



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300595



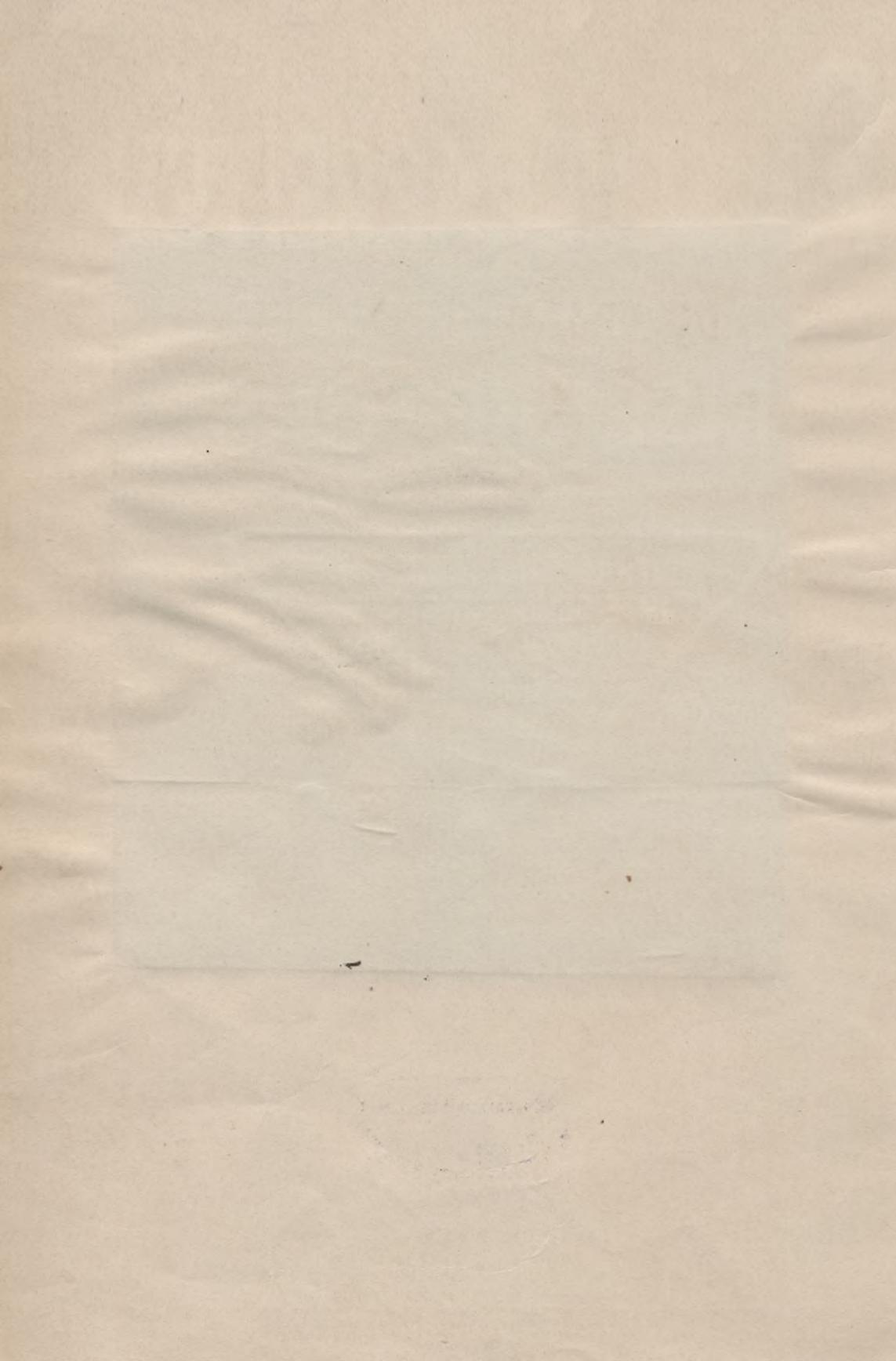
T. 9 a

15

- Heft 13: Beiträge zur Theorie der im Eisenbetonbau gebräuchlichen Form der Rippen-Kuppel.** Von Dr. Ing. Karl W. Mautner, Oberingenieur der Firma Carl Brandt. 1911. geh. 4 M.
- Heft 14: Eine Güteprobe für Beton System Dr. v. Emperger.** Von G. Neumann, Ingenieur. Mit 9 Abb. 1911. geh. 4 M.
Protokollformulare sind zum Preise von 1 M. zuzüglich Porto für 12 Stück erhältlich.
- Heft 15: Eisenbetonkonstruktionen bei Biegung und bei exzentrisch wirkenden Druck- oder Zugkräften.** Einheitliche Verfahren zur Bemessung derselben. Für die Praxis bearbeitet von R. Wuczkowski, Chefingenieur im Spezialbureau von Dr. Ing. v. Emperger. Mit 21 Abb. u. 23 Beispielen. 1911. geh. 4 M.
- Heft 16: Schwimmkörper in Eisenbeton.** Von Ingenieur W. Stroß. Mit 154 Abb. 1911. geh. 6 M.
- Heft 17: Beiträge zur Theorie und Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bögen, Bogenstellungen und mehrstiegligen Rahmen.** Von Dr. Ing. K. W. Schaechterle, Regierungsbaumeister. Mit 91 Abb. 1912. geh. 6 M.
- Heft 18: Beitrag zur Berechnung mehrstöckiger Rahmen mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes.** Von Ingenieur A. Straßner. Mit 21 Textabb. 1912. geh. 2,60 M.
- Heft 19: Ueber neuere Versuche mit umschnürtem Beton.** (Spiralummwickelte und ringbewehrte Säulen.) Von Dr. Ing. A. Kleinogel. Mit 25 Textabb. 1912. geh. 3,20 M.

Heft 20. Leitung zum Kuppeln und Zylinderbau. Von H. Frischhändler. 1912.

Heft 21. Leitung zum Leerdarmen und Kuppeln. Von H. Frischhändler. 1913.



FORSCHERARBEITEN

AUF DEM GEBIETE DES

EISENBETONS

BEITRAG ZUR THEORIE
— DES —
EISENBETONS



HEFT XX

PREIS 2 MARK

VON

DR. ING. A. FRUCHTHÄNDLER

OBER-INGENIEUR DER FIRMA PAUL KOSSEL & CIE., BREMEN

MIT 40 TEXTABBILDUNGEN



§

Prof. W. Fruchthändler

g 19 a 15

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.

Beitrag

zur

Theorie des Eisenbetons

von

Dr.-Ing. A. Fruchthändler

Ober-Ingenieur der Firma Paul Kossel & Cie., Bremen

Mit 40 Textabbildungen



Berlin 1912
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn



MI-307040

Alle Rechte vorbehalten.

Nachdruck, auch auszugsweise, verboten.



~~III 17452~~

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Einleitung	1
2. Besprechung von einigen Versuchen	3
3. Folgerungen aus den Versuchen. Neue Theorie	7
4. Balken rechteckigen Querschnittes	10
5. Berechnungsbeispiele	10
6. Grenzfall	13
7. Bemerkungen über den Verlauf der Deformationsdiagramme	14
8. Plattenbalken. Theorie	17
9. Beispiele	19
10. Deformationsdiagramme bei Plattenbalken	20
11. Reine Betonbalken	22
12. Parabelförmige Deformationskurve	24
13. Anwendungen der neuen Theorie	25
14. Schlußbemerkungen	29
Tabelle I und II	33
Anhang	34

Beitrag zur Biegungstheorie elastisch veränderlicher, insbesondere der Eisenbetonkonstruktionen.

1. Einleitung.

Die Theorie der Biegung von Konstruktionen, die in bezug auf die Zug- und Druckelastizität ein verschiedenes Verhalten aufweisen, zu denen auch vornehmlich die Verbundkonstruktionen zählen, ist noch nicht derartig geklärt, wie es heute in der Fachwelt ziemlich allgemein angenommen wird. Noch nicht als ganz befriedigend gelöst gilt zurzeit die Theorie der Schub- und Haftspannungen der Verbundkonstruktionen, die Biegungstheorie dagegen unter Zugrundelegung des Hookschen und des Bernoulli-Navierschen Gesetzes wird allgemein als mit der Wirklichkeit genügend übereinstimmend angesehen.

Daß dem nicht so ist, namentlich nicht im sogen. Stadium IIb, wo also die Zugfestigkeit des Betons erschöpft ist und die Konstruktion sich der Bruchgrenze nähert, ist schon früher von einzelnen Forschern erkannt worden; insbesondere erkannte dieses klar und deutlich der sonst auf dem Gebiete des Eisenbetons bahnbrechend wirkende Forscher Dr. v. Emperger. Schon im Jahre 1903 fand er anlässlich der Bearbeitung eines Versuchsmaterials, daß die dem Eisenbeton zugrunde gelegte Theorie für die Beurteilung der Tragfähigkeit einer Eisenbetonkonstruktion nicht maßgebend sei, jedenfalls für die Beurteilung der beim Bruch in beiden Materialien der Verbundkonstruktion auftretenden und für den Bruch maßgebenden Spannungen nicht brauchbar sei.

Dr. v. Emperger hat auch in Erkenntnis dieser Tatsache eine Faustregel vorgeschlagen, die die Spannungsverteilung der Betondruckzone in der Nähe des Bruches als Rechteck berechnet.

In Kombination mit den sonst nach der üblichen Theorie sich ergebenden Lage der Nullinie, findet Dr. v. Emperger die Spannungen, die in der Nähe des Bruches im Beton auftreten, in guter Übereinstimmung mit den direkt gemessenen Würfelfestigkeiten des Betons. Diese Erscheinung erklärt Dr. v. Emperger dadurch, daß in der Nähe des Bruches die getroffene Annahme, daß die Querschnitte nach der Biegung eben bleiben, nicht mehr ganz zusagt und auch sonst Umstände auftreten, welche die Theorie nicht berücksichtigt.¹

1) Vgl. Beton u. Eisen 1907, S. 82.

Was die Bedeutung der angeschnittenen Frage anbetrifft, so kann auf die Worte von Prof. Mörsch¹ hingewiesen werden: „Der Zweck jeder statischen Berechnung ist weniger die genaue Ermittlung der in einer Konstruktion bei irgendeiner Belastung auftretenden Spannungen, als vielmehr der Nachweis eines hinreichenden Sicherheitsgrades“.

Nun mögen die sich bei irgendeiner Belastung nach der heute geltenden Theorie ergebenden Spannungen mehr oder weniger mit der Wirklichkeit übereinstimmen, solange dies nicht auch für die oberen Belastungsgrenzen, wenigstens näherungsweise zutrifft, muß die statische Berechnung in bezug auf den Sicherheitsgrad sowohl der ganzen Konstruktion, worauf es in erster Linie ankommt, als auch der einzelnen Materialien der Verbundkonstruktion ein falsches Bild liefern. Prof. Mörsch ist diesbezüglich der Meinung, daß zwar die Spannungen in der Nähe des Bruches maßgebend, da jedoch die Verhältnisse im Bruchstadium (Stadium III) schwer theoretisch zu verfolgen sind, müsse man sich mit der Behandlung des Stadiums II zufriedenstellen.

Daß eine solche Resignation nicht befriedigen kann, insbesondere wenn die Abweichung von der Wirklichkeit ganz erheblich wird, liegt auf der Hand.

Im folgenden sollen nun auf Grund des vorhandenen Versuchsmaterials die Verhältnisse nach Erschöpfung der Zugfestigkeit des Betons bis zum Bruch untersucht werden. Ich habe gefunden, daß diese Verhältnisse gar nicht so kompliziert sind, wie bis jetzt stets angenommen wurde, daß nur die angewandte Theorie nicht stimmt. Die von der älteren Eistheorie ziemlich vorbehaltlos angenommenen Voraussetzungen, passen eben nicht ganz für Materialien, die ein verschieden elastisches Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchungen aufweisen, also auch nicht bei Verbundkonstruktionen.

Verführerisch bei dieser Übernahme der Grundlage der Eistheorie war der Umstand, daß bei Belastungsversuchen bis zu gewissen Grenzen, die nicht viel von den zulässigen Belastungsgrenzen abweichen, eine gute Übereinstimmung gefunden worden war. Bei Belastungen bis zum Bruch fand man schon erhebliche Abweichungen der Theorie und Wirklichkeit, doch suchte man sich über diese Abweichungen durch Hinweis auf Kompliziertheit und sonstige Umstände allgemeiner Natur hinwegzusetzen; mitunter behauptete man, die direkt gemessene Würfelfestigkeit gebe aus verschiedenen Gründen kein Bild der wirklichen Druckfestigkeit des Betons des untersuchten Balkens.²

1) Vgl. Theorie des Eisenbetons, 3. Aufl., S. 82.

2) Vgl. z. B. Mörsch, 3. Aufl., S. 99. Prof. Mörsch findet dort nach den Bestimmungen die Spannungen bei Bruch:

$$\begin{aligned} \text{bei } 1,4\% \text{ Bewehrung } \sigma_e &= 3050 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_b &= 185 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned}$$

Die bisher bei verschiedenen bis zum Bruch belasteten Eisenbetonkonstruktionen ganz eklatante Abweichung der Theorie von der Wirklichkeit werde ich auf Grund der darüber vorgefundenen Literatur besprechen. Auch werde ich über einige mit stahlbewehrten Betonplatten ausgeführten neuen Versuche¹ kurz berichten, eine eingehende Veröffentlichung dieser Versuche mir für später vorbehaltend.

2. Besprechung von einigen Versuchen.

Versuch mit einem Eisenbetonbalken zu Watergraafsmeed bei Amsterdam.² Ich entnehme folgendes aus der Besprechung Dr. v. Empergers. Der Versuchsbalken hatte eine Spannweite von 6,8 m.

Die Dimensionen des Balkens waren

Höhe = 65 cm,

Breite = 100 cm,

$a = 4$ cm, $f_e = 97$ cm² = 1,58 ‰
des Betonquerschnittes.

Die Bruchlast war mit Einschluß des Eigengewichtes $Q = 216,6$ t.

Nach den Bestimmungen berechnet sich für obige Werte die Lage der neutralen Faser mit

$$x = 30 \text{ cm,}$$

und die zugehörigen Spannungen

$$\sigma_b = 241 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = 3750 \text{ kg/cm}^2.$$

Die mit 12 Betonwürfeln ermittelten direkten Druckfestigkeiten des Betons ergab im Mittel aus 114 bis 150 **142** kg/cm².

An diesem Versuchsbalken wurden die Dehnungen bis zu einer Belastung von 191 t beobachtet. Daraus konnte auf die Spannungen im Balken geschlossen werden. Im Anschluß an diese Mitteilungen sagt Dr. v. Emperger: „Bis etwa 131 t ist die Übereinstimmung zwischen den Beobachtungen und der gewöhnlichen Berechnung mit $n = 15$ in der gedrückten Faser eine ganz zufriedenstellende, von da aber an nehmen die Randspannungen fast gar nicht zu. Durch eine Verkrümmung des Querschnittes und durch Erscheinungen,

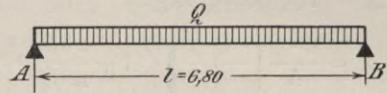


Abb. 1.

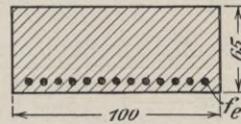


Abb. 2.

$$\text{bei } 3\% \text{ Bewehrung } \sigma_e = 1970 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_b = 211 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Druckfestigkeit der Würfel betrug nur 139 kg/cm². Prof. Mörsch meint, die Festigkeit der Würfel wäre wegen der dichtschießenden gußeisernen Formen so gering ausgefallen. Meiner Ansicht nach ist das eine Selbsttäuschung.

1) Ausgeführt von der Firma Paul Kossel & Cie. in der Materialprüfungsanstalt Groß-Lichterfelde für die Hansa-Gesellschaft für Wand- und Deckenbau.

2) Vgl. Beton u. Eisen 1907, S. 210.

die die Rechnung nicht zum Ausdruck bringt, tritt eine andere Spannungsverteilung mit dem oben genannten Ergebnis, daß die rechnungsmäßig ermittelte Druckfestigkeit des Betons etwa das Doppelte dessen ergibt, was wir als seine Würfelfestigkeit nachzuweisen in der Lage sind“.

Ich werde noch später auf diesen Versuch zurückkommen.

Beispiel aus den Versuchen von Schüle.

(Vgl. Beton u. Eisen, Jahrg. 1908, S. 364.)

Versuch Nr. 3 mit einer Bewehrungsziffer. $p = 3,63 \%$.

Das Bruchmoment war

$$M = 149\,000 \text{ cmkg.}$$

$$x = \frac{n \cdot f_e}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2bh}{n \cdot f_e}} \right] = \frac{15 \cdot 5,31}{12} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 12 \cdot 12,2}{15 \cdot 5,31}} \right] = 7,7 \text{ cm,}$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot M}{bx \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 149\,000}{12 \cdot 7,7 \cdot \left(12,2 - \frac{7,7}{3} \right)} = 335 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{149\,000}{5,31 \left(12,2 - \frac{7,7}{3} \right)} = 2910 \text{ kg/cm}^2.$$

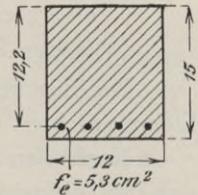


Abb. 3.

Die Würfelfestigkeit des Betons betrug 264 kg/cm^2 .

Wir sehen also hier ähnlich wie beim vorigen Versuch eine beträchtliche Überschreitung der vorhandenen Würfelfestigkeit des Betons.

Versuche von Mörsch.

(Der Eisenbetonbau, S. 98 ff., 3. Aufl. 1908.)

Das Bruchmoment war

$$M = 2060 \cdot 75 = 154\,000 \text{ cmkg.}$$

$$x = \frac{15 \cdot 7,85}{25} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 25 \cdot 9}{15 \cdot 7,85}} \right] = 5,65 \text{ cm,}$$

$$\sigma_B = \frac{2 \cdot 154\,000}{25 \cdot 5,65 \left(9 - \frac{5,65}{3} \right)} = 306 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = \frac{154\,000}{7,85 \left(9 - \frac{5,65}{3} \right)} = 2760 \text{ kg/cm}^2.$$

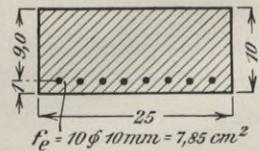


Abb. 4.

Die Würfelfestigkeit des Betons betrug — allerdings waren die Würfelproben 2 Monate alt, wogegen der Balken beim Versuch 13 Monate alt war — 140 kg/cm^2 ; wenn man annimmt, daß der Beton in dem einen Jahr um ca. 30% an Festigkeit gewann, so ergäbe dieses eine Festigkeit von $140 + 60 = 200 \text{ kg/cm}^2$, woraus wieder die Unzulänglichkeit der Berechnung nach den Vorschriften hervorgeht.

Neue Versuche der Firma Kossel & Cie., Bremen.

Als letztes Beispiel sollen die Versuche der Firma Paul Kossel & Cie. mit Eisen- und stahlbewehrten Platten vorgeführt werden.

Im Auftrage der Wand- und Deckenbaugesellschaft „Hansa“ hatte die Firma Kossel & Cie. auf dem Versuchsplatz der Materialprüfungsanstalt u. a. einige Deckenplatten hergestellt, die bei der Belastungsprobe ein recht merkwürdiges Ergebnis geliefert haben. Diese Ergebnisse haben bei dem Verfasser die Überzeugung reifen lassen, daß es ausgeschlossen ist, die Widersprüche zwischen Theorie und der Wirklichkeit einem Versagen der theoretischen Grundlagen im Bruchstadium zuzuschreiben, wie dies bisher von den verschiedenen Eisenbetonforschern gemacht wurde. Das Nachforschen in dieser Richtung haben auch den Verfasser zu der Erkenntnis geführt, die zum Inhalt der folgenden Abhandlung werden soll.

Es sei aus diesen Gründen also gestattet, die genannten Versuche der Firma vorzuführen.

Beschreibung der Versuchsobjekte.

Die 6 Versuchsdeckenplatten hatten mit Ausnahme der verschiedenen Bewehrungen gleiche Abmessungen und sonst in jeder Hinsicht gleiche Beschaffenheit. Die Dimensionen und die Art der Versuchskörper ist aus der angehefteten Zeichnung zu ersehen. Die Deckenstärke war 8 cm, die Spannweite 2 m, die Deckenlänge 2,30 m, die Deckenbreite 1 m. Die Bewehrung der 3 Decken bestand aus 18 Stahldrähten von 0,46 cm Durchmesser.

$$f_s = 18 \cdot \frac{0,46^2 \cdot \pi}{4} = 2,99 \text{ cm} = \text{rd. } 3 \text{ cm}^2.$$

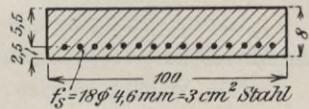


Abb. 5.

Die Bewehrung der übrigen Decken bestand aus 12 Rundeisen von 0,8 cm Durchmesser, somit

$$f_s = 12 \cdot \frac{0,8^2 \cdot \pi}{4} = 6 \text{ cm}^2.$$

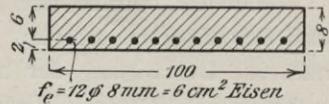


Abb. 6.

Bei den stahlbewehrten Decken (lt. der Amtsbezeichnung Deckenart I) war der Abstand des Schwerpunktes der Stahleinlage von Unterkante Betondecke 2,5 cm ($a = 2,5 \text{ cm}$). Bei den mit Rundeisen bewehrten Decken (lt. Amtsbezeichnung Deckenart II) betrug der nämliche Abstand 2 cm ($a = 2 \text{ cm}$).

Die Decken wurden am 11. August 1900 auf dem Hofe der Versuchsanstalt eingestampft.

Die Mischung bestand aus 1 Teil Portlandzement (Marke Alemannia) zu 5 Teilen Kies.

Die Decken wurden am 20. bzw. 21. Oktober, also im Alter von 70 bzw. 71 Tagen geprüft.

Die Bruchlasten der Rundeisendecken betragen:

Versuch 1	4300 kg,
„ 2	5240 kg,
„ 3	4050 kg,

also im Mittel:

$$Q = \frac{4300 + 5240 + 4050}{3} = \mathbf{4530 \text{ kg.}}$$

Das maximal auftretende Moment berechnet sich demnach zu

$$M = \frac{1}{8} Ql = \frac{4530 \cdot 200}{8} = \mathbf{113\,200 \text{ cmkg.}}$$

Für dieses Moment ergeben sich nach den Bestimmungen vom 24. Mai 1907

$$x = \frac{n \cdot f_e}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b(h-a)}{n \cdot f_e}} \right],$$

mit $n = 15$, $f_e = 6 \text{ cm}^2$, $b = 100$, $h = 8 \text{ cm}$, $a = 2 \text{ cm}$,

$$x = \frac{15 \cdot 6}{100} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100(8-2)}{15 \cdot 6}} \right] = 2,5 \text{ cm,}$$

und die Spannungen

$$\text{im Beton: } \sigma_b = \frac{2 \cdot M}{b \cdot x \left(h - a - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 113\,200}{250 \left(8 - 2 - \frac{2,5}{3} \right)} = \mathbf{175 \text{ kg/cm}^2},$$

$$\text{im Eisen: } \sigma_e = \frac{M}{f_e \left(h - a - \frac{x}{3} \right)} = \frac{113\,200}{6 \left(8 - 2 - \frac{2,5}{3} \right)} = 3660 \text{ kg/cm}^2.$$

Laut Prüfungszeugis Nr. 12657 C betrug die Druckfestigkeit des Betons im Mittel aus 10 Würfeln **154 kg/cm²**.

Die Würfel wurden aus den geprüften Decken selbst entnommen.

Die Streckgrenze des Rundeisens betrug im Mittel 2860 kg/cm², die Bruchgrenze 4050 kg/cm².

Die Ergebnisse der Berechnung nach den amtlichen Bestimmungen und der direkten Messung stimmen also verhältnismäßig gut überein, was nur eine Bestätigung der bekannten Tatsache ist, daß bis zu ca. 1% Bewehrung die bisherige Theorie der Verbundkonstruktionen auch im Bruchstadium mit der Wirklichkeit übereinstimmende Ergebnisse liefert.

Die Bruchlasten der stahlbewehrten Platten waren bei

Versuch 1	5760 kg,
„ 2	5280 kg,
„ 3	5470 kg,

im Mittel:

$$Q = \frac{5760 + 5280 + 5470}{3} = \mathbf{5500 \text{ kg.}}$$

Dieser Belastung entspricht ein

$$M = \frac{1}{8} Ql = \frac{1}{8} 5500 \cdot 200 = \mathbf{137\,500 \text{ cmkg.}}$$

Berechnet man für dieses Moment die Lage der neutralen Faser sowie die Spannungen nach den „Bestimmungen“, so ergeben sich:

$$x = \frac{n \cdot f_s}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot (h - a)}{n \cdot f_s}} \right],$$

für $n = 15$, $b = 100$ cm, $f_s = 3$ cm², $h = 8$ cm, $a = 2,5$ cm,

$$x = \frac{15 \cdot 3}{100} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100 \cdot (8 - 2,5)}{15 \cdot 3}} \right] = 1,82 \text{ cm},$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot M}{b \cdot x \left(h - a - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 137500}{100 \cdot 1,82 \left(8 - 2,5 - \frac{1,82}{3} \right)} = 309 \text{ kg/cm}^2$$

$$\text{und } \sigma_s = \frac{M}{f_s \left(h - a - \frac{x}{3} \right)} = \frac{137500}{3 \left(8 - 2,5 - \frac{1,82}{3} \right)} = 9350 \text{ kg/cm}^2.$$

Daß dieses Ergebnis der Rechnung keine wirklichen Werte liefert, liegt auf der Hand. Die Würfel Festigkeit des Betons war, wie schon früher bemerkt, ca. 154 kg/cm², die Streckgrenze des Stahldrahtes lag bei 7400 kg/cm², die Bruchgrenze bei 8400 kg/cm².¹

Aus dem Vergleich der Würfel Festigkeit von 154 kg/cm² mit der Betonspannung von 309 kg/cm² nach den amtlichen Bestimmungen geht ohne weiteres die Unzulänglichkeit der diesen Bestimmungen zugrunde liegenden Theorie hervor. Dieselbe Berechnungsmethode liefert bei der Rundeisendecke Betonspannungen, die schließlich nicht wesentlich von der Würfel Festigkeit zugunsten der Sicherheit abweichen. Bei den stahlbewehrten Platten liefert diese Methode Werte, die um 100 % von der Wirklichkeit abweichen.

Im folgenden ist nun der Versuch gemacht, diese Widersprüche zu klären.

3. Folgerungen aus den Versuchen. Neue Theorie.

Bei Beobachtung der Brucherscheinungen der oben geschilderten Versuche mit eisen- und stahlbewehrten Platten ist mir die Tatsache aufgefallen, daß bei den stahlbewehrten Platten der Bruch auf diese Weise erfolgt ist, daß die Stahldrähte sämtlich auf einmal gerissen sind; bei den Rundeisendecken kam der Bruch durch Überwindung der Betonspannungen, es konnte jedoch ohne weiteres geschlossen werden, daß unmittelbar vor dem Bruch die Streckgrenze des Eisens überschritten sein dürfte und die Druckspannungen des Betons gleichzeitig mit dem Fließen der Rundeisen überwunden sind. Ich habe aus dieser Beobachtung den Schluß gezogen, daß beim Bruch einer Verbundkonstruktion beide Materialien gleichzeitig ihre Festigkeiten erschöpfen; diese Schlußfolgerung,

1) Die Tatsache, daß unter Umständen die Zuggrenze des Stahles überschritten werden kann, ist nicht neu; eine lose Bemerkung darüber finde ich im „Beton u. Eisen“, Jahrg. 1908, Heft. XV, S. 364 unten.

die bei symmetrischen Querschnitten aus homogenen Materialien mit gleichen elastischen Eigenschaften für Zug und Druck ohne weiteres zutrifft, glaubte ich auch für Materialien wie Stein, Gußeisen usw., die verschiedene Zug- und Druckfestigkeiten aufweisen, anwenden zu dürfen. Obige Folgerung ließ sich nicht recht mit den Fundamenten unserer heutigen Theorie vereinbaren. Zum Glück brauchte aber nicht alles umgestoßen zu werden. Die Annahme vom Ebenbleiben des Querschnittes konnte mit leichtem Herzen fallen gelassen werden. Bekanntlich hat ja die strenge mathematische Theorie die Bernoullische Annahme vom Ebenbleiben des Querschnittes auch für homogene Materialien, die dem Hookschen Gesetz von der Proportionalität zwischen Spannung und Dehnung strenge folgen, nicht bestätigt. Um so weniger kann diese Annahme für Materialien, die dem Hookschen Gesetz nur näherungsweise folgen, und für Verbundkonstruktionen als bindend erachtet werden.

Viel wesentlicher ist nun das Verhältnis der gemachten Annahme über die gleichzeitige Ausnützung der Zug- und Druckfestigkeiten des Materials zu dem sogenannten Navierschen Gesetz, welches einen geradlinigen Verlauf der Spannungen fordert. Dieses Gesetz, das von Navier nur als Hypothese aufgestellt wurde, ist nachträglich durch die strenge mathematische Theorie als richtig erwiesen worden.

Dieses als unanfechtbar zu bezeichnende Gesetz ließ sich aber nur dann mit der von mir gemachten Folgerung in Einklang bringen, wenn der Spannungsverlauf als gebrochene Gerade angenommen werden konnte. Nun ist gegen eine solche Annahme meiner Ansicht nach nichts einzuwenden; die Gleichung der Geraden — das Schlußergebnis der mathematischen Elastizitätstheorie für reine Biegung — ist auf Grund der Verschiebung zweier unendlich benachbarter Elemente eines Querschnittes aufgebaut; dieses schließt nicht aus, daß die Gerade der Spannungen der Druckfasern unter Umständen anders zur x -Achse geneigt ist wie die Spannungsgerade der Zugfasern.¹ Jedenfalls war in dieser Richtung Vorsicht geboten.

Die Untersuchung der Formänderungsarbeit lieferte folgendes Ergebnis. Solange keine der Randspannungen ihre obere Grenze (etwa die Bruchspannung) erreicht hat, läßt sich nachweisen, daß ein Minimum Formänderung an Arbeit geleistet wird, wenn die Zug- und Druckspannungslinie eine Gerade bilden (dieselbe geht durch den Querschnittsschwerpunkt).

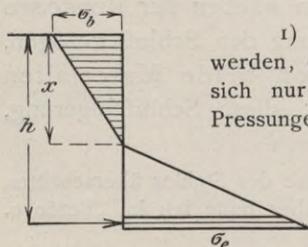


Abb. 7.

1) Übrigens möge an dieser Stelle noch hervorgehoben werden, daß nach der üblichen Theorie der Verbundkonstruktion sich nur ein geradliniger Verlauf der Deformation (Linie der Pressungen und Dehnungen) aufrechterhalten läßt. Ein geradliniger Verlauf der Spannungen selbst ist für Beton und Eisen nicht zu erreichen, wovon man sich leicht durch ein maßstäbliches Auftragen der Spannungen bei einem beliebigen Eisenbetonbalken überzeugen kann.

Hat eine der Randspannungen ihre obere Grenze erreicht, dann ist eine fernere Formänderung zwar noch möglich, aber für ein Minimum sind nicht mehr die nötigen Bedingungen vorhanden. Da eine Steigerung der Formänderung, solange die zweite Randspannung ihre Grenze nicht erreicht hat, möglich ist und damit eine Steigerung der Tragfähigkeit der Konstruktion verbunden ist, so ist anzunehmen, daß die Natur den einzigen möglichen Weg beschreiten wird, um die Leistungsfähigkeit der Konstruktion zu erhöhen.

Wir wollen nun einen Schritt weiter gehen und untersuchen, wie sich die theoretischen Grundlagen der Berechnung ändern, wenn man die oben gemachte Annahme gelten läßt, daß die Tragfähigkeit eines auf Biegung beanspruchten Balkens noch nicht erschöpft ist, wenn die eine Randspannung ihre obere Grenze erreicht, daß erst, wenn auch die andere Randspannung sich ihrer Grenze genähert hat, die Tragfähigkeit des Balkens aufhört.

Es genügt in diesem Falle zur Ermittlung der Lage der neutralen Faser nur eine Gleichung, und zwar diejenige Gleichung, die das Gleichgewicht im horizontalen Sinne ausspricht.

$$\int_0^x \sigma dF = \sigma_s f_e \dots \dots \dots 1)$$

Da $\sigma : \sigma_B = y : x$, $\sigma = \sigma_B \frac{y}{x}$,

so folgt aus 1):

$$\frac{\sigma_B}{X} \int_0^x y dF = \sigma_s f_e$$

und $X = \frac{\int_0^x y dF}{f_e \cdot \frac{\sigma_s}{\sigma_B}}$ mit $\frac{\sigma_s}{\sigma_B} = K$.

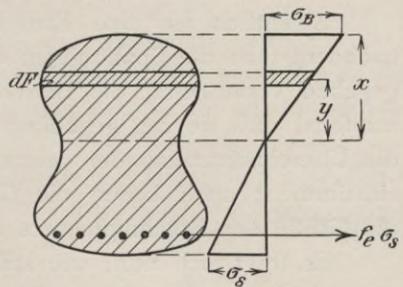


Abb. 8.

$$X = \frac{\int_0^x y dF}{f_e K} \dots \dots \dots 2)$$

Die obigen Gleichungen erhalten erst dann ihre besondere Bedeutung, wenn man annimmt, daß darin σ_B die Bruchspannung des Betons, σ_s etwa die Streckgrenze des Eisens bedeutet. Gleich an dieser Stelle möchte ich hervorheben, daß in den meisten Fällen der Praxis das σ_s den Wert der Streckgrenze des Eisens überschreiten, jedoch unter der Bruchgrenze desselben bleiben wird. Die Ursache dürfte meiner Ansicht nach darin liegen, daß nach Überschreiten der Streckgrenze größere Dehnungen auftreten, die eine freie Bewegung der Nulllinie erschweren bzw. unmöglich machen, auch dürfte durch eine Kontraktion des Eisenquerschnittes eine Lockerung vom Betongefüge eintreten, so daß dadurch die Keime der Zerstörung gegeben sind.

4. Balken rechteckigen Querschnittes.

Wenden wir obige Gleichung 2) auf einen Balken von rechteckigem Querschnitte an.

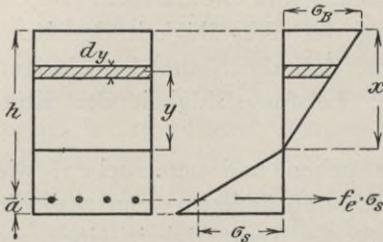


Abb. 9.

$$\int_0^x y dF = b \int_0^x y dy = \frac{b \cdot x^2}{2}.$$

$$X = \frac{b \cdot x^2}{2 f_e K}$$

$$X = \frac{2 f_e}{b} \cdot K \quad \dots \quad 2^*)$$

Diese Beziehung ist äußerst einfach. Die Beziehung zwischen dem Moment und

den Spannungen in der Nähe des Bruches ist wie nach der üblichen Theorie zu ermitteln durch

$$\left. \begin{aligned} \sigma_B &= \frac{2 \cdot M}{bx \left(h - \frac{x}{3} \right)} \\ \sigma_s &= \frac{M}{f_e \left(h - \frac{x}{3} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3)$$

Eigentlich ist eine Ermittlung der Spannungen ein Widerspruch, nachdem man die Spannungen oben in der Formel für x als bekannt und gegeben voraussetzt; die Beziehungen 3) haben dennoch ihre Bedeutung insofern, daß sie bei gegebenem Bruchmoment erkennen lassen, wieweit die Übereinstimmung der gemachten Annahme mit der Wirklichkeit übereinstimmen; auch lassen die Gleichungen 3) bei gegebenem Querschnitt die Größe des Bruchmomentes errechnen.

Es fragt sich nun, wie stimmen die oben gemachten Annahmen und die sich daraus ergebenden Beziehungen mit dem vorliegenden Versuchsmaterial überein; dies ist doch bekanntlich der beste Probestein für die Brauchbarkeit einer neuen Theorie. Ich habe nun an vielen Beispielen von Versuchsbalken, die mir in die Hand fielen, obige Formeln angewandt und stets eine vortreffliche Übereinstimmung der Theorie und Praxis gefunden, einen Widerspruch habe ich nirgends gefunden.

Einschränkend muß ich jedoch hervorheben, daß nur Versuche in Frage kommen können, die tatsächlich durch das biegende Moment zugrunde gegangen sind, wo nicht etwa die Lockerung des Verbundes durch mangelhafte Verankerung der Eisen, bzw. die Überwindung der Schubspannungen störend in den Vollzug der Biegungsspannungen eingegriffen haben.

5. Berechnungsbeispiele.

Wir wollen nunmehr auf einige der oben berechneten Beispiele die Formeln 2) und 3) anwenden.

Versuche von Schüle.

Wir beginnen mit dem oben berechneten Versuch von Schüle (vgl. S. 4). Die Würfel Festigkeit des Betons war $\sigma_B = 264 \text{ kg/cm}^2$.

Die Beanspruchung der Eisen:

$$\sigma_s = 3200 \text{ kg/cm}^2 \left[\begin{array}{l} \text{die Streckgrenze } \sigma_s = 2800 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{die Bruchgrenze } \sigma_B = 4000 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$$

$$K = \frac{3200}{264} = 12,$$

$$x = \frac{2 \cdot 5,3}{12} \cdot 12 = 10,6 \text{ cm.}$$

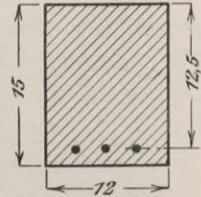


Abb. 10.

Das Bruchmoment war $M = 140000 \text{ cmkg}$.

$$\sigma_B = \frac{2 \cdot M}{b x \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 149000}{12 \cdot 10,6 \left(12,2 - \frac{10,6}{3} \right)} = 270 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_s = \frac{M}{f_e \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{149000}{5,3 \left(12,2 - \frac{10,6}{3} \right)} = 3240 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Übereinstimmung ist also eine sehr gute.

Versuch von Watergraafsmeer (S. 3).

Es war $M = 1850000 \text{ cmkg}$.

Das Eisen hatte eine Streckgrenze von 3900 kg/cm^2 und eine Festigkeit von 5800 kg/m . Die Würfel Festigkeit des Betons war rd. 140 kg/cm^2 .

Der Wert der Konstante

$$K = \frac{4400}{140} = 31.$$

Nach Formel 2) ist

$$x = \frac{2 \cdot f_s}{b} K = \frac{2 \cdot 97}{100} \cdot 31 = 60 \text{ cm,}$$

$$\sigma_B = \frac{2 \cdot M}{b x \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 1850000}{6000 \left(61 - \frac{60}{3} \right)} = 150 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{1850000}{97 \left(61 - \frac{60}{3} \right)} = 4600 \text{ kg/cm}^2.$$

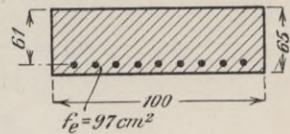


Abb. 11.

Die Übereinstimmung mit den wirklichen Materialfestigkeiten ist danach eine ganz gute im Vergleich zu den obigen Ergebnissen auf S. 3.

Versuche von Kossel & Cie.

Wir kommen nun auf die oben schon besprochenen Versuche der Firma Kossel mit Rundeisen und stahlbewehrten Platten zurück und wenden auf diese Objekte die oben entwickelten neuen Formeln an.



Abb. 12.

$$b = 100, H = 8 \text{ cm}, h = H - a = 6 \text{ cm}, \\ M = 113\,000 \text{ cm kg.}$$

Die Streckgrenze des Eisens war 2860 kg/cm^2 , die Bruchgrenze 4050 kg/cm^2 . Die Würfel Festigkeit des Betons war

$$\sigma_b = 154 \text{ kg/cm}^2, \quad K = \frac{3400}{145} = 22. \\ x = \frac{2 \cdot f_s}{b} \cdot K = \frac{2 \cdot 6}{100} \cdot 22 = 2,64 \text{ cm}, \\ \sigma_B = \frac{2 \cdot M}{b x \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{2 \cdot 113\,000}{264 \left(6 - \frac{2,64}{3} \right)} = 167 \text{ cm}^2, \\ \sigma_e = \frac{M}{f_e \left(h - \frac{x}{3} \right)} = \frac{113\,000}{6 \left(6 - \frac{2,64}{3} \right)} = 3650 \text{ kg/cm}^2.$$

Stahldecken.

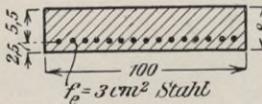


Abb. 13.

$$b = 100 \text{ cm}, H = 8 \text{ cm}, h = 5,5 \text{ cm}, \\ M = 137\,500 \text{ cm kg.}$$

Die Streckgrenze des Stahls lag bei 7400 kg/cm^2 , die Bruchgrenze bei 8400 kg/cm^2 .

$$\sigma_B = 154 \text{ kg/cm}^2, \quad k = \frac{8000}{154} = 52, \\ x = \frac{2 \cdot f_s}{b} \cdot K = \frac{2 \cdot 3}{100} \cdot 52 = 3,12 \text{ cm}, \\ \sigma_B = \frac{2 \cdot 137\,000}{312 \left(5,5 - \frac{3,12}{3} \right)} = 195 \text{ kg/cm}^2, \\ \sigma_e = \frac{137\,000}{3 \left(6 - \frac{3,12}{3} \right)} = 10200 \text{ kg/cm}^2.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit den obigen auf S. 7 nach den amtlichen Bestimmungen, so sieht man bei den Rundeisendecken eine ebenso gute Übereinstimmung, bei den Stahldecken eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit der Wirklichkeit. Die Tatsache, daß für die schwach bewehrten Rundeisenplatten, die Berechnung nach den Bestimmungen ziemlich befriedigende Ergebnisse liefert, ist bekannt und war eigentlich die Ursache, warum die Berechnung nach den amtlichen Bestimmungen allgemeine Anerkennung fand.

Die später gefundene Nichtübereinstimmung bei stärker bewehrten Balken rechteckigen Querschnittes konnte an dieser Tatsache nichts mehr ändern, um so weniger als eine befriedigende, für alle Verhältnisse passende Erklärung nicht gegeben wurde. Auch bei Plattenbalken normaler Verhältnisse wurde eine ziemliche Übereinstimmung mit der Berechnung nach

den amtlichen Bestimmungen gefunden. Es soll noch eine Erklärung der Tatsache gegeben werden, warum die amtlichen Bestimmungen für die einen Verhältnisse passen, für die anderen aber völlig versagen.

Versuche von Möller.

Bevor wir aber noch an diese Frage schreiten, sei noch ein Beispiel aus der Versuchsreihe von Prof. Möller in Braunschweig untersucht. Ich verweise deshalb auf die entsprechende Veröffentlichung im Beton und Eisen 1907, S. 211.

Wir greifen heraus einen der stärker bewehrten dort mit Nr. 9 bezeichneten Balken nebenstehenden Querschnittes:

$$b = 41,2 \text{ cm}, H = 19,7 \text{ cm}, h = 17,5 \text{ cm}.$$

Das Bruchmoment war $M = 512700 \text{ cmkg}$.

Nach den amtlichen Bestimmungen berechnet sich hierfür

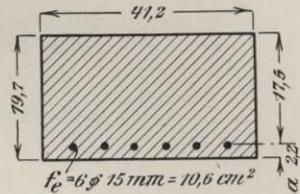


Abb. 14.

$$x = \frac{n \cdot f_e}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot b \cdot h}{n \cdot f_e}} \right] = \frac{15 \cdot 10,6}{41,2} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 41,2 \cdot 17,5}{15 \cdot 10,6}} \right] = 8,7 \text{ cm},$$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot 512700}{41,2 \cdot 8,7 \left(17,5 - \frac{8,7}{3} \right)} = 195 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = \frac{512700}{10,6 \left(17,5 - \frac{8,7}{3} \right)} = 3300 \text{ kg/cm}^2.$$

Nun war die Würfel Festigkeit des Betons im Durchschnitt ca. 163 kg/cm^2 . Nach meiner Methode wäre also in diesem Falle

$$K = \frac{3200}{163} = 20,$$

$$x = \frac{2 \cdot f_e}{b} \cdot K = \frac{2 \cdot 10,6}{41,2} \cdot 20 = 10,3 \text{ cm},$$

$$\sigma_B = \frac{2 \cdot 512700}{41,2 \cdot 10,3 \left(17,5 - \frac{10,3}{3} \right)} = 170 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_e = \frac{512700}{10,6 \left(17,5 - \frac{10,3}{3} \right)} = 3400 \text{ kg/cm}.$$

Wir sehen also auch bei diesem Versuch die Überlegenheit der neuen Methode gegenüber den amtlichen Bestimmungen.

6. Grenzfall.

An dieser Stelle möchte ich noch hervorheben, daß es auch Fälle gibt, wo die obige Theorie keine wirklichen Werte liefert. Bei den sehr stark bewehrten Balken kann es nämlich vorkommen, daß sich ein x ergibt, das aus dem Querschnitt herausfällt; da in diesem Falle der außerhalb

des Querschnittes liegende Teil unwirksam ist, kann eine Übereinstimmung mit der Wirklichkeit nicht erwartet werden. Dieser besondere Fall erfordert eine besondere Behandlung.

Näherungsweise könnte man diesen Fall so behandeln, daß man das x genau so ermittelt, wie im allgemeinen Fall, also nach der Formel

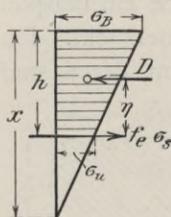


Abb. 15.

$$x = \frac{2 \cdot f_e}{b} K,$$

daraus das $\sigma_u = \sigma_B \cdot \frac{x - h}{x}$ ermittelt.

Die Druckkraft $D = \frac{\sigma_B + \sigma_u}{2} \cdot b h = Z = f_e \sigma_e$

und daraus $\sigma_e = \frac{\sigma_B + \sigma_u}{2} \cdot \frac{b h}{f_e}$ berechnet.

$$\eta = \frac{h}{3} \cdot \frac{\sigma_u + 2 \sigma_B}{\sigma_u + \sigma_B}.$$

Das Bruchmoment ist dann gleich

$$M = f_e \cdot \sigma_e \cdot \eta.$$

Dieser Fall hat aber für die Praxis keine besondere Bedeutung, da es ziemlich selten vorkommt, daß ein Balken so hoch bewehrt wird, daß die Nullschicht bei reiner Biegung aus dem Querschnitt herausfällt.

7. Bemerkungen über den Verlauf der Deformationsdiagramme.

Die oben aufgestellte neue Hypothese über den Verlauf des Spannungsbildes bei einer Verbundkonstruktion hat die ältere Annahme und zwar das Ebenbleiben des Querschnittes fallen gelassen. Die auf Grund der neuen Hypothese aufgestellten neuen Gleichungen haben durchweg zu guten Übereinstimmungen zwischen der Wirklichkeit und den Rechnungsergebnissen geführt, im Gegensatz zu den älteren Theorien, die für manche Fälle gut gestimmt haben, für andere dagegen grundverkehrte Ergebnisse gezeigt haben.

Es ist nun ein leichtes, wenn man sich ein wenig in die Grundlagen der neuen Theorie vertieft, voraussagen zu können, für welche Fälle die alte Theorie, die Grundlage der amtlichen Bestimmungen, mit der Wirklichkeit gut übereinstimmen wird und wann sie versagen wird.

Zu diesem Zwecke zeichnen wir für den gegebenen Fall das Bild des Deformationsdiagrammes.

Es sei h die Höhe des Querschnittes bis zum Schwerpunkt der Eiseneinlage.

Es sei b die Breite des Querschnittes

$f_e = p \cdot \frac{b h}{100}$, wobei p die sogen. Bewehrungsziffer bedeutet.

Die Würfelfestigkeit des Betons sei σ_B ,

die Streckgrenze des Eisens σ_s ,

die Festigkeit des Eisens σ_x .

Nach dem Hookschen Gesetz wird, die Annahme vorausgesetzt, daß zugleich die Würfestigkeit des Betons am Druckrande erreicht wird und die Beanspruchung des Eisens gleichzeitig zwischen der Streckgrenze und der Zugfestigkeit liegen muß, die Zusammenpressung am oberen Rand $\frac{\sigma_B}{E_B} = \Delta_B$ und die Dehnung des Eisens $\Delta_e = \frac{\sigma_s}{E_e}$ bis $\frac{\sigma_x}{E}$ zugleich auftreten.

Die Lage der neutralen Faser wird nach den Gleichgewichtsbedingungen im horizontalen Sinne (vgl. Gl. 2).

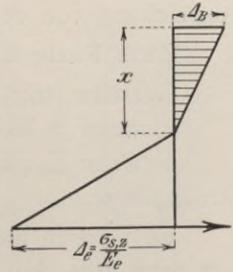


Abb. 16.

$$x = \frac{2 \cdot f_s}{b} \cdot \frac{\sigma_{s, x}}{\sigma_B} \text{ oder}$$

$$x = 2 \cdot p \cdot \frac{b \cdot h}{100 \cdot b} \cdot \frac{\sigma_{s, x}}{\sigma_B} = \frac{2p}{100} \cdot h \cdot K_{s, x} \dots \dots \dots 3)$$

Es lassen sich nun drei Grundfälle aufstellen:

Fall a:
$$\frac{\Delta_B}{\Delta_e} = \frac{\sigma_B}{\sigma_s} \cdot \frac{E_e}{E_B} = n \cdot \frac{\sigma_B}{\sigma_{s, x}} = \frac{n}{K_{s, x}},$$

$$\frac{x}{h-x} < \frac{\Delta_B}{\Delta_e} \quad \frac{x}{h-x} < \frac{n}{K_{s, x}}$$

oder nach Gl. 3)

$$\frac{\frac{2p}{100} \cdot K_{s, x} < \frac{n}{K_{s, x}}}{\left(1 - \frac{2p}{100} \cdot K_{s, x}\right)}, \quad n > \frac{\frac{2p}{100} \cdot K_{s, x}^2}{1 - \frac{2p}{100} \cdot K_{s, x}}$$

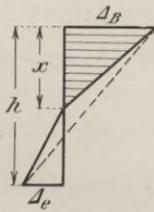


Abb. 17.

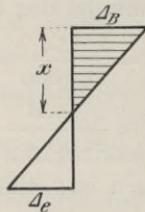


Abb. 18.

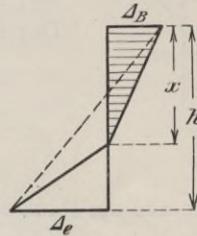


Abb. 19.

Fall b:
$$\frac{x}{h-x} = \frac{\Delta_B}{\Delta_e} \text{ oder } n = \frac{\frac{2p}{100} \cdot K_{s, x}^2}{1 - \frac{2p}{100} \cdot K_{s, x}},$$

in diesem Falle wird die Berechnung nach den amtlichen Bestimmungen gute Ergebnisse liefern.

Der dritte Fall c tritt ein, wenn

$$\frac{x}{h-x} > \frac{\Delta_B}{\Delta_e} \text{ oder } n < \frac{\frac{2p}{100} \cdot K_{s, x}^2}{1 - \frac{2p}{100} \cdot K_{s, x}}$$

Im Falle a und c wird im allgemeinen eine Nichtübereinstimmung mit der Berechnung nach den amtlichen Bestimmungen eintreten müssen, und zwar wird diese Nichtübereinstimmung um so größer, je größer die Abweichung von der Gleichheit.

Zum Falle a.

Derselbe tritt ein:

1. wenn p klein ist (also bei schwach bewehrten Querschnitten),
2. wenn $K_{s, \kappa}$ klein wird (also bei gutem Beton bzw. Eisen mit niedriger Streckgrenze).

Es wird in diesem Falle zuerst die Streckgrenze im Eisen erreicht, erst dann tritt eine Verschiebung der Nulllinie nach oben ein, wodurch der Beton bis an die Druckfestigkeit herankommt. Es wird jedoch im allgemeinen die Streckgrenze des Eisens nicht viel überschritten, und man wird der Wirklichkeit am nächsten kommen, wenn man in dem Ausdruck

$$K_{s, \kappa} = \frac{\sigma_{s, \kappa}}{\sigma_B} \text{ für } \sigma_{s, \kappa}$$

den Streckgrenzwert ansetzt.

Zu Fall b.

Die amtlichen Bestimmungen treffen zu. Für den Wert $K_{s, \kappa} = \frac{\sigma_{s, \kappa}}{\sigma_B}$ setzt man am besten das Mittel zwischen der Streckgrenze und der Zugfestigkeit ein

$$\sigma_{s, \kappa} = \frac{\sigma_s + \sigma_{\kappa}}{2}.$$

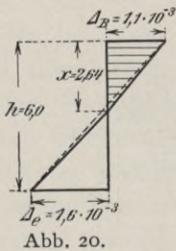


Abb. 20.

Als Beispiel zu diesem Fall kann der auf S. 6 angeführte Versuch von Kossel mit der Rundeisenplatte gelten. Der Elastizitätsmodul des Eisens $E_0 = 2\ 100\ 000$ kg/cm². Der Elastizitätsmodul des Betons $E_B = 140\ 000$ cmkg.

$$\Delta_B = \frac{\sigma_B}{E_B} = \frac{154}{140\ 000} = 0,0011 = 1,1 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta_0 = \frac{\sigma_{s, \kappa}}{E_0} = \frac{3400}{2\ 100\ 000} = 0,0016 = 1,6 \cdot 10^{-3}.$$

Wie aus der Abb. 20 zu ersehen ist, stimmt die Deformationslinie fast genau mit einer Geraden, woraus die gute Übereinstimmung dieses Beispiels mit den amtlichen Bestimmungen hervorgeht.

Zu Fall c.

Die Abweichung von den Bestimmungen ist hier die größte.

Der Fall tritt ein,

1. wenn p (die Bewehrungsziffer) groß ist,
2. wenn $K_{s, \kappa}$ groß ist (also der Beton eine geringe Festigkeit hat, resp. das Eisen eine hohe Streckgrenze).

Es wird zuerst die obere Grenze, also die Würfel Festigkeit des Betons erreicht, erst dann tritt eine Verschiebung der Nulllinie nach unten ein, wodurch bei gleichbleibender Betonspannung eine sukzessive Erhöhung der Eisenspannung zur Streckgrenze und darüber hinaus bis zur Bruchgrenze.

Durch Ausrechnung vieler Beispiele habe ich gefunden, daß in diesem Sonderfall das Eisen sehr weit über die Streckgrenze hinaus beansprucht wird, bei Stahl sogar, wo die Streckgrenze und Bruchgrenze ziemlich nahe liegen, reißt der Stahl, d. h. daß seine Bruchgrenze erreicht.¹ Daß die Berechnung mitunter sogar auch höhere Werte liefert wie die Bruchgrenze, dürfte noch in der Ungenauigkeit der sonst gemachten Annahmen liegen.

Wir wollen nun Fall c an Hand zwei oben durchgerechneter Beispiele untersuchen.

Zuerst Versuchsbalken von Schüle auf S. 4.
Versuch von Schüle.

$$\Delta_B = \frac{\sigma_B}{E_B} = \frac{270}{140 \cdot 10^3} = \frac{1,93}{10^3},$$

$$\Delta_E = \frac{3200}{2,100 \cdot 10^3} = \frac{1,51}{10^3}.$$

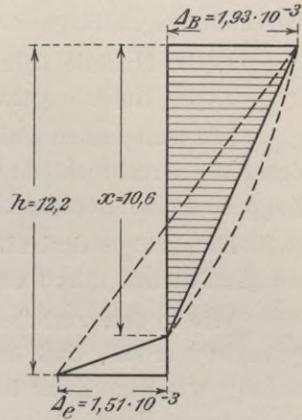


Abb. 21.

Versuch mit stahlbewehrten Decken von Kossel & Cie.

$$\Delta_B = \frac{\sigma_B}{E_B} = \frac{154}{140 \cdot 10^3} = \frac{1,1}{10^3},$$

$$\Delta_E = \frac{\sigma_e}{E} = \frac{8400}{2100 \cdot 10^3} = \frac{4,0}{10^3}.$$

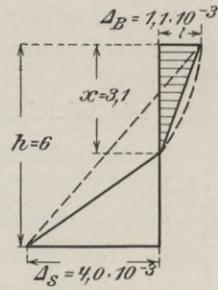


Abb. 22.

Durch das im vorangehenden gezeigte Verfahren kann man also mit Leichtigkeit erkennen, ob für einen gegebenen Fall die amtlichen Bestimmungen gute Resultate liefern werden; ebenso läßt sich mit einer ziemlichen und meist hinreichenden Genauigkeit beim ersten Versuch sagen, welcher Wert für $\sigma_{s, \infty}$ einzusetzen ist, um das Tragmoment eines Balkens voraussagen zu können.

8. Plattenbalken. Theorie.

Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich hauptsächlich auf Eisenbetonbalken bzw. Platten rechteckigen Querschnittes. Bei der großen Bedeutung, welche der Eisenbeton-Plattenbalken einnimmt, ist es erforderlich, sich auch mit diesen Balken näher zu beschäftigen und vor allem zu

1) Meiner Ansicht nach liegt die Ursache der Erscheinung, daß die Bruchgrenze des Eisens nahezu erreicht wird, darin, daß der Beton nach Erreichung der oberen Spannungsgrenze noch imstande ist, Zusammenpressungen aufzunehmen, und es tritt eine Verbiegung des Spannungsbildes ein, etwa nach beistehender Abb. 23. Durch diese Vorgänge wird das Eisen immer höher beansprucht, bis nahe an die Bruchgrenze.

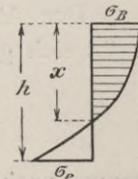


Abb. 23.

Die Abweichung von dem geradlinigen Verlauf dürfte sich vielleicht dadurch erklären, daß der Beton dem Hookschen Gesetz insbesondere in der Nähe der Bruchgrenze nur näherungsweise folgt.

untersuchen, wie sich die wirklichen Spannungen beim Bruch zu den nach den amtlichen Bestimmungen berechneten verhalten.

Wie bei der sonst heute geltenden Theorie, sind auch bei der neuen Berechnungsgrundlage zwei Grundfälle zu unterscheiden, und zwar:

1. die Nulllinie fällt in die Platte,
2. die Nulllinie geht durch den Steg.

Für den ersten Fall gelten natürlich dieselben Beziehungen, wie für den Balken rechteckigen Querschnittes, da doch die Zugspannungen in der Zugzone keine Berücksichtigung finden.

Hier möge deshalb nur auf den zweiten Fall eingegangen werden, wo die Nulllinie durch den Steg geht.

Wie in den amtlichen Bestimmungen, möge hier auch die Annäherung gemacht werden, daß die Druckspannungen im Steg selbst nicht berücksichtigt werden. Zwar bietet die Berücksichtigung dieser Spannungen keine besonderen Schwierigkeiten, auch sind die sich ergebenden Beziehungen nicht sehr kompliziert, die Annäherung wird jedoch aus dem Grunde gemacht, weil der gemachte Fehler nur unwesentlich ist und sich die Beziehungen dadurch doch wesentlich vereinfachen.

$$x \geq d.$$

Die Gleichgewichtsbedingungen im horizontalen Sinne lauten:

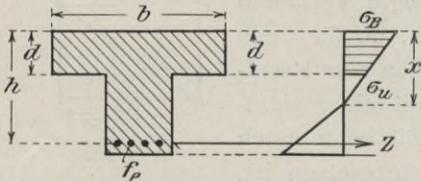


Abb. 24.

$$\frac{\sigma_B + \sigma_u}{2} b d = f_e \cdot \sigma_{s, x} \quad \dots \quad 4)$$

da $\sigma_u = \frac{x-d}{x} \cdot \sigma_B$,

$$\frac{b d}{2} \sigma_B \left(1 + \frac{x-d}{x} \right) = f_e \cdot \sigma_{s, x}$$

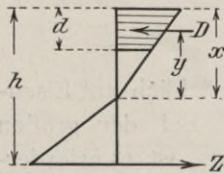


Abb. 25.

daraus

$$\frac{2x-d}{x} = \frac{2k \cdot f_e}{b d} \quad \text{mit} \quad \frac{\sigma_{s, x}}{\sigma_B} = K$$

und

$$x = \frac{d}{2 \left(1 - \frac{f_e}{b d} K \right)} \quad \dots \quad 4^*)$$

Der Abstand y des Druckschwerpunktes von der neutralen Schicht ergibt sich genau so wie nach den amtlichen Bestimmungen zu

$$y = x - \frac{d}{2} + \frac{d^2}{d(2x-d)},$$

woraus nach Einsetzung des Wertes x aus Gl. 4*)

$$x - y = \frac{d}{2} - \frac{d}{b \left[1 - \frac{f_e K}{b d} - 1 \right]} = \frac{d}{2} - \frac{d^2}{f_e K} = \frac{d}{2} \left(1 - \frac{2d}{f_e K} \right) \quad \dots \quad 5)$$

Nach meiner Methode wäre mit

$$K = \frac{2900}{240} = 12, \quad x = 17,7 \text{ cm}^2,$$

$$x - y = \frac{d}{2} - \frac{d^2}{f_e K} = 5 - 0,46 = 4,54 \text{ cm}^2,$$

$$\sigma_e = \frac{M}{f_e (h - x + y)} = \frac{1615000}{18,16 (35 - 4,54)} = 2920 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_B = \frac{\sigma_e}{K} = \frac{2920}{12} = 242 \text{ kg/cm}^2.$$

Versuche von Rella und Neffe, Wien.

Als weiteres Beispiel möge noch ein Plattenbalken aus den Versuchen von Rella & Neffe, Wien, vorgeführt werden (vgl. Beton u. Eisen 1909, S. 64).

Von diesen Versuchsbalken ist der Balken *Vb* durch Überwindung der Streckgrenze des Eisens zum Bruch gebracht worden. Die Dimensionen dieses Balkens waren

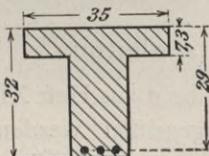


Abb. 27.

$$b = 35 \text{ cm}, \quad d = 7,3 \text{ cm}, \quad h = 29 \text{ cm},$$

$$f_e = 3 \phi 20 = 9,5 \text{ cm}^2.$$

Das Bruchmoment war $M = 750000 \text{ cmkg}$.

Die Streckgrenze war $\sigma_s = 2600 \text{ kg/cm}^2$.

Die Würfelfestigkeit war $\sigma_B = 150 \text{ kg/cm}^2$.

Nach den ministeriellen Bestimmungen ergibt sich:

$$x = \frac{\frac{35 \cdot 53,3}{2} + 15 \cdot 9,5 \cdot 29}{35 \cdot 7,3 + 15 \cdot 9,5} = 12,8 \text{ cm}^2,$$

$$x - y = \frac{7,3}{2} - \frac{53,3}{6 (2 \cdot 12,8 - 7,3)} = 3,16 \text{ cm},$$

$$\sigma_e = \frac{750000}{9,5 (29 - 3,16)} = 3050 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_B = \frac{3050 \cdot 12,8}{15 (29 - 12,8)} = 161 \text{ kg/cm}^2.$$

Nach meiner Methode wäre mit

$$K = \frac{3100}{160} = 19,5, \quad x = 13 \text{ cm},$$

$$x - y = \frac{d}{2} - \frac{d^2}{f_e K} = \frac{7,3}{2} - \frac{53,3}{9,5 \cdot 19,5} = 3,26,$$

$$\sigma_e = \frac{75000}{9,5 (29 - 3,26)} = 3070 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_B = \frac{3070}{19,5} = 158 \text{ kg/cm}^2.$$

10. Deformationsdiagramme bei Plattenbalken.

Die gute Übereinstimmung obiger Ergebnisse meiner Methode mit den ministeriellen Bestimmungen erklärt sich sofort, wenn man sich hierzu das Deformationsdiagramm des Querschnittes aufzeichnet, ähnlich wie dies

auf S. 14 ff. geschehen. Man sieht sofort, daß der Querschnitt bis zum Bruch beinahe genau eben bleibt, weshalb die Bestimmungen in diesem Fall fast ein genaues Ergebnis mit der Wirklichkeit geben müssen.

Fragen wir nun, wo die Grenze liegt, bei der noch die Bestimmungen richtige Werte liefern, so müssen wir ähnlich verfahren, wie das oben für rechteckige Querschnitte schon geschehen.

$$\frac{x}{h-x} \geq \frac{n}{K}$$

gilt auch hier als Kriterium für die drei Fälle.

Für die beiden ersten Fälle, wo

$$\frac{x}{h-x} \leq \frac{n}{K},$$

ist die Differenz gegenüber den amtlichen Bestimmungen entweder nur gering, oder sie ist überhaupt nicht vorhanden, da bis dahin die Eisenstreckgrenze zuerst erreicht wird und der Bruch durch Verschiebung der Nulllinie nach oben nur wenig aufgehalten wird, da sich der Hebelarm nur gering ändern kann. Nach Überschreitung der Streckgrenze des Eisens ist der Bruch nicht mehr lange aufzuhalten. Anders natürlich ist es, wenn zuerst die Druckfestigkeit des Betons erreicht wird und durch eine auch nur geringe Verschiebung der Nulllinie nach unten bei verhältnismäßig geringer Steigerung der Eisenspannung die Druckkraft bedeutend wächst.

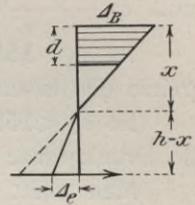


Abb. 28.

Verfolgen wir weiter obige Beziehung.

$$\frac{n}{K} \geq \frac{x}{h-x} \text{ oder } \frac{n}{K} \geq \frac{d}{2 \left(1 - \frac{f_e}{b d} K\right)} : \left[h - \frac{d}{2} \left(1 - \frac{f_e}{b d} K\right) \right],$$

wenn wir nun

$$\frac{f_e}{b d} = p \text{ ‰, } \quad \frac{h}{d} = \alpha$$

setzen, so ist

$$\frac{n}{K} \geq \frac{1}{2(1-pK) \left[\alpha - \frac{1}{2(1-pK)} \right]},$$

$$n \geq \frac{K}{2(1-pK)\alpha - 1},$$

oder weiter

$$n \geq \frac{K}{2\alpha - 2p\alpha K - 1},$$

$$[2n\alpha - 2pn\alpha K - n] \geq K,$$

$$(2\alpha - 1)n \geq (1 + 2pn\alpha)K,$$

$$\frac{(2\alpha - 1)n}{1 + 2pn\alpha} \geq K. \quad \dots \dots \dots 7)$$

wenn wir also z. B. nach dem Beispiel des Deutschen Betonausschusses für

$$\alpha = \frac{h}{d} = 3,5, \quad p = \frac{f_e}{b d} = 0,036$$

annehmen, so muß

$$\frac{(2 \cdot 3,5 - 1) 15}{1 + 2 \cdot 0,036 \cdot 3,5 \cdot 15} \geq K$$

damit der erste und zweite Fall eintreten, d. h. es muß $K \leq 19$ sein.

Bei einem normalen Handelsrundeisen von 3000 kg/cm^2 Streckgrenze muß $\sigma_B = \frac{3000}{19} = 158 \text{ kg/cm}^2$, damit der Querschnitt eben bleibt.

Ist $\sigma_B > 158 \text{ kg/cm}^2$, so tritt Fall 1 ein und es wird zuerst die Streckgrenze des Eisens erreicht.

Ist $\sigma_B < 158 \text{ kg/cm}^2$, dann würde Fall 3 eintreten, und es wird zuerst die Druckgrenze des Betons erreicht.

Man sieht schon daraus, daß für Plattenbalken im Gegensatz zu Balken rechteckigen Querschnittes in der Regel das Eisen zuerst seine Streckgrenze erreichen wird, denn der Beton wird doch meistens eine höhere Druckfestigkeit haben wie 150 kg/cm^2 .

Nur bei Anwendung von Stahl mit hoher Streckgrenze etwa bei 6000 kg/cm^2 wird wieder in der Regel Fall 3 eintreten, und da wird bei einem Beton von z. B. 150 kg/cm^2 Druckfestigkeit die Differenz zwischen Rechnung nach den Bestimmungen und der Wirklichkeit schon recht erheblich. Unter normalen Verhältnissen, etwa bei Rundeisen mit 3000 kg/cm^2 Streckgrenze und 240 kg/cm^2 , wird Fall 1 eintreten und zwar um so merklicher, je breiter die Platte des Plattenbalkens ist. Da die Streckgrenze des Eisens zuerst erreicht wird, so kann seine Beanspruchung nicht viel wachsen und man wird der Wirklichkeit am nächsten kommen, wenn man für σ_s in dem Ausdruck K den Wert der Streckgrenze nur um ein weniges übersteigt. So z. B. habe ich gefunden, daß bei einer Streckgrenze von ca. 2800 kg/cm^2 und einer Zugfestigkeit von ca. 4000 kg/cm^2 für σ_s am besten der Wert von ca. $3000 - 3200 \text{ kg/cm}^2$ gewählt wird. Will man für jeden Fall sicher gehen und wählt das σ gleich Streckfestigkeit, so weichen die Ergebnisse ein wenig von der Wirklichkeit, aber zugunsten der Sicherheit ab.

II. Reine Betonbalken.

Wir wollen nun noch die gefundene Theorie auf den Fall eines reinen Betonbalkens anwenden, vornehmlich auf den Fall rechteckigen Querschnittes. Die vorgeführte Theorie kann als ganz allgemein für alle Balken homogenen Querschnittes gelten, die ein verschiedenes elastisches Verhalten für Zug und Druck aufweisen. Wenn auch der reine Betonbalken für die Praxis keine wesentliche Bedeutung hat, so ist doch folgende Nachweisführung insofern von Wichtigkeit, als dadurch die bisher ungeklärte Tatsache, daß bei Biegung homogener Betonbalken die Zugfestigkeit wesentlich größer ausfällt als die an Probekörpern direkt gemessene Zugfestigkeit, auf derselben Grundlage Aufklärung findet, wie die Eisenbetonbalken rechteckigen Querschnittes sowie Plattenbalken. Dadurch ist m. A. der Hauptwert der angewandten Hypothese nachgewiesen, denn es werden durch sie alle Erscheinungen der verschiedenen Balkenkategorien nach derselben Erscheinung gleich gedeutet.

Es sei $\frac{\sigma_B}{\sigma_x} = K$ und das Material möge genau oder annähernd dem Hookschen Gesetz folgen. Nach der Gleichgewichtsbedingung im horizontalen Sinne muß

$$\int_0^x \sigma dF = \int_0^{h-x} \sigma' dF', \text{ da } \frac{\sigma}{\sigma_B} = \frac{y}{x} \text{ und } \frac{\sigma'}{\sigma_x} = \frac{y'}{1-x},$$

$$\frac{\sigma_B}{x} \int_0^x y dF = \frac{\sigma_x}{1-x} \int_0^{h-x} y' dF' \text{ oder}$$

$$\frac{h-x}{x} = \frac{1}{K} \frac{\int_0^{h-x} y' dF'}{\int_0^x y dF} = \frac{1}{K} \cdot \frac{S_{h-x}}{S_x}$$

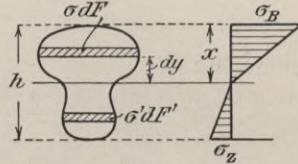


Abb. 29.

Daraus ist x leicht zu finden.

S_x, S_{h-x} bedeuten die statischen Momente der oberhalb und unterhalb der Nulllinie liegenden Teile des Querschnittes in bezug auf die Nulllinie.

Für den Fall eines rechteckigen Querschnittes ist

$$S_x = \frac{2}{3} b x^2 \text{ und } S_{h-x} = \frac{2}{3} b (h-x)^2,$$

somit

$$\frac{h-x}{x} = K$$

und

$$x = \frac{h}{1+K} \dots \dots \dots 1)$$

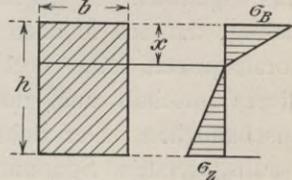


Abb. 30.

Aus der Momentengleichung

$$\frac{b x}{2} \cdot \sigma_B \cdot \frac{2}{3} h = M$$

ist

$$\sigma_B = \frac{M}{W} \cdot \frac{K+1}{2} \dots \dots \dots 2)$$

wenn mit W das Widerstandsmoment des rechteckigen Querschnittes

$$W = \frac{1}{6} b h^2.$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_B}{K} \dots \dots \dots 3)$$

Als Beispiel für diesen Fall mögen die in Mörsch „Der Eisenbetonbau“, 4. Aufl., S. 33 mitgeteilte Versuchsreihe von Hanisch und Spitzer vorgeführt werden. Wir greifen den Balken Nr. 2 heraus.

Die Bruchfestigkeit $\sigma_B = 329 \text{ kg/cm}^2$.

Die Zugfestigkeit $\sigma_x = 24 \text{ kg/cm}^2$.

Die Dimensionen waren $h = 11,5 \text{ cm}, b = 60 \text{ cm}$.



Abb. 31.

Das Bruchmoment für eine Querschnittsbreite von 1 cm betrug 955 cmkg.

$$\text{Das Widerstandsmoment } W = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \cdot 11,5^2 = 22,1 \text{ cm}.$$

Nach Navier berechnet sich beim Bruch

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{955}{22,1} = 43,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Dieser Wert überschreitet fast um das Doppelte den oben angegebenen Wert der Betonzugfestigkeit.

Nach unserer Methode wäre für den vorliegenden Fall

$$K = \frac{\sigma_B}{\sigma_x} = \frac{329}{24}, \quad K = 13,7,$$

nach Gleichung 2):

$$\sigma_B = \frac{M}{W} \cdot \frac{K+1}{2} = \frac{955}{22} \cdot \frac{13,7+1}{2} = 320 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_B}{K} = \frac{320}{13,7} = 23,2 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Übereinstimmung mit den wirklichen Spannungen ist also danach eine vortreffliche.

Ich möchte an dieser Stelle einen Umstand noch erwähnen und klären.

Es könnte leicht der Vorwurf erhoben werden, daß nach meiner Methode die Spannungen vorausgesetzt und dann wieder errechnet werden, was eigentlich ein „Sich-im-Kreis-bewegen“ bedeutet. Nun ist es zwar richtig, daß ich in allen vorangegangenen Beispielen stets die Spannungen vorausgesetzt habe und sie dann wieder zum Schluß berechnete, aber dieses geschah nur, um einen Vergleich mit der alten Theorie zu veranschaulichen. Der richtige Weg wäre eigentlich der, daß auf Grund der vorausgesetzten Spannungen das Moment ermittelt wird, welches der Balken zu tragen vermag und dieses mit dem wirklichen Tragmoment verglichen wird. Andererseits kann man sich aber mit Leichtigkeit davon überzeugen, daß, wenn man in obigen Beispielen andere Werte eingesetzt hätte, die Schlußspannungen von den vorausgesetzten (wirklichen) Spannungen verschieden ausgefallen wären. Gerade in der Übereinstimmung der vorausgeschickten Spannungen mit den aus den Formeln bei dem vorhandenen Bruchmoment errechneten Spannungen ist ein Beweis für die Richtigkeit der Theorie.

12. Parabelförmige Deformationskurve.

Ich habe bis jetzt immer vorausgesetzt, daß in allen behandelten Fällen das Hooksche Proportionalitätsgesetz zwischen Spannung und Dehnung zutrefte, und es wurde folgerichtig dann ein geradliniger Spannungsverlauf eingeführt. Ich möchte nun auf die mitunter nicht zu geringen Abweichungen aufmerksam machen, die dadurch entstehen, daß das Betonmaterial ziemlich erheblich und zwar gerade in der Nähe des Bruches von dem Hookschen Gesetz abweicht. Setzen wir also einen stark bewehrten Betonquerschnitt voraus, so wurde nach obigem angenommen, daß das Spannungsdiagramm wie nebenstehend ausfällt.

Nachdem am oberen Rande die Betonbruchspannung erreicht ist, tritt ein Senken der Nulllinie mit einem gleichzeitigen Wachsen der Eisen-

zugspannung ein, wobei das Gleichgewicht der Spannungen im horizontalen Sinne gewahrt bleiben muß.

Durch den Umstand, daß der Beton dem Hookschen Gesetz nicht folgt, ist noch ein zweiter Vorgang im Spannungsverlauf möglich. Nach der Erreichung der Bruchspannungsgrenze des Betons tritt ein Spannungsbild nach nebenstehender Abb. 33 auf. Man kann die Kurve als Parabel

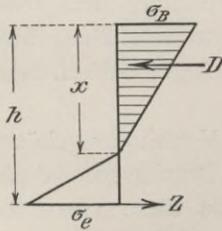


Abb. 32.

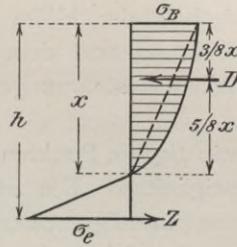


Abb. 33.

näherungsweise annehmen. Bei diesem Spannungsverlauf ist derselbe Betonquerschnitt imstande größere Druckspannungen aufzunehmen wie beim dreieckigen Spannungsverlauf.

Die Gleichung für die Nulllinie wäre:

$$\frac{2}{3} b x \sigma_B = f_e \sigma_s,$$

daraus

$$x = \frac{3}{2} \cdot \frac{f_e}{b} K \dots \dots \dots 2^{**})$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_B &= \frac{2}{3} \cdot \frac{M}{b x \left(h - \frac{3}{8} x \right)} \\ \sigma_s &= \frac{M}{f_e \left(h - \frac{3}{8} x \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 3^{**})$$

Diese Gleichungen liefern für stark bewehrte Querschnitte Ergebnisse, die sich der Wirklichkeit noch besser nähern, wie nach den Formeln 2*), 3) auf S. 10.

Für gewöhnliche Berechnungen genügen aber die Formeln des geradlinigen Verlaufs.

13. Anwendungen der neuen Theorie.

Ich komme nun zu dem letzten Abschnitt meiner Abhandlung, zu den Anwendungen meiner Theorie in der Praxis des Eisenbetons. Ist man zu der Überzeugung gelangt, daß die oben gefundenen Grundlagen der neuen Berechnung richtig sind bzw. sich der Wirklichkeit viel besser nähern, wie die der amtlichen Bestimmungen, so eröffnet sich ein ganz neues Feld der Dimensionierung der Eisenbetonkonstruktionen und zwar in tabellarischer Form.

Wie wünschenswert die Zurückführung der ganzen Bemessungsfrage auf eine einheitliche Tabellenform ist, werden am besten diejenigen Leser empfinden, die entweder selbst häufig in die Lage kommen, Spannungen für Behörden bei statischen Berechnungen nachzuweisen, oder als Leiter von technischen Büros beobachten können, wieviel Zeit solche Spannungsnachweise erfordern.

Es läßt sich auf Grund der oben entwickelten Theorie eine einfache Beziehung zwischen der Höhe der Konstruktion, der Breite, der vorgesehenen Bewehrung und dem Tragmoment aufstellen, ähnlich wie sie nach den amtlichen Bestimmungen für rechteckige, einfach bewehrte Balken vorhanden ist.

Zu den wichtigsten Punkten des neuen Verfahrens gehört die Kenntnis der Materialfestigkeiten. Die Streck- und Bruchgrenze des Eisens bzw. Stahls wird man im allgemeinen kennen, da diese Werte bei der nämlichen Bezugsquelle nicht sehr schwanken. Anders liegen aber die Verhältnisse beim Beton, hier muß stets für jedes Bauwerk beinahe durch Bruchproben mit Würfeln oder Probek balken das zugehörige σ_B ermittelt werden. Bei größeren Bauwerken, die in verschiedenen Jahreszeiten ausgeführt werden, müßte auch der Einfluß der Temperaturschwankungen auf die Festigkeiten berücksichtigt werden. Es mag sein, daß sich mit der Zeit eine gewisse Norm bezüglich der zu erzielenden Festigkeit gewinnen ließe, vorläufig müßte aber eine genaue Kontrolle der Betonfestigkeit geübt werden.

Jedenfalls wäre eine genaue Einhaltung der garantierten Würfel festigkeit (im Gegensatz zu dem zurzeit üblichen Verfahren) eine Hauptbedingung. Dieser Erschwerung der Eisenbetonpraxis ständen aber soviel Vorteile in der Einfachheit der Berechnung, sowie — was die Hauptsache ist — die Erzielung eines einheitlichen Sicherheitsgrades für die Eisenbetonkonstruktionen gegenüber, daß man meines Erachtens obige Erschwerung doch mit Genugtuung in Kauf nehmen sollte.

Die Tabellen sind folgendermaßen aufgestellt.

Für Balken rechteckigen Querschnittes gibt

$$M = \frac{bx}{2} \left(h - \frac{x}{3} \right) \sigma_B,$$

da $X = \frac{2f_e}{b} \cdot K$ nach Gleichung 2*) auf S. 10.

$$x = \frac{2p}{100} \cdot hK, \quad f_e = \frac{p}{100} \cdot bh,$$

$\frac{p}{100}$ sei die sogenannte Bewehrungsziffer in ‰.

$$M = p b h^2 K \left(1 - \frac{2}{3} p K \right) \sigma_B,$$

daraus ist

$$h = \frac{M}{\sqrt{p b K \left(1 - \frac{2}{3} p K \right) \sigma_B}} = \frac{1}{\sqrt{p k \left(1 - \frac{2}{3} p K \right) \sigma_B}} \sqrt{\frac{M}{b}} \quad \text{I)}$$

M bedeutet darin das Bruchmoment. Es muß nun die gewünschte Sicherheit eingeführt werden. Bisher war beim Beton die geforderte Sicherheit $m = 6$, für das Eisen war bei $\sigma = 1000 \text{ kg/cm}^2$ $m = 3 - 4$ gegen die Bruchgrenze. Nach meiner oben entwickelten Theorie werden nun die Bruchfestigkeit des Betons, sowie die Streckgrenze des Eisens (bzw. ein Wert zwischen der Streckgrenze und der Bruchgrenze) gleichzeitig erreicht, so daß es gerechtfertigt erscheint, einen einheitlichen Sicherheitsgrad einzuführen. Die Sicherheit eines normalen Eisenbetonbalkens rechteckigen Querschnitts bewegt sich ungefähr um die Zahl 4. Ich glaube also mit Recht den Koeffizienten $m = 4$ in Vorschlag bringen zu können. Der Unterschied zwischen meiner Berechnung und der nach den Bestimmungen ist nur der, daß bei mir dieselbe Sicherheit dann für alle Eisenbetonbalken gilt, ohne Rücksicht auf die Bewehrungsziffer, während die Sicherheit nach den Bestimmungen stark schwankt, je nach der Bewehrung zwischen **3 bis 10** und noch mehr.

Führt man nun in obiger Gleichung I statt des Bruchmomentes $M = m\mathfrak{M}$, so lautet die Gleichung

$$h = \sqrt{\frac{m}{pK(1 - \frac{2}{3} \cdot pk)\sigma_B}} \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{b}} = \mu \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{b}}$$

Die Tabelle erhält nun die Werte des Koeffizienten μ , so daß aus derselben bei gegebenen K und σ_B und nach Wahl der Bewehrungsziffer die minimale Höhe ermittelt wird. Die Wahl der Bewehrungsziffer richtet sich nach der zur Verfügung stehenden Höhe; ist dieselbe nicht beschränkt, so wählt man eine geringe Bewehrungsziffer (etwa 0,5 ‰), bei beschränkter Konstruktionshöhe muß p größer angenommen werden.

Wie aus der Tabelle zu ersehen ist, ist die erforderliche Höhe unter Umständen größer als sie nach den Bestimmungen bei

$$\sigma_B = 240 \left(h = 0,39 \sqrt{\frac{M}{b}} \right),$$

bei höheren Bewehrungsziffern jedoch sowie bei höherem K bleibt das h unter dem nach den Bestimmungen erforderlichen.

Die Tabelle muß sich erstrecken auf die Gebiete der Bruchfestigkeit des Betons, also etwa für

$$\sigma_B = 150, 180, 200, 240, 280, 300 \text{ kg/cm}^2.$$

6 Tafeln würden somit für die meisten Fälle der Praxis genügen; auch die Bewehrungsziffern p genügen in der Grenze von **0,5 bis 1,5 ‰**.

Man wird geringere Bewehrungsziffern unter 0,5 ‰ wohl aus konstruktiven Gründen nicht anwenden, höhere Bewehrungsprozente werden schon wegen ihrer Unwirtschaftlichkeit vermieden werden.

Für Plattenbalken ließe sich eine Tabelle auf etwa folgender Grundlage aufstellen.

Es war nach Gleichung 6 auf S. 19 das Bruchmoment

$$M = m\mathfrak{M} = f_e \sigma_e (h - x + y) = f_e \sigma_B \cdot K \left(h - \frac{d}{2} \right) \left(1 - \frac{2d}{f_e K} \right),$$

$$\frac{m}{\sigma_B} \mathfrak{M} = f_e K \cdot \left(h - \frac{d}{2} \right) + d^2,$$

wenn $f_e = \frac{p}{100} \cdot bd$ eingeführt wird, so ist

$$h = \frac{m\mathfrak{M}}{\sigma_B \cdot K \cdot \frac{pbd}{100}} - \frac{d^2}{\frac{pbd}{100}} + \frac{d}{2},$$

oder mit Vernachlässigung des zweiten Gliedes, das für die Höhe h nicht von Bedeutung ist

(z. B. $b = 150, d = 10, K = 15, f = 1\%$,

ist

$$\frac{d^2}{\frac{pbd}{100 \cdot K}} = \frac{100}{15 \cdot 15} = 0,45 \text{ cm}).$$

$$h = \frac{m}{\sigma_B \cdot \frac{K \cdot p}{100}} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{bd} + \frac{d}{2}.$$

$$h = \nu \cdot \frac{\mathfrak{M}}{bd} + \frac{d}{2} \dots \dots \dots \text{ II)}$$

Die Tafel II ist für die Werte des Koeffizienten ν für eine Betonfestigkeit von $\sigma_B = 240 \text{ kg/cm}^2$ aufgestellt.

Ähnlich wie bei Balken rechteckigen Querschnittes reichen auch hier 6 ähnliche Tafeln mit

$$\sigma_B = 150, 180, 200, 240, 280, 300 \text{ kg/cm}^2$$

für die Bedürfnisse der Praxis aus.

Bei bekanntem bd wird die Bewehrungsziffer p nach der zur Verfügung stehenden Höhe des Balkens gewählt und dann mit größter Einfachheit dimensioniert. Ein Spannungsnachweis erübrigt sich.

Ich möchte hier nochmals hervorheben, daß die Dimensionierung nur auf die Überwindung der Biegungsspannungen am Orte des größten Momentes geschieht, daß dabei noch keine Rücksicht auf die Frage der Scher- und Schubspannungen genommen wurde. Diese Frage muß wie in den amtlichen Bestimmungen getrennt behandelt werden und soll hier darauf weiter nicht eingegangen werden.

Es ist vielmehr die Annahme getroffen, daß stets die Schub- und Haftspannungen durch entsprechende Verbundvorkehrung mit genügender Sicherheit aufgenommen werden.

Auch ist die Frage der Dimensionierung eng verknüpft mit der Annahme der mitwirkenden Plattenbreite. Ich glaube, man läßt es am besten bei $b = \frac{l}{3}$ ($\frac{1}{3}$ der Spannweite), wie in den amtlichen Bestimmungen.

Immerhin ist es gut, stets das im Auge zu behalten, daß dieses nur eine nicht ganz geklärte und sichere Annahme und die Sicherheit der Konstruktion damit im Zusammenhange steht.

Ein Beispiel möchte noch für die Dimensionierung eines Plattenbalkens vorgeführt werden.

$$M = 800\,000 \text{ cmkg.}$$

$$\sigma_B = 240 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\sigma_s = 3400 \text{ kg/cm}^2,$$

$$b = 150 \text{ cm,}$$

$$d = 10 \text{ cm.}$$

$$K = 14.$$

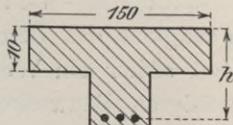


Abb. 34.

a) Die Höhe sei beschränkt:

Bewehrungsziffer $p = 2\%$, $\nu = 0,0595$,

$$h = \nu \cdot \frac{M}{bd} + \frac{d}{2} = 0,0595 \cdot \frac{800\,000}{150 \cdot 10} + \frac{10}{2} = 32 + 5 = 37 \text{ cm,}$$

$$f_e = \frac{2 \cdot 150 \cdot 10}{100} = 30 \text{ cm}^2.$$

b) Die Höhe sei nicht beschränkt:

$$p = 1\%.$$

$$h = 0,119 \cdot \frac{800\,000}{150 \cdot 10} + \frac{10}{2} = 64 + 5 = 69 \text{ cm,}$$

$$f_e = \frac{1 \cdot 1500}{100} = 15 \text{ cm}^2.$$

Bei denselben Balkenhöhen ergibt sich auf Grund der ministeriellen Bestimmungen eine etwas geringere Eiseneinlage. Der Grund hierfür liegt darin, daß in diesen Fällen der nach den Bestimmungen dimensionierte Balken keine vierfache Sicherheit besitzt. Man könnte sich allerdings auch auf den Standpunkt stellen, daß eine dreifache Sicherheit schon genügt; in Eisenkonstruktionen ist tatsächlich kaum eine größere Sicherheit vorhanden. Der große wirtschaftliche Vorteil der neuen Berechnung äußert sich allerdings erst bei hohen Werten von K , also bei Eiseneinlagen mit hoher Streckgrenze.

14. Schlußbemerkungen.

Durch die neue Berechnung wird die ganze Eisenbetontheorie auf eine Grundlage gebracht, die eine gleichmäßig große Sicherheit, unabhängig von der Güte des Betons und des Eisens, sowie unabhängig davon, ob es ein Plattenbalken oder Rechteckbalken ist, verbürgt.

Durch obige Abhandlung wird natürlich das wichtige und schwierige Gebiet der Schub- und Haftspannungen nicht berührt. Gelingt es auch diese Frage einwandfrei zu lösen, dann hätte der Eisenbeton eine sichere, von der Willkür der prüfenden Behörde unabhängige Grundlage gewonnen.

Die Theorie der Bestimmungen sowie meine neue Berechnung verlangen beide den Nachweis der Materialfestigkeit, der Unterschied ist nur

der, daß während nach der älteren Theorie infolge ihrer Unzulänglichkeit dieser Nachweis gewöhnlich unterbleiben konnte, wäre für die neue Berechnung die genaue Kenntnis der zu erzielenden Beton- und Eisenfestigkeiten unerlässlich. Die Baukontrolle wäre viel schärfer zu handhaben, dagegen würde die Rechnungskontrolle bedeutend erleichtert. Für bestimmte Kies- und Zementsorten kann zu einer bestimmten Jahreszeit die Festigkeit des Betons nicht viel schwanken, und da würde sich mit der Zeit sicher ein Weg finden, um das zu viele Versuchen zu ersparen; bei größeren Bauwerken wird jedoch immer eine vorherige Kontrolle der Festigkeiten erwünscht bleiben. Beim Eisen bzw. Stahl wird die Kenntnis der Festigkeiten, der geringen Schwankungen wegen, ohne Schwierigkeiten erzielt.



Tafel I.

Dimensionierungstabelle für einfach bewehrte Balken rechteckigen Querschnittes.

(Tabelle des Koeffizienten μ .)

Sicherheitsgrad $m = 4$, mit $\sigma_B = 240 \text{ kg/cm}^2$, $p = \frac{100 \cdot f_e}{b \cdot h}$,

$$h = \mu \cdot \sqrt{\frac{M}{b}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{m}{K \sigma_B \cdot p (1 + \frac{2}{3} p K)}}$$

p %	K =												
	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	36
0,5	0,586	0,538	0,497	0,470	0,445	0,422	0,396	0,388	0,375	0,362	0,351	0,341	0,332
0,6	0,535	0,493	0,458	0,430	0,407	0,388	0,370	0,357	0,345	0,335	0,325	0,317	0,307
0,7	0,500	0,458	0,425	0,401	0,379	0,362	0,346	0,333	0,322	0,312	0,304	0,296	0,288
0,8	0,469	0,430	0,400	0,377	0,357	0,342	0,324	0,316	0,304	0,295	0,287	0,279	0,272
0,9	0,443	0,406	0,379	0,356	0,339	0,324	0,310	0,299	0,290	0,280	0,274	0,267	0,259
1,0	0,421	0,388	0,362	0,340	0,324	0,310	0,298	0,287	0,278	0,270	0,264	0,256	0,251
1,1	0,404	0,372	0,346	0,325	0,311	0,298	0,286	0,276	0,268	0,262	0,254	0,249	0,244
1,2	0,396	0,357	0,333	0,316	0,300	0,287	0,276	0,267	0,260	0,250	0,247	0,242	0,236
1,3	0,374	0,344	0,322	0,306	0,290	0,278	0,268	0,260	0,250	0,245	0,241	0,235	0,231
1,4	0,362	0,333	0,312	0,296	0,282	0,270	0,260	0,252	0,242	0,240	0,235	0,230	0,226
1,5	0,352	0,324	0,304	0,287	0,274	0,265	0,255	0,247	0,236	0,234	0,230	0,226	0,222

Tafel II.

Dimensionierungstabelle für Plattenbalken.

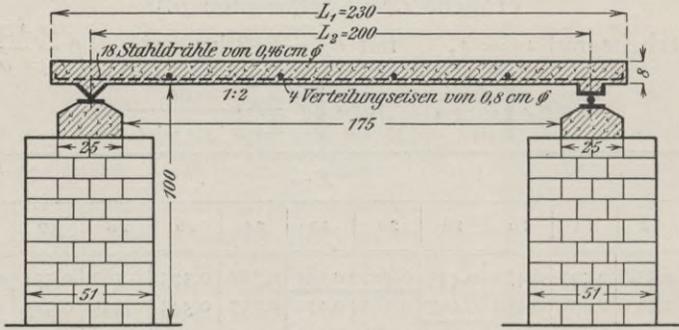
(Tabelle des Koeffizienten ν .)

Sicherheitsgrad $m = 4$, mit $\sigma_B = 240 \text{ kg/cm}^2$, $p = \frac{100 \cdot f_e}{b \cdot d}$,

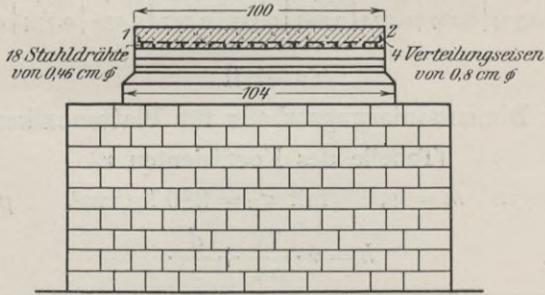
$$h = \nu \cdot \frac{M}{bd} + \frac{d}{2}$$

p %	K =										
	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
0,5	0,334	0,278	0,239	0,108	0,185	0,167	0,1515	0,139	0,128	0,1195	0,1013
0,6	0,278	0,232	0,199	0,174	0,154	0,139	0,1261	0,115	0,1068	0,0999	0,0929
0,7	0,238	0,199	0,170	0,149	0,132	0,119	0,1081	0,099	0,0915	0,0850	0,0795
0,8	0,208	0,174	0,149	0,130	0,1155	0,104	0,948	0,0870	0,0800	0,0745	0,0695
0,9	0,185	0,155	0,133	0,116	0,103	0,0925	0,841	0,775	0,0712	0,0665	0,0618
1,0	0,167	0,139	0,119	0,104	0,0926	0,0834	0,0757	0,0695	0,0641	0,0595	0,0556
1,1	0,152	0,126	0,108	0,095	0,084	0,0759	0,0689	0,0630	0,0582	0,054	0,0506
1,2	0,139	0,115	0,0999	0,087	0,77	0,0695	0,0631	0,0575	0,0534	0,0499	0,0464
1,3	0,128	0,107	0,092	0,080	0,711	0,0641	0,0583	0,0535	0,0493	0,0460	0,0428
1,4	0,1195	0,099	0,085	0,075	0,661	0,0595	0,0541	0,0495	0,0457	0,0425	0,0398
1,5	0,111	0,092	0,079	0,070	0,616	0,0556	0,0505	0,0460	0,0426	0,0395	0,0371
1,6	0,104	0,087	0,0745	0,065	0,0577	0,052	0,0474	0,0435	0,0400	0,0372	0,0347
1,8	0,0925	0,0775	0,0665	0,058	0,0515	0,0463	0,0420	0,0387	0,0356	0,0332	0,0308
2,0	0,0835	0,0695	0,0595	0,052	0,0463	0,0417	0,0378	0,0347	0,0320	0,0297	0,0278
2,2	0,076	0,063	0,054	0,0495	0,042	0,0379	0,0344	0,0315	0,0291	0,0270	0,0253
2,4	0,0695	0,0575	0,0499	0,0435	0,0385	0,0347	0,0315	0,0285	0,0267	0,0249	0,0232
2,5	0,0665	0,0556	0,0478	0,040	0,0370	0,0334	0,0303	0,0273	0,0250	0,0230	0,0222

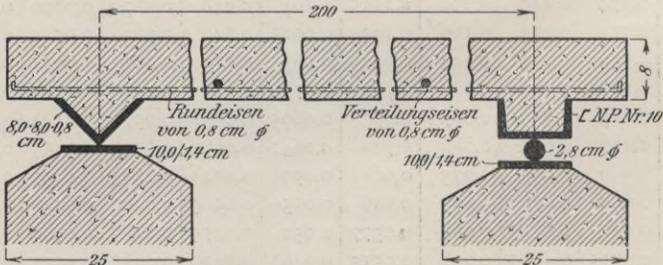
Versuchsdecken der Firma Kossel & Cie., Bremen.
 Geprüft durch das Materialprüfungsamt Groß-Lichterfelde.



Längenschnitt der Stahlbetondecken.



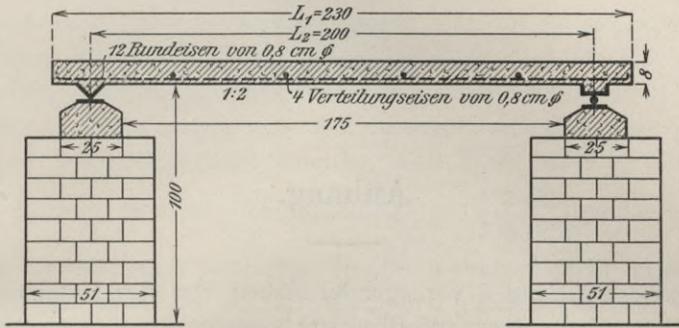
Querschnitt der Stahlbetondecken.



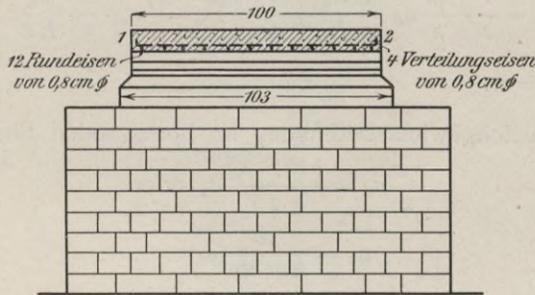
Details der Auflagerung.

Versuchsdecken der Firma Kossel & Cie., Bremen.

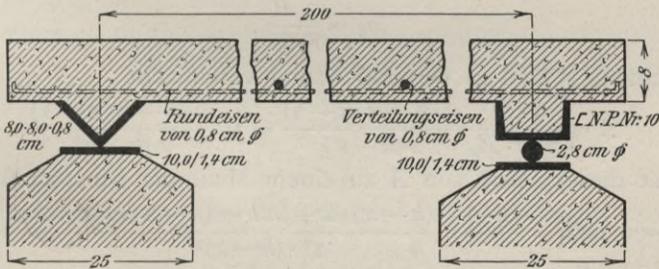
Geprüft durch das Materialprüfungsamt Groß-Lichterfelde.



Längenschnitt der Rundeisendecken.



Querschnitt der Rundeisendecken.



Details der Auflagerung.

Anhang.

Ich habe auf Seite 8 vorliegender Arbeit von der Untersuchung der Formänderungsarbeit eines auf Biegung beanspruchten Querschnittes gesprochen, ohne auf die Beweisführung näher einzugehen. Es sei mir an dieser Stelle gestattet, diese Untersuchung für den Fall eines einfachen rechteckigen Querschnittes vorzuführen.

Es gelten dieselben Bezeichnungen der vorliegenden Arbeit. Die Formänderungsarbeit des Querschnittes lautet dann:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{b x}{2} \sigma_d \cdot \frac{2}{3} \frac{\sigma_d}{E_d} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b(h-x)}{2} \sigma_x \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sigma_x}{E_x} \dots \dots \dots 1)$$

Es sei $\frac{E_x}{E_d} = n$.

Aus der Gleichgewichtsbedingung im horizontalen Sinne gilt

$$\frac{b x}{2} \sigma_d = \frac{b(h-x)}{2} \sigma_x \text{ oder}$$

$$\sigma_x = \frac{x}{h-x} \sigma_d \dots \dots \dots 2)$$

Gleichung 1) und 2) verbunden

$$A = \frac{b \cdot \sigma_d^2}{6 E_x} \left[n x + \frac{x^2}{h-x} \right] \dots \dots \dots 3)$$

Für ein äußeres Moment M ist

$$\sigma_d \frac{b x}{2} \cdot \frac{2}{3} h = M \text{ oder}$$

$$\sigma_d = \frac{3 M}{b x} \dots \dots \dots 4)$$

Gleichung 3) und 4) verbunden und vereinfacht

$$A = \frac{3 \cdot M^2}{2 \cdot b \cdot E_x} \frac{n \cdot h - x(n-1)}{x(h-x)} = C \cdot \frac{n \cdot h - x(n-1)}{x(h-x)} \dots \dots \dots 5)$$

Damit dieser Wert von A zu einem Minimum wird, muß

$$\frac{dA}{dx} = 0 \text{ sein} = \frac{(n-1)(h-x) \cdot x + [nh - (n-1)x](h-2x)}{x^2 \cdot (h-x)^2} \text{ oder}$$

$$(n-1)(h-x)x + [nh - (n-1)x](h-2x) = 0.$$

Daraus $x^2(n-1) - 2nhx + nh^2 = 0$

ist $n = 1$ (d. h. $E_x = E_d$),

was also der gewöhnlich gemachten Annahme entspricht, so ist

$$2 h x = h^2,$$

$$x = \frac{h}{2}.$$

Das bestätigt also das früher Gesagte, daß für ein gegebenes Moment ein Minimum an Formänderungsarbeit geleistet wird für ein x , das der gewöhnlichen Berechnung entspricht (also x im Schwerpunkt der Querschnittsfläche). Wächst jedoch das Moment so, daß eine der Randspannungen ihren Grenzwert erreicht, also z. B.: $\sigma_x = \sigma_Z$ (Zugfestigkeit) = konstant, dann ist x aus der Beziehung $\sigma_x = \frac{3 M}{b(h-x)}$ eindeutig bestimmt.

Für ein Minimum sind also die Bedingungen nicht mehr gegeben. Die Formänderungsarbeit wächst noch bei gleichbleibendem σ_Z mit der Größe x , wobei als Grenze das σ_B gleich der Druckfestigkeit maßgebend ist.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei einem rechteckigen Eisenbetonquerschnitt. Der Ausdruck für die Formänderungsarbeit lautet hier:

$$A = \frac{1}{2} \frac{b x}{2} \sigma_b \cdot \frac{2}{3} \frac{\sigma_b}{E_b} + \frac{1}{2} \cdot \frac{f_e \sigma_e}{E_e} \dots \dots \dots 1)$$

Die Gleichgewichtsbedingung im horizontalen Sinne lautet:

$$\frac{b x}{2} \sigma_b = f_e \sigma_e \text{ oder}$$

$$\sigma_e = \frac{b x}{2 f_e} \sigma_b \dots \dots \dots 2)$$

Gleichung 1) und 2) verbunden

$$A = \frac{1}{6} \frac{b x \sigma_b^2}{E_b} + \frac{1}{8} \frac{b^2 x^2}{f_e E_e} \sigma_b^2,$$

$$A = \frac{1}{24} \frac{b \sigma_b^2 x}{E_e} \left[4 n + \frac{3 b}{f_e} x \right] \dots \dots \dots 3)$$

Die Momentengleichung lautet:

$$\frac{b x}{2} \sigma_b \left(h - \frac{x}{3} \right) = M \text{ oder}$$

$$\sigma_b = \frac{2 M}{b x \left(h - \frac{x}{3} \right)} \dots \dots \dots 4)$$

Gleichung 3) und 4) verbunden und vereinfacht

$$A = \frac{1}{6} \frac{M^2}{b E_e} \cdot \frac{4 n + \frac{3 b}{f_e} x}{x \left(h - \frac{x}{3} \right)^2} = C \cdot \frac{4 n + \frac{3 b}{f_e} x}{x \cdot \left(h - \frac{x}{3} \right)^2}.$$

Damit ein Minimum der Formänderungsarbeit eintritt, muß

$$\frac{dA}{dx} = 0 \text{ sein} = C \cdot \frac{\frac{3 b}{f_e} x \left(h - \frac{x}{3} \right)^2 - \left(4 n + \frac{3 b}{f_e} x \right) \left(h - \frac{x}{3} \right)^2 - \frac{2}{3} x \left(h - \frac{x}{3} \right)}{x^2 \left(h - \frac{x}{3} \right)^4} 5)$$

oder
$$\frac{3b}{f_e} x \left(h - \frac{x}{3} \right) - \left(4n + \frac{3b}{f_e} x \right) (h - x) = 0$$

und weiter
$$\frac{2b}{f_e} x^2 + 4nx - 4nh = 0 \dots\dots\dots 6)$$

daraus ist
$$x = \frac{nf_e}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2bh}{nf_e}} \right],$$

welche Gleichung dem Ausdruck für die Lage der Nulllinie nach den amtlichen Bestimmungen vollkommen entspricht. Hat aber eine der Rundspannungen ihre Bruchgrenze erreicht (z. B. die Betondruckfestigkeit), dann ist ein weiteres Wachsen der Formänderungsarbeit, also auch der Tragfähigkeit, nur unter der Bedingung möglich, daß diese Spannung nicht mehr wächst. Dann ist auch das x aus der Beziehung 4) eindeutig bestimmt, wenn darin σ_b diese konstante Spannung bedeutet. Für ein Minimum sind also die Bedingungen nicht gegeben und wird notwendig die Nulllinie diese Lage annehmen, welche durch die dem Balken innewohnende größere Tragfähigkeit bedingt ist.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307034

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316003

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307041

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307035

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316004

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316010

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307036

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316005

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307037

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316006

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307038

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316007

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307039

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316008

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307040

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316009

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307033

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300595