0

63

Mathematische Annalen.

Unter Mitwirkung

von

P. Gordan, O. Hölder, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll
und H. Weber

gegenwärtig herausgegeben von

F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert und O. Blumenthal.

Leipzig bei B. G. Teubner.

Sonderabdruck aus dem 71. Bande.

1911.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Bauer, Dr. **G.**, Geheimrat, weil. Professor an der Universität München, Vorlesungen über Algebra. Im Auftrage des Mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. Karl Doehlemann, Professor an der Universität München. Mit dem Bildnis Gustav Bauers und 11 Figuren. 2. Auflage. [VI u. 366 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 11.—, geb. ℳ 12.—

Bianchi, Dr. **L.**, Professor an der Universität Pisa, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von M. Lukat, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Danzig. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. [XVIII u. 721 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 22.60, in Leinw. geb. ℳ 24.60.

Bôcher, Dr. **M.**, Professor an der Harvard University Cambridge, Mass., U. S. A., Einführung in die höhere Algebra. Deutsch von H. Beck. Mit einem Geleitworte von E. Study. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1910. Geb. ℳ 7.—

Bolza, Dr. **O.**, Professor an der Universität Chicago, Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearbeitete stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the Calculus of Variations“ desselben Verfassers. Mit 117 Figuren. [IX, 705 u. 10 S. Anhang.] gr. 8. 1909. Geh. ℳ 19.—, geb. ℳ 20.—

Borel, Dr. **E.**, Professor an der Sorbonne zu Paris, die Elemente der Mathematik. In 2 Bänden. Deutsche Ausgabe besorgt von P. Stäckel, Professor in Karlsruhe i. B.

I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. Geb. ℳ 8.60.
II. — Geometrie. Mit 403 Figuren. [XII u. 224 S.] gr. 8. 1909. Geb. ℳ 6.40.

Christoffel, **E. B.**, gesammelte mathematische Abhandlungen. Herausgegeben unter Mitwirkung von A. Krazer u. G. Faber von L. Maurer. In 2 Bänden. gr. 8. 1910.

I. Band. Mit einer Biographie E. B. Christoffels von C. F. Geiser und einem Bild in Lichtdruck sowie 15 Figuren. [XVI u. 382 S.] Geh. ℳ 18.—
II. — Mit 18 Figuren. [III u. 343 S.] Geh. ℳ 16.—

Czuber, Hofrat Dr. **E.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage in 2 Bänden.

I. Band. Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren. [X u. 410 S.] gr. 8. 1908. In Leinw. geb. ℳ 12.—
II. — Mathematische Statistik, mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. [X u. 470 S.] 1910. In Leinw. geb. ℳ 14.—

——— Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. [X u. 382 S.] gr. 8. 1909. Geb. ℳ 12.—

Dallwigk, Dr. **F.**, Privatdozent in Marburg, Vorlesungen über darstellende Geometrie. In zwei Bänden.

I. Band: Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Figuren. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1910. Geb. ℳ 13.—

Dingeldey, **Fr.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. In 2 Teilen. gr. 8. Geb.

I. Teil: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. Mit 99 Figuren. [V u. 202 S.] 1910. ℳ 6.—

Dziobek, Dr. **O.**, Professor an der Militärtechn. Akademie und an der Techn. Hochschule zu Charlottenburg, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Mit 150 Figuren. [X u. 648 S.] gr. 8. 1910. Geb. ℳ 16.—

Eneström, **G.**, Bibliothekar in Stockholm, Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. In 2 Lieferungen. I. Liefg. [208 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 10.—

Fortschritte der Mathematischen Wissenschaften in Monographien. Herausgegeben von O. Blumenthal. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh.

Bisher erschienen:
Heft 1: **Minkowski**, **H.**, zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Mit Einführungswort von O. Blumenthal. [82 S.] 1910. ℳ 2.40.

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. 2 Teile in 4 Bänden. Mit vielen Figuren. gr. 8. Geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra.
1. Band: Arithmetik. Von C. Färber. Mit 9 Fig. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1910. ℳ 9.—
2. — Algebra. Von E. Netto. [In Vorbereitung.]
II. — Die Grundlehren der Geometrie.
1. Band: Die Elemente der Geometrie. Von H. Thieme. Mit 323 Figuren. [XII u. 394 S.] 1909. ℳ 9.—
2. ... g.]

Многоуважаемому Ивану Львовичу Пташицкому

от автора.

Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LXXI. Band. Heft 3.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig

Über die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers.

Von

P. Woronetz in Kiew.

Die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers werden gewöhnlich auf ein im Raume unbewegliches Koordinatensystem $O_1x_1y_1z_1$ oder auf ein System $Oxyz$ bezogen, das mit dem Körper fest verbunden ist. In den wenigen Fällen, wo ein Koordinatensystem $M\xi\eta\zeta$ benutzt wird, welches sowohl in bezug auf $Oxyz$, als auch in bezug auf $O_1x_1y_1z_1$ beweglich ist, wird doch meist vorausgesetzt, daß der Pol M entweder im Raume fest ist oder mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt.*) Es ist aber möglich auf Probleme hinzuweisen, wo die Anwendung eines Achsensystems $M\xi\eta\zeta$ mit beweglichem Pole M, der nicht mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt, bedeutende Vorteile bieten muß. Betrachten wir, z. B., die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer gegebenen Fläche S_1 rollt. Wählen wir zum Pole des Systems $M\xi\eta\zeta$ den Punkt, in welchem die Oberfläche S des Körpers die Fläche S_1 im gegebenen Momente berührt, so werden die Bewegungsgleichungen des Körpers, welche die resultierenden Momente der wirkenden Kräfte enthalten, unabhängig von der normalen Reaktion der Fläche S_1 und von den Projektionen der Reibungskraft sein. Vernachlässigen wir also die Momente der rollenden und der bohrenden Reibung, so ergeben diese Gleichungen und die Bedingungsgleichungen, denen der Körper unterworfen ist, das volle System der Differentialgleichungen, welche die Bewegung des Körpers bestimmen. Die übrigen Bewegungsgleichungen dienen nur zur Bestimmung der erwähnten normalen Reaktion und der Projektionen der Reibungskraft.

Die vorliegende Abhandlung zerfällt in zwei Teile. In dem ersten werden die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers in bezug auf ein Achsensystem $M\xi\eta\zeta$, das eine beliebige gegebene Bewegung hat,

*) Vgl. z. B. E. J. Routh, The advanced part of a treatise on the Dynamics of a system of rigid bodies. Ch. I.

aufgestellt. Im zweiten Teile werden die erhaltenen Bewegungsgleichungen auf das Problem der rollenden Bewegung angewendet und an einem einfachen Beispiele erläutert.

Die auf das Achsensystem $M\xi\eta\zeta$ bezogenen Bewegungsgleichungen werden wir aus dem folgenden Satze*) der Dynamik materieller Punktsysteme entwickeln: „Die geometrische Derivierte $\dot{P}$ des Vektorensystems P, das aus den Bewegungsgrößen der materiellen Punkte besteht, ist dem Vektorensysteme Π der wirkenden Kräfte und Reaktionen äquivalent". Wäre der Pol M, in bezug auf welchen die resultierenden Momente der Systeme P und Π berechnet werden, ein unbeweglicher Punkt, so wäre das resultierende Moment des Systems $\dot{P}$ der geometrischen Derivierten $\dot{G}$ des resultierenden Momentes G des Systems P geometrisch gleich, sodaß der angeführte Satz die geometrischen Gleichungen

$$(\dot{L}) = (\Lambda), \qquad (\dot{G}) = (\Gamma),$$

wo L, G und Λ, Γ die resultierenden Vektoren und die resultierenden Momente um M der Systeme P und Π bezeichnen, ergeben würde. Ist aber, wie im gegebenen Falle, der Pol M ein beweglicher Punkt, d. h. sind seine Koordinaten x_1, y_1, z_1 in bezug auf das im Raume feste Achsensystem $O_1x_1y_1z_1$ Funktionen der Zeit t, so müssen die angeführten Formeln durch die folgenden ersetzt werden:

$$(1) \qquad (\dot{L}) = (\Lambda), \qquad (\dot{G}) + (K) = (\Gamma).$$

Hier bezeichnet K das Moment des resultierenden Vektors L um den Koordinatenursprung O_1, wenn dieser Vektor am „derivierten" Pole $M'(\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)$ angreift. Die Größen $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$ sind die Differentialquotienten der Koordinaten x_1, y_1, z_1 des Pols M nach der Zeit t.

I.

Wir denken uns außer dem im Raume unbeweglichen Koordinatensysteme $O_1x_1y_1z_1$ ein System $Oxyz$, das mit dem starren Körper fest verbunden ist, und bezeichnen mit p, q, r; a, b, c die Projektionen der momentanen Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers und der Geschwindigkeit des Pols O auf die x, y, z-Achsen. Dann ist die lebendige Kraft T des Körpers eine homogene Funktion zweiten Grades der Größen p, q, r, a, b, c mit konstanten Koeffizienten.

Wir führen noch ein drittes orthogonales Koordinatensystem $M\xi\eta\zeta$

*) G. K. Souslow, Grundzüge der analytischen Mechanik (russisch), Bd. I, § 192, Kiew 1900.

ein, wobei wir voraussetzen wollen, daß die Koordinaten x, y, z des Pols M in bezug auf das System $Oxyz$ und die neun Kosinus $\lambda, \lambda', \cdots, \nu''$

	x	y	z
ξ	λ	λ'	λ''
η	μ	μ'	μ''
ζ	ν	ν'	ν''

der Winkel, welche die ξ, η, ζ-Achsen mit den x, y, z-Achsen bilden, entweder als Funktionen der Zeit t oder als Funktionen der Koordinaten des starren Körpers gegeben sind.

Die Projektionen σ, τ, n; α, β, γ, welche die Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers und die Geschwindigkeit desjenigen Punktes des starren Körpers, welcher im gegebenen Momente mit dem Pole M zusammenfällt, auf die ξ, η, ζ-Achsen bilden, werden durch die Formeln

$$\sigma = p\lambda + q\lambda' + r\lambda'',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha = (a + qz - ry)\lambda + (b + rx - pz)\lambda' + (c + py - qx)\lambda'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

bestimmt.

Lösen wir diese Gleichungen nach den Größen p, q, r, a, b, c auf:

$$p = \sigma\lambda + \tau\mu + n\nu,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu + \sigma(y\lambda'' - z\lambda') + \tau(y\mu'' - z\mu') + n(y\nu'' - z\nu'), \tag{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und setzen wir in die Funktion T ein, so wird

$$T(a, b, c, p, q, r) = \Theta(\alpha, \beta, \gamma, \sigma, \tau, n),$$

wobei

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = \frac{\partial T}{\partial a}\lambda + \frac{\partial T}{\partial b}\lambda' + \frac{\partial T}{\partial c}\lambda'',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\Theta}{\partial\sigma} = \frac{\partial T}{\partial a}(y\lambda'' - z\lambda') + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p}\lambda + \cdots, \tag{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ist. Nun sind aber die Derivierten von T nach den Größen a, b, c, p, q, r gleich den auf die x, y, z-Achsen genommenen Projektionen des resultierenden Vektors und des resultierenden Momentes um O der Bewegungsgrößen der materiellen Punkte, aus denen wir uns den Körper zusammengesetzt denken wollen. Den aufgestellten Formeln zufolge haben wir also

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = L \cos(L, \xi), \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} = G \cos(G, \xi),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo L und G, wie in den Formeln (1), den resultierenden Vektor des Systems P und sein resultierendes Moment um den Pol M bedeuten.

Bezeichnen wir mit x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des Pols M in bezug auf das im Raume feste Achsensystem $O_1 x_1 y_1 z_1$, so sind die Koordinaten des derivierten Pols M' in bezug auf dasselbe System gleich $\dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1$, d. h. gleich den Differentialquotienten von x_1, y_1, z_1 nach der Zeit t, folglich haben die Koordinaten des Punktes M' in bezug auf ein Achsensystem, dessen Ursprung mit dem Punkte O_1 zusammenfällt und dessen Achsen den ξ, η, ζ-Achsen parallel sind, die Werte

$$(\dot{x} + a + qz - ry)\lambda + (\dot{y} + b + rx - pz)\lambda' + (\dot{z} + c + py - qx)\lambda'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder $\xi' + \alpha$, $\eta' + \beta$, $\zeta' + \gamma$, wenn wir der Kürze wegen die Bezeichnungen

(4) $$\xi' = \dot{x}\lambda + \dot{y}\lambda' + \dot{z}\lambda'', \qquad \eta' = \dot{x}\mu + \cdots, \qquad \zeta' = \dot{x}\nu + \cdots$$

einführen. Projizieren wir also den in (1) auftretenden Vektor K auf die ξ, η, ζ-Achsen, so wird

$$K \cos(K, \xi) = (\eta' + \beta)\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} - (\zeta' + \gamma)\frac{\partial \Theta}{\partial \beta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Das Achsensystem $Oxyz$ bewegt sich in bezug auf das System $M\xi\eta\zeta$ mit einer Winkelgeschwindigkeit ω_1, deren Projektionen σ_1, τ_1, n_1 auf die ξ, η, ζ-Achsen nach den bekannten Formeln der Kinematik

(5) $$\sigma_1 = \mu\dot{\nu} + \mu'\dot{\nu}' + \mu''\dot{\nu}'', \quad \tau_1 = \nu\dot{\lambda} + \cdots, \quad n_1 = \lambda\dot{\mu} + \cdots$$

zu berechnen sind, folglich sind die auf dieselben Achsen genommenen Projektionen der Winkelgeschwindigkeit des Achsensystems $M\xi\eta\zeta$ in bezug auf das im Raume unbewegliche System $O_1 x_1 y_1 z_1$ gleich $\sigma - \sigma_1$, $\tau - \tau_1$, $n - n_1$.

Wenden wir jetzt die geometrischen Gleichungen (1) an, indem wir die in (1) enthaltenen Vektoren auf die ξ, η, ζ-Achsen projizieren, so erhalten wir die Differentialgleichungen der Bewegung des starren Körpers in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} + (\tau - \tau_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} - (n - n_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \Lambda_\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(6) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + (\tau - \tau_1)\frac{\partial \Theta}{\partial n} - (n - n_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (\eta' + \beta)\frac{\partial \Theta}{\partial \gamma} - (\zeta' + \gamma)\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \Gamma_\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo $\Lambda_\xi, \Lambda_\eta, \cdots, \Gamma_\zeta$ die Projektionen des resultierenden Vektors und des resultierenden Momentes um M der auf den Körper wirkenden Kräfte und Reaktionen bezeichnen.

Sind die auf den Körper wirkenden Kräfte und die Bewegung des Achsensystems $M\xi\eta\zeta$ gegeben, und sind die Reaktionen und die Projektionen α, β, γ, σ, τ, n der Geschwindigkeit des Punktes M und der Winkelgeschwindigkeit des Körpers durch die Koordinaten des Körpers und durch die Differentialquotienten derselben nach der Zeit ausgedrückt, so bestimmen die erhaltenen Gleichungen (6) diese Koordinaten als Funktionen der Zeit.

II.

Um von den allgemeinen Formeln (6) zu den Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer gegebenen Fläche S_1 rollt, überzugehen, machen wir die Voraussetzung, daß sich in jedem Momente der Bewegung ein Punkt des Körpers in augenblicklicher Ruhe befindet. Wählen wir diesen Punkt zum Pole des Achsensystems $M\xi\eta\zeta$, so ist der Körper den nicht holonomen Bedingungsgleichungen

$$a = yr - zq, \quad b = zp - xr, \quad c = xq - yp \tag{7}$$

unterworfen, und in die Formeln (6) ist

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

einzusetzen.

Außerdem wollen wir, der Einfachheit wegen, voraussetzen, daß der Pol O mit dem Schwerpunkte des Körpers und die x, y, z-Achsen mit den zentralen Hauptträgheitsachsen zusammenfallen. Wir haben dann, wenn M die Masse des Körpers und A, B, C die zentralen Hauptträgheitsmomente bezeichnen,

$$2T = M(a^2 + b^2 + c^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2, \tag{8}$$

sodaß wir die Derivierten von Θ nach σ, τ, n zufolge (8), (7) und (2) aus der Formel

$$\begin{aligned} 2\Theta = {} & M(x^2 + y^2 + z^2)(\sigma^2 + \tau^2 + n^2) - M(\xi\sigma + \eta\tau + \zeta n)^2 \\ & + A(\sigma\lambda + \tau\mu + n\nu)^2 + B(\sigma\lambda' + \tau\mu' + n\nu')^2 + C(\sigma\lambda'' + \tau\mu'' + n\nu'')^2 \end{aligned} \tag{9}$$

zu berechnen haben, wobei

$$\xi = x\lambda + y\lambda' + z\lambda'', \quad \eta = x\mu + \cdots, \quad \zeta = x\nu + \cdots \tag{10}$$

gesetzt ist.

Was nun die Derivierten von Θ nach α, β, γ anbetrifft, so ergeben die Gleichungen (3) nach (8)

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha} = M(a\lambda + b\lambda' + c\lambda''),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

oder nach (7), (2) und (10)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = M(\eta n - \zeta \tau),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Die letzten drei Gleichungen (6) können also so hingeschrieben werden:

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + (\tau - \tau_1)\frac{\partial \Theta}{\partial n} - (n - n_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + M[\xi(\xi'\sigma + \eta'\tau + \zeta' n) - \sigma(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')] = \Gamma_\xi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Diese Gleichungen sollen jetzt auf das spezielle Problem der Rollbewegung angewandt werden.

Wir wählen als Koordinaten eines starren Körpers, der auf einer gegebenen Fläche S_1 rollt, nach C. Neumann*) folgende Größen: die Gaußschen Koordinaten u und v des Punktes M auf der Oberfläche S des Körpers, in welchem die Fläche S die Fläche S_1 berührt, die Gaußschen Koordinaten u_1 und v_1 desselben Punktes M auf der Fläche S_1 und den Winkel ϑ, den die Koordinatenlinie u ($v = \text{const.}$) mit der Koordinatenlinie v_1 ($u_1 = \text{const.}$) im Punkte M bildet.

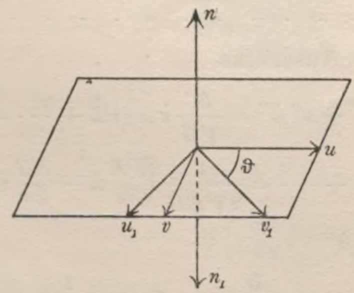

Fig. 1.

Wir werden, wie üblich, durch $E, F, G; D, D', D''$ die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung**) der Fläche S bezeichnen. Dieselben Größen für die Fläche S_1 seien $E_1, F_1, G_1; D_1, D_1', D_1''$. Der Einfachheit wegen werden wir voraussetzen, daß die Linien u und v auf S und die Linien u_1 und v_1 auf S_1 die Krümmungslinien dieser Fläche sind

$$F = 0, \quad D' = 0, \quad F_1 = 0, \quad D_1' = 0.$$

Soll die Bewegung des Körpers auf der Fläche S_1 ohne Gleitung vor sich gehen, so ist der Berührungspunkt der Oberfläche S des Körpers und der Fläche S_1 in augenblicklicher Ruhe. Wählen wir diesen Punkt zum

*) C. Neumann, Grundzüge der analytischen Mechanik, Sitzber. Sächs. Ak. 1899.

**) Stahl und Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, 1893, Formeln (4) § 1 und (1) § 2.

Ursprunge des Achsensystems $M\xi\eta\zeta$, so dürfen wir also die Formeln (11) anwenden. Die ξ, η, ζ-Achsen lassen wir mit den Tangenten zu den Koordinatenlinien u und v und mit der Normalen n zu S in M zusammenfallen.

Denken wir uns die Oberfläche S des Körpers durch die Formeln

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

bestimmt, so sind die Koordinaten x, y, z des Pols M und die neun Kosinus

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

gegebene Funktionen der Koordinaten u und v.

Differentieren wir die Funktionen λ, λ', $\cdots$, μ'' nach der Zeit t:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \dot{u} + \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \dot{v} \right) + \frac{\partial x}{\partial u} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{\mu} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \dot{u} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \dot{v} \right) + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und berechnen wir die Ausdrücke

$$\nu \dot{\mu} + \nu' \dot{\mu}' + \nu'' \dot{\mu}'' = \frac{D''}{\sqrt{G}} \dot{v}, \quad \nu \dot{\lambda} + \cdots = \frac{D}{\sqrt{E}} \dot{u},$$

$$\lambda \dot{\mu} + \cdots = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v} \right),$$

so erhalten wir nach (5)

$$(12) \qquad \sigma_1 = -\frac{D''}{\sqrt{G}} \dot{v}, \quad \tau_1 = \frac{D}{\sqrt{E}} \dot{u}, \quad n_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(\frac{\partial E}{\partial v} \dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u} \dot{v} \right).$$

Um die Projektionen σ, τ, n der momentanen Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers durch die Koordinaten u, v, u_1, v_1, ϑ und durch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{u}$, $\dot{v}$, $\cdots$ auszudrücken, zerlegen wir die Winkelgeschwindigkeit ω in drei:

$$(\omega) = (\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_3),$$

wobei ω_1 die Winkelgeschwindigkeit des Achsensystems $Oxyz$ in bezug auf das System $Muvn$, ω_2 die Winkelgeschwindigkeit des Systems $Muvn$ in bezug auf $Mu_1v_1n_1$ (Fig. 1) und ω_3 die Winkelgeschwindigkeit des Systems $Mu_1v_1n_1$ in bezug auf $O_1x_1y_1z_1$ bezeichnen.

Die Winkelgeschwindigkeit ω_1 wird dann durch die Formeln (12) bestimmt, ω_2 ist nach Fig. 1 gleich $\dot{\vartheta}$ und längs n_1 gerichtet und ω_3 wird auf ähnliche Weise, wie ω_1, berechnet. Wir erhalten also nach Fig. 1

$$
\begin{aligned}
\sigma &= -\frac{D''}{\sqrt{G}}\dot{v} - \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1 \sin\vartheta - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1 \cos\vartheta, \\
(13) \qquad \tau &= \frac{D}{\sqrt{E}}\dot{u} - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\dot{u}_1 \sin\vartheta + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\dot{v}_1 \cos\vartheta, \\
n &= \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right) + \frac{1}{2\sqrt{E_1 G_1}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\dot{u}_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\dot{v}_1\right) - \dot{\vartheta}.
\end{aligned}
$$

Bezeichnen wir mit ϱ und ε die Entfernungen des Schwerpunktes O des Körpers vom Berührungspunkte M und von der Tangentenebene zu S in M:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = x\nu + y\nu' + z\nu'',$$

so sind ϱ und ε Funktionen von u und v, und die Formeln (10) und (4) ergeben

$$\xi = \frac{\varrho}{\sqrt{E}}\frac{\partial \varrho}{\partial u}, \quad \eta = \frac{\varrho}{\sqrt{G}}\frac{\partial \varrho}{\partial v}, \quad \zeta = \varepsilon,$$

$$\xi' = \sqrt{E}\,\dot{u}, \quad \eta' = \sqrt{G}\,\dot{v}, \quad \zeta' = 0.$$

Setzen wir hieraus in (11) ein, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen des Körpers in der Form

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + (\tau - \tau_1)\frac{\partial \Theta}{\partial n} - (n - n_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + M\left(\varrho\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\tau}{\sqrt{E}} - \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\sigma}{\sqrt{G}}\right)\sqrt{G}\,\dot{v} = \Gamma_\xi, \\
(14) \quad &\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + (n - n_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} - (\sigma - \sigma_1)\frac{\partial \Theta}{\partial n} - M\left(\varrho\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\tau}{\sqrt{E}} - \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\sigma}{\sqrt{G}}\right)\sqrt{E}\,\dot{u} = \Gamma_\eta, \\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial n} + (\sigma - \sigma_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - (\tau - \tau_1)\frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} + M\varepsilon\left(\sqrt{E}\,\dot{u}\sigma + \sqrt{G}\,\dot{v}\tau\right) \\
&\qquad\qquad - M\left(\varrho\frac{\partial \varrho}{\partial u}\dot{u} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial v}\dot{v}\right)n = \Gamma_\zeta,
\end{aligned}
$$

wobei Θ nach (9) durch die Formel

$$
\begin{aligned}
(15) \quad 2\Theta = &M\varrho^2(\sigma^2 + \tau^2 + n^2) - M\left(\varrho\frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{\sigma}{\sqrt{E}} + \varrho\frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{\tau}{\sqrt{G}} + \varepsilon n\right)^2 \\
&+ A(\sigma\lambda + \tau\mu + n\nu)^2 + B(\sigma\lambda' + \tau\mu' + n\nu')^2 + C(\sigma\lambda'' + \tau\mu'' + n\nu'')^2
\end{aligned}
$$

bestimmt wird, sodaß Θ eine homogene Funktion zweiten Grades der Größen σ, τ, n ist, deren Koeffizienten nur von u und v abhängen.

Es sei noch bemerkt, daß die in (14) enthaltenen Größen Γ_ξ, Γ_η, Γ_ζ die auf die u, v, n-Achsen genommenen Projektionen des resultierenden Momentes um M der wirkenden Kräfte bezeichnen, da ja weder die normale Reaktion der Fläche S_1 noch die Reibungskraft Momente um den Pol M geben.

Wir haben noch die nicht holonomen Bedingungsgleichungen (7) durch die Koordinaten des Körpers und durch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten auszudrücken. Zu dem Zwecke bemerken wir, daß die

Geschwindigkeit $\mathfrak{y}$, mit welcher sich der Berührungspunkt M auf der Fläche S des Körpers bewegt, der Geschwindigkeit $\mathfrak{y}_1$ des Punktes M auf der Fläche S_1 geometrisch gleich ist. Projizieren wir also die Vektoren $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y}_1$ auf die Richtungen u_1 und v_1, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{E_1}\,\dot u_1 &= \sqrt{G}\,\dot v\cos\vartheta - \sqrt{E}\,\dot u\sin\vartheta,\\ \sqrt{G_1}\,\dot v_1 &= \sqrt{G}\,\dot v\sin\vartheta + \sqrt{E}\,\dot u\cos\vartheta.\end{aligned}\tag{16}$$

Die acht Differentialgleichungen erster Ordnung (13), (14) *und* (16) ***bestimmen** die Koordinaten $u, v, u_1, v_1, \vartheta$ des Körpers und die drei Größen σ, τ, n als Funktionen der Zeit t.**)

Der starre Körper sei, z. B., eine materielle Ebene:

$$\begin{aligned}&x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = 0,\ \varrho^2 = u^2,\ \varepsilon = 0,\\ &E = 1,\ G = u^2,\ D = 0,\ D'' = 0,\ \sigma_1 = 0,\ \tau_1 = 0,\ n_1 = -\dot v,\end{aligned}\tag{17}$$

die gezwungen ist auf einer Kugel:

$$\begin{aligned}&x_1 = R_1\sin u_1\cos v_1,\ y_1 = R_1\sin u_1\sin v_1,\ z_1 = R_1\cos u_1,\\ &E_1 = R_1{}^2,\ G_1 = R_1{}^2\sin^2 u_1,\ D_1 = -R_1,\ D_1'' = -R_1\sin^2 u_1\end{aligned}\tag{18}$$

ohne Gleitung zu rollen. Die auf die Ebene wirkenden Kräfte mögen eine Resultante haben, die am Schwerpunkte O der Ebene angreift, zum Zentrum O_1 der Kugel gerichtet ist und nur von der Entfernung der Punkte O und O_1 abhängt:

$$\Gamma_\xi = 0,\quad \Gamma_\eta = -\varphi\frac{R_1 u}{\sqrt{R_1{}^2 + u^2}},\quad \Gamma_\zeta = 0,$$

$$\varphi = \text{Funkt.}\left(\sqrt{R_1{}^2 + u^2}\right).$$

Wir werden voraussetzen, daß die Trägheitsmomente A und B einander gleich sind. Wir haben dann

$$A = B = \frac{1}{2}C,$$

sodaß nach (15)

$$2\Theta = A\sigma^2 + (A + Mu^2)\tau^2 + (2A + Mu^2)n^2\tag{19}$$

ist.

Die acht Differentialgleichungen (16), (13) und (14), welche die Bewegung der Ebene bestimmen, ergeben

*) Die hier entwickelten Differentialgleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers sind ebenso allgemein, wie diejenigen, welche in meiner Abhandlung „Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt“ (Math. Ann. 70) aufgestellt sind, dürften aber für die Anwendungen bequemer sein. In der Tat, bei Benutzung der Bewegungsgleichungen in der Form (14) ist es nicht nötig, den recht komplizierten Übergang von $\Theta(u, v, \sigma, \tau, n)$ zu $\Theta(u, v, u_1, v_1, \vartheta, \dot u, \dot v, \dot\vartheta)$ mit Hilfe von (13) und (16) auszuführen.

$$
\begin{aligned}
&R_1 \dot{u}_1 = u\dot{v}\cos\vartheta - \dot{u}\sin\vartheta,\\
&R_1 \dot{v}_1 \sin u_1 = u\dot{v}\sin\vartheta + \dot{u}\cos\vartheta,\\
&\sigma = \dot{v}_1 \sin u_1 \sin\vartheta + \dot{u}_1\cos\vartheta = \frac{u}{R_1}\dot{v},\\
&\tau = \dot{u}_1\sin\vartheta - \dot{v}_1\sin u_1\cos\vartheta = -\frac{1}{R_1}\dot{u},\\
(20)\qquad &n = -\dot{v} - \dot{v}_1\cos u_1 - \dot{\vartheta},\\
&\frac{d\sigma}{dt} + (n-\dot{v})\tau = 0,\\
&(A+Mu^2)\frac{d\tau}{dt} + Mu\dot{u}\tau - (A+Mu^2)\sigma n + A\sigma\dot{v} = -\varphi\frac{R_1 u}{\sqrt{R_1^{\,2}+u^2}},\\
&(2A+Mu^2)\frac{dn}{dt} + Mu\dot{u}n + Mu^2\sigma\tau = 0.
\end{aligned}
$$

Untersuchen wir erst die partikuläre Lösung

$$u = u_0 = \text{const.},$$

für die nach (20)

$$\tau = 0,\quad \sigma = \sigma_0,\quad n = n_0,\quad \dot{v} = R_1\frac{\sigma_0}{u_0},\quad v = R_1\frac{\sigma_0}{u_0}t + v_0$$

wird, wobei die Konstanten σ_0, n_0, u_0 der Bedingung

$$(A+Mu_0^{\,2})\sigma_0 n_0 - A\sigma_0^{\,2}\frac{R_1}{u_0} = \varphi_0\frac{R_1 u_0}{\sqrt{R_1^{\,2}+u_0^{\,2}}}$$

genügen müssen.

Der Punkt M beschreibt nach (17) auf der Ebene S einen Kreis mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Das Zentrum des Kreises fällt mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammen.

Zur Bestimmung der Bewegung des Punktes M auf der Kugel S_1 dienen nach (20) die Gleichungen

$$\dot{u}_1 = \sigma_0\cos\vartheta,\quad \dot{v}_1\sin u_1 = \sigma_0\sin\vartheta,$$

$$\dot{\vartheta} = -\sigma_0(P + \operatorname{ctg} u_1 \sin\vartheta),\quad P = \frac{n_0}{\sigma_0} + \frac{R_1}{u_0},$$

welche die Integrale

$$\sin u_1\sin\vartheta = P\cos u_1 + C_1,\quad v_1 - C_2 = \arccos\frac{P + C_1\cos u_1}{\sqrt{1+P^2-C_1^{\,2}}\sin u_1},$$

$$\sigma_0\sqrt{1+P^2}(t - C_3) = \arccos\frac{(1+P^2)\cos u_1 + PC_1}{\sqrt{1+P^2-C_1^{\,2}}},$$

wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Konstanten bezeichnen, zulassen. Mit Hilfe von (18) finden wir hieraus leicht, daß der Punkt M auf der Kugelfläche S_1 einen großen oder kleinen Kreis beschreibt, je nachdem die Größe P gleich Null oder von Null verschieden ist.

Ist $\dot{u}$ nicht gleich Null, so wählen wir u zur unabhängigen Veränderlichen und erhalten aus (20) zur Bestimmung von σ und n als Funktionen von u die zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(21)\quad \frac{d\sigma}{du} - \frac{n}{R_1} + \frac{\sigma}{u} = 0, \quad (2A + Mu^2)\frac{dn}{du} + Mun - Mu^2\frac{\sigma}{R_1} = 0.$$

Diese Gleichungen lassen die partikuläre Lösung

$$\sigma = 0, \quad n = 0$$

zu, sodaß nach (20)

$$\dot{v} = 0, \quad v = v_0 = \text{const.}$$

wird. Der Berührungspunkt M beschreibt auf der Ebene S eine Gerade, die durch den Schwerpunkt der Ebene hindurchgeht.

Die übrigen Koordinaten des Körpers genügen nach (20) den Gleichungen

$$\frac{du_1}{du} = -\frac{1}{R_1}\sin\vartheta, \quad \frac{dv_1}{du}\sin u_1 = \frac{1}{R_1}\cos\vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{du} = -\frac{1}{R_1}\operatorname{ctg} u_1 \cos\vartheta,$$

sodaß wir

$$\sin u_1 \cos\vartheta = C_1, \quad v_1 - C_2 = \arcsin\frac{C_1 \operatorname{ctg} u_1}{\sqrt{1 - C_1^2}},$$

$$\frac{1}{R_1}(u - C_3) = \arcsin\frac{\cos u_1}{\sqrt{1 - C_1^2}}$$

erhalten. Der Berührungspunkt M beschreibt nach (18) einen großen Kreis auf der Kugelfläche S_1. Die Zeit t wird als Funktion von u aus dem Integrale der lebendigen Kraft

$$(A + Mu^2)\frac{\dot{u}^2}{R_1^2} = 2U + 2h,$$

wo U die Kräftefunktion und h eine willkürliche Konstante bezeichnet, durch Quadraturen erhalten.

Im allgemeinen Falle erhalten wir die Integrale der Gleichungen (21), wenn wir $A = Mk^2$ setzen und mit C_1 und C_2 zwei willkürliche Konstanten bezeichnen, in der Form

$$\sigma u = C_1 e^{\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2 + u^2}} + C_2 e^{-\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2 + u^2}},$$

$$n\sqrt{2k^2 + u^2} = C_1 e^{\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2 + u^2}} - C_2 e^{-\frac{1}{R_1}\sqrt{2k^2 + u^2}}.$$

Bestimmen wir hieraus

$$(2k^2 + u^2)n^2 = u^2\sigma^2 - 4C_1C_2$$

und setzen wir in das Integral der lebendigen Kraft ein, so wird nach (19) und (20)

$$M(k^2+u^2)(\sigma^2+\tau^2) = 2U + 2h + 4MC_1C_2.$$

Die Kräftefunktion U ist eine Funktion der Entfernung der Punkte O und O_1 voneinander, hängt also nur von $\sqrt{R_1^2+u^2}$ ab.

Wenn wir noch bemerken, daß nach (20)

$$\sigma^2+\tau^2 = \frac{1}{R_1^2}(\dot{u}^2+u^2\dot{v}^2), \quad u\sigma = \frac{1}{R_1}u^2\dot{v}$$

ist, so sehen wir, daß die aufgestellten Formeln die Geschwindigkeit des Berührungspunktes M und seine Flächengeschwindigkeit um den Schwerpunkt O in der Ebene S als Funktionen der Entfernung u der Punkte M und O ergeben. Es läßt sich also die Bewegung des Berührungspunktes M in der Ebene S mittels Quadraturen bestimmen.

Was nun die Bewegung des Punktes M auf der Kugelfläche S_1 anbetrifft, so hängt die Bestimmung dieser Bewegung, wie auch der Bewegung eines beliebigen Rotationskörpers auf einer Kugel*), von der Integration einer Riccatischen Gleichung ab.

Kiew, Januar 1911.

*) Vgl. meine oben erwähnte Abhandlung, Kap. III, § 14.

Verlag von B. G. Teubner

Pringsheim, Dr. **E.**, Professor an der Uni... Physik der Sonne. Mit 235 Abb... gr. 8. 1910. Geh. *M.* 16.—, geb. *M.*...

Repertorium der höheren Mathematik. ... Auflage der deutschen Ausgabe. U... herausgegeben von P. Epstein und ... gr. 8. Geb.

I. Band: Algebra und Analysis. Unter ... A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnk... ding hrsg. von P. Epstein. I. Hä... Frühjahr 1911.]

II. — Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler herausgegeben von H. E. Timerding. I. Hälfte [XVI und 534 S.] 1910. [Die II. Hälfte folgt im Frühjahr 1911.]

Schur, F., Professor an der Universität Straßburg i. E., Grundlagen der Geometrie. Mit 63 Figuren. [X u. 192 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M.* 6.—, geb. *M.* 7.—

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung neu bearbeitet von G. Scheffers. In 3 Bänden. gr. 8. Geb.

I. Band. Differentialrechnung. 4. u. 5. Auflage. Mit 70 Figuren. [XVI u. 626 S.] 1908. *M.* 13.—

II. — Integralrechnung. 3. Auflage. Mit 105 Figuren. [XIV u. 586 S.] 1907. *M.* 13.—

III. — Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 3. Aufl. Mit 63 Figuren. [XII u. 658 S.] 1909. *M.* 13.—

Staude, O., Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Teilen. gr. 8. 1910. Geh. u. geb.

I. Teil. Mit 181 Figuren. [X u. 548 S.] Geh. *M.* 20 —, geb. *M.* 22.—

II. — Mit 47 Figuren. [IV u. S. 549—1000.] Geh. *M.* 16.—, geb. *M.* 18.—

Sturm, Geh. Reg.-Rat Dr. **R.**, Professor an der Universität Breslau, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie. Mit 32 Figuren. [VI u. 138 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M.* 4.—, in Leinw. geb. *M.* 4.40.

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Subdirektor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaeß, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von F. Klein und 184 Figuren. [XII u. 339 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M.* 7.—, geb. *M.* 8.—

Timerding, Dr. **H. E.**, Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig, Geometrie der Kräfte. Mit 27 Figuren. [XII u. 381 S.] gr. 8. 1908. Geb. *M.* 16.—

Voigt, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.**, Professor an der Universität Göttingen, Lehrbuch der Kristall-Physik (mit Ausschluß der Kristall-Optik). Mit 1 Tafel u. 213 Figuren. [XXIV u. 964 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M.* 30.—, in Leinw. geb. *M.* 32.—

Weber, Dr. **H.**, und Dr. **J. Wellstein**, Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. *M.* 10.—

II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Figuren. [XII u. 596 S.] 1907. *M.* 12.—

III. — Angewandte Elementar-Math... ...arbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. ... ...e. Teil I. Mathematische Physik. Mit e... ...Weber und J. Wellstein. Bearbeitet von ... . Mit 254 Figuren. [XII u. 536 S.] 1910.