



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000300595



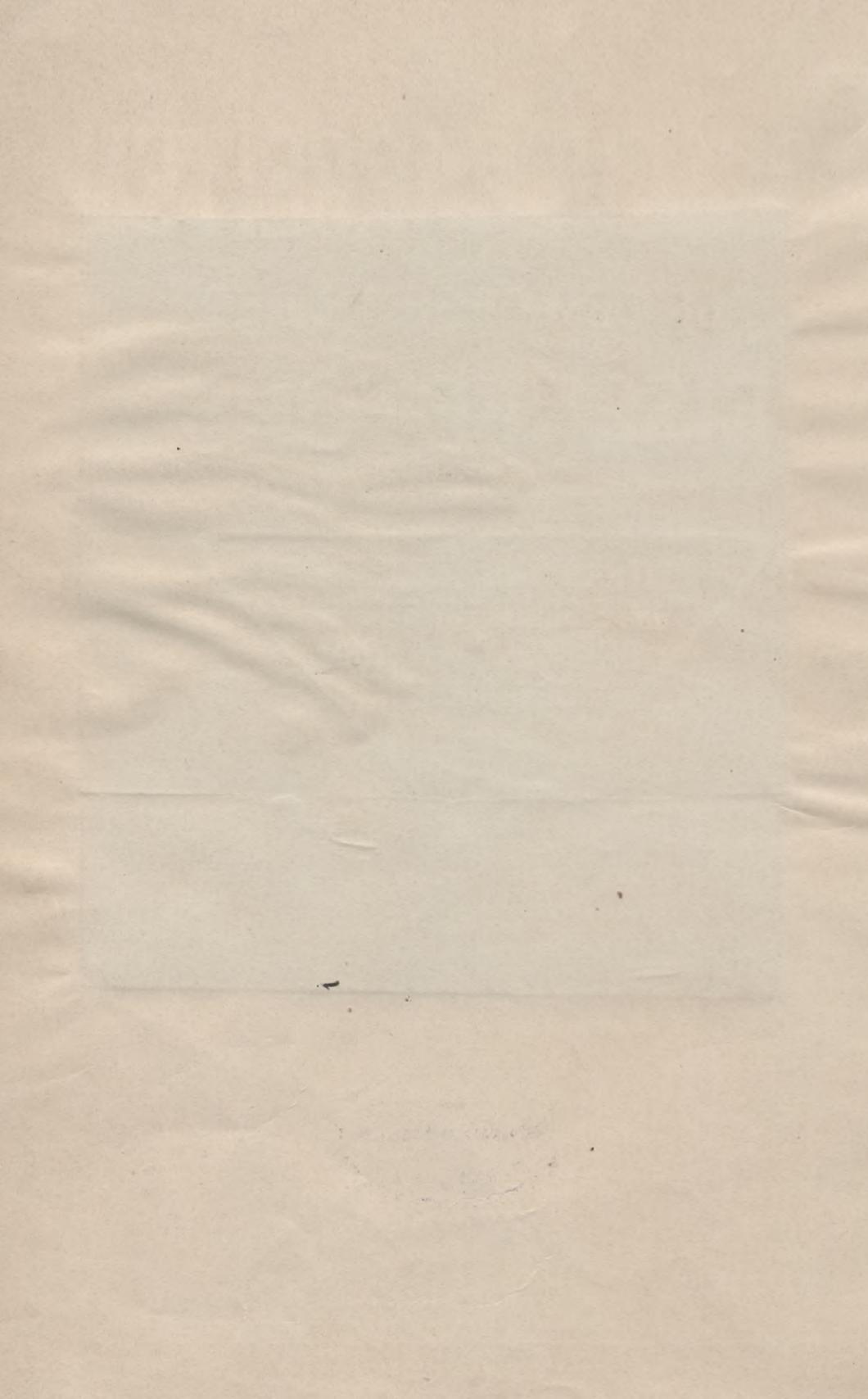
T. 9 a

15

- Heft 13: Beiträge zur Theorie der im Eisenbetonbau gebräuchlichen Form der Rippen-Kuppel.** Von Dr. Ing. Karl W. Mautner, Oberingenieur der Firma Carl Brandt. 1911. geh. 4 M.
- Heft 14: Eine Güteprobe für Beton System Dr. v. Emperger.** Von G. Neumann, Ingenieur. Mit 9 Abb. 1911. geh. 4 M.
Protokollformulare sind zum Preise von 1 M. zuzüglich Porto für 12 Stück erhältlich.
- Heft 15: Eisenbetonkonstruktionen bei Biegung und bei exzentrisch wirkenden Druck- oder Zugkräften.** Einheitliche Verfahren zur Bemessung derselben. Für die Praxis bearbeitet von R. Wuczkowski, Chefingenieur im Spezialbureau von Dr. Ing. v. Emperger. Mit 21 Abb. u. 23 Beispielen. 1911. geh. 4 M.
- Heft 16: Schwimmkörper in Eisenbeton.** Von Ingenieur W. Strob. Mit 154 Abb. 1911. geh. 6 M.
- Heft 17: Beiträge zur Theorie und Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bogen, Bogenstellungen und mehrstiegligen Rahmen.** Von Dr. Ing. K. W. Schaechterle, Regierungsbaumeister. Mit 91 Abb. 1912. geh. 6 M.
- Heft 18: Beitrag zur Berechnung mehrstöckiger Rahmen mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes.** Von Ingenieur A. Straßner. Mit 21 Textabb. 1912. geh. 2,60 M.
- Heft 19: Ueber neuere Versuche mit umschnürtem Beton.** (Spiral umwickelte und ringbewehrte Säulen.) Von Dr. Ing. A. Kleinlogel. Mit 25 Textabb. 1912. geh. 3,20 M.

Heft 20. Literatur zur Hygiene und Zementation. Von Dr. Fruchthändler. 1912.

Heft 21. Literatur zur Darstellung und Anfertigung von Zementmörteln u. Zement-Verputzungen. Von Dr. Danneberg. 1913.



FORSCHERARBEITEN

AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

BEITRÄGE ZUR THEORIE KONTINUIERLICHER
EISENBETONKONSTRUKTIONEN
BESONDERS DER MEHRSTÖCKIGEN RAHMEN
UND DURCHGEHENDEN BALKEN MIT
VERÄNDERLICHEM TRÄG-
HEITSMOMENT

HEFT XVIII

PREIS 2,60 MARK

VON

INGENIEUR A. STRASSNER

MIT 20 TEXTABBILDUNGEN UND 1 TAFEL



§
579a

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen vorbehalten.

BEITRÄGE

zur

Theorie kontinuierlicher Eisenbetonkonstruktionen

besonders der

mehrstöckigen Rahmen und durchgehenden Balken
mit veränderlichem Trägheitsmoment

Von

Ingenieur **A. STRASSNER**

Mit 20 Textabbildungen und 1 Tafel

J. Br. 26044



BERLIN 1912

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn

5.19a

15.



111-307038

Nachdruck, auch auszugsweise, verboten

Alle Rechte vorbehalten



~~111 19452~~

THEORIE

kontinuierlicher Eisenbetonkonstruktionen

INHALT.

	Seite
Berechnung der Stockwerkrahmen	1
Tabelle der Koeffizienten η und η'	6
Unendlich lange Rahmen	10
1. Die Mittelfelder	10
2. Die Endfelder	13
Die graphische Festpunktbestimmung	13
Unendlich lange Rahmen	20
Die Wärmewirkung	21
Winddruck	24
Beispiel	25
Verschiedene Anwendungen (für Balkenbrücken)	30

VORWORT.

Der Inhalt der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich zum größten Teil mit der Theorie, sowie der Berechnung mehrstöckiger Rahmenkonstruktionen. Bisher wurden die Horizontalglieder dieser Bauwerke wie einfache durchgehende Balken behandelt und die Stützen nur für zentrisch wirkende Lasten bemessen, also Annahmen gemacht, die zu wesentlich falschen Ergebnissen bezüglich der Kräfteverteilung führen mußten. Beabsichtigte man jedoch einen solchen vielfach statisch unbestimmten Rahmen ganz genau zu berechnen, so war wiederum eine umständliche rechnerische Behandlung nicht zu umgehen.

Die vorliegende Schrift erläutert eine einfache analytische und graphische Methode, die sich gegenüber anderen Berechnungsweisen als wohl anwendbar erweisen dürfte. Sie gliedert sich zum Teil an den in „Beton u. Eisen“, Jahrgang 1911/12, Heft 20 und 1 vom Verfasser veröffentlichten Aufsatz „Berechnung kontinuierlicher Eisenbetonträger mit Rücksicht auf die Wirkung der Vouten“ an. Wegen des genannten Aufsatzes wurde hier am Anfang, um unliebsame Wiederholungen zu vermeiden, kurz auf die eigentliche Berechnung eingegangen. Es sei deswegen an dieser Stelle ausdrücklich auf den bezeichneten Aufsatz hingewiesen.

Die bei den Stockwerkrahmen vorhandenen elastisch eingespannten Balken wurden schon früher zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht. Man suchte dabei zum großen Teil nach Koeffizienten, mit denen man die Einspannung bestimmen und somit die wirklich auftretenden Momente in den Balken berechnen kann. Es wäre als Fortschritt zu begrüßen, wenn diese Zeilen zur Bestimmung einheitlicher Koeffizienten beitragen würden.

Dem mit der Berechnung einfacher durchgehender Balken vertrauten Statiker fällt die Anwendung des hier Gebotenen nicht schwer, da keine ungewöhnlichen Kenntnisse der Elastizitätslehre vorausgesetzt sind.

Frankfurt a. Main, im März 1912.

Der Verfasser.

Berechnung der Stockwerkrahmen.

Bei Bauten aus Eisenbeton stellen die sich kreuzenden Balken und Stützen mit Rücksicht auf ihren innigen Zusammenhang, der durch die bekannten üblichen Anschlußvouten noch inniger wird, Rahmengebilde dar.

Den vielen Vorteilen, die eine solche Konstruktion wegen ihres einheitlichen Charakters in hohem Maße besitzt, steht in erster Linie die Schwierigkeit einer den tatsächlichen statischen Verhältnissen entsprechenden Berechnung gegenüber.

Die Stützen, welche mit den Trägern in durchaus fester Verbindung stehen, leisten der Balkenachsendrehung elastischen Widerstand und werden somit von Momenten beansprucht, deren Beurteilung die allgemein übliche Annahme, daß der Balken über den Stützen frei aufliegt, ganz ausschließt.

Eine Berechnung nach dieser gewohnten Art und Weise kann, sofern es sich nicht um Endfelder handelt, im Hinblick auf die Sicherheit der Balken als einwandfrei bezeichnet werden, denn die so erhaltenen Feld- und Stützenmomente sind größer als die in Wirklichkeit auftretenden. Zieht man jedoch in Betracht, daß das genannte Verfahren, welches das Vorhandensein gewöhnlicher durchgehender Balken voraussetzt, eine genügende Sicherheit der Stützen in keiner Weise gewährleistet, so erscheint, auch im Hinblick auf die damit erzielten Ergebnisse bezüglich der wirtschaftlichen Konstruktion, dieses Verfahren als nicht gerechtfertigt.

Man hilft sich in vielen Fällen so, daß man die Balken, die, wie dies in den unteren Geschossen der Stockwerkrahmen oft zutrifft, mit verhältnismäßig starken Stützen verbunden sind, als vollständig eingespannt annimmt. Diese Annahme, die je nach dem Einspannungsgrade mehr oder minder großen Fehlern unterliegt, bietet grundsätzlich nichts Neues, ist jedoch in den oberen Geschossen der Stockwerkrahmen, infolge der dort naturgemäß schwachen Stützen, ganz hinfällig. Es ist dann keine Übersicht darüber geschaffen, nach welchen Gesetzen sich der Übergang vom eingespannten in den gelenkigen Fall vollzieht.

Die genaue Berechnung ist umständlich. Meistens wird hierbei vom Satze von der Formänderungsarbeit ausgegangen, und es läßt

sich nicht leugnen, daß die so gewonnenen Gleichungen auf allgemeine Anwendbarkeit keinen Anspruch machen können, denn im Grunde genommen lassen sie sich jeweils nur ganz bestimmten Gebilden bezüglich der Stockwerk- und Felderanzahl anpassen.

Im Folgenden sei ein Verfahren entwickelt, das auf wesentlich anderen Grundlagen beruht und das in allen vorkommenden Fällen sich als anwendbar erweist.

Besondere Beachtung erfuhr auch der unendlich lange Rahmen, wobei ebenso wie auch bei den anderen Gleichungen auf die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes Wert gelegt wurde. Wenn man es mit Rahmen zu tun hat, deren Felderanzahl vier oder größer als vier ist, so können für die Mittelfelder die einem solchen unendlich langen Rahmen entsprechenden Gleichungen angewandt werden.

Führt man noch für die Stützen ein besonderes Elastizitätsmaß ein, so ist die Berechnung auch für solche Bauwerke anwendbar, deren Material nicht überall die gleichen elastischen Eigenschaften besitzt. Dies könnte dann in Frage kommen, wenn die Träger im Mauerwerk eingeklemmt sind, doch soll über die Zulässigkeit einer solchen Annahme hier nichts gesagt sein.

Nachfolgende Darlegungen stellen in Kürze die Grundzüge der Theorie dar.

Denkt man sich an einem Bündel von Stäben, wie dies Abb. 1 zeigt, irgend einen durchschnitten, und läßt an dessen Ende ein Moment angreifen, so wird zu dessen Aufnahme ein jeder der übrigen Stäbe seinen Teil beitragen. Die Summe dieser Beiträge muß gleich dem angreifenden Moment, also

$$M = \Sigma M'$$

sein, wobei die Größen der einzelnen M' von dem Widerstande abhängen, den die Stäbe der Drehung um ihren unverschieblich gedachten Kreuzungspunkt entgegensetzen. Zur Ermittlung dieser in die einzelnen Stäbe gehenden Momente M' benutzt man den Widerstandsgrad. Dieser bedeutet den reziproken Wert des Ausschlagwinkels eines Stabendes, wenn daran

$M = 1$ angreift, und wird auch nach Professor W. Ritter Elastizitätsmaß genannt.

Mit der Erkenntnis, daß der Ausschlagwinkel eines Balkenendes dem ihn erzeugenden Moment proportional ist, läßt sich das Verhältnis

$$\frac{M'}{\tau} = \frac{M}{\tau'}$$

anschreiben, woraus mit $\tau = \frac{1}{\epsilon}$

$$M' \cdot \epsilon = M \cdot \epsilon'$$

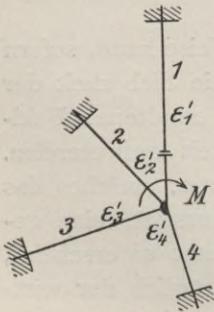


Abb. 1.

folgt. Daraus erhält man

$$\underline{M' = M \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \dots \dots \dots (1)$$

wobei ε' den Widerstandsgrad desjenigen Stabes bedeutet, für den das Moment ermittelt werden soll, während ε die Summe der Elastizitätsmaße für diejenige Stäbe darstellt, die sich an der Aufnahme des Momentes beteiligen.

Beispielsweise nimmt dann der Stab 3, wenn am Stab 1 M wirkt, das Moment

$$M_3' = \frac{M \cdot \varepsilon_3'}{\Sigma \varepsilon' - \varepsilon_1'}$$

auf.

Wir gehen nun in der Weise vor, indem wir das ganze Bauwerk als ein kontinuierliches System auffassen. Zuerst sind hierin die Festpunkte zu bestimmen, deren Lagen nicht, wie man wohl erwarten könnte, mit denen des gewöhnlichen durchgehenden Balkens übereinstimmen. Die genaue Berechnung der Festpunkte erfordert lediglich die Kenntnis des Einspannungsgrades, für dessen Ermittlung obige Gleichungen nicht ohne Wert sind.

Setzt man in der allgemeinen Gleichung*)

$$a = \frac{l \eta'}{\eta + \frac{6 J_m \varepsilon}{l}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon'}$$

so folgt

$$a = \frac{l \eta'}{\eta + \frac{6 J_m}{l \varepsilon'}} \dots \dots \dots (2)$$

wobei η und η' von der Balkenform abhängen und aus der angeschlossenen Tabelle zu entnehmen sind.

In bezug auf die Bezeichnungen der Abb. 2 läßt sich anschreiben

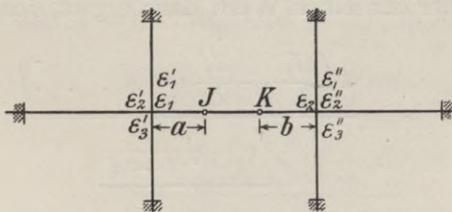


Abb. 2.

$$\underline{a = \frac{l \eta'}{\eta + \frac{6 \cdot J_m}{l \cdot \varepsilon_1}}} \dots \dots \dots (3)$$

*) Siehe „Beton u. Eisen“, Jahrg. 1911/12, Heft 20 u. Heft 1, vom Verfasser über die „Berechnung kontinuierlicher Eisenbetonträger mit Rücksicht auf die Wirkung der Vouten“.

$$b = \frac{l \eta'}{\eta + \frac{6 \cdot J_m}{l \cdot \varepsilon_2}} \dots \dots \dots (4)$$

worin ε_1 und ε_2 die Summen der Elastizitätsmaße für diejenigen Stäbe bedeuten, welche mit dem Ende des Stabes, für den a oder b in Frage kommt, in Verbindung stehen.

Also beträgt

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2' + \varepsilon_3' \dots \dots \dots (5)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1'' + \varepsilon_2'' + \varepsilon_3'' \dots \dots \dots (6)$$

Denkt man sich das ganze System um 90° gedreht, so können diese Darlegungen auch zur Bestimmung der Festpunktabstände in den Stützen herangezogen werden.

Aus Gleichung 2 findet man mit der Beachtung, daß ε' den reziproken Wert des Ausschlagwinkels an dem Balkenende bedeutet, wo $M=1$ angreift, mit $a=l-a$

$$\varepsilon' = \frac{6 J_m}{l \left(\eta - \eta' \frac{l}{l-a} \right)} \dots \dots \dots (7)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment ist $\eta' = 1$ und $\eta = 3$. Damit ergibt sich, bei fester Einspannung des Trägerendes, mit $a = \frac{1}{3} l$

$$\varepsilon' = \frac{4 J_m}{l} \dots \dots \dots (8)$$

und mit $a = 0$ bei freier Lagerung

$$\varepsilon' = \frac{3 J_m}{l} \dots \dots \dots (9)$$

Hat $\frac{l}{l-a}$ immer denselben Wert, dann ergibt sich für mehrere Stäbe

$$\varepsilon' = \frac{6 \left(\frac{J_1}{l_1} + \frac{J_2}{l_2} + \dots \right)}{\eta - \eta' \frac{l}{l-a}} \dots \dots \dots (10)$$

Viel einfacher gestaltet sich die Berechnung nach dieser Gleichung nicht, denn man hat für jeden Knotenpunkt vier Festpunkte (bei Außenstützen bloß drei) und somit auch vier Elastizitätsmaße zu berechnen, die sich jeweils aus den einzelnen ε' leicht bilden lassen.

Wird der Knotenpunkt von Träger und Stütze von einem Moment $M=1$ in Angriff genommen, dann lassen sich auf Grund der Abb. 3 allgemeine Gleichungen für Koeffizienten anschreiben, mit denen man das

angreifende Moment nur zu multiplizieren braucht, um dasjenige für die angeschlossenen Stäbe zu erhalten.

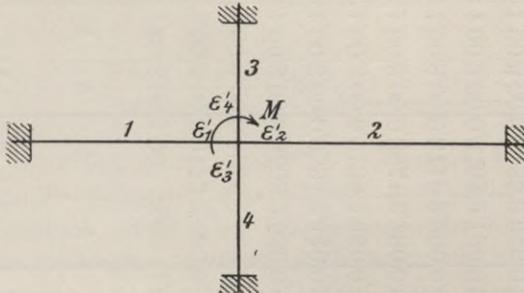


Abb. 3.

In den Stab 1 kommt das Moment

$$M_1' = M \cdot \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon}$$

und für $M = 1$

$$\mu = \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon}$$

In Stab 2

$$\mu = \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon}$$

usw.

ε bedeutet hierbei jeweils die Summe aller Elastizitätsmaße, vermindert um dasjenige für den Stab, an dem das Moment angreift, d. i. die Summe der Elastizitätsmaße für die Stäbe, welche sich an der Aufnahme des Momentes beteiligen.

Die Anwendung lehrt, daß man bei Ermittlung der Verkleinerungskoeffizienten μ zweckmäßig so verfährt, indem man, wenn sich zwei Stäbe kreuzen, μ nur für einen Stab berechnet und dann $1 - \mu$, das von den übrigen Stäben aufgenommen wird, in diesen verteilt.

Greift im Stab 2 der Abb. 3 ein Moment an, dann geht in den Stab 1

$$\mu = \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1' + \varepsilon_3' + \varepsilon_4'} \dots \dots \dots (11)$$

In die Stäbe 3 und 4 geht zusammen $1 - \mu$, und zwar in den Stab 3

$$\mu' = \frac{\varepsilon_3'}{\varepsilon_3' + \varepsilon_4'} (1 - \mu) \dots \dots \dots (12)$$

und in Stab 4

$$\mu' = \frac{\varepsilon_4'}{\varepsilon_3' + \varepsilon_4'} (1 - \mu) \dots \dots \dots (13)$$

Diese Gleichungen zeigen anscheinend keine Vereinfachungen, gestatten aber ein sehr rationelles Arbeiten.

Die Werte η und η' , welche in den Gleichungen für die Elastizitätsmaße enthalten sind, hängen von der Trägerform ab. Folgt die Querschnittänderung der Vouten dem Gesetze $J_x = \frac{J_a}{1 + cx^2}$, worin $c = \frac{J_a - J_m}{J_m \alpha^2 l^2}$ ist, so ergibt sich*)

*) Siehe Beton u. Eisen, 1911/12, Heft 20 u. 1.

Tabelle der Koeffizienten η und η'

α	1:1		1:5		1:7,5		1:10		1:15		1:20		1:25		1:30		1:40		1:50	
	η'	η																		
0,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00	1,00	3,00
0,100	1,00	3,00	0,9773	2,680	0,9754	2,6532	0,9744	2,640	0,9735	2,6268	0,9730	2,620	0,9727	2,616	0,9725	2,6136	0,9723	2,6100	0,9716	2,608
0,125	1,00	3,00	0,9650	2,600	0,9600	2,5666	0,9586	2,550	0,9571	2,5335	0,9564	2,525	0,9550	2,520	0,9557	2,5170	0,9553	2,5125	0,9551	2,510
0,150	1,00	3,00	0,9503	2,520	0,9461	2,4798	0,9441	2,460	0,9421	2,4402	0,9410	2,430	0,9404	2,424	0,9400	2,4204	0,9395	2,4150	0,9381	2,412
0,175	1,00	3,00	0,9334	2,440	0,9279	2,3931	0,9251	2,370	0,9224	2,3469	0,9209	2,335	0,9201	2,328	0,9196	2,3238	0,9189	2,3175	0,9185	2,314
0,200	1,00	3,00	0,9136	2,360	0,9063	2,3064	0,9035	2,280	0,8992	2,2536	0,8974	2,240	0,8963	2,232	0,8856	2,2272	0,8947	2,2200	0,8942	2,216
0,225	1,00	3,00	0,8941	2,280	0,8853	2,2397	0,8808	2,190	0,8764	2,1603	0,8742	2,145	0,8729	2,136	0,8719	2,1306	0,8709	2,1225	0,8693	2,118
0,250	1,00	3,00	0,8710	2,200	0,8592	2,1333	0,8438	2,100	0,8483	2,0671	0,8456	2,050	0,8440	2,040	0,8429	2,0340	0,8416	2,0250	0,8409	2,020
0,275	1,00	3,00	0,8452	2,120	0,8323	2,0466	0,8259	2,010	0,8194	1,9737	0,8163	1,955	0,8142	1,944	0,8130	1,9374	0,8113	1,9275	0,8104	1,922
0,300	1,00	3,00	0,8185	2,040	0,8035	1,9599	0,7959	1,920	0,7884	1,8804	0,7845	1,860	0,7732	1,848	0,7808	1,8408	0,7789	1,8300	0,7777	1,824
0,325	1,00	3,00	0,7905	1,960	0,7730	1,8732	0,7642	1,830	0,7555	1,7871	0,7511	1,765	0,7485	1,752	0,7465	1,7442	0,7446	1,7325	0,7432	1,726
0,350	1,00	3,00	0,7608	1,880	0,7410	1,7865	0,7309	1,740	0,7210	1,6938	0,7160	1,670	0,7130	1,656	0,7110	1,6476	0,7085	1,6350	0,7070	1,628
0,375	1,00	3,00	0,7304	1,800	0,7080	1,7000	0,6967	1,650	0,6885	1,6005	0,6799	1,575	0,6765	1,560	0,6742	1,5510	0,6714	1,5375	0,6697	1,530
0,400	1,00	3,00	0,6976	1,720	0,6725	1,6131	0,6598	1,560	0,6472	1,5072	0,6409	1,480	0,6371	1,464	0,6346	1,4544	0,6315	1,4400	0,6296	1,432

$$\delta = \frac{l}{2} \int_0^l \frac{dx}{J_x} = \frac{l^2}{6 J_m} \eta, \text{ wo } \underline{\eta = 3 - 4 \alpha (1 - n)} \quad \dots \quad (14)$$

$$\delta' = \frac{1}{l} \int_0^l (l-x)x \frac{dx}{J_x} = \frac{l^2}{6 J_m} \eta', \text{ wo } \underline{\eta' = 1 - \alpha^2 (1 - n) (3 - 1,6 \alpha)} \quad (15)$$

wobei $\alpha \cdot l$ die Voutenlänge ist, während $n \cdot J_m = J_a$ bedeutet.

Das zugrunde gelegte Gesetz kommt den Verhältnissen der Praxis sehr nahe. Eigentlich erfährt das Trägheitsmoment seine Veränderlichkeit nicht nur durch die Vouten, sondern auch durch die Stützen. Es ist interessant, zu untersuchen, inwieweit das in der Nähe vom Auflager unendlich große Trägheitsmoment die Festpunkte beeinflusst.



Abb. 4.

Demgemäß folgt

$$\delta = \frac{l}{2} \int_0^l \frac{dx}{J_x}$$

$$\delta = \frac{l}{J_a} \int_{d/2}^{l_1+d/2} (1 + cx^2) dx + \frac{l}{2 J_m} \int_{l_1+d/2}^{l-l_1-d/2} dx$$

$$\delta = \frac{l^2}{6 J_m} \eta \quad \dots \quad (16)$$

wobei

$$\eta = 3 (1 - \alpha_1) - 4 \alpha (1 - n) \quad \dots \quad (17)$$

Wenn $\alpha_1 = 0$, so entspricht dieser Ausdruck der Gleichung 14 und mit $\alpha = 0$ folgt

$$\underline{\eta = 3 (1 - \alpha_1)} \quad \dots \quad (17a)$$

$$\delta' = \frac{1}{l} \int_0^l (l-x)x \frac{dx}{J_x}$$

$$\delta' = \frac{1}{l J_a} \int_{d/2}^{l_1+d/2} (l-x)x (1 + cx^2) dx + \frac{1}{l J_m} \int_{l_1+d/2}^{l-l_1-d/2} (l-x)x dx +$$

$$+ \frac{1}{l J_a} \int_{l-l_1-d/2}^{l-d/2} (l-x)x (1 + c|l - \frac{d}{2} - x|2) dx.$$

Die Integration ergibt

$$\underline{\delta' = \frac{l^2}{6 J_m} \eta'} \quad \dots \quad (18)$$

worin

$$\eta' = 1 - \frac{\alpha_1^2}{2} (3 + \alpha_1) - (1 - n) \alpha [\alpha (3 - 3\alpha_1 - 1,6 \alpha) + 2 \alpha_1 (2 - \alpha_1)] \quad (19)$$

Wenn $\alpha_1 = 0$, so geht dieser komplizierte Ausdruck in Gleichung 15 über und mit $\alpha = 0$ folgt einfach

$$\eta' = 1 - \frac{\alpha_1^2}{2} (3 + \alpha_1) \dots \dots \dots (19a)$$

$$\int_0^{d/2} \frac{dx}{Jx} \text{ und } \int_{l-d/2}^l \frac{dx}{Jx}$$

wird mit $J_x = \infty$ Null werden und ist deswegen bei Ableitung der Gleichungen 16—19 gar nicht erwähnt.

Folgendes Zahlenbeispiel dient der Übersicht und zeigt deutlich, in welchem Maße sich der Einfluß der Stützen bemerkbar macht. Da die Resultate durch die Wahl des Einspannungsgrades nicht beeinflusst werden, so ist der Einfachheit wegen volle Einspannung angenommen, wofür sich mit $\varepsilon = \infty$

$$a = b = \frac{l \eta'}{\eta}$$

ergibt.

Es sei $\alpha_1 = \frac{1}{10}; n = \frac{1}{10}; \alpha = \frac{1,4}{6},$

womit Gleichung 17 das genaue Resultat

$$\eta = 3 - \left(1 - \frac{1}{10}\right) - 4 \cdot \frac{1,4}{6} \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1,86$$

liefert, ebenso Gleichung 19

$$\eta' = 1 - \frac{31}{2000} - \frac{12,6}{60} \left(\frac{1,4 \cdot 69,8}{180} + \frac{18}{100}\right) = 0,7907$$

$$a = \frac{0,7907 \cdot l}{1,860} = \underline{\underline{0,4251 l}}$$

Nach den einfachen Gleichungen Nr. 14 und 15 folgt mit $\alpha = \frac{1,7}{6}$

$$\eta = 3 - 4 \left(1 - \frac{1}{10}\right) \frac{1,7}{6} = 1,980,$$

$$\eta' = 1 - \frac{9}{10} \cdot \frac{1,7^2}{36} \left(3 - \frac{1,7 \cdot 1,6}{6}\right) = 0,8153.$$

Hiermit ergibt sich

$$a = \frac{0,8153 l}{1,980} = \underline{\underline{0,4118 l}}$$

Stellt man beide Resultate einander gegenüber, so zeigt sich ein Unterschied von nur 3 v. H. Das Beispiel zeigt also, daß die Änderung des Trägheitsmomentes in der Nähe des Auflagers keine wesentliche Verschiebung der Festpunkte bewirkt. Die Richtigkeit der einfachen

Gleichungen 14 und 15 ist jedoch größer, als man etwa annimmt, denn die Tatsache, daß man nicht berechtigt ist, eine sprungweise Änderung des Trägheitsmomentes in Rechnung zu stellen, beeinflusst diese günstig.

Die tabellarisch festgelegten Werte für η und η' können in jedem Falle als gültig betrachtet werden, und es wäre hierzu nur noch zu bemerken, daß die Voutenlänge von der Stützenachse aus zu messen ist.

Sind einmal die Festpunkte bekannt, dann gilt für die weitere Berechnung die allgemein bekannte graphische Konstruktion von Professor W. Ritter (Graphische Statik, III. Band), wobei nur zu beachten ist, daß sich ein Moment beim Überschreiten der Stütze nach drei Richtungen hin zerlegt.

Die Festpunkte kommen als solche nur dann in Betracht, d. h. sie behalten nur dann ihre Lage bei, wenn sich die Stützenenden in bezug auf horizontale Bewegungen in Ruhe befinden, was nur dann zu erwarten ist, wenn Konstruktion und Belastung symmetrisch sind. Der Anwendung bei unsymmetrischen Konstruktionen stehen, da sich die Resultate nicht wesentlich ändern dürften, keine Bedenken gegenüber.

Die Horizontalglieder der einzelnen Stockwerke haben, wie dies aus Abb. 5 hervorgeht, unter sich selbst keinen großen Einfluß ihrer Kontinuität zu erwarten.

Werden die Stützen selbst von Momenten in Angriff genommen, was infolge von Kranlast geschehen kann, so ermittelt man diese zuerst für die an beiden Enden frei drehbar gedachte Stütze und benutzt für die Kreuzlinienabschnitte die bekannte Beziehung

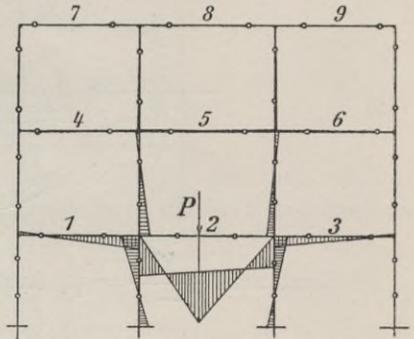


Abb. 5.

$$t = \frac{m}{\frac{1}{6} l^2},$$

wobei m das Moment der Momentenfläche bedeutet, und zwar auf die Auflagerlotrechte bezogen, wo t gesucht wird. Es ist

$$t_0 = \frac{M h^2}{6} \left(1 - 3 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right) \quad \dots \quad (20a)$$

$$t_u = \frac{M h^2}{6} \left(-1 + 3 \left(\frac{b}{h} \right)^2 \right) \quad \dots \quad (20b)$$

Die Schlußlinie geht dann durch den Schnittpunkt der Kreuzlinie mit den Festlinien.

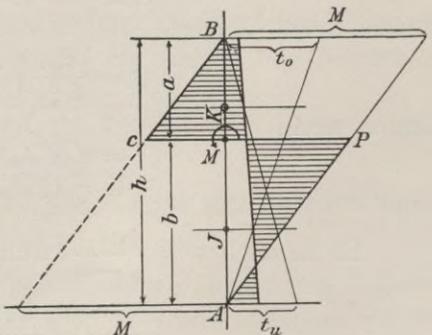


Abb. 6.

Unendlich lange Rahmen.

1. Die Mittelfelder.

Beachtet man, daß die Einspannung eines jeden Trägersendes gleich groß ist, dann lassen sich für die Festpunktabstände geschlossene Ausdrücke aufstellen. Es ist

$$a = b = \frac{l \eta'}{\eta + \frac{6 J_m}{l \varepsilon}},$$

worin

$$\varepsilon = \varepsilon'' + \frac{6 J_m}{l \left(\eta - \eta' \frac{l}{l-a} \right)}.$$

ε'' ist dabei das Elastizitätsmaß für beide Stützen.

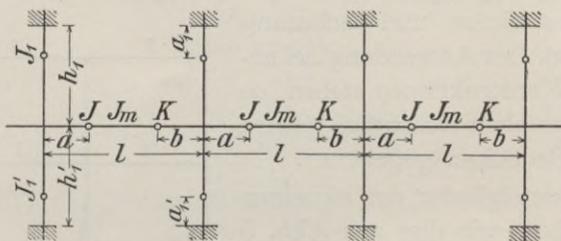


Abb. 7.

Setzt man $\frac{l}{l-a} = \psi$, dann folgt

$$1 - \frac{1}{\psi} = \frac{a}{l} = \frac{\eta'}{\eta + \frac{6 J_m}{l \varepsilon}},$$

woraus man mit dem Werte für ε folgende Beziehung erhält

$$\psi - 1 = \frac{\psi \eta'}{\eta + \frac{6 J_m (\eta - \eta' \psi)}{6 J_m + \varepsilon'' l (\eta - \eta' \psi)}},$$

welche die quadratische Gleichung

$$\psi^2 \xi_1 - \psi \xi_2 + \xi_2 = 0$$

liefert, deren Wurzel

$$\psi = \frac{\xi_2}{2 \xi_1} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \xi_1}{\xi_2}} \right]$$

lautet, worin

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta' (6 J_m + \varepsilon'' l [\eta - \eta']), \\ \xi_2 &= \eta (12 J_m + \varepsilon'' l \eta). \end{aligned}$$

Es ist auch $\psi = \frac{l}{l-a}$, womit sich folgende Gleichung

$$\frac{l}{l-a} = \frac{\xi_2}{2 \xi_1} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \xi_1}{\xi_2}} \right]$$

ergibt, die leicht nach a aufgelöst werden kann. Indem man jedoch dem Vorzeichen des Wurzelausdruckes seine Beachtung zuwendet, kann man anschreiben

$$\frac{l}{l-a} = \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\xi_1}{\xi_2}} \right],$$

$$\frac{l}{a} = \frac{\xi_2}{2\xi_1} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4\xi_1}{\xi_2}} \right],$$

was an die Forderung geknüpft ist, daß das wirkliche Vorzeichen des Wurzelausdruckes negativ ist, während das positive Vorzeichen nichts anderes als $l-a$ ergibt. Die Richtigkeit dieser Annahme kann man mit Hilfe einer Versuchsrechnung leicht überblicken. Indem man beide Gleichungen dividiert, erhält man

$$\frac{a}{l-a} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\xi_1}{\xi_2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\xi_1}{\xi_2}}},$$

woraus endlich

$$a = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\eta'(\tau_0 + \eta - \eta')}{\eta(2\tau_0 + \eta)}} \right). \dots \dots (21)$$

folgt, was wesentlich einfacher aussieht, als der Wert, den man nach unmittelbarer Auflösung der ersten Gleichung erhalten hätte. Bezeichnet man die Elastizitätsmaße der Stützen mit ε'' , so ist darin

$$\tau_0 = \frac{6J_m}{l\varepsilon''} \dots \dots \dots (22)$$

Wenn der Balken in den Stützen fest eingespannt ist, so folgt mit $\tau_0 = 0$

$$a = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\eta'}{\eta} + \frac{4\eta'^2}{\eta^2}} \right) = \frac{l\eta'}{\eta} \dots \dots (23)$$

Bei konstantem Trägheitsmoment ist sehr einfach mit $\eta' = 1$ und $\eta = 3$

$$a = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\tau_0 + 8}{6\tau_0 + 9}} \right) \dots \dots \dots (24)$$

Läßt man den Widerstand, den die Säulen der Balkenachsendrehung entgegensetzen, verschwinden, so erhält man den gewöhnlichen kontinuierlichen Balken, für dessen Festpunktabstände die obigen Gleichungen mit $\tau_0 = \infty$ in

$$a = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\eta'}{\eta}} \right) \dots \dots \dots (25)$$

übergehen. Bei konstantem Trägheitsmoment ergibt sich hiernach einfach

$$a = 0,2113 l.$$

Der Festpunktabstand bleibt bei der Annahme einer freien Lagerung des Balkens über den Stützen vom 4^{ten} Feld ab schon konstant, während sich bei dem Balken, der noch mit seinen Stützen verbunden ist, dieser Grenz-

wert eher einstellt. Um dies einzusehen, braucht man bloß zu beachten, daß beim äußersten Fall, d. i. bei einer vollständigen Einspannung des Balkens in den Stützen, die Festpunktabstände in allen Feldern, also sogar auch im Endfeld gleich groß sind. Hieraus folgt auch gleichzeitig die Erkenntnis, daß man die konstante Festpunktentfernung um so eher erwarten kann, je größer die Steifigkeit der Stützen ist.

Aus folgenden Darlegungen geht der Einfluß, den die Stützen auf die Balken ausüben, klar hervor. Da die Trägerform den Zweck der Untersuchung nicht beeinflussen kann, so nehmen wir der Einfachheit halber konstantes Trägheitsmoment an. Ferner sei

$$h_1 = h'_1 = 4,00 \text{ m}; l = 6,00 \text{ m}$$

Sind die Stützenenden fest eingespannt, so ergibt sich beim Fall 1 mit $J_1 = J'_1 = J_m$ das Elastizitätsmaß der Stützen zu

$$\varepsilon'' = \frac{2 \cdot 4 \cdot J_1}{4} = 2 J_1.$$

Nach den Gleichungen 22 und 24 folgt

$$\tau_o = \frac{6 J_m}{2 J_1 \cdot 6} = \frac{1}{2}$$

und

$$\underline{a} = \frac{6,0}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2+8}{3+9}} \right] = \underline{1,775 \text{ m.}}$$

Um zu sehen, in welchem Felde dieser genaue Wert erreicht wird, geht man von der ersten Öffnung aus und berechnet dann nacheinander a_1, a_2 usw.

Feld 1.

Nach Gleichung 3 ist mit $\varepsilon_1 = 2 J_1$ oder $\varepsilon_1 = 2 J_m$

$$\underline{a}_1 = \frac{6,00}{3 + \frac{6 J_m}{2 \cdot 6 \cdot J_m}} = \underline{1,715 \text{ m.}}$$

Feld 2.

Hier ist

$$\varepsilon_1 = 2 J_m + \frac{6 J_m}{6 \left(3 - \frac{6}{4,28} \right)} = 2,625 J_m$$

$$\underline{a}_2 = \frac{6,00}{3 + \frac{6 J_m}{6 \cdot 2,625 J_m}} = \underline{1,775 \text{ m.}}$$

Wie man sieht, hat der Festpunktabstand hier schon seinen konstanten Wert erreicht. Würde man die Verbindung mit den Stützen außer acht lassen, dann wäre in einem Mittelfeld

$$a = 0,2113 \cdot 6,0 = 1,268 \text{ m,}$$

was die Verschiebung durch die Stützen deutlich erkennen läßt.

Weil in vielen Fällen das Trägheitsmoment der Stützen kleiner als dasjenige der Träger sein wird, so sei Fall 2

$$J_1 = J_1' = \frac{1}{4} J_m,$$

wofür sich folgende Abstände ergeben

$$\begin{aligned} \text{im Mittelfeld} & \dots a = \underline{1,536 \text{ m}} \\ \text{„ Endfeld} & \dots a_1 = \underline{1,20 \text{ m}} \\ \text{„ Feld 2} & \dots a_2 = \underline{1,528 \text{ m}} \end{aligned}$$

Im Feld 3 erreicht auch a hier seinen Grenzwert, während sich im Feld 2 nur eine Differenz von 8 mm geltend macht.

In vielen Fällen gestaltet sich die Berechnung einfacher und kürzer, wenn man vom Mittelfeld eines unendlich langen Rahmens ausgeht. Die hierfür gültigen Festpunkt-Gleichungen leisten nicht nur für die Dimensionierung große Dienste, sie sind auch zur Massenermittlung sehr willkommen.

Wenn die Spannweiten der einzelnen Horizontalglieder strenggenommen nicht ganz gleich sind, so können die entwickelten Gleichungen, welche dadurch an Richtigkeit nicht viel einbüßen, dennoch verwendet werden. Ihre Anwendbarkeit ist in Kürze durch zwei Beispiele dargelegt, aus welchen man die Vorteile der Berechnungsweise leicht erkennen kann.

2. Die Endfelder.

Es erübrigt sich hierauf nochmals einzugehen, da die Aufgabe im vorhergehenden Abschnitt bereits enthalten ist.

Da sich nach rechts hin unendlich viele Felder befinden, so sind zur Berechnung von b_1 die für die Mittelfelder entwickelten Gleichungen gültig. Unter Zuhilfenahme des Elastizitätsmaßes für die Endsäulen berechnet man ferner nach bekannten Gleichungen a_1 .

Die Festpunktbestimmung bietet also hier nichts Neues.

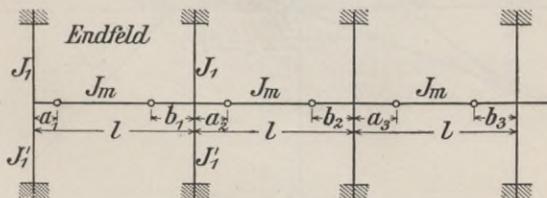


Abb. 8.

Die graphische Festpunktbestimmung.

Es soll nicht versäumt werden, im Anschluß an die analytische Berechnung eine graphische Methode zu zeigen, welche die Aufgabe der Festpunktbestimmung in einer ganz überraschend einfachen Weise löst. Die Grundlage, worauf diese Methode beruht, bildet die bekannte Theorie von Professor W. Ritter (Graphische Statik, III. Band), wonach man sich den Balken mit Momentenflächen belastet denkt. Dem Satze

von Mohr „Um die elastische Linie eines Balkens zu erhalten, betrachte man die Momentenfläche als Belastungsfläche und zeichne dazu ein Seileck“ ist in unserem Falle noch beizufügen, daß die Momentenfläche durch das Trägheitsmoment dividiert werden muß. Die Voraussetzung lautet, daß dies nicht mehr konstant ist, und es ist dann klar, daß das Seileck wesentlich anders aussieht.

Um auf die „ersten Anhaltspunkte“ zu gelangen, zeichnet man Abb. 9a, worin der Momentenverlauf mutmaßlich eingetragen ist. Abb. 9b stellt ein Seileck für die durch J dividierte Momentenfläche dar, das unter Beibehaltung des Punktes B so gedreht wurde, daß die Seileckseite $B_1 B'_1$ mit der Balkenachse zusammenfällt. Die Stützenmomente müssen so groß sein, daß der Linienzug durch die Punkte A' , B und C' geht, die eine unter dem Winkel φ geneigte Gerade auf den Auflagerlotrechten bestimmt. Verlängert man die Seileckseiten, so erhält man die Punkte A'' , B_2'' , B_1'' , C'' , deren Abstände ξ von der Horizontalen für die weitere Untersuchung maßgebend sind.

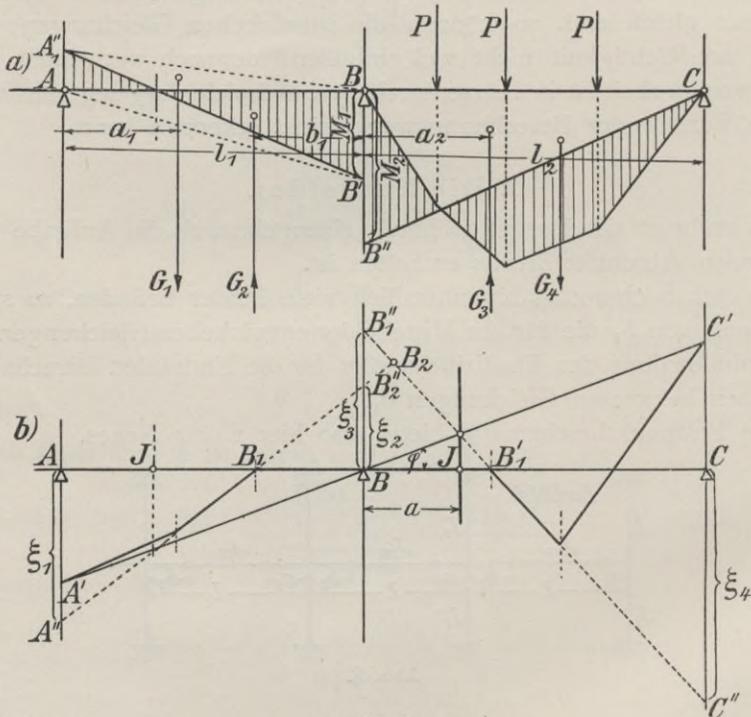


Abb. 9.

Betrachtet man das Dreieck $A_1'' B B'$, so sind ξ_1 und ξ_2 statische Momente desselben, und zwar auf die Auflagerlotrechten bezogen, wo ξ zu finden ist. Dasselbe gilt auch für das Dreieck $B B'' C$. Demnach ist

$$\begin{aligned} \xi_1 &= G_2 (l_1 - b_1), \\ \xi_2 &= G_2 \cdot b_1, \\ \xi_3 &= G_3 \cdot a_2, \\ \xi_4 &= G_3 \cdot (l_2 - a_2). \end{aligned}$$

Die Angriffspunkte der Gewichte G liegen bei konstantem Trägheitsmoment in $\frac{l}{3}$ und schieben sich, wenn dieses gegen das Auflager hin zunimmt, mehr nach der Balkenmitte zu. Die Folge davon ist, daß die für die Schwerlinie übliche Bezeichnung „Drittellinie“ nicht mehr gerechtfertigt ist, weshalb wir sie künftig, um wenigstens auf ihre allgemeine Benennung hinzuweisen, einfach D -Linie nennen.

Ihre Lage ist, wie dies aus der Abb. 9b hervorgeht, eindeutig bestimmt, wenn die Auflagerlotrechten-Abschnitte ξ bekannt sind. In der Tat ist dies auch der Fall, denn die errechneten Einsenkungen δ sind durch Momentflächen hervorgerufene statische Momente und somit mit den in Frage kommenden ξ identisch.

Beachtet man, daß δ und δ' auf die Auflagerlotrechte bezogenen statische Momente der durch J dividierten Momentenfläche bedeuten, und zwar auf die Stelle bezogen, wo die Einsenkungen gemessen werden, so kann man anschreiben

$$\xi_1 = \frac{M_1 l_1^2}{6 J_m} (\eta - \eta'),$$

$$\xi_2 = \frac{M_1 l_1^2}{6 J_m} \eta',$$

$$\xi_3 = \frac{M_2 l_2^2}{6 J_m} \eta',$$

$$\xi_4 = \frac{M_2 l_2^2}{6 J_m} (\eta - \eta').$$

Für die weitere Entwicklung kann es gleichgültig sein, ob die Größen ξ durch 6 dividiert werden oder nicht, da dieser Nenner keinen Einfluß hat. Setzt man noch $M_2 = 1$ und $M_1 = \mu$, dann folgt

$$\xi_1 = \mu \frac{l_1^2}{J_m} (\eta - \eta'),$$

$$\xi_2 = \mu \frac{l_1^2}{J_m} \eta',$$

$$\xi_3 = \frac{l_2^2}{J_m} \eta',$$

$$\xi_4 = \frac{l_2^2}{J_m} (\eta - \eta').$$

Die Kontrolle für die Richtigkeit dieser Ausführungen kann man teilweise darin erblicken, indem man erwägt, daß die D -Linien bei vollständiger Einspannung mit den Festlinien zusammenfallen. Der Beweis hierfür wird noch später erbracht werden. Es ist dann

$$a = l \frac{\eta'}{\eta}.$$

Aus Abb. 9b geht das Verhältnis

$$\frac{\xi_4}{\xi_3} = \frac{l_2 - a_2}{a_2}$$

hervor, womit man mit den Werten für ξ und a

$$\frac{\frac{l_2^2}{J_m} (\eta - \eta')}{\frac{l_2^2}{J_m} \eta'} = \frac{l_2 - \frac{l_2 \eta'}{\eta}}{\frac{l_2 \eta'}{\eta}}$$

erhält, oder

$$\frac{\eta - \eta'}{\eta'} = \frac{\eta - \eta'}{\eta'}$$

woraus die Richtigkeit zu ersehen ist.

Betrachtet man in obigen Gleichungen $\frac{l^2}{J_m}$ als veränderlich, so bleibt die Lage der D -Linie unverändert, was die Vermutung zuläßt, daß dieser Faktor wegbleiben kann. Zieht man jedoch in Betracht, daß die Lage des Punktes B_2 hiervon abhängig ist, so kann man die Notwendigkeit dieser Multiplikation leicht einsehen. Eine Vertikale durch B_2 ist die Schwerlinie von zwei Momentendreiecken, denn die durch sie hervorgerufenen statischen Momente sind dort gleich groß.

Diese vertikale Schwerlinie spielt die Rolle der verschränkten Drittelinie, deren es, wie man sieht, an jedem Auflager zwei gibt. Wenn der Balken über seinen Stützen gelenkig lagert, so rücken beide Linien zu einer einzigen zusammen. Sie brauchen bei unserem Verfahren nicht gezeichnet zu werden.

Endlich erhält man die Festlinie, welche durch den Schnittpunkt der Linie $B_1''C_1'$ mit der unter dem Winkel ψ geneigten Graden $A''C'$ geht.

Es wäre nun noch eine Konstruktion für die Festpunktbestimmung bei elastischer Einspannung zu erwähnen. Dieser Fall kommt nur bei Endfeldern in Frage, wo die Festlinie, deren genaue Lage vom Einspannungsgrad abhängt, zwischen den Auflagerlotrechten und der D -Linie liegt.

Um sie, wie überhaupt alle Festpunkte, zu finden, geht man in folgender ganz allgemeinen Weise vor.

Zunächst vernachlässigt man den Einfluß der Stützen ganz und bestimmt dann in jedem Feld die Diagonallinien.

Es ist dann

$$\underline{z'} = \frac{l^2}{J_m} \eta' \dots \dots \dots (26)$$

$$\underline{z} = \frac{l^2}{J_m} \eta \dots \dots \dots (27)$$

Für jedes Feld hat man das betreffende l und J_m einzusetzen. Die gestrichelten Linien sind natürlich horizontal und die D -Linien, welche man nicht zu zeichnen braucht, gehen durch die Schnittpunkte der Diagonalen mit der Horizontalen.

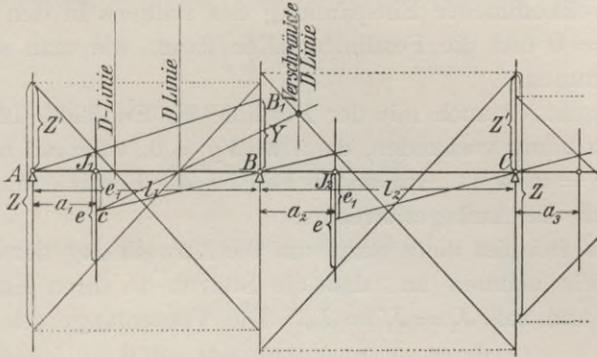


Abb. 10.

Um den ersten Festpunkt zu finden, macht man

$$y = \frac{6l}{\varepsilon''} \dots \dots \dots (28)$$

wobei ε'' wie immer das Elastizitätsmaß der Stützen ist. Die Linie AB_1 gibt den Schnittpunkt J_1 , durch den die Festlinie geht. Die Richtigkeit der Konstruktion geht aus der Gleichung 2 hervor, welche mit den Beziehungen 26 und 27 das Verhältnis

$$\frac{a}{l} = \frac{z'}{z + y}$$

liefert, was aus der Konstruktion leicht herausgelesen werden kann.

Für die Festpunktbestimmung in der zweiten Öffnung benutzt man gleich den ersten Festlinienabschnitt. Es ist

$$e_1 = \mu e \dots \dots \dots (29)$$

Legt man von C durch das Auflager B eine Linie, so geht durch J_2 die Festlinie. Diese teilt man wieder und bestimmt so die Festlinie in der dritten Öffnung usw. Die Festpunkte K bestimmen sich in gleicher Weise, indem am rechten Trägerende begonnen wird.

Bei Bestimmung der J -Punkte sind die Festlinienabschnitte mit einem Koeffizienten zu verkleinern, mit dem man ein von rechts kommendes Moment multiplizieren muß, um das nach links weitergehende zu erhalten, während der Verkleinerungskoeffizient, welcher den Teil ausdrückt, der bei einem von links herankommenden Moment nach rechts weitergeht, zur Bestimmung der Abschnitte für die K -Punkte dient.

Allgemein können hier folgende Gleichungen zur Anwendung gelangen.

Für Bestimmung der J -Punkte

$$\mu = \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon'' + \varepsilon_2'} \dots \dots \dots (30a)$$

und für die K -Punkte

$$\mu = \frac{\varepsilon_2'}{\varepsilon'' + \varepsilon_1'} \dots \dots \dots (30b)$$

ε'' bedeutet das Elastizitätsmaß für die Stützen und ε' das für die Balken und zwar ε_1' für das rechte und ε_2' für das linke Balkenende der vorhergehenden Öffnung. Wenn der Balken in den Stützen nicht eingespannt ist, dann wird $\mu = 1$ und die Konstruktion ist dann besonders einfach. Bei vollkommener Einspannung des Balkens in den Stützen wird mit $\varepsilon'' = \infty$ $\mu = 0$ und die Festlinien fallen dann, wie man sieht, mit den D -Linien zusammen.

Ebenso geht es auch mit der Festlinie im Endfeld. Ist bei A vollständige Einspannung vorhanden, dann wird $y = 0$, während bei gelenkiger Auflagerung $y = \infty$ wird. Im ersten Fall ist die Festlinie die D -Linie und im zweiten Fall die Auflagerlotrechte.

Folgendes Beispiel dient dazu, um die Anwendung der Konstruktion darzulegen. Wir nehmen an, daß die Stützen an ihren Enden fest eingespannt sind und daß $J_1 = J_1' = J_m$. Die Voutenlänge sei

$$\alpha = \frac{1}{5} \text{ und } n = \frac{1}{10},$$

wofür man aus der Tabelle

$$\eta = 2,28 \quad r' = 0,9035$$

entnehmen kann.

Für die Diagonallinien erhält man nach den Gleichungen 26 und 27

Feld 1 und Feld 4: $\underline{z'} = 0,9035 \cdot 4,0^2 = 14,46,$
 $\underline{z} = 2,280 \cdot 4,0^2 = 36,48,$

Feld 2 und Feld 3: $\underline{z'} = 0,9035 \cdot 5,0^2 = 22,59,$
 $\underline{z} = 2,280 \cdot 5,0^2 = 57,00.$

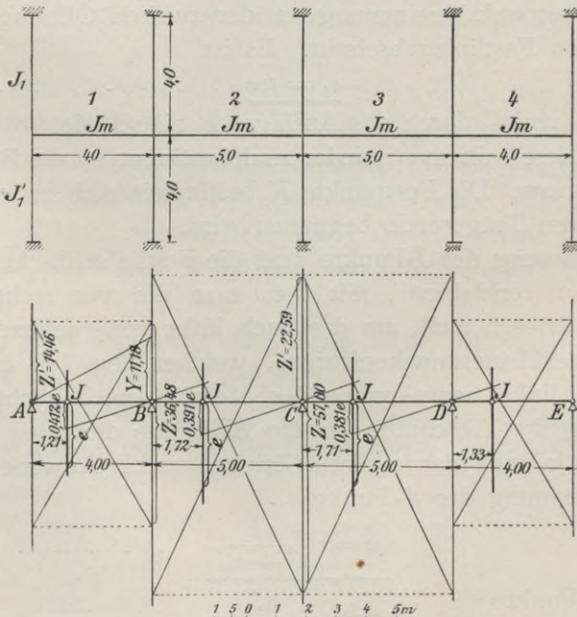


Abb. 11.

Da sämtliche Trägheitsmomente gleich groß sind, wurden sie einfach weggelassen.

Feld 1:

Nach Gleichung 8 beträgt das Elastizitätsmaß der Stützen

$$\varepsilon'' = 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3,5} \right) = \underline{2,143}.$$

Dann wird nach Gleichung 28

$$\underline{y} = \frac{6 \cdot 4,0}{2,143} = \underline{11,18}.$$

Feld 2:

Nach Gleichung 30a ist für die J -Punkte

$$\mu = \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon'' + \varepsilon_1'},$$

wobei nach Gleichung 7 für den Balken

$$\varepsilon_1' = \frac{6}{4,0 \left(2,28 - 0,9035 \cdot \frac{4,0}{2,79} \right)} = \underline{1,50}$$

beträgt, somit

$$\mu = \frac{1,5}{2,143 + 1,5} = 0,412$$

und

$$\underline{e_1 = 0,412 e.}$$

Feld 3:

$$\varepsilon_1' = \frac{6}{5 \left(2,28 - 0,9035 \cdot \frac{5,0}{3,28} \right)} = 1,38,$$

$$\mu = \frac{1,38}{2,143 + 1,38} = 0,391,$$

$$\underline{e_1 = 0,391 e.}$$

Feld 4:

$$\varepsilon_1' = \frac{6}{5 \left(2,28 - 0,9035 \cdot \frac{5,0}{3,29} \right)} = 1,32,$$

$$\mu = \frac{1,32}{2,143 + 1,32} = 0,381,$$

$$\underline{e_1 = 0,381 e.}$$

Es ergeben sich folgende Abstände:

$$a_1 = b_4 = \underline{1,21 \text{ m}},$$

$$a_2 = b_3 = \underline{1,72 \text{ m}},$$

$$a_3 = b_2 = \underline{1,71 \text{ m}},$$

$$a_4 = b_1 = \underline{1,33 \text{ m}}.$$

Die errechneten Koeffizienten μ können bei der weiteren Momenten-ermittlung zweckmäßig verwendet werden. Die Konstruktion gestaltet sich, wie man sieht, besonders einfach, wenn der Balken mit den Stützen nicht in Verbindung steht, denn dann ist immer $\mu = 1$ und die durch das Auflager gehende Linie schneidet sich jeweils mit der vorhergehenden Diagonal- und Festlinie.

Unendlich lange Rahmen.

Folgende Ausführungen zeigen kurz, wie die Festpunktbestimmung erfolgen kann.

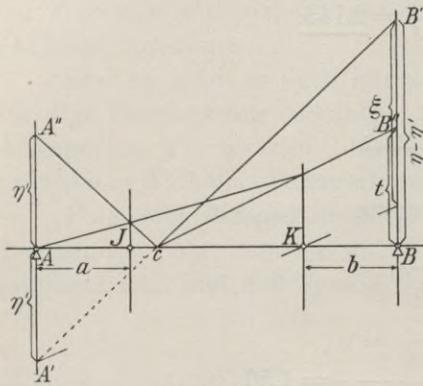


Abb. 12.

Man trägt die Größen η und η' , wie Abb. 12 zeigt, auf und zieht die Linien $A'B'$ und $A''C$. Der Abschnitt t kann zum erstenmal nur annähernd ermittelt werden. Es ist

$$t = \mu (\eta - \eta') \quad . \quad . \quad (31)$$

wobei μ einen Verkleinerungskoeffizienten für das Moment bedeutet, der jedoch wieder vom Festpunktabstand abhängt. Nimmt man vorläufig an, daß dieser $\frac{l}{4}$ ist, dann folgt nach Gleichung 30a

$$\mu = \frac{3,6 J_m}{3,6 J_m + \varepsilon'' l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31a)$$

Hierauf zieht man CB'' und die Linie, welche auf $A''C$ den Festpunktabstand bestimmt, wobei nur zu beachten ist, daß $a = b$ sein muß, was man auch durch einiges Probieren leicht findet. Wenn der Balken auf seinen Stützen frei gelagert ist, dann folgt mit $\varepsilon'' = 0$ $\mu = 1$.

Erachtet man die gewonnenen Resultate für nicht genau genug, dann kann man den Abschnitt t nach der Gleichung

$$t = \frac{\eta - \eta'}{1 + \frac{l \varepsilon'' \xi}{6 J_m}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31b)$$

nochmals ermitteln, wobei ξ nach der ersten Bestimmung aus der Zeichnung entnommen werden kann.

Für das analytisch behandelte Beispiel erhält man mit $\varepsilon'' = 2 J_m$

$$\begin{aligned} t &= \mu (\eta - \eta') = \frac{3,6 (\eta - \eta')}{3,6 + 2 \cdot 6,0} = \\ &= 0,231 (\eta - \eta'). \end{aligned}$$

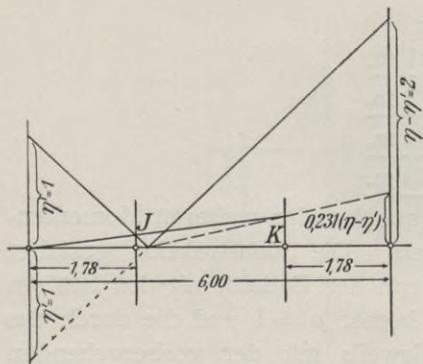


Abb. 13.

Wie man sieht, liefert diese Konstruktion den Festpunktabstand mit großer Genauigkeit.

Die Wärmewirkung.

Erfährt ein Glied des Stockwerkrahmens infolge von Wärmunterschieden eine Längenänderung, so entstehen dadurch in der ganzen Konstruktion Biegungsspannungen, deren Ermittlung uns zunächst beschäftigen soll.

Um diese Aufgabe nicht unnötig schwierig zu machen, nehmen wir an, daß das Trägheitsmoment der Stäbe konstant ist und daß ihre Enden fest eingespannt sind.

Verlängert sich der in Abb. 14 mit 4 bezeichnete Stab, so erfahren dadurch die Knotenpunkte Verdrehungen um den Winkel τ , sowie Verschiebungen, die sich, wenn sie einmal bekannt sind, für eine rasche Momentenermittlung verwerten lassen. Wir fassen nun die Berechnung des kleinen Winkels ins Auge und gehen zu diesem Zwecke von folgenden bekannten Gleichungen der Festigkeitslehre aus.

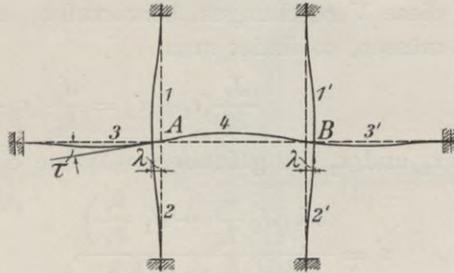


Abb. 14.

Greift am Ende eines fest eingespannten Kragträgers P an, dann ist mit $M = P \cdot l$ die unter der Last gemessene Senkung

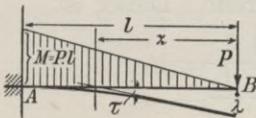


Abb. 15.

$$\delta = \frac{M l^2}{3 E J},$$

woraus

$$M = \frac{3 \delta E J}{l^2}.$$

Das Balkenende dreht sich um den Winkel

$$\tau = \frac{M \cdot l}{2 E J},$$

womit man die Stelle, an der sich die an die elastische Linie gelegten Tangenten schneiden, zu

$$z = \frac{\delta}{\tau} = \frac{2}{3} l$$

findet. Ist das Trägerende in vertikalem Sinne unverschieblich, dann ist dort der Ausschlagwinkel, wenn ein Moment angreift,

$$\tau = \frac{M l}{4 E J}.$$

Wir gehen nun in der Weise vor, indem wir uns vorerst an den Knotenpunkten eingeschaltete Gelenke denken, und bringen dann nacheinander die Stäbe in solche Lagen, daß sich ihre stetig verlaufenden elastischen Linien rechtwinklig kreuzen.

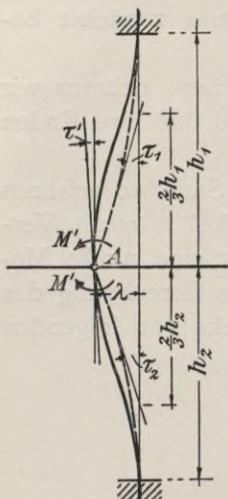


Abb. 16.

Nach den Bezeichnungen der Abb. 16 ist

daraus
$$\lambda = \tau_1 \cdot \frac{2}{3} h_1$$

$$\tau_1 = \frac{3 \lambda}{2 h_1}$$

ähnlich

$$\tau_2 = \frac{3 \lambda}{2 h_2}$$

Wenn die elastische Linie der Stützen bei A stetig verlaufen soll, dann muß sich das obere Stützenende um $\tau_1 + \tau'$ und das Ende der unteren Säule um $\tau_2 - \tau'$ drehen. Beachtet man, daß die Momente, welche diese Verdrehungen hervorrufen, einander gleich sein müssen, so findet man

$$\frac{J_1}{h_1} (\tau_1 + \tau') = \frac{J_2}{h_2} (\tau_2 - \tau')$$

Setzt man für τ_1 und τ_2 die gefundenen Werte ein, so ergibt sich

$$\tau' = \frac{3 \lambda \left(J_2 \frac{h_1}{h_2} - J_1 \frac{h_2}{h_1} \right)}{2 (J_1 h_2 + J_2 h_1)}$$

Beteiligen sich außerdem noch die Balken, so entsteht der kleinere Winkel

$$\tau = \tau' - \tau'' (M_3 + M_4),$$

wobei τ'' den Winkel bedeutet, um den sich die fest miteinander verbundenen Stützen drehen, wenn daran $M = 1$ angreift. Dieser ist

$$\tau'' = \frac{1}{\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}}$$

Mit

$$\tau_1 = \frac{h_1}{4 E J_1} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{h_2}{4 E J_2}$$

folgt nach einiger Umformung

$$\tau'' = \frac{h_1 h_2}{4 E (J_1 h_2 + J_2 h_1)}$$

Da der Ausschlagwinkel dem ihn erzeugenden Moment direkt proportional ist, folgt

$$M_3 + M_4 = \frac{\tau}{\tau_3} + \frac{\tau}{\tau_4}$$

worin wieder

$$\tau_3 = \frac{l'}{4 E J_3}$$

und im Hinblick auf die elastische Linie, die in $1/2 l$ horizontal sein muß,

$$\tau_4 = \frac{l}{2 E J_4}$$

Mit diesen Werten erhält man

$$\tau = \tau' - 2 \tau h_1 h_2 \frac{2 J_3 + \frac{J_4}{l}}{4 (J_1 h_2 + J_2 h_1)}$$

Diese Gleichung liefert endlich

$$\tau = \frac{\frac{3}{2} \lambda l l' \left(J_2 \frac{h_1}{h_2} - J_1 \frac{h_2}{h_1} \right)}{l l' (J_2 h_1 + J_1 h_2) + h_1 h_2 (2 J_3 l + J_4 l')} \dots (32)$$

Erwärmt sich der Stab 4 um $\pm t_0$ Grad gleichmäßig, dann ist

$$\lambda = \pm \alpha t_0 \frac{l}{2} \dots (33)$$

l' ist die Länge des Stabes 3 und l diejenige für den sich verlängernden Stab 4

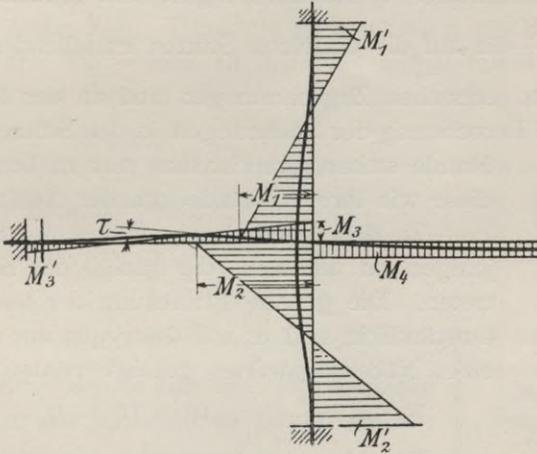


Abb. 17.

Die Momente betragen

$$M_1 = - \frac{(6 \lambda + 4 \tau h_1) E J_1}{h_1^2}$$

$$M_2 = - \frac{(6 \lambda + 4 \tau h_2) E J_2}{h_2^2}$$

$$M_3 = \frac{4 \tau E J_3}{l'}$$

$$M_4 = - \frac{2 \tau E J_4}{l}$$

$$M_1' = \frac{M_1}{2} + \frac{3 \lambda E J_1}{h_1^2}$$

$$M_2' = \frac{M_2}{2} + \frac{3 \lambda E J_2}{h_2^2}$$

$$M_3' = - \frac{M_3}{2}$$

Diese Gleichungen reichen zur Ermittlung sämtlicher Momente aus. Je mehr $J_1 \cdot h_1$ von $J_2 \cdot h_2$ voneinander verschieden ist, desto größer sind die Biegemomente in den Balken.

Die Darlegungen beschränken sich nicht nur auf die Berücksichtigung der Temperaturdifferenzen, sondern können auch zur Berechnung von Balken, die mit elastisch senkbaren Stützen verbunden sind, herangezogen werden.

In diesem Falle ist nur für λ die Stützensenkung und für $r_4 = \frac{l}{4 J_4 E}$ zu setzen.

Winddruck.

Die hierdurch bei Stockwerkrahmen auftretenden Spannungen erreichen nur dann wesentliche Beträge, wenn die Rahmen hoch und schmal sind. Das ganze Bauwerk wirkt dabei als Kragträger und es entstehen Momente und Schubkräfte. Wenn das Kragmoment ermittelt ist, berechnet man aus $\sigma = \pm \frac{M}{W}$ die auf die einzelnen Stützen entfallenden Achsialkräfte.

An der Windseite entstehen Zugspannungen und an der Leeseite Druckspannungen. Bei Berechnung der Spannungen in den Stützen, die nicht am Rande stehen, braucht man nur zu beachten, daß sich diese wie ihre Abstände von der Nulllinie verhalten.

Zu den so erhaltenen Spannungen sind noch diejenigen zu addieren, die infolge der Schubkräfte auftreten. Die genaue Ermittlung der letzten ist äußerst umständlich, und es soll deswegen nur die Berechnung eines Näherungswertes gezeigt werden.

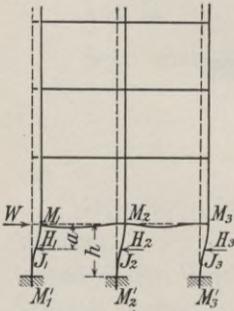


Abb. 18.

Es ist
$$W = H_1 + H_2 + H_3$$

Die Momente betragen

$$\underline{M_1 = H_1 \cdot a_1} \quad \underline{M_2 = H_2 \cdot a_2} \quad \underline{M_3 = H_3 \cdot a_3.}$$

Der Abstand des Momenten-Nullpunktes ist annähernd

$$a = \frac{h}{2},$$

während sich, wenn ε_o' von ε_u' sehr verschieden ist, der genaue Wert zu

$$a = \frac{h \varepsilon_o' (3 + \varepsilon_u' h^2)}{2 h^2 \varepsilon_o' \varepsilon_u' + 3 (\varepsilon_o' + \varepsilon_u')}$$

findet. Zur Berechnung von H benutzt man die Gleichungen

$$\underline{H_1 = \frac{J_1 \varepsilon_1'}{\sum J \varepsilon_1'}} \quad \underline{H_2 = \frac{J_2 \varepsilon_2'}{\sum J \varepsilon_2'}} \quad \underline{H_3 = \frac{J_3 \varepsilon_3'}{\sum J \varepsilon_3'}}$$

welche der gern gemachten Annahme Genüge leisten, daß die an einem Stab angreifende Kraft proportional ist dem Trägheitsmoment des Stabquerschnittes multipliziert mit dem Einspannungsgrade.

Sind die einzelnen Kräfte H bekannt, dann lassen sich hiermit leicht die Momente bilden, die sich nach den bekannten Regeln in die Stäbe verteilen.

Für die Praxis liefern diese Ausführungen, die auf Genauigkeit keinen Anspruch machen sollen, annehmbare Ergebnisse. Ihre Anwendung kann im Hinblick darauf, daß in den meisten Fällen eine Berechnung für Winddruck ganz unterbleibt, um so mehr empfohlen werden.

Beispiel.

Es sei hier eine Ausführung gewählt, und zwar ein Binder des Fabrikgebäudes der The Singer Manufacturing Co., Wittenberge. Die Unterlagen sind aus dem Handbuch für Eisenbetonbau, erste Auflage (IV. Band, 2. Teil S. 203) entnommen. Über die in Rechnung gestellte Nutzlast ist dort nichts gesagt. Sie wurde zu $1,2 \text{ t/m}^2$ angenommen, während die Maße der Balken und Stützen aus der Figur abgegriffen sind.

Berechnung der Trägheitsmomente.

a) für die Balken.

1. in Balkenmitte.

Decke I.

$$\begin{array}{l} \text{Wirksame Plattenbreite } b = 200 \text{ cm; Plattenstärke} \\ d = 10 \text{ cm; Querschnitt } 30 \cdot 60 \text{ cm} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} F = 3800 \text{ cm}^2, \\ S = 82000 \text{ cm}^3, \\ x = \frac{S}{F} = 21,6 \text{ cm}, \\ J_m = 2110000 \text{ cm}^4, \end{array} \right.$$

Decke II bis IV.

$$\text{Querschnitt } 30 \cdot 55 \text{ cm; } d = 10 \text{ cm; } b = 200 \text{ cm} \left\{ \begin{array}{l} F = 3650 \text{ cm}^2, \\ S = 71800 \text{ cm}^3, \\ x = 19,7 \text{ cm}, \\ J_m = 1900000 \text{ cm}^4. \end{array} \right.$$

Decke V.

$$\text{Querschnitt } 25 \cdot 42 \text{ cm; } d = 8 \text{ cm; } b = 200 \text{ cm} \left\{ \begin{array}{l} F = 2610 \text{ cm}^2, \\ S = 36690 \text{ cm}^3, \\ x = 14,1 \text{ cm}, \\ J_m = 552000 \text{ cm}^4. \end{array} \right.$$

2. am Auflager.

Decke I.

$$\text{Querschnitt } 30 \cdot 115 \text{ cm; } d = 10 \text{ cm; } b = 200 \text{ cm} \left\{ \begin{array}{l} F = 5450 \text{ cm}^2, \\ S = 224500 \text{ cm}^3, \\ x = 41,2 \text{ cm}, \\ J_a = 9527000 \text{ cm}^4. \end{array} \right.$$

Decke II bis IV.

$$\text{Querschnitt } 30 \cdot 105 \text{ cm; } d = 10 \text{ cm; } b = 200 \text{ cm} \left\{ \begin{array}{l} F = 5\,150 \text{ cm}^2, \\ S = 20\,700 \text{ cm}^3, \\ x = 40,2 \text{ cm}, \\ J_a = 6\,937\,000 \text{ cm}^4. \end{array} \right.$$

Decke V.

$$\text{Querschnitt } 25 \cdot 77 \text{ cm; } d = 8 \text{ cm; } b = 200 \text{ cm.} \left\{ \begin{array}{l} F = 3\,185 \text{ cm}^2, \\ S = 95\,740 \text{ cm}^3, \\ x = 27,4 \text{ cm}, \\ J_a = 2\,529\,000 \text{ cm}^4. \end{array} \right.$$

Bei jeder Decke ergibt sich

$$n = \frac{J_m}{J_a} = \text{rd. } \frac{1}{4}; \text{ und } \alpha = \frac{1}{4}$$

und dafür nach den Gleichungen 14 und 15

$$\underline{\eta}' = 1 - \frac{3}{24} \left(3 - \frac{1,6}{4} \right) = \underline{0,8781},$$

$$\underline{\eta} = 3 - \frac{3}{4} = \underline{2,250}.$$

β) Stützen.

1. Innenstützen.

$$\text{Unter Decke I: } J = \frac{1}{12} \cdot 80^4 = 3\,413\,000 \text{ cm}^4,$$

$$\text{„ „ II: } J = \frac{1}{12} \cdot 70^4 = 2\,000\,000 \text{ „}$$

$$\text{„ „ III: } J = \frac{1}{12} \cdot 60^4 = 1\,080\,000 \text{ „}$$

$$\text{„ „ IV: } J = \frac{1}{12} \cdot 45^4 = 342\,000 \text{ „}$$

$$\text{„ „ V: } J = \frac{1}{12} \cdot 30^4 = 67\,500 \text{ „}$$

2. Außenstützen.

$$\text{Unter Decke I: } J = \frac{1}{12} \cdot 70^4 = 2\,000\,000 \text{ cm}^4,$$

$$\text{„ „ II: } J = \frac{1}{12} \cdot 60^4 = 1\,080\,000 \text{ „}$$

$$\text{„ „ III: } J = \frac{1}{12} \cdot 50^4 = 521\,000 \text{ „}$$

$$\text{„ „ IV: } J = \frac{1}{12} \cdot 40^4 = 213\,000 \text{ „}$$

$$\text{„ „ V: } J = \frac{1}{12} \cdot 30^4 = 67\,500 \text{ „}$$

Hierfür ist bei konstantem Trägheitsmoment $\eta = 3$ und $\eta' = 1$.

Lasten:

α) ständige Lasten.

$$\text{Decke I bis IV } g = 2,10 \text{ t/m,}$$

$$\text{„ V } g' = 2,00 \text{ „}$$

β) Nutzlasten.

Decke I bis IV $p = 5,50 \text{ t/m}$,

„ V $g = 0,70 \text{ „}$

Die Balkenmomente für den frei aufliegenden Balken betragen

Decke I bis IV $Mg = \frac{2,1 \cdot 6,0^2}{8} = \underline{9,45 \text{ mt}}$,

$Mp = \frac{5,5 \cdot 6,0^2}{8} = \underline{24,80 \text{ mt}}$,

Decke V $Mg = \frac{2,0 \cdot 6,0^2}{8} = \underline{9,00 \text{ mt}}$,

$Mg' = \frac{0,7 \cdot 6,0^2}{8} = \underline{3,15 \text{ mt}}$.

Die Festpunkte

werden hier, um an Raum zu sparen, analytisch ermittelt. Der noch unbekannte Festpunktabstand in den oberen Stützen wurde vorläufig zu $\frac{l}{4}$ angenommen.

Kellerstützen:

$\underline{a} = \frac{330}{3} = \underline{110 \text{ cm}}$.

Decke I:

Untere Stütze $\varepsilon' = \frac{4 \cdot 2\,000\,000}{330} = 24\,300 \text{ cm}^3$,

Obere Stütze $\varepsilon' = \frac{3,6 \cdot 1\,080\,000}{430} = 9\,040 \text{ „}$
 $\varepsilon_1 = 33\,340 \text{ cm}^3$,

Endfeld . . $\underline{a} = \frac{600 \cdot 0,8781}{2,25 + \frac{6 \cdot 2\,110\,000}{600 \cdot 33\,340}} = \underline{183 \text{ cm}}$.

Untere Stütze $\varepsilon' = \frac{4 \cdot 3\,413\,000}{330} = 41\,400 \text{ cm}^3$,

Obere Stütze $\varepsilon' = \frac{3,6 \cdot 2\,000\,000}{430} = 16\,750 \text{ „}$

Balken . . . $\varepsilon' = \frac{6 \cdot 2\,110\,000}{600 \left(2,25 - 0,8781 \cdot \frac{600}{417} \right)} = 21\,300 \text{ „}$
 $\varepsilon_1 = 79\,450 \text{ cm}^3$.

Mittelfeld . . $\underline{a} = \frac{600 \cdot 0,8781}{2,25 + \frac{6 \cdot 2\,110\,000}{600 \cdot 79\,450}} = \underline{209 \text{ cm}}$.

Für die anderen Felder, sowie für die Abstände b gilt derselbe Wert.

Stützen II (über Decke I):

$$\text{Untere Stütze } \varepsilon' = \frac{4 \cdot 2\,000\,000}{330} \dots = 24\,300 \text{ cm}^3,$$

$$\text{Balken } \dots \varepsilon' = \frac{6 \cdot 2\,110\,000}{600 \left(2,25 - 0,8781 \cdot \frac{600}{391} \right)} = 23\,500 \text{ „}$$

$$\varepsilon_1 = 47\,800 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Endstütze } \dots \underline{a} = \frac{430}{3 + \frac{6 \cdot 1\,080\,000}{430 \cdot 47\,800}} = \underline{130 \text{ cm.}}$$

$$\text{Untere Stütze } \varepsilon' = \frac{4 \cdot 3\,413\,000}{330} \dots = 41\,400 \text{ cm}^3,$$

$$\text{Balken (rechts) } \varepsilon' = \frac{6 \cdot 2\,110\,000}{600 \left(2,25 - 0,8781 \cdot \frac{600}{391} \right)} = 23\,500 \text{ „}$$

$$\text{Balken (links) } \varepsilon' = \frac{6 \cdot 2\,110\,000}{600 \left(2,25 - 0,8781 \cdot \frac{600}{417} \right)} = 21\,300 \text{ „}$$

$$\varepsilon_1 = 86\,200 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Mittelstützen } \dots \underline{a} = \frac{430}{3 + \frac{6 \cdot 2\,000\,000}{430 \cdot 86\,200}} = \underline{129 \text{ cm.}}$$

Decke II.

$$\text{Untere Stütze } \varepsilon' = \frac{6 \cdot 1\,080\,000}{430 \left(3 - \frac{430}{300} \right)} = 9\,600 \text{ cm}^3,$$

$$\text{Obere Stütze } \varepsilon' = \frac{3,6 \cdot 521\,000}{425} = 4\,420 \text{ „}$$

$$\varepsilon_1 = 14\,020 \text{ cm}^3,$$

$$\text{Endfeld } \dots \underline{a} = \frac{600 \cdot 0,8781}{2,25 + \frac{6 \cdot 1\,900\,000}{600 \cdot 14\,020}} = \underline{146 \text{ cm.}}$$

$$\text{Untere Stütze } \varepsilon' = \frac{6 \cdot 2\,000\,000}{430 \left(3 - \frac{430}{301} \right)} \dots = 17\,800 \text{ cm}^3,$$

$$\text{Obere Stütze } \varepsilon' = \frac{3,6 \cdot 1\,080\,000}{425} \dots = 9\,150 \text{ „}$$

$$\text{Balken } \dots \varepsilon' = \frac{6 \cdot 1\,900\,000}{600 \left(2,25 - 0,8781 \cdot \frac{600}{454} \right)} = 17\,600 \text{ „}$$

$$\varepsilon_1 = 44\,550 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Mittelfeld} \quad a = \frac{600 \cdot 0,8781}{2,25 + \frac{6 \cdot 1\,900\,000}{600 \cdot 44\,500}} = \underline{197 \text{ cm.}}$$

Die Berechnung ist in ähnlicher Weise weiterzuführen. Die sich ergebenden Festpunkte und Elastizitätsmaße sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

I. Für Balken.

Felder	Elastizitätsmaße cm ³		Festpunkte cm	
	links	rechts	links	rechts
Endfeld:				
Decke I	23 500	21 300	183	209
„ II	20 400	17 800	146	197
„ III	19 200	16 000	102	182
„ IV	18 100	14 800	57	169
„ V	5 170	4 220	53	165
Mittelfeld:				
Decke I	23 500	23 500	209	209
„ II	20 400	20 400	197	197
„ III	19 200	19 200	182	182
„ IV	18 100	18 100	162	169
„ V	5 170	5 170	156	165

II. Für Stützen.

Stützen	Elastizitätsmaße cm ³		Festpunkte cm	
	unten	oben	unten	oben
Endstützen:				
I	—	24 300	110	79
II	9 300	9 600	130	117
III	4 650	4 730	131	125
IV	2 080	2 090	128	126
V	700	710	123	117
Mittelstützen:				
I	—	41 400	110	82
II	17 250	17 800	129	119
III	9 600	9 800	130	125
IV	3 350	3 350	128	127
V	645	650	137	146

Auf Grund der Elastizitätsmaße läßt sich für die Verkleinerungskoeffizienten folgende Tabelle aufstellen:

Decke	Von links kom. Momente				Von oben kom. Momente				Von unten kom. Momente			
	Stütze BCD		Stütze A		Stütze A		Stütze B		Stütze A		Stütze B	
	n. rechts	n. oben n. unten	n. rechts	n. oben n. unten	n. unten	n. rechts n. links	n. unten	n. rechts n. links	n. oben	n. rechts n. links	n. oben	n. rechts n. links
I	0,286	0,294 0,706	0	0,277 0,723	0,510	1,0 0	0,481	0,526 0,474	0,283	1,0 0	0,278	0,525 0,475
II	0,427	0,350 0,650	0	0,326 0,674	0,320	1,0 0	0,318	0,533 0,476	0,185	1,0 0	0,201	0,534 0,466
III	0,590	0,253 0,747	0	0,440 0,560	0,198	1,0 0	0,218	0,545 0,455	0,108	1,0 0	0,087	0,546 0,454
IV	0,818	0,161 0,839	0	0,335 0,665	0,104	1,0 0	0,092	0,550 0,450	0,036	1,0 0	0,019	0,550 0,450
V	0,897	0 1,0	0	0 1,0	0	1,0 0	0	0	0	1,0 0	0	0,552 0,448

Die Momente wurden auf graphischem Wege ermittelt, wobei die Maximal- und Minimalmomente in übersichtlicher Weise dargestellt sind. Zu ihrer Beurteilung seien noch in Kürze die Maximalwerte betrachtet.

Sie entsprechen, wenn $q = g + p$,

	im Endfeld	im Mittelfeld
Decke I	$M = \frac{q l^2}{24}$	Decke I $M = \frac{q l^2}{30}$
„ II	$M = \frac{q l^2}{19}$	„ II $M = \frac{q l^2}{28}$
„ III	$M = \frac{q l^2}{16,5}$	„ III $M = \frac{q l^2}{24}$
„ IV	$M = \frac{q l^2}{14,5}$	„ IV $M = \frac{q l^2}{21}$
„ V	$M = \frac{q l^2}{17}$	„ V $M = \frac{q l^2}{50}$

Die bei der üblichen Rechnungsart unterlaufenden Fehler lassen sich an Hand der Winklerschen Tabellen leicht überblicken.

Bisher wurde nur auf die Berechnung von Stockwerkrahmen hingewiesen. Es sollen nur noch kurz

andere Anwendungen

betrachtet werden, die vorzugsweise die rechnerische Behandlung von Balkenbrücken bilden. Bei solchen Konstruktionen ist man wohl mehr als sonst aus konstruktiven wie auch aus ästhetischen Gründen geneigt, dem Balken eine gewölbte Untersicht zu geben. Es wird damit nicht nur ein schlankes Aussehen des ganzen Bauwerkes erzielt, sondern man kommt auch dem häufig gemachten Anspruch auf eine im Scheitel möglichst geringe Konstruktionshöhe entgegen.

Meistens wird das für die Querschnittänderung zugrunde gelegte Gesetz nicht mehr streng gelten. Man hilft sich dadurch, indem man in der von vornherein gewählten Grundgleichung

$$J_x = \frac{J_a}{1 + cx^2}$$

statt x^2 allgemein x^v setzt. Dann folgt

$$J_x = \frac{J_a}{1 + cx^v} \dots \dots \dots (34)$$

wobei

$$c = \frac{1 - n}{n \alpha^v l^v} \dots \dots \dots (35)$$

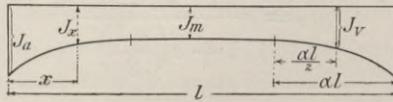


Abb. 19.

Für die Einsenkungen δ erhält man hiernach einfache Gleichungen, deren Integration ohne Schwierigkeit erfolgen kann.

$$\delta = \frac{l}{2} \int_0^l \frac{dx}{J_x}$$

$$\delta = \frac{l}{J_a} \int_0^{l_1} (1 + cx^v) dx + \frac{l}{2 J_m} \int_l^{l-l_1} dx$$

$$\delta = \frac{l^2}{6 J_m} \eta$$

wobei

$$\eta = 3 - \frac{6 \alpha v}{1 + v} (1 - n) \dots \dots \dots (36)$$

$$\delta' = \frac{1}{l} \int_0^l (l - x) x \frac{dx}{J_x}$$

$$\delta' = \frac{1}{l J_a} \int_0^{l_1} (l - x) (1 + cx^v) x dx + \frac{1}{l J_m} \int_l^{l-l_1} (l - x) x dx +$$

$$+ \frac{1}{l J_a} \int_{l-l_1}^l (l - x) [1 + c(l - x)^v] x dx$$

$$\delta' = \frac{l^2}{6 J_m} \eta'$$

wobei

$$\eta' = 1 - \alpha^2 v (1 - n) \left(\frac{6}{2 + v} - \frac{4 \alpha}{3 + v} \right) \dots \dots (37)$$

Der Koeffizient v hängt von der Voutenform ab und liegt in den meisten Fällen zwischen 1 und 2. Setzt man $v = 1$, so entsteht der Balken, den Abb. 19 zeigt. Für diese bei Balkenbrücken zweckmäßige Form ergibt sich

$$\eta = 3 - 3 \alpha (1 - n) \dots \dots \dots (38)$$

$$\eta' = 1 - \alpha^2 (1 - n) (2 - \alpha) \dots \dots \dots (39)$$

Wird noch $\alpha = \frac{1}{2}$, dann ist einfacher

$$\eta = \frac{3}{2}(1+n) \quad \dots \dots \dots (40)$$

$$\eta' = \frac{1}{8}(5+3n) \quad \dots \dots \dots (41)$$

Macht man zur Bedingung, daß in $x = \frac{l_1}{2}$ die Kurve des Trägheitsmomentes durch einen ganz bestimmten Punkt geht, so kann man, wenn dort $J_x = J_v$ genannt wird, zur Berechnung von v sehr leicht einfache Gleichungen aufstellen. Es ist:

$$J_v = \frac{J_a}{1 + c \left(\frac{\alpha l}{2}\right)^v}$$

woraus

$$2^v = \frac{J_a - J_m}{J_a - J_v}$$

folgt und

$$v = \frac{l \xi}{0,20103} \quad \dots \dots \dots (42)$$

wo

$$\xi = \frac{1-n}{1-n'} \quad \text{wenn} \quad n' = \frac{J_m}{J_v}$$

Für gebräuchliche Werte ξ ist folgende Tabelle aufgestellt, aus der v hervorgeht.

ξ	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
v	0,00	0,26	0,49	0,68	0,85	1,00	1,14	1,26
ξ	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0
v	1,38	1,49	1,59	1,68	1,77	1,85	1,93	2,00

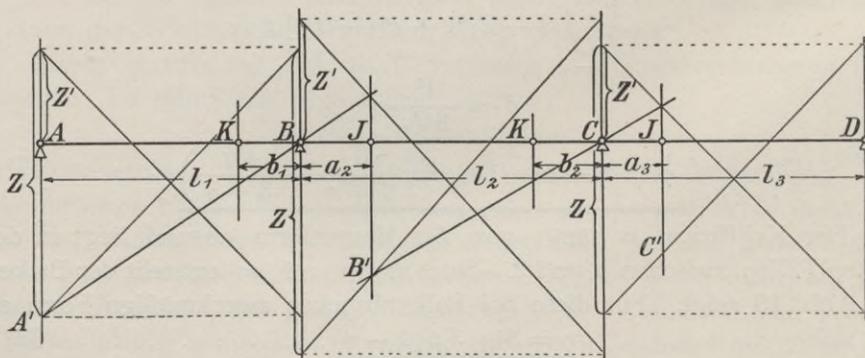


Abb. 20.

Am einfachsten bestimmt man die Festpunkte graphisch, wie dies Abb. 20 zeigt. Wenn der Balken noch mit seinen Stützen verbunden ist, dann fallen nur, wie dies zuvor erläutert wurde, die Punkte $A' B' C'$ nicht mehr zusammen. Hat man einmal die Festpunkte bestimmt, dann ist es leicht, die Einflußlinie für einen beliebigen Schnitt zu zeichnen.

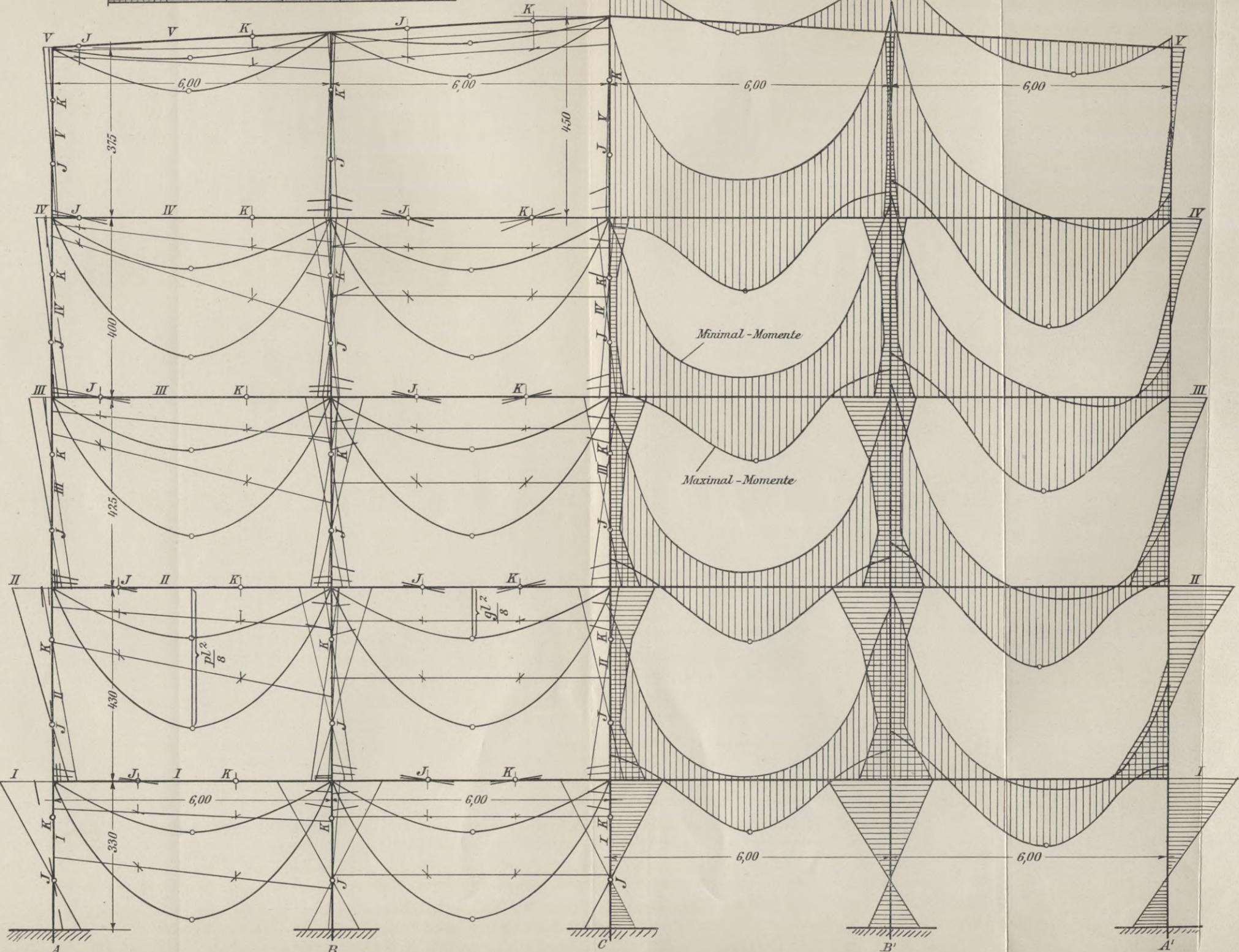
Das sehr dehbare Gesetz, welches für die Änderung der Querschnitte zugrunde gelegt wurde, läßt an Vollkommenheit nichts zu wünschen übrig. Die Gleichungen 36 und 37 enthalten drei beliebig Veränderliche, mit denen der wirklichen Balkenform in weitestgehender Weise entsprochen werden kann.

Schließlich sei noch auf die Materialersparnis hingewiesen, die bei Berücksichtigung des veränderlichen Trägheitsmomentes erzielt werden kann. Es würde zu weit führen, auch hierauf noch einzugehen, man sieht dies aber bei einem Versuch bald ein.



Längen Maßstab. 1 2 3 4 5 m

Momenten Maßstab. 10 20 30 40 50 m



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307034

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316003

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307041

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307035

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316004

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316010

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307036

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316005

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307037

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316006

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307038

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316007

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307039

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316008

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307040

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316009

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307033

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300595