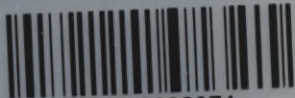


Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000298371

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS DEPARTMENT



X
489

DIE KNICKFESTIGKEIT

DER

DRUCKGURTE OFFENER BRÜCKEN

VON

DR. H. ZIMMERMANN

WIRKL. GEH. OBERBAURAT
MITGLIED DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MIT ACHT ABBILDUNGEN UND EINER ZAHLENTAFEL.



F. Nr. 28833

BERLIN 1910

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

5.58

86.

Alle Rechte vorbehalten.

Erweiterter Sonderabdruck aus der „Zeitschrift für Bauwesen“,
Jahrgang 1910.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 31257

Akc. Nr. 2847/49

Vorwort.

Das vorliegende Schriftchen hat den Zweck, die Ergebnisse einer schon im Jahre 1907 veröffentlichten allgemeineren Untersuchung dem Brückenbau dienstbar zu machen. Diese betraf die Formänderungen eines Stabes mit sprungweise veränderlichem Querschnitt, elastischer Querstützung an einzelnen Punkten und Belastung durch Einzelkräfte in der Längsrichtung, wobei diese Kräfte in oder außerhalb der Stabachse liegen können. Der besondere, für die Knickfestigkeit des Stabes maßgebende Zustand, daß die Kräfte in der Anfangslage mit der Stabachse zusammenfallen, war damals nur angedeutet worden. Dringendere Arbeiten gestatteten es mir erst im vorigen Jahre, auf den Gegenstand zurückzukommen und als nächste Aufgabe die Knickfestigkeit des Stabes mit mehreren Feldern bei zwei oder mehr starren Querstützen zu behandeln. Jetzt soll das Verhalten eines solchen Stabes bei elastischen Querstützen vorgeführt und seine Knickfestigkeit ermittelt werden. Was hier allgemein als „Stab“ und „Stütze“ bezeichnet wird, ist in den geraden Druckgurten und den Rahmen der offenen Brücken verkörpert. Diese Bezeichnungen sind mithin als gleichwertig zu betrachten. Die Behandlung der Brücken mit gekrümmten Obergurten muß ich mir noch vorbehalten.

Ich habe mich bemüht, die in der Aufgabe liegenden Schwierigkeiten durch eine sehr eingehende Darstellung zu vermindern. Hoffentlich haben damit die mehrfach in dieser Hinsicht an mich gerichteten Wünsche ihre Erfüllung gefunden.

Berlin, im März 1910.

Zimmermann.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Allgemeine Lösung der Aufgabe	6
II. Symmetrische Anordnung	14
A. Lauter gleiche Stützen	15
B. Starre Endstützen	18
III. Anwendung	19
IV. Zahlenbeispiel	22
V. Grenzfälle und Vergleiche	25
VI. Verschiedene Gleichgewichtslagen	32
VII. Größere Felderzahlen	41
A. Mit eingespannten Enden	42
1. Vier Felder	42
B. Mit frei drehbaren Enden	43
2. Fünf Felder	43
3. Sechs Felder	44
4. Sieben Felder	45
5. Acht Felder	45
VIII. Zahlentafel	52

Auf S. 235 u. ff. der Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften von 1907 findet sich eine Untersuchung über den geraden Stab auf elastischen Einzelstützen mit Belastung durch längsgerichtete Kräfte, deren Ergebnisse dazu dienen können, die Knickfestigkeit der Druckgurte offener Brücken zu ermitteln. Wie dies zweckmäßig geschieht, soll hier gezeigt werden. Dabei mögen alle früher gemachten Annahmen in Geltung bleiben und nur einige Änderungen in den Bezeichnungen eintreten, die sich inzwischen als ratsam erwiesen haben und zum Teil schon in der Untersuchung über die Knickfestigkeit des geraden Stabes mit mehreren Feldern (Sitzungsberichte 1909, S. 180 u. ff.) angewendet worden sind.¹⁾ Auch wegen der allgemeinen Erörterungen über die Knickgrenze und hinsichtlich des Begriffes

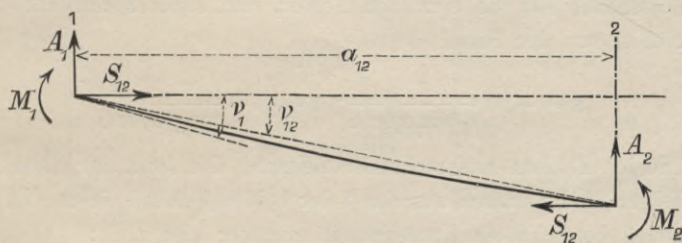


Abb. 1. Kräfte am Feld 1—2.

der Knickgleichungen und Knickbedingungen genügt es, auf die letztere Stelle zu verweisen. Zur weiteren Erklärung möge die Abb. 1 dienen, in der die jenen früheren Unter-

1) Die beiden Abhandlungen sind als Sonderdrucke im Kommissionsverlage von Georg Reimer, Berlin, erschienen. Vgl. auch Zentralbl. der Bauverw. 1909, S. 206.

suchungen zugrunde gelegten Annahmen dargestellt sind. In den folgenden Abschnitten ist die Größenbezeichnung da, wo sie zuerst auftritt, durch fetteren Druck hervorgehoben.

I. Allgemeine Lösung.

Für einen geraden Stab mit beispielsweise vier Feldern \mathbf{a}_{12} , \mathbf{a}_{23} , \mathbf{a}_{34} , \mathbf{a}_{45} und in die Achsenrichtung fallenden Druckkräften \mathbf{S}_{12} , \mathbf{S}_{23} , \mathbf{S}_{34} , \mathbf{S}_{45} gelten dann die Stetigkeitsbedingungen:

$$(1) \begin{cases} t_{12} M_1 + s_{12} M_2 & & & & = v_1 - v_{12} = N_1; \\ s_{12} M_1 + t_2 M_2 + s_{23} M_3 & & & & = v_{12} - v_{23} = N_2; \\ & s_{23} M_2 + t_3 M_3 + s_{34} M_4 & & & = v_{23} - v_{34} = N_3; \\ & & s_{34} M_3 + t_4 M_4 + s_{45} M_5 & & = v_{34} - v_{45} = N_4; \\ & & & s_{45} M_4 + t_{45} M_5 & = v_{45} - v_5 = N_5. \end{cases}$$

Diese Gleichungen stimmen mit denen der Gruppe (5) auf Seite 183 der Sitzungsberichte von 1909 überein, wenn man darin die Größen Φ Null setzt, wie es der Belastungsweise mit Angriffshebeln $f=0$ entspricht. Die \mathbf{N} sind abkürzende Bezeichnungen. Die \mathbf{M} bedeuten die Knotenpunktmomente, v_1 und v_5 die Achsenneigungen des Stabes am linken und rechten Ende, v_{12} , v_{23} usw. die Neigungen der Stabsehnern für die einzelnen Felder, und s und t sind Hilfsgrößen von der Form

$$\mathbf{s} = -\left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha}\right) \frac{1}{aS}; \quad \mathbf{t} = \left(1 - \frac{\alpha}{\tan \alpha}\right) \frac{1}{aS}$$

mit den Feldern entsprechenden Zeigern. Die t mit nur einem Zeiger sind Summen aus den t der beiden Felder, die an den gleich bezeichneten Knotenpunkt grenzen; also z. B.:

$$t_2 = t_{12} + t_{23}.$$

Die α sind Hilfswinkel mit dem Werte

$$\alpha = a \sqrt{\frac{S}{EJ}},$$

wobei a die Feldlänge, S die Stabkraft des Feldes und J das zugehörige Trägheitsmoment des Stabquerschnittes bedeutet. E ist das Elastizitätsmaß.

Weiter gelten die Lagerbedingungen:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} -m_{12} M_1 + m_{12 \cdot 2} M_2 - m_2 M_3 \dots\dots\dots \\ m_2 M_1 - m_{2 \cdot 23} M_2 + m_{23 \cdot 3} M_3 - m_3 M_4 \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad m_3 M_2 - m_{3 \cdot 34} M_3 + m_{34 \cdot 4} M_4 - m_4 M_5 \dots\dots\dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad m_4 M_3 - m_{4 \cdot 45} M_4 + m_{45} M_5 \dots\dots\dots \\ \dots + n_{11} \nu_{12} + n_{12} \nu_{23} \dots\dots\dots = 0; \\ \dots + n_{21} \nu_{12} + n_{22} \nu_{23} + n_{23} \nu_{34} \dots\dots\dots = 0; \\ \dots\dots\dots + n_{32} \nu_{23} + n_{33} \nu_{34} + n_{34} \nu_{45} = 0; \\ \dots\dots\dots + n_{43} \nu_{34} + n_{44} \nu_{45} = 0. \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von denen der Gruppe (25) auf Seite 243 der Sitzungsberichte von 1907 nur dadurch, daß die Beiwerte der Veränderlichen M und ν anders bezeichnet sind. Bedeutet wie früher δ die Verschiebung, die ein Stützpunkt unter dem Druck 1 erleidet, und zwar positiv gerechnet im Sinne der Druckrichtung, so ist jetzt die Größe der Beiwerte in folgender Weise bestimmt:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta_1 + \delta_2}{a_{12}^2} = m_{12} \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \frac{\delta_2}{a_{12} a_{23}} = m_2 \dots\dots\dots \\ \frac{\delta_3}{a_{23} a_{34}} = m_3 \dots\dots\dots \end{array} \right\} m_{12} + m_2 = m_{12 \cdot 2}; \\ \frac{\delta_2 + \delta_3}{a_{23}^2} = m_{23} \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \frac{\delta_3}{a_{23} a_{34}} = m_3 \dots\dots\dots \\ \frac{\delta_4}{a_{34} a_{45}} = m_4 \dots\dots\dots \end{array} \right\} m_2 + m_{23} = m_{2 \cdot 23}; \\ \frac{\delta_3 + \delta_4}{a_{34}^2} = m_{34} \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \frac{\delta_4}{a_{34} a_{45}} = m_4 \dots\dots\dots \end{array} \right\} m_{23} + m_3 = m_{23 \cdot 3}; \\ \frac{\delta_4 + \delta_5}{a_{45}^2} = m_{45} \dots\dots\dots \left. \begin{array}{l} \frac{\delta_4}{a_{34} a_{45}} = m_4 \dots\dots\dots \end{array} \right\} m_3 + m_{34} = m_{3 \cdot 34}; \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\delta_4}{a_{34} a_{45}} = m_4 \dots\dots\dots \\ \frac{\delta_4 + \delta_5}{a_{45}^2} = m_{45} \dots\dots\dots \end{array} \right\} m_{34} + m_4 = m_{34 \cdot 4}; \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\delta_4 + \delta_5}{a_{45}^2} = m_{45} \dots\dots\dots \end{array} \right\} m_4 + m_{45} = m_{4 \cdot 45}; \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} n_{11} = 1 - \frac{\delta_1 + \delta_2}{a_{12}} S_{12}; \quad n_{12} = \frac{\delta_2}{a_{12}} S_{23}; \\ n_{21} = \frac{\delta_2}{a_{23}} S_{12}; \quad n_{22} = 1 - \frac{\delta_2 + \delta_3}{a_{23}} S_{23}; \quad n_{23} = \frac{\delta_3}{a_{23}} S_{34}; \\ n_{32} = \frac{\delta_3}{a_{34}} S_{23}; \quad n_{33} = 1 - \frac{\delta_3 + \delta_4}{a_{34}} S_{34}; \quad n_{34} = \frac{\delta_4}{a_{34}} S_{45}; \\ n_{43} = \frac{\delta_4}{a_{45}} S_{34}; \quad n_{44} = 1 - \frac{\delta_4 + \delta_5}{a_{45}} S_{45}. \end{array} \right.$$

Hierbei sind die Verschieblichkeitsmaße δ für alle Stützpunkte verschieden angenommen und deshalb mit der zugehörigen Stützensziffer bezeichnet.

Die Größen m sind von der Belastung unabhängig. Die n sind lineare Funktionen der Stabkräfte S . Beide Arten von Hilfwerten vereinfachen sich ganz erheblich, wenn die Feldlängen a und die Verschieblichkeitsmaße δ der Stützen überall gleich groß sind, wie es bei der Anwendung häufiger der Fall ist. Für die allgemeine Lösung der Aufgabe sehen wir hiervon ab. Wesentlich ist, daß man offenbar auch für jede andere als die hier angenommene Felderzahl 4 die Gleichungen für die m und n nach dem Muster von (3) und (4) leicht anschreiben kann, wobei für die Bildung der n die Bemerkung nützlich ist, daß die auf derselben Zeile stehenden n die gleiche Feldlänge a und die zu diesem Felde und zu den beiden angrenzenden gehörigen Stabkräfte S enthalten. Ebenso leicht lassen sich natürlich die Hauptgleichungen (1) und (2) vermöge der Regelmäßigkeit ihres Baues auf eine kleinere Felderzahl einschränken oder auf eine größere ausdehnen. Es ist dabei nur die Abweichung der ersten und letzten Gleichung, in denen der Einfluß der Stabenden zum Ausdruck kommt, von den übrigen gehörig zu berücksichtigen. Neu hinzuzufügende Gleichungen müssen die Form der mittleren erhalten. Die Möglichkeit, die Ergebnisse ohne weiteres auf eine andere Felderzahl anzuwenden, begründet die Allgemeinheit der Lösung.

Es handelt sich nun darum, aus (1) und (2) die Knickbedingung herzuleiten. Bevor dies geschehen kann, muß über die Lagerung des Stabes an den Enden Bestimmung getroffen werden. Liegen die Enden frei drehbar auf, so sind die Endmomente M_1 und M_5 Null. Sie scheiden also als Veränderliche aus, und damit wird die erste und letzte Gleichung der Gruppe (1) für den vorliegenden Zweck entbehrlich. Die Gruppen (1) und (2) enthalten dann nur noch sieben Gleichungen mit den sieben Veränderlichen $M_2, M_3, M_4, \nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{34}, \nu_{45}$. Können sich die Enden nicht frei drehen, so sind Endmomente M_1 und M_5 vorhanden; dagegen sind die Endneigungen ν_1 und ν_5 Null, wenn man die Be-

trachtung auf einen Stab ohne Anfangsspannung mit starr eingespannten Enden beschränkt. Die Gruppen (1) und (2) umfassen dann neun Gleichungen mit ebenso vielen Veränderlichen. In beiden Fällen hat man eine vollständige Gruppe sogenannter linearer homogener Gleichungen, die ich in der Abhandlung von 1909 Knickgleichungen genannt habe. Die Knickbedingung wird erhalten, indem man die Determinante aus den Beiwerten der Veränderlichen gleich Null setzt. Hiermit wäre die Aufgabe grundsätzlich gelöst. Es fragt sich aber, ob es nicht möglich ist, dies Ergebnis, um die Anwendung zu erleichtern, noch zu vereinfachen. Die Bestimmung des Zahlenwertes einer Determinante geschieht zwar nach einfachen, bekannten Regeln, erfordert aber bei größerer Gliederzahl umfangreiche Berechnungen. Es kann sich nur darum handeln, diesen Rechnungen soweit wie möglich allgemein vorzuarbeiten, so daß sich die Durchführung im Einzelfalle wenigstens leichter übersehen und beherrschen läßt. Das Folgende stellt einen Versuch in dieser Richtung dar.

Es möge von den beiden zuvor erwähnten Fällen der etwas allgemeinere mit Endeinspannung gewählt werden. Die Ergebnisse lassen sich leicht auf den Stab mit frei drehbaren Enden übertragen.

Wir bestimmen zunächst die M als Funktionen der N aus Gleichung (1). Die Nennerdeterminante ist

$$(5) \quad D = \begin{vmatrix} t_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & t_2 & s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & s_{23} & t_3 & s_{34} & 0 \\ 0 & 0 & s_{34} & t_4 & s_{45} \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & t_{45} \end{vmatrix} .^2)$$

Wir bilden die Unterdeterminanten aller Glieder von D unter Beachtung der Vorzeichen und teilen sie durch D . Die Ergebnisse seien bezeichnet mit

2) Die Determinante D ist unter allen Umständen symmetrisch, gleichgültig ob die Anordnung des Stabes dies ist, oder nicht.

$$(6) \left\{ \begin{array}{ccccc} u_{11} & u_{21} & u_{31} & u_{41} & u_{51} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} \\ u_{14} & u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} \\ u_{15} & u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} \end{array} \right.$$

Sie sind hier so geordnet, wie sie zu den Gliedern von D in (5) gehören. Wenn man die Werte jeder Spalte von oben anfangend der Reihe nach mit

$$N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5$$

vervielfacht und zusammenzählt, so erhält man als algebraische Summe der ersten Spalte den Wert M_1 , für die zweite Spalte den Wert M_2 usw. bis M_5 . Da jedes N den Unterschied zweier v darstellt, so sind hiermit die M durch die v ausgedrückt. Nach diesen Größen ordnend erhält man auf solche Weise:

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} M_1 = U_{11} v_{12} + U_{12} v_{23} + U_{13} v_{34} + U_{14} v_{45}; \\ M_2 = U_{21} v_{12} + U_{22} v_{23} + U_{23} v_{34} + U_{24} v_{45}; \\ M_3 = U_{31} v_{12} + U_{32} v_{23} + U_{33} v_{34} + U_{34} v_{45}; \\ M_4 = U_{41} v_{12} + U_{42} v_{23} + U_{43} v_{34} + U_{44} v_{45}; \\ M_5 = U_{51} v_{12} + U_{52} v_{23} + U_{53} v_{34} + U_{54} v_{45}. \end{array} \right.$$

Die U sind abkürzende Bezeichnungen für die Unterschiede je zweier in (6) untereinander stehenden u ; sie sind nur eingeführt, um die Gleichungen weniger weitläufig zu gestalten. Ihre Werte ergeben sich aus der folgenden Zusammenstellung:

$$(8) \left\{ \begin{array}{cccc} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} \\ \hline -u_{11} + u_{12} & -u_{12} + u_{13} & -u_{13} + u_{14} & -u_{14} + u_{15} \\ -u_{21} + u_{22} & -u_{22} + u_{23} & -u_{23} + u_{24} & -u_{24} + u_{25} \\ -u_{31} + u_{32} & -u_{32} + u_{33} & -u_{33} + u_{34} & -u_{34} + u_{35} \\ -u_{41} + u_{42} & -u_{42} + u_{43} & -u_{43} + u_{44} & -u_{44} + u_{45} \\ -u_{51} + u_{52} & -u_{52} + u_{53} & -u_{53} + u_{54} & -u_{54} + u_{55} \end{array} \right.$$

Die Zeiger der U stimmen mit den Zeigern des ersten Gliedes der zugehörigen Unterschiede überein.

Führt man die M aus (7) in die Gruppe (2) ein, so enthält sie nur noch die vier Veränderlichen

$$v_{12} \quad v_{23} \quad v_{34} \quad v_{45}.$$

Die Beiwerte dieser Größen bezeichnen wir mit v und je zwei Ordnungsziffern. Dann nehmen die Gleichungen (2) die nachstehende Form an:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{11} v_{12} + v_{12} v_{23} + v_{13} v_{34} + v_{14} v_{45} = 0; \\ v_{21} v_{12} + v_{22} v_{23} + v_{23} v_{34} + v_{24} v_{45} = 0; \\ v_{31} v_{12} + v_{32} v_{23} + v_{33} v_{34} + v_{34} v_{45} = 0; \\ v_{41} v_{12} + v_{42} v_{23} + v_{43} v_{34} + v_{44} v_{45} = 0. \end{array} \right.$$

Es handelt sich jetzt darum, die v möglichst übersichtlich darzustellen. Die Einsetzung der M aus (7) in (2) liefert zuerst die Beiwerte von v_{12} .

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{11} = -m_{12} U_{11} + m_{12 \cdot 2} U_{21} - m_2 U_{31} \quad \cdot \quad \cdot \quad + n_{11}; \\ v_{21} = m_2 U_{11} - m_{2 \cdot 23} U_{21} + m_{23 \cdot 3} U_{31} - m_3 U_{41} \quad \cdot \quad + n_{21}; \\ v_{31} = \quad \cdot \quad m_3 U_{21} - m_{3 \cdot 34} U_{31} + m_{34 \cdot 4} U_{41} - m_4 U_{51} \quad \cdot \quad ; \\ v_{41} = \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad m_4 U_{31} - m_{4 \cdot 45} U_{41} + m_{45} U_{51} \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Ferner die Beiwerte von v_{23} :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{12} = -m_{12} U_{12} + m_{12 \cdot 2} U_{22} - m_2 U_{32} \quad \cdot \quad \cdot \quad + n_{12}; \\ v_{22} = m_2 U_{12} - m_{2 \cdot 23} U_{22} + m_{23 \cdot 3} U_{32} - m_3 U_{42} \quad \cdot \quad + n_{22}; \\ v_{32} = \quad \cdot \quad m_3 U_{22} - m_{3 \cdot 34} U_{32} + m_{34 \cdot 4} U_{42} - m_4 U_{52} + n_{32}; \\ v_{42} = \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad m_4 U_{32} - m_{4 \cdot 45} U_{42} + m_{45} U_{52} \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right.$$

Weiter hat man die Beiwerte von v_{34} :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{13} = -m_{12} U_{13} + m_{12 \cdot 2} U_{23} - m_2 U_{33} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ; \\ v_{23} = m_2 U_{13} - m_{2 \cdot 23} U_{23} + m_{23 \cdot 3} U_{33} - m_3 U_{43} \quad \cdot \quad + n_{23}; \\ v_{33} = \quad \cdot \quad m_3 U_{23} - m_{3 \cdot 34} U_{33} + m_{34 \cdot 4} U_{43} - m_4 U_{53} + n_{33}; \\ v_{43} = \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad m_4 U_{33} - m_{4 \cdot 45} U_{43} + m_{45} U_{53} + n_{43}. \end{array} \right.$$

Und schließlich die Beiwerte von v_{45} :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_{14} = -m_{12} U_{14} + m_{12 \cdot 2} U_{24} - m_2 U_{34} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad ; \\ v_{24} = m_2 U_{14} - m_{2 \cdot 23} U_{24} + m_{23 \cdot 3} U_{34} - m_3 U_{44} \quad \cdot \quad \cdot \quad ; \\ v_{34} = \quad \cdot \quad m_3 U_{24} - m_{3 \cdot 34} U_{34} + m_{34 \cdot 4} U_{44} - m_4 U_{54} + n_{34}; \\ v_{44} = \quad \cdot \quad \quad \cdot \quad m_4 U_{34} - m_{4 \cdot 45} U_{44} + m_{45} U_{54} + n_{44}. \end{array} \right.$$

Die Betrachtung dieser Gleichungen lehrt folgendes: Jede der vier Gruppen bestimmt die zu ein und demselben v gehörigen v , die in (9) senkrecht untereinander stehen.

Die Beiwerte m der U sind in allen Gruppen die gleichen und stimmen mit den Beiwerten der M in (2) überein. Sie sind gegeben durch (3). Jede Gruppe enthält die U einer Spalte von (8) in der gleichen Reihenfolge wie dort. Die in der Gruppe senkrecht untereinander stehenden U sind gleich. Oder anders ausgedrückt: Der erste Zeiger der U entspricht der Spalte, der zweite der ganzen Gruppe und damit der zugehörigen Spalte von (8) und von (9). Ebenso enthält jede Gruppe diejenigen n , die sich in der das zugehörige ν aufweisenden Spalte von (2) vorfinden, und zwar treten die n in den Gruppen auch in derselben Zeile auf, wie in (2). Die Werte der n sind gegeben durch (4). Die erste und letzte Gleichung jeder Gruppe entspricht einem Endfeld, die zweite und dritte Gleichung den beiden Mittelfeldern. Beachtet man die Verschiedenheit im Bau der End- und Mittlereichungen, so ist es leicht, die Gruppen für eine andere Felderzahl zu erweitern oder zu verkürzen. Dabei ändern die vorhandenen m und n ihre Werte nicht, wohl aber die U .

Dieses Verfahren ist an eine Bedingung geknüpft: Da bei Berechnung der u durch D geteilt wird, so darf D nicht Null sein. Wäre das etwa doch der Fall, so wäre mit

$$(14) \quad D = 0$$

die Knickbedingung für starre Stützung erfüllt. Daß dem so ist, erkennt man leicht, wenn man beachtet, daß bei starrer Stützung die Feldneigungen ν unveränderlich und bei einem anfänglich geraden Stabe Null werden. Damit beschränken sich die Knickgleichungen auf die Gruppe (1), in der überall rechts statt N Null zu setzen ist. Die zugehörige Knickbedingung ist dann offenbar $D = 0$. Dieser Fall darf hier ausgeschlossen werden.³⁾

Die Knickbedingung für elastische Stützung lautet also jetzt

$$(15) \quad \mathbf{K} = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

3) Er ist in der Abhandlung von 1909 ausführlich behandelt.

Es fragt sich nun, was hiermit anzufangen ist. Man hat in (15) eine Gleichung mit 17 Unbekannten, nämlich den

Feldlängen	a_{12}	a_{23}	a_{34}	a_{45}	,
Stabkräften	S_{12}	S_{23}	S_{34}	S_{45}	,
Trägheitsmomenten	J_{12}	J_{23}	J_{34}	J_{45}	,
Verschiebungsmaßen	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5 .

Jede dieser 17 Größen ist von Einfluß auf die Knickfestigkeit der ganzen Anordnung. (Man darf sich daher, nebenbei bemerkt, nicht wundern, daß die Knickbedingung eine so umfangreiche und verwickelte Gestalt hat.) Hinsichtlich dessen, was gegeben und was zu suchen ist, kann deshalb rein mathematisch eine außerordentlich große Zahl verschiedener Fälle vorliegen. Hier kommen die Bedürfnisse der Wirklichkeit der Auswahl zu Hilfe, indem meist der größere Teil der 17 Unbekannten durch anderweitige Bedingungen festgelegt ist. Demgemäß wollen wir hier annehmen, daß die Feldlängen, Stabkräfte und Trägheitsmomente durch die Festigkeitsberechnung gegeben seien, daß also nur die Wahl der δ noch freistehe. Von diesen fünf Größen könnten vier willkürlich festgesetzt werden, worauf sich die fünfte aus (15) berechnen ließe. Eine andere Möglichkeit wäre die, daß gewisse Beziehungen zwischen den δ angenommen würden, z. B. etwa gleiche Beschaffenheit der Endstützen, d. h.

$$\delta_1 = \delta_5 = \delta.$$

Wählt man $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ beliebig, so liefert (15) den Wert von δ . Natürlich können die drei δ für die mittleren Knotenpunkte auch gleich groß angenommen werden. Das entspricht dem Fall einer offenen Brücke mit besonderen Endrahmen. Man könnte auch umgekehrt $\delta_1 = \delta_5$ willkürlich festsetzen und danach $\delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta$ aus (15) berechnen. Zu einer solchen Annahme gelangt man, wenn die Endstützen sehr steif gebaut sind, so daß näherungsweise $\delta_1 = \delta_5 = 0$ gesetzt werden darf. Der einfachste und häufigste Fall ist der, daß alle Stützen und damit alle δ (wenigstens annähernd) gleich sind. Dieser soll jetzt zunächst als Beispiel behandelt werden, worauf sich dann der Fall der starren

Endstützen sehr kurz erledigen läßt. Da in der Wirklichkeit am meisten solche Anordnungen vorkommen, die symmetrisch sind in bezug auf einen mittleren Knotenpunkt oder eine Feldmitte, und da sich die Rechnung durch eine derartige Beschaffenheit gegenüber der allgemeinsten Form sehr abkürzt, so nehmen wir weiterhin von vornherein eine symmetrische Gestalt und Belastung des Stabes an.

II. Symmetrische Anordnung.⁴⁾

Wir setzen zur Weiterführung unseres Beispiels voraus, daß die Form, Lagerung und Belastung des Stabes eine symmetrische ist in bezug auf den mittleren Knotenpunkt 3 und daß die Enden frei drehbar sind. Dann werden die

Feldlängen	:	a_{12}	a_{23}	a_{23}	a_{12}	;
Stabkräfte	:	S_{12}	S_{23}	S_{23}	S_{12}	;
Trägheitsmomente:		J_{12}	J_{23}	J_{23}	J_{12}	;
Knotenmomente	:	0	M_2	M_3	M_2	0;
Hilfsgrößen s	:		s_{23}	s_{23}		;
„ t	:		t_2	t_3	t_2	.

Aus (5) wird wegen Fortfalls der ersten und letzten Zeile und Spalte:

$$(16) \quad D = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{23} \\ 0 & s_{23} & t_2 \end{vmatrix} = t_3 t_2^2 - 2 s_{23}^2 t_2.$$

Die u der ersten und letzten Zeile und Spalte von (6) sowie die U der ersten und letzten Zeile von (8) verschwinden. Ferner wird

$$(17) \quad \begin{cases} DU_{21} = -s_{23}^2 & \cdot & + t_2 t_3 & \cdot = -DU_{44}; \\ DU_{22} = s_{23}^2 - s_{23} t_2 & - t_2 t_3 & \cdot = -DU_{43}; \\ DU_{23} = s_{23}^2 + s_{23} t_2 & \cdot & \cdot = -DU_{42}; \\ DU_{24} = -s_{23}^2 & \cdot & \cdot = -DU_{41}; \\ \hline DU_{31} = \cdot - s_{23} t_2 & \cdot & \cdot = -DU_{34}; \\ DU_{32} = \cdot & s_{23} t_2 & \cdot + t_2^2 = -DU_{33}. \end{cases}$$

4) Es erscheint nützlich, darauf hinzuweisen, daß der regelmäßige Bau der allgemeinen Gleichungen durch die Einführung der Symmetrie gestört wird. Es empfiehlt sich daher, immer auf die allgemeine Lösung zurückzugreifen, wenn die Ergebnisse auf andere Anordnungen als die hier vorgeführten übertragen werden sollen.

Es sind also immer diejenigen v einander gleich, deren Zeiger sich zur Summe 55 ergänzen. Ersetzt man die rechtsstehenden Werte durch die linksstehenden, so geht (15) über in

$$(22) \quad K = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{42} & v_{41} \\ v_{21} & v_{22} & v_{32} & v_{31} \\ v_{31} & v_{32} & v_{22} & v_{21} \\ v_{41} & v_{42} & v_{12} & v_{11} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante läßt sich als das Produkt zweier anderer K_1 und K_2 darstellen wie folgt:

$$(23) \quad K = \begin{vmatrix} v_{11} + v_{41} & v_{12} + v_{42} \\ v_{21} + v_{31} & v_{22} + v_{32} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} v_{11} - v_{41} & v_{12} - v_{42} \\ v_{21} - v_{31} & v_{22} - v_{32} \end{vmatrix} = K_1 \cdot K_2.$$

Die erste Determinante enthält die Summen, die zweite die Unterschiede je derselben zwei v . Berechnet man diese Summen und Unterschiede mit Hilfe der Gleichungen (10) bis (13), indem man für die m und n die Werte aus (19) und (20) einsetzt, so zeigt sich, daß sie lineare Funktionen von δ sind und daß nur die in der Diagonalreihe stehenden Ausdrücke ein unveränderliches Glied, nämlich 1, enthalten. Wir setzen daher zur Abkürzung

$$(24) \quad \begin{cases} v_{11} + v_{41} = 1 + g_{11} \delta; & v_{12} + v_{42} = g_{12} \delta; \\ v_{11} - v_{41} = 1 + h_{11} \delta; & v_{12} - v_{42} = h_{12} \delta; \\ v_{21} + v_{31} = g_{21} \delta; & v_{22} + v_{32} = 1 + g_{22} \delta; \\ v_{21} - v_{31} = h_{21} \delta; & v_{22} - v_{32} = 1 + h_{22} \delta. \end{cases}$$

Die hierin auftretenden Hilfsgrößen g und h sind durch folgende Gleichungen bestimmt, in denen die durch (17) gegebenen Beziehungen zwischen den Größen U berücksichtigt sind.

$$(25) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} g_{11} \\ h_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{2}{a_{12}} + \frac{1}{a_{23}} \right) (U_{21} \pm U_{24}) - \frac{1}{a_{12} a_{23}} (U_{31} \mp U_{31}) - 2 \frac{S_{12}}{a_{12}}; \\ \begin{pmatrix} g_{12} \\ h_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{2}{a_{12}} + \frac{1}{a_{23}} \right) (U_{22} \pm U_{23}) - \frac{1}{a_{12} a_{23}} (U_{32} \mp U_{32}) + \frac{S_{23}}{a_{12}}; \end{cases}$$

$$(26) \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} g_{21} \\ h_{21} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a_{23}} \left(\frac{1}{a_{12}} + \frac{\{1\}}{a_{23}} \right) (U_{21} \pm U_{24}) + \frac{3}{a_{23}^2} (U_{31} \mp U_{31}) + \frac{S_{12}}{a_{23}}; \\ \begin{pmatrix} g_{22} \\ h_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{a_{23}} \left(\frac{1}{a_{12}} + \frac{\{1\}}{a_{23}} \right) (U_{22} \pm U_{23}) + \frac{3}{a_{23}^2} (U_{32} \mp U_{32}) - \frac{\{1\}}{a_{23}} \frac{S_{23}}{a_{23}}. \end{cases}$$

Für die g gelten die oberen Vorzeichen und in den geschweiften Klammern die Zahl 1, für die h die unteren Vorzeichen und in diesen Klammern die Zahl 3. Beide Arten von Größen setzen sich aus vielfach wiederkehrenden Teilen in sehr ähnlicher Weise zusammen, was die Zahlenrechnung wesentlich erleichtert. Alle Größen auf der rechten Seite von (25) und (26) außer den U sind gegeben, und diese folgen aus (17). Die hierin auftretenden s und t sind bestimmt durch die Gleichungen

$$(27) \begin{cases} s_{23} = - \left(1 - \frac{a_{23}}{\sin a_{23}} \right) \frac{1}{a_{23} S_{23}}; \\ t_{12} = \left(1 - \frac{a_{12}}{\tan a_{12}} \right) \frac{1}{a_{12} S_{12}}; \quad t_2 = t_{12} + t_{23}; \\ t_{23} = \left(1 - \frac{a_{23}}{\tan a_{23}} \right) \frac{1}{a_{23} S_{23}}; \quad t_3 = 2 t_{23}. \end{cases}$$

Die Hilfswinkel a_{12} und a_{23} ergeben sich aus

$$(28) \quad a_{12} = a_{12} \sqrt{\frac{S_{12}}{E J_{12}}}; \quad a_{23} = a_{23} \sqrt{\frac{S_{23}}{E J_{23}}}.$$

Die Knickbedingung wird jetzt erhalten, indem man $K=0$ setzt. Nach (23) kann das aber sowohl durch

$$K_1 = 0, \text{ wie durch } K_2 = 0$$

erfüllt werden. Die Bedingung zerfällt in zwei Gleichungen, und zwar sind diese in δ vom zweiten Grade, nämlich:

$$(29) \quad \begin{cases} 1 + (g_{11} + g_{22})\delta + (g_{11} g_{22} - g_{12} g_{21})\delta^2 = 0 \\ \text{und } 1 + (h_{11} + h_{22})\delta + (h_{11} h_{22} - h_{12} h_{21})\delta^2 = 0. \end{cases}$$

Jede der vier Wurzeln dieser beiden Gleichungen ergibt einen Wert von δ , der der Knickbedingung genügt. Für die Anwendung ist natürlich der kleinste Wert maßgebend. Die größeren Werte entsprechen unsicheren (labilen) Gleichgewichtslagen.

Eine besonders häufig vorkommende Anordnung ist die mit lauter gleichen Feldlängen. Die Knickbedingungen für diesen Fall ergeben sich aus den bisherigen Rechnungen ohne weiteres, wenn man in (25) und (26)

$$a_{12} = a_{23} = a$$

setzt. Dann vereinfachen sich diese Gleichungen wie folgt:

$$(30) \begin{cases} \left. \begin{matrix} g_{11} \\ h_{11} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a^2} \left[3 \left(U_{21} \pm U_{24} \right) - \left(U_{31} \mp U_{31} \right) \right] - 2 \frac{S_{12}}{a}; \\ \left. \begin{matrix} g_{12} \\ h_{12} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a^2} \left[3 \left(U_{22} \pm U_{23} \right) - \left(U_{32} \mp U_{32} \right) \right] + \frac{S_{23}}{a}; \end{cases}$$

$$(31) \begin{cases} \left. \begin{matrix} g_{21} \\ h_{21} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{a^2} \left[\left. \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\} \left(U_{21} \pm U_{24} \right) - 3 \left(U_{31} \mp U_{31} \right) \right] + \frac{S_{12}}{a}; \\ \left. \begin{matrix} g_2 \\ h_{22} \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{a^2} \left[\left. \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right\} \left(U_{22} \pm U_{23} \right) - 3 \left(U_{32} \mp U_{32} \right) \right] - \left. \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\} \frac{S_{23}}{a}. \end{cases}$$

Die Bedingung (29) bleibt ungeändert.

B. Starre Endstützen.

Für eine starre Stütze ist die durch die Kraft 1 erzeugte Verschiebung δ Null. Bei starren Endstützen und lauter gleichwirkenden elastischen Mittelstützen tritt also an Stelle von (18) die Bedingung

$$(32) \quad \delta_1 = \delta_5 = 0; \quad \delta_2 = \delta_3 = \delta_4 = \delta.$$

An den aus (3) und (4) hervorgegangenen Gleichungen (19) und (20) ändern sich dadurch nur die zur Bestimmung von m_{12} , $m_{12 \cdot 2}$ und n_{11} dienenden, wie folgt:

$$(33) \quad \begin{cases} m_{12} = \frac{\delta}{a_{12}^2}; & m_{12 \cdot 2} = \frac{\delta}{a_{12}} \left(\frac{1}{a_{12}} + \frac{1}{a_{23}} \right); \\ n_{11} = 1 - \frac{\delta}{a_{12}} S_{12} \cdot 5) \end{cases}$$

Diese Änderung beeinflusst lediglich die Größen g_{11} , h_{11} und g_{12} , h_{12} in (25), für die jetzt die Gleichungen gelten

$$(34) \begin{cases} \left. \begin{matrix} g_{11} \\ h_{11} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{1}{a_{12}} + \frac{1}{a_{23}} \right) \left(U_{21} \pm U_{24} \right) - \frac{1}{a_{12} a_{23}} \left(U_{31} \mp U_{31} \right) - \frac{S_{12}}{a_{12}}; \\ \left. \begin{matrix} g_{12} \\ h_{12} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{a_{12}} \left(\frac{1}{a_{12}} + \frac{1}{a_{23}} \right) \left(U_{22} \pm U_{23} \right) - \frac{1}{a_{12} a_{23}} \left(U_{32} \mp U_{32} \right) + \frac{S_{23}}{a_{12}}. \end{cases}$$

Bei gleichen Feldlängen ist hierin $a_{12} = a_{23} = a$ zu setzen. Die so entstehenden, an Stelle von (30) tretenden

5) Es sind oben nur die Werte für das linke Stabende aufgeführt, weil wegen der vorausgesetzten Symmetrie $m_{45} = m_{12}$; $m_{4 \cdot 45} = m_{12 \cdot 2}$; $n_{44} = n_{11}$.

Gleichungen brauchen wohl nicht besonders angeschrieben zu werden.

Man ersieht aus vorstehendem, daß die Berücksichtigung des Einflusses starrer Endstützen nur ganz geringfügige Änderungen an den Formeln für die Größen g_{11} , h_{11} und g_{12} , h_{12} erfordert. Die Bedingung (29) bleibt ungeändert.

III. Anwendung.

Bei der Anwendung dieser Formeln auf bestimmte Fälle kann es vorkommen, daß die in den Gleichungen (27) auftretenden Klammerausdrücke nur kleine Werte haben. Da sie nun noch mit den Produkten aS aus Feldlänge und Stabkraft geteilt werden, so sind dann die s und t sehr kleine, für die Zahlenrechnung unbequeme Brüche. Diesem Übelstand läßt sich auf folgende Weise abhelfen.

Die Größen u in (6) werden erhalten, indem man die Unterdeterminanten der Glieder von D aus (5) ermittelt und durch D teilt. Es sei d eine beliebige Unterdeterminante; dann ist also das zugehörige u bestimmt durch

$$u = \frac{d}{D}.$$

Vervielfacht man sämtliche Glieder von D mit irgend einer Zahl k , und bezeichnet man die neuen Werte von d und D mit d' und D' , so ist nach den Regeln der Determinantenlehre bei der vorliegenden fünfzeihigen Determinante

$$D' = k^5 D \text{ und } d' = k^4 d.$$

Daraus folgt

$$(35) \dots\dots\dots u = \frac{d}{D} = k \frac{d'}{D'}.$$

Das gilt offenbar auch für jede andere Zahl von Reihen, da die Unterdeterminanten in bezug auf k immer um einen Grad niedriger sind, als die Hauptdeterminante. Hiernach erhält man die u nicht nur aus der Determinante (5), sondern auch aus einer solchen, in der alle Glieder den k -fachen Wert haben, wenn man damit ganz ebenso verfährt, wie mit (5), aber jeden Quotienten noch mit k vervielfacht. Wählt man nun k von der Größenordnung aS , etwa gleich dem Mittelwerte oder gleich einem der tatsächlich auftretenden

Werte aS , so erhalten die Glieder ks und kt bequeme Zahlenwerte. — Wir setzen der Allgemeinheit wegen

$$(36) \quad k = a_0 S_0,$$

wobei a_0 und S_0 Mittelwerte oder wirklich vorhanden sein können. Dann erhalten die ks und kt mit der neuen Bezeichnung s' und t' die Form

$$(37) \quad s' = - \left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) \frac{a_0 S_0}{aS}; \quad t' = \left(1 - \frac{\alpha}{\tan \alpha} \right) \frac{a_0 S_0}{aS}.$$

Berechnet man hiermit die u nach der eben entwickelten Regel, so tritt in jedem von ihnen gemäß (35) der Faktor $a_0 S_0$ auf. Das gleiche gilt für die nach (8) bestimmten Größen U , die die Unterschiede je zweier u darstellen. Man kann das in den entwickelten Formeln dadurch sichtbar machen, daß man

$$(38) \quad U = a_0 S_0 \cdot U'$$

setzt, wo nun U' aus der nach (5), jedoch mit s' und t' an Stelle von s und t , gebildeten Determinante genau in derselben Weise abzuleiten ist, wie sie oben für U angegeben wurde.

Die Änderung, die hierdurch an den Gleichungen (25) und (26) herbeigeführt wird, ist leicht zu übersehen. Alle U gehen in U' über und erhalten denselben Beiwert $a_0 S_0$. Der letztere Umstand legt den Gedanken nahe, diesen Wert als gemeinschaftlichen Faktor der ganzen Ausdrücke für g und h herauszuziehen, die letzten von U freien Glieder mit einbegriffen. Als Beispiel hierzu möge der am häufigsten vorkommende Fall dienen, daß alle Stützen von gleicher Art und alle Feldlängen gleich groß, etwa $= a$ sind. Dann empfiehlt es sich natürlich $a_0 = a$ zu wählen. Die früher für diesen Fall abgeleiteten Gleichungen (30) und (31) erhalten so die nachstehende Form:

$$(39) \quad \begin{cases} \left. \begin{matrix} g_{11} \\ h_{11} \end{matrix} \right\} = \frac{S_0}{a} \left[3 \left(U'_{21} \pm U'_{24} \right) - \left(U'_{31} \mp U'_{31} \right) - 2 \frac{S_{12}}{S_0} \right]; \\ \left. \begin{matrix} g_{12} \\ h_{12} \end{matrix} \right\} = \frac{S_0}{a} \left[3 \left(U'_{22} \pm U'_{23} \right) - \left(U'_{32} \mp U'_{32} \right) + \frac{S_{23}}{S_0} \right]; \end{cases}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \left. \begin{matrix} g_{21} \\ h_{21} \end{matrix} \right\} = - \frac{S_0}{a} \left[\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right] \left(U'_{21} \pm U'_{24} \right) - 3 \left(U'_{31} \mp U'_{31} \right) - \frac{S_{12}}{S_0} \right]; \\ \left. \begin{matrix} g_{22} \\ h_{22} \end{matrix} \right\} = - \frac{S_0}{a} \left[\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} \right] \left(U'_{22} \pm U'_{23} \right) - 3 \left(U'_{32} \mp U'_{32} \right) + \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \frac{S_{23}}{S_0} \right]. \end{cases}$$

Aus (34) folgt, daß bei Vorhandensein starrer Endstützen in (39) die 3 des ersten Gliedes durch 2, die 2 des letzten durch 1 zu ersetzen ist.

In den zur Berechnung der U' dienenden s' und t' hebt sich hierbei wegen $a_0 = a$ die Größe a fort. Noch weiter wird die Form von s' und t' vereinfacht, wenn auch alle Stabkräfte S gleich groß sind, da man dann $S_0 = S$ wählen und somit in (37) S_0 gegen S heben wird. Ebenso verschwinden die S aus den letzten Gliedern von (39) und (40).

Die vorstehende Betrachtung gewährt außer einer bequemeren Rechnung auch einen guten Einblick in die Bedeutung der Größen g und h . Die s' und t' sind nach (37) vom Maße Null, also reine Zahlen; dasselbe gilt daher auch für die aus den s' und t' berechneten U' . Und da die Größen $S_{12} : S_0$ und $S_{23} : S_0$ als Quotienten aus zwei Kräften ebenfalls nur Zahlen sind, so haben die g und h nach (39) und (40) das Maß $S_0 : a$, oder im allgemeinen das Maß $S_0 : a_0$, d. h. Kraft durch Länge. Nun hat aber δ als Verschiebung für die Kräfteinheit das Maß Länge durch Kraft. Die in (24) auftretenden Produkte $g\delta$ und $h\delta$ sind also richtig Zahlen, wie es ja sein muß, weil sie die Zahl 1 als Summanden neben sich haben.

Für die Anwendung kann es sich empfehlen, den Faktor $S_0 : a_0$ von den g und h abzusondern und zu δ hinzuzufügen, also etwa zu setzen

$$(41) \quad g = \frac{S_0}{a_0} g'; \quad h = \frac{S_0}{a_0} h'; \quad \frac{S_0}{a_0} \delta = \delta'.$$

Da S_0 und a_0 willkürlich angenommene Werte sind, so ist durch δ' auch δ bestimmt; man kann mithin ebenso gut δ' als die zu suchende Unbekannte wählen. Dies geschieht, indem man gemäß (41) in (24)

$$(42) \quad g\delta = g'\delta' \quad \text{und} \quad h\delta = h'\delta'$$

setzt. Die Größen g , h und δ mit von Null verschiedenem Maße verschwinden dann ganz aus der Rechnung, und es bleiben in (29) nur noch die reinen von den gewählten Maßeinheiten unabhängigen Zahlen g' , h' und δ' übrig. Die Formeln für g und h liefern ohne weiteres g' und h' , wenn

man den Faktor $S_0 : a_0$ auf der rechten Seite wegläßt. Im Falle gleicher Feldlängen z. B. sind die g' und h' durch die Werte der eckigen Klammern auf der rechten Seite von (39) und (40) gegeben. Ist δ' aus (29) gefunden, so ergibt sich δ aus (41). Ein solches Rechnen mit Zahlen bietet gegenüber dem Rechnen mit Längen, Kräften usw. bekanntlich manche Vorteile.

Zur Vereinfachung des Schreibwerkes mag bei den s , t , u , U , g und h die Bezeichnung mit einem Strich fortgelassen werden, weil die ungestrichenen Größen in der Zahlenrechnung nicht mehr auftreten. Dagegen sind δ und δ' auseinanderzuhalten, da am Schluß der Rechnung von der einen zur anderen Größe übergegangen werden muß.

IV. Zahlenbeispiel.

Eine Brücke von 34 m Stützweite mit der in Abb. 2 dargestellten Anordnung hat vier gleiche Obergurttfelder von je 680 cm Länge. Das Trägheitsmoment des Obergurtquer-

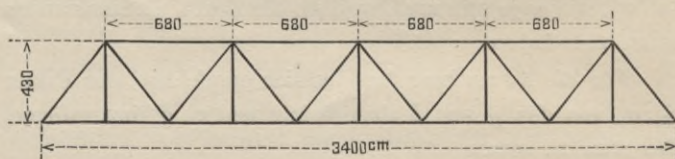


Abb. 2. Mittelliniennetz der Brücke.

schnittes für die lotrechte Schwerachse ist in den beiden Endfeldern 51300, in den Mittelfeldern 66800, bei Annahme des Zentimeters als Längeneinheit. Die zugehörigen größten Gurtkräfte sind 146 t und 211 t. Die Brücke soll fünffache Knicksicherheit erhalten; es sind daher die fünffachen Werte dieser Kräfte in Rechnung zu stellen. Das Elastizitätsmaß wird zu 2000 t angenommen. Da die Anordnung symmetrisch ist in bezug auf den Punkt 3, so können die in den Abschnitten II und III entwickelten Formeln benutzt werden. Die Rechnung gestaltet sich wie folgt.

	Feld 1-2		Feld 2-3
Es ist	$a_{12} = 680 \text{ cm}$		$a_{23} = 680 \text{ cm}$
	$S_{12} = 730 \text{ t}$		$S_{23} = 1055 \text{ t}$
	$J_{12} = 51300$		$J_{23} = 66800.$

Hiermit wird nach (28)

$a_{12} = 680 \sqrt{\frac{730}{2000 \cdot 51300}}$	$a_{23} = 680 \sqrt{\frac{1055}{2000 \cdot 66800}}$
$= 1,815 \cdot$	$= 1,912 \cdot$
$\sin a_{12} = 0,970$	$\sin a_{23} = 0,942$
$\text{tang } a_{12} = -4,017$	$\text{tang } a_{23} = -2,819.$

Hiermit sind die s' und t' nach (37) zu berechnen. (Die Bezeichnung mit Strichen kann hier fortbleiben.) Wir wählen $a_0 = a$ und $S_0 = S_{23}$. Dann ergibt sich

$s_{12} = -\left(1 - \frac{a_{12}}{\sin a_{12}}\right) \frac{S_{23}}{S_{12}}$ (entfällt)	$s_{23} = -\left(1 - \frac{a_{23}}{\sin a_{23}}\right) = 1,030$
$t_{12} = \left(1 - \frac{a_{12}}{\text{tang } a_{12}}\right) \frac{S_{23}}{S_{12}}$	$t_{23} = \left(1 - \frac{a_{23}}{\text{tang } a_{23}}\right)$
$= 1,452 \frac{1055}{730} = 2,099$	$= \dots \dots \dots 1,678.$

Es wird für Knotenpunkt 2 3

$$t_2 = t_{12} + t_{23} = 3,777 \quad t_3 = 2t_{23} = 3,356.$$

Damit ergibt sich D nach (16):

$$D = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{23} \\ 0 & s_{23} & t_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3,78 & 1,03 & 0 \\ 1,03 & 3,36 & 1,03 \\ 0 & 1,03 & 3,78 \end{vmatrix} = 40,0.$$

Hieraus folgen die u , indem man die Unterdeterminanten aller Glieder bildet und mit 40 teilt. Die sehr einfache Rechnung braucht wohl nicht weiter erklärt zu werden, wir schreiben deshalb gleich die Ergebnisse in der übersichtlichen Zusammenstellung nach (6) an. (Da die Endmomente des Gurtes als verschwindend angenommen sind, so fällt die erste und letzte Zeile und Spalte von (6) fort.)

$$\left. \begin{matrix} u_{22} & u_{32} & u_{42} \\ u_{23} & u_{33} & u_{43} \\ u_{24} & u_{34} & u_{44} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 0,291 & -0,097 & 0,027; \\ -0,097 & 0,357 & -0,097; \\ 0,027 & -0,097 & 0,291. \end{matrix} \right.$$

Die Gruppe ist symmetrisch gegen beide Diagonalen. Hierauf ergeben sich die U wie folgt:

$$\begin{aligned} U_{21} &= u_{22} = 0,291; & U_{31} &= u_{32} = -0,097; \\ U_{22} &= -u_{22} + u_{23} = -0,388; & U_{32} &= -u_{32} + u_{33} = 0,454; \\ U_{23} &= -u_{23} + u_{34} = 0,124; & U_{33} &= -u_{33} + u_{34} = -0,454; \\ U_{24} &= -u_{34} = -0,027; & U_{34} &= -u_{34} = 0,097 \text{ usw.} \end{aligned}$$

Von dem Strich an kehren die Zahlen in entgegengesetzter Reihenfolge wieder, wie schon Gleichung (17) gezeigt hat. In den Formeln für g und h ist dies berücksichtigt. Man braucht die U also nur bis U_{32} zu ermitteln. Es sind jetzt die Summen und Unterschiede der U zu berechnen:

$$\begin{aligned} U_{21} + U_{24} &= 0,264; & U_{31} + U_{34} &= -0,194; \\ U_{21} - U_{24} &= 0,318; \\ U_{22} + U_{23} &= -0,264; & U_{32} + U_{33} &= 0,908. \\ U_{22} - U_{23} &= -0,512; \end{aligned}$$

Hiermit wird nach Gleichung (39) und (40) bei Weglassung des Faktors $S_0 : a$:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 3 \cdot 0,264 - 2 \frac{730}{1055} = -0,592; \\ h_{11} &= 3 \cdot 0,318 + 0,194 - 2 \frac{730}{1055} = -0,235; \\ g_{12} &= -3 \cdot 0,264 + 1 = 0,208; \\ h_{12} &= -3 \cdot 0,512 - 0,908 + 1 = -1,444; \\ g_{21} &= -2 \cdot 0,264 + \frac{730}{1055} = 0,164; \\ h_{21} &= -4 \cdot 0,318 - 3 \cdot 0,194 + \frac{730}{1055} = -1,162; \\ g_{22} &= 2 \cdot 0,264 - 1 = -0,472; \\ h_{22} &= 4 \cdot 0,512 + 3 \cdot 0,908 - 3 = 1,772. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung dieser Werte in (29) ergeben sich die Knickbedingungen

$$\begin{aligned} 1 - 1,064 \delta' + 0,245 \delta'^2 &= 0 \\ \text{und } 1 + 1,536 \delta' - 2,094 \delta'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Die vier Wurzeln sind

$$\delta' = 2,96; \quad 1,38; \quad 1,15; \quad -0,42.$$

Für die Ausführung ist die kleinste positive Wurzel maßgebend.⁶⁾ Nach (41) ergibt sich damit

$$\delta = \frac{a_0}{S_0} \delta' = \frac{680}{1055} 1,15 = 0,74 \text{ cm/t.}$$

Bei der Berechnung von δ aus den Abmessungen der Querrahmen kann man im vorliegenden Fall die Durchbiegung der Querträger vernachlässigen.

Ist dann l die Länge des biegsamen Teils der Pfosten und J_v das maßgebende Trägheitsmoment des Pfostenquerschnittes, so ergibt sich nach Abb. 3:

$$\delta = \frac{l^3}{3 E J_v}.$$

Mit $l = 230 \text{ cm}$ und $E = 2000 \text{ t}$ wird also das erforderliche Trägheitsmoment

$$J_v = \frac{230^3}{3 \cdot 0,74 \cdot 2000} = 2740.$$

Die Brücke ist mit $J_v = 4820$ ausgeführt, hat also einen bedeutenden Überschuß an Quersteifigkeit. Noch größer würde

der Überschuß bei starren Endrahmen sein, weil sich dann $\delta = 1,01 \text{ cm/t}$ ergibt.

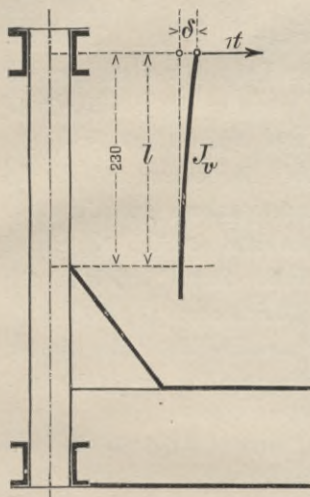


Abb. 3.
Querschnitt der Brücke.

V. Grenzfälle und Vergleiche.

An einem Beispiele ist gezeigt worden, daß die Zahlenrechnung nach dem entwickelten Verfahren leicht in übersichtlicher Weise durchgeführt werden kann. Noch einfacher gestaltet sich aber die Ermittlung gewisser Grenzwerte von δ , zwischen denen der wirkliche Wert stets liegen muß. Diese Grenzen zu kennen ist insofern nützlich, als damit ein Maßstab für den Einfluß einer Änderung der wichtigsten Größen

6) Die Bedeutung der negativen Wurzel wird später erörtert.

geboten und auch eine gewisse Sicherheit gegen größere Rechenfehler erreicht wird. Es empfiehlt sich deshalb, jetzt hierauf etwas näher einzugehen.

Wenn man nach dem kleinsten Werte von δ , also nach dem größten Widerstande fragt, den die Stützen einer Verschiebung entgegensetzen müssen, um das Gleichgewicht gerade noch herstellen zu können, so ist klar, daß dieser Widerstand wachsen muß, wenn die eigene Steifigkeit des Stabes abnimmt. Der kleinste Betrag, auf den sie herabsinken darf ist der, bei dem jedes Feld für sich gerade an die Knickgrenze gelangen würde. Im zweiten Teile der oben erwähnten Abhandlung vom Jahre 1909 ist nachgewiesen, daß dann der Stab auf die Stützen gerade so einwirkt, wie wenn er an den Knotenpunkten gelenkig wäre. Die Knotenmomente sind in diesem Falle nämlich bei einem Stab mit frei drehbaren Enden Null. Damit scheidet für die jetzt vorliegende Aufgabe die Gleichungen (1) überhaupt aus; und in den Gleichungen (2) verschwinden alle Glieder mit M . Daraus folgt als Knickbedingung für die ganze Anordnung:

$$(43) \quad \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & 0 & 0 \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & 0 \\ 0 & n_{32} & n_{33} & n_{34} \\ 0 & 0 & n_{43} & n_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Werte der n sind durch (4) bestimmt.

Bei symmetrischer Anordnung und lauter gleichen δ gelten statt (4) die Gleichungen (20), womit die Zahl der n auf die Hälfte herabgeht. Die weiteren Folgen brauchen hier nicht besonders dargelegt zu werden, da sie sich aus den früheren Entwicklungen von selbst ergeben. Mit dem Wegfall der Gleichungen (1) verschwinden nämlich auch die daraus abgeleiteten (7) und die Größen U . Streicht man diese in (25) und (26) so bleibt

$$(44) \quad \begin{Bmatrix} g_{11} \\ h_{11} \end{Bmatrix} = -2 \frac{S_{12}}{a_{12}}; \quad \begin{Bmatrix} g_{12} \\ h_{12} \end{Bmatrix} = \frac{S_{23}}{a_{12}};$$

$$(45) \quad \begin{Bmatrix} g_{21} \\ h_{21} \end{Bmatrix} = \frac{S_{12}}{a_{23}}; \quad \begin{Bmatrix} g_{22} \\ h_{22} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 11 \\ 3 \end{Bmatrix} \frac{S_{23}}{a_{23}}.$$

Mit diesen Werten bleibt die Knickbedingung (29) bestehen. Sie lautet jetzt für gleiche δ :

$$(46) \quad \begin{cases} 1 - \left(2 \frac{S_{12}}{a_{12}} + \frac{S_{23}}{a_{23}} \right) \delta + \frac{S_{12} S_{23}}{a_{12} a_{23}} \delta^2 = 0; \\ 1 - \left(2 \frac{S_{12}}{a_{12}} + 3 \frac{S_{23}}{a_{23}} \right) \delta + 5 \frac{S_{12} S_{23}}{a_{12} a_{23}} \delta^2 = 0. \end{cases}$$

Dies stimmt mit der Gleichung (79) in der Abhandlung von 1909 überein, wo auch als Beispiel die Zahlenwerte von δ' für einen Stab mit gleichen Feldlängen a und gleichen Stabkräften S berechnet sind.

Bei starren Endstützen ist auf (34) statt (25) zurückzugreifen. Dadurch ändert sich in Vorstehendem nur der Wert von g_{11} und h_{11} , da lediglich der Faktor 2 in der ersten Gleichung (44) fortfällt. Die Knickbedingung lautet mithin für diesen Fall

$$(47) \quad \begin{cases} 1 - \left(\frac{S_{12}}{a_{12}} + \frac{S_{23}}{a_{23}} \right) \delta = 0; \\ 1 - \left(\frac{S_{12}}{a_{12}} + 3 \frac{S_{23}}{a_{23}} \right) \delta + 2 \frac{S_{12} S_{23}}{a_{12} a_{23}} \delta^2 = 0. \end{cases}$$

Da die Gleichungen (4) und (43) sich leicht auch für jede beliebige andere Felderzahl anschreiben lassen, so ist hiermit die Aufgabe allgemein gelöst.

An der anderen Grenze hat δ den größten zulässigen Wert. Nach dem vorher benutzten Gedankengange wird diese Grenze erreicht bei einem vollkommen unbiegsamen Stabe. Für einen solchen sind alle Feldneigungen gleich groß, also

$$(48) \quad \nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{34} = \nu_{45} = \nu.$$

Die mit der Krümmung des Stabes zusammenhängenden Gleichungen (1) scheiden aus. Es bleiben also nur die Gleichungen (2), in denen als Veränderliche die Momente M_1 bis M_5 und die Stabneigung ν auftreten. Die Endmomente könnten bei einem starren Stabe nicht Einspannungsmomente sein, sondern müßten von gegebenen äußeren Kräften herühren. Da eine derartige Belastungsweise kaum vorkommt, so darf ohne wesentliche Minderung der Allgemeinheit des Verfahrens

$$(49) \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_5 = \mathbf{0}$$

gesetzt werden. Dann bleiben nur die vier Veränderlichen

$$M_2, M_3, M_4, \nu$$

in den vier Gleichungen (2) übrig. Sie stellen nun die Knickgleichungen dar. Die Knickbedingung ergibt sich, wenn man die Determinante aus den Beiwerten der Veränderlichen gleich Null setzt, in der Form:

$$(50) \quad \begin{vmatrix} m_{12 \cdot 2} & -m_2 & 0 & n_1 \\ -m_{2 \cdot 23} & m_{23 \cdot 3} & -m_3 & n_2 \\ m_3 & -m_{3 \cdot 34} & m_{34 \cdot 4} & n_3 \\ 0 & m_4 & -m_{4 \cdot 45} & n_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Größen m sind durch (3) bestimmt. Die n_1, n_2, n_3, n_4 ergeben sich als Summen der n einer jeden Zeile von (2), wenn ν als gemeinschaftlicher Faktor herausgesetzt wird, durch (4).

Bei symmetrischer Anordnung und lauter gleichen δ treten anstelle von (3) und (4) die Gleichungen (19) und (20). Hiermit soll die Rechnung als Beispiel weiter geführt werden. Man findet, daß die Glieder in (50) paarweise gleich werden, und daß die vierreihige Determinante sich als Produkt von zwei zweireihigen darstellen läßt, wodurch die Gleichung (50) in die folgende übergeht:

$$(51) \quad \begin{vmatrix} m_{12 \cdot 2} & -m_2 \\ -(m_3 + m_{2 \cdot 23}) & m_{23 \cdot 3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -(m_3 - m_{2 \cdot 23}) 2 n_2 \\ -m_{12 \cdot 2} & 2 n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die erste Determinante hat den Wert

$$\frac{5 \delta^2}{a_{12}^2 a_{23}^2}.$$

Sie kann nicht Null werden, da $\delta = 0$ ausgeschlossen ist. Setzt man also die zweite Determinante Null und löst man die so entstehende Gleichung nach δ auf, so findet man nach einigen Umformungen

$$(52) \quad \delta = \frac{(a_{12} + a_{23})^2 + a_{23}^2}{a_{12} S_{12} + a_{23} S_{23}}.$$

Dieses Ergebnis läßt sich leicht auf seine Richtigkeit prüfen, da — wie Engesser gezeigt hat — die Gleich-

gewichtsbedingungen eines starren, elastisch gelagerten Druckstabes auch unmittelbar aufgestellt werden können.⁷⁾

Die Gleichung (50) kann ohne weiteres für eine beliebige andere Felderzahl angeschrieben werden; sie stellt also zusammen mit (43) eine allgemeine Lösung der Aufgabe dar, die den Wert von δ einschließenden Grenzen zu bestimmen.

Als Beispiel für die Zahlenrechnung sollen jetzt diese Regeln auf die im vorigen Abschnitt beschriebene Brücke angewendet werden. Des besseren Vergleiches halber bestimmen wir nicht die Werte von δ , sondern von $\delta' = \delta S_{23} : a$ (nach Gleichung 41), wobei überall die gleiche Feldlänge, also $a_{12} = a_{23} = a$ vorausgesetzt ist. Hiermit geht (46) über in

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(2 \frac{S_{12}}{S_{23}} + 1 \right) \delta' + \frac{S_{12}}{S_{23}} \delta'^2 = 0 \\ \text{und } 1 - \left(2 \frac{S_{12}}{S_{23}} + 3 \right) \delta' + 5 \frac{S_{12}}{S_{23}} \delta'^2 = 0. \end{array} \right.$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung haben bei $S_{12} = 730$ t und $S_{23} = 1055$ t die folgenden Werte:

$$\delta' = 2,96; \quad 0,489; \quad 0,968; \quad 0,298.$$

Das gilt für die Anordnung mit lauter gleichen Rahmen. Sind die Endrahmen starr, so ergibt sich aus den Gleichungen (47)

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \left(\frac{S_{12}}{S_{23}} + 1 \right) \delta' = 0 \\ \text{und } 1 - \left(\frac{S_{12}}{S_{23}} + 3 \right) \delta' + 2 \frac{S_{12}}{S_{23}} \delta'^2 = 0. \end{array} \right.$$

Die Wurzeln sind bei $S_{12} = 730$ t und $S_{23} = 1055$ t:

$$\delta' = 0,591; \quad 2,36; \quad 0,306.$$

Die Gleichung (52) ergibt mit denselben Werten von a und S :

$$\delta' = 2,96.$$

Stellt man diese Ergebnisse mit den früheren übersichtlich zusammen, indem man für jeden Einzelfall nur die kleinste Wurzel angibt, so zeigt sich folgendes.

7) Zentralblatt der Bauverwaltung 1892, S. 351.

Es ist δ'	bei lauter gleichen Rahmen	bei starren End- rahmen
und geringster zulässiger Gurtsteifigkeit:	0,298;	0,306;
„ der vorhandenen „	1,15;	1,58;
„ größter denkbarer „	2,96;	∞ .

Alle diese Werte gelten für fünffache Sicherheit. Wie vorauszusehen war, ist der Einfluß der starren Endrahmen um so geringer, je biegsamer der Gurt ist.

Es bietet besonderes Interesse die gefundenen Zahlen mit den Werten zu vergleichen, die sich unter der Annahme einer stetigen Verteilung der stützenden Kräfte ergeben. Die viel benutzte Näherungsformel, die Engesser für diesen Fall mit Voraussetzung überall gleichen Trägheitsmomentes J und gleicher Stabkraft S aufgestellt hat, lautet in der hier angewendeten Ausdrucksweise bei einem Stabe mit starrer Endstützung

$$(a) \quad \delta = \frac{4 EJ}{aS^2} \text{.}^{8)}$$

Die Zahlenrechnung ergibt für $\delta' = \delta S : a$ im vorliegenden Beispiel mit den für das Feld 2—3 geltenden Werten von J und S

$$\delta' = 1,10 \text{ gegen den genauen Wert } \delta' = 1,58.$$

Für einen überall gleich gestützten Stab (also ohne starre Endstützen) habe ich die streng gültige Formel

$$(b) \quad \delta = \left(\frac{2}{n}\right)^2 \frac{EJ}{aS^2}$$

gefunden.⁹⁾ Hierin ist n eine veränderliche Zahl, die aus den Tafeln im unten genannten Schriftchen entnommen werden kann. Sie nähert sich mit wachsender Felderzahl dem Werte 2. Im vorliegenden Falle ist $(n:2)^2 = 0,977$. Damit wird

$$\delta' = 0,281 \text{ gegen den genauen Wert } \delta' = 1,15.$$

8) Vgl. Zentralblatt d. Bauverwaltung 1884, S. 415 und 1909 S. 178.

9) Vgl. „Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung.“ Berlin 1906. Wilhelm Ernst & Sohn. Die obige Gleichung folgt aus Formel (71) auf Seite 41 dieser Schrift.

Die Annahme einer stetigen Verteilung des Stützendruckes der Rahmen auf die ganze Gurtlänge ergibt hier nach bedeutend kleinere Werte von δ' , d. h. stärkere Abmessungen als die Rechnung mit den wirklich vorhandenen Einzelstützen. Das gilt besonders für den meist auftretenden Fall, daß keine sehr steifen Endrahmen vorhanden sind. Es ist also unzweckmäßig, die Stützenentfernung (Feldlänge) klein zu machen. Dieser Schluß setzt allerdings — wie die vorstehenden Formeln — ein gegebenes, von der Feldlänge unabhängiges J voraus, gilt also ohne weiteres nur, wenn die Gurtungen innerhalb der Feldlänge einen Überschuß an Knicksicherheit besitzen. Umgekehrt ergibt die Formel von Engesser etwas zu große Werte von δ' , also eine geringere als die verlangte Sicherheit, wenn die Knickfestigkeit der Gurte innerhalb der Feldlänge gerade den vorgeschriebenen Wert hat. Denn mit $S = \pi^2 EJ : a^2$ folgt aus (a)

$$\delta' = \frac{\delta S}{a} = \frac{4}{\pi^2} = 0,40,$$

während oben für diesen Fall bei überall gleichen Rahmen $\delta' = 0,298$ und bei starren Endrahmen $\delta' = 0,306$ gefunden wurde. Mit wachsender Felderzahl nähert sich δ' dem Grenzwerte 0,25. Der Fehlbetrag der aus Formel (a) folgenden gegen die erforderliche Rahmensteifigkeit kann also bei möglichst sparsam bemessener Gurtstärke bis auf

$$\frac{0,40 - 0,25}{0,40} 100 = 38 \text{ vH.}$$

steigen.

Die Formel (a) gilt ihrer Ableitung nach nur für den Fall starrer Endstützen. Sie scheint aber bei mittleren Verhältnissen gerade dann sehr brauchbar zu sein, wenn solche Endstützen nicht vorhanden sind. Denn der aus (a) folgende Wert $\delta' = 1,10$ weicht von dem für den letzteren Fall ermittelten genauen Werte $\delta' = 1,15$ nur wenig ab. Die Fehler, die man begeht, wenn man einerseits statt des in einzelnen Punkten wirkenden einen stetig verteilten Stützendruck, und andererseits starre Endstützen annimmt, ohne daß solche vorhanden sind, können sich also ungefähr aufheben.

VI. Verschiedene Gleichgewichtslagen.

Die Form eines gerade an der Knickgrenze befindlichen Stabes ist in dem Sinne unbestimmt, daß die Ausbiegung an irgend einer Stelle jeden beliebigen Wert annehmen kann.¹⁰⁾ Die Unbestimmtheit liegt nur in der Größe, nicht in der Art der Formänderung. Man kann daher verschiedene Arten von Gleichgewichtslagen, wo solche bestehen, sehr wohl voneinander unterscheiden. Schon von den einfachen Fällen her, die den Eulerschen Formeln entsprechen, ist das ja allgemein bekannt. Für die hier vorliegende verwickeltere Aufgabe ist die Möglichkeit des Auftretens verschiedener Gleichgewichtsformen natürlich noch gesteigert. Wir beschränken uns darauf, davon nur diejenigen ins Auge zu fassen, die sich auf die ganzen Feldlängen beziehen; von den Verschiedenheiten, die innerhalb dieser Längen auftreten können, sehen wir also ab. Die Frage soll demgemäß lauten: Welche verschiedenen Lagen können die Knotenpunkte des belasteten Stabes gegen die Anfangslage der Stabachse einnehmen. Denkt man sich die aufeinander folgenden Punkte durch gerade Linien, die Stabsehnen, miteinander verbunden, so entsteht ein Linienzug, dessen Gestalt gleichfalls eine Gleichgewichtslage kennzeichnet. Man könnte also auch fragen, welche und wie viele Arten solcher Linienzüge etwa bei ein und demselben Belastungszustand möglich sind. Die Antwort hierauf wird durch den Umstand erleichtert, daß die Gestalt des Linienzuges nur von den Neigungen der einzelnen Stabsehnen gegen die Anfangslage abhängt, die in der oben vorgeführten Untersuchung als Größen ν_{12} , ν_{23} , ν_{34} , ν_{45} eine Hauptrolle spielen. Sind diese Größen erst ermittelt, so ist die Gestalt des Linienzuges bekannt; und wird dann die Verschiebung irgend eines Punktes gegen die Anfangslage willkürlich angenommen, so ist auch die Lage des Zuges und damit die fragliche Gleichgewichtslage des Ganzen bestimmt. Hiernach soll jetzt verfahren werden.

10) Das gilt streng genommen zwar nur für die näherungsweise Rechnung, wie sie den Eulerschen Formeln zugrunde liegt und auch hier vorausgesetzt ist. Die Ergebnisse der genaueren Theorie weichen aber bekanntlich nur sehr wenig davon ab.

Ein Stab von allgemeinsten Anordnung sei so geformt und belastet, daß die nach den Gleichungen (10) bis (13) berechneten Größen v die Knickbedingung (15) erfüllen. Dann können die Gleichungen (9) widerspruchsfrei durch endliche Werte von v_{12} , v_{23} , v_{34} , v_{45} erfüllt werden. Teilt man alle Gleichungen durch eine dieser Größen, z. B. etwa v_{12} , so lassen sich die Werte der Brüche

$$\frac{v_{23}}{v_{12}}; \quad \frac{v_{34}}{v_{12}}; \quad \frac{v_{45}}{v_{12}}$$

zahlenmäßig aus drei beliebigen von den vier Gleichungen (9) berechnen. Damit sind die Werte von v_{23} , v_{34} , v_{45} gegeben, sobald man v_{12} willkürlich annimmt. Mit diesen vier v sind die Knotenmomente M_1 bis M_5 aus (7), ohne weiteres zu ermitteln, da die Größen U nur von den Querschnittsabmessungen des Stabes, den Längen der Felder und den Stabkräften abhängen, also gegeben sind. Mit den jetzt bekannten Knotenmomenten und den vorher berechneten Feldneigungen lassen sich durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für jedes Feld die Querkräfte aller Felder ermitteln. Die Unterschiede der Querkräfte Q je zweier benachbarter Felder ergeben den Druck A auf den dazwischen liegenden Stützpunkt. Aus dem Druck und der Verschiebung δ für die Kraft 1 folgt die Verschiebung y des Stützpunktes durch die Bedingung

$$(55) \quad y = A \delta.$$

Sind alle y auf diese Weise als Funktionen der einen, willkürlich angenommenen Feldneigung v_{12} berechnet, so ist die gesuchte Gleichgewichtslage aller Knotenpunkte für diese Annahme bestimmt. Nun ist aber

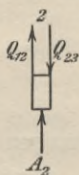
$$(56) \quad v_{12} = \frac{-y_1 + y_2}{a_{12}}.$$

Die willkürliche Annahme von v_{12} entspricht also der freien Wahl einer der Größen y_1 oder y_2 , von der dann alle übrigen y Funktionen sind.

Hiermit ist die Aufgabe allgemein gelöst. Es liegen auch schon alle dazu erforderlichen Gleichungen vor, bis auf

die zur Berechnung der y aus den M und ν dienenden. Der Vollständigkeit wegen sollen auch diese hier noch entwickelt werden.

Für einen der Endpunkte des Feldes 1—2 als Drehpunkt ergibt nach Abbildung 1 die Bedingung des Gleichgewichtes der Momente:



$$Q_{12} = -S_{12} \nu_{12} - \frac{M_1 - M_2}{a_{12}}.$$

Ganz ebenso wird für das Feld 2—3:

$$Q_{23} = -S_{23} \nu_{23} - \frac{M_2 - M_3}{a_{23}}.$$

Abb. 4.
Auflagerdruck
und Quer-
kräfte
am Knoten-
punkt 2.

Nach Abbildung 4 besteht zwischen diesen beiden Q und dem Auflagerdruck am Knotenpunkt 2 die Beziehung

$$A_2 = Q_{23} - Q_{12},$$

womit A_2 durch ν_{12} , ν_{23} , M_1 , M_2 und M_3 ausgedrückt ist. Führt man diese Rechnung bei allen Knotenpunkten durch, so gelangt man mit Rücksicht auf (55) zu der folgenden Gleichungsgruppe:

$$(57) \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{y_1}{\delta_1} = \quad \quad - S_{12} \nu_{12} \quad \quad \quad - \frac{M_1 - M_2}{a_{12}}; \\ A_2 = \frac{y_2}{\delta_2} = S_{12} \nu_{12} - S_{23} \nu_{23} + \frac{M_1 - M_2}{a_{12}} - \frac{M_2 - M_3}{a_{23}}; \\ A_3 = \frac{y_3}{\delta_3} = S_{23} \nu_{23} - S_{34} \nu_{34} + \frac{M_2 - M_3}{a_{23}} - \frac{M_3 - M_4}{a_{34}}; \\ A_4 = \frac{y_4}{\delta_4} = S_{34} \nu_{34} - S_{45} \nu_{45} + \frac{M_3 - M_4}{a_{34}} - \frac{M_4 - M_5}{a_{45}}; \\ A_5 = \frac{y_5}{\delta_5} = S_{45} \nu_{45} \quad \quad \quad + \frac{M_4 - M_5}{a_{45}}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Als Beispiel möge jetzt die Anwendung auf den in den früheren Abschnitten behandelten Stab mit symmetrischer

11) Wenn man aus (57) die y und damit aus vier Gleichungen wie (56) die Feldneigungen ν_{12} bis ν_{45} berechnet, so findet man die Gleichungsgruppe (2). Das Nähere ergibt die im Eingange erwähnte Abhandlung von 1907.

Anordnung und Belastung dienen. Hierfür bestehen zwischen den in Gleichung (9) auftretenden Beiwerten v der Veränderlichen ν die Beziehungen (21). Damit geht (9) über in

$$(58) \quad \begin{cases} v_{11}\nu_{12} + v_{12}\nu_{23} + v_{42}\nu_{34} + v_{41}\nu_{45} = 0; \\ v_{21}\nu_{12} + v_{22}\nu_{23} + v_{32}\nu_{34} + v_{31}\nu_{45} = 0; \\ v_{31}\nu_{12} + v_{32}\nu_{23} + v_{22}\nu_{34} + v_{21}\nu_{45} = 0; \\ v_{41}\nu_{12} + v_{42}\nu_{23} + v_{12}\nu_{34} + v_{11}\nu_{45} = 0. \end{cases}$$

Fügt man die letzte Gleichung zur ersten, die dritte zur zweiten hinzu, so erhält man zwei neue Gleichungen in denen die Summen je zweier ν auftreten; und zwar kommt jede Summe zweimal als Faktor vor. Sondert man diese gemeinschaftlichen Faktoren ab, so erhalten die fraglichen Gleichungen die Form

$$(59) \quad \begin{cases} (v_{11} + v_{41})[\nu_{12} + \nu_{45}] + (v_{12} + v_{42})[\nu_{23} + \nu_{34}] = 0; \\ (v_{21} + v_{31})[\nu_{12} + \nu_{45}] + (v_{22} + v_{32})[\nu_{23} + \nu_{34}] = 0. \end{cases}$$

Ein ganz ähnliches Ergebnis wird erhalten, wenn man in (58) die letzte Gleichung von der ersten und die dritte von der zweiten abzieht und im übrigen wie vorher verfährt, nämlich:

$$(60) \quad \begin{cases} (v_{11} - v_{41})[\nu_{12} - \nu_{45}] + (v_{12} - v_{42})[\nu_{23} - \nu_{34}] = 0; \\ (v_{21} - v_{31})[\nu_{12} - \nu_{45}] + (v_{22} - v_{32})[\nu_{23} - \nu_{34}] = 0. \end{cases}$$

Die Gruppen (59) und (60) zusammen ersetzen (58). Sie können in zweierlei Weise erfüllt werden.

Entweder: Die Summen in den eckigen Klammern von (59) sind nicht Null. Dann muß die Determinante aus den Beiwerten Null sein. Also

$$(61) \quad \begin{vmatrix} v_{11} + v_{41} & v_{12} + v_{42} \\ v_{21} + v_{31} & v_{22} + v_{32} \end{vmatrix} = K_1 = 0.$$

K_1 hat dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (23). Ist die Determinante aus den Beiwerten der ν in (60) nicht ebenfalls Null, so müssen die Werte in den eckigen Klammern von (60) verschwinden. D. h. es muß, wenn (61) besteht

$$(62) \quad \nu_{12} = \nu_{45} \quad \text{und} \quad \nu_{23} = \nu_{34}$$

sein.

Oder: Die Unterschiede der ν in den eckigen Klammern von (60) sind nicht Null. Dann muß die Determinante aus ihren Beiwerten Null sein. Also

$$(63) \quad \begin{vmatrix} \nu_{11} - \nu_{41} & \nu_{12} - \nu_{42} \\ \nu_{21} - \nu_{31} & \nu_{22} - \nu_{32} \end{vmatrix} = K_2 = 0.$$

Hier hat K_2 dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (23). Wird wiederum vorausgesetzt, daß nicht (61) und (63) zugleich besteht, so folgt aus (63), daß die Werte in den eckigen Klammern von (59) verschwinden müssen. D. h. es muß jetzt

$$(64) \quad \nu_{12} = -\nu_{45} \quad \text{und} \quad \nu_{23} = -\nu_{34}$$

sein.

Die Gleichungen $K_1 = 0$ und $K_2 = 0$ stellen nach (23) die beiden Knickbedingungen dar. Sie ergeben, wenn alle δ gleich groß sind, die erste und zweite Gleichung von (29). Wenn nun die Wurzeln der einen nicht etwa zugleich Wurzeln der anderen sind, so schließen sie sich gegenseitig aus. Hiermit gelangen wir zu dem folgenden bemerkenswerten Satze:

Für diejenigen Werte von δ , die der ersten Gleichung von (29) genügen, sind die Neigungen symmetrisch liegender Felder gleich. Für die Werte, die der zweiten Gleichung von (29) genügen, sind diese Neigungen entgegengesetzt gleich.

Der Satz entspringt offenbar lediglich aus der vorausgesetzten Symmetrie. Diese gestattet aber noch weitere Schlüsse. Untersucht man nämlich, welche Werte die u in der Gruppe (6) bei einem symmetrisch geformten und belasteten Stabe annehmen, so zeigt sich, daß einzelne Werte der u regelmäßig wiederkehren; und zwar geschieht das in der Weise, daß diese Gruppe symmetrisch wird gegen beide Diagonalreihen.¹²⁾ Für den Stab mit vier Feldern und eingespannten Enden findet man z. B. die Gruppe

12) Das wurde schon im Abschnitt IV bei Ausrechnung des Zahlenbeispielles gefunden, gilt aber ganz allgemein.

$$(65) \quad \begin{array}{ccccc} \mathbf{u}_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ \mathbf{u}_{12} & \mathbf{u}_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{14} \\ \mathbf{u}_{13} & \mathbf{u}_{23} & \mathbf{u}_{33} & u_{23} & u_{13} \\ \mathbf{u}_{14} & \mathbf{u}_{24} & u_{23} & u_{22} & u_{12} \\ \mathbf{u}_{15} & u_{14} & u_{13} & u_{12} & u_{11} \end{array}$$

Nur die neun mit fetterer Schrift gedruckten Werte sind verschieden; alle anderen sind Wiederholungen davon.

Mit dieser Gruppe folgt nun aus den Gleichungen (7) und (8)

im Fall $K_1 = 0$, also wenn $\nu_{12} = \nu_{45}$ und $\nu_{23} = \nu_{34}$:

$$(66) \quad M_5 = -M_1; \quad M_4 = -M_2; \quad M_3 = 0;$$

dagegen im Fall $K_2 = 0$, also wenn $\nu_{12} = -\nu_{45}$; $\nu_{23} = -\nu_{34}$:

$$(67) \quad M_5 = M_1; \quad M_4 = M_2.$$

Im zweiten Falle sind also die Momente an den symmetrisch liegenden Knotenpunkten gleich; im ersten sind sie entgegengesetzt gleich und am mittelsten Knotenpunkt Null. Hier hat dann die Biegelinie des Stabes einen Wendepunkt.

Führt man diese Ergebnisse in die Gleichungen (57) ein, so gelangt man zu einigen weiteren ganz allgemein geltenden Folgerungen. Es zeigt sich nämlich, daß

im Fall $K_1 = 0$:

$$(68) \quad A_5 = -A_1; \quad A_4 = -A_2; \quad A_3 = 0;$$

im Fall $K_2 = 0$:

$$(69) \quad A_5 = A_1; \quad A_4 = A_2.$$

Was vorher für die Knotenpunktmomente gefunden wurde, gilt mithin auch für die Auflagerdrücke, und wenn alle Stützpunkte gleich nachgiebig sind, für deren Verschiebungen y . Die Verschiebung y_3 des mittelsten Knotenpunktes ist im ersten Fall immer Null. Ist $\delta_1 = \delta_5 = 0$, sind also die Endstützen starr, so wird natürlich auch $y_1 = y_5$ Null.

Hiermit ist die Form und Lage des Stabsehnenzuges schon soweit klargestellt, daß man sich ein Bild davon machen kann, wie die verschiedenen Gleichgewichtslagen aussehen. Näheres ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (59) und (60). Es folgt nämlich

im ersten Falle mit (62) aus (59):

$$(70) \quad \frac{v_{23}}{v_{12}} = - \frac{v_{11} + v_{41}}{v_{12} + v_{42}} = - \frac{v_{21} + v_{31}}{v_{22} + v_{32}};$$

im zweiten Falle mit (64) aus (60):

$$(71) \quad \frac{v_{23}}{v_{12}} = - \frac{v_{11} - v_{41}}{v_{12} - v_{42}} = - \frac{v_{21} - v_{31}}{v_{22} - v_{32}}.$$

Die auf der rechten Seite stehenden Brüche können mit Hilfe von (24) durch δ und die zur Berechnung von δ benutzten Größen g und h ausgedrückt werden, womit dann sämtliche Feldneigungen v als Funktionen einer von ihnen für alle früher gemachten Zahlenannahmen und die verschiedenen Wurzeln der Gleichungen (29) leicht zu berechnen sind. Bei Ermittlung der y kann auch der Umstand benutzt werden, daß die algebraische Summe aller Stützendrücke Null sein muß. Auf Einzelheiten brauchen wir wohl nicht weiter einzugehen; zur Veranschaulichung der verschiedenen Arten von Gleichgewichtslagen genügen die Abbildungen 5 bis 8, die mit der willkürlichen Annahme $v_{23} = 0,1$ entworfen sind.

Die Abbildungen 5 und 6 gelten für die Verhältnisse der im Abschnitt IV behandelten Brücke. Hätte sie starre Endrahmen, so würden sich die aus Abb. 7 und 8 ersichtlichen Formen ergeben.

Ganz ähnlich gestalten sich die Gleichgewichtslagen für die im Abschnitt V untersuchten Grenzfälle.

Hier dürften jetzt einige Worte über die Bedeutung der negativen δ am Platze sein. Die durch eine Kraft 1 erzeugte Verschiebung δ einer Stütze ist als positiv angenommen worden, wenn sie im Sinne der Kraft vor sich geht. Es könnte nun zunächst als unmöglich erscheinen, daß δ negativ wird, da dann die Kraft den Stützpunkt in der ihr selbst entgegengesetzten Richtung verschieben müßte. Die Sache klärt sich aber sofort auf, wenn man die Bedingung umkehrt und die Kraft als Folge der Verschiebung, nicht als Ursache auffaßt; oder besser und allgemeiner, wenn man nur eine Verknüpfung beider annimmt. Es ist also δ positiv,

wenn die mit dem Eintritt von δ verknüpfte Kraft entgegengesetzt gerichtet ist, wie δ ; und δ ist negativ, wenn die mit ihm verknüpfte Kraft denselben Richtungssinn hat, wie δ .



Abb. 5. Alle Rahmen gleich; $\nu_{23} = 0,1$. Erster Fall.

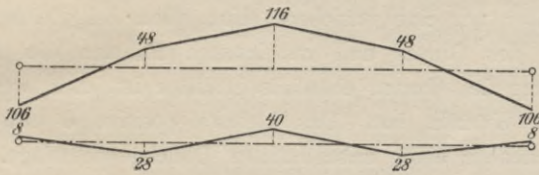


Abb. 6. Alle Rahmen gleich; $\nu_{23} = 0,1$. Zweiter Fall.



Abb. 7. Endrahmen starr; $\nu_{23} = 0,1$. Erster Fall.

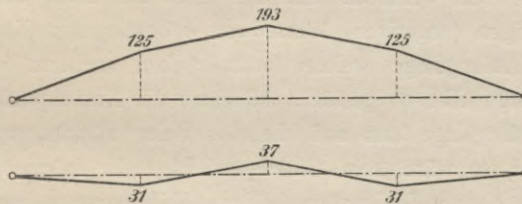


Abb. 8. Endrahmen starr; $\nu_{23} = 0,1$. Zweiter Fall.

Das letztere tritt dann ein, wenn sich die Stütze, von der die Kraftwirkung ausgeht, in unsicherem (labilen) Gleichgewichtszustande befindet. Sie stützt dann nicht, sondern bedarf selbst der Stützung. So erzeugt z. B. eine am Fuße eingespannte lotrechte Säule, die nicht bis zur Knickgrenze

belastet ist, einen Gegendruck, wenn man ihren Kopf aus der Anfangslage bringt. Hier ist δ positiv. Wird die Säule aber über die Knickgrenze hinaus belastet und wird ihr Kopf dann aus der Anfangslage bewegt, so erzeugt er einen Mitdruck und δ ist negativ.

Wenn nun die Knickbedingung eines durch elastische Rahmen seitlich gestützten Druckgurtes auf einen negativen Wert von δ führt, so besagt das, daß auch noch Gleichgewicht bestehen kann, bei einer Belastung der Rahmen, die diese für sich über ihre Knickgrenze hinausbringen würde. Der Gurt stützt sich dann nicht auf die Rahmen, sondern stützt sie seinerseits. Die zugehörige Gleichgewichtslage kann aber nur eine unsichere sein, wenn bei gleicher Belastung des Gurtes und unbelasteten Rahmen die Knickbedingung des Ganzen ebenfalls erfüllbar ist, d. h. wenn sie positive Wurzeln hat. Das kleinste positive δ entspricht dann offenbar einer unbestimmten Gleichgewichtslage. Zur Erläuterung können die Abb. 6 und 8 dienen. In beiden stellt der untere Linienzug, bei dem die Knotenpunkte abwechselnd nach oben und unten gegen die Anfangslage verschoben sind, eine unsichere Gleichgewichtslage dar. Wäre durch irgend welche äußere Eingriffe eine derartig wechselnde Verschiebung eingeleitet, so könnte der Gurt als Stütze für die Rahmen dienen, wenn sie sich selbst in unsicherem Gleichgewicht befänden und den Gurt mit einer durch die zugehörigen (negativen) Werte von δ bestimmten Kraft aus seiner Anfangslage weiter fortzudrücken suchten. Würde diese Lage aber so gestört, daß einer der Knotenpunkte von der Anfangslage aus auf dieselbe Seite rückte, wie sein Nachbar, so wäre kein Gleichgewicht mehr möglich, weil, wie die oberen Linienzüge beider Abbildungen zeigen, eine solche Lage nur bei positiven δ bestehen kann.

Diese Betrachtungen führen zu dem Schlusse, daß negative δ nur dann auftreten können, wenn der Gurt einen gewissen Überschuß von Steifigkeit besitzt, daß sie also ausgeschlossen sind, wenn jedes Feld des Gurtes für sich gerade an der Knickgrenze ist. In der Tat hat die im Abschnitt V hierfür angestellte Rechnung nur positive δ ergeben. Ein

wechselweises Abweichen der Knotenpunkte nach entgegengesetzten Seiten ist nicht möglich, wenn der Gurt vollkommen starr ist. Auch in diesem Fall kann also bei negativen δ kein Gleichgewicht bestehen.

VII. Größere Felderzahlen.

Die Knickbedingung für einen Stab von größerer Felderzahl mit elastischer Querstützung in den Knotenpunkten kann in der allgemeinen Form (15) ohne weiteres angeschrieben werden, sobald die Größen v ermittelt sind. Diese ergeben sich aus den Gleichungen (10) bis (13), die sich ebenfalls ohne Schwierigkeit auf einen Stab mit mehr als vier Feldern ausdehnen lassen. Die Zahlenwerte der darin auftretenden Größen m und n sind bei gegebenen Abmessungen und Kräften aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar zu berechnen. Nur die in (10) bis (13) enthaltenen U sind von einem Bau, der bei wachsender Felderzahl in zunehmendem Grade verwickelter wird. Selbst die allgemeine (nicht nur zahlenmäßige) Berechnung der U stößt aber keineswegs auf unüberwindbare Hindernisse, wenn man eine symmetrische Anordnung und Belastung des Stabes voraussetzt, da sich in diesem Falle die zur Ableitung der U dienende, so schon sehr regelmäßig gebaute Determinante D in (5) noch mehr vereinfacht. Mit Hilfe eines kleinen Kunstgriffes, den der Leser bei Durchsicht der folgenden Ergebnisse leicht herausfinden wird, können die u und damit auch die U noch für acht Felder in entwickelter Form dargestellt werden. Man braucht aber nicht einmal bis zur Darstellung der U zu gehen; da sie die Unterschiede benachbarter u sind und da alle u den gemeinschaftlichen Faktor $1:D$ haben, so kann man diesen zunächst weglassen und sich mit der Entwicklung der Werte $d = Du$, d. h. der Unterdeterminanten von D begnügen. In der Rechnung mit Zahlen kann auch d' nach (35) an Stelle von d treten. Demgemäß beschränken wir uns in den folgenden Beispielen auf die Ermittlung der d .¹³⁾

13) Die Knickbedingung $K=0$ wird auch noch erfüllt, wenn man alle v in (15) mit einer beliebigen Zahl vervielfacht. Wählt man als eine solche Zahl den Wert D aus (5), so erhalten die rechten

Dabei soll der Raumersparnis und besseren Übersicht wegen soweit wie möglich die oben schon mehrfach angewendete Zusammenstellung in Gruppen benutzt und überall symmetrische Anordnung vorausgesetzt werden.

A. Stab mit eingespannten Enden.

1. Vier Felder.

Die Größen d sind unabhängig von der Stützungsweise, aber bedingt durch die Art der Endeinspannung, deren Einfluß nur in ihnen zum Ausdruck kommt. Wenn nun auch der Fall der starren Einspannung der Stabenden bei offenen Brücken keine erhebliche Bedeutung hat, so soll doch, um wenigstens ein Beispiel dafür zu geben, die früher unter der Annahme frei drehbarer Enden durchgeführte Berechnung des Stabes mit vier Feldern hier durch Ermittlung der d für den Stab mit eingespannten Enden ergänzt werden.

Es ist nach (5):

$$(72) \quad D = \begin{vmatrix} t_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & t_2 & s_{23} & 0 & 0 \\ 0 & s_{23} & t_3 & s_{23} & 0 \\ 0 & 0 & s_{23} & t_2 & s_{12} \\ 0 & 0 & 0 & s_{12} & t_{12} \end{vmatrix} = t_{12} d_{11} + s_{12} d_{12}.$$

Die Gruppe der Unterdeterminanten d wird

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} & d_{34} & d_{14} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} & d_{23} & d_{13} \\ d_{14} & d_{34} & d_{23} & d_{22} & d_{12} \\ d_{15} & d_{14} & d_{13} & d_{12} & d_{11} \end{array} \right.$$

Seiten der Gleichungen (24) den D -fachen Wert. Demgemäß treten in (25) und (26) nicht mehr die Größen U , sondern DU auf, und da die U den Faktor $1:D$ enthalten, so hebt sich D in diesen Gliedern fort. Statt dessen erscheint es als Beiwert der letzten Glieder der rechten Seiten von (25) und (26). Jede Gleichung enthält immer nur ein solches Glied, dagegen eine mit zunehmender Felderzahl wachsende Anzahl von Gliedern mit U . Man spart daher an Rechenarbeit, wenn man mit U nicht die Unterschiede der $u = d:D$, sondern die Unterschiede der d bezeichnet. Auf der rechten Seite von (24) ist dann D statt 1, auf der rechten Seite von (25) und (26) überall $DS:a$ statt $S:a$ zu setzen; in (29) erscheint D^2 an Stelle von 1. Bei dieser Art des Vorgehens sind die oben aufgeführten d unmittelbar zu verwenden.

Nur die neun fetter gedruckten d sind voneinander verschieden; die anderen sind Wiederholungen und ergeben sich daraus, daß die Gruppe symmetrisch ist gegen beide Diagonalen. Man braucht also nur die ersteren Werte zu berechnen. Hierbei benutzen wir zur Abkürzung den Umstand, daß die Zahlenwerte zweireihiger und dreireihiger Determinanten bequem ohne irgend welche Hilfsrechnungen (wie Unterdeterminanten u. dergl.) zu ermitteln sind. Es sei mit leicht verständlicher Bezeichnungsweise

$$(74) \quad w_{12} = \begin{vmatrix} t_{12} & s_{12} \\ s_{12} & t_2 \end{vmatrix}; \quad w_{123} = \begin{vmatrix} t_{12} & s_{12} & 0 \\ s_{12} & t_2 & s_{23} \\ 0 & s_{23} & t_3 \end{vmatrix}.$$

Dann haben die in (73) durch fetteren Druck hervorgehobene neun d , die folgenden, nach derselben Ordnung wie in (73) zusammengestellten Werte:

$$(75) \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t_2 w_{123} - s_{23}^2 w_{12} & & \\ \hline -s_{12} w_{123} & t_{12} w_{123} & \\ \hline s_{12} s_{23} w_{12} & -s_{23} t_{12} w_{12} & w_{12}^2 \\ \hline -s_{12} s_{23}^2 t_{12} & s_{23}^2 t_{12}^2 & \\ \hline s_{12}^2 s_{23}^2 & & \\ \hline \end{array}$$

Die Bedeutung der s und t ergibt sich aus den Erklärungen zur Gleichungsgruppe (1).

B. Stab mit frei drehbaren Enden.

2. Fünf Felder.

Es ist die Determinante

$$(76) \quad D = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{34} & 0 \\ 0 & s_{34} & t_3 & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{23} & t_2 \end{vmatrix} = t_2 d_{22} + s_{23} d_{23}.$$

Die Gruppe der Unterdeterminanten d erhält die Form

$$(77) \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{d}_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ \hline \mathbf{d}_{23} & \mathbf{d}_{33} & d_{34} & d_{24} \\ \hline \mathbf{d}_{24} & \mathbf{d}_{34} & d_{33} & d_{23} \\ \hline \mathbf{d}_{25} & d_{24} & d_{23} & d_{22} \\ \hline \end{array}$$

Sie ist ebenfalls symmetrisch gegen beide Diagonalen, so daß nur sechs verschiedene d auftreten. Mit

$$(78) \quad w_{23} = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} \\ s_{23} & t_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad w_{233} = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{34} \\ 0 & s_{34} & t_3 \end{vmatrix}$$

sind die Werte der sechs d , geordnet wie in (77):

$$(79) \quad \left\{ \begin{array}{l|l} \hline t_2 w_{233} & \\ \hline -s_{23} w_{23} & t_2 w_{23} \\ \hline s_{23} s_{34} t_2 & -s_{34} t_2^2 \\ \hline -s_{23}^2 s_{34} & \\ \hline \end{array} \right.$$

3. Sechs Felder.

Die Determinante D hat den Wert

$$(80) \quad D = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{34} & 0 & 0 \\ 0 & s_{34} & t_4 & s_{34} & 0 \\ 0 & 0 & s_{34} & t_3 & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & s_{23} & t_2 \end{vmatrix} = t_2 d_{22} + s_{23} d_{23}.$$

Die Gruppe der Unterdeterminanten d wird

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}_{22} \quad \mathbf{d}_{23} \quad \mathbf{d}_{24} \quad \mathbf{d}_{25} \quad \mathbf{d}_{26} \\ \mathbf{d}_{23} \quad \mathbf{d}_{33} \quad \mathbf{d}_{34} \quad \mathbf{d}_{35} \quad \mathbf{d}_{25} \\ \mathbf{d}_{24} \quad \mathbf{d}_{34} \quad \mathbf{d}_{44} \quad \mathbf{d}_{34} \quad \mathbf{d}_{24} \\ \mathbf{d}_{25} \quad \mathbf{d}_{35} \quad \mathbf{d}_{34} \quad \mathbf{d}_{33} \quad \mathbf{d}_{23} \\ \mathbf{d}_{26} \quad \mathbf{d}_{25} \quad \mathbf{d}_{24} \quad \mathbf{d}_{23} \quad \mathbf{d}_{22} \end{array} \right.$$

Die Gruppe ist wiederum symmetrisch gegen beide Diagonalen. Es treten neun verschiedene d auf. Mit

$$(82) \quad w_{23} = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} \\ s_{23} & t_3 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad w_{234} = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{34} \\ 0 & s_{34} & t_4 \end{vmatrix}$$

ergeben sich folgende neun Werte:

$$(83) \quad \left\{ \begin{array}{l|l|l} \hline t_3 w_{234} - s_{34}^2 w_{23} & & \\ \hline -s_{23} w_{234} & t_2 w_{234} & \\ \hline s_{23} s_{34} w_{23} & -s_{34} t_2 w_{23} & w_{23}^2 \\ \hline -s_{23} s_{34}^2 t_2 & s_{34}^2 t_2^2 & \\ \hline s_{23}^2 s_{34}^2 & & \\ \hline \end{array} \right.$$

4. Sieben Felder.

Die Determinante D ist

$$(84) \quad D = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{34} & t_4 & s_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{45} & t_4 & s_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{34} & t_3 & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{23} & t_2 \end{vmatrix} = t_2 d_{22} + s_{23} d_{23}.$$

Die Gruppe der Unterdeterminanten d hat die Form

$$(85) \quad \begin{cases} d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} \\ d_{23} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{26} \\ d_{24} & d_{34} & d_{44} & d_{45} & d_{35} & d_{25} \\ d_{25} & d_{35} & d_{45} & d_{44} & d_{34} & d_{24} \\ d_{26} & d_{36} & d_{35} & d_{34} & d_{33} & d_{23} \\ d_{27} & d_{26} & d_{25} & d_{24} & d_{23} & d_{22} \end{cases}$$

Die Symmetrieverhältnisse sind dieselben, wie in den früheren Fällen. Für die zwölf verschiedenen d ergeben sich mit

$$(86) \quad w_{23} = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} \\ s_{23} & t_3 \end{vmatrix}, \quad w_{34} = \begin{vmatrix} t_3 & s_{34} \\ s_{34} & t_4 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad w_{234} = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{34} \\ 0 & s_{34} & t_4 \end{vmatrix}$$

die nachstehenden Werte:

$$(87) \quad \begin{array}{|l} \hline w_{34} w_{234} - s_{45}^2 t_3 w_{23} \\ \hline -(s_{23} t_4 w_{234} - s_{45}^2 s_{23} w_{23}) \quad t_2 t_4 w_{234} - s_{45}^2 t_2 w_{23} \\ \hline s_{23} s_{34} w_{234} \quad - s_{34} t_2 w_{234} \quad w_{23} w_{234} \\ \hline -s_{45} \cdot s_{23} s_{34} w_{23} \quad s_{45} \cdot s_{34} t_2 w_{23} \quad -s_{45} w_{23}^2 \\ \hline s_{45} \cdot s_{23} s_{34}^2 t_2 \quad -s_{45} \cdot s_{34}^2 t_2^2 \\ \hline -s_{45} \cdot s_{23}^2 s_{34}^2 \\ \hline \end{array}$$

5. Acht Felder.

Die Determinante D ist

$$(88) \quad D = \begin{vmatrix} t_2 & s_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s_{23} & t_3 & s_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{34} & t_4 & s_{45} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{45} & t_5 & s_{45} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{45} & t_4 & s_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{34} & t_3 & s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{23} & t_2 \end{vmatrix} = t_2 d_{22} + s_{23} d_{23}.$$

Die Gruppe der Unterdeterminanten hat die Form

$$(89) \quad \begin{cases} \mathbf{d}_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} & d_{27} & d_{28} \\ \mathbf{d}_{23} & \mathbf{d}_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} & d_{37} & d_{27} \\ \mathbf{d}_{24} & \mathbf{d}_{34} & \mathbf{d}_{44} & d_{45} & d_{46} & d_{36} & d_{26} \\ \mathbf{d}_{25} & \mathbf{d}_{35} & \mathbf{d}_{45} & \mathbf{d}_{55} & d_{45} & d_{35} & d_{25} \\ \mathbf{d}_{26} & \mathbf{d}_{36} & \mathbf{d}_{46} & d_{45} & d_{44} & d_{34} & d_{24} \\ \mathbf{d}_{27} & \mathbf{d}_{37} & d_{36} & d_{35} & d_{34} & d_{33} & d_{23} \\ \mathbf{d}_{28} & d_{27} & d_{26} & d_{25} & d_{24} & d_{23} & d_{22}. \end{cases}$$

Es besteht wiederum Symmetrie gegen beide Diagonalen der Gruppe; dabei sind sechzehn verschiedene d vorhanden. Mit denselben Hilfsgrößen w wie in (86) erhält man folgende Werte für die d :

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} t_5 & \cdot & w_{34} w_{234} \\ -s_{45}^2 (t_3 w_{234} + w_{34} w_{23}) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} t_5 & \cdot & s_{23} t_4 w_{234} \\ -s_{45}^2 (s_{23} w_{234} + s_{23} t_4 w_{23}) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} t_5 & \cdot & s_{23} s_{34} w_{234} \\ -s_{45}^2 \cdot & & s_{23} s_{34} w_{23} \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{ccc} s_{45} & \cdot & s_{23} s_{34} w_{234} \\ s_{45}^2 \cdot & & s_{23} s_{34} w_{23} \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{ccc} s_{45}^2 \cdot & & s_{23} s_{34}^2 t_2 \\ s_{45}^2 \cdot & & s_{23}^2 s_{34}^2 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} t_5 & \cdot & t_2 t_4 w_{234} \\ -s_{45}^2 (t_2 w_{234} + t_2 t_4 w_{23}) \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{ccc} t_5 & \cdot & s_{34} t_2 w_{234} \\ -s_{45}^2 \cdot & & s_{34} t_2 w_{23} \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{ccc} s_{45} & \cdot & s_{34} t_2 w_{234} \\ s_{45}^2 \cdot & & s_{34} t_2 w_{23} \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{ccc} s_{45}^2 \cdot & & s_{34}^2 t_2^2 \\ s_{45}^2 \cdot & & s_{34}^2 t_2^2 \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} t_5 w_{23} w_{234} \\ -s_{45}^2 w_{23}^2 \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{ccc} s_{45} w_{23} w_{234} \\ s_{45}^2 w_{23}^2 \end{array} \right] \\ w_{234}^2 \end{array} \right.$$

In diesen Zusammenstellungen sind die einzelnen Glieder (um die Ausrechnung zu erleichtern) nach Möglichkeit so geordnet, daß man erkennen kann, welche Ausdrücke in den verschiedenen d wiederkehren. Die D ergeben sich, wenn man die Glieder einer beliebigen Reihe mit ihren Unterdeterminanten vervielfacht. Es sind hier willkürlich die beiden Glieder der ersten Spalte gewählt. Die Unterdeterminanten liefert in jedem Einzelfalle die zugehörige Zusammenstellung.

Als Beispiel für die Anwendung soll nun noch das weitere Verfahren für acht Felder vorgeführt werden. Angenommen, die Zahlenwerte der d von (89) seien aus (90)

berechnet und alle d durch D geteilt.¹⁴⁾ Dann hat man die auf acht Felder ausgedehnte Gruppe der u , in der jedoch gegenüber der für 4 Felder mit Endeinspannung geltenden Gruppe (6) die erste und letzte Zeile und Spalte fehlen, weil jetzt frei drehbare Enden angenommen sind. Um die Berechnung der U aus den u übersichtlicher zu gestalten, empfiehlt es sich, die Wiederkehr gleicher Werte in den Ordnungsziffern nicht zu berücksichtigen, sondern diese so zu wählen, als ob alle u verschieden wären.¹⁵⁾ Der Einfluß der Gleichheit einzelner u ergibt sich dann bei der Zahlenrechnung ganz von selbst. Durch Teilung aller Glieder mit dem aus (88) folgenden Werte von D geht also die Gruppe (89) in die folgende über:

$$(91) \quad \begin{cases} u_{22} & u_{32} & u_{42} & u_{52} & u_{62} & u_{72} & u_{82} \\ u_{23} & u_{33} & u_{43} & u_{53} & u_{63} & u_{73} & u_{83} \\ u_{24} & u_{34} & u_{44} & u_{54} & u_{64} & u_{74} & u_{84} \\ u_{25} & u_{35} & u_{45} & u_{55} & u_{65} & u_{75} & u_{85} \\ u_{26} & u_{36} & u_{46} & u_{56} & u_{66} & u_{76} & u_{86} \\ u_{27} & u_{37} & u_{47} & u_{57} & u_{67} & u_{77} & u_{87} \\ u_{28} & u_{38} & u_{48} & u_{58} & u_{68} & u_{78} & u_{88} \end{cases}$$

Die der Gruppe (8) entsprechenden Gleichungen für die U sind dann diese:

$$(92) \quad \begin{cases} U_{21} = & u_{22} & U_{31} = & u_{32} & U_{41} = & u_{42} & U_{51} = & u_{52} \\ U_{22} = -u_{22} + u_{23} & U_{32} = -u_{32} + u_{33} & U_{42} = -u_{42} + u_{43} & U_{52} = -u_{52} + u_{53} \\ U_{23} = -u_{23} + u_{24} & U_{33} = -u_{33} + u_{34} & U_{43} = -u_{43} + u_{44} & U_{53} = -u_{53} + u_{54} \\ U_{24} = -u_{24} + u_{25} & U_{34} = -u_{34} + u_{35} & U_{44} = -u_{44} + u_{45} & U_{54} = -u_{54} + u_{55} \\ U_{25} = -u_{25} + u_{26} & U_{35} = -u_{35} + u_{36} & U_{45} = -u_{45} + u_{46} & U_{55} = -U_{54} \\ U_{26} = -u_{26} + u_{27} & U_{36} = -u_{36} + u_{37} & U_{46} = -u_{46} + u_{47} & U_{56} = -U_{53} \\ U_{27} = -u_{27} + u_{28} & U_{37} = -u_{37} + u_{38} & U_{47} = -u_{47} + u_{48} & U_{57} = -U_{52} \\ U_{28} = -u_{28} & U_{38} = -u_{38} & U_{48} = -u_{48} & U_{58} = -U_{51} \end{cases}$$

Die U brauchen nur bis U_{54} berechnet zu werden, da ihre Werte von da an mit entgegengesetzten Vorzeichen und in rückwärtslaufender Reihenfolge wiederkehren.¹⁶⁾

14) Vgl. Fußanmerkung 13.

15) Vgl. Fußanmerkung 4 im Abschnitt II.

16) Vgl. das Zahlenbeispiel im Abschnitt IV.

Die Knickbedingung lautet gemäß (15) für einen Stab mit acht Feldern allgemein:

$$(93) \quad K = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} & v_{16} & v_{17} & v_{18} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} & v_{26} & v_{27} & v_{28} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} & v_{36} & v_{37} & v_{38} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{45} & v_{46} & v_{47} & v_{48} \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} & v_{56} & v_{57} & v_{58} \\ v_{61} & v_{62} & v_{63} & v_{64} & v_{65} & v_{66} & v_{67} & v_{68} \\ v_{71} & v_{72} & v_{73} & v_{74} & v_{75} & v_{76} & v_{77} & v_{78} \\ v_{81} & v_{82} & v_{83} & v_{84} & v_{85} & v_{86} & v_{87} & v_{88} \end{vmatrix} = 0.$$

Infolge der vorausgesetzten Symmetrie sind aber diejenigen v , deren Zeiger sich zu 99 ergänzen, gleich groß.¹⁷⁾ Mit anderen Worten, die Werte der v kehren von der mitten durch die Determinante K gelegten Linie an in entgegengesetzter Reihenfolge wieder. Durch geeignete Verbindung der symmetrisch zu den Mittellinien liegenden Spalten und Zeilen läßt sich bekanntlich eine solche Determinante als das Produkt zweier anderer K_1 und K_2 darstellen wie folgt:

$$(94) \quad \left. \begin{matrix} K_1 \\ K_2 \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} v_{11} \pm v_{81} & v_{12} \pm v_{82} & v_{13} \pm v_{83} & v_{14} \pm v_{84} \\ v_{21} \pm v_{71} & v_{22} \pm v_{72} & v_{23} \pm v_{73} & v_{24} \pm v_{74} \\ v_{31} \pm v_{61} & v_{32} \pm v_{62} & v_{33} \pm v_{63} & v_{34} \pm v_{64} \\ v_{41} \pm v_{51} & v_{42} \pm v_{52} & v_{43} \pm v_{53} & v_{44} \pm v_{54} \end{vmatrix}.$$

Die oberen Vorzeichen gelten für K_1 , die unteren für K_2 . Die Knickbedingung lautet jetzt wegen $K = K_1 K_2$:

$$(95) \quad K_1 = 0 \text{ oder } K_2 = 0.$$

In (94) treten nur noch die links von der Mittellinie in (93) stehenden, also lauter verschiedene v auf.

Die Bedingungen (95) kann man nun so, wie es im Abschnitt II mit (23) geschehen ist, zur Berechnung der Werte von δ , die der Knickgrenze entsprechen, benutzen. Dies verlangt im vorliegenden Falle die Bestimmung der acht Wurzeln von zwei Gleichungen vierten Grades.

Wie im Abschnitt II durch (24) stellen wir die Summen und Unterschiede der v wieder als Funktionen von δ dar.

17) Vgl. die Bemerkungen zu (21) im Abschnitt II.

Die in der Diagonalreihe der Determinante (94) stehenden Ausdrücke enthalten alle das von δ freie Glied 1, die übrigen sind Vielfache von δ . Im Anschluß an die früher gewählte Bezeichnungsweise kann man also setzen

$$(96) K_1 = \begin{vmatrix} 1 + g_{11} \delta & g_{12} \delta & g_{13} \delta & g_{14} \delta \\ g_{21} \delta & 1 + g_{22} \delta & g_{23} \delta & g_{24} \delta \\ g_{31} \delta & g_{32} \delta & 1 + g_{33} \delta & g_{34} \delta \\ g_{41} \delta & g_{42} \delta & g_{43} \delta & 1 + g_{44} \delta \end{vmatrix} = 0$$

und

$$(97) K_2 = \begin{vmatrix} 1 + h_{11} \delta & h_{12} \delta & h_{13} \delta & h_{14} \delta \\ h_{21} \delta & 1 + h_{22} \delta & h_{23} \delta & h_{24} \delta \\ h_{31} \delta & h_{32} \delta & 1 + h_{33} \delta & h_{34} \delta \\ h_{41} \delta & h_{42} \delta & h_{43} \delta & 1 + h_{44} \delta \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichungen bedeuten für den Stab mit acht Feldern dasselbe, wie die Gleichungen (29) für den mit vier. Es sind dies die vorher erwähnten zwei Gleichungen vom vierten Grade in δ . Die Determinanten könnten zwar leicht allgemein entwickelt werden; man kann sie aber auch ebensogut erst ausrechnen, nachdem die Zahlenwerte der g und h ermittelt und eingesetzt sind. Die Unterlagen dafür geben die ohne weiteres auf acht Felder auszudehnenden Gleichungen (10) bis (13). Da diese aber infolge der hier vorausgesetzten Symmetrie noch eine Kürzung erfahren können, und da man nicht die v , sondern ihre Summen und Unterschiede braucht, so soll die Rechnung gleich etwas weiter geführt werden bis zu entwickelten Formeln für die g und h .

Betrachten wir zunächst den früher ausführlich behandelten Fall einer Anordnung mit nur vier Feldern. Die in (23) auftretenden Summen der v wurden gebildet, indem man in (10) und (11) die erste Gleichung zur letzten, die zweite zur vorletzten hinzufügte; ähnlich die Unterschiede. Dabei ergab (10) die Werte der ersten Spalte (11) die der zweiten von K_1 und K_2 . Von den Größen n abgesehen, unterscheiden sich aber die Gleichungen (10) und (11) nur durch die U , und zwar wird dieser Unterschied dadurch ausgedrückt, daß U in (10) den zweiten Zeiger 1, in (11) dagegen 2 hat.

Man kann also die aus (10) berechneten Summen und Unterschiede der v dadurch in die aus (11) hervorgehenden verwandeln, daß man in den U der ersteren den zweiten Zeiger durch eine 2 ersetzt. Die Richtigkeit dieser allgemeinen Erwägung wird für den Stab mit vier Feldern durch einen Blick auf die Gleichungen (25) und (26) bestätigt. Innerhalb jeder der beiden Gruppen ist die erste Gleichung aus (10), die zweite aus (11) abgeleitet. Abgesehen vom letzten Gliede unterscheiden sich beide immer nur dadurch, daß die U in der ersten den zweiten Zeiger 1, in der zweiten dagegen 2 haben (da nach (17) $U_{24} = -U_{41}$ und $U_{23} = -U_{42}$ ist). Da nun diese Eigenschaft der Gleichungen (10) und (11) unabhängig ist von der Felderzahl, so folgt, daß man die Werte der zweiten, dritten und vierten Spalte von (94) aus denen der ersten einfach dadurch ableiten kann, daß man an Stelle der in diesen allein auftretenden U mit dem zweiten Zeiger 1 die U mit gleichen ersten Zeigern, aber den zweiten 2, 3 und 4 setzt — immer vorbehaltlich einer besonderen Ermittlung der von U freien Glieder.

Nach diesen Gesichtspunkten sollen jetzt die Ausdrücke in U für die ersten Spalten von (96) und (97) angegeben und die von U freien Glieder für alle vier Spalten je besonders aufgeführt werden. Der Einfachheit wegen nehmen wir dabei an, daß alle Feldlängen gleich sind. (Bei nur symmetrischen, nicht gleichen Feldlängen ist die Rechnung auch nicht schwieriger, aber etwas länger.) Die jetzigen Formeln entsprechen also den Gleichungen (30) und (31) Vorausgesetzt ist, daß alle Stützen gleich, die Enden also nicht etwa besonders gestützt sind. (Die Abänderung für die letztere Art der Stützung ist nach den früher dafür gegebenen Regeln leicht zu bewirken.) Das Gesetz, nach dem sich die Größen g und h aus den U und S aufbauen, ist aus (98) so deutlich zu erkennen, daß man danach die entsprechenden Gleichungen für eine kleinere oder größere als die hier beispielsweise gewählte Zahl von acht Feldern ohne weitere Rechnung anschreiben kann.

$$(98) \left\{ \begin{array}{l} g_{11} \\ h_{11} \end{array} \right\} = \frac{1}{a^2} \left[3(U_{21} \mp U_{81}) - (U_{31} \mp U_{71}) \right] + \\ \left\{ \begin{array}{l} g_{21} \\ h_{21} \end{array} \right\} = \frac{1}{a^2} \left[-3(U_{21} \mp U_{81}) + 3(U_{31} \mp U_{71}) - (U_{41} \mp U_{61}) \right] + \\ \left\{ \begin{array}{l} g_{31} \\ h_{31} \end{array} \right\} = \frac{1}{a^2} \left[(U_{21} \mp U_{81}) - 3(U_{31} \mp U_{71}) + 3(U_{41} \mp U_{61}) - (U_{51} \mp U_{51}) \right] + \\ \left\{ \begin{array}{l} g_{41} \\ h_{41} \end{array} \right\} = \frac{1}{a^2} \left[(U_{31} \mp U_{71}) - \frac{2}{4}(U_{41} \mp U_{61}) + 3(U_{51} \mp U_{51}) \right] +$$

1. Spalte.	2. Spalte.	3. Spalte.	4. Spalte.
$+ -2 \frac{S_{12}}{a}$	$\frac{S_{23}}{a}$	0	0 ;
$+ \frac{S_{12}}{a}$	$-2 \frac{S_{23}}{a}$	$\frac{S_{34}}{a}$	0 ;
$+ 0$	$\frac{S_{23}}{a}$	$-2 \frac{S_{34}}{a}$	$\frac{S_{45}}{a}$;
$+ 0$	0	$\frac{S_{34}}{a}$	$-\frac{1}{3} \frac{S_{45}}{a}$.

Hierbei gelten die oberen Vorzeichen und die oberen Zahlen in den geschweiften Klammern für die g , die unteren Vorzeichen und die unteren Zahlen in diesen Klammern für die h .

Nach dieser Anleitung läßt sich nun die Zahlenrechnung ohne irgendwelche besonderen Entwicklungen geschlossen durchführen. Es erübrigt nur noch die Auflösung der Gleichungen (96) und (97) nach δ , was auf verschiedene, hier nicht näher zu erörternde Weise geschehen kann.

VIII. Zahlentafel zur Berechnung der Werte s und t .

Die gebräuchlichen Tafeln der Sinus und Tangenten geben diese Werte nicht als Funktionen des zugehörigen Bogens, sondern nur für Gradmaß. Bei ihrer Anwendung zur Berechnung der Größen s und t ist man daher genötigt, die Werte α erst in Grade und deren Teile zu verwandeln und damit die zugehörigen Sinus und Tangenten aufzuschlagen, was besonders dann recht umständlich ist, wenn man die (höchst unpraktische!) alte Einteilung des Viertelkreises in 90 Grade von 60 Minuten zu 60 Sekunden anwenden muß, nach der die meisten Tafeln der Kreisfunktionen berechnet sind. Eine gewisse Abhilfe bieten hier die Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus von Dr. Burrau (Berlin 1907), die aber leider die Tangenten nicht enthalten und nur bis $\alpha = 1,609$ reichen. Eine von mir berechnete, in Ligowskis Tafeln der Hyperbelfunktionen (Berlin 1890) abgedruckte Tafel reicht bis $\alpha = 2,00$, enthält aber auch nur die Sinus und Cosinus. Unter diesen Umständen wird die nachfolgende kleine Hilfstafel vielleicht nicht unwillkommen sein, in der die Werte

$$(s) = -\left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha}\right) \quad \text{und} \quad (t) = \left(1 - \frac{\alpha}{\tan \alpha}\right)$$

für die von Grad zu Grad fortschreitenden zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und π liegenden Werte von α zusammengestellt sind. Zwischenwerte lassen sich, wenn α nicht zu nahe bei π liegt, leicht und genau genug durch einfache Einschaltung ermitteln.

**BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW**

	α	(s)	(t)		α	(s)	(t)		α	(s)	(t)
o 90	1,571	0,5708	1,000	o 120	2,094	1,418	2,209	o 150	2,618	4,236	5,534
91	1,588	0,5885	1,028	121	2,112	1,464	2,269	151	2,635	4,436	5,754
92	1,606	0,6067	1,056	122	2,129	1,511	2,331	152	2,653	4,651	5,989
93	1,623	0,6254	1,085	123	2,147	1,560	2,394	153	2,670	4,882	6,241
94	1,641	0,6446	1,115	124	2,164	1,611	2,460	154	2,688	5,131	6,511
95	1,658	0,6644	1,145	125	2,182	1,663	2,528	155	2,705	5,401	6,801
96	1,676	0,6847	1,176	126	2,199	1,718	2,598	156	2,723	5,694	7,115
97	1,693	0,7057	1,208	127	2,217	1,775	2,670	157	2,740	6,013	7,455
98	1,710	0,7272	1,240	128	2,234	1,835	2,745	158	2,758	6,361	7,825
99	1,728	0,7494	1,274	129	2,251	1,897	2,823	159	2,775	6,744	8,229
100	1,745	0,7723	1,308	130	2,269	1,962	2,904	160	2,793	7,165	8,672
101	1,763	0,7958	1,343	131	2,286	2,029	2,988	161	2,810	7,631	9,161
102	1,780	0,8200	1,378	132	2,304	2,100	3,074	162	2,827	8,150	9,702
103	1,798	0,8450	1,415	133	2,312	2,174	3,165	163	2,845	8,730	10,305
104	1,815	0,8707	1,453	134	2,339	2,251	3,258	164	2,862	9,384	10,982
105	1,833	0,8972	1,491	135	2,356	2,332	3,356	165	2,880	10,127	11,748
106	1,850	0,9246	1,530	136	2,374	2,417	3,458	166	2,897	10,976	12,620
107	1,868	0,9528	1,571	137	2,391	2,506	3,564	167	2,915	11,957	13,625
108	1,885	0,9820	1,612	138	2,409	2,600	3,675	168	2,932	13,103	14,795
109	1,902	1,0120	1,655	139	2,426	2,698	3,791	169	2,950	14,458	16,174
110	1,920	1,0431	1,699	140	2,443	2,801	3,912	170	2,967	16,087	17,827
111	1,937	1,0751	1,744	141	2,461	2,910	4,039	171	2,985	18,078	19,843
112	1,955	1,1083	1,790	142	2,478	3,026	4,172	172	3,002	20,570	22,360
113	1,972	1,1425	1,837	143	2,496	3,147	4,312	173	3,019	23,776	25,591
114	1,990	1,1780	1,886	144	2,513	3,276	4,459	174	3,037	28,053	29,894
115	2,007	1,2146	1,936	145	2,531	3,412	4,614	175	3,054	34,044	35,911
116	2,025	1,2526	1,987	146	2,548	3,557	4,778	176	3,072	43,036	44,928
117	2,042	1,2918	2,040	147	2,566	3,711	4,951	177	3,089	58,027	59,946
118	2,059	1,3325	2,095	148	2,583	3,874	5,134	178	3,107	88,018	89,964
119	2,077	1,3747	2,151	149	2,601	4,049	5,328	179	3,124	178,01	179,98
120	2,094	1,4184	2,209	150	2,618	4,236	5,534	180	3,142	∞	∞

Buchdruckerei des Waisenhauses in Halle a. d. S.

**BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW**

Hilfswerte für das Entwerfen und die Berechnung von Brücken mit eisernem Überbau.

Als Ergänzung zu den Preuß. Vorschriften für das Entwerfen der Brücken mit eisernem Überbau. Von **F. Dirksen**, Königl. Eisenbahn-Bauinspektor. Mit 36 Text-Abbildungen und 1 Tafel.

Dritte durchgesehene Auflage.

1908.

Preis geheftet 4 Mk.

Statische Untersuchung von Bogen- und Wölb-Tragwerken in Stein, Eisen, Beton oder Eisen- beton nach den Grundsätzen der Elastizitätstheorie unter An- wendung des Verfahrens mit konstanten Bogengrößen.

Von **Dr. R. Schönhöfer**.

1908.

Preis geheftet 1,80 Mk.

Beiträge zur Theorie und Berechnung der vollwandigen Bogen- träger ohne Scheitelgelenk, insbesondere der Brücken- gewölbe und der im Eisenbetonbau üblichen biegungsfesten Rahmen.

Von **Dr.-Ing. Max Ritter**. Mit 36 Text-Abbildungen.

1909.

Preis geheftet 3 Mk.

Eiserne Brücken. Ein Lehr- und Nachschlagebuch für Studierende und Konstrukteure.

Von **G. Schaper**, Eisenbahn-Bau- und Betriebsinspektor im Ministerium der öffentlichen Arbeiten und ständiger Assistent an der Technischen Hochschule in Berlin. Mit 1244 Text-Abbildungen.

Preis geheftet 20 Mk.

1908.

In Leinen gebunden 21 Mk.

Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken und das praktische Rechnungsverfahren nach Mohr.

Von Regierungsbaumeister **W. Gehler**, Privatdozent an der Kgl. Techn. Hochschule zu Dresden.

Hierzu: **Anhang mit Rechnungsbeispielen.**

Von **J. Karig**, Bau-Obersekretär im Brückenbaubureau der Kgl. Sächs. Staatseisenbahnen. Mit 151 Text-Abbildungen.

Preis geheftet 6 Mk.

1910.

Preis gebunden 6,80 Mk.

In Vorbereitung:

Der Zweigelenkblechbogen. Entwurf, bauliche Aus- bildung und Berechnung des Zweigelenkblechbogens und seiner Widerlager unter be- sonderer Berücksichtigung tiefer Straßenunterführungen.

Von **Brabandt**, Eisenbahn-Bau- und Betriebsinspektor.
Mit vielen Text-Abbildungen.

Preis geheftet etwa 5 Mk.

1910.

Gebunden etwa 5,80 Mk.

Von demselben Verfasser ist erschienen:

Über den Sicherheitsgrad der Baukonstruktionen, insbesondere der auf Knicken beanspruchten Körper.

Mit 15 Abbildungen. gr. 8. (23 S.)

1886.

Steif geheftet 2 Mk.

Die Berechnung des Eisenbahn-Oberbaues.

Mit 118 in den Text eingedruckten Holzschnitten, 12 lithogr. Tafeln in Mappe und zahlr. Tabellen. gr. 8. (XII, 308 S.)

Geheftet 20 Mk.

1888.

Gebunden in Leinen 22 Mk.

Genietete Träger. Tabellen der Trägheitsmomente, Widerstandsmomente und Gewichte.

Mit Berücksichtigung der Nietverschwächung berechnet und übersichtlich zusammengestellt. Dritte, bedeutend vermehrte Auflage. Mit Abbildungen und einer Tafel. gr. 8. (VI, 73 S.)

Steif geheftet 5 Mk.

1893.

Gebunden in Leinen 6 Mk.

Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter

Last. Mit 9 Text-Abbildungen, 4 Tabellen und 4 lithogr. Tafeln. gr. 8. (46 S.)

Geheftet 6 Mk.

1896.

Gebunden in Leinen 7 Mk.

Über Raumbachwerke. Neue Formen und Berechnungsweisen für Kuppeln und sonstige

Dachbauten. Mit 36 Abbildungen. gr. 8. (VI, 93 S.)

Geheftet 8 Mk.

1901.

Gebunden in Leinen 9 Mk.

Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer

Querstützung. Mit 3 in den Text eingedruckten Abbildungen einer Tafel und zahlreichen Tabellen. 8 44 S.

1906.

Geheftet 2 Mk.

Empfohlen durch Runderlaß des Herrn Ministers der öffentlichen Arbeiten III. 1. 2298II — vom 6. Dez. 1905.

Rechentafel **nebst Sammlung häufig gebrauchter Zahlenwerte.**
Fünfte Auflage.

XII.-XIV. Tausend.

Gebunden in Leinen 5 Mk.

Über den Sicherheitsfaktor bei Bruchzustand
Nennen Sie die Bedeutung des Sicherheitsfaktors

Die Berechnung des Eisenbahnüberwagens

Bestimmte Träger

Die Schweißnähte eines Trägers auf
Last

Über Hauptachswerke

Die Klüftung eines Trägers mit
übertragung

Stichtafel



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

31257

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000298371