Über Thetafunktionen,
deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen.

Abhandlung

zum Jahresberichte

des K. Neuen Gymnasiums in Nürnberg

für das Schuljahr 1890/91.

Von

Dr. Heinrich Sievert,

K. Studienlehrer.

Nürnberg.

Buchdruckerei von J. L. Stich.

1891.

Die Herren A. Krazer und F. Prym haben in ihren Untersuchungen über Thetafunktionen*) eine mit (Θ_2) bezeichnete allgemeine Formel aufgestellt, welche die Mittel liefert, Probleme über Thetafunktionen, die von p Veränderlichen abhängen und deren Charakteristiken sich aus r^{teln} ganzer Zahlen zusammensetzen, mit Erfolg in Angriff zu nehmen, und es handelt sich jetzt zunächst darum, auf Grund der von den genannten Autoren gegebenen Methoden die Thetafunktionen einer Veränderlichen zu untersuchen.

In diesem Sinne hat, nachdem der Fall $p=1$, $r=2$ schon durch die Untersuchungen Jacobi's erledigt war, zunächst Herr Krazer in seiner Habilitationsschrift**) die dem Falle $p=1$, $r=3$ entsprechenden Thetafunktionen genauer studiert. Auf den durch Herrn Krazer geschaffenen Grundlagen baute dann Herr Schleicher***) weiter, und es gelang ihm, den Fall $p=1$, $r=3$ zu einem gewissen Abschlusse zu bringen.

Die dem Falle $p=1$, $r=5$ entsprechenden Thetafunktionen habe ich im Laufe der letzten Jahre unter Zugrundelegung der genannten Krazer-Prymschen Thetaformel eingehend studiert, und es ist mir gelungen, für dieselben sowohl eine Parameterdarstellung zu gewinnen, als auch das auf dieselben sich beziehende Umkehrproblem zu lösen. Die folgenden Blätter enthalten den ersten Teil meiner diesbezüglichen Untersuchungen, und ich hoffe, demselben bald den zweiten folgen lassen zu können.

---

*) A. Krazer und F. Prym, Über die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel. Acta mathematica, Bd. 3, S. 240 ff.

**) A. Krazer, Über Thetafunktionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Mathematische Annalen, Bd. 22, S. 416 ff.

***) K. Schleicher, Darstellung und Umkehrung von Thetaquotienten, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind. Programm der Studienanstalt Bayreuth 1890.

1.

Unter einer einfach unendlichen Thetareihe versteht man eine Reihe von der Gestalt:

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+g)^2+2(m+g)(v+h\pi i)},$$

bei der a, g, h konstante Größen bezeichnen. Zur Konvergenz der Reihe ist notwendig und hinreichend, daß der reelle Teil der komplexen Konstanten a wesentlich negativ ist. Unter dieser Bedingung stellt obige Reihe, wenn man unter v eine unabhängige komplexe Veränderliche versteht, eine für alle endlichen Werte von v einwertige und stetige Funktion der komplexen Veränderlichen v dar. Die so bestimmte Funktion wird mit $\vartheta\left\{{g \atop h}\right\}(v)$ bezeichnet. Der Zahlenkomplex $\left\{{g \atop h}\right\}$ heißt die zur Funktion $\vartheta\left\{{g \atop h}\right\}(v)$ gehörige Charakteristik.

Im folgenden werden ausschließlich solche Funktionen $\vartheta\left\{{g \atop h}\right\}(v)$ betrachtet, bei denen g, h Fünftel ganzer Zahlen sind. Zu dem Ende nehme man an, daß:

$$g = \frac{\varepsilon}{5}, \quad h = \frac{\varepsilon'}{5}$$

sei, indem man unter $\varepsilon, \varepsilon'$ irgend welche ganze Zahlen versteht. Das Symbol, welches hierdurch aus $\left\{{g \atop h}\right\}$ entsteht, ersetze man mit Unterdrückung des Nenners 5 und unter Einführung einer neuen Klammer durch das einfachere Symbol $\left[{\varepsilon \atop \varepsilon'}\right]$. Es geht dann aus $\vartheta\left\{{g \atop h}\right\}(v)$ die Funktion $\vartheta\left[{\varepsilon \atop \varepsilon'}\right](v)$ hervor, bestimmt durch die Gleichung:

$$\vartheta\left[{\varepsilon \atop \varepsilon'}\right](v) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a(m+\frac{\varepsilon}{5})^2+2(m+\frac{\varepsilon}{5})(v+\frac{\varepsilon'}{5}\pi i)}.$$

Aus der die Funktion $\vartheta\left[{\varepsilon \atop \varepsilon'}\right](v)$ darstellenden Reihe lassen sich ohne Mühe die folgenden vier Gleichungen ableiten:

$$(1)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v+\pi i)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v)e^{\frac{2}{5}\varepsilon\pi i},$$

$$(2)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v+a)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v)e^{-2v-a-\frac{2}{5}\varepsilon'\pi i},$$

$$(3)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\pm5\eta\\ \varepsilon'\pm5\eta'\end{bmatrix}(v)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v)e^{\pm\frac{2}{5}\varepsilon\eta'\pi i},$$

$$(4)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(-v)=\vartheta\begin{bmatrix}-\varepsilon\\ -\varepsilon'\end{bmatrix}(v).$$

Die Gleichung (3), bei der η, η' irgend welche ganze Zahlen bedeuten, zeigt, daß zwei Thetafunktionen $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v)$ und $\vartheta\begin{bmatrix}\zeta\\ \zeta'\end{bmatrix}(v)$, bei denen $\varepsilon\equiv\zeta$ (mod 5) und $\varepsilon'\equiv\zeta'$ (mod 5) ist, sich nur um eine fünfte Einheitswurzel unterscheiden, und daß jede Funktion $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(v)$ unter Ausscheidung einer fünften Einheitswurzel auf eine der folgenden fünfundzwanzig:

$$\begin{array}{ccccc}
\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}(v),\\
\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}(v),\\
\vartheta\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}(v),\\
\vartheta\begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-2\\-2\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}(v),\\
\vartheta\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}(v), & \vartheta\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}(v),
\end{array}$$

bei denen die Charakteristiken nur aus den Zahlen 0, 1, 2, −2, −1 als Elementen gebildet sind, zurückgeführt werden kann. Diese fünfundzwanzig Funktionen heißen Normalfunktionen. Die fünfundzwanzig Charakteristiken, welche bei den Normalfunktionen auftreten, nennt man Normalcharakteristiken. Die Gleichung (4) zeigt dann weiter, daß von diesen fünfundzwanzig Funktionen $\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(v)$ eine gerade Funktion ist, die anderen aber paarweise ineinander übergehen, wenn man v in $-v$ ändert.

Bezeichnet man das System $v+\frac{\varkappa}{5}a+\frac{\varkappa'}{5}\pi i$, bei dem $\varkappa$ und $\varkappa'$ ganze Zahlen bedeuten, zur Abkürzung symbolisch mit $v+\begin{vmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{vmatrix}$, so erhält man die Relation:

$$(5)\qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}\left(v+\begin{vmatrix}\varkappa\\ \varkappa'\end{vmatrix}\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon+\varkappa\\ \varepsilon'+\varkappa'\end{bmatrix}(v)e^{-\frac{\varkappa^2}{25}a-\frac{2\varkappa}{5}\left(v+\frac{\varepsilon'+\varkappa'}{5}\pi i\right)},$$

welche im folgenden häufig zur Anwendung kommt.

Zwei beliebige Charakteristiken seien durch die Symbole $\begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix}$ oder die einfacheren $[\alpha], [\beta]$ repräsentiert; zwei Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ sollen kongruent genannt werden, wenn $\alpha\equiv\beta$ (mod 5), $\alpha'\equiv\beta'$ (mod 5) ist, im anderen Falle mögen sie inkongruent heißen. Die Charakteristik $[\alpha \pm \beta]$ soll die Summe beziehungsweise Differenz der Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ genannt werden. Bezeichnet man mit $[\alpha]$ eine der $[0]$ nicht kongruente Charakteristik, mit $[\beta]$ eine zweite, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent ist, so bilden in der abgekürzten Schreibweise die Charakteristiken:

$$\begin{array}{ccccc}
[0], & [\alpha], & [2\alpha], & [-2\alpha], & [-\alpha], \\
[\beta], & [\beta+\alpha], & [\beta+2\alpha], & [\beta-2\alpha], & [\beta-\alpha], \\
[2\beta], & [2\beta+\alpha], & [2\beta+2\alpha], & [2\beta-2\alpha], & [2\beta-\alpha], \\
[-2\beta], & [-2\beta+\alpha], & [-2\beta+2\alpha], & [-2\beta-2\alpha], & [-2\beta-\alpha], \\
[-\beta], & [-\beta+\alpha], & [-\beta+2\alpha], & [-\beta-2\alpha], & [-\beta-\alpha]
\end{array}$$

ein System von fünfundzwanzig Charakteristiken, von denen keine zwei einander kongruent sind, und sind bei passend gewählter Reihenfolge den fünfundzwanzig Normalcharakteristiken beziehungsweise kongruent; die letzteren gehen aus ihnen aber unmittelbar hervor, wenn $[\alpha]=\left[{1 \atop 0}\right]$ und $[\beta]=\left[{0 \atop 1}\right]$ gesetzt wird.

In der Folge möge zur Abkürzung $e^{\frac{2}{5}\pi i}=\tau$ gesetzt werden, dann ist $\tau^5=1$ und $1+\tau+\tau^2+\tau^3+\tau^4=0$. Versteht man unter ε,ε' und η,η' die Elemente zweier beliebiger Charakteristiken $[\varepsilon]$ und $[\eta]$ und setzt ferner:

$$e^{\frac{2}{5}\varepsilon\varepsilon'\pi i}=\tau^{|\varepsilon|}, \quad e^{\frac{2}{5}(\varepsilon\eta'-\varepsilon'\eta)\pi i}=\tau^{\varepsilon|\eta},$$

so sind $\tau^{|\varepsilon|}$ und $\tau^{\varepsilon|\eta}$ gleichfalls fünfte Einheitswurzeln, und es gelten für diese Symbole die folgenden Gesetze:

$$\tau^{|0|}=1, \quad \tau^{|-\varepsilon|}=\tau^{|\varepsilon|}, \quad \tau^{|2\varepsilon|}=1:\tau^{|\varepsilon|}$$

$$\tau^{\varepsilon|0}=\tau^{\varepsilon|\varepsilon}=\tau^{\varepsilon|2\varepsilon}=\tau^{\varepsilon|-2\varepsilon}=\tau^{\varepsilon|-\varepsilon}=1, \quad \tau^{\varepsilon|\eta}=\tau^{-\varepsilon|-\eta}=\tau^{-\eta|\varepsilon}=\tau^{\eta|-\varepsilon},$$

$$\tau^{\varepsilon|2\eta}=\left(\tau^{\varepsilon|\eta}\right)^2, \quad \tau^{\varepsilon|-2\eta}=\left(\tau^{\varepsilon|\eta}\right)^3, \quad \tau^{\varepsilon|-\eta}=\left(\tau^{\varepsilon|\eta}\right)^4,$$

$$\tau^{\varepsilon+\zeta|\eta+\vartheta}=\tau^{\varepsilon|\eta}.\,\tau^{\varepsilon|\vartheta}.\,\tau^{\zeta|\eta}.\,\tau^{\zeta|\vartheta}.$$

Der Wert der Ausdrücke $\tau^{|\varepsilon|}$ und $\tau^{\varepsilon|\eta}$ bleibt ungeändert, wenn man an Stelle der Charakteristiken irgend welche denselben kongruente setzt. Versteht man endlich unter $[\eta]$ eine der Charakteristik $[0]$ nicht kongruente Charakteristik und läßt dann an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach irgend fünfundzwanzig den Normalcharakteristiken beziehungsweise kongruente

Charakteristiken treten, so haben von den fünfundzwanzig auf diese Weise aus $\tau^{\varepsilon|\eta}$ hervorgehenden Ausdrücken fünf den Wert 1, fünf den Wert τ, fünf den Wert τ^2, fünf den Wert τ^3 und fünf den Wert τ^4, und es findet speziell die Beziehung $\tau^{\varepsilon|\eta}=1$ statt, wenn $[\varepsilon]$ einer der Charakteristiken $[0]$, $[\eta]$, $[2\eta]$, $[-2\eta]$, $[-\eta]$ kongruent ist; daraus folgt, daß die Summe:

$$1+\tau^{\varepsilon|\eta}+\tau^{\varepsilon|2\eta}+\tau^{\varepsilon|-2\eta}+\tau^{\varepsilon|-\eta}$$

für die fünf eben erwähnten Charakteristiken den Wert fünf, für die übrigen zwanzig den Wert Null besitzt. Zur Abkürzung endlich wird künftig:

$$\tau^{\varepsilon|\eta}+\tau^{\varepsilon|-\eta}=\nu_1 \text{ und } \tau^{\varepsilon|2\eta}+\tau^{\varepsilon|-2\eta}=\nu_2$$

gesetzt.

2.

Im folgenden sollen die wesentlichen Relationen, welche zwischen den in Art. 1 aufgeführten Normalfunktionen bestehen, hergestellt und hinsichtlich ihrer gegenseitigen Beziehungen untersucht werden. Alle diese verschiedenen Relationen können aus einer einzigen Fundamentalformel abgeleitet werden, die zunächst aufgestellt werden soll. Diese Formel geht als spezieller Fall aus einer von den Herren Krazer und Prym aufgestellten allgemeinen Thetaformel*) dadurch hervor, daß man in ihr $p=1$ und $r=5$ setzt. Man erhält auf diese Weise zunächst die spezielle Formel:

$$(\Theta_2) \qquad 5\vartheta[\eta](5u_1)\,\vartheta[\eta](5u_2)\dots\,\vartheta[\eta](5u_{10})\,e^{-\frac{2}{5}\eta\eta'\pi i}$$
$$=\sum_{[\varepsilon]}\tau^{\varepsilon|\eta}\,\vartheta[\varepsilon](5v_1)\,\vartheta[\varepsilon](5v_2)\dots\,\vartheta[\varepsilon](5v_{10})\,e^{-\frac{2}{5}\varepsilon\varepsilon'\pi i}.$$

In dieser Gleichung deutet das auf der rechten Seite stehende Summenzeichen an, daß die Summe der Ausdrücke zu bilden ist, welche aus dem hinter ihm stehenden Ausdrucke hervorgehen, wenn man darin an Stelle von $[\varepsilon]$ der Reihe nach die fünfundzwanzig Normalcharakteristiken oder auch fünfundzwanzig ihnen beziehungsweise kongruente Charakteristiken treten läßt. Ferner bezeichnen $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ unabhängige Veränderliche, $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ die durch das Gleichungensystem:

*) A. Krazer und F. Prym, Über die Verallgemeinerung der Riemannschen Thetaformel. Acta mathematica, Bd. 3, S. 240, Formel (Θ_2).

$$(J)\qquad \begin{aligned} 5u_1 &= -4v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{10}, \\ 5u_2 &= v_1 - 4v_2 + v_3 + \dots + v_{10}, \\ 5u_3 &= v_1 + v_2 - 4v_3 + \dots + v_{10}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 5u_{10} &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots - 4v_{10} \end{aligned}$$

definierten linearen Funktionen derselben.

Aus der Formel (Θ_2) leitet man eine in den Charakteristiken allgemeinere Gleichung ab, indem man:

$$\begin{matrix} 5v_1, & 5v_2, & 5v_3, & 5v_4, & 5v_5, \\ 5v_6, & 5v_7, & 5v_8, & 5v_9, & 5v_{10} \end{matrix}$$

übergehen läßt in:

$$\begin{matrix} 5v_1, & 5v_2+|\varrho|, & 5v_3+|2\varrho|, & 5v_4-|2\varrho|, & 5v_5-|\varrho|, \\ 5v_6+|\varkappa|, & 5v_7+|\varkappa+\sigma|, & 5v_8+|\varkappa+2\sigma|, & 5v_9+|\varkappa-2\sigma|, & 5v_{10}+|\varkappa-\sigma| \end{matrix}$$

und beachtet, daß dann auf Grund der Gleichungen (J) die Größen:

$$\begin{matrix} 5u_1, & 5u_2, & 5u_3, & 5u_4, & 5u_5, \\ 5u_6, & 5u_7, & 5u_8, & 5u_9, & 5u_{10} \end{matrix}$$

übergehen in:

$$\begin{matrix} 5u_1+|\varkappa|, & 5u_2+|\varkappa-\varrho|, & 5u_3+|\varkappa-2\varrho|, & 5u_4+|\varkappa+2\varrho|, & 5u_5+|\varkappa+\varrho|, \\ 5u_6, & 5u_7-|\sigma|, & 5u_8-|2\sigma|, & 5u_9+|2\sigma|, & 5u_{10}+|\sigma|. \end{matrix}$$

Führt man die so geänderten Argumente in die Formel (Θ_2) ein und wendet auf der rechten Seite sowohl als auf der linken die Formel (5) des Art. 1 an, so erhält man, wenn man die den beiden Seiten gemeinsamen Exponentialgrößen durch Division entfernt und unter Verwendung der in Art. 1 eingeführten Symbole:

$$e^{-\frac{2}{5}\eta\eta'\pi i-\frac{2}{5}\eta'\varkappa\pi i+\frac{2}{5}\varkappa\varkappa'\pi i} = \left(\begin{matrix}|\eta| & |\eta+\varkappa| & \varkappa|\eta| \\ \tau\ .\ \tau & .\ \tau & \end{matrix}\right)^2,$$

$$e^{-\frac{2}{5}\varepsilon\varepsilon'\pi i-\frac{2}{5}\varepsilon'\varkappa\pi i+\frac{2}{5}\varkappa\varkappa'\pi i} = \left(\begin{matrix}|\varepsilon| & |\varepsilon+\varkappa| & \varkappa|\varepsilon| \\ \tau\ .\ \tau & .\ \tau & \end{matrix}\right)^2,$$

setzt, die gesuchte Gleichung in der Gestalt:

$$(\Theta)\qquad 5x'_{[\eta]} = \sum_{[\varepsilon]} \tau^{\varepsilon|\eta}\, x_{[\varepsilon]} \quad ,$$

wobei:

$$x'_{[\eta]} = \left\{\begin{matrix} \vartheta[\;\eta+\varkappa\;](5u_1)\,\vartheta[\;\eta\;](5u_6) \\ \vartheta[\;\eta+\varkappa-\varrho\;](5u_2)\,\vartheta[\;\eta-\sigma\;](5u_7) \\ \vartheta[\eta+\varkappa-2\varrho](5u_3)\,\vartheta[\eta-2\sigma](5u_8) \\ \vartheta[\eta+\varkappa+2\varrho](5u_4)\,\vartheta[\eta+2\sigma](5u_9) \\ \vartheta[\;\eta+\varkappa+\varrho\;](5u_5)\,\vartheta[\;\eta+\sigma\;](5u_{10}) \end{matrix}\right\} \cdot \left(\tau^{|\eta|} . \tau^{|\eta+\varkappa|} . \tau^{\varkappa|\eta}\right)^2,$$

$$x_{[\varepsilon]} = \left\{\begin{matrix} \vartheta[\;\varepsilon\;](5v_1)\,\vartheta[\;\varepsilon+\varkappa\;](5v_6) \\ \vartheta[\;\varepsilon+\varrho\;](5v_2)\,\vartheta[\;\varepsilon+\varkappa+\sigma\;](5v_7) \\ \vartheta[\varepsilon+2\varrho](5v_3)\,\vartheta[\varepsilon+\varkappa+2\sigma](5v_8) \\ \vartheta[\varepsilon-2\varrho](5v_4)\,\vartheta[\varepsilon+\varkappa-2\sigma](5v_9) \\ \vartheta[\;\varepsilon-\varrho\;](5v_5)\,\vartheta[\;\varepsilon+\varkappa-\sigma\;](5v_{10}) \end{matrix}\right\} \cdot \left(\tau^{|\varepsilon|} . \tau^{|\varepsilon+\varkappa|} . \tau^{\varkappa|\varepsilon}\right)^2$$

ist. Die Summation auf der rechten Seite der Gleichung (Θ) ist hiebei in der Weise auszuführen, daß an Stelle der Charakteristik $[\varepsilon]$ der Reihe nach die fünfundzwanzig Normalcharakteristiken oder irgend fünfundzwanzig ihnen beziehungsweise kongruente Charakteristiken treten. Setzt man in der Gleichung (Θ) an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach die fünfundzwanzig Normalcharakteristiken, so erhält man aus ihr ein System von fünfundzwanzig Gleichungen.

3.

Läßt man in der Gleichung (Θ) an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach $[\eta+\alpha]$, $[\eta+2\alpha]$, $[\eta-2\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ treten, indem man unter $[\alpha]$ eine beliebige der $[0]$ nicht kongruente Charakteristik versteht, multipliziert dann die vier dadurch aus (Θ) entstehenden Gleichungen beziehungsweise mit $\tau^{\alpha|\zeta}, \tau^{2\alpha|\zeta}, \tau^{-2\alpha|\zeta}, \tau^{-\alpha|\zeta}$, wo $[\zeta]$ eine ganz beliebige Charakteristik bezeichnet, und addiert sie zu der Gleichung (Θ), so erhält man, indem man noch berücksichtigt, daß

$$1+\tau^{\varepsilon-\zeta|\alpha}+\tau^{\varepsilon-\zeta|2\alpha}+\tau^{\varepsilon-\zeta|-2\alpha}+\tau^{\varepsilon-\zeta|-\alpha}$$

nach Art. 1 nur dann einen von Null verschiedenen Wert besitzt, wenn $[\varepsilon]$

einer der Charakteristiken $[\zeta]$, $[\zeta+\alpha]$, $[\zeta+2\alpha]$, $[\zeta-2\alpha]$, $[\zeta-\alpha]$ kongruent ist, die Gleichung:

$$(\Theta') \qquad \sum_n \tau^{n\alpha|\zeta} x'_{[\eta+n\alpha]} = \sum_n \tau^{\zeta+n\alpha|\eta} x_{[\zeta+n\alpha]}.$$

In dieser Formel sowohl wie im ganzen weiteren Verlauf der Arbeit deutet das Zeichen $\sum\limits_n$ an, daß die Summe der Ausdrücke zu bilden ist, welche aus dem hinter ihm stehenden allgemeinen Ausdruck hervorgehen, wenn man darin für n der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, -2, -1 setzt. Die Charakteristiken $[\eta]$ und $[\zeta]$ bezeichnen zwei ganz beliebige Charakteristiken, während $[\alpha]$ eine der $[0]$ nicht kongruente Charakteristik ist. Auch möge schließlich noch bemerkt werden, daß die Gleichung (Θ') immer in sich selbst übergeht, wenn $[\zeta]$ sowohl als $[\eta]$ um $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ vermehrt wird.

In der Gleichung (Θ') kann für $[\eta]$ und unabhängig davon für $[\zeta]$ eine jede der fünfundzwanzig Normalcharakteristiken gesetzt werden. Es entstehen auf diese Weise im ganzen nur fünfundzwanzig wesentlich verschiedene Gleichungen. Stellt nämlich $[\beta]$ eine beliebige, keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruente Charakteristik dar, so sind irgend welche den Normalcharakteristiken in irgend einer Reihenfolge kongruente Charakteristiken durch die in Art. 1 aufgeführten repräsentiert. Fünf in jenem Schema in Horizontalreihe stehende Charakteristiken bringen aber an die Stelle von $[\eta]$ oder $[\zeta]$ gesetzt nach der oben gemachten Bemerkung immer dieselbe Gleichung hervor. Treten daher an Stelle von $[\zeta]$ die erwähnten fünfundzwanzig Charakteristiken, so gehen aus der Gleichung (Θ') zunächst nur fünf verschiedene Gleichungen hervor, und aus jeder derselben ergeben sich wiederum fünf, wenn schließlich $[\eta]$ dieselben fünfundzwanzig Charakteristiken durchläuft. Diese fünfundzwanzig Gleichungen erhält man nach dem Gesagten, wenn man an Stelle von $[\eta]$ die Charakteristiken $[0]$, $[\beta]$, $[2\beta]$, $[-2\beta]$, $[-\beta]$ setzt und dann jedesmal an Stelle von $[\zeta]$ die nämlichen fünf Charakteristiken treten läßt.

Das so entstandene System (Θ') kann das System der fünfundzwanzig Gleichungen, die in der Gleichung (Θ) enthalten sind, ersetzen. In dem System (Θ') ist die Charakteristik $[\beta]$ nur der Bedingung unterworfen, keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent zu sein; setzt man an Stelle von $[\beta]$ irgend eine andere der zwanzig zulässigen Charakteristiken, so geht das System (Θ') wieder in sich selbst über, und man erkennt daher, daß das System (Θ') durch Angabe der Charakteristik $[\alpha]$ vollständig bestimmt ist. Berücksichtigt man weiter, daß für $[\alpha]$ eine jede der vierundzwanzig der $[0]$ nicht kongruenten Charakteristiken gesetzt werden darf, daß aber das System (Θ') ungeändert bleibt, wenn man die Charakteristik $[-\alpha]$ an Stelle der Charakteristik $[\alpha]$ treten läßt, so erkennt man, daß es im ganzen nur sechs verschiedene spezielle Systeme (Θ') gibt, so daß also aus der Gleichung (Θ') im ganzen einhundertfünfzig spezielle Gleichungen hervorgehen würden.

Sowohl auf der rechten wie auf der linken Seite der Gleichung (Θ') stehen fünf Größen, deren Indexcharakteristiken eine der Charakteristik $[0]$ kongruente Summe besitzen. Von fünf verschiedenen Charakteristiken, deren Summe der Charakteristik $[0]$ kongruent ist, soll gesagt werden, daß sie ein Fünfersystem bilden. Man erkennt dann, daß die fünf Charakteristiken eines Fünfersystems allgemein durch fünf Charakteristiken von der Form $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta+2\alpha]$, $[\eta-2\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ dargestellt werden können, und daß es, da kongruente Charakteristiken hiebei als nicht verschieden anzusehen sind, im ganzen den sechs Gruppen von Gleichungen (Θ') entsprechend dreißig verschiedene Fünfersysteme gibt.

4.

Aus der Zahl spezieller Formeln, welche durch passende Verfügung über die Veränderliche v und die ebenfalls willkürlichen Charakteristiken $[\varkappa]$, $[\varrho]$, $[\sigma]$ erhalten werden können, sollen hier nur die wichtigsten abgeleitet werden.

Setzt man zu dem Zwecke in der Formel (Θ') des Art. 3

$$5v_1 = 5v_2 = 5v_3 = 5v_4 = 5v_5 = u,$$
$$5v_6 = 5v_7 = 5v_8 = 5v_9 = 5v_{10} = v,$$

und daher dem Gleichungensysteme (J) entsprechend:

$$5u_1 = 5u_2 = 5u_3 = 5u_4 = 5u_5 = v,$$
$$5u_6 = 5u_7 = 5u_8 = 5u_9 = 5u_{10} = u,$$

so gehen in der Gleichung (Θ') die Größen $x'_{[\eta]}$ und $x_{[\varepsilon]}$ über in:

$$x'_{[\eta]} = \left(\tau^{|\eta|} \cdot \tau^{|\eta+\varkappa|} \cdot \tau^{\varkappa|\eta}\right)^2 \prod_n \vartheta[\eta + n\sigma](u)\; \vartheta[\eta + \varkappa + n\varrho](v),$$

$$x_{[\varepsilon]} = \left(\tau^{|\varepsilon|} \cdot \tau^{|\varepsilon+\varkappa|} \cdot \tau^{\varkappa|\varepsilon}\right)^2 \prod_n \vartheta[\varepsilon + n\varrho](u)\; \vartheta[\varepsilon + \varkappa + n\sigma](v)$$

$$n=0, 1, 2, -2, -1.$$

Im folgenden soll zur Abkürzung:

$$(\tau^{|\varrho|})^2\, \vartheta[\varrho](u)\; \vartheta[\varrho+\sigma](u)\; \vartheta[\varrho+2\sigma](u)\; \vartheta[\varrho-2\sigma](u)\; \vartheta[\varrho-\sigma](u) = \vartheta\{\varrho, \sigma\}(u),$$

$$(\tau^{|\varrho|})^2\; \vartheta^5[\varrho](u) = \vartheta^5\{\varrho\}(u),$$

$$\vartheta\{\varrho, \sigma\}(0) = (\varrho, \sigma),\; \vartheta^5\{\varrho\}(0) = (\varrho)^5$$

gesetzt werden.

Führt man die Werte für $x'_{[\eta]}$ und $x_{[\varepsilon]}$ in die Gleichung (Θ') ein, so geht daraus unter Anwendung der neu eingeführten Schreibweisen die Gleichung:

$$(\Theta'')\quad \sum_n \tau^{2\varkappa|\eta+n\alpha}\; \tau^{n\alpha|\zeta}\; \vartheta\{\eta+n\alpha, \sigma\}(u)\; \vartheta\{\varkappa+\eta+n\alpha, \varrho\}(v)$$

$$= \sum_n \tau^{2\varkappa-\eta|\zeta+n\alpha}\quad \vartheta\{\zeta+n\alpha, \varrho\}(u)\; \vartheta\{\varkappa+\zeta+n\alpha, \sigma\}(v)$$

$$n=0, 1, 2, -2, -1$$

hervor.

Um aus dieser Gleichung spezielle Gleichungen zu erhalten, setze man zunächst $[\varrho]=[\alpha]$, $[\sigma]=[\beta]$, $u=0$, dann entsteht aus ihr unter Berücksichtigung der Formeln:

$$\vartheta[\varrho\pm3\sigma](v) = \vartheta[\varrho\mp2\sigma](v)\; e^{\pm\frac{2}{5}\pi i(\varrho\mp2\sigma)\sigma'},$$

$$\vartheta[\varrho\pm4\sigma](v) = \vartheta[\varrho\mp\sigma](v)\; e^{\pm\frac{2}{5}\pi i(\varrho\mp\sigma)\sigma'},$$

$$\vartheta[\varrho\pm6\sigma](v) = \vartheta[\varrho\pm\sigma](v)\; e^{\pm\frac{2}{5}\pi i(\varrho\pm\sigma)\sigma'},$$

eine neue Gleichung und diese liefert schließlich, wenn man in ihr die Charakteristiken $[\alpha]$ und $[\beta]$ vertauscht, die erste speziellere Gleichung, nämlich:

$$\text{(A)}\qquad \sum_n \tau^{2\varkappa|\eta}\,\tau^{n\beta|\zeta+2\eta}(\eta+n\beta,\,\alpha)\ \vartheta\{\varkappa+\eta,\,\beta\}(v)$$

$$=\sum_n \tau^{2\varkappa-\eta|\zeta}\,\tau^{2\varkappa-\eta-2\zeta|n\beta}(\zeta,\,\beta)\ \vartheta\{\varkappa+\zeta+n\beta,\,\alpha\}(v)$$

$$n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1.$$

Setzt man ferner in (Θ'') $[\varrho]=[\alpha]$, $[\sigma]=[0]$, so ergibt sich die weitere Gleichung:

$$\text{(B)}\qquad \sum_n \tau^{2\varkappa|\eta}\,\tau^{n\alpha|\zeta+2\eta}\ \vartheta\{\varkappa+\eta,\,\alpha\}(v)\ \vartheta^5\{\eta+n\alpha\}(u)$$

$$=\sum_n \tau^{2\varkappa-\eta|\zeta}\,\tau^{2\varkappa-\eta-2\zeta|n\alpha}\,\vartheta\{\zeta,\alpha\}(u)\ \vartheta^5\{\varkappa+\zeta+n\alpha\}(v)$$

$$n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1.$$

Läßt man dagegen in der Gleichung (Θ'') an die Stelle der Charakteristik $[\varkappa]$ die Charakteristik $[\zeta-\eta]$ treten und setzt $u=v$, so erhält man, wenn man den beiden Seiten gemeinsamen Faktor $\vartheta\{\zeta,\alpha\}(v)$ durch Division entfernt und die Charakteristik $[2\zeta-\eta]$ in neuer Bezeichnung durch $[\varepsilon]$ ersetzt, die Gleichung:

$$\text{(C)}\qquad \sum_n \tau^{2\varepsilon|n\alpha}\ \vartheta^5\{\eta+n\alpha\}(v) = \sum_n \tau^{2\eta|\varepsilon+n\alpha}\ \vartheta^5\{\varepsilon+n\alpha\}(v)$$

$$n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1.$$

Diese drei Gleichungen sollen den weiteren Untersuchungen zu grunde gelegt werden.

5.

In diesem Artikel werden zunächst die zwischen den Größen $\vartheta[\varepsilon](0)$ bestehenden Beziehungen, soweit sie aus den Gleichungen (A), (B), (C) hervorgehen, näher untersucht und insbesondere gewisse Grundgleichungen hergestellt, aus denen sämtliche Relationen durch spezielle Verfügung über die Charakteristiken leicht abgeleitet werden können.

Diese Relationen enthalten ausschließlich Größen von der Form: $(\varrho)^5$, (ϱ,σ). Da diese letzteren ihren Wert nicht ändern, wenn man die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\sigma]$ durch irgend welche ihnen kongruente ersetzt, so hat man den fünfundzwanzig Normalcharakteristiken entsprechend fünfundzwanzig Größen von der Form $(\varrho)^5$. Da ferner die Charakteristiken $[\varrho]$, $[\varrho+\sigma]$, $[\varrho+2\sigma]$, $[\varrho-2\sigma]$, $[\varrho-\sigma]$ immer ein Fünfersystem bilden, die Anzahl der verschiedenen aus Normalcharakteristiken gebildeten Fünfersysteme nach Art. 4 dreißig beträgt, und eine Größe (ϱ, σ) nur eine fünfte Einheitswurzel erlangt, wenn man die Charakteristiken durch irgend welche ihnen kongruente ersetzt, so gibt es, von fünften Einheitswurzeln abgesehen, im ganzen dreißig verschiedene Größen von der Form (ϱ, σ), welche in der gewählten, abgekürzten Schreibweise sich folgendermassen darstellen:

$$\begin{array}{lllll}
(0, \alpha), & (\beta, \alpha), & (2\beta, \alpha), & (-2\beta, \alpha), & (-\beta, \alpha), \\
(0, \beta), & (\alpha, \beta), & (2\alpha, \beta), & (-2\alpha, \beta), & (-\alpha, \beta), \\
(0, \beta+\alpha), & (\beta-\alpha, \beta+\alpha), & (2\beta-2\alpha, \beta+\alpha), & (-2\beta+2\alpha, \beta+\alpha), & (-\beta+\alpha, \beta+\alpha), \\
(0, \beta+2\alpha), & (\beta-2\alpha, \beta+2\alpha), & (2\beta+\alpha, \beta+2\alpha), & (-2\beta-\alpha, \beta+2\alpha), & (-\beta+2\alpha, \beta+2\alpha), \\
(0, \beta-2\alpha), & (\beta+2\alpha, \beta-2\alpha), & (2\beta-\alpha, \beta-2\alpha), & (-2\beta+\alpha, \beta-2\alpha), & (-\beta-2\alpha, \beta-2\alpha), \\
(0, \beta-\alpha), & (\beta+\alpha, \beta-\alpha), & (2\beta+2\alpha, \beta-\alpha), & (-2\beta-2\alpha, \beta-\alpha), & (-\beta-\alpha, \beta-\alpha).
\end{array}$$

Berücksichtigt man weiter, daß nach Formel (4) des Artikels 1: $\vartheta[-\varrho](0) = \vartheta[\varrho](0)$ ist, und daß daher stets die Beziehungen: $(-\varrho, \sigma) = (\varrho, \sigma)$, $(-\varrho)^5 = (\varrho)^5$ bestehen, so folgt, daß sich die fünfundzwanzig Größen $(\varrho)^5$ auf die dreizehn: $(0)^5$, $(\alpha)^5$, $(2\alpha)^5$ — $(\beta)^5$, $(\beta+\alpha)^5$, $(\beta+2\alpha)^5$, $(\beta-2\alpha)^5$, $(\beta-\alpha)^5$ — $(2\beta)^5$, $(2\beta+\alpha)^5$, $(2\beta+2\alpha)^5$, $(2\beta-2\alpha)^5$, $(2\beta-\alpha)^5$ und die dreißig Größen (ϱ, σ) auf die achtzehn, welche im obigen Schema in den ersten drei Vertikalreihen stehen, zurückführen lassen. Es ist nun die Aufgabe der folgenden Untersuchungen, aus den Gleichungen (A), (B), (C) Grundtypen von Gleichungen abzuleiten, aus welchen sich die Beziehungen zwischen diesen dreiunddreißig Größen ergeben.

Aus der Gleichung (A) folgen zwei solche Grundgleichungen, die man erhält, wenn man in derselben das eine Mal $v=0$, $[\varkappa]=[0]$, $[\eta]=[0]$, $[\zeta]=[\varrho]$, $[\alpha]=[\varrho]$, $[\beta]=[\sigma]$ und das andere Mal $v=0$, $[\varkappa]=[0]$, $[\eta]=[0]$, $[\zeta]=[2\varrho]$, $[\alpha]=[\varrho]$, $[\beta]=[\sigma]$ setzt.

Dieselben lauten:

$$(\mathrm{A}_0^1) \qquad \sum_n \tau^{n\sigma|\varrho} (n\sigma, \varrho)(0, \sigma) = \sum_n (n\sigma, \varrho)(\varrho, \sigma),$$

$$n=0, 1, 2, -2, -1$$

$$(\mathrm{A}_0^2) \qquad \sum_n \tau^{n\sigma|2\varrho} (n\sigma, \varrho)(0, \sigma) = \sum_n (n\sigma, \varrho)(2\varrho, \sigma).$$

Aus den beiden Gleichungen (A_0^1) und (A_0^2) gehen, wenn man an Stelle der Charakteristik $[\varrho]$ eine bestimmte Charakteristik $[\varkappa]$ treten läßt, wie leicht ersichtlich, nur fünf verschiedene Gleichungen hervor; dieselben erhält man, wenn man — unter $[\lambda]$ eine von $[0]$, $[\varkappa]$, $[2\varkappa]$, $[-2\varkappa]$, $[-\varkappa]$ verschiedene Charakteristik verstanden — an Stelle von $[\sigma]$ der Reihe nach $[\lambda]$, $[\lambda+\varkappa]$, $[\lambda+2\varkappa]$, $[\lambda-2\varkappa]$, $[\lambda-\varkappa]$ setzt. Wird dann in diesem System von zehn Gleichungen die Charakteristik $[\varkappa]$ der Reihe nach durch die Charakteristiken $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\beta+\alpha]$, $[\beta+2\alpha]$, $[\beta-2\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ vertreten und $[\lambda]$ jedesmal passend bestimmt, so gehen aus den Gleichungen (A_0^1) und (A_0^2) sechzig spezielle Gleichungen hervor, welche in den Tabellen (1) und (2) zusammengestellt sind. Dabei sind die Größen z bestimmt durch die Gleichungen:

$$z_1 = \frac{(\beta,\,\alpha)}{(0,\,\alpha)},\quad z_2 = \frac{(\alpha,\,\beta)}{(0,\,\beta)},\quad z_3 = \frac{(\beta-\alpha,\,\beta+\alpha)}{(0,\,\beta+\alpha)},$$

$$z_7 = \frac{(2\beta,\,\alpha)}{(0,\,\alpha)},\quad z_8 = \frac{(2\alpha,\,\beta)}{(0,\,\beta)},\quad z_9 = \frac{(2\beta-2\alpha,\,\beta+\alpha)}{(0,\,\beta+\alpha)},$$

$$z_4 = \frac{(\beta-2\alpha,\,\beta+2\alpha)}{(0,\,\beta+2\alpha)},\quad z_5 = \frac{(\beta+2\alpha,\,\beta-2\alpha)}{(0,\,\beta-2\alpha)},\quad z_6 = \frac{(\beta+\alpha,\,\beta-\alpha)}{(0,\,\beta-\alpha)},$$

$$z_{10} = \frac{(2\beta+\alpha,\,\beta+2\alpha)}{(0,\,\beta+2\alpha)},\quad z_{11} = \frac{(2\beta-\alpha,\,\beta-2\alpha)}{(0,\,\beta-2\alpha)},\quad z_{12} = \frac{(2\beta+2\alpha,\,\beta-\alpha)}{(0,\,\beta-\alpha)}.$$

Zwei Größen z von der Form $\frac{(\varrho,\,\sigma)}{(0,\,\sigma)}$, $\frac{(2\varrho,\,\sigma)}{(0,\,\sigma)}$ sollen korrespondierend heißen; solche korrespondierende z sind daher: z_1, z_7; z_2, z_8; z_3, z_9; z_4, z_{10}; z_5, z_{11}; z_6, z_{12}.

Es mögen jetzt die Grundgleichungen aufgestellt werden, aus denen sich bei passender Verfügung über die auftretenden Charakteristiken sämtliche Nullrelationen, welche in der Gleichung (B) enthalten sind, ergeben. Zu dem Ende setze man in der Gleichung (B) $u=v=0$ und verfüge über die Charakteristiken $[\zeta]$ und $[\varkappa]$ auf die unten stehenden neun Arten. Man setze:

$$\text{I. } [\zeta]=[0],\qquad \text{II. } [\zeta]=[\sigma],\qquad \text{III. } [\zeta]=[2\sigma],$$

und lasse dann jedesmal an Stelle der Charakteristik $[\varkappa]$ die Charakteristiken:

$$[0],\qquad [\sigma],\qquad [2\sigma]$$

treten, so gehen aus der Gleichung (B) neun Gleichungensysteme (B_0) hervor, welche sich in drei Gruppen teilen. Aus diesen neun Systemen (B_0) findet man speziellere Gleichungen, wenn man der Charakteristik $[\eta]$ die Werte $[0]$, $[\sigma]$, $[2\sigma]$ erteilt und beachtet, daß jede Gleichung, in welcher das Thetaprodukt fehlt, in die Gleichungsform (C) gehört. Man erhält auf diese Weise zehn Gleichungen, von denen jede eine bestimmte Gruppe von Nullrelationen vertritt. Diese zehn Gleichungen (B_0) haben folgende Gestalt:

(B_0^1):

$$\text{I.}\ \left\{(\sigma)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma+\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma-\varrho)^5\right\}(\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(0)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\varrho)^5\right\}(0,\varrho).$$

$$\text{II.}\ \left\{(0)^5+2(\varrho)^5+2(2\varrho)^5\right\}(\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(\sigma)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma+\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma-\varrho)^5\right\}(0,\varrho).$$

$$\text{III.}\ \left\{(\sigma)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma+\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma-\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(\sigma)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\sigma+\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma+2\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma-2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\sigma-\varrho)^5\right\}(0,\varrho).$$

$$\text{IV.}\ \left\{(2\sigma)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(2\sigma+\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\sigma+2\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\sigma-2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(2\sigma-\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(\sigma)^5+(\sigma+\varrho)^5+(\sigma+2\varrho)^5+(\sigma-2\varrho)^5+(\sigma-\varrho)^5\right\}(0,\varrho).$$

$$\text{V.}\ \left\{(\sigma)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma+\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma-\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(2\sigma)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\sigma+\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(2\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(2\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\sigma-\varrho)^5\right\}(0,\varrho).$$

(B_0^2):

$$\text{I.}\ \left\{(2\sigma)^5+(2\sigma+\varrho)^5+(2\sigma+2\varrho)^5+(2\sigma-2\varrho)^5+(2\sigma-\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(\sigma)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\sigma+\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma+2\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma-2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\sigma-\varrho)^5\right\}(\sigma,\varrho).$$

$$\text{II.}\ \left\{(\sigma)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma+\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma-\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(2\sigma)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(2\sigma+\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\sigma+2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\sigma-2\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(2\sigma-\varrho)^5\right\}(\sigma,\varrho).$$

$$\text{III.}\ \left\{(2\sigma)^5+(2\sigma+\varrho)^5+(2\sigma+2\varrho)^5+(2\sigma-2\varrho)^5+(2\sigma-\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(2\sigma)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\sigma+\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(2\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(2\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\sigma-\varrho)^5\right\}(\sigma,\varrho).$$

$$\text{IV.}\ \left\{(0)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(2\sigma)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\sigma+\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(2\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(2\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\sigma-\varrho)^5\right\}(\sigma,\varrho).$$

(B_0^3):

$$\left\{(0)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(2\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(2\varrho)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(\varrho)^5\right\}(\sigma,\varrho)$$
$$=\left\{(2\sigma)^5+\tau^{2\sigma|\varrho}(2\sigma+\varrho)^5+\tau^{\varrho|\sigma}(2\sigma+2\varrho)^5+\tau^{\sigma|\varrho}(2\sigma-2\varrho)^5+\tau^{2\varrho|\sigma}(2\sigma-\varrho)^5\right\}(2\sigma,\varrho).$$

Um aus diesen Gleichungen spezielle Relationen herzuleiten, hat man nur an Stelle des Charakteristikenpaares $[\varrho]$, $[\sigma]$ eines der folgenden sechs Charakteristikenpaare:

$$[\alpha], [\beta]; \ [\beta], [\alpha]; \ [\beta+\alpha], [\beta-\alpha]; \ [\beta+2\alpha], [\beta-2\alpha]; \ [\beta-2\alpha], [\beta+2\alpha];$$
$$[\beta-\alpha], [\beta+\alpha]$$

zu setzen.

Da in den obigen Gleichungen für die Charakteristik $[\sigma]$ auch $[2\sigma]$ gesetzt werden darf, und nur die Gleichung (B_0^2, II) durch diese Substitution in sich selbst übergeht, so ergeben sich aus der Gleichung (B) einhundertvierzehn spezielle Nullrelationen.

Macht man in der Gleichung (B_0^1, I) die erste der angegebenen sechs Substitutionen und drückt alsdann die Thetapotenzen durch die Größen z_1 und z_7 aus, so findet man, daß zwischen diesen Größen eine symmetrische Gleichung sechsten Grades besteht, nämlich:

$$z_1{}^5 + z_7{}^5 - 2\,z_1{}^3\,z_7{}^3 + z_1{}^2\,z_7{}^2 - z_1 z_7 = 0.$$

Drückt man in derselben mit Hilfe der linearen Gleichungen der Tabelle (1) und (2) die z_1 und z_7 durch irgend zwei andere korrespondierende Größen z aus, so findet man, daß zwischen je zwei solchen Größen dieselbe Beziehung besteht; es geht also die obige Gleichung durch diese linearen Substitutionen in sich selbst über.

Setzt man in der Gleichung (C) $v=0$ und $[\alpha]=[\varrho]$, so erhält man aus der dann entstehenden Gleichung durch die Substitutionen $[\eta]=[0]$, $[\varepsilon]=[\sigma]$ und $[\eta]=[\sigma]$, $[\varepsilon]=[2\sigma]$ die beiden Grundgleichungen:

$$(C_0)\quad \begin{cases} \text{I.} & (0)^5 + \tau^{2\sigma|\varrho}\,(\varrho)^5 + \tau^{\varrho|\sigma}\,(2\varrho)^5 + \tau^{\sigma|\varrho}\,(2\varrho)^5 + \tau^{2\varrho|\sigma}\,(\varrho)^5 \\ & = (\sigma)^5 + (\sigma+\varrho)^5 + (\sigma+2\varrho)^5 + (\sigma-2\varrho)^5 + (\sigma-\varrho)^5. \\ \text{II.} & (\sigma)^5 + \tau^{\varrho|\sigma}\,(\sigma+\varrho)^5 + \tau^{2\varrho|\sigma}(\sigma+2\varrho)^5 + \tau^{2\sigma|\varrho}(\sigma-2\varrho)^5 + \tau^{\sigma|\varrho}\,(\sigma-\varrho)^5 \\ & = (2\sigma)^5 + \tau^{2\sigma|\varrho}(2\sigma+\varrho)^5 + \tau^{\varrho|\sigma}(2\sigma+2\varrho)^5 + \tau^{\sigma|\varrho}(2\sigma-2\varrho)^5 + \tau^{2\varrho|\sigma}(2\sigma-\varrho)^5. \end{cases}$$

Läßt man in diesen Relationen an Stelle der Charakteristiken $[\varrho]$ und $[\sigma]$ nach einander dieselben speziellen Charakteristiken wie oben treten und berücksichtigt, daß in den Gleichungen (C_0) für $[\sigma]$ auch $[2\sigma]$ gesetzt werden darf, so erhält man vierundzwanzig Gleichungen (C_0), welche die sämtlichen in der Gleichung (C) enthaltenen speziellen Nullrelationen repräsentieren.

6.

Mit Hilfe der allgemeinen Gleichungen (A), (B) und (C) sollen jetzt die zwischen den Funktionen $\vartheta[\eta](v)$ bestehenden Beziehungen ermittelt werden. In den genannten Gleichungen kommen die fünfundzwanzig Thetapotenzen vom fünften Grad und die dreißig Thetaprodukte von der Form $\vartheta\{\varrho, \sigma\}(v)$ vor.

Bezeichnet $F_n(v)$ irgend eine einwertige und für endliche Werte von v auch stetige Funktion der komplexen Veränderlichen v, die für alle Werte von v den Gleichungen:

$$1)\ F_n(v+\pi i) = F_n(v)\, e^{2ng\pi i}, \quad 2)\ F_n(v+a) = F_n(v) e^{-2nv-na-2nh\pi i}$$

genügt, wobei n eine positive ganze Zahl, g, h beliebige Konstanten bezeichnen, und sind außerdem $F_n^{(1)}(v)$, $F_n^{(2)}(v)$ . . . $F_n^{(n)}(v)$ n andere einwertige und für endliches v auch stetige Funktionen der Veränderlichen v, die denselben Bedingungen (1) und (2) genügen und zudem linear unabhängig sind, so setzt sich aus diesen die ursprüngliche Funktion $F_n(v)$ in der Form:

$$F_n(v) = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} c_\nu F_n^{(\nu)}(v)$$

zusammen, wobei die c von v freie Größen sind*).

---

*) Prym, Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel und die Riemannsche Charakteristikentheorie. Leipzig 1882. S. 31.

Die oben erwähnten fünfundfünfzig Funktionen gehören zu derselben Gattung von Funktionen, es können daher durch fünf beliebig gewählte derselben, vorausgesetzt, daß sie linear unabhängig sind, die fünfzig übrigen derselben linear ausgedrückt werden. Je fünfzig solche Gleichungen bilden dann einen Ersatz der sämtlichen in den Formeln (A), (B), (C) enthaltenen Gleichungen. Diese Reduktion der sämtlichen Gleichungen auf fünfzig wird im folgenden auf zwei Weisen durchgeführt, das eine Mal, indem man fünf Produkte von der Form $\vartheta\{\varrho, \sigma\}(v)$, die zusammen alle fünfundzwanzig Charakteristiken enthalten, zu grunde legt, das andere Mal, indem man von fünf Thetapotenzen des fünften Grades ausgeht, deren Charakteristiken ein Fünfersystem bilden.

Bezeichnet man mit $[\alpha]$ eine beliebige der $[0]$ nicht kongruente Charakteristik, mit $[\beta]$ eine zweite, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent ist, dann können fünf Thetaprodukte, welche zusammen alle fünfundzwanzig Charakteristiken enthalten, bei passend gewählten $[\alpha]$ und $[\beta]$ in die Form $\vartheta\{0, \alpha\}(v)$, $\vartheta\{\beta, \alpha\}(v)$, $\vartheta\{2\beta, \alpha\}(v)$, $\vartheta\{-2\beta, \alpha\}(v)$, $\vartheta\{-\beta, \alpha\}(v)$ gebracht werden. Durch diese fünf Produkte als Grundfunktionen sollen jetzt die fünfzig übrigen linear ausgedrückt werden. Zu dem Zweck setze man in der Gleichung (A) $[\varkappa]=[0]$, $[\zeta]=[0]$ und lasse in der so entstehenden Formel

$$\sum_n \tau^{n\beta|2\eta}(\eta+n\beta, \alpha)\ \vartheta\{\eta, \beta\}(v) = \sum_n \tau^{n\beta|\eta}(0, \beta)\ \vartheta\{n\beta, \alpha\}(v)$$

$$n=0, 1, 2, -2, -1$$

an Stelle der Charakteristik $[\beta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[\beta+\alpha]$, $[\beta+2\alpha]$, $[\beta-2\alpha]$, $[\beta-\alpha]$ treten; es entstehen so aus der Gleichung (A) fünf neue Gleichungen. Diese sämtlichen fünf Grundgleichungen sind in der folgenden allgemeinen Gleichung:

$$\text{(I)}\qquad \Big(\sum_n \tau^{n(\beta+m\alpha)|2\eta}\,\tau^{2mn\alpha|\eta+n\beta}(\eta+n\beta, \alpha)\Big)\,\vartheta\{\eta, \beta+m\alpha\}(v)$$

$$= \sum_n \tau^{n(\beta+m\alpha)|\eta-2mn\alpha}(0, \beta+m\alpha)\,\vartheta\{n\beta, \alpha\}(v)$$

$$m, n=0, 1, 2, -2, -1$$

enthalten. Aus dieser Gleichung (I) folgen nämlich zunächst die fünf oben erwähnten Gleichungen $(I_1 - I_5)$, wenn man der Größe m die Werte 0, 1, 2, −2, −1 gibt. Aus jeder dieser fünf Gleichungen gehen wieder fünf neue hervor, wenn man über die Charakteristik $[\eta]$ besonders verfügt. So erhält man aus der Gleichung (I_1) die ersten fünf, wenn man an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach $[0]$, $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ setzt; dieselben drücken die Produkte von der Form $\vartheta\{n\alpha, \beta\}(v)$, $n=0, 1, 2, -2, -1$, durch die fünf Grundfunktionen aus. Die zweiten fünf Gleichungen ergeben sich aus der Gleichung (I_2), wenn an Stelle der Charakteristik $[\eta]$ die Charakteristiken $[0]$, $[\beta-\alpha]$, $[2\beta-2\alpha]$, $[-2\beta+2\alpha]$; $[-\beta+\alpha]$ treten; dieselben drücken die fünf Produkte von der Form $\vartheta\{n(\beta-\alpha), \beta+\alpha\}(v)$, $n=0,1,2,-2,-1$, durch die Grundfunktionen aus. Die Darstellung der Thetaprodukte von der Form $\vartheta\{n(\beta-2\alpha), \beta+2\alpha\}(v)$, $\vartheta\{n(\beta+2\alpha), \beta-2\alpha\}(v)$, $\vartheta\{n(\beta+\alpha), \beta-\alpha\}(v)$, $n=0, 1, 2, -2, -1$, durch die Grundfunktionen ergibt sich endlich, wenn man für die Charakteristik $[\eta]$ der Reihe nach

in Gleichung (I_3):	$[0]$, $[\beta-2\alpha]$, $[2\beta+\alpha]$, $[-2\beta-\alpha]$, $[-\beta+2\alpha]$,
in Gleichung (I_4):	$[0]$, $[\beta+2\alpha]$, $[2\beta-\alpha]$, $[-2\beta+\alpha]$, $[-\beta-2\alpha]$,
in Gleichung (I_5):	$[0]$, $[\beta+\alpha]$, $[2\beta+2\alpha]$, $[-2\beta-2\alpha]$, $[-\beta-\alpha]$

setzt.

Um eine beliebige Funktion $\vartheta^5\{\varrho\}(v)$ durch fünf Grundfunktionen auszudrücken, setze man in der Formel (B) $u=0$ und $[\varkappa]=[0]$, lasse alsdann an Stelle von $[\eta]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\beta]$, $[2\beta]$, $[-2\beta]$, $[-\beta]$ treten und addiere die linken und rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen. Es entsteht so die neue Formel:

$$\text{(II)} \qquad 5(\zeta, \alpha)\vartheta^5\{\zeta\}(v)$$

$$= \sum_m \sum_n \tau^{m\beta|\zeta}\tau^{n\alpha|\zeta + 2m\beta}(m\beta+n\alpha)^5 \vartheta\{m\beta, \alpha\}(v)$$

$$m, n = 0, 1, 2, -2, -1.$$

Diese Gleichung liefert die Ausdrücke für die fünfundzwanzig Thetapotenzen vom fünften Grad, wenn man darin für $[\zeta]$ der Reihe nach die in Art. 2 aufgeführten Charakteristiken setzt.

Die fünf in den Gleichungen (I) und (II) als Grundfunktionen benützten Thetaprodukte sind durch die Wahl der Charakteristik $[\alpha]$ bestimmt, insofern als die fünf Produkte, von fünften Einheitswurzeln abgesehen, immer wieder erhalten werden, wenn man an die Stelle von $[\beta]$ irgend eine andere der neunzehn bei bestimmten $[\alpha]$ zulässigen Charakteristiken setzt. Berücksichtigt man weiter, daß für $[\alpha]$ eine jede der vierundzwanzig der $[0]$ nicht kongruenten Charakteristiken gesetzt werden darf, und daß die Gleichungen, welche aus der Gleichung (I) abgeleitet werden können, nur ihre Reihenfolge ändern, die Gleichung (II) aber ungeändert bleibt, wenn man für $[\alpha]$: $[-\alpha]$ oder $[2\alpha]$ setzt, so erkennt man, daß es nur sechs verschiedene Systeme von je fünf Produkten der betrachteten Art gibt. Man erhält daher auch nur sechs wesentlich verschiedene Systeme der Gleichungen (I) und (II), wenn man an Stelle von $[\alpha]$ und $[\beta]$ auf alle möglichen Weisen spezielle Charakteristiken einführt. Betrachtet man $[\alpha]$ und $[\beta]$ als feste Charakteristiken, so erhält man die fünf noch übrigen Systeme, indem man $[\alpha]$, $[\beta]$ einmal durch $[\beta]$, $[\alpha]$, dann durch $[\beta+\alpha]$, $[\beta-\alpha]$, beziehungsweise $[\beta-\alpha]$, $[\beta+\alpha]$, schließlich durch $[\beta+2\alpha]$, $[\beta-2\alpha]$, beziehungsweise $[\beta-2\alpha]$, $[\beta+2\alpha]$ ersetzt.

Die Relationen, welche zwischen den fünf Grundfunktionen bestehen, und die Gleichung fünften Grades, welche drei solche Thetaprodukte verbindet, sollen erst bei der Behandlung des zu jenen Funktionen gehörigen Umkehrproblems abgeleitet werden. Hier möge gleich zur zweiten der gestellten Aufgaben übergegangen werden, nämlich die fünfzig in Art. 6 erwähnten Funktionen durch fünf Thetapotenzen auszudrücken, deren Charakteristiken ein Fünfersystem bilden.

7.

Zunächst soll eine Thetapotenz $\vartheta^5\{\varrho\}(v)$ durch fünf Thetapotenzen von der erwähnten Eigenschaft dargestellt werden. Bezeichnet man mit $[\eta]$ eine beliebige, mit $[\alpha]$ eine der $[0]$ nicht kongruente Charakteristik, so können fünf solche Thetapotenzen bei passender Wahl von $[\eta]$ und $[\alpha]$ stets in die Form $\vartheta^5\{\eta\}(v)$, $\vartheta^5\{\eta+\alpha\}(v)$, $\vartheta^5\{\eta+2\alpha\}(v)$, $\vartheta^5\{\eta-2\alpha\}(v)$, $\vartheta^5\{\eta-\alpha\}(v)$ gebracht werden.

Um durch diese eine andere fünfte Thetapotenz auszudrücken, setze man in der Formel (B) des Art. 4 $u=0$, $[\varkappa]=[0]$ und lasse an Stelle von $[\eta]$ nach einander die Charakteristiken $[\zeta+\eta]$, $[2\zeta+\eta]$, $[-2\zeta+\eta]$, $[-\zeta+\eta]$ treten, dann erhält man durch Addition der dadurch entstehenden fünf Gleichungen die folgende:

$$\text{(B}'\text{)} \qquad 5\tau^{\zeta|\eta}(\zeta,\alpha)\,\vartheta^5\{\zeta\}(v)$$

$$=\sum_m\sum_n \tau^{3[\eta+(m-2)\zeta]|n\alpha}(m\zeta+\eta+n\alpha)^5\vartheta\{m\zeta+\eta,\alpha\}(v)$$

$$m,\, n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1.$$

In dieser Gleichung drücke man die auf der rechten Seite auftretenden Thetaprodukte durch die fünf zu grunde gelegten Thetapotenzen aus; zu dem Zweck setze man in der Gleichung (B) $u=0$ und vertausche die Charakteristiken $[\eta]$ und $[\zeta]$ mit einander; in der so gewonnenen Gleichung lasse man endlich an Stelle des Charakteristikentripels $[\eta], [\zeta], [\varkappa]$ der Reihe nach die Charakteristikentripel: $[\zeta]$, $[\zeta]$, $[\eta-\zeta]$; $[0]$, $[\zeta]$, $[\eta]$; $[-\zeta]$, $[\zeta]$, $[\eta+\zeta]$; $[-2\zeta]$, $[\zeta]$, $[\eta+2\zeta]$; $[2\zeta]$, $[\zeta]$, $[\eta-2\zeta]$ treten; man erhält so fünf Gleichungen, welche sämtlich in der folgenden, allgemeinen Gleichung:

$$\Big(\sum_n \tau^{(m+2)\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5\Big)\,\vartheta\{m\zeta+\eta,\alpha\}(v)$$

$$=\sum_n \tau^{2\eta|n\alpha}\tau^{2m\zeta|\eta+2n\alpha}\big((m-1)\,\zeta,\alpha\big)\,\vartheta^5\{\eta+n\alpha\}(v)$$

$$m,\, n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1$$

enthalten sind. Setzt man die Werte für die Thetaprodukte aus der letzten Gleichung in die Gleichung (B′) ein, so erhält man die verlangte Relation. In dieser kann man noch den konstanten Größen, welche im zweiten, dritten, vierten und fünften Gliede auf der rechten Seite der durch obige Substitution umgeformten Gleichung (B′) auftreten, eine einfachere Gestalt geben. Zu dem Ende vertausche man wieder in der Gleichung (B) die Charakteristiken $[\eta]$ und $[\zeta]$ und mache $u=v=0$, dann gehen aus derselben, indem man an Stelle des Charakteristikentripels $[\eta], [\zeta], [\varkappa]$ die Charakteristikentripel: $[\zeta]$, $[\zeta+\eta]$, $[-\zeta-\eta]$; $[4\zeta]$, $[-2\zeta-\eta]$, $[\zeta+\eta]$; $[\zeta]$, $[-2\zeta+\eta]$, $[-\zeta-\eta]$; $[\zeta]$, $[-\zeta+\eta]$, $[-\zeta-\eta]$ setzt, die Relationen

$$\sum_n \tau^{2n\alpha|\eta-\zeta} \quad (\zeta+\eta+n\alpha)^5(0,\alpha) = \sum_n \tau^{2\eta|\zeta}\tau^{2n\alpha|\eta} \quad (\eta+n\alpha)^5(\zeta,\alpha),$$

$$\sum_n \tau^{2n\alpha|\eta} \quad (2\zeta+\eta+n\alpha)^5 \qquad = \sum_n \tau^{\zeta|\eta}\tau^{2n\alpha|\eta+2\zeta}(\eta+n\alpha)^5,$$

$$\sum_n \tau^{\eta+\zeta|2n\alpha}(2\zeta-\eta+n\alpha)^5(2\zeta,\alpha) = \sum_n \tau^{\eta|\zeta}\tau^{\eta-\zeta|2n\alpha} \quad (\eta+n\alpha)^5(\zeta,\alpha),$$

$$\sum_n \tau^{\eta+2\zeta|2n\alpha}(\zeta-\eta+n\alpha)^5(2\zeta,\alpha) = \sum_n \tau^{2\zeta|\eta}\tau^{\eta+\zeta|2n\alpha} \quad (\eta+n\alpha)^5(\zeta,\alpha)$$

$$n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1$$

hervor.

Führt man diese letzteren Werte noch in die Gleichung (B′) ein, so erhält man als Gleichung, durch welche eine Thetapotenz durch fünf Grund-Thetapotenzen ausgedrückt wird, die folgende:

$$\text{(III)} \qquad 5\tau^{\zeta|\eta}\,\vartheta^5\{\zeta\}(v)$$

$$= \sum_m \sum_n \tau^{2\eta|m\alpha}\tau^{mn\alpha|\zeta} c_n\,\vartheta^5\{\eta+m\alpha\}(v),$$

$$m,n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1,$$

wobei die Größen c definiert sind durch die Gleichungen:

$$c_0 = \frac{\sum_n \tau^{3(\eta-2\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha)^5}{\sum_n \tau^{2\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5},$$

$$c_1 = \frac{\sum_n \tau^{3\eta|n\alpha}(\eta+n\alpha)^5}{\sum_n \tau^{3\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5}, \qquad c_2 = \frac{\sum_n \tau^{3(\eta+2\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha)^5}{\sum_n \tau^{4\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5},$$

$$c_{-1} = \frac{\sum_n \tau^{2(\eta+\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha)^5}{\sum_n \tau^{\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5}, \qquad c_{-2} = \frac{\sum_n \tau^{2(\eta-\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha)^5}{\sum_n (\zeta+n\alpha)^5}$$

$$n=0,\,1,\,2,\,-2,\,-1.$$

Durch die Gleichung (III) kann man jede der zwanzig von den fünf Grundfunktionen verschiedenen Thetapotenzen als Funktion derselben ausdrücken; wird für $[\zeta]$ eine der Charakteristiken $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta+2\alpha]$, $[\eta-2\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ gesetzt, so geht die Gleichung (III) in eine Identität über.

8.

Es erübrigt noch eine Gleichung herzustellen, welche die dreißig Thetaprodukte durch die fünf zu grunde gelegten Thetapotenzen ausdrückt. Eine solche Gleichung geht unmittelbar aus der Gleichung (B) hervor, wenn man in derselben an Stelle von $[\varkappa]$, $[\eta]$, $[\zeta]$ beziehungsweise $[0]$, $[\zeta]$, $[\eta]$ setzt.

$$\text{(IV)}\qquad \Big(\sum_n \tau^{n\alpha|\eta+2\zeta}(\zeta+n\alpha)^5\Big)\,\vartheta\{\zeta,\alpha\}(v)$$

$$=\sum_n \tau^{\eta|\zeta}\,\tau^{n\alpha|2\eta+\zeta}(\eta,\alpha)\,\vartheta^5\{\eta+n\alpha\}(v)$$

$$n=0,1,2,-2,-1.$$

Diese Gleichung liefert aber nur die Ausdrücke für Thetaprodukte von der Form $\vartheta\{\zeta,\alpha\}(v)$. Irgend ein anderes der noch übrigen fünfundzwanzig Thetaprodukte kann, wenn man unter $[\varrho]$ eine Charakteristik versteht, welche keiner der fünf Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent ist, bei passend gewähltem $[\varrho]$ und $[\zeta]$ in der Form $\vartheta\{\zeta,\varrho\}(v)$ dargestellt werden.

Um diese Darstellung zu erhalten, setze man in der Formel (A) $[\varrho]$ für $[\alpha]$, $[\alpha]$ für $[\beta]$, $[\zeta]$ für $[\zeta+\varkappa]$, $[\zeta-\varkappa]$ für $[\zeta]$. Auf diese Weise geht aus der Gleichung (A) die folgende hervor:

$$\Big(\sum_n \tau^{2\varkappa|\eta}\,\tau^{n\alpha|\zeta-\varkappa+2\eta}(\eta+n\alpha,\varrho)\Big)\,\vartheta\{\varkappa+\eta,\alpha\}(v)$$

$$=\sum_n \tau^{2\varkappa-\eta|\zeta-\varkappa}\,\tau^{n\alpha|\eta+2\zeta+\varkappa}(\zeta-\varkappa,\alpha)\,\vartheta\{\zeta+n\alpha,\varrho\}(v)$$

$$n=0,1,2,-2,-1.$$

Setzt man in derselben für $[\varkappa]$ der Reihe nach die Charakteristiken $[0]$, $[\zeta]$, $[2\zeta]$, $[-2\zeta]$, $[-\zeta]$, addiert die entstehenden fünf Gleichungen und substituiert in der dadurch entstandenen neuen Gleichung für die auftretenden fünf Thetaprodukte die im vorigen Artikel dafür aufgestellten Ausdrücke, so erhält man unter Berücksichtigung der auf Seite 23 angegebenen Beziehungen die Gleichung:

$$\text{(IV}'\text{)}\qquad 5\tau^{\zeta|\eta}\vartheta\{\zeta,\varrho\}(v)$$

$$=\sum_m\sum_n \tau^{2\eta|m\alpha}\tau^{mn\alpha|\zeta}c'_n\vartheta^5\{\eta+m\alpha\}(v)$$

$$m, n = 0, 1, 2, -2, -1,$$

wobei die Größen c' die folgenden Werte besitzen:

$$c'_0=\frac{\sum\limits_n \tau^{3(\eta-2\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha,\varrho)}{\sum\limits_n \tau^{2\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5},$$

$$c'_1=\frac{\sum\limits_n \tau^{3\eta|n\alpha}(\eta+n\alpha,\varrho)}{\sum\limits_n \tau^{3\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5},\qquad c'_2=\frac{\sum\limits_n \tau^{3(\eta+2\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha,\varrho)}{\sum\limits_n \tau^{4\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5},$$

$$c'_{-1}=\frac{\sum\limits_n \tau^{2(\eta+\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha,\varrho)}{\sum\limits_n \tau^{\zeta|n\alpha}(\zeta+n\alpha)^5},\qquad c'_{-2}=\frac{\sum\limits_n \tau^{2(\eta-\zeta)|n\alpha}(\eta+n\alpha,\varrho)}{\sum\limits_n (\zeta+n\alpha)^5}$$

$$n = 0, 1, 2, -2, -1.$$

Die Gleichung (IV′) gilt nur, so lange die Charakteristik $[\zeta]$ von $[0]$ verschieden ist.

Die Systeme der Gleichungen (III), (IV) und (IV′) sind durch die fünf Grundthetapotenzen mit den Charakteristiken $[\eta]$, $[\eta+\alpha]$, $[\eta+2\alpha]$, $[\eta-2\alpha]$, $[\eta-\alpha]$ vollständig bestimmt. Diese fünf Charakteristiken bilden immer ein Fünfersystem, und es gibt daher, da dreißig Fünfersysteme vorhanden sind, dreißig Gleichungensysteme (III), (IV) und (IV′). Bezeichnet $[\beta]$ eine Charakteristik, welche keiner der Charakteristiken $[0]$, $[\alpha]$, $[2\alpha]$, $[-2\alpha]$, $[-\alpha]$ kongruent ist, so gehen aus jeder der hier aufgestellten Gleichungen die dreißig Systeme hervor, wenn man in ihnen an Stelle der Charakteristikenpaare $[\eta]$, $[\alpha]$ die Charakteristikenpaare:

$$\begin{gathered}
[0],\ [\alpha];\quad [\beta],\ [\alpha];\quad [2\beta],\ [\alpha];\\
[0],\ [\beta];\quad [\alpha],\ [\beta];\quad [2\alpha],\ [\beta];\\
[-2\beta],\ [\alpha];\quad [-\beta],\ [\alpha];\\
[-2\alpha],\ [\beta];\quad [-\alpha],\ [\beta];
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
[0],\ [\beta+\alpha];\quad [\beta-\alpha],\ [\beta+\alpha];\quad [2\beta-2\alpha],\ [\beta+\alpha];\\
[0],\ [\beta+2\alpha];\quad [\beta-2\alpha],\ [\beta+2\alpha];\quad [2\beta+\alpha],\ [\beta+2\alpha];\\
[-2\beta+2\alpha],\ [\beta+\alpha];\quad [-\beta+\alpha],\ [\beta+\alpha];\\
[-2\beta-\alpha],\ [\beta+2\alpha];\quad [-\beta+2\alpha],\ [\beta+2\alpha]
\end{gathered}$$

treten läßt. Durch diese Substitutionen sind zwanzig Systeme bestimmt. Die übrigen zehn Systeme erhält man, wenn man in den letzten zehn Systemen an Stelle der Charakteristik $[\alpha]$ die Charakteristik $[-\alpha]$ setzt.

Tabellen

zu den Nullrelationen der Gleichung (A).

(Tabelle I.) (A_0^1)

$$1 + \nu_1 z_1 + \nu_2 z_7 = z_2 \left(1 + 2 z_1 + 2 z_7\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_1 z_1 + \tau \nu_2 z_7 = \tau^2 z_4 \left(1 + 2\tau^4 z_1 + 2\tau z_7\right)$$
$$1 + \tau \nu_1 z_1 + \tau^4 \nu_2 z_7 = \tau^3 z_5 \left(1 + 2\tau z_1 + 2\tau^4 z_7\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_1 z_1 + \tau^3 \nu_2 z_7 = \tau^4 z_9 \left(1 + 2\tau^2 z_1 + 2\tau^3 z_7\right)$$
$$1 + \tau^3 \nu_1 z_1 + \tau^2 \nu_2 z_7 = \tau z_{12} \left(1 + 2\tau^3 z_1 + 2\tau^2 z_7\right)$$

$$1 + \tau^3 \nu_1 z_2 + \tau^2 \nu_2 z_8 = \tau z_9 \left(1 + 2\tau^3 z_2 + 2\tau^2 z_8\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_1 z_2 + \tau \nu_2 z_8 = \tau^2 z_{10} \left(1 + 2\tau^4 z_2 + 2\tau z_8\right)$$
$$1 + \tau \nu_1 z_2 + \tau^4 \nu_2 z_8 = \tau^3 z_{11} \left(1 + 2\tau z_2 + 2\tau^4 z_8\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_1 z_2 + \tau^3 \nu_2 z_8 = \tau^4 z_{12} \left(1 + 2\tau^2 z_2 + 2\tau^3 z_8\right)$$

$$1 + \tau^2 \nu_1 z_3 + \tau^3 \nu_2 z_9 = \tau^4 z_5 \left(1 + 2\tau^2 z_3 + 2\tau^3 z_9\right)$$
$$1 + \tau^3 \nu_1 z_3 + \tau^2 \nu_2 z_9 = \tau z_{10} \left(1 + 2\tau^3 z_3 + 2\tau^2 z_9\right)$$
$$1 + \nu_1 z_3 + \nu_2 z_9 = z_{12} \left(1 + 2 z_3 + 2 z_9\right)$$

$$1 + \tau^3 \nu_1 z_6 + \tau^2 \nu_2 z_{12} = \tau z_4 \left(1 + 2\tau^3 z_6 + 2\tau^2 z_{12}\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_1 z_6 + \tau^3 \nu_2 z_{12} = \tau^4 z_{11} \left(1 + 2\tau^2 z_6 + 2\tau^3 z_{12}\right)$$

$$1 + \nu_1 z_4 + \nu_2 z_{10} = z_5 \left(1 + 2 z_4 + 2 z_{10}\right)$$

Anmerkung. Im folgenden ist zur Abkürzung $\tau^{n\alpha|\beta} = \tau^{n}$ gesetzt.

(A_0^1) (Tabelle I.)

$$1 + \nu_2 z_1 + \nu_1 z_7 = z_8 \left(1 + 2 z_1 + 2 z_7\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_2 z_1 + \tau \nu_1 z_7 = \tau^3 z_{10} \left(1 + 2\tau^4 z_1 + 2\tau z_7\right)$$
$$1 + \tau \nu_2 z_1 + \tau^4 \nu_1 z_7 = \tau^2 z_{11} \left(1 + 2\tau z_1 + 2\tau^4 z_7\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_2 z_1 + \tau^3 \nu_1 z_7 = \tau z_3 \left(1 + 2\tau^2 z_1 + 2\tau^3 z_7\right)$$
$$1 + \tau^3 \nu_2 z_1 + \tau^2 \nu_1 z_7 = \tau^4 z_6 \left(1 + 2\tau^3 z_1 + 2\tau^2 z_7\right)$$

$$1 + \tau^3 \nu_2 z_2 + \tau^2 \nu_1 z_8 = \tau^4 z_3 \left(1 + 2\tau^3 z_2 + 2\tau^2 z_8\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_2 z_2 + \tau \nu_1 z_8 = \tau^3 z_4 \left(1 + 2\tau^4 z_2 + 2\tau z_8\right)$$
$$1 + \tau \nu_2 z_2 + \tau^4 \nu_1 z_8 = \tau^2 z_5 \left(1 + 2\tau z_2 + 2\tau^4 z_8\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_2 z_2 + \tau^3 \nu_1 z_8 = \tau z_6 \left(1 + 2\tau^2 z_2 + 2\tau^3 z_8\right)$$

$$1 + \tau^2 \nu_2 z_3 + \tau^3 \nu_1 z_9 = \tau z_{11} \left(1 + 2\tau^2 z_3 + 2\tau^3 z_9\right)$$
$$1 + \tau^3 \nu_2 z_3 + \tau^2 \nu_1 z_9 = \tau^4 z_4 \left(1 + 2\tau^3 z_3 + 2\tau^2 z_9\right)$$
$$1 + \nu_2 z_3 + \nu_1 z_9 = z_6 \left(1 + 2 z_3 + 2 z_9\right)$$

$$1 + \tau^3 \nu_2 z_6 + \tau^2 \nu_1 z_{12} = \tau^4 z_{10} \left(1 + 2\tau^3 z_6 + 2\tau^2 z_{12}\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_2 z_6 + \tau^3 \nu_1 z_{12} = \tau z_5 \left(1 + 2\tau^2 z_6 + 2\tau^3 z_{12}\right)$$

$$1 + \nu_2 z_4 + \nu_1 z_{10} = z_{11} \left(1 + 2 z_4 + 2 z_{10}\right)$$

(Tabelle II.) (A_0^2)

$$1 + \nu_1 z_2 + \nu_2 z_8 = z_1 \left(1 + 2 z_2 + 2 z_8\right)$$

$$1 + \tau \nu_1 z_3 + \tau^4 \nu_2 z_9 = \tau^3 z_7 \left(1 + 2\tau z_3 + 2\tau^4 z_9\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_1 z_3 + \tau \nu_2 z_9 = \tau^2 z_8 \left(1 + 2\tau^4 z_3 + 2\tau z_9\right)$$

$$1 + \tau^4 \nu_1 z_6 + \tau \nu_2 z_{12} = \tau^2 z_7 \left(1 + 2\tau^4 z_6 + 2\tau z_{12}\right)$$
$$1 + \tau \nu_1 z_6 + \tau^4 \nu_2 z_{12} = \tau^3 z_8 \left(1 + 2\tau z_6 + 2\tau^4 z_{12}\right)$$
$$1 + \nu_1 z_6 + \nu_2 z_{12} = z_9 \left(1 + 2 z_6 + 2 z_{12}\right)$$

$$1 + \tau^2 \nu_1 z_4 + \tau^3 \nu_2 z_{10} = \tau^4 z_1 \left(1 + 2\tau^2 z_4 + 2\tau^3 z_{10}\right)$$
$$1 + \tau \nu_1 z_4 + \tau^4 \nu_2 z_{10} = \tau^3 z_6 \left(1 + 2\tau z_4 + 2\tau^4 z_{10}\right)$$
$$1 + \tau^3 \nu_1 z_4 + \tau^2 \nu_2 z_{10} = \tau z_8 \left(1 + 2\tau^3 z_4 + 2\tau^2 z_{10}\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_1 z_4 + \tau \nu_2 z_{10} = \tau^2 z_9 \left(1 + 2\tau^4 z_4 + 2\tau z_{10}\right)$$

$$1 + \tau^3 \nu_1 z_5 + \tau^2 \nu_2 z_{11} = \tau z_1 \left(1 + 2\tau^3 z_5 + 2\tau^2 z_{11}\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_1 z_5 + \tau \nu_2 z_{11} = \tau^2 z_3 \left(1 + 2\tau^4 z_5 + 2\tau z_{11}\right)$$
$$1 + \nu_1 z_5 + \nu_2 z_{11} = z_4 \left(1 + 2 z_5 + 2 z_{11}\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_1 z_5 + \tau^3 \nu_2 z_{11} = \tau^4 z_8 \left(1 + 2\tau^2 z_5 + 2\tau^3 z_{11}\right)$$
$$1 + \tau \nu_1 z_5 + \tau^4 \nu_2 z_{11} = \tau^3 z_{12} \left(1 + 2\tau z_5 + 2\tau^4 z_{11}\right)$$

(A_0^2) (Tabelle II.)

$$1 + \nu_2 z_2 + \nu_1 z_8 = z_7 \left(1 + 2 z_2 + 2 z_8\right)$$

$$1 + \tau \nu_2 z_3 + \tau^4 \nu_1 z_9 = \tau^2 z_1 \left(1 + 2\tau z_3 + 2\tau^4 z_9\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_2 z_3 + \tau \nu_1 z_9 = \tau^3 z_2 \left(1 + 2\tau^4 z_3 + 2\tau z_9\right)$$

$$1 + \tau^4 \nu_2 z_6 + \tau \nu_1 z_{12} = \tau^3 z_1 \left(1 + 2\tau^4 z_6 + 2\tau z_{12}\right)$$
$$1 + \tau \nu_2 z_6 + \tau^4 \nu_1 z_{12} = \tau^2 z_2 \left(1 + 2\tau z_6 + 2\tau^4 z_{12}\right)$$
$$1 + \nu_2 z_6 + \nu_1 z_{12} = z_3 \left(1 + 2 z_6 + 2 z_{12}\right)$$

$$1 + \tau^2 \nu_2 z_4 + \tau^3 \nu_1 z_{10} = \tau z_7 \left(1 + 2\tau^2 z_4 + 2\tau^3 z_{10}\right)$$
$$1 + \tau \nu_2 z_4 + \tau^4 \nu_1 z_{10} = \tau^2 z_{12} \left(1 + 2\tau z_4 + 2\tau^4 z_{10}\right)$$
$$1 + \tau^3 \nu_2 z_4 + \tau^2 \nu_1 z_{10} = \tau^4 z_2 \left(1 + 2\tau^3 z_4 + 2\tau^2 z_{10}\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_2 z_4 + \tau \nu_1 z_{10} = \tau^3 z_3 \left(1 + 2\tau^4 z_4 + 2\tau z_{10}\right)$$

$$1 + \tau^3 \nu_2 z_5 + \tau^2 \nu_1 z_{11} = \tau^4 z_7 \left(1 + 2\tau^3 z_5 + 2\tau^2 z_{11}\right)$$
$$1 + \tau^4 \nu_2 z_5 + \tau \nu_1 z_{11} = \tau^3 z_9 \left(1 + 2\tau^4 z_5 + 2\tau z_{11}\right)$$
$$1 + \nu_2 z_5 + \nu_1 z_{11} = z_{10} \left(1 + 2 z_5 + 2 z_{11}\right)$$
$$1 + \tau^2 \nu_2 z_5 + \tau^3 \nu_1 z_{11} = \tau z_3 \left(1 + 2\tau^2 z_5 + 2\tau^3 z_{11}\right)$$
$$1 + \tau \nu_2 z_5 + \tau^4 \nu_1 z_{11} = \tau^2 z_6 \left(1 + 2\tau z_5 + 2\tau^4 z_{11}\right).$$