Leitfaden

zum Unterricht in der

projektivischen Geometrie.

Nebst zahlreichen Aufgaben.

Dr. J. Sachs.
Professor am Großh. Gymnasium in Baden-Baden.

Bremerhaven und Leipzig.
Verlag von L. v. Vangerow.
1907.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000298344

IVI

Leitfaden

zum Unterricht in der

projektivischen Geometrie.

Nebst zahlreichen Aufgaben.

Dr. J. Sachs.

Professor am Großh. Gymnasium in Baden-Baden.

XII 125.

Lehrerbibliothek der
№ 1890
König Wilhelms-Schule Reichenbach

Bremerhaven und Leipzig.

Verlag von L. v. Vangerow.

1907.

Wr/61

KD 515(075.3)

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW
II 31378

Akc. Nr. 4141/49

Vorwort.

Für die projektivische Geometrie wird hiermit ein Lehrgang in Vorschlag gebracht, wie er aus einer zwanzigjährigen Unterrichtserteilung dem Verfasser herausgewachsen ist unter Anlehnung an Reye, Thomae u. a. Da sich das Büchlein nur als „Leitfaden“ vorstellt, so bleibt jedem Kollegen die volle Freiheit gewahrt zur Erweiterung oder Kürzung, wie ja auch vielleicht mancher da oder dort etwas zu viel oder zu wenig*) vorzufinden vermeint.

Ohne den von Felix Klein betonten Grundsatz irgendwie anzutasten, daß für die Hochschul-Mathematik die passende Mischung der analytischen und synthetischen Methode den raschesten Fortschritt gewährleistet, — darf für den Anfänger daran festgehalten werden, daß ein auf durchaus eigenen Füßen stehender Lehrgang der projektivischen Geometrie in pädagogischer und ästhetischer Hinsicht die höchsten Vorzüge aufweist. In wenigen Monaten gelangt der Schüler auf völlig neuem Wege zu geometrischen Erkenntnissen, zu denen ihn ein mehrjähriger Unterricht in Planimetrie nicht vordringen ließ; Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens, Ausbildung des Raumsinnes und der geometrischen Phantasie wird kaum sonstwo in gleichem Maße erzielt, jedenfalls nirgends die Ausnahmslosigkeit der geometrischen Durchführungen so lebhaft vor Augen geführt, als in dem selbständigen Aufbau der neueren Geometrie: sie bildet den „Königsweg zur Mathematik“ (Hankel).

---

*) Bedenken in dieser Richtung dürften ihre Lösung finden durch das im gleichen Verlage erschienene „Lehrbuch der projektivischen Geometrie“ desselben Verfassers.

Inhalt:

Projektivische Geometrie,

neuere (moderne) G., (1795—1847)	synthetische (zeichnende) G.,	Geometrie der Lage,
	[im Gegensatz gegen die	
alte (antike) G., (um 250 vor Chr.)	analytische (rechnende) Geometrie,	Geometrie des Maßes.]

Erster Abschnitt.

Grundbegriffe der projektivischen Geometrie.

Kapitel I.

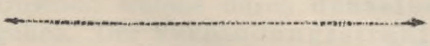
Das „Beziehen" der Grundgebilde aufeinander durch Projektion: Die projektivische Verwandtschaft.

§ 1. Die **Elemente** der projektivischen Geometrie sind: der Punkt, — die Gerade oder der Strahl, — die Ebene. Eine Gesamtheit von ununterbrochen aufeinanderfolgenden Elementen heißt ein Gebilde.

Grundgebilde sind:

die Punktreihe oder die Gesamtheit der eine gedachte gerade Linie erfüllenden Punkte. Die gerade Linie heißt Träger t der Punktreihe; ein einziger aller ihrer Punkte

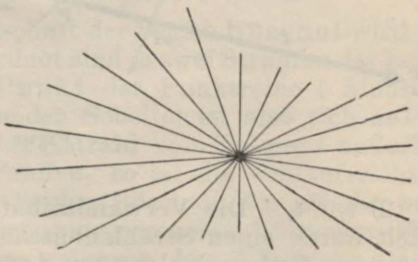
Figur 1.



Punktreihe 1. Ordnung.

der Strahlenbüschel oder die Gesamtheit der durch einen gedachten Punkt gehenden Geraden der Zeichenebene (Jakob Steiner, 1832). Der

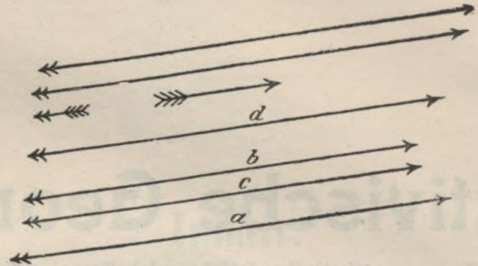
Figur 2.



Strahlenbüschel I. Klasse.

liegt unendlich fern, so daß durch seine Vermittlung die Gerade als eine (im Unendlichen) geschlossene Linie aufgefaßt werden kann.

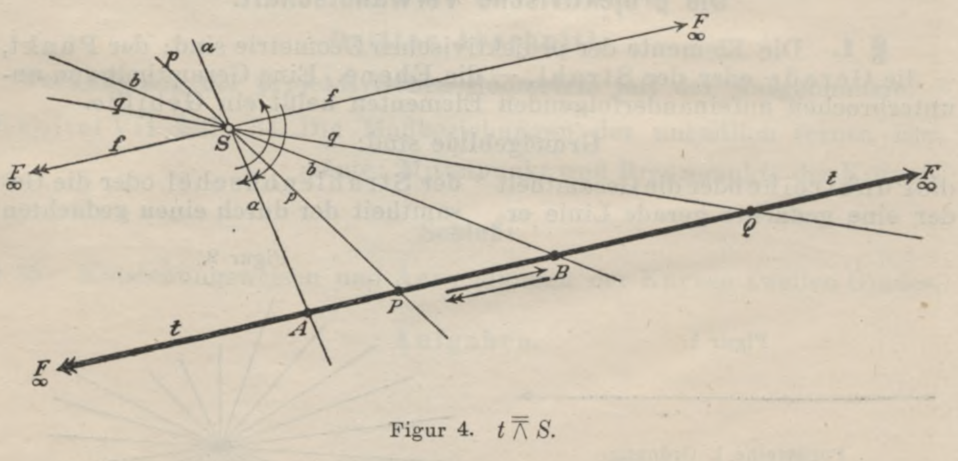
Punkt heißt Scheitel S des Strahlen-Büschels; liegt der Scheitel unendlich fern, so entsteht ein Parallelstrahlenbüschel.



Figur 3. Parallelstrahlenbüschel.

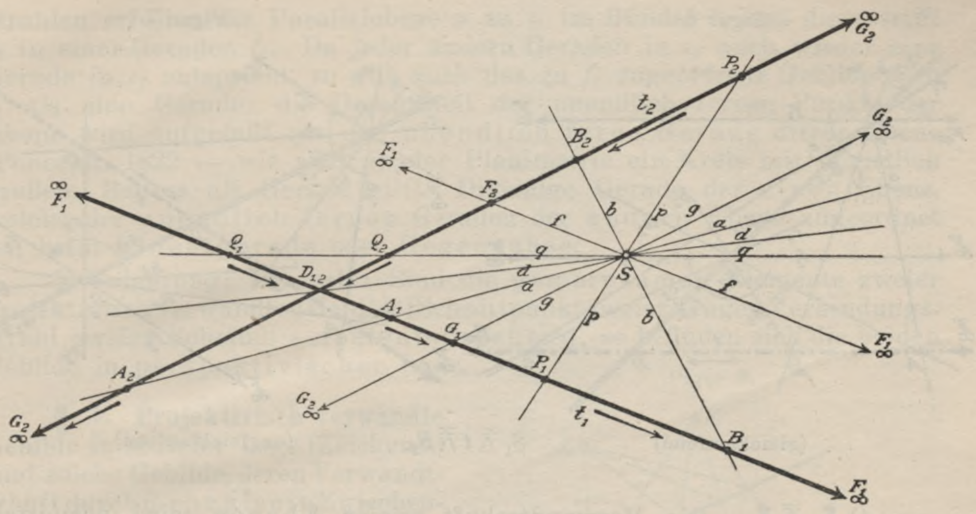
§ 2. Projektivisch verwandte Gebilde in perspektivischer Lage (Zeichen $\overline{\wedge}$):

1) $t \overline{\wedge} S$. Jedem Punkt der Punktreihe t entspricht als zugeordneter Strahl im Büschel S seine Verbindungsgerade mit dem Scheitel, — jedem Strahl des Büschels S entspricht als zugeordneter Punkt in der Punktreihe t sein Schnittpunkt mit dem Träger. (Der einzige unendlich ferne Punkt $F\infty$ auf t und der einzige Parallelstrahl $f \parallel t$ durch S sind zugeordnete Elemente.) Jeder Punkt von t liegt auf dem zugeordneten Strahl durch S, jeder Strahl von S geht durch den zugeordneten Punkt auf t. Den Punkten innerhalb bezw. außerhalb einer Strecke AB auf t entsprechen die Strahlen im Innenwinkel (und seinem Scheitelwinkel) bezw. in den Außenwinkeln der Strahlen ab durch S. Durchläuft der Punkt die Punktreihe t in der Richtung APB bezw. umgekehrt, so dreht sich der zugeordnete Strahl in der Umlaufsrichtung entgegen bezw. mit dem Uhrzeiger um den Scheitel S.



Figur 4. $t \overline{\wedge} S$.

2) $t_1 \overline{\wedge} t_2$. Die Verwandtschaft der beiden Punktreihen wird vermittelt durch einen Strahlenbüschel S. Zugeordnet sind je zwei Punkte der beiden Reihen, welche auf demselben Strahl des Büschels S liegen. Der Schnittpunkt D beider Träger ist also sich selbstentsprechend; derjenige Punkt der einen Punktreihe, welcher dem unendlich fernen Punkte der andern zugeordnet ist, heißt **F**luchtpunkt oder **G**egenpunkt: F_2 zu $F_1\infty$, G_1 zu $G_2\infty$.



Figur 5. $t_1 \overline{\barwedge} S \overline{\barwedge} t_2$.

Zugeordnete Elemente müssen in allen drei Gebilden in derselben Reihenfolge der Buchstaben aufeinanderfolgen, z. B. in Figur 5 wie *d a g p b f q d*, und zwar die Punkte

auf t_1	auf t_2
von D_1 über A_1 nach G_1 (vom Schnittpunkt D fort),	von D_2 über A_2 nach ∞G_2 (vom Schnittpunkt D fort),
von G_1 über P_1, B_1 nach ∞F_1 (von D fort),	von ∞G_2 über P_2, B_2 nach F_2 (gegen D hin),
von ∞F_1 über Q_1 nach D_1 (gegen D hin).	von F_2 über Q_2 nach D_2 (gegen D hin).

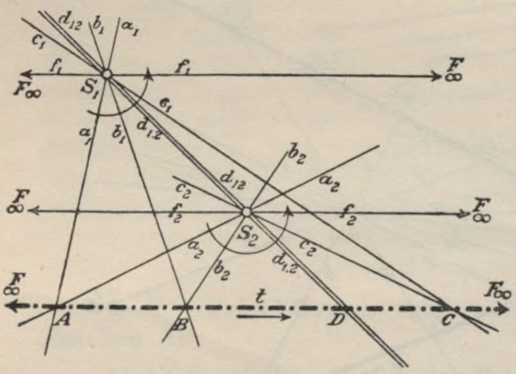
Die Richtungen von und nach D wechseln beim Überschreiten eines Fluchtpunktes zugleich mit dem Wechsel von der Projektion durch gleiche zu der durch entgegengesetzte Halbstrahlen des Büschels S. Der Scheitel S liegt in demjenigen Winkel (Scheitelwinkel) der Träger, auf dessen Schenkeln die beiden Punktreihen entgegengesetzte Durchlaufungsrichtung zum Schnittpunkt aufweisen.

Sind umgekehrt zwei projektivisch verwandte Punktreihen in perspektivischer Lage gegeben, so müssen die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte durch einen Punkt gehen, ihre Gesamtheit bildet einen Strahlenbüschel erster Klasse.

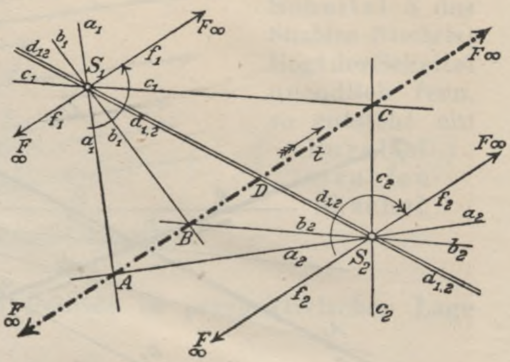
3) $S_1 \overline{\barwedge} S_2$ (Fig. 6, 7). Die Verwandtschaft der beiden Büschel wird vermittelt durch eine Punktreihe t. Zugeordnet sind je zwei Strahlen der beiden Büschel, welche durch denselben Punkt der Punktreihe t hindurchgehen. Der Verbindungsstrahl d beider Scheitel ist also sich selbstentsprechend. Wird dieser Verbindungsstrahl vom Träger t außerhalb bezw. innerhalb der Strecke $S_1 S_2$ getroffen, so ist die Umlaufsrichtung der entsprechenden Strahlen in den beiden Büscheln die gleiche bezw. die entgegengesetzte, — beide mit oder beide entgegen dem Uhrzeiger (Fig. 6) bezw. der eine Büschel mit, der andere entgegen dem Uhrzeiger (Fig. 7).

Sind umgekehrt zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel in perspektivischer Lage gegeben, so müssen die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Strahlen auf einer Geraden liegen, ihre Gesamtheit bildet eine Punktreihe erster Ordnung.

Figur 6.



Figur 7.

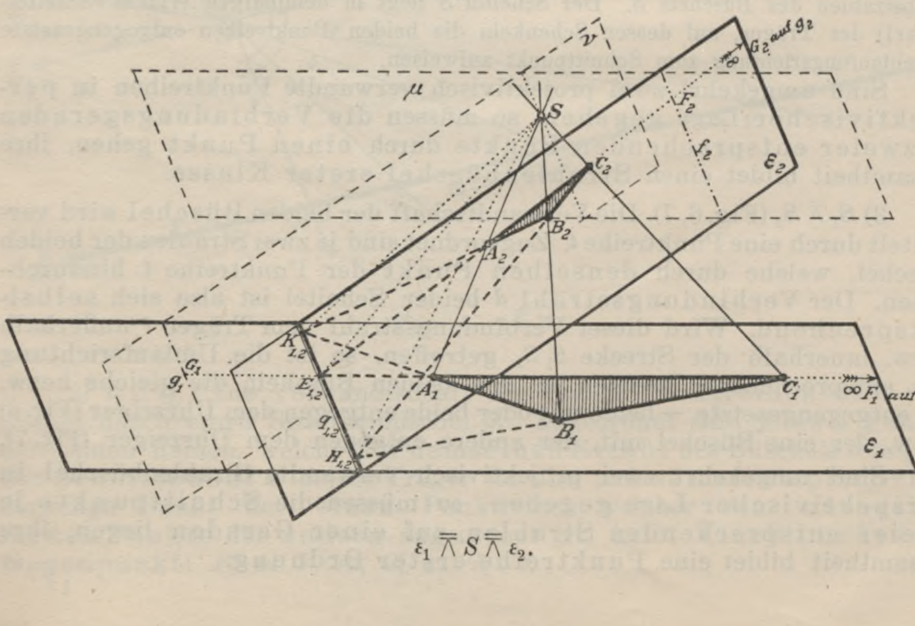


(gleichlaufend) $S_1 \overline{\barwedge}\, t \,\overline{\barwedge}\, S_2$. (ungleichlaufend)

4) $\mathfrak{E}_1 \overline{\barwedge} \mathfrak{E}_2$. Die Verwandtschaft zweier Ebenen wird vermittelt durch einen Strahlenbündel (Staudt, 1847), nämlich die Gesamtheit aller durch einen Punkt S im Raume gehenden Geraden und Ebenen. Zugeordnet sind je zwei Punkte der beiden Ebenen, welche durch denselben Strahl des Bündels, und je zwei Strahlen der beiden Ebenen, welche durch dieselbe Ebene des Bündels ausgeschnitten werden. Jeder auf der Schnittgeraden q beider Ebenen liegende Punkt ist also sich selbstentsprechend, die Schnittgerade q als Strahl ist sich selbstentsprechend; je zwei zugeordnete Geraden beider Ebenen haben als Schnittpunkt einen Punkt dieser Schnittkante.

Sämtliche unendlich fernen Punkte der einen Ebene ε_1 werden projiziert durch Parallelstrahlen des Bündels S zu ε_1; diese Parallel-

Figur 8.



$\varepsilon_1 \overline{\barwedge}\, S \,\overline{\barwedge}\, \varepsilon_2$.

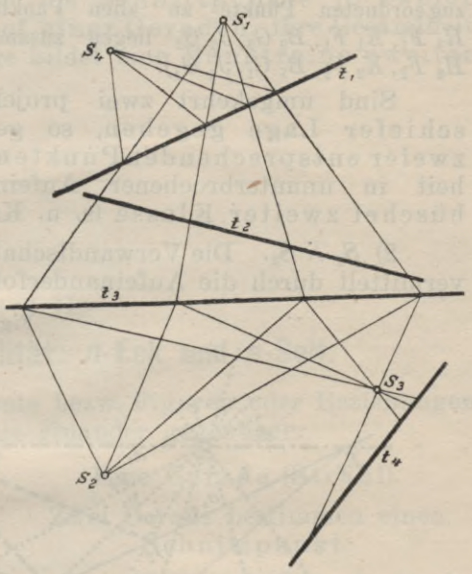
strahlen erfüllen die Parallelebene μ zu ε_1 im Bündel S, und diese trifft ε_2 in einer Geraden f_2. Da jeder andern Geraden in ε_2 auch wieder eine Gerade in ε_1 entspricht, so gilt auch das zu f_2 zugeordnete Gebilde f_1 in ε_1 als eine Gerade: die Gesamtheit der unendlich fernen Punkte der Ebene wird aufgefaßt als die unendlich ferne Gerade dieser Ebene (Poncelet, 1822 — wie auch in der Planimetrie ein Kreis mit unendlich großem Radius als Gerade gilt). Diejenige Gerade der einen Ebene, welche der unendlich fernen Geraden der andern Ebene zugeordnet ist, heißt Fluchtgerade oder Gegenachse.

5) Folgerung: **Lehrsatz:** Sind die gemeinsamen Elemente zweier projektivisch verwandten Gebilde (Schnittpunkt zweier Träger, Verbindungsstrahl zweier Scheitel) selbstentsprechend, so befinden sich die beiden Gebilde in perspektivischer Lage.

§ 3. Projektivisch verwandte Gebilde in schiefer Lage (Zeichen $\overline{\wedge}$) sind solche Gebilde, deren Verwandtschaft durch mehr als ein Zwischengebilde vermittelt werden muß.

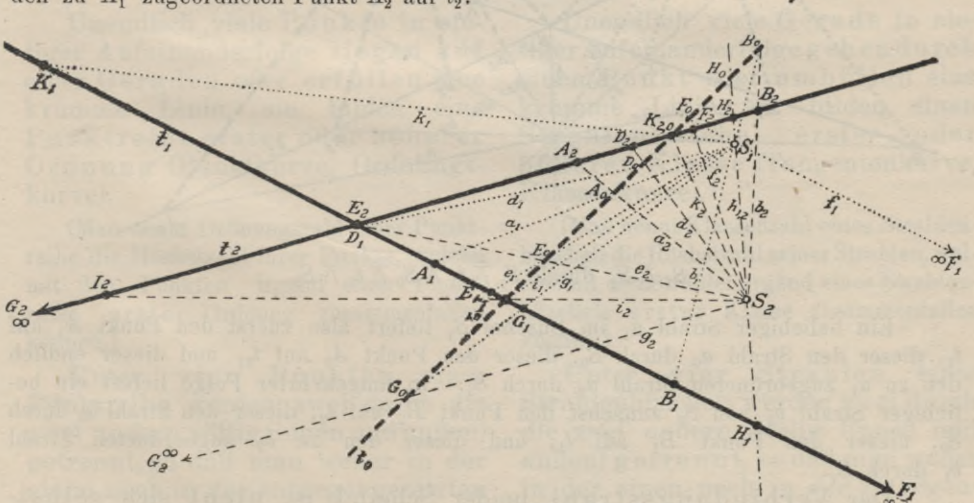
So sind in Figur 9 $t_1 \overline{\wedge} t_4$ und $t_2 \overline{\wedge} t_4$, aber $t_1 \overline{\overline{\wedge}} t_2$, $t_3 \overline{\overline{\wedge}} t_4$ usw.; ebenso $S_4 \overline{\wedge} S_2$ und $S_4 \overline{\wedge} S_3$, aber $S_1 \overline{\overline{\wedge}} S_3$, $S_1 \overline{\overline{\wedge}} S_4$ u. s. w.; endlich $t_1 \overline{\wedge} S_2$, $S_4 \overline{\wedge} t_4$, aber $t_3 \overline{\overline{\wedge}} S_1$ usw.

Figur 9.



1) $t_1 \overline{\wedge} t_2$. Die Verwandtschaft der beiden Punktreihen wird vermittelt durch die Aufeinanderfolge der Projektionen: $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_0 \overline{\overline{\wedge}} S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2$.

Ein beliebiger Punkt A_1 der Reihe t_1 liefert also zuerst den Strahl a_1 durch S_1, dieser den Punkt A_0 auf t_0, dieser den Strahl a_2 durch S_2, und dieser endlich den zu A_1 zugeordneten Punkt A_2 auf t_2.



Figur 10. $t_1 \overline{\wedge} t_2$ durch $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_0 \overline{\overline{\wedge}} S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2$.

In umgekehrter Folge liefert ein beliebiger Punkt B_2 von t_2 zunächst den Strahl b_2 durch S_2, dieser den Punkt B_0 auf t_0, dieser den Strahl b_1 durch S_1, und dieser den zu B_2 zugeordneten Punkt B_1 auf t_1.

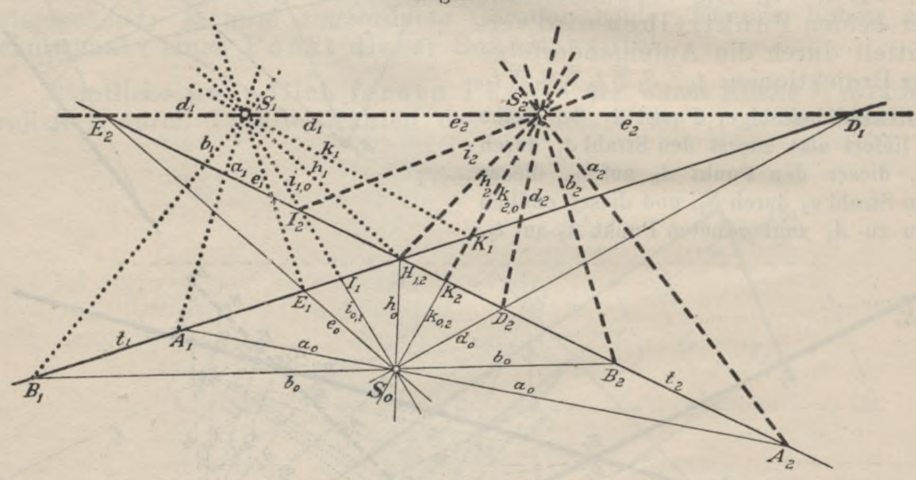
Der Schnittpunkt beider Träger ist nicht sich selbstentsprechend und muß daher in beiden Punktreihen verschiedene Benennung erhalten: heißt er D_1 in t_1, so liegt D_2 sonstwo auf t_2; heißt er E_2 in t_2, so liegt E_1 anderswo auf t_1. Zum unendlich fernen Punkt ∞F_1 von t_1 entsteht durch die Projektionsfolge F_1, f_1, F_0, f_2, F_2 der Fluchtpunkt F_2 auf t_2, ebenso zu ∞G_2 der Fluchtpunkt G_1.

Der Verbindungsstrahl $S_1 S_2$ liefert $H_1 H_2 H_0$ auf ebenderselben Geraden; die Schnittpunkte von t_0 mit t_1 und t_2 liefern J_2 auf $S_2 J_1$, K_1 auf $S_1 K_2$. — Zugeordnete Elemente müssen in allen fünf Gebilden gleiche Reihenfolge aufweisen, z. B. in Figur 10 jedesmal die Buchstabenfolge *a e i g b h f k d a*. (Die zugeordneten Punkte zu allen Punkten auf den unendlich langen Strecken $H_1 F_1, K_1 F_1, B_2 G_2, J_2 G_2$ liegen zusammengedrängt auf den endlichen Strecken $H_2 F_2, K_2 F_2, B_1 G_1, J_1 G_1$).

Sind umgekehrt zwei projektivisch verwandte Punktreihen in schiefer Lage gegeben, so gehen die Verbindungsgeraden je zweier entsprechenden Punkte **nicht** durch einen Punkt, ihre Gesamtheit in ununterbrochener Aufeinanderfolge bildet einen Strahlenbüschel zweiter Klasse (s. u. Kap. IV.)

2) $S_1 \barwedge S_2$. Die Verwandtschaft der beiden Strahlenbüschel wird vermittelt durch die Aufeinanderfolge der Projektionen $S_1 \doublebarwedge t_1 \doublebarwedge S_0 \doublebarwedge t_2 \doublebarwedge S_2$.

Figur 11.



$S_1 \barwedge S_2$ durch $S_1 \doublebarwedge t_1 \doublebarwedge S_0 \doublebarwedge t_2 \doublebarwedge S_2$.

Ein beliebiger Strahl a_1 im Büschel S_1 liefert also zuerst den Punkt A_1 auf t_1, dieser den Strahl a_0 durch S_0, dieser den Punkt A_2 auf t_2, und dieser endlich den zu a_1 zugeordneten Strahl a_2 durch S_2. In umgekehrter Folge liefert ein beliebiger Strahl b_2 von S_2 zunächst den Punkt B_2 auf t_2, dieser den Strahl b_0 durch S_0, dieser den Punkt B_1 auf t_1, und dieser den zu b_2 zugeordneten Strahl b_1 durch S_1.

Der Verbindungsstrahl beider Scheitel ist nicht sich selbstentsprechend und muß daher in beiden Büscheln verschiedene Benennung erhalten: heißt er d_1 in S_1, so geht d_2 in anderer Richtung durch S_2; heißt er e_2 in S_2, so geht e_1 in anderer Richtung durch S_1.

Der Schnittpunkt $(t_1 t_2)$ liefert $h_1 h_2 h_0$ durch ebendenselben Punkt; die Verbindungsstrahlen von S_0 mit S_1 und S_2 liefern i_2 durch $(t_2 i_1)$, k_1 durch $(t_1 k_2)$ mittels der Projektionsfolge $k_2, K_2, k_0 = k_2, K_1, k_1$. — Zugeordnete Elemente müssen in allen fünf Gebilden gleiche Reihenfolge aufweisen, z. B. in Figur 11 jedesmal die Buchstabenfolge $a\,e\,i\,h\,k\,d\,b\,a$, und zwar bei den Büscheln in doppelter Weise (im Winkel und Scheitelwinkel) infolge der doppelten Strahlenrichtung nach beiden Seiten des Scheitels. Zu den auf den Strahl a_1 folgenden Strahlen im Winkel (und Scheitelwinkel) $a_1 e_1$ sind zugeordnet die auf den Strahl a_2 folgenden Strahlen im Winkel (und Scheitelwinkel) $a_2 e_2$ in der entsprechenden Umlaufsfolge (in Figur 11 beide Büschel gegen die Uhrzeigerdrehung).

Sind umgekehrt zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel in schiefer Lage gegeben, so liegen die Schnittpunkte je zweier entsprechenden Strahlen **nicht** auf einer Geraden, ihre Gesamtheit in ununterbrochener Aufeinanderfolge bildet eine Punktreihe zweiter Ordnung (s. u. Kap. IV).

Kapitel II.

Der Grundsatz der Dualität: n-Eck und n-Seit.

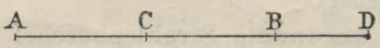
§ 4. Als gleichwertige Elemente bezw. Figuren oder Beziehungen zwischen solchen stehen in der Ebene einander gegenüber:

Ein Punkt.	Eine Gerade (Strahl).
Zwei Punkte bestimmen einen Verbindungsstrahl.	Zwei Gerade bestimmen einen Schnittpunkt.
Unendlich viele Punkte in stetiger Aufeinanderfolge liegen auf einer Geraden oder erfüllen eine krumme Linie, sie bilden eine Punktreihe erster oder höherer Ordnung (Punktkurve, Ordnungskurve).	Unendlich viele Gerade in stetiger Aufeinanderfolge gehen durch einen Punkt oder umhüllen eine krumme Linie, sie bilden einen Strahlenbüschel erster oder höherer Klasse (Tangentenkurve, Klassenkurve).
(Man nennt Ordnungszahl einer Punktreihe die Höchstzahl ihrer Punkte, welche mit den Punkten irgend einer Punktreihe erster Ordnung zusammenfallen können.)	(Man nennt Klassenzahl eines Strahlenbüschels die Höchstzahl seiner Strahlen, welche mit den Strahlen irgend eines Strahlenbüschels erster Klasse zusammenfallen können.)
Unter vier Punkten einer Punktreihe werden zwei durch die zwei andern völlig (innen und außen) getrennt, so daß man weder in der einen noch in der entgegengesetzten Durchlaufsrichtung vom einen	Unter vier Strahlen eines Strahlenbüschels werden zwei durch die zwei andern völlig (innen und außen) getrennt, so daß man weder in der einen noch in der entgegengesetzten Umlaufsrichtung vom

Punkte des ersten Paares zum andern gelangen kann, ohne entweder den einen oder den andern Punkt des zweiten Paares zu überschreiten.

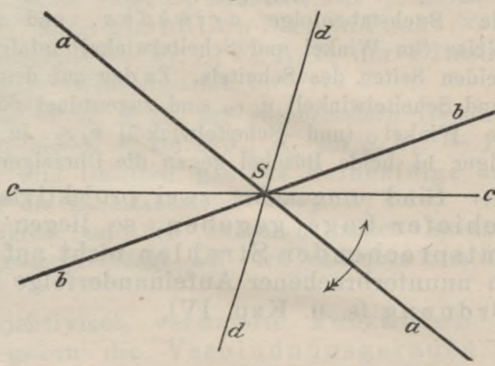
einen Strahl des ersten Paares zum andern gelangen kann, ohne entweder den einen oder den andern Strahl des zweiten Paares zu überschreiten.

Figur 12.



Punktepaar AB getrennt durch C und D, CD durch A und B.

Figur 13.



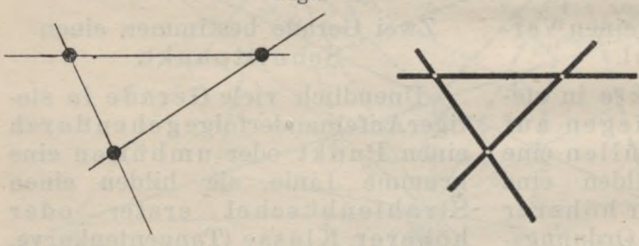
Strahlenpaar ab getrennt durch c und d, cd durch a und b (Vgl. auch Fig. 3).

§ 5. Ein **einfaches n-Eck** ist eine Gruppe von n Punkten als Ecken samt n Verbindungsgeraden als Seiten, durch welche jeder der n Eckpunkte mit einem vorhergehenden und folgenden in irgend einer Reihenfolge verbunden wird.

Ein **einfaches n-Seit** (Carnot 1801) ist eine Gruppe von n Geraden als Seiten samt n Schnittpunkten als Ecken, in welchen jede der n Seiten mit einer vorhergehenden und folgenden in irgend einer Reihenfolge geschnitten wird.

Einfaches n-Eck und einfaches n-Seit sind also genau dieselbe Figur, nur in verschiedener Auffassung der Entstehungsweise. Jedes hat n Eckpunkte und n Seiten, zusammen $2n$ aufeinanderfolgende Elemente, und von diesen heißen jedes k-te und $(k \pm n)$-te zwei gegenüberliegende Elemente. Bei gerader Zahl n hat jede Ecke eine Gegenecke, jede Seite eine Gegenseite; bei ungerader Zahl n ist von zwei gegenüberliegenden Elementen stets das eine ein Eckpunkt, das andere eine Seite.

Figur 14.



Einfaches = vollständiges Dreieck ═ Einfaches = vollständiges Dreiseit.

§ 6. Unter einem **vollständigen n-Eck** versteht man eine Gruppe von n Punkten als Ecken nebst ihren sämtlichen Verbindungsgeraden als Seiten. Die außer den n Eckpunkten noch entstehenden Schnittpunkte der Seiten heißen

Unter einem **vollständigen n-Seit** (Steiner, 1832) versteht man eine Gruppe von n Geraden als Seiten nebst ihren sämtl. Schnittpunkten als Ecken. Die außer den n Seiten noch entstehenden Verbindungsgeraden der Eckpunkte heißen

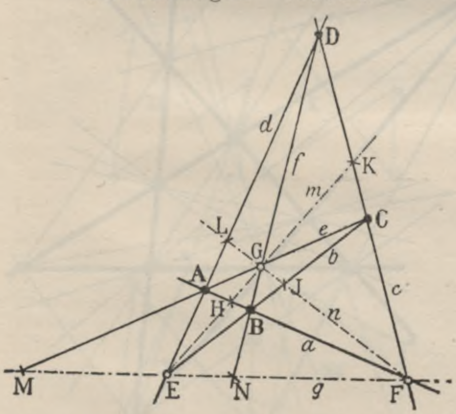
Nebenecken. Das vollständige n-Eck enthält also sämtliche einfachen n-Ecke, welche aus denselben n Eckpunkten durch verschiedene Verbindungsfolge gebildet werden können.

Das vollständige n-Eck besitzt demnach n (Haupt-)Ecken und $\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}$ Seiten. Jede dieser $\binom{n}{2}$ Seiten wird in Nebenecken geschnitten von allen Verbindungsgeraden der nicht auf der Seite selbst liegenden $(n-2)$ übrigen Eckpunkte, also von $\binom{n-2}{2}$ Seiten. Das gibt im ganzen $\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}=\frac{1}{8}n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)$ Nebenecken. — Für die Herstellung einfacher n-Ecke hat man nach Festlegung eines ersten Eckpunktes $(n-1)$fache Auswahl für den zweiten, dann $(n-2)$fache für den dritten usw., also kann man $(n-1)!$ einfache n-Ecke abzählen. Da hierunter aber jedes einzelne in beiderlei Umlaufsfolgen mitgezählt ist, so bleiben im ganzen $\frac{1}{2}(n-1)!$ einfache n-Ecke im vollständigen n-Eck.

Nebenseiten. Das vollständige n-Seit enthält also sämtliche einfachen n-Seite, welche aus denselben n Geraden durch verschiedene Schnittfolge gebildet werden können.

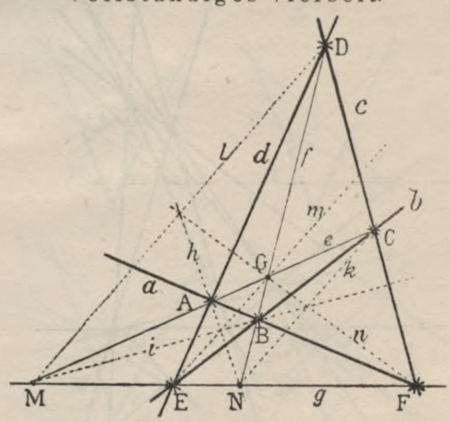
Das vollständige n-Seit besitzt demnach n (Haupt-)Seiten und $\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}$ Ecken. Jeder dieser $\binom{n}{2}$ Eckpunkte wird durch Nebenseiten verbunden mit allen Schnittpunkten der nicht durch den Eckpunkt selbst gehenden $(n-2)$ übrigen Seiten, also mit $\binom{n-2}{2}$ Punkten. Das gibt im ganzen $\frac{1}{2}\cdot\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}=\frac{1}{8}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)$ Nebenseiten. — Für die Herstellung einfacher n-Seite hat man nach Festlegung einer ersten Seite $(n-1)$fache Auswahl für die zweite, dann $(n-2)$fache für die dritte usw., also kann man $(n-1)!$ einfache n-Seite abzählen. Da hierunter aber jedes einzelne in beiderlei Umlaufsfolgen mitgezählt ist, so bleiben im ganzen $\frac{1}{2}(n-1)!$ einfache n-Seite im vollständigen n-Seit.

Figur 15.
Vollständiges Viereck.



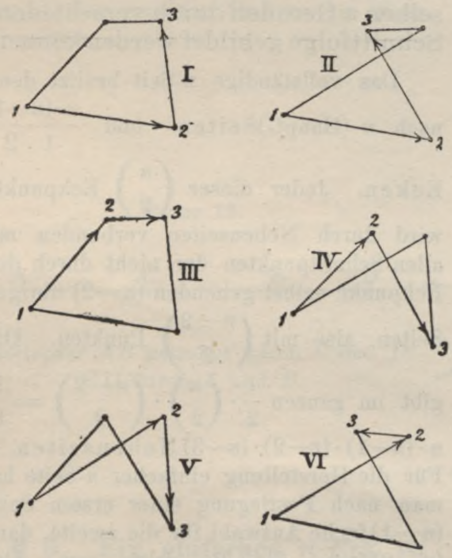
- 4 Ecken: A, B, C, D.
- 6 Seiten: a, b, c, d, e, f.
- 3 Nebenecken: E, F, G.
- 3 Verbindungsgeraden dieser Nebenecken: g, m, n.
- 6 Schnittpunkte der Seiten mit letzteren: H, I, K, L, M, N.

Figur 16.
Vollständiges Vierseit.

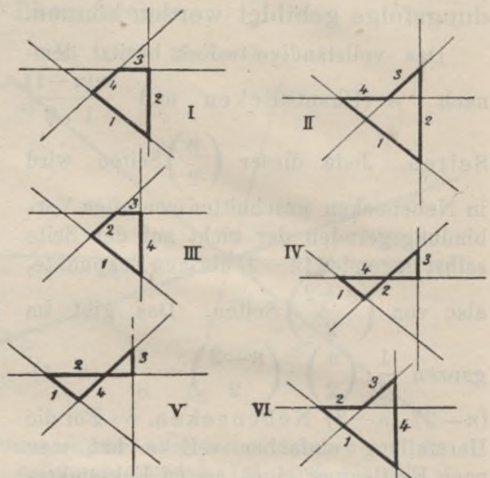


- 4 Seiten: a, b, c, d.
- 6 Ecken: A, B, C, D, E, F.
- 3 Nebenseiten: e, f, g.
- 3 Schnittpunkte dieser Nebenseiten: G, M, N.
- 6 Verbindungsgeraden der Ecken mit letzteren: h, i, k, l, m, n.

Figur 17.



Figur 18.

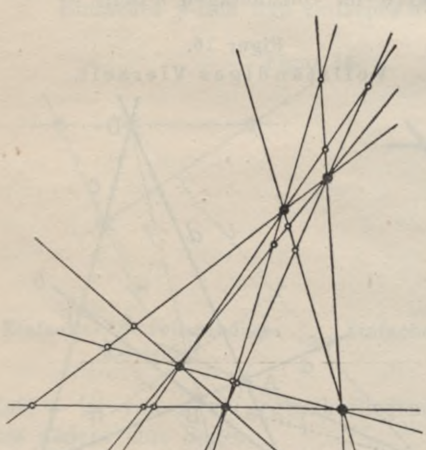


Dreierlei verschiedene einfache Vierecke im gleichen vollständigen Viereck.

Dreierlei verschiedene einfache Vierseite im gleichen vollständigen Vierseit.

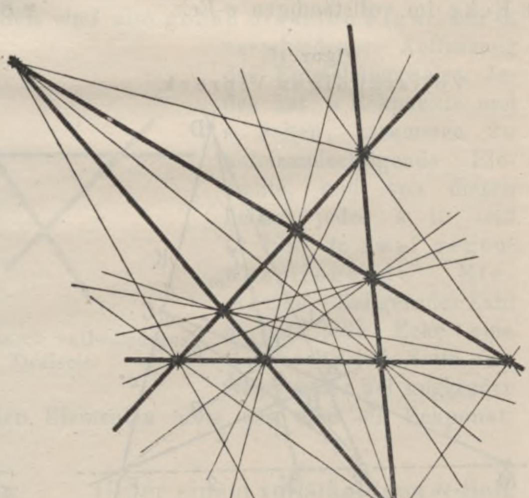
Jeweils I = III, II = VI, IV = V in umgekehrter Umlaufsfolge.

Figur 19.



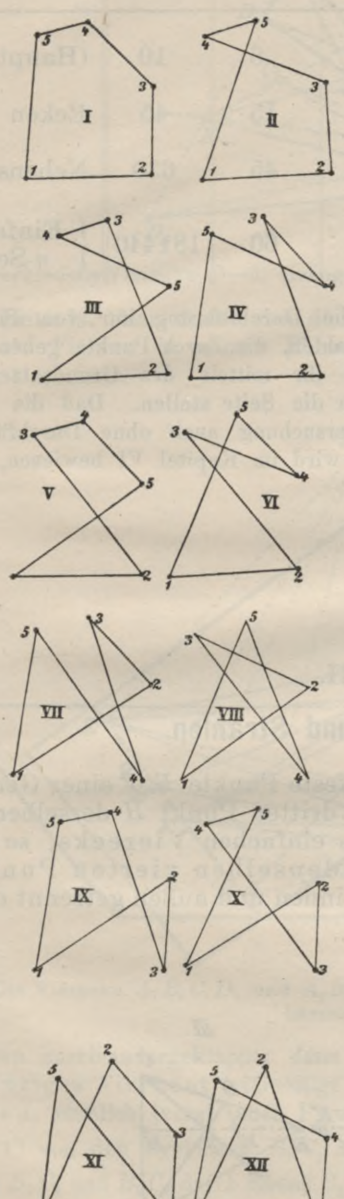
Vollständiges Fünfeck.

Figur 20.



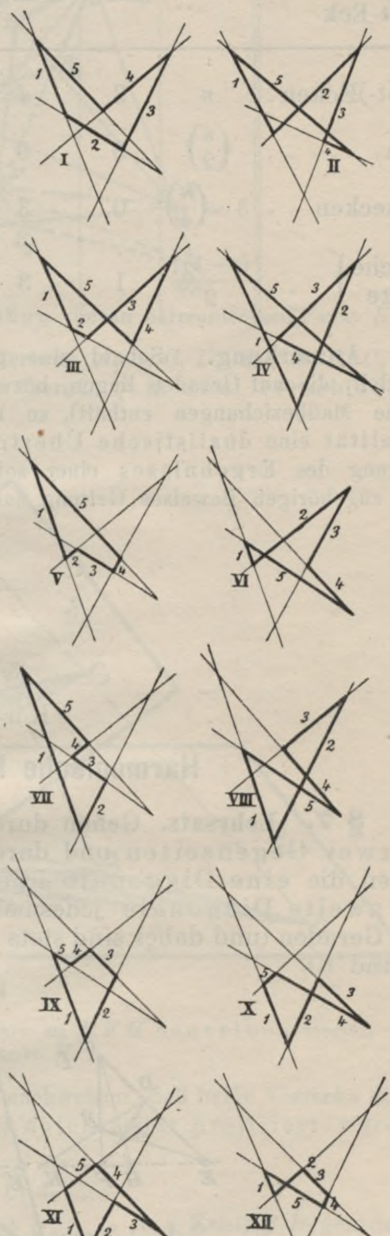
Vollständiges Fünfseit.

Figur 21.



Zwölf einfache Fünfecke im gleichen vollständigen Fünfeck.

Figur 22.



Zwölf einfache Fünfseite im gleichen vollständigen Fünfseit.

Vollständiges n-Eck		$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=10$	**Vollständiges n-Seit**
(Haupt-)Ecken .	n	3	4	5	6	10	(Haupt-)Seiten
Seiten.	$\binom{n}{2}$	3	6	10	15	45	Ecken
Nebenecken . .	$3 \cdot \binom{n}{4}$	0	3	15	45	630	Nebenseiten
Einfache n-Ecke . . .	$\frac{(n-1)!}{2}$	1	3	12	60	181440	Einfache n-Seite

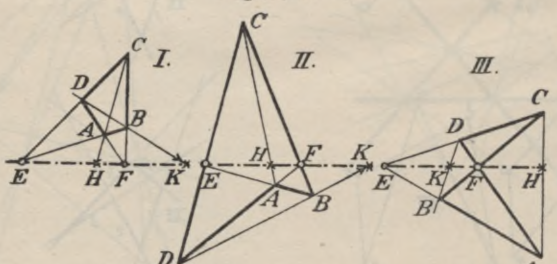
Anmerkung. Sobald eine geometrische Durchführung nur von Punkten handelt, die auf Geraden liegen, bezw. von Strahlen, die durch Punkte gehen (also keine Maßbeziehungen enthält), so kann man ihr mittels des Grundsatzes der Dualität eine dualistische Übertragung an die Seite stellen. Daß die Übertragung des Ergebnisses einer solchen Untersuchung auch ohne Durchführung des zugehörigen Beweises Geltung haben muß, wird im Kapitel VI bewiesen.

Kapitel III.

Harmonische Punkte und Strahlen.

§ 7. Lehrsatz. Gehen durch zwei feste Punkte E, F einer Geraden je zwei Gegenseiten und durch einen dritten Punkt H derselben Geraden die eine Diagonale irgend eines einfachen Vierecks, so geht die zweite Diagonale jedesmal durch denselben vierten Punkt K der Geraden (und dabei sind stets E und F innen und außen getrennt durch H und K).

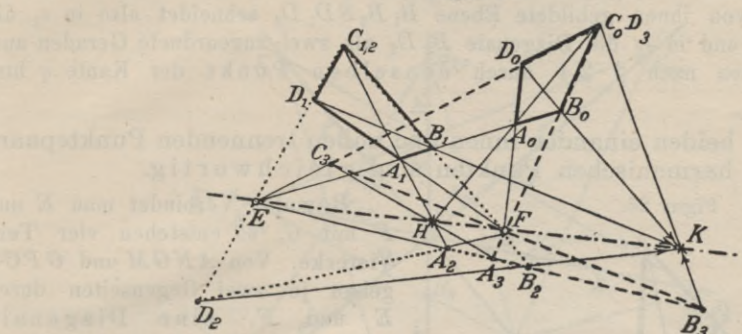
Figur 23.



Verschiedene Lagen des Vierecks zu den vier harmonischen Punkten.

Solche vier Punkte heißen **vier harmonische Punkte;** auf jeder Nebenseite eines vollständigen Vierseits entstehen vier harmonische Punkte: $FNEM$, $CGAM$, $DGBN$ in Fig. 16 bezw. 15.

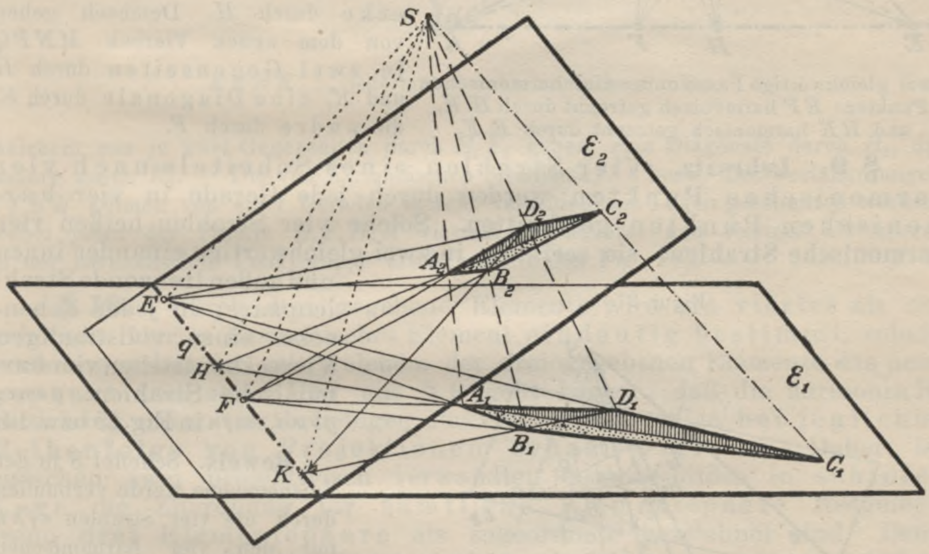
Figur 24.



Verschiedene Vierecke (0—3) erzeugen d e n s e l b e n vierten harmonischen Punkt K.

Beweis. Man denke sich die beiden Vierecke $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ und $A_2\,B_2\,C_2\,D_2$, statt als Figuren in e i n e r Ebene, um die Gerade q in z w e i v e r s c h i e d e n e

Figur 25.



Die Vierecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ liefern zu $E\,F\,H$ d e n s e l b e n vierten harmonischen Punkt K.

E b e n e n auseinandergeklappt; dann läßt sich nachweisen, daß beide Vierecke durch e i n e i n z i g e s V i e r k a n t (vierseitige Pyramide) a u f e i n a n d e r p r o j i z i e r t w e r d e n k ö n n e n, nämlich (vergl. auch Figur 8):

1) von den Dreiecken $B_1\,C_1\,A_1$ und $B_2\,C_2\,A_2$:

Seiten $B_1\,C_1$ und $B_2\,C_2$ durch Ebene $C_1\,B_1\,F B_2\,C_2$ } Kante $C_1\,C_2$
Seiten $C_1\,A_1$ und $C_2\,A_2$ durch Ebene $C_1\,A_1\,H A_2\,C_2$
Seiten $A_1\,B_1$ und $A_2\,B_2$ durch Ebene $B_1\,A_1\,E A_2\,B_2$ } Kante $A_1\,A_2$
} Kante $B_1 B_2$ geht durch den Schnittpunkt S von $C_1\,C_2$ und $A_1\,A_2$;

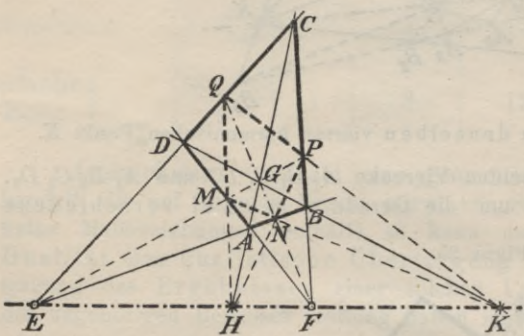
2) von den Dreiecken $D_1\,C_1\,A_1$ und $D_2\,C_2\,A_2$:

Seiten $D_1\,C_1$ und $D_2\,C_2$ durch Ebene $C_1\,D_1\,E D_2\,C_2$ } Kante $C_1\,C_2$
Seiten $C_1\,A_1$ und $C_2\,A_2$ durch Ebene $C_1\,A_1\,H A_2\,C_2$
Seiten $A_1\,D_1$ und $A_2\,D_2$ durch Ebene $D_1\,A_1\,F A_2\,D_2$ } Kante $A_1\,A_2$
} Kante $D_1 D_2$ geht durch den Schnittpunkt S von $C_1\,C_2$ und $A_1\,A_2$.

Folglich gehen die Projektionsstrahlen $B_1 B_2$ und $D_1 D_2$ durch denselben Punkt S; die von ihnen gebildete Ebene $B_1 B_2 S D_1 D_2$ schneidet also in ε_1 die Diagonale $B_1 D_1$ und in ε_2 die Diagonale $B_2 D_2$ als zwei zugeordnete Geraden aus, und solche müssen nach § 2,4 durch denselben Punkt der Kante q hindurchgehen.

§ 8. Die beiden einander innen und außen trennenden Punktepaare unter den vier harmonischen Punkten sind gleichwertig.

Figur 26.

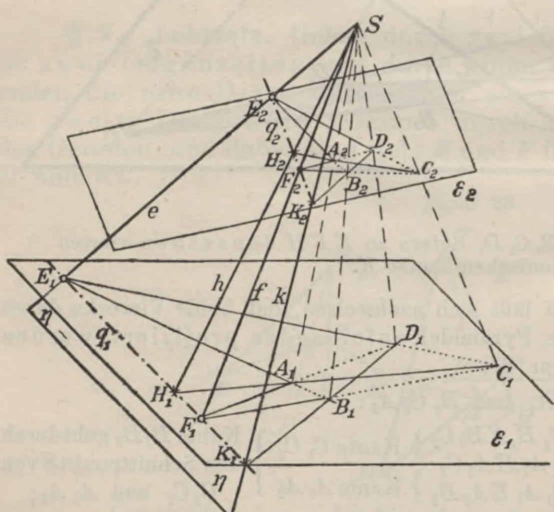


Zwei gleichwertige Paare unter vier harmonischen Punkten: EF harmonisch getrennt durch H, K, und HK harmonisch getrennt durch E, F.

Beweis. Verbindet man E und F mit G, so entstehen vier Teil-Vierecke. Von $ANGM$ und $GPCQ$ gehen je zwei Gegenseiten durch E und F, eine Diagonale durch H, folglich die andre Diagonale beider Vierecke durch K; von $MGQD$ und $NBPG$ gehen wieder je zwei Gegenseiten durch E und F, eine Diagonale durch K, folglich die andre Diagonale beider Vierecke durch H. Demnach gehen von dem neuen Viereck $MNPQ$ je zwei Gegenseiten durch H und K, eine Diagonale durch E, die andre durch F.

§ 9. Lehrsatz. Vier Strahlen eines Scheitels nach vier harmonischen Punkten werden durch jede Gerade in vier harmonischen Punkten geschnitten. Solche vier Strahlen heißen **vier harmonische Strahlen:** sie zerfallen in zwei gleichwertige einander innen und außen trennende Strahlenpaare; in jeder Nebenecke eines vollständigen Vierecks entstehen vier harmonische Strahlen: $ganc$, $gbmd$, $emfn$ in Fig. 15 bzw. 16.

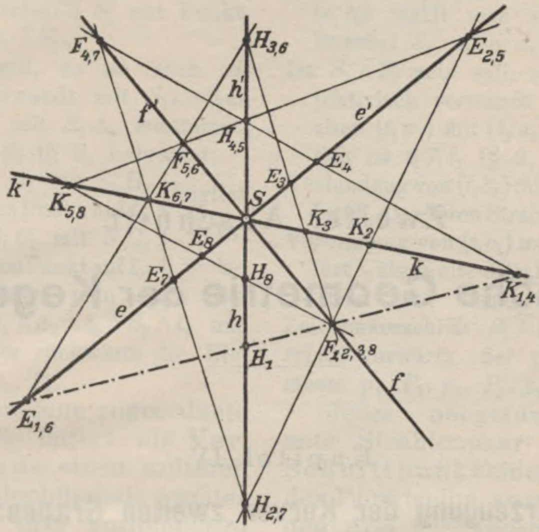
Figur 27.



$efhk$ vier harmonische Strahlen.

Beweis. Scheitel S in der Zeichenebene werde verbunden durch die vier Strahlen $efhk$ mit den vier harmonischen Punkten $E_1 F_1 H_1 K_1$, welche etwa durch das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ erzeugt sein mögen; und die Gerade q_2 schneide $efhk$ in den vier Punkten $E_2 F_2 H_2 K_2$. Man denke sich nun die Ebene der Strahlen $efhk$ um q_1 aus der Zeichenebene ε_1 herausgeklappt (als Ebene η) und projiziere aus dem jetzt im Raume befindlichen Scheitel S das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ durch das Vierkant $S(ABCD)$. Legt man dann durch q_2 eine beliebige Ebene ε_2, so wird das Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ auf diese Ebene projiziert als Viereck $A_2 B_2 C_2 D_2$, von

Figur 28.



$EFHK_{1-8}$ jedesmal vier harmonische Punkte.

welchem nun je zwei Gegenseiten durch $E_2 F_2$ gehen, eine Diagonale durch H_2, die andere durch K_2. — Die vier harmonischen Strahlen $efhk$ bezw. ihre Verlängerungen $e' f' h' k'$ können von einer Geraden in acht verschiedenen Lagen geschnitten werden, wobei jeder der Punkte E, F, H, K viermal als äußerer und viermal als innerer in der harmonischen Punktgruppe erscheint. (Siehe Fig. 28).

§ 10. Durch drei gegebene Elemente wird ein viertes als zugehöriges viertes harmonisches Element eindeutig bestimmt, sobald noch angegeben ist, mit welchem der drei gegebenen Elemente das neue gepaart sein soll. Und aus § 9 geht hervor, daß die harmonische Beziehung unter vier beliebigen Punkten oder Strahlen bei jeglicher Reihenfolge von Projektionen erhalten bleibt. Daher ist zwischen zwei projektivisch verwandten Grundgebilden in schiefer Lage die Zuordnung für sämtliche Elementepaare festgelegt, wenn drei Elementepaare als zugeordnete bezeichnet sind. Denn zu jedem durch beliebige Aufeinanderfolge von harmonischen Gruppierungen entstehenden vierten Element des ersten Gebildes muß dasjenige vierte Element des zweiten Gebildes projektivisch zugeordnet sein, welches durch die genau entsprechende Aufeinanderfolge harmonischer Gruppierungen aus den drei ersten Elementen hervorgeht.

Bei projektivisch verwandten Gebilden in perspektivischer Lage genügt nach § 2 die Zuordnung zweier beliebigen Elementepaare, weil das sich selbstentsprechende gemeinsame Element als drittes hinzutritt. —

Die Konstanz der harmonischen Beziehung bildet in der projektivischen Geometrie gewissermaßen den Ersatz für die Konstanz der Zahlenwerte bei den metrischen Beziehungen der Maßgeometrie.

Zweiter Abschnitt.

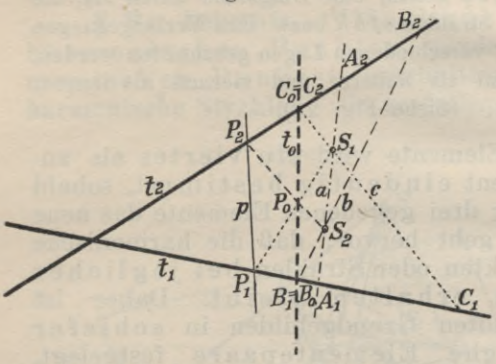
Projektivische Geometrie der Kegelschnitte.

Kapitel IV.

Erzeugung der Kurven zweiten Grades:

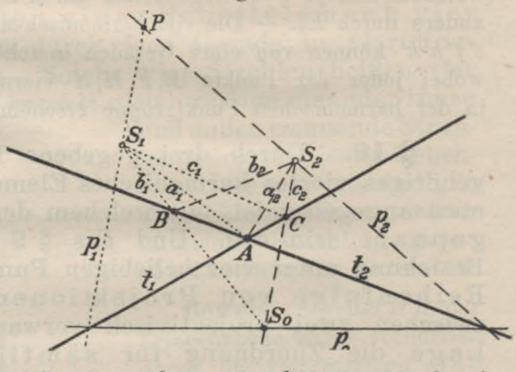
als Strahlenbüschel zweiter Klasse bezw. **als Punktreihen zweiter Ordnung.**

Figur 29.



Gegeben $A_1 B_1 C_1$ und $A_2 B_2 C_2$, gesucht $P_1 P_2$.

Figur 30.



Gegeben $a_1 b_1 c_1$ und $a_2 b_2 c_2$, gesucht $(p_1 p_2)$.

§ 11. Wenn für zwei projektivisch verwandte Punktreihen t_1, t_2 in schiefer Lage drei beliebige Punktepaare als zugeordnete gegeben sind, so kann man zu jedem weiteren Punkt der einen Reihe den zugeordneten Punkt der anderen Reihe konstruieren.

Man arbeitet mit den drei Punktepaaren ABC, als ob es die Punktepaare HJK der Fig. 10 wären, z. B.:

Den Schnittpunkt von $A_1 A_2$ mit $B_1 B_2$ wählt man als Scheitel S_2 zur Punktreihe t_2, also $t_2 \overline{\overline{\wedge}} S_2$;

Wenn für zwei projektivisch verwandte Strahlenbüschel $S_1 S_2$ in schiefer Lage drei beliebige Strahlenpaare als zugeordnete gegeben sind, so kann man zu jedem weiteren Strahl des einen Büschels den zugeordneten Strahl des andern Büschels konstruieren.

Man arbeitet mit den drei Strahlenpaaren abc, als ob es die Strahlenpaare hik der Figur 11 wären, z. B.:

Die Verbindungsgerade von $(a_1 a_2)$ mit $(b_1 b_2)$ wählt man als Träger t_2 zum Büschel S_2, also $S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2$;

den Schnittpunkt von $A_1 A_2$ mit $C_1 C_2$ wählt man als Scheitel S_1 zur Punktreihe t_1, also $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1$.

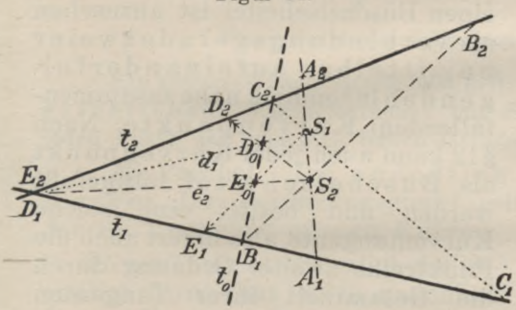
Da $t_1 \overline{\wedge} t_2$ sein soll, so ist auch S_1 projektivisch verwandt mit S_2. Nun fällt aber $S_1 A_1$ mit $S_2 A_2$ zusammen, folglich ist $S_1 \overline{\overline{\wedge}} S_2$ (§ 2, Lehrsatz);

Schneidung von $S_1 B_1$ mit $S_2 B_2$ liefert B_1 als ersten Punkt auf t_0,
Schneidung von $S_1 C_1$ mit $S_2 C_2$ liefert C_2 als zweiten Punkt auf t_0,
folglich $B_1 C_2 = t_0$.

Und nun verfährt man nach der Zeichenvorschrift $t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_0 \overline{\overline{\wedge}} S_2 \overline{\overline{\wedge}} t_2$ und erhält vorwärts oder rückwärts die Elemente P_1, p_1, P_0, p_2, P_2.

Jedes neugefundene zugeordnete Punktepaar $P_1 P_2$ liefert als Verbindungsgerade einen weiteren Strahl des Strahlenbüschels zweiter Klasse zu den drei vorhandenen $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$, also eine neue Kurventangente (vgl. § 3, 4, 10).

Figur 31.



$E_1 D_2$ Berührungspunkte der Kurve.

§ 12. Die Träger als Verbindungsgeraden der entsprechenden Punktepaare $D_1 D_2$ bezw. $E_1 E_2$ sind selbst Kurventangenten wie $A_1 A_2, B_1 B_2$..; und der zum Trägerschnittpunkt zugeordnete Punkt D_2, E_1 jeder Punktreihe ist der Berührungspunkt der Kurve mit dem Träger.

Beweis. Durch jeden Punkt A_1, B_1.. der Reihe t_1 geht der Träger als erste und der Verbindungsstrahl zum zugehörigen Punkt A_2, B_2.. als zweite Tangente der Kurve. Nur für E_1 fällt t_1 mit $E_1 E_2$ zusammen, also ist E_1 der einzige Punkt auf der Tangente t_1, durch welchen

die Verbindungsgerade von $(a_1 a_2)$ mit $(c_1 c_2)$ wählt man als Träger t_1 zum Büschel S_1, also $S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_1$.

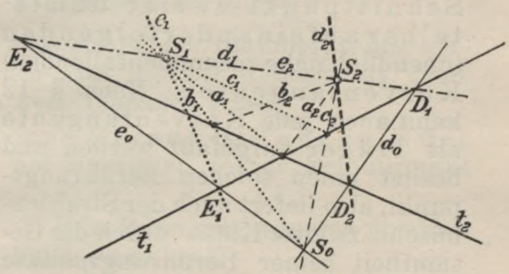
Da $S_1 \overline{\wedge} S_2$ sein soll, so ist auch t_1 projektivisch verwandt mit t_2. Nun fällt aber $(t_1 a_1)$ mit $(t_2 a_2)$ zusammen, folglich ist $t_1 \overline{\overline{\wedge}} t_2$ (§ 2, Lehrsatz);

Verbindung von $(t_1 b_1)$ mit $(t_2 b_2)$ liefert b_1 als ersten Strahl durch S_0,
Verbindung von $(t_1 c_1)$ mit $(t_2 c_2)$ liefert c_2 als zweiten Strahl durch S_0,
folglich $(b_1 c_2) = S_0$.

Und nun verfährt man nach der Zeichenvorschrift $S_1 \overline{\overline{\wedge}} t_1 \overline{\overline{\wedge}} S_0 \overline{\overline{\wedge}} t_2 \overline{\overline{\wedge}} S_2$ und erhält vorwärts oder rückwärts die Elemente p_1, P_1, p_0, P_2, p_2.

Jedes neugefundene zugeordnete Strahlenpaar $p_1 p_2$ liefert als Schnittpunkt einen weiteren Punkt der Punktreihe zweiter Ordnung zu den drei vorhandenen $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$, also einen neuen Kurvenpunkt (vgl. § 3, 4, 10).

Figur 32.

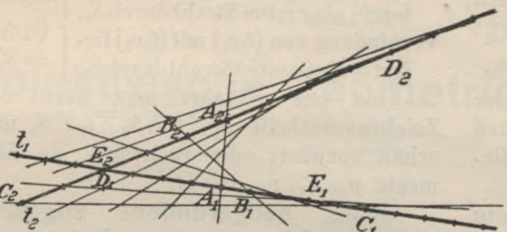


$e_1 d_2$ Berührungsgerade der Kurve.

Die Büschelscheitel als Schnittpunkte der entsprechenden Strahlenpaare $d_1 d_2$ bezw. $e_1 e_2$ sind selbst Kurvenpunkte wie $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$..; und der zum Verbindungsstrahl der Scheitel zugeordnete Strahl d_2, e_1 jedes Büschels ist die Tangente der Kurve im Scheitelpunkt.

Beweis. Auf jedem Strahl a_1, b_1.. des Büschels S_1 liegt der Scheitel als erster und der Schnittpunkt mit dem zugehörigen Strahl a_2, b_2.. als zweiter Kurvenpunkt. Nur für e_1 fällt S_1 mit $(e_1 e_2)$ zusammen, also ist e_1 der einzige Strahl durch den Kurvenpunkt S_1, auf welchem kein *keine zweite* Tangente geht; und das kann nur im *Berührungspunkt* auf dieser Tangente zutreffen.

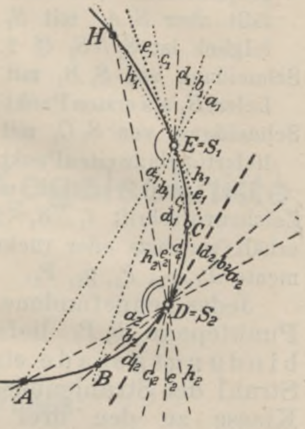
Figur 33.



Träger wie Kurventangenten.

zweiter Kurvenpunkt liegt; und das kann nur auf der *Tangente* in diesem Kurvenpunkt zutreffen.

Figur 34.



Scheitel wie Kurvenpunkte.

§ 13. Der *Berührungspunkt* auf einem Träger ist anzusehen als *Schnittpunkt zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden* (unendlich nahe zusammenfallenden) *Kurventangenten*. Nach § 12 kann auch jede *Kurventangente* als *Träger* aufgefaßt werden und besitzt einen solchen Berührungspunkt, also liefert auch der Strahlenbüschel zweiter Klasse durch die Gesamtheit seiner Berührungspunkte dieselbe Kurve als *Punktgebilde* (vgl. § 26).

Die *Kurventangente* durch einen Büschelscheitel ist anzusehen als *Verbindungsgerade zweier unmittelbar aufeinanderfolgenden* (unendlich nahe zusammenfallenden) *Kurvenpunkte*. Nach § 12 kann auch jeder *Kurvenpunkt* als *Büschelscheitel* aufgefaßt werden und besitzt eine solche Kurventangente, also liefert auch die Punktreihe zweiter Ordnung durch die Gesamtheit ihrer Tangenten dieselbe Kurve als *Tangentengebilde* (vgl. § 26).

§ 14. *Eine Kurve zweiten Grades wird eindeutig bestimmt:*

als *Tangentenkurve* durch:

1) *fünf Tangenten*,
2) *vier Tangenten* nebst dem *Berührungspunkt* auf einer derselben,
3) *drei Tangenten* nebst den *Berührungspunkten* auf zweien derselben.

[1]) *ttttt*, [2]) *ttt(tP)*, [3]) *t(tP)(tP)*.

Zur Konstruktion von beliebigen weiteren Tangenten bezw. Berührungspunkten auf solchen wählt man stets zwei der bekannten Tangenten als Träger der

als *Punktkurve* durch:

6) *fünf Kurvenpunkte*,
5) *vier Kurvenpunkte* nebst der *Tangente* durch einen derselben,
4) *drei Kurvenpunkte* nebst den *Tangenten* durch zwei derselben.

[4]) *P(Pt)(Pt)*, [5]) *PPP(Pt)*, [6]) *PPPPP*.

Zur Konstruktion von beliebigen weiteren Kurvenpunkten bezw. Tangenten durch solche wählt man stets zwei der bekannten Kurvenpunkte als Scheitel der

Punktreihen $t_1 t_2$, darunter jedenfalls solche, auf welchen die Berührungspunkte gegeben beziehungsweise gesucht sind. (Z. B. Fig. 52).

Strahlenbüschel $S_1 S_2$, darunter jedenfalls solche, durch welche die Tangenten gegeben beziehungsweise gesucht sind. (Z. B. Fig. 54.)

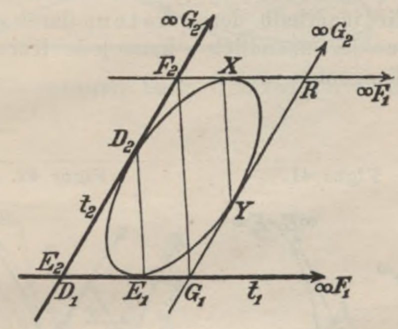
§ 15. Unterscheidung dreier Kurvengattungen nach ihren unendlich fernen Elementen:

I) **Ellipse:** Die unendlich ferne Gerade verläuft ganz außerhalb der Kurve: die Kurve ist im Endlichen geschlossen.

Keine Tangente hat einen unendlich fernen Berührungspunkt.

Kein Paar zugeordneter Strahlen läuft parallel.

Figur 35.



Umgeschriebenes Tangenten-Parallelogramm der Ellipse.

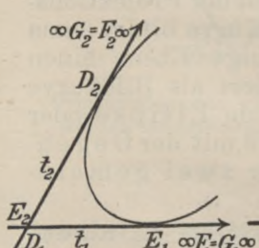
Ein konvexes Tangentenfünfseit liefert stets eine Ellipse. Die Ellipse besitzt umgeschriebene Parallelogramme mit Seiten nach jeglicher Richtung, da durch jeden Punkt der unendlich fernen Geraden zwei Tangenten gehen.

II) **Parabel.** Die unendlich ferne Gerade ist Tangente der Kurve: Ihr Berührungspunkt gilt als unendlich ferner Schlußpunkt der im Endlichen offenen Kurve.

Eine Tangente (nämlich die unendlich ferne) hat einen unendlich fernen Berührungspunkt.

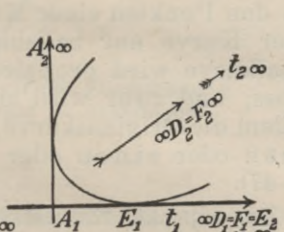
Ein Paar zugeordneter Strahlen läuft parallel.

Figur 36.



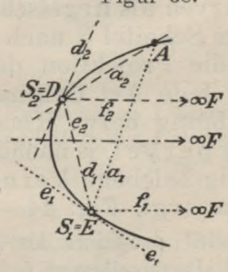
Parabel mit unendlich ferner Tangente $F_1 F_2$.

Figur 37.



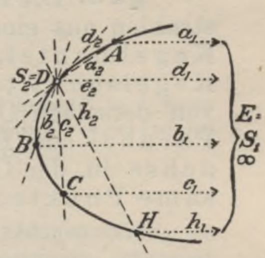
Parabel mit unendlich fernem Träger t_2.

Figur 38.



Parabel mit einem unendlich fernen Kurvenpunkt F.

Figur 39.



Parabel mit einem unendlich fernen Scheitelpunkt S_1.

Die Parabel besitzt keinerlei Paralleltangenten, da durch einen Punkt der unendlich fernen Tangente außer dieser selbst nicht noch zwei weitere Tangenten gehen können.

Für jede Wurfparabel gilt als unendlich ferner Berührungspunkt der Erdmittelpunkt: es bleiben also nur noch drei willkürliche Bestimmungsstücke für die Flugbahn.

III) **Hyperbel.** Die unendlich ferne Gerade schneidet die Kurve in zwei Punkten: die Kurve verläuft in zwei offenen Ästen je vom einen unendlich fernen Punkt durchs Endliche zum andern.

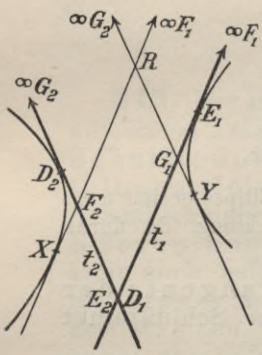
Zwei Tangenten haben unendlich fernen Berührungspunkt: sie heißen Asymptoten (ἀ-συμ-πίπτω).

Die Hyperbel besitzt angeschriebene Parallelogramme nur mit Seiten in den Richtungen des Außenwinkels der Asymptoten, da durch die innerhalb der Kurve liegenden Punkte der unendlich fernen Geraden keine Tangenten gehen können.

Zwei Paare zugeordneter Strahlen laufen parallel: sie zeigen die Asymptoten-Richtungen.

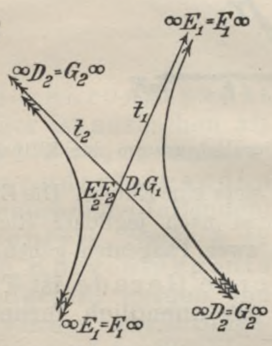
Ungleichwendige Strahlenbüschel liefern stets eine Hyperbel, und zwar mit Büschelscheiteln auf getrennten Ästen; durch gleichwendige Büschel kann jede Kurvengattung entstehen.

Figur 40.



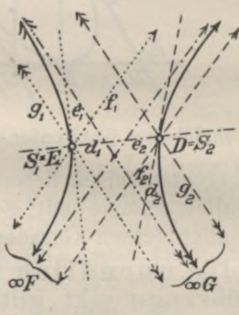
Angeschriebenes Tangenten-Parallelogramm der Hyperbel.

Figur 41.



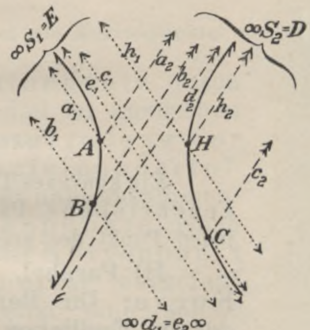
Hyperbel mit Asymptoten als Trägern.

Figur 42.



Hyperbel mit zwei gegebenen unendlich fernen Kurvenpunkten FG.

Figur 43.

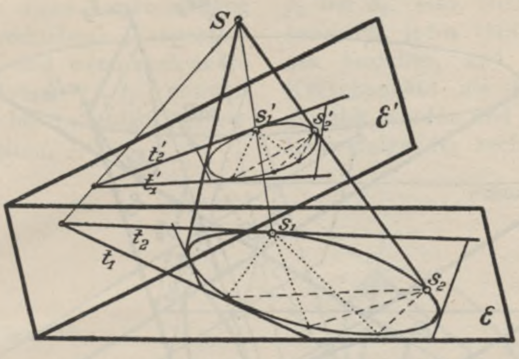


Hyperbel mit zwei unendlich fernen Scheiteln.

§ 16. Die Kurven als Kegelschnitte. Die Gesamtheit der Projektionsstrahlen aus einem Scheitel S nach den Punkten einer Kurve bildet einen Kegelmantel, die Projektion der Kurve auf beliebige Ebene einen Kegelschnitt. Jede Art Originalkurve wird projiziert als Bildkurve von derselben Ordnung bezw. Klasse, und zwar wird sie Ellipse oder Parabel oder Hyperbel, je nachdem die Originalkurve mit der Gegenachse in der Originalebene keinen oder einen oder zwei gemeinsame Punkte hat (vgl. Fig. 44—47).

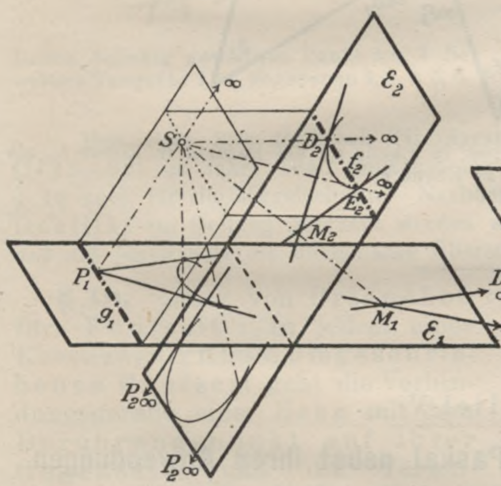
Kurvenpunkt wird projiziert als Kurvenpunkt, Kurventangente als Kurventangente, erzeugende Punktreihen $t_1\, t_2$ als ebensolche $t_1'\, t_2'$, erzeugende Strahlenbüschel $S_1\, S_2$ als ebensolche $S_1'\, S_2'$ usw. 0, 1, 2 Kurvenpunkte auf der Gegenachse in der Originalebene liefern 0, 1, 2 unendlich ferne Kurvenpunkte in der Bildebene. Tangenten an die Originalkurve in ε_1 (Fig. 45) aus einem Punkte P_1 der Gegenachse werden in ε_2 zu Paralleltangenten der Bildkurve. Tangenten an die Originalkurve in ε_2 (Fig. 45) in deren Schnittpunkten mit der Gegenachse werden in ε_1 zu Asymptoten $M_1\, D_1$ und $M_1\, E_1$ der Bild-

Figur 44.



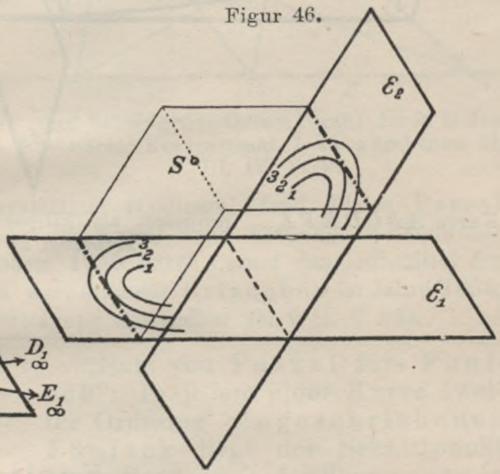
Projektion der Klassenkurve bezw. Ordnungskurve als Kegelschnitt.

Figur 45.



Originalelemente auf der Fluchtgeraden werden Bildelemente im unendlichen.

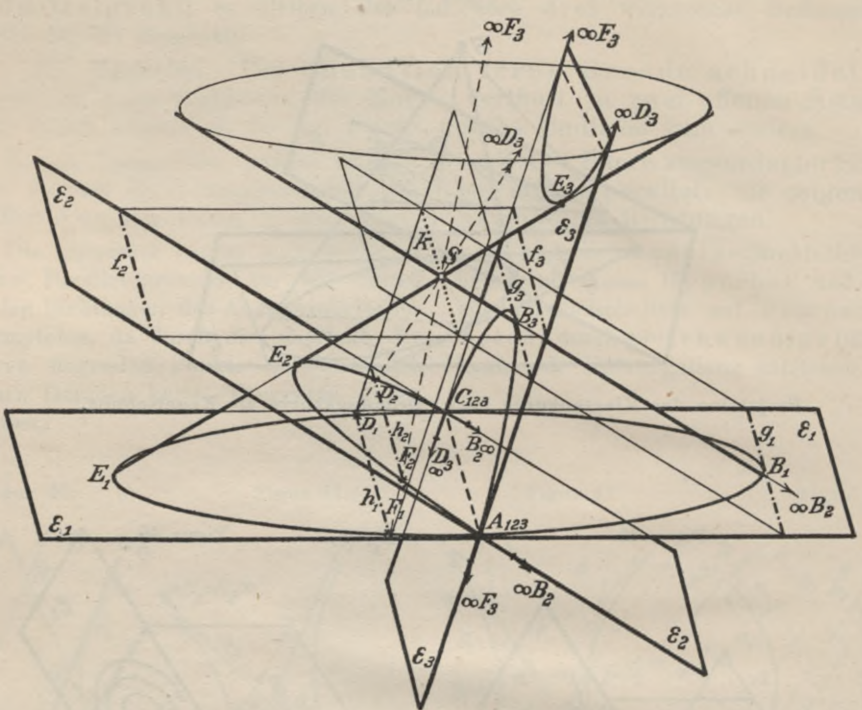
Figur 46.



Kurvenbogen 1 bezw. 2 bezw. 3 in ε_1 (oder ε_2) liefert in ε_2 (oder ε_1) Ellipse bezw. Parabel bezw. Hyperbel.

hyperbel, — und beides auch umgekehrt. Der Kurvenbogen in ε_1 oder ε_2 der Fig. 46 mag einer Ellipse oder Parabel oder Hyperbel angehören: stets muß seine Bildkurve in der anderen Ebene ε_2 oder ε_1 eine Ellipse werden, wenn die Originalkurve die Lage 1, aber eine Parabel, wenn sie die Lage 2, und eine Hyperbel, wenn sie die Lage 3 zur Gegenachse hatte. — Mittels der vorliegenden Betrachtungsweise werden in der Maßgeometrie manche am Kreise bewiesenen Eigenschaften durch den (senkrechten bezw. schiefen) Kreiskegel als Eigenschaften der Kegelschnitte übertragen.

Figur 47.



Kurve $ABCDEFA_{1-3}$ projiziert als Ellipse in Ebene ε_1, als Parabel in Ebene ε_2, als Hyperbel in Ebene ε_3.

Kapitel V.

Die Sätze von Brianchon und Paskal nebst ihren Anwendungen.

§ 17. „Satz von Brianchon fürs Sechsseit": In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen Sechsseit gehen die drei Verbindungsgeraden der Gegenecken durch einen Punkt.

Beweis. In Figur 29 (S. 16) bilden die Tangenten p, t_1, b, a, c, t_2 ein Tangentensechsseit, in welchem die Verbindungsgeraden der Gegenecken S_1 und P_1, S_2 und P_2 hindurchgehen müssen durch denselben Punkt P_0 auf dem Träger $B_1 C_2$ der Punktreihe t_0. Bei Veränderung der

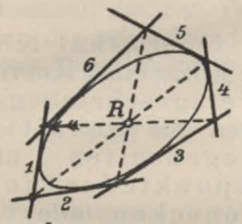
„Satz von Paskal fürs Sechseck": In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Sechseck liegen die drei Schnittpunkte der Gegenseiten auf einer Geraden.

Beweis. In Figur 30 (S. 16) bilden die Kurvenpunkte P, S_1, B, A, C, S_2 ein Sehnensechseck, in welchem die Schnittpunkte der Gegenseiten t_1 und p_1, t_2 und p_2 liegen müssen auf demselben Strahl p_0 durch den Scheitel $(b_1 c_2)$ des Büschels S_0. Bei Veränderung des

Tangente p bezw. der Punkte P_1 und P_2 verschiebt sich aber bloß der Punkt P_0 auf t_0, also bleibt diese Lagebeziehung auch für jedes veränderte Tangentensechsseit bestehen, und wenn auch andre Tangenten als Träger t_1 t_2 gewählt werden, und auch bei beliebiger Reihenfolge der sechs Seiten.

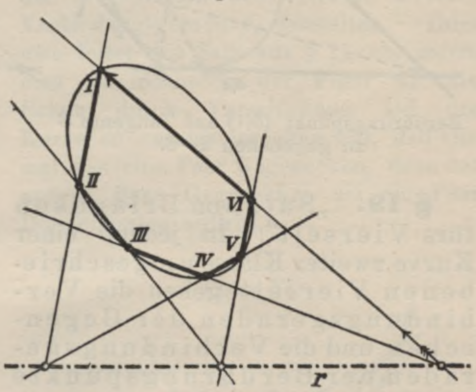
Kurvenpunktes P bezw. der Strahlen p_1 und p_2 dreht sich aber bloß der Strahl p_0 um S_0, also bleibt diese Lagebeziehung für jedes veränderte Sehnensechseck bestehen, und wenn auch andere Kurvenpunkte als Büschelscheitel S_1 S_2 gewählt werden, und auch bei beliebiger Reihenfolge der sechs Eckpunkte.

Figur 48.



Durch beliebig gewählten Punkt auf 2 die weitere Tangente 1 zu gegebenen 2, 3, 4, 5, 6.

Figur 49.



Auf beliebig gewähltem Strahl durch II den weiteren Kurvenpunkt I zu gegebenen II, III, IV, V, VI.

Den Satz fürs Sechseck (Hexagrammum mysticum) fand Blaise Pascal (1623—62) im Jahre 1640 zunächst für den Kreis, dann nach der Methode des § 16 auch für die Kegelschnitte. Nachdem 1799 durch Carnot das Hilfsmittel der Dualität zur Geltung gebracht worden war, erkannte Brianchon im Jahre 1806, daß auf jenen Satz die dualistische Übertragung anwendbar sei (vgl. § 25).

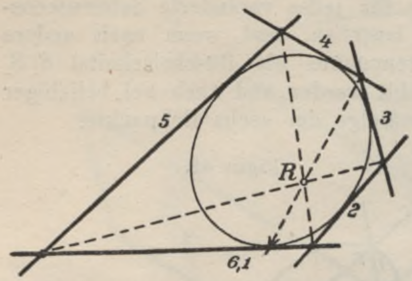
§ 18. „Satz von Brianchon fürs Fünfseit": In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen Fünfseit geht die Verbindungsgerade einer Ecke mit dem Berührungspunkt auf ihrer Gegenseite und die Verbindungsgeraden der beiden übrigen Paare nicht benachbarter Eckpunkte durch einen Punkt. (Fig. 50).

Beweis. Der Satz entsteht entweder unmittelbar aus Figur 31, oder aus dem vorigen Satze, wenn die Tangente p durch Verschiebung längs der Kurve mit der benachbarten Tangente t_1 oder t_2 zum Zusammenfallen gelangt. Diese Doppeltangente wird dann mit zwei aufeinanderfolgenden Ziffern doppelt gezählt, wenn man die Figur weiter als Sechsseit auffassen will.

„Satz von Paskal fürs Fünfeck": In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Fünfeck liegt der Schnittpunkt einer Seite mit der Tangente in ihrer Gegenecke und die Schnittpunkte der beiden übrigen Paare nicht benachbarter Seiten auf einer Geraden. (Fig. 51).

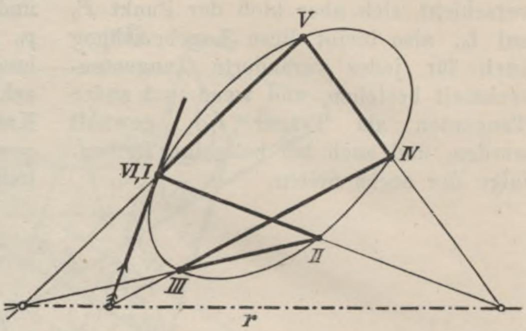
Beweis. Der Satz entsteht entweder unmittelbar aus Figur 32, oder aus dem vorigen Satz, wenn der Kurvenpunkt P durch Verschiebung auf der Kurve mit dem benachbarten Punkte S_1 oder S_2 zum Zusammenfallen gelangt. Dieser Doppelpunkt wird dann mit zwei aufeinanderfolgenden Ziffern doppelt gezählt, wenn man die Figur weiter als Sechseck auffassen will.

Figur 50.



Berührungspunkt (6,1) auf Tangente 6 zu gegebenen 2—6.

Figur 51.

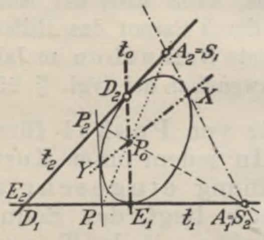


Tangente (VI,I) im Kurvenpunkt VI zu gegebenen II—VI.

§ 19. „Satz von Brianchon fürs Vierseit“: In jedem einer Kurve zweiter Klasse umgeschriebenen Vierseit gehen die Verbindungsgeraden der Gegenecken und die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte auf Gegenseiten (alle vier) durch einen Punkt.

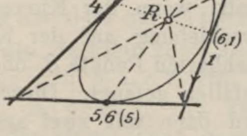
„Satz von Paskal fürs Viereck“: In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen Viereck liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten und die Schnittpunkte der Tangenten in Gegenecken (alle vier) auf einer Geraden.

Figur 52.



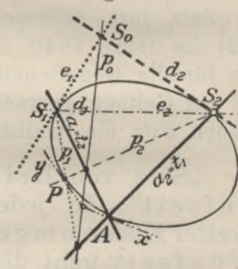
Gegeben $A_1\,D_1\,E_1$ und $A_2\,D_2\,E_2$, gesucht $P_1\,P_2$.

Figur 53.



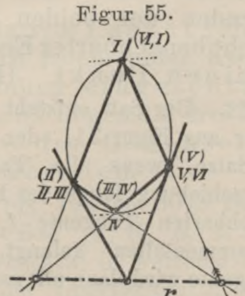
Durch beliebigen Punkt auf 2 die neue Tangente 1 zu gegebenen (2,3), 4, (5,6).

Figur 54.



Gegeben $a_1\,d_1\,e_1$ und $a_2\,d_2\,e_2$, gesucht $p_1\,p_2$.

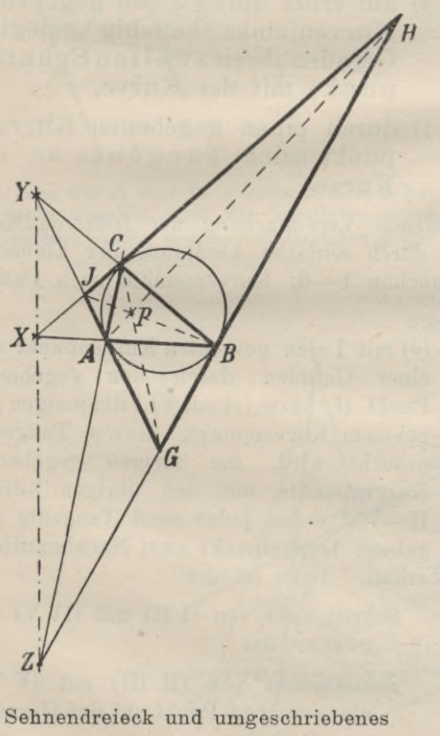
Figur 55.



Auf beliebigem Strahl durch II den neuen Kurvenpunkt I zu gegebenen (II, III), IV, (V, VI).

Beweis. Der Satz entsteht entweder unmittelbar aus Figur 52, welche an Stelle der Figuren 29 und 31 tritt, wenn auf zwei Trägern $t_1\,t_2$ außer einem Punktepaar $A_1\,A_2$ die Berührungspunkte $E_1\,D_2$ gegeben sind. Und werden noch statt $t_1\,t_2$ die Tangenten $A_1\,A_2$ und $P_1\,P_2$ als Träger gewählt, so erscheint XY statt $E_1\,D_2$ für t_0, während die Verbindungsgeraden der Gegenecken des Vierseits denselben Schnittpunkt P_0 festhalten. — Oder man leitet den Satz aus § 17 ab, indem man im Sechsseit der Figur 48 die Seiten durch Verschiebung längs der Kurve so zusammenrücken läßt, daß einmal das eine Paar Gegenseiten, dann das andere Paar Gegenseiten als ein Paar Doppeltangenten auftritt.

Figur 56.

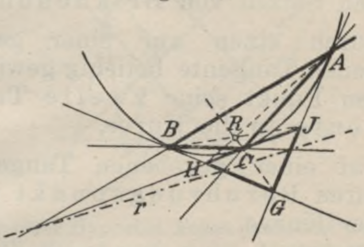


Sehnendreieck und umgeschriebenes Tangentendreieck am Kreis.

§ 20. „Satz von Brianchon fürs Dreiseit“: In jedem einer Kurve zweiter Klasse umge-

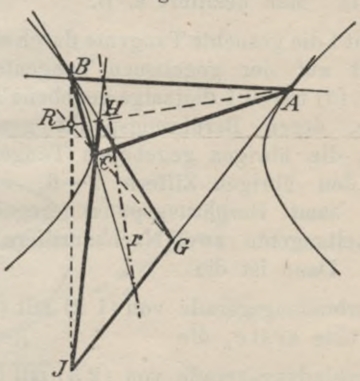
Beweis. Der Satz entsteht entweder unmittelbar aus Figur 54, welche an Stelle der Figuren 30 und 32 tritt, wenn in zwei Scheiteln $S_1\,S_2$ außer einem Strahlenpaar $a_1\,a_2$ die Tangenten $e_1\,d_2$ gegeben sind. Und werden noch statt $S_1\,S_2$ die Kurvenpunkte $(a_1\,a_2)$ und $(p_1\,p_2)$ als Büschelscheitel gewählt, so erscheint (xy) statt $(e_1\,d_2)$ für S_0, während die Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks dieselbe Verbindungsgerade p_0 festhalten. — Oder man leitet den Satz aus § 17 ab, indem man im Sechseck der Figur 49 die Ecken durch Verschiebung auf der Kurve so zusammenrücken läßt, daß einmal das eine Paar Gegenecken, dann das andere Paar Gegenecken als ein Paar Doppelpunkte auftritt.

Figur 57.



Sehnendreieck u. angeschriebenes Tangentendreiseit am allgemeinen Kurvenbogen.

Figur 58.



Sehnendreieck und angeschriebenes Tangentendreiseit an getrennten Ästen der Hyperbel.

„Satz von Paskal fürs Dreieck“: In jedem einer Kurve zweiter Ordnung eingeschriebenen

schriebenen Dreiseit gehen die Verbindungsgeraden der Eckpunkte mit den Berührungspunkten auf den Gegenseiten durch einen Punkt.

Zum Beweis läßt man im Sechsseit der Figur 48 dreimal je zwei Nachbarseiten zusammenrücken.

Dreieck liegen die Schnittpunkte der Seiten mit den Tangenten in den Gegenecken auf einer Geraden.

Zum Beweis läßt man im Sechseck der Figur 49 dreimal je zwei Nachbarecken zusammenrücken.

In Figur 56—58 sind jeweils die beiderseitigen Sätze gleichzeitig dargestellt, da stets die Elemente des eingeschriebenen Dreiecks ABC und die des umgeschriebenen Dreiseits GHJ zugleich auftreten. — Die Sätze des § 19 sind bemerkenswerter als die anderen Sätze § 17—20, weil dort vier Elemente, sonst jedesmal nur drei Elemente in der besonderen Lage auftreten. — Man beachte die Geltung der Sätze § 20 für Umkreis, Inkreis und Ankreise desselben Dreiecks.

§ 21. Aus gegebenen fünf Kurvenelementen (nach § 14) **konstruiert** man, wenn die Überzahl derselben

Tangenten sind (§ 14_{1-3}), nach den Sätzen von Brianchon:

α) durch einen auf einer gegebenen Tangente beliebig gewählten Punkt seine zweite Tangente an die Kurve,

β) auf einer gegebenen Tangente ihren Berührungspunkt mit der Kurve.

Kurvenpunkte sind (§ 14_{4-6}), nach den Sätzen von Paskal:

δ) auf einer durch einen gegebenen Kurvenpunkt beliebig gelegten Geraden ihren zweiten Schnittpunkt mit der Kurve,

γ) durch einen gegebenen Kurvenpunkt seine Tangente an die Kurve.

Die Konstruktion bildet eine bedeutende Vereinfachung der früheren Konstruktion nach § 11—14, denn sie erfolgt durch einfache Abzählung der Elemente von eins bis sechs (Tangenten nach Brianchon 1—6, Kurvenpunkte nach Paskal I—VI). Man beziffert z. B.

(α) mit 1 die gesuchte Tangente durch einen Punkt auf der gegebenen Tangente 2, bezw. (β) mit 6,1 diejenige gegebene Tangente, deren Berührungspunkt gesucht wird, die übrigen gegebenen Tangenten mit den übrigen Ziffern 2—6, wobei jede samt Berührungspunkt gegebene Doppeltangente zwei Nachbarziffern erhält. Dann ist die

Verbindungsgerade von (1 2) mit (4 5) eine erste, die

Verbindungsgerade von (2 3) mit (5 6) eine zweite Gerade durch den Punkt von Brianchon;

die Verbindungsgerade von (3 4) mit dem so gefundenen Punkt von Brianchon liefert dann als Schnittpunkt auf Tangente 6:

(δ) mit I den gesuchten Kurvenpunkt auf einer Geraden durch den gegebenen Punkt II, bezw. (γ) mit VI,I denjenigen gegebenen Kurvenpunkt, dessen Tangente gesucht wird, die übrigen gegebenen Kurvenpunkte mit den übrigen Ziffern II—VI, wobei jeder samt Tangente gegebene Doppelpunkt zwei Nachbarziffern erhält. Dann ist der

Schnittpunkt von (I II) mit (IV V) ein erster, der

Schnittpunkt von (II III) mit (V VI) ein zweiter Punkt auf der Geraden von Paskal;

der Schnittpunkt von (III IV) mit der so gefundenen Paskalschen Geraden liefert dann als Verbindungsgerade durch Punkt VI:

α) den Punkt (6 1) durch welchen die gesuchte Tangente 1 noch hindurchgehen muß, bezw.

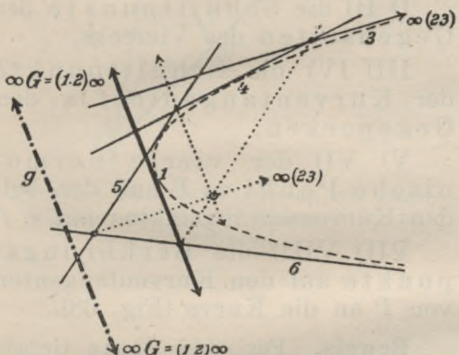
β) den Schnittpunkt der zusammenfallenden Tangenten (6,1), also den Berührungspunkt dieser Doppeltangente.

δ) die Gerade (VI,I), auf welcher der gesuchte Kurvenpunkt I noch liegen muß, bezw.

γ) die Verbindungsgerade der zusammenfallenden Punkte (VI,I), also die Tangente dieses Doppelpunktes.

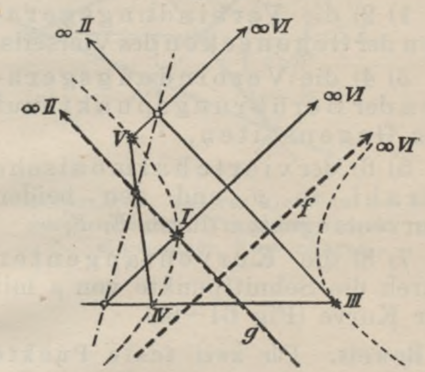
Mittels Neubezifferung der gegebenen bezw. gefundenen Elemente können auch beliebig viele weiteren Elemente konstruiert werden; verlangt die gestellte Aufgabe Konstruktion nach Brianchon (Paskal), während die gegebenen Elemente nur Konstruktion nach Paskal (Brianchon) gestatten, so konstruiert man erst bis zu drei neuen Tangenten (Kurvenpunkten), und kann dann das verlangte finden.

Figur 59.



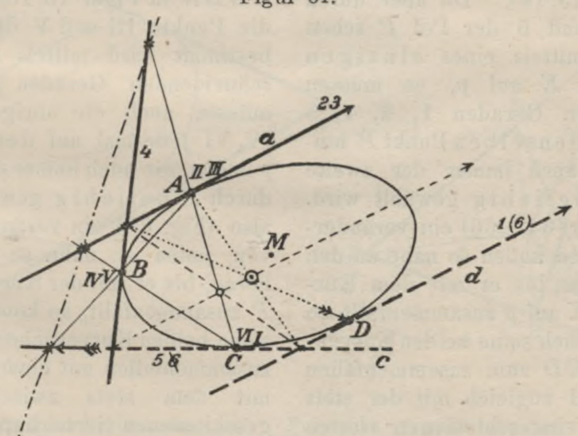
An eine durch vier Tangenten 3, 4, 5, 6 bestimmte Parabel wird die Paralleltangente zu einer beliebig gegebenen Geraden g gesucht (nach Brianchon).

Figur 60.



Von einer Hyperbel kennt man drei Punkte III, IV, V und zwei zu den Asymptoten parallele Geraden f und g; man sucht auf einer dieser beiden Geraden (g) den Hyperbelschnittpunkt (nach Paskal).

Figur 61.



Eine Kurve ist gegeben durch drei Punkte ABC nebst Tangenten in A und B. Verlangt wird der Kurvenpunkt auf der zu a parallelen Tangente. (Eine Konstruktion nach Paskal liefert c, zwei Konstruktionen nach Brianchon liefern d und D.)

Kapitel VI.

Pol und Polare (Monge 1795).

§ 22. Lehrsatz. Gehen durch zwei beliebige Punkte E, F einer Geraden p je zwei Gegenseiten eines einer Kurve umgeschriebenen Vierseits, so gehen durch denselben Punkt P (**Pol** der Geraden p, Fig. 62—66):

1) 2) die Verbindungsgeraden der Gegenecken des Vierseits,

3) 4) die Verbindungsgeraden der Berührungspunkte auf den Gegenseiten,

5) 6) der vierte harmonische Strahl zu p und den beiden Kurventangenten durch E, F,

7) 8) die Kurventangenten durch die Schnittpunkte von p mit der Kurve (Fig 64—66).

Beweis. Für zwei feste Punkte E, F auf p folgt die Lage der Geraden 1—4 aus dem Satze von Brianchon fürs Vierseit (§ 19), und die der Geraden 5, 6 aus den harmonischen Beziehungen an jedem Vierseit (z. B. der Strahlen $ganc$ in Figur 15/16). Da aber durch die Geraden 3 und 5 der Pol P schon bestimmt wird mittels eines einzigen äußeren Punktes E auf p, so müssen auch die übrigen Geraden 1, 2, 4, 6 jedesmal durch denselben Punkt P hindurchgehen, wo auch immer der zweite Punkt F auf p beliebig gewählt wird. Rückt also (Figur 64—66) ein veränderlicher Punkt E von außen so nahe an den Kurvenrand heran, bis er mit dem Kurvenschnittpunkt X auf p zusammenfällt, so kommen zuletzt auch seine beiden Kurventangenten EA, ED zum zusammenfallen mit einander und zugleich mit der stets zwischen ihnen eingeschlossenen vierten harmonischen Geraden 5, nämlich XP. Da diese aber durch P geht, so muß auch die Tangente in X bezw. in Y durch P gehen.

Lehrsatz. Liegen auf zwei beliebigen Geraden e, f eines Punktes P je zwei Gegenecken eines einer Kurve eingeschriebenen Vierecks, so liegen auf derselben Geraden p (**Polare** des Punktes P, Fig. 67, 68):

I) II) die Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks,

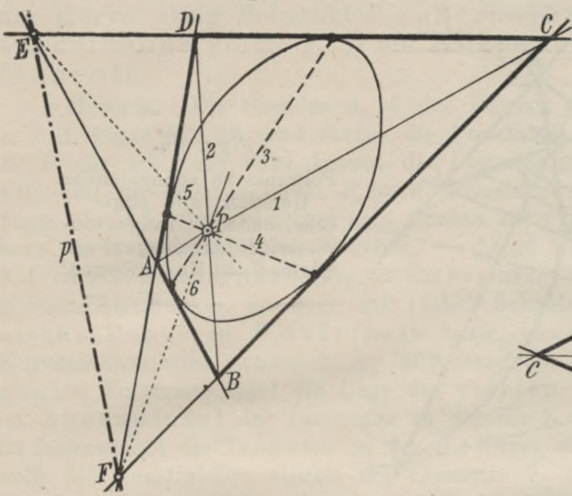
III) IV) die Schnittpunkte der Kurventangenten in den Gegenecken,

V) VI) der vierte harmonische Punkt zu P und den beiden Kurvenschnittpunkten auf e, f,

VII) VIII) die Berührungspunkte auf den Kurventangenten von P an die Kurve (Fig. 68).

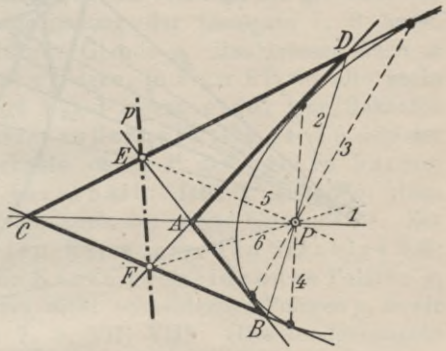
Beweis. Für zwei feste Gerade e, f durch P folgt die Lage der Punkte I—IV aus dem Satze von Paskal fürs Viereck (§ 19), und die der Punkte V, VI aus den harmonischen Beziehungen an jedem Viereck (z. B. der Punkte $DGBN$ in Figur 15/16). Da aber durch die Punkte III und V die Polare p schon bestimmt wird mittels einer einzigen schneidenden Geraden e durch P, so müssen auch die übrigen Punkte I, II, IV, VI jedesmal auf derselben Geraden p liegen, wie auch immer der zweite Strahl f durch P beliebig gewählt wird. Rückt also (Fig. 68) ein veränderlicher Strahl e von innen so nahe an den Kurvenrand heran, bis er mit der Kurventangente x aus P zusammenfällt, so kommen zuletzt auch seine beiden Kurvenschnittpunkte A, C zum zusammenfallen mit einander und zugleich mit dem stets zwischen ihnen eingeschlossenen vierten harmonischen Punkte V, nämlich X. Da aber dieser auf p liegt, so muß auch der Berührungspunkt von x bezw. von y auf p liegen.

Figur 62.



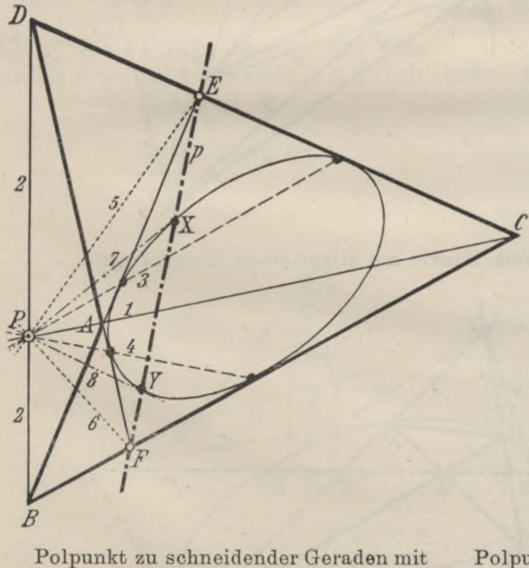
Polpunkt zu äußerer Geraden mit umgeschriebenem Tangentenvierseit an der Ellipse.

Figur 63.



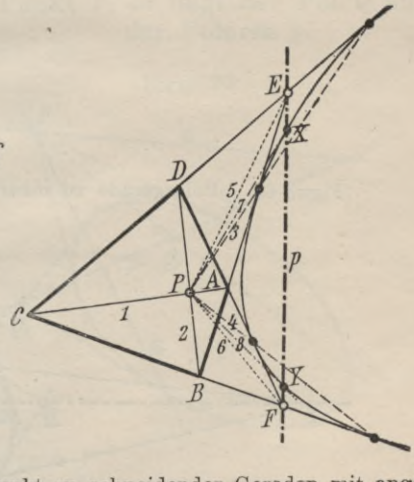
Polpunkt zu äußerer Geraden mit angeschriebenem Tangentenvierseit am allgemeinen Kurvenbogen.

Figur 64.

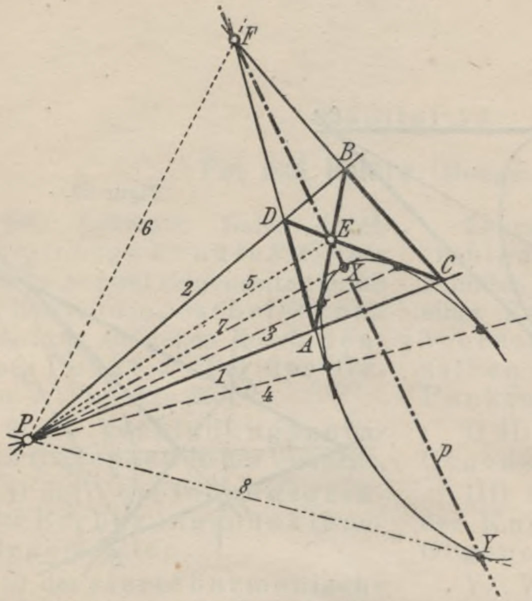


Polpunkt zu schneidender Geraden mit umgeschriebenem Tangenvierseit (einspringend) an der Ellipse.

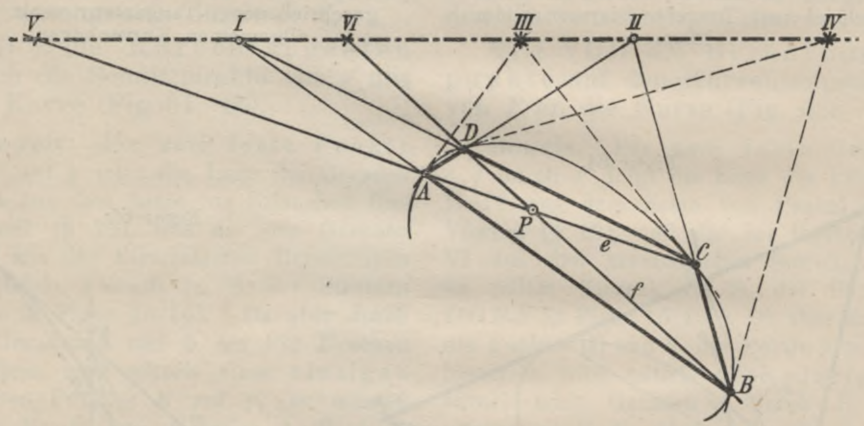
Figur 65.



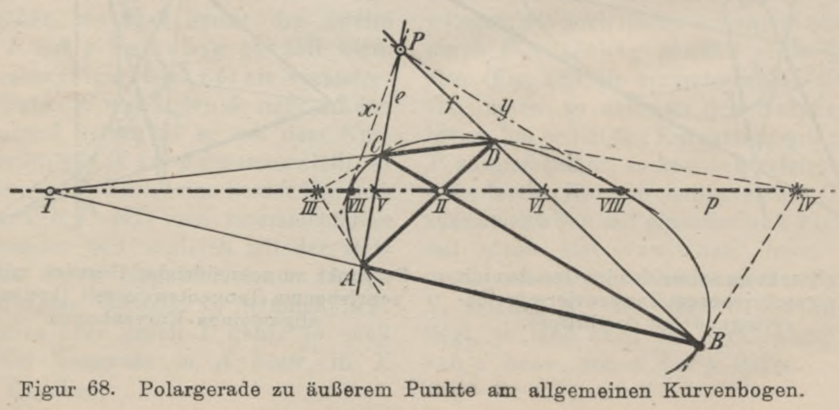
Polpunkt zu schneidender Geraden mit angeschriebenem Tangentenvierseit (konvex) am allgemeinen Kurvenbogen.



Figur 66.
Polpunkt zu schneidender Geraden mit angeschriebenem Tangentenvierseit (überschlagen) am allgemeinen Kurvenbogen.



Figur 67. Polargerade zu innerem Punkte am allgemeinen Kurvenbogen.



Figur 68. Polargerade zu äußerem Punkte am allgemeinen Kurvenbogen.

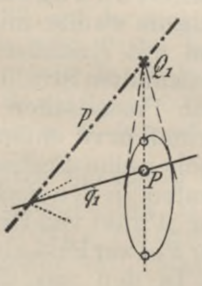
§ 23. Die Erzeugung des Poles P zur Polaren p bezw. der Polaren p zum Polpunkte P ist gegenseitig gleichwertig. — Polar zugeordnet sind: α) eine Polare p außerhalb der Kurve und ein Polpunkt P innerhalb der Kurve, β) ein Polpunkt P außerhalb der Kurve und eine die Kurve schneidende Polare p, γ) ein Kurvenpunkt und seine Kurventangente.

Beweis. Die Geraden 3, 4 der Figuren 62 bis 66 sind die gleichen, wie e, f in Figur 67, 68, und ebenso die Punkte III, IV der letzteren die gleichen, wie E, F der ersteren; dazu kommt die Übereinstimmung der Elemente 7, 8 bezw. VII, VIII für äußeren Punkt P bezw. schneidende Gerade p, also müssen auch in Figur 62—66 alle sechs bzw. acht Punkte auf p liegen, in Figur 67, 68 alle sechs bezw. acht Geraden durch P gehen. — Liegt P auf irgend einer der Sekanten 3, 4 oder e, f innerhalb (Fig. 62, 63, 67) bezw. außerhalb (Fig. 64—66, 68) der Kurvenschnittpunkte, so liegt auf jeder Sekante durch P der vierte harmonische Punkt zu P außerhalb bezw. innerhalb; fällt P mit dem einen Kurvenschnittpunkt zusammen, so fällt ebendahin auch der vierte harmonische. Zur gleichen Folgerung führt die Lage des vierten harmonischen Strahles 5,6: im Außenwinkel der Tangenten zu der die Kurve schneidenden Polaren p, im Innenwinkel der Tangenten zu der die Kurve nicht schneidenden Polaren p, sowie auch die Konstruktion mittels der Elemente 7, 8, VII, VIII. (Die letztgenannten Erzeugungen von P zu p bezw. p zu P zeigen auch, daß Pol und Polare sich vom Kurvenrande in entgegengesetzter Richtung wegbewegen: P oder p nach innen, p oder P nach außen).

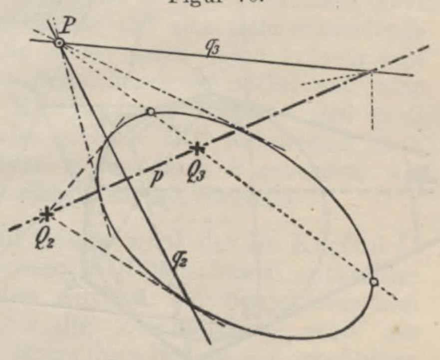
§ 24. Polar zugeordnet stehen einander gegenüber (Figur 69 und 70):

Durchlaufung der Punktreihe mit Träger p durch den Polpunkt Q,	bezw.	Durchlaufung des Strahlenbüschels mit Scheitel P durch die Polare q; —
	oder:	
Liegt ein Punkt Q auf der Geraden p, so geht die Polare q durch den Pol P,	bezw.	Geht eine Gerade q durch einen Punkt P, so liegt der Pol Q auf der Polaren p.

Figur 69.



Figur 70.



$$\frac{\begin{array}{c} P \text{ polar } p \\ Q \text{ polar } q \end{array}}{PQ \text{ polar } (p\,q).} \qquad \frac{\begin{array}{c} p \text{ polar } P \\ q \text{ polar } Q \end{array}}{(p\,q) \text{ polar } PQ.}$$

Beweise. 1) Für äußere Punkte $Q_{1,2}$ ($=E$) auf schneidender oder nicht

Beweise. 1) Für schneidende Geraden $q_{1,2}$ ($=e$) durch äußeren oder schneidender Geraden p liefern den Satz die Elemente 3, 4 des § 22, denn 3, 4 sind selbst die gesuchten Polaren zu E, F ($= Q_{1,2}$).

2) Für äußere oder innere Punkte $Q_{2,3}$ auf schneidender Geraden p ($= e$) liefern den Satz die Elemente III, IV des § 22, denn als Sekante durch $Q_{2,3}$ liefert e ($= p$) den Punkt III ($= P$) als einen Punkt der gesuchten Polaren $q_{2,3}$.

3) Für äußeren Punkt Q_1 auf nicht schneidender Geraden p oder inneren Punkt Q_3 auf schneidender Geraden p liefern den Satz die Elemente V, VI des § 22, denn die gesuchte Polare $q_{1,3}$ zu $Q_{1,3}$ muß durch den vierten harmonischen Punkt $P =$ V zu Q und den Kurvenschnittpunkten auf der Verbindungsgeraden QP hindurchgehen.

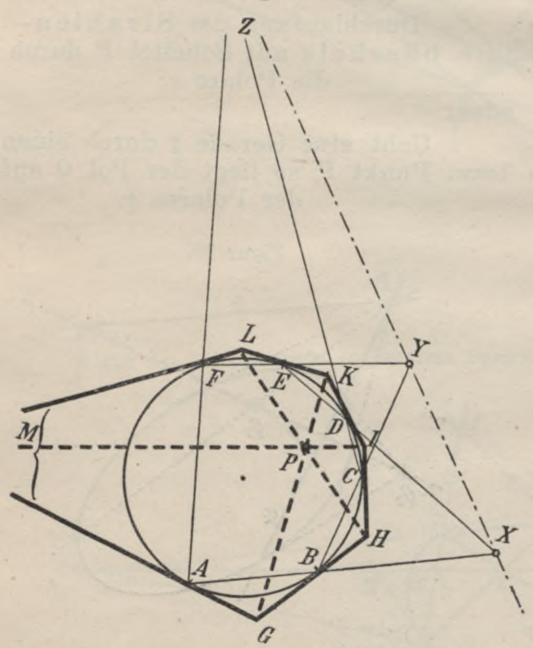
inneren Punkt P liefern den Satz die Elemente III, IV des § 22, denn III, IV sind selbst die gesuchten Polpunkte zu e, f ($= q_{1,2}$).

2) Für schneidende oder nicht schneidende Gerade $q_{2,3}$ durch äußeren Punkt P ($= E$) liefern den Satz die Elemente 3, 4 des § 22, denn als Tangentenschnittpunkt auf $q_{2,3}$ liefert E ($= P$) die Gerade 3 ($= p$) als eine Gerade durch den gesuchten Pol $Q_{2,3}$.

3) Für schneidende Gerade q_1 durch inneren Punkt P oder nicht schneidende Gerade q_3 durch äußeren Punkt P liefern den Satz die Elemente 5, 6 des § 22, denn der gesuchte Pol $Q_{1,3}$ zu $q_{1,3}$ muß auf dem vierten harmonischen Strahl $p = 5$ zu q und den Kurventangenten aus dem Schnittpunkte (qp) liegen.

§ 25. Einer Figur von verschiedenen Punkten und Geraden entspricht polar die Figur der Polargeraden und Polpunkte. Einer Gruppe von vier Punkten, die zu einem Viereck die harmonische Lage haben, entspricht eine Gruppe von vier Strahlen, die zu einem Vierseit harmonische Lage haben. Daher sind polar zugeordnete Figuren stets projektivisch verwandt. Einer Klassenkurve als Erzeugnis zweier projektivisch verwandten Punktreihen entspricht eine Ordnungskurve als Erzeugnis zweier mit den vorigen und mit einander projektivisch verwandten Strahlenbüschel. Einem Paskalschen Sechseck der Grundkurve entspricht das Brianchonsche Sechsseit der Tangenten in den Sechseckpunkten, der „Punkt von Brianchon“ wird der Pol zur Paskalschen Geraden. — In den aus den Geraden p, 3, 5 oder p, 4, 6 in Figur 62 bis 66 bezw. den Punkten P, III, V oder P, IV, VI in Figur 67, 68 gebildeten Dreiecken ist jeder Eckpunkt Pol der Gegenseite, jede Seite Polare der Gegenecke. Solche Dreiecke heißen „Polardreiecke“.

Figur 71.

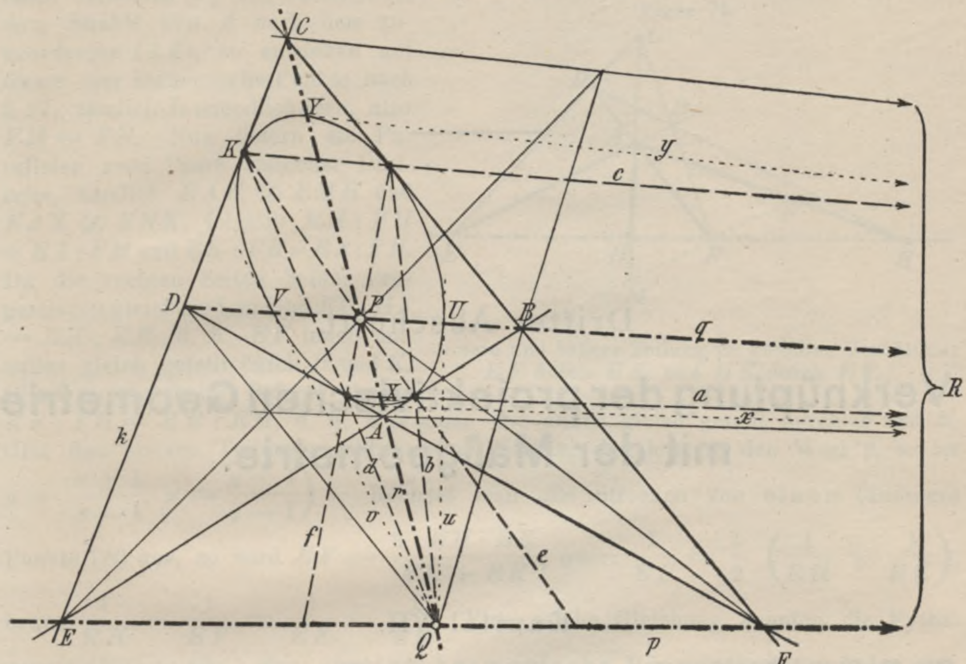


Satz von Brianchon polar zum Satz von Paskal.

Konjugierte Gerade heißen zwei solche Gerade, von denen je eine durch den Pol der andern geht.

Konjugierte Punkte heißen zwei solche Punkte, von denen je einer auf der Polaren des andern liegt.

Figur 72.



Polardreieck PQR, Polardreiseit pqr.

Auf die obengenannte Weise hat Brianchon seinen Satz aus dem von Paskal abgeleitet. — Ein Polardreieck PQR hat stets einen Eckpunkt innerhalb, zwei Eckpunkte außerhalb der Kurve, also zwei schneidende und eine nicht schneidende Seite. Durch den inneren Eckpunkt gehen die sechs, durch jeden äußeren acht Gerade nach § 22, auf der nicht schneidenden Seite liegen die sechs, auf jeder schneidenden Seite acht Punkte nach § 22. Konjugierte Punkte sind zu Q alle Punkte auf q, wie D, V, P, U, B, R, also z. B. je zwei Nebenecken eines Sehnenvierecks; konjugierte Gerade sind zu r alle durch R gehenden, wie p, x, a, q, c, y, also z. B. je zwei Nebenseiten eines Tangentenvierseits.

§ 26. Durch die Lehre von Pol und Polare wird der im Kapitel II aufgestellte Grundsatz der Dualität seiner Willkürlichkeit entkleidet und als notwendige Folgerung in den Aufbau der projektivischen Geometrie eingegliedert. Man kann sich die Zeichenebene stets als Doppelebene vorstellen, deren Blätter nur längs dem Rande der gewählten Grundkurve zusammenstoßen; und dann ist jeder Figur des einen Blattes die polare Figur des anderen Blattes zugeordnet, die Grundkurve entspricht sich selbst als Punktkurve zweiter Ordnung bzw. Tangentenkurve zweiter Klasse (vgl. § 13).

Während im Kapitel II die Gegenüberstellung von Punkt und Gerade als willkürliche Auffassung erscheinen konnte, ergibt es sich an der vorliegenden Stelle des Lehrganges als Notwendigkeit, daß wenn jenes nicht bereits geschehen wäre, unter Zurückgreifen auf den Anfang jedem Ergebnis die Übertragung auf die polare Figur an die Seite zu stellen wäre. So bildet die Lehre von Pol und Polare in doppelter Weise einen Abschluß, einerseits als Höhepunkt der Entwicklungen, andrerseits durch Rückanschluß an den Ausgangspunkt.

Dritter Abschnitt.

Verknüpfung der projektivischen Geometrie mit der Maßgeometrie.

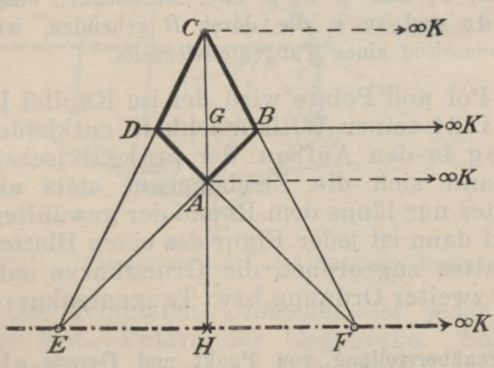
Kapitel VII.

Die Maßbeziehungen der unendlich fernen Elemente: Mittelpunkt und Brennpunkte der Kurven.

§ 27. Mittelpunkt und unendlich ferner Punkt einer Strecke bilden zugeordnete harmonische Punkte mit den Endpunkten der Strecke. —

Wenn von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete auf einander senkrecht stehen, so halbieren sie den Winkel und Nebenwinkel der beiden andern Strahlen.

Figur 73.



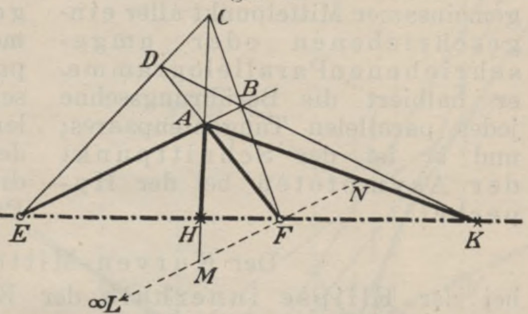
Vier harmonische Punkte $E, H, F, K\infty$.

Beweis. Beide Sätze ergeben sich am einfachsten, wenn man zur grundlegenden Figur für vier harmonische Punkte ein Deltoid benutzt; H wird Mittelpunkt von EF, K wird unendlich ferner Punkt. — Von den vier Strahlen des Scheitels A oder C nach EF, HK zeigen die Strahlen nach H und K die obige Eigenschaft, und zwar allgemein gültig wegen der Eindeutigkeit der harmonischen Beziehung.

§ 28. Von vier harmonischen Punkten teilen je zwei zugeordnete die Strecke der beiden andern innen und außen im gleichen Verhältnis.

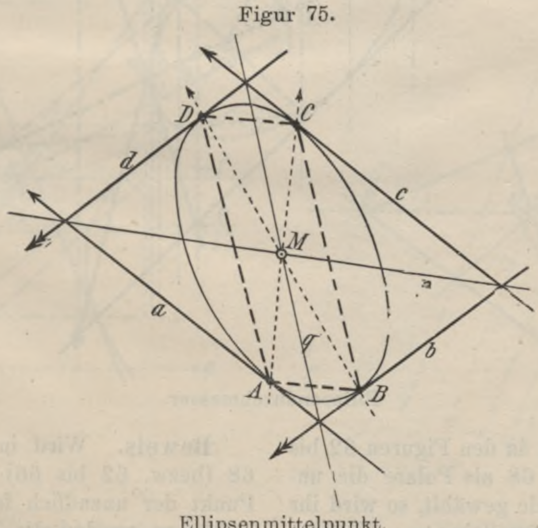
Beweis. Aus A gehen vier harmonische Strahlen nach den durch das Viereck $ABCD$ erzeugten vier harmonischen Punkten $EFHK$. Legt man durch einen derselben (F) eine Parallele zu dem Strahle von A nach dem zugeordneten (AE), so entstehen auf dieser vier harmonische Punkte nach § 27, nämlich L unendlich fern, also $FM = FN$. Nun liefern die Parallelen zwei Paare ähnlicher Dreiecke, nämlich $EAH \backsim FMH$ und $EAK \backsim FNK$, folglich $EH : FH = EA : FM$ und $EK : FK = EA : FN$. Da die rechten Seiten beider Proportionen gleich sind, so folgt $EH : HF = EK : KF$, d. h. EF innen und außen gleich geteilt durch H und K. Gliedervertauschung liefert ebenso $KF : FH = KE : EH$, d. h. KH innen und außen gleich geteilt durch F und E. (Hat das erstere Teilungsverhältnis den Wert x, das letztere den Wert y, so ist $y = \frac{x+1}{x-1}$, $x = \frac{y+1}{y-1}$) — Rechnet man alle Strecken von einem (äußeren) Punkte (E) aus, so wird $EF = \frac{2 \cdot EH \cdot EK}{EH + EK}$, oder: $\frac{1}{EF} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{EH} + \frac{1}{EK}\right)$, bezw. $\frac{1}{EH} - \frac{1}{EF} = \frac{1}{EF} - \frac{1}{EK}$. Eine solche Gleichung nannten die Pythagoreer (520 v. Chr.) eine stetige harmonische Proportion, und den vorhergehenden Ausdruck für EF das harmonische Mittel zwischen EH und EK, weil zu den Tönen zweier Saiten von den Längen EH und EK eine dritte von der Länge EF den bestklingenden Zwischenton liefert.

Figur 74.



Innere und äußere Teilung im gleichen Verhältnis: EF durch HK, und HK durch EF.

Figur 75.



Ellipsenmittelpunkt.

§ 29. Als Pol der unendlich fernen Geraden der Kurvenebene entsteht ein Punkt, welcher der gemeinsame Mittelpunkt aller seiner Sehnen ist, also der **Kurvenmittelpunkt.** Derselbe ist zugleich gemeinsamer Mittelpunkt aller eingeschriebenen oder umgeschriebenen Parallelogramme, er halbiert die Berührungssehne jedes parallelen Tangentenpaares; und er ist der Schnittpunkt der Asymptoten bei der Hyperbel.

Als Polare jedes unendlich fernen Punktes der Kurvenebene entsteht die Verbindungsgerade der Mittelpunkte aller nach jenem Punkte laufenden parallelen Sehnen bezw. Tangenten, also ein **Kurvendurchmesser.** Auf ihm liegen die Schnittpunkte der Tangenten in den Kurvenschnittpunkten jeder dieser parallelen Sekanten sowie die Schnittpunkte der beiden Geradenpaare, welche die Kurvenschnittpunkte je zweier Parallelsekanten verbinden.

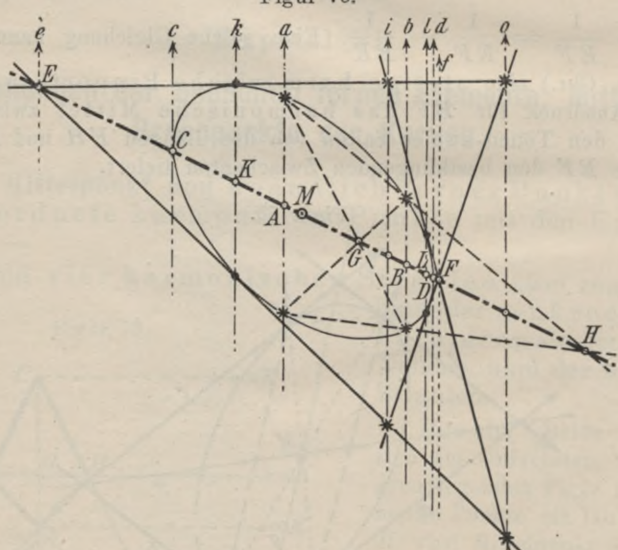
Der Kurven-Mittelpunkt liegt

bei der Ellipse innerhalb der Kurve: alle Ellipsendurchmesser sind Sekanten (Fig. 75),

bei der Parabel auf der Kurve im unendlich fernen Parabelpunkt: alle Parabeldurchmesser laufen parallel nach diesem Punkte,

bei der Hyperbel außerhalb der Kurve zwischen beiden Ästen: Die Hyperbel besitzt schneidende und nicht schneidende Durchmesser, sowie zwei berührende Durchmesser, nämlich die Asymptoten.

Figur 76.

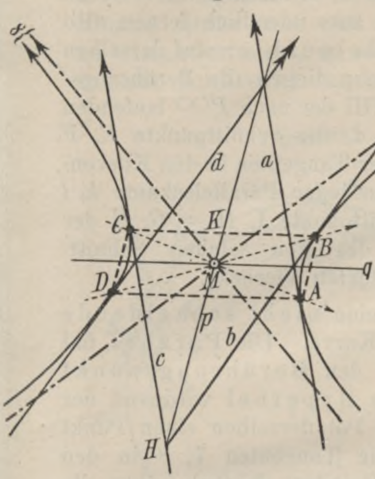


Ellipsendurchmesser.

Beweis. Wird in den Figuren 62 bis 66 sowie 67 und 68 als Polare die unendlich ferne Gerade gewählt, so wird ihr Polpunkt M auf jeder Sekante e, f vierter

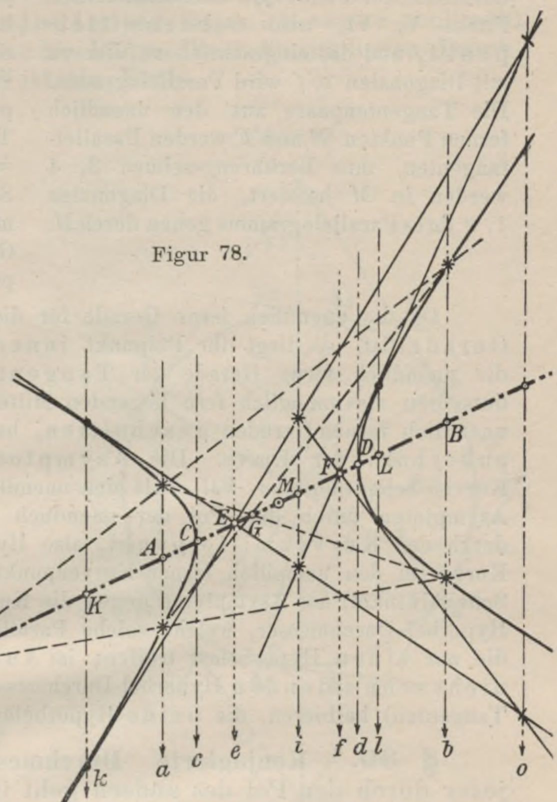
Beweis. Wird in den Figuren 67, 68 (bezw. 62 bis 66) für P irgend ein Punkt der unendlich fernen Geraden gewählt, so werden die Punkte V, VI auf

Figur 77.



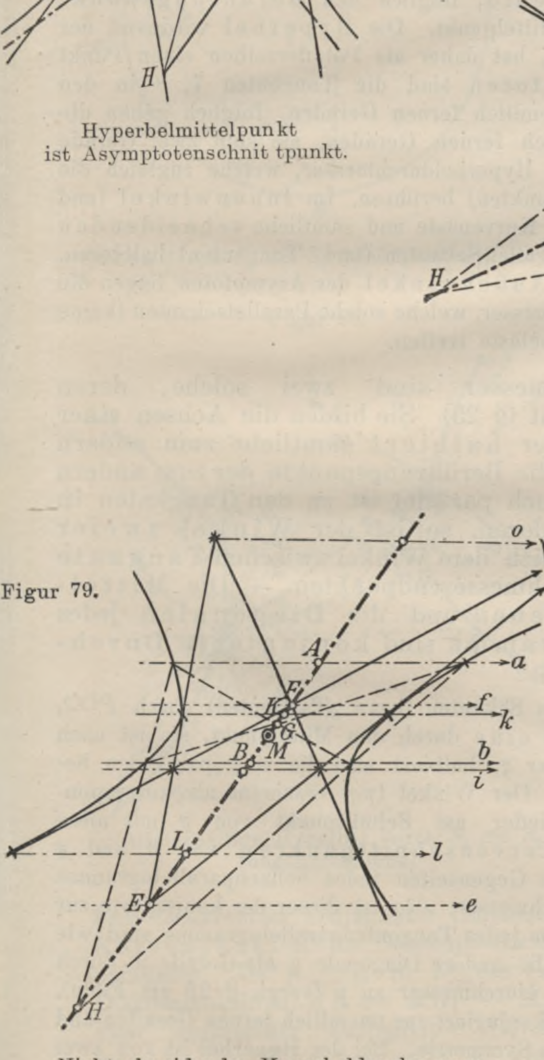
Hyperbelmittelpunkt
ist Asymptotenschnit tpunkt.

Figur 78.



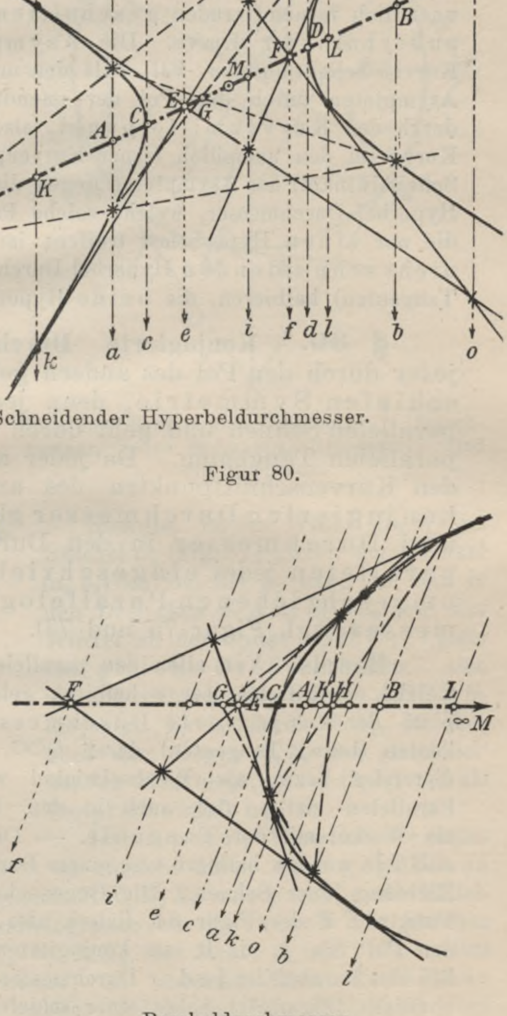
Schneidender Hyperbeldurchmesser.

Figur 79.



Nichtschneidender Hyperbeldurchmesser.

Figur 80.



Parabeldurchmesser.

harmonischer Punkt zum unendlich fernen Punkt V, VI, also Sehnenmittelpunkt, und das eingeschriebene Viereck mit Diagonalen e, f wird Parallelogramm. Die Tangentenpaare aus den unendlich fernen Punkten E und F werden Paralleltangenten, ihre Berührungssehnen 3, 4 werden in M halbiert, die Diagonalen 1, 2 ihres Parallelogramms gehen durch M.

jeder Sekante a, b durch P die vierten harmonischen zum unendlich fernen, also Sehnenmittelpunkte; auf derselben Polar-Geraden p liegen die Berührungspunkte VII, VIII der nach $P\infty$ laufenden Tangenten c, d, die Schnittpunkte E, F = III, IV der Tangenten in den Kurven-Schnittpunkten jeder Parallelsekante k, l und die Schnittpunkte I, II = G, H der Gegenseiten des von solchen Schnittpunkten gebildeten Vierecks.

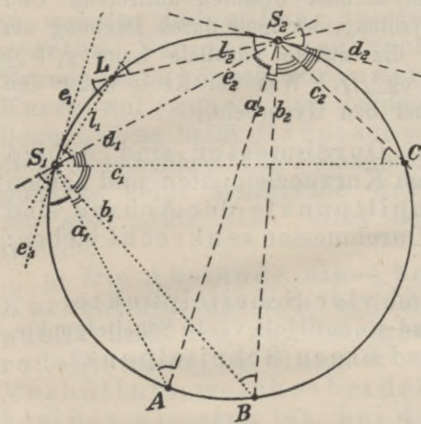
Da die unendlich ferne Gerade für die Ellipse eine nicht schneidende Gerade ist, so liegt ihr Polpunkt innerhalb der Kurve. Die Parabel hat die unendlich ferne Gerade zur Tangente, folglich den Berührungspunkt derselben als unendlich fern liegenden Mittelpunkt. Die Hyperbel wird von der unendlich fernen Geraden geschnitten, hat daher als Pol derselben einen Punkt außerhalb der Kurve. Die Asymptoten sind die Tangenten 7, 8 in den Kurven-Schnittpunkten VII, VIII der unendlich fernen Geraden, folglich gehen die Asymptoten durch den Pol der unendlich fernen Geraden, sie sind zwei Gerade durch den Kurvenmittelpunkt, also Hyperbeldurchmesser, welche zugleich die Kurve (in den unendlich fernen Kurvenpunkten) berühren. Im Innenwinkel (und Scheitelwinkel) der Asymptoten liegen die Kurvenäste und sämtliche schneidenden Hyperbel-Durchmesser, welche solche Parallel-Sekanten (und -Tangenten) halbieren, die nur einen Hyperbelast treffen; im Außenwinkel der Asymptoten liegen die nicht schneidenden Hyperbel-Durchmesser, welche solche Parallelsekanten (keine Tangenten) halbieren, die beide Hyperbeläste treffen.

§ 30. Konjugierte Durchmesser sind zwei solche, deren jeder durch den Pol des andern geht (§ 25). Sie bilden die Achsen einer schiefen Symmetrie, denn jeder halbiert sämtliche zum andern parallelen Sehnen und geht durch die Berührungspunkte der zum andern parallelen Tangenten. Da jeder auch parallel ist zu den Tangenten in den Kurvenschnittpunkten des anderen, so ist der Winkel zweier konjugierten Durchmesser gleich dem Winkel zwischen Tangente und Durchmesser in den Durchmesserendpunkten. — Die Mittelparallelen jedes eingeschriebenen und die Diagonalen jedes umgeschriebenen Parallelogramms sind konjugierte Durchmesser (vgl. Figur 75 und 77).

Beweis. Von allen den parallelen Sekanten (bezw. Tangenten) durch $P\infty$, welche ein Durchmesser p halbiert, geht eine durch den Mittelpunkt, sie ist nach § 25 der konjugierte Durchmesser q, halbiert also die zu p parallelen Sekanten (bezw. Tangenten) durch $Q\infty$. Der Winkel (pq) erscheint als korrespondierender bezw. als Wechselwinkel wieder am Schnittpunkt von p mit allen Parallelen zu q, also auch in den Kurvenschnittpunkten von p und q als Winkel mit der Tangente. — Die Gegenseiten jedes Sehnenparallelogramms $ABCD$ werden halbiert von einem Durchmesser, also ist dieser der konjugierte zur Richtung jener Sehnen. Die Gegenecken jedes Tangentenparallelogramms sind wie Punkte EF der Figur 64, liefern also die andere Diagonale q als Gerade 1 durch den Pol von p, d. h. als konjugierten Durchmesser zu p (vergl. § 25 am Ende). Bei der Parabel ist jeder Durchmesser konjugiert zur unendlich fernen Geraden und ebenfalls (Figur 80) Achse einer schiefen Symmetrie. Bei der Hyperbel ist von zwei konjugierten Durchmessern je einer ein schneidender, der andere ein nicht schneidender.

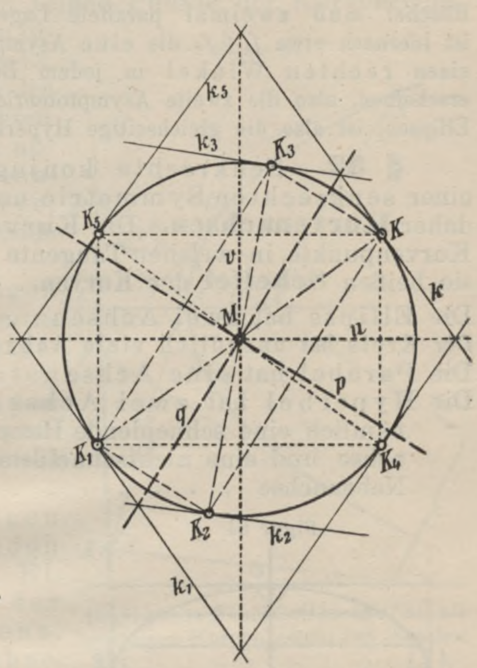
§ 31. Der Kreis entsteht als Erzeugnis zweier gleichlaufenden kongruenten Strahlenbüschel in schiefer Lage. Wenn bei einer Kurve mehr als ein Paar konjugierter Durchmesser senkrecht zu einander sind, so sind sämtliche Paare ihrer konjugierten Durchmesser senkrecht, und die Kurve ist ein **Kreis.**

Figur 81.



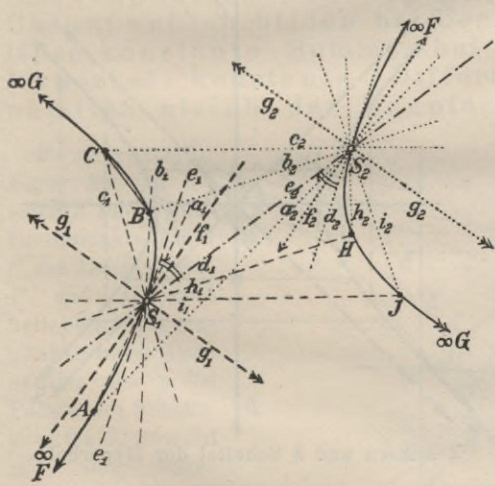
Kreis durch $S_1 \cong S_2$ (gleichlaufend).

Figur 82.



In jedem Kreispunkte Tangente $\perp$ Durchmesser, jedes Sehnenparallelogramm wird ein Rechteck.

Figur 83.



Gleichseitige Hyperbel durch $S_1 \cong S_2$ (ungleichlaufend).

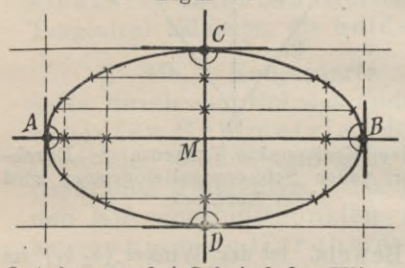
Beweis. Ist der Winkel $(a_1\, b_1)$ im Büschel S_1 (Fig. 81) gleich dem Winkel $(a_2\, b_2)$ im Büschel S_2 usw., so muß in den Dreiecken $S_1 A S_2$, $S_1 B S_2$ usw. der Winkel an der Spitze $A, B, C \ldots$ stets die gleiche Größe behalten. Also ist die entstehende Kurve $A B C S_1 S_2$ derjenige Kreis durch $S_1 S_2$, welcher über dem Bogen $S_1 S_2$ den gleichbleibenden Winkel $(a_1 a_2) = (b_1 b_2) \ldots$ als Peripheriewinkel besitzt. —

Ist nun p und q (Figur 82) ein erstes Paar senkrechter konjugierter Durchmesser, so entsteht durch einen gegebenen Kurvenpunkt K das Sehnenparallelogramm $K K_1 K_2 K_3$ mit p und q als Mittelparallelen. Da $p \perp q$, so ist das Parallelogramm ein Rechteck mit gleichen Diagonalenhälften $MK = MK_1 = MK_2 = MK_3$. Ist ferner u und v ein zweites Paar senkrechter konjugierter Durchmesser, so entsteht durch denselben gegebenen Kurvenpunkt K ein zweites Sehnenrechteck $K K_1 K_4 K_5$ mit gleichen Diagonalenhälften $MK = MK_1 = MK_4 = MK_5$. Die Kurve hat also die Punkte K, K_{1-5} mit dem Kreise um M gemeinschaftlich, folglich muß die ganze Kurve mit diesem Kreis zusammenfallen, denn durch fünf Punkte ist nur eine einzige Kurve zweiten Grades bestimmt, und nach dem vorigen gehört der Kreis ebenfalls zu diesen Kurven. — [Ungleichlaufende kongruente Strahlenbüschel erzeugen eine sog. „gleichseitige Hyperbel" (Fig. 83), nämlich mit senkrechten Asymptoten. Denn bei entgegengesetztem Umlauf zweier Büschel muß zweimal parallele Lage entsprechender Strahlen auftreten. Und ist hiernach etwa $f_1 \parallel f_2$ die eine Asymptotenrichtung, so muß durch Drehung um einen rechten Winkel in jedem Büschel die zweite parallele Lage $g_1 \parallel g_2$ erscheinen, also die zweite Asymptotenrichtung $gg \perp ff$. Was der Kreis unter den Ellipsen, ist also die gleichseitige Hyperbel unter den Hyperbeln.]

§ 32. Senkrechte konjugierte Durchmesser sind Achsen einer senkrechten Symmetrie unter den Kurvenelementen und heißen daher **Kurvenachsen.** Die Kurvenschnittpunkte der Achsen sind Kurvenpunkte, in welchen Tangente und Durchmesser senkrecht stehen: sie heißen **Scheitel der Kurven.**

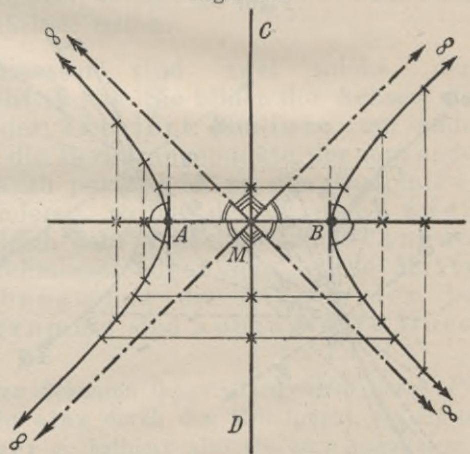
Die Ellipse hat zwei Achsen . .	und vier Scheitelpunkte.
Der Kreis hat unendlich viele Achsen	und unendlich viele Scheitelpunkte.
Die Parabel hat eine Achse . . .	und einen Scheitelpunkt.
Die Hyperbel hat zwei Achsen, nämlich eine schneidende Hauptachse und eine nichtschneidende Nebenachse	und zwei Scheitelpunkte.

Figur 84.

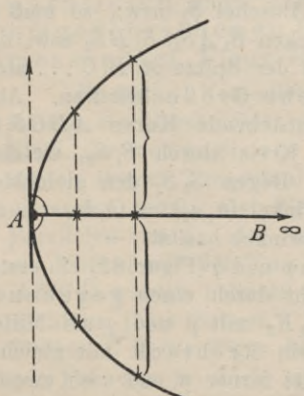


2 Achsen und 4 Scheitel der Ellipse.

Figur 86.



2 Achsen und 2 Scheitel der Hyperbel.

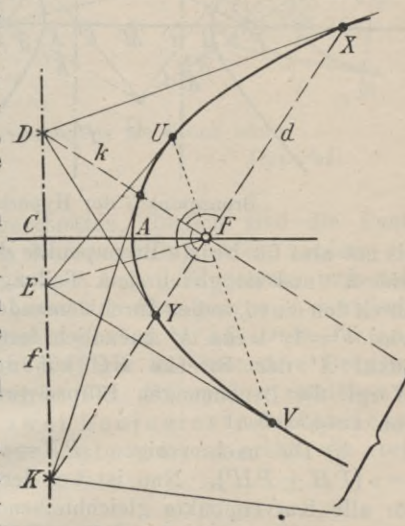


Figur 85. 1 Achse und 1 Scheitel der Parabel.

Mehr als ein Paar Achsen kann nach § 31 außer dem Kreis keine Kurve haben. Bei der Ellipse (Fig. 84) sind $AB \perp CD$ zwei schneidende konjugierte Durchmesser, also A, B, C, D vier Scheitelpunkte. Beim Kreis (Figur 82) ist in jedem Kurvenpunkte K die Tangente $k \perp MK$, jeder Durchmesser ist Symmetrieachse. Bei der Parabel (Figur 85) bildet ein einziger von allen Durchmessern mit der Tangente im End-punkt A einen rechten Winkel, A ist Kurvenscheitel, AB ist Achse, konjugiert zur unendlich fernen Geraden. Bei der Hyperbel (Figur 86) muß (nach § 30, Ende) die eine Achse außerhalb der Kurve bleiben, also liefert nur die andere Achse zwei Scheitelpunkte. Wegen der Symmetrie werden die Hyperbelachsen die Winkelhalbierenden der Asymptoten, die Hauptachse im Innenwinkel, die Nebenachse im Außenwinkel.

§ 33. Brennpunkte der Kurven heißen Punkte der Kurvenebene, in welchen jedes Paar zweier konjugierten Strahlen senkrecht steht. Brennpunkte können nur innerhalb der Kurve auf einer der beiden Achsen liegen: diese heißt Hauptachse, die andere Nebenachse. Die Polare eines Brennpunktes heißt **Leitgerade** der Kurve, ist also stets eine nicht schneidende Gerade.

Figur 87.

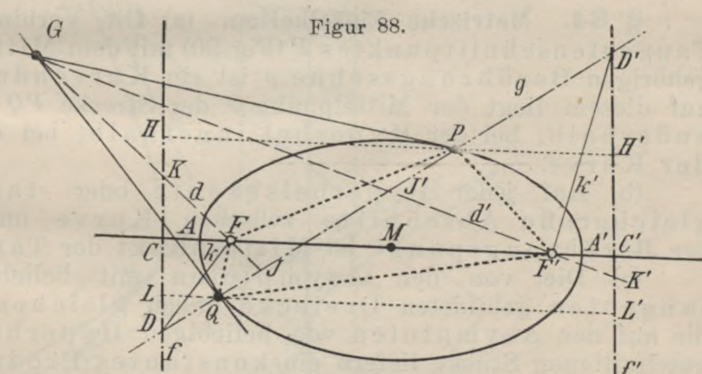


Brennpunkt F und Leitgerade f am allgemeinen Kurvenbogen, bes. Parabel.

a) Die Abstände eines beliebigen Kurvenpunktes von einem Brennpunkt und der zugehörigen Leitgeraden stehen in einem konstanten Verhältnis, welches bei der Ellipse kleiner als eins ist, bei der Parabel gleich eins, bei der Hyperbel über eins.

b) Die Abstände eines beliebigen Kurvenpunktes von den beiden Brennpunkten bilden bei der Ellipse konstante Summe, bei der Hyperbel konstante Differenz, nämlich gleich der Hauptachse.

Figur 88.

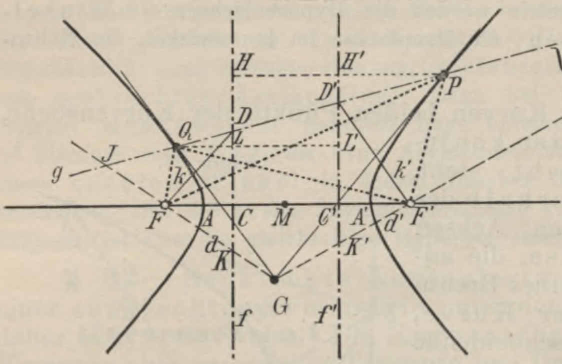


Brennpunkte der Ellipse.

Beweise: a) In Figur 88 und 89 seien F und F' die Brennpunkte, f und f' die Leitgeraden, P und Q zwei beliebige Kurvenpunkte nebst Tangenten, also g die Polare des Schnittpunktes G. Sowohl mit den ungestrichenen Buchstaben für F, als mit den gestrichenen Buchstaben für F' ist dann an beiden Figuren f polar F und g polar G, folglich (fg) polar FG oder D polar d, also auch (fd) polar FD oder K polar k. Da nun d durch K, k durch D geht, so sind k und d konjugierte Strahlen des Punktes F, also soll $d \perp k$ sein; und da die von ihnen auf g ausgeschnittenen Punkte $DQJP$ (wegen Dd) vier harmonische Punkte sind, so sind d und k mit FP und FQ vie harmonische Strahlen, also wird nach § 27 im Dreieck PQF der Innenwinkel bezw

Außenwinkel bei F durch FJ bezw. FD halbiert. Folglich besteht nach dem Satze von Apollonius die Proportion $PF : QF = PJ : JQ = PD : DQ$. Die Abstände PH und QL bilden aber mit Spitze D ähnliche Dreiecke, also wird voriges Verhältnis auch gleich $PH : QL$. Durch Gliedervertauschung entsteht $PF : PH = QF : QL$. Hiernach ist das Abstandsverhältnis für zwei beliebige Kurvenpunkte P und Q das gleiche, folglich für alle Kurvenpunkte konstant, also auch $= FA : AC = FA' : A'C = \varepsilon$. Der Symmetrie wegen ist endlich auch dasselbe $\varepsilon = F'A' : A'C' = F'A : AC' = PF' : PH' = QF' : QL'$, das Abstandsverhältnis hat also für beide Brennpunkte den gleichen Wert; es heißt „numerische Excentricität" und ist gleich dem Teilungsverhältnis, nach welchem die Strecke FC innen durch den einen, außen durch den andern Kurvenscheitel A bezw. A' geteilt wird. Daher wird $\varepsilon = 1$, wenn A$'$ unendlich fern, dagegen $\varepsilon \lesseqgtr 1$, jenachdem der äußere Teilpunkt A' der Strecke FC auf der Seite außerhalb F oder außerhalb C liegt. (Vergl. die Benennungen Ellipse von ἐν-λείπω, Parabel von παραβάλλω, Hyperbel von ὑπερβάλλω.)

Figur 89.



Brennpunkte der Hyperbel.

b) Da nach vorigem $PF = \varepsilon \,.\, PH$, $PF' = \varepsilon \,.\, PH'$, so ist auch $PF \pm PF' = \varepsilon\,(PH \pm PH')$. Nun ist bei der Ellipse (Figur 88) $PH + PH' = HH' = CC'$ für alle Kurvenpunkte gleichbleibend, also $PF + PF' =$ const. $= AA'$. Bei der Hyperbel (Figur 89) ist $PH - PH' = HH' = CC'$ für alle Kurvenpunkte gleichbleibend, also $PF - PF' =$ const. $= AA'$. Bei der Parabel ist F' unendlich fern, also sowohl Summe als Differenz der Fahrstrahlen konstant unendlich groß.

§ 34. Metrische Einzelheiten. (a) Die Verbindungsgerade eines Tangentenschnittpunktes P (Fig. 90) mit dem Mittelpunkt Q der zugehörigen Berührungssehne p ist ein Kurvendurchmesser, und auf diesem liegt der Mittelpunkt O der Strecke PQ bei der Ellipse außerhalb, bei der Hyperbel innerhalb, bei der Parabel auf der Kurve.

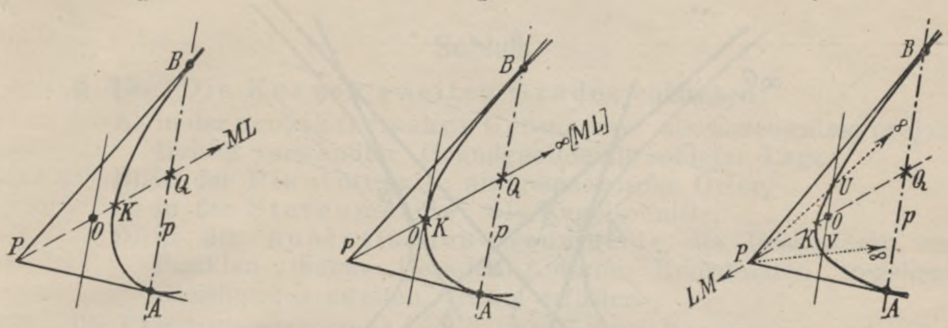
(b) Auf jeder Hyperbelsekante oder -tangente entstehen gleichgroße Abschnitte zwischen Kurve und Asymptoten: der Berührungspunkt ist Mittelpunkt der Tangentenstrecke.

(c) Die von den Asymptoten mit beliebigen Hyperbeltangenten gebildeten Dreiecke haben gleichen Inhalt — oder: die auf den Asymptoten von beliebigen Hyperbeltangenten abgeschnittenen Stücke liefern ein konstantes Produkt (S. S. 44).

Beweis: (a) Der erste Teil folgt unmittelbar aus § 29 bezw. Figur 76 bis 80, wenn man für P, p, Q die Elemente E, k, K jener Figuren nimmt. Sind dann in Figur 90 K und L die Kurvenpunkte auf PQ und O Mittelpunkt von PQ, so sind $PQKL$ vier harmonische Punkte, also wird $K = O$, wenn L unendlich fern, dagegen liegt K innerhalb OQ oder OP, jenachdem L rechts außerhalb Q oder links außerhalb P liegt. PU und PV liefern die Asymptotenrichtungen.

(b) In Figur 76 bis 80 sind EK und e mit den von E ausgehenden Tangenten vier harmonische Strahlen. Von e wird aber jede der Parallelsekanten

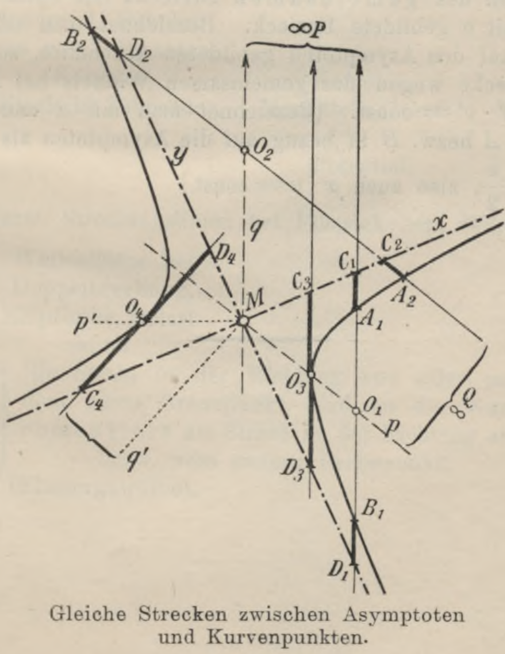
Figur 90.



Unterscheidungsmerkmal eines Kurvenbogens als Stück einer
Ellipse, Parabel, Hyperbel.

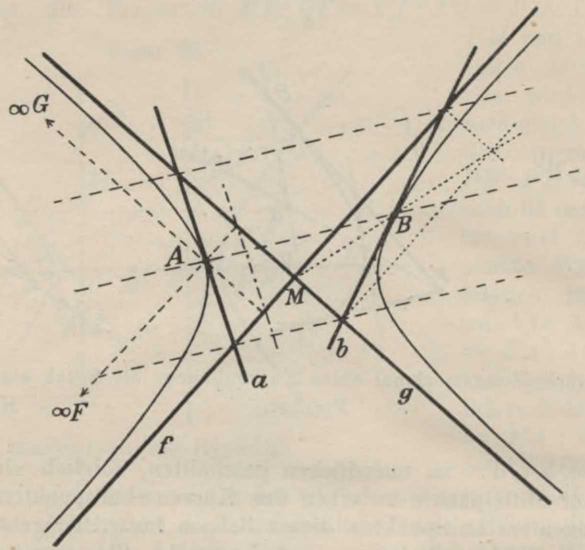
bezw. -tangenten a, b, c, d .. im unendlichen geschnitten, folglich sind die Punkte A, B, C, D nicht nur Mittelpunkte zwischen den Kurvenschnittpunkten, sondern auch zwischen den Tangentenschnittpunkten dieser Sehnen bezw. Tangenten, und daher ist auch das Stück jeder Sekante a, b bezw. der Tangente c, d zwischen der Kurve und den von E ausgehenden Tangenten gleich groß. Diese für jede Kurve geltende Tatsache nimmt bei der Hyperbel (Figur 91) besondere Bedeutung an, wenn für E der Mittelpunkt M gewählt wird: Für EK und e entstehen die konjugierten Durchmesser p, q, also werden je zwei konjugierte Durchmesser durch die Asymptoten harmonisch getrennt, und man erhält wie vorher $A_1 C_1 = B_1 D_1$, $A_2 C_2 = B_2 D_2$, $O_3 C_3 = O_3 D_3$ u. s. w.

Figur 91.



Gleiche Strecken zwischen Asymptoten
und Kurvenpunkten.

Figur 92.



Flächengleiche Dreiecke der Asymptoten
mit Hyperbeltangenten.

(c) Wendet man den Satz von Brianchon fürs Vierseit in der Weise auf die Hyperbel (Figur 92) an, daß man die Asymptoten f, g als Gegenseiten des Tangentenvierseits $a f b g$ wählt, so liegt der „Punkt von Brianchon" auf der unendlich fernen Berührungssehne, also müssen parallel werden die Verbindungsgeraden von A mit B und von (fa) mit (gb) und von (fb) mit (ga). Zwischen den letztgenannten Parallelen liegen dann je zwei inhaltsgleiche Dreiecke; und durch Subtraktion des gemeinsamen Dreiecks mit Spitze M bleibt das von (fg) mit a bezw. mit b gebildete Dreieck. Bezeichnet man mit u und v die von den Tangenten a, b auf den Asymptoten gebildeten Abschnitte, so verhalten sich die Flächen dieser Dreiecke wegen des gemeinsamen Winkels bei M wie $u \cdot v : u' \cdot v'$, folglich ist $u \cdot v = u' \cdot v' =$ const. [Bezeichnet man mit x und y die Koordinaten der Hyperbelpunkte A bezw. B in bezug auf die Asymptoten als Koordinatenachsen, so ist $x = \frac{u}{2}$, $y = \frac{v}{2}$, also auch $x \cdot y =$ const.]

Schluß.

§ 35. Die Kurven zweiten Grades **entstehen:**

A) in der projektivischen Geometrie: als Erzeugnisse projektivisch verwandter Grundgebilde in schiefer Lage,
B) in der Planimetrie: als geometrische Örter,
C) in der Stereometrie: als Kegelschnitte,
D) in der analytischen Geometrie als Gesamtheit von Punkten (bezw. Geraden), deren Koordinaten gegebene Gleichungen zweiten Grades erfüllen.

Die Übereinstimmung von A und B ist in § 33 nachgewiesen, von A und C in § 16; für A und D liefert § 34 (c, am Ende) ein einzelnes Beispiel.

Anwendung finden die Kurven zweiten Grades in allen Teilen der niederen und höheren Mathematik, Physik u. s. w.

	Ellipse	Hyperbel	Parabel
Analysis:	[Sog. elliptische Funktionen, im Einzelfall: Kreisfunktionen].	Die natürlichen Logarithmen (Basis e) heißen auch hyberbolische Logarithmen (wegen des Flächenstücks zwischen Asymptote und Kurvenbogen)	
Schattenlehre: Perspektive, Kartographie.	z. B. Schattenrand auf der Tischfläche von einer freischwebenden Kugel, wenn der leuchtende Punkt:		
	höher	tiefer	gleichhoch wie der höchste Kugelpunkt.
Astronomie:	Mondrand, Bahnkurven von: Planeten, Kometen,	Kometen,	Kometen.
Mechanik:	Elliptische Zahnräder.	Mariotte's Gesetz.	Wurfbahn; Rotierende Flüssigkeiten.
Statik:		Potential.	Parabelträger (bei Brücken usw.)
	Kraftlinien bezw. Strömungslinien bei Flüssigkeiten, Wärme, Elektrizität. . . .		
Optik:	Wellenfläche bei Doppelbrechung, Elliptische Polarisation.		
Schall, Wärme, Licht, Elektrizität, } Strahlungs-Energie:	Ein Strahl in der Richtung von oder nach dem einen Brennpunkt wird an der Kurve reflektiert als Strahl in der Richtung zum bezw. vom andern Brennpunkt. (Flüstergewölbe).		Scheinwerfer, Hohlspiegel, Brennspiegel.

Aufgaben (Konstruktionen bezw. Beweise).

Kap. I. 1. Die Figuren 4—7 so nachzuzeichnen, daß für die Träger eines der vorkommenden Gebilde t oder S die unendlich ferne Lage gewählt wird, auch für $t_1 \parallel t_2$.

2. Figur 8 für $S\infty$ (Parallelprojektion) bezw. für $S\infty$ senkrecht über ε (Orthogonalprojektion).

3. Figur 10 für verschiedene Lagen der vorkommenden Gebilde, für $t_1\infty$, für $S_1\infty$, für $t_0\infty$, für $t_1 \parallel t_2$, für $t_1 \parallel t_0$, für S_1 auf t_2 usw., für Zusammentreffen solcher Einzelbedingungen.

4. Figur 11 für verschiedene Lagen der vorkommenden Gebilde, für $S_1\infty$ usw., für gleichwendige und ungleichwendige S_1 und S_2.

5. Wie können durch projektivische Verwandtschaft kongruente Punktreihen entstehen, wie ähnliche Punktreihen, kongruente Strahlenbüschel (gleichlaufend oder ungleichlaufend)?

6. Sind zwei Gebilde $\overline{\wedge}$ demselben dritten, so sind sie $\overline{\wedge}$ miteinander. Ist von zwei projektivisch verwandten Gebilden das eine $\overline{\wedge}$ einem dritten, dann auch das andre. (Figur 9).

7. Die Zuordnung zwischen $t_1 \overline{\overline{\wedge}} t_2$ für beliebige Punkte festzulegen, wenn gegeben sind zwei beliebige Punktepaare, ein Punktepaar und ein Fluchtpunkt, zwei Fluchtpunkte.

8. Die Zuordnung zwischen $S_1 \overline{\overline{\wedge}} S_2$ für beliebige Strahlen festzulegen, wenn gegeben sind zwei beliebige Strahlenpaare, ein konvergentes und ein paralleles Strahlenpaar, zwei parallele Strahlenpaare.

Kap. II. 9. Man bilde zu einzelnen Lehrsätzen der Planimetrie oder Stereometrie oder zu hier folgenden Aufgaben bezw. Sätzen aus § 5—26 die dualistische Übertragung.

10. Die Elemente des einfachen 7-Ecks, des vollständigen 8-Seits aufzustellen usw.; wieviele Nebenecken auf einer Seite des vollständigen 9-Ecks usw?

11. Die Abzählungen in Figur 15 bis 22 nachzuprüfen; dasselbe fürs Sechseck, Sechsseit usw.

Kap. III. 12. Zu drei gegebenen Punkten EFH den vierten harmonischen K zu suchen. (Ziehe drei ganz beliebige Strahlen durch E, F, H. Die von E und F nach ihren Schnittpunkten gezogenen Geraden vollenden das Viereck, und dessen zweite Diagonale liefert K.) — Zu efh den vierten harmonischen Strahl k (§ 9 oder dual zu § 7).

13. Ein vollständiges Viereck zu vollenden, wenn davon gegeben sind eine Ecke A und die drei Nebenecken; ein vollständiges Vierseit aus einer Seite a und den drei Nebenseiten (s. 9).

14. Vier beliebig liegende Punkte der Ebene durch vier harmonische Strahlen zu projizieren (s. 9).

15. Durch gegebenen Eckpunkt eines Fünfecks eine Gerade zu legen, welche alle fünf Seiten in vier harmonischen Punkten schneidet (s. 9).

16. Durch gegebenen Punkt P eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden zu legen (s. 9).

Kap. IV. 17. Man konstruiere weitere Tangenten bezw. die Berührungspunkte der Träger bezw. Paralleltangenten zu den Trägern, wenn von einer Kurve zweiter Klasse gegeben sind die Träger und drei Tangenten, wovon zwei parallel, oder wovon eine unendlich fern oder zu einem Träger parallel, — bei parallelen Trägern, — wenn auf einem oder beiden Trägern der Berührungspunkt gegeben ist im endlichen oder im unendlichen, — wenn einer der Träger unendlich fern liegt usw., — in jedem dieser Fälle auch, wenn erst Auswahl der Träger zu treffen ist unter den gegebenen 3, 4 oder 5 Tangenten.

18. Eine Parabel soll drei Seiten eines Vierecks berühren, davon eine in gegebenem Punkte. Man konstruiere die zur vierten Seite parallele Tangente.

19. Man konstruiere weitere Kurvenpunkte bezw. die Tangenten in den Scheiteln, wenn von einer Kurve zweiter Ordnung gegeben sind die Scheitel und drei Kurvenpunkte im endlichen bezw. einer oder zwei im unendlichen, — für $S_1 \infty$ bezw. $S_1 \infty$ und $S_2 \infty$, — wenn in einem oder beiden Scheiteln die Tangente gegeben ist, bzw. wenn diese beiden Tangenten parallel sind, — in jedem dieser Fälle auch, wenn erst Auswahl der Scheitel zu treffen ist unter den gegebenen 3, 4 oder 5 Kurvenpunkten.

20. Man konstruiere weitere Kurvenelemente einer Hyperbel, welche bestimmt ist durch die beiden Asymptoten und eine Tangente oder einen Kurvenpunkt. — Durch was für Elemente außer einer gegebenen Asymptote kann eine Hyperbel bestimmt werden?

21. Zwei Maßstäbe (von gleichen oder verschiedenen Längeneinheiten) werden schief übereinander gelegt und die gleich bezifferten Punkte verbunden. Welche Kurve umhüllen die Verbindungsgeraden?

22. Auf einer gegebenen Geraden gleitet eine gleichbleibende Strecke entlang, und ihre Endpunkte bleiben stets verbunden mit zwei Scheitelpunkten S_1 und S_2. Welche Kurve durchläuft der Schnittpunkt dieser beiden Verbindungsgeraden? (s. 9).

23. Eine in gegebener Originalebene gegebene Kurve (Ellipse, Parabel, Hyperbel) soll a) als Ellipse, b) als Parabel, c) als Hyperbel projiziert werden. Welche Willkür erlaubt die Lage des Scheitels, wenn die Lage der Bildebene gegeben ist, — welche die Lage der Bildebene, wenn die Lage des Scheitels gegeben ist?

Kap. V. 24. Auf der Verbindungsgeraden zweier Gegenecken eines Tangentenvierseits liegen auch die zwei Schnittpunkte der Verbindungsgeraden der einander gegenüberliegenden Berührungspunkte und Eckpunkte auf den zwei durch je eine dieser Gegenecken gehenden Seiten. — Durch den Schnittpunkt zweier Gegenseiten eines Sehnenvierecks gehen auch die zwei Verbindungsgeraden der Schnittpunkte der einander gegenüberliegenden Tangenten und Seiten durch die zwei auf je einer dieser Gegenseiten liegenden Eckpunkte.

25. Wenn für ein aus 6, 5, 4 Kurvenelementen gebildetes Vieleck die Sätze von Brianchon bezw. Paskal vorliegen, so gelten dieselben auch für j e d e s der 60 Sechsecke, 12 Fünfecke, 3 Vierecke, welche aus denselben Elementen des ersten durch veränderte Reihenfolge (§ 6) gebildet werden können. — Die Sätze gelten auch, wenn die Ordnungskurve zu zwei festen Geraden, die Klassenkurve zu zwei festen Punkten zusammengeschrumpft (degeneriert) ist.

26. Die Aufgaben 17—20 durch einfache Abzählung von 1—6 zu lösen. Vergl. auch die Aufgaben bei Fig. 59, 60, 61.

27. Von einer Wurfbahn kennt man Ausgangspunkt und höchsten Punkt. Gesucht Schußrichtung und Treffpunkt samt Einschlagsrichtung auf gegenüberstehender senkrechter Mauerwand bezw. am Fußboden.

28. In welcher Richtung ist das bewegliche Mundstück am Zimmerbrunnen zu halten, damit der Wasserstrahl durch das gegenüberliegende Legfenster in dessen schiefer Richtung austritt? Wird die Decke des Zimmers naß, und wo?

29. Man prüfe, ob fünf gegebene Gerade eine Parabel berühren können, ob sechs gegebene Elemente einer Kurve angehören können, oder nicht.

30. Von einer Hyperbel kennt man eine Asymptote und zwei Punkte des einen Astes nebst Tangente in einem dieser Punkte. Gesucht Punkte und Tangenten des anderen Astes. — Von einer Hyperbel kennt man zwei Punkte AB samt ihren Tangenten ab und die Richtung ∞F der einen Asymptote; man sucht beide Asymptoten (dreimal nach Paskal).

Kap. VI. 31. Für eine vollständig gezeichnete bezw. durch fünf beliebige Elemente nach § 14 bestimmte Kurve soll zu einem gegebenen Punkt die Polare, zu einer gegebenen Geraden der Pol konstruiert werden.

32. An eine vollständig gezeichnet vorliegende Kurve (an einen Kreis) die Tangente aus gegebenem äußerem Punkt zu konstruieren.

33. Die Sätze über Pol und Polare (§ 22) in der Form von „geometrischen Ortssätzen" auszusprechen.

34. Weitere Elemente einer Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind ein Polpunkt samt Polare und drei Kurvenelemente nach § 14, oder zwei beliebige Polpunkte samt Polaren und ein Kurvenpunkt bezw. eine Tangente, oder ein Polardreieck und zwei Kurvenelemente nach § 14.

35. Ein Punkt einer Hyperbelasymptote hat als Polare stets eine Parallele zu dieser Asymptote.

36. Die Sätze von Brianchon und Paskal (§ 17—20) in der Zeichnung als polare Figuren gegenüberzustellen. (Vgl. Fig. 71.)

Kap. VII. 37. Die Verbindungsgeraden eines beliebigen Punktes mit den Endpunkten einer Strecke und ihrem Mittelpunkt bilden mit der Parallelen zur Strecke vier harmonische Strahlen. — Die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit den Schenkeln eines Winkels und den Halbierungsgeraden des Winkels und seines Nebenwinkels bilden vier harmonische Punkte.

38. Zu drei gegebenen Strahlen den vierten harmonischen zu suchen durch Streckenhalbierung bezw. durch Streckenverdoppelung (Schnittgerade parallel zum ungepaarten bezw. zu einem gepaarten).

39. Für eine vollständig gezeichnete bezw. durch fünf Elemente nach § 14 bestimmte Kurve sollen Durchmesser bezw. Mittelpunkt konstruiert werden.

40. Weitere Elemente einer Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind der Mittelpunkt und drei Kurvenelemente nach § 14, bezw. ein Kurvenpunkt samt Tangente und Durchmesserrichtung und zwei Kurvenelemente nach § 14, bezw. ein Durchmesser, die Richtung seines konjugierten und drei Kurvenelemente nach § 14.

41. Für eine durch vier Elemente nach § 14 bestimmte Parabel die Achse und den Kurvenscheitel zu konstruieren.

42. Eine Wurfparabel ist eindeutig bestimmt durch den Kurvenscheitel und ein Kurvenelement.

43. Weitere Elemente einer Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind ein Paar konjugierter Durchmesser und zwei Kurvenelemente nach § 14, bezw. zwei Paare konjugierter Durchmesser und ein Kurvenelement (Hyperbel, wenn das zweite Paar im gleichen Winkelraum des ersten liegt, Ellipse, wenn die Paare einander trennen, Kreis, wenn beide Paare senkrecht).

44. Von einer vollständig gezeichneten Kurve die Achsen und die Scheitelpunkte zu konstruieren. (Der Halbkreis über einem Durchmesser liefert ein eingeschriebenes Rechteck).

45. Weitere Elemente einer Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben ist eine Achse nach Lage und Größe und ein Kurvenelement, bezw. ein Scheitel nebst Tangente und zwei Kurvenelemente nach § 14, bezw. die Lage einer Achse und drei Kurvenelemente nach § 14.

46. Von einer hyperbolischen Kometenbahn kennt man eine Asymptote sowie das Perihel und dessen Richtung zur Sonne. Weitere Bahnelemente zu konstruieren.

47. Weitere Elemente einer Kurve zu konstruieren, von welcher gegeben sind ein Brennpunkt nebst Leitlinie und ein weiteres Kurvenelement.

48. Von einer vollständig gezeichneten Kurve die Brennpunkte und Leitlinien zu konstruieren.

Verlag von L. v. Vangerow, Bremerhaven und Leipzig.

Verzeichnis
der bisher erschienenen Bände
von

Kleyers Encyklopädie

der gesamten

mathematischen technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herausgegeben unter Mitwirkung bewährter Fachmänner.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M., St. Louis, Athen.

Wer niedere und höhere Mathematik, z. B.: **bürgerliches und kaufmännisches Rechnen, Buchstabenrechnung, Gleichungen 1. 2. 3. und 4. Grades mit einer und mehreren Unbekannten, Differential- und Integralrechnung etc., Planimetrie, Stereometrie, analytische Geometrie, Projektionszeichnen (darstellende Geometrie). ebene uud sphärische Trigonometrie, Goniometrie (Winkelmessungslehre), Vermessungskunde (Geodäsie), Astronomie, Physik, Mechanik, Geostatik, Geodynamik, Hydrostatik, Hydrodynamik, Elektrizität, Chemie und deren Hilfswissenschaften** studieren, oder wer, in der Praxis stehend, in diesen Fächern sich weiterbilden oder seine Kenntnisse auffrischen will, erhält durch

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften : : :

mit ca. 10,000 in den Text gedruckten Figuren,

herausgegeben unter Mitwirkung hervorragender Fachmänner,

eine auch auf die praktischen Bedürfnisse des Technikers Rücksicht nehmende Auswahl von leichtverständlichen Lehrbüchern, die sowohl **dem Studierenden, dem Fachlehrer, als dem ausübenden Techniker** ein wohlvorbereitetes Material zum Studium und zum Nachschlagen darbieten; besonders wertvoll erscheinen dieselben dadurch, dass durch sie die Befähigung zur Lösung mathematischer und technischer Probleme ausserordentlich gefördert wird.

Jeder Band ist einzeln käuflich, und zu beziehen durch jede Buchhandlung des In- und Auslandes.

P. P.

Hiermit beehre ich mich, Ihnen das neueste Verzeichnis von:

Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften

zu überreichen.

Aus der überaus großen Zahl der anerkennendsten Besprechungen, welche in Schul-, technischen und Tagesblättern erschienen und von welchen eine kleine Anzahl dem Kataloge beigegeben sind, bringe ich besonders den folgenden Ausspruch des „Pf. Courier“ zum Abdruck:

„In einzig dastehender Weise werden hier die mathematischen und die damit verwandten technischen und exakten Natur-Wissenschaften in ihrem ganzen Umfang von den elementarsten Regeln der Arithmetik bis zu dem stolzen Gebäude der höheren Mathematik behandelt. Das Werk dient gleichmässig den Zwecken des Schulunterrichts, wie denjenigen des Selbststudiums. Es enthält nicht nur die sonst in jedem Lehrbuch vorkommenden Definitionen, Lehrsätze, Formeln usw., sondern auch ausser vielen ungelösten Aufgaben eine Reihe Aufgabenlösungen, die in Bezug auf die Exaktheit und Sauberkeit der Darstellung unübertroffen dastehen, daneben häufig historische Exkursionen. Wer an der Hand dieser Lehrmittel von Stufe zu Stufe fortschreitend die mathematischen Disziplinen durcharbeitet, wird unstreitig schöne Erfolge erzielen, und die oft verhängnisvolle Ansicht, dass es zum Betrieb der trockenen Mathematik besonderer Talente bedürfe, wird dann von manchem als unzutreffend aufgegeben werden müssen.“

Die Lehrbücher der Kleyerschen Encyklopädie eignen sich ganz besonders zur Unterstützung des Unterrichts und Vortrags an den verschiedensten Lehranstalten, zum Selbststudium, zur Forthilfe bei Schularbeiten, zur Repetition, zur Vorbereitung für Examina und zum Nachschlagen für Fachleute, da bei den ausführlichen Lösungen gut gewählter Aufgaben, welche alle Teile dieser Encyklopädie enthalten, überall die Anwendungen der Gesetze, der Sätze, Regeln, Formeln etc. gezeigt werden.

Jährlich erscheinen von diesem Werke eine Anzahl neuer Bände, und sowohl die beteiligten Autoren, als auch die Verlagsbuchhandlung lassen es sich angelegen sein, den Ausbau des grossen Unternehmens nach Möglichkeit zu fördern.

Hochachtungsvoll

Bremerhaven. **L. v. Vangerow,** Verlagsbuchhandlung.

I. Mathematik.

(Grundrechnungsarten, Algebra, Geometrie, Stereometrie, Astronomie, Nautik).

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Erstes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.** Mit 71 Erkl. und einer Sammlung von 657 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **A. Frömter.** Preis: Mk. 3,—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Zweites Buch: **Das Rechnen mit benannten Zahlen.** Mit 30 Erklärungen und einer Sammlung von 518 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Frömter** und **Neubüser.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—; in Schuleinband Mk. 3.30.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten. Drittes Buch: **Das Rechnen mit unbenannten gebrochenen Zahlen. (Die gemeinen Brüche und die Dezimalbrüche.)** Mit 260 Erklärungen und einer Sammlung von 309 gelösten und ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. G. Maier.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen (Elemente der Buchstabenrechnung), **der Verhältnisse und Proportionen.** Erster Teil: Mit einer Sammlung von 478 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen. Zweiter Teil: **Elemente der Zahlenlehre. Dezimal- und Kettenbrüche und Rechnung mit unvollständigen Zahlen.** Mit einer Sammlung von 277 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet von Prof. **Hans Staudacher.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Erster Teil: **Die Schluss- und Kettenrechnung (die einfache und zusammengesetzte Regeldetri und der Reesische Satz) nebst Anwendungen.** Mit 100 Fragen, 325 Erklärungen, 63 Anmerkungen, 1250 Aufgaben, 18 Figuren, den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben und einer **Münz-, Mass- und Gewichtstabelle.** Zum Selbststudium, Nachschlagen, sowie zum Schulgebrauch bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Richard Olbricht.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch des bürgerlichen und kaufmännischen Rechnens. Zweiter Teil: **Die Prozent- und Zinsrechnung nebst ihren Anwendungen, mit Einschluss der Diskontrechnung, der Terminrechnung, der Kalkulationen und Kontokorrente.** Mit 130 Fragen, 444 Erklärungen, 27 Anmerkungen, 1520 Aufgaben, zahlreichen schematischen Figuren, einem Formelverzeichnis, einer Fristen- und Zinsenberechnungstabelle, sowie den Ergebnissen der nicht gelösten Aufgaben. Bearbeitet von **Dr. R. Olbricht.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung nebst einer Sammlung von 525 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben aus allen Zweigen des Berufslebens. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln nebst einer Sammlung von 3296 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Adolf Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. Sammlung von 2381 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grösstenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 230 Erklärungen und 26 in den Text gedruckte Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. Sammlung von 905 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 403 Erklärungen und Anmerkungen. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Otto Prange.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen des 1. Grades. (Diophantische Gleichungen.) Sammlung von 374 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben in vollständig gelöster Form und zahlreichen Erklärungen und Erläuterungen. Nebst den Abhandlungen des **Bachez de Méziriac,** im französischen Originale mit beigefügter deutscher Übersetzung. Bearbeitet zum Teil nach **System Kleyer** von **W. Fr. Schüler.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit einer Unbekannten (Quadratische Gleichungen). Sammlung von 1650 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form, erläutert durch 872 Erklärungen und 53 Figuren. Nebst Resultaten der ungelösten Aufgaben. Von **Dr. Aug. Blind.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Gleichungen des 2. Grades mit zwei und mehreren Unbekannten. (Quadratische Gleichungen.) Sammlung von 361 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 185 Erklärungen und 8 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Gleichungen 3. und 4. Grades, nebst der trigonometrischen Auflösung der Gleichungen 2. Grades. Sammlung von 253 Zahlen-, Buchstaben- und Textaufgaben, grossenteils in vollständig gelöster Form. Mit 251 Erklärungen und 10 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Conrad Metger.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Erstes Buch: Mit vielen gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 184 Figuren. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Körperberechnungen. Zweites Buch: Eine Sammlung von 772 vollständig gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst 742 Erklärungen und 256 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Mit 52 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 29 Erklärungen und 17 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit 303 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben, 68 Erklärungen und 27 in den Text gedruckten Figuren. Von **Dr. K. J. Bobek.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, der zusammengesetzten-, harmonischen-, Ketten- und Teilbruchreihen, nebst einer Sammlung von über 400 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der Kombinatorik. Ausführliche Darstellung der Lehre von den kombinatorischen Operationen. (Permutieren, Kombinieren, Variieren). Mit 506 gelösten und analogen ungelösten Übungsbeispielen nebst den Resultaten der letzteren. Von **Prof. H. Staudacher.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Logarithmen nebst einer Sammlung von 1996 gelösten und ungelösten analogen Beispielen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Fünfstellige korrekte Logarithmentafeln nebst einer trigonometrischen Tafel und einer Anzahl von anderen Tabellen. Von **Ad. Kleyer.** Preis: in einfachem Leineneinband Mk. 2.50.

Vierstellige logarithmische Tafeln der natürlichen und trigonometrischen Zahlen nebst den erforderlichen Hilfstabellen. Für den Schulgebrauch und die allgemeine Praxis bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: kartonniert 60 Pfg.

Lehrbuch der Integralrechnung. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 592 gelösten Aufgaben. Für das Selbststudium, zum Gebrauch an Lehranstalten, sowie zum Nachschlagen von Integrationsformeln und -Regeln. Bearbeitet nach eigenem System und im Anschluss an das Lehrbuch der Differentialrechnung. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Integralrechnung. Zweiter Teil: Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie auf zahlreiche gelöste praktische Aufgaben aus der **Mechanik und Technik.** Mit 245 vollständig gelösten Aufgaben, 163 Figuren und 137 Erklärungen, nebst ausführlichem Formelverzeichnis. Zum Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Erster Teil: **Die einfache und wiederholte Differentiation explizieter Funktionen von einer unabhängigen Variablen.** Ohne Anwendung der Grenzen und der Nullen-Theorie und ohne Vernachlässigung von Grössen. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben und Formelverzeichnis. Zweite Auflage. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—

Lehrbuch der Differentialrechnung. Zweiter Teil: **Die vollständige Differentiation entwickelter und nicht entwickelter Funktionen von einer und von mehreren reellen Veränderlichen. Reihenentwickelungen, unbestimmte Formen, Maxima und Minima.** Nebst 352 gelösten Aufgaben, 78 Figuren, 230 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Differentialrechnung. Dritter Teil: **Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven.** Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 Figuren, 138 Erklärungen und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. Haas.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch des Rechnens mit imaginären und komplexen Zahlen. Mit 221 Erklärungen und 38 in den Text gedruckten Figuren. Mit einer Sammlung von 269 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben nebst den Resultaten der ungelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Richard Krüger.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Einführung in die Funktionentheorie. Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung. Mit 23 Figuren. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 1.50. In einfachem Leinenband Mk. 2.—.

Lehrbuch der angewandten Potentialtheorie. Mit 588 Erklärungen und 47 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung von erläuternden Beispielen und Übungsaufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen. Erster Teil: Mit einer Sammlung von 460 gelösten und ungelösten Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren, nebst 226 Erklärungen. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. G. Weichold.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Erster Teil: **Die gerade Linie, der Strahl, die Strecke, die Ebene und die Kreislinie im allgemeinen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 234 Erklärungen und 109 in den Text gedruckten Figuren. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 1.80. Geb. nur mit Teil II zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Zweiter Teil: **Der Winkel und die parallelen Linien.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 201 Erklärungen und 113 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer.** Von **Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 2.20. Geb. nur mit Teil I zus. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Dritter Teil: **Die geometrischen Gebilde und ihre Lagen-Veränderungen. Die einfachen Vielecke.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 737 Erklärungen und 343 Figuren. Bearbeitet von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie)). Vierter Teil: **Die Lehre vom Kreis. Die geometrischen Örter und die merkwürdigen Punkte des Dreiecks.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 529 Erklärungen und 230 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Fünfter Teil: **Die Flächen der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 346 Erklärungen und 96 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Sechster Teil: **Proportionalität der Strecken.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 378 Erklärungen und 90 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Siebenter Teil: **Die Ähnlichkeit der geradlinigen Figuren.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 394 Erklärungen und 76 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Achter Teil: **Die Anwendung der Ähnlichkeit auf die Lehre vom Kreis.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 505 Erklärungen und 135 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Tabelle der Elemente der regelmässigen Vielecke. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. —.50.

Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil: **Die Lage von geraden Linien und Ebenen im Raum.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 573 Erklärungen und 174 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Seipp.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster Teil: **Aufgaben, gelöst ohne Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1952 gelösten und ungelösten Aufgaben, 178 Anmerkungen, 207 Erklärungen und 214 in den Text gedruckten Figuren. Von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Zweiter Teil: **Aufgaben, gelöst mit Anwendung der Proportionenlehre.** Mit 1327 gelösten und ungelösten Aufgaben, 126 Anmerkungen, 100 Erklärungen und 174 Figuren. Bearbeitet von **E. R. Müller.** Preis: Mk. 4.—. Geb. Mk. 5.—.

Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Dritter Teil: **Verwandlungs- und Teilungsaufgaben, sowie Aufgaben über ein- und umbeschriebene Figuren.** Mit 510 gelösten und ungelösten Aufgaben, 40 Anmerkungen, 72 Erklärungen und 54 Figuren. Bearbeitet von **Prof. E. R. Müller.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Erster Teil: **Analytische Geometrie des Punktes und der Geraden.** Mit einer Sammlung von 100 Aufgaben, 206 gelösten Übungsaufgaben und 92 in den Text gedruckten Figuren. Für das Selbststudium und zum Gebrauch an Lehranstalten bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der analytischen Geometrie der Ebene. Zweiter Teil: **Analytische Geometrie der einzelnen Linien zweiten Grades.** Mit einer Sammlung von 116 Aufgaben, 286 gelösten Übungsaufgaben und 200 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Vermessungskunde (Geodäsie). Mit einer Sammlung von 153 gelösten Aufgaben und angewandten Beispielen, zahlreichen Erklärungen und 481 in den Text gedruckten Figuren. Unter Berücksichtigung des Selbstunterrichts für Geometer-Eleven, Studierende des Bau-, Berg- und Ingenieur-Faches, sowie zum praktischen Gebrauch für Feldmesser, Kulturtechniker, Katasterbeamte usw. Von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Das apollonische Berührungsproblem und verwandte Aufgaben. Sammlung von 163 gelösten und ungelösten Aufgaben und 200 Figuren. Zur Ergänzung des Schulunterrichts und zum Selbststudium. Nach **System Kleyer** durchaus neu bearbeitet. Zweite Auflage. Von **Prof. Heinr. Cranz.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Geschichte der Geometrie für Freunde der Mathematik gemeinverständlich dargestellt von **Richard Klimpert.** Mit 100 in den Text gedruckten Figuren. Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Eine Sammlung von 1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben und 178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Mit 797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen nebst einem ausführlichen Formelverzeichnis von über 500 Formeln. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 18.—. Geb. Mk. 19.50.

Lehrbuch der Goniometrie (Winkelmessungslehre) mit 307 Erklärungen und 52 Figuren nebst einer Sammlung von 513 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Erster Teil: **Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 361 Erklärungen und 97 Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Zweiter Teil: **Harmonische Gebilde. Entstehung der Kegelschnitte. Sätze von Pascal und Brianchon.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der letzteren. Mit 445 Erklärungen und 135 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (Synthetische Geometrie, Geometrie der Lage). Dritter Teil: **Pol und Polare. Mittelpunktseigenschaften. Involution. Brennpunktseigenschaften der Kurven zweiten Grades.** Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben, mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Mit 550 Erklärungen und 172 in den Text gedruckten Figuren. Von **Prof. Dr. J. Sachs.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über den binomischen und polynomischen Lehrsatz, die arithmetischen Reihen höherer Ordnung und die unendlichen Reihen. Mit 259 Fragen und Antworten, 199 Erklärungen, 502 meist gelösten Aufgaben und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet von **Prof. Dr. A. Haas.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Erster Teil: **Die rechtwinklige Projektion auf eine und mehrere Projektionsebenen.** Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 271 Erklärungen und 226 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Zweiter Teil: **Über die rechtwinklige Projektion ebenflächiger Körper.** Mit 130 Erklärungen und 99 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Erste Hälfte: **Schiefe Parallelprojektion, Centralprojektion einschliesslich der Elemente der projektiven Geometrie.** Mit 195 Erklärungen und 169 Figuren. Bearbeitet von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Dritter Teil: Zweite Hälfte: **Centralcollineation ebener und räumlicher Systeme, Kegelschnitte, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie.** Mit 218 Erklärungen und 210 Figuren. Von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Erste Hälfte: **Krumme Linien (ebene und räumliche Kurven). Krumme Oberflächen. Schatten- und Beleuchtungslehre.** Bearbeitet nach **System Kleyer** von **J. Vonderlinn.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Projektionszeichnens (darstellende Geometrie). Vierter Teil: Zweite Hälfte: In Vorbereitung.

Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie. Nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Mit 236 Erklärungen und 56 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. W. Láska.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der Astronomie und der mathematischen Geographie. Erster Teil: **Sphärische Astronomie.** Für das Selbststudium und zum Gebrauche an Lehranstalten, bearbeitet von **Prof. Dr. W. Laska.** Preis Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Die Nautik in elementarer Behandlung. Einführung in die Schiffahrtkunde. Zur Förderung des Verständnisses der Schiffahrt in weiteren Kreisen, sowie zum Unterricht an Lehranstalten. Mit 90 vollständig gelösten Beispielen, 260 analogen ungelösten Aufgaben mit den Ergebnissen, nebst 88 Figuren, sowie Erklärung der Kunstausdrücke der Seemannssprache. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Fr. Bolte,** Direktor der Navigationsschule in Hamburg. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Kartographie. Die Kartographie nach Einführung der Terraindarstellung in Karten und Plänen. Erster Teil. Nach **System Kleyer** bearbeitet von **Victor Wessely.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

II. Physik, Elektrizität, Chemie, Akustik.

Lehrbuch der allgemeinen Physik. (Die Grundbegriffe und Grundsätze der Physik.) Mit 549 Erklärungen, 83 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 120 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch über das spezifische Gewicht fester, flüssiger und gasförmiger Körper. Mit 35 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren und 28 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 2.—. Geb. Mk. 3.—.

Lehrbuch der absoluten Masse und Dimensionen der physikalischen Grössen. Mit 545 Erklärungen und einer Sammlung von 561 gelösten und ungelösten Aufgaben, nebst den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. H. Hovestadt.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch des Magnetismus und des Erdmagnetismus nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben, erläutert durch 189 in den Text gedruckten Figuren und 10 Karten. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Statik flüssiger Körper (Hydrostatik) mit 425 Erklärungen, 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 208 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Statik fester Körper (Geostatik) mit 291 Erklärungen und 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 359 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis· Mk. 9.—. Geb. Mk. 10.

Lehrbuch über die Percussion oder den Stoss fester Körper. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch der Elastizität und Festigkeit mit 212 Erklärungen, 186 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 167 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.50. Geb. Mk. 6.50.

Lehrbuch der Dynamik fester Körper (Geodynamik) mit 690 Erklärungen, 380 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 500 gelösten und ungelösten analogen Aufgaben, mit den Resultaten der ungelösten Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 13.50. Geb. 14.50.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Erster Band: **Die Bewegungserscheinungen flüssiger Körper, welche aus den Boden- und Seitenwänden von Gefässen, sowie durch Röhrenleitungen bei konstanter, sowie veränderlicher Druckhöhe fliessen.** Mit 434 Erklärungen, mehr als 300 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis nebst einer Sammlung von 220 gelösten und ungelösten Aufgaben und den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Erste Hälfte: **Die Bewegungserscheinungen des Wassers in Kanälen und Flüssen, sowie der dabei ausgeübte Stoss und Widerstand.** Mit 282 Erklärungen, mehr als 150 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 134 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 6.—.

Lehrbuch der Bewegung flüssiger Körper (Hydrodynamik). Zweiter Band: Zweite Hälfte: **Von der Anwendung der lebendigen Kraft des bewegten Wassers als Motor oder Beweger.** Mit 203 Erklärungen, 88 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung von 30 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, mit den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **R. Klimpert.** Preis: Mk. 3.50. Geb. Mk. 4.50.

Lehrbuch der Reibungselektrizität (Friktions-Elektrizität, statischen oder ruhenden Elektrizität), erläutert durch 860 Erklärungen und 273 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben. Von **Ad. Kleyer.** Preis: Mk. 7.—. Geb. Mk. 8.—.

Lehrbuch der Kontaktelektrizität (Galvanismus) nebst einer Sammlung von gelösten und ungelösten Aufgaben. Mit 731 Erklärungen, 238 in den Text gedruckten Figuren und einem Formelverzeichnis. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Induktionselektrizität und ihrer Anwendungen (Elemente der Elektrotechnik). Mit 432 Erklärungen und 213 in den Text gedruckten Figuren, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Ad. Krebs.** Preis: Mk. 6.—. Geb. Mk. 7.—.

Lehrbuch der Elektrodynamik. Erster Teil: Mit 105 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. Oscar May.** Preis: Mk. 3.—. Geb. Mk. 4.—.

Lehrbuch des Elektromagnetismus. Mit 302 Erklärungen, 152 in den Text gedruckten Figuren und einem ausführlichen Formelverzeichnis, nebst einer Sammlung gelöster Aufgaben. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Dr. O. May** und **Ad. Krebs.** Preis: Mk. 4.50. Geb. Mk. 5.50.

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Erster Band. **Die Metalloide.** Mit 2208 Erklärungen, 332 Experimenten und 366 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—

Lehrbuch der reinen und technischen Chemie. Anorganische Experimental-Chemie. Zweiter Band. **Die Metalle.** Mit 573 Erklärungen 174 Experimenten und 33 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach **System Kleyer** von **Wilh. Steffen.** Preis: Mk. 16.—. Geb. Mk. 17.—.

Lehrbuch der Akustik. Erster Band: **Periodische Bewegungen, insbesondere Schallwellen.** Mit 257 Erklärungen und 106 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 70 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 4,50. Geb. Mk. 5,50.

Lehrbuch der Akustik. Zweiter Band: **Die verschiedenen Tonerreger.** Mit 465 Erklärungen und 315 in den Text eingedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 114 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 10.—. Geb. Mk. 11.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Erste Hälfte: **Die Fortpflanzungserscheinungen des Schalles, nebst den Erscheinungen zusammengesetzter Schwingungsbewegungen.** Mit 393 Erklärungen und 235 in den Text gedruckten Figuren nebst einer Sammlung von 66 gelösten und analogen ungelösten Aufgaben, nebst den Resultaten der letzteren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 8.—. Geb. Mk. 9.—.

Lehrbuch der Akustik. Dritter Band. Zweite Hälfte: **Praktische Akustik d. i. die Akustik in großen begrenzten Räumen, in Konzert- und Hörsälen, in Kirchen und Theatern.** Mit 136 Erklärungen und 85 in den Text gedruckten Figuren. Bearbeitet nach System Kleyer von **Richard Klimpert.** Preis: Mk. 3,50. Geb. Mk. 4,50.

Entstehung und Entladung der Gewitter, sowie ihre Zerstreuung durch den „Blitzkamm" (Fulgura frango). Eine metereologische Betrachtung von **Richard Klimpert.** Preis gebunden Mk. 2.—.

Anerkennungen aus dem Publikum

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Herr Pfarrer Kaspar-Altlussheim schreibt: „Ich werde dieses vorzügliche Werk Ihres Verlages empfehlen, wo ich kann. Ich habe es als das einzige kennen gelernt, das die für Manchen etwas trockene Wissenschaft der Algebra und Geometrie mit Geist und Leben füllt und imstande ist, auch ohne Lehrer die größten Schwierigkeiten überwinden zu helfen. Es ist ein gewaltiges Stück Arbeit, das in den verschiedenen, nach einheitlichem, erprobtem Plane verfaßten Bänden liegt und für das jeder Lernende den Bearbeitern und dem Verlag vielen Dank schuldet. Ich wünsche Ihrem Unternehmen im Interesse der Lernenden die weiteste Verbreitung."

Bonn. Mit vielem Interesse habe ich Ihre Unternehmung verfolgt, eine praktische math.-naturwissenschaftliche Bibliothek zu schaffen, und in der Erkenntnis, wie sehr eine solche billige Bibliothek dem allgemeinen Bedürfnis entspricht, werde ich nach Kräften für ihre weitere Verbreitung mich bemühen. Ich bin Ihnen dankbar für die Erleichterung, welche Sie auch mir durch Ihr Werk bei meinen Studien geschaffen haben. Namentlich freue ich mich, dass in der Differentialrechnung, bei welcher ja eine einfache, dem Wissen des Anfängers entsprechende Darstellung große Schwierigkeiten bietet, eine so praktische, mit Konsequenz durchgeführte Darstellungsweise von Ihnen gegeben worden ist u. s. f.

Fr. Blencke, stud. rer. nat.

Dahbruch b. Siegen. . . . . . Im Uebrigen kann ich von Ihren Lehrbüchern nur lobenswertes erwähnen und wünsche nur, dass dieselben ein Jahrzehnt eher zur Welt gekommen wären. Es ist mir bis jetzt noch kein Werk in die Hände gekommen, das in so leicht faßlicher Weise dem Schüler die exakten Wissenschaften beizubringen imstand wäre, u. s. f.

W. Altpeter, Ing.

Budapest. Vor allem sei es mir gestattet, Ihnen für den Verlag der Kleyerschen Encyklopädie meine vollste Anerkennung auszusprechen. — Einem Bedürfnis in wirklich vorzüglicher Weise abhelfend, behandeln die Publikationen der erwähnten Sammlung, die mathematischen Disziplinen nach theoretisch und praktisch richtiger Lehrmethode, was ich aus eigener Erfahrung als Lehrer an einer Militärbildungsanstalt vollauf bestätigen kann; indem die handlichen Heftchen mit ihrem reichen Stoff ein wirkliches Lehrbuch für den Schüler und ein vorzügliches Hilfsbuch für den Lehrer bilden. . . . .

Ferd. von Jerzabek, k. k. Leutnant.

Engelberg, Benediktiner-Stift. Da Ihr Werk „math.-tech.-naturwissenschaftliche Encyklopädie", soweit es bis heute vollendet vorliegt, auch an unserem Gymnasium allseitig wohlverdiente Anerkennung gefunden hat, so möchte speziell ich, als Lehrer der Mathematik, Ihnen heute die Gefühle meines Dankes und meiner Hochachtung für das treffliche Werk bekunden. Die bis ins Detail gehende, dabei doch so übersichtlich geordnete, leicht faßliche, klare Entwicklung der Beweise ist es ganz besonders, die mir Ihr Werk lieb und teuer macht, deswegen meinen herzlichsten Dank für Ihre mühevolle, so meisterhaft ausgeführte Arbeit, u. s. f.

P. Basilius Fellmann, O. S. B.

Oberwinterthur. . . . . Vor allem empfangen Sie meinen wärmsten Dank für die Initiative und im allgemeinen glückliche Ausführung der Idee. Gewiß kann jeder mit fleißiger Benutzung Ihrer geschätzten Hefte durch Selbstunterricht schöne Erfolge in dieser Disziplin erzielen, u. s. f.

Jacob Flur, Lehrer.

Hartford (Connecticut). Ich wünsche Ihnen unaufgefordert meinen Gefallen über den Vorteil auszudrücken, welchen ich bei verschiedentlichem Gebrauch bei der Behandlung Ihrer wirklich ausgezeichneten Kleyerschen mathematisch-technischen-naturwissenschaftlichen Encyklopädie gehabt habe. Ich habe nicht allein eine große persönliche Begeisterung für sie, sondern ich habe dieselbe mit Nutzen auch in meiner Schule gebraucht. Ich bin Lehrer der Mathematik an der Public Highe School (gleichbedeutend mit Ihren Gymnasien und Realschulen), u. s. f. Homer W. Brainard.

Berlin. Seit zwei Jahren beziehe ich nun schon von meiner Buchhandlung Ihre Kleyer-Bandausgaben. Welche Dienste sie mir geleistet, vermag ich auf diesem kleinen Raume nicht auszusprechen. H. Schaepel jr., Gymnasiast.

Herr **Dr. Otto Willareth in Sand i. Elsass** schreibt an den Verleger: Vermutlich mache es Ihnen Freude und ist es in Ihrem Geschäfts-Interesse wichtig, meine Anzeige über Ihr Verlagsunternehmen **Kleyers Encyklopädie** zu erhalten, welche ich in der **„Straßburger Post"**, dem größten Blatt von Südwest-Deutschland, No. 809 vom 11. September 1901, habe erscheinen lassen. Deshalb gestatte ich mir, Ihnen diese Besprechung als Drucksache zu übersenden. Mit dieser Besprechung möchte ich Ihnen und den Verfassern dieser Encyklopädie eine Dankesschuld abtragen für eines der segensreichsten litterarischen Unternehmen der Gegenwart. Ich besitze einen bedeutenden Teil Ihrer Encyklopädie und stets ist es mir eine Freude, darin zu arbeiten. Jedenfalls liegt es im Interesse der Sache, dass sie möglichst bekannt und verbreitet wird, damit Ihnen und den Herren Verfassern die Lust nicht an dem mühevollen Unternehmen ausgeht etc.

Berlin. Durch einen glücklichen Zufall wurde ich vor Kurzem mit Kleyers Encyklopädie bekannt und ich bemerkte nach kurzem Studium derselben, dass ein vortreffliches Werk im Erscheinen begriffen sei, u. s. f. Edm. Koebke, stud. math.

Währing b. Wien. . . . . Da das unter Ihrer werten Leitung erscheinende voluminöse Werk leider erst einige Teile vollständig enthält, aber entschieden das Vortrefflichste in Bezug auf Selbststudium leistet, u. s. f. Joseph Hackenberg, Beamter.

Traunstein. Es würde mich herzlich freuen, wenn es mir in meiner Besprechung gelungen wäre, das Interesse eines weiteren Leserkreises für Ihr großartiges, wahrhaft zeitgemäßes und eminent praktisches Unternehmen nachhaltig anzuregen.
R. Knilling, Lehrer.

Braunschweig . . . . ich war überrascht und hocherfreut über ein Unternehmen (bezieht sich auf den chemischen Teil der Encyklopädie. Die Redakt.), welches mir so ganz aus der Seele herausgeschrieben war. . . . Wie Sie den Stoff behandeln, wird er noch von keiner Seite auch nur annähernd gehandhabt, abgesehen von Katechismen, u. s. f. . . . . . Gestatten Sie mir als praktischem Lehrer der Chemie, der viele heterogene Elemente zu unterrichten hat, Ihnen zu diesem schönen Werke meinen verbindlichsten Glückwunsch auszusprechen. Möge es Ihnen vergönnt sein, das Werk in dem Sinne des Prospektus zu Ende zu führen, und glaube ich fest, dass die wirklichen Lehrer der Chemie Ihnen zu vollem Dank verpflichtet sein werden, u. s. f.
Dr. Ed. Freise, Direktor der Droguisten-Fachakademie.

Cambridge (England). Während meines Besuches in Kreuznach habe ich mich interessiert, einige deutsche Schulbücher mit unseren englischen zu vergleichen. Ich habe mehrere Hefte der Kleyerschen Encyklopädie durchgeblättert und finde, dass dieselben höchst praktisch und brauchbar sind, besonders für die zuwachsende Anzahl selbstunterrichtender Studenten. Ich bin ein Sachkenner in der reinen und angewandten Mathematik, Ehrengraduatus (etwa wie deutscher Ph.-Doktor) und Dozent in der Cambridge Universität und würde sehr gerne helfen, einige Hefte zu übersetzen. Ich werde auch Mitarbeiter finden können, dass es möglich wird, nach und nach vielleicht das ganze Werk in englisch herauszugeben. Wenn Ihnen dieser Vorschlag gefällt, können wir später Näheres darüber erörtern. Ich glaube, dass eine Uebersetzung einen sehr guten Verkauf haben würde, nicht nur in Großbritannien und Irland, sondern auch in Amerika und in den britischen Kolonien.
Theodore E. Worlledge.

Wien. Gestatten Sie uns, Ihnen unsern Dank für Ihre einzig dastehende Aufgabensammlung, die wir schon bei ihrem ersten Erscheinen mit Freuden begrüßten, u. s. f. . . . Genehmigen Sie deshalb den Dank für Ihre ausgezeichnete Encyklopädie.
Mehrere Studierende der Wiener Universität.

Sundswall (Schweden). Im Besitze einiger Hefte der ausgezeichneten Kleyerschen Encyklopädie bin ich so frei gewesen, in der beigefügten Zeitung die Aufmerksamkeit des schwedischen Publikums darauf zu richten und ist es meine Hoffnung, sowohl den Interessenten, als Ihnen einen Dienst erwiesen zu haben. Das Werk ist in Schweden leider zu wenig bekannt. D. F. Lundgren.

Brünn. Als erster Abnehmer Ihrer in der Tat sehr vortrefflichen Encyklopädie, u. s. f. . . . . Meine zahlreichen Schüler machen den besten Gebrauch von dieser einzig dastehenden Aufgabensammlung und bitten unaufhörlich, zu veranlassen, dass weitere Teile erscheinen. Franz Schwaben, Lehrer.

Bergedorf bei Hamburg. Bereits im Besitze mehrerer Bände der Kleyerschen Encyklopädie habe ich die vortrefflichen Werke schon vielen Interessenten mit Erfolg empfohlen. Albert Zander, Lehrer an der Hansaschule.

Gleiwitz. . . . . .; deshalb habe ich mit Freuden Ihr Werk begrüßt, u. s. f. . . . ,; ich aber mit förmlicher Begierde Ihre so klar gelösten Aufgaben, u. s. f.
George Feumer.

Coburg. Bitte um sehr gefl. Mitteilung, bis wann die Lehrbücher über Bau- und Ingenieurwissenschaften nach System Kleyer erscheinen werden. Mit derartigen Büchern würden Sie die ganze Welt erfreuen. Ist Integralrechnung II. Teil erschienen?
J. Eichhorn, Zivilingenieur und Patentanwalt.

Selmeczbanya (Ungarn). . . . . und ich muß offen gestehen, dass, wenn ich mich auch der deutschen Sprache noch nicht mächtig genug fühle, so werde ich doch am schnellsten aus diesem Werke zum Ziel gereichen, und eher lerne ich die Sprache, als dass ich das Werk nicht benutze, u. s. f. Ludwig Veress.

Linz. . . . . Anschließend spreche ich Euer Wohlgeboren meinen herzlichsten Dank aus für die Herausgabe Ihrer trefflichen Aufgabenhefte, die mir Gelegenheit verschaffen, mir privat und ohne große Auslagen Kenntnis von allen Partien der reinen und angewandten Mathematik zu verschaffen, u. s. f. Herrmann Bauernberger, stud. theol.

Bochum i. W. . . . . Ew. Hochwohlgeboren im Erscheinen begriffenes, so lehrreiches und auch von Laien leichtverständlich gehaltenes Werk: „Die elektrischen Erscheinungen und Wirkungen" habe ich mit Freuden begrüßt, u. s. f. C. P. Kupfer.

Urteile der Presse

über Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften.

Pädagogisches Jahrbuch von Emil Schneider. Dem Verlage von L. v. Vangerow, Bremerhaven, gebührt das Verdienst, durch Herausgabe der Kleyerschen Encyklopädie ein Werk geschaffen zu haben, das durch die Art seines Erscheinens und durch die Eigentümlichkeit in der Behandlung des Stoffes auch diejenigen, die keine gelehrte Schule besucht haben, in den Stand setzt, sich durch eigenen Fleiß ein reiches und gründliches Wissen zu erwerben. Der vorliegende Band ist in jeder Beziehung eine Musterleistung und wird hiermit wie das ganze Werk nachdrücklichst empfohlen. Man kann nur wünschen, dass uns der rühmlichst bekannte Verfasser bald mit einem nach demselben Plane bearbeiteten Lieferungswerke über die beschreibenden Naturwissenschaften beschenken möge.

Naturae Novitates. Die Kleyersche Encyklopädie ist dem Studierenden schon längst ein wohlbekanntes, unentbehrliches Hilfsmittel geworden, so dass man als die beste Empfehlung der neu vorliegenden Bände bezeichnen kann, dass diese sich in Inhalt und Form würdig ihren Vorgängern anschließen.

Kleyers Encyklopädie der ges. Naturwissenschaften.

Literaturblatt für höhere Schulen. Lehrbuch der räumlichen Elementar-Geometrie (Stereometrie). Erster Teil. Wenn man nach der vorliegenden Schrift die ganze Kleyersche Encyklopädie der gesamten mathematischen, technischen und exakten Natur-Wissenschaften beurteilen darf, so verdient dieses Unternehmen weit mehr Beachtung und Unterstützung, als es bislang in Kollegenkreisen gefunden hat. Offen gestanden bin ich mit dem Verdachte an die Lektüre dieses Buches herangetreten, dass es, als für den Selbstunterricht und die elementare Technik berechnet, in wissenschaftlicher Beziehung manches zu wünschen übrig lassen werde. Aber ich bin sehr angenehm enttäuscht worden; das Buch ist durchaus wissenschaftlich angelegt und weit gründlicher durchdacht, als die meisten Lehrbücher der Stereometrie; dass es dabei auch vielfach auf die Praxis des Lebens eingeht, kann ihm nur zur weiteren Empfehlung gereichen. Mir ist keine Schrift bekannt, welche die räumlichen Lageverhältnisse von Geraden und Ebenen mit der Allgemeinheit und Gründlichkeit untersucht, wie die vorliegende Stereometrie. Ganz besonderen Wert hat das Buch auch dadurch, dass eine große Menge konstruktiver Aufgaben erschöpfend oder wenigstens mit Andeutungen zur Lösung vorgeführt wird; besonders sorgfältig ist stets die Determination behandelt. Allen Kollegen, die bislang die konstruktive Seite der Stereometrie weniger beachtet haben, sei hiermit das Seippsche Buch nachdrücklichst empfohlen; ebenso seien die Studierenden zur Ausbildung ihrer Raumanschauung darauf hingewiesen, um so lieber, als die Zeichnungen durchweg mustergültig sind.

Pfälzische Lehrerzeitung. Von diesem großartigen, bis jetzt unerreicht dastehenden Unternehmen liegen uns weitere Bände vor. Für die Zwecke des Selbststudiums sind diese Werke das Beste, was es giebt. Auch in Schulen dürften sie mit großem Nutzen zu gebrauchen sein.

Literaturblatt für katholische Erzieher. Bezüglich dieser nach Kleyers System bearbeiteten Lehrbücher können wir uns kurz fassen. „Kleyers Encyklopädie der gesamten mathematischen etc. Wissenschafen bietet, wie bereits allgemein anerkannt, die besten Unterrichtsmittel."

Pädagogisches Literaturblatt. Lehrbuch der ebenen Elementar-Geometrie (Planimetrie). Anlage und Ausführung des Sachsschen Lehrbuchs sind vorzüglich. Der Verleger hat für eine gute Ausstattung Sorge getragen, die Figuren insbesondere zeichnen sich durch wohltuende Klarheit und Schärfe aus. Gesamturteil: das Buch ist für den Selbstunterricht, wie auch zum Gebrauch an entsprechenden Unterrichtsanstalten nach jeder Richtung hin aufs beste geeignet.

Der Techniker, New York. Die systematische Einteilung und Behandlung des umfangreichen Lehrmaterials mit zahlreichen erläuternden Aufgaben und Beispielen, wie in dem vorliegenden Werke, ist sehr fördernd und anregend für das Studium und ein allseitig anerkannter Vorzug der Kleyerschen Unterrichtsmethode; so verfaßte Lehrbücher sind nicht allein für Schulunterricht, sondern auch zum Selbststudium und als Nachschlagebücher für den praktischen Fachmann von hohem Nutzen.

Zeitschrift für Realschulwesen, Wien. Hovestadt, Lehrbuch der absoluten Masse u. Dimensionen der physikalischen Größen. Das Buch, welches den Gegenstand mit der möglichsten Vollständigkeit behandelt, zeigt bei einer anfangs ausführlichen, später knappen Darstellung doch durchgehends jene Klarheit, die gerade für diesen Teil der Wissenschaft nötig ist. Es wird sich dasselbe daher überall als eine gute Einleitung in das wissenschaftliche Studium der Physik empfehlen.

Magazin für Pädagogik. Lehrbuch der planimetrischen Konstruktionsaufgaben, gelöst durch geometrische Analysis. Erster und Zweiter Teil. An solchen Werken haben wir freilich noch keinen Ueberfluß und wir möchten einem jeden raten, der sich ohne Hilfe eines Lehrers tiefer in dieses Gebiet einzuarbeiten wünschte, sei es zum Zwecke der Erstehung einer Prüfung, sei es aus besonderer Liebhaberei zu diesem schönen Zweig der Mathematik, zu diesem ausgezeichneten Werke zu greifen. Nur mit hoher Befriedigung und reichem Gewinn wird er dasselbe aus der Hand legen.

Prakt. Physik. Der Verfasser hält vollkommen, was er verspricht; er ist ein Meister in der Entwicklung und Klarstellung der Grundbegriffe und macht dadurch seine Arbeit vor allem für den angehenden Lehrer und für die Selbstausbildung geeignet, und mancher ältere Lernende wird sagen: Hätte man mir solches in meiner Jugend geboten!

Baukunde.

Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Ein Lehrbuch für den Unterricht an bautechnischen Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht und Nachschlagen mit 194 Uebungsaufgaben und 486 Figuren nebst einem Anhang von Tabellen. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 3. Auflage. Preis: Mk. 5.—. Geb. Mk. 5,50.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Erster Teil: **Geometrische Konstruktionen, Elemente der Projektionslehre, Konstruktion der Durchdringungen zwischen Ebenen und Körpern, rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie, einfache Dachausmittelungen.** Mit 345 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn.** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W.. 2. Auflage. Preis: Mk. 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Darstellende Geometrie für Bauhandwerker. Zum Gebrauche an Baugewerkschulen und ähnlichen technischen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht für Bauhandwerker. Zweiter Teil: **Schattenlehre, Verteilung des Lichtes auf der Oberfläche eines Körpers, Schiftung bei Dächern, Windschiefe Dächer, Darstellung eines Treppenkrümmlings, Steinschnitt, Centralperspektive.** Anhang: **Bildliche Darstellung der Beleuchtung auf Körpern.** Mit 354 Figuren. Bearbeitet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. 2. Auflage. Preis: 3.—. In Schuleinband Mk. 3,30.

Vorlegeblätter für den Unterricht im Linear- und Projektionszeichnen. Zum Gebrauche an Realschulen, höheren Bürgerschulen, gewerblichen Fortbildungsschulen, Gewerbe- und Handwerkerschulen usw. **12 Tafeln mit erläuterndem Texte.** Entworfen und gezeichnet von **Prof. J. Vonderlinn,** Direktor der königl. Baugewerkschule zu Münster i. W. In Mappe: Mk. 5,50.

Das Zeichnen der Stereometrie. Als Vorschule zur darstellenden Geometrie und zum Fachzeichnen für Lehranstalten sowie zum Selbstunterricht. 28 Tafeln mit Text. Von **Prof. A. Brude.** Preis: Mk. 6.—.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW
BIBLIOTEKA GŁÓWNA
II L. inw. 31378
Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej
100000298344