Sonderabdruck aus:

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN VON

E. LAMPE IN BERLIN. **W. FRANZ MEYER** IN KÖNIGSBERG I. PR. **E. JAHNKE** IN BERLIN.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

105

An unsere Leser!

Die Redaktion des Archivs der Mathematik und Physik legt
darauf, von Zeit zu Zeit Kunde zu geben, wie weit es gelungen ist, das
ersten Bande der dritten Reihe abgedruckte Programm zu verwi
welche Aussichten auf Einlösung der Versprechungen bestehen,
füllen sie bisher weniger in der Lage war, und endlich welc
das Programm in nächster Zukunft etwa erfahren soll.

Blicken wir zurück auf die jetzt vorliegenden acht Bände, a
Mannigfaltigkeit der bisher abgedruckten Artikel! Nicht bl die Erweite
der mathematischen Erkenntnis ist angestrebt, auch die Verbreitung
Resultate mathematischer Forschung ist als Ziel festgehalten. Einige A
sätze vermitteln das Verständnis der neueren mathematischen Anschauung
wieder andere behandeln in wissenschaftlicher Form Fragen des Mittelsch
unterrichts, welche durch die Ergebnisse der Forschung in ein neues Li
gerückt werden. Physiker und Techniker kommen zu Wort, sei es, daß
im Vordergrund stehende Fragen der experimentellen Physik, der Elektr
technik von neuen Gesichtspunkten aus beleuchten, sei es, daß sie den Les
über den augenblicklichen Stand der einzelnen Forschungsgebiete orientiere
Außerdem bringt das Archiv Rezensionen und Anzeigen der neuerschienen
Werke, sowie einen Sprechsaal für die Encyklopädie der mathematische
Wissenschaften. Besondere Beachtung wird den Aufgaben und Lehrsätz
der Vermischten Mitteilungen gewidmet, denen die Dozenten, Oberlehrer un
— was freudig zu begrüßen ist — auch die Studierenden ein ständi
wachsendes Interesse entgegenbringen.

Die Redaktion ist in der Lage, für den Teil des Programms, der bis
her noch wenig berücksichtigt werden konnte, nämlich die Verbreitung d
Resultate mathematischer Forschung, weitere Arbeiten in Aussicht zu steller
So wird der zehnte Band aus der Feder des Herrn Philip E. B. Jourdai
eine Übersicht der Theorie der transfiniten Zahlen bringen. Herr G. Ber
han hat uns einen Aufsatz zur Verfügung gestellt, welcher nach einem de
projektiven Geometrie entlehnten Ordnungsprinzip eine systematische Be
handlung der Dreiecksgeometrie bietet. Von Herrn A. Kneser werden wi
einen referierenden Aufsatz über die Fourierschen Reihen und die harmo
nische Analyse bringen. Der mitunterzeichnete E. Lampe hat die Absich
eine einfache Darstellung der mechanischen Quadratur zu liefern. Ebenso
will der mitunterzeichnete Franz Meyer eine Einführung in die Theorie
des Kugelkreises mit Anwendungen auf nichteuklidische Geometrie schreiben
Und endlich hat der mitunterzeichnete E. Jahnke einen Artikel über
Vektoren mit Anwendungen auf die Mechanik in Aussicht gestellt.

Was die versprochenen Darstellungen aus der Physik und Te
geht, so haben wir inzwischen einen Aufsatz des Herrn W. West
die wichtigsten Beziehungen zwischen elektrischen und optischen K
insbesondere über den von Hagen und Rubens nachgewiesenen Zusa
hang des Reflexionsvermögens mit dem elektrischen Leitvermögen,

[Fortsetzung auf S. 3 des Ums

Sonderabdruck aus Archiv der Mathematik und Physik. III. Reihe. XI. Heft 3.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Aufstellung einiger Krümmungsformeln, die Integralflächen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung betreffen.

Von K. Żorawski in Krakau.

Diese kurze Abhandlung enthält die Aufstellung einiger Formeln und Relationen, welche sich auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung mit einer abhängigen und zwei unabhängigen Veränderlichen beziehen. Die hier durchgeführten Betrachtungen bilden eine Anwendung desjenigen Formelsystems der Krümmungstheorie von Flächen, welches in der sogenannten natürlichen Geometrie benutzt wird.

1. Es sei im Raume ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z. Man betrachte eine Fläche und wähle auf derselben ein orthogonales System von krummlinigen Koordinatenlinien. Man nenne Kurvenschar 1 und Kurvenschar 2 zwei Kurvenscharen dieses Systems und bezeichne mit s_1 und s_2 die Bogenlängen der Kurven dieser Kurvenscharen. Es seien die positiven Halbtangenten derselben und die positive Flächennormale so gewählt, daß die Richtungskosinus dieser positiven Halbgeraden beziehungsweise die folgenden seien:

$$\frac{dx}{ds_1}, \quad \frac{dy}{ds_1}, \quad \frac{dz}{ds_1},$$

$$\frac{dx}{ds_2}, \quad \frac{dy}{ds_2}, \quad \frac{dz}{ds_2},$$

$$X = \frac{dy}{ds_1}\frac{dz}{ds_2} - \frac{dy}{ds_2}\frac{dz}{ds_1}, \quad Y = \frac{dz}{ds_1}\frac{dx}{ds_2} - \frac{dz}{ds_2}\frac{dx}{ds_1}, \quad Z = \frac{dx}{ds_1}\frac{dy}{ds_2} - \frac{dx}{ds_2}\frac{dy}{ds_1}.$$

Bei dieser Wahl ist das Trieder dieser Halbgeraden in der angegebenen Reihenfolge mit dem Trieder der positiven Halbachsen x, y, z kongruent.

Es sei in der Tangentialebene der Fläche derjenige Sinn der Drehung positiv, in welchem die positive Halbtangente der Kurvenschar 1 um $\frac{\pi}{2}$ gedreht werden muß, um zur positiven Halbtangente der Kurvenschar 2 zu gelangen. Eine dritte Kurvenschar auf der Fläche kann durch den Winkel ω ihrer positiven Halbtangente mit der positiven Halbtangente der Kurvenschar 1 festgelegt werden. Ist s die Bogenlänge der Kurve dieser dritten Kurvenschar, und wächst diese Bogenlänge in der Richtung der positiven Halbtangente, so sind $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Richtungskosinus dieser positiven Halbtangente. Man betrachte noch die orthogonalen Trajektorien dieser Kurvenschar; man bezeichne mit σ die Bogenlänge derselben und setze voraus, daß die entsprechende positive Halbtangente, deren Richtungskosinus $\frac{dx}{d\sigma}$, $\frac{dy}{d\sigma}$, $\frac{dz}{d\sigma}$ sind, so gewählt worden ist, daß sie mit der positiven Halbtangente der Kurvenschar 1 den Winkel $\omega + \frac{\pi}{2}$ bildet. Die zwei letztgenannten Kurvenscharen wollen wir als Kurvenscharen ω und $\omega + \frac{\pi}{2}$ bezeichnen.

Man bezeichne jetzt mit n, g und τ die Normalkrümmung, die geodätische Krümmung und die geodätische Torsion der Kurvenschar ω und nehme, um in bezug auf die Vorzeichen eine bestimmte Wahl zu treffen, an, daß diese Krümmungen durch die Formeln:

$$n = \sum X \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad g = \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad \tau = \sum \frac{dx}{d\sigma} \frac{dX}{ds}$$

bestimmt sind, wo das Summenzeichen auf drei Achsen x, y, z zu erstrecken ist. Dementsprechend wollen wir für die Kurvenscharen 1 und 2 solche Formeln gelten lassen, welche aus den angeführten Formeln durch die Annahmen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$ hervorgehen. Man hat also für die Kurvenschar 1:

$$n_1 = \sum X \frac{d^2 x}{ds_1^2}, \quad g_1 = \sum \frac{dx}{ds_2} \frac{d^2 x}{ds_1^2}, \quad \tau_1 = \sum \frac{dx}{ds_2} \frac{dX}{ds_1}$$

und für die Kurvenschar 2:

$$n_2 = \sum X \frac{d^2 x}{ds_2^2}, \quad g_2 = -\sum \frac{dx}{ds_1} \frac{d^2 x}{ds_2^2}, \quad \tau_2 = -\sum \frac{dx}{ds_1} \frac{dX}{ds_2}.$$

Es findet die Beziehung statt:

$$\tau_1 + \tau_2 = 0,$$

und wir wollen die Bezeichnung:

$$-\tau_1 = \tau_2 = m$$

benutzen. Alsdann hat man für die Kurvenschar ω die Formeln:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} n &= n_1 \cos^2\omega + 2m \cos\omega \sin\omega + n_2 \sin^2\omega, \\ g &= g_1 \cos\omega + g_2 \sin\omega + \frac{d\omega}{ds}, \\ \tau &= \tfrac{1}{2}(n_1 - n_2) \sin 2\omega - m \cos 2\omega. \end{aligned} \right.$$

Endlich bemerke man, daß die Größen n_1, n_2, m, g_1, g_2 den Beziehungen von Gauß und Mainardi-Codazzi genügen, die unter Benutzung der hier angegebenen Bezeichnungen lauten:

$$(2)\qquad \begin{cases} n_1 n_2 - m^2 = \dfrac{dg_1}{ds_2} - \dfrac{dg_2}{ds_1} - g_1^2 - g_2^2, \\[2mm] \dfrac{dn_1}{ds_2} - \dfrac{dm}{ds_1} = n_1 g_1 + 2 m g_2 - n_2 g_1, \\[2mm] \dfrac{dn_2}{ds_1} - \dfrac{dm}{ds_2} = n_1 g_2 - 2 m g_1 - n_2 g_2. \end{cases}$$

2. Es sei jetzt die partielle Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(3)\qquad F(x, y, z, p, q) = 0$$

gegeben, wo zur Abkürzung $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$ gesetzt ist. Die charakteristischen Streifen dieser Differentialgleichung sind durch diese Differentialgleichung selbst und durch das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z}$$

definiert, wo F mit den verschiedenen Indices die partiellen Differentialquotienten der Funktion F in bezug auf die angezeigten Veränderlichen bezeichnet. Wenn man voraussetzt, daß der Ausdruck:

$$R = \sqrt{(1 + p^2)F_p^2 + 2pqF_pF_q + (1 + q^2)F_q^2}$$

für Wertsysteme von x, y, z, p, q, welche die Gleichung (3) befriedigen, im allgemeinen nicht gleich Null ist, so reduziert sich die Charakteristik im allgemeinen nicht auf einen Punkt und ist keine Minimalkurve. Bei der genannten Voraussetzung in bezug auf R hat der Ausdruck: $H = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ dieselbe Eigenschaft, d. h. diejenigen orthogonalen Trajektorien der Charakteristiken, welche auf den Flächenelementen der charakteristischen Streifen senkrecht stehen, sind im allgemeinen keine Minimalkurven.

Wir wollen nun auf jeder Integralfläche der partiellen Differentialgleichung (3) die Schar der Charakteristiken als Kurvenschar 1 und die Schar der orthogonalen Trajektorien derselben als Kurvenschar 2 annehmen. Die Richtungen der Tangenten dieser Kurvenscharen und der Normalen der Integralfläche können ohne weiteres bestimmt werden und die Richtungskosinus der entsprechenden positiven Halbgeraden können in Übereinstimmung mit den Voraussetzungen und Bezeichnungen der Nummer 1 gewählt werden. Es können nämlich die Formeln:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{ds_1} = \dfrac{F_p}{R}, \quad \dfrac{dy}{ds_1} = \dfrac{F_q}{R}, \quad \dfrac{dz}{ds_1} = \dfrac{1}{R}(pF_p + qF_q), \\[2mm] X = \dfrac{p}{H}, \quad Y = \dfrac{q}{H}, \quad Z = -\dfrac{1}{H} \end{cases}$$

und unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$(5)\qquad \begin{cases} a = (1+p^2)F_p + pqF_q, \\ b = pqF_p + (1+q^2)F_q, \\ c = qF_p - pF_q \end{cases}$$

die Formeln:

$$(6)\qquad \frac{dx}{ds_2} = \frac{b}{HR}, \quad \frac{dy}{ds_2} = -\frac{a}{HR}, \quad \frac{dz}{ds_2} = -\frac{c}{HR}$$

angenommen werden.

Wir wollen uns zunächst damit beschäftigen, die Größen n_1, m und g_1 zu berechnen. Zu dem Zwecke müssen noch einige andere Formeln angeführt werden. Aus den Differentialgleichungen der Charakteristiken folgen unmittelbar die Werte:

$$\frac{dp}{ds_1} = -\frac{1}{R}(F_x + pF_z), \quad \frac{dq}{ds_1} = -\frac{1}{R}(F_y + qF_z),$$

und wenn man zur Abkürzung

$$(7)\qquad \begin{cases} F_p\dfrac{\partial f}{\partial x} + F_q\dfrac{\partial f}{\partial y} + (pF_p + qF_q)\dfrac{\partial f}{\partial z} \\ -(F_x + pF_z)\dfrac{\partial f}{\partial p} - (F_y + qF_z)\dfrac{\partial f}{\partial q} = W_1(f) \end{cases}$$

setzt, so wird

$$(8)\qquad \frac{df}{ds_1} = \frac{1}{R}W_1(f).$$

Man sieht ferner leicht, daß die Formel:

$$W_1(H) = -\frac{1}{H}[p(F_x + pF_z) + q(F_y + qF_z)]$$

gilt, und infolge der Formeln (4) und (8) kommt man auf folgende Ausdrücke:

$$\frac{d^2x}{ds_1^2} = \frac{1}{R^2}W_1(F_p) - \frac{F_p}{R^3}W_1(R),$$

$$\frac{d^2y}{ds_1^2} = \frac{1}{R^2}W_1(F_q) - \frac{F_q}{R^3}W_1(R),$$

$$\frac{d^2z}{ds_1^2} = \frac{1}{R^2}[pW_1(F_p) + qW_1(F_q) - F_p(F_x + pF_z) - F_q(F_y + qF_z)]$$
$$\qquad - \frac{1}{R^3}(pF_p + qF_q)W_1(R),$$

$$\frac{dX}{ds_1} = -\frac{1}{HR}(F_x + pF_z) - \frac{pW_1(H)}{H^2R},$$

$$\frac{dY}{ds_1} = -\frac{1}{HR}(F_y + qF_z) - \frac{qW_1(H)}{H^2R},$$

$$\frac{dZ}{ds_1} = \frac{W_1(H)}{H^2R}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke und der früheren Formeln kommt man nun leicht zur Aufstellung der Formeln für n_1, m und g_1. Wir erhalten nämlich:

(9) $$n_1 = \frac{1}{HR^2}[F_p(F_x + pF_z) + F_q(F_y + qF_z)],$$

(10) $$m = \frac{1}{H^2R^2}[b(F_x + pF_z) - a(F_y + qF_z)],$$

(11) $$g_1 = \frac{H}{R^3}[F_q W_1(F_p) - F_p W_1(F_q)] + \frac{cn_1}{R}.$$

Dies sind die Formeln für Normalkrümmung, geodätische Torsion und geodätische Krümmung der Charakteristiken.[1])

3. Wir gehen nun zur Betrachtung der Werte der Ableitungen $\frac{dp}{ds_2}$, $\frac{dq}{ds_2}$ über. Die Differentialgleichung (3) liefert durch Differentiation nach s_2 die Beziehung:

$$F_x\frac{dx}{ds_2} + F_y\frac{dy}{ds_2} + F_z\frac{dz}{ds_2} + F_p\frac{dp}{ds_2} + F_q\frac{dq}{ds_2} = 0,$$

und wenn man die Formeln (5), (6) und (10) ausnutzt, so läßt sich diese Beziehung in der Form:

(12) $$F_p\frac{dp}{ds_2} + F_q\frac{dq}{ds_2} = -HRm$$

darstellen. Man bemerke jetzt, daß sich längs einer jeden Charakteristik unendlich viele Integralflächen berühren. Für ein gemeinsames Flächenelement besitzen diese Integralflächen unendlich viele von einander verschiedene Krümmungselemente. Da aber die fraglichen Ableitungen von der Wahl der Krümmungselemente abhängig sind, so können für dieselben auf Grund der vorgelegten Differentialgleichung Funktionen von x, y, z, p, q nicht erhalten werden, welche die Gesamtheit der Werte dieser Ableitungen darstellen und keine weiteren veränderlichen Größen enthalten. Man kann aber leicht zeigen, daß, wenn man zur Unterscheidung der genannten Krümmungselemente die Normalkrümmung n_2 der orthogonalen Trajektorien der Charakteristiken wählt, man für die fraglichen Ableitungen mit Hilfe dieser Größe vollständig bestimmte Ausdrücke erhalten wird. Man hat nämlich die Formel:

$$n_2 = \sum X\frac{d^2x}{ds_2^2} = \frac{1}{H}\left(p\frac{d^2x}{ds_2^2} + q\frac{d^2y}{ds_2^2} - \frac{d^2z}{ds_2^2}\right);$$

---

1) Es mag bemerkt werden, daß die Gleichungen $n_1 = 0$ und $m = 0$ im Werke „Sophus Lie, Geometrie der Berührungstransformationen dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers", Leipzig 1896, S. 640 und S. 657 angegeben sind.

wenn man aber die Relation:

$$p\frac{dx}{ds_2}+q\frac{dy}{ds_2}-\frac{dz}{ds_2}=0$$

nach s_2 differenziert und die erhaltene Beziehung ausnutzt, so bekommt man die Formel:

$$n_2=-\frac{1}{H}\left(\frac{dp}{ds_2}\frac{dx}{ds_2}+\frac{dq}{ds_2}\frac{dy}{ds_2}\right),$$

aus welcher mit Benutzung der Formeln (6) die Gleichung:

$$(13)\qquad -b\frac{dp}{ds_2}+a\frac{dq}{ds_2}=H^2Rn_2$$

folgt. Die Gleichungen (12) und (13) können nun in bezug auf die Ableitungen $\frac{dp}{ds_2}$ und $\frac{dq}{ds_2}$ aufgelöst werden. Die Determinante dieses Systems ist R^2, und man erhält die Formeln:

$$(14)\qquad \left|\begin{aligned}\frac{dp}{ds_2}&=-\frac{H}{R}(am+HF_qn_2),\\ \frac{dq}{ds_2}&=-\frac{H}{R}(bm-HF_pn_2).\end{aligned}\right.$$

Auf Grund dieser Formeln und der Formeln (6) kann nun der Ausdruck für die Ableitung einer beliebigen Funktion f von x, y, z, p, q nach s_2 aufgestellt werden. Führt man nämlich die Bezeichnung:

$$(15)\qquad W_2(f)=b\left(\frac{\partial f}{\partial x}-H^2m\frac{\partial f}{\partial q}\right)-a\left(\frac{\partial f}{\partial y}+H^2m\frac{\partial f}{\partial p}\right)-c\frac{\partial f}{\partial z}$$

ein, so ist leicht zu sehen, daß die folgende Formel stattfindet:

$$(16)\qquad \frac{df}{ds_2}=\frac{1}{HR}W_2(f)-\frac{H^2}{R}n_2\left(F_q\frac{\partial f}{\partial p}-F_p\frac{\partial f}{\partial q}\right).$$

Wir wollen hier noch die Formel für g_2 d. h. für die geodätische Krümmung der orthogonalen Trajektorien der Charakteristiken aufstellen. Man bemerke, daß g_2 in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$g_2=\sum\frac{dx}{ds_2}\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dx}{ds_1}\right).$$

Wird die erste Reihe der Formeln (4) nach s_2 differenziert, so folgt:

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dx}{ds_1}\right)=\frac{1}{R}\frac{dF_p}{ds_2}-\frac{1}{R}\frac{dR}{ds_2}\frac{dx}{ds_1},$$

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dy}{ds_1}\right)=\frac{1}{R}\frac{dF_q}{ds_2}-\frac{1}{R}\frac{dR}{ds_2}\frac{dy}{ds_1},$$

$$\frac{d}{ds_2}\left(\frac{dz}{ds_1}\right)=\frac{1}{R}\left(p\frac{dF_p}{ds_2}+F_p\frac{dp}{ds_2}+q\frac{dF_q}{ds_2}+F_q\frac{dq}{ds_2}\right)-\frac{1}{R}\frac{dR}{ds_2}\frac{dz}{ds_1},$$

also kann g_2 auf die Form:

$$g_2 = \frac{1}{R}\left[\frac{dF_p}{ds_2}\left(\frac{dx}{ds_2} + p\,\frac{dz}{ds_2}\right) + \frac{dF_q}{ds_2}\left(\frac{dy}{ds_2} + q\,\frac{dz}{ds_2}\right) + \left(F_p\,\frac{dp}{ds_2} + F_q\,\frac{dq}{ds_2}\right)\frac{dz}{ds_2}\right]$$

gebracht werden. Wenn man aber berücksichtigt, daß aus den Formeln (6) die Werte:

$$\frac{dx}{ds_2} + p\,\frac{dz}{ds_2} = \frac{H}{R}F_q, \quad \frac{dy}{ds_2} + q\,\frac{dz}{ds_2} = -\frac{H}{R}F_p$$

folgen, und wenn man die Beziehung (12) sowohl wie die Formel (16) ausnutzt, so kommt man zum Resultate:

$$(17) \qquad g_2 = \frac{1}{R^3}\left[F_q W_2(F_p) - F_p W_2(F_q)\right] + \frac{c}{R}\,m - \frac{H^3}{R^3}\,n_2\left(F_q^2 F_{p^2} - 2F_q F_p F_{pq} + F_p^2 F_{q^2}\right),$$

wo F_{p^2}, F_{pq}, F_{q^2} die Differentialquotienten zweiter Ordnung der Funktion F nach p und q bezeichnen.

4. Unter **2.** und **3.** beschäftigten wir uns mit den Normalkrümmungen und den geodätischen Krümmungen der Charakteristiken und ihren orthogonalen Trajektorien auf Integralflächen und mit der geodätischen Torsion dieser Kurvenscharen. Diese Größen müssen den Gleichungen von Gauß und Mainardi-Codazzi Genüge leisten, und wir wollen nun zusehen, zu welchem Resultate hier die Anwendung dieser Fundamentalrelationen der Flächentheorie führt.

Der Kürze halber wird es bequem sein, g_2 durch die Formel: $g_2 = \alpha + \beta n_2$ darzustellen, wo also α und β die in (17) auftretenden Ausdrücke bezeichnen. Alsdann liefert die Anwendung der genannten Fundamentalrelationen unter Berücksichtigung der Formeln (8) und (16) die Beziehungen:

$$(18)\begin{cases} n_1 n_2 - m^2 = \dfrac{1}{HR}\,W_2(g_1) - \dfrac{H^2}{R}\left(F_q\,\dfrac{\partial g_1}{\partial p} - F_p\,\dfrac{\partial g_1}{\partial q}\right)n_2 \\ \qquad - \dfrac{1}{R}\left[W_1(\alpha) + W_1(\beta)n_2 + \beta W_1(n_2)\right] - g_1^2 - (\alpha + n_2\beta)^2, \\ \dfrac{1}{HR}\,W_2(n_1) - \dfrac{H^2}{R}\left(F_q\,\dfrac{\partial n_1}{\partial p} - F_p\,\dfrac{\partial n_1}{\partial q}\right)n_2 - \dfrac{1}{R}\,W_1(m) \\ \qquad = n_1 g_1 + 2m(\alpha + \beta n_2) - n_2 g_1, \\ \dfrac{1}{R}\,W_1(n_2) - \left[\dfrac{1}{HR}\,W_2(m) - \dfrac{H^2}{R}\left(F_q\,\dfrac{\partial m}{\partial p} - F_p\,\dfrac{\partial m}{\partial q}\right)n_2\right] \\ \qquad = n_1(\alpha + \beta n_2) - 2mg_1 - n_2(\alpha + \beta n_2). \end{cases}$$

Man bemerke jetzt, daß mit Ausnahme von n_2 alle in diesen Beziehungen vorkommenden Größen vollständig bestimmte Funktionen von x, y, z, p, q

sind. Aus diesen Beziehungen kann aber nicht eine diskrete Anzahl von Funktionen für die Größe n_2 folgen. Daraus ergibt sich, daß die zweite dieser Beziehungen bei beliebigem n_2 erfüllt werden muß, d. h. daß die Relationen:

$$\frac{1}{HR} W_2(n_1) - \frac{1}{R} W_1(m) = n_1 g_1 + 2m\alpha,$$
$$\frac{H^2}{R}\left(F_q \frac{\partial n_1}{\partial p} - F_p \frac{\partial n_1}{\partial q}\right) = g_1 - 2m\beta$$

bestehen. Die dritte der Beziehungen (18) findet sicher bei beliebigem n_2 nicht statt, denn das erste Glied derselben kommt jedenfalls in allen möglichen Fällen vor. Diese Beziehung bildet eine partielle Differentialgleichung für n_2 von der Form:

$$\frac{1}{R} W_1(n_2) + \beta n_2^2 + \gamma n_2 + \delta = 0, \tag{19}$$

wo γ und δ folgende Ausdrücke bezeichnen:

$$\gamma = \alpha + \frac{H^2}{R}\left(F_q \frac{\partial m}{\partial p} - F_p \frac{\partial m}{\partial q}\right) - n_1\beta,$$
$$\delta = 2mg_1 - n_1\alpha - \frac{1}{HR} W_2(m).$$

Endlich kann die erste der Beziehungen (18) nicht eine von (19) unabhängige Differentialgleichung für n_2 sein, denn wir hätten alsdann für n_2 eine endliche lineare Gleichung, was ausgeschlossen ist. Demnach besteht diese Beziehung entweder bei beliebigem n_2, oder sie ist eine bloße Folge der Differentialgleichung (19). Anders gesagt, für n_2 ergibt sich aus (18) bloß die Differentialgleichung (19), und wir konstatieren, daß noch die Relationen:

$$\frac{1}{R} W_1(\beta) + \frac{H^2}{R}\left(F_q \frac{\partial g_1}{\partial p} - F_p \frac{\partial g_1}{\partial q}\right) + n_1 + 2\alpha\beta = \beta\gamma,$$
$$\frac{1}{R} W_1(\alpha) + g_1^2 + \alpha^2 - \left[\frac{1}{HR} W_2(g_1) + m^2\right] = \beta\delta$$

bestehen.

5. Wir wollen noch einige Bemerkungen in bezug auf die in diesem Artikel durchgeführten Entwicklungen hinzufügen.

Wenn die Gleichungen:

$$x = x(u),\ \ y = y(u),\ \ z = z(u),\ \ p = p(u),\ \ q = q(u)$$

einen charakteristischen Streifen der Differentialgleichung (3) definieren, so kann die Gleichung (19) für die Flächenelemente dieses Streifens in der Form:

$$\frac{dn_2}{du} + An_2^2 + Bn_2 + C = 0$$

dargestellt werden, wo A, B, C Funktionen von u sind. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Riccatischen Typus, und aus derselben ergibt sich im allgemeinen eine linear gebrochene Funktion der willkürlichen Konstante mit Koeffizienten, die bestimmte Funktionen von u sind.

Ferner bemerke man, daß die Gleichung (19) dann und nur dann das Glied mit n_2^2 nicht enthält, wenn

$$F_q^2 F_{p^2} - 2 F_p F_q F_{pq} + F_p^2 F_{q^2} = 0,$$

und es ist klar, daß dies für solche und nur für solche partiellen Differentialgleichungen stattfindet, die auf eine oder mehrere in bezug auf p und q lineare Gleichungen zurückgeführt werden können.

Zuletzt bemerke man, daß, wenn man für den Winkel ω, der unter 1 definiert wurde, eine Funktion von x, y, z, p, q wählt, damit auf jeder Integralfläche der Differentialgleichung (3) eine Kurvenschar gewählt wird. Es erhellt aus den Formeln (1), daß die Normalkrümmung der Kurven dieser Schar nur im Falle der Schar der charakteristischen Kurven von der Wahl der Krümmung n_2 unabhängig ist. Man sieht auch, daß die geodätische Torsion nur für die charakteristischen Kurven und ihre orthogonalen Trajektorien von n_2 unabhängig ist. Endlich sieht man leicht ein, daß die geodätische Krümmung dann und nur dann von der Wahl der Krümmung n_2 unabhängig ist, wenn die betreffende Kurvenschar entweder aus charakteristischen Kurven besteht, oder wenn dieselbe die Relation:

$$\frac{H}{R^2}(F_q^2 F_{p^2} - 2 F_p F_q F_{pq} + F_p^2 F_{q^2}) + F_q \frac{\partial \omega}{\partial p} - F_p \frac{\partial \omega}{\partial q} = 0$$

befriedigt. Die letztere liefert für ω den Ausdruck:

$$\omega = \omega_0(x, y, z, p, q) + \Phi(x, y, z),$$

wo ω_0 eine Funktion ist, die durch Quadratur bestimmt werden kann, und wo Φ eine willkürliche Funktion ihrer Argumente bezeichnet. Die Funktion ω_0 kann im Falle einer Differentialgleichung, die auf eine oder mehrere in bezug auf p und q lineare Gleichungen zurückführbar ist, gleich Null gesetzt werden. Demnach bestehen für diese Kategorie der Differentialgleichungen die in Rede stehenden Kurvenscharen aus Linienelementen, die in jedem Punkte des Raumes einen Kreiskegel bilden, dessen Achse das durch diesen Punkt hindurchgehende Linienelement der charakteristischen Kurve ist.

Krakau, den 10. Juni 1905.

einen Vortrag des Herrn E. Gehrcke über elektrische Wellen gebracht. Für die nächsten Hefte können wir die weiteren Arbeiten in Aussicht stellen: E. Budde, die Tantallampe; Köpsel, die Fortschritte der Funkentelegraphie; Hagen und Rubens, über die Reflexion an Metallen; Cl. Schaefer, über Absorption und Dispersion elektrischer Wellen; Michalke, die vagabundierenden Ströme elektrischer Bahnen.

Wir sagen allen Herren, die uns durch Zustellung von Beiträgen unterstützt oder durch Ratschläge auf neue Wege hingewiesen haben, unseren Dank und geben uns der Hoffnung hin, daß sowohl die Mathematiker wie die Physiker und Techniker auch fernerhin uns ihre hilfreiche Hand bieten werden.

Berlin, im Oktober 1905.

Dr. **E. Lampe,**
Geheimer Regierungsrat,
Professor der Königl. Techn. Hochschule
Berlin W. 15, Fasanenstraße 64.

Dr. **W. Fr. Meyer,**
Professor der Universität Königsberg i. Pr.
Mitteltragheim 51.

Dr. **E. Jahnke,**
Professor der Königl. Bergakademie
Berlin W. 15, Ludwigskirchstraße 6.

Für die bisher erschienenen acht Bände der dritten Reihe haben Beiträge geliefert die Herren:

A. Adler, W. Ahrens, P. Appell, E. Aschkinaß, E. N. Barisien, M. Bauer, H. Bertram, Chr. Beyel, O. Biermann, A. Blümel, H. Boas, A. Börsch, A. v. Braunmühl, F. Bremer, I'A. Bromwich, E. Budde, C. Burali-Forti, H. Burkhardt, M. Cantor, H. Cappilleri, F. Caspary, E. Cesàro, Classen, K. Cwojdziński, E. Czuber, Fr. Daniëls, G. Darboux, F. Dolezalek, v. Dücker, A. Ebeling, E. Eckhardt, J. Edalji, F. Emde, G. Eneström, F. Engel, P. Epstein, G. Espanet, C. Färber, H. Fehr, O. Fischer, F. Fitting, A. Fleck, A. Francke, R. Fricke, W. Fuhrmann, R. Funck, H. Fürle, E. Gehrcke, A. Gleichen, H. Graf, A. G. Greenhill, M. Großmann, A. Guldberg, R. Güntsche, S. Gundelfinger, H. Guradze, O. Gutsche, E. Haentzschel, St. Haller, M. Hamburger, M. W. Haskell, N. J. Hatzidakis, A. Hauck, G. Hauck, R. Haußner, T. Hayashi, L. Heffter, K. Hensel, Ch. Hermite, H. Hertzer, G. Hessenberg, C. Heuman, K. Heun, D. Hilbert, G. Holzmüller, J. Horn, A. Hurwitz, E. Jahnke, E. Janisch, P. Johannesson, St. Jolles, J. Jonas, K. Isenkrahe, F. Jung, S. Kantor, W. Kapteyn, Kewitsch, F. Klein, L. Klug, A. Kneser, J. Knoblauch, G. Kober, C. Köhler, F. Kötter, G. Kohn, P. Kokott, V. Kommerell, M. Koppe, J. Kraus, M. Krause, H. Kühne, E. Kullrich, J. Kürschák, C. A. Laisant, E. Lampe, E. Landau, G. Landsberg, R. Lehmann-Filhés, E. Lemoine, M. Lerch, T. Levi-Civita, H. Liebmann, R. v. Lilienthal, A. Loewy, F. London, H. Lorenz, J. M. Lorenz, G. Loria, W. Ludwig, J. Lüroth, O. Lummer, Ph. Maennchen, G. Majcen, E. Malo, P. Mansion, L. Matthiessen, L. Maurer, O. Meißner, E. Meyer, Fr. Meyer, P. Milau, G. Mittag-Leffler, C. Moreau, E. Müller, F. Müller, R. Müller, E. Naetsch, W. Nernst, E. Netto, J. Neuberg, R. Neuendorff, N. Nielsen, M. Noether, M. d'Ocagne, G. Olitsch, H. Opitz, W. Osgood, B. Oster, A. Pampuch, M. Pasch, M. Peche, H. W. Pexider, E. Phragmén, E. Picard, A. Pringsheim, E. Pringsheim, G. Rados, E. Rath, E. Rehfeld, H. Reißner, Th. Reye, E. Riecke, L. Ripert, R. Rothe, L. Rotth, L. Saalschütz, H. Samter, O. Schafheitlin, G. Scheffers, W. Schell, V. Schlegel, L. Schlesinger, C. Schmidt, H. Schoeler, A. Schoenflies, P. H. Schoute, H. Schubert, E. Schultz, R. Schüßler, Edm. Schultze, K. Schwering, M. Simon, D. Sintzow, R. Skutsch, O. Spieß, P. Stäckel, H. Stahl, O. Staude, W. Stegemann, v. Steinwehr, E. Steinitz, Cyparissos Stephanos, R. v. Sterneck, O. Stolz, J. Studnička, E. Study, R. Sturm, J. K. Sumec, A. Tachauer, G. Teixeira, H. Thieme, W. Thienemann, H. E. Timerding, Th. Vahlen, W. Velten, G. Vivanti, J. de Vries, G. Walleuberg, H. Weber, E. v. Weber, J. Weingarten, Ph. Weinmeister, E. Weinnoldt, J. Wellstein, C. Weltzien, A. Wendler, K. Wieghardt, H. Willgrod, E. B. Wilson, W. Wirtinger, E. Wölffing, P. Wolfskehl, H. Worm, M. Zacharias, G. Zemplén, R. Ziegel, K. Zindler, H. Züge, P. Zühlke.

B. G. Te

Mathematisch-Naturwissen

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker gegeben von **A. Gutzmer.** 14. Band. 12 Heften n. ℳ 18.— Generalregi gestellt von E. Wölffing, in Vorbereit

Berichte über die Verhandlungen der König schaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Klasse. 57. Band. 1905. gr. 8. geh. 1. Heft. n. ℳ 1.— 2. Heft. n. ℳ 2.— 3. Heft. n. ℳ 1.80. 4. Heft. n. ℳ 3.—

Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft. Herausgegeben von **Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than.** Redigiert von Joseph Kürschák und Franz Schafarzik. 20. Band. 1902. gr. 8. geh. n. ℳ 8.— [21. (1903) und 22. (1904) Band in Vorbereitung. Band 23 im Erscheinen.]

Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 4. Band. 5. Heft. 1905. gr. 8. geh. n. ℳ 1.40.

Mathematische Annalen. Begründet 1868 durch A. Clebsch und C. Neumann. Herausgegeben von **F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert.** 60. Band. 1905. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.— Generalregister zu den Bänden 1—50, zusammengestellt von A. Sommerfeld. Mit Porträt von A. Clebsch. [XI u. 202 S.] 1898. gr. 8. geh. n. ℳ 7.—

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von **Gustav Eneström.** III. Folge. 6. Band. 1905. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.—

Zeitschrift für Mathematik und Physik. Begründet 1856 durch † O. Schlömilch. Organ für angewandte Mathematik. Herausgegeben von **R. Mehmke** und **C. Runge.** 52. Band. 1905. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 20.— Generalregister zu den Jahrgängen 1—25. [123 S.] 1881. gr. 8. geh. n. ℳ 3.60. Generalregister zu den Jahrgängen 1—50, zusammengestellt von E. Wölffing. [XII u. 308 S.] 1905. gr. 8. geh. n. ℳ 15.—, geb. n. ℳ 16.—

Archiv der Mathematik und Physik. Mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. Gegründet 1841 durch J. A. Grunert. III. Reihe. Mit Anhang: Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. Herausgegeben von **E. Lampe, W. Franz Meyer** und **E. Jahnke.** 9. Band. 1905. gr. 8. Preis für den Band von 4 Heften n. ℳ 14.— Generalregister zu Reihe II, Band 1—17, zusammengestellt von E. Jahnke. [XXXI u. 114 S.] 1901. gr. 8. n. ℳ 6.—

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exakten Unterrichtsfächer an den höheren Schulen, Lehrerseminaren und gehobenen Bürgerschulen. Begründet 1869 durch J. C. V. Hoffmann. Herausgegeben von **H. Schotten.** 36. Jahrg. 1905. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 8 Heften n. ℳ 12.— Generalregister zu den Jahrgängen 1—32. [Unter der Presse.]

Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer und naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen. 2. Jahrg. 1905. Preis für den Jahrgang von 12 Nummern ℳ 3.—, Einzelnummer 40 Pfg.

Revue semestrielle des Publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam par P. Schoute (Groningen), D. J. Korteweg (Amsterdam), J. C. Kluyver (Leyden), W. Kapteyn (Utrecht), J. Cardinaal (Delft). 13. Jahrgang. 1905. gr. 8. Jährlich 2 Hefte. Jeder Jahrgang n. ℳ 7.—

Natur und Schule. Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen. Herausgegeben von **B. Landsberg, O. Schmeil** und **B. Schmid.** IV. Jahrg. 1905. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 12 Heften n. ℳ 12.—

Geographische Zeitschrift. Herausgegeben von **A. Hettner.** XI. Jahrg. 1905. gr. 8. Preis für den Jahrgang von 12 Heften n. ℳ [illegible]