

167/92
1777/192
177/192

BEITRAG
ZUR
THEORIE VERSTEIFTER BOGENBRÜCKEN.

VON
TH. REHBOCK.

MIT SIEBEN ABBILDUNGEN IN HOLZSCHNITT.

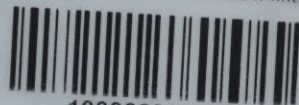
J. Nr. 18876



BERLIN 1892.
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.
(VORMALS ERNST & KORN.)

W. E. S.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000304028

BEITRAG
ZUR
THEORIE VERSTEIFTER BOGENBRÜCKEN.

VON
TH. REHBOCK.

MIT SIEBEN ABBILDUNGEN IN HOLZSCHNITT.

F. Nr. 18876



BERLIN 1892.
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN.
(VORMALS ERNST & KORN.)

VII C. C.

XXX
1172



IV 35188

Sonderdruck aus der Zeitschrift für Bauwesen, Jahrg. 1892.

Alle Rechte vorbehalten.

Akc. Nr. 1152/52

Beitrag zur Theorie versteifter Bogenbrücken.

Da die Berechnung statisch unbestimmter Systeme nach den allgemein gültigen Formeln sehr zeitraubend und ermüdend ist, erscheint es wünschenswerth, für einzelne besondere Fälle möglichst bequeme Näherungsverfahren einzuführen. In der folgenden Abhandlung soll ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Einflußlinie für den wagerechten Schub (H) versteifter Bogenbrücken mit oberliegendem Versteifungsbalken bei senkrechter Belastung gegeben werden.

Ist diese Einflußlinie bekannt, so lassen sich sofort die Einflußlinien für alle Stäbe des Systems aufzeichnen, da die Spannung eines Bogenstabes

$$B = H \sec \alpha,$$

einer Verticalen . . . $V = H (\operatorname{tg} \alpha_i - \operatorname{tg} \alpha_{i+1}),$

eines Obergurtstabes $O = -\frac{y_i (M_o - H)}{h (y_i)},$

eines Untergurtstabes $U = +\frac{y_k (M_o - H)}{h (y_k)},$

einer Diagonalen . . . $D = \pm \frac{Q_o - H \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\sin \beta}$

ist, wobei Q_o und M_o die Querkraft und das Moment für einen einfachen Balken bedeuten.

Der Versteifungsbalken sei ein Gitterbalken, der an den Enden entweder auf Mauerwerk oder auf Endverticalen ruht.

Bei den aus Abb. 1 ersichtlichen Benennungen finden sich

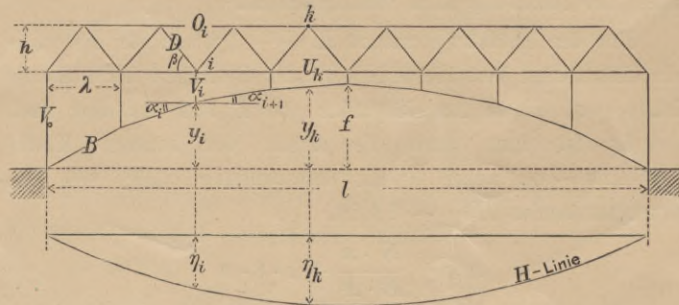


Abb. 1.

als Ergebnis der später gebrachten Ableitung die Werthe für die Ordinaten der H -Linie

$$\eta = \frac{f \cdot \lambda}{m^3 (1,6 f^2 + 1,5 \cdot h^2 \cdot c \cdot K_2)} K_1.$$

Diese Formel gestattet die Festlegung der H -Linie in kürzester Zeit mit hinreichender Genauigkeit.

Es ist $c = \frac{F_o + F_u}{2 F_b}$, m bedeutet die Anzahl der Felder des Trägers. Die Werthe K_1 für die einzelnen Knotenpunkte und der von $\frac{f}{l}$ abhängige Werth K_2 ergeben sich aus den untenstehenden Aufstellungen.

Aufstellung für K_1 .

Nummer des Knotenpunktes:	$n=1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$M=8$	500	910	1 190	1 280								
9	710	1 330	1 780	2 020								
10	980	1 860	2 540	2 980	3 120							
11	1 310	2 500	3 480	4 170	4 530							
12	1 700	3 280	4 620	5 630	6 260	6 480						
13	2 170	4 200	5 970	7 380	8 360	8 860						
14	2 717	5 280	7 557	9 440	10 850	11 712	12 005					
15	3 350	6 530	9 400	11 840	13 750	15 070	15 740					
16	4 060	7 950	11 500	14 590	17 100	18 960	20 100	20 480				
17	4 880	9 570	13 900	17 730	20 940	23 430	25 130	25 990				
18	5 800	11 390	16 600	21 280	25 280	28 510	30 880	32 320	32 800			
19	6 820	13 430	19 630	25 260	30 170	34 240	37 380	39 510	40 590			
20	7 960	15 700	23 000	29 700	35 630	40 660	44 680	47 620	49 400	50 000		
21	9 220	18 200	26 730	34 610	41 680	47 790	52 820	56 680	59 290	60 610		
22	10 600	20 960	30 840	40 030	48 370	55 680	61 850	66 750	70 320	72 480	73 200	
23	12 120	23 980	35 340	45 980	55 710	64 360	71 790	77 880	82 530	85 670	87 250	
24	13 780	27 280	40 260	52 480	63 750	73 870	82 710	90 110	95 980	100 240	102 820	103 680
25	15 580	30 870	45 610	59 560	72 500	84 250	94 630	103 500	110 740	116 250	119 970	121 840

Aufstellung für K_2 .

$\frac{f}{l}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6,5}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7,5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8,5}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9,5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{16}$
K_2	1,235	1,199	1,170	1,147	1,128	1,113	1,101	1,090	1,081	1,066	1,056	1,041	1,031

Bei Benutzung der Formel werden die Werthe K_1 für die einzelnen Knotenpunkte zur Bildung der H -Linie aufgetragen, und zwar für α Einheiten der Aufstellung je 1 cm. Es entspricht alsdann in der Abbildung 1 cm einem Werthe von

$$\alpha \cdot \frac{f \cdot \lambda}{m^3 (1,6 f^2 + 1,5 h^2 \cdot c \cdot K_2)}, \text{ d. h.: Eine Last von 1 Tonne}$$

über einer Ordinate der H -Linie von der Länge η_o erzeugt einen wagerechten Schub von $\eta_o \cdot \alpha \cdot \frac{f \cdot \lambda}{m^3 (1,6 f^2 + 1,5 h^2 \cdot c \cdot K_2)}$ Tonnen. Das Verfahren ist sowohl bei parabelförmiger als auch bei kreisförmiger Bogenlinie verwendbar.

Ableitung des Näherungsverfahrens.

Bei der Ableitung des Näherungsverfahrens wird von der Formel:

$$\eta = \frac{M_y}{\Sigma y^2 + \Sigma \frac{h^2}{\lambda} \cdot v \cdot b^3} = \frac{M_y}{N}$$

ausgegangen, in der M_y das Moment für einen Balken mit den Lasten y bedeutet. Diese Formel ist selbst eine Näherungsformel, deren Genauigkeit später geprüft werden soll. Es wird daher ihre Ableitung kurz vorausgeschickt.¹⁾

Für den Belastungszustand $H = -1 t$ und für die wirklich eintretenden Verschiebungen Δs ist die Arbeit der äußeren Kräfte $= o$, da die Angriffspunkte von H feste Auflager sind.

Es ist dann auch die Arbeit der inneren Kräfte $\Sigma S' \cdot \Delta s = o$, wobei S' die Stabspannung infolge des Belastungszustandes $H = -1 t$ ist.

$$\Delta s = \frac{S \cdot s}{E \cdot F} + \varepsilon \cdot t \cdot s$$

$S = S_o - H \cdot S'$, worin S_o die Stabspannung für den Zustand $H = o$ bedeutet.

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$H = \frac{\Sigma \frac{S_o \cdot S' \cdot s}{E \cdot F}}{\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}} + \frac{\Sigma S' \cdot s \cdot \varepsilon \cdot t}{\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}}$$

Es wird $t = o$ gesetzt, da die Einflußlinie für H nur von der Belastung, nicht von Temperaturänderungen abhängig ist.

$$H = \frac{\Sigma \frac{S_o \cdot S' \cdot s}{E \cdot F}}{\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}} = \frac{\Sigma S_o \cdot \Delta s'}{\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}}$$

worin $\Delta s'$ die Längenausdehnung von s infolge des Belastungszustandes $H = -1 t$ ist. Sind P_i lothrechte äußere Kräfte und δ_i' die durch die Belastung $H = -1 t$ erzeugten lothrechten Verschiebungen der Angriffspunkte der P_i , so lautet die Arbeitsgleichung für den Belastungszustand $H = o$ und für den Verschiebungszustand $H = -1 t$:

$$\Sigma S_o \cdot \Delta s' = \Sigma P_i \cdot \delta_i', \text{ sodafs:}$$

$$H = \frac{\Sigma P_i \cdot \delta_i'}{\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}} \text{ und } \eta = \frac{\delta_i'}{\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}}$$

Die δ_i' -Linie ist unter Vernachlässigung der Längenänderung der Endverticalen, die sich bei einem durchgeführten Beispiele als verschwindend klein ($= \frac{\delta_{max}}{270}$) ergab, gleich der Biegelinie eines Gitterträgers mit parallelen Gurten, und diese ist gleich der Momentencurve für einen Lastenzug w , dessen Lasten

für einen Obergurtnoten:

$$w_i = \frac{-\Delta o_i + \Delta d_i \cdot \sec \varphi_i + \Delta d_{i+1} \sec \varphi_{i+1}}{h_i}$$

für einen Untergurtnoten:

$$w_k = \frac{+\Delta u_k - \Delta d_k \cdot \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \cdot \sec \varphi_{k+1}^2}{h_k}$$

sind.

Der Einfluß der Werthe $\Delta d \cdot \sec \varphi$ auf die Werthe w ist gering und wird vernachlässigt, sodafs:

$$w_i = -\frac{\Delta o_i}{h_i} = -\frac{O_i \cdot o_i}{E \cdot F_o \cdot h_i},$$

$$w_k = +\frac{\Delta u_k}{h_k} = +\frac{U_k \cdot u_k}{E \cdot F_u \cdot h_k}.$$

1) Die Ableitung dieser Formel ist die von Professor Müller-Breslau in seinen Vorträgen an der Technischen Hochschule gegebene.

2) Sieh: Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre S. 26.

Für den Zustand $H = -1$ ist:

$$O_i = -\frac{M o_i - H \cdot y_i}{h_i} = -\frac{y_i}{h_i} \text{ und:}$$

$$U_k = +\frac{M o_k - H \cdot y_k}{h_k} = \frac{y_k}{h_k}.$$

Es ergibt sich demnach:

$$w_i = \frac{y_i \cdot o_i}{h_i^2 \cdot E \cdot F_o}; \quad w_k = \frac{y_k \cdot u_k}{h_k^2 \cdot E \cdot F_u}.$$

Hierbei ist:

$$h_i = h_k = h$$

$$o_i = u_k = \lambda.$$

Es werden ferner die Gurtquerschnitte einander gleich und überall gleich groß angenommen:

$$F_o = F_u = F = \frac{F_o + F_u}{2},$$

sodafs:

$$w_i = w_k = w = \frac{\lambda}{h^2 \cdot E \cdot F} \cdot y, \text{ und } \delta_i' = \frac{M_y \cdot \lambda}{h^2 \cdot E \cdot F};$$

$$\eta = \frac{M_y}{\frac{\lambda}{h^2 \cdot E \cdot F} \cdot \Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}} = \frac{M_y}{N}.$$

In dem Ausdruck für N ist:

$$\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F} = \Sigma \frac{O'^2 \cdot o}{E \cdot F_o} + \Sigma \frac{U'^2 \cdot u}{E \cdot F_u} + \Sigma \frac{B'^2 \cdot b}{E \cdot F_b} + \Sigma \frac{D'^2 \cdot d}{E \cdot F_d} + \Sigma \frac{V'^2 \cdot v}{E \cdot F_v};$$

$$O' = -\frac{y_i}{h} \quad B' = 1 \cdot \sec \alpha$$

$$U' = +\frac{y_k}{h} \quad b = \lambda \cdot \sec \alpha.$$

Mithin ist unter Vernachlässigung des Einflusses der Werthe für die Diagonalen und Verticalen:

$$N = \frac{h^2 \cdot E \cdot F}{\lambda} \left\{ \Sigma \frac{y_i^2 \cdot \lambda}{h^2 \cdot E \cdot F} + \Sigma \frac{y_k^2 \cdot \lambda}{h^2 \cdot E \cdot F} + \Sigma \frac{\sec^3 \alpha \cdot \lambda}{E \cdot F_b} \right\};$$

$$N = \Sigma y^2 + \Sigma \frac{\sec^3 \alpha \cdot h^2 \cdot F}{F_b} = \Sigma y^2 + \Sigma \frac{b^3 \cdot h^2}{\lambda^3} \cdot \frac{F}{F_b} =$$

$$= \Sigma y^2 + \Sigma \frac{b^3 \cdot h^2}{\lambda^3} \cdot c;$$

$$\eta = \frac{M_y}{\Sigma y^2 + \Sigma \frac{b^3 \cdot h^2}{\lambda^3} \cdot c} = \frac{M_y}{N}.$$

Es kann demnach die H -Linie als Seilpolygon für die Lasten y bei einem Polabstande von N betrachtet werden.

Um bei der Bestimmung von N die erforderliche Zahlenrechnungen zu vereinfachen und bei analytischer Bestimmung der Werthe η zugleich die Berechnung die Momente M_y zu sparen, wird diese Formel wie folgt umgestaltet.

Berechnung von M_y .

Es wird zunächst ein **Parabelbogen** zu Grunde gelegt. Dann ist:

$$\frac{M_y}{N} = \frac{\frac{\lambda}{2} \cdot M_y}{\frac{\lambda}{2} \cdot N}.$$

Die $\left(\frac{\lambda}{2} \cdot M_y\right)$ -Linie ist die Momentenlinie für einen einfachen Balken mit parabelförmig verlaufender Auflast von der Höhe y und dem Gewichte 1, deren Gleichung abgeleitet werden soll.

Unter Zugrundelegung der auf Abb. 2 angegebenen Benennungen ist:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -x$$

$$f - \frac{x}{f} = \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

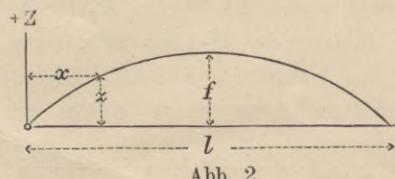


Abb. 2.

$$x = -4 \frac{f}{l^2} \cdot x^2 + 4 \frac{f}{l} \cdot x$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = +4 \frac{f}{l^2} (x^2 - x \cdot l)$$

$$\frac{dM}{dx} = 4 \frac{f}{l^2} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2 l}{2} + C_1 \right)$$

$$M = 4 \frac{f}{l^2} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} l + C_1 \cdot x + C_2 \right)$$

für $x=0$ $\left\{ \begin{array}{l} C_2 = 0 \\ M = 0 \end{array} \right.$ für $x=l$ $\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \frac{l^3}{12} \\ M = 0 \end{array} \right.$

$$M = 4 \frac{f}{l^2} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} l + \frac{x l^3}{12} \right) = \frac{\lambda}{2} M_y$$

$$\frac{\lambda}{2} M_y = \frac{f \cdot l^2}{3} \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right)$$

Für das n^{te} Feld vom linken Auflager an ist,

da: $\frac{x}{l} = \frac{n}{m}$,

$$\frac{\lambda}{2} M_y = \frac{f l^2}{3 m^4} \left\{ n \cdot m^3 - 2 n^3 \cdot m + n^4 \right\} \text{ oder,}$$

da: $\frac{l}{m} = \lambda$,

$$\frac{\lambda}{2} M_y = \frac{f \cdot \lambda^2}{3 m^2} \left\{ n \cdot m^3 - 2 n^3 \cdot m + n^4 \right\} = \frac{f \cdot \lambda^2}{3 m^2} \cdot K_1,$$

$$\eta = \frac{2 f \lambda}{3 m^2 \cdot N} \cdot K_1.$$

Die Werthe $K_1 = (n \cdot m^3 - 2 n^3 \cdot m + n^4)$ wurden für Träger von 8 bis 25 Feldern berechnet und in der Aufstellung Seite 1 zusammengestellt.

Durch die Einführung der stetig nach der Parabel verlaufenden, an Stelle der von Knoten zu Knoten springenden Belastung wird nur ein außerordentlich kleiner Fehler erzeugt. Dieser Fehler wächst mit abnehmender Feldzahl, übersteigt aber auch bei nur 10 Feldern an keiner Stelle $\frac{1}{100}$ des wahren Werthes.

Berechnung von N.

$$N = \Sigma y^2 + \Sigma \frac{h^2}{\lambda^3} \cdot c \Sigma b^3.$$

$\Sigma y^2 \frac{\lambda}{2}$ ist der Inhalt der Fläche, begrenzt durch die y^2 -Linie und die Linie AB (Abb. 3).

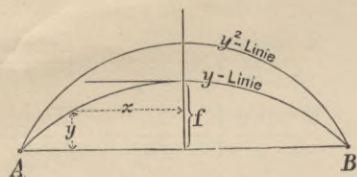


Abb. 3.

$$y = f - \frac{x^2}{2p}$$

$$y^2 = f^2 - \frac{f \cdot x^2}{p} + \frac{x^4}{4p^2}$$

$$J = \Sigma y^2 \frac{\lambda}{2} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} y^2 \cdot dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(f^2 - \frac{f \cdot x^2}{p} + \frac{x^4}{4p^2} \right) dx =$$

$$= f^2 l - f \frac{l^3}{12p} + \frac{l^5}{320p^2}.$$

Aus der Parabelgleichung folgt: $\frac{l^2}{4} = 2p \cdot f$

$$p = \frac{l^2}{8f}$$

$$J = f^2 l - \frac{2}{3} f^2 \cdot l + \frac{1}{5} f^2 \cdot l = \frac{8}{15} f^2 \cdot l = \Sigma y^2 \cdot \frac{\lambda}{2}$$

$$\Sigma y^2 = \frac{16}{15} f^2 \frac{l}{\lambda} = \frac{16}{15} m \cdot f^2.$$

Auch hierbei wurde durch die Einführung der Parabel an Stelle des Polygons ein ganz geringer Fehler gemacht, der ebenfalls bei zunehmender Feldzahl abnimmt.

In beiden Fällen sind die Näherungswerthe etwas zu klein, sodafs, da M_y im Zähler, Σy^2 im Nenner des Bruches steht, ein theilweiser Ausgleich eintritt.

Σb^3 wird ausgedrückt durch $m \cdot \lambda^3 \cdot K_2$, worin K_2 ein Werth ist, der fast ausschließlich von $\frac{f}{l}$ abhängt.

Die Zahl der Felder ist auf ihn von sehr geringem Einfluß und kommt nur bei sehr hohen Bögen in Betracht. Sie ist indessen auch bei diesen zu vernachlässigen, denn schon bei $\frac{f}{l} = \frac{1}{6}$ stellen sich nur sehr geringe Unterschiede heraus. Es ist nämlich:

für $m =$	8	10	12	16 und mehr Felder
$K_2 =$	1,232	1,234	1,234	1,235

Für die gebräuchlichen Stichmaße erhält K_2 die in der Aufstellung Seite 1 angegebenen Werthe.

Es ist nun:

$$N = \Sigma y^2 + \Sigma \frac{h^2}{\lambda^3} c \cdot \Sigma b^3 = \frac{16}{15} m f^2 + \frac{h^2}{\lambda^3} c \cdot m \cdot \lambda^3 \cdot K_2 =$$

$$= m \left\{ \frac{16}{15} f^2 + h^2 \cdot c K_2 \right\} \text{ und}$$

$$\eta = \frac{2 f \cdot \lambda \cdot K_1}{3 m^3 \left\{ \frac{16}{15} f^2 + h^2 \cdot c \cdot K_2 \right\}} = \frac{f \cdot \lambda \cdot K_1}{m^3 (1,6 f^2 + 1,5 h^2 \cdot c \cdot K_2)}$$

Um zu zeigen, wie genau die aus dieser Formel erhaltenen Werthe mit den aus der Ausgangsformel gefundenen übereinstimmen, wurden zwei Beispiele berechnet, das eine für gewöhnliche Verhältnisse, das zweite für einen recht hohen Bogen mit wenig Feldern, da bei einer solchen Anordnung die grössten Fehler auftreten.

Beispiel 1 (Abb. 4). $\frac{f}{l} = \frac{1}{8,5}$ $m = 17$.

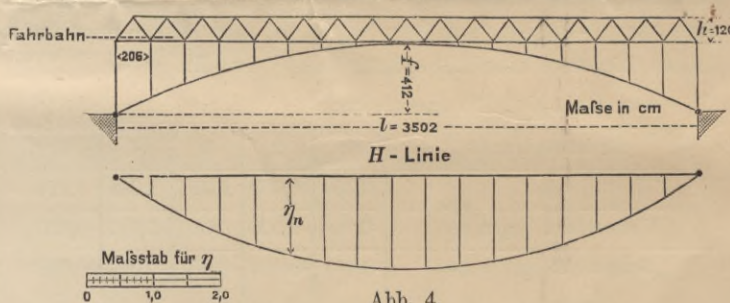


Abb. 4.

Es werden die Werthe K_1 aus der Aufstellung als Höhen der H-Linie unter den Untergurts-Knotenpunkten des Trägers aufgetragen und zwar je 20 000 Einheiten als 1 cm. Es entspricht alsdann 1 cm in der Abbildung einem Werthe von:

$$20000 \frac{412 \cdot 206}{17^3 (1,6 \cdot 412^2 + 1,5 \cdot 120^2 \cdot c \cdot 1,113)}$$

$$= \frac{345500}{271590 + 24040 \cdot c}$$

Wird c auf $\frac{1}{1,5}$ geschätzt, so ist 1 cm der Zeichnung gleich 1,2012. Die Einheit des Maßstabes muß demnach eine Länge von $\frac{1}{1,2012} = 0,8325$ cm erhalten.

Es ergeben sich für die einzelnen Knotenpunkte die Werthe η_n , die in der folgenden Zusammenstellung mit den aus der Ausgangsformel ($\eta = \frac{M_y}{N}$) für einen Parabelbogen berechneten Werthen η_p verglichen wurden:

Knotenpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
η_n	0,293	0,575	0,835	1,065	1,258	1,407	1,509	1,561
η_p	0,294	0,576	0,837	1,068	1,262	1,412	1,514	1,566
Unterschied	0,001	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,005	0,005

Die grössten Unterschiede betragen noch nicht $\frac{1}{250}$ der Werthe η_p .

Beispiel 2. (Abb. 5). $\frac{f}{l} = \frac{1}{6}$ $m = 10$.

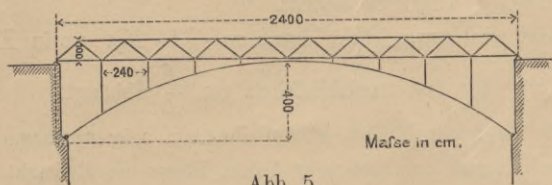


Abb. 5.

Für den geschätzten Werth $v = \frac{1}{2}$ ergibt sich:

Knotenpunkt	1	2	3	4	5
η_n	0,355	0,673	0,920	1,078	1,129
η_p	0,358	0,677	0,927	1,087	1,141
Unterschied	0,003	0,004	0,007	0,009	0,012

Die größten Unterschiede betragen nur etwa $\frac{1}{100}$ der Werth η_p .

Hat der Bogen **kreisförmige Gestalt**, so läßt sich dasselbe Näherungsverfahren anwenden, da die H -Linie auffallende Aehnlichkeit mit der für den Parabelbogen zeigt.

Es wurden für die beiden früheren Beispiele die Werthe η_k aus der Ausgangsformel bei kreisförmiger Bogenlinie berechnet:

Für Beispiel 1 ist:

für Knotenpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
η_k	0,295	0,579	0,840	1,070	1,261	1,409	1,510	1,561
Unterschied gegen η_p	0,001	0,003	0,003	0,002	-0,001	-0,003	-0,004	-0,005
Unterschied gegen η_n	0,002	0,004	0,005	0,005	0,003	0,002	0,001	0

Während die y -Fläche für den Kreisbogen fast 2 v. H. größer als die y -Fläche für den Parabelbogen ist, der Unterschied einzelner Höhen sogar 3 v. H. übersteigt, unterscheiden sich die H -Flächen nur um $\frac{1}{20}$ v. H. und zeigen einzelne Höhen höchstens eine Abweichung von $\frac{1}{2}$ v. H.

Für Beispiel 2 ergibt sich:

für Knotenpunkt	1	2	3	4	5
η_k	0,354	0,669	0,913	1,068	1,121
Unterschied gegen η_p	-0,004	-0,008	-0,014	-0,019	-0,020
Unterschied gegen η_n	-0,001	-0,004	-0,007	-0,010	0,008

Auch hier ist die Annäherung noch eine sehr gute, es zeigt sich sogar, daß in den beiden betrachteten Beispielen das Näherungsverfahren bei kreisförmigem Bogen noch etwas genauere Ergebnisse als bei dem Parabelbogen liefert.

Untersuchung der Ausgangsformel $\eta = \frac{M_y}{N}$ auf ihre Genauigkeit.

Nachdem gezeigt ist, daß sich der Werth $\frac{M_y}{N}$ stets mit großer Genauigkeit auf die besprochene bequeme Weise berechnen läßt, soll auf die bei der Ableitung der Formel: $\eta = \frac{M_y}{N}$ gemachten vereinfachenden Annahmen zurückgekommen und an der Hand von Beispielen ihre Genauigkeit untersucht werden.

Es waren bei der Ableitung der Formel drei Vereinfachungen eingeführt worden:

- 1) wurde $F_o = F_u = F$ gesetzt;
- 2) bei den Werthen w wurde der Einfluß der Diagonalen vernachlässigt;
- 3) bei Berechnung von $\sum \frac{S^2 \cdot s}{E \cdot F}$ wurden die Werthe für die Diagonalen und die Verticalen vernachlässigt.

Zu 1. Der Werth F_o wurde gleich F_u gesetzt, obschon unter der Annahme, daß die Fahrbahn am unteren Gurt liegt, F_u als Theil des Windverbandes größer als F_o ist.

Wie verschwindend klein bei unveränderlichem $\frac{F_o + F_u}{2 F_b}$ der Einfluß der Größe von F_o und F_u auf das Ergebnis ist, zeigen wieder die Beispiele, bei denen übertrieben große Unterschiede von F_o und F_u zu Grunde gelegt wurden, während $\frac{F_o + F_u}{2 F_b}$ stets gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt wurde.

Für Beispiel 1 ist:

für Knotenpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
bei $F_o : F_u : F_b = 1 : 1 : 2$ $\eta =$	0,298	0,585	0,849	1,083	1,280	1,432	1,536	1,589
bei $F_o : F_u : F_b = 1 : 1,5 : 2,5$ $\eta =$	0,299	0,586	0,851	1,086	1,282	1,434	1,538	1,591
Unterschied	0,001	0,001	0,002	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002

Für Beispiel 2 ist:

für Knotenpunkt	1	2	3	4	5
bei $F_o : F_u : F_b = 1 : 1 : 2$ $\eta =$	0,358	0,677	0,927	1,087	1,141
bei $F_o : F_u : F_b = 1 : 2 : 3$ $\eta =$	0,361	0,682	0,935	1,096	1,151
Unterschied	0,003	0,005	0,008	0,009	0,010

Auch bei diesen außerordentlich ungünstigen Annahmen erreicht der Fehler an keiner Stelle $\frac{1}{100}$ des Werthes η .

Zu 2. Nach Seite 2 war:

$$w_i = \frac{-\Delta o_i + \Delta d_i \cdot \sec \varphi_i + \Delta d_{i+1} \cdot \sec \varphi_{i+1}}{h_i}$$

$$w_k = \frac{+\Delta u_k - \Delta d_k \cdot \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \cdot \sec \varphi_{k+1}}{h_k}$$

Bei der Bildung von M_w wurde der Einfluß der Δd vernachlässigt.

Durch diese Vereinfachung erhielt M_w einen um M_w zu kleinen Werth, wobei:

$$w'_i = \frac{+\Delta d_i \cdot \sec \varphi_i + \Delta d_{i+1} \cdot \sec \varphi_{i+1}}{h_i}$$

$$w'_k = \frac{-\Delta d_k \cdot \sec \varphi_k - \Delta d_{k+1} \cdot \sec \varphi_{k+1}}{h_k}$$

Wird $\varphi_i = \varphi_{i+1} = \varphi_k = \varphi_{k+1}$ gesetzt, so ist:

$$w'_i = \frac{d \cdot \sec \varphi}{h \cdot E} \left\{ + \frac{D_i}{F_{d_i}} + \frac{D_{i+1}}{F_{d_{i+1}}} \right\}$$

$$w'_k = \frac{d \cdot \sec \varphi}{h \cdot E} \left\{ - \frac{D_k}{F_{d_k}} - \frac{D_{k+1}}{F_{d_{k+1}}} \right\}$$

Die Größe von M_w soll wiederum am Beispiel 1 gezeigt werden. Für dieses wurden die Werthe D aus einem Kräfteplan ermittelt und die Werthe F_d aus den aufgezeichneten Einflußlinien unter Berücksichtigung von Temperaturänderungen und Winddruck annähernd bestimmt. Es wurde dabei eine eingleisige Eisenbahnbrücke mit Schotterbettüberführung für einen Lastenzug, bestehend aus

dreiachsigen Locomotiven von 1,4 m Radstand, 6,8 m Länge und 6,5 t Raddruck,

dreiachsigen Tendern von 1,5 m Radstand, 6,0 m Länge und 4,5 t Raddruck,

zweiachsigen Güterwagen von 3,0 m Radstand, 6,0 m Länge und 3 t Raddruck

zu Grunde gelegt. — Es ergab sich:

$$D_1 = -D_2 = -0,590; \quad D_9 = -D_{10} = -0,285;$$

$$D_3 = -D_4 = -0,514; \quad D_{10} = -D_{12} = -0,206;$$

$$D_5 = -D_6 = -0,440; \quad D_{13} = -D_{14} = -0,137;$$

$$D_7 = -D_8 = -0,362; \quad D_{15} = -D_{16} = -0,068;$$

$$D_{17} = 0.$$

Die Stäbe d_1 und d_2 wurden aus vier Winkeln $80 \times 80 \times 10$ mm gebildet, sodafs $F_{d_1} = F_{d_2} = 60,4$ qcm ist, während Es stellen sich hierbei die Werthe M_w für

Knotenpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
auf	0,00000153	0,00000322	0,00000467	0,00000586	0,00000680	0,00000748	0,00000793	0,00000846
dagegen (bei $F_o = 140$ qcm und $F_u = 180$ qcm) die Werthe M_w für								
Knotenpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
auf	0,0000426	0,0000836	0,0001215	0,0001549	0,0001830	0,0002047	0,0002196	0,0002271

Es ergibt sich sonach für

Knotenpunkt	1	2	3	4	5	6	7	8
ein Fehler von	3,6	3,8	3,8	3,8	3,7	3,7	3,7	3,7

durchschnittlich 3,7 v. H.

Zu 3. Eine weitere Vereinfachung wurde bei der Berechnung von N eingeführt, indem bei der Bildung der $\sum \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}$ der Einfluss der Diagonalen und Verticalen vernachlässigt wurde.

Um den Fehler, der sich durch diese Vereinfachung für das Beispiel 1 ergibt, zu bestimmen, wurden auch die übrigen erforderlichen Querschnitte ermittelt, und zwar:

$$F_b = 240 \text{ qcm}; \quad F_v = 44 \text{ qcm}; \quad F_{v_0} = 75 \text{ qcm};$$

wobei F_{v_0} den Querschnitt der Endverticalen darstellt.

Für diese Querschnitte berechnen sich die einzelnen Summenwerthe zu:

$$\sum \frac{O'^2 \cdot o}{E \cdot F_o} = 0,00007838; \quad \sum \frac{U'^2 \cdot u}{E \cdot F_u} = 0,00006426;$$

$$\sum \frac{B'^2 \cdot b}{E \cdot F_b} = 0,00000811; \quad \sum \frac{D'^2 \cdot d}{E \cdot F_d} = 0,00000670;$$

$$\sum \frac{V'^2 \cdot v}{E \cdot F_v} = 0,00000128.$$

Es ist: $\sum \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F} = 0,00015873$, während die vernachlässigten Werthe:

$$\sum \frac{D'^2 \cdot d}{E \cdot F_d} + \sum \frac{V'^2 \cdot v}{E \cdot F_v} = 0,00000798 \text{ sind,}$$

sodafs der Fehler 5,0 v. H. beträgt.

Bei den beiden zuletzt unter 2) und 3) betrachteten Vereinfachungen ergab sich ein zu kleiner Werth. Da indessen von diesen Vereinfachungen die erste im Zähler, die zweite im Nenner des Werthes $\eta = \frac{M_y}{N}$ ausgeführt wurde, so heben sich die beiden durch die Vereinfachungen entstandenen Fehler zum Theil auf, und es ergibt sich für unser Beispiel nur ein Gesamtfehler von 1,16 v. H., und zwar liefern die beiden Vereinfachungen zusammen für η einen um diesen Betrag zu grossen Werth.

Es würde sich demnach empfehlen, entweder beide Vereinfachungen oder keine von beiden zu verwenden.

Aus den seitherigen Ableitungen ist ersichtlich, dafs bei der Bestimmung der H -Linie nur die Schätzung des Werthes $c = \frac{F_o + F_u}{2F_b}$ erforderlich ist.

Der Werth c erscheint nur im Werthe N , der für Aenderungen der Gröfse c nicht sehr empfindlich ist.

Hieraus geht hervor, dafs die betrachtete Trägerform für Aenderungen in der Querschnittannahme ziemlich unempfindlich ist, sodafs es möglich sein wird, bei auch nur einigermaßen richtiger Schätzung des Werthes c gleich mit der ersten gezeichneten H -Linie die Rechnung zu Ende zu führen.

die übrigen Diagonalen aus vier Winkeln $70 \times 70 \times 9$ gebildet wurden, wofür $F_d = 47,5$ qcm ist.

Wie gering die Aenderungen von N und mithin auch von $\eta = \frac{M_y}{N}$ bei verschiedenen Werthen für c sind, geht wieder aus den Beispielen hervor.

Im Beispiel 1 stellt sich für: Im Beispiel 2 stellt sich für:

$$c = 1 \quad n = 3258000; \quad c = 1 \quad n = 1831000;$$

$$c = \frac{1}{1,5} \quad n = 3185000; \quad c = \frac{1}{1,5} \quad n = 1789000;$$

$$c = \frac{1}{2} \quad n = 3158000; \quad c = \frac{1}{2} \quad n = 1769000;$$

$$c = \frac{1}{3} \quad n = 3131000; \quad c = \frac{1}{3} \quad n = 1748000.$$

Schlussbetrachtung.

Da die Einflussflächen für Stäbe des Versteifungsbalkens aus Unterschieden zweier Flächen bestehen, von denen die eine die H -Fläche ist, vergrößern sich für diese Stäbe die Fehler der H -Linie. Am stärksten ist diese Fehlerzunahme bei den Enddiagonalen, vor allem aber bei den Gurtstäben (für diese ist beim Parabelbogen die Fehlerzunahme überall gleich gross).

Für Beispiel 1 beträgt sie für die Gurtstäbe das 12,8fache, sodafs ein Fehler der H -Fläche von 1 v. H. ihres Werthes, in den Einflussflächen der Gurtstäbe Fehler von 12,8 v. H. erzeugt.

Als Beispiel sei in Abb. 6 die Einflusslinie für den mittleren Stab U_q des Beispiels 1 gezeichnet.

$$U_q = \frac{y_q}{h} \left\{ \frac{M_o}{y_q} - H \right\}.$$

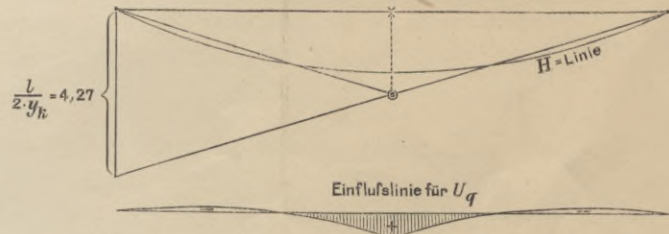


Abb. 6.

Diese starke Zunahme der Ungenauigkeit der Rechnung bei fehlerhafter H -Linie, läfst eine recht genaue Berechnung derselben als wünschenswerth erscheinen. Dieselbe allzuweit zu treiben, würde indessen zwecklos sein, da die wirkliche H -Linie der theoretischen doch niemals genau entsprechen wird, weil dieselbe durch Nebenspannungen und mancherlei Zufälligkeiten der Ausführung und des Materials beeinflusst wird. Es ist diese Empfindlichkeit eben ein Nachtheil, den die Trägerform bei der eingeschlagenen Art der Berechnung zeigt, und der durch eine geringere zulässige Beanspruchung des Materials ausgeglichen werden mufs.

Bei den gebräuchlichen Anordnungen dürfte die Anwendung der Formel $\eta = \frac{M_y}{N}$ wohl stets zulässig sein, wie unser Beispiel zeigt, in dem bei gleichmäßiger Belastung ein Gesamtfehler von $12,8 \times 1,16 = 14,85$ v. H. für die Gurtstäbe auftritt, der wohl noch zulässig ist. Wird die Formel $\eta = \frac{M_y}{N}$ verwandt,

so wird man sie stets durch das neu abgeleitete Verfahren ersetzen können, das, wie gezeigt, fast vollkommen genau dieselben Ergebnisse liefert, die Rechnung aber ganz bedeutend vereinfacht. Bei besonders hohen versteiften Bogenbrücken wird es sich empfehlen, eine genauere Proberechnung durchzuführen.

Bei der Berechnung versteifter Kettenbrücken läßt sich dasselbe Näherungsverfahren verwenden.

Die Werthe η erhalten nur entgegengesetztes Vorzeichen und zu dem Werthe $\Sigma \frac{S'^2 \cdot s}{E \cdot F}$ im Nenner kommen die Werthe

für die Kettenstücke s_0 und für die Rückhaltketten s' und s'' hinzu.

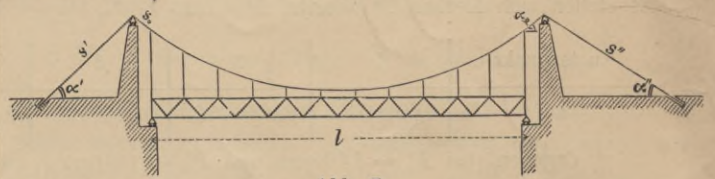


Abb. 7.

Es ist für die versteifte Kettenbrücke der in Abb. 7 dargestellten Form:

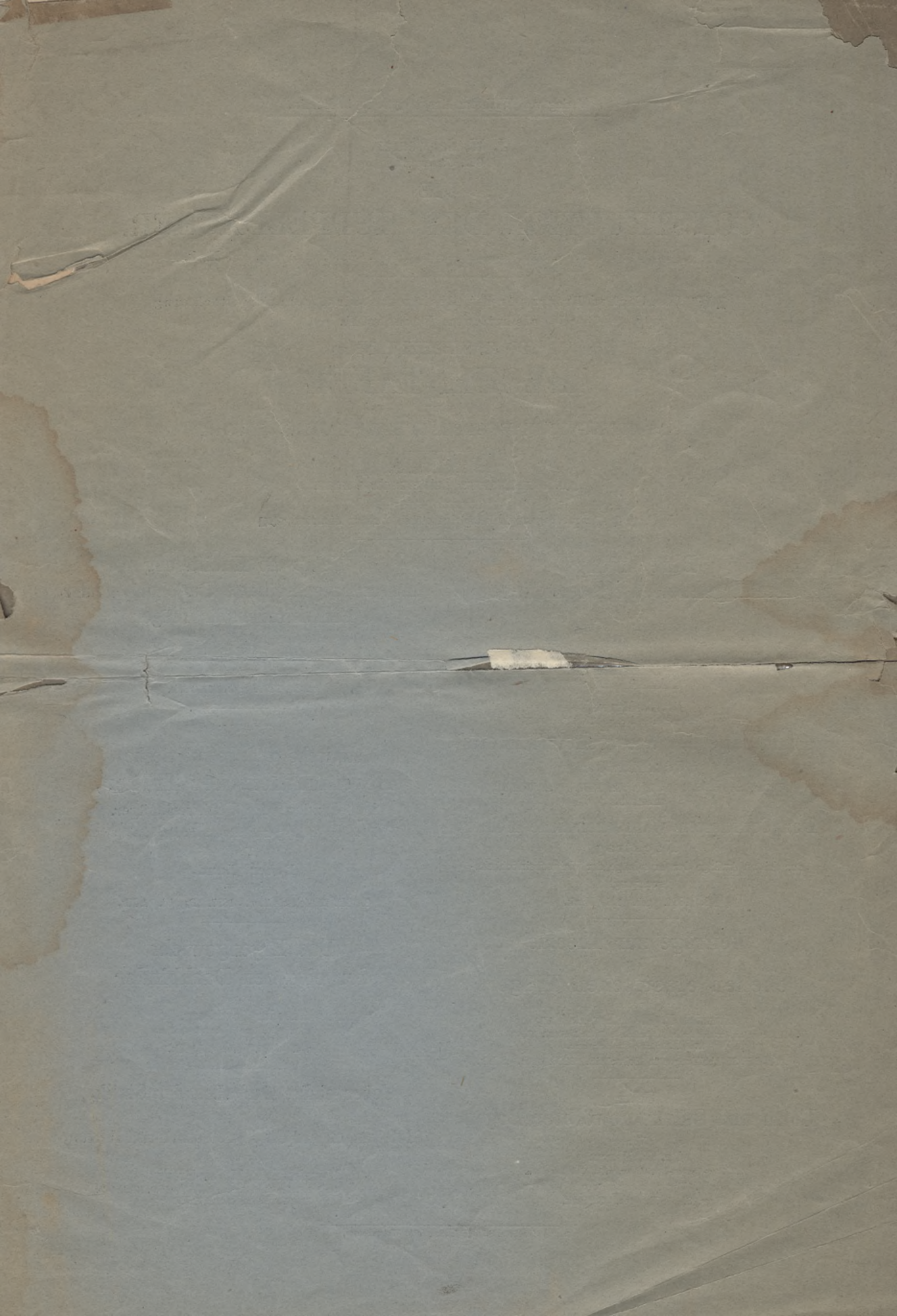
$$\eta = - \frac{f \cdot \lambda \cdot K_1}{m^3 \left\{ 1,6 f^2 + 1,5 h^2 \cdot c \cdot K_2 \right\} + \frac{3 \cdot m^2 \cdot h^2 \cdot F}{2 \cdot \lambda} \left\{ \frac{2 s_0 \cdot \sec^2 \alpha_0}{F_{s_0}} + \frac{s' \cdot \sec^2 \alpha'}{F_{s'}} + \frac{s'' \cdot \sec^2 \alpha''}{F_{s''}} \right\}}$$

und bei gleichem Durchmesser der Kette und der Rückhaltketten:

$$\eta = - \frac{f \cdot \lambda \cdot K_1}{m^3 \left\{ 1,6 f^2 + 1,5 h^2 \cdot c \left(K_2 + \frac{2 s_0 \cdot \sec^2 \alpha_0 + s' \cdot \sec^2 \alpha' + s'' \cdot \sec^2 \alpha''}{l} \right) \right\}}$$

Th. Rehbock.





Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn in Berlin.

J. W. Schwedler,
Geh. Oberbaurath,

DIE CONSTRUCTION DER KUPPELDÄCHER.

11 Tafeln mit Text. Zweite vermehrte Auflage. Fol. 1877. steif geh. 14 Mark.

Handlicher Ersatz für die Rechenmaschine, genauere Rechnung
als mit dem Rechenstab.

DR. H. ZIMMERMANN RECHENTAFEL

NEBST

SAMMLUNG HÄUFIG GEBRAUCHTER ZAHLENWERTHE.

238 SEITEN gr. 8°.

IN DAUERHAFTEM LEINENBAND 5 MARK.

Probepogen mit Beispielen stehen gern zu Diensten.

Berechnung freitragender Wellblechdächer

VON

Theodor Landsberg,

Professor an der technischen Hochschule in Darmstadt.

Mit 7 Abbildungen in Holzschnitt. 1891. geh. 1,60 Mk.

(Sonderdruck aus der Zeitschrift für Bauwesen 1891.)

Dr. G. Hagen,

Kgl. Ober-Landes-Baudirektor, wirkl. Geheimer Rath.

Grundzüge der Wahrscheinlichkeits- rechnung.

Dritte, umgearbeitete Auflage. 8. 1882. geh. 6 Mark.

Der Constanten wahrscheinliche Fehler.

Nachtrag

zur dritten Auflage der Grundzüge der Wahrscheinlichkeits-
rechnung.

8. 1884. geh. 1,60 Mark.

Beiträge zur Theorie der ebenen elastischen Träger

VON

Heinrich F. B. Müller-Breslau,

Professor an der technischen Hochschule in Berlin, ordentl. Mitglied der
Königl. Akademie des Bauwesens.

gr. 8. Mit 35 Abbildungen in Holzschnitt. 1890. geh. 2 Mk.

Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen.

VON

Dr. G. Hagen,

Kgl. Ober-Landes-Baudirektor, wirkl. Geheimer Rath.

Mit einer Kupfertafel. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage.
gr. 8. 1874. geh. 3 Mark.

Ueber die Ermittlung und die gegenseitigen Beziehungen der Einflusslinien für Träger

VON

Robert Land,

Ingenieur.

gr. 8. 1890. geh. 1,60 Mk.

Ueber die statische und geometrische Bestimmtheit der Träger, insbesondere der Fachwerkträger.

Zugleich ein Beitrag zur Kinematik der Stabwerke.

VON

Robert Land,

Ingenieur.

8. Mit 25 Holzschnitten. 1887. Pappbd. 1 Mk.

Das Eigengewicht der eisernen Dachbinder

VON

Theodor Landsberg,

Professor an der technischen Hochschule in Darmstadt.

gr. 4. 1885. geh. 1,50 Mk.

Ueber einige Aufgaben der Statik, welche auf Gleichungen der Clapeyron'schen Art führen,

VON

Heinrich F. B. Müller-Breslau,

Professor an der technischen Hochschule in Berlin, ordentl. Mitglied der
Königl. Akademie des Bauwesens.

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

IV 35188
L. inw.

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000