Schattierungskunde.

Herausgegeben von

Professor C. Riess
Hauptlehrer an der Königlichen Baugewerkeschule zu Stuttgart.

Mit 10 Figuren im Text und 3 Figurentafeln.

Stuttgart.
Verlag der J. B. Metzlerschen Buchhandlung.
1884.

Schattierungskunde.

Herausgegeben von

Professor C. Riess
Hauptlehrer an der Königlcihen Baugewerkeschule zu Stuttgart.

Mit 10 Figuren im Text und 3 Figurentafeln.

Stuttgart.
Verlag der J. B. Metzlerschen Buchhandlung.
1884.

Schattierungskunde.

I. Teil.

§. 1.

Was versteht man unter Schattierung? Wenn ein Körper irgend einer Lichtquelle ausgesetzt ist, so nehmen wir an demselben an verschiedenen Stellen seiner Oberfläche verschiedene Helligkeiten wahr, die bei regelmässig gekrümmten Flächen, wie z. B. bei der Kugel, sich regelmässig auf der Oberfläche verteilen und von einer Stelle, welche die hellste ist, stetig abnehmen bis zu einer bestimmten Dunkelheit u. s. f. Diese verschiedenartigen Nuancierungen der Helligkeit, welche sich nicht blos auf der direkt beleuchteten (Licht-) Seite der Körper, sondern auch im Selbstschatten und im Schlagschatten zeigen, bilden die Schattierung der Körper.

Zu untersuchen, von welchen Umständen die Helligkeit einer Fläche abhängt, das Mass der Helligkeit irgend eines beliebigen Flächenpunkts zu bestimmen und auf Grund dieser Bestimmung der Oberfläche eines gegebenen Körpers durch Anwendung geeigneter Hülfsmittel eine der Natur entsprechende Schattierung zu geben, das ist die Aufgabe der Schattierungskunde.

§. 2.

Richtung der Lichtstrahlen. Ist die Lichtquelle ein leuchtender Punkt, so geht das Licht strahlenförmig von demselben aus, jeder Lichtstrahl bildet eine vom Lichtcentrum ausgehende gerade Linie. Die von einem leuchtenden Punkt erzeugte Beleuchtung nennt man centrale Beleuchtung. Ist die Entfernung des leuchtenden Punktes im Verhältnis zur Grösse der beleuchteten Körper sehr gross, so können die Lichtstrahlen als unter sich parallel angesehen werden, wie dies z. B. bei den Sonnenstrahlen der Fall ist.

Wir werden im folgenden stets von dieser letzteren Voraussetzung ausgehen und annehmen, dass die Lichtstrahlen parallele gerade Linien seien. Zugleich geben wir denselben die in der Praxis allgemein übliche Richtung, d. h. sowohl die Grundrisse als auch die Aufrisse der Lichtstrahlen sind gerade Linien, welche mit dem Grundschnitt einen Winkel von 45° einschliessen.

§. 3.

Helligkeitsbestimmung einer Ebene. Die Helligkeit einer Ebene ist abhängig von dem Winkel, unter welchem sie von den Lichtstrahlen getroffen wird, oder von der Masse der auf die Flächeneinheit treffenden Lichtstrahlen. Nehmen wir an, *ab* (Fig. 1) sei die Spur einer auf der G.-Tfl. senkrecht stehenden Ebene; sie werde von den Lichtstrahlen *l*, die wir uns horizontal, also senkrecht auf die Ebene *ab* fallend denken, getroffen. Die Ebene wird nun eine der Intensität des Lichtes entsprechende Helligkeit haben. Wird die Ebene um die Kante *a* gedreht, bis sie etwa die Lage *ac* einnimmt, so wird sie nur von dem zwischen *a* und *c'* liegenden Lichtbündel, also von weniger Lichtstrahlen getroffen, als vorher, sie muss also etwas an Helligkeit abgenommen haben, und zwar um $\frac{1}{4}$, wenn $ac' = \frac{3}{4}\,ab$ ist.*) Ebenso wird die Ebene in der Lage *ad*, da sie nur von dem Lichtbündel in der Breite *ad'* getroffen wird, dunkler sein als *ab*, und zwar wird ihre Helligkeit nur noch die Hälfte von der der Ebene *ab* betragen, wenn $ad' = \frac{1}{2}\,ab$. Daraus folgt, dass die Helligkeiten der Ebene *ab*, *ac*, *ad*.. sich verhalten wie $ab : ac' : ad'$. Mit der Abnahme der Helligkeit aber nimmt auch der Winkel ab, unter welchem die Lichtstrahlen die Ebene treffen ($\measuredangle\, add' < \measuredangle\, acc'$, folglich die Helligkeit der Ebene *ad* geringer als die der Ebene *ac*).

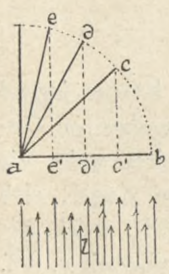


Fig. 1.

§. 4.

Bestimmung der Lage von Ebenen mit stetig abnehmender Helligkeit. Nach dem Vorhergehenden ist es nun leicht, die Lage von Ebenen zu bestimmen, deren Helligkeit stetig um ein bestimmtes Mass z. B. je um $\frac{1}{5}$ abnimmt (Fig. 2). Die Lage der Ebene *ab* und die Richtung

*) Denn die zwischen *a* und *c'* liegende Lichtmasse ist $\frac{3}{4}$ von derjenigen, welche zwischen *a* und *b* enthalten ist.

des Lichtes sei dieselbe wie im vorigen §. 3. Teilen wir ab in 5 gleiche Teile, errichten in den Teilpunkten c', d', e', f' auf ab die Senkrechten $c'c$, $d'd$, $e'e$, $f'f$, ag, und ziehen die Radien ac, ad, ae, af, so sind letztere die Spuren lothrechter Ebenen, deren Helligkeiten sich verhalten wie $ab : ac' : ad' : ae' : af$, d. h. wie $^5/_5 : {}^4/_5 : {}^3/_5 : {}^2/_5 : {}^1/_5$. Die Helligkeit der Ebene $ab = {}^5/_5 = 1$ ist die grösste, sie wird vom Licht senkrecht getroffen. Die Ebene ag wird vom Licht garnicht getroffen, die Lichtstrahlen streifen an ihr vorbei, ihre Helligkeit ist 0.

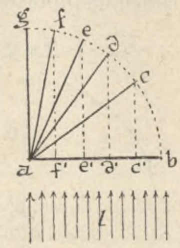


Fig. 2

§. 5

a) Ebenen, welche unter demselben Winkel von den Lichtstrahlen getroffen werden, haben gleiche Helligkeit, deshalb müssen auch parallele Ebenen gleich hell sein.

b) Da eine krumme Fläche in demjenigen Punkt, in welchem sie von einer Ebene berührt wird, dieselbe Richtung hat wie die Berührungsebene, so muss der Berührungspunkt auch die gleiche Helligkeit haben, wie die Berührungsebene.

c) Da Cylinder- und Kegelflächen von Ebenen stets in einer Mantellinie berührt werden, so haben jene stets längs dieser Mantellinie dieselbe Helligkeit, und zwar die der berührenden Ebene.

d) Berühren sich krumme Flächen, sei es in einem Punkt, in einer geraden oder krummen Linie, so haben sie an der berührten Stelle dieselben Helligkeiten.

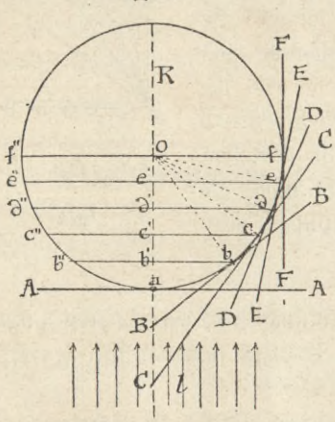
§. 6.

Das in §. 4 dargestellte Schema von Ebenen, deren Helligkeit bestimmt ist, könnte dazu dienen, wenigstens in einfachen Fällen die Helligkeit von Flächen zu bestimmen (z. B. für ein senkrecht stehendes Prisma, oder ein Cylinder), allein in den meisten Fällen würde die Konstruktion eine mehr oder weniger schwierige und umständliche sein. Zweckmässiger ist es, die Kugeloberfläche als Massstab zur Bestimmung der Helligkeiten anderer Flächen zu benützen, einer Kugeloberfläche, deren Helligkeit in allen Punkten bekannt ist.

§. 7.

Es sei K (Fig. 3) eine Kugel, l die Richtung des Lichtes (wie oben). Legt man an den Kugelumriss die Berührungsebenen AA, BB, CC, DD, EE, FF || mit den Fig. 2 dargestellten Ebenen ab, ac, ad, *ae*, *af*, deren Helligkeiten bekannt sind, so haben (nach §. 5) die Berührungspunkte an der Kugel *a*, *b*, *c*,... dieselbe Helligkeit wie die Berührungsebene resp. wie die Ebenen *ab*, *ac*, *ad*.. (Fig. 2), d. h. der Reihe nach $^5/_5$, $^4/_5$, $^3/_5$, $^2/_5$, $^1/_5$, 0.

Fig. 3



BB (Fig. 3) ist || zu *ac* (Fig. 2), folglich hat der Punkt *b* die Helligkeit der Ebene *ac*, d. h. $^4/_5$. Fällt man von *b* auf den mit dem Licht parallelen Radius *oC* der Kugel das Lot *bb'*, so ist das $\triangle . bb'B \sim \triangle ac'c$ (Fig. 2), weil *Bb* (Fig. 3) || *ac* (Fig. 2); *Bb'* (Fig. 3) || *ac*, (Fig. 2) und *bb'* (Fig. 3) || *c'c* (Fig. 2). Zieht man den Radius *ob*, so ist $\measuredangle\, obB = R$, folglich $\triangle obb' \sim \triangle bb'B$ also auch ähnlich $\triangle . ac'c$ (Fig. 2), und da hier $ac' = {^4/_5}\, ac$, so muss auch im $\triangle obb'$ $ob' = {^4/_5}\, ob$ also auch $= {^4/_5}\, oa$ sein, da $oa = ob$. Ebenso ist, wenn der Punkt *c* die Helligkeit $^3/_5$ hat, wie leicht nachzuweisen, $oc' = {^3/_5}\, oa$ u. s. f. Die Helligkeiten der Punkte *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* verhalten sich demnach wie die Längen *oa*, *ob'*, *oc'*, *od'*, *oe'*. Würde man die Ebene *BB*, welche die Kugel im Punkt *b* berührt, so drehen, dass sie stets durch den Punkt *B* geht und zugleich die Kugel berührt, so würde sie offenbar nach und nach alle Punkte des Parallelkreises *bb''* berühren, ihre Helligkeit aber würde fortwährend dieselbe sein, da sie bei dieser Drehung immer dieselbe Neigung gegen die Lichtstrahlen beibehält. Es würden deshalb auch alle Punkte des von ihr berührten Parallelkreises *bb''* gleiche Helligkeit ($^4/_5$) haben. Ebenso hat der Parallelkreis *cc''* die Helligkeit des Punktes *c*, d. h. $^3/_5$, *dd''* $^2/_5$ u. s. f. Diese Parallelkreise auf der Kugeloberfläche sind also Kreise gleicher Helligkeit.

Nach dem ebengesagten sind also die Kurven gleicher Helligkeit auf der Kugel Kreise, deren Ebenen senkrecht auf dem zum Lichtstrahl parallelen Kugelradius stehen und letzteren in gleiche Teile teilen, d. h. in 5, 6, 8, 10.., wenn man .5, 6, 8, 10.. gleichmässige Tonabstufungen in der Schattierung haben will.

§. 8.

Die in §. 3—7 in elementarer Weise durchgeführte Untersuchung lässt sich auch auf mehr wissenschaftlichem Wege ausführen.

Die zur Grundrisstafel senkrechte Ebene ab (Fig. 4), deren Aufriss $a''b''b'''a'''$ ist, werde von den Lichtstrahlen l senkrecht getroffen. Ist die auf die Flächeneinheit fallende Lichtmasse $= m$, so ist die auf die Ebene ab fallende Lichtmasse, deren Breite $= a''b''$ und deren Höhe $= a''a''' = h$ ist, $m.a''b''.h$ oder (da $a''b'' = ab$) $= m.ab.h$.

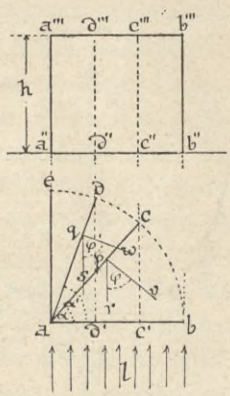


Fig. 4.

Bringt man (durch Drehung um die Kante a) die Ebene ab in die Lage ac, so ist ihr Aufriss $a''c''c'''a'''$ und die auf sie treffende Lichtmasse $= a''c''.h.m = ac'.h.m$. Desgleichen ist, wie leicht einzusehen, die auf die Ebene ad fallende Lichtmasse $= a''d''.h.m = ad'.h.m$.

Da die Helligkeit einer Fläche auch abhängig ist von der Intensität S. des Lichtes, so ist also das Mass der Helligkeit der Ebene ac und ad: $H_{ac} = ac'.h.m.s$ und $H_{ad} = ad'.h.m.s$. Die Helligkeiten der Ebene ac und ad verhalten sich also zu einander:

$$\begin{aligned} H_{ac} : H_{ad} &= ac'.h.ms : ad'h.m.s \\ &= ac' \qquad : ad'. \end{aligned}$$

Sind α und α' die Drehungswinkel der Ebenen, so ist $ac' = ac.\cos.\alpha$ und $ad' = ad.\cos\alpha'$ oder, da $ac = ad = ab$ ist, $ac' = ab.\cos\alpha$ und $ad' = ab.\cos\alpha'$, also:

$$\begin{aligned} H_{ac} : H_{ad} &= ab.\cos\alpha : ab.\cos\alpha' \\ &= \cos\alpha \qquad : \cos\alpha'. \end{aligned}$$

Errichtet man in einem beliebigen Punkt p der Ebene ac ein Lot pv und zieht den nach dem Punkt p gerichteten Lichtstrahl pr, so ist $\measuredangle rpv = \varphi$ der Einfallswinkel des Lichtes für die Ebene ac, ebenso ist φ' der Einfallswinkel für die Ebene ad. Nun lässt sich aber leicht nachweisen das $\measuredangle \varphi = \alpha$ und $\measuredangle \varphi' = \alpha'$; es ist daher

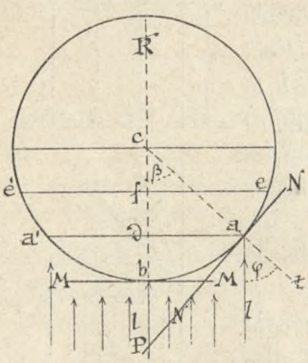
$$H_{ac} : H_{ad} = \cos\varphi : \cos\varphi',$$

d. h. die Helligkeit der Ebene ac verhält sich zur Helligkeit der Ebene ad wie der *cos* des Einfallswinkels φ zum *cos* des Einfallswinkels φ', oder ganz allgemein:

Die Helligkeiten von Ebenen, welche gegen den Lichtstrahl verschiedene Neigung haben, verhalten sich wie die Cosmusse der Einfallswinkel der Lichtstrahlen.

Da für die Ebene ab der Einfallswinkel $= 0$, so ist ihre Helligkeit gleich $\cos 0^0 = 1$; für die Ebene ae ist der Einfallswinkel $= 90^0$, $\cos 90^0 = 0$ folglich ihre Helligkeit $= 0$. Da der Wert der *cos*. nicht grösser als 1 werden kann, so muss die Helligkeit der Ebene ab, welche vom Licht senkrecht getroffen wird, die grösste sein.

Fig. 5.



Es sei nun K (Fig. 5) eine Kugel, l die Richtung des Lichtes und a ein beliebig auf der Oberfläche der Kugel liegender Punkt; welche Helligkeit hat der Punkt a?

Legen wir an den Punkt a der Kugel die Berührungsebene NN, so hat der Punkt a bekanntlich dieselbe Helligkeit wie NN. Ziehen wir $at \perp NN$ und $al \parallel$ zum Licht, so ist $\sphericalangle \varphi$ der Einfallswinkel. Ebenso ist die Helligkeit des Punktes b gleich der der Berührungsebene MM und zwar gleich 1, da der Einfallswinkel hier 0 also $\cos 0^0 = 1$ ist.

Es verhält sich also die Helligkeit des Punktes a (H_a) zur Helligkeit des Punktes b (H_b)

$$H_a : H_b = \cos \varphi : 1.$$

Das Lot at verlängert, geht durch den Mittelpunkt c, und da $bc \parallel al$, so ist $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \varphi$. also

$$H_a : H_b : = \cos \beta : 1,$$

oder wenn wir den zweiten Teil der Gleichung mit r multiplicieren:

$$H_a : H_b : = r . \cos \beta : r,$$

nun ist aber $r . \cos \beta = cd$, folglich

$$H_a : H_b = cd : cb.$$

Ist also z. B. $cd = {}^2/_3\, cb$, so ist auch die Helligkeit des Punktes a ${}^2/_3$ von derjenigen des Punktes b; ebenso ist die Helligkeit des Punktes e ${}^1/_3$ von derjenigen im Punkt a, wenn $cf = {}^1/_3\, cb$ ist.

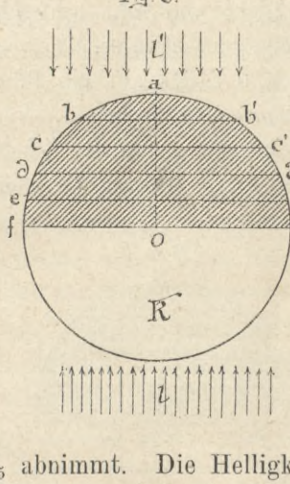
Dass und warum die Helligkeit des Parallelkreises $aa' = {}^2/_3$, die von $ee' = {}^1/_3$, wann die Punkte a und e die Helligkeiten ${}^2/_3$ resp. ${}^1/_3$ besitzen, haben wir oben bereits nachgewiesen.

§ 9.

Bestimmung der Helligkeit im Selbstschatten der Körper. Die vom direkten Licht nicht erreichbare Seite eines Körpers befindet sich im Selbst-, Körper- oder Eigenschatten. Durch Betrachtung eines Körpers, z. B. einer Kugel, werden wir finden, dass auch im Selbstschatten eine Abstufung der Helligkeit resp. Dunkelheit stattfindet, dass also auch auf die Selbstschattenseite der Körper das Licht einwirkt. Allerdings ist es nicht das direkte Licht, sondern das von andern beleuchteten Körpern zurückgeworfene, das Reflexlicht, welches hier wirksam ist.

Alle Körper in der Natur werfen das von irgend einer Lichtquelle empfangene Licht mehr oder weniger stark wieder zurück, reflektieren das Licht. Da aber von den Körpern das empfangene direkte Licht teilweise absorbiert, teilweise (namentlich von rauhen Körpern) unregelmässig reflektiert, zerstreut wird, so muss selbstverständlich die Intensität also auch die Wirkung des Reflexlichtes eine geringere sein als die des direkten Lichtes. Die nach allen möglichen Richtungen sich kreuzenden Strahlen des Reflexlichtes können wir uns durch eine Resultierende, d. h. durch Parallelstrahlen ersetzt denken, welche die gleiche Wirkung hervorbringen. Diese Richtung aber ist der des direkten Lichtes gerade entgegengesetzt. Die Intensität des Reflexlichtes ist, weil von Zufälligkeiten abhängig, nicht zu bestimmen, es genügt für die Schattierung von Zeichnungen zu technischen Zwecken, das Verhältnis der Intensität des Reflexlichtes zu der des direkten Lichtes wie $^1/_2 : 1$ anzunehmen.

Fig. 6.



Ist nun K (Fig. 6) eine Kugel, beleuchtet von dem direkten Licht l, so ist l' das mit l parallele aber in entgegengesetzter Richtung wirkende Reflexlicht, welches auf der im Selbstschatten befindlichen Kugelhälfte faf' ähnliche Helligkeitsabstufungen veranlassen wird, wie das direkte Licht auf der Lichtseite. Teilen wir daher den zum Licht parallelen Kugelradius ao z. B. in 5 gleiche Teile, und legen durch die Teilpunkte Eben senkrecht zu ao, so schneiden diese die Kugelfläche in den Parallelkreisen bb', cc', $dd' \ldots$, in welchen die Helligkeit vom hellsten Punkt a bis zur Schattengrenze ff' stetig je um $^1/_5$ abnimmt. Die Helligkeit ist aber im Punkt a nur die Hälfte von derjenigen, welche der hellste Punkt im direkten Licht hat, also $= {}^5/_{10}$, folglich in $bb' = {}^4/_{10}$, in $cc' = {}^3/_{10}$, in $dd' = {}^2/_{10}$, in $ce' = {}^1/_{10}$ und in $ff' = 0$.

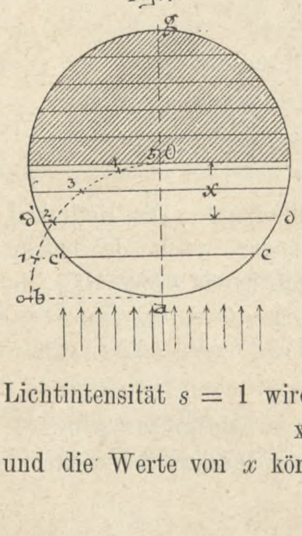
§. 10.

Schattierung des Schlagschattens. Auch die im Schlagschatten befindlichen Flächen sind nicht gleichmässig dunkel, es machen sich vielmehr auch hier verschiedene Abstufungen der Helligkeit, eine Schattierung, bemerkbar, welche teils durch das Reflexlicht erzeugt wird, teils eine Wirkung des Kontrastes ist, insofern eine dunkle Fläche um so dunkler erscheint, je heller die unmittelbar angrenzende Fläche ist. Es wird deshalb der Schlagschatten am dunkelsten sein auf einer Fläche, die am hellsten wäre, wenn das Licht sie erreichen könnte. Die Dunkelheit des Schlagschattens wird demnach von der Schattengrenze nach dem hellsten Punkt der Körperfläche hin allmählich zunehmen, und zwar nimmt man gewöhnlich an, dass die Dunkelheit des Schlagschattens von der Schattengrenze bis zum hellsten Punkt hin in einfachem Verhältnis mit der Helligkeitszunahme der Flächen wächst.

§. 11.

Einfluss der Intensität des Lichtes auf die Lage der Kurven gleicher Helligkeit. Wenn man unter Zugrundelegung der in den vorhergehenden Paragraphen ausgeführten Grundsätze z. B. eine Kugel schattiert, so findet man, dass sie im Vergleich mit der Schattierung, welche eine körperliche Kugel in der Natur zeigt, nur dann übereinstimmt, wenn man ein Licht von sehr schwacher Intensität annimmt, eine Beleuchtung, welche man etwa erhält, wenn man einer Ebene zwei Stearinkerzen (von denen 6 Stück auf ein Pfund gehen) in der Entfernung von ungefähr 1,62 m gegenüberbringt. Verstärkt man das Licht, so rücken die Helligkeitskurven gegen die Schattengrenze allmählich zurück und zwar um so mehr, je grösser die Intensität des Lichtes ist. Die Lage der Lichtkurven lässt sich nun für jede beliebige Lichtintensität s aus folgender Gleichung berechnen:

Fig. 7.



$$x. = 1 - (\sin z . 90^0)^{\sqrt[3]{\frac{1}{s}}}.$$

Darin bedeutet x (Fig. 7) den Abstand der Lichtkurvenebene von der Ebene der Schattengrenze, in der zum Licht parallelen Richtung gemessen und auf den Kugelradius als Masseinheit bezogen; z bedeutet den Helligkeitsgrad der gewünschten Kurve, also z. B. $^2/_5$, $^3/_5$ ..., wenn die Lage der Kurve mit $^2/_5$, $^3/_5$ ... Helligkeit gesucht wird. Für die Lichtintensität $s = 1$ wird obige Gleichung einfach:

$$x = 1 - \sin z . 90^0,$$

und die Werte von x können unmittelbar auf graphischem Wege gefunden werden. Man beschreibe mit ao als Radius aus dem Mittelpunkt a den Quadranten ob und teile diesen in (z. B. 5) gleiche Teile. Legt man nun die Ebene cc', dd'... durch die Teilpunkte 1, 2, 3..., so erhält man auf der Kugel die Parallelkreise gleicher Helligkeit mit je $^1/_5$ Helligkeitsdifferenz und für die Lichtintensität $S = 1$, die derjenigen entspricht, welche eine Ebene annimmt, die zwei Stearinlichtern (von denen 6 auf 1 Pfund gehen) in der Entfernung von 0,572 m gegenübergebracht wird, also ca. 8mal grösser ist als die oben angeführte.

Diese Lage der Helligkeitskurven soll unseren künftigen Konstruktionen und bei der Anfertigung der Normalkugel zu Grunde gelegt werden, jedoch nur im direkten Licht; da die Intensität des Reflexlichtes geringer ist als die des direkten Lichtes, so kann man sich hier mit der Gleichteilung des Radius og begnügen. Im Selbstschatten erhalten also die Lichtkurvenebenen unter sich gleiche Abstände.

§. 12.

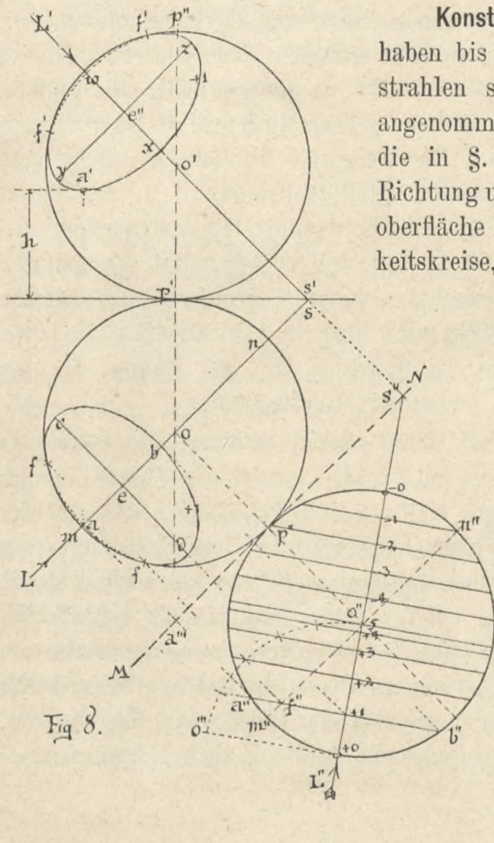


Fig. 8.

Konstruktion der Normalkugel. Wir haben bis jetzt die Richtung der Lichtstrahlen stets senkrecht zur A.-Tafel angenommen, geben wir ihnen nun aber die in §. 2 angeführte konventionelle Richtung und verzeichnen auf der Kugeloberfläche für diese Annahme die Helligkeitskreise, so werden diese, da sie jetzt eine zur Grundriss- und Aufrisstafel schiefe Lage haben, sich als Ellipsen darstellen; um diese in Grund- und Aufriss zu erhalten verfahre man folgendermassen:

a) Man ziehe durch den Mittelpunkt (o, o') der Kugel (Figur 8) den Lichtstrahl (L, L') und bestimme seine Grundrissspur . s; nun projiciert man auf eine zum Lichtstrahl parallele Seitenebene MN die Kugel sowie den Lichtstrahl (L, L'), d. h.

man mache $o''p'' = o'p'$ und beschreibe um o'' als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius der Kugel; die Spur s des Lichtstrahls (L, L') projiciert sich auf die Seitenebene nach s'', und da der Lichtstrahl L durch den Kugelmittelpunkt geht, so verbinde man s'' mit o'' durch eine Gerade $s''o''$, dann ist der Kreis $p''n''b''$ die Seitenprojection der Kugel und L'' der durch ihren Mittelpunkt o'' gehende Lichtstrahl.

b) Nun teile man im Selbstschatten den Halbmesser o'' $(-o)$ in 5 gleiche Teile, und im Licht den Quadranten $o''o'''$ in 5 gleiche Teile und lege durch die Teilpunkte Ebenen senkrecht zur Lichtrichtung L″. Dadurch erhält man in der Seitenprojektion die Lage der Helligkeitskreise im Licht $+1$, $+2$, $+3$, $+4$, ± 5, und im Selbstschatten -4, -3, -2, -1, während $+0$ der hellste Punkt im Licht und -0 der hellste Punkt im Selbstschatten ist.

c) Es handelt sich nun darum, diese Parallelkreise der Kugel in Grund- und Aufriss zu bringen. Um z. B. den Grundriss des Kreises $a''b''$ ($+1$, mit der Helligkeit $^4/_5$) zu erhalten, bringe man zunächst die beiden Endpunkte a'' und b'' nach a und b auf den Durchmesser mn, denn mn ist der Grundriss desjenigen grössten Kreises der Kugel, der den Umriss in der Seitenprojektion bildet; es müssen daher alle Punkte, welche auf dem Umriss der Seitenprojektion liegen, im Grundriss auf dem Durchmesser mn liegen. Die Länge ab ist nun die kleine Axe der Ellipse, d. h. des Grundrisses der Helligkeitskurve $+1$. Der Punkt $+1$ in der Seitenprojektion ist die Seitenprojektion des horizontalen Kreisdurchmessers, der sich also, eben weil er horizontal also parallel zur Grundrisstafel ist, im Grundriss in seiner wahren Länge, welche gleich $a''b''$ ist, darstellt. Zieht man also die Projektionslinie $+1\,dc$ und macht $dc = a''b''$, so ist dc die grosse Axe der Ellipse, die nun leicht auf irgend eine Weise konstruiert werden kann.

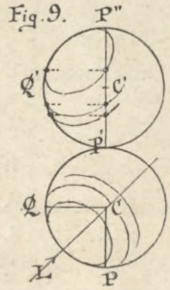
d) Die mit MN parallele Gerade $m''n''$ kann als die Seitenspur einer horizontalen Ebene betrachtet werden, welche die Kugel in eine obere $m''b''n''$ und eine untere Hälfte $m''p''n''$ scheidet. Alle auf der oberen Kugelhälfte $m''b''n''$ liegenden Teile der Helligkeitskurve sind im Grundriss sichtbar, und gehen im Kreis $m''n''$ auf die nichtsichtbare untere Kugelhälfte über. Die auf $m''n''$ liegenden Punkte der Helligkeitskurven (wie z. B. der Punkt f'' der Kurve $a''b''$) sind also die Übergangspunkte von der sichtbaren zu der nichtsichtbaren Kugelhälfte im Grundriss, also die Berührungspunkte der Ellipsen am Kugelumriss. Die Projektionslinie $f''f$ ergiebt also die beiden (gegen m symmetrisch liegenden) Berührungspunkte f, f der Ellipse $adbc$, d. h. der Helligkeitskurve + 1.

e) Da die Lichtstrahlen eine gegen Grund- und Aufrisstafel symmetrische Lage haben, so erhalten auch die Hellenkurven eine symmetrische Lage. Macht man daher $o'e'' = oe$, $wx = ab$ und $yz = cd$, so kann auch im Aufriss die Ellipse $wyxz$, d. h. die Helligkeitskurve + 1 gezeichnet werden.

f) Zur Bestimmung des tiefsten Punktes a' braucht man nur die Höhe $h = a''a'''$ zu machen, denn a'' ist der tiefste Punkt in der Seitenprojektion, a der Grundriss und daher a' der Aufriss.

g) Die Berührungspunkte der Kurven im Aufriss liegen ebenso symmetrisch in gleichen Entfernungen von L' wie im Grundriss von L.

Fig. 9.

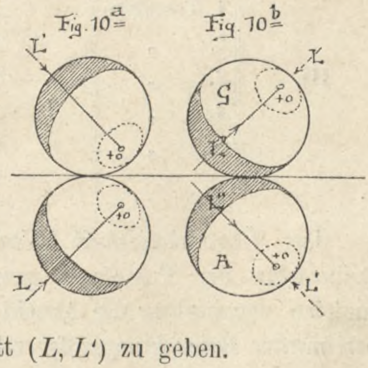


h) Die Linie L (Fig. 9) ist die symmetrische Axe für die Helligkeitskurven (wie im Aufriss L'). In gleichen Winkelabständen von L (wie z. B. in CP und CQ) müssen dieselben Helligkeitspunkte liegen; nun ist $P'P''$ der Aufriss von PC und der Umriss . $P''Q'P'$ der Aufriss von CQ, folglich müssen auf $P''P'$ und auf $P''Q'P'$ die Helligkeitspunkte gleiche Lage haben.

§. 13.

Die hohle Kugel. Zur Bestimmung der Helligkeit hohler (konkaver) Flächen hat man eine hohle Normalkugel nötig. Eine solche aber verschafft man sich ganz einfach dadurch, dass man das Blatt, auf welchem die volle Normalkugel gezeichnet ist, um 90° dreht, so dass also der Aufriss unten, der Grundriss oben zu liegen kommt. Denn würde man eine hohle Normalkugel konstruieren, so würden die Helligkeitskurven die in Fig. 10ª gezeichnete Lage erhalten, dreht man aber die volle Normalkugel um 90°, so erhalten die Kurven die Lage der Figur 10ᵇ, also der Aufriss A, der unten liegt, genau so wie der Aufriss in Figur 10ª, und der Grundriss G so, wie der Grundriss in Figur 10ª, nur ist natürlich dem Lichtstrahl die Richtung (L'', L''') statt (L, L') zu geben.

Fig. 10ª. Fig. 10ᵇ.



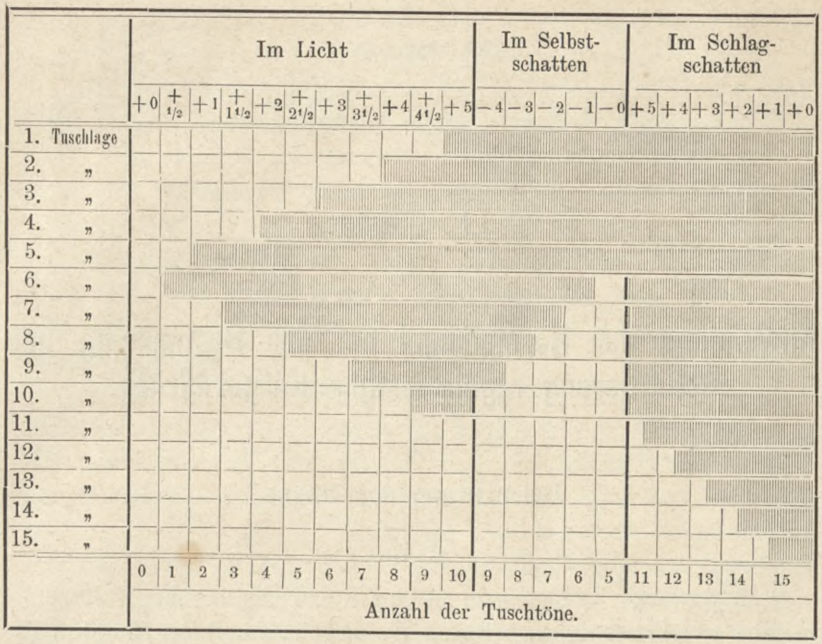
§. 14.

Ausführung der Zeichnungen, eigentliche Schattierung. Sind die Helligkeiten sämmtlicher Flächen eines Körpers durch Konstruktion gefunden, so kann zur eigentlichen Schattierung desselben geschritten werden, was auf verschiedene Weise geschehen kann: durch Schraffierung oder durch Behandlung mit dem Pinsel durch wiederholtes Auftragen eines und desselben Tuschtones von mässiger Stärke. Letzteres Verfahren ist, weil einfacher und sicherer, dem ersteren vorzuziehen.

Das Auftragen des Tones geschieht in einer bestimmten Reihenfolge, und zwar am besten nach nachstehender Tabelle.

Ueber-arbeitung	Töne	Es sind anzulegen alle Flächen im Licht- u. im Selbstschatten, deren Helligkeitsziffer liegt	Im Schlagschatten sind anzulegen
I.	1. Tuschlage	zwischen ± 5 und -0	alle Flächen
	2. „	„ $+4$ „ -0	„ „
	3. „	„ $+3$ „ -0	„ „
	4. „	„ $+2$ „ -0	„ „
	5. „	„ $+1$ „ -0	„ „
II.	1. Tuschlage	zwischen $+ 1/2$ und -1	alle Flächen
	2. „	„ $+1 1/2$ „ -2	„ „
	3. „	„ $+2 1/2$ „ -3	„ „
	4. „	„ $+3 1/2$ „ -4	„ „
	5. „	„ $+4 1/2$ „ -5	„ „
III.	1. Tuschlage	—	zwischen $+4 1/2$ u. $+0$
	2. „	—	„ $+3 1/2$ u. $+0$
	3. „	—	„ $+2 1/2$ u. $+0$
	4. „	—	„ $+1 1/2$ u. $+0$
	5. „	—	„ $+ 1/2$ u. $+0$

Der Übersichtlichkeit halber ist im nachstehenden Schema die Reihenfolge der Tuschlagen graphisch dargestellt, aus welchem man zugleich unmittelbar die Anzahl von Tönen, welche einer Fläche mit bestimmter Beleuchtungsziffer zukommt, ablesen kann.



Die Kugelfläche mit den Kreisen gleicher Helligkeit zur Bestimmung der Schattierung regelmässiger Körperoberflächen wurde erstmals vor ca. 33 Jahren angewendet und eingeführt vom k. Hofbaudirektor Herrn v. Egle, Vorstand der hiesigen Baugewerkeschule, am königl. Polytechnikum, in seiner damaligen Eigenschaft als Professor letzterer Anstalt.

II. Teil.

Anwendung der Normalkugel bei der Bestimmung der Schattierung regelmässiger Körperflächen.

A.

Beleuchtung der Ebene.

§. 15.

Allgemeines. 1) Legt man an eine Kugel eine Berührungsebene E' parallel zu einer gegebenen Ebene E, und bestimmt den Berührungspunkt f'', so hat bekanntlich die Berührungsebene E' dieselbe Helligkeit wie der Punkt f, und da die Ebene E mit E' parallel ist, erstere ebenfalls die Helligkeit des Punktes f; da nun aber diese bekannt ist, so kennt man auch die Helligkeit der Ebene E.

2) Verbindet man den Berührungspunkt f mit dem Mittelpunkt der Kugel durch eine Gerade G', so steht diese senkrecht auf der Berührungsebene E', da die Ebene E mit E' parallel ist, so muss die Senkrechte G auf E mit G' ebenfalls parallel sein. Man erhält also den Berührungspunkt f einer mit E parallelen Ebene auf der Kugelfläche, wenn man auf der Ebene E eine Senkrechte G konstruiert, mit dieser durch den Kugelmittelpunkt eine Parallele G' zieht und deren Durchschnitt mit der Kugeloberfläche bestimmt.

3) Stehen Ebenen senkrecht auf der $\frac{\text{Aufriss-}}{\text{Grundriss-}}$Tafel, so giebt die mit ihrer $\frac{\text{Aufriss-}}{\text{Grundriss-}}$Spur parallele Tangente am $\frac{\text{vertikalen}}{\text{horizontalen}}$ Kugelumriss im Berührungspunkt die Helligkeit der Ebenen an.

4) Für alle Ebenen, welche gleiche Horizontalneigung α haben, liegt die entsprechende Helligkeit auf einem horizontalen Parallelkreis, dessen Lage bestimmt ist durch den Berührungspunkt einer Tangente im Aufriss, welche die gleiche Horizontalneigung α hat.

§. 16.

Spezielle Fälle.

Die Seitenflächen des Prismas (Fig. 11, Taf. I.) sind Ebenen, welche senkrecht auf der Grundrisstafel stehen. Zieht man also (nach §. 15, 3.) $AB \parallel ab$, $BC \parallel bc \ldots$ tangierend am horizontalen Kugelumriss, so geben die Berührungspunkte $x, y \ldots$ die Helligkeiten der Prismenseiten $(ab, a'b'b''a'')$, $(bc, b'c'c''b'') \ldots$ an. Die Deckfläche $e''d''$, die im Grundriss ganz sichtbar ist, ist eine Ebene senkrecht zur Aufrisstafel; zieht man daher (wieder nach §. 15, 3.) eine Tangente $ED \parallel e''d''$ an den vertikalen Kugelumriss, so hat die Ebene $e''d''$ die Helligkeit des Berührungspunktes z. Fig. 11

Neigen wir das Prisma (Fig. 11) um den Eckpunkt d' um einen beliebigen Winkel, so nimmt es die Lage $a'e'e''a''$ (Fig. 12) ein, und der Grundriss erhält die aus der Figur ersichtliche Form. Um nun die Helligkeiten der Prismenflächen hier vermittelst der Normalkugel zu finden, klappe man die Deckfläche $a''e''$ um, d. h. bringe sie in die zur Aufrisstafel parallele Lage $a'''e'''$, und lege durch den Kugelmittelpunkt eine Ebene $p'q' \parallel a''e''$. Der Schnitt der Ebene $p'q'$ ist ein grösster Kreis, auf welchem die Helligkeitspunkte für die Seitenflächen des Prismas notwendig liegen müssen, und der in gleichem Sinne wie $a'''e'''$ umgeklappt mit dem Kugelumriss $p'xyq'$ zusammenfällt. Zieht man um die Tangenten $AB \parallel a'''b'''$ an die Normalkugel und bringt den Punkt x aus der Umklappung in die ursprüngliche Lage, d. h. nach x', so ist x' die Helligkeit der Prismenseite $a'b'a''b''$. u. s. f. — Der Grundriss des grössten Kreises $p'q'$ ist die Ellipse pq, auf ihr liegen die Helligkeitspunkte für die Prismenseiten im Grundriss. Die Tangente $AM \parallel am$ berührt die Ellipse in z, folglich ist z die Helligkeit der Prismenseite $amst$ u. s. f. Da die Deckfläche $a''e''$ eine zur Aufrisstafel senkrechte Ebene ist, so giebt der Berührungspunkt einer mit $a''e''$ parallelen Tangente am vertikalen Kugelumriss die Helligkeit der Deckfläche $(ae, a''e'')$. Fig. 12

Die Seitenflächen der Pyramide Figur 13 haben alle gleiche Horizontalneigung, und zwar die Neigung α der Seite $(ags, a's')$, da letztere eine zur Aufrisstafel senkrechte Lage hat; ihre Helligkeit ist daher die des Punktes w', in welchem die zu $a's' \parallel$ Ebene AS die Kugel berührt. Nach §. 15, 4 aber liegt die entsprechende Helligkeit der übrigen Pyramidenseiten auf dem durch w' gehenden Parallelkreis $w'v'$, dessen Grundriss wv ist. ag, ab, bc.. sind die Horizontalspuren der Pyramidenseiten ags, abs, $bcs \ldots$, folglich mn, pq, rs.. die Senkrechten Fig. 13

auf diesen Ebenen. Macht man daher nach §. 15, 2 $MO \parallel mn$, $PO \parallel pq$, $RO \parallel rs \ldots$, so sind die Helligkeiten der Punkte $x, y., z \ldots$ die den Pyramidenseiten entsprechenden.

Fig. 14 Die Fläche $(abcd, a'b'c'd')$ des in Figur 14 dargestellten Prismas hat eine beliebig schiefe Lage gegen beide Grundebenen. Bestimmen wir die Helligkeit dieser Seite nach §. 15, 2), so haben wir zunächst den Grund- und Aufriss einer auf dieser Ebene senkrecht stehenden Geraden zu konstruieren. Die Risse der Senkrechten auf einer Ebene stehen senkrecht auf den gleichnamigen Spuren der Ebene; man müsste also die Spuren der Ebene $(abcd, a'b'c'd')$ suchen. Statt dessen schneidet man besser die Ebene durch Ebenen $\parallel$ zu den Grundebenen, wodurch man Linien parallel zu den gesuchten Spuren erhält. Die horizontale Ebene $a'e'$ ergiebt im Grundriss den Schnitt ae, die zur Aufrisstafel parallele Ebene fc ergiebt im Aufriss die Linie $f'c'$, folglich ist ae eine zur Grundrissspur und $f'c'$ eine zur Aufrissspur parallele Ebene. Zieht man die Gerade $m \perp ae$ und $m' \perp f'c'$, so ist (m, m') eine auf der Ebene $(abcd, a'b'c'd')$ senkrecht stehende Gerade. Man ziehe nun die Gerade (n, n') durch den Kugelmittelpunkt $\parallel$ zu (m, m') und bestimme ihren Durchschnitt mit der Kugeloberfläche, was am einfachsten in folgender Weise geschieht.

Die Gerade (n, n') schneidet offenbar die Kugel in einem Punkt des grössten Kreises xy. Bringt man die Ebene xy durch Drehung um die Axe O in die zur Aufrisstafel parallele Lage $x''y''$, so ist der Aufriss des grössten Kreises $x''y''$ der vertikale Kugelumriss, während die Gerade n die Lage $o'x'''$ einnimmt (denn der auf n beliebig liegende Punkt $[x, x']$ beschreibt bei der Drehung im Grundriss den Bogen xx'', im Aufriss die horizontale Gerade $x'x'''$), $o'x'''$ schneidet den Kugelumriss in s. Bringt man die Ebene $x''y''$ wieder in ihre ursprüngliche Lage xy zurück, so kommt der Punkt s nach z' auf der Geraden n'. z' ist also der Schnittpunkt der Geraden (n, n') mit der Kugelfläche, also der Berührungspunkt einer mit $(abcd, a'b'c'd')$ parallelen Ebene an der Kugel, seine Helligkeit ist die der Ebene $ABCD$.

B.

Beleuchtung krummer Flächen.

1) Cylinder- und Kegelflächen.

§. 17.

Allgemeines. 1. Ist die Helligkeit eines Punktes P auf einer Cylinder- oder Kegelfläche bekannt, so hat die durch den Punkt P gehende Mantellinie dieselbe Helligkeit.

2. Ist der normale Schnitt eines Cylinders ein Kreis, so findet die Berührung zwischen ihm und einer ihm einbeschriebenen Kugel in einem grössten Kreis statt, der senkrecht auf der Achse des Cylinders steht.

3. Ein kreisförmiger Kegel (Drehungskegel) wird von einer ihm einbeschriebenen Kugel in einem Parallelkreis berührt, welcher senkrecht auf der Achse des Kegels steht. Nach §. 5, d ist aber an den Berührungsstellen die Helligkeit zweier Flächen dieselbe. Da die Helligkeit des betreffenden Kugelkreises bekannt ist, so ist damit auch die des Kegels gegeben.

§. 18.

Spezielle Fälle.

Der in Figur 15 dargestellte Cylinder wird von der ihm einbe- Fig. 15
schriebenen Kugel in dem grössten Kreis $a'b'$ berührt, folglich liefert der mit $a'b'$ parallele Kreis $a''b''$ der Normalkugel die Helligkeitspunkte, die man nur proportional von $a''b''$ auf $a'b'$ zu übertragen hat, wie bei $c'd'$ angedeutet ist Zieht man durch die so gefundenen Helligkeitspunkte die betreffenden Mantellinien, so ist die Beleuchtung des Cylinders bestimmt.

Der Cylinder Fig. 16 habe eine zur Aufrisstafel parallele Richtung. Fig. 16
Die Berührung der ihm eingeschriebenen Kugel findet im grössten Kreis $e'f'$ statt, der mit der Deckfläche $g'h'$ parallel ist. Zieht man also $e''f'' \parallel g'h'$ durch den Mittelpunkt der Normalkugel, überträgt die Helligkeitspunkte proportional von $e''f''$ auf $g'h'$ und zieht die Mantellinien, so ist die Helligkeit des Cylinders bestimmt. Der Grundriss des Kreises $e''f''$ der Normalkugel ist die Ellipse ef, der von $g'h'$ die Ellipse gh. Man hat also nur die Helligkeitspunkte, welche auf ef liegen, proportional auf die Ellipse gh zu übertragen, was am besten dadurch geschieht, dass man die Helligkeitspunkte der Ellipse ef auf ihren Durchmesser $m'n'$ projiciert und die Punkte proportional auf den Durchmesser mn überträgt.

Ist die Deckfläche (ab, $a'b'$) des gegen beide Grundebenen schief Fig. 17
liegenden Cylinders Fig. 17 senkrecht zu seiner Axenrichtung, so ist sie parallel zu dem grössten Kreis, in welchem eine ihm einbeschriebene Kugel ihn berührt. Macht man daher die Ellipse $A'D'B'$ der Normalkugel ähnlich der Ellypse $a'd'b'$ und die Ellipse AEB ähnlich aeb, so hat man nun wieder, wie in voriger Aufgabe, die Helligkeitspunkte

von $A'D'B'$ auf $a'd'b'$ und von AEB auf aeb zu übertragen, und die Mantellinien des Cylinders zu ziehen.

Fig. 18 Der Kegel Fig. 18 mit kreisförmiger Grundfläche und senkrechter Achse wird von der ihm einbeschriebenen Kugel im Parallelkreis $c'd'$ berührt. Es handelt sich also nur darum, auf der Normalkugel den ihm ähnlich liegenden Parallelkreis $C'D'$ zu finden, was einfach dadurch geschieht, dass man die Tangente $A'S' \parallel a's'$ und durch den Berührungspunkt C' die Gerade $C'D' \parallel c'd'$ zieht. Man hat nunmehr nur noch die Helligkeitspunkte, welche auf $C'D'$ liegen, auf $c'd'$ oder auf die Grundfläche $a'b'$ proportional zu übertragen und die betreffenden Mantellinien zu zeichnen. — Der Grundriss des Parallelkreises $C'D'$ der Normalkugel ist der Kreis CD. Beschreibt man nun einen dem Kreis CD gleich grossen Kreis cd um den Mittelpunkt s, und überträgt auf ihn zugleich die Helligkeitspunkte des Kreises CD, so hat man nur noch durch diese Punkte die entsprechenden Mantellinien zu ziehen.

Fig. 19 Die Axe des Kegels Figur 19 ist gegen die Grundrisstafel geneigt, aber parallel zur Aufrisstafel, eine ihm einbeschriebene Kugel berührt ihn im Parallelkreis $g'h'$ (. $\parallel e'f'$). Zieht man daher $E'T' \parallel e't'$ und durch den Berührungspunkt $G'H' \parallel e'f'$ (resp. $\parallel g'h'$), so kann man wieder wie oben die auf $G'H'$ liegenden Helligkeitspunkte auf $e'f'$ übertragen und die Mantellinien ziehen. — Der Grundriss des Berührungskreises $G'H'$ ist die Ellipse GH, die, wie leicht nachzuweisen, der Grundfläche ef des Kegels ähnlich ist. Um daher die Helligkeitslinien des Kegels im Grundriss zu erhalten, übertrage man, wie oben (für Fig. 16) beschrieben, die Helligkeitspunkte, welche auf der Ellipse GH liegen, auf die Ellipse ef und ziehe die Mantellinien des Kegels.

Fig. 20 Das in Figur 20 dargestellte, nach der Linie $ghiklm$ verkröpfte Gesims, dessen Normalprofil $a'g'$ ist, ist nichts anderes als eine Zusammensetzung von 5 Cylinderflächen, welche $a'g'$ als Normalschnitt haben, nemlich $aghb$, $bcih$, $cdki$, $delk$ und $efml$. Um z. B. die Helligkeitslinien für den Cylinder $bcih$, dessen Aufriss $a'c'i'g'$ ist, zu erhalten, schneide man ihn senkrecht zu seiner Richtung in $(pq, p'q')$ und die Normalkugel durch eine parallele Ebene $(PQ, P'Q)$; zieht man nun an die Helligkeitspunkte der Ellipse $P'Q'$ Tangenten, und parallel damit Tangenten an den Schnitt $p'q'$, so haben beiderseits die Berührungspunkte, also auch die durch sie gehenden Mantellinien gleiche Helligkeit, wie z. B. X' und x'.

Ein genaueres Resultat liefert häufig folgende Konstruktion: Dreht man den Normalschnitt pq und die Ebene PQ, d. h. bringt man sie in die mit der Aufrisstafel parallele Lage pq'' und $P''Q''$, so erhält man im ersten Fall im Aufriss das normale, also $a'g'$, gleiche Profil, während $P''Q''$ im Aufriss mit dem Kugelumriss zusammenfällt. Überträgt man also die auf der Ellipse $TQ'T'$ liegenden Helligkeitspunkte auf den Kugelumriss, z. B. X' nach X'', zieht hier Tangenten (z. B. Z') und parallel damit Tangenten (z. B. z) an das Normalprofil $a'g'$, so hat man nur durch die so erhaltenen Berührungspunkte Mantellinien zu ziehen.

Die Konstruktion zur Bestimmung der Helligkeit z. B. des Cylinders ($delk$, $d'f'm'k'$) ist der ebenbesprochenen gleich.

Ebenso auch die des Cylinders ($cdki$, $c'd'k'i'$). Die zum Normalschnitt ut parallele Ebene (durch den Mittelpunkt der Kugel gehend) ist MT in Aufriss TT'. Das Verfahren ist dasselbe wie oben, vereinfacht sich aber noch wesentlich dadurch, dass die auf der Linie TT' liegenden Helligkeitspunkte bei der Umklappung genau mit den auf dem Kugelumriss liegenden Berührungspunkten zusammenfallen (s. §. 12, *h*).

Auf ähnliche Weise wie bisher findet man auch für das Giebel- Fig. 21
gesims (Fig. 21) (steigende Cylinderfläche) die Helligkeitslinien. Erhält man durch Umklappung des Normalschnittes cd das Profil ab, so lege man durch den Kugelmittelpunkt die Ebene $C'D' \parallel cd$; sie schneidet die Kugel in einem grössten Kreis, der bei seiner Umklappung mit dem Kugelumriss $C'X''D'$ zusammenfällt. Bringt man die auf $C'D'$ liegenden Helligkeitspunkte ebenfalls in Umklappung (wie z. B. X' nach X''), zieht in X'' eine Tangente und damit parallele Tangenten an das Profil, so haben die durch die Berührungspunkte x' gehenden Mantellinien die Helligkeit des Punktes X' der Normalkugel.

Die Helligkeitslinien zu bestimmen für einen Kegel (Fig. 22, Taf. II), Fig. 22
dessen Grundfläche eine beliebige Kurve und dessen Axe schief zur Grundfläche steht. Die Tangente mn im Punkt a der Grundfläche ist die Grundrissspur der Ebene, welche den Kegel in der Mantellinie (as, $a's'$) berührt, also muss diese Mantellinie mit der Berühruugsebene gleiche Helligkeit haben. Die Helligkeit dieser Ebene aber kann in der Weise, wie wir dies bereits oben §. 14 gezeigt haben, am einfachsten in folgender Weise gefunden werden:

Man bestimme die Horizontalneigung der Ebene mns, d. h. man ziehe $sb \perp mn$ und klappe sb nach sb'' um, ziehe $b''b'''$ senkrecht zum Grundschnitt und verbinde b''' mit s', alsdann ist α der gesuchte Neigungswinkel. Man ziehe nun an die Normalkugel die Tangente

$B'S' \parallel b'''s'$ und durch den Berührungspunkt P' den Parallelkreis $P'Q'$; dessen Grundriss ist der Kreis PQ. Zieht man noch $OB \parallel sb$, so ist der Schnittpunkt X der Berührungspunkt einer mit mn parallelen Ebene, giebt also ihre Helligkeit sowie die der Mantellinie $(as, a's')$.

2. Umdrehungsflächen.

§. 19.

Fig. 23 Berührt eine Kugel abc (Figur 23), deren Mittelpunkt in der Achse der Umdrehungsfläche liegt, diese letztere, so geschieht dies stets in einem Parallelkreis xx'; beide Flächen haben also in diesem Parallelkreis einerlei Helligkeit, und es handelt sich nur darum, auf der Normalkugel den entsprechend liegenden Parallelkreis zu finden. Die Gerade xs ist die gemeinschaftliche Tangente am Meridian der Umdrehungsfläche und am Kreis abc im Punkt x, beschreibt also bei der Umdrehung den Kegel xsx', der beide Flächen (die Umdrehungsfläche und die Kugel) im Parallelkreis xx' berührt, also die Helligkeit dieses letzteren hat. Ist $SM \parallel sm$, so ist MSM' ein die Normalkugel im Parallelkreis XX' berührender Kegel, der dem Kegel xsx' ganz gleich ist; er hat die Helligkeit des Parallelkreises XX', also ist auch die Helligkeit des Kegels xsx' folglich die des Parallelkreises xx' die des Kreises XX'. Man hat also nur die Helligkeitspunkte von XX' proportional auf xx' zu übertragen. Das Verfahren besteht also einfach darin: man zieht parallele Tangenten mn an den Meridian der Umdrehungsfläche und eine parallele Tangente MN an die Normalkugel, durch die Berührungspunkte $x, x \ldots X$ die Parallelkreise xx', $xx' \ldots XX'$, und überträgt die Helligkeitspunkte von XX' auf sämtliche Parallelkreise xx' proportional. Die parallelen Tangenten pq am Meridian der Umdrehungsfläche und die parallele Tangente PQ an der Kugel ergeben die durch deren Berührungspunkte gehenden Parallelkreise yy', $yy' \ldots YY'$; folglich sind die Helligkeitspunkte von YY' auf sämtliche yy' proportional zu übertragen u. s. f. Hat man sich so durch Anwendung verschiedener Tangentenrichtungen auf einer hinreichenden Anzahl von Parallelkreisen die Helligkeitspunkte verschafft, so verbinde man die gleichnamigen Punkte (d. h. alle Punkte mit der Helligkeitsziffer $+1$, $+2$, $+3 \ldots$) mit einander; dadurch erhält man die je nach der Form der Umdrehungsfläche verschiedenartig gestalteten Kurven gleicher Helligkeit.

Nach §. 12, h ist die Lage der Helligkeitspunkte auf der Mittellinie AS der Kugel dieselbe wie auf dem linksseitigen Umriss, folglich muss auch auf der Umdrehungsfläche dasselbe stattfinden, d. h. ist z. B. X der Berührungspunkt der Helligkeitskurve + 3, so geht dieselbe Kurve + 3 auch durch den Punkt X''; zieht man daher Tangenten mn an den Meridian der Umdrehungsfläche $\parallel . MN$, so sind alle Berührungspunkte x die Berührungspunkte und x'' die Durchgangspunkte der Kurve + 3 durch die Mittellinie der Umdrehungsfläche.

Steht die Achse der Umdrehungsfläche Figur 24 senkrecht auf der Aufrisstafel, so findet man die Helligkeitskurven in folgender Weise. Zieht man im Grundriss an den Meridian der Umdrehungsfläche parallele Tangenten mn, so ist die Helligkeit für die durch deren Berührungspunkte gehenden Parallelkreise xy dieselbe wie im Parallelkreis XY der Normalkugel, wenn $MN \parallel mn$. Zeichnet man die Aufrisse der Parallelkreise, so erhält man auf der Umdrehungsfläche die Kreise $x'y$, auf der Normalkugel den Kreis $X'Y'$. Man hat daher nur die Helligkeitspunkte dieser letzteren auf die Kreise $x'y'$ zu übertragen, was einfach in der Weise geschieht, dass man um den Mittelpunkt o' einen dem Kreis $X'Y'$ gleichen Kreis zieht, auf ihn die Helligkeitspunkte, die nach den Linien L, l symmetrisch liegen, von $X'Y'$ überträgt und durch dieselbe radiale Linien bis zum Schnitt mit den Kreisen $x'y'$ zieht. — Durch Wiederholung dieses Verfahrens, d. h. durch Anwendung verschieden gerichteter Tangenten kann man sich nun eine hinreichende Anzahl von Helligkeitspunkten verschaffen, um durch deren entsprechende Verbindung die Kurven mit Sicherheit zeichnen zu können. Fig. 24

Ist der Meridian (Normalschnitt) einer Umdrehungsfläche ein Teil eines Kreises oder ein voller Kreis (Wulst), so vereinfacht sich die Konstruktion wesentlich. Es sei z. B. Figur 25 ein Teil eines ringförmigen Wulstes (entstanden durch die Umdrehung einer Kugel um eine ausserhalb derselben liegende, zur Aufrisstafel senkrecht stehende Achse). Die Erzeugende (Kugel) in der Lage mn berührt die Umdrehungsfläche im Kreis ab; letztere hat also hier dieselbe Helligkeit wie die Kugel im Kreis ab oder wie die Normalkugel im Kreis AB, wenn $AB \parallel ab$. Ebenso ist, wenn $CD \parallel cd$, $ef \parallel EF$, $GH \parallel gh$ gezogen wird, die Helligkeit in den parallelen Schnitten, d. h. in CD und cd, in EF und ef... gleich; es hat also nur eine proportionale Uebertragung der Helligkeitspunkte stattzufinden. Fig. 25

Anmerkung. Hätte man statt einer vollen eine hohle Wulstfläche (Hohlkehle), so wäre das Verfahren das gleiche, nur müsste statt der vollen die hohle Normalkugel (§. 13) in Anwendung gebracht werden.

§. 20.

3. Schraubenflächen und gewundene Flächen.

Fig. 26 Es sei $(o, o' o'')$ Figur 26 die Achse, $abcd$ der Grundriss und $a' b' c' d'$ der Aufriss einer Schraubenlinie; die Gerade $(ao, a' o')$ bewege sich so, dass sie, während der Punkt a' auf der Schraubenlinie sich fortbewegt, stets ihre mit der Grundrisstafel parallele, also horizontale, Lage beibehält. Dadurch erzeugt sie eine krumme Fläche, welche man Wendelfläche nennt. Es soll die Schattierung dieser Fläche bestimmt werden.

Die Tangente im Punkt (b, b') der Schraubenlinie ist im Grundriss die Tangente bs am Grundkreis ac; ihre Spur s erhält man, wenn man die Strecke $bs = Bog. ba$ macht, folglich ist $s' b'$ der Aufriss der Tangente. Die Berührungsebene an der Wandelfläche im Punkt (b, b') geht nun durch diese Tangente und durch die Erzeugende (ob, b'), es ist also ss' die Grundrissspur und $s' s''$ die Aufrissspur dieser Berührungsebene; folglich $(tt, t' t'')$ die Senkrechte auf der Berührungsebene, also Normale im Punkt (b, b') der Wendelfläche.

Die Horizontalneigung der Tangente an der Wandelfläche. d. h. der Winkel $b' s' o'$, ändert sich nicht, an welchen Punkt der Schraubenlinie $a' b' c' d'$.. man dieselbe legen mag, also bleibt auch der Winkel $t'' t' a'$ d. h. die Horizontalneigung der Normalen immer dieselbe. Zieht man daher durch den Mittelpunkt O' der Normalkugel parallele Linien mit den Normalen an verschiedenen Stellen der Wendelfläche innerhalb der Schraubenlinie $a' b' c' d' \ldots$, so machen dieselben, weil sie gleiche Horizontalneigung haben, mit der Achse der Kugel gleiche Winkel, bilden also die Mantellinien eines Kegels, dessen Spitze in o' ist und der die Kugel in einem Parallelkreis schneidet. Die Linie $(OT, O' T') \parallel (tt, t' t'')$ schneidet, weil sie parallel mit der Aufrisstafel ist, die Kugel im Punkt X', $T' O' T''$ ist also der oben besprochene Kegel und $X' X''$ ist der Parallelkreis, in welchem er die Normalkugel durchdringt.

Da $t' t''$ Normale der Wendelfläche im Punkt (b, b') und die damit parallele Linie $O' T'$ normal auf der Kugel im Punkt X' ist, so müssen die Punkte $(b, b'$ und $X, X')$ gleiche Helligkeit haben. Dasselbe ist aber der Fall bezüglich aller Punkte des Kreises $(XX''', X' X'')$ und der Schraubenlinie $(abcd, a' b' c' d')$. Zieht man daher einen Kreis $gh =$ dem Kreis XX''', überträgt auf diesen die Helligkeitspunkte des Kreises XX''', jedoch so, dass der Punkt X mit x zusammenfällt (es findet also eine Verdrehung um 90^0 statt), und überträgt durch radiale Linien die Helligkeitspunkte vom Kreis gh auf den Kreis $abcd$, so hat man nur noch diese Punkte in Aufriss d. h. auf die Schraubenlinie $a'b'c'd'$ zu bringen.

Schneidet man die Wendelfläche durch konzentrische Cylinder, so erhält man als Schnittkurven Schraubenlinien, für welche man in gleicher Weise, wie oben beschrieben, die Helligkeiten bestimmen kann. Die stetige Verbindung der gleichnamigen Helligkeitspunkte liefert sodann die eigentümlich gestalteten Helligkeitskurven der Wendelfläche.

Die in der Ebene om (Figur 27) liegende Kurve $h'i'k'$ werde schraubenförmig um die Achse $(o, o'o'')$ fortbewegt, wobei $h'i'k'$ stets senkrecht bleibt und $i'l'$ die Achse senkrecht schneidet (schraubenförmige Wulstfläche); es soll die Schattierung der dadurch erzeugten Fläche konstruiert werden. Fig. 27

Der auf $h'i'k'$ beliebig gewählte Punkt a' beschreibe den Weg $(abcd\ldots, a'b'c'd'\ldots)$. Alle Berührungsebenen an der Wulstfläche innerhalb der Schraubenlinie $a'b'c'd'$ haben gleiche Horizontalneigung, also auch alle Normalen. Verschaffen wir uns daher die Normale für irgend einen beliebigen Punkt der Fläche innerhalb der Schraubenlinie $a'b'c'd'\ldots$, so ist die Lösung der Aufgabe der obigen (Fig. 26) ganz gleich.

Die Berührungsebene im Punkt (c, c') der Fläche ist bestimmt durch die Tangente am Punkt c' der Schraubenlinie und die Tangente an der Erzeugenden im Punkt c'. Die Tangente $(m'n', mn)$ in Punkt (a', a) der Erzeugenden $h'i'k'$ schneidet die verlängerte $i'l'$ mit Punkt m'. Denken wir uns die Tangente $m'n'$ mit der Erzeugenden fortbebewegt und in diejenige Lage gebracht, in welcher der Punkt a' die Lage c' einnimmt, so wird, da bei dieser Bewegung der Punkt m den Weg $m\,m''\,m'''$ durchläuft, m' nach r'' kommen, wenn $c'r'' = a'r'$ ist. Legen wir durch r'' eine horizontale Ebene $r''r'''$, so ist $(m'''c, r''c')$ die Tangente an der Erzeugenden. Bringt man den Punkt u', in welchem $r''r'''$ die Schraubenlinie schneidet, nach u in den Grundriss, zieht $cg \parallel$ zum Grundschnitt und macht die Strecke $gc =$ Bogen cu, so ist g die Spur und $(gc, g'c')$ die Tangente am Punkt (c, c') der Schraubenlinie. Da g und m''' die Spuren der beiden Tangenten in der zur Grundrisstafel parallelen Ebene $r''r'''$ sind, so ist die Gerade gm''' eine zur Grundrissspur der Berührungsebene in (c, c') parallele Gerade, also die zu gm''' senkrechte Gerade pq der Grundriss der Normalen in (c, c'). Die Punkte g' und c' als Aufrisse der Punkte g und c liegen in einer zur Aufrisstafel parallelen Ebene (gc), folglich ist $g'c'$ eine zur Aufrissspur der Berührungsebene parallele Linie und $p'q' \perp g'c'$ der Aufriss der Normalen im Punkt (c, c') der Wulstfläche.

Zieht man nun durch den Mittelpunkt O, O' der Normalkugel die Gerade $(OP, O'P') \parallel (pq, p'q')$ und bestimmt den Schnittpunkt mit der Kugeloberfläche, so ist die Helligkeit des Punktes Y die des Punktes c. Legt man durch den Punkt Y den Parallelkreis $(XX''', X'X'')$, so bilden die nach ihm gezogenen Kugelradien die Mantellinien eines Kegels $X'O'X''$), welche der Reihe nach den Normalen auf der Wulstfläche längs der Schraubenlinie $(abc\,..\,a'b'c')$ parallel sind; der Parallelkreis $(X, X''', X'X'')$ enthält also die Helligkeitspunkte für die Schraubenlinie. Macht man daher den Kreis $vw = XX'''$ und überträgt auf ihn die Helligkeitspunkte des letzteren, jedoch so, dass der Punkt Y nach y zu liegen kommt (es findet also eine kleine Verschiebung der Punkte statt), zieht radiale Linien durch sie bis zum Schnitt mit dem Kreis $abcd$.., so sind diese Schnittpunkte die Grundrisse der Helligkeitspunkte für die Wulstfläche längs der Schraubenlinie $a'b'c'd'$....

Fig. 28 Die Kurve $g'a''a'''h'$ (Figur 28) sei das normale Profil einer Fläche, welche die Krümmung gbc hat, es soll ihre Beleuchtung konstruiert werden. Zieht man an einem beliebigen Punkt a'' des Profils die Tangente mn und an die Normalkugel die parallele Tangente $M'N'$, so müssen notwendig im Parallelkreis $X'Y'$ und in der Linie $(a''b''c''$, $a'b'c')$ Punkte mit gleichen Helligkeiten liegen (denn die Kugel $[O, O']$ z. B. würde, mit der gegebenen Fläche in irgend einem Punkt der Linie $a''b''c''$ in Berührung gebracht, dieselbe stets mit einem auf $X'Y'$ liegenden Punkte berühren).

Die Kurve $a'b'c'$ ist die Umklappung des Schnitts $a''b''c''$ der Fläche (nach links); klappt man auf den Parallelkreis $X'Y'$ (nach links) um samt den auf ihm liegenden Helligkeitspunkten, so erhält man den Kreis $X'F'Y'$. Ist nun z. B. F'' der Helligkeitspunkt $+2$, der in der Umklappung nach F' zu liegen kommt, so haben auch die Berührungspunkte f, welche man durch die mit $P'Q'$ parallelen Tangente pq erhält, die Helligkeit $+2$; man hat nun nur noch die Punkte f nach f'' in die Ansicht zu bringen. Zeichnet man die Schnitte $a'''c'''$ ebenfalls in der Seitenprojektion, so gelten für diese dieselben auf $X'Y'$ liegenden Helligkeitspunkte, und können durch parallele Tangenten in gleicher Weise übertragen werden.

§. 21.

Auf Tafel III ist die Normalkugel mit allen zur Konstruktion der Beleuchtung notwendigen Punkten und Linien dargestellt, und kann unmittelbar bei selbständigen Zeichenübungen praktisch verwendet werden.

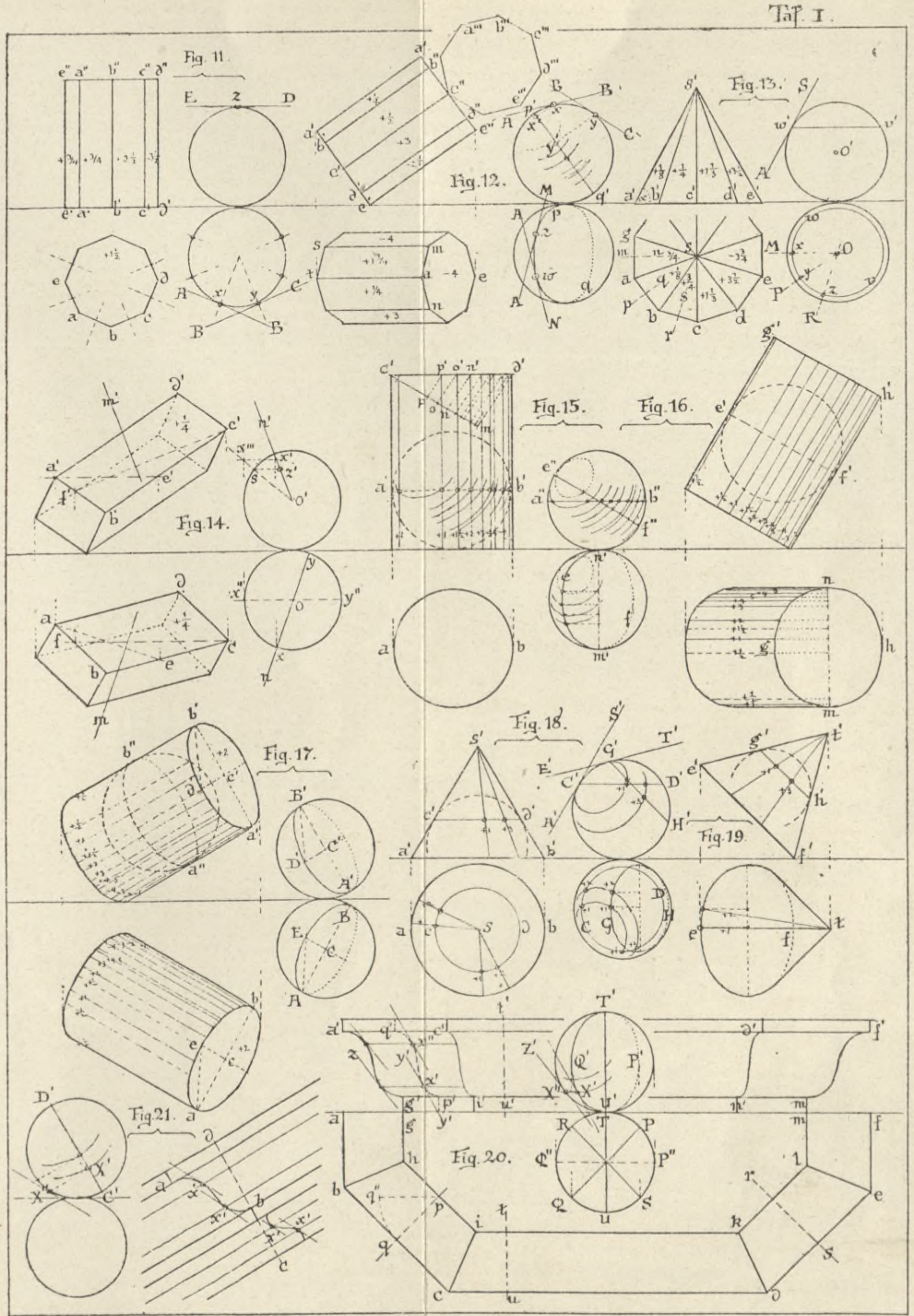


Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.

Taf. II.