Zu

Professor Heinrich Müller

Einführung in die Differential- und Integralrechnung

Zum Gebrauch an höheren Schulen

BG

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin 1907

BIBLIOTHECA JAGELLONICA
DUBLET
Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000298313

Professor Heinrich Müllers Mathematisches Unterrichtswerk

M

Einführung in die Differential- und Integralrechnung

Zum Gebrauch an höheren Schulen

bearbeitet von

Prof. Heinrich Müller

Mit einer Kurventafel

S. ZIOBROWSKI

Leipzig und Berlin
Druck und Verlag von B. G. Teubner
1907

D/110

KD 517(023)

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW
II 31461

Akc. Nr. 782 50

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Vorwort.

Das vorliegende Werkchen verdankt seine Entstehung dem Wunsche, den Gedanken, die der Verf. in seiner Arbeit über „Rechnen und Mathematik" in dem bei B. G. Teubner erschienenen Handbuch für Lehrer höherer Schulen über die Durchnahme der Differential- und Integralrechnung ausgesprochen hat, durch eine schulgemäße Darstellung des Gebietes eine praktisch verwendbare Form zu geben. Insbesondere wollte Verf. seine Auffassung, daß die Aufnahme der Grundanschauungen über das Wesen und die Aufgaben der Infinitesimalrechnung in den Unterricht der Prima sich aus der Stelle der preußischen Lehrpläne

> Dabei wird sich Gelegenheit bieten, den Schülern ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffes, mit dem sie schon auf früheren Stufen bekannt geworden sind, zu erschließen.

sehr wohl rechtfertigen ließe, dadurch zu unterstützen suchen, daß er zeigte, wie der Stoff sich leicht an die geforderte eingehende Besprechung des Funktionsbegriffes anschließt und wie er in einfacher und allgemein verständlicher Weise aufgebaut werden kann.

Bei der Betrachtung einer Funktion und ihrer graphischen Darstellung wird die Frage, ob die Funktion von einem bestimmten Werte der Veränderlichen ab weiter zu- bzw. abnehmen oder vom Zu- zum Abnehmen und umgekehrt übergehen wird, nicht zu vermeiden sein, und die Möglichkeit, die Entscheidung auf einem anderen Wege wie durch zeitraubende Auswertungen treffen zu können, wird von den Schülern freudig begrüßt werden. Soll aber die hierbei erfolgte Einführung des Differentialquotienten in der Tat die erhoffte Erleichterung bringen, so ist die Herleitung der Regeln für die Herstellung der Ableitungen einer Funktion nicht zu umgehen.

Da der binomische Lehrsatz als bekannt vorausgesetzt werden darf, so wird die Aufstellung der Taylorschen und der Mac-Laurinschen Reihe an die neu gewonnenen Kenntnisse sich bequem als eine Anwendung der Binomialreihe anschließen und damit die Grundlage für eine einwandsfreie Ableitung der algebraischen Reihen hergestellt werden.

Die Frage nach den Grenzwerten, die bei der Betrachtung der Funktion bald auftaucht, wird nun eine zuverlässige Beantwortung finden können, und da auch die Bestimmung der Wendepunkte keine Schwierigkeit mehr bietet, so wird der Forderung der Lehrpläne, ein eingehendes Verständnis des Funktionsbegriffes zu erzielen, jetzt in nachdrücklichster Weise genügt werden können.

Als dritte Anwendung der gewonnenen Differentialformeln erscheint dann die Einführung in die Integralrechnung und deren einfachste Methoden. Wenn Verf. bei den Anwendungen etwas weiter gegangen ist, als es unbedingt wünschenswert erscheinen dürfte, so geschah dies in der Absicht, reiferen Schülern eine Vorstellung von der großen Fruchtbarkeit der neu gewonnenen Anschauungen bei der Behandlung geometrischer und physikalischer Aufgaben zu geben. Inwieweit die schwierigeren Beispiele im Unterricht zu behandeln sind, wird der Lehrer im Einzelfalle zu entscheiden haben.

Verf. hegt die Hoffnung, daß das Werkchen als ein brauchbarer Beitrag zur Lösung der schwebenden Fragen auf dem Gebiete der Schulmathematik betrachtet werden wird.

Charlottenburg, im Februar 1907.

Hch. Müller.

Inhalts-Übersicht.

Kap. 1. **Anfangsgründe der Differentialrechnung.**

Kap. 2. **Unendliche Reihen.**

Kap. 3. **Ausgezeichnete Werte der Funktionen.**

Kap. 4. **Einführung in die Integralrechnung.**

Kap. 5. **Anwendungen aus der Geometrie und Physik.**

Kapitel 1.

Anfangsgründe der Differentialrechnung.

Nr. 1. Graphische Darstellung einer Funktion.

Rechnet man für eine Reihe beieinander liegender Werte von x die zugehörigen Werte der Funktion $y = f(x)$ aus, so erhält man eine Wertetabelle, in der die Abhängigkeit der Funktion von der Veränderlichen für den gewählten Bereich zu einem deutlichen Ausdruck gelangt. Diese Wertetabelle kann man benutzen, um den Verlauf der Funktion graphisch darzustellen. Man trägt in einem beliebig angenommenen Maßstab auf einer wagerechten Geraden (der X-Achse) von einem willkürlich gewählten Anfangspunkte O aus die Werte ab, die man x beigelegt hat, errichtet in O das Lot zu der X-Achse (die Y-Achse), mißt auf diesem die entsprechenden Werte von y ab und vervollständigt jedesmal das Rechteck, dessen Seiten zwei zusammengehörige Werte von x und y darstellen. Verbindet man dann die aufeinander folgenden vierten Ecken dieser Rechtecke durch einen Linienzug (eine Kurve), so erhält man ein Bild der Funktion $f(x)$, und dies Bild ist um so genauer, je näher die benutzten Werte von x beieinander liegen.

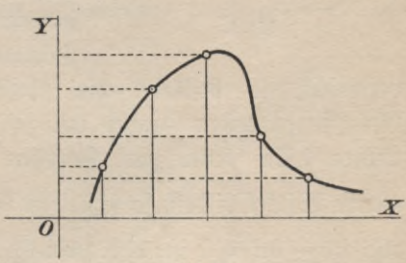

Fig. 1.

Entsprechen kleineren Änderungen von x auch kleinere Veränderungen von y (ist die Funktion stetig), so verläuft die Kurve stetig und läßt annäherungsweise auch die Werte von y erkennen, die zu den nicht benutzten Werten von x innerhalb des gewählten Bereichs gehören.

Die Stellen, an denen die Kurve die X-Achse schneidet, bezeichnen die Werte von x, für welche die Funktion y gleich 0 wird; sie heißen daher Nullstellen der Funktion.

Für die Herstellung der Zeichnung benutzt man am besten sogen. Millimeterpapier.

Nr. 2. Graphische Auflösung von Gleichungen.

a) Verbindet man zwei Punkte P_1 und P_2 der Linie, welche die Funktion ersten Grades $y = ax + b$ darstellt, miteinander, so ist die trigonometrische Tangente des Winkels φ, den die Gerade $P_1\,P_2$ mit der X-Achse bildet, gleich dem Differenzenquotienten $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Da aber $y_2 - y_1 = a\,(x_2 - x_1)$, also $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$ ist, so erkennt man, daß der Winkel φ stets dieselbe Größe besitzt, welche Werte man auch x_1 und x_2 beilegen mag. Dies ist aber nur möglich, wenn P_1 und P_2 sich auf einer Geraden bewegen, d. h. das geometrische Bild einer Funktion ersten Grades ist eine gerade Linie.

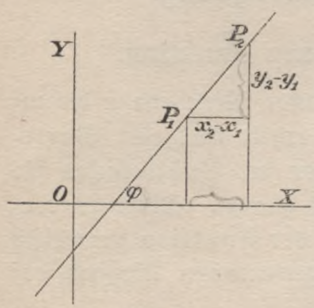

Fig. 2.

Nun läßt sich y aus der Gleichung $ax + by = c$ als Funktion von x ausdrücken (entwickeln); das Bild dieser Funktion ist gleichzeitig das Bild der gegebenen Gleichung. Entsprechend läßt sich eine zweite Gleichung $dx + ey = f$ durch eine Gerade darstellen. Da aber zwei Geraden sich nur in einem Punkte schneiden können und jeder Schnittpunkt einem Wurzelpaar der Gleichungen entspricht, so bestätigt die graphische Darstellung den Satz, daß zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten nur ein Wurzelpaar besitzen können. Da ferner zwei Geraden parallel sind, wenn sie mit der X-Achse gleiche Winkel bilden, so schneiden sich die beiden Geraden nicht, wenn $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, also $ae - bd = 0$ ist, d. h. zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten besitzen nur dann eine Lösung, wenn ihre Diskriminante von 0 verschieden ist.

b) Ist die Funktion y vom zweiten Grade und mit x durch die Gleichung $y = x^2 + ax + b$ verbunden, so kann man y als die Summe der beiden Funktionen $y_1 = x^2$ und $y_2 = ax + b$ ansehen. Aus den Linien, welche diese Funktionen darstellen, erhält man die Kurve für y, wenn man die einander entsprechenden Werte von y_1 und y_2 jedesmal addiert und die zu der Summe $y_1 + y_2$ gehörigen Punkte durch einen Linienzug miteinander verbindet.

Die Linie $y = x^2$ ist für alle Funktionen von der Form $y = x^2 + ax + b$ die gleiche; hat man sie daher einmal sorgfältig gezeichnet, so kann man sie ausschneiden und für Darstellungen benutzen, welche in dem gleichen Maßstab ausgeführt werden sollen.

Die beigefügte Tafel bringt die Kurve $y = x^2$ auf Millimeterpauspapier.

Die graphische Auflösung der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ gestaltet sich nun einfach. Ersetzt man in der Gleichung x^2 durch y, so erhält man $y + ax + b = 0$ und weiß, daß der Wert von x, der zu einem Schnittpunkt der Linien $y = x^2$ und der Geraden $y + ax + b = 0$ gehört, eine Wurzel der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ ist.

c) Entsprechend lassen sich alle dreigliedrigen Gleichungen von der Form $x^n + ax + b = 0$ näherungsweise dadurch auflösen, daß man die Kurve $y = x^n$ und die Gerade $y + ax + b = 0$ zeichnet und aus der Figur die Werte von x abliest, die zu den Schnittpunkten der beiden Kurven gehören.

Nr. 3. Zu- und Abnahme einer Funktion. Einführung des Differentialquotienten.

Um beurteilen zu können, ob die Funktion $f(x)$ von der Stelle $x = a$ ab zu- oder abnimmt, müßte man nach dem Bisherigen den Wert der Funktion für $x = a$ und für $x = a + \delta$ berechnen, wo δ eine im Verhältnis zu a sehr kleine Größe bezeichnet. Ist die Funktion von höherem Grade, so wird die Rechnung sehr mühsam, und daher empfiehlt es sich, ein weniger zeitraubendes Verfahren abzuleiten. Wir wollen uns aber dabei auf die Betrachtung stetiger Funktionen beschränken.

a) Bei einer stetigen Funktion $y = f(x)$ hat die Vergrößerung der Veränderlichen x um (ein zwar sehr kleines, aber doch endliches Stück) Δx eine nach Größe und Sinn bestimmte Veränderung Δy von y zur Folge, und der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oder die trigonometrische Tangente des Winkels φ, den die Sekante PP' mit der (positiven Richtung) der X-Achse bildet, kann als Maß für die eingetretene Veränderung gelten. Wird nun die Sekante um den Punkt P gedreht, bis sie in die Tangente in P übergeht, so rückt P' dem Punkte P unendlich nahe; die Differenzen Δx und Δy werden unendlich klein, und ihr Quotient nimmt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Der Wert des Quotienten ist dagegen eine ganz bestimmte Größe; er ist gleich der trigon. Tangente des Winkels α, den die Tangente in P mit der X-Achse bildet. Bezeichnet man zum Unterschied von den Größen Δx und Δy die unendlich kleinen Wertveränderungen mit dx und dy*) und nennt diese nicht mehr

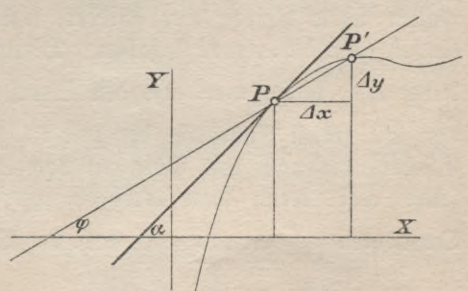

Fig. 3.

*) Die Zeichen Δ und d sind hier natürlich keine Faktoren; obwohl sie mit x und y in gleicher Höhe der Zeilen stehen, kommt ihnen doch nur die Bedeutung eines Index zu.

Differenzen, sondern **Differentiale** und den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ den **Differentialquotienten** der Funktion $y = f(x)$, so folgt:

Lehrsatz 1. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $y = f(x)$ ist gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente der Kurve $y = f(x)$ mit der positiven Richtung der X-Achse bildet.

Lehrsatz 2. Der Wert des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $y = f(x)$ für $x = a$ ist das Maß für den Grad und den Sinn der Veränderung, die y erfährt, wenn x von a ab um eine unendlich kleine Größe zunimmt.

Lehrsatz 3. Die Funktion $y = f(x)$ wächst von der Stelle a ab, wenn der Differentialquotient für $x = a$ positiv ist, und sie nimmt ab, wenn er negativ ist.

b) Entwickelt man in der Gleichung

$$y + \Delta y = a_0 (x + \Delta x)^n + a_1 (x + \Delta x)^{n-1} + a_2 (x + \Delta x)^{n-2} + \cdots$$

die Potenzen nach dem binomischen Satze und ordnet die Glieder nach Potenzen von Δx, so erhält man in dem ersten (von Δx freien) Gliede wieder die Funktion y selbst, und daher fällt y aus der Gleichung fort. Auf der rechten Seite bleiben nur Glieder, welche der Reihe nach die Faktoren Δx, $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3 \ldots (\Delta x)^n$ haben. Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch Δx, bildet man also den Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, so erhält man rechts einen von Δx freien Ausdruck, der mit $f'(x)$ bezeichnet werden mag, und weitere Glieder, die noch mit Potenzen von Δx behaftet sind. Alle diese Glieder fallen weg, wenn man $\Delta x = 0$ setzt; $f'(x)$ ist daher der Grenzwert des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$, d. h. der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$. Hieraus folgt:

Lehrsatz 4. Der Differentialquotient einer Funktion $y = f(x)$ ist wieder eine Funktion von x.

Zusatz 1. Der Differentialquotient wird auch als die (erste) Ableitung der Funktion bezeichnet.

Zusatz 2. Bildet man den Differentialquotienten der ersten Ableitung, so erhält man die zweite Ableitung der Funktion usw.

Zusatz 3. Ist die Funktion vom Grade n, so ist ihre erste Ableitung vom Grade $n - 1$.

Zusatz 4. Ist n eine positive ganze Zahl, so ist die n^{te} Ableitung der Funktion vom Grade 0, d. h. eine Konstante.

Nr. 4. Allgemeine Sätze über Differentialquotienten.

a) Hat eine Funktion die Form $y = f(x) + c$, wo c eine konstante Größe bezeichnet, so hat man: $y + \Delta y = f(x + \Delta x) + c$, d. h. bei c tritt keine Veränderung ein. Demnach besteht der Satz:

Lehrsatz 5. Der Differentialquotient einer additiven Konstanten ist gleich 0.

b) Ist $y = c \cdot f(x)$, so hat man:

$$y + \Delta y = cf(x + \Delta x) = c\,[f(x) + f'(x)\,\Delta x + f''(x)\,(\Delta x)^2 + \cdots]$$
$$= c \cdot f(x) + c \cdot f'(x)\,\Delta x + \cdots,$$

also:
$$\frac{dy}{dx} = c \cdot f'(x), \text{ d. h.}$$

Lehrsatz 6. Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren unverändert.

c) Ist y die Summe zweier stetigen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, ist also $y = g(x) + h(x)$, so hat man:

$$\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x) + h(x + \Delta x) - h(x)$$
$$= g'(x)\,\Delta x + h'(x)\,\Delta x + (\Delta x)^2\,\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ wieder eine stetige Funktion von x und Δx ist. Geht man zur Grenze über, so folgt: $y' = g'(x) + h'(x)$.

Entsprechend ergibt sich aus $y = g(x) - h(x)$ die Gleichung $y' = g'(x) - h'(x)$.

Es besteht also der Satz:

Lehrsatz 7. Der Differentialquotient einer **Summe** oder **Differenz** ist gleich der Summe bzw. der Differenz der Differentialquotienten ihrer Glieder.

d) Es sei y das **Produkt** zweier stetigen Funktionen, also $y = g(x)h(x)$. Man hat dann:

$$\Delta y = g(x + \Delta x) \cdot h(x + \Delta x) - g(x) \cdot h(x),$$
$$= [g(x) + g'(x)\,\Delta x + (\Delta x)^2 \varphi_1(x)] \cdot [h(x) + h'(x)\Delta x + (\Delta x)^2 \varphi_2(x)],$$
$$- g(x) \cdot h(x),$$
$$= g(x) \cdot h(x) + \Delta x [g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)] + (\Delta x)^2 \varphi(x) - g(x) \cdot h(x),$$
$$= \Delta x [g(x) \cdot h'(x) + h(x) \cdot g'(x)] + (\Delta x)^2 \varphi(x).$$

Durch Übergang zur Grenze erhält man hieraus:

Lehrsatz 8. Es ist $\frac{d}{dx}[g(x) \cdot h(x)] = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$.

e) Es sei y gleich dem **Quotienten** zweier stetigen Funktionen von x, also $y = \frac{g(x)}{h(x)}$. Bildet man hier die Gleichung $y \cdot h(x) = g(x)$ und verfährt nach d), so erhält man: $y \cdot h'(x) + y' \cdot h(x) = g'(x)$

oder $$y' \cdot h(x) = g'(x) - y \cdot h'(x) = g'(x) - \frac{g(x)}{h(x)} h'(x).$$

Hieraus aber ergibt sich:

Lehrsatz 9. Es ist $\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$.

f) Ist im Falle d) die Funktion $h(x)$ gleich $g(x)$, also auch $h'(x)$ gleich $g'(x)$, so erhält man $y' = 2g(x) \cdot g'(x)$. Wendet man jetzt den Lehrsatz 8 auf die Funktion $y = [g(x)]^2 \cdot g(x)$ an, so findet man: $\frac{d}{dx}[g(x)]^3 = 3[g(x)]^2 \cdot g'(x)$. Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt auf den Satz:

Lehrsatz 10. Ist y gleich der **Potenz** $[g(x)]^n$ und n eine positive ganze Zahl, so ist $y' = n. \; [g(x)]^{n-1} g'(x)$.

g) Ist dagegen y gleich der n^{ten} **Wurzel** aus der stetigen Funktion $g(x)$, ist also $y = \sqrt[n]{g(x)}$, so hat man auch $y^n = g(x)$. Nach Lehrsatz 10 ist aber jetzt $n \cdot y^{n-1} y' = g'(x)$, und daraus ergibt sich: $y' = \frac{g'(x)}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{g'(x)}{n \cdot (\sqrt[n]{g(x)})^{n-1}}$.

Insbesondere ist für die Quadratwurzel $\boldsymbol{\frac{d}{dx}[\sqrt{g(x)}] = \frac{g'(x)}{2 \cdot \sqrt{g(x)}}}$.

Nr. 5. Differentialquotienten besonderer Funktionen.

Die Herstellung der ersten Ableitung einer Funktion $f(x)$ ist recht zeitraubend, wenn man jedesmal die Differenz $f(x + \Delta x) - f(x)$ bilden, diese durch Δx dividieren und dann Δx gleich 0 setzen will; es empfiehlt sich daher, für die Bestimmung der Differentialquotienten einfacherer Funktionen Regeln abzuleiten und diese im Verein mit den Lehrsätzen der Nr. 4 zu benutzen, um die Ableitungen zu bilden.

a) Ist $y = x^n$ und n eine positive ganze Zahl, so liefert die Anwendung des Lehrsatzes 10 die Formel

1. $$\boldsymbol{d(x^n) = n \cdot x^{n-1} dx.}$$

Diese Formel bleibt indessen auch gültig, wenn n eine negative oder gebrochene Zahl ist.

α) Ist zunächst n eine ganze negative Zahl und gleich $-\nu$, so hat man: $y = \frac{1}{x^\nu}$ und nach Lehrsatz 9: $y' = \frac{-\nu \cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu \cdot \frac{1}{x^{\nu+1}} = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$. Ersetzt man nun $-\nu$ durch n, so erhält man wieder die Formel 1. n darf also auch eine negative ganze Zahl sein.

β) Ist weiter n eine gebrochene Zahl und gleich $\frac{\mu}{\nu}$, so hat man: $y = x^{\frac{\mu}{\nu}}$, also $y^\nu = x^\mu$, und nun nach Lehrsatz 8: $\nu y^{\nu-1}\,dy = \mu x^{\mu-1} dx$. Hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu \cdot x^{\mu-1}}{\nu \cdot y^{\nu-1}} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{y \cdot x^\mu}{y^\nu \cdot x} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{y}{x}.$$

Ersetzt man jetzt wieder $\frac{\mu}{\nu}$ durch n und y durch x^n, so erhält man:

$$y' = n \cdot \frac{x^n}{x} = n \cdot x^{n-1}.$$

Demnach darf n auch eine gebrochene Zahl sein.

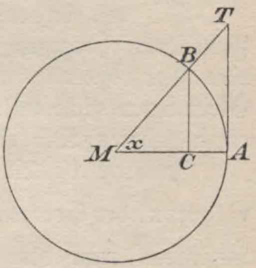

Fig. 4.

b) Um die Ableitung einer **Winkelfunktion** bilden zu können, muß man zunächst dafür Sorge tragen, daß die Funktion y und die Veränderliche x Größen derselben Art sind, weil sonst der Quotient $\frac{dy}{dx}$ keine Bedeutung besitzt. Zu dem Zwecke nimmt man den Winkel als Mittelpunktswinkel in einem Kreise mit dem Halbmesser 1 an und mißt ihn durch den Bogen, zu dem er gehört; die Winkelfunktionen treten dann gleichfalls als Längen auf. Ist aber x gleich dem Bogen AB und $\sin x = BC$, bzw. $\operatorname{tg} x = TA$, so hat man:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

also:

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

und daher:

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$$

oder:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Nimmt x bis zur Grenze 0 ab, so wächst $\cos x$ bis zur oberen Grenze $+1$, und daraus folgt:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Ist nun $y = \sin x$, so hat man: $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$
$= 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos \frac{1}{2}(x + \Delta x)$,

also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \tfrac{1}{2}(x + \Delta x) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Geht man jetzt zur Grenze über, so erhält man: $y' = \cos x$.

In gleicher Weise führt die Verwendung der Additionstheoreme auf die Herstellung der Differentialquotienten der anderen Winkelfunktionen. Man findet:

2. $\boldsymbol{d(\sin x) = \cos x\,dx,} \qquad \boldsymbol{d(\cos x) = -\sin x\,dx,}$

$$\boldsymbol{d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{1+\operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{dx}{\sin^2 x}.}$$

c) Die Kreisfunktionen ergeben sich durch Umkehrung der Winkelfunktionen. Ist z. B. $y = \sin x$, so ist $x = \operatorname{arc} \sin y$. Beachtet man diese Beziehungen, so findet man aus den vorstehenden 4 Formeln leicht die 4 Gleichungen:

3.
$$d\,(\operatorname{arc} \sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad d\,(\operatorname{arc} \cos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$d\,(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) = \frac{dx}{1+x^2}, \qquad d\,(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

d) Differentialquotienten der Exponentialfunktionen.

Bei den Exponentialfunktionen kann nicht wie bei den vorstehenden Funktionen vorgegangen werden, weil für die Veränderungen, welche durch eine Vergrößerung der Veränderlichen hervorgerufen werden, entsprechende Gleichungen nicht bestehen. Man muß daher, um die Ableitungen zu bilden, einen anderen Weg einschlagen.

Zunächst ist die Zahl e, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, der Grenzwert, dem der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ mit wachsendem n zustrebt. Bezeichnet man den natürlichen Logarithmus der Zahl a mit la, so hat man $le = 1$. Ist nun y die Exponentialfunktion e^x, ist also $ly = x \cdot le = x$, so folgt:

$$\Delta x = l(y + \Delta y) - ly = l\,\frac{y + \Delta y}{y} = l\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right)$$

und hieraus:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\, l\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right).$$

Setzt man hierin $\frac{1}{\Delta y} = \frac{n}{y}$, also $\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{n}$ und somit $\frac{1}{\Delta y} \cdot l\left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) = \frac{n}{y} \cdot l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{y}\, l\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, und beachtet, daß n unendlich groß wird, wenn y sich dem Werte 0 nähert, und daß dann $l\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ gleich le oder gleich 1 ist, so erhält man: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{e^x}$, und hieraus folgt:

4.
$$d(e^x) = e^x\, dx.$$

Ist $y = a^x$, also $x \cdot la = ly$, so ergibt sich auf dem gleichen Wege wie eben, daß $la \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$ und somit $\frac{dy}{dx} = la \cdot a^x$ ist. Man hat daher:

5.
$$d(a^x) = la \cdot a^x\, dx.$$

Im engsten Anschluß an das bei e^x angewandte Verfahren gewinnt man die Formeln:

6.
$$d(lx) = \frac{dx}{x} \quad \text{und} \quad d(\log x) = \frac{\log e \cdot dx}{x}.$$

Kapitel 2.

Unendliche Reihen.

Nr. 6. Die Taylorsche und die Mac-Laurinsche Reihe.

a) Vermehrt man in der Funktion

1. $$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

die Veränderliche x um die kleine Größe h, bildet man also

2. $$f(x+y) = (x+h)^n + a_1(x+h)^{n-1} + a_2(x+h)^{n-2} + \cdots + a_{n-1}(x+h) + a_n,$$

und entwickelt die Potenzen nach dem binomischen Satze, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x+h) = {} & x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n \qquad (= f(x)) \\ & + h\left[n x^{n-1} + a_1(n-1)x^{n-2} + a_2(n-2)x^{n-3} + \cdots\right] \\ & + h^2\left[\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} a_1 x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2} a_2 x^{n-4} + \cdots\right] \\ & + h^3\left[\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_1 x^{n-4} + \cdots\right] \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Da aber

$$\begin{aligned} f'(x) &= n x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + (n-2) a_2 x^{n-3} + \cdots \\ f''(x) &= n(n-1) x^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 x^{n-3} + (n-2)(n-3) a_2 x^{n-4} + \cdots \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2) x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3) a_1 x^{n-4} + \cdots \end{aligned}$$

usw. ist, so sieht man, daß in der Entwicklung von $f(x+h)$

der Koeffizient von h gleich $f'(x)$ ist,
" " " h^2 " $\frac{1}{2!} f''(x)$ ",
" " " h^3 " $\frac{1}{3!} f'''(x)$ ", usw.

Somit erhält man:

3. $$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \cdots$$

Dies ist aber die **Taylorsche Reihe**.

Ist n nicht eine ganze positive Zahl, so hat die Reihe unendlich viel Glieder und ist — ebenso wie der allgemeine binomische Lehrsatz, auf den sie sich stützt — nur so lange gültig, wie die Veränderliche x zwischen den Grenzen $+1$ und -1 eingeschlossen bleibt.

b) Setzt man in der Taylorschen Reihe $x = 0$, betrachtet h als Veränderliche und schreibt dann wieder x für h, so erhält man die **Reihe von Mac-Laurin**:

4. $$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \cdots$$

Auch diese Reihe hat nur dann eine endliche Gliederzahl, wenn n eine positive ganze Zahl ist, und bleibt in allen anderen Fällen nur dann gültig, wenn x so klein gewählt wird, daß die Reihe konvergiert.

Nr. 7. Die Exponentialreihen und die logarithmischen Reihen.

a) Da alle Ableitungen von e^x gleich e^x selber sind und e^0 gleich 1 ist, so liefert die Anwendung der Mac-Laurinschen Reihe:

1. $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Ersetzt man hierin x durch 1, so erhält man die Reihe:

2. $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \cdots$$

Die Reihe liefert für e den Wert $2{,}7182818 \cdots$

Die Funktion $y = a^x$ hat nach Nr. 5, Gl. 5 der Reihe nach die Ableitungen $y' = la \cdot a^x$, $y'' = (la)^2 a^x$, $y''' = (la)^3 a^x$, usw.; die Anwendung der Mac-Laurinschen Reihe führt daher auf die Entwicklung:

3. $$a^x = 1 + la \cdot \frac{x}{1} + (la)^2 \cdot \frac{x^2}{2!} + (la)^3 \cdot \frac{x^3}{3!} + (la)^4 \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Die Reihen 1 und 3 sind für jeden endlichen Wert von x konvergent.

b) Nach den Gleichungen 6 in Nr. 5 tritt bei den Ableitungen der Funktion lx die Veränderliche x als Faktor im Nenner auf, und daher werden für $x = 0$ sämtliche Ableitungen unendlich groß; eine Verwendung der Mac-Laurinschen Reihe ist also hier noch ausgeschlossen. Nun ändern sich aber die Formeln ihrer Bedeutung nach in keiner Weise, wenn man überall x durch $1 + x$ ersetzt; man hat auch dann als Ableitungen der Funktion $y = l(1 + x)$:

$$y' = \frac{1}{1+x}, \quad y'' = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}, \quad y^{(4)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4} \text{ usw.,}$$

und erkennt, daß jetzt für $x = 0$ die Nenner gleich 1 werden. Somit ergibt sich:

$$l(1+x) = l1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} \cdot (-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 2 + \frac{x^4}{4!} \cdot (-2 \cdot 3) + \frac{x^5}{5!} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots$$

$$= 0 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

Ersetzt man hierin x durch $-x$, so erhält man:

$$l(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \cdots$$

Da aber $l(1+x) - l(1-x) = l\,\frac{1+x}{1-x}$ ist, so folgt aus den beiden Gleichungen:

$$4. \qquad l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \cdots\right)$$

Die Reihe 4 ist nur solange verwendbar, wie x kleiner als 1 bleibt.

Die Glieder dieser Reihe nehmen nur bei sehr kleinen Werten von x hinreichend schnell ab, um eine rasche Berechnung der natürlichen Logarithmen zu ermöglichen; außerdem ist die Herstellung der Form $\frac{1+x}{1-x}$ aus einer Zahl a unbequem. Daher empfiehlt es sich, die Reihe durch eine Substitution umzugestalten. Man setzt

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+y}{n}, \text{ also } x = \frac{y}{2n+y};$$

es ist dann

$$5.\ l(n+y) = ly + 2\left[\frac{y}{2n+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2n+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2n+y}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{y}{2n+y}\right)^7 + \cdots\right]$$

Ist z. B. $l\,101$ zu berechnen, so setzt man $n = 100$ und $y = 1$. Es ist dann $\frac{y}{2n+y} = \frac{1}{201}$, und $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{201}\right)^3$ beeinflußt schon die 7. Dezimalstelle nicht mehr.

Anmerkung. Ist $\frac{y}{n}$ eine sehr kleine Zahl, so darf näherungsweise

$$l(n+y) = ln + \frac{y}{n}$$

gesetzt werden. Unter derselben Voraussetzung über z ist

$$l(n+z) = ln + \frac{z}{n},$$

und somit ergibt sich:

$$[l(n+y) - ln] : [l(n+z) - ln] = y : z.$$

Die gleiche Beziehung besteht für die Logarithmen mit der Grundzahl 10. Hiernach verhalten sich bei großen und nur wenig voneinander abweichenden Zahlen die Differenzen der Logarithmen wie die Differenzen der Zahlen selbst. Hierauf beruht bei der Logarithmenrechnung die Benutzung der Tafeln für die Proportionalteile.

Nr. 8. Reihen für die Winkelfunktionen. Die Zahl π.

a) Benutzt man die Gleichungen 2 in Nr. 5 und beachtet, daß $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ ist, so erhält man nach der Mac-Laurinschen Reihe:

$$1. \qquad \begin{cases} \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots \end{cases}$$

b) Bezeichnet das Zahlzeichen $e^{\varphi i}$ den Wert der Exponentialreihe 1 in Nr. 7 für $x = \varphi i$, so ist

$$e^{\varphi i} = 1 + i\frac{\varphi}{1} + i^2\frac{\varphi^2}{2!} + i^3\frac{\varphi^3}{3!} + i^4\frac{\varphi^4}{4!} + i^6\frac{\varphi^5}{5!} + i^6\frac{\varphi^6}{6!} + i^7\frac{\varphi^7}{7!} + i^8\frac{\varphi^8}{8!} + i^9\frac{\varphi^9}{9!} + \cdots$$
$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} - \cdots\right),$$

und nun nach den Gleichungen 1:

2. $$e^{\varphi i} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,.$$

In entsprechender Weise ergibt sich:

3. $$e^{-\varphi i} = \cos\varphi - i\sin\varphi\,.$$

Da $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ die Periode 2π besitzen, so erweist sich $e^{\varphi i}$ als eine periodische Funktion mit der Periode 2π, im Gegensatz zu der Funktion e^{φ}, die für reelle Werte von φ mit φ zugleich unendlich groß wird.

Aus Gleichung 2 geht daher die Gleichung hervor:

$$e^{(\varphi + 2k\pi)i} = \cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\,,$$

und somit erhält man durch Übergang zu den Logarithmen

$$\text{für } \varphi = 0: \quad l(+1) = (0 + 2k\pi)i = 0 + \frac{4k+0}{2}\pi i\,.$$
$$\text{"} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}: \quad l(+i) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = 0 + \frac{4k+1}{2}\pi i\,.$$
$$\text{"} \quad \varphi = \frac{2\pi}{2}: \quad l(-1) = \left(\frac{2\pi}{2} + 2k\pi\right)i = 0 + \frac{4k+2}{2}\pi i\,.$$
$$\text{"} \quad \varphi = \frac{3\pi}{2}: \quad l(-i) = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)i = 0 + \frac{4k+3}{2}\pi i\,.$$

Nun kann jede beliebige reelle Zahl a als das Produkt aus ihrem absoluten Betrag und dem Faktor $+1$ oder -1 dargestellt werden, und somit ergibt sich der Satz:

Lehrsatz 11.

a) Jede Zahl hat unzählig viel Logarithmen.

b) Positive Zahlen besitzen einen einzigen reellen Logarithmus.

c) Die Logarithmen negativer Zahlen sind sämtlich imaginär.

Ebenso ist eine imaginäre Zahl gleich dem Produkt aus ihrem positiv genommenen Koeffizienten und dem Faktor $+i$ oder $-i$, und daher besteht auch der Satz:

d) Die Logarithmen imaginärer Zahlen sind imaginär.

c) Aus den Gleichungen 2 und 3 folgt durch Division:

$$e^{2\varphi i} = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = \frac{1 + i\operatorname{tg}\varphi}{1 - i\operatorname{tg}\varphi},$$

und hieraus nach Gleichung 4 in Nr. 7:

$$2\varphi i = l\left(\frac{1 + i\operatorname{tg}\varphi}{1 - i\operatorname{tg}\varphi}\right) = 2\left[i\operatorname{tg}\varphi + \frac{(i\operatorname{tg}\varphi)^3}{3} + \frac{(i\operatorname{tg}\varphi)^5}{5} + \frac{(i\operatorname{tg}\varphi)^7}{7} + \cdots\right]$$

also:

$$\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5\varphi}{5} - \frac{\operatorname{tg}^7\varphi}{7} + \frac{\operatorname{tg}^9\varphi}{9} - \cdots$$

Setzt man jetzt $\operatorname{tg}\varphi = x$ und somit $\varphi = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, so folgt:

4. $$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \cdots$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ wird $\operatorname{tg}\varphi = 1$; man erhält dann die **Reihe von Leibniz**:

5. $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \cdots$$

Setzt man ferner $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{5}$, so daß $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{5}{12}$, $\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{120}{119}$ und $\operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$ wird, und verbindet die Gleichungen

$$\varphi = \frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \frac{1}{9.5^9} - \cdots$$

und

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \frac{1}{7.239^7} + \frac{1}{9.239^9} - \cdots$$

miteinander, so erhält man die **Reihe von Machin**:

6. $$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \cdots\right)$$

Während die Glieder der Leibnizschen Reihe sehr langsam abnehmen, braucht man von der Machinschen Reihe nur die ersten drei Glieder der ersten und das erste Glied der zweiten Summe zu nehmen, wenn man π auf fünf Dezimalstellen berechnen will.

Kapitel 3.

Ausgezeichnete Werte der Funktionen.

Nr. 9. Größte und kleinste Werte.

(Maxima und Minima.)

Je nach der Art ihrer Zusammensetzung kann eine Funktion ins Unbegrenzte wachsen (wie z. B. $y = ax^2$), oder zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben, wenn der Veränderlichen nur reelle Werte beigelegt werden dürfen. So können die Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ die Grenzen $+1$ und -1 nicht überschreiten, und die Funktion $y = \sqrt{a^2 - b^2 x^2}$ kann weder über $+a$ hinauswachsen, noch unter $-a$ sinken. Derartige Grenzwerte nennt man größte bzw. kleinste Werte (Maxima bzw. Minima) der Funktion.

Die Kurve, welche die Funktion $y = f(x)$ darstellt, geht vom Steigen zum Fallen bzw. vom Fallen zum Steigen über, wenn die Funktion einen größten bzw. einen kleinsten Wert erreicht hat. An der Übergangsstelle ist also die Tangente an die Kurve der X-Achse parallel, und ihr Winkel mit der X-Achse ist gleich 0^0 oder 180^0. Da aber $\operatorname{tg} 0^0 = 0$ und auch $\operatorname{tg} 180^0 = 0$ ist, so erhält man eine Gleichung zur Bestimmung der Übergangsstellen, wenn man den ersten Differentialquotienten der Funktion gleich 0 setzt (s. Nr. 3, Lehrsatz 1). Somit ergibt sich der Satz:

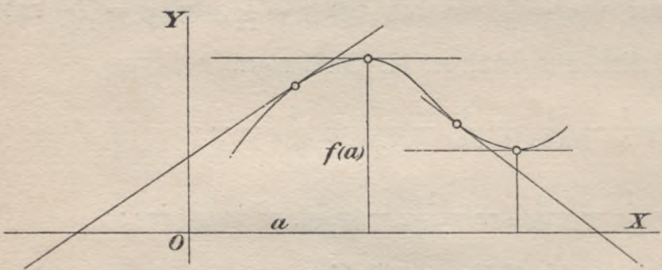

Fig. 5.

Lehrsatz 12. Eine stetige Funktion $f(x)$ kann für einen Wert der Veränderlichen x nur dann ein Maximum oder Minimum besitzen, wenn ihr Differentialquotient für diesen Wert gleich 0 ist.

Ist aber a eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, so hat man nach der Taylorschen Reihe:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{2!} f'(a) + \frac{h^3}{3!} f''(a) + \frac{h^4}{4!} f'''(a) + \cdots$$

Nun kann man h stets so klein wählen, daß die Summe aller Glieder, welche auf das erste Glied der vorstehenden Summe folgen, im Verhältnis zu diesem unendlich klein wird, also nicht berücksichtigt zu werden braucht.*) Das Vorzeichen der Differenz $f(a+h) - f(a)$ wird dann von dem Vorzeichen von h (h^2!) unabhängig bleiben. Ist daher $f''(a)$ positiv, so ist $f(x)$ unmittelbar vor und nach dem Werte a größer als $f(a)$, d. h. dem Werte a entspricht ein Minimum. Umgekehrt hat man ein Maximum, wenn $f''(a)$ negativ ist. Hieraus folgt der Satz:

Lehrsatz 13. Ist für die Wurzel a der Gleichung $f'(a) = 0$ die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$, so entspricht dem Werte a der Veränderlichen ein $\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}$.

Beispiel. Es sei $y = x^5 + 2\frac{1}{2}x^4 - 41\frac{2}{3}x^3 - 65x^2 + 600x - 400$.

Aufl. Die Gleichung $f'(x) = 5x^4 + 10x^3 - 125x^2 - 130x + 600 = 0$ hat die Wurzeln $+4$, $+2$, -3 und -5. Die zweite Ableitung $20x^3 + 30x^2 - 250x - 130$ wird für $x =$

	$+4$	$+2$	-3	-5
	positiv	negativ	positiv	negativ;
zu der Wurzel gehört also ein	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum.

Nr. 10. Wendepunkte der Kurve $y = f(x)$.

An einer Stelle, an der die Kurve $y = f(x)$ ein Maximum der Funktion $f(x)$ darstellt, kehrt sie der X-Achse ihre hohle Seite zu, und an einer Stelle, an der sie ein Minimum darstellt, ist sie gegen die X-Achse gewölbt; zwischen zwei aufeinander folgenden Grenzstellen muß sie also einmal ihre Seite umgewandt haben. Den Punkt, an dem dies geschehen ist, nennt man einen Wendepunkt.

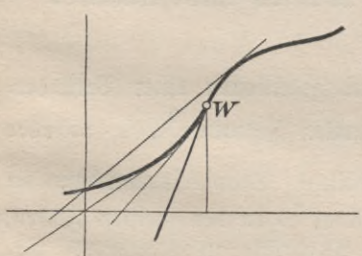

Fig. 6.

Eine Kurve kann indessen, auch ohne daß Grenzstellen vorhanden sind, Wendepunkte besitzen. Verfolgt man in der Nähe einer solchen Stelle die Veränderungen des Winkels, den die Tangente mit der X-Achse bildet, so erkennt man leicht, daß bei dem Wendepunkte der Winkel einen größten bzw. einen kleinsten Wert annimmt. Soll aber der Winkel und somit auch seine trigonometrische Tangente, d. h. die Funktion $f'(x)$, einen Grenzwert annehmen, so muß $f''(x)$ gleich 0 sein. Hieraus folgt:

---

*) Ist außer $f'(a)$ auch $f''(a)$ gleich 0, so müßte man das Verhalten der dritten und vierten Ableitung usw. untersuchen. Ein Eingehen hierauf würde jedoch die hier gesteckten Grenzen überschreiten.

Lehrsatz 14. Die Kurve $y = f(x)$ besitzt an denjenigen Stellen Wendepunkte, für welche die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ gleich 0 ist.

Beispiel 1. Es sei $y = 3x^3 + 4x^2 - 17x - 36$.

Aufl. Man hat hier: $f'(x) = 9x^2 + 8x - 17$

und $$f''(x) = 18x + 8.$$

Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die Wurzeln $+1$ und $-\frac{17}{9}$, und diesen entspricht ein Minimum bzw. ein Maximum. Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat die Wurzel $-\frac{4}{9}$, und da $+1 > -\frac{4}{9} > -\frac{17}{9}$ ist, so sieht man, daß der Wendepunkt zwischen den beiden Grenzstellen liegt.

Beispiel 2. Setzt man bei dem Beispiel in Nr. 9 die zweite Ableitung gleich 0, so erhält man eine Gleichung mit den Wurzeln $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{53})$, $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{53})$. Den drei Wurzeln entsprechen drei zwischen den vier Grenzstellen gelegene Wendepunkte.

Beispiel 3. Es sei $y = x^3 - 12x^2 + 48x - 45$.

Aufl. Die Gleichung $f'(x) = 3x^2 - 24x + 48 = 0$ hat nur die Wurzel $+4$, und die zweite Ableitung $f''(x) = 6x - 24$ nimmt für $x = 4$ den Wert 0 an; dem Werte $+4$ entspricht daher kein Grenzwert. Da die Gleichung $f''(x) = 0$ ebenfalls nur die Wurzel $+4$ hat, so gehört zu dieser Wurzel ein Wendepunkt, bei dem die Tangente der X-Achse parallel ist.

Nr. 11. Bestimmung des wahren Wertes unbestimmter Ausdrücke.

Häufig kommt es vor, daß ein aus zwei Funktionen einer Veränderlichen x gebildeter Ausdruck eine der unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, wenn man x einen gewissen Wert beilegt. Entwickelt man dann die Funktionen nach dem binomischen Satze, so gelingt es in den meisten Fällen, durch Grenzübergänge den wahren Wert der Ausdrücke zu berechnen. Bequemer ist es jedoch, sich auch hier der Ableitungen zu bedienen.

a) Die Form $\frac{0}{0}$.

Werden für $x = a$ die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich 0 und entwickelt man $f(a+h)$ und $g(a+h)$ nach der Taylorschen Reihe, so erkennt man, daß der wahre Wert des Quotienten $\frac{f(a)}{g(a)}$ gleich dem Grenzwert ist, den der Quotient

$$\frac{hf'(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots}{hg'(a)+\frac{h^2}{2!}g''(a)+\frac{h^3}{3!}g'''(a)+\cdots}$$

für $h=0$ annimmt. Da der Bruch sich durch h kürzen läßt und an der Grenze im Zähler und Nenner mit Ausnahme der ersten alle Glieder verschwinden, so ist der wahre Wert des Quotienten gleich $\frac{f'(a)}{g'(a)}$. Sind aber auch die ersten Ableitungen für $x=a$ gleich 0, so ist der wahre Wert gleich dem Quotienten aus den Ableitungen $f''(a)$ und $g''(a)$ usw.

Beispiel 1. Der Quotient $\frac{x^3+3x-14}{x^2-5x+6}$ nimmt für $x=2$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Da aber der Quotient der ersten Ableitungen $\frac{3x^2+3}{2x-5}$ für $x=2$ den Wert -15 besitzt, so ist der wahre Wert des gegebenen Quotienten für $x=2$ gleich -15.

Beispiel 2. Der Quotient $\frac{e^x-\cos x-x}{x-\sin x}$ nimmt für $x=0$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Der Quotient der ersten Ableitungen $\frac{e^x+\sin x-1}{1-\cos x}$ nimmt für $x=0$ ebenfalls die Form $\frac{0}{0}$ an. Der Quotient der zweiten Ableitungen $\frac{e^x+\cos x}{\sin x}$ wird gleich $\frac{2}{0}$, und demnach ist der wahre Wert des gegebenen Quotienten für $x=0$ gleich ∞.

b) Die Form $0\cdot\infty$.

Wird für $x=a$ die Funktion $f(x)$ gleich 0 und die Funktion $g(x)$ gleich ∞, so hat man wieder $f(a):\frac{1}{g(a)}=\frac{0}{0}$; demnach ist hier der Quotient aus $f(a)$ und $\frac{1}{g(a)}$ zu untersuchen.

Beispiel 3. Das Produkt $(a^x-1)\operatorname{ctg} x$ nimmt für $x=0$ die Form $0\cdot\infty$ an. Gibt man ihm die Form $\frac{a^x-1}{\operatorname{tg} x}$ und bildet die Ableitungen, so erhält man als Grenzwert $\frac{la\cdot a^0}{1+\operatorname{tg}^2 0}$ oder la.

c) Die Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Werden die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ beide für $x=a$ unendlich groß, so werden ihre reziproken Werte für $x=a$ beide gleich 0. Aus $\frac{f(x)}{g(x)}$ bildet man daher $\frac{1}{g(x)}:\frac{1}{f(x)}$, um an der Grenze die Form $\frac{0}{0}$ zu erhalten

Der Quotient der Ableitungen ist hier gleich $\frac{g'(x)\cdot[f(x)]^2}{f'(x)\cdot[g(x)]^2}$. Bezeichnet man den gesuchten Grenzwert mit W, so ist $W=\frac{g'(a)}{f'(a)}\cdot W^2$; in dem Falle, daß W nicht die Größe 0 besitzt, kann man durch W kürzen und erhält dann wieder wie in Absatz a) für den gesuchten Grenzwert den Quotienten $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Beispiel 4. Der Quotient $\frac{a^{\frac{1}{x}}+1}{\operatorname{ctg} x}$ nimmt für $x=0$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an. Da $d(a^{\frac{1}{x}}+1) = -la \cdot \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$ und $d(\operatorname{ctg} x) = -(1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}$ ist, so nimmt der Quotient der Ableitungen die Gestalt $\frac{la \cdot a^{\frac{1}{x}} \sin^2 x}{x^2}$ an. Nun ist $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$, und daher erhält man den Grenzwert $\lim\limits_{x=0} (la \cdot a^{\frac{1}{x}})$ oder ∞.

Kapitel 4.

Einführung in die Integralrechnung.

Nr. 12. Begriff des Integrals. Sätze über Integrale.

a) Wie bei den elementaren Rechnungsarten durch Umkehrung neue Rechnungsarten entstehen, so tritt auch hier der Aufgabe, den Differentialquotienten einer gegebenen Funktion zu bestimmen, die umgekehrte Aufgabe an die Seite, eine Funktion zu ermitteln, deren Ableitung bekannt ist, d. h. eine gegebene Funktion als Ableitung einer anderen anzusehen und diese aufzufinden.

Stellt man die gegebene Funktion $f'(x)$ graphisch dar, und entspricht dem Werte $x=a$ die Ordinate AB, so ist das Flächenstück, das die Kurve, die X-Achse und AB mit einer zweiten Ordinate $A'B'$ begrenzen, eine bestimmte Funktion $f(x)$ von x. Das Differential dieser Funktion ist die Größe $f'(x)\,dx$, und die Summe aller zwischen AB und $A'B'$ gelegenen Flächenelemente ist gleich $f(x)$. Wählt man statt des Summenzeichens $\sum$ das Zeichen $\int$, so erkennt man in $f(x) = \int f'(x)\,dx$ eine Funktion, deren erste Ableitung gleich $f'(x)$ ist. Hiernach erweist sich $\int f'(x)\,dx$ als eine Summe aus unendlich vielen unendlich kleinen Teilchen; man bezeichnet die Funktion daher als **Integral** (integrum = ganz, unversehrt), und die Rechnung, welche zur Be-

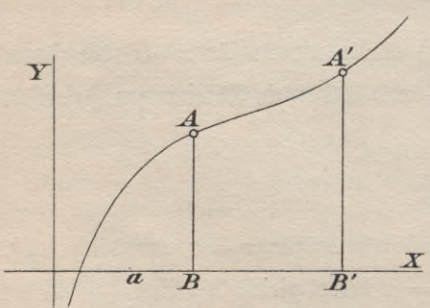

Fig. 7.

stimmung einer Funktion aus ihrer Ableitung führt, wird **Integralrechnung** genannt.

b) Nach Lehrsatz 5 in Nr. 4 macht sich eine additive Konstante einer Funktion bei ihrer Ableitung nicht bemerklich. Hieraus folgt umgekehrt, daß zu jeder Funktion $f'(x)$ unzählig viele Integrale gehören, die sich lediglich durch die Größe der additiven Konstante unterscheiden.

Man hat also:

1. $$\int f'(x)\,dx = f(x) + C.$$

Die Integrationskonstante C ist jedoch bestimmt, wenn man weiß, welchen Wert die Funktion für einen gegebenen Wert der Veränderlichen x annehmen muß. Führt man den hieraus berechneten Wert von C in die Gleichung 1 ein, so erhält man aus dem allgemeinen Integral ein besonderes (partikuläres) Integral.

Aus dem unbestimmten Integral geht das **bestimmte Integral** hervor, wenn für die Veränderliche Grenzen gesetzt werden. Soll z. B. nur das Flächenstück zwischen den Ordinaten AB und $A'B'$ (s. Fig. 7) ermittelt werden, so wird die Funktion durch die Differenz aus der bis $A'B'$ und der bis AB reichenden Fläche dargestellt. Man gibt in diesem Falle bei dem Integrationszeichen die untere Grenze unten und die obere Grenze oben an, schreibt also

2. $$\int_a^x f'(x)\,dx = f(x) - f(a).$$

c) Da $d\,[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)\,dx$, also $\int c \cdot f'(x)\,dx = c \cdot f(x)$

und auch $c \cdot \int f'(x)\,dx = c \cdot f(x)$

ist, so besteht die Gleichung (s. Lehrs. 6 in Nr. 4):

3. $$\int c \cdot f'(x)\,dx = c \cdot \int f'(x)\,dx,$$

d. h. ein konstanter Faktor kann vor das Integralzeichen gesetzt werden.

In gleicher Weise läßt sich der Lehrsatz 7 in Nr. 4 umkehren.

Nr. 13. Methoden der Integralrechnung.

a) Umkehrung der Differentialformeln.

Die Integration wird am einfachsten, wenn die gegebene Funktion von vorne herein in eine der bekannten Differentialformeln hineinpaßt, oder wenn nur kleinere Veränderungen vorzunehmen sind, um eine bekannte Form herzustellen. Ist z. B. $y' = 7x^5$, so weiß man, daß in der Funktion y die Potenz x^6 steht, und da deren Ableitung gleich $6x^5$ ist, so muß man $7x^5$ so umgestalten, daß der Faktor 6 auftritt. Man setzt daher $y' = \frac{7}{6} \cdot 6x^5$ und hat dann:

$$y' = \frac{7}{6}\, d(x^6), \quad \text{also:} \quad y = \frac{7}{6}\int d(x^6) = \frac{7}{6}\, x^6 + C.$$

Beispiel 1. Aus $y = (4x^3 + 5x^2 - 3x + 8)\,dx$

bildet man: $$y = \left(4x^3 + \frac{5}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x + 8\right) dx$$

und hieraus: $$y = x^4 + \frac{5}{3}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x^2 + 8x + C.$$

b) Vorbereitung der Integration durch eine Substitution.

In vielen Fällen, in denen es nicht möglich ist, durch eine einfachere Umgestaltung der gegebenen Funktion die Integration vorzubereiten, wird die Einführung einer neuen Veränderlichen ausreichen, um zu einer bekannten Differentialformel zu gelangen.

Beispiel 2. Es sei $dy = (ax + b)^n\,dx$.

Setzt man $ax + b = t$, so hat man $a \cdot dx = dt$, also

$$(ax + b)^n\,dx = \frac{1}{a} \cdot t^n\,dt$$

und somit

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$$

Beispiel 3. Es sei $dy = \frac{dx}{x + a}$.

Setzt man $x + a = t$, so hat man $dx = dt$ und $\frac{dx}{x+a} = \frac{dt}{t} = d(lt)$,

und somit folgt: $\int \frac{dx}{x + a} = lt + C = l(x + a) + C.$

Beispiel 4. Es sei $y = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Setzt man $\frac{x}{a} = t$, so erhält man $y = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ und dann nach Gleichung 3 in Nr. 5: $y = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

Beispiel 5. Es sei $y' = \frac{1}{a^2 + b^2x^2}$.

In dem Ausdruck $a^2 + b^2x^2$ oder $a^2\left[1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]$ setzt man $\frac{bx}{a} = t$; man hat dann: $dx = \frac{a}{b}\,dt$, also: $y'\,dx = \frac{1}{ab} \cdot \frac{dt}{1 + t^2}$, und somit nach Gleichung 3 in Nr. 5: $y = \frac{1}{ab}\,\mathrm{arc\,tg}\, t + C = \frac{1}{ab}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{bx}{a} + C.$

Beispiel 6. Es sei $y' = \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

Um hier eine der bekannteren Formen zu bilden, bringt man den Radikanden auf die Form $a^2-(b-x)^2$ und ersetzt $\frac{b-x}{a}$ durch t; man hat dann:

$$dx = -\,a\,dt;\quad a^2-(b-x)^2 = a^2(1-t^2),\quad y'\,dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

und daher wieder nach Gleichung 3 in Nr. 5:

$$y = -\operatorname{arc\,cos} t + C = -\operatorname{arc\,cos}\frac{b-x}{a} + C.$$

In dem vorstehenden Beispiel hat man 5 durch $9-4$ zu ersetzen, um auf die entwickelte Form zu gelangen; es ist also

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = -\operatorname{arc\,cos}\frac{2-x}{3} + C\ \left(\text{oder} = \operatorname{arc\,sin}\frac{x-2}{3} + C\right).$$

Beispiel 7. Es sei $y' = \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

Das Differential hat keine der bekannten Formen und läßt sich auch nicht durch eine einfache Substitution auf eine von diesen bringen, weil unter der Wurzel x^2 mit dem Vorzeichen $+$ steht. Aber auch hier läßt sich durch eine Substitution, bei der das Quadrat der Veränderlichen x verschwindet, eine Lösung herbeiführen. Setzt man nämlich $\sqrt{a^2+x^2} = t-x$, so erhält man: $a^2 = t^2 - 2tx$, also $x = \frac{t^2-a^2}{2t}$ und $t-x$ (oder $\sqrt{a^2+x^2}$) $= \frac{a^2+t^2}{2t}$, und da $dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+t^2}{t^2}$ ist, so ergibt sich: $\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{dt}{t}\cdot$ Hieraus aber folgt:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int\frac{dt}{t} = l\,t + C = l\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right) + C.$$

c) Partielle Integration (Anwendung des Lehrsatzes 8 in Nr. 4).

Sind u und v zwei Funktionen von x, so hat man nach Lehrsatz 8

$d(u\cdot v) = u\cdot dv + v\cdot du$; es ist also $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$.

Diese Gleichung kann oft verwandt werden, um ein Integral von der Form $\int u\,dv$ auf ein bekanntes Integral von der Form $\int v\,du$ zu bringen.

Beispiel 8. Es sei $y' = x\sin x$.

Man hat $\quad y'\,dx = x\sin x\,dx = -\,x\,d(\cos x)$

$$= -\,d(x\cos x) + \cos x\,dx,$$

also $$y = -\,x\cos x + \sin x + C.$$

Beispiel 9. Es sei $y' = x^2 \cos x$.

Man hat hier
$$y'\,dx = x^2 \cos x\,dx = x^2 d(\sin x)$$
$$= d(x^2 \sin x) - \sin x\, d(x^2)$$
$$= d(x^2 \sin x) - 2x \sin x\, dx.$$
Nach Beispiel 8 ergibt sich daher:
$$y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Beispiel 10. Es sei $y' = \cos^2 x$.

Man hat hier
$$y'\,dx = \cos^2 x\,dx = \cos x \cdot d(\sin x) = d(\cos x \sin x) + \sin^2 x\,dx,$$
$$= d(\cos x \sin x) + dx - \cos^2 x\,dx,$$
also
$$2 \cos^2 x\,dx = d(\cos x \sin x) + dx,$$
und somit
$$\int \cos^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}(\cos x \sin x + x) + C.$$

Kapitel 5.

Anwendungen aus der Geometrie und Physik.

Nr. 14. Länge krummer Linien (Rektifikation).

Das Differential ds eines Bogens ist mit dem Differential dy der Funktion und dem Differential dx der Veränderlichen durch die Gleichung
$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$
verbunden; es ist also
$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx + C.$$

Beispiel 1. Die Länge eines Kreises mit dem Halbmesser r zu bestimmen.

Auflösung. Wählt man als Koordinatenachsen zwei aufeinander senkrechte Durchmesser des Kreises, so hat dieser die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$; es ist also $y^2 = r^2 - x^2$, $2y\,dy = -2x\,dx$ und somit $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

Nun ist das Differential ds des Bogens gleich $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$; man hat daher $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\, dx = \frac{dx}{y}\sqrt{x^2 + y^2} = r \cdot \frac{dx}{y}$ $= r \cdot \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, und nun nach Nr. 13 Beispiel 4: $s = r \arcsin \frac{x}{r} + C$.

Bei dem Halbkreise läuft x von $-r$ bis $+r$; ist daher k die Länge des Kreises, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}k = r\cdot(\text{arc sin } 1 - \text{arc sin } -1) = r\cdot\left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = r\cdot\pi, \text{ also } \boldsymbol{k = 2\pi r}.$$

Beispiel 2. Die Länge der Zykloide zu bestimmen.

Vorbemerkung. Rollt ein Kreis auf einer Geraden G, ohne zu gleiten, so beschreibt ein Punkt P des Kreises eine Linie, welche Zykloide (Radkurve) genannt wird. Wird G als X-Achse gewählt und der Anfangspunkt in den Punkt O verlegt, in dem P zum ersten Male auf G liegt, so ist während der Bewegung bei jeder Lage des Punktes P der Berührungspunkt B auf der X-Achse von O ebensoweit entfernt wie auf dem Kreise von P.

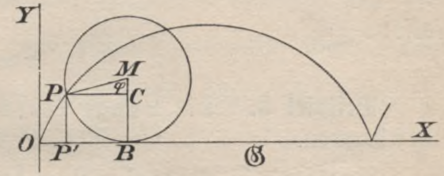

Fig. 8.

Wird daher der Winkel BMP mit φ bezeichnet, so ist $\widehat{BP} = r\cdot\varphi$, und da $P'B = r\sin\varphi$ ist, so erhält der Punkt P die Abszisse:

$$x = OB - P'B = \boldsymbol{r\cdot\varphi - r\sin\varphi}.$$

Entsprechend ergibt sich als Ordinate:

$$y = r - MC = \boldsymbol{r - r\cos\varphi}.$$

Umgekehrt folgt hieraus:

$$\cos\varphi = \frac{r-y}{r} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \pm\frac{1}{r}\sqrt{2ry - y^2}.$$

Aus $x = r\cdot\varphi - r\cdot\sin\varphi$ findet man:

$$dx = r\,d\varphi - r\,d\varphi\cos\varphi = r(1-\cos\varphi)\,d\varphi$$

also $dx = y\,d\varphi$, und da $dy = r\,d\varphi\sin\varphi = d\varphi\cdot\sqrt{2ry-y^2}$ ist, so erhält man:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\cdot\sqrt{2ry-y^2} = \cdot\sqrt{\frac{2r-y}{y}}.$$

Aufl. Nach den vorstehenden Gleichungen ist

$$dx = y\,d\varphi \quad \text{und} \quad dy = \sqrt{2ry-y^2}\,d\varphi;$$

demnach hat man:

$$\begin{aligned}(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 &= 2ry\,d\varphi,\\ &= 2r\cdot r(1-\cos\varphi)\,d\varphi\\ &= 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,\end{aligned}$$

und folglich:

$$\begin{aligned}ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi &= 4r\sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right),\\ &= -4r\,d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right).\end{aligned}$$

Wird daher die Länge der Zykloide mit z bezeichnet, so ergibt sich hieraus:

$$z = \int_0^{2\pi} ds = -4r \int_0^{2\pi} d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= -4r(\cos\pi - \cos 0)$$
$$= -4r(-1-1)$$

also:

$$\boldsymbol{z = 8r}.$$

Beispiel 3. Die Länge eines Bogens der Parabel $y^2 = 2px$ zu bestimmen.

Auflösung. Aus $y^2 = 2px$ folgt: $2y\,dy = 2p\,dx$, also $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$ und $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{y}{p}\right)^2 + 1}\,dy = \frac{1}{p}\sqrt{p^2+y^2}\,dy$. Nun ist aber

$$\sqrt{p^2+y^2}\,dy = d(y\cdot\sqrt{p^2+y^2}) - \frac{y^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}} = d(y\sqrt{p^2+y^2}) - \frac{y^2+p^2-p^2}{\sqrt{p^2+y^2}}\,dy,$$
$$= d(y\sqrt{p^2+y^2}) - \sqrt{p^2+y^2}\,dy + \frac{p^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}},$$

also

$$2\cdot\sqrt{p^2+y^2}\,dy = d(y\sqrt{p^2+y^2}) + \frac{p^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}},$$

und da nach Beispiel 7 in Nr. 13

$$\int\frac{p^2\,dy}{\sqrt{p^2+y^2}} = p^2\cdot l(y+\sqrt{p^2+y^2})$$

ist, so hat man:

$$2\int\sqrt{p^2+y^2}\,dy = y\sqrt{p^2+y^2} + p^2\cdot l(y+\sqrt{p^2+y^2}) + C,$$

und folglich:

$$s = \frac{1}{2p}\cdot y\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\cdot l(y+\sqrt{p^2+y^2}) + C'.$$

Für $y=0$ wird auch $s=0$; es ist daher $\frac{p}{2}\cdot lp + C' = 0$, also $C' = -\frac{p}{2}\cdot lp$, und somit ergibt sich:

$$s = \frac{1}{2p}\cdot y\sqrt{p^2+y^2} + \frac{p}{2}\,l\left(\frac{y+\sqrt{p^2+y^2}}{p}\right).$$

Die Integration wurde hier nur dadurch ermöglicht, daß man y als unabhängige Veränderliche wählte.

Beispiel 4.*) Die Länge s der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ zu bestimmen.

---

*) Die Beispiele 4 und 5 können übergangen werden.

Auflösung. Es ergibt sich leicht, daß $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ und $ds = dx\sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}}$ ist. Der Radikand läßt sich auf die Form $1 + \frac{b^4 x^2}{a^2(a^2 b^2 - b^2 x^2)}$ bringen, und aus dieser geht $\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}$ hervor. Ist nun ε die numerische Exzentrizität, so ist $a^2 - b^2 = a^2\varepsilon^2$, und der Radikand erhält die Gestalt $\frac{a^2 - \varepsilon^2 x^2}{a^2 - x^2}$. Im ersten Quadranten läuft x von 0 bis a; setzt man daher $x = a\sin\varphi$, so muß φ alle Werte von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ durchlaufen, und da jetzt $dx = a\cos\varphi\, d\varphi$ und $a^2 - x^2 = a^2\cos^2\varphi$ ist, so entsteht die Gleichung:

$$1. \qquad \frac{1}{4}s = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}} = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Da dies Integral keine der bekannten Formen hat und sich auch nicht auf eine von diesen bringen läßt, so muß man seinen Wert auf einem anderen Wege zu ermitteln suchen. Entwickelt man die Potenz $(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze, so folgt:

$$2. \qquad (1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\sin^6\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\varepsilon^8\sin^8\varphi \text{ usw.}$$

Man erhält also eine Reihe für $\frac{1}{4}s$, wenn man das Integral $\int\sin^m\varphi\, d\varphi$ bestimmen kann. Nun ist aber

$$\begin{aligned}\sin^m\varphi\, d\varphi &= \sin^{m-1}\varphi\sin\varphi\, d\varphi = -\sin^{m-1}\varphi\, d(\cos\varphi)\\ &= -d(\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi) + (m-1)\sin^{m-2}\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\\ &= -d(\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi) + (m-1)\sin^{m-2}\varphi\, d\varphi - (m-1)\sin^m\varphi\, d\varphi,\end{aligned}$$

also

$$m\sin^m\varphi\, d\varphi = -d(\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi) + (m-1)\sin^{m-2}\varphi\, d\varphi,$$

und hiernach

$$3. \qquad \int\sin^m\varphi\, d\varphi = -\frac{\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi}{m} + \frac{m-1}{m}\int\sin^{m-2}\varphi\, d\varphi.$$

Somit hat man:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m\varphi\, d\varphi = \frac{m-1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-2}\varphi\, d\varphi.$$

Ganz entsprechend ergeben sich die Gleichungen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-2}\varphi\, d\varphi = \frac{m-3}{m-2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4}\varphi\, d\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-4}\varphi\, d\varphi = \frac{m-5}{m-4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-6}\varphi\, d\varphi,$$

usw., bis schließlich $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ entsteht. (m ist hier eine gerade Zahl!)

Wie sich leicht erkennen läßt, erhält man durch Vereinigung dieser Gleichungen:

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m\varphi\, d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)(m-7)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{m(m-2)(m-4)(m-6)(m-8)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Setzt man jetzt der Reihe nach m gleich 2, 4, 6 usw. und benutzt die gefundenen Ausdrücke für die Gleichungen 2 und 1, so erhält man:

5. $$\frac{1}{4}s = a\,\frac{\pi}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\cdot\tfrac{1}{2} - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}\varepsilon^4\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^6\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \cdots\right)$$
$$= a\,\frac{\pi}{2}\left(1 - (\tfrac{1}{2}\varepsilon)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\varepsilon^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\varepsilon^3\right)^2 - \cdots\right).$$

Die Reihe konvergiert um so schneller, je geringer der Unterschied zwischen a und b ist.

Beispiel 5. Die Länge s eines Bogens der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ zu bestimmen.

Auflösung. Auf dem gleichen Wege wie bei der Ellipse ergibt sich zunächst $ds = dx\sqrt{\frac{\varepsilon^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}$. Da hier x von a bis ∞ läuft, so setzt man $x = \frac{a}{\cos\varphi}$; man hat dann $dx = \frac{a\sin\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi}$, $x^2 - a^2 = a^2\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$, $\varepsilon^2x^2 - a^2 = \frac{a^2\varepsilon^2}{\cos^2\varphi}\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}\right)$, also $ds = \frac{a\varepsilon\, d\varphi}{\cos^2\varphi}\sqrt{1 - \frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}}$.

Auch hier ist nun die Potenz $\left(1 - \frac{\cos^2\varphi}{\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ zu entwickeln; das erste Glied ist wieder gleich 1, und da $\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = d\varphi(1 + \mathrm{tg}^2\varphi) = d(\mathrm{tg}\,\varphi)$ ist, so beginnt die Reihe für s mit $a\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\varphi$. Das zweite Glied wird, wie man leicht sieht, gleich $-\frac{1}{2}\frac{a}{\varepsilon}\varphi$, und die folgenden Glieder sind sämtlich mit einem Faktor von der Form $\int \cos^m \varphi \, d\varphi$ behaftet, dessen Größe sich aus der Gleichung 3 ergibt, wenn man darin φ durch $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ersetzt.

Nr. 15. Bestimmung von Flächen ebener Kurven. (Quadratur.)

Wie in Nr. 12 bei der Einführung des Integrals bereits bemerkt ist, begrenzt die ebene Kurve $y = f(x)$ mit der X-Achse und den zu zwei Werten a und b von x gehörigen Ordinaten eine Fläche, deren Größe durch das Integral $\int_a^b y\,dx$ angegeben wird. Von dieser Tatsache wollen wir Gebrauch machen, um einige Flächen zu berechnen.

Beispiel 1. Die Fläche zu berechnen, welche eine im Abstand $x = x_1$ auf der Achse senkrecht stehende Sehne der Parabel $y^2 = 2px$ mit dieser begrenzt.

Auflösung. Die Hälfte der gesuchten Fläche ist das Integral $\int y\,dx$. Nun ist hier

$$y\,dx = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2p} \cdot d\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right);$$

man hat daher:

$$\tfrac{1}{2}F = \frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2px_1} \cdot x_1 = \frac{2}{3}y_1 x_1,$$

und folglich:

$$\boldsymbol{F = \frac{4}{3} x_1 y_1.}$$

Beispiel 2. Den Inhalt eines Kreises mit dem Halbmesser r zu berechnen.

Auflösung. Wählt man zwei aufeinander senkrechte Durchmesser als Koordinatenachsen, so hat der Kreis die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$. Es ist also

$$y = \sqrt{r^2 - x^2},\ y\,dx = \sqrt{r^2 - x^2}\,dx.$$

Da aber

$$\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = d\left(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\right) - x \cdot d\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right) = d\left(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\right) + \frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und
$$\frac{x^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - (r^2 - x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}}\,dx = \frac{r^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

also
$$2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = d\left(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\right) + \frac{r^2\,dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

ist, so ergibt sich nach Beispiel 4 in Nr. 13:

$$2\int y\,dx = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin\frac{x}{r} + C.$$

Nun läuft x bei dem Halbkreise von $-r$ bis $+r$, und an beiden Grenzen wird das erste Glied $x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ gleich 0; es ist daher

$$\tfrac{1}{2} J = \int_{-r}^{r} y\,dx = \tfrac{1}{2} r^2 \arcsin(+1) - \tfrac{1}{2} r^2 \arcsin(-1) = \tfrac{1}{2} r^2 \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$= \frac{1}{2} r^2 \cdot \pi$, und somit folgt: $\boldsymbol{J = \pi \cdot r^2}$.

Beispiel 3. Den Inhalt J einer Ellipse mit den Halbachsen a und b zu berechnen.

Auflösung. Aus der Gleichung der Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ folgt: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$; man hat daher nach Beispiel 2:

$$\tfrac{1}{2} J = \int y\,dx = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi \cdot a^2}{2}, \quad \text{also} \quad \boldsymbol{J = \pi a b}.$$

Beispiel 4. Die Fläche zu berechnen, welche die Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ mit der Senkrechten $x = x_1$ begrenzt.

Auflösung. Man hat hier für die Hälfte der gesuchten Fläche das Integral $\int_a^{x_1} y\,dx$. Nun ist $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, also $y\,dx = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx$; da aber

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx &= d\left(x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right) - x \cdot d\left(\sqrt{x^2 - a^2}\right) = d\left(x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= d\left(x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx \\ &= d\left(x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \sqrt{x^2 - a^2}\,dx - \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},\end{aligned}$$

also
$$2\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = d\left(x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

ist, so folgt zunächst: $F = 2\int_a^{x_1} y\,dx = \frac{b}{a}\left[\int_a^{x_1} d\left(x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}\right) - a^2 \int_a^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right]$.

Setzt man jetzt $\sqrt{x^2 - a^2} = t - x$, so wird $x = \frac{t^2 + a^2}{2t}$, also $t - x = \frac{1}{2}\frac{t^2 - a^2}{t}$, $dx = \frac{t^2 - a^2}{t^2}$ und somit $\frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{dt}{t}$. Demnach ist $\int \frac{a^2\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = a^2\,l\,t + C = a^2\,l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$.

An der unteren Grenze (a) wird der Ausdruck $x \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$ gleich 0; man erhält daher

$$F = x_1 \cdot \sqrt{x_1^{\,2} - a^2} \cdot \frac{b}{a} - ab\left[l\left(x_1 + \sqrt{x_1^{\,2} - a^2}\right) - l\,a\right]$$

oder

$$F = \frac{b}{a}\,x_1 \cdot \sqrt{x_1^{\,2} - a^2} - ab \cdot l\left(\frac{x_1^{\,2} + \sqrt{x_1^{\,2} - a^2}}{a}\right).$$

Beispiel 5. Die Fläche zu bestimmen, welche eine Zykloide mit der X-Achse einschließt (S. Beispiel 2 in Nr. 14).

Auflösung. Aus den Koordinaten $x = r(\varphi - \sin\varphi)$ und $y = r(1 - \cos\varphi)$ folgt hier: $y\,dx = r(1-\cos\varphi)\cdot r(1-\cos\varphi)\,d\varphi = r^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)\,d\varphi$. Für $\varphi = 0$ liegt P auf der Geraden $\mathfrak{G}$ und für $\varphi = 2\pi$ fällt er wieder auf $\mathfrak{G}$; der Punkt P beschreibt also einen ganzen Bogen der Kurve, wenn φ von 0 bis 2π wächst, und demnach ist das Integral $\int y\,dx$ von 0 bis 2π zu nehmen. Von den drei Bestandteilen des Differentials $y\,dx$ liefert der erste $2\pi r^2$ und der zweite $2r^2 \sin 2\pi$ oder 0; der dritte aber ist nach Beispiel 10 in Nr. 13 gleich dem Werte, den der Ausdruck $\frac{r^2}{2}(\sin\varphi\cos\varphi + \varphi)$ für $\varphi = 2\pi$ annimmt, d. h. gleich πr^2. Demnach erhält man für die gesuchte Fläche:

$$F = 2\pi r^2 + \pi r^2 = \mathbf{3\pi r^2}.$$

Beispiel 6. Die Fläche eines Ausschnitts einer logarithmischen Spirale zu bestimmen.

Vorbemerkungen. a) Bei Benutzung von Polarkoordinaten wird die Lage eines Punktes P durch seine Entfernung r von dem Nullpunkte O und den Winkel φ bestimmt, den OP mit der (positiven) X-Achse bildet. Besteht zwischen r und φ (als Bogen eines Kreises mit dem Halbmesser 1 ausgedrückt) eine Gleichung, so ist deren geometrisches Bild eine Spirale. Ist insbesondere r gleich einer Exponentialfunktion $c \cdot e^{m\varphi}$ des Winkels φ, so daß dieser als eine logarithmische Funktion von r entwickelt werden kann, so heißt die Spirale logarithmische Spirale.

b) Das Flächendifferential einer Spirale kann als ein Kreisausschnitt mit dem Mittelpunktswinkel $d\varphi$ angesehen werden; es ist daher $df = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$.

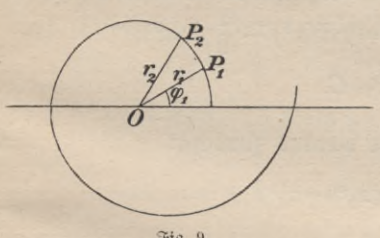

Fig. 9.

Auflösung. Hat die Spirale die Gleichung $r = c \cdot e^{m\varphi}$, so ist $df = \frac{1}{2} c^2 m e^{2m\varphi}\, d\varphi$ und demnach

$$f = \frac{c^2}{2}\int e^{2m\varphi}\, d\varphi = \frac{c^2}{4m} e^{2m\varphi} + C = \frac{r^2}{4m} + C.$$

Entsprechen den Winkeln φ_1 und φ_2 die Radien r_1 und r_2, so ergibt sich hieraus für den von r_1 und r_2 begrenzten Ausschnitt die Größe $\frac{1}{4m}(r_2{}^2 - r_1{}^2)$.

Nr. 16. Rauminhalt von Umdrehungskörpern. (Kubatur.)

Wird eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ um die X-Achse gedreht, so beschreibt sie eine Fläche, welche einen Rotationskörper umschließt. Zwei auf der Achse senkrechte Ebenen, deren Abstände von dem Nullpunkte gleich x

und $x + dx$ sind, schneiden aus dem Körper ein Raumelement dV heraus, das an der Grenze als ein Zylinder mit der Höhe dx und der Grundfläche πy^2 angesehen werden kann. Man hat daher $dV = \pi y^2 dx$.

Beispiel 1. Den Rauminhalt eines geraden Kreiskegels zu bestimmen.

Auflösung. Die erzeugende Linie hat, wenn man den Koordinatenanfang in den Schnittpunkt der Geraden und der Drehungsachse verlegt, die Gleichung: $y = Ax$. Es ist daher $dV = \pi A^2 x^2 dx = \frac{\pi}{3} A^2 d(x^3)$ und $V = \frac{\pi}{3} A^2 x^3 + C$. Geht das Integral von 0 bis h, so folgt hieraus $V = \frac{\pi}{3} A^2 h^3$. Wird jetzt der zu $x = h$ gehörige Wert von y mit r bezeichnet, so ist $r = Ah$, also $A^2 = \frac{r^2}{h^2}$ und somit $\boldsymbol{V = \frac{\pi}{3} r^2 h}$.

Zusatz. Geht die Integration von x_1 bis x_2 und sind r_1 und r_2 die zugehörigen Werte von y, so erhält man:

$$V = \frac{\pi}{3} A^2 (x_2^3 - x_1^3) = \frac{\pi}{3} A^2 (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2).$$

Nun ist $x_2 - x_1$ gleich der Höhe h des Kegelstumpfs, und da

$$A^2(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2) = r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2$$

ist, so ergibt sich die bekannte Formel: $V = \frac{\pi}{3} h (r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2)$.

Beispiel 2. Den Rauminhalt einer Kugelschicht zu bestimmen.

Auflösung. Legt man den Koordinatenanfang in den einen Endpunkt des Durchmessers, um den sich der Bogen des erzeugenden Kreises dreht, so hat man:

$$y^2 dx = 2rx\,dx - x^2 dx = r\,d(x^2) - \frac{1}{3} d(x^3)$$

und somit

$$\frac{V}{\pi} = rx^2 - \frac{1}{3} x^3 + C.$$

Geht die Integration von x_1 bis x_2, so folgt hieraus zunächst:

$$\frac{V}{\pi} = r(x_2^2 - x_1^2) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3).$$

Nun ist aber dieser Ausdruck gleich

$$(x_2 - x_1)\left[r(x_2 + x_1) - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_2 x_1 + x_1^2)\right];$$

ferner ist $y_2^2 = 2rx_2 - x_2^2$ und $y_1^2 = 2rx_1 - x_1^2$, also $2r(x_2 + x_1) = y_2^2 + y_1^2 + (x_2^2 + x_1^2)$. Beachtet man weiter, daß die Höhe h der Schicht gleich $x_2 - x_1$, daß also $x_2 x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2 - h^2)$ ist, so erhält man:

$$\frac{V}{\pi} = h\left[\tfrac{1}{2}(y_2^2 + y_1^2) + \tfrac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2) - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1^2) - \frac{1}{6}(x_2^2 + x_1^2) + \frac{1}{6}h^2\right]$$

$$= h\left(\frac{3y_2^2 + 3y_1^2 + h^2}{6}\right), \text{ also } \boldsymbol{V = \frac{\pi h}{6}(3y_2^2 + 3y_1^2 + h^2)}.$$

Zusatz. Aus dem allgemeinen Integral $\pi\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$ erhält man den Rauminhalt eines Kugelabschnitts mit der Höhe h, wenn man x von 0 bis h laufen läßt; es ist daher $A_b = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right) = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$. Ebenso läßt sich aus dem allgemeinen Integral bequem die Formel für den Rauminhalt der ganzen Kugel ableiten.

Beispiel 3. Den Rauminhalt eines Rotationsellipsoides zu bestimmen.

Auflösung. Dreht sich die Ellipse um ihre große Achse, und liegt der Koordinatenanfang in einem Endpunkt dieser Achse, hat also die Ellipse die Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = 2ab^2x$, so erhält man $dV = \pi\frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)\,dx$. Hieraus aber folgt: $\frac{a^2V}{b^2\pi} = ax^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$. Für das ganze Ellipsoid geht das Integral von 0 bis $2a$; man hat daher $V = \pi\cdot\frac{b^2}{a^2}\left(4a^3 - \frac{8a^3}{3}\right)$ $= \frac{4}{3}\pi ab^2$.

Dreht sich die Ellipse um ihre kleine Achse, so hat man in dieser Formel a mit b zu vertauschen. Man erkennt leicht, daß das zweite Ellipsoid größer ist als das erste.

Beispiel 4. Den Rauminhalt eines Körpers zu bestimmen, der durch die Drehung eines Bogens einer Zykloide um seine Sehne entsteht.

Auflösung. Man hat hier (siehe Beispiel 2 in Nr. 14) $y^2 = r^2(1-\cos\varphi)^2$ und $dx = r(1-\cos\varphi)\,d\varphi$, also $y^2dx = r^3(1-\cos\varphi)^3\,d\varphi$. Nun ist

$(1-\cos\varphi)^3 = 1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi$, und da

$$3\cos\varphi\,d\varphi = 3\,d(\sin\varphi),\quad 3\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{3}{2}[d(\cos\varphi\sin\varphi) + d\varphi]$$

und

$$\begin{aligned}\cos^3\varphi\,d\varphi &= \cos^2\varphi\,d(\sin\varphi) = d(\cos^2\varphi\sin\varphi) + 2\sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi\\ &= d(\cos^2\varphi\sin\varphi) + 2\cos\varphi\,d\varphi - 2\cos^3\varphi\,d\varphi,\quad \text{also}\end{aligned}$$

$$3\cos^3\varphi\,d\varphi = d(\cos^2\varphi\sin\varphi) + 2\cos\varphi\,d\varphi$$

ist, so folgt:

$$\begin{aligned}y^2dx &= d\varphi - 3d(\sin\varphi) + \frac{3}{2}[d(\cos\varphi\sin\varphi) + d\varphi] - \frac{1}{3}[d(\cos^2\varphi\sin\varphi) + 2d(\sin\varphi)]\\ &= \frac{5}{2}d\varphi - \frac{11}{3}d(\sin\varphi) + \frac{3}{2}d(\cos\varphi\sin\varphi) - \frac{1}{3}d(\cos^2\varphi\sin\varphi).\end{aligned}$$

Bei dem Integral wächst φ von 0 bis 2π; an beiden Grenzen fallen die letzten drei Glieder fort, und es bleibt: $V = \pi\cdot\frac{5}{2}r^2\cdot 2\pi$, also $V = 5\pi^2r^3$.

Nr. 17. Anwendungen aus der Physik.

a) Die Fallgesetze und der schiefe Wurf.

Die Veränderung der Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers wird durch die Anziehungskraft der Erde hervorgerufen, und die Zunahme seiner Geschwindigkeit v in der Zeiteinheit ist daher gleich g; daraus folgt, daß

$$\frac{dv}{dt} = g, \text{ also } dv = g\,dt \text{ und } v = gt + C$$

ist. Zu der Zeit $t = 0$ ist auch $v = 0$; demnach erhält man für die Geschwindigkeit v eines frei fallenden Körpers: $v = g \cdot t$.

Ferner ist bei jeder Bewegung die Geschwindigkeit gleich dem Quotienten aus dem Differential der zurückgelegten Strecke und dem Differential der Zeit; es ist also $ds = v\,dt$. Beim freien Fall hat man daher: $ds = g \cdot t \cdot dt = \frac{1}{2} g \cdot d(t^2)$, und folglich: $s = \frac{1}{2} gt^2 + C'$. Auch hier ist die Integrationskonstante gleich 0, weil beim Beginn der Bewegung die Strecke s noch gleich 0 ist.

Hat der Körper in dem Augenblick, in dem er der Wirkung der Schwerkraft ausgesetzt wird, bereits die Geschwindigkeit v_0, so ist $C' = v_0 t$, also $s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$.

Wird der Körper senkrecht in die Höhe geworfen, so ist $dv = -g\,dt$, und wenn die Anfangsgeschwindigkeit wieder mit v_0 bezeichnet wird, so folgt hieraus, daß $v = v_0 = gt$ und $h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ ist.

Beim schiefen Wurf ist die horizontale Komponente $v_0 \cos\alpha$ der Geschwindigkeit konstant, und die in horizontaler Richtung zurückgelegte Strecke x ist gleich $v_0 t \cos\alpha$. Für die vertikale Geschwindigkeit ergibt sich $v_0 \sin\alpha - gt$, und daraus folgt für die Höhe h, die der Körper nach t Sekunden erreicht hat,

$$h = v_0 t \sin\alpha - \tfrac{1}{2} gt^2.$$

Die Wurfhöhe findet man leicht, wenn man die Ableitung von h gleich 0 setzt, usw., und da die Wurfweite in der doppelten Zeit wie die Wurfhöhe erreicht wird, so läßt sich auch deren Bestimmung bequem durchführen.

b) Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels.

Bildet das Pendel zur Zeit t mit seiner Ruhelage den Winkel φ, so erfährt es bei seiner Weiterbewegung von der Ruhelage aus die Beschleunigung $-g \sin\varphi$. Es ist daher $\frac{dv}{dt} = -g \sin\varphi$, und wenn man hieraus und aus der Gleichung $ds = v\,dt$ die Größe dt eliminiert, so erhält man:

$$v\,dv = -g \sin\varphi\, ds.$$

Ist aber l die Länge des Pendels, so hat man $ds = l\,d\varphi$, und demnach ist

$$v\,dv = -lg \sin\varphi\, d\varphi = gl\,d(\cos\varphi), \text{ also } \tfrac{1}{2} v^2 = gl \cos\varphi + C.$$

Ist ferner α der Winkel, den die weiteste Entfernung des Pendels von seiner Ruhelage mit dieser bildet, so muß für $\varphi = \alpha$ die Geschwindigkeit gleich 0 sein; die Konstante C hat daher die Größe $-gl\cos\alpha$, und somit ergibt sich:

$$\tfrac{1}{2}v^2 = gl(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Jetzt ist $\frac{l\,d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}$, und hieraus folgt:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Ist α so klein, daß in der Reihe für $\cos\alpha$ (siehe Nr. 8 Gleichung 1) nur die zweite Potenz von α berücksichtigt zu werden braucht, so hat man: $2(\cos\varphi - \cos\alpha) = \alpha^2 - \varphi^2$, also $dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}$, und da (siehe Beispiel 4 in Nr. 13) $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \arcsin\frac{\varphi}{\alpha}$ ist, so folgt für die Zeit, in der das Pendel sich von seiner Ruhelage aus um den Winkel α bewegt,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Für die Dauer der Bewegung von einer Grenzlage zur anderen (die Schwingungsdauer) erhält man also: $\boldsymbol{T = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$.

Nr. 18. Die Keplerschen Gesetze und das Newtonsche Gravitationsgesetz.

a) Vorbemerkungen.

Die Bewegung eines Punktes P um einen festen Punkt S setzt voraus, daß der Punkt P eine bestimmte Eigenbewegung besitzt und dauernd von dem Punkte S angezogen wird. Die Bahn des Punktes P hängt von der Größe der wirkenden Kräfte und der Länge r der Entfernung PS ab. Wird der Koordinatenanfang in den Punkt S gelegt und die Sehne A_2A_1 der Bahn als X-Achse gewählt, so sind die Koordinaten x und y mit dem Radius-Vektor r und dem Winkel φ, den PS mit der positiven X-Achse bildet, durch die Gleichungen verbunden:

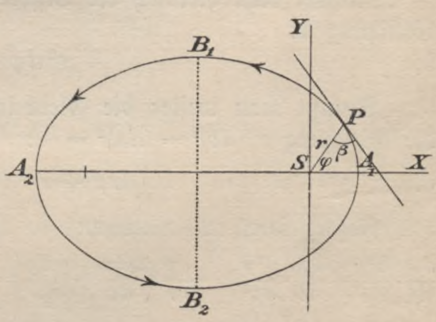

Fig. 10.

1. $\quad x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.

Befindet sich P zur Zeit 0 in dem Punkte A_1 und bewegt er sich in der Richtung A_1B_1, so können r und φ als Funktionen der Zeit t angesehen werden. Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist die Beschleunigung p

gleich dem Quotienten $\frac{m}{r^2}$, und daher ist auch p eine Funktion der Zeit t. Zerlegt man p in Komponenten, welche den Achsen parallel sind, so erhält man bei dem angenommenen Sinn der Bewegung: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = -p\cos\varphi$ und $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = -p\sin\varphi$, also:

2. $$\frac{d^2x}{dt^2} = -p\cos\varphi \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -p\sin\varphi.$$

Da $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ und $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ ist, so folgt hieraus:

3. $$\frac{d^2x}{dt^2} = -p\cdot\frac{x}{r} \text{ und } \frac{d^2y}{dt^2} = -p\cdot\frac{y}{r}.$$

Wie man leicht erkennt, läßt sich aus dieser Gleichung ableiten, daß $y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0$ ist. Da aber

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + y\frac{d^2x}{dt^2}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt}\right) = \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} + x\frac{d^2y}{dt^2},$$

also
$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)$$

ist, so hat man:

4. $$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = C.$$

Nun ist nach Gleichung 1

$$dx = dr\cos\varphi - r\,d\varphi\sin\varphi \quad\text{und}\quad dy = dr\sin\varphi + r\,d\varphi\cos\varphi.$$

Rechnet man hiernach die Differenz $xdy - ydx$ aus, so erhält man aus Gleichung 4:

5. $$r^2\,d\varphi = C\,dt.$$

Benutzt man weiter die Gleichungen für dx und dy, um r und φ in die Gleichung $v^2(dt)^2 = (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ einzuführen, so folgt

6. $$(dr)^2 + r^2(d\varphi)^2 = v^2(dt)^2.$$

Ferner folgt aus Gleichung 3, daß

$$\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{p}{r}\left(\frac{x\,dx}{dt} + \frac{y\,dy}{dt}\right) = -\frac{p}{2r}\cdot\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = -\frac{p}{2r}\cdot\frac{d(r^2)}{dt} = -\frac{p\,dr}{dt}$$

ist, und da aus $$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

die Gleichung $$\frac{d}{dt}(v^2) = 2\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

folgt, so ergibt sich $d(v^2) = -2p\,dr$, also $v^2 = -2\int p\,dr + c$.

Nach dem Gravitationsgesetz ist aber $p = \frac{m}{r^2}$; man hat daher

$$v^2 = -2\int \frac{m\,dr}{r^2} + c$$

und daraus folgt:

7. $$v^2 = \frac{2m}{r} + c.$$

b) Herleitung des zweiten Keplerschen Gesetzes.

Beachtet man, daß das Differential ds des Bogens gleich $r\,d\varphi$ und somit $\frac{r}{2}ds$ oder die Fläche des zu ds gehörigen Ausschnitts gleich $\frac{r^2}{2}d\varphi$ ist, so erkennt man aus Gleichung 5, daß der Radius-Vektor in der Zeit t die Fläche $\frac{1}{2}\int C dt$ oder $\frac{1}{2} C \cdot t$ beschreibt. Da für $t = 0$ auch die Fläche gleich 0 ist, so hat hier die Integrationskonstante die Größe 0; somit ergibt sich der Satz:

Der Radius-Vektor einer Planetenbahn beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

c) Herleitung des ersten Keplerschen Gesetzes.

Da stets $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ und nach Gleichung 5

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}, \quad \text{also} \quad \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2}$$

ist, so folgt aus Gleichung 6:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2}\right)^2 + r^2 \cdot \frac{C^2}{r^4} = v^2,$$

und nun aus Gleichung 7:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{C}{r^2}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} = \frac{2m}{r} + c.$$

Hieraus aber folgt:

$$dr = \frac{1}{C}\sqrt{cr^4 + 2mr^3 - C^2 r^2}\,d\varphi.$$

Setzt man $r = \frac{1}{z}$, so wird $dr = -\frac{dz}{z^2}$, $\sqrt{cr^4 + 2mr^3 - C^2 r^2} = \frac{1}{z^2}\sqrt{c + 2mz - C^2 z^2}$, und somit erhält man aus der vorhergehenden Gleichung:

$$d\varphi = \frac{-C\,dz}{\sqrt{c + 2mz - C^2 z^2}}.$$

Um weiter zu vereinfachen, setzt man $c + 2mz - C^2 z^2 = C^2\left(\frac{c}{C^2} + 2\frac{mz}{C^2} - z^2\right) = C^2(p + 2qz - z^2)$, und erhält dadurch:

$$d\varphi = \frac{-dz}{\sqrt{p + 2qz - z^2}}.$$

Jetzt ist $p + 2qz - z^2 = (p + q^2) - (q - z)^2$; setzt man also $q - z = w$, so daß $-dz = dw$ und $p + 2qz - z^2 = (p + q^2) - w^2$ wird, so entsteht in $d\varphi = \frac{dw}{\sqrt{(p+q^2) - w^2}}$ ein Integral, das nach Beispiel 4 in Nr. 13 gleich

$$\arcsin \frac{w}{\sqrt{p + q^2}} + c'$$

ist. Hieraus aber folgt:

$$\sin(\varphi - c') = \frac{w}{\sqrt{p+q^2}}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nun ist } w = q - z = \frac{m}{C^2} - \frac{1}{r} \\ \text{und } p + q^2 = \frac{1}{C^4}(c \cdot C^2 + m^2) \end{array}\right\} \text{also } \frac{w}{\sqrt{p+q^2}} = \frac{m - \frac{C^2}{r}}{\sqrt{c \cdot C^2 + m^2}};$$

man hat daher $\frac{C^2}{r} = m - \sqrt{c \cdot C^2 + m^2}\sin(\varphi - c')$ und daraus ergibt sich:

$$r = \frac{C^2}{m - \sqrt{c \cdot C^2 + m^2}\sin(\varphi - c')}.$$

Für $\quad \frac{C^2}{m} = \varepsilon \cdot d, \ \sqrt{1 + c \cdot \left(\frac{C}{m}\right)^2} = \varepsilon$ und $c' = \frac{\pi}{2}$,

also

$$\sin(\varphi - c') = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\varphi$$

geht hieraus die Gleichung $r = \frac{\varepsilon \cdot d}{1 + \varepsilon \cdot \cos\varphi}$ hervor, und diese stellt einen Kegelschnitt dar. Da die Bahnen geschlossene Kurven sind, so müssen sie Ellipsen sein. Es besteht also der Satz:

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

d) Herleitung des dritten Keplerschen Gesetzes.

Nach dem Vorstehenden läßt sich auch die Zeit t als Funktion von r darstellen. Verbindet man die Gleichungen 5 und 7 mit Gleichung 6, so erhält man: $(dr)^2 = \left(\frac{2m}{r} + c - \frac{C^2}{r^2}\right) \cdot (dt)^2$ und hieraus:

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{cr^2 + 2mr - C^2}}.$$

Nun ist bei den vorhin gebrauchten Bezeichnungen die große Achse $2a$ der Ellipse gleich $\frac{2\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2}$; man hat also $C^2 = ma(1 - \varepsilon^2)$.

Ferner ist

$$1 - \varepsilon^2 = -c \cdot \frac{C^2}{m^2}, \quad \text{also} \quad -c = m(1 - \varepsilon^2) \cdot \frac{m}{C^2} = \frac{m}{a}.$$

Der Ausdruck $c^2 + 2mr - C^2$ läßt sich daher auf die Form

$$2mr - \frac{mr^2}{a} - ma(1-\varepsilon^2) \quad \text{oder} \quad \frac{m}{a}[2ar - r^2 - a^2(1-\varepsilon^2)]$$

oder

$$\frac{m}{a}[a^2\varepsilon^2 - (a-r)^2]$$

bringen und somit folgt:

$$dt = \sqrt{\frac{a}{m}} \cdot \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2 - (a-r)^2}} = \frac{r\,dr}{a\varepsilon\sqrt{1-\left(\frac{a-r}{a\varepsilon}\right)^2}}.$$

Um die Integration zu ermöglichen, ersetzt man $\frac{a-r}{a\varepsilon}$ durch z; es ist dann $r = a - a\varepsilon z$, $dr = -a\varepsilon dz$, $r\,dr = -a^2\varepsilon dz + (a\varepsilon)^2 z\,dz$, und demnach

$$dt = \sqrt{\frac{a}{m}}\left(\frac{-a\,dz}{\sqrt{1-z^2}} + \frac{a\varepsilon z\,dz}{\sqrt{1-z^2}}\right) = \sqrt{\frac{a}{m}}\left[-a \cdot d(\arcsin z) - a\varepsilon d\left(\sqrt{1-z^2}\right)\right].$$

Hieraus aber folgt:

$$t = -\sqrt{\frac{a}{m}}\left(a \cdot \arcsin z + a\varepsilon\sqrt{1-z^2}\right) + C'.$$

Die halbe Umlaufszeit ist nun die Differenz der beiden Werte, die dieser Ausdruck in der Sonnenferne (im Aphel) und in der Sonnennähe (im Perihel) annimmt. Beachtet man, daß die lineare Exzentrizität e gleich $a\varepsilon$ ist, daß also

in der Sonnenferne der Radius-Vektor gleich $a + e$, und somit $z = -1$
„ „ Sonnennähe „ „ „ „ $a - e$, „ „ $z = +1$

wird, so sieht man, daß an beiden Stellen die Quadratwurzel den Wert 0 hat und die Differenz der $\arcsin z$ gleich $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$ oder $-\pi$ ist. Man erhält daher für die ganze Umlaufszeit T:

$$T = 2\sqrt{\frac{a}{m}}\,a\pi.$$

Erhebt man ins Quadrat, so erhält man $T^2 = \frac{4\pi^2}{m}a^3$; bei zwei Planeten mit den Umlaufszeiten T_1 und T_2 und den großen Halbachsen a_1 und a_2 ihrer Bahnen ist daher $T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3$, d. h.

Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Achsen ihrer Bahnen.

e) Herleitung des Newtonschen Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen.

Den Schluß von den Keplerschen Gesetzen auf die wirksamen Ursachen hat erst Newton (1687) gezogen. Bildet zur Zeit t die Tangente mit dem

Radius-Vektor den Winkel β, so wirkt der Bewegung die Komponente $p \cos\beta$ entgegen, und daher ist $\frac{dv}{dt} = -p\cos\beta$. Ferner ist $\cos\beta = \frac{dr}{ds}$, also

$$\frac{dv}{dt} = -p\,\frac{dr}{ds}, \quad v\,dv = -p \cdot \frac{dr}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

und somit

1. $$\tfrac{1}{2}\,d(v^2) = -p \cdot dr.$$

Aus den Gleichungen 5 und 6 in a) folgt weiter:

2. $$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{r\,d\varphi}{dt}\right)^2 = C^2\left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{dr}{r^2\,d\varphi}\right)^2\right].$$

Da die Bahn eine Ellipse ist, so hat man:

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon d - r}{r\varepsilon} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{r\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}, \text{ also } \sin\varphi = \frac{a(1-\varepsilon^2)\,dr}{\varepsilon \cdot r^2\,d\varphi} \text{ und } \frac{dr}{r^2\,d\varphi} = \frac{\varepsilon \cdot \sin\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Führt man diesen Ausdruck und für $\frac{1}{r^2}$ den Quotienten $\left(\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{\varepsilon d}\right)^2$ oder $\left(\frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{a(1-\varepsilon^2)}\right)^2$ in die Gleichung 2 ein, so erhält man

$$v^2 = \frac{C^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} \cdot \left(\frac{2a}{r} - 1\right) = \text{also } \tfrac{1}{2}\,d(v^2) = -\frac{C^2\,dr}{a(1-\varepsilon^2)r^2}.$$

Nach Gleichung 1 entsteht daher die Gleichung:

3. $$-p \cdot dr = -\frac{C^2\,dr}{a(1-\varepsilon^2)r^2}, \text{ und somit: } p = \frac{C^2}{a(1-\varepsilon^2)r^2}.$$

Da $C\,dt = r^2 d\varphi$, also $C.\,T = \int r^2 d\varphi = 2J = 2\pi ab = 2\pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$ ist, so ergibt sich:

$$p = \frac{4\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)}{a(1-\varepsilon^2)r^2 T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{r^2 T^2}.$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetze ist der Quotient $\frac{a^3}{T^2}$ für alle Planeten konstant. Ersetzt man jetzt $\frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$ durch m, so folgt: $\boldsymbol{p = \frac{m}{r^2}}$.

Damit ist aber das Newtonsche Gravitationsgesetz bewiesen.

Mathematisches Unterrichtswerk von Prof. Heinr. Müller.

Für höhere Lehranstalten.

Müller, Professor Heinrich, Oberlehrer am Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, **die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen.** Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8.

Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien.
I. Teil: Die Unterstufe. 3. Auflage. [VIII u. 136 S.] 1905. geb. *M.* 1.60.
II. Teil: Die Oberstufe. 2. Auflage. [XII u. 311 S.] 1902. geb. *M.* 3.40.

Ausgabe B. Für reale Anstalten und Reformschulen.
I. Teil: Die Unterstufe. 4. Auflage. [VIII u. 1?9 S.] 1906. geb. *M.* 2.20.
II. Teil: Die Oberstufe, in zwei Teilen. Herausgegeben in Verbindung mit Professor A. Hupe (Charlottenburg).
I. Abteilung: Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie. 2. Auflage. [VIII u. 223 S.] 1902. geb. *M.* 2.80.
II. Abteilung: Synthetische und analytische Geometrie der Kegelschnitte, darstellende Geometrie. 2. Auflage. [VIII u. 178 S.] 1902. geb. *M.* 2.40.

Ausgabe für bayerische Lehranstalten herausgegeben von Dr. M. Zwerger, Professor am Kgl. Neuen Gymnasium zu Würzburg.
I. Teil: Lehraufgabe der 5. und 6. Gymnasial-, bez. der 3. und 4. Realschulklasse. [VI u. 138 S.] 1906. geb. *M.* 1.60
II. Teil: Lehraufgabe der 7. und 8. Gymnasial-, bez. der 5. und 6. Realschulklasse. [VI u. 162 S.] 1906. geb. *M.* 2.—

Sonder-Abdruck aus „Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen":
Die Lehre von den Koordinaten und Kegelschnitten. Mit zahlreichen Textfiguren. [III u. 52 S.] gr. 8. 1899. kart. *M.* 1.—
Vierstellige Logarithmentafeln. Für die Hand der Schüler zusammengestellt. [7 S.] gr. 8. 1906. geh. *M.* —.25.

——— und Professor **M. Kutnewsky,** Oberlehrer am Mädchen-Reformrealgymnasium zu Berlin, **Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik, Trigonometrie und Stereometrie** mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. gr. 8.

Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien
I. Teil: 4. Auflage. [VII u. 237 S.] 1906. geb. *M.* 2.20.
II. Teil: Für die oberen Klassen. [VIII u. 348 S.] 1902. geb. *M.* 3.20.
——— 2., verb. und stark gekürzte Auflage. [VIII u. 273 S.] 1905. geb. *M.* 2.20.

Ausgabe B. Für reale Anstalten und Reformschulen.
I. Teil: 4. Auflage. [VIII u. 301 S.] 1906. geb. *M.* 2.80.
II. Teil: 2. Auflage. [XI u. 304 S.] 1907. geb. *M.* 3.—.

Ausgabe für bayerische Lehranstalten. Im Anschluß an die Teile AI und AII der Müller und Kutnewskyschen Aufgabensammlung und in Verbindung mit den Verfassern herausgegeben von Dr. M. Zwerger, Professor am Kgl. Neuen Gymnasium zu Würzburg. [VIII u. 276 S.] 1906. geb. *M.* 2.60
(Der I. Teil, 138 S., *M.* 1.60, ist für Progymnasien abgetrennt.)

——— und Professor **F. Pietzker,** Oberlehrer am Gymnasium zu Nordhausen. **Rechenbuch für die unteren Klassen der höheren Lehranstalten.** Vorstufe zu den Aufgabensammlungen von Bardey und Müller-Kutnewsky, Mit Doppeltafel: Reproduktion eines Staatspapiers. gr. 8.

Ausgabe A. Für Gymnasien und Progymnasien. 3., verbesserte Auflage. [VIII u. 254 S.] 1906. geb. *M.* 2.40.
Auch in 3 Teilen. *M.* —.80, —.80, 1.—
Ausgabe B Für reale Anstalten und Reformschulen. 3., verbesserte Auflage. [VIII u. 284 S.] 1906. geb. *M.* 2.60.
Auch in 3 Teilen. *M.* —.80, —.80, 1.20.
Ausgabe C. Mit Vermehrung der Aufgaben und Verminderung der sachlichen und methodischen Zusätze. In 3 Heften. gr. 8. 1906.
1. Heft. Für Sexta. [V u. 78 S.] *M.* —.80.
2. Heft. Für Quinta. [V u. 72 S.] *M.* —.80.
3. Heft. Für Quarta. [V u 102 S.] *M.* 1.—

Ausgabe für bayerische Lehranstalten bearbeitet von Dr. M. Zwerger, Professor am Kgl. Neuen Gymnasium zu Würzburg. In 2 Teilen. gr. 8. 1907.
I. Teil: Lehraufgabe der 1. und 2. Klasse. [VI u. 144 S.] *M.* 1.60.
II. Teil: Lehraufgabe der 3. und 4. Klasse. [VI u. 100 S.] *M.* 1.60.

——— ——— Ergänzungsheft für die Mittelklassen der Realschulen und Anstalte mit Ersatzunterricht. [IV u. 89 S.] gr. 8. 1905. kart. *M.* 1.20.

Müller, Professor **Heinrich,** Oberlehrer am Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg und **Segger, F.,** Lehrer an der Vorschule des Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasiums zu Charlottenburg, **Rechenbuch für die Vorschule der höheren Lehranstalten.** 3 Hefte. 2. Auflage. gr. 8. 1907. kart. je M. —.80.

1. Heft. Das Rechnen im Zahlenraum von 1—100, mit Ausschluß der schwierigeren Übungen. [IV u. 64 S.]
2. Heft. Schwierigere Übungen im Zahlenraum von 1—100, Kopfrechnen im Zahlenraum von 1—1000 und Einführung in das schriftliche Rechnen. [IV u. 72 S.]
3. Heft. Kopfrechnen im Zahlenraum von 1—1000. Übungen zum schriftlichen Rechnen im Zahlenraum von 1—10000000. [IV u. 58 S.]

Für Lehrerbildungsanstalten.

Müller, Professor **Heinrich,** Oberlehrer am Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, **H. Baltin,** Seminarlehrer in Köpenick, und **F. Segger,** Lehrer an der Vorschule des Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasiums zu Charlottenburg, **Rechenbuch für Präparandenanstalten.** Vorstufe zu der Müller- und Baltin-Maiwaldschen Aufgabensammlung. Mit Doppeltafel: Reproduktion eines Staatspapiers. 2 Auflage. gr. 8. 1906. In 2 Teilen.

I. Teil: Lehraufgabe der dritten Klasse. [VI u. 178 S.] geb. M. 1.80.
II. Teil: Lehraufgabe der zweiten Klasse. [VI u. 128 S.] geb. M. 1.60.
Für die erste Klasse ist der Teil I der Baltin u. Maiwaldschen Sammlung bestimmt.

——— ——— und **W. Maiwald,** Seminarlehrer in Königsberg i. Nm., **kurzgefaßtes Lehrbuch der Mathematik** für Seminare und Präparandenanstalten. Nach den Lehrplänen von 1901. 2., verbesserte Auflage. [X u. 218 S.] gr. 8. 1906. geb. M. 2.40.

——— ——— ——— **Sammlung von Aufgaben aus der Mathematik, Trigonometrie und Stereometrie** mit zahlreichen Anwendungen aus der Planimetrie und Physik. Unter Zugrundelegung der Müller-Kutnewskyschen Aufgabensammlung. In 2 Teilen. gr. 8.

I. Teil: Für die 1. Klasse der Präparandenanstalten. 2. Auflage. [VI u. 110 S.] 1904. geb. M. 1.40.
II. Teil: Für Seminare. 2. Auflage. [VIII u. 230 S.] 1905. geb. M. 2.20.
——— komplett in einem Bande. geb. M. 3.20.

——— und Dr. **J. Plath,** Regierungs- und Schulrat in Lüneburg, **Lehrbuch der Mathematik,** zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrerprüfung und das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Im Anschluß an die Baltin-Maiwaldsche Seminarausgabe des Müllerschen Lehrbuches und in Verbindung mit Professor Müller für den **Selbstunterricht** bearbeitet. Mit 121 Figuren im Text [VIII u. 236 S.] gr. 8. 1906. geh. M 3.60, geb. M 4.—

——— ——— **Sammlung von Aufgaben** zur Vorbereitung auf die Mittelschullehrerprüfung und auf das Abiturientenexamen am Realgymnasium. Im Anschluß an die Baltin-Maiwaldsche Seminarausgabe der Müller-Kutnewskyschen Aufgabensammlung und in Verbindung mit Professor Müller für den **Selbstunterricht** bearbeitet. [VIII u. 259 S.] gr. 8. 1906. geh. M. 3.60, geb. M. 4.—

Für höhere Mädchenschulen.

Müller, Professor **Heinrich,** Oberlehrer am Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg und Dr. **O. Schmidt,** weil. Oberlehrer an der höheren Mädchenschule I zu Charlottenburg, **Rechenbuch für höhere Mädchenschulen.**

I. Teil: **Für die 4 unteren Klassen.** Unter Mitwirkung von Professor Müller bearbeitet von Fräulein Hedwig Güthlein, Lehrerin an der Klockowschen höheren Mädchenschule zu Charlottenburg, und F. Segger, Lehrer an der Vorschule des Kaiserin Augusta-Gymnasiums zu Charlottenburg. 4 Hefte. gr. 8. 1904. kart. je M. —.60

1. Heft: Zahlenkreise von 1—10, von 1—20 und zum Teil von 1—100 [IV u. 50 S.]
2. Heft: Zahlenkreise von 1—100 und zum Teil von 1—1000. [IV u. 58 S.]
3. Heft: Zahlenkreis von 1—1000 und seine Erweiterung bis zu den Millionern. [IV u. 50 S.]
4. Heft: Das Rechnen im unbegrenzten Zahlenraum. Einführung in das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. [IV u. 52 S.]

II. Teil: **Für die mittleren Klassen.** Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen Dezimalzahlen und Brüchen. [VI u. 116 S.] gr. 8. 1904. kart. ℳ 1.40.

III. Teil: **Für die oberen Klassen.** In 2 Abteilungen.

1. Abteilung: Dreisatz, bürgerliche Rechnungsarten, Flächen- und Körperberechnung, Wirtschafts- und Versicherungswesen. [VI u. 142 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 1.60.

2. Abteilung: Für wahlfreie Kurse. Quadrat- und Kubikwurzel mit Anwendung auf die Flächen- und Körperberechnung, Auswahl aus den Textgleichungen des I. Teils der Müller und Kutnewskyschen Aufgabensammlung. [IV u. 104 S.] gr. 8. 1904. geb. ℳ 1.20.

Müller, Professor **Heinrich,** Oberlehrer am Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, und Professor Dr. **A. Mahlert,** Oberlehrer an der Sophienschule zu Hannover, **Lehrbuch der Planimetrie für höhere Mädchenschulen.** Als Abschluß des Rechenbuches für höhere Mädchenschulen von H. Müller und O. Schmidt. Mit 107 Figuren im Text. [VIII u. 86 S.] gr. 8. 1906. geb. ℳ 1.20.

Für Knabenmittelschulen.

Müller, Professor **Heinrich,** Oberlehrer am Kgl. Kaiserin Augusta-Gymnasium zu Charlottenburg, und Dr. **A. Bieler,** Rektor an der Städt. Knabenmittelschule zu Kottbus, **Rechenbuch für Knabenmittelschulen.** gr. 8. 1906.

I. Teil: **Für die 4 unteren Klassen.**

1. Heft: Zahlenkreise von 1 bis 10, von 1 bis 20 und zum Teil von 1 bis 100. [IV u. 52 S.] kart. ℳ —.50.

2. Heft: Zahlenkreise von 1 bis 100 und zum Teil von 1 bis 1000. [IV u. 56 S.] kart. ℳ —.50.

3. Heft: Zahlenkreis von 1 bis 1000 und deren Erweiterung bis zu den Millionern. [IV u. 52 S.] kart. ℳ —.50.

4. Heft: Das Rechnen im unbegrenzten Zahlenraum. Einführung in das Rechnen mit mehrfach benanntn Zahlen. [IV u. 52 S.] kart. ℳ —.50.

II. Teil: **Für die mittleren Klassen.**

5. Heft und 6. Heft (in einem Bande vereinigt): Das Rechnen mit mehrfach benannten Zahlen. Dezimalzahlen. Bruchrechnung. Flächen- und Körperberechnung (erster Teil). [V u. 122 S.] kart. ℳ 1.—

III. Teil: **Für die oberen Klassen.**

7. Heft: Zusammengesetzte Dreisatzaufgaben. — Allgemeine Prozentrechnung. Zins- (mit Kurs-) Rechnung. Zinseszinsrechnung, Sparkasse. Diskont-(Wechsel-) Rechnung. Gesellschaftsrechnung. Mischungsrechnung. Versicherungsrechnungen. — Flächen- und Körperberechnung (zweiter Teil). Mit Doppeltafel: Reproduktion eines Staatspapiers. [V u. 103 S.] kart. ℳ 1.—

8. Heft: Abschluß der bürgerlichen Rechnungsarten. (Kaufmännisches Rechnen.) [IV u. 52 S.] kart. ℳ — 50.

——— ——— ——— **arithmetisches Lehr- und Übungsbuch für Knaben-Mittelschulen.** gr. 8. 1906.

I. Teil: Bis zu den Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten einschließlich. Mit Logarithmentafel. [VI u. 160 S.] gr. 8. geb. ℳ 1.60

II. Teil: Reihenlehre, Zinseszins-Rechnung und Anfangsgründe der Trigonometrie. Mit Logarithmentafel. [III u. S. 161—194.] gr. 8. kart. ℳ —.40

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Dr. K. Kraepelin, Naturstudien

(mit Zeichnungen von O. Schwindrazheim)

im Hause — im Garten — in Wald und Feld.

3. Aufl. Geb. M 3.20. 2. Aufl. Geb. M 3.60. 2. Aufl. Geb. M 3.60.

„Zu den Meistern der volkstümlichen Darstellung gehört unstreitig Dr. K. Kraepelin, der mit seinen Naturstudien ein Volksbuch im wahren Sinne des Wortes geschaffen hat; denn sie sind so recht geeignet, die lern- und wißbegierige Jugend sowohl wie auch den erwachsenen Mann des Volkes zum naturwissenschaftlichen Denken anzuregen und ihnen die Natur mit ihrem Leben und Werden näher zu bringen. Er beginnt seine „Plaudereien" mit den naturwissenschaftlichen Dingen und Erscheinungen des Hauses (Wasser, Spinne, Kochsalz, Sand, Kanarienvogel, Steinkohlen usw.), führt dann zum Garten (Frühlingspflanzen, Maikäfer, Grasmücke, Unkräuter, Schutzmittel der Pflanzen, Wärme usw.) und schließt mit Wald und Feld (Laubfall, Insektenleben im Winter, Gesteine, Versteinerungen usw.). Immer beginnt er seine in Form der Unterredung gegebenen Erörterungen mit dem einzelnen Fall und leitet allmählich zu allgemeinen Gesichtspunkten über das gesetzmäßige Walten in der Natur hin; dabei vermeidet er jede Schablone, so daß die dialogische Form niemals ermüdend auf den Leser wirkt, sondern im Gegenteil anregend. Die Ausstattung ist, wie bei allen Werken des bekannten Verlags, vorzüglich; der Bilderschmuck rührt von Schwindrazheim her und trägt sehr zur Veranschaulichung des Vorgeführten bei. Deshalb kann auch der Preis ein niedriger genannt werden."

(Neue Bahnen 1902, Heft 4.)

Volksausgabe. Eine Auswahl aus den 3 vorstehenden Bänden. Veranstaltet vom Hamburger Jugendschriften-Ausschuß. . . . . Geb. M 1.—

Der anerkannte Wert der Naturstudien hat den Hamburger Jugendschriften-Ausschuß bewogen, eine billige Volksausgabe zu veranstalten, um so dem Buche eine noch größere Verbreitung zu sichern. Bei der Auswahl sind die verschiedenen Bände der ursprünglichen Ausgabe etwa gleichmäßig berücksichtigt.

Naturstudien in der Sommerfrische.

Reiseplaudereien. . . . . Geb. M 3.20.

In dem vorliegenden Werkchen zieht der Verfasser die Naturobjekte und Naturerscheinungen in den Bereich seiner Besprechung, die bei der weit verbreiteten Sitte der Ferienreisen und Sommerfrischen vielen Tausenden von Familien nahetreten, ohne daß dabei der Wunsch nach tieferem Verständnis des Gesehenen befriedigt würde. Er will somit ein weitergehendes Interesse für die Probleme des Seins und Geschehens in der Zeit erwecken, die gerade der ungebundenen Muße inmitten einer an neuen ungewohnten Erscheinungen so reichen Umgebung dient, wie sie das Gebirge, das Meer für jeden bietet, der zum erstenmal deren Zauber auf sich wirken läßt.

Streifzüge durch Wald und Flur.

Anleitung zur Beobachtung der heimischen Natur in Monatsbildern. Von Prof. B. Landsberg. 3. Aufl. Mit 84 Illustr. Geb. M 5.—

„Jeder Zeile des Buches merkt man es an, daß der Verfasser beseelt ist von einer glühenden Liebe zur Natur und daß er sich selbst mit vollster Hingabe der Beobachtung des pflanzlichen und tierischen Lebens widmet. Daß ein Unterricht in der Naturbeschreibung, wenn er im Sinne der „Streifzüge" von einem für seine Aufgabe begeisterten Lehrer erteilt wird, ganz außerordentlich fruchtbringend sein muß, darf wohl als selbstverständlich hingestellt werden." (Pädagogisches Archiv.)

Naturgeschichtliche Volksmärchen.

Gesammelt von Dr. O. Dähnhardt. Mit Bildern von O. Schwindrazheim. 2., verbesserte Auflage. Gebunden M 2.40.

Das Büchlein enthält Märchen, die Naturerscheinungen zu deuten suchen, die sinnige Anschauung, dichterisches Empfinden und herzlichen Humor vereinigen und die zeigen, wie eng die Natur mit dem Gemütsleben des Volkes verwachsen ist. So wird jeder Freund der Natur wie des Volkes das Büchlein mit Freuden begrüßen, besonders wird es die Naturliebe der Jugend zu fördern geeignet sein und darum als Gabe für diese von Eltern und Lehrern willkommen geheißen werden.

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
M
II L. inw. 31461
Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000
Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000298313