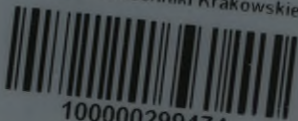
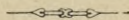


Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299474

Aus der Festigkeitslehre



~~~~~  
Druck der Internationale Artistique in Vevey  
~~~~~

ry
Aus der

Festigkeitslehre

Der Spannungszustand
in den Punkten eines geraden Stabes bei den vier
einfachen Fällen der Beanspruchung

Dargestellt
zur Einführung in das Studium der Festigkeitslehre

von

Carl J. Kriemler

Ingenieur

F. Nr. 20327

Mit 41 Abbildungen und 1 lithographierten Tafel



Vevey (Schweiz)

Verlag von Albert Roth

(Internationale Artistique)

1893



II 7537

A. Allgemeine Definitionen.

1) Gerader stabförmiger Körper.

Ein gerader stabförmiger Körper entsteht durch die Bewegung einer ebenen Fläche längst einer geraden Linie, und zwar geht diese Bewegung auf solche Weise vor sich, dass die während derselben im allgemeinen ihre Grösse und Form verändernde ebene Fläche beständig in ihrem Schwerpunkte von jener geraden Linie rechtwinkelig geschnitten wird. Die ebene Fläche bildet in irgend einer Lage den *Querschnitt* des Stabes, die Leitlinie bildet die *Axe* desselben.

2) Körperpunkt.

Unter dem materiellen Punkte A des Körpers verstehen wir eine Fläche F , welche zwei Körperelemente von einander trennt, in dem Augenblicke, wo ihre Grösse die Grenze 0 erreicht. Es ist also der Punkt A die auf einen Punkt zusammengeschrumpfte Fläche F .

3) Aeussere Kräfte.

Aeussere Kräfte nennen wir die von aussen her auf den Körper als Ganzes sich derart bethätigenden Einwirkungen, dass der Körper durch sie eine Formveränderung erfährt. Sie bilden in ihrer Gesamtheit die *Belastung*.

4) *Innere Kräfte.*

Innere Kräfte nennen wir die Kräfte, mit denen die unendlich kleinen Elemente des Körpers an ihren Berührungsflächen gegenseitig aufeinander einwirken unter dem Einflusse der ins Gleichgewicht gekommenen äusseren Kräfte.

5) *Spannung.*

Ist der Zug oder Druck, den zwei Körperelemente in ihrer gemeinschaftlichen Berührungsfläche F , gleichverteilt über diese Fläche F , aufeinander ausüben, nach Grösse und Richtung $= S$, so nennen wir den *Quotienten* $\frac{S}{F}$ im limes $F=0$, d. h. in dem Augenblicke, wo die Fläche F , auf welche sich S bezieht, in einen Punkt A zusammenschrumpft, *die Spannung p im Punkte A für die Ebene F*

$$p = (\lim F = 0) \frac{S}{F}$$

Die Richtung der Spannung p stimmt natürlich mit der Richtung von S überein.

Rückwärts kann man auch die Spannung p im Punkte A der Fläche F definieren als die auf die Flächeneinheit bezogene Zug- oder Druckkraft, welche die an die Fläche F beiderseits angrenzenden Körperelemente beim Punkte A gegenseitig aufeinander ausüben.

Aus dieser Definition erhellt, dass, sobald man den Punkt A in einer andern Fläche als F , z. B. in der Fläche D liegend sich denkt, die Spannung im Punkte A für die Fläche D eine andere sein muss als für die Fläche F .

6) *Der Spannungszustand im Punkte A .*

Man sagt der Spannungszustand im Punkte A des Körpers ist bekannt, wenn die Spannung p nach Grösse und Richtung bekannt ist für jede beliebige durch ihn hindurchgehende Fläche.

7) *Normalspannung und Tangentialspannung.*

Die Spannung p lässt sich in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine senkrecht zur betreffenden Fläche, die andere in der Fläche selbst wirkt. Die erstere Componente heisst die *Normalspannung* $= \sigma$, die letztere die *Tangentialspannung* $= \tau$.

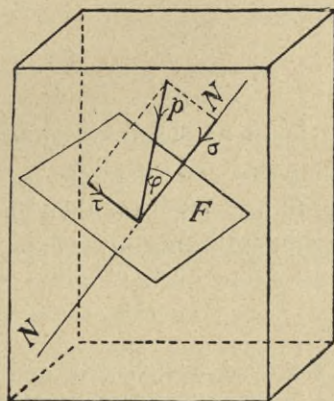


Fig. 1

Bildet die Richtung von p mit der Richtung der Normalen auf F im Punkte A den Winkel φ (vergl. Fig. 1), dann ist

$$\sigma = p \cdot \cos \varphi$$

$$\tau = p \cdot \sin \varphi$$

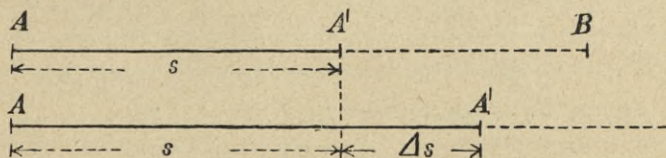
8) *Dehnung.*

Fig. 2

Ist auf der Verbindungslinie der zwei Körperpunkte A und B (vgl. Fig. 2) der Punkt A' vor der Belastung um die

Länge s von A entfernt, und ist Δs die durch die Einwirkung der Belastung hervorgebrachte, also mit der Deformation verbundene Längenänderung der Strecke s , so nennen wir *den Quotienten* $\frac{\Delta s}{s}$ im *limes* $s = 0$, also in dem Augenblicke, wo die Strecke s , auf welche Δs sich bezieht, in den Punkt A zusammengeschrumpft ist, die *Dehnung* ε *im Punkte* A *nach der Richtung* AB .

$$\varepsilon = (\lim s = 0) \frac{\Delta s}{s}$$

Die Dehnung kann natürlich entsprechend einem Zuge oder einem Drucke positiv oder negativ sein.

Rückwärts kann man auch die Dehnung ε definieren als die auf die Längeneinheit bezogene Verlängerung bzw. Verkürzung, welche die Linie AB im Punkte A erfährt.

9) *Querdehnung.*

Erleidet der Punkt A nach irgend einer Richtung eine Dehnung ε , so ist erfahrungsgemäss das blosse Vorhandensein dieser Dehnung Ursache der Entstehung einer secundären Dehnung in der zu der Richtung von ε senkrechten Richtung, deren Grösse ist $= -\frac{\varepsilon}{m}$, und zwar schwankt der Wert von m zwischen 3 und 4. Diese secundäre Dehnung nennt man die *Querdehnung*.

10) *Elasticitätsmodul.*

Die Erfahrung hat gelehrt, dass die Dehnung ε innerhalb der in der Praxis vorkommenden Spannungsgrenzen für die meisten Materialien der nach ihrer Richtung wirkenden Normalspannung proportional ist. Es ist also der Quotient $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ eine Constante, welcher der Name *Elasticitätsmodul* gegeben worden ist; sie wird kurz mit E bezeichnet.

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Bemerkung. — Für ein Material, das in allen Punkten nach allen Richtungen gleich beschaffen ist — isotropes Material — ist E von der Spannungsrichtung unabhängig; in nur homogenem Material, das zwar in allen Punkten aber nicht nach allen Richtungen gleichbeschaffen ist, ändert sich E je nach der Spannungsrichtung. In unseren Ableitungen setzen wir isotrope Körper voraus.

11) *Schiebung.*

Mit der Deformation eines Körpers ist eine Bewegung der einzelnen Ebenen in seinem Innern verbunden, welche Bewegung im allgemeinsten Falle in einer Translation und einer Rotation bestehen wird. Projiziert sich ein beliebiger Punkt B des Körpers (vergl. Fig. 3) auf die Ebene F in dem

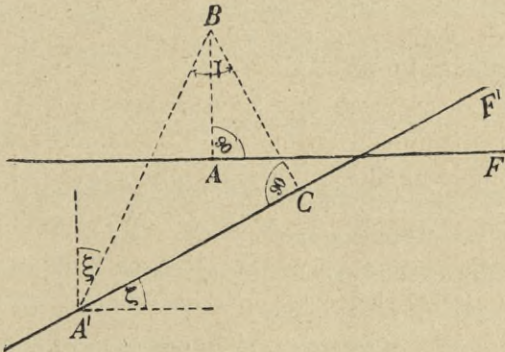


Fig. 3

Punkte A und gelangt dieser Punkt A infolge der Translation und Rotation der Ebene F in die Lage A' , und ist nunmehr der Punkt C die Projection desselben Punktes B auf die Ebene F in ihrer neuen Lage, so nennen wir den Quotienten $\frac{A'C}{CB}$ im limes $= 0$, d. h. in dem Augenblicke, wo der Abstand des Punktes B von der Ebene F gleich 0 geworden ist, die *Schiebung der Ebene F im Punkte A .*

Der Quotient $\frac{\overline{A'C}}{CB}$ ist das Mass für die trigonometrische Tangente des Winkels $A'BC = \gamma$, oder auch, da γ sehr klein bleibt, das Mass für den Winkel γ selbst, und bezeichnet man die Schiebung kurz mit γ

$$\gamma = (\lim = 0) \frac{\overline{A'C}}{BC}$$

Zieht man durch A' die Parallelen zur Richtung von AB und zur ursprünglichen Lage von F , so sieht man, dass $\gamma = \xi + \zeta$ ist; es lässt sich demnach die Schiebung auch definieren als die *Grösse, welche anzeigt, um wie viel sich der rechte Winkel, den die Fläche F mit der materiellen Linie AB ursprünglich bildete, nach der Deformation verändert hat.*

12) Schub-Elasticitätsmodul.

Analog dem constanten Verhältnis $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$ ist unter gleichen Bedingungen auch

$$\frac{\tau}{\gamma} = G$$

und nennt man die Constante G den Schub-Elasticitätsmodul.

13) Deformationszustand.

Wir sagen: der Deformationszustand in einem Körperpunkte ist bekannt, wenn wir für alle Richtungen die in ihm vorkommenden Dehnungen und Schiebungen kennen.

14) Festigkeit.

Die vollständigste Deformation hat ein Körper dann erfahren, wenn seine einzelnen Teile ihren Zusammenhang verlieren; wir sagen dann, die *Festigkeit* des Körpers sei überwunden.

15) Festigkeitslehre.

Soll ein Körper als Glied einer Construction belastet werden, so müssen wir jedenfalls zuvor uns vergewissern,

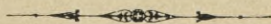
dass er diese Beanspruchung aushalten kann, ganz gewiss also, dass er in keinem seiner Punkte eine Ueberwindung seiner Festigkeit erleidet. Wir gehen aber noch weiter und lassen nur eine solche Beanspruchung zu, dass der Deformationszustand in keinem Punkte eine erfahrungsmässig als höchstens zulässig erkannte Grösse überschreitet. Die Gesamtheit der Kenntnisse, welche diese Beschränkung der Belastung ermöglichen, nennt man die *Festigkeitslehre*.

16) *Beanspruchungs-Coëfficienten*.

Die Erfahrung hat gelehrt, dass die Deformation in einem Punkte so lange unschädlich ist, als der Absolutwert aller Normalspannungen σ in demselben kleiner oder höchstens gleich ist einer bestimmten Grösse k , der Absolutwert aller Tangentialspannungen τ kleiner oder höchstens gleich einer bestimmten Grösse t ist. Die bestimmten Werte k und t nennt man die zulässigen *Beanspruchungs-Coëfficienten*.

Bei isotropem Material sind k und t für sämtliche Richtungen gleich, höchstens kann k für positive σ einen anderen Wert haben als für negative σ . Bei nur homogenem Material sind k und t für jede Richtung verschieden. In der Praxis ist es üblich, die Formeln, welche für isotropes Material abgeleitet sind, auch bei nur homogenem Material anzuwenden, die auf diese Weise gefundenen Spannungen σ und τ aber mit den richtigen, für die betreffenden Richtungen des Materials geltenden Coëfficienten k und t zu vergleichen.

Bemerkung. — Es giebt übrigens eine ganze Reihe von Fällen, wo nicht aus den Spannungen auf den Deformationszustand geschlossen werden kann, sondern wo die erkannte oder angenommene Deformation erst den Spannungszustand erkennen lässt.



B. Zug und Druck

Definition von einfacher Zug- bezw. Druckbelastung.

Wir nennen eine Belastung Zug bezw. Druck, wenn der gerade Stab an beiden Enden von zwei entgegengesetzt gleichen Kräften angegriffen wird, die beide nach aussen bezw. beide nach innen gerichtet genau in der Stabaxe wirken.

Diese Definition setzt voraus, dass der Stab gewichtslos sei. Ist sein Gewicht aber nicht zu vernachlässigen, so gehört der durch die zwei Axialkräfte und durch das eigene Gewicht belastete Stab nur dann zu den auf einfachen Zug bezw. Druck beanspruchten Stäben, wenn die Richtung seiner Axe mit der Richtung der Schwere übereinstimmt. Es sind in diesem Falle die beiden äusseren Kräfte um die Grösse des Stabgewichtes verschieden.

Voraussetzungen.

Ist in dem Falle des lotrechten Stabes :

F die Grösse des Querschnittes, der vom oberen Ende um die Länge x absteht

P die Grösse der äusseren Axialkraft

g das Gewicht der Volumeinheit des Stabmaterials

so wirkt der obere Stabteil in dem Querschnitt F (vergl. Fig. 4) auf den unteren Stabteil mit einer inneren Kraft, deren Grösse ist

$$S_x = P + g \cdot \text{Vol}_o^x = P + g \int_0^x F \cdot dx$$

worin F als Funktion von x die mit x im allgemeinen variable Querschnittsgrösse darstellt.

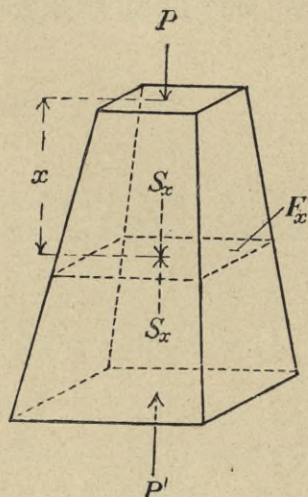


Fig. 4

Ist die Stabaxe nicht lotrecht, dann können wir nur von Zug bzw. Druck sprechen, wenn $g = 0$ ist, sodass

$$S_{(x)} = P$$

wird.

P und $g \int_0^x F \cdot dx$ erhalten positives Vorzeichen, wenn sie als Zug wirken, d. h. den Stab in dem Querschnitte zu trennen bestrebt sind, negatives Vorzeichen, wenn sie die beiden Stabteile in dem Querschnitte aneinander pressen.

Der Teil

$$g \int_0^x F \cdot dx$$

von der inneren Kraft $S_{(x)}$ wirkt gleichmässig auf den ganzen Querschnitt, und auch der Teil P wird es thun, ausgenommen bei einigen wenigen Querschnitten in nächster Nähe der Stirnflächen des Stabes, die, streng genommen, nicht mehr einfache Zug- bzw. Druckbeanspruchung erfahren.

Wir wollen nun im folgenden für den Punkt A des Stabes den Spannungszustand bei dieser Belastung kennen lernen, d. h. für alle durch A hindurchgehenden Ebenen die Spannungen σ und τ ermitteln.

Lehrsatz I. Für die Ebene des Querschnitts F , in welchem der Punkt A liegt, ist

$$p = \frac{S}{F} = \sigma; \quad \tau = 0$$

Beweis. Wir haben gesehen, dass S den ganzen Querschnitt gleichmässig beansprucht, also wirkt auf die den Punkt A enthaltende Einheit der Fläche eine Kraft $= \frac{S}{F}$ und es ist diese auf die den Punkt A enthaltende Einheit der Fläche F wirkende innere Kraft nach Definition gleich der Spannung p . Da die Querschnittsebene von der Richtung von S senkrecht geschnitten wird, so steht auch p normal zu derselben, ist also $p = \sigma$ und infolgedessen $\tau = 0$.

Zusatz. Es ist A ein beliebiger Punkt des Querschnittes, also ist die Spannung p und damit auch σ für alle Punkte eines Querschnittes gleich, so dass die sämtlichen Längsfasern des Stabes in dem betreffenden Querschnitte sich ganz gleichmässig verhalten, d. h. sich gleichmässig dehnen etc.; sie können sich also gegenseitig nicht beeinflussen, und folgt hieraus, dass in den zur Krafrichtung parallelen Ebenen keine inneren Kräfte vorhanden sind. Theoretisch ganz genau ist diese Folgerung nur für die mittelsten Teile eines Stabes constanten Querschnittes, am ungenauesten für einen Stab

stark veränderlichen Querschnittes. Bei letzterem sowie auch in der Gegend der beiden Enden des prismatischen Stabes, wenn die äusseren Kräfte nicht auf den ganzen Stirnquerschnitt desselben gleichmässig verteilt sind, treten sowohl Normalspannungen als auch Schubspannungen auf in den zur Krafrichtung parallelen Ebenen. Doch pflegen ihre Grössen so gering zu sein, dass sie ohne Ungenauigkeit gegen die Spannungen in den anderen Ebenen vernachlässigt werden können.

Lehrsatz II. Für jede Ebene durch A , welche mit der Querschnittsebene den Winkel α bildet, ist die Richtung der Spannung p_α zur Krafrichtung parallel.

Beweis. Nimmt man (vgl. Fig. 5) die Krafrichtung, also die Stabaxe, zur Richtung der X -Axe eines Coordinaten-

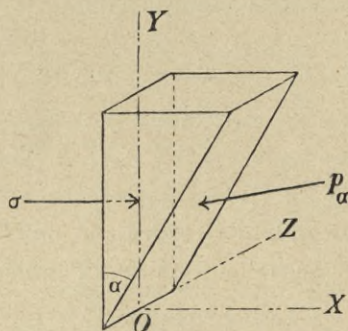


Fig. 5

Systems, die Schnittlinie der Querschnittsebene mit der neuen Ebene zur Z -Axe und die hierzu senkrechte Richtung in der Querschnittsebene zur Y -Axe, und denkt man sich die Ebenen noch nicht ganz in den Punkt A zusammengeschrumpft, so stellt sich der Punkt A als kleines Prisma dar, gebildet von der Querschnittsebene, der neuen Ebene und einer beliebigen zur XZ -Ebene und zwei zur XY -Ebene parallelen Ebenen. Es wirken nun auf Grund unserer Voraus-

setzungen die das Prisma umgebenden Körperteile auf dasselbe nur in der Querschnittsebene und in der neuen Ebene, denn seine anderen Flächen sind der Kraftrichtung parallel. Es wirkt auf die Fläche, welche in der Querschnittsebene liegt, eine innere Kraft $= a \cdot \sigma$ nach der Richtung von σ , und auf die Fläche in der neuen Ebene eine innere Kraft $= b \cdot p_\alpha$ nach der Richtung von p_α , worin p_α die nach Grösse und Richtung noch unbekannte Spannung der neuen Ebene im Punkte A , a und b noch abzuleitende Coëfficienten sind. Da Gleichgewicht der äusseren Kräfte vorausgesetzt ist, also auch diese inneren Kräfte an dem Prisma im Gleichgewicht sind, so müssen auch deren, je nach den Coordinatenachsen genommenen Componenten einzeln im Gleichgewicht sein. Nun hat aber die Kraft $a \cdot \sigma$ nach der Y - und nach der Z -Axe keine Componente, also kann auch die Kraft $b \cdot p_\alpha$ keine solche haben. Es ist also die Richtung von p_α senkrecht zur Z - und zur Y -Axe, also parallel der X -Axe und damit auch parallel der Kraftrichtung.

$a \cdot \sigma$ und $b \cdot p_\alpha$ fallen in eine Richtung, es ist demnach

$$a \cdot \sigma = b \cdot p_\alpha$$

Lehrsatz III. Für jede Ebene durch A , welche mit der Querschnittsebene denselben Winkel α bildet, ist die Grösse der Spannung p_α gleich, und zwar ist die Grösse ihrer beiden Componenten

$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha; \quad \tau_\alpha = \frac{1}{2} \sigma \cdot \sin 2\alpha$$

Beweis. Wählt man bei dem kleinen Prisma, als welches man sich den Punkt A vorstellt, die Grösse der in die Querschnittsebene fallenden Fläche $= f$, so ist die Grösse der in die neue Ebene fallenden Fläche $= \frac{f}{\cos \alpha}$. Die innere Kraft auf diese Fläche ist dann $= p_\alpha \cdot \frac{f}{\cos \alpha}$ und diejenige auf die Querschnittsfläche $= \sigma \cdot f$.

Es ist demnach

$$p_\alpha \cdot \frac{f}{\cos \alpha} = \sigma \cdot f$$

$$p_\alpha = \sigma \cdot \cos \alpha$$

Da ferner die neue Ebene mit der Querschnittsebene den Winkel α bildet, so bildet ihre Normale mit der Stabaxe, also auch mit p_α den Winkel α , und ist infolgedessen die zur Ebene normale Componente σ_α von p_α

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cdot \cos \alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha$$

während die in die Ebene fallende Componente τ_α von p_α wird zu

$$\tau_\alpha = p_\alpha \cdot \cos (90 - \alpha) = \sigma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \sin 2\alpha$$

Lehrsatz IVa. Die grösste normale Spannung σ_α in dem Punkte A ist diejenige, welche die Querschnittsebene selbst afficiert.

Beweis. Es ist $\cos^2 \alpha$ am grössten für $\alpha = 0$, d. h. es ist

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha=0} = 1 \cdot \sigma$$

Bemerkung. — Für diese Ebene ist $\tau_{\alpha=0} = 0$, denn $\sin 2\alpha = \sin 0 = 0$.

Lehrsatz IVb. Die kleinste normale Spannung σ_α in dem Punkte A ist diejenige, welche in den zur Querschnittsebene senkrechten Ebenen auftritt, und zwar ist $\sigma_{\alpha=90} = 0$.

Beweis. Für $\alpha = 90^\circ$ ist $\cos^2 \alpha = 0$, also $\sigma_\alpha = 0 \cdot \sigma$.

Bemerkung. — Für alle Ebenen, welche den Querschnitt in einem Winkel $\alpha = 90^\circ$ schneiden, ist $\tau_\alpha = 0$, denn $\sin 2\alpha = \sin 180^\circ = 0$.

Lehrsatz Va. Die grösste Schubspannung τ_α in dem Punkte A ist diejenige, welche die Ebenen afficiert, die den Querschnitt unter einem Winkel α von 45° schneiden, und zwar ist

$$\tau_{\max} = \tau_{\alpha=45} = \frac{1}{2} \cdot \sigma$$

Beweis. Es wird $\sin 2\alpha$ ein Maximum für $2\alpha = 90^\circ$, d. h. $\alpha = 45^\circ$.

Bemerkung. — Für die Ebenen, welche den Querschnitt unter einem Winkel $\alpha = 45^\circ$ schneiden, ist die Normalspannung $\sigma_{\alpha=45} = \sigma \cdot \cos^2 45 = \frac{1}{2} \sigma$.

Lehrsatz Vb. Die kleinste Schubspannung haben die Querschnittsebene und alle zu ihr senkrechten Ebenen, und zwar ist

$$\tau_{\min} = \tau_{\alpha=0} = \tau_{\alpha=90} = 0$$

Beweis. Vgl. Bemerkungen zu Lehrsätzen IVa und IVb.

Lehrsatz VI. Für alle Punkte eines Querschnittes sind jeweils die Spannungen gleich, welche gleich geneigte Ebenen affizieren.

Beweis. Es ist für alle Punkte desselben Querschnittes die Normalspannung σ für die Querschnittsebene gleich, also sind auch die Spannungen für Ebenen mit gleichem Winkel α unter sich gleich.

Folgerungen. Wenn wir die Zug- oder Druckkraft einer solchen Beschränkung unterwerfen, dass für jede durch A hindurchgehende Ebene

$$\sigma_{\alpha} < k \text{ und } \tau_{\alpha} < t$$

bleibt, so können wir sicher sein, dass in dem Punkte keine unzulässige Deformation stattfindet.

Bei einem isotropen Material, für welches $t > \frac{1}{2} k$ ist, genügt es das $\sigma_{\max} = \sigma$ mit k zu vergleichen, denn wenn $\sigma < k$ bleibt, so sind sämtliche $\sigma_{\alpha} < k$ und sämtliche $\tau_{\alpha} < t$.

Ist hingegen bei einem Material an der Festigkeitsgrenze die Schubfestigkeit kleiner als die Hälfte der Normalfestigkeit, so wird bei unbeschränkter Zug- oder Druckbelastung des Stabes die Zerstörung desselben dadurch geschehen, dass er

längst einer zur Stabaxe unter 45° geneigten Ebene abgeschoben wird.

Lehrsatz VII. Die grösste Dehnung ist diejenige nach der Richtung der Stabaxe. Ihre Grösse ist

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Beweis. Von allen Normalspannungen ist diejenige, welche die Querschnittsebene afficiert, welche also nach der Stabaxe gerichtet ist, die grösste, sodass die ihr proportionale Dehnung nach dieser Richtung die grösste Dehnung ist.

Bemerkung. — Da für alle Punkte eines Querschnittes mit der Normalspannung σ auch die Dehnungen gleich sind, so werden unter dem Einflusse der Zug- bzw. Druckbelastung zwei benachbarte Querschnitte von einander sich entfernen bzw. sich einander nähern, indem sie ihre Parallelität beibehalten.

Lehrsatz VIII. Ist l die Länge eines gezogenen bzw. gedrückten Stabes, so ist die Längenänderung desselben Δl bei variablem Querschnitte

$$\Delta l = \pm \int_0^l \frac{S_{(x)}}{E F_{(x)}} dx$$

bei constantem Querschnitte und einem Eigengewicht = 0

$$\Delta l = \pm \frac{P \cdot l}{E \cdot F}$$

Beweis. Im Punkte A eines beliebigen Querschnittes $F_{(x)}$, dessen Abstand von dem einen Stabende x ist, ist die Längenänderung pro Längeneinheit nach der Richtung der Axe

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{S_{(x)}}{F_{(x)}} \cdot \frac{1}{E}$$

es dehnt sich also das den Punkt A enthaltende Differential dx

der Länge um den Betrag

$$\varepsilon \cdot dx = \frac{S_{(x)}}{F_{(x)} \cdot E} \cdot dx$$

und stellt diese Grösse auch den Betrag dar, um welchen zwei um dx von einander entfernte Querschnitte diesen ihren Abstand verändert haben.

Summieren wir alle einzelnen Elemente $\varepsilon \cdot dx$ der Abstandsänderung je zweier benachbarter Querschnitte, so erhalten wir die Aenderung des Abstandes der zwei Endquerschnitte und damit auch die Längenänderung des ganzen Stabes, welche mit Δl hezeichnet werden möge

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon \cdot dx = \int_0^l \frac{S_{(x)}}{F_{(x)} \cdot E} \cdot dx = \frac{1}{E} \int_0^l \frac{S_{(x)}}{F_{(x)}} \cdot dx$$

Sind hierin $S_{(x)}$ und $F_{(x)}$ constant für den ganzen Stab, so ist

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{S}{F} \cdot \int_0^l dx = \frac{1}{E} \cdot \frac{P}{F} \cdot l = \frac{P \cdot l}{E \cdot F}$$

Zusatz. Mit dieser Dehnung im Sinne der Stabaxe ist eine Querdehnung $\varepsilon_{(q)}$ in jeder zur Stabaxe senkrechten Richtung verbunden, und zwar haben ε und $\varepsilon_{(q)}$ entgegengesetztes Vorzeichen. Diese Querdehnung bewirkt bei einer Zugbelastung eine Querschnitts-Vermindering, bei einer Druckbelastung eine Querschnitts-Vergrösserung.

Lehrsatz IX. Die grösste Schiebung ist diejenige in den Ebenen, welche mit der Stabaxe den Winkel von 45° bilden, ihre Grösse ist

$$\gamma_{45} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon$$

wörin ε die Dehnung nach der Stabaxe, m einen Wert zwischen 3 und 4 bedeutet.

Beweis. Denken wir uns wieder, wie beim Beweis von Lehrsatz II, den Punkt A als unendlich kleines Prisma, und zeichnen wir (vgl. Fig. 6) dasselbe so, dass die Z -Axe zur

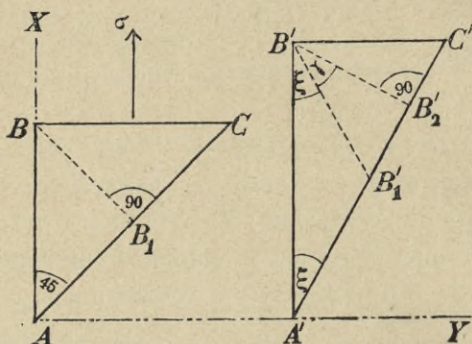


Fig. 6.

Bildfläche senkrecht steht, so stellen $AB = dx$; $BC = dy$ und AC die Spuren der dasselbe bildenden Ebenen mit der XY -Ebene dar.

Unter der Einwirkung von σ dehnt sich die Linie AB um $\varepsilon \cdot dx$ und die Linie BC um $\varepsilon_{(q)} \cdot dy = -dy \cdot \frac{\varepsilon}{m}$, sodass in dem deformierten Prisma

$$A'B' = dx (1 + \varepsilon)$$

$$B'C' = dy \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)$$

und die trigonometrische Tangente des Winkels $B'A'C' = \xi$ ist

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{B'C'}{A'B'} = \frac{dy \left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)}{dx (1 + \varepsilon)}$$

Es ist aber, weil $\alpha = 45^\circ$ war, $dx = dy$, sodass wir haben

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}$$

Ferner ist der Punkt B ein Punkt des Normalen im Punkte B_1 der Ebene, deren Spur AC ist. B gelangt durch die Deformation nach B' und B_1 nach B_1' , und zwar ist, ebenso gut wie B_1 der Halbierungspunkt von AC war, B_1' der Halbierungspunkt von $A'C'$, denn die Längenänderung von AC verteilt sich gleichmässig über die ganze Länge.

Es ist also nach der Deformation $B'B_1'$ die nunmehrige Lage derjenigen materiellen Linie, welche früher in B_1 senkrecht zur Ebene AC stand. Nach der Definition der Schiebung haben wir B' auf $A'C'$ zu projicieren, wodurch wir den Punkt B_2' erhalten, und stellt alsdann die trigonometrische Tangente des Winkels $B_2'B'B_1' = \gamma$ die Grösse der Schiebung dar.

Es ist

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{B_1'B_2'}{B_2'B'}$$

worin

$$B_1'B_2' = A'B_2' - A'B_1' = dx(1 + \varepsilon) \cdot \cos \xi - \frac{1}{2} dx(1 + \varepsilon) \frac{1}{\cos \xi}$$

$$B_2'B' = dx(1 + \varepsilon) \sin \xi,$$

also ist

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\cos \xi - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos \xi}}{\sin \xi}$$

kürzt man diesen Bruch mit $\cos \xi$, so wird

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \xi}}{\operatorname{tg} \xi}$$

und drückt man $\cos \xi$ durch $\operatorname{tg} \xi$ aus, so wird

$$\frac{1}{\cos^2 \xi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \xi$$

und damit

$$\lg \gamma = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \lg^2 \zeta}{\lg \zeta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon}{m}\right)^2}{(1 + \varepsilon)^2}}{\left(\frac{1 - \frac{\varepsilon}{m}}{1 + \varepsilon}\right)}$$

Führt man die Division des Bruches aus, wobei man die zweiten und höheren Potenzen von ε als unendlich klein höherer Ordnung vernachlässigen kann, so ergibt sich

$$\lg \gamma_{45} = \gamma_{45} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon$$

und da die Schiebungen den Schubspannungen proportional sind, für $\alpha = 45^\circ$ die Schubspannung am grössten ist, ist γ_{45} die grösste Schiebung.

Folgerung. Der Schub-Elasticitätsmodul G steht zum Elasticitätsmodul E in der Beziehung

$$G = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} E$$

Beweis. Allgemein ist $\frac{\tau}{\gamma} = G$, also ist in unserem speziellen Falle

$$\frac{\tau_{45}}{\gamma_{45}} = G$$

nun ist aber

$$\tau_{45} = \frac{1}{2} \sigma$$

$$\gamma_{45} = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \varepsilon = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\sigma}{E}$$

also ist

$$G = \frac{\frac{1}{2} \sigma}{\left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\sigma}{E}} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} E$$

Lehrsatz X. Die Dehnung nach der Richtung, welche mit der Stabaxe den Winkel $\alpha = 45^\circ$ bildet, hat die Grösse

$$\varepsilon_{45} = \frac{1}{2} \varepsilon \left(1 - \frac{1}{m} \right)$$

worin ε die Dehnung nach der Stabaxe bedeutet.

Beweis. Das Dreieck $B'B_1'C'$ in Fig. 6 ist ebenso gut ein gleichschenkliges wie das Dreieck BB_1C , weil B_1' senkrecht über der Mitte von $B'C'$ steht, wie B_1 senkrecht über der Mitte von BC .

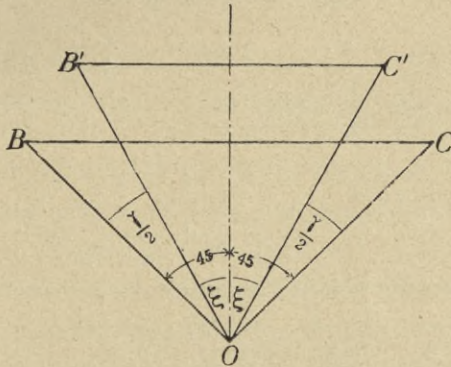


Fig. 7

Legt man nun (vgl. Fig. 7) diese beiden Dreiecke so auf einander, dass ihre Mittellinien und ihre Spitzen sich decken, so stellt nach Definition

Winkel $BOB' +$ Winkel COC' den Winkel γ dar und da die Figur zur Mittellinie symmetrisch ist, ist

$$\text{Winkel } BOB' = \frac{1}{2} \gamma = \text{Winkel } COC'$$

Demnach ist die Länge

$$BB_1 = BO = \frac{dx}{2} \cdot \frac{1}{\cos 45^\circ}$$

$$B'B_1' = B'O = \frac{dx}{2} (1 + \varepsilon) \frac{1}{\cos(4\delta - \frac{\gamma}{2})}$$

und für die Dehnung erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned} \varepsilon_{45} &= \frac{B'B_1' - BB_1}{BB_1} = \frac{(1 + \varepsilon) \frac{1}{\cos(4\delta - \frac{1}{2}\gamma)} - \frac{1}{\cos 4\delta}}{\frac{1}{\cos 4\delta}} \\ &= (1 + \varepsilon) \frac{\cos 4\delta}{\cos(4\delta - \frac{\gamma}{2})} - 1 \end{aligned}$$

hierin ist $\cos(4\delta - \frac{\gamma}{2}) = \cos 4\delta \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + \sin 4\delta \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$
und zwar ist $\sin 4\delta = \cos 4\delta$.

Es ist also

$$\varepsilon_{45} = (1 + \varepsilon) \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\gamma}{2}} - 1$$

Nun haben wir schon abgeleitet, dass

$$\operatorname{tg} \gamma_{45} = (1 + \frac{1}{m}) \varepsilon$$

und können wir, da es sich nur um einen sehr kleinen Winkel γ handelt

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{2} (1 + \frac{1}{m}) \varepsilon$$

setzen.

Drücken wir also in dem Ausdruck für ε_{45} die Werte $\cos \frac{\gamma}{2}$ und $\sin \frac{\gamma}{2}$ durch $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ aus und führen wir die sich ergebenden Divisionen aus, wobei wir alle zweiten und höheren Potenzen von ε vernachlässigen, so erhalten wir schliesslich

$$\varepsilon_{45} = \frac{1}{2} \varepsilon (1 - \frac{1}{m})$$

Anderer Beweis. Denken wir uns den Punkt A als einen unendlich kleinen Würfel, dessen eine Diagonalebene (vgl. Fig. 8) mit der XZ -Ebene zusammenfällt, so wissen

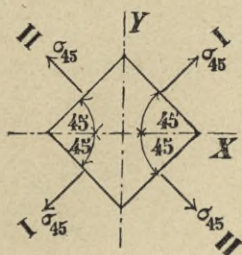


Fig. 8

wir, dass auf die vier Flächen, welche mit der Stabaxe Winkel von 45° bilden, und deren Spuren mit der XY -Ebene gezeichnet sind, je eine Normalspannung $\sigma_{45}^- = \frac{1}{2} \sigma$ wirkt.

Nun bringt das z. B. nach der Richtung I wirkende σ_{45} nach dieser Richtung eine Dehnung hervor gleich $\frac{\sigma_{45}}{E}$; nach derselben Richtung bringt aber noch das nach der Richtung II wirkende σ_{45} eine (secundäre) Dehnung hervor gleich $-\frac{1}{m} \cdot \frac{\sigma_{45}}{E}$ sodass insgesamt die Dehnung nach I sich ergibt zu

$$\epsilon_{45} = \frac{\sigma_{45}}{E} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1/2 \sigma}{E} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2} \epsilon \left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

Zusatz. Wir sehen, dass in der zu einer Ebene, welche mit dem Querschnitt einen Winkel $\alpha = 45^\circ$ bildet, normalen Richtung eine Dehnung vorhanden ist

$$\epsilon_{45} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \epsilon$$

Diese Dehnung soll aber mit der nach dieser Richtung wirkenden Normalspannung proportional sein, also sind wir genötigt, die zu ihr normale Ebene als von einer virtuellen

Normalspannung afficiert uns zu denken, die wir mit (σ) bezeichnen wollen. Es ist dann

$$(\sigma)_{45} = \varepsilon_{45} \cdot E = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \varepsilon \cdot E = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \cdot \frac{1}{2} \sigma = \left(1 - \frac{1}{m}\right) \sigma_{45}$$

Es giebt natürlich für jede Ebene ein $(\sigma)_\alpha$, und zwar ist allgemein

$$(\sigma)_\alpha = \sigma_\alpha - \frac{1}{m} \sigma_{90 - \alpha}$$



C. Biegung.

Definition der einfachen Biegungsbelastung.

Wir nennen die Belastung eines geraden Stabes dann eine Biegungsbelastung, wenn alle auf ihn einwirkenden äusseren Kräfte parallel sind, die Stabaxe senkrecht schneiden und alle in einer einzigen durch die Stabaxe gehenden Ebene liegen, der *Belastungsebene* oder *Kraftebene*. Diese Definition setzt voraus, dass der Stab gewichtslos sei. Ist aber sein Gewicht nicht zu vernachlässigen, so gehört er nur dann zu den auf einfache Biegung beanspruchten Stäben, wenn seine Axe horizontal liegt, denn nur dann wird diese auch von den Schwerkraften rechtwinklig geschnitten.

Voraussetzungen.

Denken wir uns den Stab in einem beliebigen Querschnitte auseinander geschnitten und bilden wir die Resultante aller links von dem betreffenden Querschnitte und die Resultante aller rechts von demselben wirkenden Kräfte jede für sich, so müssen, da wir Gleichgewicht der äusseren Kräfte voraussetzen, auch diese beiden Resultanten im Gleichgewicht sein. Sie müssen also beide gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sein, und beide in eine Linie fallen, welche in derselben Ebene mit den Lasten der gemeinschaftlichen Richtung dieser parallel ist. Diese Linie hat im allgemeinen einen Abstand $= a$ von dem Querschnitt, auf welchen sich die beiden Resultanten beziehen (vergl. Fig. 9).

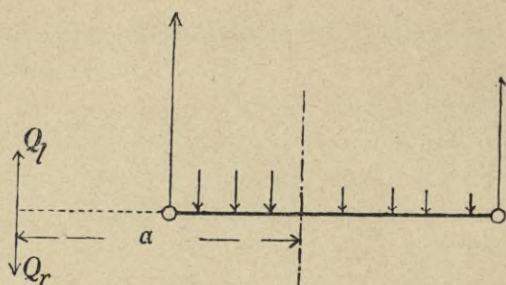


Fig. 9

Denken wir uns nun von dem Stab den linken Teil entfernt, so kann der rechte Teil nur dann in seiner Lage bleiben, wenn wir in dem Querschnitte ein der Resultanten der am rechten Teile wirksamen äusseren Kräfte entgegengesetzt gleiches Kräftesystem anbringen, d. h. also, wenn wir in dem Querschnitte ein der Resultanten der am entfernten linken Teile wirksam gewesenen äusseren Kräfte (angrei-

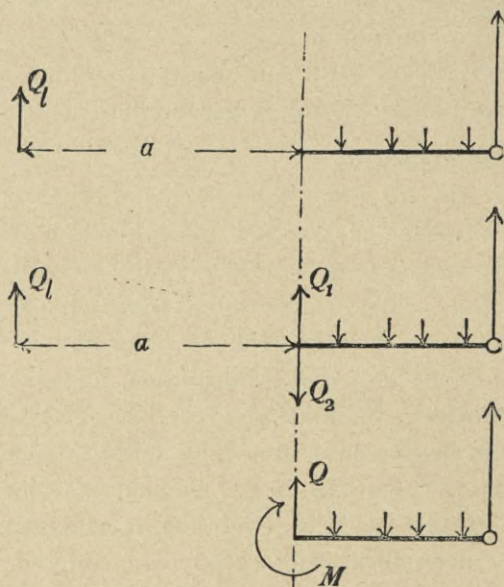


Fig. 10

fende und reagierende) äquivalentes System anbringen. Dies thun wir, indem wir (vergl. Fig. 10) zu der vorhandenen Resultanten, welche wir Q_{links} nennen wollen, in dem Schwerpunkte des Querschnitts, und zwar in der Linie des Schnittes der Belastungsebene mit dem Querschnitte, zwei entgegengesetzt gerichtete, unter sich und mit Q_{links} gleiche Kräfte Q_1 und Q_2 anbringen. Dieses neue System ist mit Q_{links} äquivalent, denn die beiden neuen Kräfte sind zusammen gleich 0, nur können wir dasselbe deuten als eine in der Ebene des Querschnitts durch dessen Schwerpunkte gehende mit Q_{links} gleiche und gleichgerichtete Schubkraft Q_1 , zusammen mit einem Kräftepaare, dessen Axe im Schwerpunkte des Querschnittes zur Belastungsebene senkrecht steht, also mit dessen zur Belastungsebene senkrechten Schweraxe zusammen fällt. Die Grösse dieses Kräftepaares ist $a \cdot Q_{\text{links}}$. Die Schubkraft nennen wir die *Querkraft* $= Q$, das Kräftepaar das *Moment* $= M$ der äusseren Kräfte für den betreffenden Querschnitt.

Gewöhnlich brauchen wir den Abstand a der Resultanten Q_{links} von dem Querschnitt gar nicht zu bestimmen, sondern bezeichnen:

M als die algebraische Summe der Produkte aus jeder links vom Querschnitt angreifenden Kraft mit ihrem Abstand von demselben.

Q als die algebraische Summe der links vom Querschnitt angreifenden Kräfte.

In Wirklichkeit bleibt nun der Stab ungeteilt, das Gleichgewicht des rechten Stabtheiles verlangt aber auch in diesem Falle die Erfüllung obiger Bedingungen, es müssen demnach die inneren Kräfte vom linken Stabteil her die Uebertragung der Querkraft Q und des Momentes M auf den Querschnitt besorgen.

Zum Ausdruck gelangen, wie wir in der Einleitung gesehen haben, innere Kräfte als über die betreffende Fläche, hier Querschnittsfläche, verteilte Spannungen σ und τ , und zwar stellt das Produkt σdf eine innere Normalkraft, das Produkt τdf eine innere Schubkraft dar, die in dem Element df der Querschnittsfläche wirkt. Die Gesamtheit der mit der Belastungsebene parallelen Componenten $\tau' df$ der Elementar-Schubkraft τdf stellt die im Querschnitt wirkende Querkraft Q dar, d. h. es ist

$$\int \tau' \cdot df = Q$$

wenn das Integral für die ganze Fläche genommen wird. Die Gesamtheit der Elementar-Normalkräfte $\sigma \cdot df$ würde die auf den Querschnitt wirkende innere Normalkraft darstellen; eine solche ist aber nicht vorhanden, also ist, wenn das Integral über die ganze Fläche ausgedehnt wird

$$\int \sigma \cdot df = 0$$

Damit ist gesagt, dass entweder alle $\sigma = 0$ sind, oder dass wenigstens, und dies ist der Fall, immer einem positiven σdf ein gleich grosses negatives σdf entspricht.

Die Gesamtheit der zur Belastungsebene senkrechten Componenten $\tau'' \cdot df$ der Elementar-Schubkräfte $\tau \cdot df$ würde eine im Querschnitt senkrecht zur Belastungsebene wirkende Schubkraft darstellen, eine solche ist aber nicht vorhanden, also ist, wenn das Integral über die ganze Fläche ausgedehnt wird

$$\int \tau'' \cdot df = 0$$

Damit ist gesagt, dass entweder alle $\tau'' = 0$ sind, oder dass wenigstens jedem $+\tau'' \cdot df$ ein gleich grosses $-\tau'' \cdot df$ entspricht; es kommen beide Fälle vor.

Es bleibt nun noch das Moment, welches auch sich darstellt mittelst der aus den Spannungen gebildeten inneren

Elementar-Kräfte. Eine Einwirkung auf das Moment können aber die Elementar-Schubkräfte $\tau \cdot df$ nicht haben, denn die Momenten-Axe liegt in der Querschnittsebene, wird also von den Richtungen der $\tau \cdot df$ geschnitten. Dagegen haben die Elementar-Normalkräfte $\sigma \cdot df$ je einen Hebelsarm im Bezug auf die Momenten-Axe, und zwar ist dieser Hebelsarm gleich dem jeweiligen Abstände v des betreffenden df von der zur Belastungsebene senkrechten Schwerlinie des Querschnitts.

Es muss demnach die Gesamtheit der Produkte, d. h. der Elementar-Momente $(\sigma \cdot df) v$ das auf den Querschnitt wirkende Moment M darstellen. Integriert man über die ganze Fläche, so muss also sein

$$\int v \cdot (\sigma \cdot df) = M$$

Bemerkung. — Es widerspricht unserer Definition der Biegungsbelastung nicht, wenn ausser den Parallelkräften noch ein äusseres angreifendes Moment in der Belastungsebene vorhanden ist. Man braucht dasselbe nur in ein den übrigen äusseren Kräften paralleles Kräftepaar aufzulösen, dessen eine Kraft im Angriffspunkt des äusseren Momentes verbleibt, während die andere über dem zu untersuchenden Querschnitt ihren Angriffspunkt bekommt. Es werden dann diese zwei Kräfte gerade wie die übrigen behandelt.

Hilfslehrsatz 1. Ist x die Abscisse eines beliebigen Querschnittes des Stabes vom linken Ende desselben gemessen, ist das auf den Querschnitt wirkende Moment M , die Querkraft Q , und ist unter den Belastungen des Stabes auch eine über seine Länge gleichförmig verteilte Last p pro Längeneinheit vorhanden, so ist

$$\frac{dM}{dx} = Q \text{ und } \frac{dQ}{dx} = -p$$

Beweis. Denken wir uns von dem Stabe alles bis auf den Teil zwischen den Querschnitten bei x und $(x + dx)$ entfernt (vergl. Fig. 11), so hat auf den Querschnitt bei x der links entfernte Stabteil mit Q und M , auf den Querschnitt bei $x + dx$ der rechts entfernte Stabteil mit $(Q + dQ)$ und $(M + dM)$ gewirkt, wobei dQ und dM die unendlich kleine Differenz darstellt der Grössen Q und M für die beiden Quer-

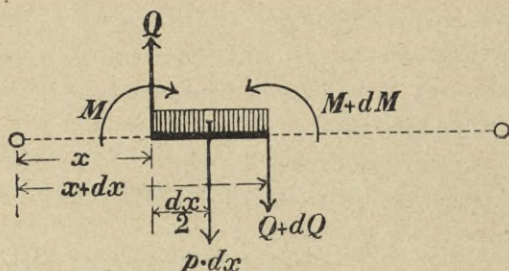


Fig. 11

schnitte. Ausserdem wirkt auf das Stabelement noch die gleichverteilte Last $p \cdot dx$, deren Resultante den Abstand dx der beiden Querschnitte halbiert. Da $(M + dM)$ und $(Q + dQ)$ von dem rechten Trägerteil herrühren, und da dx verschwindend klein ist, so haben sie (nach Einleitung) einen zu dem von Q und M entgegengesetzten Sinn.

Das Stabelement war nun mit dem ganzen Stabe zusammen im Gleichgewicht, also muss es unter der Einwirkung obiger Kräfte und Momente auch im Gleichgewicht sein, d. h. es muss sein

$$(Q + dQ) + (p \cdot dx) - Q = 0$$

und

$$(M + dM) = M + (Q \cdot dx) - (p \cdot dx \cdot \frac{dx}{2})$$

In letzterer Gleichung, für welche der Schwerpunkt des Querschnitts bei $(x + dx)$ Momentenpunkt war, kann die Grösse $(p \cdot \frac{dx^2}{2})$ als unendlich klein zweiter Ordnung vernachlässigt werden, sodass wir erhalten

$$dQ = -p \cdot dx; \quad \frac{dQ}{dx} = -p$$

$$dM = Q \cdot dx; \quad \frac{dM}{dx} = Q$$

Zusatz. Greift gerade zwischen den Querschnitten x und $(x + dx)$ eine Einzellast P an, von welcher wir annehmen können, dass sie auf die Länge von dx gleichverteilt wirkt, so ist für diese zwei Querschnitte die Differenz der Querkräfte

$$dQ = -(p \cdot dx + P)$$

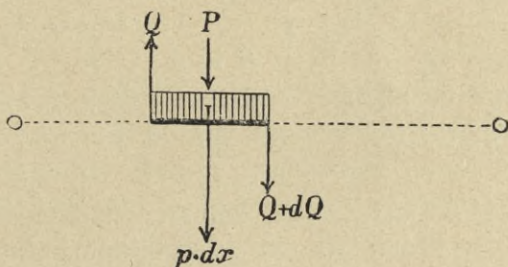


Fig. 12

Beweis. Auf das Stabelement wirken hier und sind im Gleichgewicht (vergl. Fig. 12)

$$(Q + dQ) + (P + p \cdot dx) - Q = 0$$

und daraus findet sich

$$dQ = -(p \cdot dx + P)$$

Hilfslehrsatz 2. Sind in Figur 13 OX und OY die Spuren zweier zu einander und zur Bildfläche normaler Ebenen, und bildet die Ebene, deren Spur OK ist, mit denselben die

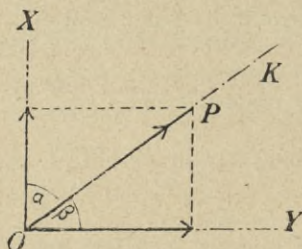


Fig. 13

Winkel α und β , und ist ferner in dieser Ebene, deren Spur OK ist, ein Kräftepaar vorhanden $= (P \cdot a) = M$, so kann man dasselbe ersetzen durch zwei gleichzeitig wirkende Kräftepaare, eines in der Ebene OX , dessen Grösse $M \cdot \cos \alpha$ ist, und eines in der Ebene OY , dessen Grösse $M \cdot \cos \beta$ ist.

Beweis. M ist gleich $P \cdot a$. Wir können das Paar so drehen, dass die eine Kraft P in die Linie OK fällt, und können sie dann zerlegen nach den beiden Schenkeln des rechten Winkels in $P \cdot \cos \alpha$ und in $P \cdot \cos \beta$. Ebenso machen wir es mit dem anderen P in der im Abstände a zur Bildebene parallelen Ebene, so dass wir nun statt des Moments $P \cdot a$ in der Ebene OK ein äquivalentes System zweier Momente haben, eines in der OX -Ebene, dessen Grösse ist

$$P \cdot a \cdot \cos \alpha = M \cos \alpha$$

eines in der OY -Ebene, dessen Grösse ist

$$P \cdot a \cdot \cos \beta = M \cos \beta$$

Hilfslehrsatz 3. Ist df ein beliebiges, unendlich kleines Element der Fläche einer geschlossenen ebenen Figur, und ist γ der Abstand dieses Elementes von einer Schwerlinie der

Figur, so nennen wir das für die ganze Fläche genommene $\int \tau_i^2 df$ das *Trägheitsmoment* der Figur für die betreffende Schwerlinie und bezeichnen es mit J .

Von den sämtlichen möglichen J gibt es ein grösstes und ein kleinstes, und zwar sind die beiden Schwerlinien, auf welche sie sich beziehen, zu einander senkrecht und heissen die zwei *Hauptträgheits-Axen*.

Beweis. Nehmen wir in der Figur zwei rechtwinklige Coordinaten-Axen an mit dem Schwerpunkt der Figur als

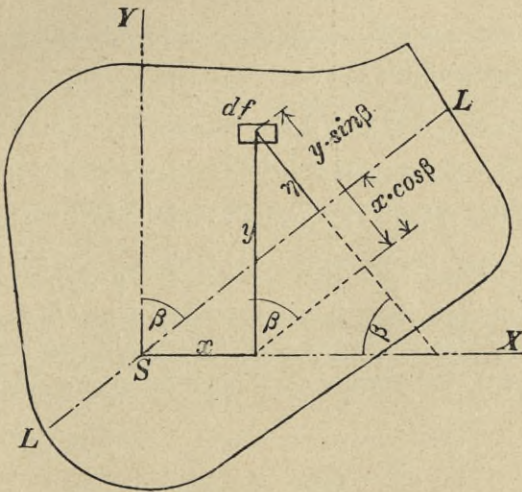


Fig. 14

Ursprung, und ist eine Schwerlinie SL bestimmt durch den Winkel β , welchen sie mit der y -Axe bildet (vergl. Fig. 14), so ist das Trägheitsmoment für diese Linie

$$J_{\beta} = \int \tau_i^2 \cdot df$$

Drückt man nun τ aus durch die Abstände x und y des Elementes df von den beiden Coordinaten-Axen, d. h.

setzt man

$$\eta = y \cdot \sin \beta - x \cdot \cos \beta$$

so ist

$$J_{\beta} = \int (y \cdot \sin \beta - x \cdot \cos \beta)^2 \cdot df$$

$$J_{\beta} = \cos^2 \beta \int x^2 df - 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta \int xy df + \sin^2 \beta \int y^2 df$$

Nun ist die x -Axe sowie die y -Axe eine Schwerlinie der Figur, also ist nach Definition

$$\int x^2 \cdot df = J_y \text{ und } \int y^2 \cdot df = J_x$$

und bezeichnen wir kurz das Integral $\int xy df$ mit T , so wird unsere Gleichung für J_{β} zu

$$J_{\beta} = J_y \cdot \cos^2 \beta - 2 T \cdot \sin \beta \cos \beta + J_x \cdot \sin^2 \beta$$

Denken wir uns nun für alle möglichen Schwerlinien SL das Trägheitsmoment J_{β} ermittelt, und denken wir uns ferner für jede dieser Schwerlinien die Grösse $\frac{1}{\sqrt{J_{\beta}}}$ gebildet, und auf die Richtung einer jeden derselben eine die so gebildete Grösse darstellende Länge vom Schwerpunkte aus aufgetragen (vgl. Fig. 15), und würden die Endpunkte aller dieser Strecken

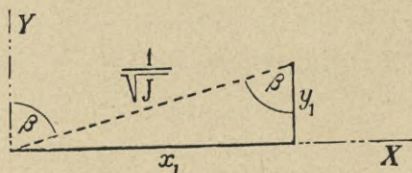


Fig. 15

durch eine Curve verbunden werden, so würden die laufenden Coordinaten dieser Curve die Form haben

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{J_{\beta}}} \sin \beta; \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{J_{\beta}}} \cos \beta$$

Aus diesen zwei Gleichungen können wir folgende drei Beziehungen ableiten

$$\begin{aligned}\sin^2 \beta &= J_{\beta} \cdot x_1^2; \quad \cos^2 \beta = J_{\beta} \cdot y_1^2 \\ \sin \beta \cdot \cos \beta &= J_{\beta} \cdot x_1 y_1\end{aligned}$$

Führen wir diese Werte in die Gleichung für J_{β} ein, so haben wir

$$\begin{aligned}J_{\beta} &= J_y \cdot J_{\beta} \cdot y_1^2 - 2 T \cdot J_{\beta} \cdot x_1 y_1 + J_x \cdot J_{\beta} \cdot x_1^2 \\ 1 &= J_y \cdot y_1^2 - 2 T \cdot x_1 y_1 + J_x \cdot x_1^2\end{aligned}$$

Diese Gleichung ist diejenige einer Ellipse, es liegen also die Endpunkte aller Strecken $\frac{1}{\sqrt{J_{\beta}}}$ auf einer Ellipse, so dass das J_{β} , welches der kleinsten Halbhaxe der Ellipse entspricht, das grösste aller J_{β} ist, und das J_{β} , welches der grössten Halbhaxe entspricht, das kleinste aller J_{β} ist, und da grösste und kleinste Halbhaxe zu einander senkrecht stehen, sind auch die beiden Hauptträgheitsachsen zu einander senkrecht.

Zusatz. Macht man die beiden Hauptachsen der Ellipse zu unseren Coordinaten-Axen, so würde in deren Gleichung das Glied mit dem Produkt $x_1 y_1$ gleich Null sein müssen, d. h. es wäre dann

$$T = \int xy \cdot df = 0$$

und

$$J_{\beta} = J_y \cdot J_{\beta} \cdot y_1^2 + J_x \cdot J_{\beta} \cdot x_1^2 = J_y \cdot \cos^2 \beta + J_x \cdot \sin^2 \beta$$

worin J_y und J_x die beiden Hauptträgheitsmomente sind, und β der Winkel ist, welchen die betreffende Schwerlinie mit der Axe von J_y bildet.

Hilfslehrsatz 4. Ist in einer von zwei im rechten Winkel sich schneidenden Ebenen eine zur Schnittlinie derselben senkrechte Schubspannung vorhanden, so erfährt die

andere Ebene eine ebenso grosse, zur gemeinschaftlichen Schnittlinie ebenfalls senkrechte Schubspannung.

Beweis. Denken wir uns den Punkt A im Inneren eines Körpers als unendlich kleines Parallelepipedum mit den nach den drei Axen eines Coordinaten-Systems gerichteten Kanten dx , dy und $d\varepsilon$, so können wir die vier Ebenen,

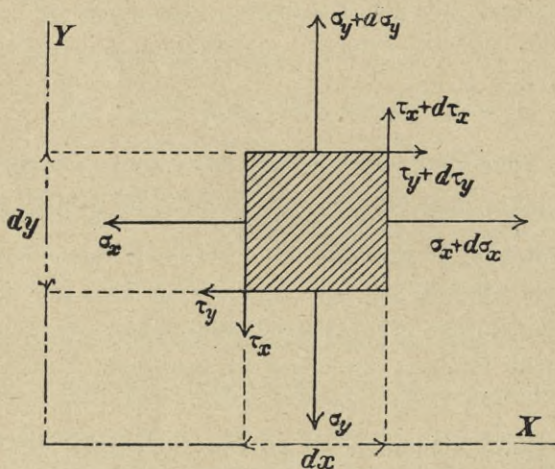


Fig. 16

welche senkrecht stehen zur YX -Ebene, als welche wir die Bildfläche in Fig. 16 nehmen wollen, darstellen durch ihre Spuren mit der Bildfläche.

Es werden auf diesen vier Flächen innere Kräfte vorhanden sein, welche im allgemeinen Falle den in der Figur eingezeichneten Spannungen entsprechen. Da der Körper als ganzes im Gleichgewicht ist, so ist auch das Element im Gleichgewicht, unter anderem gegen Drehung um seine zur YX -Ebene senkrechte Schweraxe. Mit Rücksicht auf diese Axe kommen nur in Betracht die Kräfte

$$\begin{aligned} \tau_x \cdot (dy \cdot dz); & \quad (\tau_x + d\tau_x) (dy \cdot dz) \\ \tau_y \cdot (dx \cdot dz) & \quad \text{und} \quad (\tau_y + d\tau_y) (dx \cdot dz) \end{aligned}$$

da die gezeichneten Normalspannungen dieselbe schneiden, die sämtlichen anderen Spannungen, bezw. Kräfte, welche nicht gezeichnet sind, auch diejenigen, welche auf den zwei übrigen Flächen wirken, sie entweder auch schneiden oder mit ihr parallel sind. Es müssen demnach die rechtsdrehenden obiger vier Kräfte ein Moment haben, welches gleich gross ist dem Moment der linksdrehenden, es muss also sein

$$\begin{aligned} & \tau_x \cdot (dy \cdot dz) \cdot \frac{dx}{2} + (\tau_x + d\tau_x) (dy \cdot dz) \frac{dx}{2} = \\ = & \tau_y \cdot (dx \cdot dz) \cdot \frac{dy}{2} + (\tau_y + d\tau_y) (dx \cdot dz) \frac{dy}{2} \end{aligned}$$

Die Glieder $d\tau_x \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2}$ und $d\tau_y \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{2}$ können wir als unendlich klein höherer Ordnung vernachlässigen, und erhalten wir, wenn wir mit $dx \cdot dy \cdot dz$ kürzen

$$\tau_x = \tau_y$$

und bleibt diese Beziehung richtig, wie wir auch das Parallelepipedum, als welches wir uns den Punkt A vorstellen, im Körper gedreht denken.

Hilfslehrsatz 5. Sind x und y die correspondierenden Coordinaten irgend einer Curve, so ist der Krümmungsradius r der Curve in dem Punkte, dessen Coordinaten x und y sind

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Beweis. Ist ds (vergl. Fig. 17) ein unendlich kleines Curvelement, und schliessen die Normalen, welche in beiden Enden von ds auf die Curvenrichtung gezogen werden

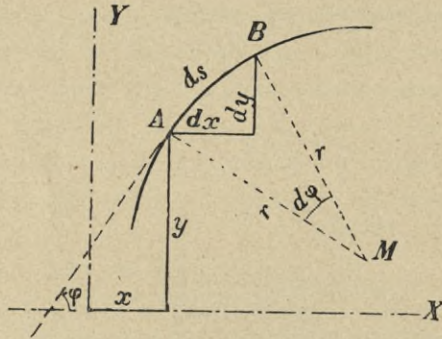


Fig. 17

können, den Winkel $d\varphi$ ein, so ist, weil ds als Kreisbogen gelten soll, die Länge jeder der Normalen AM und $BM = \frac{ds}{d\varphi} = r$.

Die Tangente an die Curve im Punkte A bildet mit der X -Axe den Winkel φ (dessen Aenderung $d\varphi$ darstellt), und es ist

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}; \quad \frac{d}{dx} \operatorname{tg} \varphi = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Es ist aber

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx}$$

also ist

$$\frac{d\varphi}{dx} = \cos^2 \varphi \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Ferner ist

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \cos \varphi = \cos^3 \varphi \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Es ist demnach

$$r = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^3 \varphi \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}} = \frac{\left(\frac{1}{\cos^3 \varphi}\right)}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)} = \frac{\left(\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right)^3}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}$$

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Lehrsatz I. Es giebt bei der Biegungsbeanspruchung in jedem Querschnitte eine bestimmte Schwerlinie, für deren sämtliche Punkte die Normalspannung in der Querschnittsebene gleich Null ist.

Für die sämtlichen Punkte jeder zu dieser Schwerlinie parallelen Linie sind die Normalspannungen in der Querschnittsebene gleich gross, und zwar ist die Grösse derselben jeweils proportional dem Abstände der Linie von der Schwerlinie.

Beweis. Unter der Einwirkung der oben definierten Belastung, wird sich der gerade Stab biegen, die Stabaxe wird eine krumme Linie werden, von welcher wir annehmen wollen, dass sie in einer Ebene bleibt, welche wir die *Biegungsebene* nennen.

Wir nehmen an (in Wirklichkeit ist dies nicht ganz der Fall), dass die ursprünglichen Querschnitte des Stabes auch in gebogenem Zustande desselben immer noch Querschnitte des nun krummen Stabes bleiben, dass sie also ebene Flächen bleiben und die nun krumme Axe senkrecht schneiden. Sie stehen demnach auch senkrecht auf die Biegungsebene.

Wenn wir uns die Biegungsebene als Bildebene denken, so können wir den gebogenen Stab und seine Querschnitte

durch ihre Spuren (vergl. Fig. 18) darstellen. Was von irgend einem Punkte der Querschnittsspur gilt, gilt auch für alle übrigen Punkte der den betreffenden Punkt enthaltenden

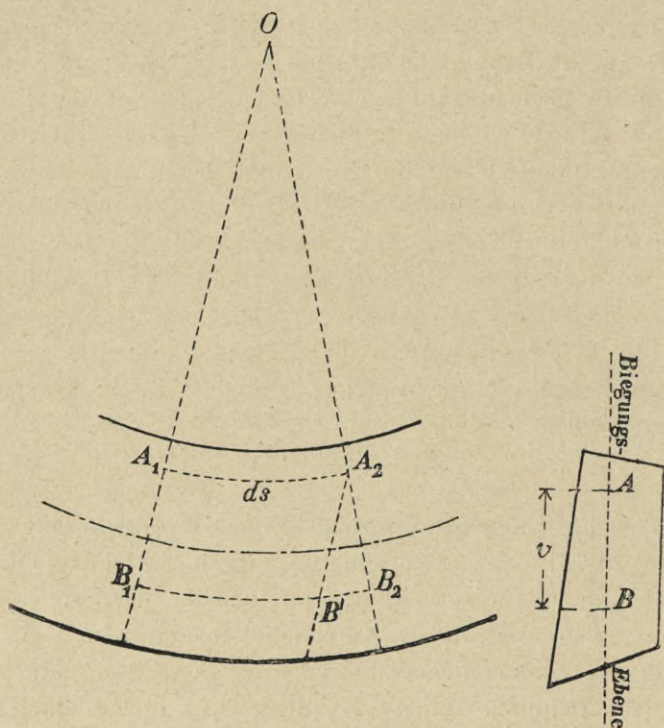


Fig. 18

zur Bildfläche d. h. Biegungsebene senkrechten Linie des Querschnittes.

Bei der Biegung des Stabes nämlich, werden voraussichtlich zwei benachbarte Querschnittsebenen ihre gegen-

seitige Lage nicht nur durch eine Rotation, sondern auch durch eine Translation ändern. Durch diese Lagenänderung der Querschnitte erfahren alle je zwischen zwei von ihnen eingeschlossenen scheibenförmigen Längselemente des Stabes Dehnungen, und da wir gesagt haben, dass die Querschnitte alle zur selben Ebene (der Biegungsebene) senkrecht bleiben, so haben alle Längselemente, welche durch die Punkte einer zur Biegungsebene senkrechten Linie gehen, je eine gleiche Dehnung. Dies schliesst, ähnlich wie bei der Zug- und Druckbelastung die gleichförmige Verteilung der inneren Kraft auf den ganzen Querschnitt eine Einwirkung sämtlicher Längsfasern aufeinander in allen zum Querschnitt senkrechten Ebenen ausschloss, hier eine Einwirkung der Längsfasern aufeinander aus wenigstens in allen zur Biegungsebene parallelen Ebenen, sodass in keinem Punkte des Stabes die zur Biegungsebene parallele Ebene von einer Spannung afficiert wird.

War vor der Lagenänderung der Abstand zweier noch paralleler Querschnittsebenen, also auch zweier beliebiger gleichweit von der Axe abstehender Punkte derselben gleich ds , so mögen nun die Punkte A_1 und A_2 diejenigen sein, deren Abstandsänderung durch die Dehnung infolge der Translation gerade neutralisiert wird durch eine entgegengesetzte Dehnung infolge der Rotation, sodass nach der Deformation der Abstand $A_1 A_2$ immer noch ds ist. Ist ferner O die Spur derjenigen Linie, in welcher sich nach der Deformation die beiden Querschnittsebenen schneiden, so wollen wir die Strecke $OA_1 = OA_2 = r$ annehmen, und hat der Punkt B_1 von A_1 sowie der Punkt B_2 von A_2 den Abstand in der Querschnittsebene $= r$, und bezeichnen wir die Strecke $B_1 B_2$, um welche nach der Deformation der Abstand $B_1 B_2$ grösser geworden ist als das ursprüngliche ds , mit $\Delta_v ds$, so

ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OA_1A_2 und $A_2B'B_2$

$$\frac{\Delta_v ds}{v} = \frac{ds}{r}$$

$$\frac{\Delta_v ds}{ds} = \frac{v}{r}$$

Der Quotient $\frac{\Delta_v ds}{ds}$ ist nach Definition die spezifische Dehnung der Längsfaser B_1B_2 , deren Abstand von der nicht gedehnten (neutralen) Faser A_1A_2 gleich v ist. Es ist also

$$\frac{v}{r} = \frac{\Delta_v ds}{ds} = \varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E}$$

worin σ_v die für sämtliche Punkte der Linie, welche im Abstand v von A zur Biegungsebene senkrecht steht, constante Spannung bedeutet.

$$\sigma_v = \frac{v}{r} E$$

Es ist also σ_v proportional dem absoluten Werte von v .

Nennen wir nun den jeweils im Abstände v von A zur Biegungsebene senkrechten, unendlich schmalen Streifen des Querschnittes dF_v , so wird unser früheres $\int \sigma \cdot df = 0$ zu

$$\int_{v=e'}^{v=e''} \sigma_v \cdot dF_v = 0 = \int_{v=e'}^{v=e''} \frac{v}{r} E \cdot dF_v$$

worin e' und e'' den Abstand der beiden äussersten Fasern von A (vgl. Fig. 19) bedeuten.

Für jeden Querschnitt ist ausser E auch r eine Constante, also ist

$$\frac{E}{r} \int_{v=e'}^{v=e''} v \cdot dF_v = 0$$

$\frac{E}{r}$ ist nicht gleich Null, also ist

$$\int_{v=e'}^{v=e''} v \cdot dF_v = 0$$

Dies kann nur dann der Fall sein, wenn A der Schwerpunkt des Querschnittes ist, also mit S zusammenfällt, da das Integral ein statisches Moment der Fläche darstellt.

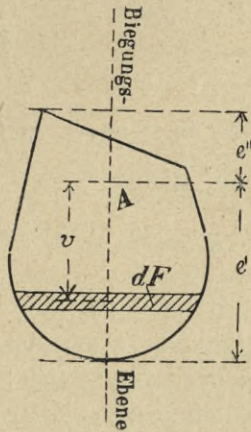


Fig. 19

Es sind also die Punkte des Querschnittes, welche nach der Richtung der Stabaxe keine Dehnung, also für die Querschnittsebene keine Normalspannung erfahren, diejenigen, welche in der zur Biegungsebene senkrechten Schwerlinie des Querschnittes liegen

$$\sigma_v = 0 = 0$$

Diese zur Biegungsebene senkrechte Schwerlinie bildet die *neutrale Faser* des Querschnittes. Jede andere zur Biegungsebene senkrechte Linie wollen wir eine *Linie gleicher Spannungen* nennen.

Lehrsatz II. Ist J das Trägheitsmoment des Querschnittes für seine zur Biegungsebene senkrechte Schweraxe, so ist

$$M = \frac{EJ}{r}$$

Beweis. Unser früheres $\int v \cdot (\sigma \cdot df) = M$ wird jetzt zu

$$\int_{v=e'}^{v=-e''} v \cdot (\sigma_v \cdot dF_v) = M = \frac{E}{r} \int_{v=e'}^{v=-e''} v^2 \cdot dF_v$$

Nun ist $\int_{v=e'}^{v=-e''} v^2 \cdot dF_v$ die Grösse, welche wir Trägheitsmoment genannt haben, also ist

$$M = \frac{E}{r} \cdot J$$

Lehrsatz III. Nehmen wir die Biegungsebene zur Ebene eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, dessen Null-Punkt beim linken Stabende sich befindet, und dessen X -Axe mit der ursprünglichen, geraden Stabaxe zusammenfällt, und ist y die Ordinate der nunmehrigen, durchgebogenen Stabaxe bei dem Querschnitte, dessen Abscisse x ist, d. h. ist y die Ordinate der *elastischen Linie* für die Abscisse x , so sind x und y verbunden durch die Gleichung

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M$$

Beweis. Die Grösse r stellt nach ihrer Entstehung den Krümmungsradius der durchgebogenen Stabaxe dar, drückt sich also für den Querschnitt bei x vermittelst der Coordinaten x und y aus als

$$r = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} : \frac{d^2 y}{dx^2}$$

oder, da wir annehmen, dass die Durchbiegung einen sehr kleinen Betrag habe, dass also $\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$ verschwindend klein sei, so können wir $(\frac{dy}{dx})^2$ gegen 1 vernachlässigen, und erhalten den einfachen Ausdruck

$$r = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

Nun war $M = \frac{E}{r} \cdot J$; führen wir hierin obigen Wert r ein, so ergibt sich

$$M = EJ \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

Bemerkung. — Soll aus dieser Beziehung die Durchbiegung der elastischen Linie gegen die ursprüngliche gerade Stabaxe ermittelt werden, so muss zuerst M als Funktion von x ausgedrückt werden; dann erhält man, wenn man beide Seiten nach dx integriert, eine neue Gleichung, deren rechte Seite die Form hat

$$EJ \cdot \frac{dy}{dx}$$

und deren linke Seite eine Funktion von x ist plus einer unbekanntten Constanten c_1 . Die in dieser Gleichung enthaltene Grösse $\frac{dy}{dx}$ stellt die trigonometrische Tangente dar des Winkels, welchen die Tangente an die elastische Linie in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, mit der ursprünglichen Stabaxe bildet, und dient die Gleichung zur Ermittlung eben dieses Winkels.

Integriert man diese zweite Gleichung nochmals beiderseits nach dx , so erhält man eine dritte Gleichung, deren rechte Seite nun die Form hat

$$EJ \cdot y$$

und deren linke Seite eine Funktion von x ist, plus dem Produkte $x c_1$ plus einer neuen unbekanntem Constanten c_2 . Aus dieser Gleichung ergibt sich die Durchbiegung y der elastischen Linie in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, gegenüber der ursprünglichen Stabaxe.

Die Werte für die beiden Constanten c_1 und c_2 können wir nur dann ermitteln, wenn irgendwelche zusammengehörige Werte für x und y von vornherein bekannt sind.

Es ist gerade bei der Biegungselasticität, wo hauptsächlich die Fälle vorkommen, dass man die Spannungen erst ermitteln kann, wenn die Deformation bekannt ist, so z. B. wenn der Stab auf zwei Stützen aufliegt, über deren einer er sich nicht frei bewegen kann, d. h. eingespannt ist; es wird dann in den Ausdrücken für M und Q immer das unbekanntem Glied $M_0 =$ dem durch die Einspannung hervorgerufenen Momente vorkommen. Erst wenn wir M_0 mit Hilfe der Gleichung für die elastische Linie bestimmt haben, sind M und Q bekannt.

Lehrsatz IV. Für alle Punkte, welche in einer Linie des Querschnittes liegen, die senkrecht zur Biegungsebene steht und vom Schwerpunkte des Querschnittes den Abstand v hat, ist die Normalspannung in der Querschnittsebene

$$\sigma_v = \frac{M}{J} v$$

Beweis. Wir haben gesehen, dass

$$\sigma_v = v \cdot \frac{E}{r}$$

und

$$M = \frac{E}{r} J$$

ist, also ist

$$\sigma_v = \frac{M}{J} \cdot v$$

Lehrsatz V. Die Normalspannung σ_v ist eine Zugspannung, also eine positive Grösse, wenn v nach derjenigen Seite der neutralen Faser genommen ist, nach welcher die Durchbiegung stattfindet, also nach welcher die elastische Linie ihre *convexe* Seite hat. Dieselbe ist hingegen eine Pressung also eine negative Grösse, wenn v nach derjenigen Seite der neutralen Faser genommen ist, nach welcher die elastische Linie ihre *concave* Seite hat.

Beweis. Auf der convexen Seite der elastischen Linie sind die Querschnitte von einander entfernt, also die einzelnen Längsfasern gedehnt worden auf der concaven Seite der elastischen Linie sind die Querschnitte einander genähert, also die Längsfasern zusammengepresst worden.

Zusatz. Geben wir nun von vornherein allen Abständen v , die z. B. von der neutralen Faser aus nach unten gemessen werden, das Vorzeichen $+$, allen denen, die von der neutralen Faser aus nach oben gemessen werden, das Vorzeichen $-$, und hat bei irgend einer Belastung die elastische Linie ihre *convexe Seite nach unten*, so ist

$$\sigma_v \text{ unten} = (+v) \frac{M}{J}$$

$$\sigma_v \text{ oben} = (-v) \frac{M}{J}$$

Es ist also richtig die Zugspannung eine positive, die Druckspannung eine negative Grösse.

Ist aber die elastische Linie nach *oben convex* gebogen, so würden die σ_v falsches Vorzeichen bekommen; wir müssten also entweder die Vorzeichen der v umtauschen, was wir aber nicht thun wollen, oder der Grösse M in diesem Falle der nach der Seite der negativen v convex gebogenen elastische Linie das negative Vorzeichen geben, was wir thun wollen. Es ist dann

$$\sigma_v \text{ unten} = (+v) \frac{-M}{J} = -v \frac{M}{J}$$

$$\sigma_v \text{ oben} = (-v) \frac{-M}{J} = +v \frac{M}{J}$$

sodass die σ_v nun wieder richtiges Vorzeichen haben.

Wenn wir aus irgend einem Grunde ein negatives M bekommen, so wissen wir, dass damit gesagt ist: die elastische Linie ist nach der Seite der negativen v convex gebogen. Gewöhnlich giebt man denjenigen v das positive Vorzeichen, welche auf der Seite der neutralen Faser liegen, nach welcher die angreifenden Kräfte gerichtet sind.

Im folgenden soll unter M ohne Vorzeichen der algebraische Wert eines Momentes verstanden werden.

Lehrsatz VI. Ist e' der Maximalwert eines positiven v und e'' der Maximalwert eines negativen v , so sind

$$\sigma_{e'} = \frac{M}{J} e' \text{ und } \sigma_{e''} = \frac{M}{J} e''$$

die beiden Grenzwerte der im Querschnitte vorkommenden Normalspannungen nach Grösse und Sinn, sobald M und e' bzw. e'' mit ihrem Vorzeichen eingeführt werden.

Beweis. Die σ_v sind proportional der Grösse v , also ist σ_v auch am grössten für die beiden grössten v .

Zusatz. Die Quotienten $\frac{J}{e'}$ und $\frac{J}{e''}$ sind ausschliesslich durch die geometrischen Verhältnisse des Querschnitts bedingte Grössen und werden die beiden *Widerstandsmomente* des Querschnitts für die zur Biegungsebene senkrechte Schwerlinie desselben genannt und mit W' bzw. W'' bezeichnet, sodass

$$\sigma_{e'} = \frac{M}{W'} \text{ und } \sigma_{e''} = \frac{M}{W''}$$

wird.

Lehrsatz VII. Angenommen von einem Querschnitte seien die beiden Hauptträgheits-Momente J_I und J_{II} sowie die Lage der beiden Hauptträgheits-Axen bekannt, und angenommen (vergl. Fig. 20), die Kraftebene bilde mit der

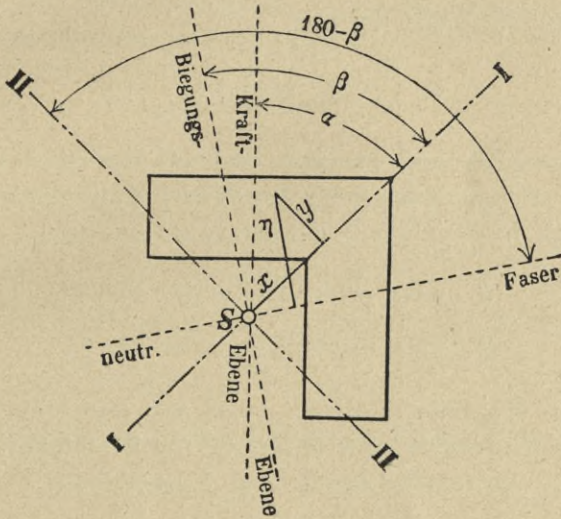


Fig. 20

Axe I des Trägheitsmoments J_I den Winkel α , so bildet die Biegeebene mit derselben Axe einen Winkel β , der bestimmt ist durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{J_{II}}{J_I}$$

Beweis. Wenn die Biegeebene mit der Axe I den Winkel β bildet, so bildet die neutrale Faser des Querschnitts mit der Axe II den Winkel $(180 - \beta)$, und ist τ der Abstand eines beliebigen Punktes des Querschnitts von der neutralen Faser, und x dessen Abstand von der Axe II, y von der Axe I, dann ist (vergl. Hilfslehrsatz 3)

$$\tau = y \cdot \sin(180 - \beta) - x \cdot \cos(180 - \beta)$$

$$\tau = y \cdot \sin \beta + x \cdot \cos \beta$$

Die Normalspannung σ_{η} in dem betreffenden Punkte ist aber nach früherem

$$\sigma_{\eta} = \frac{E}{r} \cdot \eta$$

d. h. mit dem Werte für η

$$\sigma_{\eta} = \frac{E}{r} (y \cdot \sin \beta + x \cdot \cos \beta)$$

Ferner haben wir gesehen, dass das Moment M in einer Ebene, welche mit der Axe I den Winkel α bildet, äquivalent ist (vergl. Hilfslehre 2) mit den zwei Momenten

$$M \cdot \cos \alpha \text{ in der Ebene der Axe I}$$

$$M \cdot \sin \alpha \text{ in der Ebene der Axe II}$$

Mit dem Momente $M \cdot \cos \alpha$ muss nun im Gleichgewichte sein die Gesamtheit der Momente der Elementar-Normalkräfte $\sigma_{\eta} \cdot df$ um die Axe II, d. h. es muss sein

$$\int x (\sigma_{\eta} \cdot df) = M \cdot \cos \alpha$$

oder mit dem Werte für σ_{η}

$$\begin{aligned} M \cdot \cos \alpha &= \frac{E}{r} \int (y \cdot \sin \beta + x \cdot \cos \beta) x \cdot df \\ &= \frac{E}{r} \sin \beta \int y x df + \frac{E}{r} \cos \beta \int x^2 df \end{aligned}$$

Mit dem Momente $M \cdot \sin \alpha$ muss im Gleichgewichte sein die Gesamtheit der Momente der Elementar-Normalkräfte $\sigma_{\eta} \cdot df$ um die Axe I, d. h. es muss sein

$$\int y (\sigma_{\eta} \cdot df) = M \cdot \sin \alpha$$

oder mit dem Werte für σ_{η} .

$$\begin{aligned}
 M \cdot \sin \alpha &= \frac{E}{r} \int (y \cdot \sin \beta + x \cdot \cos \beta) y \cdot df \\
 &= \frac{E}{r} \sin \beta \int y^2 df + \frac{E}{r} \cos \beta \int xy df
 \end{aligned}$$

Nun haben wir im Zusatz zu Hilfslehrsatz 3 gesehen, dass

$$T = \int xy df = 0$$

wird, sobald wir die Hauptträgheits-Axen zu Coordinaten-Axen nehmen; dies ist hier der Fall, also ist

$$M \cdot \cos \alpha = \frac{E}{r} \cos \beta \int x^2 df = \frac{E}{r} \cos \beta \cdot J_{II}$$

$$M \cdot \sin \alpha = \frac{E}{r} \sin \beta \int y^2 df = \frac{E}{r} \sin \beta \cdot J_I$$

Dividieren wir die zweite Gleichung durch die erste, so erhalten wir

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \cdot \frac{J_I}{J_{II}}$$

und daraus

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{J_{II}}{J_I}$$

Folgerungen. Wenn das Verhältnis $\frac{J_{II}}{J_I}$ sich gleich bleibt, wenn also alle Querschnitte des Stabes ähnliche und gleich gelegene Figuren sind, so ist wirklich, wie wir vorausgesetzt haben, die ganze elastische Linie eine ebene Curve.

Fällt eine der Hauptträgheits-Axen in die Kraftrichtung, wird also $\alpha = 0$, so wird auch $\beta = 0$, d. h. wenn die Kräfteebene durch die eine der Hauptträgheits-Axen geht, so biegt sich der Stab in der Kräfteebene selbst durch, es fallen Biegungsebene und Kräfteebene zusammen, und die neutrale Faser liegt in der anderen Hauptträgheits-Axe.

Element innere Kräfte, von welchen uns zwei bekannt sind, nämlich auf die im Querschnitt bei x gelegene Fläche eine Kraft

$$R_{(1)} = \int_v^{e_1} \sigma \cdot dF_{(1)} = \frac{M_{(1)}}{J_{(1)}} \int_v^{e_1} v \cdot dF_{(1)}$$

und auf die im Querschnitte bei $x + dx$ gelegene Fläche eine Kraft

$$R_{(2)} = \int_v^{e_2} \sigma \cdot dF_{(2)} = \frac{M_{(2)}}{J_{(2)}} \int_v^{e_2} v \cdot dF_{(2)}$$

oder mit

$$\int_v^{e_1} v \cdot dF_{(1)} = St_{(1)}^{e_1} \quad \text{und} \quad \int_v^{e_2} v \cdot dF_{(2)} = St_{(2)}^{e_2}$$

$$R_{(1)} = \frac{M_{(1)}}{J_{(1)}} St_{(1)} \quad \text{und} \quad R_{(2)} = \frac{M_{(2)}}{J_{(2)}} St_{(2)}$$

Diese zwei Kräfte haben entgegengesetzten Sinn, sie werden sich aber im allgemeinen nicht das Gleichgewicht halten, sondern es wird ihre Differenz eine endliche Grösse sein, also

$$R_{(2)} - R_{(1)} = s$$

Es war aber das Element mit dem ganzen Stabe im Gleichgewichte, also muss auch s aufgehoben werden. Dies kann nur durch eine innere Schubkraft in der Ebene $dx \cdot b$ stattfinden, deren Componente nach der Richtung der beiden R gleich s sein muss.

Da die σ für alle Punkte der Linie b einander gleich sind, so ist kein Grund vorhanden, warum sich s nicht gleichförmig auf die Fläche $dx \cdot b$ verteilen sollte, und können wir also, wenn τ_3 die betreffende constante Componente der Schubspannung ist parallel der Biegungsebene, setzen

$$s = \tau_3 \cdot dx \cdot b$$

Nun ist

$$s = R_2 - R_1 = \frac{M_{(2)}}{J_{(2)}} St_{(2)} - \frac{M_{(1)}}{J_{(1)}} St_{(1)}$$

worin die rechte Seite, da dx unendlich klein ist, das Differential darstellt der Grösse

$$\frac{M}{J} St_v^e$$

für den Querschnitt bei x .

Es ist demnach

$$\tau_3 \cdot dx \cdot b = d \left(\frac{M}{J} St_v^e \right)$$

$$\tau_3 = \frac{1}{b} \frac{d}{dx} \left(\frac{M}{J} St_v^e \right)$$

$$\tau_3 = \frac{1}{b} \left[\frac{dM}{dx} \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right]$$

Nach Hilfssatz 1 ist

$$\frac{dM}{dx} = Q$$

also ist

$$\tau_3 = \frac{1}{b} \left[Q \cdot \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right]$$

Lehrsatz IX. In dem Punkte A des Querschnitts ist die zur Biegungsebene parallele Componente τ_1 der Schubspannung in der Querschnittsebene gleich der zur Biegungsebene parallelen Componente der Schubspannung in der zur Biegungsebene und zur Querschnittsebene senkrechten Ebene:

$$\tau_1 = \tau_3 = \frac{1}{b} \left[Q \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right]$$

Beweis. Die beiden Ebenen schneiden sich im rechten Winkel; in der einen steht τ_1 senkrecht zur gemeinschaftlichen Schnittlinie, in der anderen steht τ_3 senkrecht zu derselben Linie, also ist nach Hilfslehrsatz 4

$$\tau_1 = \tau_3$$

Probe zu Lehrsatz IX. Wir wollen eine Probe anstellen für den Fall, dass

- 1) die Biegungsebene mit der Kräfteebene zusammenfällt,
- 2) der Stab constanten Querschnitt habe,
- 3) dieser Querschnitt ein Rechteck sei von der Breite b und der Höhe $2e$.

Wegen 1) schneidet die Kräfteebene dem Querschnitt in dessen zur Seite $2e$ parallelen Mittellinie und fällt die zur Kräfteebene parallele Componente der Schubspannung in der

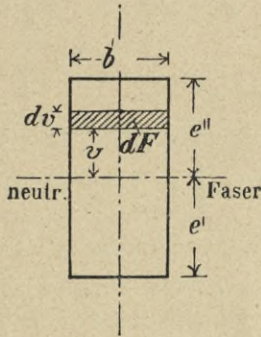


Fig. 22

Querschnittsebene mit deren zur Biegungsebene parallelen Componente zusammen. Von der ersteren haben wir gesehen, dass sie der Bedingung genügen muss

$$\int_{-e}^{+e} \tau' \cdot df = Q$$

also ist auch

$$\int_{-e}^{+e} \frac{1}{b} \left[Q \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right] df = Q$$

Wegen 2) ist $\frac{St}{J}$ eine Constante, also ist $\frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) = 0$, so dass uns bleibt

$$\int_{-e}^{+e} \frac{1}{b} Q \frac{St}{J} df = Q$$

und da τ_1 für sämtliche Punkte von b gleich ist, können wir das Flächenelement df ersetzen durch den in die Linie b fallenden Elementarstreifen $dF = b \cdot dv$ (vergl. Fig. 22), so dass endlich

$$\int_{-e}^{+e} \frac{1}{b} Q \frac{St}{J} b \cdot dv = Q$$

In unserem Falle ist

$$J = \int_{-e}^{+e} v^2 \cdot dF = \int_{-e}^{+e} v^2 \cdot b \cdot dv = b \left[\frac{v^3}{3} \right]_{-e}^{+e} = \frac{2}{3} b e^3$$

$$St_v = \int_{-e}^{+e} v \cdot dF = \int_{-e}^{+e} v \cdot b \cdot dv = b \left[\frac{v^2}{2} \right]_{-e}^{+e} = b \left(\frac{e^2 - v^2}{2} \right)$$

also ist

$$\int_{-e}^{+e} Q \cdot \frac{b \left(\frac{e^2 - v^2}{2} \right)}{\frac{2}{3} b e^3} dv = Q = Q \int_{-e}^{+e} \frac{\left(\frac{e^2 - v^2}{2} \right)}{\frac{2}{3} e^3} dv$$

Es ist aber

$$\int_{-e}^{+e} \frac{\left(\frac{e^2 - v^2}{2} \right)}{\frac{2}{3} e^3} dv = \frac{1}{\frac{2}{3} e^3} \int_{-e}^{+e} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) dv$$

und

$$\int_{-e}^{+e} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{v^2}{2} \right) dv = \left[\frac{e^2}{2} v \right]_{-e}^{+e} - \left[\frac{1}{2} \frac{v^3}{3} \right]_{-e}^{+e} =$$

$$= e^3 - \frac{e^3}{3} = \frac{2}{3} e^3$$

und damit

$$\int_{-e}^{+e} \frac{\left(\frac{e^2 - v^2}{2} \right)}{\frac{2}{3} e^3} dv \text{ richtig} = 1$$

Zusatz. Es soll im folgenden die Spannung τ in der Querschnittsebene des näheren betrachtet werden. Im allgemeinen ist die Querschnittsfigur eine beliebige krummlinig begrenzte Figur, doch wollen wir hier den in der Praxis hauptsächlich vorkommenden Fällen entsprechend spezialisieren und voraussetzen, dass die Figur in Bezug auf die Schnittlinie der Biegungsebene mit der Querschnittsebene symmetrisch sei.

Nun haben wir gesehen, dass für alle Punkte einer jeden zu dieser Schnittlinie senkrechten Linie des Querschnittes, z.B. b (vgl. Fig. 23) die zu der Schnittlinie parallelen, also zur Linie gleicher Spannung b senkrechten Componenten τ_1 der Schubspannungen τ einander gleich sind. Wie verhält es sich aber mit den zu der Schnittlinie senkrechten, also zur Linie gleicher Spannung b parallelen Componenten?

Wir erhalten durch folgende Ueberlegung einen Anhalt für die Bestimmung ihrer Grösse. Es muss τ an den beiden Enden von b die Richtung der Tangenten an die Querschnittsfigur in diesen Punkten haben, denn hätte τ hier eine andere Richtung, so könnte man es zerlegen nach der Richtung der

Tangente und nach der Normalen auf die Querschnittcurve. Dann wäre in dem betreffenden Punkte in der den Stab tangierenden Ebene eine Schubspannung vorhanden, denn die Tangente ist die Schnittlinie der Querschnittsebene mit der den Stab tangierenden Ebene, und es wäre in der Querschnittsebene eine zu dieser Schnittlinie senkrechte Schubspannung vorhanden, was nach Hilfslehre 4 zur Folge hätte, dass auch in der Tangentialebene eine zu dieser Schnittlinie senkrechte Schubspannung vorhanden wäre. Bei der vorausgesetzten Biegungsbelastung kann aber auf der Staboberfläche keine Schubspannung vorkommen, also

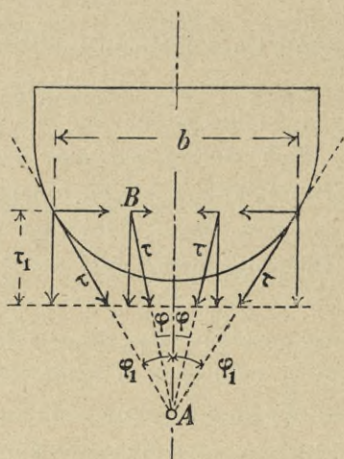


Fig. 23

kann es keine zur Tangente normale Componente der Schubspannung τ geben, und muss τ selbst in den Endpunkten der Linie b die Richtung der Tangente an die den Querschnitt umgrenzende Curve haben.

Da wir Symmetrie des Querschnittes vorausgesetzt haben gegen dessen Schnittlinie mit der Biegungsebene, so

schneiden sich die beiden Tangenten in den Endpunkten von b auf dieser Schnittlinie, z. B. im Punkte A . Es bilde die eine der Tangenten mit der Symmetrieaxe den Winkel $(+ \varphi_1)$, dann bildet die andere mit derselben den Winkel $(- \varphi_1)$. Ferner erkennt man gleich, dass für den Schnittpunkt der Linie b mit der Symmetrieaxe τ mit τ_1 zusammenfallen muss, da jede Abweichung von τ aus der Symmetrielinie in diesem Punkte der Symmetrie widersprechen würde. Wir sehen also, dass jedenfalls beim Vorrücken des Punktes B auf der Linie b von links nach rechts, die Richtung von τ sich um A dreht, und dass der Winkel φ , den diese Richtung von τ mit der Symmetrielinie bildet, allmähig von $+ \varphi_1$ bis auf 0 abnimmt und dann im selben Masse wieder wächst bis auf $- \varphi_1$.

Interessiert uns nun aus irgend einem Grunde ausser der Komponente τ_1 von τ im Punkte B auch die zur Biegungsebene senkrechte Komponente desselben, so müssen wir die beiden Tangenten in den Enden der Linie gleicher Spannung b an die Querschnittsfigur ziehen, deren Schnittpunkt mit B verbinden, welche Verbindungslinie dann mit der Symmetrielinie den Winkel φ bildet, der uns die gesuchte Komponente darstellen lässt als

$$\tau_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi = \tau_2$$

Wegen der vorhandenen Symmetrie entspricht jeder positiven Elementar-Schubkraft $\tau_2 \cdot df$ ein ebenso grosses negatives $\tau_2 \cdot df$.

Mit dieser Schubspannung $\tau_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi$, welche im Punkte B in der Querschnittsebene senkrecht zur Biegungsebene wirkt, ist nach Hilfslehre 4 in der durch B gehenden, senkrecht zur Richtung von $\tau_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi$ stehenden, also zur Biegungsebene parallelen Ebene eine zum Querschnitt senkrechte Schubspannung verbunden. Dies steht aber im Widerspruch

zu unserer Voraussetzung, dass in den zur Biegungsebene parallelen Ebenen keine inneren Kräfte vorkommen können. Wir müssen also zur Hebung dieses Widerspruches annehmen, dass die Winkel φ_1 so verschwindend klein sind, dass $\operatorname{tg} \varphi = 0$ gesetzt werden kann, für welchen Fall unsere Ableitungen richtig sind. Bei Querschnitten, für welche der Winkel φ_1 eine endliche Grösse hat, machen wir, wenn wir $\tau = \tau_1$ setzen, einen Fehler, wir thun es aber doch, weil dieser Fehler innerhalb der Genauigkeitsgrenzen liegt, mit welchen die Festigkeitsuntersuchungen zahlenmässig geführt werden können.

Analog entspricht in der durch B senkrecht zum Querschnitt und zur Biegungsebene gehenden Ebene der zur Biegungsebene parallelen Componente τ_3 der Schubspannung in derselben Ebene auch eine zur Biegungsebene senkrechte Componente, doch können wir auch hier diese Componente vernachlässigen, sobald der Winkel, welchen die Durchdringungslinien der betreffenden Ebene und der Körperoberfläche bilden mit der Biegungsebene, keinen sehr grossen Wert hat.

Voraussetzungen.

Alle folgenden Untersuchungen beziehen sich ausschliesslich auf solche Stäbe und solche Belastungen, dass

1) die Kraftebene den Querschnitt in einer Hauptträgheitsaxe schneidet, dass also die Biegungsebene zusammenfällt mit der Kraftebene;

2) die Querschnitte eine solche Form haben, dass die Tangenten an die umgrenzende Figur einen verschwindend kleinen Winkel mit jener Hauptträgheitsaxe bilden, ihr also annähernd parallel sind;

3) Die Durchschnittslinien aller zur Kraftebene senkrechten Ebenen mit der Körperoberfläche sehr wenig nur von einer zur Kraftebene parallelen Richtung abweichen.

Aus der Erfüllung dieser drei Bedingungen folgt, dass in den Querschnitten sowie in den zu den Querschnitten und der Kraftebene senkrechten Ebenen nur solche Schubspannungen vorhanden sein können, die zur Kraftebene parallel sind, es ist also

$$\tau' = \tau_1 = \tau_3 = \tau$$

und

$$\tau'' = \tau_2 = 0$$

Durch unsere bisherigen Ableitungen sind uns für jeden Punkt eines Querschnittes folgende Spannungskomponenten bekannt:

1) In der Querschnittsebene

$$\text{die Normalspannung } \sigma = \frac{M}{J} \cdot v$$

sowie die Tangentialspannung

$$\tau_1 = \tau = \frac{1}{b} \left[Q \cdot \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right]$$

sodass uns für die Querschnittsebene die resultierende Spannung p_1 nach Grösse und Richtung bekannt ist.

2) In der zum Querschnitt und zur Kraftebene senkrechten Ebene,

die Tangentialspannung

$$\tau_3 = \tau = \frac{1}{b} \left[Q \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right]$$

Die Normalspannung für diese Ebene ist uns nicht bekannt, also auch p_2 nicht, wir nehmen aber vorderhand an, auch für diese Ebene sei uns die Normalspannung eine gegebene Grösse. Wir hätten demnach vier bekannte Spannungskomponenten, mit deren Hülfe im folgenden ein Ausdruck gesucht werden soll für die Normalspannung und

die Tangentialspannung in einer beliebigen, durch den betreffenden Punkt gehenden Ebene.

Legen wir durch unseren Punkt (er sei der Punkt B in Fig. 24) ein rechtwinkeliges Koordinatensystem, dessen X -Axe mit der Stabaxe, dessen Y -Axe mit der in der Kräfteebene liegenden Hauptträgheitsaxe, und dessen Z -Axe demnach mit der neutralen Faser parallel ist, so können wir uns

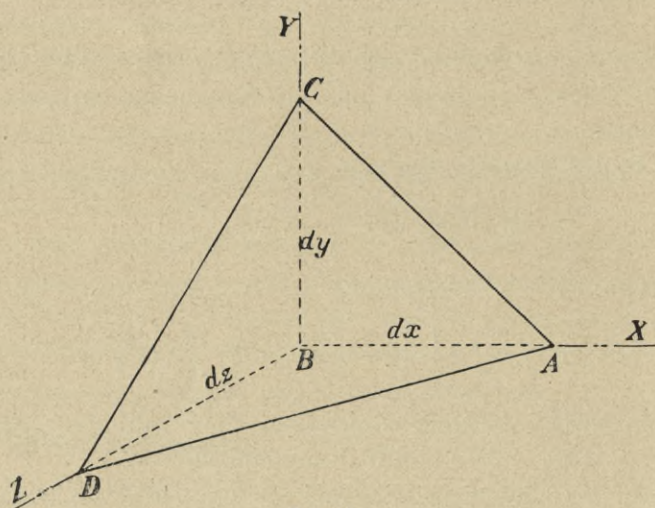


Fig. 24

denselben vorstellen als ein kleines körperliches Viereck, dessen eine Seitenfläche in die XY -Ebene fällt, also der Kräfteebene parallel ist, dessen zweite Seitenfläche in die YZ -Ebene fällt, also in der Querschnittsebene liegt, dessen dritte Seitenfläche in die ZX -Ebene fällt, also in der zum Querschnitt und zur Kräfteebene senkrechten Ebene liegt, dessen vierte Seitenfläche endlich in diejenige Ebene fällt, für welche wir gerade die Normalspannung und die Tangentialspannung suchen.

Die Lage dieser neuen Ebene können wir uns gegeben denken durch die Winkel, welche die Normale auf dieselbe mit unseren Coordinatenaxen bildet; dieselben seien beziehentlich α , β und γ , welche drei Winkel bekanntlich zu einander in der Beziehung stehen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Ist die Grösse der Vierecksfläche, welche in dieser neuen Ebene liegt gleich f , so ist die Grösse der Seitenfläche

$$\text{in der } YZ\text{-Ebene} = f \cdot \cos\alpha$$

$$\text{in der } ZX\text{-Ebene} = f \cdot \cos\beta$$

$$\text{in der } XY\text{-Ebene} = f \cdot \cos\gamma$$

denn es ist z. B. die Z -Axe die Normale auf die XY -Ebene; mit der Z -Axe bildet aber die Normale auf die neue Ebene den Winkel γ , also bildet die neue Ebene selbst mit der XY -Ebene, auf welche ihre Grösse durch die beiden anderen Ebenen senkrecht projiziert wird, ebenfalls den Winkel γ .

Von den vier Seitenflächen erfährt diejenige, welche parallel der Kraftebene ist, nach Voraussetzung keine Beanspruchung; diejenige, welche in der Querschnittsebene fällt, erfährt eine Beanspruchung, welche den Spannungen entspricht

$$\sigma_x = \sigma = \frac{M}{J} \cdot v$$

und

$$\tau_x = \tau = \frac{1}{b} \left[Q \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right]$$

diejenige, welche in die ZX -Ebene fällt, erfährt eine Beanspruchung, welche den Spannungen entspricht

$$\sigma_y = \text{unbekannt}$$

$$\tau_y = \tau = \frac{1}{b} \left[Q \frac{St}{J} + M \frac{d}{dx} \left(\frac{St}{J} \right) \right]$$

Die neue Ebene erfährt eine Beanspruchung, welche der unbekanntem und gesuchten normalen Spannung ξ und der unbekanntem und gesuchten tangentialen Spannung ζ entspricht, welche zusammen die Spannung p zur Resultanten haben, und zwar möge die Richtung von p mit den Coordinatenachsen beziehentlich die Winkel λ , μ und ν bilden.

Lehrsatz X. Die Resultante von ξ und ζ fällt in die XY -Ebene, ist also mit der Kraftebene parallel.

Beweis. Die vier Spannungen σ_x ; τ_x ; σ_y und τ_y schneiden die Z -Axe im rechten Winkel, also haben die ihnen entsprechenden Flächenkräfte keine Componente, welche zur XY -Ebene senkrecht ist, also kann die Flächenkraft auf die neue Ebene, welche ja mit jenen im Gleichgewicht sein muss, auch keine zur XY -Ebene senkrechte Componente haben, sie muss demnach in die XY -Ebene fallen, d. h. es ist die ihr entsprechende Spannung p parallel der Kraftebene.

Folgerung. Es ist der Winkel $\nu = 90^\circ$ und die Summe der Winkel λ und μ zusammen ebenfalls $= 90^\circ$.

Lehrsatz XI. Die resultierende Spannung p für die neue Ebene steht zu den vier gegebenen Spannungscomponenten in der Beziehung

$$\begin{aligned} p \cdot \cos \lambda &= \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_y \cdot \cos \beta \\ p \cdot \cos \mu &= \sigma_y \cdot \cos \beta + \tau_x \cdot \cos \alpha = p \cdot \sin \lambda \end{aligned}$$

Beweis. Die Flächenkraft auf die neue Ebene ist $p \cdot f$, und deren Componente nach der X -Axe ist $pf \cdot \cos \lambda$. Nach dieser Axe sind aber gerichtet die Flächenkräfte $\sigma_x(f \cdot \cos \alpha)$ und $\tau_y(f \cdot \cos \beta)$, es muss also sein

$$\sigma_x \cdot f \cdot \cos \alpha + \tau_y \cdot f \cdot \cos \beta = p \cdot f \cdot \cos \lambda$$

und ergibt die Kürzung mit f die erste obiger Gleichungen. Die zweite ist analog entstanden aus

$$\sigma_y \cdot f \cdot \cos \beta + \tau_x \cdot f \cdot \cos \alpha = p \cdot f \cdot \cos \mu$$

Bemerkung. — In Fig. 25 ist die YX -Ebene zur Bildebene genommen worden (die drei anderen Ebenen sind durch ihre Spuren angedeutet), so dass die Spannungen,

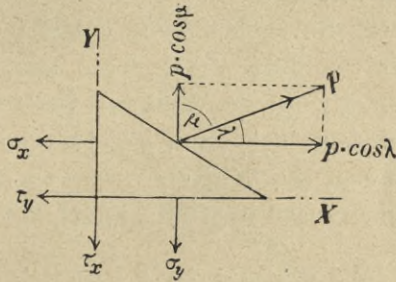


Fig. 25.

welche in die YX -Ebene fallen, nach Grösse und Richtung richtig eingetragen werden konnten.

Lehrsatz XII. Von allen den Spannungen p , welche eventuell die Richtung λ und μ ($\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu = 1$) haben, ist diejenige am grössten, welche eine solche Ebene afficiert, für welche der Winkel $\gamma = 90^\circ$ ist, d. h. eine Ebene, welche die Kraftebene im rechten Winkel schneidet.

Beweis. In den Gleichungen

$$p \cdot \cos \lambda = \sigma_x \cdot \cos \alpha + \tau_y \cdot \cos \beta$$

$$p \cdot \cos \mu = \sigma_y \cdot \cos \beta + \tau_x \cdot \cos \alpha$$

wird die rechte Seite am grössten für zusammengehörige Grösstwerte von $\cos \alpha$ und $\cos \beta$. Es entspricht aber z. B. einem bestimmten $\cos \alpha$ dann der grösste $\cos \beta$, wenn $\cos \gamma$ gleich 0 ist, d. h. wenn $\gamma = 90^\circ$ ist. Wenn die rechten Seiten der Gleichungen ihren grössten Wert haben, haben ihn die linken Seiten ebenfalls, und zwar hat, weil wir eine einzige Richtung $\lambda; \mu$ im Auge haben, also $\cos \lambda$ und $\cos \mu$ Constante sind, p selbst für die betreffende Richtung seinen Grösstwert.

Lehrsatz XIII. Die Ebenen, für welche die Normalspannung ξ und die Tangentialspannung ζ ihre Grösstwerte erlangen, sind ebenfalls solche, welche die Kraftebene im rechten Winkel schneiden.

Beweis. Die Normalspannung ξ bildet nach Voraussetzung mit den Coordinatenaxen der x und y die Winkel α und β . Nennen wir nun die Winkel, welche die Tangentialspannung ζ mit denselben Axen bildet, α' und β' , und bezeichnen wir ferner den Winkel, welchen p mit ξ bildet mit φ und den Winkel, welchen p mit ζ bildet, mit ψ , so ist, weil

$$\cos \varphi = \cos \alpha \cdot \cos \lambda + \cos \beta \cdot \cos \mu + \cos \gamma \cdot 0$$

und

$$\cos \psi = \cos \alpha' \cdot \cos \lambda + \cos \beta' \cdot \cos \mu + \cos \gamma' \cdot 0$$

ist,

$$\xi = p \cdot \cos \varphi = p \cdot \cos \lambda \cdot \cos \alpha + p \cdot \cos \mu \cdot \cos \beta$$

$$\zeta = p \cdot \cos \psi = p \cdot \cos \lambda \cdot \cos \alpha' + p \cdot \cos \mu \cdot \cos \beta'$$

oder wenn wir für $p \cdot \cos \lambda$ und $p \cdot \cos \mu$ die oben abgeleiteten Werte einführen, so erhalten wir

$$\xi = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \tau_y \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \beta + \tau_x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\zeta = \sigma_x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha' + \tau_y \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha' + \sigma_y \cdot \cos \beta \cdot \cos \beta' + \tau_x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta'$$

Es erreichen demnach ξ und ζ ihre Grösstwerte, wenn $\cos \alpha$; $\cos \beta$; $\cos \alpha'$ und $\cos \beta'$ zusammengehörige Grösstwerte haben, also wenn $\cos \gamma$ und $\cos \gamma' = 0$ sind, d. h. $\gamma = \gamma' = 90^\circ$. Es ist γ' notwendig $= 90^\circ$, sobald γ es ist, denn p , ξ und ζ liegen in einer Ebene: ausser p liegt, wenn $\gamma = 90^\circ$ ist, auch ξ in der XY -Ebene, also muss auch ζ in der XY -Ebene liegen.

Folgerungen. Da es uns nur auf die Grösstwerte von ξ und ζ ankommt, so beschränken wir im folgenden unsere

Untersuchung auf solche Ebenen, welche die Kraftebene im rechten Winkel schneiden, und können wir, wenn wir, wie in Fig. 26, die Kraftebene zur Bildfläche nehmen, das Prisma,

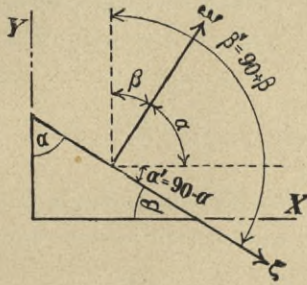


Fig. 26

in welches unser bisheriges Viereck übergegangen ist, durch seine Spuren mit der Bildebene, sowie sämtliche Spannungen, also jetzt auch ξ und ζ , nach Richtung und Grösse richtig darstellen.

Lehrsatz XIV. Für eine Ebene, welche die Kraftebene im rechten Winkel und die Querschnittsebene unter einem beliebigen Winkel α schneidet, ist die Normalspannung

$$\xi = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \tau \cdot \sin 2\alpha$$

Beweis. Es wird mit $\tau_x = \tau_y$, und weil hier $\cos \beta$ gleich $\sin \alpha$ ist, der Ausdruck für ξ im Beweis zu Lehrsatz XIII zu

$$\xi = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha + 2 \cdot \tau \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

es ist aber

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

also ist

$$\zeta = \sigma_x \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_y \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \tau \cdot \sin 2\alpha$$

Lehrsatz XV. Für eine Ebene, welche die Kraftebene im rechten Winkel und die Querschnittsebene unter einem beliebigen Winkel α schneidet, ist die Tangentialspannung

$$\zeta = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau \cdot \cos 2\alpha$$

Beweis. Es wird der Ausdruck für ζ in dem Beweise zu Lehrsatz XIII, weil in unserem jetzigen Falle

$$\cos \beta = \sin \alpha$$

$$\cos \alpha' = \cos(90 - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \beta' = \cos(90 + \beta) = -\cos(90 - \beta) = -\sin \beta = -\cos \alpha$$

ist, zu

$$\begin{aligned} \zeta &= \sigma_x \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \tau \sin^2 \alpha + \sigma_y \sin \alpha (-\cos \alpha) + \tau \cos \alpha (-\cos \alpha) \\ &= (\sigma_x - \sigma_y) (\cos \alpha \cdot \sin \alpha) + \tau (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\cos \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} - \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = -\cos 2\alpha$$

also ist

$$\zeta = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau \cdot \cos 2\alpha$$

Lehrsatz XVI. Die Normalspannung ξ erreicht ihren grössten Wert für die Ebenen, welche die Kraftebene im rechten Winkel und die Querschnittsebene unter einem solchen Winkel α schneiden, für welchen die Beziehung besteht

$$\operatorname{tg} 2\alpha = + \frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

Beweis. Soll ξ ein Maximum sein, dann muss

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = 0$$

sein für den betreffenden Winkel.

$$0 = \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \cdot \sin 2\alpha \right]$$

$$0 = 0 + \frac{\sigma_x}{2} (-\sin 2\alpha) \cdot 2 + 0 - \frac{\sigma_y}{2} (-\sin 2\alpha) \cdot 2 + \tau \cdot (\cos 2\alpha) \cdot 2$$

$$0 = (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha + 2\tau \cdot \cos 2\alpha$$

und hieraus

$$(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha = 2\tau \cdot \cos 2\alpha$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)} = \operatorname{tg} 2\alpha$$

Folgerung. Da es zwei Winkel 2α gibt, welche dieselbe Tangente haben, und dieselben um 180° verschieden sind, so wird ξ zum Maximum für zwei Winkel α , welche um 90° verschieden sind.

Zusatz. Für die beiden Ebenen, für welche ξ zum Maximum wird, ist die Tangentialspannung $\zeta = 0$.

Beweis. Es war allgemein

$$\zeta = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau \cdot \cos 2\alpha$$

daraus erhalten wir durch Umformung

$$\zeta = \cos 2\alpha \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} - \tau \right]$$

$$\zeta = \cos 2\alpha \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \operatorname{tg} 2\alpha - \tau \right]$$

und mit $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)}$

$$\zeta = \cos 2\alpha \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \frac{2\tau}{(\sigma_x - \sigma_y)} - \tau \right] = 0$$

Lehrsatz XVII. Die Grösse der einen Maximal-Normalspannung ist

$$\xi_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

die Grösse der anderen ist

$$\xi_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

Beweis. Es war allgemein

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\alpha + \frac{\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau \cdot \sin 2\alpha \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sin 2\alpha \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \tau \right] \end{aligned}$$

Hierin ist einzuführen

$$\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{\left(\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \right)}{\pm \sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}}$$

sodass wir erhalten

$$\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\left(\frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \right)}{\sqrt{1 + \frac{4\tau^2}{(\sigma_x - \sigma_y)^2}}} \left[\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \cdot \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau} + \tau \right]$$

Rechnen wir den Ausdruck aus, so ergibt sich schliesslich

$$\xi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

Zusatz. Da wir den Sinn einer Normalzugspannung mit dem positiven Vorzeichen verbunden haben, so ist das-

jenige ζ , welches sich als eine negative Grösse ergibt, eine Normaldruckspannung.

Lehrsatz XVIII. Die Tangentialspannung ζ erreicht ihren grössten Wert für diejenigen Ebenen, welche die Kraftebene im rechten Winkel und die Querschnittsebene in einem Winkel α schneiden, für welchen die Beziehung besteht

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}$$

Beweis. Soll ζ ein Maximum sein, so muss

$$\frac{d\zeta}{d\alpha} = 0$$

sein für den betreffenden Winkel.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\alpha - \tau \cdot \cos 2\alpha \right] \\ &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot (\cos 2\alpha) \cdot 2 - \tau (-\sin 2\alpha) \cdot 2 \\ &= (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + 2\tau \cdot \sin 2\alpha \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha &= 2\tau \cdot \sin 2\alpha \\ - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau} &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha \end{aligned}$$

Folgerung 1. Da es zwei Winkel 2α giebt, welche dieselbe Tangente haben, und dieselben um 180° verschieden sind, so wird ζ zum Maximum für zwei Winkel α , welche um 90° verschieden sind.

Folgerung 2. Soll ξ ein Maximum sein, so muss, wie wir gesehen haben

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

und soll ζ ein Maximum sein, so muss, wie wir eben gefunden haben

$$\operatorname{tg} 2\alpha'' = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}$$

sein, es ist also

$$\operatorname{tg} 2\alpha' = - \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha''} = - \operatorname{cotg} 2\alpha''$$

d. h. es ist der Winkel $2\alpha'$ um 90° verschieden von $2\alpha''$, oder der Winkel α' um 45° verschieden vom Winkel α'' . Mit Worten ausgedrückt heisst das: *die beiden zu einander senkrechten Ebenen, für welche ξ zum Maximum wird, sind gegen die zwei zu einander senkrechten Ebenen, für welche ζ zum Maximum wird, um einen Winkel von 45° verdreht.*

Lehrsatz XIX. Die Grösse der einen Maximal-Tangentialspannung ist

$$\zeta_1 = + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

Die Grösse der anderen ist

$$\zeta_2 = - \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

Beweis. Es war allgemein

$$\begin{aligned} \zeta &= (\sigma_x - \sigma_y) \frac{\sin 2\alpha}{2} - \tau \cdot \cos 2\alpha \\ &= \cos 2\alpha \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \operatorname{tg} 2\alpha - \tau \right] \end{aligned}$$

Hierin ist einzuführen

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

und

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau}$$

und ergibt schliesslich die Ausrechnung

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

Zusatz. Für diejenigen Ebenen, für welche ζ zum Maximum wird, ist

$$\zeta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

Beweis. Führt man in den allgemeinen Ausdruck

$$\zeta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \cos 2\alpha \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} + \tau \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \right)$$

$$\cos 2\alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}$$

und

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}$$

ein, so ergibt die Ausrechnung

$$\zeta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \pm 0$$

Lehrsatz XX. Die Dehnungen, welche der betreffende Punkt des Querschnittes nach der Richtung der Maximal-Normalspannungen erfährt, sind

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\zeta_1 - \frac{1}{m} \zeta_2 \right)$$

bezw.

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left(\zeta_2 - \frac{1}{m} \zeta_1 \right)$$

Beweis. Die Dehnung, welche die Normalspannung ζ_1 nach ihrer Richtung hervorruft, ist $\frac{1}{E} \zeta_1$; nach dieser Richtung ruft aber die zu ζ_1 senkrechte Spannung ζ_2 noch die

sekundäre Dehnung $-\frac{1}{E} \cdot \frac{\xi_2}{m}$ hervor, so dass die Gesamtdehnung nach der Richtung von ξ_1 ist

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\xi_1 - \frac{1}{m} \xi_2 \right)$$

Analog ist auch die Ableitung von

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \left(\xi_2 - \frac{1}{m} \xi_1 \right)$$

Lehrsatz XXI. Von den Ebenen, welche mit der Querschnittsebene einen solchen Winkel α bilden, dass

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y}$$

ist, hat man die eine als im Ganzen affiziert zu betrachten von einer *virtuellen* Normalspannung

$$(\sigma_1) = \frac{3}{8} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{5}{8} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

die andere von einer virtuellen Normalspannung

$$(\sigma_2) = \frac{3}{8} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{5}{8} \sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}$$

Beweis. Die Dehnung senkrecht zu der einen dieser Ebenen ist

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \left(\xi_1 - \frac{1}{m} \xi_2 \right)$$

Dieser Dehnung entspricht eine Spannung

$$(\sigma_1) = E \cdot \varepsilon_1 = \xi_1 - \frac{1}{m} \xi_2$$

Führen wir die oben gefundenen Werte für ξ_1 und ξ_2 ein, so erhalten wir

$$(\sigma_1) = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}{4}} \cdot \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

und setzen wir $m = 4$, so ergibt sich schliesslich

$$(\sigma_1) = \frac{3}{8} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{5}{8} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}$$

Analog ist auch die Ableitung von

$$(\sigma_2) = \frac{3}{8} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{5}{8} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau^2}$$

Bemerkung. — Wir haben bis hierher mit der unbekanntenen Normalspannung σ_y gerechnet. Diese Normalspannung, welche auf die zur Querschnittsebene und zur Kraftebene senkrechten Ebene wirkt, kann von zweierlei Ursachen herrühren. Die erste Ursache sind die angreifenden Lasten jeweils selbst, denn es ist klar, dass z. B. ein Brückenträger, auf dem die Schwellen eines Eisenbahnoberbaues direkt aufliegen, eine verticale Druckbeanspruchung in dem direkt unter der Schwelle befindlichen Teile erfährt, eine Druckbeanspruchung, welche in diesem Falle in der obersten Faser ihren grössten Wert, in der untersten Faser den Wert Null hat. Die zweite Ursache ist eventuell die geschweifte Form der oberen und unteren Stabbegrenzung.

In der Praxis pflegt die Einwirkung der direkt aufliegenden Lasten von keiner Bedeutung zu sein und deshalb meist ganz vernachlässigt zu werden. Die Einwirkung der geschweiften Stabbegrenzung ist jedoch, wenigstens für die Punkte der äussersten Fasern, nicht zu vernachlässigen.

Im folgenden soll zur Veranschaulichung für eine Combination beider Ursachen σ_y abgeleitet werden bei einem Stabe von einfachem rechteckigem Querschnitte, dessen obere und untere Begrenzung in Bezug auf die Stabaxe symmetrische Curven sind.

Lehrsatz XXII. Bei einem Stabe rechteckigen Querschnittes, dessen obere und untere Begrenzung symmetrische Curven sind, und dessen einzelne Querschnitte bei variabler

Höhe constante Breite haben, ist in den Punkten A des Querschnittes bei Abscisse x eine vertikal gerichtete Normalspannung vorhanden, deren Grösse ist

$$\sigma_y = -\frac{1}{b} \left[\left(p + \frac{P}{dx} \right) \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{v^3 - 3v \cdot e^2}{4e^3} + \frac{3v^3 - 3v \cdot e^2}{4e^4} dy \right] + \frac{Q}{4} \frac{3v e^2 - 3v^3}{e^4} \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{4} M \frac{4v^3 - 2v e^2}{e^5} \operatorname{tg}^2 \varphi \right]$$

worin bedeutet

v den Abstand der Linie gleicher Spannung, in welcher die Punkte A liegen, von der neutralen Faser

e den Abstand der äussersten Faser von der neutralen Faser

b die für den ganzen Stab constante Querschnittsbreite

p die gleichförmige Belastung pro Längeneinheit

P eine zwischen den Querschnitten x und $x + dx$, also praktisch über Querschnitt x angreifende Einzellast

dx das Differential der Stablänge, auf welches praktisch P gleichförmig verteilt wirkt

dy die halbe Höhendifferenz der Querschnitte bei x und $x + dx$

Q die Querkraft für den Querschnitt bei x

M das Moment für den Querschnitt bei x

$\operatorname{tg} \varphi$ die Tangente des Neigungswinkels der oberen Stabbegrenzung gegen die Stabaxe im Querschnitte x , also

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx}$$

Beweis. Schneiden wir aus dem Stabe ein Element heraus, das gebildet wird durch die Staboberfläche, die Querschnitte bei den Abscissen x und $x + dx$, sowie die zum Querschnitt und zur Kraftebene senkrechte Ebene durch die Punkte A , so muss das Element, wie vorher mit dem ganzen Stab zusammen, so auch jetzt im Gleichgewicht bleiben, d. h. die aus Fig. 27 ersichtlichen Kräfte müssen sich das Gleichgewicht halten, und zwar ist

$\sigma_y \cdot dx \cdot b$ die gesuchte normale Flächenkraft, welche als Zugspannung eingezeichnet ist, also positives Vorzeichen hat

$(p \cdot dx + P)$ die zwischen den Querschnitten x und $x + dx$ angreifende Last, wobei gedacht ist, dass P gerade auf die Länge dx gleichförmig wirkt

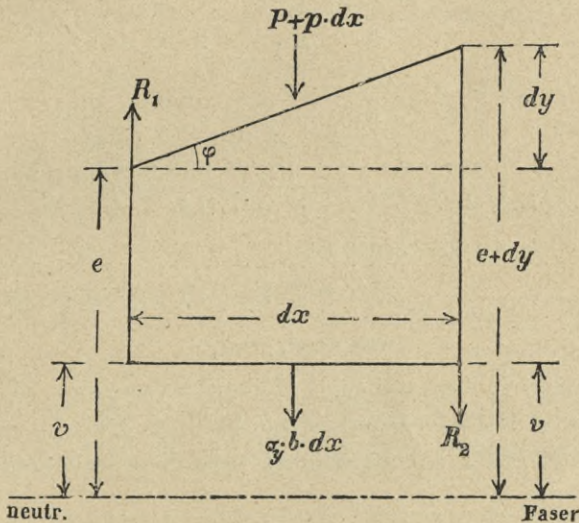


Fig. 27

R_1 die Resultante der im Querschnitte bei x zwischen der Linie gleicher Spannung im Abstände v von der neutralen Faser und der äussersten Faser im Abstände e wirkenden vertikal gerichteten inneren Elementarkräfte $\tau \cdot dF$

R_2 die Resultante der im Querschnitte bei $x + dx$ zwischen der Linie gleicher Spannung im Abstände v von der neutralen Faser und der äussersten Faser im Abstände $e + dy$ wirkenden vertikal gerichteten inneren Elementarkräfte $\tau \cdot dF$

Es ist demnach

$$R_1 = \int_v^e \tau \cdot dF$$

und zwar ist

$$\tau = \frac{1}{b} \left[\frac{Q_1 St_1}{J_1} + M_1 \frac{d}{dx} \left(\frac{St_1}{J_1} \right) \right]$$

Für unseren rechteckigen Querschnitt ist

$$St_1 = b \frac{e^2 - v^2}{2} \quad \frac{St_1}{J_1} = \frac{3}{4} \frac{e^2 - v^2}{e^3}$$

$$J_1 = 2 \frac{be^3}{3}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{St_1}{J_1} \right) = \frac{J_1 \cdot \frac{d}{dx} St_1 - St_1 \frac{d}{dx} J_1}{J_1^2}$$

In letzterer Gleichung ist

$$dSt_1 = St_2 - St_1$$

und

$$dJ_1 = J_2 - J_1$$

wenn mit St_2 das statische Moment bezeichnet wird von v bis $e + dy$ im Querschnitte bei $x + dx$

und mit J_2 das Trägheitsmoment eben dieses Querschnittes.

Es ist

$$St_2 = b \frac{(e + dy)^2 - v^2}{2} = b \frac{e^2 + 2e dy - v^2}{2}$$

$$J_2 = \frac{2}{3} b (e + dy)^3 = \frac{2}{3} b (e^3 + 3e^2 dy)$$

wenn hier, wie es auch im folgenden geschehen wird, die zweiten und höheren Potenzen von dy als unendlich klein höherer Ordnung vernachlässigt werden.

Also ist

$$dSt_1 = b \frac{2e dy}{2} = b e dy$$

$$dJ_1 = \frac{2}{3} b \cdot 3e^2 dy = 2b e^2 dy$$

und somit

$$\frac{dSt_1}{dx} = b \cdot e \cdot \frac{dy}{dx} = b e \operatorname{tg} \varphi$$

$$\frac{dJ_1}{dx} = 2 b e^2 \frac{dy}{dx} = 2 b e^2 \operatorname{tg} \varphi$$

Setzen wir diese Werte in den obigen Ausdruck für $\frac{d}{dx} \left(\frac{St_1}{J_1} \right)$ ein, und führen wir die sich ergebende Rechnung aus, so wird

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{St_1}{J_1} \right) = \frac{9 v^2 - 3 e^2}{4 e^4} \operatorname{tg} \varphi$$

und ergibt sich endlich

$$\tau = \frac{1}{b} \left[Q_1 \frac{3}{4} \frac{e^2 - v^2}{e^3} + M_1 \frac{9 v^2 - 3 e^2}{4 e^4} \operatorname{tg} \varphi \right]$$

Berücksichtigen wir nun, dass in

$$R_1 = \int_v^e \tau \cdot dF$$

$dF = b \cdot dv$ ist, so findet man durch einfache Integration

$$R_1 = \int_v^e \tau \cdot b \cdot dv = \frac{Q_1}{4} \left(2 + \frac{v^3}{e^3} - 3 \frac{v}{e} \right) + \frac{3}{4} M_1 \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{v^3}{e^2} - \frac{v^3}{e^4} \right)$$

Den Wert von R_2 können wir direkt aus dem Werte für R_1 ableiten, wenn wir entsprechend dem Uebergange vom Querschnitt bei x zum Querschnitt bei $x + dx$ einführen

für e den Wert $e + dy$

für $\operatorname{tg} \varphi$ den Wert $\operatorname{tg} \varphi + d \operatorname{tg} \varphi$

für Q_1 den Wert $Q_1 + dQ_1 = Q_2$

für M_1 den Wert $M_1 + dM_1 = M_2$

Doch können wir, weil die Beträge der zwei Aenderungen $d \operatorname{tg} \varphi$ und dM_1 praktisch verschwindend klein ausfallen, auch für den Querschnitt bei $x + dx$ als Moment den Wert M , und als Tangente des Neigungswinkels der oberen Stabbewegung gegen die Stabaxe den Wert $\operatorname{tg} \varphi$ beibehalten; es ist demnach

$$R_2 = \frac{(Q + dQ)}{4} \left(2 + \frac{v^3}{(e + dy)^3} - 3 \frac{v}{(e + dy)} \right) + \\ + \frac{3}{4} M \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{v}{(e + dy)^2} - \frac{v^3}{(e + dy)^4} \right)$$

Rechnen wir die einzelnen Brüche aus, und vernachlässigen wir alle zweiten und höheren Potenzen von dy , so wird

$$R_2 = \frac{Q + dQ}{4} \left[2 + \frac{v^3}{e^3} - 3 \frac{v^3}{e^4} dy - 3 \frac{v}{e} + 3 \frac{v}{e^2} dy \right] + \\ + \frac{3}{4} M \operatorname{tg} \varphi \left[\frac{v}{e^2} - 2 \frac{v}{e^3} dy - \frac{v^3}{e^4} + 4 \frac{v^3}{e^5} dy \right]$$

Das Gleichgewicht an dem herausgeschnittenen Stabelement verlangt nun, dass

$$R_2 + (p \cdot dx + P) + \sigma_y \cdot dx \cdot b - R_1 = 0$$

sei, d. h. es ist

$$- \sigma_y \cdot dx \cdot b = R_2 - R_1 + (p \cdot dx + P)$$

Ziehen wir von unserem R_2 den Wert von R_1 ab, so erhalten wir

$$R_2 - R_1 = \frac{Q}{4} \cdot \frac{3 v e^2 - 3 v^3}{e^4} dy + \frac{dQ}{4} \left[2 + \frac{v^3 - 3 v e^2}{e^3} - \right. \\ \left. - \frac{3 v^3 - 3 v e^2}{e^4} dy \right] + \frac{3}{4} M \operatorname{tg} \varphi \frac{4 v^3 - 2 v e^2}{e^5} dy$$

und berücksichtigen wir, dass nach Zusatz zu Hilfslehrsatz 1

$$p dx + P = - dQ$$

ist, so erhalten wir

$$- \sigma_y \cdot dx \cdot b = dQ \left[\frac{2}{4} + \frac{v^3 - 3 v e^2}{4 e^3} - \frac{3 v^3 - 3 v e^2}{4 e^4} dy - 1 \right] + \\ + \frac{Q}{4} \frac{3 v e^2 - 3 v^3}{e^4} dy + \frac{3}{4} M \operatorname{tg} \varphi \frac{4 v^3 - 2 v e^2}{e^5} dy$$

und daraus mit

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$$

und

$$\frac{dQ}{dx} = - \left(p + \frac{P}{dx} \right)$$

wobei wir das Minus-Zeichen in die zugehörige Klammer nehmen

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -\frac{1}{b} \left[\left(p + \frac{P}{dx} \right) \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{v^3 - 3ve^2}{4e^3} + \frac{3v^3 - 3ve^2}{4e^4} dy \right] + \right. \\ & \left. + \frac{Q}{4} \frac{3ve^2 - 3v^3}{e^4} \operatorname{tg} \varphi + \frac{3}{4} M \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{4v^3 - 2ve^2}{e^5} \right] \end{aligned}$$

Folgerungen. Für $v = 0$ wird

$$\sigma_y = -\frac{1}{b} \left[\left(p + \frac{P}{dx} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] = -\frac{1}{2} \frac{p + \frac{P}{dx}}{b}$$

also eine vom Winkel φ unabhängige Druckspannung. Für dx würde man z. B. wenn P durch eine Eisenbahnschwelle übertragen wird, die Schwellenbreite einzuführen haben, wobei zu beachten ist, dass p auf die Masseinheit zu beziehen ist, in welcher b und dx ausgedrückt sind.

Für $v = e$ wird, wenn p und P an dieser Faser angreifen

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -\frac{1}{b} \left[\left(p + \frac{P}{dx} \right) \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{-2e^3}{4e^3} \right) + \frac{3}{4} M \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{4e^3 - 2e^3}{e^5} \right] = \\ & = -\frac{1}{b} \left[\left(p + \frac{P}{dx} \right) + \frac{3}{2} \frac{M}{e^2} \operatorname{tg}^2 \varphi \right] \end{aligned}$$

und wenn für den betreffenden Querschnitt p und P überhaupt $= 0$ sind,

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -\frac{1}{b} \cdot \frac{3}{2} \frac{M}{e^2} \operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{1}{\left(\frac{2}{3} b e^3 \right)} \cdot e \cdot M \operatorname{tg}^2 \varphi = \\ & = -\frac{M \cdot e}{J} \operatorname{tg}^2 \varphi \end{aligned}$$

Lehrsatz XXIII. Für den praktischen Gebrauch ist bei einem Stabe beliebigen aber constanten Querschnittes für sämtliche Punkte die Normalspannung $\sigma_y = 0$ zu setzen; bei einem Stabe, dessen Querschnitte aus rechteckigen Bestandteilen (z. B. I-Träger) derart zusammengesetzt sind, dass die verschiedenen Querschnitte nur ihre Höhen ändern und die obere und untere Stabbegrenzung symmetrische Curven sind, ist für σ_y nur in den Punkten der äussersten Fasern ein endlicher Wert einzuführen, und zwar

$$\sigma_y = - \frac{M \cdot e}{J} \operatorname{tg}^2 \varphi$$

Beweis. Es ist nur zu beweisen, dass diese Gleichung für σ_y auch für einen nicht einfach rechteckigen Querschnitt gilt.

Bei unserer Ableitung von σ_y für den vollen rechteckigen Querschnitt gingen wir aus von der Formel

$$\tau = \frac{1}{b} \left[\frac{Q \cdot St}{J} + M \frac{J \frac{d}{dx} St - St \frac{d}{dx} J}{J^2} \right]$$

Für eine äusserste Faser, also für $v = e$, wird diese Formel zu

$$\tau = \frac{1}{b} M \frac{\frac{d}{dx} St}{J}$$

weil für die äusserste Faser $St = 0$ ist. Aus dem gleichen Grunde ist auch $R_1 = 0$, und in dem Ausdrücke

$$R_2 = \int_e^{e+dy} \tau \cdot dF$$

können wir genau genug für τ obigen Wert einsetzen. Wir haben demnach die Gleichung (worin b die Breite an der

äussersten Faser ist)

$$\sigma_y \cdot dx \cdot b + R_2 = \sigma_y \cdot dx \cdot b + \int_e^{e+dy} \frac{1}{b} M \frac{d}{dx} St dF = 0$$

Aus Fig. 28 ersieht man, dass, wie auch der Querschnitt aus rechteckigen Bestandteilen zusammengesetzt sein mag, der Differentialzuwachs des statischen Momentes *in der*

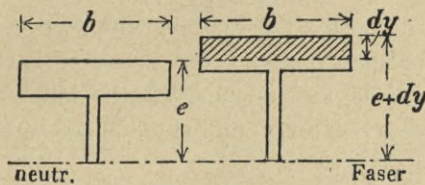


Fig. 28

Hauptsache gleich dem entsprechenden Zuwachs bei einem vollen Rechteck ist, dessen Breite der Breite an der äussersten Faser des wirklichen Querschnittes gleich ist.

$$dSt = b \cdot dy \frac{(e + dy) + e}{2} = b \cdot e dy$$

$$\frac{d}{dx} St = b e \operatorname{tg} \varphi$$

Also ist

$$\sigma_y \cdot dx \cdot b = -\frac{1}{b} \frac{M}{J} \cdot b e \operatorname{tg} \varphi \int_e^{e+dy} dF$$

$$\int_e^{e+dy} dF = b \cdot dy$$

$$\sigma_y = -\frac{M}{J} e \operatorname{tg} \varphi \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{J} e \operatorname{tg}^2 \varphi$$

Bemerkung. — Der Beweis zu Lehrsatz XXVI wird zeigen, dass in dem vorliegenden Falle auch σ_x eine Druck-

spannung ist, und dass σ_y eine Zugspannung wird, sobald σ_x eine solche ist.

Zusatz. Ist die halbe Höhe des Querschnitts bei $x + dx$ um dy kleiner als die halbe Höhe des Querschnittes bei x , so ist natürlich in alle Formeln für $\operatorname{tg} \varphi$ der Wert ($-\operatorname{tg} \varphi$) einzuführen.

Lehrsatz XXIV. Für Stäbe constanten oder variablen Querschnittes erfahren die Punkte der neutralen Faser in den beiden Ebenen, welche die Querschnittsebene unter einem Winkel von 45° und die Kraftebene senkrecht schneiden, die grössten Normalspannungen; die grössten Tangentialspannungen erfahren sie in der Querschnittsebene selbst und in derjenigen Ebene, welche zum Querschnitt und zur Kraftebene senkrecht steht.

Die Grösse dieser grössten Normalspannungen ist

$$(\sigma) = + \frac{5}{4} \tau_{v=0} \quad \text{bzw.} \quad - \frac{5}{4} \tau_{v=0}$$

die Grösse dieser grössten Tangentialspannungen ist

$$\zeta_{\max} = \tau_{v=0}$$

Beweis. Für die Punkte der neutralen Faser ist

$$\sigma_x = 0 = \sigma_y$$

und nur τ hat eine endliche Grösse.

Also wird für die grösste Normalspannung

$$\operatorname{tg} 2\alpha = + \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\tau}{0} = \infty$$

d. h.

$$2\alpha = 90^\circ \quad \text{bzw.} \quad 270^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{bzw.} \quad 135^\circ$$

und

$$(\sigma) = \frac{3}{8} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{5}{8} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau^2}$$

wird zu

$$(\sigma) = \pm \frac{5}{8} \sqrt{4\tau^2} = + \frac{5}{4} \tau_{v=0} \text{ bzw. } - \frac{5}{4} \tau_{v=0}$$

Für die grösste Tangentialspannung wird

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} = 0$$

d. h.

$$2\alpha = 0 \text{ bzw. } 180^\circ$$

$$\alpha = 0 \text{ bzw. } 90^\circ$$

und

$$\zeta_{\max} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

wird zu

$$\zeta_{\max} = \tau_{v=0}$$

Lehrsatz XXV. Für Stäbe constanten Querschnitts erfahren die Punkte der äussersten Faser in der Querschnittsebene die grösste Normalspannung; die grösste Tangentialspannung erfahren sie in denjenigen beiden Ebenen, welche die Querschnittsebene unter einem Winkel von 45° und die Kraftebene senkrecht schneiden.

Die Grösse dieser grössten Normalspannung ist

$$(\sigma) = \sigma_x$$

Die Grösse dieser grössten Tangentialspannung ist

$$\zeta_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_x$$

Beweis. Für die Punkte der äussersten Faser eines Stabes constanten Querschnitts ist

$$\tau = 0 = \sigma_y$$

und nur σ_x hat eine endliche Grösse.

Es wird also für die grösste Normalspannung

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{0}{\sigma_x} = 0$$

d. h.

$$2\alpha = 0$$

$$\alpha = 0$$

und die Grösse von (σ) ergibt sich aus

$$(\sigma) = \frac{3}{8} (\sigma_x + 0) + \frac{5}{8} \sqrt{(\sigma_x - 0)^2 + 0^2} = \frac{3}{8} \sigma_x + \frac{5}{8} \sigma_x = \sigma_x$$

Für die grössten Tangentialspannungen wird

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau} = \frac{\sigma_x}{0} = \infty$$

d. h.

$$2\alpha = 90^\circ \text{ bzw. } 270^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ \text{ bzw. } 135^\circ$$

und die Grösse von ζ_{\max} ergibt sich aus

$$\zeta_{\max} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - 0)^2}{4} + 0^2} = \frac{\sigma_x}{2}$$

Lehrsatz XXVI. Für Stäbe mit Querschnitten von variabler Höhe, wobei die obere und untere Stabbegrenzung symmetrische Curven sind, erfahren die Punkte der äussersten Faser in der Ebene, welche zur Stabbegrenzung senkrecht steht, die grösste Normalspannung; die grössten Tangentialspannungen erfahren sie in denjenigen Ebenen, welche mit der Richtung der Stabbegrenzung Winkel von 45° bilden.

Die Grösse dieser grössten Normalspannung ist

$$(\sigma) = \sigma_x \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

die Grösse dieser grössten Tangentialspannungen ist

$$\zeta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\cos^2 \varphi}$$

Beweis. Zeichnen wir für die Punkte der äussersten Faser die der Figur 27 analoge Figur 29, und zeichnen wir in dieselbe die sämtlichen zugehörigen Spannungen in dem

Sinne hinein, wie er dem positiven Vorzeichen derselben entspricht, d. h. σ_x und σ_y als Zugspannungen und die beiden τ gegen die Schnittlinie der von ihnen afficierten Ebenen

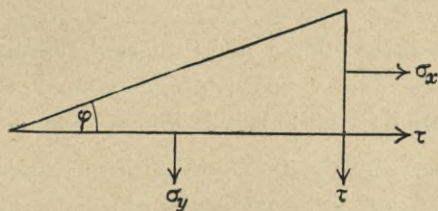


Fig. 29

gerichtet, so ersieht man, dass das Gleichgewicht verlangt, dass sei

$$\sigma_y \cdot b \cdot dx + \tau \cdot b \cdot dy = 0$$

und

$$\sigma_x \cdot b \cdot dy + \tau \cdot b \cdot dx = 0$$

d. h. es ist

$$\sigma_y = -\tau \cdot \frac{dy}{dx} = -\tau \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

und

$$\sigma_x = -\tau \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}$$

Aus letzteren zwei Gleichungen folgt, dass, wenn σ_x in Wirklichkeit eine Zugspannung ist, dann die beiden τ von der Kante ihrer Ebenen weggerichtet sind und negatives Vorzeichen haben; wenn aber τ negatives Vorzeichen hat, so wird auch σ_y zu einer Zugspannung.

Nun ist

$$\sigma_x = \frac{M \cdot e}{J}$$

also

$$\tau_{v=e} = -\sigma_x \cdot \operatorname{tg} \varphi = -\frac{M e}{J} \operatorname{tg} \varphi$$

und

$$-\sigma_y = \tau \cdot \operatorname{tg} \varphi = -\frac{Me}{J} \operatorname{tg}^2 \varphi$$

$$\sigma_y = \frac{Me}{J} \operatorname{tg}^2 \varphi$$

Diese Resultate stehen nicht im Widerspruch mit Lehrsatz XXIII, da dort τ positiv angenommen, also σ_x eine Druckspannung ist. Es haben σ_x und σ_y stets gleichen Sinn.

Die Ebene, welche von der grössten Normalspannung afficiert wird, bildet mit der Querschnittsebene einen solchen Winkel, dass

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2\operatorname{tg} \varphi}{(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)} = -\operatorname{tg} 2\varphi$$

ist, es ist also

$$\alpha = -\varphi$$

d. h. es bildet die betreffende Ebene mit der Querschnittsebene denselben Winkel, welchen die Stabbegrenzung an der Stelle mit der Stabaxe bildet, und steht demnach senkrecht eben zu der Stabbegrenzung.

Die Grösse von (σ) ergibt sich aus

$$(\sigma) = \frac{3}{8} \frac{Me}{J} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + \frac{5}{8} \sqrt{\frac{M^2 e^2}{J^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 + 4 \frac{M^2 e^2}{J^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$(\sigma) = \frac{Me}{J} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \left(\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \right) = \frac{Me}{J} \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

Die Lage der Ebenen, für welche ζ zum Maximum wird, ergibt sich aus Lehrsatz XVIII Folgerung 2.

Die Grösse von ζ_{\max} ist

$$\zeta_{\max} = \sqrt{\frac{1}{4} \frac{M^2 e^2}{J^2} (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 + \frac{M^2 e^2}{J^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Me}{J} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_x}{\cos^2 \varphi}$$

Regeln für die Festigkeitsuntersuchung.

Lehrsatz XXVII. Die Beanspruchung der Punkte in den neutralen Fasern eines auf Biegung beanspruchten Stabes von constantem oder variablem Querschnitte bleibt unter der zulässigen Grenze, wenn in jedem Querschnitte für dieselben dem absoluten Werte nach

$$(\sigma) = \frac{\ddot{\delta}}{4} \tau_{v=0} \leq k_z \text{ und } \leq k_d$$

und zugleich

$$\zeta_{\max} \leq t$$

worin k_z der Coëfficient ist für normale Zugbeanspruchung,
 k_d der Coëfficient ist für normale Druckbeanspruchung
 und t der Coëfficient ist für Schubbeanspruchung

Beweis. Siehe Lehrsatz XXIV.

Lehrsatz XXVIII. Die Beanspruchung der Punkte in den äussersten Fasern eines auf Biegung beanspruchten Stabes von constantem Querschnitte bleibt unter der zulässigen Grenze, wenn in jedem Querschnitte für dieselben dem absoluten Werte nach

$$(\sigma) = \sigma_x = \frac{M e'}{J} \leq k_z \text{ bzw. } \leq k_d$$

$$(\sigma) = \sigma_x = \frac{M e''}{J} \leq k_d \text{ bzw. } \leq k_z$$

(je nach dem M positiv oder negativ ist)

und zugleich

$$\zeta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{M e'}{J} \leq t$$

$$\zeta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{M e''}{J} \leq t$$

Beweis. Siehe Lehrsatz XXV.

Lehrsatz XXIX. Die Beanspruchung der Punkte in den äussersten Fasern eines auf Biegung beanspruchten Stabes, dessen Querschnitte eine derart variable Höhe haben, dass die obere und untere Begrenzung des Stabes symmetrische Curven sind, bleibt unter der zulässigen Grenze, wenn in jedem Querschnitte für dieselben dem absoluten Werte nach

$$(\sigma) = \frac{Me'}{J} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \leq k_z \text{ bzw. } \leq k_d$$

$$(\sigma) = \frac{Me''}{J} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \leq k_d \text{ bzw. } \leq k_z$$

und zugleich

$$\zeta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{Me'}{J} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \leq t$$

$$\zeta_{\max} = \frac{1}{2} \frac{Me''}{J} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} \leq t$$

Beweis. Siehe Lehrsatz XXVI.

Lehrsatz XXX. Hat man für einen Querschnitt des auf Biegung beanspruchten Stabes gefunden, dass in der neutralen, sowie in den beiden äussersten Fasern (σ) und ζ_{\max} unter der zulässigen Grenze bleiben, so ist bei einem Stabe, dessen Querschnitte in der neutralen Faser eine Breite haben, die nur wenig verschieden ist von der Breite in den äussersten Fasern, damit auch gesagt, dass in allen zwischenliegenden Fasern diese Spannungen unter der zulässigen Grenze bleiben. Bei einem Stabe aber, dessen Querschnitte in der neutralen Faser eine bedeutend kleinere Breite haben als in den äussersten Fasern, müssen für jede Faser, in welcher eine Aenderung der Breite stattfindet, die Werte von (σ) und ζ_{\max} nach den Formeln in Lehrsätzen XVII und XIX ermittelt und mit k und t verglichen werden.

Beweis. Es mögen hier concrete Zahlenbeispiele als Beweise gelten für Querschnittsformen, wie sie hauptsächlich in der Praxis vorkommen.

Ein Stab constanten Querschnittes liege auf zwei 200 cm von einander entfernten Stützen frei auf (vergl. Fig. 30) und sei in der Mitte belastet mit einer Einzellast von 2000 klg, so dass jede der beiden Auflager-Reaktionen = 1000 klg ist.

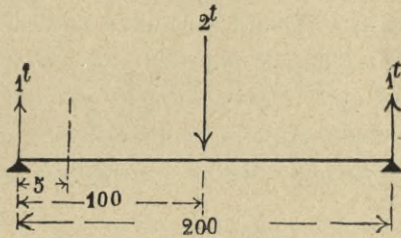


Fig. 30

Es ist dann in dem Querschnitte bei $x = 5$ cm

$$Q = 1000 \text{ klg}$$

$$M = + 1000 \text{ klg} \times 5 \text{ cm} = 5000 \text{ klg cm}$$

und in dem Querschnitte bei $x = 100$ cm

$$Q = 1000 \text{ klg}$$

$$M = + 1000 \text{ klg} \times 100 \text{ cm} = 100\,000 \text{ klg cm}$$

1) Der Stab habe einen rechteckigen Querschnitt von

der Breite $b = 10$ cm

der Höhe $h = 20$ cm

sodass für denselben mit $e = 10$ cm einzusetzen ist

$$J = 2 \int_0^e v^2 dF = 2 \int_0^e v^2 \cdot b \cdot dv = 2b \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^e = \frac{2}{3} b e^3 = 6666 \text{ cm}^4$$

$$St_v^e = \int_v^e v \cdot dF = b \int_v^e v \cdot dv = b \left[\frac{v^2}{2} \right]_v^e = b \frac{e^2 - v^2}{2}$$

Querschnitt bei $x = 5 \text{ cm}$.

Es ist

$$\sigma_v = \frac{M}{J} \cdot v = \frac{M}{J} \cdot e \cdot \frac{v}{e} = \sigma_e \cdot \frac{v}{e}$$

$$\sigma_e = \frac{M}{J} \cdot e = \frac{5000 \text{ kg cm}}{6666 \text{ cm}^4} \cdot 10 \text{ cm} = 7,5 \text{ kg pro cm}^2$$

Machen wir also eine vertikale Linie (Fig. 31 Tafel) $e \text{ cm}$ lang und eine durch ihren oberen Endpunkt gezogene Horizontale proportional σ_e , und verbinden wir alsdann den Endpunkt dieser Horizontalen mit dem unteren Endpunkte der Vertikalen durch eine Gerade, so stellt jede horizontale Ordinate dieser Geraden das σ für das betreffende v dar, also den Wert, welchen wir in unseren Formeln σ_x genannt haben.

Es ist ferner

$$\tau_v = \frac{1}{b} \frac{Q \cdot St_v^e}{J} = \frac{Q}{2J} (e^2 - v^2)$$

$$\begin{aligned} \tau_v &= \frac{1000}{2 \cdot 6666} (e^2 - v^2) = 0,075 (e^2 - v^2) = \\ &= (7,5 - 0,075 v^2) \text{ kg pro cm}^2 \end{aligned}$$

Machen wir eine durch den unteren Endpunkt unserer Vertikalen (Fig. 31) gehende Horizontale, proportional $7,5 \text{ kg}$ und zeichnen wir eine Halbparabel, die den Endpunkt dieser Horizontalen zum Scheitel hat und durch den oberen Endpunkt der Vertikalen hindurch geht, so stellen die Ordinaten dieser Parabel für jedes v das zugehörige τ dar.

Nach Lehrsatz XIX war

$$\zeta_{\max} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau^2}$$

hier wo $\sigma_y = 0$ ist, haben wir

$$\zeta_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

es ist demnach ζ_{\max} die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\frac{\sigma_x}{2}$ und τ sind, und können wir direkt eine Curve für die ζ_{\max} mittelst ihrer Ordinaten aufzeichnen, wenn wir für jedes v mit dem zugehörigen $\frac{\sigma_x}{2}$ und τ ein derartiges Dreieck construieren (Fig. 31^a).

Nach Lehrsatz XXI ist, wenn $\sigma_y = 0$ wird

$$(\sigma) = \frac{3}{8} \sigma_x + \frac{5}{8} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau^2} = \frac{3}{8} \sigma_x + \frac{5}{4} \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$(\sigma) = \frac{3}{8} \sigma_x + \frac{5}{4} \zeta_{\max}$$

und können wir rein zeichnerisch die Ordinaten der Curve der (σ) ermitteln, indem wir zu der $\frac{3}{8}$ -fachen Länge der Ordinaten der σ_x Curve jeweils das $\frac{5}{4}$ -fache der entsprechenden Ordinate der ζ_{\max} Curve addieren (Fig. 31).

Querschnitt bei $x = 100$ cm.

Wir verfahren hier ganz analog, nur ist hier (Fig. 31^b)

$$\sigma_e = \frac{100000}{6666} \cdot 10 = 150 \text{ kg pro cm}^2$$

während

$$\tau_{v=0} = 7,5 \text{ kg pro cm}^2 \text{ bleibt.}$$

Aus dem Verlaufe der Curven für die ζ_{\max} und die (σ) ersieht man, dass bei beiden betrachteten rechteckigen Querschnitten die Grösse dieser Spannungen entweder in der neutralen oder in einer äussersten Faser ihre Grösstwerte erreichen.

2) Der Stab habe einen I förmigen Querschnitt, dessen

$$\text{Höhe } 2 e = h = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Flanschenbreite } b = 10 \text{ cm}$$

$$\text{Flanschendicke } d = 2 \text{ cm}$$

$$\text{Stegdicke } s = 0,1 \text{ cm}$$

sei, so dass einzusetzen ist

$$J = \frac{2}{3} b \cdot e^3 - \frac{2}{3} (b-s)(e-d)^3 = 6666 - \frac{2}{3} 9,9 \cdot 8^3 = 3286 \text{ cm}^4$$

und für $v < (e-d)$

$$\begin{aligned} St_v^e &= s \frac{8^2 - v^2}{2} + b \frac{10^2 - 8^2}{2} = 3,2 + 180 - \frac{0,1}{2} v^2 = \\ &= 183,2 - \frac{0,1}{2} v^2 \end{aligned}$$

für $v > (e-d)$

$$St_v^e = b \frac{(10^2 - v^2)}{2} = 500 - 5 v^2$$

Querschnitt bei $x = 5 \text{ cm}$.

$$\sigma_e = \frac{M}{J} \cdot e = \frac{5000}{3286} \cdot 10 = 15,3 \text{ klg pro cm}^2$$

und für $v < (e-d)$

$$\tau = \frac{1}{s} Q \frac{St_v^e}{J} = \frac{1}{0,1} \cdot \frac{1000}{3286} (183,2 - \frac{0,1}{2} v^2) = 3 \cdot (183,2 - \frac{0,1}{2} v^2)$$

$$\tau = (550 - \frac{0,3}{2} v^2) = (550 - 0,15 v^2) \text{ klg pro cm}^2$$

$v > (e-d)$

$$\tau = \frac{1}{b} Q \cdot St_v^e = \frac{1}{10} \frac{1000}{3286} \cdot (500 - 5 v^2)$$

$$\tau = 0,03 (500 - 5 v^2) = (15 - 0,15 v^2) \text{ klg pro cm}^2$$

Während sich im vorliegenden Falle σ_x ganz analog wie im vorhergehenden Falle darstellen lässt (Fig. 32), ändert sich die Curve für die τ , welche wir folgendermassen zu konstruieren haben: wir machen zuerst eine durch den

unteren Endpunkt unserer Vertikalen gehende Horizontale proportional 15 klg., und zeichnen eine Halbparabel, die den Endpunkt dieser Horizontalen zum Scheitel hat und durch den oberen Endpunkt der Vertikalen hindurchgeht, alsdann verschieben wir den Teil dieser Parabel, der von $v = 0$ bis $v = (e - d)$ reicht, parallel mit sich selbst nach aussen um einen Betrag, der proportional ist $(550 - 15) = 535$ klg. Die Ordinaten der so erhaltenen Curve stellen für jedes v die Spannung τ dar; für $v = (e - d)$ hat τ zwei Werte, welche um 535 klg. verschieden sind.

Die Curven der ζ_{\max} und (σ) ermitteln sich ebenso wie im vorhergehenden Falle, und haben dieselben, entsprechend den zwei Werten von τ , ebenfalls zwei Werte für $v = (e - d)$

Querschnitt bei $x = 100$ cm. Das Verfahren ist dasselbe (Fig. 32^a), die Curve der τ bleibt sich gleich während

$$\sigma_e = \frac{100\,000}{3286} \cdot 10 = 305 \text{ klg. pro cm}^2$$

ist.

Aus dem Verlauf der Curven der ζ_{\max} und der (σ) ersieht man, dass bei einem Querschnitte, dessen neutrale Faser gegenüber der äussersten Faser eine sehr kleine Breite hat, zwischen diesen Fasern noch solche vorhanden sein können, deren Hauptspannungen denjenigen in jenen Fasern sehr nahe kommen oder sogar grösser sind als dieselben.

Zusatz. Aus diesen Beispielen ist auch ersichtlich, wie das Verhältnis von M zu Q auf den Spannungszustand Einfluss hat, da wo M gross ist im Vergleich zu Q ist für die Dimensionierung der Spannungszustand in den äusseren Fasern massgebend, wo aber M sehr klein ist im Vergleich zu Q , kann der Spannungszustand in der neutralen Faser der massgebende sein.

Bemerkung. — In Wirklichkeit hat der Spannungszustand in denjenigen Fasern, in welchen die Aenderung der Querschnittsbreite vor sich geht, nicht die einfache Form

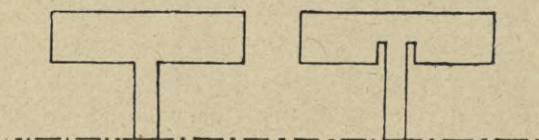


Fig. 33

wie in den anderen Fasern, denn es ist z. B. bei dem Iförmigen Querschnitte (Fig. 33) in den Punkten der untersten Faser des Flansches die zur Krafrichtung parallele Schubspannung notwendig gleich Null, weil sonst an der unteren Aussenfläche des Flansches eine Schubspannung vorhanden wäre (Hilfslehrsatz 4), was nicht der Fall ist. Es werden voraussichtlich in Wirklichkeit die Spannungen sich so verteilen, als ob der Steg noch etwas für sich in den Flansch hineinreichte, sodass er bei der Uebergangsstelle schon der ganzen Schubkraft allein entgegen wirkt.

In der Praxis können jedoch diese Unregelmässigkeiten vernachlässigt werden.

Bemerkung. — Beim Beweis von Lehrsatz I haben wir angenommen, dass die materiellen Querschnitte beim gebogenen Stabe eben bleiben, haben aber gleich erwähnt, dass dies nicht der Fall ist. Der Grund, dass sie sich etwas wölben, ist folgender: Die Schubspannung τ in der Querschnittsebene ist am grössten in der neutralen Faser, am kleinsten, oder gleich Null in der äussersten Faser, also ist die Aenderung des rechten Winkels, welchen die Längsfasern des Stabes ursprünglich mit der Querschnittsebene bildeten, am grössten für die neutrale Faser, am kleinsten oder gleich Null für die

äusserste Faser. Nun bleiben aber die Längsfasern, weil der Krümmungsradius r sehr gross ist, beinahe parallel, so

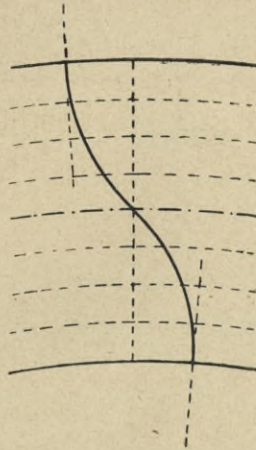
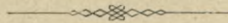


Fig. 34

dass die Querschnittsebene, welche ja mit denselben (vergl. Fig. 34) in der neutralen Faser den kleinsten in der äussersten den grössten, bezw. einen rechten Winkel bildet, eine geschweifte Form annehmen muss. Rechnungsmässig ist aber diese Wölbung von keiner Bedeutung.



D. Schub.

Definition der Schubbeanspruchung.

Ein Stab ist nie als Ganzes auf Schub beansprucht, sondern nur in einzelnen Querschnitten, und zwar ist dies dann in irgend einem Querschnitte der Fall, wenn zu beiden Seiten desselben und ihm unendlich nahe je eine äussere Kraft wirkt, von welchen beide der Querschnittsebene parallel, gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Es können diese Kräfte auch je die Resultanten links, bezw. rechts vom betreffenden Querschnitte wirkender Kräfte sein, sofern diese Resultanten keinen endlichen Abstand vom Querschnitte haben, sondern durch dessen Schwerpunkt gehen. Wir können demnach die Schubbeanspruchung als speziellen Fall der Biegungsbeanspruchung auffassen, und zwar als den speziellen Fall, dass für den untersuchten Querschnitt das Moment

$$M = 0$$

also auch die Normalspannungen

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

sind.

Voraussetzungen.

Die beiden Kräfte Q haben das Bestreben die beiden Teile des Stabes längs des Querschnittes parallel mit sich

selbst abzuschieben, welchem Bestreben die inneren Kräfte in der Querschnittsebene, also Schubkräfte entgegen wirken. Die Resultante aller der Richtung von Q parallelen Componenten der Elementar-Flächenschubkräfte muss natürlich mit Q im Gleichgewicht sein.

Unsere Untersuchung bleibe beschränkt auf Stäbe, deren Querschnitte in Bezug auf eine der Hauptträgheitsachsen wenigstens symmetrisch sind, und auf solche Belastungen, dass die Richtung von Q mit eben dieser Hauptträgheitsachse zusammenfällt.

Wir haben bei Ableitung unserer Endformeln bei der Biegungsbeanspruchung unsere Untersuchung beschränkt auf Stäbe mit Querschnitten, bei welchen die Tangenten an die Umfangsfigur derselben nur sehr kleine Winkel mit deren Symmetrieaxe bilden (vergl. Zusatz nach C. Lehrs. IX). Diese Beschränkung wollen wir hier fallen lassen und unsere Formeln für einen beliebigen symmetrischen Querschnitt ableiten, sodass die Querschnitte, welche obiger engeren Bedingung doch genügen, als spezielle Fälle erscheinen, bei welchen $\operatorname{tg} \varphi = 0$ ist.

Nun haben wir in dem Zusatze nach C. Lehrsatz IX gezeigt, dass bei solchen Querschnitten, die eine Symmetrieaxe haben, welche Krafrichtung ist, und deren Figur Tangenten hat, die bedeutend von dieser Richtung abweichen, die Richtungen der Tangentialspannungen der Punkte je einer zur Krafrichtung senkrechten Linie sich alle in dem Punkte schneiden, in welchem die beiden Tangenten an die Querschnittsfigur im Endpunkte der betreffenden Linie die Symmetrieaxe, d. h. die Krafrichtung schneiden. Es lässt sich daher jede dieser Tangentialspannungen zerlegen in eine zur Krafrichtung parallele, für alle Punkte der zur Krafrichtung senkrechten Linie constante Componente und in eine zur Krafrichtung senkrechte, variable Componente.

Lehrsatz I. In allen Punkten einer zur Krafrichtung senkrechten Linie des Querschnittes ist die zur Krafrichtung parallele Componente der Schubspannung in der Querschnittsebene gleich, und zwar hat sie die Grösse.

$$\tau_1 = \frac{1}{b} \cdot \frac{Q}{J} St_v^e$$

worin bedeutet

Q die äussere Schubkraft

St_v^e das statische Moment des ausserhalb der betreffenden Linie gelegenen Teiles der Querschnittsfigur, bezogen auf die zur Krafrichtung senkrechte Schweraxe

J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes, bezogen auf die zur Krafrichtung senkrechte Schweraxe

b die Breite des Querschnittes längst unserer Linie.

Beweis. Mit Berücksichtigung dessen, dass $M = 0$ ist, aus C. Lehrsatz IX.

Lehrsatz II. In allen Punkten einer zur Krafrichtung senkrechten Linie des Querschnittes ist in der zur Krafrichtung senkrechten Ebene die zur Querschnittsebene senkrechte Schubspannung ebenfalls

$$\tau_1 = \frac{1}{b} \cdot \frac{Q}{J} St_v^e$$

Beweis. Aus C. Hilfslehrsatz 4.

Lehrsatz III. In einem Punkte des Querschnittes ist die zur Krafrichtung senkrechte Componente der Schubspannung in der Querschnittsebene

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

worin bedeutet

τ_1 die zur Krafrichtung parallele Componente der Schubspannung in der Querschnittsebene für den betreffenden Punkt

φ den Winkel, welchen die Verbindungslinie unseres Punktes mit dem Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten der durch ihn hindurchgehenden zur Krafrichtung senkrechten Linie bildet mit der Krafrichtung.

Beweis. Aus dem Zusatze nach C. Lehrsatz IX.

Lehrsatz IV. Die Ebenen, welche senkrecht zur Querschnittsebene und parallel zur Krafrichtung sind, erfahren eine zur Querschnittsebene senkrechte Schubspannung, welche ebenfalls die Grösse hat

$$\tau_2 = \tau_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

Beweis. Aus C. Hilfslehrsatz 4.

Lehrsatz V. Die resultierende Schubspannung in der Querschnittsebene hat die Grösse

$$\tau = \frac{1}{b \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{Q}{J} St_v^2$$

Beweis. Es ist

$$\tau = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_1^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} = \tau_1 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \tau_1 \cdot \frac{1}{\cos \varphi}$$

Lehrsatz VI. Für eine Ebene, welche die Querschnittsebene unter einem beliebigen Winkel α nach einer durch den zu untersuchenden Punkt gehenden zur Richtung der resultierenden Spannung τ senkrechten Linie schneidet, ist

$$\xi = \tau \cdot \sin 2\alpha$$

Beweis. Ändert man die in den Voraussetzungen zu C. Lehrsatz X ff. angegebene Lage der Koordinatenaxen derart, dass zwar die X-Axe parallel zur Stabaxe bleibt, die Y-Axe aber mit der Richtung von τ zusammenfällt und berücksichtigt man, dass $\sigma_x = 0 = \sigma_y$ ist, so gilt alles dort und in den folgenden Lehrsätzen gesagte anstatt von Ebenen, welche unter einem Winkel α den Querschnitt nach einer zur Kraft-

richtung, mit welcher ja dort τ zusammenfällt, senkrechten Linie schneiden, jetzt von Ebenen, welche den Querschnitt unter dem Winkel α nach einer zur variablen Richtung von τ senkrechten Linie schneiden.

Lehrsatz VII. Für eine Ebene, welche die Querschnittsebene unter einem beliebigen Winkel α nach einer durch den zu untersuchenden Punkt gehenden, zur Richtung der resultierenden Spannung τ senkrechten Linie schneidet, ist

$$\zeta = -\tau \cdot \cos 2\alpha$$

Lehrsatz VIII. Die Normalspannung ξ erreicht ihren grössten Wert für die Ebenen, welche die Querschnittsebene nach der zur Richtung von τ senkrechten Linie unter einem Winkel von 45° schneiden, und zwar ist

$$\xi_{\max} = +\tau \text{ bzw. } -\tau$$

sodass die entsprechende virtuelle Spannung

$$(\sigma) = \pm \left(1 + \frac{1}{m}\right) \tau = \pm \frac{5}{4} \tau$$

Lehrsatz IX. Die Tangentialspannung ζ erreicht ihren grössten Wert für die Querschnittsebene und diejenige Ebene, welche die Querschnittsebene nach der zur Richtung von τ senkrechten Linie unter einem rechten Winkel schneidet, und zwar ist

$$\zeta_{\max} = \tau$$

Lehrsatz X. Bei Querschnitten, bei welchen die Umfangsfigur Tangenten hat, welche mit der Symmetrieaxe derselben bedeutende Winkel bilden, sind die Punkte längst des Umfanges am stärksten beansprucht und müssen dieselben je einzeln untersucht werden.

Beweis. Wohl ist τ_1 für die Punkte der zur Kraftrichtung senkrechten Schweraxe am grössten, doch kann selbst bei

einem kleineren τ_1 die resultierende Schubspannung τ durch den Einfluss des Faktors $\frac{1}{\cos\varphi}$ grösser werden.

Folgerungen. Wenn wir die Schubkraft Q einer solchen Beschränkung unterwerfen, dass dem absoluten Werte nach

$$(\sigma) = \pm \frac{5}{4} \tau < k_z \text{ und } < k_d$$

sowie

$$\zeta_{\max} = \tau < t$$

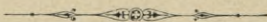
bleibt in sämtlichen Punkten, können wir sicher sein, dass keine unzulässige Deformation stattfindet.

Ist bei irgend einem Materiale

$$k > \frac{5}{4} t = t$$

so brauchen wir nur die Schubspannungen in der Querschnittsebene mit t zu vergleichen, weil ja in diesem Falle $(\sigma) < k$ bleibt.

Ist jedoch bei irgend einem Materiale an der Festigkeitsgrenze die Normalfestigkeit kleiner als $\frac{5}{4}$ der Schubfestigkeit, so wird bei unbeschränkter Schubbeanspruchung die Zerstörung des Stabes dadurch vor sich gehen, dass er längst einer Ebene zerrissen wird, welche unter 45° gegen den Querschnitt geneigt ist.



E. Torsion.

Definition der Torsionsbeanspruchung.

Ein Stab ist dann in einem seiner Querschnitte auf Torsion beansprucht, wenn zu beiden Seiten desselben und ihm unendlich nahe je ein Kräftepaar wirkt, von welchen beide die Stabaxe rechtwinklig schneiden, deren Ebenen also der Querschnittsebene parallel sind, und welche beide gleich gross aber entgegengesetzt gerichtet sind. Es können diese Kräftepaare auch je die Resultanten links bezw. rechts vom betr. Querschnitt wirkender Kräftepaare sein.

Voraussetzungen.

Die beiden Kräftepaare, deren Grösse M sei, haben das Bestreben, die beiden Teile des Stabes längst des Querschnittes bei gleichbleibender Lage der Stabaxe abzuwinden, welchem Bestreben die inneren Kräfte in der Querschnittsebene, also Schubkräfte, entgegenwirken. Die Resultante der Momente dieser sämtlichen Elementar-Flächenschubkräfte um den Momentenpunkt von M muss natürlich mit M im Gleichgewicht sein.

Unsere Untersuchung bleibe beschränkt auf prismatische Stäbe, deren Querschnitt in Bezug auf beide Hauptträgheitsaxen symmetrisch ist, und zwar untersuchen wir

- a) den elliptischen und
b) den rechteckigen Querschnitt.

Bei beiden machen wir Annahmen, welche uns begründet erscheinen, und welche auf kürzestem Wege eine Formel für die Schubspannung in der Querschnittsebene ergeben, und prüfen erst nach der Hand, ob die so gefundenen Werte den allgemein gültigen Gleichgewichtsbedingungen genügen.

a) *Der elliptische Querschnitt.*

Wir legen die X -Axe eines rechtwinkligen Koordinatensystems in die Axe des Stabes, die Y -Axe in die kleine Halbachse a der Ellipse und demnach die Z -Axe in deren grosse Halbachse b . Ferner behalten wir im Gedächtnis, dass in den Punkten des Querschnittsumfanges die Schubspannung die Richtung der Tangente an die Querschnittsfigur haben muss (vergl. Zusatz nach C. Lehrsatz IX).

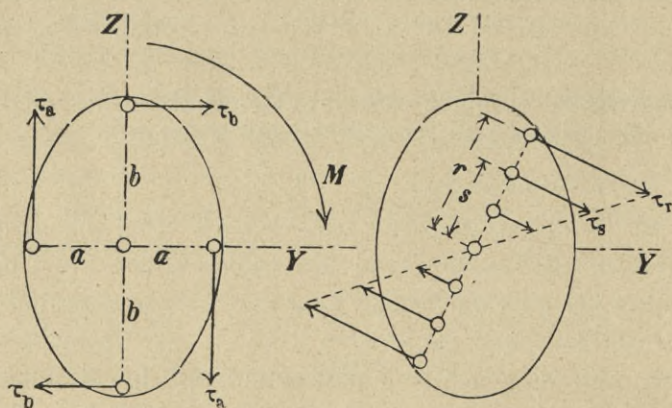


Fig. 35

Denken wir uns nun (vgl. Fig. 35) den Stab in unserem Querschnitte auseinandergeschnitten, und den Zusammenhang zwischen seinen beiden Teilen durch einen Dübel im Mittelpunkt des Querschnittes und je einen Dübel an den

Enden des kleinen Durchmessers $2a$ wiederhergestellt, und geben wir diesen Dübeln einen Querschnittsinhalt gleich der Flächeneinheit, so sind wir wegen der doppelten Symmetrie der Figur berechtigt, von vornherein anzunehmen, dass bei der Verwindung der Mitteldübel den Drehpunkt bildet, also nur die zwei anderen mittelst ihrer Scheerfestigkeit dem Abwinden widerstehen. Ihre zwei Scheerkräfte stehen zu dem Hebelsarm, also der Richtung nach dem Mitteldübel senkrecht, und müssen, wenn ihre Grösse τ_a ist, der Gleichung genügen

$$\tau_a \cdot 2a = M; \quad \tau_a = \frac{M}{2a}$$

Denken wir uns zweitens den Zusammenhang zwischen den beiden Stabteilen hergestellt durch einen Mitteldübel und, anstatt der zwei Dübel an den Enden des kleinen Durchmessers $2a$, durch zwei Dübel an den Enden des beliebigen Durchmessers $2r$, so widersteht jeder dieser Dübel dem Abwinden des Stabes mittelst einer Scheerkraft τ_r , welche zum Hebelsarm, also zum Fahrstrahl r senkrecht steht und der Gleichung genügen muss

$$\tau_r \cdot 2r = M; \quad \tau_r = \frac{M}{2r}$$

Es wäre also

$$\tau_r = \frac{a}{r} \cdot \tau_a$$

Wären nun gleichzeitig an den Enden sämtlicher Durchmesser $2r$ solche Dübel vorhanden, so ändert sich natürlich die absolute Grösse der Scheerkräfte, mit welchen sie einzeln Widerstand leisten, es ist aber kein Grund vorhanden, warum sich die Verhältnisse dieser einzelnen Kräfte zu einander ändern sollten, so dass auch jetzt noch, wenn τ_a die zum Fahrstrahl a senkrechte Scheerkraft in den Dübeln an

den Enden von $2a$, und τ_r die gleichzeitige zum Fahrstrahl r senkrechte Scheerkraft in den Dübeln an den Enden von $2r$ ist

$$\tau_r = \frac{a}{r} \tau_a$$

bleibt.

Denken wir uns drittens die beiden Stabteile längst eines Durchmessers der Ellipse mittelst einer ganzen Anzahl Dübeln zusammengehalten, so wissen wir, dass der Mitteldübel gar keinen Widerstand leistet, während der Aussendübel irgend eine zum Fahrstrahl senkrechte Scheerbeanspruchung τ_r erfährt. Es ist das nächstliegende anzunehmen, dass die zwischenliegenden Dübeln in einem mit ihrem Abstände vom Mittelpunkt im einfachen Verhältnis wachsenden Masse an dem Widerstande gegen die Verwindung beteiligt sind, also anzunehmen, dass für einen Dübel, der auf dem Fahrstrahl r vom Mittelpunkt den Abstand s hat, die zum Fahrstrahl senkrechte Scheerbeanspruchung sich findet aus der Beziehung

$$\tau_s = \frac{s}{r} \cdot \tau_r$$

Denken wir uns schliesslich die ganze Querschnittsfläche aus einzelnen Dübeln gebildet, so bleiben, wenn auch nicht die absoluten Grössen der betreffenden Scheerkräfte, welche jetzt zu Schubspannungen werden, so doch ihre Beziehungen zu einander bestehen. Es ist also, wenn τ_a die zur kleinen Halbaxe der Ellipse senkrechte Schubspannung in dem Endpunkte derselben ist, die zum Fahrstrahl r senkrechte Schubspannung in einem Punkte, der auf r vom Mittelpunkt der Ellipse den Abstand s hat.

$$\tau_s = \frac{s}{r} \cdot \tau_r = \frac{s}{r} \cdot \frac{a}{r} \cdot \tau_a = \frac{s \cdot a}{r^2} \cdot \tau_a$$

τ_r ist nicht die wirkliche Schubspannung in dem Endpunkte von r , weil diese unbedingt die Richtung der Tangente an die Ellipse in diesem Punkte haben muss, sondern nur eine Componente derselben, wobei der anderen Componente die Richtung des Fahrstrahles gegeben werden mag, und zwar soll diese Componente gerade wie τ_s proportional mit dem Abstände vom Mittelpunkte wachsen, so dass die wirklichen Schubspannungen aller Punkte eines Fahrstrahls unter sich und mit der Tangente an die Ellipse in dessen Endpunkte parallel und dem Abstände vom Mittelpunkte proportional sind.

In einem beliebigen Punkte des Querschnittes ist die zum Fahrstrahl senkrecht wirkende Elementar-Schubkraft

$$\tau_s \cdot df$$

wenn df ein Element der Querschnittsfläche ist, und das Moment dieser Elementarkraft um den Mittelpunk ist

$$\tau_s \cdot df \cdot s$$

Diese Grösse stellt aber auch das Moment der wirklichen Schubspannung dar, weil die andere Componente die Rich-

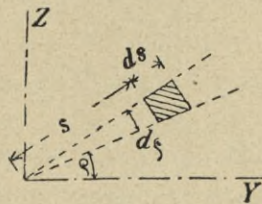


Fig. 36

tung des Fahrstrahls, also kein Moment um den Mittelpunkt hat. Es muss also, wenn über die ganze Figur integriert wird,

$$\int \tau_s \cdot df \cdot s = M$$

sein.

Nun ist

$$\tau_s = \frac{as}{r^2} \tau_a$$

und (vergl. Fig. 36)

$$df = ds \cdot (s \cdot d\rho)$$

wenn ds das Differential von s , und $d\rho$ der Differentialzuwachs des Winkels ρ bedeutet, den der Fahrstrahl s mit der positiven Y -Axe unseres Coordinaten-Systems bildet.

Demnach ist

$$M = \int \frac{a \cdot \tau_a}{r^2} s^3 \cdot ds \cdot d\rho = a\tau_a \int_{\varphi=0}^{\varphi=360^\circ} d\rho \cdot \int_{s=0}^{s=r} \frac{s^3}{r^2} ds$$

$$\int_{s=0}^{s=r} \frac{s^3}{r^2} ds = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{r^4}{4} = \frac{r^2}{4}$$

$$M = a\tau_a \int_{\varphi=0}^{\varphi=360^\circ} \frac{r^2}{4} \cdot d\rho$$

Die Grösse $\frac{r^2}{4} d\rho$ kann man auflösen in

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{r}{2} \cdot r d\rho \right)$$

und stellt das Produkt $\left(\frac{r}{2} \cdot r d\rho \right)$ den Flächeninhalt eines zwischen zwei aufeinander folgenden Fahrstrahlen eingeschlossenen Elementar-Ellipsensectors dar (vergl. Fig. 37), also stellt

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=360} \frac{r^2}{4} d\rho$$

den halben Flächeninhalt der Ellipse dar. Es ist also

$$M = a \cdot \tau_a \cdot \frac{1}{2} F$$

und daraus ergibt sich die im Endpunkte der kleinen Axe zu derselben senkrechte Schubspannung zu

$$\tau_a = \frac{2M}{a \cdot F}$$

und zwar ist τ_a auch die wirkliche Schubspannung, da seine Richtung ja mit derjenigen der Tangente an die Ellipse übereinstimmt.

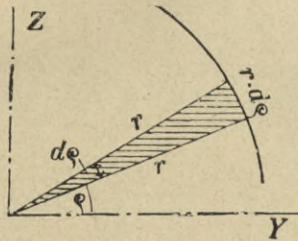


Fig. 37

Für die Ellipse ist

$$F = \pi \cdot a \cdot b$$

also ist

$$\tau_a = \frac{2M}{\pi a^2 b}$$

und für einen beliebigen Punkt, welcher auf einem Fahrstrahle im Abstände s vom Mittelpunkt liegt, ist die zum Fahrstrahle senkrechte Komponente der Schubspannung

$$\tau_s = \frac{a s}{r^2} \cdot \frac{2M}{aF} = \frac{s}{r^2} \cdot \frac{2M}{\pi \cdot a b}$$

Ist nun der Winkel (vergl. Fig. 38), welchen die zum Fahrstrahl senkrechte Richtung mit der Richtung der Tangente in dem Endpunkte desselben bildet, gleich θ , der Winkel, den der betreffende Fahrstrahl mit der positiven Y-Axe bildet, gleich ρ , und der Winkel, den die zugehörige

Tangente mit der positiven Y -Axe bildet, gleich $(-\varphi)$, so bildet die Richtung von τ_r , also auch von τ_s mit der positiven Y -Axe den Winkel $-(90 - \rho)$, und der Winkel θ ergibt sich zu

$$\theta = (-\varphi) + (90 - \rho) = 90 - (\varphi + \rho)$$

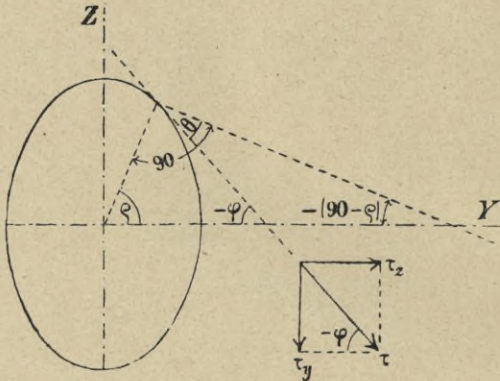


Fig. 38

Wir finden nun die wirkliche Schubspannung τ in unserem Punkte, indem wir τ_s zerlegen nach dem Fahrstrahle und nach der Tangente, wir erhalten

$$\tau = \tau_s \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$

Nun ist

$$\cos \theta = \cos [90 - (\varphi + \rho)] = \sin (\varphi + \rho)$$

$$\cos \theta = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \rho}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho}}$$

so dass unsere wirkliche Schubspannung wird zu

$$\tau = \tau_s \cdot \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho}}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \rho}$$

Die Richtung dieser wirklichen Schubspannung τ bildet mit der positiven Y -Axe den Winkel $(-\varphi)$, es sind demnach ihre Componenten nach den beiden Coordinaten-Axen, wobei wir diejenige Componente, welche zur Y -Axe senkrecht steht, τ_y , diejenige, welche zur Z -Axe senkrecht steht, τ_z nennen wollen,

$$\tau_z = \tau \cdot \cos(-\varphi) = +\tau \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$\tau_y = \tau \cdot \sin(-\varphi) = -\tau \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

Führen wir den Wert für τ ein, so haben wir

$$\tau_z = \tau_s \cdot \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho}}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \rho}; \quad -\tau_y = \tau_s \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho}}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \rho}$$

Beachten wir, dass die Gleichung der Ellipse, wenn deren Umfangscoordinaten y_1 und $z_1 \sin \rho$,

$$\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{z_1^2}{b^2} = 1$$

mit

$$y_1 = r \cdot \cos \rho$$

$$z_1 = r \cdot \sin \rho$$

übergeht in

$$r^2 = \frac{a^2 b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \rho)}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \rho}$$

und dass für einen beliebigen Punkt, der auf dem Fahrstrahl r vom Mittelpunkt den Abstand s hat,

$$s = y \cdot \frac{1}{\cos \rho} = y \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho}$$

wird, wenn y und z die Coordinaten dieses beliebigen Punktes sind, so lässt sich die Spannung τ_s ausdrücken als

$$\tau_s = y \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \rho} \cdot \frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \rho}{a^2 b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \rho)} \cdot \frac{2M}{\pi \cdot a \cdot b}$$

Damit werden die Gleichungen der Componenten nach den Coordinatenaxen zu

$$\begin{aligned} \tau_z &= y \cdot \frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \rho}{\pi \cdot a^3 b^3} \cdot 2M \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \rho} \\ -\tau_y &= y \cdot \frac{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \rho}{\pi \cdot a^3 b^3} \cdot 2M \cdot \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \rho} \end{aligned}$$

Bei der Ellipse entspricht einem positivem dy_1 ein negatives $d\varepsilon_1$, sodass

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{-d\varepsilon_1}{dy_1} = -\frac{d\varepsilon_1}{dy_1}$$

Für $\frac{d\varepsilon_1}{dy_1}$ erhält man einen einfachen Ausdruck, wenn man das Differential bildet von

$$f(y_1, \varepsilon_1) = \frac{y_1^2}{a^2} + \frac{\varepsilon_1^2}{b^2} = 1$$

Es ist

$$df(y_1, \varepsilon_1) = 0 = \frac{y_1}{a^2} dy_1 + \frac{\varepsilon_1}{b^2} d\varepsilon_1$$

und daraus

$$-\frac{d\varepsilon_1}{dy_1} = +\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y_1}{\varepsilon_1} = \operatorname{tg} \varphi$$

Nun ist

$$\frac{y_1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\left(\frac{\varepsilon_1}{y_1}\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \rho}$$

also

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \rho}$$

Mit diesem Werte von $\operatorname{tg} \varphi$ werden nach entsprechender Umformung unsere Spannungscomponenten zu

$$\tau_z = y \cdot \operatorname{tg} \rho \cdot \frac{2M}{\pi \cdot ab^3} = \varepsilon \cdot \frac{2M}{\pi \cdot a \cdot b^3}$$

$$-\tau_y = y \cdot \frac{2M}{\pi \cdot a^3 \cdot b}$$

Die wirkliche Schubspannung in unserem Punkte ist jetzt

$$\tau = \sqrt{\tau_z^2 + (-\tau_y)^2} = \frac{2M}{\pi \cdot ab} \sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{\varepsilon^2}{b^4}}$$

und zwar bildet deren Richtung mit der positiven Y -Axe einen Winkel, welcher bestimmt ist durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau_y}{\tau_z} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{\varepsilon}$$

b) Der rechteckige Querschnitt.

Wir legen den Ursprung eines Coordinatensystems in den Mittelpunkt des Querschnittes, die X -Axe in die Stabaxe, die Y -Axe parallel zur kleinen Seite $2a$ und demnach die Z -Axe parallel zur grossen Seite $2b$.

Denken wir den Stab in dem Querschnitte auseinander-geschnitten und den Zusammenhang zwischen seinen beiden Teilen durch einen Dübel im Mittelpunkt des Querschnittes und je einen Dübel in der Mitte jeder der vier Rechteckseiten wieder hergestellt, so können wir aus denselben Gründen, welche wir beim elliptischen Querschnitte angeführt haben, den Mitteldübel als spannungslos annehmen, während die Scheerkraft τ_a in den Dübeln in der Mitte der Seiten $2b$, deren Abstand also vom Mittelpunkt a ist, und die Scheerkraft τ_b in den Dübeln in der Mitte der Seiten $2a$, deren Abstand vom Mittelpunkt b ist (vergl. Fig. 39) zu einander in der Beziehung stehen

$$\tau_b = \frac{a}{b} \tau_a$$

wobei natürlich τ_a und τ_b zum Hebelsarm senkrecht stehen, also den betreffenden Rechteck-Seiten parallel sind.

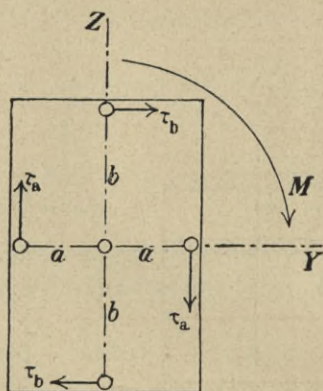


Fig. 39

Denken wir uns zweitens, es wären die beiden Seiten $2a$ mit einer Reihe von Dübeln besetzt, sodass dieselben einen zusammenhängenden Streifen bilden würden (vergl. Fig. 40), dessen Breite $d\zeta$ und dessen Höhe $2a$ wäre, so würden diese Streifen je als Ganzes der Verwindung ihre Scheerfestigkeit entgegensetzen, und findet man die betreffende Scheerkraft P , welche die Richtung der Seite $2a$ hat, aus folgender Betrachtung.

Wenn unser Elementar-Rechteck, dessen Breite $d\zeta$ und dessen Höhe $2a$ ist, einer Scheerkraft P ausgesetzt ist, so ist nach D. Lehrsatz I die Schubbeanspruchung in dessen zu P senkrechten Mittellinie

$$\tau_o = \frac{1}{d\zeta} \cdot P \cdot \frac{St_o^a}{J}$$

worin

$$St_o^a = dz \frac{a^2}{2}; \quad J = 2 \frac{dz a^3}{3}; \quad \frac{St_o^a}{J} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a}$$

also ist

$$\tau_o = \frac{1}{dz} \cdot P \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a}$$

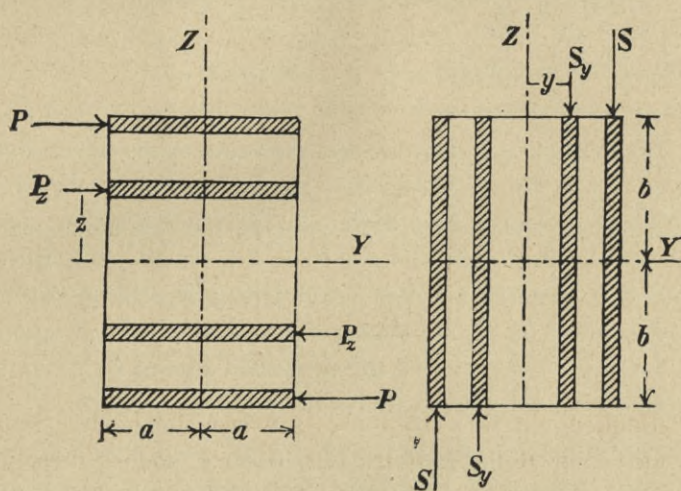


Fig. 40

Nun ist aber dieses τ_o identisch mit unserem obigen τ_b , also haben wir

$$\tau_b = \frac{1}{dz} \cdot P \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a}$$

und daraus

$$P = \frac{4}{3} \cdot a \cdot \tau_b \cdot dz$$

und wenn wir τ_b auf τ_a zurückführen

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{a^2}{b} \cdot \tau_a \cdot dz$$

Ganz analog erhalten wir die zur Seite $2b$ parallele Scheerkraft S in einem Streifen längs den Seiten $2b$ aus

$$\tau_a = \tau_o = \frac{1}{dy} \cdot S \cdot \frac{St_o^b}{J}$$

$$St_o^b = dy \frac{b^2}{2}; \quad J = 2 \frac{dy b^3}{3}; \quad \frac{St_o^b}{J} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{b}$$

$$S = \frac{4}{3} b \cdot \tau_a \cdot dy$$

Denken wir uns drittens den Zusammenhang hergestellt ausser durch die zwei Streifen längs den Seiten $2a$ noch durch zwei weitere den Seiten $2a$ parallele Streifen ebenfalls von der Breite $d\varepsilon$ und der Höhe $2a$, welche vom Mittelpunkt den Abstand ε haben, und tritt gleichzeitig mit der Scheerkraft P in den Aussenstreifen in diesen Streifen eine Scheerkraft P_z auf, so ist für dieselben in den Punkten der Z -Axe des Coordinatensystems die Schubspannung

$$\tau_b' = \frac{1}{d\varepsilon} \cdot P_z \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a}$$

Nun sind τ_b und τ_b' Schubspannungen, welche zu einem und demselben Hebelsarm bezw. Fahrstrahl senkrecht stehen, und können wir aus denselben Gründen wie beim elliptischen Querschnitt annehmen, dass solche Spannungen sich zu einander verhalten, wie ihre Abstände vom Mittelpunkt. Es is also

$$\tau_b' = \frac{\varepsilon}{b} \tau_b$$

und ergibt sich daraus auch

$$P_z = \frac{\varepsilon}{b} \cdot P$$

Analog ist für einen zur Seite $2b$ parallelen Streifen im Abstände y die Scheerkraft

$$S_y = \frac{y}{a} S$$

Denken wir uns schliesslich die ganze Querschnittsfläche aus einem solchen doppelten Streifensystem gebildet, so ist ein Punkt, dessen Coordinaten y und z sind, als Punkt des zur Seite $2a$ im Abstände z vom Mittelpunkte parallelen Streifens ausgesetzt einer zur Z -Axe senkrechten Schubspannung

$$\tau_z = \frac{1}{dz} \cdot P_z \cdot \frac{St_y^a}{J}$$

$$St_y^a = dz \cdot \frac{a^2 - y^2}{2}; \quad J = 2 \cdot \frac{dz \cdot a^3}{3}; \quad \frac{St_y^a}{J} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 - y^2}{a^3}$$

$$\tau_z = \frac{1}{dz} P_z \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{a^2 - y^2}{a^3}$$

und gleichzeitig als Punkt des zur Seite $2b$ im Abstände y vom Mittelpunkte parallelen Streifens ausgesetzt einer zur Y -Axe senkrechten Schubspannung

$$\tau_y = \frac{1}{dy} S_y \cdot \frac{St_z^b}{J} = \frac{1}{dy} \cdot S_y \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{b^2 - z^2}{b^3}$$

In diesen Ausdrücken für die beiden zu den Coordinatenachsen parallelen Spannungskomponenten sind unbekannt P_z und S_y , beide lassen sich aber auf die eine Unbekannte τ_a zurückführen, und haben wir dann

$$\tau_z = \frac{a^2 - y^2}{ab^2} \cdot z \cdot \tau_a$$

$$\left(\tau_y = \frac{b^2 - z^2}{ab^2} \cdot y \cdot \tau_a \right)$$

bezw. da $\frac{b^2 - z^2}{ab^2} y \cdot \tau_a$ die Grösse eines τ_y im Sinne der negativen Z -Axe ist, so ist

$$-\tau_y = \frac{b^2 - z^2}{ab^2} \cdot y \cdot \tau_a$$

Nun müssen die diesen Schubspannungen entsprechenden Elementar-Flächenkräfte in ihrer Gesamtheit ein Moment um den Momentenpunkt haben, das mit dem Torsionsmoment M im Gleichgewicht ist, es muss also sein

$$\int (\tau_z \cdot df \cdot z + (-\tau_y) df \cdot y) = M$$

$$\int \left(\frac{a^2 - y^2}{ab^2} \tau_a \cdot z^2 + \frac{b^2 - z^2}{ab^2} \tau_a \cdot y^2 \right) df = M$$

$$\frac{\tau_a}{ab^2} \left[\int_{-b}^{+b} a^2 \cdot z^2 \cdot df - \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} y^2 \cdot z^2 \cdot df + \right.$$

$$\left. + \int_{-a}^{+a} b^2 \cdot y^2 \cdot df - \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} z^2 \cdot y^2 \cdot df \right] = M$$

$$\frac{\tau_a}{ab^2} \left[a^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{2ab^3}{3} \right) - 2 \int_{-a}^{+a} \int_{-b}^{+b} y^2 \cdot z^2 \cdot df + \right.$$

$$\left. + b^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{2ba^3}{3} \right) \right] = M$$

$$\frac{\tau_a}{ab^2} \left[\frac{8}{3} a^3 b^3 - 2 \int_{-a}^{+a} y^2 \cdot dy \cdot \int_{-b}^{+b} z^2 \cdot dz \right] = M$$

$$\frac{\tau_a}{ab^2} \left[\frac{8}{3} a^3 b^3 - 2 \cdot \left(2 \frac{a^3}{3} \cdot 2 \frac{b^3}{3} \right) \right] = M$$

$$\frac{\tau_a}{ab^2} \cdot \frac{16}{9} a^3 b^3 = M$$

und hieraus

$$\tau_a = \frac{9M}{16a^2b}$$

Führen wir diesen Wert für τ_a in die Formeln für τ_z und τ_y ein, so finden wir

$$\tau_z = \frac{a^2 - y^2}{ab^2} \varepsilon \cdot \frac{9M}{16a^2b}; \quad - \tau_y = \frac{b^2 - \varepsilon^2}{ab^2} y \cdot \frac{9M}{16a^2b}$$

$$\tau_z = \frac{9}{16} M \frac{a^2(1 - \frac{y^2}{a^2})}{a^3 b^3} \varepsilon; \quad - \tau_y = \frac{9}{16} M \frac{b^2(1 - \frac{\varepsilon^2}{b^2})}{a^3 b^3} y$$

$$\tau_z = \frac{9M}{16ab^3} \varepsilon (1 - \frac{y^2}{a^2}); \quad - \tau_y = \frac{9M}{16a^3b} \cdot y(1 - \frac{\varepsilon^2}{b^2})$$

Die wirkliche Schubspannung in unserem Punkte, dessen Coordinaten y und ε sind, ist

$$\tau = \sqrt{\tau_z^2 + (-\tau_y)^2} = \frac{9M}{16ab} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{b^4} (1 - \frac{y^2}{a^2})^2 + \frac{y^2}{a^4} (1 - \frac{\varepsilon^2}{b^2})^2}$$

und zwar bildet deren Richtung mit der positiven Y -Axe einen Winkel φ , der bestimmt ist durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\tau_y}{\tau_z} = - \frac{y(b^2 - \varepsilon^2)}{\varepsilon(a^2 - y^2)}$$

Unsere Resultate dürfen wir aber die Bedeutung erwiesener Thatsachen erst beilegen, wenn wir gefunden haben, dass sie den allgemein gültigen Gleichgewichtsbedingungen genügen. Diese sind:

1. Die inneren Kräfte in dem Querschnitte müssen mit den äusseren Kräften und Momenten im Gleichgewicht sein.

Eine äussere Kraft haben wir in unserem Falle nicht, also müssen die Resultanten sämtlicher Elementar-Flächenkräfte nach den Richtungen der Coordinatenachsen gleich Null sein, d. h. es muss sein

$$\int \tau_z \cdot df = 0 = \int \tau_y \cdot df$$

Dies trifft bei beiden untersuchten Querschnitten zu, da jedem positiven $\tau_z \cdot df$ bzw. $\tau_y \cdot df$ ein gleich grosses negatives entspricht.

Mit dem äusseren Momente M aber sind die Momente der Elementar-Flächenkräfte per se im Gleichgewicht, da wir sie so ermittelt haben.

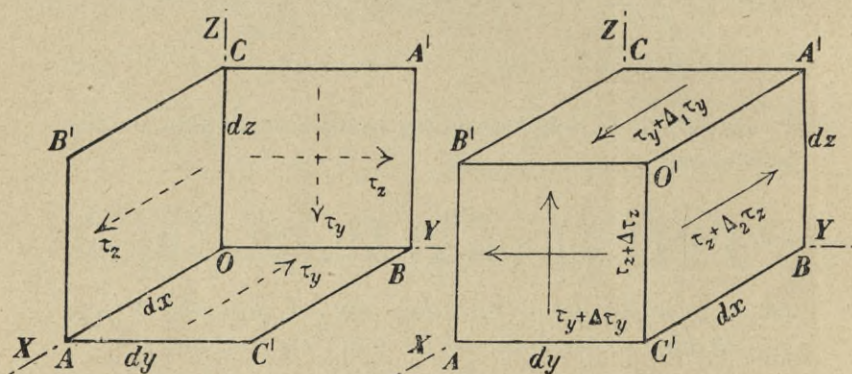


Fig. 41

2. Jedes in dem Querschnitte liegende körperliche Element des Stabes muss für sich unter der Einwirkung der inneren Kräfte im Gleichgewicht sein.

Denken wir uns ein kleines Parallelepipedium mit den unseren Coordinatenachsen parallelen Kanten von der Länge dx , dy und dz , so wirken auf dessen einzelne Flächen die in Fig. 41 eingezeichneten Spannungen, und zwar bedeutet

$\Delta \tau_z$ die Aenderung von τ_z , wenn y und z constant bleiben, während x sich ändert um dx

$\Delta(-\tau_y)$ die Aenderung von $(-\tau_y)$, wenn y und z constant bleiben, während x sich ändert um dx

$\Delta_1(-\tau_y)$ die Aenderung von $(-\tau_y)$, wenn x und y constant bleiben, während z sich ändert um dz

$\Delta_2 \tau_z$ die Aenderung von τ_z , wenn x und z constant bleiben, während y sich ändert um dy

Es ist also, da

$$d\tau_z = \frac{\partial \tau_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} dz$$

$$\Delta \tau_z = \frac{\partial \tau_z}{\partial x} dx + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \cdot 0$$

$$\Delta_2 \tau_z = \frac{\partial \tau_z}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} dy + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \cdot 0$$

und analog

$$\Delta(-\tau_y) = \frac{\partial(-\tau_y)}{\partial x} \cdot dx$$

$$\Delta_1(-\tau_y) = \frac{\partial(-\tau_y)}{\partial z} \cdot dz$$

Unser Parallelepipedium ist nur dann im Gleichgewicht, wenn die Resultanten der auf dasselbe wirkenden Flächenkräfte nach den drei Coordinatenachsen jeweils gleich Null sind.

Nach der X -Axe muss sich demnach ergeben

$$\tau_z \cdot dx \cdot dz - (\tau_z + \Delta_2 \tau_z) dx \cdot dz - (-\tau_y) dx \cdot dy + \\ + \left((-\tau_y) + \Delta_1(-\tau_y) \right) dx \cdot dy = 0$$

d. h.

$$\Delta_2 \tau_z \cdot dx \cdot dz = \Delta_1(-\tau_y) \cdot dx \cdot dy$$

und mit den Werten für die Δ

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} \cdot dy \cdot dx \cdot dz = \frac{\partial(-\tau_y)}{\partial z} \cdot dz \cdot dx \cdot dy$$

nach der Y -Axe

$$\tau_z \cdot dz \cdot dy - (\tau_z + \Delta \tau_z) \cdot dz \cdot dy = 0$$

d. h.

$$-\Delta \tau_z \cdot dz \cdot dy = 0 = \frac{\partial \tau_z}{\partial x} dx \cdot dz \cdot dy$$

und nach der Z -Axe

$$-(-\tau_y) dz \cdot dy + ((-\tau_y) + \Delta(-\tau_y)) dz \cdot dy = 0$$

d. h.

$$\Delta(-\tau_y) dz \cdot dy = 0 = \frac{\partial(-\tau_y)}{\partial x} dx \cdot dz \cdot dy$$

Es sind also unsere Annahmen der Wirklichkeit entsprechend, wenn die gefundenen Werte für τ_z und $(-\tau_y)$ noch folgenden drei Gleichungen genügen

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = \frac{\partial(-\tau_y)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(-\tau_y)}{\partial x} = 0$$

Für unsere beiden Querschnitte sind die zweite und dritte Gleichung von vornherein erfüllt, da die Formeln für τ_z und $(-\tau_y)$ von x unabhängig sind; beim elliptischen Querschnitte ist auch die erste von vornherein erfüllt, denn es ist für denselben τ_z von y und $(-\tau_y)$ von z unabhängig, also

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = 0 = \frac{\partial(-\tau_y)}{\partial z}$$

aber auch beim rechteckigen Querschnitte ist sie erfüllt, denn es ist für denselben

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial y} = -\frac{9M}{16a^3b^3} 2 \cdot y \cdot z = \frac{\partial(-\tau_y)}{\partial z}$$

Wir sind demnach jetzt in der Lage, beim elliptischen und beim rechteckigen Querschnitte, also auch in den speziellen Fällen des kreisförmigen und quadratischen Querschnittes, für jeden Punkt die resultierende Schubspannung τ in der Querschnittsebene finden zu können, und gilt für die weitere Untersuchung das in D. Lehrsätze VI bis IX incl. Gesagte auch hier.

Formt man die für den elliptischen Querschnitt gefundene Gleichung

$$\tau = \frac{2M}{\pi ab} \sqrt{\frac{y^2}{a^4} + \frac{\varepsilon^2}{b^4}}$$

um zu

$$\tau = \frac{2M}{\pi a^2 b} \sqrt{\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{b^2}}$$

so sieht man, dass τ , wie schon unsere Ableitung es verlangt, in den Punkten des Umfanges am grössten sein muss, da es mit y und ε wächst. Es sind für den Grösstwert von τ die Coordinaten y und ε diejenigen der Ellipse und genügen als solche der Gleichung

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{\varepsilon^2}{b^2} = 1$$

und da wir $a \leq b$ angenommen haben, so ist $\frac{a^2}{b^2}$ ein echter Bruch, also unser Radikand

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{b^2} \leq 1$$

Der Maximalwert desselben 1 wird unabhängig von dem Verhältniss $a : b$ stets erreicht für

$$y = a; \quad \varepsilon = 0$$

Die resultierende Schubspannung τ erreicht also beim elliptischen Querschnitte ihren Maximalwert in den End-

punkten der kleinen Axe, und zwar ist die Grösse derselben in diesen Punkten

$$\tau = \frac{2M}{\pi a^2 b}$$

Formt man analog die für den rechteckigen Querschnitt gefundene Gleichung

$$\tau = \frac{9M}{16ab} \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{b^4} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{a^4} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b^2}\right)^2}$$

um zu

$$\tau = \frac{9M}{16a^2b} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{b^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{a^2} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b^2}\right)^2}$$

so ist, weil $a \leq b$ ist, $\frac{a^2}{b^2} \frac{\varepsilon^2}{b^2}$ ein echter Bruch, also ≤ 1 , ebenso ist $\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{b^2}\right)^2 \leq 1$, sodass der Grösstwert des Radikanden höchstens gleich sein kann

$$1 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 + \frac{y^2}{a^2} \cdot 1 = 1 - \frac{y^2}{a^2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$$

hierin ist wiederum $\frac{y^2}{a^2} \leq 1$, sodass der Radikand höchstens den Wert 1 erreichen kann. Dies ist unabhängig vom Verhältnisse $a : b$ der Fall, wenn

$$\varepsilon = 0 \text{ und } y = a \text{ ist.}$$

Die grösste Schubspannung τ ist demnach diejenige in den Mittelpunkten der grossen Seiten $2b$ und zwar ist hier

$$\tau = \frac{9M}{16a^2b}$$

Unterwerfen wir das Torsionsmoment M einer solchen Beschränkung, dass beim elliptischen Querschnitte

$$\tau = \frac{2M}{\pi a^2 b} < t$$

und

$$(\sigma) = \pm \frac{5}{4} \cdot \frac{2 \cdot M}{\pi a^2 b} < k_z \text{ und } < k_a$$

bleibt,

beim rechteckigen Querschnitt

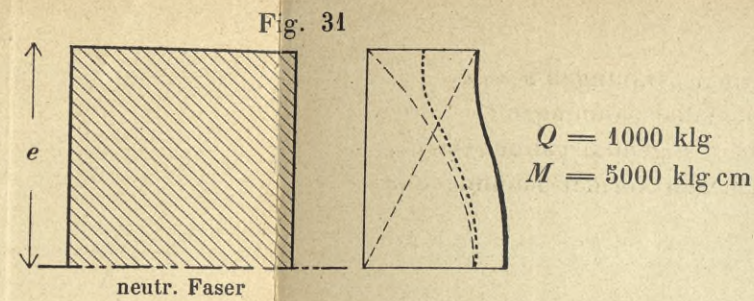
$$\tau = \frac{9M}{16a^2b} < t$$

und

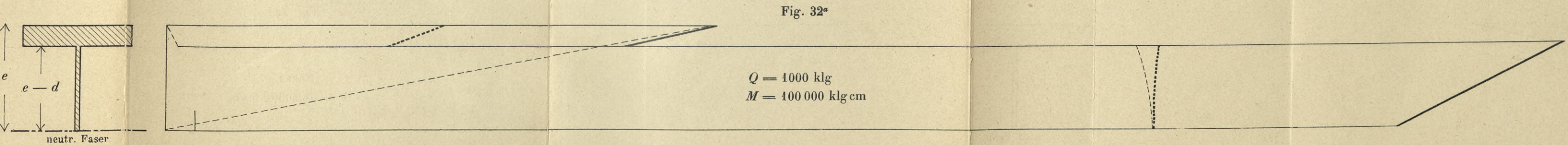
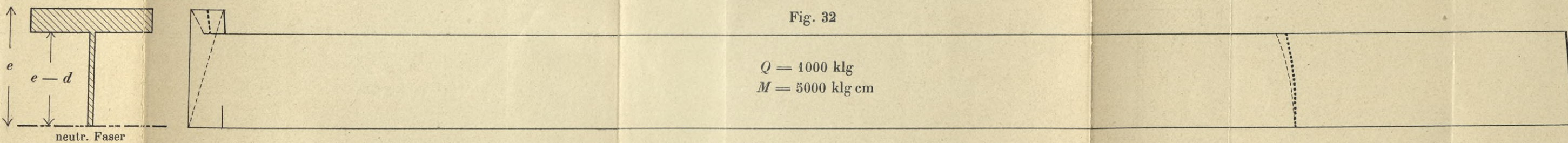
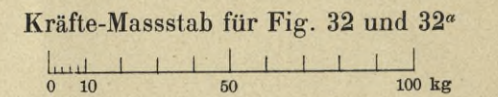
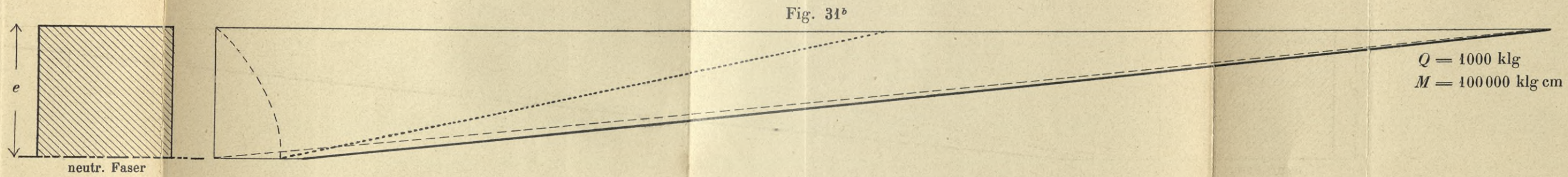
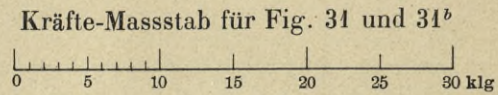
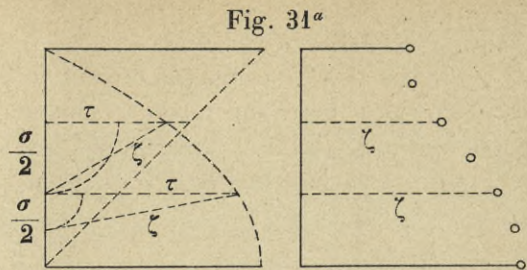
$$(\sigma) = \pm \frac{5}{4} \cdot \frac{9M}{16a^2b} < k_z \text{ und } < k_a$$

bleibt, so können wir sicher sein, dass keine unzulässige Deformation stattfindet.





- bedeutet die Curve der Normalspannungen $\sigma = \sigma_x$
- - - - bedeutet die Curve der Tangentialspannungen τ
- bedeutet die Curve der max. Tangentialspannungen ζ_{\max}
- — — — bedeutet die Curve der virtuellen Normalspannungen (σ)



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



7537

L. inv.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299474