

Der
Auftrieb in Talsperren.

Von

Dr.-Ing. Paul Fillunger in Wien.

Sonderabdruck aus der „Österreichischen Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst“, Heft 31, 32, 33 und 34, Jahrgang 1913.

Wien 1913.

Im Selbstverlage des Verfassers.

Druckerei- u. Verlags-Aktiengesellschaft,
vorm. R. v. WALDHEIM, JOS. EBNERLE & Co., Wien.

6-2

345

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300008

II 31161

Der Auftrieb in Talsperren.

Von Dr.-Ing. Paul Fillunger in Wien.

(Die Berechtigung des Trapezgesetzes. — Neuere Forschungen. — Günstigste Fugenanordnung. — Übliche Berechnungen auf Unterdruck. — Einiges zur Theorie inhomogener Materialien. — Raumelemente verschiedener Kleinheitsordnung. — Konvexe und konkave Oberflächen mit Spitzen, Kanten, parabolischen und Nabelpunkten unter gleichmäßigem äußeren Druck. — Die Frostbeständigkeit der Gesteine. — Erweiterung der Prüfungsnormen für Talsperrenmaterial. — Das Archimedische Prinzip bei porösen Körpern. — Größe und Richtung der Kapillarreibung. — Das Potential der Massenkkräfte als Funktion von einer und von zwei Variablen. — Die Berücksichtigung von Wasserfugen und die Wartung der Talsperren.)

In der neueren Literatur über die statische Berechnung von Talsperren trifft man häufig die Behauptung an, daß das sogenannte „Trapezgesetz“, das ist die geradlinige Verteilung der Normalspannungen auf horizontalen Schnittflächen, für dreieckige Mauerprofile „streng“ gültig ist.

Die französischen Autoren und auch andere verweisen hiebei auf Maurice Lévy, welcher diese Ansicht wiederholt vertreten hat und auch glaubte, in einer durch die französische Akademie der Wissenschaften veröffentlichten Schrift¹⁾ den Beweis für die Brauchbarkeit des Trapezgesetzes bei beliebigen Profilformen erbracht zu haben.

Eine kurze Wiedergabe des Lévy'schen Gedankenganges kann mit Rücksicht auf die wissenschaftliche Bedeutung des Problems nicht unterlassen werden.

Lévy gibt zunächst Spannungsformeln für ein rechteckiges Profil an, welche bis auf die Randbedingungen in der Krone als exakt gelten können. In der Krone aber herrschen Schubspannungen, deren Höchstwert dem Druck einer Wassersäule von der Höhe (Mauerbreite : 80) gleichkommt. Die Normalspannungen am Rande horizontaler Fugen sind kleiner, als sie sich aus dem Trapezgesetz ergeben würden. Nach Lévy können nun die ausgeführten Profile als Mittelglieder einer Reihe angesehen werden, deren erstes und letztes Glied das Rechteck und das Dreieck sind.

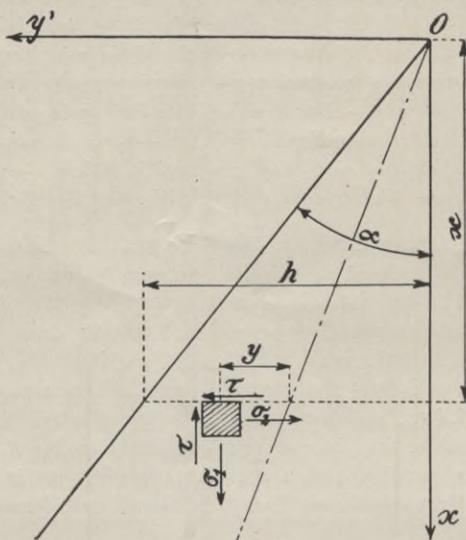
¹⁾ Maurice Lévy: „Sur la légitimité de la règle dite du trapèze dans l'étude de la résistance des barrages en maçonnerie“. Comptes rendus, 2. mai 1898.

Akc. Nr. 2131/49

1

345

Da das Trapezgesetz, wie Lévy in einer späteren Abhandlung¹⁾ nachwies, für Dreiecksprofile vollkommen exakt ist, meinte Lévy berechtigt zu sein, anzunehmen, daß es als Grundlage für die Berechnung beliebiger Profile stets eine größere Sicherheit gewährleiste, als man unmittelbar beabsichtigt. Es bleibe einer gegenwärtig in Vorbereitung stehenden Veröffentlichung in dieser Zeitschrift überlassen, die Unhaltbarkeit dieser Annahme zu zeigen, und es kann nicht wundernehmen, daß in der Folge die Bemühungen nicht zum Stillstande kamen, das Trapezgesetz auszuschalten oder seine Berechtigung für beliebige Profile nachzuweisen.



Figur 1.

Von diesen seien hier einige besonders hervorgehoben.

Aus dem „Trapezgesetz“ folgen die Formeln, welche Geheimrat Dr. Schäffer im „Zentralblatt der Bauverwaltung“, 1906, Seite 432, für dreieckige Mauerprofile aufstellt. Nach Schäffer ist die Spannungsverteilung gegeben durch die Beziehungen:

$$\sigma_1 = \frac{2 \gamma y}{\operatorname{tg}^3 \alpha} - \frac{\gamma (h - 2 y)}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

$$\sigma_2 = \frac{-\gamma h}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\tau = \frac{\gamma (h + 2 y)}{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

¹⁾ Comptes rendus, 4. juillet 1898. „Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire“.

σ_1 und σ_2 bedeuten hier die vertikale beziehungsweise horizontale Normalspannung (positiv als Zugspannung), τ die Schubspannung, x den vertikalen Abstand eines wagrechten Schnittes von der Krone, y die Entfernung von der Mitte des Schnittes, dessen ganze Breite h ist. α ist der Winkel zwischen luft- und wasserseitiger Begrenzungsebene. (Siehe Textfigur 1.) γ und γ' sind die spezifischen Gewichte von Wasser und Mauerwerk.

Führt man an Stelle der schiefwinkligen Koordinaten rechtwinklige (Oxy') ein, so ist wegen

$$y = y' - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2} x$$

$$h = x \operatorname{tg} \alpha$$

zu setzen:

$$\sigma_1 = \frac{2\gamma + \gamma' \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^3 \alpha} y' - \frac{\gamma + \gamma' \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} x$$

$$\sigma_2 = -\gamma x$$

$$\tau = \frac{\gamma}{\operatorname{tg}^2 \alpha} y'.$$

Diese Spannungen befriedigen nicht nur die hier geltenden Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial y'} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y'} = -\gamma'$$

und alle Grenzbedingungen, sondern auch, da sie linear in bezug auf x und y' sind, die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) (\sigma_1 + \sigma_2) = 0.$$

Daraus folgt zunächst, daß in der Tat das Trapezgesetz als eine streng gültige Lösung angesehen werden kann, wenn das Mauerprofil ein Dreieck ist, die Wasserseite bis hinauf zur Krone O vom Wasserdruck getroffen wird und außerdem die Wasserseite von einer vertikal abfallenden Fläche gebildet wird. Ist die Wasserseite geneigt¹⁾, so befriedigen die obigen Spannungsformeln die Randbedingungen nicht mehr; es läßt sich aber leicht zeigen, daß selbst dann noch das Trapezgesetz aufrecht erhalten werden kann, nur müssen die Spannungen dann außer dem Neigungswinkel α der Luftseite gegen die Schwerlinie auch noch den Winkel β der Wasserseite gegen diese Richtung enthalten. Die Behauptung von der strengen Gültigkeit des Trapezgesetzes bei dreieckigen Mauerprofilen

¹⁾ Während der Drucklegung wurde der Verfasser von Herrn Baurat Plenckner auf die Untersuchungen Schäffers in der Han. Zeitschrift, 1909, Seite 377, aufmerksam gemacht, wo auch dieser Fall behandelt ist.

findet man in den einschlägigen Veröffentlichungen, wie bereits erwähnt, verhältnismäßig häufig; nach Wissen des Verfassers ist aber seltsamerweise nirgends, mit Ausnahme der Abhandlung Lévy's in den Comptes rendus, 1898, 4. Juli, ein wirklicher Beweis für diese Behauptung gegeben worden, obwohl er sehr einfach zu führen wäre.

L. W. Atcherley und Professor Karl Pearson¹⁾ wie auch Dr.-Ing. Platzmann²⁾ haben versucht, die Berechnung der Spannungsverteilung in Stauwerken beliebiger Form mit Hilfe der mathematischen Theorie zu bewerkstelligen, sahen sich aber gezwungen, schließlich doch wieder auf das alte Trapezgesetz hypothetisch zurückzugreifen. Gegenüber solchen Bestrebungen muß darauf hingewiesen werden, daß ihren Ergebnissen immer noch der Stempel der Willkür anhaften muß, weil die „Randbedingungen“ nur zum Teile als bekannt gelten können, nämlich nur an den aus dem Erdreich hervorragenden Begrenzungsflächen der Mauer. Hingegen sind die Auflagerreaktionen im Fundament ganz von den örtlichen Verhältnissen einer zu errichtenden Talsperre abhängig, was auch Dr. Platzmann betont. Wenn man auch annehmen kann, daß die Senkungen besonders nachgiebiger Gebirgspartien während der Bauperiode einer Talsperre sich sofort auf die Mauer selbst übertragen und dadurch zum Teile ausgeglichen, beziehungsweise unwirksam werden, so kann man doch nicht ein Gleiches von jenen Senkungen voraussetzen, die erst eintreten, sobald das Becken zum ersten Male gefüllt wird und die Mauer bereits als einziger, fest zusammenhängender Körper (Monolith) angesehen werden muß. Es ist daher durchaus nicht ausgeschlossen, daß man dereinst über mehrere elastizitätstheoretisch einwandfreie, gleichberechtigte Lösungen des Talsperrenproblems verfügen wird, welche, da sie verschiedene Pressungen im Fundament voraussetzen, auch ganz verschiedene Spannungen im Mauerwerk angeben und daß dann das „Trapezgesetz“ in verjüngter Gestalt von den Toten wieder aufersteht, nämlich für die Fundamentpressungen, nicht für beliebige Querschnitte einer vom Dreiecke abweichenden Profilform. Die Wassertiefe solcher Bauwerke ist zumeist wenig verschieden von der Breite des Fundamentes; man muß daher annehmen, daß der Einfluß der bekannten Randbedingungen des Wasserdruckes auf die Spannungen nicht höher einzuschätzen ist als derjenige, welcher von den unbekanntem Randbedingungen des Fundamentdruckes ausgeübt wird. Allerdings werden von mehreren solchen „streng gültigen“ Lösungen nur wenige genügend einfache Berechnungsformeln liefern, um für die Praxis brauchbar zu sein.

¹⁾ Abstrakt in Min. of proc. Inst. C. E. vol. CLXII pag. 456.

²⁾ „Über den Querschnitt an Staumauern“, Leipzig, Verlag Engelmann 1908.

Bezieht sich eine Lösung der Talsperrenberechnung nur auf ein ebenes Problem, daß heißt beachtet man nur drei Spannungen, nämlich die vertikale Normalspannung, die in der Richtung der Talachse wirkende und eine Schubspannung, so kommt zu der oben erwähnten Einschränkung noch die weitere hinzu, daß damit der Normalspannung senkrecht zur Talachse bestimmte Werte vorgeschrieben werden, deren Einhaltung vom Widerstand der Talwände abhängig ist. Auf diesen Umstand wies Professor Dr. Föppl in seinem „Lehrbuch über technische Mechanik“ ausführlich hin¹⁾.

Eine solche ebene Lösung wurde vom Verfasser in zwei Abhandlungen in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ veröffentlicht. Die Ergebnisse derselben bedeuten im Vergleiche mit dem alten Trapezgesetz keine wesentliche Erschwerung bei der Ermittlung der Spannungen.

In der ersten²⁾ wurde jener Belastungsfall behandelt, bei welchem eine Einzelkraft und ein Drehmoment auf die Schneide eines keilförmigen Körpers einwirken, die zweite³⁾ zeigt die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern bei drei Belastungsfällen und zwar: Durch eine gleichförmig auf einer Rückenfläche verteilte Normalspannung, durch eine gleichförmig von der Schneide aus ansteigende Belastung und schließlich durch das Eigengewicht. Wie man unter Verwendung des Überlagerungsgesetzes aus diesen fünf Teillösungen die Spannungen zusammensetzen kann, welche in Talsperren mit praktisch erprobten Mauerprofilen vermutlich auftreten, wurde von Herrn Baurat Wilhelm Plenkner ausführlich beschrieben⁴⁾.

Die Begrenzungslinien der Profile sind zum Teile Gerade, zum Teile Kreisbögen. Letztere üben, namentlich bei kleinen Radien, einen Einfluß auf die Spannungsverteilung aus, der vollständig unberücksichtigt bleibt. Ein Versuch des Verfassers⁵⁾, auch bogenförmige Umrißlinien in die Berechnung einzubeziehen, mußte, da er teilweise auf unlösbare mathematische Aufgaben führte, abgebrochen werden.

¹⁾ „Vorlesungen über technische Mechanik“ von Dr. August Föppl, V. Band, Seite 58 bis 61. Leipzig, Verlag Teubner, 1907.

²⁾ Fillunger: „Die Spannungsverteilung in keilförmigen Körpern, auf welche eine Einzelkraft einwirkt, unter Beschränkung auf das ebene Problem“. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 59. Band, Seite 44.

³⁾ Fillunger: „Drei wichtige ebene Spannungszustände des keilförmigen Körpers“. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 60. Band, Seite 275.

⁴⁾ W. Plenkner: „Beanspruchung der Baustoffe in Stauauern nach neueren Forschungen“. Erweiterter Sonderabdruck der Abhandlung in der Allgemeinen Bauzeitung, Wien, 1913, 1. Heft.

⁵⁾ „Ein Beitrag zur Theorie der Festigkeit von Zughaken“. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 61. Band, Seite 92.

Trotz der vielen einschränkenden Bemerkungen, welche übrigens gegen das Trapezgesetz in gleichem Maße sprechen, ist diese neue Lösungsform des Talsperrenproblems doch wesentlich genauer als die bisher verwendete, denn die Zahl der willkürlichen Ausnahmen ist hier kleiner geworden. Für den Praktiker dürfte es von Wert sein, daß sie gestattet, den Verlauf der Hauptspannungstrajektorien, welche bekanntlich frei von Schubspannungen sind, genauer zu verfolgen. Bringt man bei steinernen Talsperren die Mörtelfugen als die schwächsten Teile in die Lage, welche diese Kurven bei voll gefüllten Becken einnehmen und sorgt man überdies, wie Herr Baurat Plenkner empfiehlt, durch eingelegte Eisenstücke dafür, daß auch Zugspannungen von Mörtelmaterial ferngehalten werden, wo solche auftreten, so erzielt man einen besonders hohen Sicherheitsgrad in diesen Bauwerken. Gekrümmte Fugen wurden schon vom Altmeister des deutschen Talsperrenbaues, Professor O. Intze in Anwendung gebracht¹⁾, nur entspricht die Intzesche Fugenanordnung eher den Trajektorien bei leerem Becken.

Durch Anwendung der hier vorgeschlagenen Fugenanordnung läßt sich noch ein weiterer Vorteil erreichen, wenn bei Errichtung der Talsperre mit den Schichten am luftseitigen Mauerfuß begonnen wird. Besitzt nämlich das Fundament an dieser Stelle eine stärkere Neigung zu schädlichen Setzungen, so können diese schon während der Bauperiode, wo sie minder gefährlich sind, eintreten und nicht erst im Augenblicke der ersten Einwirkung des vollen Wasserdruckes²⁾. Der Wassersack, welcher bei der Intzeschen Fugenanordnung zu Unzukömmlichkeiten führt, tritt hier nicht auf.

Für diese Anordnung der Fugen trat auch Lévy schon ein. Seine Anregung scheint jedoch nicht auf fruchtbaren Boden gefallen zu sein. Siehe Comptes rendus, 1895, 5. août „*Quelques considerations sur la construction des grands barrages*“.

* * *

In neuerer Zeit gewann die Anschauung immer mehr Boden in der Fachwelt, daß außer dem Wasserdruck und Eigengewicht der Mauer noch eine dritte Kraft, der „Unterdruck“ bei der statischen Berechnung herangezogen werden müsse, obwohl es nicht an gewichtigen Stimmen fehlte, welche, wie Intze und Sympher, die Berechnung auf Unterdruck verwarfen, solange nicht auch kleine Zugspannungen im Mauerwerk zugelassen werden. Ja man hat sogar das an der Luftseite austretende Sickerwasser durch physikalische

¹⁾ Siehe Ziegler: „Der Talsperrenbau“, Berlin 1911.

²⁾ Über die Lage der Hauptspannungstrajektorien bei vollem und leerem Becken siehe Platzmann: „Über den Querschnitt der Staumauern“, Seite 9.

Hypothesen zu erklären gesucht, wonach es nicht aus dem Inhalte des Staubeckens stammen soll.

Bei der Rechnung auf Unterdruck nimmt man an, daß von der Wasserseite her Druckwasser in Fugen eindringe, sucht die Resultierende dieses nach oben wirkenden Wasserdruckes, setzt sie mit dem horizontalen Wasserdruck und dem Eigengewichte zu einer einzigen Resultierenden zusammen und rechnet im übrigen so, als ob die Wasserfuge nicht vorhanden wäre. Dabei wählt man die Druckverteilung in der Weise, daß das Umsturzmoment des horizontalen Wasserdruckes möglichst stark unterstützt wird¹⁾.

R. Schaefer²⁾ bekämpft die auf diesen Vorstellungen begründete Lieckfeldtsche Methode und behauptet, daß sie zu unwirtschaftlich großen Abmessungen führe. Die meisten deutschen Talsperren müßten schon eingestürzt sein, wenn die Lieckfeldtsche Methode richtig wäre. Nach Schaefer und vielen anderen Autoren ist ein gefährlicher Unterdruck nur in der Gründungssohle vorhanden.

Nun ist zwar die Entstehung von horizontalen Wasserfugen nicht zu befürchten, so lange an der Forderung festgehalten wird, daß Zugspannungen von der Mauer fernzuhalten sind, bei Bauten aber, welche, wie Lieckfeldt³⁾ sagt, „für die Ewigkeit“ bestimmt sind, ist jede begründete Vorsicht gewiß am Platze. Den Anhängern jener Theorie, wonach der Unterdruck erst wirksam ist, wenn er größer wird als die ohne ihn ermittelten vertikalen Pressungen, wäre daher anzuraten, die Forderung zu erheben, daß dies nirgends geschehe⁴⁾.

Die nachstehenden Untersuchungen verfolgen den Zweck, eine klare Anschauung über die mechanischen Wirkungen des in das Mauerwerk eindringenden Wassers herzustellen, Formeln und Methoden anzugeben, nach welchen diese Wirkungen leicht zahlenmäßig angegeben werden können und die Eigenschaften zu kennzeichnen, die ein für Talsperren geeignetes Baumaterial besitzen muß.

Wenn auch, wie oben bemerkt, horizontale Zugrisse auf der Wasserseite ohne Auftreten außergewöhnlicher Verhältnisse wie Erdbeben, unvorhergesehene Setzungen im Fundamente u. dergl. bei richtig konstruierten Talsperren nicht zu befürchten sind, so müssen doch vertikale Sprünge in der Mauer zu den Möglichkeiten gerechnet

¹⁾ Die verschiedenen Methoden der Rechnung auf Unterdruck bespricht ausführlich Waniek „Über die Berechnung von Staumauern...“ in der Österr. Wochenschrift für den öffentl. Baudienst, 1912, Nr. 38, 39.

²⁾ „Der Unterdruck bei Staumauern“, Zeitschrift für Bauwesen, Berlin 1913, Heft 1 bis 3.

³⁾ „Die Lebensdauer der Talsperren“, Zentralblatt der Bauverwaltung, 1906, Seite 167.

⁴⁾ In der obzitierten Schrift aus dem Jahre 1895 stellt Lévy diese Forderung für alle jene Talsperren tatsächlich auf, welche nicht mit Drainageröhren zur Ableitung des Innendruckes versehen sind.

werden. Bei der Urftsperrre, welche 58 m hoch ist, betragen die durch Temperaturschwankungen herbeigeführten Änderungen der Pfeilhöhe des bogenförmigen Grundrisses bis zu 6.5 cm¹⁾; da das Material nur geringe Elastizität besitzt, müssen oder können wenigstens dabei Risse entstehen, welche dem Wasser den Eintritt in die Mauer gestatten²⁾.

Bei allen statischen Berechnungen von Mauerwerkskörpern wird stets die Annahme zugrunde gelegt, daß das Material als ein homogenes, elastisch isotropes angesehen werden könne, und es entsteht die Frage, ob diese Annahme überhaupt noch aufrecht erhalten werden darf, sobald man das Eindringen von Druckwasser in die Poren und Hohlräume des Mauerwerkes den allgemeinen Voraussetzungen für die theoretische Spannungsermittlung anschließt.

Die Theorie inhomogener Materialien ist bisher nur vereinzelt und von ganz verschiedenen Seiten in Angriff genommen

¹⁾ Oberbaurat Grohmann „Der Talsperrenbau in Deutschland und Österreich“, Allgemeine Bauzeitung, April 1912.

²⁾ Diese Tatsache wird durch die Beobachtungen nicht entkräftet, welche Sympher (Zentralblatt der Bauverwaltung, 1907, Seite 167) bei Ausbrüchen an Talsperren gemacht hat. Nach Sympher erwies sich das Material im Innern nur wenig feucht. Das Wasser tropfte ohne Druck von den nassen Flächen ab. Diese Beobachtungen beweisen die Anwesenheit von Wasser in der Mauer. Übrigens sind die Schlußfolgerungen Symphers in mehrfacher Hinsicht irrig. Denn in dem Augenblicke, wo ein Stein losgelöst wird, verschwindet der Wasserdruck an der bloßgelegten Fläche auch dann sofort, wenn er vorher bedeutend gewesen ist. Ein Spritzen der Poren kann nur eintreten, wenn diese weit genug sind, um größere Wassermengen aus den noch unter Druck stehenden Teilen durchzulassen. Man hat daher hier kein Kennzeichen für das Vorhandensein von Innendruck. Außerdem ist der absolute Druck nicht maßgebend für die Größe des Auftriebes, sondern nur das Druckgefälle. Ein Körper von unveränderlichem Volumen erfährt in der Nähe des Wasserspiegels genau denselben Auftrieb wie am Grunde des Meeres, wenn auch das Wasser unzusammendrückbar ist.

R. Schaefer („Der Unterdruck bei Stützmauern“, Zeitschrift für Bauwesen, Berlin, 1913, Heft 1 bis 3, Seite 101) berichtet, daß alle Sperren des Rheinlandes und in Westfalen bei vollem Becken durchnäßt sind und daß einige in den unteren Schichten sogar „spritzen“. Es sollen diese Erscheinungen zwar später aufhören, da das Mauerwerk sich selbst dichtet, was jedoch nicht ausschließt, daß diese Dichtung nur an der Luftseite vor sich geht, und daß der Wasserstrom weiter nach dem Fundament zu bestehen bleibt. Es könnte auch sein, daß das Wasser, bevor es die Luftseite erreicht hat, verdunstet, ein Vorgang, der namentlich bei angewitterter Luftseite mit erweiterten Poren und in der heißen Jahreszeit viel Wahrscheinlichkeit besäße. In diesem Falle würde die Luftseite trocken bleiben, obwohl das Wasser dort austritt.

Die Schriftleitung der Zeitschrift für Bauwesen macht die Einwendungen Schaefers gegen die Lieckfeldtsche Methode der Berechnung auf Unterdruck nicht zu ihren eigenen und schließt daran den Wunsch, daß bei neu errichteten Sperrmauern die Messung des Innendruckes stets ermöglicht werden sollte.

worden. Dr. Alfons Leon behandelte in mehreren Abhandlungen ¹⁾ die „Spannungsstörungen“, das heißt die Abweichungen von einer nach einem linearen Gesetz verteilten Zug- oder Druckspannung, wenn Randkerben, zylindrische oder kugelförmige Hohlräume oder ebensolche starre oder elastische Einschlüsse im Material vorhanden sind. Er fand, daß diese Inhomogenitäten eine beträchtliche örtliche Steigerung (oft bis auf den dreifachen ursprünglichen Wert) der Spannungen bedingen. Es kann aber auch die entgegengesetzte Wirkung eintreten: Balken, deren neutrale Faser man durch eine Bohrung entfernt, können dabei trotz Verlust an Material und Trägheitsmoment an Festigkeit zunehmen; auch zeigten Druckversuche Leons, daß senkrecht zur Kraft gelochte Prismen (in die Bohrungen wurden zum Teil Eisenkerne geschoben, zum Teil blieben sie leer) sich als widerstandsfähiger erwiesen als unversehrte Prismen. Ähnliche Aufschlüsse liefert eine Abhandlung von Doktor A. Basch ²⁾. Herr C. Pfeleiderer untersuchte Träger mit Schlitzten in der neutralen Schichte ³⁾ und Herr E. Preuß die Spannungsverteilung in gelochten Zugstäben ⁴⁾ auf experimentellem Wege. Auch Bauschinger hat einschlägige Versuche gemacht, indem er Zementkörper mit verschiedenem Sandzusatz auf ihre Festigkeit untersuchte und fand, daß die größte Festigkeit nicht dem reinen Zemente zukommt ⁵⁾.

Näher als die vorgenannten „lokalen“ Unterbrechungen der Homogenität steht der hier zu behandelnden Aufgabe ein Problem, welches von Professor Dr. Wieghardt und F. Klein aufgestellt

¹⁾ „Spannungen und Formänderungen einer um einen ihrer Durchmesser gleichmäßig sich drehenden Kreisscheibe.“ Verlag Fromme, Wien 1906. „Über die Störungen der Spannungsverteilung, die in elastischen Körpern durch Bohrungen und Bläschen entstehen“, Österr. Wochenschrift für den öffentl. Baudienst, 1908, Heft 9. „Über die Spannungsverteilung in Verbundkörpern“, Österr. Wochenschrift für den öffentl. Baudienst, 1909, Heft 2 und 3. „Zur Theorie der Verbundkörper“, Armierter Beton, 1909, Heft 9 und 10. „Kerbgröße und Kerbwirkung“, 10. Mitteilung aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der k. k. Technischen Hochschule in Wien, 1910.

²⁾ „Über den Einfluß lokaler Inhomogenitäten, insbesondere starrer Einschlüsse“. Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Hannover 1909.

³⁾ Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1910, Seite 349.

⁴⁾ Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 1912, Seite 1780.

⁵⁾ Zeitschrift des bayrischen Architekten- und Ingenieurvereines, Band IV, 1872, Seite 45, 57, 85. — Die von Bauschinger verwendeten Probekörper hatten Mischungsverhältnisse von 1 Teil Zement auf 0, 1, 2, 3, 4 Teile Bausand. Die Steigerung der Festigkeit durch Sandzusatz bezieht sich nur auf Zug-, Biegungs- und Scherfestigkeit. Die Druckfestigkeit läßt den Verlauf des Gesetzes nicht deutlich erkennen. Man vergleiche die Versuche A. Leons mit Zusätzen von 10% Normalsand (Armierter Beton, 1909, Heft 10.)

wurde¹⁾. Wieghardt wies nach, daß die sogenannte Facettenfläche ebener Fachwerke, welche aus lauter gleichseitigen Dreiecken bestehen, wenn die Stablängen abnehmen, schließlich in die Spannungsfläche einer gleich belasteten Platte übergeht. Die Analogie zwischen hochgradig statisch unbestimmten ebenen Fachwerken und der elastisch isotropen Platte aus homogenem Material tritt minder deutlich zutage, wenn die Fachwerkspolygone nicht gleichseitige Dreiecke sind. Diese Einschränkung erscheint fürs erste seltsam und führt zu der Vermutung, daß sie ganz entfallen könnte, wenn man die Gelenke des Fachwerkes nicht als völlig reibungslos annehmen würde.

Für Fachwerke mit langen Stäben wäre auch dann noch die Reibung relativ null, entsprechend dem Verhältnisse von Stablänge zum angenommenen Zapfenradius. Hingegen würde bei engmaschigen Fachwerken die Zapfenreibung mitbestimmend auf die Größe der Stabspannungen sein. Die Einführung einer Reibung hat ungefähr die gleiche Bedeutung wie die Annahme von Kräften zweiter Art²⁾ zwischen den Knotenpunkten der Fachwerke. Die Erfahrung hat gezeigt, daß auch die Molekulartheorie zu Ergebnissen führte, welche mit den Tatsachen nicht im Einklange stehen, wenn sie zwischen den Molekülen nur das Vorhandensein von Kräften der ersten Art voraussetzt³⁾. Ob die „Zapfenreibung“ in nähere Beziehungen zu bringen ist mit der beim Fließen fester Körper beobachteten „inneren Reibung“, könnte nur durch besondere Untersuchungen aufgeklärt werden.

Der Baustoff steinerner Talsperren besteht in letzter Linie überall aus einem Gemenge von Kristallen und amorphen Substanzen, welche nicht lückenlos aneinanderschließen. In die Hohlräume dringt Druckwasser ein. Was für Spannungen werden dadurch im Material hervorgerufen?

Von diesem Standpunkt aus gesehen, erscheint das Material als ein räumliches Fachwerk, welches sich in einem Druck führenden Medium befindet. Die Kristalliten sind die Fachwerksstäbe, ihre Verbindungsstellen vertreten die Gelenke. Gelänge es, einen Kristall von allen Verbänden bis auf einen loszulösen, so würde es einer Verdrehung um diesen immer noch einen gewissen Widerstand entgegensetzen. Mithin wären die Gelenke nicht als reibungslos zu betrachten. Man wird daher keinen Verstoß gegen die wissenschaftliche

¹⁾ Wieghardt: „Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke.“ Verh. zur Beförderung des Gewerbefleißes, 1906, Seite 139.

²⁾ Finger: „Elemente der reinen Mechanik“, III. Auflage, Seite 24, 25, 350 bis 353.

³⁾ Näheres hierüber in dem Vortrage Dr. Leons: „Die Entwicklung und die Bestrebungen der Materialprüfung“. Protokoll der V. Versammlungsversammlung des österreichischen Verbandes für die Materialprüfungen der Technik.

Strenge begehen, wenn man, einen genügend großen Raum ins Auge fassend, daß die kristallinische Struktur dagegen verschwindet, in bezug auf die äußeren, auf das Baumaterial einwirkenden Kräfte und die Massenkkräfte dasselbe als homogen ansieht. Hingegen muß zur Bestimmung des Einflusses, welchen das Medium auf seine unmittelbare Umgebung ausübt, die Struktur unbedingt berücksichtigt werden.

Zur Erleichterung des Verständnisses für den Gedankengang der Untersuchung betrachten wir verschieden große Raumelemente des Mauerwerkes und skizzieren kurz ihre charakteristischen Eigentümlichkeiten, indem wir auch gleichzeitig die Ergebnisse der betreffenden Phase der Untersuchung vorwegnehmen:

1. Raumelement vierter Kleinheitsordnung von der Größe eines Winkels eines größeren, zusammenhängenden Porenraumes, im folgenden kurz „Porenwinkel“ genannt. In einem solchen kann der Druck des Mediums als konstant angesehen werden. Es zeigt sich, daß dann auch die anschließenden Materialteile unter demselben, nach allen Richtungen gleichen Druck stehen müssen.

2. Raumelement dritter Kleinheitsordnung, von der Größe eines größeren, zusammenhängenden Porenraumes. Wir nennen es kurz „Porenraum“ und es ist relativ sehr groß im Vergleiche mit dem vorangegangenen „Porenwinkel“. In demselben wird der Druck des Mediums als veränderlich nach einem linearen Gesetz von bestimmter Richtung angenommen. Es wird gezeigt, welche Richtung und Größe die resultierende Kraft des Wanddruckes innehat, gleichzeitig aber auch, unter welchen Bedingungen diese Resultierende in Talsperren überhaupt zur Wirkung gelangen kann.

3. Raumelement zweiter Kleinheitsordnung. Es umfaßt eine große Anzahl von Porenräumen samt den dazwischen liegenden körnigen Bestandteilen und Bindemitteln. Um die absolute Größenordnung zu kennzeichnen, in welcher man sich dieses Element vorzustellen hat, nennen wir es den „Kubikzentimeter“. Der Druck des Mediums sei hier in zwei zueinander senkrechten Richtungen nach beliebigem Gesetz veränderlich. Zu dem Flüssigkeitsdruck tritt als neue Kraft die Reibung des in den Poren strömenden Wassers hinzu. Es wird die Größe und Richtung der Reibung aus den gegebenen Verhältnissen bestimmt und gezeigt, daß sie, beziehungsweise die Resultierende der Wasserdrücke bei geschlossenen Porenräumen als Massenkraft angesehen werden kann, deren Größe leicht zu bestimmen ist.

4. Raumelement erster Kleinheitsordnung. Es hat die Größe eines oder mehrerer Bruchsteine, aus denen die Tal-

sperre zusammengefügt ist, ist aber immer noch sehr klein gegen den ganzen, von der Mauer erfüllten Raum. Da hier bereits neben Stein auch Mörtelfugen mit inbegriffen sind, wird es bewußt fälschlich allgemein als homogen angesehen. Auf der Betrachtung dieses Raumelements beruhen alle Talsperrenberechnungen. Wir nennen es das „Mauerelement“. Auf dasselbe werden dieselben elastizitäts-theoretischen Gleichungen angewendet, welche vordem nur zur Berechnung der Spannungen durch Eigengewicht gedient haben. An die Stelle des Eigengewichtes tritt aber hier die an den kleineren Elementen ermittelte resultierende Einwirkung des Flüssigkeitsdruckes beziehungsweise der Reibung. Theoretisch wäre kein Hindernis vorhanden, dies unter Zugrundelegung einer beliebigen Verteilung des Wasserdruckes auf horizontalen Fugen zu tun. Um jedoch zu einfachen Schlussformeln für die Spannungsermittlung zu gelangen, muß man sich auf einige wenige, aber praktisch jedenfalls ausreichende Verteilungsgesetze beschränken.

Es sei bemerkt, daß die Schlussformeln des letzten Abschnittes der Untersuchung sich nur auf das dreieckige Mauerprofil beziehen. Die Annahme, daß der Druck im „Porenwinkel“ konstant, im „Porenraum“ linear, in den größeren Elementen beliebig veränderlich ist, fällt zusammen mit der Tatsache, daß man eine beliebige Kurve für ein kurzes Stück durch die Tangente, für ein noch kürzeres durch eine zur Abszissenachse parallele Gerade (Mittelwert) ersetzen kann.

1. Raumelement vierter Kleinheitsordnung.

In diesem als „Porenwinkel“ bezeichneten Raumelement können entweder Kristallspitzen in die Flüssigkeit hineinragen oder Flüssigkeitspyramiden sich zwischen aneinander stoßende Kristallkörner eindrängen.

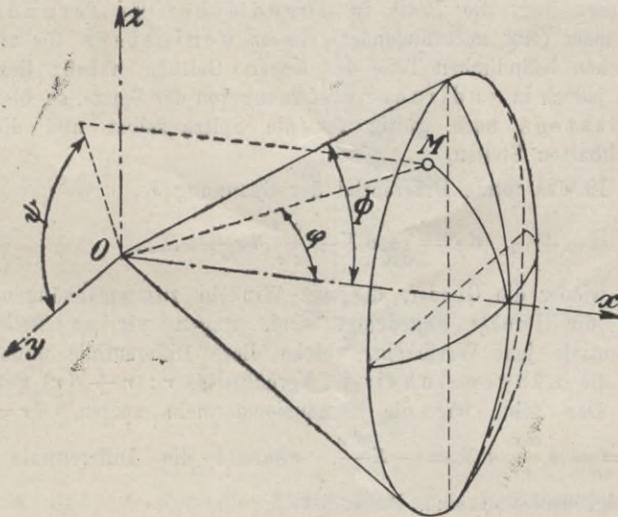
Wir untersuchen daher die Spannungsverteilung in einem geraden Kreiskegel, auf dessen Mantelfläche überall der gleiche Druck herrscht, gleichgültig ob die Erzeugenden einen Winkel von mehr oder weniger als 90° mit der Kegelachse einschließen. Daß dabei der Kegel nicht bis ins Unendliche reicht, wie es die Theorie voraussetzen muß, ist bedeutungslos, wenn auf seiner wo immer vorhandenen Basisfläche dieselben Spannungen bestehen können, welche durch das theoretisch erhaltene Spannungsbild vorgeschrieben werden.

Es wird aber auch nötig sein, außer dem geraden Kreiskegel noch einen keilförmigen Körper mit gleichförmig belasteten Keilflächen zu untersuchen, ja dieser erscheint sogar noch wichtiger als ersterer, da Kristalle, wenn sie gut ausgebildet sind, gerade Kanten besitzen und nur in räumlichen Ecken aneinander schließen können. Da-

neben sollen aber auch zylindrische und kugelförmige Hohlräume besprochen werden.

Bezeichnet man mit X die auf dem ganzen Mantel eines Kreiskegels herrschende Normalspannung; mit s die in einer beliebigen, gegebenen Richtung in dem im Inneren des Kegels liegenden Punkt M (Textfigur 2) vorhandene Spannung, wobei auch die Lage des Flächenelementes, dessen Mittelpunkt M ist, als gegeben anzusehen sei; mit r, φ, ψ die Polarkoordinaten des Punktes M : so kann, wenn der Kegel ins Unendliche reicht, s als unbekannte Funktion von X, r und einigen Winkelgrößen angesehen werden.

$$s = f(X, r, \dots).$$



Figur 2.

Reicht aber der Kegel nicht bis ins Unendliche, so müßte zu den genannten Größen noch eine Länge hinzutreten, z. B. der Abstand der Basisfläche von der Spitze O , und außerdem eine Kennzeichnung der Randwerte in dieser Basisfläche. Indem wir dies nicht voraussetzen, beengen wir die Zahl der noch möglichen Spannungsverteilungen bis auf eine einzige mit vorgeschriebenem Randwert in der Basis und dieser ist es, welchen wir eben ermitteln wollen. Wir erhalten so ein Gesetz, welches für beliebige Basisentfernungen unveränderlich bleibt, und nennen ein solches ein „perspektivisches“.

Wären die Spannungen in der Basis tatsächlich nicht gleich, aber doch nur wenig verschieden von den willkürlich vorgeschriebenen,

so würde unser Gesetz bis in einige Entfernung von der Basis wieder gültig sein, da nach dem de St. Venantschen Prinzipie ein Gleichgewichtssystem von nahe aneinanderliegenden Kräften Spannungen nur in der nächsten Umgebung ihrer Angriffspunkte hervorrufen kann. Weichen die wirklichen Basisspannungen stark von den vorgeschriebenen ab, so könnte man etwas näher gegen die Spitze eine Spannungsverteilung annehmen, welche der der Basisspannungen ähnlich ist, jedoch mildere Gegensätze gegenüber der vorgeschriebenen aufweist. Von dieser Stelle aus weiter gegen die Spitze vordringend könnte man den Gedankengang so lange wiederholen, bis man endlich auf eine Stelle gelänge, von welcher ab das vorgeschriebene Gesetz gültig wäre. Dies führt zu folgendem Schlusse: liegt die Basis in unendlicher Entfernung, so muß unser (erst aufzufindendes) Gesetz wenigstens für alle im Endlichen befindlichen Teile des Kegels Geltung haben; liegt die Basis jedoch in endlicher Entfernung von der Spitze, so bleibt es mindestens noch gültig für die Spitze selbst und die ihr benachbarten Stellen.

In das totale Differential der Spannung s

$$ds = \frac{\partial s}{\partial X} dX + \frac{\partial s}{\partial r} dr + \dots,$$

wobei wieder die Glieder, die mit Winkeln zusammenhängen, nur durch die Punkte angedeutet sind, tragen wir an Stelle der Differentiale jene Werte ein, welche diese Differentiale annehmen, wenn die Längeneinheit im Verhältnisse $r : (r + dr)$ geändert wird. Das gibt, wie die Dimensionsformeln zeigen, $dr = dr$,

$$ds = -s \frac{dr}{r}, \quad dX = -X \frac{dr}{r}, \quad \text{während die Differentiale aller}$$

Winkelgrößen Null sind. Daher ist

$$-\frac{s}{r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial X} X + \frac{\partial s}{\partial r}$$

und da s proportional X sein muß (aus dem Überlagerungsgesetz gefolgert), stellt s eine homogene Funktion ersten Grades von X dar. Nach Eulers Satz ergibt sich

$$\frac{\partial s}{\partial X} X = s$$

und man erhält schließlich

$$\frac{\partial s}{\partial r} = 0,$$

was bedeutet, daß alle Spannungen von r unabhängig sind. Aus Symmetriegründen sind auch alle Spannungen vom Meridian ψ unabhängig, es bleiben aber auch alle Massenpunkte während der

elastischen Deformation in der Meridianebene, in welcher sie sich vorher befanden, weshalb $w = 0$ zu setzen ist, wenn w die Änderung des Winkels ψ bedeutet, der die Lage eines Massenpunktes vor der Deformation bestimmt; schließlich kann auch u , die Verschiebung in radialer Richtung, von ψ nicht abhängig sein.

Bezeichnet man noch mit v die Änderung des Parallelkreiswinkels φ , mit $\lambda_r, \lambda_s, \lambda_t, \varepsilon_r, \varepsilon_s, \varepsilon_t$ die linearen Dilatationen beziehungsweise die Schubwinkel einer räumlichen Deformation, mit R_r, S_s, T_t die Normalspannungen, mit S_t, T_r, R_s die Schubspannungen ¹⁾, so sind folgende Beziehungen zu beachten:

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \frac{\partial u}{\partial r} & \varepsilon_r &= 0 \\ \lambda_s &= \frac{u}{r} + v \operatorname{ctg} \varphi & \varepsilon_s &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial r} \\ \lambda_t &= \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} & \varepsilon_t &= 0 \\ R_r &= -2K \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \Theta \left[\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + v \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \right) \\ S_s &= -2K \left(\frac{u}{r} + v \operatorname{ctg} \varphi + \Theta \left[\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + v \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \right) \\ T_t &= -2K \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \Theta \left[\frac{\partial u}{\partial r} + 2 \frac{u}{r} + v \operatorname{ctg} \varphi + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \right) \\ S_t &= 0 \\ T_r &= -K \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \\ R_s &= 0 \end{aligned}$$

K und Θ sind die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten, und zwar ist K der sogenannte Schubmodul und $\Theta = \frac{1}{m-2}$, wo m den Koeffizienten der Querkontraktion bedeutet.

Damit alle Spannungen von r unabhängig sind, muß v von r unabhängig sein und

$$u = r u' \dots \dots \dots 1)^2),$$

wobei u' und v nur mehr Funktionen von φ allein bedeuten.

¹⁾ Eine genaue Definition der hier benützten Bezeichnungen und eine Ableitung der folgenden Gleichungen befindet sich in der Abhandlung des Verfassers „Die Spannungsverteilung im geraden Kreiskegel, hervorgerufen durch eine Einzelkraft von beliebiger Richtung und Lage.“ Zeitschrift für Mathematik und Physik, 59. Band, Heft 4.

²⁾ Diese Bedingungen können bei manchen perspektivischen Problemen auch direkt aus dem Prinzip der Perspektivität abgeleitet werden.

Dadurch vereinfachen sich die vorigen Gleichungen. Sie lauten jetzt

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r &= u' \\ \lambda_v &= u' + v \operatorname{ctg} \varphi \\ \lambda_t &= u' + \frac{dv}{d\varphi} \\ \varepsilon_s &= \frac{du'}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 2).$$

$$\left. \begin{aligned} R_r &= -2 K \left(u' + \Theta \left[3 u' + v \operatorname{ctg} \varphi + \frac{dv}{d\varphi} \right] \right) \\ S_s &= -2 K \left(u' + v \operatorname{ctg} \varphi + \Theta \left[3 u' + v \operatorname{ctg} \varphi + \frac{dv}{d\varphi} \right] \right) \\ T_t &= -2 K \left(u' + \frac{dv}{d\varphi} + \Theta \left[3 u' + v \operatorname{ctg} \varphi + \frac{dv}{d\varphi} \right] \right) \\ T_r &= -K \frac{du'}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots 3).$$

Die Gleichgewichtsbedingungen für ein sphärisches Raumelement lauten nach den im Probleme begründeten Vereinfachungen

$$\left. \begin{aligned} 2 R_r - S_s - T_t + T_r \operatorname{ctg} \varphi + \frac{dT_r}{d\varphi} &= 0 \\ (T_t - S_s) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{dT_t}{d\varphi} + 3 T_r &= 0 \end{aligned} \right\} \dots 4)^1).$$

Setzt man die Werte aus Gleichung 3) in Gleichung 4) ein, so gelangt man zu den Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} 2 v \operatorname{ctg} \varphi + 2 \frac{dv}{d\varphi} - \frac{du'}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d^2 u'}{d\varphi^2} &= 0 \\ -2 v \left(\operatorname{ctg}^2 \varphi + \frac{\Theta}{\sin^2 \varphi} \right) + 2 \frac{dv}{d\varphi} \operatorname{ctg} \varphi (1 + \Theta) + \\ + 2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} (1 + \Theta) + \frac{du'}{d\varphi} (5 + 6 \Theta) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots 5),$$

welche hinreichen v und u' zu bestimmen. Bildet man aus der zweiten Gleichung 5) die Werte $\frac{du'}{d\varphi}$ und $\frac{d^2 u'}{d\varphi^2}$ und setzt man diese in die erste Gleichung ein, so entsteht:

$$v \frac{\cos \varphi}{\sin^3 \varphi} (1 + 6 \sin^2 \varphi) - \frac{dv}{d\varphi} \frac{(1 - 5 \sin^2 \varphi)}{\sin^2 \varphi} + 2 \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{d^3 v}{d\varphi^3} = 0 \dots 6)$$

deren allgemeines Integral

$$v = \frac{C_1}{\sin \varphi} + C_2 \sin 2\varphi + C_3 \left(\sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \ln \operatorname{tg} \varphi/2 \right) \dots \dots 7)$$

¹⁾ Die dritte Gleichgewichtsbedingung wird hier identisch erfüllt.

ist. C_1, C_2, C_3 sind willkürliche Konstante, welche nunmehr zu bestimmen sind.

Für $\varphi = 0$ muß auch $v = 0$ sein, und es konvergieren auch in der Tat $\sin 2\varphi, \sin \varphi$ und das Produkt $\frac{\sin 2\varphi}{2} \ln \operatorname{tg} \varphi/2$

in diesem Falle gegen Null, nur $\frac{1}{\sin \varphi}$ wird unendlich groß. Daher ist $C_1 = 0$.

Nun ist aber nach der zweiten Gleichung 5)

$$\frac{d u'}{d \varphi} = \frac{2}{5 + 6 \Theta} \left(v \frac{\cos^2 \varphi + \Theta}{\sin^2 \varphi} - \frac{d v}{d \varphi} \operatorname{ctg} \varphi (1 + \Theta) - \frac{d^2 v}{d \varphi^2} (1 + \Theta) \right)$$

und wenn man hier die Werte aus Gleichung 7) einträgt, so erhält man

$$\frac{d u'}{d \varphi} = 2 C_2 \sin 2\varphi + C_3 \left(\frac{-4(1 + \Theta)}{5 + 6 \Theta} \cdot \frac{1}{\sin \varphi} + 2 \sin \varphi + \sin 2\varphi \ln \operatorname{tg} \varphi/2 \right)$$

$\frac{d u'}{d \varphi}$ ist proportional der einzigen hier möglichen Schubspannung T_r [Gleichung 3)], welche in der Kegelachse ($\varphi = 0$) verschwinden muß. Darum ist auch $C_3 = 0$ zu setzen, und es wäre

$$T_r = -K \frac{d u'}{d \varphi} = -2 K C_2 \sin 2\varphi.$$

In unserem Belastungsfalle verschwindet T_r aber auch am Mantel $\varphi = \Phi$, wo nur die Normalspannung X herrscht. Für beliebige Werte von Φ ist dies nur möglich, wenn auch $C_2 = 0$ gesetzt wird. Somit ist $\frac{d u'}{d \varphi}$ selbst $= 0$ und

$$\left. \begin{aligned} u' &= C_4 \\ u &= r u' = r C_4 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 8).$$

Daraus folgt ferner aus Gleichung 3)

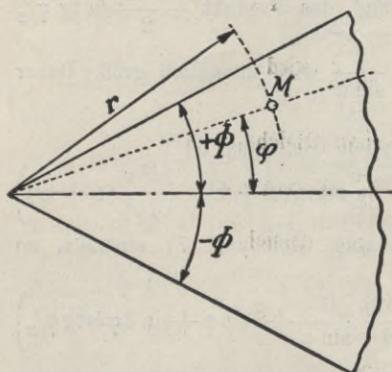
$$R_r = S_s = T_t = -2 K C_4 (1 + 3 \Theta) = X,$$

weil T_t für $\varphi = \Phi$ den Wert X annehmen muß. Die Konstante C_4 hat den Wert $\frac{-X}{2 K (1 + 3 \Theta)}$.

Der gerade Kreiskegel steht somit überall unter einem nach allen Richtungen gleich großen Druck X ; seine Massenpunkte verschieben sich nur gegen die als ruhend gedachte Spitze um den Betrag $\frac{-r X}{2 K (1 + 3 \Theta)}$. Der Winkel Φ ist nicht an Werte, welche kleiner als 90° sind, gebunden, daher gilt dieses Gesetz auch dann, wenn das Druckwasser in

einen allmählich verlaufenden kegelförmigen Hohlraum der Porenwandung eindringt, und zwar unter allen Umständen wenigstens für die Spitze. Eine Spaltwirkung ist daher ganz ausgeschlossen¹⁾.

Die Spannungsverteilung in einem keilförmigen Körper,



Figur 3.

auf dessen Keilflächen ein überall gleicher Normaldruck einwirkt, findet man am raschesten, wenn man von jenen Gleichungen ausgeht, welche Verfasser in einer früheren Abhandlung²⁾ angewendet hat. Denn an der Bedingung, daß alle Spannungen von r unabhängig sein müssen, ändert sich nichts, wenn die Belastung X (dort q genannt) statt nur auf einer Rückenfläche auf beiden wirksam ist. An jener Stelle wurde nach-

gewiesen, daß die allgemeinste Form der Airyschen Funktion für den Belastungsfall lautet:

$$F = r^2 (C_1 + C_2 \varphi + C_3 \cos 2 \varphi + C_4 \sin 2 \varphi).$$

Sie befriedigt die Bedingungsgleichung der strengen Theorie

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0 \quad . \quad . \quad 9)$$

und es ergeben sich die Spannungen in einem Punkte M (siehe Textfigur 3) aus:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \quad (\text{radiale Normalspannung}) \\ \sigma_t &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (\text{tangentielle Normalspannung}) \\ \tau &= - \frac{\partial}{\partial r} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \quad (\text{Schubspannung}) \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad 10).$$

Berechnet man zunächst nur die beiden Spannungen σ_t und τ , weil sie für die Randwerte maßgebend sind, so findet man

$$\begin{aligned} \sigma_t &= 2 C_1 + 2 C_2 \varphi + 2 C_3 \cos 2 \varphi + 2 C_4 \sin 2 \varphi \\ \tau &= - C_2 + 2 C_3 \sin 2 \varphi - 2 C_4 \cos 2 \varphi. \end{aligned}$$

¹⁾ Das Ergebnis ist nicht als „trivial“ zu bezeichnen, denn es ist nur der hier behandelte besondere Fall eines allgemeineren Problems, auf welches Verfasser in einer späteren Veröffentlichung zurückkommen wird.

²⁾ Zeitschrift für Mathematik und Physik, 60. Band, Seite 275.

An den Rändern $\varphi = \pm \Phi$ ist τ überall = 0 und $\sigma_t = X$. Daraus kann man die Konstanten C_1 bis C_4 bestimmen wie folgt

$$C_1 = \frac{X}{2}, C_2 = C_3 = C_4 = 0.$$

Daher ist $\sigma_r = \sigma_t = X$, $\tau = 0$. Es ergibt sich also, daß beide Normalspannungen gleich dem Flüssigkeitsdrucke X sind. Ein Aufspalten des Materials durch den Flüssigkeitsdruck ist daher auch hier nicht zu gewärtigen. Die Normalspannung parallel zur Keilschneide kann beliebig groß sein. Die Lösung des Problems ist ferner für beliebige „Keilbreiten“ streng gültig, da hier die Bedingung erfüllt ist, daß die Summe $(\sigma_r + \sigma_t)$ überall gleich groß ist. Nur die Einschränkungen, welche beim geraden Kreiskegel gemacht werden mußten, wenn auf der Basis andere Spannungen herrschen, als durch das perspektivische Gesetz vorgeschrieben werden, sind wieder vollkommen aufrecht zu erhalten.

Steht ein kugelförmiger Hohlraum eines Körpers unter Innendruck oder eine massive Kugel unter Außendruck, so kann die Deformation nur in einer Verschiebung u aller Punkte in radialer Richtung bestehen; u kann nur von der Entfernung r vom Kugelmittelpunkt abhängig sein und Schubspannungen treten überhaupt nicht auf. Es sind darum nur die drei Normalspannungen R_r , S_s und T_t , dieselben, welche schon beim Kreiskegel angewendet wurden, zu untersuchen. Ihre Beziehungen zu u und den Elastizitätskonstanten K und Θ lauten:

$$R_r = -2K \left(\frac{du}{dr} [1 + \Theta] + \frac{u}{r} 2\Theta \right)$$
$$S_s = T_t = -2K \left(\frac{du}{dr} \Theta + \frac{u}{r} [1 + 2\Theta] \right).$$

Die Einsetzung in die Gleichgewichtsbedingungen liefert eine Differentialgleichung für u :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} - \frac{2u}{r^2} = 0.$$

Daher ist, wenn a und b willkürliche Konstante bedeutet

$$u = ar + \frac{b}{r^2} \dots \dots \dots 11).$$

Betrachten wir zunächst nur die unter Außendruck stehende massive Kugel. Im Mittelpunkte kann eine Verschiebung der Massen nicht eintreten, am wenigsten eine unendlich große. Darum muß $b = 0$ sein und

$$R_r = S_s = T_t = -2Ka(1 + 3\Theta) = X,$$

wenn wieder X den Oberflächendruck bedeutet. Die Kugel steht daher unter einem nach allen Richtungen gleich großen Druck wie die Flüssigkeit.

Wendet man Gleichung 11) auf einen kugelförmigen Hohlraum, welcher unter dem Innendruck X steht, an, so könnte man in gewissen Fällen sagen, daß R_r für $r = \infty$ Null werden muß. Diese Randwertbestimmung tritt z. B. auf bei der Untersuchung lokaler Inhomogenitäten oder dann, wenn aus irgend einer Ursache im Innern eines Körpers, aber nahe an der unbelasteten Oberfläche, Drücke entstehen. Sie führt zu einer kubischen Abnahme aller Spannungen von innen nach außen und R_r ergibt sich als Druck, während S_s und T_t untereinander gleich und Zugspannungen sind, deren Absolutwert die Hälfte desjenigen von R_r ist.

Eine solche Randwertbestimmung wäre hier nicht zutreffend. Wir müssen vielmehr annehmen, daß in der Umgebung unserer kugelförmigen Pore sich noch viele solcher Hohlräume befinden, deren Wandungen alle unter dem gleichen Druck X stehen; geht man auf einem Polstrahl von der Stelle r_0 , dem Radius des Hohlraumes, nach außen, so trifft man in der Entfernung r' auf ein Flächenelement, auf welchem wieder die gleiche Spannung X vorhanden ist. Drückt man R_r durch die Beziehung 11) aus, so hat man

$$R_r = -2K \left(a [1 + 3\Theta] - \frac{2b}{r^3} \right).$$

R_r kann nur dann für zwei Werte $r = r_0$ und $r = r'$ denselben Wert X annehmen, wenn $b = 0$ ist. Dann ist aber wie bei der massiven Kugel unbedingt

$$R_r = S_s = T_t = -2Ka(1 + 3\Theta) = X.$$

Die Gleichungen, welche zur Anwendung kommen müssen, wenn ein gerader Kreiszyylinder unter Außendruck oder ein solcher Hohlraum unter Innendruck steht, sind von der Theorie der Festigkeit dickwandiger Rohre her so bekannt, daß auf dieselben hier nicht eingegangen werden muß. Es soll daher nur gesagt werden, was man schließlich findet.

Die radiale und tangentielle Normalspannung eines massiven Zylinders sind gleich dem Außendruck, die axiale beliebig und über dem ganzen Querschnitt gleich groß. Zu den gleichen Ergebnissen führt die Betrachtung eines dickwandigen Rohres, wenn der Außendruck dem Innendruck gleich ist.

Weniger die einzelnen angeführten Spannungsprobleme als die völlige Übereinstimmung der Endresultate führt geraden Weges zu der Überzeugung, daß eine das Mauerwerk durchdringende druckführende Flüssigkeit im Material gleichen Druck nach allen Richtungen erzeugt. Der Gedankengang des Nachweises läßt noch eine andere Deutung zu: die vor- oder einspringende Spitze

des Kegels, dieselben zwei Arten von Keilschneiden, die konvexen oder konkaven parabolischen beziehungsweise Nabelpunkte der Oberfläche eines Kreiszyinders und einer Kugel bilden ebensoviel Formen, welche die Wand eines Hohlraumes haben kann. Würden wir noch zwei mit vorwiegend elliptischen und einen mit lauter hyperbolischen Oberflächenpunkten versehene Körper zum Vergleiche heranzuziehen vermögen, also etwa ein massives und ein hohles Rotationsellipsoid und ein einachsiges Rotationshyperboloid, so könnten wir den Beweis geradezu als lückenlos bezeichnen.

Der Spannungszustand eines inhomogenen, von Druckflüssigkeit durchzogenen Körpers ist nicht bloß für Wasserbauten von Bedeutung. Ähnliche Vorgänge müssen sich auch abspielen, wenn ein durchnäßtes Gestein niedrigen Temperaturen ausgesetzt wird, wodurch das in den Poren enthaltene Wasser gefriert. Da immer die der Oberfläche zunächst liegenden Schichten zuerst abkühlen, bildet das dort auftretende Eis eine wasserdichte Schichte. Die Volumsvergrößerung des später frierenden Wassers erzeugt dann im Innern einen nach allen Richtungen gleich großen Druck, wenn nicht durch Hohlräume, die vorher vom Wasser frei geblieben sind, genügender Raum für die Ausdehnung vorhanden ist. Auf dieser Erwägung hat Professor Dr. Hirschwald¹⁾ seine „Theoretische Frostprüfung“ aufgebaut. Ganz andere Spannungen treten in der Nähe der freien Oberfläche, wo das Wasser zuerst gefroren ist, auf. Dort sind Zugspannungen parallel zur Oberfläche sicher vorhanden und bewirken, wenn sie zu groß werden, Trennung der körnigen Bestandteile, was man als „Absanden“ bezeichnet und namentlich bei feinkörnigem Gestein beobachten kann. Nach Professor Hirschwald zeigen die Steine alter Bauwerke bis zu beträchtlicher Tiefe eine geringe Festigkeitsverminderung, obgleich eine dieselbe erklärende substanzielle Änderung nicht nachgewiesen werden kann²⁾.

Neben dieser von der Oberfläche ausgehenden Zerstörung der Gesteine kommt auch bei geschichtetem oder von größeren Spalten durchzogenem Baumaterial „Schicht-“ und „Spaltfrostwirkung“ vor, bei welcher größere Stücke auf einmal abspringen. In diesen Fällen überwiegen lokale Inhomogenitäten und rufen daher andere Erscheinungen hervor, als die durch kontinuierliche Inhomogenität entstehende „Porenfrostwirkung“.

Die Dicke jener Schichte, welche den unter gleichmäßigem Druck stehenden Kern eines gefrorenen, durchnäßten Steines von der freien Oberfläche trennt (man kann annehmen, daß der gleichmäßige Druck im Innern eine wesentliche Verminderung der Festig-

¹⁾ J. Hirschwald: „Handbuch der bautechnischen Gesteinsprüfung“, Berlin, Verlag Gebrüder Borntraeger, 1911.

²⁾ Kapitel 19: „Der Einfluß des Frostes auf die Gesteinsverwitterung“.

keit nicht herbeiführen kann) dürfte kaum immer gleich groß sein. Die Geschwindigkeit der Abkühlung und die Verteilung der Poren nehmen darauf wahrscheinlich großen Einfluß. Bei relativ feinporigen, rasch abgekühlten Steinen ist die auf Zug beanspruchte Schichte vermutlich dünner und daher ihr Bestand stärker gefährdet, als bei grobporigem und langsam gefrorenem Material. Versuche scheinen diese Folgerung zu bestätigen. Andererseits wird die „experimentelle Frostprüfung“, welche in einem 25maligen Gefrieren der nassen Steine bei -15°C und Wiederauftauen bei zirka $+20^{\circ}\text{C}$ besteht, als eine „verschärfte“ Prüfung angesehen werden müssen, deren Ergebnis keinesfalls auf das Verhalten des Steines nach 25 Frost- und Tauperioden in der Natur übertragen werden darf, da im Freien die Temperaturübergänge niemals derart unvermittelt eintreten können¹⁾.

Es mag dahingestellt bleiben, ob grobporiges Gestein seine Überlegenheit über feinporiges auch dann noch bewahrt, wenn die experimentelle Frostprüfung an genügend großen Stücken durchgeführt wird, wo Gelegenheit zur Ausbildung eines im Vergleiche zur Zugschichte sehr ausgedehnten Druckkernes vorhanden ist.

Die Erscheinungen, welche bei der Prüfung auf Frostbeständigkeit zu beachten sein werden, kommen indes nicht in Betracht, wenn es sich nur darum handelt, die Wirkung des Wasserdruckes im Material der Talsperren zu studieren. Die Wasserdrücke, mit denen man rechnen muß, sind nicht so groß, daß sie mit dem Eisdruck verglichen werden könnten. Drücke von 6 Atm. gehören schon zu den Seltenheiten²⁾. Auch ist die Ausbildung der schädlichen Zugschichte nicht zu befürchten, da die Steine außen von dem gleichen Druck umgeben sind, der im Innern der Poren herrscht. Wohl aber spielt ein anderer, bisher noch nicht erforschter Umstand bei durchnästem Gestein eine Rolle: die Erweichung der Kornbindemittel und des Zementmörtels bei höheren Drücken. Bisher wurde der Erweichungskoeffizient der Gesteine nur bei atmosphärischem Druck bestimmt, derjenige des Mörtels, da er in der Regel nur naß geprüft wird, beinahe gar nicht. Es ist aber durchaus nicht als ausgeschlossen zu bezeichnen, daß man auf ganz andere Ziffern kommt, wenn beide Materialien unter Wasserdrücken von 5 bis 10 Atm. auf Druckbeziehungsweise Zugfestigkeit untersucht werden.

¹⁾ H. Seipp trat wiederholt nachdrücklich dafür ein, die Zug- und Scherfestigkeit der Gesteine vor und nach der Frostprobe zu untersuchen. Siehe besonders Bericht über den internationalen Materialprüfungs-Kongress, Kopenhagen 1909, XII/8.

²⁾ Die Bober-Talsperre mißt 60 m von der Krone bis zur Sohle, die Urft-Sperre 58 m, die Lake Cheesmann-Sperre 68·1 m, der Roosevelt-Damm (eine gemauerte Talsperre) in Arizona 86 m, die Sperre am Conchos-Fluß (Mexiko) 79·55 m, der Arrowrock-Damm (im Bau) sogar 105 m.

Th. v. Kármán¹⁾ hat Steinzylinder, welche am Mantel mit Drücken bis 3260 Atm. belastet waren, auf Druckfestigkeit in der Achsenrichtung erprobt. Auf so hohe Drücke kommt es aber bei der Prüfung der Eignung eines Baustoffes nicht an. Drücke von 10 bis 15 Atm. würden schon genügende Aufschlüsse geben und demgemäß könnten die dazu nötigen Apparate vereinfacht werden, so daß diese Versuche in jedem Laboratorium ausführbar wären. Außerdem umgab Kármán, dem es nur um die Beziehungen zwischen Bruchgefahr und Spannungszustand zu tun war, seine Probekörper mit einer dünnen Messinghülse, um das Eindringen der Preßflüssigkeit zu verhindern. Diese Vorsicht müßte hier fallen, da es bei der Prüfung des Talsperrenmaterials gerade auf die Wirkung des eindringenden Wassers ankommt.

Professor Voigt in Göttingen prüfte die Zugfestigkeit von Kristallen (Steinsalz) und Stängelchen aus einem Gemisch von Palmin- und Stearinsäure unter hohem Kohlensäuredruck²⁾. Die Resultate weisen auf eine Verminderung der Zugfestigkeit bei hohen Drücken hin, obwohl diese Körper vermöge ihrer Dichtigkeit nur wenige oder keine Hohlräume besitzen, welche durch den äußeren Druck deformiert werden könnten, und obwohl die erweichende Wirkung des Wassers fehlte.

Professor Dr. Föppl bemerkt hiezu³⁾, daß eine Ausdehnung dieser Versuche auf Zementkörper wünschenswert wäre. Bei Professor Föppls eigenen Versuchen wurden verschiedene Körper in Würfelform, zum Teil mit lackierten Oberflächen, allseitigen hohen Wasser-, Öl- und Quecksilberdrücken (bis 3500 Atm.) ausgesetzt. Manche absolut dichte (wie Glas, Metalle) zeigten sich nach dem Versuch unverändert oder erwiesen sich als bleibend komprimiert (Blei), bei den meisten anderen Würfeln waren die Ecken abgesprungen, so daß sie kugelige Gestalt annahmen. Bei einzelnen unverletzten Würfeln trat eine Volumsvergrößerung ein und Professor Föppl spricht sich für die Vermutung aus, daß die Entstehung dieser Vergrößerung in die Entlastungsperiode zu verlegen sei.

Man sieht, daß die Entlastung des Flüssigkeitsdruckes nur sehr langsam erfolgen darf, wenn man Aufschlüsse über das Verhalten der Körper bei hohem Druck nachher gewinnen will, viel langsamer, als die Erreichung des höchsten Druckes, wenn derselbe nicht gehalten wird (sonst noch langsamer). Denn die Körper

¹⁾ Th. v. Kármán: „Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck“, Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure, 21. Oktober 1911.

²⁾ Wiedemanns „Annalen der Physik“, Band 53, Seite 43, und Band 67, Seite 452.

³⁾ Mitteilungen aus dem mechanischen Laboratorium der technischen Hochschule in München, Heft 27.

setzen zwar der eindringenden Flüssigkeit einen gewissen Widerstand entgegen; sind aber einmal die feinsten Spalten alle gefüllt, so hält der Körper die Flüssigkeit durch Reibung und Kapillarkwirkung zurück, und dies kommt auf dasselbe hinaus, als ob die Flüssigkeit durch engere Rohre abfließen müßte, als sie vorher eingedrungen ist, wenn außen der Druck nachläßt. Bei rascher Entlastung tritt daher derselbe Spannungszustand mit einem inneren Druckkern und einer äußeren Zugschichte ein, wie bei der experimentellen Frostprüfung, so daß man ernstlich daran denken könnte, diese langwierige Materialprobe durch jenen kurzen Versuch zu ersetzen¹⁾.

Gegen die Erprobung der Erweichung von Steinen bei Drücken von 10 bis 15 Atm. auf Zug- und Druckfestigkeit könnte eingewendet werden, daß bekanntlich Zugspannungen in Mauerwerk überhaupt nicht vorkommen dürfen und ferner, daß das Maximum der Druckbeanspruchung im allgemeinen nicht mit dem Maximum des Wasserdruckes zusammenfallen wird. Der größte Wasserdruck in den Fugen ist nämlich am wasserseitigen Fuß bei gefülltem Becken zu erwarten, mithin dann, wenn dieser Fuß durch die Horizontalkomponente des „äußeren“ Wasserdruckes am meisten entlastet wird.

Diese Einwendungen sind aber nicht ganz stichhältig, namentlich nicht bei Talsperren mit bogenförmigem Grundriß, bei welchen die gewölbeähnliche Wirkungsweise der Mauer zur Folge hat, daß hier keine Entlastung des wasserseitigen Fußes oder mindestens nur eine stark verringerte eintritt, wenn das Staubecken voll gefüllt wird. Daher können hier der größte Wasserdruck und die größte vertikale Druckspannung sehr wohl zusammenfallen. Andererseits ist die Beanspruchung der Bausteine im allgemeinen keine reine Druckbelastung. Die Steine werden in der Mauer auch auf Biegung, daher auch auf Zug belastet. Rechnet man noch die unbestimmbaren Einflüsse von Bodensenkungen, Druck der Talwände und Wärmedeformation hinzu, so erkennt man die Notwendigkeit der für die Auswahl des zweckmäßigsten Baumaterials für Talsperren auf diese Weise gewonnenen Ziffern.

2. Raumelement dritter Kleinheitsordnung.

Man würde überhaupt zu gar keiner „Belastung“ des Mauerwerkes durch den „inneren“ Wasserdruck gelangen, wenn man denselben, wie es im vorangehenden Abschnitte getan wurde, überall gleich groß annehmen würde. Derselbe versetzt zwar seine

¹⁾ Man vergleiche die Abbildungen der durch wiederholtes Ausfrieren kugelig gewordenen Steine in der bekannten Schrift „Frostversuche mit Bausteinen der österreichisch-ungarischen Monarchie“ von A. Hanisch.

unmittelbare Umgebung in den gleichen Druckzustand, man hat aber mit Ausnahme der oben besprochenen Erweiterung der Materialprüfungsnormen kein Mittel, diesen Zustand durch irgend eine äußere Belastung künstlich herbeizuführen und das Material auf seine Eignung, diesen inneren Druck auszuhalten, zu erproben.

Eine „Fernwirkung“ des inneren Druckes, wie sie bei den Berechnungen auf Unterdruck vorausgesetzt wird, tritt erst ein, wenn der Druck nicht mehr überall gleich ist. Diese Annahme trägt den Verhältnissen in einer Talsperre Rechnung, wo der Innendruck einerseits gegen den Wasserspiegel, andererseits gegen die Luftseite hin abnehmen muß. Wir betrachten daher jetzt einen größeren, beliebig geformten Hohlraum, den „Porenraum“ (Textfigur 4), und setzen vorläufig voraus, daß derselbe allseitig begrenzt sei. In demselben herrsche ein Flüssigkeitsdruck p , welcher in einer Richtung z linear zunehme. Dann ist der Druck an einer beliebigen Stelle durch die Gleichung bestimmt

$$p = p_0 + k z 12),$$

wenn p_0 den Druck in der beliebig gewählten $x y$ -Ebene und k eine beliebige Konstante bedeutet.

Der Druck auf ein Flächenelement dF der Wand ist

$$dP = p dF,$$

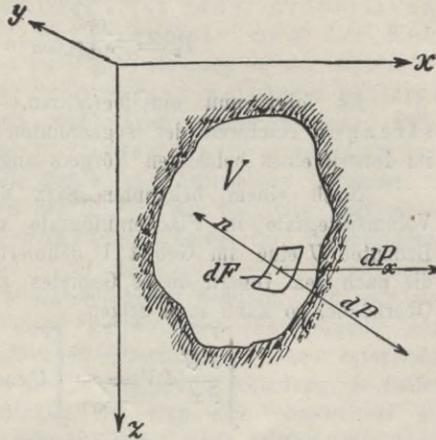
seine Komponente in der Richtung x

$$dP_x = - p dF \cos (n x),$$

wenn n die nach innen gerichtete Normale auf das Element bedeutet. Das Minuszeichen muß gesetzt werden, weil n nach innen, dP aber immer nach außen gerichtet ist, so daß n und dP_x stets einen stumpfen Winkel einschließen.

Der resultierende Druck P_x ist daher

$$P_x = - \int^F p \cos (n x) dF,$$



Figur 4.

und auf gleiche Weise würde man erhalten:

$$P_y = - \int^F p \cos(ny) dF$$

$$P_z = - \int^F p \cos(nz) dF.$$

Es folgt nun ein Verfahren, welches Kirchhoff zum strengen Nachweis der sogenannten Gleichgewichts-Bedingungen im Innern eines belasteten Körpers angewendet hat.

Nach einem bekannten Satz der Mathematik kann man Volumsintegrale in Flächenintegrale und umgekehrt verwandeln. Bedeutet U eine im Gebiet V definierte Funktion $f(x, y, z)$ und n die nach dem Innern dieses Gebietes gerichtete Normale auf seine Oberfläche, so kann man setzen

$$\int^V \frac{\partial U}{\partial x} dV = - \int^F U \cos(nx) dF$$

$$\int^V \frac{\partial U}{\partial y} dV = - \int^F U \cos(ny) dF$$

$$\int^V \frac{\partial U}{\partial z} dV = - \int^F U \cos(nz) dF.$$

Wendet man diese Beziehungen auf die vorher angeschriebenen Gleichungen für die Komponenten des resultierenden Druckes P an, so ergibt sich

$$P_x = \int^V \frac{\partial p}{\partial x} dV$$

$$P_y = \int^V \frac{\partial p}{\partial y} dV$$

$$P_z = \int^V \frac{\partial p}{\partial z} dV.$$

Es ist aber, zufolge der früher gewählten Lage des Achsen-systems (x, y, z) nach Gleichung 12) $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial p}{\partial z} = k$,

daher ist auch $P_x = 0, P_y = 0$ und

$$P_z = k \int_0^V dV = k V \dots \dots \dots 13).$$

Der resultierende Druck ist daher proportional dem Volumen V des „Porenraumes“ und der Konstanten k , welche das Maß der Drucksteigerung in der Richtung z anzeigt, und wirkt in der Richtung, in welcher p ansteigt.

Dieses Resultat hätte wohl auch elementarer, nicht kürzer, auf demselben Wege gefunden werden können, auf welchem man gewöhnlich die Größe des „Auftriebes“ bestimmt.

Um keinen Zweifel an der Strenge des Resultats aufkommen zu lassen, wurde der Kirchhoffsche Gang der Untersuchung hier bevorzugt¹⁾.

Wir erweitern unsere Untersuchung dadurch, daß wir die anfängliche Voraussetzung eines geschlossenen Porenraumes nun fallen lassen, wie es dem Aufbau eines Baumaterials besser entspricht. Stehen mehrere Porenräume in gegenseitiger Verbindung, so fehlen für jeden an den Grenzflächen, die man sich ohneweiters als Ebenen vorstellen kann, entsprechende, nach außen gerichtete Kräfte. Da aber dieselben Kräfte, nur in entgegengesetzter Richtung, auch im Nachbarraume fehlen, so gleichen sich diese Verluste wieder aus. Mit dieser Darlegung könnte man sich zufrieden geben, wenn sie nicht unvollständig wäre. Denn wenn man ein größeres Volumen ins Auge faßt, etwa einen „Kubikzentimeter“, der von „Porenräumen“ und Material gleichmäßig erfüllt ist, so bleiben äußere Flächen übrig, an welchen der Druck nicht ausgeglichen erscheint. Damit greifen wir zwar in das Gebiet des nächsten Abschnittes der Untersuchung über, es empfiehlt sich aber, auf diese Überlegungen doch hier schon einzugehen.

In Textfigur 5 ist dieser Körper gezeichnet. Wäre er nach außen abgeschlossen, so würde der resultierende Wanddruck P sich ergeben nach Gleichung 13) aus

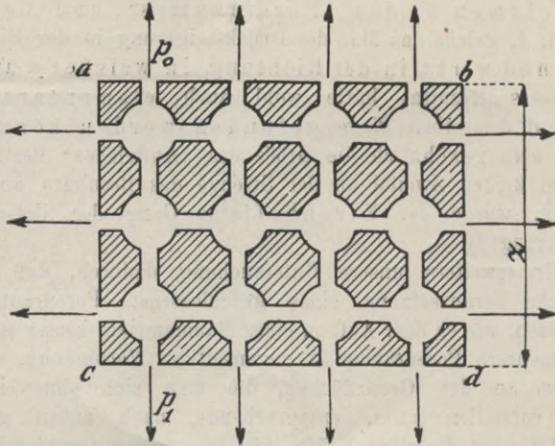
$$P = \mu k V,$$

wenn k dieselbe Bedeutung wie früher hätte, V das ganze Körpervolumen bedeutete und μ ein echter Bruch wäre, der angibt, wieviel vom ganzen Volumen auf die Porenräume entfällt ($\mu \cdot 100 =$ Volumsprozente).

An jenen Stellen, wo Porenzüge die Begrenzungsflächen erreichen, fehlen aber Drücke, und wir können sagen, daß die fehlenden Drücke längs der Flächen ac und bd bei gleichmäßiger

¹⁾ Eine bis an die letzten Grenzen gehende wissenschaftliche Genauigkeit mag manchmal als ein unökonomischer Zeitverlust erscheinen. Sie hat aber das unzweifelhafte Gute an sich, daß man nur so über das Gewicht mathematischer Deduktionen mit sich ins Reine kommen kann.

Verteilung sich aufheben würden. Ihr Abgang ist daher ohne Einfluß. Anders verhält es sich mit den Drücken längs ab und cd , weil hier die spezifischen Pressungen p_0 und p_1 nach Gleichung 12) sich um kz unterscheiden.



Figur 5.

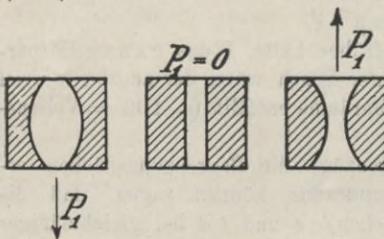
Bedeutet μ' 100 die Flächenprocente der Porenzüge an der Basisfläche $ab = F$, ein Wert, den man bei gleichmäßiger Verteilung in beliebigen Schnittflächen gleich groß finden muß, so ist die von P in Abzug zu bringende Kraft P' durch folgende Beziehung gegeben:

$$P' = \mu' F k z,$$

wobei noch $Fz = V$ gesetzt werden kann. Es bleibt daher eine resultierende Kraft P_1 zurück, gegeben durch

$$P_1 = P - P' = kV(\mu - \mu') \dots \dots \dots 14).$$

In Textfigur 6 sind drei Körper gezeichnet, bei welchen $(\mu - \mu')$ einmal positiv, einmal 0 und einmal negativ ausfallen würde. Je nachdem das eine



Figur 6.

oder das andere eintritt, ist P_1 nach unten gerichtet, Null oder wirkt nach aufwärts. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß bei gleichmäßiger Verteilung der Porenzüge immer Volumsprocente und Flächenprocente einander gleich zu setzen sind.

Mathematisch kommt die gleichmäßige Verteilung dadurch zum Ausdruck, daß μ von den Koordinaten x, y, z unabhängig ist.

Denken wir uns ein rechtwinkliges Parallelepiped mit den Seiten x, y, z , so ist das ganze Porenvolumen

$$v = \mu V = \mu x y z.$$

In einer zur xy -Ebene parallelen Schichte von der Dicke dz ist ein Porenraum enthalten von der Größe

$$\frac{\partial v}{\partial z} dz = \mu x y dz.$$

Bei dieser unendlich dünnen Schichte kann man sich aber die Porenräume als sehr niedere, zur xy -Ebene normale Prismen vorstellen. Die Summe aller Basisflächen findet man durch Division des Volumens durch die Höhe dz . Dividiert man überdies noch durch xy , so erhält man den Anteil μ' der Porenzüge an der Basis des ganzen Körpers.

$$\mu' = \frac{\partial v}{\partial z} : xy = \mu^1).$$

In gleichmäßig inhomogenen Körpern mit zusammenhängenden Porenzügen übt das die Poren erfüllende, druckführende Medium auch dann nur die Wirkung aus, seine Umgebung in denselben Druckzustand zu versetzen, wenn die Drücke an verschiedenen Stellen verschieden sind.

Ist aber z. B. ein poröser Stein von einem minder porösen Zementmörtel umgeben, so erhöht sich scheinbar das Gewicht des Steines um den Betrag

$$P_1 = k V (\mu - \mu');$$

k, μ, μ' und die Richtung der Kraft P_1 wären experimentell zu bestimmen. Da der Druck p im allgemeinen nur gegen die Luftseite zu und nach oben abnehmen kann, wirkt die Kraft P_1 günstig auf die Standfestigkeit der Mauer ein. Ungünstig ist es, einen Mörtel zu verwenden, welcher poröser ist als der Stein, weil dann P_1 negativ wird, das heißt gegen die Luftseite drückt und das Umstürzmoment des äußeren Wasserdruckes unterstützt.

$\mu' = 0$ würde heißen, das Bindemittel Zement ist vollkommen dicht. Setzt man noch die Druckniveauflächen horizontal voraus, so dürfte man in die Rechnung das Naßgewicht des Steines statt des kleineren Trockengewichtes einsetzen.

¹⁾ Dieser Gedankengang deckt sich im wesentlichen mit jenem von Delesse, der zuerst darauf hingewiesen hat, daß Volumsprozente und Flächenprozente in solchen Fällen identisch sind. „Annales des mines“, 4. Série, Tome XIII, 1848.

Das andere Extrem $\mu' = 1$ führt auf den reinen Auftrieb¹⁾. Zwischen beiden Grenzen sind die praktisch möglichen Fälle eingeschlossen. „Natura non facit saltus“. Ein triftiger Grund, die Bezeichnung „Auftrieb in Talsperren“ durch „Unterdruck“ zu ersetzen, liegt nicht vor.

3. Raumelement zweiter Kleinheitsordnung.

Nehmen wir an, man würde eine Talsperre ganz aus reinem Zementmörtel mit Normsand, sogenanntem Normalmörtel, erbauen. Die Quarzkörner können als absolut porenfrei angesehen werden, während die Grundmasse aus abgebundenem Zementbrei wasserdurchlässig ist. Der Auftrieb, den jedes Sandkorn vom Volumen V erfährt, ist nach Gleichung 14)

$$P_1 = -\mu' k V;$$

¹⁾ Die Schlußfolgerungen sind ungewohnt. Um das Kräftespiel der Vorstellung näher zu bringen, kann man an folgendes Beispiel denken:

Ein im Innern stark poröser Würfel aus reinem, abgebundenem Zementbrei sei am Boden und an den Seitenflächen absolut dicht. Füllt man die Poren von oben mit Wasser an, so vergrößert dies die Kraft, welche notwendig ist, den Würfel zu heben oder umzukanten. ($\mu' = 0$, geschlossene Porenräume.) Macht man einige feine Bohrungen in den Boden, so wird die Kraft wieder kleiner, weil man denjenigen Teil des Wassers nicht mit zu heben braucht, der sofort ausfließt, sobald der Boden die Unterstützungsebene nicht mehr berührt, und zwar auch dann, wenn das verlorene gegangene Wasser von oben allsogleich vorsichtig nachgefüllt wird. Erreicht das Flächenmaß der Bohrungen den Wert μ der Porosität im Inneren, so ist die Kraft wieder genau so groß, wie im Anfange, solange kein Wasser in den Poren vorhanden war ($\mu - \mu' = 0$). Ein zweiter Würfel sei genau gleich dem ersten, nur füllen wir die Hohlräume mit festen Sandkörnern zum größten Teil aus. Man braucht jetzt eine größere Kraft zum Heben oder Umkanten des Würfels, entsprechend dem Gewichte der Sandkörner. Füllt man den Würfel wieder mit Wasser an, so steigt die Kraft weniger als früher, denn es geht jetzt weniger Wasser hinein. Wird der undurchlässige Boden abgefeilt, so sinkt die Kraft, und zwar wird sie gleich derjenigen, welche früher ohne Sandeinlagen erhalten wurde, vermehrt durch das Gewicht des Sandes und vermindert um das durch Sand verdrängte Wassergewicht. Wir haben es jetzt mit einem aus drei Körpern bestehenden, gleichmäßig inhomogenen Gemisch (Zement—Sand—Wasser) zu tun. Das eindringende Wasser vermindert sonach die notwendige Kraft gegenüber der aus dem Trockengewicht des Gemisches ermittelten. Würde jedoch eine Sandsorte verwendet, die selbst mehr Wasser aufnimmt als der poröse Zementbrei, so könnte das Wasser beim Heben nicht sofort ganz ausfließen, weil, mit Ausnahme der am Boden aufliegenden Sandkörner, das in den höher gelegenen Körnern enthaltene Wasser zuerst die dichtere Grundmasse (Zement) durchfließen müßte. Soviel Wasser als aus den Körnern dennoch ausfließt, kann aber von oben wieder in der gleichen Zeit nachgefüllt werden. Es müßte also ein Teil des Wassers mitgehoben werden. — Zerlegt man ein inhomogenes Gemisch in Raumelemente, wie es in Textfigur 6 geschehen ist, um daran die Wirkung der Elementarkräfte zu studieren, so müssen die Trennungsflächen durch die Grundmasse geführt werden.

denn μ ist Null, μ' ist der vom Wasser getroffene Oberflächenanteil.

Die auf die Volumseinheit des ganzen Gemisches bezogene Summe aller Einzelkräfte bezeichnen wir mit γ_a . Es besteht die Beziehung

$$\gamma_a = \frac{\sum^v P_1}{v} = -k \mu' \frac{\sum V}{v},$$

die wir in eine für praktische Zwecke bequemere Form bringen.

$\frac{\sum V}{v} = \mu_k$ bedeutet den volumetrischen Gehalt der Mauer an festen Sandkörnern,
 v_z bedeutet das im Gesamtvolumen v enthaltene Zementvolumen einschließlich der wasserführenden Poren,
 v_w das in v enthaltene Wasservolumen,

$\frac{v_w}{v} = \mu''$ die (leicht zu ermittelnde) Wasseraufnahme des ganzen Volumens v .

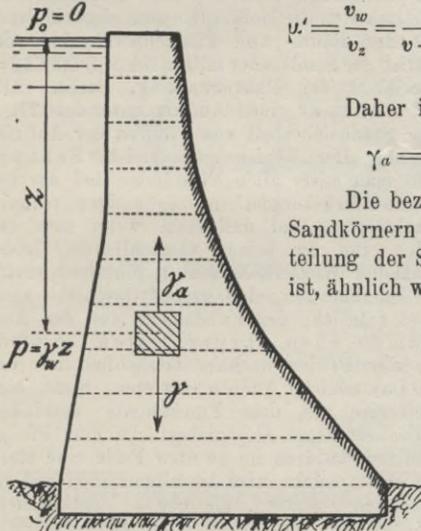
Dann ist die (schwer zu bestimmende) Wasseraufnahme des Zementes allein

$$\mu' = \frac{v_w}{v_z} = \frac{v_w}{v - \sum V} = \frac{\frac{v_w}{v}}{1 - \frac{\sum V}{v}} = \frac{\mu''}{1 - \mu_k}$$

Daher ist

$$\gamma_a = -k \frac{\mu'' \mu_k}{1 - \mu_k} \dots \dots \dots 15).$$

Die bezogene Kraft γ_a greift an allen Sandkörnern gleichmäßig an, wenn die Verteilung der Sandkörner eine gleichmäßige ist, ähnlich wie die Schwerkraft. Deshalb kann an jeder Stelle die Kraft γ_a mit dem spezifischen Gewichte γ des trockenen Mauerwerkes mittels Kräfteparallelogramm zusammengesetzt werden, was namentlich dann zu einer einfachen Berücksichtigung des Auftriebes führt,



Figur 7.

wenn der Innendruck p über dem ganzen Profil linear verteilt ist.

Textfigur 7 zeigt einen solchen Fall. Er kann eintreten, wenn die Luftseite so dicht hergestellt wurde, daß in allen horizontalen

Schichten derselbe Druck p herrscht wie im Wasser. Für k wird dann in (15) γ_w (spezifisches Gewicht des Wassers in kg/cm^3) = 0.001 zu setzen sein, wenn alle Längen in Zentimeter eingesetzt werden und die Spannungen sich in kg/cm^2 ergeben sollen¹⁾.

¹⁾ Bei Normalmörtel kann man annehmen, daß das Raumverhältnis von Normalsand : Zementbrei : Hohlräumen ungefähr gleich ist 9:3:2.

Demgemäß wäre $\mu_k = \frac{9}{14}$, $\mu' = \frac{1}{7}$ zu setzen. Dann ist

$$\frac{\mu' \mu_k}{1 - \mu_k} = 0.26.$$

Das Trockengewicht von Normalmörtel kann mit 0.0023 kg/cm^3 angenommen werden. Das für die statische Berechnung maßgebliche γ_r ist $\gamma - \gamma_a = 0.0023 - 0.00026 = 0.00204$ kg/cm^3 , also um zirka 11.5% kleiner als das Trockengewicht. Dasselbe Resultat kann auch anders gefunden werden. Der Zement, der als gleichmäßig poröse Masse anzusehen ist, erfährt überhaupt keinen Auftrieb, ebensowenig wie etwa ein am Boden eines Gefäßes angewachsener, aus dem Wasser hervorragender Zylinder. Der Auftrieb des Normalsandes, den wir uns absolut porenfrei denken, wäre, wenn er frei im Wasser schweben würde, $\frac{9}{14} \times 0.001 = 0.000643$ kg/cm^3 , kommt aber, da auch der Sand nur zum Teil mit Wasser in Berührung steht, zum anderen Teil seiner Oberfläche mit Zement dicht verbunden ist, nicht voll zur Wirkung. Nach dem Satze von Delesse, wonach Raum- und Flächenprocente identisch sind, kann man die freie Oberfläche der Sandkörner bestimmen. Es verhalten sich die Hohlräume zum abgebandenen Zementes $\frac{2}{5}$, der wirksame Auftrieb der Sandkörner mithin $0.4 \times 0.000643 = 0.00026$ kg/cm^3 . — Im Zentralblatt der Bauverwaltung, Berlin 1912, 5. Oktober, veröffentlichte Herr Schaper einen Aufsatz unter dem Titel: „Muß in den Berechnungen der Standsicherheit von Pfeilern der Auftrieb des Wassers berücksichtigt werden?“ Herr Regierungsbaumeister Schaper gelangt zu dem Schlusse, „daß man unter allen Umständen bei der Bestimmung der Bodenpressung unter Brückenpfeilern ungünstiger rechnet, wenn man den Auftrieb vernachlässigt, und daß man, wenn man den Auftrieb berücksichtigen will, ihn in seiner tatsächlichen Größe, z. B. = $\frac{5}{11}$ der Grundfläche mal der Wasserhöhe mal 1, einführen muß“. Der Faktor $\frac{5}{11}$ rührt von der Annahme her, daß grobes Geschiebe rund $\frac{5}{11}$ Hohlräume besitzt. Wäre es möglich, das Fundament vor der Aufsetzung des Pfeilers vollkommen eben abzuschleifen, so würde nach dem Satze von Delesse der Pfeiler nachher tatsächlich nur von $\frac{5}{11}$ der Grundfläche getragen. Das Gleiche könnte eintreten, wenn eine Betonschicht den Pfeiler teilweise mit dem Fundamente verbindet. In beiden Fällen wären aber die betroffenen Geschiebestücke dem Pfeiler gewissermaßen zuzurechnen, welcher dadurch im zweiten Falle eine stark aufgeraute Tragfläche bekäme. Eine solche wird im allgemeinen andere, vermutlich höhere Bodenpressungen gestatten, als ebene Druckflächen. Zur Berechnung des Auftriebes ist der Faktor $(\mu - \mu')$ zu verwenden. μ ist der Raumgehalt des Pfeilers samt Mörtelbändern und angehängten Geschiebestücken an Poren, μ' die Oberflächenporosität. Diese letztere ist, da starre, unbewegliche und unregelmäßige Körper, als welche man die groben Geschiebestücke ansehen kann, sich nahezu nur in Punkten berühren, um wenig kleiner als 1; daher kommt fast der volle Auftrieb zur Wirkung, wie O. Franzius mit Recht behauptet. Würde

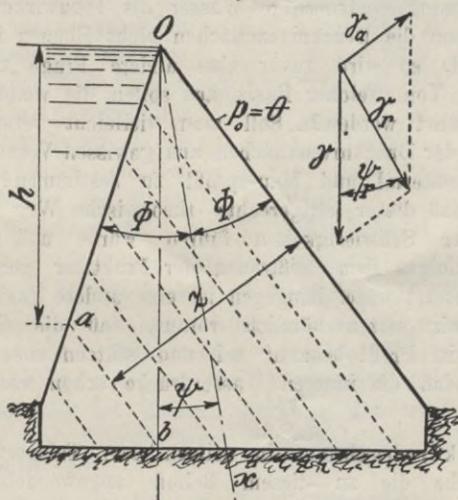
Die resultierende Massenkraft γ_r ergibt sich aus

$$\gamma_r = \gamma - \gamma_a$$

und ist genau so zu verwenden wie das spezifische Gewicht γ^1).

Ein anderer Fall: Die Durchlässigkeit der Mauer sei überall so groß, daß sich die Druckniveauflächen als parallele Ebenen in gleichen Abständen zu der Luftseite darstellen, wenn das Mauerprofil dreieckig ist (Textfigur 8). (Daß eine solche Druckverteilung ohne Begleiterscheinungen von wesentlicher Bedeutung praktisch unmöglich ist, wird später gezeigt.) Der hydrostatische Druck in der Schichte $a b$ ist

$$p = \gamma_w \cdot h.$$



Figur 8.

Bedeutet ψ den Winkel der Schwerkraft gegen die Symmetrieebene O_x des Mauerkörpers, so ist

$$h = \frac{\cos(\Phi - \psi)}{\sin 2\Phi} z,$$

daher

$$p = \gamma_w \frac{\cos(\Phi - \psi)}{\sin 2\Phi} \cdot z.$$

man leicht beweglichen feinen Sand als Fundament benützen, so könnte durch die Vermehrung der Berührungspunkte bei gleichzeitiger Näherung an die günstigste Anlagerung der Ausfall größer werden, bliebe jedoch auch dann noch hinter dem Raumgehalt des Sandes an Sandkörnern weit zurück, so lange kein festes Bindemittel zwischen dieselben eintritt. (Siehe die Polemik zwischen O. Franzius und Dr. H. Zimmermann. Zentralblatt der Bauverwaltung 1912, Nr. 89, 94 und 1913 Nr. 13.)

¹⁾ Siehe Plenkner a. a. O. Seite 136.

Durch Vergleich mit (12) ergibt sich

$$k = \gamma_w \frac{\cos(\Phi - \psi)}{\sin 2\Phi};$$

dieser Wert wäre in Gleichung 15) einzusetzen, worauf man γ_a vollständig berechnen und mit γ rechnerisch oder graphisch (siehe Textfigur 8 rechts oben) zu γ_r zusammensetzen kann. γ_r und der Winkel $(\psi - \psi_r)$ treten in den vom Verfasser aufgestellten Formeln ¹⁾ an Stelle von γ und ψ .

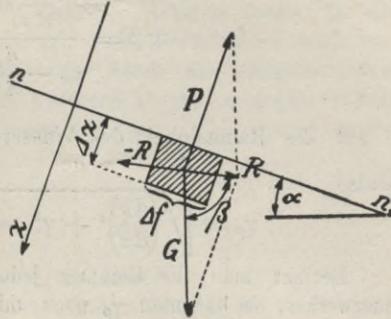
Tritt man endlich noch der Frage näher, welche Spannungen das ins Mauerwerk eindringende Wasser als Fernwirkung hervorrufen kann, wenn die Druckniveauflächen nicht Ebenen in gleichen Abständen sind, so wird zuvor eine andere Frage zu erörtern sein, nämlich: Von welcher Basis aus sollen die weiteren Untersuchungen geführt werden? Soll man vielleicht versuchen, die wahre Gestalt der Druckniveauflächen aus gewissen Voraussetzungen über das Baumaterial und Mauerprofil zu bestimmen? Man erkennt leicht, daß dieser stilgerechte theoretische Weg zu schier unüberwindlichen Schwierigkeiten führen würde und selbst im Falle eines Erfolges dem Mißtrauen der Praktiker gerechterweise allzusehr ausgesetzt wäre. Hingegen ist eine andere Basis durchaus einwandfrei; wir setzen nämlich voraus, daß die Gestalt der Niveaufkurven im Profil bekannt sei und stützen uns hiebei auf die Tatsache, daß die inneren Wasserdrücke schon wiederholt gemessen wurden.

E. Link²⁾ beschreibt in seinem dem Talsperrenbau gewidmeten Buche die zu diesem Behufe angewendete Methode. Es wurden Rohre mit offenem Ende in die Mauer eingeschlossen. Das zweite Ende des Rohres trägt ein Manometer. Durch eine genügende Anzahl von solchen Rohren, deren offene Enden im ganzen Profil bestehender Talsperren verteilt wären, könnte man leicht hinreichenden Aufschluß über die Niveaufkurven des inneren Druckes erhalten. Nach Link ist damit zu rechnen, daß (in ungünstigen Fällen) der innere Wasserdruck an der Wasserseite gleich dem äußeren Wasserdruck und an der Luftseite in gleicher Tiefe noch halb so groß ist wie dieser. Da die Druckniveauflächen einer

¹⁾ Zeitschrift für Mathematik und Physik, 60. Band, 3. Heft, Seite 284, Gleichungen 18) und 19).

²⁾ E. Link: „Die Bestimmung der Querschnitte von Staumauern und Wehren aus dreieckigen Grundformen.“ Berlin, Verlag Julius Springer, 1910, Seite 28 u. ff. Ausführlicher berichtet R. Schaefer über die weiter gemachten Erfahrungen in der Zeitschrift für Bauwesen 1913, Seite 101.

ruhenden Flüssigkeit horizontal sind, folgt daraus, daß das Wasser sich in einer gleichförmigen Bewegung von der Wasserseite zur Luftseite hin befindet, wobei es eine Reibung in den durchströmten Kapillaren hervorruft, welche eine neue, den Umsturz der Mauer begünstigende Kraft darstellt. (Streng genommen, könnte die Bewegung des Wassers wohl auch eine beschleunigte sein; wenn man aber annimmt, daß die Geschwindigkeit beim Austritt aus der Mauer nicht erheblich größer als beim Eintritt sein kann, so ist das Maß der Beschleunigung in Anbetracht der großen zurückgelegten Wege jedenfalls so klein, daß es ohne Schaden für die Beurteilung der Reibungskräfte der Null gleichgesetzt werden darf.)



Figur 9.

Es ist als ein äußerst glücklicher Zufall zu bezeichnen, daß man, obwohl die Mechanik über die Bewegung in so unregelmäßig geformten Kapillaren nahezu nichts auszusagen weiß, dennoch die Größe und Richtung dieser Reibungskräfte genau berechnen kann. Die Möglichkeit der an sich sehr einfachen Rechnung ist dadurch gegeben, daß wir die Lage der Niveauflächen auf Grund ihrer experimentellen Bestimmung als bekannt ansehen dürfen.

In Textfigur 9 ist ein Flüssigkeitsteilchen m und eine Niveaufläche $n n_1$ gezeichnet. Senkrecht zum Niveau und in der Richtung des zunehmenden Flüssigkeitsdruckes p nehmen wir die z -Achse an. Auf m wirkt die Schwerkraft $G = V \gamma_w$ senkrecht nach abwärts ein. Senkrecht zum Niveau wirkt gegen den abnehmenden Druck zu $P = \frac{dp}{dz} \Delta z \Delta f = \frac{dp}{dz} V$. Würden diese zwei im Gleichgewichte stehen und andere Kräfte fehlen, so müßte die Flüssigkeit in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung sein. Der letztere Fall ist aber hier ausgeschlossen, weil beim Durchströmen von Kapillaren namhafte Reibungen auftreten müssen.

Haben G und P eine Resultierende R , so tritt Beschleunigung auf, oder wenn wir das ausschließen, muß R durch eine Kraft $-R$ aufgehoben werden. — R ist also die Reibung im Raume V , die auf die Flüssigkeit, R die Reibung, die auf das Mauerwerk ausgeübt wird.

Bedeutet α die Neigung der Niveaufläche im Punkte m , so ist

$$R = \sqrt{P^2 + G^2 - 2PG \cos \alpha} = V \sqrt{\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 + \gamma_w^2 - 2\frac{dp}{dz} \gamma_w \cos \alpha}$$

ihr Winkel gegen die Schwerkraft

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{dp}{dz} \sin \alpha}{\gamma_w - \frac{dp}{dz} \cos \alpha};$$

die auf die Raumeinheit des Wassers bezogene Reibung $\gamma_p = \frac{R}{V}$

ist also

$$\gamma_p = \sqrt{\left(\frac{dp}{dz}\right)^2 + \gamma_w^2 - 2\frac{dp}{dz} \gamma_w \cos \alpha}$$

Bezieht man die Reibung jedoch auf die Raumeinheit des Mauerwerkes, so hat man γ_p noch mit der Wasseraufnahme μ des Materials zu multiplizieren. Der Wert μ und der bei dem früheren Beispiel einer Talsperre aus Normalmörtel benützte Wert μ'' sind eigentlich ein und dasselbe, nämlich der mittlere Raumgehalt an Poren. Bei Mauern aus Stein mit schmalen Mörtelbändern ist μ auch nahezu gleich der Porosität μ_s der Steine.

Während bezüglich des Auftriebes ein möglichst poröses Steinmaterial eigentlich am günstigsten wäre, weil bei großem μ_s auch μ groß, daher $\mu - \mu'$ klein, ja sogar positiv ausfallen könnte, gilt bezüglich der Reibung gerade das Umgekehrte. Eine Vergrößerung von μ_s erhöht auch den mittleren Porositätsgrad μ sehr merklich und damit den Wirkungsgrad der Reibung in den Kapillaren. Es ist zu vermuten, daß der letztere Umstand stets der ausschlaggebende sein wird, und daß man daher doch immer möglichst dichte Steine anwenden soll. Sicher ist, daß ein möglichst dichter Mörtel (μ' sehr klein) beide schädlichen Einflüsse stets verringert.

Um eine Vorstellung von der Größe der Reibung zu erlangen, berechnen wir γ_p für die in Textfigur 8 gezeichneten Verhältnisse. Φ ist ungefähr 28° , $\psi = 10^\circ$, daher $\alpha = 90^\circ - \Phi - \psi = 52^\circ$,

$$\mu'' = \frac{1}{\gamma}, \quad \frac{dp}{dz} = k = \gamma_w \frac{\cos 18^\circ}{\sin 56^\circ} = \gamma_w \cdot 1.147,$$

$$\gamma_p = \gamma_w \sqrt{(1.147)^2 + 1 - 2.294 \cos 52^\circ} = \gamma_w \cdot 0.95,$$

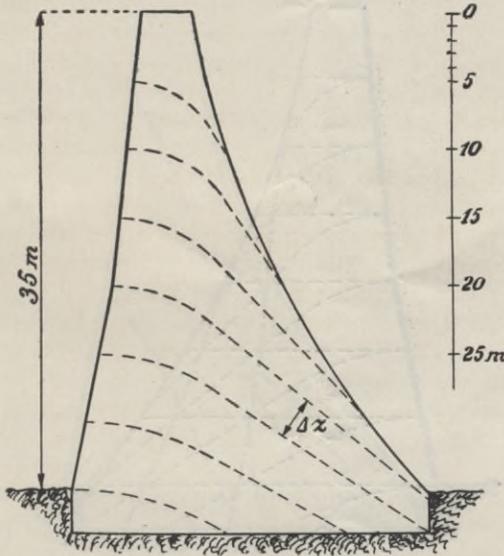
$$\mu'' \cdot \gamma_p = \gamma_w \cdot 0.136,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1.147 \sin 52^\circ}{1 - 1.147 \cos 52^\circ} = 3.076, \quad \beta = 72^\circ.$$

In diesem, wohl als extrem zu bezeichnenden Falle hätte daher die Kapillarreibung für sich allein

beiläufig dieselbe Wirkung, wie ein unter 18° gegen den Horizont nach abwärts gegen die Luftseite ziehendes Flüssigkeitsgewicht vom spezifischen Gewichte $\frac{1}{7}$.

Es kann nicht geleugnet werden, daß eine schädliche Kraft, welche unter Umständen diese Größe annehmen kann, in der statischen Berechnung der Talsperren ihren Platz finden muß, und daß es nicht angeht, ihre Wirkung durch die problematischen Methoden der Berechnung „auf Unterdruck“ zu ersetzen, sobald man einmal ihr Wesen voll erkannt hat.



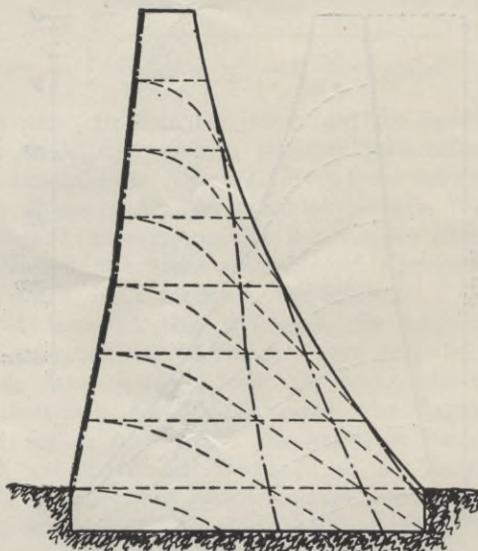
Figur 10. Niveaulinien des Innendruckes (angenommen).

Das Eigengewicht (Trockengewicht), der Auftrieb durch eingedrungenes Wasser und die Kapillarreibung sind Massenkräfte, deren Größe sich Punkt für Punkt angeben läßt, wenn das verwendete Baumaterial bekannt ist und die Niveaulinien des inneren Druckes durch unmittelbare Messungen bestimmt, beziehungsweise aus früher gesammelten Erfahrungen schätzungsweise angenommen wurden. Es ist naheliegend, diese Kräfte punktweise zu totalresultierenden Kräften γ_R zusammenzusetzen und ideale Niveaukurven zu konstruieren, welche zu γ_R in derselben Beziehung stehen wie der Auftrieb zu den Niveaukurven des inneren Wasserdruckes. Diese Aufgabe fällt mit der Frage nach dem Potentiale der Massenkräfte zusammen, so daß man die ideellen

Niveaulinien richtiger Linien gleichen Potentiales nennen sollte; wir wollen aber an dem erstgewählten Namen festhalten, weil er anschaulicher und der wasserbaulichen Praxis geläufiger sein dürfte.

Zur Zusammensetzung der totalresultierenden Massenkraft γ_R aus den Teilkräften wird man zweckmäßig die graphische Darstellung verwenden. Im folgenden soll der Vorgang an einer Tal-sperre von 35 m Höhe beschrieben werden.

Textfigur 10 zeigt das Profil und die Niveaulinien des inneren Druckes von $\frac{1}{2}$ zu $\frac{1}{2}$ Atm. Für jeden hinreichend kleinen Bezirk (kleiner als der „Kubikzentimeter“) kann das Druckgefälle



Figur 11. Niveaulinien der Reibung in den Kapillaren.

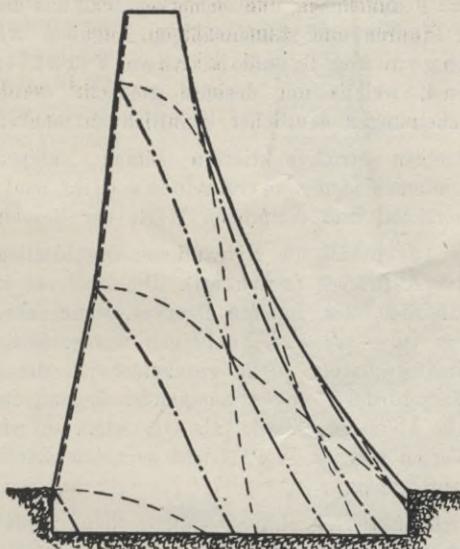
als linear angesehen werden. Sein Maß $k = \frac{dp}{dz}$ findet man aber genau genug aus $\frac{\Delta p}{\Delta z} = \frac{0.5 \text{ kg/cm}^2}{250 \text{ cm}} = 0.002 \text{ kg/cm}^3$. Der Auftrieb γ_a ist nach Gleichung 14) durch die Gleichung bestimmt

$$\gamma_a = \frac{P_1}{V} = k(\mu - \mu'),$$

wobei μ die Porosität der ganzen Mauer und μ' diejenige des Mörtels bedeutet. Denn es ist gezeigt worden, daß man bei einem aus einer Grundmasse mit eingelagerten Füllstoffen bestehenden Körper die Flächenporosität nicht gleich der Raumporosität annehmen darf, wenn man den Auftrieb bestimmen will, und daß die

Raumporosität der Grundmasse als Oberflächenporosität jener Elemente anzusehen ist, in welche man sich den ganzen Körper zerlegt denken muß. Grundmasse ist hier der Mörtel, das Steinmaterial ist in diesen eingebettet, also „Füllstoff“. Seine Porosität μ_s ist bei dünnen Mörtelbändern nahezu gleich μ .

Freilich besteht auch der Mörtel nicht aus einer einheitlich porösen Substanz, von welcher gezeigt wurde, daß sie gar keinen Auftrieb erfährt. Da aber der Raumgehalt der Mauer an Mörtel relativ klein ist, wollen wir diesen Teil des Auftriebes vernachlässigen, um den Weg der Untersuchung einfacher darstellen zu



Figur 12. Resultierende Niveaulinien aus Auftrieb und Kapillarreibung.

können. Aus dem gleichen Grunde wählen wir $\mu = 0.05$ und $\mu' = 0.38$, so daß $\mu - \mu' = -0.33 = \frac{1}{3}$ wird, das heißt der Auftrieb ist

$$\gamma_a = -\frac{k}{3} \text{ kg/cm}^3$$

und das Potential des Auftriebes ändert sich erst beim Übergange von einer Niveaulinie zur drittnächsten um $\frac{1}{2}$ Atm.

In Textfigur 11 ist dieselbe Stauauer abermals gezeichnet. Außer den Niveaulinien des inneren Druckes sind auch diejenigen einer ruhenden Wassermasse strichliert gezeichnet. Durch Zusammensetzung beider erhält man die Niveaulinien jenes Druckes, welcher auf die Volumseinheit Wasser die gleiche Massenkraft ausüben

würde wie die Kapillarreibung. Diese sind in der Figur durch strichpunktierte Linien dargestellt.

Die Kapillarreibung sollte nun mit dem mittleren Porositätsgrade μ des Mauerwerkes multipliziert werden, der auf 0.05 veranschlagt wurde. Daher wäre von den resultierenden Niveaulinien in Textfigur 11 nur jede zwanzigste bei den weiter folgenden Konstruktionen zu verwenden. Das würde zur Folge haben, daß der Einfluß der Reibung in den kleinen Textfiguren unkenntlich würde. Wir wollen daher diese an sich sehr wichtige Rücksicht unterlassen, indem wir fehlerhafterweise hier $\mu = 1$ annehmen, und bemerken, daß aus diesem Grunde alle folgenden Figuren und zahlenmäßigen Angaben als starke Übertreibungen der tatsächlichen Verhältnisse anzusehen sind, welche nur deshalb gemacht werden, um die möglichen Erscheinungen deutlicher kenntlich zu machen.

Die einzelnen strichpunktierten Linien entsprechen dann ideellen Druckunterschieden von 0.5 Atm. und ihr senkrechter Abstand ist proportional dem reziproken Werte der Reibung.

Textfigur 12 enthält die Niveaulinien des ideellen Reibungsdruckes und des Auftriebes (strichliert). Die letzteren ergeben sich aus den Niveaulinien des inneren Druckes, wenn man nur jede dritte nimmt, da $(\mu - \mu') = \frac{1}{3}$ gefunden wurde. Wenn man, was hier der Deutlichkeit halber nicht geschehen ist, die Niveaulinien des inneren Wasserdruckes enger aneinander liegend zeichnet, entsprechend einem kleineren Gefälle als 0.5 Atm., so wird es auch bei anderen Werten von $(\mu - \mu')$ leicht sein, die Niveaulinien des Auftriebes einzuzeichnen.

Die strichpunktierten Linien entsprechen wieder dem aus Reibung und Auftrieb resultierenden ideellen Druckgefälle.

Man findet sie strichliert wieder in Textfigur 13, wo auch die ideellen Niveaulinien der auf das Mauerwerk wirkenden Schwerkraft eingetragen sind. Letztere sind horizontale Gerade in Abständen von je 2 m, was einem spezifischen Trockengewicht von 2.5 kg/dm^3 entspricht. Die Niveaulinien des totalen, resultierenden, ideellen Druckes für Druckunterschiede von 0.5 Atm. sind auch hier die strichpunktierten Kurven. Es ist ersichtlich, daß sie sehr deutlich von der horizontalen Richtung abweichen. Aus ihnen findet man die totale resultierende Massenkraft γ_R an jeder Stelle nach Richtung und Größe, wenn man das Druckgefälle Δp durch den senkrechten Abstand Δz dividiert, also hier wäre

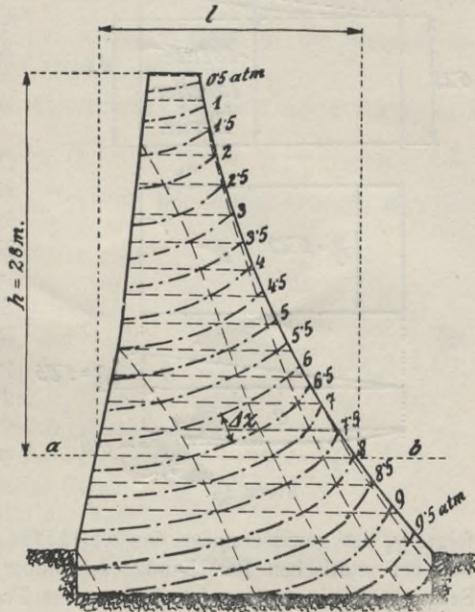
$$\gamma_R \text{ kg/cm}^3 = \frac{\Delta p}{z} = \frac{0.5 \text{ kg/cm}^2}{z \text{ cm}}$$

Es ist aber nicht leicht, eine nach zwei Richtungen veränderliche Massenkraft in die statische Berechnung der Mauer einzuführen. Zu diesem Zwecke muß sie zuerst in bestimmte, für die Rechnung bequemere Komponenten zerlegt werden. Da aber die Massenkraft γ_R eine gerichtete (Vektor-) Größe ist, stellen sich der Zerlegung neue Schwierigkeiten in den Weg. Daher ist es besser, den richtungslosen (scalaren) ideellen Druck in passende Teildrücke aufzulösen und die den Teildrücken entsprechenden Massenkkräfte getrennt zur Ermittlung der Mauerwerkspannungen zu verwenden, worauf schließlich unter Anwendung des Überlagerungsgesetzes die wirklichen Spannungen leicht gefunden werden können.

Um diesen Vorgang zu zeigen, bestimmen wir das Diagramm des ideellen Druckes auf einen horizontalen Querschnitt ab in Textfigur 13. Das Diagramm ist in Textfigur 14 oben enthalten, wo auch die Zerlegung angedeutet ist. Die Teildrücke sind darunter gezeichnet, und zwar ist a ein Rechteck, b ein rechtwinkeliges Dreieck. Beide zusammen würden jedoch eine zu große Druckfläche ergeben.

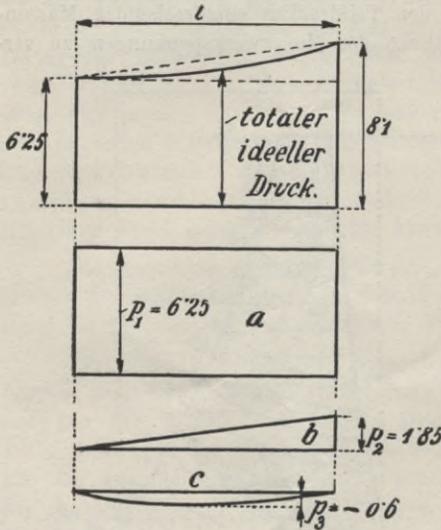
Deshalb muß noch die bogenförmig begrenzte Druckfläche c berücksichtigt werden, welche einen negativen Druck darstellt, was nur bedeutet, daß er nach oben zunimmt.

Allerdings wäre es vorzuziehen, die Druckfläche nicht für einen horizontalen Querschnitt zu bestimmen, sondern für einen kreisbogenförmigen, wenn die Berechnung der Spannungen nachher durch die vom Verfasser in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ vorgebrachten Formeln geschehen soll. Denn diese Methode verspricht dann die genauesten Resultate, wenn man die praktisch angewendeten Profile so in kreisbogenförmig begrenzte Zonen zerlegt, daß die Kreisbogen die Profilkrenzlinien senkrecht durchschneiden,



Figur 13. Niveaulinien des totalen ideellen Druckes.

weil dann die das Profil stückweise vertretenden Keile sich am engsten an die Profillinien anschließen¹⁾. Es dürfte sich aber empfehlen, nicht gleich alle Feinheiten, die in diese Methode gelegt werden können, zur Grundlage für neue Erörterungen zu wählen. Der Nachteil, daß dann auf eine klare Besprechung, wie man bei praktisch verwendeten Profilen vorzugehen hat, verzichtet werden



Figur 14.

muß, wird aufgewogen durch die Erleichterung, in dem wesentlich neuen Verfahren den geistigen Kontakt zwischen Leser und Schreiber dieser Zeilen herzustellen.

Die Druckfläche a (Textfigur 14) entspricht einer ruhenden Flüssigkeit mit horizontalen Niveaulinien. Findet man in anderen horizontalen Schnitten die Höhe p_1 des Rechteckes a immer proportional der Tiefenlage h des Schnittes, so besteht die Relation $p_1 = \gamma_1 h$, aus welcher

$$\gamma_1 = \frac{p_1}{h}$$

folgt. γ_1 ist gewissermaßen das spezifische Gewicht, welches bei der statischen Berechnung der Mauer mit der Richtung der Schwerkraft einzusetzen ist. In unserem Falle fände man

$$\gamma_1 = \frac{6'25 \text{ Atm.}}{2800 \text{ cm}} = 0'00223 \text{ kg/cm}^3,$$

etwas weniger als das Trockengewicht, denn es fehlt der Auftrieb, welcher an der Wasserseite besteht, und eine Komponente der Reibung, wenn die Niveaulinien des inneren Druckes dort keine horizontale Tangente besitzen. Mit diesem Werte γ_1 berechnet man die Spannungen genau so, wie es a. a. O. für das „Eigengewicht“ gezeigt wurde.

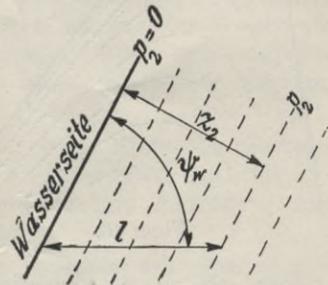
Proportionalität von p_1 und h würde nur dann merklich fehlen, wenn man nicht dasselbe Steinmaterial und den gleichen

¹⁾ Siehe Plenkner, a. a. O. Seite 145. Dasselbst gibt Herr Baurat Plenkner eine Konstruktion an, nach welcher diese Zonen leicht konstruiert werden können.

Mörtel in der ganzen Mauer verwenden wollte. In solchen Fällen müßte man zu dem Auskunftsmittel greifen, das spezifische Gewicht überall zunächst so groß anzunehmen, wie es in dem Querschnitte tatsächlich ist, dessen Spannungen man berechnen will. Die zu viel oder zu wenig genommenen Massenkräfte sind dann zu Resultierenden zu vereinigen und als solche in Rechnung zu ziehen.

Auch die Fläche b in Textfigur 14 steht mit einem konstanten spezifischen Gewicht in Zusammenhang, wenn $\operatorname{tg} \delta = \frac{p_2}{l}$ proportional mit h zu- und abnimmt, nur wirkt es nicht in der Richtung der Schwere, sondern in einer anderen Richtung.

Das der Fläche b entsprechende Kraftfeld ist in Textfigur 15 gezeichnet. Die spezifische Massenkraft ist $\gamma_2 = \frac{p_2}{z_2}$, kann daher berechnet werden, wenn z_2 bekannt ist. Auch braucht man den Winkel ψ_w um ihre Richtung angeben zu können. Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn die Wasserseite geradlinig verläuft. Dort ist immer $p_2 = 0$, das heißt die Wasserseite gibt schon die Richtung der Niveaulinien an, γ_2 steht senkrecht zu ihr. Daher ist ψ_w durch das Profil gegeben. Ist die wasserseitige Profilbegrenzung keine Gerade, so bedeutet ψ_w den Winkel der Tangente an die Begrenzungslinie gegen den Horizont in ihrem Schnittpunkt



Figur 15.

mit a b (siehe Textfigur 13). In solchen Fällen beginnt die Rechnung genau gleich wie bei gerader Wasserseite, nur sind hierauf die zu viel oder zu wenig genommenen Massenkräfte in Resultierenden vereinigt nachträglich zu berücksichtigen. Eine ähnliche Bedeutung für den Umfang der Berechnungen kommt auch einer gekrümmten Luftseite zu, indem bei solchen $\operatorname{tg} \delta$ selten proportional mit h ausfallen wird.

Um diesen Korrekturen, die bei horizontaler Schnittführung doch niemals den höchst erreichbaren Genauigkeitsgrad bieten können, vollkommen auszuweichen, beschränken wir uns im folgenden ganz auf Dreiecksprofile.

Nach Textfigur 15 ist $z_2 = l \sin \psi_w$, daher

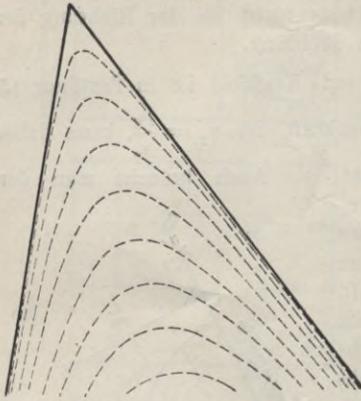
$$\gamma_2 = \frac{p_2}{l \sin \psi_w}$$

In Textfigur 13 ist $l = 19.5 \text{ m}$, $\psi_w = 80^\circ$ (daß Textfigur 13 kein Dreiecksprofil ist, bleibe aus obigen Gründen unbeachtet), nach Textfigur 14 ist $p_2 = 1.85 \text{ kg/cm}^2$, also

$$\gamma_2 = \frac{1.85 \text{ kg/cm}^2}{1950 \text{ cm} \cdot 0.985} = 0.00096 \text{ kg/cm}^3;$$

γ_2 ist also etwas kleiner als das spezifische Gewicht des Wassers, wirkt jedoch nahezu horizontal (unter 80° gegen die Schwerkraftrichtung).

Der letzte Teil der Druckfläche (Fläche c in Textfigur 14) entspricht einer nach beiden Richtungen der Ebene

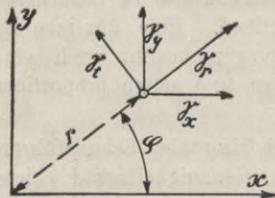


Figur 16.

veränderlichen Massenkraft γ_3 . Die Niveaulinien dieses Druckes p_3 sind daher nicht mehr gerade Linien. Wenn ein Dreiecksprofil vorausgesetzt wird, so könnten sie ähnliche Gestalt haben wie die Schar von Hyperbeln, deren gemeinsame Asymptoten von den Begrenzungen des Profils gebildet werden (Textfigur 16). In der Nähe der Asymptoten rücken die Kurven enger aneinander, weil dort der (negative) Druck rascher fällt als in der Mitte. Das Maximum von p_3 ist ungefähr -0.6 Atm .

Auch hier hätte man sich durch mehrere Schnitte zu überzeugen, ob $\max p_3$ proportional mit h ist, was bei dreieckigen Profilen im allgemeinen zutreffen wird. Dann sind die Formeln des nachfolgenden Abschnittes unmittelbar zu verwenden. Wo nicht, wären wieder die restlichen Massenkraften in Resultierenden vereinigt überdies zu berücksichtigen.

Bedeutet p_3 einen nach zwei Richtungen x und y der Ebene veränderlichen ideellen Druck oder, was dasselbe ist, das Potential der Massenkraft, so sind deren Komponenten



Figur 17.

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial p_3}{\partial x} \\ \gamma_y &= \frac{\partial p_3}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 16).$$

Im folgenden kommen Polarkoordinaten zur Anwendung. Daher bestimmen wir zunächst die Komponenten der Massenkraft γ_3 in radialer und tangentialer Richtung (γ_r und γ_t). (Siehe Textfigur 17.)

Beide sind positiv, wenn sie in der Richtung der wachsenden Koordinaten r und φ wirken.

Transformiert man durch die Gleichungen

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

und
$$\gamma_r = \gamma_x \cos \varphi + \gamma_y \sin \varphi$$

$$\gamma_t = -\gamma_x \sin \varphi + \gamma_y \cos \varphi$$

die Gleichungen 16), so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r &= \frac{\partial p_3}{\partial r} \\ \gamma_t &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p_3}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 17).$$

4. Raumelement erster Kleinheitsordnung.

Die auf das Material einwirkenden Massenkräfte γ_1, γ_2 und γ_3 finden gleich wie der „äußere“ Wasserdruck auf der Wasserseite ihre Gegenkraft in den Materialspannungen. Diese kann man berechnen, wenn man die ganze Mauer als einen elastisch isotropen, homogenen Körper ansieht.

γ_1 und γ_2 sind parallele und konstante Kräfte von bekannter Richtung. Die Spannungen, welche sie hervorrufen, sind wie diejenigen der Schwerkraft erhältlich, weshalb ihre Berechnung hier nicht mehr gezeigt zu werden braucht.

Zufolge Gleichung 17) besteht zwischen den Komponenten γ_r und γ_t von γ_3 die Bedingungsgleichung

$$p_3 = \int_0^r \gamma_r dr = r \int_0^\varphi \gamma_t d\varphi.$$

Ist p_3 proportional mit h (siehe Textfigur 18), so ist er es auch mit r , da $r \cos(\varphi + \psi) = h$ ist. p_3 kann daher als Produkt

$$p_3 = r p_3^{(1)}$$

angeschrieben werden, wo $p_3^{(1)}$ den Druck am gleichen Leitstrahl, aber im Abstände $r = 1$ cm von der Mauerkrone O vorstellt. Dann ist aber zufolge 17)

$$\left. \begin{aligned} \gamma_r &= p_3^{(1)} \\ \gamma_t &= \frac{d p_3^{(1)}}{d \varphi} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 18),$$

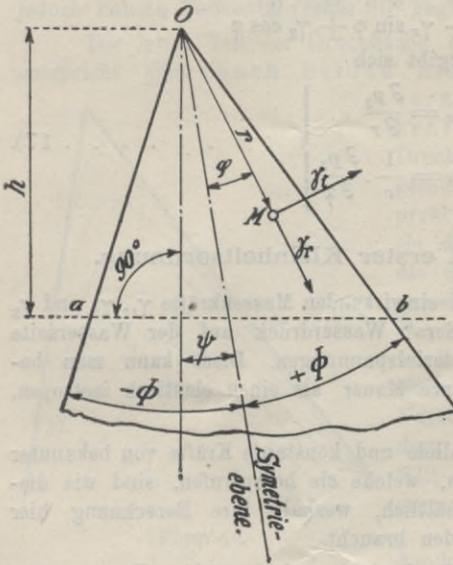
woraus notwendig folgt, daß

$$\frac{d \gamma_r}{d \varphi} = \gamma_t \dots \dots \dots 19)$$

ist. Gleichgewicht kann am „Mauerelement“ (erster Kleinheitsordnung) nur bestehen wenn

$$\sigma_r + r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \sigma_t + \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} - r \gamma_r = 0$$

$$2 \tau + r \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} - r \gamma_t = 0$$



Figur 18.

ist. σ_r und σ_t sind die radiale und tangentialen Normalspannung, positiv als Druck, τ ist die Schubspannung, positiv, wenn sie auf einem dem Pole zugewendeten Flächenelement in der Richtung des wachsenden Winkels φ wirkt.

Eine durch die Massenkraft γ_3 auf einem Flächenelement (im Abstand r von der Krone O) von definierter Richtung hervorgerufene Spannung s von definierter Richtung kann in allgemeiner Form dargestellt werden als

$$s = f(r, p_3^{(1)}, \dots)$$

wenn die Punkte nur

mehr Winkelgrößen bedeuten. Ihr totales Differential ist

$$ds = \frac{\partial s}{\partial r} dr + \frac{\partial s}{\partial p_3^{(1)}} dp_3^{(1)} + \dots$$

In diese Gleichung tragen wir für die Differentiale jene Werte ein, welche von denselben angenommen werden, wenn man die Längeneinheit im Verhältnisse ($r : r + dr$) vergrößert. ds wird zu $-s \frac{dr}{r}$, $p_3^{(1)} = \frac{p_3}{r}$ hat die Dimension eines spezifischen Gewichtes $\left[\frac{m}{l^2 l^2} \right]$, daher

$$\text{ist } dp_3^{(1)} = \frac{p_3^{(1)}}{\left(\frac{r + dr}{r} \right)^2} - p_3^{(1)} = p_3^{(1)} \left(1 - \frac{2dr}{r} \right) - p_3^{(1)} = -p_3^{(1)} 2 \frac{dr}{r}$$

Die Differentiale der Winkelgrößen verschwinden. Somit ist, da r sich nicht ändert

$$-s \frac{dr}{r} = \frac{\partial s}{\partial r} dr - \frac{\partial s}{\partial p_3^{(1)}} p_3^{(1)} 2 \frac{dr}{r}$$

oder einfacher

$$-s = r \frac{\partial s}{\partial r} - \frac{\partial s}{\partial p_3^{(1)}} p_3^{(1)} \cdot 2$$

Denkt man sich, $p_3^{(1)}$ nähme beispielsweise den zwei- oder dreifachen Wert an, so folgt aus dem Überlagerungsgesetz, daß s proportional mit $p_3^{(1)}$ wachsen muß, und aus Eulers Satz über homogene Funktionen weiter, daß

$$\frac{\partial s}{\partial p_3^{(1)}} \cdot p_3^{(1)} = s.$$

Darum ist

$$s = r \frac{\partial s}{\partial r}$$

oder

$$s = r C,$$

wenn C eine Funktion von φ allein bedeutet. Versteht man unter s nacheinander eine der drei Spannungen σ_r , σ_t und τ und unter M , N und L Funktionen von φ allein, so gelten auch folgende Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r M \\ \sigma_t &= r N \\ \tau &= r L \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 20),$$

und führt man diese Ausdrücke in die vorhin angeschriebenen Gleichgewichtsbedingungen ein, so nehmen diese die Form an

$$\left. \begin{aligned} 2 M - N + \frac{dL}{d\varphi} - \gamma_r &= 0 \\ 3 L + \frac{dN}{d\varphi} - \gamma_t &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 21).$$

Bedeutен u und v die Änderungen der Polarkoordinaten r und φ eines Punktes M (Textfigur 18), λ_r und λ_t die radiale und tangentielle, ν die kubische Dilatation, ε_z den Schubwinkel, welche unter der elastischen (unendlich klein gedachten) Deformation auftreten; K und Θ die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten, so gelten bei Beschränkung auf ebene Probleme die bekannten Beziehungen¹⁾:

$$\lambda_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \lambda_t = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial r}, \quad \nu = \frac{1}{1 + \Theta} (\lambda_r + \lambda_t)$$

$$\sigma_r = -2K(\lambda_r + \Theta \nu), \quad \sigma_t = -2K(\lambda_t + \Theta \nu), \quad \tau = -K \varepsilon_z.$$

Führt man an Stelle von u und v die neuen Variablen von $u = r^2 u'$, $v = r v'$ ein, wo u' und v' nur von φ abhängig sein

¹⁾ Das ebene Problem umfaßt zwei extreme Fälle: die rein ebene Deformation eines unendlich langen Körpers und die unendlich dünne Platte, welche nur durch Kräfte in der Plattenebene beansprucht wird. Solange die Massenkkräfte von einem homogenen Kraftfeld herrühren, ergeben beide Fälle gleiche Spannungsformeln. Dies ist der Fall bei γ_1 und γ_2 , nicht aber bei γ_3 . Hier werden für γ_3 nur die Formeln abgeleitet, welche sich auf die unendlich dünne Platte beziehen, und es wird die Aufgabe einer späteren Veröffentlichung sein, auch noch die nur wenig verschiedenen Formeln für ebene Deformation anzugeben.

sollen, so ergeben sich die Spannungen wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{-2Kr}{1+\Theta} \left[u'(2+5\Theta) + \frac{dv'}{d\varphi} \Theta \right] \\ \sigma_t &= \frac{-2Kr}{1+\Theta} \left[u'(1+4\Theta) + \frac{dv'}{d\varphi} (1+2\Theta) \right] \\ \tau &= -Kr \left(\frac{du'}{d\varphi} + v' \right) \end{aligned} \right\} \dots 22).$$

Der Vergleich lehrt, daß die Gleichungen 20) durch diese Wahl von u und v befriedigt werden, und es lassen sich auch die drei Werte M , N und L leicht durch u' , v' , K und Θ ausdrücken, was bei den Gleichgewichtsbedingungen 21) zu diesen Differentialgleichungen führt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv'}{d\varphi} (\Theta - 1) + 6u'(1+2\Theta) + \frac{d^2u'}{d\varphi^2} (1+\Theta) + \frac{1+\Theta}{K} \gamma_r &= 0 \\ \frac{du'}{d\varphi} (5+11\Theta) + 3v'(1+\Theta) + 2\frac{d^2v'}{d\varphi^2} (1+2\Theta) + \frac{1+\Theta}{K} \gamma_t &= 0 \end{aligned} \right\} 23).$$

Nach zweimaliger Differentiation jeder dieser Gleichungen und Benützung der Gleichung 19) kann man die folgenden bilden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3u'}{d\varphi^3} + 10\frac{d^2u'}{d\varphi^2} + 9u' &= \frac{-3(1+\Theta)}{2K(1+2\Theta)} \left(\frac{d^2\gamma_r}{d\varphi^2} + \gamma_r \right) \\ \frac{d^3v'}{d\varphi^3} + 10\frac{d^2v'}{d\varphi^2} + 9v' &= \frac{-(1+\Theta)}{2K(1+2\Theta)} \left(\frac{d^2\gamma_t}{d\varphi^2} + \gamma_t \right) \end{aligned} \right\} 24).$$

Kürze halber bezeichnen wir die Funktionen von γ_r und γ_t mit f_r und f_t , so daß

$$\left. \begin{aligned} f_r &= \frac{d^2\gamma_r}{d\varphi^2} + \gamma_r \\ f_t &= \frac{d^2\gamma_t}{d\varphi^2} + \gamma_t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots 25)$$

ist. Dann lautet das allgemeine Integral der Gleichungen 24)

$$\left. \begin{aligned} u' &= \frac{-(1+\Theta)}{16K(1+2\Theta)} \left[-3\cos\varphi \int f_r \sin\varphi d\varphi + 3\sin\varphi \int f_r \cos\varphi d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \cos 3\varphi \int f_r \sin 3\varphi d\varphi - \sin 3\varphi \int f_r \cos 3\varphi d\varphi \right] \\ &\quad + C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi \\ v' &= \frac{-(1+\Theta)}{48K(1+2\Theta)} \left[-3\cos\varphi \int f_t \sin\varphi d\varphi + 3\sin\varphi \int f_t \cos\varphi d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \cos 3\varphi \int f_t \sin 3\varphi d\varphi - \sin 3\varphi \int f_t \cos 3\varphi d\varphi \right] \\ &\quad + C_5 \sin\varphi + C_6 \cos\varphi + C_7 \sin 3\varphi + C_8 \cos 3\varphi \end{aligned} \right\} 26).$$

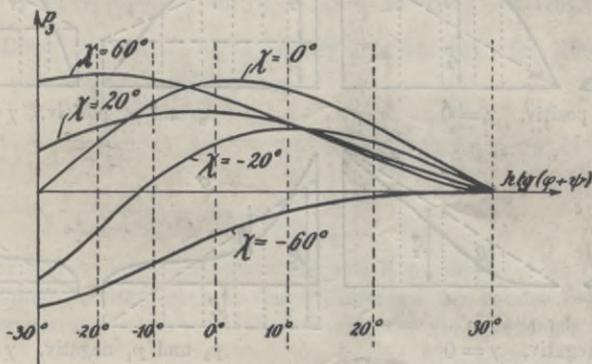
Man könnte daher theoretisch jede beliebige, dem Verlaufe von $p_3^{(1)}$ angepaßte Funktion γ_r von φ wählen, durch die Gleichungen 19) und 25) γ_t , f_r und f_t bestimmen, durch Ausführung der unbestimmten Integration in Gleichung 26) die Funktionen u' und v' finden, um schließlich durch die elastischen Grundgleichungen zu den Spannungen zu gelangen.

Praktisch gestatten aber nur zwei Funktionen γ_r eine einfache Bestimmung der acht Integrationskonstanten C_1 bis C_8 , nämlich

$$\gamma_r = \max p_3^{(1)} \cos(\varphi + \chi)$$

$$\text{und } \gamma_r = \max p_3^{(1)} \cos(3\varphi + \chi),$$

wo χ einen beliebigen positiven oder negativen Winkel bedeutet. Die erste Annahme führt, weil dann $f_r = f_t = 0$ würde, zu den



Figur 19.

in der früheren Publikation bereits behandelten ideellen Drücken p_1 und p_2 mit geradlinig begrenzter Druckfläche zurück. Die zweite Annahme gestattet je nach der Wahl von χ eine der in Textfigur 19 gezeichneten Druckflächenbegrenzungen.

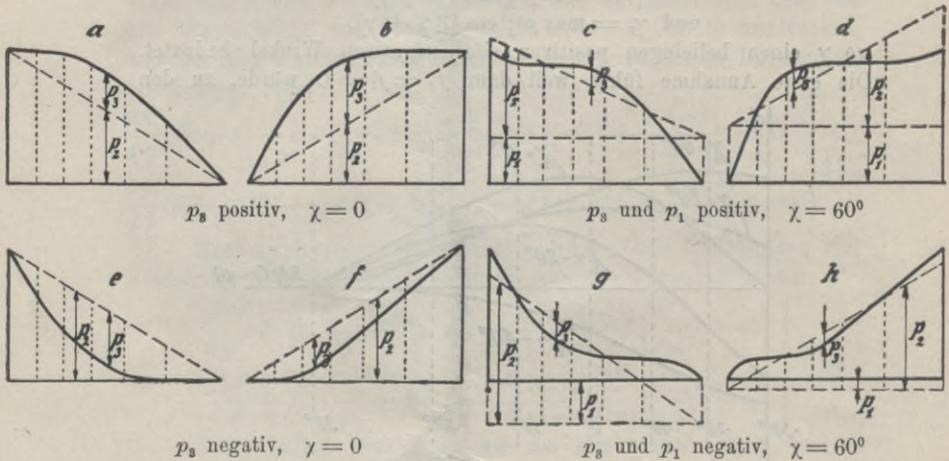
Hier ist angenommen worden, daß der Winkel ψ der Vertikalen gegen die Symmetrieebene des Profils 20° betrage, und daß der Winkel $\Phi = \pm 30^\circ$ ist (siehe Textfigur 18).

Durch passende Verbindung des positiven oder negativen Druckes p_3 mit p_2 , beziehungsweise mit p_1 kann man einer großen Zahl von oberen Begrenzungslinien des totalen ideellen Druckes gerecht werden, wie in Textfigur 20 an einigen Beispielen gezeigt ist. Durch Zusammensetzung solcher Figuren können leicht noch weitere Typen gewonnen werden.

Die Funktionen γ_r mit verschiedenem Winkel χ unterscheiden sich untereinander nur durch die Lage ihres maximalen Wertes von $p_3^{(1)}$. Sie können alle durch die einzige Form

$$\gamma_r = \max p_3^{(1)} \cos 3\varphi$$

vertreten werden, die ebenso wie die anderen eine einfache Sinuslinie ist, wenn man nachträglich bei der Auswertung der Konstanten C_1 bis C_8 auf die passendste Wahl von χ Rücksicht nimmt. χ könnte man so bestimmen: im Wendepunkte der als gegeben anzusehenden Druckflächen a, d, g oder h (Textfigur 20) ziehe man eine Schnittgerade so, daß sie als Nulllinie der durch die horizontale Schnittführung a, b (Textfigur 18) transformierten Sinuslinie dienen kann. (Bei kreisförmiger Schnittführung, welche mittels der Plenknerschen Konstruktion immer leicht durchgeführt werden kann, entfällt diese



Figur 20.

Schwierigkeit ganz.) Das Maximum von p_3 bestimmt dann die Größe des zu wählenden Winkels χ .

Eine zu weitgehende theoretische Genauigkeit liegt aber nicht im Interesse technischer Berechnungen. Man kann darum annehmen, daß man stets bei krummlinigen Begrenzungen der ideellen Druckfläche mit einem der Fälle a, b, e und f in Textfigur 20 das Auslangen finden wird. Im folgenden werden deshalb die Berechnungen nur für den Sonderfall $\chi = 0$ wirklich zu Ende geführt.

Für $\gamma_r = \max p_3^{(1)} \cos 3\varphi$ folgt aus der Gleichung 19)
 $\gamma_t = -\max p_3^{(1)} \cdot 3 \sin 3\varphi$ und aus Gleichung 26)

$$\begin{aligned}
 u' &= \frac{-(1 + \Theta)}{4K(1 + 2\Theta)} \max p_3^{(1)} \left(\frac{11}{12} \cos 3\varphi + \varphi \sin 3\varphi \right) + \\
 &\quad + C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + C_3 \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi \\
 v' &= \frac{-(1 + \Theta)}{4K(1 + 2\Theta)} \max p_3^{(1)} \left(-\frac{11}{12} \sin 3\varphi + \varphi \cos 3\varphi \right) + \\
 &\quad + C_5 \sin \varphi + C_6 \cos \varphi + C_7 \sin 3\varphi + C_8 \cos 3\varphi.
 \end{aligned}$$

S. 61

Trägt man diese Werte in die Gleichgewichtsbedingungen Gleichung 23), welche jedenfalls befriedigt werden müssen, ein, so lauten diese

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \Theta)(1 - \Theta)}{4K(1 + 2\Theta)} \max p_3^{(1)} \cos 3\varphi + [C_1(5 + 11\Theta) - \\ & - C_5(1 - \Theta)] \cos \varphi + [C_2(5 + 11\Theta) + C_6(1 - \Theta)] \sin \varphi - \\ & - 3(1 - \Theta)(C_3 + C_7) \cos 3\varphi - 3(1 - \Theta)(C_4 - C_8) \sin 3\varphi = 0 \\ & \frac{(1 + \Theta)(5 + 11\Theta)}{4K(1 + 2\Theta)} \max p_3^{(1)} \sin 3\varphi + [C_1(5 + 11\Theta) - \\ & - C_5(1 - \Theta)] \sin \varphi - [C_2(5 + 11\Theta) + C_6(1 - \Theta)] \cos \varphi + \\ & + 3(5 + 11\Theta)(C_3 + C_7) \sin 3\varphi - 3(5 + 11\Theta)(C_4 - C_8) \cos 3\varphi = 0. \end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungen können aber nur dann für jeden Wert von φ gleichzeitig bestehen, wenn

$$\begin{aligned} C_5 &= C_1 \frac{5 + 11\Theta}{1 - \Theta} & C_7 &= - \left(C_3 + \frac{1 + \Theta}{12K(1 + 2\Theta)} \cdot \max p_3^{(1)} \right) \\ C_6 &= - C_2 \frac{5 + 11\Theta}{1 - \Theta}, & C_8 &= C_4 \end{aligned}$$

ist. Wir haben daher nur mehr die vier Konstanten C_1 bis C_4 noch zu bestimmen. Dies geschieht durch Eintragen der bereits bekannten beziehungsweise festgesetzten Beziehungen in die elastischen Grundgleichungen. Man erhält, wenn Kürze halber $\frac{-3(1 + \Theta) \max p_3^{(1)}}{2K(1 + 2\Theta)} = A$ gesetzt wird

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -4Kr \left[C_1 \frac{1 + 3\Theta}{1 - \Theta} \cos \varphi + C_2 \frac{1 + 3\Theta}{1 - \Theta} \sin \varphi + \right. \\ & \left. + \left(C_3 + \frac{A(11 + 23\Theta)}{72(1 + \Theta)} \right) \cos 3\varphi + C_4 \sin 3\varphi + \frac{A}{6} \varphi \sin 3\varphi \right] \\ \sigma_t &= -4Kr \left[3C_1 \frac{1 + 3\Theta}{1 - \Theta} \cos \varphi + 3C_2 \frac{1 + 3\Theta}{1 - \Theta} \sin \varphi - \right. \\ & \left. - \left(C_3 - \frac{A(1 + 13\Theta)}{72(1 + \Theta)} \right) \cos 3\varphi - C_4 \sin 3\varphi - \frac{A}{6} \varphi \sin 3\varphi \right] \\ \tau &= -4Kr \left[C_1 \frac{1 + 3\Theta}{1 - \Theta} \sin \varphi - C_2 \frac{1 + 3\Theta}{1 - \Theta} \cos \varphi - \right. \\ & \left. - \left(C_3 + \frac{7A}{72} \right) \sin 3\varphi + C_4 \cos 3\varphi + \frac{A}{6} \varphi \cos 3\varphi + \frac{A}{36} \sin 3\varphi \right]. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise können die mit noch willkürlichen Konstanten verbundenen Ausdrücke durch neue willkürliche Konstante ersetzt werden, und zwar

$$-4K \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} C_1 = a' \quad 4K \left(C_3 + \frac{A(11+23\Theta)}{72(1+\Theta)} \right) = c'$$

$$-4K \frac{1+3\Theta}{1-\Theta} C_2 = b' \quad 4K C_4 = d',$$

während $-4K \cdot \frac{A}{6} = \frac{1+\Theta}{1+2\Theta} \max p_3^{(1)}$ ist.

Dann nehmen die Spannungen folgende Form an:

$$\sigma_r = r \left(a' \cos \varphi + b' \sin \varphi - c' \cos 3\varphi - d' \sin 3\varphi + \frac{1+\Theta}{1+2\Theta} \max p_3^{(1)} \varphi \sin 3\varphi \right)$$

$$\sigma_t = r \left(3a' \cos \varphi + 3b' \sin \varphi + c' \cos 3\varphi + d' \sin 3\varphi + \frac{(1+3\Theta) \max p_3^{(1)}}{(1+2\Theta)} \cos 3\varphi - \frac{1+\Theta}{1+2\Theta} \max p_3^{(1)} \varphi \sin 3\varphi \right)$$

$$\tau = r \left(a' \sin \varphi - b' \cos \varphi + c' \sin 3\varphi - d' \cos 3\varphi + \frac{(1+4\Theta) \max p_3^{(1)}}{3(1+2\Theta)} \sin 3\varphi + \frac{1+\Theta}{1+2\Theta} \max p_3^{(1)} \varphi \cos 3\varphi \right).$$

Noch einfachere Formen nehmen die Gleichungen an, wenn man weiter setzt

$$a' \frac{1+2\Theta}{(1+\Theta) \max p_3^{(1)}} = a \quad b' \frac{1+2\Theta}{(1+\Theta) \max p_3^{(1)}} = b$$

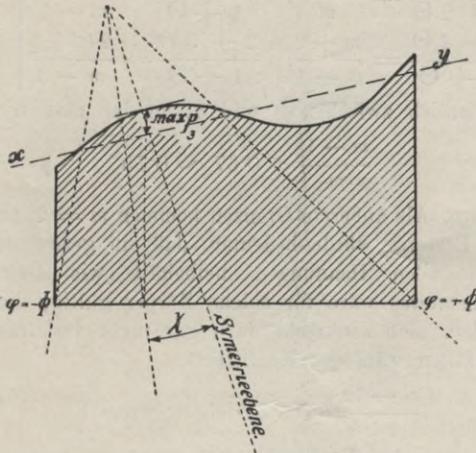
$$c' \frac{1+2\Theta}{(1+\Theta) \max p_3^{(1)}} = c \quad d' \frac{1+2\Theta}{(1+\Theta) \max p_3^{(1)}} = d.$$

Dann ist

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \max p_3^{(1)} r \frac{1+\Theta}{1+2\Theta} (a \cos \varphi + b \sin \varphi - c \cos 3\varphi - \\ &\quad - d \sin 3\varphi + \varphi \sin 3\varphi) \\ \sigma_t &= \max p_3^{(1)} r \frac{1+\Theta}{1+2\Theta} (3a \cos \varphi + 3b \sin \varphi + \\ &\quad + c \cos 3\varphi + d \sin 3\varphi + \frac{1+3\Theta}{1+\Theta} \cos 3\varphi - \varphi \sin 3\varphi) \quad \dots 27). \\ \tau &= \max p_3^{(1)} r \frac{1+\Theta}{1+2\Theta} \left(a \sin \varphi - b \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + c \sin 3\varphi - d \cos 3\varphi + \frac{1+4\Theta}{3(1+\Theta)} \sin 3\varphi + \varphi \cos 3\varphi \right) \end{aligned} \right\}$$

Im allgemeinsten Fall, das heißt wenn χ nicht gleich Null angenommen werden darf, wären aus den Gleichungen 27) die Konstanten a, b, c, d folgendermaßen zu bestimmen.

In Textfigur 21 ist die Druckfläche und das Profil (punktirt) gezeichnet. Die als Nulllinie der Sinuskurve angesehene Gerade ist xy . Der maximale, vertikal gemessene Abstand der Kurve von der Nulllinie liegt nicht über dem Schnittpunkt der Symmetrieebene ($\varphi = 0$) mit der Basis, sondern über dem Schnitt des Strahles $\varphi = -\chi$. Würde man von diesem Punkte aus die Winkel zählen, so bekäme der luftseitige Rand den Wert $\varphi = \Phi + \chi$, der wasser-



Figur 21.

seitige den Wert $\varphi = -\Phi + \chi$. An der Wasser- und Luftseite kann aber die Massenkraft γ_3 keine tangentialen Normalspannungen und keine Schubspannungen hervorbringen. Daher hätte man aus Gleichung 27)

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_t = 0 \text{ für } \varphi = \pm \Phi + \chi \\ \tau = 0 \text{ für } \varphi = \pm \Phi + \chi \end{array} \right\} \dots \dots \dots 28).$$

Diese vier Bedingungen reichen hin, die vier Konstanten a, b, c, d zu ermitteln.

Hier sollen die Konstanten nur für jenen Fall wirklich bestimmt werden, wo $\chi = 0$ gesetzt werden kann. Die Bedingungen lauten wie in Gleichung 28). Man findet

$$b = d = 0$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2 + 5 \Theta}{3(1 + \Theta)} \cos 3 \Phi \sin 3 \Phi - \Phi \\ c &= \frac{\left(\Phi \sin \Phi + \frac{1 + 4 \Theta}{1 + \Theta} \cos \Phi \right) \sin 3 \Phi + \left(3 \Phi \cos \Phi - \frac{1 + 3 \Theta}{1 + \Theta} \sin \Phi \right) \cos 3 \Phi}{\sin \Phi \cos 3 \Phi - 3 \cos \Phi \sin 3 \Phi} \end{aligned} \right\} 29).$$

In der Technik ist die Kirchhoffsche Konstante Θ nicht eingebürgert. Wir ersetzen sie daher durch den gebräuchlichen Koeffizienten der Querkontraktion m , und zwar ist

$$\left. \begin{aligned} \frac{1 + \Theta}{1 + 2 \Theta} &= \frac{m - 1}{m}, & \frac{1 + 3 \Theta}{1 + \Theta} &= \frac{m + 1}{m - 1} \\ \frac{1 + 4 \Theta}{1 + \Theta} &= \frac{m + 2}{m - 1}, & \frac{2 + 5 \Theta}{1 + \Theta} &= \frac{2m + 1}{m - 1} \end{aligned} \right\} \dots 30);$$

m liegt gewöhnlich zwischen 3 und 4, so daß man z. B.

$$\frac{m - 1}{m} = 0.67 \sim 0.75$$

annehmen kann. Als äußerste Grenzen kommen $m = 2$ und $m = \infty$ in Betracht. Ersteres würde bedeuten, daß ein gezogener Stab sein Volumen bei allen Dehnungen beibehält wie Gallerten oder Kautschuk. Letzteres wäre für solche Körper gültig, die, wenn sie gedehnt werden, sich senkrecht dazu gar nicht verkürzen. In den beiden Grenzfällen wäre der Koeffizient

$$\frac{m - 1}{m} = 0.5 \text{ beziehungsweise } 1.$$

Man sieht daraus, daß die Wahl von m nicht von ausschlaggebender Bedeutung sein kann. Denn selbst wenn man $\frac{m - 1}{m} = 1$ annimmt, spielen die von p_3 stammenden Spannungen nur eine untergeordnete Rolle gegenüber jenen, welche durch p_1 und p_2 erzeugt werden, da p_3 kleiner als die anderen ist. Diese Wahl ist auch deshalb zu empfehlen, weil dann die Spannungen auch für den unendlich langen Körper gültig sind.

Mit den Werten $b = d = 0$ und Gleichung 30) können jetzt die gesuchten Spannungen in kürzester Form geschrieben werden.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \max p_3^{(1)} r \frac{m - 1}{m} (a \cos \varphi - c \cos 3 \varphi + \varphi \sin 3 \varphi) \\ \sigma_t &= \max p_3^{(1)} r \frac{m - 1}{m} \left(3a \cos \varphi + c \cos 3 \varphi + \frac{m + 1}{m - 1} \cos 3 \varphi - \varphi \sin 3 \varphi \right) \\ \tau &= \max p_3^{(1)} r \frac{m - 1}{m} \left(a \sin \varphi + c \sin 3 \varphi + \frac{m + 2}{3(m - 1)} \sin 3 \varphi + \varphi \cos 3 \varphi \right) \end{aligned} \right\} 31).$$

Die Gleichung 31) enthält die vollständige hier angestrebte Lösung des Problems und ist wohl einfach genug, um in der Praxis noch Anwendung finden zu können. Gibt man auch in a und c die Elastizitätskonstante m an die Stelle von Θ , so ist

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2m+1}{3(m-1)} \cos 3\Phi \sin 3\Phi - \Phi \\ c &= \frac{\left(\Phi \sin \Phi + \frac{m+2}{m-1} \cos \Phi\right) \sin 3\Phi + \left(3\Phi \cos \Phi - \frac{m+1}{m-1} \sin \Phi\right) \cos 3\Phi}{\sin \Phi \cos 3\Phi - 3 \cos \Phi \sin 3\Phi} \end{aligned} \right\} 32).$$

* * *

Soweit es auf exakter Grundlage möglich erscheint, wurde im vorangehenden die Frage behandelt, welche Spannungen in einer Talsperre durch den „Unterdruck“ beziehungsweise „Innendruck“ (wie er hier genannt wurde) entstehen können. Dabei wurde das Material als ein poröser Körper angesehen; es ist selbstverständlich, daß dann der „äußere“ Wasserdruck von der Wasserseite her auch nicht auf der ganzen Fläche wirksam sein kann. Man könnte daher von dem äußeren Wasserdruck, wenn der innere in der hier gezeigten Weise berücksichtigt würde, einen der Flächenporosität an der Wasserseite entsprechenden Betrag in Abzug bringen. Tut man es nicht, so erhöht man die Sicherheit.

Es drängt sich aber auch die Überlegung auf, was geschehen soll, um auch eine Sicherheit für den Bestand der Talsperren dann noch zu haben, wenn wirklich, sei es durch Bodensenkungen, Unterwaschungen oder sonst wie, größere horizontale Sprünge im Mauerwerke auftreten, wie es in der alten „Unterdrucktheorie“ immer angenommen wurde. Von welchen Vorstellungen soll man ausgehen, um einen überzeugenden und praktisch nutzbaren Standpunkt in dieser Frage gewinnen zu können, der gestattet, die erreichte Sicherheit ziffernmäßig abzuschätzen?

Als solcher bietet sich vor allem ein gegenüber der Wirklichkeit erhöhter Porositätsgrad ν' des Mörtels dar. $\nu' = 1$ würde heißen, daß überhaupt kein Mörtel, sondern nur Wasser in den Fugen ist. Will man zum Ausdrucke bringen, daß Zugrisse nur an der Wasserseite vorkommen können, so erhöhe man ν' nur dort, oder, was zum gleichen Ziele führt, man rücke die Niveaulinien in Textfigur 12 an der Wasserseite nach Gutdünken näher aneinander. Wird eine bestehende Talsperre, wie es bei den Assuan-Werken der Fall gewesen ist, erhöht und verbreitert, so bildet die Trennungslinie von altem und neuem Mauerwerk gleichfalls eine Stelle erhöhter Wirksamkeit des Auftriebes und der Kapillarreibung. Bei einem

solchen Bauwerk sind daher außer der Berücksichtigung der verminderten Festigkeit auch noch die resultierenden Niveaulinien in Textfigur 12 an der Trennungslinie einander zu nähern. Die damit verbundenen Unstetigkeitspunkte der ideellen Druckfläche (Textfigur 14) wären sinngemäß auszugleichen.

Gegen Sprünge, welche die ganze Mauer durchsetzen, hätte man nach den ältesten Theorien über die Standfestigkeit von Stau-
mauern einen Reibungskoeffizienten festzusetzen, wobei ein Unterschied zu machen wäre zwischen Talsperren mit geradem und bogenförmigem Grundriß, da bei letzteren die Verhältnisse weit günstiger liegen.

Als wirksamster Schutz gegen die katastrophalen Folgen eines Einsturzes erscheint aber dem Verfasser eine durch viele, über das ganze Profil verteilte Wasserdruckmessungen ermöglichte ständige Überwachung des Innendruckes. Man kann nämlich die Hoffnung hegen, daß größere Schäden auf die Gestalt der Niveauflächen einen solchen Einfluß üben werden, daß man in die Lage kommt, sie rechtzeitig zu entdecken, ja vielleicht sogar die Stelle auffinden zu können, wo sie entstanden sind. Dann würden Talsperren geradezu als die sichersten aller menschlichen Bauwerke gelten können und es wäre Lieckfeldts stolzes Wort der Erfüllung nahe, Talsperren für die Ewigkeit erbaut zu haben!

* * *

Es gereicht mir zum Vergnügen, Herrn Dozenten Dr. Alfons Leon meinen Dank für viele wertvolle Anregungen und Hinweise an dieser Stelle abstatten zu können.



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II 31161
L. inw.

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10.000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300008