$ pierwiastków zespolonych. Wszystkie te pierwiastki powinny zadość czynić równaniu $\varphi(x)=0$ stopnia m-go, gdyż, według założenia, równanie $f(x)=0$ nie posiada pierwiastków zespolonych. A zatym, równanie $\varphi(x)=0$ będzie miało albo jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, albotéż ani jednego, stosownie do tego, czy liczba m jest nieparzysta, czytéż parzysta.

87. Przyjmując, jak w art. poprzedzającym, że $f(x)$ przedstawia funkcyją całkowitą, nie posiadającą pierwiastków zespolonych, i oznaczając przez m dowolną liczbę całkowitą, dodatną, rozwińmy stosunek $\frac{f(x)}{x^m}$ na ułamek ciągły. Licznik i mianownik jednego z ułamków zbliżonych nazwijmy P i Q, a r niech oznacza stopień mianownika Q. Kładąc

$$\frac{f(x)}{x^m} - \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{\varphi(x)}{\mathrm{Q}x^m},$$

mieć będziemy funkcyją całkowitą $\varphi(x)$ stopnia nie wyższego od $m-r-1$; na stronie przeto lewéj równania

$$\mathrm{P}x^m + \varphi = f(x)\mathrm{Q}$$

między ostatnim wyrazem funkcyi $\mathrm{P}x^m$ i piérwszym wyrazem funkcyi φ brak przynajmniéj r wyrazów. A zatym, równanie

$$\mathrm{P}x^m + \varphi = 0$$

posiada przynajmniéj $r-1$ pierwiastków zespolonych, które, oczywiście, powinny czynić zadość równaniu $\mathrm{Q}=0$. A ponieważ stopień funkcyi $f(x)$ jest r, więc równanie $\mathrm{Q}=0$ będzie miało albo jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, albotéż ani jednego, stosownie do tego, czy liczba r jest nieparzysta, czytéż parzysta. Tę uwagę zawdzięczamy Laguerre'owi; z niéj wynika, jako wniosek, to, cośmy powiedzieli w art. poprzedzającym.

Przykład. Funkcyja $f(x)=x^3-2x^2-x+1$ ma wszystkie trzy pierwiastki rzeczywiste, bo $f(+1)<0$. Rozwijając funkcyją $\frac{f(x)}{x^4}$ na ułamek ciągły, otrzymujemy

$$\frac{x^3-2x^2-x+1}{x^4} = \cfrac{1}{x+2+\cfrac{25}{5x-11-\cfrac{16}{20x+19+\cfrac{25}{4x-3}}}}.$$

Stąd zaś znajdujemy następujące wyrażenia mianowników ułamków zbliżonych:

$$Q_1 = x + 2, \quad Q_3 = 25(4x^3 + 3x^2 + x + 1),$$
$$Q_2 = 5x^2 - x + 3, \quad Q_4 = 16 . 25x^4,$$

i spostrzegamy, że każde z równań $Q_2 = 0$, $Q_3 = 0$ powinno mieć po dwa pierwiastki zespolone, o czym nietrudno bezpośrednio się przekonać.

§ IV. PRZYPADEK, KIEDY WSZYSTKIE PIERWIASTKI RÓWNANIA SĄ RZECZYWISTE.

88. W paragrafie niniejszym rozpatrzymy ten przypadek szczególny, kiedy zgóry wiadomo, że wszystkie pierwiastki równania są rzeczywiste. Przyjmiemy tu, że ostatni wyraz w funkcyi $f(x)$ nie równa się zeru.

Oznaczając stopień równania $f(x) = 0$ przez n, ilość jego pierwiastków dodatnych przez m, a ujemnych przez m', ilość zmian znaku w $f(x)$ przez v, ilość zmian znaku w $f(-x)$ przez v', i, nakoniec, przez h, h', h'' pewne liczby całkowite nie mniejsze od zera, będziemy mieli cztéry następujące równania:

$$m = v - 2h,$$
$$m' = v' - 2h',$$
$$v + v' = n - 2h'',$$
$$m + m' = n;$$

z tych równań wynika, iż

$$h + h' + h'' = 0.$$

A gdy żadna z liczb h, h', h'' nie jest mniejsza od zera, więc

$$h = 0, \quad h' = 0, \quad h'' = 0,$$

a stąd

$$m = v, \quad m' = v'.$$

Te równania wyrażają następujące

TWIERDZENIE 1. *Jeżeli wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są rzeczywiste i różne od zera, to ilość jego pierwiastków dodatnych jest równa ilości zmian znaku w $f(x)$, a ilość jego pierwiastków ujemnych jest równa ilości zmian znaku w $f(-x)$.*

Naprzykład, następujące równania, otrzymywane wskutek przyrównania do zera niektórych z funkcyj, podobnych do rozważanych powyżéj w art. 58-ym,

$$P_3 = 3x^3 - 2x^2 - 10x + 5 = 0,$$
$$P_4 = 3x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 2x + 3 = 0,$$
$$P_5 = 6x^5 - 13x^4 - 23x^3 + 45x^2 + 10x - 14 = 0,$$
$$Q_3 = 3x^2 - 2x - 7,$$
$$Q_4 = 3x^3 - 2x^2 - 10x - 3,$$
$$Q_5 = 6x^4 - 13x^3 - 17x^2 + 26x + 16$$

mają wszystkie pierwiastki rzeczywiste, a mianowicie:

piérwsze — dwa pierwiastki dodatne, jeden ujemny,
drugie — dwa pierwiastki dodatne, dwa ujemne,
trzecie — trzy pierwiastki dodatne, dwa ujemne,
czwarte — jeden pierwiastek dodatny, jeden ujemny,
piąte — jeden pierwiastek dodatny, dwa ujemne,
szóste — dwa pierwiastki dodatne, dwa ujemne.

89. Możemy teraz przejść do innego jeszcze zastosowania twierdzenia Descartes'a, w przypadku, kiedy wszystkie pierwiastki równania są rzeczywiste. Polega ono na tym, że daje możność oznaczenia, ile równanie ma pierwiastków, zawartych między dwoma dowolnie wziętymi krańcami: a i $b > a$. Jeżeli oznaczymy pierwiastki równania $f(x) = 0$ przez $a_1, a_2, \ldots, a_n$, to pierwiastkami równania $f(a+y) = 0$, czyli równania

$$(1) \qquad f(a) + \frac{y}{1} f'(a) + \ldots + \frac{y^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) = 0$$

będą liczby:

$$a_1 - a, \quad a_2 - a, \ldots, a_n - a,$$

a pierwiastkami równania $f(b+z) = 0$, czyli równania

$$(2) \qquad f(b) + \frac{z}{1} f'(b) + \ldots + \frac{z^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(b) = 0$$

liczby:

$$a_1 - b, \quad a_2 - b, \ldots, a_n - b.$$

Ilość pierwiastków dodatnych równania (1) równa jest ilości pierwiastków równania $f(x) = 0$, przewyższających kraniec a, a ilość pierwiastków dodatnych równania (2) równa jest ilości pierwiastków równania $f(x) = 0$, przewyższających kraniec b. A więc, jeżeli przez m i m' oznaczymy ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, przewyższających odpowiednio krańce a i b, a przez v_a i v_b ilość zmian znaku w (1) i (2), to mieć będziemy

$$m = v_a, \quad m' = v_b,$$

skąd

$$v_a - v_b = m - m'.$$

Różnica $m - m'$, oczywiście, wyznacza ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b; a więc ostatnie równanie wyraża następujące twierdzenie:

T w i e r d z e n i e 2. *Jeżeli wszystkie pierwiastki równania stopnia n-go, $f(x) = 0$, są rzeczywiste, to ilość jego pierwiastków, zawartych między dwoma dowolnymi krańcami: a i $b > a$, jest wyznaczona przez różnicę między ilością zmian znaku w grupie liczb*

$$f(a), \quad f'(a), \quad f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$$

i ilością zmian znaku w grupie liczb

$$f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ldots, f^{(n)}(b).$$

Wyrazy równe zeru, jeżeli takie się znajdą, nie przyjmują się tu pod uwagę.

Weźmy np. jedno z równań, przytoczonych w art. poprzedzającym:

$$f(x) = 6x^5 - 13x^4 - 23x^3 + 45x^2 + 10x - 14 = 0.$$

Obliczając wartości funkcyi $f(x)$ i jéj pochodnych dla $x = 0,\ 1,\ 2$, otrzymamy następującą tablicę znaków:

	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
$x = 2$	—	—	+	+	+	+
$x = 1$	+	+	—	—	+	+
$x = 0$	—	+	+	—	—	+

Widzimy więc stąd, że równanie ma tylko jeden pierwiastek, zawarty między 0 i 1, i tylko jeden między 1 i 2.

§ V. TWIERDZENIA LAGUERRE'A.

90. Laguerre rozciągnął twierdzenie Descartes'a na równanie przestępne; to go przywiodło bezpośrednio do dwu nowych twierdzeń, stosujących się do równań liczebnych, twierdzeń, zasługujących na uwagę ze względu na ich praktyczną doniosłość.

Wyprowadzimy je tu — lecz przy pomocy odrębnego rozumowania.

T w i e r d z e n i e 1. *Ilość pierwiastków równania*

$$(1)\qquad f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0,$$

większych od danéj liczby dodatnéj a, nie jest większa od ilości zmian znaku w piérwszym wierszu algorytmu Horner'a (art. 14, 15)

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{A} & \mathrm{A}_1 & \mathrm{A}_2 & \ldots & \mathrm{A}_{n-1} & \mathrm{A}_n \\
\hline
\end{array}$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llllll}
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{2,1} & \ldots & \mathrm{A}_{n-1,1} & \mathrm{A}_{n,1} \\
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,2} & \mathrm{A}_{2,2} & \ldots & \mathrm{A}_{n-1,2} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,n-1} & \mathrm{A}_{2,n-1} & & & \\
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,n} & & & &
\end{array}\right.$$

obliczonego dla $x = a$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą. Przyjmujemy tu, że liczba a nie jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$.

Napiszmy układ wiérszy

$$(3)\left\{\begin{array}{llllll}
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{4,1} \ldots & \mathrm{A}_{n,1} \\
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,2} & \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{4,1} \ldots & \mathrm{A}_{n,1} \\
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,3} & \mathrm{A}_{2,2} & \mathrm{A}_{3,1} & \mathrm{A}_{4,1} \ldots & \mathrm{A}_{n,1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\mathrm{A} & \mathrm{A}_{1,n} & \mathrm{A}_{2,n-1} & \mathrm{A}_{3,n-2} & \mathrm{A}_{4,n-3} \ldots & \mathrm{A}_{n,1}
\end{array}\right.$$

według typu ogólnego

$$A \quad A_{1,k} \quad A_{2,k-1} \quad A_{2,k-2} \ldots A_{k-1,2} \quad A_{k,1} \quad A_{k+1,1} \quad A_{k+2,1} \ldots A_{n-1,1} \quad A_{n,1},$$

i oznaczmy ilość zmian znaku w każdym wiérszu kolejno przez $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$.

Kładąc

$$\varphi_{i-1}(x) = Ax^{i-1} + A_{1,i-1}x^{i-2} + A_{2,i-2}x^{i-3} + \ldots + A_{i-1,1},$$
$$\psi_i(x) = Ax^i + A_{1,i}x^{i-1} + A_{2,i-1}x^{i-2} + \ldots + A_{i-1,2}x + aA_{i-1,1},$$

mamy równość

$$\psi_i(x) = (x+a)\varphi_{i-1}(x),$$

z któréj wnosimy, iż ilość zmian znaku w wiérszu

$$A \quad A_{1,i} \quad A_{2,i-1} \ldots A_{i-1,2} \quad A_{i-1,1} \tag{4}$$

nie jest większa od ilości zmian znaku w wiérszu

$$A \quad A_{1,i-1} \quad A_{2,i-2} \ldots A_{i-1,1}, \tag{5}$$

i różnica tych dwu liczb jest parzysta, albo równa zeru. Dopisawszy tak w wiérszu (4), jak i w wiérszu (5), grupę liczb

$$A_{i,1} \quad A_{i+1,1} \ldots A_{n,1}$$

otrzymujemy nowe dwa wiérsze:

$$A \quad A_{1,i} \quad A_{2,i-1} \ldots A_{i-1,2} \quad A_{i-1,1} \quad A_{i,1} \ldots A_{n,1}, \tag{6}$$
$$A \quad A_{1,i-1} \quad A_{2,i-2} \ldots A_{i-1,1} \quad A_{i,1} \ldots A_{n,1}, \tag{7}$$

o których można powiedziéć toż samo, co o wiérszach (4) i (5), t. j., że ilość zmian znaku w (6) nie jest większa od ilości zmian znaku w (7), a jeżeli te dwie liczby różnią się od siebie, to o liczbę parzystą.

Jeżeli w jakimkolwiek wiérszu opuścimy jeden wyraz, dowolnie wzięty, byle nie skrajny, to, oczywiście, ilość zmian znaku w danym wiérszu albo się nie zmieni, albo zmniejszy się o liczbę parzystą. Wykréślimy więc w wiérszu (6) wyraz $A_{i-1,1}$; on nie mógł być skrajnym, gdyż wyraz $A_{n,1} = f(a)$, według założenia, jest różny od zera. Wskutek tego, wiérsze: (6) i (7) staną się wiérszami i-tym i $(i-1)$-szym układu (3), i dlatego możemy napisać

$$v_i = v_{i-1} - 2h_{i-1}, \tag{8}$$

gdzie h_{i-1} oznacza pewną całkowitą liczbę dodatną, albo zero.

Równanie (8) wskazuje, że wszystkie liczby

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$$

są jednakowéj parzystości i że każda od poprzedzającéj ją nie jest większa.

Zauważmy jeszcze, że tożsamościowo (art. 15)

$$f(x) = A_{n,1} + A_{n-1,2}(x-a) + A_{n-2,3}(x-a)^2 + \ldots + A_{1,n}(x-a)^{n-1} + A(x-a)^n,$$

tak iż pierwiastki równania $f(x) = 0$, większe od naszéj liczby dodatnéj a, są pierwiastkami dodatnymi równania o niewiadoméj $x-a$, otrzymanego wskutek przyrównania do zera strony prawéj wypisanéj równości. A więc, według twierdzenia Descartes'a, ilość pierwiastków równania $f(x)=0$, większych od a, nie jest większa od v_n i z tą liczbą jest jednakowéj parzystości, a tymsamym, na mocy tego, cośmy wyżéj okazali, nie jest większa od żadnéj z liczb $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ i jest jednakowéj z nimi parzystości. Ten wynik naszego rozumowania obejmuje twierdzenie Laguerre'a.

91. Przy jakichkolwiek dwu danych liczbach a i b, różnych od siebie, każda funkcyja całkowita $f(x)$ stopnia n-tego może być przedstawiona, jednym tylko sposobem, w takiéj postaci:

(1) $$f(x) = \mathrm{A}x^{n-1}(x-a) + \varphi(x)(x-a)(b-x) + \mathrm{B}(b-x),$$

gdzie A i B oznaczają liczby stałe, $\varphi(x)$ zaś pewną funkcyją całkowitą stopnia niższego od $n-1$.

Przyjmujemy nadal, że żadna z liczb a i b nie czyni zadość równaniu $f(x)=0$; wówczas ani jeden ze spółczynników A, B w wyrażeniu (1) nie jest równy zeru.

Przypuszczając, że w wyrażeniu funkcyi

$$\varphi(x) = \mathrm{L}x^l + \mathrm{L}_1 x^{l_1} + \ldots + \mathrm{L}_i x^{l_i}$$

wyrazy są uporządkowane według malejących potęg zmiennéj x, i że $b > a$, weźmiemy pod uwagę ilość zmian znaku w grupie liczb:

$$\mathrm{A}, \mathrm{L}, \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_i, \mathrm{B}$$

i, przez skrócenie, będziemy ją tu nazywali ilością zmian znaku w wyrażeniu (1). Tak np. powiemy, że wyrażenie

$$-3x^5(x-1) + (x-1)(2-x)(5x^3-x-1) + 4(2-x)$$

przedstawia trzy zmiany znaku.

Twierdzenie pomocnicze. *Jeżeli $f(x)$ jest funkcyją całkowitą stopnia n-go, a i b są dwiema liczbami dodatnimi i $b > a$ (zresztą a może nawet równać się zeru), zaś c jest liczbą pośrednią między a i b, to, wrazie gdy funkcyje $f(x)$ i $(x-c)f(x)$ przedstawimy w postaci*

$$f(x) = \mathrm{A}x^{n-1}(x-a) + \varphi(x)(x-a)(b-x) + \mathrm{B}(b-x),$$
$$(x-c)f(x) = \mathrm{A}_1 x^n(x-a) + \psi(x)(x-a)(b-x) + \mathrm{B}_1(b-x),$$

ilość zmian znaku w wyrażeniu iloczynu $(x-c)f(x)$ jest większa od ilości zmian znaku w wyrażeniu funkcyi $f(x)$ o liczbę nieparzystą.

Zauważmy uprzednio, że:

różnica między liczbami, wyrażającymi ilość zmian znaku w grupie

$$p, \quad q, \quad r$$

i ilość zmian znaku w grupie

$$p, \quad r,$$

jest albo 0, albo 2;

jeżeli liczby p i q są jednakowego znaku, to różnica między liczbami, wyrażającymi ilość zmian znaku w grupie

$$p, \quad q', \quad r$$

i ilość zmian znaku w grupie

$$p, \quad q, \quad r,$$

jest albo 0, albo 2.

Kładąc

$$\varphi(x) = Lx^l + L_1 x^{l_1} + \ldots + L_i x^{l_i},$$

znajdziemy

$$(x-c)\varphi(x) = Lx^{l+1} + M_1 x^{m_1} + \ldots + M_k x^{m_k} - cL_i x^{l_i},$$

a zatym

$$(2)\ (x-c)f(x) = \frac{A}{b}(b-c)x^n(x-a)$$
$$+\left[-\frac{Ac}{b}x^{n-1} + Lx^{l+1} + \ldots - cL_i x^{l_i} + B\right](x-a)(b-x)$$
$$-B(c-a)(b-x).$$

Niektóre z wyrazów, objętych przez wielki nawias na stronie prawéj, mogą być podobne; dlatego należy oddzielnie rozpatrywać następujące cztéry przypadki.

a). $n-1 > l+1$ i $l_i > 0$. Wówczas w owym wielkim nawiasie niéma wyrazów podobnych, a w wyrażeniach (1) i (2) mamy dwie następujące grupy liczb:

$$A, \ L. \ L_1, \ldots, \ L_i, \ B,$$
$$A, \ -A, \ L, \ M_1, \ldots, -L_i, \ B, \ -B.$$

Oznaczmy ilość zmian znaku w każdéj z nich odpowiednio przez v i v' i, prócz tego: ilość zmian znaku w grupach

$$A, \ L$$
$$A, \ -A, \ L$$

przez v_1 i v_1'; ilość zmian znaku w grupach

$$L, \ L_1, \ldots, L_i$$
$$L, \ M_1, \ldots, M_k, \ -L_i$$

przez v_2 i v_2'; nakoniec, ilość zmian znaku w grupach

$$L_i, \ B$$
$$-L_i, \ B, \ -B$$

przez v_3 i v_3'. Mamy więc następujące równania

$$v = v_1 + v_2 + v_3,$$
$$v' = v_1' + v_2' + v_3',$$
$$v_1' - v_1 = 2h_1,$$
$$v_2' - v_2 = 2h_2 + 1,$$
$$v_3' - v_3 = 2h_3,$$

w których każda z liter h_1, h_2, h_3 oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatną, lub zero. Z tych równań wynika

$$v' - v = 2h + 1,$$

gdzie $h = h_1 + h_2 + h_3$ i dlatego oznacza również pewną liczbę całkowitą, dodatną, albo zero. To zaś równanie okazuje prawdziwość naszego twierdzenia w przypadku rozważanym.

b). $n - 1 = l + 1$, $l_i > 0$. Wówczas, na stronie prawéj równości (2) piérwsze dwa z wyrazów, zawartych w wielkim nawiasie, są podobne, wskutek czego należy przyjąć pod uwagę następujące dwie grupy liczb

$$(3)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_i,\ \mathrm{B}, \\ \mathrm{A},\ \mathrm{L} - \dfrac{\mathrm{A}c}{b},\ \mathrm{M}_1, \ldots, -\mathrm{L}_i,\ \mathrm{B},\ -\mathrm{B}, \end{array}\right.$$

z których piérwsza niech przedstawia v zmian znaku, a druga v'. Weźmy tu jeszcze pod uwagę grupę

$$\mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{M}_1, \ldots, -\mathrm{L}_i,\ \mathrm{B},\ -\mathrm{B},$$

różniącą się tylko wyrazem drugim od drugiéj z grup (3), i oznaczmy przez w ilość zmian znaku, w niéj zachodzących. Mamy

$$v' - w = 2h_1,$$

gdzie h_1 oznacza jedność, albo zero. Zachodzi tu jeszcze związek

$$w - v = 2h_2 + 1,$$

w którym h_2 jest liczbą całkowitą, dodatną, albo zerem. A więc

$$v' - v = 2h + 1,$$

gdzie litera h oznacza sumę $h_1 + h_2$, liczbę całkowitą, dodatną, albo zero, c. n. d.

c). $n - 1 > l + 1$, $l_i = 0$. Wówczas mamy następujące dwie grupy:

$$\begin{array}{c} \mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_i,\ \mathrm{B}, \\ \mathrm{A},\ -\mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k,\ -c\mathrm{L}_i + \mathrm{B},\ -\mathrm{B}. \end{array}$$

Oznaczmy ilość zmian znaku w każdéj z nich odpowiednio przez v i v' i nadto weźmy jeszcze pod uwagę grupę

$$\mathrm{A},\ -\mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k,\ -c\mathrm{L}_i,\ -\mathrm{B},$$

która niech przedstawia w zmian znaku. Oczywiście, mamy tu dwa równania

$$v' - w = 2h_1,$$

$$w - v = 2h_2 + 1,$$

w których tak h_1 jak i h_2 oznacza liczbę całkowitą, dodatną, albo zero. Z nich znajdujemy

$$v' - v = 2h + 1,$$

gdzie h oznacza liczbę całkowitą, dodatną, albo zero, c. n. d.

d). $n-1=l+1,\ l_i=0$. Mamy tu dwie grupy:

$$\mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_i,\ \mathrm{B},$$

$$\mathrm{A},\ \mathrm{L}-\frac{\mathrm{A}c}{b},\ \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k,\ -c\mathrm{L}_i+\mathrm{B},\ -\mathrm{B};$$

weźmy jeszcze pod uwagę grupę

$$\mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{M}_1, \ldots, \mathrm{M}_k,\ -c\mathrm{L}_i,\ -\mathrm{B}.$$

Oznaczmy ilość zmian znaku w każdéj z nich odpowiednio przez v, v', w. Jest więc

$$v'-w=2h_1,$$
$$w-v=2h_2+1,$$

gdzie h_1 i h_2 oznaczają liczby całkowite, nie mniejsze od zera. Stąd zaś wynika

$$v'-v=2h+1,$$

gdzie h jest liczbą całkowitą, dodatną, albo zerem, c. n. d.

92. Twierdzenie 2. *Gdy mamy dane równanie stopnia n-tego w postaci*

(1) $$f(x)=\mathrm{A}x^{n-1}(x-a)+\varphi(x)(x-a)(b-x)+\mathrm{B}(b-x)=0,$$

gdzie $\varphi(x)$ oznacza funkcyją

$$\mathrm{L}x^l+\mathrm{L}_1x^{l_1}+\ldots+\mathrm{L}_ix^{l_i}$$

stopnia niższego od $n-1$, któréj wyrazy są uporządkowane według potęg malejących zmiennéj x, zaś a i b są liczbami dodatnymi, nie czyniącymi zadość równaniu $f(x)=0$, z których $b>a$, to ilość pierwiastków równania $f(x)=0$, zawartych w przedziale od a do b, nie jest większa od ilości zmian znaku w grupie liczb

$$\mathrm{A},\ \mathrm{L},\ \mathrm{L}_1, \ldots, \mathrm{L}_i,\ \mathrm{B}$$

i jest z nią jednakowéj parzystości.

Jeżeli równanie $f(x)=0$ nie ma żadnego pierwiastka w przedziale między a i b, to wówczas twierdzenie widocznie ma miejsce, gdyż wartości $f(a)$ i $f(b)$, a tymsamym i spółczynniki A i B są jednakowego znaku.

Przypuśćmy, że równanie $f(x)=0$ posiada r pierwiastków w przedziale między a i b, a mianowicie:

$$c_1,\ c_2,\ c_3, \ldots, c_r$$

Utwórzmy funkcyje:

$$\mathrm{F}_r(x)=\frac{f(x)}{(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_r)},$$

$$\mathrm{F}_{r-1}(x)=\frac{f(x)}{(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_{r-1})},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{F}_1(x)=\frac{f(x)}{x-c_1},$$

$$\mathrm{F}(x)=f(x)$$

i, sprowadziwszy każdą z nich do postaci (1), obliczmy ilość zmian znaku w jéj wyrażeniu. Niech v_i oznacza ilość zmian znaku w wyrażeniu funkcyi $F_i(x)$. Z tych liczb v_i liczba v_r jest parzysta, równanie bowiém $F_r(x) = 0$ między a i b nie ma ani jednego pierwiastka. Na zasadzie zaś powyżéj udowodnionego twierdzenia pomocniczego, możemy napisać następujące równania:

$$v_{r-1} - v_r = 2h_1 + 1,$$
$$v_{r-2} - v_{r-1} = 2h_2 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$
$$v - v_1 = 2h_r + 1,$$

gdzie $h_1, h_2, \ldots, h_r$ są liczbami całkowitymi, z których żadna nie jest mniejsza od zera. Dodając do siebie te równania i nazywając

$$2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_r + v_r = 2h,$$

otrzymujemy

$$v = r + 2h,$$

gdzie h jest liczbą dodatną, całkowitą, albo zerem, c. n. d.

93. Przykład 1. Weźmy równanie

$$x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0. \tag{1}$$

Obliczając sposobem Horner'a wartości wielomianu, stanowiącego stronę lewą tego równania, dla $x = 1, 2, 3$, otrzymujemy następującą tablicę:

	1	0	-3	1	-8	-10
$x=1$	1	1	-2	-1	-9	-19
2	1	2	1	3	-2	-14
3	1	3	6	19	49	137

Stąd widzimy, że równanie nie ma ani jednego pierwiastka większego od 3, tak iż ta liczba 3 może być przyjęta jako wyższy kraniec dla pierwiastków dodatnych równania (1). Ponieważ zaś w wiérszu drugim, odpowiadającym wartości $x = 2$, jest jedna zmiana znaku, przeto wnosimy, że równanie (1) ma jeden tylko pierwiastek, większy od liczby 2; oczywiście, jest on zawarty między 2 i 3. Nakoniec, w wiérszu piérwszym, odpowiadającym wartości $x = 1$, jest także jedna zmiana znaku; to wskazuje, że równanie ma jeden tylko pierwiastek, większy od 1, tak iż w przedziale między 1 i 2 równanie pierwiastka nie posiada. A gdy nadto, dla wszystkich wartości zmiennéj x od 0 do 1, ów wielomian jest ujemny, zatym w przedziale między 0 i 1 równanie pierwiastków nie posiada. Z tego widzimy, że równanie (1) ma tylko jeden pierwiastek dodatny, zawarty między 2 i 3.

94. Przykład 2. Weźmy równanie

$$f(x) = x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0, \tag{1}$$

i sprowadźmy je do postaci

$$Ax^4x + \varphi(x)x(1-x) + B(1-x) = 0.$$

Ażeby wyznaczyć A, B i $\varphi(x)$, zauważmy, że, gdy wielomian na stronie lewéj nazwiemy $f(x)$, z tożsamości

$$f(x) = Ax^5 + \varphi(x)x(1-x) + B(1-x)$$

wynika bezpośrednio

$$A = f(1), \quad B = f(0),$$
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - Ax^5 - B(1-x)}{x(1-x)}.$$

Uskuteczniając wskazane działania, otrzymamy

$$A = -22, \quad B = -5$$
$$\varphi(x) = -23x^3 - 18x^2 - 2x - 14.$$

Równanie (1) przeto może być napisane tak:

$$22x^5 + (23x^3 + 18x^2 + 2x + 14)x(1-x) + 5(1-x) = 0.$$

Stąd widzimy, że między 0 i 1 niéma ani jednego pierwiastka.

ROZDZIAŁ VI.

TWIERDZENIE BUDAN'A. — SPOSÓB FOURIER'GO ODDZIELANIA PIERWIASTKÓW RÓWNANIA. — TWIERDZENIE SYLVESTER'A. — TWIERDZENIE NEWTON'A.

§ I. TWIERDZENIE BUDAN'A.

95. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli funkcyja całkowita* $f(x)$ *i kilka po sobie następujących jéj pochodnych:* $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r-1)}(x)$ *przy* $x = a$ *stają się równe zeru, to, przy dostatecznie małych wartościach dodatnych liczby* h, *grupa wartości*

$$f(a-h),\quad f'(a-h), \ldots, f^{(r-1)}(a-h),\quad f^{(r)}(a-h)$$

będzie przedstawiała same tylko zmiany znaku, grupa zaś

$$f(a+h),\quad f'(a+h), \ldots, f^{(r-1)}(a+h),\quad f^{(r)}(a+h)$$

same tylko powtórzenia znaku.

Wynika to bezpośrednio z twierdzenia art. 63-go, na mocy którego wnosimy, że przy przejściu zmiennéj x przez wartość a, od wartości mniejszych do większych, każda z funkcyj ułamkowych

$$\frac{f(x)}{f'(x)},\ \frac{f'(x)}{f''(x)}, \ldots, \frac{f^{(r-1)}(x)}{f^{(r)}(x)},$$

zmieniając się odpowiednio, przechodzi od wartości ujemnych, przez zero, do wartości dodatnych.

96. Twierdzenie pomocnicze 2. *Niech* a i b *będą dwiema liczbami, nieprzywodzącymi do zera żadnéj z funkcyj*

$$(1)\qquad f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(r-1)}(x),\ f^{(r)}(x),$$

niech v_a *i* v_b *oznaczają ilości zmian znaku w* (1) *odpowiednio przy* $x = a$ *i* $x = b$, *i przyjmijmy, że* $b > a$. *Jeżeli, popierwsze, funkcyja* $f^{(r)}(x)$ *nie zmienia swego znaku między* a *i* b, *i, powtóre, między* a *i* b *znajduje się, lecz tylko jedna, wartość* $x = c$, *przy któréj przynajmniéj jedna z funkcyj* (1) *staje się równą zeru, to wówczas*

$$v_a - v_b = m + 2h,$$

gdzie h jest pewną liczbą całkowitą dodatną, albo zerem, a m w różnych przypadkach otrzymuje następujące wartości:

kiedy liczba c jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$, a wielokrotność tego pierwiastka jest większa od r, to $m=r$;

kiedy liczba c jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$, a wielokrotność tego pierwiastka nie jest większa od r, to m jest równe liczbie, wyrażającéj wielokrotność tego pierwiastka;

kiedy liczba c nie jest pierwiastkiem równania $f(x)$, to $m=0$.

Twierdzenie to wynika z poprzedzającego; ażeby je udowodnić, potrzeba rozpatrzéć oddzielnie rozmaite przypadki szczególne.

a. Wszystkie funkcyje (1) stają się równe zeru przy $x=c$; innymi słowy, liczba c jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$, więcéj niż r-krotnym.

Oznaczywszy przez a dość małą liczbę dodatną, spostrzegamy, że $v_a=v_{c-h}$; gdyż każda z funkcyj (1), nie posiadając pierwiastka w przedziale a, $c-h$, jest tegoż samego znaku przy $x=a$, co przy $x=c-h$. Z téjże przyczyny $v_b=v_{c+h}$. Wskutek tego,

$$v_a-v_b=v_{c-h}-v_{c+h}.$$

Że zaś, według poprzedzającego twierdzenia pomocniczego,

$$v_{c-h}=r,\quad v_{c+h}=0,$$

przeto, na mocy powyższego równania,

$$v_a-v_b=r,\quad \text{c. n. d.}$$

b. Z funkcyi (1) staje się przy $x=c$ równą zera albo sama tylko funkcyja $f(x)$, albotéż funkcyja $f(x)$ i kilka bezpośrednio po niéj następujących pochodnych, lecz nie wszystkie.

Przypuśćmy, że $f(c)=f'(c)=\ldots=f^{(k-1)}(c)=0$, pozostałe zaś wartości $f^{(k)}(c),\ldots,f^{(r)}(c)$ nie są równe zeru. Oznaczywszy przez w_x ilość zmian znaku w grupie

$$f(x),\quad f'(x),\ldots,f^{(k-1)}(x),\quad f^{(k)}(x),$$

a przez w_x' ilość zmian znaku w grupie

$$f^{(k)}(x),\quad f^{(k+1)}(x),\ldots,f^{(r)}(x),$$

oczywiście będziemy mieli

$$v_x=w_x+w_x'.$$

Nadając dla x naprzód wartość a, następnie zaś wartość b, otrzymujemy

$$v_a=w_a+w_a',$$
$$v_b=w_b+w_b',$$

skąd

(2) $$v_a-v_b=w_a-w_b+w_a'-w_b'.$$

Ponieważ ani jedna z funkcyj $f(x), f'(x), \ldots, f^{(k)}(x)$ nie staje się równą zeru ani w przedziale $a, c-h$, ani w przedziale $c+h, b$, zatym

$$w_a = w_{c-h}, \quad w_b = w_{c+h},$$

a więc

$$w_a - w_b = w_{c-h} - w_{c+h}.$$

Że zaś, według poprzedniego twierdzenia pomocniczego,

$$w_{c-h} = k, \quad w_{c+h} = 0,$$

zatym

$$w_{c-h} - w_{c+h} = k,$$

wskutek czego mamy

$$w_a - w_b = k.$$

Zważmy jeszcze, że, zgodnie z założeniem, ani jedna z funkcyj $f^{(k)}(x)$, $f^{(k-1)}(x), \ldots, f^{(r-1)}(x), f^{(r)}(x)$ nie staje się równą zeru dla żadnéj wartości zmiennéj x, zawartéj w przedziale a, b; jest więc

$$w_a' = w_b',$$

albo

$$w_a' - w_b' = 0.$$

Wprowadzając do strony lewéj równania (2) zamiast $w_a - w_b$ i $w_a' - w_b'$ dopiéroco otrzymane ich wartości, znajdujemy

$$v_a - v_b = k, \quad \text{c. n. d.}$$

c. Z funkcyj (1) albo jedna tylko funkcyja, albotéż kilka sąsiednich funkcyj stają się równymi zeru przy $x = c$, lecz $f(c)$ nie jest równe zeru.

Przypuśćmy, że, pośród wartości $f(c), f'(c), \ldots, f^{(r)}(c)$, następujące są równe zeru:

$$f^{(i)}(c) = f^{(i+1)}(c) = \ldots = f^{(i+k-1)}(c) = 0;$$

wskaźnik i może otrzymywać wartości od 1 do r, wskaźnik zaś k od 1 do $r+1-i$. Oznaczając ilość zmian znaku w grupach

$$f(x), \; f'(x), \ldots, f^{(i)}(x),$$
$$f^{(i)}(x), \; f^{(i+1)}(x), \ldots, f^{(r)}(x)$$

odpowiednio przez w_x i w_x', miéć będziemy

$$v_x = w_x + w_x';$$

a stąd

$$v_a - v_b = (w_a - w_b) + (w_a' - w_b').$$

Rozważymy oddzielnie wyrazy, znajdujące się na stronie prawéj tego równania. — Każda z funkcyj: $f(x), f'(x), \ldots, f^{(i-1)}(x)$, nie posiadając ani jednego pierwiastka między a i b, jest tegoż samego znaku przy $x = a$ i przy $x = b$; wartości zaś $f^{(i)}(a)$ i $f^{(i)}(b)$ będą jednakowego albo różnego znaku, stosownie do tego, czy wielokrotność pierwiastka c, względem równania $f^{(i)}(x) = 0$, jest parzysta lub nieparzysta, gdyż między a i b równanie to nie ma innych pierwiastków, prócz jednego c. A więc, jeżeli liczba c jest pierwiastkiem równania $f^{(i)}(x) = 0$ parzystéj wielokrotności, to $w_a - w_b = 0$; jeżeli zaś jego wielokrotność jest nieparzysta, to $w_a - w_b = \pm 1$. — Co zaś do różnicy $w_a' - w_b'$, zauważmy, że ona odnosi się do grupy

$$f^{(i)}(x),\quad f^{(i+1)}(x), \ldots, f^{(r)}(x),$$

w któréj zachodzić może jeden z dwu przypadków, rozpatrywanych wyżéj; jeżeli więc $k = r + 1 - i$, to $w_a' - w_b' = r - i$, jeżeli zaś $k < r + 1 - i$, to $w_a' - w_b' = k$. — W tym przypadku, kiedy $k = r + 1 - i$, wielokrotność pierwiastka c względem równania $f^{(i)}(x) = 0$ przewyższa różnicę $r - i$ o liczbę parzystą; jest to następstwem przypuszczenia, uczynionego na początku, że funkcyja $f^{(r)}(x)$ nie zmienia znaku między a i b, wskutek czego liczba c może być pierwiastkiem równania $f^{(r)}(x) = 0$ tylko parzystéj wielokrotności. A więc, jeżeli różnica $r - i$ jest liczbą parzystą, albo zerem, to, według tego, cośmy wyżéj powiedzieli, mamy

$$w_a - w_b = 0,\quad w_a' - w_b' = r - i,$$

skąd, po dodaniu do siebie, otrzymujemy

$$v_a - v_b = r - i.$$

Jeżeli zaś różnica $r - i$ jest nieparzysta, to

$$w_a - w_b = \pm 1,\quad w_a' - w_b' = r - i,$$

i

$$v_a - v_b = r - i \pm 1.$$

W obu przeto razach, różnica $v_a - v_b$ jest parzysta i nie mniejsza od zera, c. n. d. — W przypadku, kiedy $k < r + 1 - i$, zgodnie z tym, cośmy wyżéj powiedzieli, znajdziemy, że: jeżeli k jest liczbą parzystą, to

$$w_a - w_b = 0.\quad w_a' - w_b' = k,$$

a stąd

$$v_a - v_b = k;$$

jeżeli zaś k jest nieparzyste, to

$$w_a - w_b = \pm 1,\quad w_a' - w_b' = k$$

i stąd

$$v_a - v_b = k \pm 1.$$

W obu więc razach, różnica $v_a - v_b$ jest parzysta i nie mniejsza od zera, c. n. d.

d. Z funkcyj (1) przy $x = c$ stają się równymi zeru: funkcyja $f(x)$ i przynajmniéj jedna z pozostałych funkcyj, lecz wskaźniki funkcyj stających się równymi zeru, nie tworzą nieprzerwanego ciągu liczb, jak w przypadkach poprzednich.

Przypuśćmy, że pośród liczb

$$f(c),\quad f'(c), \ldots, f^{(r)}(c)$$

te, które są równe zeru, tworzą dwie grupy, oddzielone od siebie przez jednę, albo kilka liczb, nie równych zeru; niech piérwszą taką grupę tworzy m liczb:

$$f(c),\quad f'(c),\ldots,f^{(m-1)}(c),$$

drugą zaś k liczb:

$$f^{(i)}(c),\quad f^{(i+1)}(c),\ldots,f^{(i+k-1)}(c),$$

gdzie $i > m$. Wyrażając przez w_x i w_x' ilość zmian znaku w odpowiednich grupach:

$$f(x),\quad f'(x),\ldots,f^{(m)}(x),$$
$$f^{(m)}(x),\quad f^{(m+1)}(x),\ldots,f^{(r)}(x),$$

będziemy mieli

$$v_x = w_x + w_x',$$

skąd

$$v_a - v_b = w_a - w_b + w_a' - w_b'.$$

Każda z owych dwu grup odpowiada jednemu z przypadków już rozpatrywanych; wskutek tego, bezpośrednio znajdujemy, że

$$w_a - w_b = m,\quad w_a' - w_b' = 2h,$$

gdzie h oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatną, albo zero. Dodając do siebie te równania, otrzymamy

$$v_a - v_b = m + 2h,\quad \text{c. n. d.} —$$

Zauważmy, że jeżeliby pośród funkcyj (1) te, które stają się równymi zeru przy $x = c$, tworzyły nie dwie, ale trzy, lub więcéj oddzielnych grup, to wówczas należałoby rozważać nie dwie, ale odpowiednio trzy, lub więcéj obszerniejszych grup oddzielnych, z których każda zawiérałaby tylko jednę grupę funkcyj, stających się równymi zeru przy $x = c$. Oczywiście, że ostateczne wyrażenie różnicy $v_a - v_b$ będzie odpowiednie powyższemu.

e. Z funkcyj (1), przy $x = c$ funkcyja $f(x)$ nie staje się równą zeru, ale kilka innych funkcyj, tworzących dwie, lub więcéj oddzielnych grup, stają się równymi zeru.

Przypuśćmy, że pośród liczb:

$$f(c),\quad f'(c),\ldots,f^{(r)}(c)$$

te, które są równe zeru, tworzą tylko dwie grupy następujące:

$$f^{(i)}(c),\quad f^{(i+1)}(c),\ldots,f^{(i+k-1)}(c),$$
$$f^{(j)}(c),\quad f^{(j+1)}(c),\ldots,f^{(j+l-1)}(c),$$

gdzie $i \geqq 1$, $j > i + k$. Oznaczając przez w_x i w_x' ilość zmian znaku odpowiednio w grupach:

$$f(x),\quad f'(x),\ldots,f^{(i+k)}(x),$$
$$f^{(i+k)}(x),\quad f^{(i+k+1)}(x),\ldots,f^{(r)}(x)$$

i zważając, że każda z tych grup odpowiada jednemu z przypadków już rozpatrywanych, znajdziemy

$$w_a - w_b = 2h,\quad w_a' - w_b' = 2h',$$

gdzie każda z liter h i h' oznacza pewną liczbę całkowitą dodatną, albo zero. Dodając do siebie te dwa równania, otrzymamy

$$v_a - v_b = 2(h + h'), \quad \text{c. n. d.} —$$

W podobnyż sposób możemy się przekonać, że to twierdzenie ma miejsce także wtedy, kiedy te z funkcyj (1), które stają się równymi zeru przy $x = c$, tworzą więcéj niż dwie oddzielne grupy.

Te pięć przypadków, któreśmy rozpatrzyli, są jedyne, jakie zachodzić mogą; zatym twierdzenie nasze jest udowodnione.

97. Przy pomocy tylkoco dowiedzionego twierdzenia pomocniczego, możemy uzasadnić następujące twierdzenie Budan'a.

TWIERDZENIE. *Mając funkcyją całkowitą stopnia n-go, $f(x)$, i kilka jéj pochodnych:*

$$(1) \qquad f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(r-1)}(x),\ f^{(r)}(x),$$

przypuśćmy, że ostatnia funkcyja $f^{(r)}(x)$ nie zmienia swego znaku między $x = a$ i $x = b > a$, i że żadna z funkcyj (1) *nie staje się równą zeru ani przy $x = a$, anitéż przy $x = b$; oznaczmy przez m ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b, lecz liczonych w ten sposób, iż każdy pierwiastek, którego wielokrotność przewyższa liczbę r, jeżeliby taki pierwiastek się zdarzył między a i b, uwzględnia się tylko jako pierwiastek r-krotny; nadto ilość zmian znaku w* (1) *nazwijmy v_x; wtedy będziemy mieli następujące równanie:*

$$v_a - v_b = m + 2h,$$

w którym h oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatną, lub zero, tak iż liczba m nigdy nie jest większa od różnicy $v_a - v_b$, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.

Jakoż, jeżeli między a i b niéma takiéj liczby, przy któréj przynajmniéj jedna z funkcyj (1) stawałaby się równą zeru, to wówczas $m = 0$, i, powtóre, znak każdéj z liczb

$$f(a),\ f'(a), \ldots, f^{(r)}(a)$$

jest takiż sam, jak znaki odpowiedniéj z liczb

$$f(b),\ f'(b), \ldots, f^{(r)}(b).$$

A zatym jest wtedy, zgodnie z twierdzeniem, $v_a - v_b = m = 0$.

Przypuśćmy, że między a i b znajduje się przynajmniéj jedna liczba, przywodząca do zera którąś z funkcyj (1), i wypiszmy wszystkie takie liczby według ich wzrastających wartości:

$$c,\ c_1,\ c_2, \ldots, c_{k-1}.$$

W każdym z przedziałów $c, c_1;\ c_1, c_2; \ldots; c_{k-2}, c_{k-1}$ wybierzmy po jednéj dowolnéj liczbie pośredniéj i oznaczmy je odpowiednio przez $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, tak iż $c < a_1 < c_1 < a_2 < c_2 \ldots$. Każdy więc z przedziałów

$$a,\ a_1;\ a_1,\ a_2; \ldots; a_{k-2},\ a_{k-1};\ a_{k-1},\ b,$$

zawiéra, lecz tylko jednę, liczbę, przywodzącą przynajmniéj jednę z funkcyj (1) do zera.—Biorąc pod uwagę jeden z tych przedziałów, np. a_i, a_{i-1}, oznaczymy przez μ_i ilość pierwiastków równania, zawartych między a_i i a_{i+1}, lecz tak liczonych, jakto było zaznaczone w wysłowieniu twierdzenia, t. j.

$\mu_i = 0$, jeżeli $f(c_i)$ nie równa się zeru;

$\mu_i =$ wielokrotności pierwiastka c_i, jeżeli c_i jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, wielokrotności nie większéj od r;

$\mu_i = r$, jeżeli c_i jest pierwiastkiem równania $f(x) = 0$, więcéj niż r-krotnym.

Na zasadzie poprzedzającego twierdzenia pomocniczego, mamy

$$v_{a_i} - v_{a_{i+1}} = \mu_i + 2h_i,$$

gdzie h_i jest liczbą całkowitą, dodatną, lub zerem. Kładąc kolejno $i = 0, 1, 2, \ldots$, otrzymujemy równania:

$$v_a - v_{a_1} = \mu_0 + 2h_0,$$
$$v_{a_1} - v_{a_2} = \mu_1 + 2h_1,$$
$$, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ,$$
$$v_{a_{k-1}} - v_b = \mu_{k-1} + 2h_{k-1},$$

z których, po ich dodaniu do siebie, znajdujemy

$$v_a - v_b = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{k-1} + 2(h_0 + h_1 + \ldots + h_{k-1}).$$

Lecz widocznie $\mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_{k-1} = m$; a zatym, kładąc $h_0 + h_1 + \ldots + h_{k-1} = h$, otrzymamy

$$v_a - v_b = m + 2h,$$

gdzie h jest liczbą całkowitą, dodatną, albo zerem, c. n. d.

98. Jeżeli równanie $f(x) = 0$ nie ma ani jednego pierwiastka, którego wielokrotność przewyższałaby r, to wówczas nie będzie potrzeby zwracać uwagę na szczególny sposób liczenia pierwiastków w twierdzeniu Budan'a, a liczba m wyrazi dokładnie ilości pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych w przedziale a, b.

Gdy np. funkcyja $f(x)$ jest n-go stopnia i przyjmiemy $r = n$, t. j. wypiszemy wszystkie funkcyje

(1) $$f(x),\ f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x),$$

tak iż ostatnia, jak wiadomo, jest liczbą stałą, to, jakimikolwiek są dwie liczby a i $b > a$, ilość pierwiastków równania, zawartych w przedziale od a do b, jest równa różnicy między ilościami zmian znaku w (1) przy $x = a$ i przy $x = b$, albotéż jest mniejszą od téj różnicy o liczbę parzystą. Uważając v_x, liczbę wyrażającą ilość zmian znaku w (1), jako funkcyją zmiennéj niezależnéj x, wnosimy z tego, cośmy powiedzieli w art. poprzedzającym, że, przy wzrastaniu ciągłym zmiennéj x od $-\infty$ do $+\infty$, funkcyja v_x zmienia swoję wartość tylko podczas przejścia zmiennéj x przez pierwiastek jednéj z funkcyj (1). Mianowicie: jeżeli zmienna x przechodzi przez m-krotny pierwiastek równania

$f(x)=0$, to w owéj chwili wielkość v_x zmniejsza się o $m+2h$ jedności, gdzie h oznacza liczbę dodatną, całkowitą, lub zero; jeżeli zaś zmienna x przechodzi przez pierwiastek jednéj z funkcyj $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$, ale nie funkcyi $f(x)$, to wielkość v_x albo się nie zmienia, albo zmniejsza się o liczbę parzystą. — Można toż samo tak wypowiedzieć: przy przejściu zmiennéj x przez m-krotny pierwiastek równania $f(x)=0$, od wartości mniejszych do większych, ilość zmian znaku w (1) zmniejsza się o $m+2h$, gdzie $2h$ oznacza pewną parzystą liczbę dodatną, lub zero; przy przejściu zaś zmiennéj x przez pierwiastek jakiéjkolwiek z funkcyj $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$, który nie czyni zadość równaniu $f(x)=0$, ilość zmian znaku w (1) albo pozostaje niezmienna, albotéż zmniejsza się o liczbę parzystą.

§ II. PRAWIDŁO ZNAKU PODWÓJNEGO.

99. W paragrafie poprzednim, przy dowodzeniu twierdzenia Budan'a, przypuszczaliśmy, że żadna z liczb a i b nie przywodzi do zera żadnéj z funkcyj $f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$. W razie przeciwnym, np. jeżeli przy $x=a$ niektóre z funkcyj $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ stają się równymi zeru, należy tylko zamiast krańca a przyjąć $a+h$, gdzie h jest nieskończenie małą liczbą dodatną; i taksamo, jeżeliby przy $x=b$ niektóre z funkcyj $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ stawały się równymi zeru, wówczas zamiast b wzięlibyśmy $b-h$. Ilość pierwiastków równania $f(x)=0$, zawartych między a i b, oczywiście jest równa ilości pierwiastków tegoż równania, zawartych w przedziale od $a+h$ do $b-h$, a już tak przy $x=a+h$, jak i przy $x=b-h$ żadna z funkcyj $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ nie staje się równą zeru.

Należy nam tylko okazać, w jaki sposób określają się znaki wartości $f(a+h), f'(a+h), \ldots$, albotéż znaki wartości $f(b-h), f'(b-h), \ldots$. W tym celu, przyjmując, że a oznacza którykolwiek z dwu krańców przedziału rozważanego, niższy albo wyższy, zauważmy, że jeżeli wartość $f^{(i)}(a)$ nie jest równa zeru, to wartość $f^{(i)}(a \pm h)$ będzie takiegoż znaku, jak wartość $f^{(i)}(a)$, niezależnie od tego, czy h jest dodatne, czyteż ujemne. Jeżeli zaś wartość $f^{(i)}(a)$ jest równa zeru, to wtenczas może się zdarzyć, że i kilka następujących wartości: $f^{(i+1)}(a), f^{(i+2)}(a), \ldots$ będzie równych zeru. Przypuśćmy, dla uogólnienia, że

$$f^{(i)}(a)=f^{(i+1)}(a)=\ldots=f^{(i+k-1)}(a)=0,$$

a wartość $f^{(i+k)}(a)$ nie jest już równa zeru. W takim razie, na mocy piérwszego twierdzenia pomocniczego (art. 95), bezpośrednio wnosimy, że grupa liczb:

$$f^{(i)}(a-h),\quad f^{(i+1)}(a-h), \ldots, f^{(i+k-1)}(a-h),\quad f^{(i+k)}(a-h),$$

przedstawia same tylko zmiany znaku, gdy tymczasem grupa liczb:

$$f^{(i)}(a+h),\quad f^{(i+1)}(a+h), \ldots, f^{(i+k-1)}(a+h),\quad f^{(i+k)}(a+h)$$

przedstawia same tylko powtórzenia znaku; a więc, zależnie od znaku wartości

$f^{(i+k)}(a)$, będącéj tegoż samego znaku, co każda z dwu ostatnich liczb: $f^{(i+k)}(a-h)$ i $f^{(i+k)}(a+h)$, możemy odrazu wypisać znaki wszystkich innych liczb w dwu ostatnich grupach.

Takie zastosowanie twierdzenia pomocniczego, podanego w art. 95-ym, nazywa się prawidłem znaku podwójnego.

100. Przykład 1. Mając równanie

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 85x + 17 = 0,$$

znajdujemy:

$$f'(x) = 5(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 17),$$
$$f''(x) = 20(x^3 - 3x^2 + 3x - 1),$$
$$f'''(x) = 60(x-1)^2,$$

i spostrzegamy, że trzecia pochodna $f'''(x)$ jest wciąż dodatna. Określając znaki funkcyj

$$f(x),\quad f'(x),\quad f''(x),\quad f'''(x),$$

przy $x = -\infty$, 0, 1, $+\infty$, otrzymujemy następującą tablicę:

x	f	f'	f''	f'''
$+\infty$	+	+	+	+
$1+h$			+	+
1	—	—	0	0
$1-h$			—	+
0	+	—	—	+
$-\infty$	—	+	—	+

gdzie zamiast wartości $x = 1$ potrzeba było przyjąć pod uwagę dwie inne: $x = 1 - h$ i $x = 1 + h$, i posiłkować się prawidłem znaku podwójnego. Z téj tablicy znajdujemy

$$v_0 - v_{1-h} = 1,\quad v_{1+h} - v_{+\infty} = 1,\quad v_{-\infty} - v_0 = 1.$$

A zatym, równanie dane posiada tylko dwa pierwiastki dodatne, oba pojedyńcze, jeden mniejszy, a drugi większy od 1; prócz tego posiada ono jeden pierwiastek ujemny, również pojedyńczy.

101. Przykład 2. Dane jest równanie

$$3x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 55x + 100 = 0.$$

Z funkcyj

$$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 55x + 100$$
$$f'(x) = 12x^3 - 15x^2 + 22x - 55,$$
$$f''(x) = 36x^2 - 30x + 22$$

już druga pochodna $f''(x)$ pozostaje dodatną przy wszelkich wartościach zmiennéj x; można przeto twierdzenie Budan'a stosować do szeregu, składającego się z trzech funkcyj: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. Określając znaki tych funkcyj przy $x = 0$, 1, 2, $\pm\infty$, otrzymujemy następującą tablicę:

x	f	f'	f''
$+\infty$	+	+	+
2	+	+	+
1	+	—	+
0	+	—	+
$-\infty$	+	—	+

Z niéj widzimy, że

$$v_{-\infty} - v_0 = 0, \quad v_0 - v_1 = 0, \quad v_1 - v_2 = 2, \quad v_2 - v_{+\infty} = 0.$$

A więc, dane równanie nie ma pierwiastków ujemnych, co jest zresztą widoczne; pierwiastków zaś dodatnych albo ono nie ma wcale, albotéż ma ich dwa, i wtedy oba są zawarte między 1 i 2.

102. Przykład 3. Dla równania

$$f = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2 + 51x - 23 = 0$$

otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
2	+	+	+	+	+	+
$1+h$			+			
1	—	—	0	+	+	+
$1-h$			—			
0	—	+	—	—	+	+
$-1+h$			—	—		
-1	—	+	0	0	—	+
$-1-h$			—	+		

Jest więc

$$v_{-\infty} - v_{-1-h} = 0,$$
$$v_{-1+h} - v_0 = 0,$$
$$v_0 - v_{1-h} = 2,$$
$$v_{1+h} - v_2 = 1,$$
$$v_2 - v_{+\infty} = 0.$$

A zatym, równanie dane nie posiada pierwiastków ujemnych; co się zaś tyczy pierwiastków dodatnych, to ono ma ich albo jeden, albo trzy: jeden zawarty w przedziale 1, 2, a pozostałe dwa, jeżeli istnieją, w przedziale między 0 i 1.

103. Przykład 4. Mamy równanie

$$f(x) = 48x^5 - 32x^4 - 56x^3 + 72x^2 - 29x + 4 = 0.$$

Drugie równanie pochodne

$$f''(x) = 20x^3 - 8x^2 - 7x + 3 = 0,$$

ma jeden pierwiastek dwukrotny; wszystkie więc pierwiastki równania $f''(x) = 0$ są wymierne, a tę drugą pochodną można tak przedstawić:

$$f''(x) = (5x + 3)(2x - 1)^2.$$

Stąd widzimy, że funkcyja $f''(x)$ przy wszelkich wartościach dodatnych zmiennéj x pozostaje wciąż dodatną, stając się równą zeru przy $x=\frac{1}{2}$. Wskutek tego, stosując twierdzenie Budan'a do jakiegokolwiek przedziału między krańcami dodatnymi, będziemy mogli się ograniczyć do rozważania grupy, złożonéj tylko z trzech funkcyj: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. Nadając zmiennéj x wartości $x=+\infty$, 0, 1, otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''
$+\infty$	$+$	$+$	$+$
1	$+$	$+$	$+$
0	$+$	$-$	$+$

z któréj widzimy, że równanie dane albo wcale nie ma pierwiastków dodatnych, albo ma ich dwa, a wtedy one zawiérają się między 0 i 1. Te dwa pierwiastki, jeżeli tylko one istnieją, mogą być albo różne od siebie, albo równe sobie; w piérwszym razie oba są pojedyńcze, w drugim zaś razie oba stanowią jeden pierwiastek, którego wielokrotność nie jest mniejsza od 2; gdyż wielokrotność 2, na którą tu wskazuje twierdzenie Budan'a, należy rozumiéć warunkowo. Jakoż, liczba $\frac{1}{2}$, przywodząca do zera funkcyją $f''(x)$, jest zarazem pierwiastkiem dwu pozostałych funkcyj, $f(x)$ i $f'(x)$, tak iż równanie dane ma jeden cztérokrotny pierwiastek, liczbę $\frac{1}{2}$.

§ III. KRANIEC NIŻSZY DLA ILOŚCI PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH RÓWNANIA. PRZYPADEK, KIEDY RÓWNANIE NIE MA PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH.

104. Weźmy pod uwagę grupę funkcyj

$$f(x),\quad f'(x), \ldots, f^{(n)}(x), \tag{1}$$

utworzoną z funkcyi całkowitéj $f(x)$ stopnia n-tego i jéj pochodnych, aż do n-téj włącznie, i, oznaczywszy przez a i $b>a$ dwie jakiekolwiek liczby, zastosujmy twierdzenie Budan'a do każdego z trzech przedziałów: $-\infty$, a; a, b; b, $+\infty$. Otrzymujemy tu trzy następujące równania:

$$v_{-\infty}-v_a=m'+2h',$$
$$v_a-v_b=m+2h,$$
$$v_b-v_{+\infty}=m''+2h'',$$

w których każda z liter m, m', m'' oznacza ilość pierwiastków równania $f(x)=0$, zawartych w odpowiednim przedziale, a każda z liter h, h', h'', oznacza pewną liczbę całkowitą, dodatną, albo zero. Dodawszy do siebie te równania stronami odpowiednimi, znajdujemy

$$v_{-\infty}-v_{+\infty}=m+m'+m''+2(h+h'+h'');$$

lecz widocznie

$$v_{-\infty} = n, \quad v_{+\infty} = 0;$$

a więc

$$n = m + m' + m'' + 2(h + h' + h'').$$

Oznaczywszy przez 2J ilość wszystkich pierwiastków zespolonych równania danego, mamy

$$n = m + m' + m'' + 2\mathrm{J};$$

z tego równania i z poprzedzającego wyprowadzamy

$$2\mathrm{J} = 2(h + h' + h''),$$

stąd zaś, z uwagi, że żadna z liczb h, h', h'' nie jest ujemna, wnosimy, że

$$(2) \qquad 2\mathrm{J} \geqslant 2h.$$

Każdym razem, kiedy będziemy wiedzieli ilość pierwiastków równania $f(x)=0$, zawartych między a i b, będziemy jednocześnie wiedzieli, jaka jest liczba $2h$; a jeżeli $2h > 0$, to między pierwiastkami równania $f(x) = 0$ znajduje się przynajmniéj $2h$ pierwiastków zespolonych.

Nierówność (2) będzie miała miejsce również wtedy, kiedy zamiast grupy (1) weźmiemy tylko grupę funkcyj

$$(3) \qquad f(x), \quad f'(x), \ldots, f^{(r)}(x),$$

do któréj wchodzi mniejsza ilość funkcyj pochodnych. Istotnie, oznaczywszy przez w_x ilość zmian znaku w grupie (3), a przez w_x' ilość zmian znaku w grupie

$$(4) \qquad f^{(r)}(x), \quad f^{(r+1)}(x), \ldots, f^{(n)}(x),$$

mamy równość

$$v_x = w_x + w_x',$$

a stąd

$$(5) \qquad v_a - v_b = w_a - w_b + w_a' - w_b'.$$

Stosując następnie twierdzenie Budan'a kolejno do każdéj z grup (1), (3), (4), otrzymamy

$$v_a - v_b = m + 2h,$$
$$w_a - w_b = m' + 2k,$$
$$w'_a - w'_b = 2m'' + 2j,$$

gdzie m oznacza ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b, zaś m' ilość pierwiastków tegoż równania, zawartych między a i b, ale tak rachowanych, iż każdy taki pierwiastek, którego wielokrotność jest większa od r, przyjmuje się jako pierwiastek r-krotny; $2m''$ oznacza ilość pierwiastków równania $f^{(r)}(x) = 0$, zawartych między a i b; nakoniec h, k, j oznaczają pewne liczby całkowite, nie mniejsze od zera. Równanie przeto (5) możemy zastąpić przez następujące

$$2h + m = 2k + 2j + m' + 2m''.$$

Lecz, oczywiście, $m \leqslant m' + 2m''$; a więc

$$2h \geqslant 2k;$$

ponieważ zaś $2J \geqslant 2h$, przeto, tymwięcéj,

$$2J \geqslant 2k.$$

105. Jeżeli równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastków zespolonych, to na mocy nierówności

$$2J \geqslant 2k,$$

powyżéj udowodnionéj, wnosimy, że

$$k = 0,$$

jakimikolwiek są krańce a i b, gdyż k nie może być liczbą ujemną. A więc, w tym przypadku mamy

$$w_a - w_b = m,$$

t. j. *różnica między ilością zmian znaku w grupie funkcyj*

$$f(x),\quad f'(x), \ldots, f^{(r)}(x)$$

przy $x = a$ *i ilością zmian znaku w téjże grupie przy* $x = b$, *równa się ilości pierwiastków równania* $f(x) = 0$, *zawartych między* a *i* b, *jeżeli tylko pierwiastki, których wielokrotność jest większa od* r, *są liczone jako* r*-krotne.*

Jeżeliby liczba r była równa stopniowi funkcyi $f(x)$, to otrzymalibyśmy twierdzenie art. 89-go.

§ IV. TWIERDZENIE DESCARTES'A, JAKO WNIOSEK Z TWIERDZENIA BUDAN'A.

106. Mamy funkcyją całkowitą

$$f(x) = Ax^n + Bx^m + Cx^r + \ldots + Kx^s + L,$$

uporządkowaną według malejących potęg zmiennéj x, w któréj wyraz stały nie równa się zeru, tak iż wartość $f(0)$ nie jest równa zeru. Przyjmijmy, że żaden ze spółczynników A, B, C, . . . nie jest równy zeru.

Wypisując wyrażenia funkcyj pochodnych $f'(x)$, $f''(x)$, . . . , spostrzeżemy, że wyraz stały w wyrażeniu i-téj pochodnéj $f^{(i)}(x)$ jest równy iloczynowi $1.2.3\ldots i$, pomnożonemu przez spółczynnik x^i w wyrażeniu funkcyi $f(x)$; a zatym, jeżeli w wyrażeniu funkcyi $f(x)$ niéma wyrazu z potęgą x^i, to $f^{(i)}(0) = 0$. Z tego wynika, że znaki wartości

$$f(0),\quad f'(0), \ldots, f^{(s)}(0), \ldots, f^{(r)}(0), \ldots, f^{(m)}(0), \ldots, f^{(n)}(0)$$

są takież same, jak znaki odpowiednich spółczynników

$$L,\quad 0, \ldots, K, \ldots, C, \ldots, B, \ldots, A.$$

Tu, dla uwidocznienia, przyjęliśmy, że $f'(0) = 0$, t. j. że w wyrażeniu $f(x)$ niéma wyrazu z piérwszą potęgą zmiennéj x.

Żeby uniknąć tych zer, podstawiamy zamiast wartości $x = 0$ nieskończenie małą liczbę dodatną h, i, korzystając z prawidła znaku podwójnego, przekonywamy się, że znaki wartości

$$f(h),\quad f'(h), \ldots, f^{(s)}(h), \ldots, f^{(r)}(h), \ldots, f^{(m)}(h), \ldots, f^{(n)}(h)$$

są takież same, jak znaki odpowiednich liczb

$$\mathrm{L},\quad \mathrm{K}, \ldots, \mathrm{K}, \ldots, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{B}, \ldots, \mathrm{A},$$

gdzie wszystkie liczby między A i B są równe A, wszystkie liczby między B i C są równe B i t. d.

A zatym, oznaczając ilość zmian znaku w grupie funkcyj

$$f(x),\quad f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

przez v_x, a ilość zmian znaku w równaniu $f(x) = 0$ przez v, mamy

$$v_h = v.$$

Gdy jeszcze przez m oznaczymy ilość wszystkich pierwiastków dodatnych równania $f(x) = 0$, a przez $2k$ pewną liczbę parzystą, dodatną, albo zero, to, na mocy twierdzenia Budan'a, mieć będziemy

$$v_h - v_{+\infty} = m + 2k.$$

Wstawiając tu v zamiast v_h i zważając, że $v_{+\infty} = 0$, otrzymamy

$$v = m + 2h.$$

To równanie wyraża twierdzenie Descartes'a (art. 82).

§ V. SPOSÓB FOURIER'GO ODDZIELANIA PIERWIASTKÓW.

107. Opiérając się na twierdzeniu Budan'a, Fourier podał sposób szczególny oddzielania pierwiastków rzeczywistych równania, zalécający się prostotą, a w większości przypadków dogodniejszy od innych dotąd znanych sposobów. Dzięki temu zastosowaniu, twierdzenie Budan'a jest doniosłéj wartości.

Będziemy nazywali grupą funkcyj Fourier'go grupę

$$(1)\qquad f(x),\quad f'(x), \ldots, f^{(r)}(x),$$

składającą się z funkcyi całkowitéj $f(x)$ i wszystkich jéj koléjnych pochodnych do r-éj włącznie, w przypuszczeniu, że już funkcyja $f^{(r)}(x)$ jest wciąż tegoż samego znaku przy wszystkich wartościach zmiennéj x, zawartych między dwoma danymi krańcami: a i $b > a$. Jest to taż sama grupa funkcyj, do któréj się stosuje twierdzenie Budan'a.

Różnicę między liczbą, wyrażającą ilość zmian znaku w grupie (1) przy $x = a$, i liczbą, wyrażającą ilość zmian znaku w téjże grupie przy $x = b$, będziemy nazywali w s k a ź n i k i e m f u n k c y i $f(x)$. Różnica między ilością zmian znaku w grupie funkcyi

$$f'(x),\quad f''(x), \ldots, f^{(r)}(x)$$

przy $x = a$ i ilością zmian znaku w téjże grupie przy $x = b$ będzie wskaźnikiem funkcyi $f'(x)$. Podobne znaczenie mają wskaźniki następnych funkcyj pochodnych, $f''(x), f'''(x), \ldots$, tak iż np., wskaźnik funkcyi $f^{(r-1)}(x)$ jest różnicą między ilością zmian znaku w grupie

$$f^{(r-1)}(x),\ f^{(r)}(x)$$

przy $x = a$ i ilością zmian znaku w téjże grupie przy $x = b$. Wskaźnik ostatniéj funkcyi $f^{(r)}(x)$ przyjmujemy zawsze jako równy zeru.

Oznaczając wskaźniki funkcyj $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r)}(x)$ odpowiednio przez $e, e_1, \ldots, e_r$ i wypisując je kolejno obok siebie, otrzymujemy **grupę wskaźników**

$$e,\ e_1,\ e_2,\ \ldots, e_{r-1},\ e_r.$$

Ostatni wskaźnik, e_r, zawsze równy jest zeru; każdy z pozostałych jest liczbą całkowitą, dodatną, albo zerem. Dwa jakiekolwiek obok siebie tu wypisane wskaźniki mogą się od siebie różnić conajwięcéj o jedność, tak iż ich różnica może być jedną z trzech liczb: $0, +1, -1$. Wynika to wprost ze znaczenia tych wskaźników.

Jeżeli jedna z funkcyj $f(x), f'(x), \ldots, f^{(r-1)}(x)$, np. funkcyja $f^{(i)}(x)$, jest tegoż samego znaku od $x = a$ do $x = b$, to żaden ze wskaźników $e, e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ nie może być mniejszy od wskaźnika e_i. Jakoż, wziąwszy $j < i$, weźmy pod uwagę trzy grupy funkcyj,

$$f^{(j)}(x),\ f^{(j+1)}(x), \ldots, f^{(i)}(x), \ldots, f^{(r)}(x);$$
$$f^{(j)}(x),\ f^{(j+1)}(x), \ldots, f^{(i)}(x);$$
$$f^{(i)}(x),\ f^{(i+1)}(x), \ldots, f^{(r)}(x),$$

i nazwijmy ilość zmian znaku w każdéj z nich, odpowiednio v_x, v_x', v_x''. Mamy oczywiście

$$v_a - v_b = v_a' - v_b' + v_a'' - v_b'',$$

albo

$$e_j = v_a' - v_b' + e_i.$$

A ponieważ, na zasadzie twierdzenia Budan'a, $v_a' - v_b \geqq 0$, zatym $e_j \geqq e_i$.

Twierdzenie przeto Budan'a może być tak wysłowione:

Ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b, nie jest większa od wskaźnika funkcyi $f(x)$, a jeżeli jest mniejsza od niego, to o liczbę parzystą, przyczym każdy pierwiastek równania $f(x) = 0$ więcéj niż r-krotny, jeżeli taki pierwiastek znajdzie się między a i b, winien być liczony jako r-krotny.

Każdy więc ze wskaźników $e, e_1, \ldots$ jest krańcem wyższym dla ilości pierwiastków odpowiedniéj funkcyi, zawartych między a i b.

108. W przypadku, kiedy grupa funkcyj Fourier'go składa się tylko z dwu funkcyj:

$$f(x),\ f'(x),$$

twierdzenie Budan'a nic nowego nie daje. Istotnie, ponieważ funkcyja $f'(x)$ nie ma zmieniać swego znaku od $x = a$ do $x = b$, zatym funkcyja $f(x)$ od

$x=a$ do $x=b$ albo ciągle wzrasta, albo ciągle maleje, a z tego wynika, że równanie $f(x)=0$ nie może mieć więcéj jak jeden pierwiastek, zawarty między a i b. Twierdzenie Rolle'a prowadzi do tegoż wyniku; niéma więc potrzeby oddzielnie rozważać tego przypadku.

Przypuśćmy, że grupa funkcyj Fourier'go składa się z trzech funkcyj:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x).$$

W tym przypadku co do wskaźnika e możemy zrobić trzy następujące przypuszczenia:

a. wskaźnik $e=0$; wówczas równanie $f(x)=0$ nie posiada wcale pierwiastka między a i b;

b. wskaźnik $e=1$; równanie $f(x)=0$ ma wtedy jeden pierwiastek pojedyńczy między a i b;

c. wskaźnik $e=2$; wówczas równanie $f(x)=0$ między a i b albo wcale nie posiada pierwiastka, albo ma ich dwa.

Przypadek ostatni przedstawia wątpliwość co do ilości pierwiastków, zawartych między a i b. Wtedy grupa wartości $f(a)$, $f'(a)$, $f''(a)$ przedstawia same zmiany znaku, grupa zaś wartości $f(b)$, $f'(b)$, $f''(b)$ same powtórzenia znaku, wskutek czego otrzymujemy grupę wskaźników

$$2,\ 1,\ 0,$$

która wskazuje, iż względem trzech funkcyj: $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ są wypełnione wszystkie warunki, niezbędne, aby do tych funkcyj można było zastosować twierdzenie Fourier'go (art. 70).

Jeżeli, po obliczeniu wartości sumy

$$\text{(1)} \qquad \text{wart. bezw.} \frac{f(a)}{f'(a)} + \text{wart. bezw.} \frac{f(b)}{f'(b)},$$

okaże się, że ona nie jest mniejsza od bezwzględnéj wartości różnicy $b-a$, to wówczas równanie $f(x)=0$ między a i b nie ma pierwiastka. — Lecz, jeżeli suma (1) okaże się mniejszą od wartości bezwzględnéj $b-a$, to nic z tego wnieść nie będziemy mogli, i trzeba będzie rozdzielić przedział a, b na dwa mniejsze: a, c i c, b, gdzie c jest pewną liczbą dowolną, zawartą między a i b.

Jeżeli, obliczywszy wartość $f(c)$, znajdziemy, że ona jest innego znaku niż $f(a)$, to bezpośrednio wniesiemy, że równanie $f(x)=0$ między a i b posiada dwa pierwiastki pojedyńcze. Jeden z nich będzie zawarty w przedziale a, c, drugi zaś w przedziale c, b, i oba będą już oddzielone. — Jeżeli jednak wartości $f(a)$ i $f(c)$ są jednakowego znaku, to znowu nic wnieść nie będziemy mogli. W tym przypadku wskaźnik funkcyi $f(x)$ dla jednego z przedziałów a, c i c, b będzie 2, dla drugiego zaś 0; a zatym, pytanie poprzednie o ilości pierwiastków, zawartych między a i b, sprowadza się teraz do takiegoż pytania lecz względem przedziału mniejszego.

Postępując z tym nowym przedziałem taksamo, jak postępowaliśmy z przedziałem a, b, albo otrzymamy odpowiédź na nasze pytanie, albotéż sprowadzimy je do takiegoż samego pytania, odnoszącego się jednak do przedziału jeszcze mniejszego.

Jeżeli w przedziale między a i b równanie $f(x) = 0$ wcale nie ma pierwiastka, to wciąż przechodząc od przedziału a, b do przedziałów coraz mniejszych, dojdziemy nakoniec do takiego przedziału k, l, iż wartość sumy

$$\text{wart. bezw.} \frac{f(k)}{f'(k)} + \text{wart. bezw.} \frac{f(l)}{f'(l)}$$

okaże się nie mniejszą od bezwzględnéj wartości różnicy $l - k$. W tym bowiém przypadku, wmiarę jak różnica $l - k$ zdąża do zera, każdy z wyrazów powyższéj sumy wzrasta do nieskończoności.

Jeżeli zaś równanie $f(x) = 0$ między a i b ma dwa pierwiastki pojedyńcze, to przechodząc od przedziału a, b do przedziałów coraz mniejszych, dojdziemy wreszcie do takiego przedziału k, l, iż wartość bezwzględna różnicy $l - k$ będzie mniejsza od wartości bezwzględnéj różnicy dwu pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i b. W takim przedziale równanie $f(x) = 0$ nie może miéć więcéj, niż jeden pierwiastek; i jeżeli rzeczywiście ma ono jeden pierwiastek między l i k, to wartości $f(l)$ i $f(k)$ będą różnego znaku.

Nakoniec, jeżeli się zdarzy, że równanie $f(x) = 0$ w przedziale a, b posiada jeden pierwiastek wielokrotności parzystéj, to wówczas, jakkolwiek daleko będziemy posuwali zmniejszanie przedziału a, b, nie dojdziemy do takiego przedziału k, l, iżby miała miéć miejsce nierówność

$$\text{wart. bezw.} \frac{f(k)}{f'(k)} + \text{wart. bezw.} \frac{f(l)}{f'(l)} \geqq \text{wart. bezw.} (l - k),$$

czyli, ażeby wartości $f(k)$ i $f(l)$ były różnego znaku.

Aby ostatecznie rozwiązać nasze zadanie, należy wskazać, jakdalece wypaść może potrzeba conajwięcéj zbliżyć do siebie krańce przedziału badanego. To, że sposób Fourier'go nie daje ku temu odpowiedniéj wskazówki, przedstawia istotną jego wadę. —

Jeżeli więc doszliśmy do przedziału, którego krańce są znacznie zbliżone, i nie mogliśmy, zapomocą powyższych sposobów, dowiedziéć się, czy równanie $f(x) = 0$ ma w owym przedziale dwa pierwiastki, albo nie, wówczas należy zbadać, czy równanie $f(x) = 0$ nie ma w tym przedziale pierwiastka wielokrotnego (por. art. 43).

Jeżeli się okaże, że równanie $f(x) = 0$ wcale nie ma pierwiastka wielokrotnego, wtedy należy jeszcze daléj posunąć zmniejszanie przedziału, dopóki nie otrzymamy odpowiedzi żądanéj.

Jeżeli zaś się okaże, że równanie $f(x) = 0$ posiada pierwiastki wielokrotne, to jego rozwiązanie sprowadza się do rozwiązania innych równań, nie posiadających już pierwiastków wielokrotnych i będących stopnia niższego.

109. Przechodzimy do zbadania przypadku ogólnego, kiedy grupa funkcyj Fourier'go,

(1) $$f(x),\ f'(x), \ldots, f^{(r)}(x),$$

składa się więcéj niż z trzech funkcyj (największa ich ilość może być $n + 1$).

Wypiszmy kolejne wskaźniki

(2) $$e,\ e_1, \ldots, e_r.$$

Jeżeli $e=0$, to równanie $f(x)=0$ w przedziale badanym a, b wcale nie ma pierwiastka; jeżeli zaś $e=1$, to równanie $f(x)=0$ między a i b ma tylko jeden pierwiastek, który więc będzie oddzielny.

Przypuśćmy więc, że $e \geqq 2$. Wówczas pośród liczb $e, e_1, \ldots, e_r$ znajdziemy przynajmniéj jednę równą jedności, gdyż $e>1$, a $e_r=0$, dwie zaś z tych liczb, po sobie następujące, nie mogą się różnić więcéj niż o jedność. Niech $e_i=1$ i niech już ani jedna z liczb $e, e_1, \ldots, e_{i-1}$ nie równa się jedności, tak iż, jeżeli istnieje pośród liczb (2) kilka równych jedności, to e_i oznacza pierwszą z nich (licząc od strony lewéj).

Wskaźnik e_{i-1}, oczywiście, jest równy 2, gdyż inaczéj równałby się 0 albo 1, a to sprzeciwia się temu, cośmy powyżéj co do e_i i e przyjęli.

Co się tyczy wskaźnika e_{i+1}, to możemy zrobić dwa przypuszczenia: $e_{i+1}=0$, albo $e_{i+1}>0$.

Gdy $e_{i+1}=0$, równanie $f^{(i+1)}(x)=0$ nie ma pierwiastka zawartego w przedziale a, b; możemy przeto zastosować twierdzenie Budan'a do grupy trzech funkcyj:

$$f^{(i-1)}(x),\quad f^{(i)}(x),\quad f^{(i+1)}(x),$$

któréj, dla przedziału a, b, odpowiada grupa wskaźników:

$$2,\ 1,\ 0.$$

Przypadek ten jużeśmy powyżéj szczegółowo rozważali. — Jeżeli się okaże, że równanie $f^{(i-1)}(x)=0$ między a i b wcale nie posiada pierwiastków, albo posiada jeden tylko wielokrotności parzystéj, to wtedy funkcyja $f^{(i-1)}(x)$ jest wciąż tego samego znaku od $x=a$ do $x=b$ i zamiast początkowéj grupy funkcyj (1) możemy wziąć inną, do któréj wejdzie mniéj funkcyj, mianowicie grupę

$$f(x),\ f'(x), \ldots, f^{(i-1)}(x).$$

W grupie wskaźników, odnoszących się do tylkoco wypisanéj grupy funkcyj, piérwsza jedność będzie bliżéj początku (t. j. więcéj wlewo), niż w grupie (2).— Jeżeli zaś się okaże, że w przedziale a, b równanie $f^{(i-1)}(x)=0$ posiada dwa pierwiastki pojedyńcze, wtenczas, oznaczając przez c jakąkolwiek liczbę, zawartą między tymi dwoma pierwiastkami, podzielimy przedział a, b na dwa: a, c i c, b. W każdym z tych ostatnich przedziałów będzie po jednym pierwiastku równania $f^{(i-1)}(x)=0$ i, jeżeli dla każdego z tych przedziałów ułożymy odpowiedni szereg wskaźników, to wskaźnik funkcyi $f^{(i-1)}(x)$ tak dla przedziału a, c, jak i dla przedziału c, b będzie się równać jedności. W taki więc sposób będziemy tu mogli przesunąć piérwszy ze wskaźników, równych jedności, więcéj wlewo, t. j. bliżéj początku.

Przechodząc do drugiego przypuszczenia względem wskaźnika e_{i+1}, mianowicie, przyjmując, że albo $e_{i+1}=1$, albo $e_{i+1}=2$, spostrzegamy, że wtedy funkcyja $f^{(i+1)}(x)$ między a i b ma albo jeden pierwiastek albo dwa. Oznaczmy przez α pierwiastek funkcyi $f^{(i)}(x)$, zawarty w przedziale a, b, a przez β pierwiastek funkcyi $f^{(i+1)}(x)$, zawarty w tymże przedziale. Jeżeli zaś ta ostatnia funkcyja między a i b będzie miała dwa pierwiastki, to przez β będziemy rozumiéć ten pierwiastek, który jest bliższy pierwiastka α. Przypuśćmy, że przedział a, b podzieliliśmy na kilka innych tak, iż różnica krańców każdego z nich, co do swéj wartości bezwzględnéj, nie przewyższa war. bezw. $(\beta - \alpha)$, i weźmy pod uwagę jeden z tych przedziałów, np. l, k; to, co o nim powiemy, stosować się będzie do wszystkich pozostałych. Pośród wskaźników, odnoszących do przedziału l, k,

$$(3) \qquad e', \quad e'_1, \quad e'_2, \ldots, e'_{i-1}, \quad e'_i, \quad e'_{i+1}, \ldots, e'_r,$$

wskaźnik e'_{i-1} będzie się równał jednéj z liczb: 0, 1, 2, gdyż $2 = e_{i-1} \geq e'_{i-1}$.— Jeżeli $e'_{i-1} = 0$, to w grupie funkcyj Fourier'go, jako ostatnią funkcyją, możemy przyjąć $f^{(i-1)}(x)$, i piérwszy ze wskaźników, równych jedności, będzie przesunięty więcéj wlewo, niż wskaźnik e_i w grupie (2). — Jeżeli zaś $e'_{i-1} = 1$, to wówczas piérwszy ze wskaźników, równych jedności, w grupie (3), oczywiście, będzie się znajdował bliżéj początku, niż wskaźnik e_i w grupie (2). — Jeżeli, nakoniec, $e'_{i-1} = 2$, to $e'_i = 1$, a $e'_{i+1} = 0$, gdyż, jeżeli $e'_{i+1} > 0$, to każde z równań $f^{(i)}(x) = 0$, $f^{(i+1)}(x) = 0$ miałoby po jednym pierwiastku w przedziale l, k, co przeczyłoby nierówności

$$\text{wart. bezw. } (l - k) < \text{wart. bezw. } (\beta - \alpha).$$

Ten przypadek zbadaliśmy już wyżéj.

Ze wszystkiego, cośmy wyżéj powiedzieli, widoczna, że tak przy $e_{i+1} = 0$, jak przy $e_{i+1} > 0$, zapomocą dzielenia przedziału a, b możemy piérwszy ze wskaźników, równych jedności, przesunąć więcéj wlewo.

Ażeby nierówności wart. bezw. $(l - k) <$ wart. bezw. $(\beta - \alpha)$ można było zadość uczynić, należy miéć kraniec niższy wartości bezwzględnéj różnicy $\beta - \alpha$, i im ściślejszy, tymlepiéj. Kraniec ów da nam także pojęcie o tym, oile, conajwięcéj, wypadnie zmniejszyć przedział dany, ażeby osiągnąć pożądane przesunięcie wlewo piérwszego ze wskaźników, równych jedności.

Przesuwając wciąż, według wyżéj opisanego sposobu, piérwszy ze wskaźników, równych jedności, coraz więcéj wlewo, osiągniemy to, że, zamiast pierwotnego przedziału a, b, będziemy mieli pewną ilość nowych przedziałów, a dla każdego z nich wskaźnik funkcyi $f(x)$ będzie się równać zeru lub jedności; wówczas wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$, zawarte w przedziale a, b, będą oddzielone.

110. Przykład 1. Weźmy równanie

$$f = 5x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 11x + 51 = 0.$$

Obliczając wartości funkcyj pochodnych przy różnych wartościach zmiennéj x, otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
2	+	+	+	+	+	+
1	+	—	—	+	+	+
0	+	—	+	—	—	+
—1	+	—	—	+	—	+
—2	—	+	—	+	—	+

Stąd widzimy, że wszystkie pierwiastki rzeczywiste równania danego zawiérają się między -2 i $+2$, gdyż przy $x=2$ otrzymujemy same tylko powtórzenia znaku, a przy $x=-2$ same tylko zmiany znaku.

Równanie $f=0$ posiada jeden tylko pierwiastek ujemny, zawarty między -1 i -2; dla przedziału bowiém -1, 0 wskaźnik $e=0$, a dla przedziału -1, -2 wskaźnik $e=1$.

Dla przedziału 0, $+1$ znajdujemy następującą grupę wskaźników:

$$2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0.$$

Ponieważ tu po piérwszym wskaźniku, równym jedności, $e_2=1$, następuje wskaźnik $e_3=1$, zatym należy rozdzielić przedział 0, $+1$ na kilka mniejszych. Obliczywszy wartości funkcyj Fourier'go dla $x=\frac{1}{2}$, i przepisawszy dwa wiérsze z tablicy poprzedzającéj, otrzymamy nową tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
1	+	—	—	+	+	+
$\frac{1}{2}$	+	—	—	—	+	+
0	+	—	+	—	—	+

Wskaźnik funkcyi $f(x)$ dla przedziału $\frac{1}{2}$, 1 równa się zeru; równanie więc nie ma pierwiastka między $\frac{1}{2}$ i 1.

Dla przedziału 0, $\frac{1}{2}$ otrzymujemy następującą grupę wskaźników:

$$2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,$$

w któréj po piérwszym wskaźniku, równym jedności, $e_2=1$, następuje wskaźnik $e_3=0$. Wskutek tego, obliczamy sumę

$$\text{wart. bezw.}\frac{f'(0)}{f''(0)}+\text{wart. bezw.}\frac{f'\left(\frac{1}{2}\right)}{f''\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{11}{32}+\frac{59}{36}.$$

Jest ona większa od $\frac{1}{2}$. Na mocy tego, twierdzimy, że funkcyja $f'(x)$ wcale nie ma pierwiastków między 0 i $\frac{1}{2}$. Przyjmując funkcyją pochodną $f'(x)$ jako ostatnią w grupie funkcyj Fourier'go i tworząc grupę wskaźników, znajdziemy, że wskaźnik funkcyi $f(x)$ równa się zeru. A więc równanie $f=0$ wcale nie ma pierwiastka między 0 i $\frac{1}{2}$.

Pozostaje nam zbadać przedział między $+1$ i $+2$. Dla niego z tablicy piérwszéj otrzymujemy taką grupę wskaźników:

$$2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0.$$

Należy przeto przedział $+1$, $+2$ rozdzielić na przedziały mniejsze.

Kładąc $x=\frac{3}{2}$ i obliczając wartości funkcyj Fourier'go, otrzymamy też same znaki, co przy $x=2$, tak iż musimy jeszcze dzielić przedział 1, $\frac{3}{2}$ na przedziały mniejsze.

Kładąc $x=\frac{5}{4}$ i obliczając wartości funkcyj Fourier'go, otrzymamy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}
$\frac{3}{2}$	+	+	+	+	+	+
$\frac{5}{4}$	+	—	+	+	+	+
1	+	—	—	+	+	+

Dla przedziału 1, $\frac{5}{4}$ wskaźnik funkcyi f równa się zeru; a zatym, równanie $f=0$ nie posiada pierwiastka między 1 i $\frac{5}{4}$.

Dla przedziału $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{2}$ otrzymujemy grupę wskaźników:

$$2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0;$$

a gdy

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1365}{32},\quad f'\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{133}{16},$$

przeto

$$\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{f'\left(\frac{3}{2}\right)}+\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{f'\left(\frac{5}{4}\right)}>\frac{1}{4}.$$

To wskazuje, że równanie $f=0$ nie ma pierwiastka między $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{4}$.

Widzimy zatym, że, z wyjątkiem jednego pierwiastka ujemnego, zawartego między -1 i -2, równanie dane nie posiada innych pierwiastków rzeczywistych.

111. Przykład 2. Weźmy równanie

$$f=2x^6+6x^5-5x^4-20x^3+30x^2-14x+7=0.$$

Z ułożonéj dla tego równania tablicy

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
1	+	+	+	+	+	+	+
0	+	—	+	—	—	+	+
—1	+	—	+	+	—	—	+
—2	+	—	+	—	+	—	+

widzimy, że wszystkie jego pierwiastki rzeczywiste, jeżeli one istnieją, zawiérają się między -2 i $+1$.

Dla przedziału $0, +1$ otrzymujemy następującą grupę wskaźników:

$$4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0.$$

Po wskaźniku $e_3 = 1$ następuje wskaźnik $e_4 = 1$; przedział więc $0, 1$ należy rozdzielić na dwa mniejsze.

Obliczywszy wartości funkcyj Fourier'go dla $x = \frac{1}{2}$, otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	f'	f''	f'''	f^{IV}	f^{V}	f^{VI}
1	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{1}{2}$	+	+	+	—	+	+	+
0	+	—	+	+	—	—	+

Dla przedziału $0, \frac{1}{2}$ mamy grupę wskaźników:

$$2,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,$$

która wskazuje, że należy obliczyć sumę

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{f'(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{1}{2}\right)}{f'\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Piérwszy jéj wyraz równa się $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$; a zatym, suma obu wyrazów jest większa od $\frac{1}{2}$. Równanie więc dane w przedziale $0, \frac{1}{2}$ nie ma pierwiastka.

Dla przedziału $\frac{1}{2}, 1$ otrzymujemy grupę wskaźników:

$$2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,$$

według któréj obliczamy sumę

$$\text{wart. bezw. } \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{f'''\left(\frac{1}{2}\right)} + \text{wart. bezw. } \frac{f''(1)}{f'''(1)} = \frac{1}{16} + \frac{1}{6}.$$

Suma ta jest mniejsza od $\frac{1}{2}$; a więc nie możemy stąd nic wnieść o ilości pierwiastków, zawartych między $\frac{1}{2}$ i 1.

Zanim przystąpimy do dzielenia przedziału $\frac{1}{2}$, 1 na mniejsze, postawimy pytanie: czy równanie $f''(0)$ nie posiada pierwiastka dwukrotnego między $\frac{1}{2}$ i 1? Największy spólny dzielnik funkcyj f'' i f''' jest x^2+x-1, i

$$f''=(x^2+x-1)^2.$$

Stąd widzimy, że pochodna druga posiada istotnie jeden pierwiastek dwukrotny w przedziale $\frac{1}{2}$, 1 i, prócz tego, jest wciąż dodatna przy wszelkich wartościach zmiennéj x. Przyjmując funkcyją f'' jako ostatnią w grupie funkcyj Fourier'go, spostrzeżemy z tablicy ostatniéj, że wskaźnik funkcyi f dla przedziału $\frac{1}{2}$, 1 równa się zeru; równanie więc $f=0$ wcale nie ma pierwiastka między $\frac{1}{2}$ i 1.

Z piérwszéj tablicy widzimy jeszcze, że wskaźnik funkcyi f dla przedziału 0, -2 równa się zeru; równanie przeto $f=0$ nie ma pierwiastków ujemnych.

A zatym, wszystkie pierwiastki równania danego są zespolone.

§ VI. NIEKTÓRE UWAGI NAD TWIERDZENIEM BUDAN'A. ODDZIELANIE PIERWIASTKÓW RÓWNANIA NIEZUPEŁNEGO.

112. Twierdzenie Budan'a jest bezpośrednim wynikiem pewnych własności, właściwych funkcyjom grupy

$$f,\ f',\ f'',\ldots,f^{(r)}. \tag{1}$$

Tych własności jest trzy, a mianowicie:

a. Ostatnia z funkcyj (1), t. j. funkcyja $f^{(r)}$, nie zmienia swego znaku od $x=a$ do $x=b$.

b. Przy przejściu zmiennéj x przez pierwiastek któréjkolwiek z funkcyj (1), np. przez pierwiastek funkcyi $f^{(i)}$, od wartości mniejszych do większych, stosunek

$$\frac{f^{(i)}}{f^{(i+1)}}$$

zmienia swój znak, przechodząc od wartości ujemnych do dodatnych. Stosuje się to tylko do tych pierwiastków, które zawiérają się między a i b.

c. Jeżeli liczba c, zawarta między a i b, przywodzi do zera początkowych i funkcyj grupy (1),

$$f(c)=f'(c)=\ldots=f^{(i-1)}(c)=0,$$

ale $f^{(i)}(c)$ jest od zera różne, to liczba c jest i-krotnym pierwiastkiem równania

$f=0$; jeżeli zaś liczba c przywodzi do zera wszystkie funkcyje (1), to c liczy się jako tylko r-krotny pierwiastek równania $f=0$.

Grupa funkcyj

$$(2)\qquad f,\ f_1,\ f_2,\ldots,f_s,$$

z których każda może nie być pochodną poprzedzającéj, może zastąpić szereg (1), jeżeli tylko funkcyje (2) posiadają powyższe trzy własności.

Przypuśćmy np., że jedna z funkcyj pochodnych w grupie (1) może być przedstawiona jako iloczyn dwu funkcyj całkowitych,

$$f^{(i)}=\varphi\,\varphi_1,$$

i że czynnik φ_1 jest wciąż dodatny dla wartości zmiennéj x od $x=a$ do $x=b$; wówczas grupę (1) można zastąpić przez następującą:

$$(3)\qquad f,\ f',\ldots,f^{(i-1)},\ \ \varphi,\ \ \varphi',\ldots,\varphi^{(m)},$$

gdzie pochodna $\varphi^{(m)}$ nie powinna zmieniać swego znaku między a i b. Również, jeżeli jedna z funkcyj φ, φ', ... w grupie (3), np. $\varphi^{(k)}$, jest iloczynem dwu funkcyj całkowitych,

$$\varphi^{(k)}=\psi\,\psi_1,$$

a czynnik ψ_1 jest wciąż dodatny między a i b, to zamiast grupy (3) można rozważać grupę

$$(4)\qquad f,\ f',\ldots,f^{(i-1)},\ \ \varphi,\ \ \varphi',\ldots,\varphi^{(k-1)},\ \ \psi,\ \ \psi',\ldots,\psi^{(l)},$$

gdzie pochodna $\psi^{(l)}$ nie powinna zmieniać swego znaku od $x=a$ do $x=b$.

113. Sposób Fourier'go oddzielania pierwiastków nie może być stosowany do grupy (2), dlatego, że twierdzenie Fourier'go (art. 70) może nie miéć miejsca dla funkcyj (2).

Założymy, że w wyrażeniu piérwszéj pochodnéj f' brak wyrazu stałego, i wyprowadzimy pewne twierdzenie, które w tym przypadku zastąpi w zastosowaniu twierdzenie Fourier'go.

Wówczas funkcyja f' może być przedstawiona jako iloczyn

$$f'=x^m\varphi,$$

gdzie m jest pewną liczbą całkowitą, dodatną, a φ funkcyją całkowitą, która nie staje się równą zeru przy $x=0$.

Mając na względzie warunek, ażeby twierdzenie Budan'a pozostawało w swéj mocy, zauważymy, że:

jeżeli wykładnik m jest parzysty, to, jakimikolwiek są krańce a i b przedziału rozważanego, zamiast grupy (1) można wziąć grupę

$$f,\ \ \varphi,\ \ \varphi',\ldots;$$

jeżeli zaś wykładnik m jest nieparzysty, to można to zrobić tylko wtedy, kiedy tak $a>0$, jak i $b>0$;

jeżeli, nakoniec, wykładnik m jest nieparzysty, $a<0$ i $b<0$, to zamiast grupy (1) możemy wziąć grupę

$$f, \ -\varphi, \ -\varphi', \ldots$$

114. Twierdzenie pomocnicze. *Jeżeli $f(x)$ jest funkcyją całkowitą, a m liczbą całkowitą, dodatną, i jeżeli funkcyja pochodna $f'(x)$ jest podzielna przez x^m, to, oznaczywszy przez $\varphi(x)$ funkcyją całkowitą*

$$\frac{f'(x)}{x^m}=\varphi(x)$$

i przypuściwszy, że dwie liczby dowolnie wzięte, a i $a+h$, są jednakowego znaku, mieć będziemy równość:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{(a+h)^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\varphi(a)$$
$$+\frac{(a+h)^{m+1}[(m+1)h-a]+a^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\varphi'(a+\theta h),$$

w której θ oznacza pewną liczbę dodatną, mniejszą od jedności. Jedna z liczb: a, $a+h$ może być zerem.

Ażeby tego dowieść, nazwijmy uprzednio

$$\frac{(m+1)[f(a+h)-f(a)]-[(a+h)^{m+1}-a^{m+1}]\varphi(a)}{(a+h)^{m+1}[(m+1)h-a]+a^{m+2}}=\frac{\mathrm{A}}{m+2}.$$

Zauważmy tu, że A nie może się stawać nieskończenie wielkim. Istotnie, jeżeliby

$$(a+h)^{m+1}[(m+1)h-a]+a^{m+2}=0,$$

to równanie

$$(a+x)^{m+1}[(m+1)x-a]+a^{m+2}=0$$

miałoby dwa pierwiastki: $x=0$, $x=h$; a więc, równanie pochodne

$$(m+1)(m+2)x(a+x)^m=0$$

miałoby jeden pierwiastek, $x=\lambda h$, zawarty między 0 i h, i mielibyśmy

$$a+\lambda h=0.$$

Stąd zaś, zważywszy, że λ oznacza liczbę dodatną, mniejszą od jedności, otrzymujemy

$$\frac{a+h}{a}=1-\frac{1}{\lambda}<0,$$

co się sprzeciwia założeniu, że a i $a+h$ są jednakowego znaku.

Weźmy pod uwagę funkcyją całkowitą

$$f(a+x)-f(a)-\frac{(a+x)^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\varphi(a)$$
$$-\frac{A}{(m+1)(m+2)}\Big[(a+x)^{m+1}[(m+1)x-a]+a^{m+2}\Big].$$

Posiada ona dwa pierwiastki: $x=0$, $x=h$; funkcyja więc pochodna

$$f'(a+x)-(a+x)^m\varphi(a)-Ax(a+x)^m,$$

czyli funkcyja

$$(a+x)^m[\varphi(a+x)-\varphi(a)-Ax],$$

posiada jeden pierwiastek, $x=\lambda h$, zawarty między 0 i h. A gdy $a+\lambda h$ nie może równać się zeru, przeto

$$\varphi(a+\lambda h)-\varphi(a)-A\lambda h=0.$$

Stąd zaś wyprowadzamy

$$A=\frac{\varphi(a+\lambda h)-\varphi(a)}{\lambda h},$$

czyli

$$A=\varphi'(a+\theta h),$$

gdzie θ oznacza pewną liczbę dodatną, mniejszą od jedności. Wstawiając tu zamiast litery A to, co ona wyraża, otrzymamy żądaną równość.

115. Twierdzenie. *Mając funkcyją całkowitą $f(x)$, której pochodna $f'(x)$ jest podzielna przez x^m, przy m całkowitym i dodatnym, oznaczmy*

$$\frac{f'(x)}{x^m}=\varphi(x).$$

Jeżeli a i $b>a$ są liczbami jednakowego znaku, a funkcyja pochodna $f'(x)$ nie zmienia swego znaku od $x=a$ do $x=b$, i jeżeli, prócz tego, równanie początkowe $f(x)=0$ posiada między a i b dwa pierwiastki różne, albo jeden pierwiastek wielokrotności parzystéj, to wówczas ma miejsce nierówność:

$$\text{wart. bezw. }\frac{f(a)}{\varphi(a)}+\text{wart. bezw. }\frac{f(b)}{\varphi(b)}<\text{wart. bezw. }\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

Ażeby tego dowieść, weźmy pod uwagę równość, dowiedzioną w art. poprzedzającym,

$$f(a+h)=f(a)+\frac{(a+h)^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\varphi(a)$$
$$+\frac{(a+h)^{m+1}[(m+1)h-a]+a^{m+2}}{(m+1)(m+2)}\varphi'(a+\theta h),$$

i zauważmy, że dwumian

$$(a+h)^{m+1}[(m+1)h-a]+a^{m+2},$$

rozważany, jako funkcyja całkowita zmiennéj h, ma taką pochodną:

$$(m+1)(m+2)h(a+h)^m.$$

Wskutek tego, gdy przez λ oznaczymy pewną liczbę dodatną, mniejszą od jedności, możemy, posiłkując się wzorem Lagrange'a, napisać

$$(a+h)^{m+1}[(m+1)h-a]+a^{m+2}=(m+1)(m+2)\lambda h^2(a+\lambda h)^m.$$

Z tego wynika, że równość poprzedzającą możemy tak przedstawić:

$$(1)\quad f(a+h)=f(a)+\frac{(a+h)^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\varphi(a)+\lambda h^2(a+\lambda h)^m\varphi'(a+\theta h).$$

Oznaczywszy przez α i $\beta \geq \alpha$ dwa pierwiastki równania $f(x)=0$, zawięrające się między a i b, podstawmy we wzorze (1) zamiast h różnicę $\alpha-a$; otrzymamy

$$0=f(a)+\frac{\alpha^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\varphi(a)+\lambda(\alpha-a)^2(a+\lambda(\alpha-a))^m\varphi'(a+\theta(\alpha-a)).$$

Podstawiając następnie w (1) b zamiast a i kładąc $h=\beta-b$, otrzymamy

$$0=f(b)+\frac{\beta^{m+1}-b^{m+1}}{m+1}\varphi(b)+\lambda'(\beta-b)^2(b+\lambda'(\beta-b))^m\varphi'(b+\theta'(\beta-b)).$$

Dwa równania ostatnie możemy napisać tak:

$$(2)\left\{\begin{aligned}\frac{\alpha^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}&=-\frac{f(a)}{\varphi(a)}-\lambda(\alpha-a)^2(a+\lambda(\alpha-a))^m\frac{\varphi'(a+\theta(\alpha-a))}{\varphi(a)},\\ \frac{b^{m+1}-\beta^{m+1}}{m+1}&=\frac{f(b)}{\varphi(b)}+\lambda'(\beta-b)^2(b+\lambda'(\beta-b))^m\frac{\varphi'(b+\theta'(\beta-b))}{\varphi(b)}\end{aligned}\right.$$

gdzie λ, λ', θ, θ' oznaczają pewne liczby dodatne, mniejsze od jedności.

W tych równaniach wyrazy drugie na stronie prawéj nie mogą równać się zeru. Jeżeli bowiem przypuścimy, że

$$\varphi'(a+\theta(\alpha-a))=0,$$

to mielibyśmy

$$f(a)+\frac{\alpha^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\varphi(a)=0,$$

a równanie

$$f(x)-f(a)-\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\varphi(a)=0$$

miałoby wówczas dwa pierwiastki: $x=a$, $x=\alpha$; a zatym, równanie pochodne

$$f'(x)-x^m\varphi(a)=0,$$

czyli równanie

$$\varphi(x)-\varphi(a)=0$$

miałoby jeden pierwiastek między a i b. A gdy ono posiada pierwiastek $x=a$, to równanie pochodne

$$\varphi'(x)=0$$

miałoby między a i b jeden pierwiastek wielokrotności nieparzystéj, co być nie może, gdyż funkcyja $\varphi'(x)$, według założenia, nie zmienia swego znaku od $x=a$ do $x=b$. Taksamo możemy się przekonać, że wartość $\varphi'(b+\theta'(\beta-b))$ jest różna od zera.

Zgodnie z założeniami twierdzenia, w każdym z równań (2) dwa wyrazy na stronie prawéj są jednakowego znaku. Dlatego mamy:

$$\text{wart. bezw. } \frac{\alpha^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} > \text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{\varphi(a)},$$

$$\text{wart. bezw. } \frac{b^{m+1}-\beta^{m+1}}{m+1} > \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{\varphi(b)}.$$

Stąd zaś, dodając i zważając, że suma

$$\text{wart. bezw. } \frac{\alpha^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} + \text{wart. bezw. } \frac{b^{m+1}-\beta^{m+1}}{m+1}$$

nie jest większa od wartości bezwzględnéj ułamka

$$\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1},$$

otrzymamy

$$\text{wart. bezw. } \frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1} > \text{wart. bezw. } \frac{f(a)}{\varphi(a)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(b)}{\varphi(b)},$$

c. n. d.

116. Przykład 1. Oddzielmy od siebie pierwiastki równania

$$1484x^5 - 441x^4 - 18x^3 + 1161x^2 - 243 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 1484x^5 - 441x^4 - 18x^3 + 1161x^2 - 243,$$
$$\varphi(x) = 2(3710x^3 - 882x^2 - 27x + 1161),$$

otrzymamy następującą tablicę znaków:

x	f	φ	φ'	φ''	φ'''
1	+	+	+	+	+
0,1	—	+	—	+	+
0	—	+	—	—	+

Z niéj widoczna, że jeżeli dane równanie ma pierwiastki dodatne, to wszystkie one zawiérają się między 1 i 0,1.

Dla tego przedziału mamy grupę wskaźników:

$$3,\ 2,\ 1,\ 0,\ 0.$$

Należy się tylko dowiedziéć, czy równanie $\varphi(x) = 0$ posiada pierwiastki między 1 i 0,1. W tym celu, obliczamy

$$\text{wart. bezw. } \frac{\varphi(0,1)}{\varphi'(0,1)} = \frac{1153,19}{92,1}.$$

Ponieważ ta wartość jest większa od 1, przeto

$$\text{wart. bezw. } \frac{\varphi(0,1)}{\varphi'(0,1)} + \text{wart. bezw. } \frac{\varphi(1)}{\varphi'(1)} > 1 - 0,1.$$

A zatym, równanie $\varphi(x) = 0$ między 0,1 i 1 nie ma pierwiastka.

Ograniczając się tylko do dwu funkcyj,

$$f(x), \quad \varphi(x),$$

otrzymujemy dla przedziału 0,1, 1 następującą grupę wskaźników:

$$1, \quad 0;$$

skąd wnosimy, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko jeden pierwiastek dodatny, pojedyńczy. —

Ażeby oddzielić pierwiastki ujemne równania $f(x) = 0$, wyznaczamy znaki funkcyj

$$f(x), \quad -\varphi(x), \quad -\varphi'(x), \quad -\varphi''(x), \quad -\varphi'''(x)$$

dla $x = 0, -1, -0,5, \ldots$ i otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	f	$-\varphi$	$-\varphi'$	$-\varphi''$	$-\varphi'''$
0	—	—	+	+	—
— 0,5	—	—	—	+	—
— 0,6	+				
— 1	—	+	—	+	—

Stąd widoczna, że równanie $f(x) = 0$ ma tylko dwa pierwiastki ujemne: jeden zawarty między $-0,5$ i $-0,6$, drugi zaś między $-0,6$ i -1.

117. Przykład 2. Weźmy równanie

$$4x^5 + 5x^4 - 30x^2 + 23 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 4x^5 + 5x^4 - 30x^2 + 23,$$
$$\varphi(x) = 20(x^3 + x^2 - 3),$$

mamy tu

$$\varphi'(x) = 20x(3x + 2).$$

Funkcyja $\varphi'(x)$ raz tylko zmienia swój znak, mianowicie przy przejściu zmiennéj x przez wartość $-\frac{2}{3}$; możemy przeto ograniczyć się do grupy trzech funkcyj: $f(x)$, $\varphi(x)$, i $\varphi'(x)$, stosując kolejno sposób Fourier'go do trzech przedziałów:

$$+\infty, 0; \quad 0, -\frac{2}{3}; \quad \frac{2}{3}, -\infty.$$

Z tablicy

x	f	φ	φ'
$\frac{5}{4}$	+	+	+
1	+	—	+
0	+	—	+

widzimy, że dane równanie albo wcale nie ma pierwiastków dodatnych, albotéż ma ich dwa, a wówczas zawiérają się one między 1 i $\frac{5}{4}$. Ponieważ dla przedziału 1, $\frac{5}{4}$ mamy grupę wskaźników:

$$2,\ 1,\ 0,$$

więc możemy tu stosować twierdzenie art. 115-go. Obliczywszy

$$f\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{69}{128},\quad f(1)=2,$$

$$\varphi\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{165}{16},\quad \varphi(1)=-20,$$

mamy

$$\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{\varphi\left(\frac{5}{4}\right)}+\text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)}=\frac{67}{440}.$$

Mamy zaś tu

$$\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}{2}=\frac{9}{32},$$

a więc

$$\text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{5}{4}\right)}{\varphi\left(\frac{5}{4}\right)}+\text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)}<\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1}{2}.$$

Widzimy przeto, że należy przedział 1, $\frac{5}{4}$ dzielić na przedziały mniejsze.

Dla przedziału $1\frac{3}{20}$, $1\frac{2}{10}$ znajdujemy

x	f	φ	φ'
1,2	+	+	+
1,15	+	—	+

$$f(1{,}15)=0{,}11546,\quad \varphi(1{,}15)=-3{,}1325$$

$$\frac{(1{,}2)^2-(1{,}15)^2}{2}=0{,}05875$$

$$f(1{,}2)=0{,}12128,\quad \varphi(1{,}2)=3{,}36;$$

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(1{,}15)}{\varphi(1{,}15)}+\text{wart. bezw. } \frac{f(1{,}2)}{\varphi(1{,}2)}>0{,}05875.$$

A więc, równanie wcale nie ma pierwiastków dodatnych.

Posiada ono jeden tylko pierwiastek ujemny, zawarty między 0 i -1; jest to widoczne z następującéj tablicy:

x	f	$-\varphi$	$-\varphi'$
0	$+$	$+$	$+$
$-\frac{2}{3}$	$+$	$+$	$\underline{0}$
-1	$-$	$+$	$-$
$-\infty$	$-$	$+$	$-$

118. Przykład 3. Weźmy równanie

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 11 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 11,$$
$$\varphi(x) = 15x^2 + 28x - 24,$$

utworzymy następującą tablicę:

x	f	φ	φ'	φ''
1	$+$	$+$	$+$	$+$
0	$+$	$-$	$+$	$+$
-1	$+$	$-$	$-$	$+$
-2	$+$	$-$	$-$	$+$
-3	$+$	$+$	$-$	$+$
-4	$-$	$+$	$-$	$+$

Z niéj widoczna, że równanie dane ma jeden tylko pierwiastek ujemny, zawarty między -3 i -4.

Co się zaś tyczy pierwiastków dodatnych, to należy szukać ich tylko w przedziale między 0 i 1, dla którego otrzymujemy taką grupę wskaźników:

$$2,\quad 1,\quad 0,\quad 0.$$

A gdy

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{\varphi(0)} = \frac{11}{24},$$
$$\frac{1^3 - 0^3}{3} = \frac{1}{3},$$

to

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(0)}{\varphi(0)} + \text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} > \frac{1^3 - 0^3}{3},$$

co wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ nie ma pierwiastków dodatnych.

119. Przykład 4. Weźmy równanie

$$5x^6 - 37x^5 + 50x^4 - 104 = 0.$$

Kładąc

$$f(x) = 5x^6 - 37x^5 + 50x^4 - 104,$$

$$\varphi(x) = 5(6x^2 - 37x + 40).$$

utworzymy tablicę

x	f	φ	φ'	φ''
6	+	+	+	+
5	—	+	+	+
2	—	—	—	+
$\frac{3}{2}$	—	—	—	+
1	—	+	—	+
0	—	+	—	+

Widzimy z niéj, że równanie $f(x) = 0$ w przedziale 5, 6 ma jeden pierwiastek; inne pierwiastki dodatne, jeżeli one istnieją, powinny się zawiérać między 1 i $\frac{3}{2}$.

Dla przedziału 1, $\frac{3}{2}$ grupa wskaźników jest następująca:

$$2, \quad 1, \quad 0, \quad 0.$$

Ponieważ

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} = \frac{86}{45},$$

i

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1^4}{4} = \frac{65}{64},$$

więc

$$\text{wart. bezw. } \frac{f(1)}{\varphi(1)} + \text{wart. bezw. } \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{\varphi\left(\frac{3}{2}\right)} > \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1^4}{4}.$$

To wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ wcale nie ma pierwiastków między 1 i $\frac{3}{2}$.

Następująca zaś tablica wskazuje, że równanie $f(x) = 0$ ma jeden tylko pierwiastek ujemny

x	f	$-\varphi$	$-\varphi'$	$-\varphi''$
0	—	—	+	—
$-\infty$	+	—	+	—

Ponieważ $f(-1) < 0$, $f(-2) > 0$, przeto pierwiastek ujemny znajduje się między -1 i -2.

§ VII. TWIERDZENIE SYLVESTER'A.

120. Twierdzenie Sylvester'a, podobnie jak twierdzenie Budan'a, daje kraniec wyższy dla ilości pierwiastków równania $f(x)=0$, zawartych w danym przedziale.

Dowodzenie tego twierdzenia zasadza się na rozumowaniu podobnym do tego, jakim posiłkowaliśmy się przy dowodzeniu twierdzenia Budan'a: potrzeba tylko wziąć pod uwagę, oprócz już wiadomych własności funkcyj Fourier'go,

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots, f^{(n)}(x),$$

jeszcze odpowiednie im własności funkcyj

$$S(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\ldots, S^n(x),$$

określonych w ten sposób:

$$\begin{aligned} S(x) &= f(x)^2, \\ S_1(x) &= f'(x)^2 - k_1 f(x) f''(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_i(x) &= f^{(i)}(x)^2 - k_i f^{(i-1)}(x) f^{(i+1)}(x), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n(x) &= f^{(n)}(x)^2, \end{aligned}$$

gdzie n oznacza stopień danego równania $f(x)=0$, a $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ są liczbami stałymi, które określa wzór

$$k_i = \frac{n'-i+1}{n'-i},$$

gdzie litera n' oznacza dowolnie wziętą liczbę dodatną $\geqq n$. Własności funkcyj $S_i(x)$, które niezbędnie potrzeba przyjąć pod uwagę, wyrażają następujące trzy twierdzenia.

121. Twierdzenie pomocnicze 1. *Jeżeli dla $x=a$ mamy*

$$f^{(p)}(a) = f^{(p+1)}(a) = \ldots = f^{(p+m-1)}(a) = 0,$$

i obie wartości $f^{(p-1)}(a)$ i $f^{(p+m)}(a)$ są różne od zera, to, przy dostatecznie małych wartościach h, znak wartości $S_p(a+h)$ jest takiż, jak znak iloczynu $-h^{m-1}$ przez $f^{(p-1)}(a)\,f^{(p+m)}(a)$.

Jakoż, wskutek założenia, mamy równości:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(a+h) &= \frac{h^m}{1.2.3\ldots m} f^{(p+m)}(a) + \ldots, \\ f^{(p-1)}(a+h) &= f^{(p-1)}(a) + \ldots, \\ f^{(p+1)}(a+h) &= \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} f^{(p+m)}(a) + \ldots, \end{aligned}$$

których strony prawe są uporządkowane według potęg rosnących h. Wprowadzając te wyrażenia do strony prawéj wzoru

$$S_p(a+h) = f^{(p)}(a+h)^2 - k_p f^{(p-1)}(a+h) f^{(p+1)}(a+h)$$

i porządkując je następnie według potęg rosnących h, będziemy mieli

$$S_p(a+h) = -k_p \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} f^{(p-1)}(a) f^{(p+m)}(a) + \ldots.$$

Przy dostatecznie małych wartościach h, strona prawa jest tu tegoż samego znaku, co piérwszy jéj wyraz, a więc znak wartości $S_p(a+h)$ jest takiż, jak znak iloczynu $-h^{m-1} f^{(p-1)}(a) f^{(p+m)}(a)$, gdyż wszystkie liczby $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ są dodatne.

122. Twierdzenie pomocnicze 2. *Jeżeli przy* $x = a$ *jest*

$$f^{(p-1)}(a) = f^{(p)}(a) = \ldots = f^{(p+m-1)}(a) = 0,$$

a wartość $f^{(p+m)}(a)$, $(m \geqq 1)$, *nie równa się zeru, to, przy dostatecznie małych wartościach* h, *każda z grupy wartości*

$$S_p(a+h),\quad S_{p+1}(a+h), \ldots, S_{p+m-1}(a+h)$$

jest dodatna.

Wskutek bowiém założenia, mamy

$$f^{(p-1)}(a+h) = \frac{h^{m+1}}{1.2\ldots(m+1)} f^{(p+m)}(a) + \ldots,$$

$$f^{(p)}(a+h) = \frac{h^m}{1.2\ldots m} f^{(p+m)}(a) + \ldots,$$

$$f^{(p+1)}(a+h) = \frac{h^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} f^{(p+m)}(a) + \ldots,$$

gdzie strony prawe są uporządkowane według potęg rosnących h. Wprowadzając te wyrażenia do strony prawéj wzoru

$$S_p(a+h) = f^{(p)}(a+h)^2 - k_p f^{(p-1)}(a+h) f^{(p+1)}(a+h),$$

i porządkując je następnie według potęg rosnących h, znajdziemy

$$(1)\qquad S_p(a+h) = \frac{(n'-m-p)\,h^{2m}}{(1.2\ldots m)^2 (m+1)(n'-p)} f^{(p+m)}(a)^2 + \ldots$$

Stąd widzimy, że, przy dostatecznie małych wartościach h, wartość $S_p(a+h)$ jest dodatna, gdyż $n' \geqq n \geqq m+p$. To zaś, czegośmy dowiedli o $S_p(a+h)$, oczywiście stosuje także do $S_{p+1}(a+h)$, $S_{p+2}(a+h), \ldots$, aż do $S_{p+m-1}(a+h)$ włącznie. Twierdzenie więc nasze jest udowodnione.

Uwaga. Przypadek szczególny, kiedy $n' = n$ i $m+p = n$, zasługuje na osobne omówienie. Wzór (1) wskazuje, że wówczas wartość $S_p(a+h)$, a tymsamym i funkcyja $S_p(x)$, są tożsamościowo równe zeru. Również wszystkie funkcyje pozostałe: $S_{p+1}(x)$, $S_{p+2}(x), \ldots$, aż do funkcyi $S_{n-1}(x)$ włącznie, stają się tożsamościowo równymi zeru. W zastosowaniach unika się zawsze tego przypadku przez powiększenie wartości parametru n'.

123. Twierdzenie pomocnicze 3. *Jeżeli przy* $x=a$ *mamy*

$$S_p(a)=S_{p+1}(a)=\ldots=S_{p+m-1}(a)=0,$$

a wartości $S_{p-1}(a)$, $S_{p+m}(a)$ *są różne od zera, i jeżeli ani jedna z wartości*

$$f^{(p)}(a),\quad f^{(p+1)}(a),\ldots,f^{(p+m-1)}(a)$$

nie jest równa zeru, to, przy dostatecznie małych wartościach h *i przy wszelkich wartościach* i *od* 0 *do* $m-1$ *włącznie, wartość*

$$S_{p+i}(a+h)$$

jest tegoż samego znaku, co iloczyn

$$h^{m-i}f^{(p+i)}(a)\,f^{(p+m)}(a)\,S_{p+m}(a).$$

Weźmy tu pod uwagę grupę funkcyj $\varphi_{i,r}$, określonych w ten sposób:

a). jeżeli $i+r\leqq n$, to

$$\varphi_{i,r}=f^{(i+1)}(x)^r f^{(i+2)}(x)^{r-1}\ldots f^{(i+r)}(x);$$

b). jeżeli $i+r\geqq n$, to

$$\varphi_{i,r}=f^{(i+1)}(x)^r f^{(i+2)}(x)^{r-1}\ldots f^{(n)}(x)^{i+r+1-n}$$

Oczywiście, mamy

$$\varphi'_{i,r}=\varphi_{i,r-1}\,\varphi,$$

gdzie φ oznacza pewną funkcyją całkowitą. Prócz tego, oznaczmy przez $\psi_{i,r}$ taką funkcyją całkowitą:

$$\psi_{i,r}=\frac{\varphi_{i,r}}{f^{(i+r)}(x)}f^{(i)}(x).$$

Pochodna r-go rzędu funkcyi $S_i(x)$ wyraża się zapomocą wzoru takiéj postaci:

$$(1)\quad \varphi_{i,r}S_i^{(r)}(x)=U_0S_i(x)+U_1S_{i+1}(x)+\ldots+U_{r-1}S_{i+r-1}(x)+$$
$$+\frac{\psi_{i,r}}{k_{i+1}k_{i+2}\ldots k_{i+r}}S_{i+r}(x),$$

gdzie U_0, $U_1,\ldots$ oznaczają pewne funkcyje całkowite; przyjmujemy zaś, że $i+r\leqq n$. — Dowiedziemy naprzód, że wzór (1) ma miejsce w najprostszym przypadku, kiedy $r=1$. W tym celu, rozwinąwszy obie strony równania

$$S_i(x+h)=f^{(i)}(x+h)^2-k_if^{(i-1)}(x+h)f^{(i+1)}(x+h)$$

na szeregi według potęg rosnących litery h, przyrównajmy do siebie spółczynniki piérwszéj potęgi h; otrzymamy

$$S'_i(x)=2f^{(i)}(x)f^{(i+1)}(x)-k_i\left[f^{(i-1)}(x)f^{(i+2)}(x)+f^{(i)}(x)f^{(i+1)}(x)\right].$$

Stąd zaś, zważając, że

$$2-k_i=\frac{1}{k_{i+1}},$$

wyprowadzamy

$$S'_i(x) = -k_i f^{(i-1)}(x) f^{(i+2)}(x) + \frac{f^{(i)}(x) f^{(i+1)}(x)}{k_{i+1}},$$

czyli

$$S'_i(x) = \frac{f^{(i+2)}(x)}{f^{(i+1)}(x)} S_i(x) + \frac{f^{(i)}(x)}{k_{i+1} f^{(i+1)}(x)} S_{i+1}(x).$$

Mnożąc obie strony ostatniéj równości przez $f^{(i+1)}(x)$, otrzymamy

$$f^{(i+1)}(x) S'_i(x) = f^{(i+2)}(x) S_i(x) + \frac{f^{(i)}(x)}{k_{i+1}} S_{i+1}(x),$$

co, oczywiście, jest zgodne ze wzorem (1). — Przypuszczając, że wzór (1) ma miejsce dla pewnéj wartości szczególnéj r, a przy wszelkich wartościach i, dowiedziemy, że ma on również miejsce dla następującéj wartości r, o jedność większéj. Podstawiwszy w obu stronach wzoru (1) $x+h$ zamiast x, a następnie, rozwinąwszy obie strony na szeregi według potęg h, przyrównajmy do siebie spółczynniki piérwszéj potęgi h; otrzymamy stąd równość:

$$\begin{aligned} \varphi_{i,r} S_i^{(r+1)}(x) + \varphi'_{i,r} S_i^{(r)}(x) = {} & U_0' S_i(x) + U_0 S_i'(x) \\ & + U_1' S_{i+1}(x) + U_1 S'_{i+1}(x) \\ & + \ldots\ldots\ldots \\ & + U'_{r-1} S_{i+r-1}(x) + U_{r-1} S'_{i+r-1}(x) \\ & + \frac{\psi'_{i,r}}{k_{i+1}\ldots k_{i+r}} S_{i+r}(x) + \frac{\psi_{i,r}}{k_{i+1}\ldots k_{i+r}} S'_{i+r}(x). \end{aligned}$$

Mnożąc obie jéj strony przez

$$F = f^{(i+1)}(x) f^{(i+2)}(x) \ldots f^{(i+r+1)}(x)$$

i zważając, że każdy z wyrazów

$$U_0 F S'_i(x),\quad U_1 F S'_{i+1}(x), \ldots, U_{r-1} F S'_{i+r-1}(x),$$

również jak i wyraz

$$F\varphi'_{i,r} S_i^{(r)}(x) = \varphi\varphi_{i,r} S_i^{(r)}(x) f^{(i+r+1)}(x),$$

mogą być przedstawione w postaci wielomianu

$$AS_i(x) + A_1 S_{i+1}(x) + \ldots + A_r S_{i+r}(x),$$

w którym $A, A_1, \ldots$ oznaczają funkcyje całkowite (niektóre z nich mogą być równe zeru), i że, prócz tego,

$$\frac{F\psi_{i,r}}{k_{i+1}\ldots k_{i+r}} S'_{i+r}(x) = BS_{i+r}(x) + \frac{\psi_{i,r+1}}{k_{i+1}\ldots k_{i+r+1}} S_{i+r+1}(x),$$

gdzie B oznacza pewną funkcyją całkowitą, otrzymamy równość, która, po uporządkowaniu wyrazów, przyjmie postać:

$$\varphi_{i,r+1} S_i^{(r+1)}(x) = U_0 S_1(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \ldots + U_r S_{i+r}(x) + \frac{\psi_{i,r+1}}{k_{i+1}\ldots k_{i+r+1}} S_{i+r+1}(x);$$

gdzie $U_0, U_1, \ldots$ oznaczają pewne funkcyje całkowite. Jest to wzór (1), w którego obu stronach zamiast r znajduje się $r+1$. — Ma więc wzór (1) miejsce przy wszelkich wartościach r, pod warunkiem, aby $i+r \leq n$.

Kiedy $i+r > n$, to zamiast wzoru (1) mamy

(2) $$\varphi_{i,r} S_i^{(r)}(x) = U_0 S_i(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \ldots + U_{n-i} S_n(x).$$

Szczególnéj zaś uwagi wymaga przypadek, kiedy $n'=n$, gdyż wówczas $k_n = \infty$, a ze wzoru (1) otrzymujemy

$$\varphi_{i,n-i} S_i^{(n-1)}(x) = U_0 S_i(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \ldots + U_{n-i-1} S_{n-1}(x).$$

Stąd wnosimy, że przy wszelkich wartościach r, czyniących zadość warunkowi $i+r \geq n$, ma miejsce wzór

(3) $$\varphi_{i,r} S_i^{(r)}(x) = U_0 S_i(x) + U_1 S_{i+1}(x) + \ldots + U_{n-i-1} S_{n-1}(x),$$

w którym $U_0, U_1, \ldots$ oznaczają pewne funkcyje całkowite.

Przechodząc do udowodnienia wypowiedzianego twierdzenia, uprzednio zestawimy wypowiedziane założenia, a mianowicie:

a. wszystkie liczby grupy

$$S_p(a), \quad S_{p+1}(a), \ldots, S_{p+m-1}(a)$$

są równe zeru,

b. żadna z liczb $S_{p-1}(a)$, $S_{p+m}(a)$ nie równa się zeru,

c. ani jedna z liczb grupy

$$f^{(p)}(a), \quad f^{(p+1)}(a), \ldots, f^{(p+m-1)}(a)$$

nie równa się zeru. Oczywiście, że również żadna z liczb $f^{(p-1)}(a)$, $f^{(p+m)}(a)$ nie może równać się zeru, gdyż, w razie przeciwnym, wartość $S_{p-1}(a)$ albo $S_{p+m}(a)$ równałaby się zeru, co się sprzeciwia założeniu.

Kładąc we wzorze (1) $x=a$, $i=p$, $r=1, 2, \ldots, m$, otrzymamy

$$S'_p(a) = S''_p(a) = \ldots = S_p^{(m-1)}(a) = 0,$$

$$S_p^{(m)}(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{k_{p+1}\, k_{p+2} \ldots k_{p+m} f^{(p+m)}(a)} S_{p+m}(a).$$

Stąd wnosimy, że w rozwinięciu funkcyi $S_p(a+h)$ według wzrastających potęg zmiennéj h piérwszym wyrazem jest:

$$S_p(a+h) = \frac{h^m}{1.2\ldots m} \frac{f^{(p)}(a)}{k_{p+1} \ldots k_{p+m} f^{(p+m)}(a)} S_{p+m}(a) + \ldots$$

Możemy w obu stronach tego wzoru, oznaczywszy przez i którąkolwiek z liczb $0, 1, 2, \ldots, m-1$, jednocześnie wstawić $p+i$ zamiast p, a $m-i$ zamiast m:

$$S_{p+i}(a+h) = \frac{h^{m-i}}{1.2\ldots(m-i)} \frac{f^{(p+i)}(a)}{k_{p+i+1} \ldots k_{p+m} f^{(p+m)}(a)} S_{p+m}(a) + \ldots;$$

skąd widoczna, że przy dostatecznie małych wartościach h, wartość $S_{p-i}(a+h)$ jest tegoż samego znaku, co iloczyn $h^{m-i} f^{(p+i)}(a) f^{(p+m)}(a) S_{p+m}(a)$, c. n. d.

Uwaga. W przypadku szczególnym, kiedy $n'=n$, $m+p=n$, oczywiście mamy

$$S'_p(a)=S''_p(a)=\ldots=S_p^{(m)}(a)=0.$$

Prócz tego, przy pomocy wzoru (3) przekonywamy się, że dla wartości $r>m$ mamy

$$S_p^{(r)}(a)=0.$$

A więc, w przypadku owym, funkcyja $S_p(x)$ jest tożsamościowo równa zeru. Dla téjże przyczyny, każda z funkcyj następujących: $S_{p+1}(x),\ldots,S_{n-1}(x)$ staje się tożsamościowo równą zeru. Ażeby uniknąć tego przypadku dość jest powiększyć nieco parametr n'.

124. Utworzymy dwie grupy funkcyj:

$$f(x),\ f'(x),\ f''(x),\ldots,f^{(n)}(x);$$
$$S(x),\ S_1(x),\ S_2(x),\ldots,S_n(x),$$

jednę ze wszystkich funkcyj Fourier'go, drugą zaś ze wszystkich funkcyj Sylvester'a, i, przypuściwszy, że zmiennéj x nadaliśmy jakąkolwiek wartość, nie przywodzącą do zera żadnéj z funkcyj $f(x)$, $f'(x),\ldots,S(x)$, $S_1(x),\ldots$, zwrócimy uwagę na znaki dwu którychkolwiek wyrazów sąsiednich w piérwszéj grupie, np. wyrazów $f(x)$ i $f'(x)$, i na znaki dwu odpowiadających im wyrazów $S(x)$ i $S_1(x)$ w drugiéj grupie. Mogą tu miéć miejsce następujące cztéry przypadki:

a. wyrazy $f(x)$, $f'(x)$ przedstawiają zmianę znaku i wyrazy $S(x)$, $S_1(x)$ również zmianę znaku;

b. wyrazy $f(x)$, $f'(x)$ przedstawiają powtórzenie znaku i wyrazy $S(x)$, $S_1(x)$ również powtórzenie znaku;

c. wyrazy $f(x)$, $f'(x)$ przedstawiają powtórzenie znaku, a wyrazy $S(x)$ $S_1(x)$ zmianę znaku;

d. wyrazy $f(x)$, $f'(x)$ przedstawiają zmianę znaku, a wyrazy $S(x)$, $S_1(x)$ powtórzenie znaku.

Przypadek piérwszy będziemy nazywali podwójnym powtórzeniem znaku; drugi podwójną zmianą znaku; trzeci powtórzeniem ze zmianą znaku; czwarty zmianą z powtórzeniem znaku. Rozważając wyrazy

$$f'(x),\ f''(x);$$
$$S_1(x),\ S_2(x),$$

następnie wyrazy

$$f''(x),\ f'''(x);$$
$$S_2(x),\ S_3(x)$$

i tak daléj, nakoniec wyrazy

$$f^{(n-1)}(x),\ f^{(n)}(x);$$
$$S_{n-1}(x),\ S_n(x),$$

za każdym razem będziemy mieli do zauważenia jeden z powyższych cztérech przypadków i porachujemy, ile razy każdy z nich się powtórzy.

Twierdzenie. *Mając dane równanie stopnia n-tego,* $f(x) = 0$, *i kładąc*

$$S(x) = f(x)^2;$$
$$S_i(x) = f^{(i)}(x)^2 - k_i f^{(i-1)}(x) f^{(i+1)}(x),$$
$$k_i = \frac{n' - i + 1}{n' - i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$
$$S_n(x) = f^{(n)}(x)^2,$$

gdzie n' *oznacza liczbę dowolną, nie mniejszą od* n, *ułożymy dwie grupy funkcyj.*

$$(1)\left\{\begin{array}{l} f(x),\ f'(x),\ f''(x), \ldots, f^{(n)}(x); \\ S(x),\ S_1(x),\ S_2(x), \ldots, S_n(x), \end{array}\right.$$

i zapomocą $(\mathrm{PP})_x$, $(\mathrm{VP})_x$ *przedstawimy ilość podwójnych powtórzeń znaku i ilość zmian z powtórzeniem znaku w* (1). *Jeżeli* a *i* $b > a$ *są dwiema dowolnie wziętymi liczbami, nie przywodzącymi do zera żadnéj z funkcyj w grupach* (1), *to, oznaczając przez* r *ilość pierwiastków równania* $f(x) = 0$, *zawartych między* a *i* b, *będziemy mieli*

$$(\mathrm{PP})_b - (\mathrm{PP})_a = r + 2h,$$
$$(\mathrm{VP})_a - (\mathrm{VP})_b = r + 2l,$$

gdzie każda z liter h, l *oznacza liczbę całkowitą i dodatną, albo zero.*

Dowodzenie tego twierdzenia sprowadza się do prostego sprawdzenia go zapomocą twierdzeń pomocniczych, wyłożonych w trzech artykułach poprzedzających, i podobnie, jak przy dowodzeniu twierdzenia Budan'a, dość jest ograniczyć się do przypuszczenia, że między krańcami a i b istnieje jedna tylko liczba c, przywodząca do zera przynajmniéj jednę z funkcyi w grupach (1).

Można, co do téj liczby c, uczynić kilka przypuszczeń, które wypada oddzielnie zbadać.

Przypuśćmy, że przy $x = c$ mamy

$$S_p(c) = S_{p+1}(c) = \ldots = S_{p+m-1}(c) = 0, \quad (p > 0),$$

i że żadna inna z funkcyj (1) nie staje się zerem. W tym przypadku grupa

$$f^{(p-1)}(c),\ f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m-1)}(c),\ f^{(p+m)}(c)$$

zawiéra albo same tylko powtórzenia znaku, albo same tylko zmiany znaku.

Oznaczając przez h liczbę dodatną nieskończenie małą, zauważymy, że znaki funkcyj (1) przy $x = a$ są też same, co przy $x = c - h$, a przy $x = b$ też same, co przy $x = c + h$; według założenia bowiém, żadnéj z funkcyj (1) nie przywodzi do zera wartość zmiennéj x, zawarta między a i b, a różna od liczby c. A więc, zamiast wyznaczać znaki funkcyj (1) przy $x = a$ i przy $x = b$, możemy je wyznaczać przy $x = c - h$ i przy $x = c + h$.

Oprócz tego, zamiast dwu grup (1) możemy wziąć następujące:

$$(2)\left\{\begin{array}{l} f^{(p-1)}(x),\ f^{(p)}(x), \ldots, f^{(p+m-1)}(x),\ f^{(p+m)}(x); \\ S_{p-1}(x),\ S_p(x), \ldots, S_{p+m-1}(x),\ S_{p+m}(x); \end{array}\right.$$

gdyż każdy z wyrazów opuszczonych jest tegoż samego znaku dla $x = a$, co dla $x = b$, i dlatego nie ma wpływu na wartości różnic $(PP)_b - (PP)_a$ lub $(VP)_a - (VP)_b$. Na zasadzie twierdzenia art. 123-go i na mocy przypuszczenia, że żadna z wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m-1)}(c), f^{(p+m)}(c)$ nie jest równa zeru, wnosimy, że przy $x = c - h$ znaki funkcyj (2) wyznaczają odpowiednio znaki wartości następujących:

$$\begin{array}{l} f^{(p-1)}(c), \ldots, \qquad f^{(p+i)}(c), \qquad \ldots, f^{(p+m)}(c); \\ S_{p-1}(c), \ldots, (-1)^{m-i} f^{(p+i)}(c) f^{(p+m)}(c) S_{p+m}(c), \ldots, S_{p+m}(c). \end{array}$$

Ponieważ wskutek pomnożenia wszystkich wyrazów piérwszéj albo drugiéj grupy przez jakąkolwiek liczbę, nie zmieni się ani $(PP)_x$ ani $(VP)_x$, przeto zamiast dwu ostatnich grup możemy wziąć takie:

$$(3)\left\{\begin{array}{l} f^{(p-1)}(c), \qquad \ldots, \qquad f^{(p+i)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c); \\ f^{(p+m)}(c) S_{p-1}(c) S_{p+m}(c), \ldots, (-1)^{m-i} f^{(p+i)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c). \end{array}\right.$$

Taksamo dojdziemy do tego, że przy $x = c + h$ grupy (2) mogą być zastąpione przez następujące:

$$(4)\left\{\begin{array}{l} f^{(p-1)}(c), \qquad \ldots, f^{(p+i)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c); \\ f^{(p+m)}(c) S_{p-1}(c) S_{p+m}(c), \ldots, f^{(p+i)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c). \end{array}\right.$$

Ażeby z tych grup (3) i (4) wyznaczyć $(PP)_{c-h}$, $(PP)_{c+h}$, $(VP)_{c-h}$, $(VP)_{c+h}$, a następnie sprawdzić twierdzenie w zrobionym tu przypuszczeniu co do liczby c, najdogodniéj jest oddzielnie zbadać różne przypadki, jakie zachodzić mogą w grupach (3) i (4), a mianowicie:

a. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest parzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) > 0$. W tym przypadku znajdujemy: z (3)

$$(VP)_{c-h} = 0, \quad (PP)_{c-h} = 1,$$

a z (4)

$$(VP)_{c+h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = m + 1.$$

Jest więc

$$\begin{array}{l} (VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = 0, \\ (PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = m, \end{array}$$

co, według twierdzenia, miejsce miéć powinno.

b. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c), f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest parzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c) S_{p+m}(c) < 0$. Wówczas mamy:

$$\begin{array}{l} (VP)_{c-h} = 0, \quad (PP)_{c-h} = 0, \\ (VP)_{c+h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = m; \end{array}$$

a więc

$$\begin{array}{l} (VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = 0, \\ (PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = m, \end{array}$$

jak być powinno.

c. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c),\ f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c)\, S_{p+m}(c) > 0$. Mamy wtedy

$$(VP)_{c-h} = 0, \quad (PP)_{c-h} = 0,$$
$$(VP)_{c+h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = m+1;$$

a więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = 0,$$
$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = m+1,$$

jak być powinno.

d. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c),\ f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same powtórzenia znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c)\, S_{p+m}(c) < 0$. Wtedy

$$(VP)_{c-h} = 0, \quad (PP)_{c-h} = 1,$$
$$(VP)_{c-h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = m;$$

a więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = 0,$$
$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = m-1,$$

jak być powinno.

e. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c),\ f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest parzysta a iloczyn $S_{p-1}(c)\, S_{p+m}(c) > 0$. Wtedy

$$(VP)_{c-h} = m+1, \quad (PP)_{c-h} = 0,$$
$$(VP)_{c+h} = 1, \quad (PP)_{c+h} = 0;$$

a więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = m,$$
$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = 0,$$

jak być powinno.

f. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c),\ f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest parzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c)\, S_{p+m}(c) < 0$. Wtedy

$$(VP)_{c-h} = m, \quad (PP)_{c-h} = 0,$$
$$(VP)_{c+h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = 0;$$

a więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = m,$$
$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = 0,$$

jak być powinno.

g. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c),\ f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c)\, S_{p+m}(c) > 0$. Wtedy

$$(VP)_{c-h} = m+1, \quad (PP)_{c-h} = 0,$$
$$(VP)_{c+h} = 0, \quad (PP)_{c+h} = 0;$$

a więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = m+1,$$
$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = 0,$$

jak być powinno.

h. Grupa wartości $f^{(p-1)}(c)$, $f^{(p)}(c), \ldots, f^{(p+m)}(c)$ przedstawia same zmiany znaku, liczba m jest nieparzysta, a iloczyn $S_{p-1}(c)\, S_{p+m}(c) < 0$. Wtedy

$$(VP)_{c-h} = m, \quad (PP)_{c-h} = 0,$$
$$(VP)_{c+h} = 1, \quad (PP)_{c+h} = 0;$$

a więc

$$(VP)_{c-h} - (VP)_{c+h} = m - 1,$$
$$(PP)_{c+h} - (PP)_{c-h} = 0,$$

jak być powinno.

Widzimy więc, że w zrobionym tu przypuszczeniu prawdziwość twierdzenia jest okazana. —

Należy tylko jeszcze okazać, że twierdzenie to jest prawdziwe również w dwu innych przypuszczeniach, mianowicie, kiedy

$$f(c) = f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(m-1)}(c) = 0, \quad f^{(m)}(c) \gtrless 0$$

i kiedy

$$f^{(p-1)}(c) \gtrless 0, \quad f^{(p)}(c) = f^{(p+1)}(c) = \ldots = f^{(p+m-1)}(c) = 0, \quad f^{(p+m)}(c) \gtrless 0.$$

Pozostawiamy czytelnikowi doprowadzenie tego sprawdzania do końca; ono w tych dwu ostatnich przypuszczeniach uskutecznia się owiele łatwiéj.

125. Ilekroć wiemy, ile równanie dane ma pierwiastków, zawartych między a i b, możemy wyznaczyć wartości dwu liczb parzystych

$$2h = (PP)_b - (PP)_a - r,$$
$$2l = (VP)_a - (VP)_b - r,$$

a, oznaczając przez 2J ilość pierwiastków zespolonych równania danego, będziemy mieli

$$2J \geq 2h, \quad 2J \geq 2l.$$

Te nierówności wyprowadzają się z twierdzenia Sylvester'a zupełnie taksamo, jak w art. 104-ym nierówności (2) były wyprowadzone z twierdzenia Budan'a.

126. Przypuszczaliśmy dotąd, że żadna z funkcyj $f(x)$, $f'(x), \ldots, S_1(x)$, $S_2(x), \ldots$, nie staje się zerem ani przy $x = a$, anitéż przy $x = b$; w przeciwnym razie należy zmienić wartości niektórych z liczb: a, b, oraz n' (art. 120), nieskończenie mało je powiększając lub zmniejszając. Przy nowych wartościach a, b, n', nieskończenie mało różniących się od poprzednich, znaki funkcyj $f(x)$, $f'(x), \ldots, S(x)$, $S_1(x), \ldots$, określają się bezpośrednio na zasadzie dowiedzionych wyżéj własności funkcyj Fourier'go i funkcyj Sylvester'a.

Zauważymy tu, że wartość parametru n' należy zmieniać tylko wtedy, kiedy przynajmniéj jedna z funkcyj Sylvester'a tożsamościowo równa jest zeru, co, jak już wiadomo, może się zdarzyć tylko przy $n' = n$, t. j. kiedy parametr n' ma najmniejszą wartość, a każdy z parametrów $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ największą.

W wielu przypadkach twierdzenie Sylvester'a okazuje się dogodniejszym w zastosowaniu, niż twierdzenie Budan'a. Okażemy to na kilku przykładach.

127. Przykład 1. Weźmy równanie

$$5x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 16x^2 - 11x + 51 = 0.$$

Kładąc

$$k_i = \frac{n-i+1}{n-i} = \frac{6-i}{5-i},$$

mamy

$$k_1 = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{4}{3}, \quad k_3 = \frac{3}{2}, \quad k_4 = \frac{2}{1}.$$

Obliczywszy wartości funkcyj Fourier'go i funkcyj Sylvester'a dla $x = 0, 1, 2,$ otrzymujemy poniższą tablicę znaków, w której w wiérszu górnym pomieszczone liczby $i = 0, 1, 2, \ldots$ odpowiadają funkcyjom Fourier'go $f^{(i)}(x)$ i funkcyjom Sylvester'a $S_i(x)$, a z każdych dwu wiérszy, połączonych z sobą klamrą, górny odnosi się do funkcyj Fourier'go, dolny zaś do funkcyj Sylvester'a. Tablica ta jest:

x	0	1	2	3	4	5
2	+	+	+	+	+	+
	+	—	+	+	+	+
1	+	—	—	+	+	+
	+	+	+	+	+	+
0	+	—	+	—	—	+
	+	—	+	+	+	+

Przy jéj pomocy znajdujemy

$$(VP)_0 = 2, \quad (VP)_1 = 2, \quad (VP)_2 = 0,$$
$$(PP)_0 = 1, \quad (PP)_1 = 3, \quad (PP)_2 = 3;$$

a stąd

$$(VP)_0 - (VP)_1 = 0,$$
$$(PP)_2 - (PP)_1 = 0.$$

Te równania wskazują, że żaden z przedziałów 0, 1; 1, 2, nie zawiéra pierwiastków. A więc, w tym przypadku twierdzenie Sylvester'a daje nam odrazu zupełne rozwiązanie zadania, gdy tymczasem twierdzenie Budan'a wskazuje tylko, że w każdym z przedziałów 0, 1; 1, 2 może się znajdować conajwięcéj po dwa pierwiastki.

128. Przykład 2. Weźmy równanie

$$2x^6 + 6x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 30x^2 - 14x + 7 = 0.$$

Kładąc we wzorach dla funkcyj Sylvester'a $n' = 6$, otrzymamy

$$k_1 = \frac{6}{5}, \quad k_2 = \frac{5}{4}, \quad k_3 = \frac{4}{3}, \quad k_4 = \frac{3}{2}, \quad k_5 = \frac{2}{1}.$$

Obliczając z tymi parametrami wartości funkcyj Sylvester'a dla $x=0$ i dla $x=1$, mićć będziemy następującą tablicę znaków:

x	0	1	2	3	4	5	6
1	+	+	+	+	+	+	+
$(1-h)$	+	—	$\underset{-}{0}$	+	+	+	+
0	+	—	+	—	—	+	+
	+	+	—	+	+	+	+

Stąd znajdujemy

$$(VP)_0 = 2, \quad (VP)_1 = 0,$$
$$(PP)_0 = 2, \quad (PP)_1 = 4,$$

i

$$(VP)_0 - (VP)_1 = 2,$$
$$(PP)_1 - (PP)_0 = 2.$$

Każde z dwu równań ostatnich wskazuje, że w przedziale 0, 1 dane równanie nie posiada więcéj niż dwa pierwiastki; tymczasem, według twierdzenia Budan'a, kraniec wyższy dla ilości pierwiastków, zawartych w tymże przedziale, jest 4.

Dla $x=-1$ i dla $x=-2$ znajdujemy następującą tablicę znaków:

x	0	1	2	3	4	5	6
-1	+	—	+	+	—	—	+
	+	+	+	+	+	+	+
-2	+	—	+	—	+	—	+
	+	+	—	+	+	+	+

Stąd

$$(VP)_{-1} = 4, \quad (VP)_{-2} = 4,$$
$$(PP)_{-1} = 2, \quad (PP)_{-2} = 0,$$

i

$$(VP)_{-2} - (VP)_{-1} = 0,$$
$$(PP)_{-1} - (PP)_{-2} = 2.$$

Piérwsze z dwu ostatnich równań wskazuje, że dane równanie nie ma pierwiastka między -1 i -2; gdy tymczasem twierdzenie Budan'a daje liczbę 2, jako kraniec wyższy dla ilości pierwiastków równania, zawartych między -1 i -2.

129. Przykład 3. Weźmy równanie

$$3x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 11 = 0.$$

Kładąc

$$k_1 = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{4}{3}, \quad k_3 = \frac{3}{2}, \quad k_4 = \frac{2}{1}$$

i obliczając z tymi parametrami wartość funkcyj Sylvester'a dla $x=a$ i dla $x=1$, otrzymamy następującą tablicę:

$$\begin{array}{c|cccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ - \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ + \end{array} \\ \begin{array}{c} (+h) \\ 0 \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. & \begin{array}{c} + \\ \\ + \end{array} & \begin{array}{c} \overline{0} \\ + \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \overline{0} \\ + \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} - \\ \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ \\ + \end{array} & \begin{array}{c} + \\ \\ + \end{array} \end{array}$$

Więc

$$(VP)_0 = 2, \quad (VP)_1 = 0,$$
$$(PP)_0 = 3, \quad (PP)_1 = 3,$$

i

$$(VP)_0 - (VP)_1 = 2,$$
$$(PP)_1 - (PP)_0 = 0.$$

Ostatnie równanie wskazuje, że nasze równanie wcale nie posiada pierwiastka w przedziale między 0 i 1; tymczasem z twierdzenia Budan'a widzimy tylko, że to równanie może mieć conajwięcéj dwa pierwiastki między 0 i 1.

§ VIII. TWIERDZENIE NEWTON'A.

130. Kładąc

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n,$$
$$S_i(x) = f^{(i)}(x)^2 - k_i f^{(i+1)}(x) f^{(i-1)}(x),$$
$$k_i = \frac{n-i+1}{n-i};$$

i wypisując wyrazy skrajne w wyrażeniu funkcyi $S_i(x)$, mieć będziemy

$$S_i(x) = (n-1)^2 (n-2)^2 \ldots (n-i+1)^2 \left(A_1{}^2 - \frac{2n}{n-1} A_0 A_2 \right) x^{2n-2i-2}$$
$$+ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$+ (1.2\ldots i)^2 \left(A^2_{n-i} - \frac{n-i+1}{n-i} \frac{i+1}{i} A_{n-i-1} A_{n-i+1} \right).$$

Skąd widzimy, że kiedy parametry $k_1, k_2, \ldots$ mają wartości największe, to wtedy stopień funkcyi $S_i(x)$ jest $2n-2i-2$, tak iż funkcyja przedostatnia $S_{n-1}(x)$ jest wówczas równa liczbie stałéj

$$\Big(1.2\ldots(n-1)\Big)^2 \left(A_1{}^2 - \frac{2n}{n-1} A_0 A_2 \right).$$

Przy $x = 0$, mamy

$$S_i(0) = (1.2\ldots i)^2 \left(A^2_{n-i} - \frac{(n-i+1)(i+1)}{(n-i)i} A_{n-i-1} A_{n-i+1}\right).$$

Po zrobieniu tych uwag, łatwo z twierdzenia Sylwester'a wyprowadzić, jako wniosek, pewne twierdzenie, podane bez dowodu przez Newton'a. Otrzymuje się ono z twierdzenia Sylvester'a taksamo, jak twierdzenie Descartes'a z twierdzenia Budan'a (us. 106).

131. Twierdzenie. *Mając równanie*

(1) $$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = 0,$$

utwórzmy dwie grupy liczb:

(2) $$\begin{cases} A_0,\ A_1, & A_2, & \ldots,\ A_n, \\ 1,\ A_1^2 - \dfrac{2n}{n-1}A_0A_2, & A_2^2 - \dfrac{3(n-1)}{2(n-2)}A_1A_3, & \ldots,\ 1. \end{cases}$$

Ilość pierwiastków dodatnych równania (1) *nie jest większa od ilości zmian z powtórzeniem znaku w* (2), *a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą; ilość pierwiastków ujemnych równania* (1) *nie jest większa od ilości podwójnych powtórzeń znaku w* (2), *a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.*

Jakoż, stosując twierdzenie Sylvester'a do przedziału $0, +\infty$, otrzymamy

$$(VP)_0 - (VP)_{+\infty} = m + 2h,$$

gdzie m oznacza ilość pierwiastków dodatnych równania (1), a h pewną liczbę całkowitą, dodatną, albo zero. Lecz $(VP)_{+\infty} = 0$, gdyż grupa funkcyj $f(x)$, $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ przy $x = +\infty$ przedstawia same tylko powtórzenia znaku; zatym

$$(VP)_0 = m + 2h.$$

To równanie wyraża piérwszą część twierdzenia Newton'a, $(VP)_0$ bowiém oznacza ilość zmian z powtórzeniem znaku w (2).

Stosując twierdzenie Sylvester'a do przedziału $0, -\infty$ i oznaczając przez m' ilość pierwiastków ujemnych równania (1), a przez $2h'$ pewną liczbę parzystą, dodatną, albo zero, otrzymamy

$$(PP)_0 - (PP)_{-\infty} = m' + 2h'.$$

Lecz $(PP)_{-\infty} = 0$, gdyż grupa funkcyj $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ przy $x = -\infty$ przedstawia same tylko zmiany znaku; więc

$$(PP)_0 = m' + 2h'.$$

Równanie to wyraża drugą część twierdzenia Newton'a, $(PP)_0$ bowiém oznacza ilość podwójnych powtórzeń znaku w (2).

Uwaga. Przypuszczaliśmy tu, że żadna z liczb (2) nie jest równa zeru; w przeciwnym bowiém razie należy zamiast $x=0$ wziąć $x = +h$ albo $x = -h$, gdzie h oznacza nieskończenie małą liczbę dodatną. Niekiedy bywa konieczną zmiana wartości parametru n'.

132. Przykład 1. Weźmy równanie

$$x^8 - x^7 + 4x^6 - 8x^5 - x^4 + 7x^3 - 22x^2 - 152x - 450 = 0,$$

toż samo, do któregośmy stosowali twierdzenie Descartes'a (art. 82).

Stosując do niego twierdzenie Newton'a, otrzymamy dwie grupy znaków

$$\begin{matrix} + & - & + & - & - & + & - & - & - \\ + & - & + & + & + & + & + & + & + \end{matrix}$$

i

$$(VP) = 3, \quad (PP) = 3,$$

tak iż ilość pierwiastków dodatnych jest równa albo 1, albo 3, a ilość pierwiastków ujemnych także jest równa albo 1, albo 3.

133. Przykład 2. Dla równania

$$x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 30x^2 + 6 = 0$$

otrzymujemy następujące znaki:

$$\begin{matrix} + & + & - & + & 0 & + \\ + & + & - & + & - & + \end{matrix}$$

Dla przedziału $+h, +\infty$ należy w wiérszu piérwszym zamiast 0 napisać znak $+$; będziemy mieli

$$(VP) = 0,$$

co wskazuje, że powyższe równanie wcale nie ma pierwiastków dodatnych.

Dla przedziału $-h, -\infty$ zamiast 0 w wiérszu piérwszym należy napisać znak $-$; będziemy mieli

$$(PP) = 1,$$

skąd widzimy, że dane równanie ma jeden tylko pierwiastek ujemny.

134. Przykład 3. Dla równania

$$x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 2x^2 - 5x - 5 = 0$$

otrzymujemy następujące dwie grupy znaków:

$$\begin{matrix} + & - & + & - & - & - \\ + & + & + & + & 0 & + \end{matrix}$$

Funkcyja $S_4(x)$ staje się tożsamościowo równą zeru; a więc, zamiast

$$k_i = \frac{6-i}{5-i},$$

powinniśmy wziąć

$$k_i = \frac{6-i+d}{5-i+d},$$

gdzie d oznacza dostatecznie małą, albo prościéj — nieskończenie małą liczbę dodatną. Wskutek tego, każdy z parametrów $k_1, k_2, \ldots$ otrzymuje pewien nieskończenie mały przyrostek ujemny.

Jeżeli oznaczymy przyrostek parametru k_i przez Δk_i, to nowa wartość wielkości $S_4(0)$ wyrazi się tak:

$$S_4(0) = f^{IV}(0)^2 - \left(\frac{2}{1} + \Delta k_4\right) f'''(0) f^{V}(0) = -\Delta k_4 f'''(0) f^{V}(0),$$

skąd widzimy, że $S_4(0) > 0$. A więc, zamiast 0, w wiérszu drugim należy wziąć znak $+$, wskutek czego otrzymujemy

$$(VP) = 3, \quad (PP) = 2.$$

Toż samo nam daje twierdzenie Descartes'a.

ROZDZIAŁ VII.

O NADMIARZE FUNKCYI WYMIERNÉJ. — SPOSÓB OZNACZANIA I GŁÓWNE WŁASNOŚCI NADMIARÓW.—SPOSÓB OBLICZANIA NADMIARÓW.—PRZYPADEK SZCZEGÓLNY, KIEDY NADMIAR OTRZYMUJE NAJWIĘKSZĄ MOŻLIWĄ WARTOŚĆ. — O RÓWNANIACH Z PIERWIASTKAMI PRZEGRADZAJĄCYMI SIĘ. — TWIERDZENIE STURM'A.

§ I. O NADMIARZE FUNKCYI WYMIERNÉJ.

135. Przypuśćmy, że mamy dwie funkcyje całkowite,

$$V = f(x), \quad V_1 = f_1(x),$$

piérwsze względem siebie, i że są dane dwie liczby: a i $b > a$, nie przywodzące żadnéj z funkcyj V i V_1 do zera.

Weźmy pod uwagę te pierwiastki każdego z równań

$$V = 0, \quad V_1 = 0,$$

które się zawiérają między a i b, i rozdzielmy je na trzy «klasy», stosownie do trzech następujących przypadków:

Jeżeli, przy przejściu zmiennéj x przez jeden z tych pierwiastków, np. przez c, od wartości mniejszych do większych, funkcyja ułamkowa $\frac{V}{V_1}$ zmienia swój znak, przechodząc od wartości ujemnych do dodatnych, to pierwiastek c zaliczymy do klasy piérwszéj.

Jeżeli, przeciwnie, przy przejściu zmiennéj x przez pierwiastek c, od wartości mniejszych do większych, stosunek $\frac{V}{V_1}$ zmienia swój znak, przechodząc od wartości dodatnych do ujemnych, to wówczas pierwiastek c zaliczymy do klasy drugiéj.

Jeżeli, nakoniec, przy przejściu zmiennéj x przez pierwiastek c od wartości mniejszych do większych, stosunek $\frac{V}{V_1}$ nie zmienia swego znaku, to wówczas pierwiastek c zaliczymy do klasy trzeciéj. —

Przypuśćmy, że pośród pierwiastków równania $V = 0$, zawartych między a i b, znajduje się l różnych, należących do klasy piérwszéj, i l' różnych, należących do klasy drugiéj. Różnicę $l - l'$ będziemy nazywać pierwszym nadmiarem stosunku $\frac{V}{V_1}$ od a do b, i, przez skrócenie, będziemy go oznaczali przez $E_a^b \frac{V}{V_1}$, albo krócéj przez E_a^b.

Przypuśćmy, że pośród pierwiastków równania $V_1 = 0$, zawartych między a i b, znajduje się m różnych, należących do klasy piérwszéj, i m' różnych, należących do klasy drugiéj. Różnicę $m - m'$ będziemy nazywali drugim nadmiarem stosunku $\frac{V}{V_1}$ od a do b, i, przez skrócenie, będziemy go oznaczali przez $I_a^b \frac{V}{V_1}$, albo, krócéj, przez I_a^b.

Prócz tego, umówimy się, aby nadmiarem funkcyi $\frac{V}{V_1}$ od b do a nazywać nadmiar téjże funkcyi $\frac{V}{V_1}$, wzięty od a do b i pomnożony przez -1, t. j.

$$E_b^a = -E_a^b, \quad I_b^a = -I_a^b.$$

Jeżeli przypuścimy, że zmienna x, zmieniając się w sposób ciągły, przechodzi przez wszystkie wartości od $x = a$ do $x = b$, to różnica między liczbą, wskazującą, ile razy stosunek $\frac{V}{V_1}$, stając się zerem, przechodzi od wartości ujemnych do dodatnych, i liczbą, wskazującą, ile razy tenże stosunek, stając się zerem, przechodzi od wartości dodatnych do ujemnych, równa się nadmiarowi E_a^b, *tak wtedy, kiedy* $b > a$, *jak i wtedy, kiedy* $b < a$. Również różnica między liczbą, wskazującą, ile razy stosunek $\frac{V}{V_1}$, stając się nieskończenie wielkim, przechodzi od wartości ujemnych do dodatnych, i liczbą, wskazującą, ile razy tenże stosunek, stając się nieskończenie wielkim, przechodzi od wartości dodatnych do ujemnych, równa się nadmiarowi I_a^b, *tak wtedy, kiedy* $b > a$, *jak i wtedy, kiedy* $b < a$.

Jeżeli pierwiastki równań $V = 0$, $V_1 = 0$, zawarte między a i b, są nam znane, to wyznaczenie wartości obu nadmiarów nie może przedstawiać szczególnego zadania. Np., kładąc

$$V = (x-2)(x+1), \quad V_1 = (x+3)(2x-3)(x-5)(2x-11)^2,$$

mieć będziemy

$$E_0^1 \frac{V}{V_1} = 0, \quad E_{-2}^0 \frac{V}{V_1} = -1, \quad E_0^3 \frac{V}{V_1} = -1,$$

$$I_{-4}^4 \frac{V}{V_1} = 2, \quad I_4^6 \frac{V}{V_1} = 1, \quad I_6^7 \frac{V}{V_1} = 0.$$

Jest jednak rzeczą ważną, iż, nie znając wcale ani pierwiastków równania $V = 0$, ani pierwiastków równania $V_1 = 0$, możemy zawsze, zapomocą zwyczajnego dzielenia algiebraicznego, wyznaczyć wartości obu nadmiarów funkcyj $\frac{V}{V_1}$ przy dowolnie wziętych krańcach a i b.

§ II. WŁASNOŚCI NADMIARÓW.

136. Z określenia nadmiarów bezpośrednio wynikają zasadnicze ich własności, które można wyrazić zapomocą następujących wzorów:

(1) $$E_a^b \frac{V}{V_1} + E_b^c \frac{V}{V_1} = E_a^c \frac{V}{V_1},$$

(2) $$I_a^b \frac{V}{V_1} + I_b^c \frac{V}{V_1} = I_a^c \frac{V}{V_1},$$

(3) $$I_a^b \frac{V}{V_1} = E_a^b \frac{V_1}{V},$$

(4) $$E_a^b \frac{V}{V_1 + VQ} = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

(5) $$I_a^b \left(\frac{V}{V_1} + Q\right) = I_a^b \frac{V}{V_1},$$

gdzie V, V_1, Q oznaczają jakiekolwiek funkcyje całkowite, zaś a, b, c liczby dowolne.

Jeżeli od $x = a$ do $x = b$ mamy $Q > 0$, to wówczas

(6) $$E_a^b \frac{QV}{V_1} = E_a^b \frac{V}{QV_1} = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

(7) $$I_a^b \frac{QV}{V_1} = I_a^b \frac{V}{QV_1} = I_a^b \frac{V}{V_1}.$$

Jeżeli dwie funkcyje całkowite U i U_1 są piérwsze względem siebie, to wówczas

(8) $$E_a^b \frac{UU_1}{V} = E_a^b \frac{U}{VU_1} + E_a^b \frac{U_1}{VU},$$

(9) $$I_a^b \frac{V}{UU_1} = I_a^b \frac{VU_1}{U} + I_a^b \frac{VU}{U_1},$$

(10) $$I_a^b \left(\frac{V}{U} + \frac{V_1}{U_1}\right) = I_a^b \frac{V}{U} + I_a^b \frac{V_1}{U_1}.$$

Do tych własności dodamy jeszcze jednę, którą przedstawia następujące

TWIERDZENIE. *Oba nadmiary jakiéjkolwiek funkcyi* $\frac{V}{V_1}$, *wzięte względem tychże samych krańców a i b, są z sobą związane równaniem*

(11) $$E_a^b \frac{V}{V_1} + I_a^b \frac{V}{V_1} = e_a^b,$$

gdzie e_a^b *określa się tak:*

$e_a^b = 0$, *jeżeli* $\frac{V(b)}{V_1(b)}$ *i* $\frac{V(a)}{V_1(a)}$ *są jednakowego znaku;*

$e_a^b = 1$, *jeżeli* $\frac{V(a)}{V_1(a)} < 0$, *zaś* $\frac{V(b)}{V_1(b)} > 0$;

$$e_a^b = -1, \quad jeżeli \quad \frac{V(a)}{V_1(a)} > 0, \quad zaś \quad \frac{V(b)}{V_1(b)} < 0.$$

W celu udowodnienia tego twierdzenia, zauważymy uprzednio, że z określenia symbolu e_a^b wynika wprost następująca jego własność:

$$e_a^b + e_b^c = e_a^c,$$

a stąd

$$e_a^b + e_b^c + e_c^d = e_a^d$$

i t. d.

Jeżeli przypuścimy, że między a i b obie funkcyje V i V_1 nie mają żadnego pierwiastka, albo, że jedna z nich nie ma ani jednego pierwiastka, a druga ma tylko jeden pierwiastek pojedyńczy albo wielokrotny, to wówczas jeden z wyrazów na stronie lewéj równania (11) równa się zeru, a twierdzenie staje się oczywistym.

Przechodząc do przypadku ogólnego, oznaczymy przez $a_1, a_2, \ldots, a_k$ różne pierwiastki równań $V = 0$ i $V_1 = 0$, zawarte między krańcami a i b, i przypuścimy, że one są napisane w porządku ich wartości rosnących, tak iż $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$. W każdym z przedziałów a_1, a_2; a_2, a_3; ... obierzmy po jednéj liczbie dowolnéj; niech tymi liczbami będą np. $b_1, b_2, \ldots$. Zważając, że, na zasadzie tego, cośmy wyżéj powiedzieli, twierdzenie nasze ma miejsce dla każdego z przedziałów a, b_1; b_1, b_2; ... ; b_{k-1}, b, napiszmy szereg równań:

$$E_a^{b_1}\frac{V}{V_1} + I_a^{b_1}\frac{V}{V_1} = e_a^{b_1},$$

$$E_{b_1}^{b_2}\frac{V}{V_1} + I_{b_1}^{b_2}\frac{V}{V_1} = e_{b_1}^{b_2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$E_{b_{k-1}}^{b}\frac{V}{V_1} + I_{b_{k-1}}^{b}\frac{V}{V_1} = e_{b_{k-1}}^{b}.$$

Dodając te równania do siebie i mając na uwadze związki (1) i (2), jakoteż to, cośmy powiedzieli o symbolu e_a^b, otrzymamy:

$$E_a^b\frac{V}{V_1} + I_a^b\frac{V}{V_1} = e_a^b,$$

c. n. d.

137. Korzystając z równań, wyprowadzonych w artykule poprzednim, łatwo możemy okazać, że można zawsze obliczyć nadmiar zapomocą elementarnych działań algiebraicznych.

Jakoż, równanie

$$E_a^b\frac{V}{V_1} + I_a^b\frac{V}{V_1} = e_a^b$$

wskazuje, że, jeżeli tylko wartość jednego z dwu nadmiarów E_a^b, I_a^b, jest wiadoma, to wartość pozostałego może być zaraz wyznaczona, tak iż pozostaje nam tylko pokazać, jakim sposobem można otrzymać wartość nadmiaru E_a^b.

Jeżeli stopień funkcyi V_1 nie jest mniejszy od stopnia funkcyi V, to, dzieląc V_1 przez V i nazywając iloraz Q, a resztę V_2, otrzymamy

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = E_a^b \frac{V}{V_2+QV} = E_a^b \frac{V}{V_2};$$

tak iż obliczenie nadmiaru funkcyi $\frac{V}{V_1}$ sprowadza się do obliczenia nadmiaru funkcyi $\frac{V}{V_2}$, która jest prostszą od poprzedniéj. Jeżeli zaś funkcyja V_1 jest niższego stopnia niż funkcyja V, to dzieląc V przez V_1 i nazywając iloraz Q, a resztę V_2, mieć będziemy

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = e_a^b - I_a^b\left(Q + \frac{V_2}{V_1}\right) = e_a^b - I_a^b \frac{V_2}{V_1},$$

albo

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = e_a^b - E_a^b \frac{V_1}{V_2},$$

i obliczenie nadmiaru funkcyi $\frac{V}{V_1}$ sprowadza się do obliczenia nadmiaru innéj funkcyi $\frac{V_1}{V_2}$, prostszéj, niż poprzednia. Prowadząc w ten sposób daléj obniżanie stopnia, sprowadzimy nasze zadanie do wyznaczenia nadmiaru funkcyi całkowitéj. Lecz wówczas wyznaczenie nadmiaru wynika bezpośrednio z wzoru (11), gdyż, kładąc $V_1 = 1$, otrzymujemy

$$E_a^b V = e_a^b.$$

§ III. OBLICZANIE NADMIARÓW.

138. Dowiedziemy twierdzenia, obejmującego w sobie prawidło ogólne na otrzymanie wartości jakiegokolwiek nadmiaru $E_a^b \frac{V}{V_1}$. Moglibyśmy je wyprowadzić z uwag, uczynionych przy końcu poprzedniego paragrafu, lecz wolimy tu skorzystać z wiadomych już metod, używanych przy dowodzeniu twierdzeń Budan'a i Sylvester'a.

TWIERDZENIE. *Jeżeli, mając dwie funkcyje całkowite, piérwsze względem siebie,* V *i* V_1, *podzielimy* V *przez* V_1 *i oznaczymy przez* V_2 *otrzymaną stąd resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną, następnie podzielimy funkcyją* V_1 *przez* V_2 *i oznaczymy przez* V_3 *resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną, i będziemy powtarzali to postępowanie dotąd, dopóki nie dojdziemy do reszty* V_r, *będącéj liczbą stałą, a ilość zmian znaku, zachodzących w grupie funkcyj*

(1) $$V,\ V_1,\ V_2, \ldots, V_r,$$

nazwiemy v_x, *to, jakimikolwiek będą liczby a i b, wartość nadmiaru* $\mathrm{E}_a^b \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1}$ *wyznaczona będzie zapomocą wzoru*:

$$\mathrm{E}_a^b \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1} = v_a - v_b.$$

Dowodzenie tego twierdzenia zasadza się na następujących trzech własnościach funkcyj (1).

a. Ostatniéj z funkcyj (1) nie przywodzi do zera żadna z wartości zmiennéj x, zawartych między krańcami a i b. Jest to oczywiste, gdyż V_r jest liczbą stałą, różną od zera.

b. Dwie sąsiednie z funkcyj (1) nie mogą stawać się równymi zeru dla żadnéj wartości zmiennéj x, zawartéj między a i b. Gdybyśmy przypuścili, że, przy pewnéj wartości zmiennéj x mamy

$$\mathrm{V}_k = \mathrm{V}_{k+1} = 0,$$

to z tożsamości

$$\mathrm{V}_k = \mathrm{Q}_k \mathrm{V}_{k+1} - \mathrm{C}\mathrm{V}_{k+2},$$

otrzymanéj z podzielenia funkcyi V_k przez V_{k+1}, wynika, że, dla téjże wartości zmiennéj x, mamy

$$\mathrm{V}_{k+2} = 0.$$

T. j., jeżeli, przy jakiéjkolwiek wartości zmiennéj x, dwie sąsiednie z funkcyj (1) stają się równymi zeru, to i następująca po nich funkcyja również stawałaby się równą zeru. Natenczas i wszystkie pozostałe, następujące po nich funkcyje, powinnyby także stawać się równymi zeru, tak iż mielibyśmy $\mathrm{V}_r = 0$, co być nie może.

c. Jeżeli pośród funkcyj (1), przy pewnéj wartości zmiennéj x, zawartéj między a i b, funkcyja V_{k+1} staje się równą zeru, to dwie obok niéj stojące funkcyje V_k i V_{k+2} otrzymują wartości znaków różnych. To jest widoczne z równości

$$\mathrm{V}_k = \mathrm{Q}_k \mathrm{V}_{k+1} - \mathrm{C}\mathrm{V}_{k+2},$$

które, dla wartości x, przywodzących funkcyją V_{k+1} do zera, daje

$$\mathrm{V}_k = -\mathrm{C}\mathrm{V}_{k+2}.$$

Przechodząc do udowodnienia naszego twierdzenia, naprzód ograniczymy się do tego przypadku, kiedy między a i b istnieje, lecz tylko jedna, liczba c przywodząca do zera jednę albo kilka funkcyj (1). Rozumié się samo przez się, że nie mamy potrzeby zatrzymywać się nad tym przypadkiem, kiedy w przedziale a, b żadna z funkcyj szeregu (1) nie ma pierwiastka; wtenczas bowiém twierdzenie nasze staje się oczywistym.

Można zrobić kilka przypuszczeń co do liczby c, które należy zbadać oddzielnie.

Przypuśćmy, że c nie jest pierwiastkiem równania $V=0$, i że przy $x=c$ z funkcyj (1) tylko jedna V_k staje się równą zeru. Oznaczając odpowiednio przez w_x, w'_x, w''_x ilość zmian znaku w grupach

$$V,\ V_1, \ldots, V_{k-1},$$
$$V_{k-1},\ V_k,\ V_{k+1},$$
$$V_{k+1},\ V_{k+2}, \ldots, V_r,$$

mieć będziemy

$$v_x = w_x + w'_x + w''_x,$$

skąd

(2) $$v_a - v_b = w_a - w_b + w'_a - w'_b + w''_a - w''_b.$$

Oczywiście, że

(3) $$\begin{cases} w_a - w_b = 0, \\ w''_a - w''_b = 0. \end{cases}$$

Należy oznaczyć, czemu się równa różnica $w'_a - w'_b$. W tym celu zważmy, że znaki wartości $V_{k-1}(a)$ i $V_{k-1}(b)$ są jednakowe i takież same, jak znak wartości $V_{k-1}(c)$; podobnież, znaki wartości $V_{k+1}(a)$ i $V_{k+1}(b)$ są jednakowe i takież, jak znak wartości $V_{k+1}(c)$. Ponieważ zaś znaki wartości $V_{k-1}(c)$ i $V_{k+1}(c)$ są różne, zatym wartości $V_{k-1}(a)$, $V_{k+1}(a)$ są różnego znaku, i wartości $V_{k-1}(b)$, $V_{k+1}(b)$ są także różnego znaku. Stąd wynika, że

$$w'_a = 1, \quad w'_b = 1,$$

a zatym

(4) $$w'_a - w'_b = 0.$$

Według (2), (3) i (4), otrzymujemy

$$v_a - v_b = 0,$$

co wskazuje, że w przypadku rozważanym nasze twierdzenie ma miejsce.

W podobny sposób możemy się przekonać, że twierdzenie to utrzymuje się wówczas, kiedy liczba c, nie przywodząc do zera funkcyi V, przywodzi do zera więcéj niż jednę z pozostałych funkcyj (1). Tak np., jeżeliby, spośród funkcyj (1), tylko dwie funkcyje: V_k i V_l stawały się równymi zeru przy $x=c$, to, przyjmując, że $l > k$, mielibyśmy $l > k+1$, a oznaczając odpowiednio przez w_x, w'_x, w''_x, w'''_x, w^{IV}_x ilości zmian znaku w każdéj z grup

$$V,\ V_1, \ldots, V_{k-1},$$
$$V_{k-1},\ V_k,\ V_{k+1},$$
$$V_{k+1},\ V_{k+2}, \ldots, V_{l-1},$$
$$V_{l-1},\ V_l,\ V_{l+1},$$
$$V_{l+1},\ V_{l+2}, \ldots, V_r,$$

mielibyśmy

$$w_a - w_b = 0,$$
$$w'_a - w'_b = 0,$$

$$w''_a - w''_b = 0,$$
$$w'''_a - w'''_b = 0,$$
$$w^{IV}_a - w^{IV}_b = 0,$$

Stąd zaś, po dodaniu, otrzymamy

$$v_a - v_b = 0,$$

co jest zgodne z twierdzeniem.

Przypuśćmy jeszcze, że liczba c jest pierwiastkiem równania $V = 0$. Oznaczając odpowiednio przez w_x i w'_x ilości zmian znaku w każdéj z grup

$$V, \quad V_1;$$
$$V_1, \quad V_2, \ldots, V_r,$$

i uważając, że wartość $V_1(c)$ jest różna od zera, na zasadzie tego, cośmy wyżéj udowodnili, wnosimy, że

$$w'_a - w'_b = 0,$$

wskutek czego mamy

$$v_a - v_b = w_a - w_b.$$

Należy wyznaczyć różnicę $w_a - w_b$. — Jeżeli $\dfrac{V(a)}{V_1(a)} < 0$, a $\dfrac{V(b)}{V_1(b)} > 0$, to wówczas $w_a = 1$, $w_b = 0$ i

$$w_a - w_b = 1;$$

a więc

$$v_a - v_b = 1,$$

co jest zgodne z twierdzeniem, gdyż, w tym przypadku, oczywiście, nadmiar $E_a^b \dfrac{V}{V_1} = 1$. — Jeżeli zaś $\dfrac{V(a)}{V_1(a)} > 0$, a $\dfrac{V(b)}{V_1(b)} < 0$, to wtedy $w_a = 0$, $w_b = 1$ i

$$w_a - w_b = -1;$$

a więc

$$v_a - v_b = -1 = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

co również jest zgodne z twierdzeniem. — Nakoniec, może się zdarzyć, że oba stosunki $\dfrac{V(a)}{V_1(a)}$ i $\dfrac{V(b)}{V_1(b)}$ są jednakowego znaku. Wówczas, oczywiście, $w_a = w_b$, a zatym

$$v_a - v_b = 0 = E_a^b \frac{V}{V_1},$$

zgodnie z twierdzeniem.

Przypuśćmy teraz, że między a i b znajduje się nie jedna, ale jakakolwiek ilość wartości szczególnych

$$c_1, \quad c_2, \ldots, c_m,$$

z których każda przynajmniéj jednę z funkcyj (1) przywodzi do zera. Przyjmijmy, że te liczby są już wypisane w porządku ich rosnących albo malejących wartości, zależnie od tego, czy $a < b$, czytéż $a > b$, i oznaczmy przez a_1 jakąkolwiek liczbę, zawartą między a i c_1, przez a_2 jakąkolwiek liczbę, zawartą między c_1 i c_2, i t. d. Na zasadzie tego, cośmy wyżéj udowodnili, twierdzenie nasze ma miejsce dla każdego z przedziałów

$$a,\ a_1;\quad a_1,\ a_2;\ \ldots,\ a_{m-1},\ b;$$

mamy więc następujące równania:

$$\mathrm{E}_a^{a_1}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1}=v_a-v_{a_1},$$

$$\mathrm{E}_{a_1}^{a_2}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1}=v_{a_1}-v_{a_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{E}_{a_{m-1}}^{b}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1}=v_{a_{m-1}}-v_b.$$

Dodając je do siebie i przyjmując pod uwagę wzór (1) w art. 136-ym, otrzymamy

$$\mathrm{E}_a^b\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1}=v_a-v_b.$$

Jest więc nasze twierdzenie zupełnie udowodnione.

139. Utworzenie funkcyj $\mathrm{V}_2, \mathrm{V}_3, \ldots$ według prawidła, wskazanego w art. poprzedzającym, wymaga, wogóle mówiąc, wiele zachodu; niekiedy jednak można otrzymać daleko prościéj inną grupę funkcyj

$$(1)\qquad \mathrm{V},\ \mathrm{V}_1,\ \mathrm{U}_2,\ \mathrm{U}_3,\ldots,\mathrm{U}_s,$$

posiadających też same trzy własności charakterystyczne funkcyj V, V_1, V_2, $\mathrm{V}_3, \ldots$ Wówczas twierdzenie art. poprzedniego, jako będące wynikiem tych trzech własności, będzie również miało miejsce dla grupy funkcyj (1).

Jeżeli się zdarzy, że jedna z funkcyj V, V_1, V_2, $\mathrm{V}_3, \ldots$, np. V_k, nie ma żadnego pierwiastka między a i b, to wówczas można przerwać odnajdywanie następnych funkcyj V_{k+1}, $\mathrm{V}_{k+2}, \ldots$, przyjąwszy funkcyją V_k jako ostatnią. Oczywiście, że wtedy niéma potrzeby przypuszczać, że funkcyje V i V_1 są piérwsze względem siebie.

Nadto, jeżeli przy tworzeniu funkcyj V, V_1, V_2, $\mathrm{V}_3, \ldots$ zauważymy, że jedna z nich, np. V_k, jest iloczynem $\varphi(x)\,\mathrm{U}_k$, dwu funkcyj całkowitych, a funkcyja $\varphi(x)$ nie ma pierwiastka między a i b i pozostaje wciąż dodatną, to wówczas zamiast funkcyi V_k możemy wziąć funkcyją U_k i tworzyć następne funkcyje przy pomocy V_{k-1} i U_k.

140. Dotąd przypuszczaliśmy, że żadna z funkcyj V, V_1, V_2, $\mathrm{V}_3, \ldots$ nie staje się zerem ani dla $x=a$, anitéż dla $x=b$. Nie trudno okazać, że w razie przeciwnym, kiedy jedna albo kilka spośród funkcyj V_1, V_2, $\mathrm{V}_3, \ldots$ stają się równymi zeru przy $x=a$ albo $x=b$, niémaco, przy obliczaniu ilości zmian znaku, zwracać uwagi na wyrazy równe zeru, ale tak postępować, jakgdyby ich wcale nie było. Jakoż, jeżeli $\mathrm{V}_k=0$, to wartości V_{k-1} i V_{k+1} są różnego znaku; a więc, gdy zamiast krańca a podstawimy inny, $a+h$, nieskończenie mało różniący się od a, to trzy wyrazy

$$V_{k-1}(a+h),\quad V_k(a+h),\quad V_{k+1}(a+h)$$

przedstawiają jednę zmianę znaku — taksamo, jak i dwa wyrazy

$$V_{k-1}(a)\quad V_{k+1}(a).$$

A zatym, *aby oznaczyć ilość zmian znaku w grupie wartości*

$$V(a+h),\quad V_1(a+h),\quad V_2(a+h), \ldots, V_r(a+h),$$

przy nieskończenie małym h i w przypuszczeniu, że $V(a)$ *nie* $=0$, *należy obrachować ilość zmian znaku w grupie wartości*

$$V(a),\quad V_1(a),\quad V_2(a), \ldots, V_r(a),$$

nie zwracając uwagi na zera, jakie się zdarzyć mogą.

§ IV. NAJWIĘKSZA WARTOŚĆ NADMIARU.

141. Rozkładając pierwiastki równania $V=0$ na klasy, jak to było wskazanem w art. 135-ym, i oznaczając przez l i l' ilość pierwiastków, zawartych między krańcami a i $b>a$ i należących do piérwszéj lub do drugiéj klasy, mamy równość

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = l - l',$$

która wskazuje, że wartość bezwzględna nadmiaru E_a^b nie jest większa od stopnia funkcyi V.

Oznaczywszy ów stopień przez n, spostrzegamy, że, w tym przypadku, kiedy

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = n,$$

mamy

$$l=n,\quad l'=0.$$

Równanie $V=0$ ma wtedy wszystkie pierwiastki nierówne, rzeczywiste i zawarte między a i b; wszystkie one należą do klasy piérwszéj.

Jeżeli zaś okaże się, że

$$E_a^b \frac{V}{V_1} = -n,$$

to wówczas

$$l=0,\quad l'=n,$$

wszystkie pierwiastki równania $V=0$ są różne, rzeczywiste, zawarte między a i b, i wszystkie należą do klasy drugiéj.

142. Wziąwszy pod uwagę funkcyją Legendre'a X_n, łatwo spostrzeżemy, że grupa

(1) $$X_n, \ X_{n-1}, \ X_{n-2}, \ldots, X_2, \ X_1, \ X_0 = 1$$

jest tą właśnie, którą należy utworzyć, według twierdzenia art. 138-go, w celu otrzymania wartości nadmiaru funkcyi $\dfrac{X_n}{X_{n-1}}$.

Ponieważ przy $x = 1$ grupa (1) przedstawia same tylko powtórzenia znaku, a przy $x = -1$ same tylko zmiany znaku, zatym

$$\mathrm{E}_{-1}^{+1} \frac{X_n}{X_{n-1}} = n,$$

a więc wszystkie pierwiastki równania $X_n = 0$ są pojedyńcze, rzeczywiste i zawarte między -1 i $+1$; te pierwiastki widocznie przegradzają się nawzajem z pierwiastkami równania $X_{n-1} = 0$.

Wogóle, wszystko to, co w art. 57-ym było powiedziane o równaniach z pierwiastkami przegradzającymi się, mogłoby być wyprowadzone zapomocą teoryi nadmiarów.

§ V. TWIERDZENIE STURM'A.

143. Na szczególną uwagę zasługuje wyrażenie nadmiaru funkcyi ułamkowéj $\dfrac{f(x)}{f'(x)}$, któréj mianownik jest pochodną licznika; wówczas każdy pierwiastek rzeczywisty równania $f(x) = 0$ należy do klasy piérwszéj, i, w przypuszczeniu, że równanie $f(x) = 0$ pierwiastków wielokrotnych nie posiada, jest

$$\mathrm{E}_a^b \frac{f(x)}{f'(x)} = l,$$

gdzie l oznacza ilość pierwiastków równania $f(x) = 0$, zawartych między a i $b > a$.

Stąd wynika następujące twierdzenie Sturm'a:

Twierdzenie. *Podzielmy funkcyją całkowitą $V = f(x)$ przez jéj pochodną $V_1 = f'(x)$ i oznaczmy przez V_2 resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną; podzielmy następnie funkcyją V_1 przez V_2 i oznaczmy przez V_3 resztę, pomnożoną przez dowolną liczbę ujemną, i postępujmy taksamo daléj, aż dopóki nie dojdziemy do reszty V_r, będącéj liczbą stałą. Jeżeli funkcyja V nie posiada pierwiastków wielokrotnych, to liczba V_r jest różna od zera i wówczas różnica między ilością zmian znaku w grupie*

(1) $$V, \ V_1, \ V_2, \ldots, V_r$$

przy $x = a$ i ilością zmian znaku w téjże grupie przy $x = b > a$ jest równa ilości pierwiastków równania $V = 0$, zawartych między krańcami a i b.

Twierdzenie Sturm'a jest bezpośrednim wynikiem cztérech własności, jakie posiadają funkcyje grupy (1), mianowicie:

a. ostatnia funkcyja V_r ani razu nie staje się równą zeru między a i b;

b. dwie sąsiednie funkcyje grupy (1) nie mogą jednocześnie stawać się równymi zeru dla żadnéj wartości zmiennéj x, zawartéj między a i b;

c. jeżeli przy jakiéjkolwiek wartości zmiennéj x, zawartéj między a i b, funkcyja V_k staje się równą zeru, to wartości dwu funkcyj V_{k-1} i V_{k+1} są różnego znaku.

d. przy przejściu zmiennéj x przez jakikolwiek pierwiastek równania $V=0$, zawarty między a i b, od wartości mniejszych do większych, stosunek $\frac{V}{V_1}$ przechodzi od wartości ujemnych do dodatnych.

Do każdéj grupy funkcyj, które posiadają te cztéry własności, twierdzenie Sturm'a jednakowo się stosuje, a funkcyje, tworzące taką grupę, nazywają się funkcyjami Sturm'a.

144. Ażeby wszystkie pierwiastki równania $V=0$ były pojedyńcze i rzeczywiste, potrzeba i wystarcza, iżby

$$(1) \qquad v_{-\infty} - v_{+\infty} = n,$$

gdzie $v_{-\infty}$ i $v_{+\infty}$ oznaczają ilości zmian znaku w grupie funkcyj Sturm'a

$$V, \; V_1, \; V_2, \ldots, V_r$$

przy $x=-\infty$ i przy $x=+\infty$, n zaś jest stopniem funkcyi V. Ponieważ ilość funkcyj $V, V_1, \ldots, V_r$, oczywiście, nie przewyższa liczby $n+1$, przeto $v_{-\infty} \leqq n$ i $v_{+\infty} \leqq n$; a zatym, według (1),

$$v_{-\infty} = n, \quad v_{+\infty} = 0.$$

Te równania wskazują, że wtedy ilość funkcyj Sturm'a winna być równą liczbie $n+1$, i że spółczynniki najwyższych potęg zmiennéj x w ich wyrażeniach powinny miéć jednakowe znaki.

Nawzajem, jeżeli funkcyje $V_2, V_3, \ldots$ są odpowiednio $(n-2)$-go, $(n-3)$-go, ... stopnia, tak iż ilość wszystkich funkcyj $V, V_1, V_2, \ldots$ jest $n+1$, i jeżeli spółczynniki potęg $x^{n-2}, x^{n-3}, \ldots$ w wyrażeniach funkcyj V_2, $V_3, \ldots$ są takiegoż znaku, jak spółczynnik przy x^n w wyrażeniu funkcyi V, to wtedy ma miejsce równanie (1), a wszystkie pierwiastki równania $V=0$ są rzeczywiste i różne (art. 77).

145. Przypuśćmy, że tworząc zwykłym sposobem grupę funkcyj Sturm'a dla równania $V=0$, doszliśmy do funkcyi V_i, tożsamościowo równéj zeru. To wskazuje, że równanie $V=0$ ma pierwiastki wielokrotne, oraz, że wszystkie funkcyje grupy

$$(1) \qquad V, \; V_1, \; V_2, \ldots, V_{i-1}$$

są podzielne przez funkcyją V_{i-1}, która jest największym spólnym dzielnikiem funkcyi V i jéj pochodnéj V_1.

Nazywając

$$\frac{V}{V_{i-1}} = U, \quad \frac{V_1}{V_{i-1}} = U_1, \ldots,$$

zauważymy, że funkcyje grupy

$$(2) \qquad U, \quad U_1, \quad U_2, \ldots, U_{i-1}$$

posiadają wszystkie cztéry własności charakterystyczne funkcyj Sturm'a dla jakiegokolwiek przedziału a, b; wskutek tego, oznaczywszy przez l ilość pierwiastków równania $U = 0$, zawartych między a i b, a przez v_x ilość zmian znaku w grupie (2), mamy

$$v_a - v_b = l.$$

Ilość zmian znaku w grupie (2) jest równa ilości zmian znaku w grupie (1), a l jest liczbą, wyrażającą ilość różnych pierwiastków równania $V = 0$, zawartych między a i b. Wskutek tego, na zasadzie ostatniego równania, wnosimy, że twierdzenie Sturm'a, stosowane do równania z pierwiastkami wielokrotnymi, daje możność dowiedzieć się, ile równanie ma pierwiastków *różnych*, zawartych między danymi krańcami.

146. Z tego, cośmy powiedzieli w tym rozdziale i w poprzedzającym, wynika, że zadanie o oddzielaniu pierwiastków rzeczywistych równania — a tymsamym i zadanie o rozwinięciu pierwiastka rzeczywistego na ułamek dziesiętny albo na ułamek ciągły — należy uważać za rozwiązane w zupełności.

Pozostaje więc tylko oddzielanie pierwiastków zespolonych, czemu poświęcimy rozdział następujący; teraz zaś zastosujemy twierdzenie Sturm'a do kilku przykładów.

Przykład 1. Dajmy na to, że potrzeba oddzielić pierwiastki równania

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Tworząc funkcyje Sturm'a według ogólnego prawidła, otrzymamy

$$\begin{aligned} V &= x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \\ V_1 &= 4x^3 + 3x^2 - 8x - 4, \\ V_2 &= 7x^2 + 8x - 4, \\ V_3 &= 4x + 5, \\ V_4 &= +1. \end{aligned}$$

Stąd wprost widzimy, że wszystkie pierwiastki równania $V = 0$ są rzeczywiste i nierówne. Zawiérają się one między następującymi liczbami

$$-2, \quad -1\frac{1}{2}, \quad 0, \quad 1, \quad 2.$$

Przykład 2. Weźmy równanie

$$x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Znajdziemy tu

$$V = x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1,$$
$$V_1 = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2,$$
$$V_2 = -6x^3 + 33x^2 - 44x + 27,$$
$$V_3 = -67x^2 + 102x - 69.$$

Ponieważ funkcyja V_3 nie posiada pierwiastków rzeczywistych, przeto możemy na niéj się zatrzymać. Nadając zmiennéj x wartości $-\infty$, 0, $+\infty$ otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	V	V_1	V_2	V_3
$+\infty$	+	+	—	—
0	—	+	+	—
$-\infty$	—	+	+	—

Stąd widzimy, że równanie $V = 0$ ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty; znajduje się on między 0 i 1, gdyż $V(0) < 0$, $V(1) > 0$.

Przykład 3. Weźmy równanie

$$x^4 - 12x^3 + 55x^2 + 96 = 0.$$

Dla przedziału z krańcami dodatnymi możemy przyjąć

$$V = x^4 - 12x^3 + 55x^2 + 96,$$
$$V_1 = 2x^2 - 18x + 55,$$
$$V_2 = -348x - 329,$$
$$V_3 = -1.$$

Stąd otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	V	V_1	V_2	V_3
$+\infty$	+	+	—	+
0	+	+	—	+

z któréj widzimy, że nasze równanie nie ma pierwiastków dodatnych. Dla przedziału z krańcami ujemnymi mamy taką grupę funkcyj Sturm'a:

$$V = x^4 - 12x^3 + 55x^2 + 96,$$
$$V_1 = -2x^2 + 18x - 55,$$
$$V_2 = -348x - 329,$$
$$V_3 = +1.$$

Przy pomocy tych funkcyj układamy następującą tablicę:

x	V	V_1	V_2	V_3
0	+	—	—	+
$-\infty$	+	—	+	+

z której widzimy, że równanie $V = 0$ nie ma również pierwiastków ujemnych, co zresztą można było wprost wnieść z tego, że wszystkie spółczynniki w wyrażeniu $V(-x)$ są dodatne.

ROZDZIAŁ VIII.

WYZNACZENIE ILOŚCI PIERWIASTKÓW, ZAWARTYCH WEWNĄTRZ DANEGO KONTURU. — ODDZIELANIE PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH. — PRZYKŁAD. — TWIERDZENIE HERMITE'A.

---

§ I. TWIERDZENIE CAUCHY'EGO.

147. W tym rozdziale przyjmiemy, że spółczynniki danego równania są niekoniecznie rzeczywiste, lecz mogą być zespolone.

Przy dowodzeniu twierdzenia o istnieniu pierwiastka w rozdziale 2-gim, rozważaliśmy wielkość szczególną, którą nazywaliśmy odchyleniem danéj krzywéj $z\,z'\,z''$. Była to różnica między wartościami wielkości odch $f(z)$ w punktach z'' i z, kiedy punkt bieżący z, poruszając się w sposób ciągły po krzywéj $z\,z'\,z''$, przechodzi od początku z do końca z'', przy założeniu niezbędnym, iż krzywa $z\,z'\,z''$ nie zawiéra ani jednego takiego punktu, w którymby wartość funkcyi $f(z)$ była równą zeru. Obecnie, ograniczając się wyłącznie do krzywych zamkniętych, zajmiemy się pytaniem, jaki istnieje związek między odchyleniem takiéj linji krzywéj a ilością pierwiastków równania $f(z) = 0$, zawartych wewnątrz niéj.

Zaczniemy od udowodnienia następującego twierdzenia pomocniczego.

Twierdzenie pomocnicze 1. *Odchylenie jakiéjkolwiek krzywéj zamkniętéj, wyznaczone przez funkcyją linijową $z-a$, równa się 2π albo zeru, zależnie od tego, czy punkt a znajduje się wewnątrz krzywéj zamkniętéj, czytéż zewnątrz niéj.*

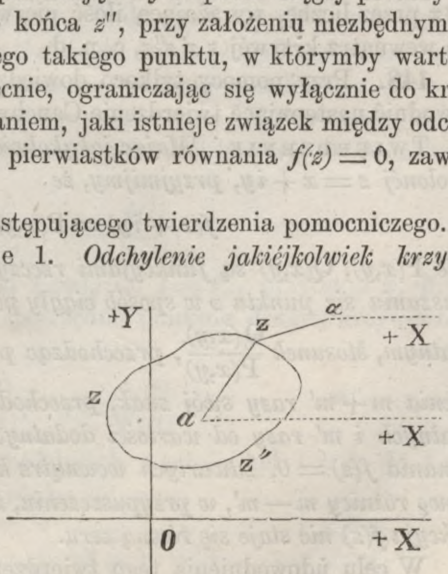

Fig. 7.

Jest to wprost widoczne na rysunku. Istotnie, gdziekolwiek znajduje się punkt a (fig. 7), czyto wewnątrz, czytéż zewnątrz konturu $z\,z'\,z''$, zawsze wartość odch $f(z)$ równa się wielkości kąta zax i, oczywiście, gdy punkt bieżący z, poruszając się po konturze $z\,z'\,z''$ w kierunku dodatnym, wróci na pierwotne swoje stanowisko, to spółcześnie kąt zax, zmieniając się odpowiednio, otrzyma przyrost 2π albo zero, stosownie do tego, gdzie się znajduje punkt a, wewnątrz czytéż zewnątrz konturu $z\,z'\,z''\,z$. A zatym, w piérwszym przypadku mamy

$$\text{odch}_{(z-a)}\, z\,z'\,z''z = 2\pi,$$

w drugim zaś

$$\text{odch}_{(z-a)}\, z\,z'\,z''z = 0.$$

Twierdzenie pomocnicze 2. *Ilość pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz krzywéj zamkniętéj $z\,z'\,z''\,z$, równa się odchyleniu krzywéj $z\,z'\,z''\,z$ o kierunku dodatnym, wyznaczonemu przez funkcyją $f(z)$, podzielonemu przez 2π.* Przypuszczamy tu, że kierunek krzywéj $z\,z'\,z''\,z$ jest dodatny, za jaki przyjmujemy kierunek od odciętych dodatnych w stronę rzędnych dodatnych.

Wyraźmy funkcyją $f(z)$ jako iloczyn czynników linijowych,

$$f(z) = A(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n),$$

gdzie A przedstawia spółczynnik najwyższéj potęgi zmiennéj z w wyrażeniu funkcyi $f(z)$, i oznaczmy, dla skrócenia, dwumian $z-a_i$ przez u_i. Mamy tu

$$\text{odch}_f z\,z'\,z''z = \text{odch}_{u_1} z\,z'\,z''z + \text{odch}_{u_2} z\,z'\,z''z + \ldots + \text{odch}_{u_n} z\,z'\,z''z.$$

Lecz, według twierdzenia poprzedzającego, wartość $\text{odch}_{u_i} z\,z'\,z''z$ jest 2π albo zero, stosownie do tego, czy punkt a_i znajduje się wewnątrz albo zewnątrz krzywéj $z\,z'\,z''z$; a więc, strona prawa równania ostatniego równa się iloczynowi 2π przez liczbę, wyrażającą ilość pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz krzywéj $z\,z'\,z''z$, c. n. d.

148. Przy pomocy tylkoco dowiedzionego twierdzenia, łatwo możemy udowodnić następujące twierdzenie Cauchy'ego.

Twierdzenie. *Mając jakąkolwiek funkcyją całkowitą $f(z)$ zmiennéj zespolonéj $z=x+iy$, przyjmijmy, że*

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

gdzie $P(x,y)$, $Q(x,y)$ są funkcyjami rzeczywistymi, całkowitymi. Jeżeli, przy poruszaniu się punktu z w sposób ciągły po całym konturze $z\,z'\,z''z$ w kierunku dodatnym, stosunek $\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$, przechodząc pewną ilość razy przez wartość zero, zmienia $m+m'$ razy swój znak, przechodząc m razy od wartości ujemnych do dodatnych i m' razy od wartości dodatnych do ujemnych, to ilość pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz konturu $z\,z'\,z''z$, jest wyrażona przez połowę różnicy $m-m'$, w przypuszczeniu, że w żadnym punkcie konturu $z\,z'\,z''z$ funkcyja $f(z)$ nie staje się równą zeru.

W celu udowodnienia tego twierdzenia, zrobimy uprzednio następującą uwagę. Jeżeli jakikolwiek kąt φ, zmieniając się w sposób ciągły, przechodzi od wartości φ_0 do wartości $\varphi_0+2k\pi$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą, albo zero, to spółcześnie wielkość $tg\varphi$, zmieniając się odpowiednio, przechodzi pewną ilość razy przez zero, zmieniając swój znak jużto z — na +, jużtéż z + na —, i, jeżeli oznaczymy przez m i m' ilość przejść piérwszego rodzaju i drugiego, to, oczywiście, będziemy mieli taką równość:

$$m - m' = 2k.$$

Kładąc

$$\varphi = \text{odch}\, f(z) = \text{arc tg}\, \frac{Q(x,y)}{P(x,y)},$$

przypuśćmy, że zmienna niezależna z, obchodząc cały kontur $z\, z'\, z''z$ w kierunku dodatnym, wraca do swojéj pierwotnéj wartości; spółcześnie kąt φ, zmieniając się w sposób ciągły, powiększy się o $2k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą albo zerem, tak iż, na zasadzie powyższéj uwagi, mamy

$$k = \frac{m - m'}{2},$$

gdzie m jest liczbą wskazującą, ile razy $\text{tg}\,\varphi = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ przechodzi przez zero od wartości ujemnych do dodatnych, a liczba m' wskazuje, ile razy taż sama wielkość przechodzi przez zero od wartości dodatnych do ujemnych. Lecz, według 2-go twierdzenia pomocniczego, liczba k, stanowiąca stronę lewą powyższego równania, przedstawia ilość pierwiastków równania $f(z) = 0$, zawartych wewnątrz konturu $z\, z'\, z''z$. Jest więc twierdzenie dowiedzione.

149. Różnica $m - m'$, o któréj mowa w twierdzeniu Cauchy'ego, stanowi to, co w rozdziale poprzednim nazywaliśmy piérwszym nadmiarem funkcyi; nadmiar ten umiemy wyznaczać, jeżeli dana funkcyja jest wymierna.

Ażeby mieć do czynienia wyłącznie z funkcyjami wymiernymi, dość jest przypuścić, że krzywa zamknięta $z\, z'\, z''z$ jest taka, iż spółrzędne każdego jéj punktu wyrażają się jako funkcyje wymierne zmiennéj niezależnéj t.

Zwykle bywa tak, że kontur $z\, z'\, z''z$ składa się z kilku oddzielnych krzywych $z\, z'$, $z'\, z''$, ...; spółrzędne punktów na piérwszéj krzywéj otrzymać można ze wzorów

$$x = \frac{\varphi(t)}{\Phi(t)}, \quad y = \frac{\psi(t)}{\Psi(t)},$$

zmieniając zmienną niezależną t od $t = t_0$ do $t = t'_0$, przyczym φ, Φ, ψ, Ψ przedstawiają funkcyje całkowite; spółrzędne punktów drugiéj krzywéj otrzymują się z podobnych wzorów

$$x = \frac{\varphi_1(t)}{\Phi_1(t)}, \quad y = \frac{\psi_1(t)}{\Psi_1(t)}$$

przez nadawanie dla t wszelkich możebnych wartości od $t = t_1$ do $t = t'_1$, i t. d. Wówczas szukany nadmiar równa się sumie

$$\mathrm{E}_{t_0}^{t'_0} \frac{Q\left(\frac{\varphi}{\Phi}, \frac{\psi}{\Psi}\right)}{P\left(\frac{\varphi}{\Phi}, \frac{\psi}{\Psi}\right)} + \mathrm{E}_{t_1}^{t'_1} \frac{Q\left(\frac{\varphi_1}{\Phi_1}, \frac{\psi_1}{\Psi_1}\right)}{P\left(\frac{\varphi_1}{\Phi_1}, \frac{\psi_1}{\Psi_1}\right)} + \ldots,$$

któréj każdy wyraz oblicza się sposobem, opisanym w rozdziale poprzednim.

150. Najczęściéj zdarza się, że dany kontur składa się z obwodu prostokąta, którego boki są równoległe do osi spółrzędnych. Obchodząc obwód takiego prostokąta w kierunku dodatnym, oznaczmy spółrzędne wiérzchołków kolejno przez (a,b), (a',b), (a',b'), (a,b'), a przez r ilość pierwiastków równania $f(z)=0$, zawartych wewnątrz tego prostokąta; wówczas mamy

$$r=\frac{1}{2}\mathrm{E}_a^{a'}\frac{\mathrm{Q}(x,b)}{\mathrm{P}(x,b)}+\frac{1}{2}\mathrm{E}_b^{b'}\frac{\mathrm{Q}(a',y)}{\mathrm{P}(a',y)}+\frac{1}{2}\mathrm{E}_{a'}^{a}\frac{\mathrm{Q}(x,b')}{\mathrm{P}(x,b')}+\frac{1}{2}\mathrm{E}_{b'}^{b}\frac{\mathrm{Q}(a,y)}{\mathrm{P}(a,y)}.$$

§ II. ODDZIELANIE PIERWIASTKÓW ZESPOLONYCH.

151. Przyjmijmy, że równanie dane $f(z)=0$ nie posiada pierwiastków wielokrotnych, i oznaczmy przez R kraniec wyższy dla modułów jego pierwiastków. Na osiach spółrzędnych oddzielmy długości $\mathrm{OF}=\mathrm{OG}=\mathrm{OH}=\mathrm{OI}=\mathrm{R}$ (fig. 8), a przez punkty F, G, H, I poprowadźmy proste, równoległe do tych osi; otrzymamy kwadrat ABCD, wewnątrz którego znajdują się wszystkie pierwiastki równania $f(z)=0$. Przeprowadzając szereg prostych, równoległych do osi spółrzędnych, rozdzielimy kwadrat ABCD na pewną ilość takich prostokątów, jak $abcd$, i, przy pomocy opisanego wyżéj sposobu, oznaczymy, które z nich zawiérają pierwiastki, a które ich nie zawiérają. Te prostokąty, wewnątrz których jest zawartych więcéj niż po jednym pierwiastku, będziemy w ten sam sposób rozkładali na mniejsze, dotąd, dopóki nie otrzymamy prostokątów, wewnątrz których jest niewięcéj jak po jednym pierwiastku; wówczas wszystkie pierwiastki równania $f(z)=0$ będą oddzielone.

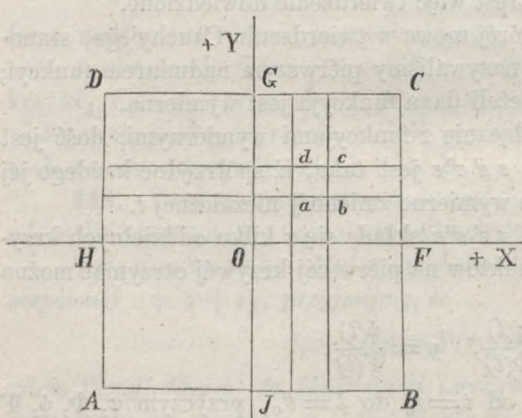

Fig. 8

Może się zdarzyć, że równanie $f(z)=0$ będzie miało pierwiastek na jednéj z tak poprowadzonych prostych, np. na ad albo na ab, których równania niech będą odpowiednio $x=a$ i $y=b$. Wtedy dwie funkcyje $\mathrm{P}(a,y)$ i $\mathrm{Q}(a,y)$, albo $\mathrm{P}(x,b)$ i $\mathrm{Q}(x,b)$ będą miały spólny dzielnik, posiadający pierwiastek rzeczywisty; okaże się to przy poszukiwaniu nadmiaru funkcyi $\frac{\mathrm{Q}(a,y)}{\mathrm{P}(a,y)}$, albo funkcyi $\frac{\mathrm{Q}(x,b)}{\mathrm{P}(x,b)}$. Należy jeszcze wskazać na kraniec, do którego doprowadziwszy rozkładanie kwadratu ABCD na mniejsze, będziemy już upewnieni, że wszystkie pierwiastki równania $f(z)=0$ są oddzielone. Zajmiemy się tym w rozdziale następnym, a teraz objaśnimy na przykładzie to, cośmy tu dotąd ogólnie rozważali.

152. Przykład. Należy oddzielić wszystkie pierwiastki równania

$$f(z)=z^5-7z^2+5z-1=0.$$

Jako wyższy kraniec dla modułów pierwiastków możemy tu przyjąć liczbę 3, gdyż, kładąc $\operatorname{mod} z \geqq 3$, mamy

$$\operatorname{mod} f(z) \geqq \operatorname{mod}^5 z - 7\operatorname{mod}^2 z - 5\operatorname{mod} z - 1 > 0.$$

Poprowadźmy proste równoległe do osi odciętych, w odległościach od początku spółrzędnych równych liczbom odpowiednio 1, 2, 3, —1, —2, —3, i podobny układ prostych równoległych do osi rzędnych; otrzymamy 36 kwadratów (fig. 9) elementarnych, wewnątrz których zawiérają się wszystkie pięć pierwiastków równania danego; należy oznaczyć, wewnątrz których z tych kwadratów znajduje się przynajmniéj po jednym pierwiastku.

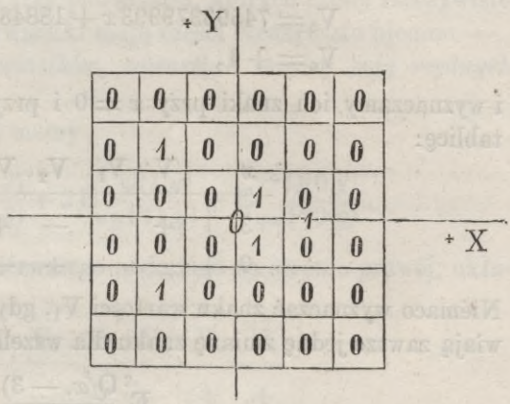

Fig. 9.

W tym celu, kładąc

$$f(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y),$$

wypiszemy wyrażenia funkcyj P i Q,

$$P(x,y)=x^5-7x^2+5x-1-(10x^3-7)y^2+5xy^4,$$
$$Q(x,y)=(5x^5-14x+5)y-10x^2y^3+y^5,$$

i poprowadzimy badanie w następującym porządku.

a. Wyznaczenie ilości pierwiastków, znajdujących się z prawéj strony osi rzędnych.

Oznaczywszy tę ilość przez r, mamy

$$2r=\mathrm{E}_0^3\frac{Q(x,-3)}{P(x,-3)}+\mathrm{E}_{-3}^{+3}\frac{Q(3,y)}{P(3,y)}+\mathrm{E}_3^0\frac{Q(x,3)}{P(x,3)}+\mathrm{E}_{+3}^{-3}\frac{Q(0,y)}{P(0,y)}.$$

Ponieważ jednak do funkcyi $Q(x,y)$ wchodzą tylko nieparzyste potęgi zmiennéj y, a do funkcyi $P(x,y)$ tylko parzyste, zatym

$$\mathrm{E}_0^3\frac{Q(x,-3)}{P(x,-3)}=\mathrm{E}_3^0\frac{Q(x,3)}{P(x,3)},$$
$$\mathrm{E}_{-3}^{+3}\frac{Q(3,y)}{P(3,y)}=1+2\mathrm{E}_0^3\frac{Q(3,y)}{yP(3,y)},$$

wskutek czego wzór poprzedni może być tak napisany:

$$(1) \qquad 2r = 1 + 2\mathrm{E}_0^3 \frac{\mathrm{Q}(x,-3)}{\mathrm{P}(x,-3)} + 2\mathrm{E}_0^3 \frac{\mathrm{Q}(3,y)}{y\mathrm{P}(3,y)} + \mathrm{E}_{+3}^{-3} \frac{\mathrm{Q}(0,y)}{\mathrm{P}(0,y)}.$$

W celu obliczenia piérwszego z trzech nadmiarów na stronie prawéj, tworzymy grupę funkcyj

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= \frac{1}{3}\mathrm{Q}(x,-3) = -5x^4 + 90x^2 + 14x - 86,\\
\mathrm{V}_1 &= \mathrm{P}(x,-3) = x^5 - 90x^3 - 7x^2 + 410x + 62,\\
\mathrm{V}_2 &= -\mathrm{V} = 5x^4 - 90x^2 - 14x + 86,\\
\mathrm{V}_3 &= 360x^3 + 21x^2 - 1964x - 310,\\
\mathrm{V}_4 &= 541773x^2 + 97508x - 740870,\\
\mathrm{V}_5 &= 74593379993x + 18848644963,\\
\mathrm{V}_6 &= +1,
\end{aligned}$$

i wyznaczamy ich znaki przy $x=0$ i przy $x=3$; otrzymujemy następującą tablicę:

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
3	+		—	+	+	+	+
0	—		+	—	—	+	+

Niémaco wyznaczać znaku wartości V_1, gdyż trzy wyrazy V, V_1, V_2 przedstawiają zawsze jednę zmianę znaku dla wszelkiéj wartości x. A więc

$$\mathrm{E}_0^3 \frac{\mathrm{Q}(x,-3)}{\mathrm{P}(x,-3)} = 1.$$

Ażeby znaléść wartość drugiego nadmiaru na stronie prawéj wzoru (1), zważmy, że

$$\frac{\mathrm{Q}(3,y)}{y} = y^4 - 90y^2 + 368,$$
$$\mathrm{P}(3,y) = 15y^4 - 263y^2 + 194;$$

i dlatego

$$\mathrm{E}_0^3 \frac{\mathrm{Q}(3,y)}{y\mathrm{P}(3,y)} = \mathrm{E}_0^9 \frac{y^2 - 90y + 368}{15y^2 - 263y + 194}.$$

Kładąc

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} &= y^2 - 90y + 368,\\
\mathrm{R}_1 &= 15y^2 - 263y + 194,\\
\mathrm{R}_2 &= 1087y - 5326,\\
\mathrm{R}_3 &= +1,
\end{aligned}$$

układamy tablicę

y	R	R_1	R_2	R_3
9	—	—	+	+
0	+	+	—	+

z któréj wnosimy, że

$$\mathop{\mathrm{E}}_{0}^{3} \frac{Q(3,y)}{yP(3,y)} = 1.$$

Ostatni nadmiar na stronie prawéj wzoru (1) wyznacza się bezpośrednio; mianowicie:

$$\mathop{\mathrm{E}}_{+3}^{-3} \frac{Q(0,y)}{P(0,y)} = \mathop{\mathrm{E}}_{+3}^{-3} \frac{5y + y^5}{-1 + 7y^2} = 1.$$

Wstawiając wartości otrzymane w stronę prawą wzoru (1) i dzieląc obie strony przez 2, będziemy mieli

$$r = 3.$$

To wskazuje, że równanie dane ma trzy pierwiastki, których części rzeczywiste są dodatne; pozostałe zaś dwa pierwiastki mają części rzeczywiste ujemne. —

b. Wyznaczenie ilości pierwiastków, zawartych między osią rzędnych i prostą $x = 1$.

Oznaczywszy tę ilość przez r, mamy

$$(2)\qquad 2r = 1 + 2\mathop{\mathrm{E}}_{0}^{1} \frac{Q(x,-3)}{P(x,-3)} + 2\mathop{\mathrm{E}}_{0}^{3} \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)} + \mathop{\mathrm{E}}_{+3}^{-3} \frac{Q(0,y)}{P(0,y)}.$$

Ażeby wyznaczyć wartość piérwszego nadmiaru na stronie prawéj, układamy tablicę

x	V	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6
1	+	—	—	—	+	+	
0	—	+	—	—	+	+	

i znajdujemy

$$\mathop{\mathrm{E}}_{0}^{1} \frac{Q(x,-3)}{P(x,-3)} = 1.$$

Drugi nadmiar na stronie prawéj wzoru (2) może być przedstawiony tak:

$$\mathop{\mathrm{E}}_{0}^{3} \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)} = \mathop{\mathrm{E}}_{0}^{9} \frac{y^2 - 10y - 4}{5y^2 - 3y - 2}.$$

Wypisujemy funkcyje

$$\begin{aligned} S &= y^2 - 10y - 4, \\ S_1 &= 5y^2 - 3y - 2, \\ S_2 &= 47y + 18, \\ S_3 &= +1, \end{aligned}$$

z których pomocą układamy tablicę

y	S	S_1	S_2	S_3
9	—	+	+	+
0	—	—	+	+

a z niéj wnosimy, że

$$\mathop{E}_{0}^{3}\frac{Q(1,y)}{yP(1,y)}=0.$$

Ostatni z nadmiarów, wchodzących do strony prawéj wzoru (2), był znaleziony powyżéj; jest on równy jedności.

Wstawiając wartości otrzymane we wzór (2), i dzieląc obie strony przez 2, będziemy mieli

$$r=2.$$

Ponieważ równanie dane ma jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, zawarty między 1 i 2, zatym otrzymany wypadek wskazuje, że ma ono dwa pierwiastki zespolone sprzężone, których część rzeczywista przypada między 0 i 1. —

c. Wyznaczenie ilości pierwiastków, zawartych wewnątrz prostokąta, utworzonego przez proste: $y=\pm 1$, $x=0$, $x=1$.

Oznaczywszy przez r tę ilość, mamy

$$r=1+\mathop{E}_{0}^{1}\frac{Q(x,-1)}{P(x,-1)}+\mathop{E}_{0}^{1}\frac{Q(1,y)}{yP(1,y)}. \tag{3}$$

W celu wyznaczenia piérwszego z nadmiarów na stronie prawéj, przy pomocy funkcyj

$$\begin{aligned}
U &= Q(x,-1)=-5x^4+10x^2+14x-6,\\
U_1 &= P(x,-1)=x^5-10x^3-7x^2+10x+6,\\
U_2 &= -U=5x^4-10x^2-14x+6,\\
U_3 &= 40x^3+21x^2-44x-30,\\
U_4 &= 999x^2+4204x-1290,\\
U_5 &= -978727x+343443,\\
U_6 &= -1,
\end{aligned}$$

układamy następującą tablicę znaków:

x	U	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
1	+	—	—	+	—	—	
0	—	+	—	—	+	—	

z któréj otrzymujemy

$$\mathop{E}_{0}^{1}\frac{Q(x,-1)}{P(x,-1)}=1.$$

Ażeby otrzymać wartość drugiego nadmiaru na stronie prawéj wzoru (3), bierzemy powyżéj już utworzone funkcyje S, S_1, S_2, S_3 i określamy ich znaki dla $y=0$ i dla $y=1$; otrzymujemy

y	S	S_1	S_2	S_3
1	—	0	+	+
0	—	—	+	+

Stąd znajdujemy

$$\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{E}}} \frac{Q(1,y)}{yP(1,y)} = 0.$$

A zatym

$$r = 2,$$

co wskazuje na istnienie dwu pierwiastków zespolonych sprzężonych, w których spółczynnik części urojonéj jest, co do wartości bezwzględnéj, mniejszy od jedności.

d. Wyznaczenie ilości pierwiastków, zawartych wewnątrz kwadratu, utworzonego przez proste: $x = -1$, $x = -2$, $y = 1$, $y = 2$.

Oznaczając tę ilość przez r, będziemy mieli

$$2r = \overset{-1}{\underset{-2}{\mathrm{E}}} \frac{Q(x,1)}{P(x,1)} + \overset{2}{\underset{1}{\mathrm{E}}} \frac{Q(-1,y)}{P(-1,y)} + \overset{-2}{\underset{-1}{\mathrm{E}}} \frac{Q(x,2)}{P(x,2)} + \overset{1}{\underset{2}{\mathrm{E}}} \frac{Q(-2,y)}{P(-2,y)}. \tag{4}$$

Ażeby wyznaczyć piérwszy z nadmiarów na stronie prawéj, zauważymy, że

$$\overset{-1}{\underset{-2}{\mathrm{E}}} \frac{Q(x,1)}{P(x,1)} = -\overset{-1}{\underset{-2}{\mathrm{E}}} \frac{Q(x,-1)}{P(x,-1)}.$$

Układamy tablicę znaków

x	U	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6
-1	$-$		$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
-2	$-$		$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

i znajdujemy

$$\overset{-1}{\underset{-2}{\mathrm{E}}} \frac{Q(x,1)}{P(x,1)} = 0.$$

Przechodząc do wyznaczenia następującego nadmiaru, przekształcamy naprzód jego wyrażenie; otrzymujemy

$$\overset{2}{\underset{1}{\mathrm{E}}} \frac{Q(-1,y)}{P(-1,y)} = \overset{2}{\underset{1}{\mathrm{E}}} \frac{y^5 - 10y^3 + 24y}{-5y^4 + 17y^2 - 14} = \overset{4}{\underset{1}{\mathrm{E}}} \frac{y^2 - 10y + 24}{-5y^2 + 17y - 14}$$

$$= \overset{4}{\underset{1}{\mathrm{E}}} \frac{(y-4)(y-6)}{-5y^2 + 17y - 14}.$$

Ponieważ funkcyja pod znakiem E staje się równą zeru przy $y = 4$, zatym z rozważanego teraz konturu należy oddzielić nieskończenie małą część, zawiérającą punkt $x = -1$, $y = 2$, i rozważać ją oddzielnie. Odpowiednie krańce w drugim i trzecim z nadmiarów, wchodzących do wzoru (4), należy zmienić o wartość nieskończenie małą; tak iż, zamiast drugiego nadmiaru, potrzeba podstawić

$$\overset{2-h}{\underset{1}{\mathrm{E}}} \frac{Q(-1,y)}{P(-1,y)} = \overset{4}{\underset{1}{\mathrm{E}}} \frac{y-6}{5y^2 - 17y + 14} = 0,$$

gdzie h oznacza nieskończenie małą liczbę dodatną.

Zamiast trzeciego nadmiaru na stronie prawéj wzoru (4) podstawiamy

$$\mathop{\mathrm{E}}_{-1-h}^{-2}\frac{Q(x,2)}{P(x,2)}=\mathop{\mathrm{E}}_{-1-h}^{-2}\frac{(x+1)(5x^3-5x^2-35x+21)}{x^5-40x^3-7x^2+85x+27}$$
$$=\mathop{\mathrm{E}}_{-1}^{-2}\frac{-5x^3+5x^2+35x-21}{x^5-40x^3-7x^2+85x+27}.$$

Bardzo łatwo, przy pomocy twierdzenia Budan'a, przekonać się, że funkcyja $5x^3-5x^2-35x+21$ nie ma ani jednego pierwiastka między -1 i -2; a więc

$$\mathop{\mathrm{E}}_{-1-h}^{-2}\frac{Q(x,2)}{P(x,2)}=0.$$

Czwarty wyraz na stronie prawéj wzoru (5) można przedstawić tak:

$$\mathop{\mathrm{E}}_{2}^{1}\frac{Q(-2,y)}{P(-2,y)}=\mathop{\mathrm{E}}_{1}^{4}\frac{y^2-40y+113}{10y^2-87y+71}.$$

Przy przejściu zmiennéj y od $y=1$ do $y=4$, funkcyja $y^2-40y+113$ zmienia swój znak raz jeden, przechodząc wówczas od wartości dodatnych do ujemnych, a funkcyja $10y^2-87y+71$ pozostaje wciąż ujemną; wskutek tego,

$$\mathop{\mathrm{E}}_{2}^{1}\frac{Q(-2,y)}{P(-2,y)}=1.$$

Nakoniec, ażeby wyznaczyć nadmiar, odpowiadający wydzielonemu punktowi $x=-1$, $y=2$, określamy znaki wartości

$$\frac{Q(-1,2-h)}{P(-1,2-h)},\quad \frac{Q(-1-h,2)}{P(-1-h,2)},$$

przy nieskończenie małym dodatnym h, i znajdujemy, że piérwsza z wypisanych wartości jest ujemna, druga zaś dodatna; a więc, szukany nadmiar jest równy 1.

Na zasadzie tak otrzymanych wartości nadmiarów, ze wzoru (4) otrzymujemy

$$r=1.$$

To wskazuje, że dane równanie ma jeden pierwiastek zespolony, którego część rzeczywista jest zawarta między -1 i -2, a spółczynnik części urojonéj między 1 i 2. Temu pierwiastkowi odpowiada drugi, sprzężony.

Oddzieliliśmy więc wszystkie pierwiastki danego równania.

§ III. TWIERDZENIE HERMITE'A.

153. Poprowadźmy na płaszczyznie spółrzędnych dowolną prostą i przez A i B oznaczmy dwa punkty na téj prostéj, znajdujące się w nieskończenie wielkiéj odległości po różnych jéj stronach. Spółrzędne punktów na prostéj AB mogą być obliczone ze wzorów

$$(1)\left\{\begin{aligned} x&=t\cos\alpha,\\ y&=t\sin\alpha+b,\end{aligned}\right.$$

jeżeli będziemy zmiennéj t nadawali wartości od $t = -\infty$ do $t = +\infty$, przez α rozumieli kąt, utworzony przez kierunek dodatny prostéj AB z kierunkiem dodatnym osi odciętych, przez b zaś odcinek osi rzędnych. W przypadku szczególnym, kiedy prosta AB jest równoległa do osi rzędnych, zamiast wzorów (1) należy wziąć

$$x = a,$$
$$y = t,$$

gdzie a oznacza liczbę stałą.

Zakładamy, że żaden z punktów, określających pierwiastki równania $f(z) = 0$, nie leży na prostéj AB.

Oznaczywszy przez $a_1, a_2, \ldots$ pierwiastki równania $f(z) = 0$, weźmy pod uwagę jeden z nich, np. a_i, i przyjmijmy $z - a_i = u_i$. W przypuszczeniu, że zmienna t, wzrastając w sposób ciągły, przechodzi przez wszystkie wartości od $t = -\infty$ do $t = +\infty$, punkt z, odpowiadający zmiennéj zespolonéj $z = x + iy$, zmieniając odpowiednio swoje położenie, będzie się jednocześnie poruszał w kierunku dodatnym po prostéj AB, w kierunku od A do B. Odchylenie funkcyi linijowéj u_i będzie się jednocześnie także zmieniało w sposób ciągły, i przyrost, jaki ono otrzyma przy przejściu punktu z od A do B, oczywiście, będzie się równał $+\pi$ albo $-\pi$, stosownie do tego, czy punkt a_i znajduje się nad, czytéż pod prostą AB. Wskutek tego, mamy równość

$$\text{odch}\, u_i\, \text{AB} = e_i \pi,$$

gdzie $e_i = 1$, jeżeli punkt a_i leży nad prostą AB, zaś $e_i = -1$, jeżeli punkt a leży pod prostą AB.

Kładąc w równaniu ostatnim kolejno $i = 1, 2, \ldots, n$ i zważając, iż

$$\text{odch}_{u_1} \text{AB} + \text{odch}_{u_2} \text{AB} + \ldots + \text{odch}_{u_n} \text{AB} = \text{odch}_f \text{AB},$$

otrzymamy

$$\text{odch}_f \text{AB} = (e_1 + e_2 + \ldots + e_n)\pi.$$

Jeżeli przez r oznaczymy ilość pierwiastków równania $f(z) = 0$, znajdujących się nad prostą AB, przez s zaś ilość pierwiastków tegoż równania, znajdujących się pod prostą AB, to, oczywiście, będziemy mieli

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_n = r - s,$$

a więc

$$\text{odch}_f \text{AB} = (r - s)\pi.$$

Gdy jakakolwiek liczba zmienna α, albo wciąż wzrastając, albotéż wciąż się zmniejszając, przechodzi od wartości α_0 do $\alpha_0 + \pi$, to wówczas $\text{tg}\, \alpha$, zmieniając się odpowiednio, przechodzi raz jeden przez wartość zero od wartości ujemnych do dodatnych i raz jeden przez ∞ od wartości dodatnych do ujemnych. Na zasadzie téj uwagi, z ostatniéj równości wyprowadzamy następujące:

$$\underset{t=-\infty}{\overset{t=+\infty}{\text{E}}} \text{tg odch} f(z) = r - s,$$

$$\underset{t=-\infty}{\overset{t=+\infty}{\text{I}}} \text{tg odch} f(z) = s - r.$$

Kładąc
$$f(t(\cos\alpha + i\sin\alpha) + bi) = \varphi(t) + i\psi(t),$$
mamy
$$\operatorname{tg}\operatorname{odch} f(z) = \frac{\psi(t)}{\varphi(t)},$$
wskutek czego, dwa poprzedzające wzory mogą być napisane tak:

(1) $$\mathrm{E}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = r - s,$$

(2) $$\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = s - r.$$

Oba te wzory są widocznie jednoznaczne wrazie, kiedy funkcyje $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są jednakowego stopnia. Ale, jeżeli funkcyja $\varphi(t)$ jest wyższego stopnia niż funkcyja $\psi(t)$, to należy stosować wzór (2); jeżeli zaś odwrotnie, funkcyja $\varphi(t)$ jest niższego stopnia niż funkcyja $\psi(t)$, natenczas należy korzystać z formuły (1). Zresztą, możemy zawsze przyjąć, że stopień funkcyi $\psi(t)$ jest niższy od stopnia funkcyi $\varphi(t)$; aby to osięgnąć, dość jest podzielić funkcyją $f(z)$ przez pewną liczbę zespoloną.

Wzór (2) dał Hermite; ten wzór wyraża następujące

T W I E R D Z E N I E. *Jeżeli $f(z)$ jest funkcyją całkowitą i jeżeli przyjmiemy*
$$f(t(\cos\alpha + i\sin\alpha) + bi) = \varphi(t) + i\psi(t),$$
gdzie α i b są dowolnymi liczbami rzeczywistymi, to wartość nadmiaru $\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}$ jest równa różnicy między liczbą, wyrażającą ilość pierwiastków równania $f(z) = 0$, znajdujących się pod prostą $y = x\operatorname{tg}\alpha + b$, i liczbą, wyrażającą ilość pierwiastków tegoż równania, znajdujących się nad prostą $y = x\operatorname{tg}\alpha + b$ — w przypuszczeniu, że prosta $y = x\operatorname{tg}\alpha + b$ nie przechodzi przez żaden pierwiastek równania $f(z) = 0$, i że funkcyja $\psi(t)$ nie jest wyższego stopnia niż funkcyja $\varphi(t)$.

Wyznaczywszy przy pomocy tego twierdzenia różnicę $r - s$, wyznaczymy tymsamym obie liczby r i s, gdyż $r + s = n$.

154. Ilekroć będą uprzednio wiadome liczby r i s, wartość bezwzględna różnicy $r - s$ przedstawi kraniec niższy dla ilości pierwiastków rzeczywistych jednego z równań $\varphi(t) = 0$ lub $\psi(t) = 0$.

Jeżeli np. przyjmiemy

(1) $$f(x) = (x - a_1 - b_1 i)(x - a_2 - b_2 i)\dots(x - a_n - b_n i) = \varphi(x) + i\psi(x),$$

gdzie $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ oznaczają liczby rzeczywiste, a $b_1 > 0$, $b_2 > 0, \dots,$ $b_n > 0$, i jeżeli przypuścimy, że prosta AB razem się schodzi z osią odciętych, to będziemy mieli $r = n$, $s = 0$ i

(2) $$\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = -n,$$

skąd wnosimy, że równanie $\varphi(x)=0$ ma przynajmniéj n pierwiastków rzeczywistych i różnych. A ponieważ funkcyja $\varphi(x)$ jest n-go stopnia, więc wszystkie pierwiastki równania $\varphi(x)=0$ są pojedyńcze i rzeczywiste. — Prócz tego, przyjmując pod uwagę, że funkcyja $\psi(x)$ jest $(n-1)$-go stopnia, z równania (2) wprost wniesiemy, że wszystkie pierwiastki równania $\psi(x)=0$ są rzeczywiste, pojedyńcze i przegradzające się z pierwiastkami równania $\varphi(x)=0$.

Oznaczywszy przez p i q dwie dowolnie wzięte liczby rzeczywiste, mamy

$$(p+qi)f(x)=p\varphi(x)-q\psi(x)+i[p\psi(x)+q\varphi(x)].$$

Stosując do téj funkcyi twierdzenie Hermite'a, otrzymamy

$$\mathrm{I}_{-\infty}^{+\infty}\frac{p\psi(x)+q\varphi(x)}{p\varphi(x)-q\psi(x)}=-n,$$

skąd wynika, że wszystkie pierwiastki równań

$$p\varphi(x)-q\psi(x)=0,$$
$$p\psi(x)+q\varphi(x)=0$$

są rzeczywiste, pojedyńcze i, prócz tego, przegradzające się nawzajem.

155. Przykład. Ażeby znaléść ilość pierwiastków równania

$$f(z)=z^5-7z^2+5z-1=0,$$

znajdujących się po prawéj i po lewéj stronie osi rzędnych, przyjmiemy $z=iy$; jest tu

$$f(iy)=7y^2-1+iy(y^4+5),$$

$$\mathrm{E}_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(y^4+5)}{7y^2-1}=-1.$$

A więc

$$r-s=-1,\quad r+s=5,$$

skąd otrzymujemy

$$r=2,\quad s=3.$$

Równanie przeto nasze ma dwa pierwiastki po lewéj stronie osi rzędnych i trzy po prawéj jéj stronie.

ROZDZIAŁ IX.

OBLICZANIE ILOCZYNU WSZYSTKICH WARTOŚCI JAKIÉJKOLWIEK FUNKCYI CAŁKOWITÉJ PIERWIASTKA RÓWNANIA DANEGO. — OGÓLNA POSTAĆ FUNKCYI WYMIERNÉJ JEDNEGO ALBO WIĘKSZÉJ ILOŚCI PIERWIASTKÓW DANEGO RÓWNANIA. — PRZEKSZTAŁCENIE RÓWNANIA. — SPOSÓB TSCHIRNHAUS'A ROZWIĄZYWANIA RÓWNAŃ 3-GO I 4-GO STOPNIA. — TWIERDZENIE LAGRANGE'A O RÓWNANIACH, MAJĄCYCH PIERWIASTKI SPÓLNE — ILOCZYN KWADRATÓW RÓŻNIC PIERWIASTKÓW RÓWNANIA.—SPOSÓB LAGRANGE'A ODDZIELANIA PIERWIASTKÓW.

---

§ I. O RUGOWNIKU.

156. Oznaczając przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pierwiastki równania

$$f(x) = \mathrm{A}x^n + \mathrm{A}_1 x^{n-1} + \ldots + \mathrm{A}_n = 0,$$

którego spółczynniki mogą być rzeczywiste albo zespolone, a przez $\mathrm{F}(x)$ jakąkolwiek funkcyją całkowitą

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{B}x^m + \mathrm{B}_1 x^{m-1} + \ldots + \mathrm{B}_m,$$

zamierzamy obliczyć wartość iloczynu

$$\mathrm{F}(x_1)\,\mathrm{F}(x_2)\ldots\mathrm{F}(x_n).$$

Iloczyn ten będziemy nazywali rugownikiem funkcyi $\mathrm{F}(x)$ względem równania $f(x) = 0$ i, dla skrócenia, będziemy go oznaczali zapomocą symbolu $[\mathrm{F}, f]$.

Istnieje kilka sposobów rozwiązywania tego zadania; przytoczymy tu tylko te, które opiérają się na zasadach dobrze nam już znanych.

Wskażemy naprzód na trzy następujące własności symbolu $[\mathrm{F}, f]$.

Popiérwsze, przy jakimkolwiek stałym C, byle różnym od zera, jest

$$(1) \qquad [\mathrm{F}, f] = [\mathrm{F}, \mathrm{C}f], \quad [\mathrm{CF}, f] = \mathrm{C}^n[\mathrm{F}, f].$$

Powtóre, jeżeli f_1 jest resztą z podzielenia funkcyi F przez funkcyją f, to

$$(2) \qquad [\mathrm{F}, f] = [f_1, f];$$

według bowiém tożsamości

$$\mathrm{F}(x) = f(x)\,\mathrm{Q} + f_1(x),$$

wyrażającéj związek między dzielną, dzielnikiem i resztą, jest

$$F(x_i) = f_1(x_i),$$

przy wszelkich wartościach wskaźnika i od $i=1$ do $i=n$; stąd zaś bezpośrednio wynika, iż

$$F(x_1)\,F(x_2)\ldots F(x_n) = f_1(x_1)\,f_1(x_2)\ldots f_1(x_n).$$

Potrzecie, ma miejsce następująca równość:

$$(3) \qquad [F,f] = (-1)^{mn}\frac{B^n}{A^m}[f,F].$$

Jakoż, oznaczywszy przez $x'_1, x'_2, \ldots, x'_m$ pierwiastki równania $F(x)=0$, z równości

$$F(x) = B(x-x'_1)(x-x'_2)\ldots(x-x'_m),$$
$$f(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$$

otrzymujemy

$$F(x_i) = B(x_i-x'_1)(x_i-x'_2)\ldots(x_i-x'_m),$$
$$f(x'_j) = A(x'_j-x_1)(x'_j-x_2)\ldots(x'_j-x_n),$$

gdzie wskaźnik i i j mogą otrzymywać wartości:

$$i=1, 2, 3, \ldots, n; \quad j=1, 2, 3, \ldots, m.$$

Wstawiając te wyrażenia w strony prawe równań

$$[F,f] = F(x_1)\,F(x_2)\ldots F(x_n),$$
$$[f,F] = f(x'_1)\,f(x'_2)\ldots f(x'_m),$$

i oznaczając, dla skrócenia, przez $\Pi(x_i-x'_j)$ iloczyn mn czynników $x_1-x'_1$, $x_1-x'_2, \ldots, x_n-x'_m$, otrzymamy

$$[F,f] = B^n\Pi(x_i-x'_j),$$
$$[f,F] = A^m\Pi(x'_j-x_i)$$

skąd, jako wniosek, bezpośrednio wynika równość (3).

157. Przechodząc do rozwiązania naszego zadania, przypuśćmy, żeśmy wykonali szereg kolejnych dzieleń, prowadzących do odnalezienia największego spólnego dzielnika funkcyj $F(x)$ i $f(x)$, i oznaczmy przez $f_1(x), f_2(x), \ldots$ wypadające tu reszty. Otrzymujemy w ten sposób związki:

$$F = fQ + f_1,$$
$$f = f_1Q_1 + f_2,$$
$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$
$$f_{k-3} = f_{k-2}\,Q_{k-2} + f_{k-1},$$
$$f_{k-2} = f_{k-1}\,Q_{k-1} + f_k,$$

gdzie litery $Q, Q_1, \ldots$ oznaczają odpowiednie ilorazy. — Przypuśćmy, że reszta f_k jest liczbą stałą B_k, i oznaczmy przez $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$ stopnie funkcyj $f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}$, a przez $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}$ spółczynniki najwyższych potęg zmiennéj x w ich wyrażeniach. Wówczas, na mocy wzorów, wyprowadzonych w art. poprzednim, możemy wypisać szereg równań:

$$[F,f]=[f_1,f]=(-1)^{m_1 n}\frac{B_1^{\,n}}{A^{m_1}}[f,f_1],$$

$$[f,f_1]=[f_2,f_1]=(-1)^{m_1 m_2}\frac{B_2^{\,m_1}}{B_1^{\,m_2}}[f_1,f_2],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$[f_{k-3},f_{k-2}]=[f_{k-1},f_{k-2}]=(-1)^{m_{k-2}\,m_{k-1}}\frac{B_{k-1}^{m_{k-2}}}{B_{k-2}^{m_{k-1}}}[f_{k-2},f_{k-1}],$$

$$[f_{k-2},f_{k-1}]=[f_k,f_{k-1}]=B_k^{m_{k-1}},$$

z których znajdujemy

$$[F,f]=(-1)^{n m_1+m_1 m_2+\ldots+m_{k-2}m_{k-1}}\frac{B_1^{\,n-m_2}B_2^{\,m_1-m_3}\ldots B_k^{\,m_{k-1}}}{A^{m_1}}.$$

To równanie, do którego strony prawéj wchodzą tylko liczby wiadome, przedstawia rozwiązanie naszego zadania.

158. Przykład. Kładąc

$$f=x^4-2x^3+x^2-1,$$
$$F=x^3-2x+3,$$

znajdujemy dwie funkcyje

$$f_1=3x^2-7x+5,$$
$$f_2=2x-1,$$

czyniące zadość równaniom:

$$f=FQ+f_1,$$
$$F=f_1Q_1+\frac{8}{9}f_2,$$
$$f_1=f_2Q_2+\frac{9}{4};$$

a zatym, mamy

$$\Big[F,f\Big]=\Big[f,F\Big]=\Big[f_1,F\Big]=\frac{3^3}{1}\Big[F,f_1\Big]$$
$$=3^3\Big[\frac{8}{9}f_2,f_1\Big]=\frac{3^3.8^2}{9^2}\Big[f_2,f_1\Big]$$
$$=\frac{8^2.2^2}{3.3}\Big[f_1,f_2\Big]=\frac{2^8}{3^2}\Big[\frac{9}{4},f_2\Big]$$
$$=\frac{2^8.9}{3^2.4}=2^6=64.$$

§ II. NAJPROSTSZA POSTAĆ FUNKCYI WYMIERNÉJ PIERWIASTKÓW RÓWNANIA DANEGO.

159. Powyższy sposób wyznaczenia rugownika [F, f] nie ujawnia niektórych jego bardzo ważnych własności, jak naprzykład téj, że: jeżeli wszystkie spółczynniki w wyrażeniach funkcyj F i f są liczbami całkowitymi, a spółczynnik najwyższéj potęgi zmiennéj x w wyrażeniu fuukcyi f jest równy jedności, to wartością rugownika jest liczba całkowita.

Żeby ten brak uzupełnić, w paragrafie następnym przedstawimy inny sposób rozwiązania tego zadania, polegający na pewnéj własności wyznaczników, a jednocześnie i samemu zadaniu nadamy postać ogólniejszą.

Teraz zaś udowodnimy następujące

Twierdzenie. *Każda funkcyja wymierna* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ *pierwiastka równania n-go stopnia* $f(x)=0$ *może być przedstawiona w postaci funkcyi całkowitéj tegoż pierwiastka, któréj stopień jest niższy od n, jeżeli tylko żadna z wartości funkcyj nie staje się nieskończenie wielką.*

Przyjmijmy, że ułamek $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ jest nieskracalny, i, uważając x jako zmienną niezależną, odnajdźmy dwie funkcyje całkowite $F(x)$ i $\Psi(x)$, czyniące zadość równości

$$F(x)\,\psi(x)-\Psi(x)\,f(x)=C,$$

w któréj C oznacza jakąkolwiek liczbę stałą; jest to możebne, gdyż funkcyje $f(x)$ i $\psi(x)$ nie mają spólnego dzielnika. Nadając w téj równości zmiennéj x wartość jednego z pierwiastków równania $f(x)=0$, otrzymamy

$$F(x)\,\psi(x)=C,$$

wskutek czego mieć będziemy

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{C}\,\varphi(x)\,F(x).$$

Strona prawa tego równania ma postać funkcyi całkowitéj pierwiastka x. — Jeżeli stopień iloczynu $\varphi(x)\,F(x)$ nie jest mniejszy od n, to wówczas dzielimy funkcyją $\varphi(x)\,F(x)$ przez $f(x)$, uważając przytym x jako zmienną niezależną; otrzymujemy równość

$$\varphi(x)\,F(x)=f(x)\,Q+\theta(x),$$

w któréj $\theta(x)$ oznacza resztę, t. j. funkcyją stopnia niższego niż n-ty. Stąd, nadając x wartość jednego z pierwiastków równania $f(x)=0$, otrzymamy

$$\varphi(x)\,F(x)=\theta(x),$$

albo

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{C}\,\theta(x).$$

Wniosek. *Każda funkcyja wymierna* $\frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots)}{\psi(x_1, x_2, \ldots)}$, *zależąca od kilku pierwiastków równania* $f(x) = 0$, *może być przedstawiona w postaci funkcyi całkowitéj tych pierwiastków, stopnia niższego niż n-ty względem każdego z nich.* Aby to udowodnić, należy zastosować powyższe twierdzenie kilka razy zrzędu.

160. Przykład. Przypuśćmy, że potrzeba sprowadzić do najprostszéj postaci funkcyją całkowitą.

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + 3},$$

gdzie x oznacza jakikolwiek pierwiastek równania

$$x^5 - 7 = 0.$$

Rozwijamy funkcyją $\frac{x^5 - 7}{x^3 - 2x^2 + 3}$ na ułamek ciągły

$$\frac{x^5 - 7}{x^3 - 2x^2 + 3} = x^2 + 2x + 4 + \cfrac{25}{5x - 4 + \cfrac{5041}{355x - 421 - \cfrac{96200}{71x - 1}}},$$

a oznaczywszy przez 25F i 25Ψ licznik i mianownik przedostatniego ułamka zbliżonego, mieć będziemy

$$\mathrm{F} = 71x^4 + x^3 + 271x^2 + 329x + 655,$$
$$\Psi = 71x^2 - 141x + 269,$$
$$(x^3 - 2x^2 + 3)\,\mathrm{F} - (x^5 - 7)\,\Psi = 3848.$$

Jeżeli przypuścimy, że x jest jednym z pierwiastków równania $x^5 - 7 = 0$, to ta równość przyjmie postać:

$$(x^3 - 2x^2 + 3)\,\mathrm{F} = 3848,$$

z któréj znajdujemy

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + 3} = \frac{71x^4 + x^3 + 271x^2 + 329x + 655}{3848}.$$

§ III. PRZEKSZTAŁCENIE RÓWNANIA.

161. Niech będzie dane równanie

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

którego pierwiastki oznaczmy przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wziąwszy pod uwagę jakikolwiek ułamek wymierny nieskracalny

$$y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

którego mianownik jest funkcyją piérwszą względem $f(x)$, zajmiemy się utworzeniem równania stopnia n-go

$$F(y)=y^n+P_1y^{n-1}+P_2y^{n-2}+\ldots+P_n=0,$$

którego pierwiastki byłyby następujące:

$$y_1=\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)},\quad y_2=\frac{\varphi(x_2)}{\psi(x_2)},\ldots,y_n=\frac{\varphi(x_n)}{\psi(x_n)}.$$

Ażeby podać rozwiązanie tego zadania, dość jest ograniczyć się do tego przypadku szczególnego, kiedy mianownik $\psi(x)$ tożsamościowo jest równy jedności, a stopień licznika $\varphi(x)$ jest mniejszy od n; do takiéj bowiém postaci sprowadza się wyrażenie wszelkiéj funkcyi wymiernéj pierwiastka równania danego.

Przypuśćmy więc, że

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}=\varphi(x),$$

gdzie $a_0, a_1, a_2,\ldots$ oznaczają jakiekolwiek spółczynniki, x zaś jeden z pierwiastków równania $f(x)=0$. Iloczyn $xy=a_0x+a_1x^2+\ldots+a_{n-1}x^n$ sprowadzimy do postaci

$$xy=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1},$$

gdzie $b_0, b_1, b_2,\ldots$ oznaczają wielomiany całkowite stopnia piérwszego, tak względem $a_0, a_1,\ldots$, jak i względem $p_1, p_2,\ldots$, któreto wielomiany są jednorodne względem $a_0, a_1, a_2,\ldots$. Iloczyn $x^2y=b_0x+b_1x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}$, sprowadzony do najprostszéj formy, daje równanie

$$x^2y=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n-1}x^{n-1},$$

gdzie $c_0, c_1, c_2,\ldots$ oznaczają wielomiany całkowite tak względem $a_0, a_1,\ldots$, jak i względem $p_1, p_2,\ldots$, będące względem $a_0, a_1, a_2,\ldots$ funkcyjami jednorodnymi linijowymi. Podobnego rodzaju wyrażenia będziemy tworzyć dotąd, dopóki nie dojdziemy do równania

$$x^{n-1}y=k_0+k_1x+k_2x^2.+\ldots+k_{n-1}x^{n-1},$$

w którym $k_0, k_1, k_2,\ldots$ oznaczają wielomiany całkowite tak względem $a_0, a_1, a_2,\ldots$, jak i względem $p_1, p_2,\ldots$, będące, prócz tego, względem $a_0, a_1, a_2,\ldots$ funkcyjami jednorodnymi linijowymi. Tym sposobem otrzymujemy układ n równań, które wypiszmy tak:

$$(1)\left\{\begin{array}{l}(a_0-y)+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}=0.\\ b_0+(b_1-y)x+b_2x^2+\ldots+b_{n-1}x^{n-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ k_0+k_1x+k_2x^2+\ldots+(k_{n-1}-y)x^{n-1}=0.\end{array}\right.$$

Stąd, jako wniosek, wynika

$$(2)\qquad\begin{vmatrix}a_0-y, & a_1, & \ldots, & a_{n-1}\\ b_0, & b_1-y, & \ldots, & b_{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ k_0, & k_1, & \ldots, & k_{n-1}-y\end{vmatrix}=0,$$

gdyż w wyznaczniku (2) każdy z elementów piérwszéj kolumny jest równy sumie elementów odpowiadających w kolumnach pozostałych, pomnożonych odpowiednio przez $-x$, $-x^2$ i t. d.

Jeżeli stronę lewą równania (2) uporządkujemy według potęg y, to otrzymamy równanie postaci

$$y^n + P_1 y^{n-1} + P_2 y^{n-2} + \ldots + P_n = 0, \tag{3}$$

w którym spółczynniki $P_1, P_2, \ldots$ mają postać wielomianów całkowitych tak względem $a_0, a_1, \ldots$, jak i względem $p_1, p_2, \ldots$, i są jednorodne względem $a_0, a_1, \ldots$, stopnia odpowiednio 1-go, 2-go, ...

Ponieważ w równaniu (3) y oznacza jakąkolwiek z wartości

$$y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \varphi(x_2), \ldots, y_n = \varphi(x_n),$$

przeto, jeżeli pośród liczb $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nie ma dwu równych sobie, to równanie (3), będąc stopnia n-tego, nie może mieć innych pierwiastków, prócz $y = y_1$, $y_2, \ldots, y_n$, a wówczas ma miejsce tożsamość

$$(y - \varphi(x_1))\,(y - \varphi(x_2))\,(y - \varphi(x_n)) = y^n + P_1 y^{n-1} + \ldots + P_n, \tag{4}$$

wskazująca, iż równanie (3) przedstawia szukane rozwiązanie naszego zadania. —

Równość (4) ma miejsce także w tym przypadku, kiedy pośród wartości $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)$ są równe sobie. Ażeby tego dowiéść, rozważymy oddzielnie dwa przypuszczenia: jedno, że równanie $f(x) = 0$ nie posiada pierwiastków wielokrotnych; drugie zaś, że ono je posiada.

W przypuszczeniu, że wszystkie pierwiastki równania $f(x) = 0$ są pojedyńcze, nadajmy spółczynnikom $a_0, a_1, \ldots$ dowolne przyrostki: $\Delta a_0, \Delta a_1, \ldots$. Nową wartość funkcyi y możemy napisać tak:

$$y + \Delta y = a_0 + \Delta a_0 + (a_1 + \Delta a_1)x + (a_2 + \Delta a_2)x^2 + \ldots,$$

tak iż odpowiadający przyrostkom spółczynników przyrostek y jest

$$\Delta y = \Delta a_0 + \Delta a_1 x + \Delta a_2 x^2 + \ldots + \Delta a^{n-1} x^{n-1}.$$

Posiłkując się wzorem Lagrange'a, wyznaczymy spółczynniki $\Delta a_0, \Delta a_1, \ldots$ tak, iżby przyrostki tych z wartości

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots, y_n,$$

które nie mają sobie równych, były równe zeru, i żeby przyrostki pozostałych były równe różnym dowolnie wziętym liczbom $t, t', \ldots$, bezwzględnie dość małym. Przy takich nowych wartościach spółczynników $a_0, a_1, \ldots$, równość (4) będzie miała miejsce. Ponieważ jéj obie strony mają postać funkcyj całkowitych zmiennych $t, t', \ldots$ i są równe przy nieskończenie wielu różnych wartościach liczb $t, t', \ldots$, niezależnych od siebie, przeto, oczywiście, pozostają one równymi przy wszelkich wartościach $t, t', \ldots$, a więc przy $t = 0, t' = 0, \ldots$.

Należy jeszcze okazać, że równość (4) ma miejsce w tym także przypadku, kiedy niektóre z pierwiastków $x_1, x_2, \ldots$ są sobie równe. W tym razie, nadajmy wszystkim pierwiastkom wielokrotnym równania $f(x)=0$ przyrostki dowolne różne $t, t', \ldots$, bezwzględnie dostatecznie małe, tak iż, zamiast pierwotnego równania $f(x)=0$, będziemy mieli nowe równanie

$$x^n + p_1' x^{n-1} + p_2' x^{n-2} + \ldots + p_n' = 0,$$

nie posiadające pierwiastków wielokrotnych, którego spółczynniki będą funkcyjami całkowitymi względem $t, t', \ldots$. Równość (4), utworzona dla tego nowego równania, ma miejsce nietylko przy wszelkiéj wartości y, ale także i dla nieskończenie wielu różnych wartości każdéj z liczb $t, t', \ldots$, niezależnych od siebie. A ponieważ obie jéj strony są funkcyjami całkowitymi zmiennych $t, t', \ldots$, zatym pozostają one równymi i przy wszelkiéj szczególnéj wartości każdéj z liczb $t, t', \ldots$. Kładąc $t=0, t'=0, \ldots$, otrzymujemy równość (4), utworzoną dla równania pierwotnego $f(x)=0$ z pierwiastkami wiolokrotnymi.

A więc, równość (4) ma miejsce we wszystkich przypadkach, t. j. równanie (3) przedstawia ogólne rozwiązanie zadania, które nas tu zajmowało.

162. Zadanie o utworzeniu równania z pierwiastkami: $\varphi(x_1)$ $\varphi(x_2), \ldots$ można uważać jako jednoznaczne z tym, które rozważaliśmy w paragrafie piérwszym niniejszego rozdziału, gdyż ono sprowadza się do utworzenia wzoru na obliczenie iloczynu

$$(y-\varphi(x_1))\,(y-\varphi(x_2))\ldots(y-\varphi(x_n)),$$

przy jakimkolwiek y.

Kładąc w równości

$$(y-\varphi(x_1))\,(y-\varphi(x_2))\ldots(y-(x_n)) = (-1)^n \begin{vmatrix} a_0 - y, & a_1\;, & \ldots, & a_{n-1} \\ b_0\;, & b_1 - y, & \ldots, & b_{n-1} \\ . & . & . & . \\ k_0\;, & k_1\;, & \ldots, & k_{n-1} - y \end{vmatrix}$$

$y=0$, otrzymamy wzór

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, \ldots, a_{n-1} \\ b_0, & b_1, \ldots, b_{n-1} \\ . & . \quad . \quad . \\ k_0, & k_1, \ldots, k_{n-1} \end{vmatrix},$$

z którego pomocą możemy wyznaczyć rugownik $[\varphi, f]$. Ten wzór wskazuje, że w tym przypadku, kiedy wszystkie spółczynniki tak w równaniu

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

jakoteż w wyrażeniu funkcyi

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

są liczbami całkowitymi, wartość rugownika $[\varphi, f]$ jest także liczbą całkowitą; wszystkie bowiém elementy $b_0, b_1, \ldots, k_{n-1}$ przedstawiają wówczas, oczywiście, liczby całkowite.

Przykład. Kładąc

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 = 0,$$
$$y = \varphi(x) = 3 - 2x + x^3,$$

znajdziemy

$$xy = 1 + 3x - 3x^2 + 2x^3,$$
$$x^2y = 2 + x + x^2 + x^3,$$
$$x^3y = 1 + 2x + 3x^3;$$

a więc mieć będziemy

$$\begin{vmatrix} 3-y, & -2, & 0, & 1 \\ 1, & 3-y, & -3, & 2 \\ 2, & 1, & 1-y, & 1 \\ 1, & 2, & 0, & 3-y \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$y^4 - 10y^3 + 36y^2 - 64y + 64 = 0.$$

Ostatni wyraz tego równania jest iloczynem jego pierwiastków, t. j.

$$[\varphi, f] = 64.$$

163. Równanie

$$(1) \qquad y^n + P_1 y^{n-1} + P_2 y^{n-2} + \ldots + P_n = 0,$$

otrzymane z równania danego

$$(2) \qquad x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0$$

zapomocą podstawienia

$$(3) \qquad y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

nazywa się równaniem przekształconym. Zasługuje ono na uwagę z tego względu, że, wiedząc jego pierwiastki, możemy obliczyć pierwiastki równania (2) zapomocą działań wymiernych—z wyjątkiem niektórych przypadków szczególnych. Istotnie, dołączając do równania (3) równania następujące:

$$xy = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b^{n-1} x^{n-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x^{n-1} y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_{n-1} x^{n-1},$$

mieć będziemy n równań z $n-1$ niewiadomymi $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Z tych równań możemy wyrazić każdą z niewiadomych $x, x^2, \ldots$ w postaci funkcyi wymiernej liczby y. W niektórych przypadkach szczególnych może się x przedstawiać w postaci $\frac{0}{0}$; wtedy nie można wyrazić x w funkcyi y w sposób wymierny. Lecz, w każdym razie, jeżeli tylko jest wiadomy chociaż jeden pierwiastek równania z niewiadomą y, to rozwiązanie równania z niewiadomą x sprowadza się do rozwiązania innych równań, stopni niższych niż n-ty, gdyż funkcyja

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n$$

ma spólny dzielnik z funkcyją

$$a_0 - y + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

Ilekroć zdołamy dobrać dla liczb $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takie wartości, iż niektóre ze spółczynników w równaniu z niewiadomą y staną się równymi zeru, możemy powiedziéć, żeśmy dane równanie przekształcili na inne, prostsze. Taki sposób przekształcania równania był wskazany przez Tschirnhaus'a.

Zauważymy jeszcze, że jeżeli przyjmiemy w równaniu danym (2)

$$y = \frac{p_1}{n} + x,$$

to, widocznie, będziemy mieli $P_1 = 0$, t. j. wskutek tego podstawienia, otrzymujemy równanie z niewiadomą y, w którym niéma wyrazu z y^{n-1}.

§ IV. ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ STOPNIA 3-GO I 4-GO.

164. Niech będzie dane równanie liczebne stopnia 3-go

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0.$$

Przyjmijmy

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

a utworzywszy równanie

$$y^3 + P_1y^2 + P_2y + P_3 = 0,$$

nadajmy dla a_0, a_1, a_2 takie wartości, iżby one czyniły zadość dwu równaniom:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0,$$

odpowiednio piérwszego i drugiego stopnia. Wtenczas równanie z niewiadomą y przyjmie postać:

$$y^3 + P_3 = 0.$$

Jest to równanie dwumienne, którego pierwiastki są pierwiastkami sześciennymi z $-P_3$; z nich łatwo wyprowadzić wartości pierwiastków równania danego. W ten sposób można rozwiązać każde równanie stopnia 3-go.

Tą drogą możemy także dojść do wzorów dla pierwiastków równania stopnia 3-go postaci ogólnéj.

165. Niech będzie dane równanie liczebne stopnia 4-go

$$x^4 + p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4 = 0.$$

Kładąc

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3,$$

utworzymy równanie

$$y^4 + P_1y^3 + P_2y^2 + P_3y^3 + P_4 = 0.$$

Uważając liczby a_0, a_1, a_2, a_3 jako niewiadome, mające czynić zadość równaniom

$$P_1 = 0, \quad P_3 = 0,$$

mieć będziemy dwa równania, jedno stopnia piérwszego, drugie zaś trzeciego. Rozwiązanie takich równań sprowadza się do rozwiązania jednego równania stopnia 3-go, co, według art. poprzedzającego, można uskutecznić zapomocą wyciągnięcia pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb wiadomych. Uskuteczniwszy to, będziemy mieli równanie z niewiadomą y postaci

$$y^4 + P_2 y^2 + P_4 = 0,$$

które rozwiązuje się łatwo zapomocą wyciągania pierwiastków kwadratowych, a w funkcyi pierwiastków tego równania wyrażają się pierwiastki równania danego w sposób wymierny.

Tym sposobem możemy także dojść do wzorów dla pierwiastków równania stopnia 4-go postaci ogólnéj.

§ V. WARUNKI, ABY DWA RÓWNANIA MIAŁY KILKA PIERWIASTKÓW SPÓLNYCH.

166. Aby dwa równania

$$(1)\begin{cases} f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \ldots + p_n = 0, \\ F(x) = x^m + q_1 x^{m-1} + q_2 x^{m-2} + \ldots + q_m = 0 \end{cases}$$

miały przynajmniéj jeden pierwiastek spólny, potrzeba i wystarcza, aby wartość rugownika $[F, f]$ była równa zeru; dlategoto wielkość $[F, f]$ nazywa się rugownikiem dwu równań (1).

Przyjmując, że już jest utworzone wyrażenie rugownika $[F, f]$ i że ostatnie wyrazy p_n i q_m w równaniach (1) nie mają określonych wartości, ale, przeciwnie, są uważane jako dwie zmienne niezależne, od których nie zależy żaden ze spółczynników pozostałych, mieć będziemy następujące twierdzenie Lagrange'a, podające warunki niezbędne, ażeby dwa równania miały kilka pierwiastków spólnych.

Twierdzenie. *Jeżeli przez* V *oznaczymy rugownik dwu równań*

$$(1) \qquad f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0,$$

$$(2) \qquad F(x) = x^m + q_1 x^{m-1} + \ldots + q_m = 0,$$

a przez $V'_{p_n}, V''_{p_n}, \ldots, V'_{q_m}, V''_{q_m}, \ldots$ *pochodne różnego rzędu wielomianu* V, *rozważanego odpowiednio jako funkcyja zmiennéj niezależnéj* p_n, *lub jako funkcyja zmiennéj niezależnéj* q_m, *to, aby równania* $f(x) = 0$ *i* $F(x) = 0$ *posiadały* k *pierwiastków spólnych, koniecznymi są następujące warunki:*

$$(3) \qquad V = 0, \quad V'_{p_m} = 0, \quad V''_{p_m} = 0, \ldots, V^{k-1}_{p_m} = 0,$$

albotéż warunki

$$(4) \qquad V = 0, \quad V'_{q_n} = 0, \quad V''_{q_n} = 0, \ldots, V^{k-1}_{q_n} = 0.$$

Jakoż, rozumiejąc przez x jakikolwiek pierwiastek równania $f(x) = 0$, przyjmijmy

$$z = -x^m - q_1 x^{m-1} - q_2 x^{m-2} - \ldots - q_{m-1} x,$$

czyli

$$z = q_m - \mathrm{F}(x),$$

i napiszmy równanie z niewiadomą z,

$$z^n + \mathrm{P}_1 z^{n-1} + \mathrm{P}_2 z^{n-2} + \ldots + \mathrm{P}_n = 0.$$

Pisząc w tym ostatnim równaniu $q_m - y$ zamiast z i nazywając, dla skrócenia,

$$\mathrm{V} = q_m^n + \mathrm{P}_1 q_m^{n-1} + \mathrm{P}_2 q_m^{n-2} + \ldots + \mathrm{P}_n,$$

otrzymamy

$$(5) \qquad \mathrm{V} - \frac{y}{1} \mathrm{V}'_{q_m} + \frac{y^2}{1.2} \mathrm{V}''_{q_m} - \ldots + (-1)^n y^n = 0,$$

gdzie

$$\mathrm{V}'_{q_m} = n q_m^{n-1} + (n-1) \mathrm{P}_1 q_m^{n-2} + \ldots,$$
$$\mathrm{V}''_{q_m} = n(n-1) q_m^{n-2} + (n-1)(n-2) \mathrm{P}_1 q_m^{n-3} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Jeżeli przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oznaczymy pierwiastki równania $f(x) = 0$, to pierwiastki równania (5) będą następujące:

$$y_1 = \mathrm{F}(x_1), \quad y_2 = \mathrm{F}(x_2), \ldots, y_n = \mathrm{F}(x_n).$$

Stąd widzimy, że jeżeli pośród liczb

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, x_n$$

jest k takich, które czynią zadość równaniu $\mathrm{F}(x) = 0$, to odpowiadające im pośród liczb

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \ldots, y_n$$

będą równe zeru, a równanie (5) będzie wówczas miało k pierwiastków równych zeru. Lecz dlatego potrzeba, aby wyraz stały i spółczynniki potęg $y, y^2, \ldots, y^{k-1}$ równały się zeru, t. j. aby miały miejsce równania (4).

W podobny sposób możemy okazać, że jeżeli między pierwiastkami równania $\mathrm{F}(x) = 0$ znajduje się k takich, które czynią zadość równaniu $f(x) = 0$, to mają miejsce równania (3).

Wszystko to czyni oczywistą prawdziwość twierdzenia Lagrange'a, co do którego można zrobić następujące uwagi:

a. Jeżeli równanie (1) nie ma pierwiastków wielokrotnych, to warunki (4) są nietylko konieczne, lecz zarazem dostateczne.

b. Jeżeli równanie (2) nie ma pierwiastków wielokrotnych, to warunki (3) są nietylko konieczne, lecz zarazem dostateczne.

c. Jeżeli każde z równań (1) i (2) ma pierwiastki wielokrotne, to ani warunków (3), ani warunków (4), anitéż jednych i drugich jednocześnie, nie można uważać za dostateczne dla istnienia k pierwiastków spólnych.

§ VI. NOWY SPOSÓB SPROWADZENIA FUNKCYI UŁAMKOWÉJ PIERWIASTKA DO POSTACI CAŁKOWITÉJ.

167. Niech będzie równanie

(1) $$x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$$

i funkcyja całkowita stopnia $(n-1)$-go

(2) $$\varphi(x) = y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1}.$$

Oznaczając przez $x_1, x_2, \ldots$ pierwiastki równania (1) i rozumiejąc przez x jeden z nich, utwórzmy równania

(3) $$\begin{cases} xy = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x^{n-1} y = k_0 + k_1 x + \ldots + k_{n-1} x^{n-1}, \end{cases}$$

do których dołączmy równanie (2). W tak otrzymanym układzie równań uważajmy strony lewe, t. j. $y, xy, \ldots, x^{n-1}y$ jako liczby wiadome, a wszystkie potęgi x, wchodzące do stron prawych, od x^0 aż do x^{n-1}, uważajmy jako liczby niewiadome.

Wyznacznik tego układu równań nazwijmy v,

$$v = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots, & a_{n-1} \\ b_0, & b_1, & \ldots, & b_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_0, & k_1, & \ldots, & k_{n-1} \end{vmatrix}$$

i przypuśćmy, że v jest różne od zera; jest to jednoznaczne z przypuszczeniem, że żadna z wartości $\varphi(x)$ nie równa się zeru, gdyż

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) = \pm v.$$

Lecz wówczas, rozwiązując równania (2) i (3) względem $x^0 = 1$, dojdziemy do takiego równania:

$$v x^0 = \mathrm{A} y + \mathrm{A}_1 x y + \mathrm{A}_2 x^2 y + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} x^{n-1} y,$$

gdzie $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots$ oznaczają liczby, zależące od $a_1, b_1, \ldots, k_1, a_2, b_2, \ldots, k_2, \ldots$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{y} = \frac{\mathrm{A} + \mathrm{A}_1 x + \mathrm{A}_2 x^2 + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} x^{n-1}}{v}.$$

Tym sposobem zawsze możemy funkcyją ułamkową $\frac{1}{y}$ przedstawić w postaci funkcyi całkowitéj stopnia niższego od n.

Przykład. Weźmy równanie

$$x^5 - 7 = 0$$

i funkcyją

$$y = 3 - 2x^2 + x^3;$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} xy &= 3x - 2x^3 + x^4, \\ x^2y &= 7 + 3x^2 - 2x^4, \\ x^3y &= -14 + 7x + 3x^3, \\ x^4y &= -14x + 7x^2 + 3x^4; \end{aligned}$$

rugując z tych pięciu równań x, x^2, x^3, x^4, będziemy mieli

$$655y + 329xy + 271x^2y + x^3y + 71x^4y = 3848,$$

skąd

$$\frac{1}{y} = \frac{71x^4 + x^3 + 271x^2 + 329x + 655}{3848}.$$

§ VII. O WYRÓŻNIKU.

168. Oznaczając przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pierwiastki równania

$$f(x) = x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_n = 0,$$

weźmy pod uwagę równość

$$f'(x) = \frac{f(x)}{x - x_1} + \frac{f(x)}{x - x_2} + \ldots + \frac{f(x)}{x - x_n},$$

i uczyńmy w niéj $x = x_i$, gdzie i oznacza jakąkolwiek z liczb $1, 2, 3, \ldots, n$; otrzymamy równanie

$$f'(x_i) = (x_i - x_1)(x_i - x_2) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n),$$

zapomocą którego znajdujemy

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} f'(x_1) f'(x_2) \ldots f'(x_n) = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 &\ldots (x_1 - x_n)^2 \\ (x_2 - x_3)^2 &\ldots (x_2 - x_n)^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot &\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ &(x_{n-1} - x_n)^2, \end{aligned}$$

albo, pisząc krócéj,

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [f', f] = \Pi(x_i - x_k)^2.$$

To wskazuje, że rugownik funkcyi pochodnéj $f'(x)$, utworzony względem funkcyi pierwotnéj $f(x)$ i pomnożony przez $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, jest równy iloczynowi kwadratów różnic pierwiastków równania $f(x) = 0$. A więc ten iloczyn może być wyznaczony zapomocą jednego z opisanych wyżéj sposobów; nazywamy go **wyróżnikiem** (**dyskryminantem**) **równania** $f(x)=0$.

Jeżeli wyróżnik jest równy zeru, to równanie posiada pierwiastki wielokrotne, i nawzajem.

Gdy spółczynniki w równaniu $f(x)=0$ są rzeczywiste, to wartość wyróżnika jest także rzeczywista, i jest ona dodatna albo ujemna, zależnie od tego, czy ilość par pierwiastków zespolonych sprzężonych jest parzysta, czyteż nieparzysta.

Jeżeli w równaniu $f(x)=0$ spółczynnik najwyższéj potęgi zmiennéj x jest równy jedności, a pozostałe spółczynniki są liczbami całkowitymi, to wyróżnik jest także liczbą całkowitą.

169. Przykład 1. Znajdźmy wyróżnik równania

$$f=x^4+px^2+qx+r=0.$$

Kładąc

$$y=q+2px+4x^3,$$

mieć będziemy

$$xy=-4r-3qx-2px^2,$$
$$x^2y=-4rx-3qx^2-2px^3,$$
$$x^3y=2pr+2pqx+2(p^2-2r)x^2-3qx^3;$$

a więc jest

$$[f',f]=\begin{vmatrix} q, & 2p, & 0, & 4 \\ -4r, & -3q, & -2p, & 0 \\ 0, & -4r, & -3q, & -2p \\ 2pr, & 2pq, & 2(p^2-2r), & -3q \end{vmatrix}.$$

Rozwijając wyznacznik na stronie prawéj i zważając, że dla równania stopnia 4-go, wyróżnik Δ jest tożsamościowo równy rugownikowi $[f',f]$, otrzymamy

$$\Delta=(-27q^2-4p^3)q^2+144pq^2r+16r(p^2-4r)^2.$$

170. Przykład 2. Weźmy równanie stopnia n-tego

$$f=x^n+px+q=0.$$

Żeby utworzyć jego wyróżnik, podzielmy funkcyją nf przez pochodną f', a następnie funkcyją f' przez resztę $f_1=(n-1)px+nq$, otrzymaną z piérwszego dzielenia. Druga reszta jest liczbą stałą, $f_2=(-1)^{n-1}n\left[\frac{nq}{(n-1)p}\right]^{n-1}+p$.

Oznaczywszy przez Q i Q_1 dwie funkcyje całkowite, mamy dwa równania

$$nf=Qf'+f_1,$$
$$f'=Q_1f_1+f_2,$$

przy których pomocy wyprowadzamy

$$[f',f]=n[nf,f']=n[f_1,f']=(n-1)^{n-1}p^{n-1}[f',f_1]$$
$$=(n-1)^{n-1}p^{n-1}\left[(-1)^{n-1}n\left(\frac{nq}{(n-1)p}\right)^{n-1}+p,f_1\right]$$
$$=(-1)^{n-1}n^nq^{n-1}+(n-1)^{n-1}p^n.$$

Stąd, zważywszy, że $\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [f', f]$, otrzymujemy

$$\Delta = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} n^n q^{n-1} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n-1)^{n-1} p^n.$$

§ VIII. SPOSÓB LAGRANGE'A ODDZIELANIA PIERWIASTKÓW.

171. Przy oddzielaniu pierwiastków jakiegokolwiek równania $f(x) = 0$ z pierwiastkami pojedyńczymi, spotykamy się z zadaniem o wyznaczeniu takiéj liczby dodatnéj H, któraby nie przewyższała modułu różnicy każdych dwu pierwiastków równania $f(x) = 0$.

Istotnie, jeżeli na płaszczyznie spółrzędnych, służącéj do oznaczania liczb zespolonych, poprowadzimy dwa układy prostych, równoległych do każdéj z osi spółrzędnych, tak, iżby odległość dwu po sobie następujących równoległych nie była większa od liczby $\frac{H}{\sqrt{2}}$, to wewnątrz każdego z prostokątów, utworzonych przez te proste, nie może znajdować się więcéj niż jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$. Zapomocą metody, wyłożonéj w rozdziale poprzednim, zawsze możemy dowiedzieć się, czy wewnątrz któregokolwiek z takich elementarnych prostokątów znajduje się pierwiastek równania $f(x) = 0$, czy też nie. Zbadawszy takim sposobem te prostokąty, których odległość od początku spółrzędnych nie jest większa od krańca wyższego dla modułów pierwiastków równania danego, oddzielimy tymsamym wszystkie jego pierwiastki.

Gdy wszystkie spółczynniki w równaniu $f(x) = 0$ są rzeczywiste, i idzie nam tylko o oddzielenie pierwiastków rzeczywistych, to wówczas należy tylko przedział między wyższym i niższym krańcem dla pierwiastków rzeczywistych rozłożyć na pewną ilość przedziałów mniejszych tak, iżby różnica krańców każdego z nowych przedziałów nie była większa od liczby H. Każdy z takich przedziałów nie może zawiérać więcéj niż jeden pierwiastek. — Żeby się dowiedzieć, czy pewien przedział zawiéra pierwiastek albo nie, należy określić znaki funkcyi $f(x)$ dla wartości x równych krańcom a i b; jeżeli znaki wartości $f(a)$ i $f(b)$ są różne, to przedział a, b zawiéra jeden pierwiastek; w przeciwnym razie przedział a, b nie zawiéra pierwiastka. Zbadawszy takim sposobem wszystkie przedziały, dowiemy się, ile dane równanie posiada pierwiastków rzeczywistych, i każdy z nich będzie oddzielony.

Taki sposób oddzielania pierwiastków rzeczywistych nazywa się sposobem Lagrange'a.

Co się tyczy wyznaczenia liczby H, to ono wynika bezpośrednio z innego zadania, którego rozwiązanie po raz piérwszy dał Waring, a następnie, w formie zręczniejszéj, Lagrange. Zadanie to polega na tym, aby utworzyć równanie, którego pierwiastki równałyby się kwadratom różnic pierwiastków równania danego; niższy kraniec dla modułów pierwiastków takiego równania może być przyjęty jako kwadrat krańca H.

Cauchy okazał, że zapomocą samego tylko wyróżnika równania danego, który przedstawia wyraz ostatni w równaniu z kwadratami różnic, można otrzymać kraniec H.

Wogóle, wyznaczając H zapomocą różnych sposobów, będziemy otrzymywali wartości różne, a największa z nich będzie dla nas najdogodniejsza; dlategoteż sposób podany przez Cauchy'ego na wyznaczenie krańca H, jakkolwiek zdaje się być owiele prostszy od sposobu Lagrange'a, to jednak w zastosowaniu okazuje się niedogodnym, gdyż daje dla H wartości nadto małe.

172. Nie będziemy tu teraz wykładali sposobów ułożenia równania z kwadratami różnic, lecz ograniczymy się tylko do wyprowadzenia niższego krańca dla modułu różnic pierwiastków według sposobu Cauchy'ego, mając na widoku nietyle praktyczną, ile teoretyczną jego wartość. Nazywając przez $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pierwiastki równania $f(x) = 0$, przez Δ jego wyróżnik, zaś przez R wyższy kraniec dla modułów pierwiastków, mamy

$$(x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{n-1} - x_n)^2 = \Delta;$$

a zatym

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{mod}^2 (x_1 - x_2) \operatorname{mod}^2 (x_1 - x_3) \ldots \operatorname{mod}^2 (x_{n-1} - x_n) = \operatorname{mod} \Delta.$$

Lecz dla modułu różnic dwu dowolnie wziętych pierwiastków mamy

$$\operatorname{mod} (x_i - x_k) \leq \operatorname{mod} x_i + \operatorname{mod} x_k < 2\mathrm{R},$$

gdyż $\operatorname{mod} x_i < \mathrm{R}$ i $\operatorname{mod} x_k < \mathrm{R}$; a więc

$$\operatorname{mod}^2 (x_i - x_k) < 4\mathrm{R}^2.$$

Na zasadzie ostatniej nierówności z równania (1) otrzymujemy

$$\operatorname{mod}^2 (x_1 - x_2) (2\mathrm{R})^{n(n-1)-2} > \operatorname{mod} \Delta;$$

albo

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{mod} (x_1 - x_2) > \frac{\sqrt{\operatorname{mod} \Delta}}{(2\mathrm{R})^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

Ponieważ x_1 i x_2 oznaczają dwa dowolnie wzięte pierwiastki równania $f = 0$, zatym z nierówności (2) wnosimy, iż, jako niższy kraniec dla modułów różnic pierwiastków równania $f(x) = 0$, możemy przyjąć liczbę

$$\mathrm{H} = \frac{\sqrt{\operatorname{mod} \Delta}}{(2\mathrm{R})^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

Jeżeli wszystkie spółczynniki w równaniu $f = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n = 0$ są liczbami całkowitymi, a równanie nie ma pierwiastków wielokrotnych, to wtenczas liczba Δ jest całkowita i $\operatorname{mod} \Delta \geq 1$, wskutek czego możemy przyjąć

$$\mathrm{H} = \frac{1}{(2\mathrm{R})^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

PRZYKŁAD. Dla równania

$$x^5 - 7x^2 + 5x - 1 = 0$$

znajdujemy

$$\mathrm{R} = 2{,}2$$
$$\Delta = 148856,$$

a więc

$$\mathrm{H} = \frac{\sqrt{148856}}{(4{,}4)^9} = 0{,}000624\ldots$$

ROZDZIAŁ X.

SPOSÓB NEWTON'A OBLICZANIA PIERWIASTKÓW.—KRAŃCE WYŻSZE DLA BŁĘDÓW.—PRZYKŁAD. — WYZNACZENIE PIERWIASTKÓW WYMIERNYCH RÓWNANIA ZE SPÓŁCZYNNIKAMI CAŁKOWITYMI.

§ I. WYZNACZENIE KRAŃCÓW DLA WARTOŚCI FUNKCYI CAŁKOWITÉJ MIĘDZY $x=a$ I $x=b$.

173. Przy obliczaniu pierwiastków równania często potrzeba miéć dwa takie krańce, między którymi zawiérałyby się wartości funkcyi całkowitéj $f(x)$, odpowiadające wartościom zmiennéj x od $x=a$ do $x=b$.

W jednym przypadku szczególnym można bezpośrednio otrzymać tak największą, jak i najmniejszą wartość funkcyi $f(x)$ między a i b, mianowicie wtedy, kiedy wiadomo, iż pochodna $f'(x)$ nie zmienia znaku między a i b; wówczas od $x=a$ do $x=b$ funkcyja $f(x)$ wciąż wzrasta, albo maleje, a z dwu liczb $f(a)$ i $f(b)$ jedna jest największą, a druga najmniejszą wartością funkcyi $f(x)$.

Jeżeli pochodna $f'(x)$ między a i b zmienia znak, ale tylko raz jeden, to wówczas jedna z dwu liczb $f(a)$ i $f(b)$ będzie albo największą albo najmniejszą wartością funkcyi $f(x)$.

Wogóle, w celu otrzymania żądanych krańców, należy odszukać dwie takie liczby p i q, z których piérwsza byłaby albo większa od obu wartości $f(a)$ i $f(b)$, a druga od nich mniejsza, i aby każde z dwu równań

$$f(x)-p=0,\quad f(x)-q=0$$

nie miało ani jednego pierwiastka między a i b; wówczas, oczywiście, dla wszelkich wartości zmiennéj x, zawartych między a i b, będziemy mieli

$$q<f(x)<p.$$

174. Wyłożymy tu pewne postępowanie elementarne, którym można się posiłkować w celu wyznaczenia krańców p i q.

Przyjmując, że funkcyja $f(x)$ jest n-go stopnia, przedstawmy ją w takiéj postaci:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \mathrm{A}x^{n-1}(x-a) \\ & + [\mathrm{C}x^{n-2}+\mathrm{C}_1x^{n-3}+\ldots+\mathrm{C}_{n-2}]\,(x-a)\,(b-x) \\ & + \mathrm{B}(b-x), \end{aligned}$$

i weźmy pod uwagę równość

$$b^{n-1}(b-a) = x^{n-1}(x-a)$$
$$+ [x^{n-2} + bx^{n-3} + \ldots + b^{n-2}](x-a)(b-x)$$
$$+ b^{n-1}(b-x).$$

Mnożąc obie strony téj równości przez liczbę dowolną k i dodając następnie do nich odpowiednie strony równości poprzedzającéj, otrzymamy

$$f(x) + kb^{n-1}(b-a) = \mathrm{A}'x^{n-1}(x-a)$$
$$+ [\mathrm{C}'x^{n-2} + \ldots + \mathrm{C}'_{n-2}](x-a)(b-x)$$
$$+ \mathrm{B}'(b-x),$$

gdzie

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A} + k, \quad \mathrm{C}' = \mathrm{C} + k, \quad \mathrm{C}'_1 = \mathrm{C}_1 + kb,$$
$$\mathrm{C}'_2 = \mathrm{C}_2 + kb^2, \ldots, \mathrm{B}' = \mathrm{B} + kb^{n-1}.$$

Przypuśćmy, że k_0 i k_1 są takimi dwiema wartościami k, iż przy $k = k_0$ wszystkie spółczynniki A′, C′, ... otrzymują wartości dodatne, a przy $k = k_1$ wartości ujemne; wówczas, oczywiście, mają miejsce nierówności

$$f(x) + k_0 b^{n-1}(b-a) > 0,$$
$$f(x) + k_1 b^{n-1}(b-a) < 0,$$

w przypuszczeniu że x zawiéra się między a i b. Z powyższych nierówności wyprowadzamy

$$k_0 b^{n-1}(a-b) < f(x) < k_1 b^{n-1}(a-b),$$

i tym sposobem żądane dwa krańce są odszukane.

175. Przykład. Znaleść krańce dla wartości funkcyi

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3$$

pod warunkiem, iż

$$0 \leqq x \leqq 1.$$

Przedstawiając funkcyją $f(x)$ w postaci

$$f(x) = 5x^4 + x(1-x)[4x^2 + 2x + 3] + 3(1-x),$$

spostrzegamy, że wszystkie wartości funkcyi $f(x)$ między $x = 0$ i $x = 1$ są dodatne. Zestawiając powyższe wyrażenie z tożsamością

$$1 = x^4 + x(1-x)[x^2 + x + 1] + (1-x),$$

otrzymamy

$$2 < f(x) < 5.$$

Znaleziony tym sposobem kraniec wyższy jest równy wartości funkcyi $f(x)$ dla $x = 1$. Co się zaś tyczy krańca niższego, to on różni się dość znacznie od najmniejszéj wartości funkcyi $f(x)$ między $x = 0$ i $x = 1$.

Dla równania

$$\mathrm{F}(x) = f(x) - \frac{47}{16} = 0$$

otrzymujemy następującą tablicę znaków:

x	F	F′	F″	F‴	$\mathrm{F^{IV}}$
1	+	+	+	+	+
$\frac{1}{4}$	+	—	+	+	+
0	+	$\bar{0}$	—	+	+

i, prócz tego,

$$\frac{\mathrm{F}\left(\frac{1}{4}\right)}{\mathrm{F}'\left(\frac{1}{4}\right)} = -\frac{9}{16}.$$

Stąd bezpośrednio wnosimy, że równanie

$$f(x) - \frac{47}{16} = 0$$

nie ma pierwiastka między 0 i 1, i dlatego, przy istnieniu warunku $0 \leqq x \leqq 1$, ma miejsce nierówność

$$f(x) > 2\frac{15}{16},$$

tak iż, zamiast otrzymanego powyżéj krańca niższego 2, można wziąć bliższy, $2\frac{15}{16}$.

§ II. SPOSÓB NEWTON'A OBLICZANIA PIERWIASTKÓW.

176. Przypuśćmy, że w przedziale między dwoma krańcami a i b, dość siebie bliskimi, równanie $f(x) = 0$ ma jeden tylko pierwiastek x. Każdy z krańców a i b może być przyjęty jako piérwsza wartość przybliżona pierwiastka szukanego.

Przyjmując liczbę a jako pierwiastek równania $f(x) = 0$, popełniamy błąd

$$h = x - a.$$

który czyni zadość równaniu $f(a+h) = 0$, czyli

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(a) = 0.$$

Ponieważ h jest liczbą bardzo małą, zatym możemy nie zważać na wyrazy, zawiérające czynniki $h^2, h^3, \ldots$; w takim razie, zamiast poprzedniego równania, otrzymujemy

$$f(a) + hf'(a) = 0,$$

skąd

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Jest to przybliżona wartość błędu h. Wprowadzając ją do strony prawéj równania $x = a + h$, otrzymamy drugą wartość przybliżoną pierwiastka x.

Oznaczywszy przez a_1 to drugie przybliżenie, mamy

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{1}$$

Podstawiając na stronie prawéj równania ostatniego a_1 zamiast a, otrzymamy trzecie przybliżenie szukanego pierwiastka x. Oznaczywszy je przez a_2, mamy

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}.$$

Wogóle, oznaczając $(n+2)$-gą przybliżoną wartość przez a_{n+1} mieć będziemy

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}.$$

Jeżeli zaś jako piérwsze przybliżenie pierwiastka x weźmiemy b, to następne przybliżenia wyznaczymy ze wzorów

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)},$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)},$$

. . . . . .

Ten sposób obliczania kolejnych przybliżeń pierwiastka jest najprostszy, a wskutek tego ze wszystkich sposobów obliczania pierwiastka, dotąd wiadomych, jest najwięcéj znany i używany. Ten sposób podał Newton.

177. Widoczne jest, że dogodność powyższego sposobu zależy od warunku, ażeby każde następujące przybliżenie rzeczywiście było bliższe pierwiastka szukanego, niż poprzedzające.

W zastosowaniu niezawsze to ma miejsce, i dlatego należy zbadać, kiedy możemy być przekonani, że wmiarę obliczenia przybliżenia dalszego istotnie więcéj się zbliżymy do pierwiastka szukanego.

Będziemy przypuszczali, że ani równanie $f'(x) = 0$, anitéż równanie $f''(x) = 0$, nie ma pierwiastka między a i b. To zaś zawsze można osięgnąć, zbliżając dostatecznie krańce a i b, prócz tylko tego przypadku, kiedy szukany pierwiastek czyni zadość równaniu $f'(x) = 0$, albo równaniu $f''(x) = 0$; ale wówczas rozwiązanie danego równania $f(x) = 0$ sprowadza się do rozwiązania innego równania, stopnia niższego.

Ponieważ dwie wartości $f(a)$ i $f(b)$ powinny być różnego, wartości zaś $f''(a)$ i $f''(b)$ jednakowego znaku, zatym stosunki

$$\frac{f''(a)}{f(a)}, \quad \frac{f''(b)}{f(b)}$$

są różnego znaku. Umówimy się, aby przez a oznaczać ten z dwu pierwotnych krańców, dla którego mamy

$$\frac{f''(a)}{f(a)} > 0.$$

Mając to wszystko na uwadze, dowiedziemy, że:

a. Oba drugie przybliżenia

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \quad b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$

są albo jednocześnie większe, albotéż jednocześnie mniejsze od pierwiastka x, zależnie od tego, czy $a > x$, czytéż $a < x$.

b. Drugie przybliżenie a_1, odpowiadające krańcowi a, zawsze jest bliższe szukanego pierwiastka, niż a.

Dla dowiedzenia tego, weźmy wzór Lagrange'a

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2} f''(t+\theta h).$$

Kładąc $t = a$, $h = x - a$ i zważając, że $f(x) = 0$, miéć będziemy

$$f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a+\theta h) = 0,$$

skąd znajdujemy

$$h = -\frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{h^2}{2} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)},$$

albo

$$x - a + \frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{h^2}{2} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)},$$

albo jeszcze

(1) $$x - a_1 = -\frac{h^2}{2} \frac{f''(a+\theta h)}{f'(a)}.$$

W podobny sposób otrzymamy równość

(2) $$x - b_1 = -\frac{h'^2}{2} \frac{f''(b+\theta' h')}{f'(b)};$$

θ i θ' oznaczają pewne liczby dodatne, mniejsze od jedności. Ponieważ, według założenia, żadna z funkcyj $f'(x), f''(x)$ nie zmienia swego znaku między $x = a$ i $x = b$, więc znaki wartości $f'(a), f'(b)$ są jednakowe, a także znaki wartości $f''(a)$, $f''(a+\theta h)$, $f''(b+\theta' h')$, $f''(b)$ są jednakowe. Wskutek tego strony prawe równości (1) i (2) są jednakowego znaku, a więc także i różnice $x - a_1$ i $x - b_1$ są jednakowego znaku, t. j. albo oba drugie przybliżenia a_1 i b_1 są większe od pierwiastka szukanego x, albotéż oba są od niego mniejsze.

Przyjmując pod uwagę to, cośmy wyżéj powiedzieli o krańcu a, i zestawiając stronę prawą równości (1) ze stroną prawą równości

$$a_1 - a = -\frac{f(a)}{f'(a)},$$

spostrzegamy, że różnice $x - a_1$ i $a_1 - a$ są jednakowego znaku; a więc, albo

$$x < a_1 < a,$$

albotéż

$$x > a_1 > a.$$

W obu przypadkach drugie przybliżenie a_1 jest bliższe szukanego pierwiastka x, niż a, i znajduje się po téj saméj stronie tego pierwiastka, co przybliżenie a.

Tym sposobem udowodniliśmy oba powyższe podania, odnoszące się do drugich przybliżeń, obliczanych sposobem Newton'a.

§ III. KRAŃCE WYŻSZE DLA BŁĘDÓW.

178. Przypuściwszy, podobnie jak w paragrafiie poprzedzającym, że równanie $f(x) = 0$ między krańcami a i b posiada jeden tylko pierwiastek x, i że żadna z funkcyj $f'(x)$, $f''(x)$ nie staje się zerem między $x = a$ i $x = b$, odnajdźmy dla funkcyi $f'(x)$ kraniec niższy dla jéj wartości bezwzględnych między $x = a$ i $x = b$ (por. § I), a dla funkcyi $f''(x)$ kraniec wyższy dla jéj wartości bezwzględnych między $x = a$ i $x = b$, i, oznaczywszy piérwszy z nich przez A, a drugi przez B, przyjmijmy

$$\frac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} = \mathrm{M}.$$

Zapomocą stopniowego przybliżania krańców a i b, zawsze możemy dosięgnąć tego, iż wartość bezwzględna liczb

$$a - b, \quad \mathrm{M}(a - b)$$

będzie mniejsza od pewnéj dowolnéj małéj liczby. Przypuścimy, że

$$\text{wart. bezw. } (a - b) < \frac{1}{10^l},$$

$$\text{wart. bezw. } \mathrm{M}(a - b) < \frac{1}{10^k},$$

gdzie l oznacza liczbę całkowitą, nie mniejszą od zera, k zaś liczbę całkowitą nie mniejszą od jedności.

Przyjmując m-te przybliżenie a_m jako wartość żądanego pierwiastka, popełniamy błąd, który się równa

$$e_m = x - a_m.$$

Podobnie mamy

$$e_{m-1} = x - a_{m-1},$$

albo

$$x = a_{m-1} + e_{m-1},$$

a zatym

$$f(a_{m-1} + e_{m-1}) = 0.$$

Ostatnie równanie możemy napisać tak:

$$f(a_{m-1})+e_{m-1}f'(a_{m-1})+\frac{e^2_{m-1}}{2}f''(a_{m-1}+\theta e_{m-1})=0,$$

skąd wynika

$$e_{m-1}+\frac{f(a_{m-1})}{f'(a_{m-1})}=-\frac{e^2_{m-1}}{2}\frac{f''(a_{m-1}+\theta e_{m-1})}{f'(a_{m-1})},$$

Zważając zaś, że

$$e_{m-1}+\frac{f(a_{m-1})}{f'(a_{m-1})}=x-\left(a_{m-1}-\frac{f(a_{m-1})}{f'(a_{m-1})}\right)=x-a_m=e_m,$$

możemy poprzednie równanie napisać tak:

$$e_m=-\frac{e^2_{m-1}}{2}\frac{f''(a_{m-1}+\theta e_{m-1})}{f'(a_{m-1})}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\text{wart. bezw. } e_m=e^2_{m-1}\text{ wart. bezw. }\frac{f''(a_{m-1}+\theta e_{m-1})}{2f'(a_{m-1})};$$

a ponieważ

$$\text{wart. bezw. }\frac{f''(a_{m-1}+\theta e_{m-1})}{2f'(a_{m-1})}<\mathrm{M},$$

zatym

(1) $$\text{wart. bezw. } e_m<\mathrm{M}e^2_{m-1}.$$

Kładąc we wzorze (1) kolejno $m=1$, $m=2,\ldots$, otrzymamy nierówności

$$\text{wart. bezw. } e_1<\mathrm{M}e^2,$$
$$\text{wart. bezw. } e_2<\mathrm{M}e_1{}^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{wart. bezw. } e_m<\mathrm{M}e^2_{m-1}.$$

Podnieśmy obie strony piérwszéj z powyższych nierówności do potęgi 2^{m-1}, obie strony drugiéj nierówności do potęgi 2^{m-2} i t. d.; otrzymamy

$$e_1{}^{2^{m-1}}<\mathrm{M}^{2^{m-1}}e^{2^m},$$
$$e_2{}^{2^{m-2}}<\mathrm{M}^{2^{m-2}}e_1{}^{2^{m-1}},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{wart. bezw. } e_m<\mathrm{M}e^2_{m-1}.$$

Wskutek pomnożenia tych nierówności przez siebie, będziemy mieli, po skróceniu,

(2) $$\text{wart. bezw. } e_m<\mathrm{M}^{2^m-1}(a-b)^{2^m}.$$

Jest to ta właśnie nierówność, którąśmy chcieli wyprowadzić; ona daje możność otrzymania wyższych krańców dla błędów, odpowiadających kolejnym przybliżeniom, i wskazuje, że z powiększeniem się liczby m błędy te szybko zdążają do zera. Istotnie, ponieważ, według założenia

$$\text{wart. bezw. } (a-b)<\frac{1}{10^l},\quad \text{wart. bezw. } \mathrm{M}(a-b)<\frac{1}{10^k},$$

więc

$$\text{wart bezw. } M^{2^m-1}(a-b)^{2^m} < \frac{1}{10^{2^m k+l-k}},$$

skąd widoczna, iż, przy dostatecznie wielkim m, liczba $M^{2^m-1}(a-b)^{2^m}$ co do swéj bezwzględnéj wartości będzie dowolnie mała.

179. Wyprowadzając nierówności (2), przypuszczaliśmy, że przybliżenia $a_1, a_2, \ldots$ są zawarte między a i b, co zawsze będzie miało miejsce, jeżeli wartości $f(a)$ i $f''(a)$ są jednakowego znaku. Jednakże w zastosowaniu niekoniecznie należy się trzymać tego warunku: można zacząć rachunek od drugiego krańca b; należy tylko pamiętać, że, ilekroć otrzymamy przybliżenie a_m, nie zawiérające się między a i b, powinniśmy zastąpić je przez inną liczbę a'_m, zawartą między a i b, i taką, iżby dla niéj kraniec wyższy dla błędu był takiż, jak dla a_m, t. j. $M^{2^m-1}(a-b)^{2^m}$. Oczywiście, że liczba a'_m, czyniąca zadość powyższym warunkom, może być zawsze bez trudności dobrana przy pomocy liczby a_m. A nawet przybliżenie a_m, chociażby ono zawiérało się między a i b, może być zastąpione przez inną liczbę a'_m, zawartą między a i b, pod warunkiem, ażeby kraniec wyższy dla błędu, odpowiadającego a'_m, był równy $M^{2^m-1}(a-b)^{2^m}$; przez to nierówność (2), przy każdym m, oczywiście nie będzie naruszona.

PRZYKŁAD. Weźmy toż samo równanie, do którego Newton zastosował swój sposób, mianowicie równanie

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0.$$

Posiada ono jeden tylko pierwiastek rzeczywisty, zawarty między 2 i 2,1.

Ponieważ

$$f'(x) = 3x^2 - 2,$$
$$f''(x) = 6x,$$

więc

$$\frac{f''(x)}{2f'(x)} = \frac{3x}{3x^2-2} = \frac{3}{3x - \frac{2}{x}},$$

skąd bezpośrednio widzimy, że, wmiarę wzrastania zmiennéj x od $x=2$ do $x=2{,}1$, funkcyja $\frac{f''(x)}{2f'(x)}$ wciąż maleje; a zatym, największą jéj wartością jest

$$\frac{f''(2)}{2f'(2)} = 0{,}6,$$

tak iż dla przedziału $a=2{,}1$, $b=2$ możemy przyjąć $M=0{,}6$. Mamy tu

$$a-b = \frac{1}{10},$$

$$\text{wart. bezw. } e_m < \frac{1}{10^{2^m}}(0{,}6)^{2^m-1}.$$

Przybliżeniem drugim jest

$$a_1 = 2,1 - \frac{f(2,1)}{f'(2,1)} = 2,0945\ldots,$$

gdzie

$$e_1 < 0,006.$$

Szukany pierwiastek x zawiéra się między krańcami

$$2,0885\ldots < x < 2,0945\ldots,$$

i, jako drugie przybliżenie, zamiast a_1, możemy wziąć liczbę

$$a'_1 = 2,09,$$

która jest mniejsza od x, gdyż $f(a'_1) < 0$.

Trzecie przybliżenie możemy wyznaczyć według wzoru

$$a_2 = a'_1 - \frac{f(a'_1)}{f'(a'_1)};$$

otrzymujemy

$$a_2 = 2,09456\ldots,$$

przyczym

$$e_2 < \frac{3}{10^5};$$

a więc, szukany pierwiastek znajduje się między krańcami

$$2,09453\ldots < x < 2,09456\ldots$$

i, jako trzecie przybliżenie, zamiast a_2 możemy wziąć liczbę

$$a'_2 = 2,09455.$$

Czwarte przybliżenie wyznaczamy ze wzoru

$$a_3 = a'_2 - \frac{f(a'_2)}{f'(a'_2)};$$

otrzymujemy

$$a_3 = 2,094551481\ldots,$$

przyczym

$$e_3 < \frac{3}{10^9},$$

tak iż szukany pierwiastek zawiéra się między krańcami

$$2,094551478\ldots < x < 2,094551481\ldots.$$

Stąd otrzymujemy następującą wartość pierwiastka:

$$x = 2,09455148,$$

z przybliżeniem do jednéj-sto milijonowéj.

180. Sposób Newton'a można także zastosować do obliczania pierwiastków zespolonych, jeżeli znane nam są przybliżone ich wartości; ale wówczas wyznaczenie wyższego krańca dla modułów błędów, odpowiadających stopniowym przybliżeniom, nie może być uskutecznione na zasadzie wzoru Lagrange'a, gdyż on był wyprowadzony wyłącznie dla funkcyj rzeczywistych.

Darboux, w rozprawie zatytułowanéj: *«Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable»* rozciągnął wzór Lagrange'a na funkcyje zmiennéj zespolonéj, uczyniwszy przytym pewną zmianę w samym wzorze.

Oznaczając przez $f(x)$ jakąkolwiek funkcyją całkowitą zmiennéj x, a przez h dowolny przyrostek, będziemy mieli, według wzoru Darboux, następujące równanie:

$$f(x+h) = f(x) + \lambda h f'(x+\theta h),$$

gdzie θ oznacza pewną liczbę dodatną, mniejszą od jedności, λ zaś pewną liczbę zespoloną, któréj moduł ≤ 1; w równaniu tym tak h i x, jak i spółczynniki w wyrażeniu funkcyi $f(x)$, mogą być zespolone. Oczywiście, że powyższy wzór pozwala to wszystko, cośmy powiedzieli wyżéj o błędach przy obliczaniu pierwiastków sposobem Newton'a, zastosować także do tego przypadku, kiedy wyznaczany pierwiastek jest zespolony.

§ IV. WYZNACZANIE PIERWIASTKÓW WYMIERNYCH RÓWNANIA ZE SPÓŁCZYNNIKAMI CAŁKOWITYMI.

181. Rozwiązanie tego zadania należy do Teoryi liczb, t. j. do téj części Algiebry, która bada własności arytmetyczne pierwiastków; wyłożymy je tu jednak dlatego, że opiéra się ono na ogólnie znanych zasadach elementarnych.

Przedewszystkiem wskażemy na pewne ułatwienia przy odszukiwaniu pierwiastków całkowitych równania ze spółczynnikami całkowitymi.

Niech będzie dane równanie

$$f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0, \tag{1}$$

w którym $A, A_1, \ldots, A_n$ są liczbami całkowitymi, i przypuśćmy, że liczba całkowita a czyni zadość temu równaniu. Kładąc

$$\frac{f(x)}{x-a} = -Bx^{n-1} - B_1 x^{n-2} - \ldots - B_{n-1},$$

zauważymy, że wszystkie spółczynniki $B, B_1, \ldots, B_{n-1}$ są liczbami całkowitymi i czynią zadość równaniom

$$B_{n-1} = \frac{A_n}{a},$$

$$B_{n-2} = \frac{A_{n-1} + B_{n-1}}{a},$$

$$B_{n-3} = \frac{A_{n-2} + B_{n-2}}{a},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

. . . .

$$B = \frac{A_1 + B_1}{a},$$

$$B + A = 0.$$

Stąd wynika następujący sposób dowiedzenia się, czy liczba całkowita a czyni zadość danemu równaniu, czytéż nie.

Liczba a powinna być dzielnikiem wyrazu stałego A_n; w przeciwnym razie a nie może czynić zadość równaniu (1). Przypuśćmy, że liczba A_n jest podzielna przez a, i oznaczmy iloraz przez B_{n-1}. Suma $B_{n-1} + A_{n-1}$ powinna być podzielna przez a; w przeciwnym bowiém razie a nie czyni zadość równaniu (1). Przypuśćmy, że suma $B_{n-1} + A_{n-1}$ jest podzielna przez a, i oznaczmy iloraz przez B_{n-2}. Suma $B_{n-2} + A_{n-2}$ powinna być podzielna przez a; w przeciwnym razie a nie czyni zadość równaniu (1). Przypuśćmy, że suma $B_{n-2} + A_{n-2}$ jest podzielna przez a i oznaczmy iloraz przez B_{n-3}. Postępując w podobny sposób daléj, albo przekonamy się, że liczba a nie jest pierwiastkiem równania (1), albotéż dojdziemy do ostatniéj liczby B. Jeżeli $B + A = 0$, to a jest istotnie pierwiastkiem równania (1); w przeciwnym razie a nie czyni zadość równaniu (1).

Możemy jeszcze dodać do tego kilka innych warunków, niezbędnych, ale nie wystarczających. Tak np., liczba a powinna się zawiérać między krańcami dla pierwiastków równania (1); liczba $a - 1$ powinna być dzielnikiem liczby $f(1)$; a liczba $a + 1$ dzielnikiem liczby $f(-1)$; liczba $a - 2$ powinna być dzielnikiem liczby $f(2)$, a liczba $a + 2$ dzielnikiem liczby $f(-2)$, i t. d.

Jeżeliśmy się przekonali, że $f(a) = 0$, to wówczas wszystkie pozostałe pierwiastki równania (1) są pierwiastkami równania

$$Bx^{n-1} + B_1 x^{n-2} + \ldots + B_{n-1} = 0.$$

Przykład. Weźmy równanie

$$f(x) = 3x^4 - 50x^2 - 104x - 105 = 0;$$

ono posiada dwa pierwiastki całkowite: $x = 5$ i $x = -3$, o czym przekonywa nas następująca tablica, zawiérająca rezultaty działań:

3	0	— 50	— 104	— 105	
	— 3	9	23	35	— 3
		3	6	7	5

Pozostałe dwa pierwiastki otrzymamy z równania

$$3x^2 + 6x + 7 = 0.$$

182. Przy rozwiązywaniu równania ze spółczynnikami całkowitymi możemy zawsze przypuszczać, że spółczynnik najwyższéj potęgi niewiadoméj jest równy jedności.

Jakoż, jeżeli w równaniu

$$(1) \qquad Ax^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_{n-1} = 0$$

spółczynnik A nie jest równy jedności, to wówczas, mnożąc obie strony równania przez A^{n-1}, otrzymamy

$$(Ax)^n + A_1(Ax)^{n-1} + \ldots + A^{n-1}A_{n-1} = 0;$$

a stąd, kładąc $Ax = y$,

$$(2) \qquad y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A^{n-1}A_{n-1} = 0.$$

Tym sposobem rozwiązanie równania (1) sprowadza się do rozwiązania równania (2), w którym spółczynniki są liczbami całkowitymi, a spółczynnik najwyższéj potęgi niewiadoméj jest równy jedności.

Można to niekiedy uskutecznić inaczéj, nieco prościéj; np., ażeby sprowadzić równanie

$$8x^4 + 12x^3 + 10x^2 + x - 7 = 0$$

do żądanéj postaci, dość uczynić $2x = y$; otrzymujemy

$$y^4 + 3y^3 + 5y^2 + y - 14 = 0.$$

Każdemu pierwiastkowi wymiernemu równania (2) odpowiada pierwiastek wymierny równania (1), i nawzajem; dlategotéż zadanie o wyznaczeniu pierwiastków wymiernych równania (1) sprowadza się do wyznaczenia pierwiastków wymiernych równania (2).

183. Twierdzenie. *Każdy pierwiastek wymierny równania postaci*

$$(1) \qquad x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

ze spółczynnikami całkowitymi $A_1, \ldots, A_n$ *jest liczbą całkowitą.*

Przypuśćmy, że równanie (1) ma pierwiastek wymierny $x = \frac{a}{b}$, gdzie a i b są liczbami całkowitymi piérwszymi względem siebie; mamy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n + A_1\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

skąd

$$a^n = b(-A_1 a^{n-1} - \ldots - A_n b^{n-1}),$$

albo, oznaczywszy przez H liczbę całkowitą

$$H = -A_1 a^{n-1} - \ldots - A_n b^{n-1},$$

$$a^n = bH.$$

Ponieważ jednak liczby a i b są piérwsze względem siebie, zatym możemy znaléść takie dwie liczby całkowite u i v, które zadość uczynią równaniu

$$au + bv = 1.$$

Stąd, po podniesieniu obu stron do potęgi n-téj, otrzymamy

$$a^n u^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b u^{n-1} v + \ldots + b^n v^n = 1,$$

albo, podstawiając BH zamiast a^n,

$$b\left(Hu^n + \frac{n}{1} a^{n-1} u^{n-1} v + \ldots + b^{n-1} v^n\right) = 1.$$

To równanie wskazuje, że liczba b jest dzielnikiem jedności, gdyż wartość wielomianu w nawiasie jest, oczywiście, liczbą całkowitą; a zatym $b=1$, t. j. pierwiastek wymierny $x=\frac{a}{b}$ jest liczbą całkowitą.

184. Z tego cośmy powiedzieli w dwu art. ostatnich, wnosimy, że wyznaczenie pierwiastków wymiernych równania ze spółczynnikami całkowitymi sprowadza się do wyznaczenia pierwiastków całkowitych równania podobnego.

Przykład. Równanie

$$3x^3+x^2+x+35=0$$

nie posiada pierwiastka całkowitego; ażeby się dowiedzieć, czy nie ma ono pierwiastków wymiernych ułamkowych, przyjmijmy $3x=y$; otrzymujemy równanie

$$y^3+y^2+3y+315=0,$$

które ma jeden tylko pierwiastek całkowity $y=-7$; a więc równanie z niewiadomą x ma jeden tylko pierwiastek wymierny $x=-\frac{7}{3}$.

KONIEC.

Redaktor i wydawca czasopisma «Bibl. mat.-fiz.»
Dr. Maryjan A. Baraniecki.

170 —

16/6

0,01