

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299731

g

EINFLUSS DER SCHUBKRÄFTE
AUF DIE BIEGUNG STATISCH BESTIMMTER
UND
DIE BERECHNUNG STATISCH UNBESTIMMTER
GERADER VOLLWANDIGER TRÄGER.

ANHANG:

NEUE SCHWERPUNKTSBESTIMMUNGEN VON TRAPEZEN UND VIERECKEN,
NEBST PRAKTISCHEN ANWENDUNGEN.

VON

ROBERT LAND
PROFESSOR AN D. K. OTTOMAN. INGENIEURSCHULE
IN CONSTANTINOPEL.

MIT 26 ABBILDUNGEN IN HOLZSCHNITT.

F. M. 19889



BERLIN 1895.
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.
(GROPIUS'SCHE BUCH- U. KUNSTHANDLUNG.)

VIII B.



1132263

Sonderdruck aus der Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. 1894
und erweiterter Sonderdruck aus dem Centralblatt der Bauverwaltung 1894.

Alle Rechte vorbehalten.

Wenngleich sich bereits verschiedene Schriftsteller mit dem Einfluß der Schubkräfte auf die Durchbiegung der vollwandigen Träger beschäftigt haben, so beschränken sich die bisherigen Untersuchungen fast nur auf die einfachen Träger (auf zwei Stützen) und ermangeln vielfach der Einfachheit der gefundenen Ergebnisse oder auch der Entwicklung derselben.*) Diese theoretischen Untersuchungen, welche durch praktische Versuche bestätigt wurden, haben den verhältnißmäßig großen Einfluß der Schubkräfte auf die Formänderungen gezeigt. Von den Versuchen seien hier nur diejenigen erwähnt, welche zur Ermittlung der Elasticitätsziffern von fluß- und schweißeisernen **I**-Trägern in der Anstalt für die Prüfung von Baumaterialien in Zürich vor einigen Jahren angestellt wurden. (Vgl. darüber: Heft III der Mittheilungen genannter Anstalt, sowie den Aufsatz von G. Mantel in der Schweizer. Bauzeitg. 1889 I S. 99.) Es zeigte sich, wie auch bei anderen Versuchsanstalten, daß die Elasticitätsziffern, berechnet nach den Zerreißversuchen, stets höher waren als diejenigen berechnet aus Biegeversuchen derselben Baustoffe, wobei für die Biegeversuche die gemessenen Durchbiegungen mit den theoretisch ermittelten ohne Berücksichtigung der Schubkräfte verglichen wurden. Berücksichtigt man jedoch den Einfluß der Schubspannungen, welcher eine Erhöhung der so aus Biegeversuchen gefundenen Elasticitätsziffer nach sich zieht, so ergeben die beiderseitigen Ergebnisse eine, dem Genauigkeitsgrade der Ausführung der Versuche ent-

*) Es seien hier genannt die Schriften von Grashof, Theorie der Elasticität, Castigliano, Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme, Winkler, Theorie der Brücken I. Heft, 2. Aufl., W. Ritter, Anwendungen der graphischen Statik I. Bd., Land, Biegungslinien ebener elastischer Gebilde, Zeitschr. d. österr. Ing. u. Arch.-Ver. 1889, Heft 4, Zschetzsche, Centralblatt der Bauverwaltung. 1893 S. 386.

sprechende recht befriedigende Uebereinstimmung. Da nun die Theorie der statisch unbestimmten Träger sich auf die Formänderungen stützt, muß sich der Einfluß der Schubkräfte auch auf diesem Gebiete geltend machen. —

Es ist nun der Zweck des nachstehenden Aufsatzes, die bisherigen Untersuchungen zu erweitern, für die praktischen Anwendungen zu vereinfachen, das gefundene Verfahren auf einige Trägerarten kurz anzuwenden und schliesslich die Art der Untersuchungen statisch unbestimmter vollwandiger Träger unter Einfluß der Schubspannungen an einem Beispiele zu zeigen.

I. Die durch die Schubspannungen erzeugte Biegelinie.

Bei einem geraden, vollwandigen I-förmigen Träger werden die Schubkräfte (oder Querkräfte) V bekanntlich hauptsächlich vom Trägersteg aufgenommen und vertheilen sich über denselben in einem Querschnitte ziemlich gleichförmig, während die Gurttheile desselben nur einen sehr geringen Theil von V übertragen, da ihre Schubspannungen äußerst klein sind. (Vgl. z. B. Keck, Vorträge über Elasticitätstheorie, S. 60.) Den Träger setzen wir zunächst als statisch bestimmt voraus. Ist F' der Querschnitt des Trägersteges, so kann für eine Trägerstelle im Abstände x vom linken Auflager gesetzt werden:

$$\text{Die mittlere Schubspannung } \tau_x = \frac{V_x}{F'}$$

$$\text{Der Gleitwinkel } \gamma_x = \frac{\tau_x}{G} = \frac{V_x}{F'G} = \frac{dM_x}{F'Gdx}, \quad \dots \quad (1)$$

wobei G = Elasticitätsziffer für Schub und M_x = Biegemoment für denselben Querschnitt (x), für den V_x die Schubkraft ist.

Anmerkung. Vorstehende Gleichungen gelten nur angenähert, da die Schubspannungen τ sich in Wirklichkeit nicht allein und nicht ganz gleichförmig auf den Trägersteg vertheilen. Die genaue theoretische Untersuchung ergibt, wenn F der ganze Trägerquerschnitt ist:

$$\gamma = z \cdot \frac{V}{FG}, \quad \text{wobei } z \text{ eine Zahl} = \frac{F}{V^2} \Sigma \tau^2 AF \quad \dots \quad (1a)$$

Denn die an einem Flächentheilchen ΔF wirkende Gleitkraft $\tau \Delta F$ erzeugt eine Verschiebung $\frac{\tau \Delta x}{G}$ und sonach eine innere elementare Formänderungsarbeit $= \frac{1}{2} \frac{\tau^2 \cdot \Delta F \cdot \Delta x}{G}$; die durch V , bei einer Verschiebung Δt des ganzen Querschnittes gegen den um Δx benachbarten, erzeugte äußere Formänderungsarbeit ist $\frac{1}{2} V \cdot \Delta t$.

Hiernach entsteht die Gleichung:

$$\frac{1}{2} V \cdot \Delta t = \sum \frac{\tau^2 \cdot \Delta F \cdot \Delta x}{2G} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{G} \Sigma \tau^2 \cdot \Delta F, \text{ also:}$$

$\gamma = \frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{VG} \Sigma \tau^2 \cdot \Delta F = z \frac{V}{FG}$, wobei z obiger Werth. Setzt man in den Ausdruck für z den bekannten allgemeinen Ausdruck für τ ein, welcher V im Zähler enthält, so verschwindet V^2 und es bleiben nur von der Querschnittsform abhängige Größen übrig. So ergibt sich z. B. für das Rechteck: $z = \frac{6}{5}$. Für das theoretische **I**-Profil (ohne Abrundungen) ergibt sich aber bereits eine verwickelte Formel; will man noch die Abrundungen berücksichtigen, so verwendet man zweckmäßig zur Ermittlung von z ein allgemeines zeichnerisches Verfahren, welches von W. Ritter in den „Anwendungen der graphischen Statik“ Bd. I angegeben ist. Nach diesem zeichnerischen Verfahren wurden die Zahlenwerthe z möglichst genau für eine Reihe von Querschnitten der deutschen Normal-**I**-Querschnitte ermittelt; (vgl. Mantel a. a. O.). Anstatt dieses umständlichen Verfahrens kann man aber mit praktisch vollkommen genügender Genauigkeit nach dem Verfasser für **I**-Querschnitte einfach setzen (abzuleiten aus (1) und (1a):

$$z = \frac{F}{F'} = \frac{\text{voller Querschnitt}}{\text{Trägersteg für ganze Trägerhöhe}}, \dots (1b)$$

wie man an nachstehender Zusammenstellung erkennt, welche die genauen zeichnerisch gefundenen Werthe mit denjenigen nach der einfachen Formel (1b) für drei weit auseinanderliegende Querschnitte enthält:

Werthe von z für **I**-Querschnitt.

	Nr. 10	Nr. 30	Nr. 50
Genauer Werth:	2,34	2,14	2,03
Angenähert. Werth nach Formel (1b):	$\frac{10,69}{4,5} = 2,37$	$\frac{69,4}{32,4} = 2,14$	$\frac{180,2}{90} = 2,00$

Setzt man also 1b) in Formel 1a), so entsteht: $\gamma_x = \frac{V_x}{F'G}$, übereinstimmend mit 1), wobei aber genauer unter F' der Querschnitt des Trägersteiges für die ganze Trägerhöhe, d. h. bis zu den äußeren Querschnittsrändern zu verstehen ist.

Der bloße Einfluß der Schubkräfte bewirkt nur eine gegenseitige Parallelverschiebung benachbarter, lothrechter Trägerquerschnitte, aber keine Verdrehung. Man kann sich diese, nur durch die Schubkräfte erzeugte Formänderung leicht in der Weise vorstellen, daß man den Träger durch ein aus schmalen, gelenkartig verbundenen Rechtecken

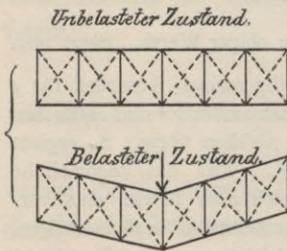


Abb. 1.

gebildetes Stabwerk mit starren Stäben ersetzt denkt, welches elastische Diagonalen (z. B. gleich gespannte Federn) enthält, Abb. 1; die im unbelasteten Zustande rechteckige Form der einzelnen Fächer bildet sich dann bei einer Belastung zur Parallelogrammform aus.

Bemerkung. In entsprechender Weise kann man für den bloßen Einfluß der Biegemomente den Träger durch gelenkartig verbundene, starre Scheiben nach Abb. 2 ersetzt

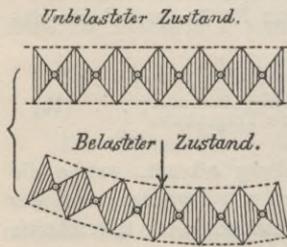


Abb. 2.

denken, welche bei der gegenseitigen Verdrehung einen elastischen Widerstand zu überwinden haben, den man sich z. B. auch durch Federn an den äußeren Scheibenrändern gebildet denken kann. Will man den gemeinschaftlichen Einfluß von Biegemomenten und Schubkräften (oder auch noch von Längs- (Normal-)

kräften) für die Formänderung ermitteln, so hängt letztere nur von der Lage der erwähnten gedachten Gelenkpunkte und der Größe der Drehwinkel ab; vgl. darüber meine Aufsätze über die Formänderung ebener elastischer Gebilde, Zeitschrift d. österreich. Ingen. u. Archit.-Vereins 1888 S. 174 und 1889.

Man kann nun zwei Fälle unterscheiden:

1) Trägerhöhe*) und sonach F' überall gleich (gewöhnlicher Fall).

Man erkennt aus Gleichung 1), daß der Gleitwinkel γ_x für jede Stelle (x) mit dem Zuwachs dM_x in demselben unveränderlichen Verhältnisse steht. Ist hiernach dM für eine gewisse Strecke unveränderlich, so ist es auch der Gleitwinkel γ , d. h. einer geraden Strecke der M -Linie entspricht auch eine gerade Strecke der Biegungslinie. Ändert sich aber dM_x , so ändert sich γ_x in gleichem Verhältniß, woraus leicht folgt:

1) Die nur durch die Schubkräfte erzeugte Biegungslinie (elastische Linie) ist affin mit der Momentenlinie, und die Gleitwinkel γ können an jeder Trägerstelle durch die Neigung der Momentenlinie zur zugehörigen Nullachse gemessen werden. Diese Beziehung folgt auch aus folgender Betrachtung. Denkt man zu den gegebenen Lasten den Kräftezug mit der Polweite $H = F'G$ (Kraft) gebildet und zeichnet die zugehörige Seillinie (Momentenlinie) für einen Kräftepol, der eine wagerechte Schlußlinie liefert, so bildet jede Seilseite mit dieser Schlußlinie einen Winkel $\gamma' = \gamma_x$, denn im Kräftezug ist die Strecke zwischen Polweite H und zugehörigem Polstrahl gleich V_x , sodafs entsteht, Abb. 3:

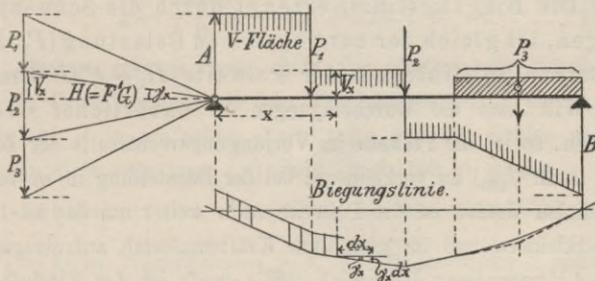


Abb. 3.

$$\frac{V_x}{H} = \frac{V_x}{F'G} = \operatorname{tg} \gamma' = \gamma' \quad (\text{da } \gamma' \text{ in Wirklichkeit äußerst klein}).$$

Es ist aber nach (1): $\frac{V_x}{F'G} = \gamma_x$, also $\gamma' = \gamma_x$.

*) Bei Blechträgern die Höhe der Blechwand.

Für eine beliebige andere Polweite H (anstatt $H = F'G$) stehen entsprechende Winkel γ'_x und γ_x in dem durch Division der beiden entsprechenden Gleichungen erhaltenen festen Verhältniſs:

$$\frac{\gamma_x}{\gamma'_x} = \frac{H}{F'G},$$

wodurch die oben gefundene affine Beziehung bestätigt wird. Hieraus erkennt man, nach Abb. 3, daſs bei einfachen Trägern auf zwei Stützen (und auch bei Trägern mit einem eingespannten Ende, für welches $x = 0$ (vgl. Abb. 6), ursprünglich lothrechte Querschnitte auch nach der Formänderung lothrecht bleiben, sodaſs unter Benutzung von Gleichung (1) auch folgt:

$$\text{Durchbiegung } y_x = \int_0^x \gamma_x dx = \int_0^x \frac{dM_x}{F'G} = \frac{1}{F'G} (M_x - M_0), \quad (2)$$

(wobei die M -Werthe algebraisch einzusetzen sind), also auch im Einklang mit obigem Satze. Da bei einfachen Trägern auf zwei Stützen (ohne überhängende Enden) $M_0 = 0$, folgt für diese einfach:

$$y_x = \frac{M_x}{F'G} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (2a)$$

Hiernach kann man die Durchbiegungen aus der Momentenlinie sehr leicht berechnen, oder zeichnerisch nach folgendem Satze ermitteln:

2) Die Biegungslinie, erzeugt durch die Schubspannungen, ist gleich der zur gegebenen Belastung ($P_1, P_2 \dots$) gehörigen Seillinie mit der Polweite $H_1 = F'G$ (Kraft).

Will man die Durchbiegungen in natürlicher Gröſſe erhalten, so ist die Polweite im Verjüngungsverhältniſs der Zeichnung (z. B. $1/100$) zu verkleinern; bei der Darstellung in m -facher natürlicher Gröſſe ist die Polweite noch weiter um das m -fache zu verkleinern und im gewählten Kräftenmaſsstab aufzutragen.

Allgemeines Beispiel. Wie groſs ist der Einfluſs der Schubkräfte auf die Durchbiegung für einen Träger der Spannweite l bei gleichförmiger Belastung p , mit Trägheitsmoment J , Stegquerschnitt F' .

Die Durchbiegung in der Mitte, erzeugt durch die Momente, ist bekanntlich: $y_m = c \frac{pl^4}{EJ}$, wobei

für Träger überall gleichen Querschnitts: $c = \frac{5}{384} = \frac{1}{76,8}$,
 für Träger gleichen Widerstandes: $c = \frac{1}{64}$, (wobei J für
 Trägermitte).

Für die ausgeführten Blechbrückenträger kann man als
 Zwischenwerth rund setzen: $c = \frac{1}{70}$,*) also die Durchbiegung in
 der Mitte: $y_m = \frac{1}{70} \frac{pl^4}{EJ}$.

Die Durchbiegung, erzeugt durch die Schubkräfte, ist nach
 Gleichung (2a):

$$y_v = \frac{\max M_x}{F'G} = \frac{pl^2}{8F'G}.$$

Das Verhältniß der zweiten Durchbiegung zur ersten ist
 hiernach:

$$\varepsilon = \frac{y_v}{y_m} = \frac{70}{8} \frac{EJ}{F'Gl^2}.$$

Nimmt man $G = 0,4 E$, so entsteht rund:

$$\varepsilon = 22 \frac{J}{F'l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzt man durchschnittlich für das Stehblech $F' = 1 \text{ cm} \cdot 0,1 l$
 so wird:

$$\varepsilon = \frac{220 J}{l^3}, \text{ wobei } J \text{ und } l \text{ in cm} \quad . \quad . \quad (3a)$$

Daraus erkennt man, daß der Einfluß der Schubkräfte
 auf die Durchbiegung mit dem Trägheitsmoment J wächst, also
 auch, da J in einfachem Verhältniß mit der Größe der zu-
 lässigen Grenzbelastung (p) steht, auch mit p wächst.

Zahlenbeispiel. Blechträger für eine Eisenbahnbrücke**) mit
 $l = 10 \text{ m}$, Trägerhöhe $= \frac{1}{10} l$. Trägheitsmoment J setzt sich
 zusammen aus Stehblech $F' = 1,1 \cdot 94 = 103,4 \text{ qcm}$, 4 Winkeleisen
 $10 \cdot 10 \cdot 1,2$ und 2 Kopfblechen, je $24 \cdot 1,5 \text{ cm}^2$. Es ist das Wider-

*) Vgl. Steiner, Handbuch der Ingen. Wissensch. Brückenbau II, 2. Aufl. S. 294.

**) Zahlenwerthe entnommen der Tafel vom Handbuch der Ingenieurwissensch., Brückenbau II S. 406.

standsmoment $W = J/e = 7900 \text{ cm}^3$, also $J = 7900 \cdot 50 \text{ cm}^4$.*) Hiernach berechnet sich nach (3):

$$\varepsilon = \frac{22 \cdot 7900 \cdot 50}{103,4 \cdot 1000^2} = 0,084.$$

Auch Formel (3a) giebt kein wesentlich anderes Ergebnis, da für dieselbe allgemein $F' = 1 \text{ cm} \cdot 0,1 l$ gesetzt wurde, d. h. hier = 100 qcm, während der thatsächlich ausgeführte Querschnitt 103,4 qcm nur wenig davon abweicht. Man ersieht hieraus: Die Schubkräfte vergrößern die von den Momenten herführende Durchbiegung im vorliegenden Falle um mehr als 8 v. H.

In ganz entsprechender Weise erhält man für einen Träger gleichen Querschnitts mit einer Einzellast in der Mitte das Verhältniß: $\varepsilon = \frac{30 J}{F' l^2}$, und bei Annahme desselben Zahlenbeispiels: $\varepsilon = 0,115$, also über 11 v. H.

II) Trägerhöhe, also auch F' veränderlich.

Dann folgt, entsprechend der obigen Betrachtung:

$$\begin{aligned} y_x &= \int_0^x \gamma_x dx = \frac{1}{G} \int_0^x \frac{V_x dx}{F'} = \frac{1}{F_c G} \int_0^x V_x \left(\frac{F_c}{F'} \right) dx = \\ &= \frac{1}{F_c G} \int_0^x \bar{V}_x dx; \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

hierbei bedeutet F_c einen beliebigen, unveränderlichen Querschnitt (als welchen man zweckmäÙig einen der vorhandenen Trägersteg-Querschnitte F' annimmt), $\bar{V}_x = V_x \cdot F_c / F' =$ gedachte (geänderte) Schubkraft, welche unter dem Träger durch \bar{V} -Strecken als eine \bar{V} -Fläche (verzerrte V -Fläche) dargestellt wird. Es ist nun: $\int_0^x \bar{V}_x dx = [\bar{V}\text{-Fläche}]_0^x$, die für einzelne besondere Punkte leicht gefunden werden kann, sodafs:

$$y_x = \frac{1}{F_c G} [\bar{V}\text{-Fläche}]_0^x \dots \dots \dots (5)$$

Ein zeichnerisches Verfahren läÙt sich auch leicht ableiten; denn man kann aus der gedachten \bar{V} -Fläche umgekehrt die entsprechenden gedachten Belastungen und hieraus die zu-

*) J -Werth bei Abzug der Nietlöcher; bei genauerer Berechnung der Formänderungen muß der J -Werth für den vollen Querschnitt eingeführt werden.

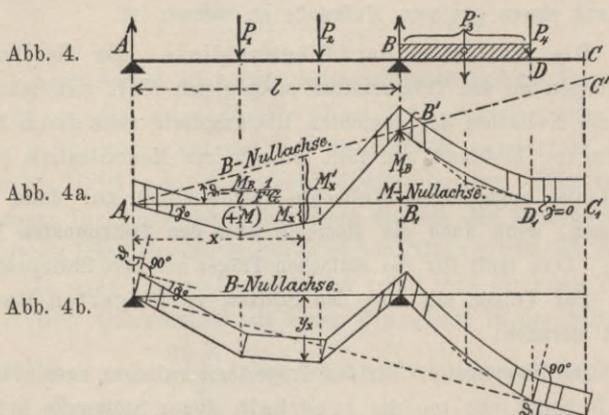
gehörige (gedachte) Momentenlinie (\overline{M} -Linie) als Seillinie ableiten, welche als gesuchte Biegelinie aufgefaßt werden kann, die mit einem gewissen Maßsstabe zu messen ist.

Die Nullachse der Biegelinie. Da die Durchbiegungen an den Trägerstützen stets gleich Null sein müssen, ist die Nullachse der gesuchten Biegelinie stets durch diese Bedingung bestimmt und fällt mit der zur Momentenlinie (oder \overline{M} -Linie) zugehörigen Nullachse (Schlußlinie) nur dann zusammen, wenn auch die Momente über den Stützpunkten Null sind. Dies trifft für die einfachen Träger auf zwei Stützpunkten zu. Für Träger mit über den Stützen verlängerten Enden folgt hiernach:

Die Biegelinie für den Trägertheil zwischen zwei Stützen A, B hängt nur von der innerhalb dieser Stützweite befindlichen Belastung ab und ist gleich der Biegelinie für den entsprechenden einfachen Träger AB (ohne Verlängerungen). Nachstehend sind einige Beispiele verschiedener Trägerarten mit Erläuterungen gegeben, wobei überall gleiche Trägerhöhe (Fall I) angenommen werde, da bei den selten vorkommenden Fällen verschiedener Trägerhöhe die Abweichungen nach Obigem leicht zu treffen sind.

1) Träger auf zwei Stützen ohne oder mit verlängerten Enden. Man zeichne (oder berechne) die Momentenlinie, bezogen auf geradlinige Achse, dann kann dieselbe aufgefaßt werden als gesuchte Biegelinie, deren zugehörige Nullachse durch die beiden, den Stützen entsprechenden Punkte der Momentenlinie geht. Ein Beispiel ist in Abb. 4 dargestellt für einen Träger ABC mit einem verlängerten Ende; Momentenlinie (Abb. 4a) = $A_1 B' C_1$, bezogen auf $A_1 C_1$ = M -Nullachse, Nullachse der Biegelinie = B -Nullachse = $A_1 B' C'$. Die Gleitwinkel γ der Trägertheilchen können nach Satz 1) durch die Neigung der M -Linie zur M -Nullachse gemessen werden und sind für die Stellen A, B, D gekennzeichnet. In Abb. 4a ist die M -Nullachse wagerecht gezeichnet, daher sind hier ursprünglich lothrechte Querschnitte auch nach der Formänderung lothrecht gezeichnet; in Abb. 4b ist die B -Nullachse wage-

recht gezeichnet, wobei die Querschnitte nicht mehr lothrecht dargestellt werden können; der Einfluss der Belastung des ver-



längerten Trägertheiles BC äußert sich daher in einer Neigung (Drehung) aller ursprünglich lothrechten Querschnitte gegen die Lothrechte um den Winkel ϑ , dessen Größe sich, entsprechend Gleichung (2), ergibt zu:

$$\vartheta = \frac{1}{F'G} \cdot \frac{M_B}{l}.$$

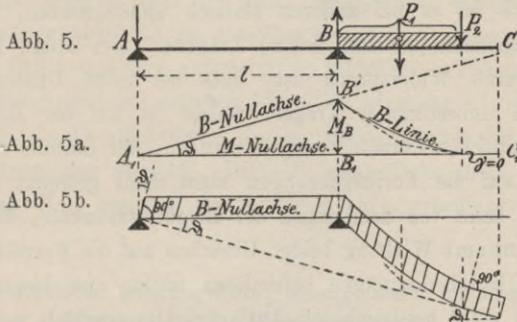
Die Durchbiegung y_x innerhalb AB in der Entfernung x von A ergibt sich rechnerisch nach Obigem und nach Gleichung (2a) zu:

$$y_x = \frac{M'_x}{F'G},$$

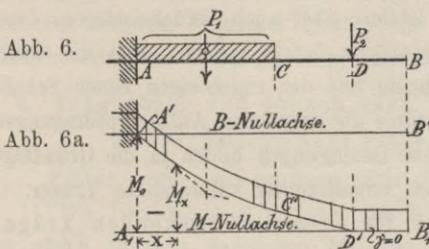
wobei M'_x = Moment für den einfachen Träger AB ohne Verlängerung ist, Abb. 4a.

Abb. 5 stellt den besonderen Fall dar, wo der Trägertheil AB unbelastet ist und sich nur Lasten auf der Strecke BC befinden; dann ist die Momentenlinie $A_1 B' C_1$ und die Nullachse der gesuchten Biegelinie $A_1 B'$. Der Trägertheil AB bleibt deshalb geradlinig und erhält keine Durchbiegung, wohl aber verschieben sich die Querschnitte, da auf diesen Trägertheil eine Schubkraft V = Auflagerdruck A wirkt, welche eine Gleitung $\gamma = \vartheta = \frac{1}{F'G} \cdot \frac{M_B}{l}$ hervorruft. Das Ergebniss der Formänderungen ist in Abb. 5b dargestellt.

2) Einseitig eingespannter Träger mit freiem Ende, Abb. 6 und 6a. Die M -Linie bezogen auf die Achse $A_1 B_1$

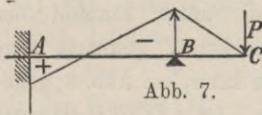


ist $A' C' D' B_1$. Die zugehörige Nullachse der Biegelinie ist $A' B' // A_1 B_1$; denn auf das freie, unbelastete Trägerende BD wirkt keine Schubkraft, daher behalten die Trägertheilchen ihre Rechteckform und die zugehörige Trägerachse ist nach der Formänderung der ursprünglichen Achse parallel.



Für statisch unbestimmte Träger gelten die oben angegebenen Beziehungen nicht mehr; wollte man sie anwenden, so käme man auf Widersprüche. Als

ein Beispiel sei nur der einerseits (bei A) eingespannte und andererseits auf einem Stützpunkt B ruhende Träger mit über-



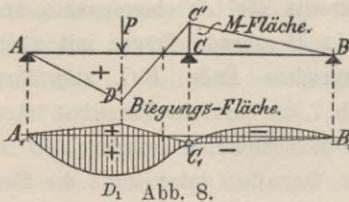
hängendem Ende BC angeführt, Abb. 7, der bei C eine Einzellast trägt. Die Momentenlinie zwischen AB ist eine Gerade, daher muß die Bie-

gungslinie eine Gerade sein, und da sie durch A und B gehen muß, könnte hiernach der Trägertheil AB seine Form nicht ändern, da infolge der Einspannung bei A die lothrechten Querschnitte sich nicht wie bei Abb. 4b und 5b verschieben können. Dies widerspricht aber dem Umstande, daß zwischen A und B eine Schubkraft, gleich dem Auflagerdruck A , vorhanden ist, welche

also auch einen entsprechenden Gleitwinkel γ bewirken müßte, der nach den obigen Betrachtungen aber nicht entstehen könnte. — Ähnlich ist es bei anderen statisch unbestimmten, z. B. den durchgehenden (kontinuierlichen) Trägern. Der Grund für diesen scheinbaren Widerspruch ist, daß bei allen Untersuchungen statisch unbestimmter Träger, welche ja auf der Betrachtung der elastischen Formänderungen beruhen, der Einfluß der Schubkräfte auf die Formänderungen nicht mehr getrennt betrachtet werden kann von demjenigen der Biegemomente, da erst die gemeinsame Wirkung beider Ursachen auf die Formänderungen die Auflagerbedingungen befriedigen muß, aus denen erst die statisch nicht bestimmbaren Auflagerkräfte ermittelt werden, von denen wiederum alle Momente und Schubkräfte abhängen.

Bei den bisher bekannten Untersuchungen statisch unbestimmter vollwandiger Träger wurden fast stets nur die von den Biegemomenten herrührenden Formänderungen in Betracht gezogen, die von den Schubkräften erzeugten aber ganz vernachlässigt*). Würde man letztere aber auch berücksichtigen, dann würde sich die Momentenfläche derart ändern, daß die unter Einfluß der neuen Momente und der zugehörigen neuen Schubkräfte erzeugte Biegelinie die gegebenen Auflagerbedingungen erfüllt; denn gerade diese Bedingungen bilden ja die Grundlage der Untersuchung statisch unbestimmter vollwandiger Träger.

Als Beispiel, wie für einen durchgehenden Träger auf drei Stützen mit einer Einzellast P die Form der wirklichen Biegungsfläche (deren



D₁ Abb. 8.

Ordinaten = Durchbiegungen sind) unter Einfluß der Schubkräfte bestimmt werden kann, sei Abb. 8 gegeben. Ist $A D' C' B$ die unter

Einfluß der Schubkräfte ermittelte Momentenfläche (die nach dem folgenden Abschnitt III

*) Vergl. jedoch: Engesser: Zur Theorie der kontinuierlichen Träger, Zeitschr. f. Baukunde 1878, wo die Schubspannungen zum ersten Male für einen einzelnen Belastungszustand angenähert berücksichtigt werden.

bestimmt werden kann), darunter gezeichnet $A_1 D_1 C_1 B_1$ die dieser Momentenfläche entsprechende Biegungsfläche mit der Achse $A_1 B_1$, und zeichnet man die den Schubkräften entsprechende negative Biegungsfläche zu derselben Achse $A_1 B_1$ (also abwärts gerichtete Ordinaten nach aufwärts), so bildet die zwischen beiden einzelnen Biegungslinien gelegene Fläche die wirkliche Biegungsfläche, da sie die algebraische Summe der Ordinaten der einzelnen Biegungslinien angiebt. Diese Biegungsfläche muß bei C_1 die Ordinate Null besitzen, der dortigen Auflagerbedingung entsprechend.

II. Die wirkliche Biegungslinie, erzeugt durch gleichzeitige Biegungs- und Schubspannungen.

Das im vorigen Abschnitt unter I angegebene zeichnerische Verfahren zur Ermittlung der, nur von den Schubkräften erzeugten Biegungslinie läßt sich vereinigen mit dem bekannten zeichnerischen Verfahren Mohrs zur Ermittlung der von den Biegungsspannungen herrührenden Biegungslinie, wobei man die von den beiden Ursachen herrührende gemeinsame Biegungslinie in einfacher Weise wie folgt erhält.

I. Trägerhöhe und sonach auch F' überall gleich.

a) Trägheitsmoment J überall gleich.

Früher wurde nachgewiesen (Satz 2, S. 6):

1) Die Biegungslinie, erzeugt durch die Schubspannungen, ist gleich der zur gegebenen Belastung ($P_1, P_2 \dots$) gehörigen Seillinie S_1 , mit der Polweite $H_1 = F'G$ (Kraft).

Der Mohr'sche Satz lautet für überall gleichen Querschnitt:

2) Die Biegungslinie, erzeugt durch die Biegungsspannungen, ist gleich der zur Momentenfläche (mit der Dimension: Kraft \cdot Länge²) als Belastungsfläche gehörenden Seillinie S_2 , mit der Polweite $H_2 = EJ$ (Kraft \cdot Länge²).

Es handelt sich jetzt darum, einen gemeinsamen Kräfteplan zu finden, dessen zugehörige Seillinie die gesuchte Biegungslinie ergibt.

Da sich eine Seillinie nicht ändert, wenn die Form des zugehörigen Kräfteplanes (einschließlich der Polstrahlen) sich ähnlich verändert, braucht man nur den einen Kräfteplan derart

zu verändern, daß er die gleiche Polweite mit dem andern Kräfteplan besitzt und dann beide Kräftepläne passend zu vereinigen, wobei der Maßstab für das Auftragen des ersten Kräfteplanes ganz beliebig ist. Ist der Längemaßstab der Zeichnung $= \frac{1}{a}$ (z. B. $= 1/100$), so hat man für die zeichnerische Bestimmung der Durchbiegungen in natürlicher Größe die Polweite $H_1 = \frac{1}{a} \cdot F'G$ und $H_2 = \frac{1}{a} \cdot EJ$ im Maßstabe der zugehörigen Kräftezüge aufzutragen. Ist nun die Polweite H_2 zeichnerisch durch eine Länge b cm dargestellt, so hat man für den gesuchten, jetzt abhängigen Kräftemaßstab des ersten Kräftezuges (für Satz 1), $1^t = n$ cm (für die P und für H_1), die Bedingung:

$$\text{Polweite} = H_1^t = \frac{1}{a} \cdot \frac{(F'G)^t}{1^t} \cdot n \text{ cm} = b \text{ cm, woraus:}$$

$$n = \frac{ab}{F'G} \text{ bestimmt ist.}$$

Da bereits zur zeichnerischen Ermittlung der Momentenfläche (M -Fläche) ein erster Kräfteplan der P nach einem gewählten Maßstabe: $1^t = c$ cm mit einer gewählten Polweite H^t zu zeichnen ist, so wird man zweckmäßig in diesen Kräfteplan (kurz genannt: P -Plan) sofort den andern Kräfteplan für die Seillinie S_1 (nach Satz 1) zeichnen, da die zum P -Plan und der M -Linie gehörigen Kräftestrahlen auf einer Lothrechten in einer zu bestimmenden Polweite h^t vom Pol sofort den Kräftezug für S_1 bilden, wie Abb. 9 zeigt. Die Strecken dieses letzten Kräftezuges mögen, zum Unterschiede von denjenigen der P , nachfolgend $p_1, p_2 \dots$ benannt werden.

Dividirt man bei der Zeichnung der Seillinie S_2 die im zugehörigen Kräfteplan aufzutragenden Strecken von der Dimension: $\overline{\text{Kraft} \cdot \text{Länge}^2}$ sämtlich durch die erste Polweite H^t , so haben die aufzutragenden neuen Strecken die Bedeutung: $\overline{\text{Länge}^2} = \text{Fläche}$ und stellen unmittelbar die wirkliche M -Fläche dar. Ist daher für den zugehörigen Kräfteplan (dessen Strecken $f_1, f_2 \dots$ seien) der Maßstab gewählt: $1 \text{ cm} = f \text{ cm}^2$

der gezeichneten M -Fläche ($= fa^2$ der M -Fläche in natürl. Größe), so ergeben sich die beiden Polweiten H_2 und H_1 (als

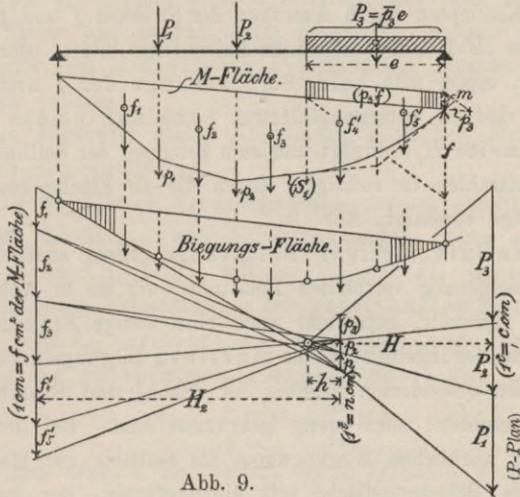


Abb. 9.

Längen) zu:

$$H_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{EJ}{H(fa^2)} \text{ cm} \quad \dots \quad (6)$$

$H_1 = \frac{1}{a} \cdot \frac{F'G}{1^t} \cdot n = \frac{F' \cdot 0,4 E}{a 1^t} \cdot n \text{ cm}$; aus der bedingten Gleichheit $H_2 = H_1$ folgt als Maßstab der p :

$$n = \frac{J \cdot 1^t}{0,4 H F' f a^2} \quad \dots \quad (7)$$

(Diese Formel folgt auch aus dem S. 14 gegebenen Ausdruck für n , wenn man darin H_2 nach (6) anstatt b setzt.)

Ferner folgt aus der Beziehung der beiden Kräftepläne Σp und ΣP das Verhältniß:

$$\frac{h^t}{H^t} = \frac{\Sigma p}{\Sigma P} = \frac{n}{c};$$

wobei h^t in demselben Kräftemaßstab wie die Polweite H^t zu messen ist, also nach: $1^t = c \text{ cm}$. Sonach folgt die Polweite h im P -Plan als Länge zu: $h \text{ cm} = h^t \cdot c = H^t \cdot n$, also nach Gleichung (7) zu:

$$h \text{ cm} = \frac{J}{0,4 F' f a^2} \text{ cm} \quad \dots \quad (8)$$

Es handelt sich jetzt darum, aus den Strecken Σf und Σp einen vereinigten Kräfteplan mit der Polweite H_2 zu zeichnen. Dies kann in der gewöhnlichen Weise geschehen, indem man einen neuen Kräfteplan durch Antragen der Strecken f und p in der durch die M -Fläche bestimmten Reihenfolge bildet, oder zweckmäßiger, indem man beide Streckenzüge der f und p getrennt und in entgegengesetztem Sinne auf beiden Seiten der Polweite H_2 aufträgt und zum Zeichnen der Seillinie durch Zwischenstrahlen in richtiger, durch die M -Fläche bestimmter Reihenfolge vereinigt, Abb. 9.

Einfluß stetiger Belastung. Einer stetigen, z. B. einer gleichförmig vertheilten Belastung, wie sie in Abb. 9 die Last P_3 darstellt, entspricht auch eine stetige Krümmung der wirklichen Biegelinie, da die einzelnen Biegelinien S_1, S_2 , welche den gesonderten Einfluß der Schub- und Biegungsspannungen angeben, auch stetig gekrümmt sind. Bei der Zeichnung der wirklichen Biegelinie als Seillinie zur Momentenfläche als Belastungsfläche mit hinzugefügten, der gegebenen Belastung entsprechenden Lasten p , muß deshalb eine gegebene gleichförmig vertheilte Belastung (z. B. P_3) als eine entsprechende, zur Momentenfläche hinzuzufügende Belastungsfläche dargestellt werden. Ist die gleichförmig stetige Belastung (P_3) über die Strecke e vertheilt ($P_3 = \bar{p}_3 e$), so ist also die im Maßstabe der f zu messende Kraft p_3 in eine über e sich erstreckende Belastungsfläche von der Höhe m umzuwandeln, d. h. nach der Bedingung:

$$(p_3 f) \bar{c} m^2 = e m, \quad (9)$$

aus welcher m sehr leicht nach dem Verhältniß $e : f = p_3 : m$ zeichnerisch gefunden wird, wie bei der M -Fläche in Abb. 9 gezeigt ist, wo die wagerechte Projection der Schlusslinienverlängerung gleich p_3 ist.

Der die Biegungsfläche erzeugende Kräfteplan besteht hienach links aus den Strecken $f_1, f_2, f_3, f'_4, f'_5$, von denen die drei ersten die Theile der anfänglich gegebenen, f'_4 und f'_5 die der vergrößerten M -Fläche darstellen, rechts im Abstände H_2 aus den Strecken p_1, p_2 , entsprechend den beiden Einzellasten P_1, P_2 , und die Reihenfolge der Vereinigung beider Streckenzüge zur

Zeichnung der zugehörigen Seillinie ist bestimmt durch die Folge: $f_1, p_1, f_2, p_2, f_3, f'_4, f'_5$. Die gesuchte Biegelinie berührt die gezeichnete Seillinie lothrecht unter den Theillinien der M -Fläche und verläuft stetig gekrümmt, bis auf die lothrecht unter den Einzellasten P befindlichen Punkte, wo sich ein Knick befindet.

Das Ergebnifs dieses Abschnittes läßt sich kurz durch folgenden Satz ausdrücken:

3) Die wirkliche Biegelinie, erzeugt durch den Einfluß der Biegungs- und Schubspannungen, kann aufgefaßt werden als eine Seillinie mit der Polweite H_2^* (Gleichung 6), deren zugehörige Belastung aus der gezeichneten Momentenfläche besteht, vermehrt um eine, der gegebenen Belastung ΣP entsprechende andere Belastung

$$\Sigma p = \frac{n}{c} \Sigma P = \frac{h}{H} \Sigma P,$$

welche nach Obigem zeichnerisch leicht gefunden werden kann.

b) Das Trägheitsmoment ist veränderlich.

(Gewöhnlicher Blechträger mit Gurtplatten verschiedener Länge.)

Hier hat man anstatt der unmittelbaren M -Fläche bekanntlich eine $(M \cdot J_c / J)$ -Fläche (verzerrte M -Fläche) zu bilden, wobei J das veränderliche Trägheitsmoment und J_c ein beliebiger, fester J -Werth, zweckmäfsig der gröfste der gegebenen J -Werthe, bedeutet. Im Uebrigen bleibt das oben angegebene Verfahren ungeändert, nur ist in den angegebenen Formeln J_c für J einzusetzen.

Zahlenbeispiel betr. der Mafsstäbe. Es sei zu untersuchen ein Blechträger der Spannweite 10 m und der Belastung 20 t (über deren Vertheilung für vorliegenden Zweck nichts gesagt zu werden braucht). Es sei J veränderlich und $\max J = J_c = 45 \text{ dcm}^4 = 450\,000 \text{ cm}^4$, Trägerhöhe = 100 cm, Blechstärke = 1 cm, also $F' = 100 \cdot 1 = 100 \text{ cm}^2$; $E = 2000 \text{ t/cm}^2$.

Es seien nun folgende Mafsstäbe und Polweiten gewählt:

- I) für die Längen: 1 cm Zeichnung = 100 cm Wirklichkeit ($1/\alpha = 1/100$),
- II) für die P -Kräfte: 1 t = 0,5 cm (= c), mit Polweite $H = 10 \text{ t}$ (= 5 cm), (also Last 20 t durch 10 cm dargestellt.)

III) für die f -Strecken: $1 \text{ cm} = 2 \text{ cm}^2 (=f)$ der gezeichneten, verzerrten M -Fläche, $= (MJ_c/J)$ -Fläche.

Dann berechnet sich, bei der Ermittlung der natürlichen Gröfse der Durchbiegungen, die Polweite H_2 des zugehörigen Kräfteplanes der f und p nach (6) zu:

$$H_2 = \frac{1}{a} \cdot \frac{E J_c}{H f a^2} = \frac{1}{100} \cdot \frac{2000 \cdot 450\,000}{10 \cdot 2 \cdot 100^2} = 45 \text{ cm.}$$

Die Polweite h , zu welcher im Kräfteplan der P die p -Strecken gehören, die im Kräfteplan der f (III) als Einfluss der Schubspannungen hinzugefügt werden müssen, folgt nach (8):

$$h = \frac{J_c}{0,4 F' f a^2} = \frac{450\,000}{0,4 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 100^2} = 0,56 \text{ cm.}$$

Will man die Durchbiegungen in mehrfacher natürlicher Gröfse haben, was behufs gröfserer Genauigkeit zu empfehlen ist, z. B. in 5-facher nat. Gr., so hat man für den Kräfteplan der f und p) die Polweite $H_2 = \frac{45}{5} = 9 \text{ cm}$ zu nehmen,

während die zugehörigen Kräftestrecken ungeändert bleiben.

II. Trägerhöhe, also auch F' veränderlich.

Man bilde, wie früher auf S. 8 angegeben, aus der V -Fläche zunächst eine \bar{V} -Fläche (verzerrte V -Fläche), wobei $\bar{V} = V \cdot F_c/F'$ und F_c ein fester Querschnitt ist. Aus dieser \bar{V} -Fläche leite man in einfacher Weise (durch Projiciren parallel der Achse der \bar{V} -Fläche) die entsprechenden gedachten Belastungen \bar{P} ab, welche nunmehr an Stelle der gegebenen Belastungen P für die weitere Behandlung zu treten haben. Aendert sich die Trägerhöhe stetig, z. B. geradlinig, und besteht die gegebene Belastung nur aus Einzelkräften, so besteht die V -Fläche aus Theilen von Rechtecken, die \bar{V} -Fläche aus Trapez-ähnlichen Theilen und die gedachten Belastungen daher aus Einzelkräften und hinzuzufügenden vertheilten Belastungen.

III. Genaue Untersuchung statisch unbestimmter Träger unter Berücksichtigung des Einflusses der Schubkräfte.

Die bisher bekannte allgemeinste und zugleich wohl einfachste und übersichtlichste Untersuchung statisch unbestimmter

Träger nimmt als Ausgangspunkt das allgemeine Gesetz der Gegenseitigkeit elastischer Formänderungen.*) Da dasselbe bei vollwandigen Trägern ganz allgemein gilt, d. h. bei Berücksichtigung aller inneren Spannungen, so bildet es auch die Grundlage für die gekennzeichnete schärfere Untersuchung der statisch unbestimmten vollwandigen Träger. Da diese Untersuchungen sich weiter auf die Ermittlung der elastischen Formänderungen statisch bestimmter Träger gründen, auf welchen ein gegebener statisch unbestimmter Träger durch Wegnahme von Auflagerbedingungen stets zurückgeführt werden kann, so ist der allgemeine Gesichtspunkt dieser genaueren Untersuchung hiermit gegeben.

Als ein Beispiel möge der schon erwähnte einfache Fall eines durchgehenden Trägers auf drei Stützen A , C , B kurz angeführt werden, Abb. 10, und zwar in der vom Verfasser gewählten Behandlung in der Beigabe zum deutschen Baukalender für 1894 oder 1895, S. 110 und 113.**)

α) Erste Einflußfläche, für den mittleren Stützen-
druck $X = C$, oder X -Fläche. — Die für den statisch bestimmten Trägerzustand $X = C = 0$ (d. h. Auflager C nicht vorhanden gedacht) von der Kraft $X = C = 1^t$ (abwärts) erzeugte Biegungsfläche ist die Einflußfläche für $(w_x X)$, wobei w_x = elastische Formänderung bei X und entsprechend X , also hier = Durchbiegung δ_c bei C ; d. h. es gilt für mehrere lothrechte Kräfte P die Beziehung:

$$w_x X = \Sigma P \delta, \text{ also } X = \frac{1}{\delta_c} \Sigma P \delta,$$

wobei δ = Ordinate der genannten Biegungsfläche unter P .

Die genaue Biegungsfläche setzt sich aus zwei Theilen zusammen, demjenigen, erzeugt durch die Biegemomente M : $A_1 C^1 B_1$ (= angenäherte Biegungsfläche), abwärts von der Nullachse $A_1 B_1$ gezeichnet, und demjenigen, erzeugt durch die

*) Zuerst allgemein genau bewiesen vom Verfasser, Wochenblatt für Baukunde 1887 S. 14, noch erweitert in der Schweizer. Bauzeitg. 1888 II S. 66. — Vgl. auch Müller-Breslau, Graphische Statik II.

**) Andere Behandlung bei Müller-Breslau, Wochenblatt f. Archit. u. Ing. 1883 S. 353.

Schubkräfte V : $A_1 C^V B_1$, oberhalb $A_1 B_1$ gezeichnet, sodass die Ordinatensumme δ beider Biegungsflächen sofort abzugreifen ist.

Unter der Annahme eines überall gleichen Blechquerschnitts und der Voraussetzung $AC = CB = l$ und $AB = l_1 = 2l$ wird z. B., wenn der obere Zeiger die Ursache ausdrückt:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_c^M &= \frac{1^t \cdot l^3}{48 EJ} = \frac{1^t \cdot (2l)^3}{48 EJ} = \frac{l^3}{6 EJ} \\ \delta_c^V &= \frac{M_c}{F^v G} = \frac{1^t \cdot l_1}{4 F^v G} = \frac{l}{2 F^v G}. \end{aligned} \right.$$

Für $G = 0,4E$ wird: $\delta_c^V = \frac{l}{0,8 F^v E}$, also das frühere Verhältnifs ε :

$$\varepsilon = \frac{\delta_c^V}{\delta_c^M} = \frac{6 EJl}{0,8 F^v E l^3} = \frac{7,5 J}{F^v l^2}.$$

Setzt man, wie vorher, durchschnittlich $F^v = 1 \text{ cm} \cdot 0,1 l$,

so wird: $\varepsilon = \frac{75 J}{l^3}$.

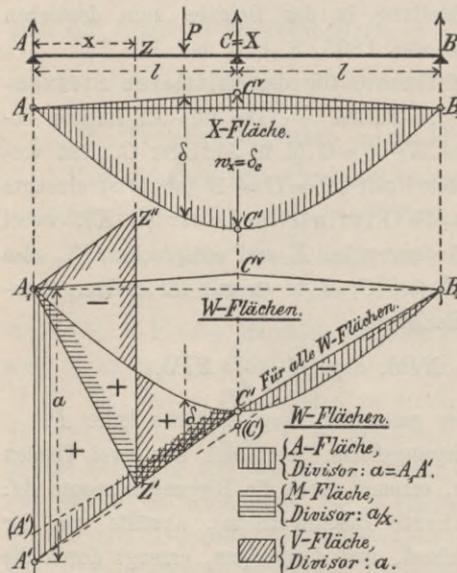


Abb. 10.

Dieser Werth ε beträgt also nur $1/3$ des nach Formel 3a) berechneten Wertes, also wird bei Benutzung des früheren Zahlenbeispieles (mit $l = 10 \text{ m}$), der jetzige Werth $\varepsilon = 1/3 \cdot 0,084 = 0,028$.

Man erkennt leicht aus der zeichnerischen Darstellung, dass der genauere Werth

$X = C$ (d. h. unter Einfluss der Schubkräfte) etwas kleiner ist, als der nur unter Berücksichtigung der Formänderungen durch die Biegemomente berechnete Werth, da das Verhältnifs δ/δ_c für die genaueren

Ordinaten etwas kleiner ist als für die angenäherten Ordinaten, welche von der geraden Nulllinie $A_1 B_1$ ausgehen.

β) Die anderen Einflußflächen unbekannter Widerstände W , oder die W -Flächen. — Zeichne für den statisch bestimmten Trägerzustand $X = C = 0$ die Einflußlinien der W , kurz mit W^0 -Linien bezeichnet, nach bekanntem kinematischen Verfahren*) als Biegungslinien derart, daß die zu X gehörige kinematische Formänderung (d. h. die Durchbiegung bei C) gleich der elastischen Formänderung δ_c ist, wobei eine zu W^0 gehörige kinematische Formänderung w entsteht. Dann ist allgemein:

Gesuchte W -Fläche $\left\{ \begin{array}{l} W^0\text{-Fläche} \\ \text{mit Ordinaten } \delta \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} W^0\text{-Fläche} - X\text{-Fläche mit Ein-} \\ \text{heitsordinate (Divisor f. d. } \delta) = w, \end{array} \right.$
wobei die nach α gezeichnete $w_x X$ -Fläche jetzt kurz mit X -Fläche bezeichnet ist. Hiernach ist also: $W = 1/w \sum P\delta$.

Damit der Unterschied der W^0 - und X -Fläche eine zusammenhängende Fläche bilde, ist es zweckmäßig, diesen beiden Flächen nach einer Seite hin dieselbe Begrenzung zu geben, als welche hier die gebrochene $A_1 C^V B_1$ am passendsten ist, d. h. man bezieht die W^0 -Linie auf die gebrochene Linie $A_1 C^V B_1$ als Nullachse. Aus obiger Bedingung, daß die zur W^0 -Linie gehörige kinematische Durchbiegung bei C gleich $\delta_c = C^V C'$ sein muß, folgt dann: Alle W^0 -Linien, bezogen auf die gebrochene Achse $A_1 C^V B$, müssen durch C' gehen. Desgleichen folgt, wenn man δ_c nebst der ganzen, genauen Biegungsfläche (X -Fläche) von der geraden Nullachse $A_1 B_1$ aus bis nach (C) abträgt: Alle W^0 -Linien, bezogen auf die gerade Achse $A_1 B_1$, müssen durch (C) gehen; diese Bedingung ist für die richtige Bestimmung der Einheitsordinate w nötig. Man nenne, behufs nachfolgender kurzer Darstellung, die W^0 -Linie, bezogen auf die gerade Nullachse $A_1 B_1$, die erste, die andre W^0 -Linie, bezogen auf die gebrochene Nullachse $A_1 C^V B_1$, die zweite W^0 -Linie; entsprechend seien die W^0 -Flächen bezeichnet.

*) Vgl. Land, Schweizer. Bauzeitung 1887, Bd. II S. 157, Zeitschr. d. österreich. Ing. u. Arch. Ver. 1888; kurzer Abriss auch in der Beigabe zum Deutschen Baukalender f. 1894 od. 1895 S. 93.

1) Einflußfläche für den Endstützdruck A , kurz A -Fläche. Man denke bei beseitigter Stütze C den Stützpunkt A gesenkt, bis die Durchbiegung des Trägers bei C gleich δ_0 ist; ziehe daher die Gerade $B_1(C)A'$, so ist $\overline{A_1 B_1(C)A'}$ = erste A^0 -Fläche, $A_1 C^V B_1 C' A'$ = zweite A^0 -Fläche. Dann ist:

$$A\text{-Fläche} \left. \begin{array}{l} \\ \text{(Ordinaten } \delta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{zweite } A^0\text{-Fläche} - X\text{-Fläche (lothrecht schraf-} \\ \text{firt), Einheitsordinate} = \text{Divisor } w = \text{Ver-} \\ \text{schiebung } A_1 A' = a; \end{array} \right.$$

also für lothrechte Lasten: $A = \frac{1}{a} \sum P\delta$.

Da für die angenäherte A -Fläche die Gerade $B_1 C'(A')$ mit Divisor $A_1(A') = (a)$ an Stelle von $B_1 C' A'$ tritt, sind die zur genauen A -Fläche gehörigen δ -Ordinaten gegenüber den angenäherten für das linke Feld AC um die Ordinaten eines Dreiecks $(A')C'A'$ größer, während sie für das rechte Feld CB sich nicht ändern. Hiernach erkennt man: Der genaue Werth A , verglichen mit dem angenäherten, ist größer für Lasten im linken Felde AC (wo Stützdruck A positiv), und um das ε -fache kleiner für solche im rechten Felde CB (wo A negativ); oder mit anderen Worten: Die genaueren A -Werthe sind in algebraisch positivem Sinne größer als die angenäherten A -Werthe.

2) Einflußfläche für das Moment M , oder M -Fläche, für Querschnitt Z im Abstände x von A .

Man denke bei beseitigter Stütze C im Querschnitt Z ein Gelenk eingefügt und den Träger gesenkt, bis eine Durchbiegung δ_0 bei C entsteht; dann ist, ähnlich wie vorher, die zweite M^0 -Fläche = $A_1 C^V B_1 C' Z A_1$, und es wird:

$$M\text{-Fläche} \left. \begin{array}{l} \\ \text{(Ordinaten } \delta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{zw. } M^0\text{-Fläche} - X\text{-Fläche (wagerecht} \\ \text{schraffirt); Divisor } w = \text{Verdrehung} \\ \text{bei } Z, = a/x; \end{array} \right.$$

es ist also allgemein: $M = x/a \sum P\delta$.

Aus dieser Gleichung folgt, daß der Werth M wieder von dem (absoluten) Verhältniß δ/a abhängt, und da für die angenäherte M -Fläche die Gerade $C'(A')$ und die Strecke $(a) = A_1(A')$ anstatt $C'A'$ und a tritt, erkennt man unschwer,

dafs dieses Verhältnifs δ/a bei dem genaueren Verfahren gröfser wird für den Theil der positiven Momentenfläche und kleiner für die negativen Theile derselben; mit anderen Worten: Die genaueren Momente ändern sich, verglichen mit den angenäherten, alle wieder in algebraisch positivem Sinne.

Sonderfall. Die Einflußfläche des Stützenmomentes M_c ergibt sich entsprechend:

M_c -Fläche = $\begin{cases} M_c^0\text{-Fläche} - X\text{-Fläche} = A_1 C^V B_1 C' A_1 - X \\ \text{Fläche; Divisor} = \text{Verdrehung bei } C, = a/l; \end{cases}$
sonach allgemein: $M_c = l/a \Sigma P\delta$.

Die M_c -Fläche besteht links und rechts von C aus negativen Momentenflächen. Da sich hier für den genaueren Werth M_c nur a ändert, während die δ dieselben sind wie bei der angenäherten M_c -Fläche, und da der genauere a -Werth gegen den angenäherten auch in demselben Mafse gröfser ist, wie bei der zuerst ermittelten Ordinate δ_c , also um das ε -fache, so ist der genaue M_c -Werth bei jeder beliebigen Belastung um das ε -fache kleiner als der angenäherte. Hiernach läßt sich für jede beliebige Belastung aus der angenäherten Momentenfläche sofort mit Leichtigkeit die genaue Momentenfläche zeichnen, da beide Momentenlinien (die genaue und angenäherte) als Seillinien aufgefaßt, im linken Felde die linke und im rechten Felde die rechte Auflagerlothrechte zur Polarachse (oder Affinitätsachse) besitzen, wie Abb. 11 zeigt, d. h. die genaue

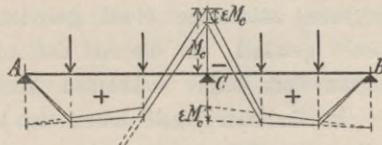


Abb. 11.

M -Fläche ist gleich der angenäherten, im algebraischen Sinne vergrößert um ein Dreieck von der Grundlinie AB und der Höhe εM_c bei C .

3) Einflußfläche für die Schubkraft V , oder V -Fläche, für Querschnitt Z .

Man denke im Querschnitt eine Gleitverbindung eingefügt und gebe der Gleitung bei Z eine solche Gröfse, daß eine

Durchbiegung δ_c bei C entsteht; ist dann $A_1 Z'' // A' C'$, so ist die zweite V^0 -Fläche = $A_1 C^V B_1 C' Z' Z'' A_1$, und es wird:

V -Fläche $\left. \vphantom{\begin{matrix} V \\ \text{Fläche} \end{matrix}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{zw. } V^0\text{-Fläche} - X\text{-Fläche (schräg schraffirt);} \\ \text{(Ordinaten } \delta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Divisor } w = \text{Gleitung } Z' Z'' = A_1 A' = a; \\ \text{also allgemein: } V = 1/a \Sigma P \delta. \end{array} \right.$

Da die V -Fläche auf der Strecke ZCB mit der A -Fläche ganz übereinstimmt, gilt für den Unterschied zwischen der genauen und angenäherten V -Fläche auf diesem Theile ganz dasselbe, was oben für die genaue und angenäherte A -Fläche gesagt ist; für Kräfte auf der Strecke AZ ist der genaue (negative) Werth V , absolut betrachtet, kleiner als der angenäherte, da hierbei $V = A - P$, und das genaue A für diese Strecke grösser als der angenäherte Werth ist, aber kleiner als P .

Vorstehende allgemeine Untersuchung liefert das Ergebniss: Die genauen Endstützendrücke, Biegemomente und Schubkräfte ändern sich, verglichen mit den angenäherten, sämtlich in algebraisch positivem Sinne, d. h. positive Werthe vergrößern sich, negative verkleinern sich, absolut genommen.*)

Schlussbemerkungen. Bezieht man die genaue X -Fläche auf die gerade Nullachse $A_1 B_1$ (z. B. bei deren zeichnerischer Darstellung nach Abschnitt II), so hat man die Ermittlung der zweiten W^0 -Linien nicht nöthig und die Darstellung bleibt genau so, wie sie vom Verfasser in der Beigabe zum Deutschen Baukalender gegeben ist; obige etwas geänderte Darstellung wurde nur deshalb gewählt, um die Art der Abweichungen des genaueren von dem bisher bekannten Verfahren leichter festzustellen. — In ähnlicher Weise lassen sich andere statisch unbestimmte vollwandige Träger untersuchen, worauf hier jedoch nicht weiter eingegangen werde, da der Weg solcher Untersuchungen hiermit gegeben ist.

*) Für die Biegemomente und Schubkräfte folgt dieses Gesetz auch unmittelbar aus der algebraisch positiven Aenderung ΔA des Stützdruckes A , welche entsprechende Aenderungen $\Delta M = \Delta A \cdot x$ und $\Delta V = \Delta A$ bewirkt.

Neue Schwerpunktsbestimmungen von Trapezen und Vierecken, nebst praktischen Anwendungen.

(Erweiterter Sonderdruck aus dem Centralbl. d. Bauverw. 1894.)

I. Neue Schwerpunktsbestimmung von Trapezen.

(Von S. 192 des Centralbl. d. Bauverw.)

Bei der zeichnerischen Lösung von Aufgaben im Gebiete der Ingenieurwissenschaften ist die Schwerpunktsbestimmung von Trapezen eine der am häufigsten auftretenden Zwischenaufgaben. Obgleich die allgemein bekannte zeichnerische Lösung derselben sehr einfach ist, hat sie doch den einen Nachtheil, daß sie neben der Trapezfläche ziemlich viel Raum erfordert. Eine noch einfachere Lösung, welche gleichzeitig diesen Nachtheil vermeidet, sei nachstehend gegeben.

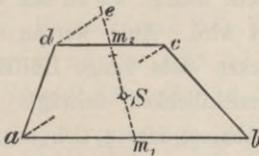


Abb. 1.

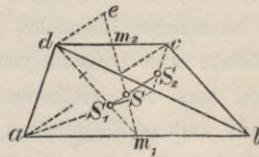


Abb. 2.

Sei $abcd$ das gegebene Trapez, Abb. 1, $m_1 m_2$ die Mittellinie und S der gesuchte Schwerpunkt, so ziehe $de \parallel$ Diagonale ac , so ist $m_1 S = \frac{1}{3} m_1 e$.

Beweis: Sind in Abb. 2 S_1, S_2 die Schwerpunkte der durch Diagonale bd gebildeten Theildreiecke, so finden folgende Beziehungen statt:

- 1) $S_1 S_2 \parallel ac$, da S_1 und S_2 auf den durch a und c gehenden Mittellinien der Theildreiecke liegen.
- 2) S_1 liegt auch auf Mittellinie $m_1 d$, wobei $m_1 S_1 = \frac{1}{3} m_1 d$.
- 3) Schwerpunkt S liegt auf $S_1 S_2$ und auch auf Mittellinie $m_1 m_2$.

Hieraus folgt, da $de \parallel ac$, also auch $\parallel S_1 S$, daß $m_1 S = \frac{1}{3} m_1 e$. — Statt der oben gegebenen Lösung kann man hiernach auch folgende benutzen:

2) Lösung nur innerhalb des Trapezes. Da $Sm_1 = \frac{1}{3}m_1e = \frac{1}{3}(m_1f + 2fm_2)$ u. $m_1f > fm_2$, muß $Sm_1 > fm_2$ sein und zwar setze man:

$Sm_1 = fm_2 + Sg$, wobei $m_1g = fm_2$; hiernach ist:

$Sm_1 = fm_2 + Sg = \frac{1}{3}(m_1f + 2fm_2)$, woraus

$$Sg = \frac{1}{3}(m_1f - fm_2) = \frac{1}{3}fg,$$

d. h. der Trapezschwerpunkt stimmt überein mit dem Schwerpunkte eines Dreiecks, gebildet aus den beiden Diagonalen und derjenigen zu den Parallelseiten gezogenen Parallelen, welche durch einen in Bezug auf die Parallelseiten zu f symmetrisch gelegenen Punkt geht. Daher die Lösung: Mache $m_1g = fm_2$, dann ist $Sg = \frac{1}{3}fg$. (Vgl. den allgemeineren Fall Abb. 12.)

Bemerkung: Bei geringem Unterschiede von ab und cd wird die Strecke fg klein, sodass es dann praktisch vollkommen genügt, die Festlegung von S durch Drittelung von fg nur durch Augenmaß zu bewerkstelligen, wobei das Verfahren also sehr einfach ist.

3) Vermeidung der Drittelung. Mache $fm_2 = m_2e$, ziehe $ei \parallel ab$, so geht ai durch S ; denn da $ei = 2m_1a$, folgt $Se = 2Sm_1$, also $m_1S = \frac{1}{3}m_1e$.

II. Die Mittellinie wird nicht gezeichnet.

4) Bestimmung der den Parallelseiten parallelen Schwerachse. Diese Aufgabe kommt, wie weiter unten noch besonders erwähnt, bei zeichnerischen Untersuchungen vielfach vor. Bestimmt man den Schnitt S' der genannten Schwerachse mit einer Diagonalen, so läßt sich aus jeder der obigen Lösungen 1) und 2) eine entsprechende Lösung für vorliegenden Fall bilden, wenn man jedes angegebene Verfahren anstatt mit der Mittellinie mit einer Diagonalen ausführt. So entsteht z. B. entsprechend Lösung 2): Mache auf Diagonale $ac:ag' = cf$, so ist $g'S' = \frac{1}{3}g'f$. Beweis: Die Diagonale wird durch das Verfahren in demselben Verhältnisse geteilt wie vorher die Mittellinie, und da $m_2e \parallel m_1a$, muß auch $SS' \parallel ab$ sein.

5) Einfachste Schwerpunktsbestimmung. Durch Abb. 2 ist nachgewiesen, daß die Verbindungslinie S_1S_2 der Schwerpunkte der durch eine Diagonale (bd) gebildeten Teil-

dreiecke parallel der andern Diagonale (ac) ist, (vgl. Abb. 4). Die beiderseitigen Verlängerungen von $S_1 S_2$ schneiden daher

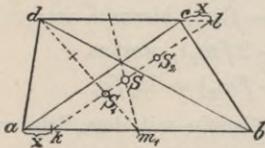


Abb. 4.

auf den Parallelseiten bis zur Diagonale ac die gleichen Strecken $x = ak = cl$ ab, und da $S_1 d = 2 S_1 m_1$, so folgt $dl = 2 m_1 k$, d. h. wenn die große und kleine Parallelseite des Trapezes wie üblich mit a und b bezeichnet wird:

$b + x = 2(a/2 - x) = a - 2x$, woraus $x = 1/3(a - b) = 1/3 u$, wenn $u = a - b =$ Unterschied der Parallelseiten ist. Die im Abstande $x = 1/3 u$ von der Ecke a zur Diagonalen ac gezogene Parallele geht hiernach durch den Schwerpunkt S , und da die Diagonale ac vor der anderen bd nichts voraus hat, so folgt die einfache Beziehung, Abb. 5:

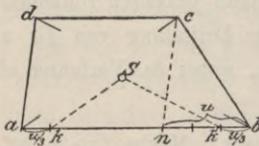


Abb. 5.

Die in dem Abstande $x = 1/3(a - b) = u/3$ von den Ecken

der größeren Grundlinie gezogenen Parallelen zu den Diagonalen schneiden sich im Schwerpunkt S .

Ziehe daher $cn \parallel ad$ und mache $ak = bk' = 1/3 bn = 1/3 u$, so schneiden sich die durch k und k' zu ac und bd gezogenen Parallelen in S . Dies ist das einfachste Verfahren zur Schwerpunktsbestimmung, weil es nicht einmal die Zeichnung der Mittellinie erfordert. (Vgl. die allgemeinere Lösung Abb. 13.)

Bemerkung. Als Grenzfall folgt hiernach für das Dreieck, Abb. 6: Die durch die Drittelpunkte einer Dreiecksseite zu den beiden andern gezogenen Parallelen schneiden sich im Schwerpunkt S , ein Satz, dessen Richtigkeit sofort einzusehen ist.

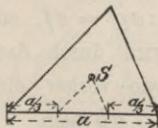


Abb. 6.

6) Anderes Verfahren (Abb. 3). Mache $ag' = fc$, ziehe durch g' die Parallele zu ab und verbinde die auf den Diagonalen liegenden Endpunkte dieser Parallelen mit den anderen Diagonalmitten, so schneiden sich

beide Geraden in S . — Nebenbei bemerkt schneidet die Gerade $g'g$ zwischen den Diagonalen die Strecke $u = a - b$ ab, wie leicht nachweisbar (z. B. durch Ziehen einer Geraden durch g' parallel bd), eine Eigenschaft, welche mit Verfahren 5) und Abb. 5 in Beziehung gesetzt werden kann. (Vgl. Abb. 12 mit zugehörigem Text c.)

Anwendungen der Verfahren auf technische Fälle.

1) Anstossende Trapeze mit gemeinsamer Mittellinie. Dieser Fall kommt bei der zeichnerischen Untersuchung geradlinig begrenzter Stützmauern und den Untersuchungen über Erddruck und Wasserdruck vor, wo die Flächen, welche den Querschnitt, den Erd- oder Wasserdruck angeben, in Trapeze mit gemeinsamer Mittellinie geteilt werden (Abb. 7). Hier wird also die Mittellinie von vornherein gezeichnet und man kann zwei Unterfälle unterscheiden:

a) Die Theiltrapeze haben verschiedene Höhe. Die Zeichnung erhält die geringste Anzahl von Hilfspunkten bei Anwendung des oben zuerst angegebenen Verfahrens, d. h. durch Festlegung der verschiedenen Schnitte e auf der Mittellinie und Drittelung der Strecken $m_1 e$ (vergl. den Stützmauerquerschnitt in Abb. 7 mit Abb. 1). Die Zeichnung enthält dann keine einzige Hilfslinie aufser der Mittellinie.

b) Die Theiltrapeze haben gleiche Höhe, ein Fall, den man meist einrichten kann. Dann ist das hier unter 5) gegebene Verfahren das zweckmäfsigste und kürzeste, da die Seitenunterschiede $u = a - b$ für alle Trapeze gleich sind und die Strecke $\frac{1}{3} u$ deshalb nur einmal bestimmt zu werden braucht; das Verfahren ist dargestellt im rechten Theile von

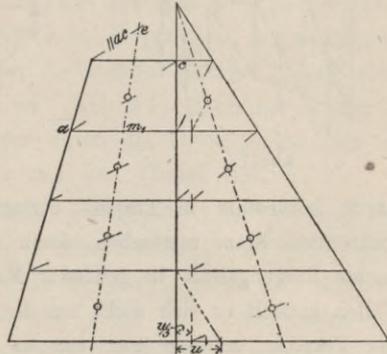


Abb. 7.

Abb. 7, ein Erddruckdreieck vorstellend. Liegt die Spitze des Erddruckdreiecks in der Oberkante der Stützmauer, so liefert die Grundlinie des oberen Theildreiecks sofort die Strecke u , wodurch sich das Verfahren noch abkürzt.

2) Beliebige anstofsende Trapeze. Dieser Fall kommt z. B. vor bei der Untersuchung von Gewölben und der Ermittlung der Biegungslinien vollwandiger Träger. Im ersten Falle (Abb. 8) bilden Gewölbe und Belastung eine gemeinsame Belastungsfläche, welche durch Lothrechte in Flächenstreifen zerlegt wird, die angenähert als Trapeze angesehen werden; im anderen Falle (Abb. 9) wird die (mitunter verzerrte) Momentenfläche

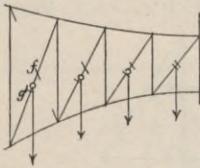


Abb. 8.

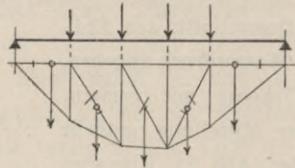


Abb. 9.

durch Lothrechte in Trapeze zerlegt, als Belastungsfläche in lothrechtem Sinne angesehen, deren zugehörige Seillinie die gesuchte Biegungslinie in gewissem Maßstabe ergibt. In beiden Fällen handelt es sich nicht um die wirkliche Schwerpunktslage der Trapeze, sondern nur um die Lage ihrer lothrechten Schwerachse, weshalb hier mit Vortheil die oben angegebene Lösung 4) Verwendung findet. Es wird hierbei für jedes Trapez eine Diagonale gezeichnet, auf derselben werden die beiden Punkte f und g' festgelegt und S' durch Drittelung der Mittelstrecke bestimmt. Die Zeichnung der verschiedenen Mittellinien fällt also ganz fort.

Nachtrag.

Schwerpunktsbestimmung eines beliebigen Vierecks.

Da die Beziehungen unter I. 1) und 2) der ersten Mittheilung für jedes beliebige Viereck gelten, folgt daraus sofort, Abb. 10:

a) Der Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks ist der Schnittpunkt der durch die unteren Drittelpunkte S_1, S_1' der Geraden

m_1c und m_1d gezogenen Parallelen zu den c und d gegenüberliegenden Diagonalen. (S_1' kann hierbei auch durch $S_1 S_1' \parallel dc$ gefunden werden.)

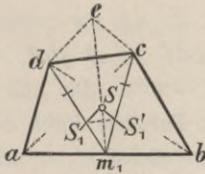


Abb. 10.

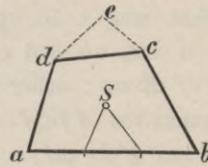


Abb. 11.

b) Zieht man $de \parallel ac$ und $ce \parallel bd$, so folgt aus ähnlichen Beziehungen der Dreiecke $S_1 S_1' S$ und dee , sowie $m_1 S_1 S$ und $m_1 de$ weiter: Der Schwerpunkt ist der untere Drittelpunkt der Strecke $m_1 e$, d. h. S ist der Schwerpunkt des Dreiecks abe . Daher die weitere einfache Lösung ohne Benutzung der Seitenmitte m_1 , Abb. 11: Bestimme Schnitt e , dann ist S der Schnitt der durch die Drittelpunkte von ab gezogenen Parallelen zu ae und be . (Vergl. Abb. 6.)

c) Es ist folgende Beziehung bekannt, Abb. 12: Bestimmt man die auf beiden Diagonalen zu ihrem Schnittpunkte f symmetrisch gelegenen Punkte $c'd'$ (d. h. ist $ac' = cf$, $bd' = df$), dann ist der Schwerpunkt S des Vierecks gleich dem Schwerpunkte des aus den mittleren Diagonalstrecken gebildeten Dreiecks $fc'd'$. Dieser Schwerpunkt kann demnach auf verschiedene Weise gefunden werden, z. B. durch Verbindung von c' und d' mit den Mitten m', m'' der andern Diagonalen, oder durch Drittelung einer dieser Verbindungsgeraden, z. B. $m'c'$, wobei die Bestimmung von d' wegfällt. Aus dieser Beziehung lassen sich nun andere Lösungen wie folgt ableiten.

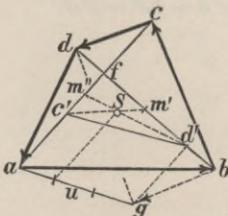


Abb. 12.

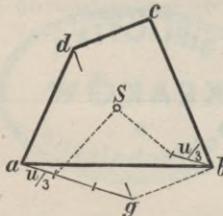


Abb. 13.

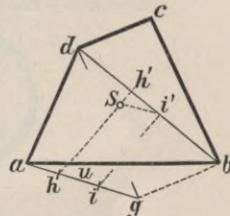


Abb. 14.

d) Giebt man den Seiten des Vierecks Pfeile nach gewissem Umfassungssinne, wie nach Abb. 12 (entsprechend einem geschlossenen Kräftezuge), so ist die Strecke $c'd'$ gleich der geometrischen Summe u (Resultante) der Gegenseiten ab und cd ; denn zieht man z. B. $bg \# cd$, so ist ag die geometrische Summe u von ab und cd , und $\triangle cdf \cong \triangle gbd'$, also ist $gd' \# cf \# ac'$; daher $ag \# c'd' = u^*$. Da nun S der Schwerpunkt von $\triangle fc'd'$, schneidet die Parallele durch S zu ac die Strecken $c'd'$ und $u = ag$ in den nächst c' , a gelegenen Drittpunkten; und da entsprechendes für die von b aus nach Größe und Richtung symmetrisch abgetragene Strecke u gilt, folgt die fernere allgemeine Lösung, Abb. 13:

Trägt man von den Eckpunkten einer Seite (ab) ein Drittheil der geometrischen Summe u zweier Gegenseiten nach Größe und Richtung auf, so schneiden sich die durch deren Endpunkte gezogenen Parallelen zu den Diagonalen im Schwerpunkte S des Vierecks. (Vgl. Abb. 5.)

e) Bei vorstehender Lösung braucht man die Diagonalen des Vierecks selbst nicht zu zeichnen; will man aber das Uebertragen von $u/3$ von einer Ecke des Vierecks nach der andern vermeiden, so muß man eine Diagonale bd zeichnen und erhält die Lösung nach Abb. 14, wobei h, i die Drittpunkte von u sind: Ziehe $hh' \parallel ii' \parallel ac$, so trifft $i'S \parallel ag = u$ die Gerade hh' in S .

Schlussbemerkung. Weitere Lösungen vorstehender Aufgaben im Anschluß an obige erste Mittheilung wurden gegeben von Lewin, P. Tobien, R. Labes, L. Ellerbeck im Centralblatt der Bauverwaltung 1894 S. 280, 312, 460.

*) Anderer Beweis im Sinne geometrischer Summen:

$$u = ab + cd = ab + cf + fd = ab + c'a + bd' = c'd'.$$



S. 61

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw. 32263

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10,000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299731