Шкомарац

Шкотарлы

„WIEDZA MATEMATYCZNA"
ZBIÓR DZIEŁ Z DZIEDZINY MATEMATYKI CZYSTEJ I STOSOWANEJ, WYDAWANY PRZEZ ST. KWIETNIEWSKIEGO, ST. STRASZEWICZA i WŁ. WOJTOWICZA.

1400

M. E. BRAHY.
DOKTÓR NAUK MATEMATYCZNO-FIZYCZNYCH.

# ĆWICZENIA METODYCZNE

## Z RACHUNKU RÓŻNICZKOWEGO.

PRZEKŁAD Z NOWEGO WYDANIA

przez

M. i J. KRASSOWSKICH.

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWEM IMIENIA D-ra JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

М 15.–
д. ст. 1.50
М 16.50

WARSZAWA
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI E. WENDE i S-ka.
1917

# SPIS RZECZY.


| | | | |
|---|---|---|---|
| ROZDZIAŁ | I. | Różniczkowanie funkcyi wyraźnych jednej zmiennej. . . . . | 1 |
| „ | II. | Różniczkowanie funkcyi wyraźnych wielu zmiennych . . . . . | 12 |
| „ | III. | Pochodne kolejne funkcyi wyraźnych jednej zmiennej. . . . . | 15 |
| „ | IV. | Pochodne kolejne funkcyi wyraźnych wielu zmiennych . . . . . | 26 |
| „ | V. | Różniczkowanie równań. . . . . . . . . . . . . . . . | 32 |
| „ | VI. | Rozwijanie funkcyi w szeregi . . . . . . . . . . . . | 45 |
| „ | VII. | Zamiana zmiennych . . . . . . . . . . . . . . . . . | 66 |
| „ | VIII. | Rugowanie stałych i funkcyi . . . . . . . . . . . . . | 82 |
| „ | IX. | Wyznaczanie funkcyi, które przy pewnych wartościach stają się nieoznaczone . . . . . . . . . . . . . . . . | 89 |
| „ | X. | Maxima i minima . . . . . . . . . . . . . . . . . | 100 |
| „ | XI. | Styczne i normalne do krzywych płaskich . . . . . . . . . | 138 |
| „ | XII. | Asymptoty . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 148 |
| „ | XIII. | Punkty osobliwe krzywych płaskich . . . . . . . . . . | 158 |
| „ | XIV. | Krzywizna krzywych płaskich . . . . . . . . . . . | 172 |
| „ | XV. | Powierzchnie . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 182 |
| „ | XVI. | Krzywe skośne . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 193 |
| „ | XVII. | Obwiednie linij i powierzchni . . . . . . . . . . . . | 205 |
| „ | XVIII. | Rozkładanie ułamków wymiernych na ułamki proste . . . . . | 219 |

## ROZDZIAŁ I.

### Różniczkowanie funkcyi wyraźnych jednej zmiennej.

Przypuszczamy, że czytelnik zna ogólne zasady rachunku pochodnych oraz różniczkowania; zdaje się jednak, że nie będzie bezcelowem przypomnieć w ogólnych zarysach twierdzenia o pochodnych i różniczkach tych funkcyi, z którymi spotykamy się w początkach rachunku różniczkowego. W wysłowieniu tych twierdzeń oznaczamy przez $u, v, w,$ funkcye zmiennej $x$, przez $a$ zaś wielkość stałą.

1. Pochodna stałej jest zerem.

2. Pochodna sumy algebraicznej kilku funkcyi równa się algebraicznej sumie pochodnych tych funkcyi.

Niech będzie

$$y = u - v + w + \quad \text{i t. d.}$$

Pochodna tego wyrażenia równa się

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \quad \text{i t. d.}$$

3. Pochodna iloczynu kilku funkcyi równa się sumie, otrzymanej przez dodanie do siebie iloczynów pochodnej każdej funkcyi przez funkcye pozostałe.

Jeżeli np.

$$y = uvw\ldots,$$

wówczas pochodna równa się

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} vw\ldots + \frac{dv}{dx} uw\ldots + \frac{dw}{dx} uv\ldots + \ldots$$

To twierdzenie łącznie z pierwszem daje następujące nowe twierdzenie:

4. Pochodna iloczynu funkcyi przez wielkość stałą równa się iloczynowi pochodnej tej funkcyi przez wielkość stałą.

Stosując np. twierdzenie do funkcyi $y = au$, mamy:

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx}$$

5. Pochodną ilorazu dwóch funkcyi, lub też pochodną ułamka, którego każdy wyraz jest funkcyą zmiennej niezależnej, obliczamy, mnożąc mianownik przez pochodną licznika, odejmując licznik pomnożony przez pochodną mianownika, i dzieląc otrzymaną różnicę przez drugą potęgę mianownika.

Jeżeli np. $y = \frac{u}{v}$, gdzie $u$ i $v$ są funkcyami zmiennej $x$, wówczas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

6. Pochodna funcyi funkcyi jest iloczynem pochodnych tych funkcyi, wziętych względem zmiennej, którą zawiera każda z nich.

Niechaj np. funkcya $u$, zawierająca zmienną $x$, będzie określona przez równania

$$u = F(z), \quad z = f(y), \quad y = \varphi(x);$$

otrzymujemy

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

co, po zastosowaniu znakowania Lagrange'a, można napisać w postaci następującej:

$$\frac{du}{dx} = F'(z) \, . \, f'(y) \cdot \varphi'(x)$$

7. Pochodna funkcyi, złożonej z kilku funkcyi, równa się sumie pochodnych funkcyi złożonej, wziętych kolejno względem każdej z funkcyi składowych.

Jeżeli np. $\quad y = F(u, v, w \ldots)$

wówczas, na zasadzie twierdzenia powyższego otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{dw}{dx} + \ldots$$

Uwaga. Jeżeli w wysłowieniu twierdzeń wyraz pochodna zastąpimy wyrazem różniczka, to wszystkie powyższe twierdzenia stosować się będą także i do różniczek.

8. Pochodna funkcyi, będącej odwrotnością funkcyi, której pochodną umiemy znaleźć, równa się jedności, podzielonej przez pochodną tej drugiej funkcyi.

Jeżeli np. $y = F(x)$ i $x = \varphi(y)$

są to dwie funkcye odwrotne względem siebie, wówczas według twierdzenia mamy:

$$F'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

## Tablica różniczek funkcyi zwykłych.

(Zarówno w tej tablicy, jak i w całej książce przez Log oznaczać będziemy logarytm przy dowolnej zasadzie, natomiast przez log oznaczać będzie logarytm neperowski, t. j. przy zasadzie $e$).

$$d\,.\,x^m = mx^{m-1}\,dx, \quad \text{skąd} \quad d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$d\,.\,\mathrm{Log}_a\,x = \mathrm{Log}_a\,e\,\frac{dx}{x} = \frac{dx}{x}\cdot\frac{1}{\ln_e a}$$

$$d\,.\,\log x = \frac{dx}{x}$$

$$d\,.\,a^x = a^x \log a\,dx.$$

$$d\,.\,e^x = e^x\,dx$$

$$d\,.\,\sin x = \cos x\,dx$$

$$d\,.\,\cos x = -\sin x\,dx$$

$$d\,.\,\mathrm{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$d\,.\,\mathrm{cotg}\,x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$d\,.\,\sec x = \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$$

$$d\,.\,\mathrm{cosec}\,x = -\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$$

$$d\,.\,\sin\mathrm{vers}\,x = \sin x\,dx \text{ *)}$$

*) $\sin\mathrm{vers}\,x = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

$$d \,.\, \text{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$d \,.\, \text{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$d \,.\, \text{arc tang}\, x = \frac{dx}{1 + x^2}$$

$$d \,.\, \text{arc cotg}\, x = -\frac{dx}{1 + x^2}$$

$$d \,.\, \text{arc sec}\, x = \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$d \,.\, \text{arc cosec}\, x = -\frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$d \,.\, \text{arc sin vers}\, x = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

Dzieląc przez $dx$ obie strony równań zawartych w powyższej tablicy, otrzymamy pochodne funkcyi zwykłych. Należy jednak zauważyć, co jest bardzo ważne, że w powyższej tablicy $x$ oznacza nie tylko zmienną niezależną ale również wszelką funkcyę wyraźną zmiennej $x$.

Możemy więc zawsze w powyższej tablicy zamiast zmiennej $x$ przez symbol powyższy rozumieć pewną dowolną funkcyę zmiennej $x$.

Tak więc równość $d \,.\, \log x = \frac{dx}{x}$ można wysłowić w następujący sposób: różniczka logarytmu neperowskiego funkcyi równa się różniczce funkcyi, podzielonej przez samą funkcyę. Ponieważ $\frac{d \,.\, \log x}{dx} = \frac{1}{x}$, przeto pochodna logarytmu neperowskiego funcyi równa się jedności, podzielonej przez samą funkcyę.

Podobne ćwiczenia są bardzo ważne, i całą ich doniosłość wykażą najlepiej następujące przykłady.

## PRZYKŁAD I.

Mamy do zróżniczkowania względem $x$ funkcyę wyraźną tej zmiennej:

$$y = \sin \sqrt{a^2 - x^2}$$

Musimy więc szukać różniczki wstawy (sinusa) funkcyi

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

Podług powyższej tablicy, różniczka sinusa funkcyi równa się cosinusowi funkcyi, pomnożonemu przez różniczkę samej funkcyi. Znajdujemy więc:

$$dy = \cos \sqrt{a^2 - x^2} \,.\, d \,.\, \sqrt{a^2 - x^2} \ldots \tag{1}$$

Wiemy także, że różniczka pierwiastka kwadratowego funkcyi równa się różniczce funkcyi podpierwiastnej, podzielonej przez podwojony pierwiastek. Mamy tedy

$$d \,.\, \sqrt{a^2 - x^2} = \frac{d \,.\, (a^2 - x^2)}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} \tag{2}$$

podstawiając w (1) znalezioną wartość na $d \,.\, \sqrt{a^2 - x^2}$, otrzymujemy:

$$dy = \frac{1}{2 \sqrt{a^2 - x^2}} \cos \sqrt{a^2 - x^2} \, d \,.\, (a^2 - x^2) \tag{3}$$

Wiemy również, że różniczka sumy algebraicznej funkcyi równa się sumie algiebraicznej różniczek tych funkcyi; na tej zasadzie znajdujemy:

$$d \,.\, (a^2 - x^2) = d \,.\, a^2 - d \,.\, x^2 \tag{4}$$

Stosując twierdzienie 1, otrzymamy, iż różniczka $d \,.\, a^2$, jako różniczka wielkości stałej, jest zerem; dalej podług przytoczonej tablicy, różniczka $d \,.\, x^2$ równa się $2\, x\, dx$, a więc

$$d \,.\, (a^2 - x^2) = -\, 2\, x\, dx \tag{5}$$

Podstawiając w (3) znalezioną wartość na $d \,.\, (a^2 - x^2)$, znajdujemy ostatecznie:

$$dy = -\, \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \sqrt{a^2 - x^2} \tag{6}$$

co jest szukaną różniczką. Pochodna zaś równa się

$$\frac{dy}{dx} = -\, \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos \sqrt{a^2 - x^2} \tag{7}$$

Przy pewnej wprawie, którą z łatwością zdobyć można, należy różniczkowanie oraz podstawianie wykonywać pamięciowo i rezultat poszukiwany, który stopniowo w naszym przykładzie odnajdowaliśmy, wypisywać odrazu, a więc pisać odrazu wzór (6), nie pisząc wzorów pośrednich (1), (2), (3), (4) i (5).

Istotnie, wystarczało napisać $\sqrt{a^2 - x^2} = z$ i szukać różniczki funkcyi funkcyi $y = \sin z$, gdzie $z = \sqrt{a^2 - x^2}$; rezultat ostateczny otrzymamy prędzej, wykonywując w pamięci działania pośrednie, niż wypisując je kolejno.

## PRZYKŁAD II.

Mamy znaleźć różniczkę funkcyi $y = \frac{a+x}{a-x} \operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x}$

Stosując twierdzenie 3, mamy:

$$dy = \frac{a+x}{a-x}\, d\,.\operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x}\, d\,.\, \frac{a+x}{a-x} \tag{1}$$

Podług danej tablicy różniczek mamy:

$$d\,.\operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x} = \frac{d\,.\left(\frac{a-x}{a+x}\right)}{1+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2}$$

po zróżniczkowaniu zaś licznika drugiej części tej równości otrzymamy:

$$d\,.\operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x} = \frac{\frac{-(a+x)\,dx - (a-x)\,dx}{(a+x)^2}}{1+\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2} \qquad \text{(twierdzenie 5)}$$

a upraszczając znajdujemy:

$$d\,.\operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x} = -\frac{a\,d\,x}{a^2+x^2} \tag{2}$$

Oprócz tego mamy:

$$d\,.\, \frac{a+x}{a-x} = \frac{(a-x)\,dx + (a+x)\,dx}{(a-x)^2} \qquad \text{(twierdzenie 5)}$$

skąd

$$d\,\frac{a+x}{a-x} = \frac{2\,a\,dx}{(a-x)^2} \tag{3}$$

Podstawiając w (1) wartości, otrzymane z (2) i (3) na

$$d\,.\operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x} \quad \text{oraz} \quad d\,\frac{a+x}{a-x},$$

otrzymamy po uproszczeniu

$$dy = \frac{a}{a-x}\left(\frac{2}{a-x} \operatorname{arctg} \frac{a-x}{a+x} - \frac{a+x}{a^2+x^2}\right) dx$$

Stąd z łatwością znajdujemy pochodną:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a-x}\left(\frac{2}{a-x}\operatorname{arctg}\frac{a-x}{a+x} - \frac{a+x}{a^2+x^2}\right)$$

Zresztą szukaną pochodną możemy otrzymać, stosując do danego wzoru twierdzenie o pochodnych oraz tabliczkę pochodnych funkcyi prostych.

Ważną rzeczą jednak jest zauważyć, że wprawa w posiłkowaniu się twierdzeniami i prawidłami różniczkowania pozwala odrazu znaleźć szukaną różniczkę danej funkcyi.

Np.:
$$dy = \frac{a+x}{a-x}\,\frac{\dfrac{-(a+x)\,dx-(a-x)\,dx}{(a+x)^2}}{1+\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^2} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{a-x}{a+x}\,\frac{(a-x)\,dx+(a+x)\,dx}{(a-x)^2};$$

wystarczy uprościć to wyrażenie, by otrzymać powyższy rezultat.

## PRZYKŁAD III.

Mamy zróżniczkować funkcyę:

$$y = \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}{(x-2)^8}$$

Biorąc logarytmy obydwóch części równania, otrzymujemy:

$$\log y = \frac{5}{2}\log(x-1) + \frac{13}{2}\log(x-3) - 8\log(x-2)$$

Różniczkując, znajdujemy

$$\frac{dy}{y} = \frac{5}{2}\,\frac{dx}{x-1} + \frac{13}{2}\,\frac{dx}{x-3} - 8\,\frac{dx}{x-2}$$

albo:

$$\frac{dy}{y} = \left[\frac{5}{2(x-1)} + \frac{13}{2(x-3)} - \frac{8}{x-2}\right]dx$$

co prościej możemy napisać:

$$\frac{dy}{y} = \frac{x^2+4}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$$

skąd

$$dy = \frac{x^2 + 4}{(x-1)(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}{(x-2)^8}\, dx =$$

$$= \frac{(x^2+4)(x-1)^{\frac{3}{2}}(x-3)^{\frac{11}{2}}}{(x-2)^9}\, dx$$

Przykład ten wskazuje, że wygodnie jest postępować w podobny sposób wtedy, gdy funkcya dana jest iloczynem czynników, podniesionych do potęgi.

## ĆWICZENIA.

1.
$$y = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \dots$$
$$\dots + \frac{x^{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\dots(n+1)} + \dots$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

2.
$$y = 35\,(a - bx)^{\frac{12}{5}} - 60\,a\,(a - bx)^{\frac{7}{5}}$$
$$\frac{dy}{dx} = 84\,b^2 x\,(a - bx)^{\frac{2}{5}}$$

3.
$$y = (ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3}{2}\,ax^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}\,bx^{\frac{1}{3}} + \frac{5}{4}\,cx^{\frac{1}{4}}}{2\,(ax^{\frac{3}{2}} + bx^{\frac{4}{3}} + cx^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}}}$$

4.
$$y = \log(\sec x)\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} x$$

5.
$$y = (\operatorname{arc\,sin\,vers} x)^2; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2 \operatorname{arc\,sin\,vers} x}{\sqrt{2x - x^2}}$$

6.
$$y = \log(\sin^n x)$$
$$\frac{dy}{dx} = n \operatorname{cotg} x$$

7.
$$y = \operatorname{tang} x + \frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^4 x}$$

8. $$y = \log\left[(a + bx^n)^2\,(a' + b'\,x^m)^2\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,n\,bx^{n-1}}{a + bx^n} + \frac{2\,m\,b'\,x^{m-1}}{a' + b'\,x^m}$$

9. $$y = (3\,x + 2)\,(x - 1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{15}{2}\,x\,(x - 1)^{\frac{1}{2}}$$

10. $$y = \operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{x + 2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2\,(x^2 + x + 1)}$$

11. $$y = \frac{a^x\,(x\log a - 1)}{\log^2 a}$$

$$\frac{dy}{dx} = x\,a^x$$

12. $$y = \log\left[\log\,(1 + x^2)\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,x}{(1 + x^2)\cdot\log\,(1 + x^2)}$$

13. $$y = 2\,e^{\sqrt{x}}\,(x^{\frac{3}{2}} - 3\,x + 6\,x^{\frac{1}{2}} - 6)$$

$$\frac{dy}{dx} = x\,e^{\sqrt{x}}$$

14. $$y = \arccos\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1 + x^2}$$

15. $$y = x^{\operatorname{arc\,sec} x} \qquad \frac{dy}{dx} = x^{\operatorname{arc\,sec} x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\log x + \operatorname{arc\,sec} x\right)\frac{1}{x}$$

16. $$y = \frac{e^{ax}\,(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2}; \qquad \frac{dy}{dx} = e^{ax}\cos bx$$

17. $$y = \log\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\,(1 + x^2)}$$

18. $$y = x\,(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 + x^2}\,; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a^4 - a^2\,x^2 - 4\,x^4}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

19. $$y = \frac{b - 2\,cx}{\sqrt{a + bx - cx^2}}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 + 4\,a\,c}{2\,(a + bx - cx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

20. $$y = \operatorname{arc\,sec} \frac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{x^2 + x - 1}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}$$

21. $$y = e^{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} \qquad \frac{dy}{dx} = e^{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,(1 + 2\,x \operatorname{arctg} x)$$

22. $$y = \log\,(x - a) - \frac{a\,(2\,x - a)}{(x - a)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + a^2}{(x - a)^2}$$

23. $$y = \frac{\sin\,x}{1 + \operatorname{tg} x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{(\sin\,x + \cos\,x)^2}$$

24. $$y = 5\,(x + 1)^{\frac{6}{5}}\,(176\,x^3 - 165\,x^2 + 150\,x - 125)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3696\,x^3\,(x + 1)^{\frac{1}{5}}$$

25. $$y = \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}\left[1 + \left(\operatorname{arc\,sin}\frac{x}{a}\right)^2\right]}$$

26. $$y = \frac{\sin\,(a - b + c)\,x}{a - b + c} + \frac{\sin\,(a + b - c)\,x}{a + b - c} -$$

$$- \frac{\sin\,(a - b - c)\,x}{a - b - c} - \frac{\sin\,(a + b + c)\,x}{a + b + c}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos ax \sin bx \sin cx$$

27. $$y = \left(\frac{2}{\cos^4 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{\cos^5 x} - \frac{3}{\cos x}$$

28. $$y = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x-4}{6\,(x-1)^{\frac{1}{2}}\,(x-2)^{\frac{4}{3}}}$$

29. $$y = a^{x^n} \qquad \frac{dy}{dx} = n\, a^{x^n}\, x^{n-1} \log a$$

30. $$y = \frac{2 \operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt{1-x^2}} + \log \frac{1-x}{1+x} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2\, x \operatorname{arc\,sin} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

31. $$y = \operatorname{arc\,tang}\left[\operatorname{tang} \frac{x-1}{x+1}\right] \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

32. $$y = \frac{2}{\sin^2 x \cos x} - \frac{3 \cos x}{\sin^2 x} + 3 \log \operatorname{tang} \frac{x}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

33. $$y = e^x \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{c^x\,(x^4+2)}{(x^2-x+1)\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

34. $$y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2} \sin x}{b + a \cos x} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a + b \cos x}$$

35. $$y = \log \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a-bx}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a-bx}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x\sqrt{a^2-b^2x^2}}$$

36. $$y = (\log x - 1)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a}{2} \log \frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{\sqrt{a^2+x^2}+a}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \log x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

37. $$y = \log (3\,x-8)^{\frac{1}{81}} - \frac{\frac{8}{3}\,x^2 - \frac{59}{6}\,x + \frac{2744}{243}}{(3\,x-8)^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+5\,x+4}{(3\,x-8)^4}$$

38. $y = \log\,[(x-3)^2 + 4]\,[(x-4)^2+9]^2 + \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + 7 \operatorname{arctg} \frac{x-4}{3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,(3\,x^3 - 16\,x^2 + 24\,x + 70)}{x^4 - 14\,x^3 + 86\,x^2 - 254\,x + 325}$$

39. $$y = \log y \sqrt{\frac{x\sqrt{ab - cd} + \sqrt{bc + abx^2}}{x\sqrt{ab - cd} - \sqrt{bc + abx^2}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{ab^2 - bcd}}{(b + dx^2)\sqrt{c + ax^2}}$$

40. $y = \frac{\sin^5 x \cos^3 x}{8} - \frac{\sin^3 x \cos^3 x}{16} + \frac{3 \sin^3 x \cos x}{64} - \frac{3 \sin x \cos x}{128} + \frac{3\,x}{128}$

$$\frac{dy}{dx} = \sin^4 x \cos^4 x$$ ~~Dobre mnej~~. X

---

# ROZDZIAŁ II.

## Różniczkowanie funkcyi wyraźnych kilku zmiennych.

Różniczka zupełna funkcyi kilku zmiennych równa się sumie cząstkowych różniczek tej funkcyi (twierdzienie 7 rozdz. I).

Niech będzie:

$$u = F\,(x, y, z, \ldots)\,;$$

oznaczamy tedy przez $u$ funkcyę wyraźną zmiennych $x, y, z, \ldots$

Będziemy mieli:

$u = F(x, y)$

$du = F_x\,dx + F_y\,dy$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz + \ldots$$

### PRZYKŁAD.

Mamy dane:

$$u = \frac{x^2\,y + y^2\,z + z^2\,x}{x + y + z}$$

Przy obliczaniu pochodnej cząstkowej funkcyi $u$ względem $x$, uważamy $y$ i $z$ za wielkości stałe, a tylko $x$ za zmienną.

Mamy tedy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(x+y+z)(2\,xy+z^2)-(x^2y+y^2z+z^2x)}{(x+y+z)^2};$$

upraszczając, otrzymamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{(y+z)(z^2+2\,xy)+y\,(x^2-yz)}{(x+y+z)^2}$$

Podobnież przy obliczaniu pochodnej cząstkowej $u$ względem $y$, uważamy $x$ i $z$ za stałe. Ta pochodna równa się

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{(z+x)(x^2+2\,yz)+z\,(y^2-xz)}{(x+y+z)^2}$$

Pochodna cząstkowa $u$ względem $z$ równa się

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{(x+y)(y^2+2\,xz)+x\,(z^2-xy)}{(x+y+2)^2}$$

Moglibyśmy także dwie ostatnie pochodne otrzymać z pierwszej przez symetryę, gdyż funkcya dana jest symetryczna względem $x$, $y$ i $z$.

Różniczka zupełna $du$ będzie ostatecznie:

$$du=\frac{(y+z)(z^2+2\,xy)+y\,(x^2-yz)}{(x+y+z)^2}\,dx+$$

$$+\frac{(z+x)(x^2+2\,yz)+z\,(y^2-xz)}{(x+y+z)^2}\,dy+$$

$$+\frac{(x+y)(y^2+2\,xz)+x\,(z^2-xy)}{(x+y+z)^2}\,dz$$

Gdy w tym wzorze zamiast $dx$, $dy$, $dz$ podstawimy odpowiednio $x$, , $z$, drugi wyraz tej równości, według twierdzenia Eulera, będzie się równał $2\,u$. Twierdzenie to jest następujące: Jeżeli $u$ jest funkcyą jednorodną go stopnia zmiennych $x, y, z \ldots$, wówczas mamy związek następujący:

$$\frac{\partial u}{\partial x}x+\frac{\partial u}{\partial y}y+\frac{\partial u}{\partial z}z+\ldots=nu$$

## CWICZENIA.

$$u=xye^{x+2y} \qquad du=e^{x+2y}\,[y\,(1+x)\,dx+x\,(1+2\,y)\,dy]$$

$$u=\frac{1}{(x^2+y^2)^2} \qquad du=-\frac{4\,(x\,dx+y\,dy)}{(x^2+y^2)^3}$$

jeżeli $dx=x$ i $dy=y$, drugi wyraz równa się $-4\,u$.

3. $$u = \frac{(x+a)^n}{(y+b)^m} \qquad du = \frac{(x+a)^{n-1}\,[n\,(y+b)\,dx - m\,(x+a)\,dy]}{(y+b)^{m+1}}$$

4. $$u = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}} \qquad du = \frac{2\,x\,y\,(y\,dx - x\,dy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2 - y^2}}$$

przy $dx = x$ i $dy = y$ drugi wyraz staje się równym zeru.

5. $$u = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}$$

$$du = \frac{(y - x - 2\sqrt{xy})\sqrt{y}\,dx + (x - y - 2\sqrt{xy})\sqrt{x}\,dy}{2\sqrt{xy}\,(x+y)^2}$$

przy $dx = x$ i $dy = y$, drugi wyraz równa się $-\frac{1}{2}u$.

6. $$u = \log y^x \qquad du = \log y \,.\, dx + \frac{x}{y}\,dy$$

7. $$u = \log \sin \frac{x}{y} \qquad du = \frac{1}{y^2}\,(y\,dx - x\,dy)\,\mathrm{cotg}\,\frac{x}{y}$$

8. $$u = \log \sqrt{\frac{ax + by}{ax - by}} \qquad du = \frac{ab\,(x\,dy - y\,dx)}{a^2\,x^2 - b^2\,y^2}$$

9. $$u = \mathrm{arctg}\,\frac{x - y}{x + y} \qquad du = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

10. $$u = \frac{x^2\,y}{a^2 - z^2} \qquad du = \frac{2\,xy}{a^2 - z^2}\,dx + \frac{x^2}{a^2 - z^2}\,dy + \frac{2\,x^2\,y\,z}{(a^2 - z^2)^2}\,dz$$

11. $$u = \frac{m \sin y - n \sin z}{p \sin z - m \sin x}$$

$$du = \frac{m \cos x\,(m \sin y - n \sin z)\,dx + m \cos y\,(p \sin z - m \sin x)\,dy +}{(p \sin z - m \sin x)^2}$$

$$\frac{+\,m \cos z\,(n \sin x - p \sin y)\,dz}{(p \sin z - m \sin x)^2}$$

12. $$u = \mathrm{arc\,sec}\,\frac{xy}{z}$$

Znak (−)

$$du = \frac{yzdx + zxdy + xydz}{xy\sqrt{x^2\,y^2 - z^2}}$$

13. $$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{z} + \frac{z^2}{2}$$

$$du = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z\,dx - x\,dz}{z^2 + x^2} + z\,dz$$

14. $u = \log \dfrac{y + \sqrt{x^2 - z^2}}{y - \sqrt{x^2 - z^2}}$ $\qquad du = 2\,\dfrac{x\,(y\,dx - x\,dy) - z\,(y\,dz - z\,dy)}{(y^2 - x^2 + z^2)\sqrt{x^2 - z^2}}$

15. $$u = \frac{x\,y\,z\,t}{x + y + z + t}$$

$$du = \frac{(y + z + t)\,y\,z\,t\,dx + (z + t + x)\,z\,t\,x\,dy + (t + x + y)\,t\,x\,y\,dz +}{(x + y + z + t)^2}$$

$$\frac{+ (x + y + z)\,x\,y\,z\,dt}{(x + y + z + t)^2}$$

Przy $dx = x$, $dy = y$, $dz = z$, $dt = t$, drugi wyraz równa się $-\,3\,u$.

---

$y = f(x)$

$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$

## ROZDZIAŁ III.

### Kolejne pochodne funkcyi wyraźnych jednej zmiennej.

Rezultat różniczkowania zwykłymi sposobami pochodnej pierwszego rzędu funkcyi $x$, nazywamy pochodną drugiego rzędu tej funkcyi.

Pochodną trzeciego rzędu nazywamy wynik różniczkowania znanymi sposobami pochodnej drugiego rzędu i t. d.

Jeżeli daną funkcyę potrafimy rozłożyć na dwa czynniki, z których każdy jest prostszą funkcyą zmiennej $x$, wówczas możemy otrzymać pochodną $n^{go}$ rzędu funkcyi danej, posiłkując się twierdzeniem Leibniza, według którego, jeżeli $u$ i $v$ są funkcyami zmiennej $x$, możemy napisać:

$$\frac{d^n uv}{dx^n} = v\,\frac{d^n u}{dx^n} + \frac{n}{1} \cdot \frac{dv}{dx}\,\frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{d^2 v}{dx^2}\,\frac{d^{n-2} u}{dx^{n-2}} + \ldots$$

Jeżeli funkcya dana jest postaci:

$$(a + bx + cx^2)^m,$$

to aby otrzymać pochodną $n^{go}$ rzędu tej funkcyi, można rozłożyć trójmian $a + bx + cx^2$ na dwa czynniki pierwszego stopnia i zastosować twierdzenie Leibniza. Prościej jednak jest zastosować do tego zagadnienia dwa

$(m + nx)^2 = \underbrace{m^2}_{a} + \underbrace{2mn}_{b}x + \underbrace{n^2}_{c}x^2 = a + bx + cx^2$

twierdzenia Lagrange'a *(Mémoires de Berlin,* 1772), które można wypowiedzieć w następujący sposób:

1°. Mamy

$$y = (a + bx + cx^2)^m$$

Jeżeli trójmian $a + bx + cx^2$ oznaczymy przez $u$, a jego pochodną $b + 2\,cx$ przez $u'$, wówczas będziemy mieli

$$\frac{d^n\, u^m}{dx^n} = m\,(m-1)\dots(m-n+1)\, u^{m-n}\, u'^{\,n} \left[1 + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,(m-n+1)}\,\frac{cu}{u'^{\,2}} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,(m-n+1)\,(m-n+2)}\,\frac{c^2\, u^2}{u'^{\,4}} + \text{etc.}\right] \qquad (\alpha)$$

2°. Przez $u$ et $u'$ oznaczamy trójmian $a + bx + cx^2$ i jego pochodną; podstawiając $4\,ac - b^2 = e^2$, znajdujemy:

$$\frac{d^n\, u^m}{dx^n} = 2\,m\,(2\,m-1)\dots(2\,m-n+1)\left(\frac{u'}{2}\right)^n u^{m-n}\left[1 + \frac{m}{1}\,\frac{n\,(n-1)}{2\,m\,(2\,m-1)}\,\frac{e^2}{u'^{\,2}} + \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{2\,m\,(2\,m-1)\,(2\,m-2)\,(2\,m-2)}\,\frac{e^4}{u'^{\,4}}\ \text{etc.}\right]\dots \qquad (3)$$

W każdym poszczególnym wypadku można przy obliczaniu $n^{ej}$ pochodnej zastosować jeden z powyższych sposobów, jak to zresztą zobaczymy na następujących przykładach.

## PRZYKŁAD I.

Mamy znaleźć kolejne pochodne funkcyi:

$$y = \frac{a + x}{a - x}$$

Pierwsza pochodna równa się

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\,a}{(a-x)^2};$$

różniczkując pierwszą pochodną $\frac{2\,a}{(a-x)^2}$ zwykłymi sposobami, otrzymujemy drugą pochodną:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2\,.\,2\,.\,a}{(a-x)^3}$$

różniczkując drugą pochodną $\frac{2 \cdot 2 \cdot a}{(a - x)^3}$, otrzymujemy trzecią pochodną

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a}{(a - x)^4}, \quad \text{i t. d.}$$

Pochodna $n^{go}$ rzędu będzie tedy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 2 \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n)\, a}{(a - x)^{n+1}}$$

PRZYKŁAD II.

Mamy znaleźć pochodne funkcyi

$$y = \frac{(a + bx)^m}{(a' + b' x)^p}$$

Funkcyę tę można rozłożyć na dwa czynniki:

$$(a + bx)^m \quad \text{i} \quad \frac{1}{(a' + b' x)^p} \quad \text{czyli} \quad (a' + b' x)^{-p}$$

W celu znalezienia pochodnej $n^{go}$ rzędu tej funkcyi, możemy zastosować wzór Leibniza, kładąc:

$$u = (a + bx)^m$$

$$v = (a' + b' x)^{-p}$$

Różniczkując, znajdujemy:

$$\frac{du}{dx} = m\, b\, (a + bx)^{m-1}$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = m\, (m - 1)\, b^2\, (a + bx)^{m-2}$$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = m\, (m - 1)\, (m - 2)\, b^3\, (a + bx)^{m-3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n u}{dx^n} = m\, (m - 1) \ldots (m - n + 1)\, b^n\, (a + bx)^{m-n}$$

Dla drugiego czynnika podobnie otrzymujemy:

$$\frac{dv}{dx} = -p\, b'\, (a' + b' x)^{-p-1}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = p\,(p+1)\,b'^2\,(a' + b'\,x)^{-p-2}$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = -\,p\,(p+1)\,(p+2)\,b'^3\,(a' + b'\,x)^{-p-3}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n v}{dx^n} = (-1)^n p\,(p+1)\ldots(p+n-1)\,b'^n\,(a' + b'\,x)^{-p-n}$$

Podstawiając wartości funkcyi $u$, $v$ i ich pochodnych we wzór Leibniza, otrzymujemy

$$\frac{d^n uv}{dx^n} \text{ albo } \frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{(a' + b'\,x)^p}\,[m\,(m-1)\,.\,.\,(m-n+1)\,b^n\,(a+bx)^{m-n}]$$

$$-\frac{n}{1}\,\frac{p\,b'}{(a' + b'\,x)^{p+1}}\,[m\,(m-1)\ldots(m-n+2)\,b^{n-1}\,(a+bx)^{m-n+1}]$$

$$+\frac{n\,(n-1)\,p\,(p+1)\,b'^2}{1\,.\,2\,(a' + b'\,x)^{p+2}}\,[m\,(m-1)\ldots(m-n+3)\,b^{n-2}\,(a+bx)^{m-n+2}] \text{ i t. d.}$$

albo, kładąc

$$A = m\,(m-1)\ldots(m-n+1)\,b^n\,\frac{(a+bx)^{m-n}}{(a' + b'\,x)^p}$$

otrzymamy

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A - \frac{n}{1}\,\frac{pb'}{a' + b'\,x}\cdot\frac{A\,(a+bx)}{b\,(m-n+1)} +$$

$$+\frac{n\,(n-1)\,p\,(p+1)\,b'^2}{1\,.\,2\,(a' + b'\,x)^2}\cdot\frac{A\,(a+bx)^2}{b^2\,(m-n+1)\,(m-n+2)} - \text{ i t. d.,}$$

co możemy inaczej napisać w postaci następującej:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = A\left[1 - \frac{n}{1}\,\frac{pb'}{b\,(m-n+1)}\,\frac{a+bx}{a' + b'\,x} + \right.$$

$$\left. + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{p\,(p+1)\,b'^2}{b^2\,(m-n+1)\,(m-n+2)}\left(\frac{a+bx}{a' + b'\,x}\right)^2 - \text{ i t. d.}\right]$$

Chcąc tedy otrzymać pochodną pierwszą, drugą, trzecią i t. d., trzeba w powyższym wzorze podstawić $n = 1, 2, 3$ i t. d.

## PRZYKŁAD III.

Mamy znaleźć pochodną $n^{go}$ rzędu funkcyi:

$$y = \frac{1}{(ax + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Funkcyę tę możemy napisać w postaci następującej:

$$y = (ax + x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

jest ona więc kształtu

$$(a + bx + cx^2)^m.$$

Możemy znaleźć jej pochodną, posługując się sposobem podanym we wzorze (3). W tym przypadku przez $u$ oznaczmy wartość następującą

$$u = ax + x^2, \quad \text{skąd} \quad u' = a + 2\,x$$

oraz załóżmy $\qquad e^2 = -a^2.$

Podstawiając te wartości i kładąc $m = -\frac{3}{2}$ we wzorze (3), otrzymamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(-1)^n\, 3\,.\,4\,.\,.\,(n + 2)\,(a + 2\,x)^n}{2^n\,(ax + x^2)^{n + \frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{3\,n\,(n-1)}{2\;3\,.\,4}\left(\frac{a}{a + 2\,x}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\cdot\left(\frac{a}{a + 2\,x}\right)^4 \text{ i t. d.}\right]$$

## PRZYKŁAD IV.

Mamy funkcyę

$$y = \frac{1}{a^2 - b^2\,x^2}$$

Funkcyę tą można napisać w postaci następującej:

$$y = \frac{1}{2\,a}\left(\frac{1}{a - bx} + \frac{1}{a + bx}\right)$$

Teraz z łatwością znajdziemy kolejne pochodne różnych rzędów.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{2\,a}\left[\frac{1}{(a - bx)^2} - \frac{1}{(a + bx)^2}\right]$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1\,.\,2\,.\,b^2}{2\,a}\left[\frac{1}{(a - bx)^3} + \frac{1}{(a + bx)^3}\right]$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1 . 2 . 3\, b^3}{2\, a} \left[\frac{1}{(a - bx)^4} - \frac{1}{(a + bx)^4}\right]$$

Czemu nie $+(-1)^n$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1 . 2 . 3 \,.\,. \,nb^n}{2\, a} \left[\frac{1}{(a - bx)^{n+1}} - (-1)^{n+1} \frac{1}{(a + bx)^{n+1}}\right]$$

Jeżeli $n$ jest parzyste, mamy: $\to n!$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1 . 2 . 3 \,.\,. \,n\, b^n}{2\, a\, (a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} [(a + bx)^{n+1} + (a - bx)^{n+1}]$$

jeżeli zaś $n$ jest nieparzyste, znajdziemy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1 . 2 . 3 \,.\,. \,n\, b^n}{2\, a\, (a^2 - b^2 x^2)^{n+1}} [(a + bx)^{n+1} - (a - bx)^{n+1}]$$

## ĆWICZENIA

1. $y = x^m \qquad \frac{d^n y}{dx^n} = m\,(m - 1) \ldots (m - n + 1)\, x^{m-n}$

Jeżeli $n = m$, wówczas

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1 . 2 . 3 \ldots m\,,$$

możemy więc powiedzieć, że pochodna $m^{go}$ rzędu funkcyi $x^m$ jest wielkością stałą, pochodne zaś rzędu wyższego od $m$ równają się 0.

2. $y = \text{Log}\, x \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\text{Log}\, e}{x}$

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\, x^{-1}\, \text{Log}\, e}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1 . 2 . 3 \ldots (n - 1)\, \text{Log}\, e}{x^n}$$

$$n = 2, 3, 4, 5, \ldots.$$

Dla $n = 1$ znajdziemy $\frac{dy}{dx} = 0$, co jest mylne, bo jak wiemy $\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Log}\, e}{x}$ Z wyjątkiem więc pierwszej pochodnej funkcyi Log $x$, wszystkie następne pochodne dadzą się wyrazić przy pomocy wzoru ogólnego, dającego pochodną rzędu $n^{go}$. Jeżeli logarytmy, zachodzące we wzorze danym, są logarytmami neperowskimi, to ponieważ $\log e = 1$, przeto $n^a$ pochodna funkcyi $y = \log x$ będzie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}\, x^{-1}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{1 . 2 . 3 \,.\,. \,(n - 1)}{x^n}$$

3. $y = a^{mx}$ $\qquad \dfrac{d^n y}{dx^n} = (m \log a)^n a^{mx}$

Jeżeli $m = 1$, to $y = a^x$, pochodna zaś $n^{go}$ rzędu będzie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (\log a)^n a^x$$

Jeżeli oprócz tego $a = e$, to $y = e^x$ i wtedy pochodna $n^{go}$ rzędu będzie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^x$$

4. $y = \sin mx$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} = m \cos mx = m \sin (mx + \dfrac{\pi}{2})$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = m^2 \cos \left(mx + \frac{\pi}{2}\right) = m^2 \sin \left(mx + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m^n \sin \left(mx + n\frac{\pi}{2}\right)$$

Jeżeli $m = 1$, to $y = \sin x$, a pochodna $n^{go}$ rzędu równa się

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sin \left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

5. $y = \cos mx$ $\qquad \dfrac{d^n y}{dx^n} = m^n \cos \left(mx + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Gdy $m = 1$ i $y = \cos x$, to $\dfrac{d^n y}{dx^n} = \cos \left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

6. $y = e^{x \sin \alpha} \sin (x \cos \alpha)$ $\qquad \dfrac{d^n y}{dx^n} = e^{x \sin \alpha} \sin \left(x \cos \alpha - n\alpha + \dfrac{n\pi}{2}\right)$

7. $$y = e^{ax} \sin mx$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{ax} (a \sin mx + m \cos mx) = e^{ax} a \left(\sin mx + \frac{m}{a} \cos mx\right)$$

Podstawiając $\dfrac{m}{a} = \operatorname{tang} \varphi$ otrzymamy $a = (a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi$; skąd dalej otrzymujemy $\dfrac{dy}{dx} = (a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin (mx + \varphi)$.

Postępując w ten sam sposób przy pochodnych następnych rzędów, otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin (mx + n\varphi)$$

dobrze!

8. $y = (1 - x^2)^m$, co można napisać inaczej: $y = (1 + x)^m (1 - x)^m$ stosując twierdzenie Leibniza, mamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{(1 - x^2)^m}{(1 + x)^n} m (m - 1) \ldots (m - n + 1) \left[1 - \frac{n}{1} \frac{m}{m - n + 1} \frac{1 + x}{1 - x} + \right.$$

$$\left. + \frac{n (n - 1)}{1 . 2} \frac{m (m - 1)}{(m - n + 1) (m - n + 2)} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 - \text{ i t. d.}\right]$$

Jeżeli $n = m$, to

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1 . 2 . 3 \ldots m (1 - x)^m \left[1 - m^2 \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{m^2 (m - 1)^2}{1^2 . 2^2} \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^2 - \text{ i t. d.}\right]$$

9. $$y = (a + bx)^m \log (a + bx)$$

Stosując twierdzenie Leibniza, mamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = m (m - 1) \ldots (m - n + 1) b^n (a + bx)^{m-n} \left[\log (a + bx) + \right.$$

$$+ \frac{n}{1} \frac{1}{m - n + 1} - \frac{n (n - 1)}{1 . 2} \frac{1}{(m - n + 1) (m - n + 2)} +$$

$$\left. + \frac{n (n - 1) (n - 2)}{1 . 2 . 3} \frac{1 . 2}{(m - n + 1) (m - n + 2) (m - n + 3)} - \text{ i t. d.}\right]$$

Jeżeli $n = m$, wówczas

$$\frac{d^m y}{dx^m} = 1 . 2 . 3 \ldots mb^m \left[\log (a + bx) + \frac{m}{1^2} - \frac{m (m - 1)}{(1 . 2)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{m (m - 1) (m - 2) 1 . 2}{(1 . 2 . 3)^2} - \text{ i t. d.}\right]$$

10. $$y = (a - bx)^m \sin (a + bx)$$

Podług twierdzenia Leibniza mamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n m (m - 1) \ldots (m - n + 1) b^n (a - bx)^{m-n} \left[\sin (a + bx) - \right.$$

$$- \frac{n}{1} \frac{a - bx}{m - n + 1} \sin \left(a + bx + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$\left. + \frac{n (n - 1)}{1 . 2} \frac{(a - bx)^2}{(m - n + 1) (m - n + 2)} \sin \left(a + bx + \frac{2 \pi}{2}\right) - \text{ i t. d.}\right]$$

Jeżeli $n = m$ i $b = 1$, wówczas pochodna $m^{go}$ rzędu funkcyi $y = (a - x)^m \sin (a + x)$ równa się:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = (-1)^m 1 . 2 . 3 . m \left[\sin (a + x) - \frac{m}{1^2} (a - x) \sin \left(a + x + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{m (m - 1)}{(1 . 2)^2} (a - x)^2 \sin \left(a + x + \frac{2 \pi}{2}\right) - \text{ i t. d.}\right]$$

11. $$y = x^m e^{ax} \sin mx$$

Jeżeli napiszemy, że $e^{ax} \sin mx = u$, $x^m = v$, a oprócz tego wiemy, że (ćwiczenie 7) $\frac{d^n u}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin (mx + n \varphi)$, wówczas z łatwością znajdziemy, stosując twierdzenie Leibniza, że:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \left\{x^m \sin (mx + n \varphi) + \frac{n}{1} mx^{m-1} \frac{\sin [mx + (n - 1) \varphi]}{(a^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left. + \frac{n (n - 1)}{1 . 2} m (m - 1) x^{m-2} \frac{\sin [mx + (n - 2) \varphi]}{(a^2 + m^2)^{\frac{2}{2}}} + \text{ i t. d.}\right\}$$

12. $$y = e^{ax} x, \text{ gdzie } x \text{ jest funkcyą zmiennej } x$$

Jeżeli założymy, że $u = x$ i $v = e^{ax}$ podług twierdzenia Leibniza mamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax} \left(\frac{d^n x}{dx^n} + n . a \frac{d^{n-1} x}{dx^{n-1}} + \frac{n (n - 1)}{1 . 2} a^2 \frac{d^{n-2} x}{dx^{n-2}} + \text{ i t. d.}\right)$$

Rezultat ten możemy napisać inaczej:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^n + n a \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \frac{n (n - 1)}{1 . 2} a^2 \left(\frac{d}{dx}\right)^{n-2} + \text{ i t. d.}\right] x$$

albo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = e^{ax} \left(\frac{d}{dx} + a\right)^n x$$

co daje

$$\left(\frac{d}{dx} + a\right)^n x = e^{-ax} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{ax} x)$$

Wzór ten bywa bardzo użyteczny przy rozwiązywaniu równań rożniczkowych.

13. $y = \text{arc} \sin x$; $\quad \frac{dy}{ax} = \frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$

Stosując wzór (3), otrzymamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, (n-1)\, x^{n-1}}{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{1}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2}\frac{1}{x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\frac{1}{x^4} + \text{ i t. d.}\right]$$

$$n = 2,\ 3,\ 4,\ 5 \ldots$$

Jeżeli otrzymany powyżej wynik weźmiemy ze znakiem ujemnym, będziemy mieli wyrażenie na pochodną $n^{\text{go}}$ rzędu funkcyi: arc cos $x$.

14. $\qquad y = \text{arc tg}\, \frac{x}{a}; \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2} = a\,(a^2 + x^2)^{-1}$

Wzór ($\beta$) daje:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = a\,\frac{d^{n-1}(a^2 + x^2)^{-1}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n\, a\, \frac{x^{n-1}}{(a^2 + x^2)^n}$$

$$\left[1 - \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\frac{a^2}{x^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5}\frac{a^4}{x^4} - \text{ i t. d.}\right]$$

Wynik ten wzięty ujemnie, da nam wyrażenie na pochodną rzędu $n^{\text{go}}$ funkcyi arc cotg $\frac{x}{a}$.

15. $$y = \log\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{a + bx + x^2}} = (a + bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Stosując wzór ($\beta$), otrzymamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(a + bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, (n-1)\, \frac{(b + 2\,x)^{n-1}}{2^{n-1}(a + bx + x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2}\,\frac{4\,a - b^2}{(b + 2\,x)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}\right.$$

$$\left.\frac{(4\,a - b^2)^2}{(b + 2\,x)^4} - \text{ i t. d.}\right].$$

16. $$y = \frac{1}{a^2 + x^2}$$

Funkcyę tę można napisać w innej postaci:

$$y = -\frac{1}{2\,a\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{x + a\sqrt{-1}} - \frac{1}{x - a\sqrt{-1}}\right)$$

Zastosowaliśmy tutaj rozkład mianownika na czynniki proste, podany w przykładzie IV.

Po różniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2a\sqrt{-1}} \left[ \frac{(x - a\sqrt{-1})^{n+1} - (x + a\sqrt{-1})^{n+1}}{(a^2 + x^2)^{n+1}} \right]$$

Podstawiając:

$$\varphi = \text{arc tang} \frac{a}{x}, \text{ skąd } x = \sqrt{a^2 + x^2} \cos\varphi \text{ oraz } a = \sqrt{a^2 + x^2} \sin\varphi,$$

ostatecznie znajdujemy, że

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{a} \frac{\sin(n+1)\varphi}{(a^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad \text{(LIOUVILLE)}$$

Ponieważ pierwsza pochodna funkcyi $y = \text{arctg} \frac{x}{a}$ jest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2 + x^2},$$

pochodna zaś $n^{go}$ rzędu tej funkcyi jest

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^{n-1} a (a^2 + x^2)^{-1}}{dx^{n-1}},$$

zatem otrzymujemy również:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^{n-1} 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \frac{\sin n\varphi}{(a^2 + x^2)^{\frac{n}{2}}}$$

17. $$y = \frac{x}{a^2 + x^2}$$

Postępując podobnie jak w ćwiczeniu poprzedniem, otrzymujemy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \frac{\cos(n+1)\varphi}{(a^2 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \qquad \text{(LIOUVILLE)}$$

Wyniki, otrzymane w dwóch ostatnich ćwiczeniach, często spotykają się w teoryi całek określonych.

18. $$y = \frac{1}{e^x + 1}$$

dzieląc 1 przez $e^x + 1$ znajdujemy

$$y = e^{-x} - e^{-2x} + e^{-3x} - e^{-4x} + \text{ i t. d.}$$

różniczkując wzory otrzymujemy ostatecznie wzór następujący:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n \left[1^n e^{-x} - 2^n e^{-2x} + 3^n e^{-3x} - 4^n e^{-4x} + \text{ i t. d.}\right]$$

LAPLACE znalazł odmienną postać pochodnej $n^{go}$ rzędu tej samej funkcyi (zob. *Mémoires de l'Académie,* 1777, p. 108).

---

## ROZDZIAŁ IV.

### Kolejne pochodne funkcyi wyraźnych wielu zmiennych.

Niech we wzorze $u = F(x\, y)$ symbol $u$ oznacza funkcyę zmiennych $x$ *i* $y$; bez względu na porządek w którym wykonywamy różniczkowanie cząstkowe, mamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x\, \partial y} \quad \text{i t. d.}$$

Różniczka zupełna $n^{go}$ rzędu funkcyi $u$ równa się tedy:

$$d^n u = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} dx^n + n \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\, \partial y} dx^{n-1}\, dy + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} \frac{\partial^n u}{\partial x^{n-2}\, \partial y^2} dx^{n-2}\, dy^2 + \text{i t. d.}$$

co symbolicznie możemy napisać:

$$d^n u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right)^n$$

Uważajmy jeszcze funkcyę $u$ zmiennych $x, y, z,$ $u = F(x, y, z)$. Podobnie jak wyżej znajdziemy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial x},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2\, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial y},$$

$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$



$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial z \, \partial x \, \partial z},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial y \, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \, \partial z \, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \, \partial x \, \partial z} \quad \text{i t. d.}$$

a więc bez względu na porządek różniczkowania otrzymamy następujący wzór symboliczny:

$$d^n u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right)^n$$

Ilekolwiek więc zmiennych zawierać będzie dana funkcya, zawsze dla pochodnych $n^{go}$ rzędu tej funkcyi znajdziemy podobne wzory.

Np: $u = f(x, y, z)$; $d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} dx dz + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y}$

## PRZYKŁAD I.

Niech będzie $\quad u = x^m y^p.$

Mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = m x^{m-1} y^p \tag{1}$$

oraz

$$\frac{\partial u}{\partial y} = p x^m y^{p-1} \tag{2}$$

Różniczkując (1) względem zmiennej $y$, a (2) względem zmiennej $x$, znajdziemy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = m \, p \, x^{m-1} y^{p-1} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial x}$$

Różniczkując (1) względem zmiennej $x$, a wynik otrzymany różniczkując względem zmiennej $y$, otrzymujemy kolejno:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = m \, (m - 1) \, x^{m-2} y^p,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \, \partial y} = m \, p \, (m - 1) \, x^{m-2} y^{p-1} \quad \text{i t. d.}$$

Ten sam wynik otrzymamy, różniczkując dwa razy wyrażenie (2) względem zmiennej $x$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial x} = m \, p \, x^{m-1} y^{p-1}$$

skąd:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \, \partial x^2} = m \, p \, (m - 1) \, x^{m-2} y^{p-1}$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = p(p-1)x$

$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = p(p-1)(p-2)x^m y$

$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = m p(p-1) x^{m-1} y^{p-2}$

Jeżeli zaś będziemy szukać kolejnych różniczek zupełnych danej funkcyi $u = x^m y^p$, wówczas, uważając $dx$ i $dy$ jako wielkości stałe, otrzymamy

$$du = m\, x^{m-1} y^p\, dx + p x^m y^{p-1}\, dy,$$

$$d^2 u = m(m-1)\, x^{m-2} y^p\, dx^2 + 2\, mp\, x^{m-1} y^{p-1}\, dx\, dy + p(p-1)\, x^m y^{p-1}\, dy^2,$$

$$d^3 u = m(m-1)(m-2)\, x^{m-3} y^p\, dx^3 + 3\, m\, p\, (m-1)\, x^{m-2} y^{p-1}\, dx^2\, dy +$$
$$+ 3\, m\, p\, (p-1)\, x^{m-1} y^{p-2}\, dx\, ay^2 + p(p-1)(p-2)\, x^m y^{p-3}\, dy^3 + \text{i t. d.}$$

Łatwiej jest różniczkować względem zmiennej $x$ i $y$ niż szukać cząstkowych różniczek i podstawiać je we wzór wyżej podany.

## PRZYKŁAD II.

Mamy funkcyę $\qquad u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad (3)$$

Różniczkując odpowiednio (1) i (2) względem $y$ i $x$, zaś (2) i (3) względem $z$ i $y$, oraz (1) i (3) względem $z$ i $x$, otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{x\, y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = -\frac{x\, y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = -\frac{y\, z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y} = -\frac{y\, z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = -\frac{x\, z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = -\frac{x\, z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Otrzymane cząstkowe pochodne różniczkujemy w sposób następujący: pierwsze dwie względem zmiennej $z$, następne dwie względem $x$, ostatnie zaś dwie względem $y$. Wtedy znajdujemy:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y\, \partial z} = \frac{x\, y\, z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x\, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z\, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial y\, \partial x} =$$

$$= \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial z\, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial x\, \partial y}$$

Dla kolejnych różniczek zupełnych danej funkcyi:

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

znajdujemy:

$$du = \frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Różniczkując powtórnie tę funkcyę i uważając $dx$, $dy$, $dz$ jako stałe, otrzymujemy:

$$d^2 u = \frac{(x\, dy - y\, dx)^2 + (z\, dx - x\, dz)^2 + (y\, dz - z\, dy)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{i t. d.}$$

## ĆWICZENIA.

1. $$u = (\sin x)^{\sin y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \cos y \cos x \sin x^{\sin y - 1} (\sin y \log \sin x + 1) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

2. $$u = \operatorname{tang} (x^y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{x^{y-1} (\cos x^y + y \log x \cos x^y + 2\, y\, x^y \log x \sin x^y}{\cos^3 (x^y)} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

3. $$u = e^{xy} \operatorname{arctg} (x + y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \left\{(1 + x\, y) \operatorname{arctang} (x + y) + \frac{(x + y)\, [(x + y)^2 - 1]}{[1 + (x + y)^2]^2}\right\} e^{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

4. $$u = \frac{2\, x\, y}{x^3 - y^3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\, 4 \,.\, \frac{x^6 + 7\, x^3\, y^3 + y^6}{(x^3 - y^3)^3}$$

5. $$u = \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{2\, x^3\, y}{(x^4 - y^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

6.
$$u = \frac{x+y}{\sin(x-y)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{x+y}{\sin^3(x-y)}[1+\cos^2(x-y)] = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

7.
$$u = \sqrt{x^2+y^2} + \text{arc tang}\,\frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{x^2-y^2-x\,y\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, dx}$$

8.
$$u = \text{arc sin}\sqrt{\frac{x-y}{y}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{4}\,\frac{y}{(x\,y-y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

9.
$$u = \cos\frac{x}{y}\,\text{arc cos}\,\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{y^2}\,\text{arc cos}\,\frac{y}{x}\left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right) + \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$\left(\frac{2}{y}\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{a^2-y^2}\cos\frac{x}{y}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

10.
$$u = \log x - \frac{y^2}{2\,x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2\,x^2} + \frac{1}{2}\log\left[\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-y^2}{x}\right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{2\,y}{x^3} + \frac{x^2+2\,y^2}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

11.
$$u = x^3 - 3\,a\,xy + y^3 \qquad d^3 u = 12\,(dx^3 + dy^3)$$ ?

12.
$$u = \sqrt{2\,xy+y^2} \qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial y} = \frac{y^2\,(y-x)}{(2\,xy+y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

13.
$$u = x\,\text{tang}\,y + y\,\text{tang}\,x$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial^3 x\, \partial y} = \frac{2\,(\cos^2 x + 3\sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

14.
$$u = \log\,[(x+y)^2\,(y+z)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{2}{(x+y)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = -\frac{1}{(y+z)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = 0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}$$

15.
$$u = \frac{x\, y\, z}{x^2 - z^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = -\frac{z\,(x^2 + z^2)}{(x^2 - z^2)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = -\frac{x\,(x^2 + z^2)}{(x^2 - z^2)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = -\frac{y\,(x^4 + 6\, x^2\, z^2 + z^4)}{(x^2 - z^2)^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}$$

16.
$$u = \log x^{y^z}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{z\, y^{z-1}}{x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = y^{z-1} \log x\,(1 + z \log y) = \frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = \frac{y^z \log y}{x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}$$

17.
$$u = x \log y + y \log z + z \log x$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial y^2} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2\, \partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial x\, \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\, \partial z^2} = -\frac{1}{z^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial z^2\, \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial y\, \partial z}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z\, \partial x^2} = -\frac{1}{x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\, \partial z} = \frac{\partial^3 u}{\partial x\, \partial z\, \partial x}$$

$$d^3 u = 2\left(\frac{z\, dx^3}{x^3} + \frac{x\, dy^3}{y^3} + \frac{y\, dz^3}{z^3}\right) - 3\left(\frac{dz\, dx^2}{x^2} + \frac{dx\, dy^2}{y^2} + \frac{dy\, dz^2}{z^2}\right)$$

18.
$$u = e^{ax + by + cz}$$

$$d^n u = e^{ax + by + cz}\,(a\, dx + b\, dy + c\, dz)^n$$

19. $$u = \log (ax + by + cz)$$

$$d^n u = -(-1)^n \, 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, (n-1) \left( \frac{a \, dx + b \, dy + c \, dz}{ax + by + cz} \right)^n$$

20. $$u = \sin ax \sin by \sin cz$$

$$\begin{aligned} d^4 u = {} & \sin ax \sin by \sin cz \, (a^4 \, dx^4 + 6 \, a^2 \, b^2 \, dx^2 \, dy^2 + 6 \, a^2 \, c^2 \, dx^2 \, dz^2 + \\ & + b^4 \, dy^4 + 6 \, b^2 \, c^2 \, dy^2 \, dz^2 + c^4 \, dz^4) \\ & - \cos ax \cos by \sin cz \, (a^2 \, dx^2 + 3 \, c^2 \, dz^2 + b^2 \, dy^2) \, 4 \, ab \, dx \, dy \\ & - \cos ax \sin by \cos cz \, (a^2 \, dx^2 + 3 \, b^2 \, dy^2 + c^2 \, dz^2) \, 4 \, ac \, dx \, dz \\ & - \sin ax \cos by \cos cz \, (b^2 \, dy^2 + 3 \, a^2 \, dx^2 + c^2 \, dz^2) \, 4 \, bc \, dy \, dz \end{aligned}$$

21. $$u = \frac{x^2 \, y^2}{z^2 + t^2}$$

$$\frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \, \partial y^2 \, \partial z^2 \, \partial t^2} = \frac{32 \, (38 \, z^2 \, t^2 - 5 \, z^4 - 5 \, t^4)}{(z^2 + t^2)^5} = \frac{\partial^8 u}{\partial x^2 \, \partial y^2 \, \partial z^2 \, \partial t^2} = \ldots \text{ i t. d.}$$

---

# ROZDZIAŁ V.

## Różniczkowanie równań.

### PRZYPADEK PIERWSZY

**Jedna ze zmiennych jest zmienną niezależną.**

Niech będzie
$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$
równanie zawierające zmienne $x$ i $y$, w którem $x$ jest zmienną niezależną.

Po pierwszem różniczkowaniu znajdujemy równanie:
$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \tag{2}$$
z którego otrzymamy: $1^0$ różniczkę zupełną $dy$;

i $2^0$ pochodną $\dfrac{dy}{dx}$.

Powtórne różniczkowanie, w którem uważamy $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ jako funkcye zmiennych $x$ i $y$, a $dx$ jako wielkość stałą, da nam:
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial x} dy \, dx + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial F}{\partial y} d^2 y = 0 \tag{3}$$

bo y jest zmienną zależną /
nie jest stałem (jak np. dx)

Z tego równania z łatwością otrzymamy:

$1^0$ różniczkę zupełną $d^2 y$,

$2^0$ pochodną $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$,

którą znajdziemy, dzieląc obie strony równania (3) przez $dx^2$, i podstawiając zamiast $\dfrac{dy}{dx}$ odpowiednią wartość, wyznaczoną ze związku (2).

Różniczkując trzeci raz ten sam wzór, otrzymujemy:

$1^0$ różniczkę zupełną $d^3 y$;

oraz $2^0$ pochodną $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$, i t. d.

Przypuśćmy, że mamy
$$F_1 (x, y, z) = 0$$
$$F_2 (x, y, z) = 0$$
dwa równania zawierające zmienne $x, y, z$, w których tylko ~~z~~ x jest zmienną niezależną.

Różniczkując pierwszy raz, otrzymujemy:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz = 0;$$

rugując z tych równań najpierw $dz$, potem $dy$, otrzymujemy:

$1^0$ różniczki zupełne $dy$ i $dz$,

oraz $2^0$ pochodne $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}$.

Przy drugiem różniczkowaniu uważamy wielkości:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}, \frac{\partial F_1}{\partial z}, \frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}, \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

jako funkcye $x, y, z$, zaś $dx$ jako wielkość stałą i znajdujemy:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \, \partial z} dx\, dz + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \, \partial z} dy\, dz +$$
$$+ \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial F_1}{\partial y} d^2 y + \frac{\partial F_1}{\partial z} d^2 z = 0$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \, \partial y} dx\, dy + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \, \partial z} dx\, dz + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial y \, \partial z} dy\, dz +$$
$$+ \frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2} dz^2 + \frac{\partial F_2}{\partial y} d^2 y + \frac{\partial F_2}{\partial z} d^2 z = 0$$

Rugując z tych dwu równań raz $d^2 z$, drugi raz $d^2 y$, otrzymujemy:

1⁰ różniczki zupełne $d^2 y$, $d^2 z$;

2⁰ pochodne $\frac{d^2 y}{dx^2}$ i $\frac{d^2 z}{dx^2}$.

Aby otrzymać powyższe pochodne, należy podzielić obie strony każdego z dwu pierwszych związków przez $dx^2$ i podstawić zamiast $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dz}{dx}$ wartości znalezione z pierwszego różniczkowania.

Możemy tedy powiedzieć, że jeżeli mamy dane $m$ równań, zawierających $m+1$ niewiadomych, z których jedna jest zmienną niezależną, to, aby otrzymać różniczki i pochodne zupełne tych równań należy wogóle zawsze postępować w sposób powyżej wskazany.

## PRZYPADEK II.

### **Dwie zmienne są niezależne.**

Mamy równanie $$F(x, y, z) = 0,$$

zawierające zmienne $x, y, z$, z których $x$ i $y$ są zmienne niezależne.

Po pierwszem różniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

Z tego równania z łatwością znajdziemy:

1⁰ różniczkę zupełną $dz$;

2⁰ i pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Te cząstkowe pochodne są to współczynniki przy $dx$ i $dy$ w wyrażeniu na różniczkę zupełną.

Różniczkując drugi raz, uważamy $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ jako funkcye $x, y, z$, zaś $dx$ i $dy$ jako stałe. W ten sposób otrzymamy:

$_x dx^2 + F_{yy} dy^2 + F_z dz^2 +$
$F_{xy} dx dy + 2F_{xz} dx dz +$
$2F_{yz} dy dz + F_z d^2 z = 0$

1⁰ różniczkę zupełną $d^2 z$;

2⁰ pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ i t. d.

Mamy równania
$$F_1(x, y, z, u) = 0$$
$$F_2(x, y, z, u) = 0$$

zawierające cztery zmienne $x, y, z, u$, z których $x, y$ są zmienne niezależne.

Pierwsze różniczkowanie daje:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}dz + \frac{\partial F_1}{\partial u}du = 0,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}dx + \frac{\partial F_2}{\partial y}dy + \frac{\partial F_2}{\partial z}dz + \frac{\partial F_2}{\partial u}du = 0.$$

Przez rugowanie otrzymujemy:

1° różniczki zupełne $dz$ i $du$

2° pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Pochodne cząstkowe są to spółczynniki przy $dx$ i $dy$ w różniczkach zupełnych.

Różniczkując drugi raz, otrzymujemy równania, z których obliczamy różniczki zupełne i pochodne cząstkowe drugiego rzędu i t. d.

Od powyższych dwóch przypadków możemy bez trudności przejść do równań zawierających trzy, cztery i t. d. zmienne niezależne.

## PRZYKŁAD I.

Mamy równanie $x^4 - 3x^2y^2 + y^4 = 0$ (1)

Po różniczkowaniu otrzymamy:

$$4x^3\,dx - 6xy^2\,dx - 6x^2y\,dy + 4y^3\,dy = 0$$

czyli

$$2x^3\,dx - 3xy^2\,dx - 3x^2y\,dy + 2y^3\,dy = 0 \tag{2}$$

co nam daje:

$$dy = \frac{3xy^2 - 2x^3}{2y^3 - 3x^2y}dx = \frac{x}{y}\cdot\frac{3y^2 - 2x^2}{2y^2 - 3x^2}dx$$

oraz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\cdot\frac{3y^2 - 2x^2}{2y^2 - 3x^2}.$$

Różniczkując wyrażenie (2) i uważając $dx$ jako stałą znajdziemy:

$$6x^2dx^2 - 3y^2dx^2 - 12xy\,dx\,dy - 3x^2dy^2 - 3x^2y\,d^2y + {}$$
$$+ 6y^2dy^2 + 2y^3d^2y = 0.$$

Dzieląc przez $dx^2$ i upraszczając, znajdziemy:

$$6x^2 - 3y^2 - 12xy\frac{dy}{dx} - 3x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x^2y\frac{d^2y}{dx^2} + 6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y^3\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

oraz

$$6x^2 - 3y^2 - 12xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + (6y^2 - 3x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (2y^2 - 3x^2y)\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Zamiast $\frac{dy}{dx}$ podstawiamy powyżej znalezioną wartość; po uproszczeniu otrzymujemy ostatecznie wzór następujący:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6(2y^8 - 7x^2y^6 + 7x^4y^4 - 7x^6y^2 + 2x^8)}{y^3(2y^2 - 3x^2)^3}$$

## PRZYKŁAD II.

Mamy równania:

$$\cos x + \cos y + \cos z = 0$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = b$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = g(x) \end{cases}$$

Różniczkując, otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} \sin x\,dx + \sin y\,dy + \sin z\,dz &= 0 \\ x^2\,dx + y^2\,dy + z^2\,dz &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Rugując z tych równań $dz$, znajdziemy:

$$(z^2 \sin x - x^2 \sin z)\,dx + (z^2 \sin y - y^2 \sin z)\,dy = 0$$

z y zależne

Rugując $dy$, mamy:

$$(x^2 \sin y - y^2 \sin x)\,dx + (z^2 \sin y - y^2 \sin z)\,dz = 0$$

skąd:

$$dy = \frac{x^2 \sin z - z^2 \sin x}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}\,dx\,; \qquad dz = \frac{y^2 \sin x - x^2 \sin y}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}\,dx;$$

oraz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \sin z - z^2 \sin x}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{y^2 \sin x - x^2 \sin y}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}$$

Różniczkując równania (1) i uważając $dx$ jako wielkość stałą, otrzymujemy:

$$\cos x\,dx^2 + \cos y\,dy^2 + \sin y\,d^2y + \cos z\,dz^2 + \sin z\,d^2z = 0$$
$$2x\,dx^2 + 2y\,dy^2 + y^2\,d^2y + 2z\,dz^2 + z^2\,d^2z = 0$$

Dzieląc te wyrażenia przez $dx^2$, znajdziemy:

$$\cos x + \cos y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin y\,\frac{d^2y}{dx^2} + \cos z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \sin z\,\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2\,\frac{d^2y}{dx^2} + 2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + z^2\,\frac{d^2z}{dx^2} = 0$$

Podstawmy zamiast $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{dz}{dx}$ znalezione wartości, znieśmy mianowniki i dla krótkości połóżmy:

$$z^2 \sin y - y^2 \sin z = A$$
$$x^2 \sin z - z^2 \sin x = B$$
$$y^2 \sin x - x^2 \sin y = C$$

otrzymamy:

$$A^2 \cos x + B^2 \cos y + C^2 \cos z + A^2 \sin y \frac{d^2 y}{dx^2} + A^2 \sin z \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

$$2 A^2 x + 2 B^2 y + 2 C^2 z + A^2 y^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + A^2 z^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

Z powyższych równań rugujemy pierwszy raz $\frac{d^2 z}{dx^2}$, drugi raz $\frac{d^2 y}{dx^2}$ i otrzymujemy:

$$A^2 (z^2 \cos x - 2 x \sin z) + B^2 (z^2 \cos y - 2 y \sin z) +$$
$$+ C^2 (z^2 \cos z - 2 z \sin z) + A^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

$$A^2 (2 x \sin y - y^2 \cos x) + B^2 (2 y \sin y - y^2 \cos y) +$$
$$+ C^2 (2 z \sin y - y^2 \cos z) + A^3 \frac{d^2 z}{dx^2} = 0$$

skąd

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A^2 (2 x \sin z - z^2 \cos x) + B^2 (2 y \sin z - z^2 \cos y) +}{A^3}$$
$$\frac{+ C^2 (2 z \sin z - z^2 \cos z)}{A^3}$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{A^2 (y^2 \cos x - 2 x \sin y) + B^2 (y^2 \cos y - 2 y \sin y) +}{A^3}$$
$$\frac{+ C^2 (y^2 \cos z - 2 z \sin y)}{A^3}$$

Mnożąc te wyrażenia przez $dx^2$, otrzymamy ostatecznie różniczki zupełne $d^2 y$ i $d^2 z$.

## PRZYKŁAD III.

Mamy równanie: $z^2 = x e^y + e^z$ z = f(x, y) w formie uwikłanej.

Różniczkowanie daje nam:

$$2 z dz = e^y dx + x e^y dy + e^z dz \tag{1}$$

skąd otrzymujemy:

$$dz = \frac{e^y}{2\,z - e^z}\,dx + \frac{x\,e^y}{2\,z - e^z}\,dy$$

a następnie:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^y}{2\,z - e^z}\,; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\,e^y}{2\,z - e^z}$$

Różniczkując równanie (1), uważając $dx$ i $dy$ jako stałe, znajdziemy:

$$2\,dz^2 + 2\,z\,d^2\,z = 2\,e^y\,dx\,dy + x\,e^y\,dy^2 + e^z\,dz^2 + e^z\,d^2\,z$$

czyli:

$$(2\,z - e^z)\,d^2\,z = x\,e^y\,dy^2 + 2\,e^y\,dx\,dy + (e^z - 2)\,dz^2$$

Zamiast $dz$ podstawiając znalezioną powyżej wartość, otrzymamy:

$$(2\,z - e^z)\,d^2\,z = x\,e^y\,dy^2 + 2\,e^y\,dx\,dy +$$
$$+ (e^z - 2)\left(\frac{e^y}{2\,z - e^z}\,dx + \frac{x\,e^y}{2\,z - e^z}\,dy\right)^2$$

skąd z łatwością znajdziemy:

$$d^2\,z = e^{2\,y}\,\frac{e^z - 2}{(2\,z - e^z)^3}\,dx^2 + 2\,e^y\,\frac{x\,e^y\,(e^z - 2) + (2\,z - e^z)^2}{(2\,z - e^z)^3}\,dx\,dy$$
$$+ x\,e^y\,\frac{x\,e^y\,(e^z - 2) + (2\,z - e^z)^2}{(2\,z - e^z)^3}\,dy^2,$$

z tego zaś związku otrzymamy ostatecznie:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{2\,y}\,\frac{e^z - 2}{(2\,z - e^z)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2\,e^y\,\frac{x\,e^y\,(e^z - 2) + (2\,z - e^z)^2}{(2\,z - e^z)^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x\,e^y\,\frac{x\,e^y\,(e^z - 2) + (2\,z - e^z)^2}{(2\,z - e^z)^3}$$

## PRZYKŁAD IV.

Mamy równania: $ax + by + cz + ku = l$

$$a^2\,x^2 + b^2\,y^2 + c^2\,z^2 + k^2\,u^2 = m$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\left.\begin{aligned} a\,dx + b\,dy + c\,dz + k\,du = 0 \\ a^2\,x\,dx + b^2\,y\,dy + c^2\,z\,dz + k^2\,u\,du = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Rugując z obu tych równań $du$, znajdziemy:

$$(a\,ku - a^2\,x)\,dx + (b\,ku - b^2\,y)\,dy + (c\,ku - c^2\,z)\,dz = 0$$

skąd

$$dz = \frac{a^2\,x - a\,ku}{c\,ku - c^2\,z}\,dx + \frac{b^2\,y - b\,ku}{c\,ku - c^2\,z}\,dy$$

z, u zależne
x y niezale

a

z

$$\frac{\partial z}{dx} = \frac{a\,(ax - ku)}{c\,(ku - cz)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{b\,(by - ku)}{c\,(ku - cz)}$$

Rugując z równań (1) $dz$, otrzymujemy związek następujący:

$$(a^2\,x - a\,c\,z)\,dx + (b^2\,y - b\,c\,z)\,dy + (k^2\,u - c\,k\,z)\,du = 0$$

skąd

$$du = \frac{a\,c\,z - a^2\,x}{k^2\,u - c\,k\,z}\,dx + \frac{b\,c\,z - b^2\,y}{k^2\,u - c\,k\,z}\,dy\,,$$

oraz

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a\,(c\,z - a\,x)}{k\,(ku - c\,z)} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{b\,(c\,z - b\,y)}{k\,(ku - c\,z)}$$

Różniczkując równania (1) i uważając $dx$ i $dy$ jako wielkości stałe, otrzymamy:

$$c\,d^2\,z + k\,d^2\,u = 0$$

$$a^2\,dx^2 + b^2\,dy^2 + c^2\,dz^2 + k^2\,du^2 + c^2\,z\,d^2\,z + k^2\,u\,d^2\,u = 0$$ ?

Rugując z tych równań raz $d^2\,u$ drugi raz $d^2\,z$, otrzymamy:

$$c\,(ku - cz)\,d^2\,z = a^2\,dx^2 + b^2\,dy^2 + c^2\,dz^2 + k^2\,du^2$$

$$k\,(cz - ku)\,d^2\,u = a^2\,dx^2 + b^2\,dy^2 + c^2\,dz^2 + k^2\,du^2$$

Jeżeli zamiast $dz$ i $du$ podstawimy wartości wyżej znalezione, otrzymamy następujące równania:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{a^2}{c}\,\frac{(ku - c\,z)^2 + (a\,x - ku)^2 + (c\,z - a\,x)^2}{(ku - c\,z)^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{a\,b}{c}\,\frac{(a\,x - ku)\,(b\,y - ku) + (c\,z - a\,x)\,(c\,z - b\,y)}{(ku - c\,z)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{b^2}{c}\,\frac{(ku - c\,z)^2 + (b\,y - ku)^2 + (c\,z - by)^2}{(ku - c\,z)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

## ĆWICZENIA.

1. $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

(Jest to równanie krzywych drugiego rzędu)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\,Ax + By + D}{Bx + 2\,Cy + E}$$

2. $$y^4 + 2\,(x^2 + C^2)\,y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c^2 - x^2 - y^2}{c^2 + x^2 - y^2}$$

3. $$(x^2 + y^2 - bx^2) - a^2\,(x^2 + y^2) = 0 \qquad (\textit{Ślimak Pascala})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{a^2\,x - (x^2 + y^2 - bx)\,(2\,x - b)}{2\,(x^2 + y^2 - bx) - a^2}$$

4. $$(x^2 + y^2 - a^2)^2\,(x^2 + y^2) = 4\,a^2\,(x^2 + y^2 - a\,x)^2$$

Kładąc $$x^2 + y^2 - a^2 = A$$

oraz $$x^2 + y^2 - a\,x = B,$$

otrzymamy pochodną:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \cdot \frac{2\,Ax\,(x^2 + y^2) + A^2\,x - 4\,a^2\,B\,(2\,x - a)}{8\,a^2\,B - 2\,A\,(x^2 + y^2) - A^2}$$

5. $$x^2 \log y - y^2 \log x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{y^2 - 2\,x^2 \log y}{x^2 - 2\,y^2 \log x}$$

6. $$y^5 - x^3 - y \arcsin x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5\,x^2 \sqrt{1 - x^2} + y}{(3\,y^2 - \arcsin x)\sqrt{1 - x^2}}$$

7. $$y \sin x - x\,\mathrm{arctg}\,y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + y^2)\,(\mathrm{arctg}\,y - y \cos x)}{(1 + y^2)\sin x - x}$$

8. $$\mathrm{tang}\,\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

9. $$x = a \text{ arc sin } \frac{\sqrt{2\,a\,y - y^2}}{a} - \sqrt{2\,a\,y - y^2} \qquad (\textit{Cykloida})$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2\,a - y}{y}}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{a}{y^2}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{2\,a}{y^2}\sqrt{\frac{2\,a - y}{y}}$$

10. $$\text{tang}\,(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\cos^2 (x^2 + y^2) - 1}{\cos^2 (x^2 + y^2) + 1}$$

11. $$x = a\,.\,\text{arc cos } \frac{a - y}{b} - \sqrt{b^2 - (a - y)^2} \qquad (\textit{Trochoida})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - (a - y)^2}}{y}$$

12. $$y\,x^y = \text{arc sin } x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y\sqrt{1 - x^2}\,.\,\text{arc sin } x}{x\sqrt{1 - x^2}\,.\,\text{arc sin } x} \cdot \frac{y}{1 + y \log x}$$

13. $$\text{arctg} \frac{x - a}{x + a} - \text{arctg} \frac{y - a}{y + a} = b$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + a^2}{x^2 + a^2}$$

14. $$y = x^{y+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^{y+x}\,(x^{y+x-1} + \log x + 1)}{1 - x^{y+x} \log x}$$

15. $$z^3 + 3\,z\,x^2 = a\,x\,y$$

$$dz = \frac{a\,y - 6\,x\,z}{3\,(z^2 + x^2)}\,dx + \frac{a\,x}{3\,(z^2 + x^2)}\,dy$$

16. $$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2\,(x^2 + y^2 - z^2)$$

$$dz = \frac{1}{z} \cdot \frac{a^2 - 2\,x^2 - 2\,y^2 - 2\,z^2}{a^2 + 2\,x^2 + 2\,y^2 + 2\,z^2}\,(x\,dx + y\,dy)$$

17. $$\frac{(x - m\,z)^2}{a^2} + \frac{(y - n\,z)^2}{b^2} = 1 \qquad (\textit{Walec eliptyczny})$$

$$dz = \frac{b^2\,(x - m\,z)}{m\,b^2\,(x - m\,z) + n\,a^2\,(y - n\,z)}\,dx + \frac{a^2\,(y - n\,z)}{m\,b^2\,(x - m\,z) + n\,a^2\,(y - n\,z)}\,dy$$

18. $$\frac{x}{y} = \text{tang}\left(\frac{2\,\pi}{h}\,z\right)$$ (*Helisoida skośna*)

$$\text{Podstawiamy } \frac{2\,\pi}{h} = a$$

$$dz = \frac{\cos^2 a\,z}{a\,y}\left(dx - \frac{x}{y}\,dy\right)$$

19. $$(A\,x^2 + A'\,y^2 + A''\,z^2 - 1)\,(A\,a^2 + A'\,b^2 + A''\,c^2 - 1)$$
$$= (A\,a\,x + A'\,by + A''\,c\,z - 1)^2$$

Podstawiając: $A\,a^2 + A'\,b^2 + A''\,c^2 - 1 = K$

$A\,a\,x + A'\,by + A''\,c\,z - 1 = P,$

mamy: $$dz = -\frac{A\,(Kx - Pa)}{A''\,(Kz - Pc)}\,dx - \frac{A'\,(Ky - Pb)}{A''\,(Kz - Pc)}\,dy$$

20. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$ (*Elipsoida*)

$$dz = -\frac{c^2\,x}{a^2\,x}\,dx - \frac{c^2\,y}{b^2\,z}\,dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^2\,(a^2\,z^2 + c^2\,x^2)}{a^4\,z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{c^4\,x\,y}{a^2\,b^2\,z^3}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^2\,(b^2\,z^2 + c^2\,y^2)}{b^4\,z^3}$$

21. $$\frac{y^2}{2\,p} - \frac{z^2}{2\,q} = x$$ (*Paraboloida hiperboliczna*)

$$dz = \frac{q\,y}{p\,z}\,dy - \frac{2}{z}\,dx$$

$$d^2\,z = -\frac{q^2}{z^3}\,dx^2 + 2\,\frac{q^2\,y}{p\,z^3}\,dx\,dy + \frac{q}{p\,z^3}\,(p\,z^2 - q\,y^2)\,dy^2$$

22. $$a\,x^m + b\,y^n + c\,z^p = k$$
$$a'\,x^{m'} + b'\,y^{n'} + c'\,z^{p'} = k'$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{m\,a\,p'\,c'\,x^{m-1}\,z^{p'-1} - m'\,a'\,p\,c\,x^{m'-1}\,z^{p-1}}{n\,b\,p'\,c'\,y^{n-1}\,z^{p'-1} - n'\,b'\,p\,c\,y^{n'-1}\,z^{p-1}}$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{m\,a\,n'\,b'\,x^{m-1}\,y^{n'-1} - m'\,a'\,n\,b\,x^{m'-1}\,y^{n-1}}{p\,c\,n'\,b'\,y^{n'-1}\,z^{p-1} - p'\,c'\,n\,b\,y^{n-1}\,z^{p'-1}}$$

23.
$$\sin(x+y)+z=a$$
$$\sin(x-y)+z=b$$
$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y,$$
$$\frac{dz}{dx}=\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \,.\, \sin x \sin y - \cos x \cos y$$

24.
$$x+y+z+u=a$$
$$x^2+y^2+z^2+u^2=b$$
$$x^3+y^3+z^3+u^3=c$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(u-x)(z-x)}{(u-y)(z-y)}$$

Przez symetrye znajdujemy:
$$\frac{dz}{dx}=-\frac{(u-x)(y-x)}{(u-z)(y-z)}$$
$$\frac{du}{dx}=-\frac{(z-x)(y-z)}{(z-u)(y-u)}$$

Kładąc:
$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)^2=B,$$
$$2x+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2z\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+2u\left(\frac{du}{dx}\right)^2=B,$$

znajdujemy:
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{A(u+z)-B}{(u-y)(z-y)}$$

a wskutek symetryi mamy:
$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{A(u+y)-B}{(u-z)(y-z)}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{A(z+y)-B}{(z-u)(y-u)}$$

25.
$$xy+zu=a$$
$$\frac{x+y}{z+u}=b$$
$$dz=\frac{by+z}{b(z-u)}dx+\frac{bx+z}{b(z-u)}dy,$$

$$du = -\frac{by + u}{b(z - u)}\,dx - \frac{bx + u}{b(z - u)}\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2(by + u)(by + z)}{b^2(z - u)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{b^2(z - u)^2 - (bx + u)(by + z) - (by + u)(bx + z)}{b^2(z - u)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2(bx + u)(bx + z)}{b^2(z - u)^3} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

26.
$$x + y + z + u = a$$
$$\log x\,y\,z\,u = b$$

$$dz = -\frac{z}{x}\,\frac{u - x}{u - z}\,dx - \frac{z}{y}\cdot\frac{u - y}{u - z}\,dy,$$

$$du = -\frac{u}{x}\,\frac{z - x}{z - u}\,dx - \frac{u}{y}\cdot\frac{z - y}{z - u}\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{z\,u}{x^2(u - z)^3}\left[(u - z)^2 + (u - x)^2 + (z - x)^2\right] = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{z\,u}{x\,y\,(u - z)^3}\left[(u - x)(u - y) + (z - x)(z - y)\right] = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{z\,u}{y^2(u - z)^3}\left[(u - z)^2 + (u - y)^2 + (z - y)^2\right] = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

27.
$$\operatorname{arc\,cotg}\frac{u + z - 1}{u - z + 1} = \operatorname{arc\,cotg}\frac{y - x + 1}{y + x - 1} + k$$

$$du = \frac{y}{z - 1}\cdot\frac{u^2 + (z - 1)^2}{y^2 + (x - 1)^2}\,dx - \frac{x - 1}{z - 1}\cdot\frac{u^2 + (z - 1)^2}{y^2 + (x - 1)^2}\,dy + \frac{u}{z - 1}\,dz$$

28.
$$x + y + z = \log(u + v)$$
$$x + y + u = \log(v + z)$$
$$x + y + v = \log(z + u)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(z + u)(z + v + 1)(u + v + 1) + (z - u)(z + u + 1)}{(z + u + 1)(u + v + 1) - (z + v + 1)\left[(z + u)(u + v) - 1\right]} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

Symetrycznie mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(u + v)(u + z + 1)(v + z + 1) + (u - v)(u + v + 1)}{(u + v + 1)(v + z + 1) - (u + z + 1)\left[(u + v)(v + z) - 1\right]} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(v + z)(v + u + 1)(z + u + 1) + (v - z)(v + z + 1)}{(v + z + 1)(z + u + 1) - (v + u + 1)\left[(v + z)(z + u) - 1\right]} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

# ROZDZIAŁ VI.

## Rozwijanie funkcyi na szeregi.

### Twierdzenie Taylora.

Mamy funkcyę $y$ zmiennej $x$, np. $y = F(x)$.

Przez $h$ oznaczmy pewien dany i skończony przyrost zmiennej $x$; wtedy wzór wyrażający twierdzenie Taylora będzie miał następujący kształt:

$$F(x+h) = F(x) + h\,F'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,F''(x) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,F'''(x) + \text{ i t. d.}$$

Wyraz $n^y$ tego szeregu równa się

$$y_n = \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,(n-1)}\,F^{n-1}(x)$$

Jeżeli zatrzymamy się na $n^{ym}$ wyrazie, błąd popełniony przez nieuwzględnienie wszystkich następnych wyrazów będzie zawarty między największą i najmniejszą wartością wyrazów następujących:

$$\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n}\,F^n(x+\theta h) \quad \text{albo} \quad \frac{h^n(1-\theta)^{n-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,(n-1)}\,F^n(x+\theta h)$$

gdzie $\theta$ spełnia warunek $0 < \theta < 1$.

### PRZYKŁAD.

Mamy: $$y = \log(a+x)$$

A więc $F(x) = \log(a+x)$, $F(x+h) = \log(a+x+h)$

Różniczkując, otrzymujemy:

$$F'(x) = +\frac{1}{a+x},$$

$$F''(x) = -\frac{1}{(a+x)^2},$$

$$F'''(x) = +\frac{1\,.\,2}{(a+x)^3},$$

$$F^{IV}(x) = -\frac{1\,.\,2\,.\,3}{(a+x)^4}$$

Podstawiając znalezione wartości we wzór Taylora, otrzymamy:

$$\log(a+x+h) = \log(a+x) + h\frac{1}{a+x} - \frac{h^2}{1\,.\,2}\frac{1}{(a+x)^2} +$$

$$+\frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{1\,.\,2}{(a+x)^3} - \frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\frac{1\,.\,2\,.\,3}{(a+x)^4} + \text{ i t. d.}$$

czyli

$$\log(a+x+h) = \log(a+x) + \frac{h}{a+x} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{a+x}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{a+x}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{a+x}\right)^4 + \text{ i t. d.}$$

Można zauważyć, że pochodne rzędów wyższych można było otrzymać odrazu, stosując wzór ogólny na pochodną rzędu $n^{go}$:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{1\,.\,2\,.\,3\ldots(n-1)}{(a+x)^n}$$

gdzie $n$ przyjmuje wartości 2, 3, 4, . .

Błąd, popełniony przez zatrzymanie się na $n^{ym}$ wyrazie szeregu przedstawiającego funkcyę $\log(a+x+h)$, zawiera się pomiędzy najmniejszą i największą wartością wyrażenia następującego:

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{h}{a+x+\theta h}\right)^n;$$

Najmniejsza wartość bezwzględna tego wyrażenia odpowiada wartości $\theta = 1$, największa zaś odpowiada $\theta = 0$; błąd więc zawiera się pomiędzy:

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{h}{a+x+h}\right)^n \quad \text{i} \quad (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{h}{a+x}\right)^n$$

Granice te są ujemne dla $n$ parzystego, dodatnie dla $n$ nieparzystego; wynika stąd, że i błąd w tych wypadkach jest dodatni lub ujemny.

## ĆWICZENIA.

1. $$y = a^{mx}$$

Pochodna $n^{go}$ rzędu (zob. rozdział III, ćwicz. 3) równa się:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (m \log a)^n a^{mx}$$

Stosując wzór Taylora, znajdujemy:

$$a^{m(x+h)} = a^{mx} \left[1 + \frac{m\,h}{1} \log a + \frac{m^2\,h^2}{1\,.\,2} (\log a)^2 + \frac{m^3\,h^3}{1\,.\,2\,.\,3} (\log a)^3 + \text{ i t. d.}\right]$$

Błąd, popełniony przez zatrzymanie się na $n^{\text{ym}}$ wyrazie, zawiera się pomiędzy

$$\frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n} (m \log a)^n\, a^{mx} \quad \text{oraz} \quad \frac{h^n}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,n} (m \log a)^n\, a^{m(x+h)}$$

2. $$y = (a + bx)^m$$

Ponieważ (zob. rozdział III, przykład II)

$$F^n(x) = m\,(m - 1) \ldots (m - n + 1)\, b^n\, (a + bx)^{m-n},$$

zatem

$$[a + b\,(x + h)]^m = (a + bx)^m \left[1 + \frac{m}{1}\, \frac{b\,h}{a + bx} + \frac{m\,(m - 1)}{1\,.\,2} \left(\frac{b\,h}{a + bx}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{m\,(m - 1)\,(m - 2)}{1\,.\,2\,.\,3} \left(\frac{b\,h}{a + bx}\right)^3 + \text{ i t. d.}\right]$$

Granice błędu, powstałego przez zatrzymanie się na $n^{\text{ym}}$ wyrazie, równają się

$$\frac{m\,(m - 1) \ldots (m - n + 1)}{1\,.\,2 \ldots n}\, b^n\, h^n\, [a + b\,(x + h)]^{m-n}$$

i $$\frac{m\,(m - 1) \ldots (m - n + 1)}{1\,.\,2\,.\,.\,n}\, b^n\, h^n\, (a + hx)^{m-n}$$

3. $$y = \frac{a + x}{a - x}$$

Znaleźliśmy (rozdział III, przykład I), że

$$F^n(x) = 2\, \frac{(1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,n)\, a}{(a - x)^{n+1}}$$

Przy pomocy tego wzoru z łatwością otrzymamy:

$$\frac{a + x + h}{a - x - h} = \frac{a + x}{a - x} + 2\,a \left[\frac{h}{(a - x)^2} + \frac{h^2}{(a - x)^3} + \frac{h^3}{(a - x)^4} + \text{ i t. d.}\right]$$

Granice błędu, powstałego przez zatrzymanie się na $n^{\text{ym}}$ wyrazie, równają się odpowiednio

$$2\,a\, \frac{h^n}{(a - x)^{n+1}} \quad \text{i} \quad 2\,a\, \frac{h^n}{(a - x - h)^{n+1}}$$

4. $$y = e^{ax} \sin mx$$

Korzystając z wzoru, otrzymanego w ćwiczeniu 7, rozdziału III:

$$F^n(x) = (a^2 + m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(mx + n\varphi),$$

znajdujemy:

$$e^{a(x+h)} \sin m(x+h) = e^{ax} [\sin mx + h(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \sin(mx+\varphi) +$$
$$+ \frac{h^2}{1\,.\,2}(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \sin(mx+2\varphi) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \sin(mx+3\varphi) + \text{i t. d.}]$$

Przy $a = 1$ i $m = 1$ mamy $y = e^x \sin x$ a wzór Taylora daje:

$$e^{x+h} \sin(x+h) = e^x [\sin x + 2^{\frac{1}{2}} h \sin(x+\varphi) + \frac{h^2}{1\,.\,2} 2 \sin(x + 2\varphi)$$
$$+ \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} 2^{\frac{3}{2}} \sin(x + 3\varphi) + \quad \text{i t. d.}].$$

5. $$y = e^{ax} \cos mx$$

Postępując podobnie jak w ćwiczeniu 7 rozdziału III, mamy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+m^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(mx + n\varphi)$$

skąd z łatwością otrzymujemy:

$$e^{a(x+h)} \cos m(x+h) = e^{ax} [\cos mx + h(a^2+m^2)^{\frac{1}{2}} \cos(mx+\varphi) +$$
$$+ \frac{h^2}{1\,.\,2}(a^2+m^2) \cos(mx+2\varphi) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}(a^2+m^2)^{\frac{3}{2}} \cos(mx+3\varphi) + \text{i t. d.}]$$

Przy $m = \sin t$ i $a = \cos t$ otrzymamy:

$$e^{(x+h)\cos t} \cos[(x+h)\sin t] = e^{x \cos t} [\cos(x \sin t) + h \cos(x \sin t + t)$$
$$+ \frac{h^2}{1\,.\,2} \cos(x \sin t + 2t) + \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3} \cos(x \sin t + 3t) + \quad \text{i t. d.}]$$

6. $$y = \text{arc tang } x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

Gdy $a = 1$, wówczas z wyniku ćwiczenia 16 rozdziału III otrzymujemy:

$$\frac{d^n \operatorname{arctg} x}{dx^n} = \frac{d^{n-1}(2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\, 1\,.\,2\,.\,3 \ldots (n-1) \frac{\sin n\varphi}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}},$$

gdzie $$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Oprócz tego z powyższej równości otrzymujemy:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sin^2 \varphi, \quad \text{skąd} \quad \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} = \sin^n \varphi$$

a więc:

$$\frac{d^n \operatorname{arctg} x}{dx^n} = (-1)^{n-1}\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1) \sin n\varphi \sin^n \varphi$$

Następnie:

$$\operatorname{arctg}(x+h) = \operatorname{arctg} x + \frac{h}{1} \sin\varphi \sin\varphi - \frac{h^2}{2} \sin 2\varphi \sin^2\varphi +$$

$$+ \frac{h^3}{3} \sin 3\varphi \sin^3\varphi - \frac{h^4}{4} \sin 4\varphi \sin^4\varphi + \quad \text{i t. d.}$$

Z tego rozwinięcia otrzymujemy:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\varphi}{2} + \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \quad \text{i t. d.}$$

Różniczkując ten szereg, otrzymujemy:

$$0 = \frac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \quad \text{i t. d.}$$

(EULER, *Institut. calc. diff.*).

7. $$y = \operatorname{arc\,cotg} x.$$

Moglibyśmy znaleźć rozwinięcie dla arc cotg $(x+h)$ w ten sam sposób, jak je otrzymaliśmy dla arctg $(x+h)$. Ale możemy również z rozwinięcia funkcyi arctg $(x+h)$ otrzymać rozwinięcie szukane. Jakoż:

$$\operatorname{arc\,tg}(x+h) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotg}(x+h)$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - y.$$

Mamy także:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{x} = \operatorname{arc\,cotg} x = y.$$

Podstawiając te wartości w wynik poprzedniego ćwiczenia, otrzymamy:

$$\operatorname{arc\,cotg}(x+h) = y - \frac{h}{1}\sin y \sin y + \frac{h^2}{2}\sin 2y \sin^2 y -$$

$$- \frac{h^3}{3}\sin 3y \sin^3 y + \quad \text{i t. d.}$$

8.
$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(x+h)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\begin{array}{l} 1 + \frac{h}{1}\,\frac{x}{1-x^2} + \frac{h^2}{1.2}\,\frac{1+2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{h^3}{1.2.3}\,\frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^3} + \\ + \frac{h^4}{1.2.3.4}\,\frac{3(3+24x^2+8x^4)}{(1-x^2)^4} + \\ + \frac{h^5}{1.2.3.4.5}\,\frac{15x(15+40x^2+8x^4)}{(1-x^2)^5} + \\ + \frac{h^6}{1.2.3.4.5.6}\,\frac{45(5+90x^2+120x^4+16x^6)}{(1-x^2)^6} + \end{array}\right]$$

i t. d.

9. Mamy daną funkcyę: $y = \text{arc log tang } x$
to znaczy, że $y$ jest łukiem, dla którego logarytm stycznej jest $x$, skąd $x = \log \text{tang}\, y$, a z tego równania otrzymamy łatwo pochodne funkcyi $y$ względem $x$.

Stosując następnie wzór T a y l o r a, otrzymujemy:

$$\text{arc log tg}\,(x+h) = y + \frac{h}{1}\,\frac{\sin 2y}{2} + \frac{h^2}{1\,.\,2}\,\frac{\sin 2y \cos 2y}{2} +$$

$$+ \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{\sin 2y \cos 4y}{2} + \frac{h^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{\sin 2y}{2}\,(\cos 6y - \sin 2y \sin 4y) +$$

$$+ \frac{h^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,\frac{\sin 2y}{2}\,(\cos 8y - 2 \sin 2y \sin 6y) + \quad \text{i t. d.}$$

$= \frac{1}{tg\,y} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos y \sin y} = y' = \cos y \sin y = \frac{\sin 2y}{2}, \quad = \frac{\cos 2y}{2} \cdot y' 2 = \frac{\sin 2y \cos 2y}{2}$

10.
$$y = \frac{1}{a^2 - x^2}$$

Kładąc $b = 1$ w wyniku przykładu IV rozd. III, otrzymamy:

$$F^{(n)}\left(\frac{1}{a^2 - x^2}\right) = \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,n}{2a\,(a^2 - x^2)^{n+1}}\,[(a+x)^{n+1} - (-1)^{n+1}(a-x)^{n+1}]$$

Mamy tedy:

$$\frac{1}{a^2-(x+h)^2} = \frac{1}{2a\,(a^2-x^2)}\left[\begin{array}{l} 2a + \frac{h}{a^2-x^2}\,[(a+x)^2 - (a-x)^2] \\ + \left(\frac{h}{a^2-x^2}\right)^2 [(a+x)^3 - (a-x)^3] \\ + \left(\frac{h}{a^2-x^2}\right)^3 [(a+x)^4 - (a-x)^4] + \text{ i t. d.} \end{array}\right]$$

## Twierdzenie Maclaurina.

Niech $y = F(x)$ będzie funkcyą wyraźną zmiennej $x$.

Jeżeli $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$ i t. d. są wartościami tej funkcyi i jej pochodnych przy $x = 0$, otrzymujemy następujący wzór, wyrażający twierdzenie Maclaurina:

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} F'''(0) + \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli zatrzymamy się na $n^{ym}$ wyrazie szeregu, wówczas suma $R$ wyrazów następnych będzie:

$$R = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} F^n(\theta x)$$

albo

$$R = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} F^n(\theta x)$$

gdzie $\theta$ jest ułamkiem zawartym między 0 i 1, czyli $0 < \theta < 1$.

Aby to rozwinięcie przedstawiało daną funkcyę, trzeba żeby szereg uważany był zbieżny oraz aby przy $n$ rosnącem nieograniczenie, $R$ zmierzało do granicy równej 0. Pożytecznem będzie upewnić się o tem w przykładach następujących, podobnie jak to uczyniliśmy w dziale poprzednim, gdzie wyniki musiały spełniać te same warunki.

Szereg Maclaurina może służyć również do rozwijania funkcyi uwikłanych.

### PRZYKŁAD I.

Niech będzie: $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x}}$

Mamy:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}},$$

zatem $F(0) = 1$.

Różniczkując zaś, otrzymujemy:

$F'(x) = \dfrac{1}{2(1 - x)^{\frac{3}{2}}}$, skąd przy $x = 0$ mamy $F'(0) = \dfrac{1}{2}$

$F''(x) = \dfrac{1 \cdot 3}{2^2 (1 - x)^{\frac{5}{2}}}$ „ „ „ „ $F''(0) = \dfrac{1 \cdot 3}{2^2}$

$F'''(x) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 (1 - x)^{\frac{7}{2}}}$ „ „ „ „ $F'''(0) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}$ i t. d.

Podstawiając wartości $F(0)$, $F'(0)$, $F''(0)$ i t. d. we wzór Maclaurina, otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2^3} + \frac{5x^3}{2^4} + \frac{35x^4}{2^7} + \text{ i t. d.}$$

Gdyby pochodna $n^{go}$ rzędu funkcyi danej była znana, wówczas, kładąc $x = 0$, otrzymalibyśmy wyrażenie, z którego łatwo można by było otrzymać $F'(0)$, $F''(0)$ i t. d.

Mamy więc w naszym przykładzie:

$$F^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^n(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

Przy $x = 0$ znajdujemy

$$F^n(0) = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}{2^n}$$

Kładąc $n = 1, 2, 3$ i t. d.

otrzymamy z ostatniego wzoru wartości na $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$ i t. d.

## PRZYKŁAD II.

b. pouczające!

Mamy równanie: $y^3 - y + x = 0.$

Należy rozwinąć funkcyę $y$ zmiennej $x$ zapomocą wzoru Maclaurina. Obliczając kolejne pochodne, otrzymujemy:

$F_x + F_y y' = 0$

$$(3y^2 - 1)\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$+ 2F_{xy} y' + F_{yy}(y')^2 + F_y y'' = 0$

$$6y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (3y^2 - 1)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$6\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 18y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + (3y^2 - 1)\frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

$$36\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + 18y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 24y\frac{dy}{dx}\frac{d^3y}{dx^3} + (3y^2 - 1)\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

$$90\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 60\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^3y}{dx^3} + 60y\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} +$$

$$+ 30y\frac{dy}{dx}\frac{d^4y}{dx^4} + (3y^2 - 1)\frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

$$90\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 360\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3} + 90\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^4y}{dx^4} + 60\,y\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 90\,y\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4}$$

$$+ 36\,y\frac{dy}{dx}\frac{d^5y}{dx^5} + (3\,y^2 - 1)\frac{d^6y}{dx^6} = 0$$

$$630\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^3y}{dx^3} + 420\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + 630\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^4y}{dx^4} + 126\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}$$

$$+ 210\,y\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4} + 126\,y\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^5y}{dx^5} + 42\,y\frac{dy}{dx}\frac{d^6y}{dx^6} + (3\,y^2 - 1)\frac{d^7y}{dx^7} = 0$$

i t. d.

Jeżeli w danem równaniu położymy $x = 0$, otrzymamy:

$$y^3 - y = 0 \quad \text{czyli} \quad y\,(y^2 - 1) = 0.$$

Ostatnie równanie jest spełnione przy $y = 0$, $y = 1$ oraz $y = -1$.

Z otrzymanego rezultatu widzimy, że trzy wartości $y$ odpowiadają wartości $x = 0$. Wzór Maclaurina da nam tedy trzy możliwe rozwinięcia funkcyi $y$ zmiennej $x$.

1°. Podstawiając wartości $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ w kolejne pochodne danego równania, otrzymamy, jako wyniki, równości następujące:

$$F'(0) = 1, \quad F''(0) = 0, \quad F'''(0) = 6, \quad F^{IV}(0) = 0, \quad F^{V}(0) = 360,$$

$$F^{VI}(0) = 0, \quad F^{VII}(0) = 60480 \quad \text{i t. d.}$$

Oprócz tego mamy $F(0) = 0$.

Podstawiając powyższe wartości we wzór Maclaurina, otrzymamy:

$$y = x + x^3 + 3\,x^5 + 12\,x^7 + \quad \text{i t. d.}$$

2°. Wartości $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ dają nam:

$$F(0) = 1, \quad F'(0) = -\frac{1}{2}, \quad F''(0) = -\frac{3}{4}, \quad F'''(0) = -\frac{48}{8}, \quad \text{i t. d.}$$

skąd:

$$y = 1 - \frac{x}{2} - \frac{3\,x^2}{8} - \frac{8\,x^3}{16} - \quad \text{i t. d.}$$

3°. Wartości $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ dają:

$$F(0) = -1, \quad F'(0) = -\frac{1}{2}, \quad F''(0) = \frac{3}{4}, \quad F'''(0) = -\frac{48}{8} \quad \text{i t. d.}$$

skąd otrzymamy:

$$y = -1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{8x^3}{16} + \text{ i t. d.}$$

## ĆWICZENIA.

1. $$y = (a + x)^m$$

$$(a + x)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} a^{m-2} x^2 + \text{ i t. d.}$$

Jest to wzór dwumianu Newtona.

Gdy $a = 1$ i $m = \frac{1}{2}$, otrzymujemy:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2^2} \frac{x^2}{1.2} + \frac{3}{2^3} \frac{x^3}{1.2.3} - \frac{3.5}{2^4} \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ i t. d.}$$

Dla $m = -1$ otrzymalibyśmy:

$$\frac{1}{a + x} = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3} + \text{ i t. d.}\right)$$

Dwa ostatnie rozwinięcia można bezpośrednio z łatwością otrzymać.

2. $$y = a^x$$

$$a^x = 1 + \frac{x}{1} \log a + \frac{x^2}{1.2} \log^2 a + \frac{x^3}{1.2.3} \log^3 a + \text{ i t. d.}$$

Kładąc $a = e$, znajdujemy:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{ i t. d.}$$

Przy $x = 1$ szereg ten przechodzi w następujący:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{ i t. d.} = 2,718281828\ldots$$

3. $$y = \operatorname{Log}(a + x)$$

$$\operatorname{Log}(a + x) = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} e \left[\frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{ i t. d.}\right]$$

Gdybyśmy mieli $y = \log(a + x)$ t. j. gdyby chodziło o logarytm naturalny (neperowski), szereg uważany przedstawiałby się w postaci następującej:

$$\log(a + x) = \log a + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \text{ i t. d.}$$

Gdyby oprócz tego było $a = 1$, to:

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{ i t. d.}$$

4. $$y = \sin x$$

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{x^5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} - \frac{x^7}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7} + \text{ i t. d.}$$

Różniczkując obie strony powyższego równania, otrzymujemy:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} - \frac{x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} + \text{ i t. d.}$$

To rozwinięcie w szereg, jak również i poprzednie, można łatwo otrzymać, korzystając z wzorów na pochodną $n^{go}$ rzędu funkcyi danej.

5. $$y = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{1 \,.\, 3} + \frac{2\, x^5}{1 \,.\, 3 \,.\, 5} + \frac{17\, x^7}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9} + \text{ i t. d.}$$

6. $$y = \sec x$$

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{5\, x^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \frac{61\, x^6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6} + \text{ i t. d.}$$

7. $$y = \operatorname{arc\,sin} x$$

Korzystając z wzoru na pochodną funkcyi $n^{go}$ rzędu (rozdział III, ćwicz. 3), otrzymujemy:

$$\operatorname{arc\,sin} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\, \frac{x^5}{5} + \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\, \frac{x^7}{7} + \text{ i t. d.}$$

Ponieważ $\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,sin} x$, zatem z powyższego równania otrzymamy:

$$\operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\, \frac{x^3}{3} - \frac{1 \,.\, 3}{2 \,.\, 4}\, \frac{x^5}{5} - \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5}{2 \,.\, 4 \,.\, 6}\, \frac{x^7}{7} - \text{ i t. d.}$$

8. $$y = \operatorname{arc\,tang} x$$

Wynik ćwiczenia 6 rozdziału VI da nam dla $x = 0$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{arc\,tg} h = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + \text{ i t. d.}$$

Zastępując $h$ przez $x$, znajdziemy:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \text{ i t. d.}$$

Aby otrzymać odrazu ten rezultat, należy skorzystać z wyniku ćwiczenia 16, rozdziału III.

Ponieważ $\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} x$, przeto znajdziemy:

$$\operatorname{arc\,cotg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \text{ i t. d.}$$

9. $$y = e^{\sin x}$$

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{3\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{8\,x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \text{ i t. d.}$$

10. $$y = \frac{e^x}{\cos x}$$

$$\frac{e^x}{\cos x} = 1 + x + \frac{2\,x^2}{1\,.\,2} + \frac{4\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{12\,x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{35\,x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \text{ i t. d.}$$

11. $$y = \sqrt{1 + e^x}$$

$$\sqrt{1 + e^x} = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{4}\,\frac{x}{1} + \frac{3}{4^2}\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{7}{4^3}\,\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{9}{4^4}\,\frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \text{ i t. d.}\right)$$

12. $$y = e^{e^x}$$

$$e^{e^x} = e\left(1 + x + \frac{2\,x^2}{1\,.\,2} + \frac{5\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{15\,x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \frac{52\,x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} + \text{ i t. d.}\right)$$

13. $$y = \frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}}$$

Kładąc $m = -\frac{1}{2}$ we wzorze ($\beta$) rozdziału III otrzymujemy:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (-1)^n\, 1\,.\,2\,.\,3 \ldots n\, \frac{(b + 2\,cx)^n}{2^n\,(a + bx + cx^2)^{n+\frac{1}{2}}}\,.$$

$$\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2}\,\frac{4\,a\,c - b^2}{(b + 2\,cx)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1\,.\,3}{2^3}\,\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,\frac{(4\,a\,c - b^2)^2}{(b + 2\,cx)^4} - \text{ i t. d.}\right]$$

Wyrażenie to przy $x = 0$ przybiera postać:

$$F^n(0) = (-1)^n \, 1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, . \, . \, n \, \frac{b^n}{2^n \, a^{n+\frac{1}{2}}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \, \frac{n\,(n-1)}{1 \, . \, 2} \, \frac{4\,a\,c - b^2}{b^2} \right.$$

$$\left. + \frac{1 \, . \, 3}{2^3} \, \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \, \frac{(4\,a\,c - b^2)^2}{b^4} - \text{ i t. d.} \right]$$

Jeżeli w tym wzorze położymy $n = 1, 2, 3 \ldots$, otrzymamy $F'(0)$, $F''(0)$, $F'''(0)$ i t. d.; z tego zaś otrzymamy:

$$\frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[ 1 - \frac{x}{1} \, \frac{b}{2\,a} + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} \, \frac{3\,b^2 - 4\,a\,c}{12\,a^2} - \text{ i t. d.} \right]$$

14.
$$y = \sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}}$$

$$\sqrt{\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}} = 1 + (a + b) \, \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + 3\,(3\,b^2 + 2\,ab - a^2) \, \frac{x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4}$$

$$+ 5 \, . \, 3 \, . \, 3\,(5\,b^3 + 3\,b^2\,a - b\,a^2 + a^5) \, \frac{x^6}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5 \, . \, 6} + \text{ i t. d.}$$ (NEWTON)

15.
$$y = (a^5 + a^4\,x - x^5)^{\frac{1}{5}}$$

$$(a^5 + a^4\,x - x^5)^{\frac{1}{5}} = a + \frac{1}{5} \, \frac{x}{1} - \frac{4}{5^2 \, . \, a^5} \, \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \frac{4 \, . \, 9}{5^3\,a^{10}} \, \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} -$$

$$- \frac{4 \, . \, 9 \, . \, 14}{5^4 \, . \, a^{15}} \cdot \frac{x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} + \text{ i t. d.}$$ (NEWTON)

16.
$$y^2 - x\,y - 1 = 0$$

$$y = \pm 1 + \frac{1}{2} \, \frac{x}{1} \pm \frac{1}{2^2} \, \frac{x^2}{1 \, . \, 2} \mp \frac{1^2 . \, 3}{2^4} \, \frac{x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} \pm \frac{1^2 \, . \, 3^2 \, . \, 5}{2^6} \, \frac{x^5}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4 \, . \, 5} \mp \text{ i t. d.}$$

17.
$$y^3 - b\,x\,y - 8 = 0$$

$$y = 2 + x - \frac{1}{2} \, \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + \frac{x^4}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \, . \, 4} + \text{ i t. d.}$$

18.
$$y^3 - x\,y - 1 = 0$$

$$y = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^4} + \frac{x^4}{3^5} - \text{ i t. d.}$$

Dwie drugie wartości $y$ są następujące:

$$y = \alpha + \frac{x}{3\,\alpha} - \frac{x^3}{3^4} \pm \frac{x^4}{3^5\,\alpha} - \text{ i t. d.}$$

$$y = \alpha^2 + \frac{x}{3\,\alpha^2} - \frac{x^3}{3^4} + \frac{x^4}{3^5\,\alpha^2} - \text{ i t. d.}$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

19. $$\sin y = x \sin (a + y)$$

$$y = n\pi + \frac{x}{1} \sin \alpha + \frac{x^2}{1\,.\,2} \sin 2\,a + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\, 2 \sin a\,(3 - 4 \sin^2 a) + \text{ i t. d.}$$

20. $$y^n \log y = ax$$

$$y = 1 + ax - (2\,n - 1)\,\frac{a^2\,x^2}{1\,.\,2} + (3\,n - 1)^2\,\frac{a^3\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} -$$

$$- (4\,n - 1)^3\,\frac{a^4\,x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \text{ i t. d.}$$

### Twierdzenie Lagrange'a.

Jeżeli $y$ jest określone za pomocą równania:

$$y = z + x\,\varphi\,(y)$$

i jeżeli $u = f\,(y)$, gdzie $f$ i $\varphi$ są funkcyami jakiemikolwiek, to zmienną $u$ można rozwinąć w szereg według potęg $x$ na zasadzie wzoru następującego:

$$u = f\,(z) + \varphi\,(z)\,.\,f'\,(z)\,.\,\frac{x}{1} + \frac{d\,.\,\{[\varphi\,(z)]^2 f'\,(z)\}}{dz}\,\frac{x^2}{1\,.\,2} +$$

$$+ \frac{d^2\,.\,\{[\varphi\,(z)]^3 f'\,(z)\}}{dz^2}\,\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ i t. d.} \qquad (\gamma)$$

Jeżeli $f\,(y)$ sprowadza się do $y$, to $f\,(z) = z$, $f'\,(z) = 1$ i otrzymujemy:

$$v = z + \varphi\,(z)\,\frac{x}{1} + \frac{d\,[\varphi\,(z)]^2}{dz}\,\frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{d^2\,[\varphi\,(z)]^3}{dz^2}\,\frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ i t. d.} \qquad (\delta)$$

## PRZYKŁAD I.

Mamy równanie: $\quad a \log y + b - y = 0$

Załóżmy, że $y$ mamy rozwinąć według wzrastających potęg $a$. Dane równanie można napisać w postaci:

$$y = b + a \log y$$

Porównywując to równanie z pierwszem równaniem w twierdzeniu Lagrange'a, t. j. z równaniem:

$$y = z + x \varphi(y),$$

widzimy, że $z = b$, $x = a$, $\log y = \varphi(y)$, przyczem $f(y)$ sprowadza się do $y$.

Mieć więc będziemy:

$$\varphi(z) = \log z = \log b$$

$$\frac{d \,.\, [\varphi(z)]^2}{dz} = \frac{d \,.\, (\log z)^2}{az} = \frac{2}{z} \log z = \frac{2}{b} \log b$$

$$\frac{d^2 [\varphi(z)]^3}{dz^2} = \frac{d^2 (\log z)^3}{dz^2} = \frac{3 \log z}{z^2} (2 \log z) = \frac{3 \log b}{b^2} (2 - \log b) \text{ i t. d.}$$

Podstawiając znalezione powyżej wartości na $x$, $z$, $\varphi(z)$ $\frac{d \,.\, [\varphi(z)]^2}{dz}$ i t. d. we wzór ($\delta$), otrzymamy:

$$y = b + \frac{a}{1} \log b + \frac{a^2}{1 \,.\, 2} \frac{2 \log b}{b} + \frac{a^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \frac{3 \log b}{b^2} (2 - \log b) + \text{ i t. d.}$$

## PRZYKŁAD II.

Mamy równanie: $a e^y - b y + c = 0$

Należy rozwinąć $y^n$ według potęg $\frac{a}{b}$.

Dane równanie można napisać w postaci następującej:

$$y = \frac{c}{b} + \frac{a}{b} e^y.$$

Przez porównanie z równaniem postaci

$$y = z + x \varphi(y)$$

znajdziemy, że:

$$z = \frac{c}{b}, \qquad x = \frac{a}{b}, \qquad \varphi(y) = e^y$$

oraz

$$f(y) = y^n$$

Z powyższego wynika tedy że:

$$\varphi(z) = e^z = e^{\frac{c}{b}}$$

oraz

$$f(z) = z^n = \left(\frac{c}{b}\right)^n,$$

a stąd:

$$f'(z) = n z^{n-1}$$

Ostatecznie otrzymamy związki następujące:

$$\varphi(z) f'(z) = n e^{z} \,.\, z^{n-1} = n e^{\frac{c}{b}} \left(\frac{c}{b}\right)^{n-1}$$

$$[\varphi(z)]^2 f'(z) = n e^{2z} \,.\, z^{n-1}$$

$$[\varphi(z)]^3 f'(z) = n e^{3z} \,.\, z^{n-1}$$

$$[\varphi(z)]^4 f'(z) = n e^{4z} \,.\, z^{n-1}$$

skąd po zróżniczkowaniu znajdziemy:

$$\frac{d \,.\left\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\right\}}{dz} = n e^{2z} \,.\, z^{n-2} [2z + (n-1)] = n e^{\frac{2c}{b}} \left(\frac{c}{b}\right)^{n-2} [2\left(\frac{c}{b}\right) + (n-1)],$$

$$\frac{d^2 \left\{[\varphi(z)]^3 f'(z)\right\}}{dz^2} = n e^{3z} \,.\, z^{n-3} [3^2 z^2 + 2 \,.\, 3 (n-1) z + (n-1)(n-2)] =$$

$$= n e^{\frac{3c}{b}} \left(\frac{c}{b}\right)^{n-3} [3^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 + 2 \,.\, 3 (n-1) \frac{c}{b} + (n-1)(n-2)],$$

$$\frac{d^3 \left\{[\varphi(z)]^4 f'(z)\right\}}{dz^3} = n e^{4z} \,.\, z^{n-4} [4^3 z^3 + 3 \,.\, 4^2 (n-1) z^2 + 3 \,.\, 4 (n-1)(n-2) z$$

$$+ (n-1)(n-2)(n-3) = n e^{\frac{4c}{b}} \left(\frac{c}{b}\right)^{n-4} [4^3 \left(\frac{c}{b}\right)^3$$

$$+ 3 \,.\, 4^2 (n-1) \left(\frac{c}{b}\right)^2 + 3 \,.\, 4 (n-1)(n-2) \frac{c}{b}$$

$$+ (n-1)(n-2)(n-3)] \quad \text{i t. d.}$$

Podstawiając wartości $x$, $f(z)$, $\varphi(z) f'(z)$, $\frac{d \,.\left\{[\varphi(z)]^2 f'(z)\right\}}{dz}$ i t. d. we wzór ($\gamma$), otrzymamy:

$$y^n = \left(\frac{c}{b}\right)^n \left[\begin{array}{l} 1 + n e^{\frac{c}{b}} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{a}{b} + n e^{\frac{2c}{b}} \dfrac{\left(\frac{b}{c}\right)^2 \left(\frac{a}{b}\right)^2}{1 \,.\, 2} [2 \frac{c}{b} + (n-1)] \\ + n e^{\frac{3c}{b}} \dfrac{\left(\frac{b}{c}\right)^3 \left(\frac{a}{b}\right)^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} [3^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 + 2 \,.\, 3 (n-1) \frac{c}{b} + (n-1)(n-2)] \\ + n e^{\frac{4c}{b}} \dfrac{\left(\frac{b}{c}\right)^4 \left(\frac{a}{b}\right)^4}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} [4^5 \left(\frac{c}{b}\right)^3 + 3 \,.\, 4^2 (n-1) \left(\frac{c}{b}\right)^2 \\ + 3 \,.\, 4 (n-1)(n-2) \frac{c}{b} + (n-1)(n-2)(n-3)] + \quad \text{i t. d.} \end{array}\right]$$

## ĆWICZENIA.

1. $$y^2 - py + q = 0$$

Rozwinąć $y$ według wzrastających potęg $\frac{1}{p}$.

$$y = \frac{q}{p}\left(1 + \frac{b}{p^2} + \frac{4}{1\,.\,2}\frac{q^2}{p^4} + \frac{5\,.\,6}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{q^3}{p^6} + \text{ i t. d.}\right]$$

2. $$y^3 - ay + b = 0$$

Rozwinąć $y$ w szereg według rosnących potęg $\frac{1}{a}$.

$$y = \frac{b}{a}\left(1 + \frac{b^2}{a^2} + 3\frac{b^4}{a^6} + 12\frac{b^6}{a^9} + 55\frac{b^8}{a^{12}} + \text{ i t. d.}\right)$$

3. $$ay^n - y + b = 0$$

Rozwinąć $y$ w szereg według wzrastających potęg $a$.

$$v = b\left[1 + b^{n-1}a + 2nb^{2n-2}\frac{a^2}{1\,.\,2} + 3n(3n-1)b^{3n-3}\frac{a^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ i t. d.}\right]$$

W powyższych przykładach otrzymane szeregi są to rozwinięcia najmniejszego pierwiastka danego równania. (Jeżeli chodzi o teoryę, to zob. „*Equations numériques*“ Lagrange'a oraz „*Memoires de Berlin*“ 1768 r.)

4. $$ay^2 - by + c = 0$$

Jeżeli założymy, że $y^2 = y$, dane równanie będzie miało następującą postać:

$$ay - b\sqrt{y} + c = 0,$$

skąd:

$$y = -\frac{c}{a} + \frac{b}{a}\sqrt{y},$$

Rozwijając $\sqrt{y}$ jako funkcyę $\frac{b}{a}$, otrzymujemy szereg następujący:

$$\sqrt{y_1} = y = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}\left[1 - \frac{1}{1\,.\,2}\cdot\frac{b^2}{2^2ac} - \frac{1\,.\,1\,.\,3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\cdot\frac{b^4}{2^4a^2c^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1\,.\,1\,.\,3\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\cdot\frac{b^6}{2^6a^3c^3} - \text{ i t. d.}\right]$$

Szereg ten przedstawia dwie wartości danego pierwiastka równania: dla jednej wartości $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ jest dodatnie, dla drugiej wartości $\sqrt{-\frac{c}{b}}$ jest wzięte z ujemnym znakiem.

5. $$y^3 - py + q = 0$$

Zakładamy że $y^3 = y_1$, równanie dane przyjmuje tedy postać:

$$y_1 - p y_1^{\frac{1}{3}} + q = 0,$$

skąd

$$y_1 = -q + p y_1^{\frac{1}{3}}$$

Rozwijając w szereg $y_1^{\frac{1}{3}}$ według rosnących potęg $p$, otrzymujemy:

$$y_1^{\frac{1}{3}} = y = (-q)^{\frac{1}{3}} \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{(-q)^{\frac{2}{3}}} - \frac{2 \,.\, 1}{3^3 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3} \cdot \frac{p}{(-q)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2 \,.\, 1 \,.\, 4}{3^4 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} \frac{p}{(-q)^{\frac{8}{3}}} - \text{ i t. d.}\right]$$

Szereg ten daje nam rozwinięcie dla trzech pierwiastków danego równania, w którem $(-q)^{\frac{1}{3}}$ może przyjmować wartości następujące:

$$-q^{\frac{1}{3}}; \quad \left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right) q^{\frac{1}{3}} \quad \text{i} \quad \left(\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}\right) q^{\frac{1}{3}}$$

6. $$a y^n - b y + c = 0$$

Zakładamy, że $y^n = y_1$; równanie dane przybiera postać:

$$a y_1 - b y_1^{\frac{1}{n}} + c = 0,$$

skąd

$$y_1 = -\frac{c}{a} + \frac{b}{a} y_1^{\frac{1}{n}}$$

Następnie rozwijamy $y^{\frac{1}{n}}$ w szereg według potęg $\frac{b}{a}$, kładąc dla skrócenia $\left(-\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \varepsilon$; otrzymujemy:

$$y_1^{\frac{1}{n}} = y = \varepsilon \left[1 - \frac{1}{n} \frac{b \varepsilon}{c} + \frac{(3-n)\, b^2 \varepsilon^2}{1 \,.\, 2 \,.\, n^2 \cdot c^2} - \frac{(4-n)(4-2n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, n^2} \frac{b^3 \varepsilon^3}{c^3} + \text{ i t. d.}\right];$$

szereg ten daje nam $n$ wartości pierwiastka danego równania; wystarczy bowiem w następującem wyrażeniu:

$$\left(\cos \frac{2 k \pi}{n} + \sqrt{-1} \sin \frac{2 k \pi}{n}\right)^n \sqrt{-\frac{a}{c}}$$

kłaść kolejno $\qquad k = 1, 2, 3, .. n$

i otrzymane w ten sposób wartości podstawić w nasz wzór zamiast $\varepsilon$.

7. $$a^y \sin a - y + 1 = 0$$

Rozwijamy $y$ w szereg według potęg $\sin a$:

$$y = 1 + \frac{a \sin a}{1} + 2 \log a \frac{a^2 \sin^2 a}{1 \cdot 2} + 3^2 (\log a)^2 \frac{a^3 \sin^3 a}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ i t. d.}$$

8. $$y = e + x \log y$$

Rozwijamy $y$ w szereg według potęg $x$:

$$y = e + \frac{x}{1} + \frac{2}{e} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{3}{e^2} \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4}{e^3} \cdot \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ i t. d.}$$

9. $$a y - y + 1 = 0$$

Rozwijamy $\sin \left(1 - \frac{1}{y}\right)$ w szereg według potęg $a$:

$$\sin \left(1 - \frac{1}{y}\right) = a - \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \text{ i t. d.}$$

10. $$e^y - y + 1 = 0$$

Rozwijamy w szereg $e^y$:

$$e^y = e\,(1 + e + \frac{3\, e^2}{1 \cdot 2} + \frac{4^2\, e^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5^3\, e^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ i t. d.}$$

11. $$y^2 - 2\,y + 1 = 0$$

Rozwijamy w szereg $\log y$:

$$\log y = \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^6} + \text{ i t. d.}$$

Najmniejszy pierwiastek danego równania możemy uważać jako równy 1; otrzymamy więc:

$$\log 1 = 0 = \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 2^4} + \text{ i t. d.}$$

skąd:

$$\log 2 = \frac{1}{2^2}\,(1 + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^4} + \text{ i t. d.})$$

12. $$y^2 - 5\,y + 6 = 0$$

Rozwinąć w szereg $y^n$:

$$y^n = \left(\frac{6}{5}\right)^n [1 + n \cdot \frac{6}{5^2} + \frac{n\,(n+3)}{1 \cdot 2}\,\frac{6^2}{5^4} + \frac{n\,(n+4)\,(n+5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\frac{6^3}{5^6} + \text{ i t. d.}]$$

W danem zadaniu mamy $y^n = 2^n$, ponieważ 2 jest najmniejszym pierwiastkiem danego równania.

13. $$y^3 - y + 1 = 0$$

Rozwińmy w szereg $y^n$:

$$y^n = 1 + n + \frac{n(n+5)}{1 \,.\, 2} + \frac{n(n+7)(n+8)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} +$$

$$+ \frac{n(n+9)(n+10)(n+11)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} + \text{ i t. d.}$$

14. $$a y^2 - k y + c = 0$$

Rozwinąć w szereg sumę $n^{\text{tych}}$ ujemnych potęg pierwiastków tego równania. Lagrange udowodnił, że jeżeli $y$ jest dane za pomocą równania $y = z + x\varphi(y)$, a $\frac{1}{y^n}$ spełnia twierdzenie Lagrange'a, to suma wyrazów szeregu, zawierających ujemne potęgi $z$, jest sumą $n^{\text{tych}}$ ujemnych potęg danego równania.

Jeżeli więc $\alpha$ i $\beta$ są pierwiastkami danego równania, to uwzględniając w szeregu tylko te wyrazy, które zawierają dodatnią potęgę $\frac{b}{c}$ albo, co jest równoznaczne, ujemną potęgą $\frac{c}{b}$, znajdziemy:

$$\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} = \left(\frac{b}{c}\right)^n [1 - \frac{na}{b}\frac{c}{b} + \frac{n(n-3)}{1 \,.\, 2}\frac{a^2}{b^2}\left(\frac{c}{b}\right)^2 -$$

$$- \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\frac{a^3}{b^3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 + \text{ i t. d.}]$$

Całkowite rozwinięcie w szereg wielkości $\frac{1}{y^n}$ będzie rozwinięciem w szereg najmniejszego pierwiastka danego równania.

15. $$a y^n - b y + c = 0$$

Oznaczając przez $\varepsilon(\alpha^{-n})$ sumę $n^{\text{tych}}$ potęg odwrotności pierwiastków, otrzymamy wzór następujący:

$$\varepsilon(\alpha^{-n}) = \left(\frac{b}{c}\right)^n [1 - n\left(\frac{c}{b}\right)^{m-1}\frac{a}{b} + \frac{n(n-2m+1)}{1 \,.\, 2}\left(\frac{c}{b}\right)^{2m-2}\frac{a^2}{b^2} -$$

$$- \frac{n(n-3m+1)(n-3m+2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\left(\frac{c}{b}\right)^{3m-3}\frac{a^3}{b^3} + \text{ i t. d.}],$$

gdy uwzględnimy w szeregu tylko te wyrazy, które zawierają dodatnie potęgi ułamka $\frac{b}{c}$.

Gdybyśmy w danem równaniu zastąpili $y$ przez $\frac{1}{y}$ i poszukiwali sumy odwrotności $n^{\text{tych}}$ potęg pierwiastków przekształconego w powyższy sposób równania, wówczas suma ta byłaby sumą $n^{\text{tych}}$ potęg pierwiastków równania danego.

16. $$u = t + e \sin u$$

Rozwijając $u$ i $\sin u$ w szereg według potęg funkcyi zmiennej $e$, znajdujemy:

$$u = t + \sin t \,.\, \frac{e}{1} + \sin 2\,t \,.\, \frac{e^2}{1\,.\,2} + \frac{3}{4}\,(3 \sin 3\,t - \sin t)\,\frac{e^3}{1\,.\,2\,.\,3} +$$

$$+ (8 \sin 4\,t - 4 \sin 2\,t)\,\frac{e^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \text{ i t. d.}$$

oraz:

$$\sin u = \sin t + \frac{\sin 2\,t}{2}\,\frac{e}{1} + \frac{3 \sin 3\,t - \sin t}{4}\,\frac{e^2}{1\,.\,2} +$$

$$+ (2 \sin 4\,t - \sin 2\,t)\,\frac{e^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \text{ i t. d.}$$

Dane równanie jest równaniem Keplera, mającem ważne zastosowania w astronomii; w tem równaniu $t$ oznacza czas albo wielkość względem niego proporcyonalną; $e$ oznacza mimośród eliptycznej drogi planety, $u$ jej anomalię mimośrodową (ekscentryczną).

17. $$y = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

Rozwinąć $y^n$ w szereg według wzrastających potęg $e$.

Należy uważać $\frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$ jako jeden z pierwiastków równania drugiego stopnia, którego drugim pierwiastkiem jest $\frac{e}{1 - \sqrt{1 - e^2}}$, samo zaś równanie ma postać następującą:

$$y^2 - \frac{2}{e}\,y + 1 = 0$$

Z tego równania znajdujemy:

$$y^n = \left(\frac{e}{2}\right)^n \left[1 + n\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{n\,(n+3)}{1\,.\,2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \text{ i t. d.}\right]$$

18. Rozwinąć $\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + x^2}}$ w szereg według wzrastających potęg $x$.

Zakładamy, że $\sqrt{1 - 2\,x\,z + x^2} = 1 - x\,y$.

Z równości tej otrzymujemy:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\,x\,z + x^2}} = \frac{dy}{dz}$$

oraz
$$y = z + \frac{1}{2} x (y^2 - 1)$$

To ostatnie równanie ma postać równania Lagrange'a, przeto znajdujemy:
$$\varphi(y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

Ze wzoru ($\delta$) przez różniczkowanie otrzymujemy:
$$\frac{dy}{dz} = 1 + \frac{d\,\varphi(z)}{dz}\,\frac{x}{1} + \frac{d^2[\varphi(z)]^2}{dz^2}\,\frac{x^2}{1 \,.\, 2} + \frac{d^3[\varphi(z)]^3}{dz^3}\,\frac{x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \text{ i t. d.}$$

skąd mamy:
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + x^2}} = 1 + \frac{x}{1 \,.\, 2}\,\frac{d\,.\,(z^2 - 1)}{dz} + \frac{x^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 2^2}\,\frac{d^2(z^2 - 1)}{dz^2} + \text{ i t. d.}$$

---

# ROZDZIAŁ VII.

## Zamiana zmiennych.

### PRZYPADEK PIERWSZY.

### Funkcye jednej zmiennej niezależnej.

Mamy dane wyrażenie:
$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \text{ i t. d.}\right) \qquad (\alpha)$$

które zawiera funkcyę $y$ zmiennej niezależnej $x$ oraz kolejne pochodne funkcyi $y$ względem zmiennej $x$.

Chcąc się dowiedzieć, co się staje z wyrażeniem ($\alpha$), gdy za zmienną niezależną przyjmiemy $y$, należy obliczyć pochodne następujące:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{3\,.\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2 - \frac{dx}{dy}\,\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5} \quad \text{i t. d.}$$

Chcąc dowiedzieć się, jaką postać przybiera związek ($\alpha$) gdy za nową zmienną niezależną przyjmujemy zmienną $t$, związaną z $x$ zapomocą równania $\varphi(x, t) = 0$, powinniśmy we wzorach następujących:

$$
(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}\,; \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3}\\
&\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{\dfrac{dx}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^3y}{dt^3}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^3x}{dt^3}\right)-3\dfrac{d^2x}{dt^2}\left(\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^5}
\end{aligned}\right. \quad \text{i t. d.}
$$

zastąpić $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3x}{dt^3}$, i t. d. przez odpowiednie wartości, obliczone z równania $\varphi(x, t) = 0$. Otrzymane w ten sposób wartości pochodnych $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, i t. d. oraz wartość na $x$, obliczoną z równania $\varphi(x, t) = 0$, podstawiamy do wzoru ($\alpha$).

Jeżeli chcemy dowiedzieć się, jaką postać przybierze wyrażenie ($\alpha$), gdy $x$ i $y$ zastąpimy przez $u$ i $t$, i jeżeli te cztery zmienne są związane z sobą następującemi równaniami:

$$\varphi_1(x, y, u, t,) = 0$$

$$\varphi_2(x, y, u, t,) = 0\,,$$

wówczas we wzorach (2) należy zastąpić $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ i t. d. przez odpowiednie wartości, wyznaczone zapomocą zróżniczkowania względem $t$ danych równań pomiędzy $x, y, u, t$. Znalezione w ten sposób wyrażenia na $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ podstawiamy w ($\alpha$), jak również wyrażenia na $x$ i $y$, uważane jako funkcye zmiennych $u$ i $t$, które otrzymamy z równań $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$.

## PRZYKŁAD I.

$$\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$$

Jaką postać przybiera to równanie, gdy zmienną niezależną jest $y$?

Posiłkując się wzorami (1), które służą do zamiany zmiennych, otrzymujemy równanie następujące:

$$-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}-x\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}-y\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}=0,$$

zmieniając zaś znaki i usuwając mianowniki, otrzymujemy:

$$\frac{d^2x}{dy^2}+x\frac{dx}{dy}+y=0$$

PRZYKŁAD II.

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3\,x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(a+1)\,x\frac{dy}{dx}-y=0$$

Zamienić zmienną niezależną $x$ na $t$, wiedząc, że

$$t=\log x$$

Z ostatniego równania, łączącego obie zmienne $x$ i $t$, pisząc, że $x=e^t$, otrzymamy:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^3x}{dt^3}=e^t$$

Podstawiając we wzory (2) powyższe wartości pochodnych, znajdziemy:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{dy}{dt}-3\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

Zastępując w zadanem równaniu zmienną $x$ i pochodne poprzednio otrzymane przez znalezione dla nich wartości, otrzymujemy ostateczny wynik w postaci następującej:

$$\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{dy}{dt}-3\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+(a+1)\frac{dy}{dt}-y=0,$$

czyli

$$\frac{d^3y}{dt^3}+a\frac{dy}{dt}-y=0$$

## PRZYKŁAD III.

$$(x+y-6)\frac{dy}{dx}+(x+y+6)=0$$

Jak się zmieni to równanie, jeżeli zmiennemi niezależnemi będą $u$ i $t$ i jeżeli równania, łączące dawne zmienne niezależne z nowemi zmiennemi są:

$$x=u+t$$
$$y=u-t?$$

Z tych równań otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dt}+1$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{du}{dt}-1$$

Jeżeli podstawimy otrzymane w ten sposób wartości w pierwszy ze wzorów (2), znajdziemy:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dt}-1}{\frac{du}{dt}+1}$$

Z równań pomiędzy dawnemi i nowemi zmiennemi otrzymujemy także:

$$x+y=2u$$

Gdy podstawimy w danem równaniu zamiast $x+y$ i $\frac{dy}{dx}$ odpowiednio znalezione wartości, dane równanie przybierze postać następującą:

$$(2u-6)\frac{\frac{du}{dt}-1}{\frac{du}{dt}+1}+2u+6=0$$

czyli

$$u\frac{du}{dt}+3=0$$

## ĆWICZENIA.

1. Wzór na promień krzywizny krzywych płaskich, gdy $x$ jest zmienną niezależną, jest, jak wiadomo,

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Jak się zmieni to wyrażenie, jeżeli za zmienną niezależną uważać będziemy $y$?

Znajdujemy:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2x}{dy^2}}$$

2. $$\left(\frac{d^3y}{dx^3}+y\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left(3\frac{dy}{dx}+x^2\right)=0$$

Jak się zmieni dane równanie, gdy zmienną niezależną będzie $y$?

Odpowiedź:

$$\frac{d^3x}{dy^3}+x^2\frac{d^2x}{dy^2}-y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0$$

3. $$(1-x)^3\frac{dy}{dx}+2a(1+x)=0$$

Zastąpić zmienną niezależną $x$ przez zmienną niezależną $t$, jeżeli

$$t=\frac{1+x}{1-x}$$

Odpowiedź:

$$\frac{dy}{dt}+at=0$$

4. $$(1+x^2)x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}(1-x^2y\sqrt{1+x^2})-x^3y^2=0$$

Przyjąć jako zmienną niezależną $t$ i położyć:

$$t=\sqrt{1+x^2}$$

Odpowiedź:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y\frac{dy}{dt}-y^2=0$$

5. $$(1-x^2)^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2-2x(1-x^2)\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$$

Bierzemy za zmienną niezależną $t$, kładąc:

$$x=\sin t.$$

Odpowiedź:

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+1=0$$

6. $$(1-x^2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{dy}{dx} + \frac{2a}{1-x} y = 0$$

Bierzemy za zmienną niezależną $t$, i uwzględniamy dany związek:

$$x = \frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

Odpowiedź:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a(e^{2t}+1)y = 0$$

7. $$y + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Za zmienną niezależną przyjąć $t$, kładąc:

$$x^2 = 4t$$

Odpowiedź:

$$y + \frac{dy}{dt} + t\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$ (FOURIER: *Traité de la chaleur*)

8. $$\frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x + y\dfrac{dy}{dx}}$$

Jaką postać przybierze to wyrażenie, jeżeli zmiennemi niezależnemi będą $r$ i $t$ i jeżeli:

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t$$

Odpowiedź:

$$\frac{r}{\dfrac{dr}{dt}}$$

9. $$\frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}$$

Przyjąć $t$ jako zmienną niezależną, mając dane związki następujące:

$$x = r\cos t, \qquad y = r\sin t$$

Jako odpowiedź otrzymamy wyrażenie na promień krzywizny w spółrzędnych biegunowych:

$$\frac{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 - r\dfrac{d^2 r}{dt^2}}$$

10.
$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Przyjąć za nową zmienną niezależną $s$, spełniającą związek następujący:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Posiłkując się wzorami (2), otrzymujemy:

$$\frac{d^2 y}{ds^2}\frac{dx}{ds} - \frac{d^2 x}{ds^2}\frac{dy}{ds}.$$

11.
$$[(x-y)\sqrt{x^2-y^2} + (x-y)^2 - 2y^2]\frac{dy}{dx} + (x+y)\sqrt{x^2-y^2} + x^2 + y^2 = 0$$

Zamieniamy zmienne niezależne $y$ i $x$ na $u$ i $t$, które spełniają związki następujące:

$$x = u^2 + t^2$$
$$y = 2ut$$

Odpowiedź:

$$(u+t)^2\frac{du}{dt} + (u-t)^2 = 0$$

12.
$$xy\frac{d^2 y}{dx^2} - x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^3 = 0$$

Zamieniamy zmienne niezależne $y$ i $x$ na $u$ i $t$, dane przez równania:

$$x = e^t$$
$$y = e^u$$

Odpowiedź:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{du}{dt} + e^{u+t} = 0$$

## PRZYPADEK DRUGI.

### **Funkcye kilku zmiennych niezależnych.**

Mamy dane wyrażenie:

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ldots\right) \qquad (\beta)$$

które zawiera zmienne niezależne $x, y,$ funkcyę ich $z$ i pochodne cząstkowe różnych rzędów tej funkcyi, wzięte względem zmiennych niezależnych $x, y$.

Chodzi o to, jak się przekształci wyrażenie ($\beta$), jeżeli zmienne niezależne $x$, $y$ zastąpimy przez nową zmienną niezależną $t$, związaną z dawnemi zmiennemi $x$, $y$ równaniem:

$$\varphi(x, y, t) = 0$$

W tym celu w wyrażeniu ($\beta$) podstawiamy, zamiast pochodnych cząstkowych, ich wartości otrzymane ze wzorów następujących:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{dz}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{dz}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{d^2 z}{dt^2} \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \frac{dz}{dt} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad \text{i t. d.} \end{aligned} \right.$$

Pochodne cząstkowe: $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 t}{\partial x^3}$ obliczamy, różniczkując równania, łączące dawne zmienne $x$, $y$ z nową zmienną $t$. Zagadnienie daje się rozwiązać tylko wówczas, gdy opierając się na tych równaniach, możemy wyrugować $x$ i $y$.

Jeżeli chcemy się dowiedzieć, jak się zmienia ($\beta$), gdy zmienne niezależne $x$, $y$ zastąpimy przez zmienne niezależne $t$ i $v$, związane z poprzedniemi zmiennemi za pomocą równań:

$$\varphi_1(x, y, v, t) = 0$$

$$\varphi_2(x, y, v, t) = 0,$$

wówczas we wzorach

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y} \quad \text{i t. d.} \end{aligned} \right.$$

zamiast $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ i t. d. podstawiamy odpowiadające im wartości, otrzymane z równań $\varphi_1 = 0$ i $\varphi_2 = 0$.

Znalezione w ten sposób wartości pochodnych $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ i t. d. wstawiamy do wzorów ($\beta$). Dalej, posługując się równaniami $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, wyznaczamy $x$ i $y$ jako funkcye nowych zmiennych $v$ i $t$ i otrzymane wartości na $x$ i $y$ podstawiamy do tych samych wzorów ($\beta$).

U w a g a. Jeżeli z równań, łączących dawne zmienne z nowemi, możemy odrazu wyrazić $x$ i $y$ jako funkcye zmiennych $v$ i $t$, to możemy wyjść ze wzorów następujących:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} \quad \text{i t. d.} \end{cases}$$

w których zamiast $\dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial v}, \dfrac{\partial x}{\partial t}, \dfrac{\partial y}{\partial t}$ i t. d., podstawiamy ich wartości otrzymane przez różniczkowanie równań, łączących zmienne niezależne. Następnie z tych wzorów otrzymamy wartości na $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ i t. d.

Nakoniec uważamy przypadek, gdy zmienne niezależne $x, y$ i sama funkcya $z$ są zastąpione przez zmienne $t, v$ i funkcyę $u$. Równania, które łączą te wielkości, są następujące:

$$\varphi_1 (z, y, x, u, v, t) = 0$$
$$\varphi_2 (z, y, x, u, v, t) = 0$$
$$\varphi_3 (z, y, x, u, v, t) = 0$$

We wzorach:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y} \quad \text{i t. d.} \end{cases}$$

zastępujemy $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial t}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}, \dfrac{\partial t}{\partial y}$ i t. p. przez wartości znalezione dla nich z równań danych. Następnie, z zmienionych w ten sposób równań otrzymujemy wartości na $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i t. d. Wartości tych pochodnych wstawiamy w ($\beta$), jak również i wartości na $x, y, z$ jako funkcyi zmiennych $u, v, t$, otrzymane przez rozwiązanie równań $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$.

U w a g a. Jeżeli z równań pomiędzy dawnemi a nowemi zmiennemi otrzymujemy łatwo wartości $x, y, z$, jako funkcye zmiennych $u, v, t$, to możemy wyjść z równań następujących:

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} \quad \text{i t. d} \end{cases}$$

Dalsze postępowanie będzie, jak wyżej.

Podobnie rozumować i postępować będziemy, gdy wyrażenie (β) zawiera trzy zmienne niezależne.

PRZYKŁAD I.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Jak się zmieni to równanie jeżeli $x$ i $y$ zastąpimy przez $r$, mając dany związek następujący:

$$x^2 + y^2 = r^2 ?$$

We wzorach (3) zastąpimy $t$ przez $r$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dr} \frac{\partial r}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dr} \frac{\partial r}{\partial y}.$$

Różniczkujemy równanie, łączące dawne zmienne z nową:

$$x = r \frac{\partial r}{\partial x}, \text{ co daje } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

$$y = r \frac{\partial r}{\partial y}, \text{ co daje } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}.$$

Podstawiamy znalezione wartości $\frac{\partial r}{\partial x}$ i $\frac{\partial r}{\partial y}$ w wyrażenia $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, i otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dr} \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dr} \frac{y}{r}.$$

Różniczkujemy drugi raz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 z}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial x} \cdot \frac{x}{r} + \frac{dz}{dr} \frac{1}{r} - \frac{dz}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{x}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d^2 z}{dr^2} \frac{\partial r}{\partial y} \cdot \frac{y}{r} + \frac{dz}{dr} \frac{1}{r} - \frac{dz}{dr} \frac{\partial r}{\partial y} \frac{y}{r^2}$$

Albo podstawiając wartości na $\frac{\partial r}{\partial x}$ i $\frac{\partial r}{\partial y}$, znajdujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{d^2 z}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{dz}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{d^2 z}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{dz}{dr}\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right).$$

Podstawiając znalezione wartości w dane równanie, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 z}{dr^2}\left(\frac{x^2+y^2}{r^2}\right) + \frac{dz}{dr}\left(\frac{2}{r} - \frac{x^2+y^2}{r^3}\right) = 0$$

Z tego zaś równania otrzymamy:

$$\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr} = 0$$

Równanie to spotyka się w badaniach nad ruchami cieczy.

## PRZYKŁAD II.

$$x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Jak się zmieni to wyrażenie, gdy $x$ i $y$ zastąpimy przez $r$ i $t$, spełniające związki następujące:

$$x = r\cos t,$$
$$y = r\sin t?$$

We wzorach (5) zastępujemy $v$ przez $r$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Przez różniczkowanie równań, łączących dawne zmienne z nowemi, otrzymujemy:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos t, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin t,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -r\sin t, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = r\cos t,$$

Podstawiamy wartości tych pochodnych w poprzednie równania i otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos t + \frac{\partial z}{\partial y} \sin t\,,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{\partial z}{\partial x}\, r \sin t + \frac{\partial z}{\partial y}\, r \cos t\,.$$

Rugując z tych dwóch równań bądź $\frac{\partial z}{\partial x}$ bądź $\frac{\partial z}{\partial y}$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos t - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\sin t}{r}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin t + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\cos t}{r}$$

Podstawiając w dane równanie znalezione wartości na pochodne, mamy:

$$r \cos t \left(\frac{\partial z}{\partial r} \sin t + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\cos t}{r}\right) - r \sin t \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cos t - \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\sin t}{r}\right) = 0$$

po uproszczeniu zaś otrzymamy: $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$

Taką zamianę zmiennych spotykamy w teoryi ruchu planet.

## PRZYKŁAD III.

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - e^z = 0$$

Zastępujemy zmienne $z$, $y$ i $x$ przez zmienne $u$, $v$ i $t$.

Równania, łączące dawne zmienne z nowemi, są:

$$u = x^2 + y^2,$$

$$v = x^2 - y^2,$$

$$\log \frac{1}{2} t = z.$$

Mamy wzory (6):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y}.$$

Różniczkujemy dane równania najprzód względem $x$, następnie względem $y$.

Znajdujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\,x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2\,x,\qquad \frac{\partial t}{\partial x}=2\,e^z\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2\,y,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\,2\,y,\quad \frac{\partial t}{\partial y}=2\,e^z\frac{\partial z}{\partial y},$$

Otrzymane wartości na pochodne podstawiamy w poprzednie dwa równania:

$$x=x\frac{\partial u}{\partial v}+e^z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t},$$

$$y=-y\frac{\partial u}{\partial v}+e^z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial t},$$

Rozwiązując te równania względem $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$, otrzymamy:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x\left(1-\frac{\partial u}{\partial v}\right)}{e^z\frac{\partial u}{\partial t}},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\left(1+\frac{\partial u}{\partial v}\right)}{e^z\frac{\partial u}{\partial t}}.$$

Otrzymane w ten sposób wartości $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial z}{\partial y}$ podstawiamy w dane równanie i znajdujemy:

$$\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2\left(1-\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2}{e^{2z}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}+\frac{1}{y^2}\cdot\frac{y^2\left(1+\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2}{e^{2z}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2}-e^z=0$$

co po uproszczeniu sprowadzi się do równania następującego:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2-\frac{e^{3z}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+1=0$$

Ponieważ, na zasadzie trzeciego równania pomiędzy dawnemi a nowemi zmiennemi, $e^z=\frac{1}{2}t$, przeto z poprzedniego równania otrzymamy:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)^2-\frac{t^3}{16}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+1=0$$

U w a g a. Często bywa wygodniej zastąpić dopiero w ostatniem równaniu dawne zmienne przez ich wartości, wyrażone jako funkcye nowych zmiennych.

## ĆWICZENIA.

1. $$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Jak się zmieni to wyrażenie, jeżeli zmienne $x, y$ zastąpimy przez zmienną $t$, daną przez równanie następujące:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \log t?$$

Odpowiedź:

$$t^2 \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

2. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Zmienne $x$ i $y$ zastępujemy przez zmienną $t$, daną przez równanie następujące:

$$x^2 - y^2 = e^{2t}.$$

Jak się zmieni dane wyrażenie?

Odpowiedź:

$$\frac{1}{e^{2t}} \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

3. $$x y^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 x^2 y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^3 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y^3 \frac{\partial z}{\partial x} - x^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Jak się zmieni to równanie, jeżeli zmienne $x, y$ zastąpimy przez zmienną $t$, daną przez równanie następujące:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = t?$$

Odpowiedź:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{1}{t} \frac{dz}{dt} = 0$$

4. $$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$$

Jak się zmieni dane wyrażenie, jeżeli $x, y$ zastąpimy przez $t$ i $r$, dane przez równania następujące:

$$x = r \cos t,$$
$$y = r \sin t?$$

Odpowiedź:

$$r \frac{\partial z}{\partial r}.$$

5. $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Zmienne $x$, $y$ zastępujemy przez $t$ i $r$. Równania łączące dawne i nowe zmienne są:

$$x = r \cos t$$

$$y = r \sin t.$$

Jak się zmieni dane równanie?

Odpowiedź:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = 0$$

6. $$y^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - x^{\frac{1}{2}} \left[ \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \right] = 0$$

Jak się zmieni dane równanie, jeżeli zmienne $x$, $y$ zastąpimy przez $t$ i $v$, dane przez następujące równania:

$$x = (t^2 + v^2)^2$$

$$y = (t^2 - v^2)^2 ?$$

Odpowiedź:

$$v^3 \frac{\partial z}{\partial t} - t^3 \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

7. $$\left(x^3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 3\, x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(y^3 \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + 3\, y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

Jak się zmieni powyższe wyrażenie, jeżeli zmienne $x$, $y$ zastąpimy przez zmienne $v$ i $t$, spełniające związki następujące:

$$x = e^{v+t}$$

$$y = e^{v-t} ?$$

Odpowiedź:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial v^3} \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial t^3}$$

8. $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Jak się zmieni powyższe równanie, jeżeli zmienne $x$, $y$, $z$ zastąpimy przez zmienną $r$, spełniającą równanie następujące:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 ?$$

Odpowiedź:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

9.
$$\frac{y-x}{\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}-\left(1+\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}}$$

Jak się zmieni to wyrażenie, jeżeli zamiast zmiennych $z, y, x$ podstawimy zmienne $u, v, t$, spełniające związki następujące:

$$u = \log \sqrt{x^2+y^2},$$
$$v = \operatorname{arc\,tang} z,$$
$$t = x+y+z?$$

Odpowiedź:

$$e^{2u}\left(\cos^2 v \frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$

10.
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

Jak się zmieni powyższe równanie, jeżeli zmienne $x, y, z$ zastąpimy przez zmienne $t, r, \varphi$ i jeżeli między niemi zachodzą związki:

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t \sin\varphi$$
$$z = r\sin t\cos\varphi$$

Wprowadzając zmienną pomocniczą $\rho = r\sin t$, otrzymamy, że:

$$\begin{cases} y=\rho\sin\varphi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \rho = r\sin t \\ x = r\cos t \end{cases}$$

Na zasadzie otrzymanego w ćwiczeniu 5 wyniku mamy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \tag{2}$$

Stosując zwykły sposób postępowania (zob. przykład II), otrzymamy:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\operatorname{cotg} t}{r^2}\frac{\partial u}{\partial r} \tag{3}$$

Dodając równania (1), (2), (3), znajdziemy:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\operatorname{cotg} t}{r^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

Podstawiając na $\rho$ jego wartość, otrzymamy równanie:

$$r\frac{\partial^2 (u\,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2 t}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin t}\frac{\partial . \left(\sin t \dfrac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial t} = 0$$

Równanie to znalazł L a p l a c e, jest ono bardzo ważne w fizyce matematycznej.

---

# ROZDZIAŁ VIII.

## Rugowanie stałych i funkcyi.

Mamy równanie $$F(x, y, a) = 0 \tag{1}$$
które zawiera stałą $a$.

Aby otrzymać równanie różniczkowe, nie zawierające stałej, musimy zróżniczkować równanie (1) i wyrugować stałą z równania danego i z jego pierwszej pochodnej, przyrównanej do zera.

Jeżeli równanie dane ma postać

$$F(x, y, a, b) = 0 \tag{2}$$

czyli zawiera dwie stałe, to musimy obliczyć pierwszą i drugą pochodną danego równania, i wyrugować stałe $a$ i $b$ z trzech równań: danego równania (2) i równań otrzymanych przez przyrównanie do zera dwóch jego pochodnych.

W ten sam sposób postępujemy w przypadku ilukolwiek stałych.

---

Mamy równanie $$F[x, y, z, \varphi(u)] = 0 \tag{3}$$
w którem $\varphi$ jest funkcyą dowolną zmiennej $u$, zaś $u$ jest oznaczoną funkcyą zmiennych $x, y, z$.

Jeżeli chcemy otrzymać równanie różniczkowe nie zawierające funkcyi dowolnej, to różniczkujemy równanie (3) raz względem $x$, drugi raz względem $y$; następnie z tych dwóch pochodnych i równania danego (3) rugujemy $\varphi(u)$ i $\varphi'(u)$.

Jeżeli dane równanie zawiera dwie funkcyę dowolne $u$ i $v$, będące oznaczonemi funkcyami zmiennych, i spełniające równanie następujące:

$$F[x, y, z, \varphi(u), \psi(v)] = 0 \tag{4}$$

to obliczamy pochodne cząstkowe dwóch pierwszych rzędów i następnie z obliczonych pochodnych i z równania (4) rugujemy $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$, $\psi(v)$, $\psi'(v)$.

Postępujemy w podobny sposób w przypadku ilukolwiek funkcyi dowolnych.

### PRZYKŁAD I.

Wyrugować stałe $a$ i $b$ z równania kuli:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{1}$$

Różniczkując to równanie dwukrotnie, otrzymujemy następujące dwa równania:

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0 \tag{2}$$

$$1+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \tag{3}$$

Z równania (3) znajdujemy, że $y-b=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$;

podstawiając wartość $y-b$ w równanie (2), otrzymujemy:

$$x-a=\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}\frac{dy}{dx}$$

Dalej, podstawiając w równanie (1) znalezione wartości na $y-b$ i $x-a$, znajdujemy ostateczną odpowiedź:

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=R$$

Jest to wzór na promień krzywizny krzywych płaskich.

### PRZYKŁAD II.

Wyrugować funkcyę $\varphi$ z równania:

$$y-nz=\varphi(x-mz)$$

Obliczając cząstkowe pochodne względem $x$ i względem $y$, mamy równania następujące:

$$-n\frac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(x-mz)\left(1-m\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$1-n\frac{\partial z}{\partial y}=-\varphi'(x-mz)\,m\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Dzielimy te dwa równania stronami; po uproszczeniu otrzymujemy:

$$m \frac{\partial z}{\partial x} + n \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

Równanie to jest *równaniem różniczkowem powierzchni walcowych.*

PRZYKŁAD III.

Wyrugować $\varphi$ i $\psi$ z równania:

$$z = x\,\varphi(z) + y\,\psi(z)$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy dwa równania o pochodnych cząstkowych:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z) + x\,\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\psi'(z)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \psi(z) + y\,\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y} + x\,\varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial y},$$

albo po uproszczeniu:

$$\frac{\partial z}{\partial x}[1 - x\,\varphi'(z) - y\,\psi'(z)] = \varphi(z),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}[1 - x\,\varphi'(z) - y\,\psi'(z)] = \psi(z),$$

Dzieląc te dwa równania przez siebie, otrzymujemy:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

Kładąc $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = F(z)$, mamy:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = F(z)$$

Różniczkując powtórnie, raz względem $x$, drugi raz względem $y$, znajdujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = F'(z)\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = F'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^3.$$

Mnożymy powyższe równania jedno przez $\frac{\partial z}{\partial y}$, drugie przez $\frac{\partial z}{\partial x}$ i odejmujemy od siebie; mamy ostatecznie:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Jest to *równanie różniczkowe powierzchni skośnych z płaszczyzną kierowniczą.*

Uwaga. W celu uproszczenia wzorów wprowadza się zazwyczaj następujące symbole:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Jeżeli zastosujemy powyższe oznaczenia w dwóch ostatnich przykładach, wówczas rezultat otrzymany można będzie napisać w potaci następującej:

$$m\,p + n\,q = 1,$$

$$q^2\,r - 2\,p\,q\,s + p^2\,t = 0.$$

## ĆWICZENIA.

1. Wyrugować stałą $a$ z równania:

$$y = a\,x + \frac{m}{a}$$

Odpowiedź:

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\,\frac{dy}{dx} + m = 0$$

2. Wyrugować stałą $a$ z równania:

$$x - y = a\,e^{-\frac{x}{x-y}}$$

Odpowiedź:

$$x - 2\,y + y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

3. Wyrugować stałe $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ z równania:

$$y = a_1\,x^n + a_2\,x^{n-1} + a_3\,x^{n-2} + \ldots + a_n\,x$$

Odpowiedź:

$$y = x\,\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1\,.\,2}\,\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\frac{d^3 y}{dx^3} - \ldots \pm \frac{x^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n}\,\frac{d^n y}{dx^n}$$

4. Wyrugować stałe $a, b, c$ z równania:

$$z = ax + by + c,$$

w którem $y$ oznacza funkcyę zmiennej $x$.

Odpowiedź:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^3 z}{dx^3} - \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^3 y}{dx^3} = 0$$

Jeżeli warunek, wyrażony w tem równaniu, jest spełniony, wówczas z krzywej o podwójnej krzywiźnie otrzymujemy krzywą płaską.

5. Wyrugować stałą $a$ z równania:

$$(a\, m + n)\,(x^2 - a\, y^2) = a\, k^2$$

Odpowiedź:

$$n\, x\, y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (m\, x^2 - n\, y^2 - k^2)\,\frac{dy}{dx} - m\, x\, y = 0$$

6. Wyrugować stałe $a, b$ z równania:

$$y^2 = a\,(b^2 - x^2).$$

Odpowiedź:

$$y\,\frac{dy}{dx} = x \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\, y\,\frac{d^2 y}{dx^2}$$

7. Wyrugować funkcyę logarytmiczną i kątową z równania:

$$y = \sin\,(\log x)$$

Odpowiedź:

$$x^2\,\frac{d^2 y}{dx^2} + x\,\frac{dy}{dx} + y = 0$$

8. Wyrugować funkcyę wykładniczą z równania:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Mnożymy licznik i mianownik lewej części równania przez $e^x$; z równania w ten sposób otrzymanego obliczamy wartość $e^{2x}$, następnie logarytmując otrzymujemy wartość na $2\,x$, wreszcie otrzymujemy równanie, które po zróżniczkowaniu daje jako ostateczny wynik:

$$\frac{dy}{dx} = 1 - y^2$$

9. Wyrugować funkcye wykładnicze i goniometryczne z równania:

$$y = a\, e^{mx} \sin n\, x$$

Odpowiedź:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\, m\,\frac{dy}{dx} + (m^2 + n^2)\, y = 0$$

10. Wyrugować stałe $a$, $b$, $c$, $e$ i funkcyę kątową z równania:

$$y = a\,e^{x} + b\,e^{-x} + c \sin(x + m)$$

Różniczkując cztery razy, otrzymujemy:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - y = 0$$

11. Wyrugować $\varphi$ z równania:

$$\frac{y - b}{z - c} = \varphi\left(\frac{x - a}{z - c}\right)$$

Odpowiedź: $p\,(x - a) + q\,(y - b) = z - c$

Jest to *równanie różniczkowe powierzchni stożkowych.*

12. Wyrugować $\varphi$ z równania: $z = \varphi\,(x^2 + y^2)$

Otrzymamy *równanie różniczkowe powierzchni obrotowych:*

$$p\,y - q\,x = 0$$

13. Wyrugować $\varphi$ z równania:

$$z = \varphi\left(\frac{y^2 - x^2}{x}\right)$$

Odpowiedź:

$$2\,x\,y\,\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2)\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

14. Wyrugować $\varphi$ z równania:

$$z = \varphi\left(\frac{y - n\,z}{x - m\,z}\right)$$

Otrzymujemy *równanie różniczkowe powierzchni konoidalnych:*

$$p\,(x - m\,z) + q\,(y - n\,z) = 0$$

15. Wyrugować $\varphi$ z równania:

$$z = \frac{1}{\varphi\,(x \pm a\,y)}$$

Odpowiedź:

$$\frac{\partial z}{\partial y} \pm a\,\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

16. Wyrugować $\varphi$ z równania:

$$z^2 - x\,y = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Odpowiedź:

$$y\,z\,\frac{\partial z}{\partial y} + x\,z\,\frac{\partial z}{\partial x} - x\,y = 0$$

17. Wyrugować $\varphi$ i $\psi$ z równania:

$$z = \frac{\varphi(x + a y)}{\psi(x - a y)}$$

Odpowiedź: $$q^2 + r t - a^2 (p^2 + r z) = 0$$

18. Wyrugować $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ z równania:

$$u = \varphi_1 (x^2 - y^2) \varphi_2 (y^2 - z^2) \varphi_3 (z^2 - x^2)$$

Odpowiedź:

$$y z \frac{\partial u}{\partial x} + z x \frac{\partial u}{\partial y} + x y \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

19. Wyrugować $\varphi$ i $\psi$ z równania:

$$z = \varphi(x + a y) + \varphi(x - a y)$$

Odpowiedź:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

20. Wyrugować $\varphi$ i $\psi$ z równania:

$$z = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Odpowiedź:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n z$$

Jest to równanie różniczkowe funkcyi jednorodnych $n^{go}$ stopnia.

21. Wyrugować $\varphi$ i $\psi$ z równania:

$$z = x \varphi(x y) + y \psi(x y)$$

Odpowiedź:

$$t y^2 + r x^2 - 2 s x y + q y + p x = z$$

22. Wyrugować $\varphi$ i $\psi$ z równania:

$$z = \varphi(a y + b x) \psi(a y - b x)$$

Logarytmując, otrzymujemy:

$$\log z = \log \varphi(a y + b x) + \log \psi(a y - bx)$$

Ponieważ funkcye $\varphi$ i $\psi$ są funkcyami dowolnemi, więc i logarytmy ich są także dowolne. Oznaczając tedy przez $F$, $f$ funkcye dowolne, możemy położyć:

$$\log \varphi(a y + b x) = F(a y + b x),$$

$$\log \psi(a y - b x) = f(a y - b x),$$

skąd:

$$\log z = F(a y + b x) + f(a y - b x).$$

Rugując $F$ i $f$, ostatecznie znajdujemy, że:

$$a^2 (r - \frac{1}{z} p^2) - b^2 (t - \frac{1}{z} q^2) = 0$$

23. Wyrugować $\varphi$, $\psi$ i $\xi$ z równania:

$$x \varphi (u) + y \psi (u) + z \xi (u) = 1,$$

w którem $u$ jest funkcyą $x$ i $y$, a $z$ jest określone przez równanie

$$x \varphi' (u) + y \psi' (u) + z \xi' (u) = 0.$$

Otrzymujemy *równanie powierzchni rozwijalnych:*

$$r t - s^2 = 0.$$

---

## ROZDZIAŁ IX.

### O wyznaczaniu funkcyi, które przy pewnych wartościach zmiennej niezależnej stają się nieoznaczone.

Niech będzie dany ułamek $\frac{F(x)}{f(x)}$,

w którym licznik i mianownik są funkcyami zmiennej $x$. Jeżeli funkcye te są określone przy $x = x_0$, może się zdarzyć, iż przy tej wartości zmiennej niezależnej ułamek przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$. O ile obie funkcye posiadają pochodne przy $x = x_0$, prawdziwą wartością ułamka jest

$$\frac{F'(x_0)}{f'(x_0)},$$

t. j. iloraz pochodnych, w których nadaliśmy zmiennej $x$ wartość $x_0$.

Jeżeli funkcye $F'(x_0)$, $f'(x_0)$ dążą obie do zera lub do nieskończoności, gdy $x$ dąży do $x_0$, wówczas prawdziwą wartością danego ułamka jest

$$\frac{F''(x_0)}{f''(x_0)}.$$

Jeżeli drugie pochodne znów obie dążą do zera lub do nieskończoności, gdy $x$ dąży do $x_0$, wówczas za wartość prawdziwą uważamy

$$\frac{F'''(x_0)}{f'''(x_0)} \quad \text{i t. d.}$$

Ten sposób postępowania zawodzi, jeżeli przy $x = x_0$ wszystkie pochodne funkcyi $F(x)$ i $f(x)$ stają się zerami lub wszystkie dążą do nieskończoności. W tym wyjątkowym przypadku możemy zastąpić $x$ przez $x_0 + h$, rozwinąć w szereg zarówno licznik jak mianownik danego ułamka, a po wykonaniu wszelkich uproszczeń położyć $h = 0$. W ten sposób otrzymamy wartość prawdziwą ułamka.

Zdarza się, iż funkcya przybiera przy pewnych wartościach zmiennej niezależnej inną postać nieoznaczoną. W takim razie staramy się przez odpowiednie przekształcenie sprowadzić ją do postaci $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$.

Przypuśćmy np., iż przy $x = x_0$ funkcya $F(x) \,.\, f(x)$ przybiera postać nieoznaczoną $0 \times \infty$. Pisząc

2)

$$F(x) \,.\, f(x) = \frac{F(x)}{\dfrac{1}{f(x)}} = \frac{f(x)}{\dfrac{1}{F(x)}},$$

otrzymamy dwa ułamki, które przy $x = x_0$ przybierają postaci $\frac{\infty}{\infty}$ i $\frac{0}{0}$.

Przypuśćmy jeszcze, iż przy $x = x_0$ funkcja $F(x) - f(x)$ zamienia się w $\infty - \infty$. Kładąc

$$F(x) = \frac{1}{F_1(x)}, \qquad f(x) = \frac{1}{f_1(x)},$$

3.) przyczem $F_1(x_0) = f_1(x_0) = 0$, mamy

$$F(x) - f(x) = \frac{1}{F_1(x)} - \frac{1}{f_1(x)} = \frac{f_1(x) - F_1(x)}{F_1(x) \,.\, f_1(x)}$$

i przy $x = x_0$ otrzymujemy znów wyrażenie nieoznaczone $\frac{0}{0}$.

Jeżeli funkcya $F(x)^{f(x)}$ zamienia się przy $x = x_0$ w $0^0$, $\infty^0$, $1^\infty$ lub t. p., wówczas logarytmujemy ją i znajdujemy wartość prawdziwą logarytmu. Niech $v$ będzie tą wartością; w takim razie $e^v$ jest szukaną wartością prawdziwą funkcyi $F(x)^{f(x)}$.

4)

## PRZYKŁAD I.

Mamy dany iloraz:

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 9}{x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9}.$$

Kładąc $x = 3$, otrzymujemy $\frac{0}{0}$.

Stosując sposób podany wyżej, czyli obliczając iloraz pierwszych pochodnych licznika i mianownika, mamy:

$$\frac{4\,x^3 - 24\,x^2 + 44\,x - 24}{4\,x^3 - 12\,x^2 - 4\,x + 12},$$

co po uproszczeniu daje:

$$\frac{x^3 - 6\,x^2 + 11\,x - 6}{x^3 - 3\,x^2 - x + 3}.$$

Kładąc w tym ilorazie $x = 3$, otrzymujemy znów $\frac{0}{0}$, szukamy więc drugich pochodnych. Nowy iloraz równa się:

$$\frac{3\,x^2 - 12\,x + 11}{3\,x^2 - 6\,x - 1}.$$

Wartość tego ilorazu przy $x = 3$ jest $\frac{1}{4}$. Wobec tego $\frac{1}{4}$ jest prawdziwą wartością danego ilorazu przy $x = 3$.

## PRZYKŁAD II.

Mamy znaleźć prawdziwą wartość wyrażenia następującego:

$$\frac{(x - a)^{\frac{1}{m}}}{(x^2 - a^2)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{przy } x = a,$$

przyczem $m$ i $n$ są liczbami całkowitemi i $m < n$.

Przy $x = a$ powyższy iloraz przybiera kształt $\frac{0}{0}$, natomiast ilorazy wszystkich pochodnych mają kształt $\frac{\infty}{\infty}$. Wobec tego kładziemy $x = a + h$. Dany iloraz przybiera postać następującą:

$$\frac{h^{\frac{1}{m}}}{[(a + h)^2 - a^2]^{\frac{1}{n}}} = \frac{h^{\frac{1}{m}}}{h^{\frac{1}{n}}\,(2\,a + h)^{\frac{1}{n}}} = \frac{h^{\frac{n-m}{m\,n}}}{(2\,a + h)^{\frac{1}{n}}}$$

poprawnie ma:

Kładąc w tem wyrażeniu $h = 0$, otrzymujemy 0. Prawdziwa więc wartość danego wyrażenia przy $x = a$ jest 0.

## PRZYKŁAD III.

Znaleźć prawdziwą wartość wyrażenia:

$$\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tang} x \qquad \text{przy } x = \frac{\pi}{2}.$$

Kładąc $x = \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy $0 \times \infty$, jeżeli natomiast dane wyrażenie napiszemy w postaci:

$$\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = \frac{\frac{\pi}{2} - x}{\operatorname{ctg} x},$$

wówczas przy $x = \frac{\pi}{2}$ otrzymujemy $\frac{0}{0}$.

Iloraz pochodnych obu wyrazów tego drugiego ułamka równa się

$$\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \sin^2 x = 1 \qquad \text{przy} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Szukana więc wartość prawdziwa równa się 1.

Pisząc dane wyrażenie w postaci

$$\operatorname{tg} x : \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}$$

i kładąc $x = \frac{\pi}{2}$, otrzymujemy $\frac{\infty}{\infty}$.

Iloraz pochodnych dzielnej i dzielnika równa się

$$\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{\cos^2 x} = \frac{0}{0} \qquad \text{przy} \quad x = \frac{\pi}{2}.$$

Kładąc $x = \frac{\pi}{2}$ w ułamku $\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos^2 x}$, otrzymujemy $\frac{0}{0}$; prawdziwą wartość tego ułamka znajdujemy, obliczając iloraz pochodnych obu wyrazów ułamka $\frac{1}{\sin x}$ i kładąc $x = \frac{\pi}{2}$. Otrzymujemy w ten sposób

$$\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} = 1.$$

Co to oznacza?! Ja mam wiedzieć!?

Różniczkując jeszcze 2 razy otrzymam prawdziwą wartość danej funkcji = +1

Zatem prawdziwa wartość danego wyrażenia równa się

$$1 \times 1 = 1.$$

## PRZYKŁAD IV.

Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ przy $x=0$.
Kładąc $x=0$, otrzymujemy $1^{\infty}$.
Natomiast logarytmując, mamy

$$\log(1+mx)^{\frac{1}{x}} = \frac{\log(1+mx)}{x},$$

co przy $x=0$ daje $\frac{0}{0}$.

Iloraz pochodnych licznika i mianownika tego ułamka równa się $\frac{m}{1+mx}$; kładąc w nim $x=0$, otrzymujemy $m$.

Prawdziwa więc wartość funkcyi $\log(1+mx)^{\frac{1}{x}}$ przy $x=0$ równa się $m$; z tego wynika, że prawdziwa wartość danej funkcyi równa się $e^m$.

## ĆWICZENIA.

1. $$\frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - x^2 - 5x - 3};$$

znaleźć prawdziwą wartość tej funkcyi przy $x=3$.

Odpowiedź: $\frac{1}{4}$.

2. $$\frac{x^3 - 4ax^2 + 5a^2x - 2a^3}{x^3 - 3a^2x - 2a^3};$$

znaleźć prawdziwą wartość tej funkcyi przy $x=2a$.

Odpowiedź: $\frac{1}{9}$.

3. $$\frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin px - \cos px};$$

znaleźć prawdziwą wartość funkcyi przy $x=0$.

Odpowiedź: $\frac{1}{p}$.

4. $$\frac{\sin x - \cos x}{\sin 2x - \cos 2x - 1};$$

znaleźć prawdziwą wartość funkcyi przy $x = \frac{\pi}{4}$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

5. $$\frac{1 - 6x^2 + 5x^4}{1 - 4x^2 - 5x^4};$$

znaleźć prawdziwą wartość funkcyi przy $x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Odpowiedź: $\frac{2}{3}$.

6. $$\frac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cosec} x - 1}{\operatorname{cotg} x - \operatorname{cosec} x + 1};$$

znaleźć prawdziwą wartość funkcyi przy $x = \frac{\pi}{2}$.

Odpowiedź: 1.

7. $$\frac{\operatorname{tang} x - \sin x}{\sin^3 x};$$

znaleźć prawdziwą wartość funkcyi przy $x = 0$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$.

8. $$\frac{a\sqrt{ax} - x^2}{a - \sqrt{ax}};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = a$.

Odpowiedź: $3a$.

9. $$\frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a + x} - \sqrt{a - x}};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 0$.

Odpowiedź: $\sqrt{a}$.

10. $$\frac{a^{\log x} - x}{\log x};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 1$.

Odpowiedź: $-1 + \log a$.

11. $$\frac{\arc\cos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 0$.

Odpowiedź: 1.

12. $$\frac{x e^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 0$.

Odpowiedź: $-1$.

13. $$\frac{e^x - e^{-x}}{\log(1-x)};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 0$.

Odpowiedź: 2. (raczej: $-2$)

14. $$\frac{\cos a x - \cos a n}{n^2 - x^2}$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = n$.

Odpowiedź: $\frac{a \sin a n}{2n}$.

15. $$\left(\frac{\sin m x}{\sin x}\right)^2;$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 0$; $m$ jest liczbą całkowitą.

Odpowiedź: $m^2$.

16. $$\frac{1 - \cos x}{x \log(1+x)};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 0$.

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$.

17. $$\frac{e^{mx} - e^{ma}}{(x-a)^n};$$

znaleźć prawdziwą wartość przy $x = a$.

Odpowiedź: Różniczkując $n$ razy, znajdujemy następującą prawdziwą wartość tego wyrażenia: $\frac{m^n e^{ma}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$.

…ąd wyjęte, że prowadzi … nie … wartość prawdziwą i dostawszy $\beta_3$ — idziemy dalej i szukamy wartości rzeczywistych. lub 0.



18. Wyrażenie następujące: $\dfrac{x - (n+1)\,x^{n+1} + n\,x^{n+2}}{(1-x)^2}$ jest sumą pierwszych $n$ wyrazów szeregu: $x + 2\,x^2 + 3\,x^3 + \ldots + n\,x^n$. Jaka jest prawdziwa wartość tej sumy przy $x = 1$?

Odpowiedź: $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$; jest to suma pierwszych $n$ liczb szeregu naturalnego.

19. $$\frac{x + x^3 - (2\,n+1)\,x^{2n+1} + (2\,n-1)\,x^{2n+3}}{(1-x^2)^2};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 1$.

Odpowiedź: $n^2$.

20. Sumą $n$ wyrazów szeregu: $x + 4\,x^2 + 9\,x^3 + \ldots + n^2\,x^n$ jest wyrażenie następujące: $\dfrac{x + x^2 - (n+1)^2\,x^{n+1} + (2\,n^2 + 2\,n - 1)\,x^{n+2} - n^2\,x^{n+3}}{(1-x)^3}$; znaleźć prawdziwą wartość tej sumy przy $x = 1$.

Odpowiedź: $\dfrac{n\,(n+1)\,(2\,n+1)}{6}$; jest to suma kwadratów pierwszych $n$ liczb szeregu naturalnego.

21. $$\frac{x^3 - 4\,a\,x^2 + 7\,a^2\,x - 2\,a^3 - 2\,a^2\sqrt{2\,a\,x - a^2}}{x^2 - 2\,a\,x - a^2 + 2\,a\sqrt{2\,a\,x - x^2}};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = a$.

Odpowiedź: Różniczkując cztery razy to wyrażenie, otrzymujemy prawdziwą wartość $-5\,a$. (EULER).

22. $$\frac{(x^2 + a^2)\,(x^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}}{(3\,x^3 - a^2\,x)\,(x^3 - a^3)^{\frac{3}{2}}};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = a$.

Wzorując się na przykładzie II, zamiast $x$ kładziemy $a + h$; stąd otrzymujemy prawdziwą wartość w postaci: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\,a^2\sqrt{3\,a}}$.

23. $$\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + (a - x)}{(a - x)^{\frac{1}{2}} + (a^3 - x^3)^{\frac{1}{2}}};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = a$.

Zamiast $x$ kładziemy $a - h$ i, stosując metodę powyżej wskazaną, otrzymujemy: $\dfrac{\sqrt{2\,a}}{1 + a\sqrt{3}}$.

d 23) Po podstawieniu $x = a - h$: $\dfrac{(2ah - h^2)^{\frac{1}{2}} + h}{h^{\frac{1}{2}} + (3a^2h - 3ah^2 + h^3)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{h^{\frac{1}{2}}[(2a+h)^{\frac{1}{2}} + h^{\frac{1}{2}}]}{\ldots}$

24.
$$\frac{(a^2 - x^2)^{\frac{1}{3}} + (a - x)^{\frac{2}{3}}}{(a - x)^{\frac{1}{3}} - (a^3 - x^3)^{\frac{1}{3}}};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = a$.

Zamiast $x$ kładziemy $a - h$ i znajdujemy dla danego wyrażenia następującą wartość prawdziwą: $\dfrac{\sqrt[3]{2\,a}}{1 - \sqrt[3]{3\,a^2}}$.

25.
$$\frac{\operatorname{tg} \pi x - \pi x}{2\,x^2 \operatorname{tg} \pi x};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 0$.

Kładąc $x = 0 + h$ i rozwijając daną funkcyę według wzoru znalezionego wyżej (ćwicz. 5, rozdział VI, dział II), następnie zakładając $h = 0$, otrzymujemy jako prawdziwą wartość funkcyi: $\dfrac{\pi^2}{6}$.

26.
$$\frac{x^m - x^{m+n}}{1 - x^{2p}};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = 1$.

Daną funkcyę możemy napisać w postaci: $\dfrac{x^m}{1 + x^p} \cdot \dfrac{1 - x^n}{1 - x^p}$; przy $x = 1$ pierwszy czynnik równa się $\dfrac{1}{2}$, drugi czynnik zamienia się w $\dfrac{0}{0}$. Prawdziwa wartość drugiego czynnika jest $\dfrac{n}{p}$, a więc prawdziwa wartość całego danego wyrażenia jest: $\dfrac{n}{2\,p}$.

27.
$$\frac{\cos ax - \cos an}{(n^2 - x^2)^m};$$
znaleźć prawdziwą wartość przy $x = n$.

Funkcyę tę możemy napisać w postaci
$$\frac{1}{(n + x)^m} \cdot \frac{\cos ax - \cos an}{(n - x)^m}.$$

Przy $x = n$, pierwszy czynnik równa się: $\dfrac{1}{(2\,n)^m}$, drugi czynnik zamienia się w $\dfrac{0}{0}$. Różniczkując $m$ razy, znajdujemy jako prawdziwą wartość drugiego czynnika: $\quad (-1)^m \dfrac{a^m \cos\left(an + \frac{1}{2}\,mx\right)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,m}$

Na zasadzie tego prawdziwa wartość całego wyrażenia jest:

$$(-1)^m \frac{a^m \cos\left(an + \frac{1}{2} mx\right)}{(2n)^m . 1 . 2 . 3 \ldots m}.$$

28. Znaleźć prawdziwą wartosć funkcyi $\frac{x^m}{e^x}$ przy $x = \infty$.

Różniczkując $m$ razy, znajdujemy następującą wartość prawdziwą:

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots m}{e^x} = 0.$$

29. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $\frac{\log x}{x^m}$ przy $x = \infty$.

Odpowiedź: 0.

30. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \operatorname{tg} x$ przy $x = \frac{\pi}{2}$.

Przy $x = \frac{\pi}{2}$ funkcya przybiera postać nieoznaczoną $0 . \infty$.

Prawdziwa jej wartość $= \frac{2}{\pi}$.

31. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $\sec \frac{\pi x}{2} \log \frac{1}{x}$ przy $x = 1$.

Prawdziwa wartość $= \frac{2}{\pi}$. $\left\{ - \frac{\log \frac{1}{x}}{\cos \frac{\pi x}{2}} \right\}$

32. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $2^x \sin \frac{a}{2^x}$ przy $x = \infty$.

Funkcya przybiera postać nieoznaczoną $\infty . 0$.
Prawdziwa wartość $= a$.

33. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi

$$\sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} \left(\frac{a - x}{a + x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{przy} \quad x = a.$$

Funkcya przybiera postać $0 . \infty$, możemy ją jednak napisać inaczej, mianowicie:

$$\frac{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}} \times \frac{2}{\pi}(a + x).$$

Przy $x = a$ granicą pierwszego czynnika jest 1; wartość drugiego czynnika jest $\frac{4a}{\pi}$; prawdziwa więc wartość danej funkcyi jest $\frac{4a}{\pi}$.

34. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x}$ przy $x = 1$.

Funkcya przybiera kształt $\infty - \infty$; sprowadzając ułamki do wspólnego mianownika, otrzymujemy: $\frac{x \log x - x + 1}{(x-1)\log x}$.

Funkcya napisana w tej postaci, przybiera przy $x = 1$ postać $\frac{0}{0}$, stosując więc zwykłą metodę, otrzymujemy prawdziwą wartość: $\frac{1}{2}$.

35. Funkcya $\frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)}$ jest sumą szeregu:

$$\frac{1}{1^2 + x^2} + \frac{1}{2^2 + x^2} + \frac{1}{3^2 + x^2} + \text{ i t. d.}$$

Uwięzi live.

Jaka jest prawdziwa wartość tej sumy przy $x = 0$?

Przy $x = 0$ suma ma kształt $\infty + \infty$.

Postępujemy podobnie jak w poprzedniem ćwiczeniu i znajdujemy jako prawdziwą wartość $\frac{\pi^2}{6}$; jest to suma odwrotności kwadratów szeregu liczb naturalnych. (EULER).

36. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x(e^{\pi x} + 1)}$ przy $x = 0$.

Funkcya dana jest sumą szeregu:

$$\frac{1}{1^2 + x^2} + \frac{1}{3^2 + x^2} + \frac{1}{5^2 + x^2} + \text{ i t. d.}$$

Przy $x = 0$ funkcya przybiera postać nieoznaczoną $\infty - \infty$.

Postępując podobnie jak w ćwiczeniu 34, znajdujemy, że prawdziwą wartością jest $\frac{\pi^2}{8}$; jest to suma odwrotności kwadratów liczb nieparzystych. (EULER).

37. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $\left(\frac{1}{x^n}\right)^{x^m}$ przy $x = 0$.

Funkcya przybiera postać nieoznaczoną $\infty^0$. Logarytmując, mamy:

$$\log\left(\frac{1}{x^n}\right)^{x^m} = -n x^m \log x = -n \frac{\log x}{\frac{1}{x^m}}. = \frac{\infty}{\infty} = \frac{-n\cdot\frac{1}{x}}{-m x^{m-1}} =$$

Prawdziwą wartością otrzymanej w ten sposób funkcyi przy $x = 0$ jest 0.

A więc prawdziwa wartość danej funkcyi $\left(\frac{1}{x^n}\right)^{x^m}$ równa się $e^0 = 1$.

$= \frac{n}{m x^m} = \frac{n}{0} = \infty = \frac{0}{m^2 x^{m-1}} = \frac{0}{0}$ = in infinitum = $\frac{0}{0}$

ale biorę $(0+h) = x$

$-n \log(0+h) = \frac{-n \log h}{\dots} = \infty \quad \frac{-n\cdot\frac{1}{h}}{\dots} = \frac{n}{\dots} = \frac{nh^m}{\dots} =$

38. Znaleźć prawdziwą wartość $\cos x^{\cos x}$ przy $x = \frac{\pi}{2}$.

Funkcya przybiera postać nieoznaczoną: $0^0$.

Logarytmując, otrzymujemy, jako prawdziwą jej wartość, 1.

39. Znaleźć prawdziwą wartość funkcyi $\operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} 2x}$ przy $x = \frac{\pi}{4}$.

Funkcya przybiera postać nieoznaczoną: $1^\infty$.

Prawdziwa wartość jest: $\frac{1}{e}$.

40. Znaleźć prawdziwą wartość $\frac{dy}{dx}$ przy $x = 0$ i $y = 0$ z równania:

$$y^4 - a^2 y^2 + 2 a^2 x^2 - x^4 = 0.$$

Odpowiedź: $\pm \sqrt{2}$. ([illegible] 2)

41. Znaleźć prawdziwą wartość pochodnej $\frac{dy}{dx}$ z równania

$$(y^2 + ax)^2 = x^2 (a^2 + 2\,ax - x^2) \text{ przy } x = 0 \text{ i } y = 0.$$

Odpowiedź: $\pm 1$.

---

# ROZDZIAŁ X.

## Maxima i Minima.

### § 1. Funkcye wyraźne jednej zmiennej niezależnej.

Niech będzie $y = F(x)$ funkcya wyraźna zmiennej $x$.

Każdy pierwiastek rzeczywisty równania $F'(x) = 0$, dla którego $F''(x) \neq 0$, jest wartością $x$, której odpowiada maximum lub minimum funkcyi $y$; a mianowicie, jeżeli dla znalezionej wartości $x$ mamy $F''(x) < 0$, wartość ta odpowiada maximum funkcyi, jeżeli zaś mamy $F''(x) > 0$, znaleziona wartość na $x$ odpowiadać będzie minimum funkcyi. Jeżeli przy znalezionej wartości $x$ mamy $F''(x) = 0$, to nie zachodzi ani maximum ani minimum, chyba że mamy $F'''(x) = 0$, oraz $F^{IV}(x) \neq 0$, w tym wypadku mieć będziemy maximum, jeżeli $F^{IV}(x) < 0$, minimum zaś, jeżeli $F^{IV}(x) > 0$ i t. d.

W twierdzeniu tem zakładamy, że funkcya $F(x)$ oraz jej pochodne są ciągłe w pobliżu wartości $(x)$, znalezionej z równania $F'(x) = 0$.

Istnieją wprawdzie wyjątki z tej reguły, lecz nie mają one znaczenia w zastosowaniach praktycznych.

## PRZYKŁAD.

Mamy daną funkcyę: $y = x^5 - ax^4 + b$, którą możemy przedstawić w postaci następującej:

$$F(x) = x^5 - ax^4 + b.$$

Różniczkując dwa razy, otrzymujemy:

$$F'(x) = 5\,x^4 - 4\,ax^3$$
$$F''(x) = 20\,x^3 - 12\,ax^2.$$

Pierwiastkami równania $F'(x) = 0$ t. j. równania $x^3(5\,x - 4\,a) = 0$ są liczby $\frac{4a}{5}$ i 0.

Jeżeli $x = \frac{4\,a}{5}$ podstawimy w $F''(x)$, otrzymamy $\frac{64\,a^3}{25}$. Pierwiastek ten odpowiada mimimum funkcyi $y$, gdyż $F''(x) > 0$. Minimum to równa się $y = b - \frac{a}{5}\left(\frac{4\,a}{5}\right)^4$.

Przy $x = 0$ mamy $F''(x) = 0$, różniczkując jednak dalej otrzymujemy:

$$F'''(x) = 60\,x^2 - 24\,ax$$
$$F^{IV}(x) = 120\,x - 24\,a.$$

Przy $x = 0$ mamy $F'''(x) = 0$, lecz $F^{IV}(x) = -24\,a$. Pierwiastek 0 wyznacza na $y$ wartość maximum, mianowicie $y = b$.

## ĆWICZENIA.

1. $$y = x^3 - 12\,x^2 + 45\,x + 30.$$

Odpowiedź: Przy $x = 5$, $y$ osiąga minimum,
Przy $x = 3$, $y$ osiąga maximum.

2. $$y = x^5 - 75\,x^3 + 1620\,x - 1000.$$

Przy $x = 6$, $y$ osiąga minimum,

Przy $\left\{\begin{matrix} x = -6 \\ x = 3 \end{matrix}\right\}$, $y$ osiąga maximum,

$x = -3$, $y$ osiąga minimum.

3. $$y = 10\,x^6 - 12\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 20.$$

Przy $x = 1$, $y = 13$ mamy minimum,

Przy $x = 0$ niema ani maximum, ani minimum.

4. $$y = \frac{1 - x}{(1 + x)^2}.$$

Przy $x = 3$, $y$ osiąga minimum.

5. $$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}.$$

Przy $x = \sqrt{2}$, $y = 12\sqrt{2} - 17$, minimum,

Przy $x = -\sqrt{2}$, $y = -12\sqrt{2} - 17$, maximum.

6. $$y = \frac{a + x}{a^2 + x^2}.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 - 2ax - x^2}{(a^2 + x^2)^2}.$$

Aby ta pierwsza pochodna była równą zeru, trzeba, żeby było

$$a^2 - 2ax - x^2 = 0.$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy dwa pierwiastki:

$$x' = +a(\sqrt{2} - 1),$$
$$x'' = -a(\sqrt{2} + 1).$$

Aby się przekonać, czy te dwa pierwiastki dają minimum czy też maximum funkcyi, wystarczy zróżniczkować tylko licznik pochodnej $\frac{dy}{dx}$, ponieważ mianownik, będąc stale dodatni, nie wpływa na znak drugiej pochodnej. Mamy tedy:

$$\frac{d.(a^2 - 2ax - x^2)}{dx} = -2a - 2x.$$

W otrzymanym rezultacie podstawiamy wartości $x'$ i $x''$ i znajdujemy, że gdy $x' = a(\sqrt{2} - 1)$, $y$ osiąga maximum,

przy $x'' = -a(\sqrt{2} + 1)$, $y$ osiąga minimum.

7. $$y = \frac{x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2 + x^2}.$$

Postępując w podobny sposób, jak w ćwiczeniu poprzednim, otrzymujemy, że

przy $x = 1$; $y = 2$ maximum,

przy $x = -1$; $y = -2$ minimum.

8. $$y = \frac{x^3 - x}{x^4 - x^2 + 1}.$$

W tym ćwiczeniu możemy także zastosować sposób postępowania wskazany w ćwiczeniu 6. Otrzymujemy:

$$\text{przy } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \quad y = \frac{1}{2}, \text{ maximum,}$$

$$\text{przy } x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}, \text{ minimum.}$$

9. $$y = \frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}.$$

$$\text{Przy } x = \sqrt{ab}, \quad y = -\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2, \text{ minimum,}$$

$$\text{przy } x = -\sqrt{ab}, \quad y = -\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2, \text{ maximum.}$$

10. $$y = (x^{\frac{1}{2}} - 1)(x^{\frac{1}{3}} - 1).$$

Zakładamy, że $x^{\frac{1}{6}} = z$; wtedy

$$\text{przy } z = 0, \quad y = 1, \text{ maximum,}$$
$$z = 1, \quad y = 0, \text{ minimum.}$$

11. $$y = x\sqrt{ax - x^2}.$$

$$\text{Przy } x = \frac{3a}{4}, \quad y = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2, \text{ maximum.}$$

12. $$y = \pm x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad \textit{(Strofoida).}$$

$$\text{Przy } x = -a\frac{\sqrt{5}-1}{5}, \ y \text{ maximum.}$$

13. $$y = \frac{\sqrt{(1+x) + 2a\sqrt{x}} + \sqrt{(1+x) - 2a\sqrt{x}}}{\sqrt{(1+x) + 2a\sqrt{x}} + \sqrt{(1+x) - 2a\sqrt{x}}}.$$

$$\text{Przy } x = 1, \quad y = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}, \text{ minimum.}$$

14. $$y = \frac{x}{\log x}.$$

Przy $x = e$, $y = e$ minimum.

15. $$y = \frac{\sin^2 mx}{\sin^2 x}.$$

Wartości $x$, otrzymane z równania $\sin x = 0$, dają na $y$ wartość $m^2$, która stanowi maximum funkcyi; wartości $x$ otrzymane z równania $\sin mx = 0$ dają na $y$ wartość minimum; z równania $m \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} mx$ otrzymamy wartości $x$, przy których $y$ osiąga minimum.

16. $$y = \frac{e^x}{\sin(x - a)}.$$

Przy $x = a + \frac{\pi}{4}$, $y = \sqrt{2} \,.\, e^{a + \frac{\pi}{4}}$, minimum.

Przy $x = a + \frac{5\pi}{4}$, $y = -\sqrt{2} \,.\, e^{a + \frac{\pi}{4}}$, maximum.

17. $$y = \sin x \cos(a - x).$$

Przy $x = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{1 + \sin a}{2}$, maximum.

Przy $x = \frac{a}{2} - \frac{\pi}{4}$, $y = -\frac{1 - \sin a}{2}$, minimum.

18. $$y = a^{x+1} - a^x - x.$$

Przy $x = -\frac{\log[(a-1)\log a]}{\log a}$, $y$ będzie maximum, albo minimum, zależnie od tego czy $a < 1$ czy też $a > 1$.

19. $$y = \operatorname{tg}^m x \,.\, \operatorname{tg}^n (a - x).$$

Gdy mamy $\operatorname{tg}(a - 2x) = \frac{n-m}{n+m} \operatorname{tg} a$, $y$ osiąga maximum.

20. Znaleźć taką liczbę $x$, by $\sqrt[x]{x}$ było możliwie największe.

Mamy znaleźć maximum funkcyi $y = x^{\frac{1}{x}}$; otrzymamy, że przy $x = e$, $y = e^{\frac{1}{e}}$ będzie maximum.

21. Mamy dany odcinek i prostą do niego równoległę. Znaleźć na prostej taki punkt, z którego dany odcinek byłoby widać pod największym kątem.

Niech punkty $B$ i $C$ będą końcami danego odcinka*); punkt $A$ niech będzie punktem szukanym na prostej równoległej. Łączymy punkt $A$ z punktami $B$ i $C$; z punktu $A$ prowadzimy prostopadłą $AD$ do prostej $BC$. Zakładamy, że $BC = b$, $AD = h$, $BD = x$. Styczna kąta $BAC$ równa się $\frac{bh}{h^2 - bx + x^2}$; przy $x = \frac{b}{2}$ styczna ta osiąga maximum.

22. Mamy dane dwa równe boki i jedną podstawę trapezu równoramiennego; wyznaczyć drugą podstawę trapezu tak, by pole jego było jaknajwiększe.

Niech $ABCD$ będzie trapezem, $AB$ niech będzie większą, $DC$ zaś mniejszą podstawą; $AD$ niech będzie jednym z równych boków. Z punktu $D$ prowadzimy prostopadłą $DP$ do $AB$ i zakładamy, że $DC = a$, $AD = BC = b$, $AP = x$.

Pole trapezu równa się $(a + x)\sqrt{b^2 - x^2}$; jest ono największe, gdy $x = -\frac{a}{4} + \frac{\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4}$.

Co staje się z polem trapezu, gdy

$$1^0 \quad x = -\frac{a}{4} - \frac{\sqrt{a^2 + 8b^2}}{4};$$

$$2^0 \quad a = b;$$

$$3^0 \quad a > b.$$

Gdy $a = 0$, trapez staje się trójkątem; maximum zachodzi przy $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

(MAUPERTUIS).

23. Wpisać największy prostokąt w odcinek danego koła.

Oznaczamy przez $r$ promień koła, przez $a$ odległość cięciwy odcinka od środka koła, przez $x$ bok prostokąta prostopadły do cięciwy. Pole prostokąta równa się:

$$2x\sqrt{r^2 - (a + x)^2}.$$

Przy $x = \frac{\sqrt{9a^2 + 8(r^2 - a^2)} - 3a}{4}$, pole to osiąga maximum.

Jeżeli $a = 0$, wartość $x$, odpowiadająca maximum funkcyi, jest $\frac{r}{\sqrt{2}}$, a pole prostokąta równa się $r^2$.

---

*) Czytelnik winien w niniejszem i w następnych zadaniach wyrysować odnośną figurę według podanych przez nas wskazówek.

24. Podzielić liczbę $a$ na takie dwie części, aby iloczyn $m^{\text{tej}}$ potęgi jednej części, przez $n^{\text{tą}}$ potęgę drugiej części był jaknajwiększy.

Zadanie to prowadzi do równania $y = x^m (a - x)^n$. Przy $x = \frac{ma}{m+n}$, $y$ osiąga maximum.

25. Na jakiej wysokości nad płaszczyzną należy umieścić punkt świecący, aby punkt tej płaszczyzny, znajdujący się w danej odległości od rzutu świecącego punktu na tę samą płaszczyznę, był jaknajsilniej oświetlony?

Niech w $L$ znajduje się punkt świecący, $A$ niech będzie jego rzutem na płaszczyznę, $P$ punktem płaszczyzny, znajdującym się w danej odległości $AP$ od rzutu punktu świecącego. Łącząc te trzy punkty, otrzymamy trójkąt $LPA$, prostokątny przy $A$. Niech będzie $AP = a$, $\measuredangle LPA = x$, dzielność punktu świecącego oznaczmy przez $I$, ilość światła, padającą na element płaszczyzny, przez $F(x)$; stosując prawo zmiany natężenia światła wraz z odległością, otrzymamy:

$$F(x) = \frac{I}{a^2} \sin x \cos^2 x.$$

Przy $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, funkcya osiąga maximum; mamy wówczas

$$F(x) = \frac{2I}{3\sqrt{3} \cdot a^2}.$$

26. Pod jakim kątem należy mierzyć daną wysokość, aby błąd popełniony przy pomiarze był jaknajmniejszy?

Niech $MP$ będzie mierzoną wysokością, w płaszczyznie zaś poziomej, przechodzącej przez punkt $P$, niech znajduje się punkt $O$, z którego mamy dokonać pomiaru.

Poprowadźmy proste $OP$ i $OM$, następnie na przedłużeniu $MP$ w zwrocie od $P$ ku $M$ uważajmy punkt $M'$, znajdujący się w nieskończenie małej odległości od $M$. Prowadzimy prostą $OM'$, a z punktu $M$ prowadzimy do niej prostopadłą $MK$.

Niech będzie $MP = h$, $\measuredangle MOP = x$, $\measuredangle M'OM = \Delta x$, $MM' = \Delta h$. Z trójkąta $MM'K$ mamy

$$KM = \Delta h \cdot \cos x, \quad \text{czyli} \quad \frac{h}{\sin x} \Delta x - \Delta h \cdot \cos x$$

skąd

$$\Delta h = \frac{h}{\sin x \cdot \cos x} \Delta x.$$

Minimum $\Delta h$ otrzymamy przy minimum funkcyi $\frac{h}{\sin x \cos x} \Delta x$, a więc przy maximum funkcyi $\sin x \cos x$, ponieważ $h$ i $\Delta x$ są stałe.

Przy $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, funkcya $\sin x \cos x$ osiąga maximum. Przy mierzeniu wysokości należy tedy wybierać podstawę, z której wykonywamy pomiar, o ile możności równą wysokości mierzonej.

27. Znaleźć najmniejszą elipsę, którą można opisać na danym trapezie.

Niech $2\,a$ i $2\,a'$ będą równoległymi bokami trapezu, przyczem niech będzie $2\,a < 2\,a'$. Niech będą $2\,y$ i $2\,y'$ dwie średnice sprzężone elipsy, tworzące z sobą kąt $\theta$; średnica $2\,y$ przechodzi przez środek boków $2\,a$ i $2\,a'$; niech $c$ oznacza część średnicy $2\,y$, zawartą między równoległymi bokami trapezu, $ax$ niech będzie częścią średnicy od środka elipsy do boku $2\,a$.

Przy powyższych oznaczeniach otrzymujemy:

$$a^2 = \frac{y'^2}{y^2}(y^2 - x^2), \quad a'^2 = \frac{y'^2}{y^2}[y^2 - (c - x)^2].$$

Kładąc

$$\frac{a'^2 - a^2}{c} = e \quad \text{i} \quad \frac{y^2}{\Lambda'^2} = z,$$

znajdujemy:

$$x = \frac{ez + c}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{c^2 + e^2 z^2 + z\,(4\,a^2 + 2\,ec)}}{2}$$

$$y' = \frac{\sqrt{c^2 + e^2 z^2 + z\,(4\,a^2 + 2\,ec)}}{2\sqrt{z}}$$

Wzór na pole elipsy jest $\pi \sin \theta\, yy'$; podstawiając w ten wzór wartości na $y$ i $y'$, otrzymujemy:

$$\frac{\pi \sin \theta}{4} \cdot \frac{c^2 + e^2 z^2 + z\,(4\,a^2 + 2\,ec)}{\sqrt{z}}$$

Przy $$z = \frac{[2\sqrt{a'^4 - a'^2 a^2 + a^4} - (a'^2 + a^2)]\,c^2}{3\,(a'^2 - a^2)^2}$$

czyli przy $$x = \frac{[a'^2 - 2\,a^2 + \sqrt{a'^4 - a'^2 a^2 + a^4}]\,c}{3\,(a'^2 - a^2)}$$

minimum pola elipsy będzie:

$$\frac{2\,\pi\, c \sin \theta\, [a'^4 - 4\,a'^2 a^2 + a^4 + (a'^2 + a^2)\sqrt{a'^4 - a'^2 a^2 + a^4}}{3\sqrt{3\,(a'^2 - a^2)}\sqrt{2\sqrt{a'^4 - a'^2 a^2 + a^4} - (a'^2 + a^2)}}.$$

Jeżeli $a' = a$, trapez staje się równoległobokiem; wtedy wzór na pole elipsy przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$. W tym przypadku należy znaleźć prawdziwą wartość tego wyrażenia, którą jest $\pi ac \sin \theta$ (BOSSUT).

## § 2. Funkcye uwikłane jednej zmiennej niezależnej.

Niech $y$ będzie funkcyą uwikłaną zmiennej $x$, określoną za pomocą równania $F(x, y) = 0$.

Równanie różniczkowe $\frac{dF}{dx} = 0$ łącznie z równaniem danem da nam wartości na $x$, odpowiadające wartościom maximum i minimum, jak również i same maxima i minima.

Podstawiając w wyrażenie $\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ każdą parę wartości, otrzymanych na $x$ i na $y$, będziemy mogli odróżnić maximum od minimum, a mianowicie funkcya osiąga maximum lub minimum zależnie od tego, czy wynik powyższego podstawienia jest dodatni czy ujemny.

Reguła ta nie jest kompletna: wymaga ona pewnych uzupełnień i omówień, analogicznych do tych, o których wspomnieliśmy przy funkcyach wyraźnych.

### PRZYKŁAD.

Mamy
$$F(x, y) = y^3 - 3\,x^2 y + x^3 - 3 = 0 \tag{1}$$

Różniczkujemy względem $x$, i tę pierwszą pochodną przyrównujemy do 0. Mamy
$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3\,x^2 - 6\,xy = 0 \tag{2}$$

Z równania (2) wynika, że $x = 0$ lub $y = \frac{x}{2}$.

Podstawiając wartości na $x$ w równanie (1), otrzymujemy
$$y^3 - 3 = 0$$
skąd
$$y = \sqrt[3]{3}.$$

Podstawiając wartości na $y$ w równanie (1), otrzymujemy

$$x^3 + 8 = 0$$

stąd

$$x = -2,$$

a więc

$$y = -1.$$

Otrzymujemy tedy dwie pary wartości, czyniących zadość równaniom (1) i (2)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt[3]{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = -1. \end{cases}$$

Oprócz tego znajdujemy, że

$$\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{6x - 6y}{3y^2 - 3x^2} = -\frac{2}{y+x}.$$

W wyrażenie to podstawiamy przedewszystkiem pierwszą parę wartości na $x$ i $y$; otrzymujemy: $-\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$, a więc przy $x = 0$, $y = \sqrt[3]{3}$ funkcya osiąga minimum. Podstawiając drugą parę wartości na $x$ i $y$, otrzymujemy $+\dfrac{2}{3}$, więc przy $x = -2$, $y = -1$ mamy maximum.

## ĆWICZENIA.

1. $$y^2 - x^2 y + x - x^3 = 0.$$

Przy $x = -1$, $y = 1$, maximum.

2. $$y^2 + 2x^2 y + 4x - 3 = 0.$$

Przy $x = -\dfrac{1}{2}$, $y = 2$, maximum.

Przy $x = 1$, $y = -1$, niema ani maximum, ani minimum.

3. $$y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0.$$

Przy $x = \dfrac{am}{\sqrt{1-m^2}}$, $y = \dfrac{a}{\sqrt{1-m^2}}$, maximum.

4. $$x^3 + y^3 - a^2 x = 0.$$

Przy $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$, maximum.

Przy $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = -a\sqrt[3]{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$, minimum.

5. $$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0.$$ *(Liść Kartezjusza).*

Przy $x = 2^{\frac{1}{3}} a$, $y = 4^{\frac{1}{3}} a$, maximum.
Przy $x = 0$, $y = 0$, minimum.

W tem zadaniu nie możemy wyznaczyć minimum sposobami, wskazanemi powyżej, gdyż z danego równania otrzymujemy pochodną $\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$, która przy $x = 0$ i $y = 0$ przybiera postać nieoznaczoną $\frac{0}{0}$, zarówno jak i druga pochodna $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Różniczkując jednak drugi i trzeci raz równanie liścia, otrzymujemy:

$$(y^2 - ax)\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\,y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,a\frac{dy}{dx} + 2\,x = 0$$

$$(y^2 - ax)\frac{d^3 y}{dx^3} + 3\,\left(2\,y\frac{dy}{dx} - a\right)\frac{d^2 y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2 = 0.$$

Kładąc w tych dwóch równaniach $x = 0$, $y = 0$, otrzymujemy z pierwszego równania $\frac{dy}{dx} = 0$, z drugiego zaś równania $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2}{3\,a}$, a więc przy $x = 0$ i $y = 0$ zachodzi istotnie minimum.

6. $$x^4 - 2\,a^2 x^2 + a^2 y^2 - 8\,a^4 = 0.$$

Przy $x = 0$, $y = +2\,a\sqrt{2}$, minimum.
Przy $x = 0$, $y = -2\,a\sqrt{2}$, maximum.
Przy $x = +a$, $y = +3\,a$, maximum.
Przy $x = +a$, $y = -3\,a$, minimum.
Przy $x = -a$, $y = +3\,a$, maximum.
Przy $x = -a$, $y = -3\,a$, minimum.

7. $$y^4 - 4a^2xy + x^4 = 0.$$

Przy $x = a\sqrt[8]{3}$, $y = a\sqrt[8]{27}$, maximum.

Przy $x = -a\sqrt[8]{3}$, $y = -\sqrt[8]{27}$, minimum.

8. $$y^4 - 4xy + x^4 + 2 = 0.$$

Przy $x = +1$, $y = +1$, niema ani maximum, ani minimum.

Przy $x = -1$, $y = -1$, to samo.

Należy w tym przypadku postępować według uwagi w ćwiczeniu 5.

9. $$\cos(y - x) - 2\sin y - \cos x = 0.$$

Przy $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{4\pi}{3}$ mamy maximum.

10. $$y^2 + mxy + a^2 + bx + nx^2 = 0.$$

Przy $x = \frac{2bn + m\sqrt{b^2 n + (m^2 - 4n)a^2 n}}{m^2 - 4n}$ otrzymamy, że

$y = \frac{-bm - 2\sqrt{b^2 n + (m^2 - 4n)a^2 n}}{nm^2 - 4n}$ osiąga maximum,

a przy $x = \frac{2bn - m\sqrt{b^2 n + (m^2 - 4n)a^2 n}}{n(m^2 - 4n)}$ otrzymamy, że

$y = \frac{-bm + 2\sqrt{b^2 n + (m^2 - 4n)a^2 n}}{m^2 - 4n}$ osiąga minimum.

Jeżeli $m = 0$, to przy $x = -\frac{b}{2n}$, $y = +\frac{1}{2n}\sqrt{b^2 n - 4a^2 n^2}$ osiąga maximum, a $y = -\frac{1}{2n}\sqrt{b^2 n - 4a^2 n^2}$ osiąga minimum.

Jeżeli $n = 0$, to $x = \infty$, a $y = -\frac{b}{m}$; nie zachodzi tu ani maximum, ani minimum.

Jeżeli $m^2 = 4n$, to dla $x = -\frac{a^2 m^2 + b^2}{bm^2}$, $y = \frac{a^2 m^2 - b^2}{2bm}$, mamy minimum.

(Euler).

## § 3. Funkcye wielu zmiennych niezależnych.

Niech $z$ będzie funkcyą wyraźną zmiennych $x$ i $y$.

Pierwiastki rzeczywiste równań: $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ będą wartościami $x$ i $y$, przy których zachodzi maximum lub minimum funkcyi $z$, jeżeli dla każdej pary tych wartości jest spełniona nierówność następująca:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 < \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \tag{1}$$

Nierówność ta wymaga, aby $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ miały jednakowy znak. Jeżeli obie pochodne mają znaki ujemne, zachodzi maximum; jeżeli znaki są dodatnie, zachodzi minimum.

Jeżeli wartości $x$ i $y$, otrzymane z równań $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, zamieniają wszystkie trzy pochodne drugiego rzędu w zero, wówczas nie zachodzi ani maximum ani minimum, chyba że przy tych samych wartościach na $x$ i $y$ trzecie pochodne równają się zeru, czwarte zaś są różne od zera i są tego samego znaku.

Niech $u$ będzie funkcyą wyraźną zmiennych $x$, $y$ i $z$.

Pierwiastki rzeczywiste równań:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

są wartościami zmiennych $x$, $y$ i $z$, odpowiadającemi największym lub najmniejszym wartościom funkcyi $u$, jeżeli każda grupa znalezionych wartości spełnia warunek następujący:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}\right)^2 < \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^2\right] \times$$

$$\times \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}\right)^2\right] \tag{2}$$

Warunek ten wymaga, aby wielkości $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ miały jednakowe znaki. Jeżeli wszystkie trzy pochodne są ujemne, mamy maximum, jeżeli są dodatnie mamy minimum.

Jeżeli wartości na $x$, $y$, $z$, otrzymane z równań $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, czynią równemi zeru wszystkie sześć pochodnych drugiego rzędu, to postępujemy jak wyżej, w przypadku funkcyi dwuch zmiennych.

Niech $z$ będzie funkcyą uwikłaną zmiennych $x$ i $y$, określoną przez równanie $F(x, y, z) = 0$.

Równania $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ razem z danem równaniem wyznaczają wartości $x$ i $y$, odpowiadające maximum i minimum funkcyi $z$; z równań tych wyznaczamy również same maxima i minima funkcyi.

Podstawiając każdą grupę otrzymanych wartości na $x$, $y$, $z$ w wyrażenia:

$$+\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad +\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad +\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

wyznaczamy maximum lub minimum funkcyi $z$, o ile spełniona jest nierówność

$$\left(\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)^2 < \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \tag{3}$$

która wymaga, by

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{i} \quad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

miały jednakowe znaki. Maximum zachodzi wtedy, gdy oba te wyrażenia są dodatnie, minimum zaś kiedy są ujemne.

Podobnie postępujemy w przypadku funkcyi wielu zmiennych niezależnych.

Wszystkie powyższe prawidła zakładają, że dana funkcya i jej pochodne są ciągłe w pobliżu uważanych wartości zmiennych, odpowiadających maximum i minimum. W zastosowaniach praktycznych rzadko zachodzi potrzeba rozważania funkcyi o więcej niż trzech zmiennych niezależnych.

## PRZYKŁAD I.

Mamy daną funkcyę $z = x^3 + y^3 - 9\,xy + 27$.

Różniczkując, otrzymujemy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\,x^2 - 9\,y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3\,y^2 - 9\,x.$$

Przyrównując do zera obie pochodne, otrzymujemy dwa równania, które po rozwiązaniu dają następujące wartości na $x$ i na $y$:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$$

Różniczkując dalej, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6\,x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-9, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6\,y.$$

Jeżeli wstawimy pierwszą parę wartości $x$ i $y$ do drugich pochodnych, otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-9, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

A więc dla tych wartości $x$ i $y$ nierówność (1) nie jest spełniona. Z tego wynika, że wartościom $x=0$, $y=0$, $z=27$ nie odpowiada ani maximum ani minimum funkcyi. Podstawiając drugą parę wartości na $x$ i na $y$, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=18, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=-9, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=18.$$

Z łatwością możemy przekonać się, że te wartości na $x$ i na $y$ sprawdzają nierówność (1). Ponieważ zaś $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ są dodatnie, przeto przy $z=0$, $x=3$, $y=3$ mamy minimum.

## PRZYKŁAD II.

Mamy daną funkcyę: $u=xy^2 z^3 (a-x-y-z)$.

Różniczkując, otrzymujemy:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2 z^3 (a-2\,x-y-z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xyz^3 (2\,a-2\,x-3\,y-2\,z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xy^2 z^2 (3\,a-3\,x-3\,y-4\,z).$$

Te trzy wyrażenia przyrównujemy do zera i rozwiązujemy otrzymane równania. Odrzucamy pierwiastki $x=0$, $y=0$, $z=0$, ponieważ odpowiadająca im wartość $u=0$ nie jest ani maximum, ani minimum funkcyi; otrzymujemy tedy:

$$x=\frac{a}{7},\quad y=\frac{2a}{7},\quad z=\frac{3a}{7}.$$

Na drugą pochodną względem $x$ otrzymujemy wartość

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-2y^2z^3.$$

Kładąc $xyz^3=v$ i $2a-2x-3y-2z=w$, mamy

$$\frac{\partial u}{\partial y}=vw,\quad \text{skąd}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Ponieważ przy uważanych wartościach $x$, $y$, $z$ funkcya $w$ jest zerem, zatym

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=v\frac{\partial w}{\partial y},$$

czyli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-3xyz^3.$$

W ten sam sposób znajdujemy, że

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-4xy^2z^2,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=-y^2z^3,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}=-2xyz^3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}=-3xy^2z^2.$$

Podstawiając znalezione wartości sześciu pochodnych drugiego rzędu w nierówność (2) i dzieląc obydwie strony przez $xy^6z^{10}$, otrzymujemy:

$$x(4z-3y)^2<y(6x-y)(8z-9x).$$

Teraz łatwo możemy sprawdzić, że przy wartościach:

$$x=\frac{a}{7},\qquad y=\frac{2a}{7},\qquad z=\frac{3a}{7}$$

uważana nierówność jest spełniona.

Ponieważ pochodne $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ są ujemne, mamy tedy maximum $u=108\left(\frac{a}{7}\right)^7$.

Często bywa wygodniej (jak np. w danym przykładzie), sprawdzić nierówność (2) po podstawieniu pochodnych drugiego rzędu w postaci ogólnej, wtedy rachunki bywają prostsze.

PRZYKŁAD III.

Mamy daną funkcyę: $F(x, y, z) = z^2 + xyz - xy^2 - x^3 = 0.$

Pochodne tej funkcyi $F$, obliczone względem $x$ i $y$, przyrównywamy do 0:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz - y^2 - 3x^2 = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2xy = 0.$$

Odrzucamy wartości: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Wszystkie trzy równania powyższe są spełnione przy

$$\left\{\begin{array}{l} x = -6, \\ y = 6\sqrt{3}, \\ z = 12\sqrt{3}, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -6 \\ y = -6\sqrt{3} \\ z = -12\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Oprócz tego mamy, że:

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{6x}{2z + xy}, \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{z - 2y}{2z + xy}, \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x}{2z + xy}.$$

Podstawiając w te wyrażenia pierwszą grupę wartości na $x$, $y$, $z$, otrzymujemy:

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\sqrt{3}, \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0, \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Wartości te spełniają nierówność (3), a ponieważ $\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ i $\dfrac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ są ujemne, przeto mamy minimum $z = 12\sqrt{3}$, gdy $x = -6$, $y = 6\sqrt{3}$.

Jeżeli podstawimy drugą grupę wartości na $z$, $x$, $y$, otrzymamy:

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = +\sqrt{3}, \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = 0, \qquad \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = +\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Te wartości również spełniają nierówność (3), a ponieważ $\dfrac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$ i $\dfrac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$ są dodatnie, zachodzi maximum, mianowicie $z = -12\sqrt{3}$, gdy $x = -6$, $y = -6\sqrt{3}$.

## ĆWICZENIA.

1. $$z = x^2 - xy + y^2 - 3y.$$

Przy $x = 1$, $y = 2$, $z = -3$ minimum.

2. $$z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y.$$

Przy $x = 1$, $y = -1$, $z = -12$ minimum.

3. $$z = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x.$$

Przy $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$, $z = -6 - 4\sqrt{2}$, podwójne minimum.

Przy $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 2$, $z = 3 + 4\sqrt{2}$, maximum.

Przy $x = 1 - \sqrt{2}$, $y = 2 \pm \sqrt{3}$ niema ani maximum, ani minimum dla $z$.

Przy $x = 1 + \sqrt{2}$, $y = 2$ niema ani maximum, ani minimum dla $z$.

4. $$z = x^4 + y^4 - ax^2y - axy^2 + c^2x^2 + c^2y^2.$$

Przy $x = y = 0$, $z = 0$, mamy minimum.

Przy $x = y = \dfrac{3a - \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$,

$z = -\dfrac{27}{256}a^4 + \dfrac{9}{16}a^2c^2 - \dfrac{c^4}{2} - \dfrac{a}{256}(9a^2 - 32c^2)^{\frac{3}{2}}$, mamy minimum.

Przy $x = y = \dfrac{3a - \sqrt{9a^2 - 32c^2}}{8}$,

$z = -\dfrac{27}{256}a^4 + \dfrac{9}{16}a^2c^2 - \dfrac{c^4}{2} + \dfrac{a}{256}(9a^2 - 32c^2)^{\frac{3}{2}}$, niema ani maximum, ani minimum.

Aby znaleźć inne jeszcze wartości na $x$ i $y$, któreby dawały maximum lub minimum $z$, należałoby rozwiązać równanie algebraiczne 6-go stopnia. (Euler).

5. $z^2 = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 - ex - fy$ (Równanie ogólne powierzchni drugiego rzędu).

Przy $x = \dfrac{ce - bf}{2\,(ac - b^2)}$ i $y = \dfrac{af - be}{2\,(ac - b^2)}$, $z$ osiąga minimum, jeżeli $a$ i $c$ są dodatnie i $b^2 < ac$; jeżeli zaś $a$ i $c$ są ujemne i $b^2 < ac$, $z$ osiąga maximum. Niema ani maximum, ani minimum, jeżeli $a$ i $c$ są znaków różnych czyli $b^2 > ac$. (LAGRANGE).

6. $$z = x^2\,y\,(x^4 + 2\,y^3 - a)^2.$$

Przy $x = \sqrt[4]{\dfrac{3\,a}{17}}$ i $y = \sqrt[3]{\dfrac{a}{17}}$, $z$ osiąga maximum.

7. $$z = \frac{x^3\,y^3}{(x - a)\;(y - b)}.$$

Zwykle funkcya $z$ posiada maximum lub minimum, gdy $\log z$ osiąga maximum lub minimum.

Kładąc $\log z = z'$, otrzymujemy:

$$z' = 3\log x + 3\log y - \log(x - a) - \log(y - b).$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x - a}; \qquad \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{3}{y} - \frac{1}{y - b}.$$

Te dwie pochodne cząstkowe przyrównywamy do zera i otrzymujemy:

$$2\,x - 3\,a = 0,$$
$$2\,y - 3\,b = 0.$$

Z tych dwóch równań znajdujemy, że

$$x = \frac{3\,a}{2}; \qquad y = \frac{3\,b}{2}.$$

Różniczkując drugi raz, otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(x - a)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} = -\frac{3}{y^2} + \frac{1}{(y - b)^2}.$$

Podstawiając w znalezione pochodne drugiego rzędu poprzednie wartości na $x$ i na $y$, mamy

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} = \frac{8}{3\,a^2}, \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial x\, \partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} = \frac{8}{3\,b^2}.$$

Otrzymane wyniki wskazują, że przy $x = \frac{3\,a}{2}$ i $y = \frac{3\,b}{2}$, $z' = \log\left(\frac{27}{4}ab\right)^2$, a więc $z = \left(\frac{27}{4}ab\right)^2$ jest minimum.

Sposób wskazany w powyższem ćwiczeniu stosuje się często w przypadku, gdy funkcya dana jest iloczynem, lub gdy zawiera pierwiastki.

8. $$z = xy\sqrt{a^2 b^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2}.$$

Przy $x = \pm\frac{b}{\sqrt{3}}$ i $y = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{a^2 b^2}{3\sqrt{3}}$, podwójne maximum.

9. $$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y).$$

Przy $x = y = 60^0$, $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, maximum.

10. $$u = xyz\,(a^2 - x^2 - y^2 - z^2).$$

Przy $x = y = z = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $u = + \frac{2\,a^5}{25\sqrt{5}}$, maximum.

Przy $x = y = z = -\frac{a}{\sqrt{5}}$, $u = -\frac{2\,a^5}{25\sqrt{5}}$, minimum.

11. $$u = ax^2 - bxy + xz + yz.$$

Przy $x = y = z = 0$, $u = 0$, niema ani maximum, ani minimum.

12. $$u = \frac{16\,abxyz}{(a + x)\,(x + y)\,(y + z)\,(z + c)}.$$

Postępujemy podobnie, jak w ćwiczeniu 7; kładąc $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{n}$, otrzymujemy przy $x = an$, $y = an^2$, $z = an^3$ maximum funkcyi $u$, mianowicie

$$u = ab\left(\frac{2}{a^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}}\right)^4.$$

13. $$a(x^3+y^3+z^3)=x^2yz+y^2xz+z^2xy.$$

Przy $x=y=a.1{,}6\ldots.$ $z=a.0{,}85\ldots.$, minimum.

14. Znaleźć wewnątrz danego trójkąta taki punkt, aby suma kwadratów jego odległości od trzech wierzchołków trójkąta była minimum.

Niech będą $A$, $B$, $C$ wierzchołki danego trójkąta, zaś $a$, $b$, $c$ przeciwległe jego boki; $O$ niech będzie punktem szukanym.

Bierzemy wierzchołek $A$ za początek spółrzędnych, prostą, na której leży bok $c$ za oś odciętych; oznaczając przez $x$, $y$ spółrzędne prostokątne punktu $O$, przez $u$ zaś funkcyę, której minimum mamy znaleźć, mamy

$$u=x^2+y^2+(c-x)^2+y^2+(b\cos A-x)^2+(b\sin A-y)^2.$$

Przy $x=\dfrac{c+b\cos A}{3}$ i $y=\dfrac{b\sin A}{3}$, funkcya $u$ osiąga minimum.

Przy znalezionych wyżej wartościach $x$ i $y$ odległości punktu $O$ od trzech wierzchołków trójkąta równają się

$$AO=\frac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{3},\quad BO=\frac{\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}}{3},$$

$$CO=\frac{\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}}{3}.$$

Punkt $O$ jest środkiem ciężkości danego trójkąta.

15. Z pośród trójkątów wpisanych w dany trójkąt, znaleźć ten, którego obwód jest najmniejszy.

Niech $A$, $B$, $C$ będą wierzchołkami danego trójkąta; $a$, $b$, $c$ odpowiedniemi bokami; wierzchołki szukanego trójkąta niech będą: $D$ na boku $c$, $E$ na boku $a$, $F$ na boku $b$. Oprócz tego niech będzie: $BD=x$, $CE=y$, $AF=z$, wreszcie przez $u$ oznaczamy obwód trójkąta $DEF$.

Mamy:

$$u=[x^2+(a-y)^2-2x(a-y)\cos B]^{\frac{1}{2}}+[y^2+(b-z)^2-2y(b-z)\cos C]^{\frac{1}{2}}$$
$$+[z^2+(c-x)^2-2z(c-x)\cos A]^{\frac{1}{2}}.$$

Pochodne cząstkowe funkcyi $u$ względem $x$, $y$ i $z$ przyrównywamy do zera i znajdujemy:

$$\frac{x-(a-y)\cos B}{[x^2+(a-y)^2-2x(a-y)\cos B]^{\frac{1}{2}}}=\frac{(c-x)-z\cos A}{[z^2+(c-x)^2-2z(c-x)\cos A]^{\frac{1}{2}}}.$$

Oprócz tego otrzymamy łatwo jeszcze dwa inne równania, które możemy bezpośrednio napisać.

Jeżeli z punktów $E$ i $F$ poprowadzimy prostopadłe $EP$ i $FQ$ do $AB$, to poprzednie równanie mieć będzie postać następującą:

$$\frac{DP}{DE}=\frac{DQ}{DF} \quad \text{czyli} \quad \cos BDE=\cos ADF.$$

A więc kąty $BDE$ i $ADF$ są równe. Tym samym sposobem otrzymalibyśmy, że kąty $BED$ i $CEF$, $CFE$ i $AFD$ są także odpowiednio równe. Otrzymujemy tedy trójkąt szukany, łącząc ze sobą spodki prostopadłych, poprowadzonych z wierzchołków trójkąta danego na przeciwległe boki.

16. Dane są dwie przecinające się proste oraz dwa punkty, znajdujące się w kącie, utworzonym przez te proste. Znaleźć na prostych takie dwa punkty, aby suma odległości między temi punktami i punktami danymi było jaknajmniejsze.

Niech $A$ będzie punktem, w którym przecinają się dwie proste $AX$ i $AY$; $D$ i $E$ niech będą dwa dane punkty; $G$ zaś niech będzie punktem szukanym na $AX$, a $F$ punktem szukanym na $AY$. Prowadzimy prostopadłą $EP$ z punktu $E$ na prostą $AX$ i prostopadłą $DQ$ z punktu $D$ na prostą $AY$; przeprowadzamy proste $GE$, $GF$ i $FD$ i oznaczamy:

$$AP=a,\quad AQ=b,\quad EP=p,\quad DQ=q,\quad AG=x,\quad AF=y$$

Niech $u$ oznacza sumę odcinków $GE$, $GF$ i $FD$.
Z warunków zadania znajdujemy:

$$u=[p^2+(a-x)^2]^{\frac{1}{2}}+[x^2+y^2-2\,xy\cos A]^{\frac{1}{2}}+[q+(b-y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Przyrównujemy do 0 pochodne funkcyi $u$ wzięte względem $x$, $y$ i $z$:

$$\frac{a-x}{[p^2+(a-x)^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{x-y\cos A}{[x^2+y^2-2\,xy\cos A]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{b-y}{[q^2+(b-y)^2]^{\frac{1}{2}}}=\frac{y-x\cos A}{[x^2+y^2-2\,xy\cos A]^{\frac{1}{2}}}.$$

Interpretując otrzymane równania w podobny sposób, jak w ćwiczeniu poprzedniem, widzimy, że w przypadku minimum, kąty $EGP$ i $FGA$, jak również kąty $AFG$ i $QFD$, są sobie równe. Rozwiązanie geometryczne tego zadania na zasadzie powyższych wskazówek nie przedstawia trudności.

17. Mamy dane trzy boki czworoboku; wyznaczyć kąty pomiędzy niemi w ten sposób, aby powierzchnia tego czworoboku była największą.

Dane boki niech będą kolejno $a$, $b$, $c$; między bokami $a$ i $b$ mamy kąt $\pi-\theta$; między bokami $b$ i $c$ mamy kąt $\pi-\theta'$.

Powierzchnię czworoboku oznaczmy przez $u$; przy pomocy tych oznaczeń znajdziemy, że:

$$u = \frac{1}{2} ab \sin \theta + \frac{1}{2} bc \sin \theta' + \frac{1}{2} ac \sin (\theta + \theta').$$

Pochodne funkcyi $u$ względem $\theta$ i $\theta'$ przyrównywamy do 0:

$$b \cos \theta + c \cos (\theta + \theta') = 0 \qquad (1)$$

$$b \cos \theta' + a \cos (\theta + \theta') = 0 \qquad (2)$$

Z tych dwóch równań rugujemy $\theta'$ i otrzymujemy równanie 3-go stopnia, z którego wyznaczamy $\theta$

$$\cos^3 \theta + \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2\, ab}\right) \cos^2 \theta - \frac{c^2}{2\, ab} = 0.$$

Podobnie postępujemy w celu określenia $\theta'$.

Jeżeli przypuścimy że dany czworobok jest wpisany w koło w ten sposób, że bok nie dany w warunkach zadania jest średnicą koła opisanego, to warunki wyrażone w równaniach (1) i (2) będą spełnione i długość tego boku będzie:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + 2\, ab \cos \theta)^{\frac{1}{2}}.$$

18. Znaleźć wewnątrz trójkąta taki punkt, aby suma odległości od tego punktu do trzech wierzchołków trójkąta była jaknajmniejsza.

Oznaczmy przez $A$, $B$, $C$ wierzchołki trójkąta, przez $a$, $b$, $c$ przeciwległe boki; niech $O$ będzie punkt szukany.

Jeżeli z punktu $O$ opuścimy prostopadłą $OP$ na bok $AB$ i jeżeli założymy, że:

$$AP = x, \quad OP = y$$

to, oznaczając przez $u$ sumę odcinków $OA$, $OB$, $OC$, znajdziemy że:

$$u = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + [(c - x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} + [(x - b \cos A)^2 + (y - b \sin A)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Przyrównywując do 0 pochodne funkcyi $u$, wzięte względem $x$ i $y$, znajdziemy:

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{c - x}{[(c - x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{b \cos A - x}{[(x - b \cos A)^2 + (y - b \sin A)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{y}{[(c - x)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{b \sin A - y}{[(x - b \cos A)^2 + (y - b \sin A)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Jeżeli oznaczymy kąty $AOP$ i $BOP$ przez $\theta$ i $\theta'$, to równania poprzednie dadzą:

$$\sin\theta - \sin\theta' = \frac{b\cos A - x}{[(x-b\cos A)^2 + (y-b\sin A)^2]^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos\theta + \cos\theta' = \frac{b\sin A - y}{[(x-b\cos A)^2 + (y-b\sin A)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Podnosimy te równania do drugiej potęgi i dodajemy:

$$\cos(\theta+\theta') = -\frac{1}{2}$$

skąd znajdziemy:

$$\theta + \theta' = AOB = 120^0.$$

W ten sam sposób można udowodnić, że każdy z kątów: $AOC$ i $BOC$ ma również $120^0$.

Przez $t$, $v$, $w$ oznaczmy odcinki $OA$, $OB$, $OC$, otrzymamy:

$$\begin{aligned} t^2 + vt + v^2 &= c^2 \\ v^2 + vw + w^2 &= a^2 \\ w^2 + tw + t^2 &= b^2. \end{aligned}$$

Kładąc $s = t + v + w$, otrzymamy z ostatnich równań następujące wartości na $t$, $v$, $w$:

$$t = \frac{s}{3} + \frac{b^2 + c^2 - 2\,a^2}{3\,s},$$

$$v = \frac{s}{3} + \frac{a^2 + c^2 - 2\,b^2}{3\,s},$$

$$w = \frac{s}{3} + \frac{a^2 + b^2 - 2\,c^2}{3\,s}. \quad *)$$

Zadanie to jest znane w historyi matematyki; J. Bertrand podał bardzo praktyczne rozwiązanie tego zadania w „*Journal de Liouville*" tom VIII.

---

*) $s = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\,m^2$; w wyrażeniu tem $m^2$ jest polem trójkąta.

## § 4. Funkcye, w których zmienne są związane ze sobą równaniami.

Mamy funkcyę: $u = f(x, y, z, v, w \ldots.)$

zawierającą $m+n$ zmiennych, związanych ze sobą $n$ równaniami:

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0 \ldots. \tag{1}$$

Aby znaleźć wartości zmiennych, dla których funkcya $u$ staje się maximum albo minimum, przyrównujemy do zera różniczkę zupełną funkcyi $u$, a równania (1) różniczkujemy względem wszystkich zmiennych w nich zawartych. Otrzymujemy w ten sposób $n+1$ równań, z których rugujemy różniczki $n$ zmiennych zależnych, w końcowym zaś równaniu przyrównujemy do zera każdy ze spółczynników przy pozostałych różniczkach. Mamy w ten sposób $m$ równań, które, dołączone do $n$ równań układu (1), pozwalają na wyznaczenie wartości szukanych.

Dla każdej grupy otrzymanych w ten sposób wartości poznajemy, czy zachodzi maximum czy minimum funkcyi, a to przez szukanie pochodnych drugiego rzędu funkcyi $u$ i badanie znanych nierówności. Czasem możemy sobie zaoszczędzić tego żmudnego rachunku, jeżeli mianowicie z natury zagadnienia widać, czy mamy do czynienia z maximum czy z minimum.

### PRZYKŁAD I.

Mamy znaleźć maximum i minimum funkcyi:

$$u = a \sin^2 x + b \sin^2 y,$$

$x$ i $y$ są związane ze sobą równaniem:

$$y - x = \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

Różniczkę zupełną funkcyi $u$ przyrównujemy do zera i równanie (1) różniczkujemy względem $x$ i $y$:

$$a \sin 2\, x dx + b \sin 2\, y dy = 0,$$
$$dy - dx = 0.$$

Z tych dwóch równań rugujemy $dy$, i przyrównujemy do zera spółczynnik przy $dx$ w końcowem równaniu:

$$a \sin 2\, x + b \sin 2\, y = 0. \tag{2}$$

Z równań (1) i (2) otrzymamy te wartości zmiennych, które dają maximum lub minimum funkcyi danej.

Otóż z równania (1) otrzymujemy:

$$y = x + \frac{\pi}{4}$$

z tego zaś:

$$\sin 2y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2x.$$

Podstawiając wartość $\sin 2y$ w (2), otrzymamy:

$$\operatorname{tang} 2x = -\frac{b}{a},$$

z tego zaś:

$$\sin^2 x = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \pm a}{2(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \sin^2 y = \frac{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \pm b}{2(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$u = \frac{1}{2}[a + b \pm (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}].$$

Znak $+$ daje maximum, znak zaś $-$ daje minimum dla funkcyi $u$.

## PRZYKŁAD II.

Przez dany punkt przeprowadzić płaszczyznę w ten sposób, aby ta płaszczyzna utworzyła z płaszczyznami spółrzędnych czworościan najmniejszy.

Niech $O$ będzie początkiem spółrzędnych prostokątnych; $A$, $B$, $C$ punktami, w których szukana płaszczyzna spotyka osie $OX$, $OY$, $OZ$; niech $a$, $b$, $c$ będą spółrzędne danego punktu.

Kładąc $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$; znajdziemy, że funkcya, dla której szukamy minimum, będzie:

$$u = \frac{xyz}{6}.$$

Zmienne $x$, $y$, $z$ są związane między sobą równaniem:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1. \tag{1}$$

Z danej funkcyi znajdujemy:

$$\log u = \log x + \log y + \log z - \log 6.$$

Różniczkę zupełną tego wyrażenia przyrównujemy do zera i różniczkujemy równanie (1):

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0,$$

$$\frac{adx}{x^2}+\frac{bdy}{y^2}+\frac{cdz}{z^2}=0.$$

Z tych dwu równań rugujemy $dz$ i znów w ostatecznem równaniu przyrównujemy do zera spółczynniki przy $dy$ i $dx$. Możemy otrzymać również ten sam wynik, posiłkując się metodą czynnika nieoznaczonego.

W tym celu mnożymy pierwsze z ostatnich równań przez czynnik nieoznaczony $\lambda$, otrzymane równanie odejmujemy od drugiego następnie przyrównujemy do zera spółczynniki przy $dx$, $dy$, $dz$ i otrzymujemy:

$$\lambda=\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}.$$

Na zasadzie równania (1) mamy:

$$3\lambda=\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=1$$

$$\lambda=\frac{1}{3},$$

skąd otrzymamy, że:

$$x=3a,\quad y=3b,\quad z=3c,\quad \text{a}\quad u=\frac{9abc}{2}.$$

Z łatwością możemy się przekonać, że znaleziona wartość na $u$ może być tylko minimum.

## PRZYKŁAD III.

Rozłożyć liczbę $n$ na takie trzy części, aby suma kwadratów tych części była maximum, i aby po pomnożeniu każdej z nich odpowiednio przez $a$, $b$, $c$, suma algebraiczna tych iloczynów była równa zeru.

Niech szukane trzy części liczby $n$ będą $x$, $y$, $z$.

Będziemy więc musieli znaleźć maximum funkcyi następującej:

$$u=x^2+y^2+z^2.$$

Zmienne $x$, $y$, $z$ są związane między sobą równaniami:

$$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=n\\ ax+by+cz&=0.\end{aligned}\right. \tag{1}$$

Przyrównywamy do zera pochodną zupełną funkcyi $u$ i różniczkujemy równania (1):

$$xdx + ydy + zdz = 0 \tag{2}$$

$$dx + dy + dz = 0 \tag{3}$$

$$adx + bdy + cdz = 0 \tag{4}$$

Z równań tych rugujemy $dz$ i $dy$, następnie w równaniu ostatecznem przyrównywamy do zera spółczynnik przy $dx$. Do tego samego wyniku dojść łatwo możemy w sposób następujący:

Mnożymy równanie (3) przez $-\lambda$, równanie (4) przez $\mu$ ($\mu$ i $\lambda$ są to czynniki nieoznaczone) i następnie dodajemy:

$$a\mu + x = \lambda, \quad b\mu + y = \lambda, \quad c\mu + z = \lambda \tag{5}$$

Z równań (5) i (1) należy wyznaczyć wielkości $x$, $y$, $z$, $\lambda$ i $\mu$.

Równania (5) dodajemy do siebie:

$$(a + b + c)\,\mu + n = 3\,\lambda.$$

Mnożymy je odpowiednio przez $a$, $b$, $c$ i znów dodajemy:

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,\mu = (a + b + c)\,\lambda.$$

Kładąc $a + b + c = s_1$ i $a^2 + b^2 + c^2 = s_2$, nadajemy ostatnim dwom równaniom postać następującą:

$$s_1\,\mu + n = 3\,\lambda$$

$$s_2\,\mu = s_1\,\lambda,$$

skąd

$$\mu = \frac{ns_1}{3\,s_2 - s_1^2}, \qquad \lambda = \frac{ns_2}{3\,s_2 - s_1^2}.$$

Otrzymane wartości na $\mu$ i $\lambda$ podstawiamy w równanie (5) i znajdujemy:

$$x = \frac{n}{3\,s_2 - s_1^2}\,(s_2 - as_1),$$

$$y = \frac{n}{3\,s_2 - s_1^2}\,(s_2 - bs_1),$$

$$z = \frac{n}{3\,s_2 - s_1^2}\,(s_2 - cs_1).$$

Maximum funkcyi będzie, gdy

$$u = \frac{n^2}{(3\,s_2 - s_1^2)^2}\,[(s_2 - as_1)^2 + (s_2 - bs_1)^2 + (s_2 - cs_1)^2].$$

## PRZYKŁAD IV.

Podzielić liczbę daną $a$ na $n$ części takich, aby ich iloczyn był jaknajwiększy.

Niechaj szukane $n$ części będą $x$, $y$, $z$, $v$, $w$....; zadanie sprowadza się do szukania maximum funkcyi

$$u = xyzvw\ldots.,$$

przyczem pomiędzy zmiennemi zachodzi równanie

$$x + y + z + v + w + \ldots. = a \qquad (1)$$

Różniczkę logarytmiczną funkcyi $u$ przyrównujemy do zera i różniczkujemy równanie (1):

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \ldots. = 0,$$

$$dx + dy + dz + dv + dw + \ldots. = 0.$$

Pierwsze równanie z dwu ostatnich mnożymy przez czynnik nieoznaczony $-\lambda$, otrzymane równanie dodajemy do drugiego z ostatnich równań oraz przyrównujemy do zera spółczynniki przy $dx$, $dy$, $dz$, $dv$, $dw$,..... Jako rezultat otrzymamy:

$$\lambda = x = y = z = v = w = \ldots.,$$

skąd:

$$n\lambda = a, \qquad \lambda = \frac{a}{n}.$$

A więc na zasadzie poprzedniego rezultatu będzie:

$$x = y = z = v = w = \ldots. = \frac{a}{n} \quad \text{oraz} \quad u = \left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

Sposób wskazany przez nas w tem zadaniu pozwoli nam rozwiązać bez trudności wiele innych podobnych zagadnień.

## ĆWICZENIA.

1. $$u = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2}.$$

Przyczem $x + y = c$.

Przy $x = c\,\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$ i $y = c\,\dfrac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$, mamy

$$u = \frac{1}{c^2}\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^3; \quad \text{ta wartość } u \text{ jest minimum.}$$

2. $$u = 5x + 3y,$$

$x$ i $y$ są związane równaniem $4\sin x - 3\cos y = 0$.

Otrzymamy:

$$u = 5 \text{ arc sin} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \text{ arc cos} \frac{3}{4} = 5,155\ldots, \text{ maximum.}$$

3. $$u = (mx + n)(ny + m),$$

równanie pomiędzy $x$ i $y$ jest:

$$a^{mx} \times b^{ny} = c.$$

Logarytmując i stosując metodę czynnika nieoznaczonego, otrzymamy:

że przy $mx + n = \dfrac{\log(a^n b^m c)}{2\log a}$ i przy $ny + m = \dfrac{\log(a^n b^m c)}{2\log b}$,

wartość $u = \dfrac{[\log(a^n b^m c)]^2}{4\log a \log b}$ jest maximum.

4. $$u = (x + a)(y + b)(z + c).$$

$x$, $y$, $z$ są związane równaniem:

$$a^x b^y c^z = k.$$

Postępujemy w tym przypadku podobnie jak w ćwiczeniu poprzednim i otrzymujemy wartości na $x + a$, $y + b$, $z + c$ oraz na $u$ wartość:

$$u = \frac{(\log k a^a b^b c^c)^3}{27\log a \log b \log c},$$ będącą maximum.

5. $$u = xy^2 z^3.$$

Równanie pomiędzy zmiennemi jest:

$$x + my^2 + nz^3 = a.$$

Wprowadzając czynnik nieoznaczony, ostatecznie znajdujemy:

$$u = \frac{a^3}{27mn} \text{ maximum.}$$

6. $$u = \cos x \cos y \cos z.$$

Równanie łączące zmienne jest:

$$x + y + z = \pi.$$

Różniczkę logarytmiczną tej funkcyi przyrównujemy do zera, wprowadzamy czynnik nieoznaczony i otrzymujemy:

$$\text{tang } x = \text{tang } y = \text{tang } z.$$

Skąd znajdujemy:

$$x = y = z = \frac{\pi}{3}$$

przyczem

$$u = \frac{1}{8}, \text{ maximum.}$$

7. $$u = (a^x - 1)(b^y - 1)(c^z - 1),$$

$x$, $y$, $z$ są dane równaniem następującem:

$$a^x b^y c^z = k.$$

Szukamy różniczki logarytmicznej funkcyi i wprowadzamy czynnik nieoznaczony, skąd:

$$u = (k^{\frac{1}{3}} - 1)^3, \text{ maximum.}$$

8. $$u = \left(\frac{a^{x+1} - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^{y+1} - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{c^{z+1} - 1}{c - 1}\right),$$

Równanie łączące zmienne jest:

$$a^x b^y c^z = A.$$

Postępując podobnie jak w ostatniem ćwiczeniu, otrzymamy maximum danej funkcyi przy wartości

$$u = \frac{(\sqrt[3]{Aabc} - 1)^3}{(a - 1)(b - 1)(c - 1)}.$$

9. $$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma t^\delta,$$

zmienne $x$, $y$, $z$, $t$ są związane równaniem:

$$x + 2y + 3z + 4t = a.$$

Jeżeli założymy, że $\alpha + \beta + \gamma + \delta = n$, to otrzymamy następującą wartość maximum funkcyi:

$$u = \left(\frac{a}{n}\right)^n \left(\frac{\alpha}{1}\right)^\alpha \left(\frac{\beta}{2}\right)^\beta \left(\frac{\gamma}{3}\right)^\gamma \left(\frac{\delta}{4}\right)^\delta.$$

10. W trójkącie kulistym prostokątnym dany jest jeden z kątów różnych od prostego; wyznaczyć boki zawierające ten kąt tak, aby ich różnica była możliwie największa.

Niech $a$ będzie danym kątem, $\varphi$ i $\theta$ bokami zawierającymi dany kąt $a$, $\varphi$ niech będzie przeciwprostokątną.

Zadanie sprowadza się do znalezienia maximum funkcyi:

$$u = \varphi - \theta,$$

gdzie $\varphi$ i $\theta$ są związane z sobą równaniem:

$$\operatorname{tang}\theta = \cos a \operatorname{tang}\varphi.$$

Maximum funkcyi $u$ zachodzi przy wartości:

$$\operatorname{tang}\varphi = (\sec a)^{\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad \operatorname{tang}\theta = (\cos a)^{\frac{1}{2}}.$$

11. Śród wszystkich prostopadłościanów, mających stałą sumę krawędzi, znaleźć taki, którego objętość jest największa.

Niech $x$, $y$, $z$ będą krawędzie schodzące się w jednym wierzchołku; sumę ich oznaczamy przez $a$.

Zagadnienie sprowadza się do znalezienia maximum funkcyi

$$u = xyz,$$

gdzie $x$, $y$, $z$ są związane równaniem:

$$x + y + z = a.$$

Ćwiczenie to można rozwiązać sposobem, wskazanym w przykładzie IV.

Przy $x = y = z = \frac{a}{3}$, wartość $u = \frac{a^3}{27}$ jest maximum.

12. Ze wszystkich walców prostych o podstawie eliptycznej, wpisanych w daną kulę, wybrać walec o największej objętości.

Niech $x$ i $y$ będą połówkami dwóch osi elipsy, będącej podstawą szukanego walca; $z$ niech będzie jego wysokość; $a$ promień kuli.

Należy znaleźć maximum funkcyi

$$u = \pi xyz.$$

Równanie łączące zmienne jest następujące:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Logarytmując i wprowadzając czynnik nieoznaczony, otrzymujemy, że

$$\text{przy} \quad x = y = z = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{wartość} \quad u = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{3}} \quad \text{jest maximum.}$$

A więc podstawa walca musi być kołem.

13. Znaleźć najmniejszą odległość punktu od płaszczyzny.

Niech spółrzędne punktu będą $a$, $b$, $c$.

Równanie płaszczyzny:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

Zagadnienie sprowadza się do szukania minimum funkcyi:

$$u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Równanie (1) łączy ze sobą zmienne $x$, $y$, $z$.

Różniczkę zupełną funkcyi $u$ przyrównujemy do zera i różniczkujemy równanie (1); stąd:

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = 0,$$

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0.$$

Przy pomocy zaś czynnika nieoznaczonego znajdziemy

$$\frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z-c}{C},$$

oraz na zasadzie znanych własności równych stosunków otrzymujemy:

$$\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}{A(x-a) + B(y-b) + C(z-c)} = \pm \frac{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

albo $$-\frac{u^2}{(Aa + Bb + Cc + D)} = \pm \frac{u}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Stąd ostatecznie otrzymujemy wartość na $u$:

$$u = \frac{Aa + Bb + Cc}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

14. Znaleźć maximum i minimum odległości danego punktu od danej kuli.

Niech $a$, $b$, $c$ będą spółrzędnemi danego punktu; $x$, $y$, $z$ bieżące spółrzędne punktów na kuli; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ spółrzędne środka kuli; $R$ jej promień.

Mamy tedy znaleźć maximum i minimum funkcyi:

$$u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}.$$

Równanie kuli jest

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2. \tag{1}$$

Stosując to, cośmy poprzednio powiedzieli, po zróżniczkowaniu znajdujemy:

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = 0 \tag{2}$$

$$(x-\alpha)\,dx + (y-\beta)\,dy + (z-\gamma)\,dz = 0 \tag{3}$$

Odejmując te dwa równania jedno od drugiego, otrzymamy zamiast równania (2) równanie następujące:

$$(a-\alpha)\,dx + (b-\beta)\,dy + (c-\gamma)\,dz = 0 \tag{4}$$

Równanie (4) mnożymy przez czynnik nieoznaczony $\lambda$ i od przekształconego w ten sposób równania odejmujemy równanie (3) oraz przyrównujemy do zera spółczynniki przy odpowiednich różniczkach. Otrzymujemy wtedy:

$$\frac{x-\alpha}{a-\alpha}=\frac{y-\beta}{b-\beta}=\frac{z-\gamma}{c-\gamma}=\pm\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}{\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}}.$$

Jeżeli przez $D$ oznaczymy odległość danego punktu od środka kuli, to:

$$D=\sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2},$$

tak więc znajdujemy:

$$x-\alpha=\pm\frac{R}{D}(a-\alpha),$$

$$y-\beta=\pm\frac{R}{D}(b-\beta),$$

$$z-\gamma=\pm\frac{R}{D}(c-\gamma),$$

skąd łatwo otrzymamy wartości na $x-a$, $y-b$, $z-c$. Podstawiając następnie te wartości, otrzymamy, że

$$u=D\pm R.$$

Znak $+$ odpowiada maximum, zaś znak $-$ minimum.

15. Powierzchnia: $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$ (1)

jest przecięta przez płaszczyznę

$$lx+my+nz=0.$$

Znaleźć maximum i minimum odległości środka powierzchni danej od punktu leżącego na obwodzie przekroju.

Oznaczmy przez $r$ szukaną odległość; zagadnienie sprowadza się do odnalezienia wartości maximum i minimum funkcyi:

$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

Zmienne $x$, $y$, $z$ są związane ze sobą dwoma równaniami: powierzchni i płaszczyzny. Postępując podobnie, jak w przykładzie III, znajdziemy, jako warunek wyznaczający szukane maximum i minimum funkcyi $r$, następujące równanie:

$$\frac{l^2}{r^2-a^2}+\frac{m^2}{r^2-b^2}+\frac{n^2}{r^2-c^2}=0.$$

Równanie (1) jest równaniem powierzchni sprężystej; znalezione zaś równanie wyznacza nam prędkości fal, rozchodzących się w ośrodku krystalicznym. (FRESNEL i HERSCHEL).

16. Paraboloida eliptyczna jest przecięta płaszczyzną prostopadłą do osi. Znaleźć największy prostopadłościan, który można wpisać w część uważanej paraboloidy, odcięty przez płaszczyznę sieczną.

Niech $a$ będzie odległością płaszczyzny uważanej od wierzchołka paraboloidy; $x$, $y$, $z$ spółrzędne punktu wspólnego dla paraboloidy i równoległościanu.

Mamy znaleźć maximum funkcyi:

$$u = 4(a - x)yz \quad \text{(objętość prostopadłościanu)},$$

przyczem $x$, $y$, $z$ są związane z sobą równaniem paraboloidy

$$\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} = x.$$

Znajdziemy, że przy

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \left(\frac{ap}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{i} \quad z = \left(\frac{aq}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$u = a^2 \sqrt{pq} \quad \text{osiąga maximum.}$$

Gdyby paraboloida była obrotową, wówczas byłoby

$$u = a^2 p.$$

17. Znaleźć pole przekroju hyperboloidy jednopowłókowej, wyznaczonego przez płaszczyznę przechodzącą przez jej środek.

Przecięcie będzie elipsą, której osie są największą i najmniejszą wartością promienia wodzącego:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Zmienne $x$, $y$, $z$ są związane z sobą równaniami:

1⁰ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, (równanie hyperboloidy);

2⁰ $lx + my + nz = 0$, (równanie płaszczyzny siecznej).

Postępując podobnie, jak w przykładzie III, otrzymujemy równanie następujące, które pozwoli nam wyznaczyć maximum i minimum funkcyi $r$:

$$\frac{a^2 l^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 m^2}{r^2 - b^2} - \frac{c^2 n^2}{r^2 + c^2} = 0.$$

Porządkujemy równanie względem malejących potęg $r^2$, dzielimy je przez spółczynnik przy $(r^2)^2$ i znajdujemy, że ostatni wyraz otrzymanego równania, będący iloczynem dwóch pierwiastków, jest następujący:

$$-\frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 l^2 + b^2 m^2 - c^2 n^2}.$$

Szukane pole równa się:

$$\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 l^2 + b^2 m^2 - c^2 n^2}}.$$

18. Znaleźć pole elipsy, określonej następującem równaniem:

$$A(x-\alpha)^2 + 2B(x-\alpha)(y-\beta) + C(y-\beta)^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

gdzie $\alpha$ i $\beta$ są spółrzędnemi środka.

Osie szukanej elipsy odpowiadają wartościom maximum i minimum promienia wodzącego. Kwadrat tego promienia równa się:

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + 2(x-\alpha)(y-\beta)\cos\theta,$$

$\theta$ jest to kąt między osiami; zmienne $x$ i $y$ są związane z sobą równaniem krzywej.

Pochodną zupełną funkcyi $r$ przyrównujemy do zera i różniczkujemy równanie (1). Po wprowadzeniu czynnika nieoznaczonego i po przyrównaniu do zera spółczynników przy $dx$ i $dy$, znajdziemy:

$$\lambda[(x-\alpha) + (y-\beta)\cos\theta] + A(x-\alpha) + B(y-\beta) = 0,$$
$$\lambda[(y-\beta) + (x-\alpha)\cos\theta] + C(y-\beta) + B(x-\alpha) = 0.$$

Mnożąc pierwsze z ostatnich równań przez $x-\alpha$, drugie przez $y-\beta$ i dodając, otrzymujemy:

$$\lambda r^2 - 1 = 0, \quad \text{skąd} \quad \lambda = \frac{1}{r^2}.$$

Znalezioną wartość $\lambda$ podstawiamy w oba równania i otrzymujemy wynik, który możemy napisać w postaci następującej:

$$\left(\frac{1}{r^2} + A\right)(x-\alpha) + \left(\frac{1}{r^2}\cos\theta + B\right)(y-\beta) = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r^2}\cos\theta + B\right)(x-\alpha) + \left(\frac{1}{r^2} + C\right)(y-\beta) = 0.$$

Z tych równań należy wyrugować $x-\alpha$ i $y-\beta$; w tym celu wystarczy zauważyć, iż prawe strony tych równań są zerami, przeto wspólny mianownik wzorów na $x - \alpha$ i $y - \beta$ musi też być równy zeru. Stąd otrzymamy:

$$\left(\frac{1}{r^2} + A\right)\left(\frac{1}{r^2} + C\right) - \left(\frac{1}{r^2}\cos\theta + B\right)^2 = 0.$$

oraz:

$$(AC - B^2)\, r^4 + (A + C - 2\,B\cos\theta)\, r^2 + \sin^2\theta = 0.$$

Dzielimy to równanie przez $AC - B^2$, i widzimy, że ostatni wyraz równania, będący iloczynem dwóch pierwiastków, jest $\frac{\sin^2\theta}{AC - B^2}$, przeto szukane pole elipsy równa się $\frac{\pi\sin\theta}{\sqrt{AC - B^2}}$.

19. Znaleźć objętość elipsoidy, wyrażonej przez równanie:

$$ax^2 + a' y^2 + a'' z^2 + 2\,byz + 2\,b' xz + 2\,b'' xy = c \tag{1}$$

Osie główne elipsoidy odpowiadają wartościom maximum i minimum promienia wodzącego, którego równanie jest:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2}$$

Równanie (1) wyraża związek pomiędzy zmiennemi. Przyrównujemy do zera różniczkę zupełną równania (2), różniczkujemy równanie (1). Dalej wprowadzamy czynnik nieoznaczony i, przyrównując do zera spółczynniki przy $dx$, $dy$, $dz$, otrzymujemy następujące równania:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda x + ax + b' z + b'' y = 0, \\ &\lambda y + ay + bz + b'' x = 0, \\ &\lambda z + a'' z + by + b' x = 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Te równania odpowiednio mnożymy przez $x$, $y$, $z$ i dodajemy do siebie, skąd otrzymujemy, że $\lambda = -\frac{c}{r^2}$.

Otrzymaną wartość $\lambda$ podstawiamy w równania (3):

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{c}{r^2} - a\right) x - b'' y - b' z = 0, \\ &b'' x - \left(\frac{c}{r^2} - a'\right) y + bz = 0, \\ &b' x + by - \left(\frac{c}{r^2} - a''\right) z = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Żeby wyrugować $x$, $y$, $z$, postępujemy w ten sam sposób, jak w ćwiczeniu poprzedniem, i otrzymujemy:

$$\left(\frac{c}{r^2}-a\right)\left(\frac{c}{r^2}-a'\right)\left(\frac{c}{r^2}-a''\right)-b^2\left(\frac{c}{r^2}-a\right)-b'^2\left(\frac{c}{r^2}-a'\right)-$$
$$-b''^2\left(\frac{c}{r^2}-a''\right)-2\,bb'\,b''=0.$$

Po uporządkowaniu tego równania względem malejących potęg $r^2$ zauważymy, że ostatni wyraz, będąc iloczynem pierwiastków, jest zarazem iloczynem kwadratów głównych osi elipsy, wskutek tego szukana objętość elipsoidy wyrazi się przez wzór następujący:

$$\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{c^{\frac{3}{2}}}{(aa'\,a''-ab^2-a'\,b'^2-a''\,b''^2+2\,bb'\,b'')^{\frac{1}{2}}}.$$

20. Znaleźć najmniejszą z elips, opisanych na danym trójkącie.

Niech $OXY$ będzie trójkątem danym; $OX=a$, $OY=b$, kąt $YOX=\theta$. $O$ bierzemy za początek spółrzędnych; $OX$ i $OY$ za osie $x$ i $y$; przez $\alpha$ i $\beta$ oznaczamy spółrzędne środka szukanej elipsy; przy tych oznaczeniach równanie elipsy będzie:

$$A(x-\alpha)^2+2B(x-\alpha)(y-\beta)+C(y-\beta)^2+1=0 \qquad (1)$$

Ponieważ krzywa musi przechodzić przez punkty $O$, $X$, $Y$, przeto mieć będziemy trzy równania, wyznaczające wartości spółczynników $A$, $B$, $C$:

$$A=-\frac{2\beta-b}{\alpha(\alpha b+\beta a-ab)},$$

$$B=\frac{(2\alpha-a)(2\beta-b)}{2\alpha\beta(\alpha b+\beta a-ab)},$$

$$C=\frac{2\alpha-a}{\beta(\alpha b+\beta a-ab)}.$$

Pole elipsy (1) równa się:

$$\frac{\pi\sin\theta}{(AC-A^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{(zob. ćwicz. 18).}$$

Wyrażenie to osiąga minimum, kiedy $AC-B^2$ jest maximum. Wartości $A$, $B$, $C$ podstawiamy w $AC-B^2$ i szukamy, które wartości na $\alpha$ i $\beta$ czynią powyższą wielkość największą; znajdujemy:

$$\alpha=\frac{a}{3} \quad \text{i} \quad \beta=\frac{b}{3}.$$

Stąd
$$A = -\frac{3}{a^2}, \quad B = -\frac{3}{2\,ab}, \quad C = -\frac{3}{b^2}.$$

Szukane pole wyrazi się przy pomocy wzoru następującego:

$$\frac{2\,\pi}{3\sqrt{3}}\,ab\sin\theta.$$

(EULER. Rozwiązanie *Bérarda*).

---

# ROZDZIAŁ XI.

## Styczne i normalne do krzywych płaskich.

Oznaczamy przez $x'$ i $y'$ spółrzędne bieżące; przez $x$ i $y$ spółrzędne punktu styczności stycznej; przez $S_t$, $S_n$, $T$, $N$ podstyczną, podnormalną, styczną i normalną.

### A. Przypadek spółrzędnych prostokątnych.

$\alpha$) Równanie krzywej jest postaci $y = f(x)$, wtedy:

(1) $y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x)$ jest równaniem stycznej;

(2) $y' - y = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}(x' - x)$ jest równaniem normalnej;

$$S_t = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} \quad (3); \qquad S_n = y\frac{dy}{dx} \quad (4);$$

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (5); \qquad N = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad (6);$$

Oznaczając przez $p$ prostopadłą, poprowadzoną z początku spółrzędnych do stycznej, znajdziemy, że

$$p = \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (7).$$

β) Równanie krzywej jest postaci $F(x, y) = 0$; wówczas

(8) $(y' - y)\dfrac{\partial F}{\partial y} + (x' - x)\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$ jest równaniem stycznej; $y - y_0 \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=y_0} +$

(9) $(y' - y)\dfrac{\partial F}{\partial x} - (x' - x)\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$ jest równaniem normalnej; $+ (x - x_0)\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=x_0}$

$$S_t = -y\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} \quad (10); \qquad S_n = -y\,\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} \quad (11);$$

$$T = y\sqrt{1 + \left[\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial x}}\right]^2} \quad (12); \qquad N = y\sqrt{1 + \left[\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\right]^2} \quad (13);$$

$$p = \frac{x\dfrac{\partial F}{\partial x} + y\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}} \quad (14).$$

### B. Przypadek spółrzędnych biegunowych.

Niech $t$ będzie kątem biegunowym, $r$ promieniem wodzącym, $\mu$ kątem zawartym między styczną i promieniem wodzącym; wtedy:

$$S_n = \frac{dr}{dt} \quad (15); \qquad S_t = \frac{r^2}{\dfrac{dr}{dt}} \quad (16);$$

$$T = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}} \quad (17); \qquad N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \quad (18);$$

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r}{\dfrac{dr}{dt}} \quad (19); \qquad p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2}} \quad (20).$$

## PRZYKŁAD I.

Znaleźć elementy główne elipsy, wyznaczonej przez następujące równanie:

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Różniczkując, otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

Podstawiamy znalezione wartości $\frac{\partial F}{\partial x}$ i $\frac{\partial F}{\partial y}$ w odnośne równania; znajdujemy odpowiednio:

1⁰ Na zasadzie równania (8):

$$(y' - y)\frac{2y}{b^2} + (x' - x)\frac{2x}{a^2} = 0$$

czyli $\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1$; jest to szukane równanie stycznej do danej elipsy.

2⁰ Na zasadzie równania (9) mamy:

$$(y' - y)\frac{2x}{a^2} - (x' - x)\frac{2y}{b^2} = 0,$$

$\frac{(y' - y)\,x}{a^2} = \frac{(x' - x)\,y}{b^2}$, jest to szukane równanie normalnej.

3⁰ Na zasadzie równania (10):

$$S_t = -y\,\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2x}{a^2}} = -\frac{a^2 - x^2}{x}.$$

4⁰ Na zasadzie równania (11):

$$S_n = -y\,\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\,x.$$

5⁰ Równanie (12) daje:

$$T = y\sqrt{1 + \left[\frac{\frac{2y}{b^2}}{\frac{2x}{a^2}}\right]^2} = a^2\,\frac{y}{x}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}.$$

6⁰ Równanie (13) daje:

$$N = y\sqrt{1 + \left[\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}\right]^2} = b^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}.$$

7⁰ Równanie (14) daje:

$$p = \frac{x \cdot \frac{2x}{a^2} + y \cdot \frac{2y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{2x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{b^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Te elementy mogą służyć do znalezienia elementów pozostałych. Kładąc w równaniu stycznej raz $y' = 0$, drugi raz $x' = 0$, znajdujemy, że odległości od początku spółrzędnych do punktów, w których styczna przecina osie $x$ i $y$, są:

$$x' = \frac{a^2}{x}, \qquad y' = \frac{b^2}{y}.$$

Z tego wynika, że powierzchnia trójkąta, zawartego między styczną i osiami spółrzędnych, jest: $\frac{a^2 b^2}{2yx}$, a odcinek stycznej, odcięty przez osie spółrzędnych, jest:

$$\sqrt{\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2}}.$$

Z równania na $p$ otrzymujemy:

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} = \frac{1}{p},$$

a więc znaleziony odcinek stycznej równa się $\frac{a^2 b^2}{pxy}$, długość zaś stycznej jest $\frac{a^2 y}{px}$.

Odejmując, otrzymamy:

$$\frac{a^2 b^2}{pxy} - \frac{a^2 y}{px} = \frac{a^2}{pxy}(b^2 - y^2) = \frac{b^2 x}{py}.$$

Przeto iloczyn odcinków stycznej, zawartych pomiędzy osiami i punktem styczności jest:

$$\frac{a^2 y}{px} \cdot \frac{b^2 x}{py} = \frac{a^2 b^2}{p^2}.$$

Odległość ogniska od stycznej jest:

$$\frac{a^2 b^2}{p\,(a^2 + cx)}, \qquad \text{gdzie} \qquad c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

odcięta zaś i rzędna punktu, w którym prostopadła $p$ spotyka styczną, są odpowiednio:

$$\frac{a^2 (c + x)}{a^2 + cx} \qquad \text{i} \qquad \frac{a^2 y}{a^2 + cx}.$$

Odległość środka elipsy od tego punktu jest:

$$\sqrt{\frac{a^2 (c + x)^2}{(a^2 + cx)^2} + \frac{a^4 y^2}{(a^2 + cx)^2}} = a.$$

To samo wyrażenie zresztą jest już znane z geometryi analitycznej.

## PRZYKŁAD II.

Obliczyć elementy główne spirali logarytmicznej, której równanie jest następujące:

$$r = ae^{mt}.$$

1° Z równania (15), ponieważ $\frac{dr}{dt} = mae^{mt}$, znajdujemy, że:

$$S_n = mae^{mt} = mr.$$

Można więc powiedzieć, że miejscem geometrycznem końców podnormalnej do spirali logarytmicznej jest również spirala, podobna do danej.

2° Z równania (16) mamy:

$$S_t = \frac{r^2}{mr} = \frac{r}{m} = \frac{1}{m}\,ae^{mt}.$$

A więc miejscem geometrycznem końców podstycznej do spirali logarytmicznej jest spirala podobna do danej.

3° Równanie (17) daje:

$$T = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{m^2 r^2}} = \frac{r}{m}\sqrt{1 + m^2}.$$

4° Uwzględniając równanie (18), otrzymujemy:

$$N = \sqrt{r^2 + m^2 r^2} = r\sqrt{1 + m^2}.$$

$5^0$ Z równania (19) otrzymujemy:

$$\operatorname{tang} \mu = \frac{r}{mr} = \frac{1}{m}.$$

A więc kąt pomiędzy styczną do spirali logarytmicznej i jej promieniem wodzącym jest stały.

$6^0$ Wreszcie korzystając z równania (20), otrzymujemy:

$$p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + m^2 r^2}} = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

ĆWICZENIA.

1. Wykazać, że dla krzywej $y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2$ suma odległości od początku spółrzędnych do punktów, w których styczna spotyka osie, jest wielkością stałą.

Szukana suma równa się $a$.

2. Wykazać, że styczna do krzywej:

$$\frac{x + \sqrt{a^2 - y^2}}{a} = \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

ma stałą długość.

Znajdujemy, że $T = a$.

3. Wykazać, że dla krzywej, określonej równaniem:

$$e^{\frac{y}{a}} = x^2 - a^2,$$

suma stycznej i podstycznej jest proporcyonalna do prostokąta, zbudowanego na spółrzędnych punktu styczności.

Szukana suma równa się $\frac{xy}{a}$.

4. Wykazać, że w spirali hyperbolicznej, określonej równaniem:

$$r = \frac{a}{t},$$

miejscem geometrycznem końców podstycznej jest koło.

Otrzymamy: $S_t = -a$.

5. Wykazać, że krzywa określona równaniem:

$$4\,by = 4\,abx - (a^2 + 1)\,x^2$$

wyznacza z osią odciętych dwa kąty spełniające się.

$x = 0$ i $x = \frac{4\,ab}{a^2+1}$ są to odcięte punktów spotkania się krzywej z osią $x$; dla powyższych wartości $x$ znajdujemy $\frac{dy}{dx} = a$ i $\frac{dy}{dx} = -\,a$.

6. Dowieść, że pole trójkąta, zawartego pomiędzy styczną do hyperboli, określonej równaniem $xy = k^2$, a osiami asymptotycznemi do niej, jest wielkością stałą.

Odpowiedź: pole trójkąta $= 2\,k^2$.

7. Środek elipsy jest zarazem wierzchołkiem paraboli, a wielka oś pierwszej krzywej jest prostopadła do osi drugiej krzywej. Jaki winien być mimośród elipsy danej, aby ona przecinała parabolę pod kątem prostym?

Równania elipsy i paraboli są następujące:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \qquad x^2 = py.$$

Spółczynniki kierunkowe stycznych do obydwóch krzywych we wspólnym punkcie są odpowiednio:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2\,x}{a^2\,y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{p}.$$

Z warunku prostopadłości stycznych otrzymamy wartość na mimośród $e$:

$$e = \frac{\sqrt{py}}{x}.$$

8. Wykazać, że w spirali, określonej równaniem:

$$r^n = a^n \sin nt,$$

kąt zawarty pomiędzy dwiema stycznemi, przeprowadzonemi przez końce cięciwy, przechodzącej przez biegun, jest stały.

Znajdziemy z łatwością, że $\mu = nt$; oznaczając przez $\mu'$ kąt odpowiadający kierunkowi $t + \pi$, otrzymamy, że $\mu' = n\,(t + \pi)$. Różnica tych dwóch kątów $\mu$ i $\mu'$ czyli szukany kąt pomiędzy dwiema stycznemi jest $= n\pi$.

9. Udowodnić, że w hypocykloidzie, określonej równaniem:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

odcinek stycznej, wyznaczony przez osie, jest wielkością stałą, oraz znaleźć wzór na prostopadłą, opuszczoną z początku spółrzędnych na styczną.

Odpowiedź: wzór na szukany odcinek stycznej jest następujący:

$$p = (axy)^{\frac{1}{3}}.$$

10. Udowodnić że w kardioidzie, określonej równaniem:

$$r = a\,(1 - \cos t),$$

kąt utworzony przez promień wodzący i styczną równa się połowie kąta utworzonego przez promień wodzący i oś biegunową, oraz, że cięciwy przechodzące przez biegun, są stałe.

Odpowiedź: $\mu = \frac{1}{2} t$. Jeżeli przez $r'$ oznaczymy promień wodzący, mający ten sam kierunek co i promień $r$, ale zwrot przeciwny, wówczas otrzymamy:

$$r' = a\,[1 - \cos(t + \pi)] = a\,(1 + \cos t),$$

skąd

$$r + r' = 2\,a.$$

11. Znaleźć odległość bieguna od stycznej i kąt pomiędzy styczną a promieniem wodzącym w krzywej, określonej równaniem:

$$r = a\,(\sec t - \operatorname{tang} t).$$

Odpowiedź: $\operatorname{tang}\mu = -\frac{2\,ar}{a^2 + r^2}, \quad p = \frac{2\,ar^2}{\sqrt{a^4 + 6\,a^2 r^2 + r^4}}.$

12. Znaleźć wszystkie elementy główne krzywej logarytmicznej, określonej równaniem:

$$y = ce^{\frac{x}{a}}.$$

Otrzymamy:

$$\frac{y' - y}{y} = \frac{x' - x}{a}, \text{ równanie stycznej;}$$

$$\frac{y' - y}{a} = -\frac{x' - x}{y}, \text{ równanie normalnej;}$$

$$S_t = a; \quad S_n = \frac{y^2}{a}; \quad T = \sqrt{a^2 + y^2}; \quad N = \frac{y}{a}\sqrt{a^2 + y^2}; \quad p = \frac{y\,(a - x)}{\sqrt{a^2 + y^2}}.$$

13. Znaleźć elementy główne cysoidy Dioklesa:

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}$$

$$y' - y = \frac{x^{\frac{1}{2}}(3a - 2x)}{2(a-x)^{\frac{3}{2}}}(x' - x) \quad \text{równanie stycznej;}$$

$$y' - y = -\frac{2(a-x)^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}(3a-2x)}(x' - x) \quad \text{równanie normalnej;}$$

$$S_t = \frac{2x(a-x)}{3a-2x}; \qquad S_n = \frac{x^2(3a-2x)}{2(a-x)^2}; \qquad T = \frac{ax}{3a-2x}\sqrt{\frac{4a-3x}{a-x}};$$

$$N = \frac{ax}{2(a-x)}\sqrt{x(4a-3x)}; \qquad p = -\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4a-3x}}.$$

14. Znaleźć elementy główne cykloidy:

$$x = a \,.\, \text{arc}\cos\frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Otrzymamy:

$$y' - y = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}(x' - x), \quad \text{równanie stycznej;}$$

$$y' - y = -\sqrt{\frac{y}{2a-y}}(x - x), \quad \text{równanie normalnej;}$$

$$S_t = y\sqrt{\frac{y}{2a-y}}; \qquad S_n = \sqrt{2ay - y^2}; \qquad T = y\sqrt{\frac{2a}{2a-y}};$$

$$N = \sqrt{2ay}; \qquad p = \frac{y\sqrt{y} - x\sqrt{2a-y}}{\sqrt{2a}};$$

15. Wyznaczyć elementy główne linii łańcuchowej:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Otrzymamy:

$$\frac{y' - y}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \frac{x' - x}{a}, \quad \text{równanie stycznej;}$$

$$\frac{y' - y}{a} = -\frac{x' - x}{\sqrt{y^2 - a^2}}, \quad \text{równanie normalnej;}$$

$$S_n = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right); \qquad S_t = \frac{ay}{\sqrt{y^2 - a^2}}; \qquad N = \frac{y^2}{a};$$

$$T = \frac{y^2}{\sqrt{y^2 - a^2}}; \qquad p = a - \frac{x}{y}\sqrt{y^2 - a^2}.$$

Gdy $x = 0$, $p = a$.

16. Znaleźć elementy główne koła, przechodzącego przez biegun.

Równanie koła w powyższym przypadku jest następujące:

$$r = a \cos t,$$

gdzie $a$ oznacza średnicę koła. Stąd:

$$S_n = -\sqrt{a^2 - r^2}; \qquad S_t = -\frac{r^2}{\sqrt{a^2 - r^2}}; \qquad T = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}};$$

$$N = a; \qquad \operatorname{tang} \mu = -\frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}}; \qquad p = \frac{r^2}{a}.$$

17. Wyznaczyć elementy główne lemniskaty, określonej równaniem:

$$r^2 = a^2 \cos 2t.$$

Oznaczając $\sqrt{a^4 - r^4}$ przez $R$, znajdziemy:

$$S_n = -\frac{R}{r}; \qquad S_t = -\frac{r^3}{R}; \qquad T = \frac{a^2 r}{R};$$

$$N = \frac{a^2}{r}; \qquad \operatorname{tang} \mu = -\frac{r^2}{R}; \qquad p = \frac{r^3}{a^2}.$$

18. Znaleźć elementy główne spirali eliptycznej:

$$\sqrt{a^2 - b^2}\, t = a \,.\, \operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{r}.$$

Oznaczając przez $R$ wielkość $\sqrt{r^2 - (a^2 - b^2)}$, otrzymujemy:

$$S_n = \frac{r}{a} R; \qquad S_t = \frac{ra}{R}; \qquad T = \frac{r\sqrt{b^2 + r^2}}{R};$$

$$N = \frac{r}{a}\sqrt{b^2 + r^2}; \qquad \operatorname{tang} \mu = \frac{a}{R}; \qquad p = \frac{ar}{\sqrt{b^2 + r^2}}.$$

# ROZDZIAŁ XII.

## Asymptoty.

Niech $y = f(x)$ będzie równaniem krzywej w odniesieniu do osi spółrzędnych prostokątnych.

Jeżeli $f(x)$ możemy rozwinąć według malejących potęg $x$ w ten sposób, że

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 + a_{-1} \frac{1}{x} + a_{-2} \frac{1}{x^2} + \quad \text{i t. d.}$$

to przy $x = \infty$ wszystkie wyrazy, zawierające $x$ w mianowniku, stają się zerami i równanie asymptoty przybiera postać:

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots a_1 x + a_0,$$

czyli jest to krzywa stopnia $m$.

Najważniejszym przypadkiem w zastosowaniach jest ten, gdy asymptota jest linją prostą. Wtedy równanie ogólne asymptot sprowadza się do równania:

$$y = a_1 x + a_0.$$

W tym przypadku można przy pomocy równania krzywej wyznaczyć spółczynniki $a_1$ i $a_0$, ponieważ zgodnie z określeniem asymptoty znajdziemy, że przy $x = \infty$

$$a_1 = \lim \frac{y}{x}$$

$$a_0 = \lim (y - a_1 x).$$

Jeżeli będziemy uważali asymptotę prostoliniową jako granicę stycznej, gdy punkt styczności oddala się w nieskończoność, to możemy, kiedy znaleźliśmy już równanie stycznej do krzywej, wyznaczyć, jak się zmieniają odcięta i rzędna stycznej w początku, gdy $x = \infty$. Wartości $x$ i $y$ w ten sposób znalezione pozwolą wyznaczyć położenie asymptoty oraz jej równanie.

Jeżeli asymptoty są równoległe do osi $y$, i jeżeli równanie krzywej może być sprowadzone do postaci $y = f(x)$, to oznaczając przez $k$ tę wartość $x$, dla której $y = \infty$, znajdziemy równanie asymptoty w postaci następującej:

$$x = k.$$

Jeżeli zaś równanie krzywej nie może być rozwiązane względem $y$, wtedy szukamy granicy stosunku $\frac{x}{y}$ dla $y = \infty$ i, jeżeli granica ta równa się zeru, wówczas sprowadzając równanie asymptoty do postaci:

$$x = b_1 y + b_0$$

otrzymamy przez podstawienie tej wartości równanie asymptoty równoległej.

Postępując w sposób analogiczny, otrzymamy asymptoty równoległe do osi $x$.

Gdy równanie asymptot jest postaci:

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

to z równania krzywej przy $x = \infty$ otrzymujemy:

$$a_2 = \lim \frac{y}{x^2},$$

$$a_1 = \lim \frac{y - a_2 x^2}{x},$$

$$a_0 = \lim (y - a_2 x_2 - a_1 x) \quad \text{i t. d.}$$

Niechaj $F(r, t) = 0$ będzie równaniem krzywej, odniesionej do spółrzędnych biegunowych. Jeżeli przez $\alpha$ oznaczymy kąt, zawarty między asymptotą prostoliniową i osią biegunową, a przez $\delta$ odległość asymptoty od prostej równoległej przechodzącej przez biegun, to przy $r = \infty$ otrzymamy:

$$\alpha = \lim t,$$

$$\delta = \lim r(t - \alpha).$$

Granice te, które wyznaczymy przy pomocy równania krzywej, wystarczą do wyznaczenia położenia asymptoty.

Jako zastosowanie powyższych sposobów, używanych w celu wyszukiwania asymptot prostoliniowych dla krzywych, otrzymujemy twierdzenia następujące, które były udowodnione w wykładach geometryi analitycznej.

1. Jeżeli równanie krzywej może być sprowadzone do postaci:

$$x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \psi\left(\frac{y}{x}\right) + x^p \chi\left(\frac{y}{x}\right) + \text{i t. d.} = 0, \qquad (m > n > p, \text{ i t. d.})$$

wówczas wartości graniczne stosunku $\frac{y}{x}$, t. j. wartości $a_1$ są rzeczywistymi pierwiastkami równania $\varphi(a_1) = 0$ i wtedy otrzymujemy:

$$a_0 = -\frac{\psi(a_1)}{\varphi'(a_1)}.$$

Jeżeli zaś $\psi(a_1) = 0$ i $\varphi'(a_1) = 0$, to $a$ wyznaczymy z równania:

$$a_0^2 \frac{\varphi''(a_1)}{2} + a_0 \psi'(a_1) + \chi(a_1) = 0 \quad \text{i t. d.}$$

2. Gdy równanie krzywej stopnia $m$ jest sprowadzone do postaci:

$$\varphi(x) y^n + \psi(x) y^{n-1} + \chi(x) y^{n-2} + \text{i t. d.} = 0, \qquad (n < m),$$

wówczas pierwiastki rzeczywiste równania $\varphi(x) = 0$, nie sprowadzające do zera równanie $\psi(x)$, wyznaczają zawsze asymptoty równoległe do osi $y$.

3. Jeżeli mamy dane równanie krzywej w spółrzędnych biegunowych:

$$\varphi(t)\, r^m + \psi(t)\, r^{m-1} + \chi(t)\, r^{m-2} + \text{i t. d.} = 0$$

to pierwiastki rzeczywiste równania $\varphi(\alpha) = 0$ określają kierunek asymptot; wówczas znajdujemy:

$$\lim r\, (t = \alpha) = -\frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

## PRZYKŁAD I.

Mamy znaleźć asymptoty krzywej, określonej równaniem:

$$x^3 - y(x - a) = 0.$$

Równanie to możemy napisać inaczej:

$$y = \frac{x^3}{x - a},$$

Widzimy, że przy $x = a$ mamy $y = \infty$, a więc krzywa posiada asymptotę prostoliniową równoległą do osi $y$, której równanie jest $x = a$.

Jeżeli $x^3$ podzielimy przez $x - a$, otrzymamy:

$$y = x^2 + ax + a^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^4}{x^2} + \quad \text{i t. d.}$$

Rezultat ten jest rozwinięciem $y$ względem malejących potęg $x$; z tego wynika, że krzywa oprócz prostoliniowej asymptoty posiada jeszcze asymptotę paraboliczną, określoną równaniem:

$$y = x^2 + ax + a^2$$

czyli

$$y - \frac{3\,a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

## PRZYKŁAD II.

Znaleźć asymptoty krzywych drugiego rzędu, określonych ogólnym równaniem:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Łącząc w jeden wszystkie wyrazy drugiego stopnia, oraz wszystkie wyrazy pierwszego stopnia, otrzymujemy:

$$x^2 \left(A \frac{y^2}{x^2} + B \frac{y}{x} + C\right) + x \left(D \frac{y}{x} + E\right) + F = 0.$$

Wartości na $a_1$ są to pierwiastki rzeczywiste równania:

$$Aa_1^2 + Ba_1 + C = 0,$$

t. j.

$$a_1 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,AC}}{2\,A}.$$

W przypadku elipsy, $B^2 - 4\,AC$ jest ujemne, a więc wartości na $a_1$ są urojone: elipsa nie ma wcale asymptot.

Następnie mamy:

$$a_0 = -\frac{Da_1 + E}{2\,Aa_1 + B}$$

przeto równanie asymptot będzie:

$$y = a_1\,x - \frac{Da_1 + E}{2\,Aa_1 + B},$$

w tym równaniu należy podstawić zamiast $a_1$ odpowiednie wartości.

W przypadku paraboli, $B^2 - 4\,AC = 0$; $a_1$ mieć będzie tylko jedną wartość $a_1 = -\frac{B}{2A}$. Dla tej wartości $a_1$ ostatni wyraz w równaniu asymptot staje się $= \infty$.

Hyperbola tedy jest jedyną krzywą, z pośród krzywych drugiego rzędu, która posiada asymptoty.

## PRZYKŁAD III.

Mamy znaleźć asymptoty krzywej, określonej równaniem:

$$y^3 = ax^2 + x^3.$$

Równanie stycznej do tej krzywej jest:

$$y' - y = \frac{2\,ax + 3\,x^2}{3\,y^2}\,(x' - x).$$

Jeżeli założymy że $x' = 0$, to otrzymamy rzędną w początku

$$y' = y - \frac{2\,ax^2 + 3\,x^3}{3\,y^2} = \frac{3\,(y^3 - x^3) - 2\,ax^2}{3\,y^2}.$$

Jeżeli w tem samem równaniu stycznej założymy, że $y' = 0$, otrzymamy odciętą w początku:

$$x' = x - \frac{3\,y^3}{2\,ax + 3\,x^2} = \frac{2\,ax^2 - 3\,(y^3 - x^3)}{2\,ax + 3\,x^2}.$$

Ponieważ z równania krzywej otrzymujemy, że $y^3 - x^3 = ax^2$, zatem wartości na rzędną i odciętą mieć będą postać:

$$y' = \frac{a}{3}\,\frac{x^2}{y^2}, \qquad x' = -\frac{ax^2}{2\,ax + 3\,x^2} = -\frac{a}{\frac{2\,a}{x} + 3}.$$

Gdy $x = \infty$, to

$$x' = -\frac{a}{\frac{2\,a}{x} + 3} = -\frac{a}{3}$$

jeżeli zaś jednocześnie $y = \infty$ i $x = \infty$, to ułamek $\frac{x^2}{y^2}$ zmierza do granicy 1, skąd

$$\lim.\ \frac{a}{3} \cdot \frac{x^2}{y^2} = \frac{a}{3}.$$

Rzędna w początku asymptoty jest $\frac{a}{3}$, odcięta zaś w tym punkcie jest $-\frac{a}{3}$. Równanie asymptoty jest:

$$\frac{x}{-\frac{a}{3}} + \frac{y}{\frac{a}{3}} = 1 \quad \text{czyli} \quad y = x + \frac{a}{3}.$$

Jest to więc prosta, poprowadzona pod kątem $45^0$ do osi $x$.

## PRZYKŁAD IV.

Znaleźć asymptoty krzywej, określonej przez równanie:

$$y^4 - x^4 + 2\,ax^2 y = 0.$$

Zakładamy, że $y = xz$ (skąd $z = \frac{y}{x}$ i $\lim.\frac{y}{x} = \lim. z$). Przy tem założeniu równanie dane przybiera postać:

$$x^4 z^4 - x^4 + 2\,ax^3 z = 0$$

albo

$$xz^4 - x + 2\,az = 0,$$

skąd: $x = \frac{2\,az}{1 - z^4}$ i następnie $y = \frac{2\,az^2}{1 - z^4}$.

Z tych dwu wyrażeń widzimy, że gdy $z = \pm 1$, to $x$ i $y$ stają się nieskończenie wielkiemi.

Mamy tedy

$$\lim \frac{y}{x} = a_1 = \pm 1,$$

i następnie, ponieważ równanie stycznej do krzywej jest:

$$y' - y = \frac{2x^3 - 2axy}{2y^3 + ax^2}(x' - x);$$

zatem przy $x' = 0$ otrzymamy, uwzględniając równania krzywej,

$$y' = \frac{2(y^4 - x^4) + 3ax^2y}{2y^3 + ax^2} = -\frac{ax^2y}{2y^3 + ax^2}.$$

Podstawiając $xz$ zamiast $y$, otrzymamy wzór na rzędną w początku stycznej:

$$y' = \frac{ax^3z}{2x^3z^3 + ax^2} = -\frac{az}{2z^3 + \frac{a}{x}},$$

Dla asymptoty, odpowiadającej $x = \infty$ czyli $z = \pm 1$, mamy

$$a_0 = -\frac{a}{2}$$

Równanie więc asymptot jest:

$$y = \pm x - \frac{a}{2}.$$

Sposób podany w tem ćwiczeniu można często stosować.

## PRZYKŁAD V.

Stwierdzić, czy krzywa, określona równaniem:

$$x^4y^4 - (x^2 - y^2)^2 + y^2 - 1 = 0$$

posiada asymptoty równoległe do osi $y$.

Porządkujemy to równanie względem $y$:

$$(x^4 - 1)y^4 + (2x^2 + 1)y^2 - x^4 - 1 = 0.$$

Pierwiastki rzeczywiste równania $x^4 - 1 = 0$ są $\pm 1$; nie czynią one równym zeru wyrażenia $2x^2 + 1$, przeto dana krzywa posiada dwie asymptoty równoległe do osi $y$, które są określone równaniami $x = +1$ i $x = -1$.

## PRZYKŁAD VI.

Równanie hyperboli, odniesione do jednego z ognisk, jest:

$$r = \frac{b^2}{a - c\cos t}, \qquad \text{gdzie} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Jeżeli napiszemy powyższe równanie w postaci następującej:

$$(a - c\cos t)\, r - b^2 = 0$$

to równanie $a - c\cos\alpha = 0$ wyznaczy nam kąty, utworzone przez asymptoty i oś biegunową.

Będziemy tedy mieli:

$$\cos\alpha = \frac{a}{c},$$

a ponieważ

$$\lim r(t - \alpha) = -\frac{b^2}{c\sin\alpha},$$

przeto, pisząc zamiast $\sin\alpha$ jego wartość $\frac{b}{c}$, znajdziemy

$$\lim r(t - \alpha) = b;$$

jest to odległość asymptot od dwu prostych równoległych, przechodzących przez ognisko.

## ĆWICZENIA.

1. $$(a^2 - x^2)\, y^2 = (a^2 + x^2)\, x^2.$$

Istnieją dwie asymptoty równoległe do osi $y$: $x = \pm a$.

2. $$ax^3 + x^3 y - ay^3 = 0.$$

Jedna asymptota równoległa do osi $x$: $y = -a$.

3. $$(a + b + x)\, y = c\,(b + x).$$

Jedna z asymptot jest równoległa do osi $y$: $x = -a - b$, druga jest równoległą do osi $x$: $y = c$.

4. $$(x + a)\, y^2 = x + 2a.$$

Jedna z asymptot jest równoległa do osi $y$: $x = -a$, dwie drugie są równoległe do osi $x$: $y = \pm 1$.

5. $$x^3 + y^3 = a^3.$$

Równanie asymptoty jest następujące: $y = -x$; jest to prosta, która tworzy z osią $x$ kąt równy $\frac{3\pi}{4}$.

6. $$y = a\frac{\sin x}{x}.$$

Asymptotą dla tej krzywej jest oś $x$; krzywa kolejno przecina asymptotę z jednej i z drugiej strony i wreszcie w nieskończoności staje się do niej styczną.

7. $$y = \sin\frac{a}{x}.$$

Oś $x$ jest asymptotą danej krzywej.

8. $$(x+1)\,y = (x-1)\,x.$$

Postępując podobnie jak w przykładzie II, otrzymujemy następujące równania asymptot: dla jednej asymptoty: $y = x - 2$, dla drugiej asymptoty równoległej do osi $y$: $x = -1$.

9. $$(x-2)\,y = (x-1)\,(x-3).$$

Równanie jednej z asymptot: $y - x + 2 = 0$ (Przykład II), druga jest równoległa do osi $y$: $x = +2$.

10. $$y^2 = \cos\frac{y}{x}.$$

Istnieją dwie asymptoty równoległe do osi $x$: $y = \pm 1$.

11. $$y = \frac{x^3 - 3\,ax^2 + a^3}{x^2 - 3\,bx + 2\,b^2}.$$

Istnieją dwie asymptoty równoległe do osi $y$: $x = 2\,b$, $x = b$, i trzecia asymptota, której równanie: $y = x - 3\,(a - b)$ otrzymuje się przez rozwinięcie w szereg (Przykład I).

12. $$\frac{y^2}{y^2 + x^2} = \frac{(y-b)^2}{m^2}. \qquad \textit{(Konchoida).}$$

Asymptota jest równoległa do osi $x$: $y = b$.

13. $$xy^2 - y = ax^3 + bx^2 + cx + e.$$

Jedną asymptotą jest oś $y$; postępujemy następnie jak w przykładzie II i otrzymujemy równania dwu drugich asymptot:

$$y = +x\sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}},$$

$$y = -x\sqrt{a} - \frac{b}{2\sqrt{a}}.$$

14. $$y^2 = \frac{x^3 + ax^2}{x - a}.$$

Rozwijamy $y^2$ w szereg podobnie, jak w przykładzie I, następnie wyciągamy pierwiastek kwadratowy i otrzymujemy:

$$y = \pm(x + a).$$

Jest to równanie dwu asymptot, przecinających się pod kątem prostym; istnieje trzecia asymptota, której równaniem jest: $x = a$.

15. $$y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0.$$

Postępując podobnie jak w przykładzie II, znajdujemy:

$$y = +x\sqrt{1+\sqrt{2}} + \frac{a}{8} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 4}{\sqrt{1+\sqrt{2}}},$$

$$y = -x\sqrt{1+\sqrt{2}} - \frac{a}{8} \cdot \frac{3\sqrt{2} - 4}{\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

Są to równania dwu asymptot.

16. $$(x^2 - 1)y = (x^2 + 1)x.$$

Mamy dwie asymptoty równoległe do osi $y$: $x = \pm 1$ i trzecią $y = x$, którą otrzymujemy, postępując podobnie jak w przykładzie II.

17. $$y^3 - ax^2 + x^3 = 0.$$

Równanie asymptoty jest następujące:

$$y = -x + \frac{a}{3}. \qquad \text{(Przykład IV).}$$

18. $$y^3 - 3axy + x^3 = 0. \qquad \textit{(Liść Kartezjusza).}$$

Postępując według wskazówek podanych w przykładzie IV, otrzymujemy następujące równanie asymptoty: $y = -x - a$.

19. $$ax^4 - by^4 + c^3 xy = 0.$$

Postępując podobnie jak w dwóch poprzednich przykładach, znajdziemy równanie asymptoty:

$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^4 x.$$

20. $$y^3 - bx^3 + c^2 xy = 0.$$

Postępując podobnie, jak wyżej, otrzymujemy równanie asymptoty:

$$y = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}} \left(x - \frac{c^2}{3\, a^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}}\right).$$

21. $$r = \frac{a \sin^2 t}{\cos t}.$$ *(Równanie biegunowe cysoidy).*

Równania dwóch asymptot są (Przykład IV):

$$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad \delta = \pm a.$$

22. $$x^3 - xy + a^3 = 0.$$

Otrzymujemy równanie asymptoty parabolicznej: $y = x^2$.

23. $$x^4 - y^4 + a^2 xy = 0.$$

Zakładając, że $y^4 = y_1$, otrzymujemy z danego równania następujące równanie:

$$y_1 = x^4 + x \,.\, a^2 y_1^{\frac{1}{4}},$$

Rozwijając $y_1^{\frac{1}{4}}$ według twierdzenia L a g r a n g e'a, otrzymujemy asymptotę hyperboliczną, określoną równaniem:

$$y = x + \frac{a^2}{4x}$$

oraz asymptotę prostoliniową określoną równaniem: $y = x$.

24. $$y^3 - 2\, xy^2 + x^2 y - a^3 = 0.$$

Otrzymujemy dwie asymptoty hyperboliczne:

$$y - x \mp \sqrt{\frac{a^3}{x}} = 0$$

i dwie asymptoty prostoliniowe: $y = x$; $y = 0$.

# ROZDZIAŁ XIII.

## Punkty osobliwe krzywych płaskich.

### 1. Punkty przegięcia.

Mamy równanie krzywej płaskiej $y = f(x)$, albo $F(x, y) = 0$.

Spółrzędnemi punktu przegięcia są pary wartości rzeczywistych $x$ i $y$, spełniające jednocześnie równanie krzywej i jedno z następujących równań:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \infty.$$

Punkt przegięcia istnieje, jeżeli:

1⁰ dla dwu jakichkolwiek punktów krzywej, leżących nieskończenie blizko punktu określonego przez każdą taką parę, lecz z dwóch różnych stron tego punku, pochodna $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ma znaki przeciwne i

2⁰ jeżeli dla tych samych wartości $x$ i $y$ pochodna $\frac{d^3 y}{dx^3}$ jest różna od zera.

Jeżeli pierwszy warunek nie jest spełniony, punkt przegięcia nie istnieje, jeżeli zaś $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, to punkty są określone równaniem krzywej i jednem z równań:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0, \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = \infty \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli równanie krzywej jest dane w spółrzędnych biegunowych, to punkty przegięcia są określone równaniem krzywej i równaniem:

$$\frac{dp}{dr} = 0,$$

gdzie $p$ jest to prostopadła, poprowadzona z bieguna do stycznej.

Punkt przegięcia istnieje, jeżeli $\frac{dp}{dr}$ zmienia znak, przechodząc przez zero.

$\left(\text{Przypominamy że } p = \dfrac{r^2}{\left(r^2 + \left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right).$

PRZYKŁAD.

Wyznaczyć punkty przegięcia krzywej:

$$y^2 = ax^2 + bx^3,$$

$$\text{gdzie } b > 0, \qquad a \gtreqless 0.$$

Różniczkując dane równanie, otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2a + 3bx}{2(a+bx)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b(4a+3bx)}{4(a+bx)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{3b^2(2a+bx)}{8(a+bx)^{\frac{5}{2}}}.$$

Punkty przegięcia, o ile istnieją, są określone równaniami:

$$4a + 3bx = 0,$$
$$y^2 = ax^2 + bx^3.$$

Otrzymujemy po rozwiązaniu tych równań następujące pary wartości:

$$x = -\frac{4a}{3b} \quad \text{i} \quad y = -\frac{4a}{9b}\sqrt{-3a}, \tag{1}$$

$$x = -\frac{4a}{3b} \quad \text{i} \quad y = +\frac{4a}{9b}\sqrt{-3a}. \tag{2}$$

Jeżeli $a > 0$, $y$ jest urojone i krzywa nie posiada punktu przegięcia.

Jeżeli $a = 0$, to dla obydwóch par wartości mamy $x = 0$, $y = 0$; ale te znaczenia $x$ i $y$ nie wyznaczają punktu przegięcia, bo $\frac{d^2y}{dx^2}$ (w tym przypadku równe $\frac{3b^{\frac{1}{2}}}{4x^{\frac{1}{2}}}$), staje się urojone dla wartości $x < 0$.

Jeżeli $a < 0$, wartości na $y$ są rzeczywiste. Wtedy:

1⁰ $\frac{d^2y}{dx^2}$ zmienia znak dla wartości $x$ trochę mniejszych, lub trochę większych od $-\frac{4a}{3b}$,

2⁰ dla tych wartości $x$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ nie jest zerem.

W tym ostatnim przypadku krzywa ma dwa punkty przegięcia, których spółrzędnemi są pary wartości (1) i (2).

## ĆWICZENIA.

1. $$y = \cos m \,.\, x \qquad (m \text{ jest dodatnie}).$$

Krzywa ta posiada nieskończenie wiele punktów przegięcia, leżących na osi $x$; odcięte ich są następujące:

$$x = \pm \frac{\pi}{2\,m}, \quad x = \pm \frac{3\,\pi}{2\,m}, \quad x = \pm \frac{5\,\pi}{2\,m}, \quad \ldots . x = \pm \frac{(2\,n + 1)\,\pi}{2\,m},$$

gdzie $n$ jest jakąkolwiek liczbą całkowitą dodatnią lub ujemną.

2. Wyznaczyć odległość pomiędzy dwoma następującemi po sobie punktami przegięcia krzywych:

$$y = \sin mx \quad \text{i} \quad y = \operatorname{tang} px \qquad (m \text{ i } p \text{ są dodatnie}).$$

Szukana odległość jest:

$$n\pi \left( \frac{1}{m} - \frac{1}{p} \right),$$

gdzie $n$ dowolna liczba całkowita, dodatnia lub ujemna.

3. $$y = e^{-\frac{1}{ax}}.$$

Punkt przegięcia

$$x = \frac{1}{2\,a}, \qquad y = \frac{1}{e^2}.$$

4. Wykazać, że jeżeli równanie:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0 \tag{1}$$

posiada tylko pierwiastki rzeczywiste, to krzywa określona równaniem:

$$y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

posiada jeden punkt przegięcia, którego odcięta jest trzecią częścią sumy pierwiastków równania (1). Jakoż jeżeli oznaczymy przez $a$, $b$, $c$ rzeczywiste pierwiastki równania (1), to krzywa może być określona przez równanie:

$$y = (x - a)\,(x - b)\,(x - c),$$

skąd z łatwością znajdziemy, że krzywa ta posiada jeden punkt przegięcia, którego odcięta posiada wartość:

$$x = \frac{a + b + c}{3}.$$

5. $$x^3 - axy - b^2\,y = 0. \qquad \textit{(Trójząb Newtona).}$$

Punkt przegięcia znajduje się w początku spółrzędnych.

6. $$xy^2 + ax^2 + b^3 = 0.$$

Gdy $a$ i $b$ mają ten sam znak, krzywa ma dwa punkty przegięcia, których odcięte są:

$$x = \pm b \sqrt{\frac{b}{a}(3 + \sqrt{12})}.$$

Jeżeli $a$ i $b$ mają znaki przeciwne, to istnieją dwa punkty przegięcia, których odcięte mają następujące wartości:

$$x = \pm b \sqrt{\frac{b}{a}(3 - \sqrt{12})}.$$ (CRAMER).

7. $$a^n y = x^{n+1}.$$

Punkt przegięcia znajduje się w początku spółrzędnych; jest to punkt podwójny, jeżeli $n = 2$; jeżeli $n = 3$, to istnieje punkt potrójny; i t. d.

8. $$y = (ax + b)(ax - b)^{\frac{p}{q}}, \qquad \left(\frac{p}{q} < 1\right).$$

Istnieją dwa punkty przegięcia:

$$x = \frac{b}{a}, \qquad y = 0;$$

$$x = \frac{b}{a}\,\frac{3q - p}{p + q}, \qquad y = \frac{4bq}{p + q}\left(2b \cdot \frac{q - p}{p + q}\right)^{\frac{p}{q}}.$$

9. $$r^2 = \frac{a^2}{t}.$$

Różniczkując, otrzymujemy

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r^3}{2a^2},$$

następnie zaś

$$p = \frac{2a^2 r}{(4a^4 + r^4)^{\frac{1}{2}}};$$

różniczkując to wyrażenie, znajdziemy:

$$\frac{dp}{dr} = \frac{2a^2(4a^4 - r^4)}{(4a^4 + r^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Jeżeli założymy, że $\frac{dp}{dr} = 0$ i jednocześnie z tem równaniem uważać będziemy równanie krzywej, to znajdziemy, że w punkcie $r = 2^{\frac{1}{2}}a$ i $t = \frac{1}{2}$ krzywa posiada przegięcie.

10. $r^2 = a^2 \cos 2t.$ *(Lemniskata Bernoulli'ego).*

Różniczkując, otrzymujemy:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\sqrt{a^4 - r^4}}{r},$$

i następnie

$$p = \frac{r^3}{a^2}, \quad \text{skąd} \quad \frac{dp}{dr} = \frac{3r^2}{a^2}.$$

Z tego ostatniego wyrażenia znajdziemy, że początek spółrzędnych jest punktem przegięcia dla obydwóch gałęzi krzywej.

11. $$y = a - b\cos t$$
$$x = at - b\sin t.$$ *(Równanie trochoidy).*

Druga pochodna:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{b(a\cos t - b)}{(a - b\cos t)^3}.$$

Przyrównując ją do zera, otrzymamy:

$$\cos t = \frac{b}{a} \quad \text{i następnie} \quad y = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

Są to spółrzędne punktu przegięcia krzywej.

## 2. Punkty wielokrotne.

Niech

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

będzie równaniem algebraicznem i wymiernem danej krzywej, zaś

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

pierwsze pochodne tego równania, wzięte względem $x$ i $y$.

Wartości na $x$ i $y$, czyniące jednocześnie zadość równaniom (1) i (2), są spółrzędnemi punktów wielokrotnych

Jeżeli związki następujące:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 0; \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

nie są spełnione, wówczas znajdujemy wartości na $\frac{dy}{dx}$ dla każdego p u n k t u p o d w ó j n e g o z drugiej pochodnej danego równania krzywej; pochodna ta, na zasadzie równania (2), ma postać:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0.$$

W przypadku p u n k t u p o t r ó j n e g o, o ile nie zachodzą jednocześnie związki: $\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} = 0$, $\frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} = 0$, $\frac{\partial^3 F}{\partial y \partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0$, to wartości na $\frac{dy}{dx}$ otrzymamy z wyrażenia trzeciej pochodnej równania (1), w której zakładamy, że $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$.

W ten sam sposób postępujemy dalej.

Jeżeli równanie krzywej dane jest w postaci wyraźnej i zawiera pierwiastki o znaku podwójnym, wówczas wyznaczamy punkty wielokrotne przez znalezienie takich wartości na $x$, aby w równaniu krzywej zniknął jeden z wyrazów, zawierających znak pierwiastka, nie znikając jednak w pochodnej $\frac{dy}{dx}$. Następnie równanie krzywej da nam odpowiednie wartości na $y$. Można również równanie krzywej uczynić wymiernym i postępować jak wyżej.

Punkty wielokrotne występują w przypadkach następujących:

1⁰. Jeżeli wartości na $\frac{dy}{dx}$ są rzeczywiste i różne, to znaleziony punkt wielokrotny jest punktem i s t o t n i e w i e l o k r o t n y m.

2⁰. Jeżeli wartości na $\frac{dy}{dx}$ są rzeczywiste i równe i jeżeli, gdy $x$ albo $y$ przybierają różne wartości po obydwóch stronach uważanego punktu, odcięta i rzędna krzywej po jednej stronie punktu wielokrotnego są rzeczywiste, po drugiej zaś stronie urojone, wówczas punkt znaleziony jest p u n k t e m z w r o t u.

Punkt zwrotu będzie p i e r w s z e g o r o d z a j u, jeżeli w punkcie uważanym $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ma znaki przeciwne dla obydwóch gałęzi krzywej. Punkt zwrotu będzie d r u g i e g o r o d z a j u, gdy $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ma ten sam znak dla obu gałęzi krzywej.

3⁰. Jeżeli wartości na $\frac{dy}{dx}$ są urojone, to punkt wielokrotny jest punktem o d o s o b n i o n y m lub sprzężonym.

## PRZYKŁAD I.

Mamy krzywą, określoną równaniem:

$$F = y^4 + x^4 - 2\,ay^3 + 2\,bx^2 y = 0.$$

Pierwsza pochodna danego równania jest:

$$(2\,y^3 - 3\,ay^2 + bx^2)\frac{dy}{dx} + 2\,x^3 + 2\,bxy = 0.$$

Przyrównując do zera pierwsze pochodne cząstkowe funkcyi $F$, wzięte względem $x$ i $y$, otrzymujemy:

$$x(x^2+by)=0,$$

$$2y^3-3ay^2+bx^2=0.$$

Ponieważ równania te, jak również i równanie krzywej są spełnione dla wartości rzeczywistych $x=0$ i $y=0$, przeto punkt określony przez te wartości $x$ i $y$ jest punktem wielokrotnym. Oprócz tego mamy:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=4(3x^2+by),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=4bx,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=12y(y-a).$$

Przy $x=0$ i $y=0$ pochodne powyższe stają się równe zeru, gdy przy tych samych wartościach $x$ i $y$ trzecie pochodne funkcyi $F$ są różne od zera.

Aby wyznaczyć spółczynniki kierunkowe stycznych do różnych gałęzi krzywej, należy zbadać trzecią pochodną obliczoną z równania krzywej. W wyrażeniu na tę pochodną przyrównujemy do zera drugie pochodne cząstkowe funkcyi $F$, i kładziemy następnie $x=0$ i $y=0$. Wtedy trzecia pochodna przybiera postać:

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-b\,\frac{dy}{dx}=0.$$

Równanie to jest spełnione przez następujące wartości $\frac{dy}{dx}$ rzeczywiste i różne:

$$\frac{dy}{dx}=0,\qquad \frac{dy}{dx}=+\sqrt{\frac{b}{a}},\qquad \frac{dy}{dx}=-\sqrt{\frac{b}{a}},$$

Widzimy więc, że początek układu spółrzędnych jest punktem potrójnym; z trzech stycznych, poprowadzonych do trzech przecinających się gałęzi krzywej, jedna jest osią $x$, a dwie drugie styczne są jednakowo nachylone do osi $x$. (CRAMER).

## PRZYKŁAD II.

Mamy krzywą, określoną równaniem:

$$(a^2 y - bx^2)^2 = a^4 (x - a)^3.$$

Punkty wielokrotne możnaby wyznaczyć, stosując zwykłą metodę postępowania; lepiej jednak rozwiązać równanie dane względem $y$:

$$y = \frac{b}{a^2} x^2 \pm (x - a)^{\frac{3}{2}}.$$

Z tego ostatniego równania widzimy, że:

$1^0$. dla każdej wartości $x > a$, $y$ posiada dwie wartości rzeczywiste;

$2^0$. że przy $x = a$ mamy $y = b$; obie wartości $y$ sprowadzają się do jednej;

$3^0$. przy $x < a$ wartości $y$ są urojone. Możemy tedy powiedzieć, że punkt o spółrzędnych $x = a$, $y = b$ jest punktem podwójnym. Punkt ten jest punktem zwrotu, jeżeli obydwie gałęzie krzywej mają w tym punkcie wspólną styczną. Dalej znajdujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{a^2} x \pm \frac{5}{2} (x - a)^{\frac{3}{2}}.$$

Przy $x = a$, $y = b$ otrzymamy na $\frac{dy}{dx}$ dwie jednakowe wartości:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2b}{a},$$

a więc znaleziony punkt, będąc punktem podwójnym, jest punktem zwrotu. Ponieważ:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2b}{a^2} \pm \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} (x - a)^{\frac{1}{2}},$$

zatem dla każdej wartości $x$ trochę większej od $a$ mamy $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$, przeto punkt znaleziony jest punktem zwrotu drugiego rodzaju.

## PRZYKŁAD III.

Mamy dane równanie krzywej: $F = ay^2 - x^3 + bx^2 = 0$.

Pierwsza pochodna tego równania jest:

$$2\,ay \frac{dy}{dx} - 3\,x^2 + 2\,bx = 0.$$

Przyrównując do zera pierwsze pochodne cząstkowe funkcyi $F$, otrzymujemy:

$$y = 0$$

$$x(3x - 2b) = 0.$$

Te dwa równania, jak również i równanie krzywej są spełnione gdy $x = 0$, $y = 0$.

Punkt określony temi wartościami $x$ i $y$ jest punktem wielokrotnym. Ponieważ dla tych wartości $x$ i $y$ drugie pochodne cząstkowe funkcyi $F$ nie są zerami, zatem z drugiej pochodnej wyznaczymy wartość $\frac{dy}{dx}$.

Druga pochodna jest

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x + b = 0$$

stąd:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{3x - b}{a}},$$

Przy $x = 0$, wartości $\frac{dy}{dx}$ są urojone, a więc początek spółrzędnych jest punktem odosobnionym. (CRAMER).

## ĆWICZENIA.

1. $(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) = 0.$ *(Lemniskata).*

Początek spółrzędnych jest punktem podwójnym; styczne poprowadzone w tym punkcie są dwusiecznemi kątów między osiami spółrzędnych.

2. $y^2 = ax^3.$ *(Rozwinięta paraboli).*

Początek spółrzędnych jest punktem zwrotu pierwszego rodzaju. Oś odciętych jest wspólną styczną.

3. $y^2 = ax^2 + bx^3.$ ($a$ i $b$ są dodatnie).

W początku spółrzędnych istnieje punkt podwójny. Spółczynniki kierunkowe stycznych w tym punkcie są: $\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{a}$. Styczne są jednakowo nachylone do osi odciętych.

4. $y^2(a - x) - x^3 = 0.$ *(Cysoida).*

W początku spółrzędnych znajduje się punkt zwrotu pierwszego rodzaju. Oś odciętych jest wspólną styczną.

5. $$x^3 - 3\,axy + y^3 = 0. \qquad \textit{(Liść Descartesa).}$$

Początek spółrzędnych jest punktem podwójnym. Obie osie są styczne do dwu gałęzi krzywej.

6. $$(y - x^2)^2 = x\,(x - a)^3.$$

Istnieje punkt zwrotu pierwszego rodzaju, którego spółrzędne są: $x = a$, $y = a^2$. Spółczynnik kierunkowy wspólnej stycznej jest:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,a.$$

7. $$(x^2 + y^2)^2 = a^2\,x^2 + b^2\,y^2.$$

W początku spółrzędnych mamy punkt odosobniony.

8. $$x^6 - 3\,a^4\,x^2 + 2\,y^3 - 3\,ay^2 + a^3 = 0.$$

Punkt podwójny: $x = 0$, $y = a$.

W punkcie tym $\dfrac{dy}{dx} = \pm\,a^{\frac{3}{2}}$.

9. $$a^6\,y^2 - 2\,a^4\,x^3\,y + a^2\,x^6 - x^7 = 0.$$

Początek spółrzędnych jest punktem zwrotu pierwszego rodzaju, oś odciętych jest wspólną styczną.

10. $$y = \pm\,(x - a)\sqrt{x - b}. \qquad (a < b).$$

Punkt odosobniony: $x = a$, $y = 0$.

11. $$y = \pm\,(x^2 - a^2)\sqrt{x} - \frac{2\,a^3}{x}.$$

Punkt podwójny: $x = a$, $y = -2\,a^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2\,a\,(1 \pm \sqrt{a}).$$

12. $$x^4 - ax^2\,y + axy^2 + \frac{1}{4}\,a^2\,y^2 = 0.$$

Początek spółrzędnych jest punktem zwrotu drugiego rodzaju. Oś odciętych jest wspólną styczną.

13. $$y^2 + x = x\,(x - 1)^2.$$

Początek spółrzędnych jest punktem odosobnionym.

14. $$x^4 - 2ax^3\sqrt{2} + 2a^2x^2 - ay^3 - a^2y^2 = 0.$$

Początek spółrzędnych jest punktem podwójnym, przyczem

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}.$$

15. $$y^2 = bx^3 - ax^2.$$

W początku spółrzędnych znajduje się punkt odosobniony.

16. Cykloida posiada nieskończenie wiele punktów zwrotu pierwszego rodzaju, których spółrzędne są następujące:

$$y = 0, \qquad x = 2\,na\pi.$$

gdzie $n$ jest liczbą całkowitą, dodatnią lub ujemną.

17. $$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$ *(Rozwinięta elipsy).*

Istnieją cztery punkty zwrotu pierwszego rodzaju:

$$x = 0, \qquad y = +\frac{c^2}{b}; \qquad \frac{dy}{dx} = +\infty;$$

$$x = 0, \qquad y = -\frac{c^2}{b}; \qquad \frac{dy}{dx} = -\infty;$$

$$x = +\frac{c^2}{a}, \qquad y = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = 0;$$

$$x = -\frac{c^2}{a}, \qquad y = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = 0.$$

18. $$xy^2 + x^2y + x^2 - y^2 + 3x + 3y = 0.$$

Istnieją dwa punkty podwójne:

$$x = 3, \qquad y = -3; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

$$x = -1, \qquad y = 1; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm 1.$$

19. $$x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^2x^2 + a^4 = 0.$$

Istnieją trzy punkty podwójne:

$$x = 0, \qquad y = -a; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$x = a, \qquad y = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$x = -a, \qquad y = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$ (CRAMER).

20. $$(x^2 - y^2)\,ay - x^4 = 0.$$

W początku spółrzędnych znajduje się punkt potrójny:

$$\frac{dy}{dx} = +1, \qquad \frac{dy}{dx} = -1, \qquad \frac{dy}{dx} = 0.$$

21. $$y^4 + x^4 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 + a^4 = 0.$$

Istnieją cztery punkty podwójne:

$$x = 0, \qquad y = a; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$x = 0, \qquad y = -a; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

$$x = a, \qquad y = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}.$$

$$x = -a, \qquad y = 0; \qquad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2}.$$

22. $$y^4 - axy^2 + x^4 = 0.$$

Istnieje punkt potrójny w początku spółrzędnych. Dwie gałęzie krzywej, mające za wspólną styczną oś $x$, tworzą punkt zwrotu pierwszego rodzaju. Oś $y$ jest styczna do trzeciej gałęzi krzywej.

23. $$(x^2 + y^2)^3 - 4a^2x^2y^2 = 0.$$ *(Róża czworolistna).*

Początek spółrzędnych jest punktem poczwórnym. Krzywa składa się z czterech gałęzi; do każdej z nich osie $x$ i $y$ są styczne.

24. $$y^4 + x^4 - 2bx^2y = 0.$$

Początek spółrzędnych jest punktem potrójnym. Dwie gałęzie krzywej, dla których oś $y$ jest wspólną styczną, tworzą punkt zwrotu pierwszego rodzaju; styczną do trzeciej gałęzi jest oś $x$.

25. $$x^5 - ay^4 + 2bx^3y + b^2xy^2 = 0.$$

Istnieje punkt potrójny w początku spółrzędnych. Dwie gałęzie krzywej, dla których wspólną styczną jest oś $x$, tworzą punkt zwrotu drugiego rodzaju; styczną do trzeciej gałęzi jest oś $y$.

26. $$x^6 + 2a^2x^3y - b^3y^3 = 0.$$

W początku spółrzędnych znajduje się punkt potrójny. Dwie gałęzie krzywej, dla których wspólną styczną jest oś $x$, tworzą punkt zwrotu drugiego rodzaju; trzecia gałąź przegina się w punkcie potrójnym. Styczną do tej gałęzi jest również oś $x$.

27. $$x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4. \tag{1}$$

Zakładamy, że $y = ux$; wtedy równanie przybiera postać:

$$x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4. \tag{2}$$

Równanie (2) przedstawia krzywą czwartego rzędu, która przecina oś rzędnych w tylu punktach, ile pierwiastków rzeczywistych posiada równanie:

$$a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 = 0. \tag{3}$$

Gdy mamy wykreśloną krzywą (2), to łatwo wykreślimy krzywą (1). Jeżeli wszystkie cztery pierwiastki równania (3) są różne i rzeczywiste, wówczas początek spółrzędnych jest punktem poczwórnym. Zbadać, do jakiej kategoryi należeć będzie punkt osobliwy, gdy pierwiastki powyższego równania będą równe; urojone; dwa rzeczywiste, dwa urojone i t. d.

(CRAMER).

28. $$x^6 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5.$$

W początku spółrzędnych mamy punkt pięciokrotny. Rozwiązanie podobne jak w zadaniu poprzedniem.

### III. Punkt zatrzymania się. Ostrze.

Niech $y = F(x)$ będzie równaniem krzywej.

Spółrzędne punktu zatrzymania się wyznaczymy, uwzględniając z pośród wartości $x$ te, które powodują w $y$ raptowną zmianę od wartości rzeczywistych do wartości urojonych. Wartość na $y$, odpowiadającą tym wartościom $x$, znajdujemy z równania krzywej. W celu wyznaczenia odciętej ostrza szukamy takiej wartości $x$, dla której $F'(x)$ zmienia raptownie swoją wartość. Równanie krzywej daje następnie rzędną punktu szukanego.

## PRZYKŁAD I.

Mamy krzywą, określoną równaniem:

$$y = \frac{1}{\log x}.$$

Przy dodatnich malejących wartościach $x$, wartości $y$ są rzeczywiste; ale począwszy od $x = 0$, $y$ staje się raptownie urojonem. Oprócz tego gdy $x = 0$, wówczas $y = 0$. Początek spółrzędnych jest więc punktem zatrzymania się.

## PRZYKŁAD II.

Mamy krzywą określoną równaniem:

$$y = x \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}.$$

Różniczkując, otrzymujemy:

$$F'(x) = \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x} - \frac{x}{1 + x^2}.$$

Gdy $x$ dąży do zera przez wartości dodatnie, wówczas pochodna dąży do granicy:

$$F'(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Granicą tej samej pochodnej, gdy $x$ dąży do zera przez wartości ujemne, jest:

$$F'(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Oprócz tego gdy $x=0$, mamy $y=0$; początek spółrzędnych jest więc ostrzem.

## ĆWICZENIA.

1. $$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

W początku spółrzędnych mamy punkt zatrzymania się.

2. $$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

W początku spółrzędnych ostrze.

3. $$y = \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}.$$

Punkt zatrzymania się: $x = 0$, $y = 1$.

4. $$y = x \log x.$$

Początek spółrzędnych jest punktem zatrzymania się.

5. $$y + 1 = a^{-\frac{1}{x}}, \qquad (a > 1).$$

$x = 0$, $y = -1$ są spółrzędne punktu zatrzymania się.

6. $$\left(y - x \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{x}\right)^2 - x^2 \cos^2 x = 0.$$

W początku spółrzędnych punkt zatrzymania się.

---

# ROZDZIAŁ XIV.

## Krzywizna krzywych płaskich.

### Dział I. Promień krzywizny.

Wzór na promień krzywizny $\rho$ dla krzywych płaskich jest następujący:

$1^0$ w przypadku spółrzędnych prostokątnych:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} \tag{1}$$

gdzie $x$ i $y$ są to spółrzędne bieżące, przyczem $x$ jest zmienną niezależną;

2° w przypadku spółrzędnych biegunowych:

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - r\frac{d^2 r}{dt^2}} \tag{3}$$

gdzie $r$ oznacza promień wodzący, $t$ zaś kąt biegunowy, który uważamy jako zmienną niezależną.

Jeżeli $p$ oznacza prostopadłą poprowadzoną od bieguna do stycznej, to promień krzywizny wyraża się za pomocą wzoru następującego:

$$\rho = \frac{r}{\frac{dp}{dr}}. \tag{3}$$

## PRZYKŁAD I.

Mamy równanie linii łańcuchowej:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Różniczkując to równanie, otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad \text{i} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{a^2}.$$

W wyrażenie (1) podstawiamy znalezione wartości na $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2 y}{dx^2}$, skąd:

$$\rho = \frac{\left[1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{y}{a^2}} = \frac{y^2}{a}.$$

$$y^2 = \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right)$$

$$1 + \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 = \frac{4 + e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2}{4} = \frac{e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2}{4} = \frac{y^2}{a^2}$$

## PRZYKŁAD II.

Mamy dane równanie spirali hyperbolicznej:

$$r = \frac{a}{t}.$$

Z równania tego otrzymujemy:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{a}{t^2} = -\frac{r^2}{a},$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{2a}{t^3} = \frac{2r^3}{a^2}.$$

Podstawiając znalezione wartości pochodnych w wzór (2), otrzymujemy:

$$\rho = \frac{\left(r^2 + \frac{r^4}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2} = \frac{r\,(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3}.$$

## PRZYKŁAD III.

Równanie spirali logarytmicznej jest następujące:

$$p = mr.$$

Różniczkując, otrzymujemy:

$$\frac{dr}{dp} = \frac{1}{m}.$$

Na zasadzie wzoru (3) otrzymujemy:

$$\rho = \frac{r}{m}.$$

## ĆWICZENIA.

1. $xy = k^2$. *(Równanie hyperboli, odniesionej do asymptot).*

$$\rho = \frac{x^3}{2\,k^2}\left(1 + \frac{k^4}{x^4}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2. $y^n = ax^{n+1}$.

$$\rho = \frac{x^{\frac{n-1}{n}}\left[n^2 + (n+1)^2\,(a^2\,x^2)^{\frac{1}{n}}\right]^{\frac{3}{2}}}{n\,(n+1)\,a^{\frac{1}{n}}}.$$

Przy $n = 2$ mamy
$$\rho = \frac{x^{\frac{1}{2}}\,(4 + 9\,ax)^{\frac{3}{2}}}{6\,a^{\frac{1}{2}}};$$

jest to promień krzywizny rozwiniętej paraboli.

3. $y = \frac{a}{x}\sqrt{ax - x^2}$.

$$\rho = \frac{(a^4 + 4\,ax^3 - 4\,x^4)^{\frac{3}{2}}}{2\,a^2\,x^3\,(3\,a - 4\,x)}.$$

4. $$x = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}. \qquad \textit{(Traktryca).}$$

$$\rho = \frac{a}{y} \sqrt{a^2 - y^2}.$$

5. $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{b^2 - (a - y)^2}}{y}. \qquad \textit{(Równanie różniczkowe trochoidy).}$$

$$\rho = \frac{[b^2 - a(a - 2y)]^{\frac{3}{2}}}{a(a - y) - b^2}.$$

Jeżeli $a = b$; $\rho = 2\sqrt{2ay}$; $\rho$ jest promieniem krzywizny cykloidy.

6. $$mx^{\frac{2}{3}} + ny^{\frac{2}{3}} = q.$$

$$\rho = \frac{3(xy)^{\frac{1}{3}}}{mnq} (n^2 x^{\frac{2}{3}} + m^2 y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}. \qquad (1)$$

Aby znaleźć promień krzywizny hypocykloidy, której równanie jest następujące:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

wystarczy w równanie (1) podstawić wartości:

$$m = 1, \qquad n = 1, \qquad q = a^{\frac{2}{3}};$$

wtedy na promień krzywizny otrzymujemy wyrażenie:

$$\rho = 3(axy)^{\frac{1}{3}}.$$

Równanie rozwiniętej elipsy jest następujące:

$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Podstawiając w wyrażenie (1) wartości $m = a^{\frac{2}{3}}$, $n = b^{\frac{2}{3}}$, $q = c^{\frac{4}{3}}$, otrzymamy następujący wzór na promień krzywizny rozwiniętej:

$$\rho = \frac{3(xy)^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{4}{3}}} (b^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Równanie rozwiniętej hyperboli jest następujące:

$$a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} y^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Podstawiając $m = a^{\frac{2}{3}}$, $n = -b^{\frac{2}{3}}$ i $q = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}$, otrzymamy na promień krzywizny rozwiniętej hyperboli następujący wzór:

$$\rho = -\frac{3(xy)^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} (a^2 + ab^2)^{\frac{2}{3}}} (b^{\frac{4}{3}} x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{4}{3}} y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

7. $$r = a \sin 2t. \qquad \textit{(Róża czworolistna)}.$$

$$\rho = \frac{(4a^2 - 3r^2)^{\frac{3}{2}}}{8a^2 - 3r^2}.$$

8. $$r = a + b \cos t. \qquad \textit{(Ślimak Pascala)}.$$

$$\rho = \frac{(a^2 - 2ar - b^2)^{\frac{3}{2}}}{2a^2 - 3ar - 2b^2}.$$

9. $$r = a\,[1 + \sqrt{2(1 - \cos t)}]. \qquad \textit{(Ślimak o dwu gałęziach)*}.$$

$$\rho = \frac{1}{2}\,\frac{(3r^2 + 2ar + 3a^2)^{\frac{3}{2}}}{3r^2 + 3ar + 6a^2}.$$

10. $$r = \frac{p}{1 - e \cos t}.$$

(Jest to równanie krzywych drugiego rzędu, gdzie $p$ oznacza parametr, $e$ mimośród)

$$\rho = p\left(1 + \frac{e^2 r^2 \sin^2 t}{p^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Oznaczając przez $\alpha$ dopełnienie kąta, utworzonego przez promień wodzący i styczną, otrzymamy:

$$\operatorname{tang} \alpha = -\frac{er \sin t}{p}.$$

Z tego wyrażenia znajdujemy prosty wzór na promień krzywizny:

$$\rho = \frac{p}{\cos^3 \alpha}.$$

11. $$p = \frac{br}{(a^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

(Jest to równanie spiralnych Cotesa, gdzie $p$ oznacza prostopadłą z bieguna do stycznej).

$$\rho = \frac{r(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2 b}.$$

12. $$p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}. \qquad \textit{(Epicykloida)}.$$

$$\rho = p \cdot \frac{c^2 - a^2}{c^2}.$$

---

*) Wątpię czy krzywa tą jest znana. Konstrukcja jej i kształt mają wiele podobieństwa z konstrukcją i kształtem ślimaka Pascala. Krzywa ta posiada dwie gałęzie. Możnaby ją nazwać ślimakiem o dwu gałęziach. (Brahy).

## Dział II. Rozwinięte.

Niech $x$, $y$ będą spółrzędnemi bieżącemi krzywej w układzie spółrzędnych prostokątnych, $\alpha$ zaś i $\beta$ spółrzędnemi środka krzywizny; mamy związki:

$$x - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx},$$

$$y - \beta = - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Aby znaleźć równanie krzywej rozwiniętej, należy z powyższych dwu równań i z równania krzywej danej wyrugować $x$ i $y$. Jeżeli to rugowanie jest trudne lub niemożliwe, wystarczy wtedy utworzyć równanie różniczkowe rozwiniętej, zastępując w wyrażeniu:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = - \frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \text{*)}$$

$x$ i $y$ przez ich wartości, wyznaczone jako funkcye $\alpha$ i $\beta$.

Jeżeli $p$ i $r$ są spółrzędne bieżące krzywej, odniesionej do spółrzędnych biegunowych, zaś $p'$ i $r'$ — spółrzędne rozwiniętej, oraz $\rho$ — promień krzywizny, wówczas mamy związki:

$$\rho = r \frac{dr}{dp},$$

$$p'^2 = r^2 - p^2,$$

$$r'^2 = r^2 + \rho^2 - 2 \rho p.$$

Aby otrzymać równanie krzywej rozwiniętej, wystarczy wyrugować $r$, $p$ i $\rho$ z powyższych trzech równań i z równania danej krzywej.

---

*) Porównaj inny sposób znalezienia krzywej rozwiniętej, wskazany w ćwiczeniu 14 w rozdziale XVII.

## PRZYKŁAD I.

Znaleźć rozwiniętą paraboli $y^2 = 2px$.

Z równania tego otrzymujemy:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

A więc mamy:

$$x - \alpha = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{-\frac{p^2}{y^3}} \frac{p}{y} = -2x - p,$$

skąd:

$$x = \frac{\alpha - p}{3};$$

a prócz tego:

$$y - \beta = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{y^3}{p^2} + y,$$

skąd:

$$y = (-p^2\beta)^{\frac{1}{3}}.$$

Podstawiając otrzymane w ten sposób wartości $x$ i $y$ w równanie krzywej, otrzymujemy następujące równanie rozwiniętej:

$$\beta^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2(\alpha - p)}{3}\right]^3.$$

## PRZYKŁAD II.

Mamy dane równanie różniczkowe linii łańcuchowej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a},$$

z którego otrzymujemy:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{a^2}.$$

Stąd znajdziemy:

$$y-\beta=-\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}=-\frac{1+\frac{y^2-a^2}{a^2}}{\frac{y}{a^2}}=-y$$

czyli że

$$y=\frac{\beta}{2}.$$

Z wyrażenia

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

jeżeli zamiast $\frac{dy}{dx}$ podstawimy jego wartość, otrzymamy:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{a}{\sqrt{y^2-a^2}}$$

podstawiając zaś zamiast $y$ jego wartość poprzednio znalezioną, otrzymamy:

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{2a}{\sqrt{\beta^2-4a^2}}.$$

Jest to równanie różniczkowe rozwiniętej linii łańcuchowej.

## PRZYKŁAD III.

Znaleźć rozwiniętą spirali $r=a^{\frac{1}{2}t}$.

Równanie tej krzywej możemy napisać w postaci:

$$p=\frac{r}{\sqrt{1+\log a}}.$$

Z tego równania otrzymujemy:

$$\rho=r\frac{dr}{dp}=r\sqrt{1+\log a},$$

$$p'^2=r^2-p^2=r^2-\frac{r^2}{1+\log a}=\frac{r^2\log a}{1+\log a},$$

$$r'^2=r^2+\rho^2-2\rho p=r^2+r^2(1+\log a)-2r\sqrt{1+\log a}\,.\,\frac{r}{\sqrt{1+\log a}}$$

$$=r^2\log a.$$

Następnie:

$$\frac{p'^2}{r'^2} = \frac{r^2 \log a}{1 + \log a} : r^2 \log a = \frac{1}{1 + \log a},$$

$$p' = \frac{r'}{\sqrt{1 + \log a}}.$$

(Jest to równanie rozwiniętej, która jest spiralą podobną do danej).

## ĆWICZENIA.

1. $$xy = 1.$$ *(Hyperbola).*

Równanie rozwiniętej jest:

$$(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} - (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}.$$

2. $$3\,y^2 = x^3.$$ *(Parabola Neila).*

Otrzymamy następujące równanie rozwiniętej:

$$81\,\beta^2 = 16\,(2 \pm \sqrt{1 - 6\,\alpha})^2\,(\pm \sqrt{1 - 6\,\alpha} - 1).$$

3. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$ *(Elipsa).*

Równanie rozwiniętej jest:

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} + (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Jeżeli zamiast $b$ podstawimy $b\sqrt{-1}$, otrzymamy rozwiniętą hyperboli:

$$(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (b\beta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Jeżeli w tem ostatniem równaniu położymy $b = a$, otrzymamy rozwiniętą hyperboli równobocznej:

$$\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}} = (2\,a)^{\frac{2}{3}}.$$

4. $$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$ *(Hypocykloida).*

Równanie rozwiniętej jest:

$$(\alpha + \beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha - \beta)^{\frac{2}{3}} = 2\,a^{\frac{2}{3}}.$$

5. $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}}.$$

Równanie to jest równaniem różniczkowem cykloidy; należy znaleźć równanie różniczkowe rozwiniętej tej krzywej.

Odpowiedź: $$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\beta}{\sqrt{-2a\beta - \beta^2}}.$$

6. Znaleźć równanie różniczkowe rozwiniętej traktrycy, której równanie różniczkowe jest:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

Odpowiedź: $$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\sqrt{\beta^2 - a^2}}{a}.$$

7. $$y = ae^{\frac{x}{n}}.$$ *(Krzywa logarytmiczna).*

Równanie różniczkowe rozwiniętej jest następujące:

$$4a\frac{d\alpha}{d\beta} + \beta \pm (\beta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

8. $$p^2 = r^2 - a^2.$$

Rozwinięta tej krzywej jest kołem.

9. $$p^2 = \frac{c^2(r^2 - a^2)}{c^2 - a^2}.$$ *(Epicykloida).*

Rozwinięta jest także epicykloidą:

$$p'^2 = \frac{c^2\left(r'^2 - \frac{a^4}{c^2}\right)}{c^2 - a^2}.$$

# ROZDZIAŁ XV.

## Powierzchnie.

Mamy równanie powierzchni $z = f(x, y)$; $x'$, $y'$, $z'$ są spółrzędne bieżące; $x$, $y$, $z$ — spółrzędne punktu styczności płaszczyzny stycznej. Podajemy poniżej wzory na elementy zasadnicze powierzchni; w wyrażeniach tych $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Dla płaszczyzny stycznej mamy wzór:

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y). \tag{1}$$

Równanie normalnej jest:

$$\frac{x' - x}{-p} = \frac{y' - y}{-q} = \frac{z' - z}{1}. \tag{2}$$

Spółczynniki kierunkowe normalnej. Przez $\theta$, $\theta'$ i $\theta''$ oznaczamy kąty normalnej z osiami, albo kąty między płaszczyzną styczną a płaszczyznami spółrzędnych; kładąc $h = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, znajdziemy wyrażenie następujące:

$$\frac{\cos\theta}{-p} = \frac{\cos\theta'}{-q} = \frac{\cos\theta''}{1} = \frac{1}{\pm h}. \tag{3}$$

Odległość początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznej oznaczymy przez $D$; równa się ona:

$$D = \frac{px + qy - z}{\pm k}. \tag{4}$$

Główne promienie krzywizny. Promień krzywizny oznaczamy przez $\rho$:

$$\rho = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Kładąc:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

znajdziemy, że główne promienie krzywizny są pierwiastkami równania:

$$(rt - s^2)\rho^2 - k[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]\rho + k^4 = 0. \tag{5}$$

Linie krzywiznowe. Równanie różniczkowe rzutu tych linii na płaszczyznę $xy$ jest następujące:

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} - (1+p^2)s + pqr = 0. \tag{6}$$

P u n k t y k o ł o w e (o m b i l i k i) znajdujemy z równań następujących:

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t} \tag{7}$$

oraz z równania płaszczyzny.

Jeżeli równanie płaszczyzny jest napisane w postaci:

$$F(x, y, z)=0$$

to łatwiej jest wyznaczyć zasadnicze elementy za pomocą następujących wyrażeń:

P ł a s z c z y z n a s t y c z n a:

$$(x'-x)\frac{\partial F}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial F}{\partial y}+(z'-z)\frac{\partial F}{\partial z}=0. \tag{8}$$

N o r m a l n a:

$$\frac{x'-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{y'-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{z'-z}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{9}$$

S p ó ł c z y n n i k i k i e r u n k o w e n o r m a l n e j:

$$\frac{\cos\theta}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\cos\theta'}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\cos\theta''}{\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{1}{\pm R} \tag{10}$$

gdzie:

$$R=\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

O d l e g ł o ś ć p o c z ą t k u s p ó ł r z ę d n y c h o d p ł a s z c z y z n y s t y c z n e j:

$$D=\frac{x\frac{\partial F}{\partial x}+y\frac{\partial F}{\partial y}+z\frac{\partial F}{\partial z}}{\pm R}. \tag{11}$$

G ł ó w n e p r o m i e n i e k r z y w i z n y są określone równaniem:

$$\begin{gathered}
U^2\left(v-\frac{R}{\rho}\right)\left(w-\frac{R}{\rho}\right)+V^2\left(w-\frac{R}{\rho}\right)\left(u-\frac{R}{\rho}\right)+W^2\left(u-\frac{R}{\rho}\right)\left(v-\frac{R}{\rho}\right) \\
-2u'VW\left(u-\frac{R}{\rho}\right)-2v'UW\left(v-\frac{R}{\rho}\right)-2w'UV\left(w-\frac{R}{\rho}\right) \\
-U^2u'^2-V^2v'^2-W^2w'^2+2VWv'w'+2UWu'w'+2UVu'v'=0
\end{gathered} \tag{12}$$

w równaniu tem wprowadziliśmy oznaczenia następujące:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = U, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = V, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = W, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = u, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = v, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = w,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} = u', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial z} = v', \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} = w'.$$

Punkty osobliwe. Spółrzędne tych punktów muszą spełniać jednocześnie równania:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

i równanie powierzchni.

Oznaczając przez $(u)$, $(v)$, $(w)$, $(u')$, $(v')$, $(w')$ wartości, które przybierają pochodne $u$, $v$, $w$, $u'$, $v'$, $w'$ w punkcie osobliwym, otrzymamy następujące równanie miejsca geometrycznego prostych stycznych w tym punkcie:

$$(u)\, x^2 + (v)\, y^2 + (w)\, z^2 + 2\,(u')\, yz + 2\,(v')\, xz + 2\,(w')\, xy = 0. \tag{14}$$

UWAGA. Jeżeli równanie powierzchni przedstawia funkcyę jednorodną $n$-go stopnia względem $x$, $y$, $z$ równą stałej $c$, wówczas równanie płaszczyzny stycznej jest:

$$x' \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} + z' \frac{\partial F}{\partial z} = nc. \tag{15}$$

Odległość początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznej jest:

$$D = \frac{nc}{R}. \tag{16}$$

PRZYKŁAD.

Dane równanie elipsoidy:

$$F \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Otrzymujemy następujące wartości pochodnych:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}.$$

Podstawiając te wartości w odpowiednie równania, otrzymujemy:

1°) z równania (15):

$$x'\frac{2x}{a^2}+y'\frac{2y}{b^2}+z'\frac{2z}{c^2}=2$$

czyli

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

Jest to równanie płaszczyzny stycznej.

2°) z równań (9):

$$\frac{x'-x}{\frac{2x}{a^2}}=\frac{y'-y}{\frac{2y}{b^2}}=\frac{z'-z}{\frac{2z}{c^2}}$$

czyli

$$\frac{a^2(x'-x)}{x}=\frac{b^2(y'-y)}{y}=\frac{c^2(z'-z)}{z}$$

co jest równaniem normalnej.

3°) z równań (10):

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{2x}{a^2}}=\frac{\cos\beta}{\frac{2y}{b^2}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{2z}{c^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}}}$$

czyli

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\cos\beta}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\cos\gamma}{\frac{z}{c^2}}=\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Równania te wyznaczają spółczynniki kierunkowe normalnej czyli kąty pomiędzy płaszczyzną styczną i płaszczyznami spółrzędnych.

4°) z równania (16) otrzymujemy odległość początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznej:

$$D=\frac{2}{\sqrt{\frac{4x^2}{a^4}+\frac{4y^2}{b^4}+\frac{4z^2}{c^4}}}$$

albo

$$D=\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

5⁰) z równania (12) otrzymujemy:

$$\frac{4x^2}{a^4}\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{D\rho}\right)\left(\frac{2}{c^2}-\frac{2}{D\rho}\right)+\frac{4y^2}{b^4}\left(\frac{2}{c^2}-\frac{2}{D\rho}\right)\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{D\rho}\right)+$$

$$+\frac{4z^2}{c^4}\left(\frac{2}{b^2}-\frac{2}{D\rho}\right)\left(\frac{2}{a^2}-\frac{2}{D\rho}\right)=0.$$

Ponieważ:

$$U=\frac{2x}{a^2},\qquad V=\frac{2y}{b^2},\qquad W=\frac{2z}{c^2},\qquad D=\frac{2}{R},$$

stąd:

$$u=\frac{2}{a^2},\qquad v=\frac{2}{b^2},\qquad w=\frac{2}{c^2},\qquad R=\frac{2}{D},$$

$$u'=0,\qquad v'=0,\qquad w'=0.$$

Jeżeli równanie powyższe, które wyznacza główne promienie krzywizny, podzielimy przez

$$\frac{16}{a^2\,b^2\,c^2\,D^2\,\rho^2}(D\rho-a^2)\,(D\rho-b^2)\,(D\rho-c^2),$$

otrzymamy

$$\frac{x^2}{a^2\,(D\rho-a^2)}+\frac{y^2}{b^2\,(D\rho-b^2)}+\frac{z^2}{c^2\,(D\rho-c^2)}=0$$

czyli

$$\rho^2-[(a^2+b^2+c^2)-(x^2+y^2+z^2)]\frac{\rho}{D}+\frac{a^2\,b^2\,c^2}{D^4}=0.$$

Z powyższego kształtu równania widać, że jeżeli $D$ zachowuje tę samą wartość, to iloczyn głównych promieni krzywizny jest wielkością stałą.

6⁰) chcąc z równania (6) otrzymać równanie różniczkowe rzutów linii krzywiznowych na płaszczyznę $xy$, wyznaczamy z równania danej powierzchni następujące wielkości:

$$p=-\frac{c^2\,x}{a^2\,z},\qquad q=-\frac{c^2\,y}{b^2\,z},\qquad r=-\frac{c^4\,(b^2-y^2)}{a^2\,b^2\,z^3},$$

$$s=-\frac{c^4\,xy}{a^2\,b^2\,z^3},\qquad t=-\frac{c^4\,(a^2-x^2)}{a^2\,b^2\,z^3},$$

następnie te wielkości, jak również wartość na $z^2$ podstawiamy w (6); szukane równanie będzie miało postać następującą:

$$\frac{b^2-c^2}{b^2}xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2-(a^2-b^2)\right]\frac{dy}{dx}-\frac{a^2-c^2}{a^2}xy=0.$$

7°) z równania (7), podstawiając wartości na $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, otrzymujemy równania punktów kołowych:

$$\frac{b^2}{a^2} z \frac{a^4 z^2 + c^4 x^2}{c^4 (b^2 - y^2)} = z = \frac{a^2}{b^2} z \frac{b^4 z^2 + c^4 y^2}{c^4 (a^2 - x^2)}.$$

Równania te będą spełnione, gdy:

$$y = 0, \qquad x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Powyższe wielkości są to spółrzędne czterech punktów kołowych.

---

Jeżeli równanie płaszczyzny stycznej napiszemy w postaci:

$$\frac{x'}{\frac{a^2}{x}} + \frac{y'}{\frac{b^2}{y}} + \frac{z'}{\frac{c^2}{z}} = 1,$$

spostrzeżemy, że spółrzędne punktów przecięcia się płaszczyzny stycznej z osiami są:

$$\frac{a^2}{x}, \qquad \frac{b^2}{y}, \qquad \frac{c^2}{z}.$$

Objętość ostrosłupa, zawartego pomiędzy płaszczyzną styczną i płaszczyznami spółrzędnych, jest:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{x} \cdot \frac{b^2}{y} \cdot \frac{1}{3} \frac{c^2}{z} = \frac{a^2 b^2 c^2}{6\,xyz}.$$

Pole części płaszczyzny stycznej, ograniczonej przez płaszczyzny spółrzędnych, równa się objętości ostrosłupa podzielonej przez jedną trzecią odległości początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznej:

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{6\,xyz} : \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{a^2 b^2 c^2}{2\,xyz} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

W celu wyznaczenia miejsca geometrycznego rzutów środka elipsoidy na płaszczyzny styczne, wystarczy wyrugować $x$, $y$, $z$ z równań płaszczyzny stycznej i prostopadłej opuszczonej z początku spółrzędnych na tę płaszczyznę. Równania tej prostopadłej są następujące:

$$\frac{a^2 x'}{x} = \frac{b^2 y'}{y} = \frac{c^2 z'}{z},$$

z nich otrzymujemy:

$$\frac{ax'}{\frac{x}{a}} = \frac{by'}{\frac{y}{b}} = \frac{cz'}{\frac{z}{c}} = \frac{\sqrt{a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2}}{1}.$$

Mnożąc odpowiednio wyrazy równania płaszczyzny stycznej przez te cztery równe wielkości, otrzymamy następujące równanie szukanego miejsca geometrycznego:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \sqrt{a^2 x'^2 + b^2 y'^2 + c^2 z'^2},$$

Jest to równanie powierzchni sprężystej.

## ĆWICZENIA.

1. Znaleźć płaszczyznę styczną do konoidy, określonej równaniem:

$$x^2 z^2 + a^2 y^2 - r^2 x^2 = 0.$$

Odpowiedź: $(z^2 - r^2)\, xx' + a^2\, yy' + x^2\, zz' = x^2 z^2.$

Gdy $z = r$, $y = 0$ równanie płaszczyzny stycznej jest:

$$z' = r.$$

2. Znaleźć płaszczyznę styczną do powierzchni, określonej przez równanie następujące:

$$az = \left(\text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2.$$

Równanie szukanej płaszczyzny:

$$2\, z^{\frac{1}{2}}\, (x' y - xy') + (z' - z)\, (x^2 + y^2)\, a^{\frac{1}{2}} = 0.$$

3. Znaleźć płaszczyznę styczną do powierzchni sprężystości, określonej równaniem:

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2.$$

Znaleźć także odległość od środka tej powierzchni do szukanej płaszczyzny. Kładąc: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, otrzymujemy równanie płaszczyzny stycznej w postaci:

$$(2\, r^2 - a^2)\, xx' + (2\, r^2 - b^2)\, yy' + (2\, r^2 - c^2)\, zz' = r^4$$

odległość zaś od środka powierzchni do szukanej płaszczyzny jest:

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{\sqrt{a^4 x^2 + b^4 y^2 + c^4 z^2}}.$$

4. Znaleźć punkt, w którym normalna do powierzchni obrotowej:

$$z = \varphi(x^2 + y^2)$$

spotyka oś $z$.

Odpowiedź: Rzędna szukanego punktu jest:

$$z' = z + x \frac{\partial x}{\partial z}.$$

5. Wykazać, że płaszczyzny styczne do powierzchni $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ przechodzą przez jeden punkt.

Równanie każdej płaszczyzny stycznej do tej powierzchni będzie:

$$z' - z = \frac{z}{x}(x' - x) + \left(\frac{xy' - x'y}{x}\right)\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

z równania tego widzimy, że płaszczyzna przechodzi przez początek spółrzędnych.

Jakoż $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ jest powierzchnią stożkową, której wierzchołek jest początkiem spółrzędnych.

6. Znaleźć rzędną punktu, w którym płaszczyzna styczna do powierzchni, określonej równaniem:

$$x^m\left(z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

spotyka oś $z$.

Rzędna szukanego punktu jest:

$$z' = (m+1)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

rzędna ta jest proporcyonalna do odległości punktu styczności od początku spółrzędnych.

7. Dane równanie powierzchni:

$$z(x^2 + y^2) = a^3;$$

znaleźć pole części płaszczyzny stycznej zawartej pomiędzy płaszczyznami spółrzędnych.

Na szukane pole znajdziemy następujący wzór:

$$\frac{9a^6\sqrt{r^2(r^2 + 4z^2)}}{2^3 xyz^2 r^2},$$

gdzie

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

8. Znaleźć objętość ostrosłupa, zawartego pomiędzy płaszczyznami spółrzędnych i płaszczyznę styczną do *„cono-cuneus"* Wallisa:

$$a^2 y^2 - x^2 y^2 - c^2 z^2 = 0.$$

Szukana objętość:

$$\frac{x^5 y^3}{6 c^2 z (x^2 - a^2)}$$

9. Znaleźć kąty pomiędzy osiami spółrzędnych a płaszczyzną styczną do helisoidy rozwijalnej, której równanie jest:

$$x \sin\left[\frac{2\pi z}{h} - \frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right] + y \cos\left[\frac{2\pi z}{h} - \frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a}\right] = a$$

Zakładamy, że

$$\frac{2\pi z}{h} - \frac{(x^2+y^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{a} = \theta,$$

wtedy:

$$\cos\alpha = \frac{h(a\sin\theta - x)}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(h^2+4\pi^2a^2)}},$$

$$\cos\beta = \frac{h(a\cos\theta - y)}{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)(h^2+4\pi^2a^2)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{2a\pi}{\sqrt{h^2+4\pi^2a^2}}.$$

Płaszczyzna styczna tworzy z płaszczyzną $xy$ kąt stały.

10. Mamy dane równanie helisoidy skośnej:

$$x \cos nz - y \sin nz = 0;$$

wyznaczyć płaszczyznę do niej styczną; znaleźć odległość $D$ początku spółrzędnych od szukanej płaszczyzny stycznej oraz wyznaczyć główne promienie krzywizny tej powierzchni.

Oznaczając $x^2 + y^2$ przez $r^2$, otrzymujemy następujące równanie płaszczyzny stycznej:

$$xy' - x'y + nr^2(z' - z) = 0.$$

Odległość początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznej równa się:

$$D = \frac{nrz}{\sqrt{1+n^2z^2}}.$$

Główne promienie krzywizny są określone przez równanie:

$$n^2\rho^2 - (1+n^2r^2)^2 = 0.$$

11. Znaleźć miejsce geometryczne rzutów początku spółrzędnych na płaszczyzny styczne do powierzchni, określonej przez równanie:

$$xyz = a^3;$$

znaleźć główne promienie krzywizny, ombiliki czyli punkty kołowe powierzchni i linie krzywizny tej powierzchni.

Odpowiedź. Szukane miejsce geometryczne jest kulą, określoną przez równanie:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\,a^2;$$

promień jej równa się $a\sqrt{3}$.

Równanie głównych promieni krzywizny jest:

$$\rho^2 + 2\,(x^2 + y^2 + z^2)\,\frac{\rho}{D} + \frac{27\,a^6}{D^4} = 0.$$

Spółrzędne punktu kołowego są: $x = y = z = a$.

Równanie różniczkowe rzutów linij krzywiznowej na płaszczyznę $xy$ jest:

$$x^2\,(x^2 y^4 - a^6)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,x^3 y^3\,(y^2 - x^2)\,\frac{dy}{dx} - y^2\,(x^4 y^2 - a^2) = 0.$$

12. Znaleźć elementy główne paraboloidy eliptycznej:

$$\frac{x^2}{2\,a} + \frac{y^2}{2\,b} - z = 0.$$

Równanie płaszczyzny stycznej:

$$\frac{xx'}{a} + \frac{yy'}{b} = z + z'.$$

Równania normalnej:

$$\frac{a\,(x' - x)}{x} = \frac{b\,(y' - y)}{y} = \frac{z' - z}{-1}.$$

Dostawy kierunkowe normalnej:

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{a}} = \frac{\cos\beta}{\frac{y}{b}} = \frac{\cos\gamma}{-1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}}.$$

Odległość $D$ początku spółrzędnych od płaszczyzny stycznej:

$$D = \frac{z}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}}.$$

Równanie głównych promieni krzywizny jest:

$$\rho^2 - (a + b + 2z)\frac{z}{D}\rho + \frac{abz^4}{D^4} = 0.$$

Jeżeli $a > b$, wówczas spółrzędne dwóch punktów kołowych są:

$$x = 0, \qquad y = \pm\sqrt{b(a-b)}, \qquad z = \frac{a-b}{2};$$

natomiast przy $a < b$ mamy:

$$y = 0, \qquad x = \pm\sqrt{a(b-a)}, \qquad z = \frac{b-a}{2}.$$

Równanie różniczkowe rzutów linii krzywiznowej na płaszczyznę $xy$ jest:

$$axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [bx^2 - ay^2 + ab(a-b)]\frac{dy}{dx} - bxy = 0.$$

13. Znaleźć punkty osobliwe powierzchni, określonej przez równanie:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2.$$

Kładąc $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, znajdujemy:

$$U = 2x(2r^2 - a^2), \qquad V = 2y(2r^2 - b^2), \qquad W = 2z(2r^2 + c^2),$$

$$u = 2(2r^2 - a^2) + 8x^2, \qquad v = 2(2r^2 - b^2) + 8y^2, \qquad w = 2(2r^2 + c^2) + z^2,$$

$$u' = 8yz, \qquad v' = 8xz, \qquad w' = 8xy.$$

Równania $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ są spełnione przez wartości $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, które spełniają także równanie powierzchni. Początek spółrzędnych jest punktem osobliwym. Miejsce geometryczne wszystkich stycznych do powierzchni w tym punkcie znajdziemy przy pomocy równania (14), kładąc w niem zamiast $U$, $V$, $W$, $u$, $v$, $w$, $u'$, $v'$, $w'$ wartości tych pochodnych przy $x = 0$, $y = 0$ i $z = 0$. W ten sposób otrzymujemy równanie:

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0.$$

Jest to równanie stożka, którego wierzchołek leży w początku spółrzędnych.

14. Znaleźć punkty osobliwe powierzchni, określonej przez równanie:

$$z(x^2 + y^2 + z^2) + ax^2 + by^2 = 0.$$

Początek spółrzędnych jest punktem osobliwym; równanie miejsca geometrycznego stycznych w tym punkcie jest:

$$ax^2 + by^2 = 0;$$

równanie to może przedstawiać tylko oś $z$.

15. Znaleźć punkty osobliwe powierzchni falowej, określonej przez równanie:

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)-a^2(b^2+c^2)x^2-b^2(a^2+c^2)y^2-$$
$$-c^2(a^2+b^2)z^2+a^2b^2c^2=0.$$

Otrzymamy cztery punkty osobliwe o spółrzędnych:

$$y=0, \qquad x=\pm c\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}, \qquad z=\pm a\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Równanie miejsca geometrycznego wszystkich stycznych w tym punkcie jest:

$$\frac{x^2}{b^2-c^2}-\frac{a^2-c^2}{4a^2c^2}y^2+\frac{z^2}{a^2-b^2}+\frac{a^2+c^2}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}\cdot\frac{xz}{ac}=0.$$

(HAMILTON).

---

# ROZDZIAŁ XVI.

## Krzywe skośne.

Mając dane równania krzywej:

$$x=\varphi(z), \qquad y=\psi(z),$$

można wyznaczyć elementy zasadnicze tej krzywej za pomocą następujących wzorów, w których $x'$, $y'$, $z'$ oznaczają spółrzędne bieżące, a $x$, $y$, $z$ spółrzędne punktu styczności stycznej.

Równanie stycznej

$$\frac{x'-x}{\frac{dx}{dz}}=\frac{y'-y}{\frac{dy}{dz}}=\frac{z'-z}{1}. \tag{1}$$

Pochodna łuku krzywej. Oznaczając łuk przez $s$, mamy:

$$\frac{ds}{dz}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2+1}. \tag{2}$$

Dostawy kierunkowe stycznej. Oznaczamy przez $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ kąty, które styczna tworzy z osiami spółrzędnych; wtedy:

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta=\frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma=\frac{dz}{ds}. \tag{3}$$

Płaszczyzna normalna jest wyznaczona przez równanie:

$$(x'-x)\frac{dx}{dz}+(y'-y)\frac{dy}{dz}+(z'-z)=0. \tag{4}$$

Płaszczyzna sciśle styczna określona jest przez równanie:

$$(x'-x)\frac{d^2y}{dz^2}-(y'-y)\frac{d^2x}{dz^2}+(z'-z)\left(\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz}\right)=0, \tag{5}$$

zaś główna normalna przez równanie:

$$\frac{x'-x}{\frac{d^2x}{ds^2}}=\frac{y'-y}{\frac{d^2y}{ds^2}}=\frac{z'-z}{\frac{d^2z}{ds^2}}. \tag{6}$$

Dostawy kierunkowe normalnej głównej. Oznaczając przez $\lambda$, $\mu$, $\nu$ kąty, które normalna główna tworzy z osiami spółrzędnych i kładąc

$$R=\pm\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

mamy:

$$\cos\lambda=\frac{\frac{d^2x}{ds^2}}{R},\qquad \cos\mu=\frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{R},\qquad \cos\nu=\frac{\frac{d^2z}{ds^2}}{R}. \tag{7}$$

Kąt krzywizny. Oznaczając przez $\omega$ ten kąt, znajdujemy, że

$$\omega=Rds. \tag{8}$$

Promień krzywizny jest

$$\rho=\frac{1}{R}. \tag{9}$$

Promień krzywizny leży na normalnej głównej, zatem jego dostawy kierunkowe są określone przez równania (7).

Środek krzywizny. Niech $X$, $Y$, $Z$ oznaczają spółrzedne tego środka; mamy:

$$\left.\begin{aligned}X&=x+\rho^2\frac{d^2x}{ds^2}\\ Y&=y+\rho^2\frac{d^2y}{ds^2}\\ Z&=z+\rho^2\frac{d^2z}{ds^2}\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Miejsce geometryczne środków krzywizny. Równania, określające to miejsce, otrzymamy przez rugowanie $x$, $y$, $z$ z trzech powyższych równań (10) i z równań krzywej.

Oś biegunowa. Następujące równania określają tę oś:

$$\frac{x'-X}{\frac{d^2y}{dz^2}}=\frac{y'-Y}{\frac{d^2x}{dz^2}}=\frac{z'-Z}{\frac{dy}{dz}\frac{d^2x}{dz^2}-\frac{dx}{dz}\frac{d^2y}{dz^2}}. \tag{11}$$

W tych równaniach zamiast $X$, $Y$, $Z$ należy podstawić ich wartości otrzymane z równań (10).

Powierzchnia biegunowa. Równanie tej powierzchni otrzymamy przez rugowanie $x$, $y$, $z$ z równań krzywej oraz z równań, określających oś biegunową.

Krawędź zwrotu. Równania tej linji znajdujemy, szukając krzywych obwiedni (zob. rozdz. XVII) rzutów osi biegunowych. Jeżeli znamy powierzchnię biegunową, wystarczy znaleźć równanie jednej z krzywych obwiedni.

Rozwinięta. Równanie powierzchni biegunowej jest jednym z równań rozwiniętej. Drugie równanie otrzymamy przez rugowanie $x$, $y$, $z$ z równania krzywej i z równań następujących:

$$\frac{x-\xi}{\frac{d\xi}{d\zeta}}=\frac{y-\eta}{\frac{d\eta}{d\zeta}}=\frac{z-\zeta}{1},$$

gdzie $\xi$, $\eta$, $\zeta$ są spółrzędnemi punktu styczności stycznej do rozwiniętej.

Kąt skręcenia, który oznaczamy przez $\varepsilon$, równa się:

$$\varepsilon=\frac{\rho^2}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^6}\left(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{d^3x}{dz^3}-\frac{d^2x}{dz^2}\frac{d^3y}{dz^3}\right)ds. \tag{12}$$

## PRZYKŁAD.

Równania śrubowej (helisy) walcowej są:

$$x=r\sin\frac{z}{ar},\qquad y=r\cos\frac{z}{ar};$$

otrzymamy z nich:

$$x^2+y^2=r^2;$$

gdzie $r$ oznacza promień walca, $a$ styczną trygonometryczną stałego kąta $v$, pomiędzy krzywą i tworzącą.

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y}{ar}, \qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{x}{ar},$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{a^2r^2}, \qquad \frac{d^2y}{dz^2} = -\frac{y}{a^2r^2},$$

$$\frac{d^3x}{dz^3} = -\frac{y}{a^3r^3}, \qquad \frac{d^3y}{dz^3} = \frac{x}{a^3r^3}.$$

Po podstawieniu wartości tych pochodnych we wzory powyżej wymienione, otrzymujemy główne elementy danej krzywej.

1°. S t y c z n a. Na zasadzie równań (1) mamy:

$$\frac{x'-x}{\frac{y}{ar}} = \frac{y'-y}{-\frac{x}{ar}} = \frac{z'-z}{1}.$$

2°. P o c h o d n ą ł u k u krzywej znajdujemy z równania (2):

$$\frac{ds}{dz} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2r^2} + \frac{x^2}{a^2r^2} + 1} = \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} = \frac{1}{\sin v}.$$

3°. D o s t a w y k i e r u n k o w e s t y c z n e j są:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dx}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = \frac{\frac{y}{ar}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = \frac{y}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{y}{r}\cos v,$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = -\frac{\frac{x}{ar}}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = -\frac{x}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} = -\frac{x}{r}\cos v,$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dz}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sin v}} = \sin v.$$

Stąd po uwzględnieniu wzorów (3) znajdujemy, że:

$$\cos\alpha = \frac{y}{r}\cos v, \qquad \cos\beta = -\frac{x}{r}\cos v, \qquad \cos\gamma = \sin v.$$

Z tych równań wynika, że styczna tworzy z osią $z$ kąt stały.

4⁰. Płaszczyznę normalną znajdziemy z równania (4):

$$(x'-x)\frac{y}{ar}-(y'-y)\frac{x}{ar}+(z'-z)=0$$

czyli

$$xy-xy'+(z'-z)\,ar=0.$$

5⁰. Płaszczyznę ściśle styczną otrzymujemy, stosując równanie (5):

$$-(x'-x)\frac{y}{a^2r^2}+(y'-y)\frac{x}{a^2r^2}+(z'-z)\left(\frac{x^2}{a^4r^3}+\frac{y^2}{a^3r^3}\right)=0$$

czyli

$$x'y-xy'-\frac{r}{a}(z'-z)=0.$$

6⁰. Normalna główna. Ponieważ $\frac{ds}{dz}=\frac{1}{\sin v}$, zatem

$$\frac{d^2s}{dz^2}=0,$$

co pociąga za sobą:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{\frac{d^2x}{dz^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2}=-\frac{\frac{x}{a^2r^2}}{\frac{1+a^2}{a^2}}=-\frac{x}{r^2(1+a^2)}=-\frac{x}{r^2}\cos^2 v,$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{\frac{d^2y}{dz^2}}{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2}=-\frac{\frac{y}{a^2r^2}}{\frac{1+a^2}{a^2}}=-\frac{y}{r^2(1+a^2)}=-\frac{y}{r^2}\cos^2 v,$$

$$\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Podstawiając znalezione wartości w równanie (6), otrzymujemy:

$$-\frac{x'-x}{\frac{x}{r^2}\cos^2 v}=-\frac{y'-y}{\frac{y}{r^2}\cos^2 v}=\frac{z'-z}{0}$$

czyli

$$x'y-xy'=0 \qquad \text{i} \qquad z'=z.$$

7⁰. Dostawy kierunkowe normalnej głównej. Ponieważ mamy:

$$R=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{r^2}\cos^4 v+\frac{y^2}{r^2}\cos^4 v}=\frac{\cos^2 v}{r},$$

przeto ze wzorów (7) otrzymujemy:

$$\cos\lambda = -\frac{\frac{x}{r^2}\cos^2 v}{\frac{\cos^2 v}{r}} = -\frac{x}{r},$$

$$\cos\mu = -\frac{\frac{y}{r^2}\cos^2 v}{\frac{\cos^2 v}{r}} = -\frac{y}{r},$$

$$\cos\nu = 0.$$

Z powyższego widzimy, że normalna główna jest zawsze prostopadła do osi walca, jak to już zresztą było dowiedzione poprzednio.

8°. Kąt krzywizny otrzymujemy z wzoru (8):

$$\omega = \frac{\cos^2 v}{r}\,ds.$$

Krzywizna jest więc stałą.

9°. Promień krzywizny znajdujemy z wzoru (9):

$$\rho = \frac{r}{\cos^2 v}.$$

10°. Środek krzywizny otrzymujemy, stosując wzór (10):

$$X = x - \frac{r^2}{\cos^4 v}\cdot\frac{x}{r^2}\cos^2 v = -x\,\mathrm{tang}^2 v = -a^2 x,$$

$$Y = y - \frac{r^2}{\cos^4 v}\cdot\frac{y}{r^2}\cos^2 v = -y\,\mathrm{tang}^2 v = -a^2 y,$$

$$Z = z.$$

11°. Miejsce geometryczne środków krzywizny otrzymamy, rugując $x$, $y$, $z$ z równań środka krzywizny oraz z równań krzywej. Równania tego miejsca są:

$$X = -a^2 r \sin\frac{Z}{ar}, \qquad Y = -a^2 r\cos\frac{Z}{ar}.$$

Z powyższych równań widać, że znalezione miejsce geometryczne jest drugą śrubową walcową o wspólnej osi z daną krzywą i o promieniu walca równym $a^2 r$.

12⁰. Oś biegunowa. Z równań (11) otrzymujemy:

$$-\frac{x'-X}{\dfrac{y}{a^2 r^2}}=\frac{y'-Y}{\dfrac{x}{a^2 r^2}}=\frac{z'-Z}{\dfrac{1}{a^3 v}}.$$

Jedno równanie osi biegunowej otrzymamy z pierwszego z powyższych równań, gdy zamiast $X$ i $Y$ podstawimy ich wartości. Równanie to jest:

$$xx'+yy'=-a^2 r^2;$$

jako drugie równanie tej samej osi można wziąć równanie płaszczyzny normalnej, mianowicie:

$$x'y-xy'=-(z'-z)\,ar.$$

13⁰. Powierzchnia biegunowa. Należy wyrugować $x$, $y$, $z$ z dwóch równań osi i z równania krzywej. W tym celu wystarczy podnieść do kwadratu obie strony poprzednich równań i dodać do siebie; w ten sposób otrzymujemy:

$$a^2(z'-z)^2=x'^2+y'^2-a^4 r^2.$$

Równanie powyższe rozwiązujemy względem $z$ i znalezioną wartość podstawiamy w równania helisy, z nich otrzymujemy wartości $x$ i $y$, które podstawiamy w równanie:

$$xx'+yy'=-a^2 r^2;$$

ostatecznie znajdujemy następujące równanie powierzchni biegunowej:

$$x'\sin\left(\frac{az'\pm\sqrt{x'^2+y'^2-a^4 r^2}}{a^2 r}\right)+y'\cos\left(\frac{az'\pm\sqrt{x'^2+y'^2-a^4 r^2}}{a^2 r}\right)+a^2 r=0.$$

14⁰. Krawędź zwrotu. Jako rzut osi biegunowej na płaszczyznę $xy$ otrzymaliśmy wzór następujący:

$$xx'+yy'=-a^2 r^2.$$

To samo równanie możemy napisać w postaci następującej:

$$x'\sin\frac{z}{ar}+y'\cos\frac{z}{ar}=-a^2 r.$$

Krzywa, przedstawiana przez to równanie, posiada następującą obwiednię:

$$x'^2+y'^2=a^4 r^2.$$

(Patrz w rozdziale następnym sposób znalezienia obwiedni).

Jest to jedno z równań krawędzi zwrotu.

Drugiem równaniem jest równanie powierzchni biegunowej, które na zasadzie poprzedniego można napisać w następującej postaci:

$$x' \sin \frac{z'}{ar} + y' \cos \frac{z'}{ar} = - a^2 r.$$

Te dwa równania krawędzi możemy sprowadzić do postaci:

$$x' = - a^2 r \sin \frac{z'}{ar}, \qquad y' = - a^2 r \cos \frac{z'}{ar}.$$

Widzimy tedy, że równania krawędzi właściwie nie różnią się od równań śrubowej, będącej miejscem geometrycznem środków krzywizny krzywej danej.

$15^0$. Kąt skręcenia otrzymujemy na zasadzie wzoru (12):

$$\varepsilon = \frac{\sin 2v}{2r} ds.$$

UWAGA. Jakąkolwiek postać miałyby równania krzywej skośnej, znajdziemy z nich $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2x}{dz^2}$ i t. d., a następnie, podstawiając znalezione wartości pochodnych we wzory ogólne, obliczymy zasadnicze elementy krzywej.

## ĆWICZENIA.

1. Wyznaczyć elementy zasadnicze helisy walcowej, określonej przez równanie:

$$x = - a^2 r \sin \frac{z}{ar}, \qquad y = - a^2 r \cos \frac{z}{ar}.$$

Są to równania linij środków krzywizny śrubowej, którą badaliśmy w poprzednim przykładzie.

Pozostawiamy czytelnikowi wyznaczenie elementów głównych tej krzywej i porównanie otrzymanych wyników z wynikami znalezionemi poprzednio.

2. Znaleźć styczną, płaszczyznę normalną i płaszczyznę ściśle styczną dla krzywej skośnej, powstałej przez przecięcie się dwóch walców prostych, których osie spotykają się pod kątem prostym.

Równania krzywej są następujące:

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad y^2 + z^2 = b^2.$$

Dla stycznej znajdujemy równania:

$$xx' + zz' = a^2,$$

$$yy' + zz' = b^2.$$

Dla płaszczyzny normalnej otrzymujemy równanie:

$$\frac{x'}{x} + \frac{y'}{y} - \frac{z'}{z} = 1.$$

Dla płaszczyzny zaś ściśle stycznej równanie:

$$b^2 x^3 x' - a^2 y^3 y' + (a^2 - b^2) z^3 z' = a^2 b^2 (a^2 - b^2).$$

3. Znaleźć styczną i płaszczyznę normalną krzywej, utworzonej przez przecięcie się kuli z elipsoidą współśrodkową (*Elipsa kulista*).
Krzywą daną określają równania następujące:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Po zróżniczkowaniu każdego z tych równań otrzymujemy:

$$x\frac{dx}{dz} + y\frac{dy}{dz} + z = 0,$$

$$\frac{x}{a^2}\frac{dx}{dz} + \frac{y}{b^2}\frac{dy}{dz} + \frac{z}{c^2} = 0,$$

stąd znajdujemy:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{a^2(b^2 - c^2)z}{c^2(a^2 - b^2)x}, \qquad \frac{dy}{dz} = \frac{b^2(c^2 - a^2)z}{c^2(a^2 - b^2)y}.$$

Podstawiając te wartości w równania ogólne, znajdujemy równania stycznej:

$$\frac{x(x' - x)}{a^2(b^2 - c^2)} = \frac{y(y' - y)}{b^2(c^2 - a^2)} = \frac{z(z' - z)}{c^2(a^2 - b^2)},$$

oraz płaszczyzny normalnej:

$$a^2(b^2 - c^2)\frac{x' - x}{x} + b^2(c^2 - a^2)\frac{y' - y}{y} + c^2(a^2 - b^2)\frac{z' - z}{z} = 0.$$

4. Znaleźć styczną i płaszczyznę normalną do krzywej, utworzonej przez przecięcie dwóch stożków prostych, których osie przecinają się pod kątem prostym.

Jeżeli jako początek osi spółrzędnych obierzemy punkt przecięcia się osi stożków, a same osie uważać będziemy jako osie spółrzędnych $x$ i $y$, wówczas, oznaczając przez $h$ i $h'$, odległości wierzchołków stożków od początku spółrzędnych, oraz przez $m$ i $m'$ spółczynniki kierunkowe tworzących, znajdziemy następujące równania krzywej:

$$h - x = m\sqrt{y^2 + z^2},$$

$$h' - y = m'\sqrt{x^2 + z^2}.$$

Równania stycznej są:

$$\frac{x' - x}{m^2 z\,[(m'^2 + 1)\,y - h']} = \frac{y' - y}{m'^2 z\,[(m^2 + 1)\,x - h]} =$$

$$= \frac{z' - z}{(h - x)\,(h' - y) - m^2 m'^2 xy}.$$

Równanie płaszczyzny normalnej jest:

$$m^2 z\,(x' - x)\,[(m'^2 + 1)\,y - h'] + m'^2 z\,(y' - y\,[(m^2 + 1)\,x - h]$$
$$+ (z' - z)\,[(h - x)\,(h' - y) - m^2 m'^2 xy] = 0.$$

5. Dana jest krzywa, według której przecinają się walce paraboliczne:

$$x^2 = 2\,az, \qquad y^2 = 2\,bz.$$

Równania stycznej są:

$$\frac{x' - x}{\frac{a}{x}} = \frac{y' - y}{\frac{b}{y}} = \frac{z' - z}{1};$$

równanie płaszczyzny normalnej:

$$\frac{a}{x}\,x' + \frac{b}{y}\,y' + z' - z = a + b;$$

równanie płaszczyzny ściśle stycznej:

$$y' = \frac{bx}{ay}\,x'.$$

Prócz tego znajdujemy:

$$\rho = \frac{(a + b + 2\,z)^{\frac{3}{2}}}{(a + b)^{\frac{1}{2}}},$$

oraz

$$X = -\,\frac{2\,xz}{a + b}, \qquad Y = -\,\frac{2\,yz}{a + b}, \qquad Z = a + b + 3\,z.$$

6. Dana jest krzywa przecięcia się walca kołowego z walcem parabolicznym:

$$x^2 + z^2 = a^2, \qquad y^2 = bz.$$

Otrzymujemy następujące równania stycznej:

$$xx' + zz' = a^2,$$

$$y' = \frac{b}{2y} z' + \frac{y}{2}.$$

Spółrzędne punktów, w których płaszczyzna normalna spotyka osie są:

$$x' = -\frac{bx}{2z}, \qquad y' = y, \qquad z' = \frac{b}{2}.$$

Płaszczyzna ściśle styczna spotyka osie spółrzędnych w punktach:

$$x' = x - \frac{z^2(a^2 + z^2)}{x^3},$$

$$y' = \frac{b}{4a^2 yz}[z^2(a^2 + z^2) - x^4],$$

$$z' = \frac{x^4 - z^2(a^2 + z^2)}{z(2a^2 + x^2)}.$$

Wzór na promień krzywizny jest:

$$\rho = \frac{(4a^2y^2 + b^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{2ab\sqrt{4a^2y^2(4z^2 + y^2) + b^2x^2(4z^2 + x^2)}}.$$

7. Dla krzywej, przecięcie się kuli

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

z walcem

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2,$$

otrzymujemy równanie stycznej:

$$\frac{x' - x}{-z} = \frac{y(y' - y)}{z\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{z' - z}{b}.$$

Długość odcinka stycznej, zawartego pomiędzy punktem styczności a płaszczyzną $xy$, jest:

$$\frac{z}{by}\sqrt{b^2y^2 + a^2z^2}.$$

Równanie płaszczyzny ściśle stycznej jest:

$$(x' - x)\,b\,[a^2z^2 - by^2\sqrt{a^2 - y^2}] - (y' - y)\,b^2y^3 + (z' - z)\,a^2z^3 = 0.$$

W punktach o spółrzędnych

$$y=0, \qquad x=b-a, \qquad z=\sqrt{r^2-(b-a)^2},$$

płaszczyzna ta staje się równoległa do osi $y$, i równanie jej przechodzi w następujące:

$$bx'+z'\sqrt{r^2-(b-a)^2}=r^2+ab-a^2.$$

8. Mamy następujące równania śrubowej stożkowej:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{h^2}(a-z)^2,$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=\operatorname{cotg}^2 v\,;$$

w których $a$ oznacza promień podstawy stożka, $h$ — wysokość stożka, $v$ — stały kąt pomiędzy styczną i podstawą stożka.

Niech będzie

$$k=\sqrt{\frac{h^2}{a^2}\operatorname{cotg}^2 v-1}\,;$$

wtedy:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{ky-x}{a-z}, \qquad \frac{dy}{dz}=-\frac{kx+y}{a-z}.$$

Z tych wzorów łatwo otrzymujemy pochodne rzędu wyższego względem $z$ oraz pochodną łuku krzywizny:

$$\frac{ds}{dz}=\frac{1}{\sin v}.$$

Równanie normalnej głównej są:

$$y'-y=\frac{ky-x}{kx+y}(x'-x), \qquad z'=z.$$

Wzór na promień krzywizny jest:

$$\rho=\frac{2(a-z)}{k\sin 2v}.$$

Środek krzywizny ma za spółrzędne:

$$X=-\frac{y}{k\cos^2 v}-x\operatorname{tang}^2 v,$$

$$Y=\frac{x}{k\cos^2 v}-y\operatorname{tang}^2 v,$$

$$Z=z.$$

Na kąt skręcenia mamy wzór:

$$\varepsilon = \frac{k \sin^2 v}{a - z} ds.$$

UWAGA. W powyższych przykładach określiliśmy tylko niektóre elementy krzywej. Uczącym się zalecamy wyznaczenie pozostałych elementów na zasadzie wzorów ogólnych.

---

# ROZDZIAŁ XVII.

## Obwiednie linij i powierzchni.

Niech będzie dane następujące równanie krzywej, zawierające parametr zmienny $a$:

$$F(x, y, a) = 0. \tag{1}$$

Pochodna względem $a$ jest:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0. \tag{2}$$

Aby znaleźć obwiednię wszystkich krzywych, które otrzymujemy, zmieniając w sposób ciągły parametr $a$ w równaniu (1), wystarczy wyrugować ten parametr z równań (1) i (2).

Jeżeli mamy równanie krzywej:

$$F(x, y, a, b) = 0, \tag{3}$$

zawierające dwa parametry zmienne $a$ i $b$, pomiędzy którymi istnieje zależność:

$$\varphi(a, b) = 0, \tag{4}$$

wówczas, chcąc znaleźć obwiednię tej krzywej, stosujemy jeden z następujących dwóch sposobów:

1°. Jeżeli z równania (4) możemy w sposób prosty wyrazić jeden parametr jako funkcyę drugiego, to podstawiamy znaleziony wzór w równanie (3) i otrzymujemy równanie zawierające jeden parametr; z równaniem tem, jako zawierającem jeden parametr, postępujemy według powyższych wskazówek.

2°. Jeżeli rozwiązanie równania (4) jest trudne albo niemożliwe, albo też wzór, wyrażający jeden parametr jako funkcyę drugiego jest złożony, wówczas różniczkujemy równanie (3) i (4) względem zmiennej $a$, zakładając że $b$ jest funkcyą $a$ i następnie z otrzymanych równań rugujemy $\frac{db}{da}$. W ten sposób znajdujemy nowe równanie między zmiennemi $a$ i $b$; z tego równania i z równań (3) i (4) rugujemy $a$ i $b$. Dogodnie jest przytem stosować metodę czynnika nieoznaczonego. Podobne sposoby stosujemy i wtedy, gdy mamy wyznaczyć obwiednię krzywej, której równanie zawiera trzy zmienne parametry, związane z sobą dwoma równaniami i t. d.

UWAGA. Mając dane równanie (3), możemy zbadać, jaki związek powinien zachodzić między $a$ i $b$, żeby zastępując w tem równaniu jeden parametr przez jego wartość, wyrażoną w funkcyi drugiego parametru, otrzymać jako obwiednię krzywą

$$f(x, y) = 0. \tag{5}$$

Aby znaleźć ten związek między $a$ i $b$, należy rozwiązać równania (3) i (5) względem $\frac{dy}{dx}$, przyrównać do siebie znalezione wartości, a następnie wyrugować $x$ i $y$ z otrzymanego równania i z równań (3) i (5).

---

Przy szukaniu obwiedni powierzchni, stosujemy podobne sposoby, jak i w przypadku obwiedni krzywych.

Mamy równanie powierzchni:

$$F(x, y, z, a), \tag{6}$$

zawierające parametr zmienny $a$; obwiednię otrzymamy, rugując $a$ z równania (6) i z równania pochodnej:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0. \tag{7}$$

Jeżeli równanie powierzchni zawiera dwa parametry:

$$F(x, y, z, a, b) = 0;$$

przyczem mamy:

$$\varphi(a, b) = 0,$$

wówczas mamy do wyboru dwa sposoby, analogiczne do poprzednio wskazanych i t. d.

UWAGA. Jeżeli z równań (6), (7) i z równania $\frac{\partial^2 F}{\partial a^2} = 0$ wyrugujemy $a$, otrzymamy równania krawędzi zwrotu.

## PRZYKŁAD I.

Znaleźć obwiednię prostych, określonych równaniem:

$$y = ax + \frac{p}{2a},$$

gdzie $a$ jest parametrem zmiennym.

Równanie dane możemy napisać w postaci:

$$F = y - ax - \frac{p}{2a} = 0; \tag{1}$$

po zróżniczkowaniu otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -x + \frac{p}{2a^2} = 0. \tag{2}$$

Równanie (2) daje:

$$a = \sqrt{\frac{p}{2x}};$$

podstawiając tę wartość na $a$ w równanie (1), otrzymamy, jako równanie obwiedni, parabolę:

$$y^2 = 2px.$$

## PRZYKŁAD II.

Znaleźć obwiednię wszystkich elipsoid obrotowych, określonych równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

przyczem między osiami zachodzi związek:

$$a^2 + b^2 = k^2. \tag{2}$$

Różniczkujemy (1) i (2) względem $a$, uważając $b$ jako funkcyę $a$ otrzymujemy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^3}\frac{db}{da} = 0, \tag{3}$$

$$a + b\frac{db}{da} = 0. \tag{4}$$

Równanie (3) mnożymy przez czynnik nieoznaczony $\lambda$; odejmując następnie równanie (4), znajdujemy:

$$\lambda \frac{x^2}{a^3} - a + [\lambda \frac{y^2 + z^2}{b^3} - b] \frac{db}{da} = 0,$$

skąd:

$$\lambda \frac{x^2}{a^3} = a \quad \text{i} \quad \lambda \frac{y^2 - z^2}{b^3} = b.$$

Dwa ostatnie równania mnożymy odpowiednio przez $a$ i $b$, następnie na zasadzie równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$\lambda = k^2,$$

skąd wynika, że:

$$k^2 \frac{x^2}{a^3} = a, \qquad k^2 \frac{y^2 + z^2}{b^3} = b,$$

czyli

$$a^2 = \pm kx, \qquad b^2 = \pm k \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Powyższe wartości podstawiamy w równanie (2) i znajdujemy następujące równanie obwiedni:

$$\pm x \pm \sqrt{y^2 + z^2} = k.$$

## PRZYKŁAD III.

Jaki związek musi istnieć pomiędzy parametrami $a$ i $b$ prostej:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{1}$$

żeby obwiednią jej było koło:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{2}$$

Z równania (1) mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a},$$

z równania (2) mamy:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Przyrównywując do siebie obie wartości pochodnej, otrzymujemy:

$$\frac{x}{y} = \frac{b}{a}, \tag{3}$$

skąd:

$$x = \frac{by}{a}.$$

Podstawiając tę wartość $x$ w równanie (1), mamy:

$$y = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2},$$

stąd:

$$x = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Szukany związek pomiędzy parametrami $a$, $b$ znajdziemy, podstawiając powyższe wartości $x$ i $y$ w równanie (2); związek ten jest:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}.$$

## ĆWICZENIA.

1. Znaleźć obwiednię paraboli, określonej równaniem:

$$y = ax - \frac{1 + a^2}{4h} x^2,$$

gdzie $a$ jest parametrem zmiennym.

Jako obwiednię znajdujemy drugą parabolę:

$$x^2 = 4h(h - y).$$

Parabola dana jest torem punktu materyalnego, poruszającego się w próżni pod działaniem siły ciężkości, jeżeli $a$ oznacza spółczynnik kierunkowy prędkości początkowej, rzędne zaś mają kierunek przeciwny do kierunku siły ciężkości.

2. Znaleźć obwiednię elips, określonych równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(k - a)^2} = 1,$$

gdzie $a$ jest parametrem zmiennym.

Równanie obwiedni jest:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}}.$$

3. Znaleźć obwiednię kół, określonych równaniem:

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2,$$

przyczem parametry $a$ i $b$ są związane równaniem:

$$b^2 = 4ma.$$

Równanie obwiedni jest:

$$y^2 = 4\,m\,(x + m).$$

4. Znaleźć obwiednię prostych, określonych równaniem:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

jeżeli między parametrami $a$ i $b$ zachodzi związek.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{n} = 1.$$

Równanie obwiedni jest:

$$\sqrt{\frac{x}{m}} + \sqrt{\frac{y}{n}} = 1.$$

5. Znaleźć obwiednię elips, określonych równaniem:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

jeżeli między parametrami zmiennemi $a$ i $b$ istnieje związek:

$$\frac{a^2}{m^2} + \frac{b^2}{n^2} = 1.$$

Szukane obwiednie są to cztery proste:

$$\pm \frac{x}{m} \pm \frac{y}{n} = 1.$$

6. Znaleźć obwiednię odcinka stałej długości, który ślizga się po dwóch osiach spółrzędnych prostokątnych.

Oznaczmy przez $l$ długość danego odcinka, przez $a$ i $b$ odległości początku spółrzędnych od punktów, w których ten odcinek przecina osie. Mamy znaleźć obwiednię prostej, określonej równaniem:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

przyczem parametry $a$ i $b$ są związane z sobą równaniem:

$$a^2 + b^2 = l^2.$$

Szukaną obwiednią jest asteroida:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

7. Znaleźć obwiednię cięciw, łączących końce średnic sprzężonych elipsy:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Jeżeli $x'$ i $y'$ są spółrzędnemi końców jednej ze średnic, $\frac{a}{b}y'$, $-\frac{b}{a}x'$ spółrzędnemi końców drugiej średnicy, wówczas równanie cięciwy jest:

$$x'\left(y-\frac{b}{a}x\right)-y'\left(x+\frac{a}{b}\right)y+ab=0.$$

Zadanie sprowadza się więc do znalezienia obwiedni wszystkich cięciw, określonych powyższem równaniem, przyczem parametry zmienne $x'$ i $y'$ są związane ze sobą równaniem:

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

Szukana obwiednia jest elipsą:

$$\frac{2\,y^2}{b^2}+\frac{2\,x^2}{a^2}=1.$$

Osie tej elipsy są:

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \quad \text{i} \quad \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

8. Przez punkt dany prowadzimy do danego koła dowolną sieczną, na otrzymanej w ten sposób cięciwie, jako na średnicy, zakreślamy koło. Znaleźć obwiędnią wszystkich kół, otrzymanych w sposób powyższy.

Początek spółrzędnych obieramy w danym punkcie, prostą zaś poprowadzoną od danego punktu do środka danego koła, uważamy za oś $x$. Równanie koła o promieniu $R$ ma wówczas postać:

$$(x-m)^2+y^2=R^2,$$

równanie zaś siecznej jest:

$$y=ax.$$

Wskutek tego równanie koła, którego średnicą jest cięciwa, leżąca na tej siecznej, jest:

$$\left(x-\frac{m}{1+a^2}\right)^2+\left(y-\frac{am}{1+a^2}\right)^2=R^2-\frac{m^2\,a^2}{1+a^2};$$

Równanie obwiedni powyższej krzywej, zawierającej parametr zmienny $a$, jest:

$$(x^2-mx+m^2+y^2-R^2)^2-m^2\,(x^2+y^2)=0.$$

9. Przez dowolny punkt, obrany na krzywej drugiego rzędu, prowadzimy dwie styczne do elipsy danej, następnie łączymy cięciwą punkty styczności. Znaleźć obwiednię wszystkich otrzymanych w ten sposób cięciw.

Niech $a$ i $b$ będą spółrzędnemi punktu, leżącego na krzywej drugiego rzędu:

$$Ax^2 + 2\,Bxy + Cy^2 + 2\,Dx + 2\,Ey + 1 = 0.$$

Równanie elipsy niech będzie:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Jeżeli przez punkt $(a, b)$ poprowadziliśmy dwie styczne do elipsy, wówczas równanie cięciwy, łączącej punkty styczności, jest:

$$\frac{ax}{m^2} + \frac{by}{n^2} = 1.$$

Zadanie sprowadza się więc do znalezienia obwiedni wszystkich cięciw, określonych przez ostatnie równanie, przyczem między $a$ i $b$ zachodzi związek:

$$Aa^2 + 2\,Bab + Cb^2 + 2\,Da + 2\,Eb + 1 = 0.$$

Jako równanie obwiedni znajdujemy:

$$(C - E^2)\frac{x^2}{m^4} - 2\,(B - DE)\frac{xy}{m^2\,n^2} + (A - D^2)\frac{y^2}{n^4} + 2\,(CD - BE)\frac{x}{m^2}$$
$$+ 2\,(AE - BD)\frac{y}{n^2} + AC - B^2 = 0.$$

Zadanie to jest przypadkiem szczególnym ogólnego zagadnienia biegunowych wzajemnych (PONCELET, *Annales de Gergonne*, t. VIII).

10. Środek zmiennego koła porusza się po osi $x$. Znaleźć związek, który powinien zachodzić pomiędzy odciętą środka i promieniem, aby obwiednia była prostą, przechodzącą przez początek spółrzędnych.

Równania koła i prostej są:

$$(x - a)^2 + y^2 = b^2,$$
$$y = mx;$$

stąd znajdujemy szukany związek w postaci:

$$b^2 = \frac{a^2\,m^2}{1 + m^2}.$$

11. Rozwiązać podobne zadanie, zakładając, że obwiednia poruszającego się koła ma być elipsą:

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Otrzymamy:

$$b^2 = n^2 \left(1 - \frac{a^2}{m^2 - n^2}\right).$$

12. Rozwiązać podobne zagadnienie, zakładając, że obwiednią zmiennego koła ma być parabola:

$$y^2 = 2\,px.$$

Związek szukany ma postać następującą:

$$b^2 = p\,(2\,a - p).$$

13. Rozwiązać to samo zagadnienie, zakładając, że obwiednią koła jest hyperbola:

$$\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1.$$

Znajdujemy związek następujący:

$$b^2 = n^2 \left(\frac{a^2}{m^2 + n^2} - 1\right).$$

14. Wyznaczyć obwiednię wszystkich normalnych do paraboli:

$$y^2 = 2\,px.$$

Ponieważ równanie normalnej do danej paraboli jest:

$$y' - y = -\frac{y}{p}\,(x' - x),$$

Zagadnienie przeto sprowadza się do wyznaczenia obwiedni wszystkich prostych, określonych przez powyższe równanie, w którem parametry zmienne $y$ i $x$ związane są z sobą równaniem:

$$y^2 = 2\,px.$$

Równanie obwiedni jest:

$$y'^2 = \frac{1}{p}\left[\frac{2\,(x' - p)}{3}\right]^2.$$

Jest to znalezione poprzednio równanie rozwiniętej paraboli $y^2 = 2\,px$. (Zob. rozdz. XIV, dział II, przykład I). Jakoż wiemy, że obwiednia wszystkich normalnych do krzywej danej jest zarazem rozwiniętą tej krzywej.

15. Z pewnego punktu rozchodzą się promienie światła we wszystkich kierunkach, znajdujących się w jednej płaszczyźnie. Promienie te są odbite przez krzywą, leżącą w tejże płaszczyźnie; znaleźć obwiednię promieni odbitych.

Punkt wyjścia promieni bierzemy jako początek spółrzędnych; przez $x$, $y$ oznaczamy spółrzędne punktu, w którym promień spotyka krzywą; przez $\alpha$ oznaczamy spółczynnik kierunkowy stycznej do krzywej w punkcie $(x, y)$; przez $\mu$ — styczną trygonometryczną kąta między promieniem i styczną do krzywej w tym samym punkcie $(x, y)$. Ponieważ kąt padania promienia świetlnego równa się kątowi odbicia, otrzymujemy przeto następujące równanie promienia odbitego w punkcie $(x, y)$:

$$y' - y = \frac{\alpha - \mu}{1 + \alpha\mu}(x' - x).$$

Stąd w zwykły sposób otrzymujemy obwiednię.

Jeżeli np. krzywą odbijającą jest elipsa:

$$\frac{(x - e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

i jeżeli początkiem spółrzędnych jest jedno z jej ognisk, w którym zarazem znajduje się punkt świecący, wówczas mamy:

$$\alpha = -\frac{b^2}{a^2}\frac{(x - e)}{y},$$

$$\mu = \frac{b^2}{ey},$$

w tym przypadku równanie promienia odbitego jest:

$$y' - y = \frac{y}{x - 2e}(x' - x). \tag{2}$$

Uważając w tem równaniu $x$, $y$ jako parametry zmienne, związane z sobą równaniem (1), znajdujemy, że obwiednią jest punkt:

$$y' = 0, \qquad x' = 2e;$$

jest to drugie ognisko elipsy.

Jest to zagadnienie z teoryi *kaustyk przez odbicie.*

16. Znaleźć obwiednię kul, których równanie jest:

$$(x-a)^2+y^2+z^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-a^2),$$

przyczem $a$ jest parametrem zmiennym.

Obwiednią jest elipsoida obrotowa:

$$\frac{x^2}{m^2+n^2}+\frac{y^2+z^2}{n^2}=1.$$

17. Znaleźć obwiednię płaszczyzn, przechodzących przez dany punkt i równoodległych od drugiego danego punktu.

Jako początek spółrzędnych obieramy drugi punkt dany, jako oś $z$, prostą przechodzącą przez dwa dane punkty; wtedy zagadnienie sprowadza się do znalezienia obwiedni płaszczyzn:

$$ax+by+z=m.$$

Parametry zmienne $a$ i $b$ są związane ze sobą przez odległość $p$, liczoną od początku spółrzędnych do każdej z płaszczyzn, t. j. przez wyrażenie:

$$p=\frac{m}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Szukane równanie obwiedni jest:

$$(m^2-p^2)(x^2+y^2)-p^2(m-z)^2=0.$$

Jest to równanie stożka kołowego.

18. Znaleźć obwiednię danej kuli, której środek porusza się po danym kole.

W tem zadaniu musimy znaleźć obwiednię kul, określonych równaniem:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+z^2=R^2;$$

w którem parametry zmienne $a$ i $b$ są związane z sobą równaniem:

$$a^2+b^2=k^2.$$

Równanie obwiedni jest:

$$(k\pm\sqrt{x^2+y^2})=R^2-z^2.$$

19. Hyperboloidę jednopowłókową przecinamy płaszczyzną i przez wszystkie punkty krzywej przekroju prowadzimy płaszczyzny, styczne do hyperboloidy; znaleźć obwiednię tych płaszczyzn stycznych.

Mamy następujące równania hyperboloidy i płaszczyzny siecznej:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$Ax+By+Cz=D.$$

Równanie płaszczyzny stycznej do hyperboloidy jest:

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-\frac{zz'}{c^2}=1.$$

Zadanie sprowadza się do znalezienia obwiedni tych płaszczyzn, przyczem parametry zmienne $x$, $y$ i $z$ związane są z sobą przez dwa pierwsze równania.

Różniczkujemy wszystkie trzy równania względem $x$, $y$, $z$:

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{ydy}{b^2}-\frac{zdz}{c^2}=0,$$

$$Adx+Bdy+Cdz=0,$$

$$\frac{x'\,dx}{a^2}+\frac{y'\,dy}{b^2}-\frac{z'\,dz}{c^2}=0.$$

Mnożymy następnie te trzy równania odpowiednio przez $\lambda$, 1, $\mu$, dodajemy do siebie, a następnie przyrównujemy do zera spółczynniki przy $dx$, $dy$, $dz$; w ten sposób znajdujemy

$$\lambda\frac{x}{a^2}+\mu\frac{x'}{a^2}+A=0,$$

$$\lambda\frac{y}{b^2}+\mu\frac{y'}{b^2}+B=0,$$

$$-\lambda\frac{z}{c^2}-\mu\frac{z'}{c^2}+C=0.$$

Mnożymy znowu ostatnie trzy równania przez $x$, $y$, $z$, dodajemy do siebie, a uwzględniając równanie hyperboloidy, płaszczyzny stycznej i płaszczyzny siecznej, otrzymujemy:

$$\lambda+\mu+D=0,$$

skąd:

$$\lambda=-\mu-D.$$

Wartość $\lambda$ podstawiamy w poprzednie równania:

$$Aa^2 - Dx = \mu (x - x'),$$
$$Bb^2 - Dy = \mu (y - y'),$$
$$- Cc^2 - Dz = \mu (z - z').$$

Z tych trzech równań otrzymujemy:

$$\frac{x - x'}{Ax^2 - Dx} = \frac{y - y'}{Bb^2 - Dy} = \frac{z - z'}{-Cc^2 - Dz}$$

albo

$$\frac{z' - z}{Cc^2 + Dz} = \mu.$$

Mnożymy obydwa wyrazy każdego z tych trzech równych stosunków odpowiednio przez $\frac{x'}{a^2}$, $\frac{y'}{b^2}$, $\frac{z'}{c^2}$; po redukcyi otrzymamy na zasadzie znanej własności proporcyi, że:

$$\frac{1 - \left(\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2}\right)}{Ax' + By' + Cz' - D} = \mu.$$

Mnożymy obydwa wyrazy każdego stosunku odpowiednio przez $A$, $B$ i $C$; mamy:

$$\frac{D - (Ax' + By' + Cz')}{A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 - D^2} = \mu.$$

Dwie ostatnie wartości $\mu$ przyrównywamy do siebie i znajdujemy:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} - 1 = \frac{[D - (Ax' + By' + Cz')]^2}{A^2 a^2 + B^2 b^2 - C^2 c^2 - D^2}.$$

Jest to równanie szukanej powierzchni.

Gdyby powierzchnią daną była elipsoida:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

wówczas równanie obwiedni byłoby:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} + \frac{z'^2}{c^2} - 1 = \frac{[D - (Ax' + By' + Cz')]^2}{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2 - D^2}.$$

20. Znaleźć obwiednią płaszczyzn, wyznaczonych przez równanie:

$$Ax + By + Cz = D,$$

którego parametry zmienne $A$, $B$, $C$, $D$ są związane z sobą równaniami:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1,$$

oraz

$$\frac{A^2}{D^2 - a^2} + \frac{B^2}{D^2 - b^2} + \frac{C^2}{D^2 - c^2} = 0.$$

Te trzy równania różniczkujemy względem $A$, $B$, $C$; mnożymy odpowiednio przez $\lambda$, $\mu$, 1, przyrównujemy do zera spółczynniki przy $dA$, $dB$, $dC$, $dD$ i otrzymujemy:

$$\lambda x = A\mu + \frac{A}{D^2 - a^2}, \tag{1}$$

$$\lambda y = B\mu + \frac{B}{D^2 - b^2}, \tag{2}$$

$$\lambda z = C\mu + \frac{C}{D^2 - c^2}, \tag{3}$$

$$\lambda = D\left[\frac{A^2}{(D^2 - a^2)^2} + \frac{B^2}{(D^2 - b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2 - c^2)^2}\right] \tag{4}$$

Mnożąc równania (1), (2), (3), przez $A$, $B$, $C$ i dodając do siebie, otrzymujemy:

$$\lambda D = \mu. \tag{5}$$

Następnie mnożymy te same równania przez $x$, $y$, $z$ i dodajemy do siebie, oznaczając przez $R^2$ sumę:

$$x^2 + y^2 + z^2.$$

W ten sposób znajdujemy:

$$\lambda R^2 = D\mu + \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2}.$$

Stąd, na zasadzie równania (3), mamy:

$$\lambda (R^2 - D^2) = \frac{Ax}{D^2 - a^2} + \frac{By}{D^2 - b^2} + \frac{Cz}{D^2 - c^2}. \tag{6}$$

Wreszcie podnosimy do kwadratu obie strony równań (1), (2), (3) i po dodaniu otrzymujemy:

$$\lambda^2 R^2 = \mu^2 + \frac{A^2}{(D^2 - a^2)^2} + \frac{B^2}{(D^2 - b^2)^2} + \frac{C^2}{(D^2 - c^2)^2}.$$

Stąd, na mocy równań (4), (5), mamy:

$$\lambda = \frac{1}{D(R^2 - D^2)} \quad \text{i} \quad \mu = \frac{1}{R^2 - D^2},$$

Wartości $\lambda$ i $\mu$ podstawiamy w równania (1), (2) i (3). Rezultat tego podstawienia jest:

$$\frac{x}{R^2 - a^2} = \frac{AD}{D^2 - a^2},$$

$$\frac{y}{R^2 - b^2} = \frac{BD}{D^2 - b^2},$$

$$\frac{z}{R^2 - c^2} = \frac{CD}{D^2 - c^2}.$$

Te trzy równania mnożymy odpowiednio przez $x$, $y$, $z$, dodajemy do siebie i na zasadzie równania (6) i wartości $\lambda$ otrzymujemy wreszcie równanie szukanej obwiedni:

$$\frac{x^2}{R^2 - a^2} + \frac{y^2}{R^2 - b^2} + \frac{z^2}{R^2 - c^2} = 1.$$

Jest to równanie powierzchni fal świetlnych, rozchodzących się w ośrodku krystalicznym (Zob. Fresnel, *Mémoires de l'Institut,* tom VII).

---

# ROZDZIAŁ XVIII.

## Rozkładanie ułamków wymiernych na ułamki proste.

Niech będzie dany ułamek $\frac{f(x)}{F(x)}$, którego wyrazy są funkcyami całkowitemi i wymiernemi zmiennej $x$, potęga zaś licznika jest różna od potęgi mianownika.

Aby podobny ułamek rozłożyć na ułamki proste, należy położyć $F(x) = 0$ i wyszukać pierwiastki tego równania.

1°. Jeżeli te pierwiastki są rzeczywiste i różne, wówczas piszemy:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots \tag{1}$$

gdzie $a$, $b$, $c$ i t. d. są to pierwiastki powyższego równania, zaś $A$, $B$, $C$ i t. d. spółczynniki stałe, które trzeba wyznaczyć.

$2^0$. Jeżeli pierwiastki są rzeczywiste i różne, wtedy piszemy:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_n}{(x-a)^n} + \frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}} + \dots \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_p}{(x-b)^p} +$$

$$+ \frac{B_{p-1}}{(x-b)^{p-1}} + \dots \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{C_q}{(x-c)^q} + \dots$$

w założeniu, że równanie $F(x) = 0$ zawiera $n$ pierwiastków równych $a$, $p$ pierwiastków równających się $b$, $q$ pierwiastków równych $c$ i t. d.

Spółczynniki $A_n$, $A_{n-1} \dots A_1$; $B_p$, $B_{p-1} \dots B_1$; $C_q$, $C_{q-1} \dots C_1$ są to stałe, które należy wyznaczyć

$3^0$. Jeżeli pierwiastki są nierówne i urojone wtedy piszemy:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Ax+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \frac{Cx+D}{(x-\gamma)^2+\delta^2} + \frac{Ex+F}{(x-\varepsilon)^2+\xi^2} + \dots \tag{3}$$

W tym przypadku pierwiastki zespolone są następujące:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta\sqrt{-1}, \\ \alpha-\beta\sqrt{-1}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma+\delta\sqrt{-1}, \\ \gamma-\delta\sqrt{-1}, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon+\xi\sqrt{-1}, \\ \varepsilon-\xi\sqrt{-1}, \end{array}\right. \quad \text{i t. d.}$$

zaś $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ i t. d. są to wielkości stałe, które należy wyznaczyć.

$4^0$. Jeżeli pierwiastki są urojone i równe, wtedy piszemy:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_n x + B_n}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n} + \frac{A_{n-1} x + B_{n-1}}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{n-1}} + \dots \frac{A_1 x + B_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$+ \frac{C_p x + D_p}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^p} + \frac{C_{p-1} x + D_{p-1}}{[(x-\gamma)^2+\delta^2]^{p-1}} + \dots \frac{C_1 x + D_1}{(x-\gamma)^2+\delta^2}$$

$$+ \frac{E_q x + F_q}{[(x-\varepsilon)^2+\xi^2]^q} + \dots \tag{4}$$

w założeniu, że równanie $F(x) = 0$ ma $n$ pierwiastków równających się:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta\sqrt{-1}, \\ \alpha-\beta\sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

$p$ pierwiastków równających się:

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma+\delta\sqrt{-1}, \\ \gamma-\delta\sqrt{-1}, \end{array}\right.$$

$q$ pierwiastków równych:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon + \xi\sqrt{-1}, \\ \varepsilon - \xi\sqrt{-1}. \end{array}\right. \quad \text{i t. d.}$$

$A_n$, $B_n$, $A_{n-1}$ i t. d. są to wielkości stałe, które trzeba obliczyć.

W każdym z rozważonych przypadków przy pomocy rachunku różniczkowego można w następujący sposób obliczyć stałe.

W pierwszym przypadku:

$$A = \frac{f(a)}{F'(a)}, \qquad B = \frac{f(b)}{F'(b)}, \qquad C = \frac{f(c)}{F'(c)} \qquad \text{i t. d.}$$

W drugim przypadku:

$$A_n = f(a), \quad A_{n-1} = \frac{f'(a)}{1}, \quad A_{n-2} = \frac{f''(a)}{1.2}, \quad \dots A_1 = \frac{f^{n-1}(a)}{1.2.3\dots(n-1)},$$

$$B_p = f(b), \quad B_{p-1} = \frac{f'(b)}{1}, \quad B_{p-2} = \frac{f''(b)}{1.2}, \quad \dots B_1 = \frac{f^{p-1}(b)}{1.2.3\dots(p-1)},$$

$C_q = f(c) \dots$ i t. d.

W trzecim przypadku wyznaczamy $A$ i $B$ z równania:

$$A(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) + B = \pm 2\beta\sqrt{-1} \,.\, \frac{f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})};$$

zaś $C$ i $D$ z równania:

$$C(\gamma \pm \delta\sqrt{-1}) + D = \pm 2\delta\sqrt{-1} \,.\, \frac{f(\gamma \pm \delta\sqrt{-1})}{F'(\gamma \pm \delta\sqrt{-1})}; \quad \text{i t. d.}$$

W czwartym przypadku w celu wyznaczenia stałych, rozwiązujemy układ równań:

$$\left\{\begin{array}{l} f(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = A_n(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) + B_n, \\ f'(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) = A_n \pm 2\beta\sqrt{-1}\,[A_{n-1}(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}) + B_{n-1}], \quad \text{i t. d.} \end{array}\right.$$

$$f(\gamma \pm \delta\sqrt{-1}) = C_p(\gamma \pm \delta\sqrt{-1}) + D_p,$$

$$f'(\gamma \pm \delta\sqrt{-1}) = C_p \pm 2\delta\sqrt{-1}\,[C_{p-1}(\gamma \pm \delta\sqrt{-1}) + D_{p-1}], \quad \text{i t. d.}$$

Jeżeli równanie $F(x) = 0$ posiada różne rodzaje pierwiastków, wówczas piszemy najpierw, że dany ułamek równa się sumie ułamków, otrzymanych przez dodanie odpowiednio drugich wyrazów równań (1), (2), (3), (4), stosownie do rodzaju poszczególnych pierwiastków, następnie zaś wyznaczamy stałe z układu równań, zawierających po lewej stronie dany ułamek, po prawej zaś sumę ułamków, odpowiadających pewnej szczególnej kategoryi pierwiastków (Zob. przykłady V i VI).

## PRZYKŁAD I.

$$\frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24}.$$

Piszemy najpierw $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$;

równanie to posiada następujące pierwiastki całkowite i różne:

$$x = 2, \qquad x = 3, \qquad x = 4.$$

Możemy więc napisać:

$$\frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4}.$$

Ponieważ mamy:

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{12x^2 - 70x + 98}{3x^2 - 18x + 26},$$

przeto musi być:

$$A = \frac{f(2)}{F'(2)} = \frac{12 \,.\, 2^2 - 70 \,.\, 2 + 98}{3 \,.\, 2^2 - 18 \,.\, 2 + 26} = 3,$$

$$B = \frac{f(3)}{F'(3)} = 4, \qquad C = \frac{f(4)}{F'(4)} = 5.$$

Dany ułamek po rozłożeniu przedstawi się w postaci następującej:

$$\frac{12x^2 - 70x + 98}{x^3 - 9x^2 + 26x - 24} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{5}{x-4},$$

## PRZYKŁAD II.

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}.$$

Równanie $(x-1)^6 = 0$ ma sześć pierwiastków, z których każdy równa się jedności; piszemy więc:

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{A_6}{(x-1)^6} + \frac{A_5}{(x-1)^5} + \frac{A_4}{(x-1)^4} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_1}{x-1}$$

Różniczkując, otrzymujemy:

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1,$$
$$f'(x) = 4x^3 + 4x,$$
$$f''(x) = 12x^2 + 4,$$
$$f'''(x) = 24x,$$
$$f^{IV}(x) = 24.$$

Stąd znajdujemy dla stałych następujące wartości:

$$A_6 = f(1) = 4, \qquad A_3 = \frac{f'''(1)}{1.2.3} = 4,$$

$$A_5 = \frac{f'(1)}{1} = 8, \qquad A_2 = \frac{f^{IV}(1)}{1.2.3.4} = 1,$$

$$A_4 = \frac{f''(1)}{1.2} = 8, \qquad A_1 = \frac{f^{V}(1)}{1.2.3.4.5} = 0.$$

Po rozłożeniu ułamka, otrzymujemy:

$$\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} = \frac{4}{(x-1)^6} + \frac{8}{(x-1)^5} + \frac{8}{(x-1)^4} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

## PRZYKŁAD III.

$$\frac{6x^2 + 25x - 9}{x^4 - 14x^3 + 107x^2 - 422x + 850}.$$

Równanie $x^4 - 14x^3 + 107x^2 - 422x + 850 = 0$ posiada następujące pierwiastki urojone sprzężone:

$$\begin{cases} 3 + 5\sqrt{-1}, \\ 3 - 5\sqrt{-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4 + 5\sqrt{-1}, \\ 4 - 5\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Możemy więc napisać:

$$\frac{6x^2 + 25x - 9}{x^4 - 14x^3 + 107x^2 - 422x + 850} = \frac{Ax + B}{(x-3)^2 + 25} + \frac{Cx + D}{(x-4)^2 + 9}.$$

Ponieważ w tym przykładzie:

$$\frac{f(x)}{F'(x)} = \frac{6x^2 + 25x - 9}{4x^3 - 42x^2 + 214x - 422}.$$

zatem po podstawieniu wartości na $x$, otrzymamy:

$$\frac{f(3+5\sqrt{-1})}{F'(3+5\sqrt{-1})}=\frac{61\sqrt{-1}-6}{20-30\sqrt{-1}}.$$

Równanie, określające $A$ i $B$ (zob. równanie ogólne przyp. trzeci), ma kształt:

$$A(3+5\sqrt{-1})+B=10\sqrt{-1}\,.\,\frac{61\sqrt{-1}-6}{20-30\sqrt{-1}}.$$

Stosując zwykły sposób, znajdujemy;

$$A=-3, \qquad B=1.$$

Podobnie w celu określenia $C$ i $D$ znajdujemy równanie:

$$C(4+3\sqrt{-1})+D=6\sqrt{-1}\,.\,\frac{133+219\sqrt{-1}}{102\sqrt{-1}-36},$$

skąd:

$$C=3, \qquad D=-1;$$

Dany ułamek można rozłożyć w sposób nystępujący:

$$\frac{6x^2+25x-9}{x^4-14x^3+107x^2-422x+850}=\frac{-3x+1}{(x-3)^2+25}+\frac{3x-1}{(x-4)^2+9}.$$

## PRZYKŁAD VI. IV

$$\frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}.$$

Równanie $(x^2+1)^2=0$ posiada dwie pary pierwiastków urojonych sprzężonych, równych $\pm\sqrt{-1}$.

Możemy więc napisać:

$$\frac{2x^3-x^2+5x}{(x^2+1)^2}=\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}.$$

Mamy:

$$f(x)=2x^3-x^2+5x,$$

$$f'(x)=6x^2-2x+5;$$

stąd otrzymujemy:

$$f(\sqrt{-1})=3\sqrt{-1}+1,$$

$$f'(\sqrt{-1})=-2\sqrt{-1}-1.$$

Na podstawie pierwszego równania ogólnego w czwartym przypadku, otrzymujemy dla określenia $A_2$ i $B_2$ równania:

$$3\sqrt{-1}+1=A_2\sqrt{-1}+B_2,$$

$$A_2=3, \qquad B_2=1.$$

Równanie ogólne drugie da nam wyrażenie, z którego wyznaczymy $A_1$ i $B_1$:

$$-2\sqrt{-1}-1=3+(A_1\sqrt{-1}+B_1)\,2\sqrt{-1},$$

$$A_1=2, \qquad B_1=-1.$$

A więc:

$$\frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}=\frac{3x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{2x-1}{x^2+1}.$$

UWAGA. W przypadku, gdy równanie $F(x)=0$ posiada pierwiastki równe i urojone, wygodniej postąpić w sposób następujący:

Uważajmy równanie następujące, które służyć nam będzie, jako punkt wyjścia:

$$\frac{2x^3-x^2+5x}{(x^2+1)^2}=\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{Ax+B}{x^2+1}.$$

Po wyrugowaniu mianowników, otrzymamy:

$$2x^3-x^2+5x=A_2x+B_2+(A_1x+B_1)(x^2+1),$$

stąd po zróżniczkowaniu, znajdziemy:

$$6x^2-2x+5=A_2+(A_1x+B_1).2x+A_1(x^2+1).$$

Jeżeli w powyższem równaniu i w jego pochodnej położymy:

$$x=\sqrt{-1},$$

otrzymamy:

$$3\sqrt{-1}+1=A_2\sqrt{-1}+B_2$$

oraz

$$-2\sqrt{-1}-1=A_2+(A_1\sqrt{-1}+B_1)\,2\sqrt{-1}.$$

Są to te same równania, które już poprzednio otrzymaliśmy. Dalej postępujemy już jak wyżej.

## PRZYKŁAD V.

$$\frac{x^2}{(x+a)^2\,(x^2+a^2)}.$$

Równanie $(x+a)^2\,(x^2+a^2)=0$ posiada dwa pierwiastki rzeczywiste i równe, dwa zaś urojone:

$$-a, \qquad -a, \qquad +a\sqrt{-1}, \qquad -a\sqrt{-1}.$$

Piszemy więc:

$$\frac{x^2}{(x+a)^2\,(x^2+a^2)}=\frac{A_2}{(x+a)^2}+\frac{A_1}{x+a}+\frac{Ax+B}{x^2+a^2}.$$

Otrzymujemy tedy, w celu określenia stałych, następujące dwie równości:

$$\frac{x^2}{(x+a)^2\,(x^2+a^2)}=\frac{A_2}{(x+a)^2}+\frac{A_1}{x+a},$$

$$\frac{x^2}{(x+a)^2\,(x^2+a^2)}=\frac{Ax+B}{x^2+a^2};$$

po odrzuceniu mianowników mamy:

$$x^2=A_2\,(x^2+a^2)+A_1\,(x+a)\,(x^2+a^2), \qquad (1)$$

$$x^2=(Ax+B)\,(x+a)^2. \qquad (2)$$

Z równości (1) i z jej pochodnej, podstawiając $x=-a$, otrzymujemy:

$$A_2=\frac{1}{2}, \qquad A_1=-\frac{1}{2a}.$$

Równość (2), po podstawieniu $x=a\sqrt{-1}$, daje nam:

$$A=\frac{1}{2a}, \qquad B=0.$$

Stąd znajdujemy ostatecznie następującą równość:

$$\frac{x^2}{(x+a)^2\,(x^2+a^2)}=\frac{1}{2\,(x+a)^2}-\frac{1}{2a\,(x+a)}+\frac{x}{2a\,(x^2+a^2)}.$$

PRZYKŁAD VI.

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}.$$

Równanie $x^3(x-2)(x^2+1)^2 = 0$ posiada następujące pierwiastki:

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad 2, \quad \sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}, \quad \sqrt{-1}, \quad -\sqrt{-1}.$$

Możemy więc napisać:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x} + \frac{A}{x-2} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+1)^2} +$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1}.$$

Z następujących równości wyznaczamy stałe:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A_3}{x^3} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_1}{x},$$

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2},$$

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+1)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2+1}.$$

Po odrzuceniu mianowników, otrzymujemy:

$$x^3 - 2x + 1 = A_3(x-2)(x^2+1)^2 + A_2 x(x-2)(x^2+1)^2 +$$
$$+ A_1 x^2(x-2)(x^2+1)^2, \qquad (1)$$

$$x^3 - 2x + 1 = Ax^3(x^2+1)^2, \qquad (2)$$

$$x^3 - 2x + 1 = (B_2 x + C_2)x^3(x-2) + (B_1 x + C_1)(x^2+1)(x-2). \qquad (3)$$

Kładąc $x = 0$, z równości (1) i z pierwszych jej dwóch pochodnych otrzymujemy następujące wartości stałych:

$$A_3 = -\frac{1}{2}, \qquad A_2 = \frac{3}{4}, \qquad A_1 = \frac{11}{8}.$$

Przy $x = 2$, równość (2) daje:

$$A = \frac{1}{40}.$$

Gdy $x = \sqrt{-1}$ równość (3) i jej pochodna dają następujące wartości stałe:

$$B_2 = -1, \qquad C_2 = -1,$$

$$B_1 = -\frac{7}{5}, \qquad C_1 = -\frac{4}{5}.$$

W rezultacie otrzymamy więc następującą tożsamość:

$$\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2x^3} + \frac{3}{4x^2} + \frac{11}{8x} + \frac{1}{40(x-2)} -$$

$$-\frac{x+1}{(x^2+1)^2} - \frac{7x+4}{5(x^2+1)}.$$

## ĆWICZENIA.

1. $$\frac{x^2}{x^2 + (a+b)x + ab} = 1 + \frac{a^2}{(b-a)(x+a)} + \frac{b^2}{(a-b)(x+b)}.$$

2. $$\frac{a(7x^2 - 28ax + 24a^2)}{x^3 - 7ax^2 + 14a^2x - 8a^3} = \frac{a}{x-a} + \frac{2a}{x-2a} + \frac{4a}{x-4a}.$$

3. $$\frac{1}{x^3 + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})x^2 + (\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc})x + \sqrt{abc}} =$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{c} - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})} + \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{c} - \sqrt{b})(x + \sqrt{b})} +$$

$$+ \frac{1}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})(x + \sqrt{c})}.$$

4. $$\frac{360x^2 - 126x + 17}{24x^3 - 10x^2 - 3x + 1} = \frac{8}{2x-1} + \frac{15}{3x-1} + \frac{24}{4x-1}.$$

5. $$\frac{x^2 - 1}{(x+2)^3} = \frac{3}{(x+2)^3} - \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{1}{x+2}.$$

6. $$\frac{x^2 - x\sqrt{a} + 3}{(x+\sqrt{a})^5} = \frac{2a+3}{(x+\sqrt{a})^5} - \frac{3\sqrt{a}}{(x+\sqrt{a})^4} + \frac{1}{(x+\sqrt{a})^3}.$$

7. $$\frac{(a+bx)^m}{(a-bx)^n} = \frac{(2a)^m}{(a-bx)^n} + \frac{m}{1}\, b\, \frac{(2a)^{m-1}}{(a-bx)^{n-1}} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\, b^2 \frac{(2a)^{m-2}}{(a-bx)^{n-2}}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\, b^3 \frac{(2a)^{m-3}}{(a-bx)^{m-3}} + \quad \text{i t. d.}$$

8. $$\frac{x}{x^4-(a+b)x^2+ab} = \frac{x}{(b-a)(x^2+a)} - \frac{x}{(b-a)(x^2+b)}.$$

9. $$\frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

10. $$\frac{12x^3-7x+2}{4x^6+21x^4+21x^2+4} = \frac{4x-3}{3(x^2+1)} - \frac{2(8x-5)}{15(x^2+4)} - \frac{4x-5}{15\left(x^2+\frac{1}{4}\right)}.$$

11. $$\frac{16(x^2+4)}{(4x^2+4x+17)^2} = -\frac{4x+1}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4\right]^2} + \frac{2x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+4}.$$

12. $$\frac{x^5+4x^3+7x-4}{(x^2+1)^3} = \frac{4(x-1)}{(x^2+1)^3} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1}.$$

13. $$\frac{x^2-x+1}{(x^2+x+1)^3} = -\frac{2x}{(x^2+x+1)^3} + \frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

14. $$\frac{5x^2-7x}{x^4-3x^3+x^2+3x-2} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}.$$

15. $$\frac{x^5+1}{x^6+x^4} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

16. $$\frac{15x^5+5x^4+58x^3+x^2+37x-16}{x^6+4x^4-x^2-4} =$$

$$= \frac{x+2}{x^2+1} + \frac{3x+4}{x^2+4} + \frac{5}{x-1} + \frac{6}{x+1}.$$

17. $$\frac{x^2}{(x^2-1)^3} = -\frac{1}{8(x+1)^3} + \frac{1}{16(x+1)^2} + \frac{1}{16(x+1)} +$$
$$+\frac{1}{8(x-1)^3} + \frac{1}{16(x-1)^2} - \frac{1}{16(x-1)}.$$

18. $$\frac{1}{x^2(x^4-1)} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

19. $$\frac{x^5+1}{x^6+x^4} = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2} + \frac{x+1}{x^2+1}.$$

20. $$\frac{x^2}{x^3+(a+2b)x^2+b(2a+b)x+ab^2} =$$
$$= \frac{a^2}{(a-b)^2(a+x)} + \frac{b^2}{(a-b)(b+x)^2} + \frac{b^2-2ab}{(a-b)^2(b+x)}.$$

21. $$\frac{1}{x^3(1-x)^2(1+x)} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \frac{1}{2(1-x)^2} +$$
$$+\frac{7}{4(1-x)} - \frac{1}{4(1+x)}.$$

22. $$\frac{4x^2(x^4-x^2-1)}{x^8-2x^6-x^4-2x^2+1} = \frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} +$$
$$+\frac{1}{x^2+x-1} + \frac{1}{x^2-x-1}.$$

23. $$\frac{x^3}{x^6-2x^5+x^4+x^3-2x+1} = \frac{1}{2(x-1)^2} + \frac{1}{2(x-1)} -$$
$$-\frac{x(1+\sqrt{2})}{4(x^2-x\sqrt{2}+1)} - \frac{x(1-\sqrt{2})}{4(x^2+x\sqrt{2}+1)}.$$

24. $$\frac{5x^2-2x^3-3x+1}{x^6-x^5+3x^3-4x^2+3x-1} = \frac{1}{(x^2-x+1)^2} - \frac{1}{x^2-x+1} +$$
$$+\frac{2}{(2x+1)\sqrt{5}-5} - \frac{2}{(2x+1)\sqrt{5}+5}.$$

25.
$$\frac{53x^3 - 10x^4 - 121x^2 + 197x - 287}{(x^2 - 5x + 8)^2 (x^2 + 7)} =$$
$$= \frac{2x - 1}{(x^2 - 5x + 8)^2} - \frac{x + 5}{x^2 - 5x + 8} + \frac{x}{x^2 + 7}.$$

26.
$$\frac{x}{a + bx^3}.$$

Dzieląc licznik i mianownik przez $b$, otrzymujemy:

$$\frac{x}{a + bx^3} = \frac{\frac{x}{b}}{\frac{a}{b} + x^3} = \frac{\frac{x}{b}}{R^3 + x^3} \qquad \left(R = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}\right).$$

Równanie $R^3 + x^3 = 0$ posiada jeden pierwiastek rzeczywisty $= -R$ i dwa pierwiastki urojone $= \frac{R}{2} \pm \frac{R}{2}\sqrt{-3}$. Otrzymujemy więc z łatwością:

$$\frac{x}{a + bx^3} = -\frac{1}{3bR(x + R)} + \frac{x + R}{3bR(x^2 - Rx + R^2)}.$$

27.
$$\frac{x^2}{a + bx^4}.$$

Możemy napisać dany ułamek w postaci:

$$\frac{x^2}{a + bx^4} = \frac{\frac{x^2}{b}}{\frac{a}{b} + x^4} = \frac{\frac{x^2}{b}}{R^4 + x^4} \qquad \left(R = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}\right).$$

Odpowiedź:

$$\frac{x^2}{a + bx^4} = \frac{x}{2bR\sqrt{2}(x^2 - Rx\sqrt{2} + R^2)} - \frac{x}{2bR\sqrt{2}(x^2 + Rx\sqrt{2} + R^2)}.$$

28.
$$\frac{x^3}{a + bx^5}.$$

Dzieląc przez $b$, mamy:

$$\frac{x^3}{a + bx^5} = \frac{\frac{x^3}{b}}{\frac{a}{b} + x^5} = \frac{\frac{x^3}{b}}{R^5 + x^5} \qquad \left(R = \sqrt[5]{\frac{a}{b}}\right).$$

Wiemy, że pierwiastki równania $R^5 + x^5 = 0$, dane są przez wzór:

$$x = R\cos\frac{(2k+1)\pi}{5} \pm R\sqrt{-1}\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{5},$$

gdzie $k$ przybiera kolejno wartości: $k = 0, 1, 2$.

W naszym więc przypadku otrzymamy:

$$x = -R,$$

$$x = R\cos\frac{\pi}{5} \pm R\sqrt{-1}\,\sin\frac{\pi}{5}.$$

$$x = R\cos\frac{3\pi}{5} \pm R\sqrt{-1}\,\sin\frac{3\pi}{5}.$$

Postępując dalej w zwykły sposób, otrzymamy:

$$\frac{x^3}{a+bx^5} = -\frac{1}{5bR(x+R)} + \frac{2x\cos\frac{\pi}{5} - 2R\cos\frac{2\pi}{5}}{5bR\left(x^2 - 2Rx\cos\frac{\pi}{5} + R^2\right)} +$$

$$+ \frac{2x\cos\frac{3\pi}{5} + 2R\cos\frac{\pi}{5}}{5bR\left(x^2 - 2Rx\cos\frac{3\pi}{5} + R^2\right)}.$$

29. $$\frac{1}{a+bx^2+cx^4}.$$

Mamy:

$$\frac{1}{a+bx^2+cx^4} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x^2 + x^4}.$$

Z równania

$$x^4 + \frac{b}{c}x^2 + \frac{a}{c} = 0,$$

otrzymujemy:

$$x^2 = -\frac{b}{2c} \pm \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac}.$$

Jeżeli

$$\sqrt{b^2 - 4ac} > 0,$$

wówczas kładąc:

$$\frac{b}{2c} - \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac} = M,$$

$$\frac{b}{2c} + \frac{1}{2c}\sqrt{b^2 - 4ac} = N,$$

otrzymujemy:

$$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x^2 + x^4} = \frac{Ax + B}{x^2 + M} + \frac{Cx + D}{x^2 + N}.$$

Stąd zaś, stosując zwykły sposób podany w trzecim wypadku, znajdujemy:

$$\frac{1}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{1}{c(N-M)(x^2 + M)} + \frac{1}{c(M-N)(x^2 + N)}.$$

Jeżeli, przeciwnie, $\sqrt{b^2 - 4ac} < 0$, to postępujemy w następujący sposób:

$$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x^2 + x^4} = \frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + 2\sqrt{\frac{a}{c}}\, x^2 \,.\, \frac{b}{2\sqrt{ac}} + x^4} =$$

$$= \frac{\frac{1}{c}}{R^4 - 2R^2 x^2 \cos\alpha + x^4};$$

gdzie

$$R = \sqrt[4]{\frac{a}{c}} \quad \text{i} \quad -\cos\alpha = \frac{b}{2\sqrt{ac}}.$$

Równanie $x^4 - 2R^2 x^2 \cos\alpha + R^4 = 0$ można rozłożyć na następujące dwa czynniki drugiego stopnia:

$$x^2 \pm 2Rx\cos\frac{\alpha}{2} + R^2,$$

możemy więc napisać:

$$\frac{\frac{1}{c}}{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}x^2 + x^4} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2Rx\cos\frac{\alpha}{2} + R^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2Rx\cos\frac{\alpha}{2} + R^2}.$$

Postępując dalej metodą zwykłą, otrzymamy:

$$\frac{1}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{R \sin \alpha - x \sin \frac{\alpha}{2}}{2\, cR^3 \sin \alpha \, (x^2 - 2\, Rx \cos \frac{\alpha}{2} + R^2)} +$$

$$+ \frac{R \sin \alpha + x \sin \frac{\alpha}{2}}{2\, cR^3 \sin \alpha \, (x^2 + 2\, Rx \cos \frac{\alpha}{2} + R^2)}.$$

30. $\dfrac{x^{m-1}}{x^n - 1}$, gdzie $n$ jest liczbą parzystą.

Pierwiastki równania $x^n - 1 = 0$ znajdujemy z wzoru:

$$x = \cos \frac{2\, k\pi}{n} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2\, k\pi}{n} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2 \ldots \text{ i t. d.})$$

albo, kładąc $\theta = \dfrac{2\,\pi}{n}$:

$$x = \cos k\,\theta \pm \sqrt{-1} \sin k\,\theta.$$

Gdy $k = 0$ i $k = \frac{n}{2}$, otrzymujemy: $x = 1$ i $x = -1$; są to pierwiastki rzeczywiste równania $x^n - 1 = 0$; wszystkie inne pierwiastki są urojone; otrzymamy je, kładąc $k = 1, 2, 3 \ldots, \frac{n}{2} - 1$.

Możemy więc napisać:

$$\frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \sum_1^{\frac{n}{2}-1}{}_k \left[ \frac{Cx + D}{x^2 - 2\,x \cos k\,\theta + 1} \right].$$

Przez $\sum_1^{\frac{n}{2}-1}{}_k$, oznaczamy tu sumę par pierwiastków urojonych, odpowiadających wartościom $k = 1, 2, 3 \ldots, \frac{n}{2} - 1$.

Posiłkując się metodą zwykłą, otrzymamy:

$$\frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{x-1} + \frac{(-1)^n}{x+1} + 2 \sum_1^{\frac{n}{2}-1}{}_k \left[ \frac{x \cos km\theta - \cos (m-1)\, k\theta}{x^2 - 2\,x \cos k\theta + 1} \right] \right\}.$$

W przypadku $n$ nieparzystego otrzymamy w ten sam sposób:

$$\frac{x^{m-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x-1} + 2\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_k \left[\frac{x \cos km\theta - \cos (m-1) k\theta}{x^2 - 2x \cos k\theta + 1}\right]\right\}.$$

$y = \log x \quad ) \quad y' = \frac{1}{x}$

$y = \log f(x) \quad ) \quad y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$y = x^n \quad ) \quad y' = n x^{n-1}$

$y = f(x)^n \quad ) \quad y' = n \cdot f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

$y = \log^n f(x) \quad ) \quad y' = n \log f(x)^{n-1} \cdot f'(x)$

$y = \cos^n f(x) \quad ) \quad y' = n \cos^{n-1} f(x) \cdot f'(x)$

ul. Staszica