U. CISOTTI

SULL' IMPIEGO DI FUNZIONI ELLITTICHE

IN UNA QUESTIONE IDRODINAMICA

NOTA

VENEZIA
PREMIATE OFFICINE GRAFICHE DI C. FERRARI
1908.

U. CISOTTI

SULL' IMPIEGO DI FUNZIONI ELLITTICHE

IN UNA QUESTIONE IDRODINAMICA

NOTA

VENEZIA
PREMIATE OFFICINE GRAFICHE DI C. FERRARI
1908.

Atti del Reale Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.
Anno accademico 1907-908 - Tomo LXVII - Parte seconda.

(Presentata dal prof. T. Levi-Civita, s. c., nell'adunanza del 17 Nov. 1907)

Nella Memoria " *Vene fluenti* „ (*) ho trattato in due dimensioni il problema generale d'efflusso di un liquido da un' apertura praticata in una parete rigida, di forma qualunque.

Ho quindi applicato i risultati generali, cui sono pervenuto in detta ricerca, ad alcuni esempi.

In uno di questi ho esaminato il caso in cui il recipiente (a sezione rettangolare) porti nel fondo un' imboccatura interna (caso di Borda).

Quando non c' è l' imboccatura, cioè quando l'orifizio è scolpito sul fondo del recipiente, si riesce a valutare il coefficiente di contrazione della vena in modo molto semplice, mediante un integrale che si rende immediatamente razionale.

Quando l' imboccatura interna c' è, non si presenta altrettanto semplice la valutazione della sua altezza h, e dell'apertura Ω dell' orifizio.

Infatti in tal caso Ω ed h sono dati rispettivamente dalle formule

$$\Omega = \pi \left\{ 2 - \frac{\pi}{\Omega_1} \right\} - 2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\frac{(\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}\sigma_1)(\operatorname{sen}\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma)}{(\operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen}\sigma_1)(\operatorname{sen}\sigma_2 + \operatorname{sen}\sigma)}} \operatorname{tg}\sigma d\sigma \ ,$$

$$h = \int_0^{\sigma_1} \sqrt{\frac{(\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\sigma)(\operatorname{sen}\sigma_2 + \operatorname{sen}\sigma)}{(\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\sigma)(\operatorname{sen}\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma)}} \operatorname{tg}\sigma d\sigma \ ;$$

(*) Rendiconti del Circ. Matematico di Palermo, tomo XXV (1 semestre 1908).

nelle quali (*) π = grossezza della vena, Ω_1 = larghezza del canale che contiene il liquido, e σ_1 e σ_2 sono due parametri che devono soddisfare alle diseguaglianze $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

Gli integrali che compariscono in Ω, e h sono, come facilmente si riconosce, integrali ellittici.

Scopo della presente nota è la loro effettiva valutazione.

Tale scopo si raggiunge mediante l' introduzione delle funzioni ellittiche di Weierstrass (**).

1. Introduzione delle funzioni ellittiche di Weierstrass. — Espressione di Ω mediante $i\omega'$ e $i\eta'$.

Cominciamo a considerare l' integrale

$$I = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\frac{(\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}\sigma_1)(\operatorname{sen}\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma)}{(\operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen}\sigma_1)(\operatorname{sen}\sigma_2 + \operatorname{sen}\sigma)}} \operatorname{tg}\sigma d\sigma \; .$$

Poniamo

$$(1) \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\sigma = t \; , \\ \dfrac{\operatorname{sen}\sigma_1}{\operatorname{sen}\sigma_2} = k \qquad (0 \leq k \leq 1) \; , \\ \operatorname{sen}\sigma_2 = t_2 \; ; \end{cases}$$

l' espressione di I diviene

$$I = \int_{kt_2}^{t_2} \sqrt{\frac{(t - kt_2)(t_2 - t)}{(t + kt_2)(t_2 + t)}} \frac{tdt}{1 - t^2} = \int_{kt_2}^{t_2} \frac{(t - kt_2)(t_2 - t)\, tdt}{(1 - t^2)\sqrt{(t^2 - k^2t_2^2)(t_2^2 - t^2)}} \; ,$$

dalla quale apparisce che I è un integrale ellittico.

(*) Essendosi già fissate opportunemente le unità di misura. [Cfr. la citata Memoria].

(**) Il Michell [" On the Theory of Free Stream Lines „ (Phil. Trans. R. S. A. 1890; pgg. 408-11)] partendo da altri criteri, e nel solo caso in cui la larghezza del canale è infinita ($\Omega_1 = \infty$), ha dato le espressioni di Ω e di h mediante i tre integrali ellittici di Jacobi; e per h molto piccolo ha assegnate le espressione approssimate di Ω ed h.

Le radici dell' equazione

$$(t^2 - k^2t_2^2)(t_2^2 - t^2) = 0 \ ,$$

disposte in ordine decrescente sono

$$t_2 > kt_2 > -kt_2 > -t_2 \ .$$

Ciò posto, indichiamo con u una variabile ausiliaria, con u_0 un valore fisso di u e poniamo

$$(2) \quad \begin{cases} t - \ t_2 = \dfrac{-p'u_0}{pu - pu_0} \ , \\ t + \ t_2 = \dfrac{-p'u_0}{pu - pu_0} \dfrac{pu - e_1}{pu_0 - e_1} \ , \\ t + kt_2 = \dfrac{-p'u_0}{pu - pu_0} \dfrac{pu - e_2}{pu_0 - e_2} \ , \\ t - kt_2 = \dfrac{-p'u_0}{pu - pu_0} \dfrac{pu - e_3}{pu_0 - e_3} \ , \end{cases}$$

dove pu è la funzione ellittica di Weierstrass i cui invarianti g_2 e g_3 lasciamo per ora indeterminati; e_1, e_2, e_3, sono tre costanti tali che $e_1 > e_2 > e_3$, e legate fra loro ed alle g_2 e g_3 dalle relazioni

$$(3) \quad \begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 \ , \\ e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\dfrac{1}{4} g_2 \ , \\ e_1e_2e_3 = \dfrac{1}{4} g_3 \ . \end{cases}$$

Osserviamo subito che differenziando una qualsiasi delle (2) si ricava

$$(4) \qquad dt = \frac{p'u_0 p'u}{[\,pu - pu_0\,]^2} du \ .$$

Ciò significa che le quattro funzioni t dell' argomento u definite dalle (2) differiscono soltanto per valori costanti additivi.

Ci proponiamo di determinare u_0 e le costanti e_1, e_2, e_3 [e quindi per le (3) g_2 e g_3], in modo che il radicale che comparisce nell' integrale I venga espresso razionalmente per la pu e la sua derivata $p'u$.

Sottraendo la prima delle (2) rispettivamente dalla seconda, terza e quarta, si ottengono le relazioni

$$2t_2 = \frac{-p'u_0}{pu_0 - e_1} ,$$

$$(1 + k)t_2 = \frac{-p'u_0}{pu_0 - e_2} ,$$

$$(1 - k)t_2 = \frac{-p'u_0}{pu_0 - e_3} ,$$

che, risolute rispetto ad e_1, e_2, e_3, danno

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= pu_0 + \frac{p'u_0}{2t_2} , \\ e_2 &= pu_0 + \frac{p'u_0}{(1 + k)t_2} , \\ e_3 &= pu_0 + \frac{p'u_0}{(1 \mp k)t_2} . \end{aligned} \right.$$

Sommando queste membro a membro e tenendo presente la prima delle (3), si ricava pu_0; abbiamo cioè

$$3pu_0 = \frac{-p'u_0}{2t_2} \frac{5 - k^2}{1 - k^2} ,$$

da cui

$$(6) \qquad pu_0 = -\frac{p'u_0}{6t_2} \frac{5 - k^2}{1 - k^2} .$$

Riguardo a $p'u_0$, ricordiamo dalla teoria delle funzioni ellittiche, che

$$\overline{p'u_0}^2 = 4(pu_0 - e_1)(pu_0 - e_2)(pu_0 - e_3) ,$$

dalla quale per le (5) si ricava

$$\overline{p'u_0}^2 = -\frac{2\overline{p'u_0}^3}{(1 - k^2)t_2^3} ,$$

da cui infine

(7) $$p'u_0 = -\frac{1-k^2}{2} t_2^3 .$$

Sostituendo nella (6) a $p'u_0$ la precedente espressione, avremo

(6′) $$pu_0 = \frac{5-k^2}{12} t_2^2 .$$

Possiamo anche ricavare pu_0 in funzione delle costanti e_1, e_2, e_3 ed assegnare contemporaneamente il valore dell'argomento u_0, nel seguente modo.

Dalle (5) si ricava

$$(e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = \frac{\overline{p'u_0}^2}{4t_2^2} ,$$

da cui

$$\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = \pm \frac{p'u_0}{2t_2}$$

Se (come vogliamo) il radicale del primo membro si intende preso positivamente, allora essendo per la (7) $p'u_0$ negativo, avremo

$$\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = -\frac{p'u_0}{2t_2} ,$$

dove il secondo membro, per la prima delle (5), non è altro che $pu_0 - e_1$; sarà dunque

$$pu_0 = e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} ;$$

d' altra parte essendo

$$p\frac{\omega}{2} = e_1 + \sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} ,$$ (*)

(*) Cfr. Halphen " Fonctions elliptiques „ [Paris, 1886, V. I. pag. 54].

potremo dire che

$$u_0 = \pm \frac{\omega}{2} + 2m\omega + 2n\omega' ,$$

dove 2ω e $2\omega'$ rappresentano al solito i periodi, reale ed immaginario, della pu, e m ed n due intieri qualunque.

Se ci limitiamo a considerare il parallelogrammo $0, \omega, \omega+\omega', \omega', 0$ dei periodi, avremo

$$u_0 = \frac{\omega}{2} ,$$

Dalle (5), portando al posto di pu_0 e $p'u_0$ i loro valori (6′) e (7), ricaviamo e_1, e_2, e_3 in funzione di k e t_2:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} e_1 &= \frac{1+k^2}{6} t_2^2 , \\ e_2 &= -\frac{[k-(3+2\sqrt{2})][k-(3-2\sqrt{2})]}{12} t_2^2 , \\ e_3 &= -\frac{k^2+6k+1}{12} t_2^2 . \end{aligned} \right.$$

Portando queste espressioni nelle (3′) si avranno g_2 e g_3 in funzione di k e t_2.

Resta con ciò pienamente determinata la funzione pu di Weierstrass.

Osservazioni. — Dalla espressione di e_2 si ricava manifestamente

$$\begin{aligned} e_2 &> 0 \quad \text{per} \quad k > 3-2\sqrt{2} , \\ e_2 &= 0 \quad \text{,,} \quad k = 3-2\sqrt{2} , \\ e_2 &< 0 \quad \text{,,} \quad k < 3-2\sqrt{2} , \end{aligned}$$

Per la terza delle (3) sarà l'invariante g_3 negativo nel primo caso, nullo nel secondo, positivo nel terzo.

Dall' esame delle (2) si deduce che mentre la variabile t cresce da kt_2 fino a t_2, la pu decresce da e_3 fino $a -\infty$ e quindi la variabile u assume tutti i valori immaginari da ω' fino a 0. Ricordiamo che in detto intervallo $\frac{p'u}{i}$ è negativo .

Facciamo ora constatare che le posizioni (2) ci permettono di esprimere razionalmente il radicale $\sqrt{\frac{(t - kt_2)(t_2 - t)}{(t + kt_2)(t_2 + t)}}$, per mezzo di pu e di $p'u$.

A tal uopo si osservi che il radicando $\frac{(t - kt_2)(t_2 - t)}{(t + kt_2)(t_2 + t)}$, si può esprimere nel seguente modo per mezzo delle (2)

$$\frac{(t - kt_2)(t_2 - t)}{(t + kt_2)(t_2 + t)} = - \frac{(pu_0 - e_1)(pu_0 - e_2)(pu - e_3)}{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu_0 - e_3)} =$$

$$= - \left[\frac{pu - e_3}{pu_0 - e_3}\right]^2 \frac{(pu_0 - e_3)(pu_0 - e_2)(pu_0 - e_3)}{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)},$$

ed essendo

$$\overline{p'u}^2 = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3) ,$$

potremo scrivere

$$\frac{(t - kt_2)(t_2 - t)}{(t + kt_2)(t_2 - t)} = - \left[\frac{pu - e_3}{pu_0 - e_3}\right]^2 \left[\frac{p'u_0}{p'u}\right]^2 ,$$

da cui

$$\sqrt{\frac{(t - kt_2)(t_2 - t)}{(t + kt_2)(t_2 + t)}} = \pm i \frac{pu - e_3}{pu_0 - e_3} \frac{p'u_0}{p'u} .$$

Il primo membro della precedente per sua natura è essenzialmente positivo (valore assoluto di una velocità) ; positivo adunque dovrà essere anche il secondo.

Per l' osservazione fatta sopra, $\frac{p'u}{i}$ è *negativo* nell'intervallo $(0, \omega')$; $pu - e_3$ è pure *negativo* ; dalla (7) scende che $p'u_0$ è *negativo*, e dalla terza delle (5) che $pu_0 - e_3$ è *positivo*. Il secondo membro della precedente dev' essere perciò affetto dal secondo segno.

Pertanto avremo

$$\sqrt{\frac{(t-kt_2)(t_2-t)}{(t+kt_2)(t_2+t)}}=-i\frac{pu-e_3}{pu_0-e_3}\frac{p'u_0}{p'u},$$

e per la (4),

$$\sqrt{\frac{(t-kt_2)(t_2-t)}{(t+kt_2)(t_2+t)}}\,dt=-i\frac{\overline{p'u_0}^2}{pu_0-e_3}\frac{pu-e_3}{[pu-pu_0]^2}\,du\ .$$

Tenendo conto della prima delle (2) abbiamo

$$\frac{t}{1-t^2}=\frac{pu-pu_0}{2}\left\{\frac{1}{(1-t_2)(pu-pu_0)+p'u_0}-\frac{1}{(1+t_2)(pu-pu_0)-p'u_0}\right\};$$

e quindi l' espressione differenziale

$$dJ=\sqrt{\frac{(t-kt_2)(t_2-t)}{(t+kt_2)(t_2+t)}}\frac{tdt}{1-t^2},$$

diviene

$$dJ=-\frac{i}{2}\frac{\overline{p'u_0}^2}{pu_0-e_3}\frac{pu-e_3}{pu-pu_0}\ .$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{(1-t_2)(pu-pu_0)+p'u_0}-\frac{1}{(1+t_2)(pu-pu_0)-p'u_0}\right\}du\ .$$

Osserviamo che, posto

$$(9)\qquad\left\{\begin{aligned}pu_1&=pu_0+\frac{p'u_0}{1+t_2}\\ pu_2&=pu_0-\frac{p'u_0}{1-t_2},\end{aligned}\right.$$

è

$$\frac{1}{[pu-pu_0][(1-t_2)(pu-pu_0)+p'u_0]}=\frac{1}{1-t_2}\frac{1}{\{pu-pu_0\}\{pu-pu_2\}}$$
$$=\frac{1}{p'u_0}\left\{\frac{1}{pu-pu_0}-\frac{1}{pu-pu_2}\right\},$$

$$\frac{1}{[pu-pu_0][(1+t_2)(pu-pu_0)-p'u_0]}=\frac{1}{1+t_2}\frac{1}{\{pu-pu_0\}\{pu-pu_1\}}$$
$$=\frac{1}{p'u_0}\left\{\frac{1}{pu-pu_1}-\frac{1}{pu-pu_0}\right\},$$

e quindi

$$\frac{1}{pu-pu_0}\left\{\frac{1}{(1-t_2)(pu-pu_0)+p'u_0}-\frac{1}{(1+t_2)(pu-pu_0)+p'u_0}\right\}=$$

$$=\frac{1}{-p'u_0}\left\{\frac{1}{pu-pu_1}+\frac{1}{pu-pu_2}-\frac{2}{pu-pu_0}\right\}.$$

Sostituendo in dJ, avremo

$$dJ=\frac{i}{2}\frac{p'u_0}{pu_0-e_3}\left\{pu-e_3\right\}\left\{\frac{1}{pu-pu_1}+\frac{1}{pu-pu_2}-\frac{2}{pu-pu_0}\right\}du\ .$$

Osserviamo che

$$\frac{pu-e_3}{pu-pu_i}=1+\frac{pu_i-e_3}{pu-pu_i}\qquad (i=0,1,2)\ ;$$

avremo quindi in definitiva

$$dJ=\frac{-i}{2}\frac{p'u_0}{pu_0-e_3}\left\{2\frac{pu_0-e_3}{pu-pu_0}-\frac{pu_1-e_3}{pu-pu_1}-\frac{pu_2-e_3}{pu-pu_2}\right\}du\ .$$

Dalla teoria delle funzioni ellittiche si ha

$$\frac{1}{pu-pu_i}=\frac{1}{p'u_i}\left\{\zeta(u-u_i)-\zeta(u+u_i)+2\zeta u_i\right\},\quad (i=0,1,2)$$

dove ζu è tale che

$$\int\zeta u du=\log\sigma u+\text{Costante}\ ,$$

avremo quindi

$$(10)\quad \int\frac{du}{pu-pu_i}=\frac{1}{p'u_i}\left\{2u\zeta u_i+\log\frac{\sigma(u-u_i)}{\sigma(u+u_i)}\right\}+\text{cost}\ .\quad (i=0,1,2)\ ,$$

dove $p'u_1$, $p'u_2$ sono definite dalle relazioni

$$(p'u_i)^2=4(pu_i-e_1)(pu_i-e_2)(pu_i-e_3)\qquad (i=1,\ 2)\ ,$$

dalle quali, per le (9) e (5), si ricavano le

$$p'u_1 = \pm\, p'u_0 \sqrt{\frac{(1-t_2)(1-k^2t_2^2)}{(1+t_2)^3}}\,,$$

$$p'u_2 = \pm\, p'u_0 \sqrt{\frac{(1+t_2)(1-k^2t_2^2)}{(1-t_2)^3}}\,.$$

Per accertare quale segno compete a $p'u_1$ e a $p'u_2$ confrontiamo le (9) colla prima delle (5). Da tale confronto emerge che

$$pu_1 \geqq e_1 \qquad \text{e} \qquad pu_2 > e_1\,,$$

le quali, tenendo presente che $p\omega = e_1$, ci dicono che (limitandoci sempre al parallelogramma $0,\ \omega,\ \omega+\omega',\ \omega',\ 0$ dei periodi) gli argomenti u_1 o u_2 sono reali e compresi tra 0 e ω. Ciò ci permette di asserire che $p'u_1$ e $p'u_2$ devono essere entrambi negativi, perciò rammentando che $p'u_0$ è pure negativo dovremo scrivere

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} p'u_1 &= p'u_0 \sqrt{\frac{(1-t_2)(1-k^2t_2^2)}{(1+t_2)^3}}\,, \\ p'u_2 &= p'u_0 \sqrt{\frac{(1+t_2)(1-k^2t_2^2)}{(1-t_2)^3}}\,. \end{aligned}\right.$$

Integrando l' espressione del dJ si avrà per le (10)

$$J = \frac{-i}{2}\,\frac{p'u_0}{pu_0-e_3}\left\{\frac{2(pu_0-e_3)}{p'u_0}\left[2u\zeta u_0 + \log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right] -\right.$$

$$\left. -\frac{pu_1-e_3}{p'u_1}\left[2u\zeta u_1 + \log\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)}\right] - \frac{pu_2-e_3}{p'u_2}\left[2u\zeta u_2 + \log\frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)}\right]\right\} + \text{cost}\,.$$

Per le (9), le (5) e le (11) abbiamo

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{pu_1-e_3}{p'u_1} &= \frac{pu_0-e_3}{p'u_0}\sqrt{\frac{(1+kt_2)(1+t_2)}{(1-kt_2)(1-t_2)}}\,, \\ \frac{pu_2-e_3}{p'u_2} &= \frac{pu_0-e_3}{p'u_0}\sqrt{\frac{(1-kt_2)(1-t_2)}{(1+kt_2)(1+t_2)}}\,, \end{aligned}\right.$$

e se si tiene presente la relazione

$$(13)\qquad \Omega_1' = \pi\sqrt{\frac{(1+kt_2)(1+t_2)}{(1-kt_2)(1-t_2)}}\ ;\ (*)$$

avremo sostituendo in J

$$J = \frac{-i}{2}\left\{2\left[2u\zeta u_0 + \log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right] - \frac{\Omega_1}{\pi}\left[2u\zeta u_1 + \log\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{\Omega_1}\left[2u\zeta u_2 + \log\frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)}\right]\right\} + \text{cost}\,\cdot$$

$$= -i\left[2\zeta u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}\zeta u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}\zeta u_2\right]u -$$

$$-\, i\log\left[\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\cdot\left(\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)}\right)^{-\frac{\Omega_1}{2\pi}}\cdot\left(\frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)}\right)^{-\frac{\Omega_1}{2\pi}}\right] + \text{cost}\ .$$

Osserviamo in fine che l'integrale definito I si ottiene dall' indefinito J, limitando tra ω' e 0, cioè

$$I = \Big| J \Big|_{\omega'}^{0}\ ;$$

$$I = \pi\left(1 - \frac{\Omega_1}{2\pi} - \frac{\pi}{2\Omega_1}\right) + i\omega'\left(2\zeta u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}\zeta u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}\zeta u_2\right) +$$

$$+\, i\log\left[\frac{\sigma(\omega'-u_0)}{\sigma(\omega'+u_0)}\cdot\left\{\frac{\sigma(\omega'-u_1)}{\sigma(\omega'+u_1)}\right\}^{-\frac{\Omega_1}{2\pi}}\cdot\left\{\frac{\sigma(\omega'-u_2)}{\sigma(\omega'+u_2)}\right\}^{-\frac{\pi}{2\Omega_1}}\right\}.$$

Essendo

$$\frac{\sigma(\omega'-u_i)}{\sigma(\omega'+u_i)} = e^{-2\eta' u_i}\ (**)\qquad (i=0,\ 1,\ 2)\ ,$$

dove

$$\eta' = \zeta\omega'\ ,$$

(*) Cfr. la Memoria " Vene fluenti „ [§ 13 es. II.].

(**) Halphen, loco cit. pag. 172.

avremo infine

$$I = \pi\left(1 - \frac{\Omega_1}{2\pi} - \frac{\pi}{2\Omega_1}\right) + i\omega'\left(2\zeta u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}\zeta u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}\zeta u_2\right) -$$

$$- i\eta'\left(2u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}u_2\right).$$

Per questo l' apertura Ω dell' orifizio assume l'espressione

$$\Omega = \Omega_1 - 2i\left[\left(2\zeta u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}\zeta u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}\zeta u_2\right)\omega' - \left(2u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}u_2\right)\eta'\right] \tag{14}$$

cercata.

2. Espressione di h mediante ω ed η.

Prendiamo ora a considerare l' integrale

$$h = \int_0^{\sigma_1}\sqrt{\frac{(\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\sigma)(\operatorname{sen}\sigma_2 + \operatorname{sen}\sigma)}{(\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\sigma)(\operatorname{sen}\sigma_2 - \operatorname{sen}\sigma)}}\operatorname{tg}\sigma d\sigma$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\sigma_1}^{\sigma_1}\sqrt{\frac{(\operatorname{sen}\sigma_1 + \operatorname{sen}\sigma)(\operatorname{sen}\sigma_2 + \operatorname{sen}\sigma)}{(\operatorname{sen}\sigma_1 - \operatorname{sen}\sigma)(\operatorname{sen}\sigma_2 + \operatorname{sen}\sigma)}}\operatorname{tg}\sigma d\sigma$$

Per le posizioni (1) esso diviene

$$h = \frac{1}{2}\int_{-kt_2}^{kt_2}\sqrt{\frac{(kt_2+t)(t_2+t)}{(kt_2-t)(t_2-t)}}\,\frac{tdt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\int_{-kt_2}^{kt_2}\frac{(kt_2+t)(t_2+t)tdt}{(1-t^2)\sqrt{(k^2t_2^2-t^2)(t_2^2-t^2)}},$$

da cui apparisce che h è un integrale ellittico.

Notiamo che il radicale che comparisce nella seconda espressione di h diviene nullo per gli stessi valori che rendano nullo il radicale che si ha nella seconda espressione di I. Applichiamo perciò anche quì le posizioni (2) dove la pu ha gli invarianti g_2 e g_3 definiti dalle (3), essendo le e_1, e_2, e_3 date dalle (8); e dove pu_0 e $p'u_0$ hanno rispettivamente i valori (6′) e (7).

Dalle (2) si deduce che, quando la variabile t cresce da $-kt_2$

a kt_2 la pu decresce da e_2 fino ad e_3, e quindi la variabile u percorre il lato $\omega + \omega'$, ω' del parallelogrammo dei periodi da $\omega + \omega'$ fino a ω'.

Esprimiamo ora il radicale $\sqrt{\dfrac{(kt_2+t)(t_2+t)}{(kt_2-t)(t_2-t)}}$ in funzione razionale di pu e di $p'u$ per mezzo delle (2).

Con un procedimento analogo a quello tenuto al numero precedente si perviene alla relazione

$$\frac{(kt_2+t)(t_2+t)}{(kt_2-t)(t_2-t)} = \left[\frac{pu_0 - e_3}{pu - e_3}\right]^2 \left[\frac{p'u}{p'u_0}\right]^2,$$

da cui

$$\sqrt{\frac{(kt_2+t)(t_2+t)}{(kt_2-t)(t_2-t)}} = \pm \frac{pu_0 - e_3}{pu - e_3} \frac{p'u}{p'u_0}.$$

Il primo membro di questa è essenzialmente positivo (valore assoluto del reciproco di una velocità); lo stesso dovrà dirsi del secondo membro.

Nell' intervallo $\omega + \omega'$, ω' è $p'u$ *positivo* e $pu - e_3$ è pure *positivo*; mentre, come abbiamo già visto $p'u_0$ è *negativo* e $pu_0 - e_3$ è *positivo*. Pertanto dovremo avere

$$\sqrt{\frac{(kt_2+t)(t_2+t)}{(kt_2-t)(t_2-t)}} = - \frac{pu_0 - e_3}{pu - e_3} \frac{p'u}{p'u_0}.$$

Per la (4) si può scrivere

$$\sqrt{\frac{(kt_2+t)(t_2+t)}{(kt_2-t)(t_2-t)}}\, dt = - \frac{[pu_0 - e_3]\,.\,[p'u]^2}{[pu - e_3]\,.\,[pu - pu_0]^2}\, du$$

$$= -4\,[pu_0 - e_3]\, \frac{[pu - e_1][pu - e_2]}{[pu - pu_0]^2}\, du.$$

Essendo, per la prima delle (2)

$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{pu - pu_0}{2} \left\{ \frac{1}{(1-t_2)(pu - pu_0) + p'u_0} - \frac{1}{(1+t_2)(pu - pu_0) - p'u_0} \right\},$$

avremo

$$dI = \sqrt{\frac{(kt_2 + t)(t_2 + t)}{(kt_2 - t)(t_2 - t)}} \frac{tdt}{1 - t^2} =$$

$$= -2[pu_0 - e_3] \frac{[pu-e_1][pu-e_2]}{pu-pu_0} \left\{ \frac{1}{(1-t_2)(pu-pu_0)+p'u_0} - \frac{1}{(1+t_2)(pu-pu_0)-p'u_0} \right\} du .$$

Ora fatte le posizioni (9), come nel numero precedente si ricava

$$\frac{1}{pu - pu_0} \left\{ \frac{1}{(1 - t_2)(pu - pu_0) + p'u_0} - \frac{1}{(1+t_2)(pu - pu_0) - p'u_0} \right\} =$$

$$= \frac{1}{-p'u_0} \left\{ \frac{1}{pu - pu_1} + \frac{1}{pu - pu_2} - \frac{2}{pu - pu_0} \right\} .$$

Sostituendo in dI, avremo

$$dI = \frac{2(pu_0 - e_3)}{p'u_0} \{pu - e_1\}\{pu - e_2\} \left\{ \frac{1}{pu - pu_1} + \frac{1}{pu - pu_2} - \frac{2}{pu - pu_0} \right\} du .$$

Facilmente si riconosce l' identità

$$\frac{(pu - e_1)(pu - e_2)}{pu - pu_i} = pu + pu_i - (e_1 + e_2) + \frac{(pu_i - e_1)(pu_i - e_2)}{pu - pu_i} . \quad (i = 0, 1, 2)$$

Portando queste espressioni in dI avremo in definitiva

$$dI = \frac{2(pu_0 - e_3)}{p'u_0} \left\{ pu_1 + pu_2 - 2pu_0 + \frac{(pu_1 - e_1)(pu_1 - e_2)}{pu - pu_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(pu_2 - e_1)(pu_2 - e_2)}{pu - pu_2} - 2 \frac{(pu_0 - e_1)(pu_0 - e_2)}{pu - pu_0} \right\} du .$$

Integrando e tenendo presente le (10) avremo

$$I = \frac{2(pu_0 - e_3)}{p'u_0} \left\{ (pu_1 + pu_2 - 2pu_0) u + \frac{(pu_1 - e_1)(pu_1 - e_2)}{p'u_1} \left[2u\zeta u_1 + \log \frac{\sigma(u - u_1)}{\sigma(u + u_1)} \right] + \right.$$

$$+ \frac{(pu_2 - e_1)(pu_2 - e_2)}{p'u_2} \left[2u\zeta u_2 + \log \frac{\sigma(u - u_2)}{\sigma(u + u_2)} \right] -$$

$$\left. - 2 \frac{(pu_0 - e_1)(pu_0 - e_2)}{p'u_0} \left[2u\zeta u_2 + \log \frac{\sigma(u - u_0)}{\sigma(u + u_0)} \right] \right\} + \text{costante}$$

dove $p'u_1$ e $p'u_2$ hanno le espressioni (11).

Dalla (9) si ricava

$$pu_1 + pu_2 - 2pu_0 = -p'u_0 \frac{2t_2}{1-t_2^2} ;$$

e se si osserva che

$$\frac{(pu_i - e_1)(pu_i - e_2)}{p'u_i} = \frac{p'u_i}{4(pu_i - e_3)} \qquad (i = 0, 1, 2),$$

per le (12), tenendo presente la (13), avremo

$$\frac{(pu_1 - e_1)(pu_1 - e_2)}{p'u_1} = \frac{p'u_0}{4(pu_0 - e_3)} \frac{\pi}{\Omega_1},$$

$$\frac{(pu_2 - e_1)(pu_2 - e_2)}{p'u_2} = \frac{p'u_0}{4(pu_0 - e_3)} \frac{\Omega_1}{\pi}.$$

Sostituendo queste espressioni in I, avremo

$$I = \frac{-4t_2(pu_0 - e_3)}{1-t_2^2} u + \frac{\pi}{2\Omega_1}\left[2u\zeta u_1 + \log\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)}\right] + \frac{\Omega_1}{2\pi}\left[2u\zeta u_2 + \log\frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)}\right] -$$

$$- \left[2u\zeta u_0 + \log\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right] + \text{costante},$$

ovvero, essendo

$$pu_0 - e_3 = -\frac{p'u_0}{(1-k)t_2} = \frac{1+k}{2} t_2^2 ,$$

$$I = -\left\{ (1+k)\frac{2t_2^3}{1-t_2^2} + 2\zeta u_0 - \frac{\pi}{\Omega_1}\zeta u_1 - \frac{\Omega_1}{\pi}\zeta u_2 \right\} u +$$

$$+ \log\left\{ \left[\frac{\sigma(u-u_0)}{\sigma(u+u_0)}\right]^{-1} \cdot \left[\frac{\sigma(u-u_1)}{\sigma(u+u_1)}\right]^{\frac{\pi}{2\Omega_1}} \left[\frac{\sigma(u-u_2)}{\sigma(u+u_2)}\right]^{\frac{\Omega_1}{2\pi}} \right\} + \text{costante}.$$

Osserviamo che l' altezza h dell' imboccatura, si ottiene limitando I fra $\omega + \omega'$ e ω' e dividendo per 2, cioè

$$h = \frac{1}{2} \Big| \, I \, \Big|_{\omega+\omega'}^{\omega'} .$$

Se si nota che

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma(\omega' - u_i)}{\sigma(\omega' + u_i)} &= e^{-2\eta' u_i}, \\ \frac{\sigma(\omega + \omega' - u_i)}{\sigma(\omega + \omega' + u_i)} &= e^{-2(\eta + \eta') u_i} \;(^*) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 0, 1, 2)$$

si avrà

$$\left| \log \frac{\sigma(u - u_i)}{\sigma(u + u_i)} \right|_{\omega + \omega'}^{\omega'} = 2\eta u_i \qquad (i = 0, 1, 2);$$

sarà pertanto

$$(15) \quad h = \left\{ (1 + k) \frac{2t_2^3}{1 - t_2^2} + 2\zeta u_0 - \frac{\pi}{\Omega_1} \zeta u_1 - \frac{\Omega_1}{\pi} \zeta u_2 \right\} \omega - \\ - \left\{ 2u_0 - \frac{\pi}{\Omega_1} u_1 - \frac{\Omega_1}{\pi} u_2 \right\} \eta .$$

Tale è l' espressione cercata dell'altezza h dell'imboccatura.

3. Sviluppi in serie delle costanti che compariscono nelle espressioni di Ω e di h, quando $k \leqq 3 - 2\sqrt{2}$, $(g_3 \geqq 0)$.

Introduzione e calcolo di una costante q. — Introduciamo una quantità q, definita dalla posizione

$$(16) \qquad q = e^{-\pi \frac{\omega'}{i\omega}};$$

ed occupiamoci del suo sviluppo.

Posto

$$l = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - k^2}}{k},$$

lo sviluppo di q secondo le potenze crescenti di $\frac{l}{2}$, limitato ai

(*) Halphen, loco citato pag. 188.

primi quattro termini è (*)

$$(16') \qquad q=\frac{l}{2}+2\left(\frac{l}{2}\right)^5+15\left(\frac{l}{2}\right)^9+150\left(\frac{l}{2}\right)^{13}+\cdots \;.$$

Notiamo ora che la prima delle (3)

$$e_1+e_2+e_3=0 \;,$$

può essere messa sotto la forma seguente

$$e_1-e_3=2e_1+e_2 \;;$$

dalla quale, ricordando che per $k \leqq 3-2\sqrt{2}$ è $e_2 \leqq 0$, si deduce la diseguaglianza

$$\frac{e_1-e_3}{e_1-e_2}<2 \;.$$

che portata nella espressione di l, dà l'altra diseguaglianza

$$\frac{l}{2}<\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[4]{2}-1}{\sqrt[4]{2}+1}=0,\ 0432\ldots$$

Se si nota inoltre che

$$q \leqq e^{-\pi}=0,\ 04321\ \ldots\;,$$

e che la serie (16') è rapidamente convergente, potremo assumere per valore di q, con grandissima approssimazione, il primo termine della (16') stessa.

Avremo pertanto

$$(16'') \qquad q=\frac{1-\sqrt{1-k^2}}{2k} \;.$$

Sviluppo di ω *e di* η *in termini di* q. — Avendo calcolato q, si valuta ω, mediante la serie

$$(17) \qquad \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}}=\frac{1+2q^4+2q^{16}+\ldots}{\sqrt[4]{e_1-e_3}+\sqrt[4]{e_1-e_2}}=\frac{\sqrt{2}(1+2q^4+2q^{16}+\ldots)}{\sqrt{(1+k)t_2}+\sqrt{(1-k)t_2}}\;.\;(^{**})$$

(*) Halphen, loco citato, pag. 271.

(**) Ibidem, pag. 271.

Noti q ed ω, si ricava η dalla formola (*)

$$(18) \qquad \eta\omega = \frac{\pi^2}{12} \frac{1 - 3^3q^2 + 5^3q^6 - 7^3q^{12} + \dots}{1 - 3\,q^2 + 5\,q^6 - 7\,q^{12} + \dots} .$$

Calcolo di ω' *e* η'. — Dalla (16) si ricava

$$(19) \qquad \omega' = \frac{i\omega}{\pi} \log\left(\frac{1}{q}\right) ,$$

mediante la quale si valuta ω', essendo già noti q e ω.

In quanto a η', essa è determinata dalla nota relazione

$$(20) \qquad \eta\omega' - \eta'\omega = i\,\frac{\pi}{2} \;(^{**}) .$$

Calcolo degli argomenti u_1 *e* u_2. — Determiniamo ora gli argomenti u_1 e u_2 tali che per pu_1 e pu_2 si abbiano le espressioni (9) e per $p'u_1$ e $p'u_2$ le espressioni (11).

A tal uopo, posto

$$u = 2\omega\nu ,$$

partiamo dalla relazione

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sigma_2 u - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\,\sigma_3 u}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\,\sigma_2 u + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\,\sigma_3 u} = \frac{q \cos 2\nu\pi + q^9 \cos 6\nu\pi + \dots}{1 + 2q^4 \cos 4\nu\pi + 2q^{16} \cos 8\nu\pi + \dots} \;(^{***}),$$

la quale, sostituendo a $\sigma_2 u$ e $\sigma_3 u$ le loro espressioni date dalle

$$\frac{\sigma_2 u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_2} , \qquad \frac{\sigma_3 u}{\sigma u} = \sqrt{pu - e_3} ,$$

diviene

$$\frac{1}{2} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{pu - e_2} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{pu - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3}\sqrt{pu - e_2} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}\sqrt{pu - e_3}} =$$

$$= \frac{q \cos 2\nu\pi + q^9 \cos 6\nu\pi + \dots}{1 + 2q^4 \cos 4\nu\pi + 2q^{16} \cos 8\nu\pi + \dots} .$$

(*) Halphen, loco citato, pag. 265.

(**) Ibidem, pag. 150.

(***) Ibidem, pag. 272.

Data la piccolezza di q si avrà co $2\nu\pi$ con un errore minore di $\frac{1}{100\,000}$, trascurando nel secondo membro tutte le potenze di q superiori alla terza, quindi chiamando s il primo membro della precedente, avremo

$$\cos 2\nu\pi = \frac{s}{q} ,$$

da cui

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,cos} \frac{s}{q} ;$$

quindi

$$u = \pm \frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \frac{s}{q} + 2m\omega + 2n\omega' , \tag{21}$$

designando, al solito, m ed n due interi qualunque.

Ora, tenendo conto delle (5) e chiamando s_1 e s_2 i valori di s corrispondenti ai valori pu_1 e pu_2 di pu, si ha

$$\left\{ \begin{aligned} s_1 &= -\frac{1 - \sqrt{1 - k^2 t_2^2}}{2kt_2} , \\ s_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 t_2^2}}{2kt_2} ; \end{aligned} \right. \tag{22}$$

e quindi per la (16″)

$$\frac{s_1}{q} = \frac{1}{t_2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 t_2^2}}{1 - \sqrt{1 - k^2}} ,$$

$$\frac{s_1}{q} = \frac{1}{t_2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - k^2 t_2^2}}{1 - \sqrt{1 - k^2}} .$$

Sostituendo nella (21) ed osservando che per la solita convenzione circa il parallelogrammo dei periodi è $m = n = 0$, avremo i valori di u_1 e u_2 a meno del segno:

$$u_1 = \pm \frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \left[-\frac{1}{t_2} \cdot \frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{1-\sqrt{1-k^2}} \right] = \pm \omega \left\{ 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} \right\} \text{ (*)}$$

$$u_2 = \pm \frac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} .$$

Per stabilire il segno di u_1 e u_2, osserviamo intanto che

$$\left| \frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} \right| \leq 1 ,$$

e quindi u_1 e u_2 sono reali entrambi ed in valore assoluto minori di ω.

Se si osserva che $p'u_1$ e $p'u_2$, come risulta dalle (11), sono negativi possiamo concludere che u_1 e u_2 devono essere positivi, cioè

$$(23) \quad \begin{cases} u_1 = \omega \left\{ 1 - \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} \right\} = \omega - u_2 , \\[2ex] u_2 = \dfrac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} . \end{cases}$$

Sviluppi in serie di ζu_0, ζu_1, ζu_2. — Prendiamo a considerare lo sviluppo della funzione ζu in serie rapidamente convergente

$$\zeta u = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega} + \frac{2\pi}{\omega} \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \operatorname{sen} \frac{n u \pi}{\omega} \text{ (**)} .$$

Facendo in questa successivamente $u = u_0 = \dfrac{\omega}{2}$, $u = u_1 = \omega - u_2$,

---

(*) Essendo, in generale,

$$\operatorname{arc\,cos}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arc\,cos} \alpha .$$

(**) Halphen, loco citato, pag. 425.

$u = u_2$, e ponendo

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned} S_0 &= \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^6}{1-q^6} + \frac{1-q^{10}}{q^{10}} - \ldots\ldots, \\ S_1 &= \sum_1^\infty {}_n(-1)^n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \operatorname{sen} \frac{nu_2\pi}{\omega}, \\ S_2 &= \sum_1^\infty {}_n \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \operatorname{sen} \frac{nu_2\pi}{\omega}, \end{aligned}\right.$$

si ha

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta u_0 &= \frac{\eta}{2} + \frac{\pi}{2\omega} + \frac{2\pi}{\omega} S_0, \\ \zeta u_1 &= \eta - \frac{\eta u_2}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \operatorname{tg} \frac{\pi u_2}{2\omega} - \frac{2\pi}{\omega} S_1, \\ \zeta u_2 &= \frac{\eta u_2}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{2\pi}{\omega} S_2, \end{aligned}\right.$$

dove u_2 è dato dalla seconda delle (23) e S_0, S_1, S_2 come risulta dalle (24) dipendono solamente dai parametri k e t_2 per mezzo di q e di u_2.

4. Espressioni di Ω e di h mediante i parametri k e t_2, quando $k \leqq 3 - 2\sqrt{2}$. - Caso particolare $k = 0$. —

Dalle (25) si deduce

$$2\zeta u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}\zeta u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}\zeta u_2 = \eta\left[1 - \frac{\Omega_1}{\pi}\right] + \frac{\eta}{\pi}\left[\frac{\Omega_1}{\pi} - \frac{\pi}{\Omega_1}\right] \arccos \frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} +$$
$$-\frac{\pi}{\omega}\left[1+4S_0\right] - \frac{\pi}{2\omega}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right] + \frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}S_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}S_2\right];$$

mentre per le (23) è

$$2u_0 - \frac{\Omega_1}{\pi}u_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}u_2 = \omega\left[1 - \frac{\Omega_1}{\pi}\right] + \frac{\omega}{\pi}\left[\frac{\Omega_1}{\pi} - \frac{\pi}{\Omega_1}\right] \arccos \frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2}.$$

Portando queste espressioni nella (14) avremo

$$\Omega=\Omega_1-2i\left[\eta\omega'-\eta'\omega\right]\left[1-\frac{\Omega_1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\Omega_1}{\pi}-\frac{\pi}{\Omega_1}\right)\text{arc cos}\frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2}\right]-$$

$$-2i\frac{\omega'}{\omega}\pi\left\{1+4S_0-\frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}\text{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega}+\frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right]+2\left[\frac{\Omega_1}{\pi}S_1-\frac{\pi}{\Omega_1}S_2\right]\right\}.$$

e se si osserva che per la (20) e la (16) si ha rispettivamente

$$\eta\omega'-\eta'\omega=\frac{i\pi}{2},$$

$$-i\frac{\omega'}{\omega}\pi=\log\left(\frac{1}{q}\right)=-\log q,$$

potremo scrivere in definitiva

$$(14')\qquad \Omega=\pi+\left(\frac{\Omega_1}{\pi}-\frac{\pi}{\Omega_1}\right)\text{arc cos}\frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2}-$$

$$-2\left\{1+4S_0-\frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}\text{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega}+\frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right]+2\left[\frac{\Omega_1}{\pi}S_1-\frac{\pi}{\Omega_1}S_2\right]\right\}\log q.$$

Mediante il cambio di $\frac{\Omega_1}{\pi}$ nel suo reciproco $\frac{\pi}{\Omega_1}$, dalle due relazioni scritte in principio del presente numero, si ricavano le due seguenti

$$2\zeta u_0-\frac{\pi}{\Omega_1}\zeta u_1-\frac{\Omega_1}{\pi}\zeta u_2=\eta\left[1-\frac{\pi}{\Omega_1}\right]+\frac{\eta}{\pi}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}-\frac{\Omega_1}{\pi}\right]\text{arc cos}\frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2}+$$

$$+\frac{\pi}{\omega}\left[1+4S_0\right]-\frac{\pi}{2\omega}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}\text{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega}+\frac{\Omega_1}{\pi}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right]+\frac{2\pi}{\omega}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}S_1-\frac{\Omega_1}{\pi}S_2\right],$$

$$2u_0-\frac{\pi}{\Omega_1}u_1-\frac{\Omega_1}{\pi}u_2=\omega\left[1-\frac{\pi}{\Omega_1}\right]+\frac{\omega}{\pi}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}-\frac{\Omega_1}{\pi}\right]\text{arc cos}\frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2}.$$

Mediante queste dalla (15) si ricava per h l'espressione

$$(15')\quad h=\frac{2(1+k)t_2^3}{1-t_2^2}\omega+\pi(1+4S_0)-\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}\text{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega}+\frac{\Omega_1}{\pi}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right]+$$

$$+2\pi\left[\frac{\pi}{\Omega_1}S_1-\frac{\Omega_1}{\pi}S_2\right].$$

Una prima espressione approssimata di Ω e di h si ha trascurando negli sviluppi (24) tutte le potenze di q superiori alla prima. È allora $S_0 = S_1 = S_2 = 0$; mentre per la (17) è $\omega = \dfrac{2\pi}{(1+\sqrt{1-k^2})t_2}$.

Le (14′) e (15′) danno rispettivamente

$$(14'') \quad \Omega = \pi + \left(\frac{\Omega_1}{\pi} - \frac{\pi}{\Omega_1}\right) \operatorname{arc\,cos} \frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} - 2\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right]\right\}\log q \ ,$$

$$(15'') \quad h = \frac{4\pi(1+k)t_2^2}{(1+\sqrt{1-k^2})(1-t_2^2)} + \pi - \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\Omega_1}{\pi}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right];$$

dove per la seconda delle (23) è

$$\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} = \frac{1}{\cot\dfrac{\pi u_2}{2\omega}} = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-k^2})t_2 - 1 + \sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2 + 1 - \sqrt{1-k^2t_2^2}}}\,.$$

In particolare per $k=0$, essendo allora per la (13) e la terza delle (1)

$$\Omega_1 = \pi\sqrt{\frac{1+t_2}{1-t_2}} = \pi\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\sigma_2}{1-\operatorname{sen}\sigma_2}}\ ,$$

e per la (16″)

$$\lim_{k=0} q = 0\ ,$$

ed essendo inoltre

$$\lim_{k=0} \operatorname{arc\,cos}\frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{(1-\sqrt{1-k^2})t_2} = \operatorname{arc\,cos} t_2 = \frac{\pi}{2} - \sigma_2 = 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\sigma_2}{1+\operatorname{sen}\sigma_2}}$$

$$= 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\pi}{\Omega_1}\ ;$$

$$\lim_{k=0}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma_2}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\sigma_2}{1+\operatorname{sen}\sigma_2}} = \frac{\pi}{\Omega_1}\ ;$$

$$\lim_{k=0}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right]\right\}\log q = 0\ ,$$

ed avendosi dalla (17)

$$\omega = \frac{\pi}{t_2} ,$$

dalla (15″) si ricava per h l'espressione

$$\begin{aligned} h &= \frac{2t_2^2}{1-t_2^2}\pi + \pi - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi^2}{\Omega_1^2} + \frac{\Omega_1^2}{\pi^2}\right) \\ &= \frac{2t_2^2}{1-t_2^2}\pi - 2\pi\frac{t_2^2}{1-t_2^2} \\ &= 0 , \end{aligned}$$

e dalla (14″)

$$\Omega = \pi + 2\left(\frac{\Omega_1}{\pi} - \frac{\pi}{\Omega_1}\right) \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{\Omega_1} .$$

Si ritrova così, come caso particolare, la relazione già determinata per via diretta, mediante il calcolo di un integrale razionale, nell'ipotesi di assenza di imboccatura interna sul fondo del recipiente (*).

5. Sviluppi in serie delle costanti che compariscono nelle espressioni di Ω e di h, quando $k \geqq 3 - 2\sqrt{2}$, ($g_3 \leqq 0$). —

Introduzione e calcolo di una costante q_1. — Introduciamo una quantità q_1, definita dalla posizione

$$q_1 = e^{-\pi\frac{i\omega}{\omega'}} . \tag{26}$$

Ci proponiamo di esprimere q_1 in termini del parametro k.

Dal confronto della (16) colla precedente si deduce che q_1 si ottiene da q collo scambio di ω in $\frac{\omega'}{i}$, il quale implica lo scambio di e_1, e_2, e_3 in $-e_3$, $-e_2$, $-e_1$.

(*) Cfr. la Memoria “Vene fluenti„ [§ 13, es. 1.].

Ciò posto, si chiami l_1, quello che diviene l del num. 3, quando nella sua espressione si opera l' accennato scambio, avremo

$$l_1 = \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}} = \frac{\sqrt{1+k} - \sqrt{2}\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}\sqrt[4]{k}} .$$

Lo sviluppo di q_1 secondo le potenze crescenti di $\frac{l_1}{2}$, si ottiene dalla (16′) cambiando q e l rispettivamente in q_1 e l_1.

Tenendo conto che per $k \geqq 3 - 2\sqrt{2}$ è $e_2 \geqq 0$, si deduce in modo analogo a quello tenuto al num. 3, la diseguaglianza

$$\frac{e_1 - e_3}{e_2 - e_3} < 2 ,$$

e quindi

$$\frac{l_1}{2} < \frac{1}{2} \frac{\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} + 1} = 0,\ 0432 \ldots .$$

Anche quì se si nota che

$$q_1 \leqq e^{-\pi} = 0,\ 04321 \ldots$$

e che la serie (16′) è rapidamente convergente, potremo ritenere con moltissima approssimazione

$$q_1 = \frac{1}{2} l_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+k} - \sqrt{2}\sqrt[4]{k}}{\sqrt{1+k} + \sqrt{2}\sqrt[4]{k}} . \tag{27}$$

Sviluppo di ω' e di η' in termini di q_1. — Noto q_1, si valuta ω' mediante la serie

$$\sqrt{\frac{\omega'}{2i\pi}} = \frac{1 + 2q_1^4 + 2q_1^{16} + \ldots.}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_3}} = \frac{1 + 2q_1^4 + 2q_1^{16} + \ldots.}{\sqrt{t_2}\left\{\sqrt[4]{\frac{1+k}{2}} + \sqrt[4]{k}\right\}} , \tag{28}$$

che si ottiene dalla (17) cambiando q in q_1, ω in $\frac{\omega'}{i}$; e e_1, e_2, e_3 in $-e_3, -e_2, -e_1$.

Cambiando nella (18) q in q_1; η ed ω in η' e ω' rispettivamente, abbiamo la relazione

$$\eta'\omega' = \frac{\pi^2}{12} \frac{1 - 3^3 q_1^2 + 5^3 q_1^6 - 7^3 q_1^{12} + \dots}{1 - 3 q_1^2 + 5 q_1^6 - 7 q_1^{12} + \dots}, \tag{29}$$

mediante la quale si valuta η', noti che sieno q_1 e ω'.

Calcolo di ω *e di* η. — Dalla (26) si deduce

$$\omega = \frac{\omega'}{i\pi} \log\left(\frac{1}{q_1}\right), \tag{30}$$

la quale ci dà ω.

Per ottenere η basta ricorrere alla (20)

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{i\pi}{2}.$$

Calcolo di u_1 *e di* u_2. — Si tratta di esprimere gli argomenti u_1 e u_2 in funzione di k e t_2, per mezzo di q_1. Si potrebbe a tal uopo procedere in modo analogo a quello fatto al num. 3, preferiamo però risparmiare il calcolo diretto ed usufruire dei risultati ottenuti al num. 3 stesso.

Basta a tal uopo stabilire la relazione tra q_1 e q ed esprimere quest' ultimo in funzione del primo.

Dalle (16) e (26), eliminando il rapporto $\frac{\omega'}{i\omega}$, si ha

$$\log q \,.\, \log q_1 = \pi^2,$$

da cui

$$q = e^{\frac{\pi^2}{\log q_1}}. \tag{31}$$

Portando nella (21) questa espressione, avremo

$$u = \pm \frac{\omega}{\pi} \arccos\left[s \,.\, e^{-\frac{\pi^2}{\log q_1}}\right] + 2m\omega + 2n\omega'.$$

Da questa, portando per s_1 e s_2 le espressioni (22) e tenendo presente, che $m = n = 0$, e le osservazioni fatte al num. 3 riguardo al segno, avremo

$$(23')\quad \begin{cases} u_1 = \omega \left\{ 1 - \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \left[\dfrac{1 - \sqrt{1 - k^2 t_2^2}}{2kt_2} e^{-\frac{\pi^2}{\log q_1}} \right] \right\} = \omega - u_2 \,, \\ u_2 = \dfrac{\omega}{\pi} \operatorname{arc\,cos} \left[\dfrac{1 - \sqrt{1 - k^2 t_2^2}}{2kt_2} e^{-\frac{\pi^2}{\log q_1}} \right] . \end{cases}$$

Queste ci danno u_1 e u_2 in funzione di q_1.

Sviluppi di ζu_0, ζu_1, ζu_2. — Indichiamo con S'_0, S'_1, S'_2 ciò che divengono S_0, S_1, S_2, quando al posto di q poniamo la sua espressione (31). Avremo

$$(24')\quad \begin{cases} S'_0 = \dfrac{e^{\frac{2\pi^2}{\log q_1}}}{1 - e^{\frac{2\pi^2}{\log q_1}}} - \dfrac{e^{\frac{6\pi^2}{\log q_1}}}{1 - e^{\frac{6\pi^2}{\log q_1}}} + \ldots\ldots , \\ S'_1 = \sum_1^{\infty}{}_n (-1)^n \dfrac{e^{\frac{2n\pi^2}{\log q_1}}}{1 - e^{\frac{2n\pi^2}{\log q_1}}} \operatorname{sen} \dfrac{nu_2\pi}{\omega} \,, \\ S'_2 = \sum_1^{\infty}{}_n \dfrac{e^{\frac{2n\pi^2}{\log q_1}}}{1 - e^{\frac{2n\pi^2}{\log q_1}}} \operatorname{sen} \dfrac{nu_2\pi}{\omega} \,. \end{cases}$$

Come risulta dalle (25), avremo

$$(25')\quad \begin{cases} \zeta u_0 = \dfrac{\eta}{2} + \dfrac{\pi}{2\omega} + \dfrac{2\pi}{\omega} S'_0 \,, \\ \zeta u_1 = \eta - \dfrac{\eta u_2}{\omega} + \dfrac{\pi}{2\omega} \operatorname{tg} \dfrac{\pi u_2}{2\omega} - \dfrac{2\pi}{\omega} S'_1 \,, \\ \zeta u_2 = \dfrac{\eta u_2}{\omega} + \dfrac{\pi}{2\omega} \cot \dfrac{\pi u_2}{2\omega} + \dfrac{2\pi}{\omega} S'_2 \,, \end{cases}$$

le quali ci danno ζu_0, ζu_1 e ζu_2 in funzione dei parametri k e t_2 per mezzo di q_1 e u_2.

6. Espressioni di Ω e di h mediante i parametri k e t_2, quando $k \geqq 3 - 2\sqrt{2}$. - Caso limite $k = 3 - 2\sqrt{2}$. —

Le espressioni di Ω e di h, quando $k \geqq 3 - 2\sqrt{2}$ si ottengono dalle (14′) e (15′) mediante la sostituzione a q della sua espressione (31), e a S_0, S_1, S_2 rispettivamente di S_0', S_1', S_2'.

Avremo così

$$(14''')\quad \Omega = \pi + \left[\frac{\Omega_1}{\pi} - \frac{\pi}{\Omega_1}\right] \operatorname{arc\,cos}\left[\frac{1-\sqrt{1-k^2t_2^2}}{2kt_2} e^{-\frac{\pi^2}{\log q_1}}\right] -$$

$$-\frac{2\pi^2}{\log q_1}\left\{1+4S_0' - \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right] + 2\left[\frac{\Omega_1}{\pi}S_1' - \frac{\pi}{\Omega_1}S_2'\right]\right\},$$

e

$$(15''')\quad h = \frac{2(1+k)t_2^3}{1-t_2^2}\omega + \pi(1+4S_0') - \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\Omega_1}{\pi}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right] +$$

$$+ 2\pi\left[\frac{\pi}{\Omega_1}S_1' - \frac{\Omega_1}{\pi}S_2'\right];$$

dove ω ha per espressione la (30) e u_2 è definita dalla seconda delle (23′).

Nel caso in cui $k = 3 - 2\sqrt{2}$, essendo allora $e_2 = 0$ e quindi $g_3 = 0$ si ha

$$\omega = i\omega'$$

e quindi per le (16) e (26)

$$q = q_1 = e^{-\pi} = 0,04321\ldots.$$

Avremo allora

$$S_0' = S_0\ ,\quad S_1' = S_1\ ,\quad S_2' = S_2\ ;$$

e le due formule (14′) e (14‴) danno l'unica relazione

$$(14^{\mathrm{IV}})\quad \Omega = \pi + \left[\frac{\Omega_1}{\pi} - \frac{\pi}{\Omega_1}\right] \operatorname{arc\,cos}\frac{1-\sqrt{1-0,0294\ldots t_2^2}}{0,0148\ldots t_2} +$$

$$+2\pi\left\{1+4S_0 - \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right] + 2\left[\frac{\Omega_1}{\pi}S_1 - \frac{\pi}{\Omega_1}S_2\right]\right\},$$

mentre le (15') e (15''') divengono entrambi

$$(15^{\text{IV}})\; h = \frac{2\,.\,343\ldots t_2^3}{1-t_2^2}\,\omega + \pi(1+4S_0) - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{\Omega_1}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\Omega_1}{\pi}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right) + $$
$$+ 2\pi\left(\frac{\pi}{\Omega_1}S_1 - \frac{\Omega_1}{\pi}S_2\right).$$

Queste in una prima approssimazione, trascurando cioè S_0, S_1, S_2 (con chè si vengano a trascurare i termini contenenti $q = 0,04321\ldots$ alle potenze superiori alla prima) danno rispettivamente

$$\Omega = \pi + \left(\frac{\Omega_1}{\pi} - \frac{\pi}{\Omega_1}\right)\operatorname{arc\,cos}\frac{1-\sqrt{1-0,0294\ldots t_2^2}}{0,0148\ldots t_2} +$$
$$+ 2\pi\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Omega_1}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\pi}{\Omega_1}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right)\right],$$

$$h = \frac{2,3\ldots t_2^2}{1-t_2^2} + \pi - \frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{\Omega_1}\operatorname{tg}\frac{\pi u_2}{2\omega} + \frac{\Omega_1}{\pi}\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}\right],$$

dove

$$tg\frac{\pi u_2}{2\omega} = \frac{1}{\cot\frac{\pi u_2}{2\omega}} = \sqrt{\frac{0,0148\ldots t_2 - 1 + \sqrt{1-0,0294\ldots t_2^2}}{0,0148\ldots t_2 + 1 - \sqrt{1-0,0294\ldots t_2^2}}}.$$

(Licenziate le bozze per la stampa il giorno 25 dicembre 1907)