…важаемому Ивану Львовичу
Пташицкому
отъ автора

Mathematische Annalen.

Unter Mitwirkung

von

P. Gordan, O. Hölder, C. Neumann, M. Noether, K. VonderMühll und H. Weber

gegenwärtig herausgegeben von

F. Klein, W. v. Dyck, D. Hilbert und **O. Blumenthal.**

Leipzig bei B. G. Teubner.

Sonderabdruck aus dem 70. Bande.

1911.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Bauer, Dr. **G.**, Geheimrat, weil. Professor an der Universität München, Vorlesungen über Algebra. Im Auftrage des Mathematischen Vereins München herausgegeben von Dr. Karl Doehlemann, Professor an der Universität München. Mit dem Bildnis Gustav Bauers und 11 Figuren. 2. Auflage. [VI u. 366 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M.* 11.—, geb. *M.* 12.—

Bianchi, Dr. **L.**, Professor an der Universität Pisa, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von M. Lukat, Oberlehrer an der Oberrealschule zu Danzig. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. [XVIII u. 721 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M.* 22.60, in Leinw. geb. *M.* 24.60.

Bôcher, Dr. **M.**, Professor an der Harvard University Cambridge, Mass., U. S. A., Einführung in die höhere Algebra. Deutsch von H. Beck. Mit einem Geleitworte von E. Study. [XII u. 348 S.] gr. 8. 1910. Geb. *M.* 7.—

Bolza, Dr. **O.**, Professor an der Universität Chicago, Vorlesungen über Variationsrechnung. Umgearbeitete stark vermehrte deutsche Ausgabe der „Lectures on the Calculus of Variations" desselben Verfassers. Mit 117 Figuren. [IX, 705 u. 10 S. Anhang.] gr. 8. 1909. Geh. *M.* 19.—, geb. *M.* 20.—

Borel, Dr. **E.**, Professor an der Sorbonne zu Paris, die Elemente der Mathematik. In 2 Bänden. Deutsche Ausgabe besorgt von P. Stäckel, Professor in Karlsruhe i. B.
- I. Band: Arithmetik und Algebra. Mit 57 Figuren und 3 Tafeln. [XVI u. 431 S.] gr. 8. 1908. Geb. *M.* 8.60.
- II. — Geometrie. Mit 403 Figuren. [XII u. 224 S.] gr. 8. 1909. Geb. *M.* 6.40.

Christoffel, **E. B.**, gesammelte mathematische Abhandlungen. Herausgegeben unter Mitwirkung von A. Krazer u. G. Faber von L. Maurer. In 2 Bänden. gr. 8. 1910.
- I. Band. Mit einer Biographie E. B. Christoffels von C. F. Geiser und einem Bild in Lichtdruck sowie 15 Figuren. [XVI u. 382 S.] Geh. *M.* 18.—
- II. — Mit 18 Figuren. [III u. 343 S.] Geh. *M.* 16.—

Czuber, Hofrat Dr. **E.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Wien, Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. 2. Auflage in 2 Bänden.
- I. Band. Wahrscheinlichkeitstheorie. Fehlerausgleichung. Kollektivmaßlehre. Mit 18 Figuren. [X u. 410 S.] gr. 8. 1908. In Leinw. geb. *M.* 12.—
- II. — Mathematische Statistik, mathematische Grundlagen der Lebensversicherung. [X u. 470 S.] 1910. In Leinw. geb. *M.* 14.—

——— Einführung in die höhere Mathematik. Mit 114 Figuren. [X u. 382 S.] gr. 8. 1909. Geb. *M.* 12.—

Dallwigk, Dr. **F.**, Privatdozent in Marburg, Vorlesungen über darstellende Geometrie. In zwei Bänden.
- I. Band: Die Methoden der Parallelprojektion. Mit 184 Figuren. [XVI u. 364 S.] gr. 8. 1910. Geb. *M.* 13.—

Dingeldey, **Fr.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der Differential- und Integralrechnung. In 2 Teilen. gr. 8. Geb.
- I. Teil: Aufgaben zur Anwendung der Differentialrechnung. Mit 99 Figuren. [V u. 202 S.] 1910. *M.* 6.—

Dziobek, Dr. **O.**, Professor an der Militärtechn. Akademie und an der Techn. Hochschule zu Charlottenburg, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Mit 150 Figuren. [X u. 648 S.] gr. 8. 1910. Geb. *M.* 16.—

Eneström, **G.**, Bibliothekar in Stockholm, Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. In 2 Lieferungen. I. Liefg. [208 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M.* 10.—

Fortschritte der Mathematischen Wissenschaften in Monographien. Herausgegeben von O. Blumenthal. In zwanglosen Heften. gr. 8. Steif geh.
Bisher erschienen:
- Heft 1: **Minkowski**, **H.**, zwei Abhandlungen über die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Mit Einführungswort von O. Blumenthal. [82 S.] 1910. *M.* 2.40.

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. 2 Teile in 4 Bänden. Mit vielen Figuren. gr. 8. Geb.
- I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra.
  - 1. Band: Arithmetik. Von C. Färber. Mit 9 Fig. [XIV u. 422 S.] gr. 8. 1910. *M.* 9.—
  - 2. — Algebra. Von E. Netto. [In Vorbereitung.]
- II. — Die Grundlehren der Geometrie.
  - 1. Band: [illegible] Von H. Thieme. Mit 323 Figuren. [XII
  - 2. [illegible] ung.]

Sonderabdruck aus Mathematische Annalen. LXX. Band. 3. Heft.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Über die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt.

Von

P. Woronetz in Kiew.

Inhaltsverzeichnis.

Die wenigen partikulären Lösungen des Problems der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer gegebenen Fläche, die bis jetzt untersucht sind, beziehen sich hauptsächlich auf zwei spezielle Fälle. Es wird entweder die rollende Bewegung einer starren Kugel auf einer beliebigen Fläche*) oder die rollende Bewegung eines beliebigen starren Körpers unter der Wirkung der Schwere auf einer Ebene**) behandelt.

In der vorliegenden Arbeit soll nachgewiesen werden, daß die meisten Resultate, die bei der Behandlung des erwähnten zweiten Problems erreicht sind, sich leicht und fast ohne Einschränkung auf das allgemeinere Problem der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer Kugel erweitern lassen. Hierbei wird die Schwere durch eine Kraft ersetzt, die vom Schwerpunkte des Körpers zum Zentrum der Kugel gerichtet ist und nur von der Entfernung dieser beiden Punkte voneinander abhängt.

Die Untersuchungen über dieses Problem bilden den Inhalt von Kapitel III.

In Kapitel IV werden die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt, entwickelt und einige einfache partikuläre Lösungen derselben angegeben.

Die beiden ersten Kapitel***) können als Einleitung in die beiden eben genannten angesehen werden.

---

*) Dieses Problem wird in den größeren Lehrbüchern der Dynamik, z. B. bei Routh (The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, Chap. V) recht ausführlich besprochen. Vergl. auch die interessante Dissertation von Fr. Noether, Über die rollende Bewegung einer Kugel auf Rotationsflächen, München 1909

**) Über die hierauf bezügliche Literatur vergl. Enc. math. Wiss. IV 6 (P. Stäckel), Elementare Dynamik der Punktsysteme und starren Körper, Nr. 38.

***) Vergl. auch meine russischen Abhandlungen: Über die Bewegungsglei-

Kapitel I enthält einige Sätze aus der Kinematik der rollenden Bewegung. Diese Sätze werden verwendet, um mittels der C. Neumannschen*) Koordinaten die Projektionen der momentanen Winkelgeschwindigkeit des rollenden Körpers auf die mit dem Körper fest verbundenen Achsen zu bestimmen.

In Kapitel II wird eine Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nicht holonomer Systeme (ohne die Euler-Lagrangeschen Multiplikatoren) angegeben, die der Hamiltonschen Methode für holonome Systeme insofern analog ist, als man zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen nur Differentialausdrücke erster Ordnung als Funktionen der unabhängigen Geschwindigkeiten zu berechnen hat. Nur ist bei nicht holonomen Systemen die Anzahl dieser Ausdrücke größer: zu den Ausdrücken für die Kräftefunktion und für die lebendige Kraft treten noch solche für so viele Impulse hinzu, als nicht holonome Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

Kapitel I.

Kinematische Untersuchungen über die rollende Bewegung eines starren Körpers auf einer gegebenen Fläche.

§ 1.

Einleitende Bemerkungen.

In den vorliegenden Untersuchungen über das Problem der Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer gegebenen Fläche S_1 rollt, sind zu den Koordinaten des Körpers nach C. Neumann**) folgende Größen gewählt: die Gaußschen Koordinaten u und v des Punktes M auf der Oberfläche S des Körpers, in welchem die Fläche S die Fläche S_1 berührt, die Gaußschen Koordinaten u_1 und v_1 desselben Punktes M auf der Fläche S_1 und der Winkel ϑ, den die Koordinatenlinie $v = \text{const.}$ mit der Koordinatenlinie $u_1 = \text{const.}$ im Punkte M bildet.

Wir denken uns ein orthogonales Koordinatenachsensystem $Oxyz$ mit dem Körper fest verbunden, bezeichnen mit w und ω die Geschwindigkeit

---

chungen nicht holonomer Systeme, Moskau math. Sammlung 1902, und Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer ruhenden Ebene rollt, Kiew Univers.-Nachrichten 1903.

*) C. Neumann, Grundzüge der analytischen Mechanik, Leipziger Berichte 1899. Vergl. auch Vierkandt, Über gleitende und rollende Bewegung, Monatshefte für Math. und Physik, 3 (1892).

**) ibid.

des Koordinatenursprungs O und die momentane Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers und stellen uns die Aufgabe, die Projektionen k, l, m; p, q, r der Vektoren w und ω auf die x, y, z-Achsen durch die Neumannschen Koordinaten $u, v, \vartheta, u_1, v_1$ und durch die Differentialquotienten $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, v_1$ derselben nach der Zeit t auszudrücken. Dazu haben wir einige einfache Sätze und Formeln aus der Flächentheorie nötig, die wir in den folgenden Paragraphen nach der Methode von Lord Kelvin (W. Thomson) und P. Tait*) ableiten wollen. Hierbei werden wir folgende Bezeichnungen benutzen. Die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung**) einer Fläche S, die durch die Gleichungen

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

gegeben sein möge, bezeichnen wir mit E, F, G; D, D', D''. In jedem Punkte M der Fläche S denken wir uns ein Achsensystem $Muvn$ gezogen, dessen u, v, n-Achsen mit den positiven Richtungen der Linien $u(v = \text{const.})$ und $v(u = \text{const.})$ und mit der Normale n zu S in M zusammenfallen. Die positive n-Achse möge in bezug auf die u- und v-Achsen so gelegen sein, wie die z-Achse in bezug auf die x- und y-Achsen.***) Die neun Kosinus der Winkel der u, v, n-Achsen mit den x, y, z-Achsen bezeichnen wir mit $\alpha, \alpha', \cdots, \gamma''$. Wir haben dann†):

$$(1) \qquad \alpha = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}, \; \beta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \; \gamma = \frac{1}{H}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right), \quad (H = +\sqrt{EG - F^2})$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

§ 2.

Volle Biegung, reine Biegung und Drillung.

Auf der Fläche S sei eine Kurve L gezogen und M und M_1 seien zwei unendlich nahe Punkte auf L. Wir legen durch die Punkte M und M_1 Tangentenebenen T und T_1 und bezeichnen mit $\Delta\varepsilon$ den unendlich

---

*) Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, vol. I, part. I, art. 110 u. f. In erweiterter Form bei Souslow, Über das Rollen einer Fläche auf einer anderen, Kiew Univers.-Nachrichten 1892, und in meiner Abhandlung, Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer Ebene rollt, Kap. IV, ibid., 1903.

**) Stahl und Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie, 1893, Form. (4) § 1 und (1) § 2.

***) Die positive z-Achse soll stets so gelegen sein, daß die positive x-Achse bei einer Drehung um die positive z-Achse im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ mit der positiven y-Achse zum Zusammenfallen gebracht wird.

†) ibid. Form. (22) und (23) § 1.

kleinen Winkel zwischen T und T_1 und mit Δs die Länge MM_1 der Kurve L. Auf der Schnittlinie der Ebenen T und T_1 tragen wir die Länge $\Delta\varepsilon : \Delta s$ in einer solchen Richtung auf, daß diese Strecke in bezug auf die Normalen n_1 und n in M_1 und M so gelegen ist, wie die z-Achse in bezug auf die x- und y-Achsen. Lassen wir nun den Punkt M_1 sich längs L dem Punkte M bis zum Zusammenfallen nähern, so erhalten wir auf diese Weise einen Vektor Ω, den wir die volle Biegung der Fläche S im Punkte M in der Richtung L nennen wollen.

Es ist klar, daß bei der rollenden Bewegung der Fläche S auf der ruhenden Ebene T längs der Kurve L der Vektor Ω die Komponente der momentanen Winkelgeschwindigkeit der Fläche S in der Ebene T bedeutet, wenn diese Winkelgeschwindigkeit so, wie bei G. Darboux*), auf die Längeneinheit bezogen ist.

Bezeichnen wir mit $\gamma, \gamma', \gamma''$ und $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_1''$ die Kosinus der Winkel der Normalen n und n_1 mit den Koordinatenachsen der x, y, z, so sind die Projektionen des Vektors Ω auf die x, y, z-Achsen

$$\Omega_x = \frac{1}{\Delta s}(\gamma_1'\gamma'' - \gamma_1''\gamma'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Setzen wir hierin

$$\gamma_1 = \gamma + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial\gamma}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right)\Delta s + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ein und lassen Δs gleich Null werden, so ergibt sich

$$\Omega_x = \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial u}\gamma'' - \frac{\partial\gamma''}{\partial u}\gamma'\right)\frac{du}{ds} + \left(\frac{\partial\gamma'}{\partial v}\gamma'' - \frac{\partial\gamma''}{\partial v}\gamma'\right)\frac{dv}{ds},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nun ist aber, wie bekannt**),

$$H^2\frac{\partial\gamma}{\partial u} = (FD' - GD)\frac{\partial x}{\partial u} + (FD - ED')\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$H^2\frac{\partial\gamma}{\partial v} = (FD'' - GD')\frac{\partial x}{\partial u} + (FD' - ED'')\frac{\partial x}{\partial v},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

sodaß nach (1)

$$H\cdot\Omega_x = \left(D\frac{\partial x}{\partial v} - D'\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{du}{ds} + \left(D'\frac{\partial x}{\partial v} - D''\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{dv}{ds} \tag{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wird.

---

*) Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, L. V.

**) Stahl und Kommerell, Formel (6) § 2.

Die Projektionen des Vektors Ω auf die Richtungen u und v sind also nach (1) gleich

$$(3)\quad \begin{aligned} \Omega_u &= \frac{1}{H\sqrt{E}}\left[(DF - D'E)\frac{du}{ds} + (D'F - D''E)\frac{dv}{ds}\right], \\ \Omega_v &= \frac{1}{H\sqrt{G}}\left[(DG - D'F)\frac{du}{ds} + (D'G - D''F)\frac{dv}{ds}\right]. \end{aligned}$$

Wir zerlegen nun die volle Biegung Ω in zwei Komponenten: Ω_s in der Richtung der Kurve L und Ω_p in der zu s senkrechten Richtung p. Ω_p wollen wir die reine Biegung und Ω_s die Drillung der Fläche S in M in der Richtung L nennen.

Geometrisch ist es klar, daß die reine Biegung Ω_p der Krümmung des normalen Schnittes der Fläche S im Punkte M in der Richtung L gleich ist. Um die Drillung Ω_s zu interpretieren, ziehen wir durch M in der Richtung L eine geodätische Linie, d. h. eine Kurve, deren Krümmungsebene stets durch die Normale n der Fläche S hindurchgeht. Für diese Kurve ist die Gerade p die Binormale, so daß Ω_s der Torsion der geodätischen Linie gleich ist, die durch M in der Richtung L gezogen ist.

Die Tangente zur Kurve L bildet mit den x, y, z-Achsen Winkel, deren Kosinus gleich

$$(4)\quad \frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \quad \ldots\ldots\ldots$$

sind, sodaß die Formeln (2)

$$H\cdot\Omega_s\cdot ds^2 = (DF - D'E)du^2 + (DG - D''E)du\,dv + (D'G - D''F)dv^2$$

ergeben.

Diejenigen Linien, längs welchen die Drillung gleich Null ist, sind die Krümmungslinien der Fläche S. Im allgemeinen also gehen durch jeden Punkt M der Fläche S zwei solche Linien hindurch. Wenn in jedem Punkte der Fläche S die Relationen

$$D : E = D' : F = D'' : G$$

erfüllt sind, so ist jede Linie auf S eine Krümmungslinie, d. h. die Fläche S ist eine Kugel. Schließen wir diesen Fall aus und wählen wir die Krümmungslinien als u- und v-Linien, so ist in jedem Punkte der Fläche

$$F = 0, \quad D' = 0.$$

Die Krümmungslinien bilden also ein orthogonales Koordinatenliniennetz*).

Wir gehen nun zur Bestimmung der reinen Biegung Ω_p über.

---

*) Stahl und Kommerell, Formel (10) § 1.

Die Richtung p ist senkrecht zur Tangente s der Kurve L und zur Normalen n der Fläche S, folglich ist

$$\cos(p,x) = \gamma' \frac{dz}{ds} - \gamma'' \frac{dy}{ds} = \left(\gamma' \frac{\partial z}{\partial u} - \gamma'' \frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{du}{ds} + \left(\gamma' \frac{\partial z}{\partial v} - \gamma'' \frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{dv}{ds},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

oder nach (1)

$$H\cos(p,x) = \left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{du}{ds} + \left(F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{dv}{ds}, \tag{5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die positive Richtung der p-Achse denken wir uns in bezug auf die s- und n-Achsen so gelegen, wie die y-Achse in bezug auf die x- und z-Achsen.

Zufolge (5) ergeben die Formeln (2):

$$\Omega_p \cdot ds^2 = D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2.$$

Diejenigen Linien, längs welchen die reine Biegung gleich Null ist, sind die asymptotischen Linien. Durch jeden Punkt der Fläche gehen im allgemeinen zwei solche Linien hindurch.

§ 3.

Das Kreiseln der Tangentenebene.

Wir denken uns wieder in zwei unendlich nahen Punkten M und M_1 der Kurve L die Tangentenebenen T und T_1 zu der Fläche S gelegt und bezeichnen mit Δs die Länge MM_1 der Kurve L. In den Ebenen T und T_1 ziehen wir die Tangenten s und s_1 zu der Kurve L in den Punkten M und M_1. Drehen wir nun die Ebene T um die Achse der vollen Biegung um den Winkel $\Delta\varepsilon$, so wird die Ebene T mit der Ebene T_1 zusammenfallen, aber im allgemeinen wird die Gerade s nicht längs der Geraden s_1 gerichtet sein, und um diese Geraden s und s_1 zum Zusammenfallen zu bringen, werden wir die Tangentenebene T um die Normale n zu S in M um einen unendlich kleinen Winkel $\Delta\eta$ drehen müssen. Auf der Normalen n tragen wir die Strecke $\Delta\eta : \Delta s$ auf und lassen den Punkt M_1 längs der Kurve L sich dem Punkte M bis zum Zusammenfallen nähern. Den so entstandenen Vektor N nennen wir das Kreiseln der Tangentenebene T im Punkte M in der Richtung L.

Augenscheinlich ist N der Größe nach der geodätischen Krümmung der Kurve L im Punkte M gleich, d. h. der Projektion der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der Kurve L auf die Tangentenebene T:

$$N = \pm \frac{1}{\varrho}\cos(\varrho, p)$$

Geben wir p die durch die Formeln (5) definierte Richtung und wählen wir in dem Ausdrucke für N das untere Zeichen, so wird sich die Tangentenebene um n in einem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne drehen.

Bei der rollenden Bewegung der Fläche S auf der ruhenden Ebene T längs der Kurve L ist also N die Komponente der momentanen Winkelgeschwindigkeit der Fläche S längs der Normalen n, wenn diese Winkelgeschwindigkeit auf die Längeneinheit bezogen ist.

Es soll nun N durch die Größen E, F, G ausgedrückt werden

Bezeichnen wir der Kürze wegen

$$E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds} = k_1, \qquad F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds} = k_2,$$

sodaß

$$k_1\frac{du}{ds} + k_2\frac{dv}{ds} = 1 \tag{6}$$

ist*), so ergibt (5):

$$H\cos(p, x) = k_1\frac{\partial x}{\partial v} - k_2\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Außerdem haben wir, wie bekannt:

$$\cos(\varrho, x) = \varrho\frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

sodaß

$$N = -\frac{\cos(\varrho, p)}{\varrho} = \frac{k_2}{H}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} + \cdots\right) - \frac{k_1}{H}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2x}{ds^2} + \cdots\right)$$

wird. Nun ist aber nach (6)

$$k_2\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{ds^2} + \cdots\right) = \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{dx}{ds}\right) + \cdots\right]k_2\frac{du}{ds} + \left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{dx}{ds}\right) + \cdots\right]\left(1 - k_1\frac{du}{ds}\right),$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Setzen wir hieraus in N ein, so werden die Koeffizienten bei k_1 und k_2 infolge der evidenten Formel

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

gleich Null, und wir erhalten:

$$N = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dx}{ds} + \cdots\right) - \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dx}{ds} + \cdots\right),$$

oder nach (4):

$$N = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right) - \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right). \tag{7}$$

Das ist die gesuchte Formel.

---

*) Stahl und Kommerell, Formel (3) § 1.

Wenn die Kurve L durch die Gleichung

$$f(u, v) = 0$$

gegeben ist, so haben wir:

$$\frac{du}{\frac{\partial f}{\partial v}} = \frac{dv}{-\frac{\partial f}{\partial u}} = \frac{ds}{h}, \quad h^2 = E\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} + G\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2,$$

und (7) geht in die bekannte Formel von Bonnet

$$N = \frac{1}{H}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial f}{\partial v} - F\frac{\partial f}{\partial u}}{h}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\frac{\partial f}{\partial v} - G\frac{\partial f}{\partial u}}{h}\right)\right]$$

über.

Für die geodätischen Linien ist die Projektion der Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ auf die Tangentenebene, also auch N gleich Null.

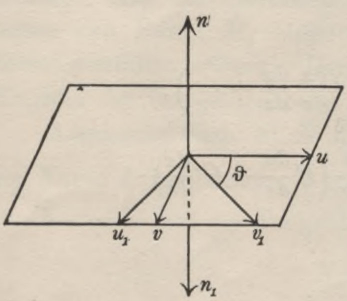
§ 4.

Anwendung auf das Problem der rollenden Bewegung.

Die Formeln der zwei vorhergehenden Paragraphen wollen wir nun zur Lösung der Aufgabe, die wir uns in § 1 gestellt haben, verwenden. Ist ω die momentane Winkelgeschwindigkeit eines starren Körpers, der auf einer gegebenen Fläche S_1 rollt, so haben wir also die Projektionen p, q, r von ω auf die mit dem Körper fest verbundenen x, y, z-Achsen durch die Koordinaten $u, v, \vartheta, u_1, v_1$ des Körpers und die Differentialquotienten $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1$ zu bestimmen.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: E, F, G; D, D', D'' seien die Fundamentalgrößen der Oberfläche S des Körpers und E_1, F_1, G_1; D_1, D_1', D_1'' dieselben Größen für die Fläche S_1, auf welcher der Körper rollt. Der Einfachheit wegen werden wir voraussetzen, daß die Linien u und v auf S und die Linien u_1 und v_1 auf S_1 die Krümmungslinien dieser Flächen sind:

$$F = 0, \quad D' = 0, \quad F_1 = 0, \quad D_1' = 0.$$



Im Berührungspunkte M der Flächen S und S_1 denken wir uns zwei Achsensysteme $Muvn$ und $M_1u_1v_1n_1$ (Fig. 1), deren Achsen mit den Tangenten zu den Linien u, v; u_1, v_1 durch den Punkt M und mit der gemeinsamen Normalen zu S und S_1 zusammenfallen, gezogen und betrachten die momentane Winkelgeschwindigkeit ω als die geometrische Summe von drei Vektoren ω_1, ω_2, ω_3:

$$(\omega) = (\omega_1) + (\omega_2) + (\omega_3),$$

wobei ω_1 die Winkelgeschwindigkeit des mit dem Körper fest verbundenen Achsensystems $Oxyz$ in bezug auf das System $Muvn$, ω_2 die Winkelgeschwindigkeit des Systems $Muvn$ in bezug auf $Mu_1v_1n_1$ und ω_3 die Winkelgeschwindigkeit des Systems $Mu_1v_1n_1$ in bezug auf das Achsensystem $O_1x_1y_1z_1$, das mit der Fläche S_1 fest verbunden ist, bezeichnen.

Wenn der Berührungspunkt M auf der Fläche S längs der Kurve u um die Strecke $\sqrt{E}\,du$ verrückt wird, so ist die in der Tangentenebene T gelegene Komponente der Winkelgeschwindigkeit ω_1 nach (3) längs der Kurve v gerichtet und, auf die Längeneinheit bezogen, gleich $D:E$, während die Komponente von ω_1 längs der Normalen n, auch auf die Längeneinheit bezogen, nach (7) gleich $\frac{1}{2\sqrt{G}}\,\frac{1}{E}\,\frac{\partial E}{\partial v}$ ist. Verrücken wir noch den Berührungspunkt M längs der Kurve v um die Strecke $\sqrt{G}\,dv$, so finden wir leicht:

$$(8)\quad \begin{gathered} \omega_1 \cos(\omega_1, u) = \sigma_1 = -\frac{D''}{\sqrt{G}}\,\dot{v}, \quad \omega_1 \cos(\omega_1, v) = \tau_1 = \frac{D}{\sqrt{E}}\,\dot{u}, \\ \omega_1 \cos(\omega_1, n) = n_1 = \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\,\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\,\dot{v}\right). \end{gathered}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_2 ist längs der Normalen n_1 gerichtet und ist gleich $\dot{\vartheta}$, und die Winkelgeschwindigkeit ω_3 wird auf ähnliche Weise wie ω_1 bestimmt. Wir erhalten also nach Fig. 1 folgende Formeln:

$$(9)\quad \begin{aligned} \omega\cos(\omega,u) &= \sigma = -\frac{D''}{\sqrt{G}}\,\dot{v} - \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\,\dot{v}_1 \sin\vartheta - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\,\dot{u}_1 \cos\vartheta, \\ \omega\cos(\omega,v) &= \tau = \frac{D}{\sqrt{E}}\,\dot{u} - \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\,\dot{u}_1 \sin\vartheta + \frac{D_1''}{\sqrt{G_1}}\,v_1 \cos\vartheta, \\ \omega\cos(\omega,n) &= n = -\dot{\vartheta} + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\,\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\,\dot{v}\right) + \frac{1}{2\sqrt{E_1G_1}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\,\dot{u}_1 - \frac{\partial G_1}{\partial u_1}\,\dot{v}_1\right) \end{aligned}$$

und hieraus die gesuchten Ausdrücke für die p, q, r:

$$(10)\quad p = \sigma\alpha + \tau\beta + n\gamma, \quad q = \sigma\alpha' + \tau\beta' + n\gamma', \quad r = \sigma\alpha'' + \tau\beta'' + n\gamma'',$$

wo die neun Kosinus nach (1) gegebene Funktionen der u und v sind.

Wir gehen nun zur Bestimmung der Projektionen k, l, m der Geschwindigkeit w des Koordinatenursprunges O auf die x, y, z-Achsen über. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Bewegung des Berührungspunktes M. Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ dieses Punktes M hat zu ihren Komponenten längs den Kurven u_1 und v_1 die Größen $\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1$ und $\sqrt{G_1}\,\dot{v}_1$. Die

Komponenten der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des Punktes M längs den Linien u und v sind gleich $\sqrt{E}\dot{u}$ und $\sqrt{G}\dot{v}$. Endlich die Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$ des Punktes des starren Körpers, der im gegebenen Momente mit dem Berührungspunkte M zusammenfällt, gibt auf die x, y, z-Achsen die Projektionen $k + qz - ry$, $l + rx - pz$, $m + py - qx$, wo x, y, z die Koordinaten des Punktes M, also gegebene Funktionen von u und v, sind. Nun ist aber der Vektor $\mathfrak{v}_1$ der geometrischen Summe der Vektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ gleich:

$$(\mathfrak{v}_1) = (\mathfrak{v}) + (\mathfrak{w}),$$

sodaß wir nach Fig. 1 und nach (10), wenn wir die Geschwindigkeiten $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ auf die x, y, z-Achsen projizieren,

$$\begin{aligned}
k = &\left(-\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 \sin\vartheta + \sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 \cos\vartheta - \sqrt{E}\,\dot{u}\right)\alpha \\
&+ \left(\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 \cos\vartheta + \sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 \sin\vartheta - \sqrt{G}\,\dot{v}\right)\beta \\
&+ y(\sigma\alpha'' + \tau\beta'' + n\gamma'') - z(\sigma\alpha' + \tau\beta' + n\gamma'), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{11}$$

erhalten.

Diese Formeln bestimmen die Größen k, l, m als Funktionen der Koordinaten $u, v, \vartheta, u_1, v_1$ des starren Körpers und der Differentialquotienten $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1$.

Soll die rollende Bewegung des Körpers ohne Gleitung vor sich gehen, so ist die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_1$ des Punktes M seiner relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ geometrisch gleich, und wir erhalten nach Fig. 1:

$$\begin{aligned}
\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 &= -\sqrt{E}\,\dot{u}\sin\vartheta + \sqrt{G}\,\dot{v}\cos\vartheta, \\
\sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 &= \sqrt{E}\,\dot{u}\cos\vartheta + \sqrt{G}\,\dot{v}\sin\vartheta.
\end{aligned} \tag{12}$$

Die Formeln (11) vereinfachen sich in diesem Falle in folgende:

$$\begin{aligned}
k &= (y\alpha'' - z\alpha')\sigma + (y\beta'' - z\beta')\tau + (y\gamma'' - z\gamma')n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{13}$$

und aus den Ausdrücken (9) für σ, τ, n können zwei der Größen $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1$ mit Hilfe von (12) eliminiert werden.

Kapitel II.

Über die Bewegungsgleichungen nicht holonomer Systeme.

§ 5.

Elimination der Lagrangeschen Multiplikatoren aus den Bewegungsgleichungen.

Die Bewegung eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer gegebenen Fläche rollt, bietet ein Beispiel für die Bewegung nicht holonomer Systeme.

Bevor wir zum speziellen Probleme der Rollbewegung übergehen, wollen wir die Bewegungsgleichungen der nicht holonomen Systeme im allgemeinen Falle besprechen.

Wir bezeichnen mit $q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}$ die Koordinaten eines materiellen Systems, mit $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_{n+k}$ die Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit t, d. h. die verallgemeinerten Geschwindigkeiten, mit $T(t, q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_{n+k})$ die kinetische Energie des Systems und mit Q_s die verallgemeinerte Kraft, die der Koordinate q_s entspricht. Das Produkt $Q_s \delta q_s$ bestimmt also die Arbeit der wirkenden Kräfte bei einer solchen Bewegung des Systems, wenn alle Koordinaten Konstante sind außer der Koordinate q_s, die um δq_s wächst.

Das materielle System sei den Bedingungsgleichungen

$$\dot{q}_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} \dot{q}_i + a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k), \tag{14}$$

wo die Koeffizienten $a_{\nu i}$ und a_ν gegebene Funktionen der Zeit und der Koordinaten bezeichnen, unterworfen.

Wir werden voraussetzen, daß die Integrationsbedingungen für die Differentialgleichungen (14) nicht erfüllt sind, sodaß die Größen

$$\text{(15)} \quad \begin{aligned} A_{ij}^{(\nu)} &= \left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j} + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu j} \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_{n+\mu}} \right) - \left(\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu i} \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_{n+\mu}} \right), \\ A_{i}^{(\nu)} &= \left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial t} + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu} \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_{n+\mu}} \right) - \left(\frac{\partial a_{\nu}}{\partial q_i} + \sum_{\mu=1}^{k} a_{\mu i} \frac{\partial a_{\nu}}{\partial q_{n+\mu}} \right) \\ &(i, j = 1, 2, \cdots, n; \; \nu = 1, 2, \cdots, k) \end{aligned}$$

nicht alle gleichzeitig Null sein können.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems lassen sich, wenn die Lagrangeschen Multiplikatoren mit $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ bezeichnet werden, so hinschreiben:

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} &= \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i - \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu a_{\nu i} \qquad (i=1,2,\cdots,n),\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}} &= \frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} + Q_{n+\nu} + \lambda_\nu \qquad (\nu=1,2,\cdots,k). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen und die Bedingungen (14) bilden ein System von $n+2k$ Differentialgleichungen, welche die $n+k$ Koordinaten q und die k Größen λ als Funktionen der Zeit t bestimmen.

Die Anwendung der Bewegungsgleichungen in der Form (16) auf spezielle Probleme, im besonderen auf das Problem der rollenden Bewegung bietet einige Schwierigkeiten, erstens, weil aus (16) die Multiplikatoren λ nicht eliminiert sind, und zweitens, weil die Funktion T nicht mit Hilfe der Bedingungsgleichungen (14) auf die einfachste Form gebracht ist*), d. h. T ist eine quadratische Funktion von $n+k$ Argumenten $\dot{q}$, während doch die Formeln (14) die Möglichkeit liefern, T als quadratische Funktion von nur n Argumenten $\dot{q}$ auszudrücken. Wir wollen deshalb versuchen, die Bewegungsgleichungen der nicht holonomen Systeme in einer für die Anwendungen bequemeren Form zu erhalten.**)

Sind aus der Funktion T unter Benutzung von (14) die abhängigen Geschwindigkeiten $\dot{q}_{n+1}, \dot{q}_{n+2}, \cdots, \dot{q}_{n+k}$ eliminiert:

$$T = \Theta(t, q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n),$$

so ist

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}} \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

Differenzieren wir diese Gleichungen nach der Zeit und wenden wir die Formeln (16) an, so haben wir:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i}\left(\frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} + Q_{n+\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{d a_{\nu i}}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}}$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

Diese Gleichungen enthalten die Multiplikatoren λ nicht mehr.

---

*) Vergl. z. B. Hölder, Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1896, oder Hadamard, Sur les mouvements de roulement, Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux 5 (1895).

**) Vergl. auch V. Voltera, Sopra una classe di equazioni dinamiche, Torino Atti 33 (1898); P. Appell, Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la dynamique, J. de math. 7 (1901); L. Boltzmann, Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome, generalisierte Koordinaten, Sitzungsberichte der Wiener Akademie 111, Abt. IIa (1902); G. Hamel, Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik, Zeitschr. Math. Phys. 50 (1903).

Eliminieren wir noch die Derivierten von T nach den Koordinaten q_s mit Hilfe der evidenten Formeln

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_s} = \frac{\partial T}{\partial q_s} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_s} \dot{q}_i + \frac{\partial a_\nu}{\partial q_s} \right) \qquad (s = 1, 2, \cdots, n+k)$$

und bezeichnen wir die verallgemeinerten Impulse, die den abhängigen Geschwindigkeiten entsprechen, mit $K_1, K_2, \cdots, K_k$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}} = K_\nu(t, q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k),$$

so erhalten wir nach kurzer Rechnung die Bewegungsgleichungen eines nicht holonomen Systems in der Form

$$(17) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} + Q_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial q_{n+\nu}} + Q_{n+\nu} \right)$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{k} K_\nu \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(\nu)} \dot{q}_j + A_i^{(\nu)} \right) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Hier haben die Größen $A_{ij}^{(\nu)}$ und $A_i^{(\nu)}$ die in (15) gegebenen Bedeutungen.

Die $n + k$ Differentialgleichungen (17) und (14) bestimmen die $n + k$ Koordinaten q durch die Zeit t.

§ 6.

Die Bewegungsgleichungen in speziellen Fällen.

Die Bewegung eines nicht holonomen Systems ist, wie bekannt*), noch nicht völlig bestimmt, wenn der Ausdruck Θ für die kinetische Energie des Systems und die Ausdrücke Q_s für die verallgemeinerten Kräfte gegeben sind. In der Tat enthalten die Bewegungsgleichungen (17) noch die Funktionen K_ν, also so viele verallgemeinerte Impulse, als nicht holonome Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Diese Funktionen K_ν sind lineare Differentialausdrücke erster Ordnung, und die Berechnung derselben macht, wenigstens im Probleme der rollenden Bewegung, keine Schwierigkeiten.

Die Formeln (17) gehen für den Fall, daß die Integrationsbedingungen für (14) erfüllt sind:

$$A_{ij}^{(\nu)} = 0, \quad A_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, k),$$

wie leicht zu ersehen ist, in die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen über.

*) Vergl. z. B. P. Appell, Sur une forme générale des équations de la dynamique et sur le principe de Gauss, J. f. Math. 122 (1900).

Wir weisen noch auf folgenden speziellen Fall, der in den Anwendungen häufig vorkommt, hin. Die Koordinaten $q_{n+1}, q_{n+2}, \cdots, q_{n+k}$, die den eliminierten Geschwindigkeiten entsprechen, mögen „zyklisch" sein, d. h. es mögen diese Koordinaten weder in der kinetischen Energie, noch in den Ausdrücken Q_s, noch endlich in den Bedingungsgleichungen (14) explizit enthalten sein. Die Aufgabe von der Bestimmung der Koordinaten durch die Zeit zerfällt dann in zwei selbständige Probleme, die nacheinander zu lösen sind. Zuerst werden die nichtzyklischen Koordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_n$ gesucht. Dazu haben wir die n Differentialgleichungen (17) zweiter Ordnung, wo

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_{n+\nu}} = 0, \quad A_{ij}^{(\nu)} = \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i}, \quad A_i^{(\nu)} = \frac{\partial a_{\nu i}}{\partial t} - \frac{\partial a_\nu}{\partial q_i}$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, k)$$

einzusetzen ist, zu integrieren. Ist diese Aufgabe gelöst, so bestimmen wir die zyklischen Koordinaten $q_{n+1}, q_{n+2}, \cdots, q_{n+k}$ aus den Bedingungsgleichungen (14) durch Quadraturen.

Setzen wir noch voraus, daß eine Kräftefunktion U existiert:

$$Q_s = \frac{\partial U}{\partial q_s} \qquad (s = 1, 2, \cdots, n+k),$$

die auch nur von den ersten n Koordinaten abhängt, so gilt augenscheinlich folgender zuerst von Ferrers*) aufgestellter Satz: „Sind für eine der Koordinaten, z. B. für q_1 die Integrationsbedingungen erfüllt:

$$A_{1,j}^{(\nu)} = 0, \quad A_1^{(\nu)} = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n;\ \nu = 1, 2, \cdots, k),$$

so ist die entsprechende Bewegungsgleichung von der Lagrangeschen Form."

Wenn die Zeit t nicht explizit in der kinetischen Energie T, in der Kräftefunktion U und in den Bedingungsgleichungen (14) enthalten ist, so müssen die Koeffizienten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ in (14) alle gleich Null sein, da ja sonst die Ruhelage nicht zu den möglichen Lagen des Systems gehören würde, was doch nicht vorausgesetzt wird. Sind außerdem die Koordinaten $q_{n+1}, q_{n+2}, \cdots, q_{n+k}$ zyklisch, so nehmen die Bewegungsgleichungen (17) die einfache Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \Theta}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{k} K_\nu \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial a_{\nu i}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

an.

Diese Gleichungen sind von Tschaplygin**) gegeben.

---

*) Ferrers, Extension of Lagrange's equations, Quart. J. of math. 45 (1878).

**) Tschaplygin, Über die Bewegung eines schweren Drehungskörpers auf einer horizontalen Ebene, Arbeiten der physikalischen Sektion Nr. 9, Moskau 1897.

§ 7.

Eine Formel für nicht holonome Systeme, die dem Hamiltonschen Integrale analog ist.

Die Bewegungsgleichungen eines nicht holonomen Systems in der Form (17) werden sehr leicht mit Hilfe des folgenden Satzes erhalten.

Es mögen $q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}$ die Koordinaten eines materiellen Systems, T seine kinetische Energie und Q_s die verallgemeinerte Kraft, die der Koordinate q_s entspricht, bezeichnen. Das System möge den Bedingungsgleichungen

$$\dot{q}_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\dot{q}_i + a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k)$$

unterworfen sein. Drücken wir unter Benutzung dieser Gleichungen die kinetische Energie des Systems und die verallgemeinerten Impulse, die den abhängigen Geschwindigkeiten $\dot{q}_{n+1}, \dot{q}_{n+2}, \cdots, \dot{q}_{n+k}$ entsprechen, durch die Zeit t, die Koordinaten $q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}$ und die unabhängigen Geschwindigkeiten $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n$ aus:

$$T = \Theta(t, q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}} = K_\nu(t, q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_n) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k),$$

so gilt die Formel

$$(18) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Big[\delta\Theta + \sum_{s=1}^{n+k} Q_s \delta q_s + \sum_{\nu=1}^{k} K_\nu \delta\Big(\dot{q}_{n+\nu} - \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\dot{q}_i - a_\nu\Big)\Big] dt = 0$$

für alle Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n$, die für die Momente t_1 und t_2 verschwinden. Die Variationen $\delta q_{n+1}, \delta q_{n+2}, \cdots, \delta q_{n+k}$ werden durch die Gleichungen

$$(19) \qquad \delta q_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\delta q_i \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k)$$

definiert, und die Differenzen $\delta\dot{q}_s - \frac{d}{dt}\delta q_s$ $(s = 1, 2, \cdots, n+k)$ sind alle gleich Null zu setzen.

In der Tat, durch partielle Integration läßt sich (18) zufolge (19) so transformieren, daß unter dem Integrationszeichen eine lineare Funktion der Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_n$ erscheint. Setzen wir die Koeffizienten bei diesen Variationen gleich Null, so erhalten wir die Bewegungsgleichungen (17).

In bezug auf die Formel (18) wollen wir noch folgendes bemerken.*)

Betrachten wir *gleichzeitig* die Bedingungen (14) für die Geschwindigkeiten und die Bedingungen (19) für die Variationen und setzen wir

$$\delta \dot{q}_i - \frac{d}{dt} \delta q_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

so werden im allgemeinen die Differenzen $\delta \dot{q}_{n+\nu} - \frac{d}{dt} \delta q_{n+\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, k)$ von Null verschieden sein. Multiplizieren wir also die bekannte d'Alembertsche Formel

$$\sum_{s=1}^{n+k} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_s} + Q_s \right] \delta q_s = 0$$

mit dt und integrieren wir zwischen t_1 und t_2, wo t_1 und t_2 zwei Momente bezeichnen, für welche alle Variationen verschwinden, so erhalten wir die Formel

$$(20) \quad \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta T + \sum_{s=1}^{n+k} Q_s \delta q_s + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}} \left(\frac{d}{dt} \delta q_{n+\nu} - \delta \dot{q}_{n+\nu} \right) \right] dt = 0.$$

Ersetzen wir hier die Funktionen T und $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+\nu}}$ durch Θ und K_ν und berechnen wir die Differenzen $\frac{d}{dt} \delta q_{n+\nu} - \delta \dot{q}_{n+\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, k)$ direkt aus (14) und (19), so erhalten wir aus (20) auf ähnlichem Wege, wie aus (18), die Bewegungsgleichungen (17).

Der Grund, weshalb wir dieser Formel (20) die Formel (18) vorziehen, ist folgender.

Bei Untersuchungen über das Problem der rollenden Bewegung werden gewöhnlich nicht die verallgemeinerten Geschwindigkeiten benutzt, sondern es werden lineare Funktionen derselben in die entsprechenden Formeln eingeführt. So werden z. B. die Differentialquotienten $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ der drei Eulerschen Winkel φ, ψ, θ nach der Zeit t gewöhnlich durch die Projektionen p, q, r der momentanen Winkelgeschwindigkeit des rollenden Körpers auf die zentralen Hauptträgheitsachsen desselben ersetzt:

$$p = \dot{\varphi} \sin \theta - \dot{\psi} \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Betrachten wir nach Kirchhoff**) neben den Größen p, q, r die Größen p', q', r':

$$p' = \delta \varphi \sin \theta - \delta \psi \sin \varphi \cos \theta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

*) Vergl. hierüber meine Abhandlung und die Abhandlung von Souslow im Bd. 22 der Moskauer Mathematischen Sammlung, 1901.

**) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. I, Vorl. VI.

so müssen wir bei Benutzung der Formel (18) den Differenzen $\delta p - \frac{dp'}{dt}$ usw. die von Kirchhoff*) gegebene Bedeutung

$$\delta p - \frac{dp'}{dt} = qr' - rq',$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

zuschreiben. Wählten wir aber die Formel (20), so hätten die erwähnten Differenzen andere Werte, die von der Form der nicht holonomen Bedingungsgleichungen abhängen würden. Deshalb dürften sich die Untersuchungen, wenn wir von der Formel (20) statt (18) ausgehen würden, etwas komplizierter gestalten.

§ 8.

Einführung linearer Funktionen der Geschwindigkeiten in die Bewegungsgleichungen.

Die Bewegungsgleichungen (17) und die Formel (18) sollen nun auf den Fall verallgemeinert werden, daß statt der Geschwindigkeiten $\dot{q}$ beliebige lineare Funktionen derselben in die Bewegungsgleichungen eingeführt werden. Wir bezeichnen diese Funktionen mit $p_1, p_2, \cdots, p_{n+k}$ und setzen

$$\dot{q}_r = \sum_{s=1}^{n+k} \alpha_{rs} p_s + \alpha_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n+k), \tag{21}$$

wo die Koeffizienten α_{rs} und α_r von der Zeit t und den Koordinaten q abhängen.

Wir werden voraussetzen, daß sich die Gleichungen (21) nach den Variabeln p auflösen lassen.

Neben den p betrachten wir noch $n+k$ Größen p', die den Gleichungen

$$\delta q_r = \sum_{s=1}^{n+k} \alpha_{rs} p_s' \qquad (r = 1, 2, \cdots, n+k) \tag{22}$$

genügen.

Es lassen sich dann die Differenzen $\delta p_s - \frac{dp_s'}{dt}$ $(s = 1, 2, \cdots, n+k)$ aus den Bedingungen

$$\delta \dot{q}_r = \frac{d}{dt} \delta q_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n+k)$$

als lineare Funktionen der p' berechnen:

*) ibid., Formel (9).

$$(23) \qquad \delta p_s - \frac{dp_s'}{dt} = \sum_{r=1}^{n+k} P_{sr} p_r' \qquad (s=1,2,\cdots,n+k),$$

wo die Koeffizienten P_{sr} lineare Funktionen der p sind.

Die nicht holonomen Bedingungsgleichungen seien, durch die Größen p ausgedrückt:

$$(24) \qquad p_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} p_i + b_\nu \qquad (\nu = 1,2,\cdots k),$$

wo die $b_{\nu i}$ und b_ν von der Zeit t und den Koordinaten q abhängen.

Die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems haben dann die Form*):

$$(25) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p_i} = \displaystyle\sum_{r=1}^{n+k} \alpha_{ri}\left(\frac{\partial T}{\partial q_r} + Q_r\right) + \sum_{r=1}^{n+k} \frac{\partial T}{\partial p_r} P_{ri} - \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu b_{\nu i} \quad (i=1,2,\cdots,n), \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p_{n+\nu}} = \displaystyle\sum_{r=1}^{n+k} \alpha_{r,n+\nu}\left(\frac{\partial T}{\partial q_r} + Q_r\right) + \sum_{r=1}^{n+k} \frac{\partial T}{\partial p_r} P_{r,n+\nu} + \lambda_\nu \quad (\nu=1,2,\cdots,k). \end{cases}$$

Hier bezeichnet T die kinetische Energie des Systems, Q_s die verallgemeinerte Kraft, die der Koordinate q_s entspricht, und $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ die Lagrangeschen Multiplikatoren. T ist nach (21) eine Funktion der Zeit t, der Koordinaten q und der Größen p.

Die Formeln (25), (24) und (21) bilden ein System von $2n+3k$ Differentialgleichungen erster Ordnung, die die $n+k$ Koordinaten q, die $n+k$ Größen p und die Multiplikatoren λ als Funktionen der Zeit t bestimmen.

In bezug auf die Formeln (25) läßt sich dasselbe sagen, was wir oben über die Bewegungsgleichungen (16) ausgesprochen haben. Die Anwendung von (25) auf das Problem der rollenden Bewegung bietet Schwierigkeiten, erstens, weil aus (25) die Multiplikatoren λ nicht eliminiert sind, und zweitens, weil in (25) die Funktion T enthalten ist, die nicht unter Benutzung von (24) auf die einfachste Form gebracht ist.

Durch Elimination der λ aus (25) nach der im § 5 angewendeten Methode kommen wir zu Bewegungsgleichungen, die am leichtesten aus folgendem Satze, der dem Satze des § 7 analog ist, abgeleitet werden können.

Drücken wir die kinetische Energie T und die Derivierten von T nach

*) Vergl. z. B. die Methode, nach welcher bei G. Kirchhoff (ibid. Vorl. VI) die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Körpers abgeleitet werden. Siehe auch die Abhandlung von K. Heun, Die Bedeutung des D'Alembertschen Prinzipes für starre Systeme und Gelenkmechanismen, Arch. Math. Phys. (3) 2 (1902), § 17.

den Größen $p_{n+1}, p_{n+2}, \cdots, p_{n+k}$ *als Funktionen der Zeit* t, *der Koordinaten* q *und der Größen* $p_1, p_2, \cdots, p_n$ *aus:*

$$T = \Theta\ (t, q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}, p_1, p_2, \cdots, p_n),$$

$$\frac{\partial T}{\partial p_{n+\nu}} = K_\nu(t, q_1, q_2, \cdots, q_{n+k}, p_1, p_2, \cdots, p_n) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k),$$

so ist der Integralausdruck

$$(26) \qquad \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta\Theta + \sum_{r=1}^{n+k} Q_r \delta q_r + \sum_{\nu=1}^{k} K_\nu \delta\Big(p_{n+\nu} - \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} p_i - b_\nu\Big)\right] dt = 0$$

für alle $p_1', p_2', \cdots, p_n'$, *die an den Grenzen des Integrals verschwinden. Die Größen* $p'_{n+1}, p'_{n+2}, \cdots, p'_{n+k}$ *sind mit Hilfe der Formeln*

$$(27) \qquad p'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} p_i' \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, k),$$

und die Variationen $\delta q_1, \delta q_2, \cdots, \delta q_{n+k}$ *mit Hilfe von* (22) *zu eliminieren und die Differenzen* $\delta p - \frac{dp'}{dt}$ *aus* (21) *und* (22) *und den Bedingungen*

$$\delta \dot{q}_r = \frac{d}{dt} \delta q_r \qquad (r = 1, 2, \cdots, n+k)$$

zu berechnen.

§ 9.

Anwendung auf das Problem der rollenden Bewegung.

Wir gehen jetzt zum speziellen Problem der Bewegung eines starren Körpers, der unter der Wirkung von gegebenen Kräften ohne Gleitung auf einer gegebenen Fläche S_1 rollt, über.

Wir denken uns zwei orthogonale Koordinatensysteme $Oxyz$ und $O_1x_1y_1z_1$, das erste mit dem starren Körper, das zweite mit der Fläche S_1 fest verbunden.

Die Koordinaten des Körpers sind die Koordinaten a, b, c seines Punktes O in bezug auf das Achsensystem $O_1x_1y_1z_1$ und die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, θ, die die Lage der Achsen der x, y, z in bezug auf die x_1, y_1, z_1-Achsen bestimmen.

Statt der verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, \dot{\theta}$ führen wir lineare Funktionen derselben nach den Formeln

$$k = \dot{a}\cos(x, x_1) + \dot{b}\cos(x, y_1) + \dot{c}\cos(x, z_1), \quad p = \dot{\varphi}\sin\theta - \dot{\psi}\sin\varphi\cos\theta,$$

$$l = \dot{a}\cos(y, x_1) + \dot{b}\cos(y, y_1) + \dot{c}\cos(y, z_1), \quad q = \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\sin\varphi\sin\theta,$$

$$m = \dot{a}\cos(z, x_1) + \dot{b}\cos(z, y_1) + \dot{c}\cos(z, z_1), \quad r = \dot{\theta} + \dot{\psi}\cos\varphi$$

ein, wo die neun Kosinus bekannte Funktionen der Eulerschen Winkel sind

Die Größen $k, l, m; p, q, r$ bezeichnen, wie in § 1, die auf die x, y, z-Achsen genommenen Projektionen der Geschwindigkeit w des Punktes O und der momentanen Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers.

Führen wir außerdem die Größen $k', l', m'; p', q', r'$ nach den Formeln

$$k' = \delta a \cos(x,x_1) + \delta b \cos(x,y_1) + \delta c \cos(x,z_1); \quad p' = \delta\varphi \sin\theta - \delta\psi \sin\varphi \cos\theta;$$

. . . .

ein, so ist*)

$$\delta k - \frac{dk'}{dt} = lr' - rl' + qm' - mq'; \quad \delta p - \frac{dp'}{dt} = qr' - rq'; \tag{28}$$

. . . .

Bezeichnen wir mit x, y, z die auf das Achsensystem $Oxyz$ bezogenen Koordinaten des Punktes M, in welchem die Oberfläche S des Körpers die Fläche S_1 berührt, und drücken wir aus, daß sich dieser Punkt in momentaner Ruhe befindet, so erhalten wir die nicht holonomen Bedingungsgleichungen, denen der Körper unterworfen ist:

$$k = yr - zq, \quad l = zp - xr, \quad m = xq - yp. \tag{29}$$

Wenn der Punkt O mit dem Schwerpunkte des Körpers und die x, y, z-Achsen mit den Hauptträgheitsachsen durch den Punkt O zusammenfallen, so ist die kinetische Energie T des Körpers gleich

$$T = \frac{1}{2} M(k^2 + l^2 + m^2) + \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2), \tag{30}$$

wo M die Masse des Körpers und A, B, C die Trägheitsmomente um die x, y, z-Achsen bedeuten.

Die Funktionen Θ und K_ν, die in (26) enthalten sind, haben also im gegebenen Falle die Werte

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} M[(x^2+y^2+z^2)(p^2+q^2+r^2) - (xp+yq+zr)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2), \\ K_1 &= M(yr-zq), \quad K_2 = M(zp-xr), \quad K_3 = M(xq-yp), \end{aligned} \tag{31}$$

sodaß die Formel (26)

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta\Theta + \delta U + M(yr-zq)\,\delta(k-yr+zq) + \cdots]\, dt = 0$$

ergibt.

Wir setzen voraus, daß eine Kräftefunktion U existiert.

*) ibid. Formel (8) und (9).

Beim Transformieren dieser Formel sind nach dem Satze des § 8 außer (28) nur noch die Gleichungen

$$(32) \qquad k' = yr' - zq', \quad l' = zp' - xr', \quad m' = xq' - yp'$$

zu berücksichtigen.

Wir haben also:

$$\delta(k - yr + zq) = \frac{d}{dt}(yr' - zq') + lr' - rl' + qm' - mq' - \delta(yr - zq)$$
$$= \dot{y}r' - \dot{z}q' - (r\delta y - q\delta z),$$

sodaß der Integralausdruck (26) schließlich die Form

$$(33) \quad \int_{t_1}^{t_2} \{\delta\Theta + \delta U + M[\varrho\dot{\varrho}(pp' + qq' + rr') - (xp' + yq' + zr')(\dot{x}p + \dot{y}q + \dot{z}r)]$$
$$- M[\varrho\delta\varrho\cdot\omega^2 - (xp + yq + zr)(p\delta x + q\delta y + r\delta z)]\}\,dt = 0$$

annimmt, wo der Kürze wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2, \quad p^2 + q^2 + r^2 = \omega^2$$

gesetzt ist.

Diese Formel erlaubt die Gleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers in beliebigen Koordinaten abzuleiten. Wählen wir die Koordinaten $u, v, \vartheta, u_1, v_1$ des § 1, so sind die x, y, z gegebene Funktionen der u und v. Die Formeln (10) und (9) bestimmen die p, q, r durch die verallgemeinerten Geschwindigkeiten $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1$. Diese Geschwindigkeiten haben den nicht holonomen Bedingungen (12) zu genügen. Mit Hilfe dieser Formeln (12) können zwei der Größen $\dot{u}, \dot{v}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1$, z. B. $\dot{u}_1$ und $\dot{v}_1$, aus (9) eliminiert werden:

$$(34) \quad \begin{aligned} \sigma &= -\left(\frac{D''}{G} + \frac{D_1''}{G_1}\right)\sqrt{G}\dot{v} + \left(\frac{D_1''}{G_1} - \frac{D_1}{E_1}\right)(-\sqrt{E}\dot{u}\sin\vartheta + \sqrt{G}\dot{v}\cos\vartheta)\cos\vartheta, \\ \tau &= \left(\frac{D}{E} + \frac{D_1}{E_1}\right)\sqrt{E}\dot{u} + \left(\frac{D_1''}{G_1} - \frac{D_1}{E_1}\right)(\sqrt{E}\dot{u}\cos\vartheta + \sqrt{G}\dot{v}\sin\vartheta)\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Wir sehen also, daß diese Formeln, wenn die Fläche S_1 eine Kugel ist, d. h. wenn

$$D_1 : E_1 = D_1'' : G_1$$

ist, eine besonders einfache Form annehmen.

Die Untersuchung dieses speziellen Falles soll den allgemeinen Untersuchungen vorausgeschickt werden.

Kapitel III.

Über die rollende Bewegung eines starren Körpers auf einer Kugel.

§ 10.

Die Differentialgleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer Kugel.

Das Problem, das den Gegenstand des vorliegenden Kapitels bildet, kann so formuliert werden: „Ein gegebener starrer Körper ist gezwungen, auf einer unbeweglichen Kugel S_1 ohne Gleitung zu rollen. Auf den Körper wirkt eine Kraft ein, die am Schwerpunkte O des Körpers angreift, zum Zentrum O_1 der Kugel gerichtet ist und nur von der Entfernung der Punkte O und O_1 abhängt. Es soll die Bewegung des Körpers bestimmt werden."

Setzen wir

$$x_1 = R_1 \sin u_1 \cos v_1, \quad y_1 = R_1 \sin u_1 \sin v_1, \quad z_1 = R_1 \cos u_1,$$

so wird

$$E_1 = R_1^2, \quad G_1 = R_1^2 \sin^2 u_1, \quad D_1 = -R_1, \quad D_1'' = -R_1 \sin^2 u_1, \tag{35}$$

und die Formeln (34) und (10) ergeben:

$$\begin{aligned} \sigma &= \nu \dot{v}, \quad \tau = \mu \dot{u}, \\ p &= \nu \dot{v} \alpha + \mu \dot{u} \beta + n\gamma, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{36}$$

wo

$$\nu = -\left(\frac{D''}{G} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{G}, \quad \mu = \left(\frac{D}{E} - \frac{1}{R_1}\right)\sqrt{E}, \tag{37}$$

ist.

Mit Hilfe dieser Formeln (36) berechnen wir gemäß (31) die kinetische Energie Θ des Körpers:

$$\begin{aligned} 2\Theta = {} & M\varrho^2(\nu^2\dot{v}^2 + \mu^2\dot{u}^2 + n^2) - M\left(\varrho \frac{\partial \varrho}{\partial u} \frac{\nu \dot{v}}{\sqrt{E}} + \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial v} \frac{\mu \dot{u}}{\sqrt{G}} + \varepsilon n\right)^2 \\ & + A(\nu\dot{v}\alpha + \mu\dot{u}\beta + n\gamma)^2 + B(\nu\dot{v}\alpha' + \mu\dot{u}\beta' + n\gamma')^2 \\ & + C(\nu\dot{v}\alpha'' + \mu\dot{u}\beta'' + n\gamma'')^2. \end{aligned} \tag{38}$$

Hier bezeichnen ϱ und ε die Entfernungen des Schwerpunktes O von dem Berührungspunkte M und von der Tangentenebene in M zu der Oberfläche S des Körpers:

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \varepsilon = x\gamma + y\gamma' + z\gamma''.$$

Die kinetische Energie Θ ist also eine homogene Funktion zweiten

Grades der Argumente $\dot{u}$, $\dot{v}$, n. Die Koeffizienten dieser Funktion hängen nur von u und v ab.

Was die Kräftefunktion U anbelangt, so ist U im gegebenen Falle eine Funktion der Entfernung der Punkte O und O_1 voneinander. Nun ist aber

$$\overline{O_1 O}^2 = \overline{O_1 M}^2 + \overline{OM}^2 - 2\,\overline{O_1 M}\cdot\overline{OM}\cos\left(\overline{O_1 M}, \overline{OM}\right) = R_1^{\,2} + \varrho^2 + 2R_1\varepsilon,$$

folglich enthält U nur u und v.

Führen wir neben den p, q, r (36) die Größen p', q', r' ein:

$$p' = \alpha\nu\delta v + \beta\mu\delta u + \gamma n', \tag{39}$$

so ergibt die Grundformel (33):

$$\int_{t_1}^{t_2}\Big[\delta\Theta + \delta U + M\varrho\dot{\varrho}(\nu^2\dot{v}\delta v + \mu^2\dot{u}\delta u + nn')$$
$$-M\left(\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\nu\delta v}{\sqrt{E}} + \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\mu\delta u}{\sqrt{G}} + \varepsilon n'\right)\left(\sqrt{E}\,\nu + \sqrt{G}\,\mu\right)\dot{u}\dot{v} - M\omega^2\varrho\delta\varrho$$
$$+M\left(\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\nu\dot{v}}{\sqrt{E}} + \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\mu\dot{u}}{\sqrt{G}} + \varepsilon n\right)\left(\sqrt{E}\,\nu\dot{v}\,\delta u + \sqrt{G}\,\mu\dot{u}\,\delta v\right)\Big]dt = 0,$$

wobei der Kürze wegen

$$\nu^2\dot{v}^2 + \mu^2\dot{u}^2 + n^2 = \omega^2$$

gesetzt ist.

Um aus diesem Ausdrucke die Bewegungsgleichungen zu erhalten, haben wir noch die Differenzen $\delta\dot{u} - \frac{d}{dt}\delta u$, $\delta\dot{v} - \frac{d}{dt}\delta v$, $\delta n - \frac{dn'}{dt}$ zu berechnen.

Aus (36) und (39) ergibt sich

$$\nu\dot{v} = p\alpha + q\alpha' + r\alpha'', \qquad \nu\delta v = p'\alpha + q'\alpha' + r'\alpha'',$$

sodaß nach (28)

$$\nu\left(\delta\dot{v} - \frac{d}{dt}\delta v\right) + \frac{\partial\nu}{\partial u}(\dot{v}\delta u - \dot{u}\delta v) = (qr' - rq')\alpha + \cdots + p\delta\alpha + \cdots - p'\dot{\alpha} - \cdots$$

wird. Setzen wir hierin aus (36) und (39) ein und bemerken, daß infolge bekannter Formeln der Kinematik

$$\beta\dot{\gamma} + \beta'\dot{\gamma}' + \beta''\dot{\gamma}'' = \sigma_1, \quad \gamma\dot{\alpha} + \cdots = \tau_1, \quad \alpha\dot{\beta} + \cdots = n_1$$

ist, wo σ_1, τ_1, n_1 die Bedeutungen (8) haben, so erhalten wir:

$$\nu\left(\delta\dot{v} - \frac{d}{dt}\delta v\right) + \left(\frac{\partial\nu}{\partial u} + \frac{\mu}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial G}{\partial u}\right)(\dot{v}\delta u - \dot{u}\delta v) = \frac{\sqrt{E}}{R_1}(n\delta u - \dot{u}n').$$

Der Ausdruck

$$\frac{\partial\nu}{\partial u} + \frac{\mu}{2\sqrt{EG}}\,\frac{\partial G}{\partial u}$$

ist aber, nach (37) und der Formel von Mainardi-Codazzi*)

$$2H^2\left(\frac{\partial D''}{\partial u}-\frac{\partial D'}{\partial v}\right)=\left(2\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)(FD'-GD)+\frac{\partial G}{\partial v}(FD-ED')$$
$$-\frac{\partial E}{\partial v}(FD''-GD')-\frac{\partial G}{\partial u}(FD'-ED''),$$

gleich Null, sodaß wir endgültig haben:

$$\nu\left(\delta\dot v-\frac{d}{dt}\delta v\right)=\frac{\sqrt{E}}{R_1}(n\delta u-\dot u n').$$

Auf ähnliche Weise finden wir:

$$\mu\left(\delta\dot u-\frac{d}{dt}\delta u\right)=\frac{\sqrt{G}}{R_1}(n\delta v-\dot v n'),$$
$$\delta n-\frac{dn'}{dt}=\sqrt{EG}\left(\frac{DD''}{EG}-\frac{1}{R_1^{\,2}}\right)(\dot v\delta u-\dot u\delta v).$$

Transformieren wir nun unter Benutzung dieser Gleichungen die Grundformel so, daß unter dem Integrationszeichen eine lineare Funktion der Größen δu, δv, n' erscheint, und setzen wir die Koeffizienten bei diesen Größen gleich Null, so erhalten wir die gesuchten Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot u}-\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial u}=\sqrt{EG}\left(\frac{DD''}{EG}-\frac{1}{R_1^{\,2}}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot v+\frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot v}n-M\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}n^2$$
$$+M\varepsilon\sqrt{E}\,\nu\dot v n,$$

$$(40)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot v}-\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial v}=-\sqrt{EG}\left(\frac{DD''}{EG}-\frac{1}{R_1^{\,2}}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial n}\dot u+\frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot u}n-M\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}n^2$$
$$+M\varepsilon\sqrt{G}\,\mu\dot u n,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial n}=-\frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{1}{\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot v}\dot u-\frac{\sqrt{G}}{R_1}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot u}\dot v+M\left(\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\dot u+\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\dot v\right)n$$
$$-M\varepsilon(\sqrt{E}\,\nu+\sqrt{G}\,\mu)\dot u\dot v.$$

Diese Formeln bestimmen die nicht zyklischen Koordinaten u und v und die Größe n als Funktionen der Zeit t.

Bevor wir auf die Untersuchung der aufgestellten Bewegungsgleichungen näher eingehen, wollen wir die Richtigkeit derselben auf Grund allgemeiner Sätze der Dynamik prüfen.

*) Stahl und Kommerell, Formel (6) § 7.

§ 11.

Entwicklung der Bewegungsgleichungen aus dem Satze von dem Momente der Bewegungsgröße.

Die nicht holonomen Bedingungsgleichungen (29), denen der starre Körper unterworfen ist, nehmen für das in Rede stehende Problem nach (36) die Form

$$(41)\qquad k = (y\alpha'' - z\alpha')\nu\dot{v} + (y\beta'' - z\beta')\mu\dot{u} + (y\gamma'' - z\gamma')n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

an, sodaß wir aus (30) nach (36)

$$(42)\qquad \frac{1}{\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}} = \frac{\partial T}{\partial k}(y\alpha'' - z\alpha') + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p}\alpha + \cdots$$

erhalten. Da nun $\frac{\partial T}{\partial k}, \cdots, \frac{\partial T}{\partial p}, \cdots$ gleich sind den in bezug auf die x, y, z-Achsen gebildeten Projektionen des resultierenden Vektors und des um den Schwerpunkt O genommenen resultierenden Momentes der Bewegungsgrößen der materiellen Punkte, aus denen wir uns den starren Körper zusammengesetzt denken, so sehen wir aus (42), daß $\frac{1}{\nu}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{v}}, \frac{1}{\mu}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot{u}}, \frac{\partial\Theta}{\partial n}$ die auf die u, v, n-Achsen genommenen Projektionen des erwähnten Momentes um den Berührungspunkt M bedeuten.

Nun ist aber bekannt*), daß die geometrische Derivierte $\dot{\Pi}_1$ des Vektorensystems Π_1, das aus den Bewegungsgrößen der materiellen Punkte des Körpers besteht, dem Vektorensysteme Π_2 der auf den Körper einwirkenden Kräfte und Reaktionen äquivalent ist. Ist der Pol $M(x, y, z)$, in bezug auf welchen wir das resultierende Moment Γ_1 des Systems Π_1 berechnen, ein unbeweglicher Punkt, so ist das resultierende Moment Γ_1' des Systems $\dot{\Pi}_1$ der geometrischen Derivierten $\dot{\Gamma}_1$ von Γ_1 geometrisch gleich:

$$(\Gamma_1') = (\dot{\Gamma}_1).$$

Ist aber, wie im gegebenen Falle, der Pol $M(x, y, z)$ beweglich, so ist

$$(43)\qquad (\Gamma_1') = (\dot{\Gamma}_1) + (K),$$

wo K das Moment des resultierenden Vektors des Systems Π_1, wenn dieser Vektor am „derivierten" Pole $M'(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ angreift, um den Koordinatenursprung bezeichnet.

Wenn wir noch bemerken, daß sich die u-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit dreht, deren Komponenten längs den x, y, z-Achsen den

*) Sousloff, Grundzüge der analytischen Mechanik (russisch), Bd. 1, § 192, Kiew 1900.

Größen $\dot{\alpha} + q\alpha'' - r\alpha'$ usw. gleich sind, so erhalten wir, wenn wir den Vektor Γ_1' auf die Richtung u projizieren:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial p} + z\frac{\partial T}{\partial l} - y\frac{\partial T}{\partial m}\right)(\dot{\alpha} + q\alpha'' - r\alpha') - \cdots + \left(\dot{y}\frac{\partial T}{\partial m} - \dot{z}\frac{\partial T}{\partial l}\right)\alpha + \cdots = \Gamma_2 \cos(\Gamma_2, u),$$

wo Γ_2 das resultierende Moment des Systems Π_2 um den Berührungspunkt M ist.

Werden die Momente der rollenden und bohrenden Reibung vernachlässigt, so gehen in Γ_2 nur die Momente der wirkenden Kräfte ein, da ja weder die Reibungskraft, noch die normale Reaktion Momente um den Berührungspunkt M geben. Existiert eine Kräftefunktion U, und denken wir uns den Differentialquotienten $\dot{U}$ von U nach der Zeit t als lineare Funktion der Größen $k, \cdots, p, \cdots$ ausgedrückt, so ist also

$$\Gamma_2 \cos(\Gamma_2, u) = \left(\frac{\partial \dot{U}}{\partial p} + z\frac{\partial \dot{U}}{\partial l} - y\frac{\partial \dot{U}}{\partial m}\right)\alpha + \cdots.$$

Geht $\dot{U}$ in $(\dot{U})$ über, wenn wir die Größen $k, \cdots, p, \cdots$ nach (36) und (41) eliminieren, so wird

$$\Gamma_2 \cos(\Gamma_2, u) = \frac{1}{v}\frac{\partial(\dot{U})}{\partial \dot{v}}.$$

Ist U eine Funktion von u und v, so haben wir:

$$\Gamma_2 \cos(\Gamma_2, u) = \frac{1}{v}\frac{\partial U}{\partial v}.$$

Wir erhalten also schließlich:

$$\text{(44)} \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} &= \frac{\partial T}{\partial k}\left[\frac{d}{dt}(yv\alpha'' - zv\alpha') + pv(x\alpha + y\alpha' + z\alpha'') - v\alpha(xp + yq + zr)\right] + \cdots \\ &+ \frac{\partial T}{\partial p}\left[\frac{d}{dt}(v\alpha) + qv\alpha'' - rv\alpha'\right] + \cdots + \frac{\partial U}{\partial v}. \end{aligned}$$

Durch recht komplizierte Rechnungen läßt sich feststellen, daß diese Gleichung mit der zweiten der Formeln (40) identisch ist.

Projizieren wir den Vektor Γ_1' auf die Richtungen v und n, so erhalten wir auf ähnliche Weise die beiden anderen Bewegungsgleichungen (40).

Die Formel (44) kann auch direkt aus den allgemeinen Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der den nicht holonomen Bedingungen (29) unterworfen ist:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial k} = r\frac{\partial T}{\partial l} - q\frac{\partial T}{\partial m} + \frac{\partial \dot{U}}{\partial k} + \lambda_1,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \dot{U}}{\partial p} + y\lambda_3 - z\lambda_2,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

durch Elimination der Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ abgeleitet werden.

Dazu haben wir unter Benutzung dieser Gleichungen die Formel (42), nachdem wir sie mit ν multipliziert haben, nach der Zeit t zu differenzieren:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial T}{\partial k}\frac{d}{dt}(y\nu\alpha'' - z\nu\alpha') + \cdots + (y\nu\alpha'' - z\nu\alpha')\left(r\frac{\partial T}{\partial l} - q\frac{\partial T}{\partial m} + \frac{\partial \dot{U}}{\partial k} + \lambda_1\right)$$
$$+ \cdots + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{d}{dt}(\nu\alpha) + \cdots + \nu\alpha\left(r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial \dot{U}}{\partial p} + y\lambda_3 - z\lambda_2\right) + \cdots,$$

oder

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} = \frac{\partial T}{\partial k}\left[\frac{d}{dt}(y\nu\alpha'' - z\nu\alpha') + x\nu(p\alpha + q\alpha' + r\alpha'') - \nu\alpha(xp + yq + zr)\right] + \cdots$$
$$\cdots + \frac{\partial T}{\partial p}\left[\frac{d}{dt}(\nu\alpha) + q\nu\alpha'' - r\nu\alpha'\right] + \cdots + \frac{\partial U}{\partial v}\cdot$$

Nun ist aber nach (29) und (30)

$$p\frac{\partial T}{\partial k} + q\frac{\partial T}{\partial l} + r\frac{\partial T}{\partial m} = 0, \quad x\frac{\partial T}{\partial k} + y\frac{\partial T}{\partial l} + z\frac{\partial T}{\partial m} = 0,$$

sodaß diese Gleichung mit der Formel (44) identisch ist.

§ 12.

Prüfung der Bewegungsgleichungen durch die Poinsotsche Interpretation der Bewegung eines kräftefreien starren Körpers.

Die Richtigkeit der Formeln (40) läßt sich, wenigstens in einem speziellen Falle, durch Benutzung der bekannten, von Poinsot gegebenen Interpretation der Bewegung eines starren Körpers, auf den keine Kräfte einwirken, bestätigen. Dieser Interpretation zufolge bewegt sich der Schwerpunkt eines solchen Körpers gleichförmig in einer Geraden, und das zentrale Trägheitsellipsoid des Körpers,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

rollt ohne zu gleiten auf einer Ebene, die eine solche Translationsbewegung hat, daß ihre Entfernung vom Schwerpunkte des Körpers konstant bleibt. Der Berührungspunkt des Ellipsoids und der Ebene beschreibt auf der Oberfläche des Ellipsoids eine Polhodie und auf der Ebene eine Herpolhodie. Die Projektion der momentanen Winkelgeschwindigkeit des Körpers auf die Normale im Berührungspunkte zum Trägheitsellipsoid bleibt konstant während der Bewegung.

Wenn der Schwerpunkt im Anfangsmomente in Ruhe war, so bleibt er in Ruhe während der Bewegung des Körpers, und das Trägheitsellipsoid wird auf einer ruhenden Ebene rollen.

Wir transformieren nun das Trägheitsellipsoid und die Ebene durch reziproke Radien.*) Das Ellipsoid geht in die Fläche vierten Grades

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

über und die Ebene in eine Kugel.

Dem Gesagten zufolge müssen die Bewegungsgleichungen (40), wenn auf den Körper keine Kräfte einwirken, und wenn der Körper von der erwähnten Fläche vierten Grades begrenzt ist, eine partikuläre Lösung zulassen, bei welcher die Größe n konstant bleibt und der Berührungspunkt M auf der Oberfläche des Körpers eine Kurve beschreibt, die aus der Polhodie durch Transformation mittels reziproker Radien erhalten wird.

In der Tat, setzen wir

$$x = \frac{a}{k-u-v}\,\frac{\sqrt{a^2-u}\,\sqrt{a^2-v}}{\sqrt{a^2-b^2}\,\sqrt{a^2-c^2}}, \ldots$$

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}, \quad k = a^2 + b^2 + c^2,$$

so läßt sich nachweisen, daß die Bewegungsgleichungen (40) im Falle

$$U = 0$$

die partikuläre Lösung

$$n = \text{const.}, \quad u \cdot v = \text{const.}$$

zulassen.

§ 13.

Auflösung der Bewegungsgleichungen nach den Differentialquotienten der unbekannten Funktionen. Bewegungsintegrale. Bestimmung der zyklischen Koordinaten.

Wir gehen nun zur näheren Untersuchung der Bewegungsgleichungen (40), die die Variablen u, v, n als Funktionen der Zeit t bestimmen, über. Diese Gleichungen sind in bezug auf u und v von der zweiten, in bezug auf n von der ersten Ordnung. Fügen wir den Formeln (40) die Gleichungen

$$\frac{du}{dt} = \dot{u}, \quad \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

hinzu, so erhalten wir fünf Differentialgleichungen erster Ordnung, welche

*) Routh, The advanced part of a treatise on the Dynamics usw. Art. 147, Ex. 4, 1884.

die fünf Funktionen $u, v, n, \dot{u}, \dot{v}$ durch t bestimmen. Sollen diese Gleichungen nach den Differentialquotienten der unbekannten Funktionen aufgelöst werden, so haben wir statt der $\dot{u}, \dot{v}, n$ neue unbekannte Funktionen p_1, p_2, p_3 nach den Formeln

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} = p_1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} = p_2, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial n} = p_3$$

einzuführen. Dann wird nach einem Satze von Donkin*)

$$\dot{u} = \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial p_1}, \quad \dot{v} = \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial p_2}, \quad n = \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial p_3}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial u} = -\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial u}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = -\frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial v},$$

wo $\overline{\Theta}$ die kinetische Energie des Körpers, als homogene Funktion zweiten Grades der Argumente p_1, p_2, p_3 ausgedrückt, bezeichnet. Wir erhalten also aus (40), wenn wir noch die Bezeichnung

$$\overline{\Theta} - U = H$$

einführen, folgende fünf Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die p_1, p_2, p_3, u, v durch t bestimmen:

$$(45)\quad \begin{aligned}
\frac{dp_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial u} + \sqrt{EG}\left(\frac{DD''}{EG} - \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial H}{\partial p_2} p_3 + \frac{\sqrt{E}}{R_1}\,\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial H}{\partial p_3} p_2 \\
&\qquad - M\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\right)^2 + M\varepsilon\sqrt{E}\,\nu\,\frac{\partial H}{\partial p_2}\,\frac{\partial H}{\partial p_3}, \\
\frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial v} - \sqrt{EG}\left(\frac{DD''}{EG} - \frac{1}{R_1^2}\right)\frac{\partial H}{\partial p_1} p_3 + \frac{\sqrt{G}}{R_1}\,\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial H}{\partial p_3} p_1 \\
&\qquad - M\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\right)^2 + M\varepsilon\sqrt{G}\,\mu\,\frac{\partial H}{\partial p_1}\,\frac{\partial H}{\partial p_3}, \\
\frac{dp_3}{dt} &= -\frac{\sqrt{G}}{R_1}\,\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial H}{\partial p_2} p_1 - \frac{\sqrt{E}}{R_1}\,\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial H}{\partial p_1} p_2 - M\left(\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial u}\,\frac{\partial H}{\partial p_1} + \varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial v}\,\frac{\partial H}{\partial p_2}\right)\frac{\partial H}{\partial p_3} \\
&\qquad - M\varepsilon\left(\sqrt{E}\,\nu + \sqrt{G}\,\mu\right)\frac{\partial H}{\partial p_1}\,\frac{\partial H}{\partial p_2}, \\
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen oder den Gleichungen (40) läßt sich noch mit Benutzung des Integrals der lebendigen Kraft

$$H = \Theta - U = h,$$

wo h eine willkürliche Konstante bezeichnet, die Zeit t eliminieren. Wählen wir z. B. u zur unabhängigen Variablen, so erhalten wir dann drei Differentialgleichungen erster Ordnung, die die Größen p_2, p_3, v, resp. $v, \dot{v}, n$ durch u bestimmen.

*) Philos. Trans. 1854.

Um außer dem Integrale der lebendigen Kraft noch ein zweites Bewegungsintegral zu erhalten, machen wir folgende spezielle Voraussetzungen. Die relative Geschwindigkeit $\mathfrak{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ des Berührungspunktes M möge in jedem Momente der Bewegung mit der Geschwindigkeit $w(k, l, m)$ des Schwerpunktes O des Körpers in einer Ebene liegen. Dann verschwindet der Vektor K, der in (43) enthalten ist. Wenn außerdem das resultierende Moment Γ_2 um M der auf den Körper wirkenden Kräfte gleich Null ist, so ist nach dem Satze des § 11 das resultierende Moment Γ_1 um M der Bewegungsgrößen der materiellen Punkte des Körpers konstant. Wir haben also in diesem speziellen Falle das Integral

$$\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}}\right)^2 + \frac{1}{\nu^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial n}\right)^2 = \text{const.} \tag{46}$$

Die eben angeführten Bedingungen sind augenscheinlich erfüllt, wenn der starre Körper teilweise oder ganz von einer Kugelfläche begrenzt ist, deren Zentrum mit dem Schwerpunkte des Körpers zusammenfällt.*)

Wir kehren wieder zum allgemeinen Falle zurück.

Sind die Bewegungsgleichungen (40) oder (45) integriert, so haben wir noch die zyklischen Koordinaten ϑ, u_1, v_1 zu bestimmen. Dazu dienen die letzte der Formeln (9) und die nicht holonomen Bedingungsgleichungen (12). Diese Formeln vereinfachen sich für den gegebenen Fall nach (35) zu folgenden:

$$\begin{aligned} R_1 \dot{u}_1 &= -\sqrt{E}\,\dot{u} \sin\vartheta + \sqrt{G}\,\dot{v}\cos\vartheta, \\ R_1 \dot{v}_1 \sin u_1 &= \sqrt{E}\,\dot{u}\cos\vartheta + \sqrt{G}\,\dot{v}\sin\vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= -n + \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right) - \dot{v}_1\cos u_1. \end{aligned} \tag{47}$$

Sind u, v, n durch die Zeit t ausgedrückt, so sind nach (36) und (41) die Größen $k, \cdots, p, \cdots$ bekannte Funktionen der Zeit, folglich**) muß sich die Bestimmung aller übrigen Koordinaten auf die Integration einer Riccatischen Gleichung zurückführen lassen.

In der Tat, setzen wir

$$-\frac{\sqrt{E}}{R_1}\dot{u} = f_1\cos\vartheta_1, \quad \frac{\sqrt{G}}{R_1}\dot{v} = f_1\sin\vartheta_1, \quad \frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\dot{u} - \frac{\partial G}{\partial u}\dot{v}\right) - n + \dot{\vartheta}_1 = f_2,$$

so sind f_1, f_2, ϑ_1 bekannte Funktionen von t. Die Formeln (47) ergeben:

$$\begin{gathered} \dot{u}_1 = f_1\sin(\vartheta + \vartheta_1), \quad \dot{v}_1 \sin u_1 = -f_1\cos(\vartheta + \vartheta_1), \\ \dot{\vartheta} + \dot{\vartheta}_1 = f_2 + f_1 \operatorname{ctg} u_1 \cos(\vartheta + \vartheta_1). \end{gathered}$$

*) Tschaplygin, Über eine mögliche Verallgemeinerung der Flächentheoreme mit Anwendung auf das Problem des Rollens der Kugel, Moskau Mathem. Samml. 20 (1897).

**) Vergl. z. B. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, L. I, ch. II.

Führen wir jetzt statt u_1 und ϑ neue Variable ζ_1 und ζ_2 nach den Formeln

$$\zeta_1 = -i \operatorname{ctg}\frac{u_1}{2}\cdot e^{-(\vartheta+\vartheta_1)i}, \quad \zeta_2 = i \operatorname{tg}\frac{u_1}{2}\cdot e^{-(\vartheta+\vartheta_1)i}$$

ein, so zeigt eine kurze Rechnung, daß ζ_1 und ζ_2 Integrale der Riccatischen Gleichung

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{2}(1+\zeta^2)f_1(t) - i\zeta f_2(t)$$

sind. Wenn hieraus ζ_1 und ζ_2, also auch u_1 und ϑ durch die Zeit t bestimmt sind, so wird die letzte Koordinate v_1 aus (47) durch Quadraturen erhalten.

§ 14.

Rollende Bewegung eines Rotationskörpers auf einer Kugel. Zurückführung des Problems auf die Integration zweier Riccatischen Gleichungen. Bewegung eines zylindrischen Stabes auf einer Kugel.

Die Bewegungsgleichungen (40) vereinfachen sich bedeutend, wenn der starre Körper im dynamischen Sinne ein Umdrehungskörper ist:

$$A = B,$$

und wenn die Oberfläche des Körpers eine Rotationsfläche um die Symmetrieachse z ist.

Setzen wir

$$x = u\cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = z(u)$$

und bezeichnen wir die Differentialquotienten von z nach u durch $z', z'', \cdots$, so wird

$$(48)\qquad \begin{aligned} &E = 1 + z'^2, \quad G = u^2, \quad \alpha'' = \frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}}, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}}, \\ &D = \frac{z''}{\sqrt{1+z'^2}}, \quad D'' = \frac{uz'}{\sqrt{1+z'^2}}, \quad \varrho^2 = u^2 + z^2, \quad \varepsilon = \frac{z-uz'}{\sqrt{1+z'^2}}, \end{aligned}$$

sodaß nach (38)

$$(49)\qquad \begin{aligned} 2\Theta = (M\varrho^2 + A)(v^2\dot v^2 + \mu^2\dot u^2 + n^2) - M\left(\varrho\,\frac{\partial\varrho}{\partial u}\,\frac{v\dot v}{\sqrt{E}} + \varepsilon n\right)^2 \\ + (C-A)(v\dot v\alpha'' + n\gamma'')^2 = P\dot u^2 + Q\dot v^2 + 2L\dot v n + Jn^2 \end{aligned}$$

ist, wobei die Koeffizienten P, Q, L, J Funktionen des Argumentes u sind. Außerdem haben wir augenscheinlich:

$$U = \text{Funct}\,(u).$$

Wir sehen also, daß im gegebenen Falle die Koordinate v auch zyklisch wird, folglich ergeben die Bewegungsgleichungen (45) oder (40), nach Elimination der Zeit t mit Hilfe des Integrals der lebendigen Kraft, zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Variablen p_2 und p_3 resp. v und n als Funktionen von u bestimmen.

Existiert noch das Integral (46), oder ist irgend ein anderes Integral der erwähnten Gleichungen bekannt, so lassen sich diese Gleichungen durch Quadraturen lösen. In der Tat fällt es nicht schwer nachzuweisen, daß im gegebenen Falle die Form des letzten Jacobischen Multiplikators M sich im voraus angeben läßt.

Wie bekannt, genügt der Multiplikator M des Systems

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}, \quad X_1, X_2, \cdots, X_n = \text{funct.}\,(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

der Formel

$$\frac{d \lg \mathsf{M}}{dx_1} + \frac{1}{X_1}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Wenden wir diese Formel auf das System (45) an, so wird

$$\begin{aligned}\frac{d \lg \mathsf{M}}{dt} &+ M\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_3^2} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_3}\right)\\ &+ M\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial v}\left(\frac{\partial H}{\partial p_2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_3^2} - \frac{\partial H}{\partial p_3}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_3}\right)\\ &+ M\varepsilon\sqrt{E}\,\nu\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_1}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_3}\right)\\ &+ M\varepsilon\sqrt{G}\,\mu\left(\frac{\partial H}{\partial p_3}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial p_2}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_3}\right) = 0.\end{aligned}$$

Nach (48) und (49) ist aber ϱ eine Funktion von u allein und $\dot{u}$ ist in Θ, folglich p_1 in H nur in der zweiten Potenz enthalten.

Wir haben also nach (45):

$$\frac{d \lg \mathsf{M}}{dt} + M\left(\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial u}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_3^2} - \varepsilon\sqrt{E}\nu\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_3}\right)\frac{du}{dt} = 0,$$

sodaß

$$\mathsf{M} = e^{-\int \Phi(u)\,du}, \quad \Phi(u) = M\left(\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial u}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_3^2} - \varepsilon\sqrt{E}\,\nu\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_3}\right)$$

ist.

So löst sich z. B. das Problem der Bewegung eines Rotationskörpers, der teilweise oder ganz von einer Kugelfläche begrenzt ist und der auf einer unbeweglichen Kugel ohne Gleitung rollt, bei Kräften von der im Anfange des Kapitels angeführten Art durch Quadraturen auf.*)

Wir wollen nun die zwei Differentialgleichungen erster Ordnung, nach deren Integration die Veränderlichen u, v, n durch Quadraturen erhalten werden, wirklich aufstellen.

---

*) Vgl. die oben angeführte Abhandlung von Tschaplygin.

Die beiden letzten Bewegungsgleichungen (40) ergeben nach (48) und (49):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot v} = -\sqrt{EG}\left(\frac{DD''}{EG} - \frac{1}{R_1{}^2}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial n}\,\dot u + \frac{\sqrt{G}}{R_1}\,\frac{P}{\mu}\,n\dot u + M\varepsilon\sqrt{G}\,\mu n \dot u,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial n} = -\frac{\sqrt{G}}{R_1}\,\frac{P}{\mu}\,\dot v \dot u - \frac{\sqrt{E}}{R_1}\,\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial \Theta}{\partial \dot v}\,\dot u + M\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial u}\,n\dot u - M\varepsilon(\sqrt{E}\nu + \sqrt{G}\mu)\,\dot v \dot u.$$

Diese Gleichungen lassen die partikuläre Lösung

$$\dot u = 0, \quad u = u_0, \quad n = n_0, \quad \dot v = \dot v_0, \quad v = \dot v_0 t + v_0,$$

wo $u_0, n_0, \dot v_0, v_0$ Konstante bezeichnen, zu, und die erste der Bewegungsgleichungen (40) gibt die Bedingung an, der diese Konstanten genügen müssen, damit eine solche Bewegung des Körpers möglich wäre. Die Bestimmung der übrigen Koordinaten ϑ, u_1, v_1 nach den Formeln (47) macht in diesem Falle keine Schwierigkeiten, und wir überzeugen uns leicht, daß der Berührungspunkt M auf der Oberfläche der Kugel einen großen Kreis oder einen kleinen Kreis beschreibt, je nachdem der Ausdruck $n_0 + \frac{\dot v_0}{\sqrt{E_0}}$ gleich Null oder von Null verschieden ist.

Schließen wir diese partikuläre Lösung aus, so ergeben die aufgestellten Gleichungen, wenn wir in ihnen u zur unabhängigen Variablen wählen:

$$\frac{d}{du}\,\frac{\partial \Theta}{\partial \dot v} = -\sqrt{EG}\left(\frac{DD''}{EG} - \frac{1}{R_1{}^2}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial n} + \frac{\sqrt{G}}{R_1}\,\frac{P}{\mu}\,n + M\varepsilon\sqrt{G}\,\mu n,$$

$$\frac{d}{du}\,\frac{\partial \Theta}{\partial n} = -\frac{\sqrt{G}}{R_1}\,\frac{P}{\mu}\,\dot v - \frac{\sqrt{E}}{R_1}\,\frac{1}{\nu}\,\frac{\partial \Theta}{\partial \dot v} + M\varrho\,\frac{\partial \varrho}{\partial u}\,n - M\varepsilon\left(\sqrt{E}\nu + \sqrt{G}\mu\right)\dot v.$$

Sind aus diesen Gleichungen $\dot v$ und n als Funktionen von u bestimmt, so erhalten wir aus dem Integrale der lebendigen Kraft u als Funktion der Zeit t durch Quadraturen. Eine zweite Quadratur bestimmt dann v durch t.

Die aufgestellten Gleichungen bilden ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Eliminieren wir aus ihnen z. B. n, so erhalten wir zur Bestimmung von $\dot v$ eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{d^2\dot v}{du^2} + \frac{d\dot v}{du}\,f_1(u) + \dot v\,f_2(u) = 0.$$

Eine solche Gleichung wird durch die Substitution

$$\dot v = e^{\int \xi\, du},$$

wo ξ eine neue Variable bezeichnet, auf die Riccatische Form gebracht.

Die Bestimmung der zyklischen Koordinaten ϑ, u_1, v_1 führt, wie wir oben gesehen haben, auch zu der Integration einer Riccatischen Gleichung. Wir dürfen also folgenden Satz aussprechen:

Das Problem der rollenden Bewegung eines starren Rotationskörpers auf einer Kugel unter der Wirkung einer Kraft, die vom Schwerpunkte O des Körpers zum Zentrum O_1 der Kugel gerichtet und nur von der gegenseitigen Entfernung der Punkte O und O_1 abhängig ist, läßt sich, wenn die Bewegung des Körpers ohne Gleitung vor sich geht, auf die Integration von zwei Riccatischen Gleichungen und auf Quadraturen zurückführen.

Der starre Körper sei z. B. ein zylindrischer Stab:

$$x = R\cos v,\quad y = R\sin v,\quad z = u.$$

Wir haben dann:

$$E = 1,\quad G = R^2,\quad \alpha'' = 1,\quad \beta'' = 0,\quad \gamma'' = 0,\quad \mu = -\frac{1}{R_1},$$

$$D = 0,\quad D'' = R,\quad \varrho^2 = R^2 + u^2,\quad \varepsilon = -R,\quad \nu = \frac{R}{R_1} - 1,$$

sodaß die kinetische Energie des Stabes nach (49) durch die Formel

$$2\Theta = \frac{1}{R_1^{\,2}}(A + MR^2 + Mu^2)\,\dot u^2 + (C + MR^2)\left(\frac{R}{R_1} - 1\right)^2 \dot v^2$$
$$+ 2MR\left(\frac{R}{R_1} - 1\right) un\dot v + (A + Mu^2)n^2$$

gegeben wird.

Die beiden linearen Differentialgleichungen, die $\dot v$ und n durch u bestimmen, sind von der Form

$$\frac{d}{du}\left[MRun + (C + MR^2)\left(\frac{R}{R_1} - 1\right)\dot v\right] = M\,\frac{R^2}{R_1^{\,2}}\,(u\dot v - R_1 n),$$

$$\frac{d}{du}\left[(A + Mu^2)n + MR\left(\frac{R}{R_1} - 1\right)u\dot v\right]$$
$$= \left[\frac{R}{R_1^{\,2}}(A + MR^2 + Mu^2) - \frac{1}{R_1}\left(\frac{R}{R_1} - 1\right)(C + MR^2) - MR\right]\dot v - M\left(\frac{R}{R_1} - 1\right)un.$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen n, so wird

$$\left(A\,\frac{C + MR^2}{MC} + u^2\right)\frac{d^2\dot v}{du^2} + 3u\,\frac{d\dot v}{du} + \left[\frac{R^2}{R_1^{\,2}}\,\frac{R + R_1}{R - R_1}\,\frac{A}{C} - \frac{R}{R_1}\left(\frac{R}{R_1} + 2\right)\right]\dot v = 0$$

Wir sehen also, daß $\dot v$ eine hypergeometrische Funktion von u ist.

§ 15.

Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, in dessen Innern sich ein Gyroskop befindet. Rollende Bewegung einer gyroskopischen Kugel auf einer Kugel.

Die meisten Resultate der vorhergehenden Paragraphen lassen sich leicht auf den Fall verallgemeinern, daß im Innern des starren Körpers, den wir uns hohl denken wollen, ein um seine Achse rotierendes Gyroskop enthalten ist. Wir werden voraussetzen, daß der Schwerpunkt des Gyroskops mit dem Schwerpunkte des starren Körpers und die Symmetrieachse des Gyroskops mit der z-Achse zusammenfalle.

Die Reibung in den Stützpunkten der Achse des Gyroskops auf die innere Oberfläche des Körpers soll vernachlässigt werden.

Wenn die Größen M, A und B in den Bewegungsgleichungen (40) die Masse und die Trägheitsmomente um die x- und y-Achsen des ganzen Systems, das aus dem starren Körper und dem Gyroskop besteht, bedeuten, so haben wir, im Falle eines gyroskopischen Körpers, nur zu den auf den Körper einwirkenden Kräften noch ein Kräftepaar*) hinzuzufügen. Das Moment dieses Paares ist gleich $\bar{C}\,\omega\,\varpi\,\sin(\omega\varpi)$, wo $\bar{C}$ das Trägheitsmoment des Gyroskops um die z-Achse, ϖ seine konstante Winkelgeschwindigkeit und ω die momentane Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers bezeichnen. Die Achse dieses Momentes steht normal zur momentanen Rotationsachse des starren Körpers und zu der z-Achse und ist in bezug auf diese zwei Achsen so gelegen, wie die z-Achse in bezug auf die x- und y-Achsen.

Führen wir die Bezeichnung

$$\bar{C}\,\varpi = \varkappa$$

ein und vergegenwärtigen wir uns die Methode, die in § 11 zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen (40) angewendet wurde, so ist es klar, daß wir im Falle eines gyroskopischen Körpers zu den rechten Seiten dieser Gleichungen (40) die Ausdrücke

$$\mu\varkappa(\nu\dot{v}\gamma''-n\alpha''),\quad \nu\varkappa(n\beta''-\mu\dot{u}\gamma''),\quad \varkappa(\mu\dot{u}\alpha''-\nu\dot{v}\beta'')$$

hinzuzufügen haben.

Machen wir über die Massenverteilung des Körpers und seine Form dieselben Voraussetzungen, wie im vorhergehenden Paragraphen, so wird nach (48) in den rechten Seiten der zwei letzten Bewegungsgleichungen (40) wieder $\dot{u}$ als gemeinsamer Faktor enthalten sein. Wir kommen also

*) Den sog. Deviationswiderstand. F. Klein und A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Heft I, Kap. III.

wieder zu zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Variablen $\dot{v}$ und n als Funktionen von u bestimmen. Nur werden jetzt diese linearen Gleichungen nicht mehr homogen sein. Folglich erhalten wir, wenn wir aus diesen Gleichungen n eliminieren, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2\dot{v}}{du^2} + \frac{d\dot{v}}{du} f_1(u) + \dot{v} f_2(u) = f_3(u).$$

Ist außer dem Integrale der lebendigen Kraft noch ein Integral bekannt, so lösen sich die Bewegungsgleichungen durch Quadraturen auf.

Der starre Körper sei z. B. eine Hohlkugel, in deren Innern sich ein Gyroskop befindet. Dann gilt das Integral (46), folglich lassen sich die Variablen u, v, n im Probleme der rollenden Bewegung einer gyroskopischen Kugel auf einer Kugelfläche durch Quadraturen bestimmen. Die übrigen Koordinaten ϑ, u_1, v_1 werden, wie in § 13 gezeigt ist, durch Integration einer Riccatischen Gleichung erhalten.

Das hier angeführte Problem kann als eine Verallgemeinerung des von D. K. Bobylew*) gelösten Problemes der Bewegung einer schweren gyroskopischen Kugel auf einer horizontalen Ebene angesehen werden. N. E. Joukowski**) hat in seinen geometrischen Untersuchungen über das Bobylewsche Problem vorgeschlagen, im Innern der Kugel einen materiellen Ring, dessen Symmetrieebene mit der xy-Ebene zusammenfällt, anzubringen. Die Dimensionen des Ringes werden so gewählt, daß das Trägheitsellipsoid des ganzen materiellen Systems in bezug auf den Schwerpunkt eine Kugel ist. In diesem Falle läßt sich die Bewegung der Kugel auf der Horizontalebene bedeutend einfacher bestimmen.

Setzen wir in unserem allgemeinen Probleme auch voraus, daß die Hohlkugel mit einem solchen Ringe versehen ist, so läßt sich nachweisen, daß die zyklischen Koordinaten ϑ, u_1, v_1 auch durch Quadraturen erhalten werden. Wir wollen auf dieses Problem, das wohl den Gegenstand einer selbständigen Abhandlung bilden dürfte, hier nicht weiter eingehen. Es sei nur bemerkt, daß die im Probleme auftretenden Quadraturen elliptischer Form sind, sodaß selbst eine vollständige Diskussion der Bewegung einer solchen Kugel auf einer Kugelfläche keine Schwierigkeiten macht.

---

*) Bobylew, Über die gyroskopische Kugel, die auf einer Horizontalebene ohne Gleitung rollt, Moskau Math. Sammlung 1891.

**) Joukowski, Über die gyroskopische Kugel von D. K. Bobylew, Arbeiten der physikalischen Sektion 1893.

Kapitel IV.

Differentialgleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer beliebigen Fläche.

§ 16.

Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers, der ohne Gleitung auf einer Kugel rollt, sind im vorhergehenden Kapitel aus der Formel (33) abgeleitet. Um eine Anwendung der anderen Grundformel des Kapitels II, der Formel (18) zu erhalten, sollen jetzt unter Benutzung dieser Formel (18) die Gleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer beliebigen Fläche entwickelt werden.

Wir werden an den Bezeichnungen und Voraussetzungen der §§ 4 und 9 festhalten und wählen zu den abhängigen Geschwindigkeiten, wie in (12), die Größen $\dot{u}_1$ und $\dot{v}_1$. Wir haben dann nach (18) die verallgemeinerten Impulse K_1 und K_2, die den Geschwindigkeiten $\dot{u}_1$ und $\dot{v}_1$ entsprechen, zu bestimmen.

Setzen wir die Ausdrücke (11) und (10) für die $k, l, m; p, q, r$ in die kinetische Energie T (30) des Körpers ein, so wird nach (9)

$$2T = M(k^2+l^2+m^2) + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T(u, v, \vartheta, u_1, v_1, \dot{u}, \dot{v}. \dot{\vartheta}, \dot{u}_1, \dot{v}_1),$$

folglich haben wir nach (11), (10) und (9):

$$\begin{aligned} K_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_1} &= M\sqrt{E}\,[-(k\alpha + \cdots)\sin\vartheta + (k\beta + \cdots)\cos\vartheta] \\ &+ \frac{1}{2\sqrt{E_1 G_1}}\,\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\Big[\frac{\partial T}{\partial k}(y\gamma'' - z\gamma') + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p}\gamma + \cdots\Big] \\ &- \frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\Big\{\Big[\frac{\partial T}{\partial k}(y\alpha'' - z\alpha') + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p}\alpha + \cdots\Big]\cos\vartheta \\ &\qquad + \Big[\frac{\partial T}{\partial k}(y\beta'' - z\beta') + \cdots + \frac{\partial T}{\partial p}\beta + \cdots\Big]\sin\vartheta\Big\} \end{aligned}$$

und einen ähnlichen Ausdruck für K_2, die Derivierte von T nach $\dot{v}_1$.

Soll die rollende Bewegung des Körpers auf der Fläche S_1 ohne Gleitung vor sich gehen, so haben die k, l, m die Werte (13), und wir erhalten nach (10) und (1):

$$\begin{aligned} 2T &= M\varrho^2(\sigma^2 + \tau^2 + n^2) - M\Big(\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\sigma}{\sqrt{E}} + \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\tau}{\sqrt{G}} + \varepsilon n\Big)^2 \\ &+ A(\sigma\alpha + \tau\beta + n\gamma)^2 + B(\sigma\alpha' + \tau\beta' + n\gamma')^2 + C(\sigma\alpha'' + \tau\beta'' + n\gamma'')^2 \\ &= 2\Theta(u, v, \sigma, \tau, n), \end{aligned} \tag{50}$$

wo wieder

$$x^2+y^2+z^2=\varrho^2,\quad x\gamma+y\gamma'+z\gamma''=\varepsilon$$

gesetzt ist.

Mit Hilfe dieses Ausdruckes $\overline{\Theta}$ für die kinetische Energie des Körpers und mit Hilfe der Formeln (13), die nach (1)

$$k\alpha+l\alpha'+m\alpha''=-\varepsilon\tau+\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{n}{\sqrt{G}},$$
$$k\beta+l\beta'+m\beta''=\quad\varepsilon\sigma-\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{n}{\sqrt{E}}$$

ergeben, lassen sich die Größen K_1 und K_2 auf die einfachere Form

$$(51)\quad \begin{aligned} K_1 &= M\sqrt{E_1}\left[\left(\varepsilon\sigma-\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{n}{\sqrt{E}}\right)\cos\vartheta+\left(\varepsilon\tau-\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{n}{\sqrt{G}}\right)\sin\vartheta\right]\\ &\quad+\frac{1}{2\sqrt{E_1G_1}}\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial n}-\frac{D_1}{\sqrt{E_1}}\left(\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\sigma}\cos\vartheta+\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\tau}\sin\vartheta\right),\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

bringen.

Die Koeffizienten bei den Größen K_1 und K_2 in der Formel (18) haben nach (12) die Werte

$$\delta\left(\dot u_1-\frac{-\sqrt{E}\dot u\sin\vartheta+\sqrt{G}\dot v\cos\vartheta}{\sqrt{E_1}}\right),\quad \delta\left(\dot v_1-\frac{\sqrt{E}\dot u\cos\vartheta+\sqrt{G}\dot v\sin\vartheta}{\sqrt{G_1}}\right),$$

die zufolge § 7 unter Benutzung der Formeln

$$(52)\quad \begin{aligned} \sqrt{E_1}\,\delta u_1 &= -\sqrt{E}\,\delta u\sin\vartheta+\sqrt{G}\,\delta v\cos\vartheta,\\ \sqrt{G_1}\,\delta v_1 &= \quad\sqrt{E}\,\delta u\cos\vartheta+\sqrt{G}\,\delta v\sin\vartheta \end{aligned}$$

zu berechnen sind.

Führen wir wieder der Kürze wegen neben der Größe n (9) die Größe

$$(53)\quad n'=-\delta\vartheta+\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\delta u-\frac{\partial G}{\partial u}\delta v\right)+\frac{1}{2\sqrt{E_1G_1}}\left(\frac{\partial E_1}{\partial v_1}\delta u_1-\frac{\partial G_1}{\partial u_1}\delta v_1\right)$$

ein, so erhalten wir leicht für die gesuchten Koeffizienten folgende Ausdrücke:

$$\frac{1}{\sqrt{E_1}}\left[\sqrt{E}(n\delta u-\dot u n')\cos\vartheta+\sqrt{G}(n\delta v-\dot v n')\sin\vartheta\right],$$
$$\frac{1}{\sqrt{G_1}}\left[\sqrt{E}(n\delta u-\dot u n')\sin\vartheta-\sqrt{G}(n\delta v-\dot v n')\cos\vartheta\right],$$

sodaß die Formel (18) für das in Rede stehende Problem die Form

$$(54)\quad \int_{t_1}^{t_2}[\delta\Theta+\delta U+K_1'\sqrt{E}(n\delta u-\dot u n')+K_2'\sqrt{G}(n\delta v-\dot v n')]\,dt=0,$$

wo

$$(55)\quad K_1' = \frac{K_1}{\sqrt{E_1}} \cos\vartheta + \frac{K_2}{\sqrt{G_1}} \sin\vartheta, \quad K_2' = \frac{K_1}{\sqrt{E_1}} \sin\vartheta - \frac{K_2}{\sqrt{G_1}} \cos\vartheta$$

bezeichnet, annimmt. Wir setzen voraus, daß eine Kräftefunktion U existiert. Die kinetische Energie Θ des Körpers haben wir als homogene Funktion zweiten Grades der unabhängigen Geschwindigkeiten u, $\dot v$, $\dot\vartheta$ auszudrücken. Dazu eliminieren wir aus den Funktionen σ, τ, n (9) unter Benutzung der Bedingungsgleichungen (12) die abhängigen Geschwindigkeiten $\dot u_1$ und $\dot v_1$:

$$(56)\quad \begin{aligned}
&\sigma = -\Delta'\sqrt{E}\dot u - \Delta''\sqrt{G}\dot v, \quad \tau = \Delta\sqrt{E}\dot u + \Delta'\sqrt{G} v,\\
&n = -\dot\vartheta + \Delta_1\sqrt{E}\dot u - \Delta_2\sqrt{G}\dot v,\\
&\Delta = \frac{D}{E} + \frac{D_1}{E_1}\sin^2\vartheta + \frac{D_1''}{G_1}\cos^2\vartheta, \quad \Delta' = \left(\frac{D_1''}{G_1} - \frac{D_1}{E_1}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta,\\
&\Delta'' = \frac{D''}{G} + \frac{D_1''}{G_1}\sin^2\vartheta + \frac{D_1}{E_1}\cos^2\vartheta,\\
&2\Delta_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \lg E}{\partial v} - \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial \lg E_1}{\partial v_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial \lg G_1}{\partial u_1},\\
&2\Delta_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \lg G}{\partial u} + \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial \lg G_1}{\partial u_1} - \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{G_1}}\frac{\partial \lg E_1}{\partial v_1}
\end{aligned}$$

und setzen die so erhaltenen Werte für σ, τ, n in die Funktion $\overline{\Theta}$ (50) ein. Dann wird

$$\overline{\Theta} = \Theta(u, v, \vartheta, u_1, v_1, \dot u, \dot v, \dot\vartheta).$$

Eliminieren wir jetzt aus der Formel (54) die Größe n' mit Hilfe von (53) und die abhängigen Variationen δu_1 und δv_1 mit Hilfe von (52) und setzen die Koeffizienten bei den unabhängigen Variationen δu, δv, $\delta\vartheta$ gleich Null, so erhalten wir die Gleichungen der rollenden Bewegung eines starren Körpers auf einer beliebigen Fläche:

$$(57)\quad \begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot u} - \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial u} = \sqrt{E}\left[-\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial u_1}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{E_1}} + \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial v_1}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{G_1}} - K_1'\dot\vartheta\right]\\
&\qquad\qquad - (\Delta_2 K_1' + \Delta_1 K_2')\sqrt{EG}\,\dot v,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot v} - \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial v} = \sqrt{G}\left[\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial u_1}\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{E_1}} + \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial v_1}\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{G_1}} - K_2'\dot\vartheta\right]\\
&\qquad\qquad + (\Delta_2 K_1' + \Delta_1 K_2')\sqrt{EG}\,\dot u,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial\dot\vartheta} - \frac{\partial(\Theta+U)}{\partial\vartheta} = K_1'\sqrt{E}\dot u + K_2'\sqrt{G}\,\dot v,
\end{aligned}$$

wobei nach (55) und (51)

$$(58)\quad \begin{aligned}
&K_1' = M\left(\varepsilon\sigma - \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{n}{\sqrt{E}}\right) - \left(\Delta'' - \frac{D''}{G}\right)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\sigma} + \Delta'\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\tau} - \left(\Delta_2 - \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial\lg G}{\partial u}\right)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial n},\\
&K_2' = M\left(\varepsilon\tau - \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{n}{\sqrt{G}}\right) + \Delta'\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\sigma} - \left(\Delta - \frac{D}{E}\right)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial\tau} - \left(\Delta_1 - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\lg E}{\partial v}\right)\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial n}
\end{aligned}$$

ist.

Da in den Bewegungsgleichungen (57) nur der Ausdruck Θ für die kinetische Energie des Körpers enthalten ist, so dürfte es vorteilhaft sein, auch die Funktionen K_1' und K_2' durch die Derivierten von Θ auszudrücken. Dazu haben wir aus den nach (56) evidenten Gleichungen

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\vartheta}} = -\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial n}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} = -\Delta' \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \sigma} + \Delta \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} + \Delta_1 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial n},$$
$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} = -\Delta'' \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \sigma} + \Delta' \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \tau} - \Delta_2 \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial n}$$

die Derivierten von $\bar{\Theta}$ nach σ, τ und n zu bestimmen und in (58) einzusetzen:

$$K_1' = M\left(\varepsilon\sigma - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial u}\frac{n}{\sqrt{E}}\right) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}} + \frac{1}{R}\frac{D''}{G}\left(\frac{\Delta'}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} - \frac{\Delta}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}}\right)$$
$$+\left(\frac{D''}{G}\frac{\Delta'\Delta_1 + \Delta\Delta_2}{R} - \frac{1}{2\sqrt{E}}\frac{\partial \lg G}{\partial u}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\vartheta}},$$

$$K_2' = M\left(\varepsilon\tau - \varrho \frac{\partial \varrho}{\partial v}\frac{n}{\sqrt{G}}\right) - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} + \frac{1}{R}\frac{D}{E}\left(\frac{\Delta''}{\sqrt{E}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{u}} - \frac{\Delta'}{\sqrt{G}}\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{v}}\right)$$
$$+\left(\frac{D}{E}\frac{\Delta''\Delta_1 + \Delta'\Delta_2}{R} - \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial \lg E}{\partial v}\right)\frac{\partial \Theta}{\partial \dot{\vartheta}},$$

wobei

$$R = \Delta\Delta'' - \Delta'^2 = \frac{D D''}{EG} + \frac{D_1 D_1''}{E_1 G_1} + \left(\frac{D}{E}\frac{D_1}{E_1} + \frac{D''}{G}\frac{D_1''}{G_1}\right)\cos^2\vartheta$$
$$+\left(\frac{D}{E}\frac{D_1''}{G_1} + \frac{D''}{G}\frac{D_1}{E_1}\right)\sin^2\vartheta$$

von Null verschieden vorausgesetzt wird.

Die Bewegungsgleichungen (57) *und die nicht holonomen Bedingungsgleichungen* (12):

$$\text{(59)} \qquad \begin{aligned} \sqrt{E_1}\,\dot{u}_1 &= -\sqrt{E}\,\dot{u}\sin\vartheta + \sqrt{G}\,\dot{v}\cos\vartheta, \\ \sqrt{G_1}\,\dot{v}_1 &= \sqrt{E}\,\dot{u}\cos\vartheta + \sqrt{G}\,\dot{v}\sin\vartheta \end{aligned}$$

bilden ein System von fünf Differentialgleichungen, welche die Koordinaten $u, v, \vartheta, u_1, v_1$ *des starren Körpers als Funktionen der Zeit* t *bestimmen.*

Enthält die Kräftefunktion U die Zeit t nicht explizite, so lassen die Gleichungen (57) das Integral der lebendigen Kraft,

$$\Theta = U + h,$$

wo h eine willkürliche Konstante bezeichnet, zu.

Eliminieren wir unter Benutzung dieses Integrals die Zeit t aus den Bewegungsgleichungen (57) und den Bedingungen (59), indem wir z. B. die Koordinate ϑ zur unabhängigen Variablen wählen, so erhalten wir zur Bestimmung der u, v, u_1, v_1 durch ϑ vier Differentialgleichungen, die in bezug auf u und v von der zweiten und in bezug auf u_1 und v_1 von der ersten Ordnung sein werden. Sind diese Gleichungen integriert, so ergibt das Integral der lebendigen Kraft die Zeit t als Funktion von ϑ durch Quadraturen.

§ 17.

Die Bewegungsgleichungen in speziellen Fällen. Partikuläre Lösungen der Bewegungsgleichungen.

Ist die Fläche S_1, auf welcher der Körper ohne zu gleiten rollt, eine Kugel (Formel 35), und hängt die Kräftefunktion U nur von den Variablen u und v ab, so werden die Koordinaten ϑ, u_1, v_1, wenn wir in die Bewegungsgleichungen (57) statt $\dot{\vartheta}$ die Größe n (9) einführen, zyklisch und die Gleichungen (57) fallen mit den Formeln (40) zusammen.

Ein anderer einfacher Fall bietet sich, wenn der starre Körper ein Rotationskörper,

$$A = B, \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = \text{Funct.}\,(u),$$

und die Fläche S_1 eine Rotationsfläche,

$$x_1 = u_1 \cos v_1, \quad y_1 = u_1 \sin v_1, \quad z_1 = \text{Funct.}\,(u_1),$$

ist. Wenn außerdem die Kräftefunktion U nur die Variablen u, ϑ, u_1 enthält, so sind die Koordinaten v und v_1 zyklisch. Diese Bedingung für die Kräftefunktion wird z. B. dann erfüllt sein, wenn die wirkenden Kräfte eine Resultante haben, die am Schwerpunkte O angreift, parallel der z_1-Achse ist und eine konstante Größe hat, oder wenn diese Resultante vom Schwerpunkte O zu einem Punkte O_1 der Symmetrieachse der Fläche S_1 gerichtet ist und nur von der Entfernung $\overline{O}\,\overline{O}_1$ abhängt.

In diesem Falle ist es vorteilhaft, in die Bewegungsgleichungen (57) statt $\dot{v}$ die Geschwindigkeit $\dot{u}_1$ mit Hilfe der ersten der Bedingungsgleichungen (59) einzuführen. Eliminieren wir noch aus den so entstandenen Gleichungen t, indem wir von dem Integrale der lebendigen Kraft

$$\Theta(u, \vartheta, u_1, \dot{u}, \dot{\vartheta}, \dot{u}_1) = U(u, \vartheta, u_1) + \text{const.}$$

Gebrauch machen, so ergeben sich zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die zwei der Koordinaten u, ϑ, u_1 als Funktion der dritten bestimmen. Sind diese Gleichungen integriert, so werden die zyklischen Koordinaten v und v_1 und die Zeit t durch Quadraturen erhalten.

Wir wollen auf die Entwicklung dieser Gleichungen, die sehr kompliziert ist, nicht eingehen und nur zwei partikuläre Lösungen der Bewegungsgleichungen (57) für den in Rede stehenden speziellen Fall angeben.

Setzen wir

$$\dot{u}=0,\quad u=u_0,\quad \dot{\vartheta}=0,\quad \vartheta=\frac{\pi}{2},\quad \dot{v}=v_0,\quad v=\dot{v}_0 t+v_0,$$

$$\dot{u}_1=0,\quad u_1=u_{10},\quad v_1=\dot{v}_{10},\quad v_1=\dot{v}_{10}t+v_{10},$$

wo $u_0, \dot{v}_0, \cdots$ Konstante bezeichnen, so werden die erste der Bedingungsgleichungen (59) uud die beiden letzten der Bewegungsgleichungen (57) erfüllt, wenn

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta}=0 \qquad \left(\vartheta=\frac{\pi}{2}\right) \tag{60}$$

ist.

In den oben angeführten Beispielen für die wirkenden Kräfte enthält U, wie leicht zu sehen ist, den Winkel ϑ nur in der Form $\sin\vartheta$, sodaß U der Bedingung (60) wirklich genügt.

Die übrigen Formeln (57) und (59) ergeben zwei Relationen:

$$\sqrt{G_1}\,\dot{v}_1=\sqrt{G}\,\dot{v},\quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial u}-\frac{1}{\sqrt{E_1}}\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial u_1}=\Delta_2 K_1'\sqrt{G}\,\dot{v},$$

denen die Konstanten $u_0, \dot{v}_0, \cdots$ genügen müssen, damit die definierte Bewegung des Körpers möglich ist.

Den aufgestellten Formeln zufolge beschreibt der Berührungspunkt M auf der Oberfläche S des Körpers und auf der Fläche S_1 mit konstanter Geschwindigkeit Parallelkreise. Die Bewegung ist stationär.

Die andere partikuläre Lösung wird durch die Formeln

$$\dot{v}=0,\quad v=v_0,\quad \dot{\vartheta}=0,\quad \vartheta=\frac{\pi}{2},\quad \dot{v}_1=0,\quad v_1=v_{10},$$

wo v_0 und v_{10} willkürliche Konstanten bedeuten, gegeben.

Die beiden letzten der Bewegungsgleichungen (57) und die zweite der Bedingungsgleichungen (59) werden, wenn U der Bedingung (60) genügt, erfüllt. Die beiden übrigen Formeln (57) und (59) dienen zur Bestimmung der Koordinaten u und u_1 durch die Zeit t. Ersetzen wir hierbei die Formel (57) durch das Integral der lebendigen Kraft, so erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\sqrt{E_1}\,\dot{u}_1=\sqrt{E}\,\dot{u},\quad (M\varrho^2+A)\tau^2=2U+\text{const.},$$

aus denen sich die Variablen u und u_1 durch Quadraturen bestimmen lassen.

Der Berührungspunkt M beschreibt auf den Flächen S und S_1 Meridiane.

Um eine partikuläre Lösung der Gleichungen (57) zu erhalten, wenn keine der Koordinaten des Körpers zyklisch ist, betrachten wir die rollende Bewegung eines starren Körpers, der von der Oberfläche eines Ellipsoids S begrenzt ist:

$$x = a\frac{\sqrt{a^2-u}\sqrt{a^2-v}}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-c^2}}, \cdots \qquad (a^2 \leqq u \leqq b^2 \leqq v \leqq c^2)$$

auf einem ruhenden Ellipsoid S_1 mit denselben Halbachsen:

$$x_1 = a\frac{\sqrt{a^2-u_1}\sqrt{a^2-v_1}}{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-c^2}}, \cdots \qquad (a^2 \leqq u_1 \leqq b^2 \leqq v_1 \leqq c^2)$$

unter der Wirkung einer Kraft, die vom Schwerpunkte O des Körpers zum Zentrum O_1 des ruhenden Ellipsoids gerichtet ist und nur von der Entfernung $\overline{OO_1}$ der Punkte O und O_1 voneinander abhängt. Die Kräftefunktion U ist dann eine Funktion von $\overline{OO_1}$, wobei

$$\begin{aligned}\overline{OO_1}^2 &= 2(a^2+b^2+c^2) - u - v - u_1 - v_1 \\ &+ 2\frac{a^2b^2c^2}{\sqrt{uv}\sqrt{u_1v_1}} + \frac{1}{2\sqrt{E}}\left(\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{E_1}} - \frac{\cos\vartheta}{\sqrt{G_1}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{G}}\left(\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{E_1}} + \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{G_1}}\right)\end{aligned}$$

ist.

Wenn wir voraussetzen, daß die Massenverteilung im Körper eine solche ist, daß die Trägheitsmomente A und C um die größte und kleinste der Achsen des Ellipsoids S einander gleich sind, sodaß nach (50)

$$\begin{aligned}2\overline{\Theta} &= (M\varrho^2+A)(\sigma^2+\tau^2+n^2) - M\left(\varrho\frac{\partial\varrho}{\partial u}\frac{\sigma}{\sqrt{E}} + \varrho\frac{\partial\varrho}{\partial v}\frac{\tau}{\sqrt{G}} + \varepsilon n\right)^2 \\ &+ (B-A)(\sigma\alpha' + \tau\beta' + n\gamma')^2\end{aligned}$$

wird, so ist es klar, daß eine solche Bewegung des Körpers auf dem Ellipsoid S_1 möglich sein muß, bei welcher der Berührungspunkt M auf den Flächen S und S_1 zentrale Kreisschnitte beschreibt:

$$u_1 = u, \quad v_1 = v, \quad u + v = a^2 + c^2.$$

Da bei dieser Bewegung des Körpers die Projektionen der momentanen Winkelgeschwindigkeit ω auf die mittlere Achse des Ellipsoids S und auf die Richtung OM gleich Null sind, so dürfen wir augenscheinlich beim Einsetzen in (57) von der einfacheren Form für $\overline{\Theta}$:

$$2\overline{\Theta} = (M\varrho^2 + A)(\sigma^2+\tau^2+n^2),$$

ausgehen. Es macht also keine Schwierigkeiten, sich zu überzeugen, daß die Gleichungen (57) und (59) wirklich die angeführte partikuläre Lösung zulassen, wobei der Winkel ϑ und die Zeit t durch die Formeln

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{2}\frac{b^2(a^2+c^2)-2uv}{\sqrt{uv}\sqrt{u-b^2}\sqrt{b^2-v}}, \quad t = \frac{1}{\omega_0}\int\frac{(u-v)\,du}{\sqrt{b^2-v}\sqrt{u-b^2}\sqrt{a^2-u}\sqrt{u-c^2}} + \text{const.},$$
$$v = a^2 + c^2 - u,$$

wo ω_0 die konstante Winkelgeschwindigkeit des Körpers bezeichnet, gegeben werden.

März 1910.

Höfler, Dr. **A.**, Professor an der Universität Wien, Didaktik des mathematischen Unterrichts. Mit 2 Tafeln u. 147 Fig. [XVIII u. 509 S.] gr. 8. 1910. Geb. ℳ 12.—

Hohenner, Dr.-Ing. **H.**, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Geodäsie. Eine Anleitung zu geodätischen Messungen für Anfänger mit Grundzügen der Hydrometrie und der direkten astronomischen Zeit- und Ortsbestimmung. Mit 216 Figuren. [XII u. 347 S.] gr. 8. 1910. In Leinw. geb. ℳ 12.—

Killing, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.**, Professor an der Universität Münster i. W., und Dr. **H. Hovestadt**, Professor am Realgymnasium zu Münster i. W., Handbuch des mathematischen Unterrichts. 2 Bände. gr. 8. Geb. I. Band. [VIII u. 448 S.] 1909. ℳ 10.—

Klein, Dr. **F.**, Geh. Regierungsrat, Professor an der Universität Göttingen, und **A. Sommerfeld**, über die Theorie des Kreisels. 4 Hefte. gr. 8. Mit zahlr. Figuren.
- I. Heft. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. Geh. ℳ 5.60, geb. ℳ 6.60.
- II. — Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. Geh. ℳ 10.—, geb. ℳ 11.—
- III. — Die störenden Einflüsse. Astronomische und geophysikalische Anwendungen. [IV u. 247 S.] 1903. Geh. ℳ 9.—, geb. ℳ 10.—
- IV. — Die technischen Anwendungen der Kreiseltheorie. Für den Druck bearbeitet u. ergänzt von Fritz Noether. [IV u. S. 761—966.] 1910. Geh. ℳ 8.—, in Leinw. geb. ℳ 9.—

Korn, Dr. **A.**, ehem. Professor an der Universität München, über freie und erzwungene Schwingungen. Eine Einführung in die Theorie der linearen Integralgleichungen. [V u. 136 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 5.60.

Kowalewski, Dr. **G.**, Professor an der Universität Bonn, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. Mit 31 Figuren. [VI u. 452 S.] gr. 8. 1909. Geb. ℳ 12.—

Landau, Dr. **E.**, Professor an der Universität Göttingen, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. 2 Bände. gr. 8. 1909. I. Band. [XVIII u. 564 S.] Geh. ℳ 20.—, geb. ℳ 21.—. II. Band. [IX u. S. 565—961.] Geh. ℳ 14.—, geb. ℳ 15.—

Lazzeri, **G.**, und **A. Bassani**, Professoren an der Marineakademie zu Livorno, Elemente der Geometrie (unter Verschmelzung von ebener und räumlicher Geometrie). Mit Genehmigung der Verfasser aus dem Italien. übersetzt von P. Treutlein, Direktor der Goetheschule zu Karlsruhe. Mit 336 Figuren. [XVI u. 491 S.] gr. 8. 1911. In Leinw. geb. ℳ 14.—

Loria, **G.**, Professor an der Universität Genua, spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem ital. Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Prof. Fr. Schütte, Oberlehrer am Stiftischen Gymnasium zu Düren. 2. Auflage. In 2 Teilen. gr. 8.
- I. Teil: Die algebraischen Kurven. Mit 142 Figuren auf 14 lithographischen Tafeln. [XVIII u. 488 S.] 1910. Geh. ℳ 16.50, geb. ℳ 18.—
- II. — Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven. Mit 80 Figuren auf 6 lithographierten Tafeln. [VIII u. 384 S.] 1911. Geh. ℳ 12.50, geb. ℳ 14.—

Mikami, **Y.**, in Tokio, mathematical Papers from the far East. With 15 Figures. [VI u. 229 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 10.—, in Leinw. geb. ℳ 11.—

Minkowski, Dr. **H.**, weil. Professor an der Universität Göttingen, gesammelte Abhandlungen. Unter Mitwirkung von A. Speiser und H. Weyl herausgegeben von D. Hilbert. 2 Bände.
- I. Band: Mit 1 Bildnis Hermann Minkowskis und 6 Figuren. [XXXI u. 371 S.] gr. 8. 1911. Geh. ℳ 14.—
- II. — Mit 1 Bildnis Hermann Minkowskis und 34 Figuren und 1 Doppeltafel. [IV u. 464 S.] gr. 8. 1911. Geh. ℳ 16.—

Perry, Dr. **J.**, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von R. Fricke und F. Süchting. 2. Auflage. Mit 106 Figuren. [XI u. 464 S.] gr. 8. 1910. Geb. ℳ 13.—

Poincaré, **H.**, Mitglied der französischen Akademie, Professor an der Faculté des Sciences der Université Paris, sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und der mathematischen Physik. Gehalten zu Göttingen vom 22. bis 28. April 1909. Mit 6 Figuren. [IV u. 60 S.] gr. 8. 1910. Geh. ℳ 1.80, geb. ℳ 2.40.

Verlag von B. G. Teubner

Pringsheim, Dr. **E.,** Professor an der Univ... Physik der Sonne. Mit 235 Abbil... gr. 8. 1910. Geh. *M.* 16.—, geb. *M.* 1...

Repertorium der höheren Mathematik. ... Auflage der deutschen Ausgabe. Unt... herausgegeben von P. Epstein und I... gr. 8. Geb.

I. Band: Algebra und Analysis. Unter ... A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke ... ding hrsg. von P. Epstein. I. Hälf... Frühjahr 1911.]

II. — Geometrie. Unter Mitwirkung von L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, F. Dingeldey, F. Enriques, G. Giraud, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler herausgegeben von H. E. Timerding. I. Hälfte [XVI und 534 S.] 1910. [Die II. Hälfte folgt im Frühjahr 1911.]

Schur, F., Professor an der Universität Straßburg i. E., Grundlagen der Geometrie. Mit 63 Figuren. [X u. 192 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M.* 6.—, geb. *M.* 7.—

Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach Axel Harnacks Übersetzung neu bearbeitet von G. Scheffers. In 3 Bänden. gr. 8. Geb.

I. Band. Differentialrechnung. 4. u. 5. Auflage. Mit 70 Figuren. [XVI u. 626 S.] 1908. *M.* 13.—

II. — Integralrechnung. 3. Auflage. Mit 105 Figuren. [XIV u. 586 S.] 1907. *M.* 13.—

III. — Differentialgleichungen und Variationsrechnung. 3. Aufl. Mit 63 Figuren. [XII u. 658 S.] 1909. *M.* 13.—

Staude, O., Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Teilen. gr. 8. 1910. Geh. u. geb.

I. Teil. Mit 181 Figuren. [X u. 548 S.] Geh. *M.* 20 —, geb. *M.* 22.—

II. — Mit 47 Figuren. [IV u. S. 549—1000.] Geh. *M.* 16.—, geb. *M.* 18.—

Sturm, Geh. Reg.-Rat Dr. **R.,** Professor an der Universität Breslau, Maxima und Minima in der elementaren Geometrie. Mit 32 Figuren. [VI u. 138 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M.* 4.—, in Leinw. geb. *M.* 4.40.

Tannery, J., Professor an der Universität Paris, Subdirektor der École normale supérieure zu Paris, Elemente der Mathematik. Mit einem geschichtlichen Anhang von P. Tannery. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. P. Klaeß, Gymnasiallehrer in Echternach (Luxemburg). Mit einem Einführungswort von F. Klein und 184 Figuren. [XII u. 339 S.] gr. 8. 1909. Geh. *M.* 7.—, geb. *M.* 8.—

Timerding, Dr. **H. E.,** Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig, Geometrie der Kräfte. Mit 27 Figuren. [XII u. 381 S.] gr. 8. 1908. Geb. *M.* 16.—

Voigt, Geheimer Regierungsrat Dr. **W.,** Professor an der Universität Göttingen, Lehrbuch der Kristall-Physik (mit Ausschluß der Kristall-Optik). Mit 1 Tafel u. 213 Figuren. [XXIV u. 964 S.] gr. 8. 1910. Geh. *M.* 30.—, in Leinw. geb. *M.* 32.—

Weber, Dr. **H.,** und Dr. **J. Wellstein,** Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 3. Auflage. Mit 40 Figuren. [XVIII u. 532 S.] 1909. *M.* 10...

II. — Elemente d... J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Au... 07. *M.* 12.—

III. — Angewand... von H. Weber, J. Wellstein und R. H. W... I. Mathematische Physik. Mit einem B... und J. Wellstein. Bearbeitet von Rudolf... 254 Figuren. [XII u. 536 S.] 1910. Geb. ...