

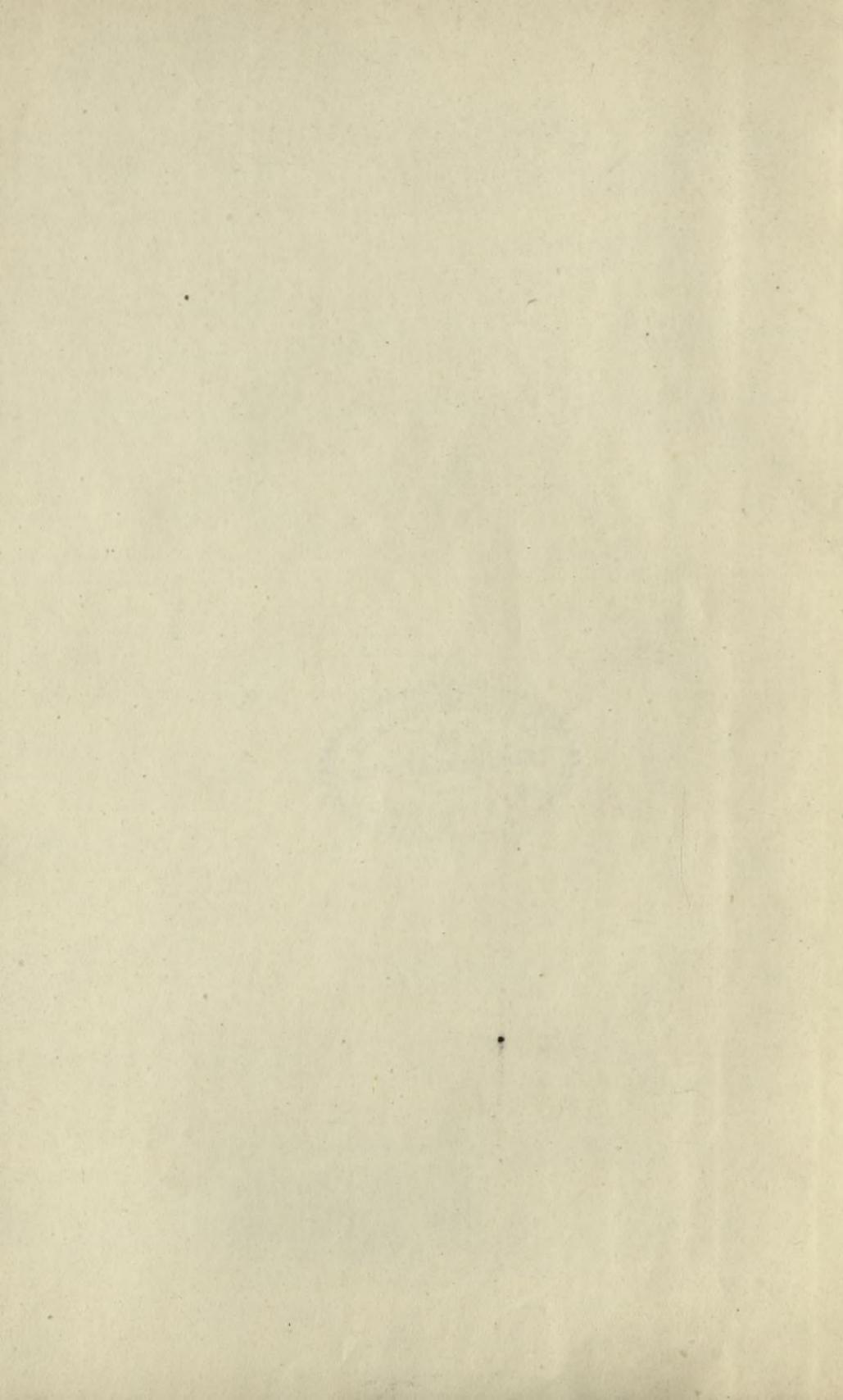
Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000300058



X
1782



ÜBER DEN EINFLUSS DER VERNACHLÄSSIGUNG DER
ACHSIALKRAFT BEI BERECHNUNG VON BOGENBRÜCKEN
MIT EINGESPANNTEN KÄMPFERN.

NEBST EINEM ANHANGE.

VON

672
DR. TECHN. FRIEDRICH OTTO BINDER
K. K. INGENIEUR IM EISENBahnMINISTERIUM.

MIT 3 TEXTABBILDUNGEN, 6 TABELLEN UND 3 TAFELN.



WIEN 1910

Druckerei- u. Verlags-Aktiengesellschaft,
vorm. R. v. WALDHEIM, JOS. EBERLE & Co., Wien.

7.58
AKC. R. v. WALDHEIM

SONDERABDRUCK AUS DER „ALLGEMEINEN BAUZEITUNG“,
HEFT 1, JAHRGANG 1910.

ALLE RECHTE VORBEHALTEN.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

II 31068

Akc. Nr. 364/49

Inhaltsübersicht.

	Seite
Einleitung	I
Ergebnisse vergleichender Berechnungen	7
Beispiel 1 und 2	9
„ 3	13
„ 4 und 5	14
„ 6	18
„ 7	21
„ 8	28
„ 9	30
„ 10 und 11	33
„ 12	34
Zusammenfassung der Grundgesetze für den Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft	35
Zulässigkeit der Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft	38
Vereinfachungen der Rechnung und Sätze, welche sich bei Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft ergeben	39

Anhang.

Andere Näherungsverfahren zur Berechnung von Bogenbrücken mit einge- spannten Kämpfern	41
<i>a</i>) Näherungsverfahren mit Annahme einer parabolischen Bogenachse	41
<i>b</i>) Näherungsverfahren zur raschen Orientierung über die in einem Bogen auftretenden statischen Verhältnisse	46
Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft bei Berechnung anderer Kon- struktionssysteme	50
<i>a</i>) Zweigelenkbogen	50
<i>b</i>) Bogen mit Zugstange	51
<i>c</i>) Polonceaudachstühle	52

Die ursprünglich nur für eiserne, jetzt auch für steinerne Brücken angewandte Elastizitätstheorie lehrt, Bogenbrücken mit eingespannten Kämpfern als dreifach statisch unbestimmte Systeme zu berechnen.

Zu jenen Sätzen der Elastizitätstheorie, welche die Bestimmung der statisch unbestimmten Größen ermöglichen, gelangt man durch die Betrachtung der elastischen Formänderungen, beziehungsweise der elastischen Formänderungsarbeit eines Systems. Derartige Betrachtungen können wohl von verschiedenen Grundlagen ausgehen und je nach dem Grade der Genauigkeit der theoretischen Annahmen zu verschiedenen Ergebnissen führen, doch wird die rechnungsmäßige Durchführung von Beispielen stets eine für die Zwecke der Praxis hinreichende Übereinstimmung der Resultate zeigen, wofern nicht bei der Entwicklung und Ausführung der Grundformeln Glieder vernachlässigt werden, welche einen bestimmenden Einfluß auf die Endresultate der Rechnung üben.

In der vorliegenden Arbeit soll nun versucht werden, den Einfluß derjenigen Glieder zu beurteilen, welche den Anteil der Achsialkräfte an der Formänderung zum Ausdruck bringen, und Einblick zu gewinnen, ob und in welchen Fällen eine Vernachlässigung dieser Glieder statthaft erscheinen kann.

Die Achsial-(Normal-)kräfte eines Bogens bewirken kleine Formänderungen und zwar Annäherungen benachbarter Querschnitte, welche zwar im Verhältnis zur Verdrehungswirkung der Momente nur unbedeutend sind, gleichwohl aber nicht von vornherein übersehen werden sollten.

Vorerst seien nun die Grundformeln zusammengestellt, welche von den in der vorliegenden Arbeit wiederholt zitierten und teilweise als Quellen benützten Autoren entwickelt und angewendet wurden.

Professor E. Winkler stellt für kleine Formänderungen die Ausdrücke auf:

$$\Delta x = -y \int_0^x \mathfrak{M} ds + \int_0^x y \mathfrak{M} ds + \int_0^x \mathfrak{P} dx$$

$$\Delta y = x \int_0^x \mathfrak{M} ds - \int_0^x x \mathfrak{M} ds + \int_0^x \mathfrak{P} dy$$

$$\Delta \varphi = \int_0^x \mathfrak{M} ds$$

$$\text{wobei } \mathfrak{P} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{N_x}{EF} + \frac{M_x}{EFr}$$

$$\text{und } \mathfrak{M} = \frac{\Delta d\varphi}{ds} = \frac{M_x}{E\mathcal{J}} + \frac{M_x}{EFr^2} + \frac{N_x}{EFr}$$

Hierin ist M_x das Angriffsmoment, N_x die Achsialkraft im Querschnitte x , \mathcal{J} das Trägheitsmoment, F die Fläche des Querschnitts, E der Elastizitätsmodul, r der Radius der Bogenachse.

Mit dieser Entwicklung vollständig übereinstimmend sind die von Professor Dr. J. von Weyrauch in dem Werke: »Die elastischen Bogenträger, ihre Theorie und Berechnung« entwickelten Gleichungen:

$$\Delta x = -y \Delta \varphi + \int_0^x \frac{M_x}{E\mathcal{J}} y ds - \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dx + y d\varphi}{EF} + \alpha \tau x$$

$$\Delta y = x \Delta \varphi - \int_0^x \frac{M_x}{E\mathcal{J}} x ds - \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dy - x d\varphi}{EF} + \alpha \tau y$$

$$\Delta \varphi = \Delta \varphi_0 + \int_0^x \frac{M_x}{E\mathcal{J}} ds + \int_0^x \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{ds}{EFr},$$

nur mit dem Unterschiede, daß die Druckspannungen hier positiv eingeführt und daher einige Vorzeichen geändert werden; auch erscheint vorstehend der Einfluß von Temperaturänderungen berücksichtigt.

Durch Anwendung der Gleichungen auf den rechten, unverrückbar und unverdrehbar gedachten Kämpfer und für $\tau = 0$ erhält man die Gleichungen:

$$\Delta l = 0 = \int_0^l \frac{M_x}{E\mathcal{J}} y ds - \int_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dx + y d\varphi}{EF}$$

$$\Delta k = 0 = - \int_0^l \frac{M_x}{E\mathcal{J}} x ds - \int_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{dy - x d\varphi}{EF}$$

$$\Delta\varphi'_0 = 0 = \int_0^l \frac{M_x}{E\mathcal{F}} ds + \int_0^l \left(N_x + \frac{M_x}{r} \right) \frac{ds}{EFr}$$

Castigliano kommt in seinem Werke: »Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme« auf einem anderen Wege, durch Betrachtung der Formänderungsarbeit, zu einer ähnlichen Lösung des Problems. Er findet für die Formänderungsarbeit den Ausdruck:

$$L = \frac{1}{2} \int \frac{M_x^2}{E\mathcal{F}} ds + \frac{1}{2} \int \frac{N_x^2}{EF} ds + \frac{1}{2} \int \frac{\mathcal{A}S_x^2}{GF} ds.$$

Hierin ist außer den früher gewählten Bezeichnungen \mathcal{A} eine von der Querschnittsform abhängige Konstante (für rechteckigen Querschnitt $= \frac{6}{5}$), S_x die Schubkraft im Querschnitte x und G der Schubelastizitätsmodul.

Die Bestimmung der statisch unbestimmten Größen erfolgt nun durch die Anwendung des Lehrsatzes vom Differentialquotienten der Formänderungsarbeit, welcher lautet:

»Wenn man die Deformationsarbeit eines elastischen Körpers oder Systems in einer Funktion der äußeren Kräfte und der Kräftepaare ausdrückt, so gibt der Differentialquotient dieses Ausdruckes in bezug auf eine dieser Kräfte die relative Verückung ihres Angriffspunktes und der Differentialquotient in bezug auf ein Kräftepaar die relative Drehung der Verbindungslinie der Angriffspunkte beider Kräfte.«

Demzufolge erhält man durch Differenzieren des obigen Ausdruckes der Formänderungsarbeit nach dem Horizontal-schube H , der vertikalen rechtsseitigen Auflagerreaktion A' und dem rechts- und linksseitigen Kämpfermoment M'_0 , beziehungsweise M_0 bei Voraussetzung unverrückbarer Widerlager die drei Bestimmungsgleichungen:

$$\frac{dL}{dH} = \Delta l = 0 = - \int_0^l \frac{M_x}{E\mathcal{F}} y ds + \int_0^l \frac{N_x \cos \varphi}{EF} ds - \int_0^l \frac{\mathcal{A}S_x \sin \varphi}{GF} ds$$

$$\frac{dL}{dA} = \Delta k = 0 = - \int_0^l \frac{M_x}{E\mathcal{F}} x ds - \int_0^l \frac{N_x \sin \varphi}{EF} ds - \int_0^l \frac{\mathcal{A}S_x \cos \varphi}{GF} ds$$

$$\frac{dL}{dM'_0} + \frac{dL}{dM_0} = \Delta\varphi'_0 + \Delta\varphi_0 = 0 = \int_0^l \frac{M_x}{E\mathcal{F}} ds.$$

Da nun $ds \cos \varphi = dx$ und $ds \sin \varphi = dy$, so unterscheiden sich diese Gleichungen von den vorher entwickelten Weyrauch's nur in unbedeutenden Nebengliedern und zwar einerseits durch Vernachlässigung aller Glieder mit dem Bogenradius r im Nenner¹⁾, deren geringfügiger Einfluß im folgenden noch nachgewiesen werden wird, andererseits durch die Berücksichtigung des bei Weyrauch vernachlässigten Anteiles der Schubkräfte an der Formänderung in den Gliedern $\int_0^l \frac{2S_x \sin \varphi}{GF} ds$ und $\int_0^l \frac{2S_x \cos \varphi}{GF} ds$. Auch der Einfluß dieser Glieder ist ein geringfügiger und kann daher ohne Bedenken vernachlässigt werden, zumal die Schubkräfte nicht nur im Verhältnis zu den Normalkräften sehr klein, sondern außerdem noch wechselnd positiv und negativ sind. Castigliano selbst hat in seinem oben zitierten Werke (I. Teil, 10. Kapitel) den Nachweis erbracht, daß der Einfluß der Schubkräfte praktisch stets vernachlässigt werden kann und nur dann eventuell nachträglich berücksichtigt werden könnte, wenn sich die Drucklinie sehr stark gegen die Achse geneigt ergibt (beim Vollbogen).

M. Gros de Perrodil entwickelt in dem Werke: »Resistance des voutes et arcs metalliques« folgende Grundformeln für die Formänderungen:

$$\begin{aligned} d\Delta x &= \left(\frac{N_x}{EF} + \tau \right) dx - \left(\frac{S_x}{GF} + \Delta\varphi \right) dy \\ d\Delta y &= \left(\frac{N_x}{EF} + \tau \right) dy + \left(\frac{S_x}{GF} + \Delta\varphi \right) dx \\ d\Delta\varphi &= \frac{M_x ds}{E \mathcal{I}} \end{aligned}$$

Für $\tau = 0$ und mit Einsetzung des Wertes $\Delta\varphi$ der dritten Gleichung in die beiden ersten ergeben sich durch Integration die folgenden Werte für die horizontale und vertikale Ver-

¹⁾ Auch die Glieder $\int_0^l N_x \frac{y d\varphi}{EF}$ und $\int_0^l N_x \frac{x d\varphi}{EF}$ enthalten, da $d\varphi = \frac{ds}{r}$, den Bogenradius im Nenner.

schiebung, sowie für die Verdrehung eines beliebigen Querschnittes x :

$$\Delta x = \int_0^x \frac{N_x}{EF} dx - \int_0^x \frac{S_x}{GF} dy - \int_0^x \frac{M_x ds}{E\mathcal{F}} dy$$

$$\Delta y = \int_0^x \frac{N_x}{EF} dy + \int_0^x \frac{S_x}{GF} dx + \int_0^x \frac{M_x ds}{E\mathcal{F}} dx$$

$$\Delta \varphi = \int_0^x \frac{M_x ds}{E\mathcal{F}}$$

Da nun $dx = ds \cos \varphi$, $\int dy = y$, $dy = ds \sin \varphi$ und $\int dx = x$, so sind die vorstehenden Gleichungen, wofern sie auf den unnachgiebig und unverdrehbar gedachten rechtsseitigen Kämpfer bezogen werden, mit jenen, welche Castigliano unter Anwendung des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit erhält, bis auf einen kleinen Unterschied in dem ohnedies unbedeutenden Schubkraftgliede vollkommen übereinstimmend.

Die Vernachlässigung des Einflusses der Schubkräfte erscheint nun sowohl durch das Vorgehen Winklers und Weyrauchs, wie auch durch den Nachweis Castiglianos gerechtfertigt; weniger entsprechend ist dagegen die in der Praxis häufig geübte Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkräfte bei Berechnung von Bogenbrücken nach der Elastizitätstheorie.

Um zunächst von der Größe der Einwirkung der Achsialkräfte auf die Formänderungen und von dem Verhältnisse ihres Einflusses gegenüber den größeren Einflüssen der Biegemomente einerseits und den viel geringeren der Schubkräfte andererseits eine Vorstellung zu erhalten, empfiehlt es sich, einige Spezialformeln zu betrachten, welche Castigliano bei dem vorerwähnten Nachweis des geringen Einflusses der Schubkräfte auf die Deformation verwendet.

In der für einen halbkreisförmigen, total und gleichförmig belasteten Zweigelenksbogen gültigen Horizontalschubformel:

$$H = \frac{4pr}{3\pi} \cdot \frac{\frac{r^2}{E\mathcal{F}} - \frac{1}{EF} + \frac{\mathfrak{A}}{GF}}{\frac{r^2}{E\mathcal{F}} + \frac{1}{EF} + \frac{\mathfrak{A}}{GF}}$$

stellen die Glieder $\frac{r^2}{E\mathcal{F}}$ den Einfluß der Biegemomente, die Glieder $\frac{1}{EF}$ jenen der Achsialkräfte und $\frac{\mathfrak{A}}{GF}$ der Schubkräfte dar, und es ist leicht zu erkennen, daß das erste Glied weitaus über die beiden anderen überwiegt und das zweite infolge des verschiedenen Vorzeichens im Zähler und Nenner mehr Einfluß üben wird als das letzte Glied.

Ebenso ermöglicht die Formel für den Horizontalschub eines vollbelasteten Halbkreisgewölbes ohne Gelenke:

$$H = \frac{4pr}{3\pi} \cdot \frac{\frac{r^3}{4E\mathcal{F}} - \frac{93}{40} \cdot \frac{1}{EF} - \frac{13}{40} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{GF}}{\frac{10r^2}{53E\mathcal{F}}}$$

einen Vergleich des Einflusses der Biegemomente $\left(\frac{r^2}{4E\mathcal{F}}\right)$, der Normalkräfte $\left(\frac{93}{40} \cdot \frac{1}{EF}\right)$ und Schubkräfte $\left(\frac{13}{40} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{GF}\right)$. Es ist z. B. für einen rechteckigen Querschnitt mit $\mathfrak{A} = \frac{6}{5}$, $G = \frac{2}{5}E$ das Glied $\frac{13}{40} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{GF} = \frac{39}{40} \cdot \frac{1}{EF}$, also nur $\frac{2}{5}$ des Gliedes der Achsialkräfte, welches wiederum sehr klein ist gegenüber $\frac{r^2}{4E\mathcal{F}}$, dem Einflusse der Biegemomente. Hierbei ist noch zu beachten, daß der Halbkreisbogen jenen Grenzfall darstellt, in welchem der Einfluß der Schubkräfte relativ sehr bedeutend, dagegen jener der Achsialkräfte ein Minimum ist.

Für Bogen mit eingespannten Kämpfern, deren Pfeilhöhe im Verhältnis zur Bogensehne sehr klein ist, gilt die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{4f^2}{45E\mathcal{F}} + \frac{1}{EF} + \frac{4f^2}{3l^2} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{GF}\right) \left(H - \frac{pl^2}{2f}\right) + \frac{1}{EF} \left(\frac{pl^2}{2f} + \frac{2}{3}pf\right) = 0$$

Hierin entspricht das Glied $\frac{4f^2}{45E\mathcal{F}}$ dem Einflusse der Biegemomente, $\frac{1}{EF}$ den Achsialkräften und $\frac{4f^2}{3l^2} \cdot \frac{\mathfrak{A}}{GF}$ den Schubkräften.

Da der Bruch $\frac{f^2}{l^2}$ sehr klein ist, kann das Schubkraftglied gegen-

über den anderen Gliedern ohneweiters vernachlässigt werden, dagegen wird der Einfluß des Achsialkraftgliedes neben jenem der Biegemomente umso wirksamer hervortreten, je kleiner die Pfeilhöhe f ist.

Ein so klares Bild geben aber analytische Ausdrücke nur in so speziellen Fällen wie den vorliegenden, und es ist im allgemeinen nicht möglich, die Untersuchung des Einflusses der Achsialkräfte auf rein analytischem Wege erfolgreich durchzuführen. Wohl kann man aus einzelnen Formeln allgemeine Schlüsse ziehen, aber ein richtiges Bild ist nur durch die Betrachtung der Ergebnisse durchgerechneter Beispiele erhältlich.

Es erschien mir daher zweckmäßig, dem Gegenstande durch eingehendere und für eine größere Anzahl praktischer Fälle durchgeführte, vergleichende Berechnungen näherzutreten.

Untersuchungen dieser Art haben vor allem schon Professor von Weyrauch, weiters de Perrodil und Castigliano angestellt, und es werden im folgenden auch die Ergebnisse dieser Untersuchungen zur Betrachtung herangezogen werden.

Ergebnisse vergleichender Berechnungen.

Die Tabelle I, Seite 40, enthält die vergleichende Gegenüberstellung der Rechnungsergebnisse für zwölf unter verschiedenen Belastungsannahmen durchgerechnete Beispiele. Dieselben sind nach dem Pfeilverhältnis der Bogen, welches für den Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkräfte besonders maßgebend ist, geordnet. Die Tabelle gibt nebst den wichtigsten Bogen-dimensionen die Werte der vertikalen und horizontalen Kämpferdruckkomponenten, der Kämpfer- und Scheitelmomente, Kämpfernormalkräfte und Scheitelschubkräfte, der Stützlinienabstände und Beanspruchungen im Kämpfer und Scheitel einerseits für die genaue Rechnung, andererseits für die Näherungsrechnung mit Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkräfte, schließlich die Differenz beider Werte.

Die Angabe dieser Differenz erfolgte bei jenen Größen, welche unter den gewählten Belastungsannahmen nur positive Werte erhalten können, wie bei den Kämpferdruckkomponenten und Achsialkräften, prozentuell und zwar in Prozenten des

genaueren Rechnungswertes, wodurch eine einheitliche Vergleichung der Beispiele untereinander ermöglicht wird. Für jene Werte jedoch, welche sowohl positiv als negativ sein können, das ist für die Angriffsmomente, Stützlinienabstände und Beanspruchungen, würde die Angabe der prozentuellen Differenz kein zuverlässiges Kriterium für die Beurteilung des Grades der Genauigkeit bilden; denn wenn der genaue Wert zufällig Null oder sehr nahe an Null ist, was gerade bei den Momenten und Stützlinienabständen sehr wahrscheinlich, weil anstrebenswert sein wird, so muß die prozentuelle Differenz für jeden beliebigen Wert der Näherungsrechnung unendlich groß werden. Trotzdem kann diese Differenz, praktisch genommen, unbedeutend sein. Es wurden daher in der Tabelle bei den Angriffsmomenten, Stützlinienabständen und Beanspruchungen die absoluten Differenzbeträge ersichtlich gemacht, welche eine richtigere, wenn auch nicht ganz einwandfreie Beurteilung der Unterschiede beider Rechnungsarten ermöglichen.

Für die Fälle unsymmetrischer Belastung wurden die Werte der Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke, sowie der Momente, Normalkräfte und Stützlinienabstände in den Kämpfern in der gleichen Kolonne untereinander und zwar für die linke, belastete Seite in die obere, für die rechte, unbelastete Seite in die untere Zeile eingesetzt.

Bei Ausweisung der Beanspruchungen entsprechen die Werte in den oberen Zeilen den Beanspruchungen an der Bogenaußenleibung, jene der unteren Zeile der Bogeninnenleibung.

Eine zeichnerische Darstellung der untersuchten Bogenkonstruktionen ist auf Taf. Nr. 1, 2 und 3 enthalten, worin die Stützlinien der genauen und Näherungsrechnung in schwarzer, beziehungsweise roter Farbe ersichtlich gemacht wurden¹⁾. Die Schnittpunkte beider Stützlinien, deren Ordinaten auf eine ein-

¹⁾ Die Stützlinien wurden für die Belastung durch Eigengewicht und halbseitige zufällige Last bei allen jenen Beispielen eingezeichnet, bei welchen die Berechnung für diesen Belastungsfall in Tabelle I ausgewiesen erscheint (das ist bei Beispiel 5, 7, 8, 9, 11, 12); in allen übrigen Fällen erfolgte die Darstellung für Eigengewicht und totale zufällige Last.

fache, im folgenden zu erörternde Weise annähernd berechnet werden können, sind besonders bezeichnet und kотиert. Für Beispiel 3, 6 und 9 wurden außerdem die Stützlınien für die Berechnung unter Annahme einer parabolischen Bogenachse in blauer Farbe eingezeichnet und bei den zwei letztgenannten Beispielen auch die Einflußlinien des Horizontalschubes und der Kämpfermomente zur Darstellung gebracht.

Es soll nun eine kurze Erörterung der einzelnen Beispiele folgen, wobei die Tabelle I, Seite 40, wie auch die Zeichnungen auf Taf. Nr. 1, 2 und 3 zur Betrachtung herangezogen werden mögen. Die Bezeichnung der Beispiele erfolgt nach den Postnummern der Tabelle I, welche mit den Figurenummern der Tafeln übereinstimmen.

Beispiel 1 und 2.

Die Beispiele 1 und 2 sind ebenso wie das dritte Beispiel teilweise dem bereits zitierten Werke de Perrodils entnommen und betreffen zwei sehr flache Gewölbe von gleicher Spannweite und Pfeilhöhe, jedoch verschiedener Querschnittsdimensionierung.

Es soll zunächst auf die Ergebnisse der von Perrodil geführten Untersuchungen eingegangen werden. Von den bereits eingangs aufgestellten drei Grundformeln der sehr klein gedachten Formänderungen ausgehend, gelangt der Autor durch längere Ableitungen zu Ausdrücken für den Horizontalschub und die Momente. Schon zu Beginn der Ableitung erwähnt er, daß eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung dadurch stattfinden kann, daß die Glieder $\frac{N_x}{EF}$ und $\frac{S_x}{GF}$, das ist der Einfluß der Normal- und Schubkräfte vernachlässigt werden. Er beschränkt sich jedoch darauf, den Einfluß dieser Vernachlässigung auf den Horizontalschub allein zu untersuchen und nennt den Näherungswert H_1 der vereinfachten Rechnung »la partie principale de la poussée«, den »hauptsächlichen« oder Näherungswert für den Horizontalschub, während der genaue Wert H als »valeur complète« bezeichnet wird. Der Unterschied zwischen beiden Werten ist namentlich bei Spezialfällen in eine leicht übersichtliche analytische Form zu bringen, während bei den allgemeinen Formeln die Betrachtung durch eine Unzahl abgeleiteter Hilfswerte erschwert wird.

Es ist für sehr flache Bogen, für welche die Normalkraft N_x konstant gleich dem Horizontalschube H und die Schubkraft S_x gleich Null gesetzt werden kann:

$$H = \frac{H_1}{1 + \frac{m}{z_2 - \frac{z_1^2}{z_0}}}$$

$$\text{wobei } m = \int_{-a}^a \frac{dx}{f}, z_0 = \int_{-a}^a \frac{ds}{f}, z_1 = \int_{-a}^a \frac{y ds}{f}, z_2 = \int_{-a}^a \frac{y^2 ds}{f}.$$

Noch deutlicher wird die Formel für parabolische Bogen mit konstantem Querschnitte, in welchem Falle:

$$H = \frac{H_1}{1 + \frac{45 \rho^2}{4f^2}},$$

(ρ = Trägheitsradius, f = Bogenpfeil), woraus unmittelbar folgendes entnommen werden kann:

Die Differenz beider Werte H und H_1 wird umso kleiner sein, je kleiner $\frac{\rho^2}{f^2}$, das ist je schlanker der Bogen dimensioniert und je größer das Pfeilverhältnis ist. Stark dimensionierte und sehr flache Bogen werden daher besonders empfindlich gegen die Vernachlässigung der Achsialkräfte sein. Auch werden Bogen mit relativ großem Trägheitsradius (z. B. eiserne Träger mit Doppel-T-Profil) empfindlicher sein als gemauerte Gewölbe, bei welchen der Trägheitsradius konstant $\frac{h}{2\sqrt{3}}$ beträgt.

Diese Grundsätze gelten freilich in erster Linie nur für den oben betrachteten Horizontalschub, weiters aber auch, wie durch die praktischen Beispiele nachweisbar, für die Normalkräfte, Kämpfermomente, Stützlinienabstände im Kämpfer und Kämpferbeanspruchungen; beim Scheitelmoment und den hievon abhängigen Größen dagegen macht sich der Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkräfte oft in gegenteiligem Sinne bemerkbar, doch ist eine eingehendere diesbezügliche Betrachtung umso mehr entbehrlich, als die Spannungsverhältnisse im Scheitel für die praktische Ausführung des Gewölbes meist nicht von Belang sind.

Ein weiteres, aus obiger Formel nicht zu ersehendes Kriterium für die Beurteilung des Einflusses der Vernachlässigung der Achsialkraft erhält man durch die einfache Überlegung, daß in Fällen, in welchen sich die Achsialkräfte von Querschnitt zu Querschnitt rasch ändern, der Einfluß ihrer Vernachlässigung sich stärker fühlbar machen wird als in jenen Fällen, bei welchen die Normalkräfte vom Scheitel zum Kämpfer stetig und langsam zunehmen. Ersteres wird bei Bogen variablen Querschnittes, letzteres bei solchen konstanten Querschnittes zutreffen.

Wie erwähnt, beschränkt sich Perrodil auf die Betrachtung der Werte H und H_1 , ohne hieran weitere Konklusionen zu knüpfen; es wird der Einfluß der Vernachlässigung auf die Momente gar nicht in Erwägung gezogen, möglicherweise deshalb, weil er dem Autor als zu groß überhaupt nicht mehr zulässig erschien. Es mußten daher sämtliche Näherungswerte (mit Ausnahme des Horizontalschubes) erst besonders ermittelt werden. Übrigens hat sich namentlich beim zweiten Beispiele auch die Notwendigkeit ergeben, die etwas flüchtig und für den vorliegenden Zweck zu ungenau berechneten Werte Perrodils zu kontrollieren und teilweise richtigzustellen.

Daß bei der genauen Berechnung nach den Perrodilschen Formeln auch der Einfluß der Schubkräfte berücksichtigt wird, was sonst bei keinem der folgenden Beispiele geschieht, ist kein Grund zu der Befürchtung, daß die Vergleichung der Resultate nicht auf gleicher Grundlage erfolge; denn der Einfluß der Schubkräfte auf die Formänderungen ist, wie bereits erwähnt, fast verschwindend klein und nur bei ungewöhnlich stark dimensionierten Gewölben und bei Vollbogen von einiger Bedeutung.

Nach diesen allgemeinen Bemerkungen auf die detaillierte Erörterung der gegenständlichen Beispiele übergehend, ergibt sich zunächst bei Vergleichung der Differenzwerte in Tabelle I die Bestätigung der vorhin gemachten Erwägung, daß der Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft für Bogen konstanten Querschnittes weniger fühlbar ist als für solche variablen Querschnittes. Die beiden Gewölbe 1 und 2 haben gleiche Spannweite und Pfeilhöhe; während jedoch bei ersterem die Gewölbstärke vom Scheitel gegen den Kämpfer rasch zunimmt (von 2 auf 4 *m*), ist sie bei letzterem konstant 2'67 *m*. Dementsprechend sind nun die Differenzen beider Rechnungsarten im zweiten Falle bedeutend kleiner als im ersteren, mit Ausnahme des Scheitelmomentes und des Stützlinienabstandes im Scheitel, deren gegenteiliges Verhalten bereits bemerkt wurde¹⁾.

Dagegen ist bei Vergleichung mit den folgenden Beispielen das Gesetz, daß flache Bogen empfindlicher sind als solche von größerem Pfeilverhältnis, deshalb nicht gut erkennbar, weil die Beispiele 1 und 2 ungewöhnlich schlank dimensionierte Gewölbe sind, wie sie praktisch gar nicht ausgeführt werden könnten (vergl. die hohen Beanspruchungen), und weil der Einfluß der besonders schlanken Dimensionierung über die Wirkung des geringen Pfeilverhältnisses überwiegt. Es darf nicht übersehen werden, daß bei normaler Dimensionierung der betrachteten, weitgespannten Gewölbe sich ganz bedeutend höhere Differenzen ergeben würden.

Außer dem Kämpfer- und Scheitelquerschnitte wurden auch noch fünf mittlere Querschnitte zwischen beiden betrachtet, welche (mit Ausnahme des dem Kämpfer zunächst liegenden Querschnittes) in gleichen Abständen von je 3° Zentriwinkel gewählt wurden. Die bezüglichlichen Werte der Momente, Normalkräfte, Stützlinienabstände und Beanspruchungen sind aus der Tabelle II, Seite 40/41, zu entnehmen. Es ergibt sich hieraus, daß die Differenzen der Achsialkräfte vom Kämpfer zum Scheitel hin allmählich zunehmen, daß jedoch diese Differenzen gegen-

¹⁾ Auch bei den Kämpferbeanspruchungen sind die Differenzen im Falle konstanten Querschnittes etwas größer als bei variablem Querschnitte, was jedoch lediglich darauf zurückzuführen ist, daß infolge der starken Reduktion des Kämpferquerschnittes (von 4 auf 2'67 *m*) derselbe fast auf das doppelte ausgenützt erscheint.

über den weit bedeutenderen der Angriffsmomente, welche sich namentlich am Kämpfer empfindlich bemerkbar machen, nicht in Betracht kommen.

Die Lage der Stützlinie, auf Taf. Nr. 1, Fig. 1 und 2 ersichtlich, ändert sich bei Durchführung der Näherungsrechnung in den vorliegenden, wie auch in allen folgenden Fällen in gleichem Sinne; sie liegt am Kämpfer oberhalb, am Scheitel unterhalb der Stützlinie der genauen Rechnung. In diesen beiden Querschnitten treten die Grenzwerte der Differenzen auf, während die übrigen Querschnitte, besonders jene im Abstände von etwa ein Viertel der Spannweite (im vorliegenden Falle in Zentriwinkeln von etwa 75° , beziehungsweise 105°), woselbst die beiden Stützlinsen zum Schnitte kommen, nur geringe, beziehungsweise gar keine Unterschiede aufweisen.

Die Schwerpunktsordinate jenes Querschnittes, in welchem der Schnittpunkt der beiden Stützlinsen liegt, kann auf Grund folgender Überlegung aus den Werten der Kämpfermomente und Horizontal-schübe beider Rechnungsarten annähernd ermittelt werden.

Zu suchen wäre der Querschnitt, in welchem der Stützlinsenabstand der genauen Rechnung $c_x = \frac{M_x}{N_x}$ gleich ist dem Stützlinsenabstände der

Näherungsrechnung $c_{x_1} = \frac{M_{x_1}}{N_{x_1}}$ ¹⁾. Da nun, wie aus den Tabellen zu ersehen, die Differenzen der Normalkräfte N_x in allen Fällen (ausgenommen Beispiel 6) nur geringfügig sind, kann näherungsweise $N_x \doteq N_{x_1}$ gesetzt werden, wodurch sich die Aufgabe auf die Ermittlung jenes Querschnittes beschränkt, für welchen $M_x = M_{x_1}$ ist. Nun ist aber:

$$M_x = M_o + Ax - Hy - \sum_o^x P(x - a)$$

$$M_{x_1} = M_{o_1} + A_1x - H_1y - \sum_o^x P(x - a)$$

Somit ist, da $M_x = M_{x_1}$, auch $M_o + Ax - Hy = M_{o_1} + A_1x - H_1y$.

Die vertikale Auflagerreaktion A differiert im Falle symmetrischer Belastung gar nicht, im Falle unsymmetrischer Belastung nur wenig von dem Näherungswert A_1 ; es kann also $A = A_1$ gesetzt werden, womit die Ordinate des gesuchten Querschnittes aus der Relation:

$$y = \frac{M_o - M_{o_1}}{H - H_1}$$

resultiert.

Die praktisch durchgeführten Berechnungen haben in allen Fällen das näherungsweise Zutreffen dieser Formel bestätigt. Sollten an Stelle der Kämpfermomente M_o, M_{o_1} die Scheitelmomente M_s, M_{s_1} gegeben sein, so besteht die leicht nachzuweisende Beziehung:

$$(f - y) = \frac{M_s - M_{s_1}}{H - H_1}.$$

¹⁾ Es werden hier, wie auch in allen folgenden Fällen, die Werte der Näherungsrechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft durch den Index 1 bezeichnet.

Die Beanspruchungen sind in den gewählten Beispielen 1 und 2 infolge der schlanken Dimensionierung ganz abnorm hoch und selbst für besten Granit zu groß; es handelte sich dem Autor offenbar nur um ein Schulbeispiel, eine praktische Ausführung war nicht beabsichtigt. Doch ist schon aus diesen Beanspruchungsziffern zu ersehen, daß man sich bei ausschließlicher Benützung der Näherungsformeln sehr leicht ein ganz falsches Bild von dem Spannungszustande des Gewölbes, insbesondere in den Kämpfern, zu machen geneigt sein wird; denn man erhält bei Durchführung der genauen Rechnung einerseits ganz bedeutende Zugspannungen ($26,5$ beziehungsweise $43,4 \text{ kg/cm}^2$) an der Außenseite der Kämpferfugen, während die Näherungsrechnung nur Druckbeanspruchungen ausweist, andererseits sind die maximalen Druckbeanspruchungen an der Innenseite um 44 beziehungsweise 60 kg/cm^2 höher als die näherungsweise berechneten Werte¹⁾.

Es ist somit schon jetzt erkennbar, daß die bedeutenden Differenzen der Ergebnisse beider Rechnungsarten in den Kämpferquerschnitten gegen die vorbehaltlose Anwendung der Näherungsrechnung sprechen, während die Unterschiede in den Scheitelfugen meist unbedenklich sind, zumal sie hier, wie auch in den meisten übrigen Fällen zu ungunsten der Näherungsrechnung ausfallen und daher für die Benützung des Näherungsverfahrens größere Sicherheit geben.

Beispiel 3.

Bei diesem Beispiele, der eisernen Brücke über die Rhone bei Taraskon, führt Perrodil zunächst die ganze Berechnung auf Grund des Näherungswertes H_1 des Horizontalschubes durch, entwickelt sodann die unter Annahme einer sehr flachen Bogenachse gültigen Grundformeln für die Berechnung des genauen Wertes H (»valeur complète de la poussée dans les arcs surbaissés«), wobei die Normalkraft N_x konstant gleich dem Horizontalschube H und die Schubkraft S_x gleich Null für jeden Querschnitt gesetzt wird, und stellt nun die solcherart erhaltenen genaueren Werte den vorigen gegenüber²⁾.

¹⁾ Im Falle des Beispielen 1 ergibt sich allerdings eine gewisse Sicherheit der Näherungsrechnung durch die hohen Scheitelbeanspruchungen, welche sogar die ungünstigste Kämpferbeanspruchung überwiegen, doch ist dies selbstredend ein rein zufälliger Ausgleich, der im allgemeinen nicht zutrifft.

²⁾ Auch in diesem Falle schien eine Nachrechnung und teilweise Richtigstellung der nur flüchtig durchgeführten Berechnungen Perrodils notwendig, wobei festgestellt werden konnte, daß durch einen auf Seite 179 des mehrfach zitierten Werkes unterlaufenen Fehler im Stellenwerte einer Zahl (der Wert $l_1 r D$ ist $10,207$, nicht $1020!$) die Näherungsrechnung größtenteils unrichtige Werte ausweist. Es handelt sich hierbei offenbar um ein Flüchtigkeitsversehen, das möglicherweise erst im letzten Stadium der Drucklegung erfolgte, was schon daraus zu erkennen ist, daß bei der Durchführung der genauen Rechnung vergleichsweise die richtigen Näherungswerte zitiert werden.

Das Beispiel betrifft, wie erwähnt, einen eisernen Träger, und es ergeben sich nach Tabelle I, entsprechend der früher gemachten Bemerkung, infolge des relativ großen Trägheitsradius des Eisenquerschnittes $\left(r^2 = \frac{h^2}{96} \text{ gegenüber } \frac{h^2}{12} \text{ bei Gewölben} \right)$ größere Differenzen als in den beiden vorausgegangenen Beispielen (mit Ausnahme des nicht maßgeblichen Scheitelmoments).

Die Lage der Stützlinie beider Rechnungsarten ist aus Fig. 3, Taf. Nr. 1 ersichtlich. Ganz besonders tritt hier die auch bei einzelnen der folgenden Beispiele bemerkbare Erscheinung hervor, daß sich die Stützlinie der Näherungsrechnung in ihrem ganzen Verlaufe, auch im Scheitel, eng an die Gewölbachse anschließt, während die Stützlinie der genauen Rechnung am Kämpfer weit unterhalb, am Scheitel merkbar oberhalb der Schwerachse gelegen ist¹⁾.

Im übrigen bietet das Beispiel keinen Anlaß zu neuen Beobachtungen; es sei nur erwähnt, daß diesmal die genaue Rechnung auch im Scheitelquerschnitte ungünstigere Resultate gibt als die Näherungsrechnung, was bei den ersten beiden Beispielen nicht der Fall ist. Die Differenzen der größten Druckspannungen betragen im Kämpfer rund 150 kg/cm^2 , im Scheitel rund 80 kg/cm^2 .

Beispiel 4 und 5.

Für die Beispiele 4 und 5 dienten die Angaben des Werkes »Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme und deren Anwendung« von Castigliano²⁾ als Grundlage. Es handelt sich hiebei um eine Stein- und eine Eisenbrücke von gleichen Dimensionen (vergl. Fig. 4 und 5, Taf. Nr. 1). Die Berechnung ist in beiden Fällen für Eigengewicht und totale zufällige Last und bei der eisernen Bogenbrücke außerdem für halbseitige zufällige Last durchgeführt.

Das größere Pfeilverhältnis der vorliegenden Bogen von $\frac{f}{l} = \frac{1}{8.5}$ ließe nach den vorhin abgeleiteten Schlußfolgerungen eigentlich kleinere Differenzen als in den Beispielen 1 bis 3 erwarten; daß dies nicht zutrifft, ist vornehmlich der stärkeren Dimensionierung der Bogen, zum Teile auch der Anordnung eines variablen Querschnittes zuzuschreiben.

¹⁾ Die mit blauer Farbe angedeutete Stützlinie, welche unter Annahme einer parabolischen Bogenachse berechnet ist, zeigt nur geringe Abweichungen gegenüber der Stützlinie der genauen Rechnung; über den Vorzug dieses Näherungsverfahrens speziell bei flachen Bogen wird noch im folgenden ausführlicher gesprochen werden.

²⁾ So wie vorhin Perrodil, rechnet auch Castigliano seine Beispiele stets mit Berücksichtigung des Einflusses der Achsialkraft; es mußten also die Werte der Näherungsrechnung erst ermittelt werden.

Die beiden Beispiele lassen einerseits deutlich die bereits erkannte größere Empfindlichkeit eiserner Bogenträger gegenüber gewölbten Bogen erkennen (im vorliegenden Fall ist $\rho^2 = \frac{h^2}{7}$ für den eisernen Bogen gegenüber $\frac{h^2}{12}$ für das Gewölbe), andererseits ermöglicht Beispiel 5 einen Vergleich des Einflusses der Vernachlässigung der Achsialkraft für verschiedene Belastungsarten, und zwar für totale und halbseitige zufällige Last.

Letzterer Betrachtung sei hier etwas ausführlicher Raum gegeben. Für die Werte des Horizontalschubes und der Normalkräfte ist, wie aus Tabelle I ersichtlich, die Art der Belastung auf die Größe der Differenz ohne bemerkenswerten Einfluß.

Bei den Kämpfermomenten und den Beanspruchungen im Kämpfer sind eigentlich die Differenzen beider Rechnungsarten bei totaler Belastung größer, machen sich jedoch nicht so ungünstig fühlbar, wie bei halbseitiger Belastung, weshalb vor allem diese Differenzen im folgenden noch betrachtet werden sollen.

Für das Scheitelmoment sind im vorliegenden Falle die Differenzen, prozentuell genommen, vollständig gleich, da Eigengewicht und zufällige Last in gleicher Weise über den Bogen verteilt sind. Dies hat auch zur Folge, daß der Angriffspunkt der Stützlinie im Scheitel für beide Belastungsarten die gleiche Lage hat.

Die Zusammenstellung der Stützlinienabstände und deren absoluten Differenzen lassen schon hier und noch besser in einzelnen folgenden Beispielen, welche gewölbte Bogenkonstruktionen betreffen, die Erscheinung erkennen, daß die Art der Belastung auf die gegenseitige Lage der Stützlinien beider Rechnungsarten nur sehr geringen Einfluß hat. Es ändert sich zwar die Lage der Stützlinie durch die Art der Belastung insbesondere bei eisernen Bogen sehr bedeutend, aber diese Änderung ist für die Stützlinien beider Rechnungsarten ungefähr gleich, so daß die gegenseitige Lage derselben zu einander fast dieselbe bleibt. Es ist nicht unwichtig, dies besonders zu betonen, weil auf Grund dieser Erscheinung die Möglichkeit geboten ist, nach Durchführung der Näherungsrechnung für eine der beiden Belastungsarten die wirkliche Lage der Stützlinie schätzungsweise anzugeben, wofern bereits vergleichende Berechnungen über die andere Belastungsart vorliegen sollten.

Auf Grund der vorstehenden Betrachtungen und bei Vergleichung aller folgenden, in Tabelle I zusammengestellten Fälle halbseitiger Belastung gelangt man zu dem Schlusse, daß die Differenzen der Resultate beider Rechnungsarten für die halbseitige Belastung kein wesentlich anderes Bild zeigen, als die für Eigengewicht beziehungsweise totale Belastung auftretenden Differenzen, daß also die Art der zufälligen Belastung keinen besonderen Einfluß auf das Verhältnis der Differenzen

ausübt. Für gemauerte Gewölbe ist dies von vornherein naheliegend, da ja bei diesen die zufällige Belastung im Verhältnis zum Eigengewicht geringfügig ist; es trifft aber auch bei eisernen Bogenbrücken zu. Allerdings machen sich die Unterschiede beider Rechnungsverfahren bei halbseitiger Belastung empfindlicher fühlbar, weil eben in der ganzen Berechnung ungünstigere Werte erscheinen.

Es soll nun noch auf besondere Beobachtungen, welche sich speziell für die halbseitige Belastung ergeben, eingegangen werden. Die Tabelle I wäre hiebei zum Vergleiche zu benutzen, und es wolle auch das Zutreffen in den folgenden Beispielen halbseitiger Belastung geprüft werden, um die allgemeine Gültigkeit der nachstehenden Bemerkungen bestätigt zu finden.

Der Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft auf vertikal gerichtete Kräfte und Kraftkomponenten ist, wie leicht begreiflich, verschwindend klein; es sind daher die Werte der vertikalen Auflagerreaktionen, wie auch der Schubkraft im Scheitel bei beiden Rechnungsarten fast die gleichen.

Bezüglich der Kämpfermomente gibt die genaue Rechnung auf der belasteten Seite meist ungünstigere, auf der unbelasteten Seite günstigere Resultate als die Näherungsrechnung; es überwiegt jedoch bei flachen Bogen $\left(\frac{f}{l} < \frac{1}{3}\right)$ als ungünstigstes Moment stets jenes der genauen Rechnung. Besonders hervorzuheben ist, daß die absoluten Differenzbeträge der linken und rechten Kämpfermomente für beide Rechnungsarten bei beliebiger Belastung stets annähernd einander gleich sein müssen, was man bei Prüfung der Tabellenwerte dieses und einiger folgender Beispiele hinreichend genau bestätigt findet.

Die theoretische Begründung hiefür ist, wie folgt, leicht zu erbringen:

Nennt man die bei Durchführung der genauen Rechnung sich ergebenden Kämpfermomente links und rechts des Scheitels M_o und M'_o , die vertikale linksseitige Auflagerkomponente A und die Abstände beliebiger Lasten P vom linken Auflager a , so ist:

$$M_o - M'_o = \sum_o^l P(l - a) - Al.$$

Ebenso ist für die Näherungsrechnung:

$$M_{o_1} - M'_{o_1} = \sum_o^l P(l - a) - A_1 l.$$

Da aber die vertikale Auflagerreaktion A , beziehungsweise A_1 von der Vernachlässigung der Achsialkraft, wie erwähnt, fast gänzlich unabhängig ist, kann $A = A_1$ und somit auch:

$$M_o - M'_o = M_{o_1} - M'_{o_1}$$

gesetzt werden, das heißt die Differenz der links- und rechtsseitigen

Kämpfermomente für die genaue Rechnung ist gleich jener für die Näherungsrechnung. Es ist aber auch:

$$M_o - M_{o_1} = M_o' - M_{o_1}'$$

das heißt die Differenz der nach beiden Rechnungsarten sich ergebenden linksseitigen Kämpfermomente ist gleich der Differenz der rechtsseitigen, und es läßt sich leicht beweisen, daß diese Differenz gleichgesetzt werden kann:

$$M_o - M_{o_1} = M_o' - M_{o_1}' = M_s - M_{s_1} + f(H - H_1),$$

wobei M_s das Scheitelmoment, H den Horizontalschub, f die Pfeilhöhe des Bogens bedeuten.

Ein ähnliches Verhalten zeigen auch die Achsialkräfte, bezüglich welcher die leicht nachweisbare Beziehung:

$$N_o - N_{o_1} = N_o' - N_{o_1}' = (H - H_1) \cos \varphi_o$$

besteht; auch hier sind also die Differenzen beider Rechnungsarten für beide Bogenseiten einander gleich.

Eine weitere analytische Entwicklung der vorstehenden Differenzgleichungen ist leider nicht durchführbar; es ist nur möglich, die Differenzbeträge einzelner Größen als Funktionen der Differenzbeträge anderer Größen, nicht aber als unabhängige Funktionen darzustellen.¹⁾

Die bereits abgeleitete Formel $\gamma = \frac{M_o - M_{o_1}}{H - H_1}$ für die Schwerpunktsordinate jenes Querschnittes, in welchem die Stützlinien beider Rechnungsarten zum Schnitte kommen, gilt selbstredend auch für unsymmetrische Belastung und muß, da eben bewiesen wurde, daß $M_o - M_{o_1} = M_o' - M_{o_1}'$ für beide Gewölbseiten annähernd gleiche Resultate geben, das heißt die Stützlinien beider Rechnungsarten kommen auch im Falle unsymmetrischer Belastung annähernd in symmetrisch beiderseits des Scheitels liegenden Querschnitten zur Kreuzung. Dies trifft, wie aus der Stützliniendarstellung in Figur 5 der Taf. Nr. 1 ersichtlich, selbst bei eisernen Bogen zu, wiewohl in diesem Falle die Stützlinien eine stark unsymmetrische Gestalt haben.

Was schließlich die Beanspruchungen betrifft, so ergibt die Näherungsrechnung für halbseitige Belastung in den belasteten Kämpfern ganz bedeutend günstigere Resultate als die genaue Rechnung auf Kosten der Sicherheit der Konstruktion. So z. B. resultieren in Beispiel 5 um 340 kg/cm^2 geringere Zugbeanspruchungen und um 260 kg/cm^2 weniger Druckbeanspruchung als nach der exakten Methode. Bei eisernen Bogen können derartige Differenzen in Anbetracht der hohen Zugfestigkeit des Eisens noch eher übersehen werden; empfindlicher fühlbar machen sie sich bei Gewölben, da eine, wenn auch

¹⁾ Eine Verallgemeinerung der eben abgeleiteten Beziehungen ergibt sich durch die Betrachtung zweier beliebiger, symmetrischer Querschnitte, wie dies bei der Erörterung des Beispiels 8 geschieht.

geringe, für die genaue Rechnung sich ergebende Zugbeanspruchung im Kämpfer, beziehungsweise eine Vermehrung derselben eventuell schon bedenklich erscheinen kann. Wie aus Tabelle I zu ersehen, ist diese Gefahr besonders bei flachen Gewölben (etwa bis zu $\frac{1}{4}$ Pfeil) zu gewärtigen.

Beispiel 6.

Das Beispiel 6 behandelt einen Bogensektor des in Figur 9 der Taf. Nr. 3 dargestellten Gewölbes, und zwar jenen oberen Teil des Bogens, dessen Zentriwinkel halb so groß ist als jener des ganzen Gewölbes. (vergl. Fig. 6, Taf. Nr. 2).

Die Berechnung erfolgte mit Anwendung des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit, und zwar mit Hilfe der Konstruktion von Einflußlinien für den Horizontalschub H und die Kämpfermomentsummen ($M_o + M_o'$) unter Annahme symmetrischer Belastung. Um zunächst die Integrale $\int \frac{ds}{\mathcal{F}}$, $\int \frac{x ds}{\mathcal{F}}$, $\int \frac{y ds}{\mathcal{F}}$, $\int \frac{xy ds}{\mathcal{F}}$, $\int \frac{x^2 ds}{\mathcal{F}}$, $\int \frac{y^2 ds}{\mathcal{F}}$ des Ausdrucks der Formänderungsarbeit durch endliche Summen zu ersetzen, wurde der Bogen in gleichen Entfernungen durch radiale Fugenschnitte in zehn gleiche Teile geteilt, wie aus Figur 6 der Taf. Nr. 2 ersichtlich. Durch Abgreifen der Werte x , y und der Gewölbstärken d (für $\mathcal{F} = \frac{1}{12} d^3$) der einzelnen Abschnitte konnten nun obige Summen gebildet und in die durch Differenzieren des Ausdrucks der Formänderungsarbeit nach den statisch unbestimmten Größen H und M_o gewonnenen Gleichungen eingeführt werden. Für die vereinfachende Annahme einer symmetrischen Belastung durch zwei Einzellasten »I« wurden nunmehr die Einflußlinien des Horizontalschubes und der Kämpfermomentsummen (siehe Figur 6a und 6b in Taf. Nr. 2) konstruiert, wonach für eine beliebige symmetrische Belastung des Gewölbes der auftretende Horizontalschub und das Kämpfermoment leicht ermittelt werden können. Es empfiehlt sich hiezu, die gesamte Belastungsfläche, wie in Figur 6 durchgeführt, durch vertikale Linien in eine Anzahl gleich breiter Lamellen zu zerlegen; summiert man sodann die Produkte sämtlicher Lamellengewichte und der zugehörigen mittleren Einflußordinaten, so ergeben sich die gesuchten Werte des Horizontalschubes und der Kämpfermomente.

Im vorliegenden Beispiele treten die Wirkungen einer außerordentlich kräftigen Dimensionierung, welche dadurch erklärlich ist, daß man es mit einem Teile eines größeren Gewölbes zu tun hat, mit der Wirkung der Flachheit des Bogens und der Veränderlichkeit des Querschnittes zusammen, wodurch die sich ergebenden Differenzen beider Rechnungsverfahren abnorm groß werden. Bei dem sonst wenig empfindlichen Horizontalschub betragen dieselben über 100%, bei der Kämpfernormalkraft über 60%!

Sehr interessant ist die Lage der Stützlinien in diesem Falle. Die Stützlinie der Näherungsrechnung fällt, da die Momente nur wenig von Null verschieden sind, nahezu mit der Mittellinie des Gewölbes zusammen (in Figur 6 rot eingezeichnet). Die genaue Rechnung ergibt dagegen ein sehr großes negatives Kämpfermoment und ein großes positives Scheitelmoment; die zugehörige Stützlinie (in Figur 6, Taf. Nr. 2 schwarz)¹⁾ ist nahezu die sogenannte »Minimalstützlinie« (Vergl. die Ähnlichkeit im Beispiele 3.)

Aus diesem Beispiele ist somit mit besonderer Deutlichkeit zu ersehen, daß die Näherungsrechnung viel günstigere Resultate als die exakte Methode liefert.

Entsprechend den großen Differenzen beider Rechnungsarten geben auch die aus Figur 6a und b, Taf. Nr. 2 ersichtlichen Einflußlinien des Horizontalschubes und der Kämpfermomentsummen für beide Berechnungen ein gänzlich verschiedenes Bild.

Die Ordinaten der Einflußlinie des Horizontalschubes für die Näherungsrechnung sind konstant mehr als doppelt so groß wie jene der genauen Rechnung, und die für die Näherung sich ergebende Summenkurve der Kämpfermomente wechselt vom negativen ins positive Gebiet, während die gleiche Kurve der genauen Rechnung ausschließlich bedeutende negative Werte ausweist.

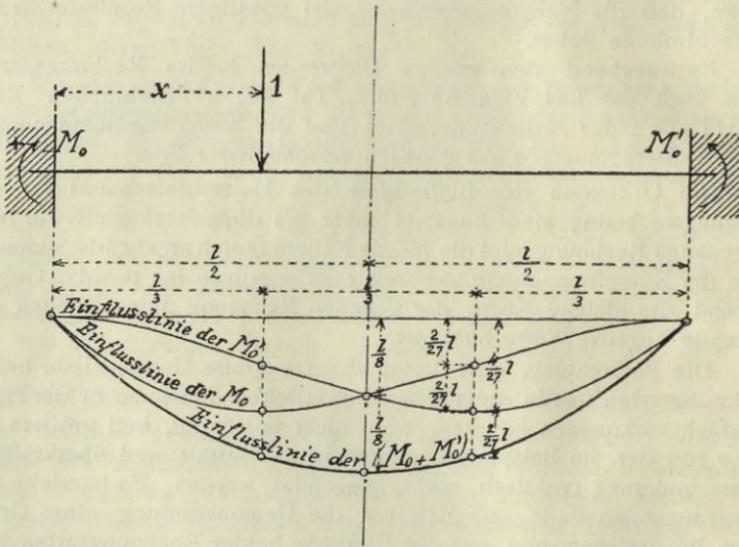
Die Befürchtung, daß derart abnorm große Unterschiede beider Rechnungsarten wie in dem eben behandelten Beispiele in der Praxis mehrfach vorkommen könnten, wäre nicht begründet, weil größere Gewölbe von der im Beispiele angenommenen Gestalt und überkräftigen Dimensionierung praktisch nicht ausgeführt werden. Es handelte sich im vorliegenden Falle lediglich um die Demonstrierung eines Grenzfalles, bei welchem alle auf die Differenz beider Rechnungsarten wirkenden Einflüsse in einem Sinne auftreten.

Gerade dieser Fall schien aber auch besonders geeignet, eine Beurteilung des Einflusses jener Glieder der genaueren Formeln Weyrauchs zu ermöglichen, welche den Gewölberadius r im Nenner enthalten und bereits eingangs als von geringem Einflusse bezeichnet wurden. Es wurde daher die Berechnung des Beispiels 6 auch nach den Weyrauchschen genauen Formeln vorgenommen, deren Ergebnisse im Zusammenhange mit dem folgenden Beispiele besprochen werden sollen.

¹⁾ Neben den in schwarzer und roter Farbe eingezeichneten Stütz- und Einflußlinien der genauen Rechnung, beziehungsweise der Näherungsrechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft wurden noch die Stütz- und Einflußlinien für die Berechnung unter Annahme einer parabolischen Bogenachse in blauer Farbe ersichtlich gemacht, welche durchwegs ziemlich nahe an den Kurven der genaueren Rechnung verlaufen. Die Vorteile dieser Berechnungsart werden später zusammenfassend behandelt.

Es sei noch erwähnt, daß der eben betrachtete Wölbogen ein interessantes Bild des Überganges zum Problem des geraden, eingespannten, auf Biegung beanspruchten Balkens bietet: es zeigt sich bereits der Übergang der Stützlinie zur Spannungstrajektorie, sowie der Übergang der Momenteneinflußlinie in die nebenstehend dargestellte Einflußlinie der Summen beider Einspannungsmomente ($M_o + M_o'$) für den geraden eingespannten Balken.

Textfigur 1.



An dieser Stelle mag es am Platze sein, einige Bemerkungen über das Problem des geraden eingespannten Balkens, welcher als sehr flacher Bogen vom Pfeilverhältnis Null aufgefaßt werden kann, beizufügen. Man könnte auf Grund der bisherigen Ergebnisse verleitet werden, anzunehmen, daß beim geraden, eingespannten Balken als dem Grenzfall eines sehr flachen Bogens vom Pfeilverhältnis Null eine Vernachlässigung der Achsialkraft bei der Berechnung am stärksten fühlbar würde. Dem widerspricht jedoch die Tatsache, daß in diesem Falle Normalkräfte überhaupt nicht auftreten, weshalb beide Berechnungsarten geradezu identisch werden.

Es ergibt sich also hier eine merkwürdige Diskontinuität, indem das sonst allgemein gültige Gesetz: je flacher der Bogen, desto größer der Fehler der Näherungsrechnung, gerade für den flachsten Bogen vom Bogenpfeil Null nicht zutrifft. Dieses diskontinuierliche Verhalten tritt überhaupt immer dann hervor, wenn man den Versuch macht, von der Bogentheorie auf das Problem des geraden, eingespannten Balkens überzugehen. So z. B. werden bei Berechnung eines Bogens

mit Hilfe der eingangs zitierten theoretischen Formeln stets umso größere Horizontalschübe resultieren, je flacher der Bogen gestaltet ist; die Horizontalschübe wachsen also bei sonst gleichen Verhältnissen mit abnehmendem Bogenpfeil. Für den Grenzfall eines sehr flachen Bogens von der Pfeilhöhe Null resultiert jedoch nicht, wie eigentlich zu erwarten wäre, ein unendlich großer Horizontalschub; derselbe reduziert sich vielmehr unvermittelt auf Null, übereinstimmend mit der Theorie des geraden eingespannten Balkens.

Man muß zugeben, daß es sich hier um eine merkwürdige, jedoch theoretisch einwandfreie Erscheinung handelt, welche übrigens auf dem Gebiete der technischen Mechanik nicht vereinzelt dasteht und durch Gleichnisse, wie auch durch die Vorstellung der Art der Lastverteilung auf die Widerlager ¹⁾ verständlicher gemacht werden kann.

Beispiel 7.

Beispiel 7 ist dem Werke Dr. v. Weyrauch's: »Die elastischen Bogenträger, ihre Theorie und Berechnung« entnommen und bezieht sich auf das vom Gewölbeausschuß des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereines im Purkersdorfer Steinbruche untersuchte Bruchstein-gewölbe (vergl. Fig. 7, Taf. Nr. 2).

Die Berechnung erfolgte nach den eingangs zitierten Formeln v. Weyrauch's, und es soll hier zunächst auf die Unterschiede aufmerksam gemacht werden, welche zwischen den bisher benützten Grundformeln Castiglianos (beziehungsweise Perrodils) und jenen Weyrauch's bestehen.

Um vor allem den Einfluß festzustellen, welchen die in den Weyrauch'schen Formeln enthaltenen Glieder $\frac{Mx}{r}$ auf die Endresultate üben, diene die nachfolgende Zusammenstellung.

Es ergibt sich für das Eigengewicht des Bruchsteinversuchsgewölbes:

	Mit Berücksichtigung der Glieder $\frac{Mx}{r}$	Ohne	Differenz
Horizontalschub	25'796 t	25'796 t	0
Kämpfermoment	- 4'902 tm	- 4'906 tm	0'004 tm
Scheitelmoment	+ 0'428 tm	+ 0'424 tm	0'004 tm
Normalkraft im Kämpfer	35'286 t	35'286 t	0
Stützlinsenabstand im Kämpfer .	- 0'139 m	- 0'139 m	0

¹⁾ Eine Vertikalkraft kann wohl in zwei nahezu horizontale Komponenten zerlegt werden, welche einen stumpfen Winkel miteinander einschließen, nicht aber in zwei Komponenten von genau horizontaler Lage. Im ersteren Falle sind die Komponenten nahezu unendlich groß, im zweiten Falle gleich Null.

Stützlinienabstand im Scheitel .	— 0'017 m	— 0'016 m	0'001 m
Beanspruchungen im Kämpfer .	$\left\{ \begin{array}{l} 0'8 \text{ kg/cm}^2 \\ 5'6 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0'8 \text{ kg/cm}^2 \\ 5'6 \text{ hg/cm}^2 \end{array} \right.$	0
Beanspruchungen im Scheitel .	$\left\{ \begin{array}{l} 5'0 \text{ kg/cm}^2 \\ 3'6 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5'0 \text{ kg/cm}^2 \\ 3'6 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$	0

Der Einfluß der Glieder $\frac{Mx}{r}$ ist somit im vorliegenden Falle verschwindend klein und praktisch ohne Bedeutung; bei sehr stark dimensionierten Gewölben dürfte er sich allerdings deutlicher bemerkbar machen.

Die von Weyrauch verwendeten Formeln unterscheiden sich aber von jenen Castiglianos und Perrodils nicht nur durch die Glieder $\frac{Mx}{r}$, sondern auch durch die Zusatzglieder $\int \frac{Nxy d\varphi}{E F}$, $\int \frac{Nxx d\varphi}{E F}$ und $\int \frac{Nxs ds}{E F r}$ der Normalkraftintegrale¹⁾. Für die Geringfügigkeit des Einflusses dieser Glieder den direkten Nachweis so wie vorhin für die Werte $\frac{Mx}{r}$ zu erbringen, würde eine sehr umständliche und zeitraubende Rechnung erfordern, da die Werte $(dx + y d\varphi)$ und $(dy - x d\varphi)$ der eingangs zitierten Grundformeln Weyrauchs bei der weiteren Entwicklung derselben durch die Ausdrücke $\frac{r-f}{r} ds$, beziehungsweise $\frac{l}{2r} ds$ ersetzt werden und zur Erbringung des Nachweises daher die Bildung zahlreicher neuer Tabellenwerte erforderlich wäre.

Es ist dies umso leichter vermeidbar, als man auch auf anderem Wege zu der angestrebten Erkenntnis gelangen kann. Schon die Tatsache, daß die betrachteten drei Ausdrücke das Bogendifferential $d\varphi = \frac{ds}{r}$, beziehungsweise den Gewölbradius im Nenner enthalten, läßt vermuten, daß ihr Einfluß kein erheblicher sein kann.

Weiters steht fest, daß der Einfluß der betrachteten Glieder nur ein Teil des Gesamteinflusses der Achsialkräfte auf die Formänderungen sein kann, und zwar ist es, wie aus der Ableitung der Weyrauchschen Formeln ersehen werden wolle, jener kleinere Teil des Einflusses der Achsialkräfte, welcher gemeinsam mit der Wirkung der Momente an der Winkeländerung $\Delta\varphi$ der Querschnitte teilnimmt. Dieser Einfluß kann jedoch nur unbedeutend sein, denn er ist nicht

¹⁾ Auf den weiteren Unterschied der Berücksichtigung von Schubkraftgliedern bei Castigliano und Perrodil soll hier nicht weiter eingegangen werden, da, wie bereits erwähnt, deren Einfluß praktisch stets vernachlässigt werden kann.

nur viel geringer als der Einfluß der Momente auf die Winkeländerung $\Delta \varphi$, sondern auch geringfügig im Vergleiche mit der Wirkung der Achsialkräfte auf die Längenänderung der Bogenachse Δs .

Schließlich konnte die Geringfügigkeit des Einflusses der obbezeichneten Glieder noch aus der Durchrechnung eines praktischen Beispielles erkannt werden. Es wurde nämlich das Beispiel 6, welches durch seine ganz ungewöhnliche Dimensionierung als Grenzfall besonders zur Untersuchung geeignet erschien, sowohl nach den Formeln Castiglianos, wie auch nach den genaueren Gleichungen Weyrauchs für Eigengewicht und totale zufällige Last berechnet. Die Ergebnisse sind folgende:

	Nach Weyrauch Castigliano Differenz berechnet		
Horizontalschub	35'319 t	35'423 t	0'104 t
Kämpfermoment	- 36'823 tm	- 34'376 tm	2'447 tm
Scheitelmoment	+ 11'653 tm	+ 13'967 tm	2'314 tm
Normalkraft im Kämpfer	48'991 t	49'081 t	0'090 t
Stützlinienabstand im Kämpfer	- 0'752 m	- 0'700 m	0'052 m
Stützlinienabstand im Scheitel	+ 0'330 m	+ 0'394 m	0'064 m
Beanspruchungen im Kämpfer	$\left. \begin{array}{l} - 7.3 \text{ kg/cm}^2 \\ + 14.1 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} - 6.5 \text{ kg/cm}^2 \\ + 13.4 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 0.8 \text{ kg/cm}^2 \\ 0.7 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right\}$
Beanspruchungen im Scheitel	$\left. \begin{array}{l} + 8.7 \text{ kg/cm}^2 \\ - 2.4 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} + 9.8 \text{ kg/cm}^2 \\ - 3.5 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 1.1 \text{ kg/cm}^2 \\ 1.1 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right\}$

Die vorstehenden Differenzen geben ein Bild des gemeinsamen Einflusses der Glieder $\frac{M_x}{r}$ und $N_x \frac{y d \varphi}{EF}$, $N_x \frac{x d \varphi}{EF}$, $N_x \frac{ds}{EFr}$, um welche sich die genauen Formeln Weyrauchs von jenen Castiglianos unterscheiden. Diese Differenzen dürften, da der Einfluß der Glieder $\frac{M_x}{r}$, wie vorhin bewiesen, fast verschwindend klein ist, vornehmlich auf den Einfluß der Werte $N_x \frac{y d \varphi}{EF}$, $N_x \frac{x d \varphi}{EF}$ und $N_x \frac{ds}{EFr}$ zurückzuführen sein; sie sind jedoch in Anbetracht des gewählten, sehr ungünstigen Falles eines überstark dimensionierten Gewölbes und im Vergleiche mit jenen Differenzen, welche in Tabelle I, Beispiel 6, für die vollständige Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft nachgewiesen wurden, als nicht beträchtlich zu bezeichnen.

Wenngleich also die Rechnungsergebnisse Weyrauchs auf Grund einer anderen und zwar genaueren Theorie gewonnen sind als jene von Perrodil und Castigliano, kann doch die Betrachtung des Einflusses der Achsialkraft und der Vergleich mit den früheren Ergebnissen ohne Rücksichtnahme hierauf erfolgen, da die Einwirkung der bei Weyrauch noch hinzutretenden Glieder eine geringfügige ist.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen sei nun auf die Erörterung des gegenständlichen Beispielles eingegangen. Das Bruchstein-

versuchsgewölbe wurde sehr schlank dimensioniert, um »ein Modell zu erhalten, dessen Erprobung einen direkten Schluß auf das Verhalten größerer Gewölbe ermöglichen sollte«. Infolge dieser sparsamen Dimensionierung treten, den bereits entwickelten Grundsätzen entsprechend, nur kleine Differenzen zwischen beiden Berechnungsarten auf.

Die Berechnung des Gewölbes ist für fünf Belastungsfälle durchgeführt, und zwar: 1. für das Eigengewicht, 2. für das Eigengewicht und eine totale Belastung mit neun Kräften $P = 3430 \text{ kg}$ und zwei Kräften zunächst den Gewölbekämpfern $\frac{P}{2} = 1715 \text{ kg}$, 3. für das Eigengewicht und eine halbseitige Belastung mit den Kräften $P = 3430 \text{ kg}$ (Belastung der Proportionalitätsgrenze), 4. für das Eigengewicht und totale Belastung mit Kräften $P = 5574 \text{ kg}$ und 5. für das Eigengewicht und eine halbseitige zufällige Belastung mit Kräften $P = 5574 \text{ kg}$ (kritische Belastung, Entstehen der ersten Risse)¹⁾.

Es wurde absichtlich in Tabelle I von der Darstellungsweise der Resultate, wie sie bei Weyrauch erfolgt, abgegangen und beispielsweise nicht ein Vergleich zwischen den für die mobile Belastung allein sich ergebenden Resultaten angestellt, sondern nur für die vorhin aufgezählten, praktisch wirklich möglichen fünf Belastungsfälle. Denn, wie bereits erwähnt und in diesem Falle neuerdings beweisbar, hat die Art der zufälligen Belastung keinen wesentlichen Einfluß auf die Größe der Differenzen beider Rechnungsarten; es ist somit die Betrachtung des ohnehin nur theoretisch möglichen Falles alleiniger zufälliger Belastung umsomehr entbehrlich. Die Differenzen der Horizontalschübe sind in allen fünf Belastungsfällen rund 4%, jene der Normalkräfte im Kämpfer rund 2%, welche Differenzen also auch für eine beliebige zufällige Belastung ohne Eigengewicht eintreten würden; bezüglich der Momente gelten die bereits bei den vorangegangenen Beispielen gemachten Bemerkungen.

Besonders augenfällig tritt hier die bereits beobachtete Erscheinung hervor, daß die gegenseitige Lage der Stützlinien beider Rechnungsmethoden durch die Art der Belastung keine wesentliche Änderung erfährt; es ist der Abstand beider Stützlinien im Kämpfer fast konstant 0'107 m, im Scheitel 0'034 m in allen fünf Belastungsfällen.

¹⁾ Die meisten der in Tabelle I ausgewiesenen Rechnungswerte konnten unmittelbar dem Buche Weyrauchs entnommen werden; jedoch sind die von Weyrauch für die Verkehrsbelastung angegebenen Werte der genauen Rechnung infolge eines Übersehens in der Entwicklung des Summengliedes $\sum_0^l \frac{\gamma_1}{F} P_x$ (vergl. Seite 249 der Ausgabe 1897 des Werkes) unrichtig, ja sie könnten möglicherweise irreführen, da sie im entgegengesetzten Sinne differieren. Diese Werte mußten bei der vorliegenden Arbeit erst neu berechnet und richtiggestellt werden.

Herr Professor Dr. v. Weyrauch hat eine diesbezügliche briefliche Mitteilung freundlichst zur Kenntnis genommen und deren Zutreffen bestätigt.

Innerhalb des Gewölbes jedoch ändert sich die Lage beider Stützlinien ziemlich bedeutend, und daher zeigen sich auch in den Beanspruchungen insbesondere der halbseitig belasteten Kämpfer bedenkliche Unterschiede: die genaue Rechnung ergibt da Mehrbeanspruchungen auf Zug und Druck von über 3 kg/cm^2 , eine bei Bruchsteingewölben gewiß zu beachtende Größe.¹⁾

Zum Schlusse mögen nun noch die von Professor Dr. v. Weyrauch auf Grund seiner eingehenden Untersuchungen abgeleiteten Ergebnisse über den Einfluß und die Zulässigkeit der Vernachlässigung der Achsialkraft in Kürze zitiert werden²⁾:

»Daß jene Vernachlässigungen« (des Einflusses der Achsialkraft N_x und der Glieder mit r im Nenner) »für Bogen mit zwei Gelenken zulässig sein können, ist im § 32 bewiesen und geht auch daraus hervor, daß der fragliche Einfluß für Halbkreisbogen mit zwei Gelenken verschwindet (wegen $f = r$). Inwieweit die Vernachlässigung bei Bogen ohne Gelenke gestattet ist, können nur Proberechnungen lehren . . .«

»Hienach« (nach den Ergebnissen der Proberechnungen) »können besonders bezüglich der Momente durch Belastung sehr große Abweichungen gegen die genaueren Werte eintreten. Da nun z. B. die Einsenkungen wesentlich durch die Momente bedingt sind, so wird man bei Berechnung derselben unter den oben erwähnten Vernachlässigungen im allgemeinen keine genügend genauen Resultate zu erwarten haben, was denn auch entsprechende Berechnungen bestätigen (Beispiel 44). Indessen kommt es bei der Berechnung von Bogenträgern in erster Linie auf die Beanspruchungen des Materials an, vor allem auf die Normalspannungen σ_o , σ_u in den obersten und untersten Querschnittelementen. Wie diese durch jene Vernachlässigungen beeinflusst werden, muß die Fortsetzung vergleichender Berechnungen ergeben. Die wichtigsten Resultate enthält die Tabelle des Beispiels 35, welche zeigt, daß die von der gesamten Belastung herührenden Spannungen σ_o , σ_u , τ weit weniger ungünstig als die M , M' ³⁾ durch die fraglichen Vernachlässigungen beeinflusst werden.« (Siehe Seite 142 des Werkes.)

¹⁾ Freilich ist im vorliegenden Falle eine gewisse Sicherheit dadurch gegeben, daß für das abgekürzte Verfahren die Beanspruchungen des unbelasteten Kämpfers ungünstiger werden und die Größe ihrer Maximalbeanspruchungen zufälligerweise annähernd jenen der belasteten Kämpfer für die genaue Rechnung entsprechen. Auf einen derartigen zufälligen Ausgleich darf man aber keineswegs im allgemeinen rechnen, wie andere in Tabelle I verzeichnete Beispiele beweisen, bei welchen die genaue Rechnung unter allen Umständen ungünstigere Resultate, und zwar sowohl für Zug- wie für Druckbeanspruchung ergibt.

²⁾ Wörtlich nach der Ausgabe 1897 des Weyrauchschen Werkes, welcher auch die fallweise angeführten Seitenzahlen entnommen wurden.

³⁾ M = Moment im linken Kämpfer, M' = Moment im rechten Kämpfer.

»Die Übereinstimmung ist für die Gesamtspannungen durch Eigengewicht und Verkehrslast weit besser, als nach den großen . . . bezüglich der Momente nachgewiesenen Abweichungen vermutet hätte werden können (vergl. Beispiel 36). Jedenfalls ist auch die Berechnung mit jenen Vernachlässigungen dem ganz willkürlichen, gewöhnlichen Verfahren bei weitem vorzuziehen.« (Siehe Seite 153.)

»Für Bogen ohne Gelenke kann der Einfluß der Vernachlässigung jenes Beitrages« (der Achsialkraft) »in den Ausdrücken von H , M , M' bei beliebiger Achse und beliebigen Querschnitten bedeutend werden, selbst in dem günstigsten Falle rechteckigen Querschnittes (Gewölbe). Zu beachten ist jedoch hier wie bei parabolischen Bogen, daß sich die Abweichungen nicht in gleichem Maße auf die bei der Dimensionierung in Frage kommenden Beanspruchungen fortzupflanzen brauchen.«

»Auch wenn bei Berechnung der Stützenreaktionen und Beanspruchungen die einfacheren Formeln der §§ 16, 34 zur Verwendung kommen, sind die Einsenkungen im allgemeinen möglichst genau zu berechnen, da diese durch Vernachlässigungen selbst dann bis zur Unbrauchbarkeit beeinflußt werden können, wenn die erhaltenen Beanspruchungen für praktische Zwecke noch genügend genau sind.« (Siehe Seite 257.)

Professor Dr. v. Weyrauch betrachtet jedoch nicht nur den Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft bei Kreisbogengewölben, sondern auch bei Bogen mit parabolischer Achse, bei welchen die Vernachlässigung durch die Nullsetzung des Wertes $\epsilon = \frac{15\gamma}{8} \left(\frac{r-f}{rf}\right)^2$ erfolgt, wobei γ gleich ist $\frac{f \cos \varphi}{F \cos \varphi}$, beziehungsweise einem Mittelwerte von $\frac{f}{F}$. Er untersucht auch hier das Wiener Bruchsteinversuchsgewölbe

nach beiden Rechnungsverfahren und vergleicht die Resultate derselben mit einander. Einige der Ergebnisse seien wieder wörtlich angeführt:

»Die Abweichungen« (der Resultate beider Rechnungsarten) »können hienach für die Momente schon bei dem kleinen $\epsilon = 0\cdot00259$ erheblich werden. Nun pflegen aber für eiserne Bogen wesentlich größere ϵ als für Gewölbe einzutreten, z. B. für die Dourobrücke $0\cdot004287$, für die Öffnung IV der Canstatter Brücke $0\cdot012063$, für die Coblenzer Brücke $0\cdot04563$, und da der Horizontalschub bei Vernachlässigung von ϵ allgemein $(1 + 6\epsilon)$ mal so groß als nach den genaueren Formeln resultiert (bei Bogen mit Kämpfergelenken nur $(1 + \epsilon)$ mal so groß), so würde er sich in den letzterwähnten Fällen alsdann um $2\cdot57\%$, beziehungsweise $7\cdot24\%$, beziehungsweise $27\cdot38\%$ zu groß ergeben, während für die Momente noch weit größere Differenzen entstünden.

Da für eine Einzellast P bei a nach § 17, 9:

$$M = \frac{P}{(1 + 6\epsilon) 2 l^2} a (l-a)^2 (5a - 2l - 12\epsilon l)$$

oder mit $\mu = \frac{a}{l}$

$$\frac{M}{Pl} = \mu (1 - \mu)^2 \frac{5\mu - 2 - 12\varepsilon}{1 + 6\varepsilon};$$

so folgen, z. B.:

	für $\frac{a}{l} = 0.1$	0.2	0.3	0.4	0.5
mit $\varepsilon = 0.015$	$\frac{M}{Pl} = -0.06242$	-0.06928	-0.04585	-0.01189	+0.01834
mit $\varepsilon = 0$	$\frac{M_1}{Pl} = -0.06075$	-0.06400	-0.03675	0	+0.03125
Abweichungen in %	= 2.68	7.62	19.85	100	70.39

	für $\frac{a}{l} = 0.6$	0.7	0.8	0.9
mit $\varepsilon = 0.015$	$\frac{M}{Pl} = +0.03611$	+0.03815	+0.02672	+0.00958
mit $\varepsilon = 0$	$\frac{M_1}{Pl} = +0.04800$	+0.04725	+0.03200	+0.01125
Abweichungen in %	= 32.93	23.85	19.76	17.43

Ähnliche Abweichungen können für die übrigen Momente M_x entstehen. Wenn sich dieselben nun auch nicht in gleichem Maße auf die Normalspannungen durch die Gesamtbelastung fortzupflanzen brauchen . . . , so erkennt man doch, daß gerade bei Bogen ohne Gelenke ε im allgemeinen nicht zu vernachlässigen ist, wie es auch bei Berechnung der Einsenkungen durch die Belastung niemals unberücksichtigt bleiben darf, da sonst, z. B. bei gleichmäßig verteilter Belastung auf die ganze Spannweite für parabolische Bogen ohne Gelenke, wie mit 2 und 3 Gelenken die Einsenkung Null sich ergeben würde.« (Siehe Seite 111 und fortlaufend.)

Bei der Berechnung der Pruthbrücke nächst Jaremcze (Pfeilverhältnis $\frac{1}{3.7}$) erwähnt Weyrauch:

»Man sieht hier, daß ε bei steilen Gewölben rechteckigen Querschnittes am ehesten vernachlässigt werden kann; doch macht die Berücksichtigung keine Schwierigkeit.« (Seite 115.)

An anderer Stelle (Seite 109) wird noch über den Einfluß von ε bemerkt:

»Die Unzulässigkeit einer allgemeinen Vernachlässigung von ε zeigt sich auch in den Konsequenzen derselben. So würde danach bei Belastung der ganzen Spannweite durch eine beliebig große, gleichmäßig verteilte Last keine Einsenkung entstehen, während doch z. B. für $f = 0$ bei Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk dieselben Einsenkungen entstehen sollten, wie bei Balken mit beiderseits frei drehbaren und beiderseits festgespannten Enden. Nebenbei ergibt die Annahme $\varepsilon = 0$ im Falle $f = 0$ für Bogen mit zwei Gelenken und ohne Gelenk $H = \infty$ statt $H = 0$, womit bei letzteren auch ganz unrichtige M, M' verbunden sind.«

»Der Einfluß von ε ist umso geringer, je steiler der Bogen ist, und für $f = \frac{l}{2}$ hat man $\varepsilon = 0$.« (Seite 256.)

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse seiner Untersuchungen bringt Weyrauch im § 36 des III. Abschnittes seines mehrfach zitierten Werkes; sie enthält im wesentlichen die bereits vorstehend wiedergegebenen Aufschlüsse.

Beispiel 8.

Das Beispiel 8 entstammt einem in Nr. 30 der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architektenvereines vom Jahre 1894 erschienenen Aufsätze des Ingenieurs Sigmund Kulka¹⁾: »Über die Berechnung großer gewölbter Brücken.« Der Verfasser führt darin unter anderem die Berechnung einer steinernen Wölbbrücke nach dem Verfahren von Castigliano und zwar mit Berücksichtigung des Einflusses der Achsialkraft²⁾ vor.

Der Wölbbogen hat das Pfeilverhältnis $\frac{1}{41}$, die Gewölbstärken entsprechen einer normalen, mittleren Annahme. Nach den bisherigen Erfahrungen kann man also auf mäßige Differenzen beider Rechnungsarten schließen, was auch zutrifft. Vergleicht man die Resultate mit denen des vorhergehenden Beispiels, so sieht man, daß die Prozentwerte der Differenzen für den Horizontalschub in beiden Fällen fast gleich sind; es hält also der Einfluß des größeren Pfeilverhältnisses dem Einfluß der besonders schlanken Dimensionierung im vorigen Beispiele ungefähr das Gleichgewicht. Bei den Kämpfernormalkräften ist dieses Verhältnis bereits mehr zugunsten des Gewölbes mit größerem Pfeil verschoben.

Die Berechnung wurde für drei Belastungsfälle: für Eigengewicht, für Eigengewicht und totale zufällige Belastung und für Eigengewicht und halbseitige zufällige Belastung durchgeführt, und es wurden hiebei, ähnlich wie in den Beispielen 1 und 2, außer dem Kämpfer und Scheitel noch andere Bogenpunkte betrachtet und zwar jene drei Querschnitte, welche die halbe Bogenachse in vier gleiche Teile zerlegen (vergl. Fig. 8, Taf. Nr. 2). Es ist dies jene Teilung, welche im vorliegenden Falle bereits zum Zwecke der Berechnung der Summenglieder der Formänderungsarbeit vorgenommen wurde. Die Werte der Momente, Normalkräfte und Stützlinienabstände der eben bezeichneten Querschnitte für beide Rechnungsverfahren sind aus Tabelle II, Seite 40/41, zu entnehmen.

¹⁾ Derzeit k. k. Oberbaurat im Eisenbahnministerium.

²⁾ Es mußten daher die in Tabelle I ausgewiesenen Rechnungswerte für das Näherungsverfahren mit Vernachlässigung der Achsialkräfte, sowie einzelne Werte der genauen Rechnung, die in der genannten Arbeit nicht ausgewiesen erscheinen, ergänzt werden.

Die Ergebnisse dieser Zusammenstellung stehen mit den bereits früher bei Beispiel 1 und 2 gemachten Beobachtungen in Übereinstimmung; neue Beziehungen ergeben sich jedoch dadurch, daß die Berechnung der Zwischenquerschnitte auch für den Fall halbseitiger Belastung erfolgte. Es läßt sich zunächst konstatieren, daß die absoluten Differenzen der Momente beider Rechnerverfahren für je zwei symmetrisch gelegene Querschnitte annähernd einander gleich sind. Schon früher (Beispiel 5) wurde dieses Gesetz für die Kämpfermomente erkannt und theoretisch begründet. Es kann nun auf ganz analogem Wege die Verallgemeinerung für je zwei beliebige symmetrisch liegende Querschnitte mit den Abszissen x und $(l-x)$ wie folgt nachgewiesen werden.

Es ist unter Beibehaltung der bereits verwendeten Bezeichnungen das Moment im Querschnitte x :

$$M_x = M_0 + Ax - \sum_0^x P(x-a) - Hy$$

und in dem symmetrisch liegenden Querschnitte $(l-x)$

$$M_{(l-x)} = M_0 + A(l-x) - \sum_0^{(l-x)} P(l-x-a) - Hy.$$

Somit ergibt sich bei der genauen Berechnung:

$$M_x - M_{(l-x)} = A(2x-l) - \sum_0^x P(x-a) + \sum_0^{(l-x)} P(l-x-a)$$

und analog bei der Näherungsrechnung:

$$M_{x_1} - M_{(l-x)_1} = A_1(2x-l) - \sum_0^x P(x-a) + \sum_0^{(l-x)} P(l-x-a).$$

Da wie früher $A = A_1$ gesetzt werden kann, ist:

$$M_x - M_{(l-x)} = M_{x_1} - M_{(l-x)_1}$$

oder auch: $M_x - M_{x_1} = M_{(l-x)} - M_{(l-x)_1}$, was zu beweisen war.

Aus der weiters leicht abzuleitenden Formel:

$$M_x - M_{x_1} = M_{(l-x)} - M_{(l-x)_1} = (M_0 - M_{01}) - (H - H_1)y$$

kann folgendes entnommen werden: $(M_0 - M_{01})$ ist eine konstante stets negative Größe, $-(H - H_1)y$ ist stets positiv, von Null im Kämpfer bis zu einem Maximalwerte im Scheitel zunehmend. Folglich nehmen die Differenzen der Momente vom Kämpfer gegen den Scheitel zunächst

ab, werden für $y = \frac{M_0 - M_{01}}{H - H_1}$ gleich Null und nehmen dann im entgegengesetzten Sinne rasch wieder zu. Diese allgemein zutreffende Erscheinung wurde bereits bei den Beispielen 1 und 2 aus der Lage der Stützlinien beider Rechnerarten erkannt und hieraus die Näherungs-

formel $y = \frac{M_0 - M_{01}}{H - H_1}$ für den Schnittpunkt beider Stützlinien abgeleitet.

Ähnlich wie mit den Angriffsmomenten verhält es sich auch mit den Achsialkräften der einzelnen Querschnitte. Auch hier sind die Differenzen der Resultate beider Rechnerarten für symmetrisch gele-

gene Querschnitte einander gleich, und es ergibt sich die leicht nachzuweisende Beziehung:

$$N_x - N_{x_1} = N_{(l-x)} - N_{(l-x)_1} = (H - H_1) \cos \varphi.$$

Aus diesem Ansatz ist leicht zu erkennen, daß die größten Differenzen im Scheitel, die kleinsten im Kämpfer auftreten und daß letztere für Vollbogen ($\varphi = 90^\circ$, $\cos \varphi = 0$) überhaupt verschwinden.

Im vorliegenden Beispiele gelangt schließlich die bereits erkannte Regel besonders klar zum Ausdrucke, daß die gegenseitige Lage der Stützlinien beider Rechnungsmethoden in verschiedenen Belastungsfällen unabhängig von der Belastung fast völlig unverändert bleibt; es ist der gegenseitige Abstand der Stützlinien im Kämpfer in allen drei Belastungsfällen rund $0\ 110\ m$, im Querschnitte 1 $0\ 062\ m$, im Querschnitte 2 Null, im Querschnitte 3... $0\ 045\ m$ und im Scheitel $0\ 060\ m$. Auf Grund dieser Erscheinung wird es statthaft sein, bei Untersuchung ähnlicher wie der eben behandelten Gewölbe nach dem Näherungsverfahren einen ungefähren Schluß auf die wahre Lage der Stützlinie, beziehungsweise auf den durch die Näherung begangenen Fehler zu ziehen.

Die Beanspruchungen sind laut Tabelle I bei allen Belastungsfällen für die genaue Rechnung im Scheitel günstiger, im Kämpfer ungünstiger. Letztere sind teilweise nicht unbedeutende Zugbeanspruchungen ($4\ 3\ kg/cm^2$ bei halbseitiger zufälliger Belastung), während das abgekürzte Verfahren nur Druckbeanspruchungen ausweist.

Beispiel 9.

Das Beispiel 9 betrifft jenes Gewölbe, dessen oberer Ausschnitt bereits im Beispiele 6 betrachtet wurde. Es ist dies ein stark dimensionierter Bogen von $\frac{1}{4}$ Pfeil, bei welchem besonders die rasche Querschnittszunahme in der Richtung gegen die Kämpfer merkbar hervortritt. Man muß sich daher auf relativ größere Differenzen gefaßt machen, was auch zutrifft, denn die Differenzen von 12% beim Horizontalschub und $3\ 3\%$ bis $3\ 6\%$ bei der Kämpfernorkraft sind in Anbetracht des großen Pfeilverhältnisses des Bogens recht bedeutend zu nennen. Auch die Kämpfermomente und Stützlinienabstände zeigen größere Abweichungen. Die maximalen Beanspruchungen ergeben sich für die genaue Rechnung durchwegs (auch im Scheitel) um 2 bis $3\ kg/cm^2$ größer als die Beanspruchungen der Näherungsrechnung.

Die Durchführung der Berechnung dieses Beispielles und die Darstellung derselben in Tafel 3 (Fig. 9, 9a, 9b, 9c) erfolgte ähnlich wie bei Beispiel 6, jedoch mit dem Unterschiede, daß die Einflußlinien ganz allgemein für beliebige, unsymmetrische Belastung konstruiert, beziehungsweise neben den Kämpfermoment-Summenkurven auch die Einflußlinien des rechts- und linksseitigen Kämpfermoments gesondert ersichtlich gemacht wurden. Es konnte somit der Fall un-

symmetrischer Belastung untersucht und in Fig. 9 die Stützlinie für die Belastung durch Eigengewicht und halbseitige Verkehrslast dargestellt werden.

Sowie bei Beispiel 6 wurden die Stütz- und Einflußlinien in Taf. Nr. 3 für drei Berechnungsarten ersichtlich gemacht:

1. Für die genaue Rechnung (in schwarzer Farbe);
2. für die Näherungsrechnung mit Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkräfte (in roter Farbe);
3. für die Näherungsrechnung unter Annahme einer parabolischen Achse (in blauer Farbe).

Es mögen nun an der Hand der Figur 9, Taf. Nr. 3, die beiden erstgenannten Berechnungsarten miteinander verglichen werden ¹⁾. Die gegenseitige Lage der Stützlinien bietet dasselbe allgemeine Bild wie in allen vorangegangenen Fällen. Am linken, belasteten Kämpfer hat die Linie der Näherungsrechnung eine günstigere Lage wie jene der genauen Rechnung; sie ist oberhalb der letzteren und näher an der Schwerachse des Gewölbes gelegen. Im weiteren Verlaufe nähern sich beide Stützlinien zusehends, bis sie ungefähr im Querschnitt 6 zum Schnitte kommen (hier ist $y = \frac{M_o - M_{o1}}{H - H_1} = 4'14$). Hier auf entfernen sie sich im entgegengesetzten Sinne bis zu einem Maximum im Scheitel (auch hier hat die Stützlinie der Näherungsrechnung die günstigere Lage, was jedoch nicht allgemein zutrifft) und nähern sich weiters wieder bis zum Schnittpunkt unweit Querschnitt 14 ($y = \frac{M_{o'} - M_{o'1}}{H - H_1} = 4'17$; der Querschnitt des rechtsseitigen Schnittpunktes liegt bekanntlich annähernd symmetrisch zu dem Querschnitt des linksseitigen Schnittpunktes). Vom zweiten Schnittpunkte an divergieren wieder beide Stützlinien, treten an verschiedene Seiten der Gewölbachse und laufen in dieser Lage durch den rechten unbelasteten Kämpfer; die Stützlinie der Näherungsrechnung liegt hier ungünstiger.

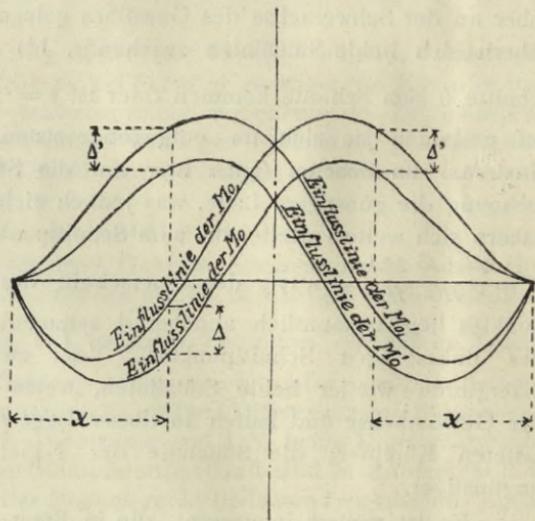
Es ist weiters interessant, die in Figur 9a, b und c, Taf. Nr. 3, dargestellten Einflußlinien für den Horizontalschub H , die Kämpfermomentsummen ($M_o + M_{o'}$) und die einzelnen Kämpfermomente M_o , $M_{o'}$ mit einander zu vergleichen und einige Schlüsse hieraus zu ziehen.

¹⁾ Auf die letztgenannte Berechnungsart wird erst später eingehender zurückgekommen werden; es sei nur gleich jetzt bemerkt, daß die Stütz- und Einflußlinien dieser Näherung, wie aus der graphischen Darstellung zu entnehmen, sich weit enger an die Kurven der genauen Berechnung anschmiegen als jene des Näherungsverfahrens mit Vernachlässigung der Achsialkraft.

Die Horizontalschubkurve der Näherungsrechnung hat durchwegs größere Ordinaten; die Differenzen derselben gegenüber den Ordinaten der genauen Rechnung sind, in Prozenten der letzteren ausgedrückt, nahezu völlig konstant 12%. Es wird also für jede beliebige Belastung der Näherungswert des Horizontalschubes um 12% größer sein als der genaue Wert, wodurch die bereits gemachte Wahrnehmung bestätigt wird, daß die Art der zufälligen Belastung auf die Größe der Differenzen des Horizontalschubes keinen Einfluß übt. Es wird z. B. die halbseitige Belastung beziehungsweise eine beliebige partielle Belastung dieselben Differenzen ergeben wie die totale Belastung.

Ein ganz anderes Bild zeigen die Momentenkurven. Figur 9b gibt ein Bild der Einflußlinien der Kämpfermomentensummen ($M_o + M_o'$), beziehungsweise der Kämpfermomente für symmetrische Belastung, Figur 9c die Einflußlinien der Kämpfermomente für eine beliebige Belastung. In beiden Fällen liegen die Kurven der Näherungsrechnung in allen Punkten mehr in positivem Gebiete, beträchtlich oberhalb der Linie für die genaue Rechnung. Diese Erscheinung steht in völliger Übereinstimmung mit den bisherigen Rechnungsergebnissen, welche für die Kämpfermomente der

Textfigur 2.



Näherungsrechnung eine ausgesprochene Neigung erkennen ließen, kleinere negative, beziehungsweise größere positive Werte anzunehmen.

Die Differenzen ¹⁾ der einzelnen Einflußordinaten der Momente nehmen vom Kämpfer gegen den Scheitel hin stetig zu und erreichen daselbst ein Maximum, woraus geschlossen werden kann, daß Belastungen im Scheitel größere Unterschiede beider Berechnungsarten ergeben als

¹⁾ Man betrachte hierbei die absoluten Differenzen, nicht wie vorhin die prozentuellen Differenzwerte, welche bei den Momenten, wie bereits begründet, kein richtiges Vergleichsbild geben.

solche in der Nähe der Kämpfer. Die Art der Belastung ist also bei den Angriffsmomenten von nicht unbedeutendem Einfluß auf die Größe der Differenzen. Da man aber bei Bogenkonstruktionen meist nur die halbseitige oder eine vom Auflager bis zu einem bestimmten Querschnitte reichende Belastung als ungünstigste untersucht, kommt der Fall des Auftretens der Maximaldifferenzen, welcher z. B. beim Aufbringen einer Einzellast in der Bogenmitte eintreten würde, kaum in Frage.

Bezüglich der in Figur 9c dargestellten Einflußlinien mag noch erwähnt werden, daß je zwei gleich weit von beiden Kämpfern abstehende Ordinaten gleich große Differenzen aufweisen, es ist z. B. in vorstehender Textfigur Nr. 2 $\Delta = \Delta'$.

Der Beweis hierfür ist einfach aus dem bereits erkannten Gesetze:

$$M_o - M_{o_1} = M_{o'} - M_{o_1'}$$

zu liefern, denn es ist $\Delta = M_o - M_{o_1}$ und $\Delta' = M_{o'} - M_{o_1'}$ für eine Einzellast 1 im Querschnitt x , somit $\Delta = \Delta'$, was zu beweisen war.

Beispiel 10 und 11.

Die Beispiele 10 und 11 sind dem bereits mehrfach genannten Werke Castiglianos entnommen¹⁾ und betreffen die Berechnung einer Eisenbahnbrücke aus Ziegelmauerwerk, der Ogliobrücke, und eines schmiedeisernen Hallenbogens. Beide Bogenkonstruktionen haben ein großes Pfeilverhältnis und sind schlank dimensioniert; der eiserne Bogen hat außerdem konstanten Querschnitt (vergl. Fig. 10 und 11, Taf. Nr. 1). Es treffen somit hier jene Bedingungen zu, unter welchen kleine Differenzen beider Rechnungsverfahren einzutreten pflegen.

Die Untersuchung der Mauerwerksbrücke aus Ziegelsteinen erfolgte für zwei Belastungsfälle:

1. Für den Fall der Abrüstung der Lehrbögen, wobei der Bogen nur sein eigenes Gewicht trägt und eine Nachmauerung noch nicht aufgebracht ist, und
2. für den Fall totaler Belastung des fertigen Gewölbes mit 1067 kg pro laufenden Meter zufälliger Last.

In beiden Belastungsfällen sind die Differenzen der Achsialkräfte (des Horizontalschubes) bereits sehr klein (0,7% für die Kämpfernorkraft, 2,8% für den Horizontalschub), dagegen zeigen die Momente noch bedeutendere Unterschiede, und dementsprechend kommen bei

¹⁾ Castigliano berechnet diese Beispiele mit Berücksichtigung des Einflusses der Achsialkraft, weist jedoch bei Beispiel 11 auf die Geringfügigkeit dieses Einflusses hin und empfiehlt, für die erste Annäherung die Achsialkräfte zu vernachlässigen, hienach den Bogen zu dimensionieren und sodann die Berechnung genau durchzuführen. Übrigens sei in der Praxis im allgemeinen die erste Annäherung genügend.

Durchführung der genauen Rechnung noch Mehrbeanspruchungen von 4.6 kg/cm^2 vor, eine Differenz, deren Vernachlässigung nicht statthaft wäre. Jedenfalls aber nähert sich dieses Beispiel bereits jener Grenze, von welcher an die Näherungsrechnung unbedenklich an Stelle der genauen Methode akzeptiert werden kann.

Denn bei der Betrachtung des folgenden Beispiels 11 wird es wohl einleuchtend, daß die erwähnte Grenze bereits überschritten ist; ja es gibt sogar die Näherungsrechnung für die Kämpfermomente und Kämpferbeanspruchungen beträchtlich ungünstigere Resultate als der genaue Rechnungsvorgang, während die Differenzen bei den Achsialkräften (auch beim Horizontalschub) bereits verschwindend klein werden (0.2 , beziehungsweise 2%).

Die Scheitelmomente und Scheitelbeanspruchungen ergeben sich zwar hier nach der genauen Rechnung ungünstiger, kommen aber neben den weit höheren Kämpferbeanspruchungen nicht in Betracht ¹⁾.

Figur 11 der Taf. Nr. 1 enthält die graphische Darstellung der Stützlinien beider Rechnungsarten für Eigengewicht und halbseitige zufällige Belastung mit den annähernd in symmetrischen Querschnitten gelegenen Schnittpunkten ($y = 12.2$, $y' = 12.7 \text{ m}$).

Beispiel 12.

Zum Schlusse wurde ein (praktisch nicht ausführbarer) Grenzfall untersucht, bei welchem alle die Wirkung der Vernachlässigung der Achsialkraft beeinflussenden Momente in einem Sinne wirksam sind, und zwar im Gegensatze zu Beispiel 6 im günstigen, ausgleichenden Sinne. Es wurde ein Wölbogen mit großem Pfeilverhältnis (Vollbogen $\frac{f}{l} = \frac{1}{2}$), schlanker Dimensionierung und konstantem Querschnitte gewählt; die Differenzen reduzieren sich daher durchwegs, auch bei den sonst sehr empfindlichen Angriffsmomenten auf ein Minimum.

Aus der Tabelle II, Seite 40/41, sind auch die Werte der Angriffsmomente, Normalkräfte und Stützlinienabstände für fünf zwischen dem Kämpfer und Scheitel gelegene Querschnitte bei totaler Belastung des Bogens zu ersehen.

Taf. Nr. 2 enthält in Figur 12 die Darstellung der fast miteinander zur Deckung kommenden Stützlinien beider Rechnungsverfahren für Eigengewicht und halbseitige zufällige Last.

¹⁾ So wie bei Beispiel 5 sind die Differenzwerte der Scheitelmomente, in Prozenten des genauen Wertes ausgedrückt, für jeden Belastungsfall gleich groß, ebenso die Differenzen der Angriffspunkte der Stützlinie im Scheitel, deren Lage durch Änderung der Belastung keine Verschiebung erfährt; es liegt dies daran, daß Eigengewicht und zufällige Last in gleicher Weise über den Bogen verteilt sind.

Es darf bei der Beurteilung dieses letzten Beispielles allerdings nicht übersehen werden, daß der Bogen in der vorliegenden Gestalt nicht ausführbar wäre; er müßte bedeutend verstärkt und ein variabler Querschnitt angeordnet werden, wodurch sich die Differenzen beider Rechnungsarten wieder vergrößern. Praktisch ausführbare Gewölbe werden also jedenfalls größere Differenzen als die eben ermittelten zeigen, doch kann das vereinfachte Verfahren bei Bogen mit großem Pfeil umsomehr unbedenklich angewendet werden, da sich alle für die Dimensionierung maßgebenden Werte, wie in den beiden letzten Beispielen konstatiert werden kann, in diesem Falle ungünstiger stellen als nach der genauen Berechnung, was eine größere Sicherheit der Konstruktion gewährleistet.

Zusammenfassung der Grundgesetze für den Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft.

Wie bei der Betrachtung der einzelnen Beispiele bereits erkannt wurde, hängt die Größe des Einflusses der Vernachlässigung der Achsialkraft bei Bogenbrücken vor allem von der Bogenform, zum Teile auch von der Art der Belastung ab.

Bezüglich der **Bogenform** sind sowohl das Pfeilverhältnis, wie auch die Anordnung der Querschnittsdimensionen des Bogens von maßgebender Bedeutung. Es ergeben sich hiefür als Grundgesetze die folgenden:

Flache Bogen sind empfindlicher gegen die Anwendung der erwähnten Vernachlässigung als Bogen von großem Pfeilverhältnisse, ebenso sind stark dimensionierte Bogen empfindlicher als solche von schlanken Dimensionen und Bogen variablen Querschnittes wieder empfindlicher als solche von konstantem Querschnitte. Bogen mit Einzelträgern, z. B. eiserne Bogen, werden gegenüber solchen Konstruktionen, bei welchen der Querschnitt auf die ganze Breite konstant durchläuft (wie bei Gewölben), im allgemeinen stärker beeinflusst und zwar umsomehr, je größer der Trägheits-

radius $\rho = \sqrt{\frac{\mathcal{I}}{F}}$ des Querschnittes ist.

Die **Art der Belastung** übt auf die relative Größe der Differenzen der Resultate beider Rechnungsverfahren nur gering-

fügigen Einfluß aus. Die Größe der Differenzen des Horizontalschubes und der Achsialkräfte wird durch die Art der Belastung überhaupt nicht merkbar beeinflusst; bezüglich der Angriffsmomente werden Belastungen der Bogenmitte größere Differenzen hervorrufen als Belastungen der Bogenschenkel.

Im übrigen ist die Art der Belastung nur insoferne von Einfluß, als sich die Vernachlässigungen umso empfindlicher fühlbar machen müssen, je ungünstiger die Belastung gewählt wird, weil eben dann die ganze Rechnung mit ungünstigeren Werten durchzuführen ist. Eingehendere diesbezügliche Erörterungen sind der Besprechung der Beispiele 5 und 9 zu entnehmen, auf welche aber hier nicht weiter eingegangen werden soll. Es mag nur noch der besonders charakteristische Satz hervorgehoben werden, daß die gegenseitige Lage der Stützlinien beider Rechnungsarten zu einander durch die Art der Belastung keine wesentliche Änderung erfährt.

Was schließlich die **Beeinflussung der einzelnen Rechnungsgrößen** durch die Vernachlässigung der Achsialkraft betrifft, so können die aus den praktischen Beispielen gewonnenen Erfahrungen, wie folgt, kurz zusammengefaßt werden.

Die Vertikalkomponenten der auf den Bogen wirksamen äußeren und inneren Kräfte werden durch Vernachlässigung der Achsialkraft nicht oder nur unwesentlich beeinflusst. Dagegen wird die horizontale Komponente der Achsialkräfte, der Horizontalschub, merkbar beeinflusst, und zwar ergibt die Näherungsrechnung bis zu 20% größere Werte, in Ausnahmefällen (Beispiel 6) noch größere Differenzen. Da nun die Achsialkräfte aus dem Horizontalschube und der jeweiligen Vertikalkraft des Querschnittes resultieren, werden die Differenzen der nach beiden Rechnungsverfahren ermittelten Achsialkräfte im Scheitel am größten, im Kämpfer am geringsten sein, somit vom Scheitel gegen den Kämpfer allmählich abnehmen.

Die Änderung der Angriffsmomente durch Vernachlässigung der Achsialkraft erhellt am besten durch die Betrachtung der gegenseitigen Lage der Stützlinien, welche

sich nach beiden Rechnungsarten ergeben. Die Stützlinie der Näherungsrechnung liegt am Kämpfer oberhalb, am Scheitel unterhalb der Stützlinie für die genaue Rechnung. Da nun das Kämpfermoment für Bogen von kleinerem Pfeilverhältnisse als $\frac{f}{l} = \frac{1}{3}$ meist negativ ¹⁾ wird, gibt die genaue Rechnung für derart flache Bogen weitaus ungünstigere Resultate, während bei Vollbogen und Bogen mit großem Pfeil ($\frac{f}{l}$ über $\frac{1}{3}$) infolge des Auftretens positiver Kämpfermomente die Stützlinie der genauen Rechnung näher der neutralen Achse und daher günstiger liegt als bei der Näherungsrechnung.

Die Scheitelmomente zeigen im allgemeinen meist das gegenteilige Verhalten wie die Kämpfermomente; es kann jedoch von vornherein nicht entschieden werden, welches Rechnungsverfahren in einem gegebenen Falle ungünstigere Resultate gibt; dies ist auch insoferne belanglos, als die Scheitelbeanspruchungen meist gegenüber den Kämpferbeanspruchungen nicht in Betracht kommen.

Die für Kämpfer und Scheitel sich ergebenden Differenzen der Momente, der Stützlinienabstände und Beanspruchungen sind zugleich die äußersten Grenzwerte für den ganzen Bogen; in allen Zwischenquerschnitten sind die Unterschiede beider Rechnungsmethoden geringer, und in zwei annähernd symmetrisch zum Scheitel gelegenen Querschnitten verschwinden sie vollständig, nämlich dort, wo die beiden Stützlinien zum Schritze kommen. Die Schwerpunktsordinate dieser Querschnitte kann nach den Formeln:

$$y = \frac{M_o - M_{o1}}{H - H_1} = f - \frac{M_s - M_{s1}}{H - H_1} \text{ (linke Seite)}$$

beziehungsweise

$$y' = \frac{M'_o - M'_{o1}}{H - H_1} = f - \frac{M_s - M_{s1}}{H - H_1} \text{ (rechte Seite),}$$

annähernd berechnet werden; es ist somit tatsächlich $y = y'$.

¹⁾ Eine häufige Ausnahme bilden die Momente der unbelasteten Kämpfer im Falle halbseitiger Belastung; es überwiegen jedoch als ungünstigere Momente stets jene der belasteten Seite.

Die absoluten Differenzbeträge der nach beiden Rechnungsverfahren erhältlichen Angriffsmomente und Achsialkräfte sind für je zwei beliebige, symmetrisch zu einander liegende Querschnitte annähernd einander gleich. ($M_x - M_{x_1} = M_{(l-x)} - M_{(l-x)_1}$, $N_x - N_{x_1} = N_{(l-x)} - N_{(l-x)_1}$.)

Die Kämpferbeanspruchungen zeigen für Bogen von kleinerem Pfeilverhältnisse als etwa $\frac{1}{3}$, für welche, wie erwähnt, die Stützlinie der genauen Rechnung meist die ungünstigere Lage hat, an der Innenleibung des Bogens höhere Druckbeanspruchungen als für die Näherungsrechnung; an der Außenleibung ergeben sich häufig bedeutende Zugbeanspruchungen, während die Näherungsrechnung entweder nur Druck oder kleinere Zugbeanspruchungen ausweist. Für Bogen mit größerem Pfeilverhältnis als $\frac{1}{3}$ zeigt sich das gegenteilige Verhalten: die Näherungsrechnung gibt ungünstigere Resultate, welche jedoch meist nicht viel von den genauen Werten abweichen.

Die maximalen Scheitelbeanspruchungen reichen gewöhnlich nicht bis zu den ungünstigsten Kämpferbeanspruchungen hinan; eine eingehendere Betrachtung derselben kann daher umsomehr entfallen, als eine einheitliche Zusammenfassung der auf dieselben wirksamen Einflüsse nicht möglich erscheint.

Zulässigkeit der Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft.

Nach der vorstehenden kurzen Zusammenfassung der Resultate, welche aus der Durchrechnung der Beispiele gewonnen wurden, erübrigt die Folgerung, für welche Fälle eine Vernachlässigung der Achsialkraft bei Berechnung von Bogenbrücken ohne jedes Bedenken als zulässig erklärt werden kann.

Der Vorteil einer rascheren, aber angenäherten Berechnung wird durch die Unsicherheit der hieraus erhaltenen Resultate nur zu leicht in Frage gestellt; insbesondere erscheint

die Anwendung näherungsweise Berechnungen dann bedenklich, wenn die Resultate derselben sich erheblich günstiger als jene einer genauen Ermittlung stellen.

Dies trifft bei der oben geführten Untersuchung bis zu Pfeilverhältnissen des Bogens von etwa $\frac{1}{3}$ zu und es wird sich daher empfehlen, bei Berechnung von Bogen mit geringerem Pfeilverhältnis als $\frac{f}{l} = \frac{1}{3}$ stets den Einfluß der Achsialkraft zu berücksichtigen¹⁾, zumal dies nur geringe Mehrarbeit verursacht. Insbesondere wird diese Vorsicht zur Notwendigkeit, wenn es sich um besondere Ausführungen (große Spannweiten, ungewöhnliche Belastungen etc.) handelt. Es wird übrigens in vielen Fällen, besonders bei Bogen konstanten Querschnittes, zweckmäßig sein, die erste Rechnung angenähert durchzuführen und erst nach Feststellung der genaueren Dimensionen nach der exakten Methode mit Berücksichtigung des Einflusses der Achsialkraft vorzugehen.

Für Bogen mit größerem Pfeilverhältnis als $\frac{f}{l} = \frac{1}{3}$ kann das Näherungsverfahren mit Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft unbedenklich angewendet werden.

Vereinfachungen der Rechnung und Sätze, welche sich bei Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft ergeben.

Die Ursache, weshalb häufig auch größere Bogenkonstruktionen mit Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft berechnet werden, liegt darin, daß die drei Grundgleichungen (bei Annahme eines konstanten Elastizitätsmoduls) die einfache Form annehmen:

$$\int_0^l \frac{M_x ds}{\mathcal{F}} = 0,$$

¹⁾ Es dürfte hiebei in den meisten Fällen, vor allem bei sehr flachen Bogen, genügen, den Einfluß der Achsialkräfte angenähert dadurch zu berücksichtigen, daß deren Größe über die ganze Bogenlänge konstant gleich dem Horizontalschube angenommen wird, wie dies Perrodil, Professor Föppl und andere Autoren empfehlen.

$$\int_0^l \frac{M_x x ds}{\mathcal{F}} = 0,$$

$$\int_0^l \frac{M_x y ds}{\mathcal{F}} = 0,$$

beziehungsweise sich der Ausdruck der Formänderungsarbeit auf:

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_x^2}{\mathcal{F}} ds$$

reduziert und die Ermittlung der Achsialkraftglieder $N_x = H \cos \varphi + V_x \sin \varphi$ für die zur Bildung der Integrale betrachteten Querschnitte entfallen kann.

Insbesondere hat man bei Bogenkonstruktionen konstanten Querschnittes (meist eiserne Bogen) den Vorteil, eine Annahme über den Querschnitt, beziehungsweise dessen Trägheitsmoment vor Durchführung der Rechnung nicht machen zu müssen, was gerade bei eisernen Tragwerken die Rechnung wesentlich vereinfacht; der Querschnitt kann nachträglich auf Grund der Rechnungsergebnisse konstruiert werden, während bei der genauen Rechnung zumindest die Annahme des Trägheitsradius $\sqrt{\frac{\mathcal{F}}{F}}$ bereits vor Durchführung der Rechnung getroffen werden müßte.

Professor Winkler hat für den Fall der Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft folgende Sätze aufgestellt, welche sich aus den obigen Grundgleichungen unter der Annahme eines konstanten Trägheitsmomentes und der Näherung $ds = dx$ (Bogendifferential gleich dem Differential der Abszisse) ergeben ¹⁾:

Die zwischen Bogenachse und Stützlinie liegenden Flächen gleichen sich aus, das heißt ihre Summe gibt Null, wofern die zu verschiedenen Seiten der Bogenachse gelegenen Flächen mit entgegengesetzten Vorzeichen eingeführt werden $\left(\int_0^l M_x dx = 0 \right)$, und es muß auch das statische Moment dieser Flächen für

¹⁾ Aus dem Vortrage Winklers: »Die Lage der Stützlinie im Gewölbe«, Deutsche Bauzeitung, 1879.

Tabelle I.

Post-Nummer	Bezeichnung der Brückenkonstruktion, beziehungsweise Benennung der Brücke	Eventuelle Quellenangabe	Bogendimensionen					Art der Belastung	Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke			Horizontalschub			Kämpfermomente			Scheitelmoment			Achsiakraft im Kämpfer			Schubkraft im Scheitel			Abstand der Stützlinie von der Schwerachse						Beanspruchungen							
			Bogenschnur	Pfeilhöhe	Pfeilverhältnis	Bogenradius	Querschnittshöhe im Kämpfer		Querschnittshöhe im Scheitel	ohne		mit		ohne		mit		ohne		mit		ohne		mit		ohne		mit		ohne		mit		ohne		mit				
										Vernachlässigung der Achsiakraft		Differenz		Vernachlässigung der Achsiakraft		Differenz		Vernachlässigung der Achsiakraft		Differenz		Vernachlässigung der Achsiakraft		Differenz		Vernachlässigung der Achsiakraft		Differenz		Vernachlässigung der Achsiakraft		Differenz		Vernachlässigung der Achsiakraft		Differenz				
			in Metern		in Metern		in Tonnen		in %		in Tonnen		in %		in Tonnenmetern		in Tonnenmetern		in Tonnen		in %		in Tonnen		in %		in Metern		in Metern		in kg pro cm ²		in kg pro cm ²		in kg pro cm ²					
1	Steinerne Bogenbrücke	M. Gros de Perrodil: »Resistance des voutes et des arcs metalliques.« (Paris, 1879.)	152°0'	12'3"	$\frac{1}{12}$	263'20	4'00	2'00	Eigengewicht u. totale zuf. Last	2854	2854	0	7196	7733	+ 7'5	- 7979	- 2983	+ 4996	- 376	- 1483	- 1107	7716	8220	+ 6'5	-	-	-	- 1'034	- 0'362	+ 0'672	- 0'052	- 0'192	- 0'140	- 26'5	23'5	+ 50'0	wie im Kämpfer links	{ 75'9	41'0	- 34'9
2	" "	"	152°0'	12'3"	$\frac{1}{12}$	246'45	2'67	2'67	Eigengewicht u. totale zuf. Last	3192	3192	0	8191	8560	+ 4'5	- 5966	- 2984	+ 2982	+ 368	- 1128	- 1496	8777	9128	+ 4'0	-	-	-	- 0'680	- 0'327	+ 0'353	+ 0'045	- 0'132	- 0'177	- 43'4	79'4	- 43'6	wie im Kämpfer links	{ 104'0	152'3	+ 48'3
3	Eiserne Brücke über die Rhone bei Taraskon	"	59°44'6"	4'902"	$\frac{1}{12}$	93'397	1'70	1'70	Eigengewicht u. totale zuf. Last	105	105	0	286	318	+ 11'0	- 96'0	+ 8'2	+ 104'2	+ 55'4	+ 3'0	- 52'4	304'8	334'8	+ 10'0	-	-	-	- 0'315	+ 0'024	+ 0'339	+ 0'193	+ 0'010	- 0'183	207'8	148'3	- 59'5	wie im Kämpfer links	{ 68'9	103'9	+ 35'0
4	Steinbrücke über die Doire bei Turin	Castiglione: »Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme und deren Anwendung.« (Wien, 1886.)	45°9'23"	5'363"	$\frac{1}{8'5}$	51'937	2'01	1'50	Eigengewicht u. totale zuf. Last	228'679	228'679	0	324'710	359'361	+ 10'5	- 259'740	- 122'640	+ 137'100	+ 21'800	- 26'881	- 48'681	392'827	423'845	+ 7'9	-	-	-	- 0'660	- 0'289	+ 0'371	+ 0'067	- 0'075	- 0'142	- 19'0	2'9	+ 21'9	wie im Kämpfer links	{ 27'5	16'8	- 10'7
5	Eiserne Bogenbrücke	"	45°9'23"	5'363"	$\frac{1}{8'5}$	51'937	2'00	1'50	Eigengewicht u. totale zuf. Last	82'448	82'448	0	147'630	175'600	+ 19'0	- 91'387	+ 17'166	+ 108'553	+ 44'749	+ 3'401	- 41'348	169'924	194'905	+ 14'7	-	-	-	- 0'538	+ 0'088	+ 0'626	+ 0'303	+ 0'019	- 0'284	30'8	575'5	+ 544'7	wie im Kämpfer links	{ 739'0	553'9	- 185'1
6	Bruchsteingewölbe	"	10°7'20"	1'276"	$\frac{1}{8'4}$	11'774	1'44	1'12	Eigengewicht	26'088	26'088	0	24'428	50'361	+ 105'2	- 24'192	- 0'631	+ 23'561	+ 9'450	- 0'079	- 9'529	34'199	56'658	+ 65'7	-	-	-	- 0'707	- 0'011	+ 0'696	+ 0'387	- 0'002	- 0'389	- 4'6	3'8	+ 8'4	wie im Kämpfer links	{ 6'7	4'5	- 2'2
7	Wiener Bruchstein-Versuchsgewölbe (vgl. Bericht des Gew.-Ausschusses des österr. Ing.- u. Arch.-Vereines, 1895)	Dr. J. von Weyrauch: »Die elastischen Bogensträger, ihre Theorie und Berechnung etc.« (München, 1897.)	23°7'58"	4'502"	$\frac{1}{5'3}$	17'923	1'10	0'60	Eigengewicht	24'095	24'095	0	25'796	26'821	+ 4'0	- 4'902	- 1'157	+ 3'745	+ 0'428	- 0'463	- 0'891	35'286	36'054	+ 2'1	-	-	-	- 0'139	- 0'032	+ 0'107	+ 0'017	- 0'017	- 0'034	0'8	2'7	+ 1'0	wie im Kämpfer links	{ 5'0	3'7	- 1'3
8	Steinerne Bogenbrücke	Ingenieur Siegmund Kulka: »Über die Berechnung großer, gewölbter Brücken.« (Zeitschr. d. öst. Ing. u. A.-V. 1894, Nr. 30.)	30°0'	7'26"	$\frac{1}{4'1}$	19'126"	1'60	1'10	Eigengewicht	65'800	65'800	0	43'269	44'783	+ 3'5	- 22'804	- 14'482	+ 8'322	- 1'890	- 4'637	- 2'747	78'460	79'400	+ 1'2	-	-	-	- 0'290	- 0'182	+ 0'108	- 0'044	- 0'104	- 0'060	- 0'9	3'6	+ 4'5	wie im Kämpfer links	{ 6'8	4'1	- 2'7
9	Bruchsteingewölbe	"	19°26'0"	5'00"	$\frac{1}{4}$	11'774	2'24	1'12	Eigengewicht	73'519	73'519	0	47'557	53'348	+ 12'2	- 26'445	- 2'287	+ 24'158	+ 4'155	- 0'644	- 4'790	87'449	90'345	+ 3'3	-	-	-	- 0'302	- 0'025	+ 0'277	+ 0'088	- 0'012	- 0'100	0'7	3'8	+ 3'1	wie im Kämpfer links	{ 6'3	4'5	- 1'8
10	Brücke aus Ziegelmauerwerk für die Eisenbahnlinie Mailand-Venedig über den Oglio	Castiglione: »Theorie des Gleichgewichts elastischer Systeme und deren Anwendung.« (Wien, 1886.)	42°00'0"	11'90"	$\frac{1}{3'5}$	24'479"	2'38	1'40	Eigengewicht des Bogens allein (ohne Hintermauerung)	51'350	51'350	0	38'671	39'724	+ 2'7	+ 9'110	+ 19'199	+ 10'089	+ 5'096	+ 2'593	- 2'503	64'000	64'547	+ 0'8	-	-	-	+ 0'142	+ 0'297	+ 0'155	+ 0'132	+ 0'065	- 0'067	7'3	9'5	+ 2'2	wie im Kämpfer links	{ 8'6	7'3	- 1'3
11	Schmiedeisernes Bundgespärre eines Hallendaches	"	48°50'0"	19'22"	$\frac{1}{2'5}$	24'908	1'816	1'816	Eigengewicht u. totale zuf. Last	25'442	25'442	0	15'606	15'927	+ 2'0	+ 29'742	+ 33'748	+ 4'004	+ 14'742	+ 12'579	- 2'163	28'148	28'216	+ 0'2	-	-	-	+ 1'056	+ 1'196	+ 0'140	+ 0'944	+ 0'790	- 0'150	546'1	590'8	+ 44'7	wie im Kämpfer links	{ 285'9	266'2	- 19'7
12	Steinerne Bogenbrücke	"	21°00'0"	10'50"	$\frac{1}{2}$	10'500	1'000	1'000	Eigengewicht u. totale zuf. Last	55'240	55'240	0	19'872	20'020	+ 0'8	+ 32'959	+ 33'949	+ 0'990	+ 10'531	+ 9'966	- 0'565	55'244	55'244	0	-	-	-	+ 0'597	+ 0'615	+ 0'018	+ 0'530	+ 0'498	- 0'032	60'7	62'1	+ 1'4	wie im Kämpfer links	{ 20'0	19'2	- 0'8

Anmerkungen:

Zu Post 1 und 2. Die Werte der Kämpferdruckkomponenten, Kämpfer- und Scheitelmomente, Achsial- und Schubkräfte sind für 4 m Brückenbreite berechnet.
 Zu Post 8. Die Werte der Kämpferdruckkomponenten, Kämpfer- und Scheitelmomente, Achsial- und Schubkräfte sind als Verhältniszahlen für ein spezifisches Mauerwerksgewicht = 1 berechnet und wären noch mit $g = 23 \text{ t/m}^2$, dem Mauerwerksgewichte, zu multiplizieren. Die Stützlinienabstände und Beanspruchungen erscheinen mit ihren Vollwerten eingestellt.

Anmerkungen:

Zu Post 10. Hierzu gilt die zu Post 8 gemachte Anmerkung mit dem Unterschiede der Annahme eines spezifischen Mauerwerksgewichtes $g = 20 \text{ t/m}^2$, wofür obenstehende Beanspruchungen ermittelt wurden.
 Zu Post 12. Hierzu gilt die zu Post 8 gemachte Anmerkung, mit dem Unterschiede, daß die Beanspruchungen für ein spezifisches Mauerwerksgewicht $g = 24 \text{ t/m}^2$ ermittelt wurden.

Tabelle II.

Zu Beispiel Post Nr.	Art der Belastung	Querschnitt		Momente			Achskräfte			Stützlinienabstände			Beanspruchungen			Anmerkung	
		Bezeichnung	Winkel zur Scheitel-Vertikalen	ohne	mit	Differenz	ohne	mit	Differenz	ohne	mit	Differenz	ohne	mit	Differenz		
				Vernachlässigung der Achskräfte			Vernachlässigung der Achskräfte			Vernachlässigung der Achskräfte							
				in Tonnenmetern			in Tonnen			in Metern			in kg pro cm ²				
1	Eigengewicht und totale zufällige Last	Kämpfer	16° 54'	- 7979	- 2983	+ 4996	7716	8229	+ 6'65	- 1'034	- 0'362	+ 0'672	- 26'5 123'0	23'5 79'4	+ 50'0 - 43'6	Die Werte der Momente und Achskräfte sind für 4 m Brückenbreite berechnet.	
		1	15°	- 3425	+ 283	+ 3708	7506	8024	+ 6'90	- 0'456	+ 0'035	+ 0'491	12'4 92'4	59'4 52'8	+ 47'0 - 39'6		
		2	12°	+ 198	+ 2179	+ 1981	7387	7913	+ 7'12	+ 0'027	+ 0'275	+ 0'248	64'5 58'1	101'7 29'7	+ 37'2 - 28'4		
		3	9°	+ 1076	+ 1710	+ 634	7286	7816	+ 7'27	+ 0'148	+ 0'219	+ 0'071	95'4 46'4	114'9 37'2	+ 19'5 - 9'2		
		4	6°	+ 630	+ 297	- 333	7230	7764	+ 7'39	+ 0'087	+ 0'038	- 0'049	98'9 61'6	94'8 77'4	- 4'1 + 15'8		
		5	3°	- 70	- 983	- 913	7204	7740	+ 7'44	- 0'010	- 0'127	- 0'117	84'8 89'6	59'1 128'4	- 25'7 + 38'8		
		Scheitel	0°	- 376	- 1483	- 1107	7196	7733	+ 7'47	- 0'052	- 0'192	- 0'140	75'9 104'0	41'0 152'3	- 34'9 + 48'3		
2	Eigengewicht und totale zufällige Last	Kämpfer	18° 4'	- 5966	- 2983	+ 2983	8777	9128	+ 4'00	- 0'680	- 0'327	+ 0'353	- 43'4 207'8	22'7 148'3	+ 66'1 - 59'5	Die Werte der Momente und Achskräfte sind für 4 m Brückenbreite berechnet.	
		1	15°	- 1199	+ 400	+ 1599	8546	8902	+ 4'17	- 0'140	+ 0'045	+ 0'185	55 105	92 75	+ 37 - 30		
		2	12°	+ 823	+ 1312	+ 489	8392	8753	+ 4'30	+ 0'098	+ 0'150	+ 0'052	96 61	111 53	+ 15 - 8		
		3	9°	+ 1277	+ 900	- 377	8293	8657	+ 4'39	+ 0'154	+ 0'104	- 0'050	104 51	100 62	- 4 + 9		
		4	6°	+ 981	- 17	- 998	8233	8599	+ 4'45	+ 0'119	- 0'002	- 0'121	98 56	80 81	- 18 + 25		
		5	3°	+ 554	- 818	- 1372	8201	8569	+ 4'49	+ 0'067	- 0'096	- 0'163	88 65	63 97	- 25 + 32		
		Scheitel	0°	+ 368	- 1128	- 1496	8191	8560	+ 4'50	+ 0'045	- 0'132	- 0'177	84'5 68'9	56'4 103'9	- 28'1 + 35'0		
8	Eigengewicht	Kämpfer	51° 38'	- 22'804	- 14'482	+ 8'322	78'460	79'400	+ 1'2	- 0'290	- 0'182	+ 0'108	- 0'9 23'5	3'6 19'2	+ 4'5 - 4'3	Die Werte der Momente und Achskräfte sind für ein spezifisches Mauerwerksgewicht = 1 berechnet und wären noch mit $g = 2'3 t/m^3$ zu multiplizieren.	
		1	38° 44'	- 1'033	+ 2'626	+ 3'659	58'377	59'556	+ 2'0	- 0'018	+ 0'044	+ 0'062	-	-	-		
		2	25° 49'	+ 5'106	+ 5'267	+ 0'161	47'912	49'275	+ 2'8	+ 0'107	+ 0'107	+ 0	-	-	-		
		3	12° 54'	+ 1'091	- 0'913	- 2'004	44'097	45'574	+ 3'3	+ 0'025	- 0'020	- 0'045	-	-	-		
		Scheitel	0°	- 1'890	- 4'637	- 2'747	43'269	44'783	+ 3'5	- 0'044	- 0'104	- 0'060	6'8 11'2	4'1 14'7	- 2'7 + 3'5		
	Eigengewicht und totale zufällige Last $p = 1'274 t/m$	Kämpfer	51° 38'	- 20'523	- 10'456	+ 10'067	91'325	92'463	+ 1'2	- 0'225	- 0'113	+ 0'112	2'0 24'2	7'7 18'9	+ 5'7 - 5'3		
		1	38° 44'	- 2'664	+ 1'760	+ 4'424	70'119	71'546	+ 2'0	- 0'038	+ 0'025	+ 0'063	-	-	-		
		2	25° 49'	+ 4'011	+ 4'202	+ 0'191	58'475	60'124	+ 2'8	+ 0'069	+ 0'070	+ 0'001	-	-	-		
		3	12° 54'	+ 1'779	- 0'650	- 2'429	53'781	55'568	+ 3'3	+ 0'033	- 0'012	- 0'045	-	-	-		
		Scheitel	0°	- 0'363	- 3'690	- 3'327	52'617	54'449	+ 3'5	- 0'007	- 0'068	- 0'061	10'6 11'4	7'2 15'6	- 3'4 + 4'2		
		Belastete Seite	Kämpfer links	51° 38'	- 31'336	- 22'158	+ 9'178	87'213	88'252	+ 1'2	- 0'359	- 0'251	+ 0'108	- 4'3 29'4	0'7 24'6		+ 5'0 - 4'8
			1	38° 44'	- 4'034	- 0'005	+ 4'029	65'512	66'816	+ 2'0	- 0'062	- 0'000	+ 0'062	-	-		-
			2	25° 49'	+ 7'574	+ 7'741	+ 0'167	53'594	55'101	+ 2'8	+ 0'141	+ 0'141	+ 0	-	-		-
			3	12° 54'	+ 5'545	+ 3'324	- 2'221	48'879	50'511	+ 3'3	+ 0'113	+ 0'066	- 0'047	-	-		-
Unbelastete Seite	Scheitel	0°	- 1'126	- 4'164	- 3'038	47'943	49'616	+ 3'5	- 0'023	- 0'084	- 0'061	8'8 11'3	5'6 15'1	- 3'2 + 3'8			
	3'	12° 54'	- 2'675	- 4'887	- 2'212	49'000	50'632	+ 3'3	- 0'055	- 0'097	- 0'042	-	-	-			
	2'	25° 49'	+ 1'543	+ 1'727	+ 0'184	52'793	54'299	+ 2'8	+ 0'029	+ 0'031	+ 0'002	-	-	-			
	1'	38° 44'	+ 0'338	+ 4'391	+ 4'053	62'984	64'286	+ 2'1	+ 0'005	+ 0'068	+ 0'063	-	-	-			
Kämpfer rechts	51° 38'	- 11'990	- 2'781	+ 9'209	82'572	83'610	+ 1'2	- 0'145	- 0'033	+ 0'112	5'4 18'3	10'5 13'5	+ 5'1 - 4'8				
12	Eigengewicht und totale zufällige Last $p = 2'000 t/m$	Kämpfer	90°	+ 32'959	+ 33'949	+ 0'990	55'244	55'244	0	+ 0'597	+ 0'615	+ 0'018	60'7 34'2	62'1 35'6	1'4 - 1'4	Die Werte der Momente und Achskräfte sind für ein spezifisches Mauerwerksgewicht = 1 berechnet und wären noch mit $g = 2'4 t/m^3$ zu multiplizieren.	
		1	75°	- 4'619	- 4'031	+ 0'588	52'235	52'274	+ 0'1	- 0'088	- 0'077	+ 0'011	-	-	-		
		2	60°	- 13'908	- 13'696	+ 0'212	42'750	42'825	+ 0'2	- 0'325	- 0'320	+ 0'005	-	-	-		
		3	45°	- 8'084	- 8'194	- 0'110	32'587	32'691	+ 0'3	- 0'248	- 0'250	- 0'002	-	-	-		
		4	30°	+ 1'333	+ 0'977	- 0'356	25'145	25'273	+ 0'5	+ 0'053	+ 0'039	- 0'014	-	-	-		
		5	15°	+ 8'118	+ 7'606	- 0'512	21'110	21'253	+ 0'7	+ 0'384	+ 0'358	- 0'026	-	-	-		
		Scheitel	0°	+ 10'531	+ 9'966	- 0'565	19'872	20'020	+ 0'8	+ 0'530	+ 0'498	- 0'032	20'0 10'4	19'2 9'6	- 0'8 + 0'8		

zwei beliebige Achsen gleich Null sein $\left(\int_0^l M_x x dx = 0, \int_0^l M_x y dx = 0 \right)$.

Statt dessen könnte man auch sagen: Die beiden durch die Bogensehnen begrenzten, sowie einerseits durch die Bogenachse, andererseits durch die Stützlinie begrenzten Flächen müssen gleich groß sein und denselben Schwerpunkt haben.

Beide Bedingungen sind in folgender Form von Professor Winkler zu einer einzigen vereinigt worden: »Bei konstantem Querschnitte ist diejenige Stützlinie nahezu die richtige, für welche die Summe der Quadrate der Abweichungen von der Bogenachse ein Minimum wird«. Dieser Satz ergibt sich auch aus dem Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit, wonach mit den obigen Vernachlässigungen $\int_0^l M_x^2 dx$ ein Minimum sein muß.

Anhang.

Andere Näherungsverfahren zur Berechnung von Bogenbrücken mit eingespannten Kämpfern.

a) *Näherungsverfahren mit Annahme einer parabolischen Bogenachse.*

Da die Ergebnisse der vorstehend geführten Untersuchung speziell für flache Bogen zu ungunsten der Näherungsrechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft ausfallen, könnte die Frage gestellt werden, welche Näherungsrechnung für flache Bogen zuverlässiger anzuwenden wäre.

Hier erweist sich die Berechnung unter Annahme einer parabolischen Bogenachse und eines mittleren konstanten Querschnittes¹⁾ als ganz vorzügliches und einfaches Näherungsverfahren, welches selbst noch bei größerem Pfeilverhältnis der Bogen weitaus genauere Resultate liefert, als die durch Vernachlässigung der Achsialkraft geübte Näherungsrechnung, wie

¹⁾ Man wählt bei Gewölben am besten $d_{\text{mittel}} = \frac{2d_s + d_k}{3}$, wobei d_s die Scheitelstärke, d_k die Kämpferstärke des Gewölbes bedeutet.

aus den Zusammenstellungen der Tabelle III, Seite 46, ersehen werden wolle. In dieser Tabelle sind die bereits vorhin betrachteten Beispiele 3, 6, 7 und 9 aufgenommen, und es werden außer den genauen Rechnungswerten für die kreisförmige Bogenachse und jenen für parabolische Achse¹⁾ auch noch die Näherungswerte für die Berechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft zum Vergleiche angegeben.

Nach den Zusammenstellungen der Tabelle III zeigt sich die beste Übereinstimmung für das erste Beispiel eines flachen Bogens von $\frac{1}{12}$ Pfeil, zumal die Resultate der parabolischen Berechnung nicht nur durchwegs viel genauer sind als jene der Näherungsberechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft, sondern auch etwas ungünstiger als die genauen Werte, was der Sicherheit halber vorteilhaft ist.

Aber auch in den übrigen Beispielen ist die parabolische Berechnung besser zutreffend als die Näherungsrechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft, da sich insbesondere die für die Dimensionierung maßgebenden Kämpferbeanspruchungen weit entsprechender ergeben, trotz der Einführung eines mittleren konstanten an Stelle des variablen Querschnittes und obwohl die Annahme einer parabolischen Achse besonders bei dem letzten Beispiele infolge des großen Pfeilverhältnisses von $\frac{1}{4}$ eigentlich nicht mehr zulässig wäre.

Die größere Genauigkeit des Näherungsverfahrens unter Annahme einer parabolischen Bogenachse gegenüber jenem mit Vernachlässigung der Achsialkraft ist auch aus der in Fig. 3, Taf. Nr. 1 mit blauer Farbe angedeuteten Stützlinie, insbesondere jedoch aus den für die Beispiele 6 und 9 (siehe Fig. 6, 6a und b in Taf. Nr. 2, sowie Fig. 9, 9a, b und c in Taf. Nr. 3) dargestellten Stütz- und Einflußlinien zu ersehen²⁾, welche sich weit enger an die bezüglichen Kurven

¹⁾ Die Resultate der parabolischen Berechnung wurden bei Beispiel 7 dem Weyrauch'schen Werke entnommen, in allen übrigen Fällen besonders ermittelt, und zwar bei Beispiel 6 und 9 mit Hilfe der in Taf. Nr. 2 und 3 ersichtlichen Einflußlinien.

²⁾ Für das Beispiel 7 wurde die Stützlinie der parabolischen Berechnung in Fig. 7 der Taf. Nr. 2 nicht eingetragen, um die Figur nicht undeutlich zu machen.

der genauen Rechnung anschließen als jene des Näherungsverfahrens mit Vernachlässigung der Achsialkraft.

Dagegen ist ein Nachteil der parabolischen Berechnung, daß sich von vornherein über den Sinn der Differenzen gegenüber der genauen Berechnung und über die gegenseitige voraussichtliche Lage der Stütz- und Einflußlinien beider Berechnungsarten eine bestimmte Angabe nicht machen läßt¹⁾; man kann also nicht so wie bei der Näherungsrechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft aus der Lage der Stützlinie der Näherungsrechnung auf jene der genauen Rechnung, beziehungsweise auf die wahren Werte der Momente, Stützlinienabstände und Beanspruchungen Schlüsse ziehen.

Mit Beachtung der vorstehenden Bemerkungen kann das Schlußergebnis dahin gefaßt werden, daß es sich bei flachen Bogen von etwa unter $\frac{1}{5}$ Pfeilverhältnis stets

empfehlen wird, wenn schon eine Näherungsrechnung der exakten Ermittlung vorgezogen werden soll, die Annahme einer parabolischen Bogenachse einzuführen, zumal man bei diesem Verfahren rascher zum Ziele gelangt und genauere Resultate erhält als durch die Näherungsrechnung mit Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft.

Professor Dr. v. Weyrauch untersucht in seinem bereits wiederholt zitierten Werke die Zulässigkeit der Anwendung der Formeln für parabolische Bogen auf Bogen anderer Achsform durch mehrfache vergleichende Berechnungen; er empfiehlt jedoch, hiebei mit Vorsicht zu verfahren und in Zweifelsfällen (bei nicht ganz flachen Bogen) die Berechnung besser auf Grund der wirklichen Achsform durchzuführen. »Wenn auch die Abweichungen gegen die genaueren Werte für manche Größen wie die Stützenreaktionen H , V , V' , die Vertikalkräfte V_x und die Normalkräfte N_x in vielen Fällen gering oder gleich Null

¹⁾ Es sei nur z. B. darauf hingewiesen, daß die gegenseitige Lage der Stützlinien der genauen und der parabolischen Berechnung in den Beispielen 3 und 6, wie durch einen Vergleich der Fig. 3 in Taf. Nr. 1 mit der Fig. 6 in Taf. Nr. 2 ersichtlich, gerade die entgegengesetzte ist.

sind, so können sie doch für andere Größen wie die Momente M_x , die Normalspannungen σ und die Einsenkungen e so groß ausfallen, daß die ganze Berechnung damit unbrauchbar wird.« Weyrauch konstatiert für das Beispiel 7 des Wiener Bruchsteinversuchsgewölbes, daß »die Berechnung nach jenen Formeln« (für parabolische Bogen) »im vorliegenden Falle nicht genügend gewesen wäre.«

Eine weitere vergleichende Zusammenstellung der Rechnungsergebnisse von Kreis- und Parabelbogen ist im II. Bande des Handbuches der Ingenieurwissenschaften (5. Abt., Auflage 1905) von Hofrat Professor Dipl. Ing. J. Melan für einen Bogen vom Pfeilverhältnis $\frac{1}{4.35}$ durchgeführt; es werden hierselbst die Einflußordinaten des Horizontalschubes H , des Wertes $X = H \frac{e_2 - e_1}{l}$ und des Kämpfermomentes M für beide Berechnungen einander gegenübergestellt. Die graphische Darstellung der Einflußlinien für H und M steht mit den in Taf. Nr. 3 ersichtlichen Ergebnissen in voller Übereinstimmung. Professor Melan kommt zu dem Schlusse, daß man auch bei Kreisbogen gewölben sich meistens mit der Näherung begnügen können wird, nach den einfacheren Formeln des Parabelbogens von konstantem Trägheitsmoment zu rechnen, und daß selbst für ein Gewölbe von dem vorerwähnten größeren Stichverhältnis der Fehler im Horizontalschube nicht groß, dagegen der Fehler in den Momenten beträchtlicher sei.

Daß man jedoch mit Vernachlässigungen und Näherungsrechnungen nicht zu weit gehen darf, erhellt unter anderem aus der schon von Weyrauch gemachten Bemerkung, daß für parabolische, total und gleichförmig belastete Bogen bei Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft die Angriffsmomente sämtlicher Querschnitte (und damit auch die Einsenkungen) zu Null werden, also die Stützlinie sich durchaus mit der Gewölbachse decken müßte, ein Ergebnis, das wegen seiner Unwahrscheinlichkeit keinen praktischen Wert hat.

Für diesen Fall der Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft bei Parabelbogen bringt Professor Melan im obzitierten Bande des Handbuches der Ingenieurwissenschaften eine

Formel zur Beurteilung des begangenen Fehlers. Besteht der Bogen aus zwei gleichen Gurten vom Abstände h und der Pfeilhöhe f und bezeichnet σ die Gurtspannung für eine mit der Schwerachse zusammenfallende Stützlinie (das ist der Fall bei Vernachlässigung der Achsialkraft), so werden die Spannungen mit Rücksicht auf die exzentrische Lage der Stützlinie (das ist für die genaue Rechnung):

im Kämpfer:
$$\text{Obergurt } \sigma_{ok} = \sigma \frac{1 - \frac{15}{4} \frac{h}{f}}{1 + \frac{45}{16} \frac{h^2}{f^2}}$$

$$\text{Untergurt } \sigma_{nk} = \sigma \frac{1 + \frac{15}{4} \frac{h}{f}}{1 + \frac{45}{16} \frac{h^2}{f^2}}$$

im Scheitel:

$$\text{Obergurt } \sigma_{os} = \sigma \frac{1 + \frac{15}{8} \frac{h}{f}}{1 + \frac{45}{16} \frac{h^2}{f^2}}$$

$$\text{Untergurt } \sigma_{us} = \sigma \frac{1 - \frac{15}{8} \frac{h}{f}}{1 + \frac{45}{16} \frac{h^2}{f^2}}$$

Im Kämpfer wird die Differenz für die Untergurtspannung am größten für $\frac{h}{f} = 0,387$ ($\sigma_u = 1,72 \sigma$), für $\frac{h}{f} \geq \frac{4}{15}$ erhält der Obergurt Zugbeanspruchung; im Scheitel tritt der größte Wert der Obergurtspannung bei $\frac{h}{f} = \frac{4}{15}$ ein ($\sigma_o = 1,25 \sigma$), während σ_u für $\frac{h}{f} \geq \frac{8}{15}$ Zugbeanspruchung wird.

Die eben zitierten Formeln können aber auch ganz allgemein bei Bogen beliebiger Achsform und beliebigen Querschnittes dazu benützt werden, sich aus einer fertig vorliegenden Berechnung, welche mit Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft durchgeführt wurde, ein ungefähres Bild von den tatsächlich auftretenden Spannungen zu verschaffen, wobei man

annähernd gute Resultate erhält, wenn h der gesamten Querschnittshöhe gleichgesetzt wird. Z. B.: Gegeben seien die Näherungswerte der Beanspruchungen für das Beispiel 1 (vergleiche Tabelle I) mit $\sigma_{ok} = 23.5$, $\sigma_{uk} = 79.4 \text{ kg/cm}^2$ für den Kämpfer, $\sigma_{os} = 41.0$, $\sigma_{us} = 152.3 \text{ kg/cm}^2$ für den Scheitel.

$$\frac{h}{f} \text{ ist für den Kämpfer } \frac{4.0}{12.3} = \text{rund } \frac{1}{3},$$

$$\text{für den Scheitel } \frac{2.0}{12.3} = \text{rund } \frac{1}{6}.$$

Somit ergeben sich als wahrscheinlichere Werte

$$\sigma_{ok} = 23.5 \frac{1 - \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{9}} = -4.5 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{uk} = 79.4 \frac{1 + \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3}}{1 + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{9}} = 136 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{os} = 41.0 \frac{1 + \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6}}{1 + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{36}} = 50 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{us} = 152.3 \frac{1 - \frac{15}{8} \cdot \frac{1}{6}}{1 + \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{36}} = 97 \text{ kg/cm}^2.$$

Es zeigt sich, daß die solcherart gewonnenen Werte weit näher an den wahren Werten: $\sigma_{ok} = -26.5 \text{ kg/cm}^2$

$$\sigma_{uk} = 123.0 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{os} = 75.9 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_{us} = 104.0 \text{ kg/cm}^2$$

liegen als die ersten Resultate. In anderen Fällen zeigen sich noch weit bessere Übereinstimmungen.

b) Näherungsverfahren zur raschen Orientierung über die in einem Bogen auftretenden statischen Verhältnisse.

Neben der Näherungsberechnung von Bogenbrücken unter Annahme einer parabolischen Bogenachse möge ferner wegen der besonderen Kürze und Einfachheit des Rechnungsvorganges

Tabelle III.

Postnummer der Tabelle I	Pfeilverhältnis des Bogens	Art der Belastung	Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke				Horizontalschub				Kämpfermomente				Scheitelmoment				Achskräfte im Kämpfer				Schubkraft im Scheitel								
			genau	für parabolische Bogenachse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Bogenachse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Bogenachse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Bogenachse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Bogenachse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz				
			berechnet				berechnet				berechnet				berechnet			berechnet				berechnet				berechnet					
			in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰	in Tonnen	in ‰			
3	1/12	Eigengewicht a. tot. zuf. Last	105.0	105.0	0	105.0	0	286.2	279.8	-2.1	317.9	+11.0	-96.0	-126.1	-30.1	+8.2	+104.2	+55.4	+63.0	+7.6	+3.0	-52.4	304.8	297.9	-2.3	334.8	+10.0				
6	1/8.4	Eigengewicht a. tot. zuf. Last	36.808	36.808	0	36.808	0	35.423	39.523	+11.5	73.051	+106.2	-34.376	-29.719	+4.657	-0.139	+34.237	+13.967	+13.392	-0.575	+0.191	-13.776	49.081	52.632	+7.2	81.668	+66.4				
7	1/5.3	Eigengewicht	24.095	24.095	0	24.095	0	25.796	25.882	+0.3	26.821	+4.0	-4.902	-6.026	-1.124	-1.157	+4.869	+0.428	-1.083	-1.511	-0.463	-0.891	35.286	35.350	0	36.054	+2.1				
		Eigengewicht u. halbs. zuf. Last	38.171 27.169	37.814 27.526	-1.0 +1.3	38.163 27.177	0	37.703	37.614	-0.2	39.189	+4.0	-20.867 +13.358	-19.083 +6.655	+1.784 -6.703	-15.342 +18.700	+4.525 +5.342	+1.598	-0.460	-2.058	+0.318	-1.280	53.532 46.240	53.228 46.410	-0.5 +0.4	54.639 47.358	+2.0 +2.4	3.074	3.431	+12.0	3.682
9	1/4	Eigengewicht	73.519	73.519	0	73.519	0	47.557	47.920	+0.8	53.348	+12.2	-26.445	-30.076	-3.631	-2.287	+24.158	+4.155	-1.073	-5.228	-0.644	-4.799	87.449	87.630	0	90.345	+3.3				
		Eigengewicht u. halbs. zuf. Last	89.532 76.768	89.170 77.130	-0.4 +0.5	89.545 76.755	0	56.441	57.830	+2.5	63.326	+12.2	-41.807 -11.624	-44.270 -21.120	-2.463 -9.496	-13.326 +17.112	+28.481 +28.736	+5.834	-0.085	-5.919	+0.016	-5.818	105.758 94.704	106.140 95.700	+0.5 +1.0	109.212 98.135	+3.3 +3.6	3.248	3.610	+11.0	3.235

Postnummer der Tabelle I	Pfeilverhältnis des Bogens	Art der Belastung	Abstand der Stützlinie von der Schwerachse										Beanspruchungen														
			im Kämpfer					im Scheitel					im Kämpfer links					im Kämpfer rechts					im Scheitel				
			genau	für parabolische Achse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Achse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Achse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Achse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz	genau	für parabolische Achse	Differenz	mit Vernachlässigung der Achskraft berechnet	Differenz
			berechnet				berechnet				berechnet				berechnet			berechnet				berechnet				berechnet	
3	1/12	Eigengewicht und totale zufällige Last	-0.315	-0.423	-0.101	+0.024	+0.339	+0.193	+0.225	+0.032	+0.010	-0.183	22.8 404.0	-41.6 458.9	-64.4 +54.9	250.7 218.1	+227.9 -185.9	wie im Kämpfer links					310.3 90.6	320.9 70.9	+10.6 -19.7	228.6 216.6	-81.7 +126.0
6	1/8.4	Eigengewicht und totale zufällige Last	-0.700	-0.565	+0.135	-0.002	+0.698	+0.394	+0.339	-0.055	+0.003	-0.391	-6.5 13.4	-5.0 12.2	+1.5 -1.2	5.6 5.7	+12.1 -7.7	wie im Kämpfer links					9.8 -3.5	10.0 -2.9	+0.2 +0.6	6.6 6.4	-3.2 +9.9
7	1/5.3	Eigengewicht	-0.139	-0.170	-0.031	-0.032	+0.107	+0.017	-0.042	-0.059	-0.017	-0.034	0.8 5.6	0.2 6.2	-0.6 +0.6	2.7 3.8	+1.9 -1.8	wie im Kämpfer links					5.0 3.6	2.5 6.1	-2.5 +2.5	3.7 5.2	-1.3 +1.6
		Eigengewicht und halbs. zufällige Last	-0.390 +0.289	-0.359 +0.144	+0.031 -0.145	-0.281 +0.395	+0.109 +0.106	+0.042	-0.012	-0.054	+0.008	-0.034	-5.4 15.1	-4.6 14.3	+0.8 -0.8	-2.6 12.6	+2.8 -2.5	10.9 -2.4	7.4 0.9	-3.5 +3.5	13.6 -5.0	+2.7 -2.6	8.9 3.6	5.5 7.0	-3.4 +3.4	7.1 6.0	-1.8 +2.4
9	1/4	Eigengewicht	-0.302	-0.350	-0.048	-0.025	+0.277	+0.088	-0.022	-0.110	-0.012	-0.100	0.7 7.1	0.3 7.5	-0.4 +0.4	3.8 4.3	+3.1 -2.8	wie im Kämpfer links					6.3 2.2	3.8 4.8	-2.5 +2.6	4.5 5.1	-1.8 +2.9
		Eigengewicht und halbs. zufällige Last	-0.395 -0.123	-0.400 -0.220	-0.005 -0.097	-0.122 +0.174	+0.273 +0.297	+0.103	-0.001	-0.104	+0.000	-0.103	-0.3 9.7	-0.3 9.8	0 +0.1	3.3 6.5	+3.6 -3.2	2.8 5.6	1.7 6.9	-1.1 +1.3	6.4 2.3	+3.6 -3.3	7.8 2.2	5.1 5.1	-2.7 +2.9	5.7 5.6	-2.1 +3.4

eines Verfahrens gedacht werden, welches Hofrat Professor Joh. E. Brik der k. k. technischen Hochschule in Wien zur raschen Orientierung über die statischen Verhältnisse von Bogenbrücken in seinen Vorlesungen empfiehlt.

Das Verfahren gründet sich auf die Theorie der Stützlinie, welche für den Krümmungsradius im Scheitel die Formel

$$\rho = \frac{H}{q_0}$$

ergibt, wobei q_0 die mittlere Belastung pro Längeneinheit im Scheitel bedeutet und für Gewölbe durch das Produkt aus der Belastungshöhe im Scheitel η_0 , dem spezifischen Mauerwerksgewicht γ und der Gewölbebreite b , also durch den Ausdruck $\eta_0 \gamma b$ dargestellt werden kann.

Hieraus ergibt sich für den Horizontalschub H der Wert:

$$H = \rho q_0 = \rho \eta_0 \gamma b$$

und es wird empfohlen, für ρ etwa den Krümmungsradius der Innenleibung des Bogens einzusetzen.

Bei halbseitiger zufälliger Belastung p tritt hiezu noch der Wert:

$$\frac{H^p}{2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{p l^2}{f k},$$

ein der Theorie des Parabelbogens entnommener Ausdruck, in welchem die Größe $k^1) = \left(1 + \frac{45}{4} \cdot \frac{f}{F f^2} \right) \left[1 - \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right]$ aus den Bogendimensionen zu berechnen ist. Die Vertikalkomponenten der Auflagerreaktionen, sowie die Schubkraft im Scheitel können für halbseitige Belastung gleichfalls nach den Formeln für parabolische Bogen:

$$A \frac{p}{2} = \frac{13}{32} p l, \quad A' \frac{p}{2} = V_m = \frac{3}{32} p l$$

mit hinreichender Genauigkeit ermittelt werden.

Zur Konstruktion der Stützlinie denke man sich nun den Horizontalschub im Schwerpunkte der Scheitelfuge oder ein wenig oberhalb desselben wirksam und konstruiere mit Hilfe

1) Für rechteckigen Querschnitt (Gewölbe):

$$k = \left[1 + \frac{15}{16} \left(\frac{d}{f} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right].$$

eines Kräftedreiecks der bekannten Vertikallasten, beziehungsweise mit Berücksichtigung der im Falle halbseitiger Belastung auftretenden Schubkraft im Scheitel das Seilpolygon, welches die Stützlinie darstellt.

Nach eingehender Durchrechnung der in Tabelle I enthaltenen zwölf Beispiele haben sich nun folgende Grundregeln ergeben, bei deren Beachtung in den meisten Fällen die günstigsten Resultate des Näherungsverfahrens erreicht werden dürften:

1. Gewölbte Bogen.

a) Eigengewicht. Bei gewölbten Bogen gibt die Formel $H = \rho \eta_0 \gamma b$ für Eigengewicht stets (mit Ausnahme des Vollbogens) die günstigste Übereinstimmung mit den genauen Resultaten, wenn für ρ der Wert des Radius der Gewölbachse eingeführt wird. Es resultieren dann in den betrachteten zwölf Beispielen teils um 1⁰/₀ bis 17⁰/₀ kleinere, teils um 1⁰/₀ bis 3⁰/₀ (beim Vollbogen 14⁰/₀) größere Werte, während man z. B. mit der Annahme $\rho =$ dem Radius der Innenleibung des Bogens durchwegs viel zu kleine Horizontalschübe erhalten würde.

b) Zufällige Belastung. Den Horizontalschub für eine totale oder halbseitige, gleichmäßig verteilte Belastung p rechnet man stets nach den Formeln für parabolische Achse $H_p = \frac{1}{8} \frac{p l^2}{f k}$ beziehungsweise $H_{\frac{p}{2}} = \frac{1}{16} \frac{p l^2}{f k}$, welche auch bei Bogen von großem Pfeilverhältnis immer noch genauere Resultate liefern als die Näherungsformeln $H_p = \rho \eta_p \gamma b = \rho p$, beziehungsweise $H_{\frac{p}{2}} = \rho \frac{p}{2}$.

2. Eiserne Bogen.

Bei eisernen Bogen, bei welchen Eigengewicht und zufällige Last fast stets gleichmäßig längs des Bogens, beziehungsweise der Bogensehne verteilt angeordnet zu sein pflegen, erhält man die beste Übereinstimmung mit der genauen Rechnung durch Anwendung der Formeln des Parabelbogens $H_{(g+p)} = \frac{1}{8} \frac{(g+p) l^2}{f k}$, beziehungsweise $H_{(g+\frac{p}{2})} = \frac{1}{8} \frac{(g+\frac{p}{2}) l^2}{f k}$. Hierbei wäre eine gleichmäßig längs des Bogens verteilte Belastung vorerst auf eine äquivalente, längs der Bogensehne verteilt

gedachte Last umzurechnen, wie dies für die Beispiele 3 und 11 geschah ($p_{\text{Sehne}} = p_{\text{Bogen}} \times \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Sehnenlänge}}$). Die Differenzen des Horizontalschubes gegenüber der genauen Rechnung sind nur geringfügig, im Maximum 8⁰/₀.

Sollte eine der vorhandenen Belastungen nicht gleichmäßig längs des Bogens oder der Bogensehne verteilt sein, so müßte auf die Formel $H = \rho \eta_0 \gamma b$ zurückgegangen werden, wobei $\eta_0 \gamma b$ der spezifischen Belastung im Scheitel und ρ dem Radius der Innenleibung des Bogens gleichzusetzen wäre, letzteres deshalb, weil die Formel für eiserne Bogen ohnehin stets zu große Werte liefern wird.

Unter Beachtung der vorstehenden Regeln ergeben sich für sämtliche, in Tabelle I behandelten zwölf Beispiele die in Tabelle IV, Seite 50 den genauen Werten gegenübergestellten Horizontal- und Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke und Schubkräfte im Scheitel. Die in Prozenten des genauen Wertes angegebenen Differenzen sind in allen Beispielen mit Ausnahme des Beispiels 6 relativ nicht bedeutend; aus dem letztgenannten Beispiel ist zu ersehen, daß die Anwendung der Formel $\rho \eta_0 \gamma b$ des Horizontalschubes auf die Betrachtung eines aus einem größeren Gewölbe ausgeschnittenen Bogensektors unzulässig ist, da sie für denselben die gleichen Werte wie für das volle Gewölbe ergibt.

Konstruiert man nun mit den in Tabelle IV ausgewiesenen Werten auf die bereits geschilderte Art und Weise die Stützlinien, so findet man in der Mehrzahl der betrachteten Beispiele (und zwar bei Beispiel 2, 3, 5, 7, 9, 10 und 11) eine gute Übereinstimmung mit den für die genaue Rechnung erhaltenen, in Taf. Nr. 1 bis 3 ersichtlichen Stützlinien; nur in wenigen Beispielen (1, 4, 8 und 12), und zwar in jenen, bei welchen die Horizontalschübe stärker differieren, ergeben sich größere Abweichungen, wobei das Näherungsverfahren ungünstigere Resultate liefert. So z. B. gehen die für Beispiel 1, 4 und 8 resultierenden Stützlinien in den Kämpfern knapp an den Kanten der Innenleibung vorbei, sie sind nahezu die »Minimalstützlinien«, während die Stützlinien der genauen Rechnung zwar auch außerhalb des Kernes sich bewegen, jedoch nicht an die Gewölbleibung herantreten. Daß beim vollen Halbkreisgewölbe (Beispiel 12) größere

Differenzen vorkommen, ist leicht begreiflich. Für Beispiel 6 würde die vorliegende Näherungsrechnung eine Stützlinie ergeben, welche nahezu mit der in Fig. 6 der Tafel Nr. 2 rot eingezeichneten Stützlinie der Näherungsrechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft zusammenfällt.

Aus den vorstehenden Versuchsberechnungen kann geschlossen werden, daß das erörterte Näherungsverfahren in den meisten Fällen Resultate geben wird, welche in Anbetracht des höchst einfachen und raschen Berechnungsvorganges als recht zutreffend bezeichnet werden können. Aber auch in Ausnahmefällen bei größeren Abweichungen sind die Resultate des Verfahrens noch geeignet, eine rasche Orientierung über die statischen Verhältnisse des Bogens zu ermöglichen. Zu diesem Zwecke kann das Verfahren bestens empfohlen werden.

Einfluß der Vernachlässigung der Achsialkraft bei Berechnung anderer Konstruktionssysteme.

a) Zweigelenkbogen.

Die Anwendung des Näherungsverfahrens mit Vernachlässigung des Einflusses der Achsialkraft ist selbstredend nicht nur bei gelenklosen, beiderseits eingespannten Bogen, sondern auch bei zahlreichen anderen Konstruktionssystemen möglich und teilweise auch zulässig.

Für Zweigelenkbogen wird die Wirkung der Vernachlässigung der Achsialkraft jedenfalls geringer sein als bei gelenklosen Bogenkonstruktionen, da gerade jene Differenzen der Rechnung, welche bei Bogen ohne Gelenk ein Maximum zu sein pflegen, nämlich die Differenzen in den Bogenkämpfern, infolge der Anordnung von Kämpfergelenken gänzlich entfallen. Die Schnittpunkte der Stützlinien beider Rechnungsverfahren, welche bei gelenklosen Bogen ungefähr im ersten, beziehungsweise dritten Viertel der Spannweite liegen, fallen hier mit den Kämpfern zusammen. Es können somit nur im Bogenscheitel erheblichere Abweichungen vorkommen.

Die Tabelle V, Seite 52, gibt eine Vergleichung der genauen und Näherungsergebnisse, welche sich für die bereits in Tabelle I, Post 5, behandelte eiserne Bogenbrücke von $\frac{1}{8.5}$ Pfeilverhältnis einerseits unter Annahme der Einspannung in den Kämpfern,

Tabelle IV.

Gewölbte Bogenbrücken.

Post Nr. der Tabelle I	Bogendimensionen						Belastungsangaben			Horizontalschub			Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke			Schubkraft im Scheitel			Anmerkung	
	Bogensehne	Pfeilhöhe	Pfeilverhältnis	Radius der Gewölbachse	Kämpferstärke	Scheitelstärke	Art der Belastung	Belastungsordinate im Scheitel	Spezifisches Gewicht des Mauerwerks	Zufällige Belastung	genau	näherungsweise	Differenz	genau	näherungsweise	Differenz	genau	näherungsweise		Differenz
											berechnet			berechnet			berechnet			
	in Metern		in Metern		η_0 in m	γ in t/m^3	β in t/m	in Tonnen		in $\%$		in Tonnen		in $\%$		in Tonnen		in $\%$		
1	152.0*	12.3*	$\frac{1}{12}$	263.20	4.00	2.00	Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . .	2.30	2.6	in η_0 inbegriffen	7196	6296	- 12.5	2854	2854	0	—	—	—	Für 4 m Brückenbreite berechnet
2	152.0*	12.3*	$\frac{1}{12}$	246.45	2.67	2.67	Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . .	2.97	2.6	in η_0 inbegriffen	8191	7612	- 7.1	3192	3192	0	—	—	—	Für 4 m Brückenbreite berechnet
4	45.923	5.363	$\frac{1}{8.5}$	51.937	2.01	1.50	Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . .	1.882	2.75	0.600	324.710	295.917	- 8.7	228.679	228.679	0	—	—	—	
6	10.720	1.276	$\frac{1}{8.4}$	11.774	1.44	1.12	Eigengewicht Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . .	1.70 1.70	2.4 —	— 2.000	24.428 35.423	48.038 60.314	+ 96.7 + 70.3	26.088 36.808	26.088 36.808	0 0	— —	— —	— —	
7	23.758	4.502	$\frac{1}{5.3}$	17.923	1.10	0.60	Eigengewicht Eigengew. u. tot. zufällige Last . . . Eigengewicht u. halbs. zuf. Last Eigengew. u. tot. zufällige Last Eigengewicht u. halbs. zuf. Last	0.60 0.60 0.60 0.60 0.60	2.4 — — — —	— 1.524 1.524 2.477 2.477	25.796 49.609 37.703 64.494 45.145	25.803 49.113 37.458 63.695 44.749	+ 0 - 1.0 - 0.6 - 1.2 - 0.9	24.095 41.245 38.171 51.965 46.970	24.095 41.245 27.311 51.965 29.321	0 0 - 0.4 0 - 0.5	— — 3.074 — 4.995	— — 3.216 — 5.226	— — + 4.5 — + 4.5	Für die Berechnung der Wirkung d. zuf. Last wurden, in Abständen v. 2.25 m wirksamen Einzellasten durch eine gleich verteilte Belastung $\frac{P}{2.25}$ ersetzt
8	30.0*	7.26*	$\frac{1}{4.1}$	20.353	1.60	1.10	Eigengewicht Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . . Eigengew. u. halbs. zufällige Last . . .	1.75 1.75 1.75	2.3 — —	— 1.274 1.274	43.269 52.617 47.943	35.617 43.998 39.807	- 17.5 - 16.5 - 17.0	65.800 74.810 73.267	65.800 74.810 67.489	0 0 - 0.2	— — 1.543	— — 1.689	— — + 9.5	Horizontalschub, Vertikalkomponenten u. Schubkraft sind noch mit dem Mauerwerksgewicht $g = 2.3 t/m^3$ zu multiplizieren.
9	19.26	5.00	$\frac{1}{4}$	11.774	2.24	1.12	Eigengewicht Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . . Eigengew. u. halbs. zufällige Last . . .	1.70 1.70 1.70	2.4 — —	— 2.000 2.000	47.557 65.324 56.441	48.038 65.400 56.719	+ 1.0 + 0.1 + 0.5	73.519 92.779 89.532	73.519 92.779 77.132	0 0 - 0.4	— — 3.248	— — 3.611	— — + 11.2	
10	42.00*	11.90*	$\frac{1}{3.5}$	28.551	2.38	1.40	Eigengewicht des Bogens allein, (ohne Hintermauerung) Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . .	1.40 2.50	2.0 —	— in η_0 inbegriffen	38.671 82.653	39.971 71.378	+ 3.3 - 13.5	51.350 146.020	51.350 146.020	0 0	— —	— —	— —	Bemerkung wie zu Post Nr. 8 mit $g = 2.0 t/m^3$.
12	21.00	10.50	$\frac{1}{2}$	10.500	1.00	1.00	Eigengewicht u. tot. zufällige Last . . . Eigengew. u. halbs. zufällige Last . . .	1.70 1.70	2.4 —	2.000 2.000	19.872 17.447	22.212 20.031	+ 11.8 + 14.5	55.240 47.931	55.240 47.795	0 - 0.3	— 1.854	— 1.719	— - 7.3	Bemerkung wie zu Post Nr. 8 mit $g = 2.4 t/m^3$.

Eiserne Bogenkonstruktionen.

Post Nr. der Tabelle I	Bogendimensionen						Belastungsangaben		Horizontalschub			Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke			Schubkraft im Scheitel			Anmerkung
	Bogensehne	Pfeilhöhe	Pfeilverhältnis	Radius der Bogeninneneileitung	Querschnittshöhe		Art der Belastung	Größe der Belastung	genau	näherungsweise	Differenz	genau	näherungsweise	Differenz	genau	näherungsweise	Differenz	
					im Kämpfer	im Scheitel			berechnet			berechnet			berechnet			
	in Metern		in Metern		in Metern		in Tonnen		in $\%$		in Tonnen		in $\%$		in Tonnen		in $\%$	
3	59.446	4.902	$\frac{1}{12}$	92.547	1.70	1.70	Eigengewicht u. tot. zufällige Last	$\left. \begin{matrix} 105 t \text{ gleichm. längs des Bogens} \\ 105 t \text{ gleichm. längs der Bogensehne . . .} \end{matrix} \right\}$	286	280	- 2.2	105	105	0	—	—	—	
5	45.923	5.363	$\frac{1}{8.5}$	48.773	2.00	1.50	Eigengewicht u. tot. zufällige Last Eigengew. u. halbs. zufällige Last	Eigengew. $g = 0.920 t/m$ Zuf. Belast. $p = 2.600 t/m$ (gleichm. vert. längs der Bogensehne.)	147.630 93.108	159.088 100.333	+ 7.8 + 7.5	82.448 71.705	82.448 32.967	0 - 0.8 + 2.1	— 10.743	— 11.419	— + 6.2	
11	48.500	19.22	$\frac{1}{2.5}$	24.000	1.816	1.816	Eigengewicht u. tot. zufällige Last Eigengew. u. halbs. zufällige Last	Eigengew. $g = 0.462 t/m$ Zuf. Belast. $p = 0.420 t/m$ (gleichm. vert. längs d. äußer. Bogenlbg)	15.606 11.890	15.840 12.068	+ 1.5 + 1.5	25.442 23.230	25.442 15.538	0 - 0.3 + 0.4	— 2.212	— 2.272	— + 2.6	

anderseits bei Anordnung von Kämpfergelenken ergeben¹⁾. Die Differenzen der genauen und Näherungsrechnung sind hienach beim Zweigelenkbogen durchwegs bedeutend geringer als beim Bogen ohne Gelenk, beziehungsweise gleich Null.

Die Zulässigkeit der Näherungsrechnung kann beim vorliegenden Beispiele allerdings noch bestritten werden, da sich im Scheitelquerschnitte immerhin nicht unerhebliche Abweichungen ergeben; doch wird das Näherungsverfahren bei hochgespannten Zweigelenkbogen zweifellos unbedenklich angewendet werden können, wie dies schon von Professor Dr. von Weyrauch festgestellt wurde. Hiebei wird die Grenze des Pfeilverhältnisses, von welchem ab die Anwendung des Näherungsverfahrens unbedingt statthaft erscheint, erheblich niedriger als bei gelenklosen Bogen mit etwa $\frac{1}{5}$ bis $\frac{1}{6}$ Bogenpfeil angenommen werden können.

b) Bogen mit Zugstange.

Castigliano weist in seinem Werke bei Behandlung eines praktischen Beispiels, und zwar der in Textfigur 3 abgebildeten Konstruktion eines Hallendaches darauf hin, daß bei Bogenkonstruktionen mit Zugstangen der Einfluß der Achsialkräfte des Bogens und der Spannung in der Zugstange auf die Formänderungsarbeit gegenüber der Wirkung der Biegemomente sehr gering sei und daher für die erste Näherungsrechnung vernachlässigt werden könne. Dies hat bei Bogen konstanten Querschnittes den Vorteil, daß es nicht notwendig ist, den Querschnitt des Bogens oder der Zugstange vorher anzunehmen; vielmehr können die Näherungsergebnisse zur Querschnittsbestimmung dienen. Castigliano erwähnt schließlich, daß die auf Grund der Näherungsrechnung gefundenen Werte der Biegemomente im allgemeinen nicht genügen werden und daß es notwendig ist, nach Annahme der Querschnitte die Berechnung genau durchzuführen.

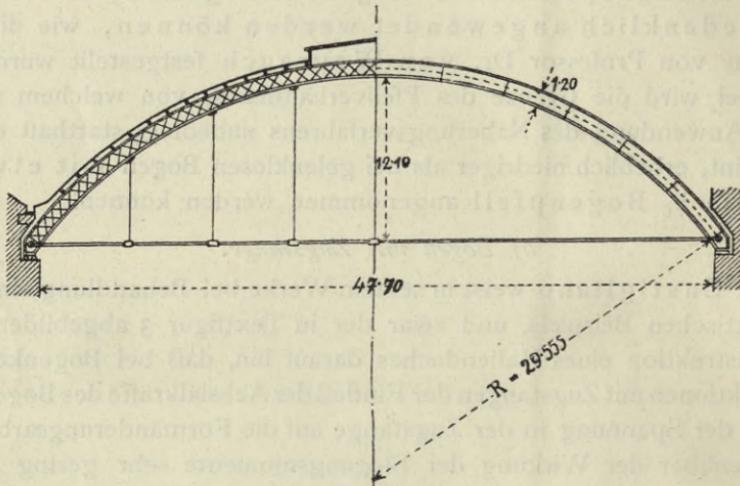
Letztere Bemerkung könnte wohl zweckmäßig näher präzisiert, beziehungsweise dahin eingeschränkt werden, daß so wie in den früheren Fällen die genaue Berechnung nur bei flachen Bogen erforderlich, dagegen bei hochgespannten Bogen nicht unbedingt notwendig ist. Denn schon in dem von Castigliano gewählten Beispiele, welches

¹⁾ Die Werte der genauen Rechnung sind hiebei dem Werke Castiglianos entnommen, die Näherungswerte besonders berechnet.

einen Bogen vom Pfeilverhältnis $\frac{1}{4}$ betrifft (siehe Textfigur 3), sind die Abweichungen des Näherungsverfahrens nicht gar erheblich, wie aus der vergleichenden Zusammenstellung in der nebenstehenden Tabelle VI ersehen werden wolle¹⁾.

Als »Kämpfer« wurde bei Berechnung des Beispielen ein Querschnitt etwas oberhalb des Angriffspunktes der Zugstange betrachtet; die Differenzen beider Rechnungsarten für diesen

Textfigur 3.



Querschnitt sind nur gering und werden für den Angriffspunkt der Zugstange gleich Null. Die größten Unterschiede ergeben sich im Scheitelquerschnitte. Der Fall liegt also ähnlich wie beim Zweigelenkbogen.

c) *Polonceaudachstühle.*

Für Polonceaudachstühle wäre nach Castigliano der Einfluß der Normalkraft des Hauptsparrens ebenso wie der Einfluß der Strebenspannungen im Ausdrucke der Formänderungsarbeit stets zu berücksichtigen, da man sonst zu stark abweichende Resultate (besonders für die Biegemomente des Hauptsparrens) erhält.

Wien, im Juli 1908.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

¹⁾ Die Näherungswerte sind mit Ausnahme der Zugstangenspannung bei Castigliano nicht ausgewiesen, sondern wurden erst rechnermäßig ermittelt.

Tabelle V.

Art der Bogenkonstruktion	Art der Belastung	Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke			Horizontalschub			Kämpfermomente			Scheitelmoment			Achskraft im Kämpfer			Schubkraft im Scheitel		
		ohne Vernachlässigung der Achskraft	mit Vernachlässigung der Achskraft	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft	mit Vernachlässigung der Achskraft	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft	mit Vernachlässigung der Achskraft	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft	mit Vernachlässigung der Achskraft	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft	mit Vernachlässigung der Achskraft	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft	mit Vernachlässigung der Achskraft	Differenz
		in Tonnen	in %		in Tonnen	in %		in Tonnenmetern			in Tonnenmetern			in Tonnen			in Tonnen		
Eiserner Bogen ohne Gelenk	Eigengewicht und totale zufällige Last	82.448	82.448	0	147.630	175.600	+ 19.0	- 91.387	+ 17.166	+ 108.553	+ 44.749	+ 3.401	- 41.348	169.924	194.905	+ 14.7	-	-	-
	Eigengewicht u. halbseitige zufällige Last	71.705 32.292	71.708 32.289	0	93.108	110.746	+ 19.0	- 153.498 + 38.218	- 85.100 + 106.753	+ 68.398 + 68.535	+ 28.222	+ 2.145	- 26.077	116.223 98.112	131.987 113.858	+ 13.6 + 16.0	10.743	10.740	0
Eiserner Bogen mit 2 Kämpfergelenken	Eigengewicht und totale zufällige Last	82.448	82.448	0	167.670	171.654	+ 2.3	0	0	0	+ 27.953	+ 7.102	- 20.851	187.819	191.381	+ 1.9	-	-	-
	Eigengewicht u. halbseitige zufällige Last	67.519 36.467	67.519 36.467	0	105.750	108.259	+ 2.4	0	0	0	+ 17.730	+ 4.106	- 13.624	125.599 111.315	127.842 113.558	+ 1.8 + 2.0	14.920	14.920	0

Tabelle VI (für den Bogen mit Zugstange).

Art der Belastung	Vertikalkomponenten der Kämpferdrücke			Spannung der Zugstange			Kämpfermomente			Scheitelmoment			Achskraft im Kämpfer			Schubkraft im Scheitel			Abstand der Stützlinie von der Schwerachse			Beanspruchungen im Scheitel					
	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz	ohne Vernachlässigung der Achskraft*)	mit Vernachlässigung der Achskraft*)	Differenz			
	in Tonnen	in %		in Tonnen	in %		in Tonnenmetern			in Tonnenmetern			in Tonnen	in %		in Tonnen	in %		in Metern			in Metern			in kg pro cm ²		
Eigengewicht und totale zufällige Belastung	21.228	21.228	0	18.718	18.915	+ 1	- 3.365	- 3.468	- 0.103	+ 10.107	+ 7.684	- 2.423	28.324	28.445	+ 0.5	-	-	-	- 0.117	- 0.122	- 0.005	+ 0.535	+ 0.406	- 0.129	{ 623.1 7.5	{ 552.6 84.6	{ - 70.5 + 77.1
Eigengewicht und halbseitige zufällige Belastung	18.982 13.912	18.982 13.912	0	14.502	14.655	+ 1	{ - 1.846 - 3.367	{ - 1.926 - 3.447	{ - 0.080 - 0.080	+ 7.843	+ 5.961	- 1.882	{ 23.953 19.937	{ 24.047 20.031	{ + 0.5 + 0.5	2.246	2.246	0	{ - 0.077 - 0.169	{ - 0.082 - 0.172	{ - 0.005 - 0.005	+ 0.535	+ 0.406	- 0.129	{ 483.1 5.3	{ 428.3 65.3	{ - 54.8 + 60.0

*) und der Formänderungsarbeit der Zugstange.

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

ÜBER DEN EINFLUSS DER VERNACHLÄSSIGUNG DER ACHSIALKRAFT BEI BERECHNUNG VON BOGENBRÜCKEN MIT EINGESpanNTEN KÄMPFERN.

Von Dr. techn. Friedrich Otto Binder, k. k. Ingenieur im Eisenbahnministerium.

Fig. 1.

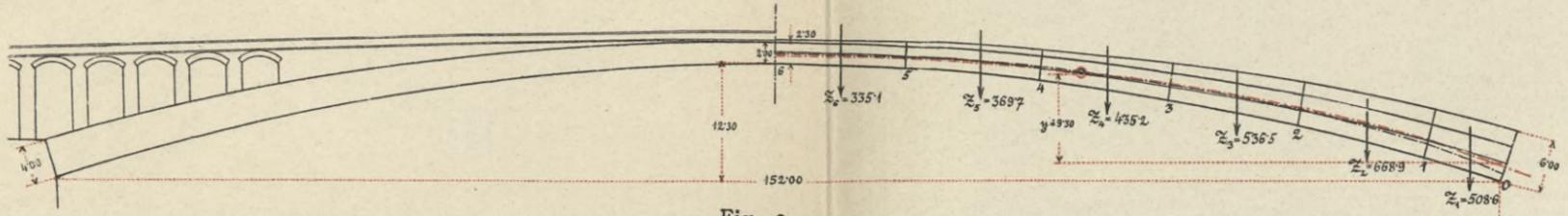


Fig. 2.

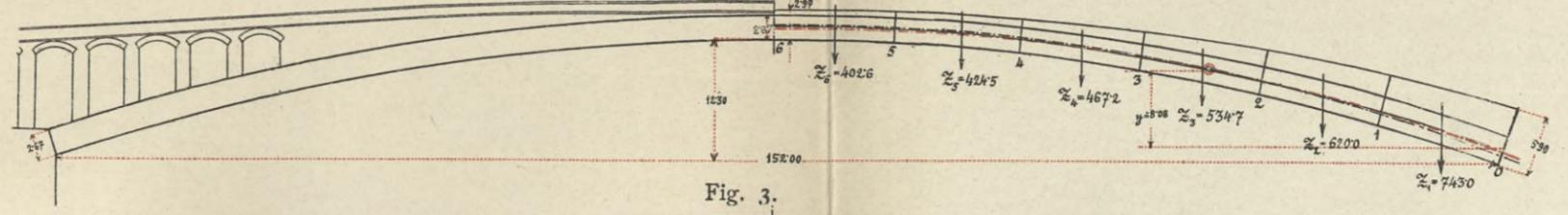


Fig. 3.

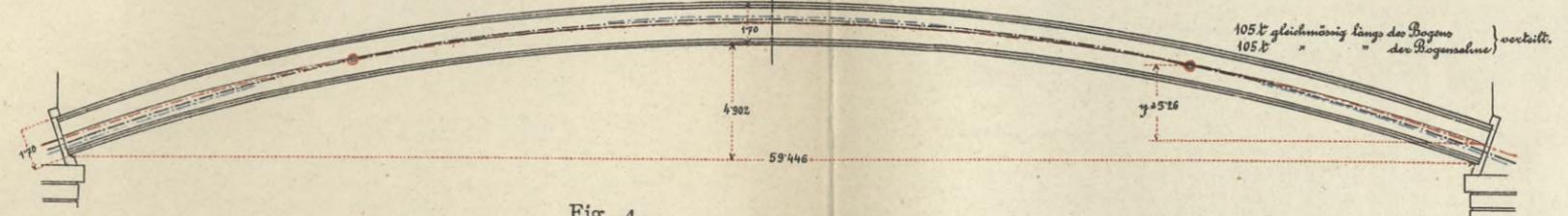
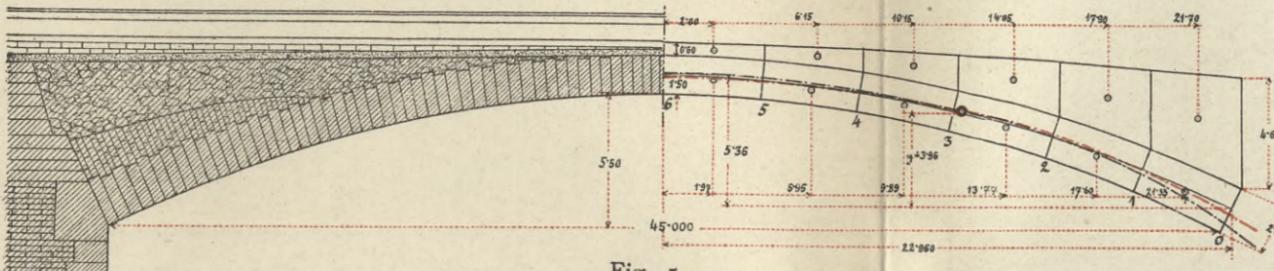


Fig. 3 a.

Fig. 4.



— Stützlinie der genauen Rechnung.
— Stützlinie der Näherungsrechnung mit Vernachlässigung der Achsialkraft.
— Stützlinie der Näherungsrechnung mit Annahme einer parabolischen Bogenselbstlast.

Die Nummern der einzelnen Figuren stimmen mit der Potnummer der Tabelle I überein.

Fig. 5.

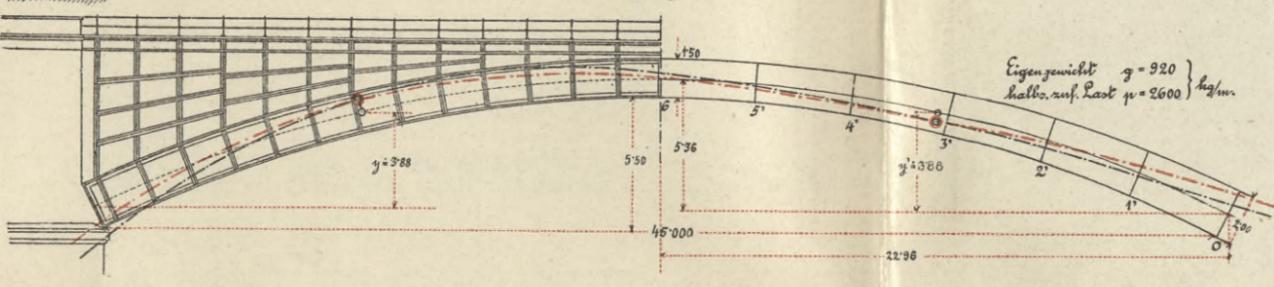


Fig. 5 a.

Fig. 10.

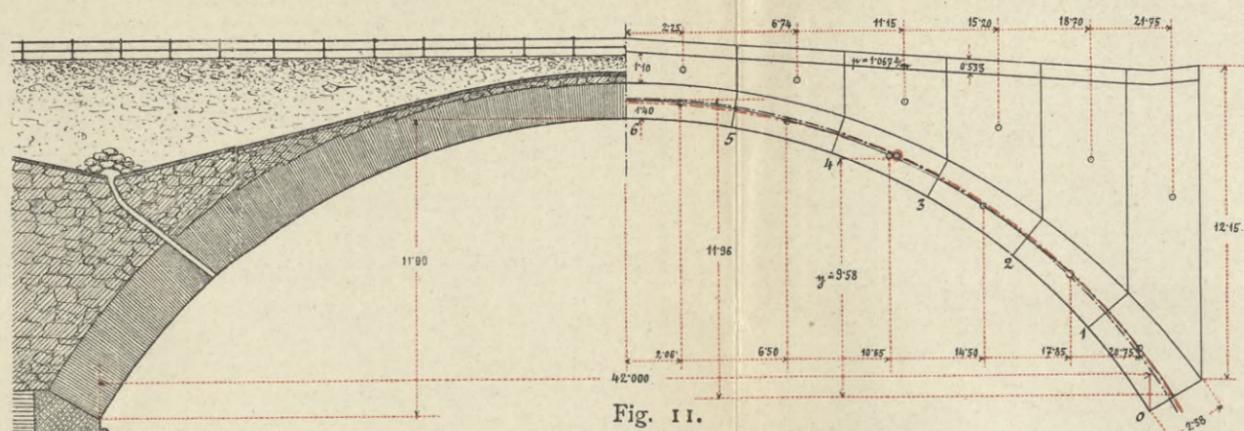
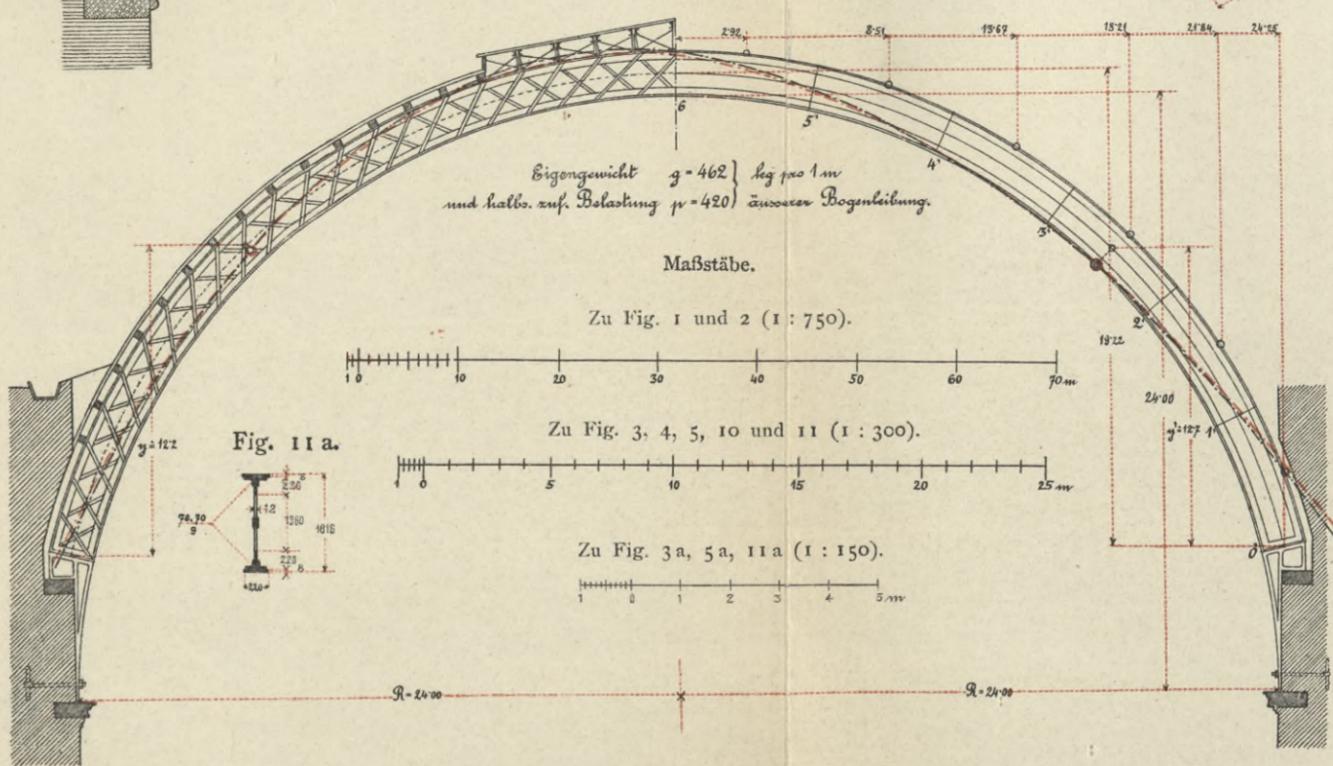


Fig. 11.



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

ÜBER DEN EINFLUSS DER VERNACHLÄSSIGUNG DER ACHSIALKRAFT BEI BERECHNUNG VON BOGENBRÜCKEN MIT EINGESPANNTEN KÄMPFERN.

Von Dr. techn. Friedrich Otto Binder, k. k. Ingenieur im Eisenbahnministerium.

Fig. 6.

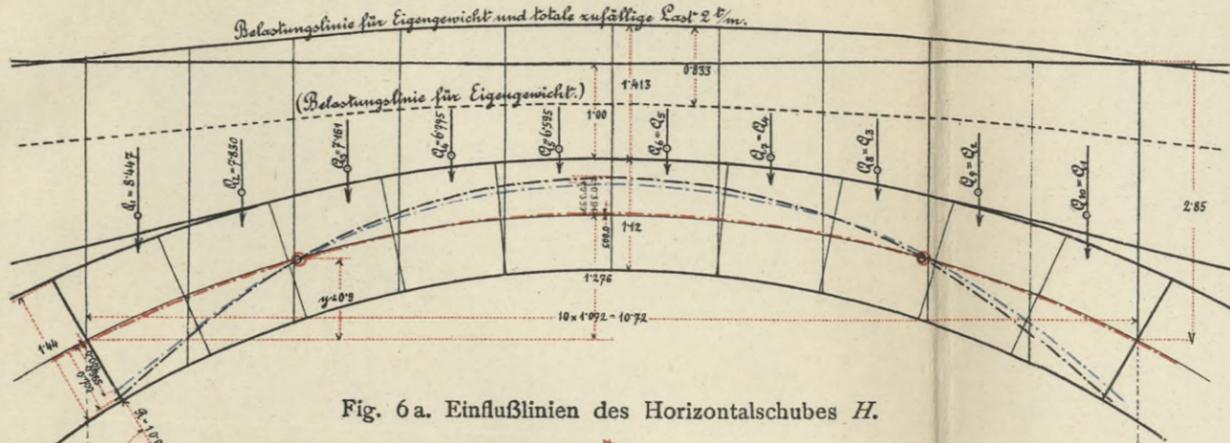


Fig. 6 a. Einflußlinien des Horizontalschubes H .

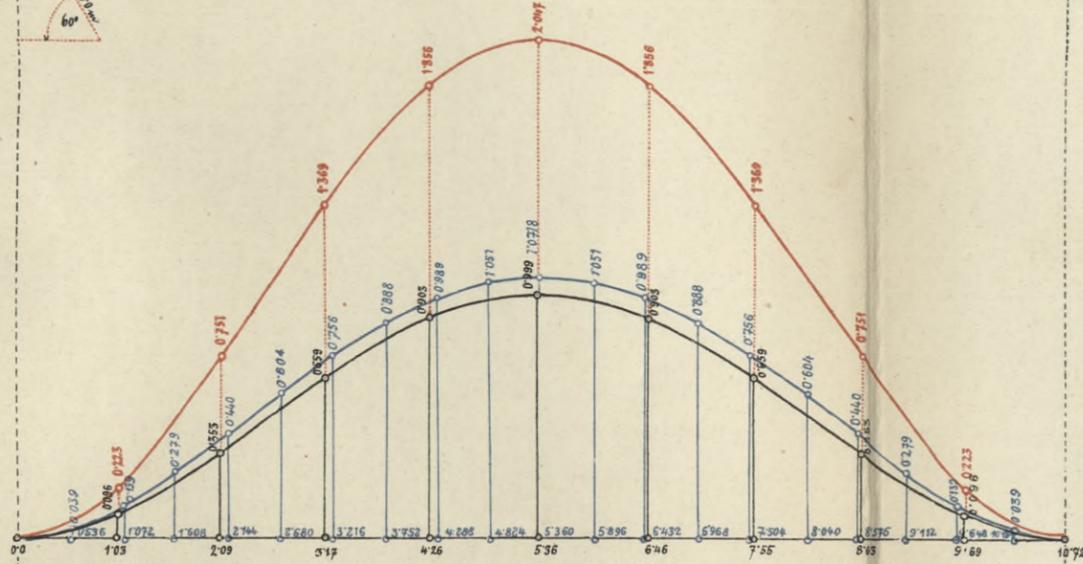


Fig. 6 b. Einflußlinien der Kämpfermoment-Summen ($M_o + M_i$) (für symmetrische Belastung).

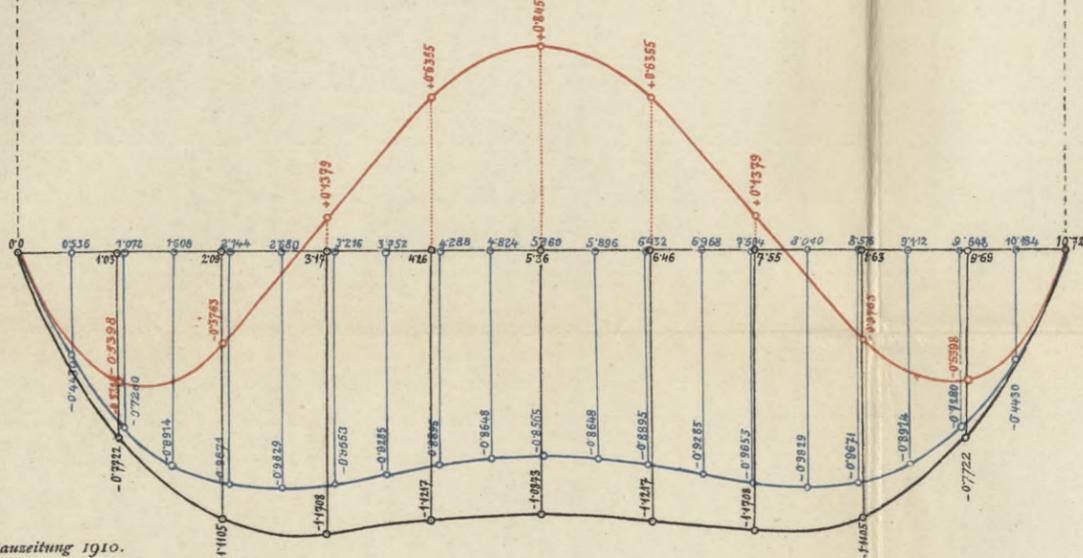


Fig. 7.

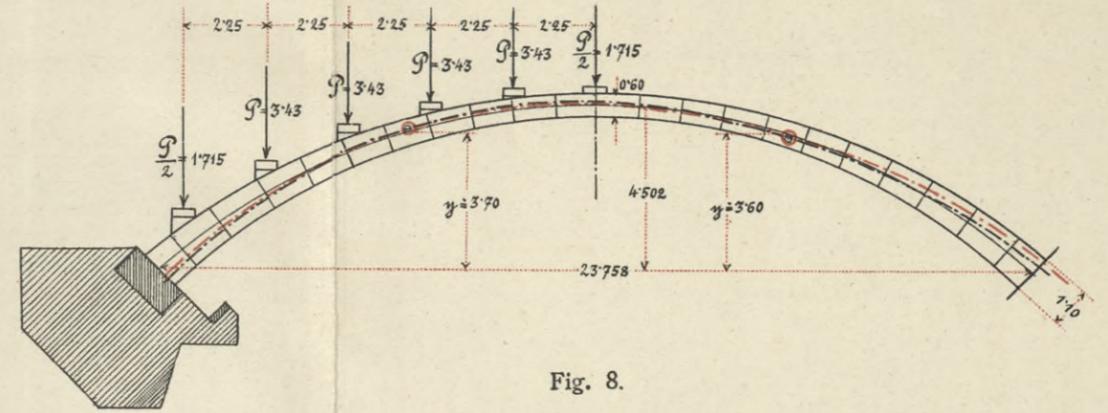
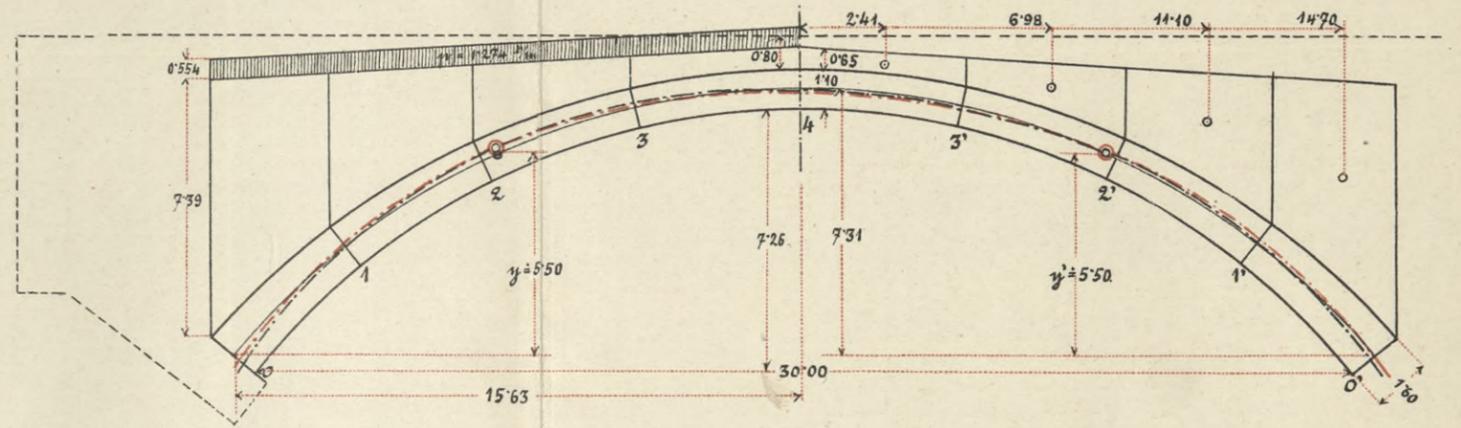


Fig. 8.



Längenmaßstab zu Fig. 7, 8 und 12 (1 : 200).

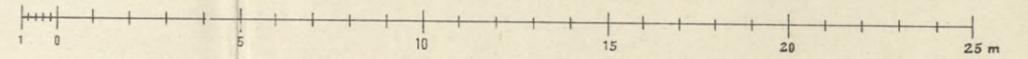
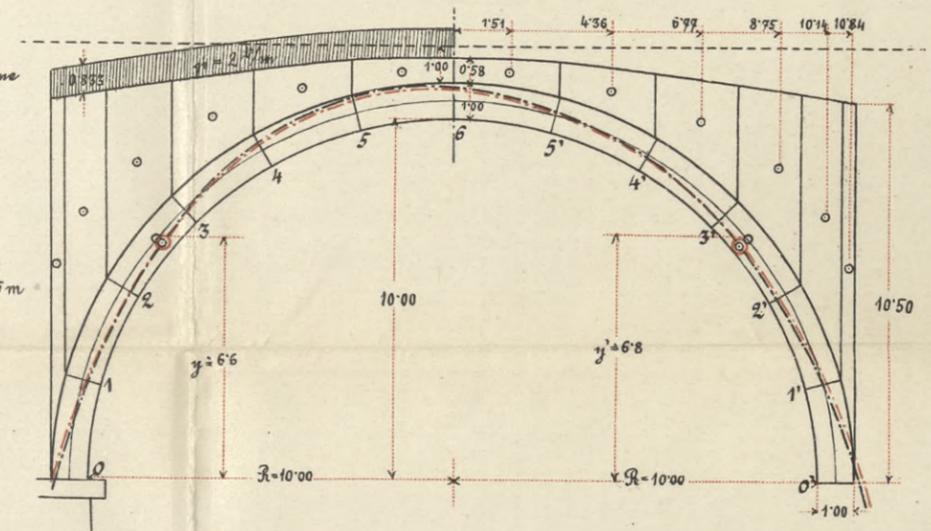
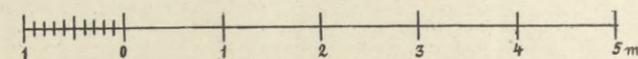


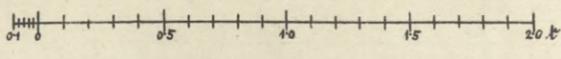
Fig. 12.



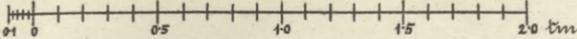
Längenmaßstab zu Fig. 6, 6 a und 6 b (1 : 75).



Kräftemaßstab zu Fig. 6 a (1 t = 3 1/8 cm).



Momentenmaßstab zu Fig. 6 b (1 tm = 3 1/8 cm).



BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

Von Dr. techn. Friedrich Otto Binder, k. k. Ingenieur im Eisenbahnministerium.

Fig. 9.

(zu Post 9 der Tabelle I).

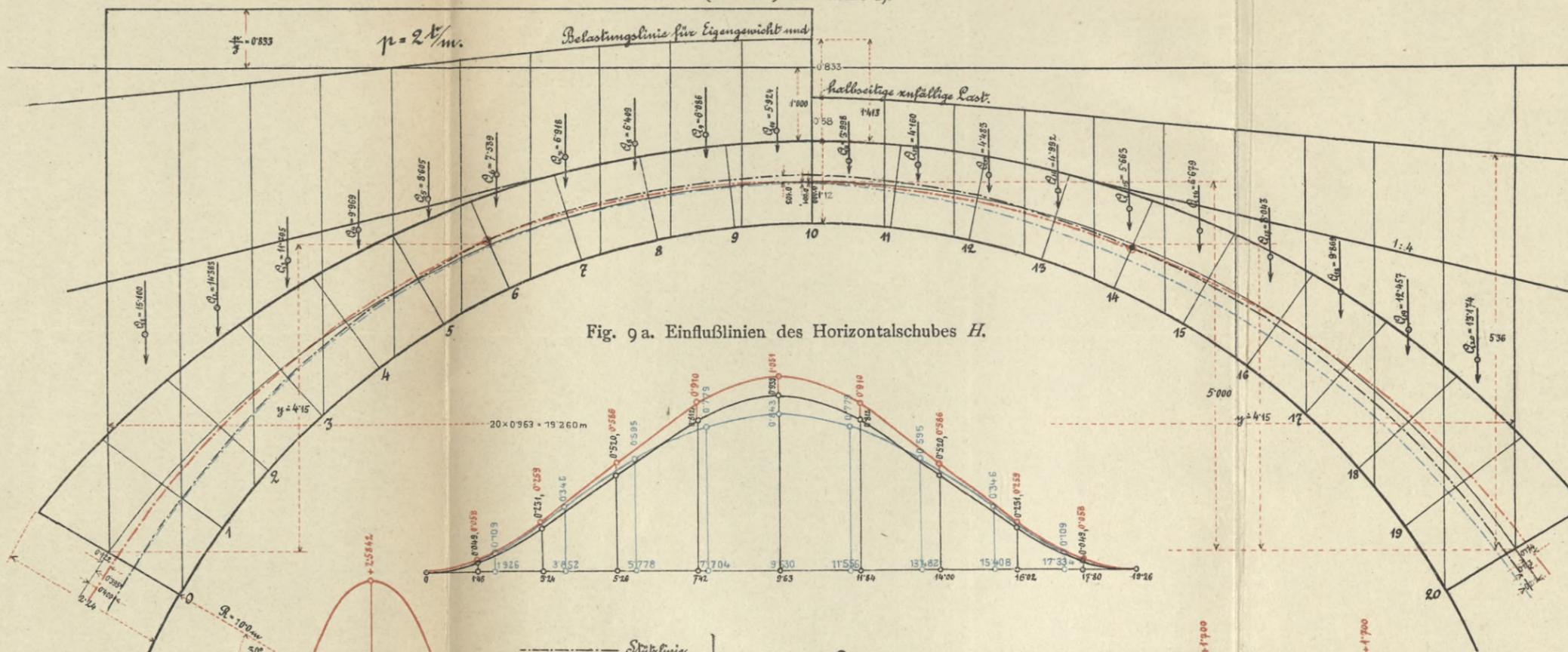
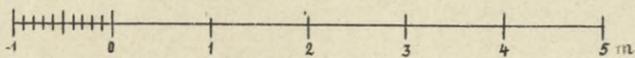


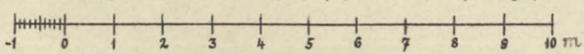
Fig. 9a. Einflußlinien des Horizontalschubes H .

Maßstäbe.

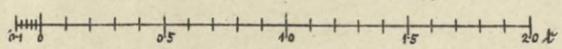
Längenmaßstab zu Fig. 9 (1 : 75).



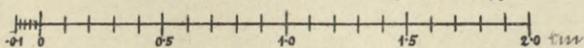
Längenmaßstab zu Fig. 9a, 9b und 9c (1 : 150).



Kräftemaßstab zu Fig. 9a ($1 t = 3 \frac{1}{3} cm$).



Momentenmaßstab zu Fig. 9b und 9c ($1 tm = 3 \frac{1}{3} cm$).



- Stützlinie } für die genaue Rechnung.
- Einflußlinie }
- - - Stützlinie } für die Näherungsrechnung
- Einflußlinie } mit Vernachlässigung der Achsialkraft.
- Stützlinie } für die Näherungsrechnung mit Annahme
- Einflußlinie } einer parabolischen Bogenachse.

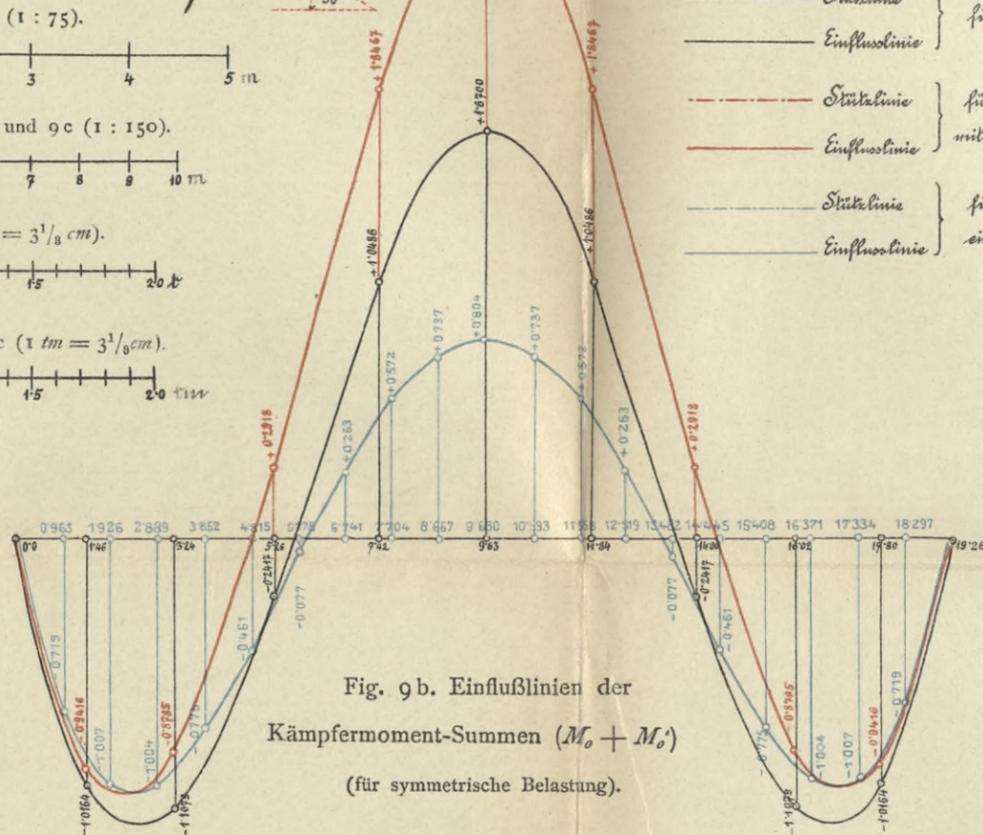


Fig. 9b. Einflußlinien der Kämpfermoment-Summen ($M_o + M_o'$) (für symmetrische Belastung).

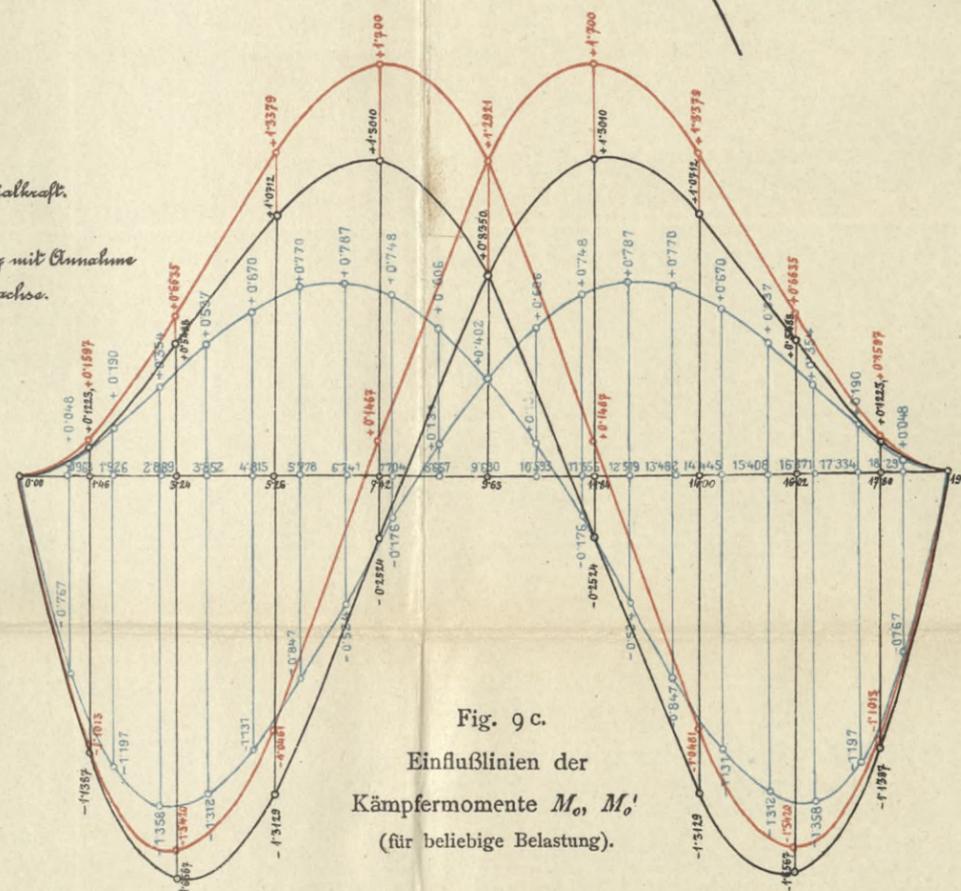


Fig. 9c. Einflußlinien der Kämpfermomente M_o, M_o' (für beliebige Belastung).

BIBLIOTEKA POLITECHNICZNA
KRAKÓW

S. 61

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

31068

Kdn., Czapskich 4 — 678. 1. XII. 52. 10,000

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000300058