



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000293390

BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana przez

A. CZAJEWICZA i S. DICKSTEINA.

Z ZAPOMOZI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU
NAUKOWEM, IMIENIA D-RA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

WSTĘP
DO
TEORYI RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

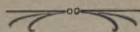
NAPISAŁ

Dr. TRAJAN LALESCO

z przedmową E. PICARDA.

PRZEŁOŻYŁ

Dr. STEFAN MAZURKIEWICZ.



WARSZAWA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

1918.

Cena 3 mk. 50 fen.

647/49.

WSTĘP
DO
TEORYI RÓWNAŃ CAŁKOWYCH.

Janina Goł...

Kraków 2. 12. 1921.

Handwritten signature or name, possibly "L. ...".

Handwritten text at the bottom right, possibly a date: "March 5. 1891".

BIBLIOTEKA MATEMATYCZNO-FIZYCZNA,

wydawana przez

A. CZAJEWICZA i S. DICKSTEINA.

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU
NAUKOWEM, IMIENIA D-RA JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

WSTĘP
DO
TEORYI RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

NAPISAŁ

Dr. TRAJAN LALESCO

z przedmową E. PICARDA.

Wyd. 1.
BIBLIOTEKA
Zakł. Mat. Ogólnej

PRZEŁOŻYŁ

Dr. STEFAN MAZURKIEWICZ.

BIBLIOTEKA
INSTYTUTU MATEMATYKI
POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ
Kra. inw. nr 40

L. J. 40.

KATEDRA I ZAKŁAD
MATEMATYKI
WYDZIAŁU INŻYNIERII
W KRAKOWIE

WARSZAWA.

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

1918.

40



11-346773

„Geprüft und auch für die Ausfuhr freigegeben“,
Warschau den. 20. 11. 1917. T. № 8152. Dr. № 410.

04.T.6

WYDZIAŁ INŻYNIERSTWA
MISYJNEGO
WARSZAWA

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

04

TREŚĆ.

	<i>Str.</i>
Przedmowa E. Picarda	
Wstęp	1

CZEŚĆ PIERWSZA.

Równanie Volterry.

I. Badania V. Volterry	5
II. Twierdzenie Volterry	7
III. Wzór Volterry; jądro rozwiązujące	9
IV. Związek między równaniem Volterry a równaniami różniczkowymi liniowymi	11
V. Równania Volterry o wielu zmiennych niezależnych	13
VI. Układy równań Volterry.	16
VII. Uwagi końcowe.	17

CZEŚĆ DRUGA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

Równanie Fredholma.

I. Wzory I. Fredholma	18
II. Pierwsze twierdzenie I. Fredholma	21
III. Pierwiastki funkcji $D(\lambda)$	28

ROZDZIAŁ DRUGI.

Badanie szczegółowe jądra rozwiązującego.

I. Funkcje ortogonalne i dwuortogonalne	31
II. Funkcje główne.	38
III. Drugie i trzecie twierdzenie I. Fredholma	48
IV. Rozwinięcia rozmaite	60

ROZDZIAŁ TRZECI.

Jądra specjalne.		<i>Str.</i>
I. Jądra symetryczne		63
II. Jądra skośnie-symetryczne		73
III. Jądra symetryzowalne.		78
IV. Jądra rozmaite		86

ROZDZIAŁ CZWARTY.

Równanie Fredholma pierwszego gatunku	89
---	----

CZEŚĆ TRZECIA.

Równania osobliwe.

I. Równanie osobliwe Volterra	103
Przypadek $N(0, 0) = 0$	103
Jądra osobliwe G	108
Przypadek, gdy $a = \infty$	110
II. Równania osobliwe Fredholma	111
Jądra osobliwe G	111
Równanie Fredholma w dziedzinie zespolonej	117
Przykłady rozmaite	121
III. Równania całkowe wyższego rzędu	126
Równania nieliniowe.	127
Równania wyższego rzędu iteracyjnego	132
Bibliografia.	139

PRZEDMOWA.

Równania funkcyjne są już oddawna przedmiotem badań najznakomitszych matematyków, jak Laplace, Cauchy, Fourier i Abel. W wielu zagadnieniach, więc np. w teorii funkcji eliptycznych oraz funkcji abelowych, nasuwają się związki funkcyjne szczególnego typu. Badań jednak systematycznych w tym kierunku nie było aż do czasów ostatnich i wysiłki analityków ześrodkowały się na specjalnej kategorii równań, mianowicie na równaniach różniczkowych, gdzie znajdujemy zagadnienia, lepiej rozgraniczone i łatwiej poddające się klasyfikacji.

W ciągu ostatnich piętnastu lat uwagę badaczy skierowały ku sobie pewne równania funkcyjne, w których funkcyje niewiadome występują pod znakiem całki. W r. 1894 Le Roux przygodnie podjął w formie ogólnej pewne zagadnienie, rozwiązane w szczególnym przypadku przez Abela; wkrótce potem V. Volterra rozpoczął badania nad pewną kategorią równań funkcyjnych wymienionego typu, badania nad którymi od tej pory pracuje bez przerwy i które niedawno znacznie rozszerzył. Powszechną jednak uwagę zwróciła na siebie w szczególnej mierze kilkostrońcowa praca I. Fredholma z r. 1900; szwedzki matematyk rozwiązał w niej równanie funkcyjne, stanowiące uogólnienie tego, które napotykamy przy rozwiązaniu zagadnienia Dirichleta za pośrednictwem potencjału warstwy podwójnej. Zastosowanie do tak słynnego zagadnienia nabrało wielkiego rozgłosu i wkrótce dostrzeżono, że do tegoż równania sprowadzić można wiele innych zagadnień Fizyki teoretycznej.

Mało która praca stała się klasyczną tak prędko, jak rozprawa, w której matematyk stockholmski rozwinął wyniki pierwszej swojej noty. Zasadnicze rezultaty badań Fredholma mają piękno rzeczy prostych i ostatecznych; aby je poznać, nie trzeba przytem żadnych przedwstępnych wiadomości specjalnych. Tak więc moda, która częstokroć wielki wpływ wywiera na kierunek badań naukowych, szybko skierowała się do tego typu równań funkcyjnych, i prace, które w ciągu

dziesięciolecia poświęcono zagadnieniu, po raz pierwszy rozwiązanemu przez Fredholma, mogłyby wypełnić bibliotekę.

Badania powyższe będą się pomału kondensowały: ukazało się już, lub też jest w przygotowaniu kilka poświęconych naszemu przedmiotowi prac dydaktycznych. P. Lalesco, który w ciągu lat ostatnich uzyskał ciekawe wyniki w Teorii równań całkowych, sądził, że jego rozmyślenia mogą być użyteczne dla tych, którzy przystępują do studyowania tej teorii. Zostawia on na uboczu w dziełku, które obecnie ogłasza, wszelkie zastosowania i ma na widoku jedynie teorię ogólną. Prostota metod wybranych przez autora i jasny wykład, który udostępnia czytanie niniejszej książki, będą niewątpliwie ocenione przez wszystkich czytelników. Zasadnicze twierdzenia Fredholma przedstawione są w sposób bardzo wytworny, a przy głębszem badaniu jądra rozwiązującego korzysta autor nader zrecznie z prac Goursata i Heywooda nad funkcjami głównymi. Przypadek jądra symetrycznego jest szczegółowo przedstawiony i doprowadzony aż do zasadniczych twierdzeń Hilberta i Schmidta o rozwinięciach na szeregi.

Zaznaczamy dalej doskonale opracowany rozdział o równaniach całkowych pierwszego gatunku, tak odmiennych od równania Fredholma. Byłoby niepodobieństwem wyłożyć na kilku stronicach całokształt badań, dotyczących równań o jądrach osobliwych; P. Lalesco wykazuje jednak na przykładach ciekawe okoliczności, które przedstawiają się w tym przypadku. Wreszcie następują wskazówki, dotyczące równań całkowych rzędu wyższego, oraz najnowszych badań Volterry nad ciałem funkcji przemiennej.

Bibliografia podana przy końcu tomu oddać może duże usługi.

Znajomość dzieła P. Lalesco pozwoli czytelnikowi przystąpić bez trudu do studyowania licznych rozpraw, zawierających zastosowania równań całkowych do Teorii równań różniczkowych i Fizyki matematycznej. Książka niniejsza zawiera wszystkie zasadnicze rezultaty czystej teorii równań całkowych, zostawiając na stronie jedynie rozwiązanie równania Fredholma, za pomocą uogólnionych szeregów Fouriera, rozważane przez Hilberta i jego uczniów. Zresztą można przypuszczać, że obecnie badania winny się skierować w stronę zastosowań równań całkowych do Mechaniki i Fizyki matematycznej. Tam właśnie napotkać można nowe typy równań, tam również mogą zwrócić na siebie uwagę pewne cechy szczególne szukanych rozwiązań — cechy, wynikające z danych postawionego zagadnienia. Mamy tu bez wątpienia szerokie pole do pracy.

Émile Picard.

WSTĘP.

I. Badania nad pewną kategorią równań funkcyjnych rozwinęły się w ciągu ostatniego dziesięciolecia tak bujnie i okazały się tak płodnymi w zastosowaniu, iż w przyszłości stanowiąc będą niewątpliwie jeden z najpiękniejszych działów Analizy matematycznej. Obecnie dział ten jest w fazie stawania się; zdało się nam więc pożytecznym wyłożyć całością już ustalonych wyników, oraz wskazać drogi, wciąż jeszcze stojące otworem dla badaczy.

Można wspomniane badania scharakteryzować ogólnie, jako roztrząsanie przypadków szczególnych następującego zagadnienia.

Wprowadzamy nowe działanie, wykonywane na funkcji $\varphi(x)$ i określone przez wyrażenie

$$\int_{ab} N(x, s) \varphi(s) ds, \quad (1)$$

byleby całka określona miała sens.

Działanie to jest w zupełności określone, jeżeli dana jest droga całkowania, oraz funkcja $N(x, y)$, którą nazywać będziemy jądrem działania (1). Weźmy teraz pod uwagę związek między funkcją $\varphi(x)$, jej pochodnymi różnych rzędów i pewną liczbą działań, takich jak (1), i postawmy sobie zagadnienie znalezienia funkcji, związkowi temu za-
dość czyniącej.

Otrzymamy nowy rodzaj równań, ogólniejszych niż równania różniczkowe (zawierają bowiem o jedno działanie więcej) i w przypadku ogólnym zupełnie od nich różnych; nazywać je będziemy całkoworóżniczkowymi, — w przypadku zaś, gdy nie zawierają pochodnych

funkcyi $\varphi(x)$ — prosto całkowemi. Przedmiotem naszej książki będą wyłącznie te ostatnie.

Zagadnienie więc ogólne, które mamy na widoku, polega na rozwiązywaniu równań całkowo-różniczkowych, w szczególności zaś całkowych.

Pierwszem w historii matematyki równaniem całkowym, które rozwiązano, było równanie:

$$\int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{(x-s)^\alpha} = F(x), \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2)$$

otrzymane przez Abela przy badaniu pewnego elementarnego zagadnienia Mechaniki ¹⁾.

W kilkadziesiąt lat potem matematyk rosyjski N. Sonin ²⁾ zbadał równanie tego samego typu co równanie Abela, nieco jednak ogólniejsze.

Sonin wyczerpał niejako zakres stosowności użytego przez Abela fortelu analitycznego i zdawało się, że sprawa jest zamknięta, gdy w r. 1896 Vito Volterra w szeregu not, przedstawionych Akademii nauk w Rzymie i Turynie, rozpoczął uwieńczone zupełnem powodzeniem badania ogólne nad równaniem całkowym:

$$\int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

posługując się metodą bezpośrednią, zacerpniętą niejako u źródeł Analizy matematycznej.

Wkrótce po pięknych, uzyskanych przez niego wynikach, pojawiła się w r. 1900 świetna praca Ivara Fredholma, dotycząca równania całkowego

$$\varphi(x) + \int_0^1 N(x, s) \varphi(s) ds = F(x),$$

którego znaczenie dla całej Analizy wyświetlone zostało przez samego Fredholma, D. Hilberta i E. Picarda. Od tej pory prace, dotyczące równań całkowych, pojawiają się bez przerwy. D. Hilbert,

¹⁾ Abel N. H. 1.

²⁾ Sonin, 1.

w szeregu not, przedstawionych Towarzystwu Naukowemu w Getyndze, użył za narzędzie badań swoich pewnej kategorii równań liniowych o nieskończenie wielu zmiennych, wyświetlił rolę symetrii jądra, podał wreszcie szereg ważnych zastosowań. Jednocześnie E. Picard podkreślił znaczenie powyższego równania całkowego, wskazując na szeroką jego stosowalność do zagadnień Fizyki matematycznej.

Równanie całkowe nazywać będziemy liniowym, jeżeli jest ono pierwszego stopnia względem działań całkowych, które zawiera.

Równania typu:

$$\int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x), \quad (3)$$

$$\varphi(x) + \int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x), \quad (3')$$

w których jedna conajmniej z występujących w działaniu całkowym granic całki jest zmienną, nazywać będziemy równaniami całkowymi liniowymi Volterry, lub poprostu równaniami Volterry, przyczem równanie (3) nazywać będziemy równaniem pierwszego gatunku, zaś (3') — równaniem drugiego gatunku.

Równania typu:

$$\int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = F(x), \quad (4)$$

$$\varphi(x) + \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = F(x), \quad (4')$$

nazywać będziemy równaniami całkowymi liniowymi Fredholma, lub poprostu równaniami Fredholma, przyczem (4) będzie równaniem pierwszego, (4') — równaniem drugiego gatunku.

Typy powyższe stanowią niejako nowe elementy analityczne; można dookoła nich zgrupować badania nad innymi rodzajami równań liniowych, które spotykamy w zastosowaniach i które rozpatrywane były przez różnych autorów.

Wykład podzielimy na trzy części. W pierwszej rozwijamy teorię zwykłego równania Volterry. Drugą część poświęcamy równaniom

całkowym Fredholma; w trzeciej wreszcie podajemy ogólne wskazówki, dotyczące równań całkowych osobliwych i równań nieliniowych, których badanie jest nie tylko logicznie interesującym uogólnieniem, ale — jak się zdaje, — może być użyteczne w wielu zagadnieniach współczesnych.

W końcu tomu podajemy szczegółową bibliografię prac, dotyczących teorii równań całkowych.

CZEŚĆ PIERWSZA.

RÓWNANIE VOLTERRY.

I. Badania V. Volterry.

1. Badania V. Volterry, ukazujące się od 1896 r., zawarte są w sześciu notach (z których cztery przedstawione zostały Akademii Turyńskiej¹⁾, dwie — Akademii dei Lincei²⁾, w rozprawie zamieszczonej w „Annali di Matematica“³⁾, wreszcie w dwu niedawno w formie książkowej ogłoszonych monografiach⁴⁾.

Jest rzeczą ważną wyświecić przedewszystkiem myśl zasadniczą tych badań.

W rozdziale niniejszym będzie mowa wyłącznie o funkcjach całkowalnych i ograniczonych. Założymy dalej, że zmienne są rzeczywiste i zawarte w pewnym przedziale skończonym; można zawsze założyć, że jest to przedział (0, 1).

Bierzemy teraz pod uwagę punkty:

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \quad (1)$$

i wyrażamy, że równanie

$$\int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x) \quad (2)$$

¹⁾ V. Volterra, 1.

²⁾ V. Volterra, 2.

³⁾ V. Volterra, 3.

⁴⁾ V. Volterra, Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales différentielles. Paris (1913). Leçons sur les fonctions de lignes. Paris (1914).

Szereg przybliżeń (7) jest jednostajnie zbieżny w przedziale $(0, a)$. Istotnie, oznaczmy granice górne funkcji $|F_1(x)|$, $|N(x, s)|$ w tym przedziale odpowiednio przez M i N ; otrzymamy wtedy nierówności:

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x)| &\leq M, \\ |\varphi_1(x)| &\leq M \cdot Nx \leq M \cdot Na, \\ &\dots \dots \dots \\ |\varphi_n(x)| &\leq \frac{M N^n x^n}{n!} \leq \frac{M N^n a^n}{n!}; \end{aligned}$$

wykazują one, że szereg (6) przedstawia funkcję całkowitą (8) zmiennej λ , rzędu conajwyżej równego 1; w przedziale więc $(0, a)$ szereg ten jest bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.

Wobec jednostajnej względem zmiennej x zbieżności szeregu (6) występująca w równaniu (5) całka istnieje i jest jednoznacznie określona; z drugiej strony szereg powyższy jest bezwzględnie zbieżny, a formalnie czyni zadość równaniu (5). Wynika stąd, że $\varphi(x)$ jest rozwiązaniem ograniczonym tego równania.

Zresztą jest to jedyne rozwiązanie ograniczone; istotnie, gdyby istniało inne, wówczas równanie jednorodne

$$\varphi(x) + \int_0^x N_1(x, s) \varphi(s) ds = 0 \tag{8}$$

miałoby rozwiązanie, nie będące tożsamościowo zerem; jest to jednak niemożliwe, odejmując bowiem (7) od (8), otrzymujemy:

$$\varphi(x) - \varphi_n(x) = - \int_0^x N_1(x, s) [\varphi(s) - \varphi_{n-1}(s)] ds \quad n=1, 2, \dots$$

Daje to nierówności analogiczne do poprzednich, w których jednak występuje $\varphi(x) - \varphi_n(x)$ zamiast $\varphi_n(x)$.

Wynika stąd, w myśl poprzedniego rozumowania, że wyrażenie

$$\lambda^n [\varphi(x) - \varphi_n(x)]$$

jest n -tym wyrazem szeregu, przedstawiającego funkcję całkowitą zmiennej λ , wskutek tego zaś będzie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \varphi_n(x)] = 0$$

i

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$$

w sprzeczności z założeniem.

Od równania (5) lub (4) przejść można do równania pierwotnego (2) przez całkowanie, które daje:

$$\int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x) - F(0). \quad (9)$$

Równanie (2) posiada więc rozwiązanie $\varphi(x)$ jedynie w tym przypadku, gdy $F(0) = 0$. Warunek ten, konieczny dla istnienia rozwiązania ograniczonego, jest, jak to widzimy, zarazem dostateczny¹⁾.

Otrzymujemy tym sposobem następujące twierdzenie:

Jeżeli funkcje $N(x, s)$ i $F(x)$ posiadają w przedziale $(0, a)$ ograniczone i ciągłe pochodne względem zmiennej x i jeżeli $N(x, x) \neq 0$ i $F(0) = 0$, wówczas równanie Volterry

$$\int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x)$$

posiada w przedziale powyższym jedno i tylko jedno rozwiązanie ograniczone i ciągłe.

3. Jeżeli weźmiemy pod uwagę równanie Volterry drugiego gatunku

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = F(x), \quad (10)$$

wówczas ograniczające warunki powyższego twierdzenia nie są konieczne; równanie to jest więc prostsze od równania (2).

Dla uniknięcia nieporozumień zachowaliśmy jednak terminologię D. Hilberta.

III. Wzór Volterry; jądro rozwiązujące.

4. Można nadać funkcji $\varphi(x)$ prostszą postać drogą następującą:

Mamy, w przypadku równania drugiego gatunku (10):

¹⁾ Twierdzenie powyższe udowodnił po raz pierwszy J. Le Roux w rozprawie doktorskiej: Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du 2-e ordre à deux variables indépendantes (p. 19—22). 1894, metodą przybliżeń kolejnych.

$$\varphi_0(x) = F(x),$$

$$\varphi_1(x) = - \int_0^x N(x, \sigma) F(\sigma) d\sigma,$$

$$\varphi_2(x) = (-1)^2 \int_0^x N(x, s) ds \int_0^s N(s, \sigma) F(\sigma) d\sigma,$$

albo, stosując wzór Dirichleta:

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= (-1)^2 \int_0^x F(\sigma) d\sigma \int_{\sigma}^x N(x, s) N(s, \sigma) ds \\ &= \int_0^x N_1(x, \sigma) F(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

przyczem:

$$N_1(x, y) = \int_y^x N(x, s) N(s, y) ds.$$

Kładąc:

$$N_p(x, y) = \int_y^x N(x, s) N_{p-1}(s, y) ds,$$

otrzymujemy ogólnie:

$$\begin{aligned} \varphi_p(x) &= (-1)^p \int_0^x \bar{N}(x, s) ds \int_0^s N_{p-2}(s, \sigma) F(\sigma) d\sigma \\ &= (-1)^p \int_0^x F(\sigma) d\sigma \int_{\sigma}^x N(x, s) N_{p-2}(s, \sigma) ds \\ &= (-1)^p \int_0^x N_{p-1}(x, \sigma) F(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Jeżeli więc położymy:

$$\mathfrak{N}(x, y; \lambda) = N(x, y) - \lambda N_1(x, y) + \dots + (-1)^p \lambda^p N_p(x, y) + \dots$$

wówczas można będzie rozwiązaniu równania (10) nadać kształt:

$$\varphi(x) = F(x) - \lambda \int_0^x \mathfrak{N}(x, s; \lambda) F(s) ds. \quad (11)$$

Przedstawia się ono w formie analogicznej do strony lewej równania (10); z tego powodu nazywać będziemy $\mathfrak{N}(x, y; \lambda)$ — jądrem rozwiązującym równania (10).

Podobnie i jądra $N_p(x, y)$ grają w teorii równań całkowych ważną rolę; nazywamy $N_p(x, y)$ jądrem iterowanym rzędu p .

Dotychczas otrzymane wyniki streścić można w następującym twierdzeniu:

Równanie Volterry drugiego gatunku (10) posiada jedno i tylko jedno, ciągłe i ograniczone rozwiązanie, przedstawione przez wzór (11). Jest ono funkcją całkowitą zmiennej λ , rzędu niewiększego niż 1.

Równanie Volterry pierwszego gatunku posiada rozwiązanie ograniczone i rzeczywiste tylko przy pewnych warunkach.

10. Związek między równaniem Volterry a równaniami różniczkowymi liniowymi.

5. Między równaniem Volterry a równaniami różniczkowymi liniowymi istnieje ścisły związek; pożyteczne będzie wydobyć go na jaw.

Przedewszystkiem można każde równanie różniczkowe liniowe sprowadzić do równania Volterry.

Istotnie weźmy pod uwagę równanie rzędu n -tego:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = f(x), \quad (12)$$

przyczem zamiast y rozpatrywać będziemy, jako funkcję niewiadomą, pochodną najwyższego rzędu:

$$z = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Jest wtedy:

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_0^x z dx + C_1,$$

.....

$$y = \int_0^x z dx^n + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_n.$$

Związki te przekształcają równanie (12) na następujące:

$$z + a_1(x) \int_0^x z dx + \dots + a_n(x) \int_0^x z dx^n = f(x) + \sum_{p=1}^n C_p f_p(x), \quad (13)$$

przyczem oznaczamy ogólnie przez $f_p(x)$ wyrażenie:

$$f_p(x) = a_p(x) + \frac{x}{1} \cdot a_{p+1}(x) + \dots + \frac{x^{n-p}}{(n-p)!} a_n(x).$$

Wystarczy zastosować teraz znany wzór:

$$\int_0^x \varphi(s) ds^n = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(s) ds,$$

aby otrzymać równanie Volterry:

$$\begin{aligned} z(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-s) + \dots + \frac{a_n(x)(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \right] z(s) ds \\ = f(x) + \sum_{p=1}^n C_p f_p(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Zakładamy tu, rzecz prosta, że punkt $x=0$ jest regularny dla wszystkich współczynników $a_1(x)$. Zauważymy mimochodem, że wszystkie elementarne własności równań różniczkowych jednorodnych i niejednorodnych wypływają natychmiast z wyników powyższych.

Aby prawa strona wzoru (14) miała wartość określoną, potrzeba, by stałe C miały wartości dane. A więc odwrotnie: rozwiązanie równania Volterry (14) jest równoważne z rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla równania różniczkowego (12). Jednoznaczność rozwiązania równania Volterry odpowiada temu, że i zagadnienie Cauchy'ego posiada w punkcie regularnym jedno tylko rozwiązanie.

6. Jeżeli położymy w równaniu różniczkowym (12) $n = \infty$, otrzymamy ciekawy wynik, który z pewnego punktu widzenia rzuca dużo światła na analityczną naturę równania Volterry. Otrzymamy mianowicie w ten sposób równanie różniczkowe liniowe rzędu nieskończonego:

$$\begin{aligned} z + a_1(x) \int_0^x z dx + a_2(x) \int_0^x z dx^2 + \dots + a_n(x) \int_0^x z dx^n + \dots \\ = f(x) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p f_p(x), \end{aligned}$$

gdzie:

$$f_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p+n}(x) \frac{x^n}{n!}.$$

Równanie to równoważne jest równaniu Volterry:

$$\begin{aligned} z + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-s) + \dots + \frac{a_n(x)(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right] \varphi(s) ds \\ = f(x) + \sum_{p=1}^{\infty} C_p f_p(x). \end{aligned} \quad (15)$$

Przypuśćmy, że w przedziale $(0, a)$ funkcje $a_p(x)$ są jednostajnie ograniczone, to znaczy, że

$$|a_p(x)| \leq A \quad (p - \text{dowolne})$$

Warunek ten oczywiście pociąga za sobą:

$$|f_p(x)| \leq A e^{Ax}.$$

Jeżeli więc szereg

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p$$

jest zbieżny, wówczas prawa strona równania (15) jest szeregiem bezwzględnie i jednostajnie zbieżnym w przedziale $(0, a)$.

Podobnie i szereg, przedstawiający jądro równania (15), jest w tymże przedziale bezwzględnie i jednostajnie zbieżny.

Powyższe proste przejście do granicy wykazuje, że w pewnych przypadkach rozwiązanie równania Volterry równoważne jest rozwiązaniu zagadnienia Cauchy'ego dla równania różniczkowego liniowego rzędu nieskończonego. Uwaga ta pozwala nam ujrzeć we właściwym świetle rolę i charakter tego nowego narzędzia analitycznego.

V. Równania Volterry o wielu zmiennych niezależnych.

7. Równania Volterry o wielu zmiennych niezależnych mają ważne zastosowania do teorii równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych o charakterystykach rzeczywistych.

Rozpatrzmy równanie typu następującego:

$$\varphi(x, y) + \int_0^x A(x, y, s) \varphi(s, y) ds + \int_0^y B(x, y, s) \varphi(x, s) ds$$

$$+ \int_0^x \int_0^y C(x, y, s, t) \varphi(s, t) ds dt = F(x, y). \quad (16)$$

Odpowiada ono omówionym w paragrafach poprzednich równaniom drugiego gatunku.

Zakładamy, iż funkcye $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$ i $C(x, y, s, t)$ oraz $F(x, y)$ są w pewnym obszarze D całkowalne i ograniczone, mianowicie, że:

$$|A(x, y, z)|, \quad |B(x, y, z)|, \quad |C(x, y, z, t)| \leq M, \quad |F(x, y)| \leq F.$$

Aby znaleźć rozwiązanie równania (16), zastosujemy metodę przybliżeń kolejnych, kładąc:

$$\varphi_1(x, y) = F(x, y),$$

$$\varphi_2(x, y) = - \int_0^x A(x, y, s) \varphi_1(s, y) ds - \int_0^y B(x, y, s) \varphi_1(x, s) ds,$$

$$- \int_0^x \int_0^y C(x, y, s, t) \varphi_1(s, t) ds dt = D[\varphi_1(x, y)]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_n(x, y) = D[\varphi_{n-1}(x, y)].$$

$$\dots \dots \dots$$
(17)

W prostokącie (1) o bokach 0α , 0β , zawartym w obszarze D , mamy:

$$|\varphi_1(x, y)| \leq F,$$

$$|\varphi_2(x, y)| \leq MF(x + y + xy) \leq MF(\alpha + \beta + \alpha\beta),$$

$$|\varphi_3(x, y)| \leq M^2 F(\alpha + \beta + \alpha\beta)(x + y + xy) \leq FM^2(\alpha + \beta + \alpha\beta)^2,$$

i ogólnie $|\varphi_n(x, y)| \leq M^n F(\alpha + \beta + \alpha\beta)^n.$

Wynika stąd, iż szereg przybliżeń jest w prostokącie (1) regularnie ¹⁾ zbieżny, jeżeli tylko α i β są tak małe, że

¹⁾ To znaczy bezwzględnie i jednostajnie.

$$M(\alpha + \beta + \alpha\beta) \leq 1.$$

Otrzymujemy w ten sposób rozwiązanie naszego równania; rozwiązanie to jest zresztą jedyne, na mocy rozumowania, analogicznego do przeprowadzonego na str. 8.

Aby rozwiązanie to przedłużyć w obszarze D , weźmy pod uwagę prostokąt (2), przylegający z prawej strony do prostokąta (1) i zawarty w D . Jeżeli wprowadzimy nowe zmienne;

$$x' = x - \alpha; \quad y' = y,$$

wówczas możemy równaniu (16) nadać postać:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y') + \int_0^{x'} A_1(x', y', s) \varphi(s, y') ds + \int_0^{y'} B_1(x', y', s) \varphi(x', s) ds \\ + \int_0^{x'} \int_0^{y'} C_1(x', y', s, t) \varphi(s, t) ds dt = F + \Phi \end{aligned}$$

Strona lewa jest zbudowana tak samo, jak lewa strona równania (16), Φ jest łatwą do obliczenia funkcją; zależy ona od wartości $\varphi(x, y)$ w prostokącie (1), które są nam już znane.

Można wskutek tego zastosować ten sam mechanizm przybliżeń kolejnych, zastępując tylko F przez $F + \Phi$; jeżeli znowuż $M(\alpha' + \beta' + \alpha'\beta') < 1$, to przybliżenia będą regularnie zbieżne, gdyż stała M ma tęsamą wartość, co w równaniu (16). Można tedy otrzymać po skończonej liczbie kroków wartość rozwiązania w każdym punkcie obszaru D . W ten sposób dochodzimy do twierdzenia:

Równanie (16) ma jedno i tylko jedno rozwiązanie w każdym obszarze, w którym funkcje $A(x, y, z)$, $B(x, y, z)$, $C(x, y, z, t)$, $F(x, y)$ są ograniczone i całkowalne¹⁾.

8. V. Volterra rozpatruje również równanie pierwszego gatunku:

$$\int_0^x \int_0^y N(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt = F(x, y). \quad (19)$$

Położmy:

$$\begin{aligned} N(x, y, s, t) = N(x, y) + N_1(x, y, s)(x - s) + N_2(x, y, t)(y - t) \\ + N_3(x, y, s, t)(x - s)(y - t). \end{aligned}$$

¹⁾ Powyższa metoda podana została przez E. Picarda.

Równanie (19) przybiera wtedy postać:

$$\begin{aligned}
 N(x, y) \int_0^x \int_0^y \varphi(s, t) ds dt + \int_0^x \int_0^y N_1(x, y, s) (x - s) \varphi(s, t) ds dt \\
 + \int_0^x \int_0^y N_2(x, y, s) (y - t) \varphi(s, t) ds dt \\
 + \int_0^x \int_0^y N_3(x, y, s, t) (y - t) (x - s) \varphi(s, t) ds dt = F(x, y).
 \end{aligned}$$

Przyjmując, jako niewiadomą, funkcję:

$$\varphi_1(x, y) = \int_0^x \int_0^y \varphi(s, t) ds dt,$$

możemy przedstawić równanie (19) w postaci:

$$\begin{aligned}
 N(x, y) \varphi_1(x, y) + \int_0^x \bar{N}_1(x, y, s) \varphi_1(s, y) ds + \int_0^y \bar{N}_2(x, y, s) \varphi_1(x, s) ds \\
 + \int_0^x \int_0^y \bar{N}_3(x, y; s, t) \varphi_1(s, t) ds dt = F(x, y).
 \end{aligned}$$

Dzieląc przez $\bar{N}(x, y)$, otrzymujemy równanie drugiego gatunku.

Ponieważ $\varphi(0, 0) = 0$, musi więc być $F(0, 0) = 0$. Podobnie warunek $\bar{N}(x, y) = N(x, y; x, y) \neq 0$ jest konieczny i dostateczny na to, aby współczynniki równania drugiego gatunku były ograniczone. Tym sposobem odnajdujemy na innej drodze te same cechy szczególne, które występowały w równaniu Volterry o jednej zmiennej.¹⁾

VI. Układy równań Volterry.

9. Metoda przybliżeń kolejnych pozwala rozwiązywać w równie prosty sposób układ n równań liniowych Volterry o n funkcjach niewiadomych. Oznaczać będziemy tem mianem układ:

¹⁾ Można powyższą metodę stosować również w przypadku jednej zmiennej.

$$\varphi_i(x) + \sum_{p=1}^n \int_0^x A_{ip}(x, s) \varphi_p(s) ds = f_i(x) \quad (i=1, 2 \dots n).$$

Sposób zastosowania powyższej metody jest oczywisty; pierwszymi przybliżeniami będą:

$$\varphi_{i0}(x) = f_i(x),$$

równaniami zaś zwrotnymi:

$$\varphi_{ik}(x) = - \sum_{p=1}^n \int_0^x A_{ip}(x, s) \varphi_{pk-1}(s) ds \quad (i=1, 2 \dots n).$$

Metoda, już kilkakrotnie stosowana, wykazuje, że szeregi przybliżeń są regularnie zbieżne, o ile współczynniki $A_{ik}(x, y)$ są całkowne i ograniczone.

10. Każdy układ równań różniczkowych liniowych rzędu skończonego, typu:

$$\frac{dz_i}{dx} + \sum_{p=1}^n a_{ip}(x) z_p(x) = f_i(x) \quad (i=1, 2 \dots n)$$

sprowadzić można do układu równań Volterry, przyjmując za niewiadomą $u_i = \frac{dz_i}{dx}$. Można nawet rozpatrywać układy równań rzędu nieskończonego, do których stosuje się ta sama metoda, byleby warunki początkowe zapewniały zbieżność lewych stron równań uważanych.

VII. Uwagi końcowe.

11. Rozdział niniejszy jasno wykazuje potęgę tego przedziwnego narzędzia analitycznego, którym jest metoda przybliżeń kolejnych, oraz płodność tej metody we wszystkich zagadnieniach o istnieniu, występujących w teorii równań różniczkowych liniowych oraz całkowych liniowych, które są — jakśmy widzieli — prawdziwem uogólnieniem tych ostatnich.

Równania całkowe dotąd rozpatrywane były regularne; poświęćmy równaniom osobliwym rozdział osobny, w którym jednocześnie omawiać będziemy równania Volterry i Fredholma.



CZĘŚĆ DRUGA.

ROZDZIAŁ PIERWSZY.

RÓWNANIE FREDHOLMA.

I. Wzory I. Fredholma.

1. Równanie Fredholma drugiego gatunku jest pouczającym przykładem prawdziwego odkrycia matematycznego; znajdujemy tu wszystkie rysy zasadnicze takiego odkrycia, — a więc wyniki nowe i niespodziewane, śmiałe przejście do granicy, które Darboux i Picard słusznie uważają za jedno z najpiękniejszych w całej Analizie. Ciekawą jest rzeczą naszkicować w ogólnych zarysach tok tego pamiętnego odkrycia.

Weźmy pod uwagę równanie

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^1 N(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (1)$$

oraz punkty podziału

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \quad (2)$$

i zastąpmy w równaniu (1) całkę przez sumę przybliżoną, odpowiadającą punktom podziału (2); otrzymamy równanie przybliżone:

$$\varphi(x) + \lambda \left[N\left(x, \frac{1}{n}\right) \varphi_1 + N\left(x, \frac{2}{n}\right) \varphi_2 + \dots + N\left(x, \frac{n}{n}\right) \varphi_n \right] = f(x). \quad (3)$$

Wyrażając, iż związek (3) spełnia się w punktach (2), otrzymamy n równań liniowych:

rozprawa w XXVII-ym tomie czasopisma „Acta Mathematica“, poświęconym pamięci N. H. Abela (w r. 1903).

Metoda I. Fredholma jest bezpośrednia; rozpatruje on znane rozwinięcie wyznacznika $D_n(\lambda)$ według potęg zmiennej λ i dowodzi, iż, kładąc $n = \infty$, otrzymamy funkcję całkowitą $D(\lambda)$ zmiennej λ . Wynik ten zasadniczy, który wydawał się bardzo prawdopodobnym już na mocy pewnych prostych rozważań z teorii wyznaczników nieskończonych, został ściśle udowodniony przez I. Fredholma przy pomocy pewnego twierdzenia Hadamarda.

Szeregi, otrzymane przez I. Fredholma, są wytworne i pozostaną niewątpliwie klasycznymi.

2. Nota Fredholma z r. 1900 niezwłocznie zwróciła na siebie uwagę profesora Getyngeskiego uniwersytetu D. Hilberta, który lat kilka poświęcił pracy nad udoskonaleniem teorii równań całkowych, zarówno drogą wykładów uniwersyteckich, jak i badań osobistych. Punktem wyjścia było dla Hilberta spostrzeżenie następujące:

Wyznacznik $D_n(\lambda)$ jest wyróżnikiem formy kwadratowej.

$$\sum_{p=1}^n x_p^2 + \lambda \sum_{p, q=1}^n N_{pq} x_p x_q. \quad (N_{pq} = N_{qp}). \quad (6)$$

W ten sposób piękna teoria form kwadratowych i dwuliniowych, którą nauka zawdzięcza Weierstrassowi, Sylvesterowi, Kroneckerowi i Frobeniusowi, mogła przez przejście do granicy $\lim n = \infty$, nowe przynieść owoce; w ten sposób również ujawnia się rola symetrii jądra, który to przypadek Hilbert i szkoła jego badali przedewszystkiem. Sprowadzenie formy (6) do kształtu kanonicznego poddało D. Hilbertowi myśl uważania każdego równania całkowego za źródło pewnego ciągu funkcji ortogonalnych i nawiązania przez to do teorii równań całkowych badania nad rozwinięciem funkcji dowolnie danych na szeregi funkcji ortogonalnych. Uzyskane przez Hilberta wyniki mieszczą się w sześciu notach, przedstawionych Getyngeskiemu Towarzystwu naukowemu¹⁾, przyczem czystej teorii poświęcone są noty 1-a, 4-a i 5-a; w pozostałych znajdujemy zastosowania. Wyniki te, o ile dotyczą teorii, odnalezione zostały i uzupełnione przez jednego z uczniów Hilberta, E. Schmidta, metodą bezpośrednią. W swej rozprawie doktorskiej²⁾ podał mianowicie Schmidt wykład

¹⁾ D. Hilbert, 1.

²⁾ E. Schmidt, 1.

głównych własności równań całkowych o jądrze symetrycznym, odznaczający się niezwykłą wytwornością, który też szybko się rozpowszechnił i niejednokrotnie był użytkowany. Przypadek jądra asymetrycznego, również rozpatrywany przez Hilberta i Schmidta, wymagał jeszcze dalszych badań. Już w r. 1903 J. Plemelj w bardzo wybitnej pracy¹⁾ odkrył ciągi funkcji dwuortogonalnych, których szczególnym przypadkiem są funkcje ortogonalne. Funkcje te, przy pomocy prostej metody utożsamiania, odnalazł następnie B. Heywood²⁾; dopiero jednak E. Goursatowi zawdzięczamy podstawową w tej mierze pracę³⁾, w której odnajdujemy wszystkie zasadnicze pierwiastki zagadnienia, wynikające z głębszych badań nad jądrem rozwiązującym. Pojęcie jąder ortogonalnych jest przytem najdogodniejszym narzędziem badania, czyni bowiem zbędnem wszelkie przejście do granicy i pozwala na bezpośrednie roztrząsanie równań całkowych w przypadku najogólniejszym. Będziemy się posługiwali metodą mieszaną, korzystając z prac Fredholma, Goursata i Heywooda.

W części tej będzie mowa jedynie o funkcjach i jądrach ograniczonych i całkownych.

II. Pierwsze twierdzenie I. Fredholma.

3. Element analityczny rozwiązania. Weźmy pod uwagę równanie całkowe:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (7)$$

$$(|N(x, y)| \leq N; \quad |f(x)| \leq M).$$

Stosując metodę przybliżeń kolejnych, podobnie jak przy równaniu Volterra, otrzymamy szereg:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) f(s) ds + \lambda^2 \int_a^b N_1(x, s) f(s) ds + \dots \\ + (-1)^p \lambda^p \int_a^b N_{p-1}(x, s) f(s) ds + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾ J. Plemelj, 1, 2.

²⁾ B. Heywood, 2.

³⁾ E. Goursat 5, H. Mercer 1.

przyczem położyliśmy:

$$N_p(x, y) = \int_a^b \dots \int_a^b N(x, s_1) N(s_1, s_2) \dots N(s_p, y) ds_1 ds_2 \dots ds_p. \quad (9)$$

Wyrażenie (9) nazywać będziemy jądrem iterowanym rzędu p . Szereg (8) jest regularnie zbieżny w przedziale (a, b) dla dostatecznie małego λ . Istotnie, wyrazy jego są kolejno mniejsze

od odpowiednich wyrazów szeregu $\sum_{p=0}^{\infty} M \cdot N^p \lambda^p (b-a)^p$, zbieżnego dla $\lambda \leq \frac{1}{N(b-a)}$. Możemy wobec tego wzór (8) napisać w kształcie:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(x, s; \lambda) f(s) ds, \quad (10)$$

przyczem wyrażenie:

$$\mathfrak{N}(x, y; \lambda) = N(x, y) - \lambda N_1(x, y) + \dots + (-1)^p \lambda^p N_p(x, y) + \dots \quad (11)$$

nazywać będziemy jądrem rozwiązującym równania (7).

Forma (10), którą nadaliśmy rozwiązaniu, nasuwa uwagę następującą. Charakter analityczny rozwiązania, uważanego jako funkcja zmiennej λ , zależy przedewszystkiem od jądra rozwiązującego; badanie rozwiązania sprowadza się tym sposobem do badania jądra rozwiązującego, przyczem, jak zobaczymy w następstwie, funkcja $f(x)$ nie gra żadnej roli.

4. Równania całkowe jądra rozwiązującego. Zamiast badać szereg (11) wprost, zauważymy, iż z szeregu tego wynikają związki następujące:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(x, y; \lambda) &= N(x, y) - \lambda \int_a^b N(x, s) [N(s, y) - \lambda N_1(s, y) + \dots \\ &\quad + (-1)^{p-1} \lambda^{p-1} N_{p-1}(s, y) + \dots] ds \\ &= N(x, y) - \lambda \int_a^b N(x, s) \mathfrak{N}(s, y; \lambda) ds \end{aligned}$$

oraz;

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(x, y; \lambda) &= N(x, y) - \lambda \int_a^b [N(x, s) - \dots \\ &\quad + (-1)^{p-1} \lambda^{p-1} N_{p-1}(x, s) + \dots] N(s, y) ds \\ &= N(x, y) - \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(x, s; \lambda) N(s, y) ds. \end{aligned}$$

Można więc powiedzieć, iż jądro rozwiązujące $\mathfrak{N}(x, y; \lambda)$ sprawdza równania całkowe:

$$\begin{aligned} N(x, y) - \mathfrak{N}(x, y; \lambda) &= \lambda \int_a^b N(x, s) \mathfrak{N}(s, y; \lambda) ds \\ &= \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(x, s; \lambda) N(s, y) ds. \end{aligned} \tag{12}$$

Będziemy badali jądro rozwiązujące przy pomocy jednego z tych równań, przyczem, oczywiście rozwiązanie jednego z nich będzie zarazem rozwiązaniem drugiego, wskutek tego, że oba równania wypływają ze wspólnego źródła: mianowicie ze związku (11).

5. Równanie stowarzyszone. Do badania równania (7) dogodnie jest dołączyć badanie równania

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b N(s, x) \varphi(s) ds = f(x), \tag{7a}$$

które otrzymujemy z równania (7) przez przemianę zmiennych jądra. Równania (7) i (7a) nazywamy stowarzyszonymi.

Mają one wspólne jądro rozwiązujące. Istotnie, analogiczny do poprzedniego rachunek wykazuje, iż elementem analitycznym rozwiązania równania (7a) jest:

$$\psi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(s, x; \lambda) f(s) ds.$$

Można tym sposobem badać jednocześnie oba równania; sprawdza się to do badania jądra rozwiązującego.

6. Funkcje całkowite Fredholma. Uwagi wstępne § 1-go następują nam próbę rozwiązania równania całkowego:

Używając dogodnego znakowania, wprowadzonego przez Fredholm'a:

$$\begin{vmatrix} N(x_1, y_1) & N(x_1, y_2) & \dots & N(x_1, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ N(x_n, y_1) & N(x_n, y_2) & \dots & N(x_n, y_n) \end{vmatrix} = N \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix},$$

możemy napisać:

$$A_1(x, y) = \int_a^b N \begin{pmatrix} x, & s \\ y, & s \end{pmatrix} ds.$$

Z kolei mamy:

$$2 A_2(x, y) = N(x, y) \int_a^b A_1(s, s) ds - 2 \int_a^b N(x, s) A_1(s, y) ds,$$

lub też, pisząc ostatnią całkę dwa razy z rzędu i oznaczając w niej zmienną całkowania raz przez s_1 , drugi raz przez s_2 :

$$2 A_2(x, y) = \int_a^b [N(x, y) A_1(s, s) ds - N(x, s_1) A_1(s_1, y) ds_1 - N(x, s_2) \times A_1(s_2, y) ds_2]$$

albo też:

$$2 A_2(x, y) = \int_a^b \left[N(x, y) N \begin{pmatrix} s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2 \end{pmatrix} - N(x, s_1) N \begin{pmatrix} s_1, & s_2 \\ y, & s_2 \end{pmatrix} - N(x, s_2) \times N \begin{pmatrix} s_2, & s_1 \\ y_1, & s_1 \end{pmatrix} \right] ds_1 ds_2.$$

Wyrażenie pod znakiem całki jest rozwinięciem wyznacznika

$$\begin{vmatrix} N(x, y), & N(x, s_1), & N(x, s_2) \\ N(s_1, y), & N(s_1, s_1), & N(s_1, s_2) \\ N(s_2, y), & N(s_2, s_1), & N(s_2, s_2) \end{vmatrix} = N \begin{pmatrix} x, & s_1, & s_2 \\ y, & s_1, & s_2 \end{pmatrix},$$

gdź

$$N \begin{pmatrix} s_2, & s_1 \\ y, & s_1 \end{pmatrix} = - N \begin{pmatrix} s_1, & s_2 \\ y, & s_1 \end{pmatrix}.$$

Tym sposobem:

$$A_2(x, y) = \frac{1}{2!} \int_a^b N \begin{pmatrix} x, & s_1, & s_2 \\ y, & s_1, & s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2,$$

a wskutek tego:

$$a_3 = \frac{1}{3!} \int_a^b N \begin{pmatrix} s_1, s_2, s_3 \\ s_1, s_2, s_3 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 ds_3.$$

Jest to prawo ogólne; w istocie:

$$\begin{aligned} p \cdot A_p(x, y) &= \int_a^b N(x, y) A_{p-1}(s, s) ds - p \int_a^b N(x, s) A_{p-1}(s, y) ds \\ &= \int_a^b \{ N(x, y) A_{p-1}(s, s) ds - N(x, s_1) A_{p-1}(s_1, x) ds \\ &\quad - N(x, s_2) A_{p-1}(s_2, y) ds_2 - \dots - N(x, s_p) A_{p-1}(s_p, y) ds_p \}. \end{aligned}$$

Zastępując A_{p-1} przez jego wartość, otrzymamy pod znakiem całki rozwinięcie wyznacznika

$$\frac{1}{(p-1)!} N \begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \dots, s_p \\ y, s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix}.$$

Mamy więc w przypadku ogólnym:

$$A_p(x, y) = \frac{1}{p!} \int_a^b N \begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \dots, s_p \\ y, s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p$$

oraz

$$a_p = \frac{1}{p!} \int_a^b N \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p.$$

Tym sposobem otrzymujemy:

$$\mathfrak{R}(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)},$$

gdzie:

$$\begin{aligned} D(x, y; \lambda) &= N(x, y) + \frac{\lambda}{1} \int_a^b N \begin{pmatrix} x, s_1 \\ y, s_1 \end{pmatrix} ds_1 + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b N \begin{pmatrix} x, s_1, s_2 \\ y, s_1, s_2 \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \\ &+ \dots + \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b N \begin{pmatrix} x, s_1, s_2, \dots, s_p \\ y, s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_p + \dots \quad (17) \end{aligned}$$

$$D(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b N(s_1, s_1) ds_1 + \dots + \frac{\lambda^p}{p!} \int_a^b N \begin{pmatrix} s_1 s_1 \dots s_p \\ s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 \dots ds_p.$$

Funkcye (17) są funkcjami całkowitemi zmiennej λ rzędu co najwyżej równego 2. Istotnie, według twierdzenia Hadamarda ¹⁾, wartość bezwzględna wyznacznika rzędu p , którego wyrazy są niewiększe bezwzględnie od N , jest nie większa od $N^p (p)^{\frac{p}{2}}$.

Wobec tego:

$$|a_p| < \frac{N^p p^{\frac{p}{2}}}{p!} (b-a)^p,$$

albo też, przy użyciu wzoru asymptotycznego Stirlinga,

$$p! \infty \left(\frac{p}{e}\right)^p,$$

$$|a_p| \infty \frac{N^p e^p}{p^{\frac{p}{2}}} (b-a)^p$$

a stąd:

$$p^{\frac{1}{2}} \sqrt[p]{|a_p|} \infty e N (b-a) < A. \quad (18)$$

Nierówność (18) wykazuje, iż $D(\lambda)$ jest funkcją całkowitą zmiennej λ , rzędu nie większego niż dwa.

Analogiczne postępowanie daje ten sam wynik dla $D(x, y; \lambda)$, przytem dla wszystkich x, y zawartych w przedziale całkowania (a, b) .

7. Jednoznaczność rozwiązania. Otrzymane przez nas rozwiązanie:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(x, s; \lambda) f(s) ds \quad (19)$$

jest jedyne; wynika to natychmiast stąd, iż związki (7) i (19) są względem siebie odwrotne. Istotnie, załóżmy, iż istnieje drugie rozwiązanie $\varphi_1(x)$, dla którego

$$\varphi_1(x) + \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi_1(s) ds = f(x). \quad (20)$$

Podstawiamy we wzór (19) wartość $f(x)$ z równania (20); daje to:

¹⁾ Hadamard, Bull. sc. math. 1893 p. 240, Wirtinger ibid. 1907 p. 175, S. Zaremba Teorya wyznaczników i równań liniowych 1909 p. 117—127.

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + \lambda \int_a^b \{N(x, s) - \mathfrak{N}(x, s; \lambda)\} + \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(x, t; \lambda) \times N(t, s) dt \} \varphi_1(s) ds$$

jednakowoż, na mocy równań całkowych jądra rozwiązującego; wyrażenie pod znakiem całki znika tym sposobem:

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)$$

co znaczy, że rozwiązania $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ są identyczne.

8. Pierwsze twierdzenie Fredholma. Możemy uzyskane w rozdziale tym wyniki streścić w następującem twierdzeniu:

Równanie

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = f(x),$$

w którem funkcye $f(x)$, $N(x, y)$ są w przedziale a, b ograniczone i całkowne, posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie $\varphi(x)$, określone przez wzór:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \mathfrak{N}(x, s; \lambda) f(s) ds,$$

przyczem $\mathfrak{N}(x, s; \lambda)$ jest ilorazem dwu funkcyj całkowitych zmiennej λ rzędu niewiększego niż 2.

Na tem polega pierwsze twierdzenie Fredholma.

III. Pierwiastki funkcji $D(\lambda)$.

9. Rozwinięcie funkcji $\log D(\lambda)$; ślady jądra. Wielkie usługi odda nam w następstwie pewien ważny wzór, który również zawdzięczamy I. Fredholmowi. Aby go wyprowadzić, zauważymy, że ze związku (16) wynika:

$$\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b D(s, s; \lambda) ds, \quad (21)$$

lub też, jeżeli podzielimy przez $D(\lambda)$, w celu otrzymania po prawej stronie jądra rozwiązującego:

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \int_a^b \mathfrak{N}(s, s; \lambda) ds. \quad (22)$$

Aby obliczyć wyrażenie po stronie prawej, posługiwać się będziemy rozwinięciem jądra rozwiązującego na szereg Mac-Laurina (11); w ten sposób otrzymamy:

$$\int_a^b \mathfrak{N}(s, s; \lambda) ds = n_1 - \lambda n_2 + \dots + (-1)^{p-1} \lambda^{p-1} n_p + \dots$$

przyczem n_p oznacza:

$$n_p = \int_a^b N_{p-1}(s, s) ds.$$

Ze stałami n_p często jeszcze spotykać się będziemy; nazywamy je śladami jądra $N(x, y)$.

Wstawiając w równanie (22) wzór na $\int_a^b \mathfrak{N}(s, s; \lambda) ds$ i całkując, otrzymujemy wzór szukany:

$$\log D(\lambda) = n_1 \lambda - n_2 \frac{\lambda^2}{2} + \dots + (-1)^{p-1} \frac{n_p}{p} \lambda^p + \dots \quad (23)$$

stała całkowania jest zerem, gdyż $D(0) = 1$.

10. Wartości właściwe jądra. Znaczenie pierwiastków funkcji $D(\lambda)$ wyjaśnia następujące twierdzenie:

Każdy pierwiastek λ_p funkcji $D(\lambda)$ jest biegunem jądra rozwiązującego. Istotnie, udowodniony w poprzedzającym paragrafie związek

$$D'(\lambda) = \int_a^b D(s, s; \lambda) ds$$

wykazuje, iż, w razie gdy λ_p jest także zerem dla funkcji $D(x, y; \lambda)$, to w każdym razie zerem rzędu o jednąć niższego niż dla funkcji $D(\lambda)$; a więc i w tym przypadku jest λ_p biegunem jądra rozwiązującego.

Zera te tworzą zbiór przeliczalny. Niechaj będzie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \dots$ ciąg zer tych, uporządkowanych według rosnących wartości bezwzględnych. Ponieważ rząd funkcji $D(\lambda)$ jest conajwyżej równy 2, więc szereg:

$$\frac{1}{|\lambda_1|^{2+\varepsilon}} + \frac{1}{|\lambda_2|^{2+\varepsilon}} + \dots + \frac{1}{|\lambda_p|^{2+\varepsilon}} + \dots$$

jest zbieżny dla każdego $\varepsilon > 0$, co nam daje pojęcie o gęstości zer. W teoryi równań Fredholma zera funkcji $D(\lambda)$ grają rolę zasadniczą. Nazywać je będziemy wartościami właściwemi jądra, funkcję zaś $D(\lambda)$ nazwiemy funkcją charakterystyczną lub wyznacznikiem jądra.

11. Warunek nieistnienia wartości właściwych. Rozwinięcie wyznacznika $D(\lambda)$ na iloczyn nieskończony ma kształt:

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda + \beta\lambda^2} \prod_{p=1}^{\infty} E\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$$

przyczem $E\left(\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$ oznacza czynnik elementarny, odpowiadający zeru λ_p .

Jeżeli $D(\lambda)$ zer nie posiada, wówczas:

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda + \beta\lambda^2}, \quad (24)$$

a więc

$$\log D(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2.$$

Przez porównanie ze wzorem (23) otrzymujemy stąd:

$$n_3 = n_4 = \dots = n_p = \dots = 0.$$

Odwrotnie, jeżeli $n_p = 0$ (dla $p \geq 3$), wówczas $D(\lambda)$ ma kształt (24), niema więc wartości właściwych.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby jądro nie posiadało wartości właściwych, jest, by jego ślady, począwszy od trzeciego, równały się zeru ¹⁾.

12. Jądra o skończonej liczbie wartości właściwych. Jeżeli jądro posiada skończoną liczbę wartości właściwych, wówczas funkcja $D(\lambda)$ ma kształt:

$$D(\lambda) = e^{\alpha\lambda + \beta\lambda^2} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \dots \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right), \quad (25)$$

skąd wynika:

$$\log D(\lambda) = \alpha\lambda + \beta\lambda^2 + \sum_{p=1}^k \log \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_p}\right)$$

przez porównanie zaś z wzorem (23)

$$(-1)^p n_p = \frac{1}{\lambda_1^p} + \frac{1}{\lambda_2^p} + \dots + \frac{1}{\lambda_k^p} \quad (p > 2).$$

Odwrotnie, jeżeli zachodzi powyższy związek, wówczas można

$D(\lambda)$ przedstawić przez wzór (25). Widzimy, iż ślady jądra, począwszy od 3-go, muszą być równe sumom jednakowych potęg pewnych k liczb:

$-\frac{1}{\lambda_1}, \dots, -\frac{1}{\lambda_k}$; wiadomo jednak, iż sumy jednakowych potęg k liczb sprawdzają równanie zwrotne typu:

$$a_0 n_p + a_1 n_{p+1} + \dots + a_k n_{p+k} = 0$$

i vice versa. ²⁾

Na to, by jądro miało skończoną liczbę wartości właściwych, potrzeba i wystarcza, aby ślady jego, począwszy od trzeciego, sprawdzały jednorodne liniowe równanie zwrotne:

$$a_0 n_p + a_1 n_{p+1} + \dots + a_k n_{p+k} = 0.$$

¹⁾ T. Lalesco 1.

²⁾ E. Goursat 5. T. Lalesco 2.

ROZDZIAŁ DRUGI.

BADANIE SZCZEGÓŁOWE JĄDRA ROZWIĄZUJĄCEGO.

I. Funkcje ortogonalne i dwuortogonalne.

1. Określenia. Skończony lub nieskończony zbiór funkcyj:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots$$

tworzy układ ortogonalny, jeżeli spełnione są warunki:

$$\int_a^b \varphi_i(s) \varphi_k(s) ds = \delta_{ik},$$

gdzie symbol δ_{ik} oznacza zero dla $i \neq k$, jedność zaś dla $i = k$.

Ciąg funkcyj tworzy układ dwuortogonalny, jeżeli można podzielić go na dwie grupy:

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots$$

$$\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x) \dots$$

tak, aby spełnione były warunki:

$$\int_a^b \varphi_i(s) \psi_k(s) ds = \delta_{ik}.$$

1) Plemelj 2, Heywood 2, Goursat 5, Mercer 1, Landsberg 1.

Układ ortogonalny lub dwuortogonalny nazywamy zupełnym, jeżeli nie można dołączyć do niego żadnej nowej funkcji lub pary funkcji.

Funkcye $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$ o tym samym wskaźniku nazywamy stowarzyszonymi.

Funkcye układu ortogonalnego są liniowo niezależne, gdyż ze związku

$$\sum_{k=1}^p c_k \varphi_k(x) = 0,$$

mnożąc przez $\varphi_k(x)$ i całkując od a do b , otrzymalibyśmy $c_k = 0$. Podobnie liniowo niezależnymi są funkcje należące do tej samej grupy układu dwuortogonalnego; dowód jest analogiczny do poprzedniego, należy tylko mnożyć przez $\psi_k(x)$.

2. Ortogonalizacja i dwuortogonalizacja danego ciągu funkcji. Odwrotnie, jeżeli dany jest ciąg n funkcji liniowo niezależnych, wówczas możemy zawsze przez kombinacje liniowe utworzyć z niego ortogonalny układ n funkcji. Oto postępowanie, wskazane przez E. Goursata.¹⁾

Załóżmy, że dane są funkcje $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$; kładziemy $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$ i dobieramy współczynniki c_2, c_3, \dots, c_n tak, aby było:

$$\int_a^b [\varphi_p(s) - c_p \varphi_1(s)] \varphi_1(s) ds = 0 \quad (p = 2, 3 \dots n)$$

Kładąc

$$\varphi_p(x) - c_p \varphi_1(x) = \bar{\varphi}_p(x), \quad (p = 2 \dots n)$$

otrzymamy ciąg:

$$\Phi_1(x), \bar{\varphi}_2(x), \dots, \bar{\varphi}_n(x),$$

dla którego spełnione są warunki:

$$\int_a^b \Phi_1(x) \bar{\varphi}_p(x) dx = 0 \quad (p = 2 \dots n)$$

Funkcye $\bar{\varphi}_2(x), \dots, \bar{\varphi}_n(x)$ są znowu liniowo niezależne; można zastosować do nich tę samą metodę i t. d.

¹⁾ Goursat, l. c. p. 66.

Teoria równań całkowych.

W końcu dochodzimy do układu:

$$\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \quad (2)$$

spełniającego warunki:

$$\int_a^b \Phi_i(s) \Phi_k(s) ds = 0. \quad (i \neq k)$$

Aby mieć także:

$$\int_a^b \Phi_p^2(s) ds = 1,$$

należy jeszcze pomnożyć $\Phi_p(x)$ przez stałą:

$$\frac{1}{\sqrt{\int_a^b \Phi_p^2(s) ds}}.$$

Układ ortogonalny (2), w powyższy sposób określony, nie jest jedynym, odpowiadającym warunkom zagadnienia.

Istotnie, funkcje

$$\overline{\Phi}_p(x) = \sum_{k=1}^n a_{pk} \Phi_k(x), \quad (p = 1, 2 \dots n)$$

tworzą również układ ortogonalny, jeżeli tylko wyznacznik $|a_{ik}|$ jest ortogonalny. Odwrotnie, jasną jest rzeczą, że biorąc na $|a_{ik}|$ coraz to inne wyznaczniki ortogonalne, otrzymamy wszystkie układy ortogonalne równoważne układowi (1).

Weźmy teraz pod uwagę dwa ciągi, zawierające po n funkcji liniowo niezależnych:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \\ \psi_1(x), \dots, \psi_n(x), \end{aligned} \quad (3)$$

zakładając przytem, że żadna kombinacja liniowa funkcji $\varphi_p(x)$ nie jest ortogonalna do wszystkich $\psi_p(x)$ jednocześnie.

Powiadam, że z układu powyższego możemy drogą kombinacji liniowych otrzymać układ dwuortogonalny.

Istotnie, położmy: $\varphi_1(x) = \Phi_1(x)$ i oznaczmy przez $\Psi_1(x)$ pierwszą z pomiędzy funkcji $\psi_p(x)$ dla której:

$$\int_a^b \Phi_1(s) \Psi_1(x) ds \neq 0$$

(funkcja taka istnieje zawsze).

Określmy następnie współczynniki $a_2, \dots, a_n, b_2, \dots, b_n$ tak, aby było:

$$\int_a^b \Psi_1(s) [\varphi_p(s) - a_p \Phi_1(s)] ds = 0 \quad (p = 2, 3 \dots n)$$

$$\int_a^b \Phi_1(s) [\psi_p(s) - b_p \Psi_1(s)] ds = 0 \quad (p = 1, \dots, n); \quad \psi_p(x) \neq \Psi_1(x) = \psi_{p_1}(x)$$

i kładziemy:

$$\varphi_p(x) - a_p \Phi_1(x) = \overline{\varphi_p(x)}, \quad (p = 2, \dots, n)$$

$$\psi_{p-1}(x) - b_{p-1} \Psi_1(x) = \overline{\psi_p(x)}, \quad (p = 2, \dots, p_1)$$

$$\psi_p(x) - b_p \Psi_1(x) = \overline{\psi_p(x)}, \quad (p = p_1 + 1, \dots, n).$$

Otrzymamy w ten sposób funkcje:

$$\Phi_1(x), \overline{\varphi_2(x)}, \dots, \overline{\varphi_n(x)}$$

$$\Psi_1(x), \overline{\psi_2(x)}, \dots, \overline{\psi_n(x)}$$

między którymi zachodzą związki:

$$\int_a^b \Phi_1(s) \overline{\psi_p(s)} ds = 0,$$

$$\int_a^b \Psi_1(s) \overline{\varphi_p(s)} ds = 0.$$

Funkcje:

$$\overline{\varphi_2(x)}, \overline{\varphi_3(x)}, \dots, \overline{\varphi_n(x)}$$

(4)

$$\overline{\psi_2(x)}, \overline{\psi_3(x)}, \dots, \overline{\psi_n(x)}$$

są w każdej grupie liniowo niezależne; przytem, żadna kombinacja liniowa funkcyj $\overline{\varphi_p(x)}$ nie może być ortogonalna do wszystkich funkcyj $\overline{\psi_p(x)}$, ponieważ, bowiem jest ona w każdym razie ortogonalna do $\Psi_1(x)$, więc byłaby ortogonalna do wszystkich funkcyj $\varphi_p(x)$, w sprzeczności z założeniem.

Układ (4) posiada więc takie same własności, jak układ pierwotny (3); można tedy zastosować do niego tę samą metodę; w ten sposób otrzymamy w końcu n par funkcyj $\overline{\Phi_p(x)}, \overline{\Psi_p(x)}$, czyniących zadość warunkom:

$$\int_a^b \Phi_i(s) \Psi_k(s) ds = 0 \quad \text{dla } i \neq k$$

oraz

$$\int_a^b \Phi_p(s) \Psi_p(s) ds \neq 0.$$

Mnożąc wreszcie każdą parę $\Phi_p(x)$, $\Psi_p(x)$ przez stałą $\frac{1}{\int_a^b \Phi_p(x) \Psi_p(x) dx}$, otrzymujemy szukany układ dwuortogonalny.

Nie jest on jedyny: jeżeli położymy:

$$\bar{\Phi}_p(x) = \sum_{r=1}^n a_{pr} \Phi_r(x), \quad (p = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

$$\bar{\Psi}_p(x) = \sum_{r=1}^n b_{pr} \Psi_r(x),$$

wówczas funkcje $\bar{\Phi}_p(x)$, $\bar{\Psi}_p(x)$ stanowiąc będą również układ dwuortogonalny pod warunkiem, aby zachodziły związki:

$$\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{kr} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n) \quad (5')$$

Wyznacznik $|a_{ik}| \neq 0$ jest dowolny; skoro jest dany, wówczas związki (5') określają jednoznacznie wyznacznik $|b_{ik}|$. Odwrotnie, podwójne podstawienie (5), które nazywać będziemy dwuortogonalnym, daje nam najogólniejszy równoważny z układem (3) układ dwuortogonalny.

Omówione metody redukcji stosowalne są oczywiście i w tym przypadku, gdy ciągi (1) i (3) są nieskończone ¹⁾.

3. Funkcje typu $\varphi(x, y) = \sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \psi_p(y)$. Będziemy w następstwie posługiwali się następującym twierdzeniem:

¹⁾ W sprawie ogólnej teorii układów ortogonalnych por. Peil A. J. 1.

Jeżeli funkcya $\varphi(x, y)$, mająca ślad skończony, sprawdza równanie:

$$\varphi(x, y) = \int_a^b \varphi(x, s) \varphi(s, y) ds \quad (6)$$

wówczas ma ona kształt:

$$\varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y) \quad (7)$$

przyczem funkcje $\varphi_p(x)$ i $\psi_p(x)$ stanowią dwie grupy pewnego układu dwuortogonalnego.

Zauważymy przedewszystkiem, że ślad musi być liczbą naturalną. W istocie, możemy rozpatrywać $\varphi(x, y)$ jako jądro równania Fredholma drugiego gatunku. Na mocy związku (6) wszystkie jądra iterowane są identyczne, wskutek czego wszystkie ślady jądra równe są liczbie:

$$\varphi_1 = \int_a^b \varphi(s, s) ds.$$

Będzie więc:

$$\log D(\lambda) = \varphi_1 \left[\frac{\lambda}{1} - \frac{\lambda^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n} + \dots \right] = \varphi_1 \log(1 + \lambda)$$

a stąd:

$$D(\lambda) = (1 + \lambda)^{\varphi_1} \quad (8)$$

co dowodzi, iż φ_1 jest liczbą naturalną, którą oznaczymy przez n .

Utworzymy teraz funkcję:

$$\varphi(x, y) - \frac{\varphi(x_1, y) \varphi(x, y_1)}{\varphi(x_1, y_1)} = \varphi_1(x, y).$$

Funkcya ta sprawdza również równanie (6), jej ślad jednak równa się $n - 1$.

W rzeczy samej:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_1(x, s) \varphi_1(s, y) ds &= \int_a^b \left[\varphi(x, s) - \frac{\varphi(x, y_1) \varphi(x_1, s)}{\varphi(x_1, y_1)} \right] \left[\varphi(s, y) - \frac{\varphi(s, y_1) \varphi(x_1, y)}{\varphi(x_1, y_1)} \right] ds \\ &= \varphi(x, y) - \frac{\varphi(x, y_1) \varphi(x_1, y)}{\varphi(x_1, y_1)} \\ &\quad - \frac{\varphi(x, y_1) \varphi(x_1, y)}{\varphi(x_1, y_1)} + \frac{\varphi(x, y_1) \varphi(x_1, y)}{\varphi(x_1, y_1)} \\ &= \varphi(x, y) - \frac{\varphi(x, y_1) \varphi(x_1, y)}{\varphi(x_1, y_1)} = \varphi_1(x, y). \end{aligned}$$

Ślad równa się:

$$\int_a^b \varphi_1(s, s) = \int_a^b \varphi(s, s) ds - \frac{\int_a^b \varphi(x_1, s) \varphi(s, y_1) ds}{\varphi(x_1, y_1)} = n - 1.$$

Do funkcji $\varphi_1(x, y)$ możemy zastosować to samo postępowanie, co do funkcji $\varphi(x, y)$. W ten sposób będziemy mogli napisać:

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \varphi_2(x) \psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y) + \chi(x, y),$$

gdzie $\chi(x, y)$ oznacza funkcję, która sprawdza równanie (6) i której ślad równa się 0; powiadam, że $\chi(x, y)$ znika tożsamościowo. Istotnie, w przeciwnym razie jej jądro rozwiązujące równałoby się $\frac{\chi(x, y)}{1 + \lambda}$, co jest niemożliwe, gdyż $D(\lambda) = 1$, jak to wynika ze związku (8); jeżeli położymy w nim $\varphi_1 = 0$; mamy więc $\chi(x, y) = 0$. Dwuortogonalność funkcji $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$ wynika natychmiast, jeżeli wyrazimy, że funkcja (7) sprawdza równanie (6). Otrzymujemy mianowicie:

$$\sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \psi_p(y) = \sum_{i, k=1}^n \varphi_i(x) \psi_k(y) \int_a^b \varphi_i(s) \psi_k(s) ds,$$

co istotnie dowodzi, iż warunki dwuortogonalności muszą być spełnione.

Odwrotnie, funkcja typu (7) sprawdza równanie (6) i ślad jej jest liczbą całkowitą. Można tedy streścić wyniki dotychczasowe w następujący sposób.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby funkcja mająca ślad skończony była typu (7), jest równanie (6).

II. funkcje główne.

4. Jądra ortogonalne. To podstawowe pojęcie zawdzięczamy E. Goursatowi¹⁾ i B. Heywoodowi²⁾; jest ono niezbędne, o ile uniknąć chcemy przechodzenia do granicy, takiego, jakie naszkicowaliśmy w Rozdz. II, § 1 — zresztą wynika ono w sposób zupełnie natu-

¹⁾ E. Goursat 3, 4.

²⁾ B. Heywood, 1.

ralny z głębszych badań nad jądrem rozwiązującym. Przedstawimy je bezpośrednio, co jest użyteczne również ze względu na inne badania. Dwa jądra $P(x, y)$, $R(x, y)$ nazywamy ortogonalnymi, jeżeli jest tożsamościowo:

$$\int_a^b P(x, s) R(s, y) ds = 0,$$

$$\int_a^b R(x, s) P(s, y) ds = 0.$$
(9)

Jeżeli zachodzi jeden tylko z tych związków, wówczas nazywamy jądra półortogonalnymi.¹⁾

Jeżeli jądra $P(x, y)$ i $R(x, y)$ są ortogonalne, wówczas:

$$\int_a^b P(x, s) \mathfrak{N}(s, y; \lambda) ds = \int_a^b R(x, s) \mathfrak{P}(x, s; \lambda) ds = 0.$$

Wystarczy tu przypomnienie wzoru:

$$\mathfrak{N}(x, y; \lambda) = R(x, y) - \lambda R_1(x, y) + \dots + (-1)^p \lambda^p R_p(x, y) + \dots$$

Jądra ortogonalne mają następujące dwie własności:

I. Jeżeli jądra $P(x, y)$ i $R(x, y)$ są ortogonalne lub półortogonalne (Goursat) i jeżeli:

$$N(x, y) = P(x, y) + R(x, y)$$

to:

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \cdot D_R(\lambda).$$

II. Jeżeli jądra $P(x, y)$ i $R(x, y)$ są ortogonalne, wówczas

$$\mathfrak{N}(x, y; \lambda) = \mathfrak{P}(x, y; \lambda) + \mathfrak{N}(x, y; \lambda).$$

Twierdzenie (I) wynika natychmiast, jeżeli wyraz po wyrazie dodamy do siebie związki:

$$\log D_P(\lambda) = p_1 \lambda - p_2 \frac{\lambda^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} p_n \frac{\lambda^n}{n} + \dots$$

$$\log D_R(\lambda) = r_1 \lambda - r_2 \frac{\lambda^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} r_n \frac{\lambda^n}{n} + \dots$$

¹⁾ Według terminologii E. Goursata.

otrzymamy:

$$\log D_P(\lambda) D_R(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (p_n + r_n) \frac{\lambda^n}{n}.$$

Zauważymy teraz iż:

$$n_1 = p_1 + r_1,$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \int_a^b [P(s_1, s_2) + R(s_1, s_2)] [P(s_2, s_1) + R(s_2, s_1)] ds_1 ds_2 \\ &= p_2 + r_2 + 2 \int_a^b P(s_1, s_2) R(s_2, s_1) ds_1 ds_2 \end{aligned}$$

otóż, jeżeli jeden conajmniej ze związków (9) ma miejsce, to:

$$\int_a^b P(s_1, s_2) R(s_2, s_1) ds_2 ds_1 = 0,$$

a więc:

$$n_2 = p_2 + r_2.$$

Wzór $n_q = p_q + r_q$ prawdziwy jest ogólnie. W rzeczy samej:

$$\begin{aligned} n_q &= \int_a^b [P(s_1, s_2) + R(s_1, s_2)] [P(s_2, s_3) + R(s_2, s_3)] + \dots \\ &\quad + [P(s_q, s_1) + R(s_q, s_1)] ds_1 ds_2 \dots ds_q = p_q + r_q + \alpha_r \end{aligned}$$

przyczem α_r jest sumą całek, z których każda znika na mocy któregośkolwiek ze związków (9). Mamy tedy:

$$\log D_N(\lambda) = \log D_P(\lambda) \cdot D_R(\lambda),$$

a więc

$$D_N(\lambda) = D_P(\lambda) \cdot D_R(\lambda) \quad \text{c. b. d. o.}$$

By udowodnić twierdzenie II, weźmiemy za punkt wyjścia równania, określające jądra rozwiązujące, t. zn. równania:

$$\mathfrak{P}(x, y; \lambda) = P(x, y) - \lambda \int_a^b P(x, s) \mathfrak{P}(s, y; \lambda) ds,$$

$$\mathfrak{R}(x, y; \lambda) = R(x, y) - \lambda \int_a^b R(x, s) \mathfrak{P}(s, y; \lambda) ds$$

dodając je stronami, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(x, y; \lambda) + \mathfrak{R}(x, y; \lambda) &= P(x, y) + R(x, y) \\ &- \lambda \int_a^b [P(x, s) \mathfrak{P}(s, y; \lambda) + R(x, s) \mathfrak{R}(s, y; \lambda)] ds \quad (11) \\ &= P(x, y) + R(x, y) - \lambda \int_a^b [P(x, s) + R(x, s)] [\mathfrak{P}(s, y; \lambda) + \mathfrak{R}(s, y; \lambda)] ds, \end{aligned}$$

gdyż całki:

$$\int_a^b P(x, s) \mathfrak{R}(s, y; \lambda) ds \quad \text{i} \quad \int_a^b (R(x, s) \mathfrak{P}(s, y; \lambda) ds$$

znikają.

Równanie (11), wyraża właśnie to, że jądrem rozwiązującym jądra

$$P(x, y) + R(x, y) \quad \text{jest} \quad \mathfrak{P}(x, y; \lambda) + \mathfrak{R}(x, y; \lambda).$$

5. Ogólne równanie całkowe jąder rozwiązujących. Widzieliśmy, że jądro rozwiązujące sprawdza dwa równania całkowe:

$$\begin{aligned} N(x, y) - \mathfrak{R}(x, y; \lambda) &= \lambda \int_a^b N(x, s) \mathfrak{R}(s, y; \lambda) ds \\ &= \lambda \int_a^b \mathfrak{R}(x, s; \lambda) N(s, y) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

Równania powyższe są szczególnymi przypadkami następującego równania całkowego:¹⁾

$$\mathfrak{R}(x, y; \lambda) - \mathfrak{R}(x, y; \mu) = (\mu - \lambda) \int_a^b \mathfrak{R}(x, s; \lambda) \mathfrak{R}(s, y; \mu) ds \quad (13)$$

Aby udowodnić, iż równanie to ma miejsce, odejmujemy od siebie wyraz po wyrazie równania:

¹⁾ Zostało ono podane przez D. Hilberta i J. Plemelja.

$$N(x, y) - \mathfrak{N}(x, y; \lambda) = \lambda \int_a^b N(x, s) \mathfrak{N}(s, y; \lambda) ds \quad (14)$$

$$N(x, y) - \mathfrak{N}(x, y; \mu) = \mu \int_a^b N(s, y) \mathfrak{N}(x, s; \mu) ds;$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{N}(x, y; \lambda) - \mathfrak{N}(x, y; \mu) \\ &= \mu \int_a^b N(s, y) \mathfrak{N}(x, s; \mu) ds - \lambda \int_a^b N(x, s) \mathfrak{N}(s, y; \lambda) ds. \end{aligned} \quad (14')$$

Aby nadać kształt odmienny prawej stronie, kładziemy w pierwszym z równań (14) $x = t$, mnożymy je przez $\mu \mathfrak{N}(x, t; \mu) dt$ i całkujemy; podobnież w drugim równaniu (14) kładziemy $y = t$, mnożymy przez $\lambda \mathfrak{N}(t, y; \lambda) dt$ i całkujemy, wreszcie odejmujemy od siebie tak przekształcone równania; otrzymamy:

$$\begin{aligned} (\mu - \lambda) \int_a^b \mathfrak{N}(x, t; \mu) \mathfrak{N}(t, y; \lambda) dt &= \mu \int_a^b N(x, t) \mathfrak{N}(t, y; \mu) dt \\ &\quad - \lambda \int_a^b N(x, t) \mathfrak{N}(t, y; \lambda) dt. \end{aligned}$$

Łącząc powyższe równanie z równaniem (14'), otrzymujemy wynik, o który chodziło.

W równaniu (13) najbardziej interesującym jest to, iż nie występuje w niem zupełnie jądro $N(x, y)$. Jest to równanie wszystkich jąder rozwiązujących, a więc równanie, które niejako określa pewne działanie analityczne in abstracto.

6. Część charakterystyczna jądra rozwiązującego, odpowiadająca danemu biegunowi. Niechaj będzie λ_1 zerem n -tego rzędu funkcji $D(\lambda)$, widzieliśmy, iż λ_1 będzie biegunem jądra rozwiązującego rzędu $m \leq n$ (por. str. 29 § 10).

W otoczeniu punktu λ_1 posiada jądro rozwiązujące kształt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}(x, y; \lambda) = G_1(x, y; \lambda) + \mathfrak{P}(x, y; \lambda) &= \frac{\varphi_m(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^m} + \frac{\varphi_{m-1}(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^{m-1}} + \dots \\ &\quad + \frac{\varphi_1(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)} + \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(x, y) (\lambda - \lambda_1)^p. \end{aligned} \quad (15)$$

Wyrazy, oznaczone w skróceniu przez $G(x, y; \lambda)$, stanowią część charakterystyczną jądra rozwiązującego odnośnie do bieguna λ_1 .

Zadaniem naszym jest zbadanie funkcyj $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$. W tym celu kładziemy:

$$\lambda - \lambda_1 = h; \quad \mu - \lambda_1 = k$$

i wstawiamy wyrażenie (15) w równanie (13). Otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \varphi_m(x, y) \left[\frac{1}{h^m} - \frac{1}{k^m} \right] + \dots + \varphi_1(x, y) \left[\frac{1}{h} - \frac{1}{k} \right] + \sum_0^{\infty} \psi_p(x, y) (h^p - k^p) \\ &= (k-h) \int_a^b \left[\frac{\varphi_m(x, s)}{h^m} + \dots + \frac{\varphi_1(x, s)}{h} + \sum_0^{\infty} \psi_p(x, s) h^p \right] \left[\frac{\varphi_m(s, y)}{k^m} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \dots + \frac{\varphi_1(s, y)}{k} + \sum_{p=0}^{m-1} \psi_p(s, y) k^p \right] ds, \end{aligned}$$

lub też, dzieląc obie strony przez $k-h$:

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_1(x, y)}{kh} + \dots + \frac{\varphi_m(x, y)}{h^m k^m} \sum_{p=0}^{m-1} (h^{m-p-1} k^p) \\ & - \sum_{p=1}^{\infty} \psi_p(x, y) [h^{p-1} + kh^{p-2} + \dots + k^{p-1}] \\ &= \sum_{p, q=1}^m \frac{1}{h^p k^q} \int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds + \sum_{p, q} \frac{h^p}{k^q} \int_a^b \psi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds \\ & + \sum_{p, q} \frac{k^q}{h^p} \int_a^b \varphi_q(x, s) \psi_p(s, y) ds + \sum_{p, q} h^p k^q \int_a^b \psi_p(x, s) \psi_q(s, y) ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Prawa strona zawiera cztery sumy. Biorąc pod uwagę pierwszą, zawierającą wyrazy, w których h i k występują jednocześnie w mianowniku, i utożsamiając ją wyraz po wyrazie z lewą stroną równania, otrzymamy związek:

$$\varphi_{p+q-1}(x, y) = \int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds \quad (p+q \leq m+1), \tag{17}$$

$$\int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds = 0. \quad (p+q > m+1).$$

Wyrazy, wchodzące w skład drugiej i trzeciej sumy, mają h w mianowniku, k w liczniku, lub odwrotnie.

Lewa strona wyrazów takich nie zawiera; jest więc dla wszystkich par wskaźników:

$$\int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds = \int_a^b \psi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds = 0. \quad (19)$$

To znaczy, że wszystkie funkcje $\varphi(x, y)$ są ortogonalne do wszystkich funkcji $\psi(x, y)$, innymi słowy: funkcje $G_1(x, y; \lambda)$ i $\Psi(x, y; \lambda)$ są ortogonalne dla wszystkich wartości λ .

Wreszcie rozpatrując czwartą sumę, otrzymamy:

$$- \psi_{p+q+1}(x, y) = \int_a^b \psi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds. \quad (20)$$

Odwrotnie, jeżeli spełnione są związki (17) i (18), wówczas $G_1(x, y; \lambda)$ jest samo przez się jądrem rozwiązującym, sprawdza bowiem ogólne równanie jąder rozwiązujących; jest mianowicie $G(x, y; \lambda)$ jądrem rozwiązującym jądra.

$$G_1(x, y; 0) = \frac{\varphi_m(x, y)}{(-\lambda_1)^m} + \frac{\varphi_{m-1}(x, y)}{(-\lambda_1)^{m-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(x, y)}{-\lambda_1},$$

które nazywać będziemy częścią jądra odnoszącą się do biegunu λ_1 .

Na mocy powyżej uczynionej uwagi, część ta ortogonalna jest do reszty. Wskutek tego można ją badać z osobna. Zauważymy też, iż λ_1 nie jest już wartością właściwą jądra $\Psi(x, y; 0)$.

7. Funkcje główne. Aby znaleźć wzory ogólne na funkcje $\varphi_p(x, y)$, trzeba rozwiązać równania:

$$\varphi_{p+q-1}(x, y) = \int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds \quad (p+q \leq m+1), \quad (21a)$$

$$0 = \int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds, \quad (p+q > m+1) \quad (21b)$$

które funkcyje te charakteryzują.

Położmy przedewszystkiem $p = q = 1$; otrzymamy równanie:

$$\varphi_1(x, y) = \int_a^b \varphi_1(x, s) \varphi_1(s, y) ds.$$

Ponieważ ślad funkcyi $\varphi_1(x, y)$ jest skończony¹⁾, więc funkcyja ta jest kształtu

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1(x) \psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x) \psi_n(y),$$

przyczem funkcyje φ i ψ tworzą dwie grupy układu dwuortogonalnego (por. str. 37, § 3).

Położmy następnie $q = 2$, p — dowolne, lub też $p = 2$, q — dowolne, otrzymamy związki:

$$\varphi_{p+1}(x, y) = \int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_2(s, y) ds = \int_a^b \varphi_2(x, s) \varphi_p(s, y) ds. \quad (22)$$

Pierwszy z nich, dla $p = 1$, przybiera postać:

$$\varphi_2(x, y) = \int_a^b \varphi_1(x, s) \varphi_2(s, y) ds = \int_a^b \varphi_2(x, s) \varphi_1(s, y) ds$$

co dowodzi, iż $\varphi_2(x, y)$ jest funkcyą dwuliniową funkcyj φ i ψ . Mamy tedy:

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{i, k=1}^p a_{ik} \varphi_i(x) \psi_k(y). \quad (23a)$$

Dalsze równania (22) określają wartości pozostałych funkcyj:

¹⁾ Wynika to stąd, że ślad funkcyi $G(x, y; \lambda)$ jest dla $\lambda \neq \lambda_1$ skończony; dokładniej, mamy:

$$\int G(s, s; \lambda) ds = \frac{D'_G(\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{n}{\lambda - \lambda_1},$$

a więc:

$$\int \varphi_1(s, s) ds = n.$$

$$\varphi_3(x, y) = \int_a^b \varphi_2(x, s) \varphi_2(s, y) ds,$$

$$\varphi_4(x, y) = \int_a^b \varphi_3(x, s) \varphi_2(s, y) ds = \int_a^b \varphi_2(x, s) \varphi_3(s, y) ds, \quad (23b)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\varphi_m(x, y) = \int_a^b \varphi_{m-1}(x, s) \varphi_2(s, y) ds = \int_a^b \varphi_2(x, s) \varphi_{m-1}(s, y) ds.$$

Powiadam, iż z równań tych wynikają pozostałe związki (21a). Istotnie, weźmy pod uwagę związek:

$$\varphi_{p+q-1}(x, y) = \int_a^b \varphi_p(x, s) \varphi_q(s, y) ds.$$

Jeżeli zamiast $\varphi_p(x, y)$ podstawimy wartość funkcji tej

$$\int_a^b \varphi_{p-1}(x, s) \varphi_2(s, y) ds,$$

otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varphi_{p+q-1}(x, y) &= \int_a^b \varphi_{p-1}(x, s) \varphi_2(s, t) \varphi_q(t, y) ds dt \\ &= \int_a^b \varphi_{p-1}(x, s) \varphi_{q+1}(s, y) ds. \end{aligned}$$

Można więc zmniejszyć o jednostkę wskaźnik p , zwiększając o tyleż wskaźnik q ; przez kilkakrotne zastosowanie tego działania sprowadzić możemy każde równanie (21a) do jednego z równań (23b).

Podobnie jest z pozostałymi równaniami, t. j. z równaniami (21b); można przez kilkakrotne zastosowanie tegoż samego działania sprowadzić je do przypadku, gdy jeden ze wskaźników jest równy m .

Będziemy mieli m tożsamości:

$$\int_a^b \varphi_m(x, s) \varphi_k(s, y) ds = 0, \quad (k=2, 3 \dots m)$$

z których jedynie pierwsza:

$$\int_a^b \varphi_m(x, s) \varphi_2(s, y) ds = 0 \quad (24)$$

jest niezależna; pozostałe są jej wynikiem.

Istotnie:

$$\int_a^b \varphi_m(x, s) \varphi_k(s, y) ds = \int_a^b \varphi_m(x, s) \varphi_2(s, t) \varphi_{k-1}(t, y) ds dt = 0.$$

Aby w prosty sposób wyrazić uzyskane wyniki, nazwiemy przedewszystkiem funkcje $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ funkcjami głównymi i zauważymy, iż wzory (23b) dowodzą, że jądra $\varphi_k(x, y)$ dla $k > 2$ powstają z jądra $\varphi_2(x, y)$ drogą kolejnych iteracji; warunek (24) zaś wyraża, iż $(m-1)$ -e iterowane jądro funkcji $\varphi_2(x, y)$ jest tożsamościowo zerem.

Można teraz w następujący sposób przedstawić wyniki otrzymane:

a) Funkcja $\varphi_1(x, y)$ jest sumą iloczynów stowarzyszonych funkcji układu dwuortogonalnego; jest mianowicie:

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \psi_p(y). \quad (24')$$

b) Funkcja $\varphi_2(x, y)$ jest formą dwuliniową funkcji głównych, to znaczy:

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{i, k=1}^n a_{ik} \varphi_i(x) \psi_k(y). \quad (24'')$$

c) Pozostałe funkcje $\varphi_k(x, y)$ są kolejnymi iteracjami funkcji $\varphi_2(x, y)$, przyczem, jeżeli m jest rzędem bieguna λ_1 , to $m-1$ -a iteracja jądra $\varphi_2(x, y)$ jest tożsamościowo zerem.

Odwrotnie, metoda, którą posługiwaliśmy się, dowodzi, że jeżeli dany jest dwuortogonalny układ $2n$ funkcji φ i ψ oraz macierz kwadratowa (a_{ik}) , taka, iż $(m-1)$ -a iteracja jądra $\sum a_{ik} \varphi_i(x) \psi_k(y)$ znika tożsamościowo ($m \leq n$), wówczas funkcja $G_1(x, y)$, utworzona z tych danych sposobem określonym przez wzór (15), jest częścią charakterystyczną pewnego jądra, odnoszącą się do bieguna m -go rzędu.

III. Drugie i trzecie twierdzenie I. Fredholma.

8. Bezpośrednie badanie jąder kształtu $\sum_{p=1}^n a_p(x) b_p(y)$; szczebel wartości właściwej. Na czele tego rozdziału zamieścimy bezpośrednie badania jąder kształtu:

$$N(x, y) = a_1(x) b_1(y) + \dots + a_p(x) b_p(y) + \dots + a_n(x) b_n(y), \quad (25)$$

przeprowadzone przez Goursata¹⁾ i Schmidta²⁾, zarówno ze względu na prostotę i łatwość przedmiotu, jak i na jego znaczenie.

Jądro $G_1(x, y)$, odpowiadające biegunowi λ_1 jest również kształtu (25). Skorzystamy z jego własności przy badaniu przypadku ogólnego.

Równanie Fredholma posiada w tym przypadku formę:

$$\varphi(x) + \lambda \left[\sum_{p=1}^n a_p(x) \int_a^b b_p(s) \varphi(s) ds \right] = f(x) \quad (25')$$

Kładąc

$$K_p = \int_a^b b_p(s) \varphi(s) ds, \quad (26)$$

otrzymamy:

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda [K_1 a_1(x) + K_2 a_2(x) + K_2 a_2(x) \dots + K_n a_n(x)] \quad (27)$$

Aby wyznaczyć stałe K_p , zastępujemy w równaniach (26) $\varphi(x)$ przez prawą stronę równania (27), co nam daje układ n równań liniowych o n niewiadomych:

$$K_p + \lambda \left[K_1 \int_a^b a_1(s) b_p(s) ds + K_2 \int_a^b a_2(s) b_p(s) ds + \dots \right. \\ \left. + K_n \int_a^b a_n(s) b_p(s) ds \right] = \int_a^b f(s) b_p(s) ds. \quad (p=1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

¹⁾ E. Goursat 2.

²⁾ E. Schmidt I. (Zweiter Teil).

Wyznacznikiem układu tego jest:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{12} \dots & \lambda \alpha_{1n} \\ \lambda \alpha_{21} & 1 + \lambda \alpha_{22} \dots & \lambda \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda \alpha_{n1} & \lambda \alpha_{n2} \dots & 1 + \lambda \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

przyczem:

$$\alpha_{pq} = \int_a^b a_p(s) b_q(s) ds.$$

Stosując do układu (28) teorię równań liniowych, otrzymujemy wyniki następujące:

a) Jeżeli wyznacznik charakterystyczny $D(\lambda)$ jest $\neq 0$, to układ (28) jest jednoznacznie rozwiązalny; w tym więc przypadku równanie (25') Fredholma posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie, przedstawione przez wzór (27).

b) Jeżeli $D(\lambda_1) = 0$, co ma miejsce dla n wartości parametru λ , wówczas rozwiązalny jest układ liniowy, jednorodny (28). Jeżeli przytem rząd macierzy układu powyższego dla $\lambda = \lambda_1$ równy jest $n - r$, wówczas ogólne rozwiązanie układu będzie miało postać:

$$K_p = \rho_1 m_{1p} + \rho_2 m_{2p} + \dots + \rho_r m_{rp} \quad (p=1, 2, \dots, n)$$

$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ są stałe dowolne.

Wstawiając w wyrażenie (27) powyższe wzory na K_p i kładąc $f(x) = 0$, otrzymamy:

$$\varphi(x) = -\lambda_1 [\rho_1 \varphi_1(x) + \rho_2 \varphi_2(x) + \dots + \rho_r \varphi_r(x)];$$

funkcje

$$\varphi_q(x) = m_{q1} a_1(x) + m_{q2} a_2(x) + \dots + m_{qn} a_n(x) \quad (q=1, 2, \dots, r)$$

są liniowo niezależne.

W tym więc przypadku równanie jednorodne posiada r liniowo niezależnych rozwiązań. Nazywamy je rozwiązaniami właściwymi równania całkowego (25').

Nazywać będziemy szczeblem wartości właściwej liczbę liniowo niezależnych rozwiązań właściwych, które posiada dla $\lambda = \lambda_1$ równanie jednorodne. W naszym przypadku szczebel λ_1 równa się r .

c) Równanie stowarzyszone:

$$\psi(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{q=1}^n a_q(s) b_q(x) \right) \psi(s) ds = f(x)$$

otrzymujemy z równania (25'), zastępując funkcje $a_q(x)$ przez funkcje $b_q(x)$, i odwrotnie. Ogólny wyraz wyznacznika charakterystycznego równania (25') jest:

$$\alpha_{ik} = \int_a^b a_i(s) b_k(s) ds,$$

dla równania więc stowarzyszonego będzie on równy:

$$\int_a^b b_i(s) a_k(s) ds = \alpha_{ki}.$$

Wyznaczniki więc charakterystyczne są tożsamościowo równe, gdyż jeden powstaje z drugiego przez przestawienie wierszy z kolumnami.

Równanie więc stowarzyszone ma te same wartości właściwe, przyczem każda z tych ostatnich ma ten sam szczebel i tę samą wielokrotność.

d) Rozpatrzmy teraz niejednorodne równanie (25') dla wartości właściwej λ_1 . Na to, aby układ (28) był rozwiązalny trzeba, aby szczebel macierzy

$$\begin{vmatrix} 1 + \lambda \alpha_{11} & \lambda \alpha_{12} \dots & \lambda \alpha_{1n} \int_a^b f(s) b_1(s) ds \\ \lambda \alpha_{21} & 1 + \lambda \alpha_{22} \dots & \lambda \alpha_{2n} \int_a^b f(s) b_2(s) ds \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda \alpha_{n1} & \lambda \alpha_{n2} \dots & 1 + \lambda \alpha_{nn} \int_a^b f(s) b_n(s) ds \end{vmatrix}$$

równał się $n - r$. Aby to miało miejsce, wyrazy wolne sprawdzać mu-

szą r niezależnych jednorodnych związków liniowych. Zamiast wyprowadzać związki te wprost metodą algebraiczną, zauważymy, że jeżeli pomnożymy równanie

$$f(x) = \varphi(x) + \lambda_1 \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds$$

przez $\psi_p(x)$ i zcałkujemy od a do b , wówczas otrzymamy:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(s) \psi_p(s) ds &= \int_a^b \varphi(s) \psi_p(s) ds + \lambda_1 \int_a^b \psi_p(x) N(x, s) \varphi(s) ds dx \\ &= \int_a^b \varphi(s) \psi_p(s) ds - \lambda_1 \int_a^b \frac{\psi_p(s) \varphi(s)}{\lambda_1} ds = 0 \end{aligned}$$

$$(p = 1, 2, \dots, r).$$

Mamy tu r różnych warunków koniecznych, którym musi czynić zadość funkcja $f(x)$; są one zarazem dostateczne, gdyż warunki, do których prowadzi metoda algebraiczna, mają tę samą formę i nie są liczniejsze.

9. Funkcje właściwe; jądro kanoniczne. Powróćmy teraz do badania jądra $G_1(x, y)$. Widzieliśmy w rozdziale poprzednim, w jaki sposób dochodzi się do pojęcia funkcji głównych. Funkcje te nie są oczywiście określone jednoznacznie: można je poddać dowolnemu przekształceniu dwuortogonalnemu; obecnie powstaje zagadnienie następujące: skorzystać z tej nieokreśloności w celu nadania układowi funkcji głównych szczególnie prostej postaci. Zagadnienie powyższe sprowadza się metodą dziś już klasyczną, do zagadnienia redukcji formy dwuliniowej:

$$\lambda \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) \tag{29}$$

do kształtu kanonicznego ¹⁾.

¹⁾ Zagadnienie to zostało znakomicie wyłożone w rozprawie L. Sauvage'a: La théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, Ann. Fac. sc., Toulouse (1894).

Można z łatwością wykazać, że wyróżnik tej formy:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda + a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & \lambda + a_{nn} \end{vmatrix}$$

równa się tożsamościowo λ^n .

Istotnie, weźmy pod uwagę równanie całkowe o jądrze $\varphi_2(x, y)$; według tego, cośmy już udowodnili, jego wyznacznik charakterystyczny będzie miał wyraz ogólny:

$$\alpha_{ik} = \int_a^b \varphi_i(s) \left(\sum_{p=1}^n a_{kp} \phi_p(s) \right) ds = a_{ik}$$

będzie więc równy $\lambda^n \Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$; z drugiej znów strony wyznacznik ten jest równy jedności tożsamościowo, gdyż $\varphi_2(x, y)$ jest jądrem pozbawionym wartości właściwych, wobec tego, że jego $n-1$ -e jądro iterowane jest tożsamościowo zerem. Jest więc istotnie $\Delta(\lambda) = \lambda^n$.

W najprostszym przypadku wyznacznik $\Delta(\lambda)$ ma jeden tylko dzielnik elementarny, wyznacznik kanoniczny o jednym dzielniku elementarnym ma postać:

$$\begin{vmatrix} \lambda & a_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & \lambda & a_2 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 \dots & \dots & \lambda \end{vmatrix} \quad (30)$$

Istnieje więc w tym przypadku podwójne podstawienie liniowe, które przekształca formę (29) na:

$$\lambda \sum_{p=1}^n \Phi_p(x) \Psi_p(y) + \left[\sum_{p=1}^{n-1} a_p \Phi_p(x) \Psi_{p+1}(y) \right].$$

Nowe funkcje Φ i Ψ tworzą również układ dwuortogonalny, gdyż $\varphi_1(x, y)$ zachowuje swój kształt poprzedni; natomiast $\varphi_2(x, y)$ przybiera kształt kanoniczny:

$$\varphi_2(x, y) = \sum_1^{n-1} a_p \Phi_p(x) \Psi_{p+1}(y) \quad (31)$$

przyczem stałe a_p są różne od zera, ale zresztą dowolne. Funkcje Φ i Ψ nazywać będziemy funkcjami właściwymi, przynależnymi do wartości właściwej λ_1 . Pozostałe funkcje $\varphi_p(x, y)$ otrzymamy drogą iteracji; mamy:

$$\varphi_3(x, y) = \sum_{p=1}^{n-2} a_p a_{p+1} \Phi_p(x) \Psi_{p+2}(y),$$

(32)

.....

$$\varphi_n(x, y) = a_1 a_2 \dots a_{n-1} \Phi_1(x) \Psi_n(y),$$

$$\varphi_{n+1}(x, y) \equiv 0;$$

λ_1 jest więc w tym przypadku biegunem n -tego rzędu.

Jądro, które otrzymujemy w ten sposób:

$$\frac{\varphi_n(x, y)}{(-\lambda_1)^n} + \frac{\varphi_{n-1}(x, y)}{(-\lambda_1)^{n-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(x, y)}{-\lambda_1} \quad (33)$$

i które posiada jądro rozwiązujące

$$\sum_{k=1}^n \frac{\varphi_k(x, y)}{(\lambda - \lambda_1)^k} \quad (33')$$

nazywać będziemy jądrem kanonicznym rzędu n -tego.

Rozwiązania właściwe. Jeżeli wstawimy wyrażenia (33) i (33') w równania jądra rozwiązującego:

$$\begin{aligned} G(x, y) - G(x, y; \lambda) &= \lambda \int_a^b G(x, s) G(s, y; \lambda) ds \\ &= \lambda \int_a^b G(x, s; \lambda) G(s, y) ds \end{aligned}$$

i przyrównamy współczynniki przy $\frac{1}{(\lambda - \lambda_1)^n}$, wówczas otrzymamy:

$$\varphi_n(x, y) + \lambda_1 \int_a^b G(x, s) \varphi_n(s, y) ds = 0,$$

$$\varphi_n(x, y) + \lambda_1 \int_a^b \varphi_n(x, s) G(s, y) ds = 0.$$

Jeżeli uwzględnimy wzór (32), wówczas związki powyższe wykazują, że:

$\Phi_1(x)$ jest rozwiązaniem właściwym danego równania całkowego, $\Psi_n(y)$ rozwiązaniem właściwym równania stowarzyszonego. Szczebel λ_1 równy jest w tym przypadku jedności, gdyż $D(\lambda)$ posiada jeden tylko dzielnik elementarny, są to więc jedyne rozwiązania. Tym sposobem jądro kanoniczne posiada własności następujące:

Rząd jądra równa się wielokrotności wartości właściwej; szczebel tej ostatniej równa się 1. Wzór, wyrażający jądro za pośrednictwem funkcj właściwych, zawiera $n-1$ stałych dowolnych. Tak więc jądro kanoniczne pierwszego rzędu ma postać:

$$\frac{\Phi_1(x) \Psi_1(y)}{\lambda - \lambda_1},$$

jądro drugiego rzędu postać:

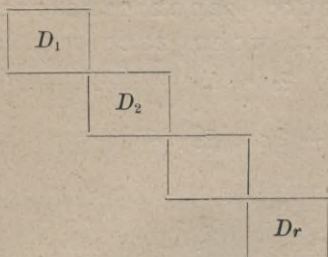
$$\frac{\Phi_1(x) \Psi_1(y) + \Phi_2(x) \Psi_2(y)}{\lambda - \lambda_1} + \frac{a_1 \Phi_1(x) \Psi_2(y)}{(\lambda - \lambda_1)^2}$$

i t. d. Aby ogólnie wyrazić jądro kanoniczne przez układ funkcj głównych, należy do funkcj właściwych zastosować dowolne podstawienie dwuortogonalne.

II. Funkcje właściwe; przypadek ogólny. Obecnie możemy przejść z łatwością do przypadku ogólnego. Przypuśćmy, że wyznacznik ma r dzielników elementarnych:

$$\lambda^n = \lambda^{n_1} \lambda^{n_2} \dots \lambda^{n_r}$$

Wyznacznikiem kanonicznym o tych samych dzielnikach elementarnych jest:



$D_1, D_2 \dots D_r$ oznaczają wyznaczniki kanoniczne, mające postać (30) o jednym tylko dzielniku elementarnym $\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2} \dots \lambda^{n_r}$ odp. Będzie więc:

$$D_1 = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & & & & & \\ & \lambda a_2 & & & & \\ & & \lambda a_3 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \lambda a_{n_1-1} & & \\ & & & & \lambda & \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda b_1 & & & & & \\ & \lambda b_2 & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & \lambda b_{n_2-1} & & \\ & & & & \lambda & \end{vmatrix} \dots \dots;$$

$\varphi_2(x, y)$ przybierze w tym przypadku kształt kanoniczny:

$$\varphi_2(x, y) = \sum_{p=1}^r \varphi_2^{(p)}(x, y),$$

przyczem:

$$\varphi_2^{(1)}(x, y) = \sum_{p=1}^{n_1-1} a_p \Phi_p^{(1)}(x) \Psi_{p+1}^{(1)}(y),$$

$$\varphi_2^{(2)}(x, y) = \sum_{p=1}^{n_2-1} b_p \Phi_p^{(2)}(x) \Psi_{p+1}^{(2)}(y),$$

.....

$$\varphi_2^{(r)}(x, y) = \sum_{p=1}^{n_r-1} k_p \Phi_p^{(r)}(x) \Psi_{p+1}^{(r)}(y).$$

Otrzymamy więc $2n$ specjalnych funkcji głównych, które nazywać będziemy znowu funkcjami właściwymi. Rozpadają się one na r grup po $2n_1, 2n_2, \dots, 2n_r$ funkcji, przyczem każda

grupa daje nam jądro kanoniczne rzędu odpowiednio równego n_1, n_2, \dots, n_r , wchodzące w skład jądra danego. Istotnie, jeżeli utworzymy $\varphi_3(x, y)$ to otrzymamy:

$$\varphi_3(x, y) = \varphi_3^{(1)}(x, y) + \varphi_3^{(2)}(x, y) + \dots + \varphi_3^{(r)}(x, y),$$

gdź funkcje każdej grupy są ortogonalne do funkcji stowarzyszonych, należących do innych grup.¹⁾

Mamy więc następujący wynik wielkiej wagi:

W przypadku ogólnym jądro $G_1(x, y)$ jest sumą skończonej liczby jąder kanonicznych ortogonalnych do siebie, rzędu n_1, n_2, \dots, n_r :

$$G_1(x, y) = \sum_{p=1}^r G_1^{(p)}(x, y), \quad (34)$$

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_r.$$

Rząd szczybla λ_1 , jako bieguna jądra rozwiązującego, równa się największej z liczb n_1, n_2, \dots, n_r ; jeżeli rząd ten oznaczymy przez m , wówczas ze związku (34) wynika nierówność:

$$n \geq m + r - 1.$$

Znak równości może tu występować w dwu przypadkach, jeżeli biegun jest pierwszego rzędu, oraz jeżeli istnieje jedno tylko jądro kanoniczne rzędu m , a pozostałe są pierwszego rzędu.

Rozwiązania właściwe. Każde z pomiędzy jąder kanonicznych składowych ma jedną tylko parę rozwiązań właściwych. Ponieważ rozwiązanie $\Phi_1^{(p)}(x)$ jest ortogonalne do wszystkich funkcji Ψ , występujących w innych jądrach kanonicznych, więc:

$$\int_a^b G_1^{(q)}(x, y) \Phi_1^{(p)} dy = 0$$

dla wszystkich $q \neq p$. A więc, wobec tego, że:

$$\Phi_1^{(p)}(x) + \lambda_1 \int_a^b G_1^{(p)}(x, s) \Phi_1^{(p)}(s) ds = 0,$$

¹⁾ Stowarzyszone są te funkcje Φ i Ψ , których oba wskaźniki są równe.

będzie także

$$\Phi_1^{(p)}(x) + \lambda \int_a^b G_1(x, s) \Phi_1^{(p)}(s) ds = 0.$$

To samo rozumowanie stosuje się do $\Psi_{n_p}^{(p)}(y)$.

Równanie jednorodne ma więc w przypadku ogólnym r liniowo niezależnych rozwiązań: są to pierwsze funkcje właściwe Φ każdej grupy.

To samo ma miejsce dla równania stowarzyszonego; rozwiązaniami są ostatnie funkcje Ψ każdej grupy.

Między funkcjami właściwymi istnieje tym sposobem układ $2r$ funkcji, będących rozwiązaniami właściwymi, przyczem jest r rozwiązań danego równania całkowego i r rozwiązań równania stowarzyszonego.

Zauważymy jeszcze, że szczebel wartości właściwej równa się liczbie składowych jąder kanonicznych.

12. Przypadek pojedynczego bieguna. Jeżeli λ_1 jest pojedynczym biegunem, wówczas część charakterystyczna jądra rozwiązującego ma kształt:

$$\frac{\varphi_1(x, y)}{\lambda - \lambda_1},$$

przyczem:

$$\varphi_1(x, y) = \sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \psi_p(y).$$

Jądro jest wtedy sumą n jąder kanonicznych pierwszego rzędu; funkcje $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ są więc rozwiązaniami właściwymi równania całkowego danego, a funkcje $\psi_1(y), \psi_2(y), \dots, \psi_n(y)$ — równania stowarzyszonego.

W przypadku bieguna pojedynczego funkcje właściwe są zarazem rozwiązaniami właściwymi.

Dzięki tej ważnej własności, zresztą charakterystycznej dla tego przypadku, wyprowadzić możemy pewien sprawdzian, który pozwala rozróżnić przypadek bieguna pojedynczego.

W tym celu zauważymy, iż w razie, gdy jądro składowe $G_1^{(p)}(x, y)$ jest rzędu wyższego niż pierwszy, rozwiązania $\Phi_1^{(p)}(x)$ i $\Psi_{n_p}^{(p)}(y)$ są do siebie ortogonalne, ponieważ nie są one funkcjami właściwymi stowarzyszonymi ($n_p > 1$). Stąd wynika, że funkcja $\Phi_1^{(p)}(x)$ jest ortogo-

nalna do wszystkich rozwiązań właściwych równania stowarzyszonego. A zatem, w przypadku wielokrotnego bieguna istnieją rozwiązania właściwe, ortogonalne do wszystkich rozwiązań równania stowarzyszonego.

Dla jądra o biegunie pojedynczym niema to miejsca, gdyż każdemu rozwiązaniu $\Phi_p(x)$ odpowiada rozwiązanie stowarzyszone $\Psi_p(y)$, dla którego:

$$\int_a^b \Phi_p(x) \Psi_p(x) dx = 1.$$

Warunek więc konieczny i dostateczny na to, aby biegun był pojedynczy, polega na tem, aby każdemu, należącemu do tego bieguna rozwiązaniu właściwemu $\Phi(x)$ danego równania, odpowiadało takie rozwiązanie $\Psi(x)$ równania stowarzyszonego, dla którego:

$$\int_a^b \Phi(s) \Psi(s) ds \neq 0.$$

12. Przypadek biegunów wielokrotnych. W przypadku wielokrotnego bieguna możemy, kładąc:

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{\lambda_1} \sum_{p=1}^n \varphi_p(x) \psi_p(y),$$

napisać jądro kanoniczne rzędu n -tego w postaci:

$$\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y).$$

Powiadam, że składnik $\Phi_2(x, y)$ jest jądrem bez wartości właściwych. Istotnie, jeżeli utworzymy jądra iterowane funkcji $\Phi_2(x, y)$, wówczas $n-1$ -e z pośród nich będzie identycznie równe zeru, wobec bowiem własności funkcji $\varphi_p(x, y)$ składa się ono z iteracji rzędu $\geq n-1$ jądra $\varphi_2(x, y)$.

Uwaga powyższa pociąga za sobą wniosek następujący:

Jądro o skończonej liczbie n wartości właściwych, mających dowolną wielokrotność, możemy zawsze napisać w kształcie

$$\sum_{p=1}^n \frac{\varphi_p(x) \psi_p(y)}{\lambda_p} + E(x, y)$$

przyczem $E(x, y)$ jest jądrem bez wartości właściwych.

13. Drugie twierdzenie Fredholma. Twierdzenie to zawiera się implícite w tem, cośmy już udowodnili. Wystarczy udowodnić, że z dwu równań

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (36)$$

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int_a^b G_1(x, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (37)$$

pierwsze pociąga za sobą drugie, i nawzajem.

W tym celu zauważymy, że każde rozwiązanie $\varphi(x)$ równania (37) czyni zadość warunkowi:

$$\int_a^b P_1(x, s) \varphi(s) ds = 0;$$

związek ten otrzymujemy, mnożąc (37) przez $P_1(y, x)$ i całkując względem x od a do b , gdyż jądra $G_1(x, y)$ oraz $P_1(x, y)$ są względem siebie ortogonalne. A więc będzie także:

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int_a^b [G_1(x, s) + P_1(x, s)] \varphi(s) ds;$$

jest to jednak właśnie równanie (36).

Odwrotnie, równanie (36) możemy napisać w postaci:

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int_a^b P_1(x, s) \varphi(s) ds = -\lambda_1 \int_a^b G_1(x, s) \varphi(s) ds.$$

Ponieważ λ_1 nie jest już wartością właściwą dla $P_1(x, y)$, więc równanie to możemy rozwiązać. Otrzymujemy w ten sposób:

$$\varphi(x) = -\lambda_1 \int_a^b G_1(x, s) \varphi(s) ds + \lambda_1^2 \int_a^b \mathfrak{P}_1(x, s; \lambda) G_1(s, t) \varphi(t) ds dt,$$

a więc właśnie równanie (37), gdyż drugi składnik po prawej stronie jest tożsamościowo zerem, wobec tego, że:

$$\int_a^b \mathfrak{P}_1(x, s; \lambda) G_1(s, t) ds = 0.$$

Mamy więc twierdzenie następujące:

Dla wartości właściwej λ_1 o wielokrotności n i szczyblu r równanie jednorodne Fredholma posiada r linio-wo niezależnych rozwiązań, które nazywamy rozwiązaniami właściwymi. Równanie stowarzyszone posiada tę samą liczbę rozwiązań właściwych.

Jest to drugie twierdzenie Fredholma.

14. Trzecie twierdzenie Fredholma. Rozumowanie numeru poprzedniego wykazuje, że i równania:

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

oraz

$$\varphi(x) + \lambda_1 \int_a^b G_1(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

wzajemnie wynikają jedno z drugiego, są więc rozwiązalne jednocześnie. Tym sposobem (§ 8, d. str. 50).

Warunkiem koniecznym i dostatecznym rozwiązalności niejednorodnego równania Fredholma dla wartości właściwej $\lambda = \lambda_1$ jest ortogonalność funkcji $f(x)$ do wszystkich rozwiązań właściwych równania stowarzyszonego przynależnych do λ_1 .

Jest to trzecie twierdzenie Fredholma.

IV. Rozwinięcia rozmaite.

15. Budowa jądra o skończonej liczbie wartości właściwych. Wyniki poprzedniego rozdziału pozwalają nam przystąpić do następującego zagadnienia:

Wyznaczyć najogólniejszy typ jądra, mającego n wartości właściwych o danej wielokrotności i danym szczyblu.

W tym celu zrobimy przedewszystkiem następującą uwagę, w gruncie rzeczy zawartą w twierdzeniu już udowodnionem.

Składniki jądra, odpowiadające różnym wartościom właściwym, są ortogonalne do siebie. Istotnie, jeżeli położymy:

$$N(x, y) = G_1(x, y) + G_2(x, y) + Q(x, y),$$

wówczas jądro $G_1(x, y)$ ortogonalne do $G_2(x, y) + Q(x, y)$ jest or-

togonalne również do $Q(x, y)$ ¹⁾; stąd wynika, iż jądra $G_1(x, y)$ i $G_2(x, y)$ są do siebie ortogonalne.

Oznaczmy teraz przez $G_p(x, y)$ najogólniejsze jądro, odpowiadające wartości właściwej λ_p o wielokrotności i szczeblu przepisany; jądro takie umiemy zbudować.

Oczywista, że jądro:

$$G_1(x, y) + G_2(x, y) + \dots + G_n(x, y) + E(x, y),$$

gdzie $E(x, y)$ oznacza jądro bez wartości właściwych, będzie właśnie jądrem szukanem, pod warunkiem, aby poszczególne składki były do siebie ortogonalne, w myśl poprzedzającej uwagi.

W tym celu potrzeba i wystarcza: popierwsze, aby funkcje właściwe użyte przy budowie jąder $G_p(x, y)$ tworzyły jeden układ dwuortogonalny; powtóre, aby $E(x, y)$ było ortogonalne do wszystkich jąder $G_p(x, y)$.

16. Przypadek, w którym jest nieskończenie wiele wartości właściwych. Rozumowanie powyższe rozciąga się bez trudu na przypadek nieskończenie wielu wartości właściwych, byleby szereg

$$\sum_{p=1}^{\infty} G_p(x, y)$$

był zbieżny i całkowny wyraz po wyrazie względem zmiennych x i y .

Warunkiem koniecznym jest, aby wykładnik zbieżności wartości właściwych był conajwyżej równy 2, innymi słowy, aby szereg

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{2+\varepsilon}}$$

był zbieżny.

17. Jądra bez wartości właściwych. Jądro

$$\varphi_2(x, y) = a_1 \Phi_1(x) \Psi_2(y) + \dots + a_{n-1} \Phi_{n-1}(x) \Psi_n(y)$$

stanowi przykład jądra bez wartości właściwych, z którym jużemy się zetknęli. Ogólniej, jeżeli szereg

$$E(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x) \Psi_{n+1}(y)$$

jest jednostajnie zbieżny, wówczas suma jego jest również jądrem bez

¹⁾ Staje się to oczywiste, jeżeli naprzód wyodrębnimy składnik $G_2(x, y)$.

wartości właściwych, gdyż wszystkie jej ślady znikają; zakłada się że funkcje Φ i Ψ tworzą dwie grupy układu dwuortogonalnego. Stosując do funkcji tych dowolne podstawienie liniowe dwuortogonalne, otrzymamy bardzo rozległą klasę jąder bez wartości właściwych. Oto kilka przykładów.

Położmy:

$$\Phi_n(x) = \cos nx, \quad \Psi_n(y) = \cos ny \quad \text{oraz} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A;$$

otrzymamy jądro: ¹⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos (n+1) y.$$

Położmy dalej:

$$\Phi_{2n}(x) = \Psi_{2n}(x) = \sin nx, \quad \Phi_{2n+1}(x) = \Psi_{2n+1}(x) = \cos nx;$$

otrzymamy jądro: ¹⁾

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} \sin nx \cos ny + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos (n-1) x \sin ny.$$

¹⁾ E. Goursat 5, p. 87 88.

ROZDZIAŁ TRZECI.

JĄDRA SPECYALNE.

I. Jądra symetryczne.

1. Wyjaśnienie znaczenia, które w teorii równań całkowych posiada symetria jądra, jest zasługą D. Hilberta, który poddał dokładnej analizie przypadek jądra symetrycznego. Jego uczniowie, zwłaszcza E. Schmidt, nadali wynikowi jego badań szczególnie proste formy.

2 **Twierdzenie Hilberta.** Jądro symetryczne posiada jedną co najmniej wartość właściwą.

Pierwszym, który powyższe twierdzenie udowodnił, był D. Hilbert¹⁾; jest ono zasadniczym twierdzeniem w teorii Schmidta²⁾, który udowodnił je, niezależnie od ogólnej teorii równań Fredholma.

Dla dowodu wystarczy wykazać, iż $n_4 \neq 0$. Otóż:

$$n_4 = \int_a^b [N_1(s_1, s_2)]^2 ds_1 ds_2.$$

Z drugiej strony jądro $N_1(s_1, s) = \int_a^b N(s_1, s_2) N(s, s_2) ds_2$ nie może zniknąć tożsamościowo w przedziale całkowania, gdyż dla $s = s_1$ mamy:

$$N(s_1, s_1) = \int_a^b [N(s_1, s_2)]^2 ds_2,$$

a więc $n_4 \neq 0$.

1) D. Hilbert, 1. Erste Mitteilung.

2) E. Schmidt 1. Erster Teil.

Można twierdzenie to przedstawić w takiej formie: Jądro, nie posiadające wartości właściwych nie może być symetryczne.

Uwaga. Wyłączmy jądra nieciągłe, różne od zera jedynie w punktach pewnego zbioru o mierze powierzchniowej równej zero, zawartego w przedziale całkowania; dla takich jąder twierdzenie nasze nie jest prawdziwe. Jako przykład weźmiemy jądro $N(x, y)$, znikające wszędzie, prócz na głównej przekątnej oraz na skończonej liczbie prostych równoległych do osi i przecinających się parami na przekątnej, gdzie $N(x, y) > 0$. Jest wtedy:

$$n_1 = \int_a^b N(s, s) ds = a^2$$

oraz

$$n_2 = \int_a^b N(s_1, s_2)^2 ds_1 ds_2 = 0,$$

gdyż $N(s_1, s_2)$ jest różne od zera jedynie w punktach, leżących na skończonej liczbie prostych, a więc w punktach zbioru o mierze powierzchniowej zero.

Podobnie dla $p > 2$, $n_p = 0$, a więc

$$D(\rho) = e^{a^{\rho}}.$$

3. Własności wartości właściwych. a) Wartości właściwe są rzeczywiste. Załóżmy, że λ_1 jest zespoloną wartością właściwą, $\varphi_1(x)$ zaś odpowiednim rozwiązaniem podstawowym. Ponieważ jądro jest rzeczywiste, przeto $\bar{\lambda}_1^{(1)}$ będzie również wartością właściwą, zaś $\bar{\varphi}_1(x)$ odpowiednim rozwiązaniem podstawowym zarówno dla danego równania, jak i dla stowarzyszonego. Gdyby teraz było $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$, wówczas mielibyśmy:

$$\int_a^b \varphi_1(x) \bar{\varphi}_1(x) dx = 0,$$

co jest niemożliwe, a więc

$$\lambda = \bar{\lambda}_1,$$

to znaczy, że λ_1 , jest rzeczywiste.

b) Bieguny jądra rozwiązującego są pojedyncze, gdyż rozwiązanie właściwe $\varphi_1(x)$ jest zarazem rozwiązaniem równania stowarzyszonego. Ponieważ zaś:

¹⁾ Przez $\bar{\lambda}_1$ oznaczamy liczbę sprzężoną z liczbą λ_1 .

$$\int_a^b \varphi_1^2(x) dx \neq 0,$$

więc bieguny są pojedyncze (por. str. 57—58).

c) Tym sposobem funkcje właściwe są zarazem rozwiązaniami właściwymi, ponieważ zaś, z powodu symetrii, są one jednocześnie rozwiązaniami równania danego i stowarzyszonego, tworzą więc układ ortogonalny.

d) Jądro symetryczne o skończonej liczbie wartości właściwych jest kształtu:

$$\sum_{p=1}^n \frac{\varphi_p(x) \varphi_p(y)}{\lambda_p}, \quad (1)$$

przyczem każda wartość występuje tyle razy, ile wynosi jej szczebel.

Odejmujemy w rzeczy samej od $N(x, y)$ część charakterystyczną, odnoszącą się do biegunów $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, to znaczy funkcję (1).

Różnica będzie jądrem symetrycznym, nie posiadającym wartości właściwych, a więc tożsamościowo równem zeru.

4. nierówność Bessela. Jeżeli funkcje $\varphi_p(x)$ tworzą układ ortogonalny, $f(x)$ zaś jest funkcją całkowalną wraz z kwadratem ¹⁾, wówczas zachodzi nierówność:

$$c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx,$$

przyczem c_p oznacza współczynnik Fouriera $\int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds$. Nierówność Bessela wynika z oczywistej równości:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) - c_1 \varphi_1(x) - c_2 \varphi_2(x) - \dots - c_n \varphi_n(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - [c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2], \end{aligned}$$

której lewa strona jest napewno nieujemna.

Wypływa stąd ważny wniosek: szereg kwadratów współczynników Fouriera funkcji całkowalnej wraz z kwadratem jest zbieżny.

¹⁾ To znaczy, że $\int_a^b f^2(x) dx$ istnieje.

5. Własności jąder iterowanych. 1) Jeżeli λ_1 jest wartością właściwą jądra $N(x, y)$, wówczas λ_1^{k+1} jest wartością właściwą jądra iterowanego k -tego rzędu; rozwiązania właściwe, odpowiadające tym wartościom właściwym, są w obu przypadkach te same.

Istotnie, w równaniu: ¹⁾

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi_1(s) ds = 0$$

zastąpmy $\varphi_1(x)$ pod znakiem całki przez jej wartość, otrzymaną z tegoż równania. Otrzymamy wtedy:

$$\varphi_1(x) - \lambda_1^2 \int_a^b N_1(x, s) \varphi_1(s) ds = 0;$$

stosując zaś to samo postępowanie k razy z rzędu, dochodzimy do równania

$$\varphi_1(x) - \lambda_1^{k+1} \int_a^b N_k(x, s) \varphi_1(s) ds,$$

co było do okazania.

2° Odwrotnie, jeżeli μ jest wartością właściwą jądra $N_k(x, y)$, wówczas jeden conajmniej z $k+1$ -ch pierwiastków z μ jest wartością właściwą jądra $N(x, y)$.

Istotnie, oznaczmy przez α jeden z tych pierwiastków i połóżmy:

$$\psi(x) = \varphi_1(x) + \sum_{p=1}^k \alpha^p \int_a^b N_{p-1}(x, s) \varphi_1(s) ds.$$

Mamy wtedy:

$$\psi(x) - \alpha \int_a^b N(x, s) \psi(s) ds = \varphi_1(x) - \alpha^{k+1} \int_a^b N_k(x, s) \varphi_1(s) ds = 0.$$

Otóż nie wszystkie funkcje $\psi(x)$ mogą zniknąć tożsamościowo, gdyż suma ich równa się $n \varphi_1(x)$. Tym sposobem twierdzenie jest udowodnione.

¹⁾ W rozdziale tym piszemy równanie Fredholma ze znakiem — przed całką jądra.

3°. Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ jest ciągiem wartości właściwych jądra $N(x, y)$, wówczas wartościami właściwymi jądra $N_k(x, y)$ są liczby:

i tylko te liczby. $\lambda_1^{k+1}, \lambda_2^{k+1}, \dots, \lambda_n^{k+1}, \dots$

Wystarczy zastosować własności 1° i 2°.

6. Rozwinięcia na szereg funkcji właściwych. (Twierdzenie Hilberta-Schmidta). Każda funkcja ciągła $f(x)$ typu

$$(a) \quad \int_a^b N(x, s) h(s) ds.$$

(gdzie $h(x)$ jest funkcją całkowaną wraz z kwadratem) daje się rozwinąć na regularnie zbieżny szereg funkcji właściwych jądra $N(x, y)$.

Uogólnionym współczynnikiem Fouriera jest liczba

$$c_n = \int_a^b N(s, t) \varphi_n(t) h(s) ds dt = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n(s) h(s) ds = \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

Tym sposobem, gdyby twierdzenie było prawdziwe, szukaniem rozwinięciem byłoby:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n \varphi_n(x)}{\lambda_n}.$$

Udowodnimy przedewszystkiem, iż szereg ten jest regularnie zbieżny. Zauważymy w tym celu, że:

$$\begin{aligned} R_{n, m}^2 &= \left| \frac{h_n \varphi_n(x)}{\lambda_n} + \dots + \frac{h_m \varphi_m(x)}{\lambda_m} \right|^2 \\ &\leq (h_n^2 + \dots + h_m^2) \left(\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \dots + \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m^2} \right). \end{aligned}$$

Wyrażenie

$$\frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} = \int_a^b N(x, s) \varphi_n(s) ds$$

jest współczynnikiem Fouriera funkcji $N(x, y)$ zmiennej y .

Na podstawie więc nierówności Bessela wyrażenie

$$\left(\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2} + \dots + \frac{\varphi_m^2(x)}{\lambda_m^2} \right) \text{ jest nie większe od } \int_a^b [N(x, s)]^2 ds,$$

więc niewiększe od pewnej stałej A . Tym sposobem:

$$R_{n, m}^2 \leq A \sum_{p=n}^m h_p^2,$$

co, wobec zbieżności szeregu $\sum_{p=1}^{\infty} h_p^2$, dowodzi zbieżności bezwzględnej i jednostajnej szeregu $s(x)$.

Trzeba wykazać jeszcze, iż szereg ten przedstawia funkcję $f(x)$. Udowodnimy w tym celu, że funkcja

$$R(x) = f(x) - s(x)$$

jest tożsamościowo równa zeru.

Z określenia rozwinięcia $s(x)$, wynika, iż funkcja $R(x)$ jest ortogonalna do wszystkich funkcji właściwych naszego jądra; mamy więc:

$$\begin{aligned} \int_a^b R^2(s) ds &= \int_a^b f(s) R(s) ds - \int_a^b s(s) R(s) ds \\ &= \int_a^b f(s) R(s) ds = \int_a^b R(s) N(s, t) h(t) ds dt \\ &= \int_a^b h(t) \int_a^b N(s, t) R(s) ds dt = 0, \end{aligned}$$

gdyż: ¹⁾

¹⁾ Byłoby to oczywiste, gdyby rozwinięcie jądra było zbieżne. Można jednak przeprowadzić dowód drogą okólną, wprowadzając pierwsze jądro iterowane, a to w sposób następujący:

Jądro $N_1(x, y) = \int_a^b N(x, y) N(s, y) ds$ jest typu (a), można więc zastosować

do niego rozumowanie tekstu.

Wynika stąd, iż szereg:

$$S_1(x, y) = \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \dots$$

jest regularnie zbieżny. Liczby λ_n^2 są jedynymi wartościami właściwymi jądra $N_1(x, y)$; jądro więc $N_1(x, y) - S_1(x, y)$ nie posiada wartości właściwych, a wskutek tego jest tożsamościowo zerem, to znaczy $N_1(x, y) \equiv S_1(x, y)$.

$$\int_a^b R(s) N(s, t) ds \equiv 0,$$

a więc:

$$R(s) \equiv 0.$$

7. Jądro domknięte. Jądro symetryczne nazywamy domkniętym, jeżeli nie istnieje żadna taka funkcja $h(x)$, całkowalna wraz z kwadratem, dla którejby było tożsamościowo:

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds \equiv 0. \quad (2)$$

Układ funkcyj właściwych jądra symetrycznego domkniętego jest zupełny, i vice versa. Istotnie, związek (2) pociąga za sobą:

$$\int_a^b \varphi_n(s) h(s) ds = 0,$$

i odwrotnie.

Jądro domknięte ma nieskończenie wiele wartości właściwych. Istotnie, gdyby liczba tych ostatnich była skończona, wówczas liczba funkcyj właściwych byłaby również skończona. Jednakowoż zupełny układ ortogonalny nie może być skończony.

8. Jądro określone. Jądro symetryczne nazywamy określonym, jeżeli nie istnieje żadna taka funkcja $h(x)$, całkowalna wraz z kwadratem, dla którejby było:

$$\int_a^b \int_a^b N(x, y) h(x) h(y) dx dy = 0. \quad (3)$$

Jeżeli teraz funkcja $R(x)$ jest ortogonalna do wszystkich $\varphi_n(x)$, to:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b N(x, y) R(x) R(y) dx dy &= \int_a^b ds \int_a^b N(x, s) R(x) dx \int_a^b N(y, s) R(y) dy \\ &= \int_a^b \left[\int_a^b N(x, s) R(x) dx \right]^2 ds, \end{aligned}$$

a wskutek tego:

$$\int_a^b N(x, s) R(x) dx \equiv 0.$$

Jądro określone jest zawsze domknięte, gdybyśmy bowiem mieli:

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds = 0$$

wówczas związek (3) zachodziłby również. Wszystkie wartości właściwe jądra określonego są tego samego znaku. W samej rzeczy, przypuśćmy, iż λ_n i λ_m mają znaki różne. Jeżeli teraz

$$h(x) = \sqrt{|\lambda_n|} \cdot \varphi_n(x) + \sqrt{|\lambda_m|} \varphi_m(x),$$

wówczas:

$$\int_a^b N(x, y) h(y) dx dy = \frac{|\lambda_n|}{\lambda_n} + \frac{|\lambda_m|}{\lambda_m} = 0; \quad (4)$$

jądro nasze nie byłoby więc określone.

Jądro iterowane jądra domkniętego jest określone. Istotnie, jeżeli

$$N_1(x, y) = \int_a^b N(x, s) N(s, y) ds,$$

wówczas nie może być:

$$\int_a^b N_1(x, y) h(x) h(y) dx dy = 0,$$

gdyż wynikałoby stąd:

$$\int_a^b \left[\int_a^b N(x, s) h(x) dx \right]^2 ds = 0,$$

a więc

$$\int_a^b N(x, s) h(x) dx = 0,$$

w sprzeczności z założeniem.

9. Jądro dodatnie; jądro quasi-określone Jądro symetryczne nazywamy dodatnim, jeżeli dla każdej funkcji $h(x)$ całkowalnej wraz z kwadratem jest:

$$\int_a^b N(x, y) h(x) h(y) dx dy \geq 0.$$

Wartości właściwe jądra dodatniego są dodatnie. Istotnie, gdyby λ_m i λ_n miały znaki przeciwne, wówczas lekka zmiana postępowania § 8 dałaby nam funkcję, dla której $\int_a^b N(x, y) h(x) h(y) dx dy$ byłoby ujemne.

Jeżeli

$$\int_a^b N(x, y) h(x) h(y) dx dy = 0$$

wówczas jest:

$$\int_a^b N(x, y) h(y) dy = 0.$$

Istotnie, na podstawie twierdzenia Hilberta-Schmidta, mamy:

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds = \frac{h_1 \varphi_1(x)}{\lambda_1} + \frac{h_2 \varphi_2(x)}{\lambda_2} + \dots + \frac{h_n \varphi_n(x)}{\lambda_n} + \dots$$

a wskutek tego:

$$\int_a^b N(x, y) h(x) h(y) dx dy = \frac{h_1^2}{\lambda_1} + \frac{h_2^2}{\lambda_2} + \dots + \frac{h_n^2}{\lambda_n}.$$

stąd zaś wynika

$$h_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

a więc:

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds = 0.$$

Jeżeli jądro dane jest dodatnie, wówczas liczba liniowo niezależnych funkcji $h(x)$, dla których:

$$\int_a^b N(x, y) h(x) h(y) dx dy = 0, \quad (4')$$

może być skończona, lub nie.

W pierwszym przypadku nazywamy jądro quasi-określone; nazwa ta usprawiedliwiona jest przez to, że jądro takie różni się od jądra określonego tylko o sumę kształtu:

$$C_1 h_1(x) h_1(y) + C_2 h_2(x) h_2(y) + \dots + C_n h_n(x) h_n(y).$$

Istotnie, niech będą $h_1^{(n)}(x), \dots, h_n^{(n)}(x)$ funkcjami liniowo niezależnymi, sprawdzającymi związek (4'). Zortogonalizujemy je; otrzymamy układ $h_1(x), \dots, h_n(x)$.

Wówczas jądro:

$$N(x, y) + C_1 h_1(x) h_1(y) + \dots + C_n h_n(x) h_n(y) \quad C_i > 0$$

nie będzie dla żadnej funkcji $h(x)$ spełniało równania (4'), będzie więc określone. Jądro quasi-określone ma tym sposobem nieskończenie wiele dodatnich wartości właściwych.¹⁾

10. Rząd funkcji $D(\lambda)$. Można udowodnić, iż w przypadku jądra symetrycznego rząd funkcji $D(\lambda)$ jest mniejszy od 2. Rodzaj równa się conajwyżej 1.

Istotnie, ze związku:

$$N_1(x, y) = \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(y)}{\lambda_n^2} + \dots$$

wynika natychmiast:

$$\int_a^b N_1(s, t) ds dt = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2}. \quad (5)$$

Wzór Weierstrassa, mający w tym przypadku postać

$$D(\lambda) = e^{a\lambda + b\lambda^2} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}$$

daje przez logarytmowanie:

$$\int_a^b N_1(s, t) ds dt = b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}.$$

Porównanie z wzorem (5) wykazuje, iż $b = 0$. Mamy tym sposobem:

$$D(\lambda) = e^{a\lambda} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n}}.$$

¹⁾ W sprawie jąder dodatnich por. Mercer 2.

Uwaga. Jeżeli szereg

$$\frac{\varphi_1(x) \varphi_1(y)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(y)}{\lambda_n} + \dots$$

jest w przedziale (a, b) regularnie zbieżny, wówczas przedstawia on, jak to zaraz widzimy, jądro $N(x, y)$.

Mamy więc w tym przypadku:

$$\int_a^b N(s, s) ds = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n} + \dots$$

Analogicznie do poprzedniego rozumowanie wykazuje, iż funkcja $D(\lambda)$ jest w tym przypadku rodzaju zero.

II. Jądra skośnie-symetryczne.

Jądro $N(x, y)$ nazywamy skośnie-symetrycznym, jeżeli

$$N(x, y) = -N(y, x).$$

Jądra te grają w teorii równań różniczkowych liniowych nieparzystego rzędu taką samą rolę, jak jądra symetryczne w teorii równań różniczkowych liniowych rzędu parzystego.

11. Własności wartości właściwych. a) Wartości właściwe są liczbami urojonymi kształtu νi .

W samej rzeczy, oznaczmy przez λ_1 wartość właściwą, przez $\varphi_1(x)$ jedno z odpowiadających tej wartości rozwiązań właściwych. Mamy:

$$\varphi_1(x) - \lambda_1 \int_a^b N(x, s) \varphi_1(s) ds = 0,$$

stąd:

$$\varphi_1(x) + \lambda_1 \int_a^b N(s, x) \varphi_1(s) ds = 0,$$

a więc:

$$\bar{\varphi}_1(x) + \bar{\lambda}_1 \int_a^b N(s, x) \bar{\varphi}_1(s) ds = 0.$$

Gdyby było $\bar{\lambda}_1 \neq -\lambda_1$, wówczas funkcje $\varphi_1(x)$ i $\bar{\varphi}_1(x)$ byłyby ortogonalne, co jest niemożliwe. Tym sposobem $\lambda_1 = -\bar{\lambda}_1$, a wskutek tego $\lambda_1 = \pm \nu i$.

b) Bieguny są pojedyncze. Istotnie, jeżeli:

$$\varphi_1(x) - \nu i \int_a^b N(x, s) \varphi_1(s) ds = 0,$$

to:

$$\bar{\varphi}_1(x) - \nu i \int_a^b N(s, x) \bar{\varphi}_1(s) ds = 0.$$

Wynika stąd, że każdemu rozwiązaniu $\varphi_1(x)$ odpowiada rozwiązanie stowarzyszone $\bar{\varphi}_1(x)$, takie iż

$$\int_a^b \varphi_1(s) \bar{\varphi}_1(s) ds \neq 0,$$

co dowodzi, że bieguny są pojedyncze.

c) Jądro skośnie-symetryczne posiada conajmniej dwie wartości własne. W istocie, przede wszystkim posiada ono conajmniej jedną, gdyż:

$$n_1 = \int_a^b [N_1(s_1, s_2)]^2 ds_1 ds_2,$$

jądro zaś

$$N_1(s_1, s_1) = - \int_a^b [N(s_1, s)]^2 ds$$

nie może być tożsamościowo zerem.

Przytem będziemy mieli conajmniej dwie wartości własne, jeżeli bowiem νi jest wartością właściwą, to będzie nią również $-\nu i$. Odpowiednimi rozwiązaniami właściwymi będą $\varphi_1(x)$ i $\bar{\varphi}_1(x)$.

Można powyższe twierdzenie sformułować tak:

Jądro, nie posiadające wartości właściwych, nie może być skośnie-symetryczne.

d) Jeżeli $\varphi_1(x)$ jest funkcją właściwą, to $\bar{\varphi}_1(x)$ jest funkcją właściwą stowarzyszoną. Ponieważ bieguny są poje-

dyńcze, więc zbiór funkcji właściwych jest identyczny ze zbiorem rozwiązań właściwych. Jeżeli funkcje $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ stanowią układ liniowo niezależnych rozwiązań odpowiadających wartości właściwej λ n -tego szeregu, wówczas funkcje

$$\overline{\varphi}_1(x), \overline{\varphi}_2(x), \dots, \overline{\varphi}_n(x)$$

stanowią układ liniowo-niezależnych rozwiązań równania stowarzyszonego.

Układy powyższe dwuortogonalizujemy metodą, wskazaną na str. 33. Zauważymy, iż położyć można:

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x); \quad \Psi_1(x) = \overline{\varphi}_1(x),$$

gdyż:

$$\int_a^b \varphi_1(x) \overline{\varphi}_1(x) dx \neq 0;$$

poza to stałe a_i, b_i są sprzężone, gdyż, jeżeli

$$\int_a^b \varphi_1(s) [\overline{\varphi}_p(s) - c_p \overline{\varphi}_1(s)] ds = 0,$$

to jednocześnie:

$$\int_a^b \overline{\varphi}_1(s) [\varphi_p(s) - \overline{c}_p \varphi_1(s)] ds = 0.$$

Pozostałe więc funkcje będą znowu parami sprzężone:

$$\varphi_2'(x), \varphi_3'(x), \dots, \varphi_n'(x)$$

$$\overline{\varphi}_2'(x), \overline{\varphi}_3'(x), \dots, \overline{\varphi}_n'(x).$$

Można, wobec tego, powtórzyć to samo postępowanie, co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

e) Jądro skośnie-symetryczne o skończonej liczbie wartości właściwych posiada kształt:

$$\frac{\varphi_1(x) \overline{\varphi}_1(y)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\varphi_n(x) \overline{\varphi}_n(y)}{\lambda_n},$$

przyczem każda wartość właściwa występuje tyle razy, ile jednostek wynosi jej szereg.

Celem udowodnienia tego twierdzenia zauważymy, iż, po odjęciu od jądra skośnie-symetrycznego części charakterystycznych, odpowiadających dwóm sprzężonym wartościom właściwym $\pm \nu i$, pozostanie jądro wciąż jeszcze skośnie-symetryczne. Istotnie, niech częścią charakterystyczną, odpowiadającą wartości νi będzie wyrażenie:

$$\frac{\varphi_1(x) \overline{\varphi_1(y)} + \dots + \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}}{\nu i};$$

wówczas częścią charakterystyczną, odpowiadającą wartości $-\nu i$, będzie:

$$\frac{\varphi_1(x) \overline{\varphi_1(y)} + \dots + \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}}{-\nu i}.$$

Suma tych części:

$$\frac{\overline{\varphi_1(x)} \varphi_1(y) - \overline{\varphi_1(x)} \varphi_1(y) + \dots + \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)} - \overline{\varphi_n(x)} \varphi_n(y)}{\nu i}$$

jest funkcją skośnie-symetryczną.

Jeżeli teraz od jądra, posiadającego skończoną liczbę wartości właściwych, odejmiemy części charakterystyczne, odpowiadające wszystkim tym wartościom, wówczas pozostanie jądro skośnie-symetryczne bez wartości właściwych, a więc jądro, które na mocy c) jest tożsamościowo zerem.

Jako przykład jądra skośnie-symetrycznego wymienimy jądro: $\sin n(x - y)$, którego jedynymi wartościami właściwymi w przedziale $(0, 2\pi)$ są: $\mp \frac{i}{\pi}$, funkcjami zaś właściwymi: $e^{\mp n x i}$.

12. nierówność Bessela. W dziedzinie zespolonej uzyskać można nierówność analogiczną do nierówności Bessela.

Jeżeli

$$\varphi_1(x), \overline{\varphi_1(x)} \dots \varphi_n(x), \overline{\varphi_n(x)}$$

jest układem funkcji właściwych jądra skośnie-symetrycznego, zaś

$$c_n = \int_a^b f(s) \overline{\varphi_n(s)} ds,$$

wówczas zachodzi nierówność:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 + \dots + |c_n|^2 \leq \int_a^b f(s)^2 ds.$$

Wynika ona z tożsamości:

$$\int_a^b f(s)^2 ds = \{ |c_1|^2 + \dots + |c_n|^2 \}$$

$$= \int_a^b \{ f(s) - c_1 \varphi_1(s) - \dots - c_n \varphi_n(s) \}$$

$$\{ f(s) - \overline{c_1} \overline{\varphi_1}(s) - \dots \} ds,$$

której strona prawa nie może być ujemna.

13. Rozwinięcia na szereg funkcji podstawowych. Każda funkcja $f(x)$ typu $\int_a^b N(x, s) h(s) ds$ (gdzie funkcja $h(x)$ jest całkowna wraz z kwadratem), daje się rozwinąć na regularnie zbieżny szereg funkcji podstawowych jądra $N(x, y)$.

Uogólnionymi współczynnikami Fouriera są liczby:

$$c_n = \int_a^b N(t, s) h(s) \overline{\varphi_n}(t) dt ds = - \frac{\lambda_n}{\overline{\lambda_n}} \int_a^b h(s) \overline{\varphi_n}(s) ds = - \frac{h_n}{\lambda_n} = \frac{h_n}{\lambda_n},$$

a więc:

$$\overline{c_n} = \frac{\overline{h_n}}{\lambda_n};$$

gdymy więc twierdzenie było prawdziwe, rozwinięciem szukanym byłoby:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{h_n \varphi_n(x)}{\lambda_n} + \frac{\overline{h_n} \overline{\varphi_n}(x)}{\overline{\lambda_n}} \right].$$

Udowodnimy przedewszystkiem regularną zbieżność tego szeregu zauważymy w tym celu, iż: ¹⁾

$$|s_m(x) - s_n(x)| \leq [|h_n|^2 + \dots + |h_m|^2] \left[\left| \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \right|^2 + \dots + \left| \frac{\varphi_m(x)}{\lambda_m} \right|^2 \right].$$

¹⁾ Jestto zastosowanie nierówności:

$(A_1 B_1 + B_1 \overline{A_1} + \dots + A_n \overline{B_n} + \overline{A_n} B_n)^2 \leq 4(A_1 \overline{A_1} + \dots + A_n \overline{A_n})(B_1 \overline{B_1} + \dots + B_n \overline{B_n})$,
którą otrzymujemy, wyrażając, iż forma kwadratowa:

$$(A_2 \lambda + B_1)(\overline{A_1} \lambda + \overline{B_1}) + \dots + (A_n \lambda + B_n)(\overline{A_n} \lambda + \overline{B_n})$$

jest dodatnią, określoną.

Wychodząc z tej nierówności, przeprowadzić możemy dowód w taki sam sposób, jak w przypadku jądra symetrycznego.

Opierając się na własnościach c) i e), możemy wreszcie udowodnić, iż jądro skośnie-symetryczne domknięte ma nieskończenie wiele wartości właściwych.

III. Jądro symetryzowalne.

14. Określenia; przykłady. Jądro nazywać będziemy symetryzowalnym, jeżeli staje się symetrycznym przez złożenie z pewnym jądrem symetrycznym i określonym; innymi słowy jądro $N(x, y)$ jest symetryzowalne, jeżeli istnieje takie jądro symetryczne określone $G(x, y)$, iż, conajmniej jedno z jąder:

$$a) \quad H_1(x, y) = \int_a^b G(x, s) N(s, y) ds,$$

$$b) \quad H_2(x, y) = \int_a^b N(x, s) G(s, y) ds$$

jest symetryczne.

Na tę kategorię jąder zwrócił uwagę J. Marty¹⁾; zawiera ona wszystkie dotychczas zbadane jądra specjalne. Tak np. jądro biegunowe (Hilbert²⁾) $A(x) G(x, y)$, gdzie jądro $G(x, y)$ jest symetryczne, określone, jest jądrem symetryzowalnym; jądro bowiem

$$\int_a^b G(x, s) A(s) G(s, y) ds$$

jest symetryczne.³⁾

Ogólniej: jądro $A(x) G(x, y) B(y)$ (Goursat) jest symetryzowalne, gdyż daje jądro symetryczne przez złożenie lewostronne z jądrem $B(x) G(x, y) B(y)$, lub prawostronne z jądrem $A(x) G(x, y) A(y)$.

¹⁾ Marty J. 2, 3, 4, 5.

²⁾ Hilbert D. 1 Fünfte Mitteilung, Hilbert dokładnie zbadał równania tego typu, w przypadku, gdy funkcja $A(x)$ zmienia znak skończoną liczbę razy; nazywa on odpowiednie równanie całkowe równaniem całkowym biegunowym, lub równaniem 3-go gatunku.

³⁾ P. także Fubini G. 3. Pell A J. 2

Wymienimy jeszcze jądro (Marty) $\int_a^b G(x, s) G_1(s, y) ds$, gdzie

jądra $G(x, y)$, $G_1(x, y)$ są symetryczne, określone; możemy je uczynić symetrycznym przez złożenie lewostronne z $G_1(x, y)$, lub prawostronne z $G(x, y)$.

15. Rozwiązania właściwe stowarzyszone. Dla jąder symetryzowalnych ważna jest następująca uwaga.

Jeżeli $\varphi_1(x)$ jest rozwiązaniem właściwym równania danego i jeżeli wyrażenie (a) jest symetryczne, wówczas:

$$\psi_1(x) = \int_a^b G(x, s) \varphi_1(s) ds$$

jest rozwiązaniem właściwym równania stowarzyszonego.

Istotnie, pomnóżmy związek

$$\varphi_1(t) - \lambda_1 \int_a^b N(t, s) \varphi_1(s) ds = 0$$

przez $G(x, t) dt$ i scałkujmy; otrzymamy:

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int_a^b G(x, t) N(t, s) \varphi_1(s) ds dt = 0,$$

lub też, wskutek symetrii jądra $H_1(x, y)$:

$$\psi_1(x) - \lambda_1 \int_a^b G(s, t) N(t, x) \varphi_1(s) ds dt = 0$$

lub wreszcie, uwzględniając symetrię jądra $G(x, y)$:

$$\psi_1(x) - \lambda \int_a^b N(t, x) \psi_1(t) dt = 0 \quad \text{c. b. d. o.}$$

Uwaga. Analogiczny dowód wykazuje, iż, jeżeli wyrażenie (b) jest symetryczne, to twierdzenie nasze będzie prawdziwe, o ile przemienimy wyrazy „dany“ i „stowarzyszony“.

16. Własności wartości właściwych. a) Wartości właściwe są rzeczywiste. W istocie, jeżeli λ_1 jest wartością właściwą, $\varphi_1(x)$ odpowiednim rozwiązaniem właściwym, wówczas $\bar{\lambda}_1$ również będzie wartością właściwą, zaś $\bar{\varphi}_1(x)$ odpowiednim rozwiązaniem; wynika stąd, iż, dla $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_1$, mielibyśmy:

$$\int_a^b G(s, t) \varphi(s) \bar{\varphi}_1(t) ds dt = 0,$$

co jest niemożliwe, kładąc bowiem:

$$\varphi_1(x) = p(x) + i q(x),$$

otrzymalibyśmy:

$$\int_a^b G(s, t) p(s) p(t) ds dt + \int_a^b G(s, t) q(s) q(t) ds dt = 0,$$

$$\int_a^b G(s, t) p(s) p(t) ds dt = \int_a^b G(s, t) q(s) q(t) ds dt = 0,$$

a więc ¹⁾

$$\int_a^b G(s, t) \varphi_1(t) dt = 0,$$

co sprzeciwia się założeniu, że $G(x, y)$ jest jądrem określonym.

b) Bieguny jądra rozwiązującego są pojedyncze, gdyż rozwiązaniu właściwemu $\varphi_1(x)$ odpowiada rozwiązanie właściwe równania stowarzyszonego $\int_a^b G(x, s) \varphi_1(s) ds$, przyczem

$$\int_a^b G(x, s) \varphi_2(s) \varphi_1(x) ds dx \neq 0,$$

gdyż jądro $G(x, y)$ jest określone.

Zbiór funkcyj właściwych jest tym sposobem identyczny ze zbiorem rozwiązań właściwych.

¹⁾ P. własności jąder dodatnich str. 77.

Uwaga. W przypadku jąder biegunowych własności powyższe mają miejsce przy założeniu nieco ogólniejszem, mianowicie, jeżeli $G(x, y)$ jest jądrem dodatniem. Istotnie, mamy wówczas:

$$\int_a^b G(x, s) \varphi_1(s) ds = \frac{\varphi_1(x)}{\lambda_1 A(x)} \neq 0 \quad (6)$$

i wskutek tego:

$$\int_a^b G(x, s) \varphi_1(s) \varphi_1(x) ds dx \neq 0. \quad (7)$$

Natomiast dla ogólnych jąder symetryzowalnych, założenie, że jądro $G(x, y)$ jest dodatnie, nie wystarcza. Jeżeli np.

$$G(x, y) = \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(y)}{a^2},$$

to położyć możemy:

$$N(x, y) = K(x, y) + \frac{\psi_1(x) \psi_1(y)}{\lambda_1},$$

przyczem $K(x, y)$ jest jądrem dowolnem, którego funkcje właściwe są ortogonalne do $\varphi_1(x)$. Jeżeli

$$\int_a^b \varphi_1(s) \psi_1(s) ds = 1,$$

wówczas:

$$\int_a^b G(x, s) N(s, y) ds = \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(y)}{a^2 \lambda_1},$$

$\int_a^b G(x, s) N(s, y) ds$ jest więc jądrem symetrycznem.

Jądro zatem $N(x, y)$ staje się symetrycznem przez złożenie z jądrem dodatniem, tem nie mniej zawiera ono część $K(x, y)$, której wartości właściwe mogą być zespolone, a rząd biegunów jądra rozwiązującego może być dowolny.

c) Jądro symetryzowalne ma jedną conajmniej wartość właściwą.¹⁾

¹⁾ Marty J. 4, 5.

d) Jeżeli $\varphi_1(x)$ jest rozwiązaniem właściwym, to wówczas $\Psi_1(x) = \int_a^b G(x, s) \varphi_1(s) ds$ jest rozwiązaniem właściwym stowarzyszonym.

Ponieważ bieguny są pojedyncze, więc zbiór funkcji właściwych jest identyczny ze zbiorem rozwiązań właściwych. Jeżeli wartości właściwej λ_1 , szczebla \bar{n} odpowiada n liniowo niezależnych rozwiązań: $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, wówczas funkcje

$$\psi_p(x) = \int_a^b G(x, s) \varphi_p(s) ds, \quad p = 1, 2, \dots, n$$

będą stanowiły n liniowo niezależnych rozwiązań równania stowarzyszonego, gdyż jądro $G(x, y)$ jest określone. Dwuortogonalizujemy teraz te układy metodą kilkakrotnie już używaną. Możemy wziąć przede wszystkim:

$$\Phi_1(x) = \varphi_1(x); \quad \Psi_1(x) = \int_a^b G(x, s) \varphi_1(s) ds,$$

gdź:

$$\int_a^b G(x, y) \varphi_1(x) \varphi_1(s) dx ds > 0.$$

Zauważymy teraz, iż związek:

$$\int_a^b \Psi_1(x) [\varphi_p(x) - a_p \Phi_1(x)] dx = 0$$

pociąga za sobą:

$$\begin{aligned} & \int_a^b G(x, s) \Phi_1(s) [\varphi_p(x) - a_p \Phi_1(x)] ds dx \\ &= \int_a^b \Phi_1(s) [\psi_p(s) - a_p \Psi_1(s)] ds = 0, \end{aligned}$$

stąd zaś wynika, iż funkcje, które otrzymamy po uskutecznieniu pierwszej operacji dwuortogonalizacyjnej, będą miały ten sam kształt, co

funkcye pierwiastkowo dane; można będzie wobec tego powtórzyć n razy to samo działanie.

e) Jądro symetryzowalne o skończonej liczbie wartości właściwych jest kształtu:

$$\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y)}{\lambda_1} + \dots + \frac{\varphi_n(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}.$$

Istotnie, jeżeli odejmiemy od jądra części charakterystyczne, odpowiadające biegunom $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, a więc wyrażenie tylko co napisane, wówczas otrzymamy jądro, które na mocy (d) będzie symetryzowalne i nie będzie posiadało wartości właściwych. Na podstawie więc (c) będzie ono tożsamościowo zerem.

16. nierówność Bessela. Niech będzie $f(x)$ funkcją, dla której istnieje całka:

$$(G) \quad \int_a^b G(x, s) f(s) f(x) ds dx,$$

jeżeli a_p jest spółczynnikiem Fouriera:

$$a_p = \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds,$$

wówczas zachodzi nierówność:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \leq \int_a^b G(x, s) f(x) f(s) ds dx.$$

Podobnie jak w przypadkach uprzednio rozpatrywanych nierówność ta wynika z tożsamości:

$$\begin{aligned} & \int_a^b G(x, s) [f(x) - a_1\varphi_1(x) \dots - a_n\varphi_n(x)] \\ & \quad [f(s) - a_1\varphi_1(s) \dots - a_n\varphi_n(s)] ds dx \\ &= \int_a^b G(x, s) f(s) f(x) ds dx - a_1^2 - a_1^2 - \dots - a_n^2, \end{aligned}$$

której strona lewa jest zawsze dodatnia.

Stąd wynika, iż szereg

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + \dots$$

jest zbieżny.

17. Twierdzenie o rozwinięciu na szereg funkcji dwuortogonalnych.
Funkcja ciągła kształtu:

$$(a) \int_a^b N(x, s) h(s) ds, \quad \text{lub} \quad (b) \int_a^b N(s, x) h(s) ds$$

daje się rozwinąć na szereg regularnie zbieżny funkcji $\varphi_n(x)$ w przypadku (a) lub funkcji $\psi_n(x)$ w przypadku (b).

$N(x, y)$ oznacza tu jądro dwustronnie symetryzowalne; zakładamy przytem, że całka (G) istnieje dla funkcji $N(x, y)$ i $h(x)$.

Dowód wzorować będziemy na dowodzie twierdzenia Hilberta-Schmidta. W przypadku (a) szeregiem szukanym będzie:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

gdzie:

$$h_n = \int_a^b f(s) \psi_n(s) ds.$$

Jestto szereg regularnie zbieżny; w istocie, ponieważ szereg kwadratów h_n^2 jest zbieżny, więc można przeprowadzić to samo rozumowanie, co w przypadku symetrycznym.

Szereg $S(x)$ przedstawia funkcję $f(x)$. Istotnie, weźmy pod uwagę różnicę:

$$R(x) = f(x) - S(x).$$

Mamy:

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x, s) R(x) R(s) dx ds &= \int_a^b G(x, s) R(s) f(x) ds dx \\ &\quad - \int_a^b G(x, s) R(s) S(x) ds dx. \end{aligned}$$

Ale:

$$S_1(x) = \int_a^b S(x) G(x, s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

a więc

$$\int_a^b G(x, s) R(s) S(x) ds dx = \int_a^b R(s) S_1(s) ds = 0$$

na mocy określenia funkcji $R(x)$.

Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x, s) R(s) f(x) ds dx &= \int_a^b G(x, s) R(s) N(x, t) h(t) ds dx dt \\ &= \int_a^b H(s, t) R(s) h(t) ds dt = 0, \end{aligned}$$

gdyż:

$$\int_a^b H(x, s) R(s) ds = 0.$$

A więc:

$$\int_a^b G(x, s) R(x) R(s) ds dx = 0$$

i tym sposobem

$$R(x) = 0.$$

18. Jądro symetryzowalne domknięte. Jądro symetryzowalne nazywać będziemy domkniętem, jeżeli jądro symetryczne $H(x, y)$ jest domknięte.

Jądro domknięte ma nieskończenie wiele wartości właściwych.

Istotnie, związek:

$$\int_a^b H(x, s) h(s) ds = 0$$

pociąga za sobą związki:

$$\int_a^b \varphi_n(s) h(s) ds = 0,$$

i odwrotnie. Jeżeli więc jądro $H(x, y)$ jest domknięte, wówczas żadna funkcja nie spełnia tych związków, co dowodzi, iż funkcj $\varphi_n(x)$ jest nieskończenie wiele.

U. Jądra rozmaite.

19. Jądra rozmaite $L(\alpha)$. Z pośród jąder ciągłych wyróżnić należy ważną kategorię jąder $L(\alpha)$, które dla jednej ze zmiennych sprawdzają uogólniony warunek Lipschitza

$$|N(x, y) - N(x, z)| \leq A |y - z|^\alpha \quad \alpha > 0$$

Jądra te mają własność następującą.

Funkcja $D(\lambda)$ jądra $L(\alpha)$ jest rodzaju 0 lub 1; dokładniej mówiąc rząd jej równa się conajwyżej $\frac{2}{2\alpha+1}$ ¹⁾

By udowodnić powyższe twierdzenie, udowodnimy przedewszystkiem nierówność:²⁾

$$\left| N \begin{pmatrix} x_1 x_2 \dots x_p \\ x_1 x_2 \dots x_p \end{pmatrix} \right| < M^p \frac{p^2}{p^{\alpha(p-1)}}$$

przyczem M jest pewną stałą.

Mamy:

$$N \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_p \\ x_1, x_2, \dots, x_p \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{vmatrix} N(x_1, x_1) - N(x_1, x_2) N(x_1, x_2) - N(x_1, x_3) \dots N(x_1, x_{p-1}) - N(x_1, x_p) N(x_1, x_p) \\ \dots \\ N(x_p, x_1) - N(x_p, x_2) N(x_p, x_2) - N(x_p, x_3) \dots N(x_p, x_{p-1}) - N(x_p, x_p) N(x_p, x_p) \end{vmatrix}$$

Wynika to ze znanego wyrażenia na $N \begin{pmatrix} x_1, \dots, x_p \\ x_1, \dots, x_p \end{pmatrix}$, jeżeli od elementów każdej kolumny (prócz ostatniej) odejmiemy elementy kolumny następującej. Kładąc:

$$N(x_k, y) = N(x_k, z) + (y - z)^\alpha N_k(y, z) \quad (|N_k(y, z)| \leq A)$$

¹⁾ Lalesco 3.

²⁾ Fredholm 4.

można więc wziąć jako granicę górną:

$$\frac{p^{\frac{p}{2}} M^p}{p^{\alpha(p-1)}}.$$

Oznaczmy przez u_p współczynnik przy λ^p w rozwinięciu funkcji $D(\lambda)$. Będzie:

$$\sqrt[p]{|u_p|} < \frac{p^{\frac{1}{2}} M}{p^{\frac{\alpha(p-1)}{p}} \sqrt[p]{p!}}$$

lub też, stosując przybliżony wzór Stirlinga:

$$p! \infty \left(\frac{p}{e}\right)^p$$

otrzymamy:

$$\sqrt[p]{|u_p|} < \frac{M e}{p^{\frac{\alpha(p-1)}{p} + \frac{1}{2}}}$$

i tym sposobem

$$p^{\alpha + \frac{1}{2}} \sqrt[p]{|u_p|} < M',$$

co dowodzi, iż rząd funkcji $D(\lambda)$ równa się conajwyżej $\frac{2}{2\alpha+1}$, a rodzaj zera, lub jedności.

Uwagi. 1^o Opierając się na znanych własnościach funkcji całkowitych, możemy twierdzić, że wykładnik zbieżności szeregu o wyrazach $1 : \lambda_n$ będzie conajwyżej równy $\frac{2}{2\alpha+1}$; jeżeli więc ε oznacza dowolnie małą liczbę dodatnią, wówczas jest:

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{2\alpha+1}{2}-\varepsilon} : \lambda_n = 0.$$

2^o Jeżeli jądro jest ciągłe i spełnia warunek Lipschitza ($\alpha = 1$), wówczas na zasadzie powyższego rząd funkcji $D(\lambda)$ będzie równy $\frac{2}{3}$, a więc:

$$\lim_{n=\infty} n^{\frac{2}{3}-\varepsilon} : \lambda_n = 0.^1)$$

¹⁾ H. Weyl, 3 udowodnił, że w przypadku gdy jądro jest symetryczne i posiada ciągłą pochodną, można opuścić ε . Por. także S. Mazurkiewicz, O wyznaczniku Fredholma II. Spr. Warsz. Tow. Nauk. VIII, 1915, gdzie wynik powyższy uogólniony jest na jądra niesymetryczne.

ROZDZIAŁ CZWARTY.

RÓWNANIE FREDHOLMA PIERWSZEGO GATUNKU.

1. Równanie Fredholma pierwszego gatunku przedstawia przy badaniu trudności, zasadniczo odmienne od tych, któreśmy dotąd spotykali.

Jeżeli chodzi o zagadnienie istnienia, to znaczy o wyszukanie ogólnych warunków, przy których równanie posiada rozwiązanie, i to jedyne, wówczas nie wystarczy ograniczyć się do funkcyj rzeczywistych całkowalnych; niezbędne są warunki dodatkowe. Wywołane przez wprowadzenie tych warunków zwężenie zakresu, w którym mamy szukać rozwiązań, stanowi właśnie nową i najważniejszą cechę naszego zagadnienia.

Otóż teoria szeregów trygonometrycznych zdążyła już ujawnić rolę funkcyj rzeczywistych całkowalnych wraz z kwadratem i badania współczesne coraz silniej podkreślają wielkie znaczenie tej klasy funkcji, która zdaje się pod względem doniosłości zajmować miejsce tuż za klasą funkcyj całkowalnych. Najbardziej interesującym szczegółem tych badań jest okoliczność, że najwygodniejszym, a nawet niezbędnym ich narzędziem jest nie już całka Riemanna, ale całka Lebesgue'a. Jest to nowy i godny uwagi przykład tego, jak roztrząsanie czysto logiczne prowadzić może do wyników bezpośrednio użytkować się dających.

W rozdziale niniejszym całki mają być rozumiane w sensie Lebesgue'a. Nazywać będziemy sumowalną każdą funkcję całkowalną w tym sensie; oznaczymy dalej przez Ω zbiór funkcyj rzeczywi-

stych sumowalnych wraz z kwadratem w przedziale (a, b) , przyczem każdą taką funkcję nazywać będziemy funkcją Ω .

E. Picard podał ważne twierdzenie, dotyczące równania pierwszego gatunku. Aby je udowodnić, podamy najprzód pewne wyniki badań ostatniej doby nad zbieżnością funkcji zmiennej rzeczywistej.

2. Zbieżność przeciętna; określenia.

1) Ciąg funkcji Ω :

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x), \dots \quad (1)$$

nazywamy przeciętnie zbieżnym w przedziale (a, b) , jeżeli:

$$\lim_{m, n = \infty} \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

b) Nazywamy ciąg (1) przeciętnie zbieżnym do funkcji granicznej $f(x)$, jeżeli:

$$\lim_{m = \infty} \int_a^b [f(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

Dwie funkcje graniczne $f(x)$ i $\varphi(x)$, które w przedziale (a, b) różnią się conajwyżej w punktach zbioru o mierze 0, uważamy za równe. Jest w tym przypadku:

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]^2 dx = 0,$$

i odwrotnie.

c) Ciąg (1) nazywamy zbieżnym prawie jednostajnie w przedziale (a, b) , jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ przedział powyższy zawiera zbiór punktów o mierze $b - a - \varepsilon$, w którym ciąg ten jest zbieżny jednostajnie.

3) **Lemmat.**¹⁾ Przeciętnie zbieżny ciąg funkcji Ω posiada jedną i tylko jedną funkcję graniczną.

Udowodnimy przedewszystkiem, że z ciągu (1) wybrać można ciąg prawie jednostajnie zbieżny w przedziale (a, b) . Bierzemy w tym celu

¹⁾ Por. H. Weyl 2, M. Plancherel 2, F. Riesz 4, Egoroff 1.

²⁾ Dowód podany w oryginale jest niezupełnie poprawny, został więc nieco zmodyfikowany.

ciąg liczb dodatnich malejących, taki, iż szereg $\sum_{p=1}^{\infty} \eta_p$ jest zbieżny. Wyznaczamy następnie ciąg:

$$f_1^{(1)}(x), f_1^{(1)}(x) \dots, f_n^{(1)}(x), \dots$$

w następujący sposób. Można znaleźć taką liczbę m_ρ , że

$$I_{m, n} = \int_a^b [f_m(x) - f_{m+n}(y)]^2 dx < \rho, \quad m > m_\rho.$$

Zbiór punktów x , dla których

$$|f_m(x) - f_{m+n}(x)| > \eta,$$

posiada dla każdego n miarę $\mu < \frac{\rho}{\eta^2}$; w istocie:

$$\mu \eta^2 < I_{m, n} < \rho.$$

Jeżeli więc położymy $\rho = \eta^3$, to będzie $\mu < \eta$. Znaczy to, że do każdej liczby $\eta > 0$ dobrać można liczbę m' tak, że miara zbioru, w którego punktach $|f_m(x) - f_{m+n}(x)| > \eta$, jest nie większa od η , jeżeli $m > m'$.

Oznaczmy przez m_k liczbę, odpowiadającą w ten sposób liczbie η_k . Połóżmy następnie: $f_1^{(1)}(x) = f_{m_1}(x)$; $f_k^{(1)}(x) =$ pierwszej funkcji ciągu (1), której wskaźnik jest większy zarówno od m_k , jak i od wskaźnika funkcji $f_{k-1}^{(1)}(x)$ ($k > 1$). Powiadam, że tak wybrany ciąg (2) rozwiązuje zagadnienie. Wystarczy w tym celu udowodnić, że do każdej pary liczb ϵ, δ dodatnich dobrać można takie m_0 , że zbiór punktów w których

$$|f_p^{(1)}(x) - f_q^{(1)}(x)| \leq \delta$$

posiada miarę niemniejszą niż $b - a - \epsilon$, jeżeli tylko p i q przekraczają liczbę m_0 . Połóżmy:

$$r_m = \sum_{p=n}^{\infty} \eta_p,$$

ponieważ $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0$, więc możemy dobrać m_0 tak, aby zachodziły nierówności:

$$r_{m_0} < \delta, \quad r_{m_0} < \epsilon.$$

Wyłączamy następnie z przedziału (ab) punkty, w których zachodzi jedna conajmniej z nierówności:

$$|f_{m_0+q}^{(1)}(x) - f_{m_0+q+1}^{(1)}(x)| > \eta_{m_0+q} \quad q=0, 1, 2 \dots$$

miara zbioru tych punktów nie przekracza liczby:

$$\eta_{m_0} + \eta_{m_0+1} + \dots = r_{m_0} < \varepsilon.$$

Zbiór więc I_ε , który pozostanie, ma miarę nie mniejszą niż $b - a - \delta$. Powiadam, że jeżeli $p, q \geq m_0$, wówczas w dowolnym punkcie tego zbioru jest:

$$|f_p^{(1)}(x) - f_q^{(1)}(x)| < \delta.$$

Istotnie, jeżeli przypuścimy, że $p < q$, wówczas

$$|f_p^{(1)}(x) - f_q^{(1)}(x)| \leq \sum_{s=0}^{q-p-1} |f_{p+s}^{(1)}(x) - f_{p+s+1}^{(1)}(x)|,$$

a więc, wobec określenia zbioru I_ε :

$$|f_p^{(1)}(x) - f_q^{(1)}(x)| \leq \sum_{s=0}^{q-p-1} \eta_{p+s} \leq r_p \leq r_{m_0} < \delta \quad (\text{c. b. d. o.})$$

Niechaj teraz będzie dany ciąg $\delta_1, \delta_2, \dots$, czyniący zadość warunkowi $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$, oraz zbieżny szereg o sumie λ : $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$. Do każdego δ_n i ε_n dobieramy odpowiednie m_0 i budujemy zbiór I_{ε_n} . Punkty, należące do wszystkich I_{ε_n} , tworzą zbiór, który oznaczymy przez K_λ , i którego miara jest nie mniejsza niż $b - a - \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = b - a - \lambda$. Oczywiście, ciąg (2) jest w punktach zbioru K_λ jednostajnie zbieżny do pewnej granicy $f(x)$, która jest określona w całym przedziale, prócz może zbioru punktów o mierze 0, gdyż λ jest dowolnie małe. Jest ona granicą ciągu (1) w sensie określenia b).

Przedewszystkiem $f(x)$ należy do Ω , gdyż¹⁾ dla $\varepsilon = \varepsilon_1$, np.:

$$\int_{I_\varepsilon} (f_n^{(1)}(x))^2 dx \leq 2 \int_{I_\varepsilon} (f_n^{(1)}(x) - f_{m_0}^{(1)}(x))^2 dx + 2 \int_{I_\varepsilon} (f_{m_0}^{(1)}(x))^2 dx$$

$$\leq 2\delta(b-a) + 2M.$$

¹⁾ Jeżeli $|a| \leq |b| + |c|$, to $|a^2| \leq 2|b^2| + 2|c^2|$.

Tembardziejziej więc

$$\int_{K_\lambda} (f_n^{(1)}(x))^2 dx \leq 2\delta(b-a) + 2M$$

ponieważ zaś w punktach zbioru $K_\lambda - f_n^{(1)}(x)$ jest jednostajnie zbieżne do $f(x)$, więc

$$\int_{K_\lambda} (f(x))^2 dx \leq 2\delta(b-a) + 2M$$

dla każdego λ . Istnieje więc $\lim_{\lambda=0} \int_{K_\lambda} (f(x))^2 dx$ i na mocy definicy

funkcyi $f(x)$ równa się $\int_a^b f^2(x) dx$. Tym sposobem $f(x)$ jest funkcją Ω .

Niech będzie dalej L_λ zbiór punktów, nie należących do K_λ . Jest wówczas

$$\lim_{\lambda=0} \int_{L_\lambda} f^2(x) dx = 0,$$

oraz, jeżeli m_0 jest stałe:

$$\lim_{\lambda=0} \int_{L_\lambda} [f_{m_0}^{(1)}(x)]^2 dx = 0,$$

a wskutek tego jak łatwo widzieć, że

$$\lim_{\lambda=0} \int_{L_\lambda} [f(x) - f_{m_0}^{(1)}(x)]^2 dx = 0.$$

Mamy dalej dla $m \geq m_0$:

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - f_m^{(1)}(x)]^2 dx &\leq \int_{K_\lambda} [f(x) - f_m^{(1)}(x)]^2 dx + 2 \int_{L_\lambda} [f(x) - f_{m_0}^{(1)}(x)]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_{L_\lambda} [f_{m_0}^{(1)}(x) - f_m^{(1)}(x)]^2 dx \\ &\leq \int_{K_\lambda} [f(x) - f_m^{(1)}(x)]^2 dx + 2 \int_{L_\lambda} [f(x) - f_{m_0}^{(1)}(x)]^2 dx \\ &\quad + 2 \int_a^b [f_m(x) - f_{m_0}^{(1)}(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Możemy tu dobrać nasamprzód m_0 tak aby 3-ci składnik był mniejszy od dowolnej naprzód danej liczby η , następnie λ , tak aby miało miejsce dla drugiego składnika, wreszcie m , tak aby i pierwszy składnik był $\leq \eta$. Wynika stąd natychmiast:

$$\lim_{m=0} \int_a^b [f(x) - f_m^{(1)}(x)]^2 dx = 0.$$

Mamy dalej:

$$\int_a^b [f(x) - f_p(x)]^2 dx \leq 2 \int_a^b [f(x) - f_p^{(1)}(x)]^2 dx + 2 \int_a^b [f_p^{(1)}(x) - f_p(x)]^2 dx.$$

Jeżeli teraz p nieograniczenie rośnie, wówczas obie całki po prawej stronie dążą do zera, a więc:

$$\lim_{p=\infty} \int_a^b [f(x) - f_p(x)]^2 dx = 0,$$

co dowodzi, że $f(x)$ jest istotnie granicą ciągu (1). Wreszcie jest ona jedyną jego granicą. Istotnie, przypuśćmy, że:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f(s) - f_n(s)]^2 ds = \lim_{n=\infty} \int_a^b [\varphi(s) - f_n(s)]^2 ds = 0,$$

wówczas będzie:

$$\begin{aligned} \lim_{n=\infty} \int_a^b [f(s) - \varphi(s)]^2 ds &\leq 2 \lim_{n=\infty} \int_a^b [f(s) - f_n(s)]^2 ds \\ &+ 2 \lim_{n=\infty} \int_a^b [\varphi(s) - f_n(s)]^2 ds = 0, \end{aligned}$$

a ponieważ lewa strona jest od n niezależna, więc:

$$\int_a^b [f(s) - \varphi(s)]^2 ds = 0;$$

t. zn. funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ mogą różnić się conajwyżej w punktach zbioru o mierze 0 c. b. d. o.

4. Twierdzenie Fischera-Riesz'a. Niechaj

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots \quad (3)$$

będzie układ zupełny funkcyj ortogonalnych, zaś:

$$f_1, f_2 \dots$$

stałe takie, że szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 \quad (4)$$

jest zbieżny.

Istnieje wtedy jedna i tylko jedna funkcya $f(x)$ całkowna wraz z kwadratem, której współczynnikami Fouriera względem funkcji ciągu (3) są liczby f_n . Zbieżność szeregu (4) jest warunkiem koniecznym i dostatecznym.

Ważne to twierdzenie udowodnili jednocześnie E. Fischer i F. Riesz¹⁾.

W twierdzeniu tem streszcza się w formie dogodnej do zastosowań znaczna część najnowszych badań nad teorią równań liniowych o nieskończenie wielu zmiennych.

Dowód wynika natychmiast z podanego w paragrafie poprzednim lematu. Weźmy pod uwagę ciąg:

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k(x), \quad n = 1, 2 \dots$$

Będzie wtedy:

$$\int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx = \sum_{k=n+1}^m f_k^2, \quad m > n,$$

a więc:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f_m(x)]^2 dx = 0.$$

Ciąg $f_n(x)$ jest więc przeciętnie zbieżny w przedziale (ab) i określa funkcję $f(x)$ w całym przedziale, prócz może punktów zbioru o mierze 0.

Jest to właśnie funkcya szukana. Aby to udowodnić, trzeba wykazać, że:

¹⁾ Fischer E. 1, Riesz F. 1, 2.

$$f_p = \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds.$$

Otóż mamy:

$$\left[\int_a^b [f(s) - f_n(s)] \varphi_p(s) ds \right]^2 \leq \int_a^b [f(s) - f_n(s)]^2 ds \int_a^b \varphi_p^2(s) ds < \varepsilon,$$

jeżeli n jest dostatecznie wielkie, a więc:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(s) \varphi_p(s) ds = \int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds,$$

Lecz, jeżeli $n > p$, to:

$$\int_a^b f_n(s) \varphi_p(s) ds = f_p,$$

ostatecznie więc:

$$\int_a^b f(s) \varphi_p(s) ds = f_p.$$

Istnieje zatem funkcja, której współczynnikami Fouriera względem ciągu (3) są liczby f_n . Wobec założeń naszych jest ona jedyną. Istotnie, gdyby istniała druga taka funkcja $\psi(x)$, wówczas różnica $f(x) - \psi(x)$ byłaby ortogonalna do wszystkich funkcji $\varphi_n(x)$, co jest niemożliwe, gdyż układ (3) jest zupełny.

5. Twierdzenie Schmidta o jądrach asymetrycznych. E. Schmidt podał w rozprawie doktorskiej uogólnienie swojego twierdzenia na przypadek jądra asymetrycznego.

Niechaj będzie $N(x, y)$ jądro asymetryczne, należące do zbioru Ω ; położmy:

$$\overline{N(x, y)} = \int_a^b N(s, x) N(s, y) ds$$

oraz

$$\underline{N(x, y)} = \int_a^b N(x, s) N(y, s) ds.$$

Oba te jądra są oczywiście symetryczne; są one także dodatnie; istotnie jest:

$$\int_a^b \overline{N}(x, y) h(x) h(y) dx dy = \int_a^b \left[\int_a^b N(s, x) h(x) dx \right]^2 ds;$$

to samo ma miejsce dla drugiego jądra $\underline{N}(x, y)$.

Wartości właściwe jąder $\overline{N}(x, y)$ i $\underline{N}(x, y)$ są więc dodatnie. Są one te same dla obu jąder. Istotnie niechaj λ_n^2 oznacza wartość właściwą jądra $\overline{N}(x, y)$, $\varphi_n(x)$ — zaś odpowiadające wartości tej rozwiązanie właściwe. Mamy:

$$\varphi_n(x) - \lambda_n^2 \int_a^b \overline{N}(x, t) \varphi_n(t) dt = 0. \quad (5)$$

Położmy

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b \underline{N}(x, t) \varphi_n(t) dt; \quad (6)$$

otrzymamy

$$\varphi_n(x) - \lambda_n \int_a^b \underline{N}(s, x) \psi_n(s) ds = 0, \quad (7)$$

co dowodzi, że $\psi_n(x)$ nie może być tożsamościowo zerem. Zastępujemy dalej w związku (6) $\varphi_n(x)$ przez prawą stronę równości (7); otrzymujemy:

$$\varphi_n(x) - \lambda_n^2 \int_a^b \underline{N}(x, s) \psi_n(s) ds = 0. \quad (8)$$

Jądro $\underline{N}(x, y)$ posiada więc również wartość właściwą λ_n^2 .

Z drugiej strony związek (6) daje:

$$\int_a^b \psi_n^2(s) ds = \lambda_n \int_a^b \underline{N}(s, t) \varphi_n(t) \psi_n(s) ds dt;$$

podobnie związek (7):

$$\int_a^b \varphi_n^2(s) ds = \lambda_n \int_a^b \underline{N}(s, t) \varphi_n(t) \psi_n(s) ds dt;$$

a więc:

$$\int_a^b \varphi_n^2(s) ds = \int_a^b \psi_n^2(s) ds = 1;$$

$\psi_n(x)$ jest zatem funkcją właściwą jądra $\overline{N}(x, y)$, należąca do wartości właściwej λ_n^2 . Tym sposobem doszliśmy do następującego wyniku:

a) Jądra symetryczne $\overline{N}(x, y)$ i $\underline{N}(x, y)$ mają te same wartości właściwe; te ostatnie są dodatnie; oznaczamy je przez λ_n^2 .

b) Jeżeli

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \dots$$

są funkcjami właściwymi jądra $\overline{N}(x, y)$, wówczas funkcjami właściwymi jądra $\underline{N}(x, y)$ będą:

$$\psi_1(x), \psi_2(x) \dots, \psi_n(x),$$

gdzie

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b \underline{N}(x, s) \varphi_n(s) ds.$$

Przechodzimy teraz do twierdzenia Schmidta:

Każda funkcja ciągła, mająca kształt (a) lub (b):

$$(a) \int_a^b \underline{N}(x, s) h(s) ds, \quad (b) \int_a^b \overline{N}(s, x) h(s) ds$$

jest rozwijalna na regularnie zbieżny szereg funkcji $\psi_n(x)$ lub $\varphi_n(x)$, zależnie od tego, czy jest kształtu (a), czy (b).

Udowodnimy pierwszą połowę tego twierdzenia; druga byłaby prostym powtórzeniem.

Spółczynnikiem Fouriera funkcji (a) względem $\psi_n(x)$ jest liczba:

$$\int_a^b \underline{N}(x, s) \psi_n(x) h(s) ds dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b h(s) \varphi_n(s) ds;$$

rozwińcie więc szukane będzie postaci:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(x)}{\lambda_n} \int_a^b h(s) \varphi_n(s) ds$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b N(x, s) \varphi_n(s) ds \int_a^b h(s) \varphi_n(s) ds.$$

Szereg ten jest regularnie zbieżny, co wynika z rozumowania analogicznego do tego, któreśmy stosowali przy twierdzeniu Hilberta-Schmidta.

Funkcja $S(x)$ ma jednak te same współczynniki Fouriera, co funkcja (a), będzie więc:

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds = S(x).$$

Twierdzenie to jest wielkiej wagi, gdyż daje ono rozwinięcia naszeręgi, postępujące według funkcji $\varphi_n(x)$ lub $\psi_n(x)$ dla obszerniejszej klasy funkcji niż twierdzenie Hilberta-Schmidta, zastosowane wprost do jąder $\underline{N}(x, y)$ lub $\overline{N}(x, y)$.

6. Twierdzenie E. Picarda. Równanie całkowe pierwszego gatunku

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds = f(x)$$

posiada jedno i tylko jedno rozwiązanie w zbiorze Ω , jeżeli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 f_n^2 \tag{9}$$

jest zbieżny. Zakłada się że jądro $N(x, y)$ jest domknięte. Warunek powyższy jest konieczny i dostateczny.

W tem sformułowaniu stałe λ_n^2 oznaczają wartości właściwe jądra $\underline{N}(x, y)$, zaś liczby f_n współczynniki Fouriera funkcji $f(x)$ względem funkcji właściwych jądra $\underline{N}(x, y)$.²⁾

¹⁾ E. Picard 5, 7.

²⁾ W przypadku jądra symetrycznego jest $\overline{N}(x, y) = \underline{N}(x, y) = N_1(x, y)$. Jądro iterowane, jak wiadomo, posiada, jako wartości właściwe, kwadraty wartości właściwych jądra $N(x, y)$. Te ostatnie są więc równe $\pm \lambda_n$. Funkcje właściwe jąder $N(x, y)$ i $N_1(x, y)$ są identyczne, można więc powiedzieć, że stałe f_n są współczynnikami Fouriera względem funkcji właściwych jądra $N(x, y)$.

By udowodnić nasze twierdzenie, obliczmy współczynnik f_n ; mamy

$$f_n = \int_a^b f(x) \psi_n(x) dx = \int_a^b \psi_n(x) N(x, s) h(s) ds dx = \frac{1}{\lambda_n} \int_a^b h(s) \varphi_n(s) ds,$$

a stąd:

$$\int_a^b h(s) \varphi_n(s) ds = \lambda_n f_n. \quad (10)$$

Otóż, według twierdzenia Fischera-Rieszsa, warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia jedyne go rozwiązania $h(x)$, czyniącego zadość równościom (10), jest zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} f_n^2$.

Tak określona funkcja $h(x)$ sprawdza istotnie nasze równanie całkowe. W samej rzeczy funkcje $\int_a^b N(x, s) h(s) ds$ i $f(x)$ mają, jak to z definicji $h(x)$ wynika, te same współczynniki Fouriera względem zupełnego układu $\psi_n(x)$: są więc one identyczne.

Uwaga. Jeżeli układ funkcyj $\psi_n(x)$ nie jest zupełny, wówczas rozumowanie nasze daje nam tylko związek:

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds = f(x) + K(x), \quad (11)$$

przyczem $K(x)$ jest funkcją ortogonalną do wszystkich $\psi_n(x)$. Żadne inne równanie typu:

$$\int_a^b N(x, s) h_1(s) ds = f(x) + K(x) + K_1(x), \quad (12)$$

gdzie $K_1(x)$ również oznacza funkcję ortogonalną do wszystkich $\psi_n(x)$, nie jest rozwiązalne w Ω . Istotnie, (11) i (12) pociągają za sobą:

$$\int_a^b N(x, s) [h(s) - h_1(s)] ds = K_1(x),$$

co jest niemożliwe.

Jeżeli więc jądro $N(x, y)$ nie jest domknięte, wówczas między równaniami

$$\int_a^b N(x, s) h(s) ds = f(x) + K(x),$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją nieortogonalną do układu $\psi_n(x)$, $K(x)$ zaś dowolną funkcją ortogonalną do wszystkich $\psi_n(x)$, jest jedno tylko rozwiązanie w Ω .¹⁾

¹⁾ Lauricella 1, 4.

CZEŚĆ TRZECIA.

RÓWNANIA OSOBLIWE.

1. Określenia; uwagi historyczne. Równanie całkowe nazywać będziemy osobliwym, jeżeli jedna conajmniej z granic całki określonej w skład jego wchodzącej jest nieskończona, albo też, jeżeli jądro staje się nieskończonem w jednym conajmniej punkcie przedziału całkowania.

Do równań osobliwych zaliczymy również równanie Volterry pierwszego gatunku, jeżeli $N(x, x) = 0$ w jednym conajmniej punkcie przedziału całkowania.

Z badań nad równaniem osobliwym Volterry wymienimy prace: V. Volterry, Holmgrena, Horna¹⁾ i Evansa²⁾.

Podobnie, pod wpływem prac D. Hilberta zbadane zostały równania osobliwe Fredholma, mianowicie przez Weyla³⁾, Hilba⁴⁾ i Plancherela⁵⁾.

W badaniach tych spotykamy nader ciekawe i rozmaite zjawiska analityczne; wymienimy tu najbardziej zasadnicze:

1) Wartości właściwe nie tworzą naogół zbioru przeliczalnego, odosobnionego. W przypadku jądra symetrycznego np. mogą one wypełniać odcinki na osi zmiennych rzeczywistych. Mówimy w tym przypadku, iż jądro posiada widmo odcinkowe.

2) Zamiast twierdzenia o rozwijaniu funkcji dowolnych na sze-

¹⁾ Horn J. 1.

²⁾ Evans G. 2.

³⁾ Weyl H. 1.

⁴⁾ Hilb E. 1.

⁵⁾ Plancherel M. 1.

reg Fouriera występuje twierdzenie o przedstawianiu funkcji przez całą Fouriera.

3) Analityczny charakter rozwiązania, rozpatrywanego jako funkcja parametru λ , zależy od prawej strony równania.

4) Przy szukaniu rozwiązań rzeczywistych wprowadzać należy najrozmaitsze warunki ograniczające.

Metody współczesne ograniczają się przeważnie do dziedziny rzeczywistej. Wydaje się jednak, iż przy badaniu równań osobliwych niezbędne będzie wprowadzenie zmiennych zespolonych. Zostało to już skutecznie dla równania Volterry. W przypadku równania Fredholma próbować można również tego uogólnienia: w kilku niedawno ogłoszonych notach wskazał Picard płodną drogę w tym nowym kierunku badań.

Omawiany tu dział teorii równań całkowych dopiero powstaje i, jak dotąd, nie ustalono jeszcze wyników bardzo ogólnych. Dlatego też, o ile chodzi o równania Fredholma, ograniczymy się do podania kilku przykładów oraz twierdzeń E. Picarda.

Obok równań osobliwych w ścisłym znaczeniu, zasługuje na uwagę ważna kategoria równań, których jądra mają kształt:

$$\frac{N(x, y)}{(x-y)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1$$

Równania te, przy pomocy pewnego fortelu rachunkowego, badać można uprzednio wyłożonymi metodami; mają one własności analogiczne do równań regularnych.

I. Równanie osobliwe Volterry.

Przypadek $N(0, 0) = 0$.

2. Twierdzenia Volterry i Holmgrena. Przypadek powyższy zbady został przez Volterrę i Holmgrena dla jąder analitycznych oraz ogólniej dla jąder typu:

$$\begin{aligned} N(x, y) &= A_0 x^n + A_1 x^{n-1} y + \dots + A_n y^n + x^{n+1} Q(x, y) \\ &= P(x, y) + x^{n+1} Q(x, y); \quad (A_0 + A_1 + \dots + A_n \neq 0). \end{aligned} \quad (1)$$

$Q(x, y)$ jest funkcją ograniczoną w przedziale całkowania. Oto twierdzenie Volterry, uzupełnione przez Holmgrena:

Na to, by równanie

$$\int_0^x N(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (2)$$

posiadało rozwiązania rzeczywiste, ograniczone w otoczeniu punktu zerowego, potrzeba i wystarcza, aby było

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0.$$

Pod tym warunkiem posiada równanie (2) $k+1$ liniowo niezależnych rozwiązań, przy czem k oznacza liczbę tych pierwiastków równania

$$\frac{A_0}{r+n} + \frac{A_1}{r+n-1} + \dots + \frac{A_n}{r+1} = 0, \quad (2')$$

których część rzeczywista jest nieujemna.

Celem udowodnienia tego twierdzenia użyjemy znowu metody przybliżeń kolejnych, sprowadzając nasze zagadnienie do rozwiązania przy pomocy tej metody równania różniczkowego rzędu n . Przedewszystkiem nadajemy jądro kształt.

$$a_0(x) + a_1(x) \frac{x-y}{1} + \dots + a_n(x) \frac{(x-y)^n}{n!} + \frac{(x-y)^{n+1}}{(n+1)!} P(x, y), \quad (1')$$

uważając $x-y$ zamiast y jako drugą zmienną niezależną. Ponieważ wyrazy najniższego stopnia tworzą jednorodny wielomian stopnia n -tego, więc $a_0(x)$ posiada czynnik x^n ; $a_0(x) = x^n \cdot b_0(x)$. Ogólniej $a_p(x)$ zawiera czynnik x^{n-p} . Przytem:

$$a_0(0) = A_0 + A_1 + \dots + A_n \neq 0,$$

co wynika z (1) i (1'), jeżeli położymy $x = y$.

Przy tych założeniach możemy równanie Volterry napisać w takiej formie:

$$\int_0^x \left[a_0(x) + a_1(x) \frac{(x-s)}{1} + \dots + a_n(x) \frac{(x-s)^n}{n!} \right] \varphi(s) ds + \int_0^x \frac{(x-s)^{n+1}}{(n+1)!} P(x, s) \varphi(s) ds = f(x).$$

Wystarczy teraz zastosować znany wzór:

$$\int_0^x \frac{(x-s)^p}{p!} \varphi(s) ds = \int_0^x \varphi(s) ds^{p+1}$$

i przyjmując za funkcję niewiadomą zamiast $\varphi(x)$ funkcję

$$z(x) = \int_0^x \varphi(s) ds^{n+1},$$

aby otrzymać równanie:

$$a_0(x) \frac{d^n z}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) z + \int_0^x P_1(x, s) z(s) ds = f(x) \quad (3)$$

Jeżeli rozwiązanie $\varphi(x)$ jest w punkcie zero ciągle i ograniczone, wówczas po lewej stronie równania (3) wyraz najniższego rzędu zawierać będzie x^{n+1} ; koniecznie więc być musi:

$$f(x) = x^{n+1} f_1(x).$$

Przy tem założeniu stosujemy metodę przybliżeń kolejnych, przy czem jako pierwsze równanie uważamy:

$$D(z_1) = a_0(x) \frac{d^n z_1}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} z_1}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) z_1 = f(x). \quad (4)$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe Fuchsa rzędu n , którego rozwiązaniem ogólnem będzie wyrażenie:

$$C_1 x^{r_1} P_1(x) + C_2 x^{r_2} P_2(x) + \dots + C_n x^{r_n} P_n(x) + Q_1(x), \quad P_i(0) \neq 0, \quad (5)$$

gdzie r_1, r_2, \dots, r_n są pierwiastki równania wyróżniającego; zakładamy na razie, iż są one odmienne od siebie, i ich różnice nie są liczbami całkowitemi; $Q_1(x)$ jest szczególnem rozwiązaniem równania niejednorodnego (4); można mu nadać zawsze kształt:

$$Q_1(x) = \sum_{i=1}^n x^{r_i} P_i(x) \int_{a_i}^x \frac{Q^{(i)}(x) f(x) dx}{x^{r_i+1}}. \quad Q^{(i)}(0) \neq 0 \quad (5')$$

Proste rozumowanie dowodzi, że, jeżeli tylko całki, występujące w tem wyrażeniu, mają sens, to jest ono ograni-

czony i ma kształt $x^{n+1}q(x)$. W istocie, wyrażenie pod znakiem całki w wyrazie ogólnym posiada rząd nieskończonostkowy równy conajmniej liczbie $R(n+1-r_i-1) = R(n-r_i)$. Jeżeli $R(n-r_i) > 1$, wówczas możemy wziąć $a_i = 0$; rząd nieskończonostkowy całki będzie równy conajmniej liczbie $R(n-r_i+1)$, cały więc wyraz będzie conajmniej rzędu $n+1$. Jeżeli natomiast $R(n-r_i) \leq -1$ wówczas granica dolna a_i musi być dodatnia, zresztą jednak dowolna. Rząd nieskończonostkowy odpowiedniego wyrazu jest w tym przypadku $\geq r_i$, ponieważ jednak $R(r_i) \geq n+1$, więc jest on conajmniej równy $n+1$.

W każdym więc razie wyrażenie (5') daje nam rozwiązanie równania (4), skończone i mające rząd nieskończonostkowy conajmniej równy $n+1$. Jeżeli stałe $a_i \neq 0$ są dowolne, wówczas wyrażenie (5') daje nam najogólniejsze rozwiązanie równania (4), skończone i będące względem x rzędu conajmniej równego $n+1$. Zawiera ona tyle stałych dowolnych, ile jest pierwiastków równania wyróżniającego, czyniących załość warunkowi $R(r_i) \geq n+1$.

Obecnie z łatwością możemy udowodnić regularną zbieżność przybliżeń kolejnych. Istotnie, w przedziale całkowania mamy:

$$|f(x)| < Mx^{n+1}, \quad |P_i(x)| < P_i, \quad |Q^{(i)}(x)| < Q_i.$$

Będzie wtedy:

$$x^{r_i} P_i(x) \int_{a_i}^x \frac{Q^{(i)}(x) f(x) dx}{x^{r_i+1}} \leq P_i Q_i M \frac{x^{n+1}}{|n-r_i+1|},$$

a więc, jeżeli oznaczymy przez ρ najmniejszą z liczb $|n-r_i+1|$ i po-

łożymy $\sum_{i=1}^n P_i Q_i = N$:

$$|z_1(x)| < \frac{NM}{\rho} x^{n+1}.$$

Drugie przybliżenie otrzymamy ze związku:

$$D(z_2) = - \int_0^x P_1(x, s) z(s) ds. \quad (6)$$

Zamiast z_2 weźmiemy znów wyrażenie (5'), w którym $f(x)$ zastąpimy przez prawą stronę równości (6). Wobec nierówności:

$$\left| \int_0^x P_1(x, s) z_1(s) ds \right| < p \frac{MNx^{n+2}}{\rho(n+2)}, \quad |P_1(x, y)| \leq p,$$

otrzymamy natychmiast:

$$|z_2| < p \frac{M^2 N^2}{\rho(\rho+1)} \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

Tak samo będzie:

$$|z_3| < p^2 \frac{M^3 N^3}{\rho(\rho+1)(\rho+2)} \cdot \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)}$$

.....

$$|z_q| < p^{q-1} \frac{M^q N^q}{\rho(\rho+1)\dots(\rho+q-1)} \cdot \frac{x^{n+q}}{(n+2)\dots(n+q)}.$$

Nierówności powyższe dowodzą regularnej zbieżności szeregu przybliżeń.

Rozwiązanie, któreśmy otrzymali, zawiera k stałych dowolnych a_i , przyczem k oznacza liczbę pierwiastków r_i , których część rzeczywista jest $\geq n+1$ to znaczących takich, dla których $R(n-r_i) \leq -1$.

3. Równanie wyróżniające. Pozostaje jedynie do udowodnienia, że równanie wyróżniające równania (4) powstaje z równania (2') przez wprowadzenie $r-n-1$ zamiast r . Zauważymy w tym celu, że równanie wyróżniające nie ulegnie zmianie, jeżeli współczynniki $a_i(x)$ zastąpimy przez ich pierwsze wyrazy. Wówczas jednak równanie (4) redukuje się (jeżeli $\varphi(x)$ będzie funkcją niewiadomą) do postaci:

$$\int_0^x [A_0 x^n + A_1 x^{n-1} s + \dots + A_n s^n] \varphi(s) ds = f(x),$$

którego równanie wyróżniające otrzymamy natychmiast, kładąc $\varphi(x) = x^r$, co daje:

$$\left[\frac{A_0}{r+1} + \dots + \frac{A_n}{r+n+1} \right] x^{n+r+1} = 0.$$

Związek

$$z(x) = \int_0^x \varphi(s) ds^{n+1}$$

dowodzi, że jeżeli $x^r = \varphi(x)$, wówczas $z(x) = \alpha x^{n+r+1}$, aby więc otrzymać równanie wyróżniające równania (4), trzeba w równaniu

$$\frac{A_0}{r+1} + \frac{A_1}{r+2} + \dots + \frac{A_n}{r+n+1} = 0$$

zastąpić r przez $r-n-1$. Oczywiście, można pozostać przy równaniu (2'), o ile się zastąpi warunek $R(r_i) \geq n+1$ przez warunek $R(r_i) \geq 0$. W ten sposób dochodzimy do warunku, który występuje w sformułowaniu Volterry i Holmgrena.

Uwagi. 1° Przypadek pierwiastków, równych r_i lub mających różnice całkowite, załatwia się w analogiczny sposób; wprowadzenie logarytmów zupełnie nie zmienia rzeczy.

2° Zagadnienie powyższe sprowadza się do znalezienia rozwiązań ograniczonych, w otoczeniu punktu zero na osi rzeczywistej, równania różniczkowego liniowego rzędu nieskończonego

$$a_0(x)y + a_1(x) \int_a^b y dx + \dots + a_n(x) \int_a^b y dx^n + \dots = f(x).$$

Jeżeli jądro jest wielomianem względem zmiennej s , wówczas równanie to będzie rzędu skończonego; natrafiamy wtedy na znane zagadnienie, którego uogólnieniem jest twierdzenie Volterry i Holmgrena.

Jądra osobliwe G .

4. Przypadek ogólny. Jądrem osobliwym G nazywać będziemy jądro kształtu:

$$\frac{G(x, y)}{(x-y)^\alpha}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Będziemy mówili, że jądro należy do wykładnika α , jeżeli $G(x, x) \neq 0$. Jądra powyższe spotykają się często w zastosowaniach; są one ciekawe z historycznego punktu widzenia, gdyż jądro, występujące w słynnym zagadnieniu Abela, jest właśnie tego typu.

Weźmy pod uwagę równanie pierwszego rodzaju:

$$\int_a^x \frac{G(x, s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s) ds = f(x). \quad (7)$$

Aby je rozwiązać, mnożymy obie strony przez $\frac{1}{(y-x)^{1-\alpha}}$ i całkujemy względem x , w granicach $0, y$; otrzymamy:

$$\int_0^y \frac{dx}{(y-x)^{1-\alpha}} \int_0^x \frac{G(x, s) \varphi(s) ds}{(x-s)^\alpha} = \int_0^y \frac{f(x) dx}{(y-x)^{1-\alpha}},$$

stąd zaś przez zastosowanie wzoru Dirichleta:

$$\int_0^y \varphi(s) ds \int_s^y \frac{G(x, s) dx}{(y-x)^{1-\alpha} (x-s)^\alpha} = \int_0^y \frac{f(x) dx}{(y-x)^{1-\alpha}}.$$

Położmy:

$$\int_y^x \frac{G(s, y) ds}{(x-s)^{1-\alpha} (s-y)^\alpha} = K(x, y) \quad (7a)$$

oraz

$$\int_0^x \frac{f(z) dz}{(x-z)^{1-\alpha}} = F(x),$$

a otrzymamy równanie

$$\int_0^y K(y, s) \varphi(s) ds = F(y). \quad (8)$$

Jestto równanie Volterry, którego jądro nie jest już nieskończone dla $x = y$. Istotnie, wykonajmy we wzorze (7a) podstawienie:

$$s - y = t(x - y);$$

otrzymamy natychmiast:

$$K(x, y) = \int_0^1 \frac{G(y + t(x - y), y) dt}{(1 - t)^{1-\alpha} t^\alpha},$$

co dowodzi, iż jądro $K(x, y)$ jest dla $x = y$ ograniczone.

Musimy teraz udowodnić, że odwrotnie, każde rozwiązanie równania (8) czyni zadość równaniu (7). Sprowadza się to do udowodnienia, że jedynym rozwiązaniem równania

$$\int_0^x \frac{h(s) ds}{(x-s)^{1-\alpha}} = 0$$

jest $h(x) \equiv 0$. Pomnóżmy równanie powyższe przez $\frac{1}{(y-x)^\alpha}$, zcałkujmy od 0 do y i zastosujmy wzór Dirichleta; otrzymamy:

$$\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \int_0^x h(s) ds = 0,$$

skąd wynika, że $h(x) \equiv 0$.

5. Zagadnienie Abela. Abel rozpatrywał równanie:

$$\int_0^x \frac{\varphi(s) ds}{(x-s)^\alpha} = f(x). \quad (0 < \alpha < 1)$$

Jest to przypadek szczególny jądra G , w którym $G(x, y) \equiv 1$.

Wzory nasze są w tym przypadku szczególnie proste. Będziemy mieli:

$$K(x, y) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi},$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(s) ds}{(x-s)^{1-\alpha}}.$$

Ponieważ $K_x'(x, y) \equiv 0$, więc rozwiązaniem zagadnienia Abela jest wzór: ¹⁾

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} F'(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s) ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \right].$$

Przypadek, gdy $\alpha = \infty$.

6. Badania współczesne nad zjawiskami nieanalitycznymi ²⁾ prowadzą do równania Volterry:

$$(e) \quad \varphi(x) + \int_x^\infty N(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (x \geq a)$$

Aby otrzymać przypadek szczególnie prosty, założymy, idąc za pracami G. C. Evansa ³⁾, że całka

$$\int_x^\infty |N(x, s)| ds \quad (9)$$

¹⁾ Goursat E. 1.

²⁾ P. Picard E., La science moderne et son état actuel.

³⁾ Evans G. 2.

istnieje i dąży do zera, gdy x dąży do nieskończoności. Stosując metodę przybliżeń kolejnych, udowodnić można, że, podobnie jak w przypadku równań regularnych, szereg przybliżeń jest zbieżny i granica jego jest jedynym ograniczonym rozwiązaniem równania (e), jeżeli tylko x jest dostatecznie duże, np. większe niż $b > a$.

Aby otrzymać rozwiązanie równania (e) w całym przedziale $(a, +\infty)$, można zastosować przedłużenie. Równanie powyższe możemy napisać w postaci:

$$\varphi(x) + \int_x^b N(x, s) \varphi(s) ds = f(x) - \int_b^\infty N(x, s) \varphi(s) ds. \quad (10)$$

$\varphi(x)$ jest określone w przedziale $(b, +\infty)$, lewa strona równania (10) jest tym sposobem wiadoma. Równanie to jest więc równaniem regularnym Volterry drugiego gatunku, z którego otrzymać można $\varphi(x)$ w przedziale (a, b) .

Jeżeli założymy jedynie istnienie całki (9) i wprowadzimy w równanie parametr λ przed znak całki, wówczas przybliżenia kolejne utworzą szereg zbieżny dla dostatecznie małych wartości λ . Rozwiązanie, rozważane jako funkcja parametru λ , jest tym sposobem holomorficzne w punkcie $\lambda = 0$. Dokładne zbadanie zależności rozwiązania od parametru λ byłoby bardzo ciekawe, gdyż równanie Volterry z jedną granicą nieskończoną jest jednym z najprostszych typów osobliwego równania całkowego.

II. Równania osobliwe Fredholma.

Jądra osobliwe G .

1. Składanie dwu jąder osobliwych G . Jądro, złożone z dwu jąder osobliwych G , należących do wykładników α i β , jest jądrem osobliwym G , należącym do wykładnika $\alpha + \beta - 1$.

Składamy jądra w przedziale (a, b) i zakładamy, że $\alpha + \beta - 1 > 0$, w razie przeciwnym jądro złożone nie jest już osobliwym.

Niech będzie:

$$P(x, y) = \frac{G_1(x, y)}{|x - y|^\alpha}, \quad Q(x, y) = \frac{G_2(x, y)}{|x - y|^\beta};$$

bierzemy pod uwagę jądro:

$$\int_a^b P(x, s) Q(s, y) ds = \int_a^b \frac{G_1(x, s) G_2(s, y)}{|x-s|^\alpha |s-y|^\beta} ds. \quad (11)$$

Przypuśćmy, że jest np. $y < x$; podzielimy przedział całkowania ab na trzy podprzedziały: ay , yx oraz xb ; oznaczymy odpowiadające tym podprzedziałom części składowe całki (11) przez I_1 , I_2 , I_3 odpowiednio.

Przedewszystkiem oszacujemy I_2 ; jest:

$$I_2 \leq \int_y^x \frac{|G_1(x, s)| |G_2(s, y)|}{|x-s|^\alpha |s-y|^\beta} ds \leq G^2 \int_y^x \frac{ds}{(x-s)^\alpha (s-y)^\beta}. \quad (12)$$

Jeżeli wykonamy zamianę zmiennych:

$$s = y + (x - y)t,$$

wówczas całka, występująca w ostatnim wyrazie nierówności (12), przybierze postać:

$$\frac{A_2}{(x-y)^{\alpha+\beta-1}}$$

przyczem:

$$A_2 = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^\beta}.$$

Mamy więc:

$$|I_1| \leq \frac{A_2 G^2}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}}.$$

Taki sam rachunek jednocześnie wykazuje, że:

$$|I_1| \leq \frac{A_1 G^2}{|x-y|^{\alpha+\beta-1}},$$

gdzie, kładąc $a_1 = \frac{a-y}{x-y}$ dla dowolnych wartości x i y położonych wewnątrz przedziału (ab) , mamy:

$$A_1 = \int_{a_1}^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^\beta} \leq \int_{-\infty}^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha t^\beta}.$$

Wobec założenia iż $\alpha + \beta > 1$, A_1 będzie skończone. Wreszcie analogiczne rozumowanie zastosować można do I_3 i A_3 .

Mamy więc:

$$\left| \int_a^b P(x, s) Q(s, y) ds \right| \leq \frac{G^2 (A_1 + A_2 + A_3)}{|x - y|^{\alpha + \beta - 1}},$$

co dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

8. Własności jąder iterowanych. 1° Jądro iterowane rzędu k jądra osobliwego G jest tej samej postaci i należy do wykładnika $(k + 1)\alpha - k$, jeżeli ten ostatni jest dodatni.

Istotnie, według twierdzenia poprzedzającego iteracja powiększa wykładnik o $\alpha - 1$; po k -krotnej iteracji wykładnik będzie tym sposobem równy liczbie:

$$\alpha + k(\alpha - 1) = (k + 1)\alpha - k.$$

2° Ciąg jąder iterowanych jądra osobliwego G zawiera tylko skończoną liczbę jąder osobliwych.

Jeżeli k jest pierwszą liczbą naturalną większą niż $\frac{\alpha}{1 - \alpha}$, wówczas jądro iterowane rzędu k nie jest już nieskończone dla $x = y$. Istotnie, jeżeli $k > \frac{\alpha}{1 - \alpha}$, wówczas $(k + 1)\alpha - k < 0$.

Możemy wynik powyższy przedstawić także w formie następującej. Weźmy pod uwagę ciąg ułamków kształtu $\frac{n}{n + 1}$; jeżeli $\frac{k}{k + 1}$ jest większe niż α , wówczas jądro iterowane rzędu k nie jest już nieskończone dla $x = y$.

9. Inny wzór na rozwiązanie równania Fredholma. Wzór Fredholma:

$$\mathfrak{R}(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)}$$

nie jest już stosowalny w przypadku jądra osobliwego G , gdyż jeden conajmniej ślad jądra G jest nieskończony. Otóż wzór: ¹⁾

$$-\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty} n_k \lambda^{k-1} \quad (13)$$

¹⁾ W rozdziale tym pisać będziemy równanie Fredholma ze znakiem — przed całką.

ności określone także i w przypadku takiego jądra G , dla którego $(k+1)\alpha - k < 0$; prócz tego wyrażenie

$$\frac{D_k(x, y; \lambda)}{D_k(\lambda)}$$

formalnie sprawdza równanie Fredholma.

Trzeba więc tylko udowodnić, że funkcje nasze są całkowite. W tym przypadku mielibyśmy:

$$\mathfrak{N}(x, y; \lambda) = \frac{D(x, y; \lambda)}{D(\lambda)} = \frac{D_k(x, y; \lambda)}{D_k(\lambda)};$$

jeżeli zaś uwzględnimy związek (15):

$$D_k(x, y; \lambda) = e^{\sum_{p=1}^k \frac{n_p \lambda^p}{p}} D(x, y; \lambda),$$

udowodnimy własność wymienioną dla $D_k(\lambda)$. Zauważymy w tym celu, że wzór (16) napisać możemy w postaci:

$$\begin{aligned} -\frac{D_k'(\lambda)}{D_k(\lambda)} &= \sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+1} \lambda^{pk} + \lambda \sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+2} \lambda^{pk} + \dots + \lambda^{k-1} \sum_{p=1}^{\infty} n_{pk+k} \lambda^{pk} \\ &= \Delta_1(\lambda^k) + \lambda \Delta_2(\lambda^k) \dots + \lambda^{k-1} \Delta_k(\lambda^k). \end{aligned} \quad (18)$$

Prawa strona wzoru (18) jest funkcją meromorficzną zmiennej λ . Istotnie, wyrażenie:

$$\mathfrak{N}_r(x, y; \lambda) = \sum_{p=1}^{\infty} N_{pk+r-1}(x, y) \lambda^{pk}$$

jest elementem analitycznym rozwiązania równania całkowego:

$$\mathfrak{N}_r(x, y; \lambda) = N_{k+r-1}(x, y) + \lambda^k \int_a^b N_k(x, s) \mathfrak{N}_r(s, y; \lambda) ds.$$

Jest to więc funkcja meromorficzna zmiennej λ , w zupełności określona wobec tego, że jądro $N_k(x, y)$ nie jest już osobliwe.

Z drugiej strony jednak:

$$\Delta_r(\lambda) = \lambda^k \int_a^b N_r(s, s) ds.$$

Funkcja $\Delta_r(\lambda)$ jest więc również funkcją meromorficzną zmiennej λ . To samo stosować się będzie do prawej strony wzoru (18), który jest sumą k funkcji meromorficznych. Z drugiej strony jest ona pochodną logarytmiczną funkcji $D_k(\lambda)$; ta ostatnia będzie więc funkcją całkowitą¹⁾.

10. Rząd funkcji $D_k(\lambda)$. Uogólnienie teorii Fredholma na jądra osobliwe G . Aby wyznaczyć rząd funkcji $D_k(\lambda)$, musimy przedewszystkiem udowodnić pewien wzór pomocniczy. Zastąpmy w związku:

$$\log D(\lambda) = - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_p \lambda^p}{p}$$

λ kolejno przez $\lambda, \alpha\lambda, \dots, \alpha^k\lambda$, oznaczając przez α jeden z pierwiastków pierwotnych równania $x^{k+1} = 1$. Dodajmy do siebie $k+1$ równości, które w ten sposób otrzymamy; będzie wtedy:

$$\log D(\lambda) D(\alpha\lambda) \dots D(\alpha^k\lambda) = - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{n_{(k+1)p} \lambda^{(k+1)p}}{p}. \quad (19)$$

Niechaj $D_k(\lambda)$ będzie wyznacznikiem jądra $N_k(x, y)$. Widzimy natychmiast, że prawa strona związku (19) jest równa funkcji $\log D_k(\lambda^{k+1})$. Przechodząc więc od logarytmów do samych funkcji, otrzymamy:

$$D(\lambda) \cdot D(\alpha\lambda) \dots D(\alpha^k\lambda) = D_k(\lambda^{k+1}).$$

Z drugiej strony ze związku (15) wynika natychmiast²⁾

$$D_k(\lambda), D_k(\alpha\lambda) \dots D_k(\alpha^k\lambda) = D(\lambda) \dots D(\alpha^k\lambda) = D_k(\lambda^{k+1}).$$

¹⁾ H. Poincaré 2, T. Lalesco 4

²⁾ Można przy pomocy tej samej metody wyprowadzić wzór analogiczny dla $\mathfrak{N}(x, y; \lambda)$; mamy.

$$\mathfrak{N}(x, y; \lambda) \cdot \mathfrak{N}(x, y; \alpha\lambda) \dots \mathfrak{N}(x, y; \alpha^k\lambda) = \mathfrak{N}_k(x, y; \lambda^{k+1}).$$

Stąd znów wynika analogiczny wzór na $D_k(x, y; \lambda)$.

Oznaczmy teraz przez m rząd funkcji $D_k(\lambda)$. Ponieważ funkcje $D_k(\alpha^k \lambda)$ są oczywiście tego samego rzędu, więc i iloczyn ich będzie rzędu m . Z drugiej strony związek, któryśmy tylko co ustalili, dowodzi, iż rząd powyższego iloczynu równa się rządowi funkcji $D_k(\lambda^{k+1})$, który, jak wiemy, jest nie większy niż $2k + 2$. Stąd wynika, że:

$$m \leq 2k + 2.$$

Rząd funkcji $D_k(\lambda)$ jest więc conajwyżej równy $2k+2$. Z wzoru

$$-\log D_k(\lambda) = \frac{n_{k+1} \lambda^{k+1}}{k+1} + \dots$$

możemy wyprowadzić twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby jądro osobliwe G o wykładnikach α i k nie miało wartości właściwych, jest znikanie wszystkich śladów jądra, począwszy od $2k+3$ -go.

Cała teoria jąder regularnych da się teraz przenieść na jądra osobliwe G .

Uwaga. W przypadku, gdy $\alpha \leq \frac{1}{2}$, możemy z łatwością usunąć wprost czynnik $e^{n_k \lambda}$ we wzorach Fredholma. Wystarczy zastąpić w każdym z wyznaczników $N \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \\ x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ i $N \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ y & x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ wyrazy stojące w przekątnej głównej przez zera.

Wytworna ta metoda podana została przez D. Hilberta²⁾. Jej uogólnienie wydaje się trudnem.

Równanie Fredholma w dziedzinie zespolonej.

11. Weźmy pod uwagę równanie

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = f(x),$$

przyczem założymy na początek, że $N(x, y)$ jest funkcją całkowitą obu zmiennych x i y .

¹⁾ Możemy tak nazwać jądro G o wykładniku α , jeżeli pierwszym jądrem iterowanym, które jest skończone dla $x = y$ jest jądro rzędu k .

²⁾ Hilbert 1. Erste Mitteilung.

Zamiast przedziału rzeczywistego (ab) , weźmiemy dowolną krzywą całkowania C_1 , przebiegającą między punktami a i b .

Rzecz jasna, że i w tym przypadku stosowalne będą wzory Fredholma pod warunkiem, że całki rzeczywiste zastąpimy wszędzie przez całki brane w dziedzinie zespolonej, wzdłuż krzywej C_1 . Tym sposobem otrzymamy funkcję zmiennej zespolonej, określoną we wszystkich punktach krzywej C_1 , którą oznaczmy ją przez

$$\varphi(x; a, b).$$

Będzie to funkcja jednoznaczna zmiennej x i parametrów a i b . Istotnie, całki, występujące we wzorze, określającym $\varphi(x; a, b)$, nie zależą od krzywej C_1 , jeżeli ustalimy punkty x, a i b , gdyż $N(x, y)$ jest funkcją całkowitą zmiennych funkcją x i y .

Ważna ta własność nie będzie miała miejsca, jeżeli jądro nie jest funkcją całkowitą. W tym przypadku $\varphi(x; a, b)$ będzie funkcją wieloznaczną; już ta okoliczność wskazuje na to, jak skomplikowane jest zagadnienie. Weźmy z E. Picardem¹⁾ najprostszy przykład jądra $N(x, y) = \frac{1}{x}$, t. zn. rozpatrzmy równanie całkowe

$$\varphi(x) - \int_{c_1} \frac{1}{x} \varphi(s) ds = f(x),$$

lub też

$$x\varphi(x) - \int_{c_1} \varphi(s) ds = xf(x).$$

Rozwiązanie otrzymujemy natychmiast, kładąc:

$$\int_{c_1} \varphi(s) ds = K;$$

otrzymamy:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{K}{x}.$$

Całkując obie strony wzdłuż krzywej C_1 , wyznaczyć możemy stałą K ; będzie mianowicie:

$$K = \int_{c_1} f(s) ds + K \int_{c_1} \frac{ds}{s},$$

¹⁾ E. Picard 11.

a stąd:

$$K = \frac{\int_{c_i} f(s) ds}{1 - \int_{c_i} \frac{ds}{s}};$$

mamy więc ostatecznie:

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{x} \frac{\int_{c_i} f(s) ds}{1 - \int_{c_i} \frac{ds}{s}}.$$

Jako końce a i b krzywej C_1 weźmy dwa punkty rzeczywiste a i b , z których jeden położony byłby na osi dodatniej, drugi na ujemnej. Jest rzeczą jasną, że $\varphi(x)$ jest funkcją wieloznaczną, gdyż

$$\int_{a,b} \frac{ds}{s} = \log \left| \frac{b}{a} \right| + 2n\pi i.$$

Tym sposobem wartość funkcji $\varphi(x)$ zależy od dowolnego całkowitego parametru n .

Droga całkowania nie może, rzecz prosta, przechodzić przez początek współrzędnych. Jeżeli więc chcemy się posuwać wzdłuż osi rzeczywistej, to musimy punkt ten okrążyć, albo też, według wskazówki Picarda, wykluczyć przedział $(-\varepsilon, \eta)$, a następnie przejść do granicy dla $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$ tak, aby stosunek $\frac{\varepsilon}{\eta}$ był stały; rozwiązanie będzie wtedy zależało od zupełnie dowolnego parametru.

12. Twierdzenie E. Picarda.¹⁾ Weźmy pod uwagę ogólniejszy przypadek jądra $\frac{1}{x} N(x, y)$, gdzie $N(x, y)$ oznacza funkcję całkowitą zmiennych x i y . Można udowodnić, że rozwiązanie odpowiadającego jądra temu równania Fredholma jest w dziedzinie zespolonej funkcją wieloznaczną, zależną liniowo od dowolnego parametru całkowitego.

W tym celu wystarczy udowodnić, że $D(x, y; \lambda)$ i $D(\lambda)$ są funk-

¹⁾ E. Picard 11, 13, 15.

cyami całkowitemi liniowemi jednego i tego samego całkowitego parametru n .

Zacznijmy od uwagi następującej:

Jeżeli jądro $N(x, y)$ posiada pochodną, spełniającą warunek Lipschitza, wówczas wyznacznik $N \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_p \\ x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix}$ jest podzielny przez:

$$\Delta^2 = \prod_{i, k=1}^p (x_i - x_k)^2. \quad i \neq k$$

Istotnie, zarówno wyznacznik powyższy, jak i pierwsza jego pochodna względem x_i znikają dla $x_i = x_k$.

Weźmy teraz wyrażenie

$$\int_{C_1} \frac{1}{s_1, s_2, \dots, s_p} N \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p. \quad (20)$$

Residuum tej całki względem zmiennej s_1 jest:

$$R_p = \int_{C_1} \frac{1}{s_2 \dots s_p} N \begin{pmatrix} 0, s_2, \dots, s_p \\ 0, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix} ds_2 \dots ds_p.$$

Na skutek wyżej wymienionej właściwości wyrażenie:

$$N \begin{pmatrix} 0, s_2, \dots, s_p \\ 0, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix}$$

jest podzielne przez $s_2^2 s_3^2 \dots s_p^2$. Residuum R_p jest więc funkcją jednoznaczną, która już nie zależy od wspólnej dla wszystkich zmiennych s_1, s_2, \dots, s_p drogi całkowania C_1 . Ponieważ z drugiej strony funkcja

$$\frac{1}{s_1 s_2 \dots s_p} N \begin{pmatrix} s_1, s_2, \dots, s_p \\ s_1, s_2, \dots, s_p \end{pmatrix}$$

jest symetryczna względem zmiennych s_1, s_2, \dots, s_p , więc przy jednokrotnym okrążeniu początku spólrzędnych w kierunku dodatnim, wyrażenie (20) wzrośnie o $p = 2\pi i R_p$. Wskutek tego będziemy mieli w dziedzinie zespolonej:

$$D(\lambda) = D_1(\lambda) + 2\pi i n \lambda D_2(\lambda),$$

kładąc:

$$D_2(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_{c_1} \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_p} N \begin{pmatrix} 0, s_1 s_2 \dots s_p \\ 0, s_1 s_2 \dots s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p.$$

Funkcye $D_1(\lambda)$ i $D_2(\lambda)$ są całkowite. Podobnie będziemy mieli jednocześnie:

$$D(x, y; \lambda) = D_1(x, y; \lambda) + 2\pi i n \lambda D_2(x, y; \lambda),$$

gdzie:

$$D_2(x, y; \lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_{c_1} \frac{1}{s_1 s_2 \dots s_p} N \begin{pmatrix} x & 0 & s_1 & s_2 & \dots & s_p \\ y & 0 & s_1 & s_2 & \dots & s_p \end{pmatrix} ds_1 ds_2 \dots ds_p.$$

Twierdzenie nasze jest tym sposobem udowodnione.

Przykłady rozmaite.

13. Na zakończenie niniejszego rozdziału podajemy dwa typowe przykłady, które bardzo dobrze unaocniają nowe zjawiska, występujące w przypadku osobliwego równania Fredholma. Zamieszczamy również ważną uwagę Picarda, która wskazuje na to, że w przypadku tym analityczny charakter rozwiązania, jako funkcji parametru λ , zależy od wolnego wyrazu równania.

14. Przykład widma odcinkowego. Weźmy pod uwagę równanie całkowe;

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s) ds = f(x) \quad (21)$$

i szukajmy warunku na to, aby równanie jednorodne

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s) ds = 0 \quad (22)$$

miało rozwiązania. W tym celu zróżniczkujmy dwukrotnie równanie (21); otrzymamy:

$$\varphi'(x) + \lambda e^{-x} \int_0^x e^s \varphi(s) ds - \lambda e^x \int_x^{\infty} e^{-s} \varphi(s) ds = f'(x), \quad (23)$$

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1) \varphi(x) = f''(x) - f(x). \quad (24)$$

Każde więc rozwiązanie równania (22) spełniać musi równanie:

$$\varphi''(x) + (2\lambda - 1)\varphi(x) = 0. \quad (25)$$

Odwrotnie: od równania (24) przejść można do (21), całkując dwukrotnie; aby stałe całkowania zniknęły, trzeba by było:

$$\varphi'(0) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-s} \varphi(s) ds = f'(0), \quad (26)$$

$$\varphi(0) - \lambda \int_0^{\infty} e^{-s} \varphi(s) ds = f(0).$$

Związki te otrzymujemy, kładąc $x = 0$ w równaniach (23) i (21). Każde więc rozwiązanie równania (25), czyniące zadość warunkom:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-s} \varphi(s) ds, \quad (27)$$

będzie również rozwiązaniem równania całkowego (22). Musimy teraz rozróżnić dwa przypadki, zależnie od znaku liczby $2\lambda - 1$.

a) Przypuśćmy nasamprzód, że jest:

$$2\lambda - 1 = \mu^2,$$

to znaczy:

$$\frac{1}{2} < \lambda < \infty.$$

Rozwiązaniem równania (25), sprawdzającym warunki (27), jest wtedy, jak to łatwy rachunek wykazuje, funkcja

$$C \cdot (\sin \mu x + \mu \cos \mu x), \quad (28)$$

C — stała dowolna.

b) Jeżeli teraz $1 - 2\lambda = \mu^2$, wówczas koniecznym warunkiem istnienia całki równania (27) jest nierówność $\mu < 1$, to znaczy:

$$0 < \lambda < \frac{1}{2}.$$

Rozwiązaniem jest w tym przypadku funkcja:

$$\operatorname{sh} \mu x + \mu \operatorname{ch} \mu x.$$

Rozwiązanie (28) jest ograniczone dla wszystkich wartości x , rozwiązanie (29) natomiast rośnie nieograniczenie wraz ze zmienną x . Mamy więc wynik następujący:

Równanie całkowe (21) ma widmo ciągłe, rozciągające się od zera do nieskończoności. Dla każdej wartości λ , zawartej między 0 a $\frac{1}{2}$, równanie jednorodne posiada jedno tylko rozwiązanie, które nieograniczenie rośnie wraz z x ; dla wartości zaś λ , zawartych między $\frac{1}{2}$ i $+\infty$, równanie jednorodne posiada jedno jedyne rozwiązanie, ograniczone w całym przedziale od 0 do $+\infty$.

15. Uwaga E. Picarda.¹⁾ Przejdźmy teraz do niejednorodnego równania (21). Każde rozwiązanie równania (21) czyni zadość równaniu różniczkowemu (24); odwrotnie każde rozwiązanie równania (24), spełniające warunki (26), będzie rozwiązaniem równania całkowego (21). Warunkom (27) możemy nadać postać:

$$\varphi'(0) - f'(0) = \varphi(0) - f(0) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-s} \varphi(s) ds. \quad (30)$$

Picard wykazał, że analityczny charakter rozwiązania równania całkowego (21) nie jest już tak prosty jak w przypadku regularnym, ale w sposób istotny zależy od wolnego wyrazu równania.

Położmy nasamprzód:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx;$$

przyczem stałe A_n mają być takie, aby szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n$ był bezwzględnie zbieżny. Jeżeli położymy

$$\varphi(x) = \sum a_n \sin nx,$$

wówczas z równania (24) otrzymamy natychmiast

$$a_n = A_n \frac{n^2 + 1}{n^2 + 1 - 2\lambda}.$$

Ogólne rozwiązanie równania (24) będzie przy powyższych założeniach postaci

¹⁾ E. Picard 10, 12, 14.

$$A \sin \mu x + B \cos \mu x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n^2 + 1}{n^2 - \mu^2} \sin nx.$$

Warunki (30) pozwolą nam wyznaczyć A i B ; dają one natychmiast:

$$B = A\mu + (1 + \mu^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n A_n}{n^2 - \mu^2}.$$

Rozwiązanie ogólne jest więc funkcją, mającą jeden punkt osobliwy istotny $\lambda = \frac{1}{2}$, oraz bieguny $\lambda = \frac{n^2 + 1}{2}$.

Weźmy teraz drugi przykład E. Picarda:

$$f(x) = \int_0^{\infty} h(s) \sin(xs) ds,$$

przyczem $h(x)$ ma być funkcją, dla której istnieje całka:

$$\int_0^{\infty} h(s) s^2 ds.$$

Kładąc

$$\varphi(x) = \int_0^{\infty} h(s) \psi(s) \sin(xs) ds,$$

otrzymujemy ze związku (24):

$$\psi(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 1 - 2\lambda}.$$

Rozwiązanie więc ogólne będzie miało w przypadku a postać:

$$\varphi(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x + \int_0^{\infty} \frac{s^2 + 1}{s^2 - \mu^2} h(s) \sin(xs) ds.$$

Warunki (30) dają:

$$B = A\mu + (1 + \mu^2) \int_0^{\infty} \frac{s h(s) ds}{s^2 - \mu^2}.$$

Rozwiązanie więc ma kształt:

$$\varphi(x) = A(\sin \mu x + \mu \cos \mu x) + \int_0^{\infty} \frac{s^2 + 1}{s^2 - \mu^2} h(s) \sin(xs) ds$$

$$+ (1 + \mu^2) \int_0^{\infty} h(s) \frac{s ds}{s^2 - \mu^2}.$$

Jeżeli $h(x)$ nie jest funkcją analityczną, $\varphi(x)$ będzie miało, jako linię osobliwą, odcinek $(\frac{1}{2}, \infty)$.

16. Przykład jądra Fouriera. Można ¹⁾ nazwać tak jądra, które mają wartości właściwe o nieskończenie wielu funkcjach właściwych. Wiadomo, że okoliczność ta nie może mieć miejsca w przypadku równania regularnego. Oto bardzo prosty przykład takiej osobliwości.

Weźmy pod uwagę równanie całkowe:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{\infty} \sin(xs) \varphi(s) ds = f(x). \quad (31)$$

Mamy:

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2 + s^2} \right) \sin(xs) ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-as} \sin(xs) ds$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{s \sin(xs) ds}{a^2 + s^2}, \quad (a > 0)$$

albo też, wobec tego, że:

$$\int_0^{\infty} e^{-as} \sin(xs) ds = \frac{x}{a^2 + x^2}$$

oraz

$$\int_0^{\infty} \frac{s \sin(xs) ds}{a^2 + s^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ax};$$

będziemy mieli:

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-as} + \frac{s}{a^2 + s^2} \right) \sin(xs) ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{a^2 + x^2}{x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax} \right];$$

¹⁾ H. Weyl 1.

co dowodzi, iż równanie (31) bez wolnego wyrazu posiada wartość właściwą $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, do której należy nieskończenie wiele funkcyj właściwych:

$$\frac{a^2 + x^2}{x} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax}. \quad a > 0$$

Analogiczny rachunek wykazuje, że równanie (31) posiada również wartość właściwą $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, której odpowiadają funkcje właściwe:

$$\frac{x}{a^2 + x^2} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ax}. \quad a > 0.$$

III. Równania całkowe wyższego rzędu.

17. Określenia, uwagi historyczne. W dwojaki sposób przejść można do bardziej ogólnych równań Volterry i Fredholma:

1) Funkcja niewiadoma występować może w równaniu w potęgach rzędu wyższego niż pierwsza, np.

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi^p(s) ds = f(x).$$

Są to równania całkowe nieliniowe.

2) Funkcja niewiadoma może występować w potęgach iterowanych rzędu wyższego niż pierwszy, np.

$$\varphi(x, y) + \lambda \int_a^b N(x, s) \varphi(s, y) ds + \mu \int_a^b N(x, s) \varphi_1(s, y) ds = f(x, y),$$

przyczem iterowaną potęgą n -tego rzędu nazywamy wyrażenie:

$$\varphi_n(x, y) = \int_a^b \varphi(x, s_1) \varphi(s_1, s_2) \dots \varphi(s_{n-1}, y) ds_1 \dots ds_{n-1}.$$

Obie te kategorie równań badano z formalnego punktu widzenia; wynikiem zasadniczym wszystkich tych badań jest ciekawa analogia z teorią funkcyj analitycznych, pojawiająca się w razie, gdy występujące w równaniach całkowych działania funkcyjne są analityczne.

Pierwsza kategoria równań powyższych rozpatrywana była przez E. Schmidta ¹⁾. Równania te mogą być użyteczne w teorii nieliniowych równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych.

Jednakowoż druga kategoria równań wyższego rzędu, rozpatrywana z bardzo ogólnego punktu widzenia przez M. Volterrę, ²⁾ przedstawia szerokie pole do nowych dociekań i jest szczególnie ciekawa zarówno ze względu na wytworność metod, jak i na możliwość zastosowań do badania zjawisk nieanalitycznych.

I tutaj ograniczymy się do wskazówek ogólnych.

Równania nieliniowe.

18. Równanie Volterry. Weźmy równanie nieliniowe Volterry:

$$\varphi(x) + \int_0^x F[x, s, \varphi(s)] ds = f(x). \quad (32)$$

Zrobimy następujące ogólne założenia:

1) W obszarze $|x|$ i $|y| < a$, $|z| < b$ funkcja $F(x, y, z)$ jest ciągła i ograniczona (górną kres jej wartości bezwzględnych oznaczmy przez m) i sprawdza względem zmiennej z warunek Lipschitza:

$$|F(x, y, z_1) - F(x, y, z_2)| \leq a |z_1 - z_2|.$$

2) Funkcja $f(x)$ znika dla $x=0$; niechaj $|x| < a'$ będzie przedział, w którym $|f(x)| < b$. Funkcja ta spełnia również warunek Lipschitza

$$|f(x) - f(y)| < k |x - y|.$$

Możemy w tych warunkach otrzymać rozwiązanie równania (32) metodą przybliżeń kolejnych, kładąc:

$$\varphi_0(x) = f(x),$$

a dla $n > 0$.

$$\varphi_n(x) + \int_0^x F[x, s, \varphi_{n-1}(s)] ds = f(x). \quad (33)$$

Drugie przybliżenie jest dane przez wzór:

¹⁾ E. Schmidt 2.

²⁾ Volterra 5, 6, 7, 8, 9, 10, Sinigaglia 2, Lauricella 3, 4, 5, 6, Amoroso 2, 3, Picone 1, Fubini 3.

$$\varphi_1(x) = f(x) - \int_0^x F(x, s, f(s)) ds,$$

przyczem z założeń naszych wynika, że w przedziale $|x| < a'$ będzie

$$|\varphi_1(x)| < (k + m)x.$$

Aby więc było

$$|\varphi_1(x)| < b,$$

wystarczy, by

$$|x| < \frac{b}{k + m}.$$

Jeżeli więc h oznacza najmniejszą z liczb $a, a', \frac{b}{k + m}$, wówczas w przedziale $|x| < h$ będzie napewno dla każdego n :

$$|\varphi_n(x)| < b$$

wszystkie więc przybliżenia będą zupełnie określone.

Aby z kolei udowodnić zbieżność przybliżeń, wystarczy rozważyć związek:

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) + \int_0^x \{F[x, s, \varphi_{n-1}(s)] - F[x, s, \varphi_{n-2}(s)]\} ds = 0,$$

z którego wynika natychmiast:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < a \int_0^x |\varphi_{n-1}(s) - \varphi_{n-2}(s)| ds$$

przyczem:

$$|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| < mx.$$

Wobec tego:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| < \frac{m(a)^{n-1}x^n}{n!},$$

co dowodzi; że funkcya:

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^n [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] \quad (33')$$

dąży do granicy $\varphi(x)$, która, na mocy związku (33), jest szukanym rozwiązaniem naszego równania.

Uwagi. 1^o Dowód powyższy stanowi uogólnienie dowodu, podanego przez E. Picarda dla równania różniczkowego:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

To ostatnie równanie można zresztą zastąpić przez równanie całkowe:

$$y(x) - \int_0^x F(s, y(s)) ds = C;$$

wtedy z wyniku przez nas uzyskanego natychmiast wypływa twierdzenie E. Picarda, jako przypadek szczególny.

2^o. Można się uwolnić od założenia $f(0)=0$, jeżeli $|f(0)|=|l|<b$. Jako pierwsze przybliżenie bierzemy w tym przypadku

$$\varphi_0(x) = f(x) - f(0),$$

przyczem $\frac{b}{m+k}$ zastąpić należy przez $\frac{b - |l|}{m+k}$ ¹⁾.

19. Równanie Fredholma. Weźmy pod uwagę nieliniowe równanie Fredholma:

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b F(x, s, \varphi(s)) ds = f(x) \quad (34)$$

przy założeniach analogicznych do tych, które zrobiliśmy w poprzedzającym paragrafie.

Założenia te są następujące:

1) Funkcja $F(x, y, z)$ jest dla $x \leq a, y \leq b, |z| < \rho$ ciągła i bezwzględnie $< m$; prócz tego spełnia ona warunek Lipschitza względem zmiennej z :

$$|F(x, y, z_1) - F(x, y, z_2)| \leq k |z_1 - z_2|.$$

2) W przedziale (a, b) jest $|f(x)| < f$.

W tych warunkach możemy znów zastosować metodę przybliżeń kolejnych. Rozumowanie analogiczne do poprzedniego wykazuje, że, jeżeli

$$|\lambda| \leq \frac{\rho - f}{m(b-a)},$$

¹⁾ Odnośnie do układów równań nieliniowych por. Cotton E. 1, Picone M. 2, 3.

to wszystkie przybliżenia będą w zupełności określone. Będzie dalej:

$$|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)| \leq m |\lambda|^n k^n (b-a)^n.$$

Jeżeli tedy

$$|\lambda| < \frac{1}{k(b-a)},$$

to szereg przybliżeń jest jednostajnie zbieżny do granicy, która jest właśnie szukanym rozwiązaniem.

Mamy więc wynik następujący:

Równanie (34) ma jedno i tylko jedno rozwiązanie, jeżeli $|\lambda|$ jest dostatecznie małe.

Uwaga. Zamiast metody przybliżeń kolejnych można użyć metody funkcji wyższających. Próbowemy mianowicie zadośćuczynić równaniu (34), kładąc:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \lambda^k.$$

Spółczynniki dadzą się obliczyć z łatwością; zbieżność szeregu i jednoznaczność rozwiązania wynikają stąd, że równanie

$$\varphi(x) + \lambda F(x, x, \varphi(x)) = f(x)$$

posiada jedno i tylko rozwiązanie, znikające dla $\lambda = 0$. Ogólniej możemy zastosować metodę powyższą do równania:

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b N_m(x, s_1, s_2, \dots, s_m) \\ \varphi(s_1)^{\alpha_1} \varphi(s_2)^{\alpha_2} \dots \varphi(s_m)^{\alpha_m} ds_1 \dots ds_m = f(x), \end{aligned} \quad (35)$$

lub do jeszcze ogólniejszego równania:

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m \int_a^b N(x, s_1, s_2, \dots, s_m) \\ F_m(\varphi(s_1), \varphi(s_2), \dots, \varphi(s_m)) ds_1 ds_2 \dots ds_m = f(x). \end{aligned} \quad (36)$$

8. Badania Schmidta. W badaniach swoich nad równaniami nieliniowymi E. Schmidt rozważa następujące równanie:

$$\varphi(x) + \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds \quad (37)$$

$$+ \sum_a^b \int N(x, s_1, s_2 \dots s_m) \varphi(s_1)^{\alpha_1} h(s_2)^{\beta_2} \dots \varphi(s_m)^{\alpha_m} h(s_m)^{\beta_m} ds_1 ds_2 \dots ds_m = 0,$$

przyczem suma rozciągnięta jest na wszystkie wartości α_i , β_i , dla których jeden conajmniej z wykładników α_i , β_i jest różny od zera. Funkcją niewiadomą jest $\varphi(x)$.

Z punktu widzenia, na którym stoi Schmidt, równanie powyższe równoważne jest równaniu (35) pod warunkiem, że po lewej stronie tego ostatniego wprowadzimy wyraz

$$\int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds.$$

Celem rozwiązania równania (37) musimy rozróżnić dwa przypadki, zależnie od tego, czy równanie

$$\varphi(x) + \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds \quad (38)$$

posiada rozwiązania różne od zera, czy też nie. W drugim przypadku stosujemy do równania (37), napisanego w kształcie:

$$\varphi(x) + \int_a^b N(x, s) \varphi(s) ds = F(x), \quad (39)$$

pierwsze twierdzenie Fredholma; otrzymujemy wtedy równanie kształtu (35); tym sposobem powracamy do przypadku już rozpatrzonego.

Rozważmy z kolei pierwszy przypadek i przypuśćmy, że równanie (38) posiada jedno tylko rozwiązanie $\varphi_1(x)$. Rozwiązaniem równania (39) będzie wtedy funkcja:

$$\varphi(x) = F(x) - \int_a^b \mathfrak{N}(x, s) F(s) ds + a \varphi_1(x), \quad (40)$$

gdzie a jest stałą dowolną, pod warunkiem, że

$$\int_a^b F(s) \varphi_1(s) ds = 0. \quad (41)$$

Wyrugowanie funkcji $\varphi(x)$ z równań (40) i (41) jest możliwe, gdyż równanie (40) jest typu (35). Otrzymujemy tą drogą analityczne równanie dla stałej a ; liczba rozwiązań równania (37) zależy więc w sposób istotny od natury tego równania. Wynik ten jest zupełnie równoważny rezultatowi badań Schmidta, który nazywa równanie dla a równaniem rozgałęzienia.¹⁾

Metoda, którą wyłożyliśmy, stosuje się oczywiście bez trudności i w przypadku ogólnym.

Równania wyższego rzędu iteracyjnego.

Funkcje przemienne; ich własności. Funkcje $A(x, y)$ i $B(x, y)$ nazywamy zmiennymi w przedziale xy^2 , jeżeli:

$$AB = \int_x^y A(x, s) B(s, y) ds = \int_x^y B(x, s) A(s, y) ds = BA.$$

Wyrażenie $AB = BA$ nazywamy iloczynem złożonym funkcji A i B . Można ustalić następujące własności tego pojęcia.

a) Każda funkcja jest zmienna ze sobą. Własność ta jest oczywista. Wyrażenie

$$\int_x^y A(x, s) A(s, y) ds = A_2(x, y)$$

nazywamy kwadratem złożonym lub drugą potęgą iterowaną funkcji $A(x, y)$.

b) Nazwijmy iterowaną potęgą n -tego rzędu wyrażenie, określone przez wzór zwrotny

$$A_n(x, y) = \int_x^y A_1(x, s) A_{n-1}(s, y) ds.$$

¹⁾ Lèvy P. I, Bratu G. I.

²⁾ Zmiennymi pierwszego gatunku, według Volterry.

Iterowane potęgi m -tego i n -tego rzędu funkcji $A(x, y)$ są przemienne; ich iloczyn złożony równa się $(m+n)$ -ej iterowanej potędze funkcji $A(x, y)$.

Aby twierdzenie to udowodnić, wystarczy rozważyć przypadek $m=1, n=2$, t. zn. ustalić związek

$$\int_x^y A_1(x, s) A_2(s, y) ds = \int_x^y A_2(x, s) A_1(s, y) ds,$$

następnie zaś zastosować indukcję zupełną.

Mamy:

$$\begin{aligned} \int_x^y A_1(x, s) A_2(s, y) ds &= \int_x^y A_1(x, s) \int_x^y A_1(s, t) A_1(t, y) dt \\ &= \int_x^y A_1(t, y) \int_x^t A_1(x, s) A_1(s, t) ds = \int_x^y A_2(x, t) A_1(t, y); \end{aligned}$$

otrzymujemy ten wynik przez proste zastosowanie wzoru Dirichleta¹⁾.

Jest więc ogólnie:

$$A_{m+n}(x, y) = \int_x^y A_m(x, s) A_n(s, y) ds.$$

c) Sumy funkcji parami zmiennych są przemienne; iloczyn złożony otrzymujemy, stosując, jak w mnożeniu zwykłym, prawo rozdzielności.

Załóżmy, iż funkcje $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y)$ są między sobą przemienne, i połączmy:

$$P(x, y) = A(x, y) + B(x, y),$$

$$Q(x, y) = C(x, y) + D(x, y).$$

Jest wtedy:

$$\begin{aligned} \int_x^y P(x, s) Q(s, y) ds &= \int_x^y [A(x, s) + B(x, s)] [C(s, y) + D(s, y)] ds \\ &= AC + AD + BC + BD \\ &= CA + CB + DA + DB = \int_x^y Q(x, s) P(s, y) ds \end{aligned}$$

c. b. d. o.

¹⁾ Por. str. 10.

21. Ciało całkowite. Twierdzenie zasadnicze. Można powyższe własności streścić i przedstawić w formie następującej.

Założmy, że mamy n funkcji $A(x, y), B(x, y) \dots L(x, y)$, określonych w przedziale ab i przemiennych w przedziale xy . Zastosujmy do nich działania dodawania oraz mnożenia złożonego skończoną liczbę razy w porządku dowolnym. Wszystkie funkcje, które w ten sposób otrzymać można, tworzą ciało K ; funkcje $A(x, y) \dots L(x, y)$ tworzą podstawę tego ciała. Weźmy jednocześnie pod uwagę ciało k wszystkich wielomianów n zmiennych $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ bez wolnego wyrazu o dowolnych współczynnikach liczbowych. Można między ciałami k i K ustanowić odpowiedniość jedno jednoznaczna w następujący sposób: przyporządkujmy każdej funkcji, należącej do podstawy ciała K , zmienną ciała k ; mnożeniu złożonemu w K , niech odpowiada zwyczajne mnożenie w k , dodawanie wreszcie niech odpowiada samemu sobie.

Rozszerzamy teraz ciało k , dołączając doń zbieżne szeregi potęgowe zmiennych $\alpha, \beta, \dots, \lambda$, znikające w punkcie $\alpha = \beta = \gamma = \dots = \lambda = 0$. Na mocy wyżej ustalonej odpowiedniości otrzymamy w ciele K szeregi funkcji przemiennych. Szeregi te będą, wobec oczywistej nierówności

$$|P_n(x, y)| \leq \frac{P^n |x - y|^n}{n!}, \quad |P(x, y)| \leq P$$

regularnie zbieżne w przedziale ab . Jest rzeczą oczywistą, iż szeregi te mają własności a), b), c), i możemy je wskutek tego włączyć do ciała K .

Tak uzupełnione ciało nazwać możemy całkowitem ciałem całkowitem o podstawie $A(x, y), \dots, L(x, y)$.

Niech będzie teraz dany dowolny związek analityczny:

$$f(\alpha, \beta, \dots, \lambda) = 0, \quad f(0, 0 \dots 0) = 0,$$

rozwiązalny przez regularną w pewnym otoczeniu punktu zerowego funkcję analityczną:

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma, \dots, \lambda), \quad \varphi(0, 0 \dots 0) = 0.$$

Wówczas, na mocy odpowiedniości ustalonej między ciałami k i K , wnosić możemy, iż równanie całkowite

$$f(A, B, C, \dots, L) = 0$$

posiada rozwiązanie

$$A = \varphi(B, C, \dots, L).$$

22. Zastosowania. Rozpatrzmy kilka przykładów:

a) Weźmy pod uwagę równanie całkowe jądra rozwiązującego równania Volterry:

$$\mathfrak{N}(x, y) = N(x, y) + \lambda \int_x^y N(x, s) \mathfrak{N}(s, y) ds.$$

Wiadomo, że $\mathfrak{N}(x, y)$ i $N(x, y)$ są przemienne.

Odpowiedniemi równaniem w ciele analitycznym jest:

$$x = a + \lambda a x,$$

a stąd:

$$x = \frac{a}{1 - \lambda a} = a + a^2 \lambda + \dots + a^{p+1} \lambda^p + \dots$$

Będzie więc poprostu:

$$\mathfrak{N}(x, y) = N(x, y) + \lambda N_2(x, y) + \dots + \lambda^p N_{p+1}(x, y) + \dots;$$

jest to funkcja całkowita zmiennej λ .

b) Weźmy równanie.

$$P_2(x, y) = P(x, y) + A(x, y).$$

Odpowiedniemi równaniem w ciele analitycznym jest:

$$x^2 = x + a$$

$$x = 1 \pm \sqrt{1 - a},$$

z którego wynika:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - a}}{2} = a - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2p - 3)}{p!} 2^{p-1} a^p.$$

Ze wzoru tego natychmiast otrzymujemy rozwiązanie równania całkowego w postaci:

$$P(x, y) = A(x, y) - \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2p - 3)}{p!} \cdot 2^{p-1} A_p(x, y).$$

Drugie rozwiązanie x_2 nic nie daje; w rzeczy samej rozwiązaniu temu odpowiadałaby funkcja, zawierająca wyraz wolny 1, a więc nie przemienna z $A(x, y)$.

c) Rozpatrzmy wreszcie przykład zupełnie innego rodzaju, podany przez Volterre. Weźmy pod uwagę funkcję:

$$V(x, y; \lambda) = \lambda A(x, y) + \frac{\lambda^2}{2} A_2(x, y) + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} A_n(x, y) + \dots$$

Jest to funkcja całkowita zmiennej λ , odpowiadająca funkcji $e^{\lambda a} - 1$ ciała k .

Mamy:

$$\begin{aligned} (e^{a\lambda} - 1)(e^{a\mu} - 1) &= e^{a(\lambda+\mu)} - e^{a\lambda} - e^{a\mu} + 1 \\ &= (e^{a(\lambda+\mu)} - 1) - (e^{a\lambda} - 1) - (e^{a\mu} - 1). \end{aligned}$$

Będzie więc odpowiednio:

$$V(x, y; \lambda + \mu) = V(x, y; \lambda) + V(x, y; \mu) + \int_x^y V(x, s; \lambda) V(s, y; \mu) ds$$

co stanowi dla funkcji $V(x, y; \lambda)$ twierdzenie o dodawaniu całkowym.

23. Funkcje przemienne w stałym przedziale.¹⁾ Jeżeli funkcje $A(x, y)$ i $B(x, y)$ spełniają warunek:

$$\int_a^b A(x, s) B(s, y) ds = \int_a^b B(x, s) A(s, y) ds,$$

wówczas nazywamy je przemiennymi w przedziale ab .

Wszystkie własności wyprowadzone w 1-ym ustępie tego paragrafu będą przysługiwały także funkcjom tej kategorii, o czym łatwo przekonać się można.

Możemy otrzymać wyniki analogiczne do poprzednio uzyskanych w następujący sposób:

Weźmy pod uwagę ciało k funkcji całkowitych i meromorficznych zmiennej λ , znikających dla $\lambda = 0$. Jednocześnie weźmy pod uwagę ciało K funkcji, które otrzymujemy, zastępując w funkcjach ciała k potęgi zmiennej λ , przez potęgi złożone funkcji $A(x, y)$.

Funkcje ciała K będą funkcjami całkowitemi lub meromorficznymi zmiennej λ . Jest to natychmiastowa konsekwencja pierwszego twierdzenia Fredholma. Istotnie, na mocy klasycznego twierdzenia Mittag Lefflera, najogólniejsza funkcja meromorficzna zmiennej λ będzie miała postać:

¹⁾ Według terminologii Volterry — funkcje przemienne drugiego gatunku.

$$f(\lambda) + \sum_{q=1}^m \left[\frac{A_1}{a_q - \lambda} + \frac{A_2}{(a_q - \lambda)^2} + \dots + \frac{A_{m_q}}{(a_q - \lambda)^{m_q}} + P_q(\lambda) \right],$$

przyczem $P_q(\lambda)$ jest wielomianem, a $f(\lambda)$ funkcją całkowitą. Otóż na mocy pierwszego twierdzenia Fredholma funkcją ciała K , odpowiadającą ułamkowi $\frac{A_1}{a_q - \lambda}$ jest funkcja meromorficzna

$$\frac{A_1}{a_q} \frac{D\left(x, y; \frac{\lambda}{a_q}\right)}{D\left(\frac{\lambda}{a_q}\right)}.$$

Podobnie funkcją, odpowiadającą ułamkowi $\frac{A_p}{(a_q - \lambda)^p}$, będzie p -ta pochodna wymienionej funkcji meromorficznej względem $\frac{\lambda}{a_q}$, pomnożona przez odpowiedni czynnik.

Wreszcie funkcji całkowitej w ciele k odpowiada w ciele K również funkcja całkowita.

Twierdzenie jest tym sposobem udowodnione. Stąd wynika, że ogólne twierdzenie § 21-go o rozwiązaniu równań całkowych jest prawdziwe i dla ciała K . Co więcej rozwiązania są meromorficznymi funkcjami zmiennej λ .

24. Rozszerzenie ciała K . Możemy w dwu przypadkach wysledzić dalszą analogię między ciałami K i k , z następującego punktu widzenia.

Weźmy równanie algebraiczne:

$$F(x, y) = 0, \quad (F(0, 0) = 0);$$

w przypadku ogólnym cykle poszczególnych gałęzi y , znikających dla $x = 0$, będą dane przez twierdzenie Puiseux'a, i dla gałęzi tych będziemy mieli rozwinięcia według potęg ułamkowych zmiennej x . Nasuwa się teraz zagadnienie wyszukania w ciele K funkcji analogicznych do tych gałęzi. Pierwszym zagadnieniem zasadniczym byłoby tu rozwiązanie dwumiennego równania całkowego

$$P_n(x, y) = A(x, y).$$

Następnie będzie można rozszerzyć odpowiedniość między ciałami

K i k przez przyporządkowanie liczbie $\sqrt[n]{\alpha}$ funkcji $P(x, y)$, którą oznaczyć możemy przez symbol $A_1(x, y)$.

Z tego punktu widzenia następuje się ciekawa analogia między teorią równań algebraicznych Puiseux'a i teorią równań różniczkowych liniowych Fuchsa. Ograniczamy się tu do krótkich uwag, odsyłając czytelników do dzieł V. Volterry.

KAT. MATEMATYKI
Wydz. Bud. Lad
BIBLIOTEKA
Zakł. Mat. Ogólnej

BIBLIOGRAFIA

Teorii równań całkowych

(do r. 1914 włącznie).

Dzieła.

1. d'Adhémar R. Exercices et leçons d'Analyse. Paris, 1908 (p. 121—184).
 2. d'Adhémar R. L'équation de Fredholm et les problèmes de Dirichlet et Neumann. Paris, 1909.
 3. Bôcher M. An introduction to the study of integral equations. Cambridge, 1909.
 4. Goursat E. Cours d'Analyse mathématique. Deuxième edit. Tome III. Paris, 1915 (p. 324—537).
 5. Heywood et Fréchet. L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique. Paris, 1912.
 6. Hilbert D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig, 1912.
 7. Horn J. Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Leipzig, 1910 (p. 183—332).
 8. Kneser A. Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik. Braunschweig, 1911.
 9. Korn A. Über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig, 1910.
 10. Kowalewski G. Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig, 1909. (p. 455—505).
 11. Lalesco T. Introduction à la theorie des équations intégrales. Paris, 1912.
 12. Pincherle S. Funktionaloperationen und Gleichungen. Encykl. d. Math. Wiss., tom II 1, zeszyt. 6, 1906.
 13. Poincaré H. Sechs Vorträge aus der reinen Mathematik und mathematischen Physik. Leipzig, 1910.
 14. Poincaré H. Leçons de Mécanique céleste. Tome III. Théorie des marées. Paris, 1910 (p. 233—303).
 15. Volterra V. Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales-différentielles. Paris, 1913.
 16. Volterra V. Leçons sur les fonctions des lignes. Paris, 1913.
-

Rozprawy (dotyczące Teorii równań całkowych).

- Abel N. H. 1) Auflösung einer mechanischen Aufgabe. Journ. r. ang. Math. 2 (1826).
- d'Adhémar R. 1) Les fonctions implicites de l'équation intégrale non linéaire. Bull. Soc. math. Fr. 36 (1907).
- 2) Sur les équations intégrales de M. Volterra. Atti IV Congr. Mat. Rzym (1909).
- Amoroso L. 1) Ricerche intorno alle equazioni lineari di prima specie. Ann. mat. p. appl. (1909).
- 2) Sulla risolubilità della equazione integrale di prima specie. Atti Acc. Lincei (1910)
- 3) Alcune osservazioni intorno alla teoria delle serie di Fourier-Hilbert-Schmidt. Atti Acc. Lincei (1910).
- 4) Sopra un nuovo tipo di equazioni integro-differenziali. Soc. Ital. Progr. Sc. (1913).
- Andreoli G. 1) Sulle equazioni integrali. Palermo Rend. 37 (1914).
- 2) Sulle equazioni integrali miste ed integro-differenziali. Atti Acc. Lincei, (1914).
- d'Arone G. D. 1) Sopra un teorema della teoria delle equazioni integrali. Giorn. mat. (1912).
- Bateman H. 1) Sur l'équation de Fredholm. Bull. sc. math. 30 (1906).
- 2) A class. of integral equations. Trans. Camb. phil. Soc. 20 (1906).
- 3) The theory of integral equations. Trans. Camb. phil. Soc. 20 (1906).
- 4) On the inversion of the definite integral. Proc. London-math. Soc. (2) 4 (1907).
- 5) Notes on integral equations The Mess. Math. 38 (1909).
- 6) A formula for the solving function of a certain integral of the second kind. The Mess. Math. 37 (1908).
- 7) On a set of kernels whose determinants form a Sturmian sequence. Bull. Amer. Soc. (2) 13 (1912).
- 8) Notes on integral equation. The Mess. Math. 41 (1912).
- Block H. 1) Sur la solution de certaines équations intégrales. Ark. Mat. Astr. Phys. (1907).
- Blondel A. 1) Sur une équation fonctionnelle linéaire. C. R. 150 (1910).
- Bôcher M. 1) A simple proof of a fundamental theorem in the theory of integral equations Ann. of Math. (2) 14 (1902).
- Boggio T. 1) Un théorème sur les équations intégrales C. R. 145 (1907).
- 2) Sopra alcune formole fondamentali alle equazioni integrali. Atti Acc. Lincei (1908).
- Bounitzky E. 1) Un système particulier d'équations intégrales. Bull. sc. math. 31 (1907).
- 2) Sur une classe d'équations intégrales. Bull. sc. math. 32 (1908).
- Brařu G. 1) Sur les équations mixtes linéaires C. R. 148 (1909).
- 2) Sur certaines équations intégrales non linéaires C. R. 150 (1910).
- 3) Sur l'équation intégrale exponentielle C. R. 152 (1911).
- Browne P. 1) Sur quelques cas singuliers de l'équation de Volterra C. R. 154 (1912).
- 2) Sur quelques équations fonctionnelles C. R. 154 (1912).

- Browne P. 3) Sur le problème généralisé d'Abel et ses applications C. R. 155 (1921).
- 4) Sur un problème d'inversion posé par Abel. C. R. 155 (1912).
- Bucht G. 1) Ueber nichtlineare Integralgleichungen mit unverzweigten Lösungen. Ark. Math. Astr. Phys. 8 (1912).
- Cesaro E. 1) Sopra un'equazione funzionale trattata da Beltrami. Rend. Acc. Napoli (1901).
- Chicca A. 1) Sulle equazioni integrali di Fredholm a nucleo simetrico. Atti Acc. Torino (1909).
- Cotton E. 1) Équations différentielles et équations intégrales. Bull. Soc. math. Fr. (1910).
- Crudeli U. 1) Contributo alla teoria di certe equazioni funzionali. Atti Acc. Lincei (1909).
- Daniele E. 1) Sui nuclei che si riproducono per iterazione. Palermo Rend. 37 (1914).
- Dixon A. C. 1) The solution of integral equations Proc. London math. Soc. (1909).
- Egoroff D. T. 1) Théorème sur les suites mesurables C. R. 152 (1911).
- Evans G. C. 1) The integral equation of the second kind of Volterra with singular kernel. Bull. Amer. Math. Soc. 16 (1909).
- 2) Sopra l'equazione integrale di Volterra con un limite de l'integrale infinito 1, 2, 3. Atti Acc. Lincei (1911).
- 3) Sopra l'algebra delle funzioni permutabili Atti Acc. Lincei (1911).
- 4) L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili. Palermo Rend. 33 (1912).
- Fischer E. 1) Sur la convergence en moyenne C. R. 144 (1908).
- Franck P. 1) Sur l'évaluation approximative de la plus petite valeur caractéristique de quelques équations intégrales C. R. 158 (1914).
- Fredholm I. 1) Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfv. Förh. Ak. Stockholm (1900).
- 2) Sur une classe de transformations rationnelles C. R. 133 (1901).
- 3) Sur une classe d'équations fonctionnelles C. R. 134 (1902).
- 4) Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta math. 27 (1903).
- Fubini G. 1) Sull'inversione degli integrali definiti Boll. Acc. Catania (1904).
- 2) Sopra una formola di Fredholm nell' problema dell'inversione degli integrali definiti Boll. Acc. Catania (1905).
- 3) Di alcune nuove classi di equazioni integrali. Atti Acc. Lincei (1810).
- 4) Equazioni integrali e valori eccezionali. Ann. mat. p. appl. (1910).
- 5) Sulle equazioni integrali di terza specie di Émile Picard. Atti Acc. Lincei (1912).
- Fujivara M. 1) Einige Bemerkungen über die Theorie der linearen Integralgleichung. Reports Tôhoku Imp. Univers. (1912).
- Giorgi. 1) Sulla teoria delle equazioni integrali e delle loro generalizzate. Atti Acc. Lincei (1912).
- Goursat E. 1) Sur un problème d'inversion résolu par Abel. Acta Math. 27 (1903).
- 2) Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm. Bull. Soc. math. Fr. 35 (1907).
- 3) Sur les équations intégrales C. R. 145 (1907).

- Goursat E. 4) Sur un théorème de la théorie des équations intégrales C. R. 146 (1907).
- 5) Recherches sur les équations intégrales linéaires. Ann. Fac. Toulouse (2) 10 (1908).
- 6) Sur quelques points de la théorie des équations intégrales. Bull. Soc. math. Fr. 37 (1909).
- 7) Sur quelques équations intégrales singulières C. R. 147 (1913).
- Greggi G. 1) Le formole risolutive e i teoremi di Schmidt per i sistemi di equazioni integrali Atti Ist. Veneto 71 (1912).
- Hahn H. 1) Bericht ueber die Theorie der linearen Integralgleichungen. Jahr. D. Math. Ver. 20 (1911).
- Hardy G. H. 1) On an integral equation. Proc. London math. Soc. (2), 7 (1909).
- Hertz P. 1) Die Integralgleichungen der Elektronentheorie. Math. Ann. 65 (1907).
- Heywood B. 1) Sur quelques points de la théorie des fonctions fondamentales relatives à certaines équations intégrales C. R. 145 (1907).
- 2) Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm J. Math. p. appl. (6) 4 (1908).
- Hilb E. 1) Ueber Integraldarstellung willkürlicher Funktionen. Math. Ann. 67 (1909).
- Hilbert D. 1) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Gött. Nachr. 1. Mitteilung (1904), 4 u. 5-e Mitteilung (1906).
- Horn J. 1) Volterrasche Integralgleichungen und Summengleichungen I Teil J. f. ang. Math. 140 (1911).
- Holmgren E. 1) Sur l'inversion des intégrales définies. Bihang. Ak. Handl. Stockh. (1900).
- 2) La théorie des équations intégrales linéaires. Ark. Mat. Astr. Fys. Stockh. 3 (1906).
- 3) Das Dirichletsche Prinzip und die Theorie der linearen Integralgleichungen. Math. Ann. 69 (1910).
- Hurwitz W. A. 1) On the pseudoresolvent to the kernel of an integral equation. Bull. Amer. Soc. (2) 18 (1912).
- 2) On the pseudoresolvent to the kernel of an integral equation. Trans. Amer. mat. Soc. 13 (1912).
- 3) Note on mixed linear integral equations. Bull. Amer. Soc. (2) 18 (1912).
- Jentzsch R. 1) Über Integralgleichungen mit positivem Kern. J. z. ang. Math. 141 (1912).
- Kellog O. 1) Zur Theorie der Integralgleichungen. Gött. Nachr. (1902).
- 2) Unstetigkeiten in den linearen Integralgleichungen Math. Ann. 58 (1904).
- Kneser A. 1) Ein Beitrag zur Theorie der Integralgleichungen. Palermo Rend. 21 (1906).
- 2) Belastete Integralgleichungen. Palermo Rend. 37 (1914).
- Korn A. 1) Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm C. R. 144 (1907).
- 2) Sur une classe importante de noyaux asymétriques 1, 2, 3 C. R. 152, 153 (1911).
- 3) Sur les équations intégrales à noyau asymétrique C. R. 156 (1913).
- 4) Ueber die Entwicklungen nach Eigenfunktionen unsymmetrischer Kerne in der Theorie der linearen Integralgleichungen. Sitz. Berl. math. Ges. 11 (1912).

- Korn A. 5) Eine Theorie der linearen Integralgleichungen mit unsymmetrischen Kern. Tôhoku Math. Journ. (1912).
- Kowalewski G. 1) Eine Eigenschaft der Volterragruppe. Sitz. Ak. Wien 121 (1912).
- Kryloff N. 1) Sur les développements procédant suivant les polynomes hypergéométriques C. R. 150 (1910).
- 2) Sur quelques propriétés des équations intégrales à noyau non symétrique C. R. 156 (1913).
- Lalesco T. 1) Sur l'ordre de la fonction entière $D(\lambda)$ C. R. 144 (1907).
- 2) Sur l'équation de Volterra J. Math. p. appl. (6) 4 (1908).
- 3) Sur les noyaux résolvants C. R. 151 (1910).
- 4) Sur les poles des noyaux résolvants C. R. 151 (1910).
- 5) Sur les noyaux symétriques gauches C. R. 151 (1910).
- 6) Sur une équation intégrale du type Volterra C. R. 152 (1911).
- 7) Theoremes sur les valeurs caractéristiques C. R. 153 (1911).
- 8) Sur une équation intégrale du type Volterra. Bull. sc. Math. (1911).
- 9) L'étude des noyaux résolvants. Bull. Soc. math. Fr. (1911).
- 10) Quelques formules relatives à la variation des valeurs caractéristiques. Bull. Soc. Roum. Sc. (1912).
- 11) Sur la variation des valeurs caractéristiques. Bull. Akad. Roum. (1913).
- 12) Sur l'addition des noyaux non orthogonaux. Bull. Acad. Roum. (1913).
- Landsberg A. 1) Theorie der Elementarteiler linearer Integralgleichungen. Math. Ann. 69 (1910).
- Lauricella G. 1) Sopra alcune equazione differenziali lineari. Atti Acc. Lincei (1908).
- 2) Sulle equazioni integrali. Ann. Mat. p. appl. (3) 15 (1908).
- 3) Sull equazione integrale di 1-a spezie. Atti Acc. Lincei (1909—1910).
- 4) Sulla risoluzione dell' equazione integrale di 1-a spezie. Atti Acc. Lincei (1911)
- 5) Sopra i nuclei reiterati. Atti Acc. Lincei (1911).
- 6) Sopra le funzioni permutabili di 2-a spezie. Atti Acc. Lincei (1913).
- 7) Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2-a specie (1913).
- Lebesgue H. 1) Sur la méthode de Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm. Bull. Soc. math. Fr. 36 (1908).
- 2) Sur un théorème de M. Volterra. Bull. Soc. math. Fr. 40 (1912).
- Levi E. 1) Sulle equazioni integrali. Atti Acc. Lincei (1907).
- Lévy P. 1) Sur les équations intégrales non linéaires. C. R. 150 (1910).
- Liouville J. 1) Sur le developpement des fonctions ou parties des fonctions en séries dont les diverses termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du 2-e ordre contenant un paramètre variable. J. Math. p. appl. 2 (1837).
- 2) Solution nouvelle d'un problème d'Analyse relatif aux phénomènes termomécaniques J. Math. p. appl. 2 (1837).
- 3) Premier mémoire sur la théorie des équations différentielles linéaires et sur le développement de fonctions en séries. J. Math. p. appl. 3 (1838).
- Longley W. R. 1) Integral equations. Bull. Amer. Math. Soc. 19 (1913).
- Marcolongo R. 1) La théorie des équations intégrales et ses applications Ann. Fac. sc. Toulouse (2) 10 (1909).
- Marty J. 1) Transformation d'un déterminant infini en un déterminant de Fredholm. Bull. sc. math. (1912).

- Marty J. 2) Sur une équation intégrale. C. R. 150 (1910).
- 3) Développements suivant certaines solutions singulières. C. R. 150 (1910).
 - 4) Existence des solutions pour certaines équations de Fredholm. C. R. 150 (1910).
 - 5) Valeurs singulières d'une équation de Fredholm. C. R. 150 (1910).
- Mercer H. 1) Plemelj's canonical form. Trans. Cambr. phil. Soc. 21 (1908).
- 2) Functions of positive and negative type and their connection with the theory of integral equations. Trans. Royal Soc. London 209 A. (1909).
- Mollerup J. 1) Une remarque sur les équations intégrales de 1-erè espèce. Palermo Rend. 29 (1909).
- 2) Sur l'identité du déterminant de Fredholm et d'un déterminant infini de v. Koch. Bull. sc. math. (2) 36 (1912).
- Moore E. H. 1) On the foundations of the theory of linear integral equations. Bull. Amer. Soc. (2) 18 (1912).
- Myller A. 1) Sur les équations intégrales. Bull. sc. math. (1907).
- Myller-Lebedeff W. 1) Die Integralgleichungen in Anwendung auf einige Reihenentwicklungen. Math. Ann. 64 (1907).
- Orlando L. 1) Sopra alcune equazioni integrali. Atti Acc. Lincei (1907).
- 2) Sulle equazioni integrali. Giorn. mat. (1908).
 - 3) Sulla risoluzione delle equazioni integrali. Atti IV Congr. mat. Roma (1909).
- Pell A. J. 1) Biorthogonal systems of functions. Trans. Amer. math. Soc. 12 (1911).
- 2) Applications of biorthogonal systems of functions to the theory of integral equations. Trans. Amer. math. Soc. 12 (1911).
- Perhave R. 1) Zur Fredholmschen Funktionalgleichung mit Hermitschen Kern. Sitz. Ak. Wien 121 (1912).
- Peres J. 1) Résolution des problèmes aux limites relatifs à une équation intégrodifférentielle de M. Volterra. Palermo Rend. 35 (1913).
- 2) Sulle equazioni integrali. Atti Acc. Lincei (1913).
 - 3) Détermination de toutes les fonctions permutables de première espèce avec une fonction donnée. C. R. 156 (1913).
 - 4) Sur les fonctions permutables analytiques. Atti Acc. Lincei (1913).
- Picard E. 1) Sur une équation fonctionnelle. C. R. 139 (1904).
- 2) Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de Fredholm. Rend. Palermo 21 (1906).
 - 3) Sur quelques problèmes de Physique mathématique se rattachant à l'équation de Fredholm. Ann. Ec. Norm. (1906).
 - 4) Sur une équation fonctionnelle se présentant dans les théorie de certaines équations aux dérivées partielles. C. R. (1907).
 - 5) Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de 1-re espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique Palermo Rend. 29 (1909).
 - 6) Sur une classe de développements en séries de fonctions fondamentales se rattachant à certaines équations fonctionnelles. C. R. 149 (1909).
 - 7) Sur les équations intégrales de première espèce 1, 2. C. R. 149 (1908).
 - 8) Sur une classe de fonctions fondamentales et sur certaines développements en séries. Ann. Ec. Norm. 21 (1910).
 - 9) Un théorème général sur certaines équations intégrales de troisième espèce C. R. 150 (1910).

- Picard E. 10) Sur une équation fonctionnelle singulière du type Fredholm. C. R. 151 (1910).
- 11) Un théorème général sur les équations intégrales de troisième espèce. C. R. 152 (1911).
- 12) Sur une équation intégrale singulière. C. R. 152 (1911).
- 13) Un complément sur un théorème relatif aux équations intégrales de 3-me espèce. C. R. 153 (1911).
- 14) Sur un exemple simple d'équation singulière de Fredholm. Ann. Ec. Norm. (1911).
- 15) Sur les solutions continues des équations intégrales de troisième espèce. C. R. 153 (1911).
- 16) Sur les équations intégrales de troisième espèce. Ann. Ec. Norm. (1911).
- 17) Remarques au sujet d'une équation intégrale considérée par M. Charlier. C. R. 147 (1913).
- Picone M. 1) Sopra un'equazione integrale di prima specie a limiti variabili. Atti Acc. Lincei (1910).
- Pincherle S. 1) Sull' inversione analitica degli integrali definiti. Rend. Acc. Bologna (1907).
- 2) Sull' inversione degli integrali definiti. Soc. Ital. sc. 15 (1908).
- 3) Sopra certe equazioni integrali. Atti. Acc. Lincei (1909).
- Plancherel M. 1) Ueber singuläre Integralgleichungen. Math. Ann. 67 (1909).
- 2) Sur la représentation d'une fonction arbitraire par une intégrale définie. C. R. 150 (1910).
- 3) La théorie des équations intégrales. Ens. math. 14 (1912).
- Platrier Ch. 1) Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires. J. Math. p. appl. (6) 9 (1913).
- 2) Sur les variations de la déterminante et de la résolvante de Fredholm avec le champ d'intégration. Nouv. Ann. Math. (4) 13 (1913).
- 3) Contribution à un théorème sur les équations intégrales de Fredholm de troisième espèce. C. R. 154 (1912).
- Plemelj J. 1) Ueber die Anwendung der Fredholmschen Functionalgleichungen in der Potentialtheorie. Sitz. Ak. Wien (1903).
- 2) Zur Theorie der Fredholmschen Funktionalgleichung Monatsh. Math. Phys. (1903).
- Poincaré H. 1) Sur quelques applications de la méthode de Fredholm. C. R. 148 (1909).
- 2) Remarques diverses sur l'équation de Fredholm. Acta math. 33 (1910).
- Pompeiu D. 1) Sur une équation intégrale. Math. Ann. 74 (1913).
- Popoff K. 1) Sur les équations de Fredholm de première espèce. C. R. 157 (1913).
- Puzyna J. 1) Zarys teoryi równań całkowych. Wektor 2 (1913).
- Riesz F. 1) Sur les systèmes orthogonaux et l'équation de Fredholm. C. R. 144 (1907).
- 2) Ueber die lineare homogene Integralgleichung. Math. Ber. Ung. 27 (1909).
- Ritz W. 1) Zur Theorie der Serienspektren. Inaugural-Dissertation. Göttingen (1903).
- Przedruk w Oeuvres complètes (1911).

- Runge C. 1) Über eine besondere Art von Integralgleichungen. *Mat. Ann.* 75 (1914).
- Saurel P. 1) On Fredholm's equation. *Bull. Amer. Soc.* 15 (1909).
- Schmidt E. 1) Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. Inaugural Diss. Göttingen (1905).
- 2) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. *Math. Ann.* 63, 64, 65 (1907-08).
- Severini C. 1) Sulle equazioni integrali di prima specie del tipo Fredholm 1, 2 *Atti Acc. Lincei* (1914).
- 2) Sulle equazioni funzionali. *Atti Acc. Catania* (5) 4 (1911).
- Schur I. 1) Ueber die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution, mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen. *Math. Ann.* 66 (1908).
- 2) Zur Theorie der linearen homogenen Integralgleichungen. *Math. Ann.* 67 (1909).
- Silla L. 1) Sui sistemi di equazioni integrali di prima specie *Atti Acc. Lincei* (1911).
- Sinigaglia L. 1) Sulle equazioni differenziali lineari. *Atti. Acc. Lincei* (1908).
- 2) Sulle funzioni permutabili di 2-a specie 1—4 *Atti. Acc. Lincei* (1911—13).
- Sonine N. 1) Sur la généralisation d'une formule d'Abel. *Acta math.* 4 (1884).
- Soula J. 1) Sur les fonctions permutables de 2-ième espèce. *Atti. Acc. Lincei* (1913).
- 2) Sur certaines équations intégrales. *Atti. Acc. Lincei* (1914).
- Stekloff W. 1) Sur le développement d'une fonction arbitraire en série de fonctions fondamentales. *C. R.* 150 (1910).
- 2) Une application nouvelle de ma méthode de développement des fonctions fondamentales *C. R.* 150 (1910).
- 3) Sur la condition de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales *C. R.* 150 (1910).
- Tedone O. 1) Su alcune equazioni integrali di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni e di integrazioni. *Atti. Acc. Lincei* (1914).
- Viterbi A. Sur la résolution approssimata delle equazioni integrali di Volterra e sul la applicazione di queste allo studio analitico delle curve. *Rend. Ist. Lomb.* (1912).
- Volterra V. 1) Sulla inversione degli integrali definiti 1, 2, 3, 4 *Atti. Acc. Torino* (1896).
- 2) Sulla inversione degli integrali definiti 1, 2. *Atti. Acc. Lincei* (1896).
- 3) Sopra alcuni questioni di inversione di integrali definiti. *Ann. mat. p. appl.* (2) 25 (1897).
- 4) Sulle equazioni integro-differenziali. *Atti. Acc. Lincei* (1909).
- 5) Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali. *Atti. Acc. Lincei* (1910).
- 6) Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali. *Atti. Acc. Lincei* (1910).
- 7) Sopra le funzioni permutabili. *Atti. Acc. Lincei* (1910).
- 8) Equazioni integro-differenziali con limite costanti. *Atti. Acc. Lincei* (1910).
- 9) Contributo allo studio delle funzioni permutabili. *Atti. Acc. Lincei* (1910).
- 10) Sopra le funzioni permutabili di 2-a specie. *Atti. Acc. Lincei* (1910).

Volterra V. 11) Sur les équations intégrales différentielles et leurs applications. Acta Math. 35 (1912).

— 12) Sopra equazioni integro-differenziali aventi i limiti costanti. Atti. Acc. Lincei (1913).

— 12) Sopra equazioni integro-differenziali aventi i limiti costanti. Atti. Acc. Lincei (1913).

— 13) Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali. Atti. Acc. Lincei (1914).

— 14) Sulle equazioni alle derivate funzionali. Atti. Acc. Lincei (1914).

— 15) Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali. Atti. Acc. Lincei (1914).

Weyl H. 1) Singulare Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung des Fouriertheorems. Math. Ann. 66 (1908).

— 2) Convergenz von Reihen die nach Orthogonalfunctionen fortschreiten. Math. Ann. 67 (1909).

— 3) Ueber die asymptotische Verteilung der Eigenwerte. Gött. Nachr. (1911).

— 4) Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen. Math. Ann. 71 (1912).



5
5

S. 93



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



II-346773

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000293390