

Dr. Ing. W. Frank
**Dreigelenk-Brückenbogen
aus Beton**



Stuttgart
Verlag von Konrad Wittwer

8
58
108
120

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299998

Rationelle Berechnung und Formgebung
von
**Dreigelenk-Brückenbogen
aus Beton**

mit Beispiel:

Berechnung der Brücke über den Kocher
bei Ottendorf, O/A. Gaildorf, Württemberg

von

Dr. Jng. W. Frank,

Bauinspektor der K. Ministerialabteilung
für Strassen- und Wasserbau, Stuttgart.

Mit 23 Abbildungen.

FN. 31300



Stuttgart
Verlag von Konrad Wittwer
1916.

Alle Rechte vorbehalten.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 31177

Carl Hammer Hofbuchdruckerei, Stuttgart.

Akc. Nr. 2237/49

Vorwort.

Die vorliegende Schrift erläutert die einfachsten Grundsätze für die graphische und analytische Behandlung von Dreigelenk-Brückenbögen aus Beton und zielt darauf ab, den Konstrukteur anzuregen und in den Stand zu setzen, die Konstruktion ohne Zuhilfenahme fertiger Formeln — etwa für die vorläufige Bemessung der Fugenstärke oder für die Bogenform — bis zur Erzielung einer auch ästhetisch befriedigenden Lösung durchzuführen.

Ein weiteres Ziel war auch das, die Bogenform so zu gestalten, dass die Bogenachse auf Grund weniger zahlenmässig festgelegter Punkte auf dem Reissboden unmittelbar festgestellt werden kann, so dass also die Ordinaten der Bogenachse nicht durch Abmessen aus einer Zeichnung in kleinem Massstab und Übertragen in natürliche Grösse auf dem Reissboden erhalten werden, wodurch die Messfehler sich vervielfachen und die Bogenform leicht unschön wird.

Von allen Künsteleien und unsicheren Theorien ist abgesehen; so z. B. von der Berücksichtigung der Querexzentrizität der Lasten, nachdem der Verfasser an anderer Stelle durch Versuche die Unrichtigkeit dieser Theorie wenigstens für einzelne Fälle, in denen sie von ihren Verfechtern tatsächlich angewandt wird, nachgewiesen hat.

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	I
I. Drucklinie und Beanspruchung für Eigengewicht	4
A. Graphisches Verfahren	4
1. Ersatz der gleichmässig verteilten Lasten durch Einzellasten; Lamelleneinteilung des Bogens	4
2. Bestimmung der Kämpfer- und Scheitelreaktionen	5
3. Einzeichnung der Drucklinie	6
B. Analytische Methode	9
1. Berechnung der Ordinaten der Drucklinie für Eigengewicht	9
2. Fugendrucke für Eigengewicht	14
II. Einfluss der Verkehrslast	16
A. Graphisch-Analytisch	16
3. Druckverteilung der Radlasten	16
4. Einflusslinien für den Horizontalschub, sowie die Axial- und Kernpunktmomente	17
5. Die Berechnung der Randspannungen aus Axial- und Kern- punktmoment	22
6. Zahlenmässige Berechnung der Kernpunktmomente und Be- stimmung der Randspannungen	27
B. Graphische Bestimmung der Belastungsscheiden und der Einflusslinien für die Kernpunktmomente	28
1. Einflusslinien für die Axialmomente	29
2. Belastungsscheiden und Einflusslinien für die Kernpunkts- momente bezw. für die Randspannungen	30
III. Korrektur der Bogenachse	31
IV. Konstruktion der Bogenachse und der Leibungen als parabolische Korbbögen	35
1. Form der Bogenachse	37
2. Analytische Behandlung der als Bogenachse verwendeten Para- beln	39

V. Berechnung der Widerlager	42
Beispiel: Brücke über den Kocher bei Ottendorf	45
1. Vorläufige Bestimmung der Bogenachse und der Gewölbestärke	45
2. Berechnung einzelner Gewölbequerschnitte für Nutzlast und Eigengewicht	48
3. Endgültige Form der Bogenachse	56
4. Endgültige Form der Bogenleibungen	57

Einleitung.

Die statische Berechnung eines Brückenbogens hat den Zweck, den Nachweis der Stabilität des Bauwerks zu liefern.

Von besonderer Bedeutung für die Stabilität ist die Beanspruchung, welche das Baumaterial unter dem Einfluss des Eigengewichts der Brücke, sowie der Nutzlast in ihrer ungünstigsten Stellung erleidet.

Es wird also die statische Berechnung eines Brückenbogens in erster Linie über die Beanspruchung Aufschluss geben müssen, welche der Beton in den einzelnen Querschnitten des Brückengewölbes erleidet.

Mit der Aufstellung eines in statischer Hinsicht einwandfreien Entwurfs ist jedoch die Aufgabe des Ingenieurs noch nicht erschöpft. Es handelt sich für ihn auch noch darum, die ästhetischen Anforderungen zu befriedigen, welche an ein der Öffentlichkeit dienendes Bauwerk gestellt werden müssen.

Dieser Anforderung sind die Ingenieure nicht immer gerecht geworden; es hat sogar das Missverständnis aufkommen können, dass das praktisch-ästhetische Gefühl und die Regeln der Statik manchmal in einem Gegensatz zueinander stehen.

Das Gegenteil ist der Fall; je tiefer man in die Statik eindringt, um so mehr findet man, dass ein theoretisch in allen Teilen richtiger Entwurf unbedingt auch in ästhetischer Beziehung befriedigt, und dass diese Übereinstimmung nur da nicht vorhanden ist, wo die Theorie an einem — vielleicht zunächst versteckten — Mangel leidet.

Es soll deshalb im folgenden nicht bloss die Aufgabe einer möglichst rationellen, d. h. insbesondere einfachen Berechnung von Brückengewölben auf graphischem und analytischem Weg, sondern auch die einer ästhetisch befriedigenden Formgebung des Brückengewölbes behandelt werden. Dabei wird zwischen graphischer und analytischer Behandlungsweise nicht streng

unterschieden, sondern als praktisch zweckmässigstes Verfahren eine Kombination beider Methoden angewendet werden.

Da ein Gewölbequerschnitt dann am günstigsten beansprucht ist, wenn der resultierende Fugendruck durch den Schwerpunkt der Fuge, d. h. bei rechteckigem Querschnitt durch deren Mitte geht, so wird man zweckmässigerweise die Form der Gewölbeachse der Drucklinie (umgekehrten Kettenlinie) für die am häufigsten vorkommende Belastung möglichst anpassen.

Als solche Belastung kann das Eigengewicht der Brücke gelten, da volle, in Rechnung zu ziehende Nutzlast selten oder gar nie eintritt und in den meisten Fällen auch der Einfluss der vollen Nutzlast im Vergleich zu dem des Eigengewichts der Brücke auf die Beanspruchung des Bogens gering ist.

Ist die Gewölbeform auf dieser Grundlage ermittelt, so wird die Verkehrslast der Brücke je nach ihrer Grösse und Stellung Ausschläge der Drucklinie nach der einen oder andern Seite hervorrufen. Die ursprünglich rein zentrische Belastung der einzelnen Fugenquerschnitte geht also in eine exzentrische über.

Die zweite Aufgabe wird nun die sein, die für jede Fuge ungünstigste Laststellung zu ermitteln und die ihr entsprechenden Randspannungen an der oberen und unteren Bogenleibung zu berechnen.

Für jede Fuge werden sich nun im allgemeinen zwei verschiedene Laststellungen ermitteln lassen, für deren eine die obere, für deren andere die untere Kantenpressung ihren Maximalwert erreicht, und zwar werden diese Maximalwerte im allgemeinen nicht gleich gross werden.

Das Wölbungsmaterial wäre nun offenbar dann am besten ausgenützt, wenn beide Maximalwerte der Randspannungen den gleichen Wert erreichten.

Es lässt sich dies dadurch bewirken, dass man von der seither angenommenen, der Gleichgewichtslage für Eigengewicht entsprechenden Bogenform abgeht; d. h. es lassen sich gewisse Änderungen Δy der ursprünglichen Ordinaten y der Bogenachse so bestimmen, dass die obere und die untere maximale Randdruckspannung einer und derselben Fuge denselben Wert erreicht.

Eine weitere Variation ist mit der ursprünglich angenommenen Fugenstärke möglich. Diese lässt sich so bestimmen, dass die vorgenannten, bereits auf gleiche Höhe gebrachten Randspannungen einen gewissen, zum Voraus bestimmten Wert σ erreichen, der mit der Festigkeit des verwendeten Baumaterials im Einklang steht.

Nebenbei muss nun noch darauf Rücksicht genommen werden, dass die Minimalwerte der Randspannungen nicht unter Null gehen, d. h., dass Zugspannungen im Beton oder in den Gewölbefugen vermieden werden.

Die »Korrektur der Bogenachse und der Fugenstärke« ist somit die dritte Aufgabe, die man bei der Konstruktion eines Brückengewölbes zu lösen hat.

Gerade in diesem Punkt ist man nun aber vielfach zu weit gegangen; man hat an den Brückenbogen die Anforderung gestellt, dass sämtliche Fugen dieselben maximalen Randspannungen aufweisen sollen.

Hierbei ist nicht berücksichtigt, dass die Einlegung von Gelenken selbst eine gewisse Unstetigkeit der Bogenform mit sich bringt; der Bogen bleibt kein einheitliches Ganzes, sondern es ist jede Bogenhälfte ein Brückenbogen für sich, der allerdings auf der Grundlage konstanter Randspannungen konstruiert werden könnte.

Beide Bogenhälften werden nun aber im Scheitel des Gesamtbogens nicht stetig ineinander übergehen; es werden sich vielmehr jene unschönen Linienzüge der oberen und auch unteren Brückenleibung bilden, die an neueren Brücken vielfach zu beobachten sind.

Statt im Scheitel eine flüssige Kurve zu erhalten, erhält man für die obere Bogenleibung auf grössere Länge eine gerade Linie, oder es senkt sich dieselbe gar gegen den Scheitel nach unten zu einem stumpfen Winkel.

Solange man nicht einen ausgesprochenen Spitzbogen als Brückenbogen wählen will — was bei flachen Bögen, von denen hier in erster Linie die Rede ist, ausgeschlossen sein dürfte — wird man in ästhetischer Beziehung verlangen müssen, dass der gesamte Brückenbogen ein einheitliches Ganzes bildet, in der Art, dass die Krümmungsradien der Bogenleibung keine sprungweisen Änderungen aufweisen, und die Behandlung dieser Aufgabe ist die vierte, die im Rahmen dieses Buchs zu lösen ist.

I. Drucklinie und Beanspruchung für Eigengewicht.

A. Graphisches Verfahren.

1. Ersatz der gleichmässig verteilten Lasten durch Einzellasten; Lamelleneinteilung des Bogens.

Als Grundlage für den Entwurf eines Brückengewölbes muss zunächst dessen Spannweite und Pfeilhöhe gegeben sein; weiterhin muss die Art des Aufbaus auf dem Gewölbe bestimmt sein.

Für die Zwecke der Bestimmung des Eigengewichts kann nun bei flachen Gewölben, wie sie im folgenden in erster Linie ins Auge gefasst sind, die Achse zunächst als Kreisbogen angenommen werden. Die Gewölbestärke im Scheitel lässt sich ebenfalls vorläufig bestimmen, denn für eine Gesamtlast $q^{t/m}$ im Scheitel und den Krümmungshalbmesser r^m erhält man als Fugendruck

$$H = q \cdot r$$

woraus sich die Fugenstärke d in Funktion der Beanspruchung σ ergibt. Für σ wird man im allgemeinen aus später zu erörternden Gründen einen nicht zu hohen Wert wählen, bei Beton etwa 20—25 kg/qcm.

Die Kämpferfuge wählt man vorläufig so, dass deren Vertikalprojektion gleich der Scheitelfuge ist.

Ist auf diese Weise die Bogenform und der Aufbau festgelegt, so müssen zur weiteren Berechnung die stetig verteilten Eigengewichtslasten durch Einzellasten ersetzt werden. (Vergl. Beispiel im Anhang: »Berechnung der Brücke über den Kocher bei Ottendorf«).

Sofern keine Einzellasten (Pfeiler oder Querwände über dem Bogen) vorhanden sind, nach denen sich die Lamelleneinteilung richten könnte, nimmt man die Lamellen zweckmässigerweise alle gleich gross und denkt sich ihre Belastung einschliesslich des Eigengewichts in deren Mitte konzentriert.

Es ist dabei keineswegs notwendig, die Fugen des Bogens radial anzunehmen; vielmehr ist es von erheblichem Vorteil,

wenn für die Berechnung die Fugen vertikal angenommen werden.

Vielfach ist es üblich, die sogenannte Belastungsgleiche zu konstruieren, d. h. sich die Konstruktion über dem Gewölbe durch eine Aufschüttung von gleichem spezifischem Gewicht, wie das Gewölbematerial, ersetzt zu denken und hieraus die Höhe dieser gedachten Aufschüttung zu bestimmen.

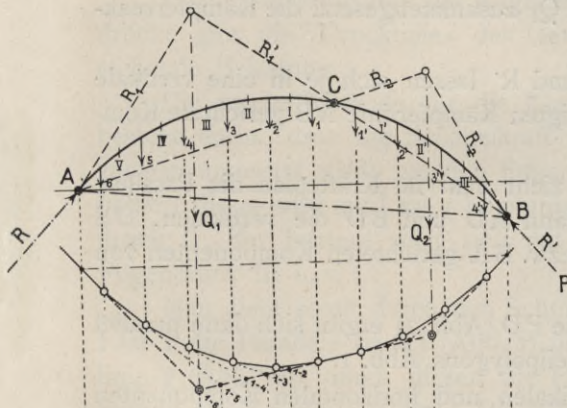
Dieses Verfahren hat jedoch nicht den geringsten Vorteil. Der Zeitaufwand ist der gleiche und die Übersichtlichkeit eine grössere, wenn die Lasten aus dem Längenschnitt der Brücke unmittelbar berechnet werden (vergl. Beispiel im Anhang).

2. Bestimmung der Kämpfer- und Scheitelreaktionen.

Im allgemeinsten Fall, bei unsymmetrischem Gewölbe und unsymmetrischer Belastung, sowie ungleicher Höhe der Kämpfer-

Abb. 1.

Abb. 2.



Kräfteplan.

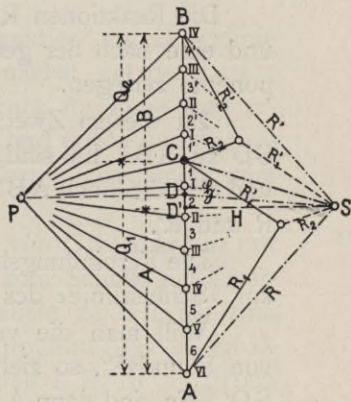
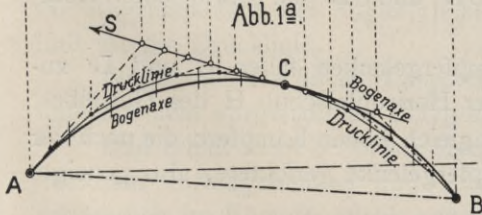


Abb. 1a.



gelenke findet man die Kämpfer- und Scheitelreaktionen auf graphischem Weg dadurch, dass man den Einfluss der Belastung

der linken (1^{ten}) Gewölbehälfte und den der rechten (2^{ten}) Gewölbehälfte für sich behandelt.

Es werden zunächst auf bekanntem Weg mit Hilfe des Kräfteplans und Seilpolygons die Resultierenden Q_1 bzw. Q_2 der linksseitigen bzw. rechtsseitigen Bogenlasten bestimmt.

Die Last Q_1 ergibt die Kämpferreaktionen R_1 und R'_1 (bei A bzw. B), welche aus der Bedingung gefunden werden, dass Q_1 , R_1 und R'_1 miteinander im Gleichgewicht sein müssen. Der Schnittpunkt von Q_1 mit BC ist der gemeinschaftliche Schnittpunkt aller drei Kräfte Q_1 , R_1 und R'_1 , wodurch die Richtung von R_1 festgelegt ist, so dass die Grösse von R_1 und R'_1 im Kräfteplan bestimmt werden kann (vergl. Abb. 2).

In gleicher Weise erhält man als Wirkung der rechtsseitigen Bogenlast Q_2 die Kämpferreaktionen R_2 (links) und R'_2 (rechts).

Die Zusammensetzung von R'_1 und R_2 ergibt die Scheitelkraft CS nach Grösse und Richtung, während der resultierende Kämpferdruck R als Resultante von R_1 und R_2 , R' als Resultante von R'_1 und R'_2 (= BS in Abb. 2) erhalten wird.

Bei symmetrischem Gewölbe und symmetrischer Belastung vereinfacht sich die Konstruktion, indem die Scheitelkraft CS horizontal wirkt und mit Q_1 zusammengesetzt die Kämpferreaktion R ergibt.

Die Reaktionen R und R' lassen sich je in eine vertikale und eine nach der geneigten Kämpferlinie AB gerichtete Komponente zerlegen.

Zu diesem Zweck zieht man im Kräfteplan die Parallele SD zu AB. Es sind dann AD und BD die vertikalen, DS und SD die nach AB bzw. BA gerichteten Komponenten von R und R' .

Die Verbindungslinie PD (Abb. 2) ergibt sich dann parallel zur »Schlusslinie« des Seilpolygons Abb. 1.

Will man die vertikalen und horizontalen Komponenten von R und R' , so zieht man durch S (Abb. 2) die Horizontale SD'. Es sind dann AD', BD' und SD' die gewünschten Komponenten.

Bei gleichhohen Kämpfergelenken fallen D und D' zusammen und es ist SD der Horizontalschub H des Gewölbes.

Ihm entspricht bei ungleich hohen Kämpfern die nach der Verbindungslinie der Kämpfergelenke gerichtete, also geneigte Reaktion $SD = \xi$.

3. Einzeichnung der Drucklinie.

Unter der Drucklinie versteht man die Verbindungslinie der Angriffspunkte der resultierenden Fugendrucke.

Nachdem die Druckkraft im Scheitelgelenk nach Richtung

und Grösse bekannt ist, hat es keine Schwierigkeit, die einzelnen Fugendrucke zu finden.]

Es bieten sich hierfür zwei Wege: ein unmittelbarer, bei dem der resultierende Fugendruck für jede beliebige Fuge unmittelbar bestimmt wird und ein mittelbarer, bei dem der Fugendruck für jede folgende Fuge sich aus dem der vorhergehenden ergibt.

Im ersten Fall hat man, um den resultierenden Fugendruck für jede beliebige Fuge, z. B. Fuge IV, Abb. 1 u. 1 a, zu erhalten, die Resultierende der Lasten 1 bis 4 zu bestimmen. Ihre Lage ergibt sich aus dem Seilpolygon, ihre Grösse aus dem Kräfteplan. Durch Zusammensetzung mit der Scheitelkraft erhält man den resultierenden Druck auf Fuge IV, welcher nach Grösse und Richtung durch die Kraftlinie S IV des Kräfteplans dargestellt wird.

In analoger Weise werden sämtliche Fugendrucke bestimmt.

Die Verbindungslinie der Angriffspunkte sämtlicher Fugendrucke gibt die »Drucklinie« des Gewölbes für die in Frage stehende Belastung.

Die zweite Methode für die Konstruktion der Drucklinie besteht darin, dass die Scheitelkraft zunächst mit der Last 1 zusammengesetzt wird, um den Fugendruck für Fuge I zu erhalten; dieser wird mit Last 2 kombiniert und ergibt den Fugendruck II, der letztere setzt sich mit Last 3 zusammen zum Fugendruck III u. s. f.

Man zieht somit durch den Schnitt von CS (Abb. 1 a) mit Last 1 die Parallele zu S I (Abb. 2) bis zum Schnitt mit Kraftlinie 2 (Abb. 1 a), durch diesen die Parallele zu S II bis zum Schnitt mit Kraftlinie 3 usw. Die Schnittpunkte des so erhaltenen Polygons mit den Fugenquerschnitten I, II, III . . . geben die Angriffspunkte der Fugendrucke, und deren Verbindungslinie ist die Drucklinie.

Bei unendlich schmaler Lamellentheilung würde diese Drucklinie mit dem vorgenannten Polygon zusammenfallen.

Man erhält somit bei dieser Methode jeden folgenden Punkt aus dem vorhergehenden und muss bei genauer Zeichnung schliesslich im Kämpfergelenk ankommen.

Um nun die aus Eigengewicht und Verkehrslast resultierenden Randspannungen des Gewölbes möglichst nieder zu halten, ist es angezeigt, diese soeben für Eigengewicht erhaltene Drucklinie nunmehr bis auf weiteres als Mittellinie des Gewölbes zu nehmen.

Es wird also dementsprechend die ursprüngliche Gewölbeform abgeändert. Sofern die Abweichung der ursprünglich angenommenen Gewölbeform von der neu erhaltenen eine erhebliche ist, bedarf es wegen der Änderungen der Eigenlast einer nochmaligen Gewichtsrechnung und erneuten Konstruktion der Drucklinie. Eine weitere (3^{te}) Korrektur ist im allgemeinen nicht notwendig; die 2^{te} Korrektur besitzt fast immer hinreichende Genauigkeit.

B. Analytische Methode.

1. Berechnung der Ordinaten der Drucklinie für Eigengewicht.

a) Bei gleichhohen Kämpfergelenken. (Abb. 3.)

Es handelt sich hierbei für jeden Fugenquerschnitt um die Bestimmung desjenigen Punktes, in welchem die resultierende Fugenkraft angreift.

Abb. 3.

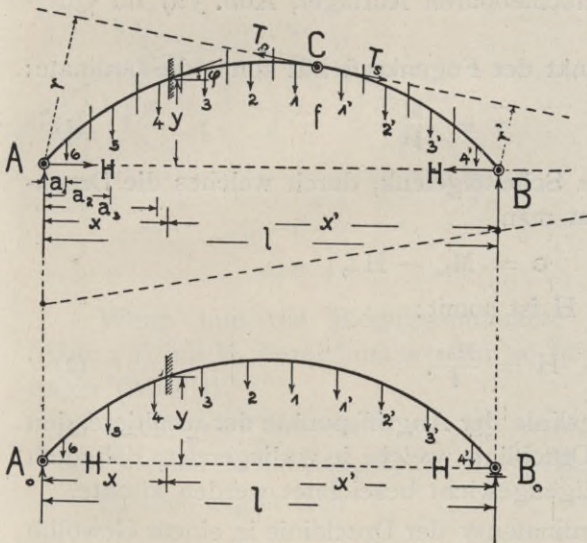
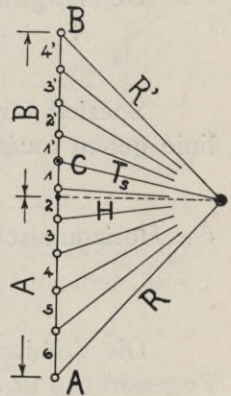


Abb. 3 a.

Abb. 3 b.



Diese resultierende Fugenkraft ist nach Größe und Richtung gegeben als Resultierende sämtlicher Kräfte, welche vom Gewölbeanfang bis zu dem in Frage stehenden Querschnitt auf das Gewölbe einwirken.

Ersetzt man nun das gleichförmig verteilte Eigengewicht durch eine Anzahl Einzellasten, indem man das Gewölbe durch Vertikalebene in Lamellen teilt und sich die Gewichte derselben, Q , je im Schwerpunkt oder auch einfach in der Mitte der Lamellen konzentriert denkt, so wirken auf das Gewölbe

vom Kämpfergelenk bis zum Querschnitt x der Auflagerdruck A , Horizontalschub H und die Lasten Q . Die Resultierende von A , H und $\sum_0^x Q$ gibt die resultierende Fugenkraft. In bezug auf ihren Angriffspunkt in der Fuge bei x , welche zweckmässigerweise vertikal angenommen wird, hat diese Fugenkraft das Moment 0 . Es ist somit:

$$M_x = A x - \sum_0^x Q (x - a) - H y = 0$$

oder auch

$$M_x = M_0 - H y = 0.$$

Hierbei bedeutet $M_0 = A x - \sum_0^x Q (x - a)$ das statische Moment aller äusseren Kräfte ohne H links des Querschnittes x in bezug auf diesen Querschnitt, stellt also das Biegemoment des bogenförmigen Balkens $A-B$ (mit einem festen und einem horizontal verschiebbaren Auflager, Abb. 3 a) im Querschnitt x vor.

Der Angriffspunkt der Fugenkraft hat somit die Ordinate:

$$y = \frac{M_0}{H}. \quad (1)$$

Speziell für das Scheitelgelenk, durch welches die Drucklinie gehen muss, hat man

$$0 = M_{0s} - H f,$$

der Horizontalschub H ist somit:

$$H = \frac{M_{0s}}{f}. \quad (2)$$

Die Verbindungslinie der Angriffspunkte der resultierenden Fugendrucke ist die Drucklinie, welche in vorliegendem Fall auch als Kettenlinie für Eigengewicht bezeichnet werden könnte.

Um also die Ordinaten y der Drucklinie in einem Gewölbe zu bestimmen, hat man nur die Biegemomente M_0 für den dem gegebenen Bogenträger (Abb. 3) entsprechenden Balkenträger (Abb. 3 a) zu bestimmen und durch den aus Gleichung (2) sich ergebenden Horizontalschub H zu dividieren.

b) Bei ungleich hohen Kämpfergelenken. (Abb. 4 u. 4 a.)

Die Reaktionen R und R' (Abb. 4) lassen sich entweder in die Vertikal- und Horizontalkomponenten A , B und H zerlegen, oder auch in die Komponenten \mathfrak{A} , \mathfrak{B} und \mathfrak{H} , wobei \mathfrak{H} die Richtung der Verbindungslinie der Kämpfergelenke besitzt, und \mathfrak{A}

Reaktionen im Kämpfer durch Zusammensetzung der Vertikalreaktionen:

$$\mathfrak{A} = \frac{I}{1} \sum_0^I Q a'; \quad \mathfrak{B} = \frac{I}{1} \sum_0^I Q a$$

mit der Horizontalreaktion \mathfrak{S} .

Die Grösze und Richtung der im Scheitelgelenk C übertragenen Druckkraft T_s ergibt sich aus den Drehmomentengleichungen um die beiden Kämpfergelenke für die linke, mit I, und die rechte, mit II bezeichnete Bogenhälfte, wobei wiederum die Einzellasten des Gewölbes mit Q , und ihre Abszissen gegen den linken und den rechten Kämpfer mit a bzw. a' bezeichnet werden.

Man erhält (vergl. Abb. 4)

$$\begin{array}{r|l} \sum^I Q a - T_s r = 0 & r' \\ \sum^{II} Q a' - T_s r' = 0 & -r \\ \hline r' \sum^I Q a - r \sum^{II} Q a' = 0 & \end{array}$$

hieraus
$$\frac{r}{r'} = \frac{\sum^I Q a}{\sum^{II} Q a'} \quad (6)$$

womit die Richtung von T_s bestimmt ist;

ferner
$$r' \sum^I Q a + r \sum^{II} Q a' - 2 T_s r r' = 0$$

hieraus
$$T_s = \frac{I}{2r} \sum^I Q a + \frac{I}{2r'} \sum^{II} Q a' \quad (7)$$

womit die Grösze von T_s bestimmt ist.

c) Zahlenmässige Berechnung von M_0 .

Die Berechnung der Biegemomente M_0 des Bogens (Abb. 4 a) geschieht am einfachsten mit Hilfe der Vertikalkräfte, denn es besteht bekanntlich zwischen den Momenten in zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten n und $n + i$, deren Abstand λ beträgt, die Beziehung

$$M_{n+1} = M_n + V_n \lambda,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass zwischen beiden Querschnitten keine Einzellasten liegen.

Für Abb. 4 a hat man nun als Vertikalkräfte in den Endquerschnitten der Bogenlamellen, d. h. in den Querschnitten zwischen den Lastangriffspunkten:

$$\begin{array}{l|l}
 V_{VI} = A_0 = \frac{1}{l} \sum_0^1 Q a' & \\
 V_V = V_{VI} - Q_6 & V_{I'} = V_0 - Q_{1'} \\
 V_{IV} = V_V - Q_5 & V_{II'} = V_{I'} - Q_{2'} \\
 V_{III} = V_{IV} - Q_4 & V_{III'} = V_{II'} - Q_{3'} \\
 V_{II} = V_{III} - Q_3 & V_{IV'} = V_{III'} - Q_{4'} = -B = -\frac{1}{l} \sum_0^1 Q a \\
 V_I = V_{II} - Q_2 & \\
 V_0 = V_I - Q_1 &
 \end{array} \quad (8)$$

und als Biegemomente in den mit deutschen Ziffern bezeichneten Querschnitten, d. h. in den Querschnitten der Lastangriffspunkte:

$$\begin{array}{l|l}
 M_6 = A_0 \cdot \lambda_6 & M_{1'} = M_1 + V_0 \lambda_0 \\
 M_5 = M_6 + V_V \lambda_5 & M_{2'} = M_{1'} + V_{I'} \lambda_{1'} \\
 M_4 = M_5 + V_{IV} \lambda_4 & M_{3'} = M_{2'} + V_{II'} \lambda_{2'} \\
 M_3 = M_4 + V_{III} \lambda_3 & M_{4'} = M_{3'} + V_{III'} \lambda_{3'} \\
 M_2 = M_3 + V_{II} \lambda_2 & M_{IV'} = M_{4'} + V_{IV'} \lambda_{4'} = 0 \\
 M_1 = M_2 + V_I \lambda_1 &
 \end{array} \quad (9)$$

Diese Momente stimmen mit den genauen, der gleichmässig verteilten Last entsprechenden Momenten nicht ganz überein, und zwar um so weniger, je grösser bei der Bogeneinteilung die Lamellen gemacht werden. Doch ist zu bemerken, dass in praktischen Fällen diese Differenz meist vernachlässigt werden kann, selbst wenn die Lamellen ziemlich gross gemacht werden, also etwa bis zu 2,50^m bei einem Bogen von etwa 40^m Spannweite.

Wollte man jedoch die Biegemomente trotz des Ersatzes der verteilten Lasten durch konzentrierte Lasten richtig erhalten, so müsste man sie für die mit römischen Ziffern bezeichneten Querschnitte anschreiben.

Man erhält dann, wenn die Vertikalkraft unmittelbar nach der Last Q_n mit V_n bezeichnet wird und wenn der Schwerpunkt der Lamellen in ihrer Mitte angenommen wird (vergl. Abb. 4 u. 4 a):

$$\begin{aligned}
 M_{VI} &= 0 \\
 M_V &= 0 + A_0 \lambda_{VI} - Q_6 \frac{\lambda_{VI}}{2} \\
 M_{IV} &= M_V + V_V \lambda_V - Q_5 \frac{\lambda_V}{2} \\
 M_{III} &= M_{IV} + V_{IV} \lambda_{IV} - Q_4 \frac{\lambda_{IV}}{2} \\
 M_{II} &= M_{III} + V_{III} \lambda_{III} - Q_3 \frac{\lambda_{III}}{2} \\
 M_{I'} &= M_{II} + V_{II} \lambda_{II} - Q_2 \frac{\lambda_{II}}{2} \\
 M_0 &= M_{I'} + V_I \lambda_I - Q_1 \frac{\lambda_I}{2} = M_{0s}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{I'} &= M_0 + V_0 \lambda_{I'} - Q_{I'} \frac{\lambda_{I'}}{2} \\
 M_{II'} &= M_{I'} + V_{I'} \lambda_{II'} - Q_{2'} \frac{\lambda_{II'}}{2} \\
 M_{III'} &= M_{II'} + V_{II'} \lambda_{III'} - Q_{3'} \frac{\lambda_{III'}}{2} \\
 M_{IV'} &= M_{III'} + V_{III'} \lambda_{IV'} - Q_{4'} \frac{\lambda_{IV'}}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Aus diesen Momenten erhält man den Horizontalschub H sowie die Ordinaten y der Drucklinie nach Gl. (2) u. (4) bzw. (1) u. (5).

Die ursprünglich willkürlich angenommene Bogenachse wird nun durch die gefundene Drucklinie ersetzt. Ist die Abweichung erheblich, so ist es notwendig, wegen der Änderungen des Eigengewichts die Rechnung zu wiederholen.

2. Fugendrucke für Eigengewicht.

Nachdem in Ziff. 1 die Form des Bogens entsprechend der Drucklinie für Eigengewicht und unter dem Vorbehalt späterer kleinerer Änderungen bestimmt wurde, handelt es sich nun um die Bestimmung der Fugendrucke und der Beanspruchung durch Eigengewicht.

Diese Aufgabe kann analytisch oder graphisch gelöst werden, doch ist die graphische Behandlung bei weitem vorzuziehen.

a) Analytische Behandlung.

Im allgemeinsten Fall, d. h. bei beliebiger Bogenachse, welche noch nicht der Drucklinie für Eigengewicht zu entsprechen

Abb. 5.

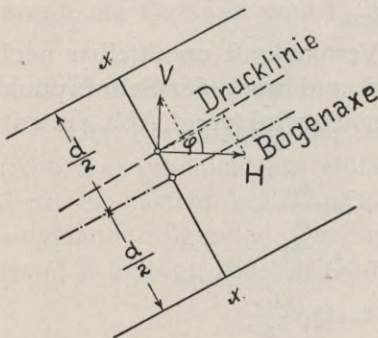
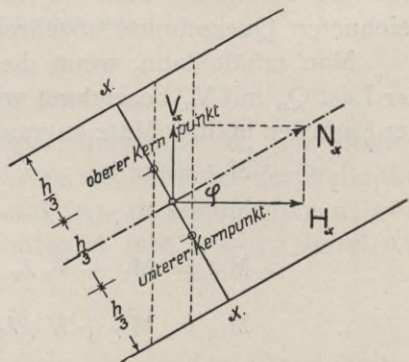


Abb. 6.



braucht, hat man im beliebigen Querschnitt x als vom linken Bogenteil auf den rechten einwirkend

$$\begin{aligned}
 \text{eine Vertikalkraft } V_x &= A - \sum_0^x Q \text{ (vergl. Abb. 3 u. 4),} \\
 \text{„ Horizontalkraft } H_x &= H.
 \end{aligned}$$

Hat die Bogenachse an dieser Stelle die Horizontalneigung φ , und zerlegt man V_x und H_x in Komponenten normal und tangential zum Fugenquerschnitt, so ergibt sich (Abb. 5):

$$\begin{aligned} N_x &= V_x \sin \varphi + H_x \cos \varphi \\ T_x &= V_x \cos \varphi - H_x \sin \varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

In dem in Ziff. I behandelten speziellen Fall dagegen, wo die Bogenachse identisch mit der Drucklinie für Eigengewicht ist, fällt die Richtung von N_x mit der Bogenachse zusammen; es ist

$$\begin{aligned} \frac{V_x}{H_x} &= \operatorname{tg} \varphi \quad (\text{Abb. 6}) \\ N_x &= \frac{H}{\cos \varphi} \\ T_x &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

b) Graphische Bestimmung der Fugendrucke.

Auch wenn H und y analytisch berechnet wurden, empfiehlt sich die graphische Bestimmung der Normal-Fugendrucke, da sie erheblich einfacher ist als die analytische und von durchaus genügender Genauigkeit.

Zu diesem Zweck wird aus den Lasten Q , den Auflagerreaktionen A_0 , B_0 und dem nach Gl. (2) bzw. (3) berechneten Horizontalschub \mathfrak{H} nach Abb. 7 ein Kräfteplan konstruiert.

Die Strahlen desselben geben unmittelbar die Fugendrucke nach Grösze und Richtung.

Der Strahl SC entspricht der Reaktion im Scheitelgelenk und muss mit dem aus Gl. (6) und (7) berechneten Wert übereinstimmen.

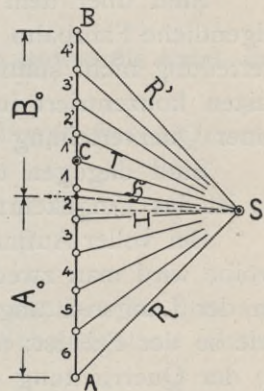
Bei gleich hohen Kämpfern tritt eine Vereinfachung insofern ein, als H mit \mathfrak{H} zusammenfällt und horizontal ist. Ist auch die Lastverteilung zum Scheitelgelenk symmetrisch, so ist auch die Scheitelreaktion T_s identisch mit H .

Greifen die Fugendrucke im Schwerpunkt des Fugenquerschnitts an, so findet eine gleichmässige Druckverteilung statt und es entsteht eine Fugenpressung;

$$\sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F}, \quad (12)$$

wobei F die Fläche des zur Bogenachse normalen Querschnitts und \mathfrak{N} Normalkomponente der Fugenkraft für Eigengewicht ist.

Abb. 7.



II. Einfluss der Verkehrslast.

A. Graphisch-analytisch.

3. Druckverteilung der Radlasten.

Nachdem die Stützlinie für Eigengewicht festgelegt ist und die Fugendrucke \mathfrak{N} bestimmt sind, handelt es sich um die Berechnung des Einflusses der Verkehrslast.

Die Verkehrslast kann aus Einzellasten (Radlasten) bestehen oder gleichmässig verteilt sein.

Bei Radlasten ist zunächst deren Druckverteilung auf das Gewölbe zu bestimmen. Eine solche findet sowohl in der Längsrichtung als auch in der Querrichtung statt, und zwar verteilt sich der Raddruck auf eine um so grössere Fläche des Gewölbes, je höher die Fahrbahn über dem Gewölbe liegt.

Als Druckverteilungswinkel wird meist 60° angenommen.

Sind über dem Gewölbe Querwände als Stützen für die eigentliche Fahrbahn, so kann in der Längsrichtung eine Druckverteilung nicht stattfinden, sondern es übertragen sich die Radlasten konzentriert in diesen Wänden und man hat nur mit einer Querverteilung zu rechnen.

Sind dagegen über dem Gewölbe einzelne Längswände, so ist das Umgekehrte der Fall.

Bei voller Aufmauerung oder Aufschüttung über dem Gewölbe wird man zweckmässigerweise von einer Druckverteilung in der Längsrichtung absehen, wie dies bei Querwänden so wie so der Fall ist; man rechnet dadurch etwas zu ungünstig; in der Querrichtung wird man die Druckverteilung vornehmen und dann die Last auf einen Gewölbestreifen von 1^m Breite reduzieren.

Man erhält dadurch die der weiteren Berechnung zugrunde zu legenden »reduzierten Radlasten«, welche für jeden Gewölbequerschnitt verschieden sind.

Im Fall von Längswänden wird das Gewölbe nicht für einen Streifen von 1^m Breite berechnet, sondern es wird der Berechnungsstreifen der Teilung der Längswände angepasst. Eine Verteilung des Raddrucks in der Längsrichtung erscheint in diesem Fall angezeigt, wenn man nicht der Vereinfachung der Rechnung halber die ungünstige Annahme der konzentrierten Radeinwirkung auch hier machen will.

Für die gleichmässig verteilte Nutzlast*) ist die Berechnung insofern bestimmter, als in der Verteilung der Last eine Unsicherheit nicht vorhanden ist.

Meist wird diese gleichmässig verteilte Last nur auf dem von der Dampfwalze frei bleibenden Raum angenommen. Dies kompliziert jedoch die Berechnung der Momente aus den Einflussflächen, wie sich später zeigen wird. Da es nun andererseits angezeigt erscheint, auch die Stosswirkungen der in Bewegung befindlichen Radlast, insbesondere sofern es sich um eine Dampfwalze handelt, in irgend einer Weise zu berücksichtigen, so kann dies in der Weise geschehen, dass die gleichmässig verteilte Belastung ohne Abzug der Dampfwalzfläche bis zur Belastungsscheide durchgerechnet wird und dann noch der einfache Raddruck, also ohne Zuschlag für Stosswirkung, in Rechnung gezogen wird.

Der Einfluss der Stosswirkung ist also dadurch berücksichtigt, dass der von der Dampfwalze eingenommene Raum zugleich auch durch die gleichmässig verteilte Verkehrslast belastet ist.

4. Einflusslinien für den Horizontalschub, sowie die Axial- und Kernpunktmomente.

1. Eine Einzellast P, welche den Bogen bei Abszisse a angreift, ergibt die Auflagerdrücke

$$A_0 = \frac{a'}{l} P$$

$$B_0 = \frac{a}{l} P$$

und einen Horizontalschub \mathfrak{H} (in Richtung A—B), den man durch eine Momentengleichung um das Scheitelgelenk erhält:

$$\mathfrak{H} f \cos \alpha = B_0 q = \frac{a}{l} q$$

oder: $\mathfrak{H} \cos \alpha = H = \frac{a q}{lf}$ gültig für P auf der linken Bogenhälfte

bezw. $H = \frac{a' p}{lf}$ „ „ „ „ „ rechten „

Trägt man den Wert von H von einer Horizontalen aus als Ordinate zur jeweiligen Abszisse a auf, so gibt die Verbindungslinie der Endpunkte die »Einflusslinie« für den Horizontalschub H.

Diese ist eine gebrochene Linie. Der Bruchpunkt liegt unter dem Scheitelgelenk und hat die Ordinate $\frac{pq}{lf}$, speziell bei symmetrischer Bogenform und gleich hohen Kämpfern: $\frac{1}{4f}$.

*) Menschengedränge.

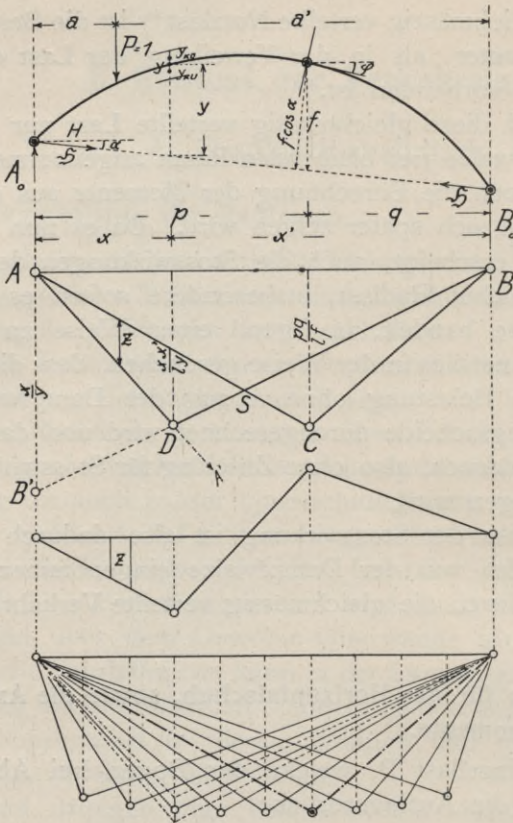


Abb. 8.

Abb. 8 a.

Abb. 8 b.

Abb. 9.

2. Das Biegemoment M_x im Querschnitt x, y des mit $P = 1$ bei a, b belasteten Bogens ist, sofern das entsprechende Moment beim Bogen ohne Scheitelgelenk und mit einem festen und einem horizontal beweglichen Auflager (also beim Balken AB , Abb. 4 a) mit M_0 bezeichnet wird:

$$M_x = M_0 - \mathfrak{S} y \cos \alpha = M_0 - Hy$$

und kann auch in der Form

$$M_x = y \left[\frac{M_0}{y} - H \right]$$

geschrieben werden.

Anstatt die Einflusslinie für M_x aufzuzeichnen, ist es zweckmässiger, die für $\frac{M_0}{y} - H$ zu benutzen.

Nun ist der Wert M_0 im Querschnitt x, y des Bogens für eine Einzellast $P = 1$ bei a, b ausgedrückt durch

$$M_0 = A_0 x = \frac{a'}{1} x \quad \text{für } a > x$$

$$\text{bzw. } M_0 = B_0 x' = \frac{\hat{a}}{1} x' \quad \text{,, } a < x.$$

(13)

Da diese Gleichungen in a bzw. a' linear sind, ist die Linie für M_0 eine einfach gebrochene Linie mit der Ordinate des Brechpunkts $\frac{x x'}{1}$ [aus $\frac{a' x}{1}$ mit $a' = x'$ bzw. aus $\frac{a x'}{1}$ mit $a = x$].

Die Einflusslinie für $\frac{M_0}{y}$ ist somit eine einfach gebrochene Linie, deren Brechpunkt die Ordinate $\frac{x x'}{1 y}$ besitzt. Sie ist in Abb. 8 a mit ADB bezeichnet.

3. Die Ordinaten der Einflusslinie für $\frac{M_0}{y} - H$ sind somit in Abb. 8 a durch die Differenz z der Ordinaten der Linienzüge ADB und ACB dargestellt.

Diese Differenz ist links des Schnittes S positiv, rechts negativ. In Abb. 8 b sind die Werte von $\frac{M_0}{y} - H$ von einer Horizontalen aus aufgetragen. Die Ordinaten der Brechpunkte sind dann $\frac{x}{1} \left[\frac{x'}{y} - \frac{q}{f} \right]$ bzw. $\frac{q}{1} \left[\frac{x}{y} - \frac{p}{f} \right]$ und speziell bei symmetrischer Bogenform und gleich hohen Kämpfern:

$$\frac{x}{1} \left[\frac{x'}{y} - \frac{1}{2f} \right] \text{ bzw. } \frac{1}{2} \left[\frac{x}{y} - \frac{1}{2f} \right].$$

Der Punkt D des Linienzugs ADB (Abb. 8 a) kann anstatt durch Berechnung seiner Ordinate $\frac{x x'}{1 y}$ auch als Schnitt der Geraden AA' und BB' gefunden werden, wobei

$$AB' = \frac{x}{y}; \quad BA' = \frac{x'}{y}$$

ist.

4. Die von den Linienzügen ADB und ACB eingeschlossene Fläche heisst Einflussfläche. Sie ist links von S positiv, rechts negativ. Man braucht sie, sobald gleichmässig verteilte Lasten vorhanden sind, denn für eine Belastung u ^{t/m} hat man, sofern man sich dieselbe in unendlich viele unendlich kleine Einzellasten $u da$ zerlegt denkt, als Beitrag zum Moment des Dreigelenkbogens im Querschnitt x, y

$$M_x = y \left[\int u da \cdot z \right] = y \left[\int u \cdot z da \right] = y \cdot F \cdot u^{mt}$$

wobei $\int z da = F$ die Einflussfläche unter der gleichmässig verteilten Last vorstellt.

5. Es ist selbstverständlich, dass man bei der Darstellung nach Abb. 8 a die Einflusslinien für die Grössen $\frac{M_x}{y} = \frac{M_0}{y} - H$ für beliebig viele Querschnitte in eine Figur zusammennehmen kann.

Man erhält dann das Bild der Abb. 9.

Die Brechpunkte D liegen auf einer durch eine mathem. Gleichung ausdrückbaren Kurve, sofern die Bogenachse ebenfalls eine mathematisch bestimmte Form hat.

Ist z. B. die Bogenachse eine Parabel, so ist speziell bei symmetrischer Bogenform deren Gleichung

$$y = \frac{4f}{l^2} x (l - x) = \frac{4f}{l^2} x x'.$$

Für den Punkt D der Einflusslinie hat man somit als Ordinate

$$y = \frac{x x'}{ly}$$

oder, wenn für $x x'$ der Wert $\frac{y \cdot l^2}{4f}$ aus der Parabelgleichung eingesetzt wird:

$$y = \frac{l}{4f},$$

d. h. die Punkte D liegen auf einer horizontalen Geraden.

6. Nach dem seither Gesagten lässt sich, sobald die Einflusslinien für $\frac{M_0}{y}$ und H aufgezeichnet sind, das Moment des Dreigelenkbogens im Querschnitt x, y für jede beliebige Belastung durch Multiplikation der Einzellasten mit den entsprechenden Ordinaten z , Addition der Produkte und schliesslich noch Multiplikation mit der Ordinate y des fraglichen Querschnitts bestimmen.

Für die Berechnung der Randspannungen werden jedoch statt dieser Axialmomente M_x besser die Kernpunktsmomente M_k verwendet, daher:

7. Einflusslinie für die Kernpunktsmomente.

Um diese zu erhalten, braucht man in dem Ausdruck $\frac{x x'}{ly}$ statt der Ordinate y der Bogenachse nur die Ordinate y_{k_0} des oberen, bzw. y_{k_u} des unteren Kernpunkts des Querschnitts einzusetzen (bezüglich der Kernpunkte vergl. Seite 23). Dabei ist es zweckmässig, die Fugenquerschnitte nicht radial, sondern

vertikal anzunehmen (Abb. 8). Die Kernpunkte y_{ko} und y_{ku} entsprechen dann zwei benachbarten Normalfugen, was für die praktische Berechnung natürlich ohne Belang ist.

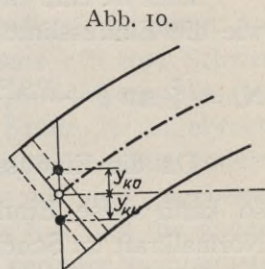
Auf diese Weise werden die Einflusslinien der Kernpunktsmomente für sämtliche Bogenquerschnitte bestimmt und es ist ratsam, statt der Axialmomente zur Berechnung der Randspannungen stets nur die Kernpunktsmomente zu benützen, da diese erheblich leichter und schneller zum Ziel führen als jene.

Allerdings muss bezüglich der Bogenstärke im Bogenviertel, wo man zuerst dimensionieren wird, zunächst eine Annahme gemacht werden, um die Ordinaten der Kernpunkte bestimmen zu können; die erste Wiederholung des Verfahrens wird aber bereits zum endgültigen Querschnitt führen.

8. Einflusslinien zur Berechnung der Kämpfer- und Scheitelquerschnitte.

In den Kämpfer- und Scheitelquerschnitten, wobei unter letzteren bei unsymmetrischer Bogenform die Querschnitte beim Scheitलगelenk verstanden sind, wirken keine Axialmomente, sondern nur Druckkräfte, die im Gelenk angreifen.

Andererseits können natürlich trotzdem Kernpunktsmomente aufgestellt werden und es ist mindestens bei den Kämpferfugen sehr zweckmässig, diese zur Berechnung der Fugenpressungen zu benützen (Abb. 10).



Projiziert man also die Kernpunkte des eigentlichen Kämpferquerschnitts in Richtung der Bogenachse auf die Vertikale durch den Kämpfer, d. h. rechnet man tatsächlich mit den beiden dem Kämpfer unmittelbar benachbarten Querschnitten, so ergibt sich aus

$$M_k = y_k \left[\frac{M_0}{y_k} - H \right]$$

wegen

$$M_0 = 0:$$

$$M_k = -y_k \cdot H,$$

d. h. der Punkt D in Abb. 8 a fällt mit A zusammen und es können die Momente M_k aus der Einflusslinie für H berechnet werden. Für den unteren Kernpunkt ist y_k negativ, die Momente M_k werden also positiv, d. h. es entstehen am oberen Fugenrand Druckspannungen; für den oberen Kernpunkt ist y_k positiv, d. h. die zur Berechnung der Fugenpressung am unteren

Bogenrand dienenden, im Uhrzeigersinn wirkenden Momente M_k werden negativ, d. h. die Randpressung wieder positiv und zwar gleich groß wie vorher.

Im Querschnitt durch das Scheitelgelenk wirkt eine Vertikalkraft V und eine Horizontalkraft H , die beide leicht berechnet und zu einer Resultierenden zusammengesetzt werden können, deren auf der Fuge normal stehende Komponente für die Fugenpressung maßgebend ist.

Man kann aber auch auf die Einflusslinie für diese Normalkomponente selbst abzielen und hat dann für eine Einzellast $P = 1$ bei Abszisse a (Abb. 8) auf der linken Bogenhälfte:

$$N_s = B_0 \sin \varphi + \mathfrak{S} \cos (\varphi - \alpha)$$

oder mit
$$B_0 = \frac{a}{l}; \quad \mathfrak{S} = \frac{a q}{l f \cos \alpha}$$

$$N_s = \frac{a}{l} \sin \varphi + \frac{a q \cos (\varphi - \alpha)}{l f \cos \alpha}. \quad (17)$$

Dies ist eine einfach gebrochene Linie, von derselben Form wie die Einflusslinie für H , mit der Scheitelordinate

$$N_s = \frac{P}{l} \sin \varphi + \frac{P q \cos (\varphi - \alpha)}{l f \cos \alpha} = \frac{P q}{l f} \left[\frac{f}{q} \sin \varphi + \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha} \right] \quad (18)$$

Da die Einflusslinie für \mathfrak{S} die Scheitelordinate $\frac{P q}{l f}$ hatte, so kann diese Einflusslinie zugleich als Einflusslinie für die Normalkraft im Scheitelquerschnitt benützt werden; man braucht das Resultat nur mit dem Faktor

$$\frac{f}{q} \sin \varphi + \frac{\cos (\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$$

zu multiplizieren.

Speziell bei gleichhohen Kämpfern und symmetrischer Bogenform ist wegen $\varphi = \alpha = 0$ dieser Faktor gleich 1, d. h. die Normalkraft im Scheitel ist gleich dem Horizontalschub.

5. Die Berechnung der Randspannungen aus Axial- und Kernpunktmoment.

Von den Kernpunktmomenten zur Berechnung der Randspannungen ist in den vorhergehenden Abschnitten bereits Gebrauch gemacht. Der Vollständigkeit halber seien die Formeln hier abgeleitet.

a) *Randspannungen bei beliebigem exzentrisch belastetem Querschnitt mit vertikaler Symmetrieachse.*

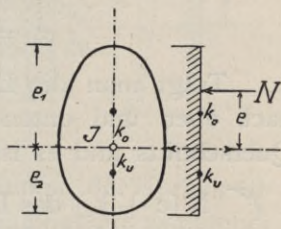
Der aus Abb. 11 ersichtliche Querschnitt habe die Fläche F und das, auf die horizontale Schwerpunktsachse bezogene Trägheitsmoment J .

Wird dieser Querschnitt nur durch ein Biegemoment M beansprucht, so sind die Randspannungen

$$\text{oben:} \quad \sigma_o = \frac{M \cdot e_1}{J}$$

$$\text{unten:} \quad \sigma_u = \frac{M \cdot e_2}{J}$$

Abb. 11.



Bezeichnet man die nur vom Querschnitt abhängige Grösse $\frac{J}{e_1}$ mit W_1 (Widerstandsmoment)

und $\frac{J}{e_2}$ „ W_2 ,

so ist $\sigma_o = \frac{M}{W_1}$; $\sigma_u = \frac{M}{W_2}$.

Wirkt auf den Querschnitt die Normalkraft N , deren Angriffspunkt in der vertikalen Symmetrieebene e^{cm} vom Schwerpunkt S entfernt liegt, so kann man sich im Schwerpunkt zwei gleiche und entgegengesetzt gerichtete Kräfte N angebracht denken, welche am Gleichgewicht des Systems nichts ändern.

Die eine dieser Kräfte bildet aber mit der gegebenen Kraft N ein Kräftepaar vom Moment $M = Ne$, und die andere wirkt zentrisch, ergibt somit gleichmässig verteilte Spannungen.

Die Wirkung einer exzentrischen Kraft N ist also identisch mit der gleichzeitigen Wirkung einer zentrischen Kraft N und eines Moments $M = Ne$.

Für die Randspannungen hat man somit

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{N}{F} + \frac{Ne}{W_1} & \sigma_o &= \frac{N}{F} + \frac{M}{W_1} \\ \sigma_u &= \frac{N}{F} - \frac{Ne}{W_2} & \sigma_u &= \frac{N}{F} - \frac{M}{W_2} \end{aligned} \quad (21) \text{ oder allgemein} \quad (22)$$

Diese Gleichungen können auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{N \cdot \frac{W_1}{F}}{W_1} + \frac{N \cdot e}{W_1} = \frac{N \left(e + \frac{W_1}{F} \right)}{W_1} \quad (\text{Druckspannung}), \\ \sigma_u &= \frac{N \cdot \frac{W_2}{F}}{W_2} - \frac{N \cdot e}{W_2} = \frac{N \left(\frac{W_2}{F} - e \right)}{W_2} \quad (\text{Druckspannung}). \end{aligned}$$

$\frac{W}{F}$ hat aber die Dimension $\frac{\text{cm}^3}{\text{cm}^2}$, stellt also eine Länge vor und wird mit k bezeichnet. Somit ergibt sich mit

$$k_u = \frac{W_1}{F}; \quad k_o = \frac{W_2}{F} \quad (23)$$

$$\sigma_o = \frac{N(e + k_u)}{W_1}$$

$$\sigma_u = \frac{N(k_o - e)}{W_2}.$$

Trägt man die Längen k_o und k_u vom Schwerpunkt aus nach oben und unten ab, so erhält man die Kernpunkte des Querschnitts und es ist

↗ $N(e + k_u)$ das Drehmoment der Fugenkraft in bezug auf den unteren Kernpunkt,

↙ $N(k_o - e)$ das Drehmoment der Fugenkraft in bezug auf den oberen Kernpunkt.

Werden diese Momente mit ↗ M_{k_u} bzw. ↙ M_{k_o} bezeichnet, so sind die Randspannungen ausgedrückt durch

$$\sigma_o = \frac{\text{↗ } M_{k_u}}{W_1} \text{ (Druckspannung am oberen Fugenrand),} \quad (24)$$

$$\sigma_u = \frac{\text{↙ } M_{k_o}}{W_2} \text{ (Druckspannung am unteren Fugenrand).}$$

b) *Bestimmung der Randspannungen bei rechteckigem Querschnitt aus Fugenkraft und Exzentrizität.*

aa) *Analytische Bestimmung.*

Für rechteckigen Fugenquerschnitt von der Breite b und Höhe h ist

$$W_1 = W_2 = W = \frac{bh^2}{6} \text{ (Widerstandsmoment),}$$

$$F = bh;$$

daher

$$k_o = k_u = \frac{W}{F} = \frac{h}{6}, \text{ und nach Gl. (21):}$$

$$\sigma_o = \frac{N}{bh} + \frac{Ne}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{N}{bh} \left(1 + \frac{6e}{h} \right) \quad (25)$$

(Druckspannung am oberen Fugenrand),

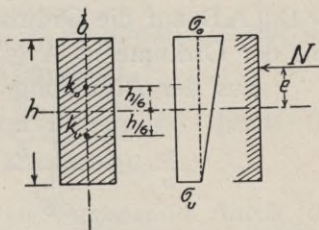
$$\sigma_u = \frac{N}{bh} - \frac{Ne}{\frac{bh^2}{6}} = \frac{N}{bh} \left(1 - \frac{6e}{h} \right)$$

(Druckspannung am unteren Fugenrand).

Anstatt von den Formeln für reine Biegung auszugehen, können die Randspannungen bei exzentrischem Druck auch unmittelbar bestimmt werden.

Wenn der Angriffspunkt von N in der Nähe des oberen Fugenrandes liegt, so wird jedenfalls $\sigma_o > \sigma_u$ werden. Macht man nun die Annahme, dass der Übergang von σ_o nach σ_u linear ist, so erhält man die in Abb. 12 gezeichnete Syannungsverteilung.

Abb. 12.



Das Gleichgewicht erfordert, dass die Summe der Horizontalkräfte = 0 ist und dass die Summe der Drehmomente sämtlicher Kräfte, etwa um den unteren Fugenrand, ebenfalls 0 ist.

Man hat somit beim rechteckigen Querschnitt

$$\sigma_u \cdot b h + \frac{1}{2} (\sigma_o - \sigma_u) b h = N$$

$$\sigma_u b h \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} (\sigma_o - \sigma_u) b h \cdot \frac{2h}{3} = N \left(\frac{h}{2} + e \right)$$

oder

$$\sigma_u + \sigma_o = \frac{2N}{bh} \quad \left| \begin{array}{c} - I \\ 2 \end{array} \right.$$

$$\sigma_u + 2\sigma_o = \frac{3N}{bh} + \frac{6Ne}{bh^2} \quad \left| \begin{array}{c} I \\ - I \end{array} \right.$$

Hieraus

$$\left. \begin{aligned} \sigma_o &= \frac{N}{bh} + \frac{Ne}{bh^2} = \sigma \left(1 + \frac{6e}{h} \right) \\ \sigma_u &= \frac{N}{bh} - \frac{Ne}{bh^2} = \sigma \left(1 - \frac{6e}{h} \right) \end{aligned} \right\} \text{wie oben,} \quad (26)$$

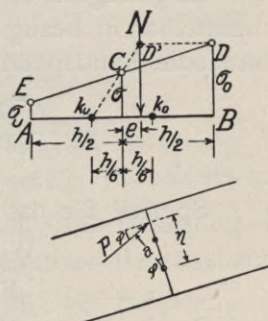
wobei $\frac{N}{bh}$ mit σ bezeichnet ist.

bb) Graphische Bestimmung.

Aus den Gl. (26) lässt sich eine graphische Konstruktion von σ_o und σ_u ableiten, wenn man sie in folgender Form schreibt:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \sigma \frac{\frac{h}{6} + e}{\frac{h}{6}} \\ \sigma_u &= \sigma \frac{\frac{h}{6} - e}{\frac{h}{6}} \end{aligned} \quad (27)$$

Abb. 13.



Man bestimmt für den Querschnitt die im Abstand $\frac{h}{6}$ vom Schwerpunkt gelegenen Kernpunkte (S. 24), trägt im Schwer-

punkt die Spannung $\sigma = \frac{N}{bh}$ auf und verbindet deren Endpunkt mit dem von N abgelegenen Kernpunkt. Der Schnitt dieser Verbindungslinie mit N gibt die Grösse von σ_0 , die man durch $D'D \parallel AB$ auf die Ordinate in B abträgt. Der Schnitt von DC mit der Ordinate in A gibt die Spannung $\sigma_u = AE$.

Aus der Abbildung erkennt man die Proportion:

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} = \frac{e + \frac{h}{6}}{\frac{h}{6}} \quad \text{oder} \quad \sigma_0 = \sigma \frac{\frac{h}{6} + e}{\frac{h}{6}}$$

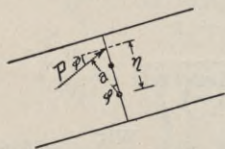
sowie

$$\frac{\sigma_0 + \sigma_u}{2} = \sigma, \text{ was den Gl. (26) entspricht.}$$

c) *Randspannungen des rechteckigen Querschnitts aus den Kernpunktsmomenten.*

Nach Gl. (24) gilt allgemein, wenn ein Querschnitt durch beliebige Kräfte angegriffen wird, welche in bezug auf die Kernpunkte k_0 und k_u die Momente M_{k_0} und M_{k_u} besitzen:

Abb. 14.



$$\sigma_0 = \frac{M_{k_u}}{W}$$

$$\sigma_u = \frac{M_{k_0}}{W_2}$$

Es ist dabei nicht notwendig, von den Kräften P zuerst die auf der Fuge senkrechten Komponenten zu bestimmen, denn nach Abb. 14 ist das Moment Pa mit $N = P \cos \varphi$ und $\eta = \frac{a}{\cos \varphi}$ identisch mit $N\eta$.

Es genügt also, das Moment der beliebig gerichteten Kräfte unmittelbar in bezug auf die Kernpunkte zu bestimmen, um aus ihnen die Randspannungen

$$\sigma_0 = \frac{M_{k_u}}{W_1}; \quad \sigma_u = \frac{M_{k_0}}{W_2} \quad (\text{Druckspannungen})$$

zu erhalten.

Speziell für das Rechteck bh ist

$$W_1 = W_2 = W = \frac{bh^2}{6}$$

$$F = bh.$$

Somit gemäss S. 24 die Lage der Kernpunkte

$$k_0 = k_u = k = \frac{W}{F} = \frac{\frac{bh^2}{6}}{bh} = \frac{h}{6}. \quad (28)$$

Demgemäss erhält man

1. Die Druckspannung am oberen Fugenrand durch das \curvearrowright Moment um den unteren Kernpunkt.
2. Die Druckspannung am unteren Fugenrand durch das \curvearrowleft Moment um den oberen Kernpunkt.
3. Die Zugspannung am oberen Fugenrand durch das \curvearrowleft Moment um den unteren Kernpunkt.
4. Die Zugspannung am unteren Fugenrand durch das \curvearrowright Moment um den oberen Kernpunkt.

6. Zahlenmässige Berechnung der Kernpunktmomente und Bestimmung der Randspannungen.

Im Abschnitt 4 wurde die Konstruktion der Einflusslinie für den Ausdruck $\frac{M_o}{y_k} - H$ und die Berechnung der Momente M_x des Dreigelenkbogens für konzentrierte und gleichmässig verteilte Lasten gezeigt.

Die Kernpunktmomente geben unmittelbar die Randspannungen, nämlich

$$\sigma_o = \frac{\curvearrowright M_{ku}}{W} \text{ (Druckspannung),}$$

$$\sigma_u = \frac{\curvearrowleft M_{ko}}{W} \text{ (" ").}$$

Um also die Grenzwerte der Randspannungen zu erhalten, wird man die Verkehrslast nach Ausweis der Einflusslinien jeweils möglichst ungünstig verteilen und für diese Laststellungen die Werte von M_k berechnen.

Man braucht zu diesem Zweck für jeden Querschnitt vier Kernpunktmomente, und zwar erhält man

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|---|
| die grösste Druckspannung σ_o | aus $\curvearrowright M_{ku}$ | bei Belastung der positiven Beitragsfläche, |
| „ „ Zugspannung σ_o | „ $\curvearrowleft M_{ku}$ | bei Belastung der negativen Beitragsfläche, |
| „ „ Druckspannung σ_u | „ $\curvearrowleft M_{ko}$ | bei Belastung der negativen Beitragsfläche, |
| „ „ Zugspannung σ_u | „ $\curvearrowright M_{ko}$ | bei Belastung der positiven Beitragsfläche. |

Zu diesen vier, für Verkehrslast erhaltenen Werten ist jeweils noch die durch das Eigengewicht hervorgerufene Beanspruchung, welche $\frac{q}{F}$ beträgt, zu addieren.

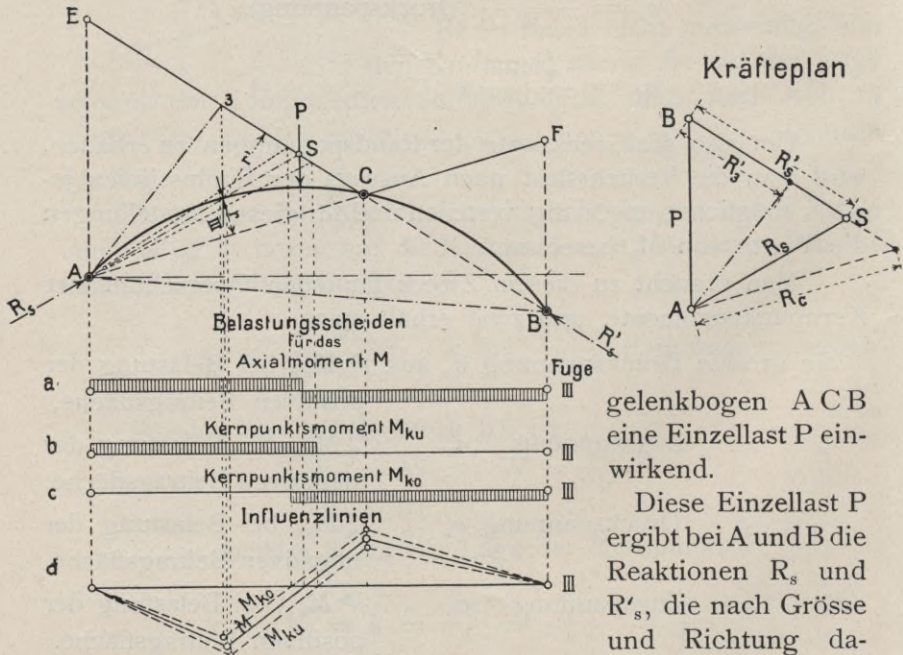
Für das Gewölbe, dessen Achse der Kettenlinie für Eigengewicht entspricht, hat man somit folgende Druckspannungen am Bogenrand:

$$\begin{aligned} \max \sigma_o &= \frac{q}{F} + \frac{(\nearrow M_{ku})}{W} \\ \max \sigma_u &= \frac{q}{F} + \frac{(\searrow M_{ko})}{W} \\ \min \sigma_o &= \frac{q}{F} - \frac{(\searrow M_{ku})}{W} \\ \min \sigma_u &= \frac{q}{F} - \frac{(\nearrow M_{ko})}{W} \end{aligned} \tag{30}$$

B. Graphische Bestimmung der Belastungsscheiden und der Einflusslinien für die Kernpunktmomente.

I. Um den Einfluss der Verkehrslast auf rein graphischem Weg zu bestimmen, denke man sich nach Abb. 15 auf den Drei-

Abb. 15.



durch bestimmt sind, dass ihre Kraftlinien sich im gemeinschaftlichen Punkt S auf der Verlängerung von BC schneiden müssen, wodurch das Kräftedreieck BAS mit $BA = P$ bestimmt ist.

Schneidet nun AS die Bogenachse in dem mit III bezeichneten Querschnitt, so erkennt man, dass die resultierende Fugenkraft R_s für alle links von III gelegenen Querschnitte ein negatives Biegemoment erzeugt, welches bei genügender Exzentrizität am unteren Bogenrand Druckspannungen, am oberen Rand Zugspannungen hervorruft.

Der Querschnitt III ist zentrisch belastet, die Fugen zwischen III und C erhalten ein positives, diejenigen zwischen C und B ein negatives Biegemoment.

Umgekehrt lässt sich nun auch die Beanspruchung der Fuge III verfolgen, wenn die Einzellast P über den Bogen wandert.

Bezeichnet man zu diesem Zweck den Schnittpunkt der Geraden A III und BC mit S, so erkennt man, dass Fuge III zentrisch beansprucht ist, wenn die Last P gerade in der Vertikalen durch S angreift.

Rückt P links von S, so dreht sich R_s entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, ergibt also für Fuge III ein positives Biegemoment; für P rechts von S greift R_s im Querschnitt III unterhalb der Fugenmitte an, ergibt also ein negatives Biegemoment.

Es ist also die Vertikalebene durch S die Belastungsscheide für das Biegemoment (Axialmoment) im Querschnitt III. Vollbelastung von A bis S ergibt das grösste positive, Vollbelastung von S bis B das grösste negative Moment im bezeichneten Querschnitt.

1. Einflusslinien für die Axialmomente.

Trägt man von einer Horizontalen aus bei jeder Abszisse a das Axialmoment M_{III} für Querschnitt III, welches der Last $P = 1$ bei Abszisse a entspricht, als Ordinate auf (Abb. 15) und verbindet die Endpunkte dieser Ordinaten, so ist diese Verbindungslinie die Einflusslinie für das Axialmoment M_{III} .

Denkt man sich nun $P = 1^t$ vor Querschnitt III angreifend, so ist das Axialmoment ausgedrückt durch

$$M_{III} = R'_s \cdot r'.$$

Rückt P näher gegen III, so ändert sich die Richtung von R_s , somit auch die Grösse (nicht aber die Richtung) von R'_s , während r' konstant bleibt. Wie leicht einzusehen, ändert sich aber R'_s proportional zur Abszisse a der Last, es ist also auch M proportional a und deshalb die Einflusslinie geradlinig. Der Wert von M für P in Querschnitt III ist leicht zu bestimmen, da das dieser Laststellung entsprechende R' im Kräfteplan durch eine Parallele zu A_3 erhalten wird und r' aus Abb. 15 abgemessen werden kann. Bei den Bezeichnungen der Abb. ist

$$M_3^{\text{III}} = R'_3 \cdot r'. \quad (31)$$

Rückt die Last nach S, so ist $M^{\text{III}} = 0$ und es ist damit der ganze Verlauf der Einflusslinie von M^{III} bestimmt. Zur Probe kann die Ordinate bei C berechnet werden.

Greift nämlich P in C an, so ist

$$M_c^{\text{III}} = -R_c \cdot r, \quad (32)$$

wobei R_c und r wieder aus Abb. 3 und dem Kräfteplan erhalten werden. Die Einflusslinie muss dabei zwischen III und C geradlinig werden.

2. Belastungsscheiden und Einflusslinien für die Kernpunktsmomente bzw. für die Randspannungen.

Die nach Ziff. 1 konstruierten Einflusslinien für die Axialmomente sind nicht auch zugleich die Einflusslinien für die Randspannungen, da bei der Randspannung im Fugenquerschnitt ausser dem Axialmoment noch die Normalkraft der Fuge zu berücksichtigen ist.

Für die Berechnung der Grenzwerte der Randspannungen σ_o und σ_u geht man daher besser von den Kernpunktsmomenten aus, welche diese Randspannungen unmittelbar nach der Formel

$$\sigma_o = \frac{M_u}{W}$$

$$\sigma_u = \frac{M_o}{W}$$

ergeben (vergl. Seite 24/26). Es bleibt dann bei der in Abb. 15 angegebenen Konstruktionsweise, indem nur an Stelle der Achspunkte des Querschnitts dessen Kernpunkte zu benützen sind.

Demgemäss erhält man

1. Die Belastungsscheide für das Moment um den unteren Kernpunkt k_u (Kernpunktsmoment M_u) durch den Schnitt der Linie $A k_u$ mit der Kämpferdrucklinie CE .

2. Die Belastungsscheide für das Moment um den oberen Kernpunkt durch den Schnitt der Linie $A k_0$ mit der Kämpferdrucklinie CE .

Die Belastungsscheide für M_{ku} gibt die grösste bzw. kleinste Druckspannung am oberen Fugenrand, je nachdem der linke oder rechte Bogenteil belastet wird.

Die Belastungsscheide für M_{ko} gibt die grösste sowie kleinste Druckspannung am unteren Fugenrand, je nachdem rechts oder links derselben belastet wird.

Diese Belastungsgrenzen sind in Abb. 15 b u. c dargestellt, während die Einflusslinien für M_{ko} und M_{ku} aus Abb. 15 d ersichtlich sind.

Zur Bestimmung der Ordinaten dieser Einflusslinien hat man die Lote r und r' durch die Kernpunkte, statt durch den Achspunkt zu ziehen.

III. Korrektur der Bogenachse.

Den Berechnungen der Abschnitte I und II liegt ein Bogen zugrunde, dessen Achse mit der Drucklinie für Eigengewicht zusammenfällt.

Für Eigengewicht entstehen somit keine Biegemomente. Die Biegemomente, welche die Verkehrslast in ihrer jeweils ungünstigsten Stellung hervorruft, sind nun nicht gerade derart, dass am oberen und am unteren Fugenrand gleichgrosse Grenzwerte der Beanspruchung entstünden. Es werden vielmehr im allgemeinen $\max \sigma_o$ und $\max \sigma_u$ für einen und denselben Querschnitt verschieden ausfallen.

Bezüglich der minimalen Druckspannung σ am oberen oder unteren Fugenrand ist zu bemerken, dass diese unter Umständen unter Null geht, d. h. dass Zugspannungen auftreten.

Nun wird man aber im allgemeinen den Bogen so dimensionieren wollen, dass Zugspannungen ausgeschlossen sind; ausserdem ist es vom Standpunkt möglichst weitgehender Materialausnützung aus zu wünschen, dass für einen und denselben Querschnitt $\max \sigma_o = \max \sigma_u$ wird und dass diese Spannung dabei einen gewissen, zum Voraus bestimmten Grenzwert erreicht.

Dieser Grenzwert σ der Randspannung kann nun nicht vollständig beliebig festgesetzt werden, sondern ist an gewisse

Grenzen insofern gebunden, als gleichzeitig die Forderung erfüllt werden muss, dass bei der die grösste Druckspannung am einen Fugenrand ergebenden Laststellung nicht Zugspannungen am andern Fugenrand auftreten.

Wird nun für Eigengewicht allein die Normalkraft einer Fuge mit \mathfrak{N} und der Horizontal Schub mit \mathfrak{H} bezeichnet und bedeutet M_k das durch die Verkehrslast allein in ihrer jeweils ungünstigsten Stellung hervorgerufene Kernpunktsmoment der Fuge, so ist unter der Voraussetzung, dass die Form der Bogenachse der Drucklinie für Eigengewicht entspricht, die obere und untere grösste Randspannung ausgedrückt durch

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{\overset{\curvearrowright}{M_{ku}}}{W} \text{ (grösster Druck am oberen Fugenrand),} \\ \sigma_u &= \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{\underset{\curvearrowleft}{M_{ko}}}{W} \text{ („ „ „ unteren „ } \end{aligned} \quad (33)$$

Die kleinsten Randspannungen sind:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{\mathfrak{N}}{F} - \frac{\underset{\curvearrowleft}{M_{ku}}}{W} \text{ (kleinster Druck am oberen Fugenrand),} \\ \sigma_u &= \frac{\mathfrak{N}}{F} - \frac{\overset{\curvearrowright}{M_{ko}}}{W} \text{ („ „ „ unteren „ } \end{aligned} \quad (34)$$

Die Aufgabe, um die es sich jetzt handelt, ist nun die, die Fugenstärke d so zu bestimmen und die Bogenform so zu ändern, dass

$$\max \sigma_o = \max \sigma_u = \sigma$$

wird, wobei alsdann noch zu kontrollieren ist, ob bei dem angenommenen Wert von σ , der in erster Linie vom verwendeten Material abhängig ist, die kleinsten Randspannungen nicht in Zugspannungen übergehen.

Um diese Aufgabe zu lösen, wird man zunächst untersuchen, welchen Einfluss auf die Randspannungen eine beliebige — als klein vorausgesetzte — Änderung Δy der Ordinate y ausübt.

a) Einfluss einer Änderung Δy der Ordinate der Bogenachse auf die Randspannungen.

Ändert sich die Ordinate y der Bogenachse um Δy , so ergibt die Normalkraft \mathfrak{N} für ständige Last ein Moment — $\mathfrak{N} \cdot e$. Nun ist aber in vorliegendem Fall, wo die Bogenmittellinie mit der Drucklinie für Eigengewicht zusammenfällt, nach Gl. (II)

b) Bestimmung von Δy und d , so dass $\sigma_o = \sigma_u = \sigma$ wird.

Sollen die oberen und unteren maximalen Randspannungen einander gleich werden, so muss nach Gleichung (36) sein:

$$\frac{\mathfrak{N}}{F} - \frac{\delta \Delta y}{W} + \frac{(\curvearrowright M_{ku})}{W} = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{\delta \Delta y}{W} + \frac{(\curvearrowleft M_{ko})}{W}$$

Hieraus

$$\Delta y = \frac{(\curvearrowright M_{ku}) - (\curvearrowleft M_{ko})}{2 \delta} \quad (37)$$

Sollen ferner beide Randspannungen den Wert σ erreichen, so hat man

$$\sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} - \frac{\delta \Delta y}{W} + \frac{(\curvearrowright M_{ku})}{W}$$

oder mit Einsetzung des Wertes für Δy

$$\sigma = \frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{(\curvearrowleft M_{ko}) + (\curvearrowright M_{ku})}{2W}$$

Mit $F = bh$ und $W = \frac{bd^2}{6}$ ergibt sich

$$\sigma = \frac{\mathfrak{N}}{bd} + \frac{M_{ko} + M_{ku}}{\frac{bd^2}{3}}$$

oder

$$b \sigma d^2 - \mathfrak{N} d - 3 \left((\curvearrowleft M_{ko}) + (\curvearrowright M_{ku}) \right) = 0. \quad (38)$$

Hieraus ergibt sich die Fugenstärke d . Dabei ist noch zu prüfen, ob bei der der Minimalbeanspruchung des Fugenrands entsprechenden Laststellung keine Zugspannungen entstehen.

c) Bestimmung von Δy und d so, dass $\begin{matrix} \max \sigma_u = \sigma \\ \min \sigma_o = 0 \end{matrix}$ wird.

In diesem Fall ist

$$\frac{\mathfrak{N}}{F} + \frac{\delta \Delta y}{W} + \frac{(\curvearrowleft M_{ko})}{W} = \sigma$$

$$\frac{\mathfrak{N}}{F} - \frac{\delta \Delta y}{W} - \frac{(\curvearrowright M_{ku})}{W} = 0$$

Hieraus

$$\frac{2 \mathfrak{N}}{F} + \frac{M_{ko} - M_{ku}}{W} = \sigma$$

$$\frac{2 \mathfrak{N}}{bd} + \frac{M_{ko} - M_{ku}}{\frac{bd^2}{6}} = \sigma$$

oder

$$b \sigma d^2 - 2 \mathfrak{N} d - 6 \left((\curvearrowleft M_{ko}) - (\curvearrowright M_{ku}) \right) = 0. \quad (39)$$

Hieraus d und aus einer der obigen Gleichungen Δy .

Anmerk. Über Gewölbekorrektur vergl. Färber, Dreigelenkbogenbrücken. Stuttgart, 1908.

d) Praktisch verwendet werden in der Regel die unter b) abgeleiteten Formeln.

Hat sich ein grösserer Wert von Δy ergeben und weicht die nach (38) berechnete Fugenstärke erheblich von der ursprünglichen Annahme ab, so ist es notwendig, die Rechnung zu wiederholen.

Es werden also M_{k_0} und M_{k_u} für die veränderte Lage der Bogenachse neu berechnet, worauf sich zwecks abermaliger Korrektur derselben ergibt:

für die jetzige Bogenachse:

$$\sigma_o = \frac{\mathfrak{R}}{F} - \frac{\mathfrak{S} \eta}{W} + \frac{\overset{\curvearrowright}{M}_{k_u}}{W}$$

$$\sigma_u = \frac{\mathfrak{R}}{F} + \frac{\mathfrak{S} \eta}{W} + \frac{\underset{\curvearrowleft}{M}_{k_0}}{W}$$

und für die abermals um Δy verschobene Bogenachse (wobei die alte Verschiebung mit η bezeichnet ist):

$$\sigma_o = \frac{\mathfrak{R}}{F} - \frac{\mathfrak{S} (\eta + \Delta y)}{W} + \frac{\overset{\curvearrowright}{M}_{k_u}}{W}$$

$$\sigma_u = \frac{\mathfrak{R}}{F} + \frac{\mathfrak{S} (\eta + \Delta y)}{W} + \frac{\underset{\curvearrowleft}{M}_{k_0}}{W}$$

Soll $\sigma_o = \sigma_u$ werden, so muss sein:

$$\frac{\mathfrak{R}}{F} - \frac{\mathfrak{S} (\eta + \Delta y)}{W} + \frac{\overset{\curvearrowright}{M}_{k_u}}{W} = \frac{\mathfrak{R}}{F} + \frac{\mathfrak{S} (\eta + \Delta y)}{W} + \frac{\underset{\curvearrowleft}{M}_{k_0}}{W}$$

Somit

$$\eta + \Delta y = \frac{\overset{\curvearrowright}{M}_{k_u} - \underset{\curvearrowleft}{M}_{k_0}}{2 \mathfrak{S}}$$

womit die neue Lage der Bogenachse bestimmt ist.

IV. Konstruktion der Bogenachse und der Leibungen als parabolische Korbbögen.

Die Untersuchung des Abschnitt III bezüglich d und Δy könnte für jeden Querschnitt angestellt werden. Da sich für die einzelnen Querschnitte die in Betracht kommenden Grössen (M_k , \mathfrak{R} etc.) stetig ändern, so werden auch die erhaltenen Werte von Δy und h eine gewisse Stetigkeit aufweisen. Es scheint also, dass man auf diese Weise immer einen ästhetisch befriedigenden Bogen erhalten müsse.

Tatsächlich ist dies aber oft nicht der Fall. Die Ursache liegt darin, dass im Wesen des Dreigelenkbogens die volle Ausnützung des Materials in sämtlichen Querschnitten keineswegs begründet ist. Naturgemäss ist der Bogen in der Nähe der Gelenke viel günstiger beansprucht als etwa im Bogenviertel. Wollte man deshalb überall dieselbe maximale Randspannung, so würde jede Hälfte des Bogens für sich eine Sichelform erhalten und der Zusammenhang beider Bogenhälften im Scheitel in den meisten Fällen ästhetisch nicht befriedigen. Die obere Leibungslinie würde im Scheitel nicht immer eine mit stetig wechselndem Krümmungsradius verlaufende einheitliche Linie mit horizontaler Scheiteltangente bilden, sondern vielfach sogar einen Knick nach unten aufweisen. Ähnlich wären die Verhältnisse bezüglich der unteren Leibungsbände.

Verschiedene Veröffentlichungen der letzten und früheren Zeit, die auf möglichst vollständige Materialausnützung bei Gewölben abzielten, haben, so interessant sie vom rein mathematischen Standpunkt aus sein mögen, die unheilvolle Wirkung gehabt, dass man nach ihnen Brücken konstruierte, deren Bogenlinien ästhetisch sehr wenig befriedigten. Zum Teil wurde nun dem Bogen in der äusseren Ansicht der Brückenstirn eine andere Form gegeben, als er innen hatte; zum Teil hat man auch die unschöne konstruktive Form aussen in die Erscheinung treten lassen.

Es muss aber unbedingt als durchaus konstruktionswidrig bezeichnet werden, wenn sich die äussere, sichtbare Form des Gewölbes mit der inneren Konstruktionsform nicht deckt. Ein Bauwerk, welches konstruktiv einwandfrei ist, braucht in keinem seiner Teile verdeckt zu werden; es wird zweifellos auch in ästhetischer Beziehung befriedigen.

Dass im Wesen des Dreigelenkbogens eine volle Materialausnützung keineswegs begründet ist, erhellt schon daraus, dass bei den Gelenken der plötzliche Übergang von zwei oder drei, ganz verschiedene Festigkeitseigenschaften besitzenden Materialien: Stahl, Granit, gewöhnlicher Stampfbeton, gewisse Unstetigkeiten mit sich bringt, die eine volle Materialausnützung unmöglich machen und darauf hinweisen, dass die Bogenlinien auf anderer Grundlage bestimmt werden müssen.

Die Aufgabe, die im folgenden gelöst werden soll, ist deshalb folgende:

Die Form der Bogenachse sowie der oberen und unteren Leibung soll so konstruiert werden, dass sie auf die ganze

Bogenlänge eine stetig verlaufende Linie mit stetig wechselndem Krümmungsradius bildet.

Dabei ist die Stärke der Kämpfer- und Scheitelfuge und ausserdem die Stärke des gefährlichen Querschnitts (etwa in $\frac{1}{4}$ der Spannweite) sowie die Achsordinate desselben von vornherein gegeben.

Es werden also nach den in Abschnitt III genannten Grundsätzen nicht sämtliche Querschnitte bestimmt, sondern nur einige benachbarte im Bogenviertel. Auf diese Weise erhält man die Lage des »gefährlichen Querschnitts«. Die hier erhaltene Fugenstärke und Achsordinate wird beibehalten, während die Richtung der Bogenachse entweder parallel zur Drucklinie für Eigengewicht angenommen werden kann, oder sich aus den Ordinaten des Achspunktes der gefährlichen Fuge benachbarten Querschnitte ergibt.

Die Gewölbstärke im Scheitel und Kämpfer wird so bemessen, dass ihre maximale Beanspruchung nur etwa $\frac{3}{4}$ der maximalen Beanspruchung des gefährlichen Querschnitts beträgt.

1. Form der Bogenachse.

Von der Bogenachse ist als gegeben zu betrachten:

1. Die Lage der Kämpfer- und Scheitelgelenke,
2. der Achspunkt in der gefährlichen Fuge und
3. die Tangente an die Bogenachse in der gefährlichen Fuge.

Aus diesen Stücken ist die Bogenachse als stetig verlaufende Linie zu konstruieren.

Als solche wird ein parabolischer Korbbogen gewählt, der die Eigenschaft besitzt, dass die einzelnen Parabelstücke in ihren Grenzpunkten nicht bloss gemeinschaftliche Tangenten, sondern womöglich auch gleiche Krümmungsradien haben. Diese Parabeln werden graphisch ermittelt und haben den Vorteil, dass sie zwecks Steigerung der Genauigkeit nicht bloss mit Leichtigkeit überhöht gezeichnet werden können, sondern dass die Konstruktion auch auf dem Reissboden für das Lehrgerüst unmittelbar ausgeführt werden kann. Im übrigen können die Ordinaten auch analytisch bestimmt werden.

Die Konstruktion ist in Abb. 17 angedeutet. Die Scheiteltangente in C und die Tangente im Achspunkt T des gefährlichen Querschnitts schneiden sich in S_1 .

Werden nun die Strecken S_1C und S_1T je in n gleiche Teile geteilt und die entsprechenden Teilpunkte miteinander

Führt man als Parameter den Faktor μ ein und bezieht die Kurve auf das durch Sx und Sy gebildete schiefe Koordinatensystem, so lautet die Gleichung der Geraden AB , welche von den Koordinatenachsen die Stücke μa bzw. $(1 - \mu)b$ abschneidet:

$$\frac{x}{\mu a} + \frac{y}{(1 - \mu)b} = 1 \quad (40)$$

oder

$$(1 - \mu)bx + \mu ay = \mu(1 - \mu)ab \quad (41)$$

Nach μ differenziert ergibt sich:

$$-bx + ay = (1 - 2\mu)ab \quad (42)$$

Aus (42) erhält man
$$\mu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

$$1 - \mu = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$$

Eingesetzt in (41) ergibt

$$\frac{x}{\left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)a} + \frac{y}{\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)b} = \frac{1}{2} \quad (43)$$

als Gleichung der Parabel.

Sie kann auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 \quad (44)$$

oder

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{x}{\frac{1}{2}a} + \frac{y}{\frac{1}{2}b} - 1$$

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass die Mittellinie MN des Dreiecks STC von der Kurve in ihrem Schnittpunkt mit der Diagonale SS' des Parallelogramms $STS'C$ berührt wird,

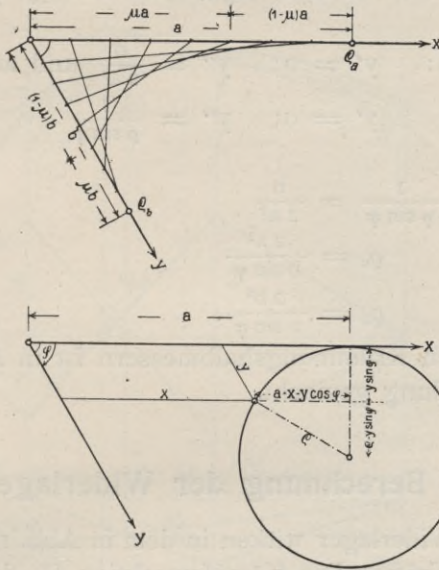
denn $\frac{x}{\frac{1}{2}a} + \frac{y}{\frac{1}{2}b} - 1 = 0$ ist die Linie MN und $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$

die Diagonale SS' .

Von der Parabel interessiert vor allem der Krümmungshalbmesser in C und T .

Um diesen zu erhalten, schreibt man die Gleichung der Parabel und die des Kreises an und bildet für beide Kurven die Differentialquotienten y' und y'' . Diese Differentialquotienten müssen für die Parabel denselben Wert haben wie für den Kreis, wenn der Kreis ein Krümmungskreis der Parabel sein soll.

Abb. 18 a.



Man hat daher:

$$\text{Gleichung der Parabel } \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^2 = \frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} - 1 \quad (44)$$

$$\text{differenziert } 2\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{y'}{b}\right) = \frac{2}{a} + \frac{2y'}{b}$$

$$\text{hieraus } y' = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - 1}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1} \cdot \frac{b}{a} \quad (45)$$

nochmals differenziert

$$-\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \frac{y''}{b} + \left(\frac{1}{a} - \frac{y'}{b}\right)^2 = \frac{y''}{b}$$

$$\text{hieraus } y'' = \frac{\left(\frac{1}{a} - \frac{y'}{b}\right)^2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1} b \quad (46)$$

$$\text{oder } y'' = \frac{4}{\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} + 1\right)^3} \frac{b}{a^2} \quad (47)$$

Gleichung des in T tangierenden Kreises mit Radius ρ :

$$(a - x - y \cos \varphi)^2 + (\rho - y \sin \varphi)^2 = \rho^2 \quad (\text{Abb. 18 a})$$

differenziert

$$-(a - x - y \cos \varphi)(1 + y' \cos \varphi) - (\rho - y \sin \varphi) y' \sin \varphi = 0$$

$$\text{hieraus } y' = -\frac{a - x - y \cos \varphi}{(a - x - y \cos \varphi) \cos \varphi + (\rho - y \sin \varphi) \sin \varphi} \quad (48)$$

differenziert

$$(a - x - y \cos \varphi) y'' \cos \varphi - (1 + y' \cos \varphi)^2 + (\rho - y \sin \varphi) y'' \sin \varphi - y' \sin^2 \varphi = 0$$

$$\text{hieraus } y'' = \frac{1 + 2y' \cos \varphi + y'^2}{(a - x - y \cos \varphi) \cos \varphi + (\rho - y \sin \varphi) \sin \varphi} \quad (49)$$

Speziell im Punkt a, o, ergibt sich aus (45, 47) mit $x = a$; $y = 0$:

für die Parabel: $y' = 0$; $y'' = \frac{b}{2a^2}$ und aus (48, 49)

für den Kreis: $y' = 0$; $y'' = \frac{1}{\rho \sin \varphi}$.

Somit ist

$$\frac{1}{\rho \sin \varphi} = \frac{b}{2a^2}$$

oder

$$\rho_a = \frac{2a^2}{b \sin \varphi}$$

analog

$$\rho_b = \frac{2b^2}{a \sin \varphi}$$

Von diesen Krümmungshalbmessern ist in Abschnitt IV, I bereits Anwendung gemacht.

V. Berechnung der Widerlager.

Auf die Widerlager wirken in dem in Abb. 19 gezeichneten Fall folgende Kräfte: Die Kämpferreaktion R, der Erddruck E und event. der Druck des Grundwassers W.

Die Bestimmung der Drucklinie erfolgt prinzipiell in gleicher Weise wie beim Gewölbe. Die Fugenteilung wird am besten annähernd radial zur voraussichtlichen Drucklinie angenommen.

Den wichtigsten Teil der Fundamentberechnung bildet die Bestimmung der Druckverteilung in der Fundamentfuge.

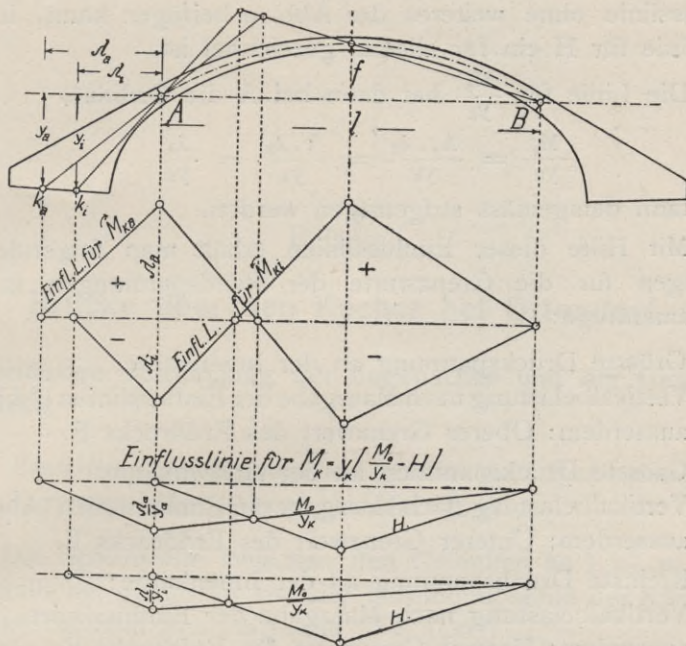
Hierbei ist zu berücksichtigen, dass einerseits die Grösse des horizontalen Erddrucks auf die Rückseite des Widerlagers nur unsicher bestimmt werden kann, andererseits auch der Auftrieb des Grundwassers infolge wechselnden Grundwasserspiegels und anderer Umstände ein wechselnder ist. Man wird deshalb in der Materialausnützung nicht zu weit gehen dürfen und die Berechnung des Widerlagers auf zwei Grenzfälle ausdehnen müssen:

- a) Ungünstigste Belastung für grösste Pressung an der Aussenkante der Fundamentfläche,
- b) ungünstigste Belastung für grösste Pressung an der Innenkante der Fundamentfläche.

Um die ungünstigsten Laststellungen für die Vertikalbelastung zu finden, ist es zweckmässig, die Bodenpressung aus den Kernpunktmomenten zu bestimmen und für diese die Einflusslinien aufzuzeichnen.

In Abb. 19 sind die Kernpunkte der Bodenfuge mit k_a und k_1 , ihre Abszissen und Ordinaten in bezug auf die Bogen-

Abb. 19.



sehne AB sowie die Vertikale durch das Kämpfergelenk A mit λ_0 , λ_1 bzw. y_0 , y_1 bezeichnet.

Eine Last $P = 1$ in der ersten Bogenhälfte ergibt zwei Kämpferreaktionen R und R' , welche sich mit P in einem Punkt schneiden, der somit als Schnittpunkt der Kraftlinie von P mit der Sehne BC gefunden wird. Geht die Kraftlinie R durch den Kernpunkt k_0 bzw. k_1 , so ist für diese Laststellung das Kernpunktmoment Null.

Man findet also die Nullpunkte des Kernpunktmoments als Schnitt der Verbindungslinie $k_0 - A$ bzw. $k_1 - A$ mit BC .

Einen weiteren Punkt der Einflusslinie hat man für die Laststellung $P = 1$ bei A , indem für diese das Kernpunktmoment ausgedrückt ist durch

$$\begin{aligned} \curvearrowright M_{k_0} &= 1 \cdot \lambda_0 \\ \text{bzw.} \quad \curvearrowleft M_{k_1} &= -1 \cdot \lambda_1. \end{aligned}$$

Da im übrigen die Einflusslinie linear verläuft, so ist sie durch die genannten zwei Punkte vollständig gegeben.

Analog dem auf S. 18 beschriebenen Verfahren können die Einflusslinien M_k auch in der Form

$$M_k = y_k \left(\frac{M_0}{y_k} - H \right)$$

aufgestellt werden. Man hat dann den Vorteil, dass man diese Einflusslinie ohne weiteres der Abb. 9 beifügen kann, in der die Linie für H ein für allemal gezeichnet ist.

Die Linie für $\frac{M_0}{y_k}$ hat dann bei A die Ordinate

$$\frac{M_0}{y_k} = \frac{A_0 \cdot \lambda_k}{y_k} = \frac{I \cdot \lambda_k}{y_k} = \frac{\lambda_k}{y_k}$$

und kann demgemäss aufgetragen werden.

Mit Hilfe dieser Einflusslinien erhält man folgende Belastungen für die Grenzwerte der Randspannungen in der Fundamentfuge:

1. Grösste Druckspannung an der Innenkante:
Vertikalbelastung nach Maszgabe der Einflusslinien (Abb. 19),
ausserdem: Oberer Grenzwert des Erddrucks E.
2. Grösste Druckspannung an der Aussenkante:
Vertikalbelastung nach Maszgabe der Einflusslinien (Abb. 19),
ausserdem: Unterer Grenzwert des Erddrucks E.
3. Kleinste Druckspannung an der Innenkante:
Vertikalbelastung nach Maszgabe der Einflusslinien,
ausserdem: Unterer Grenzwert des Erddrucks E.
4. Kleinste Druckspannung an der Aussenkante:
Vertikalbelastung nach Maszgabe der Einflusslinien,
ausserdem: Oberer Grenzwert des Erddrucks E.

Der Einfluss des Auftriebs wird gewöhnlich dadurch berücksichtigt, dass man den unter Wasser getauchten Teil des Fundamentbetons mit einem um 1 verminderten spezifischen Gewicht, also mit $s = 2,2 - 1,0 = 1,2$ in Rechnung zieht.

Um jedoch den Einfluss eines stärkeren oder schwächeren Auftriebs zu erkennen, kann man das Gewicht des Fundamentbetons auch unterhalb des Grundwasserspiegels zunächst voll rechnen und den Auftrieb als eine im Schwerpunkt des unter Wasser getauchten Teils angreifende, vertikal nach oben gerichtete Kraft anbringen.

Man erkennt dann sofort den Drehungssinn dieser Kraft in bezug auf die Kernpunkte und den Einfluss auf die Randspannungen.

Beispiel.

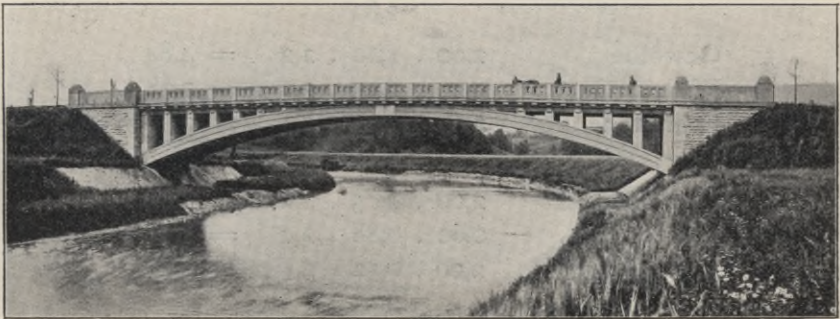
Brücke über den Kocher bei Ottendorf.

1. Vorläufige Bestimmung der Bogenachse und der Gewölbestärke.

a) *Einteilung des Bogens in Lamellen und Bestimmung des Eigengewichts.* (Vergl. Abb. 21, S. 50).

Die Spannweite zwischen den Gelenken ist $l = 40,346^m$, die Pfeilhöhe, gemessen von der Verbindungslinie der Kämpfergelenke bis zum Scheitelgelenk $f = 4,00^m$.

Abb. 20.



Kocherbrücke bei Ottendorf. Erbaut 1908.

Nimmt man als erste Annäherung für die Bogenachse einen Kreisbogen und teilt das Gewölbe vom Scheitel aus nach beiden Seiten in Lamellen von je $2,00^m$ Länge, so ergeben sich an den Kämpfern Endlamellen von $2,173^m$ und man erhält gemäss Abb. 21 folgende Lamellengewichte für einen Gewölbestreifen von $1,00^m$ Breite, wobei man sich der Einfachheit halber die Lamellengewichte 0, 1, 2 . . . , in den Querschnitten 0, 1, 2, 3 . . . konzentriert denkt.

Lamelle No.		qm	m	t/cbm	t	Ständige Last
0	Gewölbe	2,00	· 0,80	· 2,2	= 3,52	
	Aufbetonierung	2,00	· 0,33	· 2,2	= 1,45	
	Pflasterung	2,00	· (0,12)	· 0,32 ¹⁾	= 0,65	$\frac{t}{5,62}$
				<u>1,25</u>		2,81
1	Gewölbe	2,00	· 0,83	· 2,2	= 3,65	
	Aufbetonierung	2,00	· 0,35	· 2,2	= 1,54	
	Pflasterung	2,00	· (0,12)	· 0,32	= 0,65	5,84
				<u>1,30</u>		
2	Gewölbe	2,00	· 0,89	· 2,2	= 3,92	
	Aufbetonierung	2,00	· 0,39	· 2,2	= 1,72	
	Pflasterung	2,00	· (0,12)	· 0,32	= 0,65	6,29
				<u>1,48</u>		
3	Gewölbe	2,00	· 0,96	· 2,2	= 4,22	
	Aufbetonierung	2,00	· 0,52	· 2,2	= 2,29	
	Pflasterung	2,00	· (0,12)	· 0,32	= 0,65	7,16
				<u>1,60</u>		
4	Gewölbe	2,00	· 1,03	· 2,2	= 4,53	
	Aufbetonierung	2,00	· 0,67	· 2,2	= 2,95	
	Pflasterung	2,00	· (0,12)	· 0,32	= 0,65	8,13
				<u>1,82</u>		
5	Gewölbe	2,00	· 1,10	· 2,2	= 4,84	
	Pfeiler	0,60	· 0,53	· 2,2	= 0,68	
	Fahrbahn	2,00	· 0,52	· 2,4	= 2,50 ²⁾	8,02
				<u>2,15</u>		
6	Gewölbe	2,00	· 1,15	· 2,2	= 5,06	
	Pfeiler	0,60	· 0,88	· 2,2	= 1,16	
	Fahrbahn	2,00	· 0,52	· 2,4	= 2,50	8,72
				<u>2,55</u>		
7	Gewölbe	2,00	· 1,15	· 2,2	= 5,06	
	Pfeiler	0,60	· 1,35	· 2,2	= 1,78	
	Fahrbahn	2,00	· 0,52	· 2,4	= 2,50	9,34
				<u>3,02</u>		

1) Anmerkung.

Dieses Gewicht setzt sich zusammen aus:

	m	t/cbm	t/qm
Kleinpflaster	0,10	· 2,8	= 0,280
Sand	0,02	· 2,2	= 0,044
			<u>0,324</u>

	m	t/cbm	t/qm
²⁾ Eisenbetonplatte	0,25	· 2,4	= 0,600
Aufbetonierung	0,15	· 2,2	= 0,330
Sand u. Pflaster	0,12		0,324
		<u>0,52</u>	1,25

Somit vgl. spez. Gew.: 2,4.

Lamelle No.		qm	m	t/cbm	t	Ständige Last
8	Gewölbe	2,00	· 1,13	· 2,2	= 4,97	9,98
	Pfeiler	0,60	· 1,90	· 2,2	= 2,51	
	Fahrbahn	2,00	· 0,52	· 2,4	= 2,50	
				<u>3,55</u>		
9	Gewölbe	2,00	· 1,07	· 2,2	= 4,71	10,59
	Pfeiler	0,60	· 2,56	· 2,2	= 3,38	
	Fahrbahn	2,00	· 0,52	· 2,4	= 2,50	
				<u>4,15</u>		
10	Gewölbe	$\frac{1}{2}$	· 2,17	· 1,00	· 2,2 = 2,39	85,02
	Pfeiler		0,60	· 3,33	· 2,2 = 4,40	
	Fahrbahn	$\frac{1}{2}$	· 2,17	· 0,52	· 2,4 = 1,35	
				<u>4,85</u>	<u>8,14</u>	
						85,02

b) *Biegemomente für ständige Last bei Fall H = 0.*

Diese werden am einfachsten mit Hilfe der Vertikalkräfte ermittelt. Man erhält:

$V_1 = \frac{t}{2,81}$	$76,88 \cdot 2,173 = 167,06 = M_9$
$V_2 = \frac{5,84}{8,65}$	$66,29 \cdot 2,00 = 132,58$
$V_3 = \frac{6,29}{14,94}$	$56,31 \cdot 2,00 = 112,62$
$V_4 = \frac{7,16}{22,10}$	$46,97 \cdot 2,00 = 93,94$
$V_5 = \frac{8,13}{30,23}$	$38,25 \cdot 2,00 = 76,50$
$V_6 = \frac{8,02}{38,25}$	$30,23 \cdot 2,00 = 60,46$
$V_7 = \frac{8,72}{46,97}$	$22,10 \cdot 2,00 = 44,20$
$V_8 = \frac{9,34}{56,31}$	$14,94 \cdot 2,00 = 29,88$
$V_9 = \frac{9,98}{66,29}$	$8,65 \cdot 2,00 = 17,30$
$V_{10} = \frac{10,59}{76,88}$	$2,81 \cdot 2,00 = 5,62$
$Q = \frac{8,14}{85,02}$	

c) *Horizontalschub für ständige Last.*

Für den Scheitelquerschnitt ist

$$M = M_0 - Hf = 0,$$

somit

$$H = \frac{M_0}{f} = \frac{740,16}{4,00} = 185,04^t.$$

d) *Ordinaten der Bogenachse als Kettenlinie für ständige Last.*

Diese werden durch Division der Momente M_0 durch H erhalten.

Es ergibt sich:

mt	t	m	mt	t	m
$y_0 = 740,16$	$: 185,04$	$= 4,000$	$y_6 = 506,20$	$: 185,04$	$= 2,736$
$y_1 = 734,54$	$: 185,04$	$= 3,970$	$y_7 = 412,26$	$: 185,04$	$= 2,228$
$y_2 = 717,34$	$: 185,04$	$= 3,876$	$y_8 = 299,64$	$: 185,04$	$= 1,619$
$y_3 = 687,36$	$: 185,04$	$= 3,715$	$y_9 = 167,06$	$: 185,04$	$= 0,903$
$y_4 = 643,16$	$: 185,04$	$= 3,476$	$y_{10} = 0$	$: 185,04$	$= 0$
$y_5 = 582,70$	$: 185,04$	$= 3,149$			

2. Berechnung einzelner Gewölbequerschnitte für Nutzlast und Eigengewicht.

a) *Dimensionierung von Querschnitt VII und Berichtigung der Achse für diesen Querschnitt.*

Die Kernpunktsordinaten des Querschnitts VII sind:

$$y_{ko} = 2,228 + \frac{1,15^1}{6} = 2,420^m$$

$$y_{ku} = 2,228 - \frac{1,15}{6} = 2,036^m.$$

Zur Bestimmung der Einflusslinie für die Kernpunktsmomente

$$M_k = M_0 - H y_k = y_k \left[\frac{M_0}{y_k} - H \right]$$

dieses Querschnitts hat man gemäss Seite 18

$$\frac{a a'}{1 y_{ko}} = \frac{6,173 \cdot 34,173}{40,346 \cdot 2,420} = 2,160 \text{ als Ordinate für } \frac{M_0}{y_{ko}}$$

$$\frac{a a'}{1 y_{ku}} = \frac{6,173 \cdot 34,173}{40,346 \cdot 2,036} = 2,568 \text{ „ „ „ } \frac{M_0}{y_{ku}}.$$

Ferner ergibt sich für die Einflusslinie von H mit $a = a' = \frac{1}{2}$ die Ordinate:

$$\frac{a a'}{1 f} = \frac{1}{4 f} = \frac{40,346}{4 \cdot 4,00} = 2,521.$$

A n m. ¹⁾ 1,15^m = vorläufig angenommene Gewölbstärke (vertikal).

Damit sind die Einflusslinien für die Kernpunktmomente bestimmt und man erhält

aa) Für gleichmässig verteilte Last von 400 kg/qm

$$\text{für max } \sigma_o \quad (\rightarrow M_{ku} = \frac{1}{2} \cdot \overset{m}{15,1} \cdot \overset{m}{1,80} \cdot \overset{m}{2,036} \cdot \overset{t/qm}{0,400} = 11,07$$

$$\text{,, max } \sigma_u \quad (\sphericalangle M_{ko} = \frac{1}{2} \cdot 26,74 \cdot 1,24 \cdot 2,420 \cdot 0,400 = 16,08$$

$$\text{,, min } \sigma_o \quad (\sphericalangle M_{ku} = \frac{1}{2} \cdot 25,246 \cdot 1,00 \cdot 2,036 \cdot 0,400 = 10,28$$

$$\text{,, min } \sigma_u \quad (\rightarrow M_{ko} = \frac{1}{2} \cdot 13,60 \cdot 1,39 \cdot 2,420 \cdot 0,400 = 9,15.$$

bb) Für eine Dampfwalze von 18^t Dienstgewicht bei der aus Abb. 21 ersichtlichen, jeweils ungünstigsten Laststellung:

$$\text{für max } \sigma_o \quad (\rightarrow M_{ku} = \overset{m}{2,036} [2,7 \cdot \overset{t}{1,80} + \overset{t}{2,2} \cdot \overset{mt}{1,08}] = 14,73$$

$$\text{,, max } \sigma_u \quad (\sphericalangle M_{ko} = 2,420 [4,4 \cdot 1,24 + 3,0 \cdot 1,03] = 20,68$$

$$\text{,, min } \sigma_o \quad (\sphericalangle M_{ku} = 2,036 [4,4 \cdot 1,00 + 3,0 \cdot 0,84] = 14,09$$

$$\text{,, min } \sigma_u \quad (\rightarrow M_{ko} = 2,420 [2,7 \cdot 1,39 + 2,2 \cdot 0,72] = 12,90.$$

Hierbei ist die Druckverteilung der Radlasten unter 60° angenommen und dann unter Berücksichtigung der Höhe der Radlast über dem Gewölberücken die auf einen Gewölbestreifen von 1^m Breite reduzierte Last berechnet.

cc) Dimensionierung und Beanspruchung der Fuge 7.

Sieht man von einer Erhöhung der Radlasten der Dampfwalze zwecks Berücksichtigung des Einflusses der Erschütterungen und Stosswirkungen der im Gang befindlichen Maschine ab und rechnet dafür das Menschengedränge voll, ohne Abzug der von der Dampfwalze eingenommenen Fläche, so erhält man als für die Dimensionierung maßgebend folgende von Verkehrslast herrührende Kernpunktmomente im Querschnitt VII:

$$\text{für max } \sigma_o: \quad (\rightarrow M_{ku} = 11,07 + 14,73 = 25,80^{mt}$$

$$\text{,, max } \sigma_u: \quad (\sphericalangle M_{ko} = 16,08 + 20,68 = 36,76^{mt}$$

$$\text{,, min } \sigma_o: \quad (\sphericalangle M_{ku} = 10,28 + 14,09 = 24,37^{mt}$$

$$\text{,, min } \sigma_u: \quad (\rightarrow M_{ko} = 9,15 + 12,90 = 22,05^{mt}$$

$$F = 1,0 \cdot 1,1 = 1,10^{\text{qm}},$$

$$W = \frac{b d^2}{6} = \frac{1,0 \cdot 1,1^2}{6} = 0,203^{\text{m}^3}$$

$$N_e = 192^{\text{t}}$$

$$\sigma_o = \frac{192}{1,1} + \frac{185,04 \cdot 0,029}{0,203} + \frac{25,80}{0,203} = 174 + 26 + 127 = 327 \begin{matrix} \text{t/qm} \\ \text{kg/qcm} \end{matrix}$$

$$\sigma_u = \frac{192}{1,1} - \frac{185,04 \cdot 0,029}{0,203} + \frac{36,76}{0,203} = 174 - 26 + 180 = 328.$$

Will man die Fugenstärke so reduzieren, dass eine Randspannung von 35 kg/qcm entsteht, so hat man nach Gl. (38)

mit $b = 1,00^{\text{m}}; \quad \sigma = 350^{\text{t/qm}}; \quad N = 192^{\text{t}};$

$$\curvearrowleft M_{k_o} = 36,76^{\text{mt}}; \quad \curvearrowright M_{k_u} = 25,80^{\text{mt}};$$

$$350 d^2 - 192 d - 3(36,76 + 25,80) = 0$$

oder

$$350 d^2 - 192 d - 187,7 = 0.$$

Hieraus $d = 1,05^{\text{m}}.$

Mit dieser Gewölbestärke ergibt sich

$$F = 1,05^{\text{qm}}; \quad W = \frac{1,0 \cdot 1,05^2}{6} = 0,184^{\text{m}^3}$$

$$\max \sigma_o = \frac{192}{1,05} - \frac{185 \cdot (-0,027)}{0,184} + \frac{25,80}{0,184} = 183 + 27 + 140 = 35 \begin{matrix} \text{t/qm} \\ \text{kg/qcm} \end{matrix}$$

$$\max \sigma_u = \frac{192}{1,05} + \frac{185 \cdot (-0,027)}{0,184} + \frac{35,76}{0,184} = 183 - 27 + 194 = 35$$

$$\min \sigma_o = \frac{192}{1,05} - \frac{185 \cdot (-0,027)}{0,184} - \frac{23,68}{0,184} = 183 + 27 - 129 = 8,1$$

$$\min \sigma_u = \frac{192}{1,05} + \frac{185 \cdot (-0,027)}{0,184} - \frac{22,05}{0,184} = 183 - 27 - 120 = 3,6.$$

Es treten also Zugspannungen nicht auf.

b) Dimensionierung von Querschnitt VI und Berichtigung der Achse für diesen Querschnitt.

Die Kernpunktsordinaten dieses Querschnitts sind

$$y_{k_o} = 2,736 + \frac{1,15}{6} = 2,928^{\text{m}}$$

$$y_{k_u} = 2,736 - \frac{1,15}{6} = 2,544^{\text{m}}.$$

Zur Bestimmung der Einflusslinien für die Kernpunktsmomente hat man

$$\frac{a a'}{l y_{k_o}} = \frac{8,173 \cdot 32,173}{40,346 \cdot 2,928} = 2,226$$

$$\frac{a a'}{l y_{k_u}} = \frac{8,173 \cdot 32,173}{40,346 \cdot 2,544} = 2,562.$$

Man erhält somit nach Abb. 21:

aa) Für gleichmässig verteilte Last von 400 kg/qm:

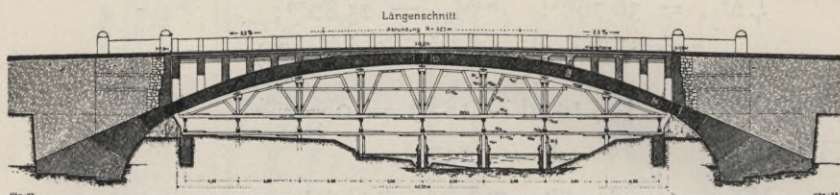
$$\curvearrowright M_{ku} = 2,544 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15,7 \cdot 1,54 \cdot 0,400 = 12,30^{mt}$$

$$\curvearrowleft M_{ko} = 2,928 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25,9 \cdot 1,12 \cdot 0,400 = 16,99^{mt}$$

$$\curvearrowleft M_{ku} = 2,544 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24,6 \cdot 0,91 \cdot 0,400 = 11,34^{mt}$$

$$\curvearrowright M_{ko} = 2,928 \cdot \frac{1}{2} \cdot 14,4 \cdot 1,21 \cdot 0,400 = 10,20^{mt}$$

Abb. 22.



bb) Für eine Dampfwalze von 18^t Gewicht:

$$\curvearrowright M_{ku} = 2,544 [3,25^t \cdot 1,54 + 2,5^t \cdot 0,82] = 17,93^{mt}$$

$$\curvearrowleft M_{ko} = 2,928 [4,40^t \cdot 1,12 + 3,0^t \cdot 0,93] = 22,60^{mt}$$

$$\curvearrowleft M_{ku} = 2,544 [4,40^t \cdot 0,91 + 3,0^t \cdot 0,75] = 15,91^{mt}$$

$$\curvearrowright M_{ko} = 2,928 [3,25^t \cdot 1,21 + 2,5^t \cdot 0,52] = 15,32^{mt}$$

cc) Für die Dimensionierung massgebend ist:

$$\curvearrowright M_{ku} = 12,30 + 17,93 = 30,23^{mt}$$

$$\curvearrowleft M_{ko} = 16,99 + 22,60 = 39,59^{mt}$$

$$\curvearrowleft M_{ku} = 11,34 + 15,91 = 27,25^{mt}$$

$$\curvearrowright M_{ko} = 10,20 + 15,32 = 25,52^{mt}$$

dd) Verschiebung der Bogenachse und Randspannungen.

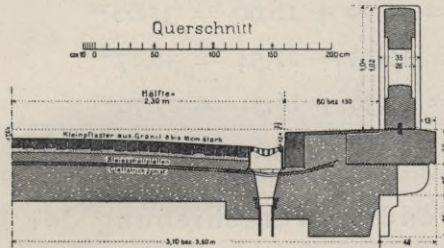
Nach Gleichung (37) erhält man

$$\Delta y = \frac{30,23 - 39,59}{2 \cdot 185,04} = -0,025^m.$$

Behält man die Stärke der Fuge mit 1,05^m bei, so ergibt sich mit $W = 0,184^m$; $\mathfrak{N} = 190^t$:

$$\begin{aligned} \max \sigma_o &= \frac{190}{1,05} + \frac{185 \cdot 0,025}{0,184} + \frac{30,23}{0,184} = 181 + 25 + 164 = 37,1 \text{ kg/qcm} \\ \max \sigma_u &= \frac{190}{1,05} - \frac{185 \cdot 0,025}{0,184} + \frac{39,59}{0,184} = 181 - 25 + 216 = 37,2 \\ \min \sigma_o &= \frac{190}{1,05} + \frac{185 \cdot 0,025}{0,184} - \frac{27,25}{0,184} = 181 + 25 - 148 = 5,8 \\ \min \sigma_u &= \frac{190}{1,05} - \frac{185 \cdot 0,025}{0,184} - \frac{25,52}{0,184} = 181 - 25 - 139 = 1,7. \end{aligned}$$

Abb. 23.



c) Dimensionierung von Querschnitt V und Berichtigung der Achse für diesen Querschnitt.

Die Kernpunktskoordinaten dieses Querschnitts sind, wenn die Normalfugenstärke entsprechend den seitherigen Ergebnissen zu 1,05 m und somit die Vertikalfuge zu 1,10 m angenommen wird

$$y_{ko} = 3,149 + \frac{1,10}{6} = 3,333 \text{ m}$$

$$y_{ku} = 3,149 - \frac{1,10}{6} = 2,965 \text{ m}.$$

Zur Bestimmung der Einflusslinie für das Kernpunktsmoment hat man

$$\frac{a a'}{l y_{ko}} = \frac{10,173 \cdot 30,173}{40,346 \cdot 3,333} = 2,282$$

$$\frac{a a'}{l y_{ku}} = \frac{10,173 \cdot 30,173}{40,346 \cdot 2,965} = 2,566$$

Man erhält somit nach Abb. 21

aa) Für gleichmässig verteilte Last von 400 kg/qm:

$$\rightarrow M_{ku} = 2,965 \cdot \frac{1}{2} \cdot 16,4 \cdot 1,31 \cdot 0,400 = 12,70 \text{ mt}$$

$$\vee M_{ko} = 3,333 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25,0 \cdot 0,98 \cdot 0,400 = 16,33 \text{ mt}$$

$$\vee M_{ku} = 2,965 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24,0 \cdot 0,80 \cdot 0,400 = 11,39 \text{ mt}$$

$$\rightarrow M_{ko} = 3,333 \cdot \frac{1}{2} \cdot 15,3 \cdot 1,02 \cdot 0,400 = 10,40 \text{ mt}.$$

bb) Für eine Dampfwalze von 18^t Gewicht:

$$\rightarrow M_{ku} = 2,995 [3,7^t \cdot 1,3 + 2,7^t \cdot 0,58] = 18,90^{mt}$$

$$\downarrow M_{ko} = 3,333 [4,4^t \cdot 0,98 + 3,0^t \cdot 0,82] = 22,54^{mt}$$

$$\downarrow M_{ku} = 2,965 [4,4^t \cdot 0,80 + 3,0^t \cdot 0,66] = 16,31^{mt}$$

$$\rightarrow M_{ko} = 3,333 [3,7^t \cdot 1,02 + 2,7^t \cdot 0,34] = 15,64^{mt}$$

cc) Für die Dimensionierung massgebend ist somit:

$$\rightarrow M_{ku} = 12,70 + 18,90 = 31,60^{mt}$$

$$\downarrow M_{ko} = 16,33 + 22,54 = 38,87^{mt}$$

$$\downarrow M_{ku} = 11,39 + 16,31 = 27,70^{mt}$$

$$\rightarrow M_{ko} = 10,40 + 15,64 = 26,04^{mt}$$

dd) Die notwendige Verschiebung der Bogenachse beträgt:

$$\Delta y = \frac{31,60 - 38,87}{2 \cdot 185,04} = -0,021^m.$$

Mit $d = 1,05^m$; $F = 1,05^{qm}$; $W = 0,184^{ms}$; $N = 188^t$ ergibt sich:

$$\max \sigma_o = \frac{188}{1,05} + \frac{185 \cdot 0,021}{0,184} + \frac{31,60}{0,184} = 179 + 21 + 172 = 37,2$$

$$\max \sigma_u = \frac{188}{1,05} - \frac{185 \cdot 0,021}{0,184} + \frac{38,87}{0,184} = 179 - 21 + 214 = 37,2$$

$$\min \sigma_o = \frac{188}{1,05} + \frac{185 \cdot 0,021}{0,184} - \frac{27,70}{0,184} = 179 + 21 - 151 = 4,9$$

$$\min \sigma_u = \frac{188}{1,05} - \frac{185 \cdot 0,021}{0,184} - \frac{26,04}{0,184} = 179 - 21 - 142 = 1,6.$$

d) Dimensionierung des Scheitelquerschnitts.

Die Berechnung des Scheitelquerschnitts könnte, wie die der übrigen Querschnitte, nach den Kernpunktsmomenten erfolgen, wobei dann die Berechnung der Normalkraft in Wegfall käme.

Ebensoschnell gelangt man jedoch zum Ziel, wenn die Normalkomponenten der im Scheitelquerschnitt wirkenden Fugendrucke berechnet werden. In diesem Fall hat man

aa) Für gleichmässig verteilte Nutzlast von 400 kg/qm bei Vollbelastung der Brücke:

$$N = H = \frac{1}{2} \cdot \overset{qm}{40,346} \cdot \overset{t}{2,521} \cdot \overset{t}{0,400} = 20,33.$$

bb) Für eine Dampfwalze von 18^t,
in der ungünstigsten Stellung (Hinterrad im Scheitel):

$$H = 4,4^t \cdot 2,521 + 2,6^t \cdot 2,08 = 16,5^t.$$

Somit Normalkomponente des resultierenden Fugendrucks

$$R = H = 16,5^t.$$

cc) Für die Dimensionierung massgebend ist:

$$N_v = 20,3^t + 16,5^t = 36,8^t$$

$$\text{das Eigengewicht } \mathfrak{N} = 185,0^t$$

$$\text{zus. } N = \underline{221,8^t}.$$

dd) Fugenpressung.

Bei einer Scheitelstärke von 80^{cm} ergibt sich als Beanspruchung des Gewölbebetons unmittelbar hinter den Gelenkquadern, wo $d = 80^{\text{cm}}$ immer noch annähernd richtig ist,

$$\sigma = \frac{221,8^t}{1,0 \cdot 0,8^{\text{qm}}} = 277^{\text{t/qm}} = 27,7^{\text{kg/qcm}}.$$

e) Kämpferfuge.

Diese könnte ähnlich wie die Scheitelfuge durch Zusammensetzung der Werte für A und H berechnet werden.

Einfacher ist jedoch die Bestimmung der Beanspruchung der Kämpferfuge aus dem Kernpunktsmoment für den Kämpferquerschnitt. Aus der allgemeinen Gleichung für den Kernpunktsmoment

$$M_k = y_k \left(\frac{M_0}{y_k} - H \right)$$

ergibt sich mit $M_0 = 0$

$$M_k = - y_k \cdot H.$$

Hierbei ist $y_k = \pm \frac{1,00}{6}^{\text{m}}$, wenn die Vertikalstärke des Gewölbs im Kämpfer zu 1,00^m angenommen wird.

Man erhält somit

aa) Für Menschengedränge:

$$\rightarrow M_{ku} = \frac{1,00^{\text{m}}}{6} \left[\frac{1}{2} \cdot 40,346 \cdot 2,521 \cdot 0,400 \right] = 3,39.$$

bb) Für die Dampfwalze:

$$\rightarrow M_{ku} = \frac{1,00^{\text{m}}}{6} \left[4,4 \cdot 2,521 + 2,6 \cdot 2,08 \right] = 2,75.$$

cc) Für die Dimensionierung ist somit massgebend:

$$M = 3,39 + 2,75 = 6,14^{mt}.$$

und es ergibt sich mit

$$d = 0,90^m; \quad F = 0,90^{qm}; \quad W = \frac{1,0 \cdot 0,9^2}{6} = 0,135^{m^3}; \quad N = 204^t$$

$$\sigma_o = \sigma_u = \frac{204^t}{0,90^{qm}} + \frac{6,14^{mt}}{0,135^{m^3}} = 227 + 45^t{}^{qm} = 27,2^{kg/qcm}$$

3. Endgültige Form der Bogenachse.

Aus den seitherigen Untersuchungen ergibt sich, dass das Maximum der Beanspruchung bei Fuge V oder VI angenommen werden kann. Da eine genaue Festlegung dieses »gefährlichen« Querschnitts nicht notwendig ist, können zur endgültigen Konstruktion der Bogenachse nach der in Abschnitt IV angegebenen Methode folgende Daten angenommen werden:

1. Das Scheitelgelenk mit horizontaler Tangente.
2. Der Achspunkt zwischen Querschnitt V und VI und in ihm die aus den rektifizierten Ordinaten von V und VI sich ergebende Tangente an die Bogenachse.
3. Das Kämpfergelenk.

Zur Festlegung der Systemfigur hat man somit:

Rektifizierte Ordinate von

Achspunkt V: $y_V = 3,149 - 0,021 = 3,128^m$

Rektifizierte Ordinate von

Achspunkt VI: $y_{VI} = 2,736 - 0,025 = 2,711^m$

Somit Zwischenordinate: $y = \frac{3,128 + 2,711}{2} = 2,920^m$

Die Neigung der Tangente an die Bogenlinie ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3,128 - 2,711}{2,00} = 0,2085.$$

Hieraus $\varphi = 13^0 9'$; $\cos \varphi = 0,979$; $\sin \varphi = 0,204$.

Damit ergeben sich die in Abb. 21 eingeschriebenen Masze zur genauen Festlegung der Tangenten an die als parabolischer Korbbogen zu konstruierende, endgültige Bogenachse.

Wie ersichtlich, setzt sich diese Bogenachse aus zwei Parabeln zusammen. Die erste, an den Scheitel anschliessende, ist vollständig bestimmt, da die drei Punkte festliegen.

Die zweite, an den Kämpfer anschliessende, ist zunächst noch unbestimmt, da die Lage des Tangentenschnittpunkts mehr oder weniger willkürlich gewählt werden kann.

Dieser Punkt wird nun aber so gewählt, dass die »Kämpferparabel« in ihrem Berührungspunkt mit der »Scheitelparabel« denselben Krümmungshalbmesser erhält, wie letztere.

Hierzu ist nach Seite 38 notwendig, dass (s. Abb. 21)

$$T S_2 = T S_1 \sqrt{\frac{c'}{c}}$$

ist. Es ergibt sich somit

$$T S_2 = \sqrt{\frac{0,986}{1,187}} 5,292 = 4,82^m.$$

Die Konstruktion der Bogenachse ist nun möglich.

Um eine grössere Genauigkeit zu erreichen und die vertikalen und normalen Fugenstärken in sämtlichen Querschnitten aus der Zeichnung entnehmen zu können, muss die Bogenachse überhöht gezeichnet werden.

Dies hat bei der vorliegenden Konstruktionsmethode keinerlei Schwierigkeit; man braucht nur die durch Zahlen festgelegte Systemfigur in überhöhtem Maszstab zu zeichnen und die Parabel in gleicher Weise wie bei der nicht überhöhten Zeichnung einzukonstruieren.

Im Original zu Abb. 21 wurden die Abszissen in 1 : 100, die Ordinaten in 1 : 20 gezeichnet.

Es besteht bei dieser Grösze der Abbildung keine Schwierigkeit, die Ordinaten sämtlicher Achspunkte so genau abzugreifen, als für die etwaige weitere statische Berechnung notwendig ist.

Für die Ausführung kann die Konstruktion unmittelbar auf dem Reissboden ausgeführt werden.

4. Endgültige Form der Bogenleibungen.

Die Form der Bogenleibungen ergibt sich nach den erläuterten Grundsätzen in einfachster Weise und ist aus Abb. 21 im einzelnen ersichtlich.

Mitteilungen über den Bau und die Konstruktion der Brücke finden sich im Verwaltungsbericht der K. Ministerialabteilung für den Strassen- und Wasserbau für die Rechnungsjahre 1907/1908, dem die Abbildungen der Brückenansicht, des Längenschnitts, Grundrisses und Querschnitts entnommen sind.



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II 31177
L. inw.

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299998