



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299305



L. J. G. 26/2. 16

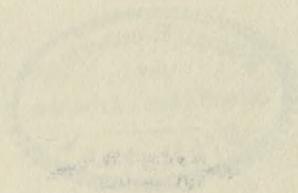
Beitrag zur Berechnung rechteckiger Silozellen
in Eisenbeton.

25/2



G. 19 a
112

Heftung mit Pergamentstreifen
in Leder.



Beitrag zur
Berechnung rechteckiger Silozellen
in Eisenbeton.

Von der
Grossh. Technischen Hochschule zu Darmstadt
zur
Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs
genehmigte
Dissertation.

Vorgelegt von
Dipl.-Ing. Alfred Ritter
aus Zürich.

Referent: Professor H. Kayser.
Korreferent: Geh. Baurat Professor A. Koch.

Tag der Einlieferung: 18. Dezember 1913.
Tag der mündlichen Prüfung: 30. April 1914.



Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

G. 192
112



II 6861

Diese Arbeit erscheint gleichzeitig als selbständiges
Buch im Verlag von Konrad Wittwer in Stuttgart.

Akc. Nr.

2813 | 51

Meinen Eltern

in Dankbarkeit

gewidmet.

Lebenslauf.

Alfred Ritter wurde am 23. Februar 1888 in Zürich geboren, besuchte daselbst Vorschule, Gymnasium und Oberrealschule und erwarb sich im Jahre 1906 das Reifezeugnis. Im Herbst 1906 begann er an der Abteilung für Bauingenieurwesen der Großh. Technischen Hochschule Karlsruhe das Hochschulstudium, woselbst er im Frühjahr 1911 das Diplomexamen bestand. Hierauf erhielt er eine Anstellung bei der Bauunternehmung Wayß & Freytag A.-G., Neustadt a. d. H. Nach zweijähriger praktischer Tätigkeit wurde er für das Sommersemester 1913 Hilfsassistent für Festigkeitslehre bei Herrn Geh. Hofrat E. A. Brauer, Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe. Im darauffolgenden Wintersemester war er im Ingenieurbureau Dr.-Ing. A. Kleinlogel, Darmstadt, beschäftigt.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Erster Abschnitt:	
§ 1. Einleitung	1
§ 2. Grundlegende Voraussetzungen	2
§ 3. Übersicht und allgemeine Bemerkungen	2
Zweiter Abschnitt:	
§ 4. Voruntersuchungen	4
Dritter Abschnitt: Das einreihige Zellsystem	10
§ 5. Erste Lösungsmethode	10
§ 6. Beispiel	12
§ 7. Zweite Lösungsmethode	13
§ 8. Beispiel	15
§ 9. Die unendlich lange Zellenreihe mit gleich großen Zellen	16
§ 10. Die Mittelzelle der unendlich langen Reihe	17
§ 11. Die Endzelle der unendlich langen Reihe	26
§ 12. Zusammenfassung	33
§ 13. Beispiel	37
Vierter Abschnitt: Das zweireihige Zellsystem	45
§ 14. Die Mittelzelle des unendlich langen Systems	45
Fünfter Abschnitt: Das unendlich große Zellsystem	54
§ 15. Die Mittelzelle	54
§ 16. Die Randzelle, deren längere Seite am Rand liegt	66
§ 17. Die Randzelle, deren kürzere Seite am Rand liegt	71
§ 18. Die Eckzelle	71
§ 19. Graphische Darstellung der Momente	77
§ 20. Zusammenfassung und Vergleich der ein-, zwei- und vielreihigen Systeme untereinander	81
Sechster Abschnitt: Berechnung der Normalkräfte	84
§ 21. Voruntersuchungen	84
§ 22. Das einreihige Zellsystem	86
§ 23. Das unendlich große Zellsystem	90
§ 24. Einfluß der Deformation infolge der Normalkräfte auf die Berechnung	93
Siebenter Abschnitt: Veränderliches Trägheitsmoment	98
§ 25. Trägheitsmoment konstant über eine Seite	98
§ 26. Berücksichtigung der Eckverstärkungen	101
Achter Abschnitt: Einfluß der Temperatur	103
§ 27. Gleichmäßige Erwärmung einer Außenwand	103
§ 28. Ungleichmäßige Erwärmung einer Außenwand	107
Neunter Abschnitt:	
§ 29. Beispiel	110
§ 30. Hauptergebnisse	121

Bezeichnungen.

a = lange Seite einer Zelle.

b = kurze Seite einer Zelle.

$n(k) = \frac{b}{a}$ = Seitenverhältnis.

J_a, J_b = Trägheitsmomente der Seiten a, b .

E = Elastizitätsmodul.

p = gleichmäßig verteilter Innendruck pro Längeneinheit.

M_0 = Momente im geschlossenen Rechteckrahmen (Einzelzelle) bei gleichmäßig verteiltem Innendruck.

M_a, M_b = Momente in den Mitten der Seiten a, b .

\hat{M}_a, \hat{M}_b = Momente an den Enden der Seiten a, b .

$M_a', M_a'', M_a^{\times}, M_a^{\times\times}$ = Unterscheidung der Momente M_a bei verschiedenen Belastungen (Grundbelastungen).

m = Gelenkmoment, d. h. Moment an Stelle eines in einem Knotenpunkt gedachten Gelenkes.

m_{12} = von einem Gelenkmoment erzeugtes Nebenmoment und zwar am Ende 1 der Seite 1—2.

N_a, N_b = Normalkräfte in den Seiten a, b .

α = elastische Drehung eines Knotenpunktes im Hauptsystem infolge des Materialdruckes.

β, γ = elastische Drehungen auf beiden Seiten eines Knotenpunktes im Hauptsystem infolge der Wirkung sämtlicher Gelenkmomente.

i = Fixpunktabstand.

ϵ = Elastizitätsmaß.

Literaturverzeichnis.

E. Mörsch: Der Eisenbetonbau, Stuttgart 1912, Konrad Wittwer.

W. Ritter: Anwendungen der graphischen Statik, 3. Band, Zürich 1900, A. Raustein.

A. Straßner: Beitrag zur Theorie kontinuierlicher Eisenbetonkonstruktionen, Berlin 1912, W. Ernst & Sohn.

Handbuch für Eisenbetonbau, Band IV, Teil 2, Berlin 1909, W. Ernst & Sohn.

K. Arnstein: Zur Dimensionierung einreihiger Silozellen. „Armierter Beton“ 1913, Heft 3.

W. Frank: Kontinuierlicher Träger mit fester Stützenlagerung. „Beton und Eisen“ 1912, Heft 12.

H. Marcus: Statische Untersuchung von Silowänden. „Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen“ 1911, Heft 1 und 4.

E. Reich: Zementsilo in Eisenbeton. „Beton und Eisen“ 1908, Heft 7.

A. Ritter: Zur Berechnung von Silozellen. „Armierter Beton“ 1913, Heft 1.

M. Ritter: Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen. „Schweizerische Bauzeitung“ 1911, Heft 4.

A. Straßner: Berechnung kontinuierlicher Eisenbetonträger mit Rücksicht auf die Wirkung der Vouten. „Beton und Eisen“ 1911, Heft 20.

Erster Abschnitt.

§ 1. Einleitung.

Der Kampf zwischen Eisen und Eisenbeton im vergangenen Jahrzehnt führte dazu, gewisse Probleme der Statik, die früher mehr wissenschaftliches Interesse hatten, in der Praxis nützlich zu verwerten.

Um nicht unnötig starke Dimensionen zu erhalten, sucht man die Berechnung der in den Konstruktionsteilen wirkenden Kräfte möglichst genau durchzuführen, indem man verschiedene Umstände, welche auf die Ergebnisse von geringerem Einfluß sind, mit in die Berechnung einführt.

Oft wird dabei zu weit gegangen, indem Berechnungsweisen entwickelt werden, die für den praktischen Gebrauch zu umständlich sind.

Umgekehrt werden aber auch oft Vernachlässigungen gemacht, die über die Kräfteverteilung ein ganz rohes, manchmal direkt unrichtiges Bild ergeben. Es kommt dies z. B. bei der Berechnung vielfach statisch unbestimmter Konstruktionen vor, bei welchen das System so weit vereinfacht und zurechtgestutzt wird, bis ein dem Berechnenden bekannter Fall entsteht.

Die vorliegende Abhandlung, welche sich mit der Berechnung von in Gruppen zusammenhängenden Silozellen beschäftigt, versucht in der Aufstellung von Berechnungsmethoden und gebrauchsfertigen Gleichungen einen Mittelweg einzuschlagen, der für die Praxis nicht zu umständlich ist, aber doch möglichst genaue Ergebnisse liefert.

Es werden dabei nur sog. Zellensilos (für Getreide usw.) ins Auge gefaßt, d. h. solche Behälter, welche durch Zwischenwände in hochgestreckte, röhrenartige Räume geteilt sind, im Gegensatz zu den großräumigen Silos (für Erz, Kohle usw.). Die Arbeit behandelt auch nur die Berechnung von Zellen mit rechteckigem und quadratischem Grundriß, welche ihrer Einfachheit halber weit häufiger hergestellt werden, als z. B. Zellen mit rundem oder sechseckigem Horizontalschnitt.

Rechteckige Zellen werden in der Praxis häufig als kontinuierliche, freigelagerte Träger oder als in sich geschlossene Rahmen berechnet, d. h. unter Vernachlässigung des Widerstandes, den die anschließenden Zellenwände der Deformation entgegensetzen. Bei Berücksichtigung des Zusammenhangs der einzelnen Zellen werden die auf die genannte einfache Art berechneten Biegemomente an gewissen Stellen verringert, was eine Ersparnis zur Folge hat, an andern Stellen aber, was wichtiger ist, vergrößert.

Es ist klar, daß die alleinige Belastung der zu untersuchenden Zelle nicht die ungünstigste ist, sondern daß vielmehr die Belastung gewisser anderer Zellen die zu berechnenden Momente vergrößert. Auch werden verschiedene Stellen der Zellenwände verschiedene ungünstigste Belastungen haben. Die Untersuchung der Einflüsse des Zusammenhangs

der Zellen und verschiedener Belastungsweisen auf die inneren Kräfte ist der Hauptzweck der Arbeit.

§ 2. Grundlegende Voraussetzungen.

Der Untersuchung wird ein Traggebilde zugrunde gelegt, das durch zwei, durch den ganzen Silo geführte Horizontalschnitte erhalten wird. Die in diesem Schnitt wirkenden Biegemomente, Normal- und Schubkräfte bleiben unberücksichtigt, das System wird also als ein ebenes betrachtet, was um so eher zulässig ist, je größer das Verhältnis zwischen Silohöhe und Zellenweite ist, und je weiter der Schnitt von den Zellenenden entfernt liegt. Infolge der versteifenden Wirkung der Silotrichter am untern Ende und der mitunter vorhandenen Versteifungen (Decken, Lisenen) am obern Ende der Zellen werden die horizontal wirkenden Momente verringert, und zwar am stärksten in der Nähe dieser Versteifungen. Dort hat die Dimensionierung hauptsächlich auf Grund vertikal drehender Momente zu geschehen, auf deren Berechnung in dieser Arbeit nicht eingegangen wird.

Dem der Untersuchung zugrunde liegenden Traggebilde fehlt somit jegliche äußere Stützung; die auftretenden Belastungen halten sich gegenseitig im Gleichgewicht.

Besteht dieses Traggebilde aus zwei oder mehreren Zellenreihen, so ist es so vielfach statisch unbestimmt, daß eine genaue Bestimmung der inneren Kräfte als für die Praxis zu umständlich bezeichnet werden muß. Die Berechnung wird wesentlich vereinfacht, wenn man annimmt, das System erstrecke sich nach der einen oder nach beiden Richtungen ins Unendliche, welche Annahme, wie gezeigt werden wird, zu Ergebnissen von hinreichender Genauigkeit führt.

Wenn man aus einer beliebigen Zellengruppierung eine Zelle herausgreift und ihren Zusammenhang mit den übrigen Zellen untersucht, so erkennt man, daß jede Zelle in ihren Ecken sowohl elastisch drehbar als auch elastisch senkbar gelagert ist.

Wenn wir von der gegenseitigen Verschiebung der Ecken infolge der Ausbiegung der Wände und infolge der Deformation durch die Normalkräfte absehen, haben wir es in den Fällen, die hier untersucht werden sollen, mit unverschieblichen Knotenpunkten zu tun. Die Frage der elastisch senkbaren Lagerung fällt deshalb außer Betracht, und es ist nur der elastische Drehwiderstand zu untersuchen, der den Ecken einer belasteten Zelle von den anschließenden Wänden geleistet wird.

§ 3. Übersicht und allgemeine Bemerkungen.

Die vorliegende Arbeit ist in acht Abschnitte geteilt. Im zweiten Abschnitt werden verschiedene Aufgaben gelöst, deren Resultate durch die ganze Abhandlung hindurch gebraucht werden. Die Abschnitte III—V beschäftigen sich mit der Berechnung der Biegemomente bei ein-, zwei- und vielreihigen Zellensystemen, während die Abschnitte VI, VII und

VIII die weniger in Betracht kommenden Einflüsse der Normalkräfte, veränderlichen Trägheitsmomentes und der Temperatur behandeln. Der letzte Abschnitt zeigt die Anwendung der gewonnenen Resultate auf ein Beispiel aus der Praxis. —

Der in der Praxis häufig vorkommende Fall gleich großer Zellen wird besonders eingehend behandelt. Es werden dafür Gleichungen aufgestellt, aus welchen die zur Dimensionierung hauptsächlich erforderlichen Momente und Normalkräfte direkt berechnet werden können. Diese Gleichungen sollen außerdem dazu dienen, verschiedene Fälle von Zellenzusammensetzungen miteinander zu vergleichen und den Einfluß der Lage der Zellen auf die Größtmomente zu untersuchen.

Auf die Dimensionierungsmethoden und die Anordnung der Eisenlagen bei Eisenbetonsilos wird nicht eingegangen, sondern die gestellte Aufgabe soll mit der Ermittlung der Größtmomente und Normalkräfte als gelöst betrachtet werden. Es wird aber vorausgesetzt, daß die Ausführung der Zellen so beschaffen ist, daß die Zellenwände tatsächlich fest zusammenhängen, d. h. daß die rechten Winkel an den Knotenpunkten auch nach der Deformation rechte sind. Es sei hier erwähnt, daß Versuche an einem Getreidesilo in Genua auf das bestimmteste auf die kontinuierliche Wirkung der Wände hindeuten¹⁾.

Wie in den meisten Fällen von Berechnungen statisch unbestimmter Systeme, ist es auch bei der Berechnung von Silozellen angängig, den Einfluß der Normalkräfte auf die Formänderungen zu vernachlässigen. Der Nachweis hierzu wird in Abschnitt VI an einem Beispiel erbracht. Dasselbe ist von den Schubkräften zu sagen.

Um die Entwicklungen nicht zu umständlich zu gestalten, wurden zuerst die Trägheitsmomente aller Wände als gleich groß angenommen. Der Einfluß veränderlichen Trägheitsmomentes und die dafür notwendigen Änderungen werden in Abschnitt VII gezeigt.

Die Außenwände werden vom Winddruck als horizontal liegende, kontinuierliche Träger beansprucht, deren Auflager von den senkrecht an die Außenwand stoßenden Wänden gebildet werden. Da die Windbeanspruchung im Vergleich mit der vom Materialdruck herrührenden gering ist, kann die Einspannung der Wände vernachlässigt, d. h. der kontinuierliche Träger als frei gelagert betrachtet werden. Hierauf wird nicht näher eingegangen. —

In der über die Berechnung rechteckiger Silozellen vorhandenen Literatur werden nur ein- und zweireihige Systeme behandelt. Mehr als zweireihige Gruppen, speziell das unendlich große Zellsystem sind meines Wissens noch nicht eingehender untersucht worden²⁾.

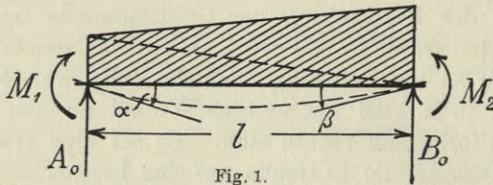
¹⁾ Handbuch für Eisenbetonbau, Band IV, Teil 2, Seite 39, Berlin 1909.

²⁾ Während der Drucklegung dieser Arbeit veröffentlichte Dr.-Ing. K. Arnstein in der „Zeitschrift für Betonbau“ 1914, Heft 5 einen Aufsatz, in welchem ein System von 3×3 Zellen unter Berücksichtigung des Zellenzusammenhangs untersucht wird.

Zweiter Abschnitt.

§ 4. Voruntersuchungen.

1. Ein Stab von der Länge l , dem Elastizitätsmodul E und dem konstanten Trägheitsmoment J sei in festem Zusammenhang mit beliebigen andern Stäben. Ist der Momentenverlauf auf die Länge des Stabes bekannt, so ist nach einem in der Statik bekannten Satz der Drehwinkel α am Ende des Stabes gleich dem dortigen Auflagerdruck A_0 , der als Belastung des frei aufliegenden Trägers l gedachten Momentenfläche dividiert durch EJ .



Für den speziellen Fall (Fig. 1), in welchem an den Enden des Stabes zwei verschieden große Momente M_1 und M_2 angreifen und der Stab selbst nicht belastet ist, ist nach genanntem Satz

$$EJ \cdot \alpha = A_0 = \frac{l}{2} \cdot M_1 \cdot \frac{2}{3} + \frac{l}{2} \cdot M_2 \cdot \frac{1}{3}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} EJ \cdot \alpha &= \frac{l}{6} (2 M_1 + M_2) \\ EJ \cdot \beta &= \frac{l}{6} (M_1 + 2 M_2) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

und entsprechend

2. Der in Fig. 2 dargestellte rechteckige, geschlossene Rahmen mit den Seitenlängen a und b und dem überall gleichen Trägheitsmoment J sei mit einem gleichmäßig verteilten Innendruck p pro Längeneinheit belastet. Die Momente \hat{M} an den Ecken sind wegen der symmetrischen Ausbildung und Belastung alle gleich groß.

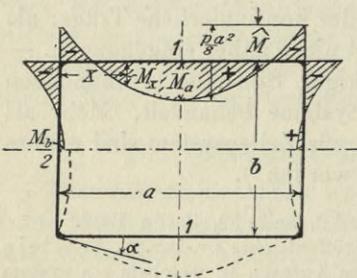


Fig. 2. Einzelzelle bei gleichmäßig verteiltem Innendruck.

Die Symmetrie verlangt, daß die Summe der Verdrehungen von der Mitte einer Seite bis zur Mitte der anliegenden Seite gleich Null ist, woraus sich die Größe von \hat{M} bestimmen läßt. In einem beliebigen Abstand x von einer Ecke hat das Moment die Größe

$$M_x = \frac{pa}{2} \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} + \hat{M}.$$

Dabei ist angenommen, daß ein Moment positiv ist, wenn es eine nach außen konvexe Verbiegung hervorruft. Diese Annahme soll auch in den späteren Entwicklungen beibehalten werden. Die Summe der Verdrehungen von 1 bis 2 (Fig. 2) ist

$$\beta = \int \frac{M}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^{a/2} \left(\frac{pa}{2} x - \frac{px^2}{2} + \hat{M} \right) dx + \frac{1}{EJ} \int_0^{b/2} \left(\frac{pb}{2} x - \frac{px^2}{2} + \hat{M} \right) dx = 0.$$

Durch Integration folgt

$$\frac{pa^3}{16} - \frac{pa^3}{48} + \frac{a}{2} \cdot \hat{M} + \frac{pb^3}{16} - \frac{pb^3}{48} + \frac{b}{2} \hat{M} = 0$$

und daraus

$$\hat{M} = -\frac{p}{12} \cdot \frac{a^3 + b^3}{a + b} = -\frac{p}{12} (a^2 - ab + b^2) \dots \dots (2a)$$

Wird das Seitenverhältnis $\frac{b}{a} = n$ gesetzt, so wird das Eckmoment

$$\hat{M} = -(1 - n + n^2) \frac{pa^2}{12} \dots \dots \dots (2)$$

Die Momente in den Seitenmitten werden nun

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{pa^2}{8} + \hat{M} = (1 + 2n - 2n^2) \frac{pa^2}{24} \\ M_b &= \frac{pb^2}{8} + \hat{M} = \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) \frac{pb^2}{24} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Diese „Momente der Einzelzelle“, welcher Ausdruck nur für die hier untersuchte, gleichmäßig verteilte Belastung gelten möge, werden gelegentlich mit M_0 bezeichnet.

Der Winkel α , um den sich die Ecke verdreht, ist nach dem unter 1. angegebenen Satz gleich dem $\frac{1}{EJ}$ -fachen der Momentenfläche von der Ecke bis zur Seitenmitte, also

$$\alpha = \frac{1}{EJ} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{pa^2}{8} \cdot \frac{a}{2} + \hat{M} \cdot \frac{a}{2} \right].$$

Darin \hat{M} aus (2) eingesetzt, führt zu

$$EJ \cdot \alpha = \frac{pab}{24} (a - b) \dots \dots \dots (4a)$$

Mit $n = \frac{b}{a}$ wird die Verdrehung der Ecke:

$$EJ \cdot \alpha = \frac{pa^3}{24} \cdot n(1 - n) \dots \dots \dots (4)$$

3. Ein rechteckiger, geschlossener Rahmen mit konstantem Trägheitsmoment sei, wie Fig. 3 a zeigt, durch vier an seinen Ecken angreifende, verschieden große Drehmomente m_1 bis m_4 belastet. Nach den in § 2 gemachten Voraussetzungen seien die Eckpunkte, abgesehen von den kleinen Verschiebungen infolge des Verbiegens der Seiten fest. Das System ist äußerlich einfach und innerlich dreifach statisch unbestimmt, weshalb vier Elastizitätsgleichungen zur Lösung der Aufgabe erforderlich sind.

Wir haben die vier Bedingungen, daß an jeder Ecke $\beta' = \beta$ sein muß (vergl. Ecke 1 in Fig. 3 a). Nach Gleichung (1) werden die absoluten Werte der Drehwinkel der 1. Ecke (vergl. Fig. 3 b)

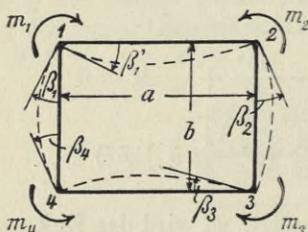


Fig. 3 a.

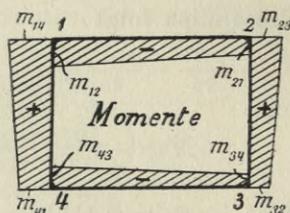


Fig. 3 b.

$$\left. \begin{aligned} EJ \cdot \beta_1' &= -\frac{a}{6} (2 m_{12} + m_{21}) \\ EJ \cdot \beta_1 &= \frac{b}{6} (2 m_{14} + m_{41}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

woraus mit der Bedingung $\beta_1' = \beta_1$ und mit

$$m_{12} = m_{14} - m_1$$

und

$$m_{41} = m_{43} + m_4$$

die Gleichung folgt

$$2 a m_1 - 2 a m_{14} - a m_{21} = 2 b m_{14} + b m_{43} + b m_4.$$

Wird die Gleichung geordnet und dasselbe für die drei andern Ecken wiederholt, so entstehen die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} 2(a+b)m_{14} + a m_{21} + b m_{43} &= -b m_4 + 2 a m_1 \\ a m_{14} + 2(a+b)m_{21} + b m_{32} &= a m_1 - 2 b m_2 \\ b m_{21} + 2(a+b)m_{32} + a m_{43} &= -b m_2 + 2 a m_3 \\ b m_{14} + a m_{32} + 2(a+b)m_{43} &= a m_3 - 2 b m_4 \end{aligned}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach den unbekanntem, inneren Momenten führt mit den Abkürzungen

$$\frac{b}{a} = n$$

und

$$(1+n)(3+n)(1+3n) = 3 + 13n + 13n^2 + 3n^3 = N$$

zu den Werten

$$\left. \begin{aligned} m_{14} &= \frac{1}{N} [(3+9n+4n^2) \cdot m_1 + 2n(1+n) \cdot m_2 + n(1-n) \cdot m_3 \\ &\quad - 2n(1+n) \cdot m_4] \\ m_{21} &= \frac{1}{N} [2n(1+n) \cdot m_1 - n(4+9n+3n^2) \cdot m_2 - 2n(1+n) \cdot m_3 \\ &\quad + n(1-n) \cdot m_4] \\ m_{32} &= \frac{1}{N} [n(1-n) \cdot m_1 - 2n(1+n) \cdot m_2 + (3+9n+4n^2) \cdot m_3 \\ &\quad + 2n(1+n) \cdot m_4] \\ m_{43} &= \frac{1}{N} [-2n(1+n) \cdot m_1 + n(1-n) \cdot m_2 + 2n(1+n) \cdot m_3 \\ &\quad - n(4+9n+3n^2) \cdot m_4] \end{aligned} \right\} (6)$$

Durch diese Werte ist der gesamte Momentenverlauf festgesetzt.

Für die Verdrehungen β der Ecken folgt durch Einsetzen der m -Werte in Gleichung (5) unter Annahme, daß rechtsdrehende Winkel positiv genommen werden,

$$\left. \begin{aligned} EJ \cdot \beta_1 &= \frac{b}{6N} [2(3+8n+3n^2)m_1 + n(5+3n)m_2 \\ &\quad + 4n \cdot m_3 + (3+5n)m_4] \\ EJ \cdot \beta_2 &= \frac{-b}{6N} [n(5+3n)m_1 + 2(3+8n+3n^2)m_2 \\ &\quad + (3+5n)m_3 + 4n \cdot m_4] \\ EJ \cdot \beta_3 &= \frac{b}{6N} [4n \cdot m_1 + (3+5n)m_2 + 2(3+8n+3n^2)m_3 \\ &\quad + n(5+3n)m_4] \\ EJ \cdot \beta_4 &= \frac{-b}{6N} [(3+5n)m_1 + 4n \cdot m_2 + n(5+3n)m_3 \\ &\quad + 2(3+8n+3n^2)m_4] \end{aligned} \right\} (7)$$

Diese für den allgemeinen Fall gültigen Gleichungen lassen für die nun folgenden Spezialfälle die Ausdrücke für die Momente und Winkelverdrehungen leicht berechnen.

4. Fig. 4 zeigt den Fall, wo je zwei Momente einander gleich sind. Setzt man in den Gleichungen (6) und (7) $m_1 = m_4 = m'$ und $m_2 = m_3 = m''$, so folgt

$$\left. \begin{aligned} m_{12} = m_{43} &= -n \cdot \frac{(2+3n)m' - m''}{(1+n)(1+3n)} & m_{14} = m_{41} = m_b' &= \frac{(1+2n)m' + n m''}{(1+n)(1+3n)} \\ m_{21} = m_{34} &= -n \cdot \frac{-m' + (2+3n)m''}{(1+n)(1+3n)} & m_{23} = m_{32} = m_b'' &= \frac{n \cdot m' + (1+2n)m''}{(1+n)(1+3n)} \end{aligned} \right\} (8)$$

$$EJ \cdot \beta' = \frac{b}{2} \cdot \frac{(1+2n)m' + n m''}{(1+n)(1+3n)} \quad EJ \cdot \beta'' = -\frac{b}{2} \cdot \frac{n \cdot m' + (1+2n)m''}{(1+n)(1+3n)} \quad (9)$$

Diese Gleichungen sind zur Kontrolle auch auf direktem Wege hergeleitet worden.

5. Setzen wir in den Gleichungen (6) und (7) $m_1 = m_2 = m'$ und $m_3 = m_4 = m''$, so erhalten wir den Belastungsfall der Fig. 5 und dafür die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} m_{12} = m_{21} = m_a' &= -n \frac{(2+n)m' + m''}{(1+n)(3+n)} & m_{14} = m_{23} &= \frac{(3+2n)m' - n m''}{(1+n)(3+n)} \\ m_{34} = m_{43} = m_a'' &= -n \frac{m' + (2+n)m''}{(1+n)(3+n)} & m_{32} = m_{41} &= \frac{-n \cdot m' + (3+2n)m''}{(1+n)(3+n)} \end{aligned} \right\} (10)$$

$$EJ \cdot \beta' = \frac{b}{2} \cdot \frac{(2+n)m' + m''}{(1+n)(3+n)} \quad EJ \cdot \beta'' = -\frac{b}{2} \cdot \frac{m' + (2+n)m''}{(1+n)(3+n)} \quad (11)$$

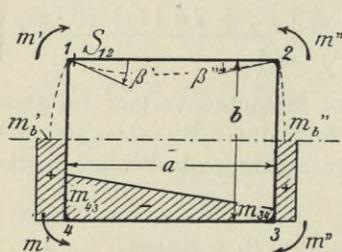


Fig. 4.

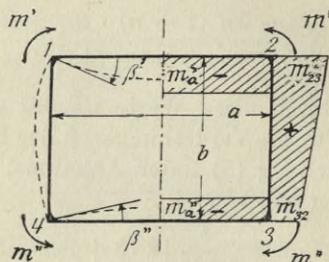


Fig. 5.

6. In dem noch spezielleren Fall, in welchem alle vier angreifenden Momente der Größe nach einander gleich ($= m$) sind und den Drehsinn wie in Fig. (5) haben, sind die Momente in allen Schnitten der Seiten a bzw. b einander gleich, nämlich

$$m_a = -\frac{n \cdot m}{1+n} \quad m_b = +\frac{m}{1+n} \quad \dots \quad (12)$$

$$EJ \cdot \beta' = -EJ \cdot \beta'' = \frac{b \cdot m}{2(1+n)} \quad \dots \quad (13)$$

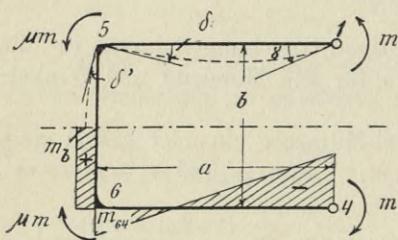


Fig. 6.

7. Der in Fig. 6 abgebildete, rechteckige, dreiseitige Rahmen sei wie eingezeichnet durch 4 Drehmomente belastet. Voraussetzung ist, daß die Ecken 1 und 4 ihre Lage nicht ändern können, wohl aber eine Verdrehung der langen Seiten zulassen. μ sei ein kleiner, echter Bruch.

Nach Gleichung (1) ist

$$EJ \cdot \delta = \frac{a}{6} (-2 m_{64} + m)$$

$$EJ \cdot \delta' = \frac{b}{6} (2 m_b + m_b).$$

Mit $\delta = \delta'$ wird

$$a (-2 m_{64} + m) = b \cdot 3 m_b.$$

Ferner ist

$$m_{64} = \mu \cdot m + m_b.$$

Aus diesen zwei Gleichungen ergeben sich mit $\frac{b}{a} = n$ die gesuchten Momente

$$m_{51} = m_{64} = \frac{1 + 3n \cdot \mu}{2 + 3n} \cdot m \quad m_b = \frac{1 - 2\mu}{2 + 3n} \cdot m \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und daraus die Verdrehungen (absolut genommen)

$$EJ \cdot \delta = \frac{b (1 - 2\mu) m}{2 (2 + 3n)} \quad EJ \cdot \gamma = \frac{a (1 + 2n - n \cdot \mu) m}{2 (2 + 3n)} \quad . \quad . \quad (15)$$

Dritter Abschnitt.

Das einreihige Zellsystem.

§ 5. Erste Lösungsmethode.

In Fig. 7 ist ein einreihiges Zellsystem mit ungleich großen Zellen dargestellt. Es soll der Momentenverlauf gesucht werden, der entsteht, wenn eine der Zellen, z. B. die n^{te} , mit einem gleichmäßigen Innendruck p pro Längeneinheit belastet wird. Die Belastung wird hier und auch später durch Schraffur der Zelle angedeutet.

Das System ist bei beliebiger Belastung innerlich $3z$ -fach statisch unbestimmt, wenn z die Anzahl der Zellen bedeutet. Nach der allgemein bei Rahmenkonstruktionen üblichen Methode hätten wir jede Zelle aufzuschneiden und an jeder Schnittstelle die drei unbekanntnen Schnittkräfte anzubringen, welche sich aus gewissen Bedingungen bestimmen ließen. Legen wir die Schnitte dorthin, wo die Längssymmetrieachse die Querseiten schneidet (Fig. 7), so wird ein Drittel der drei unbekanntnen Schnittkräfte

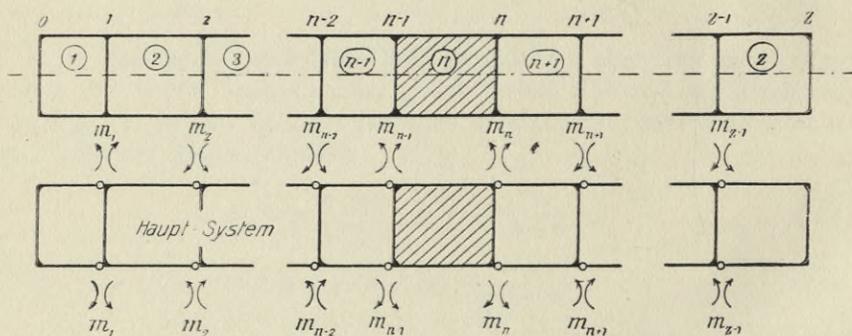


Fig. 7. Einreihiges Zellsystem. Belastung der n^{ten} Zelle.

wegen der in unserem Fall in bezug auf diese Achse symmetrischen Belastung gleich Null. Wir haben es dann noch mit $2z$ Unbekannten zu tun.

Es ist nun nicht notwendig, so viele Schnitte zu legen, daß das dann entstehende sog. Hauptssystem statisch bestimmt ist. Es wurde in der Literatur schon öfters darauf hingewiesen, daß es möglich und oft von Vorteil ist, statisch unbestimmte Hauptssysteme zu verwenden. Die Zahl der Unbekannten kann sich dabei bedeutend verringern. Da sich dieses Verfahren für unseren Fall besonders eignet, soll es hier Verwendung finden.

Man denke sich an den Stellen, die in Fig. 7 mit Ringen bezeichnet sind, ideale Gelenke so angebracht, daß die Eckpunkte ihre Lage nicht verändern, wohl aber sich ungehindert drehen können. Es werden also

§ 6. Beispiel.

In folgendem soll als Beispiel zu obigem Verfahren der in Fig. 8 dargestellte Fall zweier aneinander liegender, gleich großer Zellen behandelt werden.

Zelle 1 sei gleichmäßig mit p belastet. Es ist beim Gelenk

$$\text{nach (4)} \quad EJ \cdot \alpha = \frac{pa^3}{24} n (1 - n),$$

nach (9) wird mit $m' = 0$, $m'' = m$ und $\beta'' = \beta$

$$EJ \cdot \beta = - \frac{b}{2} \cdot \frac{1 + 2n}{(1 + n)(1 + 3n)} \cdot m$$

und nach (15) mit $\mu = 0$

$$EJ \cdot \gamma = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + 2n}{2 + 3n} \cdot m.$$

Die drei Winkel in (16) eingesetzt gibt

$$\frac{pa^3}{24} \cdot n (1 - n) - \frac{b}{2} \cdot \frac{1 + 2n}{(1 + n)(1 + 3n)} \cdot m = \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + 2n}{2 + 3n} \cdot m$$

und daraus

$$m = \frac{pa^2}{12} \cdot \frac{n(1 - n^2)(1 + 3n)(2 + 3n)}{(1 + 2n)(1 + 6n + 6n^2)} \cdot \dots \cdot (17)$$

Da das Resultat positiv herauskommt, wirkt m in dem Drehsinn, wie er in Fig. 8 angegeben ist. Der Drehsinn des Momentes, das an Stelle irgend eines Gelenkes wirkt, kann in den meisten Fällen im voraus ohne

Rechnung angegeben werden und zwar durch folgende Überlegung: Das Moment wirkt immer der Verdrehung entgegen, die von der belasteten Zelle her ausgeübt wird, liegt es nun an der belasteten Zelle selbst oder in einem andern gedachten Gelenk. Die Verdrehung der Zellenecke bei Belastung der Zelle ist immer so, daß die lange Seite nach außen dreht (vgl. Fig. 2).

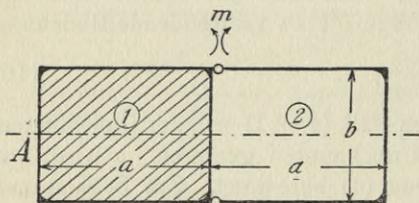


Fig. 8.

Geht man also von der belasteten Zelle aus, so kann man fortschreitend die Drehsinne aller dieser „Gelenkmomente“ angeben, was als Probe der Berechnung und besonders auch zur Bestimmung der ungünstigsten Belastungsweise irgend einer Stelle dienen kann.

Mit Hilfe des Wertes m und der Gleichungen (2), (8), (14) können nun an jeder Stelle die Biegemomente berechnet werden. Es ist z. B. im Schnitt A nach (3) und (8), wenn M_0 das Moment der belasteten Einzelzelle bedeutet

Wir denken uns vorübergehend in $n - 2$ zwei Gelenke, an deren Stelle die für uns unbekanntes Momente $m \cdot \mu_{n-2}$ wirken. Der Drehsinn dieser Momente kann leicht angegeben werden, er ist in Fig. 9 gekennzeichnet, und es werden die Momente positiv in die Rechnung eingeführt. Unter der Voraussetzung, daß der Winkel γ_{n-2} (mit derselben Bedeutung wie Winkel γ_{n-1} , also hervorgerufen durch Momente von derselben Größe m) bekannt ist, berechnet sich γ_{n-1} als Funktion von γ_{n-2} wie folgt.

Nach (15) ist

$$EJ \cdot \delta = \frac{b(1 - 2 \cdot \mu_{n-2})m}{2(2 + 3n)},$$

welche Verdrehung auf der linken Seite des Gelenks gleich sein muß, also, da infolge m die Verdrehung $= \gamma_{n-2}$ ist,

$$EJ \cdot \delta = \frac{b(1 - 2 \cdot \mu_{n-2})m}{2(2 + 3n)} = EJ \cdot \gamma_{n-2} \cdot \mu_{n-2}.$$

Daraus folgt

$$\mu_{n-2} = \frac{b}{2b + 2(2 + 3n) EJ \frac{\gamma_{n-2}}{m}} \dots \dots \dots (19)$$

und unter Annahme, μ_{n-2} sei bekannt, nach (15)

$$EJ \cdot \gamma_{n-1} = \frac{a(1 + 2n - n \cdot \mu_{n-2})m}{2(2 + 3n)} \dots \dots \dots (20)$$

Setzt man μ_{n-2} aus (19) in (20) ein, so wird

$$EJ \cdot \gamma_{n-1} = \frac{mb + 2(1 + 2n) EJ \cdot \gamma_{n-2}}{mb + (2 + 3n) EJ \cdot \gamma_{n-2}} \cdot \frac{am}{4} \dots \dots \dots (21)$$

Diese Gleichung läßt jeden γ -Wert aus dem vorhergehenden bestimmen.

Für das erste Gelenk (z. B. am linken Ende der Zellenreihe anfangend, Gelenk 1 in Fig. 7) ist nach Gleichung (15) mit $\mu_0 = 0$

$$EJ \cdot \gamma_1 = \frac{a(1 + 2n)m}{2(2 + 3n)} \dots \dots \dots (22)$$

(Dieser Wert folgt auch aus der allgemeinen Gleichung (21) mit $\gamma_{n-2} = \gamma_0 = \infty$.)

Der zahlenmäßig berechnete Wert von γ_1 in (21) eingesetzt liefert γ_2 , und so folgen fortlaufend alle γ -Werte bis γ_{n-1} .

Schließt nun z. B. in $n - 1$ die belastete Zelle n an (Fig. 7), so liefern die zwei Bedingungsgleichungen (16) für die Gelenke $n - 1$ und n , die nun leicht aufgestellt werden können, die unbekanntes Momente m_{n-1} und m_n . Es ist dann ferner (vgl. Fig. 9)

$$\left. \begin{aligned} m_{n-2} &= m_{n-1} \cdot \mu_{n-2} \\ m_{n-3} &= m_{n-1} \cdot \mu_{n-2} \cdot \mu_{n-3} = m_{n-2} \cdot \mu_{n-3} \\ &\text{usw.} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

worin μ aus (19) berechnet wird und immer ein echter Bruch ist (in gewöhnlichen Fällen $\infty \frac{1}{5}$). Damit sind nun die Unbekanntes alle ge-

nach (9)
$$EJ \cdot \beta_4 = + \frac{b}{2} \cdot \frac{1+2n}{(1+n)(1+3n)} m_4 = + 0,212418 \cdot b \cdot m_4$$

und
$$EJ \cdot \gamma_4 = - 0,346826 \cdot b \cdot m_4$$

mit $\alpha_4 + \beta_4 = \gamma_4$ folgt nun

$$m_4 = 0,0232829 \cdot p b^2.$$

Es ist ferner nach (23)

$$m_3 = m_4 \cdot \mu_3 = 0,004608 \cdot p b^2$$

$$m_2 = m_3 \cdot \mu_2 = 0,000911 \cdot p b^2$$

$$m_1 = m_2 \cdot \mu_1 = 0,000174 \cdot p b^2$$

Das Moment in A wird mit Gl. (3) und (8)

$$\begin{aligned} M_b &= \left[1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + 0,0232829 \cdot \frac{24n}{(1+n)(1+3n)} \right] \frac{p b^2}{24} \\ &= [0,375 + 0,07306] \frac{p b^2}{24} = 0,018669 p b^2. \end{aligned}$$

Ist nicht die äußerste, sondern eine innere Zelle belastet, so sind die γ - und μ -Werte von beiden Seiten her aufzustellen, und es folgen dann die beiden unbekanntenen Momente m neben der belasteten Zelle zusammen aus zwei Gleichungen.

§ 9. Die unendlich lange Zellenreihe mit gleich großen Zellen.

Für eine Mittelzelle einer unendlich langen Zellenreihe ist $\gamma_{n+1} = \gamma_n$, also nach (21)

$$EJ \cdot \gamma_n = \frac{mb + 2(1+2n) EJ \cdot \gamma_n}{mb + 2(2+3n) EJ \cdot \gamma_n} \cdot \frac{am}{4},$$

woraus folgt

$$EJ \cdot \gamma_n = \frac{1 + \sqrt{(1+2n)(1+6n)}}{4(2+3n)} \cdot a \cdot m \quad \dots \quad (24)$$

Dieser Wert in (19) eingesetzt, gibt

$$\mu_n = \frac{1+4n - \sqrt{(1+2n)(1+6n)}}{2n} \quad \dots \quad (25)$$

Zum Beispiel wird für $n = 0,8$

$$EJ \cdot \gamma_n = 0,346825 \cdot b$$

und

$$\mu_n = 0,197939 = \infty^{1/5}.$$

Das in § 8 berechnete Moment m_4 (Fig. 10) wird bei derselben Belastung und denselben Abmessungen, wenn die Reihe sich nach der linken Seite hin bis ins Unendliche erstreckt,

$$m = 0,0232829 \cdot p b^2,$$

was wieder aus $\alpha + \beta = \gamma$ folgt. Das Moment im Schnitt A wird für den Fall der unendlich langen Zellenreihe

$$M_b = 0,018669 pb^2 = \infty 0,45 \frac{pb^2}{24}.$$

Es zeigt sich, daß diese beiden Werte bis auf die gerechnete Stellenzahl gleich denjenigen der fünfzelligen Anordnung sind.

In der folgenden Tabelle sind die vorberechneten Werte zusammengestellt und noch die entsprechenden für drei und vier Zellen eingeschoben. Alle Werte gelten für $n = \frac{b}{a} = 0,8$.

Zellenzahl z	μ_{z-2}	$\frac{EJ}{b} \cdot \gamma_{z-1}$	$\frac{1}{pb^2} \cdot M_b$
1	—	∞	0,015625
2	0	0,369318	0,018551
3	0,190476	0,347673	0,018664
4	0,197647	0,346858	0,018668
5	0,197928	0,346826	0,018669
...
∞	0,197939	0,346825	0,018669

Diese Tabelle soll veranschaulichen, welchen geringen Einfluß Zellen auf die zu untersuchende Stelle ausüben, welche von ihr durch eine oder mehr Zellen getrennt sind. Es kann aus der Tabelle gefolgert werden, daß schon ein System von drei Zellen mit genügender Genauigkeit als ein unendlich langes behandelt werden kann.

Da die Berechnung unendlich langer Systeme einfacher ist und zum Teil sehr einfache, theoretisch genaue Gleichungen zur Bestimmung der zur Dimensionierung wichtigen Momente liefert, so sollen in der Folge sowohl für ein- wie auch für mehrreihige Zellensysteme die wichtigsten Formeln für unendlich weit ausgedehnte Reihen aufgestellt werden. Diese Formeln werden für erste Dimensionierungen und Kalkulationszwecke nützliche Dienste leisten, während für genaue Berechnungen, bei denen auch die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes und eventuelle Ungleichheit der Zellen zu berücksichtigen sind, das in § 7 beschriebene genaue Verfahren zu verwenden ist.

§ 10. Die Mittelzelle der unendlich langen Reihe.

Es ist klar, daß die alleinige Belastung der zu untersuchenden Zelle nicht die ungünstigste ist, sondern daß vielmehr die Belastungen gewisser anderer Zellen die zu berechnenden Momente vergrößern. Verschiedene

Stellen der Zellenwände werden im allgemeinen auch verschiedene ungünstigste Belastungen haben.

Für die bis jetzt entwickelten Gleichungen war es gleichgültig, ob $a > b$ oder umgekehrt, d. h. ob die längere Zellenseite in der Richtung der Zellenreihe verläuft oder senkrecht dazu. Dies trifft aber für die Art der ungünstigsten Belastung nicht mehr zu; es sind deshalb die beiden Fälle für sich zu behandeln.

Es ist selbstverständlich, daß die ungünstigste Belastungsweise nie nur zum Teil gefüllte Zellen enthält, weshalb die Materialdrücke p in allen gefüllten Zellen als gleich groß angenommen werden können.

a) Die kurze Seite ist Querseite.

1. Mittenmoment der langen Seite.

Diejenigen Zellen, durch deren Belastung in M_a (Fig. 11) ein positives Moment entsteht, finden sich durch folgende Überlegung:

Die Ecken eines rechteckigen Rahmens drehen sich bei gleichmäßiger Innenbelastung in der Weise, daß die längeren Seiten nach außen gebogen werden (vgl. Fig. 2), sie üben daher auch ein Drehmoment in diesem Sinne auf die Nachbarzellen oder anschließende Stabteile aus. Dieses Moment überträgt sich nun nach den Regeln des kontinuierlichen Trägers über die einzelnen Seiten, d. h. das Moment wechselt sein Vorzeichen nach Durchlaufen einer Seite. Mit dieser Überlegung folgt, daß z. B. in Fig. 11 die Belastung jeder zweiten Zelle in M_a ein positives Moment hervorruft. Diese in Fig. 11 durch Schraffur der belasteten Zellen angedeutete, für das Maximalmoment in M_a maßgebende Belastung wollen wir mit „Wechselbelastung“ bezeichnen. Die entgegengesetzte Belastung gibt dann natürlich das Minimalmoment.

Zur Berechnung von M_a denken wir uns, wie in Fig. 11 angedeutet, Gelenke so angebracht, daß das System in einzelne Rahmen und Stabstücke zerlegt wird. Unsere Unbekannten sind dann die Momente m , die an Stelle der Gelenke wirken. Sie sind aus Symmetriegründen alle gleich groß. Es ist nun an jedem Gelenk

$$EJ \cdot \alpha = - \frac{p a^3}{24} \cdot n (1 - n)$$

$$EJ \cdot \beta = + \frac{b}{2(1+n)} \cdot m$$

$$EJ \cdot \gamma = - \frac{a}{2} \cdot m$$

und nach Bedingung (16)

$$- \frac{p a^3}{24} \cdot n (1 - n) + \frac{b}{2(1+n)} \cdot m = - \frac{a}{2} \cdot m$$

$$\text{oder} \quad m = \frac{n(1-n^2)}{1+2n} \cdot \frac{p a^2}{12} \quad \dots \quad (26)$$

Daraus und mit (3) und (12) folgt das Maximalmoment in der Mitte der langen Seite zu

$$M_{a\max} = M_0 - \frac{n}{1+n} \cdot m = \frac{1+4n-2n^3}{1+2n} \cdot \frac{pa^2}{24} \quad \dots (27)$$

Das Minimalmoment daselbst ist gleich $-m$, also

$$M_{a\min} = -\frac{n(1-n^2)}{1+2n} \cdot \frac{pa^2}{12} \quad \dots \dots \dots (28)$$

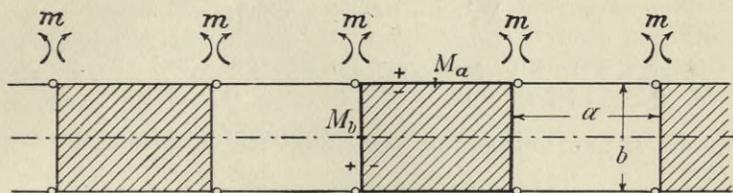


Fig. 11.

Eine Probe kann darin bestehen, daß beide Belastungen zusammen die „Vollbelastung“ geben, und es muß dann das Moment in M_a demjenigen des eingespannten Stabes entsprechen, also

$$M_{a\max} + M_{a\min} = \frac{pa^2}{24},$$

was auch zutrifft.

2. Mittenmoment der kurzen Seite.

Bei den Größt- und Kleinstmomenten in M_b müssen hier wie auch später zwei Fälle unterschieden werden. Bei Zellen, die sich der quadratischen Form nähern, ist für $M_{b\max}$ die Belastung nach Fig. 12 maßgebend, was aus der Art der Eckverdrehungen der belasteten Zellen und der Übertragung derselben nach M_b hervorgeht. (Die zu untersuchende Zelle ist stärker gezeichnet, ein positives Moment in M_b entspricht demnach einer Ausbiegung nach links.) Bei kleiner werdendem Seitenverhältnis n wird M_b infolge alleiniger Belastung der Zelle z ebenfalls sich vermindern und für ein gewisses n , welches wir mit k bezeichnen wollen, verschwinden, um für $n < k$ negativ zu werden. Die Belastung der Fig. 12 ist deshalb nur für $n > k$ die ungünstigste, während für $n < k$ die Zelle z zu entlasten und dafür Zelle z' zu belasten ist. Es werde zuerst der Fall $n > k$ behandelt.

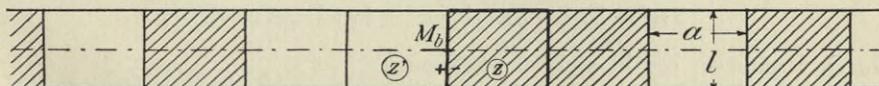


Fig. 12.

Die Belastung nach Fig. 12 kann man sich entstanden denken aus der Wechselbelastung (Fig. 11) unter Weglassung der Belastung von z' und Hinzufügung der Belastung z . Auf diese Art soll auch das Moment in M_b zusammengestellt werden. Wir haben deshalb vorerst M_b für zwei

verschiedene „Grundbelastungen“ (wie wir sie nennen wollen) zu berechnen, einmal für die Wechselbelastung, dann für die Einzelbelastung der Zelle z . Die Einzelbelastung z' erzeugt natürlich in M_b ein Moment von gleicher Größe, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen wie die Belastung z .

Die Wechselbelastung haben wir in der vorhergehenden Nummer behandelt und es ist für sie mit Gleichung (12)

$$M'_b = - \left[M_0 + \frac{m}{1+n} \right],$$

$$\text{wo } m = \frac{n(1-n^2)}{1+2n} \cdot \frac{pa^2}{12}, \text{ also } M'_b = - \frac{2n^3 + 3n^2 - 2}{(1+2n)n^2} \cdot \frac{pb^2}{24}.$$

Für die Einzelbelastung von z folgt mit der Bedingung $\alpha + \beta = \gamma$ [γ aus (24)]

$$- \frac{pa^3}{24} \cdot n(1-n) + \frac{bm'}{2(1+n)} = - \frac{1 + \sqrt{(1+2n)(1+6n)}}{4(2+3n)} \cdot am',$$

wo m' die Größe der Momente an Stelle der vier Gelenke bedeutet, die man sich an den Ecken der belasteten Zelle angebracht denkt. Es folgt daraus

$$m' = \frac{(1-n^2) \left[1 + 3n - (1+n) \sqrt{\frac{1+6n}{1+2n}} \right]}{n^3} \cdot \frac{pb^2}{24} \dots \quad (29)$$

und für die Einzelbelastung der Zelle z

$$M''_b = M_0 + \frac{m'}{1+n} = \left[1 - n^2 + n^3 - (1-n^2) \sqrt{\frac{1+6n}{1+2n}} \right] \cdot \frac{pb^2}{24n^3}.$$

Setzen wir nun die beiden Werte M'_b und M''_b für die Grundbelastungen entsprechend Fig. 12 zusammen, so wird das Maximalmoment in der Mitte der kurzen Seite für $n > k$:

$$\begin{aligned} M_{b \max} &= M'_b - (-M''_b) + M''_b \\ &= \frac{2+6n-2n^2-5n^3+2n^4-2(1-n^2)\sqrt{(1+2n)(1+6n)}}{(1+2n)n^3} \cdot \frac{pb^2}{24} \quad (30) \end{aligned}$$

Den Grenzfall $n = k$ findet man aus der Bedingung $M''_b = 0$, welche zu folgender Gleichung führt:

$$2n^6 - 3n^5 - 6n^4 + 4n^3 + 10n^2 - 4 = 0.$$

Durch Probieren ergibt sich als Lösung

$$n = k = 0,6446.$$

Für $n < k$ wird M''_b negativ, und es ist für solche Fälle, wie schon bemerkt, die Wechselbelastung die ungünstigste, also für $n < k$:

$$M_{b \max} = M'_b = \frac{2-3n^2-2n^3}{(1+2n)n^2} \cdot \frac{pb^2}{24} \dots \quad (31)$$

Die Belastung 3 ruft in P_1 das Moment m' hervor, in P_2 (nach § 7) das Moment $\mu \cdot m'$, beide Momente absolut genommen mit dem in Fig. 13 eingezeichneten Drehsinn. μ ist für die unendlich lange Reihe nach (25)

$\mu = \frac{1 + 4n - \sqrt{(1 + 2n)(1 + 6n)}}{2n}$. In \hat{M}_a wird das Moment infolge Belastung 3

$$\hat{M}_a = -\mu^2 \cdot m',$$

denn der Absolutwert des Momentes verringert sich von Zelle zu Zelle um dasselbe Verhältnis μ (vgl. § 7).

Belastung 4 gibt deshalb

$$\hat{M}_a = -\mu^4 \cdot m'.$$

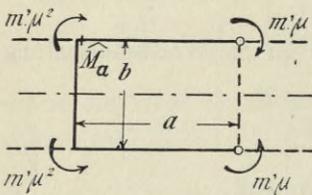


Fig. 14.

Man erkennt, daß die Summe der Einflüsse der Wechselbelastung links von \hat{M}_a eine unendliche, konvergierende Reihe mit dem Quotienten μ^2 darstellt, deren Summe wir bilden können. Dasselbe gilt von den rechtsseitigen Belastungen 2', 3' . . . Infolge der Belastung 2' ist die zu untersuchende Zelle nach Fig. 14 beansprucht.

Es folgt deshalb mit Gleichung (14):

$$\hat{M}_a = -\frac{1 + 3n \cdot \mu}{2 + 3n} \cdot \mu \cdot m'$$

und analog infolge Belastung 3':

$$\hat{M}_a = -\frac{1 + 3n \cdot \mu}{2 + 3n} \cdot \mu^3 \cdot m'.$$

Mit Hilfe der Summenformel für die unendliche, konvergierende Reihe wird nun die Summe aller Einflüsse

$$\hat{M}_{amin} = -(1 - n + n^2) \frac{p a^2}{12} - m' \left[\frac{n}{1 + n} + \frac{1}{1 - \mu^2} \left(\frac{1 + 3n \mu}{2 + 3n} \cdot \mu + 1 \right) \right] \quad (33)$$

worin m' aus (29) zu berechnen ist.

Nach dieser Gleichung kann der theoretisch genaue Wert von \hat{M}_a berechnet werden, allerdings etwas umständlich. Es soll deshalb für den praktischen Gebrauch eine empirische Formel für \hat{M}_a aufgestellt werden, deren Genauigkeit geprüft werden wird.

Bei graphischer Darstellung ($n =$ Abszisse, $\hat{M}_a =$ Ordinate) ist Gleichung (33) eine Kurve höherer Ordnung, von der für praktisch vorkommende Fälle nur ein gewisses Stück gebraucht wird. Das Seitenverhältnis $n = \frac{b}{a}$ wird hauptsächlich zwischen 0,6 und 1 schwanken und seltener unter 0,6 sinken. Wir ersetzen deshalb das Stück der Kurve zwischen $n = 0,6$ und $n = 1,0$ durch eine Parabel von der Gleichung

$$M = a + bn + cn^2 \dots \dots \dots (34)$$

Diese Gleichung hat drei unbestimmte Koeffizienten, welche wir so bestimmen, daß die Parabel mit der gegebenen Kurve drei Punkte gemeinsam hat. Diese Punkte sollen die Abszissen $n = 0,6; 0,8; 1,0$ haben. Die Koeffizienten a, b, c werden nun aus den drei Gleichungen bestimmt, die entstehen, wenn man die drei obigen Werte für n und die zugehörigen Momentenwerte aus (33) in (34) einsetzt. Diese Berechnung wird einfacher und genauer, wenn nur das „Nebenmoment“ [zweiter Ausdruck in Gleichung (33)] empirisch entwickelt wird, da dieses für $n = 1$ verschwindet. Es wird auf diese Weise

$$\hat{M}_{a \min} = -(1 - n + n^2) \frac{p a^2}{12} - (0,00794 + 0,11172 \cdot n - 0,11967 \cdot n^2) \cdot p a^2,$$

oder zusammengefaßt

$$\hat{M}_{a \min} = -(0,09127 + 0,02839 \cdot n - 0,03633 \cdot n^2) \cdot p a^2. \quad (35)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen kann der Einfluß des Nebenmomentes auf den angenäherten Wert gezeigt werden. Es ist z. B. für $n = 0,8$

$$\text{Hauptmoment:} \quad -(1 - n + n^2) \frac{p a^2}{12} = -0,0700 \cdot p a^2$$

$$\text{Nebenmoment:} \quad \frac{-0,0207 \cdot p a^2}{M_{a \min} = -0,0907 \cdot p a^2}$$

Es folgt nun die Prüfung der Genauigkeit bei Anwendung der empirischen Gleichung. Der größte dabei gemachte Fehler wird dort auftreten, wo die Parabel am stärksten von der richtigen Kurve abweicht. Das wird aller Wahrscheinlichkeit nach in der Nähe von $n = 0,9$ und $n = 0,7$ sein, denn bei $n = 0,6, 0,8, 1,0$ haben die beiden Kurven gleiche Ordinaten. Eine in diesem Sinne angestellte Berechnung zeigt folgende Resultate:

n	$-\hat{M}_{a \min}$	$-\hat{M}_{a \min}$
	Nach der genauen Gleichung (33)	Nach der empirischen Gleichung (35)
1,0	0,08333	$0,08333 = \frac{1}{12}$
0,9	0,08738	0,08739
0,8	0,09074	0,09074
0,7	0,09341	0,09334
0,6	0,09523	0,09523
	$\cdot p a^2$	$\cdot p a^2$

Der Fehler, der durch Anwendung der empirischen Gleichung entsteht, ist also für die Praxis von keiner Bedeutung. Es soll später noch öfters von solchen Gleichungen Gebrauch gemacht werden, besonders da, wo das Aufstellen einer theoretisch richtigen Gleichung gar nicht möglich ist.

Der Ausdruck für $\hat{M}_{a \max}$ wird, da für ihn gerade die entgegen-

gesetzte ungünstigste Belastung wie für $\hat{M}_{a\min}$ maßgebend ist, und da für die Vollbelastung $\hat{M}_a = -\frac{p a^2}{12}$ (d. h. gleich dem Stützenmoment des eingespannten Balkens)

$$\hat{M}_{amax} = -\frac{p a^2}{12} - \hat{M}_{amin}$$

$$\hat{M}_{amax} = (0,00794 + 0,02839 \cdot n - 0,03633 \cdot n^2) \cdot p a^2. \quad (36)$$

Für $n = 1$ wird $\hat{M}_{amax} = 0$, was auch sein muß. Bei quadratischen Zellen mit gleichen Wandstärken übertragen sich nämlich die Momente, die durch Belastung einer Zelle in dieser entstehen, von dem geringen Einfluß der Deformation durch Normalkräfte abgesehen, auf keine der andern Zellen, da die Momente m an Stelle von gedachten Gelenken an den Ecken der belasteten Zelle gleich Null werden (Eckverdrehung der belasteten Zelle $\alpha = 0$).

Bei quadratischen Zellen beschränkt sich nicht nur der Einfluß der Belastung einer belasteten Zelle auf diese allein, sondern es wird dieselbe auch durch keine der anschließenden Wände beeinflusst.

Quadratische Zellen mit konstantem Trägheitsmoment werden daher immer, ob sie nun einem ein- oder mehrreihigen System angehören, abgesehen vom Einfluß der Normalkräfte, richtig berechnet, wenn man sie als geschlossene, für sich allein bestehende Rahmen betrachtet.

Alle Gleichungen, welche zur Bestimmung von Gelenkmomenten m dienen, müssen daher für $n = 1$ den Wert $m = 0$ ergeben; sie enthalten alle den Faktor $(1 - n)$. Sämtliche Gleichungen für Maximal- und Minimalmomente müssen für $n = 1$ die Momente des geschlossenen, quadratischen Rahmens oder einfach des eingespannten Stabes ergeben, die Nebmomente müssen überall verschwinden, d. h. den Faktor $(1 - n)$ besitzen. Dies sind alles schätzenswerte Proben für die Richtigkeit der abgeleiteten Formeln.

Um die Werte der Größtmomente an verschiedenen Stellen und an ein- und mehrreihigen Systemen miteinander vergleichen zu können, sollen für Fall a für verschiedene Werte n die Momente ausgerechnet und graphisch dargestellt werden als Kurven von der Gleichung $M = f(n)$. In der folgenden Tabelle auf Seite 25 sind die berechneten Werte zusammengestellt.

Daß für $n = k = 0,6446$ aus beiden Gleichungen (30) und (31) derselbe Wert sich ergibt, kann als Probe für die Richtigkeit derselben gelten.

b) Die lange Seite ist Querseite.

Es sollen hier die Bezeichnungen der Fig. 15 eingeführt werden, was gewisse Vorteile mit sich bringt gegenüber einer im Hinblick auf Früheres vielleicht konsequenteren Bezeichnung. Es muß dann natürlich

Tabelle 1.

Momente bei einer Mittelzelle der unendlich langen Reihe
(kurze Seite = Querseite).

(Vgl. Fig. 11 und 13.)

$n = \frac{b}{a}$	$M_{a \max}$	$-M_{a \min}$	$M_{b \max} = -M_{b \min}$		$\hat{M}_{a \max}$	$-\hat{M}_{a \min}$	$\hat{M}_{b \max} = -\hat{M}_{b \min}$
			$k = 0,6446$				
			$n > k$	$n < k$			
1	0,04167	0	0,04167	(-0,04167)	0	0,08333	0,08333
0,9	0,04676	0,00509	0,03758	—	0,00406	0,08739	0,07315
0,8	0,05090	0,00923	0,03074	—	0,00739	0,09072	0,06487
0,7	0,05406	0,01240	0,01933	(-0,00553)	0,01001	0,09334	0,05854
0,6446	—	—	0,00956	0,00956	—	—	—
0,6	0,05621	0,01455	(-0,00112)	0,02568	0,01190	0,09523	0,05424
0,5	0,05729	0,01562	—	0,08333	0,01305	0,09638	0,05208
0,4	0,05722	0,01556	—	0,20139	0,01348	0,09681	0,05222
	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$
Gleichung	27	28	30	31	36	35	32

in den früheren Formeln für n das Verhältnis $\frac{a}{b}$ eingesetzt werden, und da wir hier wieder $\frac{b}{a} = n$ setzen wollen, so ist der frühere Wert n durch $\frac{1}{n}$ zu ersetzen.

Die ungünstigsten Belastungen sind aus Fig. 15 ersichtlich. Die Ableitung der Gleichungen geschieht analog dem erstbehandelten Fall und wird deshalb weggelassen. Die Resultate sind die folgenden:

Infolge Wechselbelastung:

$$m = \frac{1-n^2}{2+n} \cdot \frac{pa^2}{12}$$

$$M_{a \max} = -M_{a \min} = \frac{2+3n-2n^3}{2+n} \cdot \frac{pa^2}{24}$$

$$M_b' = \frac{-2+4n^2+n^3}{(2+n)n^2} \cdot \frac{pb^2}{24}$$

Infolge Einzelbelastung:

$$\mu = \frac{4+n - \sqrt{(2+n)(6+n)}}{2}$$

$$m' = \frac{(1-n^2) \left[3+n - (1+n) \sqrt{\frac{6+n}{2+n}} \right]}{n^2} \cdot \frac{pb^2}{24}$$

$$M_b'' = \left[1 - (1-n^2) \sqrt{\frac{6+n}{2+n}} \right] \cdot \frac{pb^2}{24n^2}$$

Die Gleichung $M_b'' = 0$ liefert den Wert $n = k = 0,6096$. Mit Hilfe des Belastungsschemas in Fig. 15 wird für $n > k$:

$$M_{b \max} = m + M_b'' = \frac{4 + n - 2n^2 - (1 - n^2) \sqrt{(6 + n)(2 + n)}}{(2 + n)n^2} \cdot \frac{pb^2}{24}$$

$$M_{b \min} = M_b' - M_b'' = \frac{4 + n - 4n^2 - n^3 - (1 - n^2) \sqrt{(6 + n)(2 + n)}}{(2 + n)n^2} \cdot \frac{pb^2}{24}$$

Für $n < k$:

$$M_{b \max} = m = \frac{1 - n^2}{(2 + n)n^2} \cdot \frac{pb^2}{12}$$

$$M_{b \min} = M_b' = -\frac{2 - 4n^2 - n^3}{(2 + n)n^2} \cdot \frac{pb^2}{24}$$

Die Knotenpunktsmomente werden

$$\hat{M}_{a \min} = -\hat{M}_{a \max} = -(0,08902 - 0,04297 \cdot n + 0,03729 \cdot n^2) pa^2$$

$$\hat{M}_{b \min} = -(0,13956 - 0,18603 \cdot n + 0,12980 \cdot n^2) pa^2$$

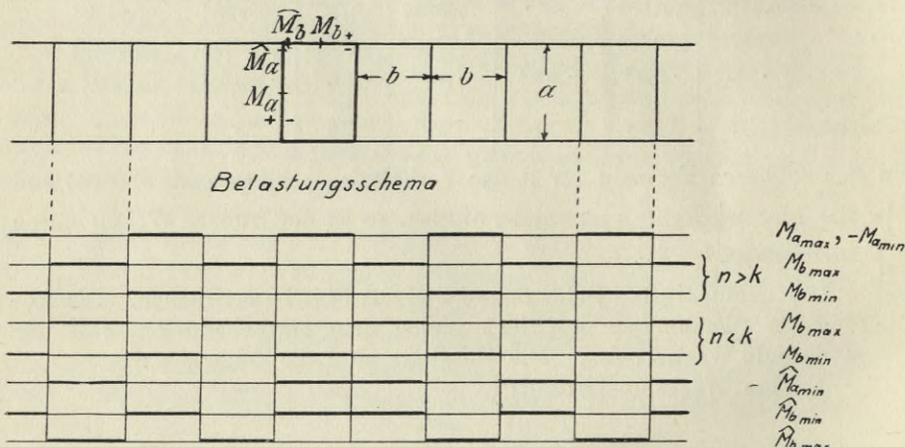


Fig. 15.

§ 11. Die Endzelle der unendlich langen Reihe.

Auch hier werden wieder zuerst die Momente für gewisse Grundbelastungen berechnet, aus denen sich die ungünstigsten Belastungen zusammensetzen (vgl. Fig. 18, Seite 31).

a) Kurze Seite = Querseite.

1. Endzelle belastet.

Die Bedingung $\alpha + \beta = \gamma$ liefert mit (4), (9) und (24) die Gleichung

$$n(1 - n) \cdot \frac{pa^3}{24} - \frac{b}{2} \cdot \frac{(1 + 2n)m}{(1 + n)(1 + 3n)} = \frac{1 + \sqrt{(1 + 2n)(1 + 6n)}}{4(2 + 3n)} \cdot a \cdot m,$$

worin m an Stelle der Gelenke zwischen Zelle 1 und 2 (Fig. 16) wirkt. Es folgt daraus

$$m = \frac{(1-n^2)(1+3n)}{(2+3n)n^3}.$$

· $\left[1 + 8n + 17n^2 + 12n^3 - (1 + 4n + 3n^2) \sqrt{(1+2n)(1+6n)}\right] \frac{pa^2}{24}$ (37)
und mit (8) (vgl. Fig. 16)

$$M_b' = M_0 + \frac{nm}{(1+n)(1+3n)} \cdot$$

$$- \bar{M}_b' = M_0 + \frac{(1+2n)m}{(1+n)(1+3n)}$$

Das Mittenmoment der kurzen Innenseite der Endzelle wird dabei positiv genommen, wenn die Seite sich gegen die Endzelle hin ausbiegt (Fig. 16).

2. Zweite Zelle belastet.

Wenn m_1' und m_2' die Gelenkmomente auf beiden Seiten der belasteten Zelle 2 bedeuten, so ist

$$-n(1-n) \frac{pa^3}{24} + \frac{b}{2} \cdot \frac{(1+2n)m_1' + nm_2'}{(1+n)(1+3n)} = -\frac{a(1+2n)}{2(2+3n)} \cdot m_1' \quad (38)$$

$$n(1-n) \frac{pa^3}{24} - \frac{b}{2} \cdot \frac{nm_1' + (1+2n)m_2'}{(1+n)(1+3n)} = \frac{1 + \sqrt{(1+2n)(1+6n)}}{4(2+3n)} \cdot a \cdot m_2',$$

welche Gleichungen zur Bestimmung von m_1' und m_2' dienen. Wenn diese Werte bekannt sind, wird

$$\bar{M}_b'' = M_0 + \frac{(1+2n)m_1' + nm_2'}{(1+n)(1+3n)}.$$

3. Wechselbelastung I.

Bei der Wechselbelastung der Fig. 16 wird durch die eingezeichneten Gelenke, entsprechend den früheren Methoden, ein Hauptssystem hergestellt, das aus einzelnen Rechteckrahmen und geraden Stäben besteht.

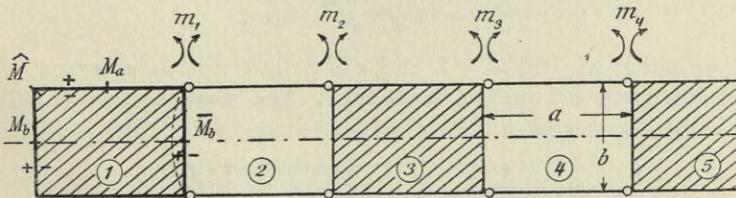


Fig. 16.

An Stelle der Gelenke wirken die statisch unbestimmten Momente m_1, m_2, \dots , welche durch ebensoviele Gleichungen (16) bestimmt sind. Wir haben es hier genau genommen mit unendlich vielen Unbekannten zu

tun. Die Werte m nähern sich aber immer mehr einem konstanten Wert, je weiter man sich von der Endzelle entfernt, und zwar geschieht dies, wie gezeigt werden wird, sehr rasch, und es gibt das folgende Annäherungsverfahren für die Praxis hinreichend genaue Gleichungen.

Es ist allgemein für das Gelenk r nach der r^{ten} Zelle, falls dieselbe eine von den gefüllten ist

$$EJ \cdot \alpha = n(1-n) \frac{pa^3}{24}$$

$$EJ \cdot \beta = -\frac{b}{2} \cdot \frac{n \cdot m_{r-1} + (1+2n)m_r}{(1+n)(1+3n)}$$

$$EJ \cdot \gamma = \frac{a}{6} (2m_r + m_{r+1}),$$

also nach (16):

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{n \cdot m_{r-1} + (1+2n)m_r}{(1+n)(1+3n)} + \frac{a}{6} (2m_r + m_{r+1}) = n(1-n) \frac{pa^3}{24}.$$

Für das Gelenk nach der r^{ten} leeren Zelle muß anstatt m_{r+1} das Moment m_{r-1} gesetzt werden und umgekehrt.

Setzen wir alle Momente m einander gleich ($= m_1$), so erhalten wir aus der Gleichung für Gelenk 1 eine erste ziemlich rohe Annäherung von m_1 . Wird bei einer neuen Berechnung $m_3, m_4 \dots = m_2$ gesetzt, m_2 aber nicht gleich m_1 , so erhält man aus den zwei Gleichungen für die Gelenke 1 und 2 eine zweite, bessere Annäherung für m_1 . Wird endlich erst $m_4, m_5 \dots = m_3$ gesetzt, so wird die Annäherung noch besser, und aus den Differenzen dieser drei Annäherungen läßt sich das Näherungsgesetz leicht erkennen und der wahre Wert von m_1 recht genau (bis zur sechsten Dezimalstelle) angeben. Diese Überlegung wird für die zwei Seitenverhältnisse $n = 0,8$ und $0,6$ zahlenmäßig durchgeführt. Aus obiger Gl. folgt für das Gelenk $r=1$ und mit $m_{r-1}=0$ und $m_{r+1}=m_r$ ($m_2=m_1$)

$$\frac{b}{2} \cdot \frac{(1+2n) \cdot m_1}{(1+n)(1+3n)} + \frac{a}{6} \cdot 3m_1 = n(1-n) \frac{pa^3}{24}$$

oder als erste Annäherung:

$$m_1 = \frac{n(1-n^2)(1+3n)}{1+5n+5n^2} \cdot \frac{pa^2}{12}.$$

Ferner erhalten wir für $r=1$ und $r=2$ und mit $m_0=0$ und $m_3=m_2$ zwei Gleichungen, m_1 und m_2 enthaltend. Aus diesen wird m_2 eliminiert, und es wird die zweite Annäherung

$$m_1 = \frac{n(1-n^2)(1+3n)(1+4n)}{1+9n+24n^2+19n^3} \cdot \frac{pa^2}{12}.$$

Einen analogen, noch umständlicheren Ausdruck erhält man für m_1 , wenn m_1, m_2 und m_3 verschieden genommen werden und erst $m_4=m_3$ gesetzt wird. Diese drei Näherungsgleichungen geben für $n=0,8$ und $0,6$ folgende Zahlenwerte:

Werte m_1 .

	$n = 0,8$	Differenz	$n = 0,6$	Differenz
1. Annäherung	0,009951		0,015448	
2. "	0,010296	345	0,015913	465
3. "	0,010336	40	0,015957	44
	$\cdot pa^2$		$\cdot pa^2$	

Der wahrscheinlichste Wert von m_1 wird daher

$$\text{für } n=0,8: m_1 = 0,010336 + 0,000040 \left[\frac{40}{345} + \left(\frac{40}{345} \right)^2 + \dots \right] = 0,010341 \cdot pa^2$$

$$\text{für } n=0,6: m_1 = 0,015957 + 0,000044 \left[\frac{44}{465} + \left(\frac{44}{465} \right)^2 + \dots \right] = 0,015962 \cdot pa^2$$

Die dritte Annäherung ist also schon sehr genau. Diese beiden Spezialwerte benötigen wir später bei der Aufstellung von empirischen Gleichungen der Größtmomente. Für m_1 selber wird die empirische Gleichung:

$$m_1 = (0,00450 + 0,05450 \cdot n - 0,05900 \cdot n^2) \cdot pa^2. \quad (39)$$

Es wird nun, m_1 als bekannt vorausgesetzt (Fig. 16)

$$M_a^x = M_0 + \frac{n \cdot m_1}{(1+n)(1+3n)} - \frac{n(2+3n) \cdot m_1}{(1+n)(1+3n)}.$$

In diesem Fall tritt das Maximalmoment nicht in der Mitte der Seite a auf, es kann aber aus dem Moment M_0 der gefüllten Einzelzelle und aus den an den Enden der Seite wirkenden Nebenmomenten berechnet werden, was später geschehen soll. Die beiden Ausdrücke links und rechts der vertikalen, punktierten Geraden sind die Nebenmomente am linken und rechten Ende der Seite a der Endzelle.

Es wird ferner

$$\begin{aligned} M_b^x &= M_0 + \frac{n \cdot m_1}{(1+n)(1+3n)} \\ - \bar{M}_b^x &= M_0 + \frac{(1+2n) \cdot m_1}{(1+n)(1+3n)} \\ \hat{M}^x &= M_0 + \frac{n \cdot m_1}{(1+n)(1+3n)} \end{aligned}$$

4. Wechselbelastung II.

Bei Belastung der Zellen 2, 4, 6 usw. (Fig. 16) geschieht die Auflösung ähnlich wie im vorhergehenden Abschnitt. Man erhält die Resultate:

n	m_1''	m_2''
0,8	0,013342	0,008751
0,6	0,021520	0,013814
	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$

und hierfür die empirischen Gleichungen

$$m_1'' = (0,01507 + 0,04948n - 0,06455n^2) \cdot pa^2$$

$$m_2'' = (0,00690 + 0,03916n - 0,04606n^2) \cdot pa^2$$

$$M_a^{\times\times} = \frac{m_1''}{2+3n} \dots - m_1''$$

$$M_b^{\times\times} = \frac{m_1''}{2+3n}$$

$$\bar{M}_b^{\times\times} = M_0 + \frac{(1+2n)m_1'' + nm_2''}{(1+n)(1+3n)}$$

$$\hat{M}^{\times\times} = + \frac{m_1''}{2+3n}.$$

5. Gleichung zur Berechnung des Größtmomentes.

Bevor wir die Momente der ungünstigsten Belastungen aus den eben berechneten Grundbelastungen zusammensetzen, soll eine Gleichung abgeleitet werden, die für unsymmetrische Fälle anzuwenden ist, d. h. in Fällen, bei denen das Maximalmoment nicht mehr in der Seitenmitte auftritt.

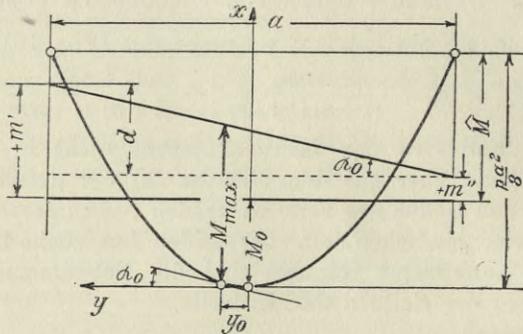


Fig. 17.

Die Gleichung soll das Maximalmoment M_{max} (Fig. 17) berechnen lassen, wenn gegeben sind das Moment $M_0 = \frac{pa^2}{8} - \hat{M}$ für einen symmetrischen Fall (Moment der Einzelzelle), und die an den Enden der Seite a wirkenden, ungleichen Momente (Nebenmomente), m' und m'' , welche die Symmetrie stören.

Die Gleichung der Parabel, bezogen auf die x - und y -Achse, lautet

$$y^2 = \frac{2x}{p}$$

(p ist hier nicht der Parabelparameter, sondern die Belastung pro Längeneinheit).

Die Neigung einer beliebigen Tangente gegen die y -Achse wird

$$tg \alpha = \frac{dx}{dy} = p \cdot y.$$

aber werden für einige dieser n -Werte die Momente berechnet, um den Verlauf derselben auch dafür in den noch folgenden graphischen Darstellungen einzeichnen zu können.

Mit Benützung der Gleichung (40) und des Belastungsschemas in Fig. 18 wird nun

$$M_{a \max} = M_a^{\times} = M_0 - \frac{n}{2(1+n)} \cdot m_1 + \frac{9n^2}{2(1+3n)^2} \cdot \frac{m_1^2}{p a^2},$$

oder mit den Werten m_1 aus (39) empirisch entwickelt

$$M_{a \max} = \left[\frac{1}{24} (1 + 2n - 2n^2) - (-0,00415 \cdot + 0,02354 \cdot n - 0,01939 \cdot n^2) \right] \cdot p a^2$$

$$M_{a \max} = (0,04582 \cdot + 0,05979 \cdot n - 0,06394 \cdot n^2) \cdot p a^2 \quad . \quad (41)$$

Die größten negativen Momente der langen Seite sind durch die geradlinig zu verbindenden Momente M_a^{\times} an den beiden Enden der Seite bestimmt. Für $n > k$ wird

$$M_b \max = M_b' + M_b^{\times} = M_0 + \frac{nm}{(1+n)(1+3n)} + \frac{m_1''}{2+3n}$$

oder

$$M_b \max = (0,02651 + 0,08569 \cdot \frac{1}{n} - 0,07053 \cdot \frac{1}{n^2}) \cdot p b^2 \quad . \quad (42)$$

Die Gültigkeitsgrenze dieser Gleichung berechnet sich aus $M_b' = 0$ zu

$$n = k = 0,714.$$

Ferner wird

$$M_b \min = M_b^{\times} - M_b' = \frac{n}{(1+n)(1+3n)} \cdot (m_1 - m)$$

$$m_1 \text{ und } m \text{ aus (39) und (37)}$$

oder

$$M_b \min = - \left(-0,00221 + 0,00100 \cdot \frac{1}{n} + 0,00121 \cdot \frac{1}{n^2} \right) \cdot p b^2 \quad . \quad (43)$$

Diese Gleichung, die ebenfalls nur bis $n = 0,714$ gültig ist, muß mit Rücksicht auf das in § 10 (Seite 24) für quadratische Zellen ausgesprochene Gesetz für $n = 1$ den Wert Null ergeben.

$$\bar{M}_b \min = \bar{M}_b' + \bar{M}_b^{\times} - \bar{M}_b'' =$$

$$= -M_0 - \frac{1+2n}{(1+n)(1+3n)} (m - m_1'' + m_1') - \frac{n(m_2' - m_2'')}{(1+n)(1+3n)}$$

oder

$$\bar{M}_b \min = - \left(0,02604 + 0,07787 \cdot \frac{1}{n} - 0,06224 \cdot \frac{1}{n^2} \right) \cdot p b^2 \quad . \quad (44)$$

Gültigkeitsgrenze für $\bar{M}_b \max$ und $\bar{M}_b \min$ aus $\bar{M}_b' = 0$: $n = k_1 = 0,6605$.

$$\bar{M}_b \max = \bar{M}_b^{\times} + \bar{M}_b'' - \bar{M}_b'$$

$$\bar{M}_b \max = \left(0,02305 + 0,07117 \cdot \frac{1}{n} - 0,05255 \cdot \frac{1}{n^2} \right) \cdot p b^2 \quad . \quad (45)$$

$\bar{M}_b \max$ bedeutet dabei das größte Moment im Sinne einer in Fig. 16 einpunktierten Durchbiegung, $\bar{M}_b \min$ das entgegengesetzte.

Tabelle 2.
 Momente bei einer Endzelle der unendlich langen Reihe (kurze Seite = Querseite).
 (Vgl. Fig. 18.)

$n = \frac{b}{a}$	$M_{b \text{ max}}$		$-M_{b \text{ min}}$		$\bar{M}_{b \text{ max}}$				$-\bar{M}_{b \text{ min}}$				\hat{M}_{max}	$-\hat{M}_{\text{min}}$		
	$k = 0,714$		$k = 0,714$		$k_1 = 0,6605$		$k_2 = 0,648$		$k_1 = 0,6605$		$k_2 = 0,648$				\hat{M}_{max}	$-\hat{M}_{\text{min}}$
	$n > k$	$n < k$	$n > k$	$n < k$	$n > k_1$	$n < k_1$	$k_1 > n > k_2$	$n < k_2$	$n > k_1$	$k_1 > n > k_2$	$n < k_2$	\hat{M}_{max}				
1	0,0417	0,0417 (0)	0	(-0,0417)	0,0417	-	-	-	0,0417	-	-	0	0,0833			
0,9	0,0478	0,0346	0,0004	-	0,0373	-	-	-	0,0357	-	-	0,0016	0,0758			
0,8	0,0527	0,0234 (0,0047)	0,0009	(-0,0184)	0,0299	-	-	-	0,0262	-	-	0,0030	0,0690			
0,714	-	0,0082	0,0016	0,0016	-	-	-	-	-	-	-	-	-			
0,7	0,0563	(0,0050)	0,0090	0,0044	0,0175	-	(-0,0034)	-	0,0103	-	(-0,0126)	0,0044	0,0645			
0,6605	-	-	-	-	0,0104	0,0104	-	-	0,0012	0,0012	-	-	-			
0,648	-	-	-	-	-	0,0113	0,0113	-	-	0,0008	0,0008	-	-			
0,6	0,0587	-	-	0,0429	(-0,0042)	-	0,0295	(-0,0169)	-	-	-	0,0165	0,0056			
0,5	0,0597	-	-	0,1124	-	-	0,0889	-	-	-	-	0,0665	0,0068			
	$\cdot pa^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pa^2 \cdot pb^2$			
Gleichung	41	42	43	47	45	-	-	-	44	-	-	-	48			

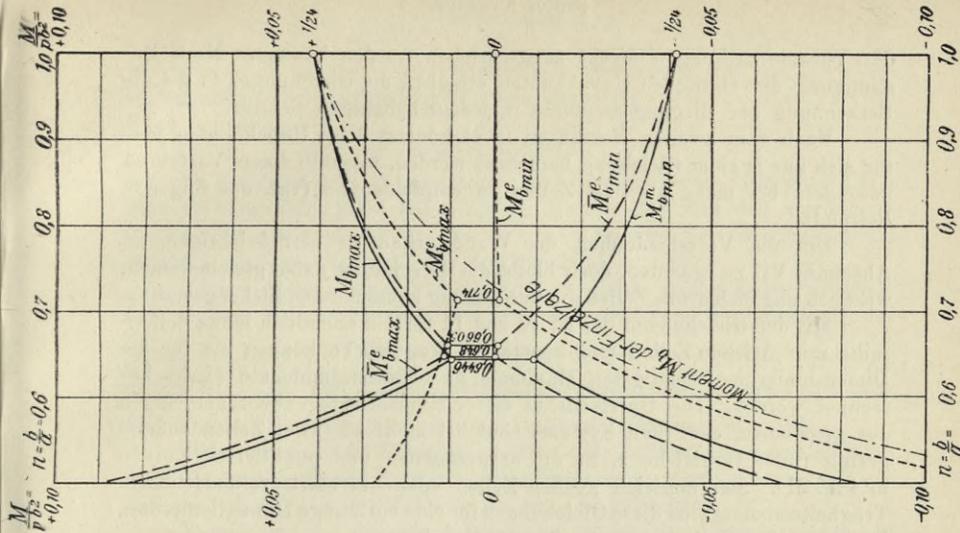


Fig. 20. Momente der Querschnitte.

für ein System mit unendlich langen Systemen (kurze Seite = Querseite).

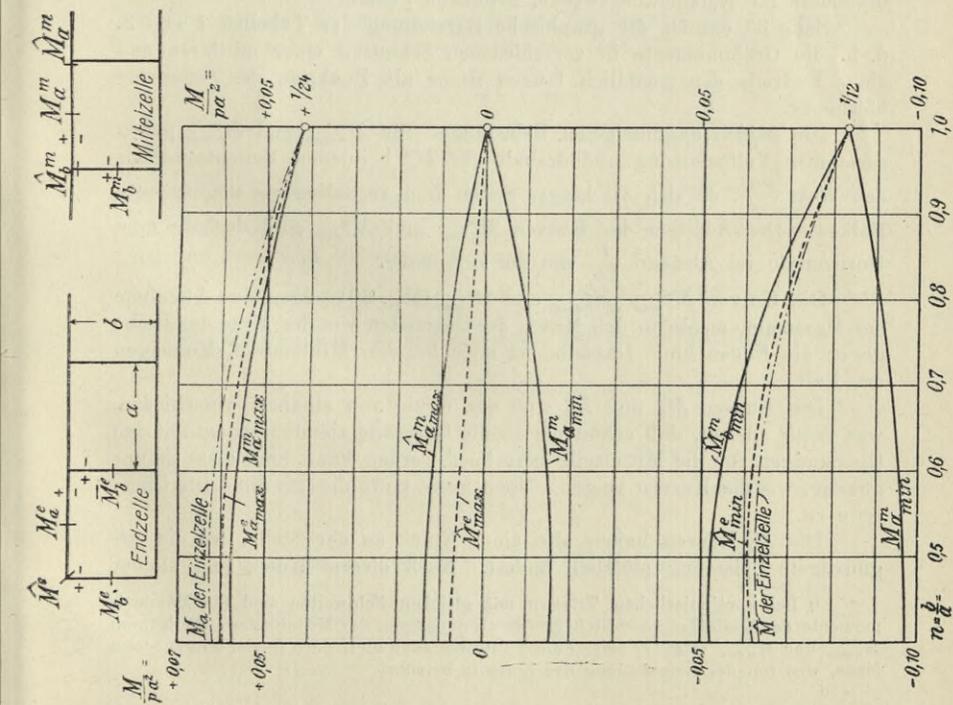


Fig. 19. Momente der Längsschnitte.

für eine mittlere und eine Endzelle des einseitigen, unendlich langen Systems (kurze Seite = Querseite).

der Voruntersuchungen direkt angeschrieben werden können. Nach Bestimmung der statischen Unbekannten erlauben die Gleichungen in § 4 die Berechnung der Biegemomente in jedem beliebigen Schnitt.

Nach dem zweiten Verfahren (§ 7) können diese Unbekannten jede für sich aus je einer Gleichung berechnet werden, weshalb dieses Verfahren besonders bei mehr als drei Zellen zu empfehlen ist (vgl. das folgende Beispiel).

Um die Verschiedenheit der Wandstärken zu berücksichtigen, ist Abschnitt VII zu beachten, doch bleibt die Berechnung dabei gleich einfach, wie auch ungleich große Zellen die Berechnung kaum umständlicher gestalten.

Mit den Gleichungen der §§ 10 und 11 für die unendlich lange Zellenreihe mit gleichen Zellen und konstanter Wandstärke können die für die Dimensionierung wichtigsten Maximal- und Minimalmomente direkt berechnet werden. Die Unterschiede dieser Momente gegenüber denjenigen des gegebenen, endlichen Systems sind bei mehr als zwei Zellen äußerst gering (man vergleiche z. B. die ausgezogenen und punktierten Kurven in Fig. 21). Bei ungleich großen Zellen oder bei stark veränderlichem Trägheitsmoment sind diese Gleichungen für eine vorläufige Dimensionierung, besonders für Kalkulationszwecke, genügend genau.

Seite 35 enthält die graphische Darstellung der Tabellen 1 und 2, d. h. die Größtmomente in verschiedenen Schnitten einer mittleren und einer Endzelle der unendlich langen Reihe als Funktion des Seitenverhältnisses.

Die beiden ungünstigsten Belastungen für M_a^m und M_a^m geben zusammen Vollbelastung und deshalb für M_a^m bei jedem Seitenverhältnis den Wert $\frac{pa^2}{24}$, da sich die langen Seiten dann verhalten wie eingespannte Balken. Die Addition der Kurven M_a^m und M_a^m gibt deshalb eine Horizontale im Abstand $\frac{1}{24}$ von der n -Achse¹⁾.

Die Kurven M_b^m , \bar{M}_b^m und M_b^e (Fig. 20) zeigen eine Abnahme der Maximalmomente in den Mitten der Querseiten von der Mitte der Reihe gegen die Enden hin. Dasselbe ist auch bei den Minimal- M_b -Momenten der Fall.

Die Kurven M_b^m und \bar{M}_b^m sind nur wenig von einander verschieden, was dafür spricht, daß schon die zweite Querseite ziemlich genau mit den Gleichungen für die Mittelzelle berechnet werden kann, und zwar zu ungunstig, wie die Kurven zeigen. Noch mehr trifft dies für die dritte Querseite zu.

Die M_b -Kurven haben alle einen Knick an der Stelle, wo die ungünstigste Belastung plötzlich ändert. Nach diesem Knick (bei kleiner

¹⁾ Bei kontinuierlichen Trägern mit gleichen Feldweiten sind die Maximalmomente der Endfelder wesentlich größer als diejenigen der Mittelfelder. Die Kurven M_a^m und M_a^e (Fig. 19) zeigen diese Tatsache auch hier, doch in viel schwächerem Maße, was von der Einspannung der Endseite herrührt.

werdendem n) wachsen die Größtmomente sehr rasch, was zeigt, wie unwirtschaftlich Zelleneinteilungen sind, die stark von der quadratischen Form abweichen.

§ 13. Beispiel.

In der Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen (Jahrgang 1911, Heft 1) behandelte Herr Dipl.-Ing. H. Marcus den Fall des einreihigen Zellensystems mit anschließendem Beispiel. Es wird hier dasselbe Beispiel gewählt, um eine Kontrolle für die Resultate zu haben.

Es sei deshalb eine fünfzellige Reihe gleich großer Zellen gegeben. Die längere Zellenseite mißt 4,5 m und verläuft in der Richtung der Reihe, die Länge der kürzeren Seite beträgt 3,0 m, so daß $n = \frac{b}{a} = \frac{3,0}{4,5} = 0,667 \left(= \frac{2}{3} \right)$. Der größte, gleichmäßige Innendruck betrage $p = 4 \text{ t/qm}$. Das Trägheitsmoment sei durchweg konstant (Fig. 21, Seite 39).

Wir behandeln die Einzelbelastungen aller Zellen für sich und addieren dann die ungünstigsten Einflüsse. Der Symmetrie wegen können wir uns auf die Belastungen der Zelle 3, 4 und 5 beschränken.

Zuerst werden die oft gebrauchten Werte der Voruntersuchungen (§ 4) berechnet. Es wird in der ganzen Berechnung $EJ = 1$ gesetzt.

Die Momente der Einzelzelle werden nach (2) und (3)

$$\hat{M} = -\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right) \cdot \frac{4 \cdot 4,5^2}{12} = -5,2500 \text{ mt} \quad \dots \quad (2)$$

$$M_a = \frac{4 \cdot 4,5^2}{8} - 5,25 = +4,8750 \text{ mt} \quad \left. \vphantom{M_a} \right\} \dots \quad (3)$$

$$M_b = \frac{4 \cdot 3,0^2}{8} - 5,25 = -0,7500 \text{ mt} \quad \left. \vphantom{M_b} \right\}$$

Nach Gleichung (4) ist die Eckverdrehung der gefüllten Einzelzelle (die Einheiten sind Meter und Tonnen)

$$\alpha = n(1-n) \frac{pa^3}{24} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 4,5^3}{24} = 3,375 \quad \dots \quad (4)$$

Die Gleichungen (8) und (9) lauten für unsern Fall (vgl. Fig. 4)

$$\left. \begin{aligned} m_{12} &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{4m' - m''}{5/3 \cdot 3} = -\frac{8}{15} m' + \frac{2}{15} m'' \\ m_{21} &= \quad \quad \quad + \frac{2}{15} m' - \frac{8}{15} m'' \\ m_{14} &= \frac{7/3 m' + 2/3 m''}{5/3 \cdot 3} = +\frac{7}{15} m' + \frac{2}{15} m'' \\ m_{23} &= \quad \quad \quad + \frac{2}{15} m' + \frac{7}{15} m'' \end{aligned} \right\} \dots \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta' &= \frac{3,0}{2} \cdot \frac{7/3 m' + 2/3 m''}{5/3 \cdot 3} = +\frac{7}{10} m' + \frac{1}{5} m'' \\ \beta'' &= \quad \quad \quad -\frac{1}{5} m' - \frac{7}{10} m'' \end{aligned} \right\} \dots \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (14) und (15) folgt mit Fig. 6

$$\left. \begin{aligned} m_{s1} &= \frac{1+2\mu}{2+2} \cdot m = \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}\right) m \\ m_b &= \frac{1-2\mu}{4} \cdot m = \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu}{2}\right) m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

$$\delta = \frac{3,0(1-2\mu)m}{2 \cdot 4} = \left(\frac{3}{8} - \frac{3}{4}\mu\right) m \dots \dots \dots (15)$$

Die Gleichungen (19) und (20) werden

$$\mu_{n-2} = \frac{3,0}{6,0 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{\gamma_{n-2}}{m}} = \frac{3}{6 + 8 \cdot \frac{\gamma_{n-2}}{m}} \dots \dots \dots (19)$$

$$\gamma_{n-1} = \frac{4,5 \left(1 + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \cdot \mu_{n-2}\right) m}{2 \cdot 4} = \left(\frac{21}{16} - \frac{3}{8} \cdot \mu_{n-2}\right) m \dots \dots (20)$$

1. Zelle 3 belastet.

Wir fangen am linken Ende an und berechnen nach (20) den Winkel γ_1 im Punkt 1 infolge eines dort wirkenden Moments m ($\mu_{n-2} = 0$):

$$\gamma_1 = \frac{21}{16} m.$$

Nach (19)
$$\mu_1 = \frac{3}{6 + 8 \cdot \frac{21}{16}} = \frac{2}{11}.$$

Nach (20)
$$\gamma_2 = \left(\frac{21}{16} - \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{11}\right) m = 1,2443 m.$$

Im Gelenk 2 ist ferner nach (4) u. (9)

$$\alpha = 3,375; \beta = \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\right) m = \frac{9}{10} m.$$

Die Verdrehungswinkel sind alle absolut angeschrieben, die Bedingungsgleichung lautet daher $\alpha - \beta = \gamma$ oder $\beta + \gamma = \alpha$:

$$\begin{aligned} \frac{9}{10} m_2 + 1,2443 m_2 &= 3,375 \\ m_2 &= \mathbf{1,5739 \text{ mt.}} \end{aligned}$$

Nach (23) wird dann

$$m_1 = m_2 \cdot \mu_1 = \mathbf{0,2862 \text{ mt.}}$$

und mit (14) (vgl. Fig. 21)

$$-M_0^m = -M_1^r = \frac{1}{4} m_1 = 0,0716$$

$$M_1^r = m_1 = 0,2862.$$

(Die Vorzeichen lassen sich sehr einfach bestimmen, indem man sich den Drehungssinn der Gelenkmomente m_1 und m_2 klar macht, vgl. Seite 12.)

$$M_1^m = M_1^o = \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_1}{2}\right) m_2 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{11}\right) 1,5739 = 0,2504$$

$$M_2^l = \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_1}{2}\right) m_2 = 0,5366$$

$$-M_2^r = m_2 = 1,5739.$$

Die Nebenmomente der Zelle 3 werden nach (8)

$$M_2^{m'} = M_2^{o'} = \left(\frac{7}{15} + \frac{2}{15}\right) m_2 = \frac{3}{5} \cdot 1,5739 = 0,9444$$

$$-M_3^{m''} = -M_3^{o'} = \left(\frac{8}{15} - \frac{2}{15}\right) m_2 = \frac{2}{5} \cdot 1,5739 = 0,6295,$$

die Gesamtmomente daher mit (2) u. (3)

$$M_2^m = -0,7500 + 0,9444 = +0,1944$$

$$M_2^o = -5,2500 + 0,9444 = -4,3056$$

$$M_3^i = -5,2500 - 0,6295 = -5,8795.$$

Diese Resultate sind in Tabelle 3 (Seite 43) zusammengestellt.

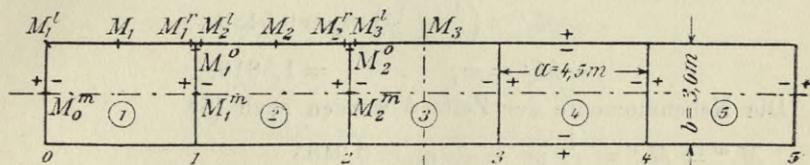


Fig. 21.

2. Zelle 4 belastet.

Wieder am linken Ende anfangend, erhält man (die ersten Werte von vorher)

$$\gamma_1 = \frac{21}{16} m = 1,3125 \cdot m; \quad \mu_1 = \frac{2}{11} = 0,18182$$

$$\gamma_2 = 1,2443 \cdot m; \quad \mu_2 = \frac{3}{6 + 8 \cdot \frac{\gamma_2}{m}} = 0,18804$$

$$\gamma_3 = \left(\frac{21}{16} - \frac{3}{8} \mu_2\right) m = 1,2420 \cdot m; \quad \mu_3 = \frac{3}{6 + 8 \cdot \frac{\gamma_3}{m}} = 0,18825$$

$$\gamma_4 = \left(\frac{21}{16} - \frac{3}{8} \mu_3\right) m = 1,2419 \cdot m.$$

Nach (9) wird

$$\beta_3 = \frac{7}{10} m_3 + \frac{1}{5} m_4$$

$$\beta_4 = \frac{1}{5} m_3 + \frac{7}{10} m_4.$$

Mit der Gelenkbedingung $\beta + \gamma = \alpha$ wird (α wie vor)

$$\text{für Gelenk 3: } \frac{7}{10} m_3 + \frac{1}{5} m_4 + 1,2420 \cdot m_3 = 3,375,$$

$$\text{für Gelenk 4: } \frac{1}{5} m_3 + \frac{7}{10} m_4 + 1,3125 \cdot m_4 = 3,375,$$

woraus folgt $m_3 = 1,5810$

$$m_4 = 1,5199$$

$$m_2 = \mu_2 \cdot m_3 = 0,18804 \cdot 1,5810 = 0,2973$$

$$m_1 = \mu_1 \cdot m_2 = 0,18182 \cdot 0,2973 = 0,0541.$$

Nach (14) wird nun

$$\begin{aligned}
 M_0^m &= M_1^i = \frac{m_1}{4} = 0,0135 \\
 &\quad - M_1^r = m_1 = 0,0541 \\
 - M_1^m &= - M_1^o = \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_1}{2}\right) m_2 = 0,0473 \\
 &\quad - M_2^i = \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_1}{2}\right) m_2 = 0,1014 \\
 &\quad M_2^r = m_2 = 0,2973 \\
 M_2^m &= M_2^o = \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_2}{2}\right) m_3 = 0,2466 \\
 &\quad M_3^i = \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_2}{2}\right) m_3 = 0,5439 \\
 &\quad - M_3^r = m_3 = 1,5810.
 \end{aligned}$$

Die Nebenmomente der Zelle 4 werden nach (8)

$$\begin{aligned}
 M_3^{m'} &= M_3^{o'} = \frac{7}{15} m_3 + \frac{2}{15} m_4 = 0,9405 \\
 - M_4^{r'} &= \frac{8}{15} m_3 - \frac{2}{15} m_4 = 0,6405 \quad (= m_3 - M_3^{m'}) \\
 - M_4^{r'} &= -\frac{2}{15} m_3 + \frac{8}{15} m_4 = 0,5998 \\
 M_4^{m'} &= M_4^{o'} = \frac{2}{15} m_3 + \frac{7}{15} m_4 = 0,9201 \quad (= m_4 + M_4^{r'}).
 \end{aligned}$$

Mit (2) und (3) folgt somit

$$\begin{aligned}
 - M_3^m &= - 0,7500 + 0,9405 = + 0,1905, \\
 - M_3^o &= - 5,2500 + 0,9405 = - 4,3095, \\
 M_4^i &= - 5,2500 - 0,6405 = - 5,8905, \\
 M_4^r &= - 5,2500 - 0,5998 = - 5,8498, \\
 M_4^o &= - 5,2500 + 0,9201 = - 4,3299, \\
 M_4^m &= - 0,7500 + 0,9201 = + 0,1701.
 \end{aligned}$$

Es wird ferner mit (14)

$$\begin{aligned}
 - M_5^i &= m_4 = 1,5199 \\
 M_5^r &= M_5^m = \frac{1}{4} m_4 = 0,3800.
 \end{aligned}$$

Auch diese Werte tragen wir in Tabelle 3 ein, und zwar ergeben diejenigen für Zelle 4 und 5 der Symmetrie wegen auch die horizontale Reihe für die zweite belastete Zelle.

3. Zelle 5 belastet.

Die γ - und μ -Werte sind auf Seite 39 berechnet.

Für Zelle 5 wird in Punkt 4 nach (9)

$$\beta_4 = \frac{7}{10} m_4$$

und mit

$$\beta + \gamma = \alpha,$$

$$\frac{7}{10} m_4 + 1,2419 \cdot m_4 = 3,375,$$

woraus folgt

$$m_4 = 1,7380$$

$$m_3 = \mu_3 \cdot m_4 = 0,3271$$

$$m_2 = \mu_2 \cdot m_3 = 0,0615$$

$$m_1 = \mu_1 \cdot m_2 = 0,0112.$$

Nach (14) wird nun

$$-M_0^m = -M_1^i = \frac{m_1}{4} = 0,0028$$

$$+M_1^r = m_1 = 0,0112$$

$$M_1^m = M_1^o = \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_1}{2}\right) m_2 = 0,0098$$

$$+M_2^i = \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_1}{2}\right) m_2 = 0,0210$$

$$-M_2^r = m_2 = 0,0615$$

$$-M_2^m = -M_2^o = \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_2}{2}\right) m_3 = 0,0510$$

$$-M_3^i = \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_2}{2}\right) m_3 = 0,1125$$

$$M_3^r = m_3 = 0,3271$$

$$-M_3^m = -M_3^o = \left(\frac{1}{4} - \frac{\mu_3}{2}\right) m_4 = 0,2709$$

$$M_4^i = \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_3}{2}\right) m_4 = 0,5980$$

$$-M_4^r = m_4 = 1,7380.$$

Die Nebenmomente in Zelle 5 sind nach (8)

$$M_4^{m'} = M_4^{o'} = \frac{7}{15} m_4 = 0,8111,$$

$$-M_5^{i'} = \frac{8}{15} m_4 = 0,9269,$$

$$M_5^{r'} = M_5^{m'} = \frac{2}{15} m_4 = 0,2317.$$

Mit (2) und (3) folgt somit

$$-M_4^m = -0,7500 + 0,8111 = +0,0611,$$

$$-M_4^o = -5,2500 + 0,8111 = -4,4389,$$

$$M_5^{i'} = -5,2500 - 0,9269 = -6,1769,$$

$$M_5^r = -5,2500 + 0,2317 = -5,0183,$$

$$M_5^m = -0,7500 + 0,2317 = -0,5183.$$

Mit diesen Werten wird Tabelle 3 vervollständigt. Durch Addition der Werte gleichen Vorzeichens werden die Maximal- und Minimalmomente erhalten. Die Größtmomente der langen Seiten, die nicht in den Seitenmitten auftreten, können nach Gl. (40) berechnet werden.

In Fig. 22 sind die Maximal- und Minimalmomente aus Tabelle 3

aufgetragen. Mit Hilfe der Parabelpfeile $\frac{pa^2}{8}$ und $\frac{pb^2}{8}$ lassen sich dann die Kurven der Größtmomente bis auf kleine Ungenauigkeiten (in den Punkten, wo die Parabeln von den Geraden geschnitten werden), die für die Dimensionierung belanglos sind, einzeichnen. Um die Kurven ganz genau zu zeichnen, geht man am besten nach der beim kontinuierlichen Träger üblichen, graphischen Methode von Prof. W. Ritter vor¹⁾, indem man die Momentenlinien für jede der fünf Einzelbelastungen einzeichnet und an jeder Stelle die Ordinaten gleichen Vorzeichens addiert. In Fig. 22 ist dies geschehen, es wurden aber nur die Kurven der Größtmomente ausgezogen.

Für $M_{0,max}$ ist Zelle 1 nicht zu belasten (dies folgt auch aus $n < k$, $k = 0,714$), weshalb die Maximallinie der Endquerseite geradlinig verläuft (Fig. 22). Die Momente der Querseitenmitten sind verhältnismäßig klein, was aber nur in der Nähe des Seitenverhältnisses $\frac{2}{3}$ der Fall ist (vgl. Fig. 20).

In der Reihe „Vollbelastung“ der Tabelle 3, die aus $M_{max} + M_{min}$ entstanden ist, läßt sich eine Probe anstellen: Die Summe aller Momente um einen Knotenpunkt muß = 0 sein; es ist also

$$M_1^r - M_2^l + M_1^o = 0 \quad \text{und} \quad M_2^r - M_3^l + M_2^o = 0.$$

Diesen Gleichungen müssen auch die Werte der Einzelreihen 1 bis 5 genügen.

Die Größtmomente der langen Seiten berechnen sich nach (40) wie folgt. Ihre Lage ist aus Fig. 22 ersichtlich, kann aber auf Grund der Ableitung auf Seite 30 leicht berechnet werden.

$$M_{1,max} = \frac{pa^2}{8} + \frac{M_1^l + M_1^r}{2} + \frac{(M_1^l - M_1^r)^2}{2pa^2} = 4,6427 \text{ mt.}$$

$$M_{2,max} = \frac{pa^2}{8} + \frac{M_2^l + M_2^r}{2} + \frac{(M_2^l - M_2^r)^2}{2pa^2} = 4,3536 \text{ mt.}$$

$$M_{3,max} = \frac{pa^2}{8} + M_3^l = 4,4601 \text{ mt.}$$

Es ist von Interesse, die Gleichungen für die unendlich lange Zellenreihe auf dieses Beispiel anzuwenden, und die daraus sich ergebenden Momente mit den genauen Werten zu vergleichen:

Mittelzelle.

Moment		$M_{a,max}$	$M_{a,min}$	$M_{b,max}$	$M_{b,min}$	$\hat{M}_{a,min}$	$\hat{M}_{b,min}$	$\hat{M}_{a,max}$
Unendliche Reihe	Gleichungen	27	28	30	30	35	32	36
		4,447	-1,071	0,498	0,498	-7,618	-4,607	0,868
Aus Tabelle 3	Zelle 3	4,460	-1,037	0,441	0,512	-7,573	-4,628	0,871
	Zelle 2	4,354	-1,109	—	—	-7,689 -7,526	-4,377	0,553 0,895

¹⁾ W. Ritter, Anwendungen der graph. Statik, 3. Band, Zürich 1900, Raustein.

Tabelle 3.
 Zusammenstellung der Momente des in § 13 behandelten Beispiels, vgl. Fig. 21.
 (Sämtliche Momente in Meter-tonnen.)

Belastete Zelle	M_1'	M_1''	M_2'	M_2''	M_2^r	M_3'	M_3''	M_0'''	M_1'''	M_2'''	M_1^0	M_2^0
1	-5,0183	-6,1769	-1,7380	+0,5980	+0,3271	-0,5183	-0,0611	-0,2709	+4,4389	-0,2709	+4,4389	-0,2709
2	+0,3800	-1,5199	-5,8498	-5,8905	-1,5810	+0,3800	+0,1701	-0,1905	-4,8299	-0,1905	-4,8299	+4,3095
3	-0,0716	+0,2862	+0,5566	-1,5739	-5,8795	-0,0716	+0,2504	+0,1944	+0,2504	+0,1944	+0,2504	-4,3056
4	+0,0185	-0,0541	-0,1014	+0,2973	+0,5439	+0,0185	-0,0473	+0,2466	-0,0473	+0,2466	-0,0473	+0,2466
5	-0,0028	+0,0112	+0,0210	-0,0615	-0,1125	-0,0028	+0,0098	-0,00510	+0,0098	-0,00510	+0,0098	-0,0510
M_{max}	+0,3935	+0,2974	+0,5576	+0,8953	+0,8710	+0,3935	+0,4303	+0,4410	+4,6991	+0,4410	+4,6991	+4,5561
Belastete Zellen	2+4	3+5	3+5	1+4	1+4	2+4	2+3+5	3+4	1+3+5	3+4	1+3+5	2+4
M_{min}	-5,0927	-7,7509	-7,6892	-7,5259	-7,5730	-5,0927	-0,1084	-0,5124	-4,3772	-0,5124	-4,3772	-4,6275
Belastete Zellen	1+3+5	1+2+4	1+2+4	2+3+5	2+3+5	1+3+5	1+4	1+2+5	2+4	1+2+5	2+4	1+3+5
Vollbelastung	-4,6992	-7,4535	-7,1316	-6,6306	-6,7020	-4,6992	+0,3219	-0,0714	+0,3219	-0,0714	+0,3219	-0,0714
Eckmomente zur Berechnung von M_1, M_2, M_3^{max}	-5,0927	-5,8795	-5,9512	-5,5932	-5,6649	-5,0927						
Belastete Zellen	1+3+5	1+3+5	2+4	2+4	1+3+5	1+3+5						
Eckmomente zur Berechnung von M_1, M_2, M_3^{min}	+0,3935	-1,5740	-1,1804	-1,2374	-1,0371	+0,3935						
Belastete Zellen	2+4	2+4	1+3+5	1+3+5	2+4	2+4						

Endzelle.

Moment	$M_{a\max}$	$M_{a\min}$	$M_{b\max}$	$M_{b\min}$	$\bar{M}_{b\max}$	$\bar{M}_{b\min}$	\hat{M}_{\min}	
Unendliche Reihe	41	—	46	47	44	45	48	
	4,638	0,392	-1,569	0,392	-0,592	0,416	-0,101	-5,144
Zelle 1 aus Tabelle 3	4,643	0,393	-1,574	0,393	-0,593	0,430	-0,108	-5,093

Die Werte für die unendliche Reihe sind in Fig. 22 durch die punktierten Kurven dargestellt. An den meisten Stellen, besonders im Endfeld, ist auf der Zeichnung ein Unterschied nicht wahrzunehmen. Man erkennt

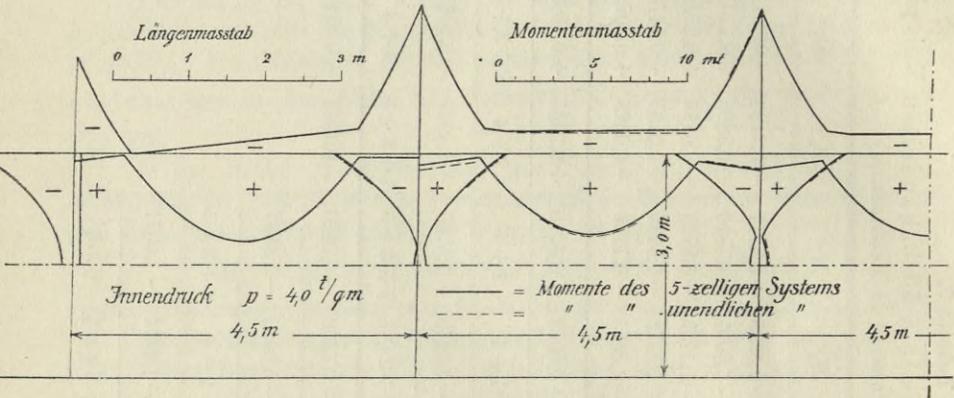


Fig. 22.

daraus, mit welcher großer Genauigkeit man ein gegebenes Beispiel nach den einfachen Formeln für die unendlich lange Reihe berechnen kann.

Aber auch die genaue Methode, die vor allem bei ungleich großen Zellen und bei veränderlichem Trägheitsmoment anzuwenden ist, ist, wie das Beispiel zeigt (es wurde kein Rechnungsgang übersprungen) für die Praxis nicht zu umständlich.

Vierter Abschnitt.

Das zweireihige Zellsystem.

In der Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen (Jahrgang 1911, Heft 4) behandelt Herr Dipl.-Ing. H. Marcus den Fall des zweireihigen Zellsystems unter Zugrundlegung eines aus Zweigelenrahmen und geraden Stabstücken bestehenden Hauptsystems. Das Verfahren wird auf ein Beispiel einer zehnzelligen Anordnung angewendet, aber nur für einen bestimmten Belastungsfall durchgeführt. Wenn man nun bedenkt, daß für die vollständige Durchführung der Berechnung im allgemeinen bei n Zellen n Belastungsfälle (hier der Symmetrie wegen nur drei) zu untersuchen sind, so muß man das Verfahren, das für den einen Belastungsfall schon eine große Rechenarbeit erfordert, als ziemlich umständlich bezeichnen.

Es wurde nun versucht, auch hier wie im dritten Abschnitt vorzugehen, d. h. das Hauptsystem aus geschlossenen Rahmen und geraden Stäben zu bilden. Die Berechnung zeigte sich aber gerade so kompliziert wie die oben genannte Behandlung, insbesondere führte das in § 7 beschriebene, für einreihige Systeme so einfache Verfahren, nach welchem die Drehwinkel γ und die Verkleinerungskoeffizienten μ fortlaufend ein Wert aus dem andern berechnet werden, hier zu sehr umständlichen Gleichungen. Es wurde deshalb vorgezogen, einen Weg einzuschlagen, der angenäherte Resultate liefert, wobei aber jede gewünschte Genauigkeit erreicht werden kann.

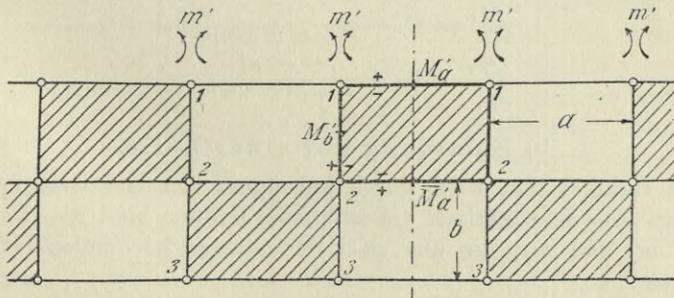


Fig. 23.

§ 14. Die Mittelzelle des unendlich langen Systems.

Wir haben hier zwei verschiedene „Grundbelastungen“ zu untersuchen, aus denen sich die ungünstigsten Belastungen zusammensetzen.

a) Wechselbelastung.

Die Momente dieser Belastung können genau und auf sehr einfache Weise berechnet werden. Wir denken uns in allen Ecken (Fig. 23) Gelenke

so angebracht, daß das System in rechteckige Rahmen und gerade Stabstücke zerlegt wird. In den Gelenken 2 verdrehen sich die dort anstoßenden Zellenecken aus Symmetriegründen um den gleichen Winkel, die Gelenkmomente 2 sind demnach gleich Null. Wir haben es somit nur mit dem einen unbekanntem Gelenkmoment m' in den Gelenken 1 und 3 zu tun, welche Gelenke wegen der Symmetrie gleichartig sind.

Für die Gelenke 1 und 3 ist¹⁾

$$\text{nach (4)} \quad EJ \cdot \alpha = -n(1-n) \frac{pa^3}{24},$$

$$\text{nach (11)} \quad EJ \cdot \beta = + \frac{b}{2} \cdot \frac{2+n}{(1+n)(3+n)} \cdot m' \quad (m'' = 0),$$

$$\text{nach (1)} \quad EJ \cdot \gamma = - \frac{a}{2} \cdot m'$$

und mit $\alpha + \beta = \gamma$ folgt

$$m' = \frac{n(1-n^2)(3+n)}{3+6n+2n^2} \cdot \frac{pa^2}{12}.$$

Mit (3) und (10) folgt nun

$$M'_a = M_0 - \frac{(2+n)n}{(1+n)(3+n)} \cdot m'$$

$$M'_b = M_0 + \frac{3+2n}{(1+n)(3+n)} \cdot m' - \frac{n}{(1+n)(3+n)} \cdot m'.$$

Die horizontale, punktierte Gerade trennt wieder die Nebenmomente am obern und untern Ende der Seite b . M_0 ist das Moment der gefüllten Einzelzelle im gefährlichen Querschnitt.

$$\bar{M}'_a = M_0 - \frac{n}{(1+n)(3+n)} \cdot m'$$

$$\hat{M}'_b = M_0 + \frac{(3+2n)}{(1+n)(3+n)} \cdot m'.$$

b) Belastung nur einer Zelle.

Das Hauptssystem wird durch Anbringen von vier Gelenken hergestellt (Fig. 24). Die statisch unbestimmten Größen sind die zwei Gelenkmomente m_1 und m_2 , die aus zwei Bedingungsgleichungen (16) zu berechnen sind.

Die Winkel α und β darin sind leicht anzugeben, während zur Bestimmung von γ ein Annäherungsweg eingeschlagen wird, der später noch öfters Verwendung finden wird. Zuerst sollen einige allgemeine Formeln und Sätze abgeleitet werden.

Es sei l die Länge eines Stabes AB (Fig. 25), der mit andern Stäben in fester Verbindung steht, und dessen Enden unverschieblich sind. Es sei ferner i der Abstand des Fixpunktes F vom Endpunkt A , mit der-

¹⁾ Über die Bedeutung der Winkel α, β, γ vgl. Seite 11.

selben Bedeutung wie beim kontinuierlichen Träger, daß also Momente, die über *B* in den Stab *AB* gelangen, sich geradlinig so fortpflanzen, daß das Moment in *F* verschwindet (vgl. Fig. 25). Denkt man sich den Stab *l* in *B* von den übrigen Stäben losgetrennt und läßt dort ein Moment von der Größe 1 wirken, so berechnet sich die Verdrehung β in *B* nach Gleichung (1) unter der Annahme, daß *i* bekannt ist, zu

$$EJ \cdot \beta = \frac{l}{6} \left(2 - \frac{i}{l-i} \right).$$

Mit „Elastizitätsmaß“ des Stabes *l* in Punkt *B* sei der reziproke Wert des Drehwinkels β gemeint, der am unverschieblichen Ende *B* unter Einwirkung eines dort angreifenden Momentes von der Größe 1 entsteht¹⁾.

Es ist daher mit obiger Gleichung das Elastizitätsmaß des Stabes *l* im Endpunkt *B*

$$\varepsilon = \frac{1}{\beta} = \frac{6(l-i)EJ}{l(2l-3i)} \dots \dots \dots (49)$$

Da sich ein von *C* nach *B* gelangendes Moment in *B* proportional den Elastizitätsmaßen der Stäbe *BA*, *BD* und *BE* in dieselben verteilt, so ist auch das Gesamtelastizitätsmaß dieser Stabgruppe in *B* gleich der Summe der Elastizitätsmaße der einzelnen Stäbe²⁾, also

$$\varepsilon^x = \varepsilon_A + \varepsilon_D + \varepsilon_E \dots (50)$$

Es sei nun ε^x bekannt

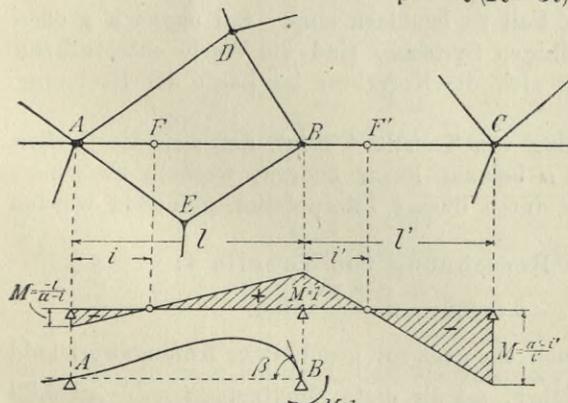


Fig. 25.

und *i*' gesucht. Gleichung (1) liefert die Beziehung

$$EJ \cdot \frac{1}{\varepsilon^x} = -\frac{l'}{6} \left(2 - \frac{l-i'}{l'} \right).$$

¹⁾ Vgl. Prof. W. Ritter, „Anwendungen der graphischen Statik“, Band 3. Zürich 1900.

²⁾ Vgl. Straßner, „Beitrag zur Theorie kontinuierlicher Eisenbetonkonstruktionen“, Seite 4. Berlin 1912.

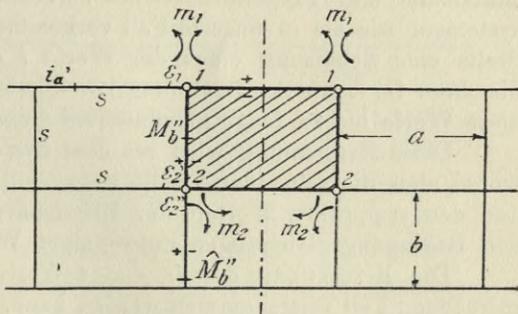


Fig. 24.

Tabelle 4.

Fixpunktabstände und Elastizitätsmaße für das unendlich große Zellensystem mit gleichen Zellen und konstantem Trägheitsmoment.

$n = \frac{b}{a}$	i_a	i_b	ε_a	ε_b
1,0	0,28287073		3,7370345	
$\frac{1}{1,1} = 0,909$	0,28552	0,28016	3,7491	3,7248
0,8	0,28900	0,27651	3,7651	3,7086
0,7	0,29251	0,27266	3,7818	3,6918
0,6	0,29638	0,26819	3,8004	3,6730
0,5	0,30070	0,26295	3,8216	3,6514
0,1	0,3246	0,2277	3,950	3,5211
0	0,3333	0,21132	4,0000	3,4641
	($b=0$)	($a=\infty$)		
	$\cdot a$	$\cdot b$	$\cdot \frac{EJ}{a}$	$\cdot \frac{EJ}{b}$

Nun folgt die Wiederholung der Rechnung für diese genaueren Werte i ; es wird nach mehrmaliger Wiederholung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= 3,81 & \varepsilon_b &= 6,15 \\ \varepsilon_a^x &= 16,11 & \varepsilon_b^x &= 13,77 \\ i_a &= 0,2967 & i_b &= 0,1609 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= 3,802 & \varepsilon_b &= 6,121 \\ \varepsilon_a^x &= 16,044 & \varepsilon_b^x &= 13,725 \\ i_a &= 0,29638 & i_b &= 0,16092 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= 3,8004 & \varepsilon_b &= 6,1218 \\ \varepsilon_a^x &= 16,0440 & \varepsilon_b^x &= 13,7226 \\ i_a &= \text{wie oben} & i_b &= 0,160913 \end{aligned}$$

$$\varepsilon_b = 6,1217$$

Es sei noch bemerkt, daß die allgemeine Bestimmung der i - und ε -Werte auf zwei quadratische Gleichungen mit je zwei Unbekannten führt. —

Für das Seitenverhältnis $n = 0,8$ ergaben sich nun durch Anwendung der Gleichungen (49) bis (51) mit $a = 1,25$ und $b = 1,0$ die Elastizitätsmasse in 1 und 2 (Fig. 24) zu

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 2,9400 \\ \varepsilon_2^x &= \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' = 6,5736. \end{aligned}$$

Mit Beachtung, daß z. B. das Moment m_1 auch auf Winkel γ_2 (im Gelenk 2) einen wenn auch geringen Einfluß hat (dieser Einfluß kann

durch Verfolgen des immer kleiner werdenden Momentes m_1 über die Seiten s nach Gelenk 2 hin und mit Hilfe der Gleichung (1) berechnet werden), wird

$$- EJ \cdot \gamma_1 = \frac{m_1}{2,9400} + 0,00187 m_2$$

$$EJ \cdot \gamma_2 = \frac{m_2}{6,5736} + 0,00221 m_1 + 0,00157 m_2.$$

Nach (4) und (11) wird ferner

$$- EJ \cdot \alpha_1 = + EJ \cdot \alpha_2 = n(1-n) \frac{pa^2}{24} = 0,013021 pb^2 \quad (b=1)$$

$$EJ \cdot \beta_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,8 m_1 + m_2}{1,8 \cdot 3,8} = 0,2047 m_1 + 0,0731 m_2$$

$$EJ \cdot \beta_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 + 2,8 m_2}{1,8 \cdot 3,8} = -0,0731 m_1 - 0,2047 m_2$$

Mit $\alpha + \beta = \gamma$, angewendet auf die Gelenke 1 und 2 entstehen zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welche die Lösungen haben

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 0,01943 pb^2 \\ m_2 &= 0,03226 pb^2 \end{aligned} \right\} (n=0,8).$$

Für $n=0,5$ ergibt sich auf dieselbe Weise

$$m_1 = 0,08533 pb^2$$

$$m_2 = 0,17712 pb^2.$$

Mit (10) wird nun:

$$M_b'' = M_0 + \frac{(3+2n)m_1 - nm_2}{(1+n)(3+n)} - \frac{-nm_1 + (3+2n)m_2}{(1+n)(3+n)}$$

(Über die Bedeutung der punktierten, horizontalen Geraden vgl. Seite 46.)

Die Übertragung der vier Gelenkmomente nach \hat{M}_b (Fig. 24) geschieht mit Hilfe der gerechneten Elastizitätsmasse und Fixpunktabstände. Es wird

$$\begin{aligned} \text{für } n=0,8: \hat{M}_b'' &= -0,00583 pb^2, \text{ Einfluß von } m_2 \text{ (links)} \\ &+ 0,00060 \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad m_2 \text{ (rechts)} \\ &- 0,00001 \quad \text{''} \quad \text{''} \quad \text{''} \quad m_1 \text{ (links)} \\ &\quad \quad \quad 0 \quad \quad \text{''} \quad \text{''} \quad m_1 \text{ (rechts)} \\ &= -0,00524 pb^2; \end{aligned}$$

$$\text{ebenso für } n=0,5: \hat{M}_b'' = -0,02861 pb^2.$$

c) Maximal- und Minimalmomente.

Dieselben entstehen bei den in Fig. 26 dargestellten Belastungen. Es ist somit

$$\begin{aligned} M_{a \max} = M_a' &= (1+2n-2n^2) \frac{pa^2}{24} - \frac{n^2(2+n)(1-n)}{3+6n+2n^2} \cdot \frac{pa^2}{12} \\ &= \frac{3+12n+4n^2-6n^3-2n^4}{3+6n+2n^2} \cdot \frac{pa^2}{24} \quad \dots \quad (52) \end{aligned}$$

$$M_{a \min} = -m = -\frac{n(1-n^2)(3+n)}{3+6n+2n^2} \cdot \frac{pa^2}{12} \dots \dots \dots (53)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{a \max} = -\bar{M}_{a \min} = \bar{M}_a' &= (1+2n-2n^2) \cdot \frac{pa^2}{24} - \frac{n^2(1-n)}{3+6n+2n^2} \cdot \frac{pa^2}{12} \\ &= \frac{3+12n+6n^2-6n^3-4n^4}{3+6n+2n^2} \cdot \frac{pa^2}{24} \dots \dots \dots (54) \end{aligned}$$

Für $n > k$ wird: $M_{b \max} = -M_b' - (-M_b'') + M_b''$,
was mit Gleichung (40) gibt:

$$M_{b \max} = -M_{b \min} = \left(0,06888 - 0,04531 \cdot \frac{1}{n} + 0,01810 \cdot \frac{1}{n^2}\right) \cdot pb^2 \quad (55)$$

k berechnet sich aus $M_b'' = 0$ zu $k = 0,582$.

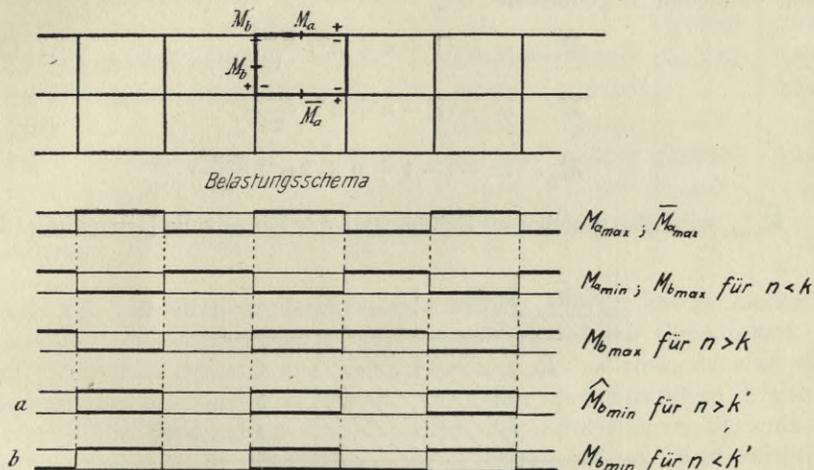


Fig. 26.

Für $n < k$ wird: $M_{b \max} = -M_{b \min} = -M_b'$.

Für das Moment \hat{M}_b kann die ungünstigste Belastungsweise nicht von vornherein angegeben werden. Die beiden möglichen Größtbelastungen sind im Schema der Fig. 26 eingetragen und mit a und b bezeichnet.

Belastung b :

Hierfür wird $\hat{M}_{b \min} = \hat{M}_b' - (-\hat{M}_b'') + \hat{M}_b''$
oder $\hat{M}_{b \min} = -\left(0,09163 - 0,10233 \cdot n + 0,09403 n^2\right) pa^2 \dots \dots (56)$

Belastung a (vgl. Fig. 27):

Wir kommen für die Berechnung von \hat{M}_b am schnellsten zum Ziel, wenn wir die folgenden drei Bedingungen aufstellen, indem wir uns vergegenwärtigen, daß der Knotenpunkt 2 keine Drehung erfährt, und wir es somit mit einem kontinuierlichen Rahmenträger mit in 2 eingespannten Ständern zu tun haben.

1. Summe aller Verdrehungen von 2 bis 4 gleich Null ($EJ=1$):

$$\frac{pb^3}{12} + \frac{b}{2} (M_2 + \hat{M}_b) + (M_1 - \hat{M}_b) \frac{a}{2} = 0;$$

2. Summe aller Verdrehungen von 3 bis 4 gleich Null:

$$(M_1 - \hat{M}_b) \frac{a}{2} + \frac{pa^3}{24} + M_1 \cdot \frac{a}{2} = 0;$$

3. Verschiebung von 1 gegenüber 2 gleich Null:

$$\frac{pb^3}{12} \cdot \frac{b}{2} + M_2 \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{2b}{3} + \hat{M}_b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{3} = 0.$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen mit drei Unbekannten führt zu den einfachen Ergebnissen

$$\hat{M}_{bmin} = -(1 - n + n^2) \frac{pa^2}{12} \dots \dots \dots (57)$$

$$M_1 = -(2 - n + n^2) \frac{pa^2}{24}$$

$$M_2 = -(-1 + n + 2n^2) \frac{pa^2}{24}.$$

\hat{M}_{bmin} wird also gleich dem Eckmoment der Einzelzelle [Gleichung (2)].

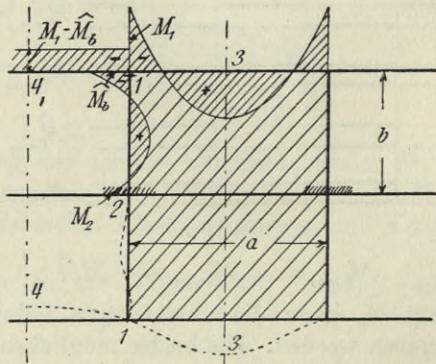


Fig. 27.

Bei der Ausrechnung der Tabelle 5 zeigte sich nun, daß für Werte $n > k'$ Gleichung (57) zu benutzen ist und für $n < k'$ Gleichung (56), und k' folgt aus der Gleichsetzung dieser beiden Gleichungen zu $n = k' = 0,776$. Neben dieser Lösung der sich ergebenden quadratischen Gleichung folgt als zweite Lösung $n = 1,0$, was nicht anders zu erwarten war, da dafür beide Gleichungen denselben Wert aufweisen müssen, nämlich $-\frac{pa^2}{12}$.

Die Verwertung dieser Ergebnisse erfolgt in § 20. Dort wird sich zeigen, daß die Beanspruchung der Zellenwände in zweireihigen Systemen sich nur unwesentlich von derjenigen von Zellen unterscheidet, die am

Tabelle 5.
Momente einer Mittelzelle des unendlich langen,
zweireihigen Systems
 (vgl. Fig. 26).

$n = \frac{b}{a}$	M_{amax}	$-M_{amin}$	$\bar{M}_{amax} = -\bar{M}_{amin}$	$M_{bmax} = -M_{bmin}$		$\hat{M}_{bmax} = -\hat{M}_{bmin}$	
				$n > k$	$n < k$	$n > k'$	$n < k'$
				$k = 0,582$		$k' = 0,776$	
1,0	0,04167	0	0,04167	0,04167	(-0,04167)	0,08333	(0,08333)
0,9	0,04722	0,00555	0,04850	0,04088	—	0,07583	(0,07569)
0,8	0,05171	0,01004	0,05383	0,04052	—	0,07000	(0,06995)
0,776	—	—	—	—	—	0,06885	0,06885
0,7	0,05512	0,01346	0,05767	0,04108	(0,00103)	(0,06583)	0,06607
0,6	0,05741	0,01574	0,06003	0,04364	(0,03645)	—	0,06408
0,582	—	—	—	0,04451	0,04451	—	—
0,5	0,05850	0,01683	0,06090	(0,05064)	0,10086	(0,06250)	0,06398
	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$
Gleichung	52	53	54	55	—	57	56

Rand von unendlich großen Systemen liegen. Die für solche Zellen aufgestellten Gleichungen können daher mit genügender Genauigkeit auch auf zweireihige Systeme angewendet werden, um so eher, da eine solche Berechnung in allen maßgebenden Punkten zu ungünstige Ergebnisse liefert. Die Berechnung der Endzellen des zweireihigen Systems wird deshalb übergangen. Hierfür sind die Gleichungen des § 19 zu verwenden.

Fünfter Abschnitt.

Das unendlich große Zellensystem.

Schon die genaue Berechnung zweireihiger Zellensysteme ist recht umständlich, die Rechenarbeit wächst aber bei drei- und mehrreihigen Systemen so an, daß an eine genaue Lösung derselben nicht zu denken ist. Es sei nur darauf hingewiesen, mit welcher Sorgfalt man die Koeffizienten bei einer größeren Anzahl von Elastizitätsgleichungen bestimmen muß, um einigermaßen genaue Resultate zu erhalten.

Es wird in § 20 gezeigt werden, in welchem hohem Maße die Momente des zweireihigen Systems sich denjenigen der Randzellen eines sich nach drei Richtungen unendlich weit erstreckenden Systems nähern. Die Momente drei- und mehrreihiger Systeme liegen zwischen den erstgenannten, weshalb solche Systeme um so eher mit den Gleichungen dieses Abschnittes berechnet werden können.

Ein solches gedachtes, unendliches Zellensystem mit gleichartigen Zellen läßt sich seiner Gleichmäßigkeit wegen leichter lösen als z. B. ein dreireihiges System, weshalb es im folgenden einer eingehenden Untersuchung unterworfen werden soll.

Für gleich große Zellen werden nun gebrauchsfertige Gleichungen abgeleitet, die aber auch bei ungleichen Zellen brauchbare Ergebnisse liefern.

§ 15. Die Mittelzelle.

Mit „Mittelzellen“ seien alle nicht am Rand liegenden Zellen bezeichnet. Die ungünstigsten Belastungen der in Betracht kommenden Momente in den Seitenmitten und den Knotenpunkten setzen sich aus drei Grundbelastungen zusammen, die zuerst untersucht werden sollen.

a) Wechselbelastung.

Das System sei schachbrettartig gefüllt, d. h. so, daß an keiner Stelle zwei leere oder zwei volle Zellen direkt nebeneinander liegen. Denken wir uns das ganze, unendlich weit ausgedehnte Feld bestehend aus einzelnen geschlossenen, mit gleichmäßigem Innendruck belasteten Rahmen, die unter sich an ihren Ecken durch Gelenke verbunden sind, so drehen sich alle Eckpunkte aller Rahmen infolge der Belastung um denselben Winkel. Die in Wirklichkeit bestehende, feste Verbindung der Zellen an den gedachten Gelenken kann deshalb wiederhergestellt werden, ohne an den Zellenwänden irgendwelche Verbiegungen vornehmen zu müssen, d. h. das Moment, welches an Stelle des Gelenkes wirkt (die statisch unbestimmte Größe), ist gleich Null. Es folgt dies auch aus der Bedin-

gungsgleichung (16): $\alpha + \beta = \gamma^1$), wo $\beta = m \cdot \beta_1$ und $\gamma = \alpha - m \cdot \beta_1$, also

$$\begin{aligned}\alpha + m \cdot \beta_1 &= \alpha - m \cdot \beta_1 \\ 2 m \cdot \beta_1 &= 0\end{aligned}$$

und da $\beta_1 \neq 0$, ist $m = 0$.

Die Momente für diesen Belastungsfall berechnen sich daher nach den Gleichungen (2) und (3) (Fig. 32):

$$\begin{aligned}M'_a &= (1 + 2n - 2n^2) \frac{p a^2}{24} \\ M'_b &= \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) \frac{p b^2}{24} \\ \hat{M}'_a &= \hat{M}'_b = -(1 - n + n^2) \frac{p a^2}{24}.\end{aligned}$$

Es sei schon hier bemerkt, daß diese Belastung für M'_a die ungünstigste ist, und deshalb $M_{a, \max} = M'_a$. Für M'_b ist, solange $n > 0,5585$ die Belastung nach Fig. 32 die ungünstigste, weshalb hierfür Fall b zu untersuchen ist.

b) Eine Zelle belastet.

Für diesen wichtigen Fall ist, obgleich er durch doppelte Symmetrie begünstigt wird, eine genaue Lösung entweder gar nicht oder nur in äußerst komplizierter Form möglich. Die hier verwendete Methode beruht auf einer langwierigen Zahlenrechnung, und es sind deshalb, um Gewißheit über die Richtigkeit derselben zu erlangen, verschiedene, zum Teil in der Praxis gebräuchliche Näherungsmethoden angewendet worden, die zugleich zu einem Vergleich untereinander Veranlassung geben. Es sollen zuerst die verschiedenen Annäherungsverfahren, die natürlich auch für andere Zellengruppierungen (auch für ungleich große Zellen) zu gebrauchen sind, erläutert und dann zu der möglichst genauen Bestimmung der Momente übergegangen werden. Die verschiedenen Methoden werden nur so weit durchgeführt, bis das Gelenkmoment m (Fig. 28) bestimmt ist, das an allen vier Ecken der belasteten Zelle (an Stelle von dort zu denkenden Gelenken) in derselben Größe angreift. Die weitere Berechnung ist dann einfach [Gleichungen (2), (3), (12)].

Erste Näherung. Das System wird unter der Annahme berechnet, die acht Seiten s seien in den Punkten A (vgl. Fig. 28a) durch Gelenke mit den in A anschließenden Seiten verbunden, d. h. die tatsächlich vorhandene elastische Einspannung bleibe unberücksichtigt.

Wir berechnen m aus der Bedingung $\alpha + \beta = \gamma$, wo α und β aus (4) und (13) folgen und $\frac{m}{\gamma}$ gleich der Summe der Elastizitätsmaße zweier aneinanderstoßender Seiten s ist. Auf diese Weise erhält man nach einfacher Rechnung

$$m = (1 - n^2) \frac{p a^2}{20} \dots \dots \dots (58)$$

¹⁾ Über die Bedeutung der Winkel α , β und γ vgl. Seite 11.

Zweite Näherung. Die Seiten s seien in den Punkten A fest eingespannt. Es wird auf dieselbe Weise

$$m = (1 - n^2) \frac{p a^2}{18} \dots \dots \dots (59)$$

Der wirkliche Wert von m wird, da die Einspannung in A weder fest noch gelenkig, sondern elastisch ist, zwischen diesen beiden Werten liegen, und voraussichtlich näher am zuletzt berechneten.

Dritte Näherung. Eine weitere, genauere Näherungsmethode beruht auf dem Gedanken, anstatt der obigen vereinfachenden Annahmen des Einspannungsgrades in A , den richtigen Wert desselben zu bestimmen, und die Berechnung mit diesem durchzuführen. Dies kann nach den Entwicklungen im IV. Abschnitt geschehen unter Benützung der Tabelle 4. Es ist dann (Fig. 28)

$$\gamma = \frac{m}{\epsilon_a + \epsilon_b}.$$

Fast scheint es, daß diese Methode zu dem genauen Werte von m führen müßte. Es ist dies aber nicht der Fall und zwar aus zwei Gründen. Erstens sind die Tabellenwerte für das vollständige, unendliche Zellsystem

berechnet, während wir hier die Elastizitätsmaße ϵ_a und ϵ_b für das System der Fig. 28a benötigen. Diese unterscheiden sich

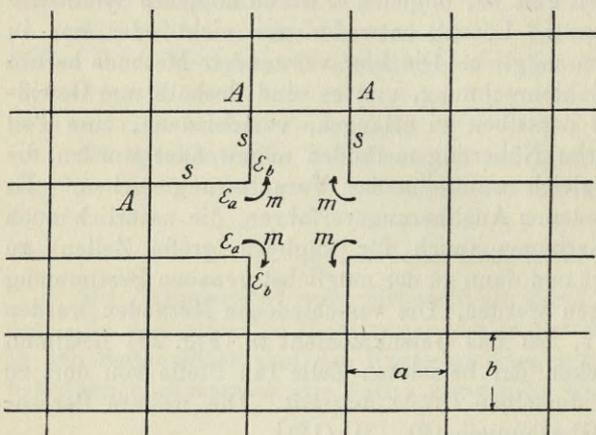


Fig. 28a.

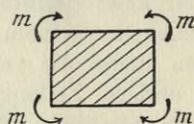


Fig. 28b.

nun allerdings erst etwa in der 5. Dezimale von den Tabellenwerten.

Zweitens sind die kleinen Zusatzverdrehungen γ'

zu berücksichtigen, die an jeder Ecke (Fig. 28a) infolge der drei Momente der anderen Ecken entstehen, was z. B. auch auf Seite 50 geschehen ist. Es wäre dann

$$\gamma = \left(\frac{1}{\epsilon_a + \epsilon_b} + \frac{\gamma'}{m} \right) m,$$

wo γ' etwas umständlich, aber so genau wie erwünscht berechnet werden kann. γ' ist, wie aus Seite 50 ersehen werden kann, nur ein kleiner Korrekturwert, und auch ohne seine Berücksichtigung wird die Annäherung, wie an einem Beispiel (Seite 62) gezeigt wird, sehr gut.

Ohne Berücksichtigung von γ' berechnet sich das Moment m folgendermaßen:

Nach (4): $EJ \cdot \alpha = -n(1-n) \frac{pa^3}{24}$.

Nach (13): $EJ \cdot \beta = + \frac{bm}{2(1+n)}$

$$\gamma = - \frac{m}{\varepsilon_a + \varepsilon_b}$$

Mit $\alpha + \beta = \gamma$ folgt

$$m = \frac{1-n^2}{1 + \frac{2(1+n)EJ}{b(\varepsilon_a + \varepsilon_b)}} \cdot \frac{pa^2}{12} \dots \dots \dots (60)$$

z. B. wird für $n = 0,8$ (ε_1 und ε_2 aus Tabelle 4)

$$m = \frac{1-0,8^2}{1 + \frac{2 \cdot 1,8}{3,7651 \cdot 0,8 + 3,7086}} \cdot \frac{pa^2}{12} = 0,01953 pa^2$$

Die Gleichungen (58) und (59) lassen vermuten, daß, wenn man Gleichung (60) in der Form der Gleichung (61) anschreibt, der Wert c für verschiedene Seitenverhältnisse ziemlich konstant sein wird; er muß jedenfalls immer zwischen $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{18}$ liegen [Gleichung (58) und (59)]

$$m = c \cdot (1-n^2) pa^2 \dots \dots \dots (61)$$

In der Tat schwankt c für praktisch hauptsächlich vorkommende Fälle von $n = 0,6$ bis $n = 1,0$ nur zwischen 0,05420 und 0,05428. In Fig. 29

sind die c -Werte dieser Näherungsrechnung als

Funktion von n dargestellt (gestrichelte Linie).

Diese Kurve, sowie die später zu berechnende genaue Kurve der c

verläuft in $n = 1,0$ parallel zur n -Achse, denn für

$n > 1$ ergeben sich naturgemäß dieselben Werte c .

Es entspricht sich z. B. $n = 1,2$ und $n = 1/1,2$ ebenfalls

$n = \infty$ und $n = 0$.

Es könnten nun die kleinen Zusatzverdrehungen γ' für

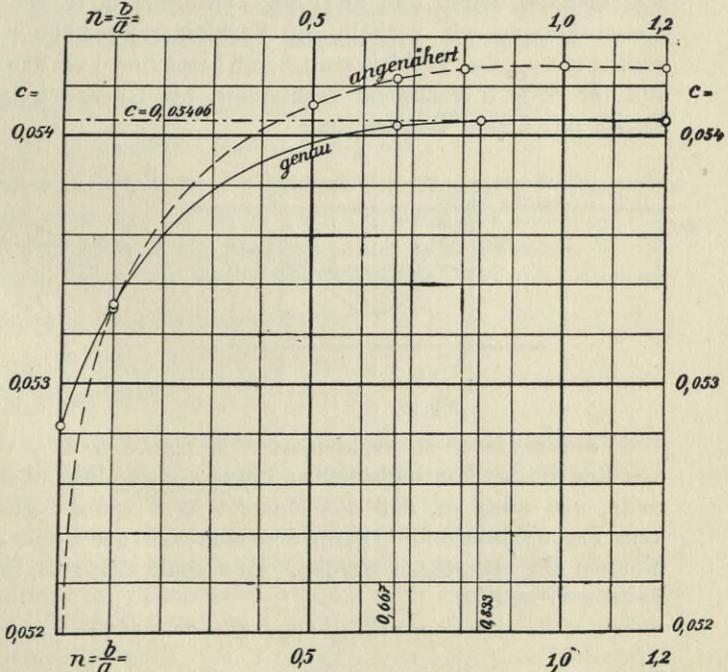


Fig. 29. Darstellung der Werte c .

verschiedene Seitenverhältnisse möglichst genau berechnet und damit eine genauere Gleichung für m aufgestellt werden. Es wird aber vorgezogen, letztere Gleichung nach einer, von den beschriebenen Methoden ganz unabhängigen Art zu ermitteln. Die folgende Rechnung liefert eine Schlußgleichung von der Form der Gleichung (61), welche das Moment m sehr genau bestimmen läßt, sie hat aber auch den Zweck, die drei beschriebenen Annäherungsverfahren auf ihre Genauigkeit zu prüfen und ihren Wert für die Praxis darzulegen. Die folgende Methode, welche wegen ihrer Umständlichkeit in der Praxis wohl kaum zu verwenden ist und hier nur den Zweck einer genauen Bestimmung des Wertes c hat, soll deshalb nur kurz erläutert werden.

Vierte Näherung. Die Seiten des unendlichen Zellsystems werden als kontinuierliche Träger auf elastisch drehbaren Stützen aufgefaßt und die hierfür übliche, graphische Konstruktion von Prof. W. Ritter ins Rechnerische umgesetzt. Mit Hilfe der in Tabelle 4 berechneten Fixpunkte läßt sich das Stützmoment berechnen, das durch die Belastung einer Seite erzeugt wird. Es ist nach der oben genannten, graphischen Konstruktion (Fig. 30)

$$\mathfrak{M}_{12} = -\frac{p a^2}{8} \cdot \frac{i_a}{a/2} = -\frac{p i_a a}{4}.$$

Dieses Moment verteilt sich vom Schnitt S_{12} aus nach den drei anschließenden Seiten und zwar im Verhältnis ihrer Elastizitätsmaße. Aus diesen können wir deshalb die Verkleinerungsmaße μ berechnen. Wir wollen mit $\mu_{a,b}$ das Verkleinerungsmaß bezeichnen, um das sich das Moment \mathfrak{M} aus der Seite a kommend verkleinert, bei Übergang in eine Seite b usw. Es ist mit dieser Bezeichnung

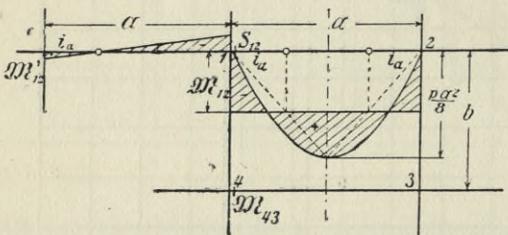


Fig. 30.

$$\mu_{\alpha\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta} + \varepsilon_{\beta}} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{\varepsilon_{\alpha} + 2 \cdot \varepsilon_{\beta}}$$

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{\varepsilon_{\beta}}{\varepsilon_{\alpha} + 2 \cdot \varepsilon_{\beta}}$$

$$\mu_{\beta\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{2 \cdot \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}}$$

$$\mu_{\beta\beta} = \frac{\varepsilon_{\beta}}{2 \cdot \varepsilon_{\alpha} + \varepsilon_{\beta}}$$

Jedes dieser so verkleinerten Momente $\mu \cdot \mathfrak{M}_{12}$ verbreitet sich nach den Regeln des kontinuierlichen Trägers geradlinig über die anschließende Seite, und zwar so, daß das Moment im Fixpunkt gleich Null ist. Aus dem Fixpunktabstand i_a kann demnach das am Ende der Seite wirkende Moment \mathfrak{M}'_{12} berechnet werden. Es verhält sich z. B. für die anschließende Seite a (Fig. 30)

$$-\mathfrak{M}'_{12} : \mu_{\alpha\alpha} \cdot \mathfrak{M}_{12} = i_a : (a - i_a)$$

oder

$$\mathfrak{M}'_{12} = -\frac{i_a}{a - i_a} (\mu_{\alpha\alpha} \cdot \mathfrak{M}_{12}) = -\delta_{\alpha} (\mu_{\alpha\alpha} \mathfrak{M}_{12}),$$

wo mit δ_a der echte Bruch gemeint ist, mit dem ein an einem Ende der Seite a auftretendes Moment multipliziert werden muß, um die absolute Größe des Momentes am anderen Ende zu ergeben.

$$\text{Es ist also} \quad \delta_a = \frac{i_a}{a - i_a}$$

$$\text{und entsprechend} \quad \delta_b = \frac{i_b}{b - i_b}.$$

Das Moment \mathfrak{M}_{12}' verteilt sich nun wieder wie \mathfrak{M}_{12} in die drei anschließenden Seiten, womit sich der beschriebene Vorgang wiederholt.

Die Größen μ und δ , welche aus i und ε für ein bestimmtes Seitenverhältnis zu berechnen sind, genügen nun, um die Momente zu bestimmen. Im unendlich großen Zellsystem verteilt sich \mathfrak{M}_{12} auf allen möglichen, also unendlich vielen Wegen durch das System hindurch, da aber die Werte μ und δ echte Brüche sind, so verkleinern sich die Momente in ihrem Verlauf und können, nachdem sie einige Seiten durchlaufen haben, vernachlässigt werden, was sich besonders bei der graphischen Durchführung (analog derjenigen beim kontinuierlichen Träger) deutlich zeigt. Die Anzahl dieser Seiten richtet sich natürlich nach der gewünschten Genauigkeit.

Es sei nun die Aufgabe gestellt, den Einfluß von \mathfrak{M}_{12} auf den Schnitt S_{12} zu untersuchen. \mathfrak{M}_{12} kann diese Schnittstelle nur nach Durchlaufen von 0, 4, 6, 8 . . . Seiten erreichen. Bei Vernachlässigung des Einflusses nach Durchlaufen von sechs und mehr Seiten wird das Moment in S_{12} , herrührend von \mathfrak{M}_{12}

$$m_{12} = \mathfrak{M}_{12} [1 + 2 \cdot \delta_a^2 \cdot \delta_b^2 \cdot \mu_{ab}^2 \cdot \mu_{ba}^2 (1 - 2 \cdot \mu_{aa})].$$

$$(\text{Es ist zu beachten, daß } \mu_{aa} \cdot \mu_{bb} = \mu_{ab} \cdot \mu_{ba}.)$$

Der zweite Klammerausdruck stellt den Einfluß von \mathfrak{M}_{12} nach Durchlaufen von vier Seiten und zwar auf die sechs verschiedenen Möglichkeiten dar.

Auf diese Weise können die Einflüsse aller acht Momente \mathfrak{M} der vier Seitenbelastungen (vier von der Größe $\mathfrak{M}_a = \mathfrak{M}_{12}$ und vier Momente $\mathfrak{M}_b = -\frac{p i_b b}{4}$) auf Schnitt S_{12} bestimmt werden. Z. B. wurde der Einfluß des Momentes $\mathfrak{M}_{43} = \mathfrak{M}_a$ (Fig. 30) auf Schnitt S_{12}

$$m_{43} = -\mathfrak{M}_a [\delta_b \cdot \mu_{ab} \cdot \mu_{ba} (1 + \delta_a^2 \cdot \mu_{aa}^2)].$$

Dieses Moment \mathfrak{M} kann (mit Durchlaufen von weniger als sechs Seiten) nur auf zwei verschiedene Arten nach 1 gelangen. Die Anzahl der δ stellt in jedem Ausdruck die Anzahl der durchlaufenen Seiten dar.

Die Addition der acht Ausdrücke m gibt das im Schnitt S_{12} herrschende Moment M_{12} infolge der Einzelbelastung. Um ein Maß der Genauigkeit des Resultates zu bekommen, wurden auch noch die Werte bei Berücksichtigung des Durchlaufens von weniger als fünf Seiten ausgerechnet. Es ergaben sich z. B. für $a = 1,2$; $b = 1,0$; $p = 1$ die folgenden Zahlen:

				Diff.
Bei Berücksichtg. des Durchlauf. von 0 Seit.:			$M_{12} = -0,118663$	
"	"	1	" $M_{12} = -0,126380$	+ 4447
"	"	2	" $M_{12} = -0,130827$	- 754
"	"	3	" $M_{12} = -0,130073$	+ 122
"	"	4	" $M_{12} = -0,130195$	- 17
"	"	5	" $M_{12} = -0,130178$	

Die Differenzen nehmen stetig ab und wechseln das Vorzeichen, d. h. der richtige Wert wird von dem angenäherten immer mehr eingeschlossen. Sein wahrscheinlichster Wert kann daher leicht bestimmt werden. Er ist

$$M_{12} = -0,130178 - 17 \frac{17}{122} = -0,130180.$$

Die Summe der acht Werte m gibt für den speziellen Fall $n=1$, da mit $\epsilon_a = \epsilon_b : \mu = \frac{1}{3}$

$$M_{12} = ap i \left(-\frac{1}{3} + \frac{\delta}{9} - \frac{\delta^2}{27} + \frac{\delta^3}{81} \cdot \cdot \cdot \right).$$

Der stetige Verlauf des Klammerausdruckes, welcher eine geometrische, konvergierende Reihe darstellt, kann als Kontrolle für die Ausdrücke m gelten, vor allem würde sich dabei das Vergessen eines der von \mathfrak{M} durchlaufenen Wege deutlich zeigen. Mit der Summenformel für die unendliche, geometrische Reihe folgt der theoretisch genaue Wert für $n=1$

$$M_{12} = -\frac{ap i}{3 + \delta}$$

und mit $\delta = \frac{i}{a-i}$ ($i = 0,282871 \cdot a$, aus Tabelle 4)

$$M_{12} = -\frac{i(a-i)pa}{3a-2i} = -0,083333 \cdot pa^2 = -\frac{pa^2}{12}.$$

Daraus folgt das schon auf Seite 24 ausgesprochene Gesetz, daß sich die belastete Zelle im unendlich großen Zellensystem mit quadratischen Zellen von konstanter Wandstärke genau so verhält, wie die für sich allein bestehende quadratische Zelle, daß also der Zusammenhang keinen Einfluß auf die zu untersuchende Zelle hat.

Aus obiger Gleichung kann nun auch der Fixpunktabstand i für $n=1$ auf direktem Wege, aus einer quadratischen Gleichung berechnet werden.

Nach beschriebener Methode sind nun für verschiedene Seitenverhältnisse n die Momente M_{12} berechnet worden, aus denen sich alle übrigen Momente in der belasteten Zelle leicht ermitteln lassen. Des Vergleiches

mit Früherem wegen wurde aber aus M_{12} das Gelenkmoment m bestimmt nach

$$m = \frac{1+n}{n} \left[-M_{12} - (1-n+n^2) \frac{p a^2}{12} \right], \quad \dots \quad (62)$$

welche Gleichung aus (2) und (12) entstanden ist. m wurde nun wieder in die Form der Gleichung (61) gebracht, und für die durchgeführten Beispiele wurden die Werte c ausgerechnet, welche nun auf 5 Dezimalen genau angegeben werden konnten. Sie sind in Fig. 29 eingezeichnet (ausgezogene Kurve).

Mit Beachtung, daß die Ordinaten dieser Kurve stark vergrößert sind, erkennt man, daß c für in der Praxis hauptsächlich vorkommende Seitenverhältnisse von $n=0,6$ bis $n=1,0$ fast konstant ist, nämlich nur zwischen $c=0,05402$ und $c=0,05406$ schwankt. —

Für den allerdings nur theoretisch interessierenden Wert $n=0 = \frac{0}{a} = \frac{b}{\infty}$, der für $b=0$ dem eingespannten Balken von der Länge a und für $a=\infty$ dem unendlich langen, kontinuierlichen Träger mit der Spannweite b entspricht, wird

$$i_a = \frac{a}{3}$$

$$i_b = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot b$$

(i_b = Fixpunktabstand des unendlich langen, kontinuierlichen Trägers mit gleichen Öffnungen).

Daraus mit Gleichung (49):

$$\varepsilon_a = \frac{4EJ}{a}$$

$$\varepsilon_b = \frac{2(3 + \sqrt{3})EJ}{(1 + \sqrt{3})b}$$

Ferner wird:

$$\delta_a = \frac{1}{2}$$

$$\delta_b = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$\mu_{aa} = \mu_{ba} = 0, \quad \mu_{ab} = \frac{1}{2}, \quad \mu_{bb} = 1.$$

Analog Gleichung (62) wird mit (61)

$$m = (1+n) \left[+M_{14} + (1-n+n^2) \frac{p a^2}{12} \right] = c(1-n^2) p a^2$$

oder für $n=0$: $M_{14} + \frac{p a^2}{12} = c \cdot p a^2$,

worin mit obigen Werten i , δ und μ und nach den früher hergeleiteten Gleichungen für m

$$M_{14} = m_{12} + m_{21} + \dots + m_{14} = \mathfrak{M}_a (\mu_{ab} - \mu_{ba} \cdot \delta_b) + \mathfrak{M}_b \cdot 1^1)$$

$$\mathfrak{M}_a = -\frac{i_a p a}{4} = -\frac{p a^2}{12}; \quad \mathfrak{M}_b = -\frac{i_b p b}{4} = -\frac{(3 - \sqrt{3}) p b^2}{24}$$

¹⁾ Die übrigen Ausdrücke verschwinden alle wegen $\mu_{ba} = 0$.

also
$$M_{14} = -\frac{pa^2}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \right) - (3 - \sqrt{3}) \cdot \frac{pb^2}{24}.$$

Es wird also, M_{14} in die obere Gleichung eingesetzt

$$-\frac{pa^2}{12} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \right) - (3 - \sqrt{3}) \frac{pb^2}{24} + \frac{pa^2}{12} = c \cdot pa^2.$$

Dividiert man durch pa^2 und setzt $\frac{b}{a} = 0$, so folgt

für $n = 0$:
$$c = \frac{1}{4(3 + \sqrt{3})} = 0,05283.$$

Das Gelenkmoment m für den zweiten Belastungsfall (Belastung einer Zelle) ist nun bekannt, nämlich

$$m = c(1 - n^2)pa^2,$$

wo c der Fig. 29 zu entnehmen ist.

Da c beinahe konstant ist, so soll für die weitere Entwicklung die Gleichung gebraucht werden

$$m = 0,05406(1 - n^2)pa^2 \quad \dots \quad (63)$$

Es wird dann damit für die Belastung nur einer Zelle und mit (2), (3) und (12)

$$M_a'' = (1 + 2n - 2n^2) \frac{pa^2}{24} - \frac{n \cdot m}{1 + n}$$

$$M_b'' = \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} \right) \frac{pb^2}{24} + \frac{m}{1 + n}$$

$$\hat{M}_a'' = -(1 - n + n^2) \frac{pa^2}{12} - \frac{n \cdot m}{1 + n}$$

$$\hat{M}_b'' = -(1 - n + n^2) \frac{pb^2}{12} + \frac{m}{1 + n}.$$

Es folgt nun ein Vergleich der verschiedenen Näherungsmethoden für m . Für $n = 0,8$ wird:

1. Bei Annahme eines Gelenkes in A (Fig. 28), Gleichung (58):

$$m = 0,01800 pa^2, \quad c = \frac{1}{20} = 0,05000.$$

2. Bei Annahme fester Einspannung in A (Fig. 28), Gleichung (59):

$$m = 0,02000 pa^2, \quad c = \frac{1}{18} = 0,05556.$$

3. Unter Berücksichtigung der richtigen Einspannung in A (Fig. 28), aber unter Vernachlässigung der Korrekturwerte γ' , Gleichung (60):

$$m = 0,01953 pa^2, \quad c = 0,05427.$$

4. Nach der zuletzt beschriebenen, genauesten Methode, Gleichung (63):

$$m = 0,01946 pa^2, \quad c = 0,05406.$$

Wenn man bedenkt, daß m nur ein Nebenmoment ist, welches die Momente der Einzelzelle korrigiert, so muß man die zweite Annäherungsmethode als befriedigend bezeichnen. Sie ist in Fällen von ungleich großen Zellen, ihrer Einfachheit wegen, am ehesten

zu empfehlen. Wendet man die beiden Methoden 1 und 2 an, so läßt sich der richtige, dazwischen liegende Wert ziemlich genau abschätzen.

Man sieht aus obigem Vergleich auch, wie genaue Resultate das dritte Verfahren, auch ohne Berücksichtigung der Korrekturen γ' , liefert, es wird deshalb bei der Untersuchung der Rand- und Eckzellen verwendet werden.

c) Halbseitige Wechselbelastung.

Diese dritte Grundbelastung ist in Fig. 31 dargestellt und wird zur Bestimmung der größten Eckmomente gebraucht.

Es wirken an dem durch gedachte Gelenke vom belasteten Teil getrennten unbelasteten Teil die Momente m' in dem eingezeichneten Drehsinn, und wir wollen versuchen, die überall gleiche Verdrehung γ der Ecken zu bestimmen.

Das Moment m' verringert sich in der Pfeilrichtung von Ecke zu Ecke um einen bei gleichgroßen Zellen und unendlicher Ausdehnung konstanten Wert μ (vgl. § 7), so daß in den Punkten A die Momente $\mu \cdot m'$, in B $\mu^2 \cdot m'$ wirken usw. Betrachten wir nun einen der Punkte A , so ist die Verdrehung der rechts von einem vorübergehend in A gedachten Gelenk liegenden Ecke nach (9), ($EJ=1$)

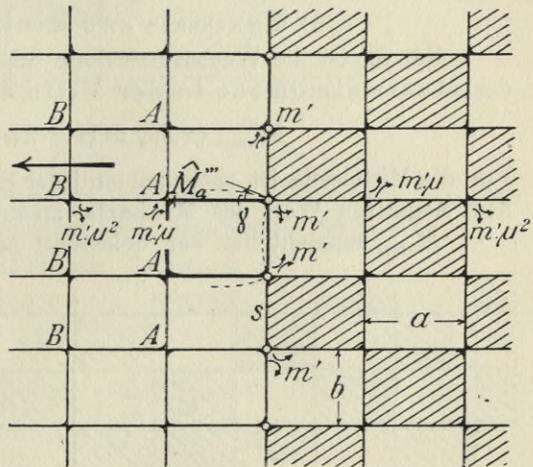


Fig. 31.

$$\beta' = \frac{b}{2} \cdot \frac{(1+2n)\mu - n}{(1+n)(1+3n)} \cdot m',$$

die Verdrehung links

$$\gamma' = \frac{b}{2} \cdot \frac{n\mu - (1+2n)}{(1+n)(1+3n)} \cdot \mu m',$$

welche Werte einander gleichgesetzt (nach $\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha = 0$) die für μ quadratische Gleichung

$$n\mu^2 - 2(1+2n)\mu + n = 0$$

ergeben, woraus folgt

$$\mu = \frac{1}{n} \left[1 + 2n - \sqrt{(1+n)(1+3n)} \right] \dots (64)$$

Nach (9) ist nun die gesuchte Verdrehung (Fig. 31)

$$\gamma = \frac{b}{2} \cdot \frac{(1+2n) - n\mu}{(1+n)(1+3n)} \cdot m'.$$

Die Verdrehung der Ecken der andern, belasteten Hälfte infolge m' allein ist (absolut genommen) genau gleich groß:

$$\beta = -\frac{b}{2} \cdot \frac{(1+2n) - n\mu}{(1+n)(1+3n)} \cdot m'$$

und infolge der Belastung (wie bei Belastungsfall a):

$$\alpha = n(1-n) \cdot \frac{pa^3}{24}$$

Mit $\alpha + \beta = \gamma$ folgt

$$m' = \frac{(1-n^2)(1+3n)}{1+n(2-\mu)} \cdot \frac{pa^2}{24} \dots \dots \dots (65)$$

und mit Gleichung (8)

$$\hat{M}_a''' = -n \cdot \frac{(2+3n)\mu + 1}{(1+n)(1+3n)} \cdot m'$$

d) Maximal- und Minimalmomente.

Für M_a ist die Wechselbelastung die ungünstigste und deshalb wird das Maximalmoment in der Mitte der langen Seite

$$M_{a\max} = M_a' = (1 + 2n - 2n^2) \frac{pa^2}{24} \dots \dots \dots (66)$$

Für die Mittelzelle ist natürlich an jeder Stelle das Minimalmoment gleich dem negativen Wert des Maximalmomentes.

$M_{b\max}$ entsteht bei der Belastung nach Fig. 32, aber nur für die

Werte $n = 1$ bis $n = k$, wo k aus $M_b'' = 0$ zu $k = 0,5585$ folgt.

Für $n < k$ ist die Belastung der Zelle 1 nach 2 hin zu verlegen, welcher Fall der unter a behandelten Wechselbelastung entspricht, nur mit umgekehrten Vorzeichen. Es wird also das Maximalmoment in der Mitte der kurzen Seite

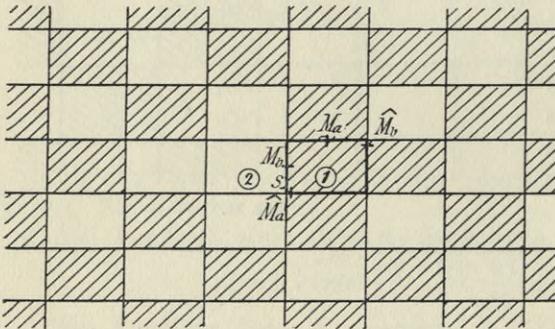


Fig. 32.

für $n > k$: $M_{b\max} = -M_b' - (-M_b'') + M_b''$

$$M_{b\max} = \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) \frac{pb^2}{24} + 2c(1-n)pa^2, \dots \dots (67a)$$

wo c aus Fig. 29 zu entnehmen ist. Wenn für c der annähernd konstante Wert 0,05406 gesetzt wird, ist

$$M_{b\max} = \left(0,04167 - 0,02479 \cdot \frac{1}{n} + 0,02479 \cdot \frac{1}{n^2}\right) pb^2 \dots \dots (67b)$$

Es ist dies keine empirische Gleichung im Sinne der früheren, sondern sie gibt Resultate in dem Grade genau, als der Wert c genau ist.

Für $n < k$: $M_{b\max} = -M_b' = \left(\frac{2}{n^2} - \frac{2}{n} - 1\right) \frac{pb^2}{24} \dots \dots \dots (68)$

Für den Minimalwert in \hat{M}_a ist das System nach Fig. 33 zu belasten, welche Belastung sich aus der zweiten und dritten Grundbelastung (Fälle b und c) wie \hat{z} folgt zusammensetzt:

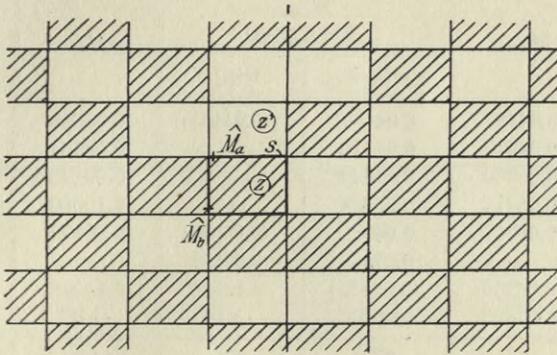


Fig. 33.

$$\begin{aligned} \hat{M}_{a \min} &= \hat{M}_a''' \text{ (Wechselbelastung der rechten Hälfte nach Fig. 31)} \\ &+ \hat{M}_a'''' - \hat{M} \text{ (Wechselbelastung der linken Hälfte)} \\ &- (-\hat{M}_a'') \text{ (Wegnahme der Belastung } z') \\ &+ \hat{M}_a'' \text{ (Belastung } z) \end{aligned}$$

$$\hat{M}_{a \min} = 2 (\hat{M}_a''' + \hat{M}_a'') - \hat{M}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{a \min} &= -2 \left[n \cdot \frac{(2+3n)\mu+1}{(1+n)(3+n)} \cdot m' + \frac{pa^2}{12} (1-n+n^2) - \frac{nm}{1+n} \right] + \\ &+ \frac{pa^2}{12} (1-n+n^2), \end{aligned}$$

wo die Werte m, μ, m' den Gleichungen (63), (64), (65) zu entnehmen sind. Diese Gleichung gibt

für $n = 1,0$	$\hat{M}_{a \min} = -0,083333$
$n = 0,8$	$-0,096429$
$n = 0,6$	$-0,103708,$

womit die folgende empirische Gleichung gebildet wird:

$$\hat{M}_{a \min} = - (0,09064 + 0,06541 \cdot n - 0,07272 \cdot n^2) pa^2. \quad (69)$$

Auf ähnliche Weise wird (die Grundbelastungen bestehen hierfür aus zwei halbseitigen Wechselbelastungen)

$$\hat{M}_{b \min} = -2 \frac{(3+2n)\mu+n}{(1+n)(3+n)} \cdot m' - \frac{pa^2}{12} (1-n+n^2),$$

worin

$$\mu = 2 + n - \sqrt{(1+n)(3+n)}$$

und

$$m' = \frac{(1-n^2)(3+n)}{2+n-\mu} \cdot \frac{pa^2}{24},$$

oder

$$\hat{M}_{b \min} = - (0,122,07 - 0,10333 \cdot n + 0,06459 \cdot n^2) pa^2. \quad (70)$$

Tabelle 6.

Momente einer Mittelzelle des unendlich großen Zellsystems.
(Vgl. Fig. 32.)

$n = \frac{b}{a}$	$M_{a \max}$	$M_{b \max}$ $k = 0,5585$		$-\hat{M}_{a \min}$	$-\hat{M}_{b \min}$
		$n > k$	$n < k$		
1,0	0,04167	0,04167	(-0,04167)	0,08333	0,08333
0,9	0,04917	0,04473	—	0,09061	0,08139
0,8	0,05500	0,04941	—	0,09643	0,08075
0,7	0,05917	0,05684	—	0,10080	0,08139
0,6	0,06167	0,06923	(0,05093)	0,10371	0,08333
0,5585	—	0,07678	0,07678	—	—
0,5	0,06250	(0,09125)	0,12500	0,10516	0,08655
	$\cdot pa^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pa^2$	$\cdot pa^2$
Gleichung	66	67 b	68	69	70

§ 16. Die Randzelle, deren längere Seite am Rand liegt.

Mit „Randzellen“ seien alle am Rande des Systems liegenden Zellen bezeichnet mit Ausnahme der die Ecken bildenden, welche „Eckzellen“ heißen mögen. Die beiden Arten von Randzellen, bei denen entweder die lange oder die kurze Seite die Außenwand bilden, müssen getrennt behandelt werden, da die Momente an entsprechenden Stellen verschiedene ungünstigste Belastungen haben.

Zur Berechnung der Momente M_a und M_b kommen wir mit zwei Grundbelastungen aus, welche zuerst untersucht werden.

a) Wechselbelastung.

Dieser Fall ist zum Teil schon in § 15 unter c behandelt worden. Wir berechneten dort in Gleichung (64) den Wert μ , um den die Momente in den gedachten Gelenken nach innen zu stetig abnehmen (vgl. Fig. 31). Dort lag zwar der Fall in dem Sinne anders, als die Abnahme in der Richtung der längeren Seite untersucht wurde, während es hier umgekehrt ist. Wir haben deshalb in Gleichung (64) die Werte a und b miteinander zu vertauschen und erhalten

$$\mu = 2 + n - \sqrt{(1+n)(3+n)} \dots \dots \dots (71)$$

Das Moment m an Stelle der äußersten Gelenke berechnet sich nun wie folgt:

nach (4): $EJ \cdot \alpha = -n(1-n) \frac{pa^3}{24}$;

nach (11) und (1) (vgl. Fig. 34):

$$EJ \cdot \beta = \frac{b}{2} \cdot \frac{(2+n)m - \mu m}{(1+n)(3+n)}$$

$$EJ \cdot \gamma = -\frac{ma}{2}.$$

Mit Gleichung (16) folgt:

$$m \left[\frac{b}{2} \cdot \frac{(2+n)-\mu}{(1+n)(3+n)} + \frac{a}{2} \right] = n(1-n) \frac{pa^3}{24}$$

und mit μ aus (71)

$$m = \frac{n(1-n)}{1 + \frac{n}{\sqrt{(1+n)(3+n)}}} \cdot \frac{pa^2}{12} \dots \dots \dots (72)$$

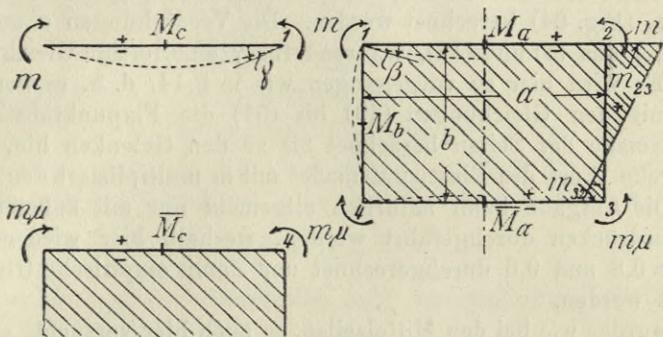


Fig. 34.

Mit Hilfe der Gleichungen (3) und (10) wird nun (Fig. 34):

$$M'_a = M_0 - n \cdot \frac{(2+n)m - \mu m}{(1+n)(3+n)} = M_0 - \frac{n^2(1-n)}{n + \sqrt{(1+n)(3+n)}} \cdot \frac{pa^2}{12}$$

$$\bar{M}'_a = -M_0 + \frac{n^2(1-n)[2+n - \sqrt{(1+n)(3+n)}]}{n + \sqrt{(1+n)(3+n)}} \cdot \frac{pa^2}{12}$$

$$M'_c = -m$$

$$\bar{M}'_c = M_0 - \frac{n^2(1-n)[2+n - \sqrt{(1+n)(3+n)}]}{n + \sqrt{(1+n)(3+n)}} \cdot \frac{pa^2}{12}$$

Dieser letzte Wert wird gleich groß wie $-\bar{M}'_a$, was auch sein muß, da die entgegengesetzte Belastung in \bar{M}_a das Moment \bar{M}'_c erzeugt und beide Belastungen zusammen Vollbelastung geben, welche Belastung in \bar{M}_a kein Moment hervorruft, also $\bar{M}'_a + \bar{M}'_c = 0$ sein muß. Dieses letztere sieht man ein, wenn man sich klarlegt, daß die Belastungen aller Innenseiten bei Vollbelastung sich gegenseitig aufheben, daß dann also nur die Außenwand des Systems belastet ist. Bei einer solchen Belastung können aber bei gleich großen Zellen keine Momente in die Innenseiten gelangen.

Es wird ferner

$$M'_b = M_0 + \frac{m_{23}'}{m_{32}'}$$

(m_{23}' und m_{32}' aus Gleichung 10).

Da hier das Maximalmoment nicht in der Seitenmitte auftritt, bedeuten der Wert M_0 wieder das Moment der Einzelzelle im gefährlichen Querschnitt und die Ausdrücke über und unter der punktierten Horizontalen

die Nebenmomente am oberen und unteren Ende der Seite b (Fig. 34). Das Maximalmoment kann nach (40) berechnet werden, was aber erst später bei der Zusammenstellung der Grundbelastungen geschieht.

b) Belastung einer Randzelle.

Hierfür werde Fig. 24 benützt, wobei das System auch nach unten bis ins Unendliche fortgesetzt zu denken ist.

Mit Hilfe von zwei Bedingungsgleichungen (16) können die Momente m_1 und m_2 (Fig. 24) berechnet werden. Die Verdrehungen α und β darin ergeben sich aus (4) und (11), während für γ eine fertige Gleichung nicht besteht. Es wird hier so vorgegangen wie in § 14, d. h. es werden fortlaufend mit den Gleichungen (49) bis (51) die Fixpunktabstände und Elastizitätsmaße der Seiten berechnet bis zu den Gelenken hin, wo dann der reziproke Wert des Elastizitätsmaßes mit m multipliziert den Winkel γ liefert. Die Aufgabe kann natürlich allgemein nur mit äußerst komplizierten Ausdrücken durchgeführt werden, weshalb hier wieder die Beispiele $n = 0,8$ und $0,6$ durchgerechnet und damit empirische Gleichungen aufgestellt werden.

Es wurde, wie bei den Mittelzellen, so auch hier versucht, annähernd konstante Werte c zu finden, weshalb die Zahlenrechnung auch für $n = 0,909$ und $0,7$ durchgeführt wurde. Wenn dieser Versuch auch mißlang, so bieten die gerechneten Werte wenigstens wieder eine Kontrolle für die Genauigkeit der empirischen Gleichungen.

Die folgende Tabelle 7 gibt die Resultate der ziemlich langwierigen Rechnung, deren Wiedergabe hier zu weit führen würde. Der Gang der Rechnung wird an einem Beispiel (neunter Abschnitt) gezeigt werden.

Tabelle 7.

(Fig. 24.)

$n = \frac{b}{a}$	i_a'	$\varepsilon_1 = \frac{m_1}{\gamma_1}$	$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_2'' = \frac{m_2}{\gamma_2}$	m_1	m_2	m_{23}''	m_{32}''
1,0	0,26223	3,6484	7,4740	0	0	0	0
0,909	0,26501	3,6598	7,1331	0,00760	0,01215	0,00343	0,00692
0,8	0,26870	3,6758	6,7207	0,01949	0,03280	0,00927	0,01978
0,7	0,27254	3,6914	6,2760	0,03432	0,06092	0,01722	0,03881
0,6	0,27732	3,7124	5,9547	0,05506	0,10547	0,02917	0,07117
	$\cdot a$	$\cdot \frac{EJ}{a}$	$\cdot \frac{EJ}{b}$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$	$\cdot pb^2$

Die ersten vier Kolonnen obiger Tabelle berechnen sich aus den Gleichungen (49)–(51). Nachdem auch die Winkel α und β für die beiden Gelenke nach (4) und (11) berechnet worden sind, ergab die Bedingung (16), angewendet bei den Gelenken 1 und 2, die beiden Momente m_1 und m_2 . Es ist z. B. für $n = 0,6$ nach (4):

$$EJ \cdot \alpha_1 = -0,6(1 - 0,6) \cdot \frac{p \cdot b^3}{24 \cdot 0,6^3} = -\frac{10}{6^3} pb^3; \quad EJ \cdot \alpha_2 = +\frac{10}{6^3} pb^3;$$

nach (11):

$$EJ \cdot \beta_1 = \frac{b}{2} \cdot \frac{2,6m_1 + m_2}{1,6 \cdot 3,6}; \quad EJ \cdot \beta_2 = -\frac{b}{2} \cdot \frac{m_1 + 2,6m_2}{1,6 \cdot 3,6}$$

nach Tabelle 7:

$$EJ \cdot \gamma_1 = -\frac{m_1}{0,6 \cdot 3,7124} \cdot b; \quad EJ \cdot \gamma_2 = +\frac{m_2}{5,9547} \cdot b.$$

Die Bedingungsgleichungen lauten:

$$\frac{2,6m_1 + m_2}{2 \cdot 1,6 \cdot 3,6} + \frac{m_1}{2,22744} = \frac{10}{6^3} p b^2$$

$$\frac{m_1 + 2,6m_2}{2 \cdot 1,6 \cdot 3,6} + \frac{m_2}{5,9547} = \frac{10}{6^3} p b^2,$$

woraus folgt:

$$m_1 = 0,05506 p b^2$$

$$m_2 = 0,10547 p b^2.$$

Es kann nun mit Hilfe der Gleichung (10) die Berechnung der Nebenmomente m_{23}'' und m_{32}'' an den Enden der Seite b folgen, so daß dann

$$M_b'' = M_0 + \frac{m_{23}''}{m_{32}''}$$

M_0 = Moment der Einzelzelle, m_{23}'' und m_{32}'' aus Tabelle 7.

c) Maximal- und Minimalmomente.

Die unter a behandelte Wechselbelastung ist die ungünstigste Belastung für M_a und \bar{M}_a , es wird deshalb (Fig. 34)

$$M_{a \max} = M_a' = (1 + 2n - 2n^2) \frac{p a^2}{24} - \frac{n^2 (1-n)}{n + \sqrt{(1+n)(3+n)}} \cdot \frac{p a^2}{12}. \quad (73)$$

$$\bar{M}_{a \max} = \bar{M}_c' = (1 + 2n - 2n^2) \frac{p a^2}{24} - \frac{n^2 (1-n) [2 + n - \sqrt{(1+n)(3+n)}]}{n + \sqrt{(1+n)(3+n)}} \cdot \frac{p a^2}{12} \dots \quad (74)$$

$$M_{a \min} = M_c' = -\frac{n(1-n)}{1 + \sqrt{(1+n)(3+n)}} \cdot \frac{p a^2}{12} \dots \quad (75)$$

$$\bar{M}_{a \min} = \bar{M}_a' = -\bar{M}_{a \max}$$

Für $n > k$ ist die ungünstigste Belastung für das Maximalmoment der Seite b in Fig. 35 dargestellt. Sie läßt sich wie folgt zusammensetzen:

$$M_{b \max} = M_b'' + (-M_b') - (-M_b'')$$

$$= 2 M_b'' - M_b' = M_0 + \frac{2 m_{23}'' - m_{23}'}{2 m_{32}'' - m_{32}'}$$

wo m_{23}'' und m_{32}'' aus Tabelle 7 und m_{23}' und m_{32}' mit (72) und (10) zu berechnen sind. Nach dieser Gleichung folgen mit (40) die speziellen Werte

$$n = 1,0: M_{b \max} = 0,04167 \cdot p b^2$$

$$n = 0,8: \quad 0,04171 \cdot p b^2$$

$$n = 0,6: \quad 0,04669 \cdot p b^2$$

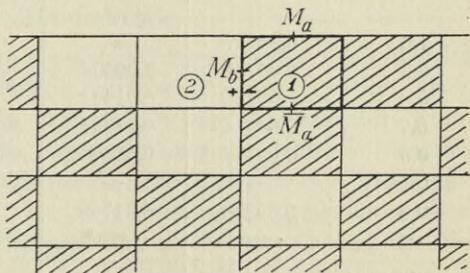


Fig. 35.

und aus diesen die empirische Gleichung

$$M_{b \max} = \left(0,06355 - 0,03953 \frac{1}{n} + 0,01764 \frac{1}{n^2} \right) p b^2 \quad (76)$$

Die Gültigkeitsgrenze dieser Gleichung folgt aus $M_b'' = 0$ zu $n = k = 0,586$.

Für $n < k$ wird, da dafür die Wechselbelastung maßgebend ist (in Fig. 35: Verschiebung der Belastung 1 nach Zelle 2),

$$M_{b \max} = -M_b' \quad (\text{s. Seite 67}).$$

Die folgende Zusammenstellung dient zum Vergleich der empirisch gerechneten Werte von $M_{b \max}$ nach (76) mit den genauen, aus Tabelle 7 ermittelten Werten.

$n = \frac{b}{a}$	$M_{b \max}$	$M_{b \max}$
	Empirisch nach (76)	Genau nach Tabelle 7
1,0	0,0417	0,0417
0,90909	0,0414	0,0415
0,8	0,0417	0,0417
0,7	0,0431	0,0429
0,6	0,0467	0,0467
	$\cdot p b^2$	$\cdot p b^2$

Wie dieser Vergleich zeigt, hat es keinen Wert, die Momente $M_{b \max}$ in der folgenden Tabelle 8 genauer als auf 4 Dezimalen anzugeben, doch ist diese Genauigkeit für die Praxis ausreichend.

Tabelle 8.

Momente einer Randzelle im unendlich großen Zellen-system, deren längere Seite am Rand liegt.

(Vgl. Fig. 35.)

$n = \frac{b}{a}$	$M_{a \max}$	$-M_{a \min}$	$\bar{M}_{a \max} = -\bar{M}_{a \min}$	$M_{b \max} = -M_{b \min}$	
				$k = 0,586$	
				$n > k$	$n < k$
1,0	0,04167	0	0,04167	0,0417	(-0,0417)
0,9	0,04731	0,00564	0,04884	0,0414	—
0,8	0,05188	0,01021	0,05442	0,0417	—
0,7	0,05584	0,01367	0,05843	0,0431	—
0,6	0,05767	0,01600	0,06087	0,0467	(0,0407)
0,586	—	—	—	0,0474	0,0474
0,5	0,05876	0,01709	0,06172	(0,0551)	0,1095
	$\cdot p a^2$	$\cdot p a^2$	$\cdot p a^2$	$\cdot p b^2$	$\cdot p b^2$
Gleichung	73	75	74	76	—

Die ungünstigsten Belastungen für die Eckmomente sind ähnlich derjenigen der Fig. 33. Da die Berechnung der dieser Belastung entsprechenden Grundbelastungen bei der Randzelle sehr umständlich ist, soll von der Berechnung der Eckmomente Abstand genommen werden. Es ist anzunehmen, daß sie um wenigens kleiner werden als die der Mittelzelle, da dies bei den Knotenpunktsmomenten der Eckzelle der Fall, und bei den Mittenmomenten ein stetiges Abnehmen von der Mittelzelle über die Randzellen zur Eckzelle wahrzunehmen ist. \hat{M}_b kann angenähert mit Gleichung (56) und (57) des zweireihigen Systems berechnet werden (vgl. § 20).

§ 17. Die Randzelle, deren kürzere Seite am Rand liegt.

Die Ableitung der Gleichungen hierfür geschieht genau auf dieselbe Weise wie in der vorhergehenden Nummer; es sollen deshalb nur die Schlußresultate angeschrieben werden, mit welchen dann Tabelle 9 gerechnet wird:

$$M_{a_{max}} = -M_{a_{min}} = (0,03926 + 0,07514 n - 0,07273 n^2) p a^2 \quad . \quad (77)$$

$n > k$ ($k = 0,601$):

$$M_{b_{max}} = \left(0,03635 - 0,01028 \frac{1}{n} + 0,01560 \frac{1}{n^2} \right) p b^2 \quad . \quad (78)$$

$M_{b_{max}}$ entsteht bei der Belastung der Fig. 36.

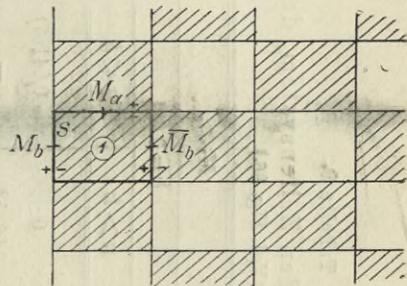


Fig. 36.

$$M_{b_{min}} = - \left(-0,00532 - 0,01028 \frac{1}{n} + 0,01560 \frac{1}{n^2} \right) p b^2 \quad . \quad (79)$$

$$\bar{M}_{b_{max}} = + \left(0,04016 - 0,02116 \frac{1}{n} + 0,02267 \frac{1}{n^2} \right) p b^2 \quad . \quad (80)$$

$$\bar{M}_{b_{min}} = - \bar{M}_{b_{max}}$$

Da der Fall $n < k$ nur theoretisches Interesse hat, sind hierfür nur wenige Punkte berechnet worden, um den Verlauf der Kurven in Fig. 42 (Seite 79) feststellen zu können.

§ 18. Die Eckzelle.

Die Berechnung der Momente geschieht hier wieder nach den Entwicklungen in § 14, und zwar für die Seitenverhältnisse $n = 0,8$ und $0,5$. Diese beiden Werte geben einen Anhalt für den Verlauf der Kurven $M = f(n)$. Es kommt dabei das Ergebnis heraus, daß alle Maximalmomente kleiner werden als die entsprechenden Momente der in den §§ 16 und 17 behandelten Randzellen. Da der Unterschied gegenüber diesen aber gering ist, lohnt es sich aus praktischen Gründen kaum, die Eckzellen schwächer zu dimensionieren als die Randzellen, weshalb auch das

Tabelle 9.

Momente einer Randzelle im unendlich großen Zellenystem, deren kürzere Seite am Rand liegt.
(Vgl. Fig. 36.)

$n = \frac{b}{a}$	$M_{a, \max}$		$M_{b, \max}$		$M_{b, \min}$		$\bar{M}_{b, \max} = -\bar{M}_{b, \min}$		
	$k = 0,601$		$k = 0,601$		$k = 0,601$		$k_1 = 0,56; k_2 = 0,55$		
	$n > k$	$n < k$	$n > k$	$n < k$	$n > k$	$n < k$	$n > k_1$	$k_2 < n < k_1$	$n < k_2$
1,0	0,04167	(0)	0,04167	(0)	0	(-0,04167)	0,0417	(0)	(-0,0417)
0,9	0,04797	—	0,04419	—	0,00252	—	0,0446	—	—
0,8	0,05282	—	0,04787	—	0,00620	—	0,0491	(0,0157)	(-0,0168)
0,7	0,05622	(0,03554)	0,05350	(0,03554)	0,01183	(-0,00613)	0,0562	—	—
0,601	—	0,06245	0,06245	0,06245	0,02078	0,02078	—	—	—
0,6	0,05816	0,06288	(0,06255)	0,06288	(0,02088)	0,02121	0,0678	—	(0,0468)
0,56	—	—	—	—	—	—	0,0747	0,0747	—
0,55	—	—	—	—	—	—	—	0,0783	0,0783
0,5	0,05866	0,10991	(0,07819)	0,10991	(0,03652)	0,06824	(0,0885)	(0,1009)	0,1178
	$\cdot p a^2$	$\cdot p b^2$	$\cdot p b^2$	$\cdot p b^2$					
Gleichung	77	78	79	80	80	80	80	80	80

Aufstellen von empirischen Gleichungen unterlassen wird. Solche können aber an Hand der im folgenden sich ergebenden Werte für $n = 0,8$ und $0,5$ leicht hergestellt werden.

Es folgen nun zuerst die Berechnungen der vier erforderlichen Grundbelastungen.

a) Wechselbelastung I.

Diese Belastung ist in Fig. 37 dargestellt. Bei der Berechnung der Randzellen konnte für diese Belastung von dem gesetzmäßigen Abnehmen der Gelenkmomente ins Innere des Systems nützlicher Gebrauch gemacht werden, es war dadurch eine theoretisch genaue Lösung der Aufgabe möglich. Auch hier werden diese Momente gesetzmäßig abnehmen, und zwar ins Innere gegen den Wert Null und nach den beiden Außenwandrichtungen gegen die Werte m hin, welche wir bei den Randzellen berechnet haben. Dieses Gesetz genau anzugeben, dürfte nur mit komplizierten Gleichungen gelingen. Es wird deshalb vorgezogen, auch für diese Belastung nach dem Verfahren des § 14 vorzugehen.

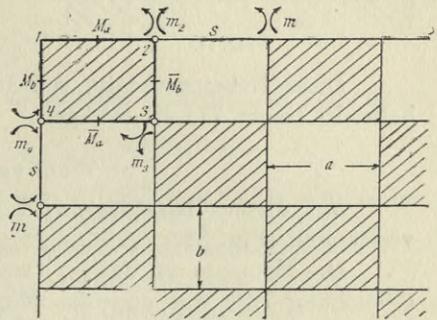


Fig. 37.

Wir berechnen die drei unbekanntenen Gelenkmomente m_2, m_3, m_4

(Fig. 37) aus drei Bedingungsgleichungen (16) unter Benützung der Tabellen 4 und 7 (Seite 49 und 68). Für $n = 0,8$ wird in Gelenk 2

$$\text{nach (4): } EJ \cdot \alpha_2 = 0,8 \cdot 0,2 \cdot \frac{pa^3}{24} = 0,00667 pa^3;$$

$$\text{nach (7): } EJ \cdot \beta_2 = -(0,1297 \cdot m_2 + 0,0401 \cdot m_3 + 0,01834 \cdot m_4) \cdot a;$$

$$\text{nach Tabelle 7: } EJ \cdot \gamma_2 = \frac{m_2}{\varepsilon_2} = \frac{m_2}{3,6758} \cdot a.$$

Dasselbe wird für die Gelenke 3 und 4 gemacht, und es folgt dann nach Gleichung (16)

$$\text{Gelenk 2: } 0,00667 pa^2 - 0,1297 m_2 - 0,0401 m_3 - 0,01834 m_4 = 0,2720 m_2$$

$$\text{Gelenk 4: } 0,00667 pa^2 - 0,01834 m_2 - 0,03393 m_3 - 0,1297 m_4 = 0,2208 m_4$$

$$\text{Gelenk 3: } -0,00667 pa^2 + 0,0401 m_2 + 0,1297 m_3 + 0,03393 m_4$$

$$= -0,1190 m_3 - (0,00667 - 0,00019) pa^2.$$

Die Größe $0,00019$ der letzten Gleichung ist eine Korrektur, der Verdrehung $\alpha = 0,00667$ [aus Gleichung (4)] auf der Innenseite von Gelenk 3, herrührend von den Widerständen der Stäbe s . Die Gleichungen haben geordnet die typische Form von Elastizitätsgleichungen, was für

die Richtigkeit der angewandten Gleichungen der Voruntersuchungen spricht. Sie geben die Lösungen

$$m_2 = +0,01620 pa^2 \quad (n = 0,8)$$

$$m_3 = -0,00439 pa^2$$

$$m_4 = +0,01865 pa^2.$$

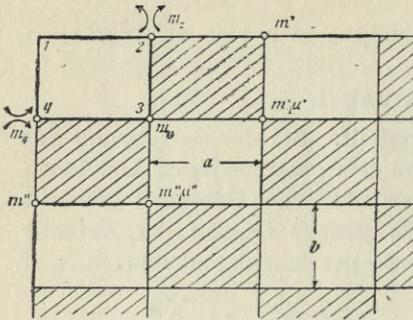


Fig. 38.

Nach Gleichung (6) werden die durch diese Gelenkmomente hervorgerufenen Nebenmomente (vgl. Fig. 3b)

$$m_{14} = -0,00033 pa^2$$

$$m_{21} = -0,00664 pa^2$$

$$m_{32} = -0,00211 pa^2$$

$$m_{43} = -0,00885 pa^2.$$

Diese Nebenmomente, wie auch diejenigen für $n = 0,5$ sind in Tabelle 10 (Seite 77) eingetragen.

b) Wechselbelastung II.

Mit dieser Belastung wird die umgekehrte Belastung der Fig. 37 verstanden (Fig. 38).

Die Momente m' und m'' werden nach den §§ 16 und 17 berechnet (Gleichung 72), was eine das Ergebnis kaum beeinflussende Ungenauigkeit ist, da diese Momente auch nur geringen Einfluß auf die Eckzelle haben. Moment m_3 könnte angenähert als Summe von $(m_2 \cdot \mu')$ und $(m_4 \cdot \mu'')$ bestimmt werden. Da diese Momente aber angenähert gleich sind und in Gelenk 3 entgegengesetzten Drehsinn haben, werden sie sich fast aufheben. Die Berechnung wird daher für $m_3 = 0$ durchgeführt und dann nachgesehen, ob die Drehwinkel der beiden in Gelenk 3 zusammenstoßenden Zellenecken stark voneinander verschieden sind. Je weniger dies der Fall ist um so eher ist $m_3 = 0$.

Es müssen hier die Winkel γ_2 und γ_4 und der Momentenverlauf (Fig. 39) berechnet werden, welche in dem zweiseitigen Stabeck unter Angriff zweier Momente m_2 und m_4 entstehen. Die Ecken seien unverschieblich.

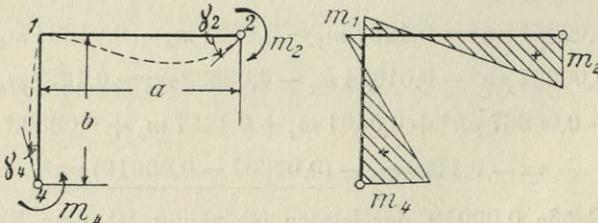


Fig. 39.

In der Ecke 1 denken wir uns vorübergehend ein Gelenk angebracht, an dessen Stelle das zu berechnende Moment m_1 wirke. Die Verdrehungen

auf beiden Seiten des Gelenkes müssen gleich groß sein, was mit (1) die Gleichung gibt:

$$\frac{a}{6} (2m_1 + m_2) = -\frac{b}{6} (2m_1 + m_4),$$

woraus folgt

$$m_1 = -\frac{m_2 + nm_4}{2(1+n)} \quad \dots \quad (81)$$

Aus (1) folgt dann weiter

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= \frac{(3+4n)m_2 - nm_4}{12(1+n)} \cdot a \\ \gamma_4 &= -\frac{m_2 + (4+3n)m_4}{12(1+n)} \cdot b \end{aligned} \right\} \dots \quad (82)$$

In Gelenk 2 wird nun für $n=0,8$

$$\text{nach (4): } EJ \cdot \alpha_2 = -0,00667 \cdot pa^3;$$

$$\begin{aligned} \text{nach (7): } EJ \cdot \beta_2 &= \frac{a \cdot 0,8}{6 \cdot 23,27} (22,64 \cdot m_2 + 5,92 \cdot 0,01021 - 3,2 \cdot 0,00189) \\ &= (0,1298 \cdot m_2 + 0,000312) \cdot a; \end{aligned}$$

$$\text{nach (82): } EJ \cdot \gamma_2 = \frac{6,2(-m_2) - 0,8m_4}{12 \cdot 1,8} \cdot a = -(0,2870 \cdot m_2 + 0,03706 \cdot m_4) \cdot a.$$

Mit (16) folgt, wenn dasselbe auch für Gelenk 4 gemacht wird,

$$\text{Gelenk 2: } 0,4168 \cdot m_2 + 0,03705 \cdot m_4 = 0,006355 \cdot pa^2$$

$$\text{Gelenk 4: } 0,03707 \cdot m_2 + 0,3668 \cdot m_4 = 0,006225 \cdot pa^2,$$

$$\text{und daraus } m_2 = 0,01387 \cdot pa^2 \quad (n=0,8)$$

$$m_4 = 0,01556 \cdot pa^2.$$

Mit (6) und (81) können nun die Nebenmomente an den gewünschten Stellen berechnet werden. Sie sind in Tabelle 10 zusammengestellt.

Es soll nun noch nachgewiesen werden, daß das Gelenkmoment in $3 \infty 0$ ist. Die Verdrehungen der Ecken in 3 berechnen sich aus (7) für $EJ=a=1$ und $n=0,8$ zu:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= 0,006667 + \frac{0,8}{6 \cdot 23,27} (-7 \cdot 0,01387 - 3,2 \cdot 0,01021 + 5,92 \cdot 0,00189) \\ &= 0,00599 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_3' &= 0,006667 + \frac{0,8}{6 \cdot 23,27} (-5,92 \cdot 0,01556 + 7 \cdot 0,00187 - 3,2 \cdot 0,01186) \\ &= 0,00600. \end{aligned}$$

Die Verdrehungen sind also tatsächlich beinahe gleich groß, weshalb auch $m_3 = 0$ gesetzt werden darf. Dasselbe gilt für $n=0,5$; es wird dafür $\beta_3 - \beta_3' = 0,00004$.

c) Belastung der Eckzelle.

Die Gelenkmomente berechnen sich aus den drei unter a aufgestellten Gleichungen (Seite 73), nur muß in diesen der unterstrichene Wert, der von der Belastung der Innenzellen herrührt, weggelassen werden.

Es ergeben sich dann für $n=0,8$ die Werte

$$m_2 = +0,01363$$

$$m_3 = +0,02243$$

$$m_4 = +0,01614.$$

Der Drehsinn dieser Momente ist in Fig. 37 eingetragen. Die daraus entstehenden Nebenmomente sind aus Tabelle 10 ersichtlich, wo auch noch die Momente der vierten Grundbelastung d eingeschrieben sind.

d) Maximal- und Minimalmomente.

Durch Zusammensetzung der Grundbelastungen zu den ungünstigsten werden die Größtmomente erhalten, welche in Tabelle 11 zusammengestellt sind. Die notwendigen Grundbelastungen sind jeweils durch die betreffenden Buchstaben a, b, c, d gekennzeichnet. Die Maximalwerte, die nicht in den Seitenmitten liegen, ergeben sich mit Hilfe von Gleichung (40).

Um die zur Dimensionierung erforderlichen Maximalmomente der Außenseiten zu erhalten, trägt man sie am besten graphisch auf. In den Reihen „links“ und „rechts“ bzw. „oben“ und „unten“ der Tabelle 11 sind die unterstrichenen Werte die dazu notwendigen Momente an den Seitenenden, welche geradlinig zu verbinden sind. Hierzu kommen die Minimaleckmomente \hat{M} , \hat{M}_a und \hat{M}_b , welche mit den „zugehörigen“ Eckmomenten in den Ecken 1, 2 und 4 durch Parabeln verbunden werden (Pfeilhöhe = $\frac{pa^2}{8}$ bzw. $\frac{pb^2}{8}$, vgl. auch Fig. 51).

Da nun die Nebenmomente für $n=1,0; 0,8; 0,5$ bekannt sind, können zwischenliegende Werte mit genügender Genauigkeit parabolisch interpoliert werden (vgl. § 11). Doch ist dies, wie schon bemerkt, nicht notwendig,

da dieser Paragraph zeigt, daß alle Momente der Eckzelle, mit Ausnahme der Minimalmomente an den Knotenpunkten der Außenseiten, kleiner sind als die entsprechenden Momente der Randzellen. Das „entsprechend“ ist so zu verstehen, daß die lange Außenseite und die kurze Innenseite der Eckzelle derjenigen Randzelle entsprechen, deren lange Seite außen liegt, und umgekehrt.

In Fig. 41 und 42 sind die für $n=0,8$ und $0,5$ berechneten Momente der Eckzellen eingetragen. (Erklärung dieser Figuren in § 19.)

Mit den Minimal-Eckmomenten verhält es sich umgekehrt. \hat{M}_{min} kann mit $\hat{M}_{b,min}$ der Tabelle 5 verglichen werden, da das unendlich große Zellenfeld sich nur wenig von dem zweireihigen System unterscheidet (vgl. § 20). Wir sehen dabei, daß die Ecke der Eckzelle etwas stärker beansprucht wird, als die der Randzelle.

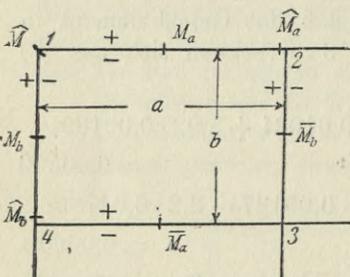
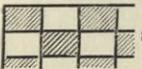
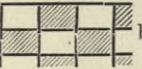
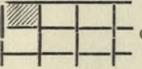
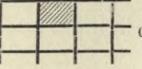


Fig. 40.

Tabelle 10.

Nebenmomente der Eckzelle im unendlich großen Zellsystem.
(Vgl. Fig. 40.) (Sämtliche Momente sind mit pa^2 zu multiplizieren.)

Belastungsfall	$n = \frac{b}{a}$	m_{14}	m_{21}	m_{23}	m_{32}	m_{34}	m_{43}	m_{41}
	0,8	-0,00033	-0,00664	-0,00963	+0,00211	-0,00228	+0,00885	+0,00980
	0,5	-0,00193	-0,00789	-0,02002	+0,00467	-0,00523	+0,01582	+0,02731
	0,8	+0,00040	-0,01387	+0,00887	-0,00188	+0,00224	-0,00851	+0,01556
	0,5	+0,00223	-0,02426	+0,01760	-0,00286	+0,00493	-0,01558	+0,03512
	0,8	-0,00015	-0,00882	-0,00481	-0,01261	+0,00982	+0,00441	+0,01173
	0,5	-0,00092	-0,01262	-0,01003	-0,03221	+0,01470	+0,00777	+0,03071
	0,8	—	—	+0,00580	+0,01218	—	—	—
	0,5	—	—	+0,01175	+0,03100	—	—	—

$\cdot pa^2$

§ 19. Graphische Darstellung der Momente.

(Fig. 41 und 42.)

Wie bei dem einreihigen System, so wurden auch hier die Tabellenwerte (Tabellen 6, 8, 9, 11) als Funktionen von n aufgetragen und durch Kurven verbunden.

In Fig. 41 sind die Mittenmomente M_a der längeren Seite und die Eckmomente \hat{M} dargestellt, und zwar sind sämtliche Ordinaten mit pa^2 zu multiplizieren (auch \hat{M}_b).

Betrachten wir einmal die Kurven $M_{a\max}^m$, $\bar{M}_{a\max}^R$ und $M_{a\max}^R$, dann $M_{a\max}^m$ und $M_{a\max}^R$, so können wir aus dem Verlauf derselben folgern, daß das Moment M_a von der Mitte gegen den Rand hin stetig abnimmt und zwar nur um ein geringes Maß. \bar{M}_a^R liegt viel näher an M_a^m als an M_a^R , die Zellen zunächst den Randzellen können demnach schon sehr genau als Mittelzellen berechnet werden. Da die ungünstigsten Belastungen für $M_{a\max}^R$ und $M_{a\min}^R$ zusammen Vollbelastung geben, welche das Moment $M_a = \frac{pa^2}{24}$ erzeugt, muß die Addition dieser Kurven an jeder Stelle $\frac{1}{24}$ geben, oder die Kurven liegen symmetrisch zu einer Horizontalen im Abstand $\frac{1}{48}$ von der n -Achse. Bemerkenswert ist, wie schnell das Eckmoment $\hat{M}_{b\min}^m$ bei kleiner werdendem n wächst. (Die Kurve ist als Funktion von pa^2 dargestellt.) Für $n = 1$ ist $\hat{M}_{b\min}^m = -\frac{pb^2}{12}$, für $n = 0,8$: $\hat{M}_{b\min}^m = -\frac{pa^2}{12,4} = -\frac{pb^2}{7,9}$, für $n = 0,5$ wird sogar $\hat{M}_{b\min}^m = -\frac{pb^2}{2,9}$, was sehr gegen die Ausföhrung allzu rechteckiger Zellen spricht.

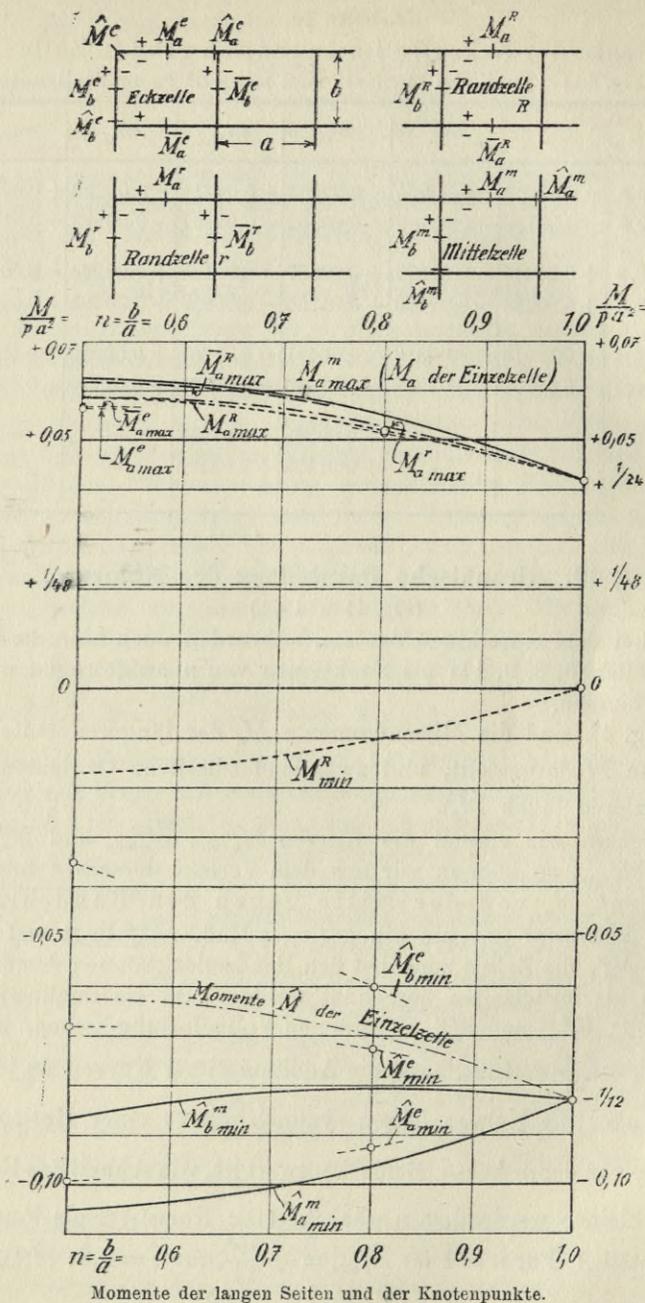


Fig. 41. Größtmomente für eine mittlere, zwei Rand- und eine Eckzelle des unendlich großen Systems.

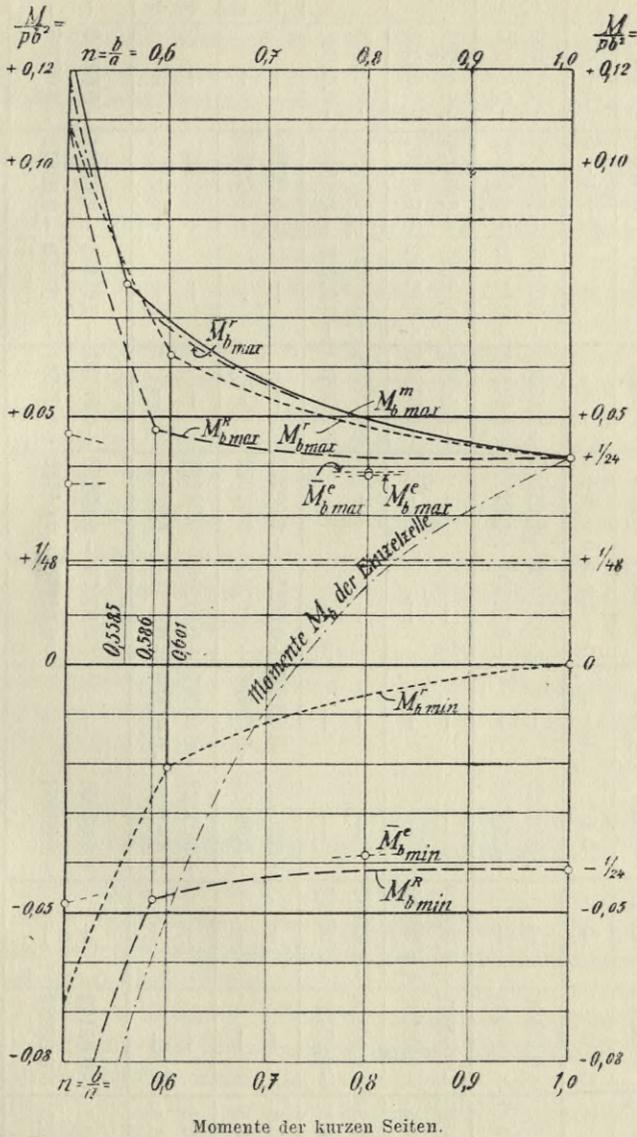


Fig. 42. Größtmomente für eine mittlere, zwei Rand- und eine Eckzelle des unendlich großen Systems.

Tabelle 11.
Maximal- und Minimalmomente der Eckzelle im unendlich großen Zellen-system.
(Vgl. Fig. 40.)

Grundbelastungen	$n = \frac{b}{a}$	$M_{a \max}$	$M_{a \min}$	$M_{b \max}$	$M_{b \min}$	$\bar{M}_{b \max}$	$\bar{M}_{b \min}$	$\bar{M}_{a \max}$	$\bar{M}_{a \min}$	\hat{M}_{\min}	$\hat{M}_{a \min}$	$\hat{M}_{b \min}$
		a	b	$b+c$	$a-c$	$a-c+d$	$b-d+c$	b	a	$b+c-d$	$b+c$	a
M_0 -Momente der Einzelzelle nach Gleichung (2) u. (3)	0,8	+ 0,05500	—	+ 0,01562	—	+ 0,01562	- 0,01562	+ 0,05500	- 0,05500	- 0,07000	- 0,07000	- 0,07000
	0,5	+ 0,06250	—	- 0,12500	—	- 0,12500	+ 0,12500	+ 0,06250	- 0,06250	- 0,06250	- 0,06250	- 0,06250
Summe der Nebenmomente (aus Tabelle 10)	0,8	- 0,00033	+ 0,00040	—	—	—	—	- 0,00851	+ 0,00885	- 0,00286	+ 0,00025	—
	0,5	- 0,00193	+ 0,00223	—	—	—	—	- 0,01558	+ 0,01582	- 0,00562	+ 0,00131	—
	0,8	- 0,00664	- 0,01387	—	—	—	—	+ 0,00224	- 0,00228	- 0,01068	- 0,02269	—
	0,5	- 0,00789	- 0,02426	—	—	—	—	+ 0,00493	- 0,00523	- 0,01465	- 0,03688	—
Maximalmomente aus M_0 - u. Nebenmomenten nach Gleichung (40)	0,8	—	—	+ 0,00039	- 0,00027	+ 0,00153	- 0,00272	—	—	- 0,00286	—	- 0,00033
	0,5	—	—	+ 0,00524	- 0,00404	+ 0,00704	- 0,01672	—	—	- 0,00562	—	- 0,00193
Zugehörige Momente	0,8	—	—	+ 0,04262	- 0,00301	+ 0,04203	- 0,04165	—	—	+ 0,02627	—	+ 0,00980
	0,5	—	—	+ 0,25532	- 0,01360	+ 0,27152	- 0,26428	—	—	+ 0,06296	—	+ 0,02731
Zugehörige Momente	0,8	+ 0,05149	—	+ 0,03800	—	+ 0,03874	- 0,03858	+ 0,05192	- 0,05165	- 0,07286	- 0,09269	- 0,06020
	0,5	+ 0,05683	—	+ 0,03654	—	+ 0,04670	- 0,04632	+ 0,05744	- 0,05689	- 0,06812	- 0,09938	- 0,03519
	0,8	—	—	—	—	—	—	—	(unten)	(rechts)	(links)	(oben)
	0,5	—	—	—	—	—	—	—	- 0,04373	- 0,08068	- 0,06975	- 0,07033
									+ 0,00046	- 0,07715	- 0,06119	- 0,06443

 pa^2 pb^2 pa^2

In Fig. 42 sind die Mittenmomente M_b der kürzeren Seiten dargestellt. Vor allem sei hier auf den Unterschied der Kurven M_b und M_{bmax}^m hingewiesen, welche erstere das Moment in der Mitte der kurzen Seite der Einzelzelle darstellt, während Kurve M_{bmax}^m den wirklichen Wert dieses Momentes bei einer Mittelzelle zeigt. Während M_{amax} genau dem Werte M_a der Einzelzelle entspricht, weicht M_{bmax}^m , je kleiner das Seitenverhältnis wird, um so mehr von dem Moment der Einzelzelle ab. Die in der Praxis oft verwendete Annäherung der Berechnung der Zellen als für sich allein bestehend (vgl. Handbuch für Eisenbetonbau, Band IV, Teil 2, Silos), führt in diesem Punkt zu einem ganz falschen Ergebnis¹⁾.

Auch hier kann wieder die Abnahme der Momente von der Mitte gegen die Ränder wahrgenommen werden. Moment \bar{M}_b^r ist auch hier wieder kaum verschieden von M_b^m . Die Stellen $n = k$, wo die ungünstigsten Belastungen plötzlich ändern, machen sich in den Kurven durch einen Knick kenntlich. Das steile Ansteigen der Kurven nach diesem Knick zeigt wieder deutlich, wie unrationell Zellen sind, deren Seitenverhältnis kleiner als etwa 0,6 ist. Die Kurven M_{bmax}^r und M_{bmin}^r liegen auch hier symmetrisch zu einer Horizontalen in $\frac{1}{48}$ Höhe. M_{bmax}^r und M_{bmin}^r sind natürlich symmetrisch zur n -Achse oder, anders ausgedrückt: Die Summe ihrer Ordinaten ist überall gleich Null, d. h. die Vollbelastung verursacht in M_b^r kein Moment. —

Trotz der geringeren Versteifung der Rand- und Eckzellen werden die Größtmomente bei diesen kleiner als bei den Mittelzellen, das Fehlen der Belastungen außerhalb des Systems hat demnach einen größeren Einfluß auf die Größe der Momente.

§ 20. Zusammenfassung und Vergleich der ein-, zwei- und vielreihigen Systeme untereinander.

Die Gleichungen des fünften Abschnittes ermöglichen die direkte Berechnung der Größtmomente in den wichtigsten Punkten des unendlich weit ausgedehnten Zellsystems mit gleichen Zellen und konstantem Trägheitsmoment bei gegebenem Seitenverhältnis. Das System wurde als ebenes betrachtet, d. h. vertikal zur Bildebene auftretende Kräfte infolge verspannender Wirkung des Silounterbaus blieben unberücksichtigt.

Die Untersuchung zeigt die Ungenauigkeit einer Berechnung der Zellen als geschlossene Rahmen, hauptsächlich bei den kürzeren Seiten und den Ecken. (Vgl. Fig. 41 und 42.)

Der Fehler einer solchen Berechnungsweise oder, was dasselbe ist, die Nebenmomente infolge des Zusammenhangs der Zellen wachsen mit

¹⁾ Auch der in der Literatur öfters zu findende Wert $\frac{pb^2}{24}$ gibt für rechteckige Zellen zu kleine Momente.

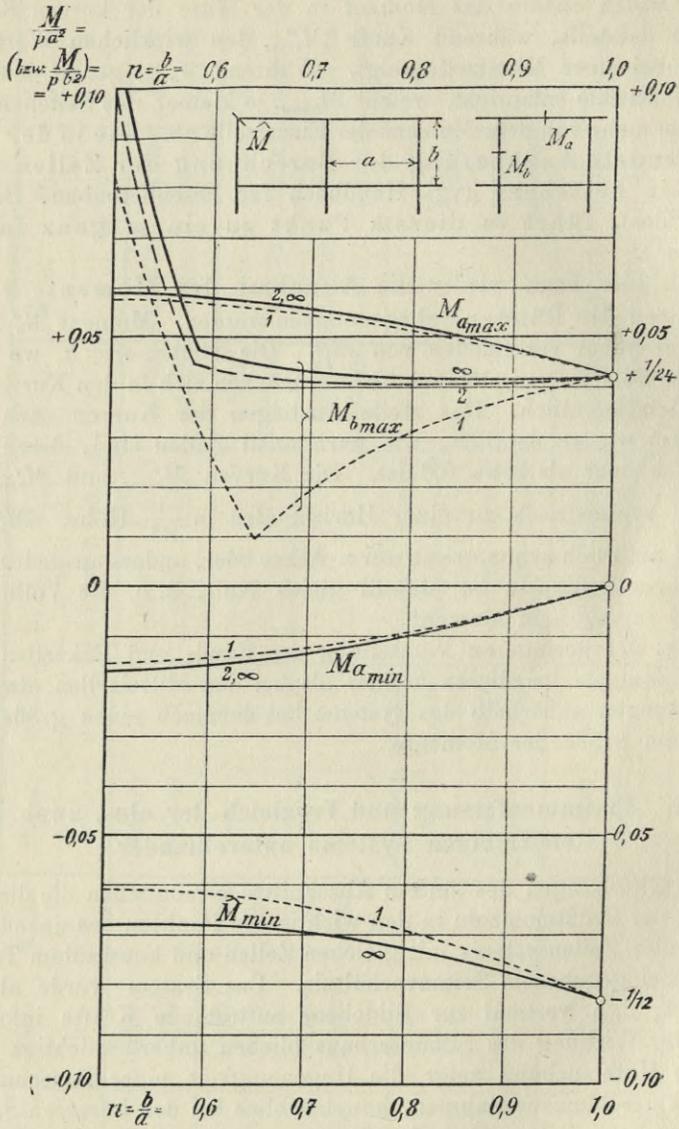


Fig. 43. Vergleich einiger Größtmomente bei unendlich langen ein-, zwei- und viereihigen Systemen.

kleiner werdendem Seitenverhältnis. Bei quadratischen Zellen sind sie gleich Null, bei solchen ist daher die genannte Berechnungsweise genau.

Die Größtmomente entsprechender Schnittstellen nehmen von der Mitte des Systems gegen die Ränder hin ab. Von den am Rand liegenden Zellen sind die Eckzellen die am wenigsten beanspruchten. (Vgl. Fig. 41 und 42 und § 19.)

In Fig. 43 sind einige Momentenkurven $M=f(n)$ für verschiedene Systeme zusammengestellt. Die drei Kurven $M_{b,max}$ stellen die Maximalmomente der kurzen Seiten von Mittelzellen des unendlich langen ein- und zweireihigen Systems und von einer Randzelle des unendlich großen Zellen-systems dar. Man erkennt einen stetigen Übergang der Momente vom einreihigen zum unendlichvielreihigen System, und zwar liegt Kurve 2 sehr nahe an Kurve ∞ , was den in Abschnitt IV gemachten Vorschlag der Berechnung zweireihiger Systeme mit den Gleichungen für das unendlich große Zellen-system rechtfertigt, um so mehr, da eine solche Berechnung etwas zu große Momente gibt.

Beim Moment M_a der langen Seiten ist der Unterschied der Kurven 2 und ∞ so gering, daß er in dem Maßstab der Fig. 43 nicht mehr wahrzunehmen ist. (Man vergleiche die Zahlenwerte dieser drei Kurven in den Tabellen 1, 5 und 8.)

Da schon die Momente der zweireihigen Systeme wenig verschieden sind von denjenigen des unendlich großen Zellen-systems, um so eher können die Rand- und Eckzellen von drei- und mehrreihigen Systemen mit den Gleichungen des V. Abschnittes berechnet werden. Aber auch für die Mittelzellen dieser Systeme werden die Gleichungen für die Mittelzelle des unendlichen Feldes gute Ergebnisse liefern.

Sechster Abschnitt.

Berechnung der Normalkräfte.

Auch die in den Zellenwänden auftretenden Normalkräfte werden durch den Zusammenhang der Zellen beeinflusst, wenn auch in wesentlich geringerem Maße, als dies bei den Biegemomenten der Fall ist. Mit „Nebennormalkraft“ oder kurz „Nebenkraft“ soll wie bei den Momenten der Unterschied der wirklichen Normalkraft gegenüber derjenigen der Einzelzelle bezeichnet werden.

Wie Beispiele zeigen, haben die Normalkräfte auf die Dimensionierung einen wesentlich geringeren Einfluß als die Momente. Es werden deshalb in diesem Abschnitt hauptsächlich diejenigen Normalkräfte berechnet, die bei den, den Größtmomenten entsprechenden ungünstigsten Belastungen entstehen, und nicht die größtmöglichen, da diese mit den zu ihrer Belastung gehörenden Biegemomenten aus genanntem Grund wohl selten für die Dimensionierung ausschlaggebend sind.

Den für die Dimensionierung hauptsächlich wichtigen Maximalmomenten der Seitenmitten und Minimalmomenten der Ecken entsprechen immer Normalzugkräfte, während den Minimalmomenten der Mitten der Außenseiten Normaldruck- und -zugkräfte entsprechen können. Da diese Minimalmomente nur dazu dienen, die innere Bewehrung der Außenwände zu berechnen, und durch sie die zulässige Betonbeanspruchung lange nicht erreicht wird (die Dicke der Wände wird mit dem absolut weit größeren Maximalmoment berechnet), so sind auch die bei der gleichen Belastung auftretenden Normaldruckkräfte in dieser Hinsicht nicht gefährlich, besonders da es nur Nebenkkräfte sind, welche die Betonspannung nur um ein geringes Maß erhöhen.

Dasselbe ist von den im Verein mit diesen Minimalmomenten in gewissen Zellenanordnungen auftretenden Nebenzugkräften zu sagen. Es kann deshalb das Aufstellen von Gleichungen für Normalkräfte, die diesen Minimalmomenten entsprechen, unterbleiben.

§ 21. Voruntersuchungen.

Für die im zweiten Abschnitt behandelten Aufgaben sollen die Normalkräfte berechnet werden. Da der jeweilige Momentenverlauf bekannt ist, ist die statische Unbestimmtheit gehoben, weshalb die Normalkräfte sich aus Gleichgewichtsbedingungen ergeben müssen.

Bei der mit gleichmäßig verteiltem Innendruck p belasteten Einzelzelle werden die Normalkräfte (Zug = positiv)

$$\text{in den Seiten } a: N_0 = + \frac{pb}{2} \dots \dots \dots (83)$$

$$\text{in den Seiten } b: N_0 = + \frac{pa}{2} \dots \dots \dots (84)$$

Für die Belastung der Einzelzelle, wie sie in Fig. 4 dargestellt ist, berechnen sich die Normalkräfte folgendermaßen:

Die Zelle wird in S_{12} (Fig. 4) aufgeschnitten und die Summe der Momente um Ecke 4 aufgestellt. In Schnitt S_{12} wirken das Moment m_{12} , die Normalkraft N_{12} und eine Querkraft, deren Hebelarm in bezug auf Ecke 4 gleich Null ist. Es wird

$$m_{41} = + m' + m_{12} + N_{12} \cdot b.$$

Die entsprechenden Gleichungen für die übrigen Ecken lauten:

$$m_{12} = - m'' + m_{23} + N_{23} \cdot a$$

$$m_{23} = + m'' + m_{34} + N_{34} \cdot b$$

$$m_{34} = - m' + m_{41} + N_{41} \cdot a.$$

Nach Einsetzen der Momente aus den Gleichungen (8) folgen die Normalkräfte

$$\left. \begin{array}{l} \text{in den Seiten } a: N_{12} = N_{34} = 0 \\ \text{in den Seiten } b: N_{23} = - N_{41} = \frac{3n(m'' - m')}{a(1 + 3n)} \end{array} \right\} \dots (85)$$

Auf dieselbe Weise werden die Normalkräfte für den in Fig. 5 dargestellten Belastungsfall

$$\left. \begin{array}{l} \text{in den Seiten } a: N_{12} = - N_{34} = \frac{3(m'' - m')}{b(3 + n)} \\ \text{in den Seiten } b: N_{23} = N_{41} = 0 \end{array} \right\} \dots (86)$$

Sind alle vier Momente einander gleich und haben den in Fig. 5 eingezeichneten Drehsinn, so werden alle Normalkräfte gleich Null.

Für den dreiseitigen Stabzug (Fig. 6) folgt mit Aufschneiden in der Mitte der kurzen Seite b und Aufstellen der Momentengleichung um Ecke 1:

$$m_b + N_b a + Q_b \frac{b}{2} + \mu m = - m.$$

Mit $Q_b = 0$ und m_b aus (14) wird

$$N_b = - \frac{3(1 + n + n\mu)m}{a(2 + 3n)} \dots (87)$$

N_a wird aus Symmetriegründen Null.

Der Horizontalschub, der an den Gelenken in der Richtung 1—4 infolge der in Fig. 6 eingezeichneten Belastung ausgeübt wird, ist nach der Gleichgewichtsbedingung

$$H = - N_b = \frac{3(1 + n + n\mu)m}{a(2 + 3n)} \dots (88)$$

Dieser Schub verursacht in einer in 1 und 4 etwa anschließenden Zellenseite eine Normalzugkraft, die neben den Nebenkräften infolge der Gelenkmomente zu berücksichtigen ist. (Vgl. folgendes Beispiel.)

Aus den abgeleiteten Gleichungen kann gefolgert werden, daß die Nebenkräfte aller derjenigen Seiten gleich Null werden, die parallel zu einer Symmetrieachse der Angriffsmomente liegen. Da nun in einem beliebigen Zellensystem, in welchem die Belastung symmetrisch zu einer

Mittelnachse (= Achse durch die Mitte einer Zelle) angeordnet ist, auch alle Gelenkmomente zu dieser Achse symmetrisch liegen, folgt das Gesetz:

Bei einem zu einer Mittelnachse symmetrischen und symmetrisch belasteten System von rechteckigen Zellen sind die Normalkräfte in denjenigen Seiten, die parallel und zunächst dieser Achse liegen gleich den Normalkräften der betreffenden Einzelzelle oder die Nebenkkräfte solcher Seiten sind gleich Null.

§ 22. Das einreihige Zellensystem.

Sind die an Stelle der Gelenke wirkenden Momente bekannt, so lassen sich die Normalkräfte aller Stäbe mit den Gleichungen des § 21 leicht berechnen. Es soll dies an den im dritten Abschnitt behandelten drei Beispielen gezeigt werden.

Für das in § 6 behandelte Beispiel (Fig. 8) wird nach (84) und (85) die Normalkraft in der Querseite A

$$N_1 = \frac{pa}{2} - \frac{3nm}{a(1+3n)},$$

m aus (17) eingesetzt gibt

$$N_1 = \frac{pa}{2} - \frac{n^2(1-n^2)(2+3n)}{4(1+2n)(1+6n+6n^2)} \cdot pa.$$

Die Normalkraft in der mittleren Querseite wird mit (85) und (88)

$$N_2 = \frac{pa}{2} + \frac{3nm}{a(1+3n)} + \frac{3(1+n)m}{a(2+3n)} = \frac{pa}{2} + \frac{n(1-n^2)}{4(1+2n)} \cdot pa$$

und diejenige in der dritten Querseite nach Gleichung (87) ($\mu=0$)

$$N_3 = -\frac{3(1+n)m}{a(2+3n)} = -\frac{n(1+n)(1-n^2)(1+3n)}{4(1+2n)(1+6n+6n^2)} \cdot pa.$$

Für $n=0,8$ wird $N_1 = (0,500 - 0,010) pa = +0,490 pa$

$$N_2 = (0,500 + 0,028) pa = +0,528 pa$$

$$N_3 = -0,018 pa.$$

Die Summe dieser drei Normalkräfte muß natürlich gleich der Belastung der Längswand sein, d. h. gleich pa , was als Probe gelten kann.

Für das Beispiel des § 8 (Fig. 10) wird z. B. die Normalkraft der Querseite 5 nach (84) und (85)

$$N_5 = \frac{pa}{2} - \frac{3nm_4}{a(1+3n)},$$

was mit $m_4 = 0,02328 pb^2$ (Seite 16) gibt

$$N_5 = (0,500 - 0,011) pa = +0,489 pa.$$

Wie der Vergleich der Werte N_1 und N_5 dieser beiden Beispiele zeigt, werden auch die Normalkräfte nur wenig von entfernt liegenden Zellen beeinflusst.

Bevor das dritte Beispiel behandelt wird, sollen die Gleichungen der Normalkräfte für die unendlich lange Reihe aufgestellt werden. Es kann dabei an Hand der Voruntersuchungen allgemein gesagt werden, daß die

Normalkräfte der Längsseiten immer gleich denjenigen der Einzelzelle sind, d. h. entweder gleich $\frac{pb}{2}$ (resp. $\frac{pa}{2}$ beim Fall der Fig. 15), wenn die Seite einer belasteten Zelle angehört, oder gleich Null, wenn die betreffende Zelle nicht belastet ist.

a) Mittelzelle, kurze Seite = Querseite.

Für die Wechselbelastung ist, da die vier Gelenkmomente gleich groß sind,

$$N_a' = \frac{pb}{2}$$

$$N_b' = \frac{pa}{2}.$$

Für die Belastung nur einer Zelle wird mit (88)

$$N_b'' = \frac{pa}{2} + \frac{3(1+n+n\mu)m'}{a(2+3n)},$$

wo μ aus (25), m' aus (29) zu berechnen ist.

Bei der ungünstigsten Belastung für M_{amax} wird demnach

$$N_a = N_a' = \frac{pb}{2},$$

für M_{bmax} (vgl. Gleichung 30 und Fig. 12)

$$N_b = N_b' - N_b'' + N_b'' = \frac{pa}{2}.$$

Es wird also auch bei der Belastung nach Fig. 12 die Normalkraft in der zu untersuchenden Querseite gleich derjenigen der Einzelzelle, was auch daraus folgt, daß es für unsere Normalkraft gleichgültig ist, ob Zelle z oder z' belastet ist.

Die zu \hat{M}_{amin} (Fig. 13) gehörende Normalkraft wird, da die Seite in der Längswand liegt,

$$\hat{N}_a = \frac{pb}{2}.$$

Für \hat{M}_{bmin} ist die Wechselbelastung maßgebend, also

$$\hat{N}_b = \frac{pa}{2}.$$

Die größte in der Querseite überhaupt mögliche Zugkraft tritt bei der Belastung nach Fig. 13 auf, entsprechend der Belastung für den größten Stützendruck beim kontinuierlichen Träger. Infolge Belastung der Zelle 2 wird mit (88)

$$N = \frac{pa}{2} + \frac{3(1+n+n\mu)m'}{a(2+3n)},$$

infolge Belastung 3 nach (88) und (87):

$$N = \frac{3(1+n+n\mu)m'}{a(2+3n)} \cdot \mu^2 + \frac{3(1+n+n\mu)m'}{a(2+3n)} \cdot \mu.$$

Infolge aller Belastungen der Fig. 13 wird demnach

$$N_{max} = 2 \left[\frac{pa}{2} + \frac{3(1+n+n\mu)m'}{a(2+3n)} (1 + \mu + \mu^2 + \dots) \right]$$

und mit der Summengleichung für die unendliche, geometrische Reihe:

$$N_{max} = pa + \frac{6(1+n+\mu)m'}{a(2+3n)(1-\mu)} \dots \dots \dots (89)$$

wo μ und m' aus (25) und (29) zu berechnen sind. Es wird z. B. für $n=0,8$: $N_{max} = 1,0444 pa$.

b) Mittelzelle, lange Seite = Querseite.

Auch hier ist für die kurze Seite immer $N_b = \frac{pa}{2}$, wenn die betreffende Zelle belastet ist, im andern Fall ist $N_b = 0$.

Die Normalkräfte, die den Momenten M_{amax} und \hat{M}_{amin} (Fig. 15) entsprechen, sind $N_a = \frac{pb}{2}$.

Die in der Querseite überhaupt mögliche größte Zugkraft berechnet sich wie unter a als Summe einer unendlichen, geometrischen Reihe. Es wird

$$N_{max} = pb + \frac{6(1+n+\mu)m'}{b(3+2n)(1-\mu)},$$

wo μ und m' aus Seite 25 folgen.

Für $n=0,8$ wird:

$$N_{max} = 1,0785 \cdot pb.$$

c) Endzelle, kurze Seite = Querseite.

Zur Berechnung der Maximalmomente waren die Momente von vier Grundbelastungen notwendig. In der folgenden Tabelle 12 sind die Normalkräfte der beiden äußersten Querseiten für diese vier Grundbelastungen zusammengestellt. Die Berechnung dieser Werte erfolgte nach den Gleichungen (85), (87), (88) mit den Momentenwerten des § 11. Es werden wieder wie bei den Momenten die speziellen Seitenverhältnisse $n=0,8$ und $0,6$ durchgerechnet, worauf dann die Aufstellung von empirischen Gleichungen erfolgen kann. Wie schon bemerkt, ist es nur notwendig, die Querseiten zu behandeln, da die Normalkräfte der Längsseiten gleich denjenigen der Einzelzelle sind.

Es wird mit Tabelle 12 die, der ungünstigsten Belastung für $M_{b,max}$ (Fig. 18) entsprechende Normalkraft der äußersten Querseite

$$N_b = (0,3829 + 0,0955n + 0,0216n^2) pa \dots \dots (90)$$

Die dem Moment $\bar{M}_{b,max}$ entsprechende Normalkraft der zweiten Querseite wird

$$\bar{N}_b = (0,5914 - 0,2539n + 0,1625n^2) pa \dots \dots (91)$$

Die zu $\bar{M}_{b,min}$ gehörige Normalkraft ist kleiner als \bar{N}_b , und da absolut genommen auch $\bar{M}_{b,min} < \bar{M}_{b,max}$, kommt sie bei der Querschnittsbestimmung nicht in Betracht.

Die dem Moment \hat{M}_{min} entsprechende Normalkraft der äußersten Querseite wird

$$\hat{N}_b = (0,5070 - 0,0615n + 0,0545n^2) pa \dots \dots (92)$$

Die Gleichungen (90) und (91) gelten alle nur für $n > k$ ($k = 0,714$ für Gleichung (90) resp. $0,6605$ für Gleichung (91)). Der Fall $n < k$ ist selten, doch können auch dafür die Normalkräfte einfach bestimmt werden, indem man die hierzu gehörigen Grundbelastungswerte in Tabelle 12 addiert. (Vgl. Belastungsschema in Fig. 18.)

Tabelle 12.

Normalkräfte der Endzelle eines einreihigen, unendlich langen Systems. (Kurze Seite = Querseite.)

(Vgl. Fig. 18, Seite 31.)

Grundbelastungen	$n = \frac{b}{a}$	N_b	\bar{N}_b
a) Endzelle belastet	0,8	+ 0,48948	+ 0,53042
	0,6	+ 0,48483	+ 0,54703
b) Zweite Zelle belastet	0,8	- 0,01572	+ 0,51540
	0,6	- 0,03514	+ 0,53445
c) Wechselbelastung I	0,8	+ 0,49269	+ 0,50731
	0,6	+ 0,48974	+ 0,51026
d) Wechselbelastung II	0,8	- 0,01637	+ 0,51888
	0,6	- 0,03688	+ 0,54184
Größtmomente		Zugehörige Normalkräfte	
$M_b \text{ max: } a + d$	0,8	+ 0,47311	—
	0,6	+ 0,44795	—
$\bar{M}_b \text{ min: } a + d - b$	0,8	—	+ 0,48883
	0,6	—	+ 0,48309
$\bar{M}_b \text{ max: } c + b - a$	0,8	—	+ 0,49229
	0,6	—	+ 0,49758
$\hat{M}_{\text{min}}: c$ (Vgl. Belastungsschema in Fig. 18.)	0,8	+ 0,49269	—
	0,6	+ 0,48974	—
		$\cdot pa$	$\cdot pa$

d) Beispiel des § 13.

Für das in § 13 behandelte Beispiel werden nun mit Hilfe der Gleichungen (85), (87) und (88) die Normalkräfte berechnet. (Vgl. Fig. 21.)

1. Zelle 3 belastet.

Die Gelenkmomente $m_1, m_2 \dots$ und die μ -Werte werden aus § 13 entnommen.

Nach (87) mit $\mu = 0$:

$$N_0 = \frac{3 \cdot \frac{5}{3}}{4 \cdot 4,5} \cdot 0,2862 = + 0,080 \text{ t.}$$

Nach (87) und (88):

$$N_1 = - \frac{3 \left(\frac{5}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{11} \right)}{4 \cdot 4,5} \cdot 1,5739 - 0,080 = - 0,469 - 0,080 = - 0,549 \text{ t.}$$

Nach (84), (85) und (88):

$$N_2 = \frac{4 \cdot 4,5}{2} + 0 + 0,469 = + 9,469 \text{ t.}$$

$$N_3 = N_2, \quad N_4 = N_1, \quad N_5 = N_0.$$

In Tabelle 13 sind diese Werte und diejenigen für die Belastungen der übrigen Zellen zusammengestellt und entsprechend Tabelle 3 (Seite 43) die zu den Größtmomenten gehörigen Normalkräfte berechnet worden.

Tabelle 13a.

Zusammenstellung der Normalkräfte für das Beispiel in § 13.
(Sämtliche Normalkräfte in ton.)

Belastete Zelle	N_0	N_1	N_2
1	+ 8,742	+ 9,777	- 0,617
2	- 0,422	+ 9,413	+ 9,415
3	+ 0,080	- 0,549	+ 9,469
4	- 0,015	+ 0,103	- 0,494
5	+ 0,003	- 0,021	+ 0,116
Vollbelastung	+ 8,388	+ 18,723	+ 17,889

$$\sum_0^3 N = 45,000 \text{ t.}$$

Tabelle 13b.

Momente	M_0^m	M_1^m	M_2^m	M_0^0	M_1^0	M_2^0
Belastete Zellen für M_{max}	2+4	2+3+5	3+4	2+4	1+3+5	2+4
Normalkraft	-0,447	+8,843	+8,975	-0,447	+9,207	+8,921
Belastete Zellen für M_{min}	1+3+5	1+4	1+2+5	1+3+5	2+4	1+3+5
Normalkraft	+8,825	+9,880	+8,914	+8,825	+9,516	+8,968

Für Vollbelastung muß sein:

$$\sum_0^5 N = 5 \cdot p a = 5 \cdot 4 \cdot 4,5 = 90 \text{ t.}$$

§ 23. Das unendlich große Zellensystem.

a) Mittelzelle.

Aus dem auf Seite 86 genannten Satz folgt, daß alle für uns in Betracht kommenden Normalkräfte der Mittelzelle gleich denjenigen der Einzelzelle sind. Für die Normalkräfte, die $M_{a,max}$ entsprechen, ist dies ohne weiteres klar, da die dieses Moment erzeugende Wechselbelastung symmetrisch ist zu einer Mittenachse, die parallel zu a liegt (Mittenachse = Achse durch die Mitte einer Zelle). Aber auch für die zu $M_{b,max}$, $\hat{M}_{a,min}$ und $\hat{M}_{b,min}$ gehörenden Normalkräfte ist dies der Fall, wenn beachtet wird, daß die Normalkraft einer Zellenseite gleich groß ist, ob die Belastung auf der einen oder anderen Seite derselben sich befindet. Wenn man z. B. in Fig. 32 die Belastung der Zelle 1 nach 2 verlegt, so wird an der Normal-

kraft der uns interessierenden Seite s nichts geändert, wohl aber wird die Belastung dann symmetrisch zu einer zur Seite s parallelen Mittenachse. Dasselbe gilt auch für die für M_{amin} maßgebende Belastung (Fig. 33), wo die Belastung z nach z' verlegt werden kann, ohne die Normalkraft in der Seite s zu ändern.

Trotzdem sie für die Dimensionierung nicht in Betracht kommen, ist es doch von Interesse, die größtmöglichen Zug- und Druckkräfte in den Seiten einer Mittelzelle zu kennen.

In der kurzen Seite s (Fig. 31) entsteht die größte Zugkraft bei einer Belastung, deren eine Hälfte in der Figur eingezeichnet ist, und deren andere Hälfte symmetrisch zu dieser in bezug auf s liegt. Die eingezeichnete Belastung gibt demnach die Hälfte von N_{bmax} .

Es ist nach (65)

$$m' = \frac{(1-n^2)(1+3n)}{1+n(2-\mu)} \cdot \frac{pa^2}{24},$$

worin
$$\mu = \frac{1}{n} [1 + 2n - \sqrt{(1+n)(1+3n)}]$$

und demnach mit (84) und (85)

$$\frac{1}{2} \cdot N_{bmax} = \frac{pa}{2} + \frac{3n(m' + \mu m')}{a(1+3n)} = \frac{pa}{2} + \frac{n(1+\mu)(1-n^2)}{1+n(2-\mu)} \cdot \frac{pa}{8}$$

oder
$$N_{bmax} = pa \left[1 + \frac{n(1+\mu)(1-n^2)}{4[1+n(2-\mu)]} \right] \dots \dots \dots (93)$$

z. B. für $n = 0,8$:

$$N_{bmax} = pa(1 + 0,0337) = 1,0337 pa.$$

Man erkennt hier wieder, wie gering der Einfluß des Zusammenhangs der Zellen (zweiter Ausdruck in der Klammer) auf die Normalkraft ist.

Mit der entgegengesetzten Belastung wird die größte Druckkraft mit (65) und (85)

$$N_{bmin} = - \frac{n(1+\mu)(1-n^2)}{4[1+n(2-\mu)]} \cdot pa.$$

Für $n = 0,8$ wird
$$N_{bmin} = -0,0337 pa.$$

Für Vollbelastung folgt daher

$$N_b = N_{bmax} + N_{bmin} = pa,$$

was nicht anders zu erwarten war.

Ganz ähnlich wird (μ aus Gl. 71)

$$N_{amax} = pb \left[1 + \frac{(1+\mu)(1-n^2)}{4(2+n-\mu)n^2} \right] \dots \dots \dots (94)$$

und für $n = 0,8$:

$$N_{amax} = pb(1 + 0,0637) = 1,0637 pb.$$

b) Randzelle, lange Seite = Querseite.

Die kurzen Seiten der Randzelle verhalten sich wie die der Mittelzelle, d. h. die dem Größtmoment M_b entsprechende ungünstigste Belastung erzeugt in der kurzen Seite die Normalkraft

$$N_b = \frac{pa}{2}.$$

Anders verhält es sich bei den langen Seiten. Es wird die Normalkraft in der langen Außenseite, die dem Moment $\bar{M}_{a\max}$ entspricht, nach Gleichung (86)

$$N_a = \frac{pb}{2} + \frac{3(-\mu-1)m}{b(3+n)}.$$

Mit μ und m aus Gleichung (71) und (72) folgt

$$N_a = pb \left[\frac{1}{2} - \frac{(1-n)(\sqrt{(1+n)(3+n)}-1-n)}{4n(n+\sqrt{(1+n)(3+n)})} \right] \dots (95)$$

Für $n=0,8$ wird: $N_a = pb(0,5000 - 0,0148) = 0,4852 pb$.

Den beiden gleich großen Momenten $\bar{M}_{a\max}$ und $\bar{M}_{a\min}$ der langen Innenseite entsprechen zwei verschiedene Normalkräfte, von welchen diejenige aus der Belastung für $\bar{M}_{a\min}$ die größere, also maßgebend ist. Es wird

$$\bar{N}_a = pb \left[\frac{1}{2} + \frac{(1-n)(\sqrt{(1+n)(3+n)}-1-n)}{4n(n+\sqrt{(1+n)(3+n)})} \right] \dots (96)$$

Für $n=0,8$: $\bar{N}_a = pb(0,5000 + 0,0148) = 0,5148 pb$.

c) Randzelle, kurze Seite = Außenseite.

Hier sind bei den langen Seiten die Nebenkräfte gleich Null, also

$$N_a = \frac{pb}{2}.$$

Die Normalkraft der kurzen Außenseite s ist für die Belastung der Fig. 36 (Seite 71) zu bestimmen, bei welcher $\bar{M}_{b\max}$ entsteht (für $n > k = 0,601$). Von dieser Belastung erzeugt nur die Belastung von Zelle 1 in s eine Normalkraft, während die übrigbleibende Wechselbelastung Seite s nicht beeinflusst. Für die alleinige Belastung dieser Zelle wird nach (85)

$$N_b = \frac{pa}{2} + \frac{3n(m'-m'')}{a(1+3n)},$$

wonach m' und m'' die Gelenkmomente an der belasteten Zelle bedeuten. Diese wurden in § 17 für $n=0,8$ und $0,6$ berechnet, womit sich folgende Gleichung ergibt:

$$N_b = (0,5016 - 0,0249n + 0,0233n^2) pa \dots (97)$$

Für $n=0,8$ wird $N_b = 0,4957 pa$.

Für die kurze Innenseite kann aus der für $\bar{M}_{b\max}$ ungünstigsten Belastung durch Verschiebung einer Zellenbelastung wie bei der Mittelzelle die Wechselbelastung hergestellt werden, was an der Größe der Normalkraft nichts ändert. Ähnlich wie unter b wird dann dafür

$$\bar{N}_b = \left[\frac{1}{2} - \frac{(1-n)(\sqrt{(1+n)(1+3n)}-1-n)}{4(1+\sqrt{(1+n)(1+3n)})} \right] pa \dots (98)$$

Für $n=0,8$: $\bar{N}_b = (0,5000 - 0,0096) pa = 0,4904 pa$.

Dem Moment $\bar{M}_{b\min}$ entspricht eine kleinere Normalkraft, welche deshalb nicht maßgebend ist. Gleichung (98) gilt auch nur für $n > k = 0,56$.

d) Eckzelle.

Hierfür wurde in § 18 gezeigt, daß die Maximalmomente alle um weniges kleiner sind als die entsprechenden Momente der Randzellen, weshalb sich eine besondere Berechnung derselben erübrigt, indem man die Eckzelle einfach mit den Maximalmomenten dimensioniert, die sich bei den Randzellen ergeben. Mit den Normalkräften verhält es sich umgekehrt, d. h. diese werden etwas größer als die entsprechenden der Randzellen, was aber keine Bedeutung hat, da die in § 23 berechneten Spezialwerte für $n = 0,8$ gezeigt haben, wie gering die Nebenkräfte im Verhältnis zu den konstanten Normalkräften der Einzelzelle sind. Die genannten Umstände wirken einander entgegen, weshalb die Dimensionierung der Eckzellen um so eher mit den Maximalmomenten und Normalkräften der Randzellen geschehen kann.

Im Verein mit den, bei den Außenseiten der Eckzellen besonders zu berechnenden Minimalmomenten sind die Normalkräfte ungefährlich.

§ 24. Einfluß der Deformation infolge der Normalkräfte auf die Berechnung.

Die vorliegende Berechnung der Momente und Normalkräfte erfolgte unter Vernachlässigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Deformationen.

Es gibt Fälle von statisch unbestimmten Systemen, bei denen bei Berücksichtigung dieses Einflusses die Kräfteverteilung wesentlich geändert wird. Als solche sind zu nennen: eingespannte oder Zweigelenkbogen mit geringem Pfeilverhältnis, niedere Rahmenkonstruktionen, also solche „gedrückte“ Konstruktionen, die im Verhältnis zu den Biegemomenten große Normalkräfte aufzunehmen haben. Bei gleichmäßiger proportionierten Tragwerken ist der genannte Einfluß so gering, daß er in der Praxis meistens vernachlässigt wird.

Auch bei gedrückten Zellenformen, die erheblich vom Quadrat abweichen, werden die Normalkräfte ihren Einfluß mehr geltend machen als bei annähernd quadratischen Zellen. Doch werden stark rechteckige Zellenformen gerne vermieden, da sie wegen der großen Biegemomente unwirtschaftlich sind.

Mit dem folgenden Beispiel soll gezeigt werden, welcher geringen Einfluß die Deformationen durch Normalkräfte auf die Biegemomente bei Zellen haben, deren Seitenverhältnis nicht stark von 1 abweicht, und daß deshalb solche, in der Praxis hauptsächlich vorkommenden Zellenformen genügend genau mit den abgeleiteten Gleichungen berechnet werden können.

In Fig. 44a ist eine zweizellige Anordnung dargestellt, deren eine Zelle mit dem gleichmäßigen Innendruck $p = 2,5 \text{ t/qm}$ belastet ist. Das Seitenverhältnis beträgt $n = \frac{b}{a} = \frac{4,0}{5,0} = 0,8$. Der Querschnitt wird im

Verhältnis zu den Momenten stärker gewählt, als notwendig, da dann bekanntlich der zu untersuchende Einfluß besser zur Geltung kommt, denn der Einfluß ist proportional dem Verhältnis $\frac{J}{F} = \frac{d^2}{12}$. Es seien alle Wandstärken $d = 30$ cm. Es ist dann für einen Streifen von 1 m Höhe

$$\text{der Querschnitt } F = 0,3 \text{ qm,}$$

$$\text{das Trägheitsmoment } J = \frac{0,3^3 \cdot 1,0}{12} = 0,00225 \text{ m}^4.$$

Der Elastizitätsmodul wird durchweg $= 1$ gesetzt. Die Berechnung wird zuerst unter Berücksichtigung der Normalkräfte durchgeführt.

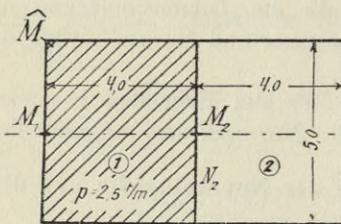


Fig. 44a.

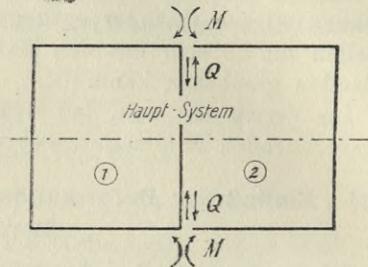


Fig. 44b.

Das vierfach statisch unbestimmte System wird so aufgeschnitten, daß das in Fig. 44 b dargestellte Hauptsystem entsteht. Als unbekannte Schnittkräfte wirken das Moment M und die Querkraft Q . Das Hauptsystem ist in sich zweifach statisch unbestimmt, die statisch unbestimmten Größen seien m und n (Fig. 45). Durch Wahl dieses Hauptsystems gegenüber einem statisch bestimmten wird der Weg über vier Gleichungen mit vier Unbekannten umgangen.

a) Wirkungen der Belastung p .

Die Verlängerung der Zelle 1 in der Richtung Q infolge p ist

$$-\delta_p = \frac{N \cdot a}{F \cdot E} = \frac{2,5 \cdot 2,0 \cdot 5,0}{0,3 \cdot 1} = 83,333 \text{ m.}$$

Die Verdrehung der Ecke in der Richtung M infolge p wird nach (4), welche Gleichung sich infolge Berücksichtigung der Normalkräfte nicht ändert:

$$\alpha_p = -n(1-n) \frac{pa^3}{24 \cdot EJ} = -0,8(1-0,8) \frac{2,5 \cdot 5,0^3}{24 \cdot 1 \cdot 0,00225} = -925,9259.$$

b) Wirkungen von $Q=1$ an Zelle 1.

Der geschlossene Rahmen (Fig. 45) wird in der Mitte der langen Seite aufgeschnitten, an welcher Schnittstelle die statischen Unbekannten m und n wirken mögen. Die Querkraft an dieser Stelle ist wegen der Symmetrie gleich Null. Die Verschiebungen und Verdrehungen an der Schnittstelle infolge der drei Kraftwirkungen von der Größe 1 berechnen sich als Summen und statische Momente der Momentenflächen wie folgt:

$$\delta_{mm} = +2 (5,0 + 4,0) \frac{1}{EJ} = + \frac{18}{EJ}$$

$$\delta_{nn} = \delta_{nn} = +2 \left(2,5 \cdot 4,0 + \frac{1}{2} \cdot 4,0^2 \right) \frac{1}{EJ} = + \frac{36}{EJ}$$

$$\delta_{nn} = +2 \left(2,5 \cdot 4,0^2 + \frac{1}{2} \cdot 4,0^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,0 \right) \frac{1}{EJ} + 2 \cdot \frac{5,0}{EF} = + \frac{122,667}{EJ} + \frac{10}{EF}$$

$$\delta_{m\varrho} = 0$$

$$\delta_{n\varrho} = - \frac{1 \cdot 5,0}{EF}$$

Aus der Bedingung, daß die Summe der Drehungen und Verschiebungen an der Schnittstelle gleich Null ist, folgen die Elastizitätsgleichungen

$$\frac{18}{EJ} m + \frac{36}{EJ} n + 0 = 0$$

$$\frac{36}{EJ} m + \left(\frac{122,667}{EJ} + \frac{10}{EF} \right) n - \frac{5,0}{EF} = 0$$

oder $18 m + 36 n = 0$

$$36 m + \left(122,667 + 10 \frac{J}{F} \right) n = 5 \frac{J}{F}$$

Mit $\frac{J}{F} = \frac{h^2}{12} = \frac{0,3^2}{12} = 0,0075$ folgt

$$m = -0,001\,478\,075$$

$$n = +0,000\,739\,038$$

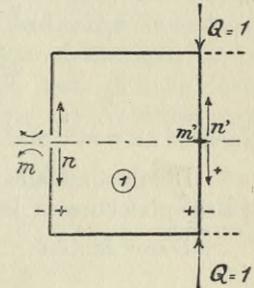


Fig. 45.

Es wird nun die Verdrehung $\frac{\alpha_{\varrho 1}}{2}$ bei $Q = 1$ infolge $Q = 1$, wenn m' das über die ganze, lange Innenseite der Zelle 1 (Fig. 45) konstante Biegemoment bedeutet mit

$$m' = m + n \cdot 4,0 = +0,001\,478\,075$$

$$\frac{1}{2} \alpha_{\varrho 1} = \frac{m' \cdot a/2}{EJ} = \frac{m' \cdot 2,5}{1 \cdot 0,00225} = + \mathbf{1,642\,306}$$

Die Verkürzung $\delta_{\varrho 1}$ dieser Seite infolge $Q = 1$ wird mit

$$n' = 1 - n = 0,999\,260\,962$$

$$\delta_{\varrho 1} = \frac{n' \cdot a}{EF} = \frac{n' \cdot 5,0}{1 \cdot 0,3} = + \mathbf{16,654\,349\,m}$$

c) Wirkungen von $M = 1$ an Zelle 1.

Die Untersuchung dieser Wirkung geschieht auf dieselbe Weise wie diejenige von Q , weshalb hier nur die Ergebnisse folgen mögen. Es wird (Fig. 45)

$$m = +0,116\,3756$$

$$n = -0,197\,0767$$

$$m' = m + 4,0 n + 1 = +0,328\,0688$$

$$n' = +0,197\,0767$$

$$\alpha_{M_1} = \frac{m' \cdot a}{EJ} = \frac{m' \cdot 5,0}{1 \cdot 0,00225} = + \mathbf{729,042}$$

$$\delta_{M_1} = \frac{n' \cdot a}{EF} = \frac{n' \cdot 5,0}{1 \cdot 0,3} = + \mathbf{3,284\,612\,m}$$

Nach Maxwell muß sein $\delta_{M_1} = \alpha_{\varrho 1}$, was auch zutrifft.

d) Wirkungen von $M=1$ an Zelle 2.

Diese Wirkungen, die an dem statisch bestimmten Dreiseit 2 (Fig. 44 b) entstehen, können aus der infolge $M=1$ entstehenden Momentenfläche berechnet werden. Es wird

$$\alpha_{M_2} = \frac{2b+a}{EJ} = \frac{2 \cdot 4,0 + 5,0}{1 \cdot 0,00225} = + 5777,778$$

$$\delta_{M_2} = -\frac{2b \cdot b/2 + a \cdot b}{EJ} = -\frac{4,0^2 + 5,0 \cdot 4,0}{1 \cdot 0,00225} = - 16000 \text{ m.}$$

e) Wirkungen von $Q=1$ an Zelle 2.

$$\alpha_{Q_2} = -\frac{2 \cdot b/2 \cdot b + b \cdot a}{EJ} = -\frac{4,0^2 + 4,0 \cdot 5,0}{1 \cdot 0,00225} = - 16000$$

$$\delta_{Q_2} = \frac{b^2 \cdot 2b/3 + b \cdot a \cdot b}{EJ} + \frac{a}{EF} = + 54\,518,519 \text{ m.}$$

Nach Maxwell muß wieder $\delta_{M_2} = \alpha_{Q_2}$ sein.

Damit sind alle notwendigen Koeffizienten zur Aufstellung der Elastizitätsgleichungen berechnet.

Diese lauten

$$\delta_p + (\delta_{Q_1} + \delta_{Q_2}) Q + (\delta_{M_1} + \delta_{M_2}) M = 0$$

$$\alpha_p + (\alpha_{Q_1} + \alpha_{Q_2}) Q + (\alpha_{M_1} + \alpha_{M_2}) M = 0$$

oder

$$- 83,333 + (16,654 + 54\,518,519) Q + (3,2846 - 16000) M = 0$$

$$- 925,9259 + (3,2846 - 16000) Q + (729,042 + 5777,778) M = 0$$

woraus die statischen Unbekannten folgen

$$Q = 0,304\,8415 \text{ ton}$$

$$M = 1,034\,0404 \text{ mt.}$$

Mit diesen Werten können nun alle Momente und Normalkräfte berechnet werden. Die Momente der Einzelzelle [Gleichungen (2) und (3)] ändern sich nicht bei Berücksichtigung der Deformation durch Normalkräfte, die Gleichungen (2) und (3) geben also genaue Werte, zu denen die Einflüsse von M und Q zu addieren sind.

Bei Vernachlässigung der Deformation durch Normalkräfte berechnet sich M wie im Beispiel des § 6 zu

$$M = + 1,023195 \text{ mt.}$$

Der genaue Wert ist um rund 1% größer, doch ist zu beachten, daß M nur ein Nebenmoment ist. Die Unterschiede der Momente in der belasteten Zelle sind wesentlich geringer, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersehen werden kann. Der Unterschied der Werte M ist übrigens mit Rücksicht auf die Größe der Zelle auch nur sehr gering, nämlich

$$\infty \frac{pb^2}{3700}$$

(Fig. 44a)	M	M_1	\widehat{M}	M_2	N_2
	mt	mt	mt	mt	ton
genau . . .	1,034040	3,317614	-4,494886	3,097813	4,49160
angenähert	1,023195	3,317828	-4,494672	3,102418	4,49777
Unterschied	1%	0,006%	0,005%	0,15%	0,14%

Der Einfluß des Zusammenhangs der Zellen auf die Größe der Normalkräfte ist, wie dieser Abschnitt zeigt, nicht bedeutend. Die Nebenkkräfte, d. h. die Unterschiede der genauen Werte gegenüber denjenigen der belasteten Einzelzelle, sind gering und nehmen ab, je mehr sich die Zellenform der quadratischen nähert, für welche sie (wie die Nebenmomente) verschwinden.

Da nun auch die Normalkräfte für die Dimensionierung erst in zweiter Linie in Frage kommen, genügt es in den meisten Fällen, sie für die belastete Einzelzelle, d. h. nach den Gleichungen (83) und (84) zu berechnen.

Siebter Abschnitt.

Veränderliches Trägheitsmoment.

Obschon die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes auf die Verteilung der Momente keinen großen Einfluß hat und ungefähr geschätzt werden kann, indem der Momentenverlauf sich so ändert, daß die Inanspruchnahme von Konstruktionsteilen mit größerem Trägheitsmoment sich vergrößert, während schwächere Stellen entlastet werden, so muß bei einer Berechnung, die möglichst genaue Resultate geben soll, der Unterschied verschiedener Wandstärken doch berücksichtigt werden.

In diesem Abschnitt wird gezeigt, in welcher Weise die bisher abgeleiteten Gleichungen dafür zu ändern sind. Zuerst wird der Fall behandelt, bei welchem die Wandstärken der langen Seiten verschieden sind von denjenigen der kurzen, wobei aber die Stärke einer Seite über ihre ganze Länge als gleichbleibend angenommen wird.

§ 25. Trägheitsmoment konstant über eine Seite.

a) Gleichungen der Voruntersuchungen.

Die Ableitungen dieser Gleichungen sind dieselben wie im zweiten Abschnitt, es mögen deshalb nur die Resultate folgen. Es werde mit J_a das Trägheitsmoment der langen Seite a bezeichnet, mit J_b dasjenige der kurzen Seite b , ferner sei zur Abkürzung

$$n = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad n' = \frac{b \cdot J_a}{a \cdot J_b}.$$

Dann wird für die mit konstantem Innendruck p belastete Einzelzelle (Fig. 2)

$$\hat{M} = - \frac{1 + n^2 \cdot n'}{1 + n'} \cdot \frac{p a^2}{12} \dots \dots \dots (2')$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{1 + 3n' - 2n^2 \cdot n'}{1 + n'} \cdot \frac{p a^2}{24} \\ M_b &= \frac{n^2 \cdot n' + 3n^2 - 2}{1 + n'} \cdot \frac{p b^2}{24 n^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3')$$

$$E \cdot \alpha = n \cdot \frac{1 - n^2}{1 + n'} \cdot \frac{p a^3}{24 J_b} \dots \dots \dots (4')$$

Für $n' = n$ nehmen natürlich alle Gleichungen die frühere Form an.

In den Gleichungen (6) bis (15), aus welchen die Momente und Verdrehungen der mit äußeren Momenten belasteten Einzelzelle zu berechnen sind, ist einfach zu setzen

$$n = n',$$

$J = J_a$, wenn in der Gleichung der Faktor a vorkommt,

$J = J_b$, wenn in der Gleichung der Faktor b vorkommt.

b) Einreihiges Zellensystem.

In den wichtigen Gleichungen für die Werte γ und μ [Gleichungen (19) bis (21), (24), (25)] sind ebenfalls die eben erwähnten Änderungen vorzunehmen, da ja diese Gleichungen aus denjenigen für den dreiseitigen Rahmen abgeleitet wurden.

In dem Beispiel des § 6 sind in Gleichung (17) für m außer dem Klammerausdruck $(1 - n^2)$ alle Werte n durch n' zu ersetzen.

Die Gleichungen für die unendlich lange Reihe, vor allem die empirisch gebildeten, lassen sich für veränderliches Trägheitsmoment nicht mehr anwenden, auch nicht bei Ersetzung von n durch n' . Diese Formeln sollen auch nur für erste Dimensionierungen (z. B. für Kalkulationszwecke) angenäherte Momente liefern. Die genaue Berechnung einreihiger Systeme kann ja mit den entsprechend abgeänderten Gleichungen nach der Methode des § 7 ebenso rasch wie mit konstantem Trägheitsmoment durchgeführt werden.

c) Das unendlich große Zellensystem.

Schreibt man die Gleichungen (49) und (51) in der Form

$$\frac{\varepsilon l}{EJ} = \frac{6(l-i)}{2l-3i} \dots \dots \dots (49')$$

$$\frac{i'}{l'} = \frac{\varepsilon \cdot \frac{l'}{EJ'}}{6+3\varepsilon \cdot \frac{l'}{EJ'}} = \frac{\frac{\varepsilon l}{EJ} \cdot n'}{6+3 \frac{\varepsilon l}{EJ} \cdot n'} \dots \dots \dots (51')$$

worin

$$n' = \frac{l' \cdot J}{l \cdot J'}$$

so erkennt man, wenn man in Gleichung (51') den Wert $\frac{\varepsilon l}{EJ}$ aus Gleichung (49') einsetzt, daß $\frac{i'}{l'}$ direkt von n' abhängt, welcher Wert bei konstantem J zu $n = \frac{l'}{l}$ wird. Da auch umgekehrt $\frac{\varepsilon l}{EJ}$ direkt von n' abhängig ist, so kann daraus gefolgert werden, daß die Werte i und ε auch für veränderliches J aus Tabelle 4 (Seite 49) entnommen werden können, wenn gesetzt wird

$$n = n' = \frac{bJ_a}{aJ_b}$$

Der Wert $\frac{i_b}{b}$ für das Seitenverhältnis n ist gleich dem Wert $\frac{i_a}{a}$ für $\frac{1}{n}$, weshalb Tabelle 4 auch für $n > 1$ benutzt werden kann, welcher Fall mit $J_a > J_b$ nun auch möglich ist. Z. B. ist für $n' = 2: \frac{i_a}{a} = 0,26295$ ($= \frac{i_b}{b}$ für $n = \frac{1}{n'} = 0,5$; vgl. Tabelle 4). Dasselbe gilt für das Elastizitätsmaß ε .

Für die Mittelzelle wurde auf Seite 62 gezeigt, welche gute Annäherung Gleichung (60) zur Bestimmung des Gelenkmomentes m liefert. Diese Gleichung lautet für veränderliches J (Fig. 28):

$$m = \frac{(1-n^2)}{1 + \frac{2(1+n')J_b}{b(\varepsilon_a + \varepsilon_b)}} \cdot \frac{p a^2}{12} \dots \dots \dots (60')$$

wo ε_a und ε_b unter Vornahme der oben genannten Änderungen aus Tabelle 4 entnommen werden können.

Für die Belastung nur einer Zelle wird dann mit (3')

$$M_b'' = \frac{n^2 \cdot n' + 3n^2 - 2}{1 + n'} \cdot \frac{pb^2}{24n^2} + \frac{m}{1 + n'}$$

Für die Wechselbelastung gelten die Gleichungen (2') und (3'), während bei der halbseitigen Wechselbelastung die Ausdrücke μ und m' gleich denen der Gleichungen (64) und (65) sind, wenn alle n außer $(1 - n^2)$ durch n' ersetzt werden.

Es ergeben sich damit für die Mittelzelle die folgenden Gleichungen für die Größtmomente (vgl. § 15d).

$$M_{amax} = \frac{1 + 3n' - 2n^2 \cdot n'}{1 + n'} \cdot \frac{pa^2}{24} \dots \dots \dots (66')$$

$$M_{bmax} = \frac{n^2 \cdot n' + 3n^2 - 2}{1 + n'} \cdot \frac{pb^2}{24n^2} + \frac{2m}{1 + n'} \dots \dots \dots (67')$$

Hierin folgt m aus Gleichung (60').

Diese Gleichungen haben so lange Gültigkeit, als obiger Wert $M_b'' > 0$. Wenn $M_b'' < 0$, ist $(-M_{bmax})$ aus Gleichung (3') zu berechnen.

$$\hat{M}_{amin} = -\frac{1 + n^2 \cdot n'}{1 + n'} \cdot \frac{pa^2}{12} - 2n' \cdot \frac{(2 + 3n')\mu + 1}{(1 + n')(1 + 3n')} m' - \frac{2n'm}{1 + n'}, \dots (69')$$

worin

$$\mu = \frac{1}{n'} \left[1 + 2n' - \sqrt{(1 + n')(1 + 3n')} \right]$$

$$m' = \frac{(1 - n^2)(1 + 3n')}{1 + n'(2 - \mu)} \cdot \frac{pa^2}{24}$$

m aus (60').

$$\hat{M}_{bmin} = -\frac{1 + n^2 \cdot n'}{1 + n'} \cdot \frac{pa^2}{12} - 2 \cdot \frac{(3 + 2n')\mu + n'}{(1 + n')(3 + n')} m', \dots (70')$$

worin

$$\mu = 2 + n' - \sqrt{(1 + n')(3 + n')}$$

$$m' = \frac{(1 - n^2)(3 + n')}{2 + n' - \mu} \cdot \frac{pa^2}{24}$$

m aus (60').

Für die Rand- und Eckzellen werden fertige Gleichungen zu umständlich. Man geht hier am besten schrittweise vor, indem man entsprechend den §§ 16, 17 und 18 die Momente für die Grundbelastungen berechnet und aus diesen die Größtmomente (vgl. § 29).

Für die Wechselbelastung werden die Gelenkmomente (vgl. Fig. 34) Randzelle, lange Seite = Außenseite:

$$m = \frac{n'(1 - n^2)}{1 + n' + n' \sqrt{\frac{1 + n'}{3 + n'}}} \cdot \frac{pa^2}{12} \dots \dots \dots (72')$$

Randzelle, kurze Seite = Außenseite:

$$m = \frac{1 - n^2}{1 + n' + \sqrt{\frac{1 + n'}{1 + 3n'}}} \cdot \frac{pa^2}{12}$$

Für die Belastung nur einer Zelle kann Tabelle 7 (Seite 68) benutzt werden.

Der ganze Rechnungsvorgang wird in § 29 an einem Beispiel zahlenmäßig durchgeführt.

d) Normalkräfte.

Ersetzt man in den Gleichungen (83) bis (88) des § 21 n durch $n' = \frac{bJ_a}{aJ_b}$, so gelten die Gleichungen auch für veränderliches Trägheitsmoment. Da diese Gleichungen für die genaue Berechnung des einreihigen Systems ausreichen, ist hierzu nichts mehr zu sagen.

Für die Mittelzellen des unendlichen Zellsystems werden die Normalkräfte, die den Belastungen der Größtmomente entsprechen, gleich denen der Einzelzelle, und da diese sich bei verschiedenen Wandstärken nicht ändern, ist auch hierfür $N_a = \frac{pb}{2}$ und $N_b = \frac{pa}{2}$.

Bei den Randzellen (vgl. § 23 b) sind die Nebenkräfte klein im Verhältnis zu den Normalkräften der Einzelzelle und werden bei Berücksichtigung verschiedener Wandstärken nur wenig geändert, so daß die Gleichungen (95) bis (98) auch für veränderliches Trägheitsmoment mit hinreichender Genauigkeit zu gebrauchen sind, besonders wenn man noch den geringen Einfluß der Normalkräfte auf die Dimensionierung im Auge behält. In den genannten Gleichungen darf aber nicht n durch n' ersetzt werden, was zu ganz unrichtigen Werten führen würde. Mit derselben Entwicklungsweise könnten übrigens Gleichungen (95) bis (98) leicht auch für veränderliches Trägheitsmoment abgeleitet werden.

§ 26. Berücksichtigung der Eckverstärkungen.

Die bei den meisten Konstruktionen an den Knotenpunkten vorhandenen Verstärkungen (Vouten) beeinflussen die Verteilung der Momente im allgemeinen in der Weise, daß die Seitenmittenmomente geringer werden, während die Eckmomente zunehmen.

Um diesen Einfluß rechnerisch zu bestimmen, muß das Trägheitsmoment als Funktion von der Variablen x unter dem Integralzeichen gelassen und mit integriert werden. Bei geradlinig verlaufenden Vouten ergeben sich dabei Ausdrücke, die sich nur umständlich integrieren lassen, und die Schlußformeln werden für den Gebrauch zu kompliziert. Von allen den Versuchen, die gerade Voute durch eine Kurve zu ersetzen, die erstens leicht integrierbar ist und zweitens der Wirklichkeit möglichst nahe kommt, ist die Methode von Straßner¹⁾ wohl als die geeignetste zu bezeichnen.

Straßner hat für die Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes im Teil l' der Seite l (Fig. 46) das Gesetz aufgestellt

$$J_x = \frac{J'}{1 + c x^2}, \text{ wo } c = \frac{J' - J}{J \cdot l'^2}.$$

¹⁾ Vgl. A. Straßner: Berechnung kontinuierlicher Eisenbetonträger mit Rücksicht auf die Wirkung der Vouten. „Beton und Eisen“ 1911, Heft 20.

Dieses Gesetz entspricht einer Voutenform, die sich eng an die geradlinige Voute anschmiegt, und ist, da die Variable x im Nenner steht, für die Integration vorteilhaft.

Für die Einzelzelle wird hiermit das Eckmoment¹⁾

$$\widehat{M} = - \frac{a^3 \gamma_a' + b^3 \gamma_b' \frac{J_a}{J_b}}{a \gamma_a + b \gamma_b \frac{J_a}{J_b}} \cdot \frac{p}{4}, \dots \dots \dots (2'')$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde (vgl. Fig. 46; die Indices beziehen sich auf die beiden Seiten a und b)

$$\begin{aligned} \eta &= 3 - 4\alpha(1 - n) \\ \eta' &= 1 - \alpha^2(3 - 1,6\alpha)(1 - n) \\ n &= \frac{J}{J'} \\ \alpha &= \frac{l'}{l}. \end{aligned}$$

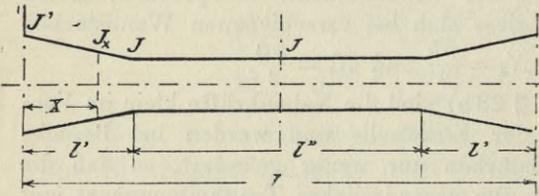


Fig. 46.

Die Momente der Seitenmitten ergeben sich nun analog den Gleichungen (3).

Was hier für die Einzelzelle bei gleichmäßiger Innenbelastung gezeigt wurde, ließe sich nun für alle im zweiten Abschnitt gerechneten Aufgaben durchführen, womit dann die Grundlagen für die weitere Berechnung gegeben wären. Die angeführten Methoden hierfür bleiben sich natürlich genau gleich. Der Vollständigkeit wegen seien hier auch noch die für variables J gültigen Gleichungen (49) und (51) für das Elastizitätsmaß und den Fixpunktabstand wiedergegeben (Abkürzungen η und η' wie oben).

$$\varepsilon = \frac{6 J (l - i)}{l [\eta (l - i) - \eta' \cdot l]} \dots \dots \dots (49'')$$

$$i_1 = \frac{\eta_1' \cdot l_1}{\eta_1 + \frac{6 J_1}{\varepsilon \cdot l_1}} \dots \dots \dots (51'')$$

Der Index 1 bezieht sich auf eine an l anschließende Seite l_1 .

¹⁾ Über die Ableitung dieser Gleichung vgl. den Aufsatz des Verfassers: Zur Berechnung von Silozellen. „Armierter Beton“ 1913, Heft 1.

Achter Abschnitt.

Einfluß der Temperatur.

Eine gleichmäßige Temperaturänderung aller Längs- oder aller Querwände erzeugt keine Spannungen, da infolge der gemachten Vernachlässigung der Kräfte in horizontalen Schnitten und durch das Fehlen jeder horizontalen Stützung die Längenänderungen der Wände sich ungehindert vollziehen können. Erst eine ungleichmäßige Wärmeänderung der verschiedenen Wände ruft Verbiegungen derselben hervor, und dabei ist der am häufigsten vorkommende Fall derjenige, bei dem sich die Außenwände stärker erwärmen oder abkühlen als die Innenwände. Ein ausschließliches Erwärmen eines Teiles der Innenwände ist bei einem Füllmaterial mit Eigenwärme denkbar, doch wohl sehr selten. In diesem Abschnitt werden deshalb nur die beiden Fälle gleichmäßiger und ungleichmäßiger Temperaturänderung einer Außenwand behandelt. Tritt eine Wärmeänderung zugleich bei zwei oder mehr Außenwänden ein, so können die für die Einzelfälle errechneten inneren Kräfte einfach addiert werden.

Inwieweit die gemachte Vernachlässigung der in Horizontalschnitten auftretenden Kräfte der Wirklichkeit entspricht, entzieht sich der Berechnung. Infolge der Festhaltung des Silounterbaus im Erdboden werden aber die errechneten Biegemomente eher verringert, wie dies auch bei den Momenten infolge des Materialdruckes der Fall ist, so daß die Berechnung in beiden Fällen zu ungünstige Werte liefern wird.

Marcus hat den Einfluß der Temperatur an ein- und zweireihigen Systemen untersucht¹⁾, es soll deshalb hier nur der Berechnungsvorgang am vielreihigen System gezeigt werden. Im neunten Abschnitt folgt die Anwendung auf ein Beispiel.

§ 27. Gleichmäßige Erwärmung einer Außenwand.

In Fig. 55 (Seite 118) ist die Deformationsfigur einer Zellengruppe von vier auf fünf gleich großen Zellen gezeichnet, bei einer gleichmäßigen Erwärmung der Außenwand um $t = 15^\circ$. Dabei verschieben sich die Knotenpunkte dieser Wand um Strecken δ , deren Summe (bei Vernachlässigung der Deformation durch Normalkräfte) gleich sein muß

$$\Sigma \delta = \omega \cdot t \cdot \Sigma a,$$

worin ω den Ausdehnungskoeffizienten des Wandmaterials, t den Unterschied der Temperatur der Außenwand gegenüber den übrigen Wänden und a die Länge der an die Außenwand stoßenden Zellen bedeuten.

¹⁾ H. Marcus: Statische Untersuchung von Silowänden. „Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen“ 1911, Hefte 1 und 4.

Wir denken uns die Außenwand von den senkrecht an sie stoßenden Wänden b durch Schnitte an der Anschlußstelle so getrennt, daß die Enden der Wände b sich frei bewegen können (im Gegensatz zu der bisher verfolgten Methode des Verwendens von gedachten Gelenken). Die Außenwand werde so festgehalten, daß die Knotenpunkte sich nur in der Richtung derselben verschieben können. Es entsteht auf diese Weise ein Hauptssystem, bestehend aus an ihren unteren Enden, d. h. in der Mittelwand, elastisch eingespannten Stäben und einem kontinuierlichen Träger mit den Spannweiten a . Die statischen Unbekannten sind die an den $(n + 1)$ Schnittstellen wirkenden Momente m_0, m_1, \dots, m_n , welche aus den $(n + 1)$ Bedingungen erhalten werden, daß die Drehungen auf beiden Seiten der Schnittstellen einander gleich sind ¹⁾.

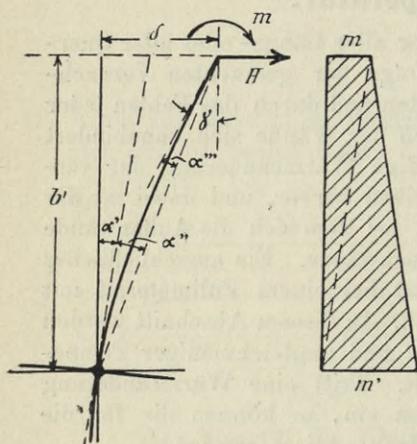


Fig. 47.

a) Der elastisch eingespannte Stab b ist in Fig. 47 dargestellt. Die angreifenden Kräfte H und m seien in dem eingezeichneten Sinn positiv.

Wird mit ε das Elastizitätsmaß der Einspannstelle bezeichnet, so ist

$$\alpha' = \frac{m'}{\varepsilon}, \text{ wo } m' = m + Hb.$$

Ferner ist nach Gleichung (1)

$$\alpha'' = (2m' + m) \frac{b}{6EJ}$$

$$\alpha''' = (m' + 2m) \frac{b}{6EJ}.$$

Somit wird die Kopfverdrehung

$$\gamma = \alpha' + \alpha'' + \alpha''' = \frac{m'}{\varepsilon} + (m' + m) \frac{b}{2EJ}.$$

Die Kopfverschiebung δ wird

$$\delta = (\alpha' + \alpha'') b = \frac{m'}{\varepsilon} b + (2m' + m) \frac{b^2}{6EJ}.$$

Mit $m' = m + Hb$ wird

$$\gamma = \frac{m + Hb}{\varepsilon} + (2m + Hb) \frac{b}{2EJ} \dots \dots \dots (99)$$

$$\delta = \frac{m + Hb}{\varepsilon} b + (3m + 2Hb) \frac{b^2}{6EJ} \dots \dots \dots (100)$$

Eliminiert man aus diesen Gleichungen H , so wird

$$\gamma = \frac{b^2 (4EJ + \varepsilon b) m + 6EJ\delta (2EJ + \varepsilon b)}{4EJb (3EJ + \varepsilon b)} \dots \dots \dots (101)$$

¹⁾ Vgl. M. Ritter: Der kontinuierliche Balken auf elastisch drehbaren Stützen. „Schweiz. Bauzeitung“ 1911, Heft 4. — W. Frank: Kontinuierlicher Träger mit fester Stützenlagerung. „Beton und Eisen“ 1912, Heft 12.

Wir stellen nun für jede Stütze die Gleichung (16): $\alpha + \beta = \gamma$ auf, worin $\alpha = 0$, und erhalten somit $(n + 1)$ Gleichungen, woraus die $(n + 1)$ Kopfmomente m bestimmt werden können. Die Verschiebungen δ , welche zur Bestimmung von γ aus Gleichung (101) bekannt sein müssen, sind bei symmetrischen Fällen leicht zu berechnen aus $\delta = \omega \cdot t \cdot L$, wo L die Entfernung des betreffenden Knotenpunktes von der Symmetrieachse bedeutet.

Wenn beim allgemeinen Fall mit ungleich großen Zellen und verschiedenen Trägheitsmomenten einer der Werte δ bekannt ist, so sind es auch alle übrigen. Wir müssen deshalb hierbei noch eine Gleichung zu Hilfe nehmen, die sich aus dem Satz der kleinsten Formänderungsarbeit ergibt, der in diesem Fall besonders klar als eine unbedingte Notwendigkeit hervortritt.

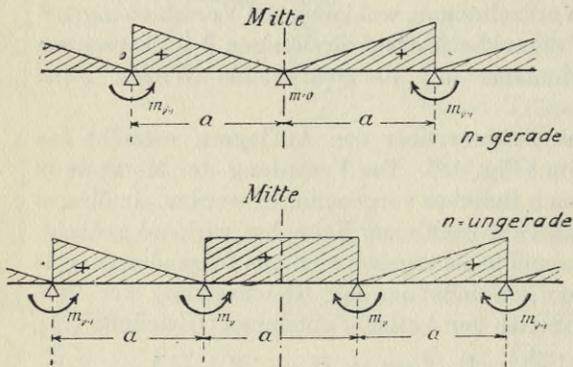


Fig. 49.

Für den am häufigsten vorkommenden Fall, wo a und J konstant sind, werden die Gleichungen (103), von denen der Symmetrie wegen nur noch halb so viel gebraucht werden (vgl. Fig. 49):

$$\left. \begin{aligned}
 4 M_1 + M_2 &= -m_0 - 2 m_1 \\
 M_1 + 4 M_2 + M_3 &= -m_1 - 2 m_2 \\
 \dots &\dots \dots \dots \\
 2 M_{v-1} + 4 M_v &= -2 m_{v-1} \quad \left(n = \text{gerade, } v = \frac{n}{2} \right) \\
 \text{bzw. } M_{v-1} + 5 M_v &= -m_{v-1} - 3 m_v \quad \left(n = \text{ungerade, } v = \frac{n-1}{2} \right)
 \end{aligned} \right\} (103')$$

Die Verdrehungen β werden:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{6 E J}{a} \cdot \beta_0 &= -2 m_0 \quad - M_1 \\
 \frac{6 E J}{a} \cdot \beta_1 &= -2 (m_1 + M_1) - M_2 \\
 \dots &\dots \dots \dots \\
 \frac{6 E J}{a} \cdot \beta_v &= 0 \quad \left(n = \text{gerade, } v = \frac{n}{2} \right) \\
 \text{bzw. } \frac{6 E J}{a} \cdot \beta_v &= -3 (m_v + M_v) \quad \left(n = \text{ungerade, } v = \frac{n-1}{2} \right)
 \end{aligned} \right\} (104)$$

Mit den Gleichungen (103') und (104) wurde Tabelle 14 berechnet, aus welcher bis zu einer Anordnung von $n = 5$ Zellen die Werte M und β entnommen werden können.

Tabelle 14.

Stützmomente und Verdrehungen der Stützenquerschnitte unter dem Einfluß von Momenten m an den Stützen.

(Vgl. Fig. 48.)

$n =$	1	2	3	4	5 Zellen
$-M_1$	—	$\frac{m_0}{2}$	$\frac{1}{5}(m_0 + 3m_1)$	$\frac{1}{7}(2m_0 + 3m_1)$	$\frac{1}{19}(5m_0 + 9m_1 - 3m_2)$
$-M_2$	—	—	—	$\frac{1}{7}(-m_0 + 2m_1)$	$\frac{1}{19}(-m_0 + 2m_1 + 12m_2)$
$-EJ \cdot \beta_0$	$\frac{am_0}{2}$	$\frac{am_0}{4}$	$\frac{a}{10}(3m_0 - m_1)$	$\frac{a}{14}(4m_0 - m_1)$	$\frac{a}{38}(11m_0 - 3m_1 + m_2)$
$-EJ \cdot \beta_1$	—	0	$\frac{a}{10}(-m_0 + 2m_1)$	$\frac{a}{14}(-m_0 + 2m_1)$	$\frac{a}{38}(-3m_0 + 6m_1 - 2m_2)$
$-EJ \cdot \beta_2$	—	—	—	0	$\frac{a}{38}(m_0 - 2m_1 + 7m_2)$

Wenn die Momente m ausgerechnet sind, so werden die Stützmomente M zahlenmäßig bestimmt, und die Biegemomente der Außenwand können dann an Hand der Fig. 48 (bzw. 49) leicht angegeben werden.

Um die Momente der Seiten b zu erhalten, berechnet man H nach Gleichung (102) und erhält das Fußmoment m' aus $m' = m + Hb$ (Fig. 47). Letzteres verteilt sich nach drei Richtungen und zwar proportional den Elastizitätsmassen der drei anschließenden Seiten. Diese Momente haben auf den Winkel γ einen sekundären Einfluß, entsprechend dem auf Seite 56 erwähnten (γ'), wodurch diese ganze Ableitung nur angenäherte Resultate liefert. Es ist jedoch dieser Einfluß so gering, daß er vernachlässigt werden kann, besonders wenn man bedenkt, auf wie rohe Schätzungen man bei der Angabe des Temperaturunterschiedes angewiesen ist.

Die infolge gleichmäßiger Erwärmung der Außenwand entstehenden Normalkräfte sind einfach zu berechnen. Diejenigen der Außenwandseiten a sind gleich den Horizontalkräften H , die der Innenwände b gleich den Auflagerdrücken des kontinuierlichen Trägers. Die Normalkräfte sind jedoch so gering, daß sie nicht zu berücksichtigen sind.

§ 28. Ungleichmäßige Erwärmung einer Außenwand.

Bei einer Erwärmung der Außenkante, die gleich ist der Abkühlung der Innenkante einer Außenwand, wobei also die Mittelfaser unter der Annahme einer linearen Temperaturverteilung keine Längenänderung erfährt, entsteht die in Fig. 58 (Seite 118) dargestellte Deformationsfigur.

Zur Berechnung benützen wir dasselbe Hauptssystem wie im vorhergehenden Paragraph.

Da die Knotenpunkte sich nicht verschieben, können wir hier wieder die früher gebrauchte Gelenkmethode verwenden. Die Kopfverdrehung der Innenseite b ist daher einfach $\gamma = \frac{m}{\varepsilon}$, wenn mit ε das Elastizitätsmaß der Seite b bezeichnet wird.

Die Verdrehungen β am kontinuierlichen Träger infolge der Momente m , die hier wieder als Gelenkmomente bezeichnet werden können, berechnen sich genau wie in § 27.

Der in der Gleichung $\alpha + \beta = \gamma$ gebrauchte Winkel α , der am kontinuierlichen Träger infolge der Belastung (=Erwärmung) entsteht, berechnet sich wie folgt:

Der in Fig. 50 dargestellte Träger wird wieder durch Aufschneiden über den Auflagern statisch bestimmt gemacht, wobei die Achsen der einzelnen Freiträger infolge der Erwärmung Kreisbogenform annehmen. Die Biegemomente dieses Hauptsystems sind gleich Null.

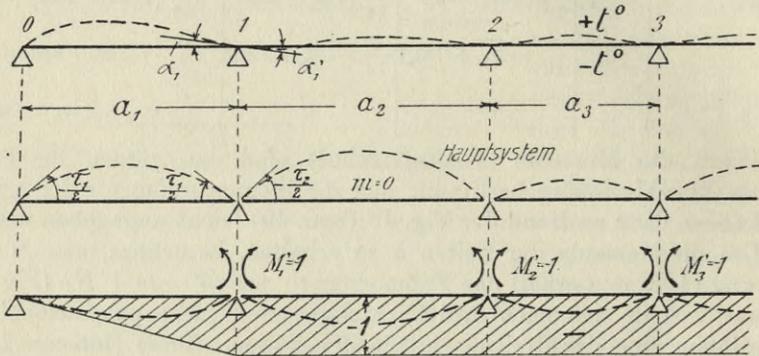


Fig. 50.

Winkel τ wird mit Fig. 51

$$d\tau = \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot ds}{h}$$

$$\tau = \int_0^a \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot ds}{h} = \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot a}{h}, \dots \dots \dots (105)$$

wobei die Wandstärke h als über die Seite gleichbleibend angenommen wurde.

Die Stützmomente M' berechnen sich wieder aus den Clapeyron'schen Gleichungen, die aus der Gleichsetzung der Winkel links und rechts der Stütze entstehen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \alpha'_1: E \cdot \frac{\tau_1}{2} + M'_1 \cdot \frac{a_1}{3J_1} &= -E \cdot \frac{\tau_2}{2} - (2M'_1 + M'_2) \frac{a_2}{6J_2} \\ \alpha_2 = \alpha'_2: E \cdot \frac{\tau_2}{2} + (M'_1 + 2M'_2) \frac{a_2}{6J_2} &= -E \cdot \frac{\tau_3}{2} - (2M'_2 + M'_3) \frac{a_3}{6J_3} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_{n-1} = \alpha'_{n-1}: E \cdot \frac{\tau_{n-1}}{2} + (M'_{n-2} + 2M'_{n-1}) \frac{a_{n-1}}{6J_{n-1}} &= -E \cdot \frac{\tau_n}{2} - M'_{n-1} \cdot \frac{a_n}{3J_n} \end{aligned} \right\} (106)$$

Sind die Stützmomente M' bekannt, so können die Winkel α , welche durch die linken Seiten der Gleichung (106) dargestellt sind, berechnet werden.

Die Bedingung (16): $\alpha + \beta = \gamma$ liefert, $(n + 1)$ mal aufgestellt, die Gelenkmomente $m_0, m_1 \dots m_n$, womit wiederum sämtliche Biegemomente berechnet werden können. (In den Seiten b mit Benutzung der Fixpunkte.)

Für a und J konstant wird:

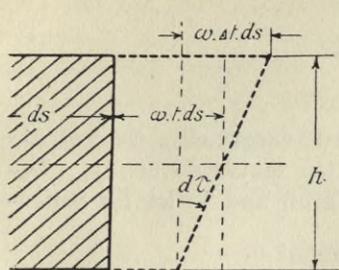


Fig. 51.

$$\left. \begin{aligned} 4 M_1' + M_2' &= -\frac{6 E J \tau}{a} \\ M_1' + 4 M_2' + M_3' &= -\frac{6 E J \tau}{a} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (106')$$

und

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\tau}{2} + \frac{a}{3 E J} M_1' \\ \alpha_2 &= \frac{\tau}{2} + \frac{a}{6 E J} (M_1' + 2 M_2') \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (107)$$

Aus (106') und (107) wurde Tabelle 15 berechnet.

Tabelle 15.

Stützmomente und Verdrehungen der Stützenquerschnitte unter dem Einfluß von ungleichmäßiger Temperaturänderung.

(Vgl. Fig. 50.)

$n =$	1	2	3	4	5 Zellen
$-\frac{a}{6 E J \tau} \cdot M_1'$	—	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{19}$
$-\frac{a}{6 E J \tau} \cdot M_2'$	—	—	—	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{19}$
α_0	$-\frac{\tau}{2}$	$-\frac{\tau}{4}$	$-\frac{3}{10} \tau$	$-\frac{4}{14} \tau$	$-\frac{15}{38} \tau$
α_1	—	0	$+\frac{1}{10} \tau$	$+\frac{1}{14} \tau$	$+\frac{3}{38} \tau$
α_2	—	—	—	0	$-\frac{1}{38} \tau$

Wie das folgende Beispiel zeigt, rufen Wärmeschwankungen ganz bedeutende Zusatzkräfte hervor, so daß in den meisten Fällen ein Schutz dagegen wirtschaftlicher und sicherer sein wird, als eine Verstärkung der Wände, um so eher, als durch letzteres Mittel die Temperaturkräfte bekanntlich noch vergrößert werden.

Vor allem ist auf die infolge ungleichmäßiger Wärmeänderung in der betreffenden Außenwand auftretenden Minimalmomente aufmerksam zu machen, die im folgenden Beispiel etwa das Dreifache der Minimalmomente infolge des Materialdruckes betragen, so daß bei der Berechnung der inneren Bewehrung der Außenwände die Temperaturkräfte in erster Linie zu berücksichtigen sind.

§ Neunter Abschnitt.

§ 29. Beispiel.

Es soll der in Fig. 52 in seinem Grundriß dargestellte Getreidesilo für den, von einer gewissen Tiefe ab konstanten Maximaldruck p_{max} berechnet werden. Die 4×5 Zellen sind gleich groß und es ist ihr Seitenverhältnis

$$n = \frac{b}{a} = \frac{3,51}{4,22} = 0,832.$$

Der maximale Seitendruck wird nach Mörsch¹⁾

$$p_{max} = \frac{\gamma}{\text{tg } \varphi_1} \cdot \frac{U}{F} = \frac{0,82}{0,25} \cdot \frac{15,46}{4,22 \cdot 3,51} = 3,15 \text{ t/m.}$$

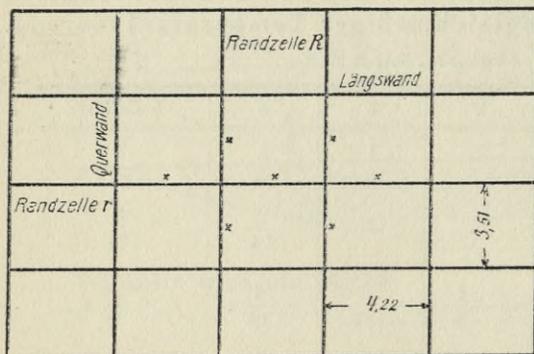


Fig. 52.

Die Berechnung geschieht für einen Streifen von 1 m Höhe, und es seien durchweg m und t die Einheiten.

Zur angenäherten Bestimmung der Wandstärken erfolgt zuerst die Berechnung der Momente und Normalkräfte für

1. Trägheitsmoment konstant.

Es sind die immer wiederkehrenden Ausdrücke

$$pa^2 = 3,15 \cdot 4,22^2 = 56,1 \text{ mt}$$

$$pb^2 = 3,15 \cdot 3,51^2 = 38,8 \text{ „}$$

a) Einzelzelle.

$$\hat{M} = -(1 - 0,832 + 0,832^2) \frac{56,1}{12} = -4,02 \text{ mt} \quad \dots (2)^2$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= (1 + 2 \cdot 0,832 - 2 \cdot 0,832^2) \frac{56,1}{24} = +2,99 \text{ mt} \\ M_b &= \left(1 + \frac{2}{0,832} - \frac{2}{0,832^2}\right) \frac{38,8}{24} = +0,83 \text{ mt} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

$$\left. \begin{aligned} N_a &= \frac{3,15 \cdot 3,51}{2} = 5,53 \text{ ton} \\ N_b &= \frac{3,15 \cdot 4,22}{2} = 6,65 \text{ „} \end{aligned} \right\} \dots (83)$$

¹⁾ E. Mörsch: Der Eisenbetonbau, IV. Auflage, Seite 601 (Stuttgart 1912, Konrad Wittwer).

²⁾ Die Gleichungsnummern sind dieselben wie diejenigen der allgemeinen Gleichungen.

b) Mittelzelle.

Mit den Gleichungen für die Mittelzelle werden die in Fig. 52 mit Kreuzen bezeichneten Wände berechnet, während alle übrigen Wände Rand- und Eckzellen angehören.

$$M_{a \max} = (\text{wie unter a}) = + 2,99 \text{ mt} \quad (66) \quad (3)$$

$$(n > k) \quad M_{b \max} = \left(0,04167 - \frac{0,02479}{0,832} + \frac{0,02479}{0,832^2} \right) 38,8 = + 1,85 \text{ mt} \quad (67b)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{a \min} &= - (0,09064 + 0,06541 \cdot 0,832 - 0,07272 \cdot 0,832^2) 56,1 \\ &= - 5,31 \text{ mt} \quad (69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{b \min} &= - (0,12207 - 0,10333 \cdot 0,832 + 0,06459 \cdot 0,832^2) 56,1 \\ &= - 4,54 \text{ mt} \quad (70) \end{aligned}$$

Die Normalkräfte N_a und N_b sind gleich den unter a berechneten Werten.

c) Randzelle R. (Vgl. Fig. 52.)

$$\sqrt{(1+n)(3+n)} = 2,649$$

$$M_{a \max} = 2,99 - \frac{0,832^2 \cdot 0,168}{3,481} \cdot \frac{56,1}{12} = 2,99 - 0,16 = + 2,83 \text{ mt} \quad (73)$$

$$M_{a \min} = - \frac{0,832 \cdot 0,168}{1 + \frac{0,832}{2,649}} \cdot \frac{56,1}{12} = - 0,50 \text{ mt} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{a \max} = - \bar{M}_{a \min} &= 2,99 - \frac{0,832^2 \cdot 0,168 \cdot 0,183}{3,481} \cdot \frac{56,1}{12} = 2,99 - 0,03 \\ &= + 2,96 \text{ mt} \quad (74) \end{aligned}$$

$$M_{b \max} = \left(0,06355 - \frac{0,03953}{0,832} + \frac{0,01764}{0,832^2} \right) 38,8 = + 1,61 \text{ mt} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} N_a &= \left[\frac{1}{2} - \frac{0,168(2,649 - 1,832)}{4 \cdot 0,832 \cdot 3,481} \right] 3,15 \cdot 3,51 \\ &= (0,5000 - 0,0119) 3,15 \cdot 3,51 = 5,39 \text{ t} \quad (95) \end{aligned}$$

$$\bar{N}_a = (0,5000 + 0,0119) 3,15 \cdot 3,51 = 5,67 \text{ t} \quad (96)$$

$$N_b = (\text{wie unter a}) = 6,65 \text{ t.}$$

d) Randzelle r.

Dafür werden die Gleichungen (77) – (80) und (97), (98) benützt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 16 (Seite 116) zusammengestellt.

e) Eckzelle.

Für die Eckzelle werden nur die Minimalmomente der Außenwände berechnet. Die Bestimmung der Koeffizienten geschieht am schnellsten durch Auftragen der Werte für $n = 1,0; 0,8$ und $0,5^1$) und ungefähres Einzeichnen der Kurve $\bar{M} = f(n)$, aus welcher der gesuchte Wert für $n = 0,832$ abgemessen werden kann. Es kommt dabei auf große Genauigkeit nicht an, da die Momente klein sind.

$$M_{a \min} : M_{links} = + 0,0003 \cdot 56,1 = + 0,02 \text{ mt}$$

$$M_{rechts} = - 0,0122 \cdot 56,1 = - 0,68 \text{ „}$$

$$M_{b \min} : M_{oben} = - 0,0002 \cdot 38,8 = - 0,01 \text{ „}$$

$$M_{unten} = - 0,0023 \cdot 38,8 = - 0,09 \text{ „}$$

¹⁾ Fettgedruckte Zahlen in Tabelle 11, Seite 80.

Berücksichtigt man auch noch die Temperaturspannungen schätzungsweise, so erhält man die Stärke aller Längswände zu $h = 0,26$ m, die der Querwände zu $h = 0,22$ m. Die Trägheitsmomente für Streifen von 1 m Höhe werden dann

$$J_a = \frac{0,26^3 \cdot 1,0}{12} = 0,001465 \text{ m}^4$$

$$J_b = \frac{0,22^3 \cdot 1,0}{12} = 0,000887 \text{ m}^4.$$

Damit wird

$$n' = \frac{b \cdot J_a}{a \cdot J_b} = \frac{3,51 \cdot 0,001465}{4,22 \cdot 0,000887} = 1,373 \left(= \frac{1}{0,728} \right).$$

Bevor zu der Berechnung der inneren Kräfte übergegangen wird, werden zuerst die erforderlichen Elastizitätsmaße bestimmt.

Für das unendliche Zellsystem wird, wenn man in Tabelle 4 den Wert $\frac{1}{n'} = 0,728$ proportional einschaltet (die Kolonne für ε_b gibt für $\frac{1}{n'}$ die Werte ε_a , vgl. Seite 99)

$$\varepsilon_a = 3,697 \cdot \frac{0,001465}{4,22} \cdot E = 0,001284 E$$

$$\varepsilon_b = 3,777 \cdot \frac{0,000887}{3,51} \cdot E = 0,000955 E.$$

Um diese Werte noch genauer zu erhalten, werden aus ihnen nach Gleichung (49)—(51) die Fixpunktabstände i berechnet und aus diesen wieder die ε -Werte.

$$\text{Nach (50):} \quad \varepsilon_a^x = \varepsilon_a + 2 \cdot \varepsilon_b = 0,003194 E$$

$$\varepsilon_b^x = 2 \cdot \varepsilon_a + \varepsilon_b = 0,003523 E$$

$$\text{Nach (51):} \quad i_a = \frac{0,003194 \cdot 4,22^2}{6 \cdot 0,001465 + 3 \cdot 0,003194 \cdot 4,22} = 1,156 \text{ m}$$

$$i_b = \frac{0,003523 \cdot 3,51^2}{6 \cdot 0,000887 + 3 \cdot 0,003523 \cdot 3,51} = 1,022 \text{ m.}$$

$$\text{Nach (49):} \quad \varepsilon_a = \frac{6 \cdot (4,22 - 1,156) 0,001465 E}{4,22 (8,44 - 3 \cdot 1,156)} = 0,0012837 E$$

$$\varepsilon_b = \frac{6 \cdot (3,51 - 1,022) 0,000887 E}{3,51 (7,02 - 3 \cdot 1,022)} = 0,0009541 E.$$

Man sieht, daß die aus Tabelle 4 geradlinig interpolierten Werte sehr genau sind, und daß die ausgeführte Nachrechnung entbehrlich ist.

Aus Tabelle 7, welche die Elastizitätsmaße der langen Außenwände (Randzelle R) enthält, werden wegen $n' > 1$ mit $\frac{1}{n'} = 0,728$ diejenigen der kurzen Außenwände erhalten (Randzelle r), während diejenigen der langen Außenwände für $n' = 1,373$ nach dieser Tabelle nur geschätzt werden können und deshalb nachgerechnet werden müssen.

Es wird also

Randzelle r :

$$\varepsilon_b = 3,687 \cdot \frac{0,000887}{3,51} \cdot E = 0,000932 E.$$

Die damit folgende genauere Berechnung nach den Gleichungen (49) bis (51) liefert

$$i'_b = 0,9526 \text{ m}$$

$$\varepsilon_b = 0,0009317 E.$$

Randzelle *R*:

$$\varepsilon_a = 3,60 \cdot \frac{0,001465 E}{4,22} = 0,001248 E.$$

Genauer wird mit Gleichungen (49) bis (51)

$$i'_a = 1,0702 \text{ m}$$

$$\varepsilon_a = 0,0012546 E.$$

a) Einzelzelle.

$$\hat{M} = - \frac{1 + 0,832^2 \cdot 1,373}{1 + 1,373} \cdot \frac{56,1}{12} = - 3,84 \text{ mt} \dots \dots \dots (2')$$

$$\left. \begin{aligned} M_a &= \frac{pa^2}{8} - 3,84 = + 3,17 \text{ mt} \\ M_b &= \frac{pb^2}{8} - 3,84 = + 1,01 \text{ " } \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3')$$

Die Normalkräfte ändern sich infolge verschiedener Wandstärken nicht.

b) Mittelzelle.

$$m = \frac{1 - 0,832^2}{1 + \frac{2 \cdot 2,373 \cdot 0,000887}{3,51 (0,0012837 + 0,0009541)}} \cdot \frac{56,1}{12} = 0,9368 \text{ mt}$$

$$M_{a \max} = (\text{wie unter a}) = + 3,17 \text{ mt} \dots \dots \dots (66')$$

$$M_{b \max} = 1,01 + \frac{2 \cdot 0,9368}{1 + 1,373} = 1,80 \text{ mt} \dots \dots \dots (67')$$

Mit $\mu = \frac{1}{1,373} [1 + 2 \cdot 1,373 - \sqrt{2,373 \cdot 5,119}] = 0,190$

und $m' = \frac{(1 - 0,832^2) \cdot 5,119}{1 + 1,373 (2 - 0,190)} \cdot \frac{56,1}{24} = 1,052 \text{ mt}$

wird $\hat{M}_{a \min} = - 3,84 - 0,513 - 1,085 = - 5,44 \text{ mt} \dots \dots \dots (69')$

Mit $\mu = 2 + 1,373 - \sqrt{2,373 \cdot 4,373} = 0,153$

und $m' = \frac{(1 - 0,832^2) \cdot 4,373}{2 + 1,373 - 0,153} \cdot \frac{56,1}{24} = 0,972 \text{ mt}$

wird $\hat{M}_{b \min} = - 3,84 - 0,422 = - 4,26 \text{ mt} \dots \dots \dots (70')$

c) Randzelle *R*. (Vgl. die Entwicklungen der Seiten 66 bis 71.)

Für die Wechselbelastung wird nach Gleichung (72)

$$m = 0,581 \text{ mt} \dots \dots \dots (72')$$

und mit (3') und (10')

$$M'_a = 3,17 - 1,373 \cdot \frac{3,373 - 0,153}{2,373 \cdot 4,373} \cdot 0,581 = (3,17 - 0,247) \text{ mt}$$

$$\overline{M}'_c = - m = - 0,581 \text{ mt}$$

$$\overline{M}'_c = 3,17 - 0,247 \cdot \mu = 3,17 - 0,247 \cdot 0,153 = (3,17 - 0,038) \text{ mt}$$

$$M'_b = \left(1,01 + \frac{+ 0,334}{- 0,128} \right) \text{ mt.}$$

Für die Einzelbelastung wird

$$- E \alpha_1 = + E \alpha_2 = 1200 \quad \dots \quad (4')$$

$$\left. \begin{aligned} + E \beta_1 &= 642,8 m_1 + 190,6 m_2 \\ - E \beta_2 &= 190,6 m_1 + 642,8 m_2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (11')$$

$$- E \gamma_1 = \frac{m_1}{\varepsilon_1} \cdot E = \frac{m_1}{0,0012546} = 797,1 m_1$$

$$+ E \gamma_2 = \frac{m_2}{\varepsilon_2' + \varepsilon_2''} \cdot E = \frac{m_2}{0,0012837 + 0,0009541} = 447,0 m_2.$$

Nach Gleichung (16) wird nun

$$1439,9 m_1 + 190,6 m_2 = 1200$$

$$190,6 m_1 + 1089,8 m_2 = 1200,$$

woraus folgt

$$m_1 = 0,703 \text{ mt}$$

$$m_2 = 0,978 \text{ „}$$

und damit nach Gleichung (10')

$$m_{23}'' = 0,260 \text{ mt}$$

$$m_{32}'' = 0,449 \text{ „}$$

Es ist also für diese Belastung

$$M_b'' = \left(1,01 + \frac{0,260}{0,449} \right) \text{ mt.}$$

Aus den Werten der beiden Grundbelastungen werden nun die Größtmomente

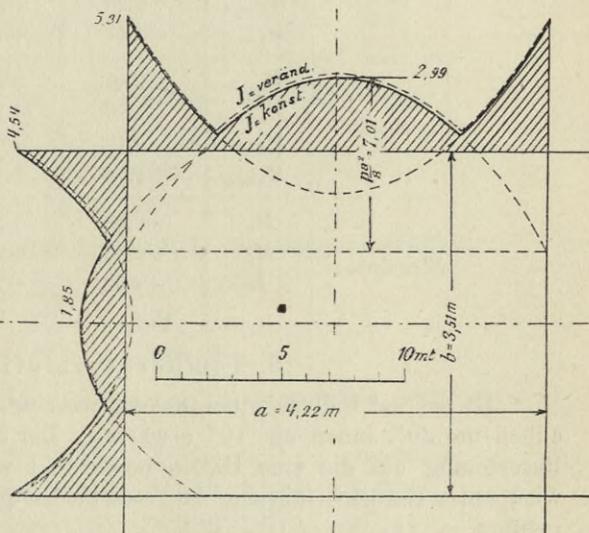


Fig. 54. Maximalmomente einer Mittelzelle.

$$M_{a \max} = M_a' = + 2,92 \text{ mt} \quad \dots \quad (73')$$

$$\bar{M}_{b \max} = \bar{M}_c' = + 3,13 \text{ „} \quad \dots \quad (74')$$

$$M_{a \min} = M_c' = - 0,58 \text{ „} \quad \dots \quad (75')$$

$$M_{b \max} = 2 M_b'' - M_b' = \left(1,01 + \frac{0,186}{1,026} \right) \text{ mt,}$$

was mit Gleichung (40) gibt

$$M_{b \max} = 1,01 + \frac{1,212}{2} + \frac{0,840^2}{2 \cdot 56,1} = + 1,62 \text{ mt.}$$

Dasselbe wird für Randzelle r gemacht. Die Ergebnisse sind in Tabelle 16 zusammengestellt.

Tabelle 16.
Zusammenstellung der Größtmomente.
 (Vgl. Fig. 52.)

		$J = \text{konstant}$	$J = \text{ver-}\br/> \text{änderlich}$	Zugehörige Normalkräfte ($J = \text{konstant}$)
Mittelzelle (Fig. 54)	$M_{a \max}$	+ 2,99	+ 3,17	5,53
	$M_{b \max}$	+ 1,85	+ 1,80	6,65
	$\hat{M}_{a \min}$	- 5,31	- 5,44	5,53
	$\hat{M}_{b \min}$	- 4,54	- 4,26	6,65
Randzelle R	$M_{a \max}$	+ 2,83	+ 2,92	5,39
	$M_{a \min}$	- 0,50	- 0,58	0
	$\bar{M}_{a \max}$	+ 2,96	+ 3,13	5,67
	$M_{b \max}$	+ 1,61	+ 1,62	6,65
Randzelle r	$M_{a \max}$	+ 2,89	+ 3,08	5,53
	$M_{b \max}$	+ 1,80	+ 1,77	6,60
	$M_{b \min}$	- 0,19	- 0,16	0
	$\bar{M}_{b \max}$	+ 1,84	+ 1,79	6,54
Einzelzelle	M_a	+ 2,99	+ 3,17	5,53
	M_b	+ 0,83	+ 1,01	6,65
	\hat{M}	- 4,02	- 3,84	—
		mt	mt	ton

3. Temperatureinfluß.

Es sei der Fall zu untersuchen, wo eine der Längsaußenwände sich außen um 20° , innen um 10° erwärmt. Der Symmetrie wegen kann die Berechnung auf die eine Hälfte beschränkt werden. Die Untersuchung wird unter Berücksichtigung der verschiedenen großen Wandstärken durchgeführt.

a) Gleichmäßige Erwärmung.

Es ist $t = 15^\circ$, ferner sei der Ausdehnungskoeffizient $\omega = 0,000012$, der Elastizitätsmodul $E = 2100000 \text{ t/qm}$.

Die Verschiebungen der Knotenpunkte berechnen sich folgendermaßen (Fig. 55):

$$\delta_2 = -0,000012 \cdot 15 \cdot \frac{4,22}{2} = -0,000380 \text{ m}$$

$$\delta_1 = 3 \cdot \delta_2 = -0,001139 \text{ „}$$

$$\delta_0 = 5 \cdot \delta_2 = -0,001899 \text{ „}$$

Mit Hilfe der unter 2. berechneten Elastizitätsmaße wird

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = 2 \cdot 0,0012837 E + 0,0009541 E = 0,003521 E$$

$$\epsilon_0 = 0,0012837 E + 0,0009317 E = 0,002215 E$$

Aus Gleichung (101) folgt mit $b = 3,51$ und $J = 0,000887$

$$E \cdot \gamma_2 = 1048 m_2 - 321$$

$$E \cdot \gamma_1 = 1048 m_1 - 965$$

$$E \cdot \gamma_0 = 1074 m_0 - 1560.$$

Nach Tabelle 14 wird für fünf Zellen

$$E \cdot \beta_0 = \frac{-4,22}{38 \cdot 0,001465} (11 m_0 - 3 m_1 + m_2) \\ = - (833,8 m_0 - 227,4 m_1 + 75,8 m_2)$$

$$\text{ebenso } E \cdot \beta_1 = - (-227,4 m_0 + 454,8 m_1 - 151,6 m_2)$$

$$E \cdot \beta_2 = - (75,8 m_0 - 151,6 m_1 + 530,6 m_2).$$

Mit $\beta = \gamma$ folgen die drei Gleichungen

$$1907,8 m_0 - 227,4 m_1 + 75,8 m_2 = 1560$$

$$-227,4 m_0 + 1502,8 m_1 + 151,6 m_2 = 962$$

$$75,8 m_0 + 151,6 m_1 + 1578,6 m_2 = 321,$$

woraus sich die unbekanntenen Kopfmomente berechnen lassen:

$$m_0 = 0,903 \text{ mt}$$

$$m_1 = 0,801 \text{ „}$$

$$m_2 = 0,237 \text{ „}$$

Damit werden nach Gleichung (102) die Horizontalkräfte

$$H_0 = -0,536 \text{ ton.}$$

$$H_1 = -0,443 \text{ ton.}$$

$$H_2 = -0,136 \text{ ton.,}$$

womit sich die Momente an den unteren Einspannstellen der Querseiten b ergeben:

$$M_0 = m_0 + H_0 \cdot b = 0,903 - 0,536 \cdot 3,51 = -0,979 \text{ mt}$$

$$M_1 = m_1 + H_1 \cdot b = 0,801 - 0,443 \cdot 3,51 = -0,754 \text{ „}$$

$$M_2 = m_2 + H_2 \cdot b = 0,237 - 0,136 \cdot 3,51 = -0,241 \text{ „}$$

Diese und die Kopfmomente sind in Fig. 55 an den Enden der Querseiten b aufgetragen und geradlinig verbunden worden. Um nun auch die Momente der Außenwand eintragen zu können, müssen die Stützmomente M nach Tabelle 14 berechnet werden. Es wird

$$M_1 = -\frac{1}{19} (5 \cdot 0,903 + 9 \cdot 0,801 - 3 \cdot 0,237) = +0,580 \text{ mt}$$

$$M_2 = -\frac{1}{19} (-0,903 + 2 \cdot 0,801 + 12 \cdot 0,237) = +0,197 \text{ „}$$

Diese Stützmomente (Fig. 57) werden zu den Momenten m der frei aufliegenden Träger (Fig. 56) addiert, wodurch man die Biegemomente der Außenwand erhält.

Die an den inneren Enden der Querseiten b wirkenden Momente

Momente und Deformationen infolge ungleichmäßiger Erwärmung einer Außenwand.
 Erwärmung der Außenkante = 20° , Erwärmung der Innenkante = 10° . (Vgl. S. 116 u. ff.)

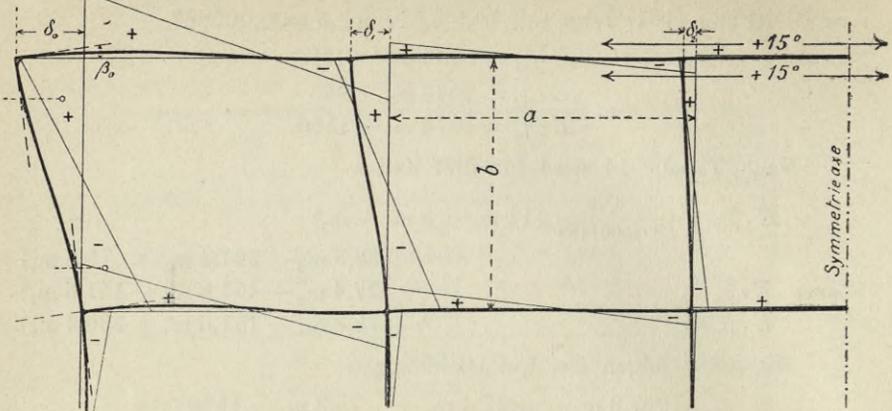


Fig. 55. Gleichmäßige Erwärmung.

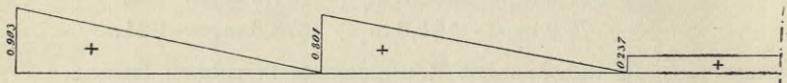


Fig. 56. Verteilung der Kopfmomente m auf das statisch bestimmte System.

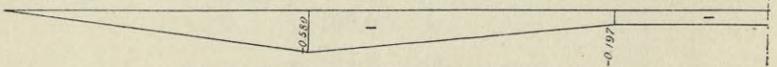


Fig. 57. Verteilung der Stützenmomente M .

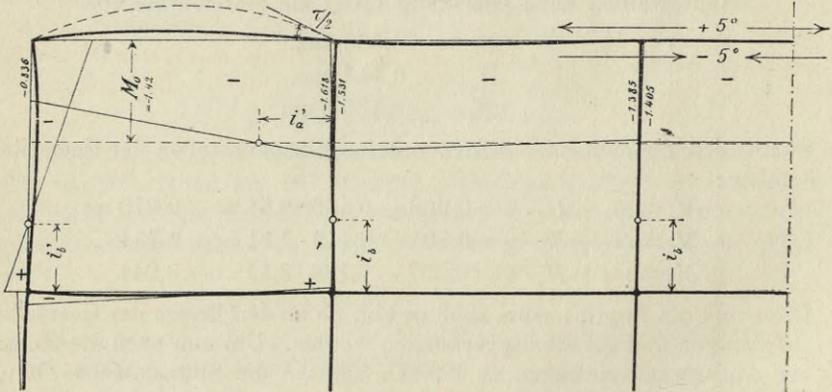


Fig. 58. Ungleichmäßige Erwärmung.

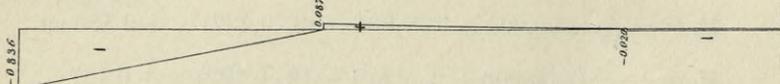


Fig. 59. Verteilung der Kopfmomente m auf das statisch bestimmte System.

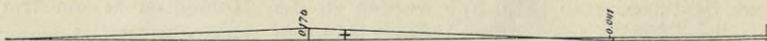


Fig. 60. Verteilung der Stützenmomente M , hervorgerufen durch die Kopfmomente.

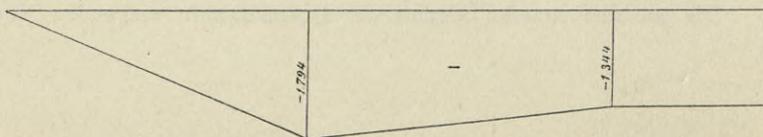


Fig. 61. Verteilung der Stützenmomente M' , hervorgerufen durch den Wärmeunterschied.

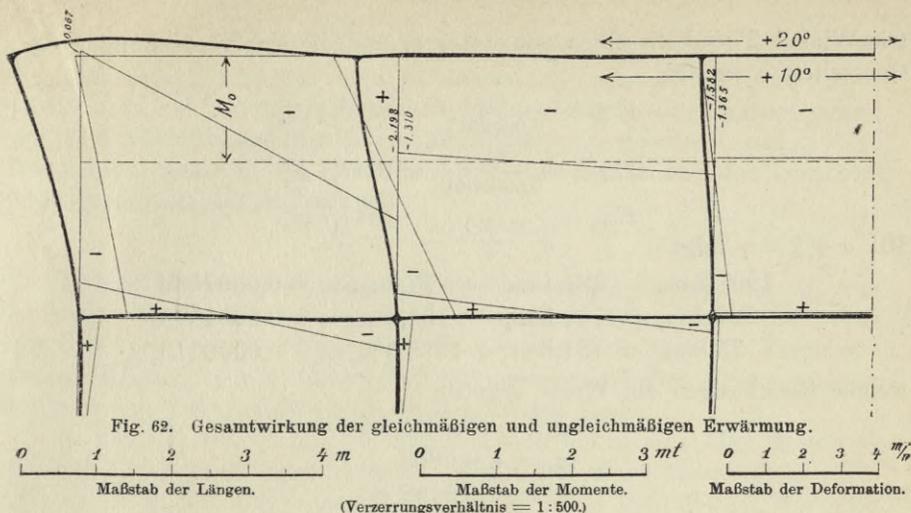


Fig. 62. Gesamtwirkung der gleichmäßigen und ungleichmäßigen Erwärmung.

werden proportional den Elastizitätsmassen der anschließenden Wände in dieselben verteilt, welche Momente sich dann nach den Regeln des kontinuierlichen Trägers über diese Wände fortpflanzen, d. h. so, daß die Momente in den Fixpunkten verschwinden; die Fixpunkte wurden auf Seite 113 ff. berechnet. In Fig. 55 sind nur die Schlußlinien eingetragen.

Um die Deformationsfigur zu der jetzt bekannten Momentenverteilung zu zeichnen, wählt man ein passendes Verzerrungsverhältnis (in unserem Fall 1:500) und trägt die Verschiebungen δ verzerrt auf. Dann geht man am raschesten so vor, daß man in derselben Verzerrung die Knotenpunktverdrehungen einzeichnet, welche Geraden die Tangenten an die elastische Linie in den Knotenpunkten darstellen. Diese Tangenten schneidet man mit den zu den Balkenachsen senkrechten Linien durch die Schwerpunkte der Momentendreiecke, welche Schnittpunkte unter sich verbunden die Tangenten in den Wendepunkten und die Lage derselben ergeben. Nun läßt sich die elastische Linie leicht einzeichnen. Die Knotenpunktverdrehungen der Außenwand können aus den Gleichungen für β oder γ (Seite 117) leicht berechnet werden, die übrigen Eckverdrehungen nach Gleichung (1).

b) Ungleichmäßige Erwärmung (Fig. 58).

Mit $\Delta t = 10^0$ wird nach Gleichung (105)

$$\tau = \frac{0,000012 \cdot 10 \cdot 4,22}{0,26} = 0,001948$$

und damit nach Tabelle 15

$$\alpha_0 = -\frac{15}{38} \tau = -0,0007689$$

$$\alpha_1 = +\frac{3}{38} \tau = +0,0001538$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{38} \tau = -0,0000513.$$

Die Winkel β sind dieselben wie unter a , und die Kopfverdrehungen der Querseiten b werden

$$E \gamma_0 = \frac{m_0}{0,0009317} = 1073,4 m_0$$

$$E \gamma_1 = \frac{m_1}{0,0009541} = 1047,7 m_1$$

$$E \gamma_2 = 1047,7 m_2.$$

Mit $\alpha + \beta = \gamma$ folgt

$$1907,2 m_0 - 227,4 m_1 + 75,8 m_2 = -0,0007689$$

$$-227,4 m_0 + 1502,5 m_1 - 151,6 m_2 = +0,0001538$$

$$75,8 m_0 - 151,6 m_1 + 1578,3 m_2 = -0,0000513,$$

welche Gleichungen die Werte ergeben

$$m_0 = -0,8355 \text{ mt}$$

$$m_1 = +0,0865 \text{ „}$$

$$m_2 = -0,0198 \text{ „}$$

Nach Tabelle 14 wird damit

$$M_1 = +0,176 \text{ mt}$$

$$M_2 = -0,041 \text{ „}$$

und aus Tabelle 15 folgt

$$M_1' = -\frac{4}{19} \cdot \frac{6 \cdot 2100000 \cdot 0,001465 \cdot 0,001948}{4,22} = -1,794 \text{ mt}$$

$$M_2' = -\frac{3}{19} \quad [\text{wie oben}] = -1,344 \text{ „}$$

Die einzelnen Einflüsse dieser Momente auf das statisch bestimmte System sind in den Fig. 59 bis 61 dargestellt, welche nun addiert die Biegemomente der Außenwand ergeben (Fig. 58). Die Kopfmomente m pflanzen sich durch die Fixpunkte der Querseiten b fort.

Um hier die elastische Linie zu zeichnen, wird folgende Überlegung angestellt:

Um die infolge der ungleichmäßigen Erwärmung entstandene Krümmung der Balkenachse zum Verschwinden zu bringen, muß ein Moment M_0 ihr entgegenwirken, dessen Größe sich wie folgt berechnet:

Nach Gleichung (105) ist

$$d\tau = \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot ds}{h} = \frac{M_0}{EJ} ds$$

und daraus der absolute Wert von M_0

$$M_0 = \frac{EJ \cdot \omega \cdot \Delta t}{h} = \frac{2100000 \cdot 0,001465 \cdot 0,000012 \cdot 10}{0,26} = 1,42 \text{ mt.}$$

An denjenigen Stellen, an denen das Moment der Außenwand den Wert M_0 erreicht hat, befinden sich demnach die Wendepunkte. Zieht man an jeder Stelle von dem tatsächlichen Moment der Außenwand das Moment M_0 ab (Fig. 58), so entsteht die Momentfläche, für welche die elastische Linie auf die unter a angedeutete Art gezeichnet werden kann. Aus Fig. 58 kann

ersehen werden, wie rasch sich das Außenwandmoment gegen die Symmetrieachse hin dem konstanten Wert M_0 nähert. Bei einem unendlich langen System mit einer beliebigen Anzahl Reihen (auch beim einreihigen System) wird bei der hier behandelten Temperaturänderung wegen des Verschwindens aller Kopfmomente m die elastische Linie eine Gerade und das konstante Biegemoment der Außenwand

$$M_0 = - \frac{\omega \cdot \Delta t \cdot EJ}{h}.$$

In Fig. 58 schneidet die gestrichelte Horizontale im Abstand M_0 von der Achse die Momentenlinie in den Abständen a der betreffenden (auf Seite 114 berechneten) Fixpunkte, was aus der Definition der Fixpunkte hervorgeht, da wir es in diesem Fall mit unverschieblichen Knotenpunkten zu tun haben. Es ist dies eine schätzenswerte Probe.

In den Fig. 55, 58 und 62 muß natürlich die Summe aller Momente um jeden Knotenpunkt verschwinden. Wenn dies nicht überall genau zutrifft, so ist es auf die Vernachlässigung der klein gewordenen Momente bei der Verteilung derselben in die Innenwände zurückzuführen.

c) Vereinigung der beiden Fälle von gleichmäßiger und ungleichmäßiger Erwärmung.

Die Momentenfläche der Fig. 62 ist aus der Summierung der Momente der Fig. 55 und 58 entstanden und gibt an jeder Stelle das endgültige Moment infolge der Erwärmung der Außenwand um 20° (Außenkante) bzw. 10° (Innenkante).

Ein Vergleich dieser Zusatzmomente mit den vom Füllmaterial erzeugten Momenten zeigt den bedeutenden Einfluß von Wärmeschwankungen. Z. B. beträgt das vom Materialdruck hervorgerufene Minimalmoment der Außenwand $M_{a\min} = -0,58$ mt (Tabelle 16, Randzelle R), während an dieser Stelle infolge des Temperaturunterschiedes das Moment $M_i = \infty - 1,40$ mt entsteht (Fig. 62).

§ 30. Hauptergebnisse ¹⁾.

Als Hauptergebnisse sind kurz folgende zu nennen:

Die Berechnung eines Systems von zusammenhängenden, rechteckigen Zellen als einzelne in sich geschlossene Rahmen führt an verschiedenen Stellen zu unrichtigen Resultaten. Die Nebeneinflüsse infolge des Zusammenhangs der Zellen und infolge der Belastung von umliegenden Zellen sind in bezug auf die Biegemomente nicht unbedeutend, während die Normalkräfte dadurch wenig beeinflusst werden.

Diese Einflüsse werden um so größer, je mehr sich die Grundrißform der Zelle von der quadratischen entfernt. Da bei quadratischen Zellen mit konstantem Trägheitsmoment die Nebeneinflüsse verschwinden, so liefert bei denselben eine Berechnung der Biegemomente und Normal-

¹⁾ Die Ergebnisse sind ausführlicher am Schluß jedes Abschnittes zusammengefaßt.

kräfte mit den Formeln des in sich geschlossenen, quadratischen Rahmens (oder des eingespannten Stabes) genaue Ergebnisse.

Eine allzu starke Abweichung von der quadratischen Form führt zu unwirtschaftlichen Dimensionen, was sich besonders durch das plötzliche, starke Anwachsen der Momente in den kurzen Seiten nach Überschreiten eines bestimmten Seitenverhältnisses kennzeichnet.

Die für die Berechnungen verwendeten Methoden beruhen alle auf der Verwendung statisch unbestimmter Hauptssysteme, deren einzelne Teile in § 4 behandelt wurden.

Beim einreihigen Zellsystem ist eine, mit Rücksicht auf die Vernachlässigung der Deformationen infolge von Normal- und Schubkräften genaue Berechnung der Biegemomente und Normalkräfte mit der in § 7 beschriebenen Methode für die Praxis nicht zu umständlich. Die dazu erforderlichen Formeln sind in den §§ 4 und 7 enthalten. Für angenäherte Berechnungen sind die Gleichungen für die Maximal- und Minimalmomente der §§ 10 und 11 zu verwenden, welche besonders bei gleich großen Zellen und konstantem Trägheitsmoment den wirklichen Momenten sehr nahe kommen.

Eine genaue Berechnung des zweireihigen Systems ist im allgemeinen zu umständlich; hierfür geben die Gleichungen der Momente und Normalkräfte für die Randzelle eines unendlich weit ausgedehnten Zellsystems gute und zwar zu ungünstige Näherungswerte (§§ 16 und 17).

Die Ersetzung des gegebenen Falles durch ein unendliches System gibt bei Zellengruppen mit drei und mehr Reihen naturgemäß noch bessere Näherungswerte, und es ist dieses System verhältnismäßig einfach zu behandeln. Bei vielreihigen Systemen ist im allgemeinen eine Abnahme der Momente von der Mitte des Systems gegen die Ränder hin wahrzunehmen, ebenso an den Rändern gegen die Ecken hin.

Der Einfluß der Normal- und Schubkräfte auf die Berechnung der statisch unbestimmten Größen ist bei nicht allzu rechteckigen Zellen zu vernachlässigen; ihr Einfluß auf die Dimensionierung ist untergeordneter Art.

Die Berücksichtigung verschiedener Wandstärken macht die genannten Berechnungsmethoden kaum umständlicher, falls die Wandstärken im Verlauf einer Seite als konstant angenommen werden. Die Momentenverteilung ändert sich dabei in demselben Maß und derselben Art, wie dies allgemein bei Rahmenkonstruktionen der Fall ist.

Der Einfluß der Temperatur auf die Dimensionierung ist bedeutend. Zum Beispiel ist die Innenbewehrung der von der Wärmeänderung betroffenen Außenwand hauptsächlich von den Temperaturmomenten abhängig und erst in zweiter Linie von den Momenten infolge des Materialdruckes. Eine Schutzvorkehrung gegen Wärmeschwankungen wird in den meisten Fällen wirtschaftlicher und sicherer sein, als eine Verstärkung der Wände.



WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

6861

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299305