



III

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298379

xxx  
195





BEITRÄGE  
ZUR  
THEORIE DER COMBINIRTEN  
GITTER- UND HÄNGE-BRÜCKEN.



VON  
HUGO B. BUSCHMANN,  
COMMISSÄRS - ADJUNCT DER K. K. GENERAL - INSPECTION DER OESTERREICHISCHEN  
EISENBAHNEN.

*Zusamm. sub Litt. D. T. Nr. 187.*

WIEN 1873.  
LEHMANN & WENTZEL  
BUCHHANDLUNG FÜR TECHNIK UND KUNST,  
Kärntnerstrasse 40.

xxx  
197  
Gc 58/28

BEITRÄGE

THEORIE DER COMBINIRTEN



1131874



HUGO B. BUSCHMANN

VERLAG VON LEHMANN & WENTZEL

*Handwritten signature*

WIEN 1873.

LEHMANN & WENTZEL

VERLAG FÜR ARCHITECTUR UND KUNST

WOLFGANGSGASSE 40.

Akc. Nr. 5315/50



Bei dem regen Leben, welches auf allen technischen Gebieten herrscht, ist es nicht zu vermeiden, dass an manchen Punkten die Praxis der Theorie voraneilt, und die Weiterentwicklung der letzteren erst durch die faktischen Ausführungen angeregt und beschleunigt wird.

In dieser Lage befindet sich auch die Wissenschaft der Brückenconstructions, welche, so bedeutende Fortschritte sie auch in den letzten Jahren gemacht haben mag, stets vor neuen Systemen steht, deren Ausführung schon mehrfach versucht wird, und deren rationelle Behandlung sie ermöglichen soll.

Ein unabsehbares Feld der Weiterentwicklung hat sich in dieser Beziehung in neuester Zeit durch die Einführung der combinirten Systeme eröffnet, und auch hier sehen wir uns dem eigenthümlichen Umstände gegenüber, dass diese Constructions schon hie und da in Ausführung sind und die Theorie noch wenig mehr als einige allgemeine Gesichtspunkte für deren richtige Anwendung gegeben hat.

Eines der hervorragendsten dieser Systeme bilden die combinirten Gitter- und Hängewerke.

Die Aufgabe des vorliegenden Aufsatzes soll es nun sein, anzuknüpfen an die höchst interessante Abhandlung über dieses specielle System in Ritters „Theorie der Dach- und Brückenconstructions“ und zu versuchen weitere Klarheit darüber zu verbreiten.

Es soll versucht werden die Theorie mit möglichster Schärfe allen Eigenthümlichkeiten dieses Systemes anzupassen und dort, wo ein genaues Eingehen als zu weitführend erschien, mögen

die Theoretiker einige wenige Abweichungen von dem mathematischen Gange nicht zu streng richten, eingedenk, dass in allen Theorien des Brückenbaues vielerlei Annahmen gemacht werden, deren absolute Richtigkeit nicht nachweisbar ist.

Derartige Annahmen müssen eben auf ein solches Mass reducirt werden, dass die möglichen Fehler in den Resultaten innerhalb jener dem Constructeur wohl bekannten Grenzen liegen, welche durch die mangelhafte Kenntniss der Eigenschaften des Baumaterials und durch die Willkürlichkeit in der Bestimmung der grössten zufälligen Belastungen gezogen sind.

Diese vorliegende Arbeit hat ihre Aufgabe gelöst, wenn es ihr gelingt hie und da die gewichtigen Bedenken zu zerstreuen, die bisher gegen die Einführung dieses Systemes für Eisenbahnbrücken eben in Folge des Mangels an theoretischen Entwicklungen bestanden haben.

Für die praktischen Ausführungen dürften die bisher gewonnenen Resultate bereits genügen. Mögen sie den Anstoss zu noch eingehenderen theoretischen Entwicklungen in dieser Sache geben.

## I. Die Tragkette.

Ehe an die Combination einer Kette mit einem Gitterträger geschritten werden kann, müssen die hiezu nöthigen Formeln aus den Theorien jedes einzelnen dieser Systeme angeführt werden.

### 1. Entwicklung der statistischen Verhältnisse der parabolischen Kettenlinie.

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

- A. wenn beide Aufhängepunkte in gleicher Höhe sind, Fig. 1;
- B. wenn dieselben in verschiedener Höhe liegen, welcher Fall bei Endfeldern von Kettenbrücken eintritt, wenn keine Spannkette vorhanden sind, Fig. 2.

Es soll bei der Entwicklung der Theorien nur der erste Fall im Auge behalten werden und zum Schlusse (Abschnitt IV.) eine Betrachtung folgen, ob und in wie weit die zweite Anordnung die gewonnenen Resultate alterirt.



Für den genannten ersten Fall, Fig. 3, bezeichne

$l$  die Spannweite,

$h$  die Pfeilhöhe,

$SS'$  die Spannungen der Kette,

$H$  die constante Horizontalkraft,

$PP'$  die Verticalcomponenten der Kettenspannung,

$L$  die Kettenlänge,

$\alpha, \varphi$  die Winkel der Tangente an die Curve mit der Horizontalen,

$p$  die Belastung pro Längeneinheit.

Es gelten nach den bekannten Theorien der Kettenbrücken für gleich vertheilte Belastung folgende Gleichungen:

$$x^2 = \frac{l^2}{4h} y \quad \dots \quad (1 \text{ Gleichung der Curve.})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8hx}{l^2} \quad \dots \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{4h}{l} \text{ für } x = \frac{l}{2} \\ \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} \alpha \frac{2x}{l} = \frac{8hx}{l^2} \end{aligned} \right\} \dots \quad (3 \text{ Tangenten an die Curve.})$$

$$L = l + \frac{8}{3} \frac{h^2}{l} - \frac{1}{40} \frac{(4h)^4}{l^3} \quad \dots \quad (4 \text{ Länge der Curve.})$$

$L$  für die meisten Fälle mit genügender Sicherheit

$$= l + \frac{8}{3} \frac{h^2}{l} \quad \dots \quad (4')$$

$$P = \frac{1}{2} p_1 l = H \operatorname{tg} \alpha \quad \dots \quad (5)$$

$$H = \frac{p_1 l^2}{8h} \quad \dots \quad (6)$$

$$S = H \sqrt{1 + \frac{16h^2}{l^2}} \quad \dots \quad (7 \text{ Spannung am Aufhängepunkt.})$$

$$S' = H \sqrt{1 + \frac{64h^2 x^2}{l^4}} \quad \dots \quad (8) \text{ Für ein bestimmtes } x.$$

Die Summe der Spannungen in allen Elementen der Kette

$$\Sigma (S) = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} H \frac{ds^2}{dx} = \frac{pl}{24h} [3l^2 + 16h^2] \quad \dots \quad (9)$$

2. Durchbiegung der Kette bei einer bestimmten Verlängerung oder bestimmten Belastung.

Die Kettenlänge ist nach Gleichung (4'

$$L = l + \frac{8}{3} \frac{h^2}{l}$$

Bei einer eintretenden Längenveränderung  $= \pm \Delta L$  wird

$$L \pm \Delta L = l \left[ 1 \pm \frac{8}{3} \frac{h_1^2}{l} \right]$$

Aus der Combination dieser beiden Gleichungen erhaltet man unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von  $\frac{h}{l}$

$$h_1 = h \sqrt{1 \pm \left( \frac{3}{8} \frac{l^2}{h^2} + 1 \right) \Delta} = h \left( 1 \pm \frac{\Delta}{2} \left[ \frac{3}{8} \frac{l^2}{h^2} + 1 \right] \right)$$

$$h_1 - h = \pm \frac{3}{16} \frac{l^2 h}{h^2} \Delta$$

$$\text{Das ist die Durchbringung } s_1 = \pm \frac{3}{16} \frac{l^2}{h} \Delta \dots \dots (10)$$

Es wird nun vorausgesetzt, dass die Kette vollkommen theoretisch richtig construiert wäre, das heisst, dass ihre Beanspruchung an allen Stellen dieselbe sei.

- Es bezeichne  $E$  den Elastizitäts-Coefficienten,
- $F$  den Kettenquerschnitt am Scheitel,
- $k_1$  eine gleichförmig vertheilte Last,
- $s_1$  die Durchbiegung am Scheitel,
- $s_2$  die Durchbiegung im Abstände  $x$  vom Scheitel.

Es ergeben sich sodann für die Belastung  $k_1$  die Horizontalkraft  $H = \frac{k_1 l^2}{8 h}$

$$\text{Die Verlängerung } \Delta L = \frac{H L}{F E} = \frac{k_1 l^2 L}{8 F E h}$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (10 so erhaltet man

$$s_1 = \frac{3}{128} \frac{k_1 l^4}{F E h^2} \dots \dots \dots (11)$$



Die Scheitelgleichung der neuen Curve wird darnach

$$y'' = \frac{4 x_1^2 \left[ h + \frac{3}{128} \frac{k_1 l^4}{F E h^2} \right]}{l^2}$$

und die Durchbiegung für ein bestimmtes  $x$

$$s^2 = y + s_1 - y'' = \frac{3}{128} \frac{k_1 l^2}{F E h^2} (l^2 - 4 x_1^2)$$

verrückt man den Coordinatenursprung zum Trägeranfang, wo-

durch  $x_1 = \frac{l}{2} - x$  Fig. 4 so erhaltet man

$$s_2 = - \frac{3}{32} \frac{k_1 l^2}{F E h^2} x (l - x) \quad . . . . (12)$$

### 3. Günstigstes Verhältniss zwischen den Hauptdimensionen der Tragkette.

Ehe die Betrachtung über die Tragkette geschlossen werden kann, ist noch einiges über die Wahl der Grösse  $\frac{h}{l}$  zu erwähnen.

Dieselbe soll derart erfolgen, dass bei gegebener Belastung die zur Tragfähigkeit nothwendige Materialmenge ein Minimum wird.

Abstrahirt man von den Tragstangen, so ist die Materialmenge proportional der in Gleichung (9) ausgedrückten Summe der Kettenspannungen.

Setzt man den ersten Differential-Quotienten dieser Gleichung = 0, so erhaltet man den Minimalwerth bei  $\frac{h}{l} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

In der Praxis gäbe diese Gleichung zu grosse Werthe, weil die Kosten der Pfeilerherstellung und die grössere Angriffsfläche für Winddruck in Betracht kommt.

Man ging bisher gewöhnlich von  $\frac{h}{l} = \frac{1}{12}$  bis  $\frac{1}{18}$ . Es erscheint jedoch für combinirte Systeme dieser Werth zu klein, weil demselben eine zu grosse Materialmenge und zu starke Senkungen entsprechen. Als günstige Annahme sind zu bezeichnen

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}$$

## II. Der Tragbalken.

Die Betrachtung über den Tragbalken soll sich nur auf Einzelträger erstrecken, indem continuirliche Träger an und für sich zur Combination mit einer Kette untauglich sind, weil bei diesen beiden Tragwerken die grössten Durchbiegungen im allgemeinen nicht an denselben Stellen erfolgen.

Es bezeichne  $k_2$  die Belastung pro Längeneinheit,

$W$  das Trägheitsmoment des Balkens in der Mitte,

$W'$  das Trägheitsmoment an einer beliebigen Stelle,

$E$  den Elastizitäts-Coefficienten,

$d_1$  die Durchbiegung in der Mitte,

$d_2$  die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle,

$h$  die Balkenhöhe.

Die allgemeine Gleichung der elastischen Linie lautet:

$\frac{d^2y}{dx^2} E W = \Sigma (xy)$  wobei  $\Sigma (xy)$  das Angriffsmoment im Abstände  $x$  bedeutet.

Es werden hier die beiden extremen Fälle in Betracht gezogen werden, zwischen denen alle Tragbalken-Constructions liegen und zwar:

### 1. Ein Balken mit constantem Querschnitte.

Das Angriffsmoment bei gleichförmiger Belastung an irgend einer Stelle ist  $M_1 = \frac{k_2 x}{2} (l - x)$

Das Angriffsmoment in der Mitte =  $\frac{1}{8} k_2 l^2$

Die Gleichung der elastischen Linie ergibt sich durch Substitution des ersteren Werthes und zweimalige Integration bei constantem  $W$  in der bekannten Weise

$$E W d_2 = \frac{k_2}{24} (2l x^3 - l^3 x - x^4) \dots \dots (13)$$

und die Durchbiegung in der Mitte

$$d_1 = - \frac{5}{384} \frac{k_2 l^4}{E W} \dots \dots \dots (14)$$



2. Ein theoretisch vollkommen richtig construirter Balken, das heisst ein Balken, dessen Spannung in den äussersten Fasern auf der ganzen Länge bei gleichförmig vertheilter Last constant ist.

Damit diese Bedingung erfüllt werde, muss die Proportion bestehen

$$W : W' = \frac{1}{8} k_2 l^2 : \frac{k_2 x}{2} (l - x)$$

$$\text{oder } W = \frac{4 x (l - x)}{l^2} W \dots \dots (15)$$

durch Substitution dieses Werthes in die Gleichung der elastischen Linie wird aus  $E W' \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k_2 x}{2} (l - x)$  der zweite Differentialquotient  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k_2 l^2}{8 E W}$

Die zweimalige Integration dieses Ausdruckes ergibt in sehr einfacher Weise

$$d_2 = y = - \frac{k_2 l^2}{16 E W} x (l - x) \dots \dots (16)$$

und die Durchbiegung in der Mitte

$$d_2' = - \frac{k_2 l^4}{64 E W} \dots \dots \dots (16')$$

### III. Combination beider Systeme.

Wenn eine Kette mit einem Träger combinirt wird, so ist vor allen vorauszusetzen, dass die Verbindung beider Systeme eine derartige sein muss, dass die gegenseitige Lage derselben sich nicht verändern kann.

Wenn nun äussere Kräfte eine Senkung oder Hebung des einen Systemes zu bewirken suchen, so sind sie genöthigt, auch dem anderen Systeme eine gleiche Formveränderung zu geben.

Diese letztere erfordert einen gewissen Theil der äusseren Kräfte, welcher in seiner Wirkung für das erste System verloren geht, und theilen sich somit jene in 2 Theile derart, dass sie in beiden Systemen gleiche Einsenkungen oder Hebungen hervorrufen.

- Solche äussere Kräfte sind für ein Brückenfeld:
1. Die Belastung des Feldes selbst;
  2. Kräfte, welche durch den Einfluss der Nachbarfelder entstehen und welche zunächst die Kette verlängern und verkürzen;
  3. der Einfluss der Temperaturveränderung.

Die Wirkungen aller dieser Kräfte sollen getrennt von einander besprochen werden.

1. Einfluss der Belastung im Felde selbst.

Es werde vorerst angenommen, dass die Last  $ql$  über die ganze Länge der Brücke gleichmässig vertheilt sei, und hievon auf die Längeneinheit der Horizontalprojection der Kette  $k_1$  und auf die Längeneinheit des Trägers  $k_2$  entfalle, das heisst  $q = k_1 + k_2$ . Die Aufgabe reducirt sich sodann auf die Bestimmung der Grösse  $\frac{k_1}{k_2} = n$ , des sogenannten Lastvertheilungs-Coefficienten.

Wir werden auch hier vorerst die bei der Abhandlung über den Tragbalken gemachte Unterscheidung beibehalten und die Kette verbinden.

- a) Mit einem Balken von constantem Querschnitte.
- b) Mit einem Balken, der vollkommen theoretisch construirt ist.

Für den ersten dieser beiden Fälle erhaltet man nach den bekannten Gleichungen die Durchbiegungen an einer beliebigen Stelle.

$$s_2 = - \frac{3}{32} \frac{k_1 l^2}{F E h^2} x (l - x) \quad \dots \quad (12)$$

$$d_2 = - \frac{k_2}{24} (x^4 - 2 l x^3 + l^3 x) \frac{1}{E W} \quad \dots \quad (13)$$

und hieraus durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke den Coefficienten

$$n_1 = \frac{k_1}{k_2} = \frac{4}{9} \frac{F h^2}{W l^2} (l^2 + l x - x^2)$$

Dieser Coefficient gibt für jedes  $x$  einen andern Werth und zwar für  $x = 0 \dots$  am Auflager  $n_1' = \frac{4}{9} \frac{F h^2}{W}$  für  $x = \frac{l}{2} \dots$



in der Mitte  $n_1'' = \frac{5}{9} \frac{Fh^2}{W}$ . Um einen mittleren Werth zu erhalten

integriert man den Ausdruck  $n_1 dx$  von  $x = 0$  bis  $x = \frac{l}{2}$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} n_1 dx = \frac{7}{27} \frac{Fh^2}{W} l$$

Dividirt man nun dieses Integrale durch  $\frac{l}{2}$  so erhaltet man

$$\text{den mittleren Werth } n_1''' = \frac{14}{27} \frac{Fh^2}{W} \dots \dots \dots (17^*)$$

Für den zweiten der oben besprochenen Fälle erhaltet man die Durchbiegung

$$s_2 = - \frac{3}{32} \frac{k_1 l^2}{FEh^2} x(l-x) \dots \dots \dots (12)$$

$$d_2 = - \frac{k_2 l^2}{16EW} x(l-x) \dots \dots \dots (16)$$

\*) Dieser Werth kann offenbar nur als ein Näherungswerth betrachtet werden. Da in diesem Punkte eine absolute Genauigkeit kaum zu erreichen sein dürfte, so soll doch wenigstens die Genauigkeit dieser Näherung geprüft werden, indem man auf einen ganz anderen als den obigen Weg zu einem Näherungsergebnisse zu gelangen sucht.

Offenbar müssen die Flächen, welche der Träger und die, welche die Kette bei ihrer Durchbiegung durchlaufen, gleiche Grösse haben, da die Durchbiegungen selbst an jeder Stelle gleich sind.

Man erhaltet diese Flächen durch Integration aus den Gleichungen (12 und 13 und zwar :

$$\int_0^l s_2 dx = - \frac{3}{32} \frac{k_1 l^2}{FEh^2} \left[ \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^l = \frac{k_1 l^5}{64 FEh^2}$$

$$\int_0^l d_2 dx = - \frac{k_2}{24EW} \left[ \frac{x^5}{5} - \frac{2lx^4}{4} + \frac{l^3 x^2}{2} \right]_0^l = \frac{k_2 l^5}{120 EW}$$

Durch Gleichsetzung dieser Ausdrücke erhaltet man den Lastvertheilungs-Coefficienten  $n_1''' = \frac{8}{15} \frac{Fh^2}{W} = \frac{14.4}{27} \frac{Fh^2}{W}$

Die Abweichung zwischen diesen beiden Werthen von  $n_1'''$  ist so unbedeutend, dass sie für die Anwendung, welche der erstere derselben in der Folge finden wird, als verschwindend klein bezeichnet werden muss.

Die Vergleichung der Resultate, wie sie der zweite Werth ergeben würde, mit den ersteren, wird hier nicht durchgeführt werden, um nicht den Leser zu sehr zu ermüden; dieselbe lehrt jedoch, dass die Differenz in den Endresultaten eine vollkommen zu vernachlässigende Grösse ist

Durch Gleichsetzung dieser beiden Ausdrücke erhaltet man,

$$n_2 = \frac{6}{9} \frac{Fh^2}{W} \dots \dots \dots (17')$$

welcher Ausdruck für alle  $x$  constant ist.

Ein Vergleich sämmtlicher bisher gewonnener Werthe für den Lastvertheilungs-Coefficienten lehrt, dass derselbe in allen praktischen Fällen zwischen  $\frac{4}{9} \frac{Fh^2}{W}$  und  $\frac{6}{9} \frac{Fh^2}{W}$  variirt, und zwar ergibt der erstere dieser Werthe den grössten Lastantheil für den Träger, der letztere den grössten Lastantheil für die Kette.

Schlimm stünde es um die Theorie dieser combinirten Systeme, wenn es unmöglich wäre genaueres für den einzelnen Fall zu ermitteln als diese beiden äussersten Grenzen, denn es bliebe dem gewissenhaften Constructeur, der sich nicht ganz willkürlichen Annahmen oder einer grenzenlosen Materialverschwendung hingeben wollte, nichts anderes übrig, als den Tragbalken mit constantem Querschnitte durchzuführen. Es soll nun versucht werden, für einen Tragbalken mit variirenden Querschnitte einen präciseren Werth für den Lastvertheilungs-Coefficienten zu ermitteln.

Es seien in Figur 5 die Ordinaten der parabolischen Linien  $ACB$  die Trägheitsmomente des Tragbalkens, falls derselbe vollkommen theoretisch construirt wäre.

Die Abweichungen von dieser Anordnung entstehen dadurch, dass es unthunlich ist die Querschnitte im Balken stetig abnehmen zu lassen, und das Uebergehen des Trägheitsmomentes in  $O$  am Auflager durch die Nothwendigkeit einer soliden Lagerung des Trägers verhindert wird. Hiedurch entstehen in allen praktischen Constructionen gewisse ausserhalb der oberwähnten Parabel liegende Stufen.

Diese Stufen wären nun bei einem combinirten Systeme so anzuordnen, dass sich dieselben einer zweiten Parabel  $aCb$  möglichst nahe anschliessen und die dunkelstraffirten Flächen zu beiden Seiten der letzteren sich nahezu ausgleichen, eine Forderung, die jederzeit erfüllt werden kann.

Es kann, wenn obige Bedingung erfüllt ist, keinem ernstlichen Anstand unterliegen bei der Bestimmung der Lastverthei-



lung diese neue Parabel  $aCb$  als die Umhüllungslinie für die Trägheitsmomente zu betrachten, und setzt sich dann der Träger aus zwei Theilen zusammen, von denen der erste ein constantes Trägheitsmoment, also constante Gurtquerschnitte hat, indess der zweite Theil als ein vollkommen theoretisch construirter Balken zu betrachten ist.

Ist das totale Trägheitsmoment in der Mitte  $W$ , so sei der constant durchlaufende Theil desselben  $Aa = Bb = mW$  und der Rest  $= (1-m)W$ , wobei  $m$  ein echter Bruch ist. Wollte man die Gleichung der elastischen Linie für die Combination dieser beiden Trägertheile ermitteln, so käme man auf für die weitere Rechnung viel zu complicirte Resultate. Zum Glücke ist jedoch der Lastvertheilungs-Coefficient für die Verbindung dieses combinirten Trägers und einer Kette ungemein leicht selbstständig zu entwickeln. Theilt man die Kette entsprechend dem Träger ebenfalls in zwei Theile, so erhaltet man folgendes:

- 1 Kettentheil: Fläche  $= F_1$  Lastantheil  $u_1$
- 2 Kettentheil: Fläche  $= F_2$  Lastantheil  $u_2$
- 1 Trägertheil: Trägheitsmoment  $mW$  Lastantheil  $v_1$
- 2 Trägertheil: Trägheitsmoment  $(1-m)W$  Lastantheil  $v_2$

Es ergeben sich folgende Relationen:

$$u_1 : u_2 = F_1 : F_2, \quad F_1 + F_2 = F$$

$$\frac{u_1}{v_1} = \frac{14 F_1 h^2}{27 m W}, \quad \frac{u_2}{v_2} = \frac{6 F_2 h^2}{9 (1-m) W}$$

hieraus  $u_2 = \frac{14 F_2 h^2}{27 m W} v_1 = \frac{6 F_2 h^2}{9 (1-m) W} v_2$

und  $v_1 = \frac{9 m}{7 (1-m)} v_2$

Der Lastvertheilungs-Coefficient wird

$$N = \frac{u_1 + u_2}{v_1 + v_2} = \frac{u_1 \left[ 1 + \frac{F_2}{F_1} \right]}{v_1 \left[ \frac{7 (1-m)}{9 m} + 1 \right]} = \frac{14 F_1 h^2}{27 m W} \frac{(F_1 + F_2)}{F_1 \left( \frac{7 (1-m)}{9 m} + 1 \right)}$$

oder  $N = \frac{14 F h^2}{(21 + 6 m) W} \dots \dots \dots (18)$

(nebenbei bemerkt, gelangt man zum selben Resultate, wenn man

oben  $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$  also die beiden Lastvertheilungs - Coefficienten gleich setzen würde). Vergleicht man den Werth  $N$  mit dem Werthe  $n_2$  aus Gleichung 17', so findet man, dass letzterer Werth immer zu gross ist, also einen zu grossen Lastantheil für die Kette und einen zu geringen für den Träger gibt.

Nichtsdestoweniger soll der leichteren weiteren Rechnung wegen die Lastvertheilung beibehalten werden, wie sie bei Einführung des theoretisch richtigen Trägers erhalten wurde, und sollen die in die Rechnung einzuführenden Beanspruchungen für Kette und Träger nur so modificirt werden, dass beide bei der Lastvertheilung mit dem Coefficienten  $N$  die zulässigen Inanspruchnahmen erhalten.

Bezeichnet  $A_1$  die einzuführende Beanspruchung der Kette,  
 $A_1'$  die zulässige Beanspruchung der Kette,  
 $A_2$  die einzuführende Beanspruchung des Trägers,  
 $A_2'$  die zulässige Beanspruchung des Trägers.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Aus (17' folgt die Kettenbelastung } k_1 = \frac{nq}{1+n} \\ \text{,, (18 ,, ,, ,, } k_1' = \frac{Nq}{1+N} \\ \text{,, (17 ,, ,, Trägerbelastung } k_2 = \frac{q}{1+n} \\ \text{,, (18 ,, ,, ,, } k_2' = \frac{q}{1+N} \end{array} \right\} \dots \dots (19$$

Um die oben angeführte Bedingung zu erfüllen muss sich verhalten

$$A_2 : A_2' = k_2 : k_2', \quad A_1 : A_1' = k_1 : k_1'$$

Durch Substitution und Reduction erhaltet man die einzuführenden Beanspruchungen

$$A_1 = A_1' \times \frac{7(1+n) + 2m}{7(1+n)} \dots \dots (20$$

$$A_2 = A_2' \times \frac{7(1+n) + 2m}{(7+2m)(1+n)} \dots \dots (21$$

Um das bereits gesagte schliesslich zu recapituliren, soll also in der ganzen weiteren Rechnung die Lastvertheilung nach Gleichung (17' also für einen theoretisch richtigen Träger voraus-



gesetzt werden, und ist durch Einführung der Beanspruchungen nach Gleichungen (20 und (21 der Abweichung in der Trägerconstruction von dieser Annahme vollkommen Rechnung getragen.

Die bisher entwickelten Relationen sind offenbar giltig für die Vertheilung des Eigengewichtes.

Was die Vertheilung der zufälligen Last anbelangt, ist vor allen zu constatiren, ob die Maximal-Beanspruchung des Gitterbalkens bei totaler Belastung eintritt, da die Lastvertheilung immer für jenen Belastungsfall vorgenommen werden muss, wo eines der beiden Systeme am ungünstigsten beansprucht wird.

Dem Verfahren, welches Ritter zur Lösung dieser Frage einschlägt, folgend, soll die Wirkung zweier Einzellasten, welche gleich weit von der Mitte abstehen, auf das Moment in der Mitte untersucht werden.

Ritter setzt in ganz willkürlicher Weise diesen beiden Einzelkräften einen über die ganze Trägerlänge gleich vertheilten Kettenwiderstand entgegen, und kommt hiedurch zu dem Resultate, dass Lasten, welche von zwei Nullpunkten gegen die Enden liegen, in der Mitte ein negatives Moment hervorrufen. Verfolgt man die Consequenzen einer solchen Beanspruchung in dem combinirten Systeme, so muss der Balken bei einer derartigen Belastung innerhalb eines gewissen Stückes  $a-b$  Fig. 6 nach aufwärts gekrümmt sein und, da vorausgesetzt wird, dass die Tragstangen ihre Länge beibehalten, müsste das entsprechende Kettenstück eine geringere Krümmung als früher haben, also durch die Belastung verkürzt worden sein, was doch nicht denkbar ist.

Diese Betrachtung gilt offenbar allgemein, ob das fragliche Stück  $a-b$  in der Mitte oder gegen die Enden liegt.

Hält man an diesem Schlusse fest, so dürfte ein Eingehen in die äusserst complicirten Theorien der Lastvertheilung bei Einzellasten unnöthig erscheinen, da a priori schon behauptet werden kann, dass alle Lasten, wo immer sie auf der Brückenbahn liegen, jedes Stück des Tragbalkens im positiven Sinne biegen, und desshalb die Lastvertheilung für die Totalbelastung vorgenommen werden muss.

Demzufolge gelten die obigen Gleichungen (19 auch für die Vertheilung der zufälligen Last.



## 2. Einfluss der Nachbarfelder.

Jedes belastete Feld hat das Bestreben die Kette in allen übrigen Feldern zu spannen, woferne dieselbe über den Pfeilern beweglich ist und Elemente derselben zu sich herüberzuziehen. Die Kettenlänge in einem belasteten Felde wird daher am grössten, wenn alle übrigen Felder unbelastet sind. Im entgegengesetzten Falle ist die Kette am kürzesten.

An jedem Pfeiler herrscht Gleichgewicht, wenn die Differenz der beiden Grössen  $H$  und  $H'$ , Fig. 7, gleich dem Reibungswiderstande sind.

Es bezeichne  $g$  das Eigengewicht,

$k_1$  die zufällige Last,

$D_1 D_2 \dots$  die Reibung an den Pfeilern, welche Functionen der Aufdrücke  $P$  und  $P_1$  sind,

$s_2$  die Senkung am Scheitelpunkte durch die Belastung,

$s_3$  die Senkung an einer beliebigen Stelle durch den Einfluss der übrigen Felder,

$s_3'$  die Senkung in der Mitte durch den Einfluss der übrigen Felder.

Wenn ein Feld belastet und das Nachbarfeld unbelastet ist, so wird

$$H = H' + D$$

durch Substitution aus Gleichung (6)

$$\frac{(g + k_1) l^2}{8 (h + s_1 + s_3')} = \frac{g l_1^2}{8 (h_1 - s_3')} + D_1$$

Daraus erhaltet man die Grösse  $s_3'$  unter Vernachlässigung der zweiten Potenz derselben

$$s_3' = \frac{(g + k_1) l^2 h_1 - (h + s_1) g l_1^2 - 8 D (h + s_1) h_1}{g l_1^2 + (g + k_1) l^2 - 8 D (h + s_1)} \quad (22)$$

Die Verbindung der Gleichungen 11) und 12) gibt

$$s_3 = \frac{4 s_3'}{l^2} x (l - x) \quad \dots \quad (23)$$

Es bezeichne in Fig. 8  $C C'$  diese Durchbiegung  $s_3$ . Wenn die Kette ihre neue Lage  $A C' B$  einzunehmen sucht, ist sie genöthigt den Träger mitzunehmen und würde derselbe keinen



Widerstand leisten, so käme er in die Lage  $ac'b$  wobei  $cc' = CC$ . Der Widerstand des Trägers bewirkt nun, dass sich Kette und Träger nur bis  $D$  und  $d$  durchbiegen, wobei  $cd = CD$  ist.

Die Zugstangen übertragen hiebei von einem Systeme auf das andere einen Druck, der pro Längeneinheit mit  $k_3$  bezeichnet werden soll. Dieser Druck nach aufwärts gerichtet, vermindert die Durchbiegung der Kette um das Stück  $C'D$ , und nach abwärts gerichtet erzeugt er die Durchbiegung des Balkens  $cd$ . Es ist nun  $CC = s_3 = C'D + cd$ , oder wenn man die Werthe aus den Gleichungen (12, (16 und (23 substituirt

$$\frac{4s_3'}{l^2} x(l-x) = \frac{3}{32} \frac{k_3 l^2}{FEh^2} x(l-x) + \frac{k_3 l^2}{16EW} x(l-x)$$

woraus die Grösse  $k_3$  constant für jedes  $x$  erhalten wird.

$$k_3 = \frac{E}{l^4} \cdot \frac{128 Fh^2 W}{3W + 2Fh^2} \cdot s_3' \dots \dots \dots (24)$$

Diese Gleichung gibt die Mehrlast, welche der Träger zu tragen erhält, wenn ein Nachbarfeld entlastet wird und die freie Bewegung der Kette über den Pfeiler ermöglicht ist.

Die stärkste Beanspruchung der Kette tritt nach obigem ein, wenn alle Felder gleichmässig belastet sind, da die Entlastung eines Nachbarfeldes einen Druck der Hängstangen auf die Kette hervorrufen.

In diesem Falle ist keinerlei Bewegung der Kette nöthig und müssen deren Querschnitte dieser Belastungsweise entsprechen.

Entlastet man die Nachbarfelder, so tritt das Maximum der Beanspruchung des Trägers ein, indem durch die Verlängerung der Kette der Träger genöthigt wird mehr Last auf sich zu nehmen.

Die freie Beweglichkeit bewirkt also nur, dass das Maximum der Belastung für den Träger vermehrt wird, ohne jenes für die Kette zu verringern. Es dürfte desshalb angezeigt sein, diese Bewegung durch eine Verankerung am Pfeiler zu hindern.

Freilich muss der Pfeiler dann so stark construiert sein, dass er den Schub  $H-H'$  an seinem oberen Ende aushalten kann.

Es soll in Folge dieses eben besprochenen Verhältnisses auf die Einwirkung eines zweiten und dritten Nachbarfeldes hier nicht eingegangen werden, um so mehr, als dieselbe ganz analog jener des ersten Nachbarfeldes erfolgen würde.



### 3. Einfluss der Temperatur.

Die unmittelbare Wirkung der Temperaturs-Veränderung ist eine Verlängerung oder Verkürzung der Kette, und in Folge dessen eine grössere oder geringere Durchbiegung derselben.

Es bezeichne  $\alpha$  den Ausdehnungs-Coefficienten,

$t$  die höchste oder niederste Temperatur,

$t'$  die Montirungs-Temperatur,

$\Delta$  das Verlängerungs-Verhältniss,

$s_4$  die Einbiegung an einer beliebigen Stelle,

$s_4'$  die Einbiegung in der Mitte.

Nach Gleichung (10) wird die Durchbiegung  $s_4' = \pm \frac{3}{16} \frac{l^2}{h} \Delta$

und  $s_4 = \frac{4s_4'}{l^2} x(l-x) = \pm \frac{3}{4} \frac{1}{h} x(l-x) \Delta$

Diese Durchbiegung der Kette ruft ebenso, wie die im vorigen Abschnitte erwähnte, äussere Kräfte hervor, welche beide Systeme in Anspruch nehmen. Man erhält analog mit der dortigen Entwicklung

$$s_4 = \pm \frac{3}{4} \frac{1}{h} x(l-x) \Delta = \frac{3}{32} \frac{k_4 l^2}{F E h^2} x(l-x) + \frac{k_4 l^2}{16 E W} x(l-x)$$

woraus die Grösse  $k_4$  constant für jeden Werth von  $x$  erhalten wird.

$$k_4 = \pm \frac{24 E W F h}{l^2 [3 W + 2 F h^2]} \Delta \dots \dots (25)$$

oder hierin für  $\Delta$  seinen Werth  $= \alpha(t-t')$  eingesetzt.

$$k_4 = \pm \frac{24 E W F h}{l^2 [3 W + 2 F h^2]} \alpha(t-t') \dots \dots (25')$$

ist  $t > t'$  so ist dieser Ausdruck positiv und tritt dann  $k_4$  in den Zugstangen als Druck auf, das heisst es belastet den Träger und entlastet die Kette, ist  $t < t'$  so findet das umgekehrte Verhältniss statt.

Es folgt hieraus unmittelbar, dass jede Temperatur-Erhöhung den Träger belastet und das Maximum der Träger-Beanspruchung eintritt, sobald  $t-t'$  seinen grössten positiven Werth annimmt, also bei der höchsten Temperatur. In gleicher Weise tritt das Maximum der Beanspruchung in der Kette bei der niedersten vorkommenden Temperatur ein.



Ehe die Betrachtung über die Temperaturs-Einwirkung geschlossen werden kann, muss das Augenmerk noch auf die Pfeiler gelenkt werden, und auf die Einwirkung, welche sie im Vereine mit einer Längenveränderung in den Hängestangen auf die Construction ausüben.

Es ist nämlich offenbar, dass, wenn die Hängestangen durch eine Veränderung in der Temperatur ihre Länge ändern und die Kette beiderseits auf gemauerten Pfeilern ruht, hiedurch an den äussersten Hängestangen die parabolische Kettenform plötzlich geändert wird, wesshalb es unter allen Umständen vorzuziehen ist, die Kette auf eisernen Pfeilern ruhen zu lassen.

In diesem letzteren Falle wirkt die Ausdehnung der Hängestangen und Pfeiler der Ausdehnung der Kette und ihrer Einwirkung auf beide Systeme entgegen.

Es bezeichne in Fig. 9  $adb$  jene Lage, welche die Kette  $acb$  annehmen würde, wenn sich die Temperatur erhöht, und auf die Längenveränderung in Pfeilern und Hängestangen keine Rücksicht genommen würde.

Heben sich nun durch die Ausdehnung die Punkte  $a$  und  $b$  um das Stück  $\alpha$ , so käme die Kette in die zu  $adb$  parallele Lage  $ADB$  und der Träger erhält statt der Temperaturs-Belastung die einer Senkung des Kettenscheitels  $= cd$  entspricht, nur jene, welche durch die Senkung  $cD$  hervorgerufen wird.

Hieraus ist unmittelbar zu entnehmen, dass die Ausdehnung an den eisernen Pfeilern der Temperaturs-Belastung entgegenwirkt und dieselbe vermindert; da jedoch diese Wirkung nicht sehr bedeutend ist, so soll dieselbe bei der weiteren Berechnung vernachlässigt werden, wodurch höchstens die Resultate etwas ungünstiger als die thatsächlichen Verhältnisse ausfallen werden.

Zum Schlusse muss noch erwähnt werden, dass es durchaus ungenügend ist, als obere Temperaturs-Grenze jenen Wärmegrad anzunehmen, den die Luft an heissen Sommertagen erfahrungsgemäss annimmt, indem das Eisen durch die strahlende Sommerwärme viel höhere Temperaturen annimmt, so dass für unsere Verhältnisse 70 Grade Celsius nicht zu hoch gegriffen sein dürften.



#### 4. Allgemeiner Rechnungsgang und Zahlenbeispiel.

Es sind jetzt alle Resultate gesammelt, welche zu einer rationellen Berechnung einer combinirten Gitter- und Hängwerksbrücke nothwendig sind, und soll nun im folgenden der allgemeine Gang einer solchen Operation angedeutet werden.

Die Grössen, welche vom Anfange an als gegeben betrachtet werden müssen, sind:

- $l$  ... die Stützweite des zu berechnenden Feldes,
- $h$  ... die Pfeilhöhe der Kette,
- $q$  ... die zufällige Last pro Längeneinheit,
- $g$  ... das Eigengewicht pro Längeneinheit,
- $p$  ... die Totallast pro Längeneinheit,
- $\alpha$  ... der Ausdehnungs-Coefficient,
- $m$  ... das Verhältniss der Trägheitsmomente am Ende und in der Mitte,
- $E$  ... der Elasticitäts-Coefficient,
- $A$  ... die grösste zulässige Spannung,
- $t$  ... die Montirungstemperatur,
- $t_2$  ... die obere Temperaturs-Grenze,
- $t_1$  ... die untere Temperaturs-Grenze.

Ferner sei vorausgesetzt, dass die Bewegung der Kette über die Pfeiler verhindert sei und soll zu Folge des vorigen Abschnittes die Längenveränderung der Hängestangen vernachlässigt werden.

Der erste Schritt, den der Constructeur zu machen hat, ist sich für den Lastvertheilungs-Coefficienten  $n$  zu entscheiden.

Es dürfte aus ökonomischen Gründen angezeigt sein, den Träger nur so stark zu machen, dass er die schädlichen Schwankungen der Kette aufhebt.

Hierüber gibt den einzigen theoretischen Anhaltspunkt die Grösse der Durchbiegung des combinirten Systemes, wie sie am Schlusse der Berechnung erhalten wird.

Aus Gleichung (17) folgt dann  $W = \frac{2}{3} \frac{Fh^2}{n}$  und die Antheile an den Belastungen zufolge (19

$$k_2 = \frac{p}{1+n} \quad \text{für den Träger,}$$

$$k_1 = \frac{np}{1+n} \quad \text{für die Kette.}$$



Die in die Rechnung einzuführenden zulässigen Spannungen sind:

$$A_1 = A \frac{7(1+n) + 2m}{7(1+n)} \quad . \quad (20 \quad \text{für die Kette.}$$

$$A_2 = A \frac{7(1+n) + 2m}{(7+2m)(1+n)} \quad . \quad (21 \quad \text{für den Träger.}$$

Die Temperaturs-Belastungen werden nach (25'

$$\begin{aligned} k_4' &= \frac{24 E W F h}{l^2 [3 W + 2 F h^2]} \alpha [t - t_1] \\ &= \frac{8 E F h}{l^2 (1+n)} \alpha [t - t_1] \quad \text{für die Kette,} \\ k_4'' &= \frac{8 E F h}{l^2 (1+n)} \alpha [t_2 - t] \quad \text{für den Träger.} \end{aligned}$$

Die Maximal-Belastungen pro Längeneinheit

$$Q_1 = \frac{np}{1+n} + \frac{8 E F h}{l^2 (1+n)} \alpha (t - t_1) \quad \text{für die Kette,}$$

$$Q_2 = \frac{p}{1+n} + \frac{8 E F h}{l^2 (1+n)} \alpha (t_2 - t) \quad \text{für den Träger.}$$

Die Horizontalkraft in der Kette wird nach Gleichung 6)

$$H = \frac{np l^2}{8 h (1+n)} + \frac{E F}{1+n} \alpha (t - t_1)$$

Die Beanspruchung der Kette ergibt sich

$$A_1 = \frac{H}{F} = \frac{np l^2}{8 F h (1+n)} + \frac{E}{1+n} \alpha (t - t_1)$$

woraus sich unmittelbar der Kettenquerschnitt in der Mitte ergibt.

$$F = \frac{np l^2}{8 A_1 (1+n) h - 8 E \alpha (t - t_1) h}$$

und das Trägheitsmoment des Trägers in der Mitte

$$W = \frac{2}{3} \frac{F h^2}{n} = \frac{(g+g) l^2 h^2}{12 A_1 (1+n) h - 12 E \alpha (t - t_1) h}$$

Das Trägheitsmoment an den Enden wird  $W_1 = m W$ .

Die actualle Trägerhöhe bei dem Trägheitsmomente  $W$  und der zulässigen Beanspruchung  $A_2$  erhält man nach der bekannten Formel

$$h = \frac{16 A_2 W}{Q_2 l^2}, \quad \text{in welche für } A_2, W \text{ und } Q_2 \text{ die obigen Werthe einzusetzen sind.}$$

Hiemit sind alle Daten gegeben, welche zur weiteren Durchführung der Rechnung nothwendig sind, indem jedes der beiden Systeme nach den bekannten Formeln für die auf dasselbe entfallende grösste Belastung unabhängig von dem anderen berechnet werden kann.

Einen Massstab für die Steifigkeit des Systemes erhaltet man durch Bestimmung der Durchbiegungen:

$$\text{Grösste totale Senkung } d_2' = \frac{Q_2 l^4}{64 EW}$$

$$\text{Grösste elastische Senkung } d_2'' = \frac{k_2 l^4}{64 EW} = \frac{3}{128} \frac{k_1 l^4}{F E h^2}$$

Es sei um ein Zahlenbeispiel nach diesem Rechnungsgange durchzuführen:

die Nutzweite  $l = 80$  Meter  $= 8000$  Centimeter,

das Eigengewicht  $g = 30$  Kilo

die Belastung  $q = 40$  „ } pro Centimeter,

die Totallast  $p = 70$  „ }

die Pfeilhöhe  $h = 8$  Meter  $= 800$  Centimeter  $= \frac{l}{10}$

der Ausdehnungs-Coefficient  $\alpha = \frac{1}{85000}$

der Elasticitäts-Coefficient  $E = 2000000$ ,

die grösste zulässige Spannung  $= 800$  Kilo pro Quadrat-Centimeter,

die Verhältnisszahl  $m = 0.3$ , der Vertheilungs-Coefficient  $n = 10$ ,

die Montirungs-Temperatur  $t = + 20$  Grad Celsius,

die obere Temperaturs-Grenze  $t_2 = + 70$  Grad Celsius,

die untere Temperaturs-Grenze  $t_1 = - 30$  Grad Celsius.

Man erhaltet Belastungen

$$\text{für die Kette } k_1 = \frac{10 \times 70}{11} = 63.63 \text{ Kilo,}$$

$$\text{für den Träger } k_2 = \frac{70}{11} = 6.37$$

einzuführende Beanspruchungen

$$\text{für die Kette } A_1 = 800 \frac{7 \times 11 + 0.6}{7 \times 11} = 806 \text{ Kilo,}$$



für den Träger  $A_2 = 800 \frac{7 \times 11 + 0.6}{7.6 \times 11} = 742$  Kilo.

Die Temperaturs-Belastung für Träger und Kette

$$k_1' = k_1'' = \frac{8 \times 2000000 \times 800}{8000 \times 8000 \times 11} \frac{50}{85000} F = \frac{F}{93.5}$$

Die Maximal-Belastungen pro Längeneinheit

$$\text{für die Kette} = Q_1 = 63.63 + \frac{F}{93.5}$$

$$\text{für den Träger} = Q_2 = 6.37 + \frac{F}{93.5}$$

Die Horizontalkraft in der Kette wird nach Gleichung (6

$$H = \frac{64000000}{8 \times 800} Q_1 = 10000 \left[ 63.63 + \frac{F}{93.5} \right]$$

$$806 F = 10000 \left[ 63.63 + \frac{F}{93.5} \right]$$

hieraus folgt der Querschnitt

$$F = \frac{636300}{699} = 911 \text{ Quadrat-Centimeter}$$

und  $k_1' = k_1'' = \frac{F}{93.5} = 9.74$  Kilo.

Durch Substitution in die obigen Gleichungen erhaltet man die Maximallast

$$\text{für die Kette} \quad Q_1 = 73.37$$

$$\text{für die Träger} \quad Q_2 = 16.11$$

Das Trägheitsmoment ergibt sich

$$W = \frac{2}{3} \frac{911 \times 640000}{10} = 38869333 \text{ in Centimeter}$$

$$W_1 = 0.3 W = 11660800 \text{ in Centimeter}$$

$$\text{Trägerhöhe } h = \frac{16 \times 742 \times 38869333}{16.11 \times 64000000} = 448 \text{ Cent.} = \frac{1}{17.8} \text{ von } l$$

Grösste elastische Einsenkung

$$d = \frac{6.37 \times 64000000 \times 64000000}{64 \times 2000000 \times 38869333} = 5.2 \text{ Cent.} = \frac{1}{1540} \text{ von } l$$

Es tritt nun die Frage hervor, was mit diesem Systeme gewonnen sei.

Zur Beantwortung derselben ist eine approximative Massenbestimmung des Tragwerkes und ein Vergleich derselben mit einem gewöhnlichen Fachwerksträger erforderlich.

Das Volumen des letzteren ergibt sich für das eben angeführte Zahlenbeispiel aus der bekannten Näherungsformel.

$V_1$  für constante Querschnitte  $= \frac{7}{2} \frac{pl^2}{A} = 19600000$  in Cubik-Centimeter.

Schlägt man hievon circa 30 pCt. ab, so erhaltet man das Volumen für einen Einzelträger und variablen Querschnitte

$$V_1' = 13720000 \text{ Cubik-Centimeter.}$$

Das Volumen des combinirten Systemes setzt sich aus zwei Theilen zusammen.

1.  $v_1$  das Volumen des Trägers nach obiger Formel für constante Querschnitte  $= \frac{7}{2} \frac{16 \cdot 11 \times 64000000}{742} = 4864000$ . Auch hiervon kämen 30 pCt. abzuschlagen unter Berücksichtigung des variablen Querschnittes und es bleibt  $v_1' = 3404800$  Cubik-Centimeter.

2.  $v_2$  das Volumen der Tragkette, welches mit ziemlicher Genauigkeit aus der Summenformel 9 erhalten wird

$$v_2 = \frac{\leq (S)}{806} = \frac{73 \cdot 37 \times 8000}{24 \times 800} [3 \times 6400000 + 16 \times 640000] \\ = 7670800 \text{ Cubik-Centimeter.}$$

Hiezu kommt noch das Volumen der Tragstangen, das annäherungsweise gegeben ist durch die Formel

$$v_3 = \frac{1}{3} \frac{l h Q_1}{A_1} = 194200 \text{ Cubik-Cent.}$$

Die totale Masse des combinirten Tragwerkes beträgt sohin  $V = 3404800 + 7670800 + 194200 = 11269800$  Cubik-Cent.

Die Materialersparniss beträgt in diesem speciellen Falle gegenüber einem Fachwerke 2450000 Cubik-Centimeter oder circa 18 Percent. Hiebei ist freilich vorausgesetzt, dass die Kette absolut richtig construiert sei, was praktisch unmöglich ist.



Dieser auf das gewonnene Resultat verschlechternd einwirkende Umstand wird jedoch reichlich dadurch aufgehoben, dass für beide verglichenen Tragwerke dasselbe Eigengewicht = 30 Kilo per Meter eingeführt wurde, was nach der eben gemachten approximativen Massenberechnung für das combinirte Sistem um circa 18 Percent zu hoch gegriffen erscheint.

Aus dem eben Gesagten dürfte es zweifellos erhellen, dass die combinirten Gitter- und Hängewerke, was die Leichtigkeit der Construction anbelangt, in gleiche Linie mit den continuirlichen Tragwerken zu stellen kämen.

Hiebei ist endlich auch nicht, wie es wohl irriger Weise vielfach geschah, die zulässige Beanspruchung der Kette grösser angenommen worden, als bei einem gewöhnlichen Gitter- oder Blechträger.

#### IV. Anhang über die Tragkette mit ungleich hohen Aufhängepunkten.

Bei den Endfeldern von Kettenbrücken tritt, wenn keine Spannketten in Anwendung sind, oft der Fall ein, dass die beiden Aufhängepunkte der Tragkette in ungleicher Höhe liegen. Es soll für diesen Fall bewiesen werden, dass sämtliche Formeln, welche im ersten Abschnitte für die Tragkette mit gleich hohen Aufhängepunkten angeführt wurden, mit geringen Variationen ihre Gültigkeit behalten, und dass die ganze Theorie der Combination mit einem Gitterwerke unverändert auch auf diese Form der Tragkette Anwendung findet.

Der Coordinaten-Ursprung liege vorerst Fig. 10 in *A*.

Es bezeichne

$l$  die Spannweite,

$d$  den Höhenunterschied beider Aufhängepunkte,

$h$  die verticale Pfeilhöhe in der halben Spannweite,

$x_1, y_1$  die Coordinaten des unbekanntes Parabelscheitels.

Die übrigen Bezeichnungen behalten dieselbe Bedeutung, wie im Abschnitte über die Tragkette mit gleich hohen Aufhängepunkten.

Es gelten folgende Relationen:

$$y = (d + 4h) \frac{x}{l} - 4h \frac{x^2}{l^2} \dots \dots \dots (1_1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d + 4h}{l} - \frac{8hx}{l^2} \dots \dots \dots (2_1)$$

Die letztere Gleichung gibt das merkwürdige Resultat, dass für  $h = \frac{d}{4}$  die Spannung in  $B$  eine horizontale Richtung hat.

$$\left. \begin{aligned} tg \alpha &= \frac{d + 4h}{l} \\ tg \alpha_1 &= \frac{d - 4h}{l} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3_1 \text{ Tangenten an die Curve.})$$

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{(d + 4h)l}{8h} \\ y_1 &= \frac{(d + 4h)^2}{16h} \end{aligned} \right\} \text{ Coordinaten des Scheitels } O.$$

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= \frac{4h}{l^2} x_2^2 \\ \frac{dy_2}{dx_2} &= \frac{8hx_2}{l^2} \end{aligned} \right\} \text{ Gleichungen der Curve für den Coordinaten-} \\ \text{ursprung in } O.$$

$$L = l + \frac{1}{2} \frac{d^2}{l} + \frac{8}{3} \frac{h^2}{l} \dots (4_1 \text{ Kettenlänge.})$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{p_1 (d + 4h) l}{8h} \\ P_1 &= \frac{p_1 (d - 4h) l}{8h} \end{aligned} \right\} \dots (5_1)$$

$$H = \frac{p_1 l^2}{8h} \dots \dots \dots (6_1)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= H \sqrt{1 + \frac{(d + 4h)^2}{l^2}} \\ S_1 &= H \sqrt{1 + \frac{(d - 4h)^2}{l^2}} \end{aligned} \right\} \dots (7_1)$$

$$S = H \sqrt{1 + \frac{64h^2 x_2^2}{l^4}} \dots \dots (8_1)$$



Die Summe der Spannungen in allen Elementen der Kette ist  $\leq S = \frac{p l}{24 h} [3 l^2 + 3 d^2 + 16 h^2] \dots \dots \dots (9_1$

Ehe in der Entwicklung weiter gegangen werden kann, ist zu constatiren, wo bei einer Vermehrung der Belastung die grösste Durchbiegung eintritt.

Zu diesem Zwecke setzt man in die Gleichung (1<sub>1</sub>) den Werth  $h + \Delta h$  statt  $h$ .

$$y + \Delta y = [d + 4h + 4\Delta h] \frac{x}{l} - [4h + 4\Delta h] \frac{x^2}{l^2}$$

$$\Delta y = 4\Delta h \frac{x}{l} - 4\Delta h \frac{x^2}{l^2}$$

Die Differentiation dieses Ausdruckes nach  $x$  erweist, dass  $\Delta y$  für  $x = \frac{l}{2}$  ein Maximum wird, dass somit an diese Stelle, sowie in dem Falle, wo beide Aufhängepunkte in gleicher Höhe liegen, die grösste Durchbiegung eintritt.

Bestimmt man in analoger Weise, wie im obigen Falle die grösste Durchbiegung, so erhaltet man genau dasselbe Resultat

für die Kettenverlängerung  $\Delta s_1 = \pm \frac{3}{16} \frac{l^2}{h} \Delta \dots \dots \dots (10_1$

und für eine bestimmte Belastung  $k_1 s_1 = \frac{3}{128} \frac{k_1 l^4}{F E h^2} \dots \dots (11_1$

Die Durchbiegung für ein bestimmtes  $x$  wird ganz analog wie im ersten Abschnitte  $s_2 = -\frac{3}{32} \frac{k_1 l^2}{F E h^2} x (l - x) \dots \dots (12_1$

Das Verhältniss von  $h$ ,  $l$  und  $d$ , bei welchen die Materialmenge ein Minimum wird, erhaltet man durch Differentiation der Gleichung (9<sub>1</sub>) für  $h = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{l^2 + d^2}$ .

Dieser Werth ist grösser als  $\frac{d}{4}$  und käme daher die Kette in die Lage wie in Fig. 11.

Eine Ableitung der sämtlichen in diesem Anhange angeführten Formeln dürfte wohl überflüssig erscheinen, da sie in

ganz analoger Weise, wie die Formeln für gleich hoch liegende Aufhängepunkte erhalten werden.

Vergleicht man sie jedoch mit den letzteren Resultaten, so zeigt sich, dass sämtliche Formeln, welche für die Combination der Kette mit dem Tragbalken im dritten Abschnitte verwendet wurden, unverändert auch für diesen Fall Anwendung finden, und dass daher alle daraus abgeleiteten Resultate auch für ungleich hoch liegende Stützpunkte ihre Gültigkeit haben.

Die Fläche  $F$  ist hiebei natürlich ein ideeler Werth, nämlich jene Querschnittsgrösse, welche unter Einwirkung der Horizontalkraft  $H$  dieselbe Beanspruchung wie die ganze Kette erhält.





Fig. 1.

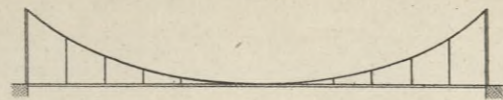


Fig. 2.

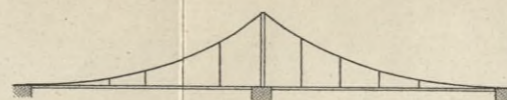


Fig. 3.

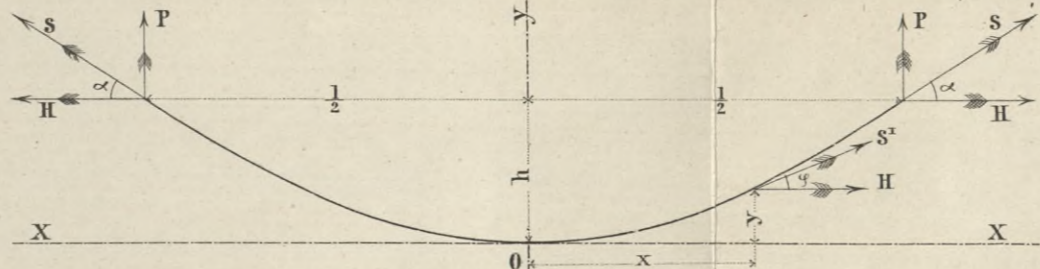


Fig. 4.

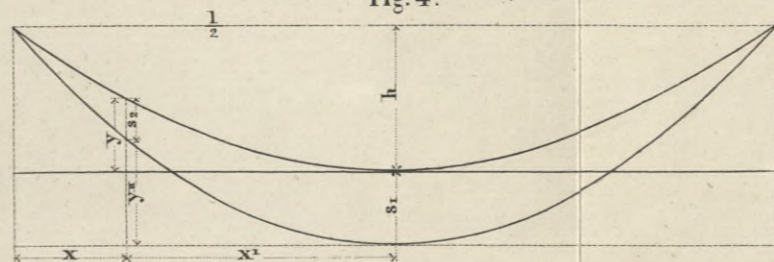


Fig. 5.

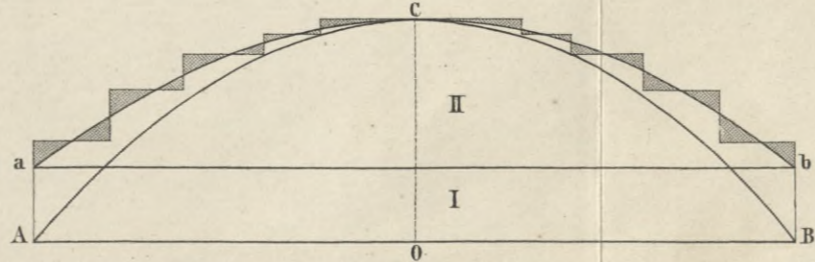


Fig. 6.

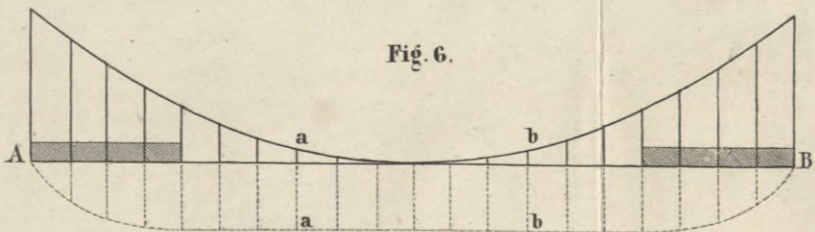


Fig. 7.

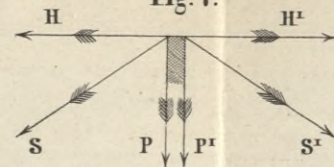


Fig. 8.

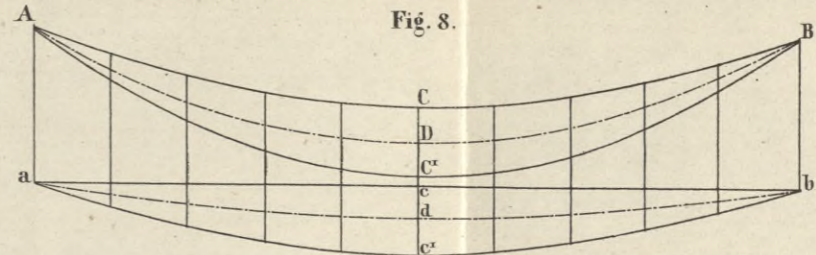


Fig. 9.

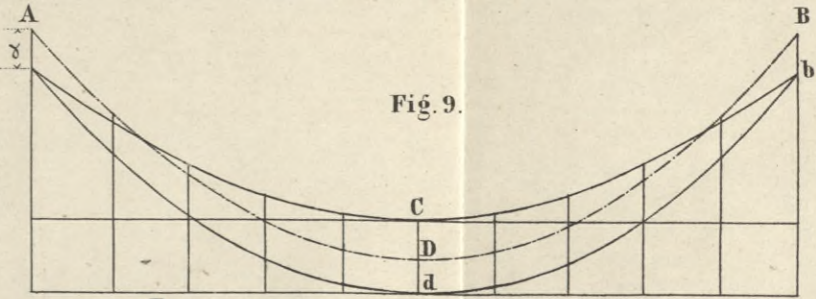


Fig. 10.

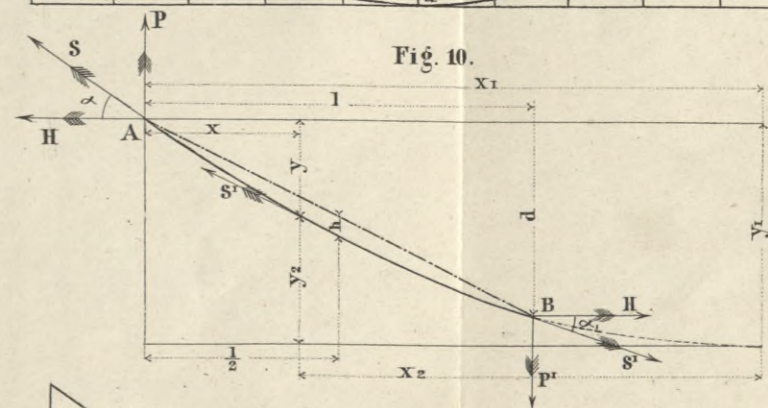
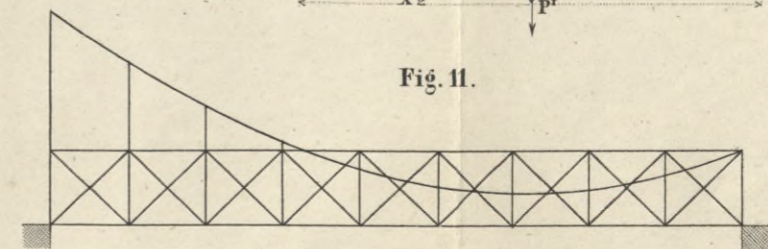


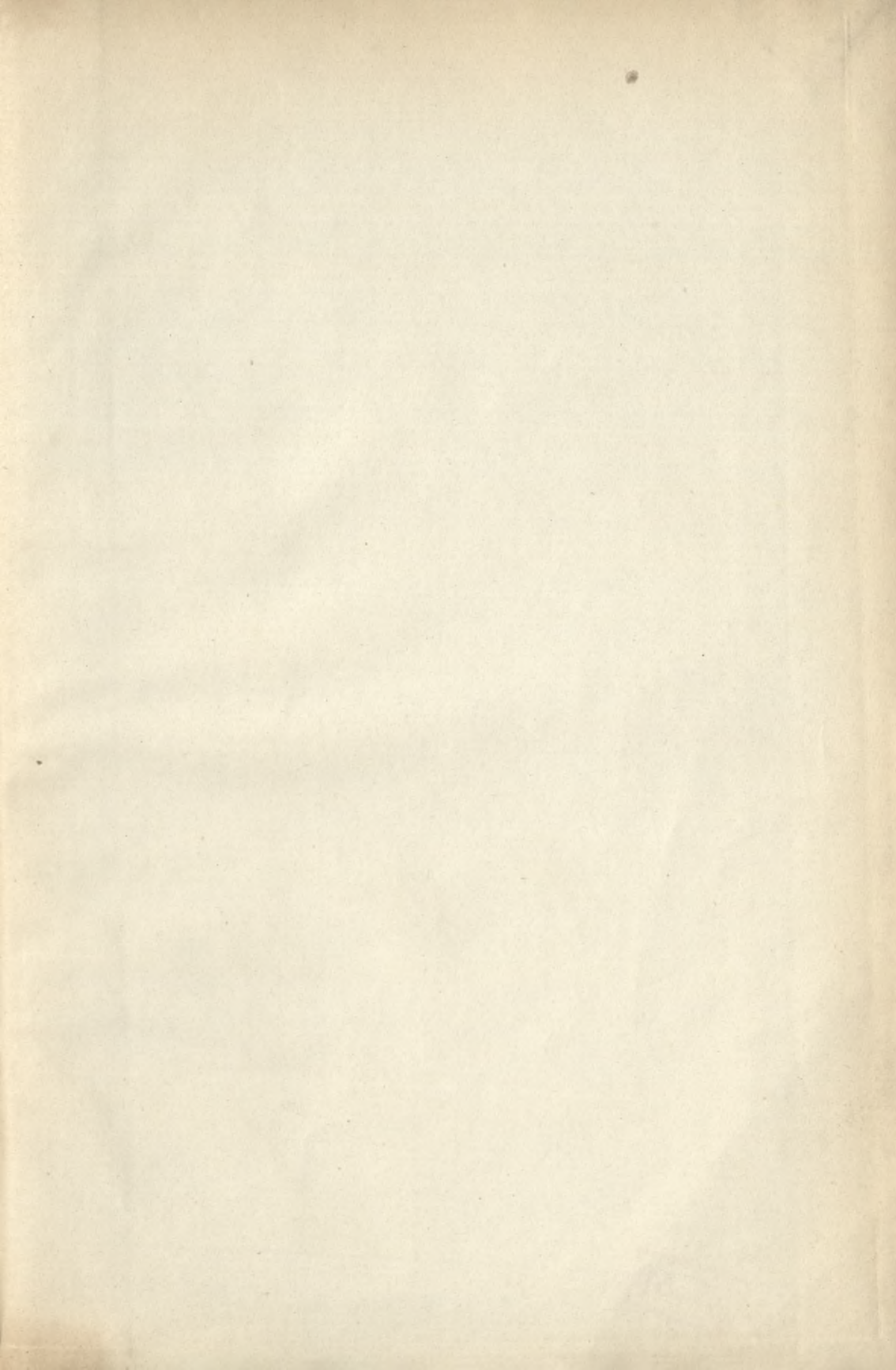
Fig. 11.











S. 61







WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II 31874  
L. inw. ....

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. S2. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298379