# Berechnung der Einsenkung von Eisenbetonplatten und Plattenbalken.

Von

Dr.-Ing. Karl Heintel,
Regierungsbaumeister.

Mit 37 Figuren.



Berlin.
Verlag von Julius Springer.
1909.

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.

# Inhaltsverzeichnis.

# 1. Die Einsenkung von Platten und Balken beliebigen Materials.

Ein Balken werde mit beliebigen, aber symmetrisch angeordneten Lasten belastet. Die in den einzelnen Querschnitten hervorgerufenen Momente sind durch die Momentenlinie bestimmt (siehe Fig. 1). Der Balken biegt sich durch (siehe Fig. 2). Ich bezeichne

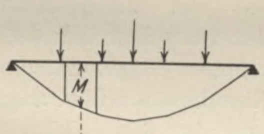



Fig. 1. Momentenlinie.

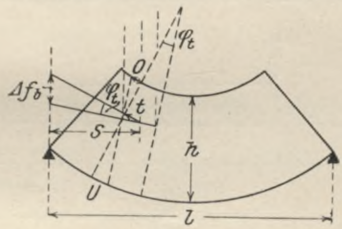



Fig. 2.

vor der Belastung auf dem Balken eine Lamelle von der Länge $t$ zwischen senkrechten Querschnittsflächen. Nach der Belastung hat sich die Lamelle verändert, sie erhält durch die Biegung eine Verkürzung der obersten Betonfaser um 0 und eine Verlängerung der untersten um $u$. Der Winkel, den die beiden Begrenzungsflächen miteinander einschließen, wird

$$\varphi_t = \frac{0 + u}{h}.$$

Der Beitrag der Einsenkung, der durch diese Lamelle hervorgerufen wird, ergibt sich direkt aus Fig. 2 zu

$$\Delta f_b = \varphi_t \cdot s = \frac{0 + u}{h}\, s.$$

Bezeichnet man die Verkürzung der obersten Faser einer Balkenlamelle von der Länge 1 bei dem entsprechenden Moment mit $\varepsilon_0$, die Verlängerung der untersten Faser mit $\varepsilon_u$, so wird

$$0 = t \cdot \varepsilon_0 \qquad u = t \cdot \varepsilon_u,$$

damit
$$\varphi_t = t \cdot \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h}$$

und
$$\Delta f_b = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} \cdot t \cdot s.$$

Um die durch die Biegungsmomente entstehende Gesamteinsenkung zu erhalten, brauche ich nur den Balken in eine Anzahl Lamellen zu zerlegen und die einzelnen Einsenkungen zu summieren. Man erhält

$$f_b = \sum_0^{\frac{l}{2}} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} \cdot s \cdot t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die Werte von $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ sind unbekannt. Wie sie für einen bestimmten Balken für verschiedene Biegungsmomente berechnet werden können, wird später gezeigt werden. Für mehrere Versuchsbalken sind sie durch Messungen erhoben worden.

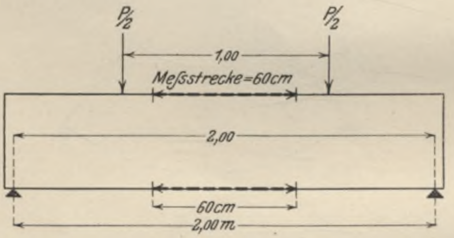


Fig. 3.

So hat Bach im Auftrag des Eisenbetonausschusses der Jubiläumsstiftung der deutschen Industrie zahlreiche Biegeversuche mit Eisenbetonbalken angestellt, und in den „Mitteilungen über Forscherarbeiten", herausgegeben vom Verein Deutscher Ingenieure, in den Heften 39 und 45 bis 47 veröffentlicht. Die allgemeine Anordnung dieser Versuche ist aus Fig. 3 zu ersehen. Die 2 m langen Balken wurden mit zwei konzentrierten, gleichen und symmetrischen Einzellasten, welche 1 m voneinander entfernt waren, belastet. Der Balkenteil zwischen den beiden Lasten erhält durch diese Anordnung durchgehends gleiches Moment. Die Schubkraft ist zwischen Auflager und Angriffspunkt der Lasten $= \frac{P}{2}$, zwischen den beiden Lasten aber gleich Null. Bei den verschiedenen Belastungsstufen wurden nun in einer 60 cm langen Meßstrecke die Zusammendrückungen des Betons an der Balkenoberfläche, sowie die Dehnungen an der Balkenunterfläche gemessen. Mit Hilfe dieser Messungen läßt sich die Einsenkung berechnen.

Beispiel: Der von Bach untersuchte Plattenbalken Nr. 72 Bach-Fig. 223 von 50,9 cm Höhe (siehe Fig. 4) werde mit $P = 10000$ kg, d. h. zwei Einzellasten von 5000 kg belastet. Wie groß ist seine Einsenkung, hervorgerufen durch die Biegungsmomente?

Bach ermittelte bei einer Belastung von

2000 4000 6000 8000 10000 kg

eine Zusammendrückung der Oberkante von

0,24 0,51 0,80 1,10 1,44

und eine Dehnung der Unterkante von

0,30 0,63 0,97 1,48 2,06.

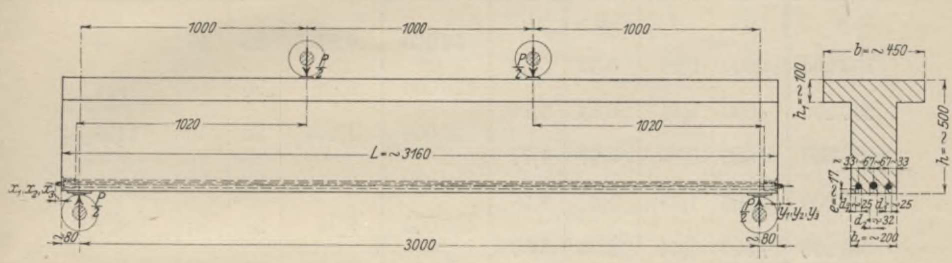


Fig. 4. Plattenbalken Nr. 72 (Bach-Fig. 223).[1]

Diese Zahlen bedeuten $\frac{1}{200}$ cm. Da sie außerdem einer Meßlänge von 60 cm entsprechen, so ergeben die auf Grund dieser Zahlen gewonnenen Rechnungsresultate von Längen

$$\frac{1}{200} \cdot \frac{1}{60} = \frac{1}{12000} \text{ cm.}$$

Den verschiedenen Belastungsstufen entspricht ein Biegungsmoment von $M = \frac{P}{2} \cdot 100$ cmkg, d. h. von

100000, 200000, 300000, 400000, 500000 cmkg.

Den mit $P = 10000$ kg belasteten Balken teile ich in Lamellen von 20 bzw. 50 cm Länge ein, zeichne die Momentenlinie (Fig. 5), bestimme das jeder Lamelle entsprechende mittlere Moment, sowie den Abstand $s$ von Lamellenmitte bis Auflager, bilde die Werte $(\varepsilon_0 + \varepsilon_u)\, s\, t$ (s. Tab. I) und schließlich

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} (\varepsilon_0 + \varepsilon_u)\, s\, t.$$

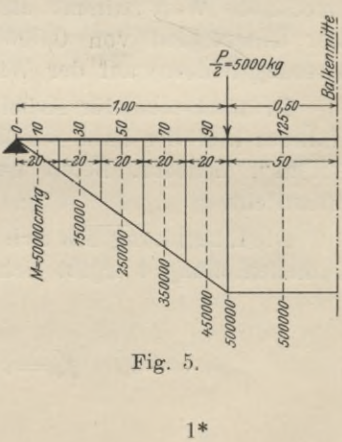


Fig. 5.

[1] Forschungsarbeiten Heft 45 bis 47.

Tabelle I.

| $M=\frac{P}{2}\cdot 100$ | $P$ | Gemessen von Bach $\varepsilon_0$ | Gemessen von Bach $\varepsilon_u$ | $\varepsilon_0+\varepsilon_u$ | Zwischen-momente | Zwischenwerte von $\varepsilon_0+\varepsilon_u$ | $t$ | $s$ | $(\varepsilon_0+\varepsilon_u)\,t\cdot s$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | | |
| | | | | | 50 000 | 0,27 | 20 | 10 | 54 |
| 100 000 | 2000 | 0,24 | 0,30 | 0,54 | | | | | |
| | | | | | 150 000 | 0,84 | 20 | 30 | 504 |
| 200 000 | 4000 | 0,51 | 0,63 | 1,14 | | | | | |
| | | | | | 250 000 | 1,455 | 20 | 50 | 1455 |
| 300 000 | 6000 | 0,80 | 0,97 | 1,77 | | | | | |
| | | | | | 350 000 | 2,175 | 20 | 70 | 3 045 |
| 400 000 | 8000 | 1,10 | 1,48 | 2,58 | | | | | |
| | | | | | 450 000 | 3,04 | 20 | 90 | 5 472 |
| 500 000 | 10 000 | 1,44 | 2,06 | 3,50 | | | | | |
| | | | | | 500 000 | 3,50 | 50 | 125 | 21 875 |
| | | | | | | | | Summe: | 32 405 |

Die gesuchte Einsenkung ist dann:

$$f_b=\frac{1}{h}\sum_0^{\frac{l}{2}}(\varepsilon_0+\varepsilon_u)\,s\,t\,\frac{1}{12000}\text{ cm}$$

$$=\frac{1}{50{,}9}\cdot 32405\,\frac{1}{12000}\text{ cm}$$

$$=\mathbf{0{,}0535\ cm.}$$

Die von Bach gemessene Einsenkung betrug **0,0595 cm.** Der errechnete Wert stimmt also mit der Messung ziemlich überein. Der Unterschied von 0,006 cm beruht (abgesehen von etwaigen Messungsfehlern) auf der Wirkung der Schubkräfte.

In nachstehender Arbeit ist von dieser Wirkung abgesehen. Näheres hierüber habe ich in meiner Studie: „Der Schubmodul des Betons“, Zeitschr. Beton und Eisen, Jahrg. 1908, Heft 4, veröffentlicht.

Die Einsenkung läßt sich auch graphisch ermitteln. Bei gleicher Lamellenteilung $t$ ergibt sich die Einsenkung aus Gl. 1 zu

$$f_b=t\sum_0^{\frac{l}{2}}\frac{(\varepsilon_0+\varepsilon_u)}{h}\cdot s \quad \text{. . . . . . . (2)}$$

Der Ausdruck

$$\sum^{\frac{l}{2}} \frac{(\varepsilon_0 + \varepsilon_u)}{h} \cdot s$$

läßt sich bei konstantem $h$ darstellen als Ordinate eines Seilpolygons mit den Gewichten $(\varepsilon_0 + \varepsilon_u)$ und der Polweite $h$ (siehe später unter Abschnitt 6). Die Einsenkung $f_b$ ist dann $t$mal größer als die graphisch gewonnene Strecke

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} \cdot s.$$

Diese kann aber auch direkt als Einsenkung angesehen werden, wenn man sie, als im Maßstab $1 : t$ gezeichnet, auffaßt. Da die Größen $(\varepsilon_0 + \varepsilon_u)$, $h$ und $s$ auch nicht in natürlicher Größe, sondern in gewissen Maßstäben $M_\varepsilon$, $M_h$ und $M_s (= M_l)$ aufgezeichnet sind, so ergibt sich schließlich als Maßstab der Einsenkung

$$M_f = \frac{1}{t} \frac{M_\varepsilon \cdot M_l}{M_h} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Ist die Höhe $h$ des Balkens nicht konstant, so wird der Ausdruck

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} \left( \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} \right) \cdot s$$

dargestellt mit Hilfe eines Seilpolygons mit den Gewichten

$$\frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} (= \varphi)$$

und der Polweite 1. Wird statt 1 eine Polweite $\varrho$ gewählt, so ergibt sich der Maßstab der Einsenkung zu

$$M_f = \frac{1}{t \cdot \varrho} \cdot M_\varphi \cdot M_l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Das Seilpolygon selbst stellt die Biegelinie des Balkens dar.

Die graphische Methode wird bei den späteren Beispielen angewandt werden; zunächst soll gezeigt werden, wie die Werte $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ für Eisenbetonbalken berechnet werden können. Hierzu muß vor allem die Formänderungskurve des Betons bekannt sein. Diese wird im nächsten Abschnitt aus Biegeversuchen mit Eisenbetonbalken abgeleitet werden.

## 2. Die Berechnung der Formänderungskurve des Betons.

Der Elastizitätsmodul des Betons ist nicht konstant, sondern veränderlich. Das elastische Verhalten des Betons läßt sich am einfachsten durch seine Formänderungskurve darstellen. Um diese zu erhalten, trägt man zu einer gewissen Beanspruchung $\sigma$ des Betons als Abszisse die zugehörige Zusammendrückung resp. Dehnung $\varepsilon$ der Längeneinheit in $m$facher Vergrößerung[1]) als Ordinate auf, wiederholt dies für verschiedene Beanspruchungen und verbindet die Punkte durch eine stetige Kurve, die Formänderungskurve (Fig. 6).

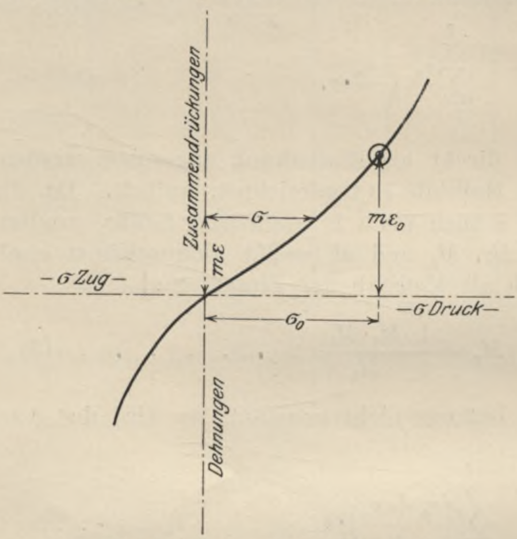



Fig. 6. Formänderungskurve.

Die zusammengehörigen Werte von $\sigma$ und $\varepsilon$ müssen durch Versuche bestimmt werden, entweder aus reinen Druck- oder Zugversuchen, oder besser, da es sich im vorliegenden Fall um Biegungsbeanspruchungen von Eisenbetonbalken handelt, aus Biegeversuchen mit solchen Balken.

Wenn die aus den beiden Versuchsmethoden erhaltenen Resultate nicht genau miteinander übereinstimmen, so ist dies nicht weiter verwunderlich, setzt doch die Theorie der Biegung das Ebenbleiben der Querschnitte, sowie völlig gleichmäßiges, homogenes Material voraus. Beim Eisenbetonbalken bringt aber nicht nur die Schubkraft, sondern auch die Haftkraft zwischen Eisen und Beton ein Nichtebenbleiben der Querschnitte hervor, und daß der Eisenbetonbalken kein homogenes, gleichmäßiges Material bedeutet, zeigen die bei Biegung auftretenden Wasserflecke und Risse im Beton.

Wenn daher die aus Biegeversuchen abgeleitete Formänderungskurve zum Teil nicht eigentlich richtig wäre, so ergibt sie doch

[1]) Ich wähle den Buchstaben $m$ der Einfachheit halber an Stelle von $M_\varepsilon$.

bei Biegebeanspruchungen richtige Dehnungswerte (was für die Einsenkung allein in Betracht kommt), da sie die Fehler der Annahmen der Theorie der Biegung eliminiert, wenigstens bei Balken ähnlicher Dimensionen wie die Versuchsbalken.

Die schon genannten, von Bach vorgenommenen Messungen an Versuchsbalken ermöglichen die Berechnung der Formänderungskurven des Betons dieser Balken.[1])

Nehmen wir an, diese Kurve sei bekannt. Der Balken werde mit zwei Einzellasten $\frac{P}{2}$ belastet, wodurch zwischen den beiden Einzellasten ein gewisses, durchgehends gleiches Moment $M$ entsteht. Die Dehnungen in Balkenober- und -Unterkante werden gemessen und betragen auf die Maßeinheit (1 cm) umgerechnet (statt 70 cm, was die Meßlänge betrug) $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$. Da die Balkenquerschnitte bei Biegung als eben angenommen werden, so erhält das Balkenelement $ABCD$ von der Länge 1 die Form $ABFE$ (s. Fig. 7). Um die in einer beliebigen Faser vom Abstand $e$

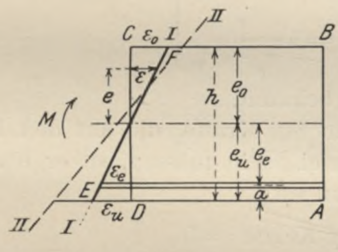


Fig. 7.

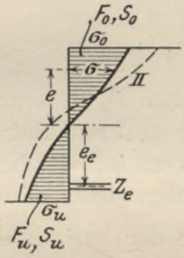


Fig. 8. Spannungskurve.

von der Neutralachse auftretende Biegungsspannung $\sigma$ zu erhalten, entnehme ich der Fig. 7 die der Entfernung $e$ entsprechende Zusammendrückung $\varepsilon$, gehe mit der $m$fachen Vergrößerung dieser Strecke, also mit $m \cdot \varepsilon$ in Fig. 6 als Ordinate ein, und entnehme die zugehörige Abszisse. Diese Abszisse stellt die Beanspruchung $\sigma$ der Faser dar. Diese Größe $\sigma$ trage ich noch in Fig. 8 ein, wiederhole diesen Vorgang für verschiedene Faserentfernungen $e$ und erhalte somit in Fig. 8 die Spannungskurve. Wäre der Maßstab, in welchem der Balken in Fig. 7 gezeichnet ist, zufällig so gewählt, daß die Länge $m\varepsilon_0$ in Fig. 7 und 6 gleich der Länge $e_0$ in Fig. 7 wäre,

[1]) Ähnliche Messungen hat Wayß und Freitag 1902 und 1903 durch Bach ausführen lassen, die Resultate sind in Prof. Mörschs Buch „Der Eisenbetonbau" (S. 103 und 104) veröffentlicht. Die Formänderungskurve des Betons hat Prof. Mörsch durch Probieren zu finden gesucht (siehe S. 106 und 107).

so wäre die Spannungskurve der Fig. 8 genau die gleiche wie die Formänderungskurve (Fig. 6).

Ist die Fläche zwischen Spannungskurve und Ordinatenaxe (Fig. 8) gleich $F_0$ bzw. $F_u$, die statischen Momente dieser Flächen bezogen auf die Neutralachse $S_0$ und $S_u$, so ist bei einer Breite $b$ des Eisenbetonbalkens die vom Beton aufgenommene Druckkraft $= b \cdot F_0$ und die Zugkraft $bF_u$.

Die Zugkraft $Z_e$ des Eisens läßt sich aus der Dehnung $\varepsilon_e$ des Eisens berechnen. Es ist

$$Z_e = f_e \cdot \varepsilon_e \cdot E_e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

($E_e$ Elastizitätsmodul des Eisens).

Die Dehnung $\varepsilon_e$ ergibt sich (Fig. 7) zu

$$\left.\begin{array}{ll} & \varepsilon_e = \varepsilon_u \dfrac{e_e}{e_u}, \\ \text{wobei} & \\ & e_e = e_u - a \\ \text{und} & \\ & e_u = h \dfrac{\varepsilon_u}{\varepsilon_u + \varepsilon_0} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Die Größe $Z_e$ ist somit bekannt.

Da die äußeren und inneren Kräfte, die auf den Balkenquerschnitt wirken, im Gleichgewicht sein müssen, so ergeben sich folgende Gleichgewichtsbedingungen:

Summe der horizontalen Kräfte $= 0$

$$b \cdot F_0 - bF_u - Z_e = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Summe der statischen Momente $= 0$

$$bS_0 + b \cdot S_u + Z_e \cdot e_e - M = 0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Erhält der Balken eine andere Belastung, so ergeben sich andere Dehnungen $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$. Damit erhält der Balken eine andere Form II (Fig. 7). Die zugehörige Spannungskurve II ist in Fig. 8 gestrichelt eingezeichnet. Zu jeder Belastung gehört eine besondere Spannungskurve. Dies ist umständlich zu zeichnen, und läßt sich dadurch vermeiden, daß man den Maßstab, in dem der Balken gezeichnet wird, so verändert, daß immer $e_0$ durch eine der zugehörigen Belastungsstufe entsprechenden Strecke $m\varepsilon_0$ dargestellt wird. Damit ergibt sich als Spannungskurve immer die Formänderungskurve s. Fig. 9.

Bezeichnet man die in diesem Maßstab dargestellten Größen mit dem Index $'$, so daß also (Fig. 9) unter Weglassung der Zeiger I resp. II

$$e_0' = m\varepsilon_0 \left(= e_0 \frac{m\varepsilon_0}{e_0}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so wird nach Fig. 7

$$e_u' = e_u \frac{m\varepsilon_0}{e_0} = m\varepsilon_u \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und

$$e_e' = e_e \frac{m\varepsilon_0}{e_0} = e_e \frac{m\varepsilon_e}{e_e}$$

also

$$e_e' = m\varepsilon_e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ferner

$$h' = h \frac{m\varepsilon_0}{e_0} = e_0' + e_u' = m\varepsilon_0 + m\varepsilon_u \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

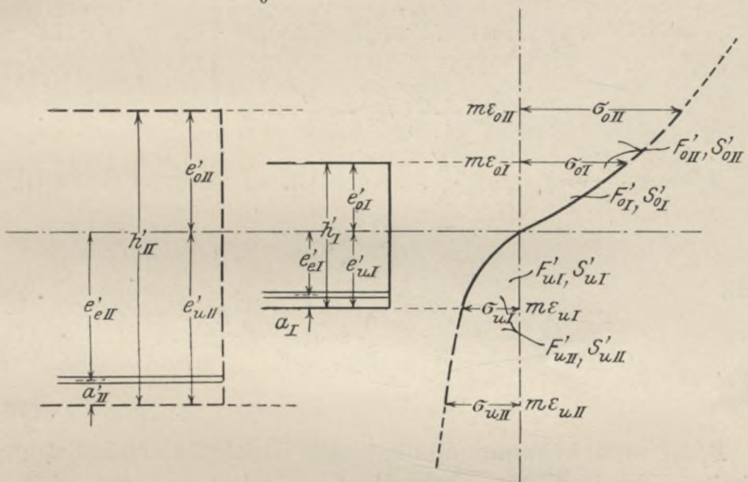



Fig. 9.

Da $h' = h \frac{m\varepsilon_0}{e_0}$, so läßt sich der Wert $\frac{m\varepsilon_0}{e_0}$ auch ersetzen durch $\frac{h'}{h}$, und es ist weiter

$$\left.\begin{array}{ll}
a' = a \frac{m\varepsilon_0}{e_0} = a \frac{h'}{h}, & \\
e_e' = e_e \cdot \frac{h'}{h}, & \\
F_0' = F_0 \frac{h'}{h}, & F_u' = F_u \frac{h'}{h}, \\
S_0' = S_0 \left(\frac{h'}{h}\right)^2, & S_u' = S_u \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \\
M' = M \left(\frac{h'}{h}\right)^2 &
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und

Multipliziere ich die Grundgleichungen (7) und (8) mit $\frac{h'}{h}$ resp. $\left(\frac{h'}{h}\right)^2$ durch, so erhalte ich

$$\left.\begin{array}{l} bF_0\frac{h'}{h} - bF_u\frac{h'}{h} - Z_e\cdot\frac{h'}{h} = 0 \\ bS_0\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + bS_u\left(\frac{h'}{h}\right)^2 + Z_e\cdot\frac{h'}{h}\cdot e_e\cdot\frac{h'}{h} - M\left(\frac{h'}{h}\right)^2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Bezeichne ich den Wert $Z_e\cdot\frac{h'}{h}$ mit $Z_e'$, so ergibt sich, indem ich zugleich mit $b$ durchdividierte:

$$\left.\begin{array}{l} F_0' - F_u' - \frac{Z_e'}{b} = 0 \\ S_0' + S_u' + \frac{Z_e'}{b}\cdot e_e' - \frac{M'}{b} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

$Z_e' = Z_e\cdot\frac{h'}{h} = f_e\cdot\varepsilon_e\cdot E_e\cdot\frac{h'}{h}$. (Nach Gl. 5.) Nun ist (nach Gl. 11)

$$\varepsilon_e = \frac{e_e'}{m},$$

somit

$$Z_e' = f_e\cdot\frac{e_e'}{m}\cdot E_e\cdot\frac{h'}{h} = f_e\cdot\frac{h'}{h}\cdot e'\,\frac{E_e}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

wobei

$$e_e' = e_u' - a' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$Z_e'$ ist somit bekannt und die beiden Gleichgewichtsbedingungen enthalten, da in Wirklichkeit die Formänderungskurve nicht bekannt, noch vier Unbekannte $F_0'$, $F_u'$, $S_0'$, $S_u'$.

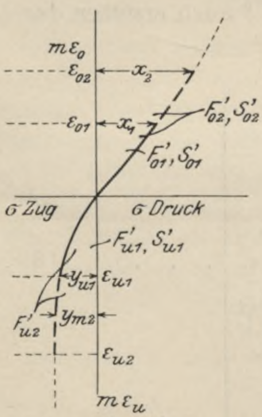


Fig. 10.

Für eine erste Berechnung dieser Größen läßt sich annehmen, daß auf Druckseite die Fläche $F_0'$ als Dreieck berechnet werden kann mit den Seiten $m\varepsilon_0$ und der unbekannten verglichenen Seite $x$ (siehe Fig. 10). Der Schwerpunkt von $F_0'$ liegt in zwei Drittel der Höhe.

Entsprechend kann bei den anfänglichen Belastungsstufen die Fläche $F_u'$ als Dreieck mit den Seiten $m\varepsilon_u$ und $y_u$ angesehen werden.

Bei höheren Belastungsstufen muß aber die Fläche $F_u'$ in ein Dreieck und mehrere Trapeze zerlegt werden.

Den Schwerpunkt des bei der nächst höheren Belastungsstufe neu hinzukommenden Trapezes nehmen wir in halber Trapezhöhe an und führen als Unbekannte die Mittellinie des Trapezes $y_m$ ein.

Wir erhalten somit nachstehende Werte — wobei der Einfachheit halber $m\varepsilon$ durch $\varepsilon$ ersetzt ist — (siehe Fig. 10).

$$F'_{01} = \frac{\varepsilon_{01} \cdot x_1}{2}, \quad S'_{01} = \frac{\varepsilon_{01} \cdot x_1}{2} \cdot \frac{2}{3} \varepsilon_{01} = \frac{\varepsilon_{01}^2 \cdot x_1}{3}$$

$$F'_{u1} = \frac{\varepsilon_{u1} \cdot y_{u1}}{2}, \quad S'_{u1} = \frac{\varepsilon_{u1}^2 \cdot y_{u1}}{3}$$

ferner

$$F'_{02} = \frac{\varepsilon_{02} \cdot x_2}{2}, \quad S'_{02} = \frac{\varepsilon_{02}^2 \cdot x_2}{3}$$

$$F'_{u2} = F'_{u1} + (\varepsilon_{u2} - \varepsilon_{u1}) y_{m2}, \quad S'_{u2} = S'_{u1} + (\varepsilon_{u2} - \varepsilon_{u1}) y_{m2} \frac{\varepsilon_{u2} + \varepsilon_{u1}}{2}.$$

Die Gleichungen (14) gehen über in folgende Gleichungen:

Anfängliche Belastungsstufen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon_{01} \cdot x_1}{2} - \frac{\varepsilon_{u1} y_1}{2} - \frac{Z'_{e1}}{b} = 0 \\ &\frac{\varepsilon_{01}^2 \cdot x_1}{3} + \frac{\varepsilon_{u1}^2 \cdot y_{u1}}{3} + \frac{Z'_{e1}}{b} e'_{e1} - \frac{M_1'}{b} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \ . \quad (17)$$

Daraus $x_1$ und $y_{u1}$ und durch weitere Rechnung $F'_{01}$, $F'_{u1}$, $S'_{01}$, $S'_{u1}$.

Höhere Belastungsstufen:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\varepsilon_{02} \cdot x_2}{2} - [F'_{u1} + (\varepsilon_{u2} - \varepsilon_{u1}) y_{m2}] - \frac{Z'_{e2}}{b} = 0 \\ &\frac{\varepsilon_{02}^2 \cdot x_2}{3} + \left[S'_{u1} + (\varepsilon_{u2} - \varepsilon_{u1}) \frac{\varepsilon_{u2} + \varepsilon_{u1}}{2} y_{m2}\right] + \frac{Z'_{e2}}{b} \cdot e'_{e2} - \frac{M_2'}{b} = 0 \end{aligned}\right|$$

usw. (18)

Beispiel: Berechnung der Formveränderungskurve des Betons bei Balken Nr. 48 nach Bach-Fig. 77 (s. Fig. 11 und Fig. 12).

Die genauen Maße des Balkens waren:

Höhe 30,37 cm, Breite 15,11 cm, Eiseneinlage drei Rundeisen von ca. 1 cm Durchmesser und zusammen 2,33 qcm Querschnittsfläche, Abstand des Schwerpunktes der Eiseneinlagen von Balkenunterkante

$$1{,}2 + \frac{1{,}0}{2} = 1{,}7 \text{ cm};$$

die Meßlänge, auf welcher die Dehnungen und Verkürzungen gemessen wurden, betrug 70 cm.

Die Untersuchung ergab, daß für Belastungen bis 2000 kg nach den für anfängliche Belastungsstufen angegebenen Gl. 17 gerechnet werden konnte, bei 2500 kg aber nach Gl. 18 gerechnet werden mußte.

Bach hat gemessen:

1. Belastung 2000 kg, Zusammendrückung der Oberkante 1,14, Dehnung der Unterkante 1,06.

2. Belastung 2500 kg, Zusammendrückung der Oberkante 1,43, Dehnung der Unterkante 1,47.

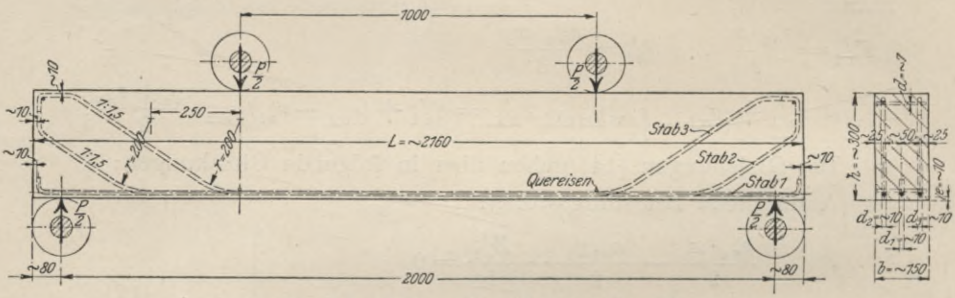



Fig. 11. Balken Nr. 48 (Bach-Fig. 77).

Diese Zahlen bedeuten $^1/_{200}$ cm bei einer Meßlänge von 70 cm. Nehmen wir die $\varepsilon$ in 100000facher Vergrößerung ($m = 100000$), so müssen wir die obigen Werte zur Einführung in unsere Rechnung mit $\frac{100\,000}{200 \cdot 70}$ multiplizieren und erhalten so:

1. Belastungsstufe 2000 kg, $m\varepsilon_{01}$ oder $\varepsilon_{01} = 8{,}14$ $\quad \varepsilon_{u1} = 7{,}57$.
2. Belastungsstufe 2500 kg, $\varepsilon_{02} = 10{,}2$ $\quad \varepsilon_{u2} = 10{,}5$.

1. Belastungsstufe 2000 kg.

$$\text{Biegungsmoment } M_1 = \frac{2000}{2} \cdot 50 = 50\,000, \quad \frac{M_1}{b} = \frac{50000}{15{,}11} = 3309.$$

Nach Gl. 9 bis 16 wird

$$\begin{aligned} e'_{01} &= m\,\varepsilon_{01} \quad \text{oder} \quad \varepsilon_{01} = 8{,}14 \\ e'_{u1} &= m\,\varepsilon_{u1} \quad \text{oder} \quad \underline{\varepsilon_{u1} = 7{,}57} \\ & \qquad\qquad\qquad\quad h_1' = 15{,}71, \end{aligned}$$

$$\frac{h_1'}{h} = \frac{15{,}71}{30{,}37} = 0{,}517$$

$$\frac{M_1'}{b} = 3309 \cdot 0{,}517^2 = 884,$$

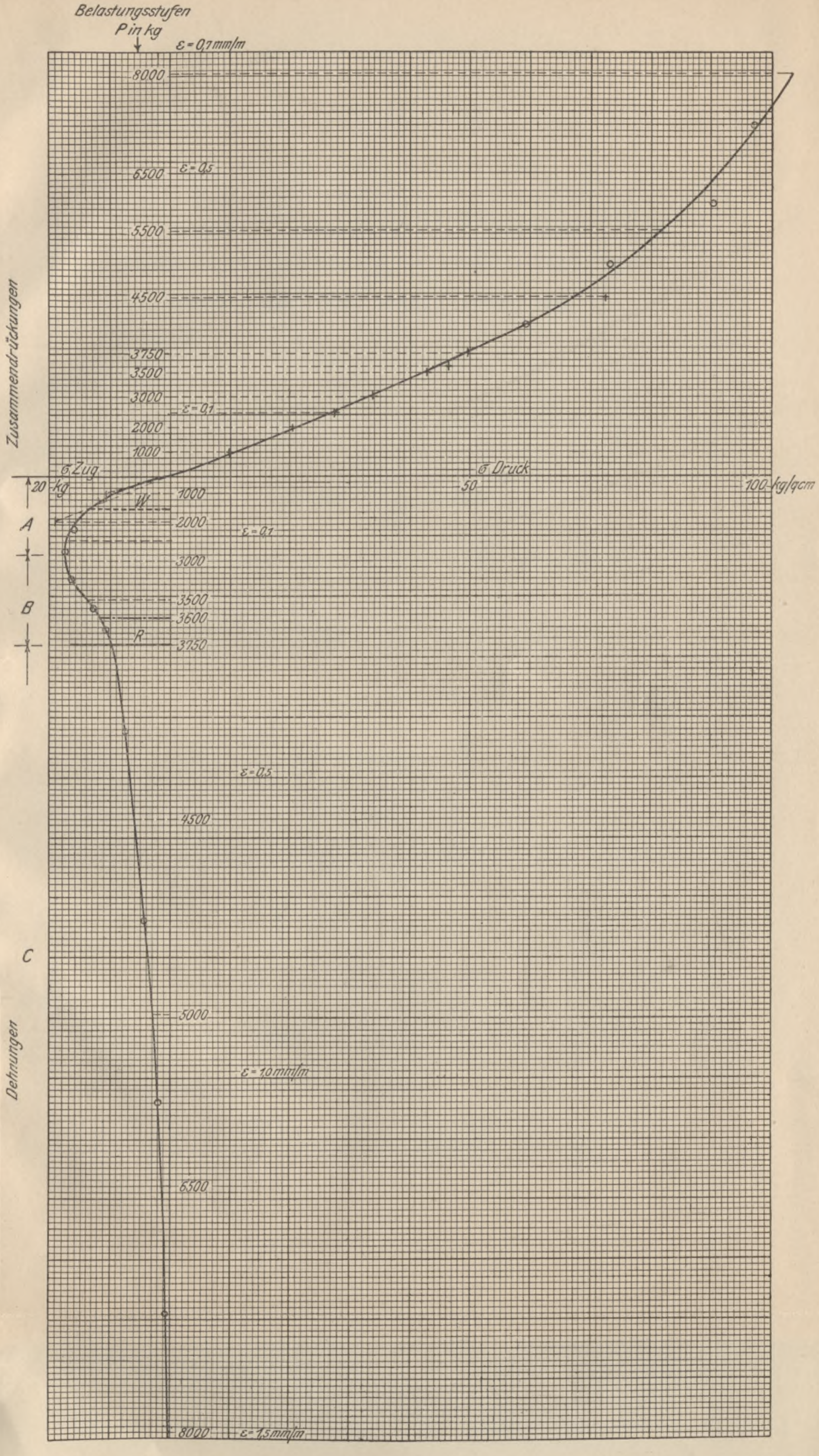



Fig. 12. Formänderungskurve des Balkens Nr. 48 nach Fig. 11 (Bach-Fig. 77).

$$a_1' = a \cdot \frac{h_1'}{h} = 1{,}7 \cdot 0{,}517 = 0{,}88$$

$$e_{e\,1}' = e_{u\,1}' - a_1' = 7{,}57 - 0{,}88 = 6{,}69,$$

$$\frac{Z_{e\,1}'}{b} = \frac{f_e}{b} \cdot \frac{h_1'}{h} \cdot e_{e\,1}' \cdot \frac{E_e}{m} = \frac{2{,}33}{15{,}11} \cdot 0{,}517 \cdot 6{,}69 \cdot \frac{2\,100\,000}{100\,000} = 11{,}2$$

(Elastizitätsmodul des Eisens $E_e$ zu 2 100 000 angenommen).

Durch Einsetzen der Werte in Gl. 17 erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{8{,}14}{2} x_1 - \frac{7{,}57}{2} y_{u\,1} - 11{,}2 = 0 \\ &\frac{8{,}14^2}{3} x_1 - \frac{7{,}57^2}{3} y_{u\,1} + 11{,}2 \cdot 6{,}69 - 884 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Daraus

$$x_1 = 20{,}3, \quad y_{u\,1} = 18{,}9$$

und

$$F_{0\,1}' = \frac{8{,}14}{2} \cdot 20{,}3 = 82{,}6 \qquad S_{0\,1}' = \frac{8{,}14^2}{3} 20{,}3 = 448,$$

$$F_{u\,1}' = \frac{7{,}57}{2} 18{,}9 = 71{,}5 \qquad S_{u\,1}' = \frac{7{,}57^2}{3} 18{,}9 = 361$$

### 2. Belastungsstufe 2500 kg.

$$M_2 = \frac{2500}{2} \cdot 50 = 62\,500, \qquad \frac{M_2}{b} = 4136.$$

$$\begin{aligned} e_{0\,2}' &= \varepsilon_{0\,2} = 10{,}2 \\ e_{u\,2}' &= \varepsilon_{u\,2} = 10{,}5 \\ \hline h_2' &= 20{,}7 \end{aligned}$$

$$\frac{h'}{h} = \frac{20{,}7}{30{,}37} = 0{,}6816.$$

$$\frac{M_2'}{b} = 4136 \cdot 0{,}6816^2 = 1921,$$

$$a_2' = 1{,}7 \cdot 0{,}6816 = 1{,}16,$$

$$e_{e\,2}' = 10{,}5 - 1{,}16 = 9{,}34,$$

$$\frac{Z_{e\,2}'}{b} = \frac{2{,}33}{15{,}11} \cdot 0{,}6816 \cdot 9{,}34 \cdot \frac{2\,100\,000}{100\,000} = 20{,}6.$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gl. 18 erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{10{,}2}{2}\,x_2 - [71{,}5 + (10{,}5 - 7{,}57)\,y_{m2}] - 20{,}6 = 0, \\ &\frac{10{,}2^2}{3}\,x_2 + \left[361 + (10{,}5 - 7{,}57)\,y_{m2}\,\frac{10{,}5 + 7{,}57}{2}\right] \\ &\qquad + 20{,}6 \cdot 9{,}34 - 1921 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Daraus

$$x_2 = 27{,}2, \quad y_{m2} = 16{,}0 \text{ usw.}$$

Die Werte sind in Fig. 12 Formänderungskurve für Balken 48 eingezeichnet.

Dieselbe Rechnung wird für die folgenden Belastungsstufen wiederholt, bei den höchsten Belastungsstufen (von 4500 kg ab) muß schließlich auch $F_0'$ in Dreieck und Trapeze geteilt werden. Die errechneten Punkte werden durch eine stetige Kurve verbunden. Die durch die Annäherungsannahmen gemachten Fehler können durch Nachrechnen beliebig vermindert werden.

Die angegebene Methode läßt sich durch einfache Erweiterung auch auf Plattenbalken anwenden.

## 3. Die Eigenschaften der Formänderungskurve des Betons.

Nach der in Abschn. 2 angegebenen Methode habe ich die Formänderungskurve der nachstehenden von Bach untersuchten Balken berechnet und in den Figuren 11 bis 27 dargestellt:[1])

1. Balken 66 und 69 nach Bach-Fig. 84 (s. Fig. 13 bis 15):
   Höhe 30 cm, Breite 20 cm, ohne Eiseneinlagen.
2. Balken 16 und 35 nach Bach-Fig. 2 in Heft 39 und Bach-Fig. 70 in Heft 45 bis 47 (s. Fig. 16 bis 19),
   Höhe 30 cm, Breite 20 cm, Eiseneinlagen 1 Rundeisen von 2,5 mm $\phi$, d. h. 0,55 % Eisenarmierung.
3. Balken 40 und 48 nach Bach-Fig. 77 (s. Fig. 11, 12 und 20). Höhe 30 cm, Breite 15 cm, Eiseneinlagen 3 Rundeisen von 1 cm $\phi$, d. h. 0,52 % Armierung.

---

[1]) Die angegebenen Nummern der Balken beziehen sich auf die Veröffentlichungen Bachs in den Mitteilungen über Forschungsarbeiten, Heft 39 und 45 bis 47. Die diesen Heften entnommenen Figuren sind unter ihrer dortigen Nummer unter der Bezeichnung Bach-Fig. angeführt.

4. Balken 64 und 65 nach Bach-Fig. 80 (s. Fig. 22 bis 24). Höhe 30 cm, Breite 20 cm, Eiseneinlagen 3 Rundeisen von 1,8 cm $\phi$, d. h. 1,25 % Armierung.

5. Plattenbalken 82 und 85 nach Bach-Fig. 228 (s. Fig. 25 bis 27).

6. Zum Vergleich sind auch die Formänderungskurven der zentrisch gedrückten bzw. gezogenen Körper 6 und 4, bzw. 7 und 8 gezeichnet (s. Fig. 28 und 29).

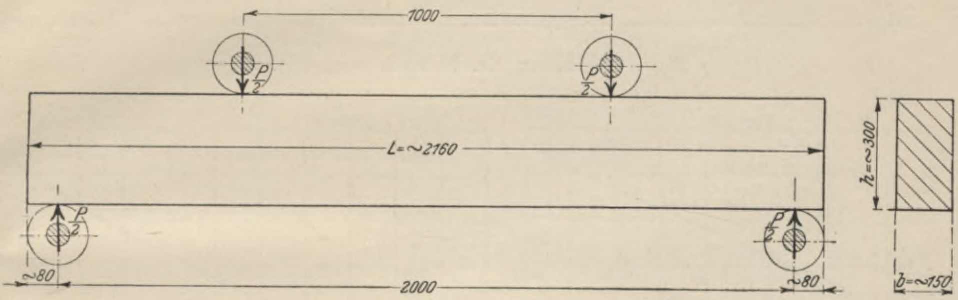



Fig. 13. Balken 66 und 69 (Bach-Fig. 84).

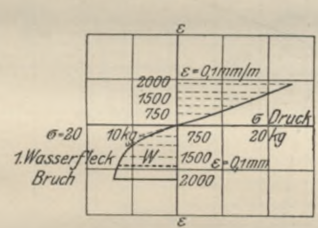



Fig. 14. Balken 66 nach Fig. 13.

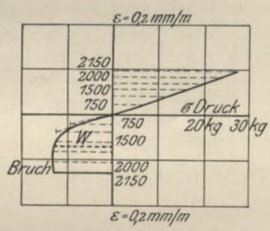



Fig. 15. Balken 69 nach Fig. 13.

Bei der Rechnung ist durchweg der Elastizitätsmodul des Eisens mit $E_e = 2\,100\,000$ eingeführt. Die verschiedenen Eisen werden aber wahrscheinlich mehr oder weniger von diesem Wert abweichen. Diese Fehlerquelle spielt, wie später gezeigt wird, bei den Anfangsbelastungen keine Rolle, sie kommt aber bei den Höchstbelastungen für die Beurteilung der Mitwirkung des Betons auf Zugseite sehr in Betracht.

Vergleicht man die verschiedenen Formänderungskurven miteinander, so ergibt sich folgendes:

**Auf Druckseite** stimmen die Kurven der meisten Balken sehr gut miteinander überein, insbesondere auch mit der Kurve des zentrisch gedrückten Primas 4 (Fig. 29). Prisma 6 ist im Vergleich zu 4 ziemlich elastischer, wogegen sich Balken 40 (Fig. 20) im Vergleich zu den anderen Balken und Prismen wesentlich spröder verhält (bis zu 30 %).

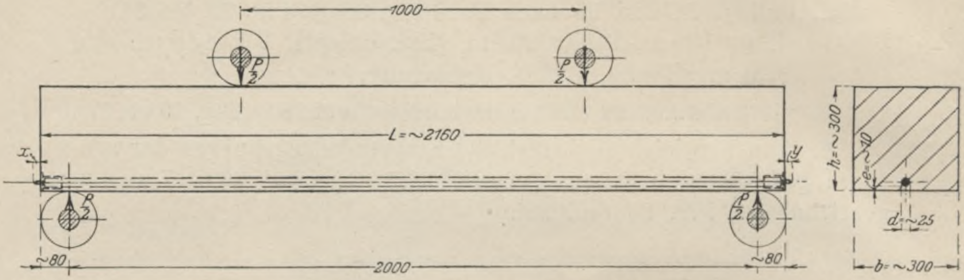



Fig. 16. Balken Nr. 16 nach Bach-Fig. 2.

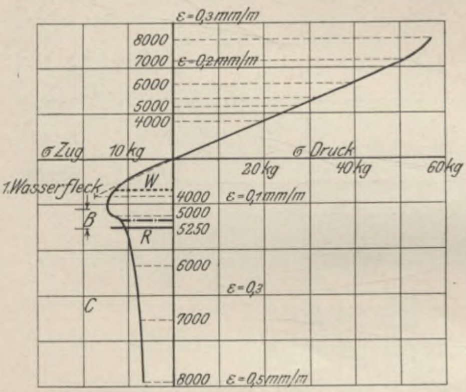



Fig. 17. Balken Nr. 16 nach Fig. 16.

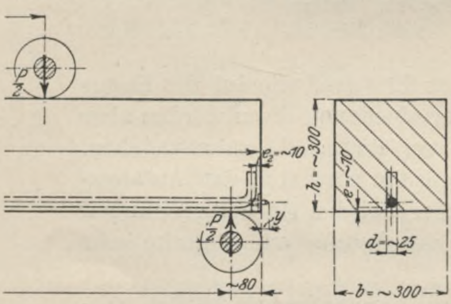



Fig. 18. Balken Nr. 35 nach Bach-Fig. 70.

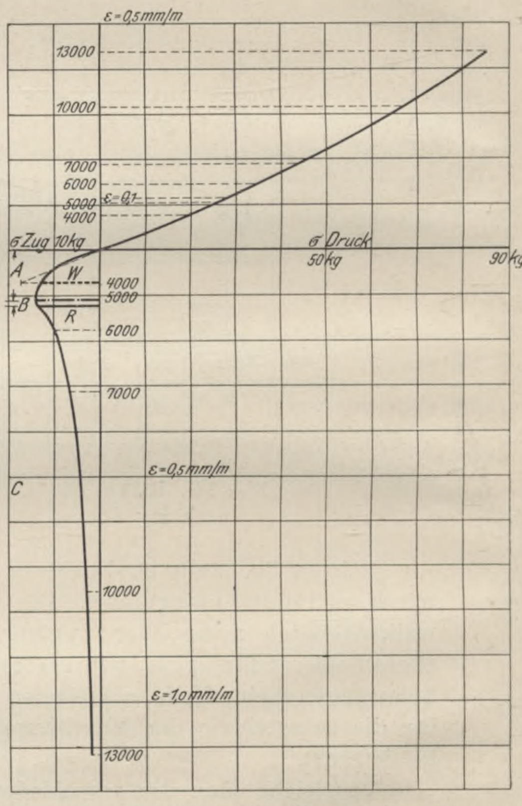



Fig. 19. Balken Nr. 35 nach Fig. 18.

Auffallend ist die rasche Krümmung nach aufwärts, welche manche Balken nach Erreichung von ungefähr $\sigma = 60$ kg zeigen, und welche besonders bei den Balken 64 und 65 in Erscheinung tritt (s. Fig. 23 und 24). Ich halte es nicht für wahrscheinlich, daß das zentrisch gedrückte Prisma bei weiterer Belastung dieselbe scharfe Krümmung zeigen wird, und glaube diese Erscheinung bei der Biegung aus dem Nichtebenbleiben der Querschnitte wie folgt ableiten zu können: Bei höheren Belastungsstufen treten auf Zugseite Risse im Beton auf. Würden die Querschnitte eben bleiben, so müßten die Risse bis zur Oberkante des Balkens gehen und die einzelnen Betonlamellen dürften sich nur noch an einem Punkt der Oberkante des

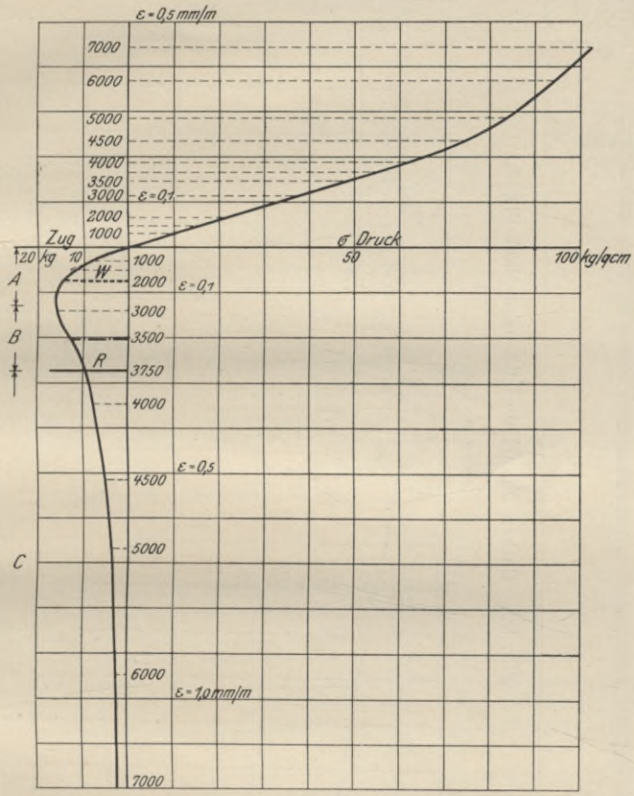



Fig. 20. Balken Nr. 40 nach Bach-Fig. 77 (s. Fig. 11).

Betons berühren. Die Druckspannung im Beton würde dann ∞ (s. Fig. 21). In Wirklichkeit ist dies nicht der Fall. Immerhin ist anzunehmen, daß an den, den Zugrissen gegenüberliegenden Stellen auf Druckseite höhere Druckbeanspruchungen erzeugt werden als in den Mitten zwischen diesen Punkten. Daß aber


Fig. 21.

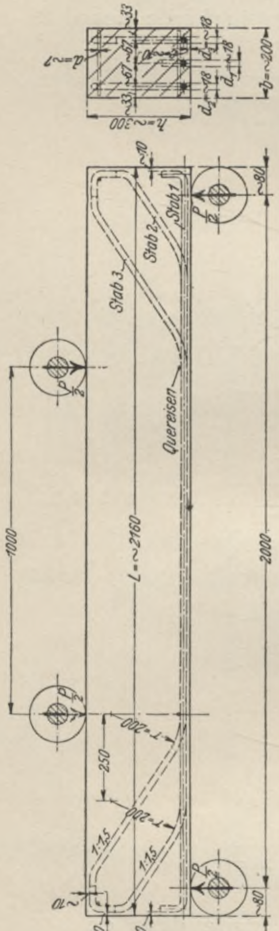



Fig. 22. Balken Nr. 64 und 65 nach Bach-Fig. 80.

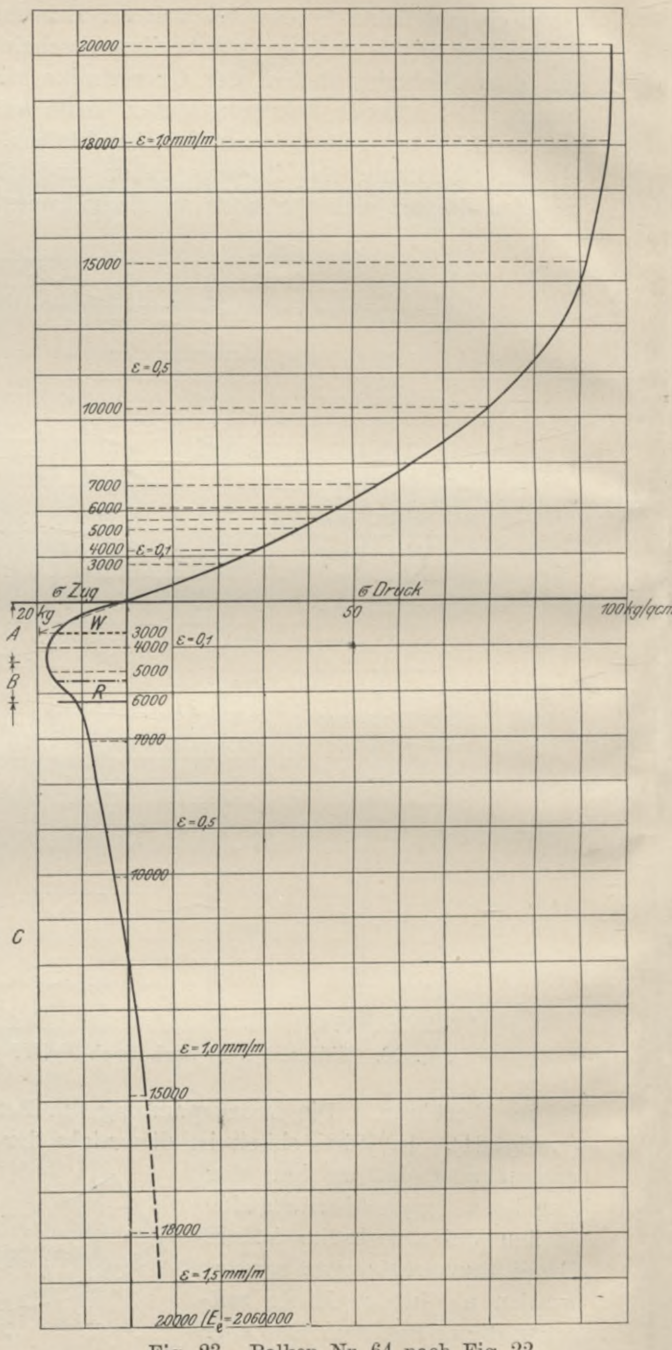



Fig. 23. Balken Nr. 64 nach Fig. 22.

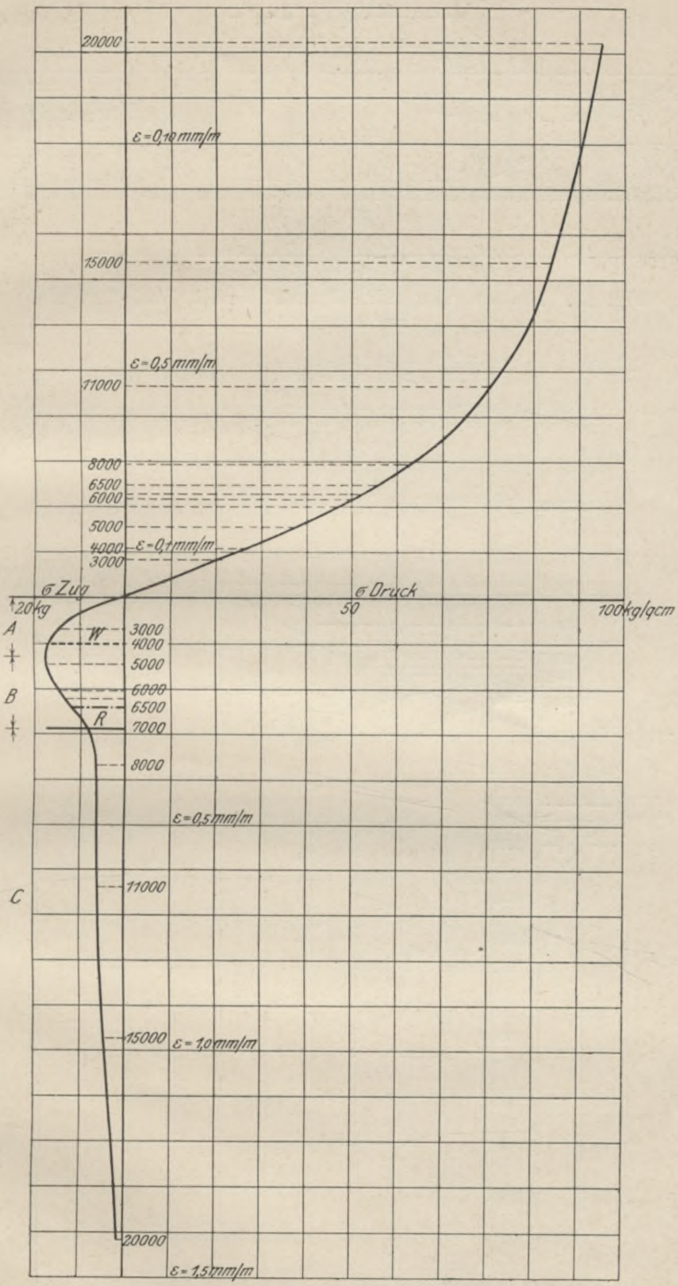



Fig. 24. Balken Nr. 65 nach Fig. 22.

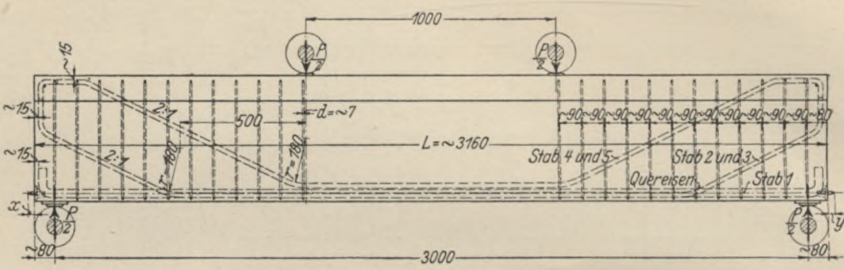



Fig. 25. Plattenbalken Nr. 82 und 85 nach Bach-Fig. 228.

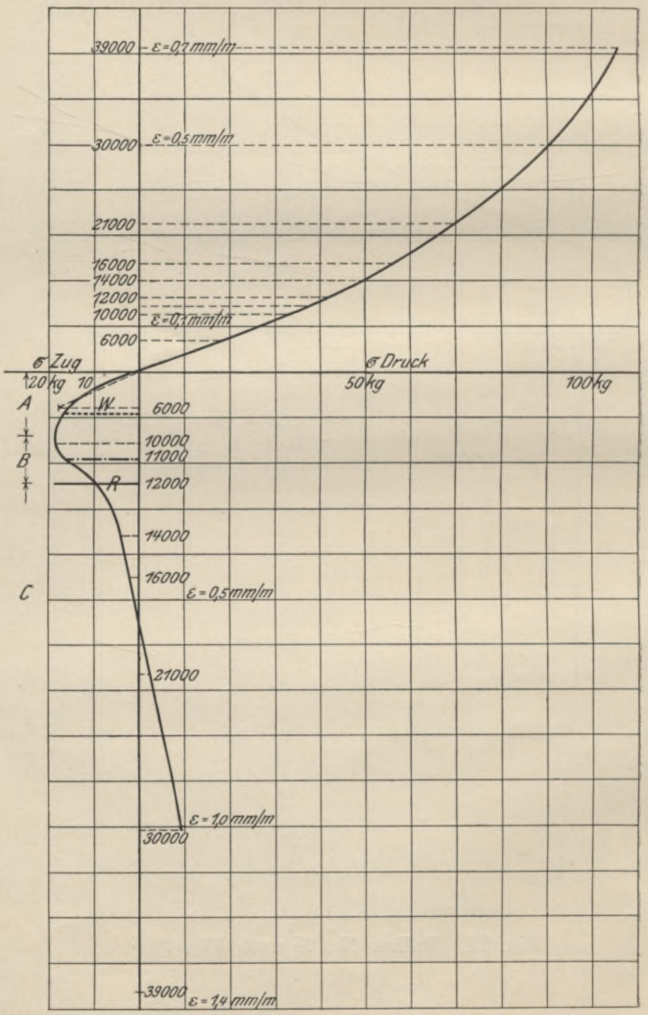
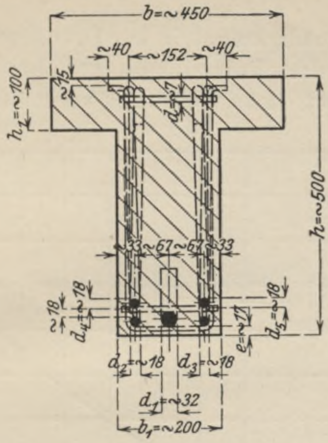



Fig. 26. Plattenbalken Nr. 82 nach Fig. 25.




Zu Fig. 25.

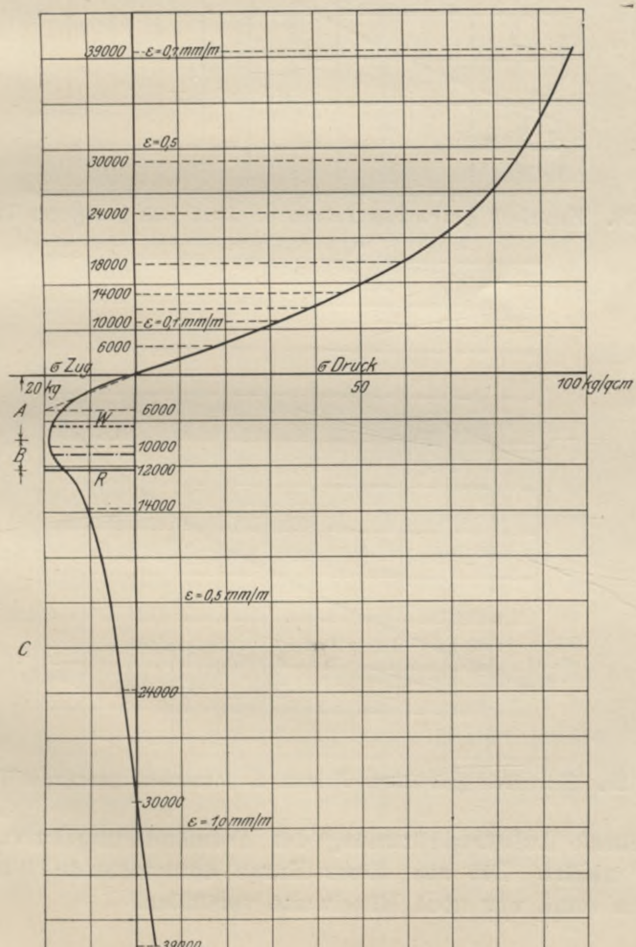



Fig. 27. Plattenbalken Nr. 85 nach Fig. 25.

durch diese Unregelmäßigkeiten in der Druckspannung eine größere Zusammenpressung der Balkenoberkante hervorgerufen wird als durch einen Mittelwert, ließe sich wohl verstehen. Damit wäre auch

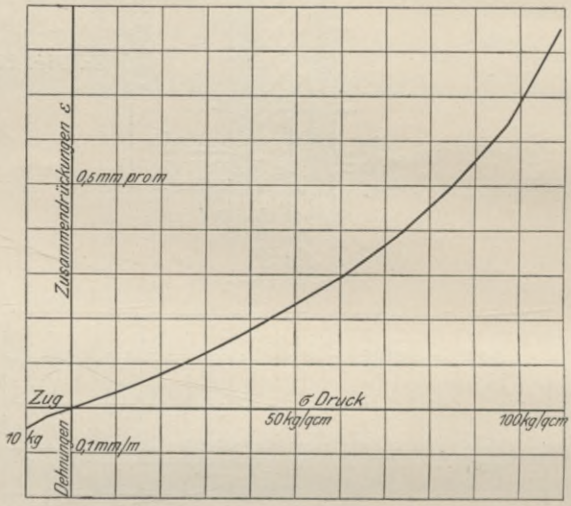



Fig. 28. Zentrisch gedrücktes Prisma 6. Zentrisch gezogenes Prisma 7.

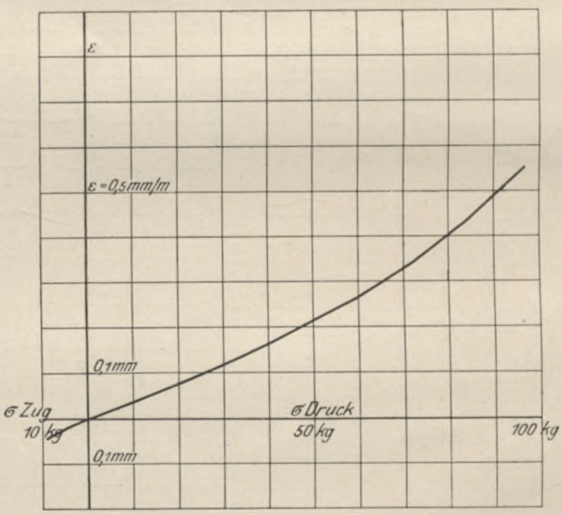



Fig. 29. Zentrisch gedrücktes Prisma 4. Zentrisch gezogenes Prisma 8.

die scharfe Aufwärtskrümmung der Formänderungskurve bei Biegung erklärt. Die aus dieser Kurve entnommenen Werte von $\sigma$ würden somit nur noch Mittelwerte vorstellen.

Es wäre interessant, den Verlauf der Formänderungskurve des zentrisch gedrückten Prismas bei noch höheren Belastungsstufen zu kennen und Versuche mit noch stärker armierten Eisenbetonbalken anzustellen. Für die Praxis würden die Resultate allerdings wenig in Betracht kommen, da hier fast ausschließlich nur die $^1/_2$ % Armierung angewandt wird.

**Auf Zugseite** lassen sich bei den Eisenbetonbalken drei Stadien unterscheiden:

Stadium A: Von Null bis zur Erreichung der höchsten Zugfestigkeit.

Die Kurven sehen sich sehr ähnlich und bilden ungefähr die Fortsetzung der aus den zentrisch gezogenen Prismen 7 und 8 abgeleiteten Formänderungskurven.

Diese Prismen ergaben Zugfestigkeiten von 13 kg/qcm. Einen ähnlichen Wert, 13 bis 14 kg, ergaben die nicht armierten Balken 66 und 69, (Fig. 13 bis 15) wogegen die Formänderungskurve der mit mehreren Eisen versehenen Eisenbetonbalken Abszissenwerte d. h. Spannungen resp. Festigkeiten bis zu 18 kg aufweist. Die höhere Festigkeit bei armierten Platten erklärt sich damit, daß bei den nicht armierten Körpern die angegebenen Festigkeitszahlen den Zugfestigkeiten an den schlechtesten Stellen der Körper entsprechen, während bei den armierten Körpern, bei welchen bei den Belastungen dieses Stadiums noch keine Risse vorhanden sind, die Mittelwerte der Zugfestigkeit auf die ganze Meßlänge der untersuchten Körper sich ergeben.

Daß Balken 16 und 35 (Fig. 16 bis 19) mit nur einer Eiseneinlage sich den nichtarmierten Balken nähern, ist verständlich.

Auch die Dehnungen bei gleicher Beanspruchung zeigen sich bei den armierten Balken verschieden von den nicht armierten, — die armierten Balken erscheinen spröder. Diese Erscheinung mag vielleicht ganz oder wenigstens bis zu einem gewissen Grad von der zufälligen Beschaffenheit des Betons abhängen, sie läßt sich aber auch auf andere Weise erklären: Werden die Balken Biegungsbeanspruchungen unterworfen, so zeigen sie lange vor dem Eintritt des Bruchs oder der ersten Risse auf Zugseite Wasserflecken (vgl. diese Beobachtungen und deren Erklärung bei Bach). (In den Figuren 11 bis 27 durch punktierte wagerechte Linie mit der Bezeichnung *W* dargestellt.) Diese Wasserflecken lassen auf eine Lockerung im Gefüge schließen, wodurch an diesen Stellen unverhältnismäßig große Dehnungen stattfinden. Ist der Balken armiert, so setzt der Gleitwiderstand zwischen Eisen und Beton der Lockerung Widerstand entgegen. Dies wird um so mehr der Fall sein, je kürzer die Strecke ist, auf welche sich der Beton selbst überlassen bleibt,

d. h. je näher die Eisen beieinander liegen. Die an den Wasserflecken entstehenden Zusatzdehnungen werden daher bei den nicht armierten Balken größer sein als bei den armierten. Erstreckt sich nun die Meßstrecke über mehrere Wasserflecke hinweg, so wird die gemessene Gesamtdehnung durch diese Zusatzdehnungen beeinflußt, und bei dem nicht armierten Balken entsprechend größer als bei dem armierten. Bei der Berechnung der Formänderungskurve aus den Dehnungen ergeben sich daher für die Spannungen bei den nicht armierten Balken kleinere Werte $\sigma$ als bei den armierten. (Bei der Berechnungsmethode des Abschnitts 2 sind diese $\sigma$ mit $y_m$ benannt.) Umgekehrt erscheinen für gleiche Werte $\sigma$ beim armierten Balken kleinere Dehnungen. Das elastische Verhalten des homogenen Betons (wenn ich den Beton, in dem noch keine Lockerungen eingetreten sind, so benenne) braucht also trotz der Verschiedenheit der Formänderungskurven nicht durch die Eiseneinlagen beeinflußt zu sein.

Die aus der Formänderungskurve entnommenen Spannungswerte sind wieder nur Mittelwerte.

Stadium $B$: Von der Erreichung der größten Zugfestigkeit bis zum Auftreten der ersten Risse im Beton. (In den Fig. 11 bis 27 sind die Risse durch eine wagerechte Linie mit der Bezeichnung $R$ dargestellt. Die letzte Belastungsstufe, bei welcher noch kein Riß festgestellt werden konnte, ist jeweils durch eine strichpunktierte Wagerechte gekennzeichnet).

In diesem Stadium findet die Lockerung des Gefüges ihren Fortgang, nur gewinnen hier die Zusatzdehnungen an den Wasserflecken die Oberhand. Je geringer die Entfernung der Eisen voneinander und von den Rändern des Betonquerschnitts ist, um so länger wird eine übergroße Lockerung des Gefüges — aus welcher schließlich der Riß entsteht — hintangehalten (siehe Bach). Bei den Balken 16 und 35 (Fig. 16 bis 19) mit nur einer Eiseneinlage ist dieses Stadium denn auch der Ordinate nach auf ein Minimum zusammengeschrumpft, während die anderen armierten Körper mit mehreren Eiseneinlagen wesentlich größere Dehnungen vor dem Auftreten der ersten Risse zeigen.

Stadium $C$: Mitwirkung des Betons nach dem Auftreten von Zugrissen.

Nach dem Auftreten von Rissen im Beton üben die einzelnen zwischen den Rissen verbleibenden Betonteile auf die Dehnung des Eisens eine hemmende Wirkung aus, indem der Gleitwiderstand zwischen Beton und Eisen den Beton zu veranlassen sucht, die Dehnungen des Eisens mitzumachen. Die Abszissen der Formänderungskurve können nicht mehr als Spannungswerte des Betons angesehen werden.

Die Kurven verlaufen fast genau gleich bei allen Balken, nur der Körper 64 und die Plattenbalken (Fig. 23, 26, 27) scheinen eine Ausnahme zu machen. In Wirklichkeit ist die Abweichung nicht so schlimm, wie die Kurven scheinen lassen. Balken 64 zeigt z. B. bei Belastung $P = 18000$ kg eine Dehnung von 1,39 mm pro Meter Meßlänge ($m\varepsilon_u = 139$). Die Rechnung ergab für diese Belastungsstufe die Werte

$$\frac{Z_e'}{b} = 7430 \qquad \frac{Z_e'}{b} \cdot e_e' = 876000,$$

$$F_u' = 380 \qquad S_u' = 5800.$$

Dagegen ergibt die Formänderungskurve des Balkens 48, welche im nachfolgenden Abschnitt 4 ausführlich behandelt ist, bei der Dehnung $m\varepsilon_u = 139$ die Werte

$$F_u' = 794 \qquad S_u' = 31967.$$

(Siehe die dortige Tabelle II).

Der Unterschied der beiden Kurven ergibt für

$F_u'$ eine Differenz $= 414$ $\qquad S_u' = 26167$,

d. i. für

$F_u'$ im Vergleich zu $\frac{Z_e'}{b}$ ein Betrag von $5{,}6\,{}^0/_0$,

für

$S_u'$ im Vergleich zu $\frac{Z_e'}{b} \cdot e_e'$ ein Betrag von $3\,{}^0/_0$.

Das sind Abweichungen, welche allein von der Nichtübereinstimmung des Elastizitätsmoduls des verwendeten Eisens mit der Annahme $E_e = 2100000$ herrühren könnten, zum mindesten aber bei der Verschiedenheit des elastischen Verhaltens verschiedener Betonsorten nicht in Betracht kommen.

Bei den Plattenbalken kommt eine Abweichung des Elastizitätsmoduls von 2100000 zu erhöhtem Ausdruck, da die Armierung im Verhältnis zur Stegbreite wesentlich stärker ist als bei Balken 64. Außerdem fehlt für die Plattenbalken in den Veröffentlichungen von Bach die Angabe des genauen Abstandes der Eiseneinlage von der Balkenunterkante, so daß dieses Maß nur schätzungsweise eingeführt werden konnte. Ein Fehler in diesem Maße ist aber von erheblichem Einfluß auf die Zugseite der Formänderungskure, so daß die Abweichung der Plattenbalkenkurven geringfügig erscheint und sogar die ungefähre Übereinstimmung als glücklicher Zufall angesehen werden kann.

Bei häufiger Wiederholung höchster Belastungen (bei Erschütterungen) wird sich Teil *C* voraussichtlich stark ändern, da allmählich der Gleitwiderstand zwischen Beton und Eisen geringer werden wird, so daß die Mitwirkung des Betons auf Zugseite immer mehr abnimmt.[1])

## 4. Die Formänderungskurve des Balkens 48.

(Siehe Fig. 12).

Die in Praxis hauptsächlich vorkommenden Eisenbetonkonstruktionen sind die Platten und die Plattenbalken.

Die Platten zeigen meistens eine Dicke von 10 bis 20 cm und ca. 0,5 % Armierung bei einer Entfernung der Eisen von 7 bis 12 cm voneinander. Die von Bach untersuchten Balken mit $^1/_2$ % Armierung haben eine Höhe von 30 cm und eine Eisenentfernung von 5 cm. Die Formänderungskurve der Platten wird daher wegen der größeren Entfernung der Eisen voneinander etwas kleinere Abszissen in den Stadien *A* und *B* der Zugseite aufweisen. Auch ist es nicht ausgeschlossen, daß die Balkenhöhe oder das Verhältnis der Balkenhöhe zum Abstand der Eisen von der Plattenunterkante einen Einfluß auf die Formänderungskurve ausübt. Von praktischer Bedeutung werden diese Einflüsse im Vergleich zur Veränderlichkeit der Elastizität verschiedener Betonsorten nicht sein, so daß ich für die nachfolgend berechneten Beispiele die Formänderungskurve des Balkens 48 zugrunde lege.

Diese Kurve stimmt auch mit derjenigen der Plattenbalken Nr. 85 und 86 in den Stadien *A* und *B* ziemlich genau überein. In den Plattenbalken der Praxis ist zwar die Entfernung der Eisen voneinander meistens kleiner als in den Probebalken; dieser Einfluß auf die Formänderungskurve wird aber nicht bedeutend werden, und kommt — ebensowenig wie eine Abweichung im Stadium *C* — praktisch nicht in Betracht, da die Stegbreite im allgemeinen sehr gering ist, $^1/_6$ bis $^1/_{15}$ der Plattenbreite.

Für die Rechnung ist es von Wert, die zu den einzelnen Dehnungen und Beanspruchungen gehörigen Werte $F_0'$, $F_u'$, $S_0'$, $S_u'$ zu kennen.

Diese sind für den Balken 48 berechnet und in Tabelle II zusammengestellt.

---

[1]) In meinen Aufsatz: Das elastische Verhalten des Betons bei Biegebeanspruchungen von Eisenbetonbalken (in Heft 2 der Zeitschr. „Beton und Eisen", 1908) hatte ich den Schluß gezogen, daß im Stadium *C* die Mitwirkung des Betons bei wachsender prozentualer Armierung geringer würde. Damals hatte ich nur die Kurven der Balken (16), 48, 64 und 85 berechnet gehabt. Von dieser Ansicht bin ich inzwischen abgekommen.

Tabelle II. Formänderungskurve des Balkens 48 (s. Fig. 12).

| Druckseite | | | | Zugseite. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon_0$ in $\frac{1}{100\,000}$ cm/cm | σ-Druck in kg/qcm | $F_0'$ | $S_0'$ | $\varepsilon_u$ in $\frac{1}{100\,000}$ cm/cm | σ-Zug in kg/qcm | $F_u'$ | $S_u'$ |
| 1 | 3,0 | 1,5 | 1 | 1 | 3,0 | 1,5 | 1 |
| 2 | 5,8 | 5,9 | 8 | 2 | 5,8 | 5,9 | 8 |
| 3 | 8,4 | 13,0 | 25 | 3 | 8,4 | 13,0 | 26 |
| 4 | 11,0 | 22,7 | 59 | 4 | 10,6 | 22,5 | 59 |
| 5 | 13,6 | 35,0 | 117 | 5 | 12,2 | 33,9 | 110 |
| 6 | 16,0 | 49.8 | 192 | 6 | 13,7 | 46,8 | 182 |
| 7 | 18,4 | 67,0 | 300 | 7 | 14,8 | 61,0 | 274 |
| 8 | 20,8 | 86,1 | 445 | 8 | 15,8 | 76,3 | 389 |
| 9 | 23,2 | 108 | 624 | 9 | 16,5 | 92,5 | 527 |
| 10 | 25,6 | 133 | 883 | 10 | 17,0 | 109,3 | 687 |
| 12 | 30,4 | 189 | 1 500 | 15 | 17,5 | 197 | 1 780 |
| 14 | 35,2 | 254 | 2 354 | 20 | 14,5 | 278 | 3 192 |
| 16 | 39,8 | 329 | 3 480 | 25 | 10,4 | 339 | 4 561 |
| 18 | 44,4 | 413 | 4 913 | 30 | 9,2 | 388 | 5 898 |
| 20 | 49,0 | 507 | 6 689 | 40 | 7,8 | 472 | 8 826 |
| 22 | 53,4 | 609 | 8 840 | 50 | 6,7 | 544 | 12 063 |
| 24 | 57,8 | 720 | 11 400 | 60 | 5,5 | 600 | 15 143 |
| 26 | 61,5 | 840 | 14 371 | 70 | 4,5 | 650 | 18 393 |
| 28 | 65,3 | 966 | 17 795 | 80 | 3,6 | 690 | 21 393 |
| 30 | 68,5 | 1100 | 21 675 | 90 | 2,8 | 722 | 24 113 |
| 32 | 71,5 | 1240 | 25 995 | 100 | 2,1 | 747 | 26 488 |
| 34 | 74,0 | 1386 | 30 797 | 110 | 1,6 | 765 | 28 378 |
| 36 | 76,5 | 1536 | 36 064 | 120 | 1,2 | 779 | 29 988 |
| 38 | 79,0 | 1692 | 41 817 | 130 | 0,8 | 789 | 31 238 |
| 40 | 81,5 | 1852 | 48 107 | 140 | 0,4 | 795 | 32 048 |
| 42 | 83,8 | 2017 | 54 884 | 150 | 0,2 | 798 | 32 484 |
| 44 | 86,0 | 2188 | 62 184 | 160 | 0 | 800 | 32 648 |
| 46 | 88,0 | 2361 | 70 014 | | | | |
| 48 | 90,0 | 2539 | 78 380 | | | | |
| 50 | 92,0 | 2721 | 87 299 | | | | |
| 52 | 93,8 | 2907 | 96 775 | | | | |
| 54 | 95,4 | 3096 | 106 803 | | | | |
| 56 | 97,0 | 3289 | 117 385 | | | | |
| 58 | 98,4 | 3484 | 128 523 | | | | |
| 60 | 99,7 | 3682 | 140 211 | | | | |
| 62 | 101,0 | 3883 | 152 454 | | | | |
| 64 | 102,3 | 4086 | 165 262 | | | | |
| 66 | 103,6 | 4292 | 178 646 | | | | |

Die Zahleneinheiten der Tabelle bedeuten für die Beanspruchungen $\sigma$ den Wert 1 kg/qcm,

für die Zusammendrückungen $\varepsilon_0$ und Dehnungen $\varepsilon_u$ den Wert $\frac{1}{100\,000}$ cm pro 1 cm Meßlänge.

Die Maßeinheit der Zeichnung der Formänderungskurve 48 in Fig. 12 ist **1 mm.**

1 mm Abszisse bedeutet eine Beanspruchung $\sigma = 1$ kg/qcm.

1 mm Ordinate bedeutet eine Zusammendrückung oder Dehnung

$$\varepsilon = \frac{1}{100\,000} \text{ cm/cm.}$$

Die Zahleneinheit der $F_0'$ und $F_u'$ in der Tabelle ist in der Zeichnung durch 1 qmm dargestellt.

Um zu zeigen, wie weit sich die Werte der Kurve mit den Beobachtungen an dem untersuchten Balken decken, habe ich für die von Bach bei den verschiedenen Belastungsstufen beobachteten Dehnungen die zugehörigen Werte $F_0'$, $S_0'$, $F_u'$, $S_u'$ aus der Tabelle II entnommen, die Werte $\frac{Z_e'}{b}$ und $\frac{Z_e'}{b} \cdot e_e'$, sowie $M'$ berechnet und die Resultate in Tabelle III eingetragen.

Tabelle III. Die Verteilung der Kräfte im Balken 48.

| 1 | 2 | 3 | 4 | = 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | = 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Belastung | $F_u'$ | $\frac{Z_e'}{b}$ | $F_u' + \frac{Z_e'}{b}$ | $= F_0'$ | $S_u'$ | $\frac{Z_e'}{b} \cdot e_e'$ | $S_0'$ | $S_u' + \frac{Z_e'}{b} \cdot e_e' + S_0'$ | $= M'$ |
| 2000 | 69 | 11 | 80 | 89 | 344 | 75 | 472 | 891 | 894 |
| 2500 | 118 | 21 | 139 | 138 | 777 | 192 | 940 | 1 909 | 1 920 |
| 3000 | 183 | 37 | 220 | 220 | 1 580 | 463 | 1 875 | 3 918 | 3 960 |
| 3500 | 284 | 73 | 357 | 366 | 3 306 | 1 324 | 4 088 | 8 718 | 8 750 |
| 3600 | 323 | 94 | 417 | 413 | 4 167 | 1 980 | 4 913 | 11 060 | 11 200 |
| 3750 | 367 | 128 | 495 | 507 | 5 300 | 3 200 | 6 689 | 15 189 | 15 100 |
| 4500 | 584 | 484 | 1068 | 1080 | 14 300 | 25 300 | 21 100 | 60 700 | 60 900 |
| 5500 | 722 | 1140 | 1862 | 1885 | 24 000 | 93 600 | 49 460 | 167 060 | 167 000 |
| 6500 | 777 | 1936 | 2713 | 2700 | 29 700 | 210 000 | 86 400 | 325 400 | 327 000 |
| 8000 | 800 | 3540 | 4340 | 4343 | 32 650 | 522 000 | 182 000 | 736 650 | 736 000 |

Man ersieht, daß die Werte der Spalten 4 und 5, die einander gleich sein sollten, nur ganz wenig voneinander abweichen. Dasselbe ist bei den Werten der Spalten 9 und 10 der Fall, die Formänderungskurve gibt also die Beobachtungsresultate ziemlich genau wieder.

Die Tabelle III gewährt einen interessanten Einblick in die Kräfteverteilung im Eisenbetonbalken.

Bei Belastung 2500 kg zeigt die Tabelle:

$$F_u' = 118, \quad \frac{Z_e'}{b} = 21,$$

der Beton übernimmt also die 5,6fache Zugkraft des Eisens; bei Belastung 8000 kg betragen diese Werte:

$$F_u' = 800, \quad \frac{Z_e'}{b} = 3540,$$

der Beton übernimmt nur noch $\frac{1}{4,5}$ der Zugkraft des Eisens.

Was das statische Moment, bezogen auf die Neutralachse, anbetrifft, so ergibt die Belastung 2500 ein

$$S_u' = 777. \quad \frac{Z_e'}{b} \cdot e_e' = 192,$$

der Beton übernimmt also das vierfache des Eisens, dagegen lauten diese Werte bei Belastung 8000:

$$S_u' = 32\,650 \quad \text{und} \quad \frac{Z_e'}{b} \cdot e_e' = 522\,000,$$

der Beton übernimmt nur noch $\frac{1}{16} = 6{,}2\,^0/_0$ des Betrags des Eisens.

Aus diesen Ausführungen geht hervor, daß eine geringe Abweichung des Elastizitätsmoduls des verwendeten Eisens von dem der Rechnung zugrunde gelegten Wert $E_e = 2\,100\,000$ bei den anfänglichen Belastungsstufen nur von unbedeutendem Einfluß sein wird, bei den höchsten Belastungsstufen aber eine wesentliche Rolle spielt.

## 5. Berechnung der Zusammendrückungen $\varepsilon_0$ und Dehnungen $\varepsilon_u$ bei einer Eisenbetonplatte von gegebenen Größenabmessungen.

Diese Aufgabe läßt sich nur durch Probieren, allerdings in sehr einfacher Weise, lösen: Zu einem gewissen $\varepsilon_u$ wird das zugehörige $\varepsilon_0$ geschätzt und nachgesehen, ob die beiden Werte der Gl. 14

$$F_u' + \frac{Z_e'}{b} = F_0'$$

genügen. Ist dies nicht der Fall, so wird für $\varepsilon_0$ ein anderer Wert gewählt, so lange bis diese Gleichung erfüllt ist. Hierauf wird das

Moment bestimmt, welches diesen Werten $\varepsilon_u$ und $\varepsilon_0$ entspricht mit Hilfe der Gl. 14 bzw. 13:

$$\frac{M'}{b} = S_0' + S_u' + \frac{Z_e'}{b} \cdot e_e'$$

und

$$M = M' \left(\frac{h}{h'}\right)^2.$$

Diese Rechnung wird für verschiedene Werte $\varepsilon_u$ durchgeführt, und schließlich werden die errechneten Größen graphisch dargestellt, indem die Momente auf einer Senkrechten und die zugehörigen $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ auf Wagrechten aufgetragen werden. Die erhaltenen Punkte werden durch eine stetige Kurve verbunden, und man kann zu beliebigem Moment die zugehörigen Werte von $\varepsilon_u$ und $\varepsilon_0$ abgreifen (s. später Fig. 31, Fig. oben links).

Zur weiteren Erläuterung wähle ich ein Beispiel: Eine frei aufliegende Platte von 3,0 m lichter Weite soll für eine Gesamtlast von 700 kg/qm berechnet und untersucht werden.

Das Moment in der Balkenmitte ist

$$M = \frac{q\,l^2}{8} = \frac{700 \cdot 3^2}{8} \cdot 100 = 79000 \text{ cmkg}.$$

Bei einer zulässigen Beanspruchung von $\sigma_b = 30$ kg, $\sigma_e = 1000$ kg ergibt sich nach der Rechnungsweise der preußischen ministeriellen Vorschriften ein notwendiges

$$h - a = 14 \text{ cm}$$

$$f_e = 6{,}45 \text{ qcm}.$$

Es werden als Armierung Rundeisen von 0,8 cm $\phi$ in Entfernungen 7,8 cm voneinander gewählt. Für $a$ wird 1,5 cm angenommen, so daß die Plattendicke $h = 15{,}5$ cm beträgt.

Berechnung zusammengehöriger $\varepsilon_u$ und $\varepsilon_0$ (s. Fig. 30).

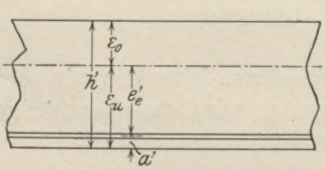


Fig 30.

Ich wähle

$$\varepsilon_u = 15.$$

Hierzu schätze ich $\varepsilon_0$ ebenfalls $= 15$.

Die beiden Werte müßten der Gleichung genügen:

$$F_u' + \frac{Z_e'}{b} = F_0'.$$

Die Werte $F_u'$ und $F_0'$ sind der Tabelle II zu entnehmen und betragen

$$F_u' = 197, \qquad F_0' = 290.$$

Der Wert von $Z_e'$ berechnet sich nach Gl. 15 zu

$$Z_e' = f_e \cdot \frac{h'}{h} \cdot e_e' \cdot \frac{E_e}{m}, \text{ wobei } m = 100000.$$

Nach Gl. 9 bis 13 ist nun

$$h' = \varepsilon_u + \varepsilon_0 = 15 + 15 = 30,$$

$$a' = a \cdot \frac{h'}{h} = 1{,}5 \cdot \frac{h'}{15{,}5} = 0{,}097\,h' = 0{,}097 \cdot 30 = 2{,}9,$$

$$e_e' = (\varepsilon_u - a') = 15 - 2{,}9 = 12{,}1,$$

$$\frac{Z_e'}{b} = \frac{1}{b} \cdot f_e \cdot \frac{h'}{h} \cdot e_e' \cdot \frac{E_e}{m} = \frac{1}{100} \cdot 6{,}45\, \frac{h'}{15{,}5} \cdot e_e' \cdot \frac{2100000}{100000}$$

$$= 0{,}0873 \cdot h' \cdot e_e' = 0{,}0873 \cdot 30 \cdot 12{,}1 = \mathbf{32}.$$

Wäre $\varepsilon_0$ mit 15 richtig gewählt, so müßte sein

$$F_u' + \frac{Z_e'}{b} = F_0',$$

$$\underbrace{197 + 32}_{229} = 290,$$

$$229 = 290.$$

Der Wert von $\varepsilon_0$ ist also zu groß gewählt. Geht man mit 229 in die Tabelle II unter $F_0'$ ein, so findet man ein zugehöriges

$$\varepsilon_0 = \mathbf{13{,}2}.$$

Führe ich diesen Wert schätzungsweise in die Rechnung ein so ergibt sich

$$h' = 15 + 13{,}2 = 28{,}2,$$

$$a' = 0{,}097\,h' = 2{,}7,$$

$$e_e' = \varepsilon_u - a' = 12{,}3,$$

$$\frac{Z_e'}{b} = 0{,}0873 \cdot 28{,}2 \cdot 12{,}3 = 30.$$

Und es soll sein

$$197 + 30 = 229,$$

$$227 = 229.$$

Die Hauptgleichung ist fast genau erfüllt. Es zeigt sich, daß die erste Annäherungsrechnung sofort einen genügend genauen Wert von $\varepsilon_0$ liefert.

Das zugehörige Biegungsmoment ergibt sich mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{M'}{b} = S_0' + S_u' + \frac{Z_e'}{b} \cdot e_e'.$$

Tabelle IV. Berechnung zusammengehöriger $\varepsilon_u$ und $\varepsilon_0$ für eine Platte von $h = 15{,}5$ cm, $f_e = 6{,}45$ qcm.

| Gewählt $\varepsilon_u$ | 5 | | 10 | | 15 | | 20 | | 30 | | 50 | | 70 | | 100 | | 140 | | 160 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geschätzt $\varepsilon_0$ | 5 | **5,2** | 10 | **9,6** | 15 | **13,3** | 18 | **16,1** | 20 | **19,8** | 25 | **25,7** | 32 | **31,1** | 39 | **39,3** | 50 | **51** | 57 | **57,4** |
| $h' = \varepsilon_u + \varepsilon_0$ | 10 | 10,2 | 20 | 19,6 | 30 | 28,3 | 38 | 36,1 | 50 | 49,8 | 75 | 75,7 | 102 | 101,1 | 139 | 139,3 | 190 | 191 | 217 | 217,4 |
| $a' = 0{,}097\,h'$ | 1,0 | 1,0 | 1,9 | 1,9 | 2,9 | 2,8 | 3,7 | 3,5 | 4,8 | 4,8 | 7,3 | 7,3 | 9,9 | 9,8 | 13,5 | 13,5 | 18,4 | 18,5 | 21 | 21 |
| $e_e' = \varepsilon_u - a'$ | 4,0 | 4,0 | 8,1 | 8,1 | 12,1 | 12,2 | 16,3 | 16,5 | 25,2 | 25,2 | 42,7 | 42,7 | 60,1 | 60,2 | 86,5 | 86,5 | 121,6 | 121,5 | 139 | 139 |
| $\frac{Z_e'}{b} = 0{,}0873 \cdot h' \cdot e_e'$ | 3,5 | 3,6 | 14,2 | 13,9 | 32 | 30 | 54 | 52 | 110 | 109 | 280 | 283 | 533 | 530 | 1050 | 1050 | 2020 | 2030 | 2620 | 2630 |
| $F_u'$ aus Tabelle II | 33,9 | 33 | 109,3 | 109,3 | 197 | 197 | 278 | 278 | 388 | 388 | 544 | 544 | 650 | 650 | 747 | 747 | 795 | 795 | 800 | 800 |
| $\frac{Z_e'}{b} + F_u'$ | 37,4 | 37,5 | 123,5 | 123,2 | 229 | 227 | 332 | 330 | 498 | 497 | 824 | 827 | 1183 | 1180 | 1797 | 1797 | 2815 | 2825 | 3420 | 3430 |
| $\varepsilon_0$ aus Tab. II zu $F_0'\left(=\frac{Z_e'}{b} + F_u'\right)$ | 5,2 | | 9,6 | | 13,3 | | 16,1 | | 19,8 | | 25,7 | | 31,1 | | 39,3 | | 51 | | 57,4 | |
| $S_0'$ aus Tabelle II | 132 | | 780 | | 2030 | | 3550 | | 6500 | | 13900 | | 24100 | | 45900 | | 92000 | | 126300 | |
| $S_u'$ aus Tabelle II | 110 | | 690 | | 1780 | | 3190 | | 5900 | | 12100 | | 18400 | | 26500 | | 32000 | | 32600 | |
| $\frac{Z_e'}{b} \cdot e_e'$ | 14 | | 110 | | 370 | | 860 | | 2750 | | 12000 | | 32000 | | 91000 | | 246000 | | 365000 | |
| $\frac{M'}{b}$ | 256 | | 1580 | | 4180 | | 7600 | | 15150 | | 38000 | | 74500 | | 163400 | | 370000 | | 523900 | |
| $M = 24000\left(\frac{M'}{b}\right) \cdot \frac{1}{h'^2}$ | 58000 | | 99000 | | 124000 | | 140000 | | 146000 | | 157000 | | 175000 | | 202000 | | 243000 | | 268000 | |
| $(100000)\,\varphi = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} = \frac{h'}{15{,}5}$ | 0,66 | | 1,26 | | 1,83 | | 2,45 | | 3,22 | | 4,88 | | 6,52 | | 9,00 | | 12,34 | | 14 | |

$S_0'$ und $S_u'$ werden direkt der Tabelle II entnommen, man erhält:

$$\frac{M'}{b} = 2030 + 1780 + 30 \cdot 12{,}3 = 4180.$$

Das Moment $M$ wird:

$$M = M' \cdot \left(\frac{h}{h'}\right)^2 = b \cdot \left(\frac{M'}{b}\right)\left(\frac{h}{h'}\right)^2 = 100 \cdot \left(\frac{M'}{b}\right) \cdot \frac{15{,}5^2}{h'^2}$$

$$= 24000 \cdot \left(\frac{M'}{b}\right) \cdot \frac{1}{h'^2}.$$

Im vorliegenden Fall wird

$$M = 24000 \cdot 4180 \cdot \frac{1}{28{,}2^2} = 12600.$$

Die Berechnung weiterer Werte ist in Tabelle IV vorgenommen.

Die graphische Darstellung der Werte befindet sich auf Fig. 31 links oben. Die errechneten Momente sind auf der Senkrechten, die zugehörigen $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ auf der Wagerechten nach rechts und links aufgetragen. Die erhaltenen Punkte sind durch eine stetige Kurve verbunden. Die Kurven zeigen dieselben charakteristischen Krümmungen, wie sie die Beobachtungen an den Versuchsbalken ergeben haben.

Die Tabelle IV ist sehr zahlenreich, die Berechnung ist aber sehr einfach und kann in 1 bis 2 Stunden bequem durchgeführt werden.[1])

## 6. Einsenkung einer frei aufliegenden Eisenbetonplatte bei gleichmäßig verteilter Belastung.

(Hierzu Fig. 31.)

Als Beispiel wähle ich die im vorigen Abschnitt berechnete Platte von 3 m lichter Weite und 700 kg/qm gleichmäßig verteilter Gesamtbelastung.

Die Einsenkung ist für verschieden hohe Belastungen gezeichnet.

Die Platte ist in Lamellen von 10 cm Länge eingeteilt, und in jeder die Mittellinie gezogen. Die durch eine gewisse gleich-

[1]) Nachträglich erhielt ich Kenntnis von einem Aufsatz von Prof. Hotopp: „Biegungsspannungen in stabförmigen Körpern, die dem Hookeschen Gesetz nicht folgen, sowie in Verbundkörpern". Zeitschr. des Architekten- und Ingenieurvereins Hannover, Jahrg. 1906, S. 282.

Prof. Hotopp löst die Aufgabe des vorliegenden Abschnitts, indem er die allgemein bekannten Hauptgleichungen 7 und 8 auf graphischem Weg behandelt. Diese Lösung erweist sich als etwas umständlicher als die vorgeführte tabellarische Methode.

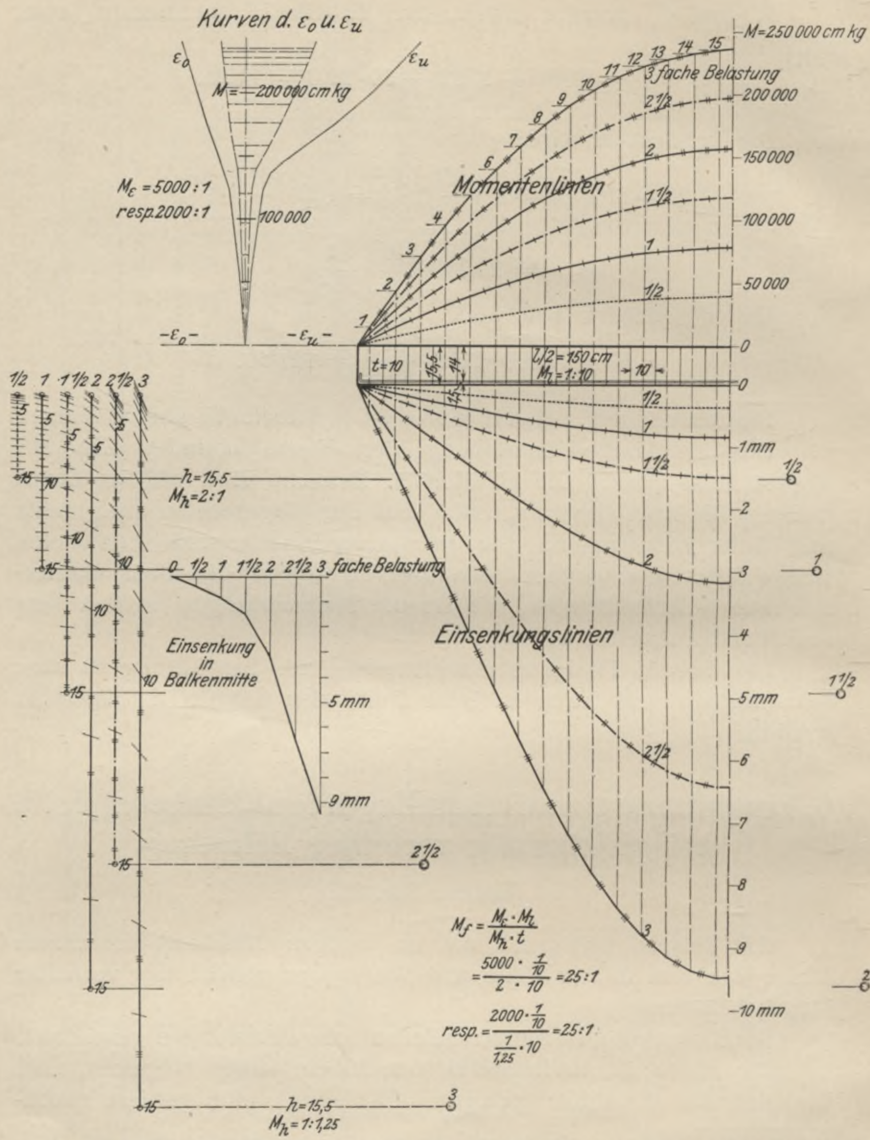



Fig. 31. Einsenkung einer **frei aufliegenden Platte** von 3,0 m l. W. Einfache Gesamtbelastung 700 kg/qm. (Figur in $^1/_3$ Größe der Originalzeichnung.)

mäßig verteilte Belastung in den einzelnen Lamellenquerschnitten hervorgerufenen Biegungsmomente sind durch die zugehörige Momentenlinie (Parabel) gegeben. In der Figur links oben sind die

Kurven der $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ dargestellt. Die den verschiedenen Momenten entsprechenden elastischen Gewichte $(\varepsilon_0 + \varepsilon_u)$ ergeben sich als Sehnen, welche auf den durch die Ordinatenpunkte der Momentenlinie gezogenen Wagrechten durch die Kurven der $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ ausgeschnitten werden. Die gesuchte Einsenkungslinie ergibt sich als Seillinie dieser elastischen Gewichte $(\varepsilon_0 + \varepsilon_u)$ bei einer Polweite gleich der Höhe der Platte (siehe Abschnitt 1).

Zum Schluß muß noch der Maßstab der Einsenkungsordinaten berechnet werden.

(In der Fig. 31 mußten die Kurven der $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ aus Rücksicht auf den beschränkten Raum des Zeichnungsblattes zweimal aufgetragen werden, und zwar in den Maßstäben 5000 : 1 und 2000 : 1. Entsprechend mußte der Maßstab der Polweite $h$ verschieden gewählt werden, um die Einsenkung immer in demselben Maßstab zu erhalten.)

Schließlich ist noch die Einsenkung der Balkenmitte bei den verschiedenen Belastungsstufen in einem Linienzug dargestellt.

## 7. Einsenkung einer an beiden Enden fest gespannten Platte mit und ohne Vouten.

(Hierzu Fig. 32 und 33.)

Beispiel: Eine eingespannte Platte von 3 m lichter Weite sei für eine Gesamtlast von 2100 kg/qm zu dimensionieren, hernach die Einsenkung für verschieden hohe Belastungen zu ermitteln.

Zur Dimensionierung werden für die Momente in Balkenmitte und an den Einspannungsstellen die Werte des eingespannten Balkens von durchgehends gleichem Querschnitt, Trägheitsmoment und Elastizitätsmodul zugrunde gelegt.

Demnach betrüge das Moment in der Balkenmitte

$$M_m = \frac{q l^2}{24} = \frac{2100 \cdot 3^2}{24} \cdot 100 = 79\,000 \text{ cmkg},$$

das Moment an den Einspannungsstellen:

$$M_s = \frac{q l^2}{12} = 158\,000 \text{ cmkg}$$

Der Balkenmitte entspricht die Platte des vorigen Beispiels mit einer Höhe $= 15{,}5$ cm und einem Eisenquerschnitt $f_e = 6{,}45$ qcm. An den Einspannungsstellen ist eine stärkere Platte nötig. Geht man von den Gedanken aus, daß an dieser Stelle die gleiche Eisenmenge wie in der Balkenmitte zur Verwendung kommen soll, so ist die Ausbildung einer Voute in der in den Fig. 32 und 33 eingezeichneten Form erforderlich.

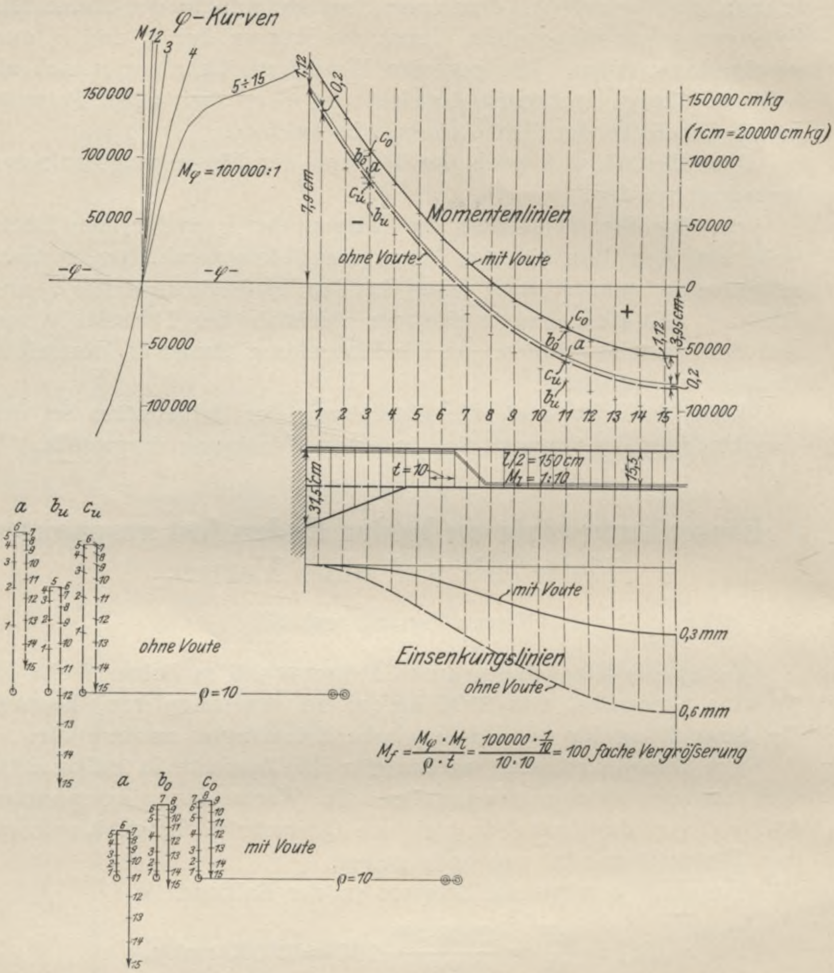



Fig. 32. Einsenkung einer **eingespannten** Platte mit und ohne Vouten. Belastung 2100 kg/qm. (Figur in $^1/_3$ Größe der Originalzeichnung.)

Wird die Voute weggelassen, so kann die eingespannte Platte über der Stütze nur das Moment 79000 cmkg aufnehmen, die Platte genügt damit in ihrer Dimensionierung nur der halben Belastung, also 1050 kg/qm.

Die mit Vouten ausgebildete Platte zeigt nicht mehr durchgehends gleiche Höhe wie die Platte des vorigen Beispiels, zur

Konstruktion der Biegelinie und der Einsenkung müssen daher, wie im Abschn. 1 ausgeführt ist, die elastischen Gewichte $\varphi = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h}$ verwendet werden. Diese Werte $\varphi$ sind für die Platte von 15,5 cm Höhe bei 6,45 qcm Eisenquerschnitt in der Tabelle IV (unterste Linie) angegeben.

Die Lamellen 1 bis 4 der Vouten zeigen verschiedene Höhen. Infolgedessen ist für jede Lamelle eine besondere Kurve der Werte $\varepsilon_0$ und $\varepsilon_u$ bzw. der elastischen Gewichte $\varphi$ erforderlich. Die Rechnungsarbeit, welche für die Platte von 15,5 cm Höhe durchgeführt und in Tabelle IV niedergelegt ist, muß für jede dieser Lamellen wiederholt werden. Als Formänderungskurve ist wieder die Kurve des Balkens 48 zugrunde gelegt. Ich verzichte darauf, die Rechnungen wiederzugeben und begnüge mich mit der Einzeichnung der $\varphi$-Kurven, welche in den Fig. 32 und 33 jeweils links oben zur Darstellung gebracht sind.

Um die Einsenkung bei einer gewissen Belastung 2100 kg/qm zu konstruieren, zeichne ich zuerst die Momentenlinie unter der Annahme, daß das Moment in der Balkenmitte $= \frac{q\,l^2}{24}$ und an der Einspannungsstelle $= \frac{q\,l^2}{12}$ sei. Diese Linie ist in Fig. 32 dünn ausgezogen und mit $a$ bezeichnet. Die den Momenten der einzelnen Lamellen entsprechenden elastischen Gewichte $\varphi$ erhalte ich gleich den Strecken, welche aus den Wagerechten durch die Momentenordinatenpunkte $a$ zwischen der zur Lamelle gehörenden $\varphi$-Kurve und der Senkrechten abgeschnitten werden. Diese Strecken können ohne weiteres mit dem Zirkel durch Anlegen an die wagerechte Reißschiene abgegriffen werden.

Aus der Forderung der festen Einspannung geht hervor, daß die Biegelinie an der Einspannungsstelle horizontal verlaufen muß. In Balkenmitte muß sie wegen der symmetrischen Belastung ebenfalls horizontal verlaufen. Daraus folgt, daß die Summe der positiven elastischen Gewichte gleich der Summe der negativen elastischen Gewichte sein muß.

Vorliegend ist dies nicht der Fall, wie aus der Fig. 32, unten, $a$, zu ersehen ist. Die Annahme der Momente mit $\frac{q\,l^2}{24}$ und $\frac{q\,l^2}{12}$ ist daher nicht richtig. Die wirklichen Momente müssen durch Probieren festgestellt werden. Zu diesem Zwecke schiebe ich die ganze Momentenlinie 1 cm in die Höhe und bestimme die dieser Momentenlinie entsprechenden elastischen Gewichte $\varphi$

(s. Fig. 32, unten, $b_o$). (Diese Momentenlinie ist nur durch kurze wagerechte Striche an den Lamellenmittellinien angedeutet.)

Die Forderung, Summe der positiven elastischen Gewichte gleich Summe der negativen Gewichte, ist hier im allgemeinen noch nicht erfüllt. Aus der Fehlerdifferenz zwischen $a$ und $b$ läßt sich aber die notwendige Verschiebung annähernd berechnen. Sie ergibt sich für die Platte mit Voute zu **1,12 cm.**

Die um 1,12 cm verschobene Momentenlinie ist in Fig. 32, oben rechts, mit ganzer Linie kräftig ausgezogen. Die zugehörigen elastischen Gewichte sind in der Figur unten, $c_o$, zusammengestellt. Die Summe der elastischen positiven Gewichte ergibt sich nunmehr gleich der Summe der negativen Gewichte.

Würde diese Forderung noch nicht erfüllt, so wäre eine nochmalige Verschiebung der Momentenlinie notwendig.

Das Moment in der Balkenmitte $\frac{ql^2}{24}$ war auf der Zeichnung der Fig. 32 durch eine Strecke von 3,95 cm Länge dargestellt. Die notwendige Verschiebung ergab sich zu 1,12 cm nach oben, d. h. bei der vorliegenden festgespannten Voutenplatte ist das wirkliche Moment in der Balkenmitte um $\frac{1,12}{3,95}$ oder **28%** **kleiner** als bei dem festgespannten Balken konstanten Querschnitts aus Material von konstantem Elastizitätsmodul.

Das wirkliche Moment an der Einspannungsstelle ist $\frac{28}{2} = \mathbf{14\%}$ **größer** als $\frac{ql^2}{12}$.

Werden die Vouten weggelassen, so sind die elastischen Gewichte der Lamellen 1 bis 4 der zu den Lamellen 5 bis 15 gehörigen Kurve zu entnehmen. (Die elastischen Gewichte s. Fig. 32, Mitte links, $a$, $b_u$, $c_u$).

Die Forderung, Summe der positiven = Summe der negativen elastischen Gewichte wird erreicht durch Verschiebung der Momentenlinie um 0,2 cm nach unten, d. h. bei der festgespannten Eisenbetonplatte ohne Vouten ergibt sich das wirkliche Moment in Balkenmitte um $\frac{0,2}{3,95}$ oder **5%** **größer** als $\frac{ql^2}{24}$, an den Einspannungsstellen um **2,5%** **kleiner** als $\frac{ql^2}{12}$.

Die Einsenkungslinie der Platte erhält man als Seilpolygon mit Hilfe der elastischen Gewichte $\varphi$ bei beliebiger Poldistanz $\varrho$. Zum Schluß ist der Maßstab der Einsenkungsordinaten nach Gl. 3 und 4 zu berechnen.

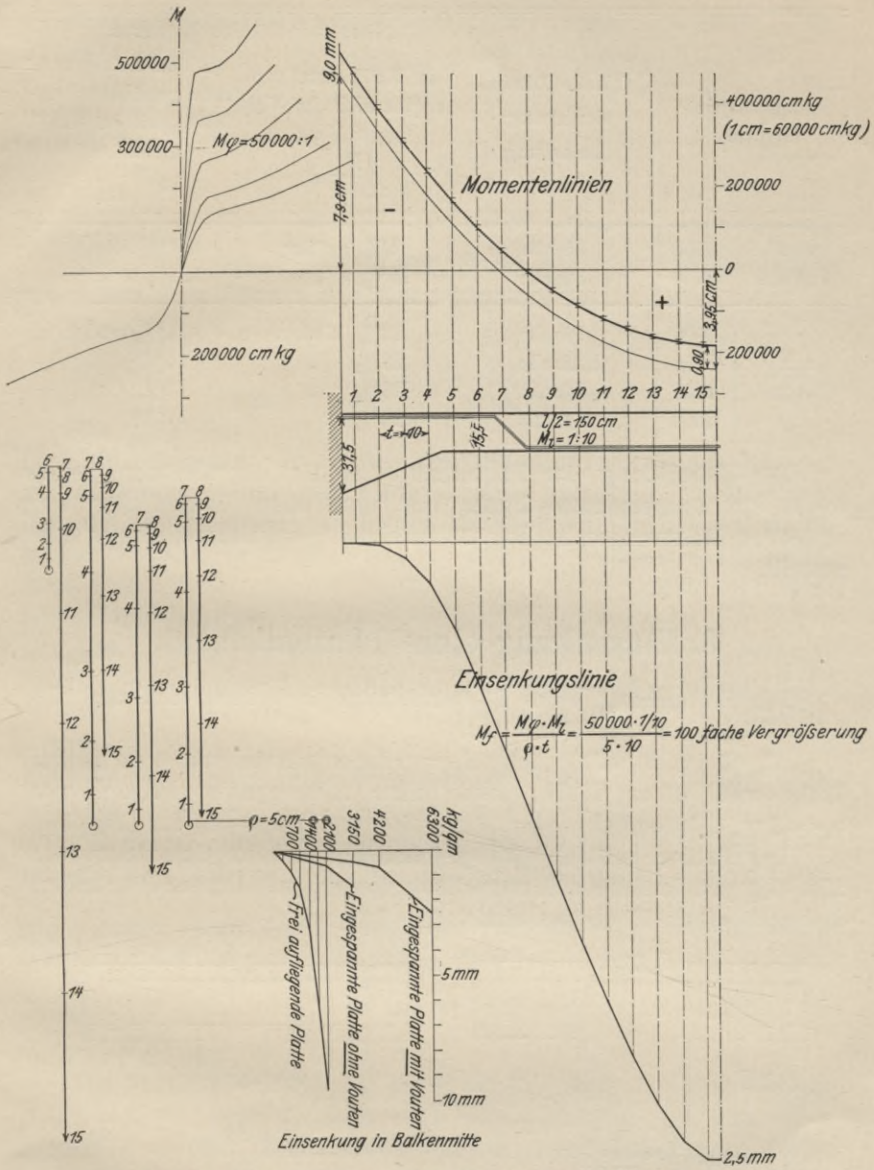



Fig. 33. Eingespannte Platte bei Belastung 6300 kg/qm.
(Figur in $^1/_3$ Größe der Originalzeichnung.)

Dieselben Untersuchungen habe ich für diese Platte für mehrere Belastungen durchgeführt (s. Fig. 33). Für die Momente in der Balkenmitte bzw. den Einspannungsstellen ergaben sich folgende Werte

| Belastung in kg/qm | | ? fache Dimensionierungsbelastung | Das wirkliche Moment in Balkenmitte ergibt sich im Vergleich zu $\frac{ql^2}{24}$ um | Das wirkliche Moment an den Einspannungsstellen ergibt sich im Vergleich zu $\frac{ql^2}{12}$ um |
|---|---|---|---|---|
| ohne Vouten | 2100 | 2fache | 5% größer | 2,5% kleiner |
| | 3150 | 3fache | 19% „ | 9,5% „ |
| mit Vouten | 2100 | 1fache | 28% kleiner | 14% größer |
| | 3150 | 1,5fache | 28% „ | 14% „ |
| | 4200 | 2fache | 28% „ | 14% „ |
| | 6300 | 3fache | 23% „ | 11,5% „ |

Die Einsenkung der Plattenmitte ist für die frei aufliegende sowie die festgespannte Platte mit und ohne Vouten für verschiedene Belastungen in Fig. 33 in einer gemeinsamen Figur dargestellt.

## 8. Einsenkung eines Plattenbalkens.

Die Einsenkung eines Plattenbalkens berechnet sich auf dieselbe Weise, wie die einer Platte.

Als Beispiel wähle ich einen Plattenbalken von 6 m lichter Weite und 50 cm Höhe, sowie einer mittragenden Plattenbreite $b_0 = 2$ m, Plattendicke $d = 15$ cm, Stegbreite $b_u = 25$ cm (Fig. 34).

Der Balken soll für eine gleichmäßig verteilte Gesamtlast von 2000 kg pro laufenden Meter dimensioniert werden und erfordert demnach einen Eisenquerschnitt $f_e = 22$ qcm.

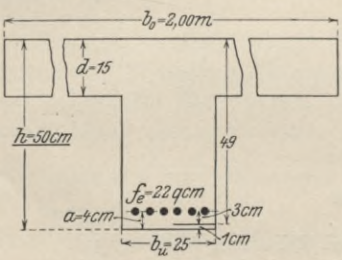



Fig. 34.

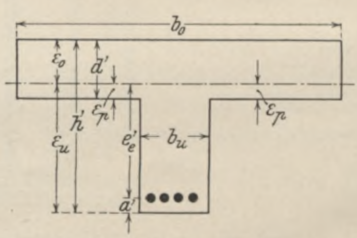



Fig. 35.

In erster Linie müssen wieder die zusammengehörigen $\varepsilon_u$ und $\varepsilon_0$ durch Versuchsrechnung bestimmt werden. (Die Neutralachse liegt, wie die Rechnung ergibt, immer innerhalb der Platte. Die

Plattenunterkante wird durch den Index $_p$ gekennzeichnet.) Die Werte $\varepsilon$ müssen der Gleichung genügen (entsprechend Gl. 14)

$$b_0 F_0' = b_u F_u' + (b_0 - b_u) F_p' + Z_e'$$

(s. Fig. 35), wobei

$$Z_e' = f_e \cdot \frac{h'}{h} \cdot e_e' \cdot \frac{E_e}{m}$$

(vgl. Gl. 15).

Sind die zusammengehörigen Werte gefunden, so erhält man das zugehörige Moment aus den Gleichnngen:

$$M' = b_0 S_0' + b_u S_u' + (b_0 - b_u) S_p' + Z_e' \cdot e_e' \quad \text{(entsprechend Gl. 14),}$$

$$\text{und } M = M' \left(\frac{h}{h'}\right)^2. \quad \text{(vgl. Gl. 13).}$$

Die Rechnung, die etwas umständlicher ist als bei der einfachen Platte, ist in der nachstehenden Tabelle V durchgeführt. Um die Verdrängung des Betons durch die Eiseneinlagen zu berücksichtigen ($f_e = 22$ qcm) ist der unterste Zentimeter des Betonstegs weggelassen (25 qcm) und für den Plattenbalken eine Höhe $h = 49$ cm eingeführt.

Die Werte $\varepsilon_u$ und $\varepsilon_0$ sind dann zusammengehörend, wenn in Tabelle V die Zahlenwerte in der Horizontalspalte „Druck $= b_0 F_0'$ $= 200\, F_0'$" mit denen der Horizontalspalte „Zug $= \Sigma$" übereinstimmen.

Die Einsenkung des Plattenbalkens ergibt sich in derselben Weise wie bei der einfachen Platte (s. Fig. 36).

Wird der Plattenbalken an beiden Enden fest eingespannt, so hat er, wenn das Biegungsmoment in Balkenmitte mit $\frac{q l^2}{24}$ angenommen wird, eine Tragkraft von 6000 kg pro laufenden Meter. An den Einspannungsstellen ist aber, entsprechend den auftretenden Momenten $\frac{q l^2}{12}$, die Ausbildung einer starken Voute erforderlich (s. Fig. 37).

Die einzelnen Lamellen (1 bis 4) der Voute ergeben verschiedene $\varphi$-Kurven, für jede Lamelle muß die Rechnung der Tabelle V wiederholt werden. Auf die Wiedergabe dieser Rechnung verzichte ich. Als Formänderungskurve des Betons müßte in diesen Fällen, wo die Platte gezogen, der Steg gedrückt ist, die Formänderungskurve der mit nur einem Eisen armierten Balken 16 und 35 oder der nicht armierten Balken 66 und 69 zugrunde gelegt werden. Ich habe aber der Einfachheit halber auch für diese Fälle die Kurve des Balkens 48 gewählt.

Tabelle V. $\varepsilon_0$, $\varepsilon_u$ und $M$ für Plattenbalken.

| Gewählt $\varepsilon_u$ | **10** | | | **15** | | | **25** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geschätzt $\varepsilon_0$ | 3 | 4 | **3,8** | 6 | 5 | **5,3** | 9 | 8 | **7,9** |
| $h' = \varepsilon_u + \varepsilon_0$ | 13 | 14 | 13,8 | 21 | 20 | 20,3 | 34 | 33 | 32,9 |
| $a' = a\frac{h'}{h} = \frac{3}{49}h'$, $a' = \frac{h'}{16,3}$ | 0,8 | 0,9 | 0,85 | 1,3 | 1,2 | 1,25 | 2,1 | 2 | 2,03 |
| $e_e' = \varepsilon_u - a'$ | 9,2 | 9,1 | 9,15 | 13,7 | 13,8 | 13,75 | 22,9 | 23 | 23 |
| $d' = d\frac{h'}{h} = 15 \cdot \frac{h'}{49}$ $d' = \frac{h'}{3,27}$ | 4 | 4,3 | 4,23 | 6,45 | 6,15 | 6,22 | 10,4 | 10,1 | 10 |
| $\varepsilon_p = d' - \varepsilon_0$ | 1 | 0,3 | 0,43 | 0,45 | 1,15 | 0,92 | 1,4 | 2,1 | 2,1 |
| $F_0'$ | 13 | 22,7 | 20 | 49,8 | 35 | 39,5 | 108 | 86 | 84,2 |
| $F_p'$ aus Tabelle II | 1,5 | 0,14 | 0,14 | 0,14 | 2,0 | 1,4 | 2,9 | 6,6 | 6,6 |
| $F_u'$ | 109 | 109 | 109 | 197 | 197 | 197 | 339 | 339 | 339 |
| Druck $= b_0 F_0' = 200\, F_0'$ | 2600 | 4540 | 4000 | 9960 | 7000 | 7900 | 21 600 | 17 200 | 16 840 |
| $F_p' \cdot (b_0 - b_u) = 175\, F_p'$ | 262 | 25 | 25 | 25 | 350 | 230 | 510 | 1150 | 1150 |
| $F_u' \cdot b_u = 25\, F_u'$ | 2743 | 2743 | 2743 | 4925 | 4925 | 4925 | 8475 | 8475 | 8475 |
| $Z_e' = f_e \cdot \frac{h'}{h} \cdot e_e' \cdot \frac{E_e}{m} = 22 \cdot \frac{h'}{49} \cdot e' \cdot \frac{2\,100\,000}{100\,000} = \frac{h' \cdot e'}{1,06}$ | 1200 | 1200 | 1190 | 2710 | 2610 | 2640 | 7330 | 7190 | 7200 |
| Zug $= \Sigma$ | 4105 | 3968 | 3950 | 7660 | 7885 | 7795 | 16 315 | 16 815 | 16 825 |
| $S_0'$ | | | 50,5 | | | 139 | | | 400 |
| $S_p'$ aus Tabelle II | | | 0 | | | 0,85 | | | 9,2 |
| $S_u'$ | | | 687 | | | 1782 | | | 4561 |
| $b_0 S_0'$ | | | 10 100 | | | 27 800 | | | 80 000 |
| $(b_0 - b_u) S_p'$ | | | 0 | | | 150 | | | 1 600 |
| $b_u S_u'$ | | | 17 200 | | | 44 000 | | | 114 000 |
| $Z_e' \cdot e_e'$ | | | 10 900 | | | 36 300 | | | 165 000 |
| $M' = \Sigma$ | | | 38 200 | | | 108 000 | | | 360 600 |
| $M = M'\left(\frac{h}{h'}\right)^2$ $M = 2400\,\frac{M}{h'^2}$ | | | 482 000 | | | 627 000 | | | 800 000 |
| $(100\,000)\ \varphi = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} = \frac{h'}{49}$ | | | 0,28 | | | 0,41 | | | 0,66 |

| Gewählt $\varepsilon_u$ | **40** | | | **70** | | | **110** | | **160** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Geschätzt $\varepsilon_0$ | 11 | 11,3 | **11,4** | 18 | 19 | **18,3** | 27 | **27,2** | 38 | 39 | **38,8** |
| $h' = \varepsilon_u + \varepsilon_0$ | 51 | 51,3 | 51,4 | 88 | 89 | 88,3 | 137 | 137,2 | 198 | 199 | 198,8 |
| $a' = a\frac{h'}{h} = \frac{3}{49}h'$, $a' = \frac{h'}{16,3}$ | 3,1 | 3,15 | 3,15 | 5,4 | 5,5 | 5,5 | 8,4 | 8,4 | 12,2 | 12,2 | 12,2 |
| $e_e' = \varepsilon_u - a'$ | 36;9 | 36,85 | 36,85 | 64,6 | 64,5 | 64,5 | 101,6 | 101,6 | 147,8 | 147,8 | 147,8 |
| $d' = d\frac{h'}{h} = 15 \cdot \frac{h'}{49}$ $d' = \frac{h'}{3,27}$ | 15,6 | 15,7 | 15,8 | 27 | 27,2 | 27,1 | 42 | 42 | 60,7 | 61 | 61 |
| $\varepsilon_p = d' - \varepsilon_0$ | 4,6 | 4,4 | 4,4 | 9 | 8,2 | 8,8 | 15 | 14,8 | 22,7 | 22 | 22,7 |
| $F_0'$ | 159,3 | 168 | 171 | 413 | 459 | 427 | 903 | 916 | 1692 | 1772 | 6756 |
| $F_p'$ aus Tabelle II | 29,3 | 27,6 | 27,6 | 92,5 | 79,6 | 89,2 | 197 | 193 | 314 | 317 | 314 |
| $F_u'$ | 472 | 472 | 472 | 650 | 650 | 650 | 765 | 765 | 800 | 800 | 800 |
| Druck $= b_0 F_0' = 200\, F_0'$ | 31 860 | 33 600 | 34 200 | 82 600 | 91 800 | 85 400 | 180 600 | 183 200 | 338 400 | 354 400 | 351 200 |
| $F_p' \cdot (b_0 - b_u) = 175\, F_p'$ | 5 120 | 4 830 | 4 830 | 16 200 | 13 900 | 15 600 | 34 500 | 33 800 | 54 800 | 55 100 | 54 800 |
| $F_u' \cdot b_u = 25\, F_u'$ | 11 800 | 11 800 | 11 800 | 16 200 | 16 200 | 16 200 | 19 100 | 19 100 | 20 000 | 20 080 | 20 000 |
| $Z_e' = f_e \cdot \frac{h'}{h} \cdot e_e' \cdot \frac{E_e}{m} = 22 \cdot \frac{h'}{49} \cdot e' \cdot \frac{2\,100\,000}{100\,000} = \frac{h' \cdot e'}{1,06}$ | 17 700 | 17 800 | 17 800 | 53 700 | 54 000 | 53 800 | 131 500 | 131 600 | 276 000 | 277 000 | 277 000 |
| Zug $= \Sigma$ | 34 620 | 34 430 | 34 430 | 86 100 | 84 100 | 85 600 | 185 100 | 184 500 | 350 800 | 352 100 | 351 800 |
| $S_0'$ | | | 1276 | | | 5 140 | | 16 200 | | | 44 100 |
| $S_p'$ aus Tabelle II | | | 80 | | | 500 | | 1 730 | | | 3 950 |
| $S_u'$ | | | 8826 | | | 18 393 | | 28 378 | | | 32 648 |
| $b_0 S_0'$ | | | 255 200 | | | 1 028 000 | | 3 240 000 | | | 8 820 000 |
| $(b_0 - b_u) S_p'$ | | | 14 000 | | | 87 500 | | 202 000 | | | 690 000 |
| $b_u S_u'$ | | | 220 700 | | | 459 800 | | 709 500 | | | 816 000 |
| $Z_e' \cdot e_e'$ | | | 655 000 | | | 3 460 000 | | 13 300 000 | | | 40 800 000 |
| $M' = \Sigma$ | | | 1 145 000 | | | 5 035 000 | | 17 452 000 | | | 51 126 000 |
| $M = M'\left(\frac{h}{h'}\right)^2$ $M = 2400\,\frac{M}{h'^2}$ | | | 1 040 000 | | | 1 550 000 | | 2 230 000 | | | 3 100 000 |
| $(100\,000)\ \varphi = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_u}{h} = \frac{h'}{49}$ | | | 1,03 | | | 1,77 | | 2,74 | | | 3,98 |

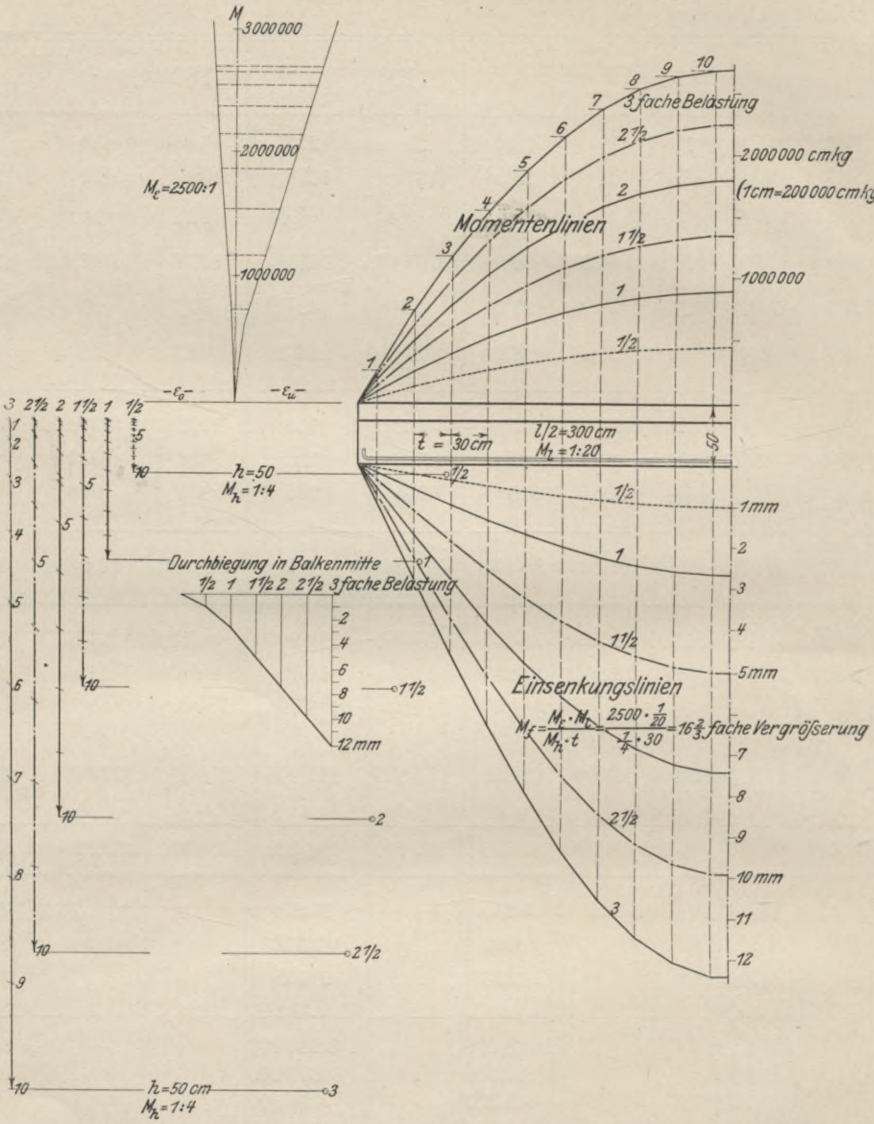



Fig. 36. Einsenkung eines **frei aufliegenden Plattenbalkens** von 6,0 m l. W.
Einfache Gesamtlast 2000 kg pro laufenden Meter.
(Fig. in $^1/_3$ Größe der Originalzeichnung.)

Die Annahme der Momente mit $\frac{q l^2}{24}$ und $\frac{q l^2}{12}$ erweist sich auch hier als nicht richtig (siehe Fig. 37). Die Momentenlinie muß so lange verschoben werden, bis die Summe der negativen elastischen Gewichte gleich der Summe der positiven Gewichte ist.

Das wirklich auftretende Moment in Balkenmitte ist 43 % kleiner als $\frac{q l^2}{24}$, das Einspannungsmoment um 21,5 % größer als $\frac{q l^2}{12}$.

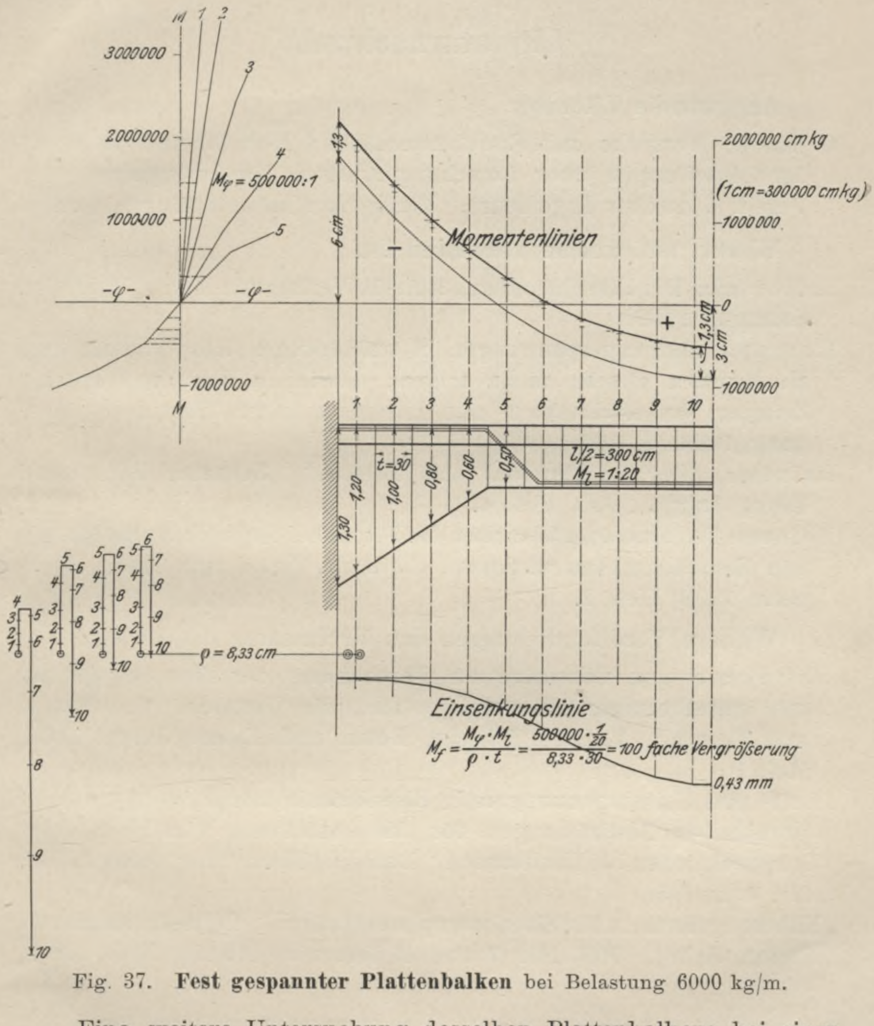



Fig. 37. **Fest gespannter Plattenbalken** bei Belastung 6000 kg/m.

Eine weitere Untersuchung desselben Plattenbalkens bei einer Belastung von 12 000 kg pro laufenden Meter ergab das Moment in Balkenmitte um 50 % kleiner als $\frac{q l^2}{24}$ und das Moment an der Einspannungsstelle um 25 % größer als $\frac{q l^2}{12}$.

# Literaturnachweis.


**Angewandte Literatur.**

C. Bach: Versuche mit Eisenbetonbalken; Heft 39 und 45 bis 47 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Verlag von Julius Springer, Berlin.

**Werke, auf welche verwiesen ist.**

E. Mörsch: Der Eisenbetonbau, 3. Aufl., Verlag von Konrad Wittwer, Stuttgart 1908.

Hotopp: „Biegungsspannungen in stabförmigen Körpern, die dem Hookeschen Gesetz nicht folgen, sowie in Verbundkörpern." Zeitschr. des Architekten- und Ingenieurvereins Hannover, Jahrgang 1906, S. 282.

Heintel: „Der Schubmodul des Betons." Zeitschr. Beton und Eisen, Jahrg. 1908, Heft 4.

Heintel: Das elastische Verhalten des Betons bei Biegebeanspruchungen von Eisenbetonkonstruktionen. Zeitschr. Beton und Eisen, Jahrgang 1908, Heft 2.

**Weitere Veröffentlichungen des Verfassers.**

„Die Formel von Considère zur Berechnung der Eisenbetonpfeiler mit spiralförmiger Eiseneinlage und die Versuche von Wayss und Freytag, A. G." Zeitschr. Beton und Eisen, Jahrg. 1906, Heft 9.

„Haft- und Schubspannungen in Eisenbetonkonstruktionen und die preußischen Bestimmungen für die Ausführung von Eisenbetonkonstruktionen bei Hochbauten." Deutsche Bauzeitung, Jahrg. 1908, Nr. 4 und 5.

„Näherungsformeln für Eisenbetonplattenbalken." Zeitschr. Armierter Beton, Jahrg. 1908, Heft 7 und Il Cemento, Milano 1908, Nr. 8.