

U, 75

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298385

THEORIE

ERDDRUCKS



X
888

THEORIE DES ERDDRUCKS

AUF GRUND DER
NEUEREN ANSCHAUUNGEN.

VON

DR. PHIL. JACOB J. WEYRAUCH
PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU STUTTGART.

1873. 13
MIT 34 HOLZSCHNITTEN IM TEXT.

SEPARAT-ABDRUCK AUS DER „ALLGEMEINEN BAUZEITUNG“.

V. II Nr. 469



WIEN 1881.

VERLAG VON R. v. WALDHEIM.

76. 6

16.



II 31866



DRUCK VON R. V. WALDHEIM IN WIEN.

Akc. Nr. 5213/50

INHALT.

I. Beliebige Körper mit beliebiger Begrenzung.

	Seite.
§. 1. Spannungen für beliebig gerichtete Flächenelemente	5
§. 2. Veränderlichkeit der Spannungen in einem Punkte mit der Flächenstellung	8

II. Grenzzustände des Gleichgewichtes in einer beliebig begrenzten Erdmasse.

§. 3. Wirkung von Reibung und Kohäsion	15
§. 4. Es wirkt die Kohäsion allein	17
§. 5. Es wirkt die Reibung allein	18

III. Unendliche Erdmasse mit ebener Oberfläche.

§. 6. Analytische Bestimmung des Erddruckes für alle Gleichgewichtszustände	20
§. 7. Graphische Bestimmung des Erddruckes für alle Gleichgewichtszustände	26
§. 8. Erddruck bei horizontaler Oberfläche	29
Unterer Grenzzustand	29
Oberer Grenzzustand	33
§. 9. Erddruck bei unter dem Reibungswinkel φ geneigter Oberfläche	34
Ansteigende Oberfläche	34
Abfallende Oberfläche	36
§. 10. Erddruck bei beliebig geneigter Oberfläche	37
Unterer Grenzzustand	37
Oberer Grenzzustand	38
§. 11. Wasserdruck	38

IV. Begrenzung durch feste Wände bei ebener Oberfläche.

§. 12. Leitende Gesichtspunkte	41
§. 13. Fall, in welchem die Theorie III für jeden Rauigkeitsgrad der Wand gilt	42
§. 14. Gültigkeit der Theorie III bei Begrenzung durch eine Mauer	45
§. 15. Allgemeinster Fall. Erdbassins, Parallele Mauern	49
§. 16. Schluss	51

Die folgende Theorie des aktiven und passiven Erd-
druckes führt zu bequemen Formeln und graphischen Kon-
struktionen. Das unter I. Gegebene dürfte auch in der
Festigkeitslehre gute Dienste leisten, die neu eingeführten
Hülfskreise lassen besser als die Spannungsellipse alle
erwünschten Verhältnisse entnehmen. In üblicher Weise,
mit Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse, gebe ich
die Entwicklungen nur für die Ebene, die allgemeinen Be-
ziehungen im Raume würden durch ganz analoges Vor-
gehen folgen, wobei an Stelle der Hülfskreise Kugeln treten.

I.

Beliebige Körper mit beliebiger Begrenzung.

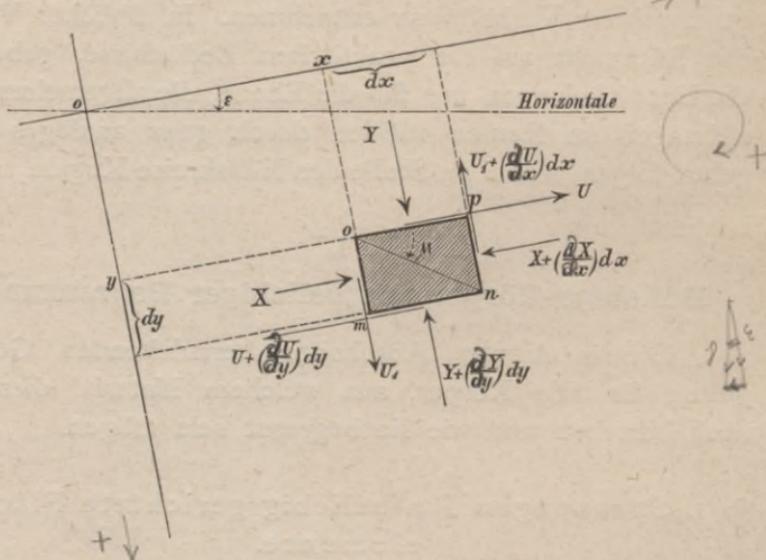
Die in diesem Abschnitte herzuleitenden Gesetze
gelten für alle Körper, aus welchem Material dieselben
auch bestehen und wie sie begrenzt sein mögen.

§. 1. Spannungen für beliebig gerichtete Flächen- elemente.

Wir nehmen ein rechtwinkeliges Koordinatensystem an.
Positive Richtungen der x -Axe und y -Axe nach rechts und
unten, die z -Axe kann man sich horizontal denken. Für alle
Winkel soll die Drehung rechts herum, wie beim Uhrzeiger,
als positiv gelten. Das Vorzeichen des Winkels μ , welchen
irgend eine Linie mit der x -Axe bildet, ist dann durch
 $\text{tang } \mu = \frac{dy}{dx}$ bestimmt. Die Horizontale schliesse mit der
 x -Axe, also die Vertikale mit der y -Axe den Winkel ε ein.

Man betrachte ein unendlich dünnes, vierseitiges Prisma, dessen Kanten den Axen parallel und von den Längen dx , dy sind. Auf jede Seitenfläche des Prisma wird irgend eine resultierende Kraft wirken, deren Richtung einen unbekanntem Winkel mit der Normalen zur Fläche einschliesst. Diese Kraft kann man sich zerlegt denken in eine zur Fläche normale und eine zu ihr tangentiale Komponente. Es bezeichnen nun X , U_1 die Normalspannung und Schubspannung für die Fläche om und Y , U dieselben für die Fläche op ; dann wirken auf unser Prisma die in Fig. 1 angeschriebenen Normal- und Schubspannungen,

Figur 1.



sowie die Schwere $\gamma dx dy$, unter γ das Gewicht der Kubikeinheit verstanden. Für das Gleichgewicht aber muss sein:

$$\begin{aligned} & \text{Summe aller Kräfte parallel der } x\text{-Axe gleich Null:} \\ & X dy - \left[X + \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) dx \right] dy + U dx - \\ & - \left[U + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \right] dx - \gamma dx dy \sin \epsilon = 0. \end{aligned}$$

Summe aller Kräfte parallel der y -Axe gleich Null:

$$Y dx - \left[Y + \left(\frac{dY}{dy} \right) dy \right] dx + U_1 dy - \\ - \left[U_1 + \left(\frac{dU_1}{dx} \right) dx \right] dy + \gamma dx dy \cos \varepsilon = 0.$$

Summe aller Momente gleich Null:

$$U dx dy = U_1 dy dx,$$

wobei unendlich kleine Grössen dritter Ordnung gegen solche zweiter Ordnung vernachlässigt sind. Vorstehende Gleichungen ergeben nach Reduktion:

$$U_1 = U \dots \dots \dots 1), \\ \left(\frac{\partial X}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = -\gamma \sin \varepsilon \dots \dots \dots 2), \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = \gamma \cos \varepsilon \dots \dots \dots 3).$$

Zerlegen wir die oberhalb on wirkenden Kräfte in Komponenten normal und längs on , setzen $on = dl$ und die ganze Normalkraft für on gleich Ndl , die ganze Schubkraft gleich Tdl , wonach sich N, T auf die Quadrat-einheit beziehen, so hat man:

$$Ndl = Y dx \cos \mu + X dy \sin \mu - U dx \sin \mu - U dy \cos \mu, \\ Tdl = Y dx \sin \mu - X dy \cos \mu + U dx \cos \mu - U dy \sin \mu, \\ \text{oder mit Rücksicht auf}$$

$$\frac{dx}{dl} = \cos \mu, \quad \frac{dy}{dl} = \sin \mu$$

und bekannte goniometrische Formeln:

$$N = \frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2} \cos 2\mu - U \sin 2\mu \dots \dots \dots 4),$$

$$T = -\frac{X-Y}{2} \sin 2\mu + U \cos 2\mu \dots \dots \dots 5),$$

und wenn der Winkel, welchen die Vertikale mit on einschliesst, durch α bezeichnet wird:

$$N = \frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2} \cos 2(\varepsilon - \alpha) + U \sin 2(\varepsilon - \alpha) \dots \dots \dots 6),$$

$$T = \frac{X-Y}{2} \sin 2(\varepsilon - \alpha) - U \cos 2(\varepsilon - \alpha) \dots \dots \dots 7).$$

Sind S , W die senkrechte und wagrechte Komponente der Spannung auf on , so hat man

$$S = N \sin \alpha + T \cos \alpha,$$

$$W = N \cos \alpha - T \sin \alpha,$$

oder durch Substitution der Ausdrücke 6) und 7):

$$S = \frac{X+Y}{2} \sin \alpha + \frac{X-Y}{2} \sin(2\varepsilon - \alpha) - U \cos(2\varepsilon - \alpha) \quad 8),$$

$$W = \frac{X+Y}{2} \cos \alpha + \frac{X-Y}{2} \cos(2\varepsilon - \alpha) + U \sin(2\varepsilon - \alpha) \quad 9).$$

Damit haben wir die Normal-, Tangential-, Vertikal- und Horizontalspannung für ein beliebiges Flächenelement im Körper, welches den Winkel μ mit der Abszissenaxe einschliesst, und mit welchem die Vertikale den Winkel α bildet. Die resultirende Spannung ist:

$$R = \sqrt{N^2 + T^2} = \sqrt{S^2 + W^2} \quad \dots \quad 10),$$

und für die Winkel der im Flächenelement errichteten Normalen und der Horizontalen mit R gelten:

$$\text{tang } \delta = \frac{T}{N}, \quad \text{tang } (\alpha + \delta) = \frac{S}{W} \quad \dots \quad 11).$$

§. 2. Veränderlichkeit der Spannungen in einem Punkte mit der Flächenstellung.

Alle durch einen Punkt o möglichen Flächenstellungen ergeben sich, wenn man μ von -90 bis $+90^\circ$ wachsen lässt. Je nach der Stellung eines Flächenelementes können natürlich die affizirenden Spannungen andere sein. Folgende graphische Darstellung lässt das Gesetz dieser Veränderlichkeit übersehen und die Werthe der Spannungen für jede Flächenstellung entnehmen (Fig. 2).

Man gehe von $o(x, y)$ aus parallel der x -Axe um $\frac{X+Y}{2} = oc$ weiter, trage bei c mit Berücksichtigung der Vorzeichen den Werth $\frac{X-Y}{2} = cn$ parallel der x -Axe und $U = cm$ parallel der y -Axe an, lege einen Kreis durch c, m, n und einen zweiten mit dem Radius oc um c . Um dann

T hat also die Richtung von d nach b , und da $ho \perp oa$ und nach Grösse und Drehungssinn

$$\sphericalangle hoe = \sphericalangle hae,$$

so ist eo die Richtungslinie von R .

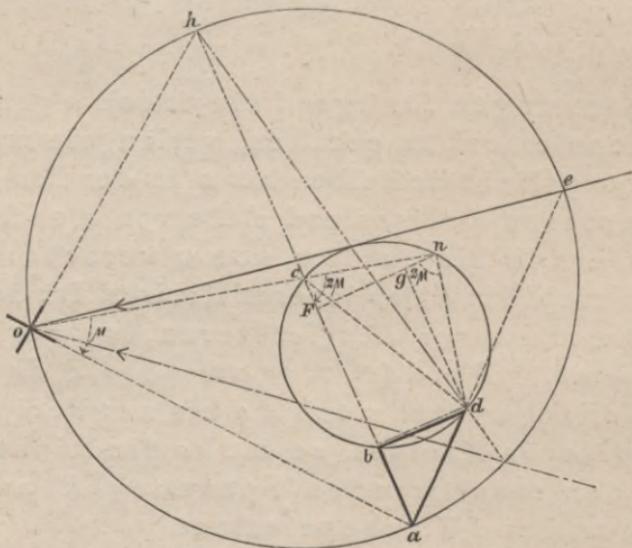
Für ein um 90° von dem angenommenen abstehendes Flächenelement hat 2μ einen um 180° anderen Werth. Damit ändern $\cos 2\mu$ und $\sin 2\mu$ ihr Vorzeichen und wir erhalten (Fig. 3):

$$hc + cf + fb = hb = N,$$

$$fn - gn = bd = T,$$

wie sich auch direkt ergibt, wenn man die beschriebene Konstruktion für das neue Flächenelement durchführt. Denkt man sich nun das Flächenelement nach einander alle Stellungen durch o einnehmen, so lassen sich aus Fig. 3 folgende Gesetze ablesen.

Figur 3.



Für alle Paare senkrecht zu einander stehender Flächenelemente hat die Summe der Normalspannungen denselben Werth.

Je zwei zu einander senkrechte Flächenelemente haben numerisch gleiche Schubspannungen.

Die Grenzwerte der resultirenden Spannungen R und gleichzeitig der Normalspannungen N treten ein für zwei Flächenelemente, deren Stellungen bestimmt sind durch

$$\tan 2\mu = \frac{2U}{X-Y} \dots\dots\dots 13);$$

es sind für dieselben:

$$\delta = 0, \quad T = 0 \dots\dots\dots 14),$$

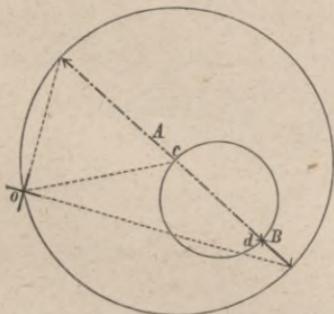
$$\left. \begin{aligned} \max R = \max N = \frac{1}{2} (X + Y) + \\ + \frac{1}{2} \sqrt{(X - Y)^2 + 4U^2} = A \end{aligned} \right\} \dots\dots 15),$$

$$\left. \begin{aligned} \min R = \min N = \frac{1}{2} (X + Y) - \\ - \frac{1}{2} \sqrt{(X - Y)^2 + 4U^2} = B \end{aligned} \right\} \dots\dots 16).$$

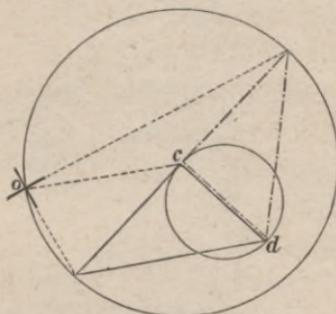
A und B heissen Hauptspannungen (Fig. 4). Für den Halbmesser des äusseren und den Durchmesser des inneren Kreises hat man:

$$ca = \frac{A+B}{2}, \quad cd = \frac{A-B}{2} \dots\dots 17).$$

Figur 4.



Figur 5.



Die Grenzwerte der Schubspannung T treten ein für die durch

$$\cot 2\mu = \frac{2U}{X-Y} \dots\dots\dots 18)$$

bestimmten, zu einander senkrechten Flächenstellungen. Es entsprechen denselben (Fig. 5):

$$N = \frac{A+B}{2}, \quad \max T = \frac{A-B}{2} \quad . 19),$$

$$R = \sqrt{\frac{1}{2} (A^2 + B^2)}, \quad \text{tang } \delta = \frac{A-B}{A+B} \quad . 20).$$

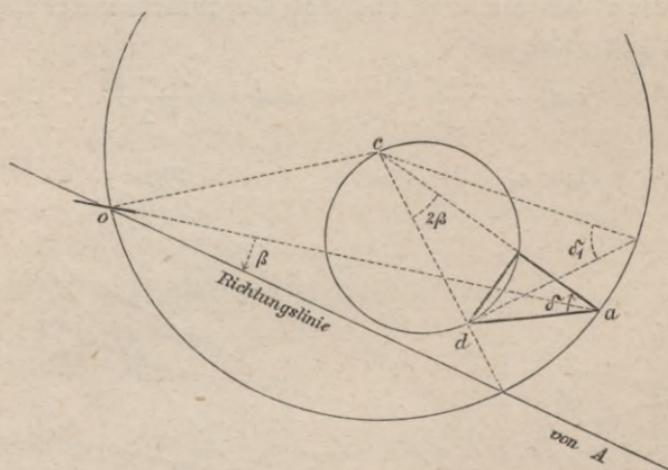
Die Flächenelemente, welche die Grenzwerte der Schubspannungen erleiden, schliessen mit denjenigen, welche von den Hauptspannungen affizirt werden, Winkel von 45° ein.

Bezeichnet man den spitzen Winkel, welchen die Richtungslinie der Hauptspannung A mit einem beliebigen Flächenelement einschliesst, durch β , so folgen für letzteres (Fig. 6):

$$N = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} \cos 2\beta \quad 21),$$

$$T = \frac{A-B}{2} \sin 2\beta \quad 22).$$

Figur 6.



Da δ für zwei Flächenstellungen zu 0 wird, so müssen auch Flächenstellungen existiren, für welche numerische Maxima eintreten. Die Bedingung dafür ist:

$$\frac{d \text{ tang } \delta}{d \beta} = \frac{d}{d \beta} \left(\frac{T}{N} \right) = 0,$$

$$\frac{d T}{d N} = \frac{T}{N} = \text{tang } \delta,$$

und da mit Rücksicht auf 21) und 22):

$$\frac{dT}{dN} = \cot 2\beta,$$

so folgt: Der Winkel δ der Normalen mit der resultirenden Spannung R erreicht seinen grössten Zahlenwerth δ_1 für

$$\tan \delta_1 = \frac{T}{N} = \cot 2\beta, \quad \beta = \pm \left(45 - \frac{\delta_1}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad 23),$$

d. h. wenn R in d senkrecht zu cd steht (Fig. 7). Bezeichnen wir in diesem Spezialfall die Zahlenwerthe von N , T , R durch \mathfrak{N} , \mathfrak{T} , \mathfrak{R} , so kann man mit Rücksicht auf $\mathfrak{R}^2 = \overline{ca^2} - \overline{cd^2}$ und 17) aus Fig. 7 entnehmen:

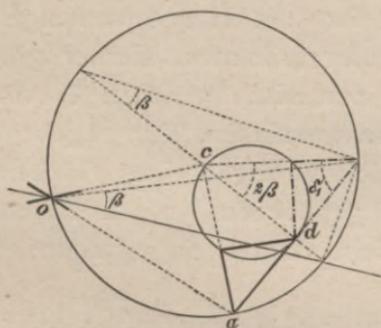
$$\mathfrak{R} = \sqrt{AB} = A \tan \left(45 - \frac{\delta_1}{2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24),$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{R} \cos \delta_1, \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{R} \sin \delta_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25),$$

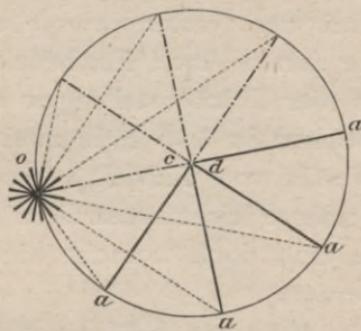
$$\sin \delta_1 = \frac{A-B}{A+B}, \quad \cos \delta_1 = \frac{2\mathfrak{R}}{A+B}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26),$$

$$B = \mathfrak{R} \tan \left(45 - \frac{\delta_1}{2}\right) = A \tan^2 \left(45 - \frac{\delta_1}{2}\right). \quad . \quad 27).$$

Figur 7.



Figur 8.



Für ein beliebiges Flächenelement, mit welchem die Richtungslinie von A den Winkel β einschliesst, hat man nach 21) und 22):

$$\tan \delta = \frac{\sin 2\beta}{\frac{A+B}{A-B} - \cos 2\beta},$$

und bei Beachtung von 26):

$$\text{tang } \delta = \frac{\sin \delta_1 \sin 2\beta}{1 - \sin \delta_1 \cos 2\beta} \dots \dots \dots 28),$$

oder wegen $\text{tang } \delta = \frac{\sin \delta}{\cos \delta}$ und nach Wegschaffung der Nenner:

$$\sin \delta = \sin \delta_1 \sin (2\beta + \delta) \dots \dots \dots 29).$$

Da allgemein

$$\text{tang } (\beta + \delta) = \frac{\text{tang } \beta + \text{tang } \delta}{1 - \text{tang } \beta \text{ tang } \delta},$$

so folgt durch Substitution von $\text{tang } \delta$ nach 28) und Reduktion

$$\text{tang } (\beta + \delta) = \text{tang } \beta \frac{1 - \cos (90 + \delta_1)}{1 + \cos (90 + \delta_1)},$$

oder einfacher

$$\text{tang } (\beta + \delta) = \text{tang } \beta \text{ tang}^2 \left(45 + \frac{\delta_1}{2} \right) = \frac{\text{tang } \beta}{\text{tang}^2 \left(45 - \frac{\delta_1}{2} \right)} \quad 30).$$

Im Allgemeinen gibt es vier Flächenstellungen, welchen numerisch gleiche Schubspannungen und zwei, welchen gleiche Normalspannungen oder resultirende Spannungen entsprechen. Für die Schubspannung $T=0$ fallen je zwei der ersten vier, und für die Hauptspannungen die letzten zwei Flächenelemente zusammen. Ferner gibt es vier Flächenstellungen mit numerisch gleichen δ , von welchen für $\delta = \delta_1$ je zwei zusammenfallen. Für gegebene Werthe von T, N, R, δ lassen sich die zugehörigen Flächenelemente leicht konstruiren (bei gegebenem δ mit Rücksicht auf 29), doch braucht hier nicht darauf eingegangen zu werden.

Für eine vollkommene Flüssigkeit sind Schubwiderstände nicht vorhanden, also für's Gleichgewicht stets $N=0, \delta=0$. Damit wird der innere Kreis unendlich klein und fällt mit dem Centrum des äusseren zusammen, wir erhalten $A = B = N$, in jedem Punkte sind die Spannungen nach allen Richtungen gleich gross (Fig. 8).

II.

Grenzzustände des Gleichgewichtes in einer beliebig begrenzten Erdmasse.

Nach den unter I. gefundenen Gesetzen lassen sich alle Spannungen an beliebiger Stelle eines Körpers angeben, wenn die Normalspannungen X , Y und die Schubspannung U für irgend zwei senkrecht zu einander stehende Flächenelemente daselbst bekannt sind. Zur Ableitung dieser drei nothwendigen Grössen existiren aber vorläufig nur die Gleichungen 2) und 3), so dass die Aufgabe unlösbar wäre. Man kann jedoch eine dritte Gleichung erhalten, wenn man auf die Festigkeitseigenschaften der in Frage kommenden Körper Rücksicht nimmt.

Die Theorie des Erddruckes findet diese dritte Gleichung zwischen X , Y , U aus Erfahrungsergebnissen über die Widerstände der Reibung und Kohäsion, womit eine Grenzbedingung für die Schubkraft T entsteht. Da für jede Fläche die Verschiebung nach zwei verschiedenen Richtungen eintreten kann, so sind auch zwei «Grenzzustände des Gleichgewichtes» denkbar. Zwischen diesen Grenzzuständen, welche im Folgenden besonders interessiren, können unendlich viele mögliche Gleichgewichtszustände liegen. Flächen, längs welcher die Grenzbedingung für die Schubkraft T erreicht ist, pflegt man «Gleitflächen», ihre Spuren «Gleitlinien» zu nennen.

§. 3. Wirkung von Reibung und Kohäsion.

Bekanntlich wird der Reibungswiderstand proportional dem Normaldruck aber unabhängig von der Berührungsfläche, der Kohäsions-Widerstand dagegen proportional der Berührungsfläche aber unabhängig vom Drucke angenommen. Daher ist der Gesamtwiderstand gegen Verschiebung für die Flächeneinheit

$$fN + c,$$

unter f den Reibungs-Koeffizienten, unter c die spezifische Kohäsion verstanden. Soll nun an der Stelle o keine Verschiebung eintreten, so muss für alle Flächenstellungen durch o sein:

$$T \leq f N + c,$$

und für die Grenzzustände des Gleichgewichtes ist auf den Gleitflächen dem Zahlenwerthe nach:

$$T = f N + c, \quad \frac{T - c}{N} = f = \tan \varphi. \quad . \quad . \quad 31),$$

wenn φ den Reibungswinkel von Erde auf Erde bedeutet.

Trägt man nun in unserer graphischen Darstellung, Fig. 9, unter dem Winkel φ gegen cd die Gerade db an und bestimmt, wie ersichtlich, die zu dem Zahlenwerthe $T = db$ gehörigen N, R, δ, β , so ist die Bedingung 31) dann erfüllt, wenn

$$dk = c.$$

Die gefundenen N, R, δ, β entsprechen dann einem Grenzzustande des Gleichgewichtes, und zwar speziell den Gleitflächen. Wir erhalten aus Fig. 9 als dritte Bedingung zwischen X, Y, U für die Grenzzustände des Gleichgewichtes

$$\frac{X + Y}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi = \frac{1}{2} \sqrt{(X - Y)^2 + 4 U^2}. \quad 32),$$

welche Gleichung, diesen Grenzzuständen entsprechend, zwei Lösungen liefert, oder auch

$$\frac{A + B}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi = \frac{A - B}{2} \quad . \quad . \quad . \quad 33),$$

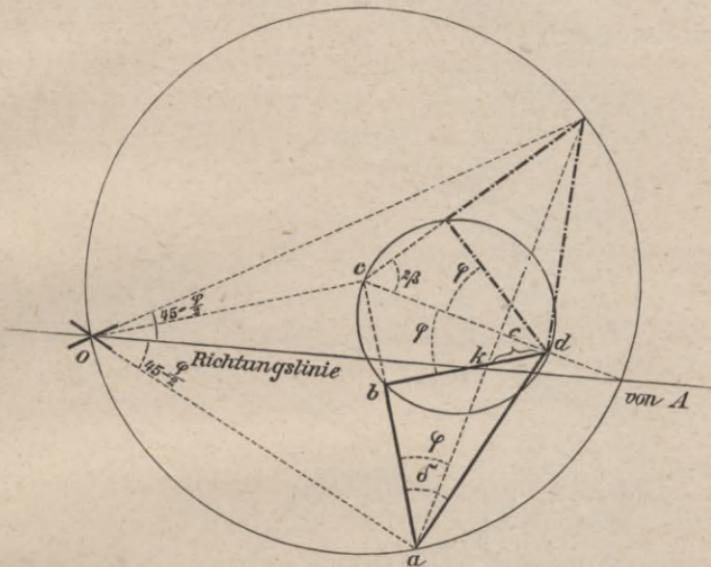
womit eine Hauptspannung durch die andere bestimmt ist. Für die Lage der Richtungslinie von A gegen die Gleitflächen folgt aus Fig. 9:

$$\beta = \pm \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 34).$$

In beiden Grenzzuständen des Gleichgewichtes liegen in jedem Punkte der Erdmasse zwei Gleitflächen symmetrisch zur Richtungslinie der Hauptspannung A und schliessen mit ihr die Winkel $45 - \frac{\varphi}{2}$, oder

mit einander den Winkel $90 - \varphi$ ein. Die Kohäsion ist ohne Einfluss auf die relative Lage der Gleitflächen gegen die Hauptspannungen.

Figur 9.



Aus Fig. 9 ersieht man, dass für die Gleitflächen bei gleichzeitiger Wirkung von Reibung und Kohäsion $\delta > \varphi$ werden kann, dagegen ist für dieselben $\delta < \delta_1$, indem δ seinen grössten Werth δ_1 erreicht, wenn $da \perp cd$ steht.

§. 4. Es wirkt die Kohäsion allein.

Von manchen Seiten (Winkler, Schäffer) wurde darauf hingewiesen, dass Reibung und Kohäsion nicht wohl gleichzeitig wirken können, sondern die Reibung erst in Wirksamkeit tritt, wenn die Kohäsion überwunden ist. Betrachten wir nun zunächst den Fall, dass die Kohäsion allein wirkt. Dann geht mit $\varphi = 0$ Fig. 9 in Fig. 10 über, diejenigen Flächen sind nun Gleitflächen, für welche die Schubspannung T ihr Maximum erreicht. Für den Winkel, welchen die Richtungslinie von A mit diesen Gleitflächen bildet, wurde schon in §. 2 gefunden, folgt aus 34) und ist aus Fig. 10 ersichtlich:

$$\beta = \pm 45^\circ \dots\dots\dots 35),$$

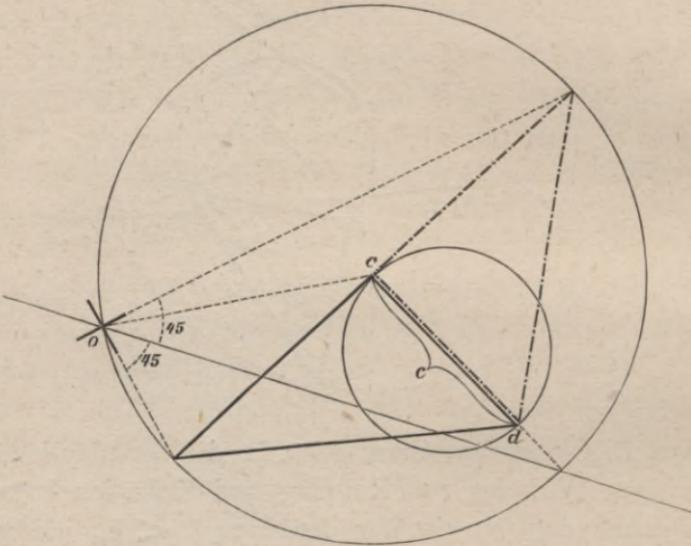
ferner folgen aus 32) und 33) oder Fig. 10:

$$2c = \sqrt{(X - Y)^2 + 4U^2} = A - B \dots\dots\dots 36),$$

und es gelten für die Gleitflächen die Gleichungen 19) und 20), so dass z. B. der Winkel δ auf den Gleitflächen bestimmt ist durch

$$\text{tang } \delta = \frac{2c}{A + B} \dots\dots\dots 37).$$

Figur 10.



§. 5. Es wirkt die Reibung allein.

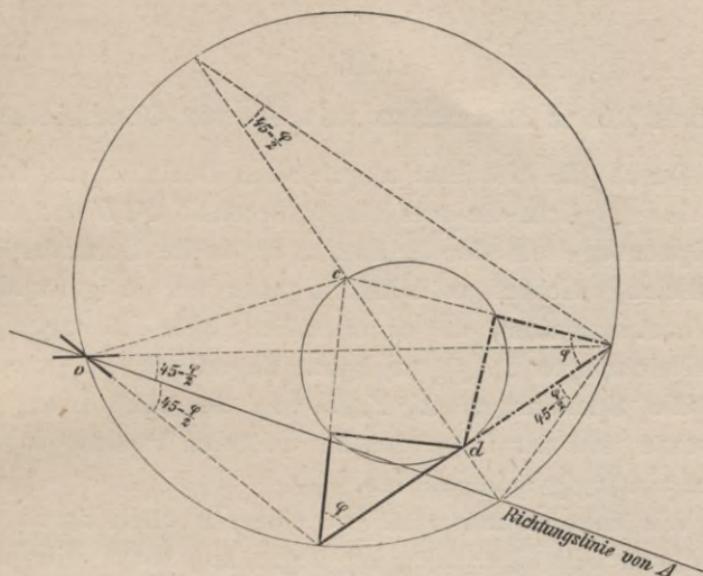
Dieser Fall ist für praktische Berechnungen allein massgebend, da die Kohäsion durch Austrocknung und nachfolgende Erschütterungen schwinden kann, wonach nur noch die Reibung Verschiebungen widersteht (Fig. 11). Es gelten natürlich die Gleichungen des §. 3 mit $c = 0$, und diejenigen des §. 2 mit $\delta_1 = \varphi$. So ergeben sich für die Hauptspannungen aus 27):

$$B = A \text{ tang}^2 \left(45 - \frac{\delta}{2} \right) \dots\dots\dots 38),$$

für die Gleitflächen aus 24):

$$\mathfrak{R} = A \text{ tang} \left(45 - \frac{c}{2} \right) = \sqrt{AB} \dots\dots\dots 39)$$

Figur II.



und für ein beliebiges Flächenelement, mit welchem die Richtungslinie von A den spitzen Winkel β einschliesst, aus 28) bis 30):

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\sin \varphi \sin 2\beta}{1 - \sin \varphi \cos 2\beta} \quad \dots \quad 40),$$

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin (2\beta + \delta) \quad \dots \quad 41),$$

$$\operatorname{tang} (\beta + \delta) = \operatorname{tang} \beta \operatorname{tang}^2 \left(45 + \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)} \quad 42).$$

Wenn d, D die Durchmesser des kleinen und grossen Hilfskreises, so folgen aus 38), 39) und wegen

$$\frac{d}{D} = \frac{1}{2} \frac{A - B}{A + B},$$

für

$\varphi =$	0	20	25	30	35	40	45	90°
$\frac{B}{A} =$	1·0000	0·4900	0·4058	0·3333	0·2710	0·2174	0·1716	0
$\frac{\Re}{A} =$	1·0000	0·7002	0·6371	0·5774	0·5206	0·4663	0·4142	0
$\frac{d}{D} =$	0	0·1711	0·2113	0·25	0·2868	0·3214	0·3535	0·5

III.

Unendliche Erdmasse mit ebener Oberfläche.

Durch die bis jetzt abgeleiteten Beziehungen ist es nun zwar möglich, die drei Unbekannten X , Y , U und damit alle Spannungen in der Erdmasse für beide Grenzzustände des Gleichgewichtes zu erhalten, aber nur in ganz allgemeinen Ausdrücken, da es unendlich viele Lösungen der drei Gleichungen 2), 3), 32) gibt. Begreiflich ist ja auch, dass die Spannungen X , Y , U von der Anordnung der Erdmasse und der Lage des betrachteten Punktes in derselben abhängig sein werden.

Wir nehmen nun zunächst eine nur oben durch eine Ebene von beliebiger Neigung begrenzte, sonst aber nach allen Seiten unendliche Erdmasse an. Da die Kohäsion praktisch nicht in Betracht kommt, dem theoretischen Bedürfnisse ihrer Berücksichtigung aber für jede Begrenzung der Erdmasse genügt wurde, so soll im Folgenden nur noch die Reibung als wirksam gelten. Wo nicht ausdrücklich Gegentheiliges bemerkt wird, wählen wir als Kräfteinheit γ Kilogramm, das Gewicht der Kubikeinheit Erde. Um eine Kraft in Kilogramm zu erhalten, hat man dann nur noch mit γ zu multiplizieren.

§. 6. Analytische Bestimmung des Erddruckes für alle Gleichgewichtszustände.

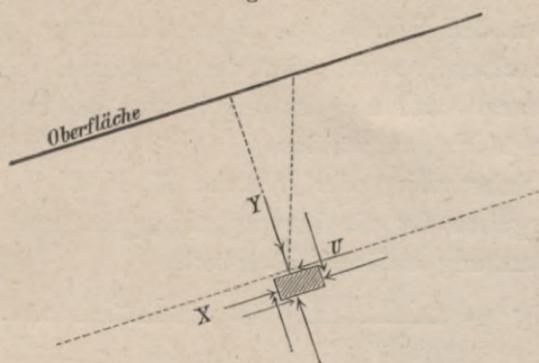
Wir denken uns eine der Oberfläche parallele Ebene (Fig. 12). Für alle Punkte derselben ist die Anordnung und Ausdehnung der Erdmasse nach gleichen Richtungen genau gleich. Es müssen also auch für alle diese Punkte die Spannungen in jeder bestimmten Richtung gleich sein.

Legen wir die x -Axe in die Oberfläche, so sind X , Y , U unabhängig von x und folgen daher aus 2), 3):

$$dU = -\sin \varepsilon dy, \quad dY = \cos \varepsilon dy,$$

oder abgesehen vom Druck der Atmosphäre

Figur 12.



$$U = -y \sin \varepsilon, \quad Y = y \cos \varepsilon \dots 43)$$

und wegen

$$R = \sqrt{Y^2 + U^2}, \quad \text{tang } \delta = \frac{U}{Y}$$

für jedes Element einer der Oberfläche parallelen Ebene

$$R = y, \quad \delta = -\varepsilon,$$

die resultirende Spannung wirkt also vertikal.

Betrachten wir nun zunächst die Grenzzustände des Gleichgewichtes. Durch Substitution der Werthe von U , Y und $c = 0$ in 32) folgt für dieselben

$$X = 2y \frac{\cos \varepsilon \pm \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi}}{\cos^2 \varphi} - y \cos \varepsilon,$$

oder wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$k = \frac{\cos \varepsilon \pm \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \dots 44),$$

$$X = (2k - \cos \varepsilon \cos \varphi) \frac{y}{\cos \varphi} \dots 45).$$

Den beiden Grenzzuständen des Gleichgewichtes entsprechen die beiden Vorzeichen im Ausdrucke für X oder k . Wenn X nur im Geringsten unter den kleineren der beiden Werthe sänke ($-$ Zeichen), würde das Gleichgewicht sofort gestört sein, und ebenso, wenn X um noch so wenig über den grösseren der Werthe wüchse ($+$ Zeichen). Wir wollen daher die Gleichgewichtszustände, welche man mit dem oberen und unteren Vorzeichen in X , k erhält, beziehungsweise den «oberen und unteren Grenzzustand des

Gleichgewichtes» nennen. Da wir in allen Formeln dieses Paragraphen den Werth von k unbestimmt einführen, so gelten dieselben sowohl für den unteren, als für den oberen Grenzzustand und ist nur immer das entsprechende Vorzeichen in 44) zu wählen.

Die Substitution der Werthe X, Y, U in 15), sowie 38), 39) ergeben für die Hauptspannungen und die resultirende Spannung auf der Gleitfläche

$$A = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} y = \frac{k y}{\operatorname{tang} \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)} \dots 46),$$

$$B = k y \operatorname{tang} \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots 47),$$

$$\mathfrak{R} = k y \dots 48).$$

Für den spitzen Winkel, welchen die Richtungslinie von A mit der Oberfläche einschliesst, folgt aus 41), weil für jedes der Oberfläche parallele Flächenelement $\delta = -\varepsilon$

$$\sin (2\beta - \varepsilon) = -\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} \dots 49).$$

Hiernach ist die Richtung von A und damit diejenige der Gleitflächen, welche Winkel von $45 - \frac{\varphi}{2}$ mit A einschliessen, ganz unabhängig von der Lage eines Punktes in der Erdmasse, das heisst: Im unbegrenzten, kohäsionslosen Erdreich mit ebener Oberfläche sind die Gleitflächen Ebenen.

Substituirt man die Werthe von U, X, Y in 6) bis 9), so folgen für ein Flächenelement in der Entfernung y von der Oberfläche, mit welchem die Vertikale den Winkel α einschliesst, die normale, tangential, senkrechte und wagrechte Spannungskomponente

$$N = n y, \quad T = t y, \quad S = s y, \quad W = w y \quad . 50),$$

worin n, t, s, w unabhängig von der Tiefe und

$$n \cos \varphi = k + k \cos 2(\alpha - \varepsilon) - \cos \varphi \cos (2\alpha - \varepsilon) \quad 51),$$

$$t \cos \varphi = -k \sin 2(\alpha - \varepsilon) + \cos \varphi \sin (2\alpha - \varepsilon) \quad . 52),$$

$$s \cos \varphi = 2k \sin \varepsilon \cos (\alpha - \varepsilon) + \cos \varphi \sin (\alpha - \varepsilon) \quad . 53),$$

$$w \cos \varphi = 2k \cos \varepsilon \cos (\alpha - \varepsilon) - \cos \varphi \cos (\alpha - \varepsilon) \quad . 54).$$

Für die resultirende Spannung hat man

$$R = r y \dots \dots \dots 55),$$

worin

$$r = \sqrt{n^2 + t^2} = \frac{t}{\sin \delta} = \frac{n}{\cos \delta} \dots \dots \dots 56),$$

oder auch

$$r = \sqrt{s^2 + w^2} = \frac{s}{\sin(\alpha + \delta)} = \frac{w}{\cos(\alpha + \delta)} \dots 57),$$

während der Winkel δ , welchen die Normale zum Flächenelement und der Winkel $\alpha + \delta$, welchen die Horizontale mit R einschliesst, bestimmt sind durch

$$\text{tang } \delta = \frac{t}{n}, \quad \text{tang } (\alpha + \delta) = \frac{s}{w} \dots \dots 58).$$

Hieraus folgt: Für alle Elemente einer durch die Erdmasse gelegten Ebene sind die affizirenden Kräfte von einerlei Richtung. Diesen Satz, welchen auch die ältere Theorie des Erddruckes stillschweigend voraussetzt, habe ich a. a. O. zum Ausgangspunkte einer Theorie des Erddruckes auf Stützmauern genommen, welche in ähnlicher Weise wie die ältere Theorie vorgeht, jedoch die willkürlichen Annahmen derselben über den Werth von δ vermeidet und gleiche Resultate wie die neuere Theorie liefern muss. («Zeitschr. f. Bauk.» 1878.)

Für ein Flächenelement, welches von y bis $y + dy$ reicht, hat man den Erddruck (Fig. 13)

$$dE = R \frac{dy}{\sin \mu} = \frac{ry dy}{\sin \mu}$$

und für eine von y_0 bis y oder von der vertikalen Tiefe h_0 bis h unterhalb des Schnittpunktes s mit der Oberfläche reichende Ebene pz mit Rücksicht auf

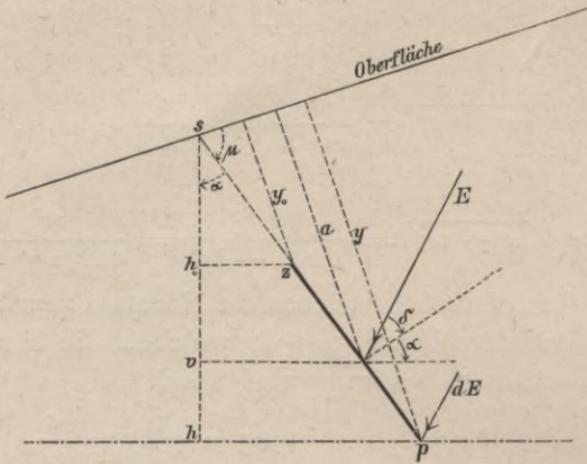
$$y = \frac{h \sin \mu}{\cos \alpha}$$

und

$$\mu = 90 + \varepsilon - \alpha,$$

$$E = \frac{r}{\sin \mu} \frac{y^2 - y_0^2}{2} = \frac{r \cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos^2 \alpha} \frac{h^2 - h_0^2}{2}.$$

Figur 13.



Da sich mit Rücksicht auf 45) w nach 54) ausdrücken lässt

$$w = \frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \varphi} (2k \cos \varepsilon - \cos \varphi) = k^2 \cos(\alpha - \varepsilon),$$

womit nach 57)

$$r = \frac{\cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos(\alpha + \delta)} k^2,$$

so liefern vorstehender Ausdruck für E und 58) den Erd-
druck auf $p q$ in Kilogrammen und den Winkel des Erd-
druckes gegen den Horizont

$$E = \left(\frac{k \cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{h^2 - h_0^2}{2 \cos(\alpha + \delta)} \gamma \quad \dots 59),$$

$$\tan(\alpha + \delta) = \frac{2 \sin \varepsilon}{k \cos \varphi} + \frac{\tan(\alpha - \varepsilon)}{k^2} \dots \dots \dots 60).$$

Um auch noch den Angriffspunkt von E zu bestimmen,
drückt man das Moment von E in Bezug auf den Schnitt-
punkt s doppelt aus und hat, wenn für den Angriffspunkt a
die Ordinate und v die vertikale Tiefe unter dem Schnitt-
punkt s (Fig. 13)

$$E \frac{a \cos \delta}{\sin \mu} = \int_{y_0}^y dE \frac{y \cos \delta}{\sin \mu} = \frac{r \cos \delta}{\sin \mu} \frac{y^3 - y_0^3}{3},$$

woraus mit dem ersten Ausdrücke für E

$$a = \frac{2}{3} \frac{y^3 - y_0^3}{y^2 - y_0^2} \quad v = \frac{2}{3} \frac{h^3 - h_0^3}{h^2 - h_0^2} \dots \dots 61).$$

Reicht die Ebene ps von der Oberfläche bis zur vertikalen Tiefe h unter s , so bleibt 60) ungeändert, während aus 59), 61) für Grösse in Kilogrammen und Angriffspunkt des Erddruckes

$$E = \left(\frac{k \cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{h^2 \gamma}{2 \cos(\alpha + \delta)} \dots 62),$$

$$a = \frac{2}{3} y, \quad v = \frac{2}{3} h \dots 63).$$

Ferner hat man dann den Horizontaldruck und Vertikaldruck der Erde auf die Ebene in Kilogrammen

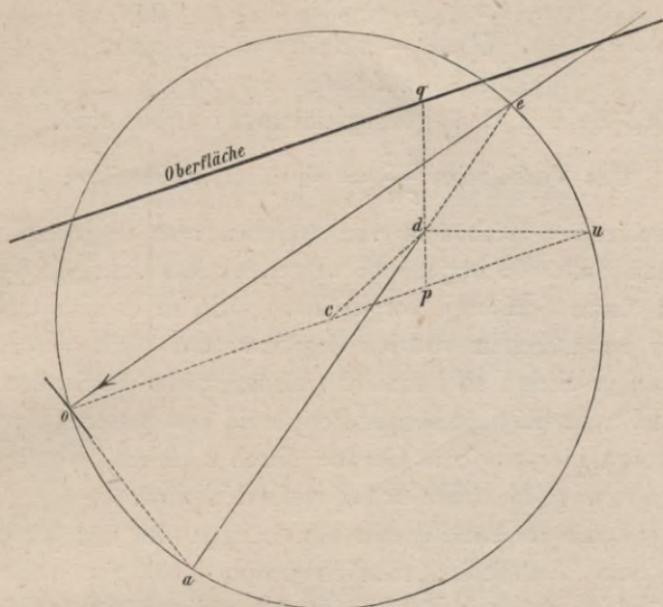
$$H = E \cos(\alpha + \delta) = \left(\frac{k \cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{h^2 \gamma}{2} \dots 64),$$

$$V = E \sin(\alpha + \delta) = \left(\frac{k \cos(\alpha - \varepsilon)}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{h^2 \gamma \tan(\alpha + \delta)}{2} \dots 65).$$

In allen diesen Gleichungen ist für die Grenzzustände des Gleichgewichtes k durch 44) bestimmt und darin das obere oder untere Zeichen vor dem Wurzelausdruck zu nehmen, je nachdem man den Erddruck im oberen oder unteren Grenzzustande wünscht. In praktischen Fällen hat man es mit dem letzteren zu thun. Uebrigens lassen sich die abgeleiteten Formeln meist noch vereinfachen (§§. 8, 10).

Für jeden Werth von k , der zwischen den durch 44) bestimmten Grenzwerten liegt, ist ebenfalls Gleichgewicht möglich und machen wir irgend eine solche Annahme, so liefern die Formeln 50) bis 65) den Erddruck auf beliebige Flächenelemente und Ebenen für den entsprechenden Gleichgewichtszustand. Alle anderen Verhältnisse für denselben ergeben sich durch Substitution von X, Y, U nach 43), 45) in die Formeln von I, wobei Gleitflächen nicht existiren und $\delta_1 < \varphi$ ist. Umgekehrt würde der gegebene Werth einer Grösse, deren Ausdruck k enthält, auf das augenblickliche, massgebende k und damit auf den ganzen Gleichgewichtszustand schliessen lassen. Die Verschiedenheit der Gleichgewichtszustände ist allein durch die Verschiedenheit der k oder von den drei Ausgangsspannungen X, Y, U allein durch die Verschiedenheit der X bedingt.

Figur 15.



cd nach einem auf der Geraden pu innerhalb (beziehungsweise ausserhalb) dieser Strecke so gelegenen Punkte c , dass $\frac{cd}{cu} = \sin \varphi$ wird; dann ist cd der Durchmesser des inneren und cu der Halbmesser des äusseren Kreises. Der Druck per Quadrateinheit auf irgend ein Flächenelement in der erwähnten Tiefe ergibt sich, wenn man die Richtung des Elementes durch den auf der Verlängerung von up gelegenen Peripheriepunkt o des äusseren Kreises bis zum Punkte a des letzteren und von hier aus die Gerade ade bis wieder zur äusseren Peripherie zieht:

$$\text{Grösse } R = ad, \quad \text{Richtung } \parallel eo.$$

Der Beweis dieses Satzes liegt einfach darin, dass mit Rücksicht auf das in §. 2 über A, B, U, Y Gesagte und nach Konstruktion

2
 übereinstimmung m
 y Involutions
 des Kreises
 siehe Müller
 Breslau
 L. Druck
 auf Stützmauern.

$$\frac{cd}{cu} = \frac{A-B}{A+B} = \sin \varphi,$$

$$U = -ud \sin \varepsilon = -y \sin \varepsilon,$$

$$Y = ud \cos \varepsilon = y \cos \varepsilon,$$

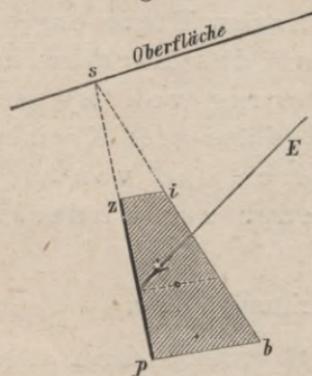
womit die drei Bedingungsgleichungen erfüllt sind.

Das Verhältniss $\frac{cd}{cu} = \sin \varphi$ zu konstruiren, gibt es verschiedene Methoden, von welchen man in jedem einzelnen Falle die bequemste anwenden kann. In §§. 8—11 sind einige Verfahren vorgeführt. — Sollte es sich treffen, dass beim Ziehen von oa der Schnitt a nicht genügend scharf erscheint, so kann man zunächst in o die Senkrechte zum Flächenelement bis zur Peripherie des äusseren Kreises und von hier aus eine Gerade durch c ziehen, womit der Schnitt a vollkommen scharf gefunden wird.

Da in unsern Figuren alle Längen mit der Tiefe in gleichem Verhältniss, nämlich proportional $p q$ wachsen, so ändern sich mit der Tiefe weder die Richtungen der Hauptspannungen, noch die der Gleitflächen, noch die der resultirenden Spannungen auf irgend welche Flächenelemente von gleicher Neigung, die Gleitflächen sind also Ebenen. Wie diesen Satz, so kann man auch alle anderen Resultate des vorigen Paragraphen aus den Fig. 14, 15 ableiten.

Der Erddruck auf eine ebene Fläche ps wird erhalten

Figur 16.



(Fig. 16), wenn man die Spannung R für einen beliebigen Punkt derselben nach Grösse und Richtung bestimmt, die Grösse von dem betreffenden Punkte aus senkrecht zu ps aufträgt, durch den Endpunkt dieses R und den Schnittpunkt s von gedrückter Fläche und Oberfläche eine Gerade sib legt und durch p und s zwei Parallelen zum aufgetragenen R zieht; die zwischen den letzteren liegende

Fläche $psib$ stellt den Erddruck E dar, die Richtung ist

parallel dem konstruirten R , der Angriffspunkt aber liegt da, wo die Parallele zu $p b$ durch den Schwerpunkt der Druckfigur auf $p z$ trifft.

Da R proportional y wächst, so wird bei vorstehender Konstruktion

$$p z i b = \int_{y_0}^y R \frac{d y}{\sin \mu} = E.$$

Weiter ist nichts mehr zu beweisen.

Reicht die gedrückte Fläche bis zur Terrainfläche, so stellt das Dreieck $p s b$ den Erddruck E dar und der Angriffspunkt liegt um $\frac{2}{3} \overline{p s}$ von s gegen p hin.

Aus den Fig. 14, 15 lassen sich eine Reihe von Beziehungen zwischen dem oberen und unteren Grenz- zustand entnehmen, worauf jedoch hier verzichtet werden soll; dagegen wollen wir in den §§. 8 bis 11 praktische Konstruktionsmethoden für alle Fälle geben.

Lässt man den Punkt c nach einander alle Lagen zwischen den oben gegebenen Grenz- lagen auf $p n$ einnehmen, so erhält man alle überhaupt möglichen Gleichgewichtszustände. Für jeden derselben ergeben sich die Druckverhältnisse für beliebige Flächenelemente nach §. 2 und der Druck auf irgend eine Ebene in gleicher Weise wie in den Grenz- zuständen.

§. 8. Erddruck bei horizontaler Oberfläche.

Unterer Grenz- zustand. Aus 44) folgt mit $\varepsilon = 0$ und dem unteren Vorzeichen

$$k = \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots 66),$$

so dass aus 46) bis 48) die Hauptspannungen und Span- nungen auf den Gleitflächen

$$A = y, \quad B = y \tan^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots 67),$$

$$\mathfrak{R} = \gamma \operatorname{tang} \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots 68).$$

Aus 49) folgt, dass A vertikal gerichtet ist, so dass die Gleitflächen die Winkel $45 - \frac{\varphi}{2}$ mit der Vertikalen einschliessen.

Für eine Ebene, welche von der Oberfläche bis zur vertikalen Tiefe h reicht, und mit welcher die Vertikale den beliebigen Winkel α einschliesst, hat man nach 59) den Erddruck in Kilogrammen:

$$E = \operatorname{tang}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \frac{h^2 \gamma}{2 \cos(\alpha + \delta)} \dots \dots 69).$$

Der Winkel $\alpha + \delta$, welchen die Horizontale mit E einschliesst, folgt nach 60) aus:

$$\operatorname{tang}(\alpha + \delta) = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)} \dots \dots 70)$$

und Horizontaldruck und Vertikaldruck auf die Fläche werden nach 64) und 65):

$$H = \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tang}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots \dots \dots 71),$$

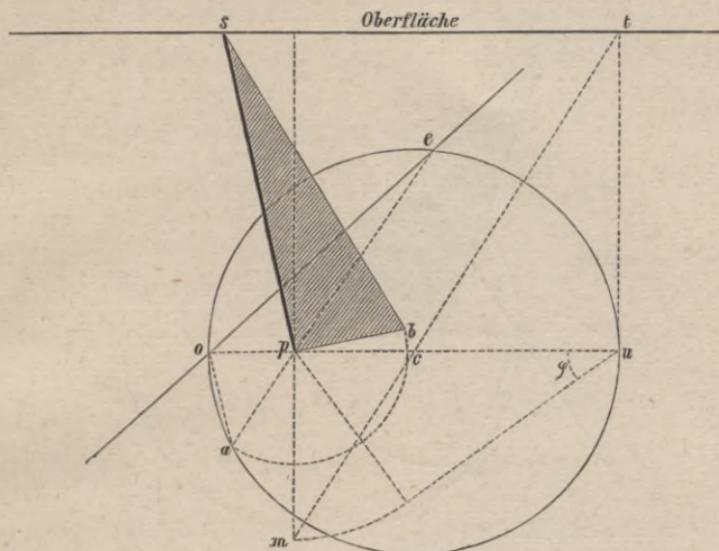
$$V = \frac{h^2 \gamma}{2} \operatorname{tang} \alpha \dots \dots \dots 72).$$

Der erstere ist gleich dem Erddruck auf die vertikale Fläche von gleicher Tiefe h und der letztere gleich dem auf der Fläche lastenden Erdgewicht. Reicht die gedrückte Fläche nur von h_0 bis h , so ist in vorstehenden Formeln $h^2 - h_0^2$ an Stelle von h^2 zu setzen.

Durch Konstruktion erhält man den Erddruck auf die Ebene ps , oder einen Theil derselben wie folgt (Fig. 17).

Man ziehe $pu = h$ horizontal, trage daran bei u unter dem Winkel φ eine Gerade, falle auf diese von p aus ein Perpendikel, schneide mit der Grösse desselben auf der Vertikalen durch p unterhalb dieses Punktes bei m ein und verbinde m mit dem senkrecht über u gelegenen Oberflächenpunkt t , wobei die Horizontale pu in c geschnitten

Figur 17.



wird. Schlägt man dann mit cu als Halbmesser einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von up bei o trifft, zieht $oa \parallel sp$ und von Peripherie zu Peripherie die Gerade ape , so ist die Richtung des Erddruckes parallel eo ; macht man noch $pb = pa$ senkrecht zu ps , so stellt das Dreieck psb nach Grösse und Vertheilung den Erddruck auf ps dar.

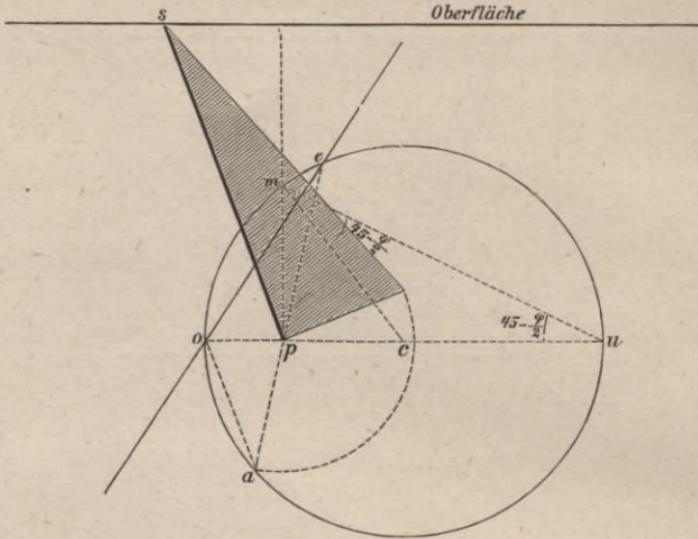
Diese Konstruktion bildet einen speziellen Fall des in §. 6 gegebenen allgemeinen Verfahrens. Es fallen nun die Punkte p und d zusammen, und ist wie verlangt:

$$\frac{pc}{cu} = \frac{pm}{tu} = \frac{pm}{pu} = \sin \varphi.$$

Folgende Konstruktion ist ebenfalls bequem und wie die Formeln 69) und 70) schon früher auf ganz anderem Wege von mir abgeleitet worden (Fig. 18).

Man ziehe $pu = h$ horizontal und unter dem Winkel $45 - \frac{\varphi}{2}$ gegen pu , die Gerade um bis zum Schnitte mit der Vertikalen pm , lege durch die Punkte mu einen Kreisbogen mit dem Zentrum c auf pu , welcher die Verlängerung von up bei o trifft. Zieht man dann $oa \parallel ps$ und von

Figur 18.



Peripherie zu Peripherie die Gerade apc , so ist der Erddruck parallel eo ; macht man noch $pb = pa$ senkrecht zu ps , so stellt das Dreieck psb nach Grösse und Vertheilung den Erddruck auf ps dar.

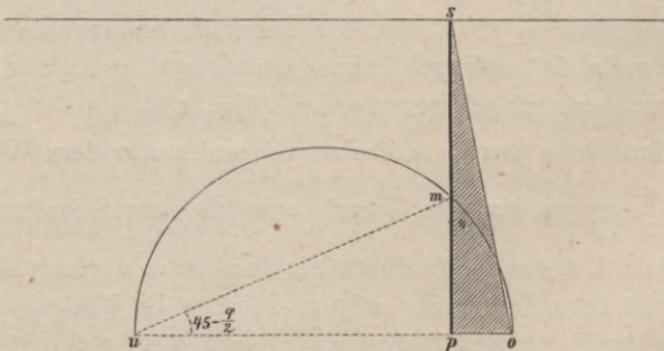
Der Beweis liegt wieder darin, dass nun

$$\frac{pc}{cu} = \frac{pc}{mc} = \sin \varphi$$

ist, und so lassen sich noch eine Reihe von Spezialverfahren angeben.

Für eine vertikale Wand gestaltet sich das zweite Verfahren sehr kurz wie folgt (Fig. 19). Man ziehe $pu = h$

Figur 19.



horizontal, lege um unter dem Winkel $45 - \frac{\varphi}{2}$ an up , schlage mit dem Zentrum auf pu einen Halbkreis umo , so hat man in Dreieck $ps o$ die Grösse und Vertheilung des Erddruckes, während die Richtung horizontal ist.

Oberer Grenzzustand. Aus 44) folgt mit $\varepsilon = 0$ und dem unteren Vorzeichen:

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} = \cot \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots 73),$$

und damit aus 46) bis 48):

$$A = y \cot^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right), \quad B = y \dots 74),$$

$$\mathfrak{R} = y \cot \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots 75).$$

Nach 49) ist A horizontal, so dass die Gleitflächen Winkel von $45 + \frac{\varphi}{2}$ mit der Vertikalen einschliessen.

Für die beliebig gerichtete Ebene ps werden (Drücke in Kilogrammen):

$$E = \cot^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \frac{h^2 \gamma}{2 \cos (\alpha + \delta)} \dots 76),$$

$$\text{tang } (\alpha + \delta) = \frac{\text{tang } \alpha}{\cot^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)} \dots 77),$$

$$H = \frac{h^2 \gamma}{2} \cot^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right) \dots 78),$$

$$V = \frac{h^2 \gamma}{2} \text{ tang } \alpha \dots 79).$$

Die konstruktive Bestimmung des Erddruckes erfolgt nach den für den unteren Grenzzustand gegebenen Sätzen, nur dass jetzt beim ersten Verfahren «oberhalb dieses Punktes» an Stelle von «unterhalb dieses Punktes», und beim zweiten Verfahren «unter dem Winkel $45 + \frac{\varphi}{2}$ » an Stelle von «unter dem Winkel $45 - \frac{\varphi}{2}$ » zu treten haben. Die Figuren kann man sich hiernach selbst machen. In obigen Formeln

lässt sich bekanntlich auch $\tan\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)$ an Stelle von $\cot\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$ setzen.

Die Vertikaldrücke der Erde sind im oberen und unteren Grenzzustand gleich und bestimmt durch das Gewicht der senkrecht über der gedrückten Fläche liegenden Erde. Die Horizontaldrücke dagegen stehen nach 78) und 71) im Verhältniss:

$$\frac{H_o}{H_u} = \cot^2\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \dots\dots\dots 80),$$

wonach z. B. für

$\varphi = 0$	20	25	30	35	40	45	90°
$\frac{H_o}{H_u} = 1$	4·160	6·071	9	13·617	21·150	33·970	∞

In diesem Verhältnisse steht also auch der Erddruck für eine vertikale Ebene im oberen und unteren Grenzzustand.

§. 9. Erddruck bei unter dem Reibungswinkel φ geneigter Oberfläche.

Ansteigende Oberfläche. Für $\varepsilon = \varphi$ folgt aus 44) mit dem oberen und unteren Vorzeichen

$$k = 1 \dots\dots\dots 81).$$

Es fallen also die beiden Grenzzustände zusammen und existirt nur ein möglicher Gleichgewichtszustand. Für denselben werden nach 46) bis 48) die Hauptspannungen und Spannungen auf den Gleitflächen:

$$A = \frac{y}{\tan\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)}, \quad B = y \tan\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \dots\dots 82),$$

$$N = y \dots\dots\dots 83).$$

Der spitze Winkel β , welchen A mit der Oberfläche einschliesst, folgt aus 47)

$$\beta = -\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right) \dots\dots\dots 84)$$

und da die Gleitflächen um Winkel von $45 - \frac{\varphi}{2}$ von A abste-
hen, so ist die eine parallel der Oberfläche, die andere vertikal.

Für eine Ebene ps , welche von dem Oberflächenpunkt s bis zur vertikalen Tiefe h unter demselben reicht, ist nach 62) der Erddruck in Kilogrammen:

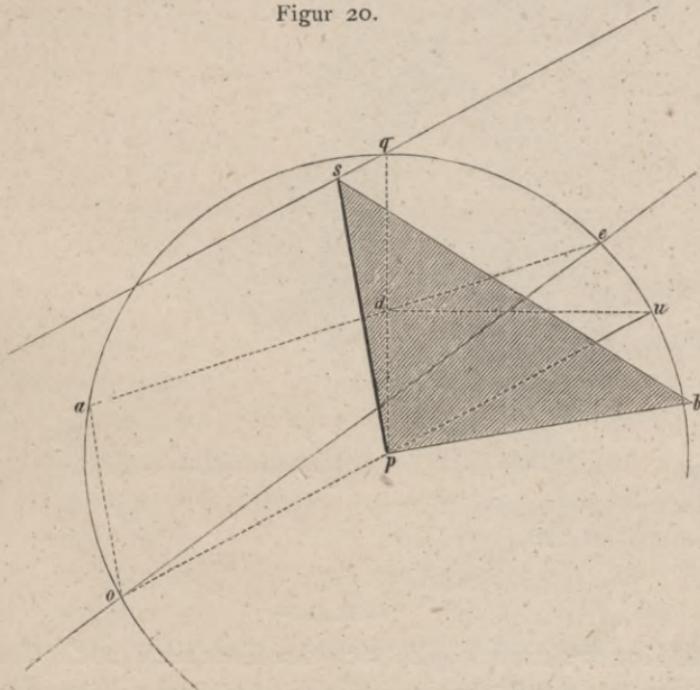
$$E = \left(\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{h^2 \gamma}{2 \cos(\alpha + \delta)} \dots 85).$$

Der Winkel $\alpha + \delta$ der Horizontalen mit E folgt nach 60) aus:
 $\text{tang}(\alpha + \delta) = 2 \text{tang} \varphi - \text{tang}(\varphi - \alpha) \dots 86).$

Durch Konstruktion findet sich der Erddruck auf ps wie folgt (Fig. 20):

Man ziehe durch p bis zur Oberfläche die Vertikale pq , schlage mit dieser als Halbmesser einen Kreisbogen um p , welcher die Parallele durch p zur Oberfläche bei u auf der Druckseite und bei o trifft, ziehe ud horizontal bis pq , ferner $oa \parallel ps$ bis zum Schnitte a des Bogens und von Peripherie zu Peripherie die Gerade ade ; dann ist der Erddruck parallel eo . Trägt man noch $pb = ad$ senkrecht zu ps auf, so stellt Dreieck psb die Grösse und Vertheilung des Erddruckes dar.

Figur 20.



Diese Konstruktion folgt ebenfalls aus dem allgemeinen Verfahren in §. 7, wenn man bedenkt, dass nun

$$\frac{p d}{p u} = \sin \varphi = \frac{c d}{c u}.$$

Auch zeigt sich hierbei, dass jetzt nur ein Gleichgewichtszustand existirt, da die Punkte c innerhalb und ausserhalb der Strecke $p u$ zusammenfallen, nämlich nach p .

Abfallende Oberfläche. Mit $\varepsilon = -\varphi$ folgen k, A, B, \mathfrak{K} wie oben, der spitze Winkel der Hauptspannung A mit der Oberfläche:

$$\beta = 45 - \frac{\varphi}{2} \dots \dots \dots 87)$$

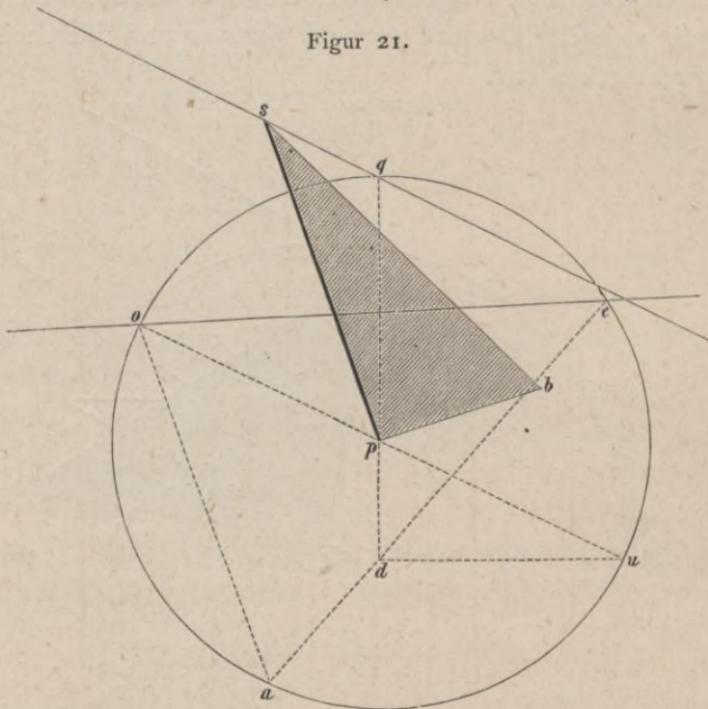
und für die Ebene $p s$ Erddruck in Kilogrammen:

$$E = \left(\frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{h^2 \gamma}{2 \cos(\alpha + \delta)} \dots \dots 88),$$

Richtungswinkel $\alpha + \delta$ des Horizontes gegen E nach 60) aus:

$$\text{tang}(\alpha + \delta) = \text{tang}(\varphi + \alpha) - 2 \text{tang} \varphi \dots 89).$$

Figur 21.



Durch Konstruktion ergibt sich der Erddruck nach der für ansteigende Oberfläche gegebenen Anleitung (Fig. 21).

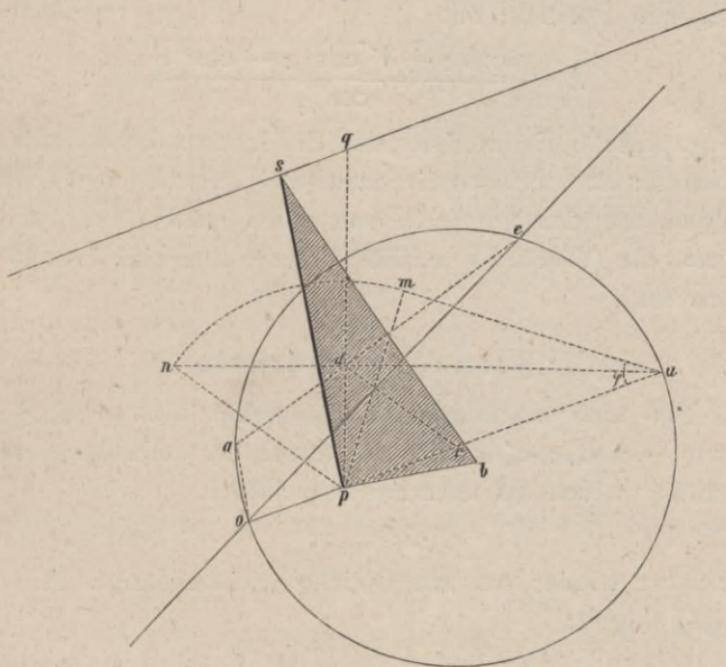
§. 10. Erddruck bei beliebig geneigter Oberfläche.

Unterer Grenzzustand. Es gelten die in §. 6 gegebenen Formeln mit

$$k = \frac{\cos \varepsilon - \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \quad 90).$$

Graphisch kann man nach §. 7 die Grösse und Vertheilung des Erddruckes auf eine Ebene $p s$, z. B. wie folgt erhalten (Fig. 22).

Figur 22.



Man ziehe $p q$ senkrecht bis zur Oberfläche, $p u = p q$ parallel der Letzteren, $u d$ horizontal nach $p q$, trage eine Gerade unter dem Winkel φ bei u an $u p$ (oder bei q an $q p$), falle ein Perpendikel $p m$ auf dieselbe und schneide von p aus mit der Grösse von $p m$ auf der horizontalen $u d$ ausserhalb dieser Strecke bei n ein. Macht man dann $d c \parallel n p$, legt um c mit dem Halbmesser $c u$ einen Kreisbogen, welcher die Verlängerung von $u p$ bei o trifft, zieht $o a \parallel s p$ und von Peripherie zu Peripherie die Gerade $a d e$, so ist der Erddruck parallel $e o$. Trägt man noch $p b = a d$

senkrecht zu ps auf, so stellt Dreieck psb nach Grösse und Vertheilung den Erddruck auf ps dar.

Wir haben eben auch hier wieder

$$\frac{dc}{cu} = \frac{pn}{pu} = \frac{pm}{pu} = \sin \varphi$$

wie es sein muss. Für $\varepsilon = \varphi$ geht diese Konstruktion in diejenige des §. 9 über.

Oberer Grenzzustand. Es gelten die in §. 6 gegebenen Formeln mit

$$k = \frac{\cos \varepsilon + \sqrt{\cos^2 \varepsilon - \cos^2 \varphi}}{\cos \varphi} \dots \dots 91).$$

Die graphische Ermittlung des Erddruckes kann nach der soeben für den unteren Grenzzustand gegebenen Anleitung erfolgen, nur dass an Stelle von «ausserhalb dieser Strecke bei n » die Worte «innerhalb dieser Strecke bei n » zu setzen sind.

§. 11. Wasserdruck.

Für eine vollkommene Flüssigkeit ist $\varphi = 0$ und wegen $-\varphi < \varepsilon < \varphi$ auch $\varepsilon = 0$. Daher liefert 44) sowohl mit dem oberen als unteren Vorzeichen:

$$k = 1;$$

es existirt wieder nur ein Gleichgewichtszustand. Aus 46) bis 48) folgen:

$$A = B = R = \gamma \dots \dots \dots 92).$$

Da für jede Richtung R zwischen A und B liegen muss, so sind die Spannungen nach allen Richtungen gleich gross, und demgemäss ergibt sich aus 47) für den Winkel β von A mit dem Wasserspiegel:

$$\sin 2\beta = \frac{0}{0};$$

man kann jede Richtung als die von A annehmen.

Für den Wasserdruck auf eine bis zur Tiefe h unter den Spiegel reichende Ebene ps hat man aus 62), weil nach 60) $\delta = 0$:

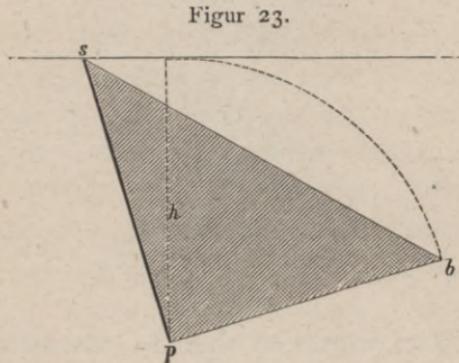
$$E = \frac{h^2 \gamma}{2 \cos \alpha} \dots \dots \dots 93),$$

also für den Horizontal- und Vertikaldruck:

$$H = \frac{h^2 \gamma}{2} \dots \dots \dots 94),$$

$$V = \frac{h^2 \gamma}{2} \tan \alpha \dots \dots \dots 95).$$

Durch Konstruktion findet sich der Wasserdruck auf ps , wenn man $pb = h$ senkrecht zu ps anträgt, wonach sofort das Dreieck psb die Grösse und Vertheilung von E angibt (Fig. 23). Dies folgt sowohl aus den Konstruktionen in §§. 8 bis 10, als aus Formel 93).



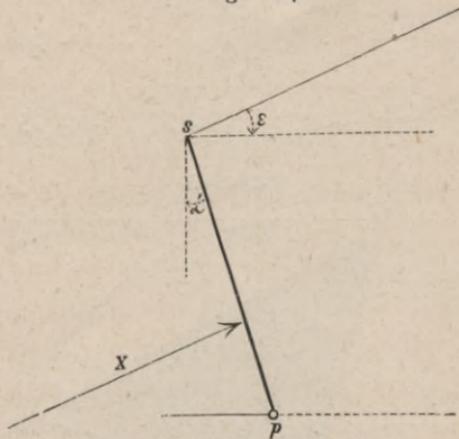
IV.

Begrenzung durch feste Wände bei ebener Oberfläche.

Die Entwicklungen in II. und III. sind unter den üblichen Annahmen über die Gesetze der Reibung und Kohäsion mathematisch scharf. Wir können also den Erd- druck auf eine Ebene im Inneren der Erdmasse für die Grenz- zustände und alle Zwischenzustände des Gleichgewichtes berechnen oder konstruieren, wenn die Erde eine ebene Ober- fläche und sonst nach allen Seiten unendliche Ausdehnung hat. Liesse sich nachweisen, dass die Pressungen ungeändert bleiben, wenn an Stelle der mathematischen Ebene eine feste Wand tritt, wie es bei Stützmauern der Fall ist, so würde auch der aktive und passive Erddruck auf diese, sowie die Zwischenzustände direkt nach den in III. ge-

gebenen Methoden zu bestimmen sein. Denn da beim gewöhnlichen, aktiven Erddruck die geringste Verkleinerung

Figur 24.



der X genügt, um ein Vorrücken der Erde gegen die Wand zu bewirken (Fig. 24), so würde derselbe dem unteren Grenzzustand des Gleichgewichtes entsprechen; der passive Erddruck oder Erdwiderstand aber, bei welchem die geringste Erhöhung der X ein Vorrücken der Wand gegen die Erde zur Folge

hätte, würde im oberen Grenzzustand zu finden sein. (S. 21.)

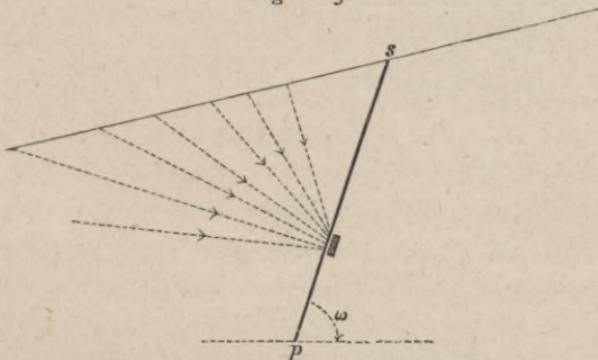
Von den Autoren, welche über die neuere Theorie des Erddruckes geschrieben haben, glaubten Rankine und Considère, dass durch die feste Wand nichts geändert werde, Saint-Venant hielt diese Voraussetzung wenigstens für praktisch zulässig, Levy und Winkler nahmen die willkürliche Behauptung, dass $\delta = \varphi$ sein müsse, aus der älteren in die neuere Theorie herüber (vergleiche «Zeitschrift für Baukunde» 1878, Seite 206). Der Erste, welcher den Gegenstand schärfer untersuchte, war Mohr; nur in Folge einer Hypothese über die passive Rolle der Hauptspannung B gegenüber der aktiven von A scheinen uns seine Resultate theilweise bestreitbar.

Im Folgenden soll untersucht werden, in welchen Fällen sich die genaue Gültigkeit der Theorie III ohne Hypothese feststellen lässt, womit nicht ausgeschlossen ist, dass die Theorie auch noch in anderen Fällen richtig bleiben kann (§. 16).

§. 12. Leitende Gesichtspunkte.

Wenn es sich darum handelt, nachzuweisen, inwiefern der für das unbegrenzte Erdreich geltende Gleichgewichtszustand durch feste Wände ungeändert bleibt, begegnet man vielfach dem folgenden Trugschluss: «Denken wir uns eine Ebene ps durch die Erde gelegt und die Masse auf einer Seite derselben plötzlich festwerdend, so wird dadurch offenbar am Gleichgewichtszustand nichts geändert.» — Zuzugeben ist, dass durch das Erhärten auf einer Seite keine Bewegung einzutreten braucht. Daraus aber, dass Gleichgewicht weiter herrscht, folgt noch nicht, dass auch der Gleichgewichtszustand derselbe geblieben ist. Sicher gültig bleiben in jeder ruhenden Erdmasse nur die Gesetze in I., II., welche auf unendlich viele Arten erfüllt sein können, und von welchen die unter III. nur einen speziellen Fall bilden. Ganz abgesehen davon, dass die Gleichungen in III. auch einen Druck auf eine feste Wand liefern, welche sich der natürlichen Böschung anschliesst ($\omega = \varphi$, $\alpha = \varphi - 90$, Fig. 25), ist leicht einzu-

Figur 25.



sehen, dass sich der Gleichgewichtszustand durch die Wand wenigstens ändern kann. Man fasse zu diesem Zwecke ein Erdtheilchen bei der Wand innerhalb des weich gebliebenen Theiles der Masse in's Auge. Hat dies Theilchen vor Einsetzen der Wand durch das Gewicht der jenseits derselben liegenden Erde Pressungen erhalten, so werden dieselben nun durch die feste und unbewegliche Wand abgehalten und

aufgenommen. Es ist hierbei sogar denkbar, dass zwischen Wand und Erde durch Setzen der letzteren ein freier Raum entsteht (für $\omega \leq \varphi$).

Damit die Gesetze für das Gleichgewicht im unbegrenzten Erdreich auch nach dem Einziehen fester Wände ungeändert fortbestehen, ist nöthig:

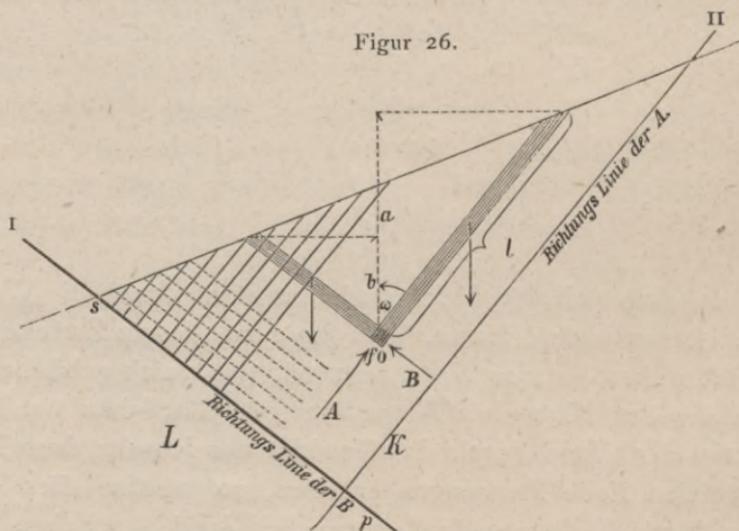
1. dass die Spannungen, für welche die Gesetze aufgestellt wurden, nicht selbst durch die Wand geändert werden;
2. dass die Wand den nach diesen Gesetzen auf sie entfallenden Kräften in gleicher Weise widerstehen könne wie vorher die Erde.

§. 13. Fall, in welchem die Theorie III für jeden Rauheitsgrad der Wand gilt.

Die Hauptspannungen A und B sind Normalspannungen und wirken rechtwinkelig zu einander, es finden längs der Flächen, welche von den Hauptspannungen affiziert werden, keinerlei Schubspannungen statt. Für die in III. angenommene unendliche Erdmasse mit ebener Oberfläche sind diese Flächen Ebenen.

Nehmen wir also in einer solchen Erdmasse eine Ebene ps in der Richtung der B an (Fig. 26), so hat

Figur 26.



diese einzig und allein den Normalspannungen A Widerstand zu leisten. Lassen wir die Ebene fest werden, so wird dadurch am Gleichgewichtszustand im Erdkörper K nichts geändert, falls die vor Einsetzen der Wand in K wirksam gewesenen Spannungen selbst ungeändert bleiben. Dies gilt bei der angenommenen Wandrichtung ganz allgemein, für jeden Reibungswinkel φ_1 von Erde auf Wand; denn wenn die A normal zur Wand wirken, ein Schubwiderstand also nicht beansprucht wird, so ist es auch gleichgültig, welchen Werth der letztere eventuell haben könnte.

Es fragt sich nun, ob die Spannungen in K durch das Einziehen von p s ungeändert geblieben sind. Um dies zu entscheiden, kann man von einer zuerst von Mohr nachgewiesenen Eigenschaft kohäsionsloser Erde mit ebener Oberfläche und sonst unendlicher Ausdehnung ausgehen.

Wir nehmen vor Einziehen der Wand einen Punkt o in K an und legen durch denselben in der Richtung von B ein Flächenelement f . Das Gewicht des auf f sitzenden Prisma vom Querschnitt f und der Axrichtung nach A ist in Einheiten von γ Kilogramm gleich $f l$, daher die Komponente in der Axrichtung $f l \cos \omega = f a$. Da nun Gleichgewicht herrscht und Schubkräfte in der Richtung von A nicht auftreten, so muss sein $f A - f a = 0$:

$$A = a.$$

Die andere Komponente des Prismagewichtes wird von der unteren Seitenfläche aufgenommen, um so viel ist der Druck auf diese grösser, wie auf die obere Seitenfläche. Legt man durch den Punkt o ein Flächenelement in der Richtung von A , so ergibt sich aus der Bedingung für das Gleichgewicht in der Richtung von B :

$$B = b.$$

Damit ist bewiesen, dass die Hauptspannungen erzeugt gedacht werden können durch das Gewicht der in ihren Richtungen bis zur Oberfläche liegenden Elementarsäulen, und dass z. B. der Druck auf ein Flächenelement f in der Richtung von B genau so gross ist, als wenn von f aus eine Röhre vom Querschnitt f mit einer vollkommenen

Flüssigkeit von der Dichtigkeit der Erde ginge. Analoges gilt für ein Flächenelement in der Richtung von A . — Bei horizontaler Oberfläche liegt eine Hauptspannung parallel der letzteren; man könnte sich also dann den Schnitt im Unendlichen in jeder Höhe über o denken. Die Formeln des §. 8 sagen uns, dass wir ihn im unteren Grenz-
zustand um:

$$y \operatorname{tang}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right),$$

im oberen um:

$$y \operatorname{cot}^2 \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)$$

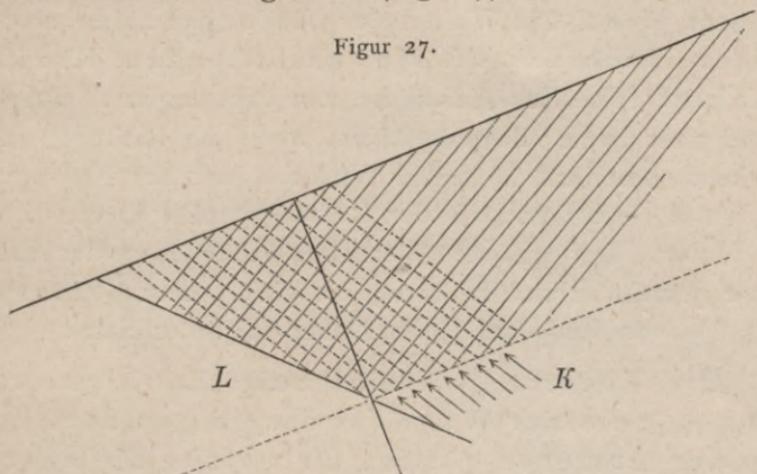
über o anzunehmen haben.

Denken wir uns jetzt wie oben eine Ebene ps in der Richtung der B gelegt und fest werden, so nimmt diese Wand zwar einen Theil der Gewichte der Elementarsäulen, durch welche die A im Erdkörper L gebildet werden, auf (Fig. 26), so dass hier der Gleichgewichtszustand geändert sein wird; aber im Erdkörper K ist an den Elementarsäulen zur Bildung der A und B gar nichts geändert worden. Sind aber die A und B gleichgeblieben, so gilt dies nach den in I. abgeleiteten, also unabhängig von Begrenzung und Wänden bestehenden Gleichungen 21) und 22), auch für die Spannungen in allen beliebigen Richtungen an jeder Stelle des Erdkörpers K . Für den Erdkörper L würden die A und B ganz ebenso ungeändert geblieben sein, wenn wir die Wand in die Richtung von A gelegt hätten. Man kann also aussprechen:

Die Theorie III bleibt bei einseitiger Begrenzung durch eine ebene Wand für jeden Rauigkeitsgrad der Wand gültig, wenn letztere die Neigung der einen Hauptspannung erhält und die durch einen beliebigen Punkt der Wand gezogene Richtungslinie der andern Hauptspannung die Oberfläche innerhalb des Erdkörpers trifft.

Es werde jetzt die Wand aus der Stellung I in Fig. 26 etwas rechts herumgedreht (Fig. 27), so werden für ge-

Figur 27.



wisse Punkte des Erdkörpers K Theile der Elementarsäulen, durch deren Gewicht die B gebildet wurden, abgeschnitten und ihr Gewicht von der Wand aufgenommen. Analoges gilt für den Erdkörper L in Hinsicht der A , wenn wir die Wand aus der Stellung II in Fig. 26 etwas links herumdrehen. Von Hypothesen absehend, müssen wir sagen:

Die Theorie lässt sich bis jetzt für keinen Rauigkeitsgrad der Wand als gültig nachweisen, wenn die Stellung der letzteren derart ist, dass die durch jeden ihrer Punkte gezogenen Richtungslinien der Hauptspannungen nicht beide die Oberfläche innerhalb des Erdkörpers treffen.

§. 14. Gültigkeit der Theorie III bei Begrenzung durch eine Mauer.

Betrachten wir nochmals den Erdkörper K , denken uns aber die Wand aus der Stellung I in Fig. 26 etwas links herumgedreht (Fig. 27), so ändert sich an den Elementarsäulen, durch deren Gewichte die A und B in K gebildet wurden, nichts. Es werden also zufolge 21) und 22)

innerhalb K auch die Spannungen in allen beliebigen Richtungen ungeändert bleiben und die Theorie III Gültigkeit behalten, wenn die Wand zur Aufnahme der nach dieser Theorie auf sie entfallenden Kräfte befähigt ist. Zur Aufnahme von Pressungen R ist die Wand aber immer dann befähigt, wenn die Richtung der R einen numerisch kleineren Winkel δ mit der Normalen zur Wand einschliesst, als den Reibungswinkel φ_1 von Erde auf Mauer. Der grösste Werth, welchen δ in der Erdmasse jemals erreichen kann, ist gleich dem Reibungswinkel φ von Erde auf Erde. Daher folgt der Satz:

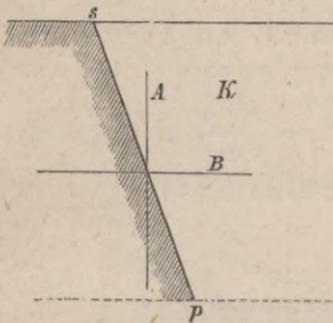
Die Theorie III bleibt beim Rauheitsgrad $\varphi_1 \geq \varphi$ einer Wand für diejenigen Stellungen der letzteren gültig, für welche die durch jeden ihrer Punkte gezogenen Richtungslinien der Hauptspannungen beide *) die Oberfläche innerhalb des Erdkörpers treffen. Für Mauern wird bekanntlich immer $\varphi_1 \geq \varphi$ angenommen.

Die Entscheidung, ob beide durch einen Punkt der Wand gezogenen Richtungslinien der Hauptspannungen die Oberfläche innerhalb des Erdkörpers schneiden, wäre in jedem einzelnen Falle sehr leicht, da sich mittelst der nach §. 7 zu erhaltenden Kreise die Hauptspannungen nach §. 2 sofort ergeben. Man kann aber auch allgemein vorgehen, wenn man aus den in III geführten Untersuchungen über die ungefähre Richtung der Hauptspannungen orientirt ist. Für den bei Mauern allein interessirenden aktiven Erddruck soll dies gezeigt werden.

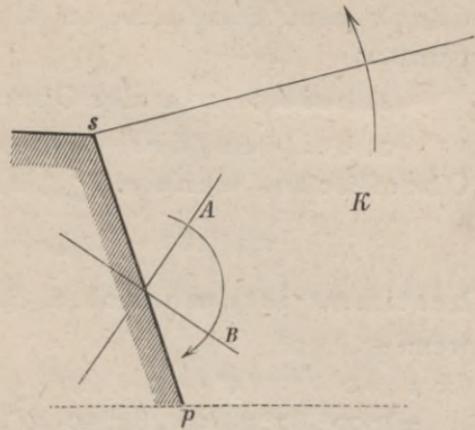
Bei horizontaler Oberfläche liegt A vertikal, B horizontal, es schneiden also stets beide Hauptspannungen die Oberfläche auf Seiten des Erdkörpers, wenn die Wand vertikal oder nach hinten abfallend, d. h. $\alpha \geq 0$ ist (Fig. 28, 34). Dreht man die Oberfläche aus der Lage in Fig. 28 links

*) Die Annahmen Mohr's führen zu dem Resultate, dass nur A diese Bedingung erfüllen muss.

Figur 28.

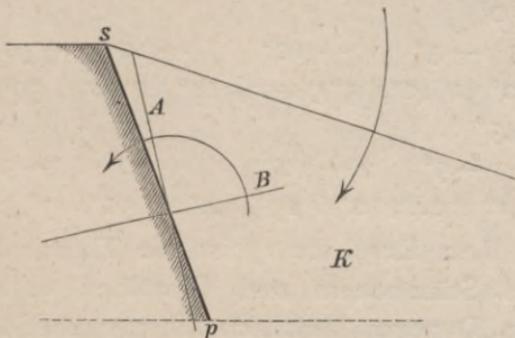


Figur 29.



herum (Fig. 29), so drehen sich A und B rechts herum und schneiden nur dann beide Hauptspannungen die Oberfläche im Erdkörper, wenn $\alpha \geq \zeta$ ist, unter ζ den Winkel der Vertikalen gegen die Richtungslinie von B verstanden. Drehen wir dagegen die Oberfläche aus der Lage in Fig. 28 rechts herum (Fig. 30), so drehen sich A und B links herum und beide Hauptspannungen schneiden die Ober-

Figur 30.



fläche im Erdkörper, wenn $\alpha \geq \eta$ ist und η den Winkel der Vertikalen gegen die Hauptspannung A bedeutet. Bezeichnet nun wie bisher β den spitzen Winkel der Richtungslinie von A mit der Oberfläche, so hat man:

$$\zeta = \varepsilon - \beta, \quad \eta = 90 + \varepsilon - \beta \dots 96),$$

und da β bestimmt ist durch 47), so können wir das Ergebniss dieser letzten Untersuchung wie folgt aussprechen.

Die Theorie III gilt für den aktiven Erd-
druck auf eine ebene Mauerfläche (Fig. 34)
genau:

1. bei horizontaler Oberfläche, wenn $\alpha \geq 0$ ist;
2. bei von der Mauer aus ansteigender
Oberfläche, wenn $\alpha \geq \zeta$ und ζ durch

$$\sin (180 - 2 \zeta + \varepsilon) = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} \dots 97$$

bestimmt ist, wonach z. B. sein muss:

wenn $\varphi = 30^\circ$

für $\varepsilon = 0$ 5° 10° 20° 30° 45°
 $\alpha \geq 90^\circ, 87^\circ 28' 50'', 84^\circ 50' 20'', 78^\circ 25' 10'', 60^\circ, \quad -;$

wenn $\varphi = 45^\circ$

für $\varepsilon = 0$ 5° 10° 20° 30° 45°
 $\alpha \geq 90^\circ, 88^\circ 52' 37'', 87^\circ 53' 31'', 85^\circ 32' 10'', 82^\circ 30', 67^\circ 30';$

3. bei von der Mauer aus abfallender Ober-
fläche, wenn $\alpha \geq \eta$ und η durch

$$\sin (2 \eta - \varepsilon) = - \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi} \dots 98$$

bestimmt ist, so dass sein muss:

wenn $\varphi = 30^\circ$

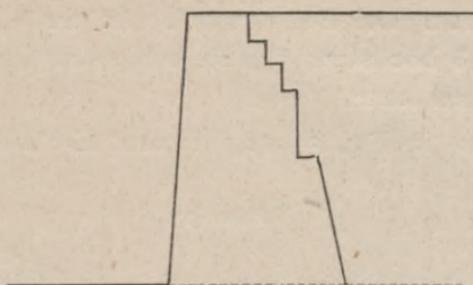
für $\varepsilon = 0$ -5° -10° -20° -30° -45°
 $\alpha \geq 0, 2^\circ 31' 10'', 5^\circ 9' 40'', 11^\circ 34' 50'', 30^\circ, \quad -;$

wenn $\varphi = 45^\circ$

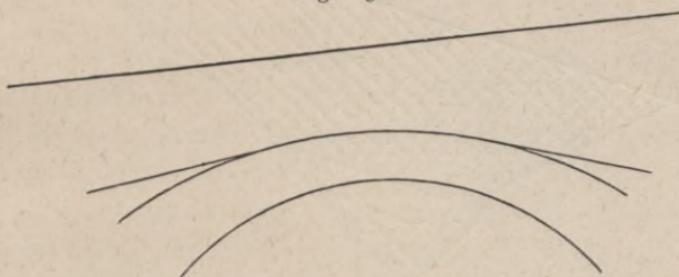
für $\varepsilon = 0$ -5° -10° -20° -30° -45°
 $\alpha \geq 0, 1^\circ 2' 24'', 2^\circ 6' 29'', 4^\circ 27' 50'', 7^\circ 30', 22^\circ 30';$

Nach dem Resultate 1) ist die Theorie III für die
meisten bei Stützmauern und Gewölben vorkommenden
Fälle genau. Dagegen lässt sich die genaue Gültigkeit bei
ansteigender Oberfläche nur in Ausnahmefällen und bei
hinterschnittener Mauer (α negativ) nie erweisen. Selbst-
verständlich bleibt die Theorie auch genau für jede Wand,
welche aus mehreren ebenen Flächen oder Flächenelementen
von den ermittelten Stellungen zusammengesetzt ist, etwa
wie in Fig. 31, 32, da es nur auf Erfüllung der oben
gesperrt gedruckten Bedingungen ankommt.

Figur 31.



Figur 32.



§. 15. Allgemeinster Fall. Erdbassins. Parallele Mauern.

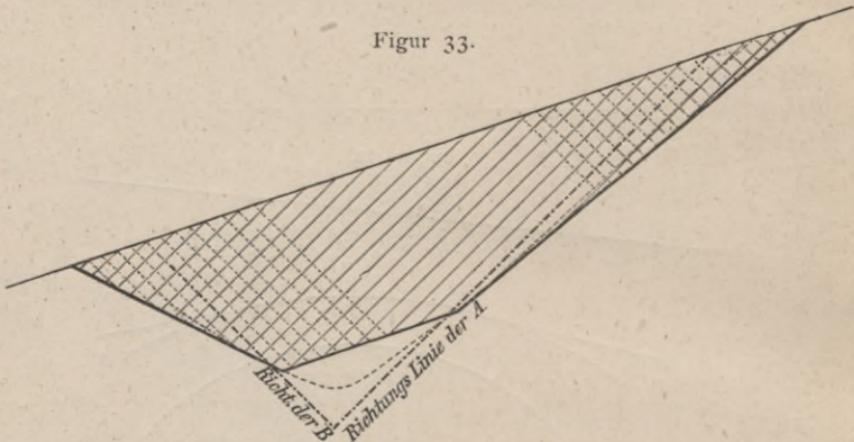
Haben wir mehrere Wandflächen, deren jede einzelne in Bezug auf Neigung und Rauigkeitsgrad ($\varphi_1 \geq \delta$) den oben gestellten Bedingungen entspricht, so dass jede einzelne am Gleichgewichtszustande nichts ändert, so bleibt auch nach Einsetzen aller zusammen der im unbegrenzten Erdreich gültige Gleichgewichtszustand bestehen. Man kann aussprechen:

Ist eine Erdmasse mit ebener Oberfläche durch beliebig viele ebene oder krumme Wände von beliebigen Rauigkeitsgraden begrenzt, so bleibt die Theorie III genau gültig, wenn 1. die durch jeden Punkt der Wände gezogenen Richtungslinien der Hauptspannungen beide die Oberfläche innerhalb des Erdkörpers schneiden, und 2. in jedem Wandelement die afficirende Spannung R einen numerisch kleineren Winkel δ mit der Normalen einschliesst,

als der Reibungswinkel φ_1 von Erde auf Wand daselbst ist. Die Bedingung 2) ist für $\varphi_1 \geq \varphi$ immer erfüllt, weil δ höchstens den Reibungswinkel von Erde auf Erde erreichen kann.

Für das in Fig. 33 angedeutete Erdbassin beispiels-

Figur 33.



weise hat die Theorie III Gültigkeit, wenn die Wand nicht zu glatt ist ($\varphi_1 \geq \delta$) und das Gleiche gilt für die einfach punktierte Umfassung des Bassins. Würden wir jedoch die strichpunktirten Wände an Stelle der ausgezogenen setzen, so dürften die Wände auch absolut glatt sein. Bei weiterem Nachinnendrehen aber ist die genaue Gültigkeit nicht mehr festzustellen, weil dann die Bedingung 1) verletzt wird. Wir können also nichts nachweisen über die Gültigkeit der Theorie III bei zwei Mauerflächen, welche nach oben um weniger als 90° divergieren, wozu auch der Fall zweier paralleler Mauern gehört.

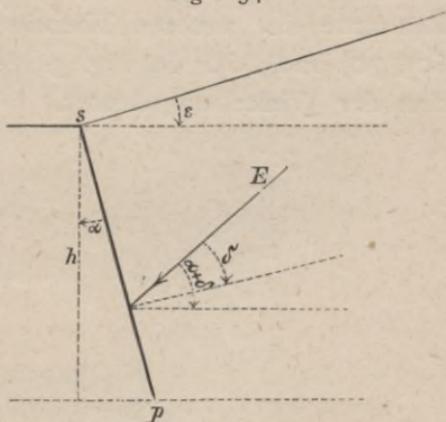
Bekanntlich nahmen Scheffler und Hagen an, dass eine oben horizontale, von zwei vertikalen Wänden eingeschlossene Erdmasse genau dieselben Pressungen auf beide Wände ausübe, als wenn die Erde von einer Wand aus bis in's Unendliche reicht. Auch nach den Mohr'schen Resultaten würde dies richtig sein. Wir haben keinen Grund es zu bestreiten, halten aber die versuchten Beweise für ungenügend.

§. 16. Schluss.

Es ist möglich und wahrscheinlich, dass die Theorie III noch in anderen als den jetzt erhaltenen Fällen bei Begrenzung durch feste Wände gültig bleibt. Dies trifft ja wenigstens in dem Spezialfalle $\varphi = 0$ (Wasser) für ganz beliebige Wände und Bassins zu. Mit Rücksicht auf letzteren Umstand wird man sagen können: Bei beliebigen Wandrichtungen bleibt die Theorie III um so angenäherter richtig, je kleiner der Reibungswinkel φ von Erde auf Erde ist.

Ferner lässt sich annehmen, dass die Theorie III um so angenäherter gilt, je weniger sich die Wand von der im §. 14 bestimmten Grenzlage der genauen Gültigkeit entfernt. Bei $\varepsilon \geq 0$ (Fig. 34)

Figur 34.



beispielsweise ist die Theorie genau gültig für $\alpha \geq \zeta$, und sie wird auch in anderen Fällen um so angenäherter gelten, je größer α ist. Schäffer hält die neuere Theorie bei horizontaler oder ansteigender Oberfläche und vertikaler oder nach hinten abfallender Mauer ($\varepsilon \geq 0$, $\alpha \geq 0$) für absolut genau.

Jedenfalls dürfte sie in allen diesen Fällen eher anwendbar sein, als die ganz willkürliche ältere Theorie des Erddruckes.

Mit über 0 hinaus abnehmendem α wird die Theorie III immer weniger zutreffend und für $\alpha = 90 - \varphi$ ist kein Druck mehr auf die Mauerfläche vorhanden, während die Gültigkeit der abgeleiteten Formeln einen solchen bedingen würde. Für alle Fälle, in welchen die Theorie III nicht gilt, ist eine scharfe, bis zu praktischer Verwendbarkeit führende Theorie des Erddruckes bis heute über-

haupt unmöglich, es gelten nur die Beziehungen unter I, II, alle anderen Formeln sind, wenn brauchbar, als empirische aufzufassen.

Die folgende, an anderer Stelle («Zeitschrift für Baukunde», 1878) von mir abgeleitete Formel für den Erddruck auf eine Mauerfläche gilt für beliebige δ und vereinigt in sich die Resultate der älteren und neueren Theorie

$$E = \left(\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{(n + 1) \cos \alpha} \right)^2 \frac{h^2 \gamma}{2 \cos(\alpha + \delta)} \dots \dots \dots 99)$$

mit

$$n = \sqrt{\frac{\sin(\varphi + \delta) \sin(\varphi - \varepsilon)}{\cos(\alpha + \delta) \cos(\alpha - \varepsilon)}} \dots \dots \dots 100).$$

Um den Erddruck nach der älteren Theorie zu erhalten, hat man darin $\delta = \varphi$ oder 0 zu setzen, die Resultate der neueren Theorie ergeben sich mit δ nach 60), 70) und 86). In Fig. 34 ist der positive Drehungssinn der Winkel angedeutet.



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II L. inw. 31866

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298385