# Formeln und Lehrsätze

zum Gebrauche

# der elliptischen Functionen.

---

Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor

**K. Weierstrass**

bearbeitet und herausgegeben

von

**H. A. Schwarz.**

---

Dritte Lieferung, enthaltend Bogen 5 und 6.

---

Göttingen.
Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).
1881.

$2\omega_1$, $2\omega_3$ entsprechen, ist also entweder ein Rechteck, wenn $k^2$ einen reellen Werth hat, oder es hat, wenn dies nicht der Fall ist, die Eigenschaft, durch seine kürzere Diagonale in zwei spitzwinklige Dreiecke zerlegt zu werden.

Diese Eigenschaft ist für das auf die angegebene Weise bestimmte primitive Periodenpaar $(2\omega_1, 2\omega_3)$ charakteristisch, wenn noch die Bedingung hinzugefügt wird, dass $\wp\omega_1 = e_1$, $\wp\omega_3 = e_3$ sein und dass der reelle Bestandtheil des Quotienten $\frac{\omega_3}{\omega_1 i}$ einen positiven Werth haben soll. Denn ausser den beiden primitiven Periodenpaaren $(2\omega_1, 2\omega_3)$, $(-2\omega_1, -2\omega_3)$ gibt es kein anderes diesen Periodenpaaren aequivalentes Periodenpaar mit derselben Eigenschaft.

## Bestimmung der in den Verwandlungsformeln der $\sigma$-Functionen vorkommenden Wurzelgrössen für ein specielles Periodenpaar.

### 28.

Unter der Voraussetzung, dass die Perioden $2\omega$, $2\omega''$, $2\omega'$, auf welche sich die Formeln des Art. 21 und des Art. 22 beziehen, durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad 2\omega = 2\omega_1, \qquad 2\omega'' = 2\omega_2 = 2\omega_1 + 2\omega_3, \qquad 2\omega' = 2\omega_3$$

bestimmt werden, wobei $\omega_1$ und $\omega_3$ die im Art. 27 festgesetzten Werthe haben, ergibt sich, dass der in Art. 21 fixirte Werth der Quadratwurzel $\sqrt{e_1 - e_3}$ genau übereinstimmt mit demjenigen Werthe dieser Wurzelgrösse, welcher zur Bestimmung der Grössen $\omega_1$ und $\omega_3$ angewendet wurde und beliebig gewählt werden konnte.

Zur Bestimmung der Werthe der übrigen in den Gleichungen des Art. 21 und des Art. 22 vorkommenden Wurzelgrössen ergeben sich, unter Beibehaltung der im Art. 27 festgestellten Bezeichnungen, die folgenden Gleichungen

$$(2.)\qquad \begin{gathered} \frac{\sigma_3\omega}{\sigma\omega} = \sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \frac{\sigma_2\omega}{\sigma_3\omega} = k', \qquad \frac{\sigma_1\omega'}{\sigma_2\omega'} = \frac{1}{k}, \qquad \frac{\sigma_1\omega''}{\sigma_3\omega''} = -\frac{k'i}{k}, \\ \sqrt{e_2 - e_3} = k\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt{e_1 - e_2} = k'\sqrt{e_1 - e_3}, \\ \sqrt{e_3 - e_1} = -i\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt{e_3 - e_2} = -ik\sqrt{e_1 - e_3}, \qquad \sqrt{e_2 - e_1} = -ik'\sqrt{e_1 - e_3}. \end{gathered}$$

Wenn der Werth von $\sqrt[4]{e_1 - e_3} = \sqrt{\sqrt{e_1 - e_3}}$ beliebig fixirt wird und mit

$\sqrt{k}$, $\sqrt{k'}$ diejenigen Werthe dieser Wurzelgrössen bezeichnet werden, deren reelle Bestandtheile positiv sind, so gelten die Gleichungen:

$$(3.)\qquad \sqrt[4]{e_2-e_3} = \sqrt{k}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}, \qquad \sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{k'}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}.$$

## Bestimmung der Grössen $\frac{\sigma'\omega_1}{\sigma\omega_1}$ und $\frac{\sigma'\omega_3}{\sigma\omega_3}$ mittelst zweier eindeutig bestimmter Grössen $E$ und $E'$.

29.

Unter Zugrundelegung der im Art. 27 erklärten Bezeichnungen sollen die Grössen $E$ und $E'$ die Werthe der bestimmten Integrale

$$(1.)\qquad \begin{aligned} E &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}\,dt,\\ E' &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k'^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{1-k'^2t^2}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k'^2t^2}}\,dt \end{aligned}$$

bezeichnen, vorausgesetzt dass die Integrationen auf directem Wege ausgeführt und den Quadratwurzeln diejenigen Werthe beigelegt werden, deren reelle Bestandtheile positiv sind.

Unter dieser Voraussetzung sind die Grössen $\eta_1 = \frac{\sigma'\omega_1}{\sigma\omega_1}$, $\eta_3 = \frac{\sigma'\omega_3}{\sigma\omega_3}$ durch die Gleichungen

$$(2.)\qquad \eta_1 = \sqrt{e_1-e_3}\left\{E-\frac{e_1}{e_1-e_3}K\right\}, \qquad \eta_3 = -i\sqrt{e_1-e_3}\left\{E'+\frac{e_3}{e_1-e_3}K'\right\}$$

bestimmt, aus denen sich

$$(3.)\qquad E = \frac{1}{\sqrt{e_1-e_3}}(\eta_1+e_1\omega_1), \qquad E' = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_3}}(\eta_3+e_3\omega_3)$$

ergibt. Zwischen den Grössen $\omega_1$, $\omega_3$, $\eta_1$, $\eta_3$ besteht zufolge Art. 7 (5.) die Gleichung

$$(4.)\qquad \eta_1\omega_3-\omega_1\eta_3 = \frac{\pi i}{2},$$

welche der Legendre'schen Relation $EK'+E'K-KK' = \frac{\pi}{2}$ entspricht.

## Darstellung der Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ durch unendliche Producte.

### 30.

Die Function $\sigma_\lambda u$ ist ebenso wie die Function $\sigma u$ durch ein zweifach unendliches Product darstellbar.

Wenn nämlich

(1.) $$w_1 = (2\mu+1)\omega + 2\mu'\omega', \qquad w_2 = (2\mu+1)\omega + (2\mu'+1)\omega', \qquad w_3 = 2\mu\omega + (2\mu'+1)\omega'$$

gesetzt wird und bei der Productbildung jeder der beiden Zahlen $\mu$, $\mu'$ alle ganzzahligen positiven und negativen Werthe, Null eingeschlossen, beigelegt werden, so besteht für jeden der drei Werthe von $\lambda (\lambda = 1, 2, 3)$ die Gleichung

(2.) $$\sigma_\lambda u = \sigma_\lambda(u \mid \omega, \omega') = e^{-\frac{1}{2} e_\lambda u^2} \prod_{w_\lambda} \left(1 - \frac{u}{w_\lambda}\right) e^{\frac{u}{w_\lambda} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w_\lambda^2}}.$$

### 31.

Die Werthe, welche die Grössen $\frac{u}{2\omega} = v$, $e^{v\pi i} = z$, $2\eta\omega v^2$, $e^{2\eta\omega v^2}$ annehmen, wenn dem Argumente $u$ der Reihe nach die Werthe

$$u+\omega, \qquad u+\omega', \qquad u+\omega''$$

beigelegt werden, sind zusammengestellt in folgender Tabelle, in welcher $\tau = \frac{\omega'}{\omega}$ und $h = e^{\tau\pi i}$ die im Art. 6 erklärte Bedeutung haben.

(1.)

| $u$ | $u+\omega$ | $u+\omega'$ | $u+\omega''$ |
|---|---|---|---|
| $v$ | $v+\frac{1}{2}$ | $v+\frac{1}{2}\tau$ | $v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$ |
| $z$ | $iz$ | $h^{\frac{1}{2}}z$ | $ih^{\frac{1}{2}}z$ |
| $2\eta\omega v^2$ | $2\eta\omega v^2+\eta u+\frac{1}{2}\eta\omega$ | $2\eta\omega v^2+\eta' u+\frac{1}{2}\eta'\omega'+\frac{1}{4}\tau\pi i+v\pi i$ | $2\eta\omega v^2+\eta'' u+\frac{1}{2}\eta''\omega''+\frac{1}{4}\pi i+\frac{1}{4}\tau\pi i+v\pi i$ |
| $e^{2\eta\omega v^2}$ | $e^{2\eta\omega v^2} e^{\eta u} e^{\frac{1}{2}\eta\omega}$ | $e^{2\eta\omega v^2}\, e^{\eta' u}\, e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'}\, h^{\frac{1}{4}} z$ | $e^{2\eta\omega v^2}\, e^{\eta'' u}\, e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''} \sqrt{i}\, h^{\frac{1}{4}} z$ |

Die Grösse $h^{\frac{1}{4}}$ hat die Bedeutung $e^{\frac{1}{4}\tau\pi i}$ und $\sqrt{i}$ ist gleich $e^{\frac{1}{4}\pi i}$ zu setzen.

Mit Benutzung dieser Tabelle ergeben sich aus den im Art. 6 enthaltenen

Ausdrücken (7.) (8.) (9.) für die Function $\sigma u$ folgende Ausdrücke der Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ durch einfach unendliche Producte:

$$\text{(2.)}\qquad \sigma_1 u = e^{2\eta\omega v^2}\cos v\pi \prod_n \frac{\cos(n\tau - v)\pi}{\cos n\tau\pi} e^{-v\pi i} \prod_n \frac{\cos(n\tau+v)\pi}{\cos n\tau\pi} e^{v\pi i}$$

$$\text{(3.)}\qquad = e^{2\eta\omega v^2} \frac{z+z^{-1}}{2} \prod_n \frac{1+h^{2n}z^{-2}}{1+h^{2n}} \prod_n \frac{1+h^{2n}z^2}{1+h^{2n}}$$

$$\text{(4.)}\qquad = e^{2\eta\omega v^2}\cos v\pi \prod_n \frac{1+2h^{2n}\cos 2v\pi + h^{4n}}{(1+h^{2n})^2}.$$

---

$$\text{(5.)}\qquad \sigma_2 u = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{\cos((n-\frac{1}{2})\tau - v)\pi}{\cos(n-\frac{1}{2})\tau\pi} e^{-v\pi i} \prod_n \frac{\cos((n-\frac{1}{2})\tau + v)\pi}{\cos(n-\frac{1}{2})\tau\pi} e^{v\pi i}$$

$$\text{(6.)}\qquad = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1+h^{2n-1}z^{-2}}{1+h^{2n-1}} \prod_n \frac{1+h^{2n-1}z^2}{1+h^{2n-1}}$$

$$\text{(7.)}\qquad = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1+2h^{2n-1}\cos 2v\pi + h^{4n-2}}{(1+h^{2n-1})^2}.$$

---

$$\text{(8.)}\qquad \sigma_3 u = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{\sin((n-\frac{1}{2})\tau - v)\pi}{\sin(n-\frac{1}{2})\tau\pi} e^{-v\pi i} \prod_n \frac{\sin((n-\frac{1}{2})\tau + v)\pi}{\sin(n-\frac{1}{2})\tau\pi} e^{v\pi i}$$

$$\text{(9.)}\qquad = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1-h^{2n-1}z^{-2}}{1-h^{2n-1}} \prod_n \frac{1-h^{2n-1}z^2}{1-h^{2n-1}}$$

$$\text{(10.)}\qquad = e^{2\eta\omega v^2} \prod_n \frac{1-2h^{2n-1}\cos 2v\pi + h^{4n-2}}{(1-h^{2n-1})^2}.$$

Durch Entwickelung nach Potenzen der Grösse $v$ und Vergleichung der Coefficienten der mit $v^2$ multiplicirten Glieder ergeben sich die Gleichungen

$$\text{(11.)}\qquad 2\eta\omega = -2e_1\omega^2 + \pi^2\left\{\frac{1}{2} + \sum_n \frac{4h^{2n}}{(1+h^{2n})^2}\right\},$$

$$\text{(12.)}\qquad 2\eta\omega = -2e_2\omega^2 + \pi^2 \sum_n \frac{4h^{2n-1}}{(1+h^{2n-1})^2},$$

$$\text{(13.)}\qquad 2\eta\omega = -2e_3\omega^2 - \pi^2 \sum_n \frac{4h^{2n-1}}{(1-h^{2n-1})^2},$$

welche der Gleichung (10.) des Art. 6 entsprechen.

Der Zahl $n$ sind bei der Bildung der unendlichen Producte, beziehungsweise der unendlichen Summen, alle ganzzahligen positiven Werthe beizulegen.

## Bestimmung der in den Verwandlungsformeln der $\sigma$-Functionen vorkommenden Wurzelgrössen durch einfach unendliche Producte.

### 32.

Wenn die Grössen $h_0, h_1, h_2, h_3$ durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad \begin{aligned} h_0 &= (1-h^2)(1-h^4)(1-h^6)\cdots, & h_1 &= (1+h^2)(1+h^4)(1+h^6)\cdots, \\ h_2 &= (1+h)\,(1+h^3)(1+h^5)\cdots, & h_3 &= (1-h)\,(1-h^3)(1-h^5)\cdots \end{aligned}$$

definirt werden, in welchen die Grösse $h$ die im Art. 6 erklärte Bedeutung hat, so ist

$$(2.)\qquad h_0 = h_0\, h_1\, h_2\, h_3, \qquad h_1\, h_2\, h_3 = 1$$

und es ergibt sich

$$(3.)\qquad \sigma\omega = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta\omega}\cdot\frac{h_1^2}{h_0^2}, \quad \sigma\omega'' = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta''\omega''}\sqrt{i}\,\frac{h_2^2}{2h^{\frac{1}{4}}h_0^2}, \quad \sigma\omega' = \frac{2\omega}{\pi} e^{\frac{1}{2}\eta'\omega'} i\,\frac{h_3^2}{2h^{\frac{1}{4}}h_0^2}.$$

Die im Art. 21 in eindeutiger Weise bestimmten Wurzelgrössen

$$\sqrt{e_2-e_3}, \qquad \sqrt{e_1-e_3}, \qquad \sqrt{e_1-e_2}$$

haben demnach die Werthe

$$(4.)\qquad \sqrt{e_2-e_3} = \frac{\pi}{2\omega}\cdot 4h^{\frac{1}{2}}h_0^2 h_1^4, \qquad \sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega}h_0^2 h_2^4, \qquad \sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega}h_0^2 h_3^4,$$

mithin gelten für die in den Verwandlungsformeln des Art. 22 vorkommenden Wurzelgrössen $\sqrt[4]{e_2-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_3}$, $\sqrt[4]{e_1-e_2}$ die Gleichungen

$$(5.)\qquad \begin{gathered} \sqrt[4]{e_2-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,2h^{\frac{1}{4}}h_0 h_1^2, \qquad \sqrt[4]{e_1-e_3} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,h_0 h_2^2, \qquad \sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,h_0 h_3^2, \\ \sqrt[4]{e_2-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_3}\,\sqrt[4]{e_1-e_2} = \sqrt[8]{G} = \frac{\pi}{2\omega}\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}\,2h^{\frac{1}{4}}h_0^3, \end{gathered}$$

in welchen der Werth von $\sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}$ beliebig fixirt werden kann.

Es ergibt sich also

$$(6.)\qquad k^2 = \frac{e_2-e_3}{e_1-e_3} = 16h\left\{\frac{(1+h^2)(1+h^4)(1+h^6)\cdots}{(1+h)\,(1+h^3)(1+h^5)\cdots}\right\}^8, \qquad k'^2 = \frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \left\{\frac{(1-h)(1-h^3)(1-h^5)\cdots}{(1+h)(1+h^3)(1+h^5)\cdots}\right\}^8.$$

## Uebergang von dem primitiven Periodenpaare $(2\omega, 2\omega')$ zu einem äquivalenten Periodenpaare $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$.

33.

Wenn an die Stelle des primitiven Periodenpaares $(2\omega, 2\omega')$, auf welches die in den vorhergehenden Artikeln enthaltenen Formeln sich beziehen, ein demselben äquivalentes Periodenpaar $(2\tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}')$ tritt, wo

$$(1.)\qquad \tilde{\omega} = p\omega + q\omega', \qquad \tilde{\omega}' = p'\omega + q'\omega', \qquad pq' - qp' = 1,$$

so ist in jenen Formeln an die Stelle von

$$\begin{matrix} \omega,\ \omega',\ \omega'' = \omega + \omega' \\ \eta,\ \eta',\ \eta'' = \eta + \eta' \end{matrix} \quad \text{beziehlich} \quad \begin{matrix} \tilde{\omega},\ \tilde{\omega}',\ \tilde{\omega}'' = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}' \\ \tilde{\eta},\ \tilde{\eta}',\ \tilde{\eta}'' = \tilde{\eta} + \tilde{\eta}' \end{matrix}$$

zu setzen, wobei $\tilde{\eta} = p\eta + q\eta'$, $\tilde{\eta}' = p'\eta + q'\eta'$.

Bei dieser Vertauschung bleiben die Invarianten $g_2$, $g_3$ und die Functionen $\sigma u$ und $\wp u$ in Folge der Gleichungen

$$(2.)\qquad \sigma(u\,|\,\omega, \omega') = \sigma(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \qquad \wp(u\,|\,\omega, \omega') = \wp(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$$

ungeändert. Der Gleichung (17.) des Art. 9 zufolge bleibt mithin bei dieser Vertauschung die Gesammtheit der drei Grössen $e_1$, $e_2$, $e_3$, also wegen der Gleichungen (2.) des Art. 18 auch die Gesammtheit der drei Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ ungeändert; dagegen können die I n d i c e s der drei Grössen $e_1$, $e_2$, $e_3$ und dem entsprechend die I n d i c e s der drei Functionen $\sigma_1 u$, $\sigma_2 u$, $\sigma_3 u$ ihre Werthe ändern.

Aus den in den Artikeln 6, 8, 9, 18, 21, 22, 23, 26, 31, 32 enthaltenen Formeln ergibt sich eine Anzahl neuer gleichfalls gültiger Formeln, wenn in denselben gleichzeitig die Grössen

$$(3.)\qquad \begin{matrix} \omega,\ \omega'',\ \omega' \\ \eta,\ \eta'',\ \eta' \\ e_1,\ e_2,\ e_3 \\ \sigma_1 u,\ \sigma_2 u,\ \sigma_3 u \\ v = \dfrac{u}{2\omega},\ \tau = \dfrac{\omega'}{\omega} \end{matrix} \quad \text{beziehlich durch die Grössen} \quad \begin{matrix} \tilde{\omega},\ \tilde{\omega}'',\ \tilde{\omega}' \\ \tilde{\eta},\ \tilde{\eta}'',\ \tilde{\eta}' \\ e_\lambda,\ e_\mu,\ e_\nu \\ \sigma_\lambda u,\ \sigma_\mu u,\ \sigma_\nu u \\ v = \dfrac{u}{2\tilde{\omega}},\ \tau = \dfrac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}} \end{matrix}$$

ersetzt werden, wobei die Grössen $z$ und $h$ ihre Bedeutung entsprechend ändern. Hierbei sind die Indices $\lambda$, $\mu$, $\nu$, welche den Gleichungen

$$(4.)\quad \begin{array}{lll} \wp\omega = e_1, & \wp\omega'' = e_2, & \wp\omega' = e_3 \\ \wp\tilde{\omega} = e_\lambda, & \wp\tilde{\omega}'' = e_\mu, & \wp\tilde{\omega}' = e_\nu \end{array}$$

gemäss zu bestimmen sind, von den Resten der Zahlen $p$, $q$, $p'$, $q'$ in Bezug auf den Modul 2 abhängig.

Die nachfolgende Tabelle enthält die Werthe dieser Indices für jeden der sechs von einander verschiedenen Fälle, welche eintreten können.

(5.)

| | Reste modulo 2 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | $q$ | $p'$ | $q'$ | $\lambda$ | $\mu$ | $\nu$ |
| I | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 |
| II | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 2 |
| III | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 1 | 3 |
| IV | 1 | 1 | 1 | 0 | 2 | 3 | 1 |
| V | 0 | 1 | 1 | 0 | 3 | 2 | 1 |
| VI | 0 | 1 | 1 | 1 | 3 | 1 | 2 |

Hiernach bestehen, wenn für $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die durch die vorstehende Tabelle gegebenen Werthe gesetzt werden, die Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{aligned} \sigma_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\lambda u = \sigma_\lambda(u\,|\,\omega, \omega'), \\ \sigma_2(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\mu u = \sigma_\mu(u\,|\,\omega, \omega'), \\ \sigma_3(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') &= \sigma_\nu u = \sigma_\nu(u\,|\,\omega, \omega'). \end{aligned}$$

Unter derselben Voraussetzung ergeben sich durch die Vertauschungen (3.) aus den Gleichungen (5.) des vorhergehenden Art. die folgenden Gleichungen, in welchen $h = e^{\tau\pi i}$, $\tau = \dfrac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}$ zu setzen ist, während $h_0$, $h_1$, $h_2$, $h_3$ die im vorhergehenden Art. erklärten Functionen der Grösse $h$ bedeuten:

$$(7.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu} = 2h^{\frac{1}{4}}h_0h_1^2 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n})^2,$$

$$(8.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} = h_0h_2^2 = \prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1})^2,$$

$$(9.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu} = h_0h_3^2 = \prod_n(1-h^{2n})(1-h^{2n-1})^2,$$

$$(10.)\quad \frac{2\tilde{\omega}}{\pi}\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G} = 2h^{\frac{1}{4}}h_0^3 = 2h^{\frac{1}{4}}\prod_n(1-h^{2n})^3.$$

Der Wurzelgrösse $\sqrt[8]{G}$ ist der Werth $\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}$ beizulegen. Der Werth von $\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}$ kann beliebig fixirt werden.

Unter der Voraussetzung, dass die Wurzelgrössen durch die Gleichungen (7—10.) bestimmt werden, bestehen die Gleichungen

$$(11.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\cdot\frac{h^{\frac{1}{4}}(z-z^{-1})}{i}\prod_n(1-h^{2n})(1-h^{2n}z^{-2})(1-h^{2n}z^2),$$

$$(12.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,h^{\frac{1}{4}}(z+z^{-1})\prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n}z^{-2})(1+h^{2n}z^2),$$

$$(13.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^{-2})(1+h^{2n-1}z^2),$$

$$(14.)\qquad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\prod_n(1-h^{2n})(1-h^{2n-1}z^{-2})(1-h^{2n-1}z^2),$$

$$v = \frac{u}{2\tilde{\omega}},\quad z = e^{v\pi i},\qquad \tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}},\quad h = e^{\tau\pi i}.$$

Der Zahl $n$ sind bei der Bildung der unendlichen Producte alle ganzzahligen positiven Werthe beizulegen.

Die Grösse $2\tilde{\eta}\tilde{\omega}$ kann mittelst der Gleichung (10.) des Art. 6 oder der Gleichungen (11—13.) des Art. 31 bestimmt werden, nachdem in diesen Gleichungen die angegebenen Vertauschungen (3.) vorgenommen sind.

## Einführung der Thetafunctionen. Ausdruck der vier $\sigma$-Functionen durch die Functionen $\vartheta(v|\tau)$ und $\Theta(u|\tilde{\omega}, \tilde{\omega}')$.

34.

Der Werth des unendlichen Productes

$$(1.)\qquad F(z) = \prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^{-2})(1+h^{2n-1}z^2)\qquad (n = 1, 2, 3, \ldots\infty)$$

kann durch eine nach Potenzen der Grösse $z^2$ fortschreitende unendliche Reihe dargestellt werden, welche für alle endlichen Werthe der Grösse $z$, den Werth $z = 0$ ausgenommen, unbedingt convergirt. Für alle Werthe der Grösse $h$, deren absoluter Betrag kleiner ist als 1, besteht nämlich die identische Gleichung

$$(2.)\qquad \prod_n(1-h^{2n})(1+h^{2n-1}z^{-2})(1+h^{2n-1}z^2) = 1+h(z^2+z^{-2})+h^4(z^4+z^{-4})+h^9(z^6+z^{-6})+\cdots$$

In Folge dieser Umgestaltung des unendlichen Productes in eine unendliche Reihe ergeben sich aus den Gleichungen (11—14.) des vorhergehenden Art. folgende Darstellungen der vier $\sigma$-Functionen:

$$(3.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\frac{1}{i}h^{\frac{1}{4}}zF(h^{\frac{1}{2}}zi) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\frac{1}{i}\sum\nolimits_n(-1)^n h^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}z^{2n+1},$$

$$(4.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,h^{\frac{1}{4}}zF(h^{\frac{1}{2}}z) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\sum\nolimits_n h^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}z^{2n+1},$$

$$(5.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,F(z) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\sum\nolimits_n h^{n^2}z^{2n},$$

$$(6.)\quad \sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,F(zi) = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\sum\nolimits_n(-1)^n h^{n^2}z^{2n}.$$

Bei der Bildung der vorstehenden unendlichen Summen sind der Zahl $n$ alle ganzzahligen positiven und negativen Werthe, einschliesslich der Null, beizulegen, während $z = e^{v\pi i}$ zu setzen ist.

Durch die Gleichungen

$$(7.)\quad \frac{1}{i}\sum\nolimits_n(-1)^n h^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}z^{2n+1} = 2h^{\frac{1}{4}}\sin v\pi - 2h^{\frac{9}{4}}\sin 3v\pi + 2h^{\frac{25}{4}}\sin 5v\pi - \cdots = \vartheta_1(v),$$

$$(8.)\quad \sum\nolimits_n h^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}z^{2n+1} = 2h^{\frac{1}{4}}\cos v\pi + 2h^{\frac{9}{4}}\cos 3v\pi + 2h^{\frac{25}{4}}\cos 5v\pi + \cdots = \vartheta_2(v),$$

$$(9.)\quad \sum\nolimits_n h^{n^2}z^{2n} = 1 + 2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi + 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_3(v),$$

$$(10.)\quad \sum\nolimits_n(-1)^n h^{n^2}z^{2n} = 1 - 2h\cos 2v\pi + 2h^4\cos 4v\pi - 2h^9\cos 6v\pi + \cdots = \vartheta_0(v)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty)$$

werden die Functionen $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$, $\vartheta_0(v)$ definirt, welche, wenn $v\pi = x$ gesetzt wird, bei Anwendung der Bezeichnungsweise, deren sich Jacobi in seinen Vorlesungen (Gesammelte Werke, Bd. I S. 501) bedient hat, mit den Jacobi'schen Functionen $\vartheta_1(x, q)$, $\vartheta_2(x, q)$, $\vartheta_3(x, q)$, $\vartheta(x, q)$ beziehlich übereinstimmen. Die von Jacobi mit $q$ bezeichnete Grösse hat dieselbe Bedeutung, wie die im Vorhergehenden mit $h$ bezeichnete Grösse.

Herr Hermite bezeichnet (Journal de M. Liouville, 2me série, tome III. p. 26) für $\mu = 0, 1$, $\nu = 0, 1$ den Werth der unendlichen Reihe

$$\sum\nolimits_m(-1)^{m\nu}e^{i\pi[(2m+\mu)x+\frac{1}{4}\omega(2m+\mu)^2]} \quad\text{mit}\quad \theta_{\mu,\nu}(x).$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty)$$

Zwischen der durch die Gleichungen (7—10.) festgesetzten Bezeichnungsweise der vier Thetafunctionen $\vartheta_\varrho(v)$ ($\varrho = 1, 2, 3, 0$) und der von Herrn

Hermite angewendeten Bezeichnungsweise besteht daher, wenn $\omega = \tau$ gesetzt wird, die durch folgende Gleichungen ausgedrückte Beziehung

$$\theta_{0,0}(x) = \vartheta_3(x), \qquad \theta_{0,1}(x) = \vartheta_0(x), \qquad \theta_{1,0}(x) = \vartheta_2(x), \qquad \theta_{1,1}(x) = i\vartheta_1(x).$$

Die Functionen $\vartheta_\varrho(v)$ sollen im Folgenden, wenn es nöthig ist, eine Angabe hinsichtlich des Periodenpaares $(2\tilde{\omega},\, 2\tilde{\omega}')$, auf welches diese Functionen sich beziehen, in die Bezeichnung derselben aufzunehmen, mit

$$\vartheta_\varrho\left(v\,\Big|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right) = \vartheta_\varrho(v\,|\,\tau) \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 0) \tag{11.}$$

bezeichnet werden.

Aus der angegebenen Definition ergibt sich

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau) + \vartheta_0(v\,|\,\tau) = 2\vartheta_3(2v\,|\,4\tau), \qquad \vartheta_3(v\,|\,\tau) - \vartheta_0(v\,|\,\tau) = 2\vartheta_2(2v\,|\,4\tau). \tag{12.}$$

Die vier Functionen $\vartheta_\varrho(v\,|\,\tau)$ genügen nebst allen ihren Ableitungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = \frac{1}{4\pi i}\,\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}. \tag{13.}$$

Werden durch die Gleichungen

$$\Theta_\varrho(u) = \Theta_\varrho(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}') \doteq e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,\vartheta_\varrho\left(v\,\Big|\,\frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}\right), \qquad u = 2\tilde{\omega}v \tag{14.}$$

für $\varrho = 1, 2, 3, 0$ vier in Bezug auf die drei Argumente $u$, $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$ homogene Functionen definirt, so bestehen dem Vorhergehenden zufolge die Gleichungen

$$v = \frac{u}{2\tilde{\omega}}, \qquad \tau = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}}, \qquad h = e^{\tau\pi i},$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[8]{G}\,\sigma u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,\vartheta_1(v\,|\,\tau) = \Theta_1(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \tag{15.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\mu - e_\nu}\,\sigma_\lambda u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,\vartheta_2(v\,|\,\tau) = \Theta_2(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \tag{16.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,\vartheta_3(v\,|\,\tau) = \Theta_3(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'), \tag{17.}$$

$$\sqrt{\frac{2\tilde{\omega}}{\pi}}\,\sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u = e^{2\tilde{\eta}\tilde{\omega}v^2}\,\vartheta_0(v\,|\,\tau) = \Theta_0(u\,|\,\tilde{\omega}, \tilde{\omega}'). \tag{18.}$$

35.

Durch Entwickelung nach Potenzen der Grösse $v$ und Vergleichung der Anfangsglieder erhält man aus den Gleichungen (15—18.) des vorhergehenden Art. folgende Ausdrücke für die im Art. 33 (7—10.) bestimmten Wurzelgrössen:

$$(1.)\quad \sqrt{\frac{2\varpi}{\pi}}\sqrt[8]{G} = \frac{1}{2\varpi}\vartheta_1'(0) = \frac{\pi}{\varpi}h^{\frac{1}{4}}(1-3h^{1.2}+5h^{2.3}-7h^{3.4}+\cdots),$$

$$(2.)\quad \sqrt{\frac{2\varpi}{\pi}}\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu} = \vartheta_2(0) = 2h^{\frac{1}{4}}(1+h^{1.2}+h^{2.3}+h^{3.4}+\cdots),$$

$$(3.)\quad \sqrt{\frac{2\varpi}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu} = \vartheta_3(0) = 1+2h+2h^4+2h^9+\cdots,$$

$$(4.)\quad \sqrt{\frac{2\varpi}{\pi}}\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu} = \vartheta_0(0) = 1-2h+2h^4-2h^9-\cdots$$

Es ergibt sich hieraus das System von Gleichungen

$$(5.)\quad \vartheta_1'(0) = \pi\vartheta_0(0)\vartheta_2(0)\vartheta_3(0), \qquad \vartheta_0^4(0)+\vartheta_2^4(0) = \vartheta_3^4(0),$$

$$(6.)\quad e_\lambda = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\varpi}\right)^2(\vartheta_3^4(0)+\vartheta_0^4(0)),\quad e_\mu = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\varpi}\right)^2(\vartheta_2^4(0)-\vartheta_0^4(0)),\quad e_\nu = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\varpi}\right)^2(\vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0)),$$

$$(7.)\quad \sqrt{\frac{2\varpi}{\pi}} = \frac{2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\cdots}{\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}-\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}(2h+2h^9+2h^{25}+\cdots),$$

$$(8.)\quad \sqrt{\frac{2\varpi}{\pi}} = \frac{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}} = \frac{2}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}+\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}(1+2h^4+2h^{16}+\cdots),$$

$$(9.)\quad \sqrt{k} = \frac{\sqrt[4]{e_\mu-e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \frac{2h^{\frac{1}{4}}+2h^{\frac{9}{4}}+2h^{\frac{25}{4}}+\cdots}{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots},$$

$$(10.)\quad \sqrt{k'} = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}} = \frac{\vartheta_0(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)} = \frac{1-2h+2h^4-2h^9+\cdots}{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots}.$$

Zwischen der Grösse

$$(11.)\quad l = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}-\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda-e_\nu}+\sqrt[4]{e_\lambda-e_\mu}} = \frac{2h+2h^9+\cdots}{1+2h^4+2h^{16}+\cdots} = \frac{\vartheta_2(0\,|\,4\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,4\tau)}$$

und der Grösse $4\tau$ besteht hiernach dieselbe Gleichung, wie zwischen $\sqrt{k}$ und $\tau$.

Die Gleichung (11.) ist ein specieller Fall der Gleichung

$$(12.)\quad \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\,\sigma_\mu u + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\,\sigma_\nu u} = \frac{\vartheta_2(2v\,|\,4\tau)}{\vartheta_3(2v\,|\,4\tau)} = \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}\,\frac{\sigma_1(2u\,|\,\tilde\omega, 4\tilde\omega')}{\sigma_2(2u\,|\,\tilde\omega, 4\tilde\omega')},$$

welche sich aus den Gleichungen (12.) des vorhergehenden Art. ergibt.

Durch Entwickelung nach Potenzen der Grösse $v$ und Vergleichung der Coefficienten der mit $v^3$, beziehungsweise mit $v^2$, multiplicirten Glieder erhält man aus den Gleichungen (15—18.) des vorhergehenden Art. folgende den Gleichungen (10.) des Art. 6 und (11—13.) des Art. 31 analoge Gleichungen:

$$(13.)\quad 2\tilde\eta\tilde\omega = -\frac{1}{6}\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^{1.2}+5^3h^{2.3}-\cdots}{1-3h^{1.2}+5h^{2.3}-\cdots},$$

$$(14.)\quad 2\tilde\eta\tilde\omega = -2e_\lambda\tilde\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} = -2e_\lambda\tilde\omega^2 + \frac{\pi^2}{2}\,\frac{1+3^2h^{1.2}+5^2h^{2.3}+\cdots}{1+h^{1.2}+h^{2.3}+\cdots},$$

$$(15.)\quad 2\tilde\eta\tilde\omega = -2e_\mu\tilde\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} = -2e_\mu\tilde\omega^2 + 4\pi^2\,\frac{h+4h^4+9h^9+\cdots}{1+2h+2h^4+2h^9+\cdots},$$

$$(16.)\quad 2\tilde\eta\tilde\omega = -2e_\nu\tilde\omega^2 - \frac{1}{2}\frac{\vartheta_0''(0)}{\vartheta_0(0)} = -2e_\nu\tilde\omega^2 - 4\pi^2\,\frac{h-4h^4+9h^9-\cdots}{1-2h+2h^4-2h^9+\cdots}.$$

## Verwandlungsformeln für die $\vartheta$-Functionen.

### 36.

Für die Vermehrung des Argumentes $v$ der Functionen $\vartheta_0(v)$, $\vartheta_1(v)$, $\vartheta_2(v)$, $\vartheta_3(v)$ um eine der Grössen $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\tau$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau$, $1$, $\tau$, $1+\tau$, beziehungsweise um die Grösse $p+q\tau$, wo $p$ und $q$ ganze positive oder negative Zahlen bedeuten, gelten folgende Formeln:

| | |
|---|---|
| $\vartheta_0(v+\frac{1}{2}) = \vartheta_3(v)$ | $\vartheta_0(v+1) = \vartheta_0(v)$ |
| $\vartheta_1(v+\frac{1}{2}) = \vartheta_2(v)$ | $\vartheta_1(v+1) = -\vartheta_1(v)$ |
| $\vartheta_2(v+\frac{1}{2}) = -\vartheta_1(v)$ | $\vartheta_2(v+1) = -\vartheta_2(v)$ |
| $\vartheta_3(v+\frac{1}{2}) = \vartheta_0(v)$ | $\vartheta_3(v+1) = \vartheta_3(v)$ |

$$\begin{array}{ll|ll}
\vartheta_0(v+\tfrac{1}{2}\tau) = & ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_1(v) & \vartheta_0(v+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_0(v) \\
\vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}\tau) = & ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_0(v) & \vartheta_1(v+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v) \\
\vartheta_2(v+\tfrac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_3(v) & \vartheta_2(v+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_2(v) \\
\vartheta_3(v+\tfrac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_2(v) & \vartheta_3(v+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_3(v) \\
\hline
\vartheta_0(v+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_2(v) & \vartheta_0(v+1+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_0(v) \\
\vartheta_1(v+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau) = & h^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_3(v) & \vartheta_1(v+1+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_1(v) \\
\vartheta_2(v+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau) = & -ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_0(v) & \vartheta_2(v+1+\tau) = & -h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_2(v) \\
\vartheta_3(v+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau) = & ih^{-\frac{1}{4}}e^{-v\pi i}\vartheta_1(v) & \vartheta_3(v+1+\tau) = & h^{-1}e^{-2v\pi i}\vartheta_3(v)
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(v+p+q\tau) &= (-1)^q h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\vartheta_0(v) \\
\vartheta_1(v+p+q\tau) &= (-1)^{p+q} h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\vartheta_1(v) \\
\vartheta_2(v+p+q\tau) &= (-1)^p h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\vartheta_2(v) \\
\vartheta_3(v+p+q\tau) &= h^{-q^2} e^{-2qv\pi i}\vartheta_3(v).
\end{aligned}$$

## Grundformeln der linearen Transformation der Thetafunctionen.

### 37.

Aus den Gleichungen (2.) und (6.) des Art. 33 ergeben sich in Folge der Gleichungen (15—18.) des Art. 34 folgende die lineare Transformation der $\Theta$-Functionen betreffende Formeln:

(1.)
$$\begin{aligned}
\Theta_1(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_1\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_1(u|\omega,\omega'), &\quad \Theta_2(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_2\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_\alpha(u|\omega,\omega'), \\
\Theta_3(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_3\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_\beta(u|\omega,\omega'), &\quad \Theta_0(u|\tilde{\omega},\tilde{\omega}') &= \varepsilon_0\sqrt{\frac{\tilde{\omega}}{\omega}}\,\Theta_\gamma(u|\omega,\omega').
\end{aligned}$$

In diesen Formeln bedeuten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die drei Zahlen 2, 3, 0 mit der Bestimmung, dass $\alpha \equiv \lambda+1$, $\beta \equiv \mu+1$, $\gamma \equiv \nu+1$ (mod. 4). Die Grössen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_0$ bedeuten achte Wurzeln der Einheit.

Die einfachsten linearen Transformationen, aus denen alle anderen linearen Transformationen $\binom{p,\,q}{p',\,q'}$ zusammengesetzt werden können, sind die Transformationen $\binom{1,\,0}{1,\,1}$ und $\binom{0,\,1}{-1,\,0}$. Für diese letzteren gelten folgende Grundformeln:

$$(2.)\quad \begin{array}{ll|ll}
\Theta_1(u\,|\,\omega,\omega') = & i^{-\frac{1}{2}}\Theta_1(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_1(u\,|\,\omega,\omega') = & i\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_1(u\,|\,\omega',-\omega)\\
\Theta_2(u\,|\,\omega,\omega') = & i^{-\frac{1}{2}}\Theta_2(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_2(u\,|\,\omega,\omega') = & \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_0(u\,|\,\omega',-\omega)\\
\Theta_3(u\,|\,\omega,\omega') = & \Theta_0(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_3(u\,|\,\omega,\omega') = & \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_3(u\,|\,\omega',-\omega)\\
\Theta_0(u\,|\,\omega,\omega') = & \Theta_3(u\,|\,\omega,\omega'+\omega) & \Theta_0(u\,|\,\omega,\omega') = & \sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}}\,\Theta_2(u\,|\,\omega',-\omega)
\end{array}$$

---

$$(3.)\quad \begin{array}{ll|ll}
\vartheta_1(v\,|\,\tau) = & i^{-\frac{1}{2}}\vartheta_1(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_1(v\,|\,\tau) = & i\sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)\\
\vartheta_2(v\,|\,\tau) = & i^{-\frac{1}{2}}\vartheta_2(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_2(v\,|\,\tau) = & \sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_0\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)\\
\vartheta_3(v\,|\,\tau) = & \vartheta_0(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_3(v\,|\,\tau) = & \sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)\\
\vartheta_0(v\,|\,\tau) = & \vartheta_3(v\,|\,\tau+1) & \vartheta_0(v\,|\,\tau) = & \sqrt{\frac{i}{\tau}}\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}v^2}\,\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right).
\end{array}$$

Der Quadratwurzel $\sqrt{\frac{\omega i}{\omega'}} = \sqrt{\frac{i}{\tau}}$ ist derjenige ihrer beiden Werthe beizulegen, dessen reeller Bestandtheil positiv ist. Der Grösse $i^{-\frac{1}{2}}$ ist der Werth $e^{-\frac{1}{4}\pi i}$ beizulegen.

Aus den vorstehenden Formeln erhält man folgende analytische Darstellungen der vier Functionen $\vartheta(v\,|\,\tau)$:

$$(4.)\quad \begin{array}{l|l}
\vartheta_1(v\,|\,\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_n(-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v-\frac{1}{2}+n)^2} & \vartheta_3(v\,|\,\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2}\\
\vartheta_2(v\,|\,\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_n(-1)^n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v+n)^2} & \vartheta_0(v\,|\,\tau) = \sqrt{\frac{i}{\tau}}\sum_n e^{-\frac{\pi i}{\tau}(v-\frac{1}{2}+n)^2}
\end{array}$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty).$$

## Additionstheoreme der $\sigma$- und $\Theta$-Functionen.

38.

Wenn mit $u$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ vier beliebige Grössen bezeichnet werden, so ergibt sich aus der identischen Gleichung

$$(\wp u-\wp u_1)(\wp u_2-\wp u_3)+(\wp u-\wp u_2)(\wp u_3-\wp u_1)+(\wp u-\wp u_3)(\wp u_1-\wp u_2) = 0$$

durch wiederholte Anwendung der Formel (1.) des Art. 11 die Gleichung

$$(1.)\quad \begin{aligned} &\sigma(u+u_1)\sigma(u-u_1)\sigma(u_2+u_3)\sigma(u_2-u_3)\\ &+\sigma(u+u_2)\sigma(u-u_2)\sigma(u_3+u_1)\sigma(u_3-u_1)\\ &+\sigma(u+u_3)\sigma(u-u_3)\sigma(u_1+u_2)\sigma(u_1-u_2) = 0, \end{aligned}$$

welche für alle Werthe der Grössen $u$, $u_1$, $u_2$, $u_3$ Geltung hat.

Durch die Gleichungen

$$(2.)\quad \begin{array}{llll} u+u_1 = a, & u-u_1 = b, & u_2+u_3 = c, & u_2-u_3 = d,\\ u+u_2 = a', & u-u_2 = b', & u_3+u_1 = c', & u_3-u_1 = d',\\ u+u_3 = a'', & u-u_3 = b'', & u_1+u_2 = c'', & u_1-u_2 = d'' \end{array}$$

werden drei Systeme von je vier Grössen $a, b, c, d$; $a', b', c', d'$; $a'', b'', c'', d''$ eingeführt, zwischen welchen folgende Beziehungen bestehen:

$$(3.)\quad \begin{array}{l|l|l} a' = \tfrac{1}{2}(a+b+c+d) & a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'+c'+d') & a = \tfrac{1}{2}(a''+b''+c''+d'')\\ b' = \tfrac{1}{2}(a+b-c-d) & b'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'-c'-d') & b = \tfrac{1}{2}(a''+b''-c''-d'')\\ c' = \tfrac{1}{2}(a-b+c-d) & c'' = \tfrac{1}{2}(a'-b'+c'-d') & c = \tfrac{1}{2}(a''-b''+c''-d'')\\ d' = \tfrac{1}{2}(-a+b+c-d) & d'' = \tfrac{1}{2}(-a'+b'+c'-d') & d = \tfrac{1}{2}(-a''+b''+c''-d'')\\ \hline a'' = \tfrac{1}{2}(a+b+c-d) & a = \tfrac{1}{2}(a'+b'+c'-d') & a' = \tfrac{1}{2}(a''+b''+c''-d'')\\ b'' = \tfrac{1}{2}(a+b-c+d) & b = \tfrac{1}{2}(a'+b'-c'+d') & b' = \tfrac{1}{2}(a''+b''-c''+d'')\\ c'' = \tfrac{1}{2}(a-b+c+d) & c = \tfrac{1}{2}(a'-b'+c'+d') & c' = \tfrac{1}{2}(a''-b''+c''+d'')\\ d'' = \tfrac{1}{2}(a-b-c-d) & d = \tfrac{1}{2}(a'-b'-c'-d') & d' = \tfrac{1}{2}(a''-b''-c''-d'') \end{array}$$

$$(3.^*)\quad a^2+b^2+c^2+d^2 = a'^2+b'^2+c'^2+d'^2 = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2.$$

Aus den Gleichungen (3.) ergibt sich, dass jedes einzelne der drei Systeme von je vier Grössen $a, b, c, d$; $a', b', c', d'$; $a'', b'', c'', d''$ als ein System von vier unabhängig veränderlichen Grössen betrachtet werden kann.

In der Gleichung (1.) mögen nun an die Stelle der Grössen $u+u_1$, $u-u_1$, $u_2+u_3$, $u_2-u_3$ der Reihe nach folgende Grössen gesetzt werden:

$$[1]\ a, b, c, d;\ [2]\ a+\tilde{\omega}, b+\tilde{\omega}, c, d;\ [3]\ a+\tilde{\omega}, b+\tilde{\omega}'', c-\tilde{\omega}', d;\ [4]\ a+\tilde{\omega}'', b+\tilde{\omega}'', c+\tilde{\omega}', d-\tilde{\omega}';$$
$$[5]\ a+\tilde{\omega}+2\tilde{\omega}', b+\tilde{\omega}, c+\tilde{\omega}, d-\tilde{\omega};\ [6]\ a+\tilde{\omega}, b+\tilde{\omega}, c+\tilde{\omega}, d-\tilde{\omega},$$

wobei $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}''$, $\tilde{\omega}'$ die im Art. 33 erklärte Bedeutung haben. Dann ergeben sich unter Benutzung der Gleichungen (3.) und der Verwandlungsformeln der $\sigma$-Functionen nach jedesmaliger Abtrennung eines den drei Gliedern der entstandenen Gleichung gemeinsamen Exponentialfactors die in der Tabelle [A.] zusammengestellten Gleichungen. Die Indices $\lambda$, $\mu$, $\nu$ bedeuten in irgend einer Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3.

[A.]

$$[1]\quad \sigma a\, \sigma b\, \sigma c\, \sigma d + \sigma a'\, \sigma b'\, \sigma c'\, \sigma d' + \sigma a''\, \sigma b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[2]\quad \sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma c\, \sigma d + \sigma_\lambda a'\, \sigma_\lambda b'\, \sigma c'\, \sigma d' + \sigma_\lambda a''\, \sigma_\lambda b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[3]\quad \sigma_\lambda a\, \sigma_\mu b\, \sigma_\nu c\, \sigma d + \sigma_\lambda a'\, \sigma_\mu b'\, \sigma_\nu c'\, \sigma d' + \sigma_\lambda a''\, \sigma_\mu b''\, \sigma_\nu c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[4]\quad \sigma_\mu a\, \sigma_\mu b\, \sigma_\nu c\, \sigma_\nu d - \sigma_\mu a'\, \sigma_\mu b'\, \sigma_\nu c'\, \sigma_\nu d' + (e_\mu - e_\nu)\, \sigma_\lambda a''\, \sigma_\lambda b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0$$
$$[5]\quad (e_\mu - e_\nu)\, \sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma_\lambda c\, \sigma_\lambda d + (e_\nu - e_\lambda)\, \sigma_\mu a'\, \sigma_\mu b'\, \sigma_\mu c'\, \sigma_\mu d' + (e_\lambda - e_\mu)\, \sigma_\nu a''\, \sigma_\nu b''\, \sigma_\nu c''\, \sigma_\nu d'' = 0$$
$$[6]\quad \sigma_\lambda a\, \sigma_\lambda b\, \sigma_\lambda c\, \sigma_\lambda d - \sigma_\lambda a'\, \sigma_\lambda b'\, \sigma_\lambda c'\, \sigma_\lambda d' + (e_\lambda - e_\nu)(e_\lambda - e_\mu)\, \sigma a''\, \sigma b''\, \sigma c''\, \sigma d'' = 0.$$

Aus diesen Additionstheoremen der $\sigma$-Functionen erhält man vermittelst der Gleichungen (15—18.) des Art. 34 die entsprechenden in der Tabelle [B.] zusammengestellten Additionstheoreme der $\Theta$-Functionen. Die Indices $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ bedeuten in irgend einer Reihenfolge die Zahlen 2, 3, 0.

[B.]

$$[1]\quad \Theta_1 a\, \Theta_1 b\, \Theta_1 c\, \Theta_1 d + \Theta_1 a'\, \Theta_1 b'\, \Theta_1 c'\, \Theta_1 d' + \Theta_1 a''\, \Theta_1 b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[2]\quad \Theta_\alpha a\, \Theta_\alpha b\, \Theta_1 c\, \Theta_1 d + \Theta_\alpha a'\, \Theta_\alpha b'\, \Theta_1 c'\, \Theta_1 d' + \Theta_\alpha a''\, \Theta_\alpha b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[3]\quad \Theta_\alpha a\, \Theta_\beta b\, \Theta_\gamma c\, \Theta_1 d + \Theta_\alpha a'\, \Theta_\beta b'\, \Theta_\gamma c'\, \Theta_1 d' + \Theta_\alpha a''\, \Theta_\beta b''\, \Theta_\gamma c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[4]\quad \Theta_\beta a\, \Theta_\beta b\, \Theta_\gamma c\, \Theta_\gamma d - \Theta_\beta a'\, \Theta_\beta b'\, \Theta_\gamma c'\, \Theta_\gamma d' \pm \Theta_\alpha a''\, \Theta_\alpha b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0$$
$$[5]\quad \Theta_2 a\, \Theta_2 b\, \Theta_2 c\, \Theta_2 d - \Theta_3 a'\, \Theta_3 b'\, \Theta_3 c'\, \Theta_3 d' + \Theta_0 a''\, \Theta_0 b''\, \Theta_0 c''\, \Theta_0 d'' = 0$$
$$[6]\quad \Theta_\alpha a\, \Theta_\alpha b\, \Theta_\alpha c\, \Theta_\alpha d - \Theta_\alpha a'\, \Theta_\alpha b'\, \Theta_\alpha c'\, \Theta_\alpha d' \pm \Theta_1 a''\, \Theta_1 b''\, \Theta_1 c''\, \Theta_1 d'' = 0.$$

# C. F. GAUSS WE[RKE]

HERAUSGEGEBEN VON DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER [WISSENSCHAFTEN]

AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band:

I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck 1870. Preis 12 Mark.

II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.
Die Besitzer des ersten Abdruckes von Band II. können die beim zweiten Abdrucke hinzugekommenen Zusätze als „Nachtrag zum ersten Abdrucke des zweiten Bandes" zum Preise von 1 Mark beziehen.

III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.

IV. WAHRSCHEINLICHKEITS - RECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880. Preis 15 Mark.

V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis 15 Mark.

VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN. 1874. Preis 20 Mark.

Die Entnahme von einzelnen Bänden bezw. des vollständigen Werkes erfolgt gegen Baarzahlung von der K. Universitäts-Casse in Göttingen, welche nach wie vor den Vertrieb besorgt.

Versendungen nach auswärts erfolgen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn die Preiszahlung durch Postnachnahme gewünscht wird und zulässig ist; sonst sind wegen der für Werthsendungen erforderlichen festeren Verpackung pro Band 60 Pfennig Emballagekosten mehr zu zahlen.

Göttingen im Mai 1881.

---

# GAUSS-DENKMÜNZE.

Die K. Gesellschaft hat zur Feier der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von C. F. Gauss durch Herrn Münzmedailleur H. F. Brehmer in Hannover eine Denkmünze von 70 Millimeter Durchmesser in bronzirtem Kupfer herstellen lassen. Sie enthält den Kopf von Gauss und die auf ihn sowie auf die Feier sich beziehende Inschrift. Um dieses Kunstwerk allgemeiner zugänglich zu machen, hat die Gesellschaft verfügt, dass es zu dem Preise von fünf Mark von der K. Universitäts-Casse zu Göttingen bezogen werden kann, von Auswärtigen ohne Nebenkosten, ausser Porto, wenn Postnachnahme des Preises erfolgen kann.