

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300595



F. 9 a

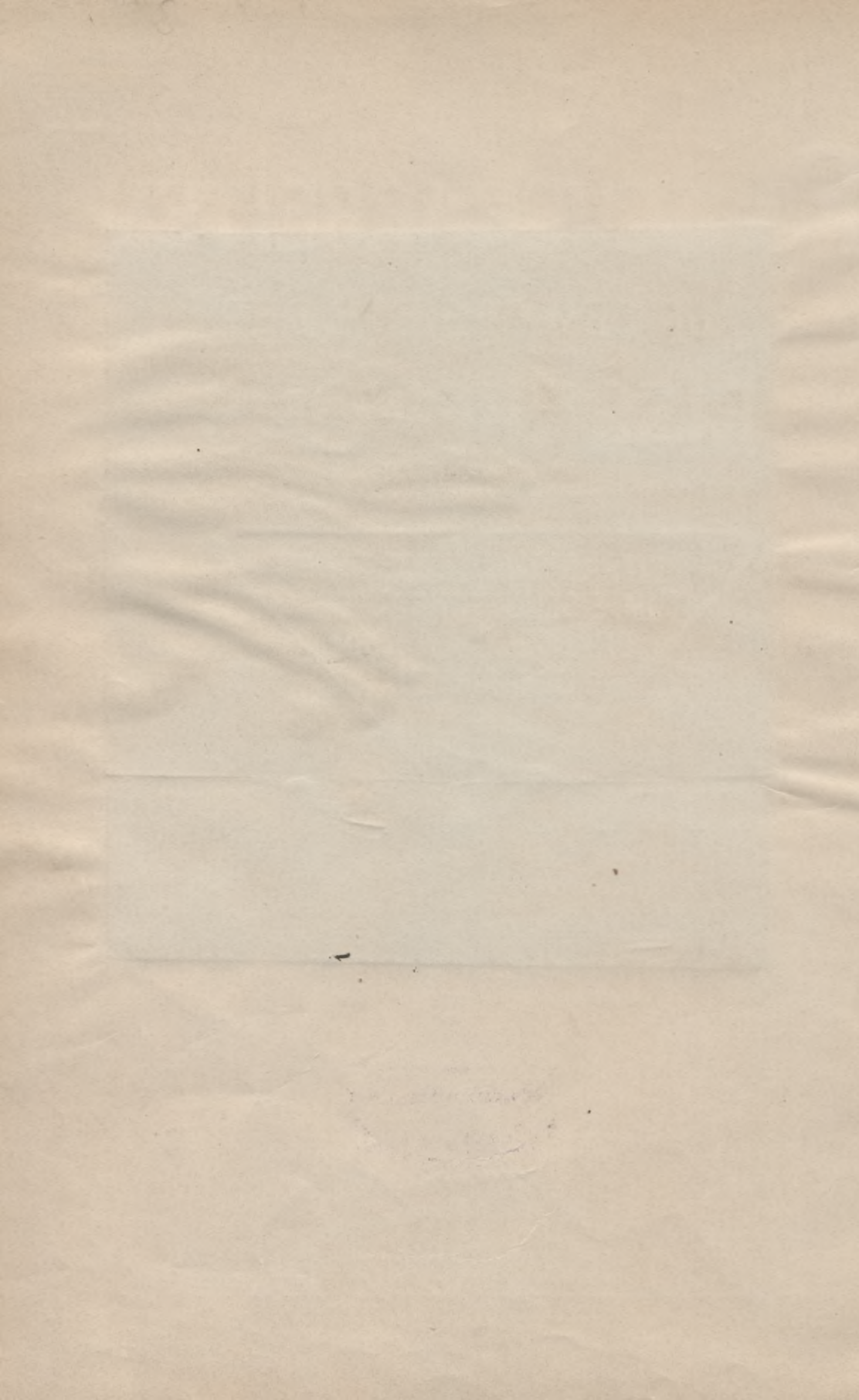
15

x
1340

- Heft 13: Beiträge zur Theorie der im Eisenbetonbau gebräuchlichen Form der Rippen-Kuppel.** Von Dr. Ing. **Karl W. Mautner**, Oberingenieur der Firma Carl Brandt. 1911. geh. 4 M.
- Heft 14: Eine Güteprobe für Beton System Dr. v. Emperger.** Von **G. Neumann**, Ingenieur. Mit 9 Abb. 1911. geh. 4 M.
- Protokollformulare** sind zum Preise von 1 M. zuzüglich Porto für 12 Stück erhältlich.
- Heft 15: Eisenbetonkonstruktionen bei Biegung und bei exzentrisch wirkenden Druck- oder Zugkräften.** Einheitliche Verfahren zur Bemessung derselben. Für die Praxis bearbeitet von **R. Wuczkowski**, Chefingenieur im Spezialbureau von Dr. Ing. v. Emperger. Mit 21 Abb. u. 23 Beispielen. 1911. geh. 4 M.
- Heft 16: Schwimmkörper in Eisenbeton.** Von Ingenieur **W. Straß**. Mit 154 Abb. 1911. geh. 6 M.
- Heft 17: Beiträge zur Theorie und Berechnung der im Eisenbetonbau üblichen elastischen Bogen, Bogenstellungen und mehrstieligen Rahmen.** Von Dr. Ing. **K. W. Schaechterle**, Regierungsbaumeister. Mit 91 Abb. 1912. geh. 6 M.
- Heft 18: Beitrag zur Berechnung mehrstöckiger Rahmen mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes.** Von Ingenieur **A. Straßner**. Mit 21 Textabb. 1912. geh. 2,60 M.
- Heft 19: Ueber neuere Versuche mit umschnürtem Beton.** (Spiralunwickelte und ringbewehrte Säulen.) Von Dr. Ing. **A. Kleinlogel**. Mit 25 Textabb. 1912. geh. 3,20 M.

Heft 20. Leitfaden zum Eisen- und Eisenbetonbau. Von Dr. Ing. W. Straß. 1912.

Heft 21. Leitfaden zum Eisen- und Eisenbetonbau. Von Dr. Ing. W. Straß. 1913.



FORSCHERARBEITEN

AUF DEM GEBIETE DES EISENBETONS

BEITRAG ZUR THEORIE DER
IM EISENBETONBAU GE-
BRÄUCHLICHEN FORM
DER RIPPEN-
KUPPEL

11/2
HEFT XIII — 21

PREIS 4 MARK

VON

Dr. Ing. **KARL W. MAUTNER**
OBERINGENIEUR DER FIRMA CARL BRANDT

MIT 47 TEXTABBILDUNGEN



5
7.19.2

**Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.**

BEITRAG ZUR THEORIE DER IM EISENBETONBAU GEBRÄUCHLICHEN FORM DER RIPPENKUPPEL

von

Dr. Ing. **KARL W. MAUTNER**
OBERINGENIEUR DER FIRMA CARL BRANDT

MIT 47 TEXTABBILDUNGEN

F. Nr. 26044



BERLIN 1911
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.

F. 19a



III-307033

~~III 19/52~~

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen vorbehalten.

Akc. Nr.

~~2109/51~~

7007-156/2018

Vorwort.

Verschiedene Ausführungen von Eisenbetonkuppeln ließen es dem Verfasser vorliegender Arbeit wünschenswert erscheinen, die statischen Verhältnisse dieser Bauwerke einem eingehenden Studium zu unterziehen. Der Grund, warum von den gebräuchlichen monolithischen Kuppelkonstruktionen besonders die Rippenkuppel einer Behandlung für wert gehalten wurde, ist darin zu sehen, daß Verfasser der Meinung ist, daß, nach Klarlegung der statischen Verhältnisse dieser, Schlüsse auf die Formveränderungen auch glatter Kuppeln gezogen werden könnten, und daß durch Zerlegung einer solchen Kuppel in gedachte Ringe und Rippen möglichst großer Zahl eher eine für die Praxis befriedigende Lösung auch dieser Kuppelarten zu finden wäre als durch Studium derselben nach den allgemeinen Lehren der mathematischen Elastizitätstheorie. Ferner bildet die Rippenkuppel durch die immer mehr ausgedehnte Anwendung des Eisenbetons zur Überdachung großer Räume eine beliebte und für Monumentalbauten auch architektonisch dankbare Lösung, so daß speziell wegen der Anwendung bei außergewöhnlich großen Spannweiten eine Untersuchung angebracht ist. Über größere Ausführungsbeispiele dieser Art siehe Prof. S. Müller-Berlin: „Die Kuppel der Friedrichstraßen-Passage, Berlin“ (Armierter Beton 1909) und Aufsatz des Verfassers (Deutsche Bauzeitung 1908, Nr. 11, 12 und 13) sowie Vortrag des Verfassers auf der 12. Hauptversammlung des Deutschen Betonvereins 1909 (Deutsche Bauzeitung 1909, Nr. 13). Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich nur mit der Klarlegung einseitiger Lastangriffe, doch ist sofort einzusehen, daß der einfacheren Berechnung symmetrischer Lastangriffe mit Rücksicht auf die Ringformveränderungen keine Schwierigkeiten mehr im Wege stehen. Es wird nur vielleicht zweckmäßig sein, für die Berechnung der symmetrischen Lastangriffe ein anderes als das der Arbeit zugrunde liegendes Hauptsystem zu wählen, da die Bedingung der Fußeinspannung wohl in den seltensten Fällen streng erfüllt sein dürfte. Wenn diese dennoch in vorliegender Arbeit für die einseitigen Lastangriffe angenommen wurde, so geschah das aus den näher angeführten Gründen.

Es ist selbstverständlich, daß die Behandlung auch auf andere Ringformen (elliptische, rechteckige, polygonale) leicht ausgedehnt werden kann. Außer den in der Arbeit als Fehlerquellen bezeichneten Annahmen ist zu bemerken, daß der Einfluß der Normalkräfte auf Ring- und Rippenformänderungen ausgeschlossen wurde. Es ist klar, daß in Fällen, in welchen diese Vernachlässigung größere Fehler mit sich bringt, diese Berücksichtigung speziell für die Rippen leicht erfolgen kann. Der Verfasser hofft, durch die vorliegende Schrift eine Berechnungsart gegeben zu haben, welche in mehr oder minder scharfer Anwendung derselben die statischen Verhältnisse an Rippenkuppeln mit Rücksicht auf die Formänderung der Ringe und Rippen genügend klarlegt und eine genauere als bisher übliche Dimensionierung solcher Bauwerke zuläßt.

Der Verfasser übergibt die Arbeit der wohlwollenden Beurteilung der engeren Fachkollegen mit dem Wunsche, daß dieselbe auch in praktischer Anwendung bei ihnen Zutritt finde.

Düsseldorf, im Dezember 1910.

Dr. Ing. **Karl W. Mautner.**

INHALTSVERZEICHNIS.

	Seite
Vorwort.	
1. Die Ringformveränderungen	3
2. Das Hauptsystem	6
3. Voll- und halbsymmetrische Kräfte des Systems	9
4. Die vollsymmetrischen Kräfte	10
5. Die halbsymmetrischen Kräfte	12
6. Das Hauptsystem mit Zwischenringen	16
7. Die vollsymmetrischen Kräfte am Kuppelsystem mit mehreren Zwischenringen	18
8. Die halbsymmetrischen Kräfte am Kuppelsystem mit mehreren (starren) Ringen	20
9. Halbsymmetrische Kräfte und Ringformveränderung	24
A. Radiale Kräfte	24
B. Tangentielle Kräfte und Ringformveränderungen	27
10. Ermittlung der halbsymmetrischen Kräfte bei elastischen Ringen	30
11. Anwendung des Verfahrens auf die Winddruckberechnung von Rippenkuppeln	37
1. Vernachlässigung der Rippenquerbiegung	39
2. Vernachlässigung der Ringformveränderlichkeit für die halbsymmetrischen Kräfte	40
Rechnungsbeispiel für eine parabolische Rippenkuppel, bestehend aus drei Ringen und acht Rippen auf einseitigen Lastangriff	41
Tabellen und Schaubilder der Ringbiegungseinflußwerte	47

Die Eisenbetonbauweise hat neben anderen ihr eigentümlichen Formen auch räumliche Überdeckungen und Tragwerke ausgebildet, welche von den verwandten, gebräuchlichen Formen des Eisenbaues wesentlich verschieden sind. Die im Eisenbetonbau stark entwickelte Form der Rippenkuppel, der Pyramiden und Zelte mit Rippen bzw. Sparren und Ringen ohne Diagonalen bedingt eine sehr abweichende statische Behandlung dieser Gebilde im Vergleich zu den räumlichen Stabsystemen des Eisenbaues.

Eine Rippenkuppel ist ein aus ebenen Trägern und Ringen zusammengesetztes Raumtragwerk, derart, daß die Träger von einer oder mehreren parallelen Ebenen sämtlich durchschnitten und an diesen Schnittstellen an Ringe fest angeschlossen sind. Diese allgemeinste Auffassung führt für allgemeine Lastangriffe auch bei einfachen geometrischen Formen und geringer Ring- und Rippenzahl zu derart verwickelten äußeren Gleichgewichts- und inneren elastischen Beziehungen, daß deren Lösungen wohl kaum für die Anwendung geeignet sein dürften.

Für einen Sonderfall gibt Prof. Max Foerster in „Die Eisenkonstruktionen der Ingenieurbauten“ (Engelmanns Verlag, Leipzig 1903), S. 293 die Ermittlung der Querkräfte einer einseitig lotrecht belasteten, äußerlich statisch bestimmten Rippenkuppel als Raumsystem. Bezüglich der Windkräfte ist dort gesagt: „Die Windkräfte lassen auf einfachem Wege keine genaue Behandlung zu, weil durch den Scheitelring alle Binder in Spannung versetzt werden“.

Für den Eisenbetonbau hätte die Lösung dieser Aufgabe, wenn auch unter vereinfachenden Annahmen, größere Bedeutung:

Ringe und Rippen sind im Eisenbetonbau zumeist vielfach statisch unbestimmte Gebilde, deren Formänderungen wechselseitig von großem Einfluß auf die Spannungen sind.

Die Ermittlung der Ringbeanspruchung setzt die Kenntnis der Formänderungen bei einseitiger Belastung der Kuppel voraus. Ein einfaches, angenähertes Verfahren könnte derart vorgenommen werden, daß jede Rippe für die größte auf sie allein entfallende Belastung berechnet und die Kräfteermittlung ohne Rücksicht auf die übrigen Rippen und die Ringformveränderung vorgenommen wird.

Aus dem Verfasser bekannten Berechnungen ausgeführter Rippenkuppeln ist die Berücksichtigung der Ringformveränderung zumeist nicht ersichtlich. Der Sicherheitsgrad dieser Näherungsrechnung ist dann im Hinblick auf die statische Unbestimmtheit der Rippen nicht allzu hoch einzuschätzen.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, einseitige Lastangriffe auf Rippenkuppeln und verwandte Traggebilde unter Berücksichtigung der Formänderung aller Teile zu behandeln.

Zunächst sei bezüglich des Begriffs der Rippenkuppel eine von der oben gegebenen Begriffserklärung etwas abweichende Annahme gemacht. Die Rippenkuppel bestehe aus einem (belasteten) Haupttragsystem und an dieses angeschlossenen Rippenteilen. Das für sich stabile Haupttragsystem umfaßt zwei irgendwie bestimmt gelagerte, gegenüberliegende Rippenhälften, die untereinander durch einen oder mehrere Ringe mit bestimmter Lagerung an diesen verbunden sind. An dieses Haupttragsystem sind an die Ringe mit gleicher Lagerung je zwei gegenüberliegende, ebenfalls für sich stabile Rippenhälften angeschlossen.

Das Haupttragsystem empfängt die Last. Die sich durch die Rippenformveränderung des Hauptsystems ergebende Verschiebung sowie die Ringformveränderung versetzen die angeschlossenen Rippen in Spannung.

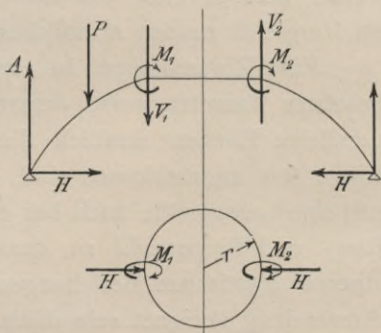


Abb. 1.

Diese Annahme ist dem Charakter der monolithisch erbauten Rippenkuppeln im allgemeinen nicht widersprechend.

Was die Lagerung des Hauptsystems und der angeschlossenen Rippen an diesem anbelangt, so wären verschiedene Annahmen möglich.

So die Lagerung mit Fußgelenken und fester Verbindung am Ringe (Abb. 1).

Aus $V_1 = V_2$ ergibt sich durch die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen $V_1 = \frac{M_1 + M_2}{2r}$, und das Hauptsystem äußerlich einfach statisch unbestimmt.*) Das System ist aber wegen der in den Ringen auftretenden Verdrehungen und der damit verbundenen Schwierigkeiten der Formänderungs- und Spannungsermittlungen, besonders von Eisenbetonquerschnitten, wenig geeignet.

*) Innerlich ist das System durch Einschaltung des Ringes dreifach unbestimmt. Zur Ermittlung der Auflagerunbekannten des Systems ist die Einbeziehung der Ringbiegung im horizontalen und vertikalen Sinne und der Ringverdrehungen in die gesamte Formänderungsarbeit und die Darstellung der vertikalen Ringbiegungsmomente $M_{u,\varphi}$, der horizontalen $M_{v,\varphi}$

Verläßt man den festen Anschluß der Ringe, so ist, um bei einem stabilen, symmetrischen Gebilde zu bleiben, die Fußeinspannung notwendig.

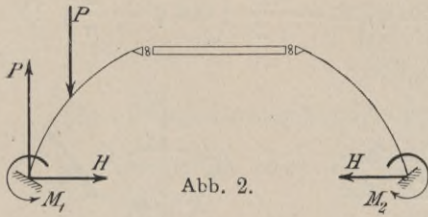


Abb. 2.

Der Anschluß der Ringe kann hierbei entweder durch feste Gelenke, welche auch Querkräfte übertragen können, oder durch Rollenlager, welche nur horizontale Kräfte übernehmen können, gedacht werden. In vorliegender Arbeit ist die letztgenannte Art des Anschlusses gewählt (Abb. 2).

Dies empfiehlt sich aus folgenden Gründen:

1. Da die einseitig angreifenden Kräfte zumeist Windkräfte sind, so spielt die Übertragung der im Verhältnis zu den symmetrischen Eigengewichtskräften kleinen lotrechten Seitenkräfte keine bedeutende Rolle;
2. liegt der Schwerpunkt der vertikalen Seitenkräfte zumeist nahe dem Auflager, daher die Annahme der Wirklichkeit nahe kommt;
3. wird die Behandlung durch die nur einfache Unbestimmtheit des Hauptsystems und durch die Ausschaltung vertikaler Ringbiegungen einfacher.

1. Die Ringformveränderungen.

Für den in Abb. 3 dargestellten Ringbelastungsfall ergibt sich das Moment bei B (vergl. Müller-Breslau, „Neuere Methoden“)

$$M_B = -\frac{Hr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

und der Verdrehungsmomente $M_{d,\varphi}$ als Funktionen der Unbekannten H des Systems nötig. Die zu dieser Darstellung erforderlichen Ringunbekannten können in analoger Weise ermittelt werden, wie dies in Müller-Breslau „Neuere Methoden“ für den halbkreisförmigen, beliebig exzentrisch belasteten, eingespannten Ringträger gezeigt ist. Als Unbekannte wären somit die Schnittkraft bei S, N , ferner das vertikale Ringbiegemoment an der Schnittstelle S, M_v^0 und das horizontale M_u^0 einzuführen und die Integration über den ganzen Ring durchzuführen. Die Durchführung der Aufgabe unterbleibt hier aus den oben angeführten Gründen.

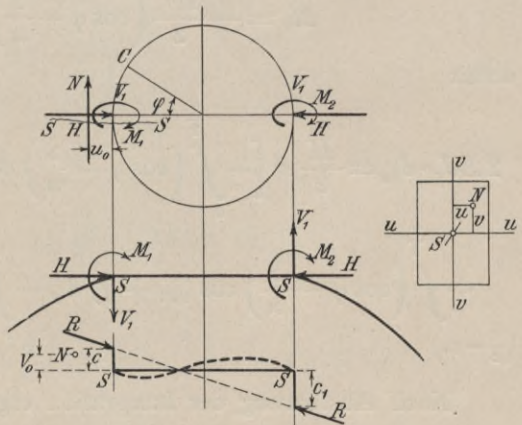


Abb. 1 a.

Daher ein Moment im Punkte C (unter dem variablen Winkel $\varphi < \frac{\pi}{2}$)

$$M_C = -\frac{Hr}{2} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + \frac{Hr}{2} (1 - \cos \varphi) = -\frac{Hr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right) \quad 1)$$

$$M_A = \frac{Hr}{\pi}.$$

Im nachfolgenden sollen die Verschiebungen von Punkten des Umfanges D , die unter dem beliebigen Winkel φ_0 zu den angreifenden diametralen Kräften liegen, berechnet werden.

$$2 \cdot \delta_{\varphi_0} = \int M_c \frac{M' ds}{EJ_r}.$$

Die Momente M' bestimmen sich an dem statisch bestimmten Hauptfall, der durch Aufschneiden des Ringes bei $s-s$ entsteht, wie folgt:

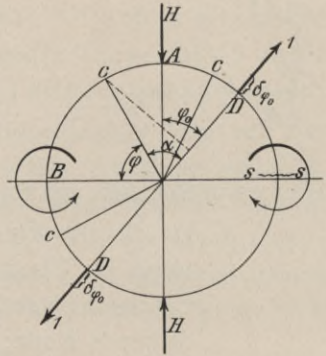


Abb. 3.

$$\text{Teil } B-A: \quad \alpha = \varphi_0 + \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - (\varphi - \varphi_0) \quad \left. \vphantom{\alpha} \right\} \varphi = 0 \text{ bis } \frac{\pi}{2}$$

$$M' = r \cdot \sin \alpha = r \cdot \cos (\varphi - \varphi_0)$$

$$\text{Teil } A-D: \quad M' = -r \cdot \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\varphi_0 + \varphi) \right] = -r \cdot \cos (\varphi_0 + \varphi)$$

von $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$ bis $\frac{\pi}{2}$

$$\text{Teil } B-D: \quad M' = r \cdot \sin \left[\frac{\pi}{2} - (\varphi_0 + \varphi) \right] = r \cdot \cos (\varphi_0 + \varphi)$$

von $\varphi = 0$ bis $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)$

$$M_\varphi = -\frac{Hr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right);$$

somit

$$2 EJ_r \cdot \delta_{\varphi_0} = \frac{H}{2} r^3 \left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right) \cos (\varphi - \varphi_0) d\varphi + \right. \\ \left. + \int_{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right) \cos (\varphi_0 + \varphi) d\varphi - \int_0^{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi}\right) \cos (\varphi_0 + \varphi) d\varphi \right].$$

Nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$\delta_{\varphi_0} = \frac{Hr^3}{4 EJ_r} \left[\frac{4}{\pi} + \cos \varphi_0 \left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \varphi_0 \right] \quad \dots \quad 2)$$

Im besonderen ergibt sich aus 2):

$$\text{für } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}: \delta_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Hr^3}{4EJ_r} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right) = \frac{Hr^3}{2EJ_r} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \quad 3)$$

$$\text{für } \varphi_0 = 0: \delta_0 = \frac{Hr^3}{4EJ_r} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{Hr^3}{2EJ_r} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \quad 4)$$

Über letztgenannten Sonderwert vergl. Müller-Breslau, „Neuere Methoden“.

Zur Kontrolle seien die Sonderwerte $\delta_{\frac{\pi}{2}}$ und δ_0 auch unmittelbar ermittelt:

$$M_\varphi = -\frac{H}{2} \cdot r \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)$$

$$M' = 1 \cdot r \cdot \sin \varphi \quad (\text{Abb. 4})$$

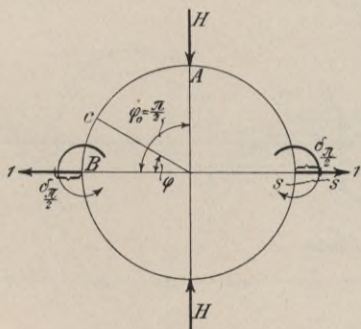


Abb. 4.

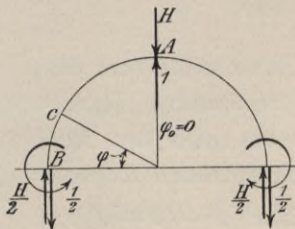


Abb. 5.

$$2EJ_r \cdot \delta_{\frac{\pi}{2}} = -2 \cdot \frac{H}{2} \cdot r^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right) \sin \varphi d\varphi$$

$$\delta_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Hr^3}{2EJ_r} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \quad \dots \dots \dots 3)$$

$$M_\varphi = -\frac{H}{2} \cdot r \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)$$

$$M' = -\frac{r}{2} (1 - \cos \varphi) \quad (\text{Abb. 5})$$

$$EJ_r \cdot \delta_0 = 2 \cdot \frac{H}{4} \cdot r^3 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right) (1 - \cos \varphi) d\varphi$$

$$\delta_0 = -\frac{Hr^3}{2EJ_r} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \quad \dots \dots \dots 4)$$

für die Annahme einer flachen Parabel mit der Näherung $ds = dx$ ergibt sich die Einflußlinie X

$$\text{aus } y = \frac{f}{b^2} \cdot x^2$$

$$\int_0^b M_0 x^2 dx = \frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2} \left(b - \frac{a}{3} \right)^2$$

$$\text{zu } X_a = \frac{5 \cdot a^2 (a^2 - 4ab + 6b^2)}{24 f \cdot b^3}$$

Für einen elastischen Ring bestimmt sich die Bogenkraft des Hauptsystems nach Castigliano:

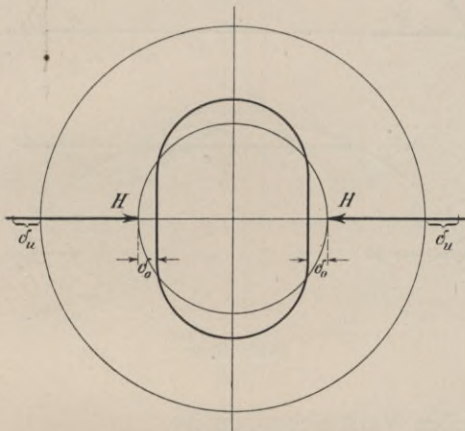


Abb. 8.

$$\frac{dL}{dH} = -2 \delta_0 \quad (\text{Abb. 8})$$

$$- EJ_b \cdot 2 \delta_0 = \int_0^b (-M_0 y + 2Hy^2) ds$$

$$- 2 EJ_b \cdot \delta_0 + \int_0^b M_0 y ds$$

$$H = \frac{\int_0^b M_0 y ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 ds} \quad 5)$$

oder für elastischen Kopf- und Fußring:

$$H = \frac{- 2 EJ_b (\delta_0 + \delta_u) + \int_0^b M_0 y ds}{2 \int_0^b y^2 ds} \quad \dots \dots \dots 5')$$

Wird für die elastische Verschiebung δ_0 aus 4) eingeführt,*⁾ so ergibt sich

$$H = \frac{\int_0^b M_0 y ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 ds + J_b \cdot \frac{r^3}{J_r} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right)} \quad \dots \dots \dots 6)$$

*⁾ Absoluter Wert, Vorzeichen bereits berücksichtigt.

für elastischen Kopf- und Fußring somit

$$H = \frac{\int_0^b M_0 y ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 ds + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\right) \left(\frac{J_b}{J_r} \cdot r^3 + \frac{J_b}{J_R} \cdot R^3\right)} \quad . . 6')$$

r = Kopfringradius; J_b = konstantes Rippenträgheitsmoment; $R = r + b$ = Fußringradius; J_r und J_R die konstanten Trägheitsmomente des Kopf- bzw. Fußringes.

Bei einseitiger Belastung erfahren die Ringe des Hauptsystems (mit Ausnahme des Fußringes) auch Verschiebungen nach der unbelasteten Seite zu. Da Übertragungen von Querkräften zufolge der Systemwahl nicht stattfinden, so bleiben die Ringe in ihrer Horizontalebene.

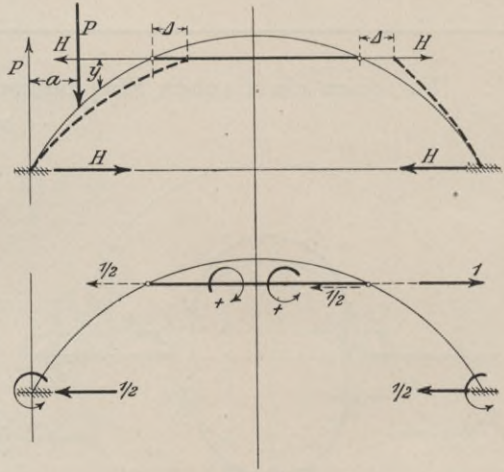


Abb. 9.

Der vorläufig absolut starr gedachte Kopfring verschiebe sich um A (Abb. 9). Der Starrheit des Ringes wegen ist die Verschiebung beider Ringanschlußpunkte gleich groß.

Nach dem Satze von den virtuellen Verschiebungen ist

$$EJ_b \cdot A = 2 \cdot \int_0^b M_x M' ds,$$

die Momente M_x sind links: $M_x = M_0 - H \cdot y,$

rechts: $M_x = -H \cdot y.$

Die Momente des statisch bestimmten Hauptfalls M'

sind links: $M' = + \frac{y}{2}$

rechts: $M' = - \frac{y}{2}$

$$EJ_b \cdot A = \int_0^b \left(M_0 \frac{y}{2} - \frac{H \cdot y^2}{2} + \frac{H \cdot y^2}{2} \right) ds$$

$$2 EJ_b \cdot A = \int_0^b M_0 \cdot y ds \quad 7)$$

und die Beziehung zwischen Schub und Verschiebung Δ aus 5) und 7)

$$H = \frac{EJ_b \cdot \Delta}{\int_0^b y^2 ds}$$

3. Voll- und halbsymmetrische Kräfte des Systems.

Das in der Einleitung näher beschriebene System erfährt im wesentlichen seine Beanspruchungen durch zwei Kräftegruppen. Eine dieser Gruppen umfaßt die Kräfte, welche in bezug auf zwei Achsen, die zueinander rechtwinklig stehen, symmetrisch sind, und eine Gruppe die Kräfte, welche nur in bezug auf die eine dieser Achsen Symmetrie zeigen. Die Achsen sind:

Die Achse des (belasteten) Hauptsystems und die Normale desselben. Die beiden an den Ringen des Hauptsystems angreifenden gleichen Schübe bringen Formänderungen der Ringe hervor, welche auch bezüglich der Normalen der Hauptsystemebene symmetrisch sind. Diese Formänderungen erzeugen in den unbelasteten, an das Hauptsystem angeschlossen gedachten Nebenrippen Kräfte, welche gleichfalls bezüglich beider Achsen symmetrisch sind.

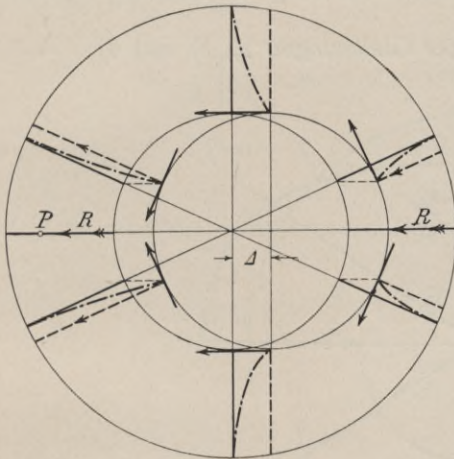


Abb. 10.

[für starren Kopfring Δ nach 7)] bringt in den Rippen der unbelasteten Kuppelhälfte Zusammendrückungen hervor, während die Rippen der belasteten Kuppelhälfte Verlängerungen erfahren.

Abb. 10 zeigt die durch Δ hervorgerufenen Lagenänderungen der Nebenrippen und die dadurch von den Rippen auf den (starr gedachten) Ring ausgeübten Reaktionen. Die — — —-Lage der Rippen für den Fall, daß diese auf seitliche Biegung nicht beansprucht werden sollten, was man sich durch eine horizontale Beweglichkeit der Fußlager, die im vertikalen Sinne die oben beschriebene Lagerung beibehalten sollen, erreicht denken kann (Abb. 11). Die — · — · —-Lage der Rippen setzt eine auch im wagerechten Sinne feste Einspannung am Fuße voraus.



Abb. 11.

In diesem Falle üben die Nebenrippen neben den radialen auch tangentielle Reaktionen auf die Ringe aus.

Der starre Ring überträgt diese Reaktionen (sowohl die radialen als auch die tangentiellen) auf das Hauptsystem und bewirkt so eine Formänderungsverminderung desselben, indem die belastete Hälfte eine Krümmungsverschärfung der Rippe, die unbelastete eine Streckung erfährt.

Ebenso gerichtete Kräfte treten durch die Verschiebung Δ auch bei elastisch nachgiebigen Ringen auf, deren Größe sich aber auch nach den Formänderungsanteilen der Kräftegruppe für die Ringe und die Rippen richtet.

Durch Superposition der Wirkungen der voll- und halbsymmetrischen Kräfte bestimmen sich die Auflagerkräfte des ganzen Systems.

4. Die vollsymmetrischen Kräfte.

Es bezeichne: $\delta_0^{(r)}$, $\delta_1^{(r)}$, $\delta_2^{(r)}$ die resultierende Formänderung bei angeschlossenen Nebenrippen; δ_0 , δ_φ , $\delta_{\frac{\pi}{2}}$ usw. die Ringdeformationen des von Nebenrippen freien Ringes im Sinne der Gleichungen 2), 3) und 4)

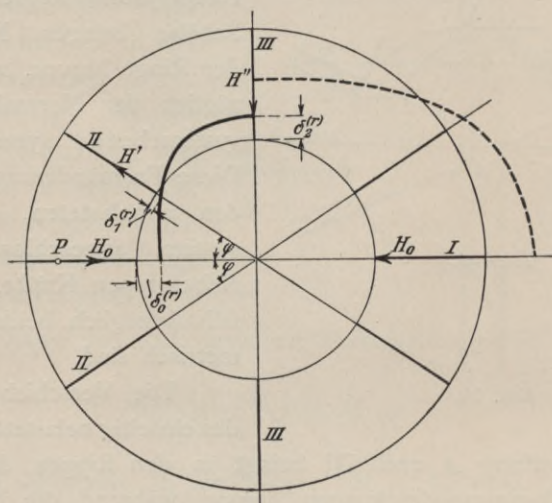


Abb. 11.

$$\delta_\varphi = \frac{Hr^3}{4EJ_r} \left[\frac{4}{\pi} + \cos \varphi \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \varphi \right].$$

Es bezeichne:

$$K_\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\pi} + \cos \varphi \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \varphi \right]$$

$$\delta_\varphi = \frac{Hr^3}{2EJ_r} \cdot K_\varphi$$

$$\delta_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Hr^3}{2EJ_r} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = \frac{Hr^3}{2EJ_r} \cdot K_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\delta_0 = -\frac{Hr^3}{2EJ_r} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = \frac{Hr^3}{2EJ_r} \cdot K_0.$$

Es bezeichne:

$$K_{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}$$

$$K_0 = - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$$

$$\begin{aligned} K_{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\pi} + \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\pi} - \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\pi} + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \left(\frac{\pi}{2} - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{4}{\pi} - \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Daher } K_{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} = K_{\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}; \quad K_0 = K_{\pi}.$$

Es sind die resultierenden Formänderungen:

$$\left. \begin{aligned} \delta_0^{(r)} &= \frac{1 \cdot r^3}{2 E J_r} \left[H_0 \cdot K_0 + 2 H' K_{\varphi} + H'' K_{\frac{\pi}{2}} \right] \\ H_0 &= \frac{2 E J_b \cdot \delta_0^{(r)} + \int_0^b M_0 y \, ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 \, ds} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^{(r)} &= \frac{1 \cdot r^3}{2 E J_r} \left[H_0 \cdot K_{\varphi} + H' (K_0 + K_{2\varphi}) + H'' K_{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \right] \\ H' &= \frac{E J_b \cdot \delta_1^{(r)}}{\int_0^b y^2 \, ds} \end{aligned} \right\} (2) \cdot 8)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_2^{(r)} &= \frac{1 \cdot r^3}{2 E J_r} \left[H \cdot K_{\frac{\pi}{2}} + 2 H' K_{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} + H'' K_0 \right] \\ H'' &= \frac{E J_b \cdot \delta_2^{(r)}}{\int_0^b y^2 \, ds} \end{aligned} \right\} (3)$$

Aus diesen n Gleichungen sind n Bogenkräfte der Rippen bestimmbar.

Sind Kopf- und Fußring elastisch, so ist

$$\left. \begin{aligned} \delta_0^{(r)} &= \frac{1}{2E} \left(\frac{r^3}{J_r} + \frac{R^3}{J_R} \right) \left[H_0 \cdot K_0 + 2 H' K_\varphi + H'' K_{\frac{\pi}{2}} \right] \\ H_0 &= \frac{-2 EJ_b \cdot \delta_0 + \int_0^b M_0 y ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 ds} \end{aligned} \right\} (1') \quad . \quad 8'$$

usw.

5. Die halbsymmetrischen Kräfte.

Wie in 3. ausgeführt, entstehen diese Kräfte durch die Verschiebungen des Systems nach der unbelasteten Seite. Diese Wirkungen seien zunächst unter der Voraussetzung absolut starrer Ringe und seitlich nicht biegungsfähiger (entsprechend gelagerter) Rippen untersucht. Durch die Verschiebung der Ringe (in Abb. 12 des Kopfringes) werden von diesen auf je zwei diametral liegende Rippenhälften gleiche und, absolut genommen, gleich gerichtete Schübe $H_2, H_3 \dots$ ausgeübt. Die Widerstände der Rippen werden in ihrer Resultierenden durch die starren Ringe auf das Hauptssystem übertragen.

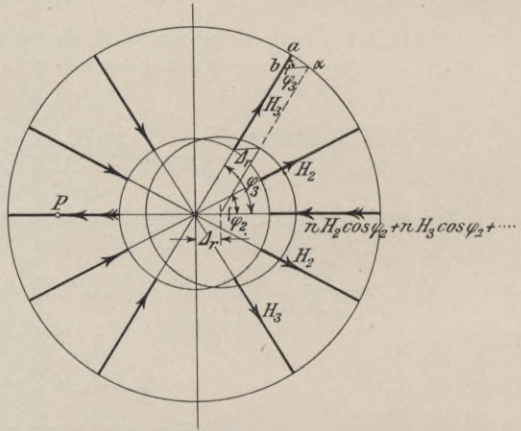


Abb. 12.

Das ganze System sei unter der Wirkung aller Rippen bei der resultierenden Ringverschiebung A_r im Gleichgewicht.

Die Verkürzung bzw. Verlängerung einer Rippenhälfte ergibt sich aus $ab\alpha$ durch $ab = A_r \cdot \cos \varphi$.

Die resultierende Verschiebung des Hauptsystems besteht aus der Verschiebung des Hauptsystems allein

$$A_0 = \frac{\int_0^b M_0 y ds}{2 EJ_b}$$

und der rückschiebenden Wirkung der am Hauptsystem angreifenden Widerständeresultierenden R :

$$EJ_b \cdot A_R = R \int_0^b y^2 ds = (n \cdot H_2 \cos \varphi_2 + n H_3 \cos \varphi_3 + \dots) \int_0^b y^2 ds.$$

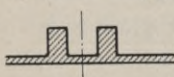
Diese resultierende Ringverschiebung ist zufolge der Starre der Ringe für alle Punkte derselben gleich \mathcal{A}_r . Der für eine beliebige Rippe m in deren Achse entfallende Verschiebungsteil $\mathcal{A}_m = ab = \mathcal{A}_r \cos \varphi$

$$EJ_b \cdot \mathcal{A}_m = H_m \cdot \int_0^b y^2 ds; \quad \mathcal{A}_r = \frac{\mathcal{A}_m}{\cos \varphi_m} = \frac{H_m}{EJ_b \cos \varphi_m} \cdot \int_0^b y^2 ds.$$

Daher

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r &= \frac{1}{2 EJ_b} \cdot \int_0^b M_0 y ds - \frac{n (H_2 \cos \varphi_2 + H_3 \cos \varphi_3 + \dots + H_m \cos \varphi_m)}{EJ_b} \cdot \int_0^b y^2 ds \\ &= \frac{H_2}{EJ_b \cos \varphi_2} \cdot \int_0^b y^2 ds = \frac{H_3}{EJ_b \cos \varphi_3} \cdot \int_0^b y^2 ds = \dots = \frac{H_m}{EJ_b \cos \varphi_m} \cdot \int_0^b y^2 ds \quad 9) \end{aligned}$$

n = Anzahl der auf jeder Kuppelhälfte unter dem gleichen Winkel φ zur Hauptsystemachse liegenden Rippenhälften. (Bei einfachen Rippen

$n = 2$, bei Doppelrippen  $n = 4$ usw.)

Aus den m Gleichungen 9) ergibt sich zunächst

$$H_3 = H_2 \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_2}; \quad H_4 = H_3 \frac{\cos \varphi_4}{\cos \varphi_3} = H_2 \frac{\cos \varphi_4}{\cos \varphi_2} = \dots = H_m \frac{\cos \varphi_4}{\cos \varphi_m}.$$

Die zur Bestimmung von H_m aus der Gruppe 9 dienende Gleichung kann somit auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r &= \frac{1}{2 EJ_b} \cdot \int_0^b M_0 y ds - \frac{n}{EJ_b} \left(H_m \cdot \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos \varphi_m} + H_m \cdot \frac{\cos^2 \varphi_3}{\cos \varphi_m} + \dots + H_m \cdot \cos \varphi_m \right) \cdot \int_0^b y^2 ds \\ &= \frac{H_m}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m} \cdot \int_0^b y^2 ds \end{aligned}$$

$$H_m = \frac{\int_0^b M_0 y ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 ds \left[n \left(\cos \varphi_m + \dots + \frac{\cos^2 \varphi_3}{\cos \varphi_m} + \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos \varphi_m} \right) + \frac{1}{\cos \varphi_m} \right]}$$

und unter Berücksichtigung, daß

$$X = \frac{\int_0^b M_0 y ds}{2 \cdot \int_0^b y^2 ds} \dots \dots \dots 5)$$

der Schub des Hauptsystems mit starrem Ringe, ist

$$H_m = \frac{X \cdot \cos \varphi_m}{1 + n (\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 + \dots \cos^2 \varphi_m)} \dots 10)$$

Wenn nur ein Rippenpaar außer dem Hauptsystem vorhanden ist:

$$H_\varphi = \frac{X \cdot \cos \varphi}{1 + 2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

für $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $H_\varphi = 0$

für $\varphi = 0$: $H_\varphi = \frac{X}{3}$

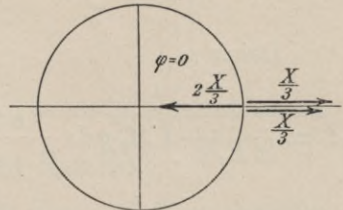


Abb. 13.

Die Wirkung auf das Hauptsystem ist auch hier = 0, da $R = 2 \frac{X}{3}$ sich gegen die

beiden auch am Hauptsystem angreifenden Schübe von je $H_\varphi = \frac{X}{3}$ aufhebt.

Die Frage nach $\max H_\varphi$ wird gelöst durch

$$\frac{dH_\varphi}{d\varphi} = X \cdot \frac{-(1 + 2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi + 4 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{(1 + 2 \cos^2 \varphi)^2} = 0$$

$$-\sin \varphi + 2 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}; \quad \max H_\varphi = \frac{X}{2\sqrt{2}}$$

Im vorstehenden waren stets Rippen vorausgesetzt, welche vermöge ihrer Fußlagerung keine Biegungen im wagerechten Sinne erfahren sollen. Die Rippen müßten in diesem Falle durch die Verschiebung des starren Ringes um Δ_r parallel zu ihrer Anfangslage verschiebbar sein (Abb. 10).

Der allgemeinere und mit der Wirklichkeit besser übereinstimmende Annahmefall ist der mit seitlich biegungsfähigen Rippen.

- In Abb. 14 bezeichne
- Δ_r die resultierende Verschiebung des Ringes,
 - u die Verkürzung der unter φ gelagerten Rippe,
 - v die tangentielle Verschiebung derselben am Ringe.

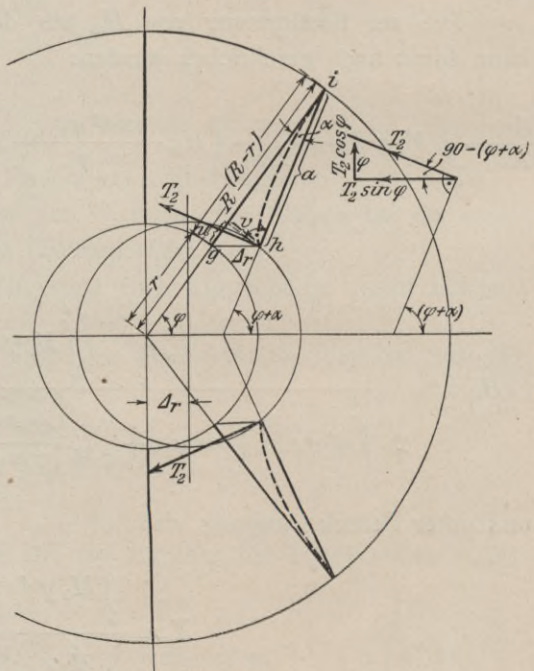


Abb. 14.

Es ergibt sich aus den geometrischen Beziehungen unter Annahme einer sehr kleinen Verschiebung Δr :

$$Aghi) \dots \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta r \cdot \sin \varphi}{(R-r) - \Delta r \cdot \cos \varphi} \doteq \alpha$$

$$a = \sqrt{\Delta r^2 + (R-r)^2 - 2 \Delta r (R-r) \cos \varphi}$$

und unter Vernachlässigung von Δr^2 :

$$a = (R-r) + \frac{1}{2(R-r)} [\Delta r^2 - 2 \Delta r (R-r) \cos \varphi] + \dots$$

$$a = (R-r) - \Delta r \cdot \cos \varphi.$$

$$v = a \cdot \operatorname{tg} \alpha = [(R-r) - \Delta r \cdot \cos \varphi] \cdot \frac{\Delta r \cdot \sin \varphi}{(R-r) - \Delta r \cdot \cos \varphi}$$

$$\doteq (R-r) \frac{\Delta r \cdot \sin \varphi}{(R-r) - \Delta r \cdot \cos \varphi} \doteq \Delta r \cdot \sin \varphi$$

$$v = \Delta r \cdot \sin \varphi \quad \dots \dots \dots 11)$$

$$u = (R-r) - a = \Delta r \cdot \cos \varphi \quad \dots \dots \dots 12)$$

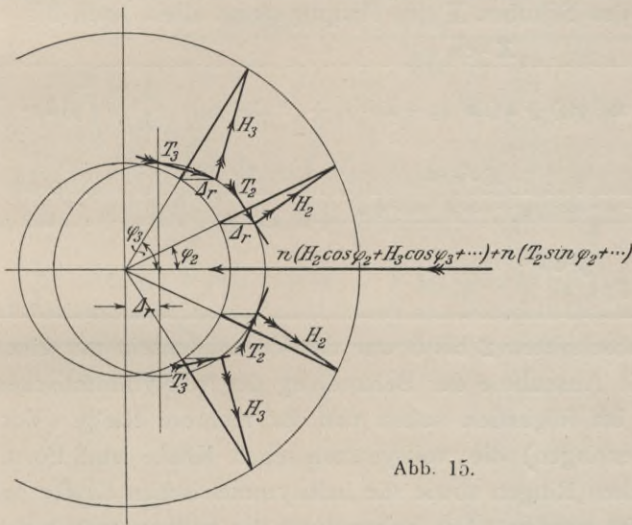


Abb. 15.

Über die Elastizitätsverhältnisse der Rippen für die seitliche Biegung sei folgendes festgesetzt:

J_s sei das konstante, für alle Rippen gleiche Trägheitsmoment in bezug auf die vertikale Hauptachse des Rippenquerschnitts.

Ferner

$$b = (R-r)$$

(vergl. Abb. 6).

Ebenso wie unter 5a, ergibt sich die Verkürzung der Nebenrippe „m“:

$$u_m = \Delta r \cdot \cos \varphi_m = \frac{H_m}{E J_b} \cdot \int_0^b y^2 ds$$

und die seitliche Ausweichung:

$$v_m = \Delta r \cdot \sin \varphi_m = \frac{T_m}{E J_s} \cdot \int_0^b x^2 dx = \frac{T_m b^3}{3 E J_s}.$$

Die unter φ_2 geneigte Rippe habe den Schub H_2 und die Tangentialkraft T_2

„ „ φ_3 „ „ „ „ „ H_3 „ „ „ T_3

„ „ φ_m „ „ „ „ „ H_m „ „ „ T_m

(Abb. 15).

Analog den Gleichungen 9) ergeben sich zur Bestimmung aller Kräfte H und T folgende $2m$ Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} Ar &= \frac{1}{2EJb} \cdot \int_0^b M_0 y \, ds - \\ &- \frac{n}{EJb} \cdot (H_2 \cdot \cos \varphi_2 + H_3 \cdot \cos \varphi_3 + \dots H_m \cdot \cos \varphi_m + T_2 \cdot \sin \varphi_2 + T_3 \cdot \sin \varphi_3 + \dots T_m \cdot \sin \varphi_m) \cdot \int_0^b y^2 \, ds \\ &= \frac{1}{EJb} \cdot \frac{H_2}{\cos \varphi_2} \cdot \int_0^b y^2 \, ds = \frac{1}{EJb} \cdot \frac{H_3}{\cos \varphi_3} \cdot \int_0^b y^2 \, ds = \dots = \frac{1}{EJb} \cdot \frac{H_m}{\cos \varphi_m} \cdot \int_0^b y^2 \, ds \\ &= \frac{1}{EJ_s} \cdot \frac{T_2}{\sin \varphi_2} \cdot \frac{b^3}{3} = \frac{1}{EJ_s} \cdot \frac{T_3}{\sin \varphi_3} \cdot \frac{b^3}{3} = \dots = \frac{1}{EJ_s} \cdot \frac{T_m}{\sin \varphi_m} \cdot \frac{b^3}{3} \end{aligned} \right\} 13)$$

$$\begin{aligned} H_3 &= H_2 \cdot \frac{\cos \varphi_3}{\cos \varphi_2} \dots H_m = H_2 \cdot \frac{\cos \varphi_m}{\cos \varphi_2} \\ T_3 &= T_2 \cdot \frac{\sin \varphi_3}{\sin \varphi_2} \dots T_m = T_2 \cdot \frac{\sin \varphi_m}{\sin \varphi_2}; \quad T_m \cdot \sin \varphi_m = H_2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi_m}{\cos \varphi_2} \cdot \left(\frac{J_s}{J_b} \right) \cdot \frac{3 \cdot \int_0^b y^2 \, ds}{b^3} \end{aligned}$$

Unter Einführung des Schubes X des Hauptsystems allein nach 5):

$$H_m = \frac{X \cdot \cos \varphi_m}{1 + n(\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 + \dots \cos^2 \varphi_m) + n(\sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3 + \dots \sin^2 \varphi_m) \cdot \left(\frac{J_s}{J_b} \right) \cdot \int_0^b y^2 \, ds \cdot \frac{3}{b^3}} \quad 14)$$

$$T_m = \frac{X \cdot \sin \varphi_m}{\frac{b^3}{3} \cdot \left(\frac{J_b}{J_s} \right) \cdot (1 + n \cdot \cos^2 \varphi_2 + n \cdot \cos^2 \varphi_3 + \dots n \cdot \cos^2 \varphi_m) + n(\sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3 + \dots \sin^2 \varphi_m) \int_0^b y^2 \, ds} \quad 15)$$

In vorstehenden Abschnitten 2 bis 5 war das Vorhandensein nur eines Ringes (Kopfringes), mit Ausnahme der Behandlung der vollsymmetrischen Kräfte, angenommen. Im folgenden sollen nun für mehrere Ringe (Vorhandensein von Zwischenringen) die vollsymmetrischen Kräfte und Formänderungen von elastischen Ringen sowie die halbsymmetrischen Kräfte bei starren Ringen untersucht werden. Die Behandlung der halbsymmetrischen Kräfte für elastische Ringe soll für einen und mehrere Ringe getrennt erfolgen.

6. Das Hauptsystem mit Zwischenringen.

Bei der getroffenen Annahme über das Hauptsystem ist dasselbe bei n Zwischenringen $(n+1)$ fach statisch unbestimmt.

6a. Die Ringkräfte bei starren Ringen.

$$L = \int \frac{M_y^2}{EJ_b} \cdot ds; \quad \frac{dL}{dX_1} = 0; \quad \frac{dL}{dX_2} = 0;$$

links:

von $B-A$: $M_y = -X_2 y + M_0$

von $A-D$: $M_y = -X_2 y - X_1(y-h) + M_0$;

rechts: von B—A: $M_y = -X_2 y$
 von A—D: $M_y = -X_2 y - X_1 (y - h)$
 von B—D: $\frac{dM_y}{dX_2} = -y$; von A—D: $\frac{dM_y}{dX_1} = -(y - h)$;
 von B—A: $\frac{dM}{dX_1} = 0$

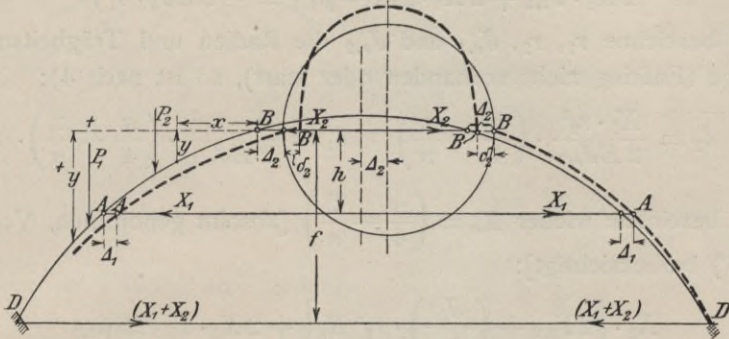


Abb. 16.

$$\frac{dL}{dX_2} = 2 X_2 \cdot \int_B^D y^2 ds - \int_B^D M_0 y ds + 2 X_1 \cdot \int_A^D y (y - h) ds = 0$$

$$\frac{dL}{dX_1} = 2 X_2 \cdot \int_A^D y (y - h) ds - \int_A^D M_0 (y - h) ds + 2 X_1 \cdot \int_A^D (y - h)^2 ds = 0.$$

Es bezeichne

$$\int_A^D y y_1 \cdot ds = Y_{1,2}; \quad y_1 = y - h$$

$$\int_B^D y^2 ds = Y_{2,2}; \quad \int_A^D y_1^2 ds = Y_{1,1}; \quad \int_B^D M_0 y ds = \mu_{2,2}; \quad \int_A^D M_0 y_1 ds = \mu_{1,1}$$

$$\left. \begin{aligned} 2 X_2 \cdot Y_{2,2} + 2 X_1 \cdot Y_{1,2} &= \mu_{2,2} \\ 2 X_2 \cdot Y_{1,2} + 2 X_1 \cdot Y_{1,1} &= \mu_{1,1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 16)$$

$$X_2 = \frac{\mu_{2,2} \cdot Y_{1,1} - \mu_{1,1} \cdot Y_{1,2}}{Y_{2,2} \cdot Y_{1,1} - Y_{1,2}^2}; \quad X_1 = \frac{\mu_{1,1} \cdot Y_{2,2} - \mu_{2,2} \cdot Y_{1,2}}{Y_{2,2} \cdot Y_{1,1} - Y_{1,2}^2}.$$

Die Größen $Y_{1,1}$, $Y_{1,2}$, $Y_{2,2}$, $\mu_{1,1}$ und $\mu_{2,2}$ können, ebenso wie in Abschnitt 2 für das Hauptsystem mit einem Ringe gezeigt, durch Seilpolygone der Kräftepläne der „Kräfte“ y bzw. y_1 konstruiert werden, auch für inkonstantes J_b der Rippen.

6b. Die Ringkräfte des Hauptsystems für elastische Ringe

werden durch Anwendung des Satzes von Castigliano erhalten:

$$\frac{dL}{dX_2} = -2 \delta_2; \quad \frac{dL}{dX_1} = -2 \delta_1;$$

die Gleichungen 16) gehen dann über in

$$\left. \begin{aligned} 2 X_2 \cdot Y_{2,2} + 2 X_1 \cdot Y_{1,2} - \mu_{2,2} &= -2 EJ_b \cdot \delta_2 \\ 2 X_2 \cdot Y_{1,2} + 2 X_1 \cdot Y_{1,1} - \mu_{1,1} &= -2 EJ_b \cdot \delta_1 \end{aligned} \right\} \dots 16')$$

Es bezeichne $r_1, r_2, J_{r,1}$ und $J_{r,2}$ die Radien und Trägheitsmomente der Ringe (Fußring nicht vorhanden oder starr), so ist nach 4):

$$\delta_2 = \frac{X_2 \cdot r_2^3}{2 EJ_{r,2}} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right); \quad \delta_1 = \frac{X_1 \cdot r_1^3}{2 EJ_{r,1}} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right).$$

Es bezeichne wieder $K_0 = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right)$ [absolut genommen, Vorzeichen ist in 16') berücksichtigt]:

$$\begin{aligned} X_2 \cdot \left[2Y_{2,2} + \left(\frac{J_b}{J_{r,2}} \right) \cdot r_2^3 K_0 \right] + 2 X_1 \cdot Y_{1,2} &= \mu_{2,2} \\ 2 X_2 \cdot Y_{1,2} + X_1 \cdot \left[2Y_{1,1} + \left(\frac{J_b}{J_{r,1}} \right) \cdot r_1^3 K_0 \right] &= \mu_{1,1}. \end{aligned}$$

Ist der Fußring auch elastisch (Radius R , Trägheitsmoment J_R), so ist die Gesamtverschiebung zwischen Ring 2 und Fußring, absolut genommen:

$$\delta_2 = \frac{X_2}{2E} \cdot \left(\frac{r_2^3}{J_{r,2}} + \frac{R^3}{J_R} \right) \cdot K_0; \quad \delta_1 = \frac{X_1}{2E} \cdot \left(\frac{r_1^3}{J_{r,1}} + \frac{R^3}{J_R} \right) \cdot K_0$$

und somit die zwei Gleichungen zur Ermittlung der Ringkräfte:

$$\left. \begin{aligned} X_2 \cdot \left\{ 2Y_{2,2} + \left[\left(\frac{J_b}{J_{r,2}} \right) \cdot r_2^3 + \left(\frac{J_b}{J_R} \right) \cdot R^3 \right] \cdot K_0 \right\} + 2 X_1 \cdot Y_{1,2} &= \mu_{2,2} \\ 2 X_2 \cdot Y_{1,2} + X_1 \cdot \left\{ 2Y_{1,1} + \left[\left(\frac{J_b}{J_{r,1}} \right) \cdot r_1^3 + \left(\frac{J_b}{J_R} \right) \cdot R^3 \right] \cdot K_0 \right\} &= \mu_{1,1} \end{aligned} \right\} 17)$$

Ebenso für n Zwischenringe die $(n+1)$ Gleichungen 17) zur Bestimmung der Ringkräfte für das Hauptsystem allein bei elastischen Ringen.

7. Die vollsymmetrischen Kräfte am Kuppelsystem mit mehreren Zwischenringen.

Für im ganzen n Ringe, deren einer der Fußring ist, und m Rippen ergeben sich $m(n-1)$ Doppelgleichungen zur Bestimmung der vollsymmetrischen Ringformveränderungen und der Schübe. Die am Fußring angreifenden Schübe sind für diese vollsymmetrischen Kräfte gleich der algebraischen Summe der einzelnen Ringkräfte jeder Rippe.

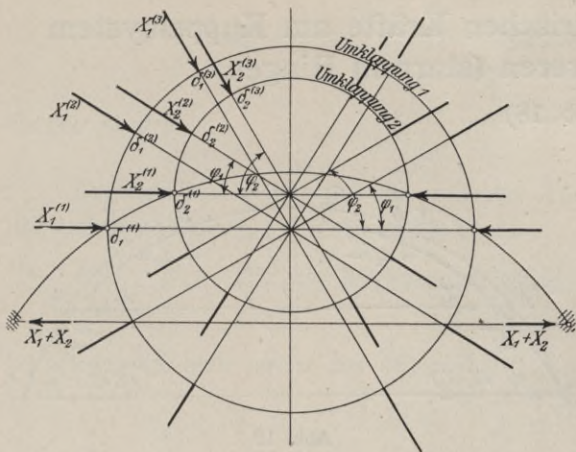


Abb. 17.

Es bezeichne im folgenden:
die Schübe des obersten
Ringes, je nach der Rippe:

$$X_2^{(1)}; X_2^{(2)}; X_2^{(3)};$$

die Verschiebungen an die-
sem Ring und dem Fußring,
je nach der Rippe:

$$\delta_2^{(1)}; \delta_2^{(2)}; \delta_2^{(3)};$$

die Schübe am Zwischen-
ring, je nach der Rippe:

$$X_1^{(1)}; X_1^{(2)}; X_1^{(3)};$$

die Verschiebungen:

$$\delta_1^{(1)}; \delta_1^{(2)}; \delta_1^{(3)}.$$

Die Schübe am Fußring sind sodann

$$[X_2^{(1)} + X_1^{(1)}]; [X_2^{(2)} + X_1^{(2)}]; [X_2^{(3)} + X_1^{(3)}].$$

Die $(n - 1) m$ Doppelgleichungen, die sich durch Anwendung von 8) und 16') ergeben, lauten:

$$\left. \begin{aligned} \delta_2^{(1)} &= \frac{1}{2E} \cdot \left(\frac{r_2^3}{J_{r,2}} + \frac{R^3}{J_R} \right) \cdot [X_2^{(1)} \cdot K_0 + 2 X_2^{(2)} \cdot K_{\varphi,1} + 2 X_2^{(3)} \cdot K_{\varphi,2}] \\ 2 E J_b \cdot \delta_2^{(1)} &= -\mu_{2,2} + 2 X_2^{(1)} \cdot Y_{2,2} + 2 X_1^{(1)} \cdot Y_{1,2} \end{aligned} \right\} \text{Rippe 1 (Hauptsystem)} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^{(1)} &= \frac{1}{2E} \cdot \left(\frac{r_1^3}{J_{r,1}} + \frac{R^3}{J_R} \right) \cdot [X_1^{(1)} \cdot K_0 + 2 X_1^{(2)} \cdot K_{\varphi,1} + 2 X_1^{(3)} \cdot K_{\varphi,2}] \\ 2 E J_b \cdot \delta_1^{(1)} &= -\mu_{1,1} + 2 X_2^{(1)} \cdot Y_{2,1} + 2 X_1^{(1)} \cdot Y_{1,1}^* \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_2^{(2)} &= \frac{1}{2E} \cdot \left(\frac{r_2^3}{J_{r,2}} + \frac{R^3}{J_R} \right) \cdot [X_2^{(2)} \cdot (K_0 + K_{2\varphi,1}) + X_2^{(3)} \cdot (K_{(\varphi,2-\varphi,1)} + K_{(\varphi,2+\varphi,1)}) + X_2^{(1)} \cdot K_{\varphi,1}] \\ 2 E J_b \cdot \delta_2^{(2)} &= + 2 X_2^{(2)} \cdot Y_{2,2} + 2 X_1^{(2)} \cdot Y_{1,2} \end{aligned} \right\} \text{Rippe 2} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^{(2)} &= \frac{1}{2E} \cdot \left(\frac{r_1^3}{J_{r,1}} + \frac{R^3}{J_R} \right) \cdot [X_1^{(2)} \cdot (K_0 + K_{2\varphi,1}) + X_1^{(3)} \cdot (K_{(\varphi,2-\varphi,1)} + K_{(\varphi,2+\varphi,1)}) + X_1^{(1)} \cdot K_{\varphi,1}] \\ 2 E J_b \cdot \delta_1^{(2)} &= + 2 X_2^{(2)} \cdot Y_{2,1} + 2 X_1^{(2)} \cdot Y_{1,1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_2^{(3)} &= \dots \\ 2 E J_b \cdot \delta_2^{(3)} &= \dots \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \delta_1^{(3)} &= \dots \\ 2 E J_b \cdot \delta_1^{(3)} &= \dots \end{aligned} \right\} (6) \quad \dots \quad \text{Rippe 3}$$

Hieraus die $(n - 1) m$ unbekanntens vollsymmetrischen Kräfte.

*) $Y_{2,1} = Y_{1,2}$.

8. Die halbsymmetrischen Kräfte am Kuppelsystem mit mehreren (starrten) Ringen.

Es bezeichne (siehe Abb. 18)

A_2 die Verschiebung des obersten Ringes nach der unbelasteten Seite zu am Hauptssystem allein,

A_1 dieselbe Verschiebung des Zwischenringes,

X_1 und X_2 die Ringkräfte nach 16), am Hauptsystem mit starren Ringen.

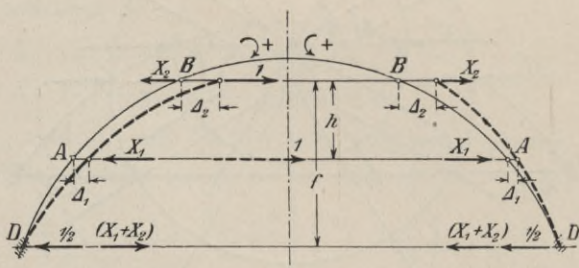


Abb. 18

Es bestimmen sich sonach die Verschiebungen nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$EJ_b \cdot A_2 = \int_0^b M_y M_2' ds + \int_0^b M_y M_2' ds$$

und

$$EJ_b \cdot A_1 = \int_0^b M_y M_1' ds + \int_0^b M_y M_1' ds,$$

worin die Momente M_2' die am statisch bestimmten Fall, bei Wirkung von 1 am Kopfring bedeutet M_1' die des statisch bestimmten Falles für 1 am Zwischenring.

Es ergeben sich die M_y wie in 6a):

$$\text{links: von } B-D: M_2' = + \frac{y}{2} \left\{ M_1' = 0 \right.$$

$$\text{von } A-D: M_2' = + \frac{y}{2} \left\{ M_1' = + \frac{(y-h)}{2} = + \frac{y_1}{2} \right.$$

$$\text{rechts: von } B-D: M_2' = - \frac{y}{2} \left\{ M_1' = 0 \right.$$

$$\text{von } A-D: M_2' = - \frac{y}{2} \left\{ M_1' = - \frac{y_1}{2} \right.$$

$$EJ_b \cdot A_2 = \int_B^D -X_2 \cdot \frac{y^2}{2} ds + \int_B^D \frac{M_0 y}{2} ds - \int_A^D X_1 y \cdot \frac{y_1}{2} ds$$

$$+ \int_B^D X_2 \cdot \frac{y^2}{2} ds + X_1 \cdot \int_A^D y \cdot \frac{y_1}{2} ds;$$

$$2 EJ_b \cdot A_2 = \int_B^D M_0 y ds = \mu_{2,2}; \quad A_2 = \frac{\mu_{2,2}}{2 EJ_b} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \dots 19)$$

ebenso ergibt $A_1 = \frac{\mu_{1,1}}{2 EJ_b}$

Es bezeichne wie in 7), nur mit der Änderung, daß es sich hier um die halbsymmetrischen Kräfte handelt:

$X_2^{(2)} \cdot X_2^{(3)} \dots X_2^{(m)}$ die halbsymmetrischen Kräfte am oberen Ring,
 $X_1^{(2)} \cdot X_1^{(3)} \dots X_1^{(m)}$ „ „ „ „ Zwischenring,

berücksichtigt man ferner aus 16) und 19)

$$A_2 = \frac{X_2 \cdot Y_{2,2} + X_1 \cdot Y_{1,2}}{EJ_b}; \quad A_1 = \frac{X_2 \cdot Y_{2,1} + X_1 \cdot Y_{1,1}}{EJ_b} \dots 19')$$

Die resultierende Verschiebung am oberen Ring unter Mitwirkung von m Nebenrippen sei $A_{r,2}$, am Zwischenring $A_{r,1}$, so ist wie in 5):

$$A_{r,2} = \frac{A_2^{(m)}}{\cos \varphi_m} = \frac{X_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m} = \frac{V^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m}$$

$$A_{r,1} = \frac{A_1^{(m)}}{\cos \varphi_m} = \frac{X_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m} = \frac{U^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m}$$

$$A_{r,2} = \frac{\mu_{2,2}}{2 EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot (V^{(2)} \cdot \cos \varphi_2 + V^{(3)} \cdot \cos \varphi_3 + \dots V^{(m)} \cdot \cos \varphi_m)$$

$$= \frac{V^{(2)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_2} = \frac{V^{(3)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_3} = \dots = \frac{V^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m}$$

$$A_{r,1} = \frac{\mu_{1,1}}{2 EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot (U^{(2)} \cdot \cos \varphi_2 + U^{(3)} \cdot \cos \varphi_3 + \dots U^{(m)} \cdot \cos \varphi_m)$$

$$= \frac{U^{(2)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_2} = \frac{U^{(3)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_3} = \dots = \frac{U^{(m)}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\mu_{2,2}}{2} \cdot \cos \varphi_m - V^{(m)} [1 + n (\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 + \dots \cos^2 \varphi_m)] = 0 \\ \frac{\mu_{1,1}}{2} \cdot \cos \varphi_m - U^{(m)} [1 + n (\cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 + \dots \cos^2 \varphi_m)] = 0 \end{array} \right\} 20)$$

Die Gleichungen 20) ermöglichen die Bestimmung der Unbekannten-
 gruppen $U^{(m)}$, $V^{(m)}$ für die Rippe m .

Diese bekannt, bestimmen sich die Schübe $X_2^{(m)}$ und $X_1^{(m)}$ aus

$$\left. \begin{array}{l} V^{(m)} = X_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,2} \\ U^{(m)} = X_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + X_1^{(m)} \cdot Y_{1,1} \end{array} \right\} \dots \dots \dots 20')$$

Die Gleichungen 20) ergeben die halbsymmetrischen Kräfte unter Vor-
 aussetzung von seitlich nicht biegunsfähigen und dementsprechend gelagerten
 Rippen.

Im nachfolgenden mögen die halbsymmetrischen Kräfte unter Berücksichtigung der seitlichen Biegung der Rippen bei mehreren Ringen behandelt werden. Es bezeichne:

$H_2^{(2)}, H_2^{(3)} \dots H_2^{(m)}$ die halbsymmetrischen Schübe am oberen Ring der Rippen II, III ... m ,

$T_2^{(2)}, T_2^{(3)} \dots T_2^{(m)}$ die Tangentialkräfte am oberen Ring (Ring 2),

$H_1^{(2)}, H_1^{(3)} \dots H_1^{(m)}$ desgl. die Schübe am Ring 1,

$T_1^{(2)}, T_1^{(3)} \dots T_1^{(m)}$ desgl. die Tangentialkräfte am Ring 1,

$A_{r,2}$ und $A_{r,1}$ die resultierenden Ringverschiebungen der Ringe 2 bzw. 1,

$v_2^{(2)}, v_2^{(3)} \dots v_2^{(m)}$ die tangentiellen Verschiebungen der Anschlußpunkte der Rippen II, III ... m an den Ring 2,

$v_1^{(2)}, v_1^{(3)} \dots v_1^{(m)}$ desgl. an den Ring 1,

$u_2^{(2)}, u_2^{(3)} \dots u_2^{(m)}$ die achsialen Verschiebungen der Anschlußpunkte der Rippen II, III ... m an den Ring 2,

$u_1^{(2)}, u_1^{(3)} \dots u_1^{(m)}$ desgl. an den Ring 1.

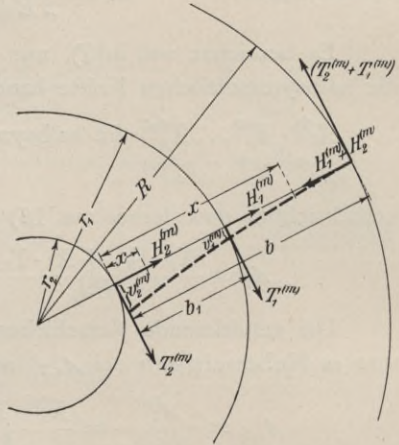


Abb. 19.

Entsprechend den Gleichungen 19') ist die achsiale Verschiebung einer Rippe durch die achsialen Kräfte derselben

$$A_2 = \frac{\sum X_2 \cdot Y_{2,2} + \sum X_1 \cdot Y_{1,2}}{EJ_b}; \quad A_1 = \frac{\sum X_2 \cdot Y_{2,1} + \sum X_1 \cdot Y_{1,1}}{EJ_b};$$

hierin ist unter $\sum X_2$ und $\sum X_1$ die Projektion aller am Ring 2 bzw. Ring 1 angreifenden Schübe auch der Tangentialkräfte auf die in Betracht gezogene (Haupt-)Rippe zu verstehen.

Ferner ist entsprechend den Gleichungen 12)

$$A_{r,2} = \frac{u_2^{(2)}}{\cos \varphi_2} = \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_2}$$

$$A_{r,2} = \frac{u_2^{(3)}}{\cos \varphi_3} = \frac{H_2^{(3)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(3)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_3}$$

$$A_{r,2} = \frac{u_2^{(m)}}{\cos \varphi_m} = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m}$$

$$A_{r,1} = \frac{u_1^{(2)}}{\cos \varphi_2} = \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_2}$$

$$A_{r,1} = \frac{u_1^{(m)}}{\cos \varphi_m} = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m}$$

Die Beziehungen zwischen den Tangentialkräften einer Rippe m und den seitlichen Verschiebungen $v_2^{(m)}$ und $v_1^{(m)}$ bestimmen sich wie folgt (siehe Abb. 19):

$$EJ_S \cdot v_2^{(m)} = \int_0^b M_x M_2' dx$$

$$\text{von } 0-b_1 \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x \\ M_2' = 1 \cdot x \end{cases}; \quad \text{von } b_1-b \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x + T_1(x-b_1) \\ M_2' = 1 \cdot x \end{cases}$$

$$EJ_S \cdot v_2^{(m)} = \int_0^b T_2 x^2 dx + \int_{b_1}^b T_1 x^2 dx - b_1 \cdot \int_{b_1}^b T_1 x dx;$$

$$\text{hieraus} \quad 6 EJ_S \cdot v_2^{(m)} = 2 T_2^{(m)} \cdot b^3 + T_1^{(m)} (2 b^3 + b_1^3 - 3 b^2 b_1) \quad . \quad 21a$$

$$\text{ebenso} \quad EJ_S \cdot v_1^{(m)} = \int_0^b M_x M_1' dx$$

$$\text{von } 0-b_1 \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x \\ M_1' = 0 \end{cases}; \quad \text{von } b_1-b \begin{cases} M_x = T_2 \cdot x + T_1(x-b_1) \\ M_1' = 1(x-b_1) \end{cases}$$

$$EJ_S \cdot v_1^{(m)} = T_2 \cdot \int_{b_1}^b x(x-b_1) dx + T_1 \cdot \int_{b_1}^b (x-b_1)^2 dx;$$

hieraus

$$6 EJ_S \cdot v_1^{(m)} = T_2^{(m)} (2b^3 + b_1^3 - 3b^2 b_1) + T_1^{(m)} (2b^3 - 2b_1^3 - 6b^2 b_1 + 6b b_1^2) \quad 21b$$

Es bezeichne zur Abkürzung

$$\psi = \frac{b^3}{3}; \quad \chi = \frac{(2b^3 + b_1^3 - 3b^2 b_1)}{6}; \quad *) \sigma = \frac{2b^3 + b_1^3 - 3b^2 b_1}{6}$$

$$\tau = \frac{(2b^3 - 2b_1^3 - 6b^2 b_1 + 6b b_1^2)}{6} = \frac{(b-b_1)^3}{3}.$$

Entsprechend den Gleichungen 11) ergibt sich:

$$\begin{array}{l|l} \mathcal{A}_{r,2} = \frac{v_2^{(2)}}{\sin \varphi_2} = \frac{\psi \cdot T_2^{(2)} + \chi \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_2} & \mathcal{A}_{r,1} = \frac{v_1^{(2)}}{\sin \varphi_2} = \frac{\sigma \cdot T_2^{(2)} + \tau \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_2} \\ \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{r,2} = \frac{v_2^{(m)}}{\sin \varphi_m} = \frac{\psi \cdot T_2^{(m)} + \chi \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_m} & \mathcal{A}_{r,1} = \frac{v_1^{(m)}}{\sin \varphi_m} = \frac{\sigma \cdot T_2^{(m)} + \tau \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_m} \end{array}$$

*) $\chi = \sigma$, wie dies auch unmittelbar aus dem Maxwellschen Satze folgt.

Entsprechend Gleichungen 13) ergeben sich folgende Gleichungsgruppen:

$$\begin{aligned}
 A_{r,2} &= \frac{\mu_{2,2}}{2 EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot \left\{ [H_2^{(2)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_2^{(m)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_2^{(m)} \cdot \sin \varphi_m] \cdot Y_{2,2} \right. \\
 &\quad \left. + [H_1^{(2)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_1^{(m)} \cdot \cos \varphi_m + T_1^{(2)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_1^{(m)} \cdot \sin \varphi_m] \cdot Y_{1,2} \right\} \\
 &= \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_2} = \dots = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,2}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m} \\
 &= \frac{\psi \cdot T_2^{(2)} + \chi \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_2} = \dots = \frac{\psi \cdot T_2^{(m)} + \chi \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_m}
 \end{aligned}$$

22)

$$\begin{aligned}
 A_{r,1} &= \frac{\mu_{1,1}}{2 EJ_b} - \frac{n}{EJ_b} \cdot \left\{ [H_2^{(2)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_2^{(m)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_2^{(m)} \cdot \sin \varphi_m] \cdot Y_{1,2} \right. \\
 &\quad \left. + [H_1^{(2)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_1^{(m)} \cdot \cos \varphi_m + T_1^{(2)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_1^{(m)} \cdot \sin \varphi_m] \cdot Y_{1,1} \right\} \\
 &= \frac{H_2^{(2)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(2)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_2} = \dots = \frac{H_2^{(m)} \cdot Y_{2,1} + H_1^{(m)} \cdot Y_{1,1}}{EJ_b \cdot \cos \varphi_m} \\
 &= \frac{\sigma \cdot T_2^{(2)} + \tau \cdot T_1^{(2)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_2} = \dots = \frac{\sigma \cdot T_2^{(m)} + \tau \cdot T_1^{(m)}}{EJ_S \cdot \sin \varphi_m}
 \end{aligned}$$

Bei m Rippen und r Ringen (Fußring mitgezählt) enthalten die Gleichungsgruppen 22) $2 \cdot m (r - 1)$ voneinander unabhängige Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten.

In den Abschnitten 5 und 8 waren für die Behandlung der halbsymmetrischen Kräfte starre Ringe vorausgesetzt. Im nachfolgenden sollen diese Kräfte unter Berücksichtigung der Ringelastizität ermittelt werden. Dazu ist vor allem wieder die Kenntnis der Ringformveränderungen unter der Einwirkung von Gruppen halbsymmetrischer, im Gleichgewicht befindlicher Kräfte nötig. Sind diese Formveränderungen bekannt, so können sie, zu den Rippenformänderungen in Beziehung gebracht, die halbsymmetrischen Kräfte bei elastischen Ringen finden lassen.

9. Halbsymmetrische Kräfte und Ringformveränderung.

A. Radiale Kräfte.

a) Ermittlung der Überzähligen.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$2X - Y \cdot 2r = 0; \quad Y = \frac{X}{r}$$

X ergibt sich aus

$$\frac{dL}{dX} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi^2 \cdot \frac{dM_\varphi}{dX} \cdot ds = 0;$$

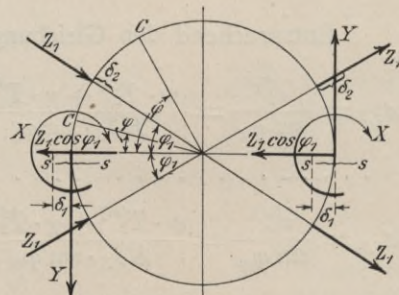


Abb. 20.

links: von $0-\varphi_1$: $M_\varphi = Z_1 \cdot \cos \varphi_1 r \cdot \sin \varphi - Yr(1 - \cos \varphi) + X$;
 $M_\varphi = X \cdot \cos \varphi + Z_1 \cdot \cos \varphi_1 r \cdot \sin \varphi$; $\frac{\partial M_\varphi}{\partial X} = \cos \varphi$;
 von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$: $M_\varphi = X \cdot \cos \varphi + Z_1 \cdot \cos \varphi_1 r \cdot \sin \varphi - Z_1 r \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)$;
 $\frac{dM_\varphi}{dX} = \cos \varphi$;
 rechts: von $0-\varphi_1$: $M_\varphi = -X \cdot \cos \varphi - Z_1 \cdot \cos \varphi_1 r \cdot \sin \varphi$;
 $\frac{dM_\varphi}{dX} = -\cos \varphi$;
 von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$: analog.

$$0 = Xr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi + Z_1 r^2 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi -$$

$$- Z_1 r^2 \cdot \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\varphi - \varphi_1) \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi.$$

Nach Durchführung der Integration und Reduktion ergibt sich:

$$X = -Z_1 \cdot \frac{r}{\pi} \cdot \sin \varphi_1 (\pi - 2\varphi_1) \quad \dots \quad 23)$$

für $\varphi_1 = 0$; $X = 0$; für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $X = 0$.

b) Ermittlung der Verschiebungen δ_2 .

Diese kann durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen geschehen.

Wird das Hauptssystem durch Aufschneiden des Ringes ($S-S$) erhalten,

so ist es vorteilhaft, vier Kräfte 1 an diesem anzubringen. Man erhält dann als Arbeit der äußeren Kräfte $4 \cdot \delta_2$ wegen der im System herrschenden Symmetrie. Die Momente M_φ (vergl. Abb. 21a) ergeben sich unter Benutzung von Gleichung 23):

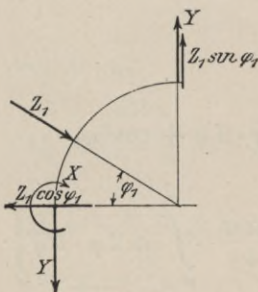


Abb. 21a.

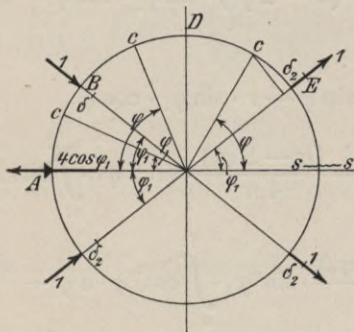


Abb. 21b.

von $0-\varphi_1$:

$$M_\varphi = -Z_1 \frac{r}{\pi} (\pi - 2\varphi_1) \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi + Z_1 \cdot \cos \varphi_1 r \cdot \sin \varphi - \underline{Z_1 r \cdot \sin(\varphi - \varphi_1)}$$

für $\varphi = \varphi_1$ bis $\frac{\pi}{2}$

M' : von $A-B$: $M' = + 2 \cos \varphi_1 r \cdot \sin \varphi$
 von $B-D$: $M' = + 2 \cos \varphi_1 r \cdot \sin \varphi - 1 r \cdot \sin (\varphi - \varphi_1)$
 von $E-D$: $M' = + 1 r \cdot \sin (\varphi - \varphi_1)$.

Nach Aufstellung der Produkte ($M_\varphi M' d\varphi$) und Reduktion derselben:

$$4 E J_r \cdot \delta_2 = 2 Z_1 r^3 \cdot \left[\frac{4 \varphi_1}{\pi} \cdot \sin^2 \varphi_1 \cdot \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi - \frac{(\pi - 2 \varphi_1)}{\pi} \cdot \frac{\sin 2 \varphi_1}{2} \int_0^{\varphi_1} \sin 2 \varphi \cdot d\varphi + 2 \cos^2 \varphi_1 \cdot \int_0^{\varphi_1} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \right]$$

Nach Auswertung der Integrale und Reduktion:

$$\delta_2 = \frac{Z_1 r^3}{2 E J_r} \left[\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \left(\cos \varphi_1 + \frac{2 \varphi_1^2}{\pi} \cdot \sin \varphi_1 \right) \right] \quad . \quad . \quad 24)$$

Wegen der in jedem Quadranten gleichen Arbeitsbeiträge ist es auch statthaft, als Hauptsystem nur einen solchen Quadranten zu wählen. Wie im folgenden ausgeführt, wird die Verschiebung gleichlautend erhalten.

$$1 \cdot \delta_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_\varphi M_2'}{E J_r} ds.$$

Für den statisch bestimmten Fall der Momente M_2' siehe Abb. 21 c.

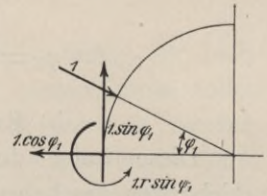


Abb. 21 c.

Wie unter b) ist von $0-\varphi_1$

$$M_\varphi = - Z_1 \cdot \frac{r}{\pi} \cdot (\pi - 2 \varphi_1) \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi + Z_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot r \cdot \sin \varphi$$

und von $0-\varphi_1$

$$M_2' = r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \varphi - r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi$$

$$E J_r \cdot \delta_2 = Z_1 \cdot r^3 \left\{ - \frac{(\pi - 2 \varphi_1)}{4 \pi} \cdot \sin 2 \varphi_1 \cdot \int_0^{\varphi_1} \sin 2 \varphi \cdot d\varphi + \cos^2 \varphi_1 \cdot \int_0^{\varphi_1} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi + \frac{(\pi - 2 \varphi_1)}{\pi} \cdot \sin^2 \varphi_1 \cdot \int_0^{\varphi_1} \cos^2 \varphi \cdot d\varphi - \frac{\sin 2 \varphi_1}{4} \cdot \int_0^{\varphi_1} \sin 2 \varphi \cdot d\varphi \right\}.$$

Nach Integration und Reduktion ergibt sich

$$\delta_2 = \frac{r^3 Z_1}{2 E J_r} \left[\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cdot \left(\cos \varphi_1 + \frac{2 \varphi_1^2}{\pi} \cdot \sin \varphi_1 \right) \right] \quad . \quad . \quad 24)$$

wieder für $\varphi_1 = 0$; $\delta_2 = 0$; $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$; $\delta_2 = 0$.

B. Tangentielle Kräfte und Ringformveränderungen.

a) Ermittlung der Überzähligen.

Es gelingt nachzuweisen, daß das System nicht, wie in Abb. 22 erkenntlich gemacht, dreifach, sondern nur einfach unbestimmt ist.

Aus dem Gleichgewicht im vertikalen Sinne folgt $Y_1 = Y_2$; im horizontalen $Z_1 = Z_2$.

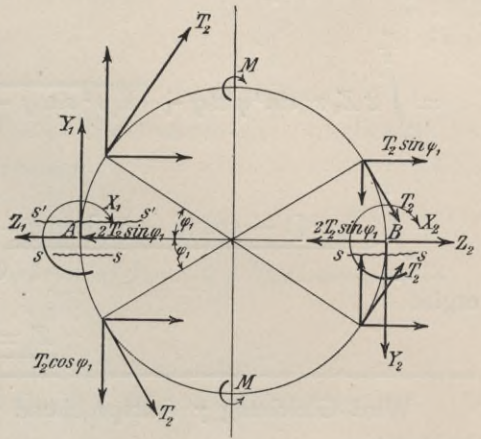


Abb. 22.

Momentengleichung auf B

$$X_1 + X_2 + 2 Y_1 \cdot r + 2 T_2 \cdot r = 0 \quad \alpha)$$

Moment M obere Hälfte

(Schnitt s-s)

$$M = X_1 + Y_1 \cdot r + Z_1 \cdot r + T_2 \cdot r (\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1) \quad \beta)$$

Moment M untere Hälfte (Schnitt s'-s'; umgekehrte Schnittkräfte)

$$M = -X_1 - Y_1 \cdot r + Z_1 \cdot r - T_2 \cdot r \quad \gamma)$$

Aus $\beta)$ und $\gamma)$

$$0 = 2 X_1 + 2 Y_1 \cdot r + 2 T_2 \cdot r \quad \delta)$$

Aus $\alpha)$ und $\delta)$

$$\underline{X_1 = X_2.}$$

Z_1 ergibt sich aus

$$\frac{2}{E J_r} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \cdot \frac{d M_\varphi}{d Z_1} \cdot ds = 0.$$

von $0 - \varphi_1$

links

$$M_\varphi = X_1 + Z_1 r \sin \varphi + Y_1 r (1 - \cos \varphi) + T_2 \sin \varphi_1 r \sin \varphi$$

rechts

$$M_\varphi = -X_1 + Z_1 r \sin \varphi - Y_1 r (1 - \cos \varphi) - T_2 \sin \varphi_1 r \sin \varphi$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{d M_\varphi}{d Z_1} = r \sin \varphi;$$

von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}$

links

$$M_\varphi = X_1 + Z_1 r \sin \varphi + Y_1 r (1 - \cos \varphi) + T_2 \sin \varphi_1 r \sin \varphi + T_2 r [1 - \cos (\varphi - \varphi_1)]$$

rechts

$$M_\varphi = -X_1 + Z_1 r \sin \varphi - \dots$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{d M_\varphi}{d Z_1} = r \sin \varphi.$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \frac{dM_\varphi}{dZ_1} ds = 0$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 Z_1 r^3 \sin^2 \varphi d\varphi + \overbrace{(X_1 r^2 \sin \varphi - X_1 r^2 \sin \varphi + \dots)}^0 d\varphi$$

$$+ \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\{T_2 r^3 [1 - \cos(\varphi - \varphi_1)] \sin \varphi - T_2 r^3 [1 - \cos(\varphi - \varphi_1)] \sin \varphi\}}_0 d\varphi$$

ergibt

$$\underline{Z_1 = 0} \dots \dots \dots 25)$$

Wird Gleichung γ (entsprechend dem 4. Quadranten) für $\odot = \text{minus}$ geschrieben

$$M = + X_1 + Y_1 r - Z_1 r + T_2 r \dots \dots \dots r')$$

Aus β) und r')

$$\underline{Z_1 = 0.}$$

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi \frac{dM_\varphi}{dX_1} ds = 0.$$

Nach Aufstellung von M_φ unter Berücksichtigung von $Z_1 = 0$ und Gleichung α) und $\frac{dM_\varphi}{dX_1}$ ergibt sich:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(X_1 \frac{1}{2} r d\varphi - X_2 \frac{1}{2} r d\varphi \right) - \underbrace{\frac{(X_1 + X_2)}{4} (1 - \cos \varphi) r d\varphi + \frac{(X_1 + X_2)}{4} (1 - \cos \varphi) r d\varphi + \dots}_{0} = 0$$

$$\underline{X_1 = X_2.}$$

Somit ist das System auch nur einfach unbestimmt.

Aus α)

$$Y_1 r = -(X_1 + T_2 r)$$

von $(0 - \varphi_1)$:

links

$$M_\varphi = X_1 \cos \varphi - T_2 r + T_2 r \cos \varphi + T_2 r \sin \varphi_1 \sin \varphi;$$

$$\left. \frac{dM_\varphi}{\partial X_1} = \cos \varphi \right\}$$

rechts

$$M_\varphi = -X_1 \cos \varphi + T_2 r - T_2 r \cos \varphi - T_2 r \sin \varphi_1 \sin \varphi;$$

$$\frac{\partial M_\varphi}{\partial X_1} = -\cos \varphi$$

von $\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right)$

links

$$M_\varphi = X_1 \cos \varphi - T_2 r + T_2 r \cos \varphi + T_2 r - T_2 r \cos \varphi \cos \varphi_1;$$

ebenso

rechts mit umgekehrten Vorzeichen.

$$0 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (X_1 \cos \varphi + T_2 r \cos \varphi) r \cos \varphi d\varphi - 2 \int_0^{\varphi_1} T_2 r^2 \cos \varphi d\varphi +$$

$$+ 2 \int_0^{\varphi_1} T_2 r^2 \sin \varphi_1 \frac{\sin 2\varphi}{2} d\varphi - 2 \int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}} T_2 r^2 \cos \varphi_1 \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Nach Integration und Reduktion ergibt sich

$$X_1 = X_2 = \frac{4 T_2 r}{\pi} \cdot \left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \varphi_1}{2} + \cos \varphi_1 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2} \right) \right] \quad 26)$$

für $\varphi_1 = 0, X_1 = 0;$

für $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, X_1 = -T_2 r \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$

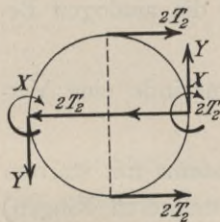


Abb. 23.

(vergl. hierzu den Wert M_B der radialen Angriffe, Abschnitt 1).

b) Die Verschiebung δ_2 (an einer Nebenrippe.

$$1 \cdot \delta_2 = \frac{1}{E J_r} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_\varphi M_2' ds$$

M_φ siehe oben

von $0 - \varphi_1:$

$$M_2' = -r + r \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi + r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi,$$

von $0 - \varphi_1:$

$$M_\varphi = X_1 \cdot \cos \varphi - T_2 r + T_2 r \cdot \cos \varphi + T_2 r \cdot \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi,$$

von $\varphi_1 - \frac{\pi}{2}: M_2' = 0.$

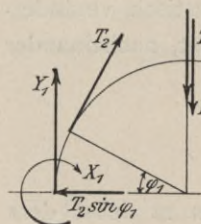


Abb. 24a.

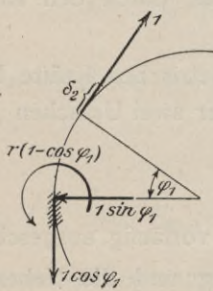


Abb. 24b.

Nach Bildung der Produkte $M_\varphi M_2' ds$ und Integration sowie Einführung von X_1 nach 26) ergibt sich

$$\delta_2 = \frac{T_2 r^3}{E J_r} \cdot \left[\sin^2 \varphi_1 \cdot \left(\frac{\varphi_1}{2} - \frac{1}{\pi} \right) + \frac{\sin 2 \varphi_1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2 \varphi_1}{\pi} \right) + \varphi_1 \cdot \cos^2 \varphi_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_1}{\pi} \right) + \varphi_1 - 2 \sin \varphi_1 \right] \quad 27)$$

Durch die Beziehungen 23), 24), 26) und 27) sind die Ringformveränderungen durch Gruppen halbsymmetrischer Schübe und Querbiegekräfte der Rippen bekannt.

10. Ermittlung der halbsymmetrischen Kräfte bei elastischen Ringen.

Die in Gleichung 7) errechnete Verschiebung des starren Kopfringes des Hauptsystems ist direkt proportional der Bogenkraft. Da die halbsymmetrischen Kräfte der Nebenrippen von dieser Verschiebung \mathcal{A}_r abhängen, so ergibt sich nach Gleichung 10) bzw. den Gleichungen 14) und 15) direkte Proportionalität zwischen den halbsymmetrischen Kräften (Bogen- und Tangentialkräfte der Nebenrippen) mit der Bogenkraft X des Hauptsystems mit starren Ringen. Für mehrere starre Ringe bestehen die analogen Beziehungen der Gleichungen 22).

Sind die Ringe elastisch, so tritt durch zwei Umstände eine Veränderung der halbsymmetrischen Kräfte ein:

1. Tritt an die Stelle der Bogenkraft X des Hauptsystems mit starrem Ringe (bzw. an Stelle der Ringkräfte $X_1, X_2 \dots$ bei mehreren Ringen) die Bogenkraft (bzw. die Ringkräfte), welche unter Berücksichtigung der vollsymmetrischen Ringformveränderung unter Mitwirkung aller Rippen nach den Gleichungen 8) bzw. den Gleichungen 18) errechnet wird (Schübe H_0 bzw. $X_1^{(1)}, X_2^{(1)} \dots$).

2. Wird ein Teil der halbsymmetrischen Kräfte oder, besser ausgedrückt, der Reaktionen der Nebenrippen (im achsialen und tangentiellen Sinne) zur Formänderung der Ringe aufgewendet und wird diese Reaktion nur teilweise als stabilisierende Kraft durch den Ring dem Hauptsystem übertragen.

Zur Berechnung der halbsymmetrischen Kräfte bei elastisch veränderlichen Ringen soll die Wirkung dieser zwei Ursachen getrennt, nacheinander erfolgend, gedacht werden.

Im folgenden sei

1. Querbiegung der Rippen vorläufig ausgeschaltet;
2. zunächst nur ein Kopfring und die Nebenrippen m nebst dem Hauptsystem vorhanden.

Somit ist die Längenänderung der Nebenrippe m

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{r,m} &= \mathcal{A}_{r,0} \cdot \cos \varphi_m - \delta_{m,2} = \frac{\int_0^b y^2 ds}{E J_b} \cdot (H_0 \cdot \cos \varphi_m - n \cdot H_{m,e} \cdot \cos^2 \varphi_m) - \\ & - \frac{r^3 \cdot H_{m,e}}{2 E J_r} \cdot e_{m,m} = \frac{H_{m,e} \cdot \int_0^b y^2 ds}{E J_b} \end{aligned}$$

Hieraus wird gefunden

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot \cos \varphi_m}{1 + n \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{r^3}{2} \cdot \left(\frac{J_b}{J_r}\right) \cdot \frac{e_{m,m}}{\int_0^b y^2 ds}}$$

und bei vorhandenem elastischen Fußring (siehe Abb. 24)

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot \cos \varphi_m}{1 + n \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{J_b}{J_R}\right) R^3 + \left(\frac{J_b}{J_r}\right) \cdot r^3 \right] \cdot \frac{e_{m,m}}{\int_0^b y^2 ds}} \quad (30)$$

Für starre Ringe ($J_r = J_R = \infty$) gehen, da auch $H_0 = X$ wird, die Gleichungen in die Gleichungen 10) über. Für sehr schwache Ringe ($\lim J_r = J_R = 0$) nähert sich $H_{m,e}$ dem Werte 0.

Sind mehrere Nebenrippen vorhanden, so sind zunächst die oben erwähnten Einflußwerte der Ringbiegung $e_{m,a}$ zu finden.

Unter der Voraussetzung $\varphi_a < \varphi_m$ folgt aus (Abb. 26)

$$E J_r \cdot \delta_a = \int_0^{\varphi_a} M_\varphi M' ds$$

$$2 E J_r \cdot \delta_a = H_m \cdot r^3 \cdot \left[\cos(\varphi_m - \varphi_a) \cdot \varphi_a - \sin \varphi_a \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_a \cdot \varphi_m}{\pi} \sin \varphi_m \right) \right] \quad (29)$$

welche für $\varphi_a = \varphi_m$ in die Gleichung 24) übergeht.

Für $\varphi_a = 0$ (Auflager) $\delta_a = 0$.

Der Ringbiegungseinflußwert $e_{m,a}$ ist somit

$$e_{m,a} = \left[\cos(\varphi_m - \varphi_a) \cdot \varphi_a - \sin \varphi_a \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_a \cdot \varphi_m}{\pi} \sin \varphi_m \right) \right] \quad (29)$$

Nach dem Maxwellschen Satze ist $e_{m,a} = e_{a,m}$.*)

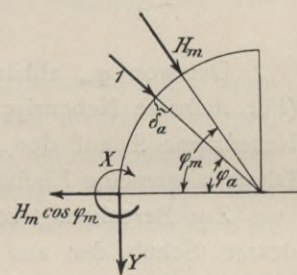


Abb. 26.

*) Siehe Tabelle der Ringbiegungseinflußwerte und Darstellung der Ringformänderung am Schlusse.

Somit ergibt sich für den halbsymmetrischen Schub $H_{m,e}$ bei Vorhandensein mehrerer Nebenrippen:

$$A_{r,m} = A_{r,0} \cdot \cos \varphi_m - \Sigma \delta_{m,2} = \frac{\int_0^b y^2 ds}{E J_b} \cdot [H_0 \cdot \cos \varphi_m - n \cdot \cos \varphi_m \cdot (H_{2,e} \cdot \cos \varphi_2 + H_{3,e} \cdot \cos \varphi_3 + \dots H_{m,e} \cdot \cos \varphi_m)] - \frac{r^3}{2 E J_r} \cdot (H_{2,e} \cdot e_{2,m} + H_{3,e} \cdot e_{3,m} + \dots H_{m,e} \cdot e_{m,m}) = \frac{H_{m,e} \cdot \int_0^b y^2 ds}{E J_b}; \quad (31)$$

ebenso: z. B. für Rippe 3

$$A_{r,3} = \frac{\int_0^b y^2 ds}{E J_b} \cdot [H_0 \cdot \cos \varphi_3 - n \cdot \cos \varphi_3 \cdot (H_{2,e} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_{m,e} \cdot \cos \varphi_m)] - \frac{r^3}{2 E J_r} \cdot (H_{2,e} \cdot e_{2,3} + H_{3,e} \cdot e_{3,3} + \dots H_{m,e} \cdot e_{m,3}) = H_{3,e} \cdot \frac{\int_0^b y^2 ds}{E J_b}$$

Hieraus alle Unbekannten $H_{2,e}$, $H_{3,e} \dots H_{m,e}$ bestimmbar.

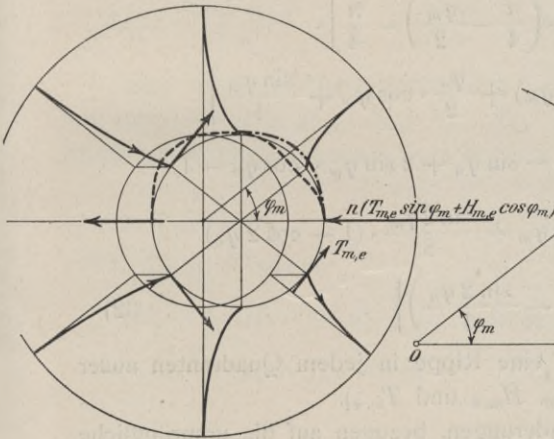


Abb. 27.

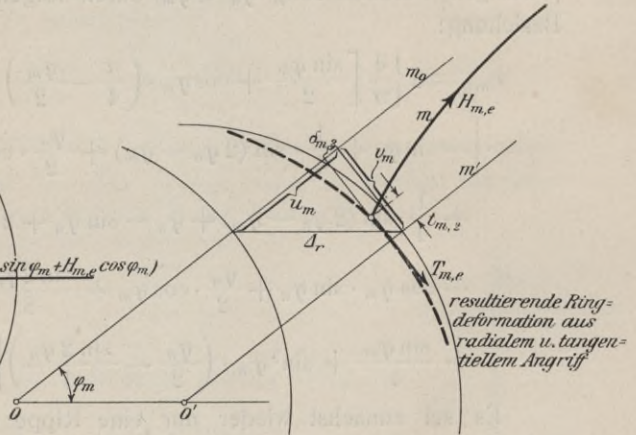


Abb. 27a.

Nunmehr sollen auch die halbsymmetrischen Kräfte unter Berücksichtigung der Querbiegung der Rippen bei elastischen, also jetzt auch tangentiell beanspruchten Ringen berechnet werden.

*) Bei elastischem Fußring tritt an Stelle von

$$\frac{r^3}{J_r} \dots \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r^3}{J_r} \right).$$

Es bezeichne analog oben gewählter Bezeichnung:

$H_{m,e}$, $T_{m,e}$ die beiden halbsymmetrischen Kräfte der Rippe m ,
 H_0 den aus der Gruppe 8) errechneten Schub der Hauptrippe, unter Berücksichtigung aller vollsymmetrischen Ringformänderungen.

Ferner: $\tau_{m,m}$ den Ringformveränderungseinflußwert der Kraft T_m auf den Anschlußpunkt der Rippe m selbst,

ebenso $\tau_{a,m}$ den Einflußwert der Kraft T_a auf die tangentielle Verschiebung des Anschlußpunktes der Rippe m am Ring.

Wie oben ist $\tau_{a,m} = \tau_{m,a}$.

Der Einflußwert $\tau_{m,m}$ ist nach Gleichung 27)

$$\tau_{m,m} = 2 \left\{ \sin^2 \varphi_m \cdot \left(\frac{\varphi_m}{2} - \frac{1}{\pi} \right) + \frac{\sin 2 \varphi_m}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{2 \varphi_m}{\pi} \right) + \varphi_m \cdot \cos^2 \varphi_m \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\varphi_m}{\pi} \right) + \varphi_m - 2 \sin \varphi_m \right\}.$$

Der Einflußwert $\tau_{m,a}$ ergibt sich aus

$$EJ_r \cdot \tau_{m,a} = \int_0^a M_\varphi M' ds$$

unter der (wegen obengenannter Anwendbarkeit des Maxwellschen Satzes) zulässigen Voraussetzung $\varphi_a < \varphi_m$ durch folgende, allerdings umständliche Beziehung:

$$\begin{aligned} \tau_{m,a} = 2 \left\{ \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin \varphi_m}{2} + \cos \varphi_m \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_m}{2} \right) - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \right. \\ \cdot \left[-\sin \varphi_a + \frac{1}{4} \cdot \sin (2 \varphi_a - \varphi_m) + \frac{\varphi_a}{2} \cdot \cos \varphi_m + \frac{\sin \varphi_m}{4} \right] \\ + \frac{1}{4} \cdot \sin (2 \varphi_a - \varphi_m) + \varphi_a - \sin \varphi_a + 2 \sin \varphi_m \cdot (\cos \varphi_a - 1) \\ - \cos \varphi_m \cdot \sin \varphi_a + \frac{\varphi_a}{2} \cdot \cos \varphi_m + \frac{\sin 2 \varphi_m}{8} \cdot (1 - \cos 2 \varphi_a) \\ \left. + \frac{\sin \varphi_m}{4} + \sin^2 \varphi_m \cdot \left(\frac{\varphi_a}{2} - \frac{\sin 2 \varphi_a}{4} \right) \right\} \dots \dots \dots 32) \end{aligned}$$

Es sei zunächst wieder nur eine Rippe in jedem Quadranten außer dem Hauptssystem angenommen (φ_m , $H_{m,e}$ und $T_{m,e}$).

In Abb. 27a sind die Formänderungen, bezogen auf die ursprüngliche Rippenlage und deren Normale, kenntlich gemacht.

m_0 = ursprüngliche Rippenlage, m' = Rippenlage bei nicht querbiegungsfähigen (dementsprechend gelagerten) Rippen, m = tatsächliche Rippenlage nach radialer und tangentieller Ringformänderung.

Nach Gleichungen 11) und 12)

$$u_m = A_r \cdot \cos \varphi_m; \quad v_m = A_r \cdot \sin \varphi_m.$$

Die resultierende radiale Verschiebung $u_{r,m} = A_r \cdot \cos \varphi_m - \delta_m$;

die resultierende tangentielle Verschiebung $v_{r,m} = A_r \cdot \sin \varphi_m - t_m$.

Wie oben ist

$$\delta_m = \frac{r^3 \cdot H_{m,e}}{2 EJ_r} \cdot e_{m,m}; \quad t_m = \frac{r^3 \cdot T_{m,e}}{2 EJ_r} \cdot \tau_{m,m}.$$

$$\left. \begin{aligned} u_{r,m} &= \frac{\int_0^b y^2 ds}{EJ_b} \cdot (H_0 \cdot \cos \varphi_m - n \cdot H_{m,e} \cdot \cos^2 \varphi_m - n \cdot T_{m,e} \cdot \sin \varphi_m \cdot \cos \varphi_m) - \\ &\quad - \frac{r^3 H_{m,e}}{2 EJ_r} \cdot e_{m,m} = H_{m,e} \cdot \frac{\int_0^b y^2 ds}{EJ_b} \\ v_{r,m} &= \frac{\int_0^b y^2 ds}{EJ_b} \cdot (H_0 \cdot \sin \varphi_m - n \cdot H_{m,e} \cdot \sin \varphi_m \cdot \cos \varphi_m - n \cdot T_{m,e} \cdot \sin^2 \varphi_m) - \\ &\quad - \frac{r^3 T_{m,e}}{2 EJ_r} \cdot \tau_{m,m} = T_{m,e} \cdot \frac{b^3}{3 EJ_S} \end{aligned} \right\} 33)$$

Aus Gleichung 32) ist nach vorher aus Gleichung 8) errechneten H_0 , $H_{m,e}$ und $T_{m,e}$ zu bestimmen.

Ist auch ein elastischer Fußring vorhanden, so ist

- a) H_0 aus der Gleichungsgruppe 8') vorzubestimmen,
- b) in Gleichung 33) einzuführen:

$$\delta_m = \frac{H_{m,e} \cdot e_{m,m}}{2 E} \cdot \left(\frac{r^3}{J_r} + \frac{R^3}{J_R} \right); \quad t_m = \frac{T_{m,e} \cdot \tau_{m,m}}{2 E} \cdot \left(\frac{r^3}{J_r} + \frac{R^3}{J_R} \right).$$

Sind mehrere Nebenrippenpaare 2, 3, 4 ... m ($\varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_m$) vorhanden mit entsprechenden $H_{2,e}, T_{2,e}; H_{3,e}, T_{3,e} \dots H_{m,e}, T_{m,e}$, so existiert für jede Rippe m ein Gleichungspaar $u_{r,m}, v_{r,m}$, z. B. für Rippe 2:

$$\left. \begin{aligned} u_{r,2} &= \frac{\int_0^b y^2 ds}{EJ_b} \cdot \cos \varphi_2 \cdot \\ &\quad \cdot [H_0 - n \cdot (H_{2,e} \cdot \cos \varphi_2 + H_{3,e} \cdot \cos \varphi_3 + \dots H_{m,e} \cdot \cos \varphi_m + \\ &\quad + T_{2,e} \cdot \sin \varphi_2 + T_{3,e} \cdot \sin \varphi_3 + \dots T_{m,e} \cdot \sin \varphi_m)] - \\ &\quad - \frac{r^3}{2 EJ_r} \cdot (H_{2,e} \cdot e_{2,2} + H_{3,e} \cdot e_{3,2} + \dots H_{m,e} \cdot e_{m,2}) = H_{2,e} \cdot \frac{\int_0^b y^2 ds}{EJ_b} \\ v_{r,2} &= \frac{\int_0^b y^2 ds}{EJ_b} \cdot \sin \varphi_2 \cdot \\ &\quad \cdot [H_0 - n \cdot (H_{2,e} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_{m,e} \cdot \cos \varphi_m + T_{2,e} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_{m,e} \cdot \sin \varphi_m)] \\ &\quad - \frac{r^3}{2 EJ_r} \cdot (T_{2,e} \cdot \tau_{2,2} + T_{3,e} \cdot \tau_{3,2} + \dots T_{m,e} \cdot \tau_{m,2}) = T_{2,e} \cdot \frac{b^3}{3 EJ_S} \end{aligned} \right\} 33')$$

Anmerkung: In den Gleichungen 33) und 33') ist eine Vernachlässigung des Einflusses der Tangentialkräfte auf die radialen Verschiebungen und umgekehrt der Schübe auf die tangentiellen Verschiebungen erfolgt, da diese sekundären Verschiebungen sehr klein sind.

Die Biegungseinflußwerte $\delta = f(T_e)$ und $\tau = f_1(H_e)$ sind daher auch nicht ermittelt worden. Der Weg zur Berücksichtigung dieser Einflüsse ist nach dem oben Dargelegten einfach zu finden, doch gestaltet sich die Ermittlung dieser Biegungseinflußwerte recht umständlich.

Es erübrigt nun noch, die halbsymmetrischen Kräfte bei mehreren elastischen Ringen und Rippen aufzusuchen.

Es bezeichne wieder im folgenden:

H_2^0, H_1^0 die Schübe des Hauptsystems am Ring 2 bzw. 1, errechnet unter Berücksichtigung der vollsymmetrischen Formänderungen nach Gleichungen 18). (In den Gleichungen 18) entspricht der Bezeichnung H_2^0 der Wert $X_2^{(1)}$, dem Werte $X_1^{(1)}$ die Bezeichnung H_1^0 .)

Die halbsymmetrischen Schübe und Tangentialkräfte der einzelnen Rippen sind bezeichnet

$$\begin{array}{l} \text{am Ring 2} \\ \text{am Ring 1} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} H_2^{(2,e)}, H_2^{(3,e)} \dots H_2^{(m,e)} \\ T_2^{(2,e)}, T_2^{(3,e)} \dots T_2^{(m,e)} \\ H_1^{(2,e)}, H_1^{(3,e)} \dots H_1^{(m,e)} \\ T_1^{(2,e)}, T_1^{(3,e)} \dots T_1^{(m,e)} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{am Fußring ist sodann} \\ H_f^{(2,e)} = H_2^{(2,e)} + H_1^{(2,e)} \\ T_f^{(2,e)} = T_2^{(2,e)} + T_1^{(2,e)} \end{array}$$

Es bezeichne weiter:

$$\begin{array}{ll} u_{r,2}^{(2)}, u_{r,2}^{(3)} \dots u_{r,2}^{(m)} & \text{die radialen resultierenden Verschiebungen am Ring 2,} \\ u_{r,1}^{(2)}, u_{r,1}^{(3)} \dots u_{r,1}^{(m)} & \text{„ „ „ „ „ 1,} \\ v_{r,2}^{(2)}, v_{r,2}^{(3)} \dots v_{r,2}^{(m)} & \text{„ tangentiellen „ „ „ 2,} \\ v_{r,1}^{(2)}, v_{r,1}^{(3)} \dots v_{r,1}^{(m)} & \text{„ „ „ „ „ 1.} \end{array}$$

Für jede beliebige Rippe m ergeben sich bei den (außer dem eventuellen Fußring) angenommenen zwei Ringen 2×2 Verschiebungsgleichungen für die vier Unbekannten $H_2^{(m,e)}, H_1^{(m,e)}, T_2^{(m,e)}, T_1^{(m,e)}$:

$$\left. \begin{array}{l} u_{r,2}^{(m)} = A_{r,2} \cdot \cos \varphi_m - \Sigma H^{(e)} \cdot e_{(m)} \\ v_{r,2}^{(m)} = A_{r,2} \cdot \sin \varphi_m - \Sigma T^{(e)} \cdot \tau_{(m)} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} u_{r,1}^{(m)} = A_{r,1} \cdot \cos \varphi_m - \Sigma H^{(e)} \cdot e_{(m)} \\ v_{r,1}^{(m)} = A_{r,1} \cdot \sin \varphi_m - \Sigma T^{(e)} \cdot \tau_{(m)} \end{array} \right.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichungen 19') ergibt sich:

$$EJ_b \cdot A_{r,2} = [H_2^0 - n \cdot (H_2^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_2^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_2^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \cdot Y_{2,2} + [H_1^0 - n \cdot (H_1^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_1^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_1^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_1^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \cdot Y_{1,2}$$

und

$$EJ_b \cdot A_{r,1} = [H_2^0 - n \cdot (H_2^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_2^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_2^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \cdot Y_{1,2} + [H_1^0 - n \cdot (H_1^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots T_1^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \cdot Y_{1,1}$$

Dann ergeben sich die Verschiebungsgleichungen z. B. für Rippe m :

$$\left. \begin{aligned}
 u_{r,2}^{(m)} \cdot EJ_b &= Y_{2,2} \cdot \cos \varphi_m \cdot [H_2^0 - n \cdot (H_2^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_2^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_2^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \\
 &- \left(\frac{J_b}{2}\right) \cdot \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r_2^3}{J_{r,2}}\right) \cdot [H_2^{(2,e)} \cdot e_{2,m} + \dots H_2^{(m,e)} \cdot e_{m,m}] \\
 &+ Y_{1,2} \cdot \cos \varphi_m \cdot [H_1^0 - n \cdot (H_1^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_1^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_1^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_1^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \\
 &= H_2^{(m,e)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(m,e)} \cdot Y_{1,2}
 \end{aligned} \right\} 34a)$$

analog die übrigen drei Verschiebungen: $u_{r,1}^{(m)}, v_{r,2}^{(m)}, v_{r,1}^{(m)} \dots \dots \dots$ 34b, c, d)

Die Verschiebungsgleichung für $v_{r,2}^{(m)}$ stellt sich unter Benutzung der Beziehungen 21a) und 21b) wie folgt dar:

$$\left. \begin{aligned}
 J_b \cdot E \cdot v_{2,r}^{(m)} &= \sin \varphi_m \cdot \left\{ [H_2^0 - n (H_2^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots H_2^{(m,e)} \cdot \cos \varphi_m + T_2^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_2^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \right. \\
 &\cdot Y_{2,2} + [H_1^0 - n (H_1^{(2,e)} \cdot \cos \varphi_2 + \dots + T_1^{(2,e)} \cdot \sin \varphi_2 + \dots T_1^{(m,e)} \cdot \sin \varphi_m)] \cdot Y_{1,2} \left. \right\} \\
 &- \left(\frac{J_b}{2}\right) \cdot \left(\frac{r_2^3}{J_{r,2}} + \frac{R^3}{J_R}\right) \cdot [T_2^{(2,e)} \cdot \tau_{2,m} + T_2^{(3,e)} \cdot \tau_{3,m} + \dots T_2^{(m,e)} \cdot \tau_{m,m}] \\
 &= \left(\frac{J_b}{J_S}\right) \cdot (\psi \cdot T_2^{m,e} + \chi \cdot T_1^{m,e})
 \end{aligned} \right\} 34c)$$

[Für die Aufstellung der Verschiebungsgleichung $v_{1,r}^{(m)}$ sind sinngemäß die Einflußwerte σ und τ (letzteres nicht mit dem Ringbiegungseinflußwert τ zu verwechseln) der Beziehung 21b) an Stelle von ψ und χ anzuwenden.]

11. Anwendung des Verfahrens auf die Winddruckberechnung von Rippenkuppeln.

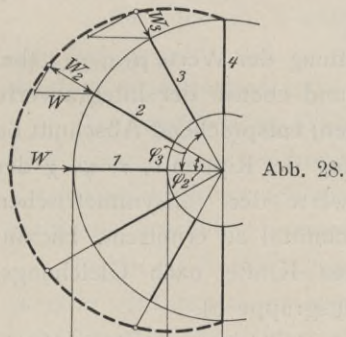


Abb. 28.

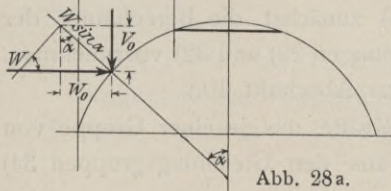


Abb. 28a.

Der Winddruck W kann zweckmäßig mit seiner Richtung in eine Rippenenebene fallend angenommen werden (Rippe 1). Die auf die Rippen 2, 3, 4 ... im Grundrisse entfallenden Winddrücke sind dann:

$$\begin{aligned}
 W_2 &= W \cdot \cos \varphi_2; \\
 W_3 &= W \cdot \cos \varphi_3 \dots \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Im Aufrisse ist in den anzunehmenden Bogenteilpunkten eine Zerlegung in

$$\begin{aligned}
 W_0 &= W \cdot \sin^2 \alpha \\
 \text{und} \\
 V_0 &= \frac{W}{2} \cdot \sin 2 \alpha
 \end{aligned}$$

vorzunehmen. Die entsprechenden Seitenkräfte der Nachbarrippen werden erhalten:

$$\begin{aligned}
 W_0^{(2)} &= W \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi_2 \dots \dots W_0^{(m)} = W \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos \varphi_m \\
 V_0^{(2)} &= \frac{W}{2} \cdot \sin 2 \alpha \cdot \cos \varphi_2 \dots \dots V_0^{(m)} = \frac{W}{2} \cdot \sin 2 \alpha \cdot \cos \varphi_m.
 \end{aligned}$$

Es empfiehlt sich nun, die Ermittlung der Windseitenkräfte für die Mittelpunkte der Bogenelemente vorzunehmen, welche sich durch Teilung nach „konstanter Bogengröße“ ergeben (siehe Abschnitt 2).

Es braucht nicht erst erwähnt zu werden, daß sämtliche Entwicklungen der vorigen Abschnitte auch für horizontale Kraftangriffe gelten, da die von der Belastung abhängigen Integralwerte μ (Abschnitt 6, Gleichung 16) ein Konsolenmoment M_0 des statisch bestimmten Falles des Hauptsystems enthalten, das ebensowohl durch horizontalen Angriff entstanden sein kann.

Da die Berechnung stets ein belastetes Hauptsystem und unbelastete Nebenrippen voraussetzt, muß die Berechnung so durchgeführt werden, daß die unbekanntenen Schübe und Tangentialkräfte hintereinander für folgende Fälle ermittelt und dann algebraisch zusammengelegt werden:

1. Rippe 1 mit den auf sie entfallenden Belastungen $W_0^{(1)}$, $V_0^{(1)}$ als Hauptsystem, alle anderen Rippen unbelastet als Nebenrippen;
2. Rippe 2 mit den auf sie entfallenden Belastungen $W_0^{(2)}$, $V_0^{(2)}$ als Hauptsystem, alle anderen als unbelastete Nebenrippen usw.

Natürlich braucht die Ermittlung der Unbekannten nur für den ersten Fall durchgeführt zu werden, da für die weiteren Fälle dieselben aus den zuerst ermittelten durch Multiplizieren mit $\cos \varphi_2$, $\cos \varphi_3$ usw. erhalten werden.

Der Berechnungsgang selbst wird sich bei strenger Anwendung des ganzen Verfahrens (man beachte die vorgenommene Vernachlässigung zu Gleichungen 32) und 33) wie folgt gestalten.

Nach analytischer oder graphischer Ermittlung der Werte $\mu_{1,1}$, $\mu_{2,2}$ (bei mehr als 3 Ringen der entsprechend übrigen) und ebenso der Integralwerte $Y_{1,1}$, $Y_{1,2}$, $Y_{2,2}$ (entsprechend eventuell der übrigen) entsprechend Abschnitt 6a und den ähnlichen Einflußwerten der Querbiegung der Rippen σ , τ , ψ , χ der Gleichungen 21a) und 21b) sind die Einflußwerte der vollsymmetrischen Ringformänderung K_0 , K_φ , $K_{2\varphi}$ usw. nach Abschnitt 4 zu ermitteln. Hierauf erfolgt die Bestimmung der vollsymmetrischen Kräfte nach Gleichungsgruppe 18) (ohne Zwischenringe nach Gleichungsgruppe 8).

Für die sodann folgende Ermittlung der halbsymmetrischen Kraftgruppen ist (für elastische Ringe wie oben) zunächst die Berechnung der Ringbiegungseinflußwerte e und τ nach Gleichungen 29) und 32) vorzunehmen. (Besondere Ausdrücke für $e_{2,2}$, $e_{3,3}$ usw. siehe Abschnitt 10.)

Hierauf sind die halbsymmetrischen Kräfte aus je einer Gruppe von Verschiebungsgleichungen für jede Rippe aus den Gleichungsgruppen 34) zu ermitteln.

Dies geschehen, sind die erhaltenen voll- und halbsymmetrischen Kräfte mit richtigem Vorzeichen zu addieren, und zwar getrennt für jeden der oben beschriebenen Winddruckbelastungsfälle.

Hierauf sind die für die verschiedenen Belastungsfälle erhaltenen Gesamt-schübe und -Tangentialkräfte algebraisch für jeden der Angriffspunkte zusammenzuzählen.

Damit sind alle äußeren Kräfte ermittelt. Die Ringmomente sind dann durch Superposition je zweier vollsymmetrischer Kräfte und je eines Paares halbsymmetrischer Kräfte mit Hilfe der Beziehungen 1), 23) und 26) für die statisch unbestimmten Ringgrößen zu ermitteln.

Die genaue Anwendung des Verfahrens ist insbesondere wegen der langwierigen Ermittlung der Ringbiegungseinflußwerte*) und der großen Zahl von Gleichungen bei mehreren Rippen und Ringen sehr zeitraubend.

Es ist daher von Wichtigkeit, sich darüber klar zu werden, ob in den etwa bei der Berechnung vorzunehmenden Vernachlässigungen größere oder unbedeutendere Fehler als in den Annahmen des Verfahrens von vornherein liegen.

a) Der erste und wichtigste Annahmefehler des Systems liegt für Fälle der Praxis in der Nichteinbeziehung der zwischen Rippen und Ringe gespannten Decken (zumeist gleichfalls Eisenbetondecken), deren unzweifelhaft stark versteifende Wirkung nicht in der Rechnung erscheint. Die Berücksichtigung dieser Wirkung setzte die Lösung des Problems der glatten, einseitig belasteten, biegungssteifen Kuppel voraus, welche noch nicht existiert.

b) Die in der Einleitung bereits erwähnten Annahmefehler der gewählten Lagerung, welche von der Übertragung der Querkräfte absieht und die vertikalen Ringbiegungen sowie Torsionen ausschaltet.

c) Für den im Verfahren eventuell angenommenen Fußring herrscht der Widerspruch, daß er absolut verdrehungsfest, aber im radialen Sinne elastisch angenommen ist.

Der versteifenden Wirkung der Kuppeldecken kann zweckmäßig durch Einbeziehung eines bestimmten Teiles derselben für die Ermittlung der Ringträgheitsmomente $J_R, J_{r,1}, J_{r,2}$ usw. annähernd Rechnung getragen werden.

Durch die Entwicklungen der vorhergehenden Abschnitte wird konstatiert werden können, welche Fehler bei folgenden beabsichtigten Vernachlässigungen zu erwarten sind.

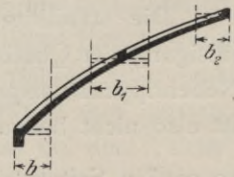


Abb. 29.

1. Vernachlässigung der Rippenquerbiegung.

Angenommene Rippenform: flache Parabel.

Kopfring $r = 2$ m; Fußring $R = 12$ m; $b = 10$ m; Pfeil $f = 4$ m

$$\frac{J_b}{J_s} = 1. \quad \int_0^b y^2 ds = \frac{f^2 \cdot b}{5} = \frac{16 \cdot 10}{5} = 32.$$

*) Für die häufig vorkommenden Winkelwerte ist eine Tabelle der Ringbiegungseinflußwerte am Schluß gegeben.

$$a) \varphi_m = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Nach Gleichung 14) } H_m = \frac{X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{4} + 2 \cdot \frac{2}{4} \cdot 1 \cdot \frac{3 \cdot 32}{(10)^3}} = 0,338 X.$$

$$\text{Nach Gleichung 15) } T_m = \frac{X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{(10)^3}{3 \cdot 32} \cdot 1 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{2}{4}\right) + 2 \cdot \frac{2}{4}} = 0,0323 X$$

Der Fehler der Vernachlässigung durch T_m beträgt somit etwa 9,5 vH.

$$b) \varphi_m = \frac{\pi}{2}. \quad \max T_m = \frac{X \cdot 1}{\frac{(10)^3}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} + 2 \cdot 1} = 0,08 X.$$

Der Wert von H_m in a) käme bei Vernachlässigung von T_m auf

$$H_m = \frac{X \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{2}{4}} = X \cdot 0,353.$$

Die auf das Hauptsystem übertragene Kraft wäre bei Vernachlässigung von T_m :

$$n \cdot H_m \cdot \cos \varphi_m = X \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,353 = 0,499 X,$$

mit Berücksichtigung von T_m

$$n(H_m \cdot \cos \varphi_m + T_m \cdot \sin \varphi_m) = \left[2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,338 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,0323 \right] \cdot X = 0,524 X.$$

Die stabilisierende Kraft am Hauptsystem fällt somit bei Vernachlässigung der Querbiegung um etwa 5 vH. geringer aus, während die radiale Nebenrippenbeanspruchung um 5 vH. größer ausfällt. Die Vernachlässigung ist also nicht bedeutend und erhöht die Sicherheit selbst bei Annahme einer so großen Seitensteifigkeit der Rippen wie $\left(\frac{J_b}{J_s}\right) = 1$, die gewöhnlich nicht vorkommt.

2. Vernachlässigung der Ringformveränderlichkeit für die halbsymmetrischen Kräfte.

Zur Untersuchung des Einflusses der Vernachlässigung der Ringelastizität für die Ermittlung der halbsymmetrischen Kräfte ist nur die Veränderung der halbsymmetrischen Schübe zu untersuchen, da die Tangentialkräfte zufolge 1. beim Näherungsverfahren ausscheiden.

Der Einfluß ist erkennbar aus 30):

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot \cos \varphi_m}{1 + n \cdot \cos^2 \varphi_m + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{J_b}{J_R} \right) \cdot R^3 + \left(\frac{J_b}{J_r} \right) \cdot r^3 \right] \cdot \frac{e_{m,m}}{b} \int_0^b y^2 ds}$$

für $\varphi_m = \frac{\pi}{4}$; $\left(\frac{J_b}{J_R} \right) = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{J_b}{J_r} \right) = 1$; $R = 12$; $r = 2$ m

$$e_{m,m} = \left[\varphi_m - \sin \varphi_m \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_m^2}{\pi} \cdot \sin \varphi_m \right) \right] = 0,089$$

$$H_{m,e} = \frac{H_0 \cdot 0,7071}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} \cdot 1728 + 8 \right) \cdot \frac{0,089}{64}} = \frac{H_0 \cdot 0,7071}{2 + 0,955}$$

Im Falle angenommener Starre der Ringe ($J_R = J_r = \infty$):

$$H_m = \frac{H_0 \cdot 0,7071}{2}$$

Es wird daher bei der Bestimmung der halbsymmetrischen Schübe ein Fehler von etwa 30 vH. begangen und, da der halbsymmetrische Schub maximal etwa ein Drittel des Hauptsystemschubes beträgt, ein Fehler von etwa 10 vH. in bezug auf diesen. Die stabilisierende Kraft am Hauptsystem verändert sich um

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{10}{100} \cdot H_0 = \frac{14}{100} \cdot H_0,$$

also um etwa 14 vH. Es wird demnach bei Annahme starrer Ringe für die Hauptrippen zu günstig, für die Nebenrippen zu ungünstig gerechnet.

Die vorliegenden Fehlergrenzen gelten natürlich nur für die eben getroffenen Annahmen.

Bei der Berechnung praktischer Fälle wird es demnach dem Konstrukteur überlassen bleiben, auf Grund einer mehr oder minder möglichen Einschätzung der in Betracht kommenden Ringträgheitsmomente das Verfahren mehr oder weniger weit auszudehnen. Dabei wird er sich stets bewußt sein müssen, daß nur Genauigkeitsgrenzen in Betracht kommen können, die dem Fehlerbereich der Annahmen entsprechen.

Rechnungsbeispiel für eine parabolische Rippenkuppel, bestehend aus drei Ringen und acht Rippen auf einseitigen Lastangriff.

Annahmen:

Rippenform flach parabolisch: $y = \frac{f}{b^2} \cdot x^2$; $R = 15$ m; $r_1 = 12$ m,

$r_2 = 2$ m; $b = 13$ m; $f = 7$ m; $h = \frac{7}{13^2} \cdot (12 - 2)^2 = 4,15$ m.

Laststellung: $a = 10$ m.

Bestimmung der Konstanten und Belastungswerte nach Gleichung 16:*)

$$\mu_{2,2} = \int_0^A M_0 y dx = \frac{f}{b^2} \cdot \left[\frac{a^4}{36} + \frac{a^2}{2} \cdot \left(b - \frac{a}{3} \right)^2 \right] = 206$$

$$\mu_{1,1} = \int_B^A M_0 y_1 dx = \int_{(r_1-r_2)}^{(R-r_2)} \left(\frac{f}{b^2} \cdot x^2 - h \right) \cdot M_0 dx; \quad M_0 = x - b + a$$

$$\mu_{1,1} = \frac{f}{b^2} \cdot \left[\underset{(r_1-r_2)}{(a-b) \cdot \int x^2 dx} + \underset{(r_1-r_2)}{\int x^3 dx} \right] -$$

$$- h \cdot \left[\underset{(r_1-r_2)}{(a-b) \cdot \int dx} + \underset{(r_1-r_2)}{\int x dx} \right] = 37$$

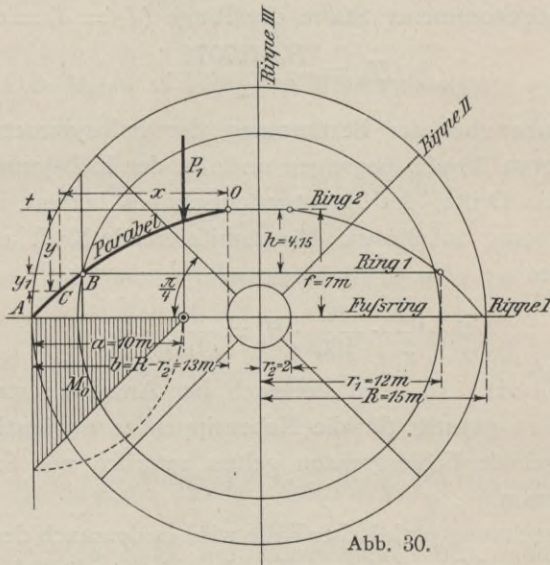


Abb. 30.

$$Y_{2,2} = \frac{f^2 b}{5} = \int_0^A y^2 dx = 128$$

$$Y_{1,1} = \int_B^A y_1^2 dx = \frac{f^2}{5 b^4} \cdot [(R - r_2)^5 - (r_1 - r_2)^5] -$$

$$- \frac{2 h f}{3 b^2} \cdot [(R - r_2)^3 - (r_1 - r_2)^3] + h^2 \cdot (R - r_1) = 6,6$$

$$Y_{1,2} = \int_B^A y y_1 dx = \frac{f^2}{5 b^4} [(R - r_2)^5 - (r_1 - r_2)^5] -$$

$$- \frac{h f}{3 b^2} \cdot [(R - r_2)^3 - (r_1 - r_2)^3] = 24.$$

*) Sämtliche Ausrechnungen dieses Beispiels sind mit dem Rechenstabe durchgeführt, daher mit Genauigkeitsfehlern behaftet. Um die Fehler bei der Berechnung der sehr kleinen Biegungeinflußwerte der Ringe für weitere Fälle der Praxis möglichst einzuschränken, sind Tabellen dieser Werte für die gebräuchlichsten Winkel am Schlusse angegeben.

Zu Vergleichszwecken seien die Schübe am Hauptsystem (Rippe I) allein, unter der Annahme starrer Ringe, vorerst ermittelt.

Nach Gleichung 16:

$$\left. \begin{aligned} 256 X_2 + 48 X_1 &= 206 \\ 48 X_2 + 13,2 X_1 &= 37 \end{aligned} \right\}$$

hieraus $X_2 = + 0,88$; $X_1 = - 0,41$. Fußring: $X_1 + X_2 = 0,47$.

Fehlte der Zwischenring 1, so ergibt sich

$$X = \frac{\mu_{2,2}}{Y_{2,2}} = \frac{206}{256} = 0,81.$$

Biegungseinflußwerte der vollsymmetrischen Ringformänderung:

$$K_0 = - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) = - 0,151$$

$$K_{\frac{\pi}{2}} = K_{\varphi_2} = + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) = + 0,137$$

$$\begin{aligned} K_{\varphi_1} &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{\pi} + \cos \varphi_1 \cdot \left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2} \right) - \sin \varphi_1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] = + 0,0077. \end{aligned}$$

Da das negative Vorzeichen eine Ringbiegung nach innen hier bezeichnet, müssen die Biegungseinflußwerte sämtlich mit umgekehrten Vorzeichen in die folgenden Gleichungsgruppen eingeführt werden. Ein positiv aus diesen Gleichungen erhaltener Schub am Ring 2 oder Ring 1 beansprucht dann diesen Ring auf Druck.

Annahmen bezüglich Trägheitsmomente:

$$\frac{J_b}{J_{r,2}} = 1; \quad \frac{J_b}{J_{r,1}} = \frac{1}{3}; \quad \frac{J_b}{J_R} = \frac{1}{5}.$$

Unter Einführung der oben ermittelten $\mu_{1,1}$; $\mu_{2,2}$; $Y_{2,2}$; $Y_{1,2}$; $Y_{1,1}$ sowie K_0 ; $K_{\frac{\pi}{4}}$; $K_{\frac{\pi}{2}}$ ergeben sich nach 18) folgende Gleichungen der vollsymmetrischen Ringformänderungen:

$$\begin{aligned} 2 E J_b \cdot \delta_2^{(1)} &= \left(\frac{2^3}{1} + \frac{15^3}{5} \right) \cdot [0,151 X_2^{(1)} - 0,015 X_2^{(2)} - 0,137 X_2^{(3)}] \\ &= 206 - 256 X_2^{(1)} - 48 X_1^{(1)} \dots \dots \dots 1a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{und } 2 E J_b \cdot \delta_1^{(1)} &= \left(\frac{12^3}{3} + \frac{15^3}{5} \right) \cdot [0,151 X_1^{(1)} - 0,015 X_1^{(2)} - 0,137 X_1^{(3)}] \\ &= 37 - 48 X_2^{(1)} - 13,2 X_1^{(1)} \dots \dots \dots 1b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 E J_b \cdot \delta_2^{(2)} &= \left(\frac{2^3}{1} + \frac{15^3}{5} \right) \cdot \\ &\cdot [(0,151 - 0,137) X_2^{(2)} - 0,0077 X_2^{(1)} - 0,0077 X_2^{(3)}] \\ &= - 256 X_2^{(2)} - 48 X_1^{(2)} \dots \dots \dots 2a) \end{aligned}$$

$$\text{und } 2 E J_b \cdot \delta_1^{(2)} = \left(\frac{12^3}{3} + \frac{15^3}{5} \right) \cdot [(0,151 - 0,137) X_1^{(2)} - 0,0077 X_1^{(1)} - 0,0077 X_1^{(3)}] \\ = -48 X_2^{(2)} - 13,2 X_1^{(2)} \dots \dots \dots 2b)$$

$$2 E J_b \cdot \delta_2^{(3)} = \left(\frac{2^3}{1} + \frac{15^3}{5} \right) \cdot [0,151 X_2^{(3)} - 0,015 X_2^{(2)} - 0,137 X_2^{(1)}] \\ = -256 X_2^{(3)} - 48 X_1^{(3)} \dots \dots \dots 3a)$$

$$2 E J_b \cdot \delta_1^{(3)} = \left(\frac{12^3}{3} + \frac{15^3}{5} \right) \cdot [0,151 X_1^{(3)} - 0,015 X_1^{(2)} - 0,137 X_1^{(1)}] \\ = -48 X_2^{(3)} - 13,2 X_1^{(3)} \dots \dots \dots 3b)$$

Es ergeben sich durch Auflösung dieser sechs Gleichungen die vollsymmetrischen Schübe

am Ring 2	am Ring 1	am Fußring
$X_2^{(1)} = + 0,551$	$X_1^{(1)} = + 0,344$	$X_2^{(1)} + X_1^{(1)} = + 0,895$
$X_2^{(2)} = - 0,031$	$X_1^{(2)} = + 0,276$	$X_2^{(2)} + X_1^{(2)} = + 0,245$
$X_2^{(3)} = + 0,103$	$X_1^{(3)} = + 0,304$	$X_2^{(3)} + X_1^{(3)} = + 0,407$

Wären die Ringe starr, so ergibt sich (siehe oben) $X_2^{(1)} = + 0,88$, $X_1^{(1)} = - 0,41$; weitere vollsymmetrische Schübe treten nicht auf.

Die halbsymmetrischen Kräfte mögen an diesem praktischen Rechnungsbeispiel unter Ausschluß der Tangentialkräfte wegen des geringen Einflusses derselben ermittelt werden.

Zunächst sind die Ringbiegungseinflußwerte zu berechnen.

Nach Gleichung 28):

$$e_{m,m} = e_{2,2} = \left[\varphi_m - \sin \varphi_m \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_m^2}{\pi} \cdot \sin \varphi_m \right) \right] \\ = \left[\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} \right)^2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = 0,0891,$$

ferner für $\varphi_m = \frac{\pi}{2}; \varphi_a = \frac{\pi}{4};$

nach Gleichung 29):

$$e_{m,a} = e_{3,2} = \left[\cos \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varphi_a \right) \cdot \varphi_a - \sin \varphi_a \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \varphi_a \cdot \frac{\pi}{2}}{\pi} \cdot \sin \varphi_m \right) \right] = 0,$$

ebenso für $\varphi_m = \frac{\pi}{4}; \varphi_a = 0; e_{m,a} = e_{2,1}$

$$= \left[\cos \cdot (\varphi_m - 0) \cdot 0 - \sin 0 \cdot \left(\cos \varphi_m + \frac{2 \cdot 0 \cdot \varphi_m}{\pi} \cdot \sin \varphi_m \right) \right] = 0.$$

In den Gleichungsgruppen 34) ist $H_2^0 = X_2^{(1)}$ der Gleichung 18) und $H_1^0 = X_1^{(1)}$.

Diese Gleichungen sind dann im besonderen Falle

$$u_{r,2}^{(2)} \cdot EJ_b = Y_{2,2} \cdot \{ \cos \varphi_2 \cdot [H_2^0 - n \cdot H_2^{(2e)} \cdot \cos \varphi_2] \} \\ + Y_{1,2} \cdot \{ \cos \varphi_2 \cdot [H_1^0 - n \cdot H_1^{(2e)} \cdot \cos \varphi_2] \} \\ - \frac{J_b}{2} \cdot \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r_2^3}{J_{r,2}} \right) \cdot H_2^{(2e)} \cdot e_{2,2} = H_2^{(2e)} \cdot Y_{2,2} + H_1^{(2e)} \cdot Y_{1,2}$$

$$u_{r,1}^{(2)} \cdot EJ_b = Y_{1,2} \cdot \{ \cos \varphi_2 \cdot [H_2^0 - n \cdot H_2^{(2e)} \cdot \cos \varphi_2] \} \\ + Y_{1,1} \cdot \{ \cos \varphi_2 \cdot [H_1^0 - n \cdot H_1^{(2e)} \cdot \cos \varphi_2] \} \\ - \frac{J_b}{2} \cdot \left(\frac{R^3}{J_R} + \frac{r_1^3}{J_{r,1}} \right) \cdot [H_1^{(2e)} \cdot e_{2,2}] = H_2^{(2e)} \cdot Y_{1,2} + H_1^{(2e)} \cdot Y_{1,1}$$

$$u_{r,2}^{(2)} \cdot EJ_b = 128 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0,551 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_2^{(2e)} \right] \\ + 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0,344 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_1^{(2e)} \right] \\ - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15^3}{5} + \frac{2^3}{1} \right) \cdot 0,0891 \cdot H_2^{(2e)} = 128 \cdot H_2^{(2e)} + 24 \cdot H_1^{(2e)}$$

$$u_{r,1}^{(2)} \cdot EJ_b = 24 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0,551 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_2^{(2e)} \right] \\ + 6,6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[0,344 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot H_1^{(2e)} \right] \\ - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15^3}{5} + \frac{12^3}{3} \right) \cdot 0,0891 \cdot H_1^{(2e)} = 24 \cdot H_2^{(2e)} + 6,6 \cdot H_1^{(2e)}$$

Hieraus bestimmt sich $H_2^{(2e)} = + 0,19$; $H_1^{(2e)} = + 0,026$.

Auf die Hauptrippe I somit

$$\text{am Ring 2: } n \cdot \cos \varphi_2 \cdot H_2^{(2e)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,19 = 0,269,$$

$$\text{am Ring 1: } n \cdot \cos \varphi_2 \cdot H_1^{(2e)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,026 = 0,0367.$$

Zum Vergleich seien wieder die halbsymmetrischen Kräfte bei starren Ringen ermittelt:

$$\text{Nach Gleichung 20): } \frac{206}{2} \cdot \cos \varphi_2 - 2 \cdot V^{(2)} \cdot \cos^2 \varphi_2 = V^{(2)}$$

$$\frac{37}{2} \cdot \cos \varphi_2 - 2 \cdot U^{(2)} \cdot \cos^2 \varphi_2 = U^{(2)}$$

ergibt

$$V^{(2)} = 36,4 \cdot U^{(2)} = 6,5,$$

$$\text{somit } \left. \begin{array}{l} 128 H_2^{(2)} + 24 \cdot H_1^{(2)} = 36,4 \\ 24 H_2^{(2)} + 6,6 \cdot H_1^{(2)} = 6,5 \end{array} \right\} H_2^{(2)} = + 0,315; \quad H_1^{(2)} = - 0,16. *)$$

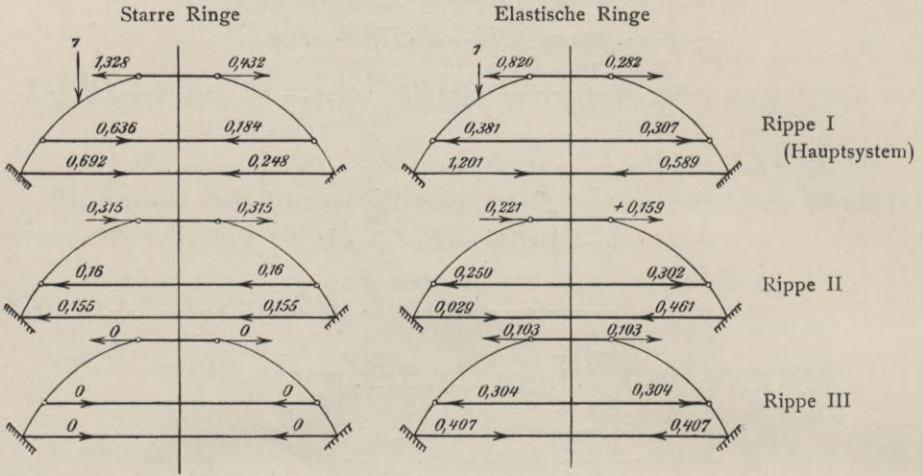
*) Auf das Hauptsystem wirkt

$$\text{am Ring 2: } n \cdot \cos \varphi_2 \cdot H_2^{(2)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,315 = 0,448,$$

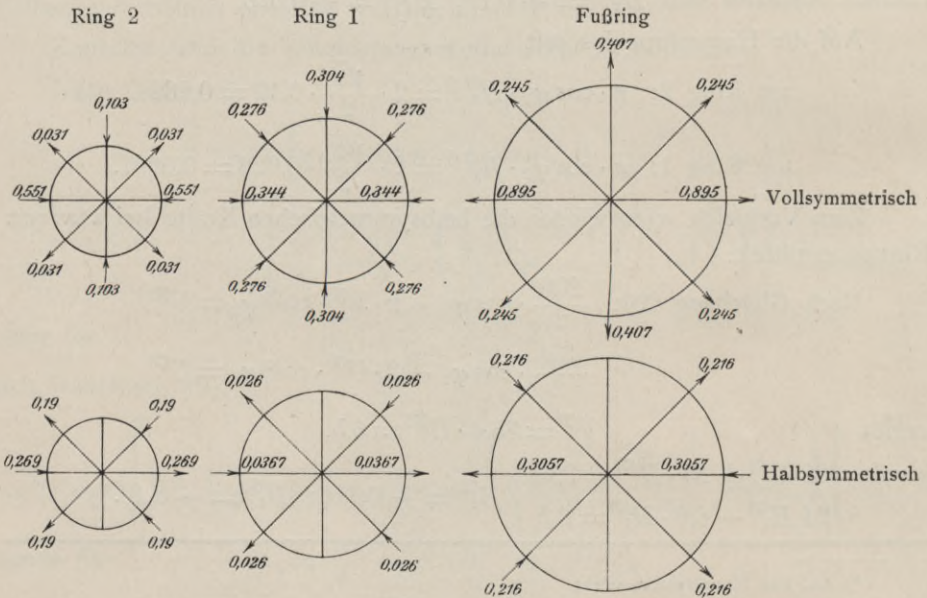
$$\text{am Ring 1: } n \cdot \cos \varphi_2 \cdot H_1^{(2)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-0,16) = - 0,226.$$

In nachstehenden Abbildungen sind die resultierenden Schübe der Rippen für diese und die Ringe dargestellt, also die Teilsysteme zur Ermittlung der inneren Kräfte frei gemacht.

a) Äußere Kräfte der Rippen.



b) Äußere Kräfte der Ringe.



Hiermit ist die Aufgabe gelöst. Die Rippenmomente sind nach

$$M_x = M_0 - X_2 \cdot y - X_1 \cdot y_1$$

und die Ringmomente durch Superposition je zweier diametraler vollsymmetrischer Kräfte nach

$$M_c = -\frac{Hr}{2} \left(\cos \varphi - \frac{2}{\pi} \right)$$

und der halbsymmetrischen nach

$$X = -Z \cdot \frac{r}{\pi} \sin \varphi_1 (\pi - 2 \varphi_1)$$

und den sich mit dieser Unbestimmten ergebenden Winkelwerten der Momente zu bestimmen.

Nachfolgend noch eine Tabelle aller Ringbiegungseinflußwerte für die in der Praxis zumeist verwendeten Winkel der Rippenlagen.

Tabelle für K_φ , e und τ .

φ°	K_φ	$e_{m,m}$	$\tau_{m,m}$
90	+ 0,1366	+ 0	+ 0,0379
75	+ 0,1198	+ 0,0412	+ 0,03246
67½	+ 0,09954	+ 0,0704	+ 0,0258
60	+ 0,0727	+ 0,0906	+ 0,0179
45	+ 0,00538	+ 0,08904	+ 0,00656
30	- 0,0668	+ 0,04695	+ 0,00123
22½	- 0,0989	+ 0,0248	+ 0,00035
15	- 0,1250	+ 0,0089	+ 0,00015
0	- 0,1488	+ 0	+ 0

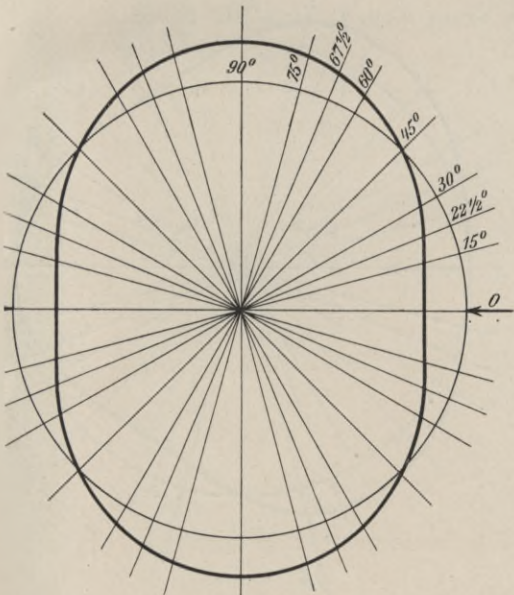


Abb. für K_φ .

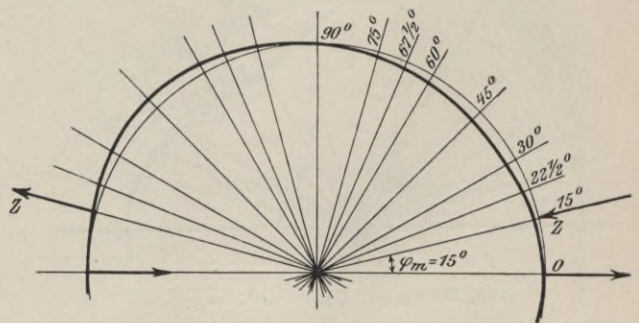


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 15^\circ$.

Im folgenden sind diese Biegeeinflußwerte als Schaubilder der Ringformveränderungen dargestellt und durch $e_{m,a} = e_{a,m}$ und $\tau_{m,a} = \tau_{a,m}$ aus den Tabellen ergänzt.

Tabelle für $e_{m,a}$.

φ_m°	φ_a°						
	75°	$67\frac{1}{2}^\circ$	60°	45°	30°	$22\frac{1}{2}^\circ$	15°
90	+	+	+	+	+	+	+
75	0	0,0528	0,0574	0,0501	0,0301	0,0190	0,0094
$67\frac{1}{2}$			0,0784	0,0702	0,04266	0,0271	0,0134
60				0,0844	0,0523	0,03305	0,0166
45					0,05964	0,0391	0,02076
30						0,03305	0,01744
$22\frac{1}{2}$							0,01396

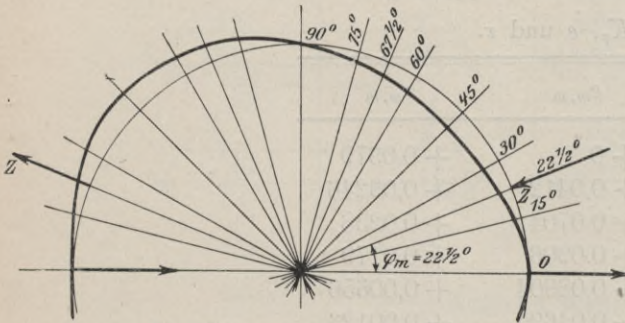


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 22\frac{1}{2}^\circ$.

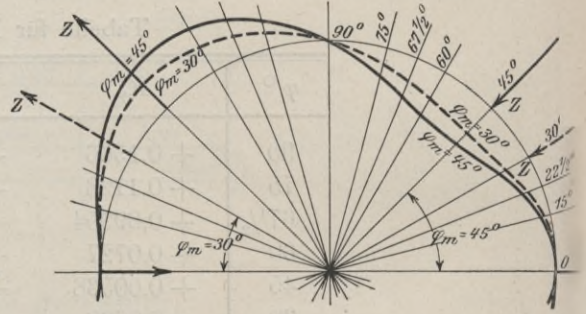


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 45^\circ; 30^\circ$.

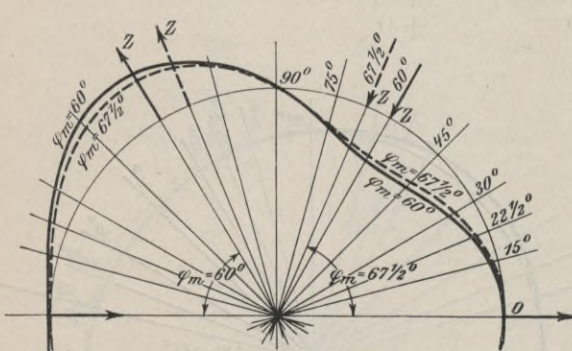


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 60^\circ; 67\frac{1}{2}^\circ$.

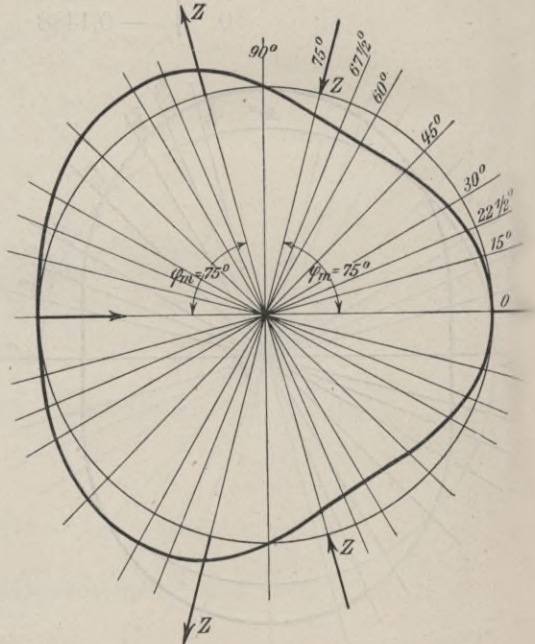


Abb. für $e_{m,a}$. $\varphi_m = 75^\circ$.

Tabelle für $\tau_{m,a}$.

φ_m°	φ_a°						
	75°	67½°	60°	45°	30°	22½°	15°
	+	+	+	+	+	+	+
90	0,03820	0,03927	0,04169	0,05132	0,06223	0,06302	0,05711
75		0,03150	0,03190	0,03526	0,04078	0,04143	0,03743
67½			0,02499	0,02639	0,02980	0,03041	0,02782
60				0,01830	0,02009	0,02344	0,01917
45					0,00674	0,00695	0,00675
30						0,00123	0,00123
22½							0,00034

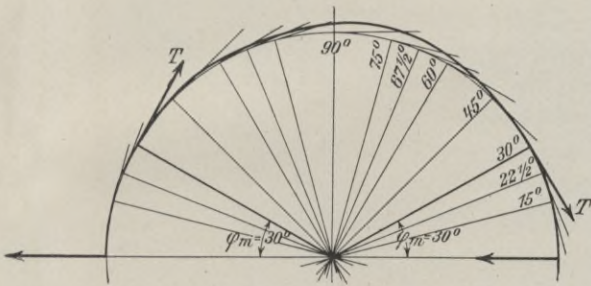


Abb. für $\tau_{m,a}$. $\varphi_m = 30^\circ$.

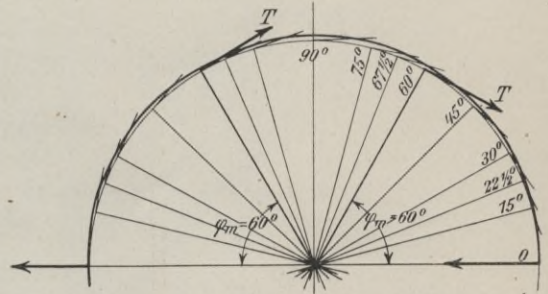
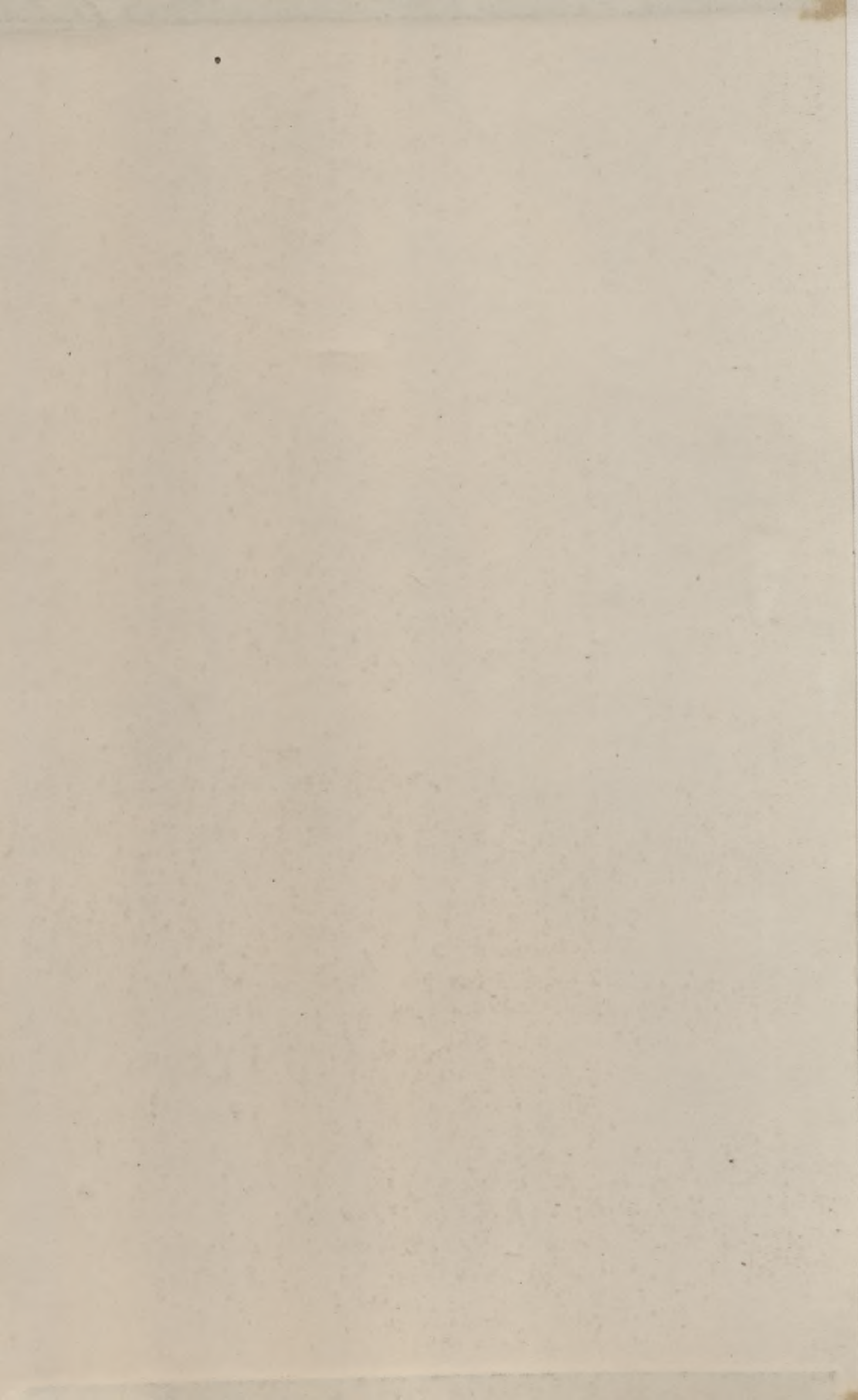


Abb. für $\tau_{m,a}$. $\varphi_m = 60^\circ$.

In der zur Darstellung der $\tau_{m,a}$ nötigen großen Verzerrung sind die Verschiebungen für $\varphi_m \geq 75^\circ$ zufolge Überschneiden der Formänderungsstrecken bei $\varphi_a = 0$ nicht mehr richtig darstellbar.



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307034

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316003

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



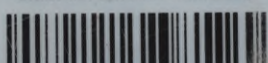
III-307041

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



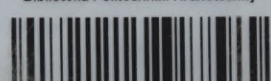
III-307035

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316004

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316010

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307036

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



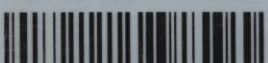
100000316005

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307037

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000316006

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307038

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



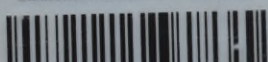
100000316007

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307039

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



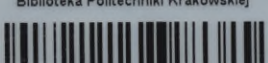
100000316008

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307040

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



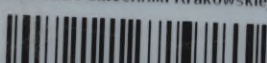
100000316009

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307033

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300595