2,50

Heft 22: **Der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf statisch unbestimmte Bogen- und Rahmentragwerke.** Von Dr.-Ing. **Rueb,** Städt. Ingenieur.
Mit 6 Textabb. u. 3 Tafeln. 1914. geh. 2,60 M.

Heft 23: **Die Berechnung der freiaufliegenden, rechteckigen Platten.** Von Dr.-Ing. **M. Leitz.**
Mit 26 Textabb. u. 2 Tafeln. 1914. geh. 3,60 M.

Heft 24: **Der doppelt gekrümmte Träger und das schiefe Gewölbe im Eisenbetonbau.** Ein Beitrag zu ihrer Berechnung. Von Dr.-Ing. **H. Marcus.**
Mit 23 Textabb. 1914. geh. 2,80 M.

Heft 25: **Die Rammwirkung im Erdreich.** Versuche auf neuer Grundlage. Von Dr.-Ing. **K. Zimmermann,** Königl. Regierungsbaumeister.
Mit 118 Textabbildungen. 1915. geh. 6,— M.

Heft. 26. Neuere Methoden zur Statik der Rahmentragwerke u. der elast. Bogenträger. Von Ing. A. Strassner. Mit 157 Abb.

FORSCHERARBEITEN AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

DIE BERECHNUNG DER FREI AUFLIEGENDEN, RECHTECKIGEN PLATTEN

HEFT XXIII

PREIS 3,60 MARK

VON

Dr.-Ing. HEINRICH LEITZ

Mit 26 Textabbildungen und 2 Tafeln

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90

Die Berechnung
der frei aufliegenden, rechteckigen
Platten

Von

Dr.-Ing. HEINRICH LEITZ

Mit 26 Textabbildungen und 2 Tafeln

BERLIN 1914
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.

EINLEITUNG.

Es sind in der technischen Literatur in den letzten Jahren zahlreiche Versuche gemacht worden, die Werte der Momente der frei aufliegenden rechteckigen Platte zu bestimmen, teils auf Grund der Kirchhoffschen Plattentheorie, teils auf Grund mehr oder weniger wahrscheinlicher Annahmen. In dieser Arbeit soll die exakte Lösung des Problems, welche Navier schon 1820 vor Aufstellung der Grundgleichungen der Elastizitätstheorie fand, wieder in Erinnerung gebracht werden und ihre Anwendbarkeit für alle technisch wichtigen Belastungen gezeigt werden. Es zeigt sich, daß die Methode genauer, leistungsfähiger und weniger zeitraubend ist als die sonst angewendeten. Die Ergebnisse sind im Abschnitt D ausführlich diskutiert und mit anderen verglichen.

Karlsruhe, im August 1913.

Dr.-Ing. **H. Leitz.**

INHALTSVERZEICHNIS.

INHALTSVERZEICHNIS.

Sammlung der Bezeichnungen.

x, y	Koordinatensystem in der horizontalen Ebene, Ursprung in der Ecke der rechteckigen Platte liegend, die X-Achse längs des kurzen Randes, die Y-Achse längs des längeren Randes (Abb. 1).
z	Durchbiegung der Mittelebene der Platte; positiv nach oben.
ζ	Abstand eines Punktes innerhalb des Plattenvolumens von der Mittelebene; positiv nach oben.
$\mathfrak{z}$	Durchbiegung der Platte für eine sinusförmig verteilte Last.
$\mathfrak{y}$	Koordinate parallel der langen Randseite, vom Angriffspunkt der Einzellast aus gerechnet.
a	kurze Spannweite der rechteckigen Platte.
b	längere Spannweite der rechteckigen Platte.
β	Seitenverhältnis $= \frac{b}{a}$.
a'	Koordinate des Angriffspunktes einer Einzellast parallel der kurzen Spannweite.
b'	dasselbe parallel der längeren Spannweite. Beide auch als Koordinaten der Ecken eines in dem Plattenrechteck liegenden Belastungsrechtecks benutzt.
$\frac{1}{\varepsilon}$	ohne Index; Verhältnis der Quadratseite eines innerhalb des Plattenrechtecks befindlichen Belastungsquadrats zur kurzen Spannweite.
Θ	Winkel in der xy-Ebene zwischen der X-Achse und der Normalenrichtung eines Schnittes.
n	Normalenrichtung eines Plattenquerschnittes.
s	Tangentenrichtung desselben Querschnittes, zur n-Richtung liegend wie y zu x.
h	Höhe der Platte.

i	deren Trägheitsmoment für eine Längeneinheit der Schnittkurve $= \frac{h^3}{12}$.
w	Widerstandsmoment wie eben $= \frac{h^2}{6}$.
m	ohne Index; alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞.
n	alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞.
μ	alle ungeraden Zahlen von 1 bis ∞; kommt m und μ in derselben Gleichung vor, so ist $\mu = 2m - 1$ und $m = \frac{\mu + 1}{2}$.
ν	wie vorstehend, $\nu = 2n - 1$ und $n = \frac{\nu + 1}{2}$.
E	der Youngsche Elastizitätsmodul.
ϱ	Verhältnis der Querdehnung zur Längsdehnung (Poissonsches Verhältnis oft mit $\frac{1}{m}$ bezeichnet).
G	Schubmodul $= \frac{E}{2(1+\varrho)}$.
σ_x	Normalspannung in der Schnittfläche mit der Normalen parallel x; positiv wie die X-Achse.
$\sigma_n, \sigma_y, \sigma_z$	entsprechend wie vorstehend.
τ_{xy}	Schubspannung in der Ebene mit der Normalen x parallel der positiven Y-Achse, oder umgekehrt.
$\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{ns}$	sinngemäß wie vorstehend.
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \varepsilon_n$	Dehnungen in der Richtung der Indizes.
$\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \varepsilon_{ns}$	Schiebungen der Ebene mit der Normalenrichtung des ersten Index, nach der positiven Richtung des zweiten.
(σ_x)	Ersatzspannung $= E\varepsilon_x$, d. h. diejenige Achsialspannung, die einen Stab um ε_x dehnen würde. Desgleichen für (σ_y), (σ_z).
$\sigma_{\mathrm{I}}, \sigma_{\mathrm{II}}$	Hauptspannungen.

Θ_{I}, Θ_{II}	Winkel der Normalen der von den Hauptspannungen beanspruchten Querschnitte mit der X-Achse.
$(\sigma_{I}), (\sigma_{II})$	Ersatzhauptspannungen.
$\bar{\sigma}$	schiefe Hauptspannung in der Höhe der neutralen Fläche und in einer unter 45° gegen die Mittelebene geneigten Ebene.
$\overline{(\sigma)}$	schiefe Ersatzhauptspannung wie vorgenannt.
M_x, M_y	Verschiebungen eines Plattenpunktes parallel x und y.
m_x, m_y	Spannungsmomente der σ_x bezw. σ_y für eine Längeneinheit Breite des Schnittes mit der Normalen x bezw. y positiv, wenn oben Druck hervorbringend, und ausgeübt von dem im Sinne der positiven X- oder Y-Achse vorwärts liegenden Plattenteil auf den rückwärtigen.
t_x	Spannungsmoment der Schubspannungen τ_{xy} für eine Längeneinheit des Schnittes mit der Normalen x positiv, wenn eine negative Schubspannung oben hervorbringend, und ausgeübt von dem im Sinne der X-Achse vorwärts liegenden Plattenteil auf den rückwärtigen.
m_{00}	Summe zweier Schnittmomente m_x und m_y.
(m_x)	Ersatzmoment $= Ei \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, d. h. dasjenige Moment eines einfachen Balkens, das ihm dieselbe Biegung verleihen würde, als in der X-Richtung vorhanden ist. Desgleichen (m_y).

(t_x)	Ersatztorsionsmoment $= Ei \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$.
(m_{00})	$Ei\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = (m_x) + (m_y)$.
Δ^2	$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.
m_{I}, m_{II}	Hauptspannungsmomente.
Θ_{I}, Θ_{II}	Richtungen der Schnittnormalen der Hauptspannungsmomente.
$(m_{I}), (m_{II})$	Hauptersatzmomente.
q_n	Querkraft im Schnitt mit der Normalen n; positiv nach oben.
a_n	Auflagerdruck längs eines Randes mit der Normalen n; positiv nach oben.
$\mathfrak{p}$	Last für eine Flächeneinheit der Platte, gleichförmig verteilt; positiv nach unten.
p	Belastung eines Randträgers für eine Längeneinheit; positiv nach unten.
Δ^4	Abkürzung für $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \Delta^2 \Delta^2 z$.
M	Biegungsmoment eines Randträgers.
A^*	in jeder Ecke einer rechteckigen Platte auftretende Einzelkraft; positiv nach oben.
e	Basis der natürlichen Logarithmen.

Die inneren Kräfte sind gekennzeichnet durch die Normale der durch sie beanspruchten Schnittfläche (m_x, σ_x, q_x, a_x usw.) und ersetzen die Einwirkung des im Sinne der positiven Normalen vorwärts liegenden Teils auf den rückwärtigen.

Durch Klammern eingeschlossene Buchstaben bedeuten Ersatzgrößen [(m_x), (t_x), (σ_x) usw.].

Römische Ziffern kennzeichnen Hauptspannungen, Momente usw. und deren Richtungen [(σ_{I}), m_{II}, Θ_{I}].

Ein Stern bezeichnet Größen in der Ecke einer Platte (t_x^*, A^*).

Eine angehängte Null kennzeichnet Größen in der Mitte der Platte [z_0, m_{x_0}, $(t_x)_0$].

Alle Größen, die auf die Längeneinheit des Schnittes bezogen sind, haben kleine lateinische Buchstaben (m_x, q_x, p), solche, die auf eine Flächeneinheit bezogen sind, deutsche oder griechische ($\mathfrak{p}$, σ, τ).

A. Theorie der Biegung ebener Platten.

1. Allgemeines und Annahmen.

Die annähernd ebene Platte werde nur durch Kräfte senkrecht zu ihrer Ebene belastet und nur durch Momente, deren Drehachse in der XY-Ebene liegen.

Das Material folge dem verallgemeinerten Hookeschen Gesetz nach den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \varrho\,(\sigma_y + \sigma_z)\right] \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \quad \text{usw.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Die Deformation sei so klein, daß jedes Linienelement ds einer Kurve der unverzerrten Plattenmittelebene gleich dem der durchgebogenen gesetzt werden kann.

Es soll ferner eine zur ungebogenen Mittelebene der Platte senkrechte Gerade während der Deformation gerade und senkrecht zur Mittelebene bleiben.

Die Normalspannungen σ_z seien klein und vernachlässigbar.

Gesucht sei die größte Dehnung irgend eines Linienelements des Plattenkörpers, die unter dem Betrage bleiben soll, der für einen in seiner Längsrichtung beanspruchten Stab bei gleichem Sicherheitsgrad als obere Grenze erachtet wird. Aus praktischen Gründen wird aus der Maximaldehnung durch Multiplikation mit E eine ideelle Spannung, die Ersatzspannung, gebildet:

$$(\sigma) = E\varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

die in der Platte nicht vorhanden ist, die aber diejenige Spannung darstellt, die in einem Stab bei einfacher Zug- oder Druckbeanspruchung die Dehnung ε hervorbringen würde. (σ) soll über die bei ebenen Trägern üblichen Grenzen nicht hinausgehen.

2. Deformationsgrößen der Platte.

Die Mittelebene der Platte biegt sich zu einer schwach gekrümmten Fläche durch, deren Tangente in der X-Richtung die Neigung $\frac{\partial z}{\partial x}$, in der Y-Richtung $\frac{\partial z}{\partial y}$ hat.

Die Neigung in beliebiger Richtung n ist

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \Theta + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \Theta, \quad \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

in der Richtung s rechtwinklig zu n:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{\partial z}{\partial x} \sin \Theta + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \Theta,$$

wo Θ der Winkel zwischen n und x ist.

Die Verschiebungen eines Punktes im Abstand ζ von der Mittelfläche sind, den gemachten Voraussetzungen zufolge,

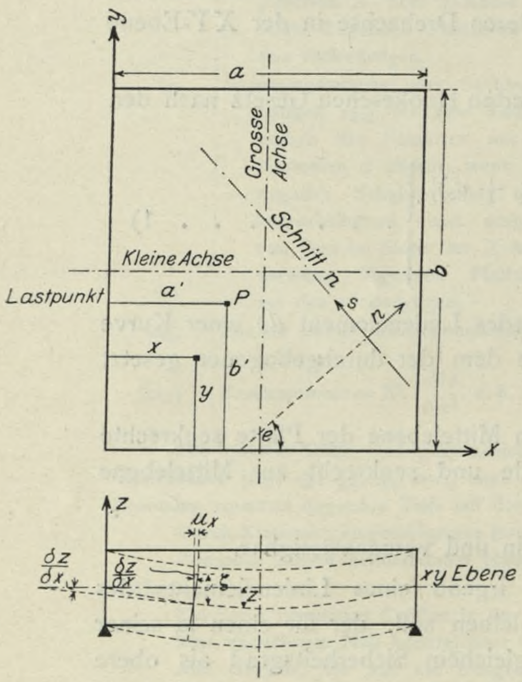


Abb. 1.

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -\frac{\partial z}{\partial x} \zeta \\ u_y &= -\frac{\partial z}{\partial y} \zeta \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 4)$$

Durch Differenzieren ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \zeta \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \zeta \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \zeta \end{aligned}\right\} \quad 5)$$

In Analogie mit und mit derselben Berechtigung wie in der Balkentheorie betrachten wir die Größe $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ als die Krümmung eines X-Streifens, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ als die Krümmung eines Y-Streifens und bezeichnen die Momente $Ei \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $Ei \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, die bei einem Balken die Krümmungen der X- bezw. Y-Streifen der Platte hervorbringen würden, als Ersatzmomente; diese Momente sind nicht die Spannungsmomente, sondern ausschließlich von den Dehnungen hergeleitet und zur Berechnung der Ersatzspannungen (σ) bestimmt. Es ist

$$\left.\begin{aligned} (m_x) &= Ei \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \\ (m_y) &= Ei \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 6)$$

und um einfache Gleichungen zu erhalten, bezeichnen wir als Ersatztorsionsmoment die Größe

$$(t_x) = Ei \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6a)$$

3. Zusammenhang zwischen Deformation und inneren Kräften.

Aus den Gl. 1) u. 5) erhalten wir unter Vernachlässigung von σ_z

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\zeta = \frac{1}{E}(\sigma_x - \varrho\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= -\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\zeta = +\frac{1}{E}(\sigma_y - \varrho\sigma_x) \\ \varepsilon_{xy} &= -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Hieraus ergibt sich unter Ersatz von G durch $\frac{E}{2(1+\varrho)}$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varrho\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\zeta \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varrho\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\zeta \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{1+\varrho}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Teilen wir die Platte durch einen Schnitt nach der Linie s mit der Normalen n, so übt der auf der positiven Seite liegende Teil auf den anderen durch seine Spannungen σ_n, τ_{ns} ein Biegungsmoment um die Achse s senkrecht zu n und ein Torsionsmoment um die Achse n aus. Es ist

$$\left.\begin{aligned} m_n &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_n \zeta \, d\zeta \\ t_n &= -\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{ns} \zeta \, d\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9)$$

wobei m als positiv angesehen wird, wenn es oben Druck hervorbringt, und t, wenn es auf die beanspruchte Fläche gesehen, gegen den Uhrzeiger dreht und also negative Schubspannungen hervorbringt. Die Gl. 8) u. 9) ergeben nach ausgeführter Integration und mit der Bezeichnung $\frac{h^3}{12} = i =$ Trägheitsmoment für eine Längeneinheit der Schnittkurve:

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{Ei}{1-\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \varrho\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{(1-\varrho^2)}[(m_x) + \varrho\,(m_y)] \\ m_y &= \frac{Ei}{1-\varrho^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \varrho\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{(1-\varrho^2)}[(m_y) + \varrho\,(m_x)] \\ t_x &= \frac{Ei}{1+\varrho}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1+\varrho)}(t_x) \\ t_y &= -t_x \end{aligned}\right\} . \quad 10)$$

und es ist

$$\left.\begin{array}{lll}\sigma_x = -\dfrac{m_x}{i}\zeta, & \sigma_y = -\dfrac{m_y}{i}\zeta, & \tau_{xy} = -\dfrac{t_x}{i}\zeta \\ (\sigma_x) = -\dfrac{(m_x)}{i}\zeta, & (\sigma_y) = -\dfrac{(m_y)}{i}\zeta & \end{array}\right\} \qquad 10a)$$

4. Transformationsgleichungen und Hauptmomente.

Differenziert man Gl. 3), so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial n^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\Theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\Theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\sin 2\Theta \\ \frac{\partial^2 z}{\partial n\,\partial s} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\sin 2\Theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\cos 2\Theta\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 11^{*})$$

Multipliziert man die Gleichungen mit Ei, so werden aus den Differentialquotienten Ersatzmomente; das Ersatzmoment (m_n) für einen Schnitt mit der Normalen n, wo der Winkel zwischen n und x gleich Θ ist,

und

$$\left.\begin{aligned}(m_n) &= (m_x)\cos^2\Theta + (m_y)\sin^2\Theta + (t_x)\sin 2\Theta \\ (t_n) &= \frac{(m_y) - (m_x)}{2}\sin 2\Theta + (t_x)\cos 2\Theta\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad 12)$$

In Analogie zu den bekannten Gleichungen über Hauptspannungen schließen wir hieraus, daß es zwei Schnittrichtungen mit den Normalenrichtungen Θ_{I}, Θ_{II}, berechnet aus

$$\operatorname{tg} 2\Theta = \frac{2\,(t_x)}{(m_x) - (m_y)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 13)$$

gibt, für welche das Ersatztorsionsmoment Null wird, und die Ersatzmomente die ausgezeichneten Werte

$$\left.\begin{aligned}(m_{\mathrm{I}}) &= \frac{(m_x) + (m_y)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\,(t_x)^2 + [(m_x) - (m_y)]^2} \\ (m_{\mathrm{II}}) &= \frac{(m_x) + (m_y)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{4\,(t_x)^2 + [(m_x) - (m_y)]^2}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 14)$$

genannt Hauptersatzmomente, erreichen.

Dieselben Gleichungen gelten für die Spannungsmomente. Die ausgezeichneten Richtungen sind für beide die gleichen.

5. Die Querkraft.

Teilen wir die Platte durch einen Schnitt mit der Normalen n, so haben wir die Einwirkung des im Sinne $+n$ abgetrennten Teiles außer durch die schon besprochenen Momente auch durch der Z-Achse parallele Kräfte zu ersetzen, deren Wert, bezogen auf die Längeneinheit des Schnittes n, als seine Querkraft in dem betreffenden Punkt q_n bezeichnet werde. Das Gleichgewicht der Kräfte an einem kleinen rechtwinkligen

*) Die beiden Größen wurden von Grashoff als Beugung und Drall der Mittelfläche bezeichnet (Theorie der Elastizität und Festigkeit, S. 352).

Dreieck mit den Seiten dx, dy, beansprucht durch q_y und q_x, und der Hypotenuse ds, beansprucht durch q_n ergiebt

$$q_n = q_x \cos \Theta + q_y \sin \Theta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16)$$

Demnach wird die Querkraft ein Maximum für die Richtung

$$\operatorname{tg} \Theta_0 = \frac{q_y}{q_x} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 17)$$

mit der Größe

$$q_0 = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}.$$

Die Querkraft läßt sich also graphisch darstellen als Vektor q von der in Gl. 17) gegebenen Richtung, dessen Projektion auf eine Schnittnormale die Querkraft im Schnitt ergibt. Die Deformation der Platte, die den Querkraftschubspannungen entspricht, ist in unserer Annahme nicht enthalten; sie besteht in einer Krümmung und Schiefstellung der materiellen Querschnittsgeraden, die mit demselben Recht und unter denselben Umständen wie in der gewöhnlichen Balkentheorie vernachlässigt wird.

6. Gleichgewichtsbedingungen.

An einem kleinen Rechteck mit den Seiten dx und dy treten folgende Schnittkräfte auf: $-q_x$, $q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}$ $-q_y$, $q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}$, und die Momente: $-m_x$, $+m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x}$ und $-m_y$, $+m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y}$; ferner $-t_x$, $t_x + \frac{\partial t_x}{\partial x}$ und $-t_y$, $t_y + \frac{\partial t_y}{\partial y}$; das Rechteck sei durch die Belastung $\mathfrak{p}$ für eine Flächeneinheit belastet, positiv in der Richtung nach unten. Die Gleichgewichtsbedingungen liefern dann die Kräftegleichung

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \mathfrak{p} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 19)$$

Die Momentengleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial x} - \frac{\partial t_y}{\partial y} + q_x = 0 \\ \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial t_x}{\partial x} + q_y = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 20)$$

Diese Gleichungen gelten unabhängig von dem Deformationsgesetz des Stoffes, also auch für starre Körper. Ihre Integration über die ganze Platte ergibt die Gleichgewichtsbedingungen, denen die äußeren Kräfte zu genügen haben.

7. Randbedingungen.

In den Querschnitten der Platte längs einer Randkurve sollte die Querkraft gleich der äußeren zur Z-Achse parallel vorausgesetzten Kraft werden, das Biegungsmoment gleich dem äußeren Kraftmoment um die Randtangente und das Torsionsmoment gleich dem äußeren Kraftmoment um die Randnormale.

Das Problem enthält dann eine Randbedingung zuviel und ist nicht allgemein lösbar.[1])

Man macht daher folgende Annahme: Das längs eines Randes mit der Normalen n auftretende Torsionsmoment t_n, dessen Resultante für ein Linienelement ds die Größe $t_n\,ds$ hat, ist statisch gleichwertig mit den Kräften $-t_n$ am Anfang und $+t_n$ am Ende des Linienelements. Vollzieht man diese Zerlegung längs eines Randstückes s, so erhält man auf der oberen Seite die Kräfte

$$-t_n', \quad -\left(t_n' + \frac{\partial t_n}{\partial s}\,ds\right) \text{ usw.}, \quad \ldots -\left(t_n'' - \frac{\partial t_n}{\partial s}\,ds\right), \quad -t_n'',$$

auf der unteren Seite

$$+t_n', \quad +\left(t_n' + \frac{\partial t_n}{\partial s}\,ds\right) \quad \ldots + \ldots, \quad -\left(t_n'' - \frac{\partial t_n}{\partial s}\,ds\right) + t_n''.$$

Es heben sich die t_n heraus, und es bleibt am Anfang eine Einzelkraft t_n', am Ende $-t_n''$ übrig, während die Strecke s mit der verteilten Last $-\frac{\partial t_n}{\partial s}$ belastet erscheint, alle Größen positiv nach oben gerechnet.

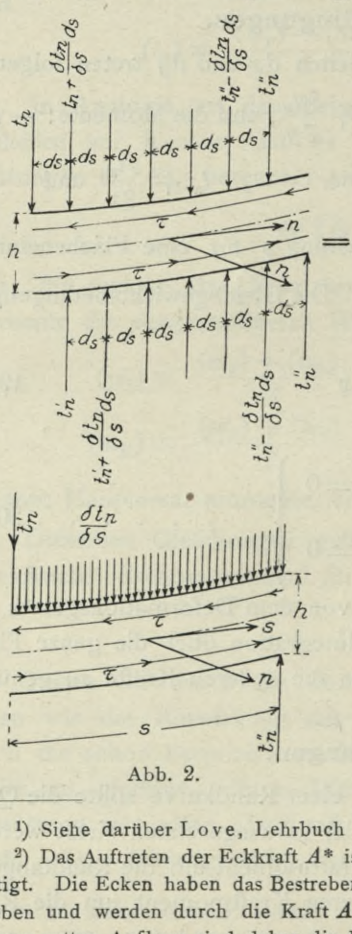


Abb. 2.

Daraus ergibt sich, daß an einer Ecke des Randes, an der im Sinne von x nach y folgend die Schnitte n' und n'' zusammenstoßen, eine Einzelkraft auftritt von der Größe

$$+t_n' - t_n'' = A^{*}\text{[2])} \quad . \quad . \quad 21)$$

Wir haben also am Rande n, wenn wir äußere Kräfte mit deutschen Buchstaben bezeichnen.

$$\left.\begin{aligned} &1. \quad \mathfrak{m}_n = m_n \\ &2. \quad \mathfrak{q}_n - \frac{\partial \mathfrak{t}_n}{\partial s} = q_n - \frac{\partial t_n}{\partial s} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 22)$$

insbesondere bei gestütztem Rande ist die Auflagerkraft

$$a_n = q_n - \frac{\partial t_n}{\partial s}, \quad . \quad . \quad . \quad 22\text{a})$$

d. h. die Querkraft wird um den Betrag $-\frac{\partial t_n}{\partial s}$ vermehrt.

---

[1]) Siehe darüber Love, Lehrbuch der Elastizität, übersetzt von Timpe 1907, S. 526 u. f.

[2]) Das Auftreten der Eckkraft A^* ist im Falle rechteckiger Platten durch die Erfahrung bestätigt. Die Ecken haben das Bestreben, sich unter dem Einfluß der Belastung in die Höhe zu heben und werden durch die Kraft A^* auf die Unterlage heruntergedrückt. Zur durchgängigen satten Auflage sind daher die Kräfte A^* notwendig.

8. Aufstellung der Differentialgleichung.

Setzen wir die Momente nach Gl. 10) in die Gleichgewichtsgleichung 20) ein, so ergibt sich nach einiger Umrechnung und unter Bezeichnung von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ mit $\Delta^2 z$ für die Querkraft

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -\frac{Ei}{1-\varrho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \Delta^2 z \\ q_y &= -\frac{Ei}{1-\varrho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \Delta^2 z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 23)$$

und dies in die Kräftegleichung 19) eingesetzt

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{Ei}{1-\varrho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta^2 z + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta^2 z\right) - \mathfrak{p} = 0 \\ &-\frac{Ei}{1-\varrho^2}\Delta^2 \Delta^2 z - \mathfrak{p} = 0 \\ &\Delta^4 z = -\frac{\mathfrak{p}}{Ei}(1-\varrho^2) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ 24)$$

wo $\Delta^4 z$ den Ausdruck $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$ bezeichnet.

Diese Gleichung ist, abgesehen von dem Faktor $1 - \varrho^2$, analog der Differentialgleichung des Balkens $\frac{d^4 z}{dx^4} = -\frac{p}{EJ}$.

Von Bedeutung ist noch für manche Fragen die Summe zweier zusammengehörenden Momente m_x und m_y, die mit m_{00} bezeichnet sei.

Es ist

$$m_{00} = m_x + m_y = \frac{Ei}{1-\varrho^2}\,(1+\varrho)\,\Delta^2 z = \frac{Ei}{1-\varrho}\,\Delta^2 z \quad .\ 25)$$

Die Größe $\Delta^2 z$ ist für jede Wahl der Richtungen x und y dieselbe Größe als Summe der Krümmungen $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Demnach ist in jedem Punkt die Summe der Biegungsmomente zweier aufeinander senkrechten Schnitte unabhängig von der Wahl der Schnittrichtungen. Ebenso ist die Summe der Ersatzmomente (m_x), (m_y), bezeichnet mit (m_{00}), konstant, wie aus

$$(m_{00}) = Ei\Delta^2 z = (1-\varrho)\, m_{00} \quad \ldots\ldots\ 26)$$

folgt.

Mit Rücksicht auf Gl. 23) drückt sich dann q aus durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} q_x &= -\frac{1}{1-\varrho^2} \cdot \frac{\partial\,(m_{00})}{\partial x} \\ q_y &= -\frac{1}{1-\varrho^2} \cdot \frac{\partial\,(m_{00})}{\partial y} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ 27)$$

d. h., trägt man (m_{00}) als Ordinate über der Platte auf, so ist die Neigung der so entstehenden Fläche nach einer Richtung n gleich $(1 - \varrho^2)$ mal der Querkraft des Schnittes mit der Normalen n, abgesehen vom Vorzeichen, und die Höhenlinien dieser Fläche auf die Platte projiziert, geben die Richtungen an, in denen die Querkraft ein Maximum ist, während die Linien stärksten Gefälles querkraftfreie Schnittflächen angeben.

9. Die Verteilung der Querkraft über den Querschnitt.

Wir bestimmen analog wie beim Balken aus den Gleichgewichtsgleichungen des Elements die Schubspannung im Querschnitt. Ein kleines Parallelflach mit den Seiten dx, dy, $d\zeta$ erleidet auf seinen Seitenflächen die Normalspannungen σ_x, σ_y und die Schubspannungen τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}; die Gleichgewichtsbedingungen nach der X- und Y-Achse ergeben

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 28)$$

Ersetzt man hierin die Spannungen

$$\sigma_x = -\frac{m_x}{i}\zeta$$

$$\sigma_y = -\frac{m_y}{i}\zeta$$

$$\tau_{xy} = -\frac{t_x}{i}\zeta,$$

so ist unter Benutzung von Gl. 20) und der Beziehung $t_x = -t_y$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \left(\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y}\right)\frac{\zeta}{i} = -q_y \cdot \frac{\zeta}{i}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \left(\frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x}\right)\frac{\zeta}{i} = -q_x \cdot \frac{\zeta}{i}.$$

Die Integration ergibt unter Berücksichtigung der Randbedingungen $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ für $\zeta = \pm \frac{h}{2}$ für

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xz} = \frac{q_x}{2i}\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2\right) \\ \tau_{yz} = \frac{q_y}{2i}\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 29)$$

und für die Querschnittrichtung, die die größte Querkraft enthält,

$$\tau_{oz} = \frac{q}{2i}\left(\frac{h^2}{4} - \zeta^2\right) \quad \ldots\ldots \quad 29a)$$

Die Querkraft verteilt sich also wie bei einem Balken rechteckigen Querschnitts.

10. Größtwerte der Spannungen und Dehnungen.

Die Spannungen, die den Momenten proportional sind, erreichen ihre Maxima für $\zeta = \pm \frac{h}{2}$, d. h. auf der Ober- und Unterseite der Platte. Setzt man $\frac{i}{\frac{h}{2}} = w$, d. h. = Widerstandsmoment der Platte für eine Längeneinheit der Schnittbreite $= \frac{h^2}{6}$, so werden die Gl. 10a) für eine beliebige Richtung n angeschrieben

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= -\frac{m_n}{w}, \quad \tau_{ns} = -\frac{t_n}{w} \\ \text{und} \qquad & \\ (\sigma_n) &= -\frac{(m_n)}{w} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 30)$$

Die größten Werte der Normalspannungen entstehen in Querschnitten, die durch Hauptmomente beansprucht werden.

In der Höhe der neutralen Fläche und dem Querschnitt größter Querkraft erreicht die Schubspannung ein Maximum, während die Normalspannung dort Null ist. Dreht man diesen Schnitt um seine horizontale Achse um $\pm 45°$, so erhält man, analog wie beim Balken, die Flächen, die durch die Hauptspannungen beansprucht werden. Deren Größe ist gleich der Schubspannung, nämlich

$$\overline{\sigma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{q_{\max}}{h} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 31)$$

und ist bei positivem q als Zugspannung unter $+45°$ nach aufwärts und als Druckspannung unter $-45°$ nach abwärts gerichtet.

Der Schubspannung entspricht eine Schiebung von

$$\varepsilon_{nz} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{nz} = \frac{3}{2\,G} \cdot \frac{q_{\max}}{h}, \quad \ldots\ldots \quad 32)$$

wo n die Normale des Schnittes größter Querkraft ist. Wird ein Würfel längs zweier Seitenpaare derart deformiert, so erleiden die zugehörigen Diagonalrichtungen positive und negative Dehnungen im Betrage von

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{nz} = \frac{3}{4\,G} \cdot \frac{q_{\max}}{h},$$

die dieselbe Richtung und Vorzeichen haben wie die obigen $\overline{\sigma}$. Die zugehörige Ersatzspannung ist

$$\overline{(\sigma)} = E\overline{\varepsilon} = \frac{3\,E}{4\,G} \cdot \frac{q_{\max}}{h} = \frac{3}{2}(1+\varrho)\,\frac{q_{\max}}{h} \quad \ldots \quad 33)$$

für deren Richtung und Vorzeichen dasselbe gilt wie von $\overline{\sigma}$.

Eine dritte wichtige Ersatzspannung erhalten wir in der Z-Richtung. Es ist

$$\varepsilon_z = -\frac{\varrho}{E}(\sigma_x + \sigma_y),$$

wobei σ_z gemäß den Annahmen vernachlässigt ist. Setzt man dies nach Gl. 10a) ein, so ergibt sich für die Ersatzspannung an der Oberfläche der Platte

$$(\sigma_z) = \varrho \cdot \frac{m_{00}}{w} = \frac{\varrho}{(1-\varrho)} \cdot \frac{(m_{00})}{w} \quad \ldots\ldots \quad 34)$$

Für positive Momente ist (m_{00}) positiv, und (σ_z) stellt für die oberen Plattenpunkte eine Zugersatzspannung dar, d. h., das Material hat das Bestreben, nach oben auszuweichen.

Diese Spannung ist nicht zu vernachlässigen, da die Zerstörung der Platten auf der Druckseite nur durch Ausweichen des Materials nach außen vor sich gehen kann, wie auch aus Bruchversuchen ersichtlich ist. (Siehe Mörsch, Der Eisenbetonbau, 4. Aufl., Abb. 148, 149, 155.)

Diese drei erwähnten Ersatzspannungen sind nach der angenommenen Festigkeitshypothese unter den üblichen Spannungsgrenzen zu halten.

Wir haben die Schubspannungen nicht unter die kritischen Spannungen eingeschlossen. Denken wir uns einen Bereich der Platte, hinreichend klein, um den Spannungszustand darin konstant anzunehmen, so können wir uns den Baustoff aus zwei Scharen von Stäbchen zusammengesetzt denken, deren Achsen in die Richtungen der Hauptspannungen fallen. Wir setzen den Bereich noch in der Nähe der Ober- oder Unterfläche gelegen voraus, wo nur zwei Hauptspannungen vorhanden sind. Dann ist die Deformation jedes dieser Stäbchen dieselbe wie die eines einfachen, mit der Ersatzspannung (σ_I) bezw. (σ_{II}) beanspruchten Stabes, während deren tatsächliche Spannungen σ_I bezw. σ_{II} sind. In jedem Querschnitt, der diese Stäbchen schief schneidet, ergeben die Stäbchen Komponenten, die im Querschnitt liegen, und solche senkrecht zum Querschnitt. Aus ersteren setzen sich die Torsionsmomente, aus letzteren die Biegungsmomente zusammen. Ist nun die Ersatzspannung (σ_I) und (σ_{II}) der Stäbchen unter dem Höchstwert von σ bei geraden Stäben, so können jene Schubspannungen keine Bedeutung mehr haben, da gerade Stäbe vom selben Deformationszustand in Versuchen jenen Höchstwert als hinreichend sicher erwiesen haben. Es scheiden daher Schubspannungen vollkommen aus der Sicherheitsbeurteilung aus; sie zeigen nur an, daß der Querschnitt nicht senkrecht zur Achse einer der Stäbchenscharen liegt, die nur auf Zug oder Druck beansprucht sind.

11. Kritik der Theorie.

Die Theorie leidet an demselben Widerspruch wie die Balkentheorie. Die Annahme materieller, gerade bleibender Querschnittgeraden steht mit der durch die Verteilung der Querkraft über den Querschnitt hervorgerufenen Schiebungsdeformation in Widerspruch. Der daraus sich ergebende Fehler wird beträchtlich bei dicken Platten und in der Nähe konzentrierter Lasten. Der Einfluß dieser Schiebungsdeformation auf die Durchbiegung ist gleichfalls nicht zum Ausdruck gekommen.

Die Vernachlässigung von σ_z ist nicht in allen Fällen berechtigt. σ_z wird recht bedeutend unter stark konzentrierten Lasten, wirkt jedoch dann meist günstig, indem es die Dehnung ε_z verringert, so daß dann die dritte kritische Ersatzspannung den Betrag annimmt

$$(\sigma_z) = \sigma_z + \frac{\varrho}{(1-\varrho)} \cdot \frac{(m_{00})}{w} \quad \ldots\ldots\ 34a)$$

Führt man für σ_z den Wert Kraft durch Belastungsfläche F ein, so ist

$$(\sigma_z) = -\frac{P}{F} + \frac{\varrho}{1-\varrho} \cdot \frac{(m_{00})}{w} \quad \ldots \ldots \quad 34\text{b)}$$

Eine Dehnung der neutralen Ebene wurde gleichfalls nicht in Rechnung gezogen. Sie kann bei einem Biegungspfeil von der Ordnung der Plattendicke und horizontal festgehaltenem Rande sehr wohl mit den Oberflächendehnungen gleicher Größenordnung sein. Ihre Berücksichtigung führt auf bis jetzt ungelöste Differentialgleichungen, [1]) und ihr Einfluß besteht in einer Vergrößerung der Tragfähigkeit der Platte. Die Vernachlässigung ist also zugunsten der Sicherheit.

Diese Voraussetzungen und Vernachlässigungen sind dieselben wie in der Theorie der gewöhnlichen Balken, stellen jedoch die Anwendung in den meisten Fällen der Praxis, in denen die Voraussetzungen einigermaßen zutreffen, nicht in Frage.

B. Lösungen der Differentialgleichung für die rechteckige frei aufliegende Platte.

1. Lösung unter Annahme einer Durchbiegung von der Form

$$z_{mn} = \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b}.$$

Das Koordinatensystem habe seinen Ursprung in einer Ecke der Platte, die positive Seite der X-Achse längs des kurzen Randes a, die positive Seite der Y-Achse längs des längeren Randes b (Abb. 1). Längs des ganzen Randes ist die Durchbiegung z gleich Null, ferner ist $m_x = 0$ für $x = 0$ und $x = a$, $m_y = 0$ für $y = 0$ und $y = b$ und demzufolge längs des ganzen Randes nach den Gleichungen 10:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Ein Ausdruck von der Form

$$z_{mn} = \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b}, \quad \ldots \ldots \quad 35)$$

dessen zweite Ableitungen den Wert haben

$$\frac{\partial^2 z_{mn}}{\partial x^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b}$$

$$\frac{\partial^2 z_{mn}}{\partial y^2} = -\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \cdot \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b},$$

erfüllt für jedes ganzzahlige m und n sämtliche obengenannten Randbedingungen. Dieser Ausdruck kann also als Durchbiegung einer frei aufliegenden

---

[1]) Siehe Enzyklopädie der math. Wissenschaften. Bd. IV, 2, II. Heft 3, S. 350.

rechtwinkligen Platte angesehen werden, deren Belastung sich nach Gl. 24) berechnet zu

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{p}_{mn} &= -\frac{Ei}{1-\varrho^2}\cdot\Delta^4\,\mathfrak{z}_{mn} = -\frac{Ei}{1-\varrho^2}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 \sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b} \\ &= -\frac{Ei}{1-\varrho^2}\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^2 \mathfrak{z}_{mn} \end{aligned}\right\} \quad 36)$$

Schneidet man die Belastungsfläche also parallel der X- oder Y-Achse, so erhält man Sinuslinien, die $(m-1)$ Nullpunkte innerhalb der Plattenspannweite haben. Ist m eine ungerade Zahl, mit μ bezeichnet, dann ist diese Sinuslinie symmetrisch zur Mitte der Spannweite; ist m gerade, so ist sie in der zweiten Hälfte der Spannweite das negative Spiegelbild des Verlaufs in der ersten Hälfte, wie es die folgenden Abbildungen zeigen.

2. Die Naviersche Doppelreihe und Bestimmung ihrer Koeffizienten.

Es liegt nahe, r der vorerwähnten Belastungsflächen mit verschiedenen Koeffizienten A_{mn} multipliziert übereinander zu lagern und der Summe zur Bestimmung der r Stück Koeffizienten A_{mn} r Bedingungen aufzuerlegen, etwa daß in r Punkten die gesamte Belastung vorgegebene Werte annehme. Wir setzen statt dessen unendlich viele Belastungsflächen übereinander, in dem wir die Durchbiegung in der Form annehmen

$$z = -\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{m=1}^{m=\infty} A_{mn}\,\mathfrak{z}_{mn}\,, \quad 37)$$

wo m und n je alle ganzen Zahlen durchlaufen, und verlangen, daß die Gl. 24)

$$\Delta^4 z = -\frac{\mathfrak{p}}{Ei}(1-\varrho^2)$$

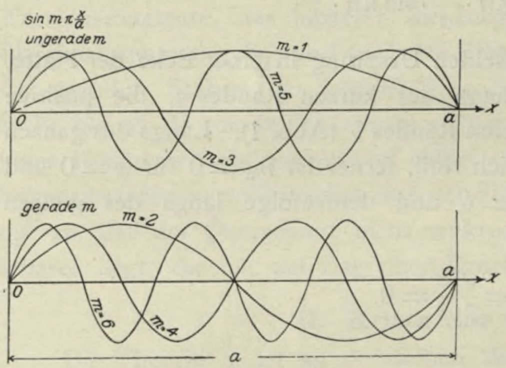


Abb. 3.

möglichst genau erfüllt werden. Wir drücken dies analytisch aus durch die Forderung, daß die Summe aller Unterschiede im Quadrat der beiden Seiten der Gleichung über die ganze Platte genommen, ein Minimum sei. Hierbei wird das Quadrat der Unterschiede genommen, um zu vermeiden, daß sich positive und negative Unterschiede ausgleichen.

Demnach

$$J = \int_0^a\int_0^b\left(\Delta^4 z + \frac{\mathfrak{p}}{Ei}(1-\varrho^2)\right)^2 dx\,dy = \text{Minimum} \quad . \quad . \quad 38)$$

Es ist nach Gl. 36) u. 37)

$$\begin{aligned}
\Delta^4 z &= -\sum_m \sum_n A_{mn} \Delta^4 \mathfrak{z}_{mn} \\
&= -\sum_m \sum_n \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right)^2 A_{mn} \mathfrak{z}_{mn} \\
&= -\frac{\pi^4}{a^4} \cdot \sum_m \sum_n \left(m^2 + \frac{n^2}{\beta^2}\right)^2 A_{mn} \mathfrak{z}_{mn} \\
&= -\frac{\pi^4}{a^4} \cdot R,
\end{aligned}$$

wo $\frac{b}{a} = \beta$ gesetzt würde, und die Reihe mit R bezeichnet. Gl. 38) wird nun

$$J = \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\mathfrak{p}(1-\varrho^2)}{Ei} - \frac{\pi^4}{a^4} \cdot R\right)^2 dx\, dy = \text{Minimum} \; . \quad . \quad 38\text{a})$$

Die Bedingung dafür ist, daß sämtliche Differentialquotienten $\frac{\partial J}{\partial A_{mn}}$ nach A_{mn} verschwinden. Also

$$\frac{\partial J}{\partial A_{m'n'}} = 0,$$

wo m' und n' beliebige Werte von m und n annehmen kann. Dies ergibt

$$\int_0^a \int_0^b \left[\frac{\mathfrak{p}(1-\varrho^2)}{Ei} - \frac{\pi^4}{a^4} \cdot R\right] \frac{\partial R}{\partial A_{m'n'}} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 39)$$

$$\int_0^a \int_0^b \frac{\mathfrak{p}(1-\varrho^2)}{Ei} \cdot \frac{\partial R}{\partial A_{m'n'}} \cdot dx\, dy = \frac{\pi^4}{a^4} \int_0^a \int_0^b R \cdot \frac{\partial R}{\partial A_{m'n'}} \cdot dx\, dy \quad 39\text{a})$$

Es ist nun

$$\frac{\partial R}{\partial A_{m'n'}} = \left(m'^2 + \frac{n'^2}{\beta^2}\right)^2 \mathfrak{z}_{m'n'}.$$

Demnach wird die Gleichung zu

$$\left.\begin{aligned}
&\left(m'^2 + \frac{n'^2}{\beta^2}\right)^2 \int_0^a \int_0^b \frac{\mathfrak{p}(1-\varrho^2)}{Ei} \cdot \mathfrak{z}_{m'n'}\, dx\, dy \\
&\quad = \frac{\pi^4}{a^4} \left(m'^2 + \frac{n'^2}{\beta^2}\right)^2 \int_0^a \int_0^b \left[\sum_m \sum_n \left(m^2 + \frac{n^2}{\beta^2}\right)^2 \mathfrak{z}_{mn}\right] \mathfrak{z}_{m'n'}\, dx\, dy
\end{aligned}\right\} \quad 40)$$

Bei der gliedweisen Integration der rechten Seite kommen Integrale von der Form

$$\int_0^a \int_0^b \mathfrak{z}_{mn}\, \mathfrak{z}_{m'n'}\, dx\, dy$$

vor, welche zerfallen in ein Produkt aus

$$\int_0^a \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin m'\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot dx \cdot \int_0^b \sin n\pi \cdot \frac{y}{b} \cdot \sin n'\pi \cdot \frac{y}{b} \cdot dy.$$

Ein solches Integral läßt sich auf die Form bringen

$$-\frac{1}{2}\int_0^a\left[\cos(m+m')\pi\cdot\frac{x}{a}-\cos(m-m')\pi\cdot\frac{x}{a}\right]dx$$

und ergibt integriert zwischen den Grenzen 0 bis a

$$=-\frac{a}{2\pi}\left[\frac{\sin(m+m')\pi}{m+m'}-\frac{\sin(m-m')\pi}{m-m'}\right].$$

Solange m nicht gleich m', ist dieser Ausdruck Null, weil es sich um sinus ganzzahliger Vielfache von π handelt. Nur für den einzigen Fall $m=m'$ wird der zweite Summand von der Form $\frac{0}{0}$ und erreicht den Wert π nach der Gleichung $\frac{\sin r\alpha}{\alpha}=r$ für α gleich Null. Das Integral wird also für diesen Fall $=+\frac{a}{2}$ und das andere Integral in $y=\frac{b}{2}$, so daß von allen Integralen $\int_0^a\int_0^b \mathfrak{z}_{mn}\,\mathfrak{z}_{m'n'}\,dx\,dy$ nur das Integral $\int_0^a\int_0^b \mathfrak{z}^2_{m'n'}\,dx\,dy$ übrigbleibt mit dem Wert $\frac{ab}{4}$.

Diese ausgezeichnete Eigenschaft der Integrale ermöglicht es, $A_{m'n'}$ definit auszudrücken; wäre sie nicht vorhanden, so erhielte man unendlich viel Gleichungen mit unendlich viel Unbekannten.

Gl. 40) wird also

$$\int_0^a\int_0^b\frac{\mathfrak{p}(1-\varrho^2)}{Ei}\,\mathfrak{z}_{m'n'}\,dx\,dy=\frac{\pi^4}{a^4}\left(m'^2+\frac{n'^2}{\beta^2}\right)^2 A_{m'n'}\cdot\frac{ab}{4} \qquad 41)$$

und allgemein

$$A_{mn}=\frac{4\,a^4(1-\varrho^2)}{\pi^4\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\frac{\mathfrak{p}}{Ei}\cdot\sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b}\cdot dx\,dy \qquad 42)$$

und

$$z=-\Sigma\Sigma A_{mn}\cdot\sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b}.$$

In vielen wichtigen Belastungsfällen nehmen die Koeffizienten A_{mn} mit wachsenden m und n rasch ab, so daß wenige Reihenglieder ausreichende Resultate ergeben.

3. Berechnung von A für verschiedene Belastungen.

Der Koeffizient

$$A_{mn}=4\,\frac{a^4}{\pi^4}\cdot\frac{1}{\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\frac{1}{ab}\int_0^a\int_0^b\frac{\mathfrak{p}(1-\varrho^2)}{Ei}\cdot\sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b}\cdot dx\,dy$$

ist für jede beliebige Belastung, auch empirisch gegebene, berechenbar. Für analytisch einfache Belastungsfälle kann das Integral exakt ausgewertet werden.

a) Für Einzellast P ist der sin im Bereich des Lastangriffs nicht veränderlich und $\int\limits_0^a \int\limits_0^b \mathfrak{p}\, dx\, dy = P$.

Seien die Koordinaten des Lastangriffspunktes a' und b', dann ist

$$A_{mn} = \frac{4\,Pa^2\,(1-\varrho^2)}{Ei\pi^4\beta\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)^2} \cdot \sin m\pi \cdot \frac{a'}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{b'}{b} \quad . \quad . \quad 43)$$

Rückt die Einzellast in die Mitte, so wird für $a' = \frac{a}{2}$, $b' = \frac{b}{2}$, $\sin m \cdot \frac{\pi}{2}$ für gerades m jeweils Null, und es bleiben nur die sin mit ungeradem m, das mit μ bezeichnet wird. Es ist $\sin \frac{\mu\pi}{2} = (-1)^{m+1}$, wo $m = \frac{\mu - 1}{2}$, und es wird

$$A_{mn} = \frac{4\,Pa^2\,(1-\varrho^2)\,(-1)^{m+n}}{Ei\,\pi^4\beta\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44)$$

wo $\mu = 2\,m - 1$ und $\nu = 2\,n - 1$ ist.

b) Sei eine Belastung y gleichförmig verteilt innerhalb eines Rechtecks, gegeben durch $x = a'$, $x = a''$, $y = b'$, $y = b''$.

$$\left.\begin{aligned} A_{mn} = \frac{4\,\mathfrak{p}\,a^4\,(1-\varrho^2)}{Ei\,\pi^6\,mn\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)^2}&\left(\cos m\pi \cdot \frac{a''}{a} - \cos m\pi \cdot \frac{a'}{a}\right) \\ &\left(\cos n\pi \cdot \frac{b''}{b} - \cos n\pi \cdot \frac{b'}{b}\right) \end{aligned}\right\} \quad 45)$$

Bei zur Plattenmitte symmetrischer Belastung wird $a'' = a - a'$, $b'' = b - b'$ und für gerade Werte m

$$\cos m\pi \cdot \frac{a''}{a} = \cos m\pi \cdot \frac{a - a''}{a} = \cos m\pi \cdot \frac{a'}{a},$$

d. h., die Koeffizienten mit geradzahligen $\sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b}$ fallen aus, und es bleiben nur die ungeradzahligen, wobei wir jetzt in den Sinus μ, ν statt m, n schreiben und m, n als Nummer des Summengliedes betrachten; dann ist $\mu = 2\,m - 1$, $\nu = 2\,n - 1$. Es ist

$$\cos \mu\pi \cdot \frac{a'}{a} = -\cos \mu\pi \cdot \frac{a - a'}{a} = -\cos \mu\pi \cdot \frac{a''}{a},$$

und es wird für zu den Achsen symmetrische Teilbelastung

$$A_{mn} = \frac{16\,\mathfrak{p}\,a^4\,(1-\varrho^2)}{Ei\,\pi^6\,\mu\nu\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2} \cdot \cos \mu\pi \cdot \frac{a'}{a} \cdot \cos \nu\pi \cdot \frac{b'}{b}; \quad . \quad 46)$$

bei Vollbelastung ist $a' = b' = 0$ und

$$A_{mn} = \frac{16\, \mathfrak{p}\, a^4 (1 - \varrho^2)}{Ei\, \pi^6 \mu \nu \left(\mu^2 + \frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 47)$$

c) Es sollen nicht alle möglichen Belastungen gezeigt werden; einige weitere Beispiele seien nur genannt.

Bei einer Belastung längs der Geraden $x = a'$ von $y = 0$ bis $y = b$ mit einer Last p für eine Längeneinheit ist

$$A_{mn} = \frac{4\, a^4 \sin m\pi \frac{a'}{a} (1 - \varrho^2)}{Ei\, \pi^4 \left(m^2 + \frac{n^2}{\beta^2}\right)^2 a b} \int_0^b p \sin n\pi \cdot \frac{y}{b} \cdot dy \quad . \; . \; . \quad 48)$$

Bezeichnet A'_{mn} den Koeffizienten für die Belastung durch eine Einzellast $P = 1$ im Punkt a', b', so ist der Koeffizient für Belastung durch ein Moment M_x im selben Punkt gleich $\frac{\partial A'_{mn}}{\partial a'} \cdot M_x$.

In allen Fällen einer Symmetrie der Belastung nach der x- oder y-Achse fallen die Ausdrücke, in denen geradzahlige m bezw. n vorkommen, aus, und es bleiben nur Ausdrücke, die μ, ν enthalten. Dies ist verständlich mit Hinblick auf Abb. 3, wo gezeigt ist, daß nur die Glieder mit ungeradem m oder n symmetrische Belastungen ergeben. In den A_{mn} kann auch eine Veränderlichkeit des Trägheitsmoments berücksichtigt werden, mit derselben Berechtigung wie in der Balkentheorie.

4. Formeln für Momente und Querkräfte.

Die so bestimmten A_{mn} sind in folgende Formeln einzusetzen:

$$z = - \sum_m \sum_n A_{mn} \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 49)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{\pi}{a} \cdot \sum_m \sum_n A_{mn}\, m \cos m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{\pi}{b} \cdot \sum_m \sum_n A_{mn}\, n \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \cos n\pi \cdot \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 50)$$

$$\left.\begin{aligned} (m_x) &= Ei \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = + Ei \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \sum_m \sum_n A_{mn}\, m^2 \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b} \\ (m_y) &= Ei \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = + Ei \cdot \frac{\pi^2}{b^2} \cdot \sum_m \sum_n A_{mn}\, n^2 \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b} \\ (t_x) &= Ei \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = - Ei \cdot \frac{\pi^2}{ab} \cdot \sum_m \sum_n A_{mn}\, mn \cos m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \cos n\pi \cdot \frac{y}{b} \\ (m_{00}) &= Ei\, \Delta^2 z = Ei \cdot \frac{\pi^2}{a^2} \cdot \sum_m \sum_n A_{mn} \left(m^2 + \frac{n^2}{\beta^2}\right) \sin m\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin n\pi \cdot \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \quad 51)$$

$$\left.\begin{aligned}
q_x &= -\frac{1}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\partial(m_{00})}{\partial x} = -\frac{Ei}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\pi^3}{a^3}\cdot\sum_m\sum_n A_{mn}\, m\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right) \\
&\qquad\qquad \sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b} \\
q_y &= -\frac{1}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\partial(m_{00})}{\partial y} = -\frac{Ei}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\pi^3}{a^2 b}\cdot\sum_m\sum_n A_{mn}\, n\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right) \\
&\qquad\qquad \sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b}
\end{aligned}\right\} \quad 52)$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= -\frac{Ei}{1-\varrho^2}\cdot\Delta^4 z = -\frac{Ei}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\pi^4}{a^4}\cdot\sum_m\sum_n A_{mn}\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)^2 \\
&\qquad\qquad \sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b}
\end{aligned}\right\} \quad 53)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial t_x}{\partial y} &= \frac{1}{1+\varrho}\cdot\frac{\partial(t_x)}{\partial y} = \frac{Ei}{1+\varrho}\cdot\frac{\pi^3}{a\, b^2}\cdot\sum_m\sum_n A_{mn}\, m n^2 \cos m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b} \\
\frac{\partial t_y}{\partial x} &= \frac{-1}{1+\varrho}\cdot\frac{\partial(t_x)}{\partial x} = -\frac{Ei}{1+\varrho}\cdot\frac{\pi^3}{a^2 b}\cdot\sum_m\sum_n A_{mn}\, m^2 n \sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\cos n\pi\cdot\frac{y}{b}
\end{aligned}\right\} \quad 54)$$

Es ist

$$m_x = \frac{1}{1-\varrho^2}\left[(m_x)+\varrho\,(m_y)\right]$$

$$m_y = \frac{1}{(1-\varrho^2)}\left[(m_y)+\varrho\,(m_x)\right]$$

$$t_x = -t_y = \frac{1}{1+\varrho}(t_x).$$

Der Auflagerdruck in einem Randpunkt, in dem die Randnormale parallel x bezw. y ist, wird

$$a_x = q_x - \frac{\partial t_x}{\partial y}.$$

$$a_y = q_y + \frac{\partial t_y}{\partial x} = q_y - \frac{\partial t_x}{\partial x}.$$

Diese Auflagerdrücke sind die Belastungen für die Randbalken.

In den Ecken treten Einzelkräfte auf von der Größe der Differenz der Torsionsmomente der beiden in der Ecke zusammenstoßenden Schnitte; demnach

$$A^*_{\substack{x=0\\y=0}} = +t_y - t_x = -2\,t_x \text{ für } x=0,\ y=0.$$

5. Beziehungen, die für die Ausrechnung von Zahlenwerten von Wichtigkeit sind.

Zunächst ergibt sich leicht, wie auch zu erwarten, die Berechtigung der Maxwellschen Vertauschung. Die Durchbiegung durch Einzellast im Punkt a', b' ist nach Gl. 43) u. 49)

$$z = \frac{-4\,Pa^2(1-\varrho^2)}{Ei\pi^4\beta}\cdot\sum_m\sum_n\cdot\frac{\sin m\pi\cdot\frac{a'}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{b'}{b}}{\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b}, \quad 55)$$

woraus die vollständige Gleichwertigkeit der Lastangriffskoordinaten a', b, und der Koordinaten des Durchbiegungspunktes x, y ersichtlich ist. Ähnliche Sätze lassen sich aufstellen für Moment und Winkel, Einzelkraft und m_x bezw. m_y usw.

Einige andere Beziehungen werden von rechnerischem Werte sein, nämlich bei symmetrischer Belastung zwischen solchen Punkten $P\,(x, y)$ und $P'\,(a', b')$, zwischen deren Koordinaten die Beziehung besteht:

$$x = \frac{a}{2} - a', \quad y = \frac{b}{2} - b' \text{ (Abb. 4).}$$

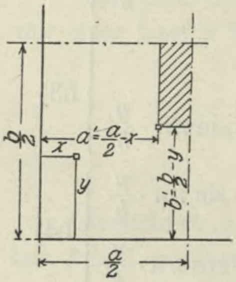


Abb. 4.

Es ist dann

$$\sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} = (-1)^{m+1} \cdot \cos \mu\pi \left(\frac{a}{2a} - \frac{x}{a}\right)$$
$$= (-1)^{m+1} \cdot \cos \mu\pi \cdot \frac{a'}{a}.$$

Bei symmetrischer gleichförmiger Teilbelastung über ein Rechteck, dessen Seiten gegeben sind durch $x = a'$, $x = a - a'$, $y = b'$, $y = b - b'$, ist nach Gl. 46) u. 51) das Moment in der Mitte $(m_x)_0$ gleich

$$(m_x)_0 = \frac{16\,\mathfrak{p} a^2}{\pi^4}(1-\varrho^2)\sum_\mu\sum_\nu \cdot \frac{\mu}{\nu\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2} \cdot \frac{\cos \mu\pi \cdot \frac{a'}{a} \cdot \cos \nu\pi \cdot \frac{b'}{b}}{\sin \mu\pi \cdot \frac{a}{2a} \cdot \sin \nu\pi \cdot \frac{b}{2b}}$$

$$= \frac{16\,\mathfrak{p} a^2}{\pi^4}(1-\varrho^2)\sum_\mu\sum_\nu \cdot \frac{\mu}{\nu\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}(-1)^{m+n} \cdot \cos \mu\pi \cdot \frac{a'}{a} \cdot \cos \nu\pi \cdot \frac{b'}{b},$$

und das Moment bei Vollbelastung im Punkte $x = \frac{a}{2} - a'$, $y = \frac{b}{2} - b'$ ist gleich

$$(m_x) = \frac{16\,\mathfrak{p} a^2}{\pi^4}(1-\varrho^2)\sum_\mu\sum_\nu \cdot \frac{\mu}{\nu\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2} \cdot \sin \frac{\mu\pi}{a}\left(\frac{a}{2} - a'\right) \cdot \sin \frac{\nu\pi}{b}\left(\frac{b}{2} - b'\right).$$

Die beiden sind einander gleich, da

$$\sin \frac{\mu\pi}{a}\left(\frac{a}{2} - a'\right) = (-1)^{m+1} \cdot \cos \mu\pi \cdot \frac{a'}{a}.$$

Bei Einzellast in der Mitte ist die Durchbiegung in einem Punkte x', y' nach Gl. 44) u. 49)

$$z = -\frac{4\,P a^2}{\pi^4 \beta E i}(1-\varrho^2)\sum_\mu\sum_\nu \cdot \frac{(-1)^{m+n}}{\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x'}{a} \cdot \sin \nu\pi \cdot \frac{y'}{b},$$

d. h. proportional dem Ersatztorsionsmoment in dem Punkte $\frac{a}{2} - x'$, $\frac{b}{2} - y'$ bei totaler gleichförmiger Belastung, welches nach Gl. 47) u. 51) ist

$$(t_x) = -\frac{16\,\mathfrak{p}\,a^2(1-\varrho^2)}{\pi^4\beta}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{1}{\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\cos\frac{\mu\pi}{a}\left(\frac{a}{2}-x'\right)\cos\frac{\nu\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y'\right)$$

aus dem gleichen Grunde wie oben; es ist also

$$z_{x',y'} = \frac{\left(t_{\left(\frac{a}{2}-x',\,\frac{b}{2}-y'\right)}\right)P}{4\,Ei\,\mathfrak{p}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 56)$$

Eine Menge anderer ähnlicher Beziehungen, namentlich in bezug auf Einflußflächen, scheint nicht der Mühe wert zu sein, verfolgt zu werden.

6. Nachprüfung der aus der Reihe sich ergebenden Belastung $\mathfrak{p}$.

Nach Gl. 53) ist die verteilte Belastung $\mathfrak{p}$ gleich

$$\mathfrak{p} = \frac{Ei}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\pi^4}{a^4}\cdot\sum_m\sum_n A_{mn}\left(m^2+\frac{n^2}{\beta^2}\right)^2\cdot\sin m\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\cdot\frac{y}{b}\cdot$$

Setzt man für gleichförmig verteilte Belastung $\mathfrak{p}$ A_{mn} nach Gl. 47) ein, so ergibt sich die Reihe

$$\mathfrak{p} = \frac{16\,\mathfrak{p}}{\pi^2}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{1}{\mu\nu}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin\nu\pi\cdot\frac{y}{b}, \quad . \; . \; . \; . \quad 57)$$

die sich spalten läßt in das Produkt

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\left(\frac{4}{\pi}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{4}{\pi}\cdot\sum_\nu\cdot\frac{1}{\nu}\cdot\sin\nu\pi\cdot\frac{y}{b}\right). \quad . \quad 58)$$

Jede dieser Einzelsummen nähert sich für jeden Wert $x < a$ bezw. $y < b$ mit wachsender Gliederzahl dem Wert $\frac{\pi}{4}$,[1]) so daß also das aus der Reihe berechnete $\mathfrak{p}$ gegen die gegebene Belastung konvergiert und Gl. 58) identisch erfüllt wird.

Den Grad der Konvergenz zeigt nachstehende Tabelle, worin der Summenwert für eine beschränkte Anzahl von Gliedern (5, 6, 7, 8) für den

ν	$y=0$	$=0{,}1\,b$	$0{,}2\,b$	$0{,}3\,b$	$0{,}4\,b$	$0{,}5\,b$
1	0	0,309	0,588	0,809	0,951	1,0
3	0	0,270	0,317	0,103	− 0,196	− 0,333
5	0	0,200	0	− 0,200	0	+ 0,200
7	0	0,116	− 0,136	+ 0,044	+ 0,084	− 0,143
9	0	0,034	− 0,065	+ 0,090	− 0,106	+ 0,111
11	0	− 0,027	0,054	− 0,073	+ 0,086	− 0,091
13	0	− 0,062	0,073	− 0,024	− 0,045	+ 0,077
15	0	− 0,067	0	+ 0,067	0	− 0,067
$\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{\nu=1}^{9} =$	0	1,182	0,895	1,075	0,932	1,062
$\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{1}^{11} =$	0	1,148	0,964	0,982	1,041	0,946
$\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{1}^{13} =$	0	1,069	1,058	0,952	0,984	1,044
$\frac{\pi}{4}\cdot\sum_{1}^{15} =$	0	0,983	1,058	1,040	0,984	0,960

[1]) Beweis in den meisten Lehrbüchern der höheren Mathematik unter Kapitel „Fouriersche Reihen".

Ausdruck $\frac{4}{\pi} \cdot \Sigma \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \sin \nu\pi \cdot \frac{y}{b}$ berechnet ist, welcher gegen 1 konvergiert.

$$\frac{4}{\pi} \cdot \Sigma_{\nu} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \sin \nu\pi \cdot \frac{y}{b} \quad \text{. . . . . 59)}$$

Die Funktion, die durch die Summe dargestellt ist, schwankt also, von 0 schnell ansteigend, mit zunehmender Gliederzahl in immer engeren Grenzen um 1. Geht man also bis $\mu = \nu = 15$, so ist, abgesehen von den Rändern von der Breite $0{,}1\,a$ bezw. $0{,}1\,b$, die Belastung in der Größe schwankend innerhalb $1{,}058^2 = 1{,}12\,\mathfrak{p}$ und $0{,}92\,\mathfrak{p}$. Dies wäre zwar praktisch immer noch hinreichend genau eine gleichförmige Belastung, zumal sich die Wirkung der stärkeren und schwächeren Lasten ausgleichen wird. Es wird sich jedoch ergeben, daß die Reihen für die Durchbiegungen und Momente erheblich rascher konvergieren, und daß die Summe schon nach wenigen Gliedern auf mehrere Dezimalen sicher ist, was eben durch diese Ausgleichung bewirkt wird.

Die Reihe für Einzellast ist im Angriffspunkt nicht mehr konvergent und ergibt den Wert ∞. Dies trifft zu, da die spezifische Belastung am Angriffspunkt einer Einzellast tatsächlich unendlich ist.

Daß die aus der Reihe sich ergebende Belastung $\mathfrak{p}$ in den anderen Punkten der Platte Null wird, läßt sich dadurch zeigen, daß man $\mathfrak{p}$ über ein beliebiges, den Angriffspunkt enthaltendes Rechteck integriert, wobei man als Belastungssumme eine Reihe wie Gl. 57) erhält, die für jedes Rechteck gegen den Wert P konvergiert.

Auch für andere Belastungen läßt sich die Richtigkeit der Reihen in ähnlicher Weise prüfen.

7. Die Lévysche Reihe für die einseitig unendlich lange Platte.

Für den Fall $\beta = \infty$ gibt die Naviersche Reihe einen bestimmten Wert nur für $y = \frac{b}{2}$. Denn es ist bei gleichförmiger Belastung nach Gl. 47) u. 49)

$$z = -\frac{16\,\mathfrak{p}\,a^2(1-\varrho^4)}{\pi_6\,Ei} \cdot \Sigma_{\mu}\Sigma_{\nu} \cdot \frac{1}{\mu\nu\left(\mu^2 + \frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin \nu\pi \cdot \frac{y}{b}.$$

Setzt man hierin $\beta = \infty$, so wird

$$z = -\frac{16\,\mathfrak{p}\,a^4(1-\varrho^2)}{\pi^6\,Ei} \cdot \Sigma_{\mu}\Sigma_{\nu} \cdot \frac{1}{\mu^5\,\nu} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \sin \nu\pi \cdot \frac{y}{b}$$

$$= -\frac{16\,\mathfrak{p}\,a^4(1-\varrho^2)}{\pi^6\,Ei} \cdot \Sigma_{\mu} \cdot \frac{1}{\mu^5} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \cdot \Sigma \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \sin \nu\pi \cdot \frac{y}{b}.$$

Die letzte Reihe hat den Wert $\frac{\pi}{4}$, demnach wird

$$z = -\frac{4\,\mathfrak{p}\,a^4(1-\varrho^2)}{\pi^5\,Ei} \cdot \Sigma \cdot \frac{1}{\mu^5} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \quad \text{. . . . . 60)}$$

Diese Reihe stellt die Durchbiegung im X-Schnitt dar, der bei $b = \infty$ in der mittleren Partie unabhängig von y ist. Der Zustand in der Nähe des kurzen Randes ist demnach nicht berechenbar.

Für diese Punkte ist die Lévysche Reihe[1]) benutzbar, welche für $b = \infty$ und gleichförmige Belastung folgende Form annimmt:

$$z = -\frac{4\,\mathfrak{p}\,a^4}{\pi^5 Ei}(1-\varrho^2)\sum_\mu \cdot \frac{1}{\mu^5}\left[1 - e^{-\frac{\mu\pi y}{2a}}\left(1 + \frac{\mu\pi y}{2a}\right)\right]\cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \quad 61)$$

für gleichförmige Belastung. Sie soll hier nicht abgeleitet werden, doch geprüft auf Erfüllung der Differentialgleichung mit Randbedingungen. Für $x = 0$, $y = 0$ und $x = a$ wird $z = 0$. Für $y = \infty$ wird

$$z = -\frac{4\,\mathfrak{p}\,a^4(1-\varrho^2)}{\pi^5 Ei}\cdot \sum_\mu \cdot \frac{1}{\mu^5}\cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a},$$

d. h. dasselbe wie die oben (Gl. 60) zitierte Naviersche Reihe für $\beta = \infty$ und $y = \infty$.

$$\left.\begin{aligned}
(m_x) &= Ei\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{4\,\mathfrak{p}\,a^2}{\pi^3}(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^3}\left[1 - e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\left(1+\frac{\mu\pi y}{2a}\right)\right]\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(m_y) &= Ei\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4\,\mathfrak{p}\,a^2}{\pi^3}(1-\varrho^2)\sum\cdot\frac{1}{\mu^3}\cdot\frac{\mu\pi y}{2a}\,e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(t_x) &= Ei\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2\,\mathfrak{p}\,a^2}{\pi^3}(1-\varrho^2)\sum\cdot\frac{1}{\mu^3}\left(1+\mu\pi\cdot\frac{y}{a}\right)e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\cdot\cos\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(m_{00}) &= (m_x)+(m_y) = \frac{4\,\mathfrak{p}\,a^2}{\pi^3}(1-\varrho^2)\sum\cdot\frac{1}{\mu^3}\left(1-e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\right)\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}
\end{aligned}\right\} \quad 62)$$

Für $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ werden (m_x) und (m_y), wie bei der Navierschen Lösung schon der Fall, Null. Desgleichen für $y = \infty$ $(m_y) = 0$. Nur (m_x) wird für $y = \infty$

$$(m_x) = \frac{4\,\mathfrak{p}\,a^2}{\pi^3}(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^3}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a},$$

d. h. der der schon erwähnten Durchbiegungslinie z für $y = \infty$ entsprechende Wert.

Es wird

$$\left.\begin{aligned}
q_x &= -\frac{1}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\partial(m_{00})}{\partial x} = -\frac{4\,\mathfrak{p}\,a}{\pi^2}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^2}\left[1-e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\left(1+\frac{\mu\pi y}{2a}\right)\right]\cos\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
q_y &= -\frac{1}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\partial(m_{00})}{\partial y} = -\frac{4\,\mathfrak{p}\,a}{\pi^2}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^2}\cdot e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}
\end{aligned}\right\} \quad 63)$$

und die Differentialgleichung wird identisch erfüllt durch:

$$\mathfrak{p} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{4\mathfrak{p}}{\pi}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}, \quad \ldots\ldots \quad 64)$$

da die Summe, wie mehrfach erwähnt, den Wert $\frac{\pi}{4}$ hat.

---

[1]) Comptes rendus à l'Académie 1899, t. CXXIX, p. 535—539; siehe auch Estanave, Contributions à l'équilibre d'une plaque rectangulaire (Thèse). Paris 1900. Gauthier-Villars. p. 21.

Mittels der Gl. 56) ist es einfach, auch die Lösung für Einzellast abzuleiten.

Es ist

$$z_{x'y'} = \frac{\left(t_{\left(\frac{a}{2}-x',\ \frac{b}{2}-y'\right)}\right) P}{4\,Ei\,\mathfrak{p}},$$

wo (t) das bei gleichförmiger Belastung im Punkt $\frac{a}{2} - x'$, $\frac{b}{2} - y'$ auftretende Ersatztorsionsmoment ist. Setzt man letzteres aus Gl. 62) ein, so ergibt sich

$$z_{x'y'} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Pa^2(1-\varrho^2)}{Ei\,\pi^3} \cdot \sum_\mu \cdot \frac{1}{\mu^3}\left[1 + \mu\pi \cdot \frac{\left(\frac{b}{2}-y'\right)}{a}\right] e^{-\frac{\mu\pi}{a}\left(\frac{b}{2}-y'\right)} \cos \cdot \frac{\mu\pi}{a}\left(\frac{a}{2}-x'\right).$$

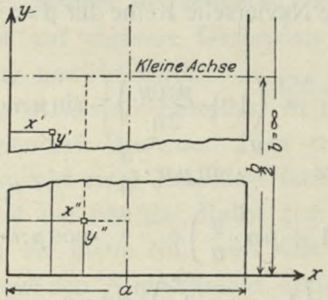


Abb. 5.

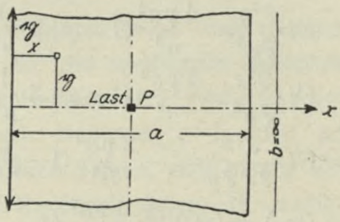


Abb. 6.

$\frac{b}{2} - y'$ ist die Entfernung von der kleinen Achse der Platte. Wir setzen diese Größe gleich $\mathfrak{y}$ und legen die X-Achse in die kleine Mittelachse, also durch den Lastangriffspunkt.

Setzt man noch $\cos \cdot \frac{\mu\pi}{a}\left(\frac{a}{2} - x'\right)$ wie früher $= (-1)^{m+1} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x'}{a}$, dann ist die Durchbiegung im Punkt $x\mathfrak{y}$

$$z_{x\mathfrak{y}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{Pa^2(1-\varrho^2)}{Ei} \cdot \sum_\mu \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{\mu^3}\left(1 + \frac{\mu\pi\,\mathfrak{y}}{a}\right) e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \quad 65)$$

Infolge der Symmetrie ist $\mathfrak{y}$ nach beiden Seiten der X-Achse positiv zu rechnen.

Es wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{y}} &= +\frac{1}{2} \cdot \frac{Pa(1-\varrho^2)}{\pi^2\,Ei} \cdot \sum_\mu \frac{(-1)^{m+1}}{\mu^2}\left(\mu\pi\frac{\mathfrak{y}}{a}\right) e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}} \cdot \sin \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{Pa(1-\varrho^2)}{2\,Ei\,\pi^2} \cdot \sum_\mu \frac{(-1)^{m+1}}{\mu^2}\left(1 + \frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}\right) e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}} \cdot \cos \mu\pi \cdot \frac{x}{a} \end{aligned}\right\} 66)$$

$\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{y}}$ wird Null für $\mathfrak{y} = 0$ und $x = 0$. Also ist es zulässig, $\mathfrak{y}$ nach beiden Seiten positiv zu rechnen.

$$\left.\begin{aligned}
(m_x) &= Ei\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{P}{2\pi}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{\mu}\left(1+\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}\right)e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(m_\mathfrak{y}) &= Ei\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{P}{2\pi}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{\mu}\left(1-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}\right)e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(m_{00}) &= Ei\Delta^2 z = \frac{P}{2\pi}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{\mu}\cdot e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(t_x) &= Ei\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{P}{2\pi}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{\mu}\cdot e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\cos\mu\pi\cdot\frac{x}{a}
\end{aligned}\right\}\quad 67)$$

Für $x = 0$ und $\mathfrak{y} = 0$ ergibt sich

$$(m_x) = (m_y) = \frac{(m_{00})}{z} = \frac{P}{2\pi}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu} = \infty,$$

wie zu erwarten; in allen anderen Punkten ist die Reihe recht brauchbar.

$$\left.\begin{aligned}
q_x &= -\frac{1}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\partial(m_{00})}{\partial x} = -\frac{P}{a}\cdot\sum_\mu(-1)^{m+1}e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\cos\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
q_y &= -\frac{1}{1-\varrho^2}\cdot\frac{\partial(m_{00})}{\partial\mathfrak{y}} = +\frac{P}{a}\cdot\sum_\mu(-1)^{m+1}e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}
\end{aligned}\right\}\quad 68)$$

$\mathfrak{p} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_\mathfrak{y}}{\partial\mathfrak{y}} = 0$ mit Ausnahme im Lastangriffspunkt, wie q_x und $q_\mathfrak{y}$.
Es kann bewiesen werden, ebenso wie im Fall der endlichen Platte, daß das Integral von $\mathfrak{p}$ über ein den Lastangriffspunkt enthaltendes Rechteck bei jeder beliebigen Größe desselben gleich P ist, d. h., daß außer P keine weitere Belastung vorhanden ist.

C. Zahlenwerte und Tabellen.

1. Die Durchbiegung.

Bei gleichförmiger Belastung $\mathfrak{p}$ ist nach Gl. 47) u. 49) die Durchbiegung

$$z_0' = -\frac{16\,\mathfrak{p}a^4(1-\varrho^2)}{\pi^6 Ei}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{1}{\mu\nu\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin\nu\pi\cdot\frac{y}{b}\qquad 71)$$

und für Einzellast in der Mitte

$$z_0' = -\frac{4\,Pa^2}{\pi^4 Ei\,\beta}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{(-1)^{m+n}}{\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin\nu\pi\cdot\frac{y}{b}\cdot\qquad 72)$$

Wächst die lange Seite ins Unendliche, so sind die Gleichungen 61) u. 65) zu benutzen.

$$z_0' = \frac{-4\,\mathfrak{p}a^4}{\pi^5 Ei}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^5}\left[1-\left(1+\frac{\mu\pi y}{2a}\right)e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\right]\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\ .\qquad 73)$$

$$z_0'' = -\frac{1}{2}\,\frac{Pa^2}{Ei\,\pi^3}\cdot(1-\varrho^2)\sum_\nu\cdot\frac{(-1)^{m+1}}{\mu^3}\left(1+\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}\right)e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\qquad 74)$$

Für die Durchbiegung in der Mitte ist $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$ zu setzen; es wird dadurch $\sin \mu\pi \frac{x}{a} = (-1)^{m+1}$, $\sin \nu\pi \frac{y}{b} = (-1)^{n+1}$. Im Fall $\beta = \infty$ ist $y = \infty$ und $\mathfrak{y} = 0$ zu setzen. Die Summe reduziert sich dadurch auf $\sum\limits_{\mu} \frac{(-1)^{m+1}}{\mu^5} = 0{,}9962$ und $\sum \frac{1}{\mu^3} = 1{,}0516$.

Man erhält hiermit für die Durchbiegung in der Mitte von Platten bei verschiedenen β: 77)

	$\beta = 1$	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5
Gleichförmige Belastung $\mathfrak{p}$ $z_0' =$	$-0{,}00407$	$-0{,}00603$	$-0{,}00773$	$-0{,}00909$	$-0{,}01013$	$-0{,}01150$
Einzellast P $z_0'' =$	$-0{,}0116$	$-0{,}0139$	$-0{,}0153$	$-0{,}0161$	$-0{,}0165$	$-0{,}0168$
Verhältnis $\frac{z_0'}{z_0''} =$	0,352	0,434	0,506	0,566	0,615	0,684

	3,0	4,0	5,0	∞	
Gleichförmige Belastung $\mathfrak{p}$ $z_0' =$	$-0{,}01224$	$-0{,}01283$	$-0{,}0130$	$-0{,}01305$	$(1-\varrho^2)\frac{\mathfrak{p}a^4}{Ei}$
Einzellast P $z_0'' =$	$-0{,}0168$	$-0{,}0169$	$-0{,}0170$	$-0{,}0170$	$(1-\varrho^2)\frac{Pa^2}{Ei}$
Verhältnis $\frac{z_0'}{z_0''} =$	0,727	0,758	0,767	0,767	$\frac{\mathfrak{p}a^2}{P}$

Es sei bemerkt, daß die Durchbiegung eines gleichförmig belasteten Balkens $z_0' = -\frac{5}{384} \cdot \frac{p\,a^4}{EJ} = -0{,}1303 \cdot \frac{p\,a^4}{EJ}$ beträgt.

Durch Multiplikation der Koeffizienten A_{mn} mit den zugehörigen sin erhält man folgende Tabellen:

Durchbiegung der quadratischen Platte für gleichförmige Belastung. 78)

$y = 0{,}5\,a$					$-0{,}00407$	$(1-\varrho^2)\frac{\mathfrak{p}a^4}{Ei}$
$0{,}4\,a$				$-0{,}00382$	$-0{,}00390$	
$0{,}3\,a$			$-0{,}00274$	$-0{,}00322$	$-0{,}00332$	
$0{,}2\,a$		$-0{,}00150$	$-0{,}00203$	$-0{,}00238$	$-0{,}00246$	
$0{,}1\,a$	$-0{,}00043$	$-0{,}00080$	$-0{,}00108$	$-0{,}00128$	$-0{,}00132$	
$x =$	$0{,}10\,a$	$0{,}20\,a$	$0{,}30\,a$	$0{,}40\,a$	$0{,}50\,a$	

Durchbiegung der quadratischen Platte bei Einzellast in der Mitte
(mit Hilfe von Gl. 69 u. 76, Abb. 11). 79)

$y = 0{,}5\,a$	$-0{,}00294$	$-0{,}00579$	$-0{,}00841$	$-0{,}01055$	$-0{,}01157$	$(1-\varrho^2)\frac{Pa^2}{Ei}$
$0{,}4\,a$	$-0{,}00278$	$-0{,}00545$	$-0{,}00785$	$-0{,}00973$		
$0{,}3\,a$	$-0{,}00232$	$-0{,}00457$	$-0{,}00646$			
$0{,}2\,a$	$-0{,}00166$	$-0{,}00321$				
$0{,}1\,a$	$-0{,}0085$					
$x =$	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$	

Durchbiegung der unendlich langen ($b = \infty$) Platte bei Einzellast in der Mitte.[1] 81)

$\mathfrak{y} = 2{,}0\,a$	0,0001	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	$(1-\varrho^2)\dfrac{Pa^2}{Ei}$
$1{,}8\,a$	0,0001	0,0002	0,0003	0,0004	0,0004	
$1{,}6\,a$	0,0002	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006	
$1{,}4\,a$	0,0003	0,0005	0,0008	0,0010	0,0011	
$1{,}2\,a$	0,0005	0,0010	0,0014	0,0017	0,0018	
$1{,}0\,a$	0,0009	0,0017	0,0023	0,0027	0,0029	
$0{,}9\,a$	0,0011	0,0022	0,0029	0,0035	0,0036	
$0{,}8\,a$	0,0014	0,0027	0,0041	0,0044	0,0046	
$0{,}7\,a$	0,0018	0,0034	0,0046	0,0055	0,0058	
$0{,}6\,a$	0,0022	0,0041	0,0057	0,0068	0,0071	
$0{,}5\,a$	0,0025	0,0050	0,0070	0,0082	0,0086	
$0{,}4\,a$	0,0032	0,0060	0,0083	0,0098	0,0104	
$0{,}3\,a$	0,0037	0,0070	0,0098	0,0117	0,0124	
$0{,}2\,a$	0,0041	0,0081	0,0112	0,0135	0,0143	
$0{,}1\,a$	0,0045	0,0086	0,0119	0,0144	0,0154	
0	0,0046	0,0090	0,0128	0,0156	0,0170	
$x =$	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$	

Nach Gl. 56) können aus den später für die gleichförmig belastete Platte berechneten Ersatztorsionsmomenten bei verschiedenen β leicht die Durchbiegungen für Einzellast in den Fällen $\beta = 1{,}25$ und $\beta = 2{,}0$ berechnet werden.

2. Momente bei gleichförmiger Belastung.

Die Ersatzmomente sind nach Gl. 47) u. 51) gegeben durch die Formeln für endliches β:

$$\left.\begin{aligned}
(m_x) &= \frac{16\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2}{\pi^4}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{\mu}{\nu\left(\mu^2+\dfrac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin\nu\pi\cdot\frac{y}{b}\\
(m_y) &= \frac{16\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2}{\pi^4\beta^2}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{\nu}{\mu\left(\mu^2+\dfrac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin\nu\pi\cdot\frac{y}{b}\\
(t_x) &= -\frac{16\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2}{\pi^4\beta}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{1}{\left(\mu^2+\dfrac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\cos\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\cos\nu\pi\cdot\frac{y}{b}
\end{aligned}\right\}\quad 82)$$

und nach Gl. 62) für $\beta = \infty$:

$$\left.\begin{aligned}
(m_x) &= \frac{4\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2}{\pi^3}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^3}\left[1-\left(1+\frac{\mu\pi y}{2\,a}\right)e^{-\mu\pi\cdot\frac{y}{a}}\right]\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(m_y) &= \frac{4\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2}{\pi^3}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^3}\left(\frac{\mu\pi y}{2\,a}\right)e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(t_x) &= -\frac{2\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2}{\pi^3}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^3}\left(1+\frac{\mu\pi y}{a}\right)e^{-\mu\pi\cdot\frac{y}{a}}\cdot\cos\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\
(m_{00}) &= \frac{4\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2}{\pi^3}\cdot\sum_\mu\cdot\frac{1}{\mu^3}\left(1-e^{-\frac{\mu\pi y}{a}}\right)\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}
\end{aligned}\right\}\quad 83)$$

[1]) Bei der Berechnung wurde die Beziehung $e^{-\alpha} = \operatorname{Cof}\alpha - \operatorname{Sin}\alpha$ benutzt und die hyperbolischen Funktionen dem Taschenbuch für Bauingenieure entnommen.

Aus der Gleichung für (t_x) geht hervor, daß es in der Mitte der Platte Null ist, da jeder $\cos \mu \cdot \frac{\pi}{2} = 0$. Die dortigen Ersatzmomente sind also Hauptmomente.

In der Ecke treten zwei gleiche Torsionsmomente auf in den rechtwinklig zusammenstoßenden Querschnittsflächen, während $(m_x)^*$ und $(m_y)^*$ Null sind. Es liegen daher die Hauptmomente unter den Richtungen $\varphi_{\mathrm{II}} = 45^\circ$ und $\varphi_{\mathrm{I}} = -45^\circ$ nach den Gleichungen 13), 14), und die Hauptmomente sind $(m_{\mathrm{I}})^* = -(t_x)^*$, $m_{\mathrm{II}}^* = +(t_x)^*$. Das Torsionsmoment ist gleich $\frac{1}{1+\varrho} \cdot (t_x)^*$, und die infolge seiner Zerlegung auftretende Einzellast A^* ist

$$A^* = -\frac{-2}{1+\varrho} \cdot (t_x)^*.$$

Man erhält demnach folgende Tabelle:

Ersatzmomente in der Mitte der Platte (Abb. 12). 88)

	$\beta = 1$	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0	∞	
$(m_x)_0$	0,0368	0,0560	0,0728	0,0861	0,0964	0,1100	0,1172	0,1231	0,1245	0,1250	$(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}\,a^2$
$(m_y)_0$	0,0368	0,0334	0,0281	0,0224	0,0174	0,0100	0,0055	0,0016	0,0004	0	$(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}\,a^2$

Momente in der Ecke $x = 0$, $y = 0$. 89)

	$\beta = 1$	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5
$(t_x)^* = -(m_y)^* = (+m_{\mathrm{II}})^*$	$-0{,}0462$	$-0{,}0556$	$-0{,}0612$	$-0{,}0643$	$-0{,}0659$	$-0{,}0672$
$t_x^* = -m_{\mathrm{I}}^* = +m_{\mathrm{II}}^*$	$-0{,}0462$	$-0{,}0556$	$-0{,}0612$	$-0{,}0643$	$-0{,}0659$	$-0{,}0672$
$A^* =$	$+0{,}0924$	$+0{,}1112$	0,1224	0,1286	0,1318	0,1344

	3,0	4,0	5,0	∞	
$(t_x)^* = -(m_{\mathrm{I}})^* = (+m_{\mathrm{II}})^*$	$-0{,}0674$	$-0{,}0676$	$-0{,}0677$	$-0{,}0677$	$(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}\,a^2$
$t_x^* = -m_{\mathrm{I}}^* = +m_{\mathrm{II}}^*$	$-0{,}0674$	$-0{,}0676$	$-0{,}0677$	$-0{,}0677$	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a^2$
$A^* =$	0,1348	0,1352	0,1354	0,1354	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a^2$

Die dazugehörigen Spannungsmomente ergeben sich nach Gl. 10).

Durch Multiplikation der Koeffizienten A_{mn} mit den zugehörigen sin erhält man die folgenden Werte der Ersatzmomente, aus denen sich die Hauptersatzmomente und deren Richtung nach den Gl. 13 u. 14 berechnen.

Ersatzmomente der quadratischen Platte

$$\frac{b}{a} = \beta = 1.$$

Tafel I u. Abb. 13 u. 14. 90)

$y =$	$x =$	0	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$
$0{,}5\,a$	(m_x)	0	0,0175	0,0278	0,0334	0,0361	0,0368
	(m_y)	0	0,0115	0,0220	0,0299	0,0351	0,0368
	(t_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_{00})	0	0,0290	0,0498	0,0633	0,0712	0,0736
	Θ_{II}	unbest.	90°	90°	90°	90°	unbest.
	(m_I)	0	0,0175	0,0278	0,0334	0,0361	0,0368
	(m_{II})	0	0,0115	0,0220	0,0299	0,0351	0,0368
$0{,}4\,a$	(m_x)	0	0,0169	0,0266	0,0318	0,0344	0,0351
	(m_y)	0	0,0113	0,0215	0,0294	0,0344	0,0361
	(t_x)	— 0,0118	— 0,0112	— 0,0093	— 0,0066	— 0,0035	0
	(m_{00})	0	0,0282	0,0481	0,0612	0,0688	0,0712
	Θ_{II}	45°	52° 30′	52° 40′	50° 10′	45°	0
	(m_I)	0,0118	0,0256	0,0336	0,0373	0,0379	0,0361
	(m_{II})	— 0,0118	0,0026	0,0144	0,0239	0,0309	0,0351
$0{,}3\,a$	(m_x)	0	0,0148	0,0230	0,0274	0,0294	0,0299
	(m_y)	0	0,0108	0,0202	0,0274	0,0318	0,0334
	(t_x)	— 0,0231	— 0,0217	— 0,0181	— 0,0128	— 0,0066	0
	(m_{00})	0	0,0256	0,0432	0,0548	0,0612	0,0633
	Θ_{II}	45°	47° 40′	46° 15′	45°	39° 50′	0
	(m_I)	0,0231	0,0346	0,0398	0,0402	0,0373	0,0334
	(m_{II})	— 0,0231	— 0,0090	0,0034	0,0146	0,0239	0,0299
$0{,}2\,a$	(m_x)	0	0,0116	0,0172	0,0202	0,0215	0,0220
	(m_y)	0	0,0093	0,0172	0,0230	0,0266	0,0278
	(t_x)	— 0,0336	— 0,0314	— 0,0259	— 0,0181	— 0,0093	0
	(m_{00})	0	0,0209	0,0344	0,0432	0,0481	0,0498
	Θ_{II}	45°	46° 05′	45°	42° 45′	37° 20′	0
	(m_I)	0,0336	0,0418	0,0431	0,0398	0,0336	0,0278
	(m_{II})	— 0,0336	— 0,0210	— 0,0087	+ 0,0034	0,0144	0,0220
$0{,}1\,a$	(m_x)	0	0,0065	0,0093	0,0108	0,0113	0,0115
	(m_y)	0	0,0065	0,0116	0,0148	0,0169	0,0175
	(t_x)	— 0,0422	— 0,0390	— 0,0314	— 0,0217	0,0112	0
	(m_{00})	0	0,0130	0,0209	0,0256	0,0282	0,0290
	Θ_{II}	45°	45°	43° 55′	42° 20′	37° 30′	0
	(m_I)	0,0422	0,0455	0,0418	0,0346	0,0256	0,0175
	(m_{II})	— 0,0422	— 0,0325	— 0,0210	— 0,0090	0,0026	0,0115
0	(m_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_y)	0	0	0	0	0	0
	(t_x)	— 0,0462	— 0,0422	— 0,0336	— 0,0231	— 0,0118	0
	(m_{00})	0	0	0	0	0	0
	Θ_{II}	45°	45°	45°	45°	45°	unbest.
	(m_I)	0,0462	0,0422	0,0336	0,0231	0,0118	0
	(m_{II})	— 0,0462	— 0,0422	— 0,0336	— 0,0231	— 0,0118	0

$(1 - \varrho^2)\, p\, a^2$

Ersatzmomente der rechteckigen Platte mit dem Seitenverhältnis

$$\beta = \frac{b}{a} = 1{,}25.$$

Tafel I u. Abb. 13 u. 14. 91)

$y=$		$x=0$	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$
$0{,}5\,b$	(m_x)	0	0,0236	0,0394	0,0490	0,0544	0,0560
	(m_y)	0	0,0104	0,0198	0,0271	0,0318	0,0334
	(t_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_{00})	0	0,0340	0,0592	0,0761	0,0862	0,0894
	Θ_{II}	unbest.	90°	90°	90°	90°	90°
	(m_I)	0	0,0236	0,0394	0,0490	0,0544	0,0560
	(m_{II})	0	0,0104	0,0198	0,0271	0,0318	0,0334
$0{,}4\,b$	(m_x)	0	0,0227	0,0379	0,0469	0,0519	0,0535
	(m_y)	0	0,0103	0,0197	0,0270	0,0316	0,0332
	(t_x)	— 0,0132	— 0,0125	— 0,0106	— 0,0076	— 0,0040	0
	(m_{00})	0	0,0330	0,0576	0,0739	0,0835	0,0867
	Θ_{II}	45°	58° 10′	65° 15′	71° 20′	79° 15′	90°
	(m_I)	0,0132	0,0305	0,0428	0,0494	0,0526	0,0535
	(m_{II})	— 0,0132	0,0025	0,0148	0,0244	0,0308	0,0332
$0{,}3\,b$	(m_x)	0	0,0202	0,0333	0,0411	0,0453	0,0460
	(m_y)	0	0,0102	0,0194	0,0265	0,0309	0,0320
	(t_x)	— 0,0265	— 0,0250	— 0,0211	— 0,0151	— 0,0078	0
	(m_{00})	0	0,0304	0,0527	0,0676	0,0762	0,0780
	Θ_{II}	45°	50° 40′	54° 05′	57° 55′	66° 25′	90°
	(m_I)	0,0265	0,0407	0,0485	0,0506	0,0487	0,0460
	(m_{II})	— 0,0265	— 0,0103	+ 0,0041	0,0170	0,0275	0,0320
$0{,}2\,b$	(m_x)	0	0,0159	0,0251	0,0304	0,0331	0,0341
	(m_y)	0	0,0093	0,0175	0,0236	0,0272	0,0285
	(t_x)	— 0,0391	— 0,0368	— 0,0307	— 0,0218	— 0,0113	0
	(m_{00})	0	0,0252	0,0426	0,0540	0,0603	0,0626
	Θ_{II}	45°	47° 35′	48° 30′	49° 25′	52° 15′	90°
	(m_I)	0,0391	0,0497	0,0522	0,0490	0,0419	0,0341
	(m_{II})	— 0,0391	— 0,0245	— 0,0096	+ 0,0050	0,0185	0,0285
$0{,}1\,b$	(m_x)	0	0,0091	0,0137	0,0164	0,0176	0,0180
	(m_y)	0	0,0069	0,0126	0,0164	0,0184	0,0190
	(t_x)	— 0,0500	— 0,0467	— 0,0374	— 0,0267	— 0,0138	0
	(m_{00})	0	0,0160	0,0263	0,0328	0,0360	0,0370
	Θ_{II}	45°	45° 40′	45° 25′	45°	44° 10′	0
	(m_I)	0,0500	0,0547	0,0505	0,0431	0,0318	0,0190
	(m_{II})	— 0,0500	— 0,0387	— 0,0243	— 0,0103	+ 0,0042	0,0180
0	(m_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_y)	0	0	0	0	0	0
	(t_x)	— 0,0556	— 0,0512	— 0,0412	— 0,0286	— 0,0147	0
	(m_{00})	0	0	0	0	0	0
	Θ_{II}	45°	45°	45°	45°	45°	unbest.
	(m_I)	0,0556	0,0512	0,0412	0,0286	0,0147	0
	(m_{II})	— 0,0556	— 0,0512	— 0,0412	— 0,0286	— 0,0147	0

$(1-\varrho^2)\,p\,a^2$

Ersatzmomente einer rechteckigen Platte mit dem Seitenverhältnis

$$\beta = \frac{b}{a} = 2{,}0.$$

Tafel I u. Abb. 13 u. 14. 92)

$y =$	$x =$	0	0,1 a	0,2 a	0,3 a	0,4 a	0,5 a
0,5 b	(m_x)	0	0,0365	0,0635	0,0823	0,0932	0,0964
	(m_y)	0	0,0054	0,0103	0,0141	0,0166	0,0174
	(t_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_{00})	0	0,0419	0,0738	0,0964	0,1098	0,1142
	Θ_{II}	unbest.	90°	90°	90°	90°	90°
	(m_I)	0	0,0365	0,0635	0,0823	0,0932	0,0964
	(m_{II})	0	0,0054	0,0103	0,0141	0,0166	0,0174
0,4 b	(m_x)	0	0,0353	0,0614	0,0794	0,0899	0,0934
	(m_y)	0	0,0057	0,0109	0,0150	0,0176	0,0187
	(t_x)	— 0,0111	— 0,0106	— 0,0090	— 0,0066	0,0034	0
	(m_{00})	0	0,0410	0,0723	0,0944	0,1075	0,1121
	Θ_{II}	45°	72° 10′	80° 10′	84° 10′	87° 20′	90°
	(m_I)	0,0111	0,0387	0,0630	0,0801	0,0902	0,0934
	(m_{II})	— 0,0111	0,0023	0,0094	0,0143	0,0174	0,0187
0,3 b	(m_x)	0	0,0319	0,0550	0,0703	0,0795	0,0825
	(m_y)	0	0,0068	0,0129	0,0176	0,0207	0,0218
	(t_x)	— 0,0240	— 0,0227	— 0,0193	— 0,0140	— 0,0073	0
	(m_{00})	0	0,0387	0,0679	0,0879	0,1002	0,1043
	Θ_{II}	45°	59° 25′	68° 50′	76°	83°	90°
	(m_I)	0,0240	0,0451	0,0626	0,0699	0,0727	0,0825
	(m_{II})	— 0,0240	— 0,0065	0,0054	0,0142	0,0198	0,0218
0,2 b	(m_x)	0	0,0257	0,0431	0,0548	0,0611	0,0631
	(m_y)	0	0,0079	0,0149	0,0203	0,0236	0,0248
	(t_x)	— 0,0389	— 0,0370	— 0,0312	— 0,0226	— 0,0119	0
	(m_{00})	0	0,0336	0,0580	0,0751	0,0847	0,0879
	Θ_{II}	45°	51° 50′	57° 10′	63° 40′	73° 40′	90°
	(m_I)	0,0389	0,0548	0,0632	0,0660	0,0646	0,0631
	(m_{II})	— 0,0389	— 0,0212	— 0,0052	0,0092	0,0202	0,0248
0,1 b	(m_x)	0	0,0156	0,0249	0,0307	0,0342	0,0350
	(m_y)	0	0,0083	0,0145	0,0183	0,0211	0,0220
	(t_x)	— 0,0561	— 0,0522	— 0,0433	— 0,0309	— 0,0170	0
	(m_{00})	0	0,0239	0,0394	0,0490	0,0553	0,0570
	Θ_{II}	45°	47°	48° 20′	50° 40′	55° 40′	90°
	(m_I)	0,0561	0,0643	0,0633	0,0561	0,0459	0,0350
	(m_{II})	— 0,0561	— 0,0403	— 0,0239	— 0,0071	+ 0,0093	0,0220
0	(m_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_y)	0	0	0	0	0	0
	(t_x)	— 0,0659	— 0,0611	— 0,0505	— 0,0350	— 0,0176	0
	(m_{00})	0	0	0	0	0	0
	Θ_{II}	45°	45°	45°	45°	45°	unbest.
	(m_I)	0,0659	0,0611	0,0505	0,0350	0,0176	0
	(m_{II})	— 0,0659	— 0,0611	— 0,0505	— 0,0350	— 0,0176	0

$(1 - \varrho^2)\, p\, a^2$

Ersatzmomente der rechteckigen Platte, deren eine Seite unendlich lang ist.

$$\beta = \frac{b}{a} = \infty .$$

Tafel II u. Abb. 13 u. 14. 93a)

2,0 a	(m_x)	0	0,0448	0,0796	0,1044	0,1193	0,1242
	(m_y)	0	0,0002	0,0004	0,0006	0,0007	0,0008
	(t_x)	— 0,0009	— 0,0009	— 0,0007	— 0,0006	— 0,0003	0
	(m_{00})	0	0,0450	0,0800	0,1050	0,1200	0,1250
1,0 a	(m_x)	0	0,0405	0,0716	0,0932	0,1063	0,1106
	(m_y)	0	0,0027	0,0052	0,0071	0,0084	0,0088
	(t_x)	— 0,0116	— 0,0108	— 0,0093	— 0,0069	— 0,0036	0
	(m_{00})	0	0,0432	0,0768	0,1003	0,1147	0,1194
0,8 a	(m_x)	0	0,0378	0,0664	0,0861	0,0977	0,1015
	(m_y)	0	0,0040	0,0077	0,0106	0,0125	0,0131
	(t_x)	— 0,0183	— 0,0175	— 0,0163	— 0,0108	— 0,0056	0
	(m_{00})	0	0,0418	0,0741	0,0967	0,1102	0,1146
0,6 a	(m_x)	0	0,0333	0,0576	0,0743	0,0840	0,0870
	(m_y)	0	0,0057	0,0109	0,0149	0,0176	0,0185
	(t_x)	— 0,0284	— 0,0270	— 0,0228	— 0,0166	— 0,0087	0
	(m_{00})	0	0,0390	0,0685	0,0892	0,1016	0,1055
0,5 a	(m_x)	0	0,0300	0,0516	0,0663	0,0741	0,0772
	(m_y)	0	0,0066	0,0127	0,0171	0,0204	0,0210
	(t_x)	— 0,0345	— 0,0328	— 0,0278	— 0,0202	— 0,0103	0
	(m_{00})	0	0,0366	0,0643	0,0834	0,0945	0,0982
0,4 a	(m_x)	0	0,0263	0,0446	0,0566	0,0648	0,0655
	(m_y)	0	0,0073	0,0138	0,0187	0,0205	0,0229
	(t_x)	— 0,0415	— 0,0394	— 0,0333	— 0,0242	— 0,0128	0
	(m_{00})	0	0,0336	0,0584	0,0753	0,0853	0,0884
0,3 a	(m_x)	0	0,0350	0,0360	0,0451	0,0497	0,0518
	(m_y)	0	0,0077	0,0143	0,0193	0,0227	0,0232
	(t_x)	— 0,0494	— 0,0467	— 0,0393	— 0,0282	— 0,0147	0
	(m_{00})	0	0,0292	0,0503	0,0644	0,0724	0,0750
0,2 a	(m_x)	0	0,0158	0,0254	0,0315	0,0341	0,0359
	(m_y)	0	0,0073	0,0134	0,0176	0,0201	0,0210
	(t_x)	— 0,0572	— 0,0539	— 0,0450	— 0,0325	— 0,0165	0
	(m_{00})	0	0,0231	0,0388	0,0491	0,0550	0,0569
0,1 a	(m_x)	0	0,0086	0,0135	0,0166	0,0179	0,0184
	(m_y)	0	0,0055	0,0095	0,0121	0,0136	0,0140
	(t_x)	— 0,0618	— 0,0575	— 0,0475	— 0,0342	— 0,0179	0
	(m_{00})	0	0,0141	0,0230	0,0287	0,0315	0,0324
0	(m_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_y)	0	0	0	0	0	0
	(t_x)	— 0,0680	— 0,0626	— 0,0510	— 0,0358	— 0,0184	0
	(m_{00})	0	0	0	0	0	0
$y =$	$x =$	0	0,1 a	0,2 a	0,3 a	0,4 a	0,5 a

$(1 - \varrho^2)\, p a^2$

Hauptersatzmomente der rechteckigen Platte, deren eine Seite unendlich lang ist.

$$\beta = \frac{b}{a} = \infty.$$

Tafel II u. Abb. 13 u. 14. 93 b)

$y =$	$x =$	0	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$
$2{,}0\,a$	Θ_{II}	45°	88° 40′	89° 30′	89° 40′	89° 50′	90°
	(m_I)	0,0009	0,0448	0,0796	0,1044	0,1193	0,1242
	(m_{II})	— 0,0009	0,0002	0,0004	0,0006	0,0007	0,0008
$1{,}0\,a$	Θ_{II}	45°	75° 65′	82° 10′	85° 30′	87° 50′	90°
	(m_I)	0,0116	0,0434	0,0728	0,0935	0,1066	0,1106
	(m_{II})	— 0,0116	— 0,0002	+ 0,0040	0,0065	0,0082	0,0088
$0{,}8\,a$	Θ_{II}	45°	66° 40′	75° 20′	82°	86° 10′	90°
	(m_I)	0,0183	0,0453	0,0705	0,0876	0,0981	0,1015
	(m_{II})	— 0,0183	— 0,0035	+ 0,0035	0,0090	0,0121	0,0131
$0{,}6\,a$	Θ_{II}	45°	58° 30′	67° 50′	75° 20′	82° 40′	90°
	(m_I)	0,0284	0,0498	0,0670	0,0786	0,0852	0,0870
	(m_{II})	— 0,0284	— 0,0108	+ 0,0014	+ 0,0106	0,0164	0,0185
$0{,}5\,a$	Θ_{II}	45°	54° 50′	62° 30′	70° 20′	79° 20′	90°
	(m_I)	0,0345	0.0531	0,0661	0,0735	0,0760	0,0772
	(m_{II})	— 0,0345	— 0,0165	— 0,0017	0,0099	0,0184	0,0210
$0{,}4\,a$	Θ_{II}	45°	51° 45′	57° 25′	64°	74° 55′	90°
	(m_I)	0,0415	0,0573	0,0660	0,0684	0,0682	0,0655
	(m_{II})	— 0,0415	— 0,0237	— 0,0076	+ 0,0068	0,0170	0,0229
$0{,}3\,a$	Θ_{II}	45°	49° 13′	52° 40′	57° 20′	66° 15′	90°
	(m_I)	0,0494	0,0619	0,0659	0,0632	0,0562	0,0518
	(m_{II})	— 0,0494	— 0,0327	— 0,0155	+ 0,0012	0,0162	0,0232
$0{,}2\,a$	Θ_{II}	45°	47° 10′	48° 40′	51° 10′	56° 30′	90°
	(m_I)	0,0572	0,0657	0,0648	0,0579	0,0454	0,0359
	(m_{II})	— 0,0572	— 0,0425	— 0,0260	— 0,0087	+ 0,0096	0,0210
$0{,}1\,a$	Θ_{II}	45°	45° 50′	46° 10′	46° 50′	48° 20′	90°
	(m_I)	0,0618	0,0645	0,0599	0,0487	0,0338	0,0184
	(m_{II})	— 0,0618	— 0,0505	— 0,0360	— 0,0199	— 0,0022	+ 0,0140
0	Θ_{II}	45°	45°	45°	45°	45°	unbest.
	(m_I)	0,0680	0,0626	0,0510	0,0358	0,0184	0
	(m_{II})	— 0,0680	— 0,0626	— 0,0510	— 0,0358	— 0,0184	0

$(1 - \varrho^2)\, p\, a^2$

3. Mittel- und Eckmomente bei Konzentrierung der Belastung (auf kleine Quadrate wirkend).

Die Platte sei mit der Gesamtlast P belastet, die nacheinander auf Quadrate von verschiedener Seitenlänge von a bis zu $0{,}05\,a$ verteilt werde; das Belastungsquadrat liege symmetrisch zu den Achsen der Platte. Es sei hierbei das Verhalten der Mittel- und Eckmomente verfolgt.

Zur Berechnung der Mittelmomente sei die unter B. 5. abgeleitete allgemeine Beziehung verwendet. Demnach ist bei symmetrischer Teilbelastung über ein Quadrat von der Seitenlänge $\frac{1}{\varepsilon} a$ das Ersatzmoment (m_x) und (m_y) in der Mitte der Platte gleich den entsprechenden Momenten der mit derselben gleichförmigen Belastung total belasteten Platte im Punkt $x = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a}{2}$, $y = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{a}{2}$. Letztere Werte können leicht den Tabellen des letzten Kapitels direkt entnommen oder durch Interpolation gefunden werden. Nur für kleine Werte von $\frac{1}{\varepsilon}$ sind die Werte noch zu rechnen. Man erhält dann folgende Tabelle und nach Ersatz von $\mathfrak{p}$ durch $\frac{P}{a^2} \cdot \varepsilon^2$ die Momente durch die Gesamtlast P ausgedrückt:

Mittelmomente bei Konzentrierung der Belastung auf ein Quadrat $\frac{1}{(\varepsilon a)^2}$.

Abb. 18. 94)

ε	$\frac{1}{\varepsilon}$	(m_x) $\beta = 1{,}0$	1,25	2,0	∞	(m_y) $\beta = 1{,}0$	1,25	2,0	∞	
1	1,0	0,0368	0,0535	0,0739	0,0772	0,0368	0,0332	0,0236	0,0210	
1,25	0,8	0,0344	0,0470	0,0611	0,0648	0,0344	0,0310	0,0236	0,0205	
1,67	0,6	0,0274	0,0352	0,0437	0,0451	0,0274	0,0250	0,0204	0,0193	$(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}\,a^2$
2,5	0,4	0,0172	0,0209	0,0249	0,0254	0,0172	0,0166	0,0145	0,0134	
5	0,2	0,0065	0,0072	0,0084	0,0086	0,0065	0,0056	0,0056	0,0055	
10	0,1	0,00234	.	.	0,00273	0,00234	.	.	0,00192	
20	0,05	0,00068	.	.	0,000835	0,00068	.	.	0,00061	

Ersetzt man $\mathfrak{p}$ durch $\frac{P}{a^2} \cdot \varepsilon^2$, so ergibt sich:

1	1,0	0,0368	0,0534	0,0739	0,0772	0,0368	0,0332	0,0236	0,0210	
1,25	0,8	0,0538	0,0734	0,0945	0,1013	0,0538	0,0484	0,0369	0,0321	
1,67	0,6	0,0762	0,0983	0,1212	0,1253	0,0762	0,0695	0,0567	0,0537	$P(1-\varrho^2)$
2,5	0,4	0,1075	0,1307	0,1556	0,1588	0,1075	0,1038	0,0907	0,0832	
5	0,2	0,1623	0,18	0,21	0,215	0,1623	0,14	0,14	0,1375	
10	0,1	0,234	.	.	0,273	0,234	.	.	0,192	
20	0,05	0,272	.	.	0,334	0,272	.	.	0,244	

Die Reihen konvengieren mit zunehmender Konzentration der Last schlechter, weil die ersten Glieder mit sehr kleinen Sinus multipliziert sind und daher die späteren Glieder erhöhten Einfluß auf das Resultat haben, so daß die Zahlen bei stärkerer Konzentration nur noch Annäherungswerte darstellen.

Bei symmetrischer gleichförmiger Teilbelastung ist das Ersatztorsionsmoment in der Ecke der Platte

$$(t_x) = -\frac{16\,\mathfrak{p}\,a^2(1-\varrho^2)}{\pi^4\beta}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{\cos\mu\pi\cdot\frac{a'}{a}\cdot\cos\nu\pi\cdot\frac{b'}{b}}{\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}$$

nach den Gleichungen 46) und 51), d. h. dasselbe wie bei Vollbelastung im Belastungseckpunkt a', b'. Wie oben entnehmen wir letztere Zahlen den Tabellen des vorigen Kapitels und ersetzen $\mathfrak{p}$ durch $\frac{P}{a^2}\cdot\varepsilon^2$. Für konzentrierte Einzellast ist die Zahl den späteren Berechnungen entnommen bei der quadratischen Platte, bei den anderen geschätzt. Die Ersatztorsionsmomente sind an Größe gleich den unter 45° gegen die x-Achse liegenden Hauptmomenten $(m_{\mathrm{I}})^*$, $(m_{\mathrm{II}})^*$.

Ersatztorsionsmomente in der Ecke der Platte bei Konzentrierung der Belastung auf ein Quadrat mit der Seite $\frac{1}{\varepsilon}\,a$ in der Mitte der Platte.

Abb. 19. 95)

ε	$\frac{1}{\varepsilon}$	$\beta = 1{,}0$	1,25	2,0	∞	
1,0	1,0	— 0,0462	— 0,0500	— 0,0310	0	$(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}\,a^2$
1,25	0,8	— 0,0610	— 0,0607	— 0,0355		
1,67	0,6	— 0,0721	— 0,0695	— 0,0395		
2,5	0,4	— 0,0800	— 0,0757	— 0,0412		
5,0	0,2	— 0,0870	— 0,0800	— 0,0410		
∞	0	— 0,0875	(— 0,0810)	(— 0,0410)		

Die Hauptmomente (m_{I}) unter der Richtung $\varphi_{\mathrm{I}} = -45^\circ$ sind gleich obigen Werten mit positivem Vorzeichen (m_{II}), unter $\varphi_{\mathrm{II}} = 45^\circ$ gleich obigen Werten mit demselben Vorzeichen. Das Torsionsmoment ist $=\frac{(t_x)}{(1+\varrho)}$ und die Eckkraft in $x=0$, $y=0$ gleich $\frac{2\,(t_x)}{1+\varrho}$.

4. Momente bei Einzellast in der Mitte.

Befindet sich eine Einzellast in der Mitte, so berechnen sich die Momente nach Gl. 44) u. 51) zu

$$\left.\begin{aligned}(m_x) &= \frac{4\,P(1-\varrho^2)}{\pi^2\beta}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{\mu^2(-1)^{m+n}}{\left(\mu^2+\frac{\nu_2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\sin\nu\pi\cdot\frac{y}{b}\\ (t_x) &= -\frac{4\,P(1-\varrho^2)}{\pi^2\beta^2}\cdot\sum_\mu\sum_\nu\cdot\frac{\mu\nu(-1)^{m+n}}{\left(\mu^2+\frac{\nu^2}{\beta^2}\right)^2}\cdot\cos\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\cdot\cos\nu\pi\cdot\frac{y}{b}\end{aligned}\right\}\quad 96)$$

Momente der quadratischen Platte bei Einzellast in der Mitte.

Tafel I u. Abb. 20. 101)

$y =$	$x =$	0	0,1 a	0,2 a	0,3 a	0,4 a	0,5 a	
0,5 a	(m_x)						∞	$(1-\varrho^2)\,P$
	(m_y)						∞	
	(t_x)						0	
	(m_{00})						∞	
	Θ_{II}						unbest.	
	(m_I)						∞	
	(m_{II})						∞	
0,4 a	(m_x)					0,1080	0,1735	
	(m_y)					0,1080	0,1017	
	(t_x)					— 0,0499	0	
	(m_{00})					0,2160	0,2752	
	Θ_{II}					45°	90°	
	(m_I)					0,1579	0,1735	
	(m_{II})					0,0581	0,1017	
0,3 a	(m_x)				0,0521	0,0889	0,1100	
	(m_y)				0,0521	0,0505	0,0448	
	(t_x)				— 0,0556	— 0,0371	0	
	(m_{00})				0,1042	0,1394	0,1548	
	Θ_{II}				45°	60° 50′	90°	
	(m_I)				0,1077	0,1115	0,1100	
	(m_{II})				— 0,0035	+ 0,0279	0,0448	
0,2 a	(m_x)			0,0224	0,0400	0,0596	0,0695	
	(m_y)			0,0224	0,0264	0,0254	0,0238	
	(t_x)			— 0,0729	— 0,0581	— 0,0374	0	
	(m_{00})			0,0448	0,0664	0,0850	0,0933	
	Θ_{II}			45°	48° 20′	57° 15′	90°	
	(m_I)			0,0954	0,0915	0,0836	0,0695	
	(m_{II})			— 0,0505	— 0,0251	+ 0,0014	0,0238	
0,1 a	(m_x)		0,0059	0,0132	0,0220	0,0310	0,0335	
	(m_y)		0,0059	0,0095	0,0110	0,0097	0,0088	
	(t_x)		— 0,0824	— 0,0734	— 0,0584	— 0,0309	0	
	(m_{00})		0,0118	0,0227	0,0330	0,0407	0,0423	
	Θ_{II}		45°	45° 45′	47° 40′	54° 25′	90°	
	(m_I)		0,0883	0,0847	0,0749	0,0532	0,0335	
	(m_{II})		— 0,0765	— 0,0621	— 0,0419	— 0,0124	+ 0,0088	
0	(m_x)	0	0	0	0	0	0	
	(m_y)	0	0	0	0	0	0	
	(t_x)	— 0,0875	— 0,0841	— 0,0753	— 0,0583	— 0,0338	0	
	(m_{00})	0	0	0	0	0	0	
	Θ_{II}	45°	45°	45°	45°	45°	unbest.	
	(m_I)	0,0875	0,0841	0,0753	0,0583	0,0338	0	
	(m_{II})	— 0,0875	— 0,0841	— 0,0753	— 0,0583	— 0,0338	0	

Ersatzmomente für Einzellast in der Mitte

für $\frac{b}{a} = \beta = \infty$.

Tafel II u. Abb. 21. 102a)

$(1 - \varrho^2)\, P$

$y =$	$x =$	0	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$
$2{,}0\,a$	(m_x)	0	0,0007	0,0013	0,0018	0,0020	0,0022
	(m_y)	0	— 0,0005	— 0,0009	— 0,0012	— 0,0014	— 0,0016
	(t_x)	0,0019	0,0017	0,0015	0,0016	0,0006	0
	(m_{00})	0	0,0002	0,0004	0,0005	0,0006	0,0006
$1{,}0\,a$	(m_x)	0	0 0089	0,0167	0,0230	0,0271	0,0285
	(m_y)	0	— 0,0045	— 0,0087	— 0,0118	— 0,0139	— 0,0147
	(t_x)	0,0216	0,0205	0,0174	0,0127	0,0067	0
	(m_{00})	0	0,0043	0,0081	0,0112	0,0131	0,0138
$0{,}8\,a$	(m_x)	0	0,0138	0,0262	0,0366	0,0433	0,0455
	(m_y)	0	— 0,0058	— 0,0110	- 0,0158	— 0,0187	— 0,0197
	(t_x)	0,0322	0,0308	0,0263	0,0193	0,0102	0
	(m_{00})	0	0,0080	0,0152	0,020[illegible]	0,0246	0,0258
$0{,}6\,a$	(m_x)	0	0,0207	0,0399	0,0561	0,0674	0,0710
	(m_y)	0	— 0,0059	— 0,0117	— 0,0171	— 0,0214	— 0,0222
	(t_x)	0,0446	0,0428	0,0372	0,0278	0,0149	0
	(m_{00})	0	0,0147	0,0282	0,0390	0,0461	0,0488
$0{,}5\,a$	(m_x)	0	0,0243	0,0475	0,0678	0,0825	0,0880
	(m_y)	0	— 0,0045	— 0,0093	— 0,0146	— 0,0189	— 0,0208
	(t_x)	0,0498	0,0481	0,0426	0,0328	0,0180	0
	(m_{00})	0	0,0197	0,0382	0,0533	0,0636	0,0671
$0{,}4\,a$	(m_x)	0	0,0273	0,0545	0,0803	0,1005	0,1086
	(m_y)	0	— 0,0011	— 0,0037	— 0,0081	— 0,0129	— 0,0154
	(t_x)	0,0526	0,0513	0,0470	0,0379	0,0218	0
	(m_{00})	0	0,0262	0,0509	0,0722	0,0875	0,0933
$0{,}3\,a$	(m_x)	0	0,0290	0,0597	0,0921	0,1214	0,1343
	(m_y)	0	+ 0,0048	+ 0,0073	+ 0,0057	+ 0,0002	— 0,0033
	(t_x)	0,0508	0,0554	0,0492	0,0426	0,0267	0
	(m_{00})	0	0,0338	0,0670	0,0978	0,1215	0,1310
$0{,}2\,a$	(m_x)	0	0,0285	0,0604	0,0988	0,1437	0,1694
	(m_y)	0	0,0133	0,0248	0,0308	0,0263	0,0202
	(t_x)	0,0416	0,0423	0,0442	0,0444	0,0342	0
	(m_{00})	0	0,0418	0,0851	0,1297	0,1700	0,1895
$0{,}1\,a$	(m_x)	0	0,0265	0,0571	0,0948	0,1607	0,2262
	(m_y)	0	0,0219	0,0441	0,0672	0,0783	0,0698
	(t_x)	0,0238	0,0237	0,0292	0,0330	0,0429	0
	(m_{00})	0	0,0483	0,1012	0,1621	0,2390	0,2960
0	(m_x)	0	0,0254	0,0541	0,0907	0,1600	∞
	(m_y)	0	0,0254	0,0541	0,0907	0,1600	∞
	(t_x)	0	0	0	0	0	0
	(m_{00})	0	0,0508	0,1082	0,1804	0,3200	∞

Ersatzhauptmomente für Einzellast in der Mitte.

$$\beta = \frac{b}{a} = \infty$$

Tafel II u. Abb. 19. 102b)

$(1 - \varrho^2)\,P$

$y =$	$x =$	0	0,1 a	0,2 a	0,3 a	0,4 a	0,5 a
2,0 a	Θ_{II}	45°	36°	27°	18°	9°	0
	(m_I)	−0,0019	−0,0018	−0,0017	−0,0016	−0,0016	−0,0016
	(m_{II})	+0,0019	+0,0020	0,0021	0,0022	0,0022	0,0022
1,0 a	Θ_{II}	45°	36°	27°	18°	9° 10′	0
	(m_I)	−0,0216	−0,0194	−0,0176	−0,0160	−0,0150	−0,0147
	(m_{II})	+0,0216	0,0238	0,0256	0,0272	0,0282	0,0285
0,8 a	Θ_{II}	45°	36° 10′	27° 10′	18° 10′	9° 15′	0
	(m_I)	−0,0322	−0,0283	−0,0248	−0,0222	−0,0204	−0,0197
	(m_{II})	+0,0322	0,0363	0,0400	0,0430	0,0450	0,0455
0,6 a	Θ_{II}	45°	36° 20′	27° 35′	18° 40′	9° 20′	0
	(m_I)	−0,0446	−0,0374	−0,0312	−0,0265	−0,0238	−0,0222
	(m_{II})	+0,0446	+0,0522	+0,0594	+0,0655	+0,0698	+0,0710
0,5 a	Θ_{II}	45°	36° 40′	28° 10′	19° 10′	9° 45′	0
	(m_I)	−0,0498	−0,0405	−0,0331	−0,0261	−0,0220	−0,0208
	(m_{II})	+0,0498	+0,0601	+0,0713	+0,0793	+0,0856	0,0880
0,4 a	Θ_{II}	45°	37° 15′	29° 05′	20° 20′	10° 25′	0
	(m_I)	−0,0526	−0,0401	−0,0298	−0,0222	−0,0169	−0,0154
	(m_{II})	+0,0526	+0,0663	+0,0806	+0,0944	0,1045	0,1086
0,3 a	Θ_{II}	45°	38° 50′	29° 10′	22° 30′	11° 55′	0
	(m_I)	−0,0508	−0,0400	−0,0223	−0,0117	−0,0053	−0,0033
	(m_{II})	+0,0508	+0,0737	+0,0893	+0,1095	+0,1269	0,1343
0,2 a	Θ_{II}	45°	39° 55′	34° 05′	26° 15′	14° 55′	0
	(m_I)	−0,0416	−0,0222	−0,0050	+0,0088	+0,0205	+0,0202
	(m_{II})	+0,0416	+0,0640	+0,0902	+0,1208	0,1495	0,1694
0,1 a	Θ_{II}	45°	42° 15′	38° 45′	33° 40′	23°	0
	(m_I)	−0,0238	+0,0004	+0,0207	+0,0465	+0,0600	+0,0698
	(m_{II})	+0,0238	+0,0480	0,0805	0,1155	0,1790	0,2262
0	Θ_{II}	90°	90°	90°	90°	90°	unbest.
	(m_I)	0	0,0254	0,0541	0,0907	0,1600	∞
	(m_{II})	0	0,0254	0,0541	0,0907	0,1600	∞

und für unendliches β zu

$$\left.\begin{aligned}
(m_x) &= \frac{P(1-\varrho^2)}{2\pi} \cdot \sum_\mu \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{\mu} \left(1 + \frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}\right) e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}} \cdot \sin\mu\pi \cdot \frac{x}{a} \\
(m_y) &= \frac{P(1-\varrho^2)}{2\pi} \cdot \sum_\mu \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{\mu} \left(1 - \frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}\right) e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}} \cdot \sin\mu\pi \cdot \frac{x}{a} \\
(t_x) &= \frac{P(1-\varrho^2)}{\pi} \cdot \sum_\mu \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{\mu} \cdot \frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a} \cdot e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}} \cdot \cos\mu\pi \cdot \frac{x}{a} \\
(m_{00}) &= \frac{P(1-\varrho^2)}{\pi} \cdot \sum_\mu \cdot \frac{(-1)^{m+1}}{\mu} \cdot e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}} \cdot \sin\mu\pi \cdot \frac{x}{a}
\end{aligned}\right\} \quad 97)$$

Es ist also

$$\left.\begin{aligned}(m_x) &= \frac{1}{2}(m_{00}) + \frac{P(1-\varrho^2)}{2}\cdot\sum_{\mu}(-1)^{m+1}\cdot\frac{\mathfrak{y}}{a}\cdot e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\\ (m_y) &= \frac{1}{2}(m_{00}) - \frac{P(1-\varrho^2)}{2}\cdot\sum_{\mu}(-1)^{m+1}\cdot\frac{\mathfrak{y}}{a}\cdot e^{-\frac{\mu\pi\mathfrak{y}}{a}}\cdot\sin\mu\pi\cdot\frac{x}{a}\end{aligned}\right\}\quad 97\text{a)}$$

Die Reihen konvergieren im Angriffspunkt der Last nicht und ergeben unendliche Momente. Sie konvergieren jedoch für die anderen Punkte, und zwar um so besser, je weiter man sich von dem Angriffspunkt der Einzellast entfernt.

5. Querkräfte und Auflagerdrücke.

Die Querkräfte lassen sich ebenfalls nach Gl. 52) durch Reihen berechnen, und der größte Teil der untenstehenden Zahlenwerte wurde so ermittelt. Man erhält sie jedoch schneller und hinreichend genau nach Gl. 27):

$$q_n = -\frac{\partial(m_{00})}{\partial n}\cdot\frac{1}{1-\varrho^2},$$

wobei die Werte von (m_{00}) aus den Werten der letzten Tabellen genommen werden und aus deren Differenzen der Differentialquotient ermittelt wird. Es seien dazu folgende Hilfsformeln benutzt (Abb. 7):

Sei eine Funktion y durch einzelne Werte in den Abständen h gegeben, dann ist im Anfangspunkt der Kurve

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{2h}(3\Delta_0 - \Delta_1) \quad . \quad 103)$$

und in einem mittleren Punkt

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_n = \frac{1}{2h}(\Delta_{n-1} + \Delta_n), \quad 104)$$

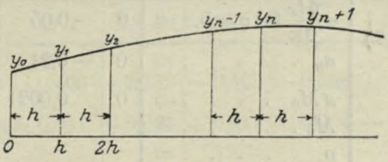


Abb. 7.

wo $\Delta_0 = y_1 - y_0$ und $\Delta_n = \Delta_{n+1} - \Delta_n$.

Die Querkraft am Rande ermittelt sich also immer mit Hilfe von Gl. 103), in der Platte jedoch mit Hilfe von Gl. 104).

Der Auflagerdruck längs des Randes ist

$$a_x = q_x - \frac{\partial t_x}{\partial y} \quad \text{und} \quad a_y = q_y - \frac{\partial t_x}{\partial x},$$

wobei in den berechneten Fällen beide Bestandteile jeweils dasselbe Vorzeichen erhalten.

Der Betrag, um den die Summe der Auflagerdrücke die gesamte Belastung übersteigt, nämlich die Summe aller $-\frac{\partial t_n}{\partial s}$, ist natürlich gleich den in den Ecken wirkenden Einzelkräften entgegengesetzten Vorzeichens A^*. Die Größen $\frac{\partial t_n}{\partial s}$ sollen aus den Randtorsionsmomenten der Tabellen ebenfalls nach Gl. 103) u. 104) ermittelt werden.

Es wurde dann das Moment M_0 in der Mitte des Randbalkens für die lange und kurze Seite ermittelt, unter Voraussetzung der Spannweite b und a bei freier Auflagerung, mit Hilfe der Ordinaten η der Einflußlinie für den

Querkräfte, Auflagerdrücke und stellvertretende Belastung.
Gleichförmige Belastung.

Randseite a (Abb. 20). 105)

β	$x =$	0	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$	
	Ordinate der Einflußlinie $\eta =$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	a
1,0	q_y . . . . . =	0	— 0,17	— 0,25	— 0,30	— 0,33	— 0,34	$\mathfrak{p}\,a$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ . . . . =	0	— 0,071	— 0,096	— 0,111	— 0,116	— 0,120	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	— 0,05	— 0,07	— 0,08	— 0,08	— 0,08	$\mathfrak{p}\,a$
	a_y . . . . . =	0	— 0,22	— 0,32	— 0,38	— 0,41	— 0,42	$\mathfrak{p}\,a$
	ΔM_0 . . . . =	0	0,0022	0,0064	0,0114	0,0164	0,0106	$\mathfrak{p}\,a^3$
	M_0 . . . . . =			$0{,}0470\,\mathfrak{p}\,a^3$				
	p . . . . . =			$0{,}375\,\mathfrak{p}\,a$				
1,25	q_y . . . . . =	0	— 0,16	— 0,25	— 0,31	— 0,34	— 0,34	$\mathfrak{p}\,a$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ . . . . =	0	— 0,070	— 0,113	— 0,132	— 0,143	— 0,150	$\mathfrak{p}\,a\,(1-\varrho)$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	— 0,05	— 0,08	— 0,09	— 0,10	— 0,11	$\mathfrak{p}\,a$
	a_y . . . . . =	0	— 0,21	— 0,33	— 0,40	— 0,44	— 0,45	$\mathfrak{p}\,a$
	ΔM_0 . . . . =	0	0,0021	0,0066	0,0120	0,0176	0,0112	$\mathfrak{p}\,a^3$
	M_0 . . . . . =			$0{,}0495\,\mathfrak{p}\,a^3$				
	p . . . . . =			$0{,}396\,\mathfrak{p}\,a$				
2,0	q_y . . . . . =	0	— 0,16	— 0,26	— 0,32	— 0,35	— 0,36	$\mathfrak{p}\,a$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ . . . . =	0	— 0,077	— 0,131	— 0,164	— 0,175	— 0,177	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	— 0,05	— 0,09	— 0,11	— 0,12	— 0,12	$\mathfrak{p}\,a$
	a_y . . . . . =	0	— 0,21	— 0,35	— 0,43	— 0,47	— 0,48	$\mathfrak{p}\,a$
	ΔM_0 . . . . =	0	0,0021	0,0070	0,0129	0,0188	0,0120	$\mathfrak{p}\,a^3$
	M_0 . . . . . =			$0{,}0528\,\mathfrak{p}\,a^3$				
	p . . . . . =			$0{,}423\,\mathfrak{p}\,a$				
∞	q_y . . . . . =	0	— 0,18	— 0,27	— 0,33	— 0,36	— 0,37	$\mathfrak{p}\,a$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ . . . . =	0	— 0,091	— 0,137	— 0,164	— 0,181	— 0,186	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial x}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	— 0,06	— 0,10	— 0,12	— 0,13	— 0,13	$\mathfrak{p}\,a$
	a_y . . . . . =	0	— 0,25	— 0,37	— 0,44	— 0,49	— 0,50	$\mathfrak{p}\,a$
	ΔM_0 . . . . =	0	0,0025	0,0074	0,0132	0,0196	0,0125	$\mathfrak{p}\,a^3$
	M_0 . . . . . =			$0{,}0552\,\mathfrak{p}\,a^3$				
	p . . . . . =			$0{,}443\,\mathfrak{p}\,a$				

Randseite b (Abb. 21). 106)

β	$y =$	0	$0{,}1\,b$	$0{,}2\,b$	$0{,}3\,b$	$0{,}4\,b$	$0{,}5\,b$	
	Ordinate der Einflußlinie $\eta =$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	b
1,25	q_x . . . . . =	0	− 0,19	− 0,28	− 0,34	− 0,36	− 0,38	$\mathfrak{p}\,a$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial y}$ . . . . =	0	− 0,066	− 0,094	− 0,104	− 0,106	− 0,106	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial y}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	− 0,05	− 0,07	− 0,07	− 0,07	− 0,07	$\mathfrak{p}\,a$
	a_y . . . . . =	0	− 0,24	− 0,35	− 0,41	− 0,43	− 0,45	$\mathfrak{p}\,a$
	$\varDelta M_0$ . . . . =	0	0,0024	0,0070	0,0123	0,0172	0,0112	$\mathfrak{p}\,a\,b^2$
	M_0 . . . . . =				$0{,}0501\ \mathfrak{p}\,a\,b^2$			
	p . . . . . =				$0{,}408\ \mathfrak{p}\,a$			
2,0	q_x . . . . . =	0	− 0,28	− 0,38	− 0,43	− 0,46	− 0,47	$\mathfrak{p}\,a$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial y}$ . . . . =	0	− 0,067	− 0,080	− 0,070	− 0,060	− 0,051	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial y}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	− 0,05	− 0,06	− 0,05	− 0,04	− 0,04	$\mathfrak{p}\,a$
	a_x . . . . . =	0	− 0,33	− 0,44	− 0,48	− 0,50	− 0,51	$\mathfrak{p}\,a$
	$\varDelta M_0$ . . . . =	0	0,0033	0,0088	0,0144	0,0200	0,0128	$\mathfrak{p}\,a\,b^2$
	M_0 . . . . . =				$0{,}0593\ \mathfrak{p}\,a\,b^2$			
	p . . . . . =				$0{,}475\ \mathfrak{p}\,a$			

Gleichförmige Belastung. $\beta = \infty$. Lange Randseite. 106)

β	$y =$	0	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}6\,a$	$0{,}8\,a$	$1{,}0\,a$	$1{,}4\,a$	$1{,}8\,a$	$2{,}4\,a$	
∞	q_x . . . . =	0	− 0,178	− 0,276	− 0,384	− 0,434	− 0,466	− 0,482	− 0,495	− 0,499	− 0,500	$\mathfrak{p}\,a$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial y}$ . . . =	0	− 0,058	− 0,077	− 0,074	− 0,060	− 0,041	− 0,027	− 0,011	− 0,004	− 0,001	$(1-\varrho)\,\mathfrak{p}\,a$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial y}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	− 0,041	− 0,054	− 0,052	− 0,042	− 0,029	− 0,019	− 0,008	− 0,003	− 0,001	$\mathfrak{p}\,a$
	a_x . . . . =	0	− 0,219	− 0,330	− 0,436	− 0,476	− 0,495	− 0,501	− 0,503	− 0,502	− 0,501	$\mathfrak{p}\,a$

Einzellast in der Mitte. Quadratische Platte. (Abb. 22). 107 a)

β	$x =$	0	$0{,}1\,a$	$0{,}2\,a$	$0{,}3\,a$	$0{,}4\,a$	$0{,}5\,a$	
	Einflußlinie $\eta =$	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	a
1,0	q_y . . . . =	0	− 0,122	− 0,233	− 0,328	− 0,389	− 0,380	$\dfrac{P}{a}$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial x}$ . . . =	0	− 0,061	− 0,121	− 0,208	− 0,292	− 0,385	$(1-\varrho)\dfrac{P}{a}$
	$-\dfrac{\partial t_x}{\partial x}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	0	− 0,043	− 0,090	− 0,146	− 0,205	− 0,270	$\dfrac{P}{a}$
	a_y . . . . =	0	− 0,165	− 0,323	− 0,474	− 0,594	− 0,650	$\dfrac{P}{a}$
	$\varDelta \mathfrak{M}_0$ . . . . =	0	0,0016	0,0065	0,0142	0,0238	0,0325	
	M_0 . . . . . =				$0{,}0786\ P\,a$			
	p . . . . . =				$0{,}629\ \dfrac{P}{a}$			

Seitenverhältnis. $\beta = \infty$

Lange Seite.

M_0 berechnet für einen Randbalken, von $\mathfrak{y} = -2{,}0$ bis $+2{,}0\,a$; also von der Spannweite $4\,a$. (Abb. 23.) 107b)

β	$\mathfrak{y} =$	0	0,2 a	0,4 a	0,6 a	0,8 a	1,0 a	1,4 a	2,0 a	
∞	q_x . . . . . =	−0,471	−0,410	0,270	−0,153	−0,084	−0,049	−0,012	0,002	$\frac{P}{a}$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial y}$ . . . =	−0,268	−0,135	+0,005	+0,057	+0,059	+0,046	+0,022	+0,010	$(1-\varrho)\frac{P}{a}$
	$-\frac{\partial t_x}{\partial y}$ für $\varrho = 0{,}3$ =	−0,187	−0,095	+0,004	+0,040	+0,041	+0,031	+0,015	+0,007	$\frac{P}{a}$
	a_x . . . . . =	−0,658	−0,505	−0,266	−0,113	−0,043	−0,018	+0,003	+0,005	$\frac{P}{a}$
	Ordinaten der Einflußlinie $\eta =$	1,0	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,3	0	a { Spannweite $4\,a$
	$\varDelta M_0$ . . . . =	0,1316	0,1818	0,0851	0,0317	0,0103	0,0054	−0,0009	+ 0	Pa
	M_0 . . . . =					0,4450 Pa				
	$p = \frac{8\,M_0}{(4\,a)^2}$ . . =					$0{,}223\,\frac{P}{a}$				

Mittelquerschnitt. Mit $\varDelta M_0$ wurden die Summanden bei der Berechnung von $\mathfrak{M}_0$ bezeichnet. Eine stellvertretende gleichförmige Belastung p, die dasselbe Moment in der Mitte hervorbringen würde, hat die Größe $p = \frac{8\,M_0}{a^2}$ bezw. $\frac{8\,M_0}{b^2}$. Die Größen $\frac{\partial t_n}{\partial s}$, die mit dem Faktor $(1-\varrho)$ behaftet sind, wurden mit dem Wert $\varrho = 0{,}3$ eingesetzt. Auf diese Weise ergeben sich die vorstehenden Tabellen.

6. Anhang.

Die technische Brauchbarkeit der Reihen für eine bestimmte Belastung hängt ganz vom Grade der Konvergenz ab. Und diese wieder ist proportional der Höhe der Potenz der Zahlen m und n im Nenner von A_{mn}. Demnach nimmt die Konvergenz ab von der Reihe für die Durchbiegung bis zur Reihe für die verteilte Belastung je nach dem Grade des entsprechenden Differentialquotienten. Sie nimmt ferner ab mit Konzentrierung der Belastung von gleichförmig verteilter Last bis zur Einzellast und zum belastenden Moment. Bei symmetrischer Belastung fallen für jede Symmetrie zu einer Koordinatenachse die entsprechenden gerade m bezw. n enthaltenden A_{mn} aus. Es sind hier nur Zahlen für symmetrische Belastung berechnet. Jedoch verursacht die Berechnung einer Größe für unsymmetrische Belastung nicht erheblich mehr Arbeit als die der entsprechenden symmetrischen Belastung. Eine systematische Verfolgung der Verteilung der inneren Kräfte für unsymmetrische Belastungen ginge über den Rahmen dieser Arbeit hinaus, bietet jedoch keine Schwierigkeiten.

Im Falle einer schlecht konvergierenden Reihe liegt dies meist daran, daß große Serien positiver und negativer Glieder abwechseln. Geht man bis zum Ende der positiven Serie, so erhält man einen mit Sicherheit zu großen Wert; einen immer noch zu großen Wert, aber innerhalb engerer Grenzen, erhält man, wenn man bis zur Mitte der ersten negativen Serie geht.

Aus den Tabellen sind außer den direkt angegebenen Größen, nach den Beziehungen in B. 5. auch die Größen für symmetrische Teilbelastung in der Mitte, die Durchbiegung bei Einzellast und unter Benutzung der Maxwellschen Vertauschung viele andere zu entnehmen.

D. Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Die Durchbiegung.

Die Durchbiegung in der Mitte der Platte interessiert einesteils im Vergleich zu der des entsprechend belasteten frei aufliegenden Balkens mit der kurzen Spannweite a, andrerseits als Maßstab zur Beurteilung der Steifigkeit der Konstruktion. Die Tabelle 77) zeigt, wie mit zunehmendem β die Durchbiegung z_0' der gleichförmig belasteten Platte wächst bis zum Wert $\frac{5}{384} \cdot \frac{\mathfrak{p} a^4}{Ei}(1-\varrho^2)$, d. h. derjenigen des Balkens mal dem Faktor $(1 - \varrho^2)$.

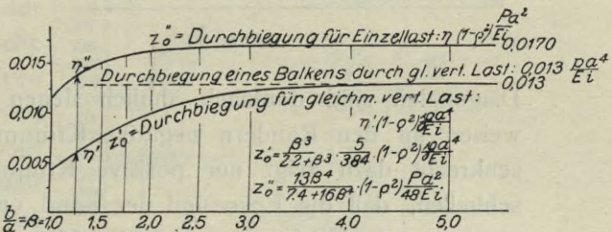


Abb. 8.

Die Kurve z_0' läßt sich wiedergeben durch die Gleichung

$$z_0' = \frac{\beta^3}{2,2+\beta^3} \cdot \frac{5}{384} \cdot \frac{\mathfrak{p} a^4}{Ei}(1-\varrho^2) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad 108)$$

Demnach ist die Durchbiegung der quadratischen Platte nur $\frac{1}{3,2}(1-\varrho^2)$ von der des frei aufliegenden Balkens. Der Faktor $(1 - \varrho^2)$ drückt den Einfluß der Querdehnung aus, welcher demnach die Durchbiegung um 16 vH. für $\varrho = 0,4$ und um 4 vH. für $\varrho = 0,2$, im Mittel also um 9 vH. verringert, selbst bei der unendlich langen, an zwei Rändern aufliegenden Platte. ϱ kann demnach aus Durchbiegungsversuchen von Balken und Platten bestimmt werden.

Die Durchbiegungskurve für Einzellast in der Mitte läßt sich mit Annäherung darstellen durch

$$z_0'' = \frac{13\,\beta^4}{7,4+16\,\beta^4}(1-\varrho^2) \cdot \frac{Pa^2}{48\,Ei}, \quad . \; . \; . \; . \quad 109)$$

die maximal um 4 vH. von den Werten der Tabelle 77) abweicht. Die höhere Potenz von β drückt ein schnelleres Erreichen des Grenzwertes mit zunehmendem β aus.

Die Berechnung der Durchbiegung für sämtliche Punkte der Platte ist sehr häufig ein einfaches Mittel, um sich Klarheit über die Momente zu verschaffen, namentlich da die Reihen für die Durchbiegung am schnellsten konvergieren; werden die z etwas genau und an mehr Stellen der Platte berechnet, so kann man, ähnlich wie bei Berechnung der Querkräfte geschehen, aus den Differenzen die Momente hinreichend genau berechnen, wobei man die Differentiale durch Differenzen ersetzt.

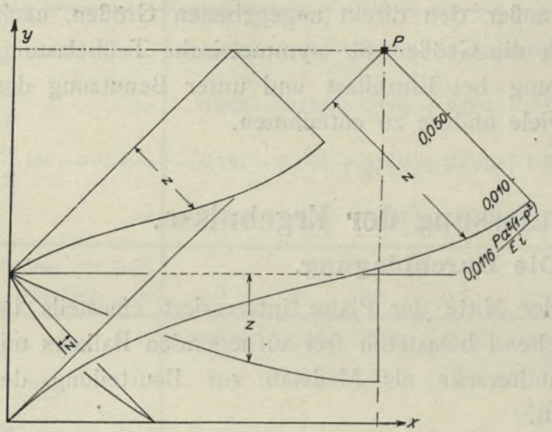


Abb. 9.

Die Durchbiegungen der Platte für Einzellast in der Mitte ergeben nach Tabelle 79) die in folgender Abbildung gezeichneten Durchbiegungslinien nach verschiedenen Richtungen.

Die Biegungslinien der Streifen parallel zu den Diagonalen sind demnach ähnlich denen von eingespannten Balken und weisen an den Rändern negative Krümmungen auf. Der kurze Streifen senkrecht dazu zeigt nur positive Krümmung; es läßt sich also daraus schließen, daß die Ecke und der Rand unter 45° gegen die X-Achse eine einspannende Wirkung gegen die Mitte zu ausübt und dementsprechend dort negative Momente unter 45° gegen die X-Achse zu erwarten sind.

2. Ersatzmomente und Spannungsmomente bei gleichförmiger Belastung.

Es sei an die Definition des Ersatzmomentes

$$(m_n) = Ei \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial n^2}, \quad (t_n) = Ei \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial n\, \partial s}$$

erinnert, welche den Krümmungen und Dehnungen der äußersten Fasern proportional sind, und an die Beziehungen der Spannungsmomente zu den Ersatzmomenten

$$m_x = \frac{1}{1-\varrho^2}\Big[(m_x) + \varrho(m_y)\Big] \quad \text{und} \quad t_x = \frac{1}{1+\varrho}(t_x).$$

Der Verlauf dieser Größen und die Abhängigkeit der Größtwerte vom Seitenverhältnis β soll hier verfolgt werden.

In der Mitte der Platte sind die Torsionsmomente (t_x) Null; die Momente $(m_x)_0$ und $(m_y)_0$ sind also Hauptersatzmomente. Bei der quadratischen Platte ist außerdem $(m_x)_0 = (m_y)_0 = 0{,}0368\, \mathfrak{p} a^2 (1-\varrho^2)$; für $\beta > 1$ ist (m_x) größer als (m_y) und strebt dem Wert $\frac{\mathfrak{p} a^2}{8}(1-\varrho^2)$ zu $\left(\text{beim Balken } \frac{\mathfrak{p} a^2}{8}\right)$, während

$(m_y)_0$ allmählich Null wird. Die Werte für (m_x) und (m_y) aus Tabelle 88) sind in Abb. 10 aufgetragen und lassen sich durch die folgenden Näherungsgleichungen ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} (m_x)_0 &= \frac{\beta^3}{\beta^3 + \frac{7}{3}} (1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{8} \\ (m_y)_0 &= \frac{\sqrt{\beta}}{\beta^3 + \frac{7}{3}} (1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{8} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad 111)$$

Die erste Gleichung ergibt die Werte von Tabelle 88) mit einer Abweichung von $\pm 2{,}5$ vH., die zweite in den Werten $\beta = 1$ bis $\beta = 3$ mit $\pm 4{,}5$ vH. für große β jedoch zu große Werte, was in jenem Gebiet ohne Bedeutung ist.

$(m_x)_0$ steigt demnach rasch vom Wert der quadratischen Platte $0{,}3\,(1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{8}$ an und wird für $\beta = 5$ schon praktisch gleich $(1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{8}$ wie bei der unendlichen Platte. Also auch lange Platten haben in der X-Richtung nur die $(1 - \varrho^2)$ fache Krümmung von einfachen Balken der Spannweite a, wo $1\,\varrho^2$ etwa von 0,84 bis 0,96 schwankt. $(m_y)_0$ fällt erst langsam, dann rascher auf Null ab; d. h., eine sehr lange Platte hat in der Mitte keine Krümmung mehr nach der langen Seite hin.

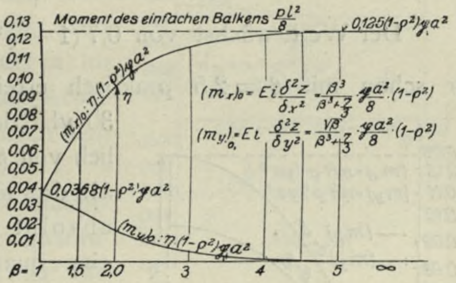


Abb. 10.

Während $(m_x)_0$ tatsächlich das größte in den Achsen vorkommende (m_x) ist, nach Ausweis der Tabellen 90) bis 93), verschiebt sich bei längeren Seitenverhältnissen das Maximum von (m_y) auf der langen Achse gegen den Rand zu und erreicht für $\beta = \infty$ eine Grenzlage und einen Grenzwert. Wir entnehmen aus den Tabellen $(m_y)_{\max}$ und seine Entfernung e, vom Rande auf der großen Achse gemessen:

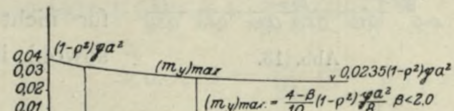


Abb. 11.

$$\left.\begin{array}{llllll} \beta = & 1{,}0 & 1{,}25 & 2{,}0 & \infty \\ (m_y)_{\max} = & 0{,}0368 & 0{,}0334 & 0{,}0250 & 0{,}0235\,(1 - \varrho^2)\,\mathfrak{p} a^2 \\ e = & 0{,}5\,a & 0{,}55\,a & 0{,}35\,a & 0{,}3\,a \end{array}\right\} \quad 112)$$

Diese Werte von $(m_y)_{\max}$ sind in folgender Kurve dargestellt und haben also in der Entfernung 0,5 a bis 0,3 a von der Mitte des kurzen Randes auf der großen Achse statt. Sie lassen sich wiedergeben durch

$$(m_y)_{\max} = \frac{4 - \beta}{10} (1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{8} \; (\beta < 2), \quad . \; . \; . \quad 113)$$

wobei der Wert für $\beta = 2$ auch für größere β beizubehalten ist.

Auch in der Ecke ist der Momentenzustand ein ausgezeichneter Fall. Dort ist $(m_x) = 0$ und $(m_y) = 0$, dagegen sind bedeutende Torsionsmomente vorhanden, ein Zeichen, daß die Richtungen unter $\pm 45°$ gegen die X-Achse durch die Hauptmomente beansprucht werden. Bezeichnen wir die Ersatzmomente der Richtung $+45°$ mit (m_{II}), die der dazu senkrechten Richtung mit (m_{I}), so ist (m_{I}) stets positiv, (m_{II}) ebenso groß und negativ. Die Kurven, die ihre Abhängigkeit von β veranschaulichen, sind nach Tabelle 89) in Abb. 12 aufgetragen und lassen sich etwa nach folgender Näherungsgleichung auf ± 2 vH. Abweichung berechnen:

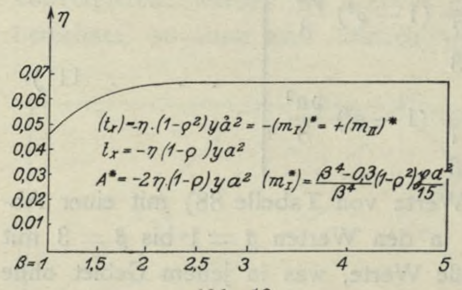


Abb. 12.

$$(m_{\text{I}}^x) = + \frac{\beta^4 - 0{,}3}{\beta^4} (1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{15} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 114)$$

Der Wert wächst von $0{,}7\,(1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{15}$ rasch auf $(1 - \varrho^2) \frac{\mathfrak{p} a^2}{15}$ an, den er schon mit $\beta = 2{,}5$ praktisch erreicht, und der größte Unterschied ist 30 vH. des größten Wertes für kleine β, nämlich von $\beta = 1{,}0$ bis $\beta = 1{,}25$ ist (m_{I}^x) größer als das Mittelmoment $(m_x)_0$ und damit das absolut größte Ersatzmoment der Platte; eine quadratische Platte erleidet demnach in den Ecken die größte Dehnung.

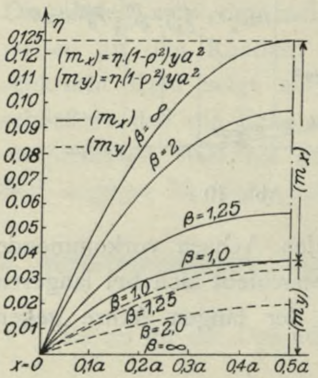


Abb. 13.

In den Abb. 13 u. 14 ist der Verlauf der Ersatzmomente längs der Achsen nach den Tabellen 90) bis 93) aufgezeichnet.

Die Ersatzmomente (m_x) können demnach für nicht zu große Seitenverhältnisse ($\beta \lessgtr 2$) sowohl in den Punkten der großen wie der

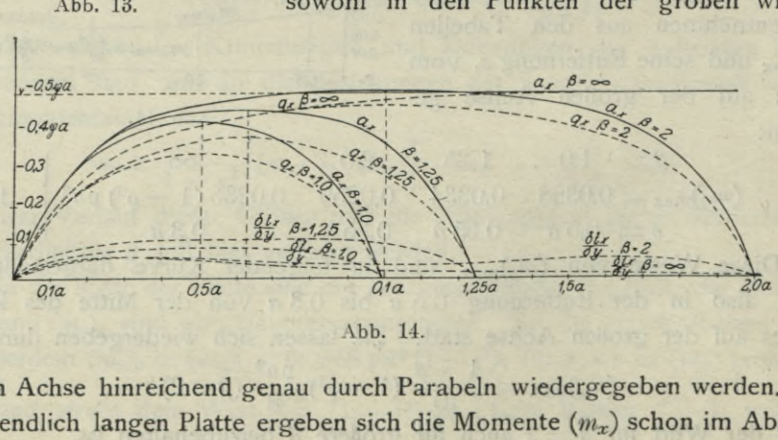


Abb. 14.

kleinen Achse hinreichend genau durch Parabeln wiedergegeben werden. Bei der unendlich langen Platte ergeben sich die Momente (m_x) schon im Abstand

2,0 a vom kurzen Rande nach Tabelle 93a) sehr annähernd gleich denen des gleichförmig belasteten Balkens in allen Punkten, abgesehen vom Faktor $(1-\varrho^2)$, und sind von da an von $\mathfrak{p}$ unabhängig. Die Kurven von (m_x) in den Punkten der großen Achse verlaufen für größer werdende β stark steigend übereinander, so daß bei wachsendem β ein (m_x) in einer festen Entfernung vom kurzen Rand stark zunimmt, z. B. das Moment (m_x) in der Entfernung 0,5 a vom kurzen Rand nimmt die Werte an für

$$\left.\begin{array}{llllll} \beta = & 1{,}0 & 1{,}25 & 2{,}0 & \infty & \\ (m_x) = & 0{,}0368 & 0{,}0535 & 0{,}0739 & 0{,}0772 & (1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2 \end{array}\right\} \quad 115)$$

wird also mehr als doppelt so groß für $\beta = \infty$.

Dementsprechend ist es nicht angängig, eine lange Platte als aus zwei Halbquadraten an den Enden und einem Mittelstück bestehend anzunehmen, wobei man ersteren die Momente der quadratischen Platte, letzteren die des frei aufliegenden Balkens zuteilt, da man für das Halbquadrat viel zu kleine Momente erhält.

Wie die Kurven (m_x) übereinander, verlaufen die Kurven der (m_y) untereinander, und zwar nach ziemlich parabolischen Kurven im Schnitt der kleinen Achse; in der großen Achse verschiebt sich das Maximum jedoch nach dem Rand zu, wie schon oben beschrieben.

Abb. 15 stellt den Verlauf der Hauptersatzmomente im Diagonalschnitt einer quadratischen Platte dar; in diesem Fall ist die Diagonalrichtung durchgehend Richtung von Hauptmomenten.

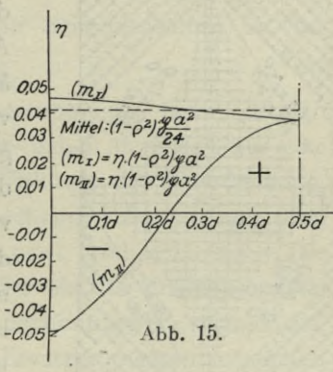


Abb. 15.

Die Ersatzmomente (m_{I}), wo die Richtung I unter -45° zur X-Achse läuft, d. h. senkrecht zur Diagonalen, sind ziemlich gleichmäßig über die Diagonale verteilt und immer positiv. Ihr Mittelwert ist nach Tabelle 90) gleich

$$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\cdot 0{,}0462 + 0{,}0455 + 0{,}0431 + 0{,}0402 + 0{,}0379 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0368\right)$$
$$= 0{,}0416 = \frac{1}{24}\,(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}a^2.$$

Die in der Diagonalenrichtung liegenden Momente (m_{II}) sind in der Ecke negativ und gleich (m_{I}), werden allmählich positiv und erreichen den Wert $+(m_x)_0$. Ihr Mittelwert ist,

$$\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\cdot 0{,}0462 - 0{,}0325 - 0{,}0087 + 0{,}0146 + 0{,}0309 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}0368\right)$$
$$= -0{,}0004 = 0,$$

ziemlich angenähert gleich Null. Der Vorzeichenwechsel erfolgt ungefähr im ersten Viertel der Diagonale, und sie verhält sich also wie ein eingespannter Balken, der in der Mitte Last trägt, in der Nähe der Ecke auf den kurzen übereck gehenden Balken aufgelagert ist und diese dadurch belastet und in der Ecke durch die mehrfach erwähnte auftretende Eckkraft A^* niedergehalten wird. Bei größerem β hat der Diagonalenschnitt keine statische Wichtigkeit mehr, da er nicht mehr Hauptachsenschnitt ist.

In den Beilagen sind auf den Tafeln I u. II die Richtungen und Größe der Hauptmomente durch Kurven dargestellt. Längs des Randes sind die Momente (m_x) und (m_y) Null, daher laufen die Hauptrichtungen unter 45° gegen den Rand um, und zwar sind in den gezeichneten Quadranten der Platte die Richtungen unter — 45° durch positive, die unter + 45° durch negative Ersatzmomente beansprucht. Die Hauptrichtungen 45° sind recht genau vorhanden in dem Gebiet, das durch zwei zusammenstoßende Seiten und die Verbindungslinie der Mitte der kurzen Seite mit dem Punkt $y = 0{,}5\,a$ der langen begrenzt wird, welches Eckgebiet genannt werden soll; ferner bei längeren Platten außerdem unmittelbar längs des Randes. Im Kern der Platte sind die Hauptrichtungen parallel den Achsen. Ähnlich findet man, daß negative Momente (m_{II}) ungefähr vorhanden sind in dem von den Verbindungslinien der Seitenmitten abgeschnittenen Eckgebiet; bei langen Platten ist die Begrenzungslinie eine gekrümmte Kurve, die, von der Mitte der kleinen Seite ausgehend, sich der großen allmählich nähert. Die Ersatzmomente (m_{I}), die in der Ecke zu den übereck laufenden Richtungen gehören, sind immer positiv und haben in der Ecke ein relatives Maximum, dessen Gebiet mit zunehmendem β etwas kleiner wird, sich aber auf das Eckgebiet beschränkt. Das Maximum in der Mitte tritt erst von $\beta > 1$ an auf, sein Gebiet breitet sich mit zunehmendem β auf den größten Teil der Platte aus. Abb. 16 stellt die Richtungen und Vorzeichen von (m_{II}) schematisch dar.

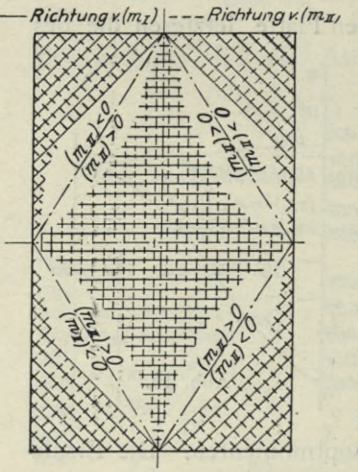


Abb. 16.

Demnach findet die Lastübertragung in der Ecke hauptsächlich unter 45° statt, also in der Richtung der kürzesten Spannweite zwischen den Auflagern. Die Art der Übertragung ist von dem Spannweitenverhältnis ziemlich unabhängig; das größte Eckmoment schwankt nur um 30° von $\beta = 1$ bis $\beta = \infty$ und die entlastende Wirkung der Ecke macht sich bei der quadratischen Platte im höchsten Grade geltend, nimmt mit zunehmendem β rasch ab. Daher das rasche Steigen des Mittelmoments (m_x) auf den Wert des einfachen Balkens, abgesehen vom Faktor $(1 - \varrho^2)$. Während die Einwirkung ein Faktor ist, der die Deformationen der Platte und damit die Ersatzmomente der Platte vermindert gegenüber der einfachen Balkenlage, ist die Wirkung der Querausdehnung, die sich im Faktor $(1 - \varrho^2)$ ausdrückt, ein weiterer. Die Tragwirkung von der Art rechtwinklig sich kreuzender, seitenparalleler Balken findet hauptsächlich in den Achsen statt.

Eine zu beachtende Ersatzspannung ist (σ_z) nach Gl. 34b):

$$(\sigma_z) = -\frac{P}{F} + \frac{\varrho}{1-\varrho}\,\frac{(m_{00})}{w}.$$

$\frac{P}{F}$ kann bei gleichförmiger Belastung vernachlässigt werden; dann wird $(\sigma_z)_0$ in der Mitte für die Werte $\varrho = 0{,}2$ und $0{,}4$ gleich $\frac{1}{4}\cdot\frac{(m_{00})_0}{w}$ bis $\frac{2}{3}\cdot\frac{(m_{00})_0}{w}$ im Mittel $\frac{3}{7}\cdot\frac{(m_{00})_0}{w}\cdot(m_{00})_0$ schwankt zwischen $2\,(m_x)_0$ für $\beta = 1$ und $(m_x)_0$ für $\beta = \infty$, also (σ_z) zwischen $\frac{4}{3}\cdot\frac{(m_x)_0}{w}$ und $\frac{1}{4}\cdot\frac{(m_x)_0}{w}$, für ein mittleres $\varrho = 0{,}3$ zwischen $\frac{6}{7}\cdot\frac{(m_x)_0}{w}$ und $\frac{3}{7}\cdot\frac{(m_x)_0}{w}$. Für $\varrho > 0{,}33$ ist die Ersatzspannung $(\sigma_z)_0$ bei der quadratischen Platte maßgebend, d. h. größer als die Ersatzspannungen $(\sigma_x)_0 = \frac{(m_x)_0}{w}$. Mit wachsendem Seitenverhältnis ist bei den normalen Werten von ϱ $(\sigma_x)_0$ größer als $(\sigma_z)_0$.

Für die Dimensionierung sind die Ersatzmomente bezw. Ersatzspannungen maßgebend. Die Spannungsmomente haben demnach nur eine statische Bedeutung. Vernachlässigt man die Wirkung der Querdehnung, so werden alle Ersatzgrößen gleich den entsprechenden Spannungsgrößen (vergl. Gl. 10), also für $\varrho = 0$ wird $m_x = (m_x)$ usw. und $\sigma_x = (\sigma_x)$. Die daraus berechneten Momente sind durchweg größer als die Ersatzmomente. Die Querkontraktion hat also die Eigenschaft, die Dehnungen zu vermindern.

Die Spannungsmomente setzen sich aus den Ersatzmomenten zusammen nach den Gl. 10: $m_x = \frac{1}{1-\varrho^2}\,[(m_x) + \varrho\,(m_y)]$. Sie sind also bei gleichem Vorzeichen von (m_x) und (m_y) bedeutend größer als die entsprechenden Ersatzmomente, was ausdrückt, daß eine Platte bei Momenten gleichen Vorzeichens kleinere Deformationen erleidet als ein stellvertretender, sich kreuzender Balkenrost, namentlich auch kleinere Dehnungen der äußersten Fasern. Für verschiedene Werte von ϱ erhält man:

Spannungsmomente in Plattenmitte (Abb. 17). 115)

ϱ	$\beta =$	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	2,5	3.0	4,0	5,0	∞	
0	$m_{x_0} =$	0,0368	0,0560	0,0728	0,0861	0,0964	0,1100	0,1172	0,1231	0,1245	0,1250	$\mathfrak{p}a^2$
	$m_{y_0} =$	0,0368	0,0334	0,0281	0,0224	0,0174	0,0100	0,0055	0,0016	0,0004	0	$\mathfrak{p}a^2$
0,2	$m_{x_0} =$	0,0441	0,0627	0,0784	0,0906	0,0998	0,1120	0,1183	0,1234	0,1246	0,1250	$\mathfrak{p}a^2$
	$m_{y_0} =$	0,0441	0,0446	0,0427	0,0396	0,0367	0,0320	0,0289	0,0262	0,0253	0,0250	$\mathfrak{p}a^2$
0,3	$m_{x_0} =$	0,0478	0,0660	0,0812	0,0928	0,1016	0,1130	0,1188	0,1236	0,1246	0,1250	$\mathfrak{p}a^2$
	$m_{y_0} =$	0,0478	0,0502	0,0499	0,0482	0,0463	0,0430	0,0407	0,0385	0,0374	0,0375	$\mathfrak{p}a^2$
0,4	$m_{x_0} =$	0,0515	0,0694	0,0840	0,0951	0,1034	0,1140	0,1194	0,1238	0,1247	0,1250	$\mathfrak{p}a^2$
	$m_{y_0} =$	0,0515	0,0558	0,0572	0,0568	0.0560	0,0540	0,0524	0,0506	0,0502	0,0500	$\mathfrak{p}a^2$
0,5	$m_{x_0} =$	0,0553	0,0727	0,0868	0,0973	0,1051	0,1150	0,1200	0,1239	0,1247	0,1250	$\mathfrak{p}a^2$
	$m_{y_0} =$	0,0553	0,0614	0,0645	0,0650	0,0656	0,0650	0,0641	0,0627	0,0625	0,0625	$\mathfrak{p}a^2$

Bis zum Wert $\beta = 2$ sind die m_{y_0} auch die größten vorkommenden m_y, wenn $\varrho > 0{,}2$; darüber hinaus liegen die Maxima von m_y zwischen Mitte und Rand auf der langen Achse und werden hinreichend genau wiedergegeben durch den Wert von m_{y_0} für $\beta = 2$. In Abb. 17 sind die m_{y_0} daher

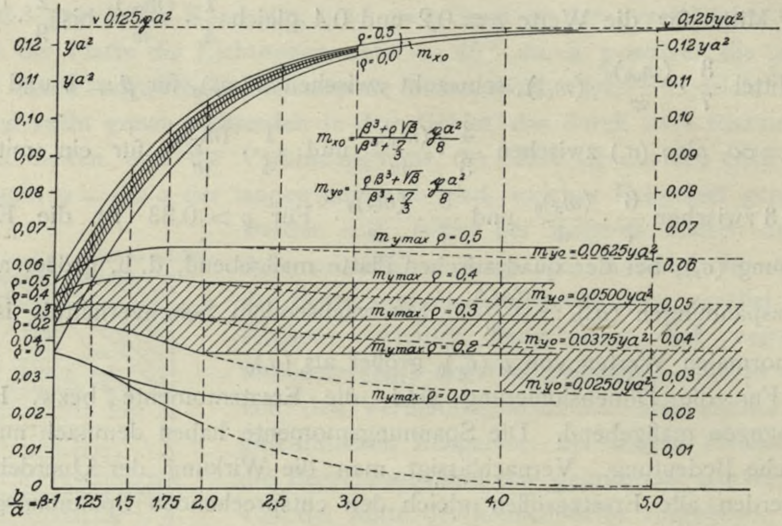


Abb. 17.

für $\beta > 2$ durch gestrichelte Linien wiedergegeben, während $m_{y\max}$ durch eine Horizontale von dem Wert $\beta = 2$ ab dargestellt ist. Aus den früher aufgestellten Annäherungsgleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} m_{x_0} &= \frac{(\beta^3 + \varrho\sqrt{\beta})}{\beta^3 + \frac{7}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{p}a^2}{8} \\ m_{y_0} &= \frac{\varrho\beta^3 + \sqrt{\beta}}{\beta^3 + \frac{7}{3}} \cdot \frac{\mathfrak{p}a^2}{8} \\ &\text{und für } \beta > 2 \text{ und } \varrho > 0{,}2 \text{ wird} \\ m_{y_{\max}} &= \frac{1 + \varrho \cdot 5{,}65}{7{,}3} \cdot \frac{\mathfrak{p}a^2}{8} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad 116)$$

Die Momente m_{x_0} nähern sich mit zunehmendem β, unabhängig von ϱ, dem Wert des einfachen Balkens. Bemerkenswert ist, daß für $\beta = \infty$ in der Y-Richtung ebenfalls Momente auftreten in der Größe $\varrho\, m_x$, d. h. ϱ mal den Momenten des geraden Balkens. Die Erklärung dafür ist die, daß bei einer Beanspruchung der Platte nur durch ein Moment m_x sie infolge der Querausdehnung eine Krümmung nach der Y-Richtung erhalten würde. Das Nichtvorhandensein dieser Krümmung ist nur möglich durch die Wirkung der Momente $m_y = \varrho\, m_x$.

In der Ecke ergeben sich die Momente zu

$$m_{\mathrm{I}}^{x} = (m_{\mathrm{I}})(1-\varrho) = +\frac{\beta^4 - 0{,}3}{\beta^4} \cdot \frac{\mathfrak{p}a^2}{15}(1-\varrho), \quad . \quad . \quad 117)$$

ein Wert, der für die in Betracht kommenden ϱ kleiner ist als das entsprechende Mittelmoment m_{x_0}, bei größerem β jedoch größer werden kann als $m_{y_{\max}}$.

m_x kann über die X-Achse und über die Y-Achse für $\beta < 2$, m_y nur über die X-Achse nach einer Parabel verteilt angesehen werden. Über die Y-Achse nimmt man m_y am besten als konstant an.

Das mittlere Moment im Diagonalschnitt einer Platte läßt sich aus rein statischen Gleichungen bestimmen; es ist für die quadratische Platte $m_{\mathrm{I}_m} = \frac{\mathfrak{p}a^2}{24}$, also unabhängig von ϱ. Da es sich ausdrückt durch die Ersatzmomente nach $m_{\mathrm{I}} = \frac{1}{1-\varrho^2}[(m_{\mathrm{I}}) + \varrho\,(m_{\mathrm{II}})]$, muß das mittlere Ersatzmoment (m_{II}) Null sein und das Mittel von $(m_{\mathrm{I}}) = (1-\varrho^2)\frac{\mathfrak{p}a^2}{24}$, was oben nachgewiesen wurde. Die Verteilung von m_{I} über den Diagonalschnitt wird durch folgende Zahlen gegeben, wobei δ das Verhältnis der Entfernung von der Ecke zur Gesamtlänge der Diagonale ist:

$\delta =$		0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	
$\varrho = 0$	$m_{\mathrm{I}} =$	0,0462	0,0455	0,0431	0,0402	0,0379	0,0368	118)
0,2	$m_{\mathrm{I}} =$	0,0370	0,0390	0,0414	0,0431	0,0441	0,0441	
0,3	$m_{\mathrm{I}} =$	0,0324	0,0357	0,0405	0,0446	0,0472	0,0478	

Diese Werte sind mit $\mathfrak{p}a^2$ zu multiplizieren.

Die Hauptrichtungen der Momente sind dieselben wie die der Ersatzmomente; das Gebiet der negativen Momente ist infolge der Querausdehnung kleiner.

3. Ersatzmomente und Momente bei Konzentrierung der Last.

Mit zunehmender Konzentration der Belastung auf ein symmetrisch zu den Achsen der Platte liegendes Quadrat von der Seitenlänge $\frac{1}{\varepsilon}\cdot a$ wachsen die Momente in Plattenmitte $(m_x)_0$ und $(m_y)_0$, wie Abb. 18 für einige Seitenverhältnisse zeigt. Die Kurven für $(m_x)_0$ befinden sich oberhalb, die für $(m_y)_0$ unterhalb der für die quadratische Platte geltenden Werte. Alle sind innerhalb des Zwischenraums der Kurven von $(m\ )_0$ und $(m_x)_0$ für $\beta = \infty$, welcher mit zunehmendem ε prozentual abnimmt. Für kleine Belastungsflächen, etwa von $\varepsilon = 3$ an, können die Werte der Ersatzmomente annähernd wiedergegeben werden durch

$$\left.\begin{aligned}(m_x)_0 &= \sqrt[3]{\varepsilon}\cdot\frac{5\,\beta^2-1}{4\,\beta^2}\cdot P(1-\varrho^2)\\ (m_y)_0 &= \sqrt[3]{\varepsilon}\cdot\frac{9\,\beta^2+1}{10\,\beta^2}\cdot P(1-\varrho^2)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 119)$$

Mit zunehmendem ε ist keine obere Grenze für die Ersatzmomente festzustellen.

Die Eckmomente nehmen mit zunehmender Konzentration ebenfalls zu. Die nach Tabelle 95) aufgezeichneten Kurven von Abb. 19 zeigen, daß nur bei kleinem β das Anwachsen der Eckmomente beträchtlich ist (etwa 100 vH.), daß aber mit zunehmendem β und ε diese Momente gegen Null konvergieren. Sie können etwa roh wiedergegeben werden durch

$$\left.\begin{aligned}(m_{\mathrm{I}})^* &= \\ \frac{\beta^4 - 0{,}3}{\beta^5} &\cdot \frac{P}{8}(1-\varrho)\end{aligned}\right\} \qquad 120)$$

für konzentrierte Belastung und reichen schon bei kleinem ε nicht an die Mittelmomente heran.

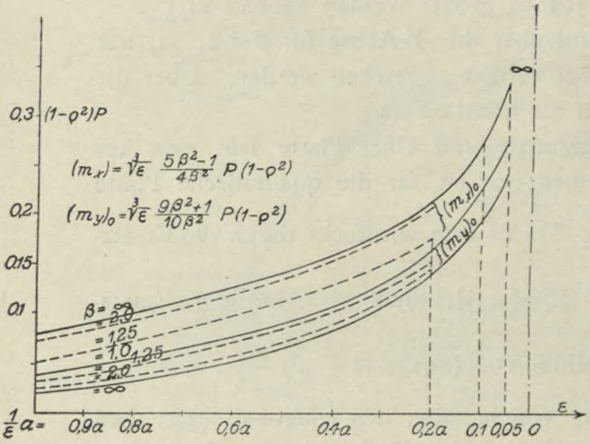


Abb. 18.

Die Spannungsmomente ergeben sich aus den Ersatzmomenten nach den früheren Gleichungen.

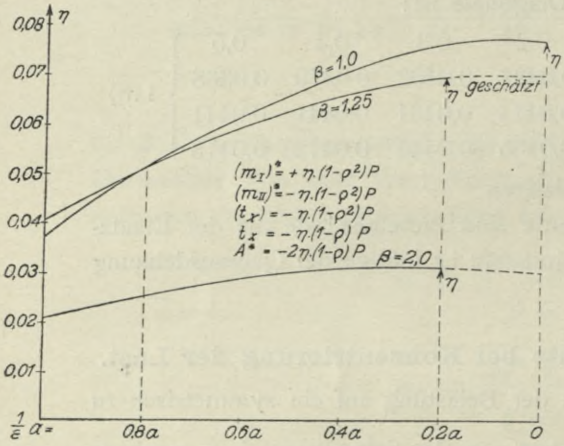


Abb. 19.

Wichtig in diesen Gleichungen ist die Kenntnis der Fläche, auf welche sich eine Last verteilt. Einzellasten werden im allgemeinen nicht unmittelbar auf einer Platte aufsitzen, so daß man mit einer Lastverteilung durch die Zwischenschicht rechnen kann. Zu dieser Zwischenschicht kann man auch noch die halbe Deckenstärke zurechnen, so daß man bei Annahme eines Verteilungswinkels von 45° in der Platte als ε höchstens den Wert $\frac{a}{h}$ einzuführen braucht, falls eine konzentrierte Last unmittelbar auf der Platte aufsitzt.

Zu beachten ist in diesen Fällen die Ersatzspannung

$$(\sigma_z) = -\frac{P}{F} + \frac{\varrho}{1-\varrho}\cdot\frac{(m_{00})}{w},$$

welche unter Einsetzen von $F = \frac{1}{\varepsilon} = a^2$ wird

$$(\sigma_z) = +P\left[-\frac{\varepsilon^2}{a^2} + \frac{\varrho(1+\varrho)}{w}\cdot\sqrt[3]{\varepsilon}\cdot\frac{43\,\beta^2-3}{20\,\beta^2}\right] \quad . \quad . \quad 121)$$

wobei (m_{00}) aus 119 berechnet ist.

Bei größeren Verteilungsflächen entnimmt man die Werte der Ersatzmomente besser aus den Tabellen 90) bis 93) in der schon früher erwähnten Weise. Dehnt sich die Belastung aus über ein Rechteck von der Breite $\frac{1}{\varepsilon} \cdot a$ in der X-Richtung und $\frac{1}{\varepsilon'} \cdot b$ symmetrisch zu den Achsen in der Y-Richtung, so ist das Moment in der Mitte gleich dem Moment bei Vollbelastung im Punkt $x = \frac{a}{2} - \frac{a}{2\varepsilon}$ und $y = \frac{b}{2} - \frac{b}{2\varepsilon'}$.

Für große ε kann man annehmen, daß die Verteilung der Momente über die Platte erfolgt, als ob eine Einzellast in der Mitte angriffe. Für Einzellast konvergieren die Reihen der Momente nicht mehr im Angriffspunkt der Last, da $(m_x)_0$ und $(m_y)_0$ unendlich werden. Für $\beta = 1$ und

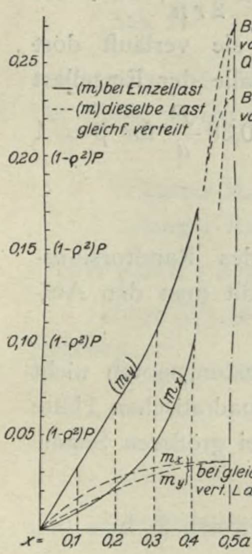


Abb. 20.

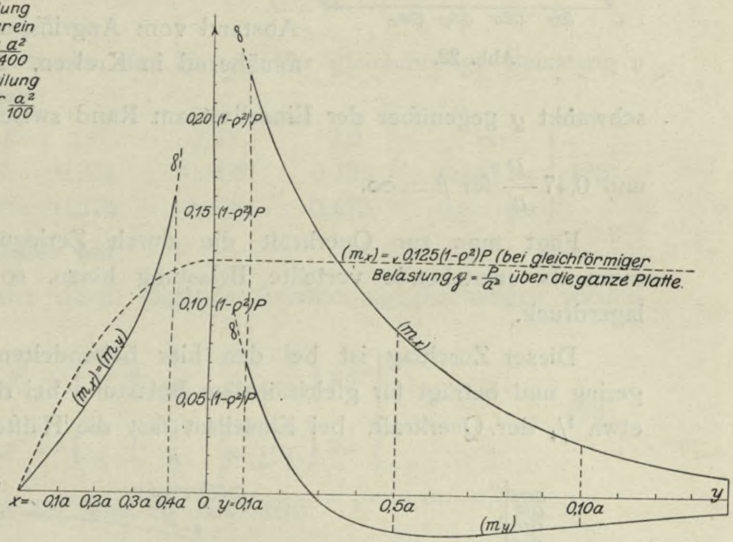


Abb. 21.

$\beta = \infty$ sind die außerhalb der Mitte entstehenden Momente in Tabelle 101) u. 102) ausgerechnet und in den Tafeln I u. II in Richtung und Größe graphisch wiedergegeben. Abb. 20 u. 21 zeigen die Schnitte der Momentenfläche in den Achsen für eine quadratische und eine unendlich lange Platte. In der Nähe des Angriffspunktes der Einzellast verlaufen die Hauptrichtungen in Kreisen und deren Radien. Bei der quadratischen Platte bilden sich die Richtungen unter 45° in den Ecken aus wie bei gleichförmiger Belastung.

Das Gebiet der negativen Momente (m_{II}) ist bei der quadratischen Platte größer geworden gegenüber gleichförmiger Belastung. Bei der unendlichen Platte sind die Momente (m_{II}), die man als Radialmomente bezeichnen könnte, überall negativ, mit Ausnahme eines ellipsenförmigen Gebietes um den Angriffspunkt der Einzellast, welches die Randseiten berührt.

4. Querkräfte und Auflagerdrücke.

Für die schiefe Spannung in der neutralen Fläche ist die Querkraft maßgebend. Diese ist bei gleichförmiger Belastung am Rand der langen Seite am größten. Ihr Maximum schwankt in der Mitte der kurzen Seite zwischen $0{,}34\,\mathfrak{p}a$ und $0{,}37\,\mathfrak{p}a$ für $\beta = 1$ bzw. $\beta = \infty$ und in der Mitte der langen Seite von $0{,}34\,\mathfrak{p}a$ bis $0{,}5\,\mathfrak{p}a$. Ihre Verteilung über die Auflager ist nach den Werten der Tabellen 105) bis 107) in den Abb. 22 u. 23 aufgetragen. Im Falle einer Einzellast ist das Maximum der Querkraft in der Nähe des Angriffspunktes gegeben durch $\frac{P}{2\,r\,\pi}$, wo r der Abstand vom Angriffspunkt; sie verläuft dort annähernd in Kreisen. Im Falle der Einzellast

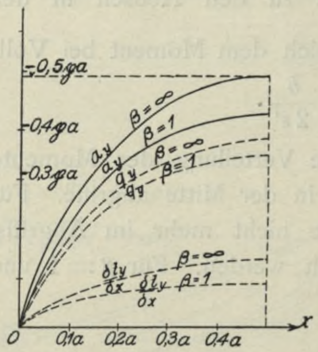


Abb. 22.

schwankt q gegenüber der Einzellast am Rand zwischen $0{,}38\,\frac{P}{a}$ für $\beta = 1$ und $0{,}47\,\frac{P}{a}$ für $\beta = \infty$.

Fügt man zur Querkraft die durch Zerlegung des Randtorsionsmoments entstehende verteilte Belastung hinzu, so erhält man den Auflagerdruck.

Dieser Zuschlag ist bei den hier behandelten Belastungsnoten nicht gering und beträgt für gleichförmige Belastung bei der quadratischen Platte etwa $^1/_4$ der Querkraft, bei Einzellast fast die Hälfte; bei größeren Seiten-

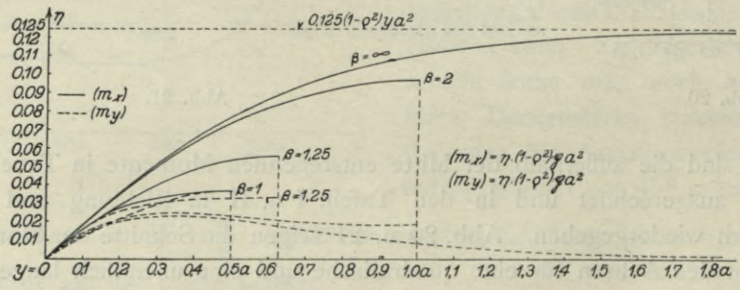


Abb. 23.

verhältnissen ist er auf der langen Randseite geringer, vermindert sogar die Querkraft auf dem langen Rand der unendlichen Platte bei Einzellast in einiger Entfernung von der X-Achse.

In den Abb. 24 u. 25 sind die besprochenen Größen und der sich ergebende Auflagerdruck nach den Ergebnissen der Tabellen 105) bis 107) für Einzellast bei quadratischer und unendlich langer Platte dargestellt.

Wird die Platte an den Rändern durch frei aufliegende Balken von der Spannweite a bzw. b getragen, so kann man nach der gleichförmigen Belastung p fragen, welche dasselbe größte Moment in der Mitte hervor-

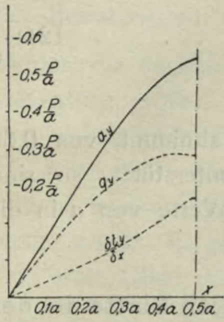


Abb. 24.

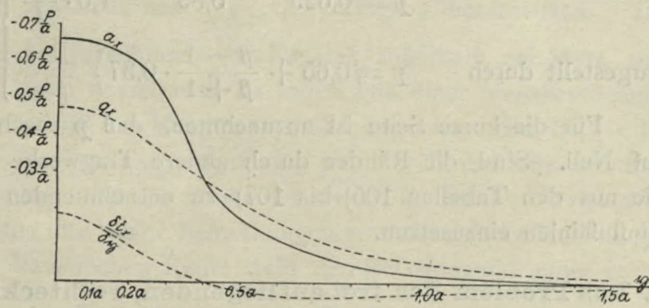


Abb. 25.

bringt als die Auflagerdrücke der Platte. Für gleichförmige Belastung $\mathfrak{p}$ der Platte würde erhalten:

$$\left.\begin{array}{lllll} & \beta = 1{,}0 & 1{,}25 & 2{,}0 & \infty \\ \text{kurzer Rand } p' & = 0{,}375 & 0{,}396 & 0{,}423 & 0{,}443\,\mathfrak{p}a \\ \text{langer Rand } p'' & = 0{,}375 & 0{,}408 & 0{,}475 & 0{,}5\quad \mathfrak{p}a \end{array}\right\} \quad 122)$$

wobei $\varrho = 0{,}3$ angenommen war.

Diese Werte werden durch folgende Annäherungsgleichungen wiedergegeben:

$$\left.\begin{aligned} p' &= \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{15} \cdot \frac{\beta^3 - 1}{\beta^3 + 1}\right) \mathfrak{p}a \\ p'' &= \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{\beta^3 - 1}{\beta^3 + 1}\right) \mathfrak{p}a \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad 123)$$

und sind in den Kurven der Abb. 26 dargestellt.

Bei Einzellast wurde für die quadratische Platte in Tabelle 107) eine stellvertretende Last von $p = 0{,}629\,\frac{P}{a}$ berechnet; für eine unendliche Platte wurde bei einer Stützweite $l = 4\,a$ des frei aufliegenden Randbalkens p zu $0{,}89\,\frac{P}{l}$ berechnet, was wohl dem Wert einer Platte mit dem Seitenverhältnis $\beta = 4$ ziemlich nahekommen wird. Für sehr lange Stützweiten der Randträger wird das Moment in deren Mitte $\frac{Pl}{8}$, deren stellvertretende Belastung also $p = \frac{P}{l}$. Wird also die lange Seite b durch einen Träger von

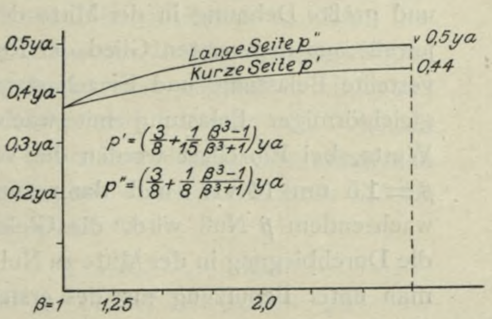


Abb. 26.

der Spannweite b unterstützt, so kann für verschiedene β die maßgebende Belastung p zu folgenden Werten angenommen werden:

$$\left.\begin{array}{llll} & \beta = 1{,}0 & 4{,}0 & \infty \\ & p = 0{,}629 & 0{,}89 & 1{,}0 \cdot \frac{P}{l} \\ \text{dargestellt durch} & p = \left(0{,}65 + \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \cdot 0{,}37\right) \frac{P}{l} & & \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad 124)$$

Für die kurze Seite ist anzunehmen, daß p rasch abnimmt, von 0,63 auf Null. Sind die Ränder durch andere Tragwerke unterstützt, so sind die aus den Tabellen 105) bis 107) zu entnehmenden Werte von a in die Einflußlinien einzusetzen.

5. Das Problem der frei aufliegenden, rechteckigen Platte in der mathematischen und technischen Literatur.

Die Differentialgleichung 24 wurde auf einen Versuch von Sofia Germain hin von Lagrange im Jahre etwa 1813 gefunden. Poisson stellte die Lösungen für polar-symmetrisch belastete Kreisplatten auf, bei denen das Torsionsmoment am Rande Null ist. Die Ausdehnung der Lösung auf andere Umrandungen führte zu Schwierigkeiten in den Randbedingungen, die durch die Arbeiten von Kirchhof, Boussinesq, Lévy, Thomson u. Tait Mitte des 19. Jahrhunderts beseitigt wurden, so daß seit der Zeit die Theorie in der im Abschnitt A dargestellten Form vollendet ist. Eine ausführliche Darstellung und Literaturangaben zur Geschichte findet man in Love, Lehrbuch der Elastizität, deutsch von Timpe. Verlag Teubner 1907. S. 6 u. 33 bis 35 der Einleitung, und Darstellung der Theorie im Kapitel XXII, § 294 bis 298 und § 313 und 314.

Die Lösung für die rechteckige Platte wurde aufgestellt von Navier in einer von ihm nichtveröffentlichten, der Akademie 1820 vorgelegten Arbeit, welche B. de St. Venant in seiner Übersetzung der Theorie der Elastizität fester Körper von Clebsch wiedergibt. Die Übersetzung hat den Titel: Thèorie de l'élasticité des corps solides de Clebsch traduite par Barré de St. Venant et Flamant; Paris, Dunod éditeur 1883. und die rechteckige Platte ist behandelt auf Seite 740 bis 752. Es sind darin die Gleichungen für die Durchbiegung und größte Dehnung in der Mitte der Platte aufgestellt, Gleichungen, welche jeweils aus dem ersten Glied der Reihe bestehen, und zwar für gleichförmig verteilte Belastung und Einzellast. Dies ergibt für die Durchbiegung bei gleichförmiger Belastung mit wachsendem β um 2,5 bis 21 vH. zu große Werte, bei Einzellast werden die Werte für $\beta = 1$ um 1,3 vH. zu klein, für $\beta = 1{,}5$ um 14 vH. und dann um sehr viel, da das erste Glied mit wachsendem β Null wird, die Gleichung also für unendliche lange Platten die Durchbiegung in der Mitte zu Null ergibt. Für die größte Dehnung ε_x erhält man unter Benutzung nur des ersten Gliedes um 11,6 bis 31 vH. zu große Werte, entsprechend $\beta = 1$ und $\beta = \infty$. Für die Dehnung ε_y dagegen Werte, die rasch das Vielfache der tatsächlichen werden. Für Einzellast sind die Dehnungen unbegrenzt im Angriffspunkt, und der durch das erste Glied erhaltene Wert hat keine Bedeutung, er wird schon bei einer Konzentration der Belastung auf ein Quadrat von $\frac{a}{2,5}$ Seitenlänge überschritten. Die Fehler, die entstehen bei Berechnung von Punkten außerhalb der Mitte, sind wesentlich größer. Genau dasselbe ist zu sagen von einer Veröffentlichung von Lorenz in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 57, Nr. 16, 19. April 1913, der die Durchbiegungsfläche zu einer Sinusfläche annimmt und nach einem Arbeitsprinzip die Werte des ersten Gliedes der Navierschen Reihe erhält. Es gelten also obige Bemerkungen von dieser Veröffentlichung. Das erste Glied der Navierschen Reihe stellt den Belastungsfall einer rechteckigen, frei aufliegenden Platte für eine verteilte Last $\mathfrak{p} \cdot \sin \pi \frac{x}{a} \cdot \sin \pi \frac{y}{b}$ dar, die von einer Einzellast oder gleichmäßig verteilten Last weit entfernt ist und nach der Linie $\mu = 1$ der Figur 3 verläuft. Setzt man die entstehende elastische Arbeit gleich der einer gleichförmig verteilten Last $\mathfrak{p}$ oder Einzellast P mit der Durchbiegungsfläche der sinusförmigen Belastung, so können keine Beziehungen zwischen P und $\mathfrak{p}$ und dieser Fläche gefolgert werden.

Eine andere Lösung für rechteckige Platten, die auf mindestens zwei Seiten frei aufliegen, wurde von Lévy in den Comptes rendus, 9. Oktober 1899, t. C. XXIX p. 535 bis 539 gegeben und von Estanave in einer Dissertation: Contribution à l'équilibre élastique d'une plaque rechangulaire . . . Paris, Verlag Gauthier-Villars 1900, ausgearbeitet. Die Reihen scheinen für die zahlenmäßige Berechnung weniger geeignet zu sein, doch wurde die Reihe für $\beta = \infty$ des Abschnitts B. 7 für gleichförmige Belastung aus der auf S. 21 des letzteren Werkes befindlichen Reihe abgeleitet unter Ersetzung von b durch ∞.

Simic hat in einem „Beitrag zur Berechnung der rechteckigen Platten" in der Zeitschrift des österreichischen Architekten- und Ingenieurvereins Nr. 44 1908 den Fall gleichmäßige Belastung bei freier Auflagerung in der Weise behandelt, daß er die Durchbiegungsfläche durch eine dreigliedrige Summe von Ausdrücken darstellt, welche mit ihren zweiten Ableitungen längs des Randes Null werden, und deren 3 Koeffizienten er derart bestimmte, daß die Belastung $\mathfrak{p}$, nach Gl. 24 aus der Durchbiegungsgleichung berechnet, in 5 Punkten gleich den gegebenen war, nämlich in Mitte und den Enden der Mittelachsen. Die Ausdrücke sind Summen von Potenzen in x und y, und die Ableitungen werden etwas kompliziert. Die erhaltenen Werte der Momente in Plattenmitte stimmen mit denen aus Tabelle 115 für $\varrho = 0,3$ erhaltenen recht gut überein. Er erhält für

$\beta = 1$	1,25	1,5	1,75	2,0	
$m_x = 0,0488$	0,0683	0,0850	0,1010	0,1050	$\mathfrak{p}a^2$
$m_y = 0,0488$	0,0517	0,0513	0,0510	0,0490	$\mathfrak{p}a^2$,

während die hier erhaltenen Werte sind:

$$m_x = 0{,}0460 \quad 0{,}0643 \quad 0{,}0797 \quad 0{,}0911 \quad 0{,}1004 \; \mathfrak{p}a^2$$
$$m_y = 0{,}0460 \quad 0{,}0474 \quad 0{,}0463 \quad 0{,}0439 \quad 0{,}0315 \; \mathfrak{p}a^2.$$

Die Vermehrung des Auflagerdrucks infolge des Torsionsmomentes ist nicht in Betracht gezogen; die Werte für die Querkraft sind namentlich für kleine β nicht sehr abweichend. Andere Momente als in Plattenmitte sind nicht betrachtet.

In einem Aufsatz: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik, in dem Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 135, S. 1 u. ff. 1909, stellte Ritz die Lösung von Differentialgleichungen der als Summe von Ausdrücken, die die Randbedingungen erfüllen, und deren Koeffizienten derart zu bestimmen sind, daß die Summe die Differentialgleichung oder ein ihr gleichwertiges Minimumprinzip erfüllt und berechnet auf diese Weise die Durchbiegung einer eingespannten quadratischen Platte.

Das Verfahren führt im Fall der frei aufliegenden Platte auf die Naviersche Reihe. Hager hat in einer Arbeit: Berechnung ebener rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen; München und Berlin, Verlag Oldenburg 1911, eine der Ritzschen ähnliche Methode für verschiedene rechteckige Platten verwendet, ohne allgemeine Resultate zu erzielen.

Die Technik verwendet im allgemeinen Gleichungen, die aus anderen Betrachtungen hervorgehen. Eine v. Bach zugeschriebene Methode besteht darin, aus den für symmetrische Belastung nach Lage und Größe bekannten Auflagerreaktionen das Gesamtmoment im Diagonalschnitt zu bestimmen und es über den Schnitt gleichmäßig zu verteilen. Man kommt so zu den Gleichungen

$$m_{x_0} = \frac{p a^2}{12} \cdot \frac{\beta^2}{1+\beta^2}$$
$$m_{y_0} = \frac{p a_2}{12} \cdot \frac{1}{1+\beta^2}.$$

Es ist nachgewiesen worden, daß die Annahmen im Diagonalschnitt des Quadrats ziemlich berechtigt sind. Im Schnitt von rechteckigen Platten mit größerem Seitenverhältnis sind die Diagonalmomente ohne Interesse, da sie keine Hauptmomente vorstellen. Die Gleichungen liefern für das Quadrat $m_{x_0} = 0{,}0416\,\mathfrak{p}a^2$ und $(m_x)_0 = m_{x_0}(1-\varrho) = 0{,}7\, m_{x_0} = 0{,}0292\,\mathfrak{p}a^2$, während hier gefunden wurde $0{,}0478\,\mathfrak{p}a^2$ bezw. $0{,}0368\,\mathfrak{p}a^2$. Die v. Bachsche Gleichung liefert also schon für das Quadrat zu kleine Werte, die aber für $\beta > 1$ (relativ noch kleiner werden), auch für die unterstzulässige Grenze von ϱ, nämlich $\varrho = 0{,}2$ bedeutend kleiner als die gefundenen Momente der Tabelle 115 bleiben. Für $\beta = 2$ ergibt die v. Bachsche Gleichung $m_{x_0} = 0{,}0667\,\mathfrak{p}a^2$, während das kleinste m_{x_0} für $\varrho = 0 = 0{,}0964\,\mathfrak{p}a^2$ ist. Versieht man die Gleichung für m_{x_0} mit dem Berichtigungsfaktor $1 \cdot 12$, wie er angibt, so kommt man den Verhältnissen der quadratischen Platte nahe, doch für $\beta > 1$ bleiben die Momente immer noch zu klein.

Die meisten anderen Arbeiten über Platten ersetzen diese durch sich kreuzende Balkenlagen von einem oder mehreren Balken und berechnen die gegenseitigen Auflagerdrücke aus den Bedingungen, daß die Durchbiegungen in den Kreuzungspunkten die gleichen sein müssen. So die sogenannte Christophesche Formel:

$$m_{x_0} = \frac{\mathfrak{p} a^2}{8} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta} \cdot 4}$$

$$m_{y_0} = \frac{\mathfrak{p} a^2}{8} \cdot \frac{1}{1 + \beta^4}.$$

Sie ergibt für das Spannungsmoment der quadratischen Platte $0{,}0625\,\mathfrak{p} a^2$, nach Tabelle 115 ein recht hoher Wert; für $\beta = 2$ ergibt sich

$$m_{x_0} = 0{,}1175\,\mathfrak{p} a^2, \quad m_{y_0} = 0{,}0074\,\mathfrak{p} a^2.$$

Die Momente m_{x_0} werden demnach wesentlich zu groß, namentlich für kleine β (20 bis 30 vH.). Die Momente m_{y_0} jedoch konvergieren, wie bei fast allen technischen Gleichungen, gegen Null, während sie infolge der Querausdehnung nicht kleiner als $\varrho\, m_{x_0}$ werden können.

Nach den schweizerischen Bestimmungen für Eisenbeton ist das Moment nach der Schmalseite zu berechnen mit einer Belastung

$$p' = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad p'' = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot \mathfrak{p}.$$

Dies ergibt für freie Auflagerung

$$m_{x_0} = \frac{\mathfrak{p} a^2}{8} \cdot \frac{\beta^2}{1 + \beta^2} \quad \text{und} \quad m_{y_0} = \frac{\mathfrak{p} a^2}{8} \cdot \frac{1}{1 + \beta^2}$$

und für das Quadrat denselben Wert wie die Christophesche Gleichung, also etwas reichlich viel. Die Gleichungen sollen nur bis zu $b < 1{,}5\,a$ benutzt werden; sie ergeben für diesen Fall: $0{,}0867\,\mathfrak{p} a^2$ und $0{,}385\,\mathfrak{p} a^2$. Der erstere Wert ist etwas zu groß, der letztere zu klein, jedoch nur wenig.

Alle die erwähnten Gleichungen treffen für das Moment nach der langen Seite auch nicht annähernd, da sie gegen Null konvergieren, für das Moment nach der kurzen Seite ergibt das Mittelmoment der Diagonale zu kleine, die anderen Gleichungen zu große Werte.

In einer Arbeit „Berechnung der gekreuzt armierten Eisenbetonplatte und deren Aufnahmeträger", Dissertation, auch erschienen unter den Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons, hat Bosch die Belastung der Randträger ermittelt, indem er die Platte durch einen Rost den Seiten paralleler Balken ersetzte. Die stellvertretende Belastung der Randträger wird dort für den längeren Träger kleiner, für den kürzeren größer gefunden als hier.

In der richtigen Erkenntnis, daß die Tragrichtungen einer Platte in der Ecke unter 45° gegen die Seiten geneigt sind, hat Danusso in Veröffentlichungen der Zeitschrift „Il cemento“ den seitenparallelen Balken des Rostes noch übereck laufende hinzugefügt; die Arbeit ist von v. Bronneck in den Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Eisenbetons, Heft XXI (1913) veröffentlicht. Es seien hier die Diagramme der Mittelmomente und stellvertretenden Belastung der Aufnahmeträger betrachtet. Die Momente nach der kurzen Seite sind durchweg wesentlich (25 vH.) kleiner als die hier gefundenen, während die Momente nach der langen Seite für mittlere ϱ den Sachverhalt ziemlich treffen. Die stellvertretende Belastung für die Langseite ist dort ebenfalls kleiner ausgefallen als in den Tabellen 105 bis 107. Die für Einzellast gefundenen Werte haben keine große Bedeutung, da sie, wie konstatiert, sehr von der Konzentration der Last abhängen und keine obere Grenze haben.

Die in der technischen Literatur ausgerechneten Momente sind Spannungsmomente, und die Grenze der aus ihnen sich ergebenden Spannung ist gewöhnlich der aus dem Zugversuch mit $n$facher Sicherheit abgeleitete Wert. Da die Spannungsmomente bedeutend größer sind als die Ersatzspannung, bleiben auch die oben erwähnten zu kleinen Werte der m_x noch häufig über dem wirklichen Ersatzmoment. Es geht dann natürlich nicht an, die Grenze für die entsprechende Spannung σ höher zu setzen mit Rücksicht auf die günstige Wirkung zweier Spannungen in zueinander rechtwinkligen Ebenen mit gleichem Vorzeichen. Die hohen Eckmomente und die Ersatzspannung (σ_z) wurden bis jetzt in der Literatur nicht beachtet.

Die Randbalken mit einer zu kleinen ersetzenden Belastung zu berechnen, ist unzweckmäßig, da infolge deren Durchbiegung dann die Plattenmomente größer werden und größere Dehnungen erleiden als vorgesehen.

Die Festigkeitsgefahr wurde in dieser Arbeit nach der Größe der Ersatzspannung beurteilt, die sich ergibt nach

$$(\sigma_x) = \sigma_x - \varrho\,(\sigma_y + \sigma_z).$$

Die Mohrsche Hypothese sowie die der größten Schubspannung $\tau = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ wurden nicht in Betracht gezogen, da für spröde Stoffe die Gültigkeit der Hypothese der größten Dehnung bereits bestätigt ist, für mehr plastische dagegen die Versuche nicht ausreichen, um eine der drei Hypothesen als den anderen überlegen erscheinen zu lassen; jedoch läßt sich jede Kombination von Spannungen leicht durch die Ersatzgrößen ausdrücken. (Siehe hierzu v. Karman in den Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 118, 1912: „Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck“.

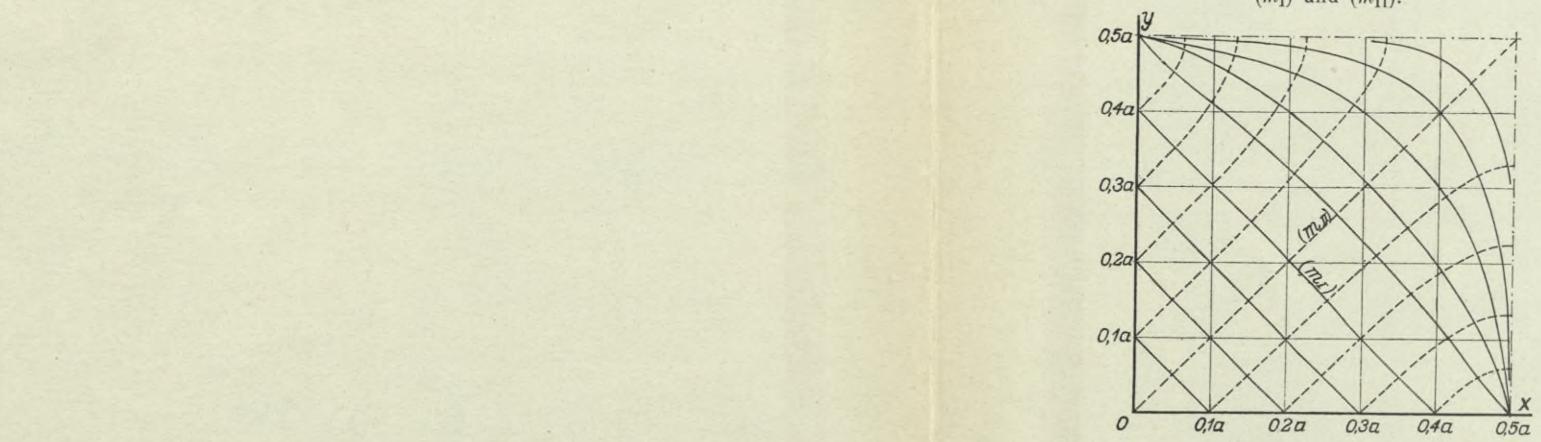
Kurz vor Drucklegung der Arbeit kam mir eine Dissertation von Darmstadt von Dr. ing. Hencky: „Der Spannungszustand rechteckiger Platten" zu Gesicht, welche die frei aufliegende und eingespannte Platte behandelt. Statt der Navierschen Reihe, die Ausdrücke benutzt, welche die Randbedingungen streng erfüllen, deren Summe aber nur annähernd dem vorgeschriebenen Belastungszustand entspricht, wurden dort Funktionen benutzt, welche zwar die Differentialgleichung streng erfüllen, deren Summe aber den Randbedingungen nur annähernd entspricht. Der Einfluß der Belastungen wird durch partikuläre Integrale ausgedrückt. Die rasche Konvergenz dieser Reihen wird jedoch in den meisten Fällen verteilter Lasten durch die einfachere Form der Navierschen Reihe ausgeglichen. Der in beiden Arbeiten vorkommende Teil der Zahlenwerte zeigte eine gute Übereinstimmung.

Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

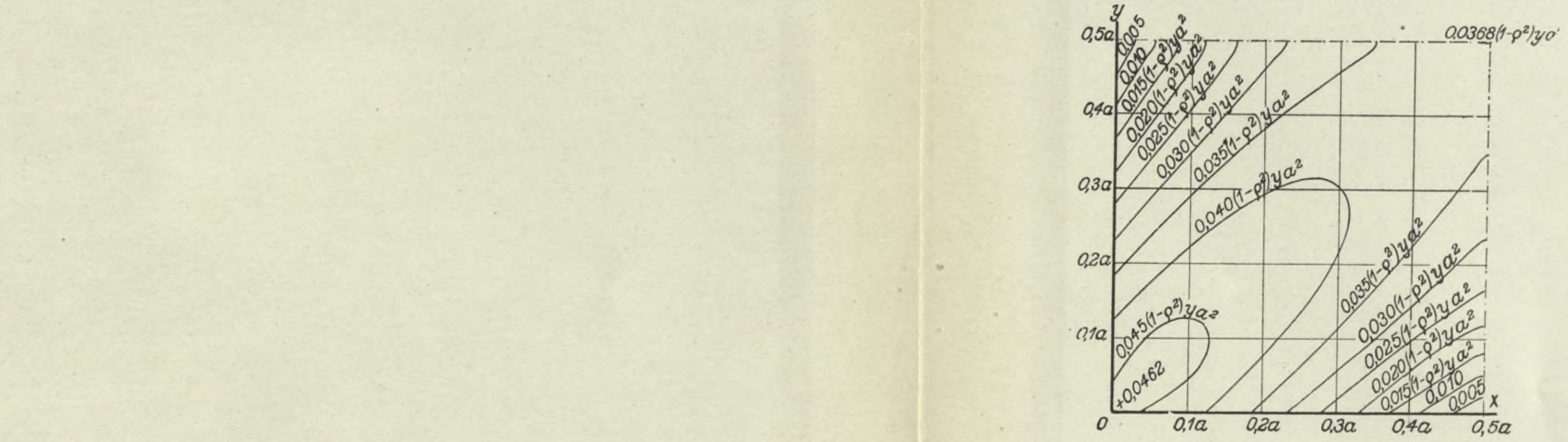
Richtung und Größe der Hauptersatzmomente rechteckiger Platten $\left[(m) = Ei\,\frac{\partial_z^2}{\partial n^2}\right]$.

Quadratische Platte bei gleichförmiger Belastung $\mathfrak{p}$.

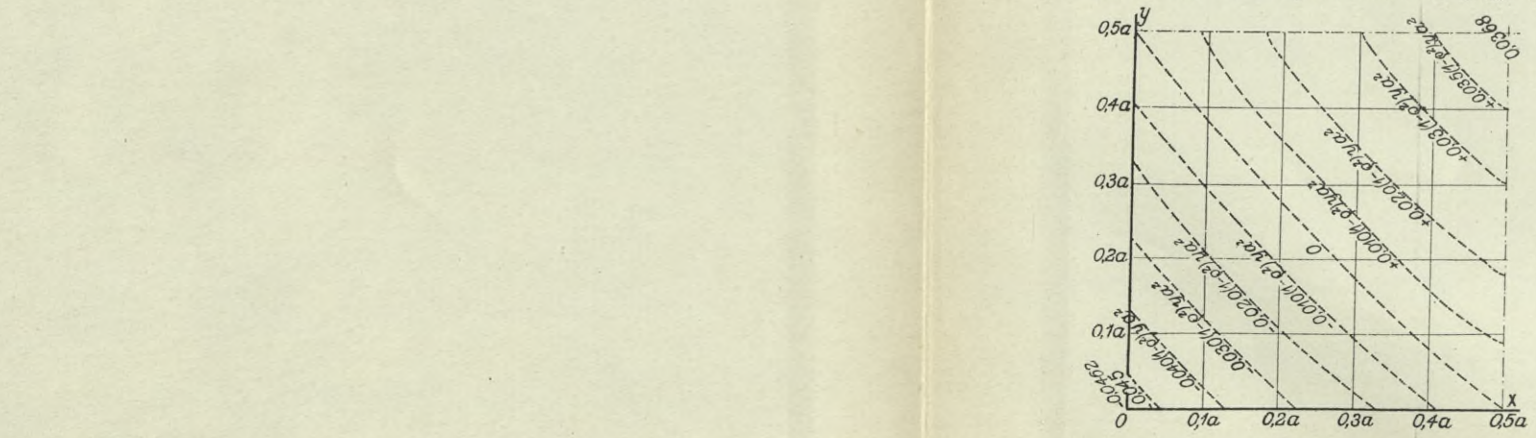
Ia. Richtungen der Hauptersatzmomente (m_{I}) und (m_{II}).



Ib. Größe der Hauptersatzmomente (m_{I}).

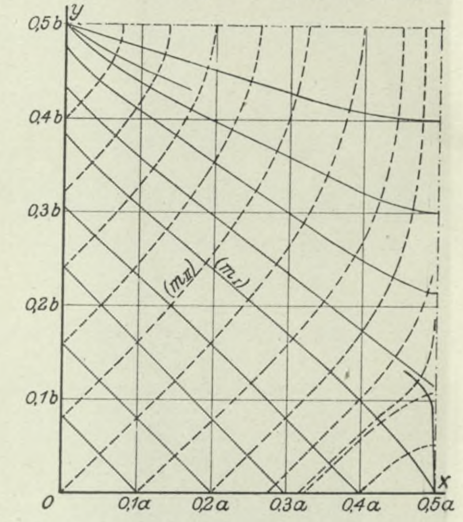


Ic. Größe der Hauptersatzmomente (m_{II}).

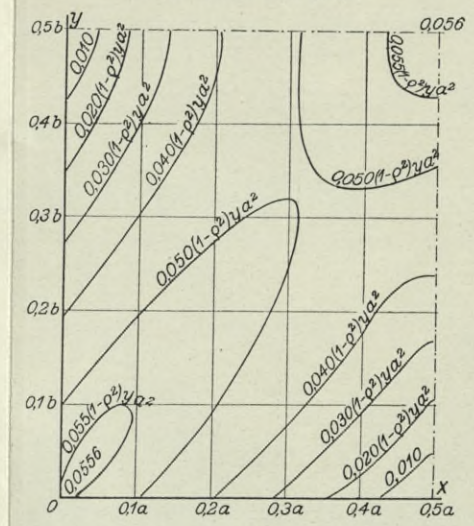


Platte mit dem Seitenverhältnis $\frac{b}{a} = \beta = 1{,}25$ bei gleichförmiger Belastung $\mathfrak{p}$.

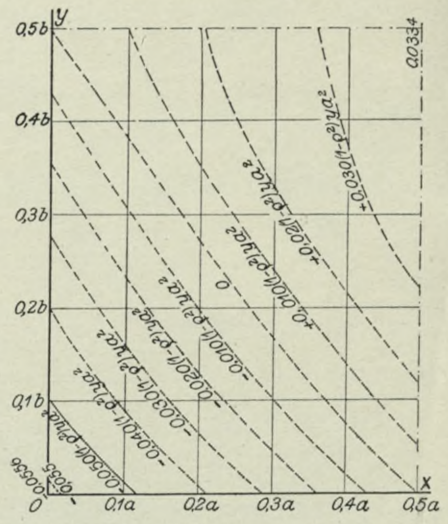
IIa. Richtungen von (m_{I}) und (m_{II}).



IIb. Größe von (m_{I}).

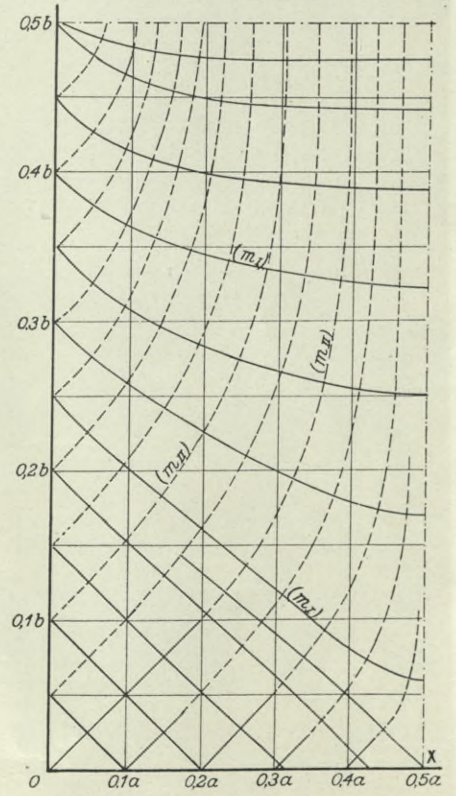


IIc. Größe von (m_{II}).

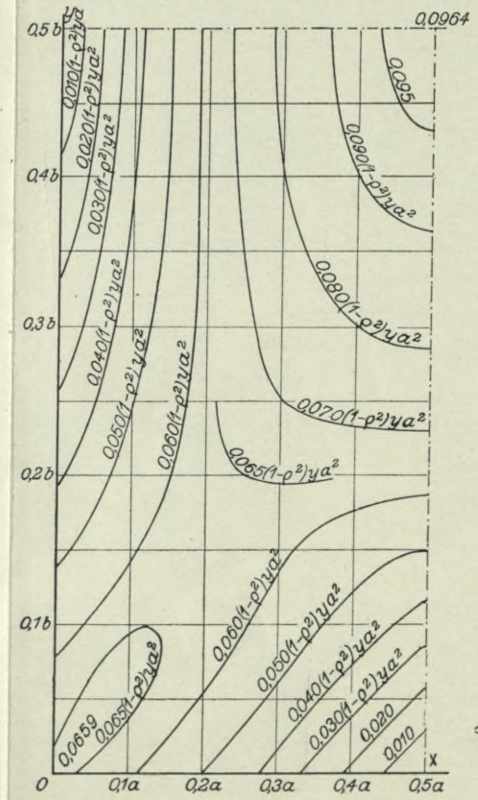


Platte mit dem Seitenverhältnis $\frac{b}{a} = \beta = 2{,}0$ bei gleichförmiger Belastung $\mathfrak{p}$.

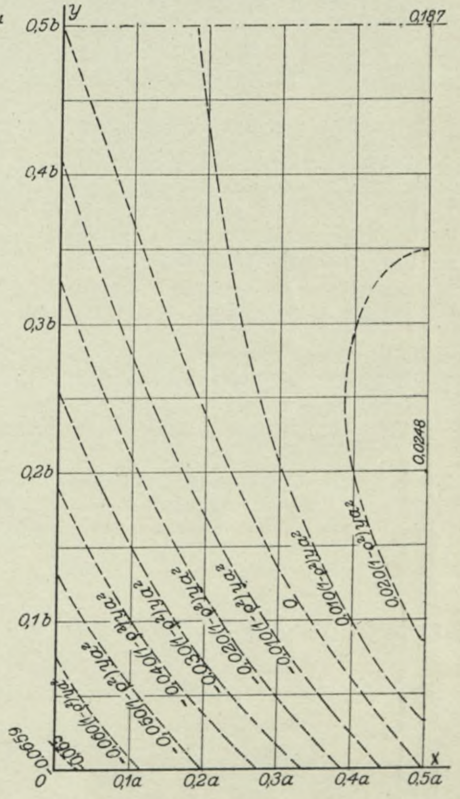
IIIa. Richtungen von (m_{I}) und (m_{II}).



IIIb. Größe von (m_{I}).

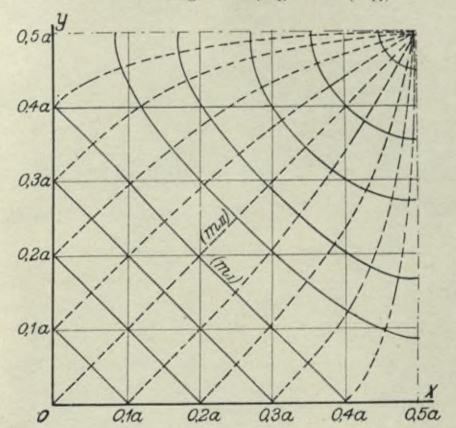


IIIc. Größe von (m_{II}).

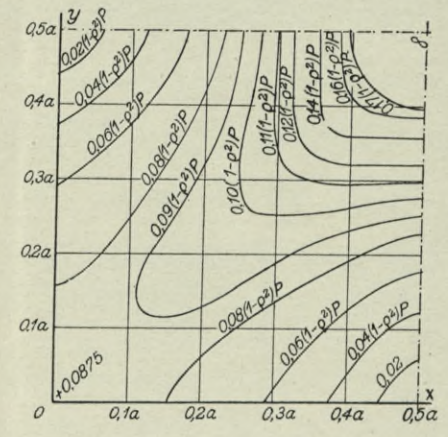


Quadratische Platte bei Einzellast P in der Mitte.

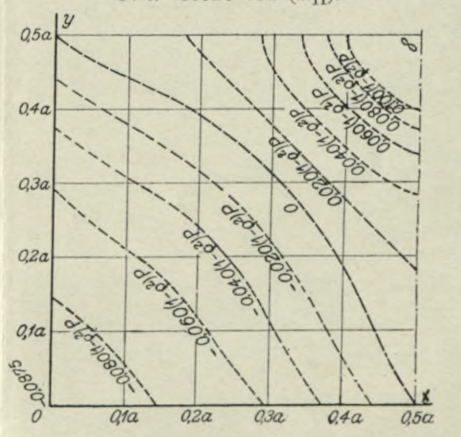
IVa. Richtung von (m_{I}) und (m_{II}).



IVb. Größe von (m_{I}).



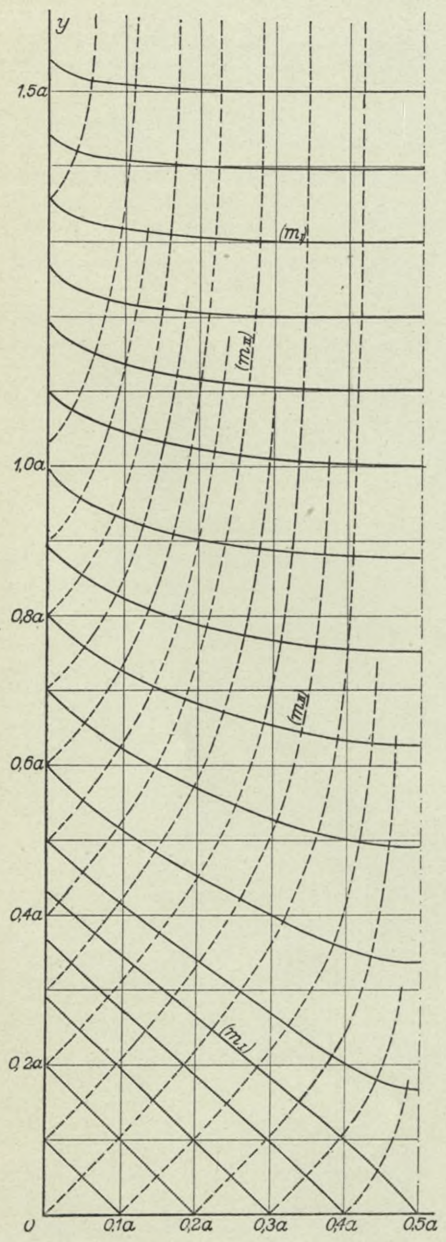
IVc. Größe von (m_{II}).



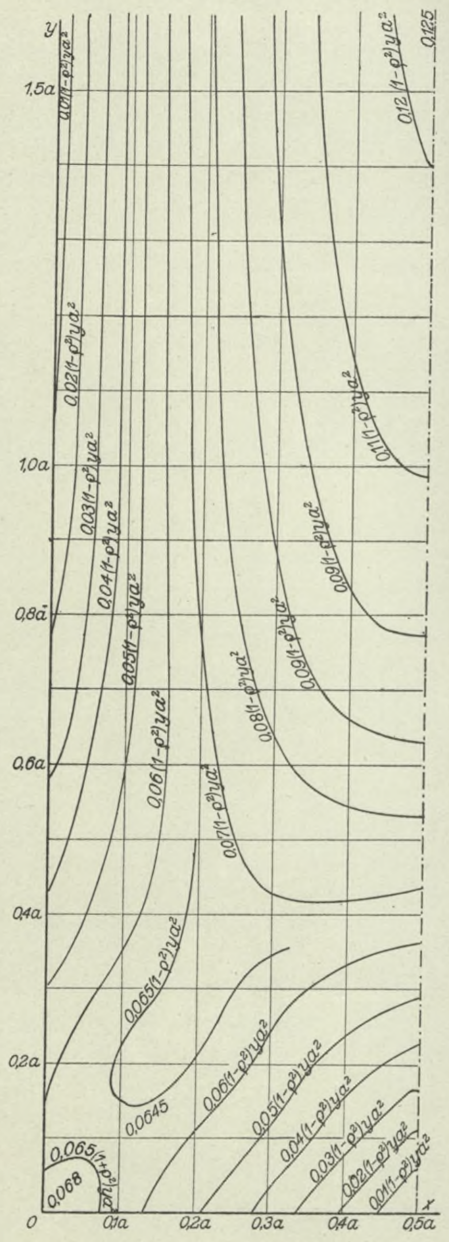
Anmerkung: In der Beschriftung der Kurven ist zu lesen: $(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}\,a^2$ statt $(1-\varrho^2)\,\gamma\,a^2$.

Richtung und Größe der Hauptersatzmomente für die unendliche Platte bei gleichförmiger Belastung $\mathfrak{p}$.

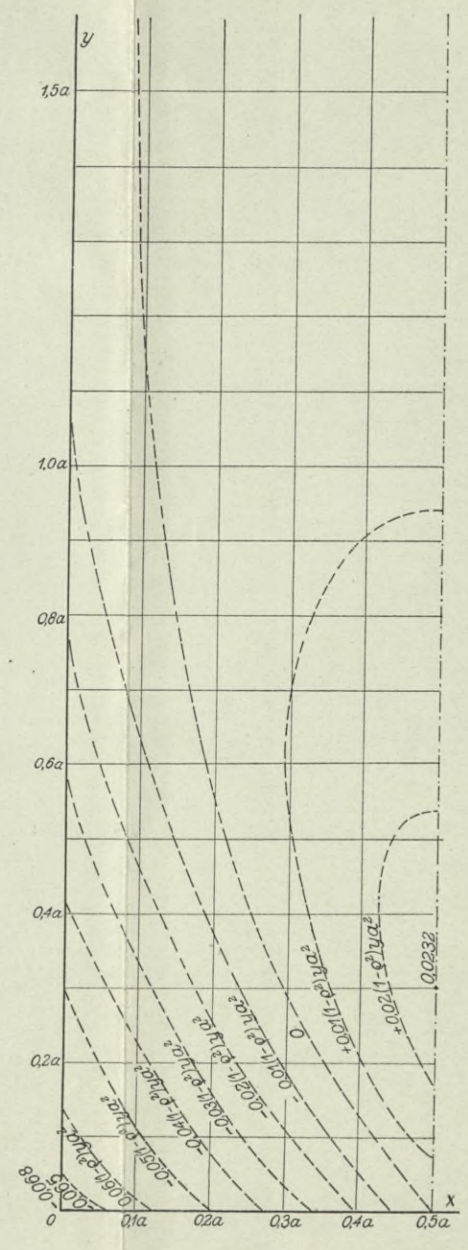
Va. Richtungen von (m_{I}) und (m_{II}).



Vb. Größe von (m_{I}).



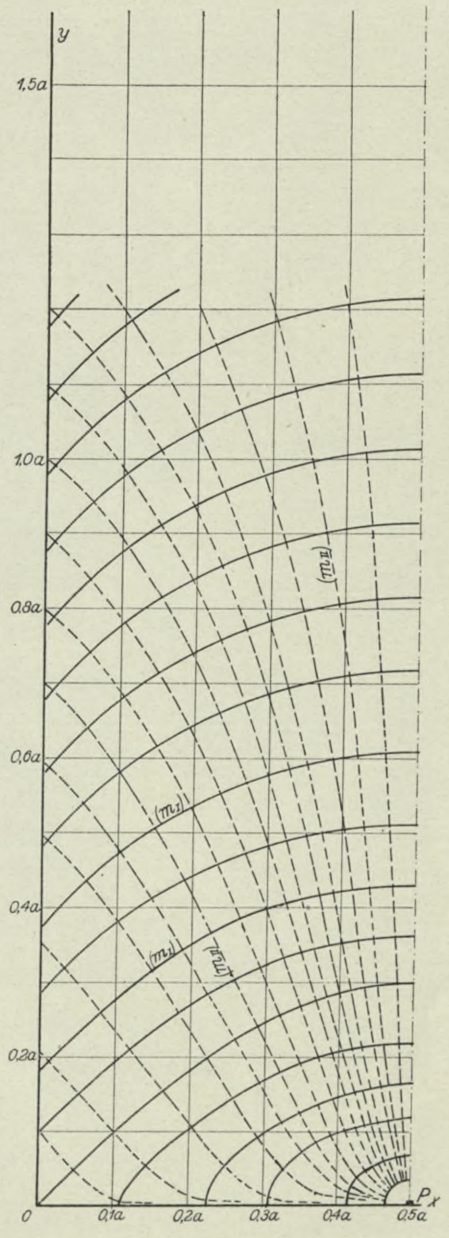
Vc. Größe von (m_{II}).



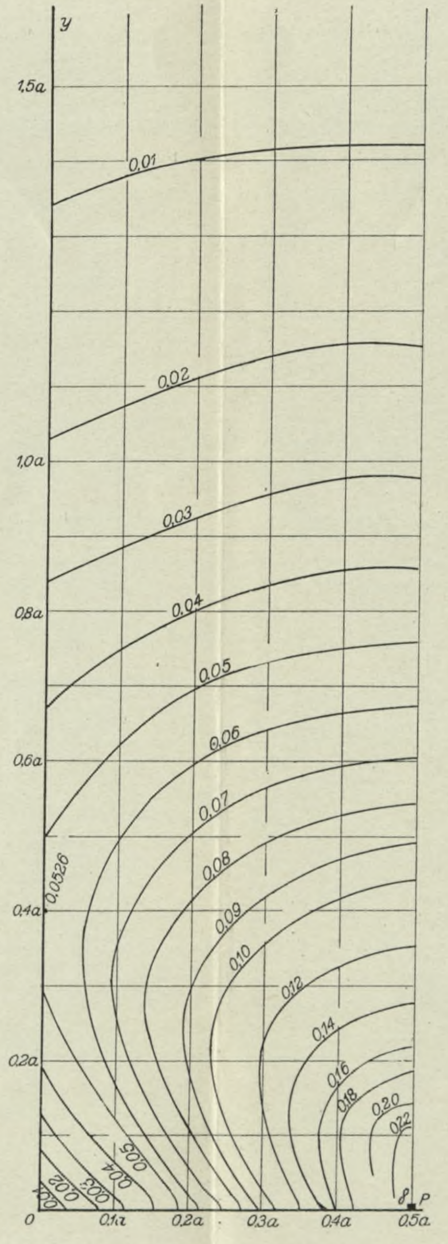
In der Beschriftung der Kurven ist zu lesen: $(1-\varrho^2)\,\mathfrak{p}\,a^2$ statt $(1-\varrho^2)\,y\,a^2$.

Richtung und Größe der Hauptersatzmomente für die unendlich lange Platte bei Einzellast.

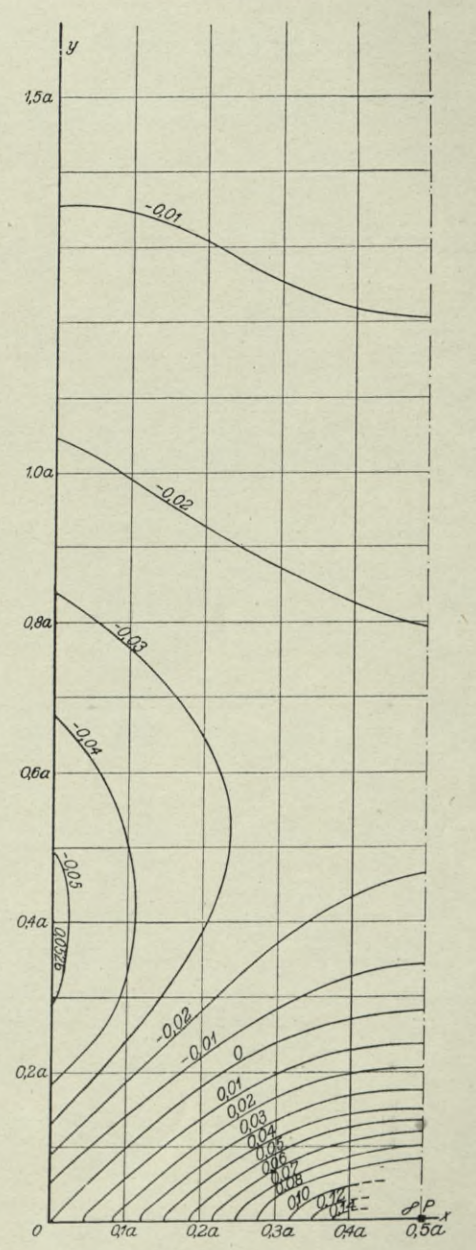
VIa. Richtung von (m_{I}) und (m_{II}).



VIb. Größe von (m_{I}).



VIc. Größe von (m_{II}).



Die Zahlen sind mit dem Faktor $(1-\varrho^2)\,P$ zu versehen.

30.00