





Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000300746

Heft 13.

**Versuche über den Einfluß von Kälte und Wärme auf die Erhärtungsfähigkeit von Beton.** Ausgeführt im Königlichen Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde-West im Jahre 1911. Bericht erstattet von Professor **M. Gary**, Abteilungsvorsteher im Königlichen Materialprüfungsamt.

Mit 15 Textabbildungen.

1912.

Geheftet Preis 1,60 M.

Heft 14.

**Versuche mit Eisenbeton-Balken zur Ermittlung der Widerstandsfähigkeit von Stoßverbindungen der Eiseneinlagen.** Ausgeführt in der Königl. Mechanisch-Technischen Versuchsanstalt in Dresden. Bericht erstattet von Professor **H. Scheit**, Geh. Hofrat, Direktor der Versuchsanstalt und Privatdozent Dipl.-Ing. **O. Wawrziniok**, Adjunkt der Versuchsanstalt.

Mit 144 Textabbildungen.

1912.

Geheftet Preis 4 M.

Heft 15.

**Versuche über den Einfluß der Elektrizität auf Eisenbeton.** Ausgeführt in der Großh. Materialprüfungs-Anstalt an der Technischen Hochschule zu Darmstadt in den Jahren 1909 bis 1911. Bericht erstattet von Professor **O. Berndt**, Geh. Baurat, Vorstand der Materialprüfungs-Anstalt, Professor Dr. **K. Wirtz**, Geh. Hofrat, unter Mitwirkung von Privatdozent Dr.-Ing. **E. Preuß**.

Mit 214 Textabbildungen.

1912.

Geheftet Preis 4,60 M.

Heft 16.

**Versuche über die Widerstandsfähigkeit von Beton und Eisenbeton gegen Verdrehung.** Ausgeführt in der Materialprüfungsanstalt der Königlich Technischen Hochschule zu Stuttgart in den Jahren 1910 und 1911. Bericht erstattet von Dr.-Ing. **C. Bach**, K. Württ. Baudirektor, Professor des Maschineningenieurwesens, Vorstand des Ingenieurlaboratoriums und der Materialprüfungsanstalt und **O. Graf**, Ingenieur der Materialprüfungsanstalt.

Mit 114 Textabbildungen und 14 Zusammenstellungen.

1912.

Geheftet Preis 4,60 M.

Heft 17.

**Versuche mit Stampfbeton.** Ausgeführt im Königlichen Materialprüfungsamt zu Groß-Lichterfelde-West in den Jahren 1905 bis 1910. Bericht erstattet von Geheimem Regierungsrat Professor **M. Rudeloff**, Direktor, und Professor **M. Gary**, Abteilungsvorsteher im Königlichen Materialprüfungsamt.

Mit 71 Textabbildungen und 64 Tabellen.

1912.

Geheftet Preis 9,60 M.

Heft 18.

**Die Beziehung zwischen Formänderung und Biegemoment bei Eisenbetonbalken** (abgeleitet aus den bis Ende 1911 durchgeführten Versuchen). Bericht erstattet von Professor Dr.-Ing. **E. Mörsch**.

Mit 12 Textabbildungen.

1912.

Geheftet Preis 1,20 M.

Heft 19.

**Prüfung von Balken zu Kontrollversuchen.** Ausgeführt in der Materialprüfungsanstalt der Königlich Technischen Hochschule zu Stuttgart in den Jahren 1910 und 1911. Bericht erstattet von Dr.-Ing. **C. Bach**, K. Württ. Baudirektor, Professor des Maschineningenieurwesens, Vorstand des Ingenieurlaboratoriums und der Materialprüfungsanstalt, und **O. Graf**, Ingenieur der Materialprüfungsanstalt.

Mit 26 Textabbildungen und 10 Zusammenstellungen.

1912.

Geheftet Preis 2,40 M.

xxx  
233





Heft 20.

**Versuche mit Eisenbeton-Balken zur Ermittlung der Widerstandsfähigkeit verschiedener Bewehrung gegen Schubkräfte.**

DRITTER TEIL. Ausgeführt in der Materialprüfungsanstalt der Königlich Technischen Hochschule zu Stuttgart in den Jahren 1910 bis 1912. Bericht erstattet von Dr.-Ing. **C. Bach**, K. würt. Baudirektor, Professor des Maschineningenieurwesens, Vorstand des Ingenieurlaboratoriums und der Materialprüfungsanstalt und **O. Graf**, Ingenieur der Materialprüfungsanstalt.

Mit **188** Textabbildungen und **29** Zusammenstellungen.

1912.

Geheftet Preis **10,60 M.**

Heft 21.

**Untersuchungen über den Einfluß der Köpfe auf die Formänderungen und Festigkeit von Eisenbeton-Säulen.**

Ausgeführt im Königlichen Materialprüfungsamt zu Berlin-Lichterfelde-West im Jahre 1912. Bericht erstattet von Professor **M. Rudeloff**, Geheimer Regierungsrat, Direktor im Königlichen Materialprüfungsamt.

Mit **44** Textabbildungen und **64** Tabellen.

1912.

Geheftet Preis **6 M.**

DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR EISENBETON

DIE BEZIEHUNG ZWISCHEN FORM-  
ÄNDERUNG UND BIEGUNGSMOMENT  
BEI EISENBETONBALKEN

ABGELEITET

AUS DEN BIS ENDE 1911 DURCHGEFÜHRTEN VERSUCHEN

BERICHT ERSTATTET VON  
PROFESSOR Dr.-Ing. E. MÖRSCH

MIT 12 TEXTABBILDUNGEN

BERLIN 1912  
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN



DEUTSCHER AUSSCHUSS FÜR BISHNERTON



III - 307238

ABGELEITET

AUS DEM BIS ENDE 1911 DURCHFÜHRTEN VERSUCHEN

Alle Rechte vorbehalten.

RECHT ERSTATET VON

PROFESSOR DR.-ING. E. MÖRSCH

MIT 12 TEXTABBITURGEN

BERLIN 1912

Druck von Oskar Bonde in Altenburg.

ppx-0 248/2018

# Die Beziehung zwischen Formänderung und Biegemoment bei Eisenbetonbalken,

abgeleitet aus den bis Ende 1911 durchgeführten Versuchen.

Anläßlich der allgemeinen Beratung über Arbeitsplan IV des Deutschen Ausschusses für Eisenbeton am 10. Februar 1911 in Dresden wurde dem Verfasser vom Arbeitsausschuß der Auftrag erteilt, die Beziehungen zwischen Formänderungswinkel und Biegemoment bei Eisenbetonbalken aus dem bis dahin vorliegenden Versuchsmaterial abzuleiten. Erst nach Vorliegen dieses Berichtes sollte in eine weitere Beratung über die Versuche mit statisch unbestimmten Konstruktionen, wie kontinuierliche Balken, Rahmen usw. eingetreten oder noch Ergänzungsversuche zur weiteren Klarstellung jener Beziehung beschlossen werden.

Im Interesse eines streng wissenschaftlichen Vorgehens und der späteren Auswertung der vorgesehenen Versuche mit statisch unbestimmten Konstruktionen war dieser Weg angezeigt, der auch für die vorherige Ausarbeitung der Versuchsprogramme vorteilhaft erschien.

Während für die Berechnung der Biegemomente und äußeren Kraftwirkungen bei allen statisch bestimmten Konstruktionen ohne Zweifel die Regeln der Statik gültig sind, entsteht bei den statisch unbestimmten Konstruktionen aus Eisenbeton die Frage, ob hierfür die Elastizitätslehre anwendbar ist, die bekanntlich Proportionalität zwischen Biegemoment und Formänderungswinkel voraussetzt.

Bezüglich der statisch unbestimmten Bauwerke unterscheiden wir solche, deren Querschnitte in der Hauptsache von Normalkräften und nur in geringem Grade von biegenden Momenten beansprucht werden, ferner solche, wo die Normalkräfte hinter dem Einfluß der Biegemomente zurücktreten oder ganz fehlen. Zu den ersteren gehören die nach der Stützlinie geformten Gewölbe ohne Gelenke oder mit zwei Gelenken, während unter die letzteren alle rahmenartigen Bauteile, insbesondere aber die kontinuierlichen und eingespannten Träger fallen.

Wenn bei den Gewölben, deren Form der Belastung angepaßt ist, die Zugfestigkeit in den meisten Querschnitten nicht in Anspruch genommen wird, so werden sich die Wirkungen des Momentes und der Achsialkraft in ähnlicher Weise addieren wie bei einem homogenen Querschnitt. Die Frage der Gewölberechnung nach der Elastizitätslehre ist für Eisenbetongewölbe in der Literatur mehrfach erörtert worden.

In der Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur- und Architektenvereins 1896 wurde von Oberingenieur J. A. Spitzer nachgewiesen, daß bei dem Monier-



gewölbe der Purkersdorfer Gewölbeversuche eine vollständige Uebereinstimmung der Deformationen und Rißbildungen mit der Berechnung nach der Elastizitätslehre stattgefunden hat, so daß die Theorie des elastischen Bogens auch für Eisenbetongewölbe gültig ist. Die Abweichungen, welche sich wegen der nicht genau vorhandenen Proportionalität zwischen Spannungen und Deformationen beim Betongewölbe ohne Gelenke ergeben, sind von Diplomingenieur Max Ritter in der Schweizerischen Bauzeitung 1906 untersucht und unter Zugrundelegung des Potenzgesetzes für verschwindend klein gefunden worden.

Diese Ergebnisse sind bei der vorherrschenden Druckbeanspruchung in Gewölben einleuchtend. Dagegen ist die Frage bisher noch nicht behandelt worden, ob es statthaft ist, diejenigen statisch unbestimmten Konstruktionen aus Eisenbeton, wo die Biegemomente für die Formänderung maßgebend sind, nach der Elastizitätslehre zu berechnen. Die Frage interessiert um so mehr, als diese Konstruktionen sehr zahlreich sind und weil aus den bekannten Durchbiegungsdiagrammen geschlossen werden muß, daß die Beziehung zwischen Formänderung und Moment von der Proportionalität ziemlich abweicht, sofern man etwas höhere Belastungszustände in Betracht zieht. Um die Frage beantworten zu können, ist die

### Beziehung zwischen Biegemoment und Formänderungswinkel

bei verschiedenen Bewehrungsprozenten festzustellen. Hierzu eignen sich am besten die verschiedenen an der Materialprüfungsanstalt Stuttgart angestellten Versuche, weil hier die Messung der Formänderungen innerhalb einer längeren Strecke mit konstantem Biegemoment erfolgte.

Für den vorliegenden Zweck ungeeignet sind diejenigen Versuchsbalken, die mit einer konzentrierten Last in der Mitte oder mit gleichmäßig verteilter Last belastet wurden. Ferner muß sich die Messung der Längenänderung am oberen und unteren Balkenrand auf eine genügend große Meßlänge erstrecken, damit die Einflüsse lokaler Risse sich verteilen, wie dies auch bei der Formänderung der Bauteile der Fall ist.

Die Beziehung zwischen dem jeweiligen Biegemoment und dem zugehörigen Formänderungswinkel zwischen zwei benachbarten Querschnitten ist zwar ähnlich dem Verhältnis zwischen dem Moment und dem auf die Strecke mit konstantem Moment entfallenden Biegungspeil, einfacher und genauer erhält man aber bei den erwähnten Versuchen die Größe des Formänderungswinkels aus den gemessenen Längenänderungen des oberen und unteren Randes der Probek balken. Nach Abb. 1 ist der Drehungswinkel  $\Delta\alpha$  von zwei im Abstand  $s$  voneinander liegenden Querschnitten

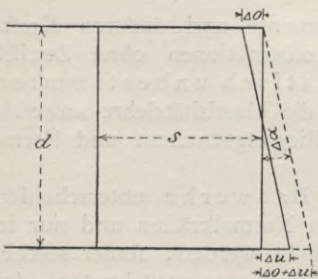


Abb. 1.

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta u_0 + \Delta u_1}{d}$$

Die ersten Versuche, bei welchen die Längenänderungen oben und unten auf eine größere Strecke mit konstantem Biegemoment gemessen wurden, sind im Auftrag der Firma Wayß & Freytag A.-G. im Jahre 1902 bis 1903 an der Materialprüfungsanstalt in Stuttgart durchgeführt worden. Der Querschnitt dieser rechteckigen Balken war 15 auf 30 cm. Auf Vorschlag des Verfassers wurden sie der Biegung mit symmetrischer Doppelbelastung unterworfen, so daß innerhalb der Meßlänge von 80 cm ein konstantes Moment ohne Querkraft vorhanden war.

Die Messung der Eisenverlängerungen erfolgte zwischen vorstehenden Zapfen AA, welche mit den Eiseneinlagen verschraubt waren. Außerdem wurde noch die Verkürzung des oberen Randes und die Durchbiegung der Meßlänge bei verschiedenen Belastungsstadien gemessen. Das Mischungsverhältnis war 1 Zement : 4



Rheinsand, das Alter 3 Monate. Je sechs Körper waren mit 2 Durchmesser 10 mm, bzw. 2 Durchmesser 16 mm und 2 Durchmesser 22 mm bewehrt und hiervon dienten jedesmal drei für die Messung der Eisendehnungen und drei für die Ermittlung der Verkürzungen der obersten Betonfaser, weil die für gleichzeitige Messung nötige Anzahl der Apparate nicht vorhanden war.

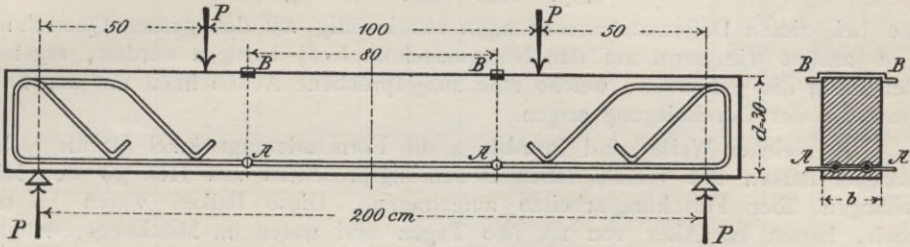


Abb. 2. Probekörper der Firma Wayß & Freytag A.-G. vom Jahre 1902 bis 1903.

In Abb. 3 sind die Beziehungen zwischen den Biegemomenten und den gemessenen Formänderungswinkeln bei diesen Versuchskörpern dargestellt.

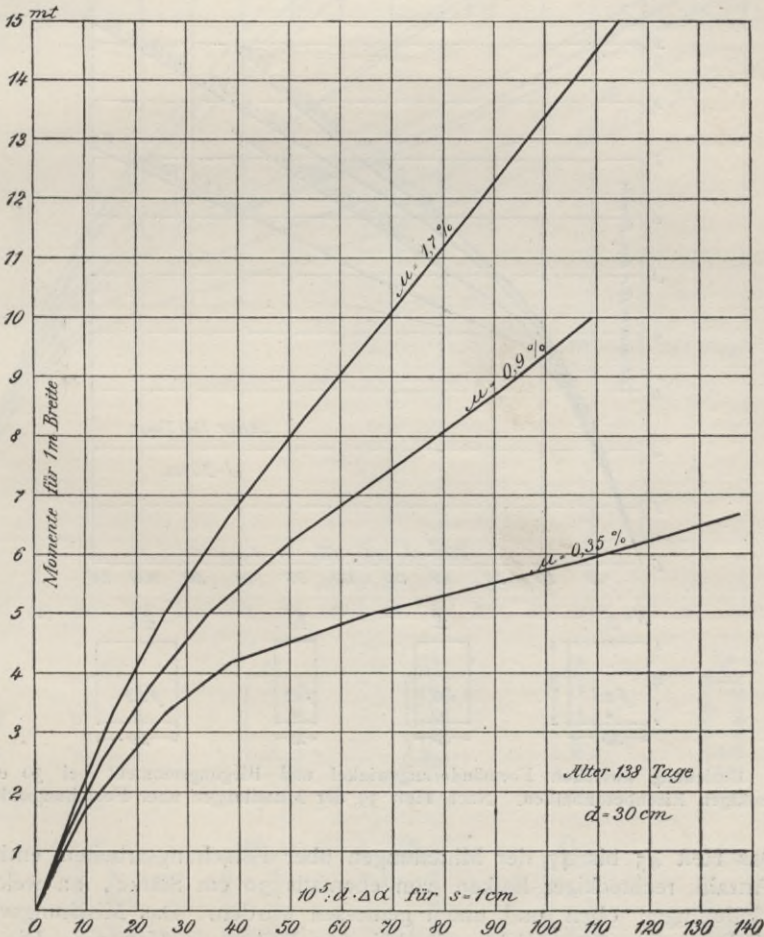


Abb. 3. Beziehung zwischen Formänderungswinkel und Biegemoment bei 30 cm hohen rechteckigen Eisenbetonbalken der Firma Wayß & Freytag A.-G.

Die Längenänderung  $\Delta u$  der unteren Faser mußte dabei aus der Verlängerung des Eisens und der Verkürzung des oberen Betonrandes berechnet werden. Als Abszissen sind die mit  $d \cdot 10^5$  multiplizierten Formänderungswinkel für  $s = 1$  cm aufgetragen, während die Ordinaten die auf 1 m Breite entfallenden Momente in mt bedeuten. Für die drei Bewehrungsprozente von

$$0,35, 0,90 \text{ und } 1,70 \%,$$

die bei diesen Deformationsrechnungen zweckmäßig auf den ganzen Querschnitt  $b \cdot d$  (anstatt wie sonst auf den Nutzquerschnitt  $b \cdot h$ ) bezogen werden, ergeben sich dann die 3 Kurven, welche eine ausgesprochene Aehnlichkeit mit den Diagrammen der Durchbiegung zeigen.

In gleicher Weise sind in Abb. 4 die Formänderungswinkel für die rechteckigen Balken mit verschiedenen Bewehrungsprozenten aus Heft 39 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten aufgetragen. Diese Balken waren 30 cm hoch, hatten ein Alter von rd. 190 Tagen und waren im Mischungsverhältnis von 1 Raumteil Zement zu 4 Teilen Kiessand hergestellt, wobei der letztere aus 3 Teilen Sand und 2 Teilen Kies bestand. Die Balken mit glatt bearbeitetem Rundeseisen wurden weggelassen, da sie für den vorliegenden Zweck nicht in Betracht kommen.

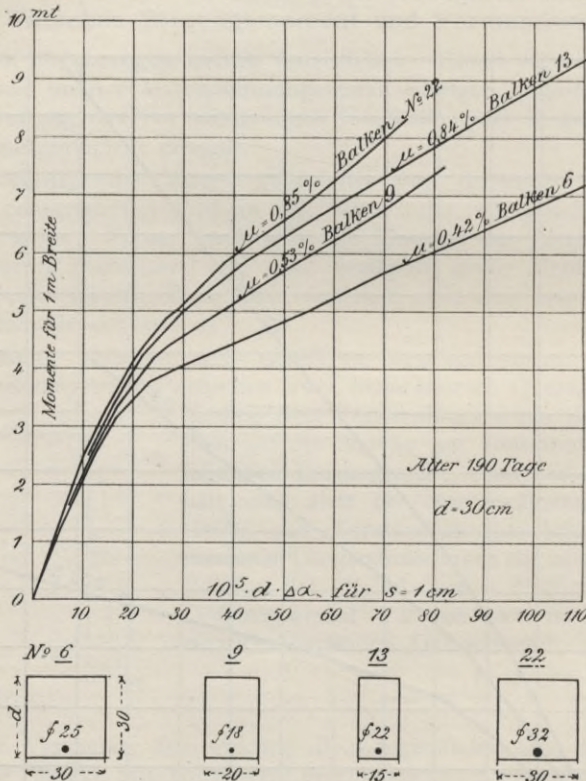


Abb. 4. Beziehung zwischen Formänderungswinkel und Biegemoment bei 30 cm hohen rechteckigen Eisenbetonbalken. Nach Heft 39 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten.

Das Heft 45 bis 47 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten enthält eine große Anzahl rechteckiger Balken von ebenfalls 30 cm Stärke, an welchen die Längenänderungen oben und unten gemessen wurden. Das Mischungsverhältnis dieser Balken war das gleiche wie bei den Balken in Heft 39. Die Winkeländerungen für die Balkenlänge  $s = 1$  cm sind in Abb. 5 dargestellt. Als Ordinaten sind die Momente in mt bezogen auf 1 m Breite und als Abszissen



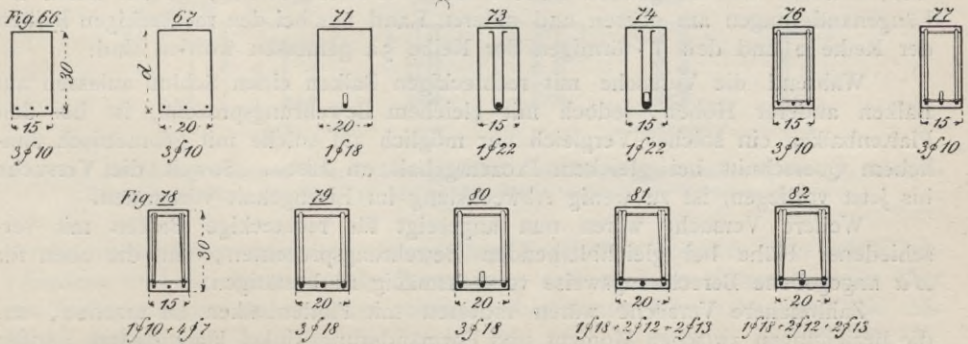
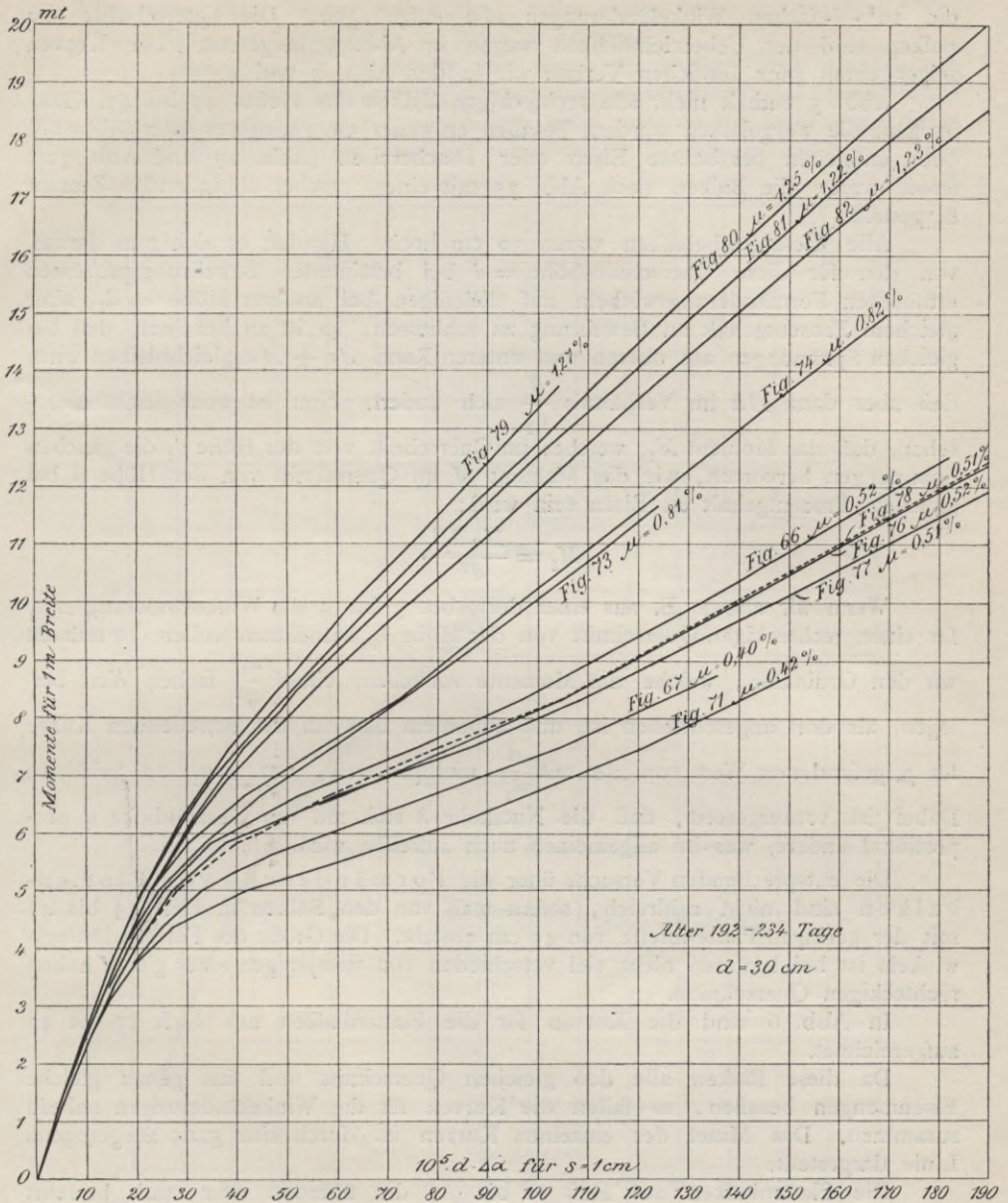


Abb. 5. Beziehung zwischen Formänderungswinkel und Biegemoment bei 30 cm hohen rechteckigen Eisenbetonbalken. Nach Heft 45 bis 47 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten.



die  $10^5 \cdot d$ -fachen Winkeländerungen  $\Delta\alpha$  aufgetragen. Die Querschnitte der Balken sind der Uebersichtlichkeit wegen in Abb. 5 beige setzt. Die Kurven zeigen einen ganz ähnlichen Verlauf wie in den Abb. 3 und 4.

Abb. 5 enthält nicht alle rechteckigen Balken des Heftes 45 bis 47. Diejenigen, die weggelassen wurden, besaßen entweder ein geringeres Alter (Abb. 68) oder enthielten bearbeitete Eisen oder Thachereisen (Abb. 69 und Abb. 72), ferner waren die Balken nach Abb. 75 mit einem rascher abbindenden Zement hergestellt.

Alle diese Probek balken waren 30 cm hoch. Handelt es sich nun darum, von den für diese Querschnittshöhe  $= d$  bei bestimmten Bewehrungsprozenten ermittelten Formänderungswinkeln auf diejenigen bei anderer Höhe  $= d_1$ , aber gleichem Prozentgehalt an Bewehrung zu schliessen, so ist zu beachten, daß bei gleichen Spannungen am oberen und unteren Rand  $\Delta\sigma + \Delta\tau$  gleichbleiben wird, daß aber dann  $\Delta\alpha$  im Verhältnis  $\frac{d}{d_1}$  sich ändert. Nun ist aber leicht einzusehen, daß das Moment  $M_1$ , welches im Querschnitt von der Höhe  $d_1$  die gleichen Spannungen hervorruft, wie das Moment  $M$  im Querschnitt von der Höhe  $d$  bei gleichem Prozentgehalt an Eisen sein wird:

$$M_1 = \frac{M \cdot d_1^2}{d^2}.$$

Wenn wir also z. B. aus einer der Abb. 3 bis 5 die Winkeländerung  $\Delta\alpha_1$  für einen rechteckigen Querschnitt von der Höhe  $d_1$  entnehmen wollen, so müssen wir den Ordinaten, welche die Momente vorstellen, einen  $\frac{d_1^2}{d^2}$  fachen Wert beilegen, als dort angeschrieben ist, und außerdem den auf der betreffenden Kurve für  $\mu$  gefundenen Wert von  $\Delta\alpha$  mit  $\frac{d}{d_1}$  multiplizieren, um  $\Delta\alpha_1$  zu erhalten. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Nutzhöhe  $h$  sich mit der Gesamtdicke  $d$  proportional ändere, was im allgemeinen auch zutreffen wird.

Die entsprechenden Versuche über die Formänderung von Plattenbalken sind nicht zahlreich, sofern man von den Balken in Heft 45 bis 47 mit der geringen Plattenbreite von 45 cm absieht. Die Größe des Formänderungswinkels ist bei letzteren nicht viel verschieden von demjenigen eines gleich hohen rechteckigen Querschnitts.

In Abb. 6 sind die Kurven für die Plattenbalken aus Heft 45 bis 47 aufgezeichnet.

Da diese Balken alle den gleichen Querschnitt und fast genau gleiche Eisenmengen besaßen, so fallen die Kurven für die Winkeländerungen nahezu zusammen. Das Mittel der einzelnen Kurven ist durch eine ganz ausgezogene Linie dargestellt.

Die Plattenbalken aus Heft 90 bis 91, die überdies sehr stark bewehrt sind, konnten im vorliegenden Bericht nicht verwertet werden, da bei ihnen die Längenänderungen am oberen und unteren Rand nur bei den rechteckigen Balken der Reihe 2 und den T-förmigen der Reihe 5a gemessen worden sind.

Während die Versuche mit rechteckigen Balken einen Schluß zulassen auf Balken anderer Höhen, jedoch mit gleichem Bewehrungsprozent, ist bei den Plattenbalken ein solcher Vergleich nur möglich auf solche mit geometrisch ähnlichem Querschnitt bei gleichem Prozentgehalt an Eisen. Soweit die Versuche bis jetzt vorliegen, ist zu wenig Abwechslung im Eisengehalt vorhanden.

Weitere Versuche wären nun angezeigt für rechteckige Balken mit verschiedener Höhe bei gleichbleibenden Bewehrungsprozenten, um die oben für  $\Delta\alpha$  angegebene Berechnungsweise versuchsmäßig zu bestätigen.

Zahlreichere Versuche wären indessen mit Plattenbalken zu machen, um die Beziehungen zwischen Moment und Formänderungswinkel klarzustellen. Außer



der Eisenmenge wird hierbei das Verhältnis der Plattenbreite zur Stegbreite und der Plattendicke zur Gesamthöhe in Betracht kommen.

Eine mathematische Verfolgung der durch die Kurven ausgedrückten Abhängigkeit des Formänderungswinkels vom Biegemoment und Bewehrungsprozent erscheint sehr schwierig, namentlich wenn man an die Anwendung dieses Gesetzes auf die Berechnung statisch unbestimmter Konstruktionen denkt. Die

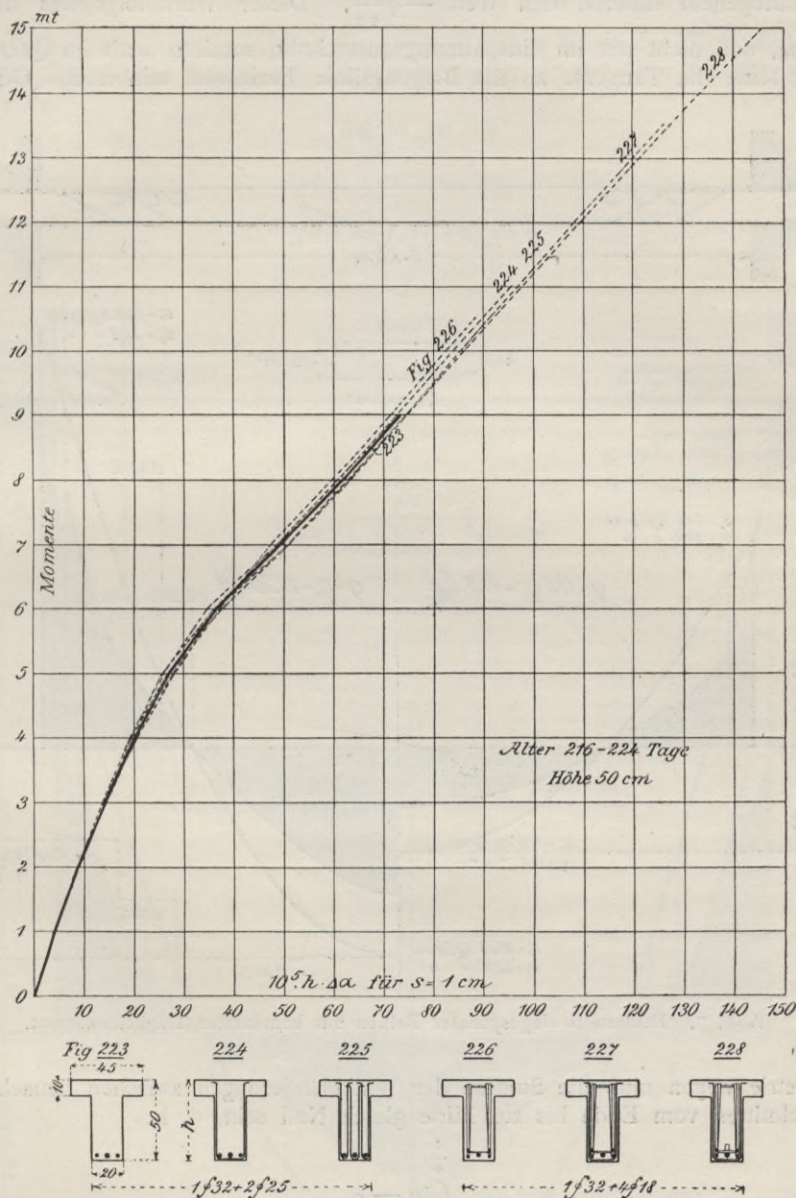


Abb. 6. Beziehung zwischen Formänderungswinkel und Biegemoment bei den T-förmigen Eisenbetonbalken aus Heft 45 bis 47 der Mitteilungen über Forschungsarbeiten.

bereits vorhandenen graphisch dargestellten Ergebnisse gestatten aber schon verschiedene und für die praktische Anwendung sehr wichtige Untersuchungen über die Auflagerreaktionen einfacher statisch unbestimmter Konstruktionen, die sehr häufig vorkommen.

### 1. An beiden Enden eingespannter Träger.

Bekanntlich ergibt die Elastizitätstheorie für das Einspannmoment eines gleichmäßig mit  $q$  belasteten, an beiden Enden vollkommen eingespannten Trägers aus homogenem Material den Wert  $-q \frac{l^2}{12}$ . Dieser Wert folgt aus der Bedingung, daß nicht nur im Einspannungsquerschnitt, sondern auch im Querschnitt in der Mitte die Tangente an die Biegelinie horizontal sein muß. Oder der

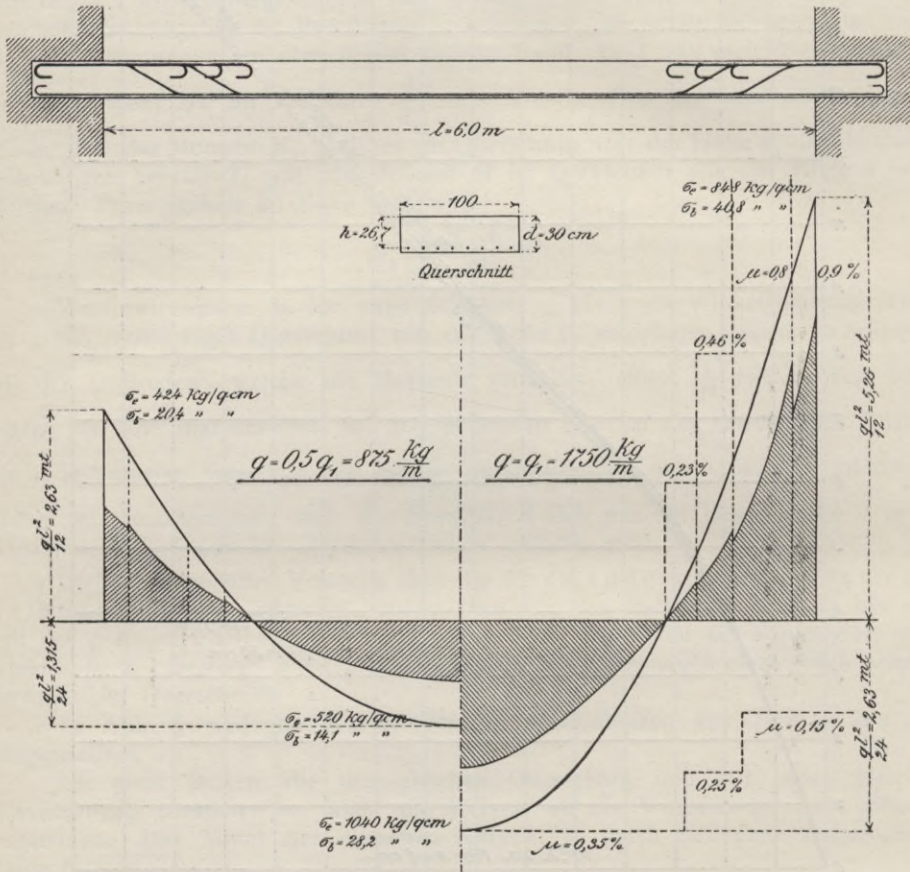


Abb. 7. Beiderseits eingespannter Balken mit konstantem Trägheitsmoment.

Symmetrie wegen muß die Summe der Winkeländerungen zwischen benachbarten Querschnitten vom Ende bis zur Mitte gleich Null sein, d. h.

$$\int_0^{\frac{l}{2}} d\alpha = 0.$$

Während diese Gleichung sonst auf rechnerischem Wege zu dem statisch unbestimmten Einspannmoment führt, müssen wir hier, wo das Gesetz zwischen  $d\alpha$  und  $M_x$  nicht mathematisch ausgedrückt ist, umgekehrt verfahren.

In Abb. 7 ist ein 6 m weit gespannter, 1,00 m breiter und 30 cm hoher Eisenbetonbalken mit Einspannung an den Enden vorausgesetzt. Die Bewehrung ist dem Verlauf der Momentenlinie des homogenen Balkens angepaßt und beträgt



in der Mitte  $0,35 \frac{0}{0}$  und über dem Auflager  $0,9 \frac{0}{0}$  des Betonquerschnittes  $b \cdot d$ . Für die Belastungen 875 und 1750 kg/m sind je die Momentenparabeln aufgezichnet, derart, daß das Mittelmoment  $q \frac{l^2}{24}$  und das Einspannmoment  $-q \frac{l^2}{12}$

beträgt. Wenn diese Momentenlinien richtig sind, so muß die Gleichung  $\int_0^{\frac{l}{2}} d\alpha = 0$  erfüllt sein. Nun sind in Abb. 3 die  $(10^5 \cdot d)$  fachen Werte der Winkeländerungen  $\Delta\alpha$  für die Länge  $s = 1$  cm angegeben, man erhält dann für die  $\infty$  kleine Länge  $ds$

$$d\alpha = \Delta\alpha \cdot ds$$

und

$$\int_0^{\frac{l}{2}} d\alpha = \int_0^{\frac{l}{2}} \Delta\alpha \cdot ds = 0.$$

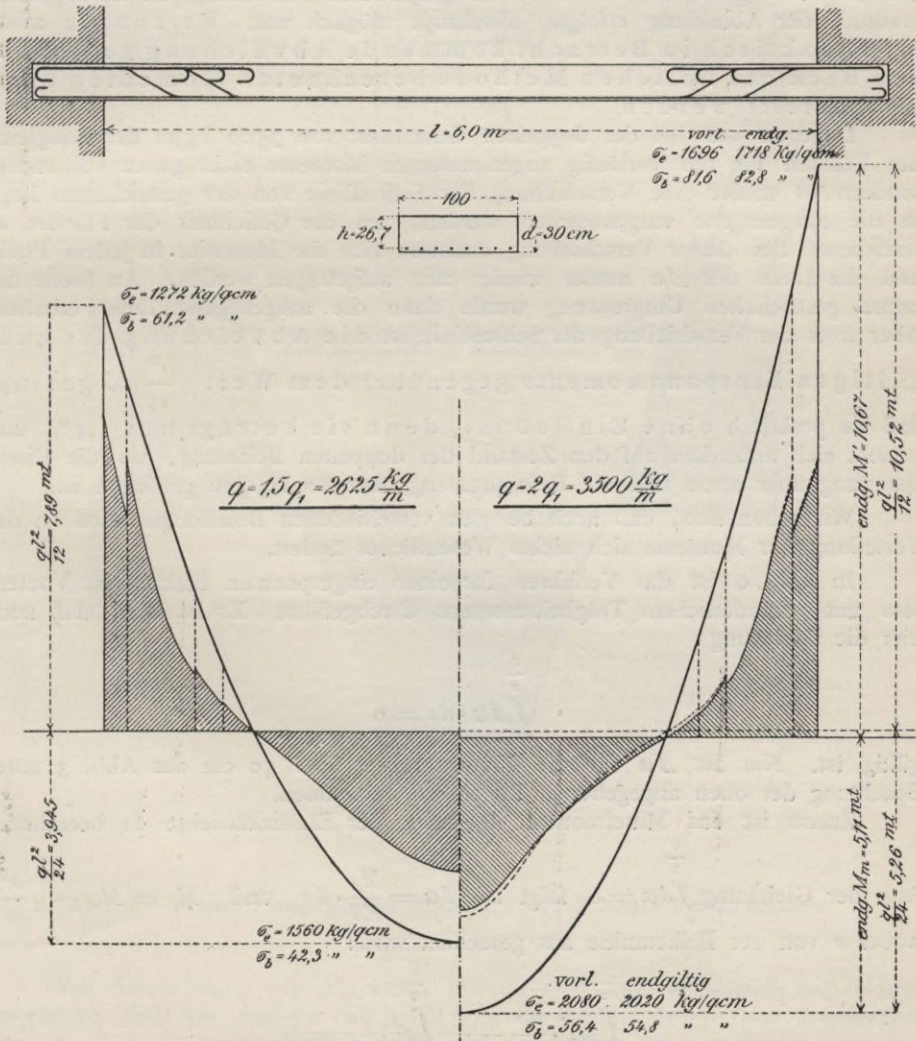


Abb. 8. Beiderseits eingespannter Balken mit konstantem Trägheitsmoment.



Trägt man daher in jedem Punkte der Schlußlinie als Ordinate in irgend einem Maßstab die dem Biegemoment und Bewehrungsprozent daselbst entsprechende Größe  $\Delta\alpha$  oder  $10^5 \cdot d \cdot \Delta\alpha$  auf, so besagt die letzte Gleichung, daß dann die entstehenden Flächen auf der positiven und negativen Seite einander gleich sein müssen. Diese Flächen sind in der Abb. 7 durch Schraffierung angedeutet. Für die Bewehrungsprozente von 0,35 und 0,9 % konnten unmittelbar die beiden unteren Kurven in Abb. 3 zur Entnahme von  $10^5 \cdot d \cdot \Delta\alpha$  benutzt werden, für die zwischenliegenden Werte war zwischen beiden Kurven zu interpolieren.

In Abb. 8 ist dasselbe Verfahren für den gleichen Balken bei 1,5- und 2-facher Gesamtlast wiederholt. An den Punkten, wo das Bewehrungsprozent wechselt, ergeben sich naturgemäß Unstetigkeiten in der Linie der  $\Delta\alpha$ .

Das Ergebnis dieser graphischen Kontrolle des Einspannmomentes  $q \frac{l^2}{12}$  ist ein überraschendes. Sowohl bei der halben und ganzen, als auch bei der  $1\frac{1}{2}$ -fachen Gesamtlast glichen sich die schraffierten Flächen der Winkeländerungen mit der Genauigkeit aus, welche bei der graphischen Darstellung (die im doppelten Maßstab der Abbildung erfolgte) überhaupt möglich war. Es konnte also eine praktisch in Betracht kommende Abweichung gegenüber den nach der üblichen Methode berechneten Momenten nicht festgestellt werden.

Dagegen war bei der doppelten Gesamtlast von 3500 kg/m der Ausgleich der Flächen für die vorläufig angenommenen Momente nicht genau vorhanden, sondern es mußte eine Verschiebung der Schlußlinie von der gestrichelten Lage in die ausgezogene vorgenommen werden, um die Gleichheit der Flächen zu erreichen. Bei dieser Verschiebung änderten sich die Momente in jedem Punkt und die Linie der  $\Delta\alpha$  mußte wieder neu aufgetragen werden. An Stelle der ersten gestrichelten Umgrenzung wurde dann die ausgezogene Linie erhalten. Aber trotz der Verschiebung der Schlußlinie ist die Abweichung des endgültigen Einspannmomentes gegenüber dem Wert  $q \frac{l^2}{12}$  so gering, daß sie praktisch ohne Einfluß ist, denn sie beträgt nur  $1,4 \frac{0}{10}$  und bezieht sich außerdem auf den Zustand der doppelten Belastung, wo die Eisen- spannung über 2000 und die Betonpressung über 80 kg/qcm gestiegen ist.

Wir sehen also, daß auch bei den verschiedenen Belastungsstadien an der Verteilung der Momente sich nichts Wesentliches ändert.

In Abb. 9 ist das Verfahren für einen eingespannten Balken mit Vouten, also mit veränderlichem Trägheitsmoment durchgeführt. Es ist klar, daß auch hier die Gleichung

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \Delta\alpha \cdot ds = 0$$

gültig ist. Nur ist  $\Delta\alpha$  für die Plattenstärken über 30 cm aus Abb. 3 unter Beachtung der oben angegebenen Regeln zu entnehmen.

Zuerst ist das Mittelmoment  $M_m$  nach der Elastizitätslehre zu berechnen.

Aus der Gleichung  $\int_0^{\frac{l}{2}} d\alpha = 0$  folgt mit  $d\alpha = \frac{M_x}{EJ} \cdot ds$  und  $M_x = M_m - q \frac{x^2}{2}$ , wobei  $x$  von der Balkenmitte aus gerechnet wird:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} M_m \cdot \frac{ds}{J} - \frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \cdot \frac{ds}{J} = 0,$$

woraus



$$M_m = \frac{\frac{q}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{ds}{J}}{\frac{l}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{ds}{J}}$$

folgt.

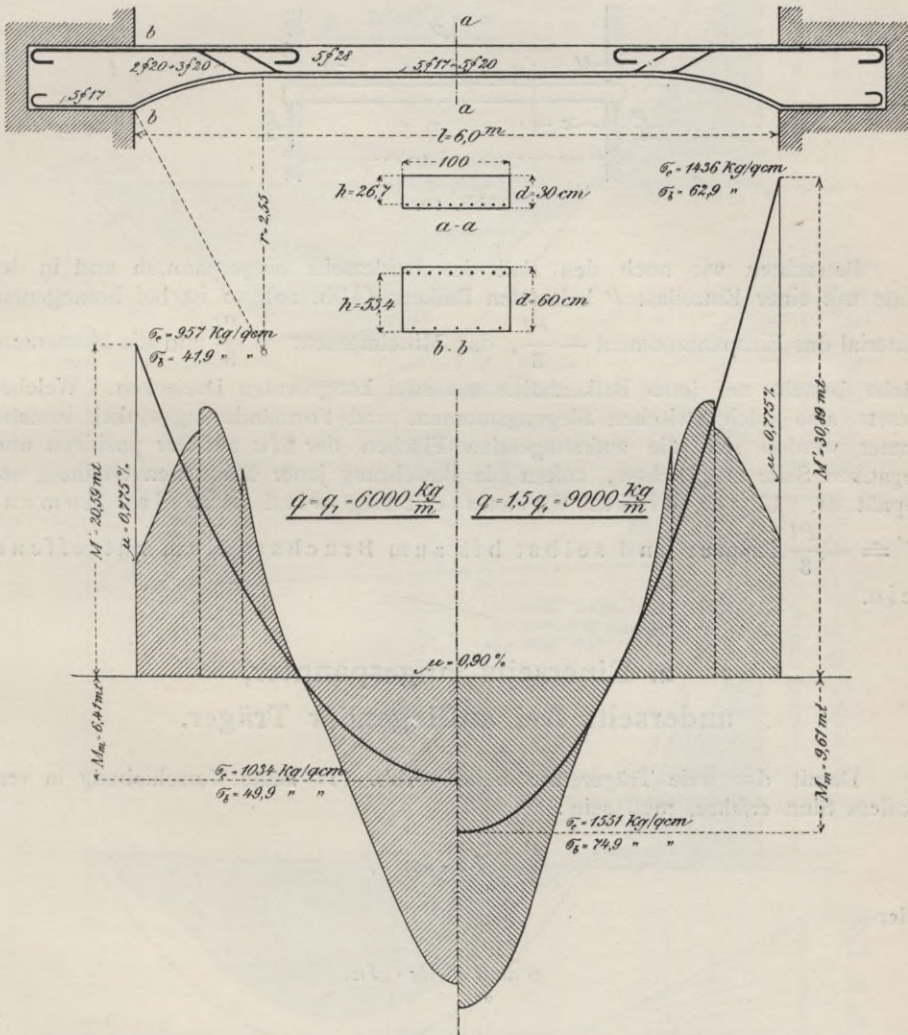


Abb. 9. Beiderseits eingespannter Balken mit veränderlichem Trägheitsmoment.

Zur Ausrechnung von  $M_m$  wurde die auf die Voute entfallende Balkenlänge in gleiche Teile von  $s = 10$  cm geteilt, für die Mitten dieser Teile  $J$  berechnet und dann durch Addition der Quotienten  $\frac{s}{J}$  bzw.  $x^2 \cdot \frac{s}{J}$  die Integrale ermittelt. Mit  $q = 6000$  kg/m fand sich dann

$$M_m = 6,41 \text{ mt}, \quad M' = 6,41 - q \frac{l^2}{8} = -20,59 \text{ mt}.$$

Das Verfahren ist bei veränderlichem Trägheitsmoment natürlich umständlicher. Die für einfache und  $1\frac{1}{2}$ -fache Last ermittelten positiven und negativen Flächen der  $\Delta\alpha \cdot ds$  in Abb. 9 zeigten jeweils so übereinstimmende Inhalte, daß die Abweichung in der Zeichnung nicht darzustellen war. Der nach der Elastizitätslehre ermittelte Verlauf der Momente stimmt also hinreichend genau mit dem auf Grund der tatsächlichen Formänderung des Eisenbetons sich ergebenden überein.

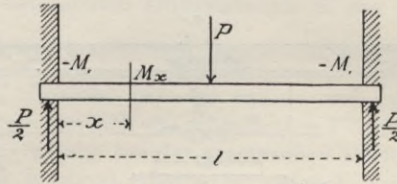


Abb. 10.

Betrachten wir noch den Fall des beiderseits eingespannten und in der Mitte mit einer Einzellast  $P$  belasteten Balkens (Abb. 10), so ist bei homogenem Material das Einspannmoment  $-\frac{Pl}{8}$ , das Mittelmoment  $+\frac{Pl}{8}$  und die Momentenfläche besteht auf jeder Balkenhälfte aus zwei kongruenten Dreiecken. Welches Gesetz also auch zwischen Biegemoment und Formänderungswinkel besteht, immer werden sich die aufzutragenden Flächen der  $\Delta\alpha$  auf der positiven und negativen Seite ausgleichen, sofern die Bewehrung jener Momentenverteilung angepaßt ist. Unter dieser Voraussetzung wird also das Moment  $M' = -\frac{Pl}{8}$  immer und selbst bis zum Bruchstadium zutreffend sein.

## 2. Einerseits eingespannter, andererseits frei aufliegender Träger.

Damit das freie Trägerende bei  $A$  (Abb. 11) keine Verschiebung in vertikalem Sinn erfahre, muß sein:

$$0 = \int_0^l x \cdot d\alpha$$

oder

$$0 = \int_0^l x \cdot ds \cdot \Delta\alpha.$$

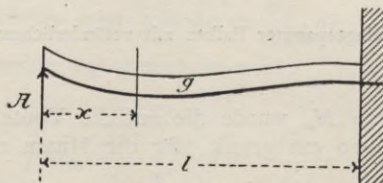


Abb. 11.



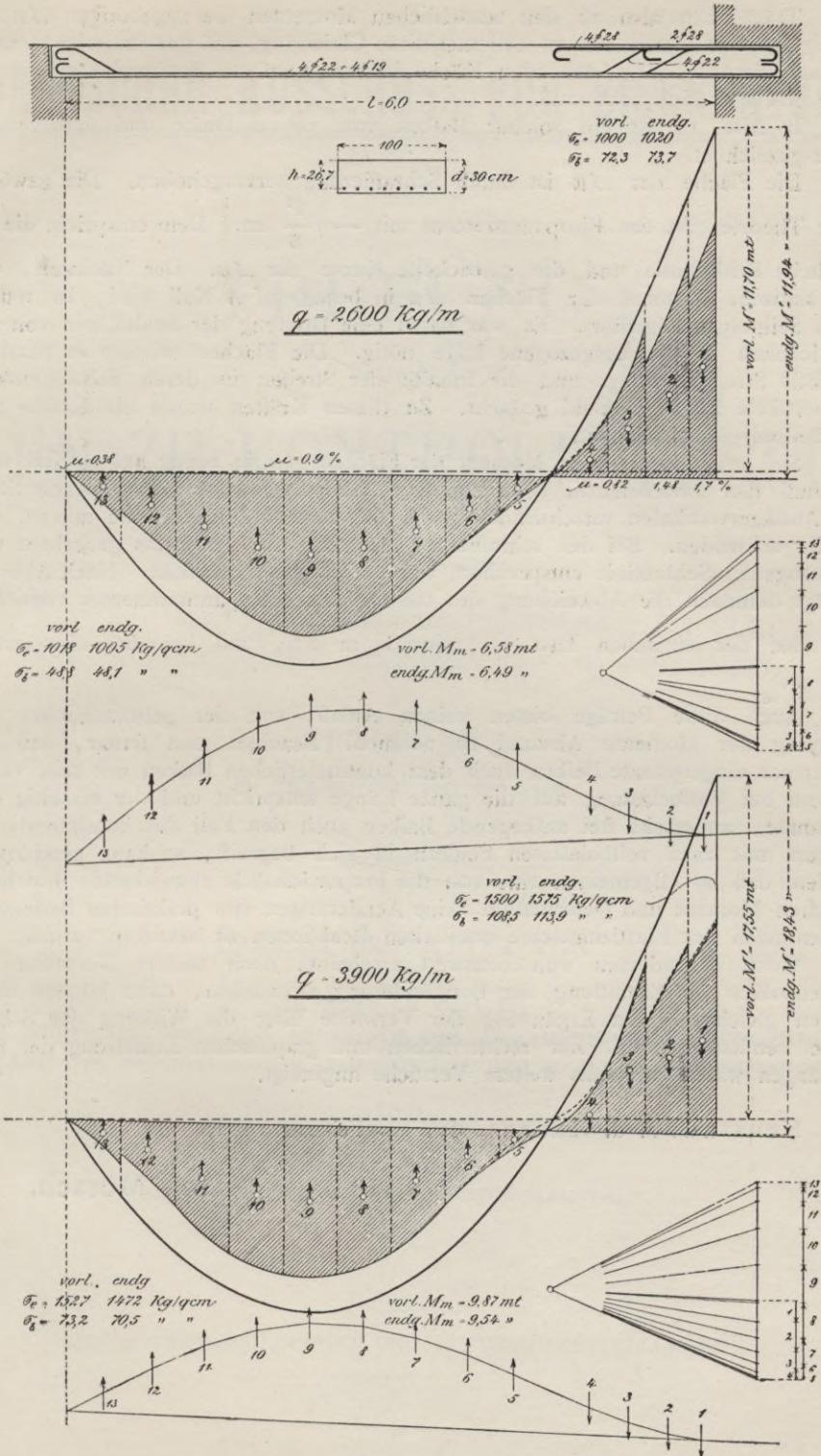


Abb. 12. Einerseits eingespannter, andererseits frei aufliegender Balken.



Trägt man also zu den tatsächlichen Momenten die zugehörigen  $\Delta\alpha$  aus Abb. 3 als Ordinaten auf, so bedeutet diese Gleichung, daß das statische Moment der auf diese Weise entstehenden Fläche in bezug auf die Senkrechte durch das linke Auflager Null sein muß.

In Abb. 12 ist ein solcher Balken von 30 cm Dicke und 6 m Spannweite gezeichnet.

Die Fläche der  $\Delta\alpha$  ist durch Schraffierung hervorgehoben. Die gewöhnliche Theorie gibt das Einspannmoment mit  $-q \frac{l^2}{8}$  an. Dem entspricht die gestrichelte Schlußlinie und die gestrichelte Kurve der  $\Delta\alpha$ . Der Nachweis, daß das statische Moment der Flächen  $\Delta\alpha$  in bezug auf A Null wird, ist mittels eines Seilpolygons geführt. Es war dabei eine Drehung der Schlußlinie von der gestrichelten in die ausgezogene Lage nötig. Die Flächen wurden in parallele vertikale Streifen zerlegt und die Inhalte der Streifen in deren Schwerpunkten als vertikale Kräfte wirkend gedacht. Zu diesen Kräften wurde ein Kräfte- und ein Seilpolygon gezeichnet.

Soll nun das statische Moment der Flächen  $\Delta\alpha$  in bezug auf A Null sein, so muß das zwischen die erste und letzte Seilpolygoneite hineinfallende Stück der Auflagervertikalen verschwinden, oder die erste und letzte Seite müssen sich auf ihr schneiden. Bei den schraffierten Flächen, die der etwas gedrehten und ausgezogenen Schlußlinie entsprechen, wurde dies genau erreicht. Nach Abb. 12 beträgt demnach die Abweichung des tatsächlichen Einspannmomentes vom Wert  $q \frac{l^2}{8}$  bei der einfachen Last  $q = 2600 \text{ kg/m}$  2 0/0 und bei der  $1\frac{1}{2}$ -fachen Last 5 0/0.

Auch diese Beträge bieten keinen Anlaß, von der gebräuchlichen Berechnung der Momente Abstand zu nehmen. Beachtet man ferner, daß der beiderseits eingespannte Balken auch dem kontinuierlichen Balken mit sehr vielen Feldern bei Vollbelastung auf die ganze Länge entspricht und der einseitig eingespannte, andererseits frei aufliegende Balken auch den Fall des kontinuierlichen Trägers mit zwei vollbelasteten Feldern in sich begreift, so kann geschlossen werden, daß im allgemeinen eine von der Proportionalität abweichende Beziehung zwischen Moment und Deformation keine Aenderungen von praktischer Bedeutung in den nach der Elastizitätslehre ermittelten Reaktionen zu bewirken vermag.

Wenn es indessen wünschenswert erscheint, noch weitere Versuche mit Plattenbalken zur Ermittlung der Formänderung anzustellen, dann können diese Balken gleichzeitig zur Ergänzung der Versuche über die Wirkung der Schubkräfte benützt werden. Zur rechnerischen und graphischen Ermittlung der Einsenkungen wären jedenfalls weitere Versuche angezeigt.

Neustadt a. d. Haardt, den 24. Februar 1912.

Prof. Mörsch.











Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307234

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313215

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE

BIBLIOTEKA

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307180

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307235

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313216

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300746

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307236

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313217

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307237

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313218

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307238

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313219

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307239

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



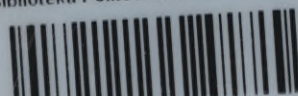
100000313220

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307240

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313221

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



III-307241

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000313222