Szanownemu Panu
Prof Dr Garbowskiemu
z wyrazami szacunku
i koleżeństwa
autor.

ABDRUCK
AUS DEN BERICHTEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG. LIX. BAND.

SITZUNG VOM 25. FEBRUAR 1907.

Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades.

Von

K. ŻORAWSKI.

ABDRUCK
AUS DEN BERICHTEN DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN KLASSE DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU LEIPZIG. BAND LIX.

SITZUNG VOM 25. FEBRUAR 1907.

Zur Invariantentheorie der Differentialformen zweiten Grades.

Von

K. Żorawski.

In einer Arbeit vom Jahre 1891 [1]) habe ich, an die bekannte Abhandlung von Lie, „Über Differentialinvarianten" [2]), anschließend, die Frage nach allen Differentialinvarianten und Differentialparametern [3]) derjenigen unendlichen Gruppe behandelt, welche durch die Invarianz einer binären Differentialform zweiten Grades charakterisiert wird. In der genannten Arbeit ist meines Wissens zum ersten Male die Anzahl der genannten Differentialinvarianten und Differentialparameter der verschiedenen Ordnungen ohne Beschränkung auf die niedrigsten Ordnungen angegeben. Ich operierte mit infinitesimalen Transformationen der Gruppe, wobei die Differentialinvarianten als Lösungen gewisser vollständiger Systeme auftreten, und für einige der niedrigsten Ordnungen ist bei mir auch die Integration dieser Systeme durchgeführt.

Es haben seither die Herren T. Levi-Civita [4]), C. N. Haskins [5]), A. R. Forsyth [6]) und Th. de Donder [7]) gleichfalls unter Anwendung der Lieschen Methode infinitesimaler Transformationen den meinigen

1) „Über Biegungsinvarianten." Acta Mathematica, Band 16, S. 1—64.

2) Mathematische Annalen, Band 24 (1884).

3) In meiner Arbeit und den Arbeiten anderer Autoren waren für diese Invarianten verschiedene spezielle Benennungen benutzt. Wir begnügen uns hier mit der Benutzung der allgemeinen Terminologie.

4) Reale Istituto Veneto, Atti, Ser. 7, vol. 5_2, (1894).

5) Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 3, S. 71—91 (1902), Vol. 5, S. 167—192 (1904).

6) Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A, Vol. 201, S. 329—402, (1903), Ser. A, Vol. 202, S. 277—333 (1903).

7) Mémoires de l'Académie de Belgique, Nouvelle série, tome I (1904 et 1905).

verwandte invariantentheoretische Untersuchungen angestellt. In diesen Arbeiten, von denen einige mehr, einige weniger Berührungspunkte mit der meinigen besitzen, befinden sich unter anderen Untersuchungen, einerseits solche, die als Verallgemeinerungen meiner Betrachtungen angesehen werden können, anderseits solche, die Vereinfachungen und Vervollkommnungen meiner Behandlungsweise sind.

Neuerdings beschäftigt sich im 131. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik Herr J. Knoblauch mit der Frage nach den Invarianten der binären Differentialformen zweiten Grades; ohne die Methode der infinitesimalen Transformationen zu benutzen, knüpft er an die Betrachtungen an, die in der Abhandlung von Casorati: „Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprieta delle superficie curve“[1]) enthalten sind. Herr Knoblauch fängt seine Abhandlung mit den Bemerkungen an, daß die Anwendung infinitesimaler Transformationen „den eigentlichen Inhalt des der Untersuchung zugrunde liegenden Gleichungssystems zerstört“ und daß die Benutzung infinitesimaler Transformationen auf komplizierte Rechnungen führt. Auf die erste dieser Bemerkungen muß erwidert werden, daß eben die von Lie geschaffene Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen bezeugt, daß die Benutzung infinitesimaler Transformationen in invariantentheoretischen Untersuchungen gerade den Inhalt des zugrunde liegenden Gleichungssystems nicht zerstören kann. Was die zweite der genannten Bemerkungen betrifft, so muß hervorgehoben werden, daß, sobald man eine Methode von derartiger Allgemeinheit wie die Liesche unmittelbar auf ein spezielles Problem anwendet, dies sicher nicht die einfachste Methode liefert, die bei diesem Probleme möglich ist. Es ist klar, daß die Kraft und Tragweite allgemeiner Methoden darin besteht, daß man vermöge derselben ausgedehnte Kategorien von Problemen zur Lösung bringen kann. Anderseits wird man aber in jedem speziellen Falle, mit vollem Rechte, Vereinfachungen der Behandlung verlangen können, und in bezug darauf bemerken wir zunächst, daß in den früher genannten Arbeiten, in welchen gleichfalls mit infinitesimalen Transformationen gerechnet wird, neben anderen Untersuchungen auch Vereinfachungen der Behandlung enthalten sind. Ferner aber müssen

1) Annali di Matematica, S. 1, tomo 3, 4 (1860—61).

wir auch hervorheben, daß die Knoblauchsche Abhandlung nicht als Ersatz der Untersuchungen, die mit infinitesimalen Transformationen geführt waren, gelten kann, weil der Hauptbeweis der Knoblauchschen Abhandlung unrichtig ausgeführt ist. Eine detaillierte Analyse dieses Beweises bildet den Inhalt des § 1 der gegenwärtigen Arbeit.

In der Einleitung der Knoblauchschen Abhandlung wird aber noch ein Punkt hervorgehoben. Knoblauch sagt nämlich, daß das von mir behandelte Problem jedenfalls einer Neubearbeitung bedarf, weil die von mir angegebenen Anzahlen von unabhängigen Differentialparametern verschiedener Ordnungen an zwei Stellen nicht der gewöhnlichen Definition der Unabhängigkeit von Invarianten entsprechen. Wir gehen auf diese Ausdrucksweise Knoblauchs, in welcher derselbe gerade wegen der genannten Anzahlen die Neubearbeitung des Problems verlangt, nicht unmittelbar ein, doch wollen wir folgende Tatsachen zusammenstellen. Im § 3 der gegenwärtigen Abhandlung wird konstatiert, daß aus den von uns aufgestellten partiellen Differentialgleichungen, denen die Differentialparameter genügen, sich die Anzahlen derselben bei jeder Auffassung erhalten lassen, insbesondere also bei derjenigen Fragestellung, die von Knoblauch als zweckmäßig angesehen wird. Diese Anzahlen lassen sich ferner aus den genannten Differentialgleichungen auf Grund sehr nahe liegender Bemerkungen folgern und es wäre demnach z. B. nicht zutreffend zu meinen, daß dieselben bei Benutzung meiner Behandlungsweise entweder gar nicht oder vielleicht nur mit Schwierigkeit zu erreichen sind. Ein viel wichtigerer Umstand ist aber der, daß gerade die Zweckmäßigkeit der Knoblauchschen Auffassung sehr in Frage gezogen werden kann. Im § 2 konstatieren wir nämlich, daß, wenn man auf die Knoblauchsche Weise nach den Anzahlen von Differentialparametern fragt, diese ohne jede Untersuchung von vorne herein angegeben werden können und zwar auf Grund eines Satzes, der für eine ausgedehnte Kategorie von Gruppen auf der Hand liegt. Außerdem kommen wir in der Folge zu dem Schlusse, daß gerade diese Knoblauchsche Auffassung die Ursache war, daß er den Hauptbeweis seiner Abhandlung unrichtig ausgeführt hat.

Diese unseren Bemerkungen haben natürlich nicht den Zweck, gegen die Behandlung der Invariantentheorie binärer Differentialformen 2 ten Grades mit Hilfe endlicher Gleichungen nach

Casoratis Vorbild aufzutreten. Gerade aus Anlaß der Knoblauchschen Veröffentlichung haben wir im Gegenteil versucht, unter Benutzung endlicher Transformationsgleichungen die erforderlichen Beweise und Ausführungen in einer von der Knoblauchschen Darstellung abweichenden Weise zu liefern. Wir fassen nämlich den Teil des Problems, welcher Knoblauch mißlungen ist, anders und ferner bringen wir einerseits den Gruppenbegriff zur Geltung, von dem in der Knoblauchschen Publikation keine Rede ist, anderseits aber stellen wir die Differentialinvarianten und die Differentialparameter in einer Form auf, die unmittelbar den geometrischen Inhalt derselben angibt, auf welchen Knoblauch gleichfalls nicht eingeht. Diese Gegenstände bilden den Inhalt des 4ten und der folgenden §§, wobei wir einige Rechnungen überschlagen, die als bekannt angesehen werden können.

Außerdem sei noch bemerkt, daß in der gegenwärtigen Abhandlung aus Gründen, die in den früher aufgeführten Arbeiten hervorgehoben waren, hauptsächlich diejenigen Differentialparameter einer systematischen Behandlung unterworfen werden, die eine einzige willkürliche Funktion zweier krummliniger Koordinaten eines Flächenpunktes enthalten. Nur im letzten § der Abhandlung beschäftigen wir uns mit Differentialparametern, die von den Ableitungen einer der krummlinigen Koordinaten nach der anderen abhängig sind.

§ 1.

Wir besprechen zunächst das Hauptraisonnement der Knoblauchschen Abhandlung, wobei wir die Knoblauchschen Bezeichnungen benutzen. Es sei die binäre Differentialform zweiten Grades:

$$\sum_{i,\,k} a_{ik}\, du_i\, du_k \equiv A,$$

wo i und k unabhängig die Werte 1, 2 annehmen und wo

$$a_{ik} = a_{ki}$$

ist. Führt man in A neue Veränderliche:

$$u_1' = u_1'(u_1,\, u_2), \qquad u_2' = u_2'(u_1,\, u_2) \tag{1}$$

ein, so folgt:

$$A = \sum_{\lambda,\,\mu} a'_{\lambda\mu}\, du'_\lambda\, du'_\mu$$

und wir erhalten für die beiden Koeffizientensysteme die drei Transformationsgleichungen:

$$(2) \qquad a_{ik} = \sum_{\lambda, \mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}. \qquad (i, k = 1, 2)$$

Man betrachte ferner eine Funktion $\varphi(u, v)$. Führt man in dieselbe die neuen Veränderlichen u'_1, u'_2 ein, so folgt:

$$\varphi(u_1, u_2) = \bar{\varphi}(u'_1, u'_2)$$

und durch Differentiation ergeben sich zwei Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}. \qquad (i = 1, 2)$$

Knoblauch betrachtet das System von Gleichungen, welches aus den Gleichungen (2), aus den Gleichungen (3) und aus allen Gleichungen besteht, die durch einmalige, zweimalige usw. $(m-1)$-malige Differentiationen von (2) und (3) nach u_1 und u_2 sich ergeben. Dieses System von Gleichungen wollen wir mit $B^{(m)}$ bezeichnen. Knoblauch strebt dahin, alle Resultanten dieses Systems zu erhalten, welche aus demselben durch Elimination aller in dem Systeme vorkommenden Ableitungen der Funktionen u'_1, u'_2 nach den Veränderlichen u_1, u_2 (d. h. aller Ableitungen dieser Funktionen von der ersten bis zur m-ten Ordnung inklusive) sich ergeben. Es wird die Anzahl m^2 aller unabhängigen Resultanten aufgestellt und es wird gesucht, diese Resultanten in der Form von Gleichheiten der für das ursprüngliche und für das transformierte Größensystem gebildeten Differentialinvarianten und Differentialparameter zu erhalten. Knoblauch bekommt nämlich eine gewisse Anzahl $\mathfrak{g}^{(m-1)}$ von derartigen unabhängigen Relationen mit Differentialinvarianten, welche nur von den a_{ik} und von den Differentialquotienten der a_{ik} nach u_1 und u_2 bis zur $(m-1)$-ten Ordnung inklusive abhängig sind. Ferner bekommt er eine gewisse Anzahl $\mathfrak{b}^{(m)}$ von derartigen von den früheren und voneinander unabhängigen Relationen, die Differentialparameter enthalten, welche außer von den a_{ik} und deren Ableitungen noch von den Ableitungen der Funktion $\varphi(u, v)$ bis zur m-ten Ordnung inklusive abhängig sind. Da es sich nun ergibt, daß $\mathfrak{g}^{(m-1)} + \mathfrak{b}^{(m)}$ gerade gleich m^2 ist, so schließt er daraus, daß er auf diese Weise alle Resultanten des Systems $B^{(m)}$

erhalten hat und kommt auf die Sätze über die Anzahl der Differentialinvarianten von verschiedenen Ordnungen.

Wir wollen genauer zusehen, auf welche Weise KNOBLAUCH die Differentialparameter erhalten hat. Er nimmt zunächst die Differentialparameter:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \Delta_a(\varphi, K) &= \sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial K}{\partial u_k}, \\ D_a(\varphi, K) &= \frac{1}{a}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial K}{\partial u_2} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\frac{\partial K}{\partial u_1}\right), \end{aligned}$$

welche nur die ersten Differentialquotienten der Funktion φ enthalten und wo K das GAUSSsche Krümmungsmaß ist. Ferner bildet er die Differentialparameter:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &D_a(\Delta_a^1 \varphi, K), \qquad \Delta_a(\Delta_a^1 \varphi, K) \\ &\Delta_a^2 \varphi = \sum_{ik} \alpha_{ik} \varphi_{ik}, \end{aligned}$$

wo

$$\Delta_a^1 \varphi = \sum_{ik} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k},$$

$$\varphi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i\,k \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu},$$

die also außer der ersten noch die zweiten Differentialquotienten der Funktion φ enthalten. Weiter werden durch Ausführung der Operationen (4) auf die Größen (5) Differentialparameter erhalten, die außer den ersten und zweiten noch die dritten Differentialquotienten von φ enthalten und so fort, bis man auf Größen kommt, die außer den niedrigeren die Differentialquotienten m-ter Ordnung von φ enthalten. Wenn man diese Differentialparameter nach Ordnungen klassifiziert, wobei unter der Ordnung eines Differentialparameters die höchste Ordnung der in demselben vorkommenden Differentialquotienten von φ verstanden wird, so erhält man gerade 2 Differentialparameter 1-ter Ordnung, 3 Differentialparameter 2-ter usw. $m + 1$ Differentialparameter m-ter Ordnung und diese Differentialparameter sind für jede Ordnung in bezug auf die höchsten Differentialquotienten von φ voneinander unabhängig. Die Summe der obigen Zahlen ist nämlich gleich der früheren Zahl $\mathfrak{b}^{(m)}$.

Wir wollen aber zusehen, von welcher Ordnung die höchsten in diesen Differentialparametern vorkommenden Differentialquotienten der a_{ik} sind. In den Größen (4) ist diese Ordnung gleich 3, in den zwei ersten der Größen (5) gleich 3, in der dritten derselben gleich 1 und es erhellt ferner, daß jedenfalls nicht alle aufgestellten Differentialparameter 3-ter Ordnung von den Differentialquotienten 4-ter Ordnung der a_{ik} frei sind usw., daß jedenfalls nicht alle Differentialparameter m-ter Ordnung von den Differentialquotienten $(m+1)$-ter Ordnung der a_{ik} unabhängig sind. Nun aber enthält das System $B^{(m)}$ die a_{ik} und deren Differentialquotienten nur bis zur $(m-1)$-ten Ordnung inklusive. Daraus folgt, daß die von Knoblauch aufgestellten, von den Differentialquotienten der Funktion φ abhängigen Differentialparameter jedenfalls nicht alle aus dem Systeme $B^{(m)}$ durch Elimination der Ableitungen der u_1' und u_2' nach u_1 und u_2 sich ergeben können. Man kommt also auf dem Knoblauchschen Wege nicht auf m^2 Resultanten des Systems $B^{(m)}$ und daher ist der Hauptbeweis der Knoblauchschen Arbeit unrichtig.

§ 2.

Wir haben soeben gesehen, daß es Knoblauch deswegen nicht gelungen ist, seine Betrachtungen richtig durchzuführen, weil er nicht Sorge getragen hat, derartige Differentialparameter aufzustellen, in welchen die höchste Ordnung der Differentialquotienten der a_{ik} einer entsprechenden Bedingung genügt. Anläßlich dessen scheint es uns vielleicht nicht zwecklos zu bemerken, daß sobald man in bezug auf die Weise, in welcher die genannten Differentialparameter von den a_{ik} und deren Differentialquotienten abhängen sollen, keine Forderung stellt, ein bekanntes Verfahren angewendet werden kann, um alle unabhängigen Differentialparameter zu erhalten. Dieses Verfahren bezieht sich auf jede Gruppe, die zwei Differentialinvarianten aufweist, sobald man zwei Veränderliche als unabhängige und alle anderen als Funktionen dieser unabhängigen Veränderlichen betrachtet. Bezeichnet man mit u_1, u_2 die unabhängigen Veränderlichen und mit J_1, J_2 die unabhängigen Differentialinvarianten, so bilden die Differentialquotienten:

$$(6)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial J_1}=\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{\partial J_2}{\partial u_2}-\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\frac{\partial J_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial J_1}{\partial u_1}\frac{\partial J_2}{\partial u_2}-\frac{\partial J_1}{\partial u_2}\frac{\partial J_2}{\partial u_1}},\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial J_2}=\frac{\frac{\partial J_1}{\partial u_1}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}-\frac{\partial J_1}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}}{\frac{\partial J_1}{\partial u_1}\frac{\partial J_2}{\partial u_2}-\frac{\partial J_1}{\partial u_2}\frac{\partial J_2}{\partial u_1}}$$

zwei unabhängige Differentialparameter und überhaupt die Differentialquotienten:

$$(7) \qquad \frac{\partial^m \varphi}{\partial J_1^m}, \quad \frac{\partial^m \varphi}{\partial J_1^{m-1} \partial J_2}, \quad \frac{\partial^m \varphi}{\partial J_1^{m-2} \partial J_2^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^m \varphi}{\partial J_2^m}$$

$m + 1$ unabhängige Differentialparameter. Es kann daher für eine spezielle Gruppe der erwähnten Kategorie die Ermittelung der Anzahlen von unabhängigen Differentialparametern, in denen die höchsten Differentialquotienten der Funktion φ von der ersten, von der zweiten usw. von der m-ten Ordnung sind, und die keiner weiteren Bedingung unterworfen sind, nicht den Gegenstand einer Untersuchung bilden, denn aus der obigen Bemerkung erhellt, daß die Maxima dieser Zahlen sicher erreicht werden. Wenn also Knoblauch seine Ausführungen auf S. 260—263 unter anderem als Untersuchung obiger Anzahlen bezeichnet, so kann diese Beleuchtung nicht als zweckmäßig angesehen werden. Wir wollen aber bemerken, daß, wenn man nimmt

$$J_1 = K, \qquad J_2 = \Delta_a^1 K$$

und die Differentialparameter unserer Gruppe nach den Formeln (6) und (7) aufstellt, diejenigen dieser Differentialparameter, in denen die höchsten Ableitungen von φ von der Ordnung l sind, die Differentialquotienten der a_{ik} bis zur $(l + 3)$-ten Ordnung enthalten werden. In den Knoblauchschen Differentialparametern, in denen die höchsten Ableitungen der Funktion φ von der Ordnung $l > 1$ sind, steigen die Ordnungen der a_{ik} bis $l + 1$ auf. Es stellt sich hier von selbst die Forderung ein, die Differentialparameter mit möglichst niedrigen Ordnungen der Differentialquotienten der a_{ik} zu erhalten. Aus diesem Anlaß und aus Anlaß der Knoblauchschen Bemerkungen wollen wir nun auf einige Einzelheiten meiner früheren Arbeit eingehen.

§ 3.

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, haben wir in der genannten Arbeit unter anderem zwei Aufgaben gelöst. Erstens haben wir die Anzahl derjenigen Differentialinvarianten bestimmt, die die a_{ik} und deren Differentialquotienten nur bis zur m-ten Ordnung inklusive enthalten, alle untereinander unabhängig sind und von allen denjenigen Differentialinvarianten unabhängig sind, die a_{ik} und deren Differentialquotienten nur bis zur $(m - 1)$-ten Ordnung inklusive enthalten. Diese Anzahl wurde als Anzahl der Differentialinvarianten m-ter Ordnung bezeichnet. Zweitens haben wir die Anzahl derjenigen Differentialparameter bestimmt, die a_{ik} und deren Differentialquotienten nur bis zur $(m - 1)$-ten Ordnung, die Ableitungen der Funktion φ nur bis zur m-ten Ordnung inklusive enthalten, alle untereinander und von allen Differentialinvarianten bis zur $(m - 1)$-ten Ordnung, sowie auch von allen Differentialparametern unabhängig sind, die die a_{ik} und deren Differentialquotienten nur bis zur $(m - 2)$-ten Ordnung und die Ableitungen der Funktion φ nur bis zur $(m - 1)$-ten Ordnung inklusive enthalten. Diese Anzahl wurde als Anzahl der Differentialparameter m-ter Ordnung bezeichnet. Im Falle der Differentialinvarianten haben wir für die m-te Ordnung, bei $m > 3$ die Zahl $m - 1$ bei $m = 0$ und $m = 1$ die Zahl Null und bei $m = 2$ und $m = 3$ die Zahl 1 erhalten. Im Falle der Differentialparameter haben wir für die m-te Ordnung bei $m > 4$ die Zahl $m + 1$, bei $m = 1$ die Zahl 1, bei $m = 2$ die Zahl 3, bei $m = 3$ die Zahl 4 und bei $m = 4$ die Zahl 6 erhalten. Aus Anlaß der Anzahlen von Differentialparametern für die Ordnungen 1 und 4 macht Knoblauch die richtige Bemerkung, daß sich bei der gewöhnlichen Abzählung der Differentialparameter nach Ordnungen der Ableitungen von φ die Anzahlen der Differentialparameter anders gruppieren (man hat nämlich für die Ordnung 1 die Zahl 2 und für die Ordnung 4 die Zahl 5). Infolge der bei uns getroffenen Auffassungsweise muß in unsrer Klassifikation der Differentialparameter $\varDelta_a(\varphi, K)$ mit zur vierten Ordnung gezählt werden, und wenn auch der genannte Differentialparameter nur die ersten Ableitungen von φ enthält, so ist es doch leicht zu ersehen, daß unsre Kategorien unmittelbar mit der Natur des Problems verbunden sind. Sie ergeben sich in meiner Arbeit wegen der dort betrachteten stufenweisen Erweiterungen der Gruppe des Problems. Wenn man anderseits an die Darstellung anschließt, die sich bei Casorati und Knoblauch findet, so kann man sagen, daß diese Kategorien daraus folgen müssen, daß man den Überschuß der Resultanten eines jeden Systems $B^{(m)}$ gegen die Resultanten des Systems $B^{(m-1)}$ betrachtet und es erhellt, daß man auf diesem Wege zur richtigen Fassung des Eliminationsproblems kommt.

Wir haben gesehen, daß es vom Interesse ist, bei der Betrachtung der Differentialparameter auf die Ordnungen der in denselben vorkommenden Differentialquotienten der a_{ik} besonders zu achten. Mit jeder der von uns betrachteten Invarianten ist ein System zweier Zahlen verbunden. Es sei nämlich p die höchste Ordnung der in der Invariante vorkommenden Differentialquotienten der a_{ik} und es sei q die höchste Ordnung der in derselben vorkommenden Differentialquotienten der Funktion φ. Es wird dabei $p = 0$ die Bedeutung haben, daß in der betreffenden Invariante keine Differentialquotienten der Funktionen a_{ik}, sondern nur diese Funktionen selbst auftreten, und es wird $q = 0$ die Bedeutung haben, daß in der betreffenden Invariante gar keine Differentialquotienten der Funktion φ auftreten, d. h. daß dieselbe zu der Kategorie gehört, für welche wir in der gegenwärtigen Arbeit die Benennung Differentialinvariante gebrauchen. Nun wollen wir ferner mit (P, Q) die Anzahl derjenigen voneinander unabhängigen Invarianten bezeichnen, für welche $p = P$ und $q = Q$ ist und welche von allen denjenigen Invarianten unabhängig sind, für welche entweder $p < P$, $q = Q$ oder $p = P$, $q < Q$ oder endlich $p < P$, $q < Q$ ist. Wenn wir die Entwickelungen unserer Arbeit in den Acta math. 16 in Erinnerung bringen, so erhellt, daß alle Invarianten einer Gruppe, die bis auf die P-ten Differentialquotienten der a_{ik} und bis auf die Q-ten Differentialquotienten der Funktion φ erweitert wird, als Lösungen eines vollständigen Systems erhalten werden, in welchem die höchsten Differentialquotienten der a_{ik} die P-ten und die höchsten Differentialquotienten der Funktion φ die Q-ten sind. Es wird nun anderseits die Anzahl aller dieser Lösungen unter Benutzung der Bezeichnungen, die wir soeben besprochen haben, durch die Summe

$$\sum_{0}^{P}{}_{p} \sum_{0}^{Q} (p, q)$$

dargestellt und es erhellt, daß, sobald man nur diese Anzahlen der Lösungen in allen möglichen Fällen zu bestimmen weiß, man auch stufenweise alle Anzahlen (P, Q) aufstellen kann. Die Anzahlen der Lösungen hängen aber von den Eigenschaften der Matrices der entsprechenden vollständigen Systeme ab und diese Eigenschaften sind erschöpfend in meiner Arbeit in den Acta math. 16 behandelt worden. Wenn man schrittweise die Entwickelungen dieser Arbeit verfolgt, so können ohne weiteres alle Anzahlen (P, Q) angegeben werden. Es wird am übersichtlichsten sein, wenn man diese Anzahlen in einer Tabelle zusammenstellt, deren Horizontalreihen den verschiedenen Zahlen P und deren Vertikalreihen den verschiedenen Zahlen Q entsprechen. Man gelangt auf diese Weise zu folgender Tabelle:

(8)

Q \ P	0	1	2	3	4	5	6	
0	0	1	0	0	0	0	0	
1	0	0	3	0	0	0	0	
2	1	0	0	4	0	0	0	
3	1	1	0	0	5	0	0	
4	3	0	0	0	0	6	0	
5	4	0	0	0	0	0	7	
6	5	0	0	0	0	0	0	

in welcher die Zahl (P, Q) in der $(P + 1)$-ten Horizontalreihe und in der $(Q + 1)$-ten Vertikalreihe gelegen ist. Nun enthält aber diese Tabelle in bezug auf die Anzahlen der Differentialparameter jedenfalls mehr, als die Knoblauchsche Veröffentlichung, denn man ersieht aus der Tabelle die kleinsten Zahlen p, welche bei einer gegebenen Zahl q möglich sind.

§ 4.

Wir wollen nun versuchen die Bestimmung der Anzahlen der betrachteten Invarianten verschiedener Ordnungen nach dem Vorbilde Casoratis unter Benutzung endlicher Gleichungen und ohne Beschränkung auf die niedrigsten Ordnungen durchzuführen. Wir werden dabei, im Gegensatz zur Knoblauchschen Darstellung, die Anzahlen der Differentialinvarianten ohne Betrachtung der Differentialparameter aufstellen.

Wenn man alle ersten, alle zweiten usw. alle m-ten Differentiationen nach u, v auf das System dieser Gleichungen (2) ausführt, so wird man mit diesen drei Gleichungen zusammen das System $G^{(m)}$ von

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3(m + 1) = 3\,\frac{(m + 1)(m + 2)}{2}$$

Gleichungen erhalten. Diese Gleichungen bestimmen direkt die a_{ik} und alle Differentialquotienten der a_{ik} nach den u_1, u_2 bis zur m-ten Ordnung inklusive und sind deshalb alle voneinander unabhängig. Es erhellt, daß, wenn man mit denselben irgend welche algebraische Prozesse vornimmt, durch diese Prozesse die Anzahl der unabhängigen Gleichungen weder vergrößert noch vermindert werden kann. Es ist bequem, die Gleichungen des Systems $G^{(m)}$ nach Ordnungen einzuteilen, und zwar diejenigen dieser Gleichungen von der Ordnung l zu nennen, welche linker Hand die l-ten Differentialquotienten der a_{ik} enthalten. Unsere Aufgabe besteht zunächst darin, uns über die Resultanten des Systems $G^{(m)}$ Rechenschaft zu geben, die durch Elimination aller Ableitungen der Veränderlichen u_1', u_2' nach den Veränderlichen u_1, u_2 folgen.

Aus den drei Gleichungen (2) lassen sich die Ableitungen der u_1', u_2' nach u_1, u_2 nicht eliminieren, es gibt deshalb keine Resultante, in welcher nur die a_{ik} und a'_{ik} selbst auftreten.

Christoffel hat gezeigt, daß sich die 6 Gleichungen 1-ter Ordnung in bezug auf die 6 Ableitungen 2-ter Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 auflösen lassen. Daraus schließen wir zunächst, daß es keine Resultante gibt, in welcher nur a_{ik}, a'_{ik} und die ersten Differentialquotienten derselben auftreten.

Ferner schließen wir daraus, daß man 1) die 8 Ableitungen dritter Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 durch die ersten Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 und durch die a_{ik} und a'_{ik} und deren Differentialquotienten bis zur 2-ten Ordnung inklusive ausdrücken kann; daß man 2) die 10 Ableitungen 4-ter Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 durch die ersten Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 und durch die a_{ik} und a'_{ik} und deren Differentialquotienten bis zur 3-ten Ordnung inklusive ausdrücken kann usw., daß man $m - 1$) die $2(m+2)$ Ableitungen $(m+1)$-ter Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 durch die ersten Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 und durch die a_{ik} und a'_{ik} und deren Differentialquotienten bis zur m-ten Ordnung ausdrücken kann.

Alle die letztgenannten Ausdrücke folgen durch Differentiation der Christoffelschen Auflösungen der 6 Gleichungen 2-ter Ordnung und durch jedesmalige Einsetzen der Werte, welche durch die Christoffelschen Auflösungen für die Ableitungen 2-ter Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 geboten werden. Da nun das ganze System $G^{(m)}$ durch Differentiation aus den Gleichungen (2) folgt, so bilden die Gleichheiten, welche diese Ausdrücke bieten, einen Teil der Gleichungen des Systems $G^{(m)}$. Und wenn man diese Ausdrücke in alle Gleichungen des Systems $G^{(m)}$ einsetzt, so wird dadurch die Unabhängigkeit einiger dieser Gleichungen aufgehoben, es bleibt aber noch eine Anzahl von Gleichungen, welche keine Identitäten sind und von den Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 höchstens die ersten enthalten. Es erhellt, daß dieser Kategorie von Gleichungen die 3 Gleichungen 0-ter Ordnung angehören, daß die Gleichungen 1-ter Ordnung keine derartigen Gleichungen liefern und daß man 1 derartige Gleichung aus den Gleichungen 2-ter Ordnung, 2 aus den Gleichungen 3-ter usw. $3(m+1)-2(m+2)=m-1$ aus den Gleichungen m-ter Ordnung bekommt. Diejenigen dieser Gleichungen, welche auf diese Weise aus den Gleichungen l-ter Ordnung des Systems $G^{(m)}$ abgeleitet werden, enthalten die Differentialquotienten l-ter Ordnung der a_{ik} und keine höheren, es sind aber diese Gleichungen sicher in bezug auf diese Differentialquotienten l-ter Ordnung voneinander unabhängig, denn die Gleichungen l-ter Ordnung sind in bezug auf diese Differentialquotienten voneinander unabhängig. Wir wollen der Kürze halber diejenigen Gleichungen der erhaltenen Kategorie, welche aus den Gleichungen l-ter Ordnung des Systems $G^{(m)}$ entstehen mit γ_l bezeichnen.

Hat man alle Gleichungen $\gamma_l\,(l=0, 1, \ldots, m)$ aufgestellt, so besteht weiter das Problem der Resultantenbildung in der Elimination der Ableitungen erster Ordnung der u_1', u_2' in bezug auf u_1, u_2. Nachdem was wir bereits konstatiert haben, ist die nächste Frage, ob sich aus den drei Gleichungen γ_0 und aus der einzigen Gleichung γ_2 diese Ableitungen erster Ordnung eliminieren lassen. Es ist bekannt, daß, obwohl die Anzahl dieser Gleichungen der Anzahl der zu eliminierenden Ableitungen gleich ist, doch diese Elimination möglich ist, weil diese Gleichungen γ_0 und γ_2 nicht in bezug auf die zu eliminierenden Ableitungen voneinander unabhängig sind. Es ist ferner bekannt, daß das Eliminationsresultat in der Form:

$$K = K' \tag{9}$$

geschrieben werden kann, wo K das Gausssche Krümmungsmaß für das ursprüngliche und K' für das neue System bezeichnet. Die Gleichung (9) liefert die erste Resultante des Systems $G^{(m)}$, und zwar eine Resultante von der 2ten Ordnung und in der Invariantenform.

Wir gehen nun zu den zwei Gleichungen γ_3 über. Da diese Gleichungen durch Differentiation und Elimination aus dem Systeme $G^{(3)}$ folgen und da es gerade zwei solcher Gleichungen gibt, so kann man nach CASORATIS Vorgang diese Gleichungen einfach durch Differentiation von (9) aufstellen. Man erhält zwei Gleichungen:

$$(10) \qquad \frac{\partial K}{\partial u_i} = \sum_l \frac{\partial K'}{\partial u_l'} \frac{\partial u_l'}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2)$$

und aus den Gleichungen γ_0 und einer der Gleichungen γ_3 lassen sich die vier Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 bestimmen. Wenn man diese Werte in die zweite der Gleichungen (10) einsetzt, so erhält man eine Resultante 3-ter Ordnung.

Wenn man ferner diese Werte in die Gleichungen $\gamma_4, \gamma_5, \ldots, \gamma_m$ einsetzt, so erhält man 3 Resultanten 4-ter, 4 Resultanten 5-ter usw. $m - 1$ Resultanten m-ter Ordnung.

Nun bleibt noch die Frage übrig, ob alle diese Resultanten auf Invariantenform zurückgeführt werden können. Dies unterliegt aber keinem Zweifel, weil unser Gleichungssystem eine Transformationsgruppe definiert.

Auf diese Weise sind die Anzahlen der Differentialinvarianten verschiedener Ordnungen durch Betrachtung der endlichen Gleichungen der Gruppe bestimmt.

§ 5.

Wir wenden uns nun zu den Differentialparametern. Man betrachte nämlich alle Gleichungen, die aus den Gleichungen (2) und (3) durch einmalige, zweimalige, ..., $(m-1)$-malige Differentiation folgen, d. h. man betrachte das System $B^{(m)}$. Dieses System enthält alle Gleichungen des Systems $G^{(m-1)}$ und außerdem noch

$$2 + 3 + \cdots + m + 1 = \frac{m(m+3)}{2}$$

Gleichungen, also ist die Gesamtzahl der Gleichungen dieses Systems $B^{(m)}$ gleich:

$$\frac{m(m+3)}{2} + 3\frac{m(m+1)}{2} = m(2m+3).$$

Wir wollen die Gleichungen des Systems $B^{(m)}$ in analoger Weise wie diejenigen des Systems $G^{(m)}$ klassifizieren. Wir ziehen uns die im § 3 besprochene Bemerkung Knoblauchs über die in meiner Arbeit in den Acta math. 16 ermittelten Anzahlen der Differentialparametern zu Nutze und gebrauchen hier eine andere Benennung der analogen Kategorien, indem wir alle Gleichungen, die dem Systeme $B^{(l)}$ angehören, aber in dem Systeme $B^{(l-1)}$ nicht enthalten sind, als Gleichungen l-ten Ranges benennen. Die Anzahl der Gleichungen l-ten Ranges ist gleich:

$$l(2l+3)-(l-1)(2l+1)=4l+1.$$

Unter diesen Gleichungen befinden sich die Gleichungen, mit deren Hilfe man bei $l>1$ alle Ableitungen l-ter Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 durch die ersten Ableitungen derselben und durch die Größen a_{ik} und a_{ik}' und deren Differentialquotienten bis zur $(l-1)$-ten Ordnung inklusive ausdrücken kann. Die Anzahl solcher Gleichungen unter den Gleichungen l-ten Ranges des Systems $B^{(m)}$ ist $2(l+1)$. Da man nun durch Benutzung dieser Gleichungen aus den übrigen alle Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 außer denjenigen erster Ordnung entfernen kann, so erhalten wir, $l>1$ vorausgesetzt, $2l-1$ Gleichungen vom l-ten Range, in denen nur noch die Ableitungen erster Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 auftreten können. Wir wollen die Gleichungen, welche aus denjenigen l-ten Ranges auf diese Weise, durch Entfernung der Ableitungen höherer Ordnungen entstehen, mit β_l bezeichnen.

Wir werden uns nun damit beschäftigen, die Anzahl der Resultanten zu bestimmen, welche aus den Gleichungen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ durch Elimination der Ableitungen erster Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 sich ergeben und welche von den Resultanten unabhängig sind, die im § 4 betrachtet wurden. Um dabei diese neuen Resultanten von den früheren zu unterscheiden, wollen wir sie für den Augenblick Resultanten zweiter Art nennen, und zwar Resultanten zweiter Art von dem Range l, falls sie durch die genannte Elimination aus den Gleichungen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ sich ergeben und von allen Eliminationsresultaten der Gleichungen β_1, $\beta_2, \ldots, \beta_{l-1}$ unabhängig sind.

Die Gleichungen β_1 bestehen aus drei Gleichungen γ_0 und zwei neuen Gleichungen. Vier dieser Gleichungen können in bezug auf die vier Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 aufgelöst werden, und setzt man diese Werte in die fünfte Gleichung ein, so erhält man eine Resultante zweiter Art ersten Ranges.

Wenn man die erhaltenen Werte der Ableitungen erster Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 in die Gleichungen β_l einsetzt, so erhält man $2l - 1$ Resultanten, die sicher von allen Resultanten unabhängig sind, welche auf dieselbe Weise aus den Gleichungen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{l-1}$ entstehen. Unter diesen Resultanten gibt es im allgemeinen Resultanten $(l-1)$-ter Ordnung, die im § 4 betrachtet wurden. Wenn man die dort aufgestellten Zahlen in Erinnerung bringt, so kommt man zu dem Ergebnis, daß 3 Resultanten zweiter Art und 2-ten Ranges, 4 Resultanten zweiter Art und 3-ten Ranges, 6 Resultanten zweiter Art und 4-ten Ranges und überhaupt bei $m > 4$ $2m - 1 - (m-2) = m + 1$ Resultanten zweiter Art und m-ten Ranges existieren.

Alle diese Resultanten können sicher auf die Invariantenform zurückgeführt werden, weil wir es mit einer Transformationsgruppe zu tun haben. Auf diese Weise liefert jede Resultante zweiter Art einen Differentialparameter und hiermit sind also die Anzahlen der Differentialparameter aufgestellt worden.

Wir gehen nun zu der Aufgabe über, alle möglichen Zahlen (P, Q) zu bestimmen, wie wir dies auf Grund der Differentialgleichungen meiner Arbeit in den Acta math. 16 im § 3 der gegenwärtigen Abhandlung ausgeführt haben. Hier handelt es sich darum, die im § 3 aufgestellte Tafel mit Benutzung endlicher Transformationsgleichungen zu erhalten.

Die Anzahlen, welche in der ersten Kolonne dieser Tafel stehen, sind eben im § 4 aufgestellt worden. Um die Zahlen der zweiten Kolonne zu erhalten, werden wir die Systeme betrachten, die bei verschiedenen Zahlen m aus $\gamma_l \, (l = 0, 1, \ldots, m)$ und den Gleichungen (3) bestehen. Die Gleichungen γ_0 und (3) können in bezug auf die ersten Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 aufgelöst werden und man erhält aus ihnen einen Differentialparameter. Es gibt keine Gleichungen γ_1, die Hinzufügung der einzigen Gleichung γ_2 liefert die Differentialinvariante K, die Hinzufügung zweier Gleichungen γ_3 liefert eine Differentialinvariante 3-ter Ordnung und noch eine Invariante, nämlich $\Delta_a(\varphi, K)$; da ferner nicht mehr als zwei Differentialparameter existieren können, welche Ableitungen erster Ordnung und keine höheren der Funktion $\varphi\,(u, v)$ enthalten, so müssen in den folgenden Stellen der zweiten Kolonne überall Nullen eingesetzt werden.

Wir wollen noch zusehen, auf welche Weise man die Zahlen der dritten Kolonne unserer Tafel erhalten kann. Wenn man zu den Gleichungen γ_0 und (3) noch diejenigen drei Gleichungen hinzufügt, die durch Differentiationen erster Ordnung aus (3) sich ergeben, so bekommt man ein System, aus welchem augenscheinlich die Ableitungen zweiter Ordnung der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 nicht eliminiert werden können. Daher muß in der ersten Horizontalreihe der dritten Kolonne die Zahl 0 gesetzt werden. Um die Zahl der zweiten Horizontalreihe zu erhalten, müssen die Gleichungen β_2 betrachtet werden und man erhält daher die Zahl 3. Zu den weiteren Horizontalreihen dieser Kolonne übergehend, sieht man leicht, daß keine Resultanten hinzukommen können außer derjenigen, welche bereits auf die Invarianten der ersten und zweiten Kolonne geführt haben. Es müssen daher in allen diesen Horizontalreihen lauter Nullen eingesetzt werden.

Es erhellt, daß auf diese Weise alle Zahlen der weiteren Kolonnen aufgestellt werden können und darauf brauchen wir nicht näher einzugehen.

Wir heben ausdrücklich hervor, daß das Verfahren, welches wir zur Bestimmung der Anzahlen der Differentialinvarianten verschiedener Ordnungen im § 4 und der Anzahlen der Differentialparameter verschiedener Rangen im gegenwärtigen § 5 angestellt haben, eine vollkommene Analogie zu den Ausführungen besitzt, die in den Acta math. 16 sich befinden. Die Betrachtungen, welche soeben über die Aufstellung der Tafel des § 3 angegeben wurden, sind ihrerseits völlig analog der Behandlung dieser Fragen mit Hilfe infinitesimaler Transformationen. Es erhellt, daß diese Analogien keine Zufälle, sondern notwendige Folgen der Transformationsgruppentheorie sind.

§ 6.

Nun gehen wir dazu über, die Frage nach der Aufstellung der Differentialinvarianten und der Differentialparameter in Angriff zu nehmen. Wir werden dabei versuchen, gerade diejenigen Invarianten aufzustellen, die in der Tafel des § 3 angedeutet worden sind. Es scheint uns dabei vorteilhaft, diese Invarianten direkt in einer Form zu erhalten, die unmittelbar die geometrische Bedeutung der Invariante angibt.

Anläßlich dessen wird es bequem sein, Bezeichnungen zu benutzen, in welchen vorzugsweise Größen auftreten, die unmittelbare geometrische Bedeutung besitzen. Wir werden voraussetzen, daß keine der Scharen der Koordinatenlinien $u_2 =$ konst. und

$u_1 =$ konst. Scharen von Minimalkurven sind. Diese Voraussetzung kann auf keine Weise die Allgemeinheit unserer Resultate beeinträchtigen, weil es unser Ziel ist, Funktionen aufzustellen, die unter anderem die Eigenschaft besitzen sollen, daß sie bei jeder Parameteränderung auf der Fläche invariant bleiben.

Wenn man die Bogenlängen der Koordinatenlinien mit s_1 und s_2 bezeichnet, so können für eine beliebige Funktion $f(u_1, u_2)$ die Formeln:

$$\frac{df}{ds_1} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial f}{\partial u_1}, \qquad \frac{df}{ds_2} = \frac{1}{\sqrt{a_{22}}}\frac{\partial f}{\partial u_2}$$

angenommen werden. Nimmt man an, daß die hier auftretenden Quadratwurzeln bestimmte Werte besitzen, so können wir sagen, daß damit positive Halbtangenten der Koordinatenlinien festgelegt worden sind. Man bezeichne ferner

$$p_1 = -\frac{d\log\sqrt{a_{11}}}{ds_2}, \qquad p_2 = \frac{d\log\sqrt{a_{22}}}{ds_1}$$

und wenn man die Schreibweise:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{df}{d\tau'}\right) = \frac{d^2 f}{d\tau\, d\tau'}$$

benutzt, so erhält man die Beziehung:

$$(11) \qquad \frac{d^2 f}{ds_2\, ds_1} - \frac{d^2 f}{ds_1\, ds_2} = p_1\frac{df}{ds_1} + p_2\frac{df}{ds_2}.$$

Der Winkel der Koordinatenlinien kann durch die Formeln:

$$\cos\theta = \frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}}$$

bestimmt werden und es wird in der Folge noch bequem sein die Bezeichnungen:

$$q_1 = \frac{p_1 + p_2\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad q_2 = \frac{p_2 + p_1\cos\theta}{\sin\theta},$$

$$g_1 = q_1 - \frac{d\theta}{ds_1}, \qquad g_2 = q_2 + \frac{d\theta}{ds_2}$$

zu benutzen.

Man betrachte ferner eine Flächenkurve, die keine Minimalkurve ist. Die Richtung einer Halbtangente dieser Flächenkurve kann entweder durch den Winkel ω, welchen diese Halbtangente mit der positiven Halbtangente der Kurve $u_2 =$ konst. bildet, festgelegt werden, oder es können zur Bestimmung derselben die Größen:

$$(12)\quad \lambda = \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin\theta} = \sqrt{a_{11}}\,\frac{du_1}{ds}, \qquad \mu = \frac{\sin\omega}{\sin\theta} = \sqrt{a_{22}}\,\frac{du_2}{ds}$$

benutzt werden, wobei s die Bogenlänge der betrachteten Kurve bezeichnet. Man bemerke erstens, daß diese Größen die Relation:

$$\lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu\cos\theta = 1$$

befriedigen, zweitens, daß in Folge der benutzten Bezeichnungen die Formel:

$$\frac{df}{ds} = \lambda\,\frac{df}{ds_1} + \mu\,\frac{df}{ds_2}$$

stattfindet und drittens, daß die geodätische Krümmung der betrachteten Kurve durch die Formel:

$$(13)\qquad g = \frac{d\omega}{ds} + g_1\lambda + g_2\mu$$

bestimmt werden kann.

Man betrachte nun auf der Fläche eine Kurvenschar:

$$(14)\qquad \varphi(u_1, u_2) = \text{konst.},$$

die keine Schar der Minimalkurven ist. Man bezeichne mit ω_φ, λ_φ, μ_φ die Größen ω, λ, μ für eine der beiden Halbtangenten dieser Kurvenschar (14). Wir haben alsdann die Formeln:

$$(15)\quad \lambda_\varphi = \frac{\sin(\theta - \omega_\varphi)}{\sin\theta} = \sqrt{a_{11}}\,\frac{du_1}{ds_\varphi}, \quad \mu_\varphi = \frac{\sin\omega_\varphi}{\sin\theta} = \sqrt{a_{22}}\,\frac{du_2}{ds_\varphi},$$

die Beziehung:

$$\lambda_\varphi^2 + \mu_\varphi^2 + 2\lambda_\varphi\mu_\varphi\cos\theta = 1$$

und es findet die Relation:

$$\frac{d\varphi}{ds_\varphi} = \lambda_\varphi\,\frac{d\varphi}{ds_1} + \mu_\varphi\,\frac{d\varphi}{ds_2} = 0$$

statt; wir kommen daher leicht auf die Formeln:

$$(16)\quad \begin{aligned} \lambda_\varphi &= -\frac{\sqrt{a_{11}}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}}{\varepsilon\sqrt{a_{11}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)^2 - 2a_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} + a_{22}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2}}, \\ \mu_\varphi &= \frac{\sqrt{a_{22}}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}}{\varepsilon\sqrt{a_{11}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)^2 - 2a_{12}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1} + a_{22}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2}} \end{aligned}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Da man nun auf Grund dieser Formeln und unter Benutzung der Beziehungen (15) den Winkel ω_φ durch die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ bestimmen kann, so kann auch die geodätische Krümmung g_φ der Schar (14) berechnet werden, denn wir haben nach (13) die Formel:

$$(17) \qquad g_\varphi = \frac{d\,\omega_\varphi}{d s_\varphi} + g_1 \lambda_\varphi + q_2 \mu_\varphi.$$

Es erhellt, daß im ersten Gliede dieser Formel partielle Differentialquotienten zweiter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ vorkommen und daß in den weiteren Gliedern diese Differentialquotienten zweiter Ordnung nicht vorhanden sind.

Man betrachte ferner die orthogonalen Trajektorien der Kurvenschar (14). Man nehme für diese orthogonalen Trajektorien $\omega = \omega_\varphi + \frac{\pi}{2}$ und man bezeichne die bezüglichen Größen λ, μ mit $\overline{}_\varphi$, $\bar{\mu}_\varphi$ und die Bogenlänge s mit n_φ. Man hat alsdann die Formeln:

$$\bar{\lambda}_\varphi = -\frac{\cos(\theta - \omega_\varphi)}{\sin\theta} = \sqrt{a_{11}}\,\frac{du_1}{dn_\varphi}, \qquad \bar{\mu}_\varphi = \frac{\cos\omega_\varphi}{\sin\theta} = \sqrt{a_{22}}\,\frac{du_2}{dn_\varphi}$$

und man schließt aus denselben leicht, daß

$$\bar{\lambda}_\varphi = -\frac{\lambda_\varphi \cos\theta + \mu_\varphi}{\sin\theta}, \qquad \bar{\mu}_\varphi = \frac{\mu_\varphi \cos\theta + \lambda_\varphi}{\sin\theta};$$

es folgen demnach auf Grund der Formeln (16) die Formeln:

$$\bar{\lambda}_\varphi = \frac{\sqrt{a_{11}}\left(a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} - a_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)}{\varepsilon\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\sqrt{a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2}},$$

$$\bar{\mu}_\varphi = \frac{\sqrt{a_{22}}\left(a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} - a_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)}{\varepsilon\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\sqrt{a_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + a_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2}}$$

und für die geodätische Krümmung $\bar{g}_\varphi$ der betrachteten orthogonalen Trajektorien die Formel:

$$(18) \qquad \bar{g}_\varphi = \frac{d\omega_\varphi}{d n_\varphi} + g_1 \bar{\lambda}_\varphi + q_2 \bar{\mu}_\varphi,$$

in welcher nur das erste Glied von den Differentialquotienten zweiter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ abhängig ist.

Wir werden in der Folge die beiden Operationen:

$$(19)\qquad \frac{df}{ds_\varphi}=\lambda_\varphi\frac{df}{ds_1}+\mu_\varphi\frac{df}{ds_2},\qquad \frac{df}{dn_\varphi}=\bar\lambda_\varphi\frac{df}{ds_1}+\bar\mu_\varphi\frac{df}{ds_2}$$

in Anwendung bringen und wir bemerken, daß analog der Relation (11) die Beziehung:

$$(20)\qquad \frac{d^2f}{dn_\varphi\,ds_\varphi}-\frac{d^2f}{ds_\varphi\,dn_\varphi}=g_\varphi\frac{df}{ds_\varphi}+\bar g_\varphi\frac{df}{dn_\varphi}$$

stattfindet.

§ 7.

Wir wollen als Ausgangspunkt für die Aufstellung der Differentialinvarianten und der Differentialparameter zwei bekannte Sätze benutzen, nämlich: 1. Das Gausssche Krümmungsmaß ist eine Differentialinvariante unserer Gruppe. 2. Die geodätische Krümmung der Schar (14) ist ein Differentialparameter unserer Gruppe. Wenn man noch dazu die Tatsache hinzufügt, daß, sobald man auf einer Invariante eine der Operationen (19) ausübt, dadurch wieder eine Invariante erhalten wird, so wird man zunächst in der Lage sein, alle Differentialparameter aufzustellen und sodann alle Differentialinvarianten zu gewinnen.

Es erhellt zunächst, daß

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dn_\varphi}(P=0,\ Q=1),\\[1ex] \dfrac{d^2\varphi}{dn_\varphi^2}(P=1,\ Q=2),\\[1ex] \dots\dots\dots\dots\\[1ex] \dfrac{d^m\varphi}{dn_\varphi^m}(P=m-1,\ Q=m)\end{cases}$$

Differentialparameter sind und die hinzugefügten Zahlen P, Q die Stellen zeigen, in welchen diese Invarianten auf der Tafel (8) notiert sind. Ferner ist

$$(22)\qquad \frac{dK}{ds_\varphi}(P=3,\ Q=1)$$

ein Differentialparameter mit der bezüglichen Stellenangabe. Endlich hat man noch die Differentialparameter:

$$(23)\begin{cases} g_\varphi, \quad \bar{g}_\varphi (P = 1,\ Q = 2), \\ \dfrac{d g_\varphi}{d s_\varphi}, \dfrac{d \bar{g}_\varphi}{d s_\varphi}, \dfrac{d \bar{g}_\varphi}{d n_\varphi} (P = 2,\ Q = 3), \\ \dfrac{d^2 g_\varphi}{d s^2_\varphi}, \dfrac{d^2 \bar{g}_\varphi}{d s^2_\varphi}, \dfrac{d^2 \bar{g}_\varphi}{d s_\varphi d n_\varphi}, \dfrac{d^2 \bar{g}_\varphi}{d n^2_\varphi} (P = 3,\ Q = 4), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^{m-2} g_\varphi}{d s^{m-2}_\varphi}, \dfrac{d^{m-2} \bar{g}_\varphi}{d s^{m-2}_\varphi}, \dfrac{d^{m-2} \bar{g}_\varphi}{d s^{m-3}_\varphi d n_\varphi}, \dots, \dfrac{d^{m-2} \bar{g}_\varphi}{d n^{m-2}_\varphi} (P = m - 1,\ Q = m) \end{cases}$$

und es stellen die Ausdrücke (21), (22) und (23) gerade so viel Invarianten dar, wie in den entsprechenden Zellen der Tafel angezeigt worden ist. Es entsteht nur noch die Frage, ob alle erhaltenen Invarianten untereinander und von denjenigen Invarianten unabhängig sind, die durch die Zahl $Q = 0$ charakterisiert sind, die also in der gegenwärtigen Abhandlung Differentialinvarianten genannt werden.[1])

Wäre es möglich zu beweisen, daß die Differentialparameter:

$$(24) \qquad \frac{d^2 \varphi}{d n^2_\varphi}, \ g, \ \bar{g}$$

in bezug auf die zweiten Ableitungen der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ voneinander unabhängig sind und daß bei $l > 2$ die Differentialparameter:

$$(25) \quad \frac{d^l \varphi}{d n^l_\varphi}, \quad \frac{d^{l-2} g_\varphi}{d s^{l-2}_\varphi}, \quad \frac{d^{l-2} \bar{g}_\varphi}{d s^{l-2}_\varphi}, \quad \frac{d^{l-2} \bar{g}_\varphi}{d s^{l-3}_\varphi d n_\varphi}, \dots, \frac{d^{l-2} \bar{g}_\varphi}{d n^{l-2}_\varphi}$$

1) In meiner Abhandlung in den Acta math. 16 habe ich durch Integration vollständiger Systeme die Differentialparameter ersten und zweiten Ranges, d. h. diejenigen, für welche gleichzeitig $P \leqq 1$, $Q \leqq 2$, aufgestellt. Die Differentialparameter dritten Ranges, d. h. diejenigen, für welche gleichzeitig $P = 2$, $Q = 3$, sind durch Integration vollständiger Systeme in der ersten der oben angeführten Abhandlungen des Herrn A. R. Forsyth gefunden worden, welcher dabei formentheoretische Bildungsgesetze zur Berechnung dieser und anderer Invarianten in Anwendung gebracht hat. Endlich sei noch bemerkt, daß A. R. Forsyth unter anderem auch die geometrische Bedeutung der Differentialparameter, für welche gleichzeitig $P \leqq 2$, $Q \leqq 3$ ist, bestimmt hat.

in bezug auf die Ableitungen l-ter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ voneinander unabhängig sind, so wäre die obenstehende Frage bejahend beantwortet. Wir können die Reihe (24) als Spezialfall der Reihe (25) für $l = 2$ betrachten, und den verlangten Beweis für die allgemeine Reihe bei $l \geqq 2$ durchführen. Aus den Formeln (17) und (18) ergeben sich durch mehrfache Ausführung der Operationen (19) die Ausdrücke:

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^{l-2} g_\varphi}{ds_\varphi^{l-2}} &= \frac{d^{l-1}\omega_\varphi}{ds_\varphi^{l-1}} + \Omega_1^{(l-1)}, \\ \frac{d^{l-2}\bar{g}_\varphi}{ds_\varphi^{l-2}} &= \frac{d^{l-1}\omega_\varphi}{ds_\varphi^{l-2}\,dn_\varphi} + \Omega_2^{(l-1)}, \\ \frac{d^{l-2}\bar{g}_\varphi}{ds_\varphi^{l-3}\,dn_\varphi} &= \frac{d^{l-1}\omega_\varphi}{ds_\varphi^{l-3}\,dn_\varphi^2} + \Omega_3^{(l-1)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{l-2}\bar{g}_\varphi}{dn_\varphi^{l-2}} &= \frac{d^{l-1}\omega_\varphi}{dn_\varphi^{l-1}} + \Omega_l^{(l-1)}, \end{aligned}\right.$$

wo die Größen $\Omega_r^{(l-1)}$ $(r = 1, 2, \ldots, l)$ von den Ableitungen l-ter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ unabhängig sind und wo die ersten rechter Hand stehenden Glieder lineare Funktionen dieser Ableitungen l-ter Ordnung sind. Diese letzteren Glieder sind dabei sicher in bezug auf die Ableitungen l-ter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ voneinander unabhängig, es sind also die Differentialparameter (26) bei jedem $l \geqq 2$ in bezug auf die Ableitungen l-ter Ordnung von $\varphi(u_1, u_2)$ voneinander unabhängig. Es ist also nur denkbar, daß $\frac{d^l\varphi}{dn_\varphi^l}$ von den Differentialparametern (26) in bezug auf die Ableitungen l-ter Ordnung von $\varphi(u_1, u_2)$ nicht unabhängig ist. Da nun $\frac{d^l\varphi}{dn_\varphi^l}$ jedenfalls eine lineare Funktion dieser Ableitungen l-ter Ordnung ist, so ist nur denkbar, daß eine Relation von der Form:

$$(27)\qquad \frac{d^l\varphi}{dn_\varphi^l} = \sum_0^{l-1}{}_r\, \alpha_r^{(l-1)} \frac{d^{l-1}\omega_\varphi}{ds_\varphi^{l-1-r}\,dn_\varphi^r} + \alpha_l^{(l-1)}$$

besteht, wo die Größen $\alpha_r^{(l-1)}$ $(r = 0, 1, \ldots, l)$ von den Ablietungen l-ter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ unabhängig sind. Man differenziere diese Relation (27) nach s_φ, so folgt:

$$\frac{d^{l+1}\varphi}{ds_\varphi dn_\varphi^l} = \sum_0^{l-1} {}_r \alpha_l^{(l-1)} \frac{d^l \omega_\varphi}{ds_\varphi^{l-r} dn_\varphi^r} + \alpha^{(l)}, \tag{28}$$

wo $\alpha^{(l)}$ lauter Glieder enthält, die von den Ableitungen $(l+1)$-ter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ unabhängig sind. Man bemerke nun, daß wir auf Grund der Beziehung (20) haben:

$$\frac{d^2\varphi}{ds_\varphi dn_\varphi} = -\bar{g}_\varphi \frac{d\varphi}{dn_\varphi}. \tag{29}$$

Wir versuchen zu beweisen, daß allgemein bei $l \geqq 1$

$$\frac{d^{l+1}\varphi}{ds_\varphi dn_\varphi^l} = -\frac{d\varphi}{dn_\varphi} \frac{d^l\omega_\varphi}{dn_\varphi^l} + \beta^{(l)} \tag{30}$$

ist, wo mit $\beta^{(l)}$ Glieder bezeichnet worden sind, die von den $(l+1)$-ten Ableitungen der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ unabhängig sind. Setzt man voraus, daß die Beziehung (30) für eine bestimmte Ordnung l richtig ist und differenziert man dieselbe nach n_φ, so folgt:

$$\frac{d^{l+2}\varphi}{dn_\varphi ds_\varphi dn_\varphi^l} = -\frac{d\varphi}{dn_\varphi} \frac{d^{l+1}\omega_\varphi}{dn_\varphi^{l+1}} + \beta_1^{(l+1)}, \tag{31}$$

wo $\beta_1^{(l+1)}$ Glieder bezeichnet, die $(l+2)$-ten Differentialquotienten von $\varphi(u_1, u_2)$ nicht enthalten. Da aber die Beziehung:

$$\frac{d^{l+2}\varphi}{dn_\varphi ds_\varphi dn_\varphi^l} - \frac{d^{l+2}\varphi}{ds_\varphi dn_\varphi^{l+1}} = g_\varphi \frac{d^{l+1}\varphi}{ds_\varphi dn_\varphi^l} + \bar{g}_\varphi \frac{d^{l+1}\varphi}{dn_\varphi^{l+1}}$$

stattfindet, so gelangt man auf Grund von (31) zur Relation:

$$\frac{d^{l+2}\varphi}{ds_\varphi dn_\varphi^{l+1}} = -\frac{d\varphi}{dn} \frac{d^{l+1}\omega_\varphi}{dn_\varphi^{l+1}} + \beta^{(l+1)},$$

wo mit $\beta^{(l+1)}$ Glieder bezeichnet worden sind, die keine $(l+2)$-ten Differentialquotienten der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ enthalten. Da aber die Beziehung (29) besteht, so ist die Gültigkeit der Relation (30) für jedes $l \geqq 1$ bewiesen. Demnach führt die Beziehung (28) auf den Schluß:

$$-\frac{d\varphi}{dn_\varphi} \frac{d^l\omega_\varphi}{dn_\varphi^l} = \sum_0^{l-1} {}_r \alpha_r^{(l-1)} \frac{d^l\omega_\varphi}{ds_\varphi^{l-r} dn_\varphi^r} + \bar{\alpha}^{(l)}, \tag{32}$$

wo mit $\bar{\alpha}^{(l)}$ ein Ausdruck bezeichnet worden ist, der von den Ableitungen $(l+1)$-ter Ordnung der Funktion $\varphi(u_1, u_2)$ unabhängig ist. Nun aber ist eine derartige Relation wie (32) unmöglich und wir sehen daher, daß auch eine Relation von der Form (27) nicht bestehen kann. Auf diese Weise haben wir bewiesen, daß alle Differentialparameter (21), (22) und (23) untereinander und von den Differentialinvarianten unabhängig sind.

Hiermit ist die Frage nach den Differentialparametern und deren geometrischer Interpretation gelöst. Dieselben folgen sämtlich aus den Resultanten des Systems $B^{(m)}$, während die Differentialparameter desjenigen Systems, welches Knoblauch aufgestellt hat, nicht sämtlich durch Resultantenbildung des Systems $B^{(m)}$ zu erhalten sind.

Die Aufstellung aller Differentialinvarianten ist nun eine unmittelbare Folge der durchgeführten Betrachtung über Differentialparameter. Wenn man nämlich in den Differentialparametern (21) und (23) $\varphi = K$ setzt, so erhält man lauter Differentialinvarianten, während diese Operation auf (22) ausgeführt einfach Null liefert. Man kommt auf diese Weise zu allen Differentialinvarianten bis zur m-ten Ordnung inklusive, d. h. zu allen Resultanten des Systems $G^{(m)}$. Wir erhalten nämlich die Tafel:

$$(33)\left\{\begin{array}{l}
K \quad (P=2,\ Q=0),\\[4pt]
\dfrac{dK}{dn_K} \quad (P=3,\ Q=0),\\[8pt]
\dfrac{d^2K}{dn_K^2},\ g_K,\ \bar{g}_K \quad (P=4,\ Q=0),\\[8pt]
\dfrac{d^3K}{dn_K^3},\ \dfrac{dg_K}{ds_K},\ \dfrac{d\bar{g}_K}{ds_K},\ \dfrac{d\bar{g}_K}{dn_K}\,(P=5,\ Q=0),\\[8pt]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\[4pt]
\dfrac{d^{m-2}K}{dn_K^{m-2}},\ \dfrac{d^{m-4}g_K}{ds_K^{m-4}},\ \dfrac{d^{m-4}\bar{g}_K}{ds_K^{m-4}},\ \dfrac{d^{m-4}\bar{g}_K}{ds_K^{m-5}dn_K},\ \dots,\ \dfrac{d^{m-4}\bar{g}_K}{dn_K^{m-4}}\,(P=m,\ Q=0)
\end{array}\right.$$

und wir brauchen nicht weiter darauf einzugehen, daß diese Differentialinvarianten in der Tat die Gesamtheit der Resultanten des Systems $G^{(m)}$ ausmachen.

Es mag hier hervorgehoben werden, daß das letztere System (33) mit demjenigen System von Differentialinvarianten zur Deckung kommt, welches bei Knoblauch auf Seite 263 angegeben ist, es sei aber auch bemerkt, daß Knoblauch auf die geometrische Bedeutung der Differentialinvarianten gar nicht eingeht.

§ 8.

Wir wollen uns noch dazu wenden, die Invarianten zu untersuchen, die außer von den a_{ik} und deren Differentialquotienten noch von den Ableitungen einer der Veränderlichen u_1, u_2 nach der anderen abhängig sind. Es seien dieselben hier Differentialparameter zweiter Gattung genannt und man bemerke, daß nach A. R. Forsyth[1]) alle diese Differentialparameter aus denjenigen Differentialparametern erhalten werden können, die wir in den früheren Paragraphen betrachtet haben. Anderseits bildet es aber keine Schwierigkeit, wenn man zur Bestimmung dieser Differentialparameter zweiter Gattung Betrachtungen aufstellen will, die denjenigen in den §§ 4—7 analog sind.

Aus den Gleichungen (1) folgt durch Differentiation die Gleichung:

$$\frac{du_2'}{du_1'} = \frac{\dfrac{\partial u_2'}{\partial u_1} + \dfrac{\partial u_2'}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{du_1}}{\dfrac{\partial u_1'}{\partial u_1} + \dfrac{\partial u_1'}{\partial u_2}\dfrac{du_2}{du_1}},$$

und durch weitere Differentiationen, bei welchen man auch u_2 als Funktion von u_1 und u_2' als Funktion von u_1' betrachtet, folgen weitere Gleichungen, die wir bis zu einer Ordnung m, der höchsten in denselben vorkommenden Differentialquotienten betrachten wollen. Die Anzahl dieser Gleichungen ist m und man bezeichne mit $M^{(m)}$ das System, welches aus diesen m Gleichungen und den früheren Gleichungen $G^{(m-1)}$ gebildet wird.

Man bezeichne die Gleichungen, welche dem Systeme $M^{(l)}$ angehören, dagegen in dem Systeme $M^{(l-1)}$ nicht enthalten sind, als Gleichungen des Ranges l. Die Anzahl der Gleichungen des l-ten Ranges ist gleich $3l+1$. Man bezeichne ferner mit μ_l die Gleichungen, welche sich aus diesen Gleichungen l-ten Ranges ergeben, wenn man aus denselben wie in den früheren Fällen, alle Ableitungen der u_1', u_2' nach den u_1, u_2 außer derjenigen erster Ordnung entfernt. Man bekommt auf diese Weise 4 Gleichungen μ_1 und $l-1$ Gleichungen μ_l bei $l>1$. Aus den 4 Gleichungen μ_1 können alle Ableitungen erster Ordnung der

---

1) Philosophical Transactions, Ser. A. Vol. 201, S. 333.

u_1', u_2' noch den u_1, u_2 bestimmt werden und wenn man dieselben in die anderen Gleichungen μ_l einsetzt, so ergibt sich eine Anzahl von Resultanten, welche auf Invarianten führen. Wenn man nun alle Differentialparameter zweiter Gattung, die aus Resultanten des Systems $M^{(l)}$ entstehen, nicht aber aus Resultanten des Systems $M^{(l-1)}$ entstehen können, und die von den Differentialinvarianten unabhängig sind, Differentialparameter zweiter Gattung l-ten Ranges nennt, so sieht man leicht, daß kein derartiger Differentialparameter 1-sten Ranges, zwei Differentialparameter 4ten Ranges und ein Differentialparameter jedes anderen Ranges existiert. Es soll noch die Frage beantwortet werden, welche die höchsten Ordnungen der Ableitungen der a_{ik} und der Differentialquotienten von u_2 nach u_1 sind, die in diesen Differentialparametern vorkommen müssen. Auf dieselbe Weise, wie im § 5, läßt sich leicht einsehen, daß erstens jeder Differentialparameter l-ten Ranges Differentialquotienten $(l-1)$-ter Ordnung der a_{ik} enthalten muß, daß zweitens jeder Differentialparameter l-ten Ranges bei $l \neq 4$ die Ableitung l-ter Ordnung von u_2 nach u_1 enthalten muß, und daß drittens von den beiden Differentialparametern 4-ten Ranges der eine die Ableitung 4-ter Ordnung von u_2 nach u_1 notwendig enthält, der andere aber auf einen Differentialparameter zurückgeführt werden kann, in welchem nur die Ableitung erster Ordnung von u_2 nach u_1 auftritt.

Diese Erörterungen genügen uns, um alle Differentialparameter aufzustellen. Wenn man nämlich voraussetzt, daß die Kurve $u_2 = \Phi(u_1)$ keine Minimalkurve ist, die Bogenlänge derselben mit s und die geodätische Krümmung mit g bezeichnet, so besteht das Gesamtsystem der betrachteten Differentialparameter erstens aus dem Differentialparameter:

$$\frac{dK}{ds},$$

zweitens aus den Differentialparametern:

$$g, \frac{dg}{ds}, \ldots, \frac{d^{m-2}g}{ds^{m-2}}.$$

Hiermit ist die Frage nach den Differentialparametern zweiter Gattung erledigt.

Druckfertig erklärt 23. IV. 1907.]