



2,50

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



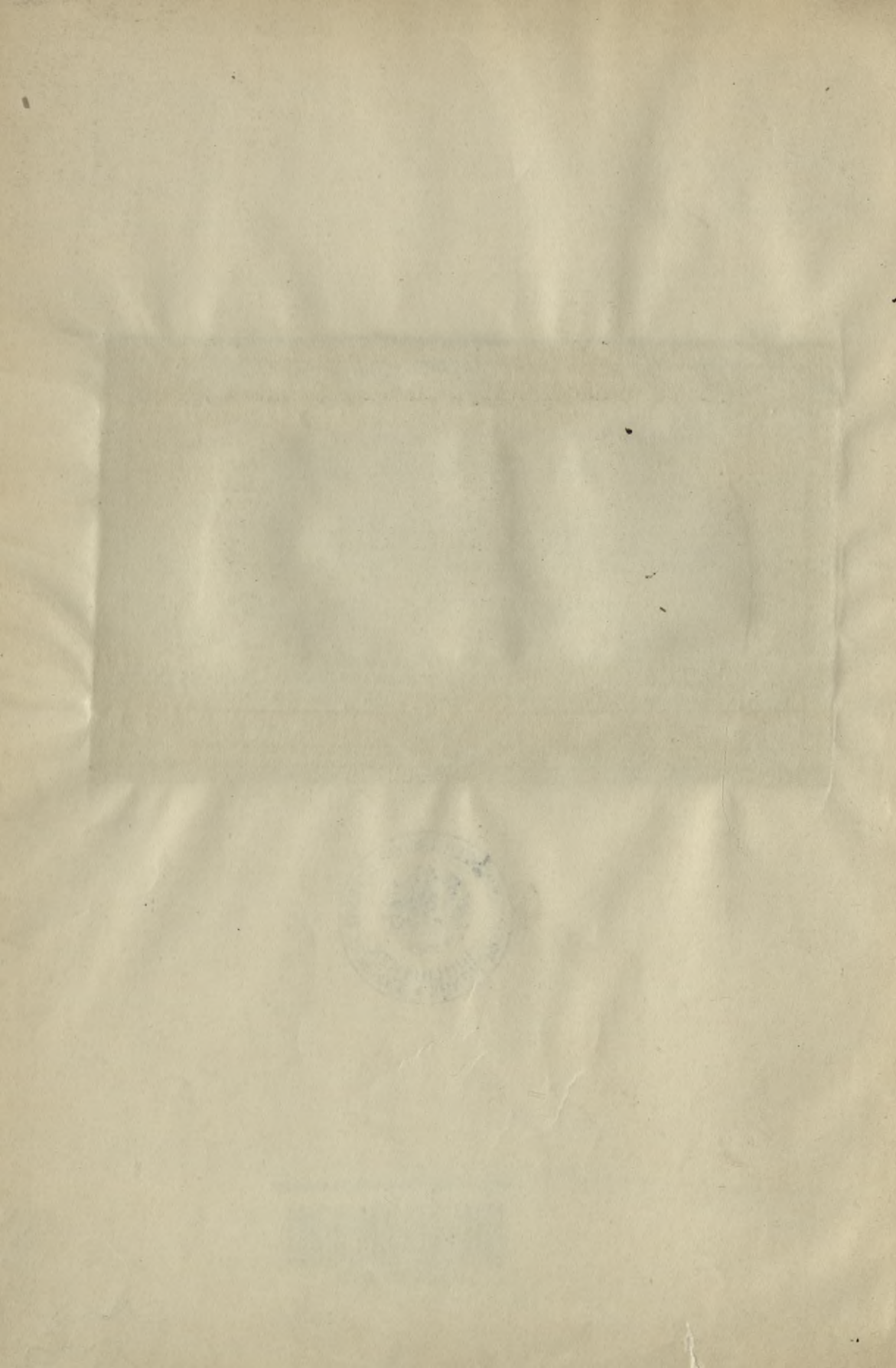
100000300596

- Heft 22: Der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf statisch unbestimmte Bogen- und Rahmentragwerke.** Von Dr.-Ing. **Rueb**, Städt. Ingenieur.
Mit 6 Textabb. u. 3 Tafeln. 1914. geh. 2,60 M.
- Heft 23: Die Berechnung der freilaufenden, rechteckigen Platten.** Von Dr.-Ing. **M. Leitz**.
Mit 26 Textabb. u. 2 Tafeln. 1914. geh. 3,60 M.
- Heft 24: Der doppelt gekrümmte Träger und das schiefe Gewölbe im Eisenbetonbau.** Ein Beitrag zu ihrer Berechnung. Von Dr.-Ing. **H. Marcus**.
Mit 23 Textabb. 1914. geh. 2,80 M.
- Heft 25: Die Rammwirkung im Erdreich.** Versuche auf neuer Grundlage. Von Dr.-Ing. **K. Zimmermann**, Königl. Regierungsbaumeister.
Mit 118 Textabbildungen. 1915. geh. 6,— M.

*Heft 26: Müssen Mattoien für Statik der Rahmen-
Ausgaben in der stat. Vorgehensweise.
Von Ing. A. Strasser, mit 157 Abb.*



XXX
1010



FORSCHERARBEITEN

AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

DER EINFLUSS DER LÄNGS- UND
QUERKRÄFTE AUF STATISCH
UNBESTIMMTE BOGEN-
UND RAHMEN-TRAG-
WERKE



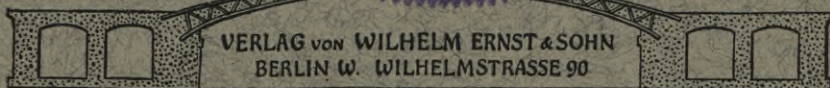
HEFT XXII

PREIS 2,60 MARK

VON

Dr.-Ing. **B. RUEB**
STÄDT. INGENIEUR

MIT 6 TEXTABBILDUNGEN UND 3 TAFELN



VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN
BERLIN W. WILHELMSTRASSE 90

§

Handwritten: 1922
15

Handwritten: XXX
1010

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf statisch unbestimmte Bogen- und Rahmentragwerke

Von

Dr.-Ing. **B. RUEB**
Städt. Ingenieur

Mit 6 Textabbildungen und 3 Tafeln

F.N. 26 044



BERLIN 1914
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn.

5.192

15



~~III 19459~~



11-307042

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.

Akt. Nr. ~~2169~~ 51

3PK-3-156/2018

VORWORT.

Vorliegende Arbeit wurde an der Technischen Hochschule zu Darmstadt als Doktor-Dissertation verwendet; sie befaßt sich im Zusammenhang mit den Beziehungen zwischen den analytischen und graphischen Berechnungsmethoden elastischer Bogen- und Rahmentragwerke insbesondere mit der Untersuchung des Einflusses der Längs- und Querkräfte auf die statisch nicht bestimmbareren Größen.

Es soll in derselben festgestellt werden, inwieweit die analytischen Berechnungsmethoden von elastischen Bogen- und Rahmenkonstruktionen mit den graphischen Verfahren übereinstimmen und namentlich, ob bei der in der Praxis üblichen analytischen Berechnungsweise infolge der Vernachlässigung der Längs- und Querkräfte größere, die Spannungsverteilung wesentlich beeinflussende Fehler auftreten.

Es ist mir eine angenehme Pflicht an dieser Stelle Herrn Professor H. Kayser in Darmstadt meinen verbindlichsten Dank auszusprechen für die wertvollen Ratschläge, die er mir bei der Vornahme dieser Arbeit erteilte. Zu großem Dank bin ich auch Herrn Baumeister Leonhard Moll in München verpflichtet für das Interesse, das er dieser Abhandlung zuteil werden ließ und dafür, daß er mir die Ausarbeitung während meiner Tätigkeit in seiner Firma ermöglichte.

Nürnberg, im Oktober 1913.

Der Verfasser.

INHALT.

	Seite
I. Einleitung	1
II. Entwicklung der Gleichungen zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen	2
III. Ermittlung der Elastizitätsebenen aus den unter II. entwickelten Gleichungen	9
IV. Untersuchungen der Beziehungen zwischen den analytischen und graphischen Berechnungsmethoden	13
V. Untersuchung des Einflusses der Längs- und Querkräfte auf die statisch unbestimmten Größen	22
VI. Schlußfolgerung	34

I. Einleitung.

Die statischen Untersuchungen der in neuerer Zeit vielfach angewandten elastischen Bogen- und Rahmentragwerke aus Eisenbeton werden bald analytisch, bald graphisch durchgeführt. Die analytischen Methoden sind in den letzten Jahren vielseitig ausgearbeitet und für die in der Praxis häufig vorkommenden Bogen- und Rahmenarten Gleichungen zur unmittelbaren Berechnung der statisch unbestimmten Größen, jedoch meistens unter nur teilweiser Berücksichtigung der Längskräfte und ausschließlicher Vernachlässigung der Querkkräfte ermittelt worden.¹⁾

Das rein graphische Verfahren unter Benutzung der Elastizitätsellipsen, wie es in W. Ritter-Culmann, Anwendungen der graphischen Statik, Band IV entwickelt ist, hat nur vereinzelt Aufnahme gefunden,²⁾ dagegen wird nicht selten ein kombiniertes analytisch-graphisches Verfahren, namentlich zur Konstruktion von Einflußlinien, angewandt.³⁾ Diese letztere Methode zeigt besondere Merkmale, es werden hierbei die Biegemomente immer nur graphisch, die Längskräfte dagegen annäherungsweise analytisch behandelt,

1) Müller-Breslau: Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 1904.

Maurer: Berechnung steifer Rahmen. Mitteilungen über Zement, Beton und Eisenbeton 1907, Nr. 8 u. 9.

Ables: Statische Untersuchung einiger im Eisenbeton häufig vorkommenden Aufgaben, Beton u. Eisen 1907, Heft V u. VI.

R. Saliger: Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV. 1. Aufl.

W. Schaechterle: Berechnung von Bogenstellungen und mehrstieligen Rahmen.

H. Pilgrim: Eisenbetonkonstruktionen mit genauer Gewölbe- und Rahmenberechnung.

M. Ritter: Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger.

Mörsch: Berechnung eingespannter Bogen. Schweizerische Bauzeitung, 1906, Nr. 7 u. 8.

Schönhöfer: Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken. 2. Aufl.

2) Nast: Turnhalle der Selekten- und Englischen-Fräulein-Schule zu Frankfurt. Beton u. Eisen 1908, Heft VIII.

Maillart: Ein Wettbewerb um Ideen für eine Brücke in Freiburg. Beton u. Eisen 1908, Heft XV.

3) Mörsch: Berechnung eingespannter Bogen. Schweizerische Bauzeitung 1906, Nr. 7 u. 8.

Schönhöfer: Statische Untersuchung von Bogen- und Wölbtragwerken. 2. Aufl.

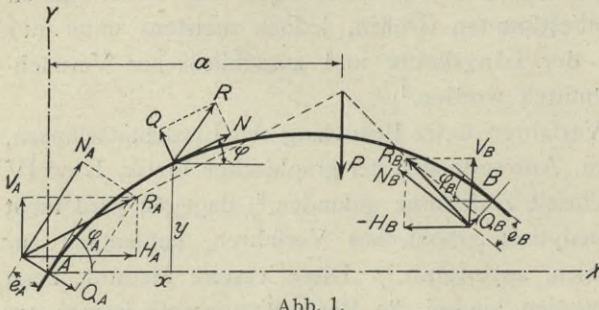
Rueb, Einfluß der Längs- und Querkkräfte.

mitunter letztere auch vernachlässigt, der Einfluß der Querkräfte bleibt wie bei dem rein analytischen Verfahren stets unberücksichtigt.

Inwieweit diese Vernachlässigung berechtigt ist und welchen Einfluß sie auf die statisch nicht bestimmaren Größen ausübt, soll in den nachstehenden Darlegungen in Verbindung mit den Beziehungen zwischen den analytischen und graphischen Berechnungsmethoden eingehend untersucht werden.

II. Entwicklung der Gleichungen zur Berechnung der bei elastischen Bogen- und Rahmentragwerken auftretenden, statisch nicht bestimmaren Größen unter Berücksichtigung des Einflusses der Längs- und Querkräfte.

Werden von einem durch Lasten P beanspruchten biegefesten, an seinen Fußpunkten A und B eingespannten Bogen oder polygonalen Rahmen die Widerlager weggenommen, so müssen, wenn das Gleichgewicht erhalten



bleiben soll, die Reaktionen R_A und R_B , die ursprünglich an den Kämpfern gewirkt haben, nach Größe, Lage und Richtung wieder angebracht werden.

Zerlegt man R_A und R_B in die wagerechten und lotrechten Seiten-

kräfte H_A , V_A und $(-H_B)$, V_B (Horizontalschub und Auflagerdruck), so ergibt sich für jeden beliebigen Punkt der Rahmen- oder Bogenachse, wenn mit e_A und e_B die Entfernungen der Angriffspunkte der Seitenkräfte von A und B bezeichnet werden, das Biegemoment

$$1) \quad M = - \sum_0^x P(x-a) - H_A(y - \cos \varphi_A e_A) + V_A(x + \sin \varphi_A e_A) \\ = + \sum_l^{l-x} P(a-x) + H_B(y + \cos \varphi_B e_B) - V_B(x - \sin \varphi_B e_B);$$

2) die Längskraft

$$N = H_A \cos \varphi + \left(V_A - \sum_0^x P \right) \sin \varphi = - \left[H_B \cos \varphi + \left(V_B - \sum_l^{l-x} P \right) \sin \varphi \right];$$

3) die Querkraft

$$Q = \left(V_A - \sum_0^x P \right) \cos \varphi - H_A \sin \varphi = - \left[\left(V_B - \sum_l^{l-x} P \right) \cos \varphi - H_B \sin \varphi \right].$$

In diesen Gleichungen bedeuten φ , die Winkel der Horizontalen mit den Bogentangenten oder der Rahmenachse, x und y die Koordinaten des

auf der Achse beliebig angenommenen Punktes in bezug auf den Ursprung A . H_A , V_A , e_A und $(-H_B)$, V_B , e_B stellen die statisch nicht bestimmbarren Größen dar; dieselben lassen sich zweckmäßig nach dem Satz der kleinsten Formänderungsarbeit ermitteln

$$4) \quad A = \int \frac{M^2 ds}{2 EJ} + \int \frac{N^2 ds}{2 EF} + \beta \int \frac{Q^2 ds}{2 GF}$$

wobei:

M das Biegemoment

N die Längskraft

Q die Querkraft

J das Trägheitsmoment

E den Elastizitätsmodul

F die Querschnittsfläche

G den Gleitmodul

β einen von der Querschnittsform abhängigen Koeffizienten, für den Rechteckbalken $\frac{6}{5}$,

bedeutet.

Es ist nun nach bekannten Gesetzen der Statik die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach einem statisch unbestimmten Stützwiderstand bei unnachgiebigen Stützen gleich Null. Werden somit aus den Gleichungen 1), 2) und 3) die Werte für M , N und Q in die Gleichung 4) eingesetzt und dann dieselbe teilweise nach den Unbekannten H , V und e differentiiert, so können aus den drei neu erhaltenen Gleichungen die statisch unbestimmten Größen H , V und e ermittelt werden. Bei der Rechnungsdurchführung ist es gleichgültig, ob man mit den ersten oder den zweiten Werten der Gleichungen 1), 2) und 3) rechnet; aus den drei bekannten Bedingungs-gleichungen — Summe aller Horizontalkräfte, Summe aller Vertikalkräfte und Summe aller Drehmomente gleich Null — können H_A , V_A und e_A oder $(-H_B)$, V_B und e_B , sobald die einen oder die anderen bekannt sind, unter sich ermittelt werden. Die nachfolgenden Untersuchungen werden mit Hilfe der ersten Werte durchgeführt. Zur Vereinfachung soll bei sämtlichen Faktoren der Zeiger A vernachlässigt, der veränderliche Winkel φ für den Endquerschnitt A mit φ_0 bezeichnet werden. Die teilweise Differentiation nach H liefert

$$5a) \quad \frac{\partial M}{\partial H} = -(y - \cos \varphi_0 e)$$

$$b) \quad \frac{\partial N}{\partial H} = + \cos \varphi$$

$$c) \quad \frac{\partial Q}{\partial H} = - \sin \varphi.$$

Die teilweise Differentiation nach V liefert

$$6a) \quad \frac{\partial M}{\partial V} = + (x + \sin \varphi_0 e)$$

$$b) \quad \frac{\partial N}{\partial V} = + \sin \varphi$$

$$c) \quad \frac{\partial Q}{\partial V} = + \cos \varphi.$$

Die teilweise Differentiation nach e liefert

$$7a) \quad \frac{\partial M}{\partial e} = H \cos \varphi_0 + V \sin \varphi_0$$

$$b) \quad \frac{\partial N}{\partial e} = 0$$

$$c) \quad \frac{\partial Q}{\partial e} = 0.$$

Diese Werte in die Gleichungen $\frac{\partial A}{\partial H}$, $\frac{\partial A}{\partial V}$ und $\frac{\partial A}{\partial e}$ eingesetzt, gibt

$$8) \quad \int_0^l \left[-\sum_0^x P(x-a) - H(y - \cos \varphi_0 e) + V(x + \sin \varphi_0 e) \right] \\ (-y + \cos \varphi_0 e) \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \left[H \cos \varphi + \left(V - \sum_0^x P \right) \sin \varphi \right] \cos \varphi \frac{ds}{EF} \\ + \beta \int_0^l \left[\left(V - \sum_0^x P \right) \cos \varphi - H \sin \varphi \right] (-\sin \varphi) \frac{ds}{GF} = 0;$$

$$9) \quad \int_0^l \left[-\sum_0^x P(x-a) - H(y - \cos \varphi_0 e) + V(x + \sin \varphi_0 e) \right] \\ (x + \sin \varphi_0 e) \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \left[H \cos \varphi + \left(V - \sum_0^x P \right) \sin \varphi \right] \sin \varphi \frac{ds}{EF} \\ + \beta \int_0^l \left[\left(V - \sum_0^x P \right) \cos \varphi - H \sin \varphi \right] \cos \varphi \frac{ds}{GF} = 0;$$

$$10) \quad \int_0^l \left[-\sum_0^x P(x-a) - H(y - \cos \varphi_0 e) + V(x + \sin \varphi_0 e) \right] \\ (H \cos \varphi_0 + V \sin \varphi_0) \frac{ds}{EJ} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 8a) \quad & \int_0^l \sum_0^x P(x-a) y \frac{ds}{EJ} - e \cos \varphi_0 \int_0^l \sum_0^x P(x-a) \frac{ds}{EJ} \\
 & + H \int_0^l y^2 \frac{ds}{EJ} - 2 e H \cos \varphi_0 \int_0^l y \frac{ds}{EJ} \\
 & + e^2 H \cos^2 \varphi_0 \int_0^l \frac{ds}{EJ} + H \left(\int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\
 & - V \int_0^l x y \frac{ds}{EJ} - e V \sin \varphi_0 \int_0^l y \frac{ds}{EJ} + e V \cos \varphi_0 \int_0^l x \frac{ds}{EJ} \\
 & + e^2 V \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \int_0^l \frac{ds}{EJ} \\
 & + V \left(\int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\
 & - \int_0^l \sum_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sum_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} = 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9a) \quad & - \int_0^l \sum_0^x P(x-a) x \frac{ds}{EJ} - e \sin \varphi_0 \int_0^l \sum_0^x P(x-a) \frac{ds}{EJ} \\
 & - H \int_0^l x y \frac{ds}{EJ} + e H \cos \varphi_0 \int_0^l x \frac{ds}{EJ} - e H \sin \varphi_0 \int_0^l y \frac{ds}{EJ} \\
 & + e^2 H \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \int_0^l \frac{ds}{EJ} \\
 & + H \left(\int_0^l \cos \varphi \sin \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\
 & + V \int_0^l x^2 \frac{ds}{EJ} + 2 e V \sin \varphi_0 \int_0^l x \frac{ds}{EJ} + V e^2 \sin^2 \varphi_0 \int_0^l \frac{ds}{EJ} \\
 & + V \left(\int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\
 & - \int_0^l \sum_0^x P \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sum_0^x P \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} = 0;
 \end{aligned}$$

$$10a) \quad - \int_0^l \sum_0^x P(x-a) \frac{ds}{EJ} - H \int_0^l y \frac{ds}{EJ} + e H \cos \varphi_0 \int_0^l \frac{ds}{EJ} \\ + V \int_0^l x \frac{ds}{EJ} + e V \sin \varphi_0 \int_0^l \frac{ds}{EJ} = 0$$

oder nach den statisch unbestimmten Größen H , V und e geordnet

$$8b) \quad H \left(\int_0^l y^2 \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\ - V \left(\int_0^l x y \frac{ds}{EJ} - \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\ - e (H \cos \varphi_0 + V \sin \varphi_0) \int_0^l y \frac{ds}{EJ} \\ = - \int_0^l \sum_0^x P(x-a) y \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \sum_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sum_0^x \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \\ + e \cos \varphi \left[\int_0^l \sum_0^x P(x-a) \frac{ds}{EJ} + H \int_0^l y \frac{ds}{EJ} - V \int_0^l x \frac{ds}{EJ} - e (H \cos \varphi_0 + V \sin \varphi_0) \int_0^l \frac{ds}{EJ} \right]$$

nach Gleichung 10a) gleich Null;

$$9b) \quad - H \left(\int_0^l x y \frac{ds}{EJ} - \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\ + V \left(\int_0^l x^2 \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\ + e (H \cos \varphi_0 + V \sin \varphi_0) \int_0^l x \frac{ds}{EJ} \\ = \int_0^l \sum_0^x P(x-a) x \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \sum_0^x P \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sum_0^x P \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} \\ + e \sin \varphi_0 \left[\int_0^l \sum_0^x P(x-a) \frac{ds}{EJ} + H \int_0^l y \frac{ds}{EJ} - V \int_0^l x \frac{ds}{EF} - e (H \cos \varphi_0 + V \sin \varphi_0) \int_0^l \frac{ds}{EJ} \right]$$

nach Gleichung 10a) gleich Null;

$$\begin{aligned}
 10b) \quad & -H \int_0^l y \frac{ds}{EJ} \\
 & + V \int_0^l x \frac{ds}{EJ} \\
 & + e(H \cos \varphi_0 + V \sin \varphi_0) \int_0^l \frac{ds}{EJ} \\
 & = \int_0^l \sum_0^x P(x-a) \frac{ds}{EJ}.
 \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 8b), 9b) und 10b) lassen sich H , V und e berechnen; bei ihnen tritt auch der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Formänderungen zutage.

Werden für das vorliegende dreifach statisch unbestimmte System die Elastizitätsgleichungen in der bekannten Form

$$\begin{aligned}
 Hd_{11} + Vd_{12} + e(H \cos \varphi + V \sin \varphi) d_{13} &= \Sigma P_m \cdot d_{1m} \\
 Hd_{21} + Vd_{22} + e(H \cos \varphi + V \sin \varphi) d_{23} &= \Sigma P_m \cdot d_{2m} \\
 Hd_{31} + Vd_{32} + e(H \cos \varphi + V \sin \varphi) d_{33} &= \Sigma P_m \cdot d_{3m}
 \end{aligned}$$

angeschrieben, so zeigt ein Vergleich derselben mit den Gleichungen 8b), 9b) und 10b), daß

$$d_{12} = \int_0^l xy \frac{ds}{EJ} - \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} = d_{21}$$

$$d_{13} = \int_0^l y \frac{ds}{EJ} = d_{31}$$

$$d_{23} = \int_0^l x \frac{ds}{EJ} = d_{32} \text{ ist.}$$

Eine wesentliche Vereinfachung in der Ermittlung der statisch unbestimmten Größen H , V und e kann erzielt werden, wenn das Koordinatensystem

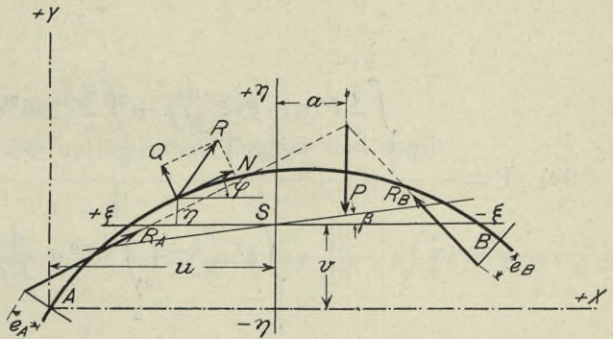


Abb. 2.

nach dem Schwerpunkt S des mit den elastischen Gewichten $\frac{ds}{EJ}$ behafteten Bogens oder Rahmenezuges versetzt und als positive η -Achse die Richtung von $+V$ und als positive ξ -Achse die entgegengesetzte Richtung von $+H$ gewählt wird. Sind zugleich die Bogen- oder Rahmenachsen in bezug auf eine durch den Schwerpunkt der elastischen Gewichte gehenden Geraden symmetrisch, welche zu der Achse senkrecht steht,

gegen welche die Neigungswinkel φ gemessen werden, so fallen in den Gleichungen 8b), 9b) und 10b) alle Glieder mit den Faktoren

$$\begin{aligned} & -\frac{l}{2} \int \frac{\eta ds}{EJ}, \quad -\frac{l}{2} \int \xi \frac{ds}{EJ}, \quad -\frac{l}{2} \int \xi \eta \frac{ds}{EJ} \\ & +\frac{l}{2} \int \cos \varphi \sin \varphi \frac{ds}{EF} \end{aligned}$$

und

$$+\frac{l}{2} \int \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF}$$

fort, und man erhält unter Berücksichtigung, daß in Gleichung 1) die Vorzeichen vor den letzten Summanden entgegengesetzten Wert annehmen, die einfachen Gleichungen

$$8c) \quad H = -\frac{-\frac{l}{2} \int_0^x P(a-\xi) \eta \frac{ds}{EJ} + \frac{-\frac{l}{2} \int_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF}}{+\frac{l}{2}}$$

$$+\frac{-\frac{l}{2} \int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}{+\frac{l}{2}}$$

$$9c) \quad V = -\frac{-\frac{l}{2} \int_0^x P(a-\xi) \xi \frac{ds}{EJ} + \int_0^x P \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^x P \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF}}{+\frac{l}{2}}$$

$$+\frac{\int \xi^2 \frac{ds}{EJ} + \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF}}{+\frac{l}{2}}$$

$$10c) \quad e(H \cos \varphi + V \sin \varphi) = \frac{-\frac{l}{2} \int_0^x P(a-\xi) \frac{ds}{EJ}}{+\frac{l}{2}}$$

$$+\frac{\int \frac{ds}{EJ}}{+\frac{l}{2}}$$

Soll in Gleichung 1) $e_A = e_B = 0$ werden, so müssen die Kämpferresultierenden durch die Querschnittschwerpunkte gehen. Diese Bedingung wird erfüllt, sobald an den Fußpunkten A und B Gelenke angeordnet werden. Es ist dann

$$-\sum_0^x P(x-a) - Hy + Vx = M;$$

hieraus folgt für $x = l$ und $y = 0$

$$P(l-a) = Vl$$

oder

$$V = \frac{\sum_0^x P(l-a)}{l} = \mathfrak{A},$$

also gleich der Auflagerreaktion des frei aufliegenden Trägers.

Mit diesem Wert für V ergibt Gleichung 8a)

$$\begin{aligned} 11) \quad & \int_0^l \sum_0^x P(x-a) y \frac{ds}{EJ} + H \int_0^l y^2 \frac{ds}{EJ} \\ & + H \left(\int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right) - \frac{\sum_0^x P(l-a)}{l} \int_0^l xy \frac{ds}{EJ} \\ & + \frac{\sum_0^x P(l-a)}{l} \left(\int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\ & - \int_0^l \sum_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sum_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} = 0; \end{aligned}$$

es ist aber

$$\frac{\sum_0^x P(l-a)}{l} x - \sum_0^x P(x-a) = \mathfrak{A}$$

gleich dem Biegemoment des frei aufliegenden Trägers und somit

11a)

$$H = \frac{\int_0^l \mathfrak{A} y \frac{ds}{EJ} - \mathfrak{A} \left(\int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right) + \int_0^l \sum_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sum_0^x P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF}}{\int_0^l y^2 \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

III. Entwicklung der Elastizitätsellipse aus den unter II. entwickelten Formeln.

Berücksichtigt man bei der elastischen Formänderung eines Stabes die Normalkraft und die Schwerkraft, so wird sich unter der Wirkung dieser

Kräfte ein Stabquerschnitt um die Nulllinie drehen und gleichzeitig senkrecht zu seiner Achse verschieben. Diese Verschiebung kann nach den Regeln der Kinematik ebenfalls als Drehung um einen unendlich fernen Punkt aufgefaßt werden. Die Lage des resultierenden Drehpols erhält man aus dem Größenverhältnis der Einzeldrehungen, d. h. aus dem Trägheitsmoment und dem Verhältnis der elastischen Konstanten. Um diese Rechnungen durch eine anschauliche Konstruktionsvorschrift zu ersetzen, hat Ritter die Elastizitätsellipse mit den Halbachsen i und $i\sqrt{\frac{\beta E}{G}}$ eingeführt und bewiesen, daß der resultierende Drehpunkt der Antipol der Krafrichtung in bezug auf diese Ellipse wird. Um den so bestimmten Punkt dreht sich der Querschnitt gegenüber seiner ursprünglichen Lage. In derselben Weise bildet man die Elastizitätsellipse für ein Stabelement (Ritter, Bd. 4, S. 87).

Diese Ellipse hat die Halbachsen $a = i\sqrt{\frac{\beta E}{G} + \frac{\Delta s^2}{12}}$ und $b = i$. Der Antipol einer bestimmten Krafrichtung gibt dann den Pol, um den sich die beiden Endquerschnitte relativ zueinander drehen. Ebenso

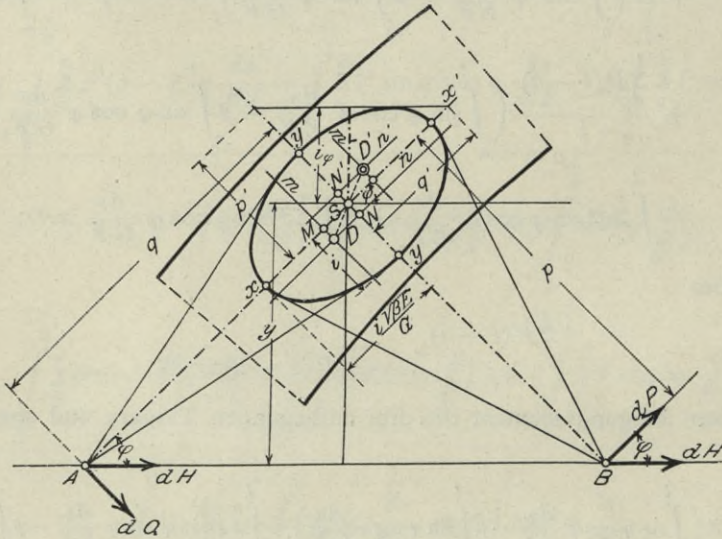


Abb. 3.

wie für ein Bogenelement kann man auch die Elastizitätsellipse des ganzen Bogens ableiten. Der Antipol einer beliebigen Krafrichtung hinsichtlich der Elastizitätsellipse ist dann der Punkt, um den sich der Endquerschnitt dreht.

Die gleichen Ergebnisse lassen sich auch aus den unter II. entwickelten Formeln ableiten.

Das Bogen- oder Rahmendifferential ds liefert einen unendlich kleinen Beitrag zum Horizontalschub von

$$12) \quad dH = \frac{My \frac{ds}{EJ} - \left(\mathcal{X} + \sum_0^x P \right) \left(\sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right)}{y^2 \frac{ds}{EJ} + \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

Setzt man in dieser Gleichung das elastische Gewicht $\frac{ds}{EJ}$ als gemeinsamen Faktor voraus, so erhält man für den Nenner

$$\frac{ds}{EJ} \left(y^2 + \cos^2 \varphi i^2 + \beta \frac{E}{G} \sin^2 \varphi i^2 \right).$$

Die beiden letzten Glieder des Summenausdrucks stellen den mit dem Winkel φ veränderlichen Trägheitsradius dar

$$13) \quad \cos^2 \varphi i^2 + \beta \frac{E}{G} \sin^2 \varphi i^2 = i_\varphi^2.$$

Trägt man im Schwerpunkt S (Abb. 3) eines Bogen- oder Rahmenelementes ds den dem Winkel φ entsprechenden Trägheitsradius i_φ lotrecht auf und zieht durch dessen Endpunkt eine Horizontale, so werden auf ds und deren Senkrechten durch den Schwerpunkt S zwei Strecken

$$p' = \frac{i_\varphi}{\cos \varphi} \quad \text{und} \quad q' = \frac{i_\varphi}{\sin \varphi}$$

abgeschnitten.

Aus den vorstehenden Gleichungen ergibt sich

$$\sin \varphi = \frac{i_\varphi}{q'} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{i_\varphi}{p'}.$$

Führt man diese Werte in Gleichung 13) ein, so erhält man

$$14) \quad \frac{i^2 i_\varphi^2}{p'^2} + \frac{i^2 \beta \frac{E}{G} i_\varphi^2}{q'^2} = i_\varphi^2 \quad \text{oder}$$

$$14a) \quad \frac{i^2}{p'^2} + \frac{i^2 \beta \frac{E}{G}}{q'^2} = 1,$$

die bekannte Gleichung der Ellipse in Linienkoordinaten. Die kleine Achse derselben deckt sich mit derjenigen der Zentralellipse des Querschnitts, die große Achse dagegen verhält sich zur kleineren wie $\sqrt{\beta E} : \sqrt{G}$. Die Ellipse ist demnach abhängig einerseits von der Größe und Form des Querschnitts, andererseits aber von dem Elastizitäts- und Gleitmodul des Konstruktionsmaterials und wird daher Elastizitätsellipse genannt.¹⁾

Setzt man im Nenner der Gleichung 12) das elastische Gewicht zweiter Ordnung $\frac{ds}{EJ} y$ voraus, so nimmt er die Form an

$$\frac{ds}{EJ} y \left(y + \frac{\cos^2 \varphi i^2}{y} + \frac{\beta E}{G} \cdot \frac{\sin^2 \varphi i^2}{y} \right).$$

¹⁾ Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, Bd. I, S. 153.

Es sei zunächst der veränderliche Winkel φ gleich Null, so wird

$$y = p, \quad \frac{\cos^2 \varphi i^2}{y} = \frac{i^2}{p}, \quad \frac{\sin^2 \varphi i^2 \frac{\beta E}{G}}{y} = 0 \quad \text{und} \quad dH = dP.$$

Die Kraft dP bewirkt eine Drehung des einen Querschnitts gegenüber dem anderen um eine in der Schnittebene liegende Neutralachse oder Spannungsnulllinie; der Abstand derselben von dem Querschnittschwerpunkt S ergibt sich aus der bekannten Gleichung

$$0 = \frac{dP}{F} - \frac{dP \cdot p \cdot z_p}{J} \quad \text{zu}$$

$$16) \quad p \cdot z_p = \frac{J}{F} = i^2.$$

Es stellt somit in Gleichung 15) der Quotient $\frac{\cos^2 \varphi i^2}{y}$ die durch die Längskraft dP bewirkte Verschiebung der Neutralachse aus dem Querschnittschwerpunkt S auf der von dP entgegengesetzten Seite dar.

Nach Gleichung 16) verhält sich $p : i = i : z_p$ oder nach dem Satz der korrespondierenden Subtraktion und Addition

$$\frac{p - i}{i - z_p} = \frac{p + i}{i + z_p}.$$

Bezeichnet man die Endpunkte der Strecken $p - i$ mit Y , $p + i$ mit Y' , $i - e$ mit N und $i + e$ mit N' , so ist nach der Theorie der projektiven Geometrie¹⁾

$$\frac{BY}{NY} : \frac{BY'}{NY'} = (BNYY') = -1.$$

B und N stellen die in bezug auf die Endpunkte Y und Y' der kleinen Achse der Elastizitätsellipse konjugierten Punkte dar. Errichtet man in N die Senkrechte n , so schneidet diese die Elastizitätsellipse in den beiden Berührungspunkten der von B aus gezogenen Tangenten. Sie ist somit der geometrische Ort aller zum Punkte B konjugierten Punkte hinsichtlich der Elastizitätsellipse und heißt Polare des Punktes B .

Es werde nun $\varphi = 90^\circ$; dann wird

$$y = q; \quad \frac{\cos^2 \varphi \cdot i^2}{y} = 0; \quad \frac{\sin^2 \varphi i^2 \frac{\beta E}{G}}{y} = \frac{i^2 \frac{\beta E}{G}}{q} \quad \text{und} \quad dH = dQ.$$

Die Kraft dQ bewirkt eine Drehung um eine Achse, deren Entfernung von S sich ähnlich wie vor ergibt zu

$$16a) \quad q \cdot z_q = \frac{J \frac{\beta E}{G}}{F} = i^2 \frac{\beta E}{G}.$$

¹⁾ Doehlemann, Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Enriques, Projektive Geometrie. Deutsch von Fleischer.

Der Quotient $\frac{\sin^2 \varphi i^2 \frac{\beta E}{G}}{y}$ in Gleichung 15) stellt somit die durch die Querkraft dQ bewirkte Verschiebung der Neutralachse aus dem Querschnittschwerpunkt S auf der von dQ entgegengesetzten Seite dar.

Nach der Gleichung 16a) verhält sich wieder

$$\frac{q - i\sqrt{\frac{\beta E}{G}}}{i\sqrt{\frac{\beta E}{G}} - z_q} = \frac{q + i\sqrt{\frac{\beta E}{G}}}{i\sqrt{\frac{\beta E}{G}} + z_q}$$

oder $\frac{AX}{MX} = \frac{AX'}{MX'} = (AMXX') = -1.$

A und M sind somit konjugierte Punkte hinsichtlich der Endpunkte X und X' der großen Achse der Elastizitätsellipse.

Die Senkrechte m in M ist wieder Polare, der geometrische Ort aller zu A konjugierten Punkte hinsichtlich der Elastizitätsellipse.

Der Schnittpunkt D beider Polaren m und n ist konjugiert, sowohl zu A wie auch zu B hinsichtlich der Elastizitätsellipse; es bilden infolgedessen ABD ein Polardreieck, in welchem jede Seite Polare des gegenüberliegenden Eckpunktes ist. Die Wirkungslinie des Horizontalschubes H entspricht somit der Polaren des Punktes D bezüglich der Elastizitätsellipse. Zieht man durch die Punkte M' und N' die zu den Polaren m und n Parallelen m' und n' , so schneiden sich letztere in einem Punkt D' , der dem Pol D diametral gegenüberliegt. D' heißt Antipol der äußeren Kraft H hinsichtlich der Elastizitätsellipse; durch ihn geht die Achse, um die sich der eine Querschnitt gegenüber dem anderen infolge der Einwirkung des Horizontalschubes dreht.

Wird in der vorstehenden Untersuchung y durch η ersetzt, so bezieht sich dieselbe auf die Gleichung 8c). Führt man dieselbe an Hand des Nenners der Gleichung 9c) durch, so findet man den Antipol der nach dem Schwerpunkt des mit dem elastischen Gewicht $\frac{ds}{EJ}$ behafteten Bogens oder Rahmenezuges versetzten Auflagerreaktion V bezüglich der Elastizitätsellipse.

IV. Beziehungen zwischen den analytischen und graphischen Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Bogen- und Rahmenkonstruktionen.

Bei der graphischen Berechnungsweise von Bogen- und Rahmentragwerken werden für die einzelnen Elemente die Elastizitätsellipsen konstruiert. Hierauf bestimmt man den Antipol der statisch unbestimmten Größen H

und V hinsichtlich der Elastizitätsellipsen. Die Bedeutung der Elastizitätsellipse ist eine rein kinematische. Um sie für die graphische Statik zu verwenden, muß sie mit den Sätzen in Verbindung gebracht werden, welche sich auf die Konstruktion der Durchbiegungen von Stabpolygonzügen aus den relativen Drehungswinkeln der einzelnen Elemente beziehen. Die elastischen Gewichte sind nichts weiter als diese Drehungswinkel. Will man für eine bestimmte Kraft die Formänderung eines Bogens oder Rahmens (den man sich an dem einen Ende frei denkt) bestimmen, so verlegt man daher die elastischen Gewichte in die Gelenke, das heißt in die Antipole der Krafrichtung in bezug auf die Elastizitätsellipsen. Nachdem in dieser Art der kinematische Teil der Aufgabe erledigt ist, erhält man die statisch unbestimmten Größen aus der Bedingung, daß die Verschiebungen des fre gedachten Kämpfers wieder rückgängig gemacht werden müssen. In den Gleichungen 8c), 9c), 10c) und 11a) sind diese Verschiebungen analytisch ermittelt. Graphisch werden sie mit Hilfe von fünf Seilpolygonen¹⁾ durch den elementaren Satz: „Die Summe der statischen Momente paralleler Kräfte in bezug auf eine ihnen parallele Gerade ist gleich der zwischen die letzten Seileckseiten hineinfallenden Strecke, multipliziert mit der Polweite“ dargestellt.

Im ersten Seileck läßt man die elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ}$ in den Schwerpunkten der Bogen- oder Rahmenelemente lotrecht, im zweiten Seileck horizontal angreifen. Diese beiden Seilecke bestimmen den Schwerpunkt der elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ}$ und liefern zugleich die statischen Momente $\frac{ds}{EJ} \xi$ und $\frac{ds}{EJ} \eta$ (elastische Gewichte zweiter Ordnung), bezogen auf die Schwerpunktsachsen.

Im dritten und vierten Seileck läßt man die elastischen Gewichte zweiter Ordnung $\frac{ds}{EJ} \xi$ und $\frac{ds}{EJ} \eta$ in den Antipolen der senkrechten und wagerechten Schwerpunktsachsen bezüglich der Elastizitätsellipsen senkrecht und wagerecht wirken und man erhält alsdann auf graphischem Wege die Werte der Nenner der Gleichungen 8c) und 9c)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{ds}{EJ} \xi \left(\xi + \frac{\sin^2 \varphi i^2}{\xi} + \frac{\beta E}{G} \frac{\cos^2 \varphi i^2}{\xi} \right) &= \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \xi^2 \frac{ds}{EJ} + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} \\
 &+ \beta \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF}
 \end{aligned}$$

1) Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, Bd. IV, S. 230.

und ebenso

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{ds}{EJ} \eta \left(\eta + \frac{\cos^2 \varphi i^2}{\eta} + \frac{\beta E}{G} \frac{\sin^2 \varphi i^2}{\eta} \right) = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}.$$

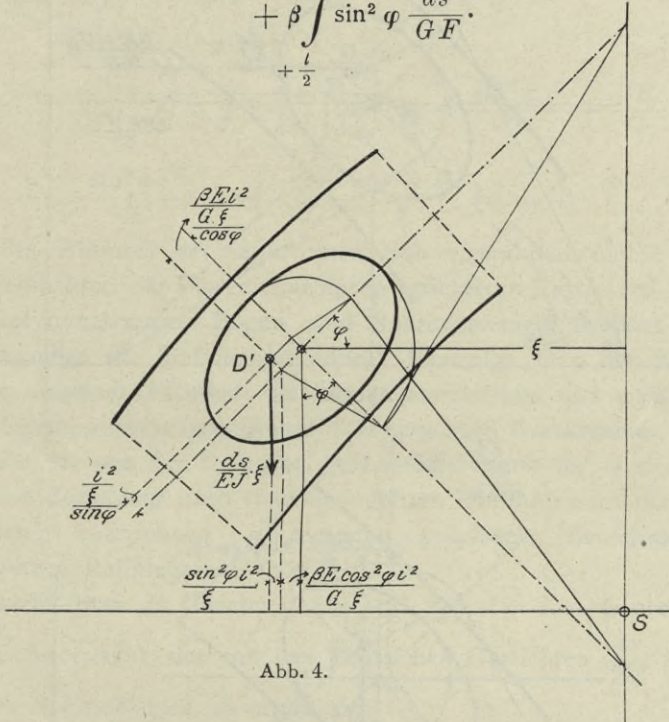


Abb. 4.

Die Werte

$$\frac{\sin^2 \varphi i^2}{\xi} \quad \text{und} \quad \frac{\beta E}{G} \frac{\cos^2 \varphi i^2}{\xi} \quad (\text{Abb. 4})$$

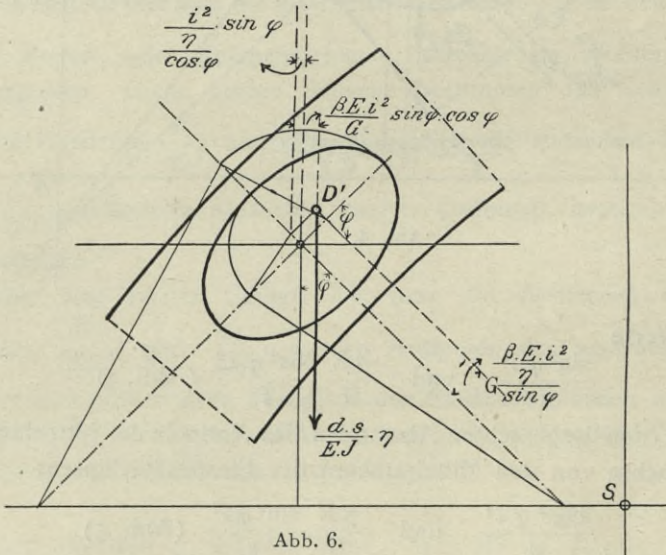
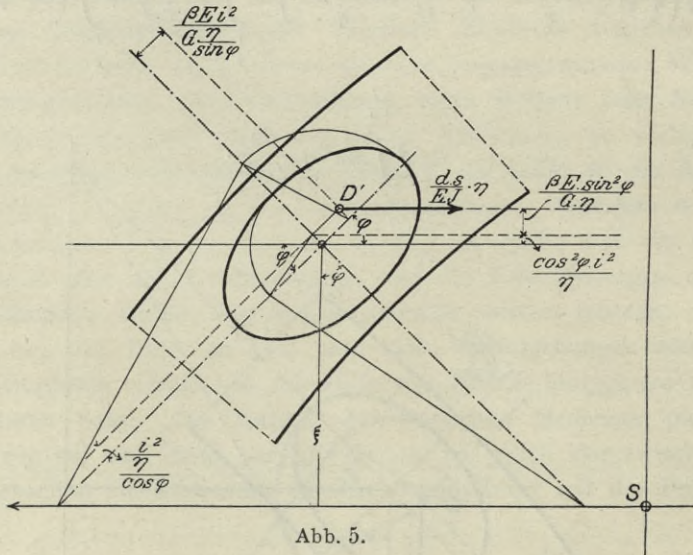
entsprechen den wagerechten Abständen des Antipols der lotrechten Schwerpunkthauptachse von den Mittelpunkten der Elastizitätsellipsen;

$$\frac{\cos^2 \varphi i^2}{\eta} \quad \text{und} \quad \frac{\beta E}{G} \frac{\sin^2 \varphi i^2}{\eta} \quad (\text{Abb. 5})$$

dagegen den lotrechten Abständen des Antipols der horizontalen Schwerpunkthauptachse von den Mittelpunkten der Elastizitätsellipsen.

Im fünften Seileck läßt man die elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ} \eta$ in den Antipolen der wagerechten Schwerpunkthauptachse lotrecht angreifen; man erhält somit das Zentrifugalmoment der Bogen- oder Rahmengewichte in bezug auf die beiden Schwerpunkthauptachsen.

Nach der Theorie der elastischen Gewichte stellt dasselbe die Einflußlinie des Horizontalschubes dar. Besteht in Gleichung 8c) die Belastung nur aus einer Einzellast $P=1$, so lautet der Zähler derselben



$$\begin{aligned}
 & \int_a^{-\frac{l}{2}} (a - \xi) \eta \frac{ds}{EJ} + \int_a^{-\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_a^{-\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \\
 & = \int_a^{-\frac{l}{2}} \eta \frac{ds}{EJ} \left[(a - \xi) + \frac{\cos \varphi \sin \varphi i^2}{\eta} - \frac{\beta E}{G} \frac{\sin \varphi \cos \varphi i^2}{\eta} \right],
 \end{aligned}$$

wo $\frac{\cos \varphi \sin \varphi i^2}{\eta}$ und $\frac{\beta E \sin \varphi \cos \varphi i^2}{G \eta}$ (Abb. 6)

Abstände des Antipols der horizontalen Schwerpunkthauptachse von den in den Mittelpunkten der Elastizitätsellipsen errichteten Lotrechten darstellen.

Bei der vorhandenen Belastungsart ergibt der Zähler der Gleichung 9c)

$$\int_a^{-\frac{l}{2}} (a - \xi) \xi \frac{ds}{EJ} + \int_a^{-\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_a^{-\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF}$$

$$= \int_a^{-\frac{l}{2}} \xi \frac{ds}{EJ} \left[(a - \xi) + \frac{\sin^2 \varphi i^2}{\xi} + \frac{\beta E \cos^2 \varphi i^2}{G \xi} \right],$$

wo $\frac{\sin^2 \varphi i^2}{\xi}$ und $\frac{\beta E \cos^2 \varphi i^2}{G \xi}$ (Abb. 4)

Abstände des Antipols der senkrechten Schwerpunkthauptachse von den in den Mittelpunkten der Elastizitätsellipsen errichteten Lotrechten darstellen.

Bei unsymmetrischen Bogen- und Rahmenformen zeichnet man wie bei symmetrischen die fünf Seilpolygone. Vereinigt man die Elastizitätsellipsen der einzelnen Elemente zu einer Gesamtellipse und konstruiert die zu beiden Schwerpunktachsen H und V konjugierten Durchmesser, so lassen sich an Hand der aus den Seilecken gefundenen Werte für H und V durch entsprechende Zerlegung nach den konjugierten Durchmessern die Kämpferresultierenden¹⁾ aufzeichnen. (Vergleiche graphische Berechnung eines unsymmetrischen Rahmens auf Tafel II.)

Verschiebt man in Gleichung 8b) und 9b) den Koordinatenursprung nach dem Schwerpunkt des mit den elastischen Gewichten $\frac{ds}{EJ}$ behafteten Bogens oder Rahmenezuges, so ergibt sich

$$8d) \quad H \left(\int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right)$$

$$+ V \left(\int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \xi \eta \frac{ds}{EJ} - \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right)$$

$$= - \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P (a - \xi) \eta \frac{ds}{EJ} + \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF}.$$

¹⁾ Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, Bd. IV, S. 234.

$$\begin{aligned}
 9d) \quad & H \left(\int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \xi \eta \frac{ds}{EJ} - \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\
 & + V \left(\int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \xi^2 \frac{ds}{EJ} + \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} \right) \\
 & = - \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P (a - \xi) \xi \frac{ds}{EJ} + \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF}.
 \end{aligned}$$

Sind sämtliche Polweiten = 1, so wird

$$\begin{aligned}
 & \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF} = t_2; \\
 & \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \xi \eta \frac{ds}{EJ} - \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} = t; \\
 & - \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P (a - \xi) \eta \frac{ds}{EJ} + \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \\
 & \hspace{20em} = \Sigma P z_2; \\
 & \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \xi^2 \frac{ds}{EJ} + \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_{+\frac{l}{2}}^{-\frac{l}{2}} \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} = t_1; \\
 & - \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P (a - \xi) \xi \frac{ds}{EJ} + \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \sin^2 \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_a^{-\frac{l}{2}} \Sigma P \cos^2 \varphi \frac{ds}{GF} = \Sigma P z_1.
 \end{aligned}$$

Mit diesen Werten erhält man

$$8e) \quad H t_2 + V t = z_2;$$

$$9e) \quad H t + V t_1 = z_1;$$

$$8f) \quad H = \frac{z_2 t_1 - z_1 t}{t_2 t_1 - t^2};$$

$$9f) \quad V = \frac{z_1 t_2 - z_2 t}{t_2 t_1 - t^2}.$$

H und V bedeuten die wagerechte und lotrechte Komponente der linken Kämpferresultierenden R_A , wohingegen bei der graphischen Berech-

nungsweise $H = \frac{z_2}{t_2}$ und $V = \frac{z_1}{t_1}$ Größen darstellen, die durch Zerlegung von R_A parallel der ξ - und η' - und η - und ξ' -Achse erhalten werden. Bezeichnet man diese letzteren zum Unterschied der in den Gleichungen 8f) und 9f) angeführten H und V , mit X und Y , so verhält sich¹⁾

$$X: H = (V + w) : w; \text{ oder}$$

$$X = \frac{H(V + w)}{w} = \frac{Vt}{t_2} + H.$$

Werden die Werte für H und V aus Gleichung 8f) und 9f) eingeführt, so ergibt sich

$$X = \frac{z_1 t_2 - z_2 t}{t_2 t_1 - t^2} \frac{t}{t_2} - \frac{z_2 t_1 - z_1 t}{t_2 t_1 - t^2} = \frac{z_2}{t_2},$$

der beim graphischen Verfahren ermittelte Wert; es ist auch

$$Y = V + \frac{Ht}{t_1} \text{ oder}$$

$$Y = \frac{z_1 t_2 - z_2 t}{t_2 t_1 - t^2} + \frac{(z_2 t_1 - z_1 t)t}{(t_2 t_1 - t^2)t_1} = \frac{z_1}{t_1},$$

gleich dem beim graphischen Verfahren ermittelten Wert.

Bei dem Zweigelenkbogen läßt man die elastischen Gewichte zweiter Ordnung in den Antipolen der Kämpfersehne hinsichtlich der Elastizitätsellipsen erst lotrecht, dann wagerecht wirken und zieht die zugehörigen Seilecke; das erstere stellt wieder die Einflußlinie des Horizontalschubes dar.²⁾

Für eine Einzellast $P = 1$ lautet der Zähler der Gleichung 11a)

$$\mathfrak{A} \int_0^l xy \frac{ds}{EJ} - \mathfrak{A} \left(\int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} - \beta \int_0^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right)$$

$$- \left(\int_a^l xy \frac{ds}{EJ} - \int_a^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_a^l \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{GF} \right)$$

oder

$$\frac{b}{l} \left[\int_0^l y \frac{ds}{EJ} \left(x - \frac{\sin \varphi \cos \varphi i^2}{y} + \frac{\beta E}{G} \frac{\sin \varphi \cos \varphi i^2}{y} \right) \right]$$

$$- \int_a^l y \frac{ds}{EJ} \left(x - \frac{\sin \varphi \cos \varphi i^2}{y} + \frac{\beta E}{G} \frac{\sin \varphi \cos \varphi i^2}{y} \right).$$

$$\frac{\sin \varphi \cos \varphi i^2}{y} \quad \text{und} \quad \frac{\beta E}{G} \frac{\sin \varphi \cos \varphi i^2}{y}$$

1) Tafel II. Berechnung eines unsymmetrischen Rahmens nach Ritter.

2) Ritter, Anwendungen der graphischen Statik, Bd. IV, S. 62 u. 88.

entsprechen den Abständen der Antipole der Kämpfersehne von den in den Mittelpunkten der Elastizitätsellipsen errichteten Lotrechten. Das zweite Seileck stellt den Nenner der Gleichung 11a) dar; denn es ist

$$\int_0^l y^2 \frac{ds}{EJ} + \int_0^l \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int_0^l \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}$$

$$= \int_0^l y \frac{ds}{EJ} \left(y + \frac{\cos^2 \varphi i^2}{y} + \frac{\beta E}{G} \frac{\sin^2 \varphi i^2}{y} \right),$$

worin

$$\frac{\cos^2 \varphi i^2}{y} \quad \text{und} \quad \frac{\beta E}{G} \frac{\sin^2 \varphi i^2}{y}$$

den Abständen der Antipole der Kämpfersehne von der in den Mittelpunkten der Elastizitätsellipsen errichteten Horizontalen entsprechen.

Die analytischen Berechnungsmethoden von elastischen Bogen- und Rahmenkonstruktionen stimmen somit mit dem graphischen Verfahren vollständig überein. Die Anwendung der Elastizitätsellipsen bietet ein Mittel, um bei dem graphischen Verfahren den Einfluß der Längs- und Querkräfte zu berücksichtigen. Sobald diese Kräfte vernachlässigt werden, greifen sowohl in den fünf Seilecken der eingespannten, wie auch in den beiden Seilecken der Zweigelenkkonstruktionen sämtliche Gewichte in den Schwerpunkten der Bogen- oder Rahmenelemente ds an. Vielfach wird in der Praxis von dieser Berechnungsweise Gebrauch gemacht, wobei dann der Einfluß der Längskräfte durch analytische Hilfsrechnung teilweise berücksichtigt, derjenige der Querkräfte aber stets vernachlässigt wird.

Auf den beiden Tafeln I und II sind auf graphischem Wege die statisch unbestimmten Größen H und V eines symmetrischen und eines unsymmetrischen Rahmens ermittelt.

Zuerst berechnet man die Fläche der durch die Schwerpunkte gelegten Querschnitte und bestimmt das Trägheitsmoment J dieser Flächen. Hierauf zeichnet man für die einzelnen Elemente die Elastizitätsellipsen. Die große Achse i_1 ist gleich $\sqrt{\frac{\beta E}{G} \frac{J}{F} + \frac{As^2}{12}}$, die kleine Achse $i_2 = \sqrt{\frac{J}{F}}$. Als dann bestimmt man die elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ}$ und fügt sie zu einem Krafteck mit dem Pol O_1 zusammen. Man zieht dann die beiden Seilecke A_1-B_1 und A_2-B_2 und erhält die Schwerpunkthauptachsen. Auf letzteren werden durch die Seilseiten der Polygone A_1-B_1 und A_2-B_2 die elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ} \xi$ und $\frac{ds}{EJ} \eta$ abgeschnitten. Nun konstruiert man die Antipole der horizontalen wie auch vertikalen Schwerpunkthauptachsen hinsichtlich

der Elastizitätsebenen. Hierfür gibt Ritter in Band IV auf Seite 89 zwei Verfahren an. Man findet dieselben auch, indem man vom Schnittpunkt der Ellipsenachsen mit den Schwerpunkthauptachsen an die Ellipse Tangenten legt, die Berührungspunkte derselben durch eine Sehne verbindet und dann den Schnittpunkt dieser Sehnen diametral verlegt (Abb. 3). Sind die Antipole gefunden, so läßt man die elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ} \xi$ in den Antipolen der Hauptachse V senkrecht wirken und zieht mit dem Pol O_3 ein Seileck A_3-B_3 . Dieses Seileck stellt die Einflußlinie der statisch unbestimmten Auflagerkraft V dar. Es ist $V = \frac{z_1}{t_1}$. Hierauf läßt man die elastischen Gewichte $\frac{ds}{EJ} \eta$ in den Antipolen der horizontalen Schwerpunkthauptachse horizontal angreifen und zieht mit dem Pol O_4 das Seileck A_4-B_4 . Nun läßt man dieselben Gewichte in den gleichen Antipolen senkrecht wirken und zieht das Seileck A_5-B_5 und erhält die Einflußlinie für den Horizontalschub. Es ist $H = \frac{z_2}{t_2}$. Will man sämtliche Ellipsen zu einer Gesamtellipse vereinigen, so erhält man die große Achse i_1 als geometrisches Mittel zwischen dem Polabstand C_1 und dem Abstand der beiden Endseiten des Seilecks A_3-B_3 t_1 und endlich die kleine Achse i_2 als geometrisches Mittel zwischen dem Polabstand C_2 und dem Abstand der Endseiten im Seileck A_4-B_4 t_2 . Zur Berechnung der statisch unbestimmten Größen ist es indes nicht nötig, die Gesamtellipse aufzuzeichnen.

Bei unsymmetrischer Konstruktionsform zieht man genau wie vor die fünf Seilecke und bildet die Werte i_1 und i_2 . Diese stellen jedoch nicht mehr wie vor Hauptachsen der Gesamtellipse dar, sondern Entfernungen der zu den Achsen H und V parallelen Tangenten derselben. Konstruiert man zu einer Achse den konjugierten Durchmesser, so schneidet derselbe nach geometrischen Regeln die Tangente im Berührungspunkt. Es läßt sich alsdann die Ellipse aufzeichnen. Die Richtung der konjugierten Durchmesser kann in einfacher Weise gefunden werden. Es ist nach Mörsch:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\int \varepsilon \eta \frac{ds}{EJ}}{\int \xi^2 \frac{ds}{EJ}},$$

wobei α den Neigungswinkel des konjugierten Durchmessers mit der Horizontalen bedeutet.

Im fünften Seileck fallen infolge der Unsymmetrie des Rahmens die Schlußseiten nicht mehr zusammen. Ihre gegenseitige Entfernung t stellt das Zentrifugalmoment $\int \xi \eta \frac{ds}{EJ}$ dar. t_1 entspricht dem Wert $\int \xi^2 \frac{ds}{EJ}$. Es

ist demnach $\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{t_1}$. Der Winkel α läßt sich geometrisch leicht darstellen durch ein rechtwinkliges Dreieck, in dem t und t_1 die Katheten bilden. Es ist hierbei zu beachten, daß, wenn die Polabstände in allen Kraftecken nicht den gleichen Wert beibehalten, t_1 mit den Werten $C_1 \Sigma \frac{ds}{EJ}$ und t mit den von $C_2 \Sigma \frac{ds}{EJ}$ multipliziert werden müssen (C_1 und C_2 sind Polabstände in den Kraftecken O_1 und O_2). In ähnlicher Weise erhält man mit den Werten t und t_2 den zur horizontalen Schwerpunktschwerachse konjugierten Durchmesser. Nun bestimmt man gleich wie beim symmetrischen Bogen die Werte $H = \frac{z_2}{t_2}$ und $V = \frac{z_1}{t_1}$. Bildet man aus diesen beiden Werten die Resultierende und zerlegt diese in die horizontale und eine zu dem konjugierten Durchmesser η' parallele Komponente, so erhält man den Horizontalschub. Zerlegt man die Kämpferresultierende in eine vertikale und eine zum konjugierten Durchmesser ξ' parallele Komponente, so erhält man die vertikale Auflagerreaktion.

V. Untersuchung des Einflusses der Längs- und Querkräfte auf die statisch unbestimmten Größen.

Wie die Gleichungen 8c), 9c) und 11a) zeigen, ist der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf die statisch unbestimmten Größen in erster Linie von den Trägheitsradien i abhängig; es ist daher, um für die verschiedenen Stichverhältnisse gleichartige Ergebnisse zu erhalten, erforderlich, die Bogen- und Rahmenstärken so zu wählen, daß für alle Stichverhältnisse bei gleichartiger Belastung konstante Materialbeanspruchung hervorgerufen wird. Bei Eisenbetonkonstruktionen wird immer die Betonbeanspruchung grundlegend sein.

Dieselbe beträgt im Scheitel

$$\sigma_0 = \frac{H}{F} + \frac{M}{W} = \frac{H}{b d} + \frac{M \cdot 6}{b d^2}.$$

Hieraus ergibt sich für die Breite 1

$$17) \quad d = \frac{H}{2 \sigma} + \sqrt{\left(\frac{H}{2 \sigma}\right)^2 + \frac{6 M}{\sigma}}.$$

Bei eingespannten Bogen mit parabolischer Achse wird nach M. Ritter Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger ohne Scheitелgelenk, angenähert für ständige Last

$$H = \frac{5 g_s + g_k}{48 f} l^2; \quad g_k \text{ angenähert } 3 g_s;$$

somit

$$H = \frac{g_s l^2}{6f}; \quad M_S = 0;$$

für bewegliche Last

$$H = \frac{p l^2}{16,8f} \quad \text{und} \quad M_S = \frac{p l^2}{186}.$$

Mit diesen Werten ergibt sich:

$$17a) \quad d = \left(\frac{g}{6} + \frac{p}{16,8} \right) \frac{l^2}{2\sigma f} + \sqrt{\left[\left(\frac{g}{6} + \frac{p}{16,8} \right) \frac{l^2}{2\sigma f} \right]^2 + \frac{p l^2}{31\sigma}};$$

beim Zweigelenbogen wird wieder für ständige Last

$$H = \frac{g l^2}{6f} \quad \text{und} \quad M_S = 0;$$

für bewegliche Last kann im Sinne der vorstehend angeführten Abhandlung H und M_S ermittelt werden. Es ist nach Gleichung 64) in Engeßers Autographie, Bogenträger, Neudruck Februar 1908,

$$H = \frac{5 \int_0^{\delta} (\xi l^3 - 2 \xi^3 l + \xi^4) p d\xi}{8 f l^3} = \frac{5 p}{8 f l^3} \left(l^3 \int_0^{\delta} \xi d\xi - 2 l \int_0^{\delta} \xi^3 d\xi + \int_0^{\delta} \xi^4 d\xi \right)$$

$$= \frac{5 p}{8 f l^3} \left(\frac{l^3 \delta^2}{2} - \frac{2}{4} l \delta^4 + \frac{1}{5} \delta^5 \right)_{\delta = \frac{l-\xi}{2}}^{\delta = \frac{l+\xi}{2}} = \frac{p \xi}{128 f l} \left(25 l^2 - 10 \xi^2 + \frac{\xi^4}{l^2} \right)$$

$$M_S = \mathfrak{M} - H f = \frac{p l \xi}{4} - \frac{p \xi^2}{8} - \frac{p \xi}{128 f l} \left(25 l^2 - 10 \xi^2 + \frac{\xi^4}{l^2} \right) f.$$

Durch Differentiation ergibt sich

$$\frac{dM_S}{d\xi} = \frac{7}{128} - \frac{\xi}{4} + \frac{15}{64} \left(\frac{\xi}{l} \right)^2 - \frac{5}{128} \left(\frac{\xi}{l} \right)^4 = 0;$$

Hieraus wird

$$\xi = 0,305 l.$$

Mit diesem Wert erhält man für

$$H = \frac{p l^2}{17,43} \quad \text{und} \quad M_S = \frac{p l^2}{138}$$

und schließlich die Bogenstärke zu

$$17b) \quad d = \left(\frac{g}{6} + \frac{p}{17,43} \right) \frac{l}{2\sigma f} + \sqrt{\left[\left(\frac{g}{6} + \frac{p}{17,43} \right) \frac{l}{2\sigma f} \right]^2 + \frac{p l^2}{23\sigma}}.$$

Bei den Rahmenkonstruktionen tritt die größte Materialbeanspruchung bei voller Belastung auf. Nach Abeles (Beton u. Eisen 1907, Heft V, S. 129) ist für gleichmäßige Lastverteilung

$$H = \frac{g l^3}{4h(2l+h)} \quad \text{und} \quad M_S = \frac{g l^2 (3hl + 2l)}{24(2l+h)};$$

mit

$$\lambda = \frac{h}{l}$$

wird

$$H = \frac{g h}{8 \lambda^2 + 4 \lambda^3} \quad \text{und} \quad M_S = \frac{g (3 \lambda + 2) h^2}{48 \lambda^2 + 24 \lambda^3}.$$

Mit diesen Werten liefert die Gleichung 17) eine Rahmenstärke von

$$17c) \quad d = \frac{gh}{(8\lambda^2 + 4\lambda^3)2\sigma} + \sqrt{\left(\frac{gh}{(8\lambda^2 + 4\lambda^3)2\sigma}\right)^2 + \frac{gh^2(3\lambda + 2)}{(8\lambda^2 + 4\lambda^3)\sigma}}$$

bei Zweigelenrahmen beträgt der Horizontalschub nach Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, III. Aufl., S. 115.

$$H = \frac{gl^2}{12h\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h}{l}\right)} = \frac{gh}{12\lambda^2 + 8\lambda^3}$$

und

$$M_s = \frac{gl^2}{8} - \frac{gl^2h}{12h\left(1 + \frac{2}{3}\frac{h}{l}\right)} = \frac{gh^2(2\lambda + 1)}{16\lambda^3 + 24\lambda^2}$$

somit wird

$$17d) \quad d = \frac{gh}{(24\lambda^2 + 16\lambda^3)\sigma} + \sqrt{\left(\frac{gh}{(24\lambda^2 + 16\lambda^3)\sigma}\right)^2 + \frac{gh^2(2\lambda + 1)6}{(24\lambda^2 + 16\lambda^3)\sigma}}$$

Aus den Gleichungen 17a) bis 17d) können die Bogen- und Rahmen stärken ermittelt werden; sind diese bekannt, so wird in Rücksicht auf die Bewehrung nach der in der Praxis vielfach angewandten Näherungsformel

$$i^2 = \frac{d^2}{10} \text{ gesetzt.}$$

Ausführung der in den Formeln 8c), 9c) und 11a) vorkommenden Integrationen.

Für den parabelförmigen Bogen gilt

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x);$$

mit $\frac{4f}{l^2} = a$ wird

$$y = alx - ax^2$$

und

$$\frac{dy}{dx} = y' = al - 2ax;$$

hieraus ergibt sich

$$x = \frac{l}{2} - \frac{y'}{2a}$$

und

$$y = \frac{al^2}{4} - \frac{y'^2}{4a}$$

$$dx = -\frac{1}{2a} dy';$$

nun ist

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + y'^2} \\ &= -\frac{1}{2a} \sqrt{1 + y'^2} dy'; \end{aligned}$$

demnach die Bogenlänge

$$18) \quad s = -\frac{1}{2a} \int_{+al}^{-al} \sqrt{1+y'^2} dy' = \frac{1}{2a} \int_{-al}^{+al} \sqrt{1+y'^2} dy';$$

$$s = \frac{1}{4a} [2al\sqrt{1+a^2l^2} + \lg \text{nat} (1 + 2a^2l^2 + 2al\sqrt{1+a^2l^2})]$$

$$\cos \varphi = \frac{dx}{ds} = \frac{l}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{dy}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Es wird somit

$$19) \quad \int_0^l \cos^2 \varphi ds = \frac{1}{2a} \int_{-al}^{+al} \frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{2a} \lg \text{nat} (y' + \sqrt{1+y'^2})$$

$$= \frac{1}{2a} \lg \text{nat} (1 + 2a^2l^2 + 2al\sqrt{1+a^2l^2});$$

$$20) \quad \int_0^l \sin^2 \varphi ds = \frac{1}{2a} \int_{-al}^{+al} \frac{y'^2 dy'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$= \frac{1}{4a} [2al\sqrt{1+a^2l^2} - \lg \text{nat} (1 + 2a^2l^2 + 2al\sqrt{1+a^2l^2})].$$

Weiter ist

$$21) \quad \int_0^l y^2 ds = \int_{+al}^{-al} \underbrace{\left(\frac{al^2}{4} - \frac{y'^2}{4a} \right)}_y \underbrace{\left(-\frac{1}{2a} \sqrt{1+y'^2} dy' \right)}_{ds}$$

$$= \frac{1}{32a^3} \left[a^4 l^4 \int_{-al}^{+al} \sqrt{1+y'^2} dy' - 2a^2 l^2 \int_{-al}^{+al} y' \sqrt{1+y'^2} dy' + \int_{-al}^{+al} y'^4 \sqrt{1+y'^2} dy' \right]$$

$$= \frac{1}{48 \cdot 32a^3} [2\sqrt{1+a^2l^2} (-3al - 10a^3l^3 + 8a^5l^5) + 3(1 + 4a^2l^2 + 8a^4l^4)]$$

$$\lg \text{nat} (1 + 2a^2l^2 + 2al\sqrt{1+a^2l^2}).$$

Bei eingespannten Bogen ändern sich die Werte für

$$\int_0^l \cos^2 \varphi ds \quad \text{und} \quad \int_0^l \sin^2 \varphi ds$$

nicht, dagegen müssen zur Ermittlung der Integrale

$$\int_0^l \xi ds \quad \text{und} \quad \int_0^l \eta ds$$

vorerst die Koordinaten u und v des Schwerpunktes S bestimmt werden.

Es ist

$$su = \int_0^l x ds = \int_{-al}^{+al} \underbrace{\left(\frac{l}{2} - \frac{y'}{2a} \right)}_x \underbrace{\left(-\frac{1}{2a} \sqrt{1+y'^2} dy' \right)}_{ds}$$

und

$$sv = \int_0^l y ds = \int_{-a}^{+al} \underbrace{\left(\frac{al^2}{4} - \frac{y'^2}{4a} \right)}_y \underbrace{\left(-\frac{1}{2a} \sqrt{1+y'^2} dy' \right)}_{ds}$$

$$= \frac{1}{64a^2} [(4a^3 l^3 - 2al) \sqrt{1+a^2 l^2} (1+4a^2 l^2)]$$

$$\lg \text{nat} (1 + 2a^2 l^2 + 2al \sqrt{1+a^2 l^2}).$$

Führt man nun ein neues, dem alten paralleles Koordinatensystem ξ und η durch den Schwerpunkt S des Bogens ein, so wird

$$y = v + \eta \quad \text{und} \quad x = \xi + \frac{l}{2}.$$

Diese Werte in die Parabelgleichung eingesetzt, geben mit der Abkürzung

$$\gamma = \frac{al^2}{4} - v$$

$$\eta = \gamma - a\xi^2.$$

Nun wird, ähnlich wie beim Zweigelenkbogen,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta' = -2a\xi$$

und

$$\xi = -\frac{1}{2a} \eta'$$

$$d\xi = -\frac{1}{2a} d\eta'$$

$$ds = -\frac{1}{2a} \sqrt{1+\eta'^2} d\eta'.$$

Weiter ergibt sich durch Substitution von ξ und η

$$\eta = \frac{\gamma - \eta'^2}{4a}$$

und schließlich

$$22) \int_0^l \xi^2 ds = \int_{+al}^{-al} \underbrace{\left(-\frac{1}{2a} \eta' \right)^2}_{\xi^2} \underbrace{\left(-\frac{1}{2a} \sqrt{1+\eta'^2} d\eta' \right)}_{ds}$$

$$= \frac{1}{64a^3} [(4a^3 l^3 + 2al) \sqrt{1+a^2 l^2} - \lg \text{nat} (1 + 2a^2 l^2 + 2al \sqrt{1+a^2 l^2})]$$

und

$$23) \int_0^l \eta^2 ds = \int_{+al}^{-al} \underbrace{\left(\gamma - \frac{\eta'^2}{4a} \right)^2}_{\eta^2} \underbrace{\left(-\frac{1}{2a} \sqrt{1+\eta'^2} d\eta' \right)}_{ds}$$

$$= \frac{1}{32a^3} \left[\left(\frac{a^5 l^5}{3} + \frac{1-48a\gamma}{12} a^3 l^3 - \frac{1+16a\gamma-128a^2\gamma^2}{8} al \right) \sqrt{1+a^2 l^2} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{16} + a\gamma + 8a^2\gamma^2 \right) \lg \text{nat} (1 + 2a^2 l^2 + 2al \sqrt{1+a^2 l^2}) \right].$$

Die entsprechenden Formeln für rechteckige Rahmen sind erheblich einfacher; es wird

$$24) \quad \int_0^l \cos^2 \varphi \, ds = l$$

$$25) \quad \int_0^l \sin^2 \varphi \, ds = 2h$$

$$26) \quad \int_0^l y^2 \, ds = lh^2 + \frac{2}{3} h^3$$

für Zweigelenrahmen, und nach Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, III. Aufl., S. 125 für den eingespannten Rahmen

$$27) \quad \int_0^l \xi^2 \, ds = \frac{l^2}{12} (l + 6h)$$

$$28) \quad \int_0^l \eta^2 \, ds = \frac{h^3}{3(2h + l)} (2l + h).$$

An Hand der Gleichungen 17) wurden die Bogenstärken unter Annahme einer ständigen Last von $g = 2,0 \text{ t/m}^2$, einer Verkehrslast von $p = 1,0 \text{ t/m}^2$ und einer Betonspannung von $\sigma = 300 \text{ t/m}^2$, die Rahmenstärken unter Annahme einer gleichmäßig verteilten Belastung von $g = 3,0 \text{ t/lf. m}$ und einer Betondruckspannung von $\sigma = 400 \text{ kg/m}^2$ berechnet.

Der Gleitmodul ergibt sich aus der bekannten Formel

$$G = \frac{Em}{2(m+1)} \quad \text{mit } m = 4:0,4 E,$$

und somit wird

$$\frac{\beta E}{G} = \frac{6}{5} \frac{1}{0,4} = 3.$$

Die Zunahme der Bogenstärken gegen die Kämpfer und die Verstärkungen der Rahmen in den Eckpunkten und Stielen hat auf die Schnittkräfte nur geringen Einfluß;¹⁾ es wurden daher zur Vereinfachung der Berechnung die Trägheitsmomente J und ebenso der Elastizitätsmodul E für sämtliche Bogen- und Rahmenelemente ds als konstant angenommen. Den vorstehenden Belastungsannahmen entsprechend sind in den Zählern der Gleichungen 8c), 9c) und 11a) die Lasten P durch eine stetige Belastung aus unendlich vielen Einzellasten $dP = g \, dx$ zu ersetzen.

Es wird dann in Gleichung 11a)

$$29) \quad \int_0^l My \, ds = g \int_0^l \left(\frac{l}{2} x - \frac{x^2}{2} \right) y \, ds = \frac{g}{2a} \int_0^l \frac{(alx - ax^2)}{y} y \, ds = \frac{g}{2a} \int_0^l y^2 \, ds$$

¹⁾ M. Ritter, Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogenträger, S. 21.

und

$$30) \quad H = \frac{g}{2a \left[1 + \frac{\int_0^l \cos^2 \varphi i^2 ds}{\int_0^l y^2 ds} + \frac{3 \int_0^l \sin^2 \varphi i^2 ds}{\int_0^l y^2 ds} \right]};$$

in Gleichung 8c) bei eingespannten Bogen

$$31) \quad H = \frac{g \int_0^l \frac{\left(\frac{l}{2} + \xi\right)^2 \eta}{2} ds}{\int_0^l \eta^2 ds + \int_0^l \cos^2 \varphi i^2 ds + \frac{\beta E}{G} \int_0^l \sin^2 \varphi i^2 ds + \frac{g \int_0^l (alx - ax^2) \eta ds}{2a \left(\int_0^l \eta^2 ds + \int_0^l \cos^2 \varphi i^2 ds + \frac{\beta E}{G} \int_0^l \sin^2 \varphi i^2 ds \right)};$$

es ist aber

$$\int_0^l (alx - ax^2) \eta ds = \int_0^l \eta^2 ds$$

und somit wird

$$31a) \quad H = \frac{g}{2a \left[1 + \frac{\int_0^l \cos^2 \varphi i^2 ds}{\int_0^l \eta^2 ds} + \frac{3 \int_0^l \sin^2 \varphi i^2 ds}{\int_0^l \eta^2 ds} \right]}$$

In Gleichung 9c) ergibt sich der Zähler für stetige Belastung zu

$$32) \quad \int_0^l \frac{\left(\frac{l}{2} + \xi\right)^2}{2} \xi ds = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{l^2}{4} \xi + l\xi^2 + \xi^3 \right) ds = \frac{l}{2} \int_0^l \xi^2 ds$$

und schließlich der Auflagerdruck

$$33) \quad V = \frac{gl}{2 \left[1 + \frac{\int_0^l \sin^2 \varphi i^2 ds}{\int_0^l \xi^2 ds} + \frac{3 \int_0^l \cos^2 \varphi i^2 ds}{\int_0^l \xi^2 ds} \right]}$$

Bei den Rechteckrahmen entwickelt sich die Gleichung 8c) zu

$$34) \quad H = \frac{g \frac{h^2 l^3}{12(2h+l)}}{\frac{h^3(2l+h)}{3(2h+l)} + li^2 + 6hi^2},$$

Gleichung 9c) zu

$$35) \quad V = \frac{g \frac{l^3}{24} (l+6h)}{\frac{l^2}{12} (l+6h) + 2hi^2 + 3li^2}$$

und Gleichung 11a) zu

$$36) \quad H = \frac{g \frac{l^3}{12} h}{\left(h^2 l + \frac{2}{3} h^3\right) + li^2 + 6hi^2}.$$

Bei der Berechnung in einem gegebenen Fall ist die Frage: Darf die Längskraft L , darf die Querkraft Q oder darf sogar L und Q unberücksichtigt bleiben? Also wie groß ist der Fehler am wahren Wert H_{LQ} , wenn nur H_L oder H_Q oder H_0 berechnet werden? Hierbei bedeutet

H_{LQ} den Schub, der unter Berücksichtigung von L und Q ,

H_L denjenigen, der unter Berücksichtigung von L und Vernachlässigung von Q ,

H_Q denjenigen, der unter Berücksichtigung von Q und Vernachlässigung von L , und

H_0 denjenigen, der unter Vernachlässigung von L sowohl als auch Q berechnet wurde.

Es sind dann die Fehler in Prozenten:

$$\text{I. } 100 \frac{H_{LQ} - H_L}{H_{LQ}}$$

$$\text{II. } 100 \frac{H_{LQ} - H_Q}{H_{LQ}}$$

und

$$\text{III. } 100 \frac{H_{LQ} - H_0}{H_{LQ}}.$$

Eine zweite Frage ist, ob nicht durch prozentische Abzüge an den gerechneten Werten H_L , H_Q oder H_0 der richtige Wert H_{LQ} wenigstens annähernd erhalten werden könnte. Die Zuschläge in Prozenten wären ausgedrückt durch

$$\text{IV. } 100 \frac{H_L - H_{LQ}}{H_L}$$

$$\text{V. } 100 \frac{H_Q - H_{LQ}}{H_Q}$$

$$\text{VI. } 100 \frac{H_0 - H_{LQ}}{H_0}.$$

Bezeichnet man in der Formel 8c) den Zähler mit Z , so erhält man für

$$H_{LQ} = \frac{Z}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

$$H_L = \frac{Z}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF}}$$

$$H_Q = \frac{Z}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

$$H_0 = \frac{Z}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ}}$$

oder für

$$\text{I. } 100 \frac{\beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF}}$$

$$\text{II. } 100 \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF}}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

$$\text{III. } 100 \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ}}$$

$$\text{IV. } 100 \frac{\beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

$$\text{V. } 100 \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF}}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

$$\text{VI. } 100 \frac{\int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}{\int \eta^2 \frac{ds}{EJ} + \int \cos^2 \varphi \frac{ds}{EF} + \beta \int \sin^2 \varphi \frac{ds}{GF}}$$

Führt man in den vorstehenden Gleichungen die Werte aus 9c) an, so gilt die Untersuchung für den statisch unbestimmten Auflagerdruck V , für die Werte der Gleichungen 11a) gilt dieselbe für den Horizontalschub einer Zweigelenkbogen- oder Rahmenkonstruktion. In den nachstehenden Tabellen sind für symmetrische parabelförmige Bogen und rechteckige

λ	d	$\int_0^l \eta^2 ds$	$\int_0^l \cos^2 \eta \eta^2 ds$	$\frac{\beta E}{G} \int_0^l \sin^2 \eta \eta^2 ds$	I	II	III	IV	V	VI
					$100 \frac{H_{LQ} - H_L}{H_{LQ}}$	$100 \frac{H_{LQ} - H_Q}{H_{LQ}}$	$100 \frac{H_{LQ} - H_0}{H_{LQ}}$	$100 \frac{H_L - H_{LQ}}{H_L}$	$100 \frac{H_Q - H_{LQ}}{H_Q}$	$100 \frac{H_0 - H_{LQ}}{H_0}$

Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den Horizontalschub beim eingespannten symmetrischen parabelförmigen Bogen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung.

1/1	0,01	0,2143	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1/2	0,02	0,2825	0,0001	0,0003	0,09	0,03	0,12	0,09	0,03	0,12
1/3	0,04	0,3560	0,0003	0,0005	0,14	0,10	0,24	0,14	0,10	0,24
1/4	0,05	0,4298	0,0010	0,0009	0,20	0,23	0,43	0,20	0,23	0,43
1/5	0,07	0,5081	0,0023	0,0014	0,26	0,45	0,61	0,26	0,45	0,61
1/6	0,09	0,5877	0,0046	0,0019	0,32	0,78	1,11	0,32	0,78	1,10
1/7	0,11	0,6721	0,0084	0,0026	0,38	1,23	1,61	0,38	1,22	1,60
1/8	0,13	0,7552	0,0140	0,0034	0,44	1,85	2,30	0,43	1,82	2,25
1/9	0,16	0,8304	0,0224	0,0043	0,50	2,70	3,21	0,47	2,00	3,10
1/10	0,19	0,9229	0,0344	0,0054	0,57	3,72	4,30	0,52	3,54	4,10

Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den Horizontalschub beim eingespannten Rechteckrahmen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung.

1/1	0,06	0,333	0,0003	0,0019	0,06	0	0,06	0,06	0	0,06
1/2	0,10	0,417	0,0021	0,0064	1,43	0,23	1,92	1,40	0,50	1,90
1/3	0,15	0,467	0,0068	0,0137	2,95	1,50	4,50	2,80	1,40	4,20
1/4	0,20	0,500	0,0157	0,0236	4,70	3,05	7,80	4,50	2,90	7,40
1/5	0,25	0,524	0,0303	0,0364	6,50	5,35	12,60	6,10	5,10	11,20
1/6	0,30	0,542	0,0523	0,0523	8,70	8,70	19,30	8,10	8,10	16,20
1/7	0,35	0,556	0,0832	0,0713	11,10	13,20	27,80	10,00	11,70	21,70
1/8	0,40	0,567	0,1257	0,0940	13,50	19,00	39,00	12,00	16,00	28,00
1/9	0,45	0,576	0,1799	0,1199	15,80	27,00	52,10	13,50	20,50	34,00
1/10	0,50	0,583	0,2499	0,1499	18,00	34,00	68,50	15,00	25,50	40,50

λ	d	$\int_0^l y^2 ds$	$\int_0^l \cos^2 \varphi r^2 ds$	$\frac{\beta E}{G} \int_0^l \sin^2 \varphi r^2 ds$	I	II	III	IV	V	VI
					$100 \frac{H_{LQ} - H_L}{H_{LQ}}$	$100 \frac{H_{LQ} - H_Q}{H_{LQ}}$	$100 \frac{H_{LQ} - H_0}{H_{LQ}}$	$100 \frac{H_L - H_{LQ}}{H_L}$	$100 \frac{H_Q - H_{LQ}}{H_Q}$	$100 \frac{H_0 - H_{LQ}}{H_0}$

Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den Horizontalschub beim symmetrischen parabelförmigen Zweigelenkbogen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung.

1/1	0,01	0,8962	0,0000	0,0000	0,01	0,00	0,01	0,01	0,00	0,01
1/2	0,03	1,3241	0,0001	0,0003	0,025	0,01	0,03	0,02	0,01	0,03
1/3	0,04	1,7771	0,0005	0,0007	0,04	0,03	0,07	0,04	0,03	0,07
1/4	0,06	2,2763	0,0012	0,0011	0,05	0,06	0,10	0,05	0,06	0,10
1/5	0,08	2,7826	0,0029	0,0017	0,06	0,10	0,16	0,06	0,10	0,16
1/6	0,10	3,3103	0,0056	0,0024	0,07	0,17	0,24	0,07	0,17	0,24
1/7	0,12	3,8157	0,0099	0,0031	0,08	0,26	0,34	0,08	0,26	0,34
1/8	0,13	4,3419	0,0166	0,0040	0,09	0,38	0,47	0,09	0,38	0,47
1/9	0,17	4,8816	0,0261	0,0050	0,10	0,54	0,64	0,10	0,53	0,63
1/10	0,20	5,4832	0,0398	0,0062	0,11	0,73	0,84	0,11	0,72	0,83

Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den Horizontalschub beim Zweigelenkrechtckrahmen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung.

1/1	0,06	1,667	0,0003	0,0020	0,12	0,02	0,14	0,12	0,02	0,14
1/2	0,11	2,667	0,0230	0,0069	0,26	0,09	0,35	0,26	0,09	0,35
1/3	0,15	3,667	0,0071	0,0142	0,38	0,20	0,58	0,38	0,20	0,58
1/4	0,20	4,667	0,0161	0,0242	0,51	0,34	0,86	0,51	0,34	0,86
1/5	0,25	5,667	0,0307	0,0368	0,63	0,54	1,17	0,63	0,54	1,17
1/6	0,30	6,667	0,0522	0,0522	0,77	0,77	1,54	0,77	0,77	1,54
1/7	0,34	7,667	0,0822	0,0711	0,95	1,05	2,00	0,92	1,04	1,96
1/8	0,39	8,667	0,1220	0,0915	1,05	1,40	2,45	1,03	1,38	2,41
1/9	0,44	9,667	0,1741	0,1161	1,20	1,80	3,00	1,17	1,75	2,92
1/10	0,50	10,667	0,2347	0,1438	1,34	2,20	3,54	1,30	2,15	3,45

λ	d	$\int_0^l \xi^2 ds$	$\int_0^l \sin^2 \varphi t^2 ds$	$\frac{\beta E}{G} \int_0^l \cos^2 \varphi t^2 ds$	I	II	III	IV	V	VI
					$100 \frac{V_{LQ} - V_L}{V_{LQ}}$	$100 \frac{V_{LQ} - V_Q}{V_{LQ}}$	$100 \frac{V_{LQ} - V_0}{V_{LQ}}$	$100 \frac{V_L - V_{LQ}}{V_L}$	$100 \frac{V_Q - V_{LQ}}{V_Q}$	$100 \frac{V_0 - V_{LQ}}{V_0}$

Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den Auflagedruck beim eingespannten symmetrischen parabelförmigen Bogen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung.

1/1	0,01	0,2446	0,0000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
1/2	0,02	1,2108	0,0001	0,0002	0,03	0,00	0,03	0,03	0,00	0,03
1/3	0,04	3,2200	0,0002	0,0011	0,04	0,00	0,04	0,04	0,00	0,04
1/4	0,05	6,7215	0,0003	0,0030	0,05	0,00	0,05	0,05	0,00	0,05
1/5	0,07	12,2325	0,0005	0,0069	0,06	0,00	0,06	0,06	0,00	0,06
1/6	0,09	17,3765	0,0006	0,0137	0,07	0,00	0,07	0,07	0,00	0,07
1/7	0,11	31,2793	0,0009	0,0250	0,08	0,00	0,08	0,08	0,00	0,08
1/8	0,14	45,7280	0,0011	0,0421	0,09	0,00	0,09	0,09	0,00	0,09
1/9	0,16	64,2243	0,0014	0,0673	0,10	0,00	0,10	0,10	0,00	0,10
1/10	0,19	87,2062	0,0018	0,1034	0,11	0,00	0,11	0,11	0,00	0,11

Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den Auflagedruck beim eingespannten Rechteckrahmen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung.

1/1	0,06	0,5833	0,0006	0,0010	0,20	0,10	0,29	0,20	0,10	0,29
1/2	0,10	2,667	0,0021	0,0064	0,25	0,08	0,33	0,25	0,08	0,33
1/3	0,15	6,750	0,0046	0,0205	0,30	0,07	0,37	0,30	0,07	0,37
1/4	0,20	13,333	0,0079	0,0472	0,35	0,06	0,41	0,35	0,06	0,41
1/5	0,25	22,917	0,0121	0,0910	0,40	0,05	0,45	0,40	0,05	0,45
1/6	0,30	36,000	0,0174	0,1570	0,44	0,05	0,48	0,44	0,05	0,48
1/7	0,35	53,083	0,0238	0,2499	0,47	0,04	0,51	0,47	0,04	0,51
1/8	0,40	74,666	0,0313	0,3760	0,50	0,04	0,54	0,50	0,04	0,54
1/9	0,45	101,250	0,0400	0,5395	0,53	0,04	0,57	0,53	0,04	0,57
1/10	0,50	133,333	0,0500	0,7497	0,56	0,04	0,60	0,56	0,04	0,60

Rahmen mit konstantem Trägheitsmoment J und gleichmäßig verteilter Belastung für die Stichverhältnisse $\lambda = \frac{f}{l}$ von $\frac{1}{1}$ bis $\frac{1}{10}$ die Prozentwerte der Werte I bis VI zusammengestellt.

VI. Schlußfolgerungen.

Werden aus vorstehenden Tabellen die reziproken Werte der Stichverhältnisse λ als Abszissen und die entsprechenden Fehlerwerte, die bei der Vernachlässigung der Längs- und Querkräfte am wahren Wert von H und V entstehen, als Ordinaten aufgetragen (Tafel III), so können aus dem Verlauf der Kurven für symmetrische parabelförmige Bogen und rechteckige Rahmen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung die Schlußfolgerungen gezogen werden.

I. Im allgemeinen.

1. Der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf die statisch unbestimmten Größen ist bei Rahmen ungleich größer als bei Bogen.

2. Der wahre Wert der statisch unbestimmten Größen H_{LQ} und V_{LQ} ist stets kleiner als der ohne Berücksichtigung der Längskräfte L und Querkräfte Q .

II. Im besonderen.

1. Der Einfluß der Längskräfte auf den statisch unbestimmten Horizontalschub wächst sowohl bei den Bogen wie auch Rahmen, gleichviel ob mit oder ohne Kämpfergelenk, mit abnehmendem Stichverhältnis parabolisch.

2. Der Einfluß der Querkräfte auf den statisch unbestimmten Horizontalschub wächst bei den eingespannten Bogen und Rahmen ebenfalls mit abnehmendem Stichverhältnis parabolisch, bei Gelenkanordnung dagegen annähernd linear.

3. Der Einfluß der Längskräfte auf den statisch unbestimmten Auflagerdruck eingespannter Bogen und Rahmen ist sehr gering und nimmt annähernd linear mit dem Stichverhältnis ab. Derjenige der Querkräfte ist etwas größer und wächst parabolisch mit abnehmendem Stichverhältnis.

4. Die Einflußkurven der Längskräfte schneiden infolge ungleich starker Krümmung diejenigen der Querkräfte. An diesen Schnittstellen wird der Einfluß der Längskräfte gleich dem der Querkräfte. Die gemeinsamen Schnittpunkte liegen bei parabelförmigen Bogen bei dem Stichverhältnis von etwa $\frac{1}{4}$, bei dem Rechteckrahmen dagegen bei etwa $\frac{1}{6}$. Der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den statisch unbestimmten Auflagerdruck bei den eingespannten Bogen und Rahmen ist so gering, daß er ohne

weiteres vernachlässigt werden kann. Bei Bogenkonstruktionen überwiegt bei den häufig vorkommenden Ausführungen mit den Stichverhältnissen von etwa $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{10}$ der Einfluß der Längskräfte denjenigen der Querkräfte, und die Vernachlässigung der letzteren bei der üblichen analytischen Berechnungsweise erscheint gerechtfertigt; anders ist es dagegen bei den Rahmenkonstruktionen; die in der Praxis häufigeren Stichverhältnisse bewegen sich zwischen $\frac{1}{1}$ und $\frac{1}{4}$, hier aber überwiegt der Einfluß der Querkräfte denjenigen der Längskräfte, und obwohl die Stichverhältnisse verhältnismäßig groß sind, wird der Einfluß der Längs- und Querkräfte so groß oder noch größer als bei Bogenkonstruktionen mit sehr kleinen Stichverhältnissen.

Es ist demnach bei der Berechnung insbesondere von eingespannten Rahmenkonstruktionen nicht statthaft, die Längskräfte, noch weniger die Querkräfte zu vernachlässigen.

Angewandte Beispiele.

Im Anschluß an die vorstehenden Untersuchungen sollen nunmehr für einige Bogen- und Rahmenkonstruktionen aus Eisenbeton Horizontalschub und Auflagerdruck ermittelt werden.

1. Gesucht seien Horizontalschub und Auflagerdruck eines eingespannten Brückengewölbes von den Dimensionen

$$\begin{aligned} l &= 40,00 \text{ m} \\ f &= 4,00 \text{ „} \\ d &= 0,85 \text{ „} \\ f_e = f'_e &= 15,0 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

und einer Belastung von $3,60 \text{ t/m}^2$.

Nach Gleichung 31a) wird

$$\text{a) } H_0 = \frac{3,60}{2a} = \mathbf{180,0 \text{ t.}}$$

$$a = \frac{4 \cdot 4,0}{40,0^2} = 0,01$$

$$i^2 = \frac{\frac{85^2}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 15,0 \cdot 37,5^2}{8500 + 450} = 0,064;$$

nach Gleichung 19) wird

$$\int_0^l \cos^2 \varphi \, ds = 39,0 \text{ (angenähert } = l = 40,0 \text{ m)}$$

und
$$\int_0^l \cos^2 \varphi \, ds \, i^2 = 2,496;$$

nach Gleichung 23) wird

$$\int_0^l \eta^2 ds = 59,0656 \left(\text{angenähert} = \frac{4}{45} f^2 l = \frac{4 \cdot 4,0^2 \cdot 40,0}{45} = 56,888 \right)$$

$$H_L = \frac{3,60}{0,02 \left(1 + \frac{2,496}{59,0656} \right)} = \mathbf{172,711 \text{ t}}$$

nach Gleichung 20) wird

$$\int_0^l \sin^2 \varphi ds = 2,04 \text{ (angenähert} = 0)$$

und

$$3 \int_0^l \sin^2 \varphi ds i^2 = 0,3917$$

$$H_Q = \frac{3,60}{0,02 \left(1 + \frac{0,392}{59,067} \right)} = \mathbf{178,804 \text{ t}}$$

$$H_{LQ} = \frac{3,60}{0,02 \left(1 + \frac{2,496 + 0,392}{59,062} \right)} = \mathbf{171,625 \text{ t}}$$

b) Nach Gleichung 33) wird

$$V_0 = \frac{3,60 \cdot 40,0}{2} = \mathbf{7,20 \text{ t}}$$

nach Gleichung 22) wird

$$\int_0^l \xi^2 ds = 5581,197 \left(\text{angenähert} = \frac{l^3}{12} = 5333,333 \right)$$

$$3 \int_0^l \cos^2 \varphi ds i^2 = 3 \cdot 2,496 = 7,488$$

$$V_Q = \frac{3,60 \cdot 40,0}{2 \left(1 + \frac{7,488}{5581,197} \right)} = \mathbf{71,903 \text{ t}}$$

Der Einfluß der Längskräfte auf den statisch unbestimmten Auflagerdruck wird so gering, daß er rechnerisch kaum mehr verfolgt werden kann.

Werden bei vorstehendem Brückengewölbe Kämpfergelenke angeordnet, so ergibt sich nach Gleichung 30)

$$c) \quad H_0 = \frac{3,60}{2 \cdot 0,01} = \mathbf{180,0 \text{ t}}$$

nach Gleichung 21) wird

$$\int y^2 ds = 351,925 \left(\text{angenähert} = \frac{8}{15} f^2 l = \frac{8}{15} \cdot 4,0^2 \cdot 40,0 = 241,333 \right).$$

$$H_L = \frac{3,60}{0,02 \left(1 + \frac{2,496}{351,925} \right)} = \mathbf{179,733 \text{ t}}$$

$$H_Q = \frac{3,60}{0,02 \left(1 + \frac{0,3917}{351,925} \right)} = \mathbf{179,798 \text{ t}}$$

$$H_{LQ} = \frac{3,60}{0,02 \left(1 + \frac{2,496 + 0,3917}{351,925} \right)} = \mathbf{179,541 \text{ t}}$$

2. Gesucht der Horizontalschub eines Brückengewölbes von den Dimensionen

$$l = 60,00 \text{ m}$$

$$f = 12,00 \text{ „}$$

$$d = 0,85 \text{ „}$$

$$f_e = f'_e = 15 \text{ cm}^2$$

und einer Belastung von wiederum 3,60 t/m².

Nach Gleichung 31a) wird

$$\text{a) } H_0 = \frac{3,60}{2a} = \mathbf{135,0 \text{ t}}$$

$$a = \frac{4 \cdot 12,0}{3600,0} = \frac{4}{300}$$

Nach Gleichung 19) ist

$$\int_0^l \cos^2 \varphi \, ds = 55,0125 \quad (\text{angenähert } 60,0),$$

somit

$$\int_0^l \cos^2 \varphi \, ds \, i^2 = 55,0125 \cdot 0,064 = 3,5208;$$

nach Gleichung 23) wird

$$\int_0^l \eta^2 \, ds = 876,724 \quad \left(\text{angenähert } \frac{4 \cdot 12,0^2 \cdot 60,0}{45} = 768,133 \right)$$

$$H_L = \frac{3,60}{\frac{2 \cdot 4}{300} \left(1 + \frac{3,5208}{876,724} \right)} = \mathbf{134,461 \text{ t}}$$

Nach Gleichung 20) wird

$$\int_0^l \sin^2 \varphi \, ds = 10,895 \quad (\text{angenähert } = 0)$$

$$3 \int_0^l \sin^2 \varphi \, ds \, i^2 = 2,0918$$

$$H_Q = \frac{3,60}{\frac{2 \cdot 4}{300} \left(1 + \frac{2,0918}{876,724} \right)} = \mathbf{134,676 \text{ t}}$$

$$H_{LQ} = \frac{3,60}{\frac{2 \cdot 4}{300} \left(1 + \frac{3,5208 + 2,0918}{876,724} \right)} = \mathbf{134,181 \text{ t}}$$

$$b) \quad V_0 = 3,6 \cdot \frac{60}{2} = 108 \text{ t.}$$

Der Einfluß der Längs- und Querkräfte auf den statisch unbestimmten Auflagerdruck ist so gering, daß er rechnerisch kaum mehr verfolgt werden kann.

c) Werden bei dem vorstehenden Brückengewölbe Kämpfergelenke angeordnet, so ergibt sich nach Gleichung 30)

$$H_0 = \frac{3,60}{2 \cdot \frac{4}{300}} = \mathbf{135,0 \text{ t.}}$$

Nach Gleichung 21) wird

$$\int_0^l y^2 ds = 4829,712 \quad \left(\text{angenähert } \frac{8}{15} \cdot 12,0^2 \cdot 60,0 = 4608,0 \right),$$

somit

$$H_L = \frac{3,60}{\frac{2 \cdot 4}{300} \left(1 + \frac{3,5208}{4829,712} \right)} = \mathbf{134,900 \text{ t.}}$$

Der Einfluß der Querkraft auf den statisch unbestimmten Horizontalschub ist so gering, daß er rechnerisch kaum mehr verfolgt werden kann.

3. Gesucht seien Horizontalschub und Auflagerreaktion einer eingespannten Rahmenkonstruktion von den Dimensionen

$$l = 12,00 \text{ m} \quad h = 1,20 \text{ m} \quad d = 0,60 \text{ m} \quad b = 1,00 \text{ m} \\ f_e = f'_e = 30,0 \text{ cm}^2$$

und einer Belastung von $3,0 \text{ t/m}^2$.

Rahmen von diesen Dimensionen kommen im Hochbau seltener vor; dagegen können sie oft mit Vorteil bei Ueberbrückungen von Bächen innerhalb des Stadtgebietes bei beschränkter Konstruktionshöhe und rechteckigem Durchflußprofil, wo aus besonderen Gründen Eisenbeton als Konstruktionsmaterial gewünscht wird, Verwendung finden.

Nach Gleichung 34) wird

$$a) \quad H_0 = \frac{3,0 \cdot \frac{1,20 \cdot 12,0^3}{12(2 \cdot 1,20 + 12,0)}}{\frac{1,20^3(2 \cdot 12,0 + 1,20)}{3(2 \cdot 1,20 + 12,0)}} = \frac{36,0}{1,008} = \mathbf{35,714 \text{ t}}$$

$$i^2 = \frac{\frac{0,60^3}{12} \cdot 1,0 + 2 \cdot 15 \cdot 0,0030 \cdot 0,25^2}{0,60 \cdot 1,0 + 2 \cdot 15 \cdot 0,0030} = 0,03424 \text{ m}^4$$

$$H_L = \frac{36,0}{1,008 + 12 \cdot 0,03424} = \mathbf{25,389 \text{ t}}$$

$$H_Q = \frac{36,0}{1,008 + 6 \cdot 1,20 \cdot 0,03424} = \mathbf{28,685 \text{ t}}$$

$$H_{LQ} = \frac{36,0}{1,008 + 0,41 + 0,246} = \mathbf{21,389 \text{ t.}}$$

Nach Gleichung 35) wird

$$b) \quad V_0 = \frac{3,0 \cdot \frac{12,0^3}{24} (12,0 + 6 \cdot 1,20)}{\frac{12,0^3}{12} (12,0 + 6 \cdot 1,20)} = \frac{4147 \cdot 20}{230,40} = \mathbf{18,0 \text{ t}}$$

$$V_Q = \frac{4147,20}{230,4 + 3 \cdot 12,0 \cdot 0,03424} = \mathbf{17,905 \text{ t}}$$

Der Einfluß der Längskräfte auf den statisch unbestimmten Auflagerdruck ist so gering, daß er rechnerisch kaum mehr verfolgt werden kann.

c) Werden bei der vorstehenden Rahmenkonstruktion Fußgelenke angeordnet, so wird nach Gleichung 36)

$$H_0 = \frac{3,0 \cdot \frac{12,0^3}{12,0} \cdot 1,20}{\left(1,20^2 \cdot 12,0 + \frac{2}{3} \cdot 1,20^3\right)} = \frac{518,40}{18,432} = \mathbf{28,125 \text{ t}}$$

$$H_L = \frac{518,40}{18,432 + 0,42} = \mathbf{27,497 \text{ t}}$$

$$H_Q = \frac{518,40}{18,432 + 0,255} = \mathbf{27,741 \text{ t}}$$

$$H_{LQ} = \frac{518,40}{18,432 + 0,42 + 0,255} = \mathbf{27,132 \text{ t}}$$

4. Gesucht seien Horizontalschub und Auflagerreaktion eines eingespannten Rahmens von den Dimensionen

$$l = 15,00 \text{ m}$$

$$h = 3,00 \text{ ,,}$$

$$d = 0,75 \text{ ,,}$$

$$b = 0,45 \text{ ,,}$$

$$f_e = f'_e = 47,0 \text{ cm}^2$$

und einer Belastung $g = 2,50 \text{ t/m}^2$.

Nach Gleichung 34) wird

$$a) \quad H_0 = \frac{2,50 \cdot \frac{3,0^2 \cdot 15,0^2}{12 (2 \cdot 3,0 + 15,0)}}{\frac{3,0^2 (2 \cdot 15,0 + 3,0)}{3 (2 \cdot 3,0 + 15,0)}} = \frac{300,93}{14,123} = \mathbf{21,306 \text{ t}}$$

$$i^2 = \frac{\frac{0,75^3 \cdot 0,45}{12} + 2 \cdot 15 \cdot 0,0047 \cdot 0,31^2}{0,3475 + 2 \cdot 15 \cdot 0,0047} = 0,061 \text{ m}^4$$

$$H_L = \frac{300,93}{14,123 + 15,0 \cdot 0,061} = \mathbf{20,067 \text{ t}}$$

$$H_Q = \frac{300,93}{14,123 + 6 \cdot 3,0 \cdot 0,061} = \mathbf{19,770 \text{ t}}$$

$$H_{LQ} = \frac{300,93}{14,123 + 0,915 + 1,098} = \mathbf{18,646 \text{ t}}$$

Nach Gleichung 35) wird

$$b) V_0 = \frac{2,50 \cdot \frac{15,0^3}{24} (15,0^3 + 6 \cdot 3,0)}{\frac{15,0^2}{12} (15,0 + 6 \cdot 3,0)} = \frac{11\,601,562}{618,75} = \mathbf{18,75\ t}$$

$$V_Q = \frac{11\,601,562}{618,75 + 3 \cdot 15,0 \cdot 0,061} = \mathbf{18,663\ t}$$

Der Einfluß der Längskräfte auf den statisch unbestimmten Auflagerdruck ist so gering, daß er rechnerisch kaum mehr verfolgt werden kann.

c) Werden bei der vorstehenden Rahmenkonstruktion Fußgelenke angeordnet, so wird nach Gleichung 36)

$$H_0 = \frac{2,50 \cdot \frac{15,0^3}{12} \cdot 3,0}{3,0^2 \cdot 15,0 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3,0^3} = \frac{2109,375}{153,0} = \mathbf{13,785\ t}$$

$$H_L = \frac{2109,375}{153,0 + 15,0 \cdot 0,061} = \mathbf{13,705\ t}$$

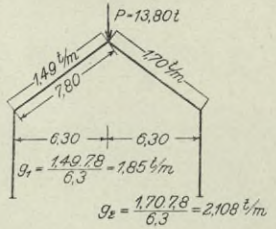
$$H_Q = \frac{2109,375}{153,0 + 3,0 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 0,061} = \mathbf{13,687\ t}$$

$$H_{LQ} = \frac{2109,375}{153,0 + 0,915 + 1,098} = \mathbf{13,605\ t}$$

Zusammenstellung der in den vier vorstehenden Beispielen gefundenen Werte.

Beispiel	Berechneter Wert in Tonnen	Fehler zu groß um Tonnen	Prozente des wahren Wertes	Erforderliche Korrektur am berechneten Wert H	
				um Tonnen	um %
1a	H_{LQ}	171,63	0	0	0
	H_L	172,71	1,08	0,6	— 0,6
	H_Q	178,80	7,17	4,2	— 7,17
	H_0	180,00	8,37	4,9	— 8,30
1b	V_{LQ}	71,90	0	0	0
	V_L	72,00	0,10	0,14	— 0,10
	V_Q	71,90	0	0	0
	V_0	72,00	0,10	0,14	— 0,10
1c	H_{LQ}	179,54	0	0	0
	H_L	179,73	0,19	0,11	— 0,19
	H_Q	179,80	0,26	0,16	— 0,26
	H_0	180,00	0,46	0,26	— 0,46
2a	H_{LQ}	134,18	0	0	0
	H_L	134,46	0,28	0,21	— 0,28
	H_Q	134,68	0,50	0,37	— 0,50
	H_0	135,00	0,82	0,61	— 0,82
2b	V_{LQ}	108,00	0	0	0
	V_L	108,00	0	0	0
	V_Q	108,00	0	0	0
	V_0	108,00	0	0	0
2c	H_{LQ}	134,90	0	0	0
	H_L	134,90	0	0	0
	H_Q	135,00	0,10	0,07	— 0,10
	H_0	135,00	0,10	0,07	— 0,10
3a	H_{LQ}	21,39	0	0	0
	H_L	25,39	4,00	19	— 4,00
	H_Q	28,67	7,28	34	— 7,28
	H_0	35,71	14,32	67	— 14,32
3b	V_{LQ}	17,95	0	0	0
	V_L	18,00	0,05	0,28	— 0,05
	V_Q	17,90	0,10	0,35	— 0,10
	V_0	18,00	0,05	0,28	— 0,05
3c	H_{LQ}	27,13	0	0	0
	H_L	27,50	0,37	1,4	— 0,37
	H_Q	27,74	0,61	2,3	— 0,61
	H_0	28,13	1,00	3,7	— 1,00
4a	H_{LQ}	18,65	0	0	0
	H_L	20,07	1,42	7,7	— 1,42
	H_Q	19,77	1,12	6,0	— 1,12
	H_0	21,31	2,66	14,2	— 2,66
4b	V_{LQ}	18,66	0	0	0
	V_L	18,75	0,09	0,5	— 0,09
	V_Q	18,66	0	0	0
	V_0	18,75	0,09	0,5	— 0,09
4c	H_{LQ}	13,61	0	0	0
	H_L	13,71	0,10	0,74	— 0,10
	H_Q	13,69	0,08	0,60	— 0,08
	H_0	13,79	0,18	1,30	— 0,18

Graphische Berechnung eines eingespannten Rahmens nach Ritter.

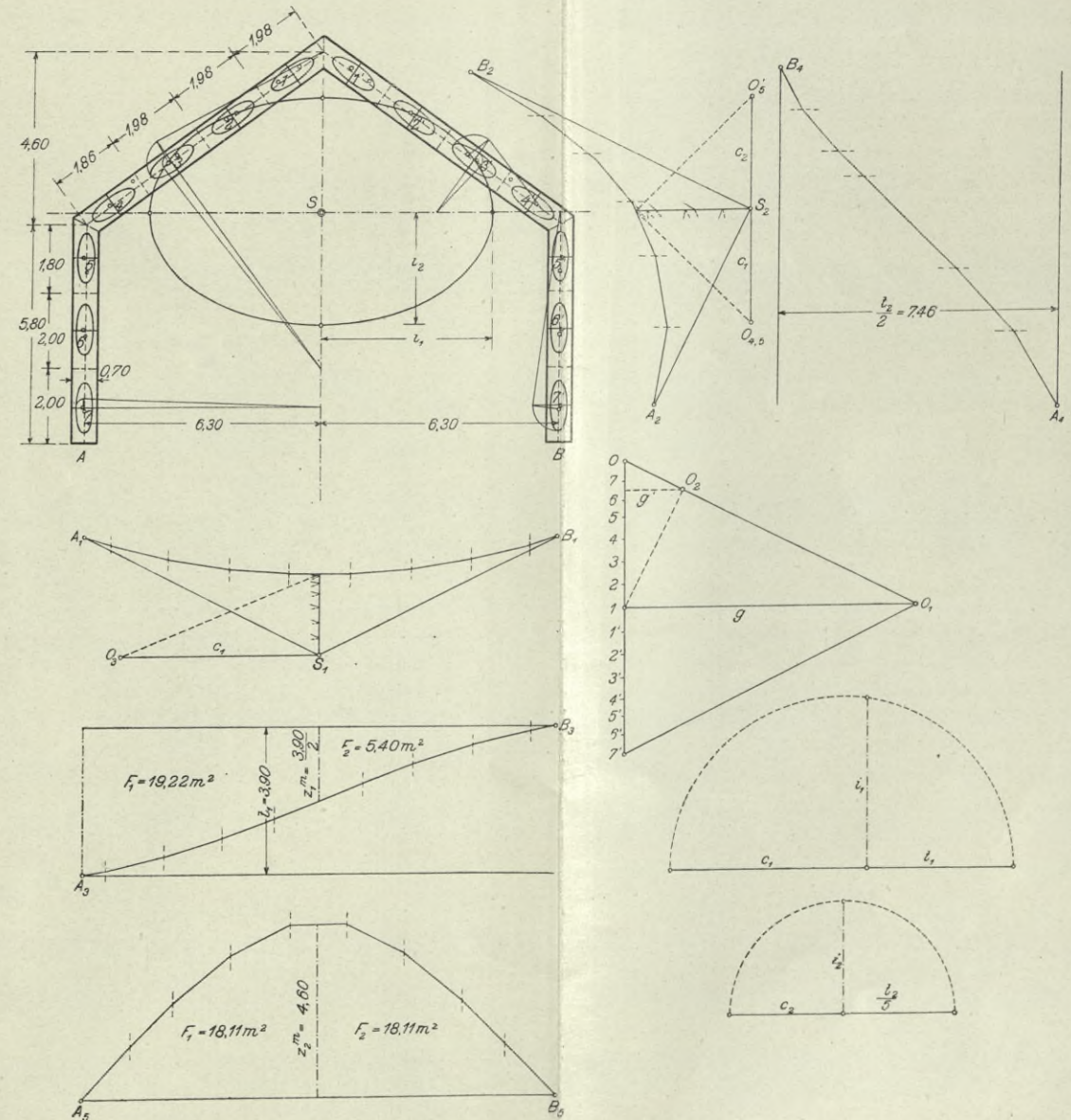


L	As	$J = \frac{b \cdot d^3}{12}$	$F = b \cdot d$	$i_2 = \sqrt{\frac{J}{F}}$	$i_1 = \sqrt{\frac{As^2}{12} + \frac{\beta E \cdot J}{G \cdot F^*}}$	$Ag = \frac{As}{E \cdot J}$
1.	1,98	800 990	2275	18,75	65,8	247,2
2.	1,98	800 990	2275	18,75	65,8	247,2
3.	1,98	800 990	2275	18,75	65,8	247,2
4.	1,86	800 990	2275	18,75	62,9	232,2
5.	1,80	1 000 420	2450	20,21	62,8	180,0
6.	2,00	1 000 420	2450	20,21	67,5	200,0
7.	2,00	1 000 420	2450	20,21	67,5	200,0
7'	2,00	1 000 420	2450	20,21	67,5	200,0
6'	2,00	1 000 420	2450	20,21	67,5	200,0
5'	1,80	1 000 420	2450	20,21	62,8	180,0
4'	1,86	800 990	2275	18,75	62,9	232,2
3'	1,98	800 990	2275	18,75	65,8	247,2
2'	1,98	800 990	2275	18,75	65,8	247,2
1'	1,98	800 990	2275	18,75	65,8	247,2

$$H = \frac{P \cdot z_2^m + g_1 \cdot F_1 + g_2 \cdot F_2}{t_2} = \frac{13,80 \cdot 4,60 + 1850 \cdot 18,11 + 2108 \cdot 18,11}{14,92} = 9,05 \text{ t}$$

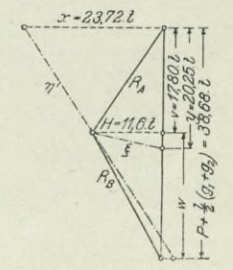
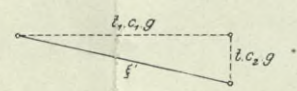
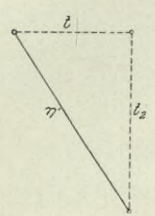
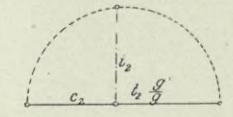
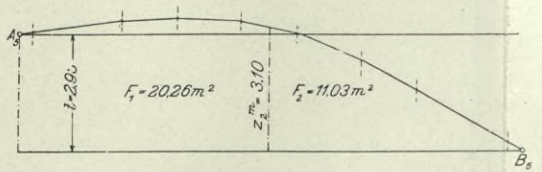
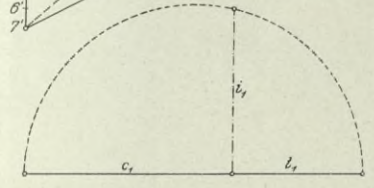
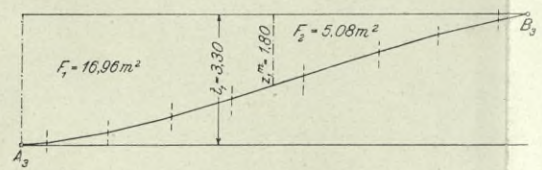
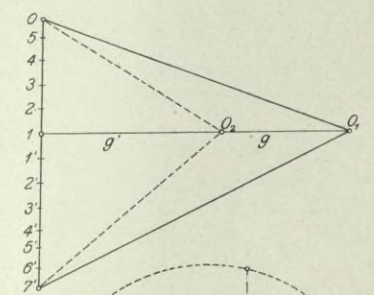
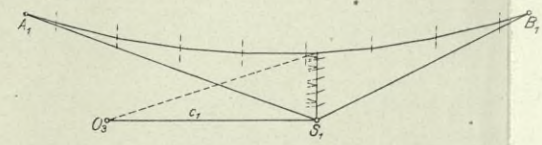
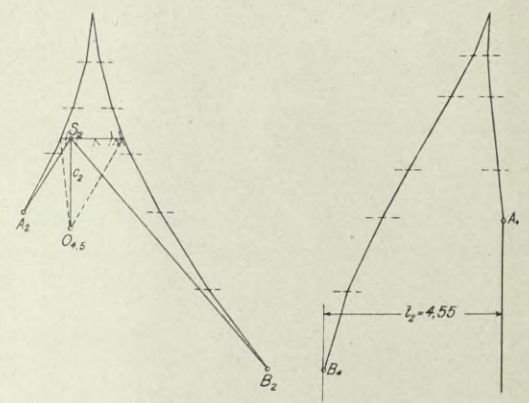
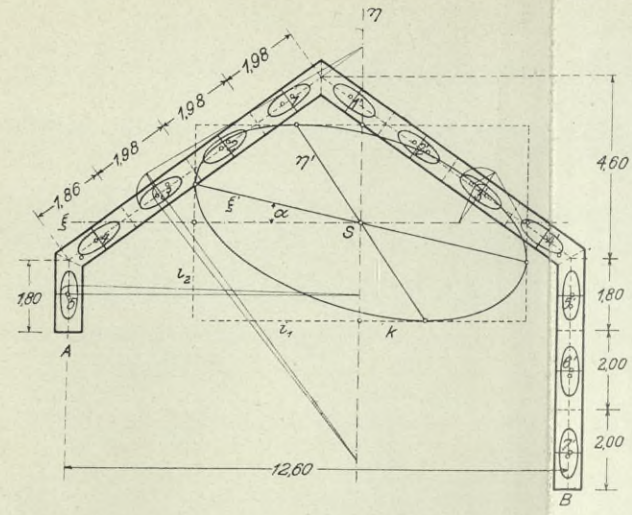
$$V = \frac{P \cdot z_1^m + g_1 \cdot F_1 + g_2 \cdot F_2}{t_1} = \frac{13,80 \cdot \frac{3,90}{2} + 1850 \cdot 19,22 + 2108 \cdot 5,40}{3,90} = 18,92 \text{ t}$$

*) Siehe S. 27: $\beta \cdot \frac{E}{6} = 3$.



Rueb. Einfluß der Längs- und Querkräfte.

Graphische Berechnung eines unsymmetrischen Rahmens nach Ritter.



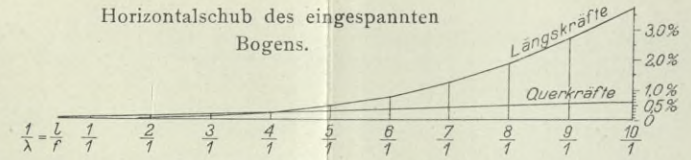
$$X = \frac{13,80 \cdot 3,10 + 1,85 \cdot 20,26 + 2,108 \cdot 11,03}{4,55} = 23,72 \text{ t}$$

$$Y = \frac{13,80 \cdot 1,80 + 16,96 \cdot 1,85 + 2,108 \cdot 5,08}{3,30} = 20,25 \text{ t}$$

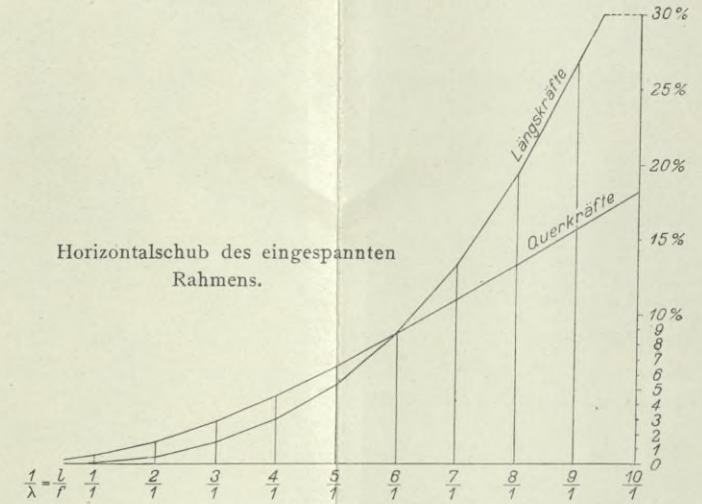
Graphische Darstellung der Fehler

am wahren Wert der statisch unbestimmten Größen H und V bei Vernachlässigung der Längs- und Querkräfte an symmetrischen parabelförmigen Bogen und Rechteckrahmen mit konstantem Trägheitsmoment und gleichmäßig verteilter Belastung.

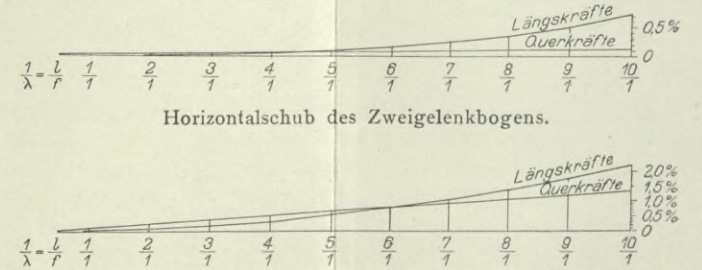
Horizontalschub des eingespannten Bogens.



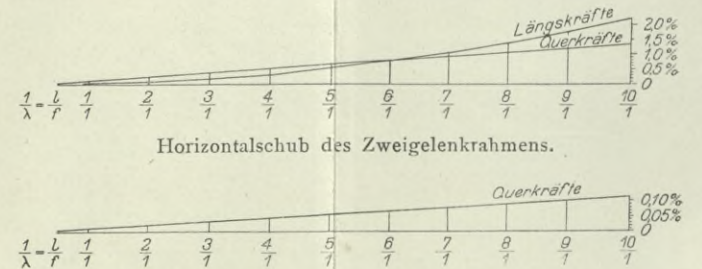
Horizontalschub des eingespannten Rahmens.



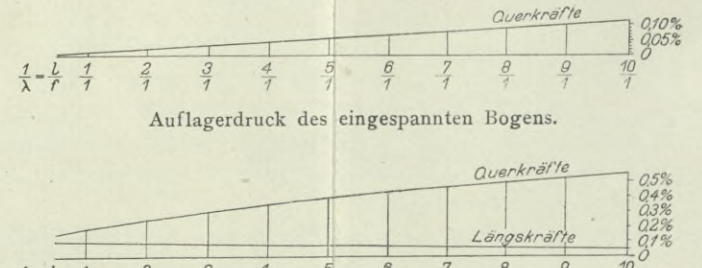
Horizontalschub des Zweigelenbogens.



Horizontalschub des Zweigelenrahmens.



Auflagerdruck des eingespannten Bogens.



Auflagerdruck des eingespannten Rahmens.

Rueb, Einfluß der Längs- und Querkräfte.

30.00

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

17452

Druk. U. J. Zam. 356. 10.000.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307043

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316011

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307044

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316012

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307045

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316013

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307046

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316014

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307042

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300596