



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298368



X  
895



BEITRÄGE  
ZUR  
THEORIE HÖLZERNER TRAGWERKE  
DES HOCHBAUES

I. HÄNGE- UND SPRENGWERKE

VON

SIEGMUND MÜLLER

PROFESSOR AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU BERLIN

MIT 25 ABBILDUNGEN IM TEXT.

*J. No. 27 174*



BERLIN 1907  
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

Nachdruck verboten.

Erweiterter Sonderdruck aus der Zeitschrift für Bauwesen  
Jahrgang 1906.

**BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW**

II 31261

Akc. Nr. 2878/49

## Inhalt.

	Seite
I. Kinematische Gesetze . . . . .	12
II. Statische Berechnung beliebig geformter Hänge- und Sprengwerke . . . . .	19
III. Unsymmetrische Hänge- und Sprengwerke mit wagerechtem Riegel . . . . .	29
IV. Symmetrische Hänge- und Sprengwerke . . . . .	33
V. Tragwerke mit drei gleichen Feldern . . . . .	38
VI. Zahlenbeispiele . . . . .	40
VII. Durchbiegungen doppelter Tragwerke . . . . .	48
VIII. Dreifache Tragwerke . . . . .	52
Anhang: Kurze Übersicht der Regeln und Formeln für symmetrische Hänge- und Sprengwerke . . . . .	53

---



Die Genauigkeit statischer Berechnungen ist bei hölzernen Tragwerken im allgemeinen erheblich geringer als bei eisernen Baukonstruktionen. Die geringe Gleichförmigkeit des Holzes, seine große Empfindlichkeit gegen Witterungseinflüsse können selbst bei einfachen, statisch bestimmten Systemen größere Abweichungen von dem berechneten Zustande verursachen, als sie bei richtig gebauten Eisenkonstruktionen möglich sind. Bei den hölzernen Tragwerken des Hochbaues leidet die Genauigkeit der Rechnung überdies nicht selten durch Unklarheiten der Ausführung, häufig selbst durch Unklarheiten des Entwurfs. Unklarheiten der Ausführung liegen vornehmlich in den Verbindungen. Bei den einfachen Verzäpfungen, den leichten Versatzungen läßt sich selten genügend klar beurteilen, ob in ihnen Zug- oder Druckwirkungen auftreten, und ob Biegemomente aufgenommen werden können. Unklarheiten des Entwurfes finden sich gewöhnlich in der Gliederung des Tragwerkes. Eisernen Tragwerke zeigen in ihrem Aufbau einen scharfen Unterschied zwischen den lediglich in der Mittellinie beanspruchten Fachwerkstäben und den auf Biegung beanspruchten, vollwandigen Traggliedern. Dieser Gegensatz tritt im Aufbau hölzerner Tragwerke des Hochbaues, besonders in den leichten Dachstühlen weniger klar hervor. — Die meisten Tragwerke sind gemischte Systeme, in denen neben den nur axial beanspruchten Stäben einzelne Glieder auf Biegung beansprucht werden müssen — wenigstens bei ungleichmäßiger Belastung. In der Regel wird das Stabwerk der gewöhnlichen Holzbinder auch heute noch nur den Längskräften aus Eigengewicht und voller Belastung durch Schneedruck angepaßt: geschlossene Fachwerke, deren Glieder allein mit zentrischen Längskräften auch einseitigen Belastungen aus Winddruck und Nutzlasten Widerstand leisten können, sind

selten. Den Fortschritten der Fachwerklehre ist der Aufbau einfacher Holztragwerke des Hochbaues nicht in gleichem Schritt gefolgt.

Es liegt vom geschichtlichen Standpunkt aus nahe, die rasche Entwicklung eiserner Baukörper im Verlaufe eines halben Jahrhunderts zum Vergleiche heranzuziehen. Die Anfänge des Eisenbaues fallen zeitlich mit dem Beginn der wissenschaftlichen Erkenntnis in der Fachwerktheorie zusammen. Es ist nur natürlich, daß die im Anfange ebenso unklaren eisernen Tragwerke der weiteren Entwicklung unmittelbar gefolgt sind, so daß heute im Eisenbau Unklarheiten in der Stützung, wie in der Gliederung schon lange beseitigt sind.

Anders im Holzbau! Dort war die viele Jahrhunderte geübte Nachbildung einzelner, auf der Grundlage einfacher Erfahrung entstandener Tragwerke ein Hemmstein für die Anpassung an eine schnell fortgeschrittene Theorie: in der eingewurzelten Gewohnheit liegt auch der Hauptgrund dafür, daß zum Teil noch heute die frühere grob empirische, ja handwerksmäßige Behandlung in der Bestimmung der erforderlichen Holzstärken selbst für größere Spannweiten als genügende Unterlage angesehen wird. Solch unzulängliches Verfahren wird bei unklaren Systemen um so eher geübt, als die Unbestimmtheiten der genauen Untersuchung besondere Schwierigkeiten entgegenseetzen.

Daß im Holzbau Bieigungsbeanspruchungen zentrisch gespannter Fachwerkstäbe eher zugelassen werden als im Eisenbau, hat freilich auch eine innere Berechtigung. Ein Holzgurt mittlerer Abmessungen (20 · 20 cm) kann ein etwa dreimal so großes Bieigungsmoment aufnehmen als ein Eisengurt gleicher zulässiger Längskraft; hölzerne Stäbe sind also in diesem Sinne bieigungsfester als Eisenstäbe. Trotzdem werden aber vom Standpunkte der Wirtschaftlichkeit und der Standfestigkeit auch im Holzbau klare, steife, geschlossene Fachwerke solchen mit offenen Gelenkfachen, welche bei einseitigen Belastungen erst durch Verbiegungen einzelner Glieder standfest werden, vorzuziehen sein. Freilich ist im Hochbau für manche Trag-

werke die Fortlassung eines zum vollständigen Fachwerk erforderlichen Stabes durch bauliche oder künstlerische Gründe geboten. Beim doppelten Hängewerk kann das offene Mittelfeld zur Verbindung benutzter Räume einen Wert erhalten: als Binder im ausgenutzten Dachgeschoß ist dieses System seinem Wesen nach berechtigt. In Kirchendächern über Kreuzkappen, in offenen Hallenbindern (Abb. 21) sollte das Hängewerk durch Aussteifung des Mittelfeldes zum Fachwerk vervollständigt werden. Forderungen dieser Art sind neuerdings mehrfach erhoben worden. (Vgl. Landsberg, Handb. d. Arch. III, 2, 4 S. 104.)

Eine Grundbedingung für Fortschritte in diesen Bestrebungen ist die genaue statische Untersuchung der üblichen unbestimmten Holzwerke: die hier aufgenommenen Untersuchungen werden sich vorzugsweise mit denjenigen hölzernen Tragwerken des Hochbaues beschäftigen, deren statische Berechnung für die dem Hochbau eigentümlichen Lastzustände noch nicht oder wenig behandelt worden ist.

Die vorliegende Abhandlung erstreckt sich auf die Untersuchung der für den Hochbau wichtigsten Grundsysteme, der

### **Hänge- und Sprengwerke.**

Einfache Hänge- und Sprengwerke. Systeme einfacher Mittelstützung, d. h. Balken mit einem unterstützten Mittelknoten können aus diesen Betrachtungen entfallen. Sie sind in allen Fällen für Kräfte in den Knotenpunkten steif, selbst wenn im Tramen Biegemomente nicht aufgenommen werden. Die elastischen Formänderungen des Stabwerkes können auch hier, wie später für das doppelte Tragwerk ausgeführt, vernachlässigt werden. Der mittlere Stützpunkt erleidet keine Senkungen; der Tramen ist daher als durchgehender Träger auf drei starren Stützpunkten anzusehen. Lasten im oberen Knotenpunkt, auch schräge Windlasten ergeben keine Biegungen des Steifbalkens: das System wirkt als statisch bestimmtes Fachwerk, dessen Berechnung, ebenso wie die des durchgehenden Balkens auf starren Stützen geläufig ist.

Statische Deutung doppelter Hänge- und Sprengwerke. Doppelte Hänge- und Sprengwerke bestehen aus einem an den Enden gestützten, biegungsfesten, geraden Balken (Streckbalken, Steifbalken, Streckbaum, Tramen) (Abb. 1) und einem gegliederten Stabwerk, welches den Balken in zwei mittleren Knotenpunkten unterstützt. Das Stabwerk

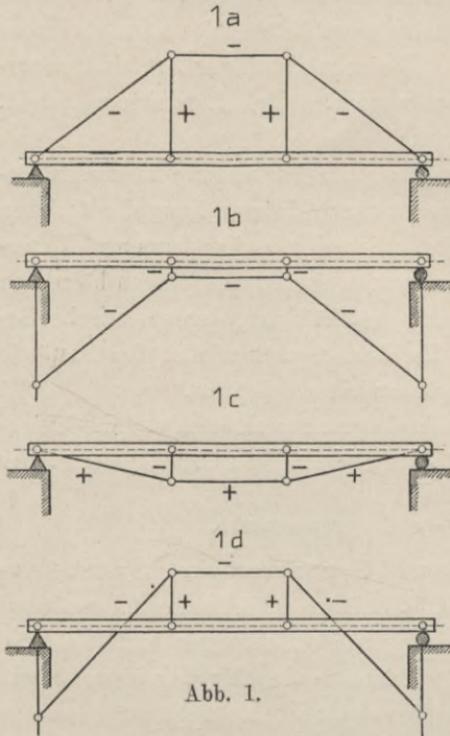


Abb. 1.

enthält einen doppelt geknickten Gurt (Mittelriegel, zwei Seitenschrägen) und zwei lotrechte Stiele in den mittleren Stützpunkten. Ob die Stiele auf Zug (Hängesäulen im Hängewerk) oder auf Druck (Ständer im Sprengwerk) beansprucht werden, gibt für die stützende Wirkung des Stabwerkes auf den Steifbalken keinen wesentlichen Unterschied. Im Grunde zeigt auch der doppelt bewehrte (armierte) Balken gleiche statische Wirkung wie die Hänge- und Sprengwerke (Abb. 1c). Doch spielt der Unterschied in der Gurthöhe eine erhebliche Rolle in dem elastischen Verhalten des Stabwerkes; die für die Sprenge- und Hängewerke in den nachfolgenden Untersuchungen grundsätzlich angenommene Vernachlässigung elastischer Formänderungen im Stabwerk gilt bei bewehrten Trägern geringer Gurthöhe nicht mehr. Das in Abb. 1d dargestellte sogenannte „vereinigte Hänge- und Sprengwerk“ gehört immer dann unter die hier behandelten Tragwerke, wenn die Verbindungen

gleiches Verhalten zeigen. In Abb. 1a ist ein Hängewerk dargestellt, in Abb. 1b ein Sprengwerk, in Abb. 1c ein vereinigt wirkendes Hänge- und Sprengwerk, in Abb. 1d ein Hängewerk mit einer anderen Gurthöhe als in Abb. 1a. Die Stabwerke sind in Abb. 1a und 1c als Hängewerke, in Abb. 1b und 1d als Sprengwerke zu betrachten. Die Stiele sind in Abb. 1a und 1c auf Zug, in Abb. 1b und 1d auf Druck beansprucht. Die Balken sind in Abb. 1a und 1c auf Zug, in Abb. 1b und 1d auf Druck beansprucht.

zwischen Seitenschrägen und Balken nicht besondere Stützpunkte bilden; einfache Bolzen genügen hierzu nicht.

Die Tragwerke sollen für die Berechnung als in einem festen und einem beweglichen Endlager gestützt angenommen werden; freilich ist in den Holzträgern des einfachen Hochbaues diese Voraussetzung nie genau erfüllt. Beide Enden werden in der Regel gleich fest in die Stützmauer eingebunden; bei gleicher Nachgiebigkeit des Mauerwerkes nehmen sie die wagerechten Seitenkräfte der schrägen Lasten in gleichen Anteilen auf, wenn die Längenänderung des Tragens vernachlässigt werden kann. Diese Voraussetzung gilt aber für alle nachfolgenden Untersuchungen. Im übrigen hat die Unbestimmtheit solcher halbfester Lager nur Einfluß auf den Streckbalken; es ändern sich die Längskraft und damit in geringem Maße die gleichförmigen Längsbeanspruchungen.

Bei offenem Mittelfeld lassen sich die Stabkräfte der Hänge- und Sprengwerke für gegebene Belastung statisch bestimmen, wenn eine Stabkraft bekannt ist; ebenso ist alsdann der Steifbalken statisch bestimmt. Die doppelten Hänge- und Sprengwerke sind demnach einfach innerlich statisch unbestimmt.

Genaue Berechnung mit Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in dem Stabwerk. Die genaue statische Berechnung kann nach den allgemeinen Arbeitsgesetzen statisch unbestimmter Tragwerke durchgeführt werden. Von Müller-Breslau sind hierfür die allgemeinen Formeln zur Berechnung der statisch unbestimmten Größe angegeben (Müller-Breslau, Neuere Methoden der Festigkeitslehre, III. Aufl.). Als statisch unbestimmter Wert ist dort der Druck im Spannriegel  $X = H$  aufgefaßt; das statisch bestimmte Hauptsystem ist ein einfacher Balken. Die Momentenfläche für den Zustand  $X = -1$  wird durch die Fläche zwischen Steifbalken und Stabwerk gebildet.

Das wirkliche Biegemoment eines Querschnittes wird daher  $M = M_0 - H \cdot y$ , wobei  $M_0$  das Moment im Haupt-Gl. 1. system darstellt. Für  $H$  ergibt sich die Gleichung

Gl. 2.

$$H = \frac{3 \cdot f M_0 \cdot y \cdot dx}{\mu \cdot \eta^2 \cdot (2a + 3b)},$$

jedoch ist der Sonderfall vorausgesetzt, daß die beiden Außenfelder gleich sind (Abb. 2).

Als Grundlage weiterer Untersuchungen fragt sich zunächst, welchen Einfluß die Wertziffer  $\mu$  für die hier behandelten Holzträger des Hochbaues annehmen kann. Im Werte  $\mu$  sind die elastischen Stablängenänderungen des Stabwerkes und der Einfluß der Längskraft im Streckbalken berücksichtigt.

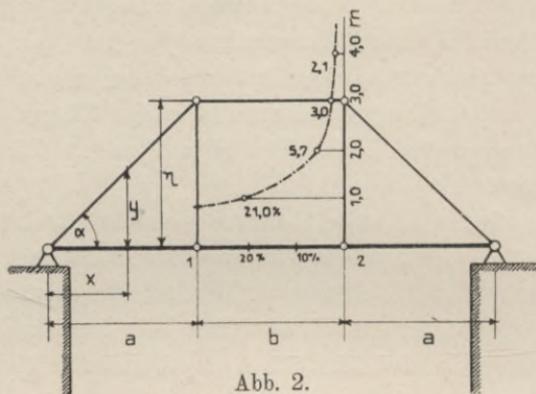


Abb. 2.

Das Hängewerk nach Abb. 2 entspricht mit drei gleichen Feldern von 3 m Länge häufig vorkommenden Abmessungen im Hochbau. Die Elastizitätsziffer  $E$  sei unveränderlich; die Stäbe sollen aus vierkantigen Normalhölzern gebildet werden. Es seien: für den Streckbaum (26/28 cm): Trägheitsmoment  $J = 47563 \text{ cm}^4$ , Querschnittsfläche  $F = 728 \text{ cm}^2$ ; für die Hängesäule (16/22 cm): Querschnittsfläche  $F_v = 352 \text{ cm}^2$ ; für den Spannriegel (22/26 cm): Querschnittsfläche  $F_m = 572 \text{ cm}^2$ . In den Seitenschrägen ändert sich die Querschnittsfläche  $F_s$  mit der veränderlichen Gurthöhe. Unter Benutzung der Buchstaben in Abb. 2 wird (Müller-Breslau, N. M. d. F.)

$$\text{Gl. 3.} \left\{ \begin{aligned} \mu &= 1 + 3 \cdot \frac{J}{F \cdot \eta^2} \cdot \frac{2a + b}{2a + 3b} + \frac{3b}{\eta^2 \cdot (2a + 3b)} \\ &\quad \cdot \left[ 2 \frac{J}{F_s} \cdot \sec^3 \alpha + \frac{J}{F_m} \cdot \frac{b}{a} + 2 \frac{J}{F_v} \cdot \text{tg}^3 \alpha \right]. \end{aligned} \right.$$

Innerhalb der untersuchten Grenzwerte für die Gurthöhen von  $\eta = 1$  m bis  $\eta = 4$  m fällt der Wert  $\mu$  von 1,033 auf 1,004. Der Einfluß auf den Riegelschub  $H$ , und damit auf die Stäbe des Stabwerkes überhaupt, ist also wegen seiner Geringfügigkeit bestimmt zu vernachlässigen. Es fragt sich weiter, wie groß der Einfluß der Stablängenänderungen auf das gefährlichste Biegemoment des Streckbalkens wird. Für volles Eigengewicht und einseitige Nutzlast bis zur Mitte ist der Unterschied des für  $\mu = 1$  berechneten angenäherten Biegemomentes in dem Fußpunkt der Hängesäule gegen das genau berechnete Moment in Hundertsteln dieses Wertes bestimmt. In der Abb. 2 sind die Zahlen senkrecht zur Hängesäule für die veränderlichen Höhen derselben aufgetragen. Bei der Ausrechnung wurde als Eigengewicht 1,25 t/m und als Nutzlast 1,75 t/m zugrunde gelegt. Selbst bei größeren Abweichungen in den Abmessungen findet man ähnliche Ergebnisse wie im vorstehenden Beispiel.

Nur für geringe Gurthöhen spielen die elastischen Änderungen der Stablängen eine maßgebende Rolle. Bei bewehrten Trägern mit 1/10 Stich werden sie berücksichtigt werden müssen. Hölzerne Hänge- und Sprengwerke des Hochbaues werden kaum weniger als 1/5 der Spannweite Stich erhalten. Für größere Pfeilhöhen jenseit dieser Grenze könnte in gewöhnlichen Fällen auch für Eisenkonstruktionen die angenäherte Rechnung als genügend genau angesehen werden, für hölzerne Tragwerke sicherlich in allen Fällen. Hier bedingen schon die nicht zu verfolgenden Ungenauigkeiten des Baustoffes und der Ausführung größere Unterschiede als die vorberechneten Werte.

Für die statische Untersuchung der Hänge- und Sprengwerke des Hochbaues gelte also der Satz: Die elastischen Formänderungen des Stabwerkes, ebenso die axialen Längenänderungen des Streckbalkens infolge der Längskräfte können gegenüber den Biegungen im Balken vernachlässigt werden. Die vorangeführte genaue Berechnung kann der Vernachlässigung der Formänderungen im Stabwerk ohne weiteres

dadurch angepaßt werden, daß  $\mu = 1$  gesetzt wird. Gangbar ist der Weg dieses Verfahrens in allen Fällen der Belastung auch für unregelmäßige Formen; für unregelmäßige Belastung unmittelbar am Streckbalken wird er in der Regel am schnellsten zum Ziele führen.

Im Hochbau sind die Belastungen sowohl nach ihrer Veränderlichkeit, wie nach ihrer Angriffsweise engen Grenzen unterworfen; in den meisten Fällen ist am Streckbalken neben gleichförmigem Eigengewicht noch gleichförmige Nutzlast zu berücksichtigen. Überdies wirken die Belastungen selten unmittelbar am Tramen. In der Regel sind in den Fußpunkten der Hängesäulen Unterzüge angebracht, welche die Lasten der gestützten Deckenträger auf das Hängewerk mittelbar übertragen. Dem Hochbau eigentümlich sind ferner beliebig gerichtete Lasten am Obergurt aus Eigengewicht, Schnee und Winddruck. Es soll in den nachfolgenden Untersuchungen ein Weg angegeben werden, der gerade für diese Belastungen selbst bei unregelmäßigen Formen unmittelbar die Stabkräfte und damit die Momente des Steifbalkens ergibt; dabei sollen die Lastscheiden und die gefährlichsten Belastungen allgemein festgesetzt werden.

### I. Kinematische Gesetze.

Die Längen der Fachwerkstäbe, ebenso die der Balkenmittellinie, gelten für die Berechnung als unveränderlich. Innerhalb der Grenzen der zulässigen Tragfähigkeit sind die elastischen Durchbiegungen des Tramens im Verhältnis zu seiner Länge verschwindend klein. Die Fußpunkte der Hängesäulen und das bewegliche Lager können alsdann wagerechte Verschiebungen gegen das feste Lager nicht erleiden. Nach Abb. 3 kann man sich daher die Fußpunkte der Hängesäulen durch wagerechte Gelenkstäbe an die Lager angeschlossen und das bewegliche Lager in ein Gelenk umgewandelt denken. Das Stabwerk bildet alsdann eine kinematische Kette. Die Seitenscheiben  $Z_I$  und  $Z_{II}$  ergeben mit der Mittelscheibe  $Z_{III}$  und der Widerstandsscheibe  $W$  ein Gelenkviereck (Abb. 3). Bei ruhender Widerstandsscheibe liegt der augenblickliche Dreh-

pol der Mittelscheibe  $Z_{III} = R$  (Mittelriegel  $R$ ) im Schnittpunkt der Seitenschrägen ( $J$ ) (ideeller Firstpunkt = ideelle Spitze). Erteilt man dem Stabwerk irgend eine verschwindend kleine Momentanbewegung, so sind die Bewegungen der beiden oberen Firstpunkte senkrecht zu den Seitenschrägen. Trägt man sie um  $90^\circ$  gedreht auf den Polstrahlen als lotrechte Geschwindigkeiten I—I' und II—II' auf, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte parallel zum Riegel. Zieht man die lotrechten I'—1' und II'—2', so stellen 1—1' und 2—2' die lotrechten Verschiebungen der beiden Fußpunkte dar (Abb. 3). Für die wirklichen Be-

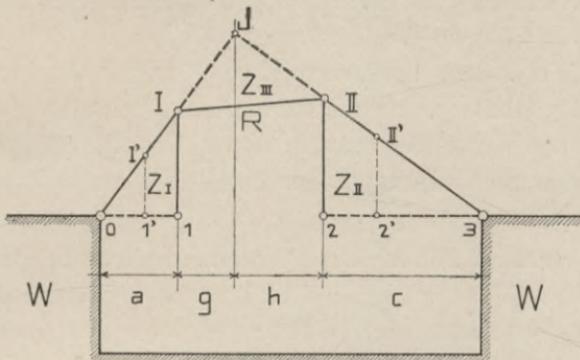


Abb. 3.

wegungen der beiden Fußpunkte lassen sich daher ohne weiteres folgende, allgemein gültige Beziehungen festlegen:

1. Die mittleren Stützpunkte der doppelten Tragwerke bewegen sich nur in senkrechter Richtung.

2. Die Verschiebungen dieser beiden Punkte haben stets entgegengesetztes Vorzeichen; senkt sich der eine (+), so hebt sich der andere (—).

3. Das Verhältnis dieser Bewegung ist unabhängig von der Belastung, und zwar:

4. Verhalten sich die lotrechten Verrückungen der Mittelknoten wie die Abschnitte, welche die ideelle Spitze im Mittelfelde abscheidet:  $\delta_1 : \delta_2 = -g : h$ .

Gl. 4.

Für den Sonderfall wagerechten Mittelriegels gilt weiterhin:

5. Die Verschiebungen der Mittelknoten verhalten sich  
 Gl. 5. wie die anliegenden Außenfelder:  $\delta_1 : \delta_2 = -a : c$ .

Zur Bestimmung der Bewegungen läßt sich bei wage-  
 rechtem Riegel auch folgender Satz sofort übersehen:

6. Bei jeder Verrückung des Tragwerkes bleibt das  
 Mittelfeld ein Parallelogramm und die Schlußlinien der  
 Biegungslinien des Tragens in den Außenfeldern sind ein-  
 ander parallel (in Abb. 4a ist 0—1' und 3—2' Schlußlinie).

Sind schließlich die Außenfelder gleich und der Riegel  
 wagerecht, so ist:

7. Hebung des einen Fußpunktes gleich Senkung des  
 anderen. Sind an die Gurtknoten oder an die Stützpunkte  
 der Stiele andere Lastknoten angeschlossen, ohne daß die  
 Zwangläufigkeit der kinematischen Kette beeinträchtigt wird,  
 so können deren Bewegungen durch Vervollständigung der  
 Polgebilde nach bekannten Gesetzen leicht ermittelt werden  
 (Abb. 9).

Überhaupt läßt sich der hier eingeschlagene Weg, bei  
 elastischen Verschiebungen von Tragwerken die Kinematik  
 für die Bestimmung der Bewegungen derjenigen Glieder zu  
 benutzen, deren elastische Formänderungen vernachlässigt  
 werden können, allgemein auch für Ingenieurtragwerke ver-  
 werten. Bei Balkenträgern können beispielsweise in offenen  
 Feldern, deren fortgelassene Diagonalen durch die biegungs-  
 feste Ausbildung eines Gurstabes über drei Fache ersetzt  
 sind, die Durchbiegungen ganz entsprechend untersucht  
 werden.

Weg-, Kraft- und Momentenverhältnis in den  
 Mittelknoten unbelasteter Streckbalken:

Die für die Knoten kinematisch untersuchten Ver-  
 rückungen sind gleichzeitig die elastischen Durchbiegungen  
 des Streckbalkens. Es sei für die Folge der Bruch  $\frac{\delta_1}{\delta_2} = \omega$

kurz das „Wegverhältnis“ genannt. Für schrägen Spann-  
 Gl. 6. riegel gilt also allgemein:  $\omega = \frac{\delta_1}{\delta_2} = -\frac{g}{h}$  (Abb. 4).

Als Grundlage für den allgemeinen Fall soll zunächst ein Spannungszustand des Streckbalkens untersucht werden, bei dem äußere Kräfte nur an den oberen Gurtknoten, nicht also an dem Streckbalken angreifen. Bezeichnet man die vom Balken aufgenommenen Kräfte allgemein mit  $X_1$  und  $X_2$ , so lassen sich die Durchbiegungen  $\delta$  als Funktionen der  $X$  darstellen (Abb. 4):

$$\text{Gl. 7.} \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \alpha \cdot X_1 + \beta \cdot X_2; \\ \delta_2 &= \gamma \cdot X_1 + \delta \cdot X_2. \end{aligned}$$

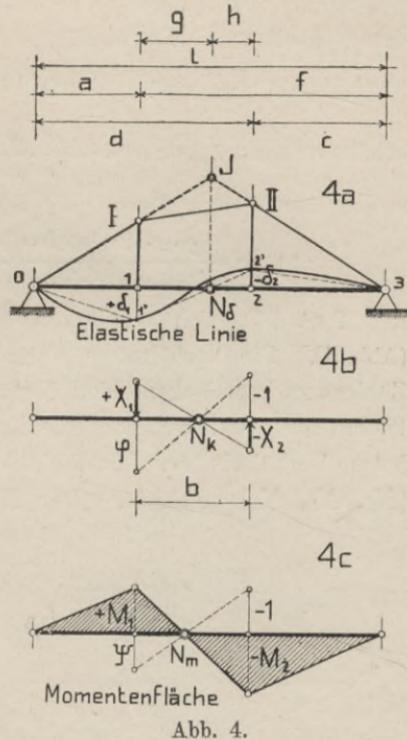
Hierbei sind die Werte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  nur von den Feldlängen abhängig. Die Elastizitätszahl, ebenso der Querschnitt des Balkens sei ein für allemal als unveränderlich angenommen. Man übersieht

aus den beiden Gleichungen, daß einem bestimmten Wegverhältnis  $\omega$  ein zugehöriges „Kraftverhältnis“  $= \frac{X_1}{X_2} = \varphi$  entspricht. Dividiert man die beiden Gleichungen Nr. 7 und drückt das Wegverhältnis durch Längenabschnitte des Balkens nach Gleichung Nr. 6 aus, so erhält man für

$$\text{Gl. 8.} \quad \varphi = \frac{X_1}{X_2} = -\frac{g \cdot d^2 \cdot c^2 + h \cdot a \cdot c \cdot \tau^2}{h \cdot f^2 \cdot a^2 + g \cdot a \cdot c \cdot \tau^2} \quad (\text{Abb. 4}), \quad \text{dabei bedeutet:}$$

$$\text{Gl. 9.} \quad 2\tau^2 = l^2 - a^2 - c^2.$$

Schließlich lassen sich die durch  $X_1$  und  $X_2$  in den Querschnitten der Stützpunkte erzeugten Biegemomente  $M_1$  und  $M_2$  in entsprechender Form ausdrücken:



$$\text{Gl. 10.} \quad M_1 = \varepsilon \cdot X_1 + \zeta \cdot X_2; \quad M_2 = \eta \cdot X_1 + \vartheta \cdot X_2.$$

Die Beiwerte sind auch hier nur von den Feldlängen abhängig. Somit ergibt sich endlich ein zum Kraft- und damit auch zum Wegverhältnis zugehöriges „Momentenverhältnis“  $\frac{M_1}{M_2} = \psi$ . Durch Division der Gleichungen 10

Gl. 11. erhält man zunächst:  $\psi = + \frac{a}{c} \cdot \frac{c + \varphi \cdot f}{d + \varphi \cdot a}$ , und durch Einsetzen des Wertes für  $\varphi$  nach Gleichung 8 schließlich:

$$\text{Gl. 12.} \quad \psi = - \frac{g \cdot c \cdot (2\tau^2 + b \cdot d) + h \cdot a \cdot f \cdot (f + c)}{h \cdot a \cdot (2\tau^2 + b \cdot f) + g \cdot c \cdot d \cdot (d + a)}$$

$2\tau^2$  läßt sich wieder nach Gleichung 9 ausrechnen (Abb. 4). Die Verhältnisse sind negativ. Trägt man den Zählerwert im linken, den Nennerwert im rechten Mittelknoten auf und verbindet die Endpunkte, so entsteht für jedes Verhältnis im Mittelfeld ein zugehöriger Nullpunkt ( $N_\delta$ ,  $N_k$ ,  $N_m$ ) (Abb. 5). Der Nullpunkt für die Durchbiegungen  $N_\delta$  liegt

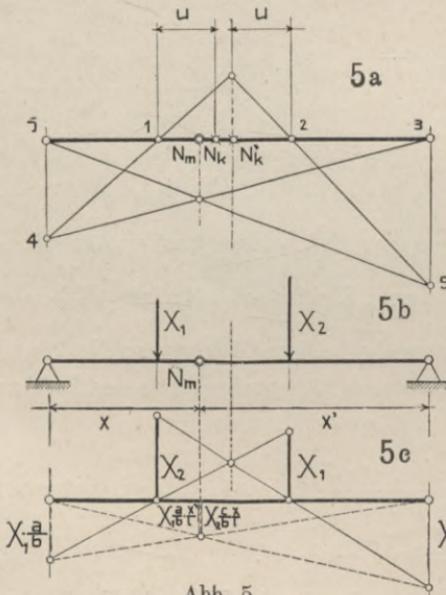


Abb. 5.

unter dem ideellen Firstpunkt (Abb. 4a). Für die Ermittlung des Nullpunktes für das Momentenverhältnis  $N_m$  aus dem Nullpunkt der Kräfte  $N_k$  und umgekehrt läßt sich eine einfache zeichnerische Konstruktion angeben.

Bekannt sei  $N_k$ ; man soll  $N_m$  finden (Abb. 5). Zu  $N_k$  bilde man den Gegenpunkt  $N'_k$  im Mittelfelde. Von einem beliebigen Punkte auf der Senkrechten in  $N'_k$  ziehe man zwei Strahlen 1—4 und 2—5.

Das Linien kreuz 0—5 und 4—3 gibt die Senkrechte durch den gesuchten Nullpunkt  $N_m$ . Der Beweis ist aus der Bedingung abzuleiten, daß  $X_1$  und  $X_2$  für  $N_m$  entgegengesetzt gleiche Momente ergeben müssen. Daher wird bei gesonderter Betrachtung jeder Kraft:

$$X_1 \cdot \frac{a \cdot x'}{l} = X_2 \cdot \frac{c \cdot x}{l} \quad \text{Gl. 13.}$$

Teilt man beide Seiten der Gleichung durch  $b$ , so wird aus Abb. 5 c die Richtigkeit der in 5 a ausgeführten Konstruktion ohne weiteres verständlich.

Für das Momentenverhältnis läßt sich eine eigenartige Ableitung geben, wenn man auf die aus der Theorie der durchgehenden Träger bekannten „verschränkten Drittelvertikalen“ zurückgreift. Die  $E \cdot J$ -fache elastische Linie ist Seillinie der Momentenfläche bei der Polweite 1 (Abb. 6). Die beiden Dreiecke  $M_1 \cdot \frac{d}{2}$  und

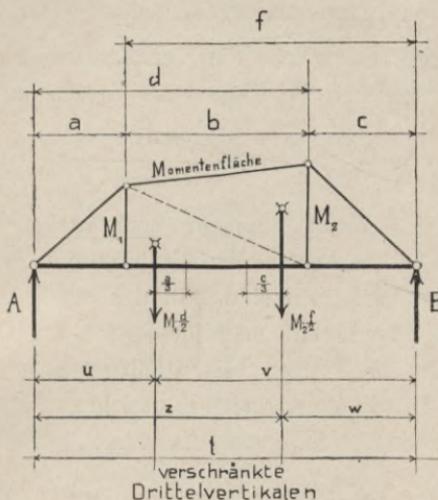


Abb. 6.

Schwerpunkte in den verschränkten Drittelvertikalen liegen, ergeben als Auflagerkräfte:

$$A = \frac{1}{2 \cdot l} [M_1 \cdot d \cdot v + M_2 \cdot f \cdot w]; \quad B = \frac{1}{2 \cdot l} [M_1 \cdot d \cdot u + M_2 \cdot f \cdot z]. \quad \text{Gl. 14.}$$

Daraus berechnet sich:

$$E \cdot J \cdot \delta_1 = A \cdot a - M_1 \cdot \frac{a^2}{6}; \quad E \cdot J \cdot \delta_2 = B \cdot c - M_2 \cdot \frac{c^2}{6}. \quad \text{Gl. 15.}$$

Durch Division und Einsetzung erhält man schließlich:

$$\text{Gl. 16.} \quad \psi = -\frac{3f(\varepsilon \cdot z + w) - c \cdot l \cdot \varepsilon}{3d(v + \varepsilon \cdot u) - a \cdot l \cdot 1}$$

Hierbei ist in dem Wert  $\varepsilon = \frac{g \cdot c}{h \cdot a}$  die Neigung des Riegels berücksichtigt. Natürlich läßt sich der Ausdruck in Gleichung 16 auf die Form des Momentenverhältnisses in Gleichung 12 umrechnen.

Bei wagerechtem Riegel wird der vorerwähnte Wert  $\varepsilon$  gleich 1, also auch  $(\varepsilon \cdot z + w) = (v + \varepsilon \cdot u) = l$ , somit

$$\text{Gl. 17.} \quad \psi = -\frac{3f - c}{3d - a}$$

Die für die  $\omega$ ,  $\varphi$  und  $\psi$ -Verhältnisse abgeleiteten Gleichungen nehmen besonders einfache Formen an, wenn das Tragwerk symmetrisch ist. Hier seien nur die Werte angegeben, welche die Verhältnisse bei beliebiger Gurtlinie, aber gleichen Feldlängen  $a = b = c$ , annehmen. Es wird:

$$\text{Gl. 18.} \quad \omega = -\frac{g}{h}; \quad \varphi = -\frac{8g + 7h}{8h + 7g}; \quad \psi = -\frac{3g + 2h}{3h + 2g}$$

Es bleibt nunmehr noch übrig, den Weg anzugeben, wie bei bekannten Verhältniswerten die Einzelglieder  $\delta$ ,  $X$ ,  $M$  zu berechnen sind. In den weiteren Ausführungen wird sich zeigen, daß man für Lasten am Obergurt, ebenso für Kräfte am Tramen bei mittelbarer Unterzugübertragung einen Kraftplan ohne weiteres zeichnen kann und somit die Einzelkräfte  $X_1$  und  $X_2$  findet. Alsdann berechnen sich

$$M_1 = s_1 \cdot X_1, \text{ wobei } s_1 = \frac{a}{l} \cdot \left( f + \frac{c}{\varphi} \right); \text{ ebenso } M_2 = s_2 \cdot X_2,$$

Gl. 19. wobei  $s_2 = \frac{c}{l} \cdot (d + \varphi \cdot a)$ . Aus den Momenten finden sich wieder die Durchbiegungen  $\delta_1 = t_1 \cdot M_1$ , wobei

$$t_1 = \frac{a}{6E \cdot J \cdot l \cdot \psi} \cdot [3d \cdot v \cdot \psi - a \cdot l \cdot \psi + 3f \cdot w]$$

und  $\delta_2 = t_2 \cdot M_2$ , wobei

$$t_2 = \frac{c}{6E \cdot J \cdot l} \cdot [3x \cdot f - c \cdot l + 3d \cdot u \cdot \psi] \quad (\text{Abb. 6}).$$

## II. Statische Berechnung beliebig geformter Hänge- und Sprengwerke.

Äußere Kräfte wirken nur am Stabwerk. Bei Belastung der Gurtknoten sind die Hängesäulenkräfte mit den auf den Streckbalken ausgeübten Kräften gleichwertig; werden Zugkräfte in den Hängesäulen positiv bezeichnet, so wird  $+V_1 = -X_1$ ;  $+V_2 = -X_2$ . Die Hängesäulenkräfte stehen also ebenfalls im Verhältnis  $\varphi$ .

Eine allgemeine zeichnerische Lösung ergibt sich wie folgt: An dem Hängewerk nach Abb. 7 seien zwei beliebige Lasten  $P_1$  und  $P_2$  gegeben. In die Gleichung 8 setzt man die Zahlenwerte ein und erhält das Kraft-

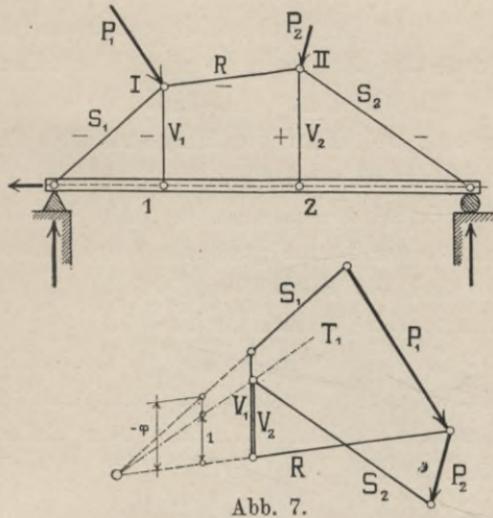


Abb. 7.

verhältnis. Die gegebenen Kräfte reiht man aneinander und zieht durch ihre Eckpunkte die Parallelstrahlen zum Gurt in gleichem Umlaufssinn (Kräfteplan in Abb. 7). Durch den Schnittpunkt des Riegelstrahles und der Kraftlinie für die Seitenschräge  $S_1$  ziehe man einen zu  $S_1$  zugeordneten Strahl  $T_1$ , und zwar so, daß  $S_1$  und  $T_1$  auf einer Senkrechten vom Riegelstrahl Strecken im Verhältnis  $-\varphi$  und 1 abschneiden. Der Schnittpunkt von  $T_1$  und  $S_2$  gibt  $V_2$  und damit  $V_1$ .

Für die Ausführung dieser Grundlösung, deren Richtigkeit ohne weiteres aus der Abbildung ersichtlich wird, ist zu beachten, daß Schrägenkraft und zugeordneter Strahl auf derselben Seite der Riegelkraft liegen müssen. Das Kraftverhältnis ist stets negativ, also muß  $-\varphi$  und 1 vom Riegelstrahl nach einer Seite aufgetragen werden. Es könnte

ebenso einfach zur Schrägenseite  $S_2$  ein zugeordneter Strahl  $T_2$  gezogen werden. Nur wäre alsdann 1 zwischen Schrägenlinie und Riegelstrahl einzutragen; auf derselben Senkrechten würde jetzt  $-\varphi$  den zugeordneten Strahl  $T_2$  ergeben, welcher nunmehr mit  $S_1$  zum Schnitt gebracht werden müßte.

Über die Wirkung der äußeren Kräfte und den Verlauf der inneren Spannungen lassen sich aus der Grundlösung einige allgemeine Beziehungen ableiten:

1. Ist der Streckbalken unbelastet, so haben die beiden Stielkräfte stets umgekehrtes Vorzeichen.

2. Wirkt nur eine Last von außen auf einen Gurtknoten, so erhält die Hängesäule des anderen Gurtpunktes Zug, die eigene Druck.

3. Schneiden sich im Kräfteplan die durch die Eckpunkte der Lasten gezogenen Gurtstrahlen in einem Punkte, so sind die Stielkräfte gleich Null. Die Gurtlinie ist in diesem Falle Seileck der Lasten.

4. Bei diesem Zustande muß die Mittelkraft der äußeren Kräfte durch den ideellen Firstpunkt gehen. Senkrechte Lasten  $P_1$  und  $P_2$  verhalten sich alsdann umgekehrt wie die Abstände  $g$  und  $h$ .

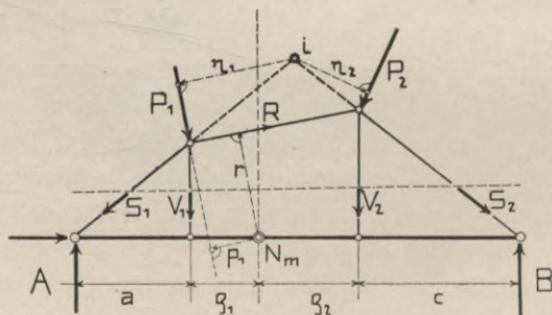


Abb. 8.

Auf rechnerischem Wege kann man die Kräfte des Stabwerkes durch den Momentennullpunkt oder mit Hilfe des Kraftverhältnisses bestimmen. Aus dem Momentenverhältnis ergibt sich der Momentennullpunkt; am besten berechnet man eine der Strecken (Abb. 8):

$$e_1 = -b \cdot \frac{\psi}{1-\psi} \quad \text{und} \quad e_2 = b \cdot \frac{1}{1-\psi}. \quad \text{Gl. 20.}$$

Denkt man sich durch  $N_m$  einen lotrechten Schnitt gelegt, so muß für den links abgeschnittenen Teil beispielsweise das statische Moment der äußeren Kräfte gleich dem Drehmoment der durchschnittenen Riegelkraft  $R$  für den Nullpunkt werden.

$$\text{Also:} \quad R = -\frac{1}{r} \cdot \left[ A \cdot (a + e_1) - P_1 \cdot p_1 \right] = -\frac{M_m^0}{r}. \quad \text{Gl. 21.}$$

Nach Berechnung der Riegelkraft können die Stiel- und Schrägenkräfte aus dem Gleichgewicht der Gurtknoten gefunden werden. Bei dieser Berechnung müssen zuerst die Auflagerkräfte bestimmt werden.

Das Kraftverhältnis gibt eine analytische Berechnung ohne vorherige Ermittlung der Auflagerkräfte. Denkt man sich einen wagerechten Schnitt durch Schrägen und Stiele gelegt, so müssen die durchschnittenen Kräfte mit den äußeren Lasten in den Gurtknoten im Gleichgewicht sein.

Stellt man für den ideellen Firstpunkt die Momentengleichung auf, so entfallen die Schrägenkräfte. Es ergibt sich:

$$P_1 \cdot \eta_1 - P_2 \cdot \eta_2 = -V_1 \cdot g + V_2 \cdot h = -M_i, \text{ demnach:}$$

$$V_1 = \mu_1 \cdot M_i; \quad \mu_1 = \frac{\varphi}{g \cdot \varphi - h} \quad \text{und} \quad V_2 = \mu_2 \cdot M_i; \quad \mu_2 = \frac{1}{g \cdot \varphi - h} \quad \text{Gl. 22.}$$

(Abb. 8). Diese Berechnung gilt auch für beliebige Innenbelastung des Riegels.

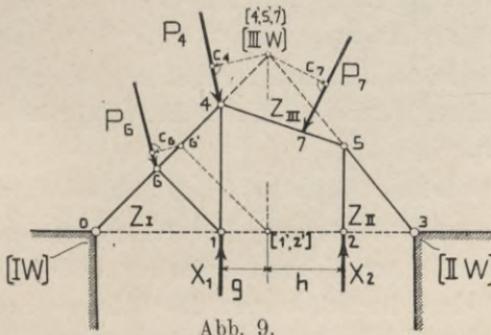


Abb. 9.

Sind außer den beiden oberen Gurtknoten andere Stabknoten durch Zwischenstäbe eingeschaltet, so führt eine

kinematische Berechnung zum Ziel. Die von dem Streckbalken auf das Stabwerk ausgeübten Kräfte  $X_1$  und  $X_2$  sind mit den äußeren Kräften am Stabwerk im Gleichgewicht. Erteilt man der kinematischen Kette irgend eine Momentanbewegung, so ist nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten für unelastische Systeme die Arbeit der äußeren Kräfte gleich Null. Man erhält:

$$0 = -P_6 \cdot c_6 - P_4 \cdot c_4 + P_7 \cdot c_7 + X_1 \cdot g - X_2 \cdot h \quad (\text{Abb. 9}).$$

Hierin bedeuten  $c$  die Hebelarme von den Endpunkten der lotrechten Geschwindigkeiten auf die äußeren Kräfte; Rechtsdrehung sei positiv. Also erhält man allgemein:

$$\text{Gl. 23.} \quad X_1 = -\mu_1 \cdot \Sigma P \cdot c; \quad \mu_1 = \frac{q}{g \cdot \varphi - h} \quad (\text{vgl. Gleichung 22}).$$

Kräfte am Streckbalken. Kommen für das zu untersuchende Hängewerk neben Belastungen des Stabwerkes Kräfte am Streckbalken selbst in Betracht, so wird man diese am besten für sich getrennt betrachten. Für alle Lastzustände, bei denen das Stabwerk unbelastet ist, läßt sich für die Stielkräfte ein allgemeiner Satz aufstellen. Denkt man sich den Balken mit seinen Lasten entfernt und bringt die Stielkräfte an den durchschnitten gedachten Stielen als äußere Lasten an, so muß das Stabwerk unter ihrem Einfluß im Gleichgewicht sein. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten gilt alsdann: Bei irgend einer Momentanverschiebung der kinematischen Kette muß die von den Stielkräften geleistete Arbeit gleich Null sein. Daraus folgt wieder:

1. Die beiden Stielkräfte verhalten sich umgekehrt wie die Abschnitte, welche der ideelle Firstpunkt im Mittelfelde abschneidet.

2. Die beiden Stielkräfte haben gleiches Vorzeichen.

Mittelbare Belastung des Streckbalkens. Es sei zunächst der für den Hochbau besonders wichtige Fall untersucht, bei dem die Belastungen des Balkens durch Unterzüge auf die Mittelknoten übertragen werden.

Die Unterzuglasten seien  $Y_1$  und  $Y_2$ . Die Zugkräfte in den Stielen  $V_1$  und  $V_2$ , die auf Durchbiegung des Balkens



zuglasten als Zugkräfte hinzu, so daß sich die wirklichen Stabkräfte in den Stielen ohne weiteres auf der Kraftlinie ablesen lassen.

Sollte das Krafteck zeichnerisch ungünstige Schnitte ergeben, so kann ein anderes Verfahren zur Anwendung gelangen. Wie vor, seien die Unterzuglasten bestimmt. Durch ihre Endpunkte im Krafteck ziehe man die Parallelen zu den Schrägenseiten, welche sich in  $O$  schneiden (Abb. 11). Auf der Kraftlinie trage man weiter hinter  $Y_2$  eine Hilfskraft  $\frac{Y_1 + Y_2}{1 - \varphi}$  an und ziehe den Leitstrahl  $L$ . Eine Parallele  $L'$  zu diesem durch  $\beta$  bringe man mit dem durch  $O$  gezogenen Riegelstrahl zum Schnitt. Die Senkrechte durch den Schnittpunkt schließt das Krafteck der Stabkräfte. Zum Beweise wolle man sich in Abb. 11 durch den Punkt  $\beta$  des Kräfteplanes zu den Schrägenseiten die Parallelen  $S_1'$  und  $S_2'$  ziehen; alsdann würden die drei Linien  $S_1'$ ,  $S_2'$ ,  $L'$  auf der  $V$ -Linie (und zwar von  $L'$  aus gerechnet) die vom Streckbalken aufgenommenen Kräfte  $X_1$  und  $X_2$  abschneiden, welche in dem zu berechnendem Kraftverhältnis  $\varphi$  stehen. Die drei Linien  $S_1$ ,  $S_2$  und  $L$  durch den Punkt  $O$  bilden ein Parallelbüschel zu den drei Strahlen  $S_1'$ ,  $S_2'$  und  $L'$  durch den Punkt  $\beta$ . Daraus folgt, daß  $\alpha\delta:\gamma\delta = X_1:X_2$  wird, und damit berechnet sich der Wert  $\gamma\delta$  wie in der Lösung eingeführt.

Ist die Größe  $\varphi$  nicht viel von 1 verschieden, so wird der Strahl  $L$  in der Abb. 11 steil. Einen ungünstigen Einfluß auf die Genauigkeit hat solche Neigung jedoch nicht; im Gegenteil wird gerade dann der Schnitt mit der Riegelinie ein scharfer.

Wirkt nur eine Unterzuglast, z. B.  $Y_1$ , so vereinfacht sich nach Abb. 12 die Konstruktion noch weiter. Durch die Endpunkte von  $Y_1$  ziehe man die Parallelen zu den Schrägenseiten. Ein durch das Verhältnis  $\varphi$  zu  $S_2$  zugeordneter Strahl gibt mit einer Parallelen zu  $S_1$  durch  $\beta$  die  $V$ -Linie.

Bei rechnerischer Ermittlung der vier Unbekannten (zwei Stielkräfte  $V$  und zwei Balkenlasten  $X$ ) aus den zwei

bekanten Unterzugskräften kommen die gegenseitigen Beziehungen scharf zum Ausdruck; es ergeben sich folgende vier Gleichungen zur Bestimmung der vier Unbekannten.

Zunächst gelten die beiden Begriffsgleichungen Nr. 24.

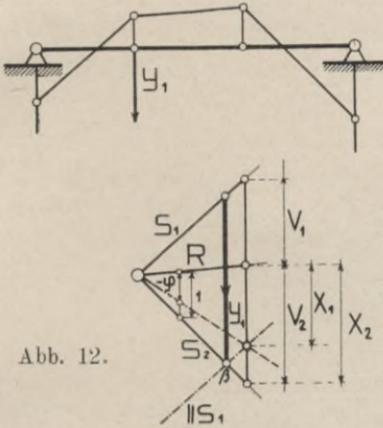


Abb. 12.

$$\text{I. } V_1 + X_1 = Y_1,$$

$$\text{II. } V_2 + X_2 = Y_2.$$

Nach dem für Kräfte am Streckbalken abgeleiteten, allgemeinen Satz verhalten sich die Stielkräfte (vgl. S. 688):

$$\text{III. } V_1 : V_2 = h : g.$$

Schließlich gilt für die vom Balken aufgenommenen Kräfte:

$$\text{IV. } X_1 : X_2 = \varphi.$$

Gl. 25.

Aus diesen vier Gleichungen bestimmen sich die Einzelwerte:

$$V_1 = h \cdot \frac{Y_1 - \varphi \cdot Y_2}{h - \varphi \cdot g};$$

$$V_2 = g \cdot \frac{Y_1 - \varphi \cdot Y_2}{h - \varphi \cdot g}.$$

$$X_1 = \varphi \cdot \frac{Y_1 \cdot g - Y_2 \cdot h}{\varphi \cdot g - h};$$

$$X_2 = \frac{Y_1 \cdot g - Y_2 \cdot h}{\varphi \cdot g - h}.$$

$$M_1 = (Y_1 \cdot g - Y_2 \cdot h) \cdot k_1;$$

$$M_2 = (Y_1 \cdot g - Y_2 \cdot h) \cdot k_2; \text{ dabei}$$

$$k_1 = \frac{a \cdot f \cdot \varphi + c}{l \cdot g \cdot \varphi - h};$$

$$k_2 = \frac{c \cdot a \cdot \varphi + d}{l \cdot g \cdot \varphi - h}.$$

Gl. 25<sup>a</sup>.

Die vorkommenden Längenabmessungen sind in der Abb. 4 angegeben.

Sind die Auflagerkräfte ermittelt, so kann man mit Hilfe des Momentennullpunktes zunächst die Riegelkraft nach Gleichung 21 wie folgt bestimmen:

$$R = -\frac{1}{r} \cdot [A \cdot (\alpha + e_1) - Y_1 \cdot e_1]$$

Gl. 26.

Aus  $R$  müssen alsdann die anderen Stabkräfte und die Biegemomente durch Gleichgewichtsbedingungen abgeleitet werden.

Gefährlichste Laststellungen für mittelbare Unterzugsbelastung des Streckbalkens. Ist  $H$  die wagerechte

Seitenkraft der Riegelkraft  $R$ , so gilt auch  $H = -\frac{1}{\eta} \cdot M_m^0$ , wie aus Gleichung 26 zu ersehen. Hierbei bedeutet  $M_m^0$  das Biegemoment, welches im Querschnitt  $N_m$  eines einfachen stellvertretenden Balkens auftreten würde. Somit ergibt sich die Einflußlinie für  $H$  aus der Einflußfläche für das Balkenmoment  $M_m^0$ , wie in Abb. 13 eingezeichnet;  $H$  sei jetzt als

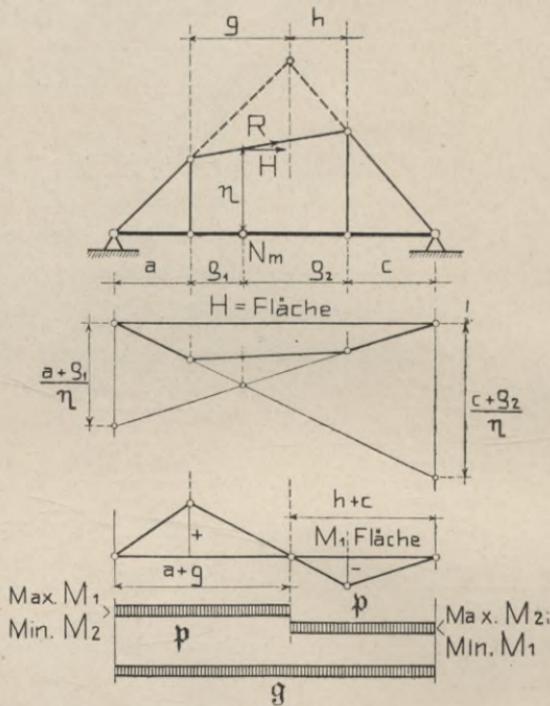


Abb. 13.

Druck positiv. Man übersieht aus der Einflußlinie, daß volle Nutzlast den gefährlichsten Wert ergibt. Dasselbe gilt natürlich für alle anderen Glieder des Stabwerkes.

Im Streckbalken können die gefährlichsten Biegemomente nur in den Mittelknoten auftreten. Die aus der Grundlösung abgeleiteten Beziehungen (vgl. Seite 20) lassen bezüglich des Einflusses veränderlicher Nutzlasten im Streckbalken folgende Sätze übersehen:

1. Die Senkrechte durch den ideellen Firstpunkt ist Lastscheide für sämtliche Biegemomente des Balkens.

2. Ist der Ausdruck für das Momentenverhältnis (Gleich. 11, 12, 16, 17) größer (kleiner) als 1, so entsteht das größte maßgebende Biegemoment im linken (rechten) Mittelknoten.

3. Einseitige Nutzlast bis zum ideellen Firstpunkt gibt die gefährlichste Laststellung für die Biegemomente.

4. Ist  $\frac{g \cdot (g + a)}{h \cdot (h + c)}$  größer (kleiner) als 1, so ist das linke (rechte) Dreieck der Einflußfläche größer, und daher die Belastung der linken (rechten) Seite die gefährlichste.

5. Nutzlasten links (rechts) vom Firstpunkt geben im linken (rechten) Mittelknoten positive Biegemomente.

Infolge einer gleichförmigen Nutzlast ( $p$  kg für die Längeneinheit) erhält man daher bei den gefährlichsten Laststellungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{Max } M_1 &= +p \cdot \frac{k_1}{2} \cdot g \cdot (a + g); & \text{Min } M_1 &= -p \cdot \frac{k_1}{2} \cdot h \cdot (c + h), \\ \text{Max } M_2 &= -p \cdot \frac{k_2}{2} \cdot h \cdot (c + h); & \text{Min } M_2 &= +p \cdot \frac{k_2}{2} \cdot g \cdot (a + g), \end{aligned} \right\} \text{Gl. 27.}$$

die  $k$ -Werte sind in Gleichung 25\* angegeben.

Eigengewicht ( $g$  kg für die Längeneinheit) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= g \cdot \frac{k_1}{2} \cdot [g \cdot (a + g) - h \cdot (c + h)]; \\ M_2 &= g \cdot \frac{k_2}{2} \cdot [g \cdot (a + g) - h \cdot (c + h)]. \end{aligned} \right\} \text{Gl. 28.}$$

Unmittelbare Belastung des Streckbalkens. Der Streckbalken sei durch beliebige lotrechte Kräfte  $P$  belastet. Der Tramen wirkt wie ein einfacher Balken, an dem neben den gegebenen Kräften  $P$  die noch unbekanntenen Stielkräfte  $V_1$  und  $V_2$  angreifen. Zur Bestimmung der Werte  $V$  dienen zwei Bedingungen, nämlich:  $V_1 : V_2 = h : g$  vgl. III in Gleichungen Nr. 25, und  $\delta_1 : \delta_2 = -g : h$  nach den allgemeinen kinematischen Gesetzen. Diesen wirklichen Zustand denke man sich in zwei Teilzustände zerlegt, indem jede Stielkraft in zwei Teile geteilt wird, und zwar:

$V_1 = Y_1 + X_1$  und  $V_2 = Y_2 + X_2$ . Hierbei sollen  $Y_1$  und  $Y_2$  diejenigen Auflagerkräfte sein, welche die Lasten  $P$  an einem stellvertretenden durchgehenden Träger auf vier starren Stützen in den mittleren Auflagern hervorrufen würden. Faßt man nun die nach den Gesetzen durchlaufender Träger zu berechnenden Kräfte  $Y$  mit den äußeren Lasten  $P$  zu einem ersten Teilzustande zusammen, so bleibt für den zweiten Teilzustand nur  $X_1$  und  $X_2$  in den Mittelknoten übrig. Bei dem ersten Teilzustande erleiden die Mittelknoten keine Durchbiegungen; daher hat der zweite Teilzustand die vollen wirklichen Durchbiegungen der Mittelknoten, für welche die kinematischen Gesetze gelten. Die Teilkräfte  $X$ , welche diese Durchbiegungen also allein hervorrufen, müssen demnach in dem bekannten Kraftverhältnis stehen. Es gelten daher für die wirklichen Stielkräfte, die Auflagerkräfte des durchgehenden Trägers und die vom Balken beim zweiten Teilzustande aufzunehmenden Kräfte  $X$  genau dieselben Beziehungen, welche für Unterzuglasten  $Y$  in den Gleichungen 25 I bis IV abgeleitet worden sind. Somit sind für die Bestimmung der Stabkräfte Unterzuglasten bei mittelbarer Belastung und Auflagerlasten eines stellvertretenden durchgehenden Trägers bei unmittelbarer Belastung in ihrer Wirkung vollständig gleich. Demnach ergibt sich für die Ausführung der Berechnung folgender, leicht zu übersehender Gedankengang:

Man berechne einen durchgehenden Träger unter dem Einfluß der gegebenen Lasten nach den Clapeyronschen Gesetzen.

Die mittleren Stützenmomente aus dieser Rechnung seien  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$ , die Auflagerkräfte  $Y_1$  und  $Y_2$ . Aus den letzten Werten finde man die Stabkräfte entweder zeichnerisch wie in Abb. 10, 11 und 12 angegeben oder rechnerisch aus den Gleichungen 25 a; die zugehörigen Momente seien  $\mathfrak{M}^1$  und  $\mathfrak{M}^2$ . Dann sind die wirklichen Biegemomente in den Mittelknoten  $M_1 = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}^1$  und  $M_2 = \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}^2$ . Die wirkliche Momentfläche ergibt sich aus den  $\mathfrak{M}_0$ -Flächen für die

drei Felder und einer gebrochenen Schlußlinie, die durch Auftragen der wirklichen Momente entsteht.

Im Hochbau sind in den weitaus meisten Fällen die Belastungen so einfacher Art, daß sie aus bekannten Formeln ohne zeichnerische Darstellung Momente und Auflagerkräfte der durchlaufenden Träger ergeben. Überhaupt wird sich dieser hier eingeschlagene Weg nur so lange empfehlen, als die geläufigen Clapeyronschen Gleichungen einfache Gestalt annehmen. Bei wagerechtem Riegel und symmetrischer Ausbildung vereinfachen sich die dargestellten Rechnungen erheblich, wie in den nachfolgenden Untersuchungen gezeigt wird.

### III. Unsymmetrische Hänge- und Sprengwerke mit wagerechtem Riegel.

Die kinematischen Gesetze für die Durchbiegungen der Mittelknoten vereinfachen sich wesentlich. Es war bereits an der Gleichung 5 der Satz abgeleitet: Die Verschiebungen der Mittelknoten verhalten sich wie die anliegenden Außenfelder. Das Verhältnis der stets entgegengesetzten Verschiebungen war dabei von der Belastung unabhängig. Daher:

$$\omega = -\frac{a}{c}.$$

Das gleichbleibende Verhältnis der auf den unbelasteten Streckbalken wirkenden Kräfte vereinfacht sich dementsprechend. Und zwar wird das Kraftverhältnis

$$\varphi = -\frac{c}{a} \cdot \frac{d^2 + \tau^2}{f^2 + \tau^2} \quad \text{wobei wieder } 2\tau^2 = l^2 - a^2 - c^2 \quad \text{Gl. 30.}$$

(Abb. 4). Wie einfach das Momentenverhältnis bei wagerechtem Riegel wird, ist bereits in der Gleichung 17 abgeleitet.

In verschiedener Form erhält man:  $\psi = -\frac{3f-c}{3d-a} = -\frac{3b+2c}{3b+2a}$  Gl. 30<sup>a</sup>.

Ebenso leicht läßt sich der Nullpunkt mit seinen Abständen

$$\text{berechnen } q_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{3f-c}{l+2b}; \quad q_2 = \frac{b}{2} \cdot \frac{3d-a}{l+2b}. \quad \text{Gl. 31.}$$

risch kann Momenten- und Kraftverhältnis mit geringer Mühe

gefunden werden. Nach Abb. 14 schlage man den Drittelpunkt 6 um 2 nach 7; ebenso den Drittelpunkt 8 um 1 nach 9

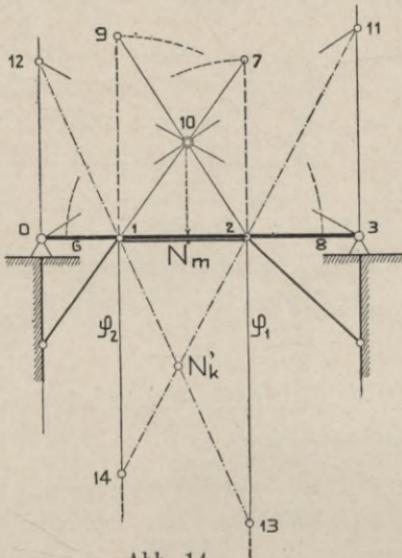


Abb. 14.

Man ziehe das Innenkreuz 1—7/2—9, alsdann durch 10 das Außenkreuz 0—11/3—12, schließlich wieder das Innenkreuz 12—1—13/11—2—14. Damit ergibt sich der verschränkte Kraftnullpunkt und  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ , welche

$$\varphi = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \text{ bestimmen.}$$

Kräfte am Stabwerk. Die Kräfte des Stabwerkes lassen sich zunächst, wie im allgemeinen Falle, nach dem zeichnerischen Verfahren finden. In Abb. 15 ist der Kräfteplan für eine lotrechte (15b) und eine wagerechte (15c)

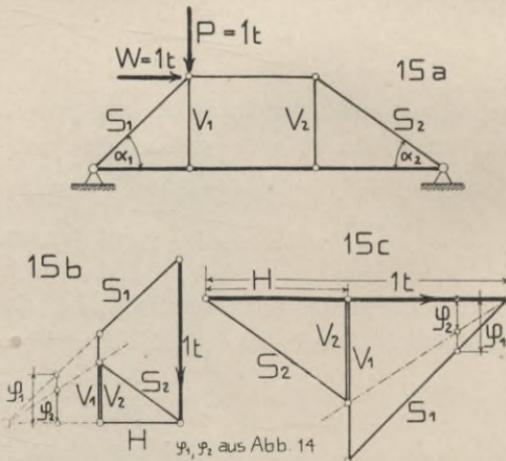


Abb. 15.

Last = 1 t im linken Obergurtpunkt gezeichnet (vgl. Grundlösung in Abb. 7). Die wagerechte Richtung des Riegels

vereinfacht in höherem Maße die rechnerische Ermittlung. Die Riegelkraft  $R$  wird zu einer wagerechten Kraft  $H$ . Bei lotrechter Belastung lassen sich aus  $H$  sämtliche anderen Stabkräfte besonders einfach finden. Es ist allgemein:

$$H = -\frac{M_m^0}{\eta}; S_1 = +H \cdot \sec \alpha_1; S_2 = +H \cdot \sec \alpha_2 \quad (\text{Abb. 15 a}). \quad \text{Gl. 32.}$$

Noch einfacher wird die Bestimmung der Biegemomente in den Mittelknoten. Man benutzt bei lotrechter Belastung am besten die Querkraft im Mittelfelde. Da sie bei wagerechtem Riegel nur vom Balken aufgenommen werden kann, ist das Moment im Mittelfelde durch den Momentennullpunkt bestimmt. Man erhält:  $M_1 = -Q \cdot \varrho_1$ ;  $M_2 = +Q \cdot \varrho_2$ . Gl. 32<sup>a</sup>.

Für die Lage des Momentennullpunktes ergibt sich aus den Gleichungen für das Momentenverhältnis: 1. Der Nullpunkt liegt näher am Knotenpunkt des größeren Außenfeldes, daher: 2. Der Knotenpunkt des kleineren Außenfeldes erhält das maßgebende größte Biegemoment. Der letzte Satz gilt genau so für beliebige Belastung des Streckbalkens durch Unterzüge in den Mittelknoten.

Mittelbare Belastung des Streckbalkens durch Unterzüge. Die Bestimmung der Biegemomente in den Mittelknoten aus den gefundenen Unterzugslasten  $Y_1$  und  $Y_2$  verkürzt sich wesentlich, da die in Gleichung 25 a eingeführten  $k$ -Werte einfachere Formen annehmen. Es wird:

$$k_1 = \frac{b \cdot c}{2h \cdot l} \cdot \frac{3b + 2c}{l + 2b}; k_2 = -\frac{b \cdot c}{2h \cdot l} \cdot \frac{3b + 2a}{l + 2b}; \quad \text{Gl. 33.}$$

demnach also auch;

$$M_1 = (Y_1 \cdot a - Y_2 \cdot c) \cdot \frac{\varrho_1}{l}; M_2 = -(Y_1 \cdot a - Y_2 \cdot c) \cdot \frac{\varrho_2}{l}. \quad \text{Gl. 34.}$$

Diese Beziehungen kommen auf die Gleichung 32 hinaus, in der die Momente durch die Querkraft im Mittelfelde ausgedrückt sind (Abb. 4 und 13 erklären die Buchstaben).

Gleichmäßig verteiltes Eigengewicht ( $g$ ) ergibt nach diesen Formeln:

$$M_1 = -g \cdot \frac{(c-a) \cdot b}{2} \cdot \frac{3f-c}{2l+4b}; M_2 = +g \cdot \frac{(c-a) \cdot b}{2} \cdot \frac{3d-a}{2l+4b}, \quad \text{Gl. 35.}$$

dabei wird der Schub im Riegel:  $H = -g \cdot \frac{(a+\varrho_1) \cdot (c+\varrho_2)}{2 \cdot \eta}$ . Gl. 36.

Für eine gleichförmige Nutzlast ( $p$ ) gelten zunächst mit einigen Vereinfachungen die allgemeinen Gesetze:

1. Gefährlichste Laststellung für die Knotenmomente ist einseitige Belastung bis zum ideellen Firstpunkt, und zwar auf der größeren Balkenhälfte.

2. Bei dieser Laststellung erhält der Mittelknoten des kleineren Außenfeldes (absolut genommen) das größere Moment.

3. Und zwar ist dieses Moment ein Minimum (negativ). Man erhält für die gefährlichste Laststellung ( $c$  sei kleiner als  $a$ ):

$$\text{Gl. 37.} \quad \text{Min } M_2 = \frac{p}{2} \cdot \left[ \frac{(a+e_1)^2}{l} - \frac{g^2}{b} \right] \cdot \frac{b \cdot (3d-a)}{2l+4b}.$$

Unmittelbare Belastung des Streckbalkens. Für gleichmäßiges Eigengewicht lassen sich die Clapeyronschen Gleichungen des stellvertretenden durchgehenden Trägers in einfacher Form aufstellen:

$$\text{Es wird: } 2 \mathfrak{M}_1 \cdot (a+b) + \mathfrak{M}_2 \cdot b = -\frac{g}{4} \cdot (a^3 + b^3)$$

$$\mathfrak{M}_1 \cdot b + 2 \mathfrak{M}_2 \cdot (b+c) = -\frac{g}{4} \cdot (b^3 + c^3).$$

Die Stützkräfte selbst sind:

$$Y_1 = g \cdot \frac{a+b}{2} - \frac{\mathfrak{M}_1}{a} + \frac{\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1}{b}$$

$$Y_2 = g \cdot \frac{b+c}{2} - \frac{\mathfrak{M}_2}{c} + \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{b}$$

(vgl. die Erklärungen für die verschiedenen Momente Seite 28).

Durch Einsetzen dieser Werte (an Stelle der Unterzuglasten) in die Gleichungen 34 wird also infolge Eigengewichts für den zweiten Teilzustand (vgl. Seite 28) das Moment:

$$\mathfrak{M}^1 = \frac{e_1}{2b} \cdot \left[ g \cdot b \cdot (a-c) + 2 \cdot (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1) \right];$$

$$\mathfrak{M}^2 = -\frac{e_2}{2b} \cdot \left[ g \cdot b \cdot (a-c) + 2 (\mathfrak{M}_2 - \mathfrak{M}_1) \right].$$

Bei gleichförmigen Nutzlasten entsprechen für die üblichen Längenabmessungen der Hänge- und Sprengwerke die gefährlichsten Laststellungen für die größten Mittelknotenmomente bei mittelbarer und unmittelbarer Belastung einander sehr. Für das Biegemoment eines Mittelknotens gibt es im

Mittelfelde eine Lastscheide. Nur bei ungewöhnlichen Feldverhältnissen kann auch im anliegenden Felde eine zweite Lastscheide hinzutreten. Für die praktische Bestimmung des gefährlichsten Momentes wird es immer ausreichen, mit einseitigen Laststellungen, vom Endpunkt bis zur Lastscheide im Mittelfelde vorgeschoben, zu rechnen. Aus der Bedingung, daß eine Last 1 im Lastscheidepunkt für den untersuchten Mittelknoten ein Moment gleich Null ergeben muß, lassen sich die Abstände wie folgt ermitteln (vgl. Abb. 18):

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= v_1 \pm \sqrt{v_1^2 - \frac{c^2}{3}}; & v_1 &= \frac{4c \cdot l + 3b \cdot f - b \cdot c}{6l} \\ \xi_2 &= v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - \frac{a^2}{3}}; & v_2 &= \frac{4a \cdot l + 3b \cdot d - b \cdot a}{6l} \end{aligned} \right\} \text{Gl. 41.}$$

In der Regel ist das gefährlichste Moment im Mittelknoten am kleineren Außenfelde als ein Minimum zu bestimmen. Die zugehörige Belastung reicht vom entgegengesetzten Lager bis zum vorberechneten Lastscheidepunkt im Mittelfelde. Ebenso ergibt das Eigengewicht im Mittelknoten am kleinerem Außenfelde einen negativen Wert.

#### IV. Symmetrische Hänge- und Sprengwerke.

Für symmetrische Tragwerke wird infolge der gleichen Außenfelder und des wagerechten Riegels das Weg-, Kraft- und Momentenverhältnis gleich — 1. Schon bei den kinematischen Beziehungen wurde für die Verschiebungen der für jede Belastung gültige Satz aufgestellt: Senkung des einen Mittelknotens ist Hebung des anderen Mittelknotens. In den vorstehenden Verhältnisbestimmungen ist auch für beliebige Belastung der Gurtknoten die Beziehung enthalten: Solange der Balken selbst unbelastet ist, sind die Stielkräfte umgekehrt gleich; ebenso die Biegemomente in den Mittelknoten. Die Momentenfläche des Balkens ist symmetrisch.

Kräfte an den Gurtknoten. Die zeichnerische Ermittlung der Stabkräfte ist ohne Vorberechnung für beliebige Belastung ohne weiteres möglich.

Gang der Untersuchung. Man reihe die Lasten aneinander, ziehe durch den Anfangs- und Endpunkt Parallelen zu den Streben, alsdann durch deren Schnittpunkt eine Lotrechte, durch den mittleren Eckpunkt der Lasten eine Wage-rechte. Damit sind alle Stabkräfte bestimmt.

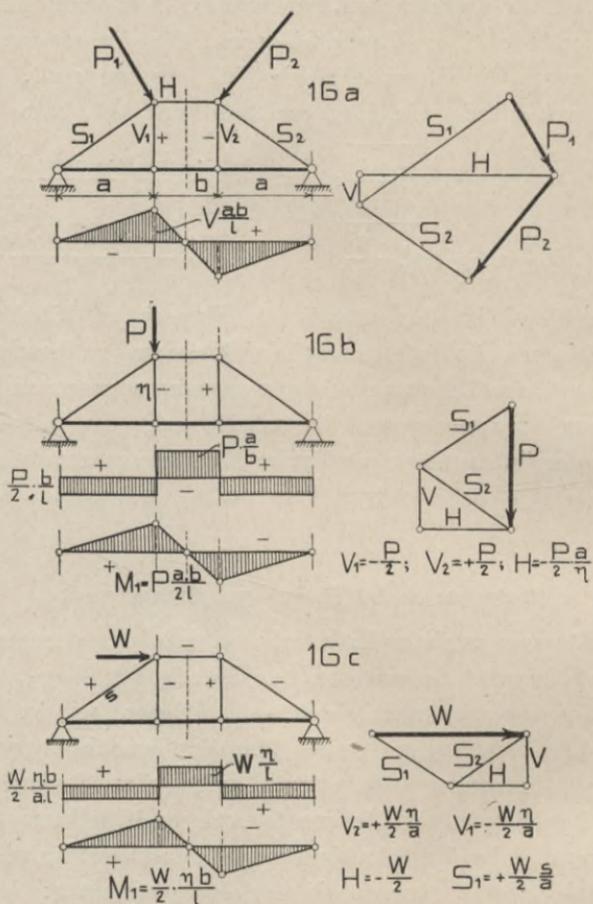


Abb. 16.

Man übersieht aus dieser Konstruktion:

1. Äußere Kräfte an den Gurtknoten und die durch dieselben hervorgerufenen Strebenkräfte bilden ein geschlossenes Krafteck. Daher:

2. Für die Bestimmung der Strebenkräfte kann man die äußeren Kräfte der Gurtknoten nach dem ideellen Firstpunkt verlegen und sie dort nach den Streben zerlegen.

In den Abb. 16 sind für beliebige Belastung (16a), alsdann für eine lotrechte Kraft  $P$  (16b), schließlich für eine wagerechte Kraft  $W$  (16c) die Kräftepläne gezeichnet.

Mittelbare Belastung des Streckbalkens durch Unterzüge. Ist das Tragwerk unbelastet, so gilt für jede Belastung des Tragens: Die Stielkräfte sind gleich groß und erhalten dasselbe Vorzeichen. Sind die Unterzuglasten bekannt, so berechnet man die Stabkräfte aus der Beziehung: Die Stielkräfte sind gleich der halben Summe der angreifenden Unterzuglasten und daher für alleinige Belastung des Mittelfeldes gleich der halben Summe der Lasten.

Für die Beanspruchung des Balkens durch Unterzuglasten findet man: Die Momentenfläche ist symmetrisch; die Biegemomente in den Mittelknoten sind umgekehrt gleich groß. Somit wird:  $M_1 = \frac{Y_1 - Y_2}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{l}$ . Für eine Einzel-  
last  $P$  in 1 also:  $M_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{l}$ ;  $M_2 = -M_1$  (Abb. 17a).

Gleichmäßiges Eigengewicht ergibt in den Stäben den bekannten Zustand der Symmetrie, bei dem im Balken keine Momente entstehen.

Bei gleichförmiger Nutzlast entsteht der gefährlichste Zustand durch einseitige Belastung einer Hälfte. Man erhält (Abb. 17b)

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= +p \cdot \frac{a+b}{4} = V_2; & H &= -p \cdot \frac{a}{4 \cdot \eta} (a+b); \\ S_2 &= -p \cdot \frac{s}{4 \cdot \eta} \cdot (a+b); \\ M_1 &= -p \cdot \frac{a \cdot b}{8} = -M_2; & \text{im Mittelfelde } Q &= +p \cdot \frac{a}{4} \cdot \end{aligned} \right\} \text{Gl. 42.}$$

Unmittelbare Belastung des Streckbalkens. Für unmittelbare Belastung des Streckbalkens übersieht man zu-

nächst, daß symmetrische Belastung keine Durchbiegung in den mittleren Stützpunkten ergibt. Weiterhin folgt aus der Symmetrie,

daß eine Last  $P$  in beliebiger Stellung auf der linken Hälfte im oberen Stabwerke dieselben Spannungen ergeben muß, wie eine gleiche Last auf der rechten Hälfte. Daraus erkennt man die Richtigkeit folgenden Rechenverfahrens: Man füge zu jeder Belastung das Spiegelbild hinzu. Für die nunmehr symmetrische Belastung werden die Stützkkräfte eines durchgehenden Trägers auf starren Stützen bestimmt. Die wirklichen Stabkräfte der Hängesäulen sind halb so groß wie diese Werte.

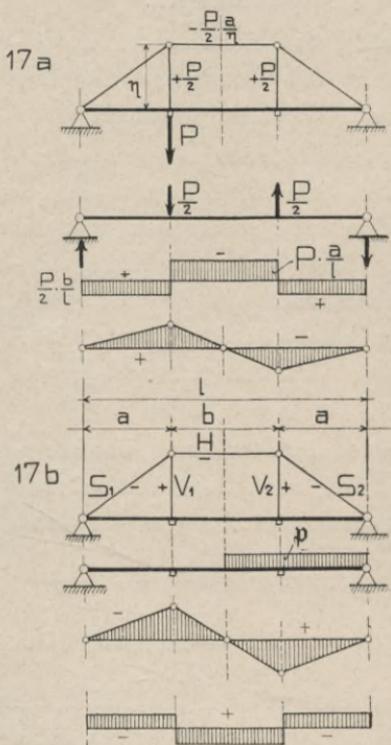


Abb. 17.

momente des symmetrischen durchlaufenden Trägers einfach. Für die gewöhnlichen Belastungen des Hochbaues werden die in den Clapeyronschen Gleichungen vorkommenden Momente der  $M_0$ -Flächen aus geläufigen Formeln ohne Darstellung dieser Flächen gefunden werden können. Sind dann die mittleren Stützkkräfte des ideellen beiderseits gleichen Zustandes berechnet, so kann für die daraus bestimmten halben Hängekräfte und die untersuchte unsymmetrische Belastung ein gemeinsames Seileck als Momentenfläche gefunden werden. Für Einzellasten und Streckenbelastungen sind nach den Bezeichnungen der Abb. 18a die bekannten für die Ausrechnung der Clapeyronschen Gleichungen not-

wendigen statischen Momente der  $M_0$ -Flächen zusammengestellt.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Lastzustand I } \frac{L}{R} = q \cdot \frac{a^4}{24}; \text{ Lastzustand II } \frac{L}{R} = \frac{q}{24} \cdot (b^2 - x^2)^2; \\ \text{Lastzustand III } \frac{L}{R} = \frac{P}{6} \cdot x \cdot (a^2 - x^2) \\ \frac{L}{R} = \frac{q \cdot x'^2}{24} \cdot (2b^2 - x'^2); \end{array} \right\} \text{Gl. 43.}$$

Für gleichmäßige volle Belastung durch Eigengewicht wird das Stützenmoment in den Mittelknoten:  $M = -\frac{q}{4} \cdot \frac{a^3 + b^3}{2a + 3b}$ . Gl. 44.

Somit werden die Hängekräfte als Stützenkräfte

$$V = \frac{q}{2} \cdot \left[ (a + b) + \frac{a^3 + b^3}{2a \cdot (2a + 3b)} \right]. \quad \text{Gl. 45.}$$

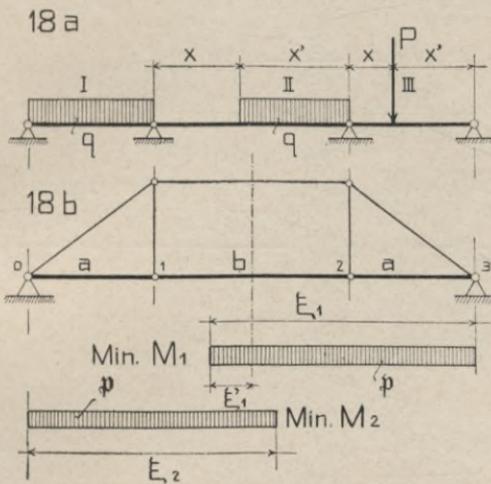


Abb. 18.

Für gleichförmige Nutzlasten wird auch hier einseitige Belastung vom Auflager bis zur Lastscheide in dem Mittelfelde als gefährlichste Belastung für die größten negativen Biegemomente in den Mittelknoten eingeführt. Handelt es sich z. B. um den linken Mittelknoten, so läßt sich aus dem negativen Moment des Eigengewichtes übersehen, daß die Lastscheide im Mittelfelde näher am linken Knoten liegen muß. Es möge für die Anwendung eine genügend genaue

Annäherung zur Bestimmung der Lastscheide angegeben  
 Gl. 46. werden in der Gleichung:  $\xi_1 = \frac{l}{2} \cdot \left[ 1 + \frac{3b}{4a} \cdot \frac{b}{l+2b} \right]$ . Die  
 Annäherung ist aus der genauen Formel (Gleichung 41) ab-  
 geleitet, indem dort die Unbekannte  $\xi_1$  durch  $\xi_1 = \frac{l}{2} + \lambda \cdot l$

ersetzt wurde;  $\lambda^2$  ist alsdann als kleiner Wert gegen  $\lambda$  vernachlässigt worden (Abb. 18b). Für die gefährlichste Laststellung bei Nutzlasten berechnet sich daher:

$$\text{Gl. 47. } \left\{ \begin{array}{l} + V_1 = \frac{1}{2} \left[ p \cdot \frac{a+b+2\xi_1'}{2} - \frac{\mathfrak{M}_1}{a} \right], \\ \text{wobei} \quad \mathfrak{M}_1 = -\frac{p}{4} \cdot \frac{a^3 + b^3 + \xi_1' \cdot (3b^2 - 4\xi_1'^2)}{2a + 3b}. \end{array} \right.$$

Daraus wird das gesuchte Minimum im linken Mittelknoten:

$$\text{Gl. 48. } \text{Min } M_1 = -V \cdot a + \frac{p \cdot \xi_1'^2 \cdot a}{2l} \quad (\text{Abb. 18b}).$$

Für die üblichen Abmessungen hölzerner Hochbautragwerke wird  $\xi_1'$  etwa  $0,2b$  bis  $0,25b$ . Für die üblichen Fälle gilt ohne weiteres als gute Annäherung:

$$\text{Gl. 48}^a. \text{Min } M_1 = -p \cdot \frac{a}{4} \cdot \left[ a + 1,5b + \frac{a^3 + 1,7b^3}{2a \cdot (2a + 3b)} - \frac{2 \cdot (a + 0,75b)^2}{l} \right].$$

### V. Tragwerke mit drei gleichen Feldern.

Bei gleicher Feldweite vereinfachen sich besonders alle analytischen Beziehungen zur Berechnung der Stabkräfte und Momente. Für das doppelte Hängewerk nach Abb. 19a sind die Stabkräfte und Momente in der auf S. 39 stehenden Tabelle zusammengestellt, und zwar für die Lastzustände A: lotrechte Last  $P$  in 1; B: wagerechte Kraft  $W$ , nach rechts wirkend, in 1; C: Eigengewicht, gleichförmig, durch Unterzüge übertragen; D: Nutzlast, einseitig vom rechten Lager bis zur Mitte, desgl. durch Unterzüge übertragen.

Bei unmittelbarer Belastung des Streckbalkens ergeben sich für die häufigsten Belastungsfälle folgende Stabkräfte und Momente:

Lastzustand	$H$	$V_1$	$V_2$	$S_1$	$S_2$	$M_1$	$M_2$	$Q_m$
A	$-\frac{P \cdot a}{2 \cdot \eta}$	$\frac{P}{2}$	$+\frac{P}{2}$	$-\frac{P \cdot s}{2 \cdot \eta}$	$-\frac{P \cdot s}{2 \cdot \eta}$	$+\frac{P \cdot a}{6}$	$-\frac{P \cdot a}{6}$	$-P$
B	$-\frac{W}{2}$	$\frac{W \cdot \eta}{2 \cdot a}$	$+\frac{W \cdot \eta}{2 \cdot a}$	$+\frac{W \cdot s}{2 \cdot a}$	$-\frac{W \cdot s}{2 \cdot a}$	$+\frac{W \cdot \eta}{6}$	$-\frac{W \cdot \eta}{6}$	$+\frac{W \cdot l}{6}$
C	$-\frac{a^2}{\eta}$	$+\frac{g \cdot a}{2}$	$+\frac{g \cdot a}{2}$	$-\frac{a \cdot s}{\eta}$	$-\frac{a \cdot s}{\eta}$	0	0	0
D	$-\frac{a^2}{2 \cdot \eta}$	$+\frac{a}{2}$	$+\frac{a}{2}$	$-\frac{a \cdot s}{2 \cdot \eta}$	$-\frac{a \cdot s}{2 \cdot \eta}$	$-\frac{a^2}{8}$	$+\frac{a^2}{8}$	$+\frac{a}{4}$

A. Eigengewicht (Abb. 19b):

$$V_1 = V_2 = 1,1 \cdot g \cdot a;$$

$$H = -1,1 \cdot g \cdot \frac{a^2}{\eta};$$

$$M_1 = M_2 = -g \cdot \frac{a^2}{10};$$

$$M_m = +g \cdot \frac{a^2}{40}.$$

} Gl. 49.

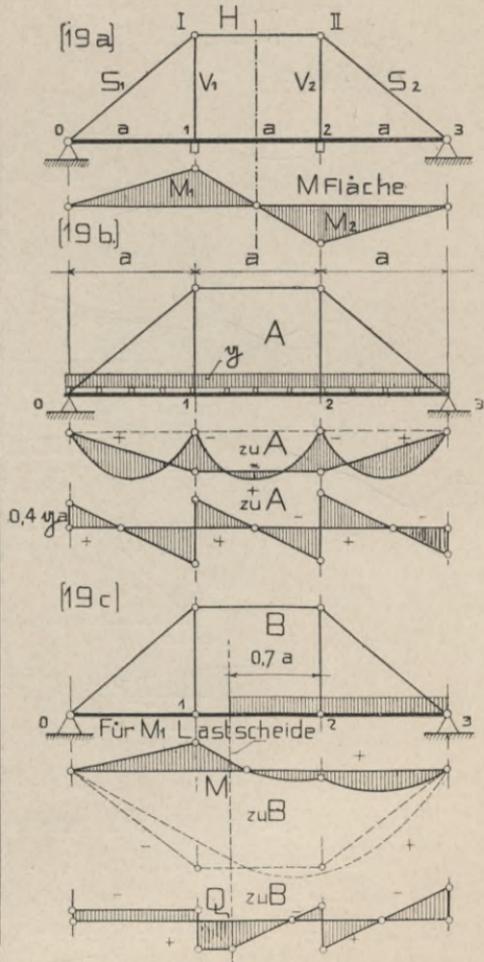


Abb. 19.

B. Nutzlast, gleichförmig (Abb. 19c): Die gefährlichste Nutzlast entsteht durch einseitige Belastung bis zur Lastscheide in dem Mittelfelde, die bei  $0,7 a$  liegt. Das größte Moment tritt in dem nicht belasteten Mittelknoten auf; es wird

Gl. 50.

$$\text{Min } M_1 = -0,182 p \cdot a^2.$$

Bei diesem Zustande werden die Stabkräfte in den Hängestäben  $V = 0,664 \cdot p \cdot a$ .

### VI. Zahlenbeispiele.

Nr. I. Doppelpes Hängewerk als Dachstuhl mit angehängter Decke; drei gleiche Felder; unmittelbare Belastung des Balkens.

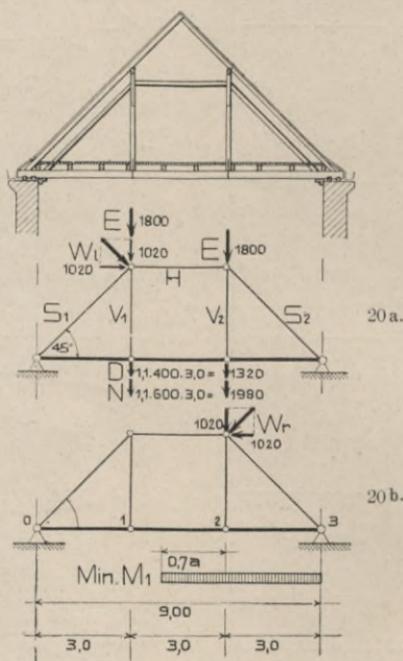


Abb. 20.

Belastungen (Schneelasten sind nicht vorhanden)

$E$ Dachgewicht . . . . .	150 kg/qm	Grundfläche,
$W$ Wind . . . . .	85 "	Dachfläche,
$D$ Eigengewicht der Decke . . . . .	100 "	Grundfläche,
$N$ Nutzlast der Decke . . . . .	150 "	"

Binderweite 4 m.

Stabwerk: Gefährlichster Lastzustand: ( $E$ ,  $W$  links,  $D$ ,  $N$  voll; Abb. 20 a).

$$H = - \left[ 1800 + \left( \frac{1020}{2} + \frac{1020}{2} \right) + 1320 + 1980 \right] = -6120 \text{ kg,}$$

$$S_2 = -6120 \cdot \frac{1}{0,71} = -8620 \text{ kg,}$$

$$V_2 = + \left( \frac{1020}{2} + \frac{1020}{2} \right) + 1320 + 1980 = +4320 \text{ kg.}$$

Balken: Gefährlichster Lastzustand: ( $W$  rechts,  $D$ ,  $N$  rechts; Abb. 20 b)

$$W_r \text{ gibt } M_1 = -2 \cdot \frac{1020 \cdot 3,0}{6,0} = -1020 \text{ kgm,}$$

$$D \text{ " " } = -(4 \cdot 100) \cdot \frac{3,0^2}{10} = -360 \text{ "}$$

$$N_r \text{ " " } = -0,182 \cdot (4 \cdot 150) \cdot 3,0^2 = -985 \text{ "}$$

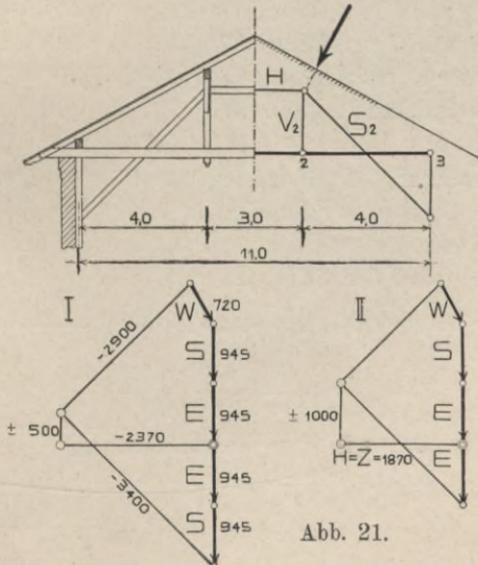
$$\text{Größtes Moment} = -2365 \text{ kgm.}$$

Hierbei tritt im Balken ein Zug auf von

$$+1800 + \left( \frac{1020}{2} + \frac{1020}{2} \right) + 1320 + 0,664 \cdot (4 \cdot 150) \cdot 3,0 = 5340 \text{ kg.}$$

1 Balken 22/26 cm mit  $W = 2479 \text{ cm}^3$  und  $F = 572 \text{ cm}^2$  gibt

$$\sigma = \frac{236500}{2479} + \frac{5340}{572} = 105 \text{ kg/qcm.}$$



Nr. II. Hänge- und Sprengwerk als Dachbinder.  
Symmetrische Anordnung mit ungleichen Feldern (Abb. 21).

Belastungen: Binderweite = 3,60 m.

$E$  Eigengewicht 75 kg/qm Grundfläche = 270 kg/m Binder,  
 $S$  Schnee . . . 75 " " = 270 " "  
 $W$  Wind . . . 50 " Dachfläche = 180 " Gurt.

Knotenlasten:  $E = 3,5 \cdot 270 = 945 \text{ kg} = S$ ;  
 $W = 180 \cdot 4 = 720 \text{ kg}$ .

Kräfteplan I für  $E$ ,  $S$  beiderseits,  $W$  links gibt gefährlichste Kräfte im Stabwerk:

$H = -2370$ ;  $S_1 = -2900$ ;  $S_2 = -3400$ ;  $V_1 = -500 = -V_2$ .

Kräfteplan II für  $E$ ,  $S$  links,  $W$  links gibt gefährlichsten Zustand im Balken:  $V_1 = -1000 = -V_2$ :

Max  $M_1 = 1000 \cdot 3,0 \cdot 4,0 \cdot \frac{1}{11} = 1091 \text{ kgm}$ ; dabei  $Z = 1870 \text{ kg}$ .

Nutzbarer Querschnitt Doppelbalken  $2 \cdot 10/20 \text{ cm}$  mit  
 $W = 1333 \text{ cm}^3$ ,  $F = 400 \text{ cm}^2$ , daher  $\sigma = \frac{109100}{1333} + \frac{1870}{400}$   
 $= 86 \text{ kg/qcm}$ .

Nr. III. Symmetrisches Hängewerk mit ungleichen Feldern als Dachbinder mit angehängter Decke (Abb. 22).

Fall A. Unmittelbare Belastung des Balkens.

Belastungen: Binderweite = 4 m.

$E$  Eigengewicht mit Dach 130 kg/qm, = 520 kg/m Binder,  
 $S$  Schnee für Grundfläche 75 " = 300 " "  
 $W$  Wind für Dachfläche . 50 " = 200 " Gurt,  
 $D$  Deckeneigenlast . . . 75 " = 300 " Binder,  
 $N$  Nutzlast der Decke . . 100 " = 400 " "

Stabwerk: Für Spannriegel und Streben entsteht gefährlichste Laststellung aus  $E$ ,  $S$  beiderseits,  $W$  links,  $D$ ,  $N$  voll; Knotenlasten sind in Abb. 22a eingezeichnet. Im Spannriegel wird der Schub  $H$  aus

$E, S, D, N$ :  $-(1950 + 1125 + 1245 + 1660) \cdot \frac{3,5}{2,5} = -8372 \text{ kg}$

aus  $W$   $-\left(\frac{810}{2} \cdot \frac{3,5}{2,5} + \frac{380}{2}\right) = -757 \text{ ,,}$

daher größter Riegedruck  $H_{\min} = -9129 \text{ kg}$ ,  
somit in der rechten Strebe

$S_{\min} = -9129 \cdot \frac{4,3}{3,5} = -11217 \text{ kg}$ .

In der rechten Hängesäule entsteht größter Zug bei  $S$  links,  $W$  links,  $D$ ,  $N$  voll:

$$\text{Max } V_2 \text{ aus } D, N \text{ voll} = +1245 + 1660 = +2905 \text{ kg}$$

„  $S$  links,  $W$  links

$$= \left( \frac{810}{2} + \frac{380}{2} \cdot \frac{2,5}{3,5} + \frac{1125}{2} \right) = +1104 \text{ „}$$

$$\text{daher Max } V_2 \text{ zusammen} = +4009 \text{ kg.}$$

Min  $V_2$  entsteht bei  $S$  rechts,  $W$  rechts,  $D$ :

$$\text{Min } V_2 = -1090 + 1245 = +155 \text{ kg.}$$

Balken: Gefährlichste Laststellung für Min  $M_1$  entsteht durch  $S$  rechts,  $W$  rechts,  $D$ ,  $N$  rechts:

aus  $S$  rechts und senkrechter Windkom-

$$\text{ponente } W': -(1125 + 810) \cdot \frac{1}{2} \cdot (3,5 \cdot 4,0) \cdot \frac{1}{11} = -1229 \text{ kgm}$$

aus wagerechter Windkomponente

$$380 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2,5 \cdot 4,0}{11} = -173 \text{ „}$$

$$\text{aus } D = -\frac{300}{4} \cdot \frac{3,5^3 + 4,0^3}{2 \cdot 3,5 + 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{3,5} = -120 \text{ „}$$

aus  $N$  rechts berechnet sich Min  $M$  wie folgt:

$$\text{Gl. 46: } \xi_1 = \frac{11}{2} \left( 1 + \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 3,5} \cdot \frac{4,0}{11 + 2 \cdot 4} \right) = 6,49 \text{ m,}$$

$$\text{alsdann } \xi'_1 = 0,99 \text{ m,}$$

$$\text{Gl. 47: } \mathfrak{M}_1 = -\frac{400}{4} \cdot \frac{3,5^3 + 4^3 + 0,99 \cdot (3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 0,99^2)}{2 \cdot 3,5 + 3 \cdot 4,0}$$

$$= -793 \text{ kgm und}$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left( 400 \cdot \frac{3,5 + 4 + 2 \cdot 0,99}{2} + \frac{793}{3,5} \right)$$

$$= 1062 \text{ kg, also}$$

Gl. 48: infolge  $N_r$  wird

$$\text{Min } M_1 = -1062 \cdot 3,5 + 400 \cdot \frac{6,49^2 \cdot 3,5}{2 \cdot 11} = -1037 \text{ „}$$

$$\text{daher maßgebendes Moment } M = -2559 \text{ kgm.}$$

Statt der genauen Ausrechnung nach Gl. 46, 47, 48 hätte kürzer ohne weiteres Gl. 48a benutzt werden können, welche statt 1037 den Wert 1033 ergeben hätte.

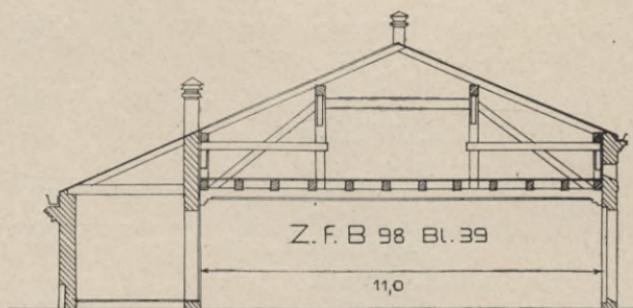
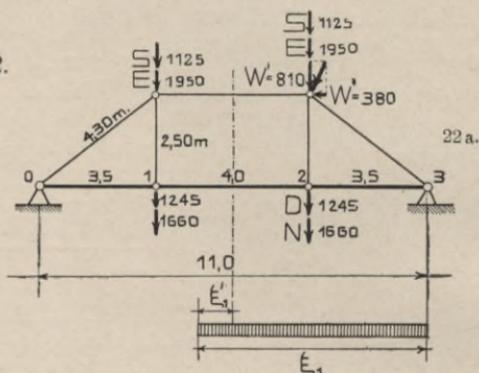


Abb. 22.



Als Zug im Balken wird zugunsten der Sicherheit der Wert aus voller Belastung gesetzt, also  $Z = \text{Min } H = 9129 \text{ kg}$ . Bei einem Balken  $24/30 \text{ cm}$  mit  $W = 3600 \text{ cm}^3$  und  $F' = 720 \text{ cm}^2$  erhält man

$$\sigma = \frac{255900}{3600} + \frac{9129}{720} = 71 + 13 = 84 \text{ kg/qcm.}$$

Fall B: Mittelbare Belastung des Balkens durch Unterzüge.

Stabwerk: Im Spannriegel und den Streben ergibt dieselbe gefährlichste Laststellung Knotenlasten aus  $D = 1125 \text{ kg}$ , aus  $N \text{ voll} = 1500 \text{ kg}$ .

$$H = - \left( 1950 + 1125 + 1125 + 1500 \right) \cdot \frac{3,5}{2,5} - \left( \frac{810}{2} \cdot \frac{3,5}{2,5} + \frac{380}{2} \right) \\ = -8737 \text{ kg,}$$

$$\text{daraus } S \text{ min in rechter Strebe} = -8738 \cdot \frac{4,3}{3,5} = -10734 \text{ kg.}$$

In der rechten Hängesäule wird entsprechend der größte Zug  $= 1125 + 1500 + 1090 = +3715 \text{ kg}$ ;

Min  $S_2$  wird für  $S$  rechts,  $W$  rechts und  $D$ :

$$+ 1125 - 1090 = + 35 \text{ kg.}$$

Balken: In 1 geben wieder:

$$S \text{ rechts und } W' = -1229 \text{ kgm}$$

$$W'' = - 173 \text{ ,,}$$

$D$  ist ohne Einfluß, schließlich gibt  $N$  (Gl. 42)

$$= -400 \cdot 3,5 \cdot 4,0 \cdot \frac{1}{8} = - 700 \text{ ,,}$$

zusammen ergibt sich Min  $M_1 = -2102 \text{ kgm.}$

$Z \text{ max} = 8737 \text{ kg}$ ; 1 Balken 22/26 cm mit  $W = 2479 \text{ cm}^3$  und

$$F = 572 \text{ cm}^2 \text{ gibt } \sigma = \frac{210200}{2479} + \frac{8737}{572} = 84 + 15 = 99 \text{ kg/qcm.}$$

Nr. IV. Doppeltes Sprengwerk mit ungleichen Feldern; mittelbare Belastung durch Unterzüge (Abb. 23).

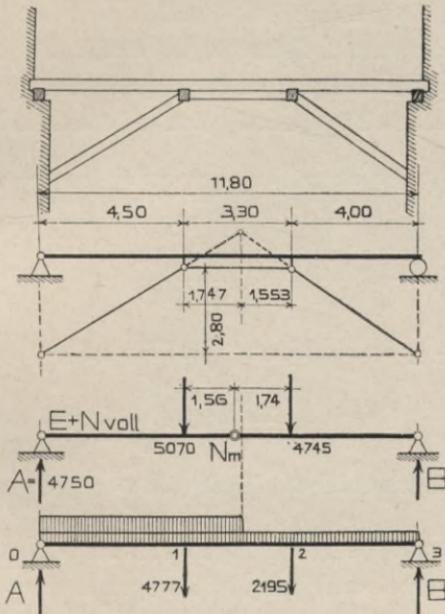


Abb. 23.

Belastungen:  $E$  Eigengewicht = 500 kg/m Träger,

$N$  Nutzlast = 800 " "

Stabwerk: Gefährlichster Zustand: Eigengewicht und volles  $N$ ,

$$\text{Knotenlasten } P_1 = 1300 \cdot (4,5 + 3,3) \cdot \frac{1}{2} = 5070 \text{ kg,}$$

$$P_2 = 1300 \cdot (4,0 + 3,3) \cdot \frac{1}{2} = 4745 \text{ ,,}$$

$$\text{Auflagerkraft } A_0 = \frac{1}{11,8} (5070 \cdot 7,3 + 4745 \cdot 4,0) = 4750 \text{ kg}$$

Nullpunkt der Momente im Mittelfelde; Gl. 31 ergibt

$$e_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{3f - a}{l + 2b} = 1,56 \text{ m; für diesen Punkt ist}$$

$$M_m^0 = 4750 \cdot 6,06 - 5070 \cdot 1,56 = 20876 \text{ kgm.}$$

$$\text{Nach Gl. 32 ist der Schub im Riegel } H = -\frac{20876}{2,8} = -7456 \text{ kg,}$$

$$\text{alsdann in der linken Strebe } S_1 = -\frac{7456}{4,5} \cdot 5,30 = -8770 \text{ ,,}$$

$$\text{,, rechten ,, } S_2 = -\frac{7456}{4,5} \cdot 4,88 = -8076 \text{ ,,}$$

Balken: Gefährlichstes Moment tritt auf im Knotenpunkt des kleineren Außenfeldes, also in 2. Für Min  $M_2$  wird gefährlichste Laststellung: Eigengewicht und links Nutzlast bis zum ideellen Firstpunkt. Man erhält als Knotenlasten:

$$P_1 = 500 \cdot (4,5 + 3,3) \cdot \frac{1}{2} + 800 \cdot \frac{4,5}{2} + 800 \cdot \frac{1,747}{3,3} \cdot \left(3,3 - \frac{1,747}{2}\right) = 4777 \text{ kg,}$$

$$P_2 = 500 \cdot (4,0 + 3,3) \cdot \frac{1}{2} + 800 \cdot \frac{1,747^2}{2 \cdot 3,3} = 2195 \text{ ,,}$$

$$\text{Gl. 32}^a; Q \cdot e_2 = \text{Min } M_2 = -\left[ (4777 \cdot 4,5 + 2195 \cdot 7,8) \cdot \frac{1}{11,8} - 2195 \right] \cdot 1,74 = -1874 \text{ kgm.}$$

$$22/26 \text{ cm Balken mit } W = 2479 \text{ cm}^3 \text{ gibt } \sigma = \frac{187400}{2479} = 75 \text{ kg/qcm.}$$

Nr. V. Doppeldes Hängewerk als Dachstuhl mit angehängter Decke, unsymmetrisches System mit wagerechtem Riegel. Mittelbare Belastung durch Unterzüge (Abb. 24).

Binderweite 4 m.

	Belastungen	kg/qm	kg/m
$E$	Eigengewicht mit Dach	= 160	Grundfläche = 640 Binder,
$S_l$	Schnee links . . .	= 50	,, = 200 ,,
$S_r$	Schnee rechts . . .	= 75	,, = 300 ,,

$W_l$ Wind links . . . . .	= 77 Dach	= 308 Gurt,
$W_r$ Wind rechts . . . . .	= 54 „	= 216 „
$D$ Deckeneigengewicht . . . . .	= 120 Grundfläche	= 480 Binder,
$N$ Nutzlast der Decke . . . . .	= 150 „	= 600 „

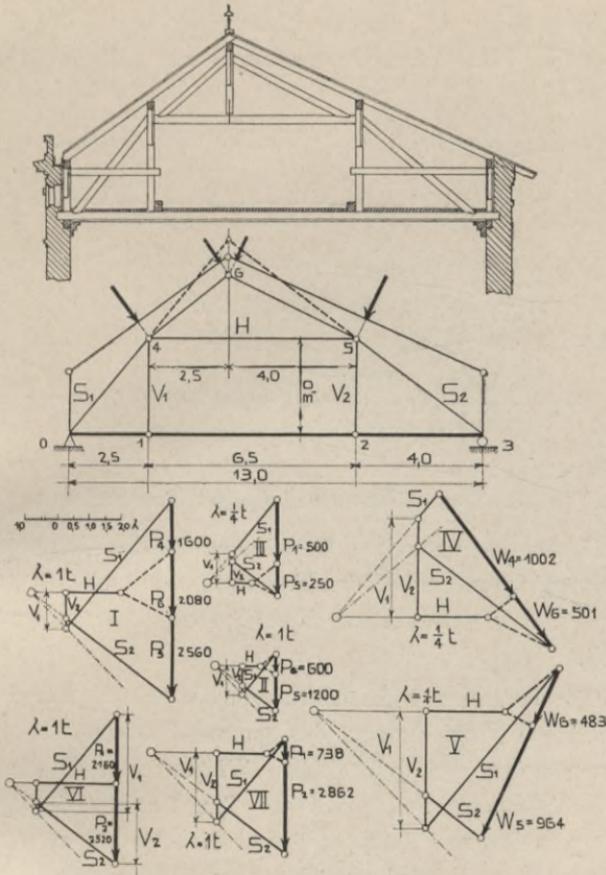


Abb. 24.

Die statische Berechnung ist für die verschiedenen Lastzustände in Kräfteplänen durchgeführt. Nach Gl. 30 wird das Kraftverhältnis

$$(2 \tau^2 = 13^2 - 2,5^2 - 4,0^2 = 146,75);$$

$$\varphi = -\frac{4}{2,5} \cdot \frac{9^2 + 73,375}{10,5^2 + 73,375} = -1,34.$$

In Abb. 24 gehören die Kräftepläne I zum Eigengewicht  $E$ , II zum Schnee rechts  $S_r$ , III zum Schnee links  $S_l$ , IV zum Wind links  $W_l$ , V zum Wind rechts  $W_r$ , VI zum Deckeneigengewicht  $D$ , VII zur einseitigen Nutzlast  $N$  vom rechten Lager bis zum ideellen Firstpunkt, welcher hier mit dem wirklichen Firste auf derselben Lotrechten liegt. Die Einzelkräfte der Pläne sind in nachstehender Tabelle (S. 49) enthalten.

Aus  $X_1 = -6015$  folgt Min  $M_1$  nach Gl. 19:

$$\text{Min } M_1 = - \left[ 6015 \cdot 10,5 - \frac{6015}{1,34} \cdot 4,0 \right] \frac{2,5}{13,0} = 8745 \text{ kgm.}$$

Bei diesem Moment wirkt im Balken eine Zugkraft  $Z = +7335$  kg.

Ein Doppelbalken 26/32 cm mit  $W = 2 \cdot 4437 \text{ cm}^3$  und  $F = 2 \cdot 832 \text{ cm}^2$  gibt

$$\sigma = \frac{874500}{8874} + \frac{7335}{1664} = 98 + 4 = 102 \text{ kg/qcm.}$$

## VII. Durchbiegungen doppelter Tragwerke.

Neben der statischen Berechnung ist die Untersuchung der Durchbiegungen bei den Tragwerken mit offenen Mittelfeldern für die Bewertung des Systems von besonderem Vorteil.

Die elastischen Formänderungen des Balkens haben nicht unerhebliche Verbiegungen des ganzen Systems zur Folge, wodurch neben den dynamischen Wirkungen auch die Güte der Verbindungen und somit die Tragfähigkeit des ganzen Baukörpers leidet. Maßgebend sind die Durchbiegungen der Mittelknoten. Es wird zunächst darauf ankommen, dort die größten Verschiebungen zu bestimmen.

Nach Gleichung 5 ist bei wagerechtem Riegel zu übersehen, daß die größte Durchbiegung im Mittelknoten des größeren Außenfeldes entsteht. Angenommen,  $a > c$ , so ist  $\delta_1$  der größere Wert. Er berechnet sich nach Gleichung 19:

$$\delta_1 = t_1 \cdot M_1; \quad t_1 = \frac{a}{6 E J \cdot l \cdot \psi} [3 d \cdot v \cdot \psi - a \cdot l \cdot \psi + 3 f \cdot w].$$

Kraft	$E$	$S_l$	$S_r$	$S_{\text{voll}}$	$W_l$	$W_r$	$D$	$N_{\text{voll}}$	$N_r$	Max	Min
$H$	- 1730	- 560	- 160	- 720	- 550	- 625	- 2500	- 3130	-	-	- 8705
$S_1$	- 5250	- 1680	- 550	- 2210	- 250	- 1634	- 3960	- 4940	-	-	- 17994
$S_2$	- 4180	- 1300	- 450	- 1750	- 1315	- 540	- 3140	- 3920	-	-	- 14305
$V_1$	+ 1140	+ 900	- 232	-	- 770	+ 915	+ 3080	+ 3840	-	+ 9875	+ 3218
$V_2$	- 840	- 650	+ 178	-	+ 552	- 664	+ 1880	+ 2350	-	+ 4120	- 274
$Z$	+ 1730	+ 560	+ 160	-	+ 1045	+ 425	+ 2500	-	+ 2120	-	-
$X_1$	- 1140	- 900	+ 232	-	+ 770	- 915	- 890	-	- 2170	-	- 6015

Sind also aus der statischen Berechnung die Biegemomente bekannt, so ist die Durchbiegung derselben ohne weiteres aus einer Gleichung zu finden. Hierbei ist für Belastungen der oberen Knoten, ebenso für mittelbare Belastung des Balkens das volle Moment des Knotenquerschnitts in die Berechnung der Durchbiegungen einzuführen. Bei mittelbarer Belastung des Streckbalkens dürfen natürlich nur die Zusatzmomente  $\mathfrak{M}^1$  und  $\mathfrak{M}^2$  zu den Stützenmomenten  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  der kontinuierlichen Träger angesetzt werden (Seite 28). Für die Berechnung der Durchbiegungen ist das hier durchgeführte Verfahren insofern zweckmäßig, als sich die maßgebenden Momentenwerte getrennt von den einflußlosen Gliedern ergeben.

Für Tragwerke mit wagerechtem Riegel vereinfacht sich die allgemeine Gleichung in die Form:

$$\text{Gl. 52.} \left\{ \begin{array}{l} \delta_1 = \frac{M_1}{6 E \cdot J \cdot l} \cdot \frac{b \cdot a \cdot (4\tau^2 + b^2)}{3b + 2c} \\ \delta_2 = \frac{M_2}{6 E \cdot J \cdot l} \cdot \frac{b \cdot c \cdot (4\tau^2 + b^2)}{3b + 2a} \end{array} \right\} \quad (\text{vgl. zu } \tau^2 \text{ Gl. 9).}$$

Für symmetrische Systeme gelten noch weitere Verkürzungen:

$$\text{Gl. 53.} \quad \delta_1 = \frac{M_1}{6 E J} \cdot a \cdot b = -\delta_2.$$

Also schließlich für Tragwerke mit drei gleichen Feldern

$$\text{Gl. 54.} \quad \delta_1 = \frac{M_1}{6 E J} a^2.$$

Bei Hängewerken mit Unterzügen, ebenso bei solchen ohne Deckenbelastung kann man für symmetrische Systeme setzen:

$$\text{Gl. 55.} \quad \delta_1 = \left( \frac{M}{J} \cdot \frac{h}{2} \right) \cdot \frac{2}{h} \cdot \frac{a \cdot b}{6 E} = \frac{\sigma}{3 E} \cdot \frac{a \cdot b}{h};$$

$h$  ist hierbei die Höhe des Balkens. Und, wenn  $\sigma = 100 \text{ kg/qcm}$ ,

$$\text{Gl. 56.} \quad E = 100\,000 \text{ kg/qcm, so wird } \delta = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot b}{h},$$

wobei sich  $\delta$  in mm ergibt, wenn  $a, b, h$  in m eingesetzt werden. Bei gleicher Balkenlänge und gleicher Balkenhöhe wird  $\delta$  zu einem Minimum, wenn  $b = 2a$  ist.

Bei den Durchbiegungen ist zu beachten, daß sie in den beiden Knotenpunkten nach entgegengesetzten Richtungen auftreten. Es ist also die Knotendurchbiegung bei symmetrischen Systemen in Verhältnis zur halben Länge zu setzen. Bei unsymmetrischen Tragwerken ist die Summe beider Knotendurchbiegungen durch die ganze Länge zu teilen. Als Grenze für diese Durchbiegungsverhältnisse empfiehlt sich 1:300. Dabei ist gute Ausführung und in der statischen Berechnung Berücksichtigung aller Einflüsse, wie hier durchgeführt, vorausgesetzt. Unter solchen Bedingungen folgt für die Balkenhöhe als niedrigste Grenze  $h \geq \frac{1}{15} a \geq \frac{1}{45} l$  und zwar für Träger mit gleichen Feldern. Bei unmittelbarer Belastung ist aus den Biegemomenten für die Querschnittsermittlung zunächst der Einfluß des Eigengewichtes zu streichen. Für die einseitige Nutzlast wird nur das Zusatzmoment anzusetzen

sein; bei gleichen Feldern bleibt von dem Minimummoment  $= -0,182 pa^2$  nur 0,9 dieses Wertes übrig, da das Stützenmoment des Trägers auf vier starren Stützen bei der untersuchten Laststellung  $= -0,0188 pa^2$  beträgt.

Die ausgerechneten Zahlenbeispiele ergeben für die Durchbiegungen folgende Werte:  $E$  stets 100 000 kg/qcm.

I.  $J = 32225 \text{ cm}^4$  für Balkenquerschnitt 23/26 cm;

Moment aus  $N_r = (0,9 \cdot 985) = -887 \text{ kgm}$ ,

desgl. aus  $W_r$ : 1020 kgm, zusammen also  $= -1907 \text{ kgm}$ .

Daher  $\delta = \frac{190700 \cdot 300^2}{6 \cdot 100000 \cdot 32225} = 0,88 \text{ cm}$ ; und  $\frac{\delta}{l'} = \frac{0,88}{450} = \frac{1}{510}$ .

II.  $J = 13330 \text{ cm}^4$  für 2·10/20 cm. Moment = 109 100 kgcm,

also  $\delta = \frac{109100 \cdot 400 \cdot 300}{6 \cdot 100000 \cdot 13330} = 1,64 \text{ cm}$ ; und  $\frac{\delta}{l'} = \frac{1,64}{550} = \frac{1}{337}$ .

III. Fall B:  $J = 32225 \text{ cm}^4$  für Balkenquerschnitt 22/26 cm.

$M = 208300 \text{ kgm}$ .

$\delta = \frac{208300 \cdot 350 \cdot 400}{6 \cdot 100000 \cdot 32225} = 1,5 \text{ cm}$  und  $\frac{\delta}{l'} = \frac{1,5}{550} = \frac{1}{367}$ .

IV.  $J = 32225 \text{ cm}^4$  für 22/26 cm;  $M_2 = -1993 \text{ kgm}$ ; daraus

$\delta_2 = \frac{199300 \cdot 330 \cdot 400 \cdot (4x^2 + 330^2)}{6 \cdot 100000 \cdot 32225 \cdot 1180 \cdot (3 \cdot 330 + 2 \cdot 450)}$ , wobei  
 $2x^2 = 1180^2 - 450^2 - 400^2$ .

Hieraus Hebung  $\delta_2 = 1,41 \text{ cm}$ , und daher Senkung

$\delta_1 = \frac{1,41 \cdot 4,5}{4,0} = 1,76 \text{ cm}$ .  $\frac{\delta_1 + \delta_2}{l} = \frac{3,17}{1180} = \frac{1}{372}$ .

V.  $J = 141664 \text{ cm}^4$  für 2·26/32 ·  $M_1 = -8745 \text{ kgm}$ .

Somit  $\delta_1 = \frac{874500 \cdot 650 \cdot 250 \cdot (2 \cdot 1467500 + 650^2)}{6 \cdot 100000 \cdot 141664 \cdot 1300 \cdot (3 \cdot 650 + 2 \cdot 400)} =$

Hebung  $\delta_1 = 1,67 \text{ cm}$ ; und Senkung  $\delta_2 = \frac{1,67 \cdot 4}{2,5} = 2,68 \text{ cm}$ .

Somit  $\frac{\delta_1 + \delta_2}{l} = \frac{4,35}{1300} = \frac{1}{300}$ .

Für die Bewertung der Endergebnisse darf nicht außer acht gelassen werden, daß diese Durchbiegungen nur durch die Momente des Balkens hervorgerufen werden. In Wirklichkeit werden eher größere Werte auftreten: bei Holzträgern

vergrößern die unvermeidlichen Mängel der Ausführung die Rechnungsergebnisse ebenso, wie bei Eisenkonstruktionen die starren Verbindungen sie vermindern.

Zum Vergleich mit Fachwerken möge beachtet werden, daß dort unter denselben Voraussetzungen die Durchbiegungen sich gleich Null ergeben müßten, da die Längskräfte in den Stäben nicht berücksichtigt worden sind. Die gefundenen Durchbiegungen können als Maßstab für den Grad der elastischen Nachgiebigkeit gelten, die das Tragwerk durch die offenen Mittelfelder erhält. Berücksichtigt man, welche Nachteile aus der größeren Beweglichkeit für die Tragfähigkeit des ganzen Systems folgen, so kann aus den durchgeführten Rechnungen nur wieder die Überlegenheit der vollständigen Fachwerke gefolgert werden.

### VIII. Dreifache Tragwerke.

Hänge- und Sprengwerke höherer als zweifacher Ordnung sind im Hochbau selten. Je größer die Anzahl der

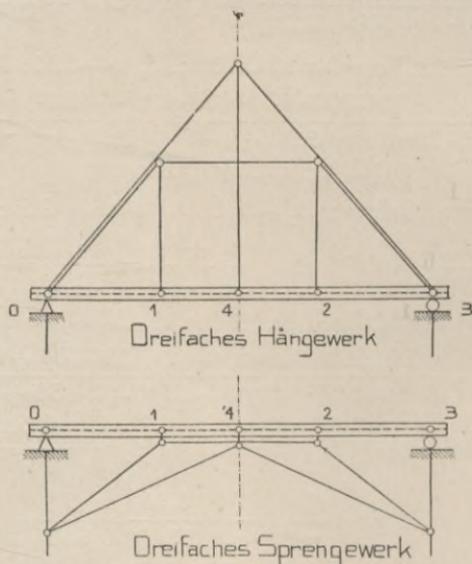


Abb. 25.

offenen Felder, um so größer die Nachteile des Systems. Bei dreifachen Systemen (Abb. 25) ist der mittlere Stütz-

punkt 4 aus der einfachen Ausstrebung ein starres Auflager. Für das doppelte Stabwerk gelten dieselben kinematischen Beziehungen. Aus dem Wegverhältnis läßt sich wieder ein Kraft- und ein Momentenverhältnis ableiten; nur ist jetzt der Grundbalken ein durchgehender Träger auf drei starren Stützpunkten.

Die weitaus meisten dreifachen Tragwerke haben beiderseits gleiche Anordnung. Unter dieser Voraussetzung fällt der mittlere Stützpunkt mit dem Momentennullpunkt des zweifachen Systems zusammen. Daher gilt: Die statische Wirkung des doppelten Stabwerkes bleibt vollständig ungeändert, so lange der Balken nicht unmittelbar belastet wird.

Wirken Lasten unmittelbar am Streckbalken, so ist zunächst der Träger als ein durchlaufender Balken auf fünf starren Stützen zu berechnen. Aus den Stützkräften der Fußpunkte des doppelten Stabwerkes  $Y$  werden die Zusatzmomente genau wie für die doppelten Hängewerke berechnet.

---

## Anhang.

### Kurze Übersicht der Regeln und Formeln für symmetrische Hänge- und Sprengwerke.

Die weitaus meisten hölzernen Tragwerke des Hochbaues aus dem Gebiete der Hänge- und Sprengwerke sind symmetrisch. Für diesen Sonderfall sind nachstehend eine Reihe von Sätzen zusammengestellt, die für sich selbständig ein Bild über die statische Wirkung dieser Tragwerke ergeben; auch die Beweise lassen sich in allen Hauptgliedern durch die Symmetrie und die Folgerungen aus den vorangeführten Beziehungen selbständig herleiten. Für den Sonderfall der symmetrischen Tragwerke gibt somit die nachfolgende Zusammenstellung einen unmittelbaren, begründeten Weg zur Durchrechnung praktischer Beispiele, ohne die Kenntnis der vorstehenden allgemeinen Betrachtungen zur unumgänglichen Voraussetzung zu machen.

## I. Allgemeine Regeln und Formeln.

### A. Durchbiegungen des Balkens.

1. Die Bewegung der Fußpunkte der Vertikalen ist in allen Fällen der Belastung umgekehrt gleich groß; senkt sich der eine Fußpunkt um den Wert  $\delta$ , so hebt sich der andere um dieselbe Größe.

### B. Belastung des Stabwerkes.

2. Ist der Tramen unbelastet, so sind die Kräfte in den Hängesäulen gleich groß, haben jedoch entgegengesetztes Vorzeichen. Die Momentenfläche des Tramens ist umgekehrt symmetrisch; unter der gedrückten Hängesäule entstehen positive Biegemomente.

3. Die äußeren Kräfte am Stabwerk bilden mit den Strebenkräften ein geschlossenes Krafteck.

4. Wirkt nur eine Kraft von außen auf einen Obergurtnoten, so erhält die zugehörige Hängestange Druck.

### C. Belastung des Streckbalkens.

5. Ist nur der Streckbalken belastet, so sind die Kräfte in den Hängesäulen gleich groß und haben gleiches Vorzeichen.

#### C'. Mittelbare Belastung des Streckbalkens.

6. Bei indirekter Belastung durch Unterzüge sind die Hängesäulenkräfte gleich der halben Summe der Unterzugslasten.

7. Die Momentenfläche des Streckbalkens ist nur von der Differenz der Unterzugslasten abhängig und wird durch ein Kräftepaar hervorgerufen, dessen Einzelkräfte in den Wirkungsgeraden der Hängesäulen liegen und gleich der halben Differenz der Unterzugslasten sind.

#### C''. Unmittelbare Belastung des Streckbalkens.

8. Bei unmittelbarer Belastung des Streckbalkens durch unsymmetrische Kräfte füge man zu der wirklichen Belastung

das Spiegelbild hinzu und bestimme die ideellen mittleren Auflagerdrücke eines solchergestalt symmetrisch belasteten durchgehenden Balkens auf 4 starren Stützen. Die wirklichen Hängesäulenkräfte sind gleich den halben ideellen Stützkraften. Ein Seileck für die äußeren Lasten und die berechneten Hängesäulenkräfte gibt die Momentenfläche des Streckbalkens.

## II. Gang der Untersuchung eines symmetrischen Hängewerkdaches.

Die angreifenden Kräfte ergeben sich aus dem Eigengewicht, dem Schneedruck, den Windkräften und der gleichförmig verteilten Nutzlast einer angehängten Decke.

Man bilde die gefährlichsten Lastzustände:

### A. Für das Stabwerk des Gurtcs.

Eigengewicht des Daches; volle beiderseitige Schneebelastung des Daches; einseitige Windbelastung; — Eigengewicht der unteren Decke ( $g$ ); volle Nutzlast der unteren Decke ( $p$ ).

- Bei flacher Dachneigung wird der Winddruck als lotrechter Zuschlag beiderseits zum Schneedruck addiert.
- Bei unmittelbarer Belastung der Decke wird die Kraft der Hängesäulen

$$V = \frac{g+p}{2} \cdot \left[ (a+b) + \frac{a^3+b^3}{2a \cdot (2a+3 \cdot b)} \right] \text{ und für } a=b$$

bei drei gleichen Feldern  $V = 1,1 \cdot (g+p) \cdot a$

Ein geschlossenes Krafteck aus den ermittelten Lasten des gefährlichsten Zustandes und aus den Strebenparallelen gibt die Strebenkräfte und damit auch die Riegelkraft.

### B. Für die Hängesäulen.

Max  $V$  wird durch folgenden Zustand hervorgerufen: Schneedruck und Winddruck auf einer Hälfte des Daches; (Eigengewicht des Daches ohne Einfluß); Eigengewicht der unteren Decke; volle Deckennutzlast.

Min  $V$ : Schnee- und Winddruck auf einer Dachseite; (Eigengewicht des Daches einflußlos); Eigengewicht der Decke;

Nutzlast der Decke bis zur Mitte auf der Seite der Dachbelastung.

Min  $V$  entsteht auf der weniger belasteten Seite. Kraftecke für Max  $V$  und Min  $V$  wie bei A.

**C'. Für den Streckbalken bei mittelbarer Belastung.**

Schnee- und Winddruck auf einer Dachseite (Dach-eigengewicht für Momente ohne Einfluß, ebenso Deckeneigengewicht); Deckennutzlast einseitig bis zur Balkenmitte auf der Seite der Dachbelastung.

Das Biegemoment aus Deckennutzlast wird  $= p \frac{a \cdot b}{8}$ .

Die Biegemomente aus Dachbelastung ergeben sich, nachdem die Hängesäulenkräfte aus Kraftecken gefunden worden sind.

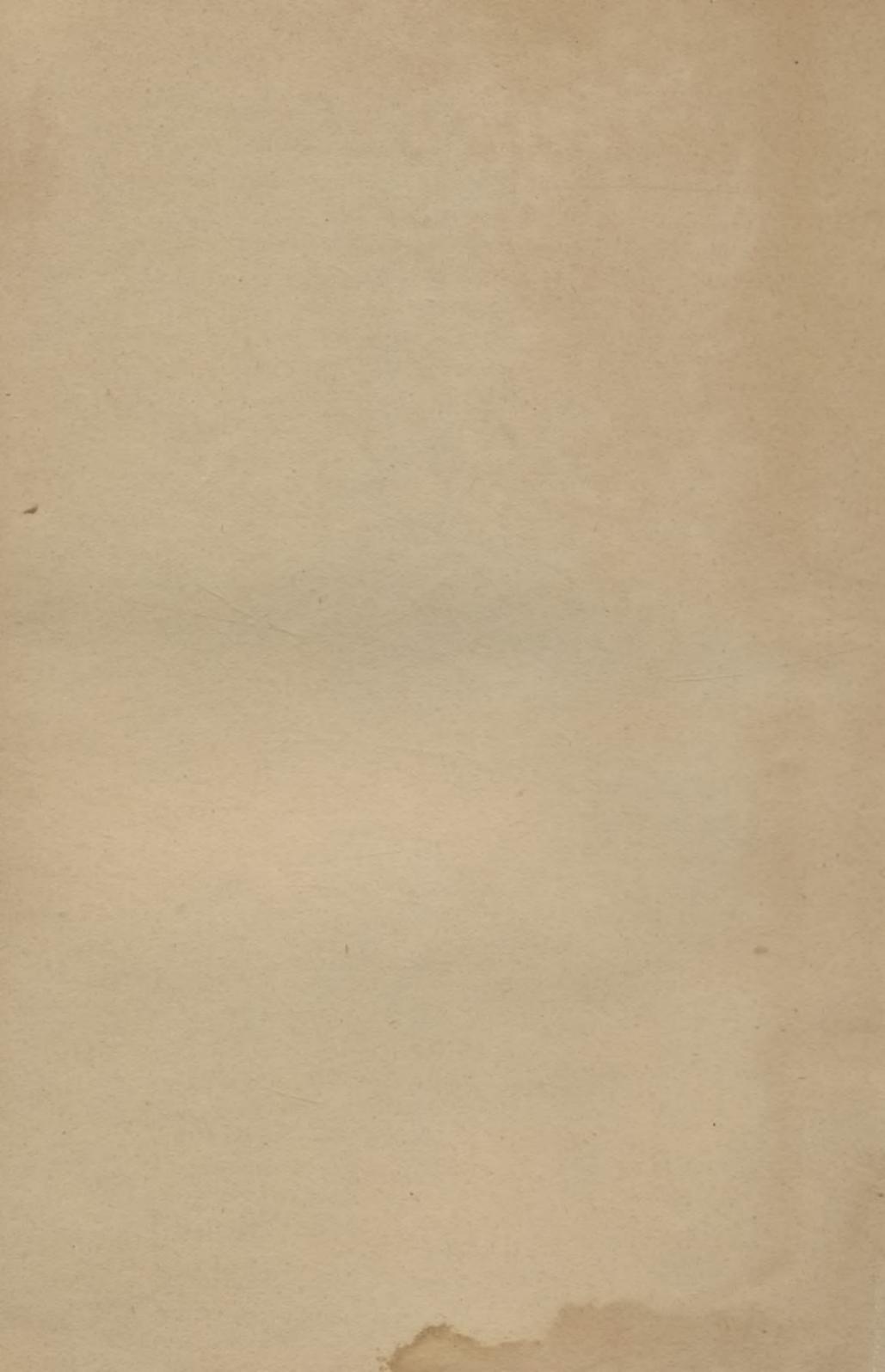
**C''. Für den Streckbalken bei unmittelbarer Belastung.**

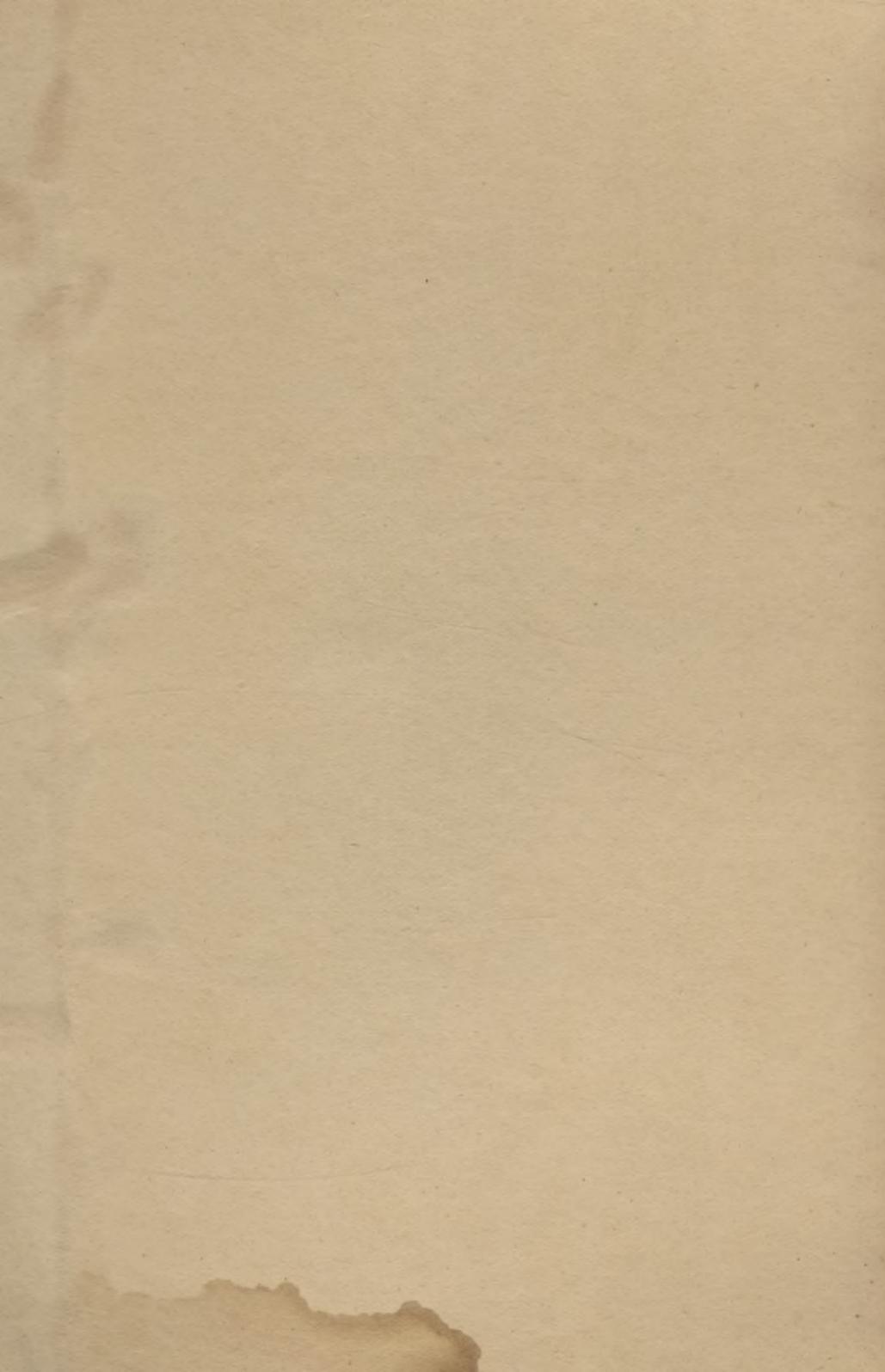
Zunächst wieder Schnee- und Winddruck auf einer Dachseite; (Eigengewicht des Daches bleibt ohne Einfluß auf die Biegemomente des Balkens); Eigengewicht der Decke; Nutzlast auf der Seite der Dachbelastung über die Mitte vorgeschoben bis 0,7 des Mittelfeldes.

Der absolut größte Momentenwert ist das negative Biegemoment im Fußpunkt der Hängesäule auf der weniger belasteten Seite. Bei drei gleichen Feldern gibt die Nutzlast Min  $M = -0,182 p \cdot a^2$ .

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA  
KRAKÓW







WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

31261

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298368