Das Fachwerk.

Eine Einführung
in die statische Berechnung desselben.

Zugleich ein Repetitorium für den ausübenden Techniker.

Von

Heinr. Birven
Ingenieur.

Mit 22 Abbildungen im Text.

Hildburghausen 1903.
Polytechnischer Verlag Otto Pezoldt.

Druck von Dr. L. Nonne's Erben (Druckerei der Dorfzeitung)
in Hildburghausen.

Vorwort.

Bei der Bearbeitung dieses kleinen Werkchens betrachtete es der Verfasser als seine Aufgabe, einerseits dem Studierenden, der bereits mit den Lehren der Mechanik und Festigkeitslehre vertraut ist, andererseits dem ausübenden Techniker ein leichtfafsliches und schnell zum Ziele führendes Repetitorium für das Studium der Fachwerkkonstruktionen zu schaffen. Dabei wurde die Materie sowohl graphisch, wie analytisch behandelt, jedoch in zwei von einander getrennten Abschnitten. Letzteres geschah aus dem Grunde, weil dadurch das systematische Vorgehen wesentlich erleichtert wird.

Der Verfasser giebt sich der angenehmen Hoffnung hin, dafs das Werkchen den obigen Zwecken entsprechend ein brauchbares Repetitorium sein werde.

Zum Schlusse erübrigt es ihm noch, für die geschmackvolle innere, wie äufsere Ausstattung des Werkchens seinem Herrn Verleger den besten Dank abzustatten.

Aachen, im Dezember 1902.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis

Das Fachwerk.

I. Abschnitt.

Das analytische Verfahren nach Ritter.

§ 1. Einleitung.

Da bei einem an seinen Endpunkten unterstützten Balken bei gleichmäfsiger Belastung Biegungsspannungen auftreten, so sind der Biegungstheorie zufolge diese Spannungen ungleichmäfsig über den ganzen Querschnitt verteilt. Wenn beispielsweise bei erhöhter Belastung die Spannung der am weitesten von der „Neutralen Faserschicht" entfernt liegenden Faser bereits die Elastizitätsgrenze erreicht hat, überschreitet die Spannung der in der Nähe der Neutralen liegenden Schichten das Zulässige noch in keiner Weise. Man ersieht also, dafs bei Anwendung eines solchen Balkens das Material in durchaus ungenügender Weise ausgenutzt wird.

Um diesem Uebel abzuhelfen, hat man die Fachwerke angewandt, deren Theorie im Jahre 1863 von „Ritter" gegeben wurde. Ein Fachwerk besteht aus einem System gelenkig und reibungslos mit einander verbundener Stäbe, welche die in ihnen auftretenden Spannungen auf die Verbindungsstellen, die Knotenpunkte, übertragen. Es hat diese Art der Verbindung von Stäben zu einem Fachwerk den wichtigen Vorzug, dafs in den Konstruktionsteilen nur Zug- und Druckspannungen, niemals Biegungsspannungen auftreten können. Dies ergeht daraus, dafs, wenn man durch eine derartige Stangenverbindung einen Schnitt legt und an jeder Schnittstelle eine Kraft anbringt, welche den früheren Gleichgewichtszustand wieder herzustellen bestimmt ist, alsdann diese Kräfte stets in die Richtung der Stäbe fallen, da dieselben ja sonst eine Drehung der Stäbe um den Gelenkbolzen anstreben würden. Da sich nun die Zug- oder Druckspannungen gleichmäfsig über den Querschnitt verteilen, so läfst sich beim Fachwerk eine vollkommene Ausnutzung des Materials erreichen.

§ 2. Die Auflagerreaktionen. Statische Bestimmtheit.

Wenn die Belastung eines Fachwerkes in der Vertikalebene wirkt, so hat auch die Reaktion in den Auflagern eine vertikal entgegengesetzte Richtung. Kommt aber noch eine schräg gerichtete Kraft hinzu, wie sie etwa vom Winddruck ausgeübt wird und ist das Fachwerk in zwei festen Auflagern gestützt, so wird die Auflagerreaktion keine vertikale Richtung annehmen. Die Ersatzkraft der auf die Konstruktion wirkenden Kräfte läfst sich aber in unendlich viele Komponenten zerlegen, deren Richtung durch die Auflager geht. Eine derartige Konstruktion wäre statisch unbestimmt, und zwar aus dem Grunde, weil die Konstruktion mit den beiden Auflagern fest verbunden ist. Bei einer derartigen Auflagerung hat man aber auch noch mit den sogenannten Montierungsspannungen zu rechnen, welche infolge ungenauer Auflagerung in den Stäben auftreten. Des weiteren haben bei einem solchen Fachwerk die häufigen Temperaturschwankungen unangenehme Temperaturspannungen im Gefolge. Um nun diese Uebelstände zu beseitigen und das Fachwerk statisch bestimmbar zu machen, ersetzt man das eine feste Auflager durch ein sogenanntes Rollenlager, wodurch es der Konstruktion ermöglicht wird, sich je nach der herrschenden Temperatur zusammenzuziehen oder auszudehnen. Es kann nun aber auch jeder schräg gegen das verschiebbare Auflager gerichtete Druck in eine horizontale und vertikale Komponente zerlegt werden. Die horizontale Seitenkraft wird eine Bewegung erteilen, die vertikale aber wird die gesuchte Auflagerreaktion darstellen. Die Anwendung eines Rollenlagers ermöglicht es uns also, den zu berechnenden Träger zu einem statisch bestimmten zu machen.

Wenn nun ein Körper durch mehrere Kräfte beansprucht wird, so findet bekanntlich Gleichgewicht statt, wenn die Kräfte weder das Bestreben haben, den Körper nach irgend einer Richtung hin zu verschieben, noch denselben zu drehen. Eine Verschiebung des Körpers ist dann ausgeschlossen, wenn sich die Kräfte nach Gröfse und Richtung zu einem geschlossenen Kräftepolygon zusammensetzen lassen, oder mit anderen Worten, wenn die Summe der horizontalen und vertikalen Komponenten gleich Null ist. Die horizontalen Kräfte mit H, die vertikalen mit V bezeichnet, deutet uns dies die Formel an:

$$\Sigma \mathbf{H} = \mathbf{0}; \ \Sigma \mathbf{V} = \mathbf{0}.$$

Wollen wir die Horizontal- und Vertikal-Komponenten einzeln durch ihre Resultante ausdrücken, so haben wir nur nötig, dieselben auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu beziehen und den Winkel, den die resultierende Kraft mit der Abscissenachse bildet, mit $\sphericalangle \alpha$ zu bezeichnen. Alsdann ergiebt sich für die Horizontalkomponenten ohne weiteres:

$$P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 + P_3 \cdot \cos \alpha_3 + \ldots = \Sigma P \cdot \cos \alpha = 0.$$

Und für die Vertikalkomponenten:

$$P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2 + P_3 \cdot \sin \alpha_3 + \ldots = \Sigma P \cdot \sin \alpha = 0.$$

Es läfst sich nun aber leicht zeigen, dafs in einem Falle, wie dem vorhergehenden, immerhin noch ein Drehbestreben der Kräfte vorhanden sein kann. Setzen wir nämlich alle in einer Konstruktion wirkenden Kräfte bis auf eine zu einer Resultierenden zusammen, so wird in der Regel diese Resultierende R_x mit der übrig bleibenden Kraft P_n ein Kräftepaar bilden, also eine Drehung um irgend einen Punkt der Ebene anstreben.

Ein solches von einem Kräftepaar ausgeübte Drehmoment wird nun aber gleich Null werden, wenn ebenfalls die Summe der Momente aller angreifenden

Kräfte, bezogen auf einen beliebig angenommenen Drehpunkt, gleich Null wird. Die Hebelarme der Kräfte mit a_1, a_2, a_3 u. s. w. bezeichnet, wird also Drehungsgleichgewicht stattfinden, wenn die Formel erfüllt ist:

$$P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3 + \ldots = \Sigma P \cdot a = 0.$$

In den Formeln:

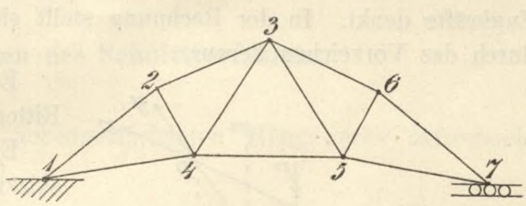
$$\Sigma P \cdot \cos \alpha = 0,$$
$$\Sigma P \cdot \sin \alpha = 0,$$
$$\Sigma P \cdot a \quad = 0$$

haben wir nunmehr drei Gleichungen, welche die Grundlage der Berechnung eines Fachwerkes bilden.

Aus vorstehenden drei Gleichungen ersehen wir nun aber auch, dafs, wenn auf ein Bauwerk irgend welche Kräfte wirken, sich noch drei Auflagerreaktionen berechnen lassen und zwar ihrer Gröfse nach, wenn ihre Richtung bekannt ist.

Nunmehr sind wir imstande, uns eine höchst einfache Regel zur Untersuchung der statischen Bestimmtheit eines Fachwerkträgers abzuleiten.

Wie bekannt, nennt man einen Träger, der starr und unverschieblich ist, geometrisch bestimmt. Diese Bedingung wird von einem Dreieck erfüllt. Setzt man nun die Mittellinienfigur eines Fachwerkträgers aus lauter Dreiecken zusammen, so ist der Träger geometrisch bestimmt. (Figur 1.)



Figur 1.

Bezeichnen wir nun mit N einmal die Anzahl der Dreiecke eines solchen Fachwerkes, so ergiebt sich für die Anzahl der Stäbe s die Formel:

$$s = 3 + 2(N - 1),$$

indem ja das erste Dreieck drei Stäbe liefert, jedes folgende aber nur zwei und dies $N - 1$ mal oder aufgelöst:

$$\mathbf{s = 2N + 1}.$$

Bezeichnet ferner K die Anzahl der Knotenpunkte, so ist:

$$K = 3 + 1(N - 1) = N + 2.$$

Ferner ist:

$$2K = 2N + 4; \; 2K - 4 = 2N.$$

Ebenfalls ist:

$$s - 1 = 2N.$$

Durch Subtraktion folgt:

$$\begin{array}{c} s - 1 = 2N \\ 2K - 4 = 2N\,(-) \\ \hline s - 2K + 3 = 0. \\ \hline s - 2K = -3 \text{ oder:} \end{array}$$

$$\mathbf{2K = s + 3}.$$

In Worten sagt uns also die Formel: $2K = s + 3$:

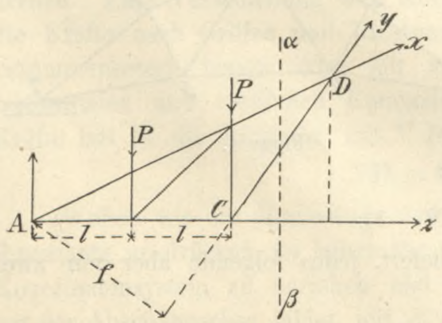
Ein Fachwerk ist geometrisch und statisch bestimmt, wenn seine Mittellinienfigur aus lauter Dreiecken besteht und die Stäbezahl gleich ist der um drei verminderten doppelten Anzahl der Knotenpunkte.

Mit Hilfe dieser einfachen Formel untersucht man also zuerst, bevor man an die Berechnung geht, ob das fragliche Fachwerk ein statisch bestimmtes ist.

§ 3. Ritterschen Schnittverfahren.

Um die in den Konstruktionsteilen auftretenden Spannungen zu ermitteln, bedient man sich der sogenannten „Ritterschen Schnittmethode". Nach dem Vorgange von Ritter denkt man sich durch das Fachwerk einen geraden oder krummen Schnitt an beliebiger Stelle gelegt, der jedoch höchstens drei Stäbe durchschneiden darf. Bringt man alsdann an den Schnittstellen die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts nötigen Kräfte an, so stellen diese die in den Stäben auftretenden Spannungen dar. Es lassen sich diese Kräfte alsdann mit Hilfe der Momentengleichung leicht bestimmen, indem nämlich bei passender Wahl des festen Drehpunktes diejenigen Kräfte zum Wegfall kommen, deren Hebelarme gleich Null sind.

Bemerkt sei noch, dafs man sich die anzubringenden Kräfte stets als Zugkräfte denkt. In der Rechnung stellt sich dann die zutreffende Belastung durch das Vorzeichen heraus.



Figur 2.

Es werde nun an einem Beispiel die Rittersche Schnittmethode näher erläutert: Es werde verlangt, in dem neben skizzierten Konstruktionsteil eines Fachwerkes die in dem Stabe C D auftretende Spannung zu berechnen. (Figur 2.)

Zu diesem Zwecke bringen wir in dem Fachwerk einen Schnitt an, welcher C D trifft und denken uns an den Schnittstellen die Kräfte X, Y und Z wirkend zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts. Diese Kräfte, welche wir uns als Zugkräfte einzeichnen, repräsentieren die in den betreffenden Stäben auftretenden Spannungen. Das links von der Schnittfläche $\alpha\,\beta$ liegende Stück wird im Gleichgewicht gehalten durch die Kräfte A, P, P, deren Gröfse bekannt ist und die unbekannten Kräfte X, Y, Z.

Für diese mufs nun bei Wahl eines beliebigen festen Drehpunktes die algebraische Summe der statischen Momente gleich Null sein!

Um nun die Kraft Y zu bestimmen, wählt man bei Aufstellung der Momentengleichung als Drehpunkt denjenigen Punkt, in welchem sich die beiden verlängerten Kräfte X und Z schneiden, also A. Es ist ersichtlich, dafs hierdurch die Kräfte X und Z aus der Rechnung herausfallen, da ihr statisches Moment in Bezug auf den Drehpunkt A gleich 0 ist.

Man erhält nunmehr folgende Gleichung:

$$P \cdot l + P \cdot 2l - Y \cdot f = 0.$$

Es mufs noch hervorgehoben werden, dafs in dieser Gleichung, wie auch im folgenden stets geschehen soll, sämtliche im Sinne des Uhrzeigers um den Drehpunkt drehende Kräfte als positiv, die entgegengesetzten als negativ aufgefafst sind.

Es ergiebt sich also für Y:

$$Y = \frac{P \cdot 3l}{f}.$$

In genau derselben Weise ergeben sich nun die Spannungswerte für die beiden anderen Stäbe:

Kraft x; Drehpunkt C; Hebelarm von $x = f'$; also:

$$+ A \cdot 2l + X \cdot f' - P \cdot l = 0.$$

$$X = \frac{P \cdot l - A \cdot 2l}{f'}.$$

Und für die Kraft Z, Drehpunkt D, Hebelarm f'':

$$A \cdot 3l + Z \cdot f'' - P \cdot 2l - P \cdot l = 0.$$

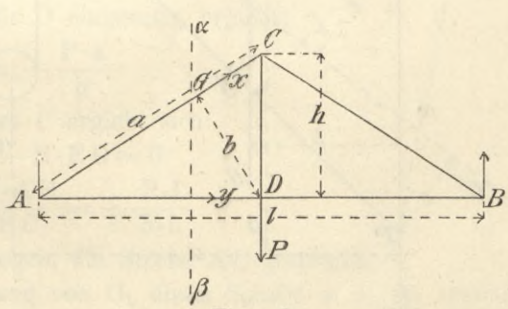
$$Z = \frac{P \cdot 2l + P \cdot l - A \cdot 3l}{f''} = \frac{P \cdot 3l - A \cdot 3l}{f''}.$$

§ 4. Anwendungen des Schnittverfahrens.

1. Das einfache Hängewerk.

Es sei die in Stäben des nebengezeichneten Hängewerks auftretende Spannung zu ermitteln! (Figur 3.)

Die gesamte Belastung der Hängesäule werde mit P bezeichnet. Die Reaktionen bei A und B sind alsdann gleich $\frac{P}{2}$. Teilen wir nun durch einen Schnitt $\alpha\beta$ die Konstruktion in zwei Teile, so lassen sich die in den Stäben AC und AD wirksamen Kräfte mit Hilfe der Momentengleichung als diejenigen Kräfte berechnen, welche wir an den Schnittstellen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichtes anbringen müssen. Diese Kräfte seien x und y.



Figur 3.

Zur Berechnung der Kraft x wählen wir als festen Drehpunkt den Punkt D. Mit Hilfe der Momentengleichung ergiebt sich nun:

$$+ \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} + x \cdot b = 0; \text{ also:}$$

$$x = - \frac{P \cdot l}{2 \cdot 2 \cdot b}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke A D C und A G D folgt:

$$\frac{2\,b}{l} = \frac{h}{a}, \text{ daher:}$$

$$x = -\frac{P \cdot a}{2 \cdot h}.$$

Die Strebe A C wird auf Druck beansprucht durch eine Kraft von der Gröfse

$$\frac{P \cdot a}{2 \cdot h}.$$

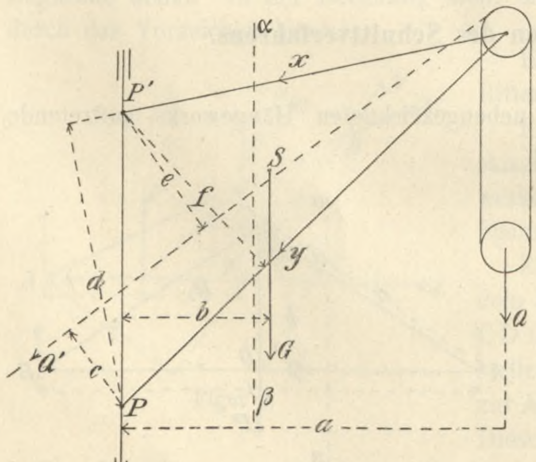
Gehen wir nun weiter zur Berechnung der Spannkraft in dem Stabe A D, so werden wir nunmehr als Drehpunkt den Punkt C wählen. Die Rechnung gestaltet sich dann wie folgt:

$$+\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} - y \cdot h = 0.$$

$$\text{Daraus: } y = +\frac{P \cdot l}{4 \cdot h}.$$

In der Stange A D wirkt also eine Zugkraft von der Gröfse $\frac{P \cdot l}{4 \cdot h}$.

2. Als weiteres Beispiel zur Anwendung des Schnittverfahrens diene folgende Aufgabe:



Figur 4.

Welche Kräfte wirken in Schliefse und Strebe des nebengezeichneten Drehkranes? Q sei die zu bewegende Last, Q_1 die Kraft an der Kette wirksam, G das Gewicht der Konstruktion (Schliefse + Strebe + Kette), a, b, c, d, e, f die zugehörigen Hebelarme. (Figur 4.)

Gang der Berechnung:

Der Kran kann als ein einfachstes Fachwerk betrachtet und nach den für ein solches mafsgebenden Regeln berechnet werden.

Bringen wir wieder an beliebiger Stelle einen Schnitt $\alpha\beta$ an und fügen wir die erforderlichen Gegenkräfte bei, so folgt wiederum aus der Momentengleichung für x in Bezug auf den Drehpunkt P:

$$+ Q \cdot a - Q_1 \cdot c + G \cdot b - x \cdot d = 0.$$

$$\text{Also: } x = \frac{Q \cdot a - Q_1 \cdot e + G \cdot b}{d}.$$

Es wirkt also in der Schliefse eine Zugkraft von der Gröfse

$$\frac{Q \cdot a - Q_1 \cdot e + G \cdot b}{d}.$$

Und in gleicher Weise für y unter Annahme von P' als Drehpunkt:

$$+ Q \cdot a + Q_1 \cdot c + G \cdot b + y \cdot f = 0.$$

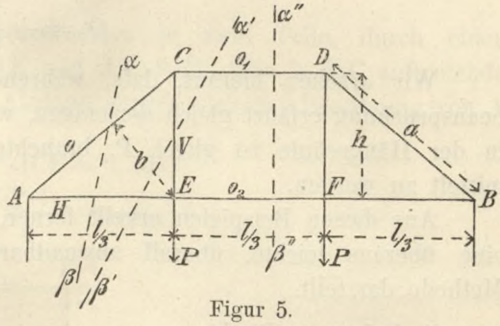
$$y = -\frac{Q \cdot a + Q_1 \cdot c + G \cdot b}{f}.$$

Wir erhalten also für y eine Druckkraft.

Somit sind die in den Stäben thätigen Kräfte bestimmt!

3. Hängewerk mit zwei Hängesäulen.

Es seien die in den Konstruktionsteilen beistehenden Hängewerks mit zwei Hängesäulen auftretenden Spannungen zu ermitteln! (Figur 5.)



Figur 5.

Auflösung: Jede Hängesäule erfahre einen Zug von P kg. Alsdann ist die Reaktion in A und B ebenfalls gleich P.

Wir führen nun zunächst einen Schnitt $\alpha\beta$ so, dafs derselbe nur die beiden Stäbe AC und AE trifft und fügen die Zugkräfte O und H an. Alsdann ist in Bezug auf E als Drehpunkt:

$$+ O \cdot EG + P \cdot AE = 0.$$

$$O = -\frac{P \cdot AE}{EG}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AEG und ACE folgt:

$$\frac{AE}{EG} = \frac{AC}{EC} = \frac{a}{h}.$$

Dies in die obige Gleichung für O eingesetzt, ergiebt:

$$O = -\frac{P \cdot a}{h}.$$

Mit Benutzung des Drehpunktes C ergiebt sich:

$$P \cdot AE - H \cdot EC = 0.$$

$$H = + \frac{P \cdot AE}{EC} = + \frac{P \cdot l}{3 \cdot h}.$$

Die Stange AE wird also gezogen, die Strebe AC gedrückt.

Führen wir nun zur Bestimmung von O_1 einen Schnitt $\alpha_1 \beta_1$, so ergiebt sich aus der Momentengleichung wiederum in Bezug auf den Drehpunkt E:

$$O_1 \cdot h + \frac{P \cdot l}{3} = 0.$$

$$O_1 = -\frac{P \cdot l}{3 \cdot h}.$$

Des weiteren ergiebt sich in Bezug auf den Drehpunkt A:

$$\frac{V \cdot l}{3} + O_1 \cdot h = 0.$$

$$V = -\frac{O_1 \cdot h \cdot 3}{l}.$$

Setzen wir hierin den eben gefundenen Wert für O_1 ein, so erhalten wir:

$$V = -\frac{-P \cdot l \cdot h \cdot 3}{3 \cdot h \cdot l} = +P.$$

Bringen wir nun noch den Schnitt $\alpha'' \beta''$ an, so ergiebt sich für C als Drehpunkt:

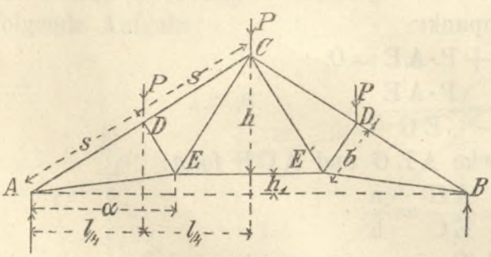
$$+\frac{P \cdot l}{3} - O_2 \cdot h = 0. \text{ Also:}$$

$$O_2 = +\frac{P \cdot l}{3 \cdot h}.$$

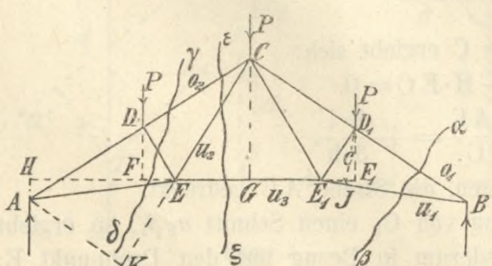
Wir ersehen hieraus, dafs, während O_1 gedrückt wird, O_2 eine Zugbeanspruchung erfährt gleich derjenigen, welche AE erleidet. Die Zugspannung in der Hängesäule ist gleich P, brauchte also eigentlich nicht besonders ermittelt zu werden.

Aus diesen Beispielen erhellt ferner, dafs das Rittersche Schnittverfahren eine überaus leichte, überall anwendbare und schnell zum Ziele führende Methode darstellt.

4. Polonceau-Binder.



Figur 6.



Figur 7.

Der nebenstehend skizzierte Polonceau-Binder sei statisch zu berechnen!

Die auf die Knotenpunkte C, D und D_1 wirkende Last sei gleich P; dann ist der Gegendruck in den Auflagern A und B je 1,5 P. (Figur 6.)

Legen wir nun durch die Stäbe D_1 B und E_1 B einen Schnitt $\alpha \beta$ und nennen wir die in den Stäben wirksamen Kräfte O_1 und U_1, so erhalten wir wiederum aus der Momentengleichung bei Annahme von E_1 als Drehpunkt (Figur 7):

$$+ O_1 \cdot D_1 E_1 + P \cdot E_1 F_1 - P \cdot G E_1 - P \cdot F \cdot E_1 + 1{,}5 P \cdot H E_1 = 0.$$

$$O_1 \cdot b = -P \cdot \left(a - \frac{l}{4}\right) + P \cdot \left(\frac{l}{2} - a\right) + P \cdot \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4} - a\right) - 1{,}5 P \cdot (l - a).$$

$$O_1 \cdot b = -P \cdot a + P \cdot \frac{l}{4} + P \cdot \frac{l}{2} - P \cdot a + \frac{3}{4} P \cdot l - P \cdot a - \frac{3}{2} P \cdot l + \frac{3}{2} P \cdot a.$$

$$O_1 \cdot b = -\frac{3}{2} P \cdot a.$$

$$\text{Also: } O_1 = -\frac{3}{2} \frac{P \cdot a}{b}.$$

Für D_1 als Drehpunkt ergiebt sich:

$$-U_1 \cdot D_1 J - P \cdot G F_1 - P \cdot F F_1 + 1{,}5 P \cdot H F_1 = 0.$$

$$U_1 \cdot D_1 J = -P \cdot \frac{1}{4} l - P \cdot \frac{1}{2} l + 1{,}5 P \cdot \frac{3}{4} l = \frac{3}{8} P \cdot l.$$

Bezeichnen wir den Hebelarm von U_1 mit c, so ist:

$$u_1 = \frac{3}{8} \frac{P \cdot l}{c}.$$

Teilen wir nun weiter die Konstruktion in zwei Teile, durch einen Schnitt $\gamma\delta$, welcher die Stäbe DC, DE und AE trifft. Die in DC auftretende Spannung sei O_2, die in DE sei V. Alsdann ergiebt sich mit Benutzung von A als Drehpunkt:

$$V \cdot D A + P \cdot H F = 0, \text{ also:}$$

$$V \cdot s = -\frac{P \cdot l}{4}. \text{ Daraus:}$$

$$V = -\frac{P \cdot l}{4 \cdot s}.$$

In Bezug auf den Drehpunkt E erhält man:

$$O_2 \cdot D E + 1{,}5 P \cdot H E - P \cdot F E = 0;$$

$$O_2 \cdot b = -1{,}5 P \cdot a + P\left(a - \frac{l}{4}\right);$$

$$O_2 \cdot b = -\frac{P}{4}(l + 2a). \text{ Also:}$$

$$O_2 = -\frac{P}{4}\left(\frac{l + 2a}{b}\right).$$

Es bleiben uns nun nur noch die Spannungen in den Stäben EC und EE_1 zu bestimmen übrig, welche mit U_2 und U_3 bezeichnet werden mögen. Zu dem Zwecke legen wir durch das Fachwerk einen Schnitt $\varepsilon\zeta$, welcher die Stäbe DC, EC und EE_1 trifft. Dann ergiebt die Momentengleichung (Drehpunkt C):

$$-U_3 \cdot C G - P \cdot F G + 1{,}5 P \cdot H G = 0.$$

$$-U_3 \cdot (h - h_1) - P \cdot \frac{l}{4} + 1{,}5 P \cdot \frac{l}{2} = 0.$$

Folglich:

$$U_3 = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{h - h_1}.$$

Ferner unter Annahme von A als Drehpunkt:

$$-U_2 \cdot A K + U_3 \cdot A H + P \cdot H F = 0.$$

$$U_2 \cdot A K = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{h - h_1} \cdot h_1 + P \cdot \frac{l}{4} = \frac{P \cdot l}{4}\left(\frac{2 h_1}{h - h_1} + 1\right).$$

$$U_2 \cdot A K = \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{2 h_1 + h - h_1}{h - h_1} = \frac{P \cdot l}{4} \cdot \frac{h + h_1}{h - h_1}.$$

Da $AD = DC$, so ist $AK = 2c$, folglich:

$$U_2 = \frac{P}{8} \cdot \frac{l}{c} \cdot \frac{h + h_1}{h - h_1}.$$

Die in den Formeln auftretenden Gröfsen s, a, h, c sind wie folgt zu ermessen. Es ist:

$$1.\quad s = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

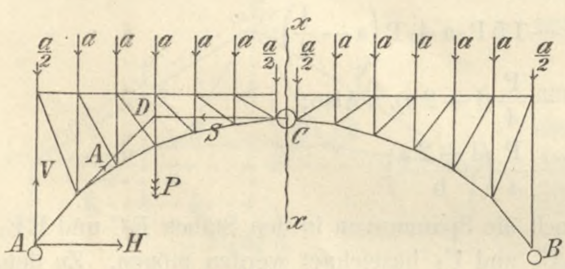
$$2.\quad a = \frac{l}{4} + \frac{b\,h}{2\,s}.$$

$$3.\quad h_1 = \frac{h}{2} - \frac{b \cdot l}{4\,s}.$$

$$4.\quad c = \frac{b \cdot s}{\sqrt{s^2 + b^2}}.$$

§ 5. Der Parabolische Träger.

Der „Parabolische Träger“ ist eine Fachwerkkonstruktion, bei welcher eine Begrenzungslinie sich der Form einer Parabel nähert. Die Anwendung einer solchen Form der Begrenzungslinie hat ihren Grund in folgendem: In nachstehender Figur 8 sehen wir einen Träger, dessen untere Begrenzungslinie eine angenäherte Parabel darstellt. Die oberen Knotenpunkte sind belastet mit je a kg. Der Träger ist mit zwei Kämpfergelenken und einem Scheitelgelenk als Auflager ausgerüstet. Auf die vier Endknoten entfällt eine Last von je $\frac{a}{2}$ kg. Legen wir uns nun einen Schnitt x x durch die Mitte des Scheitelgelenks und betrachten wir einmal die links vom Schnitt liegende Konstruktionshälfte, so finden wir, dafs, da die Konstruktionshälfte ebenfalls symmetrisch angeordnet ist, die Summe der auf die links liegenden Knoten wirkenden Kräfte $\Sigma a = P$ in die Richtung des mittleren Vertikalständers fallen mufs. Von dem Scheitelgelenk C geht nun eine horizontal gerichtete Schubkraft S als Auflagerreaktion C aus, während die Auflagerreaktion A (die sich ihrerseits aus den Komponenten V und H als Resultierende ergiebt), die Schubkraft S und die resultierende Belastung P im Punkte D schneidet. Daraus ergiebt sich ohne weiteres, dafs man, um Materialverschwendung zu vermeiden, den Träger unten durch eine Kurve begrenzen mufs, welche sich den Richtungen der Kräfte A und S möglichst anschliefst. Und eine Kurve, die diesen Bedingungen entspricht, ist eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$.



Figur 8.

Die Fachwerke von dreieckiger Grundform, wie wir sie bisher kennen gelernt haben, zeigen folgende Eigenschaft: Denkt man sich an irgend einer Stelle die Belastung vermindert oder ganz weggenommen, so erfahren hierdurch die übrigen Stäbe des Fachwerkes keine erhöhte Spannung. Man hat also bei der Berechnung des erforderlichen Querschnitts der Stäbe einfach das Fachwerk voll belastet anzunehmen.

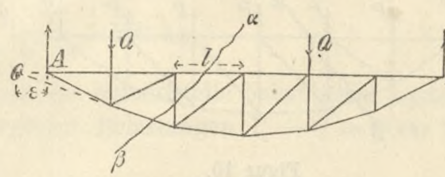
Bei anderen Konstruktionsformen dagegen treten in einzelnen Stäben bei teilweiser Belastung des Bauwerks höhere Spannungen auf, als bei voller Balastung.

Man hat daher bei solchen Fachwerken einen Unterschied zu machen zwischen der permanenten und der mobilen Belastung. Zu den permanenten Belastungen gehört das Eigengewicht der Konstruktion; zu den mobilen der Schneedruck, Winddruck, bei Eisenbahnbrücken das Gewicht eines Eisenbahnzuges, welcher die Brücke ganz oder teilweise bedeckt.

Um nun die zur Querschnittsberechnung dienende Spannung eines Stabes zu finden, geht man in der Weise vor, dafs man zunächst untersucht, für welche Belastungszustände die Spannung der Stange ein Maximum resp. Minimum erreicht, d. h. welche von den mobilen Belastungen entfernt werden müssen, damit die Spannung des in Frage kommenden Stabes am stärksten wird. Alsdann hat man aus den gefundenen Belastungszuständen die zugehörige Spannung selbst zu berechnen.

Um das Vorstehende näher zu erläutern, sei folgende Aufgabe gestellt:

Welches ist bei dem in Figur 9 dargestellten parabolischen Träger die ungünstigste Belastungsweise für die verschiedenen Stäbe?



Figur 9.

Zu diesem Zwecke legen wir durch die Konstruktion an beliebiger Stelle einen Schnitt $\alpha\beta$, fügen die zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts erforderliche Zugkraft x an und belasten hierauf den Träger etwa rechts vom Schnitt mit der Last Q.

Alsdann stellen wir in bekannter Weise unsere Momentengleichung auf unter Annahme von 0 als Drehpunkt.

Es ergiebt sich somit:

$$-A\cdot\varepsilon + x\cdot(2l+\varepsilon) = 0.$$

$$x = \frac{A\cdot\varepsilon}{2l+\varepsilon}.$$

Wie man sieht, erzeugt also eine jede rechts von der Schnittstelle auftretende Belastung einen Zug.

Belasten wir nunmehr den Träger ebenfalls links von der Schnittstelle mit Q, so ergiebt uns die Momentengleichung:

$$-B\cdot(6l+\varepsilon) - x\cdot(2l+\varepsilon) = 0.$$

Und hieraus:

$$x = -\frac{B\cdot(6l+\varepsilon)}{2l+\varepsilon}.$$

Jedes links von der Schnittstelle aufgelegte Gewicht erzeugt also eine Druckspannung.

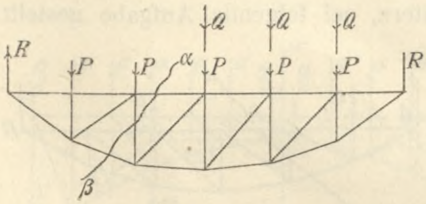
Um nun das Maximum der Spannung oder die gröfste Zugspannung zu berechnen, hat man ausschliefslich diejenigen Knotenpunkte als belastet anzusehen, deren Belastung Zugspannungen in der zu untersuchenden Stange hervorrufen; um das Minimum oder das Maximum der Druckspannung zu erhalten, diejenigen, deren Belastung Druckspannungen in dem Stabe erzeugen.

Wenn wir also, wie dies Skizze 10 zeigt, aufser der genannten Last P alle rechts von dem Schnitt liegenden Knotenpunkte noch mit der mobilen Belastung Q versehen, so stellt uns dies das Maximum der Spannung dar. Wenn wir aber (Figur 11) aufser der permanenten Belastung P alle links vom Schnitt liegenden Knotenpunkte mit der mobilen Last Q belasten, so haben wir das Minimum der Spannung (eventuell das Maximum der Druckspannung).

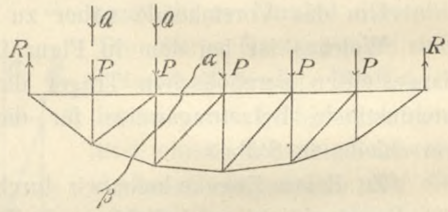
Die Werte für das Maximum und Minimum der Spannung (S_{max} und S_{min}) lassen sich nun direkt aus den Gleichungen:

$$x = \frac{A \cdot \varepsilon}{2\,l + \varepsilon} \quad \text{und} \quad x = -\frac{B \cdot (6\,l + \varepsilon)}{2\,l + \varepsilon}$$

berechnen, indem man nämlich aus der ersteren die Spannung berechnet, welche die gesamten Belastungen rechts von der Schnittstelle hervorbringen, aus der



Figur 10.



Figur 11.

letzteren diejenige, welche die Gewichte links von der Schnittstelle zusammengenommen hervorbringen, worauf man alsdann die gefundenen Werte zusammen addiert.

Aufgabe: Bei einem in acht Felder eingeteilten parabolischen Träger von 16 m Spannweite und 2 m Pfeilhöhe seien die Werte für S_{max} und S_{min} zu bestimmen, wenn als permanente Belastung $P = 1000$ kg und als mobile Belastung $Q = 5000$ kg angenommen wird!

In unserem Falle wird $l = 2$ m und $\varepsilon = 4$ m sich ergeben.

Wir bringen in dem vierten Felde von links einen Schnitt an; alsdann wirken rechts von der Schnittstelle vier Kräfte von der Gröfse $P + Q = 1000 + 5000 = 6000$ kg. Diese erzeugen an dem linken Auflager A den Gegendruck:

$$A = 6000\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\right) = 7500 \text{ kg}$$

in Bezug auf B als Drehpunkt.

Die hieraus resultierende Zugspannung in der Vertikalstange ergiebt sich nunmehr aus der Gleichung:

$$S = A \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 3\,l};\ S_1 = 7500 \cdot \frac{4}{4 + 6} = +\,3000 \text{ kg}.$$

Die drei links vom Schnitt wirkenden Kräfte P = 1000 kg erzeugen bei B den Auflagerdruck B unter Annahme von A als Drehpunkt:

$$B = 1000\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8}\right) = 750 \text{ kg.}$$

Das ergiebt für die Vertikalstange eine Druckspannung aus der Gleichung:

$$S = -B \cdot \frac{\varepsilon + 8\,l}{\varepsilon + 3\,l},\ S_2 = -750 \cdot \frac{4 + 16}{4 + 6} = -1500 \text{ kg.}$$

Die gröfste Zugspannung findet man nun, indem man die beiden gefundenen Werte S_1 und S_2 addiert:

$$S_{max} = +3000 \text{ kg} - 1500 \text{ kg} = +\mathbf{1500} \text{ kg.}$$

Die höchste auftretende Zugspannung in der Vertikalstange beträgt also 1500 kg.

Um nun das Minimum der Spannung zu finden, geht man in genau derselben Weise vor:

Die vier rechts vom Schnitt wirkenden permanenten Belastungen P = 1000 kg erzeugen bei A den Auflagerdruck:

$$A = 1000\left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\right) = 1250 \text{ kg.}$$

Das giebt für die Vertikalstange eine Spannung:

$$S_1 = +1250 \cdot \frac{4}{4 + 6} = +500 \text{ kg.}$$

Andererseits rufen die drei links von der Schnittstelle befindlichen Lasten, bestehend aus den permanenten und mobilen Belastungen P + Q = 6000 kg bei B den Auflagerdruck hervor:

$$B = 6000 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8}\right) = 4500 \text{ kg.}$$

Die Spannung in der Vertikalstange beträgt demnach:

$$S_2 = -4500 \cdot \frac{4 + 16}{4 + 6} = -9000 \text{ kg.}$$

Analog dem früheren erhalten wir nun die gröfste Druckspannung:

$$S_{min} = +500 - 9000 = -\mathbf{8500} \text{ kg.}$$

Das Minimum der in der Vertikalstange auftretenden Spannung ist also — 8500 kg.

§ 6. Der Parallelträger.

Für den Parallelträger greifen im allgemeinen die Bemerkungen des vorigen Paragraphen Platz.

Wollte man z. B. untersuchen, welche Spannung durch ein rechts von der Schnittstelle (Figur 12) aufgelegtes Gewicht Q in dem vierten Vertikalständer erzeugt wird, so hätte man für den links vom Schnitt liegenden Teil der Konstruktion nach Anbringung der beiden Zugkräfte x und z die Gleichung der statischen Momente aufzustellen. Als Drehpunkt müfste der Durchschnittspunkt dieser Zugkräfte gewählt werden. Da deren Richtungen aber einander parallel sind, so liegt dieser Punkt im Unendlichen. Der Hebelarm der auftretenden Kräfte ist also unendlich grofs und die Momentengleichung lautet:

$$+ A \cdot \infty + S \cdot \infty = 0.$$

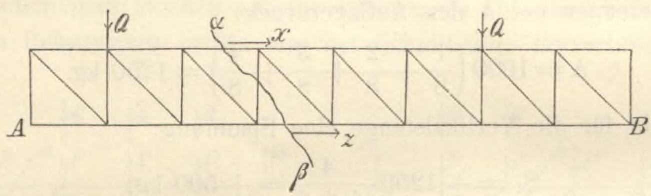
$$S_1 = - A.$$

In derselben Weise ergiebt sich für die Spannung, welche durch eine links vom Schnitt angebrachte Belastung hervorgerufen wird:

$$S_2 = + B.$$

Man ersieht hieraus, dafs jede rechts von der Schnittstelle angebrachte Belastung eine Druckspannung, jede links eine Zugspannung in dem Vertikalständer erzeugt.

Die Werte für S_{max} und S_{min} lassen sich nun, genau wie im vorigen Paragraphen, mit Hilfe der beiden letzten Formeln berechnen.



Figur 12.

Wir nehmen auch jetzt wiederum eine permanente Last $P = 1000$ kg und eine mobile Last $Q = 5000$ kg an. Zur Bestimmung von S_{max} hat man dann sämtliche rechts vom Schnitt liegenden Knotenpunkte mit P, die links liegenden mit $P + Q$ belastet anzunehmen.

Die rechts liegenden Lasten erzeugen in A den Gegendruck:

$$A = 1000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} + \frac{4}{8} + \frac{5}{8}\right) = 1875 \text{ kg.}$$

Daher die Spannung in der Vertikalstange:

$$S_1 = - A. \qquad S_1 = - 1875 \text{ kg.}$$

Die beiden links liegenden Lasten rufen in B den Auflagerdruck:

$$B = 6000 \left(\frac{1}{8} + \frac{2}{8}\right) = 2250 \text{ kg hervor.}$$

Also die Spannung in der Vertikalstange:

$$S_2 = + B. \qquad S_2 = + 2250 \text{ kg.}$$

S_{max} ergiebt sich nunmehr aus der Addition von S_1 und S_2:

$$S_{max} = S_1 + S_1 = - 1875 + 2250 = + \mathbf{375} \text{ kg.}$$

Umgekehrt hat man zur Bestimmung von S_{min} die rechts liegenden Knotenpunkte mit $P + Q$ belastet anzusehen, die links liegenden dagegen nur mit P.

Es ergiebt sich alsdann der Gegendruck, den die fünf rechts liegenden Belastungspunkte erzeugen:

$$A = 11\,250 \text{ kg.}$$

Also die Spannung:

$$S_1 = -\,11\,250 \text{ kg.}$$

Die zwei links liegenden erzeugen den Gegendruck:

$$B = 375 \text{ kg.}$$

Also die Spannung:

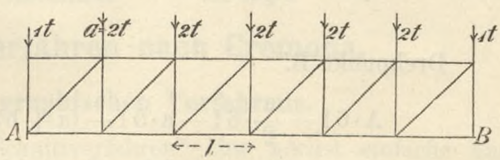
$$S_2 = +\,375 \text{ kg.}$$

Daher ergiebt sich:

$$S_{min} = S_1 + S_2 = -\,11\,250 + 375 = -\,\mathbf{10\,875} \text{ kg.}$$

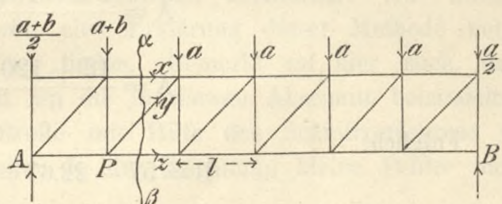
Es werde nunmehr das Gesagte an folgendem Beispiel erörtert:

Welches ist die erforderliche Stärke der Stäbe im zweiten Felde bei einer dauernden Belastung $a = 2$ t und einer beweglichen $b = 10$ t pro Knoten und einer zulässigen Druckspannung von 750 atm? (Figur 13.)



Figur 13.

Wir nehmen an, dafs der auf die Endknotenpunkte entfallende Druck nur die Hälfte der Belastung eines Knotenpunktes betrage.



Figur 14.

Wir legen nun in bekannter Weise durch das zweite Feld der Konstruktion einen Schnitt $\alpha\beta$ und fügen an den Schnittstellen die Zugkräfte x, y und z an.

Wenn wir nun die links von der Schnittstelle liegenden Knotenpunkte mit der Last $a + b$ belastet annehmen, die rechts liegenden dagegen nur mit a, so ergiebt uns die Momentengleichung (Figur 14):

1. Drehpunkt P.

$$+ A \cdot l - \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot l + x \cdot l = 0.$$

Da aber $A = 3\,(a + b)$, so ist:

$$+ 3\,(a + b)\,l - \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot l + x \cdot l + 0. \quad \text{Daraus:}$$

$$x = \frac{-\,3\,(a+b)\,l + \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot l}{l} = -\,3\,(a+b) + \frac{a+b}{2} = -\,\frac{5}{2}\,(a+b).$$

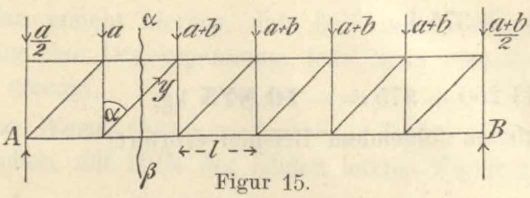
$$A = -\,\frac{5}{2}\,(a+b) = -\,\frac{5}{2} \cdot 12 = -\,\mathbf{30} \text{ t.}$$

2. Drehpunkt P′.

$$+3(a+b)\cdot 2l-\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot 2l-(a+b)\cdot l-z\cdot l=0.$$

$$z=\frac{3(a+b)\cdot 2l-\left(\frac{a+b}{2}\right)2l-(a+b)\cdot l}{l}.$$

$$z=4(a+b)=+4\cdot 12=+\mathbf{48}\ \text{t}.$$



Figur 15.

Wir belasten nunmehr alle rechts von der Schnittstelle liegenden Knotenpunkte mit der vollen Belastung, die links liegenden dagegen mit a. (Figur 15.)

Die Auflagerreaktionen A und B ergeben sich nun wie folgt:

Drehpunkt B.

$$A\cdot 6l-\frac{a}{2}\cdot 6l-a\cdot 5l-(a+b)\cdot(4l+3l+2l+l)=0.$$

$$6A=8a+10(a+b).$$

$$A=\frac{8a+10(a+b)}{6}.$$

$$A=\frac{16+120}{6}=22{,}67\ \text{t}.$$

Folglich:

$$B=57-22{,}67=34{,}33\ \text{t}.$$

Wenn wir nunmehr die Spannung y berechnen wollen, so würde hier der Schnittpunkt der oberen und unteren Gurtung, da diese parallel sind, im Unendlichen liegen. Wir ziehen es daher vor, statt dessen die vertikale Seitenkraft $y\cdot\cos\alpha=y\cdot\cos 45^0$ einzuführen und die algebraische Summe der Vertikalkräfte aufzustellen: $\Sigma V=0$.

Wir erhalten also:

$$+A-\frac{a}{2}-a+y\cdot\cos 45^0=0.$$

$$y=\frac{-A+\frac{a}{2}+a}{\cos 45^0};\ \text{oder da:}$$

$$\frac{1}{\cos 45^0}=\sqrt{2},$$

$$y=\left(-A+\frac{a}{2}+a\right)\sqrt{2}.$$

$$y=-19{,}67\cdot\sqrt{2}=\sim-20\cdot\sqrt{2}\ \text{t}.$$

Der Querschnitt des Stabes berechnet sich nunmehr aus der Formel:

$$\frac{20 \cdot \sqrt{2} \cdot 1000}{750}.$$

Es würde ferner zu untersuchen sein, ob nicht die Knickgefahr zu einer Querschnittvergröſserung nötigt, was sich ja mit Hilfe der „Eulerschen Knickformel“:

$$P_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J}{l^2}$$

erfahren läſst.

II. Abschnitt.

Das graphische Verfahren nach Cremona.

§ 7. Theorie des graphischen Verfahrens.

Wenn auch das „Rittersche Schnittverfahren“ eine höchst einfache und leicht zum Ziele führende Methode darstellt, so ist doch in manchen Fällen die graphische Ermittelung der Kräfte noch schneller ausführbar. Aus diesem Grunde soll in diesem II. Abschnitt eine Erklärung dieser Methode nebst einigen angewandten Beispielen Platz finden. Bemerkt sei hier noch, daſs es für den Studierenden vorteilhaft ist, die in diesem Abschnitt behandelten Beispiele einer rechnerischen Kontrolle mit Hilfe des Schnittverfahrens zu unterziehen, da durch Ungenauigkeiten in der Zeichnung kleine Fehler nicht zu vermeiden sind.

Das graphische Verfahren von Cremona beruht auf der Anfertigung eines Kräfteplanes, der nach dem Grundsatz aufgezeichnet wird, daſs, wenn alle auf ein Fachwerk wirkenden äuſseren Kräfte im Gleichgewicht sind, ebenfalls die auf einen einzelnen Knotenpunkt wirkenden äuſseren und inneren Kräfte sich im Gleichgewicht befinden müssen, ihnen also ein geschlossener Kräftezug entspricht.

Man geht nun hierbei in der Weise vor, daſs man mit einem Knoten beginnt, an welchem eine nach Gröſse und Richtung gegebene Kraft angreift und in welchem auſserdem nur noch zwei unbekannte Kräfte wirken. Die Spannkräfte dieser beiden Stäbe lassen sich alsdann zeichnerisch bestimmen. Geht man nun weiter zum folgenden Knotenpunkt, so haben wir auch hier wieder nur zwei unbekannte Kräfte, da ja die Spannkraft desjenigen Stabes, der die beiden Knotenpunkte miteinander verbindet, bereits bekannt ist. Dies wiederholt sich bei jedem folgenden Knoten.

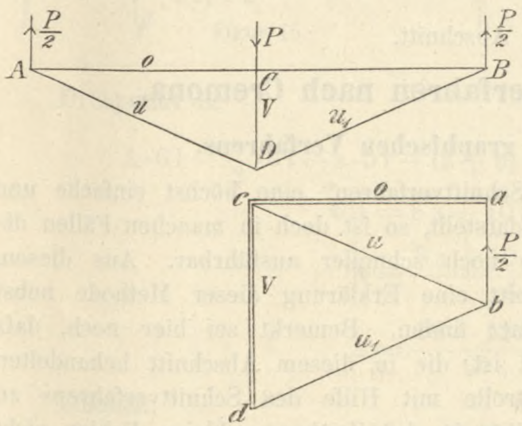
Um festzustellen, ob die in einem Stabe thätige Kraft eine Zug- oder Druckkraft ist, denkt man sich den Knotenpunkt mit seinen Kräften herausgeschnitten und bringt an den letzteren die Pfeile in dem Sinne an, wie dies im Kräftezug angegeben ist. Ist alsdann die Richtung des Pfeiles dem Knotenpunkte zugekehrt, so haben wir es mit einer Druckkraft zu thun, im andern Falle ist es eine Zugkraft.

Besteht ein Fachwerkträger aus zwei symmetrischen Hälften, so hat man nur nötig, den Kräfteplan für die eine Hälfte aufzuzeichnen.

§ 8. Anwendung des graphischen Verfahrens.

An einem einfachen Beispiel möge das im vorigen Paragraphen Gesagte näher erläutert werden:

Die Skizze Figur 16 zeigt uns einen armierten oder verspannten Balken. Jedes Feld sei mit P belastet, der ganze Träger also mit 2 P; davon verteilt sich auf den Knoten C die Last P, auf A und B je $\frac{1}{2}$ P. Jede Auflagerreaktion ist gleich P, so dafs in A und B noch je $\frac{P}{2}$ als aufwärts gerichtete Kraft resultiert.



Figur 16.

Beginnen wir nun zur Bestimmung der Spannkräfte mit dem Knoten A, so wirken hier die drei Kräfte $\frac{P}{2}$, O und U. Da $\frac{P}{2}$ bekannt ist, so lassen sich dieselben zu einem geschlossenen Kräftezug zusammensetzen, indem man in einem passenden Mafsstabe die Kraft $\frac{P}{2} = ab$ parallel der Auflagerreaktion aufträgt, alsdann durch a eine Parallele zu O und durch b eine Parallele zu U zieht. Schneiden sich diese Parallelen etwa in c, so stellt uns ac nach Gröfse und Richtung die Spannkraft O, cb die Spannkraft U dar. Da ab aufwärts gerichtet ist, so ist der Umfahrungssinn bacd und es stellt ac, da der Pfeil auf c zustrebt, eine Druckkraft, cb dagegen eine Zugkraft dar.

Gehen wir nun zu dem Knoten D über, so haben wir es hier ebenfalls mit drei Kräften zu thun, von denen aber nur zwei unbekannt sind. Wir erweitern also unsern Kräftezug, indem wir durch c eine Parallele zu V und durch b eine solche zu U_1 ziehen, welche beiden sich in d schneiden. Alsdann stellt uns wieder die Strecke cd nach Gröfse und Richtung die Spannkraft V, db die Kraft U_1 dar.

Wir müssen nun den Zugpfeil von U in Bezug auf D einzeichnen und erhalten den Kräftezug bcdb, also für V eine Druckkraft und für U_1 Zugkraft.*)

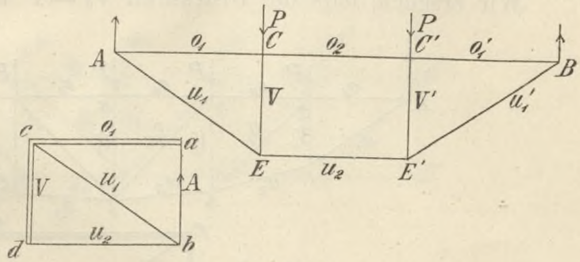
*) Im Kräfteplan kennzeichnet man die Drucklinien durch eine feine Doppellinie zum Unterschied von den Zuglinien.

Genau in derselben Weise hat auch die Berechnung des doppelt armierten Trägers zu erfolgen. Beispielsweise seien die Spannkräfte des in Figur 17 skizzierten doppelt armierten Trägers zu ermitteln!

Die Belastung des Trägers ist gleich 2 P, folglich, da dieselbe symmetrisch angeordnet ist, die Reaktion in den Auflagern:

$$A = B = P.$$

Genau wie im vorigen Beispiel tragen wir nunmehr eine Strecke ab = A auf, ziehen durch a die Parallele zu O_1 und durch b die Parallele zu U_1, welche sich in c schneiden mögen. In der Strecke ac haben wir alsdann die Druckkraft O_1, in der Strecke cb die Zugkraft U_1. Des weiteren finden wir, indem wir durch c die Parallele zu V, durch b die Parallele zu U_2 ziehen, auf den Knoten E wirkend die Druckkraft V und die Zugkraft U_2.



Figur 17.

Gehen wir nun zum Punkte C über, so finden wir, dafs den dort wirkenden vier Kräften das bereits im Kräfteplan vorhandene Rechteck abdc entspricht. Wir ersehen daraus, dafs sich die beiden Spannkräfte O_2 und U_2, da sie durch dieselbe Strecke bd dargestellt werden, absolut, d. h. ohne Rücksicht auf das Vorzeichen genommen, gleich sind. Die noch übrig bleibenden Spannungen sind wegen der Symmetrie der Konstruktion den bereits gefundenen und ihnen entsprechenden gleich.

Wir erhalten also für O_1, O_2 und O_1', sowie für V und V' Druck, dagegen für U_1, U_2 und U_1' Zug.

§ 9. Weitere Anwendungen.

Es seien die in dem in Figur 18 skizzierten Träger auftretenden Spannkräfte graphisch zu ermitteln. Er sei belastet, wie Skizze zeigt!

Zuerst berechnen wir wieder die Stützenwiderstände. Dieselben sind, da die Gesamtbelastung des Trägers 5 P beträgt, je $2\frac{1}{2}$ P.

$$A = B = 2\frac{1}{2} P.$$

In bekannter Weise tragen wir nun A = ad im Kräfteplan auf und ziehen, indem wir mit Punkt A beginnen, $ae \parallel o_1$ und $ed \parallel u_1$. Zu Punkt 1 übergehend, finden wir hier die Kräfte u_1, V_1 und u_2 thätig, wir ziehen also $ef \parallel V_1$ und $df \parallel u_2$.

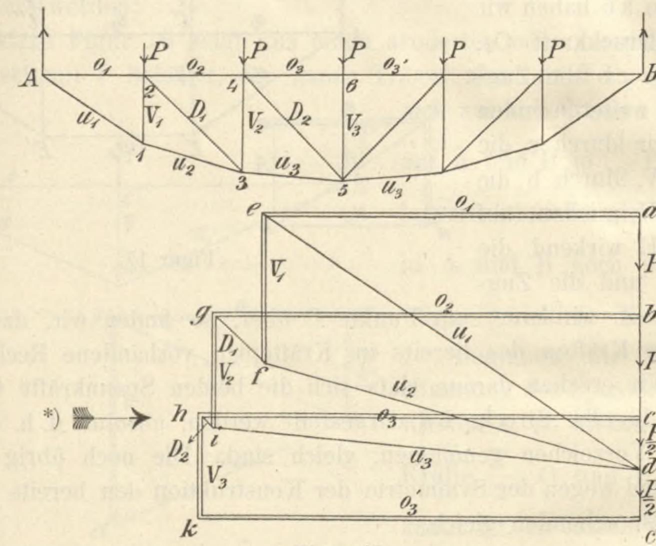
Bei Punkt 2 haben wir fünf Kräfte, von denen aber drei, nämlich P, V und o_1, bereits bekannt sind. Wir reihen nun an den noch offenen Zug baef o_2 und D_1 an, indem wir durch b die Parallele zu o_2 und durch f die Parallele zu D_1 ziehen.

Bei Punkt 3 haben wir g h || V_2 und h d || u_3 zu ziehen, wodurch wir den Kräftezug d f g h d erhalten.

Bei 4 haben wir es wieder mit fünf, aber nur zwei unbekannten Kräften o_3 und D_2 zu thun, die wir erhalten, wenn wir durch c eine Parallele zu o_3 und durch h eine solche zu D_2 ziehen. Kräftezug c i h g b c.

Um die nun noch unbekannte Spannkraft V_3 zu ermitteln, gehen wir zweckmäfsig zu Punkt 6, wo wir die Kräfte P, o_3, o_3' und V_3 haben. Wir ziehen wieder i k parallel V_3 und c′ k parallel o_3'. Kräftezug c c′ k i c.

Wir ersehen, dafs die Druckkraft $V_3 = P$ wird.



Figur 18.

Die Kräfte auf der rechten Hälfte sind den ihnen entsprechenden auf der linken gleich, brauchen daher nicht besonders ermittelt zu werden.

Wenn wir, wie dies in der Skizze geschehen, die Zugkräfte durch einfache und die Druckkräfte durch doppelte Linien erkenntlich machen, so finden wir, dafs sämtliche Stäbe der oberen Gurtung, also o_1, o_2, o_3 u. s. w., desgleichen die Vertikalständer V_1, V_2, V_3 u. s. w. gedrückt, dagegen die Stäbe der unteren Gurtung u_1, u_2, u_3 u. s. w., sowie die Diagonalstäbe D_1, D_2 u. s. w. gezogen werden.

§ 10. **Der Parallelträger.**

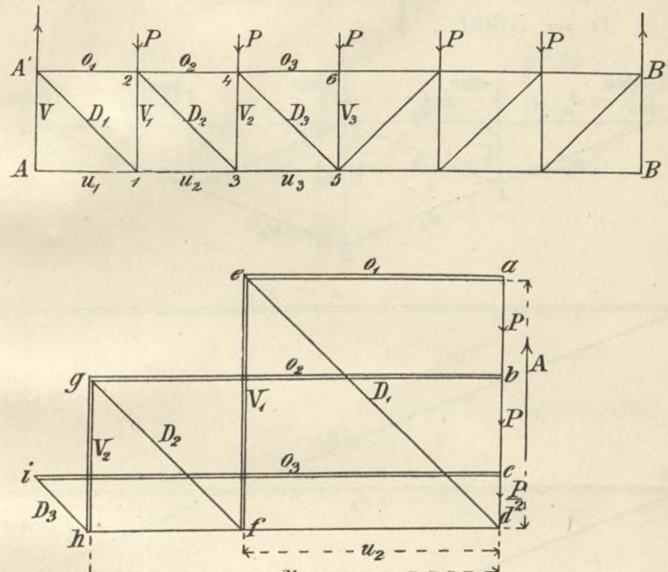
Als nächstes Beispiel sei ein Parallelträger gewählt, der, wie die Skizze zeigt, belastet ist. (Figur 19.)

Der in nebenstehender Figur 19 gezeichnete Träger ist belastet durch 6 P. Auf jeden zwischen den Auflagern befindlichen Knotenpunkt wirkt die Kraft P, auf die Endknoten je $\frac{P}{2}$. Es ergiebt sich dann für die Auflagerreaktionen:

$$A = B = 2\frac{1}{2}P.$$

*) Die Buchstaben *h* und *i* in Figur 18 sind zu vertauschen.

Aus der Gleichgewichtsbedingung des Punktes A ergiebt sich $V = A + \frac{1}{2} P$ $= 3 P$ und $u_1 =$ Null. Wir sehen also, dafs der Ständer V den ganzen Auflagerdruck aufzunehmen hat, der Stab u_1 also, ohne die Konstruktion zu beeinträchtigen, fehlen könnte. Der eigentliche Stützpunkt des Fachwerkes ist demnach im Punkte A′ zu suchen, was in gleicher Weise von B′ für die andere Seite gilt. Die Aufzeichnung des Kräftezuges, bei welcher mit A′ begonnen wird, bietet im übrigen keine Schwierigkeiten, so dafs aus der Figur 19 alles zu ersehen ist.



Figur 19.

Wir erhalten somit als Kräftezug:

für Punkt 1 d e f d;
„ „ 2 a b g f e a;
„ „ 3 d f g h d;
„ „ 4 b c i h g b.

Die mittlere Vertikale V_3 überträgt, wie aus Knoten 5 ersichtlich, ebenfalls keine Spannung; sie ist also theoretisch überflüssig.

Desgleichen zeigt uns der Kräfteplan, dafs sämtliche Horizontalstäbe der oberen Gurtung, sowie die Vertikalständer eine Druckspannung erleiden, dagegen die Stäbe der unteren Gurtung nebst den Diagonalstangen eine Zugkraft übertragen.

§ 11. **Zahlenmäfsig durchgeführte Beispiele.**

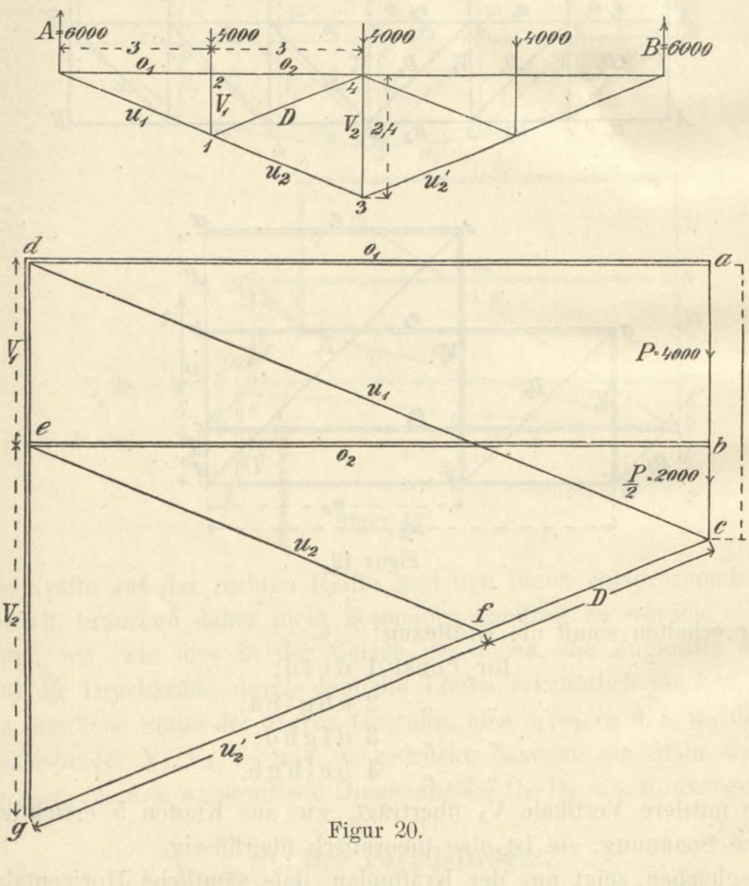
Beispiel 1: Ein dreifach verspannter Träger, dessen Länge $l = 12$ m ist, sei in den Knoten des Obergurtes belastet mit je 4000 kg. Die Länge der mittleren Vertikalen sei gleich 2,4 m. (Figur 20.)

Als passende Maſsstäbe seien gewählt:

Längenmaſsstab: $1\frac{1}{2}$ cm = 2 m. Kräftemaſsstab: 1 cm = 1500 kg.

Nach Ausführung des Kräfteplanes, der in gewohnter Weise aufgezeichnet wird, ergeben sich folgende Werte:

$O_1 = O_2 = 14\,500$ kg	Der Obergurt und die Vertikalständer erhalten Druck, der Untergurt und die Diagonalen Zug.
$U_1 = 15\,600$ „	
$U_2 = 10\,400$ „	
$V_1 = 4\,000$ „	
$V_2 = 8\,000$ „	
$D = 5\,300$ „	

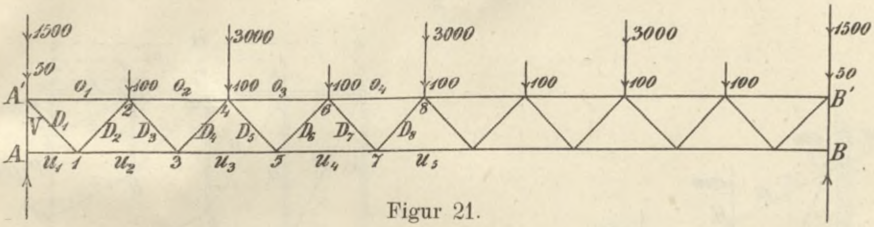


Figur 20.

Beispiel 2: Ein Gitterträger, wie ihn Figur 21 veranschaulicht, ruht bei A und B auf Säulen. Seine Spannweite beträgt 12 m. Die Entfernung der Knoten A′, 2, 4 u. s. w. beträgt je 1,5 m, die Höhe des Trägers 0,75 m. Seine Belastung ergiebt sich aus der Zeichnung. Es sind die Spannkräfte sämtlicher Stäbe graphisch zu ermitteln! Dabei soll das Eigengewicht der Konstruktion Berücksichtigung finden.

Als Längenmaſsstab wählt man zweckmäſsig 1 : 100, als Kräftemaſsstab 1 cm = 750 kg.

Das Eigengewicht der Konstruktion läfst sich natürlich nur annähernd angeben, dasselbe sei hier mit 800 kg in Rechnung gesetzt. Wir sind berechtigt, dasselbe als gleichmäfsig über die ganze Länge des Trägers verteilt anzusehen und zwar bilden auch hier die Knotenpunkte der oberen Gurtung die Angriffspunkte desselben. Die obere Gurtung besteht aus acht Feldern, also ist die Belastung pro Feld $\frac{800}{8} = 100$ kg. Die sieben zwischen den Endknoten gelegenen Knotenpunkte erhalten also je 100 kg, die beiden Endknoten A′ und B′ je 50 kg des Eigengewichtes.



Figur 21.

Die Auflagerreaktionen sind:

$$A = B = \frac{9700}{2} = 4850 \text{ kg.}$$

Aus dem Kräfteplan*) erhalten wir alsdann die Spannkräfte:

$$\left.\begin{aligned} V &= 4\,850 + 1550 = 6400 \text{ kg} \\ O_1 &= 4\,850 \text{ kg} \\ O_2 &= 14\,450 \text{ „} \\ O_3 &= 20\,950 \text{ „} \\ O_4 &= 24\,250 \text{ „} \end{aligned}\right\} \text{Druckkräfte.}$$

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \text{Null} \\ U_2 &= 9\,700 \text{ kg} \\ U_3 &= 19\,200 \text{ „} \\ U_4 &= 22\,500 \text{ „} \\ U_5 &= 25\,600 \text{ „} \end{aligned}\right\} \text{Zugkräfte.}$$

$$\begin{aligned} D_1 &= D_2 = 6860 \text{ kg} \\ D_3 &= D_4 = 6720 \text{ „} \\ D_5 &= D_6 = 2333 \text{ „} \\ D_7 &= D_8 = 2192 \text{ „} \end{aligned}$$

Die Diagonalen $D_2\ D_4\ D_6\ D_8$ erleiden Druckspannung.
Die Diagonalen $D_1\ D_3\ D_5\ D_7$ erleiden Zugspannung.

§ 12. Weitere Aufgaben.

Beispiel 1: Es seien die in den einzelnen Balken eines Perrondaches auftretenden Spannungen zu ermitteln. Die Höhe desselben betrage 3 m, die

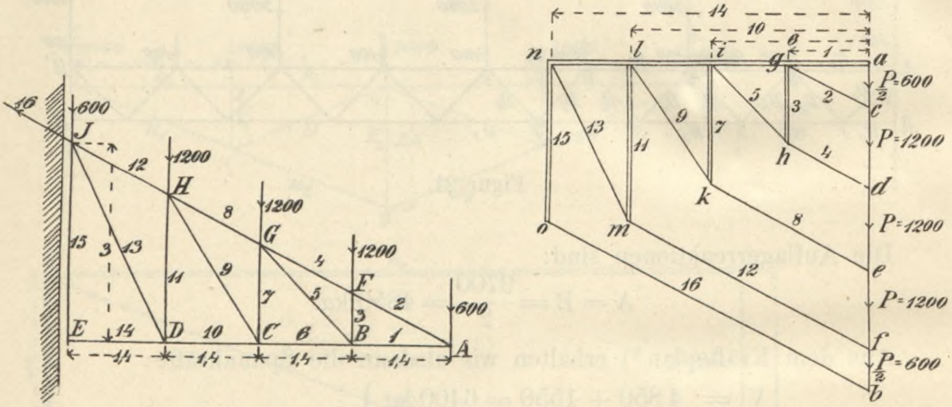
*) Der Kräfteplan zu Figur 21 ist wegen Mangels an Raum nicht aufgezeichnet.

horizontale Entfernung der Knotenpunkte je 1,4 m und die Belastung eines mittleren Knotenpunktes 1200 kg. Als Maſsstäbe seien gewählt:

Längenmaſsstab: 1 : 100. Kräftemaſsstab: 1 mm = 100 kg.

Lösung: In unserem Falle haben wir es mit gleichmäſsig verteilten Lasten und mit einer konstanten Entfernung der Knotenpunkte von einander zu thun. Es wird sich daher auch die Belastung der mittleren Knotenpunkte als eine gleichmäſsige ergeben. Da dieselben je 1200 kg betragen, so folgt für die Endknotenpunkte A und J:

$$A = J = \frac{P}{2} = 600 \text{ kg}.$$



Figur 22.

Bei der Aufzeichnung des Kräfteplanes geht man wieder in der Weise vor, daſs man die wirksamen äuſseren Kräfte in der Reihenfolge $\frac{P}{2}$, P, P, P, $\frac{P}{2}$ in vertikaler Richtung aufträgt und alsdann mit Knotenpunkt A beginnt.

Man konstruiert daselbst aus $\frac{P}{2}$, 1 und 2 ein Kräftedreieck a c g, geht dann zu Punkt F über, wo auſser den bekannten Kräften P und 2 noch 3 und 4 wirken. Dieselben setzt man zu dem Kräfteparallelogramm c d h g zusammen. Punkt G liefert uns den Kräftezug d e k i h d u. s. w. bis zum letzten Knoten J.

Die nachfolgende Tabelle ergiebt die mit Hilfe des Kräftemaſsstabes ermittelten Spannungen:

a) Druckkräfte.	b) Zugkräfte.
1 = 1150 kg	2 = 1350 kg
3 = 1050 „	4 = 1350 „
6 = 2150 „	5 = 1500 „
7 = 1550 „	8 = 2550 „
10 = 3250 „	9 = 1900 „
11 = 2050 „	12 = 3750 „
14 = 4250 „	13 = 2250 „
15 = 2100 „	16 = 4900 „