Johann Mathematik

JACOB STEINER'S

VORLESUNGEN

ÜBER

SYNTHETISCHE GEOMETRIE.

ERSTER THEIL:

DIE THEORIE DER KEGELSCHNITTE

IN

ELEMENTARER DARSTELLUNG.

ZWEITE AUFLAGE.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1875.

DIE

THEORIE DER KEGELSCHNITTE

IN

ELEMENTARER DARSTELLUNG.

AUF GRUND VON UNIVERSITÄTSVORTRÄGEN UND MIT BENUTZUNG HINTERLASSENER MANUSCRIPTE JACOB STEINER'S.

BEARBEITET

VON

DR. C. F. GEISER,

PROFESSOR AM SCHWEIZERISCHEN POLYTECHNICUM.

ZWEITE AUFLAGE.

MIT 141 HOLZSCHNITTEN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1875.

Vorwort zur ersten Auflage.

Es ist in den letzten Lebensjahren Jacob Steiner's einer seiner Lieblingswünsche gewesen, die beiden Hauptvorlesungen, welche er regelmässig an der Berliner Universität hielt, herauszugeben. Leider war aber die Gesundheit des grossen Geometers in diesen Zeiten derart erschüttert, dass er selbst nicht daran denken konnte, die mit grosser Mühe verbundene Arbeit auf sich zu nehmen, und so blieb es dem Verfasser dieses Buches vorbehalten, bei Uebernahme der hinterlassenen Schriften Steiner's, die Herausgabe der Vorlesungen in erster Linie zu besorgen.

Es bot sich von selbst dar, dass der Anfang mit der Vorlesung: „Eigenschaften der Kegelschnitte und einiger andern Curven, synthetisch und elementar entwickelt“ gemacht wurde, denn für diese ergaben sich in einem etwa 80 Seiten haltenden Manuscripte, betitelt: „Populäre Kegelschnitte“ hinreichende Anhaltspunkte. Zudem stellte Herr Professor Dr. Sidler in Bern mit der verdankenswerthesten Bereitwilligkeit dem Verfasser ein ausgezeichnet geführtes Collegienheft der Vorlesung zur Verfügung, so dass es nicht schwer hielt, den Steiner'schen Vortrag bis ins Einzelne zu verfolgen.

Immerhin schliesst sich nur der zweite [der umfassendste] Abschnitt des vorliegenden Buches, welcher Ellipse, Hyperbel und Parabel gesondert untersucht, in Inhalt und Anordnung dem Steiner'schen Manuscripte an, während der erste und der dritte Abschnitt, die Hauptsätze der Kreistheorie, die Lehre vom geometrischen Orte und eine gemeinsame Behandlung der Kegelschnitte enthaltend, nach einigen von Steiner in seinen Manuscripten angedeuteten, aber nicht ausgeführten Ideen bearbeitet wurden. Auch in diesen Abschnitten sind die meisten Resultate aus der erwähnten Quelle geschöpft, nur glaubt der Herausgeber ausdrücklich für die Anordnung derselben, sowie für allfällige Unrichtigkeiten hier die Verantwortlichkeit übernehmen zu müssen. — Da in dem ganzen Buche nur elementare Sätze behandelt werden, so war die Einführung historischer Notizen sowie aller Quellennachweis unnöthig.

Alle auf Curven höherer Grade bezüglichen Sätze des Steiner'schen Manuscriptes sind in diese Bearbeitung nicht aufgenommen worden, weil sie sich meistentheils auf Untersuchung projectivischer Gebilde stützen. Ein Abschnitt, der in der ersten Ausarbeitung über die elementaren projectivischen Beziehungen dem Buche angefügt war, ist nach genauer Ueberlegung in der Schlussredaction gestrichen worden.

Man wird ohne Zweifel an mancher Stelle des Buches fühlen, dass dasselbe nicht in einem Gusse entstanden ist; es möge zur Entschuldigung angeführt sein, dass dem Verfasser namentlich in den zwei letzten Jahren durch selbstständige wissenschaftliche Arbeiten und durch eine oft drückende Lehrthätigkeit die beste Arbeitszeit entzogen wurde, so dass er nur ab und zu sich der Ueberarbeitung und Ausführung seines ersten Entwurfs widmen konnte. Vielleicht erkennt eine wohlwollende Kritik auch an, dass die ungleiche Behandlung einzelner Partieen ihren Grund darin hat, dass der Verfasser diejenigen Sätze, welche von grösserer Bedeutung sind und mehrfach zur Anwendung kommen, möglichst ausführlich erörterte, während die aus ihnen gezogenen Folgerungen so kurz als irgend thunlich angedeutet sind. Im Uebrigen sei das Buch dem mathematischen Publikum zur geneigten Beurtheilung empfohlen.

Der Bearbeiter dieser Vorlesung Steiner's hatte die Absicht, auch die Vorlesung: „Ueber die neuern Methoden der synthetischen Geometrie“ herauszugeben, als sich glücklicherweise Herr Professer Dr. Schröter zur Redaction derselben bereit erklärte, so dass nun die beiden Vorlesungen gleichzeitig erscheinen können; die Beziehungen zwischen denselben sind leicht aufzufinden und brauchen hier nicht näher erörtert zu werden.

Zürich, im Juni 1867.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Der Natur der Quellen dieses Buches entsprechend sind in dieser zweiten Auflage desselben fundamentale Aenderungen nicht vorgenommen worden. Namentlich haben sich im zweiten Hauptabschnitte: „Die Kegelschnitte in spezieller Behandlungsweise“ alle Zusätze nur auf die Verwendung von Notizen beschränkt, welche von Steiner herrühren und von mir an passend scheinender Stelle in den ursprünglichen Text eingewoben wurden.

Für die beiden andern Hauptabschnitte sind allerdings einzelne Parthieen neu bearbeitet worden, für welche ich die Verantwortung zu übernehmen habe. Steiner selbst hat in seinen verschiedenen Entwürfen über den Umfang des in der einleitenden Vorlesung zu behandelnden Stoffes geschwankt und namentlich in den letzten derselben gerne die elementaren Sätze über projectivische und involutorische Gebilde zu Hülfe genommen. Ich habe in Rücksicht auf den zweiten Band dieses Werkes derartige Anklänge sowie schon in der ersten, jetzt auch in der zweiten Auflage durchaus unberücksichtigt gelassen, dagegen zur Abrundung und Vervollständigung des Ganzen eine Reihe von Entwicklungen und Betrachtungen hinzugefügt, die zum Theil anderweitigen Arbeiten Steiner's entnommen, zum Theil durch dieselben angeregt und wie ich hoffe im Sinne des Urhebers ausgeführt sind.

Im September 1875.

C. F. G.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Erstes Kapitel. **Der Kreis.**

Zweites Kapitel. **Der geometrische Ort.**

Die Kegelschnitte in spezieller Behandlungsweise.

Drittes Kapitel. **Die Ellipse.**

Viertes Kapitel. **Die Hyperbel.**

Fünftes Kapitel. **Die Parabel.**

Gemeinsame Behandlung der Kegelschnitte.

Sechstes Kapitel. **Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte.**

Siebentes Kapitel. **Der Kegelschnitt als Projection des Kreises.**

Einleitung.

Erstes Kapitel.

Der Kreis.

§. 1. Die Potenz.

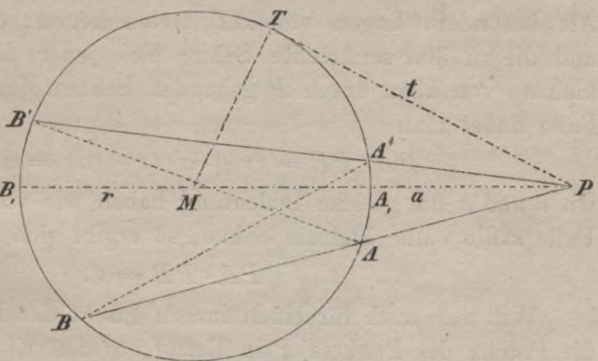
Zieht man von einem Punkt P ausserhalb des Kreises M zwei beliebige Secanten PAB und *$PA'B'$ durch denselben, so entstehen auf jeder der beiden von P an gerechnet zwei Abschnitte derart, dass*

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'$$

wird.

Es ist nämlich $\triangle AB'P \backsim A'BP$ da die Winkel bei B und B' als Peripheriewinkel über demselben Bogen, die Winkel bei A und A' als Nebenwinkel von solchen einander gleich sind. Es folgt hieraus die Proportion

Fig. 1.



$$PB' : BP = AP : PA'$$

von welcher die aufgestellte Gleichung eine unmittelbare Consequenz ist.

Das Product $PA \cdot PB$, welches für jede durch P gelegte Secante den nämlichen Werth behält, wird die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis M genannt. Es gibt zwei besondere Lagen der Secante, die zur Berechnung der Potenz besonders geeignet sind. Die eine gibt in dem durch M gezogenen Durchmesser

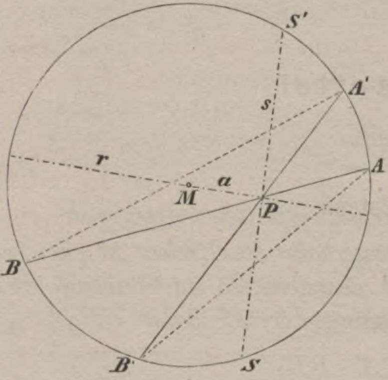
$$PA_1 \cdot PB_1 = (a+r)(a-r) = a^2 - r^2\,,$$

wenn r den Radius des Kreises M und a die Entfernung des Punktes P von dem Mittelpunkte M bedeutet; die andere geht von der Tangente aus und ergibt

$$PT^2 = t^2 = a^2 - r^2\,,$$

wo t die Länge der von P aus an den Kreis gezogenen Tangente bezeichnet. —

Fig. 2.



Analoge Betrachtungen gelten, wenn man von einem Punkte P innerhalb des Kreises ausgeht. Werden durch P die beiden Sehnen AB und $A'B'$ gezogen, so ist wieder

$$\triangle AB'P \backsim A'BP\,,$$

da die Winkel bei A und A' sowie diejenigen bei B und B' als Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen übereinstimmen. Aus der Proportion

$$PB' : BP = AP : PA'$$

ergibt sich also ebenfalls

$$PA \cdot PB = PA' \cdot PB'\,.$$

Als besondere Lagen von AB treten hervor: der Durchmesser PM und die zu ihm senkrechte Sehne SS', jener die grösste, diese die kleinste von allen durch P gehenden Sehnen des Kreises. Im ersten Falle findet man

$$PA \cdot PB = (r+a)(r-a) = r^2 - a^2\,,$$

wo r und a die gleiche Bedeutung haben wie vorhin. Ist im zweiten Falle s die halbe kleinste Sehne, so ergibt sich

$$PA \cdot PB = s^2.$$

Will man auch für einen innern Punkt das Product $PA \cdot PB$ als die Potenz des Punktes P in Bezug auf den Kreis M bezeichnen, so ist es von Vortheil, neben dem absoluten Werthe von Strecken auch das Vorzeichen derselben zu berücksichtigen. In diesem Sinne wird man bei einer mit AB bezeichneten Strecke ihre Richtung als von A nach B hingehend annehmen, so dass BA die gleiche Strecke, aber in entgegengesetzter Richtung gemessen bedeutet. Wenn also AB mit dem positiven Vorzeichen genommen wird, so muss BA das negative Vorzeichen erhalten, damit die Gleichung $AB + BA = 0$ erfüllt sei, welche geometrisch gedeutet ausdrückt, dass das successive

Durchlaufen der Strecken AB und BA zum Ausgangspunkte der Bewegung zurückführt. Wenn überhaupt auf einer Geraden verschiedene Strecken gegeben sind, so wird man sofort, nachdem eine der beiden in der Geraden enthaltenen Richtungen als die positive bezeichnet ist, von jeder Strecke das Vorzeichen angeben können.

Wendet man die Unterscheidung positiver und negativer Strecken auf die Potenz an, so ergibt sich: *für einen Punkt ausserhalb des Kreises ist die Potenz positiv, für einen Punkt innerhalb desselben negativ*, denn im ersten Falle sind die Strecken PA und PB gleichgerichtet, im zweiten Falle entgegengesetzt. Man muss also für einen innern Punkt die früher gefundenen Werthe der Potenz modificiren, so dass $PA \cdot PB = a^2 - r^2$, [eine allgemein gültige Formel], oder $PA \cdot PB = - s^2$ wird.

Aehnlich wie bei Strecken kann man auch bei Winkeln das Vorzeichen unterscheiden. Es geschieht diess am einfachsten in folgender Weise: Man bezeichnet in einem Kreise diejenige Richtung als die positive, welche der Bewegungsrichtung eines von vorn gesehenen Uhrzeigers entgegengesetzt ist und hat damit sofort ein Merkmal zur Bestimmung des Vorzeichens eines Bogens, der auf einem beliebigen Kreise gelegen ist. Man gibt einem Centriwinkel das nämliche Vorzeichen wie dem Bogen auf welchem er steht und setzt zugleich fest, dass Centriwinkel und Peripheriewinkel über gleichen Bogen auch gleiches Vorzeichen haben sollen. Da für alle Kreise in der Ebene die positive Richtung die nämliche ist und jeder Winkel zum Centriwinkel oder Peripheriewinkel gemacht werden kann, so ist für alle Winkel in der Ebene eine übereinstimmende Regel zur Festsetzung des Vorzeichens gegeben.

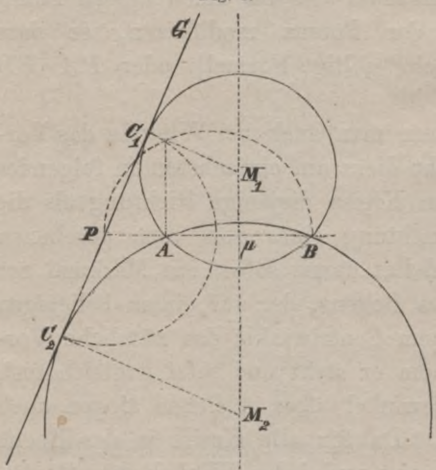
Diess constituirt einen wesentlichen Unterschied zwischen Winkeln und Strecken, insofern für Winkel, welche verschiedene Scheitel haben, eine einheitliche Vorzeichenbestimmung stattfindet, während für Strecken auf verschiedenen Geraden diess nicht der Fall ist. Der Grund liegt darin, dass eine Gerade als Kreis von unendlich grossem Durchmesser aufzufassen ist, dessen Mittelpunkt auf einer senkrechten Geraden nach der einen oder andern Richtung hin im Unendlichen angenommen werden kann. — Immerhin wird man in Dreiecken, deren Winkel in einem bestimmten Sinne gemessen werden, die gegenüberliegenden Seiten in gleicher Reihenfolge zu durchlaufen und ihnen die gleichen Vorzeichen beizugeben haben. In dieser Weise sind aus den Figuren 1. und 2. durch ähnliche Dreiecke die nöthigen Proportionen mit den entsprechenden Bezeichnungen abgeleitet worden. —

Durch seine Potenz Π nach dem Kreise M ist der Punkt

P nicht vollständig bestimmt, er kann im Allgemeinen beliebig auf einem mit M conzentrischen Kreise angenommen werden, dessen Radius $a = \sqrt{r^2 + \Pi}$ ist. Für $-\infty < \Pi < -r^2$ ist die Bestimmung von a unmöglich; für $\Pi = -r^2$ findet man $a = 0$, d. h. P fällt mit dem Mittelpunkte M zusammen, für $\Pi = 0$ ergibt sich als Ort des Punktes P der Kreis M. —

Die bisherigen Entwicklungen dienen dazu, *einen Kreis zu finden, der durch zwei gegebene Punkte A und B geht und eine gegebene Gerade G berührt.*

Fig. 3.



Wenn man den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden AB mit G als P in die Figur einführt, so ist die Potenz von P nach dem gesuchten Kreise gleich $PA \cdot PB$. Diese Grösse ist zugleich das Quadrat der Tangente, die von P an den Kreis geht. Wenn man also von P aus auf G die mittlere Proportionale aus PA und PB nach beiden Richtungen hin abträgt, wie es die Figur anzeigt, so entstehen zwei Punkte C_1 und C_2 von denen jeder als Berührungspunkt eines durch A und B gehenden Kreises mit G sich darstellt. Da wo das in der Mitte μ von AB auf AB gefällte Perpendikel mit den in C_1 und C_2 auf G errichteten Senkrechten zusammentrifft hat man also die Mittelpunkte M_1 und M_2 der gesuchten Kreise, womit die gestellte Aufgabe als gelöst betrachtet werden kann.

Es ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass A und B auf der nämlichen Seite von G liegen; denn nur in diesem Falle ist $PA \cdot PB$ positiv, so dass eine Quadratwurzel aus der Potenz — mit andern Worten eine mittlere geometrische Proportionale aus PA und PB wirklich vorhanden ist. Liegen A und B auf entgegengesetzten Seiten von G, so ist $PA \cdot PB$ negativ und die Construction des verlangten Kreises wird unmöglich. Im Grenzfall, wo einer der Punkte A oder B auf G selbst liegt, existirt eine einzige Lösung, weil dieser Punkt dann zugleich Berührungspunkt ist, so dass die Construction sich wesentlich vereinfacht. Ein anderer specieller Fall, der im Allgemeinen zwei Lösungen zulässt, die auch ohne Zuhülfenahme der

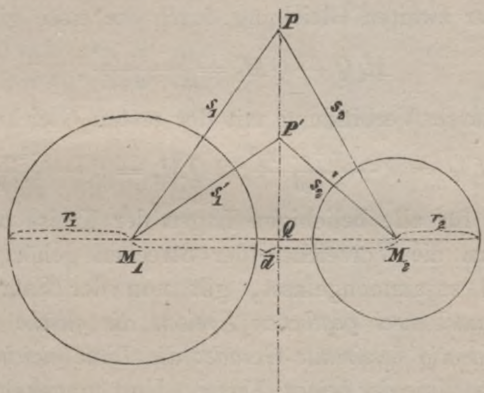
Lehre von der Potenz gefunden werden können, tritt ein, wenn A und B zusammenfallen, aber die Richtung ihrer Verbindungsgeraden gegeben ist. Man muss dann einen Kreis construiren, von dem zwei Tangenten und der Berührungspunkt auf einer derselben bekannt sind.

§. 2. Potenzlinie und Potenzpunkt.

Ein Kreis bestimmt für alle Punkte in der Ebene die in Bezug auf ihn genommene Potenz. Nimmt man einen zweiten Kreis hinzu, so kann man fragen: *ob es Punkte gebe, welche für die beiden Kreise dieselbe Potenz erzeugen.* Zur Beantwortung setzen wir zunächst voraus [was übrigens von keinem Einfluss auf die Beweisführung ist], dass die beiden Kreise ausser einander liegen.

Sei P irgend einer der Punkte gleicher Potenz, so ist für ihn, wenn r_1 und r_2 die Radien der beiden Kreise bedeuten, d den Ab-

Fig. 4.



stand ihrer Mittelpunkte M_1 und M_2 bezeichnet und ferner die Entfernungen des Punktes P von diesen Mittelpunkten s_1 und s_2 genannt werden, die Potenz nach $M_1 : p_1^2 = s_1^2 - r_1^2$, wie der § 1 unmittelbar ergibt und die Potenz nach $M_2 : p_2^2 = s_2^2 - r_2^2$, also da $p_1^2 = p_2^2$ sein soll:

$$s_1^2 - r_1^2 = s_2^2 - r_2^2$$

oder

$$s_1^2 - s_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Umgekehrt: gilt für die Abstände s_1 und s_2 eines Punktes P von M_1 und M_2 die zuletzt gefundene Gleichung, so hat derselbe in Bezug auf die beiden gegebenen Kreise dieselbe Potenz.

Sei Q der Fusspunkt des von P auf $M_1 M_2$ gefällten Perpendikels so ist

$$s_1^2 = PQ^2 + M_1Q^2$$

$$s_2^2 = PQ^2 + M_2Q^2$$

also

$$s_1^2 - s_2^2 = M_1Q^2 - M_2Q^2.$$

Für irgend einen Punkt P' des Perpendikels ist aber, wenn dessen Abstände von M_1 und M_2 mit s_1' und s_2' bezeichnet werden:

$$s_1'^2 = P'Q^2 + M_1Q^2$$

$$s_2'^2 = P'Q^2 + M_2Q^2$$

und

$$s_1'^2 - s_2'^2 = M_1Q^2 - M_2Q^2 = r_1^2 - r_2^2,$$

d. h.: *das von P auf M_1M_2 gefällte Perpendikel ist der Ort der Punkte gleicher Potenzeu.*

Es bleibt nur noch übrig den Punkt Q zu bestimmen, wozu die Gleichungen dienen:

$$M_1Q + QM_2 = d; \qquad M_1Q^2 - QM_2^2 = r_1^2 - r_2^2.$$

Die Division der zweiten Gleichung durch die erste gibt

$$M_1Q - QM_2 = \frac{r_1^2 - r_2^2}{d},$$

so dass man durch Verbindung mit der ersten Gleichung erhält:

$$2\,M_1Q = d + \frac{r_1^2 - r_2^2}{d};\ 2\,QM_2 = d - \frac{r_1^2 - r_2^2}{d}.$$

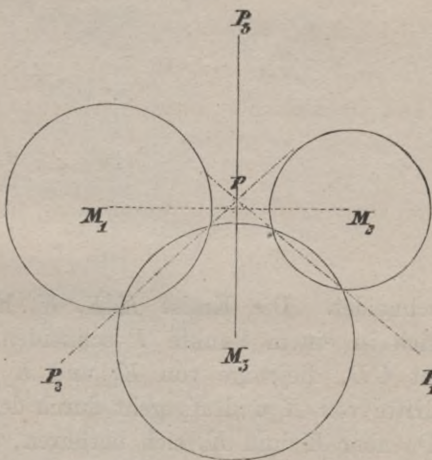
Hiermit ist Q für alle beliebigen Lagen der Kreise unzweideutig bestimmt, insofern die Vorzeichen der Strecken gehörig berücksichtigt werden. Alles zusammengefasst, gilt nun der Satz: *Der Ort aller Punkte, welche nach zwei gegebenen Kreisen die gleiche Potenz erzeugen, ist eine unzweideutig bestimmte Gerade: die Linie gleicher Potenzen oder kürzer: die Potenzlinie der beiden Kreise.* Und umgekehrt: *Jeder Punkt dieser Potenzlinie gibt nach den beiden Kreisen die nämliche Potenz.*

Wir gehen jetzt noch darauf ein, die Beziehung anzugeben, in welcher die Potenzlinie zweier Kreise oder *die Linie der gleichen Tangenten* [was offenbar gleichbedeutend ist], zu der gegenseitigen Lage der beiden Kreise steht. Schneiden sich zwei Kreise, so fällt die Potenzlinie mit ihrer gemeinschaftlichen Sehne zusammen, denn für jeden Schnittpunkt der beiden Kreise ist die Potenz nach dem einen sowohl als nach dem andern derselben gleich Null. Berühren sich die Kreise, so ist die gemeinschaftliche Tangente zugleich Potenzlinie. Liegen die Kreise aussereinander so geht die Potenzlinie zwischen ihnen durch, ohne einen von beiden zu schneiden, und wenn endlich einer von den Kreisen den andern einschliesst, so liegt die Potenzlinie ausserhalb derselben und zwar auf der Centralen gemessen mit dem Mittelpunkte des eingeschlossenen Kreises auf derselben Seite vom Mittelpunkte des einschliessenden Kreises. Da für conzentrische Kreise $d = 0$ ist, also $M_1 Q$ und $Q M_2$ unendlich werden, so liegt in diesem Falle die Potenzlinie ganz in unendlicher Entfernung.

Aus den allgemeinen Formeln leitet man auch die Potenzlinien zweier Kreise ab, von denen einer sich auf seinen Mittelpunkt reduzirt hat, ebenso ergeben sie die Lösung, wenn einer der Kreise in eine Gerade ausartet; diese selbst ist dann die Potenzlinie, wie man erkennt, indem man den einen Radius unendlich gross setzt und den zugehörigen Mittelpunkt entsprechend ins Unendliche rückt. —

Drei Kreise $M_1 M_2 M_3$ bestimmen zu je zweien genommen drei Potenzlinien, welche wir so bezeichnen wollen, dass $M_2 M_3$ und P_1, $M_3 M_1$ und P_2, $M_1 M_2$ und P_3 zusammengehören; die drei Geraden $P_1 P_2 P_3$ schneiden sich in einem Punkte, dem Potenzpunkte der drei Kreise.

Fig. 5.



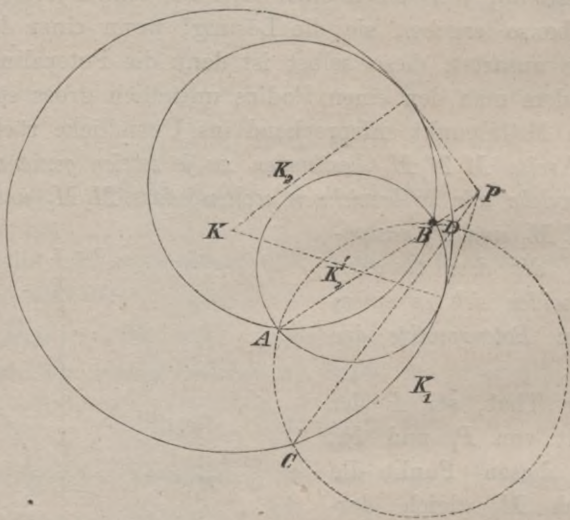
In der That, sei P der Durchschnitt von P_1 und P_2, so ist für diesen Punkt die Potenz nach M_2 gleich derjenigen nach M_3 und ebenso die Potenz nach M_3 gleich derjenigen nach M_1, also auch die Potenz nach M_1 gleich derjenigen nach M_2, d. h. P liegt auf der Potenzlinie P_3 der Kreise M_1 und M_2.

Zieht man von P aus [insofern diess möglich ist] je zwei Tangenten an jeden der Kreise, so sind dieselben alle gleich lang und ihre Berührungspunkte liegen auf einem neuen Kreise, der die drei gegebenen rechtwinklig schneidet, wesshalb er ihr *Orthogonalkreis* heisst.

Die bewiesene Eigenschaft, dass die drei Potenzlinien dreier Kreise sich in einem Punkte schneiden, dient dazu *die Potenzlinie zweier sich nicht schneidender Kreise M_1 und M_2 zu finden.* Man construire einen Kreis M_3, welcher sowohl M_1 als M_2 schneidet, dann sind die gemeinschaftlichen Sehnen von M_3 und M_1 und von M_2 und M_3 zwei von den drei Potenzlinien der Kreise M_1, M_2, M_3: die dritte gesuchte geht also durch ihren Schnittpunkt; sie steht zudem senkrecht auf der Centrallinie $M_1 M_2$, wodurch sie vollständig bestimmt ist.

Eine zweite Anwendung des Satzes gibt *die Construction des Kreises, welcher durch zwei Punkte A und B geht und einen gegebenen Kreis K berührt.* Sei K_2 der gesuchte Kreis, so lege man durch A und B einen beliebigen Kreis K_1, welcher K in zwei Punkten C und D

Fig. 6.



schneidet. Die Kreise K K_1 K_2 haben aber drei Potenzlinien, die sich in einem Punkte P schneiden. Die Potenzlinie von K und K_1 ist CD, diejenige von K_1 und K_2 fällt mit AB zusammen und die dritte von K und K_2 geht durch den Schnittpunkt P von AB und CD. Da aber K und K_2 sich berühren, so ist ihre Potenzlinie die gemeinschaftliche Tangente, also jedenfalls Tangente an K. Man lege deshalb von P aus die beiden Tangenten an K, so bestimmt jeder der beiden Berührungspunkte mit A und B einen Kreis, welcher die gestellte Aufgabe löst [die zweite Lösung ist in unserer Figur mit K_2' bezeichnet].

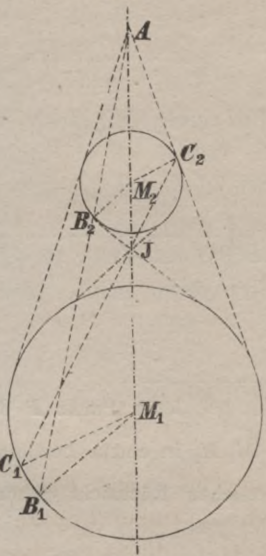
Wenn A und B beide gleichzeitig ausserhalb oder innerhalb K liegen, so liegt P ausserhalb K und man kann die beiden nöthigen Tangenten sofort ziehen. Liegt einer der Punkte auf K, so fällt P mit ihm zusammen und es gibt von P aus nur noch eine Tangente an K; wenn einer der Punkte A und B ausserhalb, der andere innerhalb K liegt, so liegt P im Innern des Kreises K und es sind dann keine der zur Construction nöthigen Tangenten mehr vorhanden. Die Aufgabe, einen Kreis zu finden, welcher durch zwei Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt, lässt also zwei, eine oder gar keine

Lösung zu, je nachdem einer von den drei bezeichneten Fällen eintritt. Spezielle Fälle der Aufgabe können leicht im Sinne des Schlusses von § 1 gebildet und gelöst werden.

§. 3. Aehnlichkeitspunkte und Aehnlichkeitsaxen.

Zieht man in zwei Kreisen M_1 und M_2, die vorderhand als einander ausschliessend angenommen werden, zwei parallele und gleichgerichtete Radien $M_1B_1 = r_1$, und $M_2B_2 = r_2$, so geht die Gerade B_1B_2 durch einen Punkt A auf der Verlängerung der Geraden M_1M_2, welcher für jede beliebige Lage der parallelen Radien derselbe bleibt.

Fig. 7.



Es ist nämlich $\triangle\, M_1B_1A \sim M_2B_2A$, also

$$M_1A : M_2A = r_1 : r_2,$$

aus welcher Gleichung, da $M_1A - M_2A = M_1M_2$ ist, M_1A und M_2A eindeutig berechnet werden können, und zwar in der Art, dass nur die Grössen r_1, r_2, $M_1 \; M_2$ [aber nicht die Richtung der Radien] auftreten. Der Punkt A heisst *der äussere Aehnlichkeitspunkt* der Kreise M_1 und M_2; er ist in dem angenommenen Falle zugleich der Durchschnittspunkt der beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise, weil die nach den auf gleichen Seiten der Centralen gelegenen Berührungspunkten gezogenen Radien parallel und gleichgerichtet sind, wie es die Figur verlangt.

Werden ferner in M_1 und M_2 zwei parallele, aber ungleichgerichtete Radien M_1C_1 und M_2C_2 gezogen, so schneidet C_1C_2 die Gerade M_1M_2 in einem Punkte J, welcher für jede beliebige Lage der parallelen und ungleichgerichteten Radien derselbe bleibt, da aus den Gleichungen

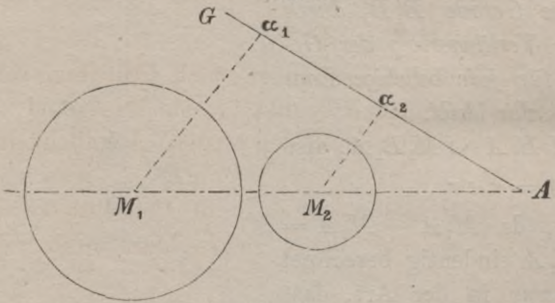
$$M_1J : M_2J = r_1 : r_2 \quad \text{und} \quad M_1J + JM_2 = M_1M_2$$

die Stücke M_1J und M_2J unzweideutig berechnet werden können. Der Punkt J heisst *der innerere Aehnlichkeitspunkt* der Kreise M_1 und M_2; er ist der Durchschnitt ihrer beiden innern gemeinschaftlichen Tangenten. Es ist klar, dass die Existenz der Punkte A und J unabhängig ist von der Möglichkeit, an die Kreise M_1 und M_2 gemeinschaftliche Tangenten zu ziehen und dass sie nach der angegebenen Methode immer construirt werden können, sobald die beiden Kreise nicht conzentrisch sind. In diesem speziellen Falle muss man annehmen, dass beide Aehnlichkeitspunkte im gemeinschaftlichen Mittelpunkte vereinigt seien*).

Zieht man durch den äussern Aehnlichkeitspunkt A einen beliebigen geradlinigen Strahl G und von M_1 und M_2 aus zwei beliebige parallele, gleichgerichtete Gerade, welche G in α_1 und α_2 schneiden mögen, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $M_1\alpha_1 A$ und $M_2\alpha_2 A$:

$$M_1\alpha_1 : M_2\alpha_2 = M_1 A : M_2 A \text{ oder da } r_1 : r_2 = M_1 A : M_2 A$$
$$M_1\alpha_1 : M_2\alpha_2 = r_1 : r_2 .$$

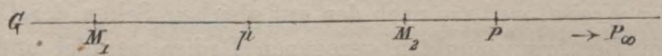
Fig. 9.



Wenn umgekehrt diese Relation für die Abschnitte $M_1\alpha_1$ und $M_2\alpha_2$ gilt, welche zwei von M_1 und M_2 ausgehende parallele und gleichgerichtete Gerade mit einem Strahle G bilden, der die Centrale $M_1 M_2$ auf ihrer Ver-

*) Jeder Punkt P der Geraden G theilt die auf derselben gelegene Strecke $M_1 M_2$ in einem bestimmten Verhältniss $\frac{M_1 P}{M_2 P} = \lambda$, das, wenn auf die Vorzeichen Rücksicht genommen wird, für Punkte auf $M_1 M_2$ selbst negativ, für

Fig. 8.



Punkte ausserhalb positiv ist. Als spezielle Fälle sind bemerkenswerth: für $P = M_1$, $\lambda = 0$; für $P = M_2$, $\lambda = \pm\infty$ je nachdem man P [siehe die Fig. 8] rechts oder links von M_2 her in diesen Punkt hineinfallen lässt. Fällt P mit der Mitte μ von $M_1 M_2$ zusammen, so ist $\lambda = -1$; wenn P im Unendlichen liegt, hat man $\lambda = +1$.

Ist umgekehrt $M_1 M_2$ gegeben, so gehört zu jedem λ in Folge der beiden Gleichungen $\frac{M_1 P}{M_2 P} = \lambda$ und $M_1 P + P M_2 = M_1 M_2$ nur ein einziger unzweideutig bestimmter Punkt P. [Hält man diess auch dann noch fest, wenn $\lambda = +1$ ist, so folgt dass man in einer Geraden nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt annehmen darf, was sich später noch aus andern Gründen ergeben wird]. In diesem Sinne kann man sagen: Sind zwei Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und den Radien r_1, r_2 gegeben, so werden der äussere Aehnlichkeitspunkt A und der innere Aehnlichkeitspunkt J auf der Centralen bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{M_1 A}{M_2 A} = +\frac{r_1}{r_2}; \quad \frac{M_1 J}{M_2 J} = -\frac{r_1}{r_2}.$$

längerung schneidet, so geht G durch den äussern Aehnlichkeitspunkt A der beiden Kreise. Sei in der That A' der Durchschnitt von G mit $M_1 M_2$, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $M_1 \alpha_1 A'$ und $M_2 \alpha_2 A'$:

$$M_1 \alpha_1 : M_2 \alpha_2 = M_1 A' : M_2 A' ;$$

aber nach Voraussetzung hat man

$$M_1 \alpha_1 : M_2 \alpha_2 = r_1 : r_2 ,$$

also auch

$$M_1 A' : M_2 A' = r_1 : r_2 ;$$

ferner hat man noch

$$M_1 A' - M_2 A' = M_1 M_2 .$$

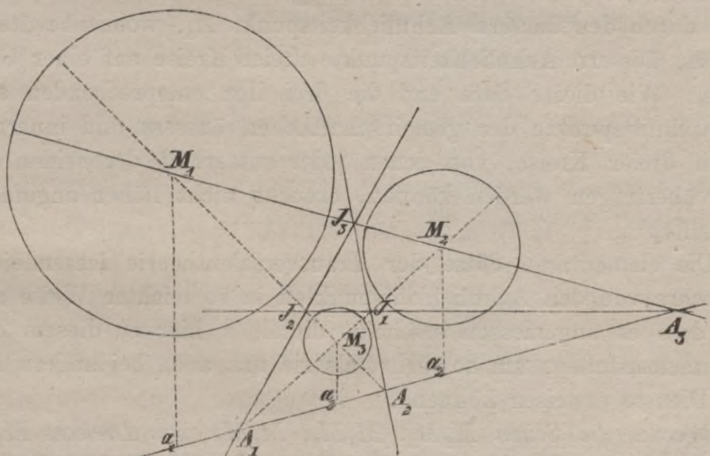
Die beiden letzten Gleichungen bestimmen nach Früherem vollkommen unzweideutig den Aehnlichkeitspunkt A, d. h. A und A' fallen zusammen, die Gerade G geht durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2.

Würde G die Gerade $M_1 M_2$ auf der Strecke $M_1 M_2$ selbst treffen, so könnte man in durchaus gleicher Weise zeigen, dass unter Voraussetzung der Relation

$$M_1 \alpha_1 : M_2 \alpha_2 = r_1 : r_2$$

der Strahl G durch den innern Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_2 geht.

Fig. 10.



Drei Kreise M_1, M_2, M_3 mit den Radien r_1, r_2, r_3 geben zu je zweien aufgefasst, sechs Aehnlichkeitspunkten den Ursprung. M_2 und M_3 bestimmen den äussern Aehnlichkeitspunkt A_1 und den innern J_1, ebenso ergeben M_3 und M_1 die Aehnlichkeitspunkte A_2 und J_2 und schliesslich führen noch M_1 und M_2 zu den Aehnlichkeitspunkten A_3 und J_3. Es gilt nun folgender Satz: *Die drei äussern Aehnlichkeitspunkte liegen auf einer Geraden und ebenso liegt jeder äussere Aehnlichkeitspunkt mit den beiden ihm nicht zugehörigen innern Aehnlichkeitspunkten auf einer Geraden, welche Aehnlichkeitsaxe genannt wird.* Es entstehen so die vier Systeme A_1, A_2, A_3; A_1, J_2, J_3; J_1, A_2, J_3; J_1, J_2, A_3 die auf den vier Aehnlichkeitsaxen vertheilt sind.

Der Beweis wird für alle Fälle analog geführt; wir geben ihn hier nur für das System der drei äussern Aehnlichkeitspunkte $A_1 A_2 A_3$

Man ziehe die Gerade $A_1 A_2$ und durch die Mittelpunkte $M_1 M_2 M_3$ drei unter sich parallele Strahlen, welche $A_1 A_2$ in α_1, α_2, und α_3 treffen mögen. Da $A_1 A_2$ durch den äussern Aehnlichkeitspunkt A_1 der Kreise $M_2 M_3$ geht, so ist:

$$M_2 \alpha_2 : M_3 \alpha_3 = r_2 : r_3 ,$$

ebenso hat man

$$M_1 \alpha_1 : M_3 \alpha_3 = r_1 : r_3 ,$$

also auch

$$M_1 \alpha_1 : M_2 \alpha_2 = r_1 : r_2 ,$$

d. h.: $A_1 A_2$ geht nach dem vorhin bewiesenen Satze entweder durch den äussern oder durch den innern Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2. Da aber die Mittelpunkte der Kreise M_1, M_2, M_3 auf einer und derselben Seite der Geraden $A_1 A_2$ liegen, so sind $M_1 \alpha_1$ und $M_2 \alpha_2$ nicht nur parallel, sondern auch gleich gerichtet. Demnach geht $A_1 A_2$ durch den äussern Aehnlichkeitspunkt A_3, womit bewiesen ist, dass die äussern Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise auf einer Geraden liegen. Wie dieser Satz und die drei ihm entsprechenden auf die Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen äussern und innern Tangenten dreier Kreise, von denen jeder ausserhalb der beiden andern liegt, übertragen werden können, braucht nicht näher angeführt zu werden.

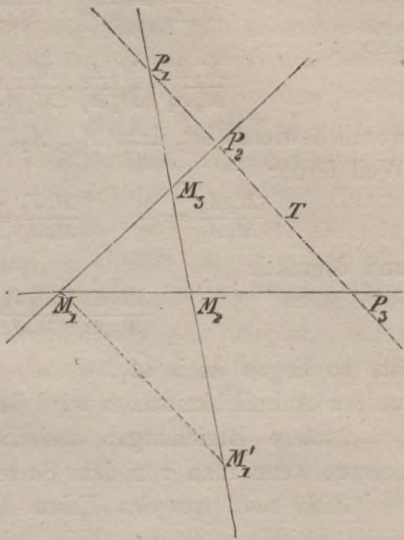
Die elementaren Sätze der Transversalentheorie lassen sich auf die Lehre von den Aehnlichkeitspunkten in so leichter Weise anwenden, dass es angemessen erscheint dieselben hier zu diesem Zwecke zusammenzustellen, um so mehr, als sie uns auch bei andern Fragen gute Dienste erweisen können.

Werden die Seiten $M_2 M_3$, $M_3 M_1$, $M_1 M_2$ eines Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ von der geradlinigen Transversalen T resp. in den Punkten P_1, P_2, P_3 geschnitten, so ist:

$$\frac{M_2 P_1}{M_3 P_1} \cdot \frac{M_3 P_2}{M_1 P_2} \cdot \frac{M_1 P_3}{M_2 P_3} = +1 .$$

Dass das Vorzeichen in dieser Relation richtig bestimmt ist, geht daraus hervor, dass entweder alle drei Verhältnisse links positiv sind, (wenn die Transversale ausserhalb des begrenzten Dreiecks $M_1M_2M_3$ liegt) oder eines positiv und die beiden andern negativ (wenn die Transversale durch die Dreiecksfläche hindurchgeht). Was den absoluten Werth des Productes anbetrifft, so findet man denselben, indem man durch M_1 eine Parallele zu T legt, welche M_2M_3 in M_1' begegnet. Es entstehen so zwei Paar ähnliche Dreiecke $M_1M_1'M_2$ und $P_3M_2P_1$ einerseits, $M_1M_3M_1'$ und $P_2M_3P_1$ andererseits. Die ersten geben

Fig. 11.



$$M_2P_3 : M_2P_1 = M_1P_3 : M_1'P_1$$

oder $M_1'P_1 = \dfrac{M_2P_1 \cdot M_1P_3}{M_2P_3}$

die zweiten:

$$M_3P_1 : M_3P_2 = M_1'P_1 : M_1P_2 \text{ oder } M_1'P_1 = \frac{M_3P_1 \cdot M_1P_2}{M_3P_2}$$

Durch Gleichsetzung der beiden Ausdrücke für $M_1'P_1$ findet man in der That das gesuchte Product als der positiven Einheit gleich.

Wenn umgekehrt auf den Seiten M_2M_3, M_3M_1, M_1M_2 des Dreiecks $M_1M_2M_3$ drei Punkte $P_1P_2P_3$ so gewählt werden, dass

$$\frac{M_2P_1}{M_3P_1} \cdot \frac{M_3P_2}{M_1P_2} \cdot \frac{M_1P_3}{M_2P_3} = +1$$

ist, so liegen dieselben in einer Geraden.

Wäre diess nicht der Fall, sondern würden die Seiten M_2M_3 und die Verbindungsgerade P_2P_3 sich in P_1' statt in P_1 begegnen, so hätte man

$$\frac{M_2P_1'}{M_3P_1'} \cdot \frac{M_3P_2}{M_1P_2} \cdot \frac{M_1P_3}{M_2P_3} = +1\,,$$

also in Verbindung mit der vorausgesetzten Gleichung

$$\frac{M_2P_1}{M_3P_1} = \frac{M_2P_1'}{M_3P_1'}\,.$$

Es gibt aber in einer Geraden nur einen einzigen Punkt, welcher eine in derselben enthaltene Strecke in einem gegebenen Verhältniss theilt, also fallen P_1 und P_1' zusammen.

Seien jetzt M_1, M_2, M_3 die Mittelpunkte dreier Kreise mit den Radien r_1, r_2, r_3, ferner A_1, A_2, A_3 ihre äussern, J_1, J_2, J_3 die innern Aehnlichkeitspunkte, so ist

$$\frac{M_2 A_1}{M_3 A_1} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3 A_2}{M_1 A_2} = \frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{M_1 A_3}{M_2 A_3} = \frac{r_1}{r_2}$$

also

$$\frac{M_2 A_1}{M_3 A_1} \cdot \frac{M_3 A_2}{M_1 A_2} \cdot \frac{M_1 A_3}{M_2 A_3} = \frac{r_2 \cdot r_3 \cdot r_1}{r_3 \cdot r_1 \cdot r_2} = +1,$$

womit bewiesen ist, dass A_1, A_2, A_3 in der nämlichen Geraden liegen. Weil ferner

$$\frac{M_2 A_1}{M_3 A_1} = \frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3 J_2}{M_1 J_2} = -\frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{M_1 J_3}{M_2 J_3} = -\frac{r_1}{r_2}$$

und demnach

$$\frac{M_2 A_1}{M_3 A_1} \cdot \frac{M_3 J_2}{M_1 J_2} \cdot \frac{M_1 J_3}{M_2 J_3} = +1$$

ist, so liegen auch A_1, J_2, J_3 auf einer Geraden. Für die beiden andern Aehnlichkeitsaxen wird der Beweis analog geführt.

Andere Beziehungen zwischen den Aehnlichkeitspunkten gehen hervor, wenn man von dem Satze ausgeht:

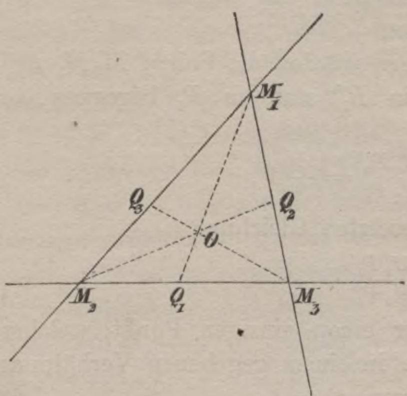
Zieht man von den Ecken $M_1 M_2 M_3$ eines Dreiecks Strahlen nach einem beliebigen Punkte O in seiner Ebene, welche die Gegenseiten in Q_1, Q_2, Q_3 schneiden, so ist

$$\frac{M_2 Q_1}{M_3 Q_1} \cdot \frac{M_3 Q_2}{M_1 Q_2} \cdot \frac{M_1 Q_3}{M_2 Q_3} = -1 .$$

Die Transversale $M_2 Q_2$ im $\triangle\, Q_1 M_3 M_1$ ergibt nach dem eben bewiesenen Satze:

$$\frac{M_3 Q_2}{M_1 Q_2} \cdot \frac{M_1 O}{Q_1 O} \cdot \frac{Q_1 M_2}{M_3 M_2} = +1 .$$

Fig. 12.



Ebenso findet man aus der Transversalen $M_3 Q_3$ im $\triangle\, Q_1 M_2 M_1$:

$$\frac{M_1 Q_3}{M_2 Q_3} \cdot \frac{M_2 M_3}{Q_1 M_3} \cdot \frac{Q_1 O}{M_1 O} = +1;$$

durch die Multiplication der beiden letzten Gleichungen erhält man die zu beweisende Relation.

Umgehehrt gibt der Satz: *Liegen auf den Seiten eines Dreiecks $M_1 M_2 M_3$ drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 derart, dass das Product der entstehenden Theilverhältnisse*

$$\frac{M_2 Q_1}{M_3 Q_1} \cdot \frac{M_3 Q_2}{M_1 Q_2} \cdot \frac{M_1 Q_3}{M_2 Q_3} = -1$$

ist, so gehen die Geraden $M_1 Q_1$, $M_2 Q_2$, $M_3 Q_3$ durch einen und denselben Punkt.

Ginge nämlich die Gerade, welche den Schnitt von $M_2 Q_2$ und $M_3 Q_3$ mit M_1 verbindet, nicht durch Q_1, sondern durch einen Punkt

Q_1' der Geraden $M_2 M_3$, so würde durch Verbindung der Gleichung, die wir als zwischen den Theilverhältnissen bestehend voraussetzen mit der andern

$$\frac{M_2 Q_1'}{M_3 Q_1'} \cdot \frac{M_3 Q_2}{M_1 Q_2} \cdot \frac{M_1 Q_3}{M_2 Q_3} = -1$$

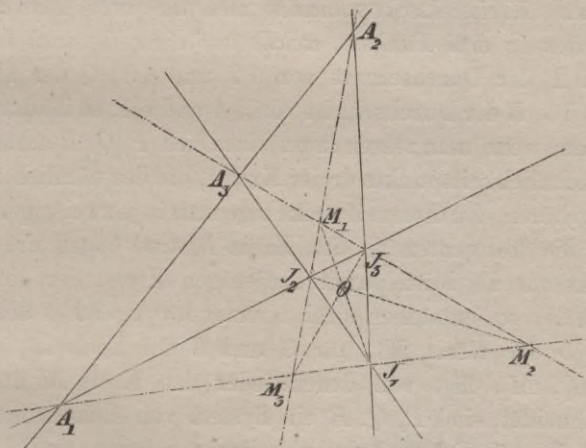
welche sich ergibt, weil $M_1 Q_1'$, $M_2 Q_2$, $M_3 Q_3$ durch den nämlichen Punkt gehen, folgen:

$$\frac{M_2 Q_1}{M_3 Q_1} = \frac{M_2 Q_1'}{M_3 Q_1'}.$$

Nach dem schon früher angewandten Schlusse, dass es auf $M_2 M_3$ nur einen einzigen Punkt gibt, welcher diese Strecke in einem vorgeschriebenen Verhältnisse theilt, müssen aber Q_1 und Q_1' zusammenfallen.

Wendet man diesen Satz auf das System der Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise an, so ergibt sich zunächst: *Verbindet man die Mittelpunkte dreier Kreise jeweilen mit den von ihnen unabhängigen innern Aehnlickeitspunkten derselben, so gehen die entstehenden Strahlen durch den nämlichen Punkt O.*

Fig. 13.



Es ist unter Beibehaltung der frühern Bezeichnungsweise

$$\frac{M_2 J_1}{M_3 J_1} = -\frac{r_2}{r_3}, \quad \frac{M_3 J_2}{M_1 J_2} = -\frac{r_3}{r_1}, \quad \frac{M_1 J_3}{M_2 J_3} = -\frac{r_1}{r_2}$$

also

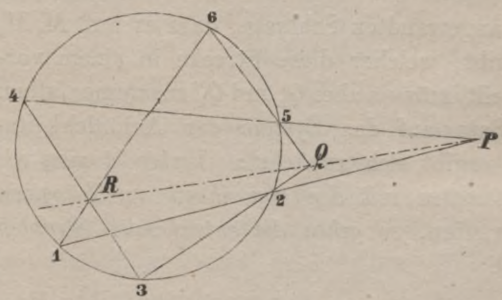
$$\frac{M_2 J_1}{M_3 J_1} \cdot \frac{M_3 J_2}{M_1 J_2} \cdot \frac{M_1 J_3}{M_2 J_3} = -1,$$

was den ausgesprochenen Satz beweist. Analog zeigt man, *dass sich $M_1 J_1$, $M_2 A_2$, $M_3 A_3$, ebenso $M_1 A_1$, $M_2 J_2$, $M_3 A_3$ und endlich $M_1 A_1$, $M_2 A_2$, $M_3 J_3$ jeweilen in dem nämlichen Punkte schneiden.*

§. 4. Der Pascal'sche Satz.

Werden sechs Punkte, die auf einem Kreise M liegen, in irgend einer Reihenfolge mit den Zahlen 1 2 3 4 5 6 bezeichnet und man verbindet succesive 1 mit 2, 2 mit 3, 3 mit 4, 4 mit 5, 5 mit 6 und 6 mit 1, so entsteht ein dem Kreise eingeschriebenes Sechseck. [In unsrer Figur haben wir absichtlich, um die Allgemeinheit der Betrachtung zu wahren, die Punkte so gewählt, dass sie nicht ein gewöhnliches convexes, sondern ein überschlagenes Kreissechseck bilden.]

Fig. 14.



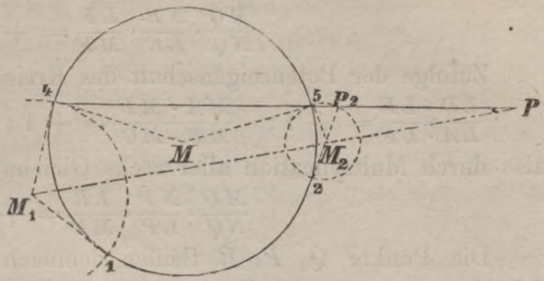
In diesem Sechseck nennen wir 1 und 4, 2 und 5, 3 und 6 gegenüberliegende Ecken, ebenso 1 2 und 4 5, 2 3 und 5 6, 3 4 und 6 1 gegenüberliegende Seiten. Unter dieser Voraussetzung gilt der von *Pascal* herrührende Satz:

In einem Kreissechseck schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Es sei P der Durchschnitt von 1 2 und 4 5, Q der Durchschnitt von 2 3 und 5 6, R der Durchschnitt von 3 4 und 6 1, so ist der Pascal'sche Satz bewiesen, wenn man zeigen kann, dass sich P, Q, R darstellen lassen als solche Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise, die der nämlichen Aehnlichkeitsaxe angehören. Zu diesem Zwecke lege man in je zwei gegenüberliegenden Ecken die Tangenten an den Kreis M und construire von deren Schnittpunkt aus als Mittelpunkt denjenigen Kreis, der die gewählten Ecken enthält, so entstehen drei Kreise: für 1 und 4 der Kreis M_1, für 2 und 5 der Kreis M_2, für 3 und 6 der Kreis M_3. In Bezug nun auf M_1, M_2, M_3, von denen jeder den Kreis M unter rechten Winkeln schneidet, sind P, Q, R ein System von Aehnlichkeitspunkten, welche auf der nämlichen Aehnlichkeitsaxe gelegen sind.

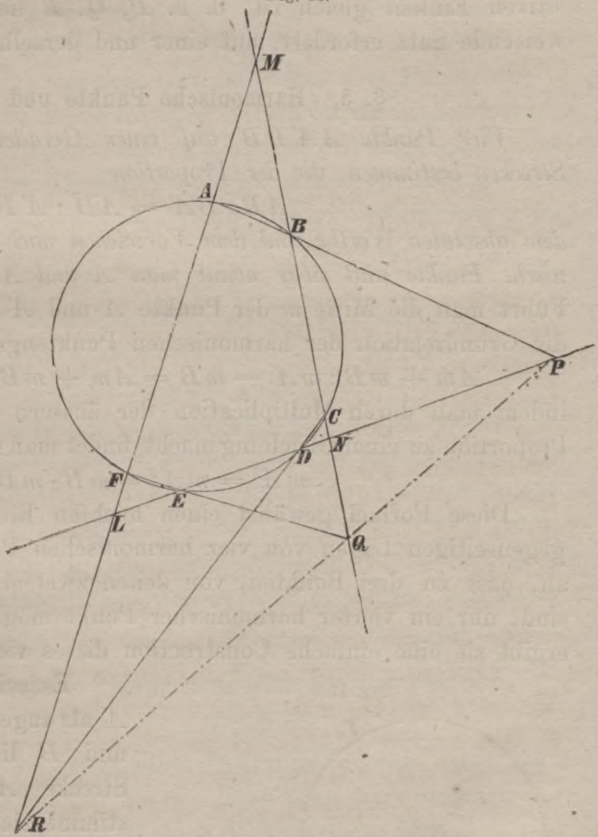
Legt man in 4 die Tangente an M_1 und in 5 die Tangente an M_2, so schneiden sich diese beiden Tangenten in dem Mittelpunkte M des Kreises M. Es ist also $M\,4\,5$ ein gleichschenkliges Dreieck und $\sphericalangle M\,4\,5 = M\,5\,4$, ebenso $\sphericalangle M_1\,4\,5 = M_2\,5\,4$, da um diese Winkel zu erzeugen zu jedem der Vorigen ein Rechter zu addiren ist. Es ist ferner $\triangle M_2\,5\,p_2$ ein gleichschenkliges, wenn p_2 den zweiten Durchschnittspunkt von 4 5 mit dem Kreise M_2 bezeichnet, also $\sphericalangle M_2\,5\,p_2 = M_2\,p_2\,5$, woraus folgt $\sphericalangle M_2\,p_2\,P = M_2\,5\,4 = M_1\,4\,5$ d. h. $M_1\,4$ und $M_2 p_2$ sind parallele Radien, und da sie zudem gleichgerichtet sind, so geht 4 5 durch den äussern Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_1 und M_2*).

Fig. 15.



In durchaus gleicher Weise wird gezeigt, dass 1 2 den äussern Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_2 ebenfalls enthält, also ist dieser mit P identisch. Es bedarf keiner weitern Ausführung mehr, dass Q im Falle der Figur 14 der innere Aehnlichkeitspunkt der Kreise M_2 und M_3, R der innere Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_3 ist. Unter gehöriger Verwendung der angegebenen Beweiselemente kann man den Pascal'schen Satz für jedes beliebige Kreissechseck beweisen.

Fig. 16.



Die Transversalentheorie gibt einen andern Beweis dieses wichtigen Satzes: Im Sechseck $ABCDEF$ bilden die Seiten BC, DE, FA ein Dreieck LMN, zu welchem successive die Transversalen AB, CD, EF gefügt werden mögen. Dies gibt unter Anwendung des ersten der im vorigen § bewiesenen Transversalensätze folgende drei Gleichungen:

*) Dass 4 5 durch den äussern Aehnlichkeitspunkt P von M_1 und M_2 geht, kann auch so bewiesen werden: Es gibt einen Kreis μ, welcher M_1 in 4 und M_2 in 5 berührt. Der Punkt 4 stellt sich demnach als innerer Aehnlichkeitspunkt von μ und M_1, der Punkt 5 als innerer Aehnlichkeitspunkt von μ und M_2

$$\frac{MB}{NB} \cdot \frac{NP}{LP} \cdot \frac{LA}{MA} = +1$$
$$\frac{MC}{NC} \cdot \frac{ND}{LD} \cdot \frac{LR}{MR} = +1$$
$$\frac{MQ}{NQ} \cdot \frac{NE}{LE} \cdot \frac{LF}{MF} = +1$$

Zufolge der Potenzeigenschaft des Kreises hat man ferner:

$$\frac{LD \cdot LE}{LA \cdot LF} = +1\,; \quad \frac{MA \cdot MF}{MB \cdot MC} = +1\,; \quad \frac{NB \cdot NC}{ND \cdot NE} = +1\,,$$

also durch Multiplication aller sechs Gleichungen:

$$\frac{MQ}{NQ} \cdot \frac{NP}{LP} \cdot \frac{LR}{MR} = +1\,.$$

Die Punkte Q, P, R theilen demnach die Seiten des Dreiecks LMN derart, dass das Product der entstehenden Verhältnisse der positiven Einheit gleich ist, d. h. P, Q, R liegen, wie es der zu beweisende Satz erfordert, auf einer und derselben geraden Linie.

§. 5. Harmonische Punkte und Strahlen.

Vier Punkte $AA'BB'$ auf einer Geraden, welche auf derselben Strecken bestimmen, die der Proportion

$$AB : BA' = AB' : A'B'$$

dem absoluten Werthe und dem Vorzeichen nach genügen, heissen harmonische Punkte und zwar nennt man A und A', B und B' zugeordnet. Führt man die Mitte m der Punkte A und A' ein, so verwandelt sich die Grundrelation der harmonischen Punktengruppe in folgende:

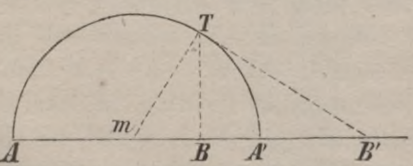
$$Am + mB : mA' - mB = Am + mB' : mB' - mA'\,;$$

indem man durch Multiplication der äussern und innern Glieder die Proportion zu einer Gleichung macht, findet man nach gehöriger Reduction

$$mA^2 = mA'^2 = mB \cdot mB'\,.$$

Diese Formel gewährt einen leichten Einblick in die möglichen gegenseitigen Lagen von vier harmonischen Punkten; sie zeigt ferner an, dass zu drei Punkten, von denen zwei als zugeordnete bestimmt sind, nur ein vierter harmonischer Punkt möglich ist, und schliesslich ergibt sie eine einfache Construction dieses vierten Punktes.

Fig. 17.



Es seien in der That A und A' als zugeordnete Punkte gegeben und B liege zunächst auf der Strecke AA' selbst, dann bestimmt sich B' wie folgt: Man schlage über AA' einen Halb-

dar; ihre Verbindungsgerade 4 5 muss also zufolge der Sätze über die Aehnlichkeitspunkte dreier Kreise [hier μ, M_1, M_2] durch den äussern Aehnlichkeitspunkt von M_1 und M_2 gehen.

kreis, welcher von dem Perpendikel in B auf AA' in T getroffen werde. Die Tangente in T an den Halbkreis schneidet den gesuchten Punkt B' auf AA' aus. Zum Beweise dient:

$$\triangle mTB' \sim TBM \text{ also } mB : mT = mT : mB'$$

und da $MT = MA = MA'$, so hat man $MA^2 = mB \cdot mB'$.

Läge B auf der Verlängerung von AA', so wäre die Construction ebenso leicht. Man würde nämlich von B aus die Tangente an den Halbkreis über AA' legen und dann wäre der Fusspunkt des von ihrem Berührungspunkte auf AA' gefällten Perpendikels der gesuchte vierte harmonische Punkt B'.

Von bemerkenswerthen speziellen Fällen sei zunächst hervorgehoben, dass wenn B in die Mitte m von AA' fällt, B' ins Unendliche zu liegen kommt, und umgekehrt, ist B' irgend ein unendlich entfernter Punkt der Geraden AA', so fällt B mit m zusammen. Um nun den Satz nicht umstossen zu müssen, dass drei Punkte bei bestimmter Zuordnung nur einen einzigen vierten harmonischen zulassen, bedient man sich des Ausdruckes: *Auf einer Geraden gibt es, vom Gesichtspunkte der harmonischen Eigenschaften aus aufgefasst, nur einen einzigen unendlich entfernten Punkt.* Sind also A und A' zugeordnet, so bestimmt der unendlich entfernte Punkt mit m, A, A' eine harmonische Gruppe.

Wenn B mit A' zusammenfällt, so findet diess auch für B' statt, d. h. *wenn von vier harmonischen Punkten zwei sich vereinigen, so fällt allemal noch ein dritter mit ihnen zusammen.*

Mit der vorhin gegebenen Definition einer Gruppe von vier harmonischen Punkten stimmt eine andere überein, welche von der Theilung einer Strecke durch Punkte auf derselben Geraden ausgeht. *Zwei Punkte B und B', welche AA' dem absoluten Werthe nach in gleichem, dem Vorzeichen nach in entgegengesetztem Verhältnisse theilen, bilden ein dem Punktenpaare AA' harmonisch zugeordnetes Punktenpaar,* denn aus den Gleichungen $\frac{AB}{BA'} = \lambda$, $\frac{AB'}{A'B'} = -\lambda$ ergibt sich sofort die für die harmonische Gruppe charakteristische Relation:

$$AB : BA' = AB' : A'B'.$$

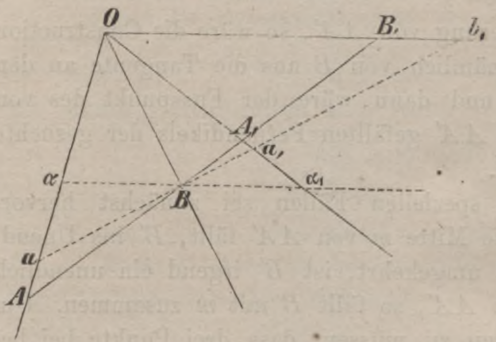
Man findet aus dieser zweiten Definition unmittelbar, dass die Aehnlichkeitspunkte A und J zweier Kreise ein harmonisches Punktenpaar zu den Mittelpunkten M_1 und M_2 derselben bilden, da

$$\frac{M_1 A}{M_2 A} = +\frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{M_1 J}{M_2 J} = -\frac{r_1}{r_2}$$

ist, wenn r_1 und r_2 die Radien bedeuten. —

Vier Strahlen, welche von einem Punkte O aus durch vier harmonische Punkte gezogen werden, heissen vier harmonische Strahlen. Sie haben die Eigenschaft, dass sie von jeder beliebigen Transversalen in vier harmonischen Punkten geschnitten werden.

Fig. 18.



Seien AA_1BB_1 vier harmonische Punkte, $O\,(AA_1B\,B_1)$ vier harmonische Strahlen, so ziehe man zum Beweis des ausgesprochenen Satzes durch B eine Parallele zu OB_1, welche OA in α und OA_1 in α_1 treffen möge. Es ist dann

$$AB : AB_1 = \alpha B : OB_1 \text{ und}$$
$$A_1B : A_1B_1 = \alpha_1 B : OB_1 .$$

Nach der Fundamentalrelation für harmonische Punkte sind aber die linken Seiten dieser beiden Proportionen gleich, also auch die rechten, woraus folgt $\alpha B = \alpha_1 B$, d. h. die Transversale $\alpha B\alpha_1$ wird von den vier harmonischen Strahlen in vier harmonischen Punkten geschnitten, von denen der eine im Unendlichen liegt, während sein zugeordneter die Mitte des Punktenpaares $\alpha\alpha_1$ ist. Zieht man jetzt durch B irgend eine andere Transversale aBa_1b_1, so gelten die Proportionen

$$aB : ab_1 = \alpha B : Ob_1 \text{ und } Ba_1 : a_1b_1 = \alpha_1 B : Ob_1 ;$$

da aber $\alpha B = \alpha_1 B$, so wird nach gehöriger Anordnung der gleichen linken Seiten

$$aB : a_1B = ab_1 : a_1b_1$$

sich ergeben, woraus folgt: *jede durch B gehende Transversale* schneidet auf den vier harmonischen Strahlen vier harmonische Punkte aus. Ist aber der oben ausgesprochene Satz für eine durch B gehende Transversale bewiesen, so gilt er auch für jede zu dieser Transversalen parallel gezogene, womit seine allgemeine Gültigkeit dargethan ist.

Will man zu drei Strahlen, von denen zwei als zugeordnet bestimmt sind, den vierten harmonischen Strahl construiren, so ziehe man irgend eine Transversale und suche zu ihren drei Schnittpunkten mit den drei gegebenen Strahlen unter derselben Zuordnung den vierten harmonischen Punkt; durch diesen geht der vierte harmonische Strahl.

Als interessante spezielle Fälle von vier harmonischen Strahlen ergeben sich: 1. Die unbegränzt gedachten Schenkel eines Winkels und seine Halbirungslinien, die bekanntlich senkrecht aufeinanderstehen. Man braucht, um diess einzusehen, nur eine Transversale zu ziehen, welche einem der winkelhalbirenden Strahlen parallel ist. 2. Vier Parallelstrahlen durch vier harmonische Punkte, denn ein System paralleler Geraden kann aufgefasst werden, als ob sie einen unendlich entfernten Punkt gemein hätten. 3. Zwei parallele Gerade, ihre Mittellinie und eine beliebige unendlich entfernte Gerade. Aus diesem letzten Falle, auf den man die Bemerkung anwendet, dass zu drei Strahlen mit gegebener Zuordnung nur ein vierter harmonischer Strahl gefunden werden kann, schliesst man die Berechtigung der Ausdrucksweise: *In einer Ebene gibt es, vom Gesichtspunkte der harmonischen Eigenschaften aus aufgefasst, nur eine einzige unendlich entfernte Gerade*, d. h. nur eine einzige Gerade, welche ihrer ganzen Ausdehnung nach im Unendlichen liegt; man bezeichnet sie gewöhnlich mit G_∞.

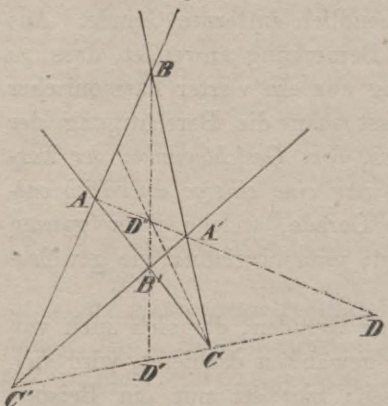
Der Begriff der unendlich entfernten Geraden, der sich auch von andern Ausgangspunkten als dem hier gewählten darbietet, wird sich später sehr nützlich gebrauchen lassen; hier sei nur ein Beispiel seiner Anwendbarkeit angeführt. Unter den Kreisen, die durch zwei Punkte A, B in der Ebene gehen, befindet sich auch deren Verbindungsgerade G als Kreis mit unendlich grossem Radius. Während jeder der übrigen Kreise von jeder beliebigen Geraden, die ihn trifft, in zwei Punkten geschnitten wird, macht der genannte Spezialfall eine scheinbare Ausnahme, insofern eine Gerade mit ihm nur einen Schnittpunkt gemein hat. Beachtet man aber, dass wenn ein Theil eines Kreises durch AB in stetiger Vergrösserung des Radius sich G annähert, dann ein anderer Theil sich immer mehr von G entfernt und schliesslich ins Unendliche rückt, so wird man sagen: Der Kreis besteht im Grenzfall aus G und der unendlich entfernten Geraden der Ebene. Es ist endlich möglich, dass auch G ins Unendliche rückt; in diesem Falle wird der Kreis mit der *doppelt gelegten* unendlich entfernten Geraden der Ebene identisch. —

Die Construction, welche wir für harmonische Punkte und Strahlen ausgeführt haben, bedurften direct oder indirect [*halbiren, parallele und senkrechte Strahlen ziehen*] *des Zirkels*. Es gibt nun eine Methode, zu drei Punkten [resp. Strahlen] bei bestimmter Zuordnung den vierten harmonischen *linear* zu construiren, und zwar beruht dieselbe auf einer Eigenschaft des vollständigen Vierseits.

Wir nennen vollständiges Vierseit eine ebene Figur, welche aus vier unbegränzten Geraden besteht, von denen keine drei durch denselben Punkt gehen.

Das vollständige Vierseit hat *vier Seiten, sechs Ecken* [Durchschnittspunkte der Seiten zu zweien] und *drei Diagonalen* [Verbindungsgeraden der gegenüberliegenden, nicht auf derselben Seite enthaltenen Ecken]. Auf jeder der Diagonalen liegen vier Punkte: zwei Ecken, in denen sich je zwei Seiten schneiden, und zwei Diagonalpunkte, in denen die gewählte Diagonale von den beiden andern getroffen wird. *Diese vier Punkte sind harmonische und zwar die Eckpunkte zugeordnet,* was nach sich zieht, dass *auch die Diagonalpunkte zugeordnet* sind. Seien demnach $AB, A'B', AB', BA'$ die Seiten eines vollständigen Vierseits, C' der Durchschnitt von AB und $A'B'$, C der Durchschnitt von AB' und BA', ferner werde die Diagonale CC' von AA' in D und von BB' in D' getragen, schliesslich sei D'' der Durchschnitt der Diagonalen $AA'D$ und $BB'D'$, so ist nachzuweisen, dass $AD''A'D$, $BD''B'D'$, $C'D'CD$ harmonische Punktengruppen sind.

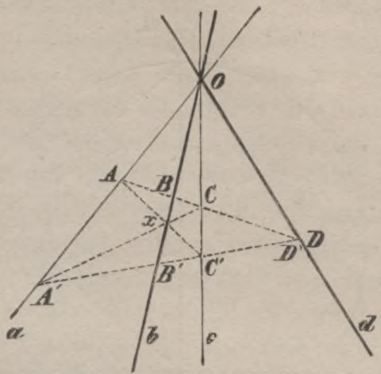
Fig. 19.



Zu diesem Zwecke bestimme man zu den Strahlen AC, $A'C$, $C'C$ den vierten harmonischen, dem letzten zugeordneten Strahl δ, ebenso zu AC', $A'C'$, CC' den vierten harmonischen Strahl δ', der ebenfalls CC' zugeordnet sei. Beide Strahlengruppen treffen die Gerade $DA'D''A$ in vier harmonischen Punkten und da zu $DA'A$ bei bestimmter Zuordnung nur ein vierter harmonischer Punkt existirt, so schneiden sich δ und δ' auf dieser Geraden in dem genannten Punkte. Man zieht denselben Schluss in Bezug auf $BD''B'D'$ d. h. δ und δ' schneiden sich im gemeinsamen Punkte von $AD''A'D$ und $BD''B'D'$ und diese Punktengruppen sind demzufolge harmonisch. Zum Schlusse sei bemerkt, dass der Beweis nur für eine einzige Diagonale geleistet werden muss, da er sich für die beiden andern in durchaus gleicher Weise führen lässt.

Man kann jetzt vermittelst des bewiesenen Satzes zu drei Punkten mit gegebener Zuordnung den vierten harmonischen wie folgt linear construiren: Sei z. B. in der harmonischen Gruppe $CDC'D'$ das D zugeordnete Element D' gesucht, während die drei andern bekannt sind, so ziehe man durch C zwei beliebige Gerade, welche man mit einem durch D ebenfalls willkürlich gezogenen Strahl zum Durchschnitt bringt in Punkten die A und A' heissen mögen. Wenn jetzt $C'A$ und CA' sich in B, ferner $C'A'$ und CA sich in B' treffen, so geht die Verbindungsgerade BB' durch den verlangten Punkt D', wie der Satz vom vollständigen Vierseit unmittelbar ergibt.

Fig. 20.



Zu den Strahlen a, b, c, welche durch den Punkt O gehen, findet man den vierten harmonischen, b zugeordneten, indem man auf b einen willkürlichen Punkt x wählt, durch diesen zwei beliebige Strahlen zieht, welche a und c resp. in A, A' und C, C' treffen, so schneiden sich AC und $A'C'$ in einem Punkte D, durch welchen auch der Strahl d gehen muss. Es bilden nämlich a, c, $A'C$ und AC' ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen AC, $A'C'$ und Ox oder BB' sind, also sind $ABCD$ oder $A'B'C'D'$ vier harmonische Punkte und a, b, c, d vier harmonische Strahlen.

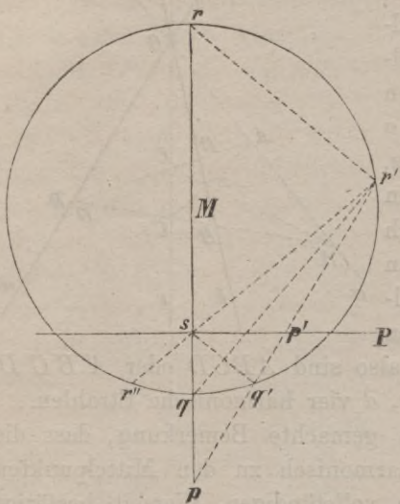
Es mag noch die weiter oben gemachte Bemerkung, dass die Aehnlichkeitspunkte zweier Kreise harmonisch zu den Mittelpunkten liegen, vermittelst des Satzes vom vollständigen Vierseit bestätigt werden. Die vier Aehnlichkeitsaxen dreier Kreise bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Diagonalen mit den Verbindungsgeraden der Mittelpunkte zusammenfallen. Auf jeder Centrallinie liegen also vier harmonische Punkte, von denen die beiden durch sie verbundenen Kreismittelpunkte zugeordnet sind, ebenso die beiden in ihr gelegenen Aehnlichkeitspunkte.

§. 6. Pol und Polare.

Legt man in der Ebene eines Kreises M durch einen beliebigen Punkt p eine Sehne, welche den Kreis in den Punkten q und r schneiden möge und bestimmt zu p, q, r den vierten harmonischen, p zugeordneten Punkt p', so nennt man p und p' *ein harmonisches Punktenpaar in Bezug auf den Kreis.* Es gilt nun der Satz: *Bestimmt man zu p alle diejenigen Punkte p', welche mit ihm ein harmonisches Punktenpaar bilden, so liegen dieselben auf einer Geraden, welche die Polare des Punktes p heisst.* Der Beweis beruht wesentlich auf dem im vorigen §. erwähnten Satze: Bilden von vier harmonischen Strahlen zwei zugeordnete einen rechten Winkel, so halbiren sie die Winkel der beiden andern Strahlen; und umgekehrt, halbirt einer von vier harmonischen Strahlen den Winkel zweier zugeordneter, so bildet er mit seinem zugeordneten einen rechten Winkel. Nach dieser Vorbemerkung verfahren wir, wie folgt:

Wir nehmen p zunächst ausserhalb des Kreises an. Wenn der durch p gehende Durchmesser qr gezogen wird, so liegt auf ihm ein zugeordneter Punkt s, durch welchen die Polare gehen muss. Da zudem die ganze entstehende Figur zu diesem Durchmesser symmetrisch ist, so steht die Polare auf ihm senkrecht. Der Beweis unseres Satzes wird also darauf reduzirt, zu zeigen, dass jeder der Punkte p' auf dem in s zu pq errichteten Perpendikel liegt. Sei $q'r'$ eine durch p gezogene Secante, welche den Punkt p' ergibt, dann sind r' $(rspq)$ vier harmonische Strahlen, da sie von einem Punkte aus durch vier harmonische Punkte gezogen sind. Zwei von ihnen, $r'r$ und $r'q$ stehen senkrecht aufeinander, folglich halbirt $r'q$ den Winkel der Strahlen $r's$ und $r'p$. Wenn man mit r'' den zweiten Durchschnitt von sr' mit dem Kreise M bezeichnet, so müssen demzufolge die Bogen $r''q$ und qq' einander gleich sein, also auch die Winkel $r''sq$ und qsq'. Aber die Punkte $pq'p'r'$ sind harmonische, desshalb sind s $(pq'p'r')$ vier harmonische Strahlen. Der Winkel zweier entsprechender derselben [$r's$, resp. seine Verlängerung und sq'] wird durch den dritten, sp halbirt, folglich steht der vierte sp' auf diesem senkrecht, d. h. p' liegt auf dem in s auf pq errichteten Perpendikel. Der Beweis gilt ebenso für einen Punkt p, welcher innerhalb des Kreises liegt.

Fig. 21.



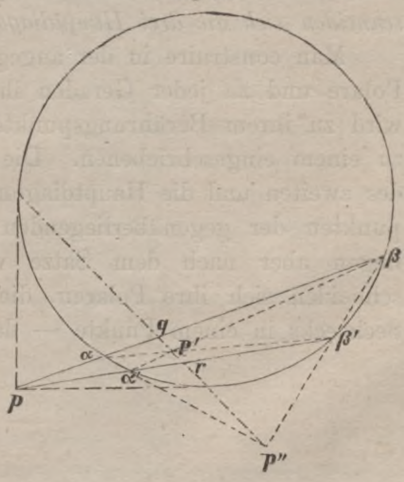
Während die gefundene Gerade, die mit P bezeichnet werden möge, wie bereits bemerkt, die Polare des Punktes p genannt wird, heisst p *der Pol der Geraden* P. — Ueber den Zusammenhang von Pol und Polare finden eine Reihe von Sätzen statt, von denen wir die nachfolgenden herausheben: Liegt der Pol innerhalb des Kreises, so schneidet die Polare den Kreis nicht. Liegt der Pol ausserhalb des Kreises, so schneidet die Polare den Kreis in zwei Punkten, welche die Berührungspunkte der vom Pole aus an den Kreis gezogenen Tangenten sind. In diesem Falle ist also die Polare zugleich die Berührungssehne der Tangenten. [Da es auf der Polaren Punkte gibt, deren Verbindungsgerade mit dem Pole nicht mehr zwei Punkte aus dem Kreise ausschneidet, so bilden diese Punkte mit dem Pole nicht mehr im eigentlichen Sinne des Wortes harmonische Punktenpaare in Bezug auf den Kreis. *Man nennt desshalb in allgemeinerer Auffassung harmonische Punktenpaare des Kreises solche, welche die Eigenschaft haben, dass die Polare des einen durch den andern geht.*] Liegt der Pol auf dem Kreise selbst, so ist die Polare zugleich die Tangente im Pole an den Kreis.

Diese Sätze lassen sich sofort umkehren. Zu jedem Punkte existirt eine und nur eine Polare, zu jeder Polaren ein und nur ein Pol. Dieser wird construirt, indem man den zur Polaren senkrechten Durchmesser zieht, zu dessen beiden Durchschnittspunkten mit dem Kreise und seinem Durchschnittspunkte mit der Polaren den vierten harmonischen Punkt construirt [der dem letztern zugeordnet ist], so ist dieser der gesuchte Pol. *Der Pol eines Durchmessers ist ein unendlich entfernter Punkt, die Polare des Mittelpunktes eine unendlich entfernte Gerade.* Da aber zu einem Punkte nur eine Polare gehört, so wird man auf die bereits früher gemachte Bemerkung geführt, *dass in der Ebene, in Ansehung harmonischer Eigenschaften nur eine einzige unendlich entfernte Gerade angenommen werden darf.*

Bewegt sich der Pol auf einer Geraden G, so drehe sich die Polare um einen Punkt g, welcher der Pol der Geraden G ist. Wenn sich die Polare um einen Punkt g dreht, so durchläuft der Pol eine Gerade G, welche die Polare des Punktes g ist. Liegen also z. B. drei Punkte auf einer Geraden, so laufen ihre Polaren durch einen Punkt.

Die in §. 5 gegebene Eigenschaft des vollständigen Vierseits führt zu folgender *linearen Construction der Polaren eines Punktes p in Bezug auf einen Kreis M*: Seien $p\alpha\beta$, $p\alpha'\beta'$ zwei von p ausgehende Secanten im Kreise, so ziehe man die Geraden $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$, $\alpha\beta'$ und $\alpha'\beta$, welche sich in p'' und p' schneiden, dann ist $p'p''$ die Polare von p. Denn sind q und r die Schnittpunkte von $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ mit $p'p''$, so kann man $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\alpha\beta'$, $\alpha'\beta$ als Seiten eines vollständigen Vierseits auffassen, dessen Diagonalen $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ und $p'p''$ sind. $p\alpha q\beta$ und $p\alpha' r\beta'$ sind also harmonische Punkte, oder p und q, p und r conjugirt harmonische Punktenpaare in Bezug auf den Kreis.

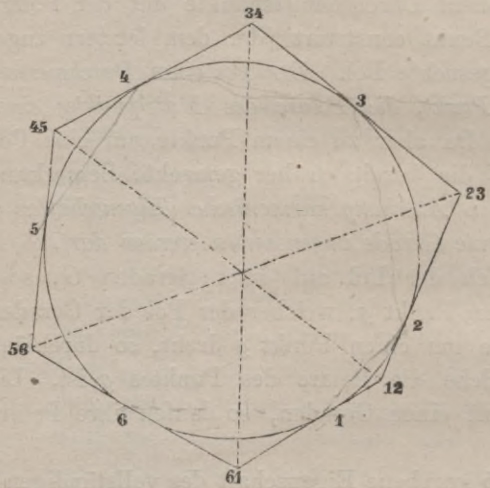
Fig. 22.



Mit der gegebenen Construction hängt unmittelbar zusammen die lineare Construction der beiden Tangenten, welche von einem Punkte aus an einen Kreis gelegt werden können.

Vermittelst der Theorie von Pol und Polare hat *Brianchon* aus dem Pascal'schen Satze einen andern hergeleitet, welcher das dem Kreise umgeschriebene Sechseck betrifft. In dem von den Tangenten 1, 2, 3, 4, 5, 6 des Kreises gebildeten Sechseck heissen 12, 23, 34, 45, 56, 61 die *Ecken* und zwar 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61

Fig. 23.



gegenüberliegende; die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken werden *Hauptdiagonalen* genannt. Der von Brianchon aufgestellte Satz lautet nun: *In einem beliebigen dem Kreise umschriebenen Sechseck schneiden sich die drei Hauptdiagonalen in einem und demselben Punkte.*

Man construire in der angegebenen Figur zu jedem Punkte seine Polare und zu jeder Geraden ihren Pol. Jede der sechs Tangenten wird zu ihrem Berührungspunkte, also das umgeschriebene Sechseck zu einem eingeschriebenen. Die Ecken des ersten werden zu Seiten des zweiten und die Hauptdiagonalen des ersten zu den Durchschnittspunkten der gegenüberliegenden Seiten des zweiten. Diese Punkte liegen aber nach dem Satze von Pascal auf einer Geraden, also schneiden sich ihre Polaren, die Hauptdiagonalen des umschriebenen Sechsecks in einem Punkte — damit ist der Satz bewiesen.

Zweites Kapitel.

Der geometrische Ort.

§. 7. Definition und Beispiele.

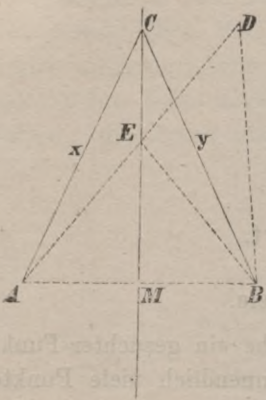
Es kann vorkommen, dass in einer Aufgabe ein gesuchter Punkt nicht vollständig bestimmt ist, sondern dass unendlich viele Punkte den gestellten Bedingungen genügen, während dennoch diese Bedingungen nicht für jeden beliebigen Punkt der Ebene erfüllt sind. Man nennt dann die Zusammenfassung aller Punkte, welche die Aufgabe lösen, den *geometrischen Ort* des gesuchten Punktes.

Das einfachste Beispiel bietet *der Kreis;* er ist der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche gleich weit, um *den Radius*, von einem festen Punkte, *dem Mittelpunkte*, abstehen. Die wesentlichen Umstände, welche sich hier darbieten und die in ähnlicher Weise bei jedem geometrischen Orte zu beachten sind, mögen etwas ausführlich erörtert werden. Jeder Punkt, welcher die gegebene Entfernung von dem festen Punkte hat, liegt auf dem Kreise; und umgekehrt: jeder Punkt, welcher auf dem Kreise liegt, befindet sich in der angegebenen Entfernung vom Mittelpunkte. Ferner: wenn irgend ein Punkt der gestellten Bedingung nicht genügt, so liegt er nicht auf dem Kreise; umgekehrt, liegt er nicht auf dem Kreise, so genügt er der gestellten Bedingung nicht. Endlich findet man noch, dass für jeden Punkt ausserhalb des Kreises die Entfernung vom Mittelpunkt grösser ist, als der Radius, für jeden Punkt innerhalb ist die genannte Entfernung kleiner als der Radius — beide Bemerkungen lassen sich sofort umkehren. —

Sind zwei feste Punkte A und B gegeben, und es soll ein dritter Punkt C derart bestimmt werden, dass zwischen $AC = x$ und $BC = y$ stets eine vorgeschriebene Relation gilt, so wird man für C einen geometrischen Ort finden, der durch die gegenseitige Lage von A und B [deren Entfernung wir im Nachfolgenden immer gleich $2c$ annehmen] und durch die Gleichung zwischen x und y gegeben ist.

1) *Soll* $x = y$ *sein, so erhält man für den Punkt* C *eine Gerade, welche in der Mitte* M *von* AB *auf* AB *senkrecht steht.*

Fig. 24.

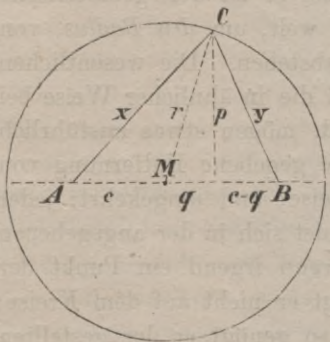


Hier müssen die vorhin beim Kreise gemachten Erörterungen wiederholt werden. Man findet dann unter Anderem: Liegt ein Punkt D mit B auf derselben Seite der Ortsgeraden CM, so ist für ihn $AD > BD$ und umgekehrt: ist $AD > BD$, so liegt B mit D auf derselben Seite von CM. Zum Beweise ziehe man BE, wo E der Durchschnitt von AD mit CM ist. Nun hat man $AD = AE + ED = BE + ED$. Da aber in jedem Dreieck die Summe zweier Seiten grösser ist, als die dritte, so haben wir aus dem Dreiecke BDE:

$$BE + ED > DB, \text{ also } AD > DB.$$

2) *Für* $x^2 + y^2 = a^2$ *erhält man einen Kreis, dessen Mittelpunkt* M *die Mitte von* AB *und dessen Radius* $r = \sqrt{\frac{a^2 - 2c^2}{2}}$ *ist.*

Fig. 25.



Man hat nämlich

$$x^2 = p^2 + (c + q)^2;$$
$$y^2 = p^2 + (c - q)^2,$$

also

$$x^2 + y^2 = a^2 = 2p^2 + 2c^2 + 2q^2,$$

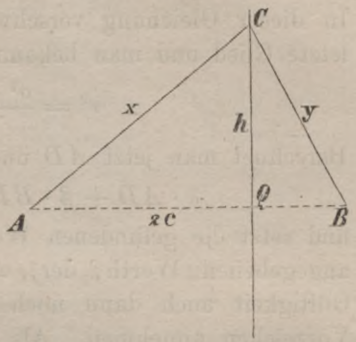
woraus

$$p^2 + q^2 = r^2 = \frac{a^2 - 2c^2}{2}$$

folgt. Es ist also r constant und der gesuchte Ort identisch mit dem angegebenen Kreis. Für jeden Punkt ausserhalb des Kreises ist $x^2 + y^2 > a^2$, für jeden Punkt innerhalb ist $x^2 + y^2 < a^2$; der kleinste Werth, den $x^2 + y^2$ überhaupt erlangen kann, ist $2c^2$. Diess tritt für den Mittelpunkt M ein; daraus folgt, dass ein wirklicher geometrischer Ort, welcher der gestellten Bedingung Genüge leistet, nur vorhanden ist, wenn $a^2 > 2c^2$ ist. Für $a^2 = 2c^2$ reduzirt sich der Ortskreis auf den Punkt M, für $a^2 < 2c^2$ ist er gar nicht vorhanden. Die Gesammtheit der definirten geometrischen Orte, welche durch Veränderung von a^2 bei festbleibenden A und B zum Vorschein kommen, bilden ein System conzentrischer Kreise, da das Centrum M das nämliche bleibt.

3) *Wenn $x^2 - y^2 = a^2$ ist, so resultirt als Ort des Punktes C eine Gerade, die senkrecht zu AB steht in einem Punkte Q, für welchen man $AQ^2 - BQ^2 = a^2$ hat.*

Fig. 26.



In der That ist für einen Punkt der bezeichneten Geraden:

$$x^2 = h^2 + AQ^2, \qquad y^2 = h^2 + BQ^2$$

$$x^2 - y^2 = AQ^2 - BQ^2 = a^2.$$

Um den Punkt Q zu finden, benutzt man die Gleichungen:

$$AQ^2 - BQ^2 = a^2, \qquad AQ + QB = 2c$$

welche durch Division ergeben:

$$AQ - QB = \frac{a^2}{2c}$$

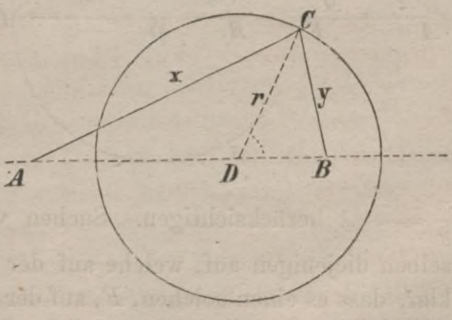
So wird schliesslich

$$AQ = \frac{a^2 + 4c^2}{4c}; \quad QB = \frac{4c^2 - a^2}{4c}; \quad \frac{AQ}{BQ} = \frac{a^2 + 4c^2}{a^2 - 4c^2}$$

Für alle Punkte links von CQ ist $x^2 - y^2 < a^2$, für diejenigen rechts von der Ortsgeraden $x^2 - y^2 > a^2$. Hält man wieder A und B fest, während a^2 varirt, so erhält man als Ortsgeraden successive alle Senkrechten zu AB und zwar für $a^2 = -4c^2$ das Perpendikel in A, für $a^2 = 0$; dasjenige in M (der Mitte von AB), für $a^2 = +4c^2$ das Perpendikel in B und schliesslich für $a^2 = \infty$ die unendlich entfernte Gerade der Ebene. [Den hier behandelten geometrischen Ort hatten wir bereits in §. 2 zur Bestimmung der Potenzlinie zweier Kreise benutzt.]

4) *Die beiden zuletzt behandelten Orte sind spezielle Fälle des durch die Gleichung $\alpha x^2 + \beta y^2 = a^2$ bestimmten. Man findet für ihn einen Kreis, dessen Mittelpunkt D auf der Geraden AB so bestimmt wird, dass $\alpha \cdot AD + \beta \cdot BD = 0$ ist und dessen Radius sich aus der Formel:*

Fig. 27.



$$r^2 = \frac{(\alpha + \beta)\, a^2 - 4\alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta)^2}$$

ergibt.

Man hat im Falle, dass α und β gleiches Vorzeichen besitzen [wobei D auf die Strecke AB selbst zu liegen kommt und AD und BD entgegengesetzte Vorzeichen bekommen]

$$x^2 = r^2 + AD^2 + 2r \cdot AD \cdot \cos BDC$$
$$y^2 = r^2 + BD^2 + 2r \cdot BD \cdot \cos BDC$$
$$a^2 = \alpha x^2 + \beta y^2 = (\alpha + \beta) r^2 + \alpha \cdot AD^2 + \beta \cdot BD^2 + 2r \cos BDC \, . \\ [\alpha \cdot AD + \beta \cdot BD] \, .$$

In dieser Gleichung verschwindet zufolge der Annahme über D das letzte Glied und man bekommt:

$$r^2 = \frac{a^2 - (\alpha \cdot AD^2 + \beta \cdot BD^2)}{(\alpha + \beta)^2}$$

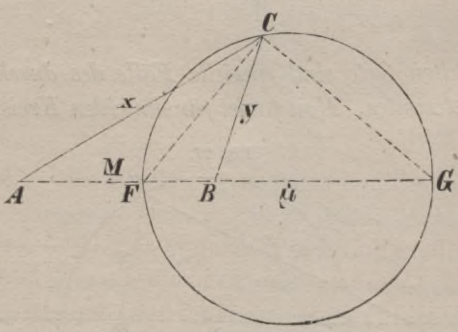
Berechnet man jetzt AD und BD aus den Gleichungen:

$$\alpha \cdot AD + \beta \cdot BD = 0 \, , \qquad AD + DB = 2c$$

und setzt die gefundenen Werthe ein, so erhält man für r^2 den früher angegebenen Werth, der, wie die ganze übrige Entwicklung, seine Gültigkeit auch dann noch behält, wenn α und β entgegengesetzte Vorzeichen annehmen. Als Bedingung für das wirkliche Vorhandensein des geometrischen Ortes findet man, dass $(\alpha + \beta) a^2 - 4\alpha\beta c^2$ positiv sei. Für $\alpha - \beta = 0$ bekommt man den unter 2) behandelten Ort, für $\alpha + \beta = 0$ den Fall 3). Die besondere Annahme $a^2 = 0$ soll unter 5) noch eingehender behandelt werden und zwar unabhängig von dem allgemeinen Falle.

5) *Der Ort aller Punkte, für welche* $\frac{x}{y} = \lambda$, *ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf* AB *liegt und diese Strecke im Verhältniss* $1 : \lambda^2$ *theilt. Der Radius hat den Werth* $r = \frac{2\lambda c}{\lambda^2 - 1}$.

Fig. 28.



Da Strecken, die nicht auf dem nämlichen Träger (der nämlichen Geraden) enthalten sind, in Rücksicht auf das Vorzeichen erst durch Zuhülfenahme anderweitiger Elemente (z. B. Winkel bei ähnlichen Dreiecken) in Beziehung gesetzt werden können, so muss man für den zu untersuchenden geometrischen Ort ebensowohl $\frac{x}{y} = \lambda$ als $\frac{x}{y} = -\lambda$ berücksichtigen. Suchen wir also unter den Punkten desselben diejenigen auf, welche auf der Geraden AB selbst liegen, so ist klar, dass es einen solchen, F, auf der Strecke AB selbst gibt und einen andern, G, auf ihrer Verlängerung. Wir nehmen nun einen bekannten Satz aus der Planimetrie zu Hülfe, der also lautet: In einem Dreieck theilt die Halbirungslinie des Winkels C an der Spitze die Grundlinie AB im Verhältniss der anliegenden Seiten; dasselbe gilt auch für die Halbirungslinie des Nebenwinkels von C. Sei jetzt C ein Punkt des zu bestimmenden Ortes, so construire man die Winkelhalbirenden für ABC und den Nebenwinkel. Diese treffen AB in Punkten, welche die Strecke AB in dem Verhältnisse $\frac{AC}{BC} = \frac{x}{y} = \pm \lambda$ theilen, also in F und G. Da aber die beiden Halbirungsgeraden senkrecht aufeinanderstehen, so ist der Winkel FCG ein Rechter und C befindet sich auf dem Kreise, der über FG als Durchmesser beschrieben ist; dieser Kreis ist also der gesuchte geometrische Ort. Die vier Punkte $AFBG$ sind harmonisch, weil die von C aus nach ihnen gezogenen Strahlen als Schenkel eines Winkels und dessen Halbirungsgeraden eine harmonische Gruppe bilden. Wenn man, wie überall in den geometrischen Oertern dieses §. die Strecke $AB = 2c$ setzt, so findet man, wenn μ den Mittelpunkt des Ortskreises und r dessen Radius bedeutet,

$$AF = \frac{2c\lambda}{\lambda + 1}, \quad AG = \frac{2c\lambda}{\lambda - 1}, \quad A\mu = \frac{2c\lambda^2}{\lambda^2 - 1},$$

$$BF = -\frac{2c}{\lambda + 1}, \quad BG = \frac{2c}{\lambda - 1}, \quad B\mu = \frac{2c}{\lambda^2 - 1},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{AF}{BF} = -\lambda, \quad \frac{AG}{BG} = +\lambda, \quad \frac{A\mu}{B\mu} = \lambda^2$$

und endlich

$$r = \frac{AG - AF}{2} = \frac{2c\lambda}{\lambda^2 - 1}.$$

Ertheilt man λ successive alle Werthe von 0 bis ∞, so erhält man unendlich viele Ortskreise: $\lambda = 0$ gibt denjenigen, der sich auf den Punkt A reduzirt, für $\lambda = 1$ stellt sich ein unendlich grosser Kreis ein, der aus dem in der Mitte M von AB auf AB errichteten Perpendikel und G_∞ besteht; aus $\lambda = \infty$ ergibt sich der Punkt B.

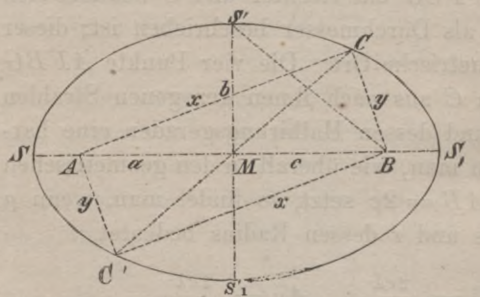
Seien F und G die Schnittpunkte eines beliebigen der Ortskreise mit AB, so ist zufolge einer Grundrelation harmonischer Punkte $MF \cdot MG = MA^2 = MB^2$. Diess Product ist zugleich die Potenz des Punktes M nach dem Kreise FG, d. h.: alle Ortskreise erzeugen nach dem Punkte M die nämliche Potenz. Da nun für irgend zwei derselben die Potenzlinie senkrecht auf AB steht, so haben wir den Satz: *Construirt man für beliebige Paare der Kreise, welche die Eigenschaft haben, dass für alle Punkte eines derselben das Verhältniss der Abstände nach zwei festen Punkten A und B constant bleibt, die Po-*

tenzlinie, so erhält man immer eine und dieselbe Gerade, nämlich das in der Mitte M von AB auf AB errichtete Perpendikel.

§. 8. Ellipse, Hyperbel und Parabel.

Der geometrische Ort eines Punktes C, für welchen die Summe seiner Abstände von zwei festen Punkten A und B constant ist, heisst Ellipse.

Fig. 29.



A und B werden die *Brennpunkte* genannt; ihre Verbindungsgerade ist eine Symmetrieaxe der Ellipse, ebenso das Perpendikel, das in der Mitte M von AB auf AB errichtet ist, so dass also die Curve aus vier congruenten Quadranten besteht. M ist der *Mittelpunkt* der Ellipse, jede durch ihn gehende Gerade schneidet auf derselben zwei Punkte aus, die gleichweit von ihm abstehen. In unserer Figur ist $ACBC'$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich in M halbiren.

Um eine genaue Vorstellung der Curve zu erhalten, kann man dieselbe mechanisch construiren. Man schlinge einen geschlossenen Faden von der Länge $2a + 2c$ [wo $2c = AB$ und $2a = AC + CB$ ist] um die Brennpunkte A und B herum und beschreibe dann mit dem Stifte C bei stets straff gehaltenem Faden eine krumme Linie, bis dieselbe in sich selbst zurückläuft.

Auf der Geraden AB befinden sich zwei Punkte der Ellipse, die Scheitel S und S_1, deren Entfernung $= 2a$ ist und die *grosse Axe* oder *Hauptaxe* heisst; ebenso liegen zwei Punkte der Curve, die Scheitel S' und S_1' auf der zweiten Symmetrieaxe; ihre Entfernung $2b$ wird die *kleine Axe* oder *Nebenaxe* genannt. [Man nennt auch sehr oft die unbegrenzten Geraden, auf denen SS_1 und $S'S_1'$ gelegen sind, die *Axen* der Ellipse.] Zwischen a, b und c [man nennt die letztere Grösse die *Excentrizität*] gilt die Gleichung $b^2 + c^2 = a^2$, d. h. die halbe grosse Axe ist grösser als die halbe kleine Axe und grösser als die Excentrizität. —

Alle Ellipsen, bei denen das Verhältniss $\frac{b}{a}$ [das stets zwischen den Grenzen 0 und 1 liegt] constant bleibt, sind *ähnlich*, man braucht also nur für einen bestimmten Werth von a alle Ellipsen zu construiren, um sofort die Verschiedenheit der äussern Formen zu übersehen, welche die Ellipse überhaupt darbieten kann*). Wenn b zunächst sein Maximum angenommen hat, das $= a$ ist, so muss $c = 0$ sein, d. h. für die Annahme, dass die beiden Axen gleich seien, fallen die Brennpunkte zusammen und die Ellipse ist identisch mit dem Kreise vom Radius a. Nimmt jetzt b immer mehr ab, so verflacht sich die Ellipse, die Brennpunkte rücken immer weiter auseinander, bis schliesslich $b = 0$ geworden ist, in welchem Falle die Brennpunkte mit den Scheiteln der grossen Axe zusammenfallen und die Ellipse sich auf die grosse Axe reduzirt, die man sich doppelt vorstellen muss. — Hätte man einen bestimmten Werth für die kleine Axe $2b$ festgehalten und die grosse Axe sich verändern lassen, dann wäre für diese der kleinste Werth $= 2b$ und die entsprechende Ellipse identisch mit dem Kreise vom Radius b gewesen. Wenn jetzt die grosse Axe wächst, so nimmt auch die Excentrizität zu, die Ellipse erscheint immer flacher, bis sie für einen unendlich grossen Werth der Hauptaxe [der in diesem Falle auch eine unendlich grosse Excentrizität entspricht] ausartet in zwei parallele Gerade, deren Abstand $= 2b$ ist. — Schliesslich setzen wir fest, dass der Abstand der Brennpunkte, die doppelte Excentrizität, unverändert bleibe. Der kleinste Werth der grossen Axe ist dann $2c$ und die zugehörige Ellipse ist die gerade Verbindungsstrecke der Brennpunkte, doppelt gelegt. Wächst die grosse Axe, so nimmt b zu und mit ihm das Verhältniss $\frac{b}{a}$, das alle Werthe von 0 bis 1 successive annimmt, jedoch so, dass es letztern Werth erst für ein unendlich grosses a erreicht. Die Ellipse nähert sich also in ihrer Form immer mehr dem Kreise, wird aber dann erst zu einem solchen, wenn alle ihre Punkte in's Unendliche gerückt sind und sie identisch wird mit der doppelt gelegten unendlich entfernten Geraden der Ebene.

Es soll nun noch gezeigt werden, dass die Ellipse von einer Geraden G nie in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, oder mit andern Worten, dass über einer gegebenen Grundlinie höchstens zwei Dreiecke von gegebener Summe der beiden andern Seiten möglich sind, deren Spitzen in einer gegebenen Geraden G liegen. Wir unterscheiden drei Fälle: 1. einer der Brennpunkte liegt auf G, 2. die

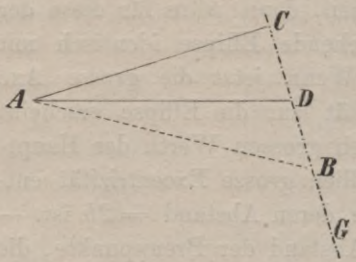
*) Nur ist zu bemerken, dass unter den Ellipsen vom Axenverhältniss $\frac{b}{a}$ eine solche sich befindet, welche sich auf einen Punkt reduzirt; auch in diesem Grenzfalle noch ist das Axenverhältniss von Wichtigkeit und als ein vollkommen bestimmtes anzusehen, so dass man Ellipsen von verschiedenem Axenverhältniss auch dann noch als verschieden anzusehen hat, wenn sie auf Punkte reduzirt sind.

Brennpunkte liegen auf verschiedenen Seiten von G, 3. sie liegen auf der nämlichen Seite von G.

Im ersten Falle zeigt man sofort, dass auf jeder Seite von AB nur je ein Punkt der gestellten Bedingung Genüge leisten kann. Seien C und D zwei Punkte, die oberhalb AB liegen, und von denen C weiter von B absteht, als D, so hat man

$$AC + CD > AD\,,\; AC + CD + DB > AD + DB\,, \text{ also}$$
$$AC + CB > AD + DB\,.$$

Fig. 30.



Der Werth von $AC + CB$ wächst demnach continuirlich, wie C sich von B entfernt, kann also einen vorgeschriebenen Werth höchstens einmal erreichen. Da auf G höchstens ein Punkt, der oberhalb AB liegt, die gegebene Summe der Seiten AC und CB erzeugt, und diess ebenso für den unterhalb AB liegenden Theil von G gilt, so kann eine durch den Brennpunkt B gehende Gerade in der That nur zwei Punkte mit der Ellipse gemein haben.

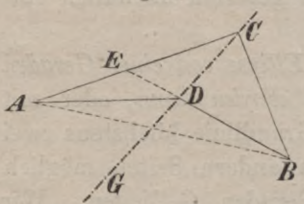
Für den zweiten Fall ist der Beweis analog. Man hat nämlich die Ungleichheiten

$$AE + ED > AD\,,\; AE + ED + DB > AD + DB:$$
$$EC + CB > EB\,,\; AE + EC + CB > AE + EB$$

desshalb

$$AC + CB > AE + EB$$
$$AC + CB > AE + EB > AD + DB$$

Fig. 31.



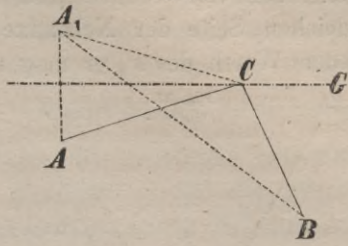
und endlich

$$AC + CB > AD + DB\,.$$

Es gibt also höchstens *ein* Dreieck mit der Spitze C auf G oberhalb AB und höchstens *eines*, dessen Spitze C unterhalb BA liegt, insofern die Grundlinie AB und die Summe der beiden übrigen Seiten eine gegebene sein soll.

Zum Beweise des Satzes im dritten Falle ziehe man von A aus ein Perpendikel nach G und verlängere dasselbe um sich selbst zum Punkte A_1. Für irgend einen Punkt C auf G ist dann $AC + CB = A_1C + CB$. Es gibt aber nach dem vorigen Falle nur zwei Punkte auf G, für welche $A_1C + CB$ einen gegebenen Werth hat,

Fig. 32.



[einen über, den andern unter A_1B] also erlangt auch $AC + CB$ für die Punkte auf G höchstens zweimal einen vorgelegten Werth.

Man übersieht aus dieser Beweisführung leicht die Bedingung, welche erfüllt sein muss, damit eine Gerade G und eine Ellipse E sich schneiden. Sind von der letztern die Excentrizität $2c$ und die grosse Axe $2a$ gegeben [wobei $a > c$] so tritt ein Schneiden von G und E dann sicher ein, wenn der Schnittpunkt von G mit AB auf der Strecke AB oder in einem Endpunkt derselben liegt. Ist diess nicht der Fall, so entscheidet die Entfernung des Punktes A_1 von B in der Art, dass ein Schneiden noch immer vorhanden ist, wenn $A_1B < 2a$, aber nicht mehr eintritt, wenn $A_1B > 2a$.

Die Hyperbel ist der geometrische Ort eines Punktes C, für welchen die Differenz der Abstände [oder Leitstrahlen] nach zwei festen Punkten A und B [den Brennpunkten] einen bestimmten Werth $2a$ hat.

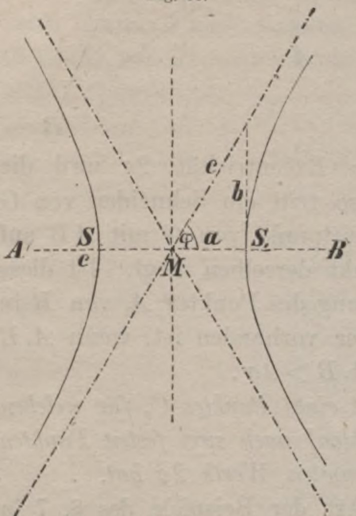
Will man diese Bedingung nach Art der Beispiele des §. 7 in einer Gleichung ausdrücken, so hat man $x - y = 2a$ *oder* $y - x = 2a$, wenn x den Abstand des Punktes C von A, y den Abstand von B bedeutet. Wir müssen also zwei Gleichungen anwenden, weil wir keinen der Punkte A und B vor dem andern bevorzugt haben*); derjenige Theil unseres Ortes, welcher der Gleichung $x - y = 2a$ genügt, liegt mit B auf derselben Seite des Perpendikels, welches in der Mitte M von AB auf AB errichtet wird, der zweite, ihm congruente Theil, welcher der Gleichung $y - x = 2a$ entspricht, liegt auf der andern Seite dieser Geraden. Die Hyperbel hat, wie die Ellipse, zwei Symmetrieaxen, aber nur die eine derselben, die *Hauptaxe* AB hat mit ihr zwei Punkte S und S_1, die *Scheitel* gemein, deren Entfernung $= 2a$ ist. [Diese Entfernung wird in engerem Sinne als die Hauptaxe, oder die *grosse Axe* bezeichnet.] Die zweite, in M senkrecht auf AB stehende, die *Nebenaxe*, wird von der Curve nicht getroffen, da für ihre Punkte $x - y = 0$ ist, also nicht $= 2a$ sein kann.

M heisst der *Mittelpunkt* der Hyperbel, jede durch ihn gelegte Gerade enthält, wenn sie überhaupt die Curve schneidet, zwei Punkte derselben, die gleichweit von ihm entfernt sind. Die Hyperbel be-

*) Wir können allerdings die beiden Gleichungen ersetzen durch eine einzige, indem wir die mit ihnen gleichbedeutenden: $x - y - 2a = 0$, $x - y + 2a = 0$ multipliziren, was $(x - y)^2 = 4a^2$ ergibt.

steht aus vier congruenten Theilen, von denen je zwei, die auf der gleichen Seite der Nebenaxe liegen, zusammenhängen. Da man für jeden Werth des x, er mag noch so gross gewählt werden, einen zugehörigen des y findet und das Dreieck aus x, y, $2c$ immer gebildet werden kann, wenn $x + y > 2c$ ist, so folgt, dass die Curve sich ins Unendliche erstreckt. Um ihre unendlich entfernten Punkte zu finden, bemerken wir, dass für einen solchen die Leitstrahlen parallel sind. Die Differenz derselben ist dann gegeben, indem man von dem einen Brennpunkte aus auf den nicht zugehörigen Leitstrahl ein Perpendikel fällt und die Strecke von dem Fusspunkte bis zum zugehörigen Brennpunkt bestimmt. Soll aber diese Differenz $= 2a$ sein, so stellt sich die gesuchte Richtung des unendlich entfernten Punktes dar als die Richtung einer Kathete von der Länge $2a$ in einem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse $AB = 2c$. Da vier solche Dreiecke möglich sind, von denen je zwei dieselbe Richtung der angegebenen Kathete haben, so können wir durch den Mittelpunkt M zwei Gerade ziehen, deren unendlich entfernte Punkte auf der Hyperbel liegen; diese Geraden, denen sich die Curve, gegen das Unendliche fortrückend, immer mehr anschmiegt, heissen die *Asymptoten**).

Fig. 33.



Fällt man bei der Hyperbel mit der Brenndistanz $2c$ und der grossen Axe $2a$ in einem der beiden Scheitel ein Perpendikel auf AB und bezeichnet dessen Länge bis zum Durchschnitt mit der einen Asymptote mit b, so kann man $2b$ in engerm Sinne die Nebenaxe oder *kleine Axe* nennen. Man hat dann die Relation $a^2 + b^2 = c^2$, woraus folgt, wenn man c die *Excentrizität* der Hyperbel heisst, dass die Excentrizität grösser ist als jede der beiden Halbaxen.

Die Asymptoten theilen die Ebene in vier Winkelräume; nur in

*) Jede durch M gehende Gerade, welche die Hyperbel schneidet, gibt auf derselben Punkte, die gleichweit von M, nach entgegengesetzten Richtungen abstehen. Diess tritt auch für die Asymptoten ein, von denen jede zwei unendlich entfernte Punkte mit der Hyperbel gemein hat, die aber vereinigt sind, weil in einer Geraden nur ein einziger unendlich ferner Punkt vorhanden ist, d. h. die Asymptoten sind Tangenten der Hyperbel.

den beiden, welche die Brennpunkte enthalten, liegen Punkte der Hyperbel. Einer von diesen beiden Winkelräumen wird durch die Schenkel des eigentlichen *Asymptotenwinkels* 2φ begränzt, dessen Hälfte man aus der Gleichung $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$ bestimmen kann. In die leeren Winkelräume kann man unter Andern eine der gegebenen *conjugirte Hyperbel* verzeichnen, welche dieselben Asymptoten und die gleiche Excentrizität hat. Der Asymptotenwinkel geht in seinen Nebenwinkel über, während die Halbaxen a und b ihre Rollen vertauschen in der Art, dass die Hauptaxe zur Nebenaxe wird und umgekehrt.

Um die verschiedenen Gestalten der Hyperbel bei Variation von a, b, c zu übersehen, halte man zuerst A und B fest und lasse die grosse Axe sich verändern. Ist diese $= 0$, so wird die Hyperbel identisch mit der Nebenaxe, für welche $x - y = 2a = 0$ ist. Dieselbe muss doppelt gezählt werden, weil in ihr beide Zweige sich vereinigen. Nimmt die grosse Axe zu, so erhält man zunächst aus der Formel $\cos\varphi = \frac{a}{c}$ stumpfe Asymptotenwinkel, bis $a = b = c \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ wird, in welchem Falle der Asymptotenwinkel ein rechter wird. Die Hyperbel heisst dann *gleichseitig* und entspricht in mancher Beziehung, dem Kreise. Nimmt die grosse Axe noch mehr zu, so wird der Asymptotenwinkel spitz, bis schliesslich für $a = c$ die Hyperbel sich auf die doppelt gelegte Hauptaxe reduzirt, von welcher das Stück zwischen den Brennpunkten ausgelassen ist.

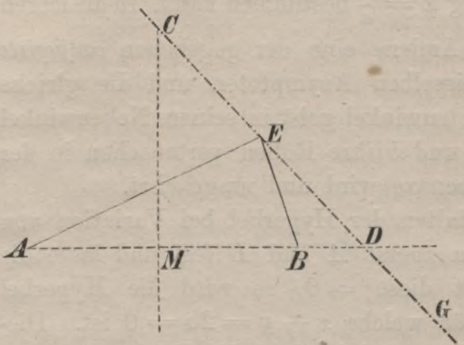
Lässt man die Hyperbel sich derart verändern, dass die Asymptoten fest bleiben und die Brennpunkte sich stets in demselben Asymptotenwinkel befinden, so bleibt das Verhältniss $\frac{b}{a}$ constant, und die sämmtlichen Hyperbeln sind *ähnlich*. Unter ihnen ist diejenige zu beachten, deren Excentrizität $c = 0$ ist und die aus den beiden Asymptoten besteht.

Es sollen nun die Scheitel oder Endpunkte der grossen Axe festbleiben. Wenn die Brennpunkte zuerst in den Scheiteln selbst angenommen werden, so bekommt man wieder die doppelt gelegte Hauptaxe. Entfernen sich die Brennpunkte immer weiter vom Mittelpunkte M, so öffnet sich die Hyperbel mehr und mehr, bis sie endlich für unendlich entfernte Brennpunkte zu zwei Parallelen wird, welche durch die Scheitel gehen und senkrecht auf der Hauptaxe stehen.

In ähnlicher Weise, wie diess für die Ellipse geschehen ist, geht man vor, um auch *für die Hyperbel nachzuweisen, dass sie von einer Geraden G nie in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.* Das

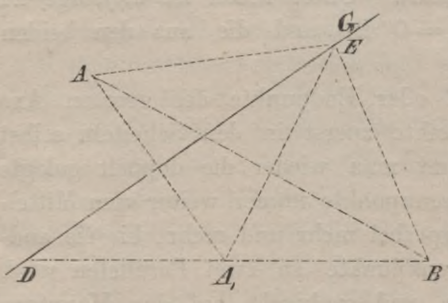
Wesentliche dieses Beweises liegt darin, dass man von der möglichen Zeichenverschiedenheit der Differenz $AE - EB$, wo E einen Punkt der Geraden G bedeutet, absieht. Schneidet G die Hauptaxe ausserhalb der Strecke AB, so hat diese Differenz ein Minimum $= 0$, welches für den Schnitt C von G mit der Nebenaxe der Hyberbel eintritt, und ein Maximum $= 2c$ für den Punkt D von G auf der Hauptaxe. Stellt man sich jetzt die Gerade als in ihrem unendlich fernen Punkte wie einen Kreis geschlossen vor, so wird die Differenz $AE - EB$, wenn E vom Punkte C in der Richtung nach dem Maximum sich bewegt, stetig wachsen, bis E den Punkt D erreicht, und zwar auf dieser Strecke den Werth $2a$ nur einmal annehmen. Geht man von D weiter, so nimmt die betrachtete Differenz stetig ab, bis man durch das Unendliche hindurch wieder zu dem Punkte C gelangt; auf dieser Strecke, welche aus zwei in's Unendliche reichenden Stücken besteht, kann also $AE - EB$ den verlangten Werth auch nur einmal erreichen, so dass zwei Schnittpunkte von G mit der Hyperbel vorhanden sind, aber ausser ihnen kein anderer mehr.

Fig. 34.



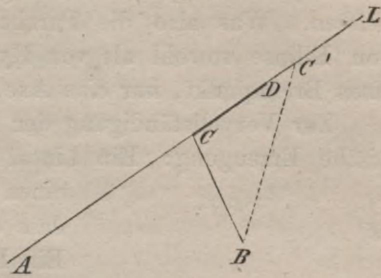
Im Falle G zwischen den Brennpunkten durchgeht, bestimme man einen Punkt A_1 derart, dass G mit dem in der Mitte von AA_1 auf AA_1 errichteten Perpendikel identisch wird. Man hat jetzt $AE - EB = A_1E - EB$ und kann die vorigen Betrachtungen anwenden. Das Maximum dieser Differenz tritt dann ein, wenn E nach D rückt, es hat den Werth A_1B. Während ein Schneiden der Hyperbel H, für welche A und B die Brennpunkte sind und $2a$ die grosse Axe ist, mit einer Geraden G immer eintritt, wenn G und AB sich ausserhalb der begrenzten Strecke AB treffen, so werden, wenn G zwischen A und B hindurchgeht, gemeinschaftliche Punkte von G und H nur existiren, wenn A_1B gleich oder grösser als $2a$ ist.

Fig. 35.



Wir geben noch eine mechanische Erzeugung der Hyperbel. In dem einen Brennpunkte A befestige man ein um ihn drehbares Lineal L. Ein Faden von passender Länge l ist in dem andern Brennpunkte B und in einem Punkte D des Lineals befestigt, der von A um m abstehen mag. Dreht man nun L um A und spannt zugleich mit dem Stifte C den Faden fortwährend an L, so beschreibt C den Bogen einer Hyperbel H, deren Brennpunkte A und B sind, und zwar wenn $m > l$ ist, einen Theil des B einschliessenden Zweiges. In der That ist $AC + CD = m$, ebenso $BC + CD = l$, also bleibt die Differenz dieser beiden Summen: $AC - CB = m - l$ constant. Hiebei ist vorausgesetzt, dass C immer auf der Strecke AD selbst liege; würde man mit diesem Punkte während der Bewegung über D hinaus z. B. nach C' gelangen, so wäre $AC' - C'D = m$, $C'D + C'B = l$, also $AC' + C'B = m + l$, d. h. man bekäme ein Stück der Ellipse E mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $l + m$. Damit diese Construction, sei es für die Hyperbel oder die Ellipse ausführbar sei, muss sich aus l, m und $2c$ ein Dreieck bilden lassen; in dessen Spitze treffen E und H zusammen.

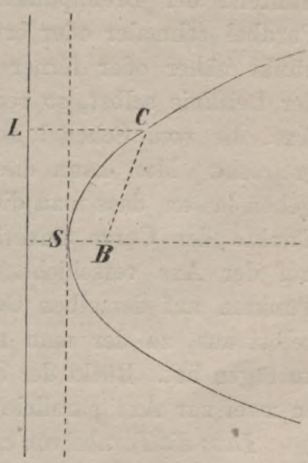
Fig. 36.



Obwohl mit Ellipse und Hyperbel auf's Innigste zusammenhängend, kann die *Parabel*, zu deren Betrachtung wir uns jetzt wenden, doch nicht vermittelst zweier Brennpunkte dargestellt werden; sie gehört also nicht zu denjenigen geometrischen Orten, welche im §. 7 vorzugsweise behandelt worden sind und denen sich dann naturgemäss Ellipse und Hyperbel angeschlossen haben. Wir geben folgende Definition:

Der geometrische Ort eines Punktes C, dessen senkrechter Abstand von einer festen Geraden L [der Leitlinie] gleich ist seinem Abstande von einem festen Punkte A [dem Brennpunkte], heisst Parabel.

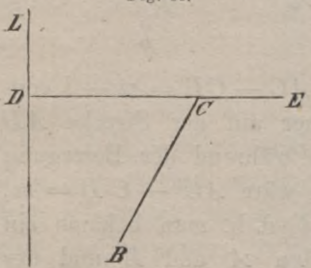
Fig. 37.



Die Parabel liegt ihrer ganzen Ausdehnung nach mit dem Brennpunkte auf derselben Seite der Leitlinie und hat das Perpendikel von B aus auf L, welches die *Axe* genannt wird, zur Symmetrieaxe. Auf diesem Perpendikel befindet sich in gleichem Abstande von L und von B ein Punkt der Curve, welcher *Scheitel* genannt wird; von dem Scheitel aus erstreckt sich die Parabel sowohl über als unter der Axe nach derselben Richtung hin ins Unendliche. Die Tangente im Scheitel, die wir späterhin häufig benutzen werden, soll *Scheiteltangente* heissen. Was also die Parabel in Bezug auf ihre Form wesentlich von Ellipse sowohl als von Hyperbel unterscheidet, ist, dass sie nur *einen* Brennpunkt, nur *eine* Axe, und auf dieser nur *einen* Scheitel hat.

Zur Vervollständigung der Anschauung dient die folgende mechanische Erzeugung: Ein Lineal von der Länge DE gleitet mit dem einen Ende D auf der Geraden L derart, dass es zu derselben stets senkrecht bleibt. Ein Faden von der Länge $DE = l$, dessen Enden in E und B befestigt sind, bleibt während der Bewegung stets mit dem Stifte C straff an das Lineal gespannt und beschreibt ein Stück der Parabel, welche B zum Brennpunkte und L zur Leitlinie hat. Die Richtigkeit der Construction folgt aus der Bemerkung, dass $l = DC + CE = BC + CE$ also $DC = CB$ ist.

Fig. 38.

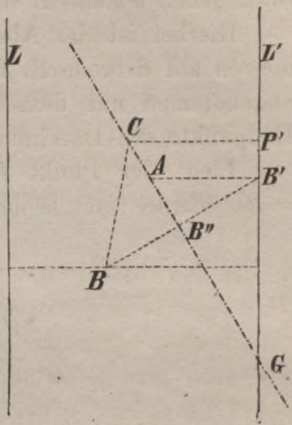


Die Gestalt der Parabel ist einzig abhängig von der Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie, da, wie man leicht zeigen kann, *alle Parabeln ähnlich sind.* Hält man die Leitlinie und die Axe fest, während der Brennpunkt auf der letztern sich bewegt, so wird die Parabel schmaler oder erweiterter erscheinen, je nachdem der Brennpunkt näher oder ferner von der Leitlinie sich befindet; liegt er auf der Leitlinie selbst, so reduzirt sich die Curve auf die doppelt gelegte Axe, die vom Scheitel aus nach einer Seite hin sich in's Unendliche erstreckt. Man kann die Veränderung der Parabel auch so vor sich gehen lassen, dass man die Axe und zwei zu ihr symmetrisch gelegene Punkte der Curve unverändert beibehält, während der Scheitel sich auf der Axe verschiebt. Liegt der Scheitel mit den festgehaltenen Punkten auf derselben Geraden, so artet die Parabel in diese Gerade selbst aus, zu der man noch die unendlich ferne Gerade der Ebene zu fügen hat. Rückt der Scheitel in's Unendliche, so zerfällt die Curve in zwei zur Axe parallele Gerade.

Dass die Parabel von einer Geraden G in nie mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann, wird wie folgt gezeigt: Sei L die Leitlinie, B der Brennpunkt einer Parabel, G eine beliebige Gerade, dann fälle man von B auf G ein Perpendikel und verlängere dasselbe um sich selbst nach B'. Zieht man nun durch B' eine Senkrechte L' und eine Parallele $B'A$

zur Axe, welche letztere auf G den Punkt A ergibt, so wird für einen Punkt C auf G welcher von A aus nach einer der beiden Seiten der Geraden G sich bewegt, die stets positive Differenz $CB - CP'$ [wo P' den Fusspunkt des von C auf L' gefällten Perpendikels bezeichnet] von Null an stetig zunehmen und beliebig gross werden können. Liegt also L' mit B auf derselben Seite von L, so wird diese Differenz auf jeder Seite von A aus auf G gerechnet nur einmal gleich dem Abstande der Geraden L und L', d. h. in diesem Falle gibt es auf der Geraden G zwei Punkte der Parabel. Wenn aber L' auf der andern Seite von L liegt, so schneidet G die Parabel gar nicht.

Fig. 39.



Ellipse, Hyperbel und Parabel mit den zugehörigen speziellen Fällen zusammengenommen, heissen *Curven zweiten Grades;* der Grund dieser Bezeichnung liegt darin, dass eine Gerade, wenn sie nicht selbst einen Bestandtheil desselben ausmacht, keines dieser Gebilde in mehr als zwei Punkten schneidet. Einer andern Eigenschaft wegen, die späterhin erörtert werden soll, werden sie auch unter dem Namen: *Kegelschnitte* zusammengefasst, dessen wir uns von nun an bedienen wollen. Wir haben also folgende Kegelschnitte:

1. Die *Ellipse* und ihre speziellen Fälle: der *Kreis*, der *Punkt*, die *doppelt gelegte Strecke.*

2. Die *Hyperbel* und ihre speziellen Fälle: *die gleichseitige Hyperbel*, *zwei sich schneidende Gerade*, *eine doppelt gelegte Gerade, auf welcher eine Strecke ausgefallen ist.*

3. Die *Parabel* und ihre speziellen Fälle, welche ebensowohl Ellipse als Hyperbel oder Parabel genannt werden können: *zwei parallele Gerade*, eine einseitig begränzte, *doppelt gelegte Gerade, eine Gerade zusammengenommen mit* G_∞, *die doppelt gelegte* G_∞ wenn G_∞ die unendlich entfernte Gerade der Ebene bedeutet.

§. 9. Gemeinsamer Ursprung der Kegelschnitte.

Die Lehre vom geometrischen Orte ergibt ausser den bereits benutzten Definitionen für die Kegelschnitte, welche die fundamentalen sind, noch andere, die vor ihnen den Vortheil haben, dass sie Ellipse, Hyperbel und Parabel gleichartig bestimmen, während bis jetzt die

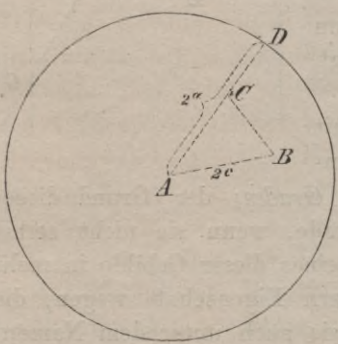
Parabel eine scheinbare Ausnahmestellung einnahm. Von besonderem Interesse ist die nachfolgende:

Der geometrische Ort eines Punktes C, welcher gleichviel absteht von einem festen Punkte B und von einem Kreise A ist ein Kegelschnitt.

Hierbei ist der Abstand des Punktes vom Kreise vorderhand gemessen auf dem durch ihn gehenden Durchmesser und zwar als gleich angenommen mit dem Abstande des Punktes von dem ihm nähern Endpunkte des Durchmessers.

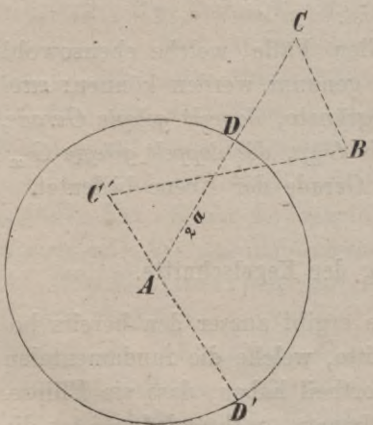
Liegt der Punkt B innerhalb des Kreises A, so dass also $AB = 2c$ kleiner ist als der Radius $AD = 2a$ des Kreises, so hat man, wenn AD der durch C gehende Radius ist: $AC + CD = 2a$. Aber nach der gestellten Bedingung ist $CD = CB$, also $AC + CB = 2a$, d. h. der Punkt C bewegt sich auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B, deren grosse Axe gleich $2a$ und deren Brenndistanz gleich $2c$ ist. Die Ellipse liegt ganz innerhalb des Kreises; wenn B mit A zusammenfällt, so wird sie zu einem Kreise vom Radius a, der dem gegebenen conzentrisch ist. Liegt B auf dem Kreise selbst, so reduzirt sich die Ellipse auf den doppelt gelegten Radius AB.

Fig. 40.



Nehmen wir den Punkt B ausserhalb des Kreises an, dann erhalten wir für einen Punkt C des gesuchten Ortes, der ebenfalls ausserhalb des Kreises und zwar näher bei B als bei A liegt: $AC - CD = 2a$, wo D der Schnittpunkt der Geraden AC mit dem Kreise und $2a$ wiederum der Radius dieses Kreises sein soll. Da aber $CD = CB$ verlangt wird, so erhalten wir $AC - CB = 2a$, d. h. der Ort von C ist der den Brennpunkt B umschliessende Zweig der Hyperbel mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $2a$. Um die Bedeutung des zweiten, A umschliessenden Zweiges der Hyperbel zu finden, wähle man einen beliebigen Punkt C' desselben, der also näher an A als an

Fig. 41.



B liegt, ziehe die Gerade $C'A$ und verlängere sie über A hinaus, bis sie den Kreis in einem Punkte D' schneidet. Da C' auf dem zweiten Zweige der Hyperbel liegt, so ist für ihn $BC' - C'A = 2a$, also $BC' = C'A + 2a = C'A + AD' = C'D'$. Wir haben also in diesem Falle nicht den vorhin definirten Abstand des Punktes C' vom Kreise gleich dem Abstand des Punktes C' von B, sondern an Stelle des ersten tritt ein Werth, der ihn entweder zu einem Durchmesser ergänzt, oder der um einen Durchmesser grösser ist, je nachdem C' innerhalb oder ausserhalb des Kreises A liegt.

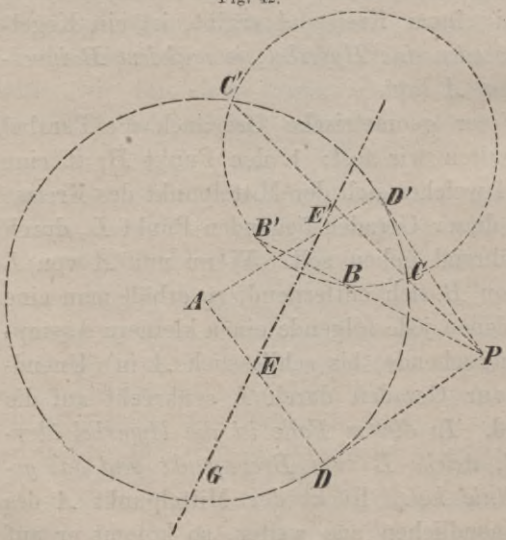
Der Grund dieser Erscheinung liegt in Folgendem: der Abstand eines Punktes von einer Linie ist an sich genommen etwas Unbestimmtes, da man den gegebenen Punkt mit jedem beliebigen Punkte der Linie zusammennehmen und ihre Entfernung als den verlangten Abstand bezeichnen kann. Man wählt nun unter allen diesen Abständen diejenigen aus, welche entweder ein Maximum oder ein Minimum sind; diese stehen, wie leicht zu zeigen ist, in ihren Fusspunkten auf der Linie senkrecht. Bei der Geraden tritt bekanntlich nur ein *Minimum* ein, beim Kreise aber sowohl ein *Maximum* als ein *Minimum*, andere Linien ergeben sogar mehrere Maxima und Minima, und jedes derselben kann im engern Sinne als Abstand des Punktes von der Linie aufgefasst werden. Wir werden also den vorhin entwickelten Satz jetzt vollständiger aussprechen, indem wir sagen: Der geometrische Ort eines Punktes C, der gleichen Abstand von einem festen Punkte B und einem Kreise A ergibt, ist ein Kegelschnitt *und zwar eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem B innerhalb oder ausserhalb des Kreises A liegt.*

Um zu zeigen, dass dieser geometrische Ort auch die Parabel als speziellen Fall zulässt, halten wir fest: 1. den Punkt B, 2. eine durch B gehende Gerade, auf welcher sich der Mittelpunkt des Kreises A bewege und 3. einen auf dieser Geraden liegenden Punkt L, durch welchen der Kreis A fortwährend gehen soll. Wenn nun A von L aus sich bewegt und zwar von B sich entfernend, so erhält man eine Schaar von Hyperbeln, von denen jede folgende einen kleinern Asymptotenwinkel hat, als die vorhergehende, bis schliesslich A in's Unendliche rückt und der Kreis zur Geraden durch L senkrecht auf die Gerade der Mittelpunkte wird. *In diesem Falle ist die Hyperbel übergegangen in diejenige Parabel, welche B zum Brennpunkt und das genannte Perpendikel zur Leitlinie hat.* Rückt der Mittelpunkt A des beweglichen Kreises vom Unendlichen aus weiter, so kommt er auf der andern Seite von L wieder zum Vorschein und der Kegelschnitt wird zur Ellipse. In dieser Weise ist also die Parabel als Verbindungsglied zwischen Ellipse und Hyperbel und als spezieller Fall beider Arten von Kegelschnitten dargestellt. Es ergibt sich aus dieser Betrachtung auch, *dass die Parabel zwei Brennpunkte hat, von denen aber einer in unendlicher Entfernung liegt; ebenso hat sie einen unendlich entfernten Mittelpunkt, einen unendlich entfernten Scheitel der grossen Axe und eine unendlich entfernte Nebenaxe.*

Mit der so eben erörterten Erzeugung der Kegelschnitte ist die nachfolgende identisch: *Der geometrische Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der stets durch einen festen Punkt B geht und einen gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$ berührt, ist ein Kegelschnitt, welcher A und B zu Brennpunkten und $2a$ zur grossen Axe hat.* Der Kreis A und der Punkt B bestimmen den Kegelschnitt vollständig und umgekehrt kann man einen gegebenen Kegelschnitt, der durch seine grosse Axe $2a$ und seine Brennpunkte A und B bestimmt ist, stets in einen derartigen geometrischen Ort verwandeln. Man schlage um A als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius $2a$, dann ist der Kegelschnitt identisch mit dem geometrischen Orte der Mittelpunkte aller Kreise, die durch B gehen und den Kreis A berühren. Die Parabel fügt sich ein, sobald man die Leitlinie als Kreis von unendlich grossem Radius auffasst.

Man ist durch diese Erzeugungsart in den Stand gesetzt, mit Hülfe von früher angegebenen Constructionen *den Durchschnitt einer beliebigen Geraden zu finden mit einer Ellipse oder Hyperbel, sofern man von derselben die Brennpunkte und die grosse Axe kennt, oder mit einer Parabel, von welcher Leitlinie und Brennpunkt gegeben sind.*

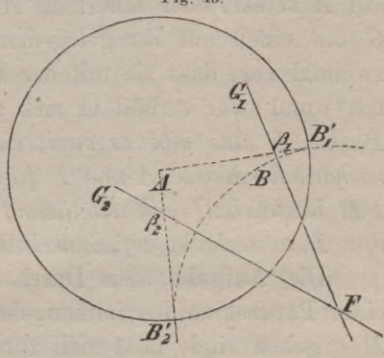
Fig. 42.



Seien A und B die Brennpunkte einer Ellipse mit der grossen Axe $2a$, ferner sei G eine beliebige Gerade, deren Durchschnitt mit der Ellipse bestimmt werden soll. Zu diesem Zwecke schlage man um A als Mittelpunkt einen Kreis vom Radius $2a$, dann ist die Aufgabe zurückgeführt auf die andere: einen Kreis zu finden, der durch B geht den Kreis A berührt und seinen Mittelpunkt auf G liegen hat. Die Gerade G ist, da sie den Mittelpunkt des gesuchten Kreises enthält, ein Durchmesser desselben, und also eine Symmetrieaxe für ihn; fällt man demnach von B aus auf G ein Perpendikel und verlängert dasselbe über G hinaus um sich selbst nach B', so ist B' ebenfalls ein Punkt des gesuchten Kreises. Wir haben jetzt nur noch einen Kreis zu construiren, welcher durch die zwei Punkte B und B' geht und einen gegebenen Kreis A berührt. Diese Aufgabe, welche je nach der Lage von B und B' zum Kreise A zwei, eine oder keine Lösung zulässt, ist bereits in § 2 wie folgt behandelt worden: Man lege durch BB' einen beliebigen Kreis, der A in den Punkten C und C' begegnen möge; von dem Durchschnitt P der Geraden CC' und BB' ziehe man die Tangenten an A, so sind deren Berührungspunkte D und D' zugleich die Berührungspunkte der gesuchten Kreise. Die Mittelpunkte derselben, welche die gesuchten Ellipsenpunkte sind, findet man, indem man jeden der Berührungspunkte D und D' mit dem Mittelpunkte A durch eine Gerade verbindet und deren Durchschnitte E und E' mit G bestimmt. — In dieser Construction erblickt man einen neuen Beweis des Satzes, dass eine Ellipse von einer Geraden nie in mehr als zwei Punkten geschnitten werden kann.

Dreht man die Gerade G um einen beliebigen auf ihr gelegenen Punkt F, so kann man versuchen, für jede Lage von G die auseinandergesetzte Construction ihrer Schnittpunkte mit der Ellipse anzuwenden. Da $FB' = FB$ ist, so wird bei der vorgeschriebenen Drehung von G der Punkt B' sich auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte F und dem Radius FB bewegen, da F und B unverändert bleiben. Nun hängt die Möglichkeit, Schnittpunkte von G mit der Ellipse zu finden, davon ab, Kreise zu finden, die durch die Punkte B und B' gehen und den Kreis A berühren. Weil B innerhalb A liegt, so muss dasselbe mit B' der Fall sein, wir finden demnach als äusserste Grenze für das Vorhandensein von Schnittpunkten solche Gerade G, deren zugehörige Punkte B' auf dem Umfange von A enthalten sind. Die Kreise A und F schneiden sich im Allgemeinen in zwei Punkten B_1' und B_2'; fällt man von F aus ein Perpendikel G_1 auf BB_1', so ist diess ein Grenzfall derart, dass G_1 mit der Ellipse

Fig. 43.



nur einen einzigen Punkt gemein hat, nämlich den Schnittpunkt β_1 von G_1 und AB_1', analog verhält es sich mit dem Perpendikel G_2 von F auf BB_2', welches der Ellipse in dem Schnittpunkte β_2 von G_2 und AB_2' begegnet. Von den durch F gehenden Geraden hat jede in dem Winkelraume $\beta_1 F \beta_2$ enthaltene zwei Punkte, G_1 und G_2 je nur einen, jede ausserhalb des Winkels $\beta_1 F \beta_2$ enthaltene aber keinen Punkt mit der Ellipse gemein. Nennt man eine Gerade, auf welcher nur ein einziger Punkt der Ellipse liegt, *Tangente* derselben, so haben wir den Satz: *Von einem Punkte F aus gehen an eine Ellipse im Allgemeinen zwei Tangenten.* Diese sind wirklich vorhanden (und mit ihnen die Punkte B'_1 und B'_2), wenn die Kreise A und F sich schneiden, sie sind nicht vorhanden, wenn A und F sich nicht schneiden; wenn A und F sich berühren, so gibt es nur noch eine einzige Tangente. Im ersten Falle liegt der Mittelpunkt F ausserhalb der Ellipse, im zweiten innerhalb, im dritten auf der Ellipse selbst.

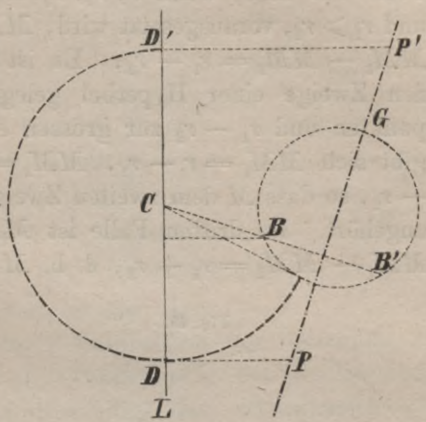
Man hat an diesen Entwicklungen nur geringe Modificationen anzubringen, um sie von der Ellipse auf die Hyperbel überzutragen. Wenn eine Gerade G die Hyperbel mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $2a$ schneiden, berühren oder nicht schneiden soll, so muss, da jetzt B ausserhalb des um A mit dem Radius $2a$ beschriebenen Kreises liegt, das um sich selbst verlängerte Perpendikel von B auf G einen Endpunkt B' ergeben, der ausserhalb A, auf A selbst, oder innerhalb A sich befindet. Dreht man die Gerade G um einen auf ihr gelegenen Punkt, so kommt es im Allgemeinen zweimal vor, dass sie mit der Hyperbel einen einzigen Punkt gemein hat*) und zwar verhält es sich gerade wie bei der Ellipse: *Von einem Punkte F aus gibt es zwei, eine, keine Tangente an die Hyperbel, je nachdem die Kreise A und F [der letztere wieder um F mit dem Radius FB beschrieben] sich schneiden, berühren, nicht schneiden d. h. je nachdem F ausserhalb, auf, innerhalb der Hyperbel liegt.*

Die Aufgabe, den Durchschnitt einer beliebigen Geraden G mit einer Parabel zu bestimmen, deren Leitlinie L und deren Brennpunkt B gegeben sind, lässt sich zurückführen auf die andere: durch einen Punkt B einen Kreis zu legen, der eine Gerade L berührt und seinen Mittelpunkt auf einer andern Geraden G liegen hat. Fällt man von

*) Geht G parallel zu einer Asymptote der Hyperbel H, so ist BB' eine Tangente an den Kreis A und es befindet sich nur ein Schnittpunkt von G und H im Endlichen; der andere liegt im Unendlichen, so dass noch immer zwei von einander verschiedene Schnittpunkte vorhanden sind. Aehnliches tritt für die Parabel ein, wenn eine Gerade parallel zur Axe gezogen wird.

B aus ein Perpendikel auf G und verlängert dasselbe um sich selbst nach B', so ist noch nöthig, einen Kreis durch B und B' zu legen, der L berührt. Nach § 1 lässt diese Aufgabe je nach der Lage von B und B' zu L zwei, eine oder keine Lösung zu und wird wie folgt behandelt: Durch B und B' lege man einen willkürlichen Kreis, an den man von dem Durchschnitt C der Geraden L und BB' die Tangenten zieht; mit der Länge dieser Tangenten schlage man um C einen Kreis, welcher L in den Berührungspunkten D und D' der gesuchten Kreise trifft. Ihre Mittelpunkte findet man, indem man die Durchschnitte P und P' der in D und D' auf L errichteten Perpendikel mit G bestimmt; diese Punkte P und P' sind die gesuchten Parabelpunkte.

Fig. 44.



Dreht man G um einen festen Punkt F, so beschreibt B' den Kreis mit dem Mittelpunkte F und dem Radius FB, welcher der Leitlinie im Allgemeinen in zwei Punkten B_1' und B_2' begegnen wird, deren zugehörige Geraden G Tangenten der Parabel sind. Also: *Von einem Punkte F aus gehen an eine Parabel zwei, eine oder keine Tangente, je nachdem der Kreis F und die Gerade L sich schneiden, berühren oder nicht schneiden, d. h. je nachdem F ausserhalb, auf oder innerhalb der Parabel liegt.*

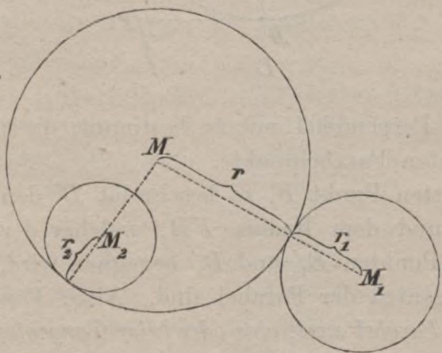
Ellipse, Hyperbel und Parabel theilen, wie wir jetzt bewiesen haben, die Eigenschaft, dass von einem Punkte der Ebene aus an eine dieser Curven im Allgemeinen zwei und höchstens zwei Tangenten gehen; sie werden desshalb *Curven zweiter Klasse* genannt.

Von den unendlich vielen von einander verschiedenen Möglichkeiten, die Kegelschnitte im Allgemeinen, oder spezielle Fälle derselben als geometrische Oerter darzustellen, sollen zur Anwendung des bis jetzt Gegebenen, einige sich hier leicht einfügende folgen.

1. *Der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise berühren, besteht aus zwei Kegelschnitten, von denen jeder die Mittelpunkte der festen Kreise zu Brennpunkten hat, während die grossen Axen resp. der Summe oder Differenz ihrer Radien gleich sind.*

Setzen wir zunächst voraus, dass von den Kreisen M_1 und M_2 jeder den andern ausschliesse, so kann der Kreis M vier wesentlich verschiedene Lagen gegen dieselben annehmen: indem er M_1 und M_2 beide ausschliesst, oder beide einschliesst, oder M_1 ausschliesst und M_2 einschliesst, oder M_1 einschliesst und M_2 ausschliesst. Im ersten Falle hat man, wenn r, r_1, r_2 die Radien von M, M_1, M_2 bedeuten und $r_1 > r_2$, vorausgesetzt wird, $MM_1 = r_1 + r$, $MM_2 = r_2 + r$ und $MM_1 - MM_2 = r_1 - r_2$. Es ist also M auf dem M_2 umschliessenden Zweige einer Hyperbel gelegen, welche M_1 und M_2 zu Brennpunkten und $r_1 - r_2$ zur grossen Axe hat. Für den zweiten Fall ergibt sich $MM_1 = r - r_1$, $MM_2 = r - r_2$ und $MM_2 - MM_1 = r_1 - r_2$, so dass M dem zweiten Zweige der eben beschriebenen Hyperbel angehört. Im dritten Falle ist $MM_1 = r + r_1$, $MM_2 = r - r_2$ also $MM_1 - MM_2 = r_1 + r_2$, d. h. M liegt auf dem M_2 umschliessenden Zweige der Hyperbel mit den Brennpunkten M_1 und M_2 und der grossen Axe $r_1 + r_2$. Im letzten Falle findet man für M den anderen Zweig dieser Hyperbel. Da eine Gerade G, welche M_1 und M_2 gleichzeitig berührt, als eine spezielle Lage des Kreises M angesehen werden kann, dessen Mittelpunkt alsdann im Unendlichen, in einer zu G senkrechten Richtung enthalten ist, so ergeben sich die Asymptoten der beiden Hyperbeln, indem man aus der Mitte von $M_1 M_2$ das eine Mal Perpendikel auf die beiden äussern, das andere Mal auf die innern gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kreise fällt.

Fig. 45.



Wenn M_1 und M_2 sich schneiden, so ist von den beiden Kegelschnitten der eine Hyperbel, der andere Ellipse, liegt M_2 ganz innerhalb M_1, so sind beide Ellipsen. Artet M_1 in eine Gerade G aus, so erhält man zwei Parabeln, welche M_2 zum gemeinschaftlichen Brennpunkte haben und deren Leitlinien zu beiden Seiten von G im Abstand r_2 liegen. Die übrigen mannigfachen Spezialfälle erledigen sich ebenso leicht.

2. *Liegen drei Punkte A, M, B in einer Geraden so, dass M die Mitte der Strecke AB ist und besteht zwischen den Abständen x, y, z eines Punktes C von A, M und B die Relation $xz + y^2 = d^2$, so ist der Ort von C eine Ellipse mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $\sqrt{2(c^2 + d^2)}$.*

Man hat nach einem elementaren Satze

$$x^2 + z^2 = 2y^2 + 2c^2$$

während zugleich in Folge der Bedingungsgleichung

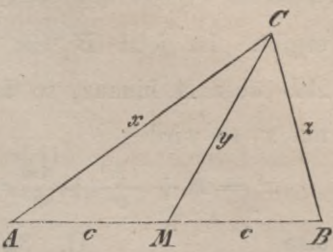
$$2xz = 2d^2 - 2y^2$$

ist; durch Addition folgt hieraus

$$(x + z)^2 = 2(c^2 + d^2)$$

was den ausgesprochenen Satz beweist. Die kleine Axe der Ellipse ist durch $\sqrt{2(d^2 - c^2)}$ gegeben; damit der Ort von C also wirklich vorhanden sei, muss $d > c$ sein.

Fig. 46.



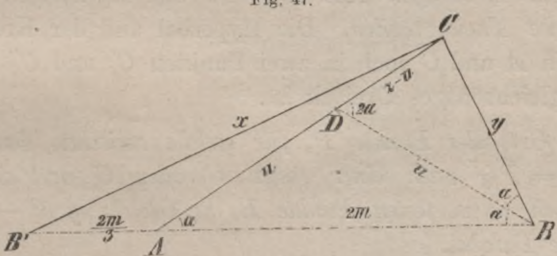
Für $xz - y^2 = d^2$ ist der Ort von C eine Hyperbel mit A und B als Brennpunkte und $\sqrt{2(c^2 - d^2)}$ als grosser Axe.

Diess Resultat ergibt sich durch Subtraction der Gleichung $2xz = 2y^2 + d^2$ von der schon vorhin angewendeten: $x^2 + z^2 = 2y^2 + 2c^2$. [Damit Punkte C existiren ist nothwendig, dass d^2 zwischen $+ c^2$ und $- c^2$ liege.] Der halbe Asymptotenwinkel der gefundenen Hyperbel ist durch $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2(c^2 - d^2)}}{2c}$ gegeben, *man bekommt also für die Gleichung $xz = y^2$ eine gleichseitige Hyperbel.*

3. *Bleibt von einem Dreieck ABC die Grundlinie AB fest, während die Spitze C sich unter der Bedingung bewegt, dass der Winkel bei B stets das Doppelte von demjenigen bei A betrage, so ist ihr Ort eine Hyperbel vom Asymptotenwinkel 120^0, für welche B ein Brennpunkt und A der nicht zugehörige Scheitel ist.*

Sei $AC = z$ und $CB = y$, so hat man, wenn D der Schnitt-

Fig. 47.



punkt der Winkelhalbirenden bei B mit der Gegenseite AC, ferner $AB = 2m$ und $AD = u$ ist, aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABC und BDC die Proportion

$$y : z : 2m = z - u : y : u,$$

demnach gelten die Gleichungen

$$y^2 = z^2 - zu \text{ und } 2my = zu,$$

deren Addition

$$\text{I.}\quad y^2 + 2my = z^2$$

ergibt. Ist jetzt B' ein Punkt auf der Verlängerung der Strecke AB über A hinaus, so das $B'A = \frac{2m}{3}$, und bezeichnet man $B'C$ mit x, so wird

$$x^2 = z^2 + \frac{4m^2}{9} + \frac{4m}{3} z \cos\alpha \text{ und } y^2 = z^2 + 4m^2 - 4mz\cos\alpha$$

also

$$\text{II.}\quad 3x^2 + y^2 = 4z^2 + \frac{16}{3}m^2.$$

Die Elimination von z^2 aus I. und II. ergibt

$$3x^2 = 3y^2 + 8my + \frac{16}{3}m^2,\quad x^2 = (y + \tfrac{4}{3}m)^2$$

und wird die Quadratwurzel ausgezogen: entweder

$$x - y = \frac{4}{3}m,\quad \text{oder}\quad x + y = -\frac{4}{3}m.$$

Die zweite Lösung ist unbrauchbar, da $x + y > BB$ oder $\frac{8m}{3}$ sein muss, die erste gibt eine Hyperbel mit den Brennpunkten B und B', für welche die Brenndistanz $2c = \frac{8m}{3}$ und die grosse Axe $2a = \frac{4m}{3}$ ist. Der halbe Asymptotenwinkel φ ist gegeben durch $\cos\varphi = \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$, also wird $\varphi = 60^0$ und $2\varphi = 120^0$. Jeder Scheitel ist vom Mittelpunkt und vom zugehörigen Brennpunkt gleichweit, um $\frac{2m}{3}$ entfernt.

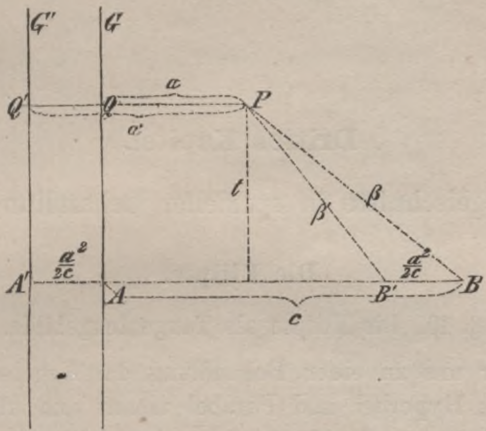
Legt man durch ABC einen Kreis, so ist der Bogen AC doppelt so gross als der Bogen BC, *man kann also vermittelst der beschriebenen Hyperbel einen Kreisbogen AB oder den ihm zugehörigen Centriwinkel in drei gleiche Theile theilen.* Die Hyperbel und der Kreis begegnen sich ausser in A und C noch in zwei Punkten C' und C'' derart, dass $CC'C''$ ein gleichseitiges Dreieck ist.

4. *Der Ort aller Punkte P, für welche zwischen dem senkrechten Abstande $\alpha = PQ$ nach einer festen Geraden G und dem Abstande $\beta = PB$ nach einem festen Punkte B die Gleichung $\beta^2 - \alpha^2 = a^2$ besteht, ist eine Parabel.*

Ist A der Fusspunkt des von B auf G gefällten Perpendikels und $AB = c$ so trage man von B aus gegen A hin die Strecke $BB' = \frac{a^2}{2c}$ ab, bestimme, in derselben Richtung von A ausgehend einen Punkt A', so dass auch $AA' = \frac{a^2}{2c}$ ist und ziehe durch denselben eine Parallele G' zu G, so sind B' und G' Brennpunkt und Leitlinie der Parabel des

Punktes P. Zum Beweise sei $PB' = \beta'$, ferner werde der senkrechte Abstand von P nach G' mit $PQ' = \alpha'$ und der senkrechte Abstand von P nach AB mit t bezeichnet. Man hat jetzt:

Fig. 48.



$$\alpha' = \alpha + \frac{a^2}{2c}, \text{ also } \alpha'^2 - \alpha^2 = \frac{a^2}{c}\alpha + \frac{a^4}{4c^2};$$

im Weitern ergeben die Gleichungen

$$\beta^2 = (c - \alpha)^2 + t^2, \quad \beta'^2 = \left(c - \alpha - \frac{a^2}{2c}\right)^2 + t^2$$

durch Subtraction

$$\beta^2 - \beta'^2 = a^2 - \frac{a^2}{c}\alpha - \frac{a^4}{4c^2}.$$

Es ist also $(\alpha'^2 - \alpha^2) + (\beta^2 - \beta'^2) = a^2$ und da zufolge der Bedingungsgleichung $\beta^2 - \alpha^2 = a^2$ ist.

$$\alpha'^2 - \beta'^2 = 0 \text{ oder } \alpha' = \beta'.$$

wodurch der Ort von P als eine Parabel mit den angegebenen Elementen nachgewiesen ist. Es mag noch erwähnt werden, dass sie die Schnittpunkte der Geraden G mit demjenigen Kreise enthält, der um B herum mit dem Radius a beschrieben ist.

Drittes Kapitel.

Die Kegelschnitte in spezieller Behandlungsweise.

Die Ellipse.

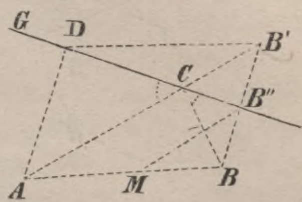
§. 10. Die Ellipse als Tangentengebilde.

Indem wir uns zu einer Behandlung der Kegelschnitte wenden, welche Ellipse, Hyperbel und Parabel trennt und als von einander verschiedene Curven auffasst, werden wir nicht vermeiden können, einige der bereits im ersten Abschnitte gefundenen Resultate noch einmal abzuleiten. Es ist dabei unser Zweck, in möglichst elementarer Weise die Brennpunktseigenschaften zu erörtern, wobei es vortheilhaft ist, den Kegelschnitt als Tangentengebilde zu erzeugen. Zur Definition der Tangenten eines Kegelschnittes gelangen wir von dem Satze aus, dass als Grenzfall zwischen den Geraden, welche den Kegelschnitt in zwei von einander verschiedenen Punkten und denjenigen, welche ihn gar nicht treffen, solche Gerade sich einstellen, welche nur einen einzigen Punkt mit ihm gemein haben. Diese werden *Tangenten* genannt. In Anwendung auf die Ellipse, welche wir zuerst betrachten wollen, lautet demnach die Definition:

Hat eine Gerade G mit der Ellipse [mit den Brennpunkten A und B und der grossen Axe $2a$] *nur einen einzigen Punkt C gemein, so heisst dieselbe die Tangente der Ellipse im Punkte C, und C heisst ihr Berührungspunkt.* Alle Punkte der Tangente mit Ausnahme von C liegen ausserhalb der Ellipse, und da für jeden Punkt ausserhalb der Ellipse $AD + DB > 2a$ ist, so hat der Berührungspunkt C der Tangente die Eigenschaft, dass er von allen Punkten der Geraden G das Minimum der Summe der Abstände von A und B bestimmt. Betrachten wir die Punkte A und B und die Gerade G [welche die Gerade AB ausserhalb der Strecke AB schneidet], so haben wir demnach den Berührungspunkt C auf G so zu bestimmen, dass $AC + CB$ ein Minimum wird.

Zu dem Ende fällen wir von B das Perpendikel BB'' auf G und verlängern dasselbe um sich selbst nach B'. [Dieser Punkt B' soll künftighin *der Gegenpunkt von B in Bezug auf G* genannt werden.] Zieht man jetzt die Gerade AB', so schneidet diese auf G den gesuchten Punkt C aus. Man hat in der That, da $AC + CB = AC + CB'$ ist, für jeden beliebigen Punkt D auf G: $AD + DB > AC + CB$. Es ist aber $\sphericalangle ACD = B''CB'$ und aus der Congruenz der Dreiecke BCB'' und $B'CB''$ folgt ferner $\sphericalangle ACD = BCB''$, d. h. AC und CB bilden mit G gleiche Winkel. Auf die Ellipse angewandt gibt diess den Satz: *Die Tangente G in einem Punkte C der Ellipse bildet mit den Leitstrahlen AC und CB gleiche Winkel.* Da $B'C = CB$ ist, so folgt $AC + CB' = AB' = 2a$, und da G eine beliebige Tangente der Ellipse sein kann, so folgt: *Bestimmt man die Gegenpunkte B' eines Brennpunktes B der Ellipse in Bezug auf alle Tangenten derselben, so liegen diese Punkte B' auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte A und dem Radius 2a.* —

Fig. 49.

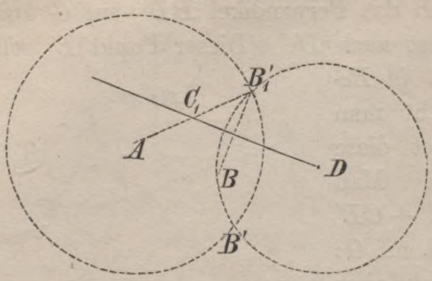


Wenn M der Mittelpunkt der Ellipse ist, so hat man $AM = MB$, ebenso ist $BB'' = B''B'$, also sind die Dreiecke $AB'B$ und $MB''B$ ähnlich und ihre Seiten verhalten sich wie $2:1$; daraus folgt: $AB' = 2a = 2MB''$ oder $MB'' = a$, d. h.: *Fällt man von einem Brennpunkte aus Perpendikel auf alle Tangenten der Ellipse, so liegen deren Fusspunkte auf einem Kreise mit dem Mittelpunkte M und dem Radius a*, oder, da was für den einen Brennpunkt gilt, sofort auch für den andern bewiesen werden kann: *Fällt man von den Brennpunkten aus Perpendikel auf alle Tangenten einer Ellipse, so liegen deren Fusspunkte auf dem Kreise, welcher über der grossen Axe als Durchmesser errichtet ist.* Dieser Satz kann auch umgekehrt werden und lautet dann: *Werden von einem Punkte A innerhalb eines Kreises M Sehnen durch diesen gezogen, und in deren Endpunkten jeweilen Perpendikel auf die zugehörigen Sehnen errichtet, so umhüllen alle diese Perpendikel eine Ellipse, welche A zum Brennpunkt und den durch A gehenden Durchmesser von M zur grossen Axe hat.*

Vermittelst dieser Sätze kann man die Aufgabe lösen: *Von einem gegebenen Punkte D aus die Tangenten an eine Ellipse zu ziehen, von welcher man die Brennpunkte A und B und die grosse Axe 2a kennt.*

Sei B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf die gesuchte Tangente, so ist $DB = DB'$; um also B' zu finden, schlage man um A einen

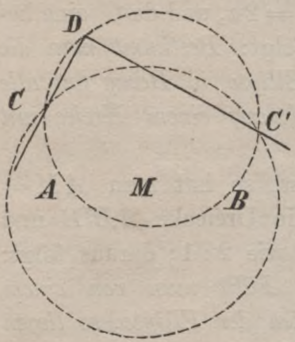
Fig. 50.



Kreis mit dem Radius $2a$ und um D einen Kreis mit dem Radius DB, so treffen sich diese beiden Kreise in zwei Punkten B' und B_1', von denen jeder als der Gegenpunkt von B in Bezug auf eine durch D gehende Tangente angesehen werden kann. Um diejenige Tangente, die z. B. B_1' entspricht, zu finden, fälle man von D aus das Perpendikel auf BB_1'; der Berührungspunkt C_1 dieser Tangente ist ihr Durchschnitt mit AB_1'.

Eine zweite Lösung ist die folgende: Der noch unbekannte Fusspunkt C des von B aus auf die gesuchte Tangente gefällten Perpendikels liegt nothwendigerweise auf dem Kreise, welcher über der grossen Axe als Durchmesser errichtet worden ist. Da der Winkel DCB ein rechter ist, so muss C auch auf dem Kreise liegen, der über DB als Durchmesser errichtet ist. Die beiden genannten Kreise schneiden sich im Allgemeinen in zwei Punkten C und C', so dass sowohl DC als DC' eine durch D gehende Tangente an die gegebene Ellipse ist.

Fig. 51.

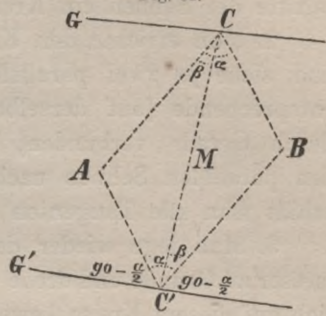


Da zwei Kreise entweder zwei Punkte gemein haben [sich schneiden], *oder einen* [sich berühren], *oder gar keinen* [sich nicht schneiden], *so kann man von einem Punkte aus zwei, eine, oder gar keine Tangente an eine Ellipse ziehen*, und zwar wie leicht einzusehen ist, *je nachdem der Punkt ausserhalb, auf, oder innerhalb der Ellipse liegt.* —

Die Aufgabe, Tangenten an die Ellipse zu ziehen, welche einer gegebenen Geraden G parallel sind, lässt sich auf die eben gelöste zurückführen, indem man den Punkt D zum unendlich entfernten Punkt der gegebenen Geraden G werden lässt. In diesem Falle artet der Kreis über dem Durchmesser DB in eine Gerade aus, welche durch B geht und senkrecht auf G steht. Da nun B innerhalb des Kreises liegt, welcher über der grossen Axe als Durchmesser errichtet ist, so schneidet diese senkrecht zu G gelegte Gerade den Kreis stets in zwei Punkten C und C', woraus folgt, *dass zu jeder beliebigen Richtung zwei parallele Tangenten an die Ellipse gezogen werden können.*

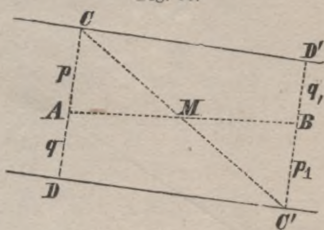
Jede durch den Mittelpunkt M der Ellipse gehende Gerade heisst *Durchmesser* der Ellipse; auf ihr liegen, wie in §. 3 bemerkt wurde, zwei Punkte der Curve, C und C', die gleichweit von M abstehen. Es gilt nun der Satz: *Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel.* Diess ist schon aus Gründen der Symmetrie klar, kann aber noch wie folgt bewiesen werden: Das Viereck $ACBC'$ ist ein Parallelogramm, also sind die beiden Winkel α einander gleich, ebenso die Winkel β. Da ferner die Leitstrahlen mit der Tangente gleiche Winkel einschliessen, so bilden die Geraden G und G' mit CC' nach entgegengesetzten Seiten den Winkel $\beta + 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, und sind desshalb parallel.

Fig. 52.



Fällt man aus den Brennpunkten A und B Perpendikel auf zwei parallele Tangenten G und G', deren Fusspunkte C und D, C' und D' sein mögen, so liegen, wie bereits bewiesen, die Ecken des Rechtecks $CDC'D'$ auf einem Kreise mit dem Radius a. Das Product der Strecken $AC \cdot AD = pq$ ist also der Potenz des Punktes A in Bezug auf den Kreis über der grossen Axe als Durchmesser gleich, d. h. constant, welche Richtung auch die parallelen Tangenten haben mögen. Da aber $p = p_1$ und $q = q_1$, so ist der Satz bewiesen: *Das Product der beiden Perpendikel, die man von den Brennpunkten aus auf eine Tangente der Ellipse fällen kann, hat einen Werth, der von der Lage der Tangente unabhängig ist.* Wählt man die Tangente in einem Scheitel der kleinen Axe, so wird $p = q = b$, d. h. *das Product $p \cdot q$ ist für jede Tangente gleich dem Quadrate der halben kleinen Axe.*

Fig. 53.



Wenn man die Ellipse nicht mechanisch beschreiben kann, so ist es vortheilhafter, statt ihre einzelnen Punkte zu construiren, dieselbe durch ihre Tangenten zu erzeugen. Diess kann, wenn die Brennpunkte A und B und die grosse Axe $2a$ gegeben sind, unter Zuhülfenahme der wenigen bis jetzt gegebenen Sätze auf nachfolgende verschiedene Weisen geschehen:

1. Um den Brennpunkt A beschreibe man einen Kreis mit dem Radius $2a$, in diesem durch B alle möglichen Sehnen; in dem Hal-

(jedes Teils)

~~birungs~~punkt jeder Sehne errichte man Perpendikel, so sind alle auf diese Weise entstandenen Perpendikel Tangenten an die Ellipse. Die Construction wird wesentlich erleichtert, da der Ort der Halbirungspunkte der Sehnen ein Kreis ist. Der Hauptkreis der neuen Ellipse

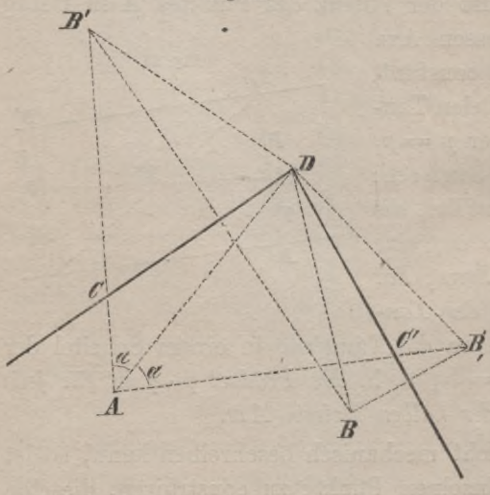
2. Man errichte den Kreis über der grossen Axe als Durchmesser und ziehe je zwei parallele Sehnen durch die Brennpunkte. Deren entsprechende [auf derselben Seite von AB gelegenen] Endpunkte durch Gerade verbunden, geben Tangenten der Ellipse. Gibt man den parallelen Sehnen nach und nach alle möglichen Richtungen, so erhält man alle Tangenten der Ellipse.

3. Man lege wieder den Kreis über der grossen Axe als Durchmesser zu Grunde und drehe einen rechten Winkel so, dass der Scheitel sich auf diesem Kreise bewegt, während der eine Schenkel stets durch den einen Brennpunkt geht; der andere wird dann in jeder seiner Lagen Tangente an die gesuchte Ellipse sein.

§. 11. Beziehungen zwischen zwei und mehr Tangenten der Ellipse. Normalen.

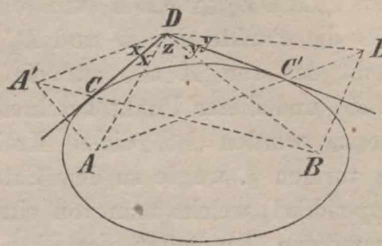
Es seien CD und $C'D$ die beiden von einem Punkte D aus an die Ellipse gezogenen Tangenten mit den Berührungspunkten C und C', ferner sei B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf DC und B'_1 der Gegenpunkt von B in Bezug auf $C'D$, dann ist $DB = DB'$ und $DB = DB_1'$, also $DB' = DB_1'$, ferner $AB' = AB_1' = 2a$ und AD sich selbst gleich. Die beiden Dreiecke ADB' und ADB_1' sind also congruent [sie haben die drei Seiten resp. gleich] und die entsprechenden Winkel stimmen überein, desshalb ist $\alpha = \alpha_1$. Diess gibt den Satz: *Zieht man von einem Brennpunkte aus Strahlen nach den Berührungspunkten zweier Tangenten der Ellipse, so wird der von ihnen gebildete Winkel durch denjenigen Strahl halbirt, welcher von dem nämlichen Brennpunkte aus nach ihrem Durchschnittspunkte geführt wird.*

Fig. 54.



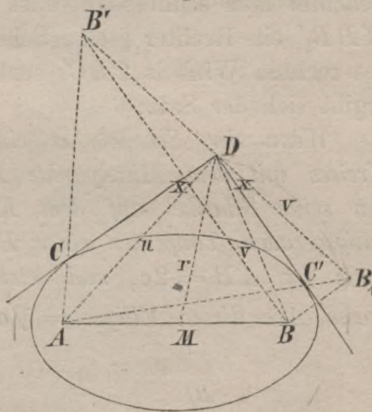
Wir betrachten wieder die beiden von D aus an die Ellipse gezogenen Tangenten DC und DC', dann den Gegenpunkt A' von A in Bezug auf DC und den Gegenpunkt B_1' von B in Bezug auf DC'. Es ist nun $A'B = AB_1' = 2a$, $AD = A'D$ und $BD = B_1'D$, also sind die Dreiecke $A'DB$ und ADB_1' congruent und desshalb $\sphericalangle A'DB = ADB_1'$ oder $2x + z = 2y + z$ und $x = y$, d. h. *Zieht man von einem Punkte aus die beiden Tangenten an die Ellipse und die beiden Strahlen nach den Brennpunkten, so bilden diese Strahlen mit den Tangenten resp. gleiche Winkel.*

Fig. 55.



Stehen die beiden Tangenten DC und DC' senkrecht aufeinander, so ist, da nach dem oben bewiesenen Satze $\sphericalangle CDA = C'DB_1'$, Winkel $ADB'_1 = 90^0$. Bezeichnet man die beiden von D nach den Brennpunkten gezogenen Strahlen mit u und v, so ist $AD^2 + DB^2 = u^2 + v^2$, und da $DB = DB_1'$ ist, auch $AD^2 + DB'^2_1 = u^2 + v^2$. Aber das Dreieck ADB_1' ist ein rechtwinkliges mit der Hypotenuse $AB_1' = 2a$, also hat man $u^2 + v^2 = 4a^2$. Sollen also die von einem Punkte D aus an die Ellipse gezogenen Tangenten rechtwinklig zu einander stehen, so muss D dem geometrischen Orte der Punkte angehören, für welche die Summe der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten constant ist; dieser Ort ist nach § 7 ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Nach der dort gegebenen Formel findet man für den Radius dieses Kreises: $r = \sqrt{\frac{4a^2 - 2c^2}{2}} = \sqrt{2a^2 - c^2}$; führen wir nun die kleine Axe der Ellipse ein, vermittelst der Relation $a^2 = b^2 + c^2$, so findet man schliesslich $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Diese Grösse wird construirt, indem man einen Scheitel der grossen Axe der Ellipse mit einem Scheitel der kleinen Axe verbindet. Man hat also den Satz: *Bewegt sich ein rechter Winkel dergestalt, dass seine Schenkel stets eine gegebene Ellipse berühren, so durchläuft sein Scheitel eine bestimmte Kreislinie, welche mit der Ellipse conzentrisch ist, und deren Radius gleichen*

Fig. 56.

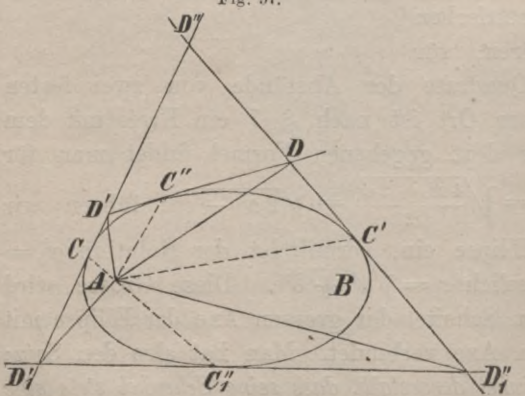


Werth hat, mit der Geraden, die in der Ellipse zwei Scheitel der beiden Axen verbindet.

Wenn B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf CD ist, so hat man $\triangle ADB_1' \cong ADB'$ und da $\sphericalangle ADB_1'$ ein rechter ist, so folgt, dass die Punkte B', D und B_1' in einer Geraden liegen. Der Fusspunkt des von A aus auf die Gerade $B'B_1'$ gefällten Perpendikels ist D, und dieser Punkt beschreibt, wenn $B'B_1'$ sich bewegt, wie bewiesen worden ist, einen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Im vorigen §. wurde zu dem Satze, dass der Ort der Fusspunkte aller Perpendikel, welche man von einem Brennpunkte der Ellipse aus auf sämmtliche Tangenten derselben fällen kann, der Kreis über ihrer grossen Axe als Durchmesser ist, eine Umkehrung gegeben. Wendet man dieselbe im vorliegenden Falle an, so erhält man das Resultat: Die Gerade $B'B_1'$ ist in allen ihren Lagen Tangente an eine Ellipse, welche mit der gegebenen die gleichen Brennpunkte A und B hat [mit ihr *confocal* ist] und deren halbe grosse Axe $= \sqrt{a^2 + b^2}$ ist. Beachtet man schliesslich, dass $AB' = AB_1' = 2a$, dass der Winkel $B'BB_1'$ ein Rechter [seine Schenkel stehen nämlich auf den Schenkeln des rechten Winkels CDC' senkrecht] und dass $B'D = DB_1'$ ist, so ergibt sich der Satz:

Wenn der Scheitel B eines rechten Winkels innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$ liegt, so schneiden seine Schenkel auf dem Kreise vier Punkte aus, deren Verbindungsgeraden Tangenten einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B sind; ist $AB = 2c$, und setzt man $a^2 - c^2 = b^2$, so ist die halbe grosse Axe dieser Ellipse $= \sqrt{a^2 + b^2}$. Dreht man also den rechten Winkel um B herum, so kann man beliebig viele Tangenten der Ellipse erzeugen. Die Mitten aller der genannten Verbindungsgeraden, welche die Tangenten ergeben, liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt M die Mitte der Strecke AB ist. Als Corollar folgt hieraus der elementare Satz: *Stehen die beiden Diagonalen eines Kreisviereckes senkrecht aufeinander, so liegen die Mitten seiner Seiten in einem neuen Kreise.* —

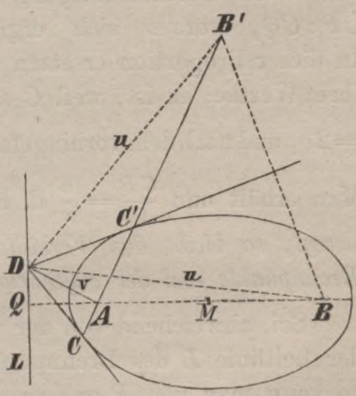
Fig. 57.



Werden zwei beliebige Tangenten $D''D'C$ und $D''DC'$ der Ellipse mit den Berührungspunkten C und C' festgehalten, und man legt eine dritte Tangente $DD'C''$ mit dem Berührungspunkt C' auf die Art, dass die Ellipse von dem entstehenden Dreieck ausgeschlossen wird, so ist nach dem ersten Satze dieses Paragraphen $\sphericalangle CAD' = D'AC''$ und $\sphericalangle C''AD = DAC'$, also $\sphericalangle D'AD = \frac{1}{2} CAC'$. *Wenn also die Tangente $DD'C''$ mit dem Berührungspunkt C'' auf dem Bogen CC' der Ellipse rollt, so bleibt der Winkel $D'AD$, unter welchem ihr zwischen den beiden festen Tangenten liegendes Stück gesehen wird, constant. Wenn aber die bewegliche Tangente mit den festen ein Dreieck bildet, welches die Ellipse einschliesst, so tritt an Stelle des Winkels $\frac{1}{2} CAC'$ sein Supplementarwinkel* $180^0 - \frac{1}{2} CAC'$. Hieraus folgt nun der Satz: *Zieht man von einem Brennpunkte der Ellipse aus Strahlen nach den Ecken eines ihr umschriebenen Viereckes, so bilden diese Strahlen vier Winkel, von denen, wenn das Viereck ein convexes* (von einem Umlaufe) *ist, je zwei auf gegenüberliegende Seiten sich stützende sich zu zwei Rechten ergänzen; ist das Viereck ein überschlagenes* (von zwei Umläufen), *so sind je zwei der genannten Winkel einander gleich.*

Aus dem Satze, dass die Strahlen von einem Brennpunkte aus nach den Berührungspunkten und nach dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten gleiche Winkel mit einander bilden, folgt der nachstehende:

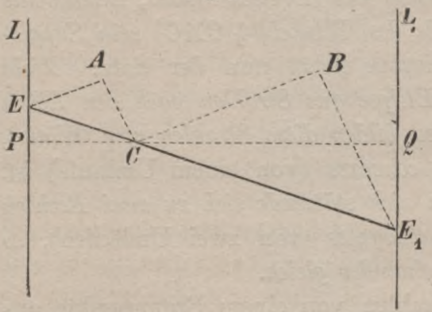
Fig. 58.



Sind DC und DC' zwei Tangenten, deren Berührungssehne CC' durch den Brennpunkt A geht, so steht DA senkrecht auf CC'. Construirt man jetzt den Gegenpunkt B' von B in Bezug auf die Tangente DC_1', so ist das Dreieck DAB' ein rechtwinkliges, in welchem die Kathete $AB' = 2a$ und die Hypotenuse $DB' = DB$ ist. Wenn man also DB mit u und DA mit v bezeichnet, so kann man die Gleichung $DB'^2 - DA^2 = AB'^2$ verwandeln in: $u^2 - v^2 = 4a^2$. Wie also auch die Berührungssehne CC' durch den Brennpunkt A gelegt werde, der Punkt D hat immer die Eigenschaft, dass die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten [den Brennpunkten B und A] constant ist. *Nach § 7 ist also der Ort von D eine Gerade L, welche senkrecht auf AB steht.* Sei Q der Durchschnitt von L mit AB, so ist auch $QB^2 - QA^2 = 4a^2$, und ferner hat man

$QB - QA = 2c$; daraus ergibt sich $QB + QA = \frac{2a^2}{c}$, $QM = \frac{a^2}{c}$, $QB = \frac{a^2+c^2}{c}$ und $QA = \frac{a^2-c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$. Die Gerade L heist die *Leitlinie* der Ellipse in Bezug auf den Brennpunkt A; zu ihr parallel im Abstande $\frac{2a^2}{c}$ und symmetrisch in Hinsicht auf die Ellipse liegt eine dem Brennpunkte B zugehörige Leitlinie L_1, die für ihn ganz dieselbe Rolle spielt, wie L für A.

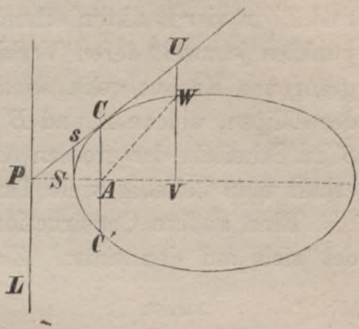
Fig. 59.



Sei EE_1 das Stück einer beliebigen Ellipsen-Tangente, deren Berührungspunkt C heissen möge, welches zwischen den beiden Leitlinien liegt, so ist $\sphericalangle EAC = E_1BC = 90^0$, ferner $\sphericalangle ECA = E_1CB$, also sind die beiden Dreiecke EAC und CBE_1 ähnlich, woraus folgt: $AC : BC = CE : CE_1$. Bezeichnet man mit PQ das zwischen den Leitlinien liegende Stück der durch C parallel zu AB gezogenen Geraden, so sind auch die Dreiecke EPC und E_1QC ähnlich, also ist $CP : CQ = CE : CE_1$, und unter Berücksichtigung der früheren Proportion: $AC : BC = CP : CQ$, woraus sich ergibt: $AC + BC : AC = CP + CQ : CP$. In dieser Proportion ersetzen wir das erste und das dritte Glied durch ihre Werthe; es ist, weil C auf der Ellipse sich befindet: $AC + CB = 2a$, und nach dem vorhingefundenen Resultate $CP + CQ = PQ = \frac{2a^2}{c}$. Man erhält nun $\frac{CP}{AC} = \frac{a}{c}$ d. h. *Wenn sich ein Punkt C auf der Ellipse bewegt, so bleibt das Verhältniss der Abstände des Punktes von einem Brennpunkte und der zugehörigen Leitlinie constant.*

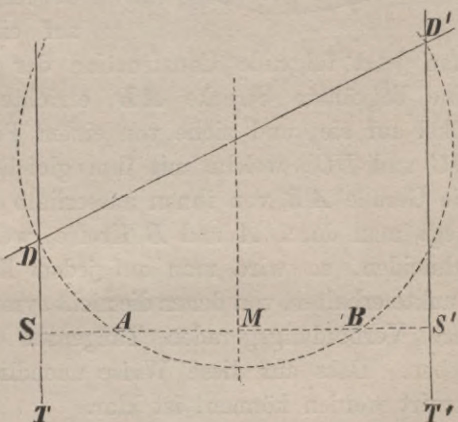
Sei, abweichend von der vorigen Bezeichnung, P der Durchschnitt der Leitlinie L des Brennpunktes A mit der grossen Axe der Ellipse, so kann man von P aus zwei Tangenten an die Ellipse ziehen, deren Berührungssehne CC' durch A geht und auf PA senkrecht steht. Die Strecke CC' heisst Parameter der Ellipse; ihr Werth kann wie folgt gefunden werden. Der Abstand des Punktes C von L ist $= AP$, also hat man $CA : AP = c : a$, nach Früherem ist aber $AP = \frac{b^2}{c}$ also $CA = \frac{b^2}{a}$ und $CC' = \frac{2b^2}{a}$. Nun errichte man in S die Scheiteltangente Ss. Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke PsS und PCA hat man dann $sS : PS = CA : AP$; da aber C und S zwei Punkte der Ellipse sind, so ist auch $SA : PS = CA : AP$, woraus man durch Vergleichung zieht: $sS = SA$. Noch allgemeiner: *Ist U ein beliebiger Punkt der Tangente PC, ferner V der Fusspunkt des von U auf AB gefällten Perpendikels und W der Durchschnitt dieses Perpendikels mit der Ellipse, so ist $AW = UV$.* Man hat nämlich $AW : VP = CA : AP$, weil C und W Ellipsenpunkte sind, und $UV : VP = CA : AP$ wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke PCA und PUV; diess gibt in der That den ausgesprochenen Satz.

Fig. 60.



Wird die grosse Axe als Berührungssehne zweier Tangenten angenommen, so kann der Schnittpunkt dieser Tangenten, welche in den Scheiteln der grossen Axe berühren, und auf dieser senkrecht stehen, sowohl auf der einen als auf der andern der beiden Leitlinien der Ellipse angenommen werden, da ja die Berührungssehne durch jeden der Brennpunkte geht. In der That sind die beiden Tangenten und die Leitlinien parallel und desshalb können diese vier Geraden so angesehen werden, als ob sie einen und denselben unendlich entfernten Punkt gemein hätten.

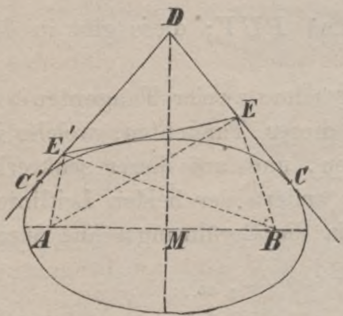
Fig. 61.



Werden die Tangenten in den Scheiteln der grossen Axe mit T und T' bezeichnet, so schneidet eine beliebige Tangente der Ellipse zwischen T und T' ein Stück DD' aus, welches, wie eine unmittelbare Folgerung aus einem frühern Satze ergibt, von jedem der Brennpunkte aus unter rechtem Winkel gesehen wird. Die Punkte $DD'AB$ liegen also auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt von DD' mit der kleinen Axe ist. Man kann hieraus die folgende Construction der Ellipse aus ihren Tangenten ableiten: Ausserhalb der Strecke AB, deren Mitte M ist, wähle man zwei Punkte S und S', so dass $SM = SM'$, und errichte in diesen die Perpendikel T und T' auf AB. Nun construirt man einen beliebigen, durch A und B gehenden Kreis, welcher T und T' in vier Punkten schneidet; verbindet man von den Durchschnittspunkten je zwei, deren Verbindungsgerade durch den Mittelpunkt des gezogenen Kreises geht, so sind diese Verbindungsgeraden Tangenten der Ellipse, welche A und B zu Brennpunkten und die Punkte S und S' zu Scheiteln der grossen Axe hat. Durch Veränderung des Kreises erhält man beliebig viele Tangenten dieser Ellipse.

Eine andere Construction der Ellipse aus ihren Tangenten gründet sich auf den Satz: *Zieht man von einem Punkte D der kleinen Axe aus zwei feste Tangenten DC und DC', so erscheint das Stück EE', welches eine bewegliche dritte Tangente zwischen denselben ausschneidet, von beiden Brennpunkten aus stets unter demselben Winkel.* Der Satz ist evident für den Fall, dass EE' der grossen Axe parallel ist; damit ist er aber auch nach einem schon mehrfach benutzten Satze für alle übrigen Fälle bewiesen. Da die Punkte $ABEE'$ auf einem Kreise liegen, so erhält man jetzt folgende Construction der Ellipsentangenten. Man wähle eine begränzte Strecke AB, errichte in ihrer Mitte M ein Perpendikel auf sie, und ziehe von einem Punkt D desselben zwei Geraden DC und DC', welche mit ihm gleiche Winkel bilden, aber so, dass die Gerade AB von ihnen ausserhalb der Strecke AB getroffen wird. Legt man durch A und B Kreise, welche die Geraden DC und DC' schneiden, so wird man auf jedem Kreise durch diese Geraden vier Punkte erhalten, von denen die nicht symmetrisch zu MD gelegenen durch ihre Verbindungsgeraden Tangenten einer bestimmten Ellipse gegeben. Dass auf diese Weise unendlich viele Ellipsentangenten construirt werden können, ist klar.

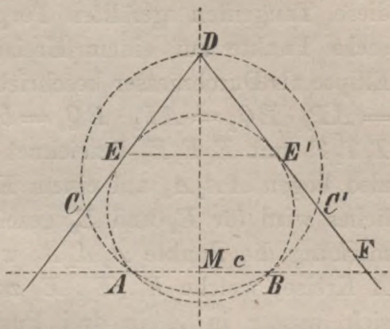
Fig. 62.



Der kleinste Kreis der Schaar AB, der noch Tangenten ergibt, ist derjenige, welcher die beiden Geraden DC und DC' berührt; es geschehe diess in E und E', so ist EE' die Tangente in einem Scheitel der kleinen Axe der Ellipse. Die beiden festen, symmetrisch zu A und B gelegten Geraden DC und DC' sind ebenfalls Tangenten an die Ellipse und der Kreis, welcher sie erzeugt, ist derjenige durch die

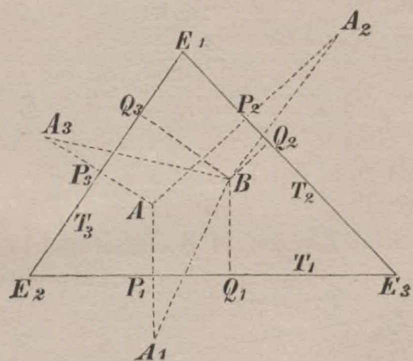
Punkte ABD; von den vier Schnittpunkten, die in diesem Falle zur Construction der Tangenten dienen, vereinigen sich zwei im Punkte D. Die Berührungspunkte dieser Tangenten sind ihre zweiten Schnittpunkte C und C' mit dem genannten Kreise. Man hat nämlich z. B. für den Punkt C' das Mass des Peripheriewinkels $BC'F = \frac{1}{2} DB$ [wenn F der Schnitt von DC' mit AB ist], wo unter DB der Kreisbogen $DC'B$ verstanden ist, ebenso $\sphericalangle AC'D = \frac{1}{2} AD$; da aber $AD = DB$, so folgt, dass die Leitstrahlen AC' und BC' mit der Tangente gleiche Winkel bilden, d. h. C' ist der Berührungspunkt. Diess gibt den Satz: *Zieht man von einem Punkte D der kleinen Axe aus zwei Tangenten an die Ellipse, deren Berührungspunkte C und C' sein mögen, so liegen die Punkte D, C und C' mit den Brennpunkten A und B in einem Kreise.* Nach §. 1 gilt die Relation: $FE'^2 = FA \,.\, FB$ oder $FE'^2 = (FM + c)\,(FM - c) = FM^2 - c^2$. Zieht man an die Ellipse eine beliebige Tangente, welche die grosse Axe in F und die Tangente in einem Scheitel der kleinen Axe in E' trifft, so ist $FM^2 - FE'^2 = c^2$.

Fig. 63.



Sind drei Tangenten $T_1 T_2 T_3$ der Ellipse gegeben, so bilden dieselben ein der Ellipse umschriebenes Dreieck. Sucht man die Gegenpunkte $A_1 A_2 A_3$ von A in Bezug auf die drei Geraden $T_1 T_2 T_3$ so ist $BA_1 = BA_2 = BA_3 = 2a$, d. h. B ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher sich dem Dreieck $A_1 A_2 A_3$ umschreiben lässt. *Kennt man also von einer Ellipse einen Brennpunkt und ein umschriebenes Dreieck*, [von dem wir annehmen wollen, dass es den Brennpunkt einschliesse] *so construire man die Gegenpunkte des gegebenen Brennpunktes in Bezug auf die Seiten des Dreiecks, dann ist der Mittelpunkt des Kreises, der diesem Dreieck der Gegenpunkte umschrieben werden kann, der zweite Brennpunkt der Ellipse, und der Radius dieses Kreises ihre grosse Axe.* Die

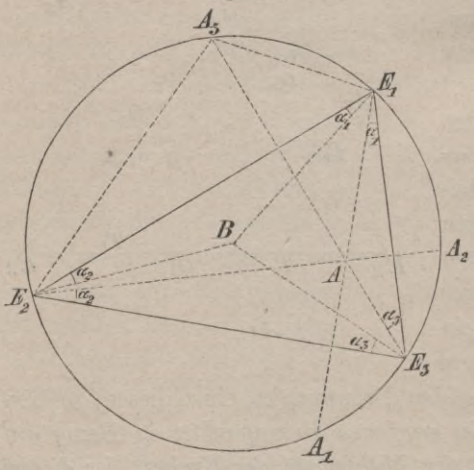
Fig. 64.



Berührungspunkte der Ellipse auf den drei gegebenen Dreiecksseiten liegen auf den Radien, welche nach den zugehörigen Gegenpunkten gezogen werden. Seien die Fusspunkte der von A auf $T_1 T_2 T_3$ gefällten Perpendikel resp. $P_1 P_2 P_2$ und die Fusspunkte der von B auf diese Tangenten gefällten Perpendikel resp. $Q_1 Q_2 Q_3$, so liegen diese sechs Punkte auf einem Kreise, welcher über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser beschrieben ist. Zugleich hat man $AP_1 \cdot BQ_1 = AP_2 \cdot BQ_2 = AP_3 \cdot BQ_3 = b^2$. Wenn die Ecken des Dreiecks $T_1 T_2 T_3$ mit $E_1 E_2 E_3$ bezeichnet werden, so ist $E_1 A = E_1 A_2 = E_1 A_3$, also liegen $A A_2 A_3$ auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt E_1. Aehnliches wird für E_2 und E_3 gezeigt. Man kann auf Grund dieser Bemerkung die Punkte $A_1 A_2 A_3$ wie folgt bestimmen: Man lege durch A Kreise, welche E_1, E_2, E_3 zu Mittelpunkten haben; diese schneiden sich ausser in A in drei Punkten, welche die gesuchten sind. Da $E_1 A_2 = E_1 A_3$ und $BA_2 = BA_3$, so schneiden sich im Viereck $E_1 B A_2 A_3$ die Diagonalen rechtwinklig; dasselbe wird von den Vierecken $E_2 B A_3 A_1$ und $E_3 B A_1 A_2$ gezeigt. Fälle ich somit von $E_1 E_2 E_3$ Perpendikel resp. auf $A_2 A_3$, $A_3 A_1$ und $A_1 A_2$, so schneiden sich dieselben in B. Es sind nun die Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ denjenigen von $A_1 A_2 A_3$ parallel, also gilt der ausgesprochene Satz auch für das Dreieck $P_1 P_2 P_3$.

Wir betrachten jetzt den speziellen Fall, in welchem A auf der Halbirungsgeraden des Winkels E_1 im Dreiecke $E_1 E_2 E_3$ liegt. Aus Gründen der Symmetrie liegt dann B ebenfalls auf dieser Halbirungslinie; liegt A im Durchschnitt der drei Halbirungslinien der Winkel des Dreiecks, so fällt B mit ihm zusammen, und die Ellipse wird zum Kreis.

Fig. 65.



Ist A der Durchschnitt der drei Höhen im Dreieck $E_1 E_2 E_3$ [das wir als spitzwinklig voraussetzen], so ist B der Mittelpunkt des diesem Dreieck umschriebenen Kreises. Um die Richtigkeit dieser Behauptung nachzuweisen, ist blos nöthig zu zeigen, dass die drei Gegenpunkte $A_1 A_2 A_3$ auf dem Kreise liegen, welcher dem Dreiecke $E_1 E_2 E_3$ umschrieben werden kann. Die Schenkel des Winkels $A_1 A A_3$ stehen resp. senkrecht auf den Schenkeln des Winkels $E_1E_2E_3$ und es ist desshalb leicht nachzuweisen, dass diese Winkel einander gleich sind; ebenso zeigt man, dass $\sphericalangle E_2AA_1 = E_1E_3E_2$, also ist $E_2AA_1 + A_1AE_3 = E_2AE_3 = E_1E_2E_3 + E_2E_3E_1 = 180^0 - E_2E_1E_3$. Da A_1 und A symmetrisch zu E_2E_3 liegen, so ist $\sphericalangle E_2AE_3 = E_2A_1E_3$ und desshalb $E_2A_1E_3 + E_2E_1E_3 = 180^0$; das Viereck $E_1E_2A_1E_3$ ist also ein Kreisviereck und A_1 liegt auf dem Kreise, der durch $E_1E_2E_4$ geht. Der Beweis wiederholt sich für die Punkte A_2 und A_3.

Fällt man vom Mittelpunkte des dem Dreiecke umschriebenen Kreises Perpendikel auf die Seiten derselben, so liegen ihre Fusspunkte in der Mitte derselben. Aus der Ellipsentheorie zieht man also ohne Mühe den elementaren Satz: *In einem Dreiecke liegen die Mitten der Seiten mit den Fusspunkten der Höhen in einem Kreise, dessen Durchmesser gleich dem Radius des dem Dreiecke umschriebenen Kreises ist, und dessen Mittelpunkt in der Mitte derjenigen Geraden liegt, welche den Höhenpunkt des Dreiecks mit dem Mittelpunkte des ihm umschriebenen Kreises verbindet.* Zwei Tangenten der Ellipse bilden bekanntlich mit den Strahlen die von ihrem Durchschnitt nach den Brennpunkt gezogen werden, gleiche Winkel; daraus folgt: *Zieht man von einer Ecke des Dreiecks Strahlen nach dem Höhenpunkt und dem Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so bilden dieselben mit den anliegenden Dreiecksseiten gleiche Winkel**).

Der eben zitirte Ellipsensatz gibt übrigens eine neue Lösung der Aufgabe: *Den zweiten Brennpunkt einer Ellipse zu construiren, von welcher man einen Brennpunkt und drei diesen umschliessende Tangenten kennt*, Man verbinde nämlich den gegebenen Brennpunkt durch einen Strahl mit einer Ecke und trage von derselben aus einen andern Strahl ab, welcher zu dem gegebenen symmetrisch liegt in Bezug auf die beiden in dieser Ecke zusammenstossenden Seiten. Auf dem neuen Strahle muss der gesuchte Brennpunkt liegen, der so als Durchschnitt dreier Geraden gefunden wird. In dieser Construction liegt ein leicht auszusprechender Satz über das Dreieck.

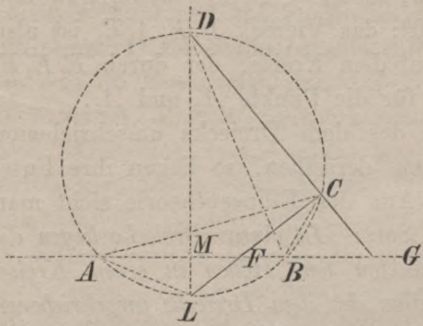
Im Anschluss an die bis jetzt ausgeführte Tangententheorie der Ellipse mögen noch einige Sätze über die Normalen derselben hier Platz finden. Man nennt Normale des Punktes C eine Gerade, welche in C auf der dort berührenden Tangente senkrecht steht. Zur weitern Untersuchung erinnern wir uns des Satzes: Legt man von

---

*) Dass diese beiden Dreieckssätze auch für ein stumpfwinkliges Dreieck gelten, zeigt sich unter Anwendung von Hyperbelsätzen, die wir später beweisen werden.

einem Punkte D der kleinen Axe aus Tangenten an die Ellipse, welche in C und C' berühren mögen, so liegen die Punkte $CC'D$ mit den Brennpunkten A und B in einem Kreise.

Fig. 66.



Sei L der zweite Schnittpunkt dieses Kreises mit der kleinen Axe, so ist LC senkrecht auf CD im Punkte C, d. h. LC ist die Normale der Ellipse in diesem Punkte. Wenn man nun bemerkt, dass die Normale stets zwischen den Brennpunkten durchgeht, so ergibt sich folgende *Construction der Normalen* in einem Punkte C der Ellipse: *Man lege den Kreis durch die Punkte ABC, welcher die kleine Axe in zwei Punkten schneidet. Von der Verbindungsgeraden des Punktes C mit diesen beiden Schnittpunkten, ist diejenige die gesuchte Normale, welche zwischen beiden Brennpunkten durchgeht.*

Es gibt eine unendliche Anzahl von Ellipsen, welche dieselben Brennpunkte A und B haben. *Zieht man von einem beliebigen Punkte der kleinen Axe aus an alle diese Ellipsen die Normalen, so liegen deren Fusspunkte in einem Kreise.* Ein ähnlicher Satz kann für die Tangenten aufgestellt werden.

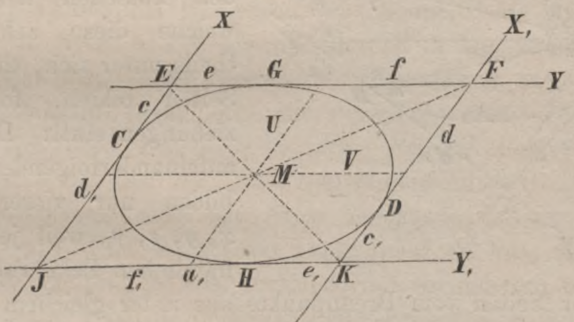
Sei F der Schnittpunkt der Normalen in C mit der grossen Axe und G der Schnittpunkt der zu C gehörigen Tangente mit derselben Axe, so hat man zunächst $\triangle ACL \sim FCB$, denn die Winkel bei C sind einander gleich als Peripheriewinkel über gleichem Bogen, ebenso die Winkel bei B und L aus demselben Grunde. Man hat desshalb $AC : CL = FC : BC$ oder $CF \cdot CL = AC \cdot BC$. Auch die Dreiecke ACG und CDB sind ähnlich, denn die Winkel bei A und D stehen über demselben Bogen, sind also gleich, und ebenso sind die Winkel bei C einander gleich, wie früher bereits gezeigt worden ist. Es folgt daraus $AC : CG = CD : CB$ und $CG \cdot CD = AC \cdot BC$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CGA und CBD folgt ferner, dass $\sphericalangle CGA = CBD = CLD$ ist. Somit sind auch die Dreiecke FML und DMG ähnlich [sie sind beide rechtwinklig und die Winkel bei L und G sind einander gleich]. Es ist darum $FM : ML = MD : MG$, also $FM \cdot MG = ML \cdot MD$, und diess ist nach der Potenztheorie des Kreises (§. 1.) $= MA^2 = MB^2 = c^2$. Wir haben also folgende Sätze:

Zieht man von irgend einem Punkte C einer Ellipse die Normale *und die Tangente, so ist das Product aus den Abschnitten der Normalen zwischen dem Fusspunkte C und der kleinen und der grossen Axe gleich dem Product der Abschnitte der entsprechenden Tangente zwischen dem Berührungspunkt C und der kleinen und der grossen Axe — gleich dem Producte der Leitstrahlen des Punktes C.* Ferner: *Das Product aus den Abschnitten der grossen Axe zwischen dem Mittelpunkte M und der Tangente und der dazu gehörigen Normalen ist gleich dem Producte aus den Abschnitten der kleinen Axe zwischen dem Mittelpunkte M und der Normalen und der Tangente, gleich dem Quadrate über der Excentrizität der Ellipse.*

§. 12. Das der Ellipse umschriebene Parallelogramm. Conjugirte Durchmesser und Axen.

Sind zwei Paare paralleler Tangenten der Ellipse gegeben, X und X_1, Y und Y_1, so ist die Berührungssehne jedes Paares, CD und GH ein Durchmesser der Ellipse und wird durch deren Mittelpunkt

Fig. 67.

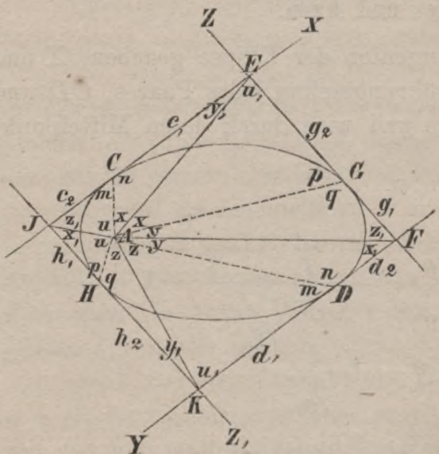


M gehälftet, daher müssen auch die beiden Diagonalen EK, FJ des durch die Tangenten gebildeten Parallelogramms $EFKJ$ durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, und durch ihn gehälftet werden. In der That liegt die Mitte jeder durch X und X_1 begränzten Geraden in der Mittellinie U dieser Parallelen, und die Mitten aller durch Y und Y_1 begränzten Geraden sind in der Mittellinie V dieses zweiten Parallelenpaars enthalten; sollen also die zwei Geraden GH, CD einander hälften, so muss ihr Durchschnitt sowohl in U als in V liegen, also ihr Schnittpunkt M sein; aber auch die Diagonalen halbiren sich gegenseitig, also fällt ihr Schnittpunkt ebenfalls mit M zusammen. In Rücksicht der Abschnitte, in welche die Seiten des Parallelogramms durch die Berührungspunkte getheilt werden, folgt zunächst aus der sofort sich darbietenden Congruenz von Dreiecken, dass die Gegenseiten gleich getheilt werden, nämlich dass:

$$c = c_1, \; d = d_1; \; e = e_1, \; f = f_1,$$

so dass man den vollständigen Satz hat: *Bei jedem der Ellipse umschriebenen Parallelogramm gehen die Diagonalen durch den Mittelpunkt der Ellipse und werden von ihm gehälftet, und die Gegenseiten werden durch ihre Berührungspunkte gleich getheilt.* Die Diagonalen sind, da sie durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, Durchmesser derselben und zwar heissen sie, beide zusammengefasst, *zugeordnete oder conjugirte Durchmesser* der Ellipse.

Fig. 68.



Werden aus dem einen oder andern Brennpunkte, etwa aus A, nach den Ecken und nach den Berührungspunkten der Seiten eines der Ellipse umgeschriebenen Parallelogrammes Strahlen gezogen, so finden zwischen den Winkeln, welche diese acht Strahlen theils unter sich, theils mit den Seiten bilden, folgende Beziehungen statt: Die zunächst aufeinanderfolgenden Strahlen bilden nur viererlei Winkel x, y, z, u, weil jede zwei der nämlichen Ecke anliegende Abschnitte der Seiten vom Brennpunkte aus unter gleichem Winkel gesehen werden; also ist $x + y + z + u = 180^0$. Die Strahlen nach den Ecken bilden mit den resp. Seiten auch nur viererlei Winkel $x_1 y_1 z_1 u_1$ und zwar sind diese den vorigen gleich. Ebenso bilden die Strahlen nach den Berührungspunkten mit den Seiten nur viererlei Winkel $mnpq$, die beziehlich den Winkeln gleich sind, welche die Strahlen nach den Ecken unter sich bilden, also den Winkeln, unter welchen die Seiten vom Brennpunkte aus gesehen werden; diese Winkel $mnpq$ sind resp. die Summen der vorigen Winkel zu zweien genommen: $m = x + y$, $n = z + u$, $p = y + z$, $q = u + x$. [Man hat z. B. Winkel $m = FAE = x + y$. Denn wenn E in C fällt, so ist F unendlich entfernt, also $AF \parallel KD \parallel CJ$, folglich $m = CAF^\infty$ als Wechselwinkel. Da also $m = EAF$ oder $x + y$ und als Aussenwinkel $m = x + y_1$, so ist $y_1 = y$ etc.] Die acht Strahlen, welche aus dem andern Brennpunkte B nach den Ecken und nach den Berührungspunkten des Parallelogramms gezogen werden, sind resp. jenen gleich, so wie auch die Winkel, welche sie unter sich und mit den Seiten bilden; nämlich ein Strahl aus A und ein Strahl aus B sind gleich, wenn sie nach Gegenecken oder nach Berührungspunkten von Gegenseiten gehen, und sie bilden mit den Seiten gleiche Winkel, wenn sie nach derselben Ecke oder nach denselben Berührungspunkten gezogen sind (so wie auch, wenn sie nach entgegengesetzten gezogen sind).

Man hat nun verschiedene Paare ähnlicher Dreiecke, aus denen mannigfache Relationen folgen, z. B.:

Die Dreiecke ECA und ADF sind ähnlich, daher [wenn die von A nach den Ecken und den Berührungspunkten des Parallelogramms gehenden Strahlen mit den correspondirenden kleinen Buchstaben bezeichnet werden] $c_1 : c = d : d_2$ oder

1) $c_1 d_2 = cd$ und da $d_2 = c_2$, so ist auch 2) $c_1 c_2 = cd$;
ferner $c : e = d_2 : f$ oder

$$3)\ cf = ed_2 \text{ und } 4)\ de = c_1 f.$$

Daraus folgt, wofern die Tangenten in C und D als fest, dagegen die Tangente in G, d. h. EF als veränderlich angesehen wird:

Von irgend zwei festen parallelen Tangenten $C_1 D$ *der Ellipse schneidet jede beliebige dritte, oder eine bewegliche dritte Tangente stets solche Stücke* $CE = c_1$, $DF = d_2$ *ab, deren Rechteck constant, nämlich dem Rechtecke unter den aus dem* (einen oder andern) *Brennpunkte nach den Berührungspunkten der festen Tangenten gezogenen Strahlen* cd *gleich ist* (1). Und wofern die Tangente C als fest, dagegen das Tangentenpaar G und H als veränderlich angenommen wird: *Von irgend einer festen Tangente* C *der Ellipse schneidet jedes beliebige Paar paralleler Tangenten* EG *und* JH *stets solche Stücke* $CE = c_1$, $CJ = c_2$ *ab, deren Rechteck constant, nämlich dem Rechteck unter den aus den Brennpunkten* A, B *nach dem Berührungspunkte* C *der festen Tangente gezogenen Strahlen* c, d *gleich ist* (2). [Denn der Strahl BC ist $= AD = d$.]

Da jede zwei Dreiecke ähnlich sind, welche über Abschnitten stehen, die einer Seite anliegen, so hat man nach Art der vorhin gefundenen Gleichungen noch die folgenden [von denen die erste bereits in 4) gegeben ist].

$$5)\ \begin{cases} de = fc_1 & cf = ed_2 \\ gi = eh_1 & gk = fh_2 \\ ek = id_1 & di = hc_2 \\ hf = kg_1 & he = ig_2. \end{cases}$$

Werden je vier und vier übereinander stehende in einander multiplizirt, so kommt

$$6)\ cgdh = c_1 g_1 d_1 h_1 \text{ und } cgdh = c_2 g_2 d_2 h_2 ,$$

also auch

$$7)\ c_1 g_1 d_1 h_1 = c_2 g_2 d_2 h_2 .$$

Da ferner $c_1 = d_1$ und $g_1 = h_1$ ist, so folgt $cgdh = c_1^2 g_1^2$ und ebenso $cgdh = c_2^2 g_2^2$ desshalb $c_1 g_1 = c_2 g_2$ oder $c_1 : c_2 = g_2 : g_1$. D. h.: *Werden die Abschnitte der Seiten des Parallelogramms im Laufe seines Umfangs numerirt, so ist das Product der vier ungeraden Abschnitte gleich dem Product der vier geraden; zudem ist jedes Product gleich dem Product der aus dem Brennpunkt nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen* (6, 7). Und insbesondere: *Bei je zwei sich anliegenden Seiten ist das Product der zwei ungeraden Abschnitte gleich dem der zwei geraden.* Ferner: *Das Product der vier Strahlen nach den Berührungspunkten ist gleich dem Producte der Quadrate zweier sich folgender geraden oder ungeraden Abschnitte.*

Den zwei Dreiecken, welche über Abschnitten stehen, die der nämlichen Seite anliegen, ist allemal dasjenige dritte ähnlich, welches über der dieser Seite gegenüberliegenden Seite steht; z. B. sind die Dreiecke GEA und HAJ und AKF ähnlich, daher:

$$k : d_1 + d_2 = g_2 : e \text{ und } f : d_1 + d_2 = h_1 : i \text{ oder}$$

$$8)\ ke = g_2 (d_1 + d_2) = g_2 D$$

und $fi = h_1 (d_1 + d_2) = h_1 D = h_1 C = c_2 H = d_2 G$, wenn wir die ganzen Längen der Seiten des Parallelogramms abkürzend durch die Berührungspunkte bezeichnen. Da $h_1 = g_1$, so ist ferner

$$9)\ ke + fi = (g_1 + g_2)(d_1 + d_2) = GD$$

$$10)\ efki = g_1 g_2 (d_1 + d_2)^2 = g_1 g_2 D^2 = c_1 g_1 CG = c_1 c_2 G^2 .$$

$$11)\ \frac{ke}{fi} = \frac{g_2}{g_1} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{d_1}{d_2} .$$

Weiter hat man $g : e = f : D$ oder 12) $gD = ef$ und ebenso $hD = ki$; jetzt ist aber $g + h = 2a$ [gleich der grossen Axe] und desshalb

$$13)\ \begin{cases} 2aD = ef + ki \text{ und ebenso} \\ 2aG = ei + fk, \text{ mithin} \end{cases}$$

$$14)\ 2a(D \pm G) = (e \pm k)(f \pm i) \text{ und } 15)\ \frac{D}{G} = \frac{ef + ki}{ei + fk} .$$

Schliesslich erhält man durch Combination von 9) und 15)

$$D^2 = \frac{(ke + fi)(ef + ki)}{ei + kf} .$$

Diese Gleichungen ergeben nun folgende Sätze:

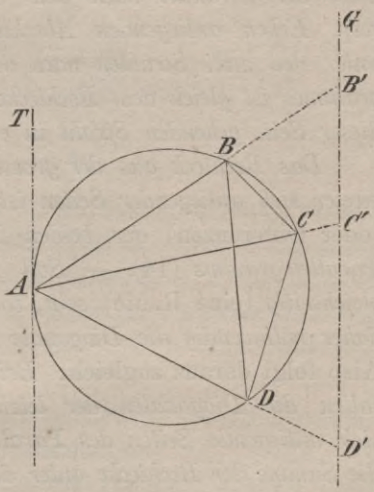
Das Rechteck zweier Strahlen, welche nach zwei Gegenecken des

Parallelogramms gezogen sind, ist gleich dem Rechteck jeder Seite und des mit ihr einer der Gegenecken anliegenden Abschnittes einer andern Seite (8). — *Die Summe der Rechtecke unter den zwei paar Strahlen* (k und e, f und i) *nach den Gegenecken ist gleich dem Rechteck unter zwei sich anliegenden Seiten des Parallelogramms* (9). — [Dieser Satz ist durchaus analog dem ptolemäischen Satze vom Kreisviereck*), woraus sofort einige Folgerungen gezogen werden sollen.] — *Die Summe der Rechtecke unter den zwei Paar Strahlen, die nach den Endpunkten zweier Gegenseiten gehen, ist gleich dem Reckteck unter einer der übrigen Seiten und der grossen Axe der Ellipse* (13). — [Es mag noch beigefügt werden, dass die Summe der Winkel bei A über zwei Gegenseiten des Parallelogramms constant: $x + y + z + u = 180^0$ ist.] —

---

*) Der zitirte Satz heisst: *Bei einem dem Kreise eingeschriebenen Viereck, dessen Seiten unverlängert sich nicht schneiden, ist das Product der Diagonalen der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten gleich* und umgekehrt: *Wenn in einem convexen Viereck das Product der Diagonalen gleich der Summe der Producte der gegenüberliegenden Seiten ist, so lässt sich demselben ein Kreis umschreiben.* Der Beweis ergibt sich folgendermassen: Werden durch einen Punkt A des Kreises drei Strahlen AB, AC, AD gezogen, welche eine zur Tangente T in A beliebig gezogene Parallele G in $B'C'D'$ treffen, so entstehen die drei Paare ähnlicher Dreiecke, ABC und $AC'B'$, ABD und $AD'B'$, ACD und $AD'C'$, welche die Gleichungen liefern:

Fig. 69.



$$B'C' = \frac{BC \cdot AC'}{AB}, \quad B'D' = \frac{BD \cdot AB'}{AD};$$

$$C'D' = \frac{CD \cdot AD'}{AC}.$$

Bezeichnen wir ferner den gemeinschaftlichen Werth $AB \cdot AB' = AC \cdot AC' = AD \cdot AD'$ mit P, so gehen die drei Gleichungen über in:

$$B'C' = \frac{BC \cdot P}{AB \cdot AC}; \quad B'D' = \frac{BD \cdot P}{AD \cdot AB}; \quad C'D' = \frac{CD \cdot P}{AC \cdot CD}.$$

Substituirt man die gefundenen Werthe in die Gleichung $B'C' + C'D' = B'D'$ und multiplizirt mit $\frac{AB \cdot AC \cdot AD}{P}$, so erhält man in der Formel

$$BC \cdot AD + AB \cdot CD = BD \cdot AC$$

den verlangten Satz, dessen Umkehrung nun leicht herzustellen ist.

Unter Berücksichtigung des ptolemäischen Lehrsatzes findet man im Weitern: *Es gibt allemal einen bestimmten Kreis, in welchen die vier Strahlen e, f, k, i nach den Ecken sich als Seiten eines eingeschriebenen Vierecks eintragen lassen, und sodann sind bei dem nämlichen Kreise drei verschiedene Vierecke möglich, je nachdem die Seiten in der Ordnung $efki$ oder $efik$ oder $ekfi$ sich folgen; die Diagonalen des ersten sind gleich den Seiten des Parallelogramms* (9) *und von den Diagonalen der beiden andern ist die eine der grossen Axe der Ellipse und die andere der einen oder der andern Seite des Paralellogramms gleich* (13). *Die Winkel der drei Vierecke sind die nämlichen, welche die vier Strahlen schon in ihrer ursprünglichen Lage unter sich bilden. Der genannte Kreis ist demjenigen gleich, welcher durch den Brennpunkt und durch die beiden Endpunkte irgend einer Seite des Parallelogramms geht. — Beschreibt man also durch den Brennpunkt und durch die beiden Endpunkte jeder Seite eines der Ellipse umschriebenen Parallelogramms Kreise, so haben diese vier Kreise gleiche Radien.* —

Das Product der vier Strahlen nach den Ecken eines umschriebenen Parallelogramms ist gleich dem Quadrate irgend einer Seite, multiplizirt in die beiden Abschnitte einer ihr anliegenden Seite (10). — *Die Producte der Strahlen nach den Gegenecken verhalten sich wie die den resp. Ecken anliegenden Abschnitte jeder Seite* (11). — *Das Rechteck unter den zwei Strahlen nach den Endpunkten einer Seite des Parallelogrammes ist gleich dem Rechtecke unter dem nach dem Berührungspunkte dieser Seite gehenden Strahl in eine ihr anliegende Seite* (12). —

Das Rechteck aus der grossen Axe und der Summe (oder Differenz) *zweier sich anliegender Seiten ist gleich dem Rechteck aus den Summen* (oder Differenzen) *der beiden Paar Strahlen nach den Gegenecken des Parallelogramms* (14). — *Soll $D = G$ und somit das Parallelogramm gleichseitig* (eine Raute) *sein, so muss auch $e = k$ oder $i = f$ sein, und daher nothwendig die Diagonale EK oder FJ auf die kleine Axe fallen.* Also folgt daraus zugleich: *Bei jeder der Ellipse umgeschriebenen Raute fallen die Diagonalen der letztern auf die Axen der erstern. — Zwei sich anliegende Seiten des Parallelogramms verhalten sich umgekehrt, wie die Summe der Rechtecke unter den Strahlenpaaren nach den Endpunkten dieser Seiten und ihrer Gegenseiten* (15).

Da nach (8) $C : H = c_2 : h_1$, ebenso analog: $C : G = c_1 : g_2$, $H : D = h_2 : d_1$, $D : G = d_2 : g_1$, daher

$$CH \parallel EK, \quad CG \parallel FJ, \quad HD \parallel FJ, \quad DG \parallel EK,$$

so folgt weiter: *Bei jedem der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramm sind die Berührunpspunkte die Ecken eines andern Parallelogramms,* *dessen Seiten den Diagonalen des erstern parallel sind.* — Zieht man die Gerade JM, so muss sie, da M die Mitte von EK ist, auch durch die Mitte von CH ($\parallel EK$) gehen; also: *Der Durchschnitt J zweier Tangenten, die Mitte ihrer Berührungssehne CH und der Mittelpunkt der Ellipse liegen allemal in einer Geraden;* die Gerade durch irgend zwei dieser Punkte geht daher nothwendig durch den dritten. Anders ausgedrückt heisst dieser Satz: *Der Durchschnitt J zweier Tangenten und die Mitte ihrer Berührungssehne liegen in einem und demselben Durchmesser der Ellipse.* —

Aus 6) und 10) folgt:

16) $efki : cdgh = c_1 g_1 CG : c_1^2 g_1^2 = CG : c_1 g_1 = C^2 : c_1 c_2 = G^2 : g_1 g_2$,

d. h.: *Das Product der vier Strahlen nach den Ecken verhält sich zum Producte der vier Strahlen nach den Berührungspunkten, wie das Quadrat jeder Seite zum Rechteck unter ihren Abschnitten.* — Wenn insbesondere das eine Paar Gegenseiten des Parallelogramms der Berührungssehne des andern Paars parallel läuft, so ist auch dieses Paar der Berührungssehne des erstern parallel, und so sind alsdann die vier Abschnitte in jedem Paar Gegenseiten einander gleich, und zwar gleich dem halben Durchmesser, welcher die Berührungspunkte des andern Paars verbindet, also $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = \alpha$, und $g_1 = g_2 = h_1 = h_2 = \beta$ wo α und β die halben genannten Durchmesser GH und CD sind.

Für diesen besondern Fall hat man: $efki : cgdh = 4\alpha^2 : \alpha^2 = 4\beta^2 : \beta^2$ oder

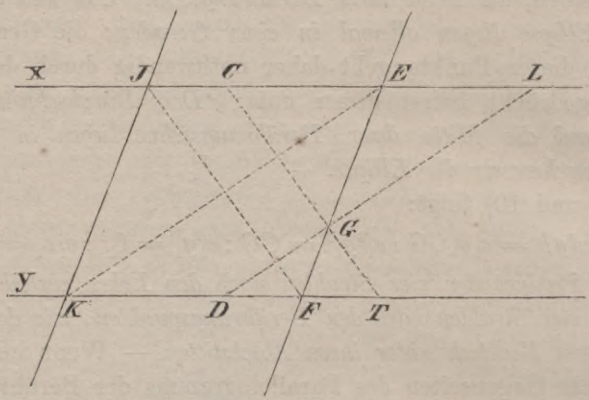
$$17)\quad efki = 4cgdh = 4c_1^2 g^2 = 4\alpha^2\beta^2 = \tfrac{1}{4} C^2 G^2 .$$

Also: *Bei jedem der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramm, dessen Seitenpaare den Durchmessern parallel sind, welche durch die Berührungspunkte der Gegenseiten gehen, ist das Product der Strahlen vom Brennpunkte nach den Ecken gleich dem vierfachen Product der Strahlen nach den Berührungspunkten, oder gleich einem Viertel des Products aus den Quadraten zweier anliegender Seiten.* —

In Bezug auf ein der Ellipse umgeschriebenes Parallelogramm $EFKJ$ ergeben sich weiter folgende Eigenschaften:

Wird die Berührungssehne DG bis an die Tangente X verlängert, so ist $EL = EC = c_1$, weil nach dem Obigen DG parallel der Diagonale EK, daher $LE = KD = d_1$ und auch $d_1 = c_1$. Ebenso muss die Sehne CG der Tangente Y in einem Punkte T begegnen, für welchen $FT = FD$ ist. Also: *Bei irgend zwei parallelen Tangenten XC, YD der Ellipse findet die Eigenschaft statt, dass wenn aus dem Berührungspunkte D der einen durch irgend einen Peripheriepunkt G eine Gerade DGL bis an die andere gezogen wird, dann von dieser* *ein doppelt so grosses Stück CL abgeschnitten wird, als durch die Tangente im genannten Punkt $G: CL = 2CE$, $DT = 2DF$.* —

Fig. 70.

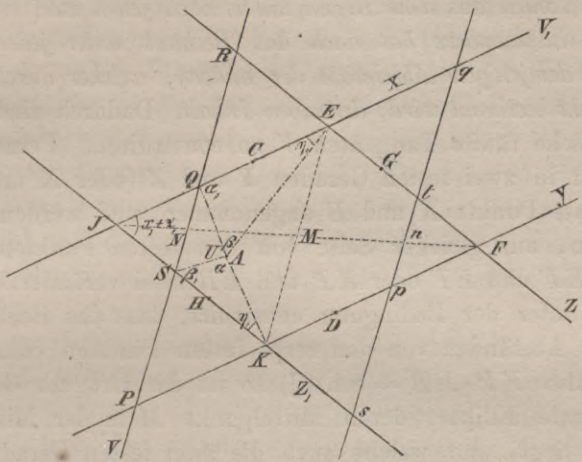


Da wenn X, Y fest, dagegen G oder Z beweglich, das Product $CE \cdot DF = c_1 d_2 = cd$ (1) constant, wir wollen sagen, gleich einer Grösse p^2 bleibt, so ist ebenso das Product $CL \cdot DT = 4p^2$ constant. Die Ellipse ist also bestimmt, wenn irgend zwei parallele Tangenten X, Y nebst ihren Berührungspunkten CD, so wie ferner irgend eine dritte Tangente Z, die jedoch nicht zwischen den Punkten C und D durchgeht, oder irgend ein zwischen jenen Tangenten liegender Punkt G gegeben ist. Denn im ersten Falle hat man p^2 unmittelbar $= CE \cdot DF$ wodurch man neue Punkte $E_1 F_1$ so finden kann, dass $CE_1 \cdot DF_1 = p^2$. Im andern Falle ziehe man aus C und D je eine Gerade durch G bis an die gegenüberliegenden Tangenten Y, X, so erhält man dadurch die Punkte L, T, wo dann wiederum $4p^2$ bestimmt ist durch $4p^2 = CL \cdot DT$; durch neue Punkte L_1, T_1 werden auch neue Punkte G_1 gefunden. — Man kann jetzt auch den Satz aussprechen: *Werden in zwei parallelen Geraden XY die Punkte C, D beliebig angenommen und als fest betrachtet, und werden sodann in den Geraden nach gleicher Richtung von den festen Punkten aus, je solche andere zwei Punkte E, F bestimmt, dass $CE \cdot DF$ einen gegebenen constanten Werth behält, so ist der Ort der Geraden EF eine Ellipse, welche die gegebenen Geraden XY in den festen Punkten CD berührt, und ebenso ist der Ort des Durchschnitts g der Strahlen CF, DE eine andere Ellipse, welche gleichfalls die Geraden XY in den Punkten CD berührt.* —

Tritt zu den vier Tangenten der Ellipse, die ein Parallelogramm $EFKJ$ bilden, eine beliebige fünfte V oder PR, die in N berührt, hinzu, so wird diese von den zwei Paaren paralleler Tangenten in

P und Q, R und S so geschnitten, das $NP \cdot NQ = NR \cdot NS$ (2). Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke PKS und QER folgt ferner

Fig. 71.



$PK \cdot RE = SK \cdot QE$; es soll nun gezeigt werden, dass diese Rechtecke constanten Inhalt haben, wie auch die Tangente V ihre Lage ändern mag.

Nach dem Obigen erscheint das Stück SQ der beweglichen Tangente V dem Brennpunkte A unter dem constanten Winkel u; zudem sind die y bei E und K einander gleich, daher muss, vermöge der Dreiecke KAS und EQA $\alpha + \beta_1 = \beta + \alpha_1$ sein; da aber $\alpha + \beta$ constant ist, weil u es ist [nämlich $\alpha + \beta = u + x + z$, und ebenso $\alpha_1 + \beta_1 = u + x_1 + z_1$ also $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$*)], so folgt $\alpha = \alpha_1$ und $\beta = \beta_1$. Demnach sind die Dreiecke KAS und EQA ähnlich und es ist:

$$ex = KS \cdot EQ = KP \cdot ER = \text{const.}$$

diesen nämlichen constanten Werth haben auch die Rechtecke $EC \cdot KJ$ und $KH' EJ$ was als spezieller Fall auch aus dem Gegenwärtigen folgt, indem nämlich gleichzeitig Q in C und S in J oder anderseits S in H und G in J fallen kann; in Hinsicht der Gegenecken F, J ist nämlich analog $FP \cdot JS = FR \cdot JQ = \text{const.} = fi = FK \cdot JH = FD \cdot JK$. Man zieht daraus folgende Resultate:

Werden die Seiten eines der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramms von irgend einer fünften Tangente V geschnitten, und werden die Abschnitte von zwei Gegenecken (E und K, oder F und J) ausgenommen,

*) Wo u, x, z, x_1, z_1 die nämliche Bedeutung haben, wie in Fig. 68.

so sind die Rechtecke unter den Abschnitten jedes Seitenpaares, welches einer der beiden andern Ecken anliegt, constant, und zwar für beide Paare von gleichem Inhalte, nämlich gleich dem Inhalte des Rechtecks unter den Strahlen aus dem Brennpunkte nach jenen zwei ersten Gegenecken; und insbesondere hat auch das Rechteck unter jeder der beiden Seiten und demjenigen Abschnitte der andern, welcher durch ihren Berührungspunkt bestimmt wird, denselben Inhalt. Dadurch sind also auch beliebige solche fünfte Tangenten V zu construiren. Ferner:

Werden in zwei festen Geraden Y und Z (oder X und Z_1) zwei beliebige feste Punkte K und E angenommen, und werden sodann in den Geraden, auf gleicher Seite von den festen Punkten, d. h. auf den Seiten KF und EF oder KP und ER zwei veränderliche Punkte P und R unter der Bedingung construirt, dass das Rechteck unter ihren festen Abständen von den resp. festen Punkten constanten Inhalt hat [also $KP \cdot ER = \text{const.}$], so ist der Ort der Geraden PR eine bestimmte Ellipse, deren Mittelpunkt M in der Mitte der Geraden KE liegt, und welche auch die zwei festen Geraden berührt, und zwar in denjenigen Punkten D und G, für welche die Rechtecke $KD \cdot EF$ und $EG \cdot KF$ [wovon jedes eine gegebene Seite hat] den nämlichen constanten Inhalt haben. Die Punkte D und F, so wie F und G sind nur besondere entsprechende Punkte statt P und R, sie müssen desshalb auch in Bezug auf die festen Punkte K und E nach einerlei Seite hin liegen. —

Kommt die veränderliche Tangente V insbesondere in die Lage, wo sie mit einer der beiden Diagonalen EK, FJ parallel ist, sei etwa V_1 oder $sq \parallel EK$ und n der Berührungspunkt, so ist zunächst $EK = pq = rs$, und demnach auch $ps = rq$. Es ist aber nach Früherem $np \cdot nq = nr \cdot ns$, oder also auch: $np\,(nr + rq) = nr\,(np + ps)$ oder $np \cdot rq = nr \cdot ps$, und da ja $ps = rq$ ist, $np = nr$ und $nq = ns$, d. h. der Berührungspunkt n ist die Mitte von jeder der Strecken pr und qs. Da M die Mitte der Diagonale EK ist, so muss folglich n im Durchmesser FM liegen, in welchem zugleich die Mitte m der Berührungssehne DG liegt. —

Denkt man sich nun für einen Augenblick das Parallelogramm $EFKJ$ veränderlich, aber so, dass die eine Ecke, etwa E, in dem durch sie gehenden festen Durchmesser ME fortrückt, zum Beispiel nach E_1, so muss die Gegenecke K sich auf dem nämlichen Durchmesser ganz gleich bewegen, also nach K_1 gelangen, wo $MK_1 = ME_1$ ist; und alsdann muss der Berührungspunkt n der mit dieser festen Diagonale EK oder E_1K_1 parallelen Tangente V_1 gleicherweise wie vorhin mit dem festen Mittelpunkte M und dem veränderlichen Durchschnitte F_1 in einem und demselben Durchmesser liegen. Dieser Durchmesser ist aber durch die festen Punkte M und n bestimmt, folglich müssen sich die veränderlichen Ecken F und J, oder F_1 und J_1 auf demselben bewegen. *Bleibt also bei einem der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramm $EFKJ$ die eine Diagonale, etwa EK fest, d. h. in einem festen Durchmesser, so bleibt auch die andere FJ auf einem bestimmten festen Durchmesser Mn, welcher insbesondere durch die Berührungspunkte n und n_1 derjenigen beiden Tangenten V_1 und V_2 geht, welche der ersten Diagonale parallel sind.* Ebenso sind die Tangenten in den Punkten, in welchen die Ellipse von der Diagonale EK geschnitten wird, mit der andern Diagonale FJ parallel oder umgekehrt: Die Berührungspunkte der der Diagonale FJ parallelen Tangenten liegen in EK.

Mit dem Parallelogramm bewegt sich zugleich auch die Berührungssehne DG; aber sie bleibt stets dem festen Durchmesser EK parallel, und ihre Mitte m bleibt stets auf dem festen Durchmesser FJ oder Mn. Daher nothwendig auch umgekehrt: *Die Mitten m aller mit EK parallel gezogenen Sehnen DG liegen in dem Durchmesser nn_1 oder FJ und die beiden Tangenten in den Endpunkten DG der Sehne schneiden sich auf diesem nämlichen Durchmesser FJ;* oder denkt man sich die Tangenten beweglich und lässt ihren Durchschnitt F sich auf dem festen Durchmesser JMF bewegen, so bleibt die Berührungssehne CG stets dem Durchmesser KME parallel und ihre Mitte m bleibt im ersten Durchmesser nMn_1. So wie die beiden Sehnen DG und CH der festen Diagonale EK stets parallel sind, ebenso sind die beiden Berührungssehnen CG und DH beständig der festen Diagonale FJ parallel, und ihre Mitten liegen in EK.

Zwei Durchmesser der bezeichneten Art wie EK und FJ werden [was bereits im Anfange dieses §. bemerkt worden ist] conjugirte Durchmesser der Ellipse genannt. Zufolge unserer Betrachtungen besteht ihre charakteristische reciproke Eigenschaft darin, *dass jeder durch die Mitten aller Sehnen geht, welche mit dem andern parallel sind, also auch insbesondere durch die Berührungspunkte der beiden Tangenten, welche mit dem andern parallel sind.* —

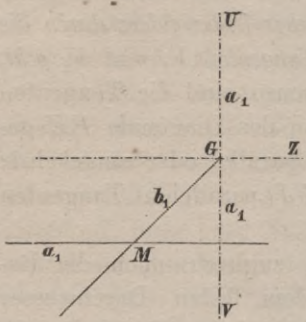
Hieran schliessen sich nun folgende Resultate:

Zu jedem Durchmesser A der Ellipse gibt es stets einen, aber auch nur einen ihm zugeordneten conjugirten Durchmesser B; er ist durch die Tangenten in den Endpunkten des erstern bestimmt, weil er ihnen parallel ist. Insbesondere sind auch die Axen ein Paar conjugirter Durchmesser.

§. 13. Verschiedene Constructionen. Gleichung der Ellipse.

Sei Z eine beliebige Tangente der Ellipse mit dem Berührungspunkt G, dann schneidet irgend ein Paar conjugirter Durchmesser auf Z zwei Punkte E und F aus, die auf verschiedenen Seiten von G liegen und der Bedingung Genüge leisten: $EG \cdot GF = a_1^2$; wo a_1 die Hälfte desjenigen Durchmessers ist, welcher der Tangente Z parallel läuft, was aus frühern Sätzen unmittelbar zu folgern ist. Schlägt man nun über jedem Punktenpaare EF den Kreis, dessen Mittelpunkt auf Z liegt, so schneiden sich alle diese Kreise in zwei festen Punkten U und V, die in der Senkrechten auf Z in G je im Abstande a_1 von G liegen. Durch die Potenztheorie des Kreises wird die Richtigkeit dieser Behauptung evident.

Fig. 72.



Jetzt kann man, sobald von einer Ellipse zwei conjugirte Durchmesser $2a_1$ und $2b_1$ der Grösse und Lage nach gegeben sind, beliebig viele andere Paare conjugirter Durchmesser in ihrer Richtung bestimmen. In einem Endpunkte G des Durchmessers $(2b_1)$ ziehe man eine Parallele Z zu $(2a_1)$ und auf Z in G eine Senkrechte UV, so dass $GU = GV = a_1$ ist. Irgend ein Kreis durch UV schneidet nun Z in zwei Punkten E und F, welche mit dem Durchschnittspunkte M der conjugirten Durchmesser (der zugleich Mittelpunkt der Ellipse ist) verbunden, die Richtungen zweier conjugirter Durchmesser ergeben. Zieht man den Kreis durch MUV, so erhält man das einzige Paar conjugirter Durchmesser, das einen rechten Winkel einschliesst, die Axen.

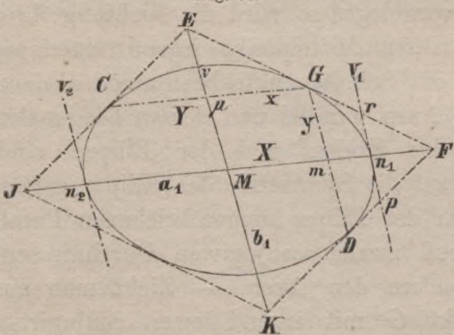
Es mögen hier noch einige Sätze und Constructionen aneinandergereiht werden, die nach dem bereits Entwickelten keiner weitern Ausführung bedürfen. Die Mitten mm_1 je zweier paralleler Sehnen DG und D_1G_1 liegen in einem Durchmesser nn_1, d. h. liegen mit dem Mittelpunkte M der Ellipse in einer Geraden. Hierdurch ist also der Mittelpunkt M zu finden, wenn die Ellipse gezeichnet gegeben ist: denn man findet durch zwei parallele Sehnen den Durchmesser nn_1, in dessen Mitte M liegt. Auch sind die Tangenten in den Endpunkten nn_1 dieses Durchmessers zu construiren; sie sind den Sehnen DG, D_1G_1 parallel. Die Mitten m jedes Systems paralleler Sehnen und die Durchschnitte F der Tangentenpaare in ihren Endpunkten liegen in einem und demselben Durchmesser FJ, welcher dem den Sehnen parallelen Durchmesser EK conjugirt ist. Und umgekehrt, die Berührungssehnen DG aller Tangentenpaare, welche aus Punkten F eines festen Durchmessers FJ an die Ellipse gelegt werden, sind parallel, nämlich dem conjugirten Durchmesser EK parallel, und ihre Mitten m liegen sämmtlich in jenem ersten Durchmesser. —

Zieht man aus den Endpunkten D, E irgend eines Durchmessers der Ellipse nach irgend einem beliebigen Peripheriepunkt G Sehnen CG, DG, so sind diese allemal irgend zweien conjugirten Durchmessern FJ, EK parallel; nämlich diese Durchmesser gehen durch die Mitten der Sehnen. Hierdurch gewinnt man eine Uebersicht des ganzen Systems conjugirter Durchmesser der Ellipse, und einen neuen Beweis, dass unter ihnen nur ein einziges Paar rechtwinklig zu einanderstehender (die Axen) existirt. — Durch jede Sehne DG sind zwei conjugirte Durchmesser bestimmt; der eine, EK ist ihr parallel und der andere JF geht durch ihre Mitte m. —

Ist die Ellipse gezeichnet vorgelegt, so wird die Richtung ihrer Axen gefunden, wenn man um ihren Mittelpunkt irgend einen sie schneidenden Kreis beschreibt, die Schnittpunkte bestimmen alsdann ein Rechteck, dessen Seiten den Axen parallel und dessen Diagonalen gemeinschaftliche Durchmesser des Kreises und der Ellipse sind. [Die Construction gründet sich auf die Symmetrie der Ellipse gegenüber ihren Axen.] — Bei jedem der Ellipse umgeschriebenen Parallelogramm sind die Seiten irgend zweien conjugirten Durchmessern parallel; beim Rechteck insbesondere den Axen. — Zieht man aus einem beliebigen Peripheriepunkt G mit irgend zwei conjugirten Durchmessern parallele Sehnen, so liegen ihre andern Endpunkte C, D allemal mit M in einer Geraden, d. h. sie sind zugleich die Endpunkte irgend eines Durchmessers CD. Und bewegt sich der Scheitel G des constanten Winkels ohne Drehung, so dass seine Schenkel stets denselben festen conjugirten Durchmessern parallel bleiben, in der Ellipse herum, so dreht sich der Durchmesser CD um M. — *Ist die Grundlinie CD eines Dreiecks CGD fest, und sollen die Schenkel CG, DG zwei conjugirten Durchmessern einer gegebenen Ellipse $\mathfrak{M}$ parallel sein, so ist der Ort der Spitze G ebenfalls eine Ellipse M, die der gegebenen ähnlich und mit ihr ähnlich liegend ist.* —

Sind die Seiten eines der Ellipse umschriebenen Parallelogramms zwei conjugirten Durchmessern parallel, also seine Berührungspunkte die Mitten der Seiten und zugleich die Endpunkte oder Scheitel der genannten Durchmesser, so sind seine Diagonalen dasjenige Paar conjugirter Durchmesser, welche zu den erstgenannten harmonisch sind. Der Beweis wird geführt, indem man zeigt, dass eine der Seiten des Parallelogramms von den vier Durchmessern in vier harmonischen Punkten geschnitten wird. [Einer von den vier Schnittpunkten liegt in unendlicher Entfernung, sein zugeordneter in der Mitte zwischen den beiden andern.] *Zu jedem Paar conjugirter Durchmesser gibt es also allemal ein, aber nur ein bestimmtes anderes Paar, welches zu ihm harmonisch ist.* Dabei fällt jedes Paar in die Diagonalen desjenigen umgeschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten dem andern Paar parallel sind. Ist das eine Paar gegeben, so lege man in den Scheiteln derselben die Tangenten, die ein Parallelogramm bilden — in dessen Diagonalen liegt dann das andre Paar; oder zwischen den Scheiteln des ersten ziehe man die Sehnen, so gehen die andern durch die Mitten dieser Sehnen. *Die zu den Axen gehörigen harmonischen conjugirten Durchmesser bilden mit jeder Axe gleiche Winkel, und sind demzufolge* (aus Symmetriegründen) *einander gleich.* —

Fig. 73.



Die Tangente V_1 sei der Diagonale EK des umschriebenen Parallelogramms $EFKJ$ parallel; nach Früheren ist dann: $EG \cdot KF = Er \cdot Kp = ek$. Daraus folgt: $\frac{EG}{Er} = \frac{Kp}{KF}$ und weil $V_1 \parallel EK$, so ist auch $\frac{Kp}{KF} = \frac{Er}{EF}$ daher $\frac{EG}{Er} = \frac{Er}{EF}$ oder $Er^2 = EG \cdot EF$. Da EM, Gm, rn_1 parallel sind, so ist $EG : Er : EF = Mm : Mn_1 : MF$ also auch $Mn_1{}^2 = Mm \cdot MF$. Construirt man noch die andere der Diagonale EK parallele Tangente V_2 und deren Berührungspunkt n_2, so sind n_1 und n_2 die Endpunkte des Durchmessers MF, und M liegt in der Mitte zwischen n_1 und n_2; daraus schliesst man vermöge der letzten Gleichung, dass die vier Punkte F, n_1, m, n_2 harmonisch und dabei F und m, so wie n_1 und n_2 zugeordnet sind. Also:

Das Rechteck unter den Abständen der Mitte m einer beliebigen Sehne DG und des Durchschnittes F der Tangenten in ihren Endpunkten vom Mittelpunkte M der Ellipse ist gleich dem Quadrat des halben Durchmessers Mn_1, in welchem jene beiden Punkte liegen.

Man bezeichne die halbe Sehne GD, also Gm durch y, die halbe Sehne GC also $G\mu$ durch x, so ist, da die Sehnen beziehlich den conjugirten Durchmessern EK und JF parallel sind, auch $M\mu = y$ und $Mm = x$. Ferner setze man $ME = Y$, $MF = X$ und $Mn_1 = a_1$,

$Mv = b_1$. Dabei werden x und y die *Coordinaten des Punktes G in Bezug auf die conjugirten Durchmesser* MF und ME genannt, und zwar heisst x die *Abscisse*, y die *Ordinate* des Punktes; gleicherweise kann man X und Y als die *Coordinaten der Tangente* in Rücksicht auf die nämlichen conjugirten Durchmesser auffassen.

Im Dreieck EMF ist Gm oder y parallel EM, daher $Gm : EM = FG : FE$ oder $\frac{y}{Y} = \frac{FG}{FE}$; ferner ist $G\mu = x$ parallel FM und daher $G\mu : FM = EG : EF$ oder $\frac{x}{X} = \frac{EG}{FE}$ demnach ist $\frac{y}{Y} + \frac{x}{X} = \frac{FG + GE}{FE} = \frac{FE}{FE}$, also

$$1)\ \frac{x}{X} + \frac{y}{Y} = 1\,.$$

Nach dem vorhin bewiesenen Satze ist aber

$$2)\ xX = a_1^2\,,\ \ yY = b_1^2\,.$$

Werden aus 2) das eine Mal die Werthe von X und Y, das andere Mal die Werthe von x und y genommen und in 1) eingesetzt:. so kommt:

$$\text{I.}\ \ \frac{x^2}{a_1^{\,2}} + \frac{y^2}{b_1^{\,2}} = 1$$

$$\text{II.}\ \ \frac{a_1^{\,2}}{X^2} + \frac{b_1^{\,2}}{Y^2} = 1\,.$$

Von diesen beiden Gleichungen heisst die erste die *Gleichung der Ellipse in Rücksicht ihrer Punkte* und in Bezug auf zwei conjugirte Durchmesser Mv und Mn_1 als Coordinatenaxen, und die andere kann aufgefasst werden als die *Gleichung der Ellipse in Rücksicht ihrer Tangenten* und in Bezug auf dieselben zwei conjugirten Durchmesser. Durch die erste werden alle Punkte, durch die zweite alle Tangenten der Ellipse bestimmt.

Wählt man die Axen der Ellipse zu Coordinatenaxen, so lautet die Gleichung I. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Schlägt man nun den Kreis über der grossen Axe als Durchmesser, so findet man als Gleichung desselben [wenn er als Ellipse aufgefasst wird], $\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{a^2} = 1$, wo $x_1\, y_1$ die Coordinaten irgend eines seiner Punkte sind. Betrachtet man einen Punkt des Kreises mit dem ihm zunächst liegenden Ellipsenpunkt $x_1 y$, der die gleiche Abscisse hat, so folgt aus den Gleichungen $\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{a^2} = 1$, $\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, die Relation $\frac{y_1^{\,2}}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}$ oder $y = \frac{b}{a}\, y_1$. *Man erhält demnach aus dem Kreise die Ellipse, indem man* *ihn auf zwei senkrecht zu einander stehende Durchmesser als Coordinatenaxen bezieht, und dann jeden seiner Punkte ersetzt durch einen Punkt der mit ihm gleiche Abscisse hat, und dessen Ordinate sich zur Ordinate des Kreispunktes verhält wie $b:a$.*

Diess gibt folgende Construction der Ellipse aus ihren Punkten, wenn die Axen $2a$ und $2b$ gegeben sind. Man schlage einen Kreis K_1 über der grossen Axe als Durchmesser und einen conzentrischen Kreis K_2 über der kleinen Axe als Durchmesser. Durch den Mittelpunkt M ziehe man nun eine beliebige Gerade, welche K_1 in p_1 und K_2 in p_2 schneidet. Eine Parallele durch p_1 zur kleinen Axe und eine Parallele durch p_2 zur grossen Axe schneiden sich in einem Punkte p der Ellipse, wie durch höchst einfache elementare Betrachtungen sofort erwiesen wird.

Fig. 74.

Theilt man den Kreis über dem Durchmesser $2a$ durch unendlich nahe aneinanderliegende Parallele zur Ordinatenaxe in unendlich kleine Theile ein, so kann man diese Theile, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen, als Rechtecke betrachten. In ähnlicher Weise ist durch diese Parallelen die Ellipse, welche den Durchmesser $2a$ zur grossen Axe und $2b$ zur kleinen Axe hat, in unendlich kleine Rechtecke getheilt. Jedes der Ellipse zugehörige Rechteck verhält sich zu dem entsprechenden Kreisrechtecke wie $b:a$, also auch die Summe der einen Rechtecke [der Ellipseninhalt] zur Summe der andern Rechtecke [dem Kreisinhalte] wie $b:a$. Da nun der Inhalt des Kreises $=\pi a^2$ ist, so folgt: *Der Inhalt der Ellipse mit den Halbaxen a und b ist $=\pi ab$, wo π die Ludolphische Zahl ist.*

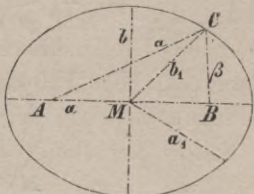
Nach dem Vorigen gehört zu jedem Punkte der Ellipse ein entsprechender desjenigen Kreises, welcher über der grossen Axe der Ellipse als Durchmesser gezogen worden ist, und ebenso findet man zu jedem Punkte dieses Kreises einen entsprechenden auf der Ellipse. In ähnlicher Weise kann zu jedem Durchmesser des Kreises ein entsprechender Durchmesser der Ellipse gezeichnet werden, nämlich derjenige, dessen Endpunkte den Endpunkten des Kreisdurchmessers entsprechen. Seien jetzt zwei senkrecht zueinanderstehende Kreisdurchmesser gegeben, so sind die Tangenten in den Endpunkten des einen dem andern parallel. Diese Eigenschaft haben auch die entsprechenden Ellipsendurchmesser d. h. diese sind conjugirte Durchmesser der Ellipse. Umgekehrt wird gezeigt, dass irgend einem Paare conjugirter

Durchmesser der Ellipse ein Paar Durchmesser des Kreises entsprechen, welche senkrecht aufeinanderstehen. Daraus folgt, dass zu einem, dem Kreise umgeschriebenen Quadrate, dessen Seite gleich dem Durchmesser ist, ein der Ellipse umgeschriebenes Parallelogramm gehört, dessen Seiten zweien conjugirten Durchmessern gleich sind. Wendet man die Schlüsse, welche zur Inhaltsberechnung der Ellipse geführt haben, auf dieses Parallelogramm an, so findet man, dass dessen Inhalt constant und zwar gleich dem Product $4ab$ ist, wo a und b die Halbaxen der Ellipse sind. [Der Inhalt des Quadrates verhält sich nämlich zum Inhalt des Parallelogramms wie $b : a$.] *Seien also* $2a_1$, $2b_1$ *die betrachteten conjugirten Durchmesser*, φ *der Winkel, den sie miteinander bilden, so ist* $4ab = 2a_1 \cdot 2b_1 \sin\varphi$ *oder auch* $a_1 b_1 \sin\varphi = ab$*).

Wir haben früher den Satz bewiesen: Von irgend einer festen Tangente der Ellipse schneidet jedes beliebige Paar paralleler Tangenten stets solche Stücke ab, deren Rechteck constant, nämlich dem Rechteck unter den aus den Brennpunkten nach dem Berührungspunkt der festen Tangente gezogenen Strahlen gleich ist. Aus diesem Satze lässt sich ein neuer Zusammenhang zwischen zwei conjugirten Durchmessern und den Axen der Ellipse herleiten.

Seien A und B die Brennpunkte der Ellipse, C einer ihrer Punkte, α und β die Leitstrahlen dieses Punktes, b_1 der halbe durch C gehende Durchmesser, a_1 die Hälfte des ihm conjugirten, so folgt aus dem angegebenen Satze sofort: 1) $\alpha\beta = a_1^2$, da die an die Endpunkte des Durchmessers $2a_1$ gelegten Ellipsentangenten parallel sind, und auf der Tangente in C ein Stück abschneiden von der Grösse $2a_1$, dessen Mitte C ist. Nach einem elementaren Satze hat man aber 2) $\alpha^2 + \beta^2 = 2c^2 + 2b_1^2$, wo c die Entfernung eines

Fig. 75.



*) Wendet man diess Resultat auf die Gleichung (17) des vorigen §. an, so lässt sich dieselbe (da α und β durch a_1 und b_1 zu ersetzen sind) in die Form umsetzen:

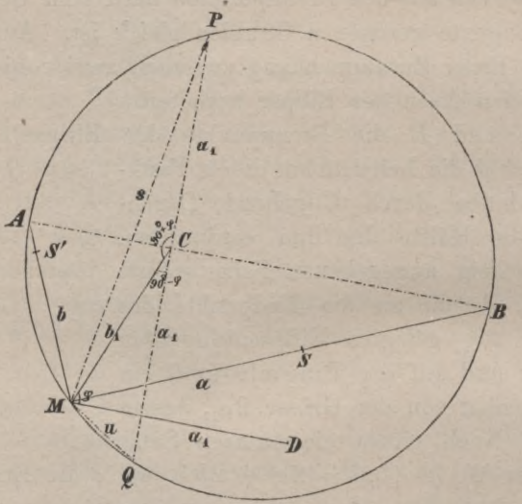
$$efki \cdot \sin^2\varphi = 4cdgh \cdot \sin^2\varphi = 4a_1^2 b_1^2 \sin^2\varphi = 4a^2b^2 \text{ d. h.:}$$

Sind die Seiten eines umgeschriebenen Parallelogrammes irgend zweien conjugirten Durchmessern parallel, so ist sowohl das Product der vier Strahlen nach den Ecken, als das Product der vier Strahlen nach den Berührungspunkten in das Quadrat des Sinus des Winkels jener Durchmesser constant, das erstere gleich dem vierfachen letztern, oder gleich dem vierfachen Producte der Quadrate der halben Axen.

Brennpunktes vom Mittelpunkt der Ellipse ist. Durch Combination von 1) und 2) erhält man $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = 2c^2 + 2a_1^{\,2} + 2b_1^{\,2}$. Es ist nun $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 = (2a)^2$, demnach $4a^2 - 2c^2 = 2a_1^{\,2} + 2b_1^{\,2}$. Nimmt man noch die Relation zu Hülfe $a^2 = b^2 + c^2$, so folgt 3) $a^2 + b^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$, oder auch: *die Summe der Quadrate zweier conjugirter Durchmesser der Ellipse ist constant, und zwar gleich der Summe der Quadrate der Axen.*

Nachdem in diesem Paragraphen bereits gezeigt worden ist, wie aus der Lage und Grösse zweier conjugirter Durchmesser die Richtung der Axen gefunden werden kann, so soll nun noch mit Hülfe der beiden zuletzt bewiesenen Sätze die Grösse der Axen berechnet und construirt werden. Man hat $a^2 + b^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$, $ab = a_1 b_1 \sin\varphi$, also auch $(a+b)^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} + 2a_1 b_1 \sin\varphi$ und in ähnlicher Weise $(a-b)^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} - 2a_1 b_1 \sin\varphi$. Aus der Summe und der Differenz der Axen können diese selbst leicht berechnet werden. Die Construction

Fig. 76.



wird wie folgt ausgeführt: $MC = b_1$ und $MD = a_1$ seien die Hälften der gegebenen conjugirten Durchmesser, φ der von ihnen eingeschlossene Winkel. Durch C ziehe man eine Parallele zu MD, so ist diese die Tangente in C an die Ellipse; eine in C senkrecht auf sie gezogene Gerade ist die zugehörige Normale. Trägt man auf dieser nach beiden Seiten von C die Strecke a_1 nach P und Q ab, so ist $MP = s$ gleich der Summe $a + b$ der gesuchten Axen, und $MQ = u$ gleich der Differenz $a - b$. In der That ist im Dreieck MPC:

$$s^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2 - 2a_1 b_1 \cos(90^0 + \varphi)$$
$$= a_1{}^2 + b_1{}^2 + 2a_1 b_1 \sin\varphi = (a+b)^2$$

und im Dreiecke MQC:

$$u^2 = a_1{}^2 + b_1{}^2 - 2a_1 b_1 \cos(90^0 - \varphi) = a_1{}^2 + b_1{}^2 - 2a_1 b_1 \sin\varphi = (a-b)^2.$$

Aus s und u werden a und b sofort construirt, indem $s + u = 2a$, $s - u = 2b$ ist. Die Richtung der Axen wird, wie bewiesen worden ist, durch den Kreis PMQ gegeben, dessen Durchschnitte A und B mit der Tangente in C den Axen angehören.

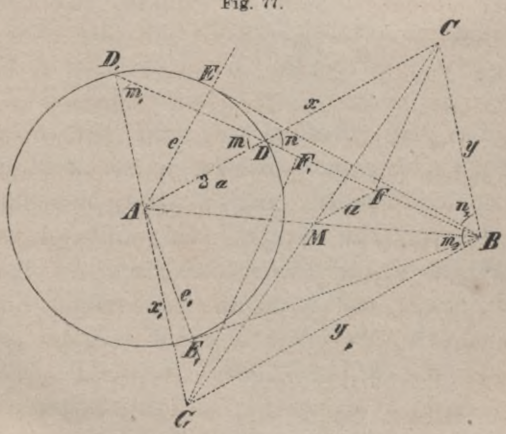
Viertes Kapitel.

Die Hyperbel.

§. 14. Erzeugung der Hyperbel durch Punkte und Tangenten.

Die Betrachtung der Hyperbel kann mit derjenigen der Ellipse in nahe Uebereinstimmung gebracht werden: Man darf nur von Zufälligkeiten und Einzelnheiten abstrahiren um die Eigenschaften beider Curven gleichlautend aussprechen zu können. Wie in der elementaren Geometrie der Satz von der Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis verschieden ausgesprochen wird, je nachdem der Punkt innerhalb oder ausserhalb des Kreises liegt, so verhält es sich mit den meisten Sätzen von den Kegelschnitten, die gar keiner oder nur geringer Modificationen bedürfen um sowohl für die Ellipse als für die Hyperbel zu gelten. Indess sollen hier nicht Schritt für Schritt die abgeleiteten Ellipsensätze auf die Hyperbel übertragen werden, sondern die Aufmerksamkeit soll sich hauptsächlich auf Eigenschaften richten, die für beide Curven verschieden sind und den wesentlichsten Unterschied zwischen ihnen bilden.

Fig. 77.



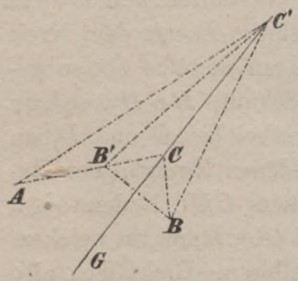
Ist C irgend ein Punkt der Hyperbel und zwar desjenigen Zweiges, welcher den Brennpunkt B umschliesst, so ist $x - y = 2a = AC - BC$. Wird auf AC, von dem Punkte A aus nach C hin, $AD = 2a$ abgeschnitten und BDD_1 gezogen, so ist $CB = CD$ also $\triangle BCD$ gleichschenklig und der Ort des Punktes D ein Kreis A mit dem gegebenen Radius $= 2a$. Dieser Kreis dient als Leitlinie zur Beschreibung der Hyperbel durch die Spitze eines veränderlichen Dreiecks: *Ein Kreis A und ein ausserhalb liegender Punkt B sind gegeben. Ein gleichschenkliges Dreieck BCD bewegt sich so, dass der eine Schenkel CD sich um den Mittelpunkt A des Kreises dreht, der eine Endpunkt D der Grundlinie die Kreislinie durchläuft und der andere in jenem Punkte B fest bleibt. Die Spitze C des Dreiecks beschreibt dann die Hyperbel, welche A und B zu Brennpunkten, und den Radius des Kreises A zur grossen Axe hat.* Diese Erzeugungsweise ist im Wesentlichen die bereits in §. 9 gegebene, woraus folgt, dass auch Ellipse und Parabel in ähnlicher Weise erzeugt werden können.

Will man einzelne Punkte der Hyperbel construiren, so ergibt sich das folgende allerdings etwas unbequeme Verfahren: Man zieht aus A einen Strahl AC, nach seinem Durchschnitt D mit dem Kreis A die Gerade BD, trägt den Winkel D bei B an dieselbe ab, so gewinnt man den Punkt C. Oder: aus B die Sekante BDD_1, sodann die Strahlen ADC und D_1AC_1, sofort die Winkel bei D und D_1 an B getragen, so hat man C und C_1 in verschiedenen Zweigen der Hyperbel und zwar Endpunkte eines Durchmessers CMC_1, denn $\sphericalangle n = m = m_1 = m_2 = n_1$, daher $ACBC_1$ ein Parallelogramm, in welchem sich bekanntlich die Diagonalen gegenseitig halbiren. Dreht sich also die Sekante BD_1 um B, so bewegen sich die gleichschenkligen Dreiecke BCD und BC_1D_1 zugleich, und ihre Scheitel C und C_1 beschreiben gleichzeitig beide Zweige der Hyperbel und sind stets die Scheitel eines Durchmessers derselben. Wird die Sekante zur Tangente, so vereinigt sich D mit D_1 in E oder E_1, so wie x und x_1 in e oder e_1 und dann wird $x \parallel y$ daher C und C_1 entgegengesetzt unendlich entfernt, das eine Mal in der Richtung e, das andere Mal in der Richtung e_1. Hiernach hätte die Hyperbel scheinbar vier unendlich entfernte Punkte, also nach einer früher eingeführten Bezeichnungsweise (§. 6) mit der unendlich entfernten Geraden vier Punkte gemein, während in §. 8. bewiesen worden ist, dass eine Gerade mit der Hyperbel höchstens zwei Punkte gemein haben kann. Der Widerspruch hebt sich, indem man bedenkt, dass auf einer Geraden nur ein unendlich entfernter Punkt angenommen wird und dass parallele Geraden denselben unendlich entfernten Punkt haben. Die Hyperbel hat also nur zwei unendlich entfernte Punkte, welche auf den Asymptoten liegen.

Die Hyperbel theilt die Ebene in drei unendliche Räume, von denen zwei je einen Brennpunkt erhalten und von der Hyperbel eingeschlossen werden, während der dritte von der Hyperbel ausgeschlossen wird. In diesem letztern Raum ist, wenn x und y die

Leitstrahlen eines beliebigen Punktes nach den Brennpunkten A und B der Hyperbel bezeichnen, $x - y < 2a$, für die Punkte der Hyperbel selbst hat man $x - y = 2a$ und für die erstgenannten beiden Räume hat man $x - y > 2a$, wenn auf das Vorzeichen keine Rücksicht genommen wird. Wenn man an die Hyperbel eine Tangente legt [eine Gerade, die nur einen Punkt mit der Hyperbel gemein hat], so kann diese nie in einen Theil der Ebene eintreten, der einen Brennpunkt einschliesst. Demzufolge hat in Anbetracht aller Punkte der Hyperbeltangente, der Berührungspunkt, der auf der Hyperbel selbst liegt, ein Maximum des Ausdrucks $x - y$. *Seien G die Tangente, A und B die Brennpunkte* (zwischen denen G hindurchgeht), *so erhält man den Berührungspunkt C, indem man den Gegenpunkt B' von B in Bezug auf G construirt und den Durchschnitt der Geraden AB' mit G bestimmt.* Denn für diesen Punkt C ist die Differenz $x - y = AC - CB = AC - CB' = AB'$; sei aber C' ein anderer Punkt von G, so ist $AC' - C'B = AC' - C'B'$ und weil $AC' < AB' + B'C'$, so ist $AC' - B'C' < AB'$, woraus folgt, dass die Differenz $x - y$ für den Punkt C in der That ein Maximum ist. — Der Punkt C liegt auf der

Fig. 78.

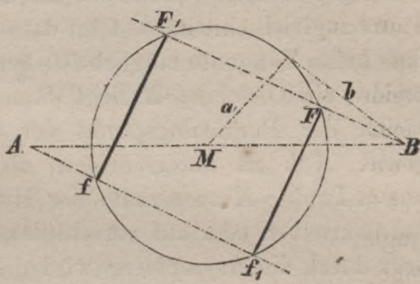


Hyperbel, also ist $AC - CB = AB' = 2a$, d. h. *construirt man den Gegenpunkt B' des Brennpunktes B in Bezug auf eine beliebige Tangente der Hyperbel, so liegt derselbe auf einem Kreise, welcher mit einem Radius gleich der grossen Axe der Hyperbel um den andern Brennpunkt A beschrieben ist.* Es ist ferner klar, dass G mit AC und CB gleiche Winkel bildet, d. h. *die Tangente im Punkte C bildet gleiche Winkel mit den Leitstrahlen AC, CB nach den Brennpunkten A und B.* Aus diesen Bemerkungen folgt sofort (vergl. Fig. 77.): *Ein Kreis A und ein Punkt B ausserhalb desselben seien gegeben; aus B ziehe man Gerade BDD_1, die den Kreis schneiden, hälfte ihre Abschnitte BD, BD_1 mittelst darauf senkrechter Geraden FC, F_1C_1, so ist deren Ort eine Hyperbel, welche A und B zu Brennpunkten hat, und deren Hauptaxe gleich dem Radius des Kreises A ist;* dabei sind FC, F_1C_1 stets Tangenten in den Scheiteln eines Durchmessers der Hyperbel. Für die Grenzfälle der Geraden BD, wo sie BE oder BE_1 ist und den Kreis A berührt, liegt der Berührungspunkt C oder C_1 der Tangente unendlich entfernt, und die Tangente geht durch M, d. h. sie ist *Asymptote.*

Da $MF \parallel AD$, so ist $MF = a = MF_1$, folglich der Ort von F und F_1 ein Kreis M mit dem Radius a, also: *Fällt man aus den*

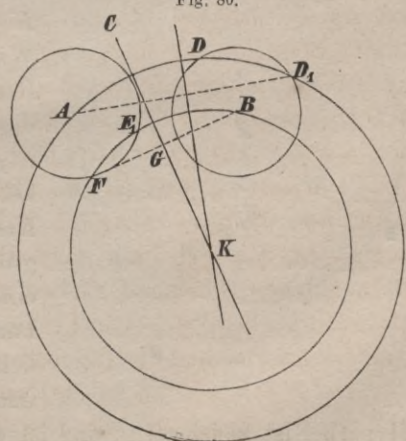
Brennpunkten einer Hyperbel Perpendikel auf ihre Tangenten, so ist der Ort der Fusspunkte derjenige Kreis, welcher über der Hauptaxe der Hyperbel als Durchmesser beschrieben worden ist. Ferner: *Zieht man aus zwei Punkten A und B, die ausserhalb eines Kreises M mit seinem Mittelpunkt in einer Geraden liegen und gleichweit von ihm entfernt sind, parallele Gerade Aff_1 und BFF_1, so bestimmen die Durchschnittspunkte zwei parallele Geraden fF_1, f_1F, welche als Tangenten eine Hyperbel beschreiben.* Jedes solche Paar Tangenten berührt die Hyperbel in den Endpunkten eines Durchmessers. [Die Elemente der Hyperbel sind leicht zu bestimmen; der Durchmesser des Kreises ist die grosse Axe, A und B sind die Brennpunkte.] Man kann auch sagen: Bewegt sich der Scheitel F eines rechten Winkels in einem festen Kreise M und geht der eine Schenkel FB stets durch einen festen ausserhalb M liegenden Punkt B, so beschreibt der andere Schenkel Ff_1 eine Hyperbel, welche mit M conzentrisch ist und B zum Brennpunkt hat. — Da $BF \cdot BF_1 = Af \cdot Af_1 = b^2$, wo b die von B an den Kreis M gehende Tangente, also nach §. 8. die halbe Nebenaxe ist, so ist damit folgender Satz bewiesen: *Fällt man aus beiden Brennpunkten Lothe auf eine und dieselbe Tangente Ff_1 der Hyperbel, oder aus einem Brennpunkt auf ein Paar paralleler Tangenten, so ist der Inhalt des Rechtecks unter den Lothen constant und zwar für beide Fälle die nämliche von der Richtung und Lage der Tangenten unabhängige Grösse b^2.*

Fig. 79.



Aus der Construction der Tangente CG in einem Punkte C der Hyperbel ist das Verfahren abzusehen, wie durch einen beliebigen ausserhalb der Hyperbel liegenden Punkt K Tangenten an dieselbe zu ziehen sind.

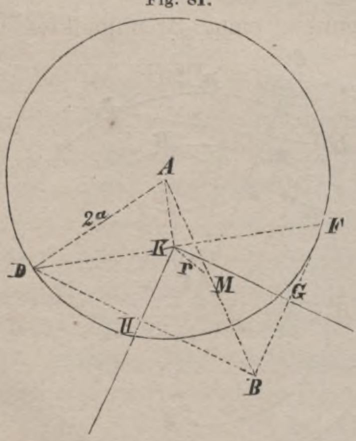
Fig. 80.



Denn da die Tangente CG der Ort gleicher Abstände ist für B und einen bestimmten Punkt F im Kreise A, und für A und einen bestimmten Punkt D im Kreise B, so folgt, dass für jeden Punkt K in der Tangente, jene Punkte F und D rückwärts bestimmt, und dadurch zu finden sind, dass aus K Kreise durch B oder A beschrieben werden, welche jene gegebenen Ortskreise um A und B beziehlich in F und D schneiden. Allein sie schneiden dieselben auch noch in F_1 und D_1, woraus folgt, dass im Allgemeinen zwei Tangenten durch den angenommenen Punkt K gehen, wovon die eine BF und AD, die andere BF_1 und AD_1 senkrecht hälftet. Schneiden die Kreise einander nicht, was für beide Paare zugleich eintritt, so folgt dass K innerhalb der Hyperbel liegt und dass keine Tangente möglich ist; berührt sich das eine Paar, so thut das andere ein Gleiches, K liegt dann in der Hyperbel selbst und ist zugleich der Berührungspunkt der einzigen durch ihn gehenden Tangente. Um zu unterscheiden, ob die beiden Tangenten, welche von einem Punkte K ausserhalb der Hyperbel an dieselbe gezogen werden, auf demselben oder auf verschiedenen Zweigen berühren, dient Folgendes: durch die Asymptoten wird der ausserhalb der Hyperbel liegende Raum in vier Theile getheilt, und diese geben die Entscheidung. *Liegt K zwischen den Asymptoten und der Hyperbel, so gehen beide Tangenten an denselben Zweig, liegt K im äussern Asymptotenwinkel, so liegen die Berührungspunkte auf verschiedenen Zweigen.* Der Berührungspunkt einer Asymptote kann sowohl auf dem einen als dem andern Zweige angenommen werden.

Da die Tangente CG auf dem zugehörigen Strahl BF senkrecht steht, so ist es leicht zwei Tangenten zu finden, die einen gegebenen Winkel α mit einander bilden, denn eben diesen Winkel schliessen die zugehörigen Strahlen aus B oder A [BF und BF_1, AD und AD_1] ein. Soll insbesondere der Winkel α ein Rechter sein, so kann der Ort von K verlangt werden. Da auch der Winkel der zugehörigen Strahlen ein Rechter sein muss, so ist klar, dass die Forderung nicht immer zu erfüllen ist, sondern nur so lange, als der Winkel (tt_1) der beiden von B aus an den Kreis A gehenden Tangenten t und t_1 grösser als ein Rechter ist; ist er gleich einem Rechten, so gibt es nur ein Paar rechtwinkliger Tangenten, nämlich die Asymptoten, und dann ist der Ort von K auf M beschränkt, und die

Fig. 81.



Hyperbel ist gleichseitig, und ist er kleiner als ein Rechter, so ist die

Forderung unmöglich, und diess findet also statt, wenn der Winkel (tt_1) spitz, mithin der Asymptotenwinkel $\pi - (tt_1)$ stumpf ist oder $b > a$.

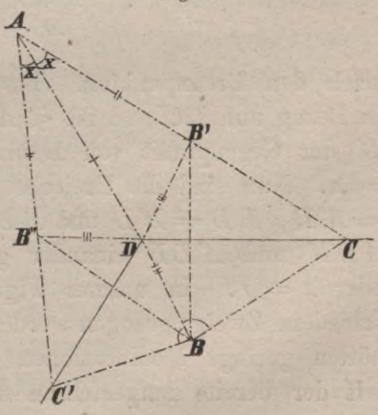
Es seien die Tangenten KG und KH zueinander rechtwinklig, so ist auch der Winkel $GBH = 90^0$ und daher der Strahl $BH \parallel GK$, $BG \parallel KH$ und folglich, da G und H die Mitten der Strahlen BF und BD sind, liegt K in der Mitte der Geraden DF. Also ist, weil $AD = AF$ und $KD = KF = KB$, AK senkrecht auf DF und $AK^2 + BK^2 = 4a^2 = 2r^2 + 2c^2$, demzufolge unter Benutzung der bekannten Relation zwischen grosser Axe, Nebenaxe und Excentrizität $r^2 = a^2 - b^2$, d. h.: *Der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel eine gegebene Hyperbel berühren, ist ein mit der Hyperbel conzentrischer Kreis, dessen Radius $r = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist.* Auch hieraus erkennt man, dass für die gleichseitige Hyperbel der Kreis sich auf einen Punkt reduzirt, während er für Hyperbeln mit stumpfem Asymptotenwinkel unmöglich wird.

Diese Betrachtung ergibt unmittelbar folgende Sätze: *Dreht sich ein rechter Winkel um einen festen Punkt B, und schneiden seine Schenkel einen festen Kreis A, der B nicht umschliesst, so ist der Ort der Mitten aller Sehnen, welche Schnittpunkte kreuzweise verbinden, ein bestimmter Kreis M, dessen Mittelpunkt die Mitte von AB ist.* Alle diese Sehnen sind zudem Tangenten einer bestimmten Hyperbel. Ferner: *Liegen zwei Gegenecken eines Rechteckes in einer gegebenen Kreislinie A und die dritte in einem festen Punkte ausserhalb des Kreises,* so ist der Ort der vierten Ecke ein zweiter Kreis M.

§. 15. Betrachtung von zwei und mehr Hyperbeltangenten.

Aus dem Satze, dass die Gegenpunkte eines Brennpunktes in Bezug auf alle Tangenten einer Hyperbel ein Kreis mit dem andern Brennpunkt als Mittelpunkt und der grossen Axe als Radius ist, lassen sich mehrere bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Seien CD, $C'D$ zwei Tangenten mit den Berührungspunkten C und C', die auf demselben Zweige der Hyperbel liegen mögen, D ihr Durchschnittspunkt, so kann man die Gegenpunkte B' und B'' von B in Bezug auf diese beiden Tangenten bestimmen. Es sind dann

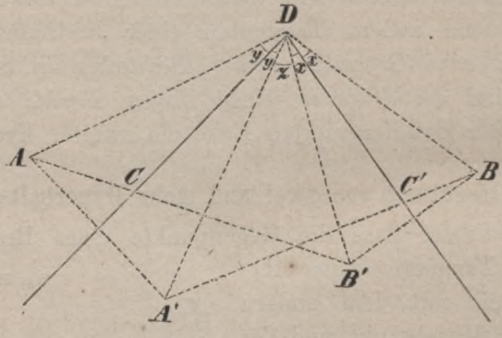
Fig. 82.



die Dreiecke $AB'D$ und $AB''D$ congruent, da AD sich selbst gleich, $AB' = AB'' = 2a$ und $DB' = DB = DB''$ ist, also hat man $\sphericalangle B'AD = B''AD$ oder auch $\sphericalangle CAD = C'AD$. Ebenso lässt sich beweisen, dass auch $\sphericalangle CBD = C'BD$ ist, indem man einfach die Gegenpunkte von A in Bezug auf die beiden gegebenen Tangenten zu Hülfe nimmt. Etwas anders gestaltet sich die Sache, wenn die Tangenten CD und $C'D$ an verschiedene Zweige der Hyperbel gelegt werden. In Rücksicht der Winkel bei A hat man in diesem Falle immer noch $\triangle AB'D \cong AB''D$, also $\sphericalangle B'AD = B''AD$, aber der Strahl AD halbirt nun nicht den Winkel CAB' sondern seinen Nebenwinkel $B'AB''$. Dasselbe gilt natürlich auch in Bezug auf den Brennpunkt B, man hat also den Satz: *Zieht man von einem Brennpunkte aus Strahlen nach den Berührungspunkten und dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten der Hyperbel, so halbirt der letztere Strahl entweder den Winkel zwischen den beiden ersten, oder aber dessen Nebenwinkel, je nachdem die beiden Tangenten an denselben oder an verschiedene Zweige der Hyperbel gehen.*

Wir ziehen von einem Punkte D aus zwei Tangenten an die Hyperbel DC' und DC, ferner von demselben Punkte D die Strahlen

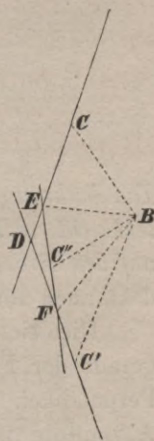
Fig. 83.



nach den Brennpunkten. Bestimmt man den Gegenpunkt A' von A in Bezug auf DC', so ist $\sphericalangle ADC' = C'DA' = y$ und ebenso, wenn B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf CD ist, $\sphericalangle B'DC = CDB = x$. Nun sind die Dreiecke $AB'D$ und $A'DB$ congruent, da $AD = A'D$, $BD = B'D$ und $AB' = A'B = 2a$, also sind die Winkel ADB' und $A'DB$ einander gleich und man hat $z + 2y = z + 2x$ oder $x = y$. In unserer Figur sind die beiden Tangenten an verschiedene Zweige gezogen worden; wäre diess nicht der Fall gewesen, so hätten geringe Modificationen eine analoge Beziehung ergeben, die mit der bereits aufgestellten sich zu dem folgenden Satze vereinigen lässt: *Zieht man von den beiden Brennpunkten einer Hyperbel aus Strahlen nach dem Durchschnittspunkte zweier Tangenten derselben, so sind die Winkel, welche diese Strahlen mit den Tangenten bilden, und zwar je mit derjenigen Richtung derselben, die nach dem Berührungspunkte geht, einander gleich, sobald die beiden Tangenten an verschiedene Zweige der Hyperbel gehen, und sie ergänzen sich zu zwei Rechten, wenn beide Tangenten an denselben Zweig gelegt sind.*

Tritt zu zwei festen Tangenten eine dritte bewegliche, so gilt folgender Satz: *Der Winkel, unter dem das zwischen zwei festen Tangenten befindliche Stück einer dritten beweglichen Tangente von einem Brennpunkte aus gesehen wird, ist constant, so lange die bewegliche Tangente nicht einer der festen parallel wird, ohne dass sie mit ihr zusammenfällt; er springt hingegen in den Nebenwinkel um, so oft der erwähnte Umstand eintritt.*

Fig. 84.



Gehen die zwei festen Tangenten an denselben Hyperbelast, so ist dieser Winkel die Hälfte von dem convex oder concav genommenen Winkel, den die vom Brennpunkte B nach den Berührungspunkten der zwei festen Tangenten gehenden Strahlen mit einander bilden. Gehen die zwei festen Tangenten an verschiedene Hyperbeläste, so ist der genannte Winkel gleich dem halben concav oder convex genommenen Nebenwinkel desjenigen, unter dem die Berührungssehne der zwei festen Tangenten erscheint.

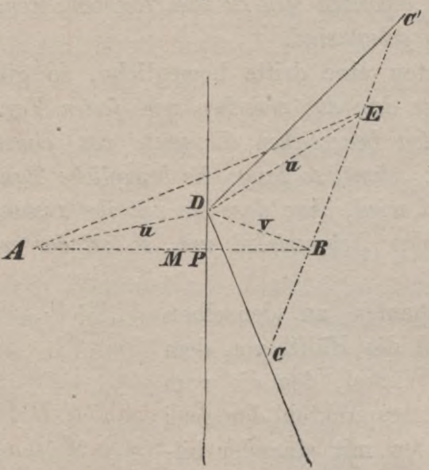
Seien in der That CD und $C'D$ die beiden festen Tangenten mit den Berührungspunkten C und C', ferner $EC''F$ die bewegliche Tangente mit dem Berührungspunkte C'', so ist $\sphericalangle CBE = C''BE$ und $C'BF = C''BF$, also $CBE + C'BF = C''BE + C''BF = EBF = \frac{1}{2}\, CBC'$. Daraus folgt nun, *dass in irgend einem der Hyperbel umschriebenen Viereck je zwei gegenüberliegende Seiten von einem Brennpunkte aus entweder unter gleichen Winkeln gesehen werden, oder aber unter solchen, die sich zu zwei Rechten ergänzen.*

Wenn in dem vorhin bewiesenen Satze die Berührungssehne CC' der beiden festen Tangenten durch den einen Brennpunkt geht, so erscheint das zwischen diesen Tangenten liegende Stück einer dritten Tangente vom Brennpunkte aus unter rechtem Winkel und der von dem Brennpunkte aus nach dem Durchschnittspunkte der beiden festen Tangenten gezogene Strahl steht senkrecht auf der Berührungssehne, denn es ist $DBC = DBC' = \frac{1}{2}\, CBC'$.

Wir ziehen aus dieser Bemerkung folgenden Schluss: Wenn CD

und $C'D$ zwei Tangenten sind, deren Berührungssehne durch B geht, so liegt der Gegenpunkt des Brennpunktes A in Bezug auf die Tangente CD in der Berührungssehne CC'. Sei E dieser Gegenpunkt, so ist $AD = DE = u$, $DB = v$, ferner ist nach Früherem $BE = 2a$ und da DEB ein rechtwinkliges Dreieck ist, so hat man $u^2 - v^2 = (2a)^2$, d. h. der Punkt D liegt derart, dass die Differenz der Quadrate seiner Abstände von zwei festen Punkten A und B constant ist. Unter Berücksichtigung des geometrischen Ortes in §. 7, 3 folgt daher der Satz: *Zieht man durch einen Brennpunkt B der Hyperbel beliebige Sehnen, und construirt den Durchschnittspunkt derjenigen Tangenten, welche je in den Endpunkten einer solchen Sehne die Hyperbel berühren, so diese liegen Durchschnittspunkte alle in einer Geraden, welche auf der Hauptaxe senkrecht steht.* Diese Gerade heisst *Leitlinie der Hyperbel in Bezug auf den Brennpunkt B;* aus Gründen der Symmetrie ergibt sich sofort, dass auch für den Brennpunkt A eine Leitlinie existiren muss.

Fig. 85.

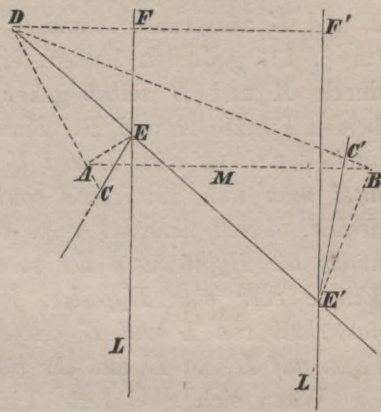


Die einem Brennpunkt zugehörige Leitlinie ist die Verbindungsgerade der Fusspunkte der von ihm aus auf die Asymptoten gefällten Perpendikel. Denn die Parallele durch den Brennpunkt zu einer Asymptote ist die Berührungssehne zweier Hyperbeltangenten (eine davo nist die Asymptote selbst), die sich in einem Punkte schneiden, welcher in dem Perpendikel liegt, das vom Brennpunkt auf die Berührungssehne (also auch auf die Asymptote) errichtet werden kann.

Die beiden Leitlinien laufen parallel unter sich und mit der Nebenaxe, und jede hat von dem Mittelpunkt M die Distanz $\frac{a^2}{c}$. Sei nämlich P der Durchschnittspunkt der zu B gehörigen Leitlinie mit der Hauptaxe, so ist $PA^2 - PB^2 = (2a)^2$, $PA + PB = 2c$, also durch Division $PA - PB = 2PM = \frac{2a^2}{c}$ und $PM = \frac{a^2}{c}$; man findet ferner leicht $PA = c + \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 + a^2}{c}$ und $PB = c - \frac{a^2}{c} = \frac{c^2 - a^2}{c} = \frac{b^2}{c}$.

Die Umkehrung der obigen Entwicklungen führt zu der Consequenz: *Dass für jeden Punkt einer Leitlinie die Berührungssehne der* *von ihm aus an die Hyperbel gezogenen Tangenten durch den zugehörigen Brennpunkt geht*, welche keines weiteren Beweises bedarf.

Fig. 86.

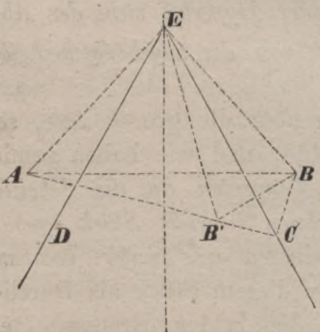


Wenn D ein Punkt der Hyperbel auf dem den Brennpunkt A umschliessenden Zweige ist, so wird die Gerade DA auf demselben Zweige einen Punkt C, und DB auf dem andern B umschliessenden Zweige einen Punkt C' ergeben. Die Hyperbeltangenten in C und D schneiden sich auf der zu A gehörigen Leitlinie L in einem Punkte E, die Tangenten in D und C' aber in einem Punkte E' der zu B gehörigen Leitlinie L'. Jetzt sind die Dreiecke DAE und DBE' ähnlich, denn die Winkel bei D sind einander gleich, weil die Hyperbeltangente den Winkel der Leitstrahlen DA und DB hälftet, und die Winkel bei A und B sind, wie bewiesen worden, Rechte; demnach ist $\frac{DA}{DB} = \frac{DE}{DE'}$. Legt man durch D eine Parallele zu AB, welche L und L' in F und F' treffen möge, so ist $\frac{DE}{DE'} = \frac{DF}{DF'}$, also auch $\frac{DA}{DB} = \frac{DF}{DF'}$ oder $\frac{DA}{DF} = \frac{DB}{DF'} = \frac{DB - DA}{DF' - DF}$. Nun ist $DB - DA = 2a$ [nach der Fundamentaldefinition der Hyperbel] und $DF' - DF = FF' = \frac{2a^2}{c}$ [gleich dem doppelten Abstande einer der Leitlinien vom Mittelpunkte der Hyperbel], also $\frac{DA}{DF} = \frac{DB}{DF'} = \frac{c}{a}$, d. h. *Für jeden Punkt der Hyperbel steht der Abstand von einem Brennpunkte zum Abstande von der zugehörigen Leitlinie in einem constanten Verhältniss.*

Ist die Berührungssehne zweier Tangenten die grosse Axe, so geht dieselbe durch die beiden Brennpunkte, und wir haben somit zufolge eines frühern Satzes: *Legt man Tangenten an die Scheitel der Hauptaxe, so erscheint das zwischen ihnen liegende Stück irgend einer dritten Tangente von beiden Brennpunkten aus unter rechtem Winkel;* wenn man also einen Kreis über diesem Stück als Durchmesser schlägt, so geht derselbe durch die beiden Brennpunkte. Schlägt man desshalb eine Kreisschaar durch zwei feste Punkte A und B, nimmt dann zwischen denselben zwei äquidistante Gerade L und L', welche senkrecht zu AB stehen und verbindet von den vier Punkten, in denen dieselben jeden Kreis schneiden, je zwei diametral gegenüberstehende, so umhüllen die sich ergebenden Geraden eine Hyperbel, deren Brennpunkte in A und B und deren Scheitel in L und L' liegen. Der Grenzfall, wenn der Kreis die Strecke AB zum Durchmesser hat, gibt die Asymptoten. Nimmt man die Geraden L und L' ausserhalb A und B, so gibt dieselbe Construction, wie wir im §. 11. gefunden hatten, eine Ellipse, und wenn L und L' resp. durch A und B selbst gehen, so reduzirt sich das Gebilde auf die beiden Punkte A und B. Man kann ferner ohne Weiteres den Satz aufstellen: *Es seien L und L' zwei feste, zu einander parallele Gerade; lässt man nun um irgend einen festen Punkt A einen rechten Winkel drehen, dessen Schenkel resp. von L und L' begränzt werden, so umhüllen die Hypotenusen der so entstandenen rechtwinkligen Dreiecke eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem der Punkt A zwischen oder ausserhalb von L und L' gelegen ist; die Scheitel des erzeugten Gebildes liegen auf L und L' und der eine Brennpunkt ist A.*

Wenn sich zwei feste Tangenten der Hyperbel in einem Punkte der Nebenaxe schneiden, so wird die Berührungssehne derselben von beiden Brennpunkten aus unter gleichem Winkel gesehen; somit wird das zwischen ihnen liegende Stück einer beweglichen dritten Tangente von beiden Brennpunkten aus entweder ebenfalls unter gleichen Winkeln gesehen, oder aber unter solchen, die sich zu zwei Rechten ergänzen. Man überzeugt sich aber leicht, dass nur der letztere Fall eintreten kann, indem man die bewegliche Tangente mit einer der beiden festen zusammenfallen lässt. Das in Betracht kommende Stück ist dann gleich dem Abstande des Durchschnittspunktes der beiden festen Tangenten von dem Berührungspunkte der einen derselben und man kann den Beweis wie folgt führen:

Fig. 87.

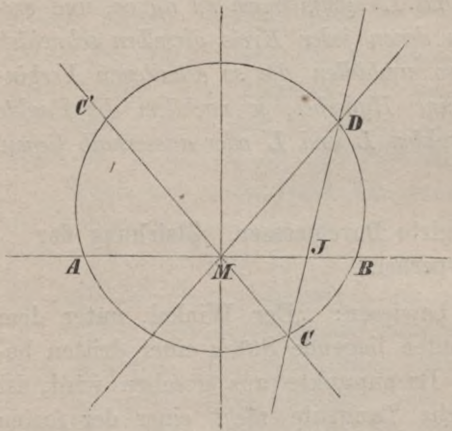


Sei E der Durchschnitt der beiden Tangenten CE und DE, B' der Gegenpunkt von B in Bezug auf CE, so liegen die Punkte A, B', C in einer Geraden und es ist $\sphericalangle EB'A + EB'C = 180^0$; ferner hat man $\sphericalangle EBC = EB'C$, und da $EB = EB' = EA$, so ist auch $\sphericalangle EAB' = EB'A$ und endlich $\sphericalangle EAC + EBC = 180^0$. Dasselbe muss nun für jede beliebige Lage der dritten beweglichen Tangente gelten, da die Winkel in A und in B immer de zugleich entweder constant bleiben, oder aber in den Nebenwinkel des frühern übergehen. Legt man also durch einen Punkt der Nebenaxe der Hyperbel zwei Tangenten an dieselbe, so erscheint das zwischen denselben liegende Stück einer beweglichen dritten Tangente von den beiden Brennpunkten aus unter zwei Winkeln, die sich zu zwei Rechten ergänzen. Die Endpunkte des genannten Stückes liegen mit den beiden Brennpunkten zusammen auf einem und demselben Kreise; mit dem früher abgeleiteten analogen Satze für die Ellipse verbunden erhält man also folgende Construction von Ellipse und Hyperbel durch ihre Tangenten: *Schlägt man eine Kreisschaar durch zwei feste Punkte A und B, zieht durch irgend einen Punkt der Centralaxe zwei feste Strahlen L und L' symmetrisch zu dieser, und verbindet von den vier Punkten, in denen jeder Kreis dieselben schneidet, je die unsymmetrisch gelegenen, so umhüllen die so erhaltenen Verbindungsgeraden eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem die Punkte A und B zwischen den beiden Strahlen L und L' oder ausserhalb liegen.*

§. 16. Asymptoten und conjugirte Durchmesser. Gleichung der Hyperbel.

Wir hatten folgenden Satz bewiesen: „Der Winkel, unter dem das zwischen zwei festen Tangenten liegende Stück einer dritten beweglichen Tangente von einem Brennpunkte aus gesehen wird, ist constant, so lange die bewegliche Tangente *nicht* einer der festen parallel wird, ohne dass sie mit ihr zusammenfällt; er springt hingegen in den Nebenwinkel um, so oft der erwähnte Umstand eintritt. Gehen die zwei festen Tangenten an denselben Hyperbelast, so ist dieser Winkel die Hälfte von dem convex oder concav genommenen Winkel, den die vom Brennpunkt B nach den Berührungspunkten der zwei festen Tangenten gehenden Strahlen mit einander bilden.“ Setzen wir nun fest, dass die Asymptoten die beiden unveränderlichen Tangenten seien, und kommen im Fernern überein, dass die Asymptoten als denselben Zweig der Hyperbel berührend betrachtet werden sollen, so erscheint die Berührungssehne derselben von den Brennpunkten aus unter dem Asymptotenwinkel. Es folgt daher unter Berücksichtigung des vorhin wiederholten Satzes: *Das zwischen den Asymptoten liegende Stück irgend einer dritten Tangente erscheint von den Brennpunkten aus unter Winkeln, deren Summe $= 180^0$ ist, und zwar ist der eine φ, der andere $180^0 - \varphi$, wenn φ den halben Asymptotenwinkel bezeichnet.* Sind also die Asymptoten und irgend eine dritte Tangente der Hyperbel gegeben, so kann man dieselbe wie folgt construiren. Man halbire den äussern Winkel der Asymptoten und schlage einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Nebenaxe liegt [welche die Halbirungslinie des äussern Asymptotenwinkels ist] um das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Hyperbeltangente; wo dieser Kreis die Halbirungslinie des eigentlichen Asymptotenwinkels [die Hauptaxe der Hyperbel] trifft, sind die beiden Brennpunkte. Schlägt man jetzt um A und B eine Kreisschaar, so ergeben die Durchschnittspunkte derselben mit den Asymptoten nach Früherem durch eine einfache Construction die Gesammtheit der Tangenten der Hyperbel.

Fig. 88.

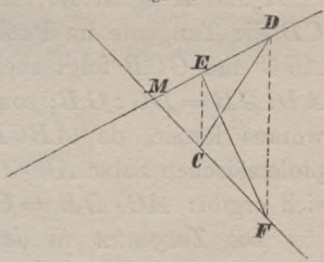


Es seien MC und MD die Asymptoten einer Hyperbel, CD eine Tangente derselben, ferner J der Durchschnitt dieser Tangente mit der Hauptaxe, und schliesslich C' der zweite Durchschnittspunkt des Kreises $ACBD$ mit der Asymptote MC, so hat man zunächst: $JA \cdot JB = JC \cdot JD$ d. h. *Das Rechteck unter den Abschnitten, welche die Hauptaxe auf dem zwischen den Asymptoten liegenden Stück irgend einer Tangente der Hyperbel bildet, ist gleich dem Rechteck unter den Abschnitten, welche diese Tangente auf der Strecke AB erzeugt.* Für jeden beliebigen der Kreise durch AB hat man weiter: $MC \cdot MC' = MA^2 = c^2$, also da $MC' = MD$, auch $MC \cdot MD = c^2$, was den Satz ergibt:

Das Rechteck unter den Abschnitten, welche eine bewegliche Tangente der Hyperbel auf den Asymptoten bildet, ist constant, und zwar gleich dem Quadrate über der halben Brenndistanz. Wenn, wie früher, φ der halbe Asymptotenwinkel ist, so ist für jede beliebige Hyperbeltangente die Fläche des Dreiecks $MDC = \frac{1}{2}\, MC \cdot MD \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\, c^2 \sin 2\varphi$, *es ist also der Inhalt des Dreiecks, welches die Hyperbeltangenten in jeder ihrer Lagen mit den Asymptoten bildet, constant.* Sind nun zwei sich schneidende Gerade gegeben, und man trägt in zwei Scheitelwinkeln alle möglichen Dreiecke von gegebenem Inhalte ab, so ergeben die Grundlinien dieser Dreiecke die Tangenten einer Hyperbel, welche die gegebenen Geraden zu Asymptoten hat. Macht man dasselbe in den beiden andern Scheitelwinkeln, so erhält man die conjugirte Hyperbel. Durch diese Bemerkung ist man in den Stand gesetzt, die nachfolgende Aufgabe zu lösen: *Gegeben zwei sich schneidende Gerade und ein Punkt. Man soll durch den Punkt eine Gerade* *legen, welche mit den beiden ersten ein Dreieck von gegebenem Inhalte bildet.* Man zeichne, um die Lösung zu construiren, die durch die Grösse des Dreiecks bestimmten conjugirten Hyperbeln, und ziehe vom Punkte, der gegeben ist, Tangenten an dieselben, so sind diese die gesuchten Geraden. Liegt also dieser Punkt in dem von beiden Hyperbeln ausgeschlossenen Theile der Ebene, so sind vier Lösungen vorhanden, liegt der Punkt auf einer der Hyperbeln, so gibt es drei, und wenn der Punkt innerhalb einer der beiden Hyperbeln sich befindet, so erhält man zwei Lösungen der Aufgabe.

Man kann noch einfacher, als es vorhin geschehen ist, die Tangenten einer Hyperbel verzeichnen, von welcher man die Asymptoten MC und MD und eine Tangente CD kennt. Man lege nämlich durch C und D zwei beliebige parallele Gerade, welche die Asymptoten noch in E und in F treffen mögen, so ist EF eine neue Tangente der Hyperbel. In der That ist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MEC und MDF

Fig. 89.

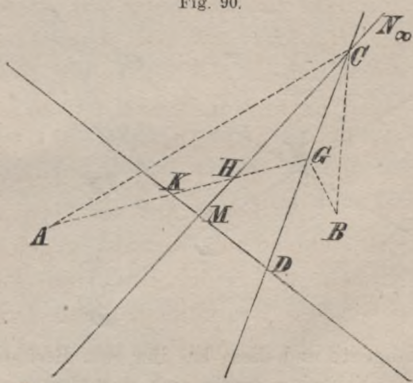


$$ME : MD = MC : MF, \text{ oder}$$
$$MC \cdot MD = ME \cdot MF,$$

d. h. die Dreiecke MEF und MCD haben gleichen Flächeninhalt, was auch daraus sich ergibt, dass die Dreiecke ECF und ECD inhaltsgleich sind.

Fasst man die Asymptote MC so auf, als gehe sie mit der Tangente CD an denselben Zweig der Hyperbel, nennt man ferner den Berührungspunkt dieser Asymptote [ihren unendlich entfernten, nach unserer Annahme rechts von MC liegenden Punkt] N und den Berührungspunkt der mit CD bezeichneten Tangente G, so ist $BN \parallel MC$, $\sphericalangle CBG = CBN = BCM$ und nach frühern Sätzen: $\sphericalangle BCM = ACG$, also $\sphericalangle CBG = ACG$; ferner ist $\sphericalangle AGC = BGC$ und somit sind die Dreiecke AGC und BGC ähnlich. Daraus folgt nun: $GC^2 = AG \cdot BG$.

Fig. 90.



Durchaus analog wird die Relation $GD^2 = AG \cdot BG$ abgeleitet, aus welcher man in Verbindung mit der eben gefundenen zieht: $GC = GD$; d. h.: *Das zwischen den Asymptoten liegende Stück irgend einer*

*Tangente der Hyperbel wird vom Berührungspunkte halbirt, und das Quadrat der Hälfte ist gleich dem Rechtecke unter den Leitstrahlen des Berührungspunktes**). Ist die Hyperbel gleichseitig, also das Dreieck CDM rechtwinklig, so ist $CG = GD = MG$, also $AG \cdot BG = MG^2$, wie wir schon in §. 8, 3 durch Discussion der Gleichung $xz - y^2 = d^2$ gefunden hatten.

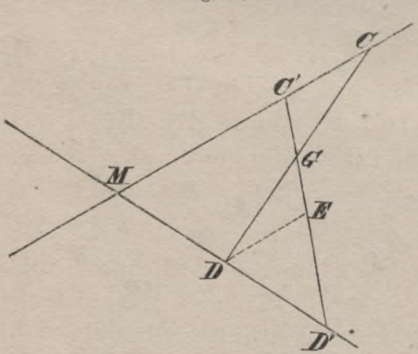
Kehren wir zum allgemeinen Fall zurück: Da $\sphericalangle ACM = BCG$ und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AGC und BGC auch $\sphericalangle BCG = CAG$ ist, so hat man $\sphericalangle ACH = CAH$, somit $AH = HC$; ebenso wird $AK = KD$ sein, also sind die Dreiecke AHC und AKD gleichschenklige. Diess gibt eine einfache Methode, um an einen beliebigen Punkt G der Hyperbel die Tangente zu ziehen. Man lege durch G den Leitstrahl nach A, welcher die Asymptoten resp. in H und K schneidet, mache $HC = HA$ und $KD = KA$, so ist CD die Tangente im Punkte G. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AGC und GCB folgt auch: $AC : CB = CG : GB$, ebenso wird sein: $AD : DB = DG : GB$; somit, da $CG = GD$, ist $AC : CB = AD : DB$, woraus ferner, da $ABCD$ ein Kreisviereck und desshalb nach dem ptolemäischen Satze $AC \cdot DB + CB \cdot AD = AB \cdot DC = 2c \cdot DC$ ist, sich ergibt: $AC \cdot DB = CB \cdot AD = c \cdot CD$. —

Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind, wie leicht zu beweisen ist, *einander parallel.* Aber nicht jeder Durch-

---

*) Dass der Berührungspunkt G einer Hyperbeltangente ihr zwischen den Asymptoten enthaltenes Stück CD halbirt, kann auch so gezeigt werden:

Fig. 91.

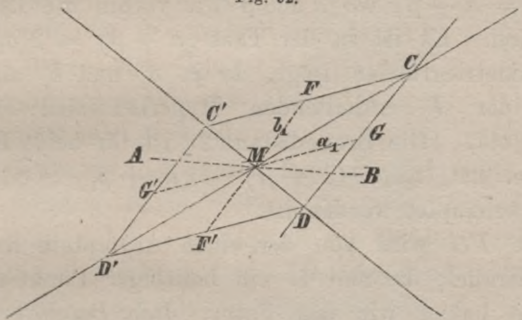


Wäre G nicht Berührungspunkt, so ginge durch ihn noch eine zweite Hyperbeltangente $C'D'$ und die beiden Dreiecke MCD und $MC'D'$ müssten inhaltsgleich sein. Wenn nun D' weiter von M entfernt ist, als D, so ziehe man DE parallel zu CC'; es entstehen dann die inhaltsgleichen (und congruenten) Dreiecke CGC' und GDE, woraus sich ergibt: $\triangle MC'D' = MCD + DED'$, was einen Widerspruch mit der geforderten Gleichung $MCD = MC'D'$ enthält; also geht durch den Punkt G nur eine einzige Hyperbeltangente und diese hat ihn zum Berührungspunkte.

Nebenher ergibt sich der elementare Satz: *Unter allen durch einen Punkt G gehenden Geraden schneidet zwischen zwei festen Geraden diejenige das Dreieck vom kleinsten Flächeninhalte ab, welche im Punkte G zwischen den gegebenen Geraden halbirt wird.* [Dabei ist die Voraussetzung gemacht, dass G auf der Seite des Dreiecks selbst, und nicht etwa auf der Verlängerung gelegen sei.]

messer der Hyperbel schneidet auf derselben zwei Punkte aus [jede durch den Mittelpunkt M gehende Gerade heisst Durchmesser der Hyperbel], so dass also in dem gleichen Sinne wie für die Ellipse keine conjugirten Durchmesser für die Hyperbel existiren. Bei der Ellipse wurden nämlich zwei Durchmesser conjugirte genannt, von denen jeder zu den Tangenten in den Endpunkten des andern parallel war. Diese Definition lässt sich nun, wie man sofort einsieht, nicht unmittelbar auf die Hyperbel übertragen. Man nimmt desshalb die conjugirte Hyperbel zu Hülfe und sagt: *zwei conjugirte Durchmesser der Hyperbel sind solche, von denen jeder parallel ist zu den Tangenten in den Endpunkten des andern, insofern diese Endpunkte das eine Mal auf der Hyperbel selbst, das andere Mal auf der conjugirten Hyperbel gemessen werden.* Es seien wiederum CMD' und $C'MD$ die Asymptoten der Hyperbel, CD eine Tangente mit dem Berührungspunkte G [es ist dann $CG = GD$]; diese Elemente bestimmen durch einfaches Ziehen von Parallelen durch C und D mit GM ein Parallelo-

Fig. 92.



gramm $CC'DD'$. Verlängert man GM bis G' und zieht durch M die Parallele FF', zu CD, so sind FF' und GG' ein Paar conjugirter Durchmesser in Bezug auf die Hyperbel. Es ist nun $AG \cdot BG = CG^2 = MF^2$ d. h.: *Das Rechteck unter den Leitstrahlen irgend eines Punktes der Hyperbel ist gleich dem Quadrate des halben, diesem Punkte entsprechenden conjugirten Durchmessers.* Es seien $\alpha = AG$ und $\beta = BG$ die Leitstrahlen des Punktes G, so hat man $\alpha^2 + \beta^2 = 2a_1^2 + 2c^2$; es ist aber $\alpha\beta = b_1^2$, also $(\alpha - \beta)^2 = 2(a_1^2 - b_1^2 + c^2)$, oder da $\alpha - \beta = 2a$ [wo, wie immer $2a$ die Axe der Hyperbel ist], $2a^2 = a_1^2 - b_1^2 + c^2$, und unter Berücksichtigung der Formel $a^2 = c^2 - b^2$, $a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$, oder in Worten: *Die Differenz der Quadvate zweier conjugirter Durchmesser ist constant, und gleich der Differenz der Quadrate der Axen.* Wie bei der Ellipse, sind auch bei der Hyperbel die Axen ein Paar conjugirter Durchmesser, und zwar kann bewiesen werden, dass sie die einzigen zueinander senkrecht stehenden sind. Um die Bedeutung der Asymptoten zu erkennen, beachte man den Satz: *Jedes Paar conjugirter Durchmesser einer Hyperbel ist ein den Asymptoten zugeordnetes harmonisches Strahlenpaar.* In der That schneidet die Gerade FG die conjugirten Durchmesser und die Asymptoten in vier harmonischen Punkten, von denen einer in unendlicher Entfernung liegt, während sein zugeordneter sich in der Mitte der beiden übrigen befindet. Man findet also das gesammte System conjugirter Durchmesser der Hyperbel, indem man einfach zu den Aspmptoten alle harmonisch zugeordneten Strahlenpaare construirt. Wenn nun von vier harmonischen Strahlen zwei zusammenfallen, so vereinigt sich mit ihnen allemal noch ein dritter, so dass also jede der Asymptoten selbst als ein Paar zusammengefallener conjugirter Durchmesser sich darstellt.

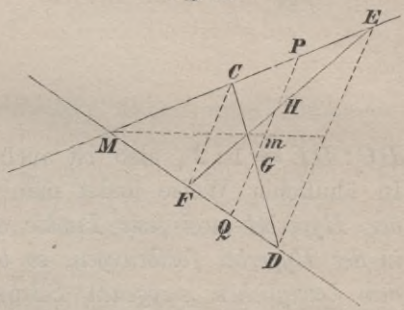
Nennt man G und F conjugirte Punkte der beiden Hyperbeln, und bezeichnet die Leitstrahlen FA_1 und FB_1 [wo A_1 und B_1 die Brennpunkte der conjugirten Hyperbel sind] mit α_1 und β_1, so hat man: $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta$, wo α und β wie vorhin die Leitstrahlen des Punktes G sind. Es ist in der That $(\alpha + \beta)^2 = 2(a_1^2 + b_1^2 + c^2)$ und aus Symmetriegründen folgt, da ja a_1 und b_1 auch conjugirte Durchmesser der F enthaltenden Hyperbel sind: $(\alpha_1 + \beta_1)^2 = 2(a_1^2 + b_1^2 + c^2)$. [Die Brenndistanz $2c$ ist für beide Hyperbeln dieselbe.] Man hat also $(\alpha + \beta)^2 = (\alpha_1 + \beta_1)^2$ oder $\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1$, wie behauptet worden ist.

Die Linie FG wird von der einen Asymptote halbirt, und ist der andern parallel; da nun G ein beliebiger Punkt der einen Hyperbel ist, so haben wir den Satz: *Jede Parallele mit der einen Asymptote wird in ihrem Abschnitte zwischen zwei conjugirten Hyperbeln von der andern Asymptote halbirt.*

Der Inhalt eines zwei conjugirten Hyperbeln umschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten zwei conjugirten Durchmessern parallel sind, oder dessen Ecken auf den Asymptoten liegen, ist constant, und zwar gleich $2c^2 \sin\varphi$, wo φ den halben Asymptotenwinkel bezeichnet. Man kann daher auch sagen: *Wenn in den Winkeln zweier sich schneidenden Geraden ein Parallelogramm von constantem Inhalte sich verschiebt, so umhüllen seine Seiten zwei conjugirte Hyperbeln, welche jene Geraden zu Asymptoten haben.* Schreibt man dem Parallelogramm $CC'D'D$ eine Ellipse ein, welche dasselbe ebenfalls in den Mitten seiner Seiten berührt, so sind in dieser a_1 und b_1 ebenfalls conjugirte Durchmesser, ebenso die beiden Asymptoten, da jede derselben zwei Sehnen, die der andern parallel sind, halbirt. Wenn sich das Parallelogramm den gestellten Bedingungen gemäss ändert, so bleibt die ihm zugehörige Ellipse von constantem Inhalt [der gleich $\frac{\pi c^2}{2} \sin 2\varphi$ ist].

Aus einem früheren vielfach benutzten Satze folgt, indem man zu zwei, an denselben Hyperbelast gehenden Tangenten die Asymptote als dritte hinzufügt: *Gehen zwei Tangenten an denselben Hyperbelast, so erscheint die Berührungssehne von einem Brennpunkte aus unter doppelt so grossem Winkel, als das von beiden Tangenten abgeschnittene Stück einer Asymptote.* — Wir haben ferner: Seien MC und MF die Asymptoten einer Hyperbel, CD und EF zwei Tangenten derselben mit den Berührungspunkten G und H, so ist $CF \parallel GH \parallel ED$, wie die elementarsten Betrachtungen erweisen. Wenn die Berührungssehne GH die Asymptoten noch in den Punkten P und Q trifft, so ist noch $PH = GQ$. Schliesslich geht noch die Verbindungsgerade der Mitte m von GH mit M durch den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten CD und EF. Daran knüpfen sich folgende Sätze: *Wenn ein beliebiges Tangentenpaar an die Hyperbel gelegt wird, so werden die von demselben auf den Asymptoten abgeschnittenen Stücke von der Berührungssehne halbirt.* — *Bei einer Secante der Hyperbel sind die Stücke zwischen den Asymptoten und der Hyperbel gleich.* Wenn daher die Asymptoten gegeben sind und irgend ein Punkt G, so kann man alle andern Punkte der Hyperbel bestimmen, wenn man durch C beliebige Strahlen zieht, und auf jedem Strahle von einer Asymptote aus dasjenige Stück abträgt, um welches C von der andern Asymptote entfernt ist. — *Von zwei conjugirten Durchmessern halbirt jeder die sämmtlichen mit den andern parallelen Sehnen.* — *Der Durchmesser, welcher ein System paralleler Sehnen halbirt, ist der Ort der Durchschnittspunkte der an die Endpunkte jeder dieser Sehnen gelegten Tangenten.*

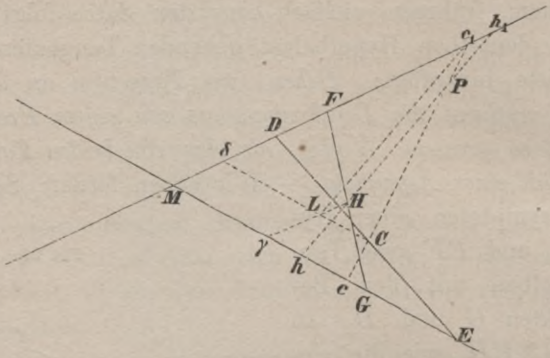
Fig. 93.



Auf der Hyperbel wählen wir zwei Punkte C und H, deren zugehörige Tangenten DE und FG sein mögen. Durch den auf der Hyperbel gelegenen Punkt P legen wir die Strahlen HP und CP, welche die Asymptoten resp. in h und h_1, c und c_1 treffen mögen. Legt man nun durch C eine Parallele $C\delta$ zu MG und durch c_1 eine

Parallele $c_1 L$ zu hh_1, so ist $\triangle CLc_1 \cong chP$ also $LC = hc$. Es sind aber die Dreiecke LCD und GED ähnlich, und es verhält sich

Fig. 94.



$DC : DE = 1 : 2$, also ist auch $LC : GE = 1 : 2$ oder $hc = \frac{1}{2} GE$. In ähnlicher Weise findet man $c_1 h_1 = \frac{1}{2} FD$. *Nimmt man also auf der Hyperbel zwei feste Punkte an, und lässt einen dritten Punkt sich in der Hyperbel fortbewegen, so bilden die durch die festen Punkte nach dem beweglichen gezogenen Sekanten auf den Asymptoten constante Abschnitte, welche halb so gross sind als die entsprechenden Abschnitte, welche die in den festen Punkten gezogenen Tangenten auf den Asymptoten bilden.* Dieser Satz kann benutzt werden, um eine Hyperbel zu construiren, die durch drei gegebene Punkte geht, und eine gegebene Gerade zur Asymptote hat. Seien die Punkte mit C, H, P bezeichnet, so bestimmen die Strahlen PC und PH auf der Asymptote einen Abschnitt ch. Lässt man nun diese constante Länge ch auf der Asymptote fortrücken, so beschreibt der Durchschnittspunkt der Strahlen Cc und Hh die Hyperbel. —

Wir wollen zum Schlusse noch angeben, dass in durchaus analoger Weise wie diess für die Ellipse geschehen ist, auch für die Hyperbel eine Gleichung ihrer Punkte oder ihrer Tangenten in Bezug auf zwei conjugirte Durchmesser als Coordinatenaxen gefunden werden kann. Man erhält, wenn $2a_1$ und $2b_1$ diese conjugirten Durchmesser bezeichnen [wo a_1 derjenige ist, welcher die Hyperbel schneidet, während b_1 seine Endpunkte auf der conjugirten Hyperbel liegen hat], für die Punkte der Hyperbel

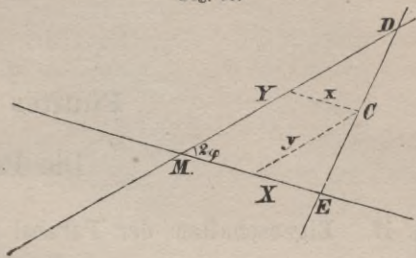
$$\frac{x^2}{a_1{}^2} - \frac{y^2}{b_1{}^2} = 1$$

und für die Tangenten der Hyperbel

$$\frac{a_1^{\,2}}{X^2} - \frac{b_1^{\,2}}{Y^2} = 1\,,$$

zwei Gleichungen, die sich von den analogen für die Ellipse nur dadurch unterscheiden, dass an die Stelle von $b_1^{\,2}$ getreten ist $-\, b_1^{\,2}$.

Fig. 95.



Man kann auch die Asymptoten zu Coordinatenaxen wählen, in welchem Falle die Gleichung der Hyperbel sowohl in Betracht ihrer Punkte als auch ihrer Tangenten sehr einfach wird. Sei nämlich C irgend ein Punkt der Hyperbel, DE die zugehörige Tangente, so ist $CD = CE$, ferner $MD = Y = 2y$, und $ME = X = 2x$. *Ist nun 2φ der Asymptotenwinkel, so ist nach Früherem* [wenn c die halbe Brennweite ist]

$$XY = c^2 \sin 2\varphi$$

die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Tangenten, und

$$xy = \tfrac{1}{4}c^2 \sin 2\varphi$$

die Gleichung der Hyperbel, in Bezug auf die Punkte, beide mal die Asymptoten als Coordinatenaxen vorausgesetzt.

Fünftes Kapitel.

Die Parabel.

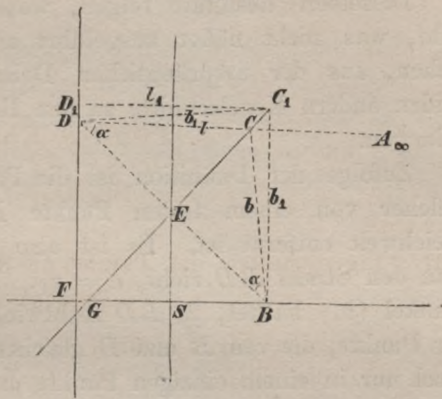
§. 17. Eigenschaften der Parabel in Bezug auf ihre Punkte und ihre Tangenten.

Die meisten Eigenschaften der Parabel lassen sich voraussagen, indem man die Ellipse oder die Hyperbel so spezialisirt, dass sie zur Parabel wird. In der That erscheint die Parabel in mancherlei Rücksicht als Uebergangsfall der beiden genannten Curven, oder umgekehrt, sie erscheint als jede derselben. Desshalb stellen sich auch die wesentlichen Eigenschaften der Parabel als Uebergänge dar, und bieten dadurch oft mehr Interesse als im allgemeinen Falle, indem sie einfachere geometrische Erscheinungen zeigen, die durch ihren Zusammenhang mit allbekannten Elementarsätzen überraschen und zugleich zu zahlreichen Folgerungen Anlass geben, die nicht minder anziehend sind, und sich ebenso wohl auf die Parabel als auf die mit ihr in Verbindung auftretenden Elementarfiguren für sich allein betrachtet, beziehen.

Indem man so vom Allgemeinen zum Besondern herabsteigt, ergeben sich beispielsweise folgende einfache Betrachtungen und Lehrsätze: Hält man bei der Ellipse den Brennpunkt B sowie den ihm zugehörigen Scheitel S der Hauptaxe fest und lässt letztere wachsen, bis sie unendlich gross wird, so bleiben während dieser Veränderung die früher aufgestellten Eigenschaften der Ellipse ungestört, so dass angenommen werden darf, dass sie auch in jenem Endfalle noch stattfinden, wo die Axe unendlich wird, oder wo die Ellipse in die Parabel übergeht. Dabei entfernen sich offenbar der Mittelpunkt M, der andere Brennpunkt A und der zweite Scheitel S_1 der Hauptaxe zugleich in's Unendliche, ebenso die ganze kleine Axe. Daher werden alle Strahlen, welche aus beliebig im Endlichen gelegenen Punkten nach A gehen, mit der Axe SB parallel sein, ferner wird der Kreis M, welcher über der Axe SS_1 als Durchmesser beschrieben ist, in die

Tangente im Scheitel S der Parabel übergehen. Unter Berücksichtigung dieser veränderten Umstände müssen also die wesentlichsten Sätze über die Ellipse sich darstellen und sich aussprechen lassen. Z. B.: *Die Strahlen aus einem Parabelpunkte C nach den Brennpunkten B, A bilden mit der zugehörigen Tangente gleiche Winkel,* wobei der Strahl CA parallel der Axe SS_1 zu nehmen ist. Darauf gründet sich folgende *Construction der Tangente in einem Punkte C der Parabel:* Man trage auf der Axe vom Brennpunkte B aus nach der Seite der Leitlinie hin das Stück $BG = BC$ ab,

Fig. 96.



so ist GC die gesuchte Tangente, wie sich sofort ergibt, wenn man bedenkt, dass $CA \parallel GB$ und dass $\triangle BCG$ gleichschenklig ist. Ferner: *Die Strahlen aus dem endlich entfernten Brennpunkte B nach den Berührungspunkten und dem Durchschnitte zweier Parabeltangenten bilden zwei gleiche Winkel, und die Strahlen aus dem unendlich entfernten Brennpunkte A nach denselben Punkten laufen in gleichen Abständen*). —*

Die Fusspunkte der Perpendikel aus dem vorliegenden Brennpunkt B auf die Tangenten der Parabel liegen in einem unendlich grossen Kreise, welcher die Parabel im Scheitel S berührt, d. h. in der Scheiteltangente. Auch vom Ort des Durchschnittes rechtwinkliger Tangenten weiss man sofort, dass er eine Gerade sein wird, die senkrecht zu der Axe steht, denn der auf der Axe gelegene Durchschnitt zweier rechtwinkliger Tangenten kann offenbar nicht ins Unendliche rücken, wenn die Ellipse in die Parabel übergeht. Der Hülfskreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $2a$ [die gewöhnlichen Bezeichnungen für die Ellipse vorausgesetzt] trifft die Hauptaxe SS_1 in einem Punkte F, wobei stets $BS = SF$; im Grenzfalle geht also dieser Kreis in die Leitlinie über. Ferner: Der Kreis über dem Durchmesser BF schneidet den Kreis M [über der grossen Axe als Durchmesser] in

*) Winkel mit dem nämlichen Scheitel sind dann gleich, wenn sie auf einem um diesen Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kreis gleiche Bogen ausschneiden. Im Grenzfalle, wo der Mittelpunkt ins Unendliche rückt und die Schenkel parallel werden, gehen die Kreisbogen in die senkrechten Abstände der Parallelen über.

zwei Punkten, durch welche aus F zwei Tangenten der Ellipse gehen, die im Grenzfalle des Uebergangs zur Parabel zu einander rechtwinklig werden; *daher ist die Leitlinie zugleich der Ort der Schnittpunkte der sich rechtwinklig schneidenden Tangenten.*

Dieselben Resultate folgen, wenn man von der Hyperbel ausgeht, was nicht näher ausgeführt zu werden braucht, da wir vorziehen, aus der ursprünglichen Definition ohne Zuhülfenahme der beiden andern Kegelschnitte zu den Hauptsätzen über die Parabel zu gelangen.

Zufolge der Definition ist die Parabel der Ort eines Punktes C, welcher von einem festen Punkte B und einer festen Geraden L gleichweit entfernt ist. Es ist also $CD = l = BC = b$, und wenn man den Strahl BD zieht, $\alpha = \alpha_1$. Die Gerade CE, welche 1) den Winkel (bl) hälftet, 2) BD rechtwinklig halbirt und 3) Ortslinie ist der Punkte, die von B und D gleichen Abstand haben, trifft die Parabel nur in einem einzigen Punkte und heisst desshalb Tangente der Parabel im Punkte C, der ihr Berührungspunkt genannt wird. Wäre noch ein zweiter Punkt C_1 der Parabel vorhanden, so wäre $b_1 = l_1 = C_1 D$; aber diese letztere Strecke ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck $DD_1 C_1$, also grösser als die Kathete l_1, womit gezeigt ist, dass C_1 kein Punkt der Parabel sein kann.

Der Punkt D heisst der Gegenpunkt der Parabel in Bezug auf die Tangente CG, woraus der Satz folgt: *Die Gegenpunkte des Brennpunktes der Parabel in Bezug auf ihre sämmtlichen Tangenten liegen auf der Leitlinie.* Da ferner $FS = SB$, und da CG die Strecke DB hälftet, so folgt: *dass die Fusspunkte der vom Brennpunkte aus auf sämmtliche Tangenten der Parabel gefällten Perpendikel auf der Scheiteltangente liegen.*

Die nachfolgenden Sätze bedürfen nun keines weitern Beweises mehr:

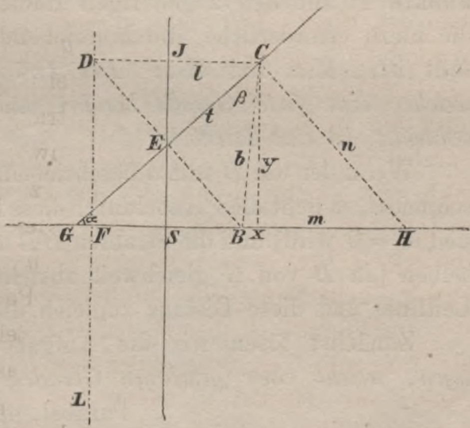
Bewegt sich ein veränderliches gleichschenkliges Dreieck BCD unter der Bedingung, dass der eine Endpunkt B der Grundlinie BD in einem festen Punkte bleibt, und der andere D eine feste Gerade L durchläuft, auf welcher der anliegende Schenkel CD stets senkrecht bleibt, so beschreibt die Spitze eine Parabel, welche die genannten festen Elemente zu Brennpunkt und Leitlinie hat.

Die gesammten Tangenten der Parabel werden erhalten, wenn man aus B nach L alle möglichen Strahlen BD zieht und jeden durch eine senkrechte Gerade EC hälftet. Diese Gerade beschreibt als Tangente die Parabel.

Geht der eine Schenkel EB eines rechten Winkels BEC stets durch *einen festen Punkt* B, *während sein Scheitel* E *irgend eine Gerade* SE *durchläuft, so beschreibt der andere Schenkel als Tangente eine Parabel, welche den festen Punkt zum Brennpunkte und die feste Gerade zur Tangente im Scheitel hat* [so dass also das Perpendikel von B auf SE die Axe ist].

An die vorstehenden Betrachtungen schliessen sich leicht mehrere Eigenschaften der Parabel, die man vorzugsweise bei der analytischen Methode zu beweisen und hervorzuheben pflegt. Indem man die Axe der Parabel und ihre Scheiteltangente zu Coordinatenaxen wählt, ziehe man aus einem beliebigen Punkte C der Curve die Ordinate y und die Normale $n = CH$, so heissen $CG = t$ *die Tangente*, $Gx = s$ die *Subtangente*, $xH = m$ die *Subnormale* und $Sx = x$ die *Abscisse*. Nun ist $n \parallel BD$, daher $l = HB$, aber da $l = b = BG$ [weil $\beta = \alpha$], so ist $BG = BH$, d. h.: *Die Tangente und die Normale schneiden die Axe in gleicher Entfernung von* B *und zwar ist diese Entfernung dem zugehörigen Leitstrahle gleich.* — Da n gleich und parallel BD, so ist $\triangle BFD \cong HxC$, daher $m = BF$ oder: *die Subnormale für jeden beliebigen Punkt der Parabel ist constant und zwar gleich dem Abstande des Brennpunkts von der Leitlinie.* — Da ferner $b = BG$ und BE senkrecht auf t, so ist $EG = EC$ und folglich sowohl $\triangle ESG \cong EJC$, als auch $\triangle BEG \cong DEC$, daher $SG = JC = x$ und $BG = DC$, (also auch $FG = Bx$), d. h.: *Das Stück jeder Tangente vom Berührungspunkte* C *bis zur Axe* G *wird von der Tangente im Scheitel* S *gehälftet.* Ebenso ergibt sich: *Die Subtangente* Gx *wird durch den Scheitel gehälftet, oder ist doppelt so gross als die Abscisse.* Vermöge des rechtwinkligen Dreiecks GCH ist $y^2 = Gx \cdot xH$, d. h. $y^2 = 2x \cdot \frac{1}{2}p = px$, wo p die doppelte Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie ist, und der *Parameter* der Parabel heisst. Die Relation $y^2 = px$ ist, wie man sich ausdrückt, *die Gleichung der Parabel in Bezug auf die Axe und die Scheiteltangente als Coordinatenaxen.* —

Fig. 97.

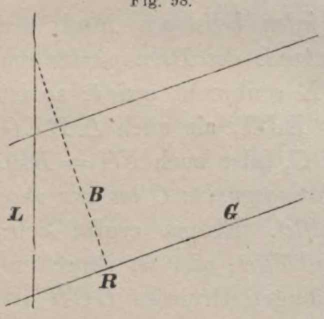


Wir haben gesehen, wie die gesammten Tangenten der Parabel durch die Strahlen aus B (bis an L) bestimmt werden. Diess setzt uns in den Stand, über die Richtung der Tangenten zu verfügen, nämlich Tangenten zu legen, deren Richtung gegeben ist, oder welche einen gegebenen Winkel miteinander einschliessen. Bei allen diesen Aufgaben kann man sich auf die analogen Constructionen für Ellipse und Hyperbel stützen, was die Ableitungen wesentlich erleichtert. Vermittelst dieser Sätze kann man der Bestimmung der Parabel, wie sie zum Schlusse des §. 9. als letzter der dort behandelten geometrischen Orte gegeben worden ist, eine andere Fassung geben. [Siehe Fig. 48 und zugehörigen Text.] Wenn nämlich unter Beibehaltung der dort gegebenen Bezeichnung $\beta^2 - \alpha^2 = a^2$ ist, so schneidet der feste Kreis um den Mittelpunkt B mit dem Radius a alle Kreise um die Punkte P mit den zugehörigen Radien α unter rechtem Winkel, da die hiezu erforderliche und hinreichende Bedingung $\beta^2 = a^2 + \alpha^2$ erfüllt ist. Man hat also: *Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher eine feste Gerade berührt und einen festen Kreis rechtwinklig schneidet, ist eine Parabel.*

Wenn der um B mit a beschriebene Kreis die Gerade G in R und S schneidet, so geht die Parabel durch diese Punkte hindurch [weil dann $\beta = a$ und $\alpha = 0$ wird] und die Strahlen BR und BS sind zwei Normalen derselben [da B von G gleichweit absteht, wie der Brennpunkt von der Leitlinie und diese Distanz zugleich die Subnormale ist]*).

Zunächst lösen wir die Aufgabe, *Tangenten an die Parabel zu legen, welche einer gegebenen Geraden G parallel sind*, wenn von der Parabel nur der Brennpunkt B und die Leitlinie L vorliegen. Man fälle aus B das Perpendikel BR auf G und halbire den Abschnitt desselben, welcher zwischen B und L liegt, durch eine senkrechte Gerade, so ist diese die verlangte Tangente. Hier tritt die Leitlinie als der Ort der Gegenpunkte des Parabelbrennpunktes in Bezug auf alle Tangenten dieser Curve auf. Aber der Ort der Gegenpunkte besteht aus der Leitlinie und noch einer unendlich entfernten Geraden, wie man sofort einsieht, wenn man für den analogen Fall bei der Ellipse den entsprechenden Ortskreis unendlich gross werden lässt, und bedenkt, dass

Fig. 98.



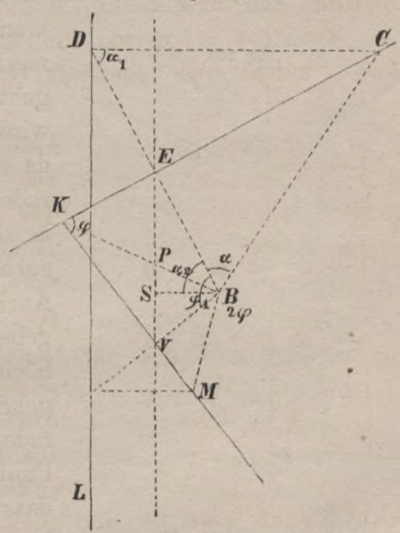
*) Allgemeiner ist der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der stets von zwei gegebenen Kreisen den einen in bestimmtem Sinne berührt, den andern senkrecht schneidet, ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt der Mittelpunkt des festen berührten Kreises ist.

nach Früherem ein unendlich gross werdender Kreis, von dem ein Theil (eine Gerade) im Endlichen liegt, noch G_∞ als Bestandtheil enthält. Ergänzt man auf Grund dieser Bemerkung die vorhin gegebene Construction, so gelangt man zu dem Satze: *Die Parabel hat keine zwei parallelen Tangenten in angebbarer Entfernung, wohl aber ist mit jeder Tangente eine unendlich entfernte parallel.* Diese unendlich entfernten Tangenten fallen alle mit der unendlich entfernten Geraden der Ebene zusammen, diese hat also keine bestimmte Richtung, sondern ist mit jeder beliebigen Geraden der Ebene parallel. Wird der Strahl BR der Leitlinie parallel, so ist gar keine sichtbare Tangente vorhanden; diess ist aber offenbar der einzige Fall dieser Art. Also: *Es gibt nach allen möglichen Richtungen sichtbare Tangenten der Parabel, ausgenommen eine einzige Richtung, nämlich die Richtung der Axe.*

Soll eine Tangente mit der gegebenen Geraden G parallel sein, oder sie unter irgend einem gegebenen Winkel φ schneiden, so ist sie, wie das Vorstehende klar zeigt, leicht zu finden.

Es sollen ferner zwei Tangenten gezogen werden, welche einen gegebenen Winkel φ bilden. Auch dieser Forderung ist leicht zu genügen; nämlich man ziehe aus B zwei Strahlen, deren Winkel φ_1 der Nebenwinkel von φ ist, so sind die zugehörigen Tangenten die verlangten. Oder da der Strahl BD den Winkel SBC hälftet ($\alpha_2 = \alpha_1 = \alpha$), so nehme man einen Winkel $MBC = 2\varphi_1$, so geben dessen Schenkel allemal die Berührungspunkte C, M eines Tangentenpaars, welches den gegebenen Winkel einschliesst. Zugleich folgt hieraus, *dass der doppelte Winkel φ irgend zweier Tangenten mit demjenigen MBC, welchen die aus dem Brennpunkte nach den Berührungspunkten gezogenen Strahlen bilden, zusammen $= 4R$ ist;* oder: *dass der äussere Winkel irgend zweier Tangenten allemal halb so gross ist, als der Brennpunktswinkel über der Berührungssehne.*

Fig. 99.



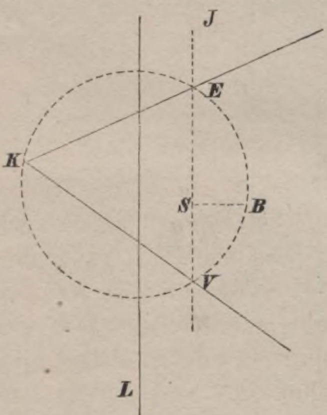
Ist insbesondere $\varphi = R$, so ist auch $\varphi_1 = R$ und folglich $MBC = 2R$, oder die Punkte M, B und C liegen in einer Geraden. Daraus folgt: *Schneiden zwei Tangenten der Parabel einander unter* *rechtem Winkel, so geht die Berührungssehne CM allemal durch den Brennpunkt B*, und umgekehrt, *zieht man durch B irgend eine Sehne, und legt in ihren Endpunkten C, M Tangenten an die Parabel, so sind dieselben rechtwinklig zu einander.* In diesem Falle, in welchem $\varphi = \varphi_1 = R$ ist und natürlich auch die Winkel bei V und E Rechte sind, ist $BVKE$ ein Rechteck, dessen Diagonalen sich in P hälften, und da EV in der festen Geraden SE liegt, so muss also K [weil $BP = PK$] in L liegen d. h.: *Der Ort des Durchschnittspunktes rechtwinkliger Tangenten ist die Leitlinie.* Und: Werden aus irgend einem Punkte K in der Leitlinie zwei Tangenten an die Parabel gelegt, so schliessen dieselben allemal einen rechten Winkel ein, und ihre Berührungspunkte C, M liegen mit dem Brennpunkte B in einer Geraden.

§. 18. Zusammenhang zweier Parabeltangenten.

Soll aus irgend einem Punkte K, welcher ausserhalb der Parabel liegt, eine Tangente an dieselbe gezogen werden, so kann man, unter andern, auf folgende zwei Arten verfahren, die im Wesentlichen schon durch §. 9. gegeben sind:

1) Zufolge des Vorhergehenden erreicht man den Zweck, indem man über dem Strahle BK als Durchmesser einen Kreis errichtet, denn dieser geht durch die Spitzen EV der rechtwinkligen Dreiecke BEK, BVK, und da dieselben ausserdem in der festen Geraden SJ liegen, so sind sie dadurch bestimmt, und mit ihnen zugleich sind auch die Tangenten KE, KV gefunden. Auch folgt daraus, dass durch einen gegebenen Punkt K im Allgemeinen und höchstens zwei Tangenten der Parabel gehen. [Der Kreis (BK) und die Gerade SJ können sich höchstens in zwei Punkten schneiden.] Tritt der Fall ein, dass der Kreis (BK) die Gerade SJ berührt, so zeigt diess an, dass nur eine Tangente möglich ist, und dass K in der Parabel liegt, nämlich es fallen dann E und V zusammen und bestimmen mit K nur eine Tangente; und umgekehrt: wird K in der Parabel angenommen, so tritt jenes ein, d. h. so berührt der Kreis (BK) die Gerade SJ. Demzufolge müssen die Kreise,

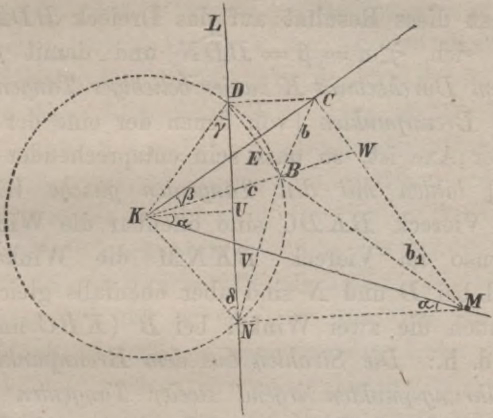
Fig. 100.



deren Durchmesser BC, BM etc. sind, die Gerade SJ resp. in den Punkten E, V etc. berühren. Man zieht daraus den folgenden Satz: *Bei einer Kreisschaar* (B, L), *welche einen Punkt* A *und ausserdem eine Gerade* L *als Tangente gemein haben, liegen die andern Endpunkte der Durchmesser, welche jenen Punkt* B *gemein haben, in einer Parabel, deren Brennpunkt* B *und deren Scheiteltangente* L *ist; ferner hat diese Parabel alle Geraden, welche den zweiten Endpunkt mit dem Berührungspunkte des jedesmaligen Kreises und* L *verbinden, zu Tangenten.* Trifft es sich, dass der Hülfskreis die Gerade SJ weder schneidet noch berührt, so schliesst man, der Punkt K liege innerhalb der Parabel und auch umgekehrt.

2) Nach Analogie der Ellipse und Hyperbel braucht man blos

Fig. 101.



um K einen durch B gehenden Kreis zu beschreiben, dessen Durchschnitte D, N mit L die Strahlen BD, BN bestimmen, welche den gesuchten Tangenten KE, KV entsprechen [nämlich diese Tangenten sind die Perpendikel aus K auf jene Strahlen]. Hält man etwa KC fest, so sind B und D fest, als gemeinschaftliche Punkte einer Kreisschaar K oder $[BD]$, die von der festen Transversale L so geschnitten wird, dass diejenigen Durchmesser KM der Kreise, die auf der Sehne BN senkrecht stehen, Tangenten einer Parabel sind, welche B zum Brennpunkt, L zur Leitlinie und die Axe KC der Kreise ebenfalls zur Tangente hat. —

Aus der zweiten Construction der zwei Tangenten, die durch einen gegebenen Punkt gehen, folgen leicht die wesentlichsten Sätze, welche den Tangenten im Allgemeinen zukommen. Da K der Mittelpunkt des Kreises BND ist [welcher dem $\triangle BND$ umschrieben ist], so sind $KB = KN = KD$ Radien desselben; ferner sind KE, KV

Perpendikel auf zwei Seiten des Dreiecks BND; wird das dritte Perpendikel mit KU bezeichnet, so ist $NU = UD$, und UK, welches parallel zur Parabelaxe verläuft, hälftet den Winkel NKD.

Wir nehmen noch den elementaren Satz zu Hülfe: Zieht man in einem Dreieck ABC aus dem Mittelpunkt M des umschriebenen Kreises die drei Radien a, b, c nach den gleichbezeichneten Ecken und die drei Perpendikel a_1, b_1, c_1 resp. auf die Seiten BC, CA, AB, so bilden je zwei von diesen (z. B. b_1 und c_1) mit dem dritten (a_1) und dem entsprechendem Radius (a) gleiche Winkel ($\sphericalangle\, b_1 a_1 = c_1 a$). Zum Beweise hat man nur zu betrachten, dass diese gleichen Winkel mit einem Dreieckwinkel (C) übereinstimmen, der eine ($c_1 a$), weil der Centriwinkel über dem halben Bogen gleich dem Peripheriewinkel über dem ganzen ist, und der andere ($b_1 a_1$), weil Winkel gleich sind, wenn ihre Schenkel wechselseitig senkrecht zu einander stehen.

Wendet man diess Resultat auf das Dreieck BDN der Fig. 101 an, so ergibt sich $\sphericalangle\, \alpha = \beta = BDN$ und damit der Satz: *Die Strahlen aus dem Durchschnitt K zweier beliebiger Tangenten der Parabel nach den beiden Brennpunkten* [von denen der eine der unendlich entfernte Punkt der Axe ist, so dass sein entsprechender Strahl parallel der Axe geht] *bilden mit den Tangenten gleiche Winkel.* In dem symmetrischen Viereck $BKDC$ sind offenbar die Winkel bei B und D gleich, ebenso im Viereck $BKNM$ die Winkel bei B und N; die Winkel bei D und N sind aber ebenfalls gleich, weil $\gamma = \delta$, folglich sind auch die zwei Winkel bei B (KBC und KBM) einander gleich, d. h.: *Die Strahlen aus dem Brennpunkte einer Parabel nach den Berührungspunkten irgend zweier Tangenten bilden mit dem Strahle nach dem Durchschnittspunkte der letztern gleiche Winkel.* Die beiden abgeleiteten Eigenschaften der Parabel folgen auch auf mehrere andere Arten, oder durch andere Schlüsse, worauf hier nicht näher eingegangen werden soll.

Da $\beta = \alpha$ ist, so sind die Vierecke $BKDC$ und $BMNK$ ähnlich und auch deren Hälften, die Dreiecke BKC und BMK, was zur Folge hat, dass $c : b = b_1 : c$ oder $c^2 = bb_1$, d. h.: *Zieht man aus dem Brennpunkte der Parabel nach den Berührungspunkten irgend zweier Tangenten, so wie nach deren Durchschnitt drei Strahlen, so ist allemal das Quadrat des letztern Strahls so gross als das Rechteck unter den beiden erstern.*

In den Dreiecken KBC und KBM sind resp. die Winkel bei C und K und die Winkel bei K und M einander gleich, woraus folgt: *Der Winkel zweier Tangenten ist der Summe der zwei Winkel gleich, welche sie mit den Brennpunktsstrahlen ihrer Berührungspunkte bildet*, und ferner: *Der Winkel K wird durch den Strahl KB in zwei* *solche Theile getheilt, welche wechselseitig den Winkeln gleich sind, welche die Tangenten mit den Brennstrahlen ihrer Berührungspunkte bilden;* oder: Zieht man aus dem Brennpunkte der Parabel zwei Strahlen nach den Berührungspunkten irgend zweier Tangenten, so bilden sie mit diesen zwei Winkel, deren Summe dem Tangentenwinkel gleich ist; und zieht man aus dem Brennpunkte einen dritten Strahl nach dem Durchschnitte der Tangenten, so theilt er den Winkel der letztern so, dass das Stück an jeder Tangente gleich ist jenem Winkel, welchen die andere Tangente mit dem nach ihrem Berührungspunkte gezogenen Strahle bildet.

Die unmittelbar vorhergehenden Sätze gestatten durch Umkehrung und weitere Entwickelung zahlreiche Folgerungen. Bevor auf dieselben eingegangen wird, mag aber der früher angegebene Satz: „Die Strahlen aus dem Brennpunkte B der Parabel nach den Berührungspunkten C und M irgend zweier Tangenten bilden mit dem Strahle nach dem Durchschnitte K der letztern gleiche Winkel“ für den unendlich entfernten Brennpunkt A_∞ der Parabel näher erörtert werden. Es ist klar, dass dieser Satz, wenn er für Parabel, Ellipse und Hyperbel zugleich und gleichlautend oder allgemein gültig sein soll, anders aufgefasst, d. h. an ein anderes Merkmal geknüpft werden muss. Freilich bleibt auch für den in Betracht kommenden Fall die Eigenschaft noch bestehen, dass die Strahlen aus C und M mit dem aus K an A_∞ gleiche Winkel bilden, die gleich Null sind; aber durch diese Winkel ist die Lage der Geraden KA_∞ nicht bestimmt [blos die Richtung], sie kann vielmehr unter dieser Bedingung beliebig hin und her gerückt werden, nur muss sie den beiden andern Strahlen parallel bleiben. Um ihre Lage allgemein, d. h. für jeden beliebigen Kegelschnitt zu bestimmen, müssen endlich entfernte oder sichtbare Gegenstände zu Hülfe genommen werden, z. B. die Berührungssehne CM. Diese wird für jeden sichtbaren Brennpunkt B von dem Strahle BK so getheilt, dass sich die Abschnitte verhalten wie die anliegenden Strahlen b, b_1, denn im Dreieck CBM ist BW eine winkelhalbirende Transversale, welche bekanntlich die Grundlinie im Verhältniss der anliegenden Seiten theilt. Nun ist die Frage, ob dasselbe auch für den unendlich entfernten Brennpunkt A_∞ stattfinde? Diess ist allerdings der Fall, denn nach Obigem ist $NU = UD$, und daher muss auch die Sehne CM durch den Strahl UK gehälftet werden, was dem Verhältniss von $CA : MA$ entspricht, in welchem beide Glieder unendlich gross sind, so dass ihr Verhältniss der Einheit gleichgesetzt werden kann. Man hat also: *Die Perpendikel aus irgend einem Punkte des mittlern Strahls KU auf die beiden äussern Strahlen*

DC und MN *sind gleich*, wie wir bereits in einer Anmerkung des §. 17 angegeben hatten.

Der behandelte Satz kann auch wie folgt ausgesprochen und festgehalten werden: *Der Strahl aus einem Brennpunkte eines Kegelschnitts nach dem Durchschnitte irgend zweier Tangenten derselben theilt die Berührungssehne in zwei Abschnitte, die sich verhalten, wie die anliegenden Strahlen aus dem Brennpunkte nach den Berührungspunkten.*

Für die gegenwärtig in Betracht kommende Parabel ist dabei besonders hervorzuheben: *Die Berührungssehne CM je zweier Tangenten wird von dem durch ihren Durchschnitt K gehenden Durchmesser KA_∞ gehälftet.* [Durchmesser heisst jede der Axe SA_∞ parallele Gerade KA_∞. Ihr Schnittpunkt mit der Parabel heisst Scheitel des Durchmessers.] *Durch die Berührungssehne oder deren Mitte und den Scheitel des Tangentenwinkels ist die Richtung der Axe gegeben.* Die Mitten aller Berührungssehnen liegen in einem Durchmesser, wenn die Scheitel der zugehörigen Tangentenwinkel in demselben sich befinden; und auch umgekehrt: allen Sehnen, deren Mitten in einem und demselben Durchmesser liegen, entsprechen solche Tangentenwinkel, deren Scheitel in dieselben Durchmesser fallen.

Aus dem Satze: „Von den drei Strahlen, die aus den Berührungspunkten C, M irgend zweier Tangenten und aus dem Durchschnittspunkte K derselben parallel der Parabelaxe gezogen werden, ist der letztere in der Mitte der beiden ersten gelegen," folgt leicht, dass die zwei Tangenten von der im Scheitel des durch K gehenden Durchmessers gezogenen gehälftet werden, dass also die dritte Tangente der Berührungssehne jener zwei parallel ist, und dass folglich *alle Berührungssehnen, deren Tangenten sich auf dem nämlichen Durchmesser schneiden, parallel sind, und ihre Mitten in demselben liegen.* Dieser Satz ist auch umgekehrt richtig.

Es soll nun eine Reihe der erwähnten Folgerungen entwickelt werden. Diese Entwicklung wird dadurch schwierig, dass zu viele Eigenschaften gleichzeitig aus derselben Quelle folgen und zwar sehr leicht und fast unmittelbar. Jede Unterordnung ist mit Nachtheilen behaftet, ihr Vorzug könnte nur scheinbar sein und auf Mangel an freier Durchdringung beruhen. Die hier eingeschlagene Anordnung ist also ohne jegliche Zwangsgründe.

Da $\sphericalangle\, BKM = BCK$, so folgt, wenn die Tangente KC fest bleibt und KM ihre Lage ändert, dass der Winkel BKM constant bleibt, d. h.: die Strahlen aus dem Brennpunkte B nach den Durchschnitten irgend einer festen mit beliebigen andern Tangenten bilden mit diesen letztern gleiche Winkel; oder: *der Strahl aus dem Brenn-*

punkte nach dem Durchschnitte einer festen und einer veränderlichen Tangente bildet mit der letztern einen constanten Winkel.

Zieht man aus dem Brennpunkte einer Parabel nach allen Tangenten unter einem constanten Winkel Strahlen, so liegen sämmtliche Fusspunkte in zwei Geraden, welche selbst Tangenten sind, und zwar liegen die Fusspunkte in der einen oder andern Geraden, je nachdem der Winkel nach der einen oder andern Seite hinliegt, indem nämlich nach jeder Tangente zwei verschiedene Strahlen gehen, so lange der constante Winkel nicht ein Rechter wird. Für je zwei Ortstangenten ist der Fusspunkt des einen Strahls zugleich ihr Berührungspunkt, so dass es also im Allgemeinen zwei Tangenten gibt, welche mit dem zugehörigen Radius Vector irgend einen gegebenen Winkel bilden. Aendert man den angenommenen Winkel, so treten nach und nach alle Tangenten an die Stelle der Ortstangenten; wird derselbe gleich einem Rechten, so fallen die beiden Ortstangenten in eine zusammen, in die Scheiteltangente der Parabel.

Sind ein fester Punkt und eine feste Gerade gegeben und ein der Grösse nach gegebener Winkel bewegt sich in ihrer Ebene so, dass sein Scheitel die Gerade durchläuft, während der eine Schenkel derselben sich um den Punkt dreht, so beschreibt der andere Schenkel eine Parabel, welche den festen Punkt zum Brennpunkt und die feste Gerade zur Tangente hat, und zwar letztere da berührt, wo der Scheitel des Winkels in dem Augenblicke liegt, wenn der beschreibende Schenkel auf die feste Gerade fällt.

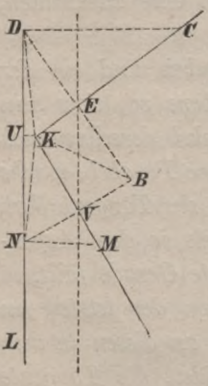
Legt man durch zwei feste Punkte B und C, wovon der letztere in einer festen Geraden CK liegt, irgend einen Kreis, und an diesen in dem Punkte K, wo er die Gerade zum andern Mal schneidet, die Tangente KM, so ist der Ort der letztern eine Parabel, welche den ersten festen Punkt B zum Brennpunkt und die feste Gerade zur Tangente mit dem Berührungspunkte C hat. Oder: Zieht man bei einer Kreisschaar (BC) von zwei gemeinschaftlichen Punkten B und C durch den einen oder den andern Punkt, z. B. durch C irgend eine Transversale CK, legt in den Punkten K, in welchen sie die Kreise zum zweitenmale schneidet, Tangenten KM an dieselben, so sind diese zugleich die gesammten Tangenten einer Parabel, welche den andern Durchschnittspunkt der Kreise zum Brennpunkt, und die Transversale zur Tangente in jenem ersten Punkte hat. Da nämlich $\sphericalangle BKM = BCK$, so ist nach einem bekannten Elementarsatze KM Tangente des Kreises BCK im Punkte K.

Das Stück CK jeder Tangente zwischen ihrem Berührungspunkte C und dem Punkte K, in welchem sie von irgend einer andern Tangente KM getroffen wird, erscheint dem Brennpunkte B unter einem Winkel, welcher mit dem Tangentenwinkel zusammengenommen zwei Rechte beträgt *oder dessen Nebenwinkel gleich ist.* Daher müssen je zwei Tangenten unter einerlei Winkel erscheinen, weil sie nur einen Nebenwinkel haben.

Aus Früherem ergeben sich noch die nachfolgenden Sätze: Bewegen sich zwei Tangenten der Parabel so, dass ihr Winkel constant bleibt, so ist auch der Winkel (bb_1) der ihnen zugehörigen Leitstrahlen unveränderlich. Und umgekehrt: Dreht sich ein constanter Winkel um den Brennpunkt B einer Parabel, so bilden die Tangenten, durch deren Berührungspunkte seine Schenkel in jedem Augenblicke gehen, einen ebenfalls unveränderlichen Winkel. Sollen die beiden Winkel einander gleich sein, so ist jeder $= \frac{4}{3} R = 120^0$.

Wenn sich der constante Tangentenwinkel bewegt, so beschreibt sein Scheitel eine Hyperbel, welche für den Fall, dass der Winkel ein Rechter ist, in die Leitlinie übergeht. In der That ist, da $\sphericalangle EKV$ constant sein soll, auch EBV als Supplementarwinkel constant, und zwar ist $EBV = \frac{1}{2} DKN$. Das rechtwinklige Dreieck NUK bleibt also bei der Bewegung von K sich selbst ähnlich, und es ist $\frac{KU}{NK}$ constant, und zwar kleiner als Eins. Ersetzt man schliesslich NK durch BK, so ist für eine beliebige Lage des Punktes K das constante Verhältniss $\frac{KU}{BK} < 1$, also ist der Ort von K eine Hyperbel, welche B zum Brennpunkt und L zur Leitlinie hat. Es bleibt zu bemerken übrig, dass je ein Winkel und sein Nebenwinkel zusammen eine Hyperbel ergeben, und zwar entspricht dem stumpfen Winkel der zu B gehörige, dem spitzen Winkel der andere Zweig der Hyperbel. Für einen rechten Winkel fallen wie bereits gezeigt die beiden Zweige mit der Leitlinie zusammen, während für den Winkel 180^0 die Hyperbel sich auf die Parabel selbst reduzirt.

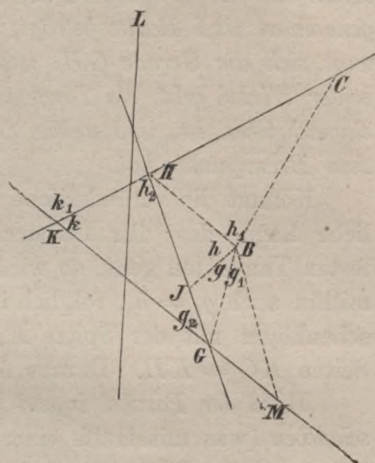
Fig. 102.



§. 19. Dreiseite und Vierseite, welche der Parabel umschrieben sind.

Irgend drei Tangenten mögen die Parabel in C, M und J berühren, und einander paarweise in K, H und G schneiden, oder das Dreieck GHK bilden. Werden die zwei erstern als fest angenommen, und wird der dritten Bewegung oder Veränderung der Lage gestattet, so ist dennoch in jedem Augenblicke $h = h_1$ und $g = g_1$, wobei $g + g_1 + h + h_1 =$ const.; also ist auch $h + g =$ const. $= k$, oder $h + g + k = 2R$, d. h.: *die Stücke aller Tangenten zwischen irgend zwei* *festen Tangenten der Parabel erscheinen dem Brennpunkt unter gleichen Winkeln und zwar unter einem Winkel, welcher mit dem festen Tangentenwinkel zusammengenommen zwei Rechte beträgt, oder dessen Nebenwinkel gleich ist.* Die bewegliche Tangente, oder das begränzte Stück GH derselben, kann insbesondere auf die begränzten Stücke KC und KM der festen Tangenten fallen, in welchem Falle der Satz mit einem frühern übereinstimmt. Es mag hier bemerkt werden, dass von den drei Winkeln eines Tangentendreiecks allemal nur einer [in der Figur K] ein eigentlicher Tangentenwinkel ist; die beiden andern sind Tangentennebenwinkel.

Fig. 103.



Da $\sphericalangle HKG + HBG = 180^0$ ist, so gelten die Sätze: *Die drei Durchschnittspunkte G, H, K je dreier Tangenten einer Parabel liegen mit dem Brennpunkte B in einem Kreise.* Oder: Jedes Dreieck, welches durch irgend drei Tangenten einer Parabel gebildet wird [dessen Seiten eine Parabel berühren], hat die Eigenschaft, dass der ihm umschriebene Kreis durch den Brennpunkt der Parabel geht. Oder: Die Tangenten einer Parabel bilden, zu je dreien zusammen, unzählige Dreiecke, welche die gemeinsame Eigenschaft haben, dass die ihnen umschriebenen Kreise einander sämmtlich im Brennpunkt der Parabel schneiden.

Jeder Kreis (BK), welcher durch den Brennpunkt B und den Durchschnittspunkt K irgend zweier festen Tangenten der Parabel geht, schneidet diese Tangenten in zwei Punkten G und H, welche allemal in irgend einer dritten Tangente GH liegen. Oder: Hat man eine Kreisschaar (BK) von zwei gemeinschaftlichen Punkten B, K und zieht durch einen der letztern (K) zwei beliebige Transversalen KC und KM, so bestimmen diese in jedem Kreise eine Sehne (z. B. GH) und alle diese Sehnen sind Tangenten einer und derselben Parabel, welche den andern gemeinschaftlichen Punkt der Kreise zum Brennpunkt hat, und welche auch die Transversalen berührt, und zwar jede in demjenigen Punkte (C, M), in welchem sie von dem Kreise, der die andere in K berührt, geschnitten wird.

Bleibt ein Winkel K eines veränderlichen Vierecks $BGKH$, so wie der Scheitel B des gegenüberstehenden Winkels fest, und ist die Summe dieser Winkel gleich zwei Rechten, so ist der Ort der Diagonale GH, welche die Scheitel der zwei übrigen Winkel verbindet, eine Parabel, welche dem festen Winkel eingeschrieben ist, und welche den festen Scheitel B des Gegenwinkels zum Brennpunkt hat. Oder: *Dreht sich ein Winkel GBH, der mit einem festen Winkel K zusammen genommen zwei Rechte beträgt, um irgend einen festen Punkt B, so bewegt sich die Gerade GH, welche durch die Durchschnitte der Schenkel beider Winkel geht, als Tangente einer Parabel, welche dem festen Winkel eingeschrieben ist, und welche den festen Scheitel des beweglichen Winkels zum Brennpunkte hat.*

Kommt die veränderliche dritte Tangente GH in die eigenthümliche Lage, dass ihr Leitstrahl BJ durch den Durchschnitt K der festen Tangenten geht, so wird $(g + g_1) = (h + h_1)$, daher $g = h$ und mithin auch $g_2 = h_2$, folglich ist das Tangentendreieck GKH ein gleichschenkliges mit der Spitze K, der Grundlinie GH und den gleichen Seiten $KG = KH$. Daraus folgen nachstehende Sätze:

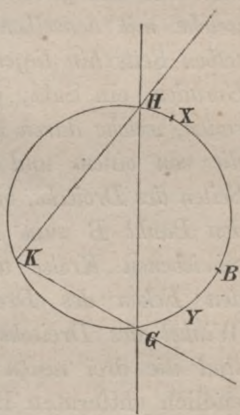
Wird der Parabel irgend ein gleichschenkliges Dreieck GKH umgeschrieben [was mit Hülfe einer frühern Construction leicht zu machen ist], *so liegen die drei Punkte, die Spitze K des Dreiecks, der Berührungspunkt J der Grundlinie und der Brennpunkt B der Parabel allemal in einer Geraden*, so dass die Gerade, welche durch irgend zwei der genannten Punkte bestimmt wird, nothwendig auch durch den dritten geht. Und umgekehrt: Wird einem gleichschenkligen Dreieck irgend eine Parabel eingeschrieben, so findet dasselbe statt.

Beschreibt man um eine Parabel ein gleichseitiges Dreieck, oder hat man irgend drei Tangenten der Parabel, welche ein gleichseitiges Dreieck einschliessen, so treffen die drei Strahlen, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, einander allemal in einem und demselben Punkte B, nämlich im Brennpunkte der Parabel. Oder: *Wird einem gegebenen festen gleichseitigen Dreiecke irgend eine Parabel eingeschrieben, und werden aus den Ecken des Dreiecks durch die Berührungspunkte der Gegenseiten Strahlen gezogen, so treffen sich diese in irgend einem Punkte, welcher zugleich der Brennpunkt der jedesmaligen Parabel ist und dessen Ort die dem Dreieck umschriebene Kreislinie ist.* Oder umgekehrt: *Nimmt man in der einem gleichseitigen Dreieck umschriebenen Kreislinie irgend einen Punkt B und zieht aus demselben durch die Ecken des Dreiecks Strahlen, so treffen diese die Seiten des Dreiecks in drei solchen Punkten, in welcher sie von einer bestimmten Parabel berührt werden, welche B zum Brennpunkte hat.*

Aus der Grundbestimmung der Parabel folgt, dass dieselbe durch den Brennpunkt B und irgend zwei Tangenten HG, HK bestimmt ist, denn die Perpendikel aus B auf die gegebenen Graden HG, HK verdoppelt geben zwei Punkte der Leitlinie, wodurch diese bestimmt ist. Durch Leitlinie und Brennpunkt ist aber die Parabel unzweideutig gegeben. Oder: die Kreisschaar BH schneidet die gegebene Gerade in solchen Punktenpaaren G und K, durch welche die gesammten Tangenten der Parabel erzeugt werden.

Beschreibt man um das Dreieck GHK, welches durch irgend drei unbegränzte Gerade gebildet wird, einen Kreis, so ist jeder Punkt dieser Kreislinie Brennpunkt einer bestimmten Parabel, welche jene drei Geraden zu Tangenten hat, oder welche dem Dreieck eingeschrieben ist. Denn sieht man zwei der drei Geraden, etwa HG und HK, als Tangenten und B als Brennpunkt an, so ist dadurch eine Parabel bestimmt; wollte man aber annehmen, sie berühren die dritte Gerade KG nicht, so müsste z. B. aus K eine andere Tangente KG_1 möglich sein, welche mit der HG einen Punkt G_1 statt G gemein hätte; allein alsdann müssten auch B, H, K, G_1 in einem Kreise liegen, was unmöglich ist, da durch die drei Punkte BHK nur ein Kreis gehen kann, und dieser angenommener Massen die Gerade HG ausser in H nur noch in G schneidet. Umgekehrt, *geht irgend ein Kreis durch den Brennpunkt einer Parabel, so sind im Allgemeinen*, [wofern er nämlich die Parabel schneidet] *unzählige Dreiecke möglich, welche zugleich dem Kreise eingeschrieben und zugleich der Parabel umgeschrieben sind.* Denn legt man an die Parabel irgend eine Tangente GK, welche den Kreis schneidet, und sofort durch die Durchschnittspunkte zwei neue Tangenten an dieselbe, so müssen sich diese auf dem Kreise schneiden, weil $KHGB$ immer in einem Kreise liegen müssen, und dieser durch BGK bestimmt ist. Berührt die erste Tangente zugleich den Kreis, so fallen die zwei neuen in eine zusammen, deren Berührungspunkt alsdann X oder Y ist, wenn X und Y die Schnittpunkte von Kreis und Parabel bezeichnen. Darin liegt, durch Umkehrung zu erhalten, eine Lösung der Aufgabe: *Die gemeinschaftlichen Tangenten einer Parabel und eines Kreises zu finden, wenn dieser durch den Brennpunkt von jener geht, die gezeichnet vorliegt.*

Fig. 104.



Aus den eben bewiesenen Parabeleigenschaften fliessen unmittelbar folgende Sätze: *Der Ort der Brennpunkte einer Parabel, welche irgend einem gegebenen festen Dreiecke* GHK eingeschrieben ist, ist die dem Dreieck umschriebene Kreislinie. — Nimmt man in der einem beliebigen Dreieck GHK *umschriebenen Kreislinie irgend einen Punkt B an, und fällt aus demselben Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die Fusspunkte allemal in einer Geraden.* In der That liegen diese Punkte in der Scheiteltangente derjenigen Parabel, welche B zum Brennpunkte hat, und dem Dreiecke GHK umschrieben ist. — *Der Ort des Punktes B, welcher die Eigenschaft hat, dass die aus ihm auf die Seiten eines gegebenen festen Dreiecks gefällten Perpendikel Fusspunkte haben, die in irgend einer Geraden liegen, ist die dem Dreieck umschriebene Kreislinie.* — Oder allgemeiner, indem man einen ebenfalls bewiesenen Parabelsatz anwendet: *Zieht man aus dem genannten Punkte B Strahlen nach den Seiten des Dreiecks, welche mit denselben irgend welche, aber einander gleiche und nach derselben Seite hin liegende Winkel bilden, so liegen die Fusspunkte in einer Geraden,* ein Satz, der sich leicht umkehren lässt. — *Diejenigen Geraden, welche durch alle der so eben definirten Strahlen bestimmt werden, die von einem und demselben Punkte B ausgehen, mit Einschluss der Seiten des Dreiecks, bilden die gesammten Tangenten einer Parabel, welche den Punkt B zum Brennpunkte hat.* — *Zieht man aus dem im umgeschriebenen Kreise willkürlich angenommenen Punkte B Strahlen nach den Ecken des Dreiecks, und von da aus andere Strahlen, welche die Winkel des Dreiecks in eben solche Theile zerlegen, wie jene ersten, so sind die drei neuen Strahlen allemal parallel,* weil sie nach dem unendlich entfernten Brennpunkte A_∞ derjenigen Parabel gehen, die B zum Brennpunkte hat, welche dem gegebenen Dreiecke eingeschrieben ist. — *Zieht man durch die Ecken eines beliebigen Dreiecks nach irgend einer Richtung parallele Strahlen, und sodann drei neue Strahlen, welche mit den Seiten beziehlich dieselben Winkel bilden, wie jene, nur die Seiten verwechselt genommen, so treffen die drei neuen Strahlen einander in einem Punkte, und der Ort des letztern für alle möglichen Richtungen ist die dem Dreieck umgeschriebene Kreislinie.* — An diese Sätze schliesst sich die Lösung der folgenden Aufgabe: Wenn irgend ein Dreieck GHK gegeben ist, so soll in dem ihm umgeschriebenen Kreise derjenige Punkt B gefunden werden, welcher die Eigenthümlichkeit hat, dass die Fusspunkte der aus ihm auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel in einer Geraden g liegen, welche mit einer gegebenen Geraden G parallel ist. Durch eine Spitze des Dreiecks ziehe man den auf der Geraden G senkrechten Strahl, und sofort den zweiten Strahl, der mit den in der Spitze zusammenstossenden Seiten verwechselt eben solche Winkel bildet, wie jener, so geht derselbe durch den verlangten Punkt B. Analog wird die allgemeinere Aufgabe behandelt, wenn statt der Perpendikel unter irgend einem gegebenen

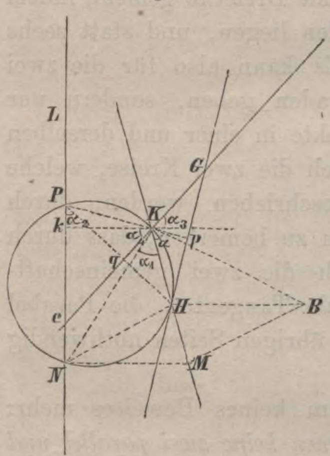
Winkel φ Strahlen aus B an die Seiten gezogen werden sollen. Dieselbe gewährt zwei Lösungen. —

Soll eine Parabel vier Geraden berühren, d. h. einem vollständigen Vierseit eingeschrieben werden können, so müssen die den vier Dreiecken [aus welchen das Vierseit besteht] umgeschriebenen Kreise einander in einem und demselben Punkte B schneiden, welcher der Brennpunkt der Parabel ist, und umgekehrt, findet letzteres statt, so ist auch ersteres möglich.

Beschreibt man um zwei der vier Dreiecke Kreise, so haben sie allemal eine Ecke des Vierseits gemein, und müssen also einander im Allgemeinen noch in einem andern Punkte B schneiden. Fällt man aus diesem Punkte Perpendikel auf die Seiten der Dreiecke, so liegen für jedes Dreieck die zugehörigen drei Fusspunkte in einer Geraden; zwei Fusspunkte sind aber für beide Dreiecke gemein, indem zwei Paar Seiten in denselben zwei Geraden liegen, und statt sechs Fusspunkte nur vier vorhanden sind. Es kann also für die zwei Dreiecke nicht verschiedene Fusspunktsgeraden geben, sondern nur eine, und folglich müssen alle vier Fusspunkte in einer und derselben Geraden liegen. Hiernach aber müssen auch die zwei Kreise, welche den noch übrigen beiden Dreiecken umgeschrieben werden, durch eben denselben Punkt gehen. Es ist noch zu bemerken, dass durch den Punkt B als Brennpunkt und durch die zwei gemeinschaftlichen Seiten der betrachteten Dreiecke als Tangenten, die Parabel bestimmt ist, aber dass sie auch die beiden übrigen Seiten nothwendig zu Tangenten hat.

Die nachfolgenden Sätze bedürfen nun keines Beweises mehr: *Vier beliebige Gerade in einer Ebene, von denen keine zwei parallel und auch nicht mehr als zwei durch den nämlichen Punkt gehen, bilden zu je drei genommen vier Dreiecke, und die denselben umgeschriebenen vier Kreise schneiden sich in einem und demselben Punkte B. — Sie können von einer bestimmten Parabel berührt werden, und der Brennpunkt derselben ist B; also ist durch vier Tangenten stets eine, aber auch nur eine Parabel bestimmt. — Es gibt einen, aber nur einen bestimmten Punkt B, für welchen die Fusspunkte der von ihm auf die vier Geraden gefällten Perpendikel in einer Geraden liegen.* Diese Gerade ist die Scheiteltangente der Parabel, welche die vier gegebenen Geraden berührt, und deren Brennpunkt B ist. — *Es gibt nur einen bestimmten Punkt B, der so beschaffen ist, dass wenn aus demselben nach den gegebenen Geraden unter irgend gleichen Winkeln Strahlen gezogen werden, die vier Fusspunkte jedesmal in einer Geraden liegen.* Jener Punkt ist B, und diese Gerade g, resp. alle die unendlich vielen derartigen Geraden, welche durch Aenderung des in Frage kommenden Winkels erhalten werden, sind die gesammten Tangenten der angezeigten Parabel. Auch die vier Grundgeraden stellen sich als Gerade g dar. — *Es gibt einen einzigen Punkt (B), der die Eigenthümlichkeit besitzt, dass, wenn man aus ihm nach den sechs Ecken des Vierseits Strahlen zieht und sofort unter verwechselten Winkeln sechs neue Strahlen auslaufen lässt, diese einander parallel sind.* Umgekehrt: *Es gibt eine bestimmte Richtung, aber nur eine, welche die Eigenschaft hat, dass, wenn durch die Ecken Strahlen gezogen und durch sechs neue Strahlen die Winkel umgekehrt getheilt werden, diese letztern Strahlen in einem und demselben Punkte zusammenlaufen.* Die Richtung dieser Strahlen ist zugleich die der Axe der Parabel. —

Fig. 105.



Ueber das durch irgend drei Tangenten der Parabel gebildete Dreieck soll jetzt noch ein interessanter Satz bewiesen werden, aus welchem in Verbindung mit dem Vorhergehenden verschiedene nicht minder merkwürdige Folgerungen zu ziehen sind:

Durch die Endpunkte H, K einer Seite des Dreiecks und durch den Fusspunkt N des aus ihrem Berührungspunkt M auf die Leitlinie L gefällten Perpendikels lege man den Kreis $NHKP$, welcher die Leitlinie zum zweiten Male in P schneidet; ziehe die Strahlen BK, NK, PH etc., so ist Winkel $\alpha_2 = \alpha_1$ (über der Sehne NH) $= \alpha$ [denn die Dreiecke KNM und KBM sind congruent, weil N und B Gegenpunkte in Bezug auf KM sind, woraus $KN = KB$ und $NM = MB$ folgt] $= \alpha_3 = \alpha_4$. Daher haben die Dreiecke ckK und cqP zwei Paare gleiche Winkel, nämlich $\alpha_2 = \alpha_4$ und c gemein, folglich ist auch das dritte Paar gleich, $k = q$; nun ist der Strahl kK der Axe parallel, also $k = R$, folglich ist auch $q = R$ und somit HqP das aus der Ecke H auf die Gegenseite GK des Dreiecks herabgelassene Perpendikel. Es ist a priori zu schliessen, dass es sich bei der andern Ecke K, durch welche der Hülfskreis geht, eben so verhalten müsse, indem zwischen beiden in der Construction kein Unterschied vorhanden ist, oder es kann diess auf ganz gleiche Weise bewiesen werden. [Heisst der Nebenwinkel von β_2 bei $P = \gamma_2$, so ist, als Gegenwinkel des Vierecks $NHKP$ im Kreise $\gamma_2 + \beta_1 = 2R$, daher, da $\beta_1 = \beta$ und

$\beta + \gamma = 2R$, auch $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$, folglich die Dreiecke ihH und ipP gleichwinklig und desshalb Winkel $h = p = R$, also PKp das aus der Ecke K auf die Gegenseiten des Dreiecks gefällte Perpendikel.] Demzufolge ist P der Durchschnitt der drei Perpendikel aus den Ecken auf die Gegenseiten des Tangentendreiecks GHK, und zwar liegt er in der Leitlinie der Parabel. Daraus entspringen folgende Sätze:

Bei jedem durch irgend drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecke liegt der Durchschnittspunkt der drei Höhen in der Leitlinie L *der Parabel.*

Die Leitlinien aller Parabeln, welche irgend einem festen Dreiech sich einschreiben lassen, schneiden einander in einem und demselben bestimmten Punkte, in welchem sich nämlich zugleich die drei Höhen des Dreiecks durchkreuzen.

Fället man aus irgend einem Punkte B *der Kreislinie, welche einem beliebigen festen Dreieck* GHK *umschrieben ist, Lothe auf die Seiten des Dreiecks und verlängert dieselben jenseits der Seiten um sich selbst, so liegen die drei Endpunkte jedesmal in einer Geraden, welche sich um einen bestimmten festen Punkt* O *dreht, wenn jener Punkt* B *die Kreislinie durchläuft, und zwar ist der feste Punkt der Durchschnitt der drei Höhen des Dreiecks.*

In jedem der vier Dreiecke, welche durch ein vollständiges Vierseit gebildet werden, treffen die drei Höhen in einem Punkte zusammen, und die auf diese Weise bestimmten vier Punkte liegen in einer Geraden, welche die Leitlinie der dem Vierseit eingeschriebenen Parabel ist.

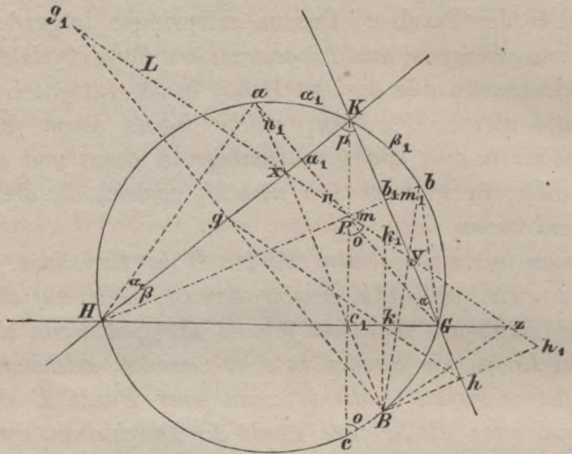
Wegen der Congruenz der Dreiecke HNK und HBK ist der Kreis HKP dem Kreise HKG gleich, und beide sind auch den Kreisen GHP und GKP gleich. Daher schliesst man: *Schneiden von vier gleichen Kreisen dreimal drei einander in einem Punkte, so schneiden sich stets zum vierten Male drei in einem Punkte.* — Zieht man durch einen der vier Punkte eine Gerade L, errichtet auf sie in den Punkten, wo sie die zugehörigen drei Kreise zum zweiten Male schneidet, Lothe bis an die entsprechenden Seiten des durch die drei übrigen Kreisschnittpunkte bestimmten Dreiecks GHK, beschreibt mit denselben um ihre Endpunkte M, C, J Kreise, so schneiden sich auch diese in einem Punkte B, und zwar mit dem vierten gegebenen Kreise, der durch GHK geht, zusammen.

Eine Reihe der gegebenen Sätze lässt sich durch folgende Elementarbetrachtung vorbereiten und in umgekehrter Ordnung darstellen.

Die Kreislinie, welche einem beliebigen Dreieck GHK umgeschrieben ist, wird durch die Höhen desselben [GPa, HPb, KPc] in drei paar gleiche Bogen getheilt. Denn da z. B. Winkel $\alpha = \beta$ vermöge der rechtwinkligen Dreiecke Ga_1K und Hb_1K, so ist Bogen

$\alpha_1 = \beta_1$ etc. Daher ist auch, bei H, $\beta = \alpha_2$ und folglich $a a_1 = a_1 P$ und aus ähnlichen Gründen ist $b b_1 = b_1 P$, $c c_1 = c_1 P$, d. h.: *Die Abschnitte der drei Höhen zwischen ihrem Durchschnitte P und den Punkten*

Fig. 106.



a, b, c, in welchen sie die Kreislinie zum zweiten Male treffen, werden durch die zugehörigen Grundlinien [Seiten des Dreiecks] *gehälftet.*

Irgend eine Transversale L durch P schneide die Seiten des Dreiecks in x, y, z. Man ziehe die Geraden ax, by, cz, so entstehen gleichschenklige Dreiecke axP, byP, czP, so dass Winkel $n_1 = n$, $m_1 = m$, $(0 = 0)$. Vermöge des einem Kreise einschreibbaren Vierecks Kb_1Pa_1 ist $n + m = p$, also auch $n_1 + m_1 = p$, daher die Summe der Bogen unter n_1 und m_1 gleich dem Bogen unter p, d. h. GBH; jene haben aber mit diesem die Endpunkte G und H gemein, folglich müssen ihre andern Endpunkte in B zusammenfallen d. h.: die Strahlen ax, by so wie cz (für welchen dasselbe folgt) treffen sich in irgend einem und demselben Punkte B der Kreislinie. Zieht man nun aus B auf die Seiten des Dreiecks die Perpendikel Bgg_1, Bhh_1, Bkk_1, so sind die Dreiecke Bxg_1, Byh_1, Bzk_1 Scheiteldreiecke der axP etc. und ebenfalls gleichschenklig, daher liegen die Mitten ihrer Grundlinien oder die Fusspunkte der Perpendikel g, h, k in einer zu L parallelen Geraden ghk. Aus dieser Betrachtung und durch Umkehrung der Schlüsse folgen nachstehende Elementarsätze:

Die einem beliebigen Dreiecke umgeschriebene Kreislinie begränzt die Höhen desselben so, dass die Fusspunkte die Mitten sind zwischen jenen Gränzpunkten und dem gegenseitigen Durchschnitte der Höhen. — Die Gränzpunkte liegen so, dass die Ecken des Dreiecks die Mitten der sie *verbindenden Bogen sind.* — Umgekehrt: *Nimmt man in einer Kreislinie drei beliebige Punkte a, b und c, hälftet die dazwischen liegenden Bogen in K, H und G, so schneiden sich die drei Seiten aG, bH und cK in irgend einem Punkte P, und sind zugleich beziehlich rechtwinklig zu den drei Sehnen KH, GK, HG,* d. h. *sie sind zugleich die Höhen des Dreiecks GHK;* auch werden die Stücke der erstern Sehnen, die zwischen ihren Anfangspunkten abc und ihrem gemeinschaftlichen Punkte P liegen, von den drei letztern Sehnen gehälftet.

Zieht man durch P irgend eine Gerade L, welche die Seiten des Dreiecks GHK in x, y und z schneidet, und legt durch diese Punkte und durch die entsprechenden Gränzpunkte a, b, c der Höhen Strahlen ax, by, cz, so treffen diese in irgend einem Punkte B zusammen; dieser Punkt B liegt jedesmal in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie und zwar ist diese sein Ort, so dass, wenn die Gerade L sich um den festen Punkt P dreht, alsdann der Punkt B die Kreislinie continuirlich und ganz beschreibt. — Umgekehrt: *Zieht man aus einem beliebigen Punkte B der Kreislinie nach den Gränzpunkten abc der Höhen des Dreiecks Strahlen Ba, Bb, Bc, so liegen die Punkte x, y, z, in welchen sie die entsprechenden Seiten des Dreiecks treffen, in irgend einer Geraden L; diese Gerade geht stets durch einen bestimmten festen Punkt, nämlich durch den gemeinsamen Durchschnitt der drei Höhen des Dreiecks, so dass sie sich um denselben dreht, wenn jener angenommene Punkt B die Kreislinie durchläuft.* — Ferner: *Fällt man aus B Perpendikel Bgg_1, Bhh_1, Bkk_1 auf die Seiten des Dreiecks GHK und verlängert sie bis an L, so sind die Fusspunkte g, h, k die Mitten derselben, und also liegen die Fusspunkte in einer Geraden ghk.* — Umgekehrt: *Fällt man man aus einem beliebigen Punkte B der Kreislinie Perpendikel auf die Seiten des Dreiecks, so liegen die drei Fusspunkte ghk in einer Geraden.* [Die Richtung der Geraden ghk ist jedesmal durch den Punkt B bestimmt und umgekehrt bestimmt auch die Richtung von ghk den Punkt B, so dass keine zwei der Geraden parallel sind]; *werden die Perpendikel über die Seiten hinaus verlängert und zwar verdoppelt, so liegen ihre Endpunkte $g_1 h_1 k_1$ in einer andern Geraden L, welche stets durch einen bestimmten festen Punkt P geht, nämlich durch den Durchschnitt der drei Höhen des Dreiecks, und welche sich also um diesen Punkt herumdreht, wenn jener die Kreislinie durchläuft.*

Errichtet man in den Punkten xyz Lothrechte auf die Seiten des Dreiecks GHK und fällt sodann aus B Perpendikel auf dieselben, so liegen die Fusspunkte in der nämlichen Geraden ghk. Daher müssen die drei Lothrechten ein Dreieck bilden, dessen umgeschriebener Kreis durch B geht; werden die Perpendikel verdoppelt, so liegen ihre Endpunkte in *der nämlichen Geraden L;* denn das Perpendikel auf die Lothrechte in X ist parallel und gleich gx, daher bis an L verlängert gleich $2gx$, weil g die Mitte von Bg_1 ist. *Also liegt auch der Durchschnitt der Höhen dieses neuen Dreiecks in L.*

Vermöge vorhergehender Entwicklungen hat man in Rücksicht des gleichseitigen Dreiecks noch folgende besondere Sätze: *Es gibt unzählige regelmässige Dreiecke, die irgend einer gegebenen Parabel umgeschrieben sind; nämlich jede Tangente der Parabel ist Seite eines solchen Dreiecks, aber auch nur eines einzigen. — Die Mittelpunkte aller dieser Dreiecke liegen in der Leitlinie der Parabel und erfüllen sie einfach,* d. h. jeder Punkt derselben ist Mittelpunkt von einem der genannten Dreiecke, aber nur von einem. — *Die den Dreiecken umgeschriebenen Kreise haben die Axe der Parabel zur gemeinschaftlichen Potenzlinie, und zwar schneiden sie einander in zwei Punkten auf derselben, wovon einer der Brennpunkt B ist. In jedem Kreise liegt nur ein Dreieck.*

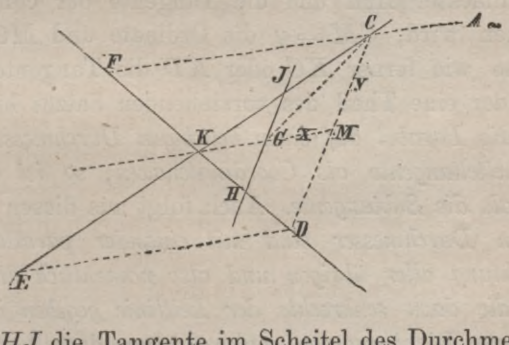
Zufolge des Schlusssatzes in §. 18. ist der Ort der Ecken aller dieser Dreiecke eine Hyperbel, für welche, wenn die Bezeichnungen der Figur 102 beibehalten werden, B und L ein Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie sind. Zwei der Ecken eines jeden der gleichseitigen Dreiecke liegen auf dem B umschliessenden, die dritte auf dem andern Zweige. Für eine der erstern ist $\sphericalangle EKV = 120^0$, $\sphericalangle EBV = UKN = 60^0$, also $\frac{UK}{NK} = \frac{1}{2}$. Bezeichnet man mit $2p$ den Abstand des Punktes B von L, mit $2a$ und $2b$, $2c$, 2φ, die Axen, die doppelte Excentrizität und den Asymptotenwinkel der Hyperbel, so ist $a = \frac{4p}{3}$, $b = \frac{4p}{3}\sqrt{3}$, $c = \frac{8p}{3}$, $2\varphi = 120^0$. Die Hyperbel ist also von der besondern Art, welche wir am Schlusse des §. 9. [unter Voraussetzung, dass in Fig. 47 die Gleichung $\beta = 2\alpha$ erfüllt sei] kennen lernten und zur Dreitheilung eines Winkels benutzten. Die Construction geschieht am besten, indem man auf die Strahlen, welche von B aus unter dem Winkel 30^0 gegen die Axe der Parabel gelegt werden können, in ihren Schnittpunkten mit der Leitlinie Perpendikel errichtet; diese sind mit den Asymptoten identisch. Die Scheitel haben gleiche Abstände vom Mittelpunkt und den zugehörigen Brennpunkten.

Schliesslich seien noch folgende Sätze angeführt: *Zieht man aus einem Brennpunkte B der Parabel Strahlen nach den Ecken des ihr umschriebenen Dreiecks GHK, und ferner drei Strahlen nach den Berührungspunkten M, C, J desselben, so ist allemal das Product jener drei Strahlen dem Producte der letztern drei gleich.* — Bezeichnet man nämlich die Strahlen von B aus nach den sechs genannten Punkten mit den correspondirenden kleinen Buchstaben, so ist nach einem Satze des §. 18. und unter Benutzung der Fig. 103 : $g^2 = mi$, $h^2 = ic$, $h^2 = cm$, woraus in der That $ghk = cmi$ folgt. Als Spezialfall ergibt sich hieraus: *Zieht man aus den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks durch irgend einen Punkt B der ihm umgeschriebenen Kreislinie Strahlen bis an die Gegenseiten, so ist das Product derjenigen drei Abschnitte der Strahlen, welche zwischen jenem Punkte und den Ecken liegen, gleich dem Producte der drei übrigen Abschnitte, welche zwischen dem Punkte und den Seiten liegen. Auch ist einzeln das Quadrat jedes der drei erstern Strahlen dem Rechtecke unter den zwei, ihm nicht zugehörigen letztern Strahlen inhaltsgleich.*

§. 20. Weitere Eigenschaften der Parabel und ihrer Tangenten.

Von den drei Strahlen CF, KM, DE, welche durch die Berührungspunkte und den Durchschnittspunkt irgend zweier Tangenten der Parabel mit der Axe derselben parallel (nach A_∞) gezogen werden, ist der mittlere, KM gleichweit von den zwei andern entfernt, demnach wird jede Gerade, welche den ersten Strahl CA_∞ mit dem dritten DA_∞ verbindet, durch den mittlern KA_∞ gehälftet. Also werden namentlich die Tangenten CE, DF selbst in K gehälftet, d. h.: *Das Stück CE jeder Tangente der Parabel, welches zwischen dem Berührungspunkt C und irgend einem Durchmesser EDA_∞ liegt, wird von der Tangente DF im Scheitel D dieses Durchmessers gehälftet.*

Fig. 107.



Nun sei HJ die Tangente im Scheitel des Durchmessers KMA_∞, so sind J und H die Mitten der Tangenten CK und DK und folglich $HJ \parallel CD$ so wie ferner $GJ \parallel GH$ [weil $MC = MD$ ist] und endlich bleibt der Durchmesser GA_∞ fest, während der Durchschnitt K der zwei ersten Tangenten sich auf demselben bewegt, so ändern sich zwar die betreffenden Linien, aber die bemerkten Umstände und

Gleichungen bestehen fort, d. h. es bleibt $GK = GM$, $GJ = GH$, $MC = MD$ und $HJ \parallel CD$, wobei HJ als Tangente in dem festen Punkte G feste Lage und Richtung hat. Daraus zieht man den folgenden Satz:

Bewegt sich der Durchschnitt K zweier Tangenten der Parabel in irgend einem Durchmesser GA_∞ derselben, so behält die Berührungssehne CD constante Richtung, nämlich sie bleibt stets der Tangente HJ im Scheitel G jenes Durchmessers parallel; die Mitte M der Sehne liegt stets im Durchmesser. Das Stück HJ von der Tangente im Scheitel, welches durch die jedesmaligen zwei Tangenten begränzt ist, wird durch den Scheitel G des Durchmessers gehälftet; ebenso liegt dieser Scheitel in der Mitte zwischen dem Durchschnitte K der jedesmaligen zwei Tangenten und dem Mittelpunkt M ihrer Berührungssehne. Und umgekehrt: *Zieht man in einer Parabel parallele Sehnen nach einer beliebigen Richtung, so liegen ihre Mitten allemal in irgend einem und demselben Durchmesser, welcher auch durch den Berührungspunkt G der den Sehnen parallelen Tangente, so wie durch die Durchschnitte K der sämmtlichen Tangentenpaare in den Endpunkten der Sehnen geht.*

Hierdurch wird, wie man sieht, die Benennung: „Durchmesser" gerechtfertigt. *Wenn auch zu irgend einem Durchmesser GA_∞ kein zugeordneter wirklich existirt, so kann man doch die Richtung der von ihm halbirten Sehnen, oder der Tangente in seinem Scheitel, als ihm, oder seiner Richtung zugeordnet ansehen, oder als Richtung die ihm zugeordneten, aber unendlich entfernten Durchmesser annehmen.* In diesem Sinne würde, wenn G als Anfangspunkt der Coordinaten in Bezug auf den Durchmesser KM und die Tangente der conjugirten Richtung genommen wird, $CM = y$ die Ordinate und $MG = x$ die Abscisse sein, so wie ferner KC oder KD die Tangente und KM die Subtangente, der eine Theil des vorstehenden Satzes hiesse demnach: *Bezieht man die Parabel auf einen beliebigen Durchmesser und die ihm zugehörige Scheiteltangente als Coordinatenaxen, so ist die Abscisse x halb so gross als die Subtangente.* Auch folgt aus diesen Bemerkungen: *Alle wirklichen Durchmesser sind mit einander parallel, so dass mit jedem die Richtung aller übrigen und also namentlich die Richtung der Axe, so wie die dazu senkrechte der Leitlinie gegeben ist.* — Die der Axe zugeordnete Richtung ist senkrecht zu derselben und ist die Richtung der Tangente im Hauptscheitel der Parabel oder auch die Richtung der Leitlinie.

Wenn eine Parabel gezeichnet vorliegt, so soll 1) *die Richtung ihrer wirklichen Durchmesser* d. h. *irgend eines derselben* und 2) *die Axe gefunden werden.* Ferner: 3) *Wenn blos ein Bogen der Parabel, welcher* *den Hauptscheitel Q nicht enthält, gegeben ist, so soll dieser Scheitel und die Axe gefunden werden.* Man ziehe zur Lösung von 1) zwei parallele Sehnen CD und C_1D_1, so geben ihre Mitten einen Durchmesser MM_1. Sofort wird auch die Tangente im Scheitel G dieses Durchmessers gefunden, denn sie ist jenen Sehnen parallel. 2) Aus irgend einem Punkte R der Parabel fälle man auf den Durchmesser MM_1 ein Perpendikel, welches der Parabel in einem zweiten Punkte S begegnen wird, und ziehe die Gerade QA_∞, welche die Sehne RS rechtwinklig hälftet, so ist sie die Axe QA_∞. 3) Da G die Mitte von KM ist, so sind die Strahlen CF, CK, CG und CM harmonisch. Wäre nun der Bogen CN nur bis N gegeben, und sollte der Scheitel G des irgend einer gegebenen Richtung CD zugeordneten Durchmessers GA gefunden werden, welcher Scheitel nämlich jenseits jenes Bogens liegen kann, so construire man zunächst irgend einen Durchmesser CA_∞, ferner in dessen Scheitel C [welcher natürlicher Weise in dem gegebenen Bogen liegt] die Tangente CK, dann ziehe man durch denselben (C) den Strahl CM der gegebenen Richtung parallel und suche endlich zu den drei Strahlen CA_∞, CK, CM den vierten harmonischen, CA_∞ zugeordneten Strahl CG, so muss dieser allemal durch den gesuchten Scheitel G gehen; letzterer wird daher gefunden, wenn die Construction wiederholt wird, wodurch man nämlich mit einem neuen Punkt C_1 und neuen Strahlen C_1F_1, C_1K_1, C_1M_1 auch einen neuen Strahl C_1G_1 erhält, dessen Durchschnitt mit CG den gesuchten Punkt G gibt. Es ist klar, wie hierdurch der Hauptscheitel Q gefunden werden kann; nämlich für diesen ist die gegebene Richtung CM zu der festen Richtung CA_∞ rechtwinklig.

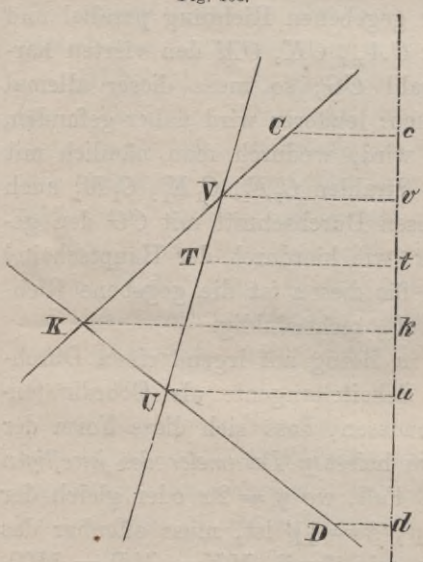
Ist die Gleichung der Parabel in Bezug auf irgend einen Durchmesser GA_∞ und die zugehörige Scheiteltangente als Coordinatenaxen: $y^2 = px$ [es wird leicht bewiesen, dass sich diese Form der Gleichung stets herstellen lässt], so heisst p *Parameter des jeweiligen Durchmessers.* Für den besondern Fall, wo $y = 2x$ oder gleich der Subtangente KM und also $y = \frac{1}{2}p$, $x = \frac{1}{4}p$ ist, muss offenbar das Dreieck DKC bei K rechtwinklig sein [weil $MK = MD = MC$], folglich liegt der Punkt K in der Leitlinie L. Also: *Das Stück GP jedes Durchmessers zwischen seinem Scheitel G und der Leitlinie L ist dem vierten Theile der zugehörigen Parameters gleich.* [Denn $KG = GM = x = \frac{1}{4}p$]. Oder: *Diejenige Ordinate y, welche durch den Brennpunkt B geht, ist dem halben Parameter p im speziellen Falle der Axe als Durchmesser gleich* [oder die doppelte Ordinate dem ganzen]. Oder: *Ist die Ordinate y im gewöhnlichen Sinne genommen dem halben Parameter gleich, so schneidet die zugehörige Tangente CK den Durchmesser*

PGM mit der Leitlinie L in einem und demselben Punkt P, und beide Tangenten, welche derselben Ordinate, wenn diese positiv und negativ genommen wird, entsprechen, sind zu einander rechtwinklig.

Für den wirklichen Brennpunkt B der Parabel [so wie für jeden Brennpunkt A und B einer Ellipse oder einer Hyperbel] erscheint das Stück, welches irgend zwei feste Tangenten von jeder andern, oder von einer beweglichen dritten abschneiden, unter einem constanten Winkel; es kann gefragt werden, welches der analoge Satz für den unendlich entfernten Brennpunkt A_∞ der Parabel sei?

Zwischen den zwei festen Tangenten KC und KD sei UV eine beliebige dritte mit dem Berührungspunkte T; die Strahlen Cc, Vv, Tt, Kk, Uu, Dd seien der Axe parallel, so hat man $ck = kd$, $tv = cv$, $tu = du$ und desshalb $uv = \frac{1}{2}cd$; ferner: $vk = ud$ [$2ud = dk + tk$, $2vk = ck + tk$] und $ku = cv$. Ist nun cd zu jenen Strahlen rechtwinklig, so ist uv der senkrechte Abstand der Strahlen Uu und Vv von einander, d. h. der Strahlen, welche aus den Endpunkten der veränderlichen dritten Tangente nach A_∞ gezogen sind; da cd constant ist, so bleibt folglich auch dieser Abstand uv constant. Der in Frage stehende Satz lautet also:

Fig. 108.



Irgend zwei feste Tangenten der Parabel begränzen alle übrigen so, dass die Stücke einerlei Höhe haben, d. h. *dass die durch die Endpunkte jedes Stücks der Axe parallel gelegten Strahlenpaare constanten Abstand von einander haben*, oder *dass die Summe, resp. der Unterschied der Perpendikel, welche aus den Endpunkten der dritten Tangente auf die Axe herabgelassen werden, constant ist.* Oder: *Jede dritte Tangente erscheint von A_∞ aus unter constanter Höhe.*

Es folgt ferner unmittelbar:

Irgend zwei feste Tangenten begränzen von derjenigen der übrigen Tangenten das kleinste Stück, welche zu der Axe senkrecht steht, also von der Tangente im Scheitel der Parabel.

Es ist, wie wir gesehen haben, $ku = vc = vt$ und ebenso $kv = ud = ut$; hiernach ist weiter $ku : ud = cv : vk = vt : tu$; aber es ist auch $ku : ud = KU : UD$, $cv : ck = CV : VK$ und $vt : ut = VT : UT$ folglich:

$$KU : DU = CV : VK = VT : TU \text{ und}$$
$$KU : KD = CV : CK = VT : UV \text{ oder}$$
$$DU : DK = KV : KC = UT : UV \text{ d. h.}$$

Zwei beliebige Tangenten der Parabel, KC und KD werden von jeder dritten UV in umgekehrtem Verhältniss geschnitten, nämlich in Bezug auf die Berührungspunkte CD und den gegenseitigen Durchschnittspunkt K derselben, und ferner wird die dritte Tangente UV durch ihren Berührungspunkt T in demselben Verhältniss getheilt. Ebenso verhält sich der erste Abschnitt jeder von jenen zwei Tangenten zur Ganzen, wie der zweite Abschnitt der andern zur Ganzen, oder wie der eine, diesem zweiten Abschnitte anliegende Abschnitt der dritten Tangente zur Ganzen.

Es folgt daraus weiter:

Theilt man jeden Schenkel KC und KD eines beliebigen Dreiecks DKC in irgend eine Anzahl n gleiche Theile, verbindet je einen x^{ten} Theilungspunkt V in KC von K aus gezählt mit dem gleichvielten Theilungspunkt U in KD von D an gezählt, so sind die $n - 1$ Verbindungslinien Tangenten einer Parabel, welche die Schenkel KC, KD in ihren Endpunkten CD an der Grundlinie berührt und welche jede von jenen Linien UV in demjenigen Punkte T berührt, der sie so theilt, dass die Abschnitte sich umgekehrt verhalten, wie die anliegenden Zahlen x, $n - x$, welche anzeigen, die wievielten Theilungspunkte UV von K an gerechnet, sie verbindet.

Da, wie bewiesen worden, $\frac{DU}{DK} = \frac{UT}{VU}$, $\frac{CK}{CV} = \frac{UV}{VT}$ und $\frac{TV}{TU} = \frac{TV}{TU}$, so ist das Product dieser drei Verhältnisse:

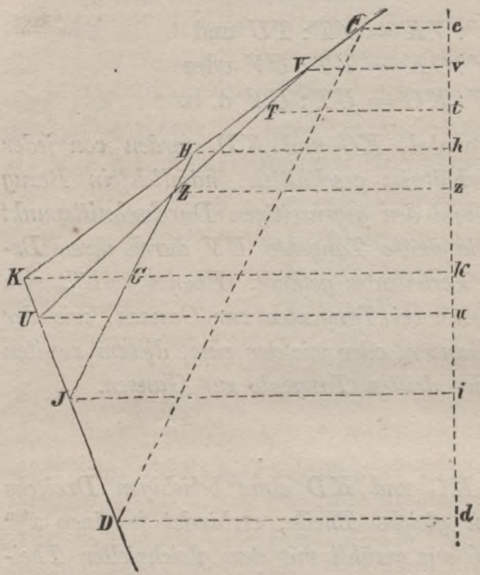
$$\frac{DU}{DK} \cdot \frac{CK}{CV} \cdot \frac{TV}{TU} = 1, \text{ also}$$
$$DU \cdot CK \cdot TV = DK \cdot CV \cdot TU,$$

welches nach dem bekannten Transversalensatze beweist, *dass die drei Strahlen KT, UC, VD aus den Ecken irgend eines der Parabel umgeschriebenen Dreiecks KVU nach den Berührungspunkten der gegenüberstehenden Seiten einander in irgend einem Punkte treffen.*

Da $ku = tv$, wie schon bemerkt worden, und ferner wenn JH die zum Durchmesser KA_∞ gehörige Scheiteltangente ist: $kz = tz$, so ist $uz = zv$ und folglich auch Z die Mitte von UV. Also: *Die*

Mitten Z der Stücke, welche irgend zwei feste Tangenten von allen übrigen (UV) begränzen, liegen in einer bestimmten Geraden, nämlich in derjenigen Tangente HJ, welche mit der Berührungssehne CD jener festen parallel ist, oder welche durch ihren Berührungspunkt G gehälftet wird. Oder anders: *Zieht man durch jeden Punkt Z der Grundlinie HJ irgend eines gegebenen Dreiecks HKJ zwischen den Schenkeln diejenige Gerade VZU, welche durch den Punkt gehälftet wird, so berühren alle diese Geraden eine bestimmte Parabel, welche dem Dreieck eingeschrieben ist, und zwar dessen Grundlinie in ihrer Mitte G, die Schenkel aber in deren Verlängerungen jenseits der Grundlinie um ihre eigene Länge berührt.*

Fig. 109.



Da $vh = ui$, so bleibt das Verhältniss $HV : JU$ constant, wenn die drei Tangenten, welche das Dreieck HKJ bilden, fest bleiben, während VU sich verändert und zwar ist $HV : JU = HK : JK$ ~~$= HD : JC$~~, d. h.: $HC : JD$

Nimmt man in zwei beliebigen festen Geraden KC, KD zwei beliebige feste Punkte J, H an und bestimmt solche Punktenpaare U, V in den Geraden, deren Abstände von jenen festen Punkten sich verhalten wie die Abstände der letztern von dem Durchschnitte K der festen Geraden [jedoch müssen jene in Bezug auf die resp. festen Punkte J, H und auf K verkehrte Lage haben], *so ist der Ort der Geraden UV eine bestimmte Parabel, welche die festen Geraden in denjenigen Punkten C, D berührt, welche doppelt so weit von ihrem Durchschnitte K entfernt sind, als die festen Punkte JH und welche die Gerade JH in ihrer Mitte berührt, und ferner ist der Ort der Mitte Z der veränderlichen Geraden UV die durch die festen Punkte bestimmte Gerade JH.* Oder: *Werden die Schenkel eines festen Dreiecks HKJ proportional geschnitten, jedoch je einer unter der Grundlinie in der Verlängerung, und der andere über derselben* [auch wohl in der Verlängerung über K hinaus], *so wird die Schneidende UV stets von der Grund-*

linie HJ gehälftet, und umgekehrt, wird sie von dieser gehälftet, so schneidet sie jene proportional. In beiden Fällen kommen natürlich die eben abgeleiteten Parabelsätze in Betracht.

Angenommen, HJ sei eine beliebige Tangente der Parabel, d. h. nicht gerade von den zwei ersten KC, KD so abhängig, dass der Durchmesser GA_∞ durch K geht, so kann man leicht zeigen, dass wenn jene drei fest sind, jede vierte Tangente UV in constantem Verhältniss getheilt wird, nämlich dass $VZ:ZU = HG:GJ$ [$= KJ:JC = DH:HK$]. Denn vermöge je dreier Tangenten hat man zufolge vorhergehender Sätze z. B.

$$ZG:GJ = TZ:ZU \text{ [in Betracht der Tangente } ZUJ]$$
$$ZG:GH = TZ:ZV \text{ [in Betracht der Tangente } ZHV]$$

daher $$VZ:ZU = HG:GJ\,.$$

Daher lassen sich alle vorstehenden Sätze allgemeiner aussprechen. Auch folgen daraus Sätze über das vollständige Vierseit mit Bezug auf die ihm eingeschriebene Parabel. Theilt man nämlich das Stück HJ irgend einer der vier gegebenen Geraden, welches zwischen zweien, KH, KJ liegt, in gleichem Verhältniss [im Punkte G] wie das Stück UV der vierten, welches zwischen denselben zweien liegt, von der ersten HJ [in Z] getheilt wird, und wird dieses mit Vertauschung der entsprechenden Elemente, so erhält man die vier Punkte G, T, D, C, in welchen die eingeschriebene Parabel die vier Geraden berührt.

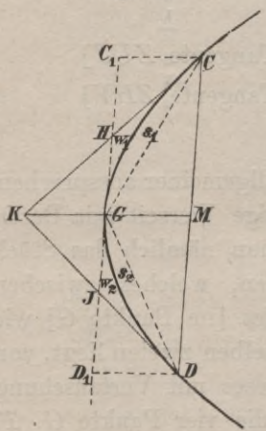
Da $vh = ui$, so folgt, dass die Mitten von vi und hu zusammenfallen; aus gleichen Gründen haben kz und vi einerlei Mitte, folglich haben die drei Strecken vi, hu, kz [wobei die HJ ganz beliebig ist] einen Punkt n zur gemeinschaftlichen Mitte; oder die drei Strahlenpaare Vv und Ji, Hh und Uu, Kk und Zz haben einen gemeinschaftlichen Mittelstrahl nN, welcher somit durch die Mitten der drei Diagonalen VJ, HU, KZ des vollständigen Vierseits geht. Dieses, verbunden mit früher bewiesenen Eigenschaften gibt den Satz:

Die Mitten N der drei Diagonalen jedes vollständigen Vierseits liegen in einer bestimmten Geraden; diese Gerade ist parallel der Axe derjenigen Parabel, die dem Vierseit eingeschrieben ist. Sie ist senkrecht auf der Fusspunktsgeraden [von dem Brennpunkte B aus, dem einzigen, der eine solche ergeben kann] so wie auf der Geraden L, die durch die Durchschnittspunkte der Höhen der vier Dreiecke geht, aus denen das vollständige Vierseit besteht.

§. 21. Quadratur der Parabel.

Das Dreieck DKC, welches durch irgend zwei Tangenten und deren Berührungssehne DC gebildet wird, besteht aus einem Segment der Parabel $DGCD = S$ und einem concaven Tangentenwinkelstück $DKCGD = W$, welche sich wie folgt in Theile von constantem Verhältniss und zwar von $2:1$ zerschneiden lassen.

Fig. 110.



Zieht man die dritte Tangente HJ parallel CD [oder zieht man aus K den Strahl nach der Mitte M von CD], so sind HGJ die Mitten der Geraden KC, KM, KD und daher ist, wenn der Inhalt des Dreiecks $DKC = d$ gesetzt wird: $\triangle JKH = \frac{1}{4}d$ und

$$\triangle DGC = \tfrac{1}{2}d \text{, also}$$

$$\triangle JKH + \triangle DGC = \tfrac{3}{4}d \text{ und}$$

$$(s_1 + w_1) + (s_2 + w_2) = \tfrac{1}{4}d\,.$$

Wird nun dieselbe Zerfällung auf die zwei Paar ähnlicherweise zusammengehöriger Räume s_1 und w_1, s_2 und w_2 angewendet, so erhält man ein analoges Resultat, so dass von diesen Räumen durch vier Dreiecke [wovon zwei dem Raume S und zwei dem Raume W angehören, und wo jene zwei doppelt so gross sind, als diese] $\frac{3}{4}$ ihres Inhalts abgesondert, und nur $\frac{1}{4}$ desselben übrig bleibt und zwar unter der Form von vier Paar zusammengehörigen s und w. Da auf diese vier Paare weiter dasselbe Verfahren angewendet werden kann, so ist klar, dass nach der n^{ten} Construction die Summen der von S abgeschnittenen

Dreiecke DGC etc. $= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \cdots \frac{1}{2.4^{n-1}}\right) d,$

der von W abgeschnittenen Dreiecke

$$JKH \text{ etc.} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} \cdots \frac{1}{4^n}\right) d,$$

zusammen also die Summe der Dreiecke

$$= \tfrac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdots \frac{1}{4^{n-1}}\right) d$$

ist und demnach als noch nicht berücksichtigter Rest $= \frac{1}{4^n}\, d$ bleibt.

Dass dieser Rest, wenn n über alle Gränzen gross wird, zum Verschwinden klein werden muss, ist klar; daher muss jene doppelte

Reihe von Dreiecken am Ende das Dreieck DKC oder d ganz erschöpfen, was auch schon der blossen Anschauung sich so darstellt, und da jeweilen die gleichzeitig in Betracht kommenden Dreiecke sich verhalten, wie $2:1$, so muss folglich auch $S:W=2:1$ sein, oder es ist $S=\frac{2}{3}d$ und $W=\frac{1}{3}d$ oder

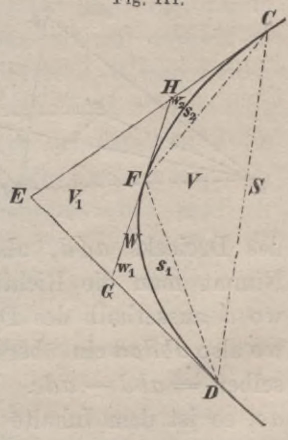
$$d:S:W=3:2:1\text{, d. h.:}$$

Das Dreieck DKC, welches irgend zwei Tangenten der Parabel mit der zugehörigen Berührungssehne (CD) einschliessen, wird dem Inhalte nach durch den Parabelbogen in einem einfachen constanten Verhältniss getheilt, nämlich so, dass das Segment über der Sehne $CGDC$ sich zu dem im Tangentenwinkel $CKDGC$ verhält wie $2:1$, oder dass ersteres $\frac{2}{3}$ und das andere $\frac{1}{3}$ des genannten Dreiecks ist.

Zieht man die Strahlen CA_∞, DA_∞, die der Tangente HJ in C_1, D_1 begegnen, so entsteht das Parallelogramm CDD_1C, welches als dem Segment $CGDC$ zugehörig bezeichnet werden soll, und welches offenbar $\frac{3}{2}$ mal so gross ist, als dieses letztere, da es mit dem Dreiecke CKD inhaltsgleich ist. Also: *Jedes Parabelsegment ist $\frac{2}{3}$ mal so gross als das zugehörige Parallelogramm.*

Aus dem vorhin aufgestellten Satze folgt unmittelbar eine eben so einfache Relation zwischen den Inhalten zweier zusammengehörigen Vielecke [n Ecke], die der Parabel ein- und umschrieben sind, und wobei die Ecken des ersten zugleich die Berührungspunkte der Seiten des andern sind.

Fig. 111.



Betrachtet man unter dieser Bedingung z. B. zwei Dreiecke DFC und GEH, deren Inhalte [oder Flächen] durch V, V_1 bezeichnet werden mögen, so dass das Segment S in die drei Theile V, s_1, s_2 und das Tangentenwinkelsegment W in die drei Theile V_1, w_1, w_2 zerlegt ist, dann hat man:

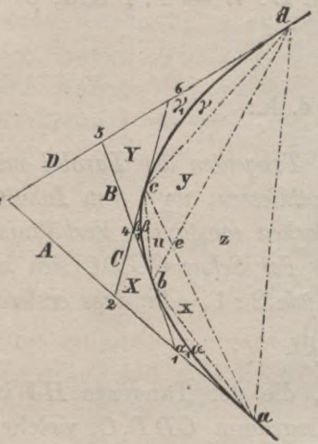
$$W=\tfrac{1}{2}S,\ w_1=\tfrac{1}{2}s_1,\ w_2=\tfrac{1}{2}s_2 \text{ also}$$
$$W-w_1-w_2=\tfrac{1}{2}(S-s_1-s_2) \text{ und desshalb}$$
$$V_1=\tfrac{1}{2}V.$$

Man hat also den Satz: *Der Inhalt des umschriebenen Dreiecks ist halb so gross, als der des zugehörigen eingeschriebenen Dreiecks.*

Betrachtet man ferner irgend vier Punkte a, b, c und d, die in der

Parabel liegen, nebst den vier zugehörigen Tangenten ABCD, so bestimmen jene, so wie diese, drei verschiedene einfache Vierecke, welche einander paarweise entsprechen, und von denen zu zeigen ist, dass ihre Inhalte in dem Verhältniss von 2 : 1 *stehen.*

Fig. 112.

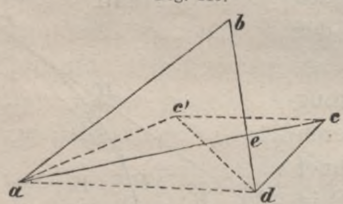


Von den drei eingeschriebenen Vierecken ist das eine *abcda* convex, und die zwei übrigen *abdca* und *adbca* sind überschlagene; von den umgeschriebenen ist eines, *ADBC*, convex, das zweite, *ABCD*, concav [d. h. mit einspringendem Winkel] und das dritte *ABDC* überschlagen. Es entspricht aber nicht das convexe dort dem convexen hier, sondern sie entsprechen sich, wie schon aus der Bezeichnung hervorgeht, in folgender Ordnung:

I. *abcd* [convex] entspricht *ABCD* [concav].
II. *abdc* [überschlagen] entspricht *ABDC* [überschlagen].
III. *adbc* [überschlagen] entspricht *ADBC* [convex].

Der dritte Fall nöthigt also von selbst, wofern nämlich ein allgemein gültiges Gesetz aufgestellt werden soll, über den Inhalt des überschlagenen Vierecks sich zu verständigen. Sei $abdc'$ ein convexes Viereck, so ist dessen Inhalt gleich der Differenz der Inhalte der Dreiecke abd und $ac'd$. Wenn also c' auf einer Parallelen zu ad sich bewegt, während die Punkte abd fest bleiben, so ändert sich der Inhalt des Dreiecks $ac'd$, also auch der Inhalt des Vierecks $abdc'$ nicht. Nimmt man die Richtigkeit dieser Bemerkung auch für den Fall an, wo c' ausserhalb des Dreiecks abd liegt [z. B. nach c gekommen ist], wo also $abdca$ ein überschlagenes Viereck heisst, so ist der Inhalt desselben $= abd - adc$. Ist schliesslich e der Durchschnitt von bd und ac, so ist dem Inhalte nach:

Fig. 113.



$$\triangle\, abd = abe + aed$$

$$\triangle\, acd = aed + edc\,,\ \text{also}$$

$$\text{Viereck } abedcea = abe - edc\,,\ \text{d. h.}$$

Der Inhalt eines überschlagenen Vierecks ist gleich der Differenz der Inhalte der beiden Dreiecke, aus denen es besteht).*

Jetzt hat man zunächst für den Fall I.:

Das convexe Viereck $abcd$ = Segment $abcda - \alpha - \beta - \gamma$
ferner (1463) oder $ABCD$ = Arbelos $a3dcba - \alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1$;
da jede obere Grösse nach dem Gleichheitszeichen doppelt so gross ist, als die entsprechende untere, so muss sein:

$$\text{Viereck } abcd = 2 \,.\, \text{Viereck } ABCD\,.$$

Im Falle II. ist $x + u = 2X$, $y + u = 2Y$, also $(x - y) = 2(X - Y)$ oder $(y - x) = 2(Y - x)$, also ist auch

$$\text{Viereck } abcd = 2\,.\, \text{Viereck } ABDC.$$

Für den Fall III. bemerke man, dass das überschlagene Viereck $adbca$ aus den beiden Dreiecken ade und bce besteht; ihm entspricht das convexe Viereck $ADBC$ oder 3542. Man hat nun:

$$\triangle\, acd = 2\,.\triangle\, 236$$

$$\triangle\, bcd = 2\,.\triangle\, 456,\ \text{also}$$

$$2(\triangle\, 236 - \triangle\, 456 = \triangle\, acd - \triangle\, bcd = \triangle\, aed - \triangle\, bec,\ \text{d. h.}$$

$$\text{Viereck } adbc = 2\,.\, \text{Viereck } ADBC.$$

Damit ist der verlangte Nachweis für jedes der drei Vierecke geleistet.

Ebenso kann gezeigt werden, dass, wenn man in der Parabel fünf beliebige Punkte annimmt, und dieselben nach irgend einer Ordnung der Reihe nach durch Gerade verbindet, das dadurch entstehende Fünfeck, welche Form es immerhin haben mag, allemal doppelt so gross ist, als das zugehörige umgeschriebene Fünfeck, dessen Seiten die Tangenten in den Ecken des angenommenen sind, und welche Seiten in ganz entsprechender Ordnung in ihren Schnittpunkten die Ecken erzeugen, so dass also dieses Gesetz für alle zwölf Paare von Fünfecken, welche durch jene fünf Punkte bestimmt sind, zugleich stattfindet. Dasselbe ist für sechs, sieben etc., n Punkte der Fall, so dass man allgemein behaupten kann: *Der Inhalt jedes beliebigen der Parabel eingeschriebenen n Ecks ist doppelt so gross, als der Inhalt des zugehörigen umschriebenen n Ecks.* Hierdurch ist also auch zu ent-

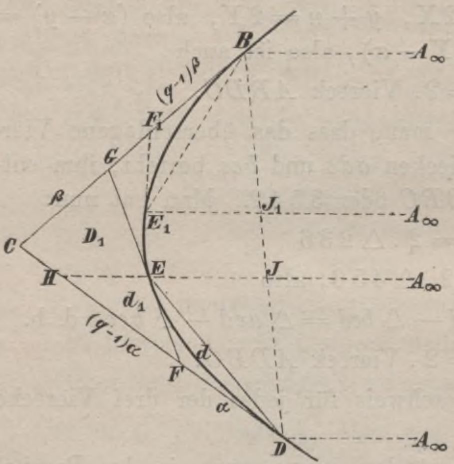
*) Es bleibt allerdings hierbei das Vorzeichen des Gesammtinhaltes unbestimmt. So wie Strecken auf einer Geraden erst dann vollkommen gegeben sind, wenn ihre positive Richtung bestimmt ist, so bedürfen Flächenstücke in einer Ebene zur Fortsetzung ihres Vorzeichens noch einer Annahme darüber, in welcher Richtung der von einem gewählten Anfangspunkt ausgehende Radius Vector die Fläche in positivem Sinne überstreicht.

Festsetzung

scheiden, was bei gewissen, auch wohl sehr verwickelten Fünfecken oder n Ecken unter deren Inhalt zu verstehen sei. —

Es lässt sich nun ferner zeigen, dass der Inhalt der Parabelsegmente nach einem einfachen, bestimmten Gesetz von der Höhe, oder dem Abstande der beiden Durchmesser von einander abhängt, zwischen denen das Segment liegt.

Fig. 114.



Es seien CB, CD irgend zwei feste, und GF eine beliebige dritte Tangente. Durch den Berührungspunkt E gehe der Strahl HEA_∞ parallel der Axe, so ist $HF = FD$. Es kann immer $DF : DC = 1 : q$ gesetzt werden, wo q irgend welche Zahl bedeutet. Dann ist auch $CG : CB = 1 : q$ und ebenso $FE : FG = 1 : q$. Hienach folgt, wenn $\triangle DCB = D$, $\triangle FCG = D_1$, $\triangle DEF = d$ und $\triangle FEH = d_1$ gesetzt und bemerkt wird, dass D und D_1 bei C, ferner D_1 und d_1 bei F einen gemeinschaftlichen Winkel haben.

$$D_1 = \frac{1 \cdot (q-1)}{q \cdot q} D \text{ [nämlich } = \frac{\beta \cdot (q-1)\,\alpha}{q\beta \cdot q\alpha} \cdot D]$$

$$d_1 = \frac{1 \cdot 1}{(q-1)\,q} \cdot D_1$$

$$d = d_1 \text{, folglich}$$

$$d = \frac{1^3}{q^3} D.$$

Wird noch bemerkt, dass $DF : DC = DJ : DB = 1 : q$, so folgt aus der letzten Gleichung zunächst der Satz: *Die Inhalte (d, D) irgend zweier Tangentensehnendreiecke (DCB, DFE), welche eine gemeinschaftliche Tangente DFC haben* [in der ihre Grundlinien liegen], *verhalten sich wie die Cuben der Abstände $(DJ : DB)$ der Durchmesser DA und EA, DA und CA, zwischen denen die Dreiecke liegen.*

Läge das kleinere Dreieck DFE an der festen Tangente bei B, wie BF_1E_1, und hätten die Durchmesser E_1A, BA gleiche Höhe wie diejenigen, zwischen denen DFE liegt, also $BJ_1 = DJ$, so würde auch $BF_1 : BC = BJ_1 : BD = 1 : q$ sein, und folglich

$\triangle BF_1E_1 = \frac{1^3}{q^3} D$ und somit $BF_1E_1 = DFE$ sein. Es ist aber auch klar, dass, welche Lage diese Dreiecke haben mögen, sie immer auf ein und dasselbe Dreieck DCB, welches mit jedem von jenen eine Tangente gemein hat, bezogen werden können.

Daher folgt weiter: *Bei einer und derselben Parabel haben Tangentensehnendreiecke (DFE, BF_1E_1), welche zwischen Durchmessern von gleicher Höhe* [oder gleichem Abstande von einander] *liegen, gleichen Flächeninhalt,* und auch umgekehrt. Ferner: *Je zwei Tangentensehnendreiecke bei der nämlichen Parabel* [resp. ihre Inhalte] *verhalten sich wie die Cuben der Höhen der zwei Paar Durchmesser, zwischen denen sie liegen.* Diese Sätze lassen sich nach Früherem unmittelbar auf die Segmente der Parabel, und zwar sowohl auf die über den Sehnen DE und DB als die in den Tangentenwinkeln (die Arbelen) übertragen; nämlich jede Art für sich betrachtet, verhält sich dem Inhalte nach, wie die Cuben ihrer Höhen in Bezug auf die Durchmesser, welche durch die Endpunkte ihrer Sehnen gehen.

Betrachtet man mit dem Dreieck DFE zugleich das Dreieck BGE, welche zusammen die Höhe des Dreiecks DCB haben, so hat man für jenes, wenn dessen Inhalt durch δ bezeichnet und bemerkt wird, dass $BG : BC = q - 1 : q$, $\delta = \frac{(q-1)^3}{q^3} D$; oder für beide hat man: $\sqrt[3]{d} = \frac{1}{q} \sqrt[3]{D}$, $\sqrt[3]{\delta} = \frac{q-1}{q} \sqrt[3]{D}$ und folglich

$$d^{\frac{1}{3}} + \delta^{\frac{1}{3}} = D^{\frac{1}{3}}$$

d. h.: *Ist die Höhe oder der Abstand der Durchmesser, zwischen welchen irgend ein Tangentensehnendreieck liegt, so gross als die Summe der Höhen, welche irgend zwei andern Dreiecken, in gleichem Sinne genommen, zukommen: so ist die Cubikwurzel aus dem Inhalte jenes Dreiecks der Summe der Cubikwurzeln aus den Inhalten der zwei andern gleich.* Dieser Satz ist nämlich nach dem allgemeinen Ausdrucke, wie er hier gegeben ist, richtig, nicht blos für den Fall, wo die drei Sehnen oder Grundlinien (DB, DE, EB) der in Rede stehenden Dreiecke ein der Parabel eingeschriebenes Dreieck bilden, von welchem Falle die Betrachtung ausging.

Bezeichnet man die Inhalte der Segmente, welche über den Grundlinien jener drei Dreiecke liegen, durch S, s und σ, so ist gleicherweise:

$$s^{\frac{1}{3}} + \sigma^{\frac{1}{3}} = S^{\frac{1}{3}}$$

d. h.: *Ist die Höhe eines beliebigen Parabelsegments in Bezug auf die Durchmesser so gross als die Summe der Höhen irgend zweier anderer*

Segmente derselben Parabel, so ist die Cubikwurzel aus dem Inhalte des ersten Segments gleich der Summe der Cubikwurzeln aus den Inhalten der zwei letztern Segmente.

Durch Wiederholung lässt sich dieser Satz, so wie auch der vorige, stufenweise auf beliebig viele [vier, fünf, sechs, . . . n] Segmente ausdehnen, wodurch man zu dem folgenden, scheinbar allgemeinen Resultate gelangt: Ist die Höhe eines Parabelsegments in Beziehung auf die Durchmesser, zwischen denen es liegt, so gross als die Summe der Höhen von irgend n andern Segmenten der nämlichen Parabel, so ist die Cubikwurzel aus jenem der Summe der Cubikwurzeln aus den letztern gleich. Oder in einer Formel, in welcher die Bedeutung der einzelnen Zeichen leicht zu erkennen ist.

$$S^{\frac{1}{3}} = s_1^{\frac{1}{3}} + s_2^{\frac{1}{3}} + s_3^{\frac{1}{3}} \dots s_n^{\frac{1}{3}}.$$

Insbesondere folgt daraus: *Ist irgend ein convexes* $(n+1)$ *Eck einer Parabel eingeschrieben, so ist die Cubikwurzel des Segments über der grössten Seite der Summe der Cubikwurzeln der Segmente über den übrigen* n *Seiten gleich.* Haben die letztern n Segmente unter sich gleiche Höhen, so haben sie auch gleiche Inhalte, so dass $S^{\frac{1}{3}} = n \cdot s_1^{\frac{1}{3}}$ oder $S = n^3 s_1$. Wird ferner der Inhalt des $(n+1)$ Ecks durch V bezeichnet, so ist $V = S - n s_1$. Beide Gleichungen verbunden [durch Elimination von s_1] ergeben:

$$V = \frac{n^2-1}{n^2} S.$$

Diese Formel zeigt, wie der Inhalt V eines der Parabel eingeschriebenen $(n+1)$ Ecks, dessen Seiten alle, ausgenommen die Grundlinie [oder die grösste], gleiche Höhe haben, aus dem Inhalte des Segments über der Grundlinie zu finden ist, oder auch umgekehrt, dieser aus jenem, nämlich

$$S = \frac{n^2}{n^2-1} V.$$

Aus der ersten Gleichung folgt ferner:

$$V = n(n^2-1)s = (n-1)n(n+1)s,$$

$$Ss^2 = (S-V)^3 \text{ oder } s = (S-V)\sqrt{1-\frac{V}{S}}, \text{ endlich}$$

$$V = S - s^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{3}} = (S^{\frac{2}{3}} - s^{\frac{2}{3}}) S^{\frac{1}{3}}.$$

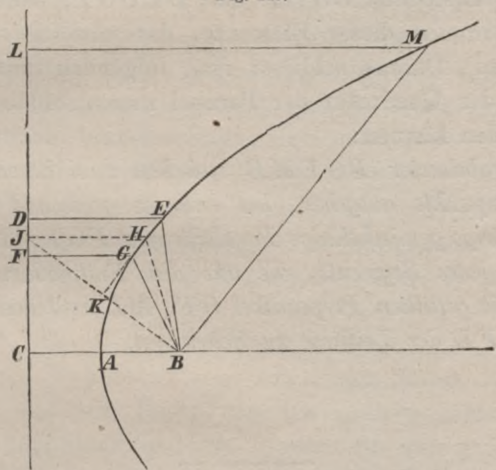
Ist insbesondere $n = 2$, so gibt die Formel: $V = \frac{n^2-1}{n^2} S$ ein bekanntes Resultat, welches nämlich das Verhältniss eines Segments zu dem grössten Dreieck über seiner Sehne anzeigt, es ist

$S : V = 4 : 3$*). Aber auch für jeden andern Werth von n hat unter den gegenwärtigen Bedingungen, dass nämlich die n Seiten einerlei Höhe haben, das Vieleck für eine gegebene Höhe der Grundlinie den grössten Inhalt.

Ein anderes Verfahren, die Parabel zu quadriren, beginnt damit, dass der Inhalt irgend eines Sectors aus dem Brennpunkte B bestimmt wird, und zwar durch Hülfe des ihm entsprechenden gemischtlinigen Vierecks, welches zwischen dem Bogen, der Leitlinie L und den beiden aus den Endpunkten des Bogens auf die Leitlinie gefällten Perpendikel liegt. Der Sector ist stets die Hälfte von diesem Viereck. Daraus wird sofort auch der Inhalt jedes beliebigen Segments gefunden, sobald seine Lage und seine Höhe über der Axe gegeben sind. Aber auch umgekehrt kann aus dem oben gefundenen Ausdrucke für den Inhalt des Segments der Inhalt des Sectors, oder dessen Verhältniss zu dem genannten Viereck bestimmt werden.

Es sei B der Brennpunkt, CD die Leitlinie und A der Scheitel einer Parabel AGE. Aus irgend einem Punkte H der Parabel ziehe

Fig. 115.



man die Geraden HB und HJ, die erste nach dem Brennpunkte und die andere senkrecht auf die Leitlinie, so ist $HB = HJ$. Ferner ziehe man die Gerade BJ und die Tangente H, nämlich HK, so

*) In Fig. 110 lassen sich über der Grundlinie CD unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Spitze in dem begränzten Parabelbogen CGD liegt. Unter allen diesen hat das Dreieck CGD den grössten Flächeninhalt und je zwei andere ergeben unter sich gleichen Inhalt, wenn die Verbindungsgerade ihrer Spitzen der Tangente im Punkte G parallel ist.

steht diese auf jener senkrecht und hälftet sie in K, so dass $BK = JK$. Nimmt man nun in der Tangente HK auf beiden Seiten von H zwei Punkte G und E, welche gleichweit von H entfernt sind, und zieht aus denselben die Geraden GB und EB, GF und ED, wovon die zwei letztern senkrecht auf CD stehen, also parallel HJ laufen, so ist, wie man sieht, das Paralleltrapez $DEGF$ doppelt so gross als das Dreieck BGE, denn es ist

$$DEGF = JK \cdot GE \text{ und } \triangle BGE = \frac{BK \cdot GE}{2},$$

wo, wie vorhin bemerkt, $JK = BK$. Denkt man sich nun die beiden Punkte G und E immer näher und schliesslich unendlich nahe an H, so kann man sie als in der Parabel liegend ansehen, und es folgt sodann, dass ein Sector $BGHE$, dessen Bogen GHE unendlich klein ist, halb so gross sei, als das zugehörige Paralleltrapez $DEHGF$, welches den nämlichen Bogen EHG zur Seite hat.

Nun lassen sich aber jeder beliebige Sector BGM und das ihm entsprechende gemischtlinige Paralleltrapez $LMEGF$ in solche unendlich kleine Elemente zerlegen, welche paarweise das Verhältniss 1 : 2 haben, wie die Elemente $BGHE$ und $DEHGF$, daher müssen auch sie, als die Summen dieser Elemente, das nämliche Verhältniss zu einander haben. Daraus schliesst man folgenden Satz, von welchem aus alle mit der Quadratur der Parabel zusammenhängenden Fragen behandelt werden können:

Jeder Parabelsector $BGEMB$ zwischen zwei Strahlen BG, BM, die vom Brennpunkte ausgehen, hat halb so grossen Flächeninhalt, als das ihm zugehörige gemischtlinige Paralleltrapez $FGEMLF$, welches den Bogen GEM jenes Segments, die aus den Endpunkten GM derselben auf die Leitlinie gefällten Perpendikel GF, ML und das zwischen diesen liegende Stück FL der Leitlinie zu Seiten hat.

Sechstes Kapitel.

Brennpunktseigenschaften der Kegelschnitte.

§. 22. Confocale Kegelschnitte. Construction der Kegelschnitte aus gegebenen Elementen.

Die vorangehenden Kapitel über Ellipse, Hyperbel und Parabel zeigen genugsam, wie eine Reihe von Eigenschaften, welche für eine einzelne dieser Curven bewiesen wurden, ihre Gültigkeit für alle Kegelschnitte behalten. Wenn auch Ellipse und Hyperbel sich gegenseitig bedeutend näher stehen, als jede von ihnen der Parabel, so ist doch in den meisten Fällen keine Schwierigkeit vorhanden, Sätze, welche von den beiden ersten gelten, auf die letztere zu übertragen, indem man einfach berücksichtigt, dass der zweite Brennpunkt der Parabel der unendlich entfernte Punkt ihrer Axe ist. Einige Beispiele, die sich in den frühern Entwicklungen von selbst dargeboten hatten, mögen hier in Kürze wiederholt werden, damit an sie weitere Eigenschaften geknüpft werden können, die allen Kegelschnitten gemeinschaftlich sind.

1. Der Ort aller derjenigen Punkte, welche gleichweit abstehen von einem festen Punkte B und von einem festen Kreise mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$, ist ein Kegelschnitt, welcher A und B zu Brennpunkten und den Radius $2a$ zur grossen Axe hat. Liegt B ausserhalb des Kreises, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, liegt B innerhalb des Kreises, so erhält man eine Ellipse. Um die Parabel zu erzeugen, lässt man den Kreis in eine Gerade übergehen, welche dann zur Leitlinie der Parabel wird.

2. Die Gegenpunkte des Brennpunktes B eines Kegelschnittes in Bezug auf sämmtliche Tangenten desselben, liegen in einem Kreise, welcher den andern Brennpunkt A zum Mittelpunkt, und die grosse Axe des Kegelschnitts zum Radius hat. Für die Parabel rückt der Mittelpunkt dieses Kreises in's Unendliche und der Kreis selbst wird zu einer Geraden [der Leitlinie].

3. Fällt man vom Brennpunkte B eines Kegelschnitts Perpendikel auf sämmtliche Tangenten derselben, so liegen deren Fusspunkte in einem Kreise, der über der grossen Axe des Kegelschnitts als Durchmesser beschrieben ist. Im Falle der Parabel geht dieser Kreis in die Scheiteltangente über.

4. Die Tangente in irgend einem Punkte des Kegelschnitts bildet mit den zugehörigen Brennstrahlen gleiche Winkel. Bei der Ellipse geht die Tangente ausserhalb, bei der Hyperbel zwischen den beiden Brennpunkten durch; bei der Parabel ist der eine Brennstrahl parallel der Axe.

5. Bewegt sich ein Punkt C derart, dass sein Abstand p von einem festen Punkte B zu seinem Abstande q von einer festen Geraden L in einem bestimmten constanten Verhältniss $\frac{p}{q} = \lambda$ steht, so ist sein Ort ein Kegelschnitt mit B als Brennpunkt und L als zugehöriger Leitlinie, und zwar für $\lambda < 1$ eine Ellipse, für $\lambda = 1$ eine Parabel und für $\lambda > 1$ eine Hyperbel.

Auf diese Sätze gestützt wollen wir jetzt eine Reihe von Aufgaben lösen, welche die Bestimmung der Kegelschnitte aus gegebenen Elementen betreffen.

Um den Kegelschnitt zu construiren, wurden früher immer die Brennpunkte und die grosse Axe als bekannt vorausgesetzt. *Es soll nun die grosse Axe eines Kegelschnitts bestimmt werden, von welchem die Brennpunkte A und B und eine Tangente G gegeben sind.* Man suche den Gegenpunkt A' von A in Bezug auf G, so ist BA' die grosse Axe des Kegelschnitts. Derselbe ist eine Hyperbel, wenn G die Gerade AB auf der Strecke AB und eine Ellipse, wenn G die Gerade AB ausserhalb der Strecke AB trifft. Geht G durch A oder B selbst, so reduzirt sich der Kegelschnitt auf die doppelt gelegte Gerade AB, welche ebensowohl als Ellipse wie als Hyperbel anzusehen ist, je nachdem man die Strecke AB selbst oder ihre Ergänzung in's Unendliche bevorzugt. Man könnte auch so verfahren: durch Halbirung der Strecke AB findet man den Mittelpunkt M. Fällt man von A aus ein Perpendikel auf G, dessen Fusspunkt F sein möge, so schneidet der Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius MF auf der Geraden AB die Endpunkte der grossen Axe aus.

Liegt der Brennpunkt A in unendlicher Entfernung, so kann er nicht verzeichnet werden, aber er ist vollständig bestimmt, sobald man die Richtung, in welcher er liegt, angibt. Zieht man dann durch B eine Gerade parallel dieser Richtung, so ist dieselbe die Axe aller Parabeln, welche B und A_∞ zu Brennpunkten haben. Nach dem

Vorhergehenden muss also die Parabel bestimmt sein, sobald man von ihr den Brennpunkt B, die Axe BA_∞ und eine Tangente G kennt. In der That findet man einen Punkt der Leitlinie, indem man den Gegenpunkt B' von B in Bezug auf G construirt. Das Perpendikel von B' auf BA_∞ ist dann die Leitlinie selbst, welche mit dem Brennpunkt zusammengenommen, die Parabel vollständig bestimmt. Oder, was unter Umständen zweckmässiger sein kann: Der Fusspunkt F des von B auf G gefällten Perpendikels ist ein Punkt der Scheiteltangente, welche dadurch gegeben ist, und mit dem Brennpunkte die Parabel bestimmt. [Auch hier ist der Grenzfall leicht zu erledigen, wo G entweder durch B oder A_∞ geht.]

Wenn von einem Kegelschnitte ein Punkt C und die Brennpunkte A und B gegeben sind, so ist derselbe nicht eindeutig bestimmt, sondern kann entweder eine Ellipse mit der grossen Axe $AC + CB$, oder eine Hyperbel mit der grossen Axe $AC - CB$ [abgesehen vom Vorzeichen] *sein.* Dass in der That zwei Kegelschnitte durch A, B, C bestimmt sind, wird durch die folgende Betrachtung klar: Bei jedem Kegelschnitte bildet die Tangente in einem beliebigen Punkte mit den zugehörigen Leitstrahlen nach den Brennpunkten gleiche Winkel. Zieht man also die Geraden AC und CB und halbirt den Winkel, so ist die Halbirungsgerade die Tangente im Punkte C des Kegelschnittes; durch diese Tangente und die Brennpunkte ist nun nach dem Vorigen der Kegelschnitt eindeutig bestimmt. Aber die Geraden AC und CB bilden miteinander vier Winkel, welche zwei zu einander senkrechte Halbirungsgerade zulassen, G und G', von denen jede als Tangente einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten A und B erzeugt, und zwar die eine eine Ellipse, die andere eine Hyperbel. Ellipse und Hyperbel schneiden einander ausser in C noch in drei andern Punkten, welche zu C in Bezug auf die gemeinsamen Axen der beiden Kegelschnitte symmetrisch sind*). Da in jedem dieser vier Punkte die Hyperbeltangente und die Ellipsentangente senkrecht zu einander stehen, so sagt man, dass auch die Ellipse und die Hyperbel in ihren vier gemeinschaftlichen Punkten sich rechtwinklig schneiden.

Liegt der Brennpunkt A in unendlicher Entfernung, so gehen sowohl die Ellipse als die Hyperbel in Parabeln über. Diess be-

*) In dieser Zweideutigkeit liegt auch der Grund, warum unsere mechanische Construction der Hyperbel [§. 7] zugleich einen Ellipsenbogen ergibt. Wenn man [Fig. 36] auf AD mit C nach D hinrückt, so erhält man zunächst ein Stück der Hyperbel, kommt man nach D hinein und rückt darüber hinaus, so biegt man unter rechtem Winkel ab in ein Stück der Ellipse.

stätigt sich auch wie folgt: Durch den Brennpunkt B und die Axe BA_∞ ist die Parabel noch nicht bestimmt. Kennt man nun noch einen Punkt C derselben, so kann man die Tangente in diesem Punkte finden, indem man den Winkel der Strahlen CB und CA_∞ halbirt. A_∞ kann aber sowohl auf der einen als auf der andern Seite von B als im Unendlichen liegend angenommen werden, demzufolge lassen die Strahlen CB und CA_∞ zwei winkelhalbirende Gerade zu, die senkrecht aufeinanderstehen. Also: *Es gibt zwei Parabeln, die einen Punkt B zum Brennpunkt, eine Gerade BA_∞ zur Axe haben und welche zugleich durch einen Punkt C gehen. Diese Parabeln schneiden sich im Punkte C* und dem Gegenpunkte von *C in Bezug auf die gemeinschaftliche Axe rechtwinklig*, da jeweilen ihre Tangenten in den betreffenden Schnittpunkten sich unter rechtem Winkel begegnen.

Durch diese Sätze gewinnt man eine Uebersicht über die unendlich vielen Kegelschnitte, welche zwei Punkte A und B zu gemeinschaftlichen Brennpunkten haben; solche Kegelschnitte heissen *homofocal* oder *confocal*. Ihre Gesammtheit wird als eine *Schaar* bezeichnet. Wir setzen zunächst voraus, dass keiner der Brennpunkte im Unendlichen liege, dann ist die Mitte M von AB gemeinsamer Mittelpunkt der Kegelschnitte; dieselben haben überdiess AB und die in M senkrecht auf AB errichtete Gerade zu gemeinsamen Axen [nur der Lage, nicht der Grösse nach]. *Jede beliebige Gerade G in der Ebene ist Tangente eines, aber auch nur eines der Kegelschnitte der Schaar;* derselbe ist Hyperbel oder Ellipse, je nachdem G die Gerade AB auf der Strecke AB oder ausserhalb derselben schneidet. *Durch irgend einen Punkt C in der Ebene gehen zwei Kegelschnitte der Schaar,* welche sich in vier symmetrisch zu den Axen gelegenen Punkten schneiden, von denen einer C ist. Wenn C auf einer der Axen liegt, so löst sich der eine der beiden Kegelschnitte in die doppelt gelegte durch ihn gehende Axe auf und es ist dann leicht zu entscheiden, ob der andere Hyperbel oder Ellipse sei. Einer der Kegelschnitte ist Hyperbel, der andere Ellipse; in den vier Schnittpunkten stehen sie senkrecht zueinander. Die Schaar confocaler Kegelschnitte zerfällt demnach in eine Schaar Ellipsen und eine Schaar Hyperbeln. Jede Curve der einen Art schneidet keine Curve derselben Art, aber jede Curve der andern Art, und zwar in vier Punkten rechtwinklig.

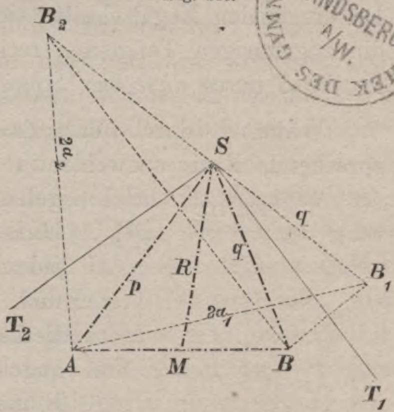
Fällt der eine Brennpunkt in unendliche Entfernung, so werden Ellipsen und Hyperbeln zu Parabeln von gleichem Brennpunkt und gleicher Axe. Man erhält also zwei Schaaren confocaler Parabeln, die sich dadurch unterscheiden, dass die Scheitel der einen Schaar auf der einen Seite des Brennpunkts, die Scheitel der andern auf der andern Seite derselben liegen. Eine Parabel der einen Schaar schneidet keine Parabel derselben Schaar, aber jede der andern Schaar in zwei Punkten, die symmetrisch zur Axe liegen, rechtwinklig.

Ein Satz, welcher in §. 11. für die Ellipse bewiesen und durch Fig. 56 erläutert wurde [von dem wir übrigens auch die entsprechenden bei der Hyperbel und der Parabel kennen lernten], kann in folgender Weise ausgedehnt werden: *Der Ort aller Punkte, von denen aus man an zwei verschiedene confocale Kegelschnitte zwei zu einander senkrechte Tangenten ziehen kann, ist ein mit den Kegelschnitten conzentrischer Kreis, dessen Radius sich aus der Gleichung:*

$$R^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 - c^2$$

ergibt, wo a_1 *und* a_2 *die halben grossen Axen,* c *die gemeinschaftliche Excentrizität der beiden Kegelschnitte bedeutet.*

Fig. 116.



Betrachten wir zunächst zwei *confocale Ellipsen* E_1 und E_2 mit den gemeinsamen Brennpunkten A und B und der gemeinschaftlichen Brenndistanz $AB = 2c$; sei ferner für E_1 die grosse Axe gleich $2a_1$, für E_2 gleich $2a_2$, so bestimmen sich die kleinen Axen aus den Gleichungen

$$a_1{}^2 - b_1{}^2 = c^2, \; a_2{}^2 - b_2{}^2 = c^2.$$

Wenn nun T_1 eine Tangente an E_1 und die zu ihr senkrechte Gerade T_2 eine Tangente an E_2 ist, so construire man für B die Gegenpunkte B_1 und B_2 in Bezug auf T_1 und T_2, welche mit dem Durchschnitte S derselben in einer Geraden liegen werden. In dem Dreiecke AB_1B_2 geht der Strahl $AS = p$ von der Ecke A aus nach der Mitte der Gegenseite, setzt man also $BS = B_1S = B_2S = q$, so ist nach einem bekannten elementaren Satze: $(2a_1)^2 + (2a_2)^2 = 2p^2 + 2q^2$, d. h.: der Punkt S ergibt nach zwei festen Punkten hin Abstände, deren Quadrate eine constante Summe behalten, also ist sein Ort, wie in §. 7. bewiesen wurde, ein Kreis. Der Radius R desselben bestimmt sich aus der Gleichung: $2a_1{}^2 + 2a_2{}^2 = p^2 + q^2 = 2R^2 + 2c^2$; es ist demnach

$$R^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 - c^2 = a_1{}^2 + b_2{}^2 = a_2{}^2 + b_1{}^2$$

oder auch: *der Radius dieses Kreises ist gleich der Sehne, welche einen Scheitel der grossen Axe der einen Ellipse mit einem Scheitel der kleinen Axe der andern verbindet.*

Für zwei *confocale Hyperbeln* H_1 und H_2 ist immer noch [was in durchaus gleicher Weise, wie vorhin, bewiesen werden kann]: $R^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} - c^2$, da aber jetzt $c^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} = a_2^{\,2} + b_2^{\,2}$, so ergibt sich $R^2 = a_1^{\,2} - b_2^{\,2} = a_2^{\,2} - b_1^{\,2}$, so dass also unter Umständen keine reellen Punkte S mehr existiren können. Den Grenzfall, wo der Kreis sich auf seinen Mittelpunkt reduzirt, bildet $a_1^{\,2} = b_2^{\,2}$, oder, was damit gleichbedeutend ist, $a_2^{\,2} = b_1^{\,2}$, der dann eintritt, wenn die Asymptotenwinkel der beiden Hyperbeln sich zu 180^0 ergänzen.

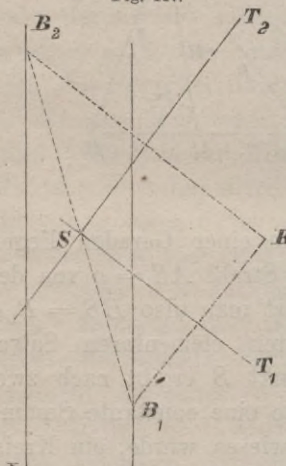
Wählt man eine *Ellipse* E_1 [für welche $a_1^{\,2} = b_1^{\,2} + c^2$] und eine *confocale Hyperbel* H_2 [für welche $c^2 = a_2^{\,2} + b_2^{\,2}$], so wird

$$R^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} - c^2 = a_1^{\,2} - b_2^{\,2} = a_2^{\,2} + b_1^{\,2} .$$

Da die beiden Kegelschnitte sich in vier Punkten schneiden, in denen die zugehörigen Tangenten rechtwinklig stehen, *so geht der Kreis der Punkte S durch diese vier Schnittpunkte.*

Während durch das Paar confocaler Kegelschnitte der entsprechende Kreis unzweideutig bestimmt ist, so gibt es für einen vorgelegten Kreis unendlich viele Paare zugehöriger Kegelschnitte. Vorerst gehen durch jeden Punkt S des Kreises eine Ellipse und eine Hyperbel, welche die nöthige Bedingung erfüllen und man kann leicht angeben, unter welchen Bedingungen noch Ellipsenpaare oder Hyperbelpaare auftreten können.

Fig. 117.



Bei zwei *confocalen Parabeln* [die also nicht nur den im Endlichen gelegenen Brennpunkt B, sondern auch den unendlich entfernten A, mit andern Worten die Axenrichtung gemein haben] mögen zunächst die parallelen Leitlinien auf der nämlichen Seite von B liegen. Wenn T_1 Tangente an die Parabel mit der Leitlinie L_1, T_2 Tangente an die Parabel mit der Leitlinie L_2 ist, wenn ferner diese Tangenten sich in S rechtwinklig begegnen, und B_1 und B_2 die Gegenpunkte von B nach denselben sind, so hat man $BS = B_1S = B_2S$. Da der Winkel B_1BB_2 ein rechter ist, so liegen wieder B_1, S und B_2 in einer Geraden und S ist die Mitte der Strecke

$B_1 B_2$, d. h. S ist gleichweit von L_1 und L_2 entfernt*). Die nämliche Betrachtung gilt, wenn die Leitlinien auf verschiedenen Seiten von B liegen, in welchem Falle die beiden Schnittpunkte der Parabeln dem Ort der Punkte S angehören. Wir haben also den Satz: *Der Ort aller Punkte, von denen aus an zwei verschiedene confocale Parabeln zwei zu einander senkrechte Tangenten gelegt werden können, ist eine Gerade, die in gleichem Abstande zwischen den beiden Leitlinien verläuft.* [Im zweiten Falle, wo die Parabeln sich schneiden, sind dann allerdings auf der Strecke zwischen den gemeinschaftlichen Punkten keine Tangenten mehr an die Parabeln möglich.]

Aus dem eben Entwickelten ergibt sich auch der Satz: *Gehen an zwei confocale Kegelschnitte K_1 und K_2 von einem Punkte S aus Tangentenpaare T_1 und T_1', T_2 und T_2' derart, dass T_1 und T_2 einen rechten Winkel einschliessen, so tritt das nämliche auch für T_1' und T_2' ein.* Da zudem unter diesen Umständen $\sphericalangle\, T_1 T_1'$ entweder $= T_2 T_2'$ oder $= 180^0 - T_2 T_2'$, so folgt im Weitern: *Der Ort aller Punkte, von denen aus zwei confocale Kegelschnitte unter gleichen Winkeln oder solchen, die sich zu 180^0 ergänzen, gesehen werden, ist ein mit ihnen conzentrischer Kreis, der für confocale Parabeln in eine Gerade übergeht.* —

Wir knüpfen, um weitere Sätze über confocale Kegelschnitte abzuleiten, an die Schlussbetrachtung des §. 11. [Fig. 66] einige Folgerungen. Dort wurde gezeigt, dass wenn in einem Punkte C der Ellipse die Tangente DCG und die Normale LFC resp. in D und G, F und L zum Schnitte mit den Axen gebracht werden, die Punkte $ALBCD$ in einem Kreise liegen, dessen Mittelpunkt sich auf der Nebenaxe der Ellipse befindet, während FCG in einem Kreise enthalten sind, für welchen FG ein Durchmesser ist, dessen Endpunkte zu A und B harmonisch liegen. Man leitet hieraus mit Leichtigkeit ab, dass die beiden Kreise sich rechtwinklig schneiden, ferner, dass der durch diese Bemerkung vervollständigte Satz unter der nöthigen Modification ebensowohl für die Hyperbel [durch C mit den Brennpunkten A und B] als für die Ellipse gilt, da man, um von einem der beiden Kegelschnitte zum andern überzugehen, blos Tangente und Normale miteinander zu vertauschen hat.

---

*) Bei diesem Anlasse stellt sich $B_1 B_2$ als Tangente an eine Hyperbel mit den Scheiteltangenten L_1, L_2 und dem Brennpunkte B dar, wie aus einem Satze hervorgeht, den wir in §. 15. benutzten, um eine Hyperbel aus zwei parallelen Geraden und einem rechten Winkel, der sich um einen festen Punkt dreht, zu erzeugen.

Betrachtet man nun das ganze System von Kegelschnitten mit den gemeinsamen Brennpunkten A und B, so kann man von einem Punkte der gemeinschaftlichen grossen Axe aus an die sämmtlichen Kegelschnitte Tangenten (Normalen) legen, deren Berührungspunkte (Fusspunkte) nach dem eben Gesagten in einem Kreise liegen und das Nämliche gilt für einen Punkt der kleinen Axe. *Lässt man also einen Punkt jede der beiden Axen ganz durchlaufen, so erhält man zwei Systeme von Kreisen, von denen das eine die Eigenschaft hat, dass jeder seiner Kreise durch A und durch B hindurchgeht, während vom zweiten System keine zwei Kreise sich schneiden werden. Durch jeden Punkt der Ebene geht ein Kreis des einen und ein Kreis des andern Systems, die sich in ihm rechtwinklig schneiden.*

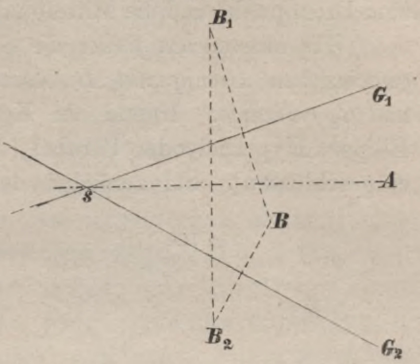
Die Berührungspunkte (Fusspunkte) der aus einem Punkte der Axe an eine Schaar confocaler Parabeln gezogenen Tangenten (Normalen) liegen in einem Kreise, dessen Mittelpunkt der gemeinschaftliche Brennpunkt ist. Dieser Satz folgt entweder als Spezialfall aus den vorigen oder aber derart aus dem in §. 17. [Fig. 97] bewiesenen: Die Tangente und Normale einer Parabel schneiden die Axe in gleicher Entfernung und zwar ist diese Entfernung dem Leitstrahle gleich. — *Die gemeinschaftliche Nebenaxe der Parabel liegt ganz im Unendlichen, die Tangenten von einem ihrer Punkte an die Parabelschaar sind also parallel und deren Berührungspunkte liegen in einer Geraden, die durch B hindurchgeht.* Diess ergibt sich [unter Beibehaltung der Bezeichnung in Fig. 97], weil $\sphericalangle CBH = 2\alpha =$ const. ist, oder auch: weil eine Schaar conzentrischer Kreise und ihre sämmtlichen Durchmesser als zwei Systeme sich überall rechtwinklig schneidender Kreise angesehen werden können*).

Wir nehmen jetzt die Construction des Kegelschnittes aus gegebenen Elementen wieder auf. Durch einen Brennpunkt B und eine Tangente G_1 ist ein Kegelschnitt noch nicht bestimmt, man weiss nur, dass der Kreis, welcher um den andern Brennpunkt A mit der grossen Axe $2a$ des Kegelschnitts als Radius beschrieben wird, durch den Gegenpunkt B_1 von B in Bezug auf G_1 geht. Tritt nun zu B und G_1 noch eine zweite Tangente G_2, so muss der genannte Kreis mit dem Mittelpunkte A und dem Radius $2a$ sowohl durch B_1 als auch durch den Gegenpunkt B_2 von B in Bezug auf G_2 gehen.

*) Zieht man parallele Tangenten an eine beliebige Schaar confocaler Kegelschnitte, so liegen die Berührungspunkte in einer gleichseitigen Hyperbel, welche mit den gegebenen Kegelschnitten den Mittelpunkt gemein hat und durch die beiden Brennpunkte der Schaar hindurchgeht. Die eine Asymptote ist in dem System paralleler Tangenten enthalten.

Daraus folgt, *dass der Ort der Brennpunkte A diejenige Gerade sA ist, welche in der Mitte von B_1B_2 auf B_1B_2 senkrecht steht.* Diese Gerade geht durch den Schnittpunkt s der Geraden G_1 und G_2, denn da G_1 in der Mitte von BB_1 senkrecht auf BB_1 und G_2 in der Mitte von BB_2 senkrecht auf G_2 steht, so muss durch ihren Schnittpunkt s auch die in der Mitte von B_1B_2 senkrecht auf B_1B_2 gelegte Gerade sA gehen, es ist also s der Mittelpunkt des durch die Punkte $B_1B_2B_3$ gelegten Kreises. [Eine andere Construction der Geraden sA besteht darin, dass man die Gleichheit der Winkel BsG und AsG_1 benutzt.]

Fig. 118.



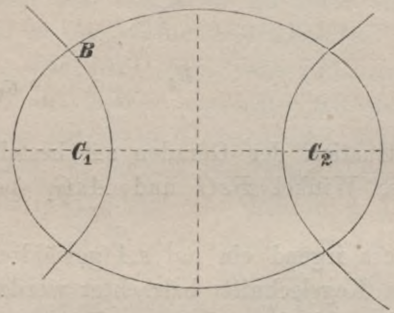
Umgekehrt weiss man nun, dass irgend ein auf sA gewählten Punkt als zweiter Brennpunkt eines Kegelschnitts betrachtet werden kann, der B zum ersten Brennpunkt und G_1 und G_2 zu Tangenten hat. Um zu entscheiden, in welchen Fällen Ellipse, Parabel oder Hyperbel eintritt, bemerken wir, dass, wenn der Kreis mit der grossen Axe eines Kegelschnitts als Radius und mit einem der Brennpunkte zum Mittelpunkte den andern Brennpunkt einschliesst, dann dieser Kegelschnitt eine Ellipse ist; schliesst der Kreis den Brennpunkt aus, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, liegt der Brennpunkt auf dem Kreise selbst, so reduzirt sich der Kegelschnitt auf eine doppelt gelegte Gerade, und wenn der Kreis unendlich gross ist, so geht der Kegelschnitt in eine Parabel über. [Eine andere Unterscheidung gründet sich darauf, dass bei der Hyperbel die Tangenten zwischen den Brennpunkten hindurch gehen, während bei der Ellipse diess nicht eintreten kann.]

Die Schaar von Kegelschnitten, welche B zum Brennpunkte haben und die beiden Geraden G_1 und G_2 berühren, zerfällt also in eine Schaar von Ellipsen, deren zweite Brennpunkte auf der einen Seite von s auf sA liegen, und eine Schaar von Hyperbeln, welche ihre zweiten Brennpunkte auf der andern Seite von s haben. Als Grenzfälle treten auf: die Gerade sB doppelt gelegt, und die Parabel, welche B_1B_2 zur Leitlinie und eine Parallele zu sA durch B zur Axe hat. Die Mittelpunkte der Gesammtschaar dieser Kegelschnitte liegen in einer Geraden, welche in der Mitte zwischen B und sA

parallel zu sA geführt wird; ihre grossen Axen gehen sämmtlich durch B, während die kleinen Axen eine Parabel umhüllen, welche B zum Brennpunkt und die Mittelpunktsgerade zur Scheiteltangente hat. —

Wir untersuchen ferner die Schaar von Kegelschnitten, welche einen gemeinsamen Brennpunkt B besitzen und zwei gemeinsame Punkte C_1 und C_2 enthalten. Irgend ein Kegelschnitt dieser Schaar ist entweder Ellipse, Hyperbel oder Parabel [die speziellen Fälle dieser Curven mit eingeschlossen]. Sei zunächst der Kegelschnitt eine Ellipse mit dem zweiten Brennpunkt A, so ist $C_1A + C_1B = C_2A + C_2B$, weil beide der grossen Axe dieser Ellipse gleich sein müssen. Daraus folgt, wenn wir zunächst voraussetzen, dass $C_2B > C_1B$ sei, $C_1A - C_2A = C_2B - C_1B$, d. h.: der Ort von A ist derjenige Zweig der Hyperbel durch B mit C_1 und C_2 zu Brennpunkten, welcher den Brennpunkt C_2 umschliesst. — Soll einer der Kegelschnitte der Schaar eine Hyperbel sein, so müssen folgende verschiedene Fälle beachtet werden: 1. C_1 und C_2 liegen auf demselben Zweige der Hyperbel [er umschliesse nun A oder B] und 2. C_1 und C_2 liegen auf verschiedenen Zweigen der Hyperbel. Im ersten Falle hat man entweder $C_1B - C_1A = C_2B - C_2A$ oder $C_1A - C_1B = C_2B - C_2A$, also $C_2A - C_1A = C_2B - C_1B$, d. h. der Ort von A ist der C_1 umschliessende Zweig der Hyperbel durch B mit den Brennpunkten C_1 und C_2. Im zweiten Falle ergibt sich [in Unterscheidung ob C_1 auf dem Zweige A und C_2 auf dem Zweige B liege oder umgekehrt], entweder $C_1B - C_1A = C_2A - C_2B$ oder $C_1A - C_1B = C_2B - C_2A$, also beidemale $C_1A + C_2A = C_1B + C_2B$, d. h. der Ort von A ist eine Ellipse, welche C_1 und C_2 zu Brennpunkten hat und durch B geht. Wenn schliesslich der durch B, C_1 und C_2 bestimmte Kegelschnitt eine Parabel sein soll, so findet man als zweiten Brennpunkt einen der beiden unenendlich entfernten Punkte der Hyperbel, welche C_1 und C_2 zu Brennpunkten hat, und welche durch B geht. *Es gibt also zwei Parabeln, welche einen bestimmten Punkt zum Brennpunkte haben, und durch zwei gegebene Punkte gehen.* Diess ergibt sich auch aus folgender Betrachtung: Construirt man einen Kreis, welcher einen beliebigen Punkt einer Parabel zum Mittelpunkte hat und durch den Brennpunkt derselben geht, so berührt

Fig. 119.

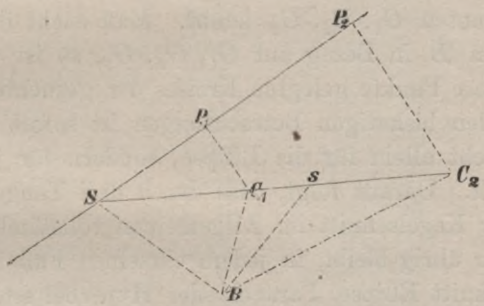


er die Leitlinie. Soll also eine Parabel den Punkt B zum Brennpunkt haben und zugleich die Punkte C_1 und C_2 enthalten, so ist die Leitlinie gemeinschaftliche Tangente der Kreise, welche resp. C_1 und C_2 zu Mittelpunkten haben, und welche durch B gehen. Diese Kreise haben zwei Punkte gemein, lassen also auch zwei und nur zwei gemeinschaftliche Tangenten zu, demzufolge gibt es wirklich zwei Parabeln, welche den gestellten Bedingungen Genüge leisten. —

Spezielle Fälle, welche diese Betrachtung darbietet, erledigen sich leicht, so dass wir nun allgemein den Satz aussprechen können: *Der Ort der zweiten Brennpunkte aller derjenigen Kegelschnitte, welche einen gegebenen Punkt B zum Brennpunkte haben, und durch zwei feste Punkte C_1 und C_2 gehen, besteht aus den beiden confocalen Kegelschnitten, welche C_1 und C_2 zu Brennpunkten haben, und welche zudem durch den Punkt B gehen.* —

Ist L die Leitlinie eines Kegelschnittes, welcher durch C_1 und C_2 geht und welcher B zum Brennpunkte hat, so gilt nach einer Funda-

Fig. 120.



mentaleigenschaft der Kegelschnitte, wenn P_1 und P_2 die Fusspunkte der von C_1 und C_2 auf L gefällten Kegelschnitte sind, die Relation: $\frac{BC_1}{C_1P_1} = \frac{BC_2}{C_2P_2}$ oder $BC_1 : BC_2 = C_1P_1 : C_2P_2$. Sei ferner S der Durchschnitt der Geraden C_1C_2 mit L, so ist wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke SP_1C_1 und SP_2C_2 auch $C_1S : C_2S = C_1P_1 : C_2P_2$, also ist $BC_1 : BC_2 = C_1S : C_2S$. Durch diese Proportion ist der Punkt S bestimmt, d. h. es gibt auf der Geraden C_1C_2 zwei Punkte, welche ihr genügen, einen, s, auf der Strecke C_1C_2 selbst, den andern, S, ausserhalb derselben. Man findet diese Punkte bekanntlich, indem man die Durchschnittspunkte der Halbirungsgeraden der Winkel BC_1 und BC_2 bilden, mit C_1C_2 construirt. [Die Punkte C_1, C_2, s, S sind also harmonische, und zwar die beiden ersten und die beiden letzten einander zugeordnet.] Es folgt nun der Satz: *Soll ein Kegelschnitt durch zwei*

Punkte C_1 *und* C_2 *gehen und einen bestimmten Punkt* B *zum Brennpunkt haben, so geht seine* B *entsprechende Leitlinie durch den einen oder den andern von zwei leicht zu construirenden, auf der Geraden* $C_1 C_2$ *gelegenen Punkten.* Diesem Satze kann man eine etwas andere Fassung geben. Da nämlich $C_1 B : C_2 B = C_1 S : C_2 S$ und $C_1 B : C_2 B = C_1 s : C_2 s$, *so sind* [nach §. 3.] *die Punkte* S *und* s *resp. die äussern und innern Aehnlichkeitspunkte der beiden Kreise, welche* C_1 *und* C_2 *zu Mittelpunkten haben und durch* B *gehen.* Die Leitlinie irgend eines der vorhin genannten Kegelschnitte, welche dem gegebenen Brennpunkt zugehört, geht also entweder durch den einen oder durch den andern der Aehnlichkeitspunkte. Auch jetzt ist es leicht, die verschiedenen Arten der Kegelschnitte zu unterscheiden. Jeder Kegelschnitt, dessen Leitlinie durch s geht, ist Hyperbel; die Leitlinien durch S werden durch die vorhin construirten Parabelleitlinien in zwei Gruppen getheilt, von denen die eine [die Gerade $S C_1 C_2$ enthaltende] zu Hyperbeln, die andere zu Ellipsen gehört.

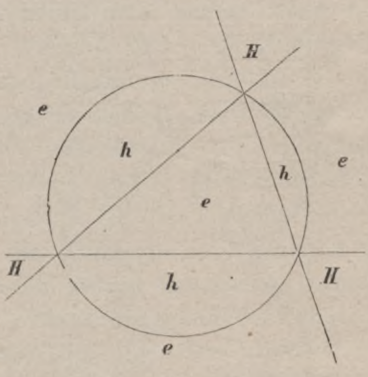
In §. 11. ist gezeigt worden, wie der zweite Brennpunkt einer Ellipse gefunden wird, von welcher man den einen Brennpunkt B und drei Tangenten G_1, G_2, G_3 kennt. Man sucht die Gegenpunkte B_1, B_2, B_3 von B in Bezug auf G_1, G_2, G_3, so ist der Mittelpunkt A des durch diese Punkte gelegten Kreises der gesuchte zweite Brennpunkt. Nach den bisherigen Betrachtungen ist sofort klar, dass diese Construction nicht allein für die Ellipse, sondern für jeden beliebigen Kegelschnitt gilt. Daraus folgt, dass durch drei Tangenten und einen Brennpunkt der Kegelschnitt im Allgemeinen vollständig bestimmt ist, so dass also nur übrig bleibt, in jedem einzelnen Falle zu entscheiden, ob der Kegelschnitt Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Um diese Unterscheidung durchzuführen, halten wir die drei Tangenten fest und wählen zunächst B in unendlicher Entfernung und zwar nach einer willkürlich bestimmten Richtung hin. Der Kegelschnitt ist dann eine Parabel und zwar liegt deren Brennpunkt auf demjenigen Kreise, welcher dem Dreiecke $G_1 G_2 G_3$ umschrieben ist. Die Aufgabe, denselben zu finden, kommt auf die in §. 19. behandelte zurück: Es ist ein Dreieck und der demselben umschriebene Kreis gegeben, ferner eine Gerade G; man soll auf der Kreislinie einen Punkt A so bestimmen, dass die Fusspunkte der von ihm auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel in einer zu G parallelen Geraden liegen. In der That ist in unserm Falle die Gerade G irgend eine Senkrechte zu der Richtung des unendlich entfernten Brennpunktes B. Wird umgekehrt der Brennpunkt B auf dem Kreise angenommen, welcher dem Dreieck $G_1 G_2 G_3$ umschrieben ist, so liegt der zweite Brennpunkt A im Unendlichen, und zwar in einer Richtung, die ebenfalls sofort bestimmt werden kann.

Wir nehmen ferner an, B befinde sich auf einer der Dreiecksseiten, z. B. G_3. Es fällt dann B_3 mit B selbst zusammen, also liegt A sowohl auf dem Perpendikel, das in der Mitte von B_1 und B [resp. B_3] errichtet wird, d. h. auf G_1, als auch auf G_2, es ist also A die Ecke des Dreiecks, welche G_3 gegenüberliegt. Befindet sich also B auf einer Seite des Dreiecks, so fällt A mit der gegenüberliegenden Ecke zusammen. Es ist demnach zwar im Allgemeinen A durch B vollkommen eindeutig bestimmt, wenn aber B mit einer der Ecken zusammen fällt, so kann A auf der gegenüberliegenden Seite willkürlich angenommen werden. Jedesmal indess muss der Kegelschnitt in die doppelt gelegte Gerade AB zerfallen, die als Ellipse, Hyperbel oder Parabel angesehen werden kann.

Fällt B mit dem Mittelpunkte eines der vier Kreise zusammen, welche dem Dreiseit $G_1 G_2 G_3$ umgeschrieben werden können, so vereinigen sich B und A, und der entsprechende Kegelschnitt ist der betrachtete Kreis selbst.

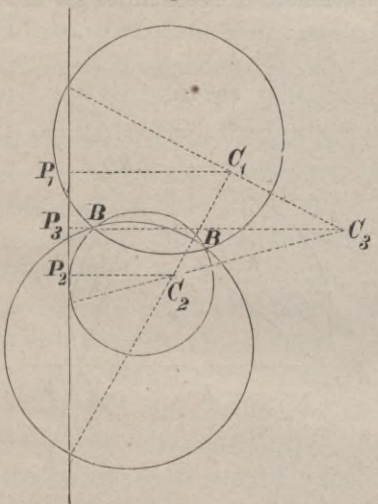
Fig. 121.



Verändert der Punkt B seine Lage stetig, so wird der zugehörige Kegelschnitt sich ebenfalls stetig ändern, und wird also von der Ellipse zur Hyperbel, oder von der Hyperbel zur Ellipse nur dann übergehen, wenn er sich zuvor in einen der Uebergangskegelschnitte [Parabel oder doppeltgelegte Gerade] verwandelt hat. *Nun wird aber die Ebene durch das Dreieck $G_1 G_2 G_3$, die unendlich entfernte Gerade und den dem Dreieck umschriebenen Kreis in zehn Theile getheilt, derart, dass der Punkt B in einem der mit e bezeichneten Abschnitte liegen muss, damit der zugehörige Kegelschnitt eine Ellipse, und in einem der mit h oder H bezeichneten, damit derselbe eine Hyperbel sei.* [Die Brennpunkte einer eingeschriebenen Hyperbel liegen jedesmal in zwei gegenüberliegenden der Räume h und H.] Die speziellen Fälle sind bereits erledigt, also jetzt auch die ganze geforderte Unterscheidung.

Will man einen Kegelschnitt construiren, welcher durch drei Punkte $C_1 C_2 C_3$ geht, und einen bestimmten Punkt B zum Brennpunkt hat, so beachte man zunächst, dass, da der Kegelschnitt jedenfalls durch C_1 und C_2 geht, seine B zugehörige Leitlinie nothwendiger Weise entweder durch den äussern oder den innern Aehnlichkeitspunkt derjenigen Kreise gehen muss, welche C_1 und C_2 zu Mittelpunkten haben und durch B gehen. Zieht man nun noch den Kreis welcher C_3 zum Mittelpunkt hat und durch B geht, so findet sich durch Combination der drei Punkte $C_1 C_2 C_3$ zu zweien, dass die zu B gehende Leitlinie des gesuchten Kegelschnitts drei der sechs Aehnlichkeitspunkte enthalten muss, welche die drei genannten Kreise erzeugen, und zwar muss jede der drei angegebenen Combinationen für jede der Leitlinien berücksichtigt werden. Der §. 3. zeigt nun, dass vier solche Leitlinien existiren, nämlich die drei äussern Aehnlichkeitspunkte der Kreise liegen in einer solchen, und je einer der drei äussern Aehnlichkeitspunkte mit den beiden ihm nicht zugehörigen in einer andern. *Es gibt also vier Kegelschnitte, welche durch drei Punkte gehen und einen gegebenen Punkt zum Brennpunkt haben.* Von diesen vier Kegelschnitten sind die drei, deren Leitlinien innere Aehnlichkeitspunkte enthalten, Hyperbeln, der vierte kann Hyperbel, Parabel oder Ellipse sein, was in jedem einzelnen Falle leicht zu entscheiden ist.

Fig. 122.



Der Satz, dass für alle Punkte eines Kegelschnittes der Abstand nach einem Brennpunkt zu dem Abstande nach der zugehörigen Leitlinie constant bleibt, dient auch dazu, *einen Kegelschnitt zu construiren, von dem eine Leitlinie L und drei Punkte C_1, C_2, C_3 gegeben sind.* Denn seien $P_1 P_2 P_3$ die Fusspunkte der von $C_1 C_2 C_3$ auf L gefällten Perpendikel, B der zu L gehörige Brennpunkt, so ist

$$\frac{C_1 B}{C_1 P_1} = \frac{C_2 B}{C_2 P_2} = \frac{C_3 B}{C_3 P_3}$$

also

$$\frac{C_2 B}{C_3 B} = \frac{C_2 P_2}{C_3 P_3}, \quad \frac{C_3 B}{C_1 B} = \frac{C_3 P_3}{C_1 P_1}, \quad \frac{C_1 B}{C_2 B} = \frac{C_1 P_2}{C_2 P_2}.$$

Nach dem geometrischen Orte, den wir in §. 8. unter 5. behandelten, liegt demnach B auf jedem der drei Kreise, die man als Ort der Punkte erhält, von denen je zwei der Punkte $C_1 C_2 C_3$ um Abstände entfernt sind, die sich verhalten wie die Abstände der nämlichen Punkte von L. *Da diese Kreise zwei gemeinschaftliche Punkte haben, so ergibt die gestellte Aufgabe zwei Lösungen.*

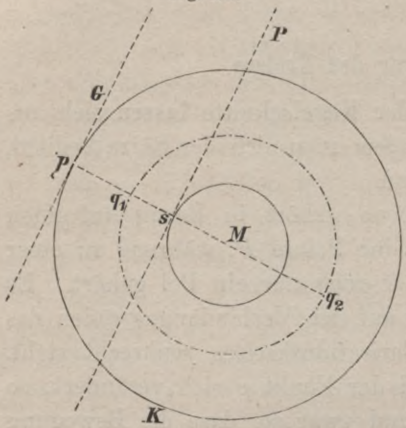
§. 23. Die Polarfigur des Kreises.

Eine Reihe von Eigenschaften der Kegelschnitte lassen sich aus Eigenschaften des Kreises ableiten, indem man sich der Sätze bedient, welche in §. 6. aufgestellt worden sind.

Zu jedem Punkte p in der Ebene gehört in Bezug auf einen Kreis M stets eine, aber auch nur eine Polare P, während zu einer beliebigen Geraden P stets ein, aber auch nur ein Pol gehört. Es gilt zudem der Satz, dass die Polare auf der Verbindungsgeraden des Pols mit dem Mittelpunkte des Polarisationskreises senkrecht steht. Wird der Kreis festgehalten, während der Punkt p sich verändert, so verändert sich auch seine Polare, und zwar so, dass die Bewegung der Polaren durchaus durch die Bewegung des Pols bestimmt ist. Umgekehrt, bewegt sich die Gerade P, so bewegt sich auch ihr Pol p, und zwar ist die Ortsveränderung von p vollständig durch diejenige von P bestimmt. Lässt man nun p irgend eine Curve C durchlaufen, so bewegt sich die Polare P als Tangente einer andern Curve C_1, welche durch C und M bestimmt ist. Wenn p_1 und p_2 zwei unmittelbar aufeinanderfolgende [unendlich nahe] Lagen des Punktes p sind und G die sie verbindende Gerade, ferner P_1 und P_2 die Polaren von p_1 und p_2 [die sich ebenfalls unendlich nahe liegen, d. h. einen unendlich kleinen Winkel miteinander bilden] und s ihr Schnittpunkt, so bieten sich folgende Verhältnisse dar: G ist die Tangente von C in dem Punkte p_1 [oder p_2], weil die Tangente in irgend einem Punkte einer Curve die Verbindungsgerade zweier unmittelbar aufeinander folgenden Punkte ist. Ebenso ist s der Berührungspunkt der Tangente P_1 [oder P_2] der Curve C_1. Es entspricht also der Curve C die Curve C_1 nicht nur, wenn man C als aus Punkten bestehend auffasst, sondern auch dann noch, wenn man C durch Bewegung einer Tangente sich bilden lässt. Alles zusammengefasst ergibt sich der Satz:

Sucht man zu jedem Punkte p einer Curve C die Polare P in Bezug auf einen festen Kreis M, so bilden alle Geraden P zusammengenommen die Tangenten einer neuen Curve C_1. Der Tangente G im Punkte p von C entspricht der Berührungspunkt s der Tangente P von C_1. Die Curve C_1 heisst die Polarfigur der Curve C; umgekehrt ist auch C die Polarfigur von C_1. Sind zwei Curven zu einander polar, wenn man die erste als aus Punkten, die zweite als aus Tangenten bestehend *auffasst, so sind sie auch polar, wenn man die erste als Tangentengebilde, die zweite als Punktgebilde betrachtet.*

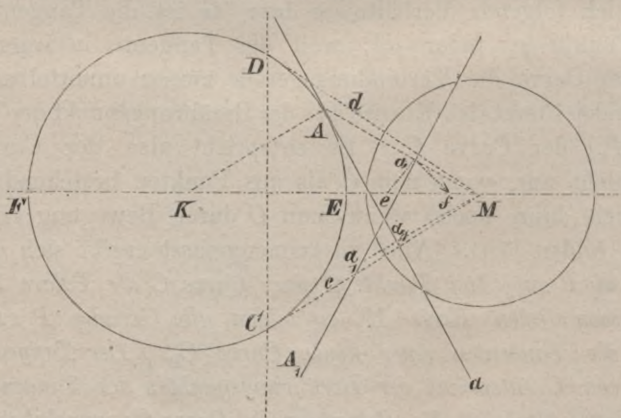
Fig. 123.



Sei M der Fundamentalkreis, in Bezug auf welchen polarisirt wird, M sein Mittelpunkt und R sein Radius, ferner Mp der Radius eines ihm conzentrischen Kreises K, so ist die Polarfigur desselben ein zu M und K conzentrischer Kreis K_1. Um dessen Radius Ms zu finden, bedenkt man, dass der durch p gehende Durchmesser des Kreises M vier harmonische Punkte enthält, von denen p und s zwei zugeordnete sind, während die beiden andern q_1 und q_2 auf dem Kreise M liegen; deren Mitte ist demnach M, und nach §. 5. findet die Relation statt: $Mq_1^2 = Mq_2^2 = R^2 = Mp \cdot Ms$, also $Ms = \frac{R^2}{Mp}$, wodurch der Kreis K_1 vollständig bestimmt ist. Wenn $Mp = R$ ist, so fallen natürlich K_1 und K_2 mit dem Kreise K zusammen.

Ist K nicht conzentrisch mit M, so ist die Polarfigur von K in Bezug auf M nicht ein Kreis, sondern eine andere Curve, deren Gestalt gefunden werden soll.

Fig. 124.



Es seien A, a ein beliebiger Punkt und seine zugehörige Tangente im Kreise K, und A_1, a_1 seien resp. die Polare und der Pol derselben. Der Radius des Kreises M ist R, demnach hat man: $M\alpha \cdot MA = R^2$; $M\alpha_1 \cdot Ma_1 = R^2$. — *Da der Ort von A der Kreis K ist, so ist der Ort von α ein bestimmter Kreis K_1, der mit K den Punkt M zum äussern Aehnlichkeitspunkte hat.* Zum Beweise sucht man die Punkte e und f, welche zu E und F [den Endpunkten des Durchmessers MK im Kreise K] in demselben Verhältniss stehn, wie α zu A und zeigt, dass $\sphericalangle\, e\alpha f$ ein Rechter ist. Man hat in der That, da $R^2 = MA \cdot M\alpha = ME \cdot Me = MF \cdot Mf$ ist, $MA : ME = Me : M\alpha$ und $MA : MF = Mf : M\alpha$. Es sind also sowohl die Dreiecke $MAE = M\alpha e$, als auch die Dreiecke MAF und $M\alpha f$ ähnlich. Man hat aus diesen Aehnlichkeiten $\sphericalangle\, AEM = e\alpha M$ und $\sphericalangle\, AFM = f\alpha M$ und da $\sphericalangle\, MEA - MFA = 90^0$, so ist auch $\sphericalangle\, M\alpha e - M\alpha f = e\alpha f = 90^0$, woraus sich der Ort von α als ein Kreis über dem Durchmesser ef ergibt.

Nun ist A_1 zu dem Strahle $M\alpha$ senkrecht. Daher ist der Ort von A_1 eine Curve, welche die Eigenschaft hat, dass die Fusspunkte sämmtlicher Perpendikel, die von einem Punkte M auf ihre Tangenten gefällt werden können, in einem Kreise liegen, also ein Kegelschnitt K [im Falle unserer Figur eine Hyperbel]. Man hat also die nachfolgenden Sätze:

Die irgend einem gegebenen Kreise K entsprechende Polarfigur in Bezug auf einen Kreis M ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Einem Punkte A und der zugehörigen Tangente a bei K entsprechen eine Tangente A_1 und deren Berührungspunkt a_1 bei $\mathfrak{K}$; die Hauptaxe von $\mathfrak{K}$ fällt auf den gemeinschaftlichen Durchmesser der Kreise MK; M ist ein Brennpunkt desselben.

Schliesst der Kreis K den Mittelpunkt M nicht ein, so sind aus demselben zwei Tangenten c, d an K vorhanden; daher hat $\mathfrak{K}$ zwei Tangenten C_1, D_1, deren Berührungspunkte c_1, d_1 unendlich entfernt sind, also zwei Asymptoten, und es ist demnach $\mathfrak{K}$ eine Hyperbel.

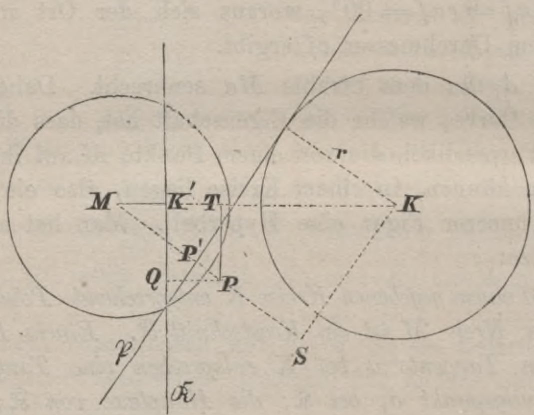
Geht der Kreis K durch den Mittelpunkt M, so wird $\mathfrak{K}$ eine Parabel, der Ort von α, d. h. der Kreis K_1 geht in eine Gerade über, nämlich in die Scheiteltangente der Parabel $\mathfrak{K}$.

Schliesst K den Mittelpunkt M ein, so wird der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ eine Ellipse; alsdann schliesst auch der Kreis K_1 den Punkt M ein, welcher äusserer Aehnlichkeitspunkt der Kreise K, K_1 bleibt. Es ist ersichtlich, dass $\mathfrak{K}$ keine unendlich entfernten Punkte enthalten kann. —

Durch Umkehrung folgt: *Irgend ein Kegelschnitt der $\mathfrak{K}$ der Ebene geht durch Polarisation in Bezug auf einen beliebigen der Kreise mit dem Mittelpunkte M, wo M ein Brennpunkt von K ist, in einen Kreis* *über*. Der vollständige Beweis dieses Satzes wird geführt, indem man den Kreis zu Hülfe nimmt, welcher über der grossen Axe von K als Durchmesser beschrieben werden kann, und welcher der Ort der Fusspunkte aller Perpendikel ist, die von M auf die sämmtlichen Tangenten des Kegelschnittes gefällt werden.

Der Satz, dass die Polarfigur eines Kreises K in Bezug auf einen andern Kreis M ein Kegelschnitt sei, wurde bewiesen, indem man die Umhüllende der Polaren aller Punkte von K discutirte. Man hätte auch vorgehen können, indem man die Pole aller Tangenten von K bestimmte — und zwar wie folgt: Sei P der Pol einer beliebigen Tangente $\mathfrak{P}$ des Kreises K, P' der Fusspunkt des von M auf sie ge-

Fig. 125.



fällten Perpendikels; im Weitern möge $\mathfrak{K}$ die Polare von K wiederum nach M genommen sein und K' und Q seien die Fusspunkte der resp. von M und P auf dieselbe gefällten Perpendikel. Wenn nun R der Radius von M, r der Radius von K und a die Entfernung der Mittelpunkte M und K ist, so hat man

$$MK \cdot MK' = a \cdot MK' = MP \cdot MP' = R^2.$$

Wird durch K eine Parallele zu $\mathfrak{P}$ gezogen und ihr Durchschnitt mit MP als S eingeführt und fällt man noch von P ein Perpendikel PT auf MK, so geben die ähnlichen Dreiecke MTP und MKS die Relation

$$MT : MP = MS : a \text{ oder}$$

$$MT = \frac{MP \cdot MS}{a} = \frac{MP \cdot (MP' + r)}{a} = \frac{MP\left(\frac{R^2}{MP} + r\right)}{a}$$

$$= \frac{R^2 + r \cdot MP}{a}.$$

Da $PQ = MT - MK' = \frac{R^2 + r \cdot MP}{a} - \frac{R^2}{a}$, so folgt

$$PQ = \frac{r}{a} \cdot MP \text{ oder } \frac{PQ}{PM} = \frac{r}{a}, \text{ d. h.:}$$

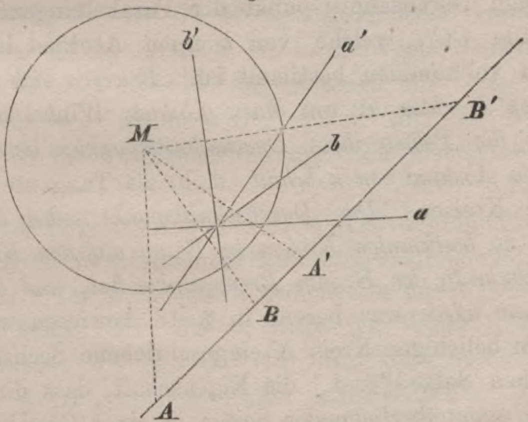
Der Ort des Punktes P ist so beschaffen, dass das Verhältniss seiner Abstände von einem festen Punkte (M) und einer festen Geraden ($\mathfrak{K}$) constant bleibt, wie auch P als Tangente des Kreises K sich bewegen mag; er ist also ein Kegelschnitt, für welchen M ein Brennpunkt, $\mathfrak{K}$ die zugehörige Leitlinie ist. Er ist Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $\frac{r}{a}$ grösser, gleich der Axe als Eins ist, was mit dem oben gegebenen Criterium stimmt.

Construirt man für M die Polare $\mathfrak{M}$ nach dem Kreise K, so werden M und $\mathfrak{M}$ nach dem Kreise M polarisirt eine Gerade und einen Punkt ergeben, welche Pol und Polare in Bezug auf den gefundenen Kegelschnitt sind*). Der Pol von $\mathfrak{M}$ nach dem Kreise M ist also der Mittelpunkt des Kegelschnittes, dessen zweiter Brennpunkt nebst zugehöriger Leitlinie nun leicht gefunden werden.

Wir können von den bis jetzt erhaltenen Resultaten sofort Anwendung machen auf die *Construction eines Kegelschnitts $\mathfrak{K}$, von welchem man einen Brennpunkt und drei aus Punkten oder Tangenten bestehende*

*) Die Richtigkeit dieser Bemerkung folgt aus dem Satze: *Die Polaren von vier harmonischen Punkten bilden vier harmonische Strahlen.* [In unserm Falle liegt einer der vier Punkte im Unendlichen, sein zugeordneter ist der Mittelpunkt, die beiden übrigen sind die Brennpunkte des Kegelschnittes. Zum

Fig. 127.



Beweise beachte man, dass die Polaren von $AA'BB'$ durch den Pol der Geraden gehen, auf welcher sie liegen und resp. senkrecht auf den harmonischen Strahlen $M(AA'BB')$ stehen, also die nämlichen Winkel einschliessen, wie diese und demzufolge ebenfalls harmonisch sind.

Elemente kennt. Es sind hiebei vier verschiedene Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich ausser dem Brennpunkt gegeben sind: 1. drei Tangenten, 2. zwei Tangenten und ein Punkt, 3. eine Tangente und zwei Punkte, 4. drei Punkte. Polarisirt man den gesuchten Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in Bezug auf einen Kreis M, welcher den gegebenen Brennpunkt von $\mathfrak{K}$ zum Mittelpunkt hat, so wird er zu einem Kreise K, seine Punkte zu Tangenten von K und seine Tangenten zu Punkten dieses Kreises. *Die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu finden, welcher einen gegebenen Punkt zum Brennpunkt hat und welcher drei gegebene Gerade berührt, lässt sich also zurückführen auf die andere: Einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu legen. Ebenso ist die Aufgabe, einen Kegelschnitt von gegebenem Brennpunkt durch drei bestimmte Punkte zu legen, abhängig von der andern, einen Kreis zu bestimmen, welcher drei Gerade berührt. Diese lässt vier Auflösungen zu, also auch die ursprüngliche,* wie bereits im vorigen Paragraphen bewiesen worden ist.

Polarisirt man eine Parabel in Bezug auf einen beliebigen Kreis M, der ihren Brennpunkt B zum Mittelpunkt hat, so wird sie zu einem Kreise K, welcher durch B geht und dessen Mittelpunkt k heissen soll; eine Tangente G der Parabel wird zu einem Punkte C des Kreises, und zwar steht die Gerade CB senkrecht auf G. Wenn ferner zwei Tangenten der Parabel G und G_1 einen bestimmten Winkel α miteinander bilden, so werden die Geraden BC und BC_1, welche B mit den, diesen Tangenten entsprechenden Punkten C und C_1 verbinden, ebenfalls den Winkel α oder dessen Nebenwinkel einschliessen. Dem Durchschnittspunkt der Parabeltangenten entspricht nun die Gerade CC_1, welche von k einen Abstand hat, der durch den Winkel α vollkommeu bestimmt ist. *Bewegen sich demnach zwei Parabeltangenten so, dass der von ihnen gebildete Winkel constant bleibt, so bewegt sich die Polare ihres Durchschnittspunktes derart, dass sie einen constanten Abstand von k behält,* d. h. als Tangente eines mit K conzentrischen Kreises. *Der Durchschnittspunkt selbst durchläuft die Polurfigur des so bestimmten Kreises in Bezug auf den Kreis M, nämlich einen Kegelschnitt, der B zum Brennpunkte hat, und leicht als eine Hyperbel erkannt wird,* was bereits in §. 18. bewiesen worden ist. —

Das einem beliebigen Kreis K eingeschriebene Sechseck hat nach dem Pascal'schen Satze [§. 4.] die Eigenschaft, dass die drei Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten in einer Geraden liegen; bei einem dem Kreise umschriebenen Sechseck schneiden sich zufolge des Satzes von Brianchon [§. 6.] die drei Hauptdiagonalen in einem und demselben Punkte.

Diese beiden Sätze lassen sich in folgender Weise auf die Kegelschnitte übertragen: Es sei ein Sechseck gegeben, welches einem beliebigen Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ eingeschrieben ist. Polarisirt man $\mathfrak{K}$ derart, dass er zu einem Kreise K wird, d. h. polarisirt man in Bezug auf einen Kreis, welcher einen der Brennpunkte von $\mathfrak{K}$ zum Mittelpunkt hat, so werden die Ecken des Sechsecks zu sechs Tangenten des Kreises K, also zu einem, diesem Kreise umschriebenen Sechseck. Die gegenüberliegenden Seiten des $\mathfrak{K}$ eingeschriebenen Sechsecks werden zu gegenüberliegenden Ecken des K umschriebenen Sechsecks, und die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten des ersten Sechsecks zu Hauptdiagonalen des zweiten. Da diese sich in einem und demselben Punkte schneiden, so müssen jene, welche die Pole der Hauptdiagonalen sind, in einer Geraden liegen. Damit ist die folgende Fassung des Pascal'schen Satzes bewiesen:

Werden irgend sechs Punkte eines beliebigen Kegelschnitts in einer willkürlichen Reihenfolge durch 1 2 3 4 5 6 *bezeichnet, und die nachfolgenden Paare der Seiten des von ihnen gebildeten Sechsecks:* 1 2 *und* 4 5, 2 3 *und* 5 6, 3 4 *und* 6 1 *gegenüberliegende Seiten genannt, so liegen die drei Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden.*

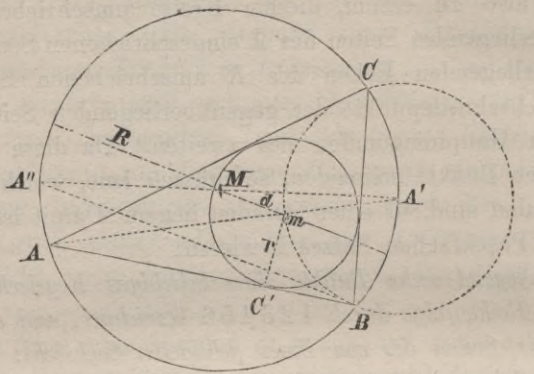
In ähnlicher Weise ergibt sich eine allgemeine Fassung des Satzes von Brianchon:

Sechs Tangenten eines Kegelschnittes, welche wir in irgend einer Reihenfolge mit 1 2 3 4 5 6 *bezeichnen, heissen ein dem Kegelschnitte umschriebenes Sechseck. Die successiven Schnittpunkte von* 1 2, 2 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6 1 *nennen wir die Ecken desselben, und zwar werden* 1 2 *und* 4 5, 2 3 *und* 5 6, 3 4 *und* 6 1 *als gegenüberliegende definirt. Die Hauptdiagonalen eines solchen Sechsecks* [d. h. die Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken] *schneiden sich in einem und demselben Punkte.*

Wir schliessen diesen Paragraphen mit der Anwendung der Polarisation auf die Verallgemeinerung einer elementar-geometrischen Betrachtung.

Wenn einem Dreieck ABC ein Kreis M mit dem Radius R umgeschrieben und ein Kreis m mit dem Radius r eingeschrieben ist, während d die Entfernung Mm der Mittelpunkte bedeutet, so findet zwischen R, r und d eine Beziehung statt, die in folgender Weise abgeleitet werden kann: Schneidet die Gerade Am den umschriebenen Kreis zum zweitenmale in A', welcher Punkt zum Mittelpunkte eines Hülfskreises durch B und C gewählt werden möge, so geht dieser Hülfskreis zugleich durch m, denn es ist $\sphericalangle\, mA'B = ACB$ [als Peripheriewinkel über AB im Kreise M] $= 2mCB$ [Centriwinkel und Peripheriewinkel über mB im Kreise um A' herum], wie es sein muss, wenn m der Durchschnitt der Winkelhalbirenden im Dreieck ABC sein soll. Wenn jetzt der zweite Endpunkt des durch A' gehenden Durchmessers im Kreise M mit A'', ferner der Fusspunkt des von m auf AB gefällten Perpendikels mit C' bezeichnet wird, so sind die rechtwinkligen Dreiecke AmC' und $A''A'B$ ähnlich [wegen der gleichen

Fig. 127.



Winkel bei A und A''], es ist also $Am : mC' = A'A'' : A'B$, oder da $A'B = A'm$, so folgt $mA \cdot mA' = 2Rr$. Die linke Seite dieser Gleichung ist die Potenz des Punktes m in Bezug auf den Kreis M, man hat daher endlich

$$R^2 - d^2 = 2Rr \text{ oder } \frac{r}{R+d} + \frac{r}{R-d} = 1\,.$$

Analoge Relationen ergeben sich, wenn man statt des innern dem Dreieck eingeschriebenen Kreises succesive die drei über den Seiten liegenden einführt.

Die abgeleitete Gleichung zeigt, dass zwischen den Radien zweier Kreise und der Entfernung ihrer Mittelpunkte eine bestimmte Bedingung erfüllt sein muss, damit von zwei Kreisen dem einen Dreiecke eingeschrieben werden können, welche dem andern umschrieben sind. Ist aber diese Bedingung erfüllt, so sind R, r, d nicht mehr unabhängig von einander, reichen also zur Bestimmung des Dreiecks, welches erst durch drei von einander unabhängige Elemente gegeben ist, nicht mehr aus, d. h. *es gibt dann unendlich viele Dreiecke, welche dem einen Kreis ein-, dem andern umgeschrieben sind.* Am einfachsten übersieht man diese Verhältnisse an zwei conzentrischen Kreisen, für welche unsre Bedingung erfüllt ist, wenn $R = 2r$.

In erweiterter Fassung stellt sich diese Betrachtung nun wie folgt dar: *Sind zwei Kegelschnitte in der Ebene gegeben, so wird es im Allgemeinen unmöglich sein, ein Dreieck zu finden, welches zugleich* *dem einen um-, dem andern eingeschrieben ist; wenn aber ein solches Dreieck existirt, so sind deren zugleich unendlich viele vorhanden.* Die Polarisation gibt uns ein Mittel an die Hand, um diesen Satz wenigstens für den Fall zu verifiziren, in welchem die gegebenen Kegelschnitte einen Brennpunkt gemein haben.

Sind zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 gegeben, für welche M ein gemeinschaftlicher Brennpunkt ist, und mit ihnen verbunden ein Dreieck, dessen Ecken ABC auf K_1 liegen, während die Seiten abc Tangenten von K_2 sind, so kann man um M als Mittelpunkt einen Kreis K schlagen und in Bezug auf denselben K_1 und K_2 polarisiren. Es entstehen dann als Polarfiguren zwei Kreise K_1' und K_2' von der Eigenschaft, dass die Polaren $a'b'c'$ von ABC den Kreis K_1'' berühren, während die Pole $A'B'C'$ von abc auf K_2' liegen. Es gibt also *ein* Dreieck, welches K_1' um- und K_2' eingeschrieben ist — und damit nach dem Obigen *unendlich viele.* Werden dieselben mit K_1' und K_2' in Bezug auf den Kreis M rückwärts polarisirt, so folgt, dass auch für K_1 und K_2 unendlich viele derartige Dreiecke existiren.

Es würde zuweit führen, an dieser Stelle die Bedingung allgemein zu entwickeln, welche zwischen den Axen von K_1 und K_2, und den von ihnen eingeschlossenen Winkeln existiren muss, damit die Construction der um- und eingeschriebenen Dreiecke möglich wird; wir behandeln hier nur ein Paar spezielle Fälle.

1. Alle Punkte, von denen aus eine Parabel unter dem Winkel 60^0 oder 120^0 gesehen wird, liegen auf einer bestimmten Hyperbel, die Brennpunkt und zugehörige Leitlinie mit der Parabel gemein hat. Diese Hyperbel und Parabel erfüllen die für K_1 und K_2 gestellte Bedingung und es tritt hier zudem der interessante Umstand ein, dass alle Dreiecke, die zugleich der Hyperbel ein- und der Parabel umgeschrieben sind, gleichseitige sein müssen. [Durch die Polarisation, welche die beiden Kegelschnitte zu conzentrischen Kreisen macht, werden die gleichseitigen Dreiecke wieder in gleichseitige verwandelt.] Ueber die einer Parabel umschriebenen gleichseitigen Dreiecke enthält §. 19. einen Satz, der einer Verallgemeinerung im Sinne unserer jetzigen Betrachtungen fähig ist.

2. Einen andern Fall ergibt die elementare Aufgabe, *ein Dreieck zu construiren aus dem Höhenpunkt H und dem umschriebenen Kreis M.* Aus einem Satze in §. 11., der in §. 22. wieder aufgenommen wurde, folgt, dass der Mittelpunkt M und der Höhenpunkt H als Brennpunkte eines Kegelschnittes angesehen werden können, der die Seiten des Dreiecks berührt und dessen grosse Axe gleich dem Radius des umschriebenen Kreises ist. Unsere bisherigen Entwicklungen

zeigen also, *dass die gestellte Aufgabe unendlich viele Lösungen zulässst,* so dass Kegelschnitt und Kreis die dazu nöthige Bedingung erfüllen.

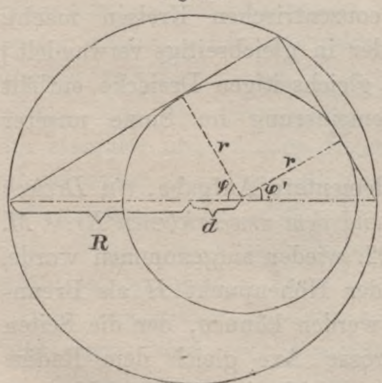
3. Man kann endlich fragen, unter welchen Bedingungen zwei confocale Kegelschnitte ein- und umgeschriebene Dreiecke zulassen. Die Frage lässt sich auf diejenige für zwei Kreise zurückführen, die wir schon erledigt haben, sobald man angibt, unter welchen Umständen zwei Kreise durch Polarisation auf einen dritten in confocale Kegelschnitte verwandelt werden. Seien M der Polarisationskreis, K_1 und K_2 die zu polarisirenden Kreise, so werden die Polaren $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ des Mittelpunktes M nach K_1 und K_2 zwei Gerade sein, deren Pole, in Bezug auf den Kreis M genommen, zu den Mittelpunkten der confocalen Kegelschnitte werden. Da confocale Kegelschnitte den nämlichen Mittelpunkt haben, so ist die nothwendige [und auch hinreichende] Bedingung dafür, dass K_1 und K_2 zu solchen verwandelt werden, die, dass $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ zusammenfallen.

Bezeichnet man die Halbaxen des einen Kegelschnittes mit a_1 und b_1, diejenigen des zweiten, ihm confocalen, mit a_2 und b_2 [was die Relation $a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2$ bedingt], so findet man als Bedingung dafür, dass dem ersten unendlich viele Dreiecke eingeschrieben werden können, die zugleich dem zweiten umschrieben sind:

$$\frac{a_2}{a_1} + \frac{b_2}{b_1} = 1\,.$$

[Im Anschluss an die Figur 104, §. 19. wurde der Satz aufgestellt: Geht ein Kreis durch den Brennpunkt einer Parabel und schneidet er dieselbe, so sind unzählige Dreiecke möglich, welche zugleich dem Kreise eingeschrieben und der Parabel umschrieben sind. Nach den Methoden, welche wir bis jetzt kennen lernten, kann dieser Satz nicht auf den entsprechenden für zwei Kreise zurückgeführt werden, sondern er entspricht durch Polarisation in Bezug auf einen Kreis um den Brennpunkt der Parabel sich selbst.]

Fig. 128.



Sollen zwei Kreise derart beschaffen sein, dass dem einen Vierecke eingeschrieben werden können, die zugleich dem andern umschrieben sind, so muss zwischen R, r, d ebenfalls eine bestimmte Relation erfüllt sein, und wenn diess der Fall ist, so gibt es unendlich viele solcher Vierecke.

Diese Relation wird [insofern man die Richtigkeit des Satzes zugibt] am einfachsten gefunden, indem man dasjenige Viereck zu Hülfe nimmt, welches symmetrisch zu dem gemeinschaftlichen Durchmesser der beiden Kreise liegt.

Die Figur 129 gibt

$$\cos\varphi = \frac{r}{R+d}, \quad \cos\varphi' = \frac{r}{R+d}$$

und da $\varphi + \varphi' = 90^0$, also $\cos\varphi^2 + \cos\varphi'^2 = 1$ ist,

$$\left(\frac{r}{R+d}\right)^2 + \left(\frac{r}{R-d}\right)^2 = 1\,.$$

Die Polarisation gibt auch jetzt wieder das Mittel an die Hand, um aus dieser Formel die Bedingung abzuleiten, unter welcher zwei Kegelschnitte, die einen gemeinsamen Brennpunkt haben, Vierecke zulassen, die dem einen um-, dem andern eingeschrieben sind. Daran knüpft sich die nämliche Frage für zwei beliebige Kegelschnitte. Es sei hier nur erwähnt, dass zwei spezielle Fälle früher behandelt worden sind. *Die Ecken aller Rechtecke, die einem Kegelschnitt umschrieben werden, liegen auf einem mit ihm conzentrischen Kreise,* und: *Werden einem Kreise alle Vierecke eingeschrieben, deren Diagonalen zueinander senkrecht stehen und in einem festen Punkte sich schneiden, so umhüllen deren Seiten einen bestimmten Kegelschnitt, der den festen Punkt zum Brennpunkt hat.* Endlich fügen wir noch den Satz an:

Seien wieder a_1 und b_1, a_2 und b_2 die Halbaxen zweier confocaler Kegelschnitte, so sind Vierecke dem ersten ein- und dem zweiten umschreibbar, insofern die Relation erfüllt ist:

$$a_1^2 : b_1^2 = a_2 : b_2\,.$$

§. 24. Der gerade Kegel.

Eine grosse Reihe der bis jetzt aufgefundenen Sätze über Ellipse, Hyperbel und Parabel und manche neue Eigenschaften dieser Curven lassen sich ableiten, indem man dieselben als Schnitte einer Ebene mit der Mantelfläche eines Kreiskegels auffasst. Diese Betrachtungsweise ist in frühern Zeiten der Ausgangspunkt zur Untersuchung der genannten Curven gewesen, und hat ihrer Bezeichnung als *Kegelschnitte* den Ursprung gegeben. Unsere in dieser Richtung gehende Betrachtung leiten wir durch einige elementare Sätze ein, die sich auf das Dreieck und die vier ihm eingeschriebenen Kreise beziehen.

Ist einem Dreieck ein Kreis eingeschrieben, so lassen sich die Abschnitte, in welche die Seiten durch die Berührungspunkte getheilt werden, *durch die Seiten ausdrücken.* Wiewohl jede Seite durch die Berührungspunkte der vier dem Dreieck eingeschriebenen Kreise in acht, und also alle drei Seiten in vier und zwanzig Abschnitte getheilt werden [jeweilen von den Ecken nach den Berührungspunkten gerechnet], so sind diese doch nur von einerlei Grösse, nämlich es entsprechen ihnen, wenn a, b, c die Seiten sind, nur die vier Ausdrücke $\frac{a+b+c}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$, $\frac{a-b+c}{2}$, $\frac{-a+b+c}{2}$. Denn es sei DKC ein beliebiges Dreieck und der ihm wirklich eingeschriebene d. h. der von ihm umschlossene Kreis M berühre die Seiten a, b, c bezüglich in G, E, A, so ist $DG = DA$, $KG = KE$, $CE = CA$; daher ist

$$DG = DA = \frac{a-b+c}{2}, \quad KG = KE = \frac{a+b-c}{2},$$
$$CE = CA = \frac{-a+b+c}{2}.$$

Ist ferner N einer der drei äussern Kreise, so ist

$$DB = DH = \frac{-a+b+c}{2}, \quad KH = KF = \frac{a+b+c}{2},$$
$$CF = CB = \frac{a-b+c}{2}.$$

Man sieht hieraus, dass jeder äussere Kreis diejenige Seite, über welcher er liegt, z. B. $DC = c$ in eben solche Abschnitte theilt, wie der innere, $CA = DB$ und $CB = DA$ [nur haben dieselben verwechselte Lage], und dass jener in den zwei andern Seiten Abschnitte hervorbringt, KH und KF, die dem halben Umfange des Dreiecks gleich sind.

Da nach dem Vorherstehenden $KD - KC = DG - CE = DA - CA = AB$, so folgt der nachstehende Satz: *Ist die Grundlinie DC eines Dreiecks DKC fest* [ihrer Grösse und Lage nach] *und ebenso der Punkt A, in welchem sie von dem eingeschriebenen Kreise M berührt wird, so ist auch ihr Berührungspunkt B mit dem über ihr liegenden eingeschriebenen Kreise N fest. Dagegen ist der Ort der Spitze K des Dreiecks eine bestimmte Hyperbel, welche die Endpunkte der Grundlinie zu Brennpunkten und die genannten Berührungspunkte zu Hauptscheiteln hat;* und umgekehrt:

Hat man irgend drei feste Punkte D, A und C in einer Geraden, denkt sich dann die Schaar Kreise, welche die Gerade in dem innern oder mittlern Punkte A berühren, und legt aus den zwei übrigen, B und C, an jeden Kreis Tangenten, so ist der Ort des Durchschnitts K dieser Tangentenpaare eine bestimmte Hyperbel, welche die äussern Punkte zu Brennpunkten und den mittlern zu einem Scheitel der Hauptaxe hat; zugleich berühren die Tangentenpaare die einzelnen Kreise N einer andern

Schaar, welche den andern Hauptscheitel B zum gemeinschaftlichen Berührungspunkt mit der Axe hat. Ferner:

Beschreibt man in alle Dreiecke, wovon jedes das Stück CD der Axe einer Hyperbel zwischen den Brennpunkten zur Grundlinie und irgend ein Paar zusammengehörige Leitstrahlen CK und DK zu Schenkeln hat, innerhalb und über der Grundlinie Kreise M und N, so berührt jedes Kreispaar die Grundlinie [oder die Axe der Hyperbel] *in denselben zwei festen Punkten A und B, nämlich in den Scheiteln A und B der Hyperbel.*

Liegt der Berührungspunkt des Kreises mit der Grundlinie des Dreiecks in der Verlängerung der Grundlinie, d. h. ist er von den drei festen Punkten einer der beiden äussern, wie z. B. in Ansehung des Dreiecks CK_1L, wo CL die feste Grundlinie und E und F die festen Berührungspunkte sind, *so folgen analoge Sätze für die Ellipse wie vorhin für die Hyperbel,* nämlich der Ort von K_1 ist eine Ellipse, welche die festen Endpunkte der Grundlinie C und L zu Brennpunkten und die festen Berührungspunkte E und F zu Hauptscheiteln hat, u. s. w.

Irgend zwei ausser einanderliegende Kreise M, N in einer Ebene haben vier gemeinschaftliche Tangenten, zwei äussere EF und GH und zwei innere AB und XY; jene schneiden sich in K, diese in K_1, und jene schneiden sich mit diesen in den vier Punkten C, L, D, J [welche beiläufig bemerkt, allemal mit den Mittelpunkten M und N in einem dritten Kreise liegen]. Da nun $CA = CE$ und $DB = DH = LF$ und ferner $CB = CF$, so ist

$$AB = XY = CL = DJ \text{ und } CD = JL = EF = GH, \text{ d. h.:}$$

Die Strecken, welche auf dem einen Tangentenpaare durch die Berührungspunkte begrenzt werden, sind den Stücken gleich, welche dieses Paar vom andern Paare abschneidet.

Wenn das System der beiden Kreise und ihrer gemeinschaftlichen Tangenten um die Axe KMK_1N herumgedreht, so entsteht folgendes:

1. *Die Kreise MN beschreiben zwei Kugeln M, N;*

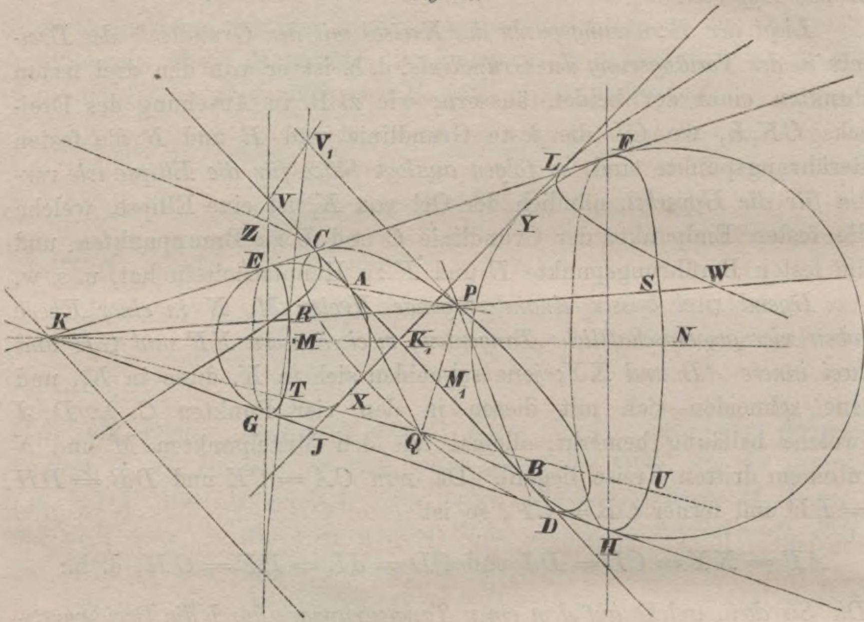
2. *Die beiden Tangentenpaare erzeugen zwei gerade Kegel K, K_1,* welche die gemeinschaftlichen umschriebenen Kegel jener Kugeln (1) sind, K der äussere und K_1 der innere; bei jenem liegen beide Kugeln in dem nämlichen Theil oder der nämlichen Hälfte des Kegels, bei diesem in verschiedenen Hälften.

3. *Jeder Kegel berührt jede Kugel in einem Kreise,* z. B. der Kegel K berührt sie in den Kreisen ERG, FSH, welche von den Berührungspunkten E oder G, F oder H beschrieben werden. Die

Kanten des Kegels bis an den Berührungskreis haben gleiche Länge, ebenso die Stücke derselben zwischen beiden Berührungskreisen, d. h. $EF = RS = GH =$ constant.

4. *Jede Ebene, welche einen der beiden Kegel längs einer Kante berührt, berührt zugleich beide Kugeln, und auch umgekehrt.* Eine solche Berührungsebene wird erhalten oder bestimmt, wenn man z. B. an einen der genannten Kreise, etwa an ERG in irgend einem Punkte

Fig. 129.



R die Tangente legt, und durch sie und den durch denselben Punkt gehenden Strahl [Kante] KR des zugehörigen Kegels K die Ebene sich denkt. Es ist klar, dass die Berührungspunkte R, S beider Kugeln in dem nämlichen Strahle liegen, und dass die Ebene durch diesen und durch die Axe MN allemal auf der Berührungsebene senkrecht steht, so dass also z. B. die Ebene $CPDQC$, welche in der Geraden CD auf der Grundebene [d. h. der Ebene der ursprünglichen Figur, der Zeichnungsfläche] senkrecht steht, eine der genannten berührenden Ebenen ist, die den Kegel K_1 längs des Strahls CD, und die Kugeln M, N in den Punkten A, B berührt. So verhält es sich aber offenbar mit jeder berührenden Ebene, weil jede durch die Axe gehende Ebene als jene Grundebene angesehen werden kann, indem sie durch Drehung in die Lage derselben gelangt. Es fällt ferner in die

Augen, dass jede Ebene, welche den einen Kegel berührt, den andern schneidet, wie z. B. die letztgenannte, den innern Kegel K_1 berührende Ebene den äussern K in der Linie $CPDQC$ schneidet, und dass ferner die gesammten gemeinschaftlichen Tangentenebenen der zwei Kugeln zugleich die gesammten Tangentenebenen der zwei Kegel, jeden einzeln betrachtet, sind; diess gilt natürlich auch umgekehrt.

5. *Der Ort der Mittelpunkte aller Kugeln, welche einem geraden Kegel eingeschrieben sind, d. h. welche den Kegel in Kreisen berühren, ist die Axe* [Hauptaxe] *des Kegels, und zwar so, dass umgekehrt jeder Punkt der Axe der Mittelpunkt einer solchen Kugel ist.* Und ferner: Wird der Kegel von irgend einer Ebene E geschnitten, die jedoch weder durch seine Axe, noch durch seinen Mittelpunkt [K oder K_1] geht, so gibt es allemal irgend zwei bestimmte umgeschriebene Kugeln, welche jene Ebene berühren [es mag E beide oder nur die eine Hälfte des Kegels schneiden]. Man denke sich irgend eine den Kegel berührende Ebene E_1 und ferner die zwei Ebenen e und e_1, welche die von E und E_1 gebildeten Winkel hälften, so werden dieselben die Axe in den Mittelpunkten der gesuchten Kugeln treffen. —

Um nun den Schnitt, welchen irgend eine Ebene mit einem geraden Kegel bildet, genauer zu erforschen, betrachten wir zunächst den Schnitt $CPDQC$, welcher der gleichbenannten Ebene und dem Kegel K angehört. Zieht man aus irgend einem Punkte P des Schnittes nach den Berührungspunkten A, B Gerade PA, PB, so berühren sie daselbst die Kugeln M, N; daher ist $PA = PR$ und $PB = PS$ [als Tangenten aus einem Punkte an eine Kugel M oder N] und folglich $PA + PB = PR + PS = RS =$ constant; d. h.: *Jeder Punkt P des Schnittes hat von den zwei Punkten A und B, in welchen seine Ebene die Kugeln M und N berührt, eine unveränderliche Summe der Entfernungen, folglich ist derselbe eine Ellipse, welche jene Punkte zu Brennpunkten hat, und deren Hauptaxe dieser constanten Summe gleich ist;* nun ist CD offenbar die Hauptaxe der Ellipse, daher ist $RS = CD$.

Entsprechender Weise folgt, dass jeder Punkt W des Scheitels, welcher zwischen einer Ebene $WLCZ$ und dem Kegel K_1 stattfindet, von den zwei Punkten F, E, in welchen die Ebene von den Kugeln N, M berührt wird, einen constanten Unterschied der Entfernungen hat, und dass folglich der Schnitt eine Hyperbel ist, welche jene Punkte zu Brennpunkten hat, und deren Hauptaxe CL gleich diesem Unterschiede ist, also $LC = AB = XY$.

Es ist leicht zu zeigen, dass nun umgekehrt, wenn blos der gerade Kegel [K oder K_1] und eine beliebige, ihn schneidende Ebene CPD oder WLC gegeben sind, aber die sie berührenden Kugeln M,

N nicht, diese doch immer vorhanden und nach 3) zu finden sind, worauf die Beschaffenheit des Schnittes sich sofort ergibt. Er ist nämlich eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem seine Ebene nur die eine oder beide Hälften des Kegels schneidet.

Es bleibt aber noch der besondere Fall zu untersuchen übrig, wo die schneidende Ebene mit irgend einer, den Kegel längs einer seiner Kanten berührenden Ebene parallel ist. In diesem Falle kann sie, wie die Anschauung unmittelbar zeigt, nur die eine Hälfte des Kegels schneiden, und zwar alle Kanten bis auf die eine, in welcher jene Ebene berührt. Auch entsteht dieser Fall dadurch, dass sich die eine Kugel N in's Unendliche entfernt. *Dabei ist nun zu beweisen, dass der Schnitt eine Parabel ist.* Diess kann unter andern dadurch geschehen, dass gezeigt wird, der Durchschnitt V der Kreisebene ERG und der Parabelebene CPD_∞ sei die Leitlinie der Parabel, denn für diesen Fall ist $CA = CE = CV$ und die Gerade V steht senkrecht auf der Axe CD. — Auch bei der Ellipse und der Hyperbel gehen die Ebenen der Berührungskreise [ERG etc.] durch die Leitlinie. Der Beweis kann für alle drei Kegelschnitte wie folgt geführt werden [wobei die von uns gegebene Figur noch zu vervollständigen ist]: a) Bei der Parabel lege man durch den Parallelstrahl KG der Schnittebene CD, wo D nun im Unendlichen liegt, Ebenen, so wird immer $PV_1 \parallel VC \parallel KG$ und GRV_1 eine Gerade sein [wo V_1 in V liegt], daher Dreieck $KGR \sim PRV_1$, und da stets $KG = KR$ auch $PR = PV_1 = PA$, folglich der Schnitt eine Parabel und V die Leitlinie. b) Für die Ellipse CDP ziehe man durch K eine Gerade KX parallel der grossen Axe CD; X sei der Punkt, in welchem der Strahl KH von der Kreisebene ERG getroffen wird, so ist wieder $PV_1 \parallel CD \parallel KX$ und Dreieck $KXR \sim PV_1R$; weil nun $KX : KR = PV_1 : PR$ [$= PA$] $=$ constant, so ist VV_1 die Leitlinie der Ellipse. Für die Hyperbel wird der Beweis in durchaus gleicher Weise geführt.

Alles zusammengefasst ergibt sich also: *Der gegenseitige Durchschnitt eines geraden Kegels K oder K_1 und irgend einer Ebene E ist, wenn diese nicht durch den Mittelpunkt des Kreises geht, eine der drei Curven, Ellipse, Hyperbel oder Parabel, und zwar die erste, zweite oder dritte, je nachdem die schneidende Ebene E nur die eine Hälfte des Kegels* [und zwar alle Kanten desselben], *oder beide Hälften* [mit Ausnahme zweier Kanten], *oder nur die eine Hälfte desselben* [und von dieser alle Kanten bis auf eine] *trifft. Aus diesem Grunde heissen die drei Curven Kegelschnitte.* — Die Axe KM des Kegels trifft die Hauptaxe des Kegelschnittes, so dass beide Axen in einer Ebene E_1 liegen, und diese Ebene E_1 steht auf der schneidenden Ebene senkrecht. Es folgt daraus, dass das Perpendikel aus K auf E die Hauptaxe des Scheitels trifft. Umgekehrt: *Steht irgend ein gerader Kegel über einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, so schneiden sich die Axe des Kegels und die Hauptaxe der Kegelschnitts; die beiden liegen stets in einer Ebene, welche senkrecht zur Ebene des Kegelschnittes steht.*

Es ergeben sich nun folgende weitere Eigenschaften der Kegelschnitte: In der Ellipse CPD ziehe man den Durchmesser PMQ, so wie den Strahl QA, so ist $QA = PB = QT$ [QA und QP sind Tangenten an M] $= PS$, und ferner ist $KR = KT$, daher ist $KP + KQ = KT + (TQ + KP) = KT + KS =$ constant, also namentlich auch $KE + KF = KC + KD$, d. h.: *Der von einer Ellipse begrenzte gerade Kegel hat die Eigenschaft, dass die Summe je zweier Kanten KP und KQ, welche nach den Endpunkten irgend eines Durchmessers PQ der Ellipse gehen, constant ist,* also z. B. stets der Summe der Kanten KC, KD, welche nach den Hauptscheiteln der Ellipse gehen, gleich ist, oder auch der Summe zweier Kanten gleich, welche bis zum Berührungspunkt der einen und andern Kugel genommen werden.

Eine analoge Eigenschaft findet man für die Hyperbel, nämlich: *Steht ein gerader Kegel über einer Hyperbel, so ist die Differenz zwischen je zwei Kanten desselben, welche nach den Endpunkten eines Durchmessers der Hyperbel gehen, constant, also gleich der Differenz der beiden Kanten, welche die Hauptscheitel der Hyperbel treffen, ode auch gleich dem Unterschiede zweier Kanten, die von den Berührungspunkten der einen und andern Kugel begränzt werden,* d. h.: $= K_1 Y - K_1 X = K_1 B - K_1 A$.

Wird die Ellipse $CPDQ$ als der Grösse und Lage nach veränderlich, oder als fest angenommen, so kann nach dem Orte der Mittelpunkte (Scheitel) aller durch dieselbe gehenden geraden Kegel K gefragt werden; ähnliches in Rücksicht der Hyperbel. Die Beantwortung dieser Frage folgt aus dem Bisherigen sehr leicht. Zunächst weiss man, dass der Mittelpunkt K oder K_1 des Kegels, so wie dessen Axe KMK_1 in einer festen Ebene CDK liegen müssen, welche längs der Hauptaxe des gegebenen Kegelschnitts auf dessen Ebene senkrecht steht. Jene Ebene schneidet aber im Falle der Ellipse den begränzten Theil dieses Kegels, wie dieser auch liegen mag, in einem Dreieck CDK, dessen Grundlinie CD als Hauptaxe der Ellipse fest ist, und die jedesmaligen zwei Kugeln M und N schneidet sie in zwei Kreisen M, N, welche dem Dreieck eingeschrieben sind; die Berührungspunkte dieser Kreise mit der Grundlinie sind die Brennpunkte A und B der Ellipse. Daraus folgt also, dass der Ort von K eine Hyperbel ist, welche die

Endpunkte C, D der Grundlinie zu Brennpunkten und die festen Berührungspunkte, d. h. die Brennpunkte der Ellipse zu Hauptscheiteln hat. Aehnlicherweise folgt, wenn man die Hyperbel zur festen gemeinschaftlichen Basis der geraden Kegel K_1 annimmt, dass dann der Ort der Mittelpunkte der letztern eine Ellipse sei, welche die Hauptscheitel der Hyperbel zu Brennpunkten und deren Brennpunkte zu Scheiteln hat. Daher sind zwei solche zusammengehörige Kegelschnitte, eine Ellipse und eine Hyperbel, zugleich *reziprok*, d. h. jeder ist der Ort der Mittelpunkte aller gerader Kegel, welche durch den andern gehen. Geht einer dieser Kegelschnitte durch unendliche Erweiterung in eine Parabel über, so thut der andere zugleich dasselbe, und dann sind die zwei Parabeln einander in gleichem Sinne zugeordnet; auch sind sie einander gleich. [Die Axe des Kegels ist stets Tangente des Kegelschnitts, welcher der Ort des Kegelmittelpunkts ist, und also nothwendig Tangente in dem jedesmaligen zugehörigen Mittelpunkt.] Man hat also den Satz: *Der Ort der Mittelpunkte aller geraden Kegel, welche durch irgend einen und denselben Kegelschnitt gehen, ist ein bestimmter zweiter Kegelschnitt, welcher mit jenem ersten in solcher Beziehung steht, dass dieser umgekehrt der Ort der Mittelpunkte aller geraden Kegel ist, die durch den zweiten Schnitt gehen; und ferner stehen die zwei Kegelschnitte zueinander in der Beziehung, dass ihre Ebenen sich rechtwinklig schneiden, dass die Brennpunkte eines jeden mit den Hauptscheiteln des andern zusammenfallen [also ihre Hauptaxen im Durchschnitte beider Ebenen liegen], und dass daher nur zwei verschiedene Hauptfälle möglich sind, nämlich, dass entweder α) der eine Kegelschnitt eine Ellipse und der andere eine Hyperbel ist, oder β) beide Kegelschnitte einander gleiche Parabeln sind.*

Betrachtet man den geraden oder Kreiscylinder als speziellen Fall des geraden Kegels, so folgt, dass sein Mittelpunkt im Unendlichen liegt. Es ergibt sich also: *Durch irgend eine feste Ellipse gehen zwei, aber nur zwei gerade Cylinder; durch eine Hyperbel keiner, und durch eine Parabel stets einer, der aber flach wird, d. h. in eine Ebene, die Ebene der Parabel übergeht.*

Die Brennpunkte der Ellipse und der Hyperbel haben auch die Eigenschaft, dass wenn man aus einem derselben nach den Endpunkten irgend eines [reellen] Durchmessers Strahlen zieht, wie etwa AP, AQ bei der Ellipse, dann für die Ellipse die Summe und für die Hyperbel die Differenz dieser Strahlen constant ist. In dieser Hinsicht hat demnach der Mittelpunkt jedes geraden Kegels K oder K_1, welcher über einer Ellipse oder einer Hyperbel steht, dieselbe Eigenschaft, wie jeder ihrer Brennpunkte für sich betrachtet, so dass man den genannten Mittelpunkten die Benennung *Brennpunkte ausser der Ebene* oder *räumliche Brennpunkte* des Kegelschnitts geben könnte.

Noch entschiedener spricht sich diese übereinstimmende Eigenschaft aus, wenn man zwei von jenen Kegelmittelpunkten gemeinsam betrachtet. Man denke sich z. B. über der Ellipse $CPDQ$ irgend zwei gerade Kegel K und K_2, deren Mittelpunkte in demselben Zweige der Ortshyperbel liegen sollen, und zwar in demjenigen, dessen Scheitel A ist, so ist, wenn man sich die in A berührenden, den Kegeln eingeschriebenen Kugeln M, M_2 denkt, und bemerkt, dass für jede Kante, wie etwa KP, $PA = PR = PR_2$ und KR, K_2R_2 constant sind: $KP - PA =$ const., und $K_2P - PB =$ const., mithin auch $KP - K_2P =$ const. $= KR = K_2R_2$. Ist ferner K_3 ein gerader Kegel über der nämlichen Ellipse, aber liegt sein Mittelpunkt im andern Zweige der Ortshyperbel, also dem Brennpunkte B näher, als dem Brennpunkte A, so hat man $K_3P + PA =$ const. und mithin: $KP + K_3P =$ const. $= KR + K_3R_3$. Das heisst:

Jede feste Ellipse hat unzählig viele Paare von Brennpunkten, in dem Sinne nämlich, dass wenn man aus einem solchen Punktenpaare nach einem Punkte ihres Umfanges Strahlen zieht, alsdann entweder α) die Summe oder β) der Unterschied derselben constant ist, und zwar liegen alle diese Brennpunkte in einer bestimmten, der Ellipse auf eigenthümliche Weise zugeordneten Hyperbel, d. h. je zwei Punkte in dieser sind ein Paar Brennpunkte jener, und es kommt jedem Paar Brennpunkte die Eigenschaft α) oder β) zu, je nachdem sie in verschiedenen oder in dem nämlichen Zweige der Hyperbel liegen.

Aehnlicherweise folgt für die Hyperbel: *Jede in fester Lage betrachtete Hyperbel hat unzählige Paare von Brennpunkten, in dem Sinne, dass die Differenz ihrer Abstände von allen Punkten ihres Umfangs constant ist; der Ort aller solcher Brennpunkte ist die der Hyperbel zugeordnete Ellipse d. h. je zwei Punkte in dieser sind ein Paar Brennpunkte von jener.*

Schliesslich hat man für die Parabel: *Jede feste Parabel hat unzählige Paare von Brennpunkten in dem Sinne, dass die Differenz der Abstände jeden solchen Punktenpaars von den einzelnen Punkten der Parabel constant ist; der Ort aller dieser Brennpunkte ist die der festen Parabel zugeordnete Parabel, d. h. jede zwei Punkte in dieser sind ein solches Paar für jene, und zugleich auch umgekehrt: Die Punkte der erstern sind in demselben Sinne die Brennpunkte der zweiten Parabel.*

Aus den vorigen Sätzen folgen unmittelbar nachstehende:

Stehen zwei gerade Kegel K, K_2 über dem nämlichen Kegelschnitte, und man trägt die Kanten PK_2 des einen auf den entsprechenden Kanten

PK des andern ab [dabei werden als entsprechende Kanten diejenigen bezeichnet, die nach dem nämlichen Punkte des Kegelschnittes gehen], *entweder alle nach dem Mittelpunkte K hin, wo sie auch über diesen hinausreichen können, oder alle auf der Verlängerung über den Kegelschnitt hinaus, so sind in jedem Falle die Endpunkte derselben gleichweit von dem Mittelpunkte K entfernt, d. h. sie liegen in einem Kreise [ERG* oder *FSH] in welchem die Kegelfläche K von einer Kugel M oder N berührt wird.*

Man hat ferner den nahezu gleichlautenden Satz: Steht ein geader Kegel K über einem Kegelschnitt, und man trägt auf jeder Kante PK desselben die ihr entsprechenden Leitstrahlen PA, PB des Scheitels ab, und zwar den einen Strahl PA, welcher nach dem, dem Mittelpunkte K des Kegels näher liegenden Brennpunkt führt, nach diesem Mittelpunkte hin, den andern aber nach entgegengesetzter Richtung, so liegen die Endpunkte der abgetragenen Strahlen in dem einen und andern Falle in einem Kreise ERG, FSH in welchem der Kegel von einer Kugel M, N berührt wird; und umgekehrt: Trägt man die Kanten PK des Kegels auf den entsprechenden Leitstrahlen PA, PB des Schnittes ab und zwar für den dem Scheitel K nähern Brennpunkt A nach diesem hin, für den andern B dagegen auf der Verlängerung des Strahls, so liegen die Endpunkte derselben beziehlich in einem Kreise A oder B. Schliesslich: Beschreibt man um die Brennpunkte A und B eines Kegelschnitts zwei Kreise unter der Bedingung, dass die Summe ihrer Radien $AA_1 + BB_1 = CD =$ Hauptaxe des Schnittes, und trägt die Differenzen der Radien und Leitstrahlen PA, PB, also PA_1 und PB_1 auf der zugehörigen Kante PK des geraden Kegels ab, so liegen die Endpunkte in einem und demselben Kreise.

Siebentes Kapitel.

Die Kegelschnitte als Projection des Kreises.

§. 25. Kreis und Kegelschnitt im geraden Kegel.

Um die in §. 7. abgeleiteten harmonischen Eigenschaften des Kreises in bequemer Weise auf die Kegelschnitte überzutragen, müssen wir neben harmonischen Punkten und harmonischen Strahlen noch harmonische Ebenen in unsere Betrachtung einführen. *Wir nennen vier harmonische Ebenen vier Ebenen, welche von einem Punkte aus durch vier, mit diesem Punkte nicht in einer Ebene liegende harmonische Strahlen gelegt werden können.* Dieselben werden auch erzeugt durch eine Gerade und vier harmonische Punkte, welche mit der Geraden nicht in derselben Ebene liegen. Vier harmonische Ebenen werden von jeder Geraden in vier harmonischen Punkten, von jeder Ebene in vier harmonischen Strahlen geschnitten; es fällt also nicht schwer zu drei gegebenen Ebenen bei bestimmter Zuordnung die vierte harmonische zu construiren.

Als spezielle Fälle seien hier erwähnt: 1) Zwei Ebenen und ihre beiden winkelhalbirenden Ebenen; 2) Vier parallele Ebenen, welche durch vier harmonische Punkte gelegt sind. [Man schliesst daraus, dass im Sinne der harmonischen Eigenschaften ein System paralleler Ebenen aufgefasst werden kann als ein System von Ebenen, welche durch dieselbe unendlich entfernte Gerade gehen.] *3) Drei parallele Ebenen, von denen die eine in der Mitte zwischen den beiden andern liegt, und irgend eine unendlich entfernte Ebene.* [Um den Satz nicht umstossen zu müssen, dass zu drei Ebenen bei bestimmter Zuordnung stets nur eine vierte harmonische existirt, bedient man sich des Ausdrucks: *Die unendlich entfernte Ebene des Raumes*, was heissen soll, dass in Ansehung harmonischer Eigenschaften alle unendlich entfernten Punkte des Raumes so aufgefasst werden können, als lägen sie auf einer und derselben Ebene.]

Wählt man einen Kreis M in der Ebene E und einen durch M gehenden geraden Kegel mit der Spitze [oder dem Mittelpunkte] D, der ausserhalb der Ebene E liegt, so tritt Folgendes ein: Jedem Punkte der Ebene E entspricht im Allgemeinen ein geradliniger Strahl durch D, so dass jeder Punkt auf dem entsprechenden Strahle liegt, und jeder Strahl durch seinen entsprechenden Punkt geht; jedem Punkte des Kreises M entspricht ein Strahl des Kegels D, dem Mittelpunkte des Kreises die Axe des Kegels. Zu jeder Geraden in E gehört jetzt eine Ebene durch D und umgekehrt, namentlich entspricht der durch D parallel zu E gelegten Ebene die unendlich entfernte Gerade der Ebene E; zu einer Tangente des Kreises M gehört eine Tangentialebene des Kegels D. Vier harmonische Punkte in E bestimmen vier harmonische Strahlen in D und vier harmonische Strahlen in E ergeben vier harmonische Ebenen durch D.

Schneidet man den Kegel D durch eine Ebene E_1, welche weder durch D geht, noch der Ebene E parallel läuft, so erhält man als Ort der gemeinsamen Punkte von D und E_1 einen Kegelschnitt K, der durch den Kegel mit dem Kreise M in nachfolgende Beziehung tritt: Jedem Punkte von M entspricht derjenige Punkt von K, welcher mit ihm auf derselben Kante des Kegels D liegt, und ebenso schneidet eine Tangentialebene von D auf E und E_1 entsprechende Tangenten von M und K aus. Zu vier harmonischen Punkten in der Ebene des Kreises findet man zugehörige vier harmonische Punkte in der Ebene des Kegelschnitts K, zu vier harmonischen Strahlen in der erstgenannten Ebene vier harmonische Strahlen in der zweiten u. s. f.

Auf Grund dieser einfachen Betrachtungen lassen sich demnach eine Reihe von Sätzen, welche vom Kreise gelten, ohne jegliche Mühe auf einen beliebigen Kegelschnitt übertragen, indem man einfach bedenkt, dass irgend ein Kegelschnitt mit einem willkürlichen Kreise stets in die vorhin untersuchte Lage gebracht werden kann. Man construire nämlich über dem Kegelschnitt einen geraden Kegel [was auf unendliche viele Arten möglich ist] und suche unter den zur Axe des Kegels senkrecht stehenden Ebenen diejenige aus, welche einen Kreis ergibt, der mit dem gegebenen Kreise gleichen Radius hat. Es ergeben sich dann aus den folgenden links stehenden Sätzen unmittelbar die auf der rechten Seite befindlichen.

Eine Gerade hat mit einem Kreise zwei, einen oder keinen Punkt gemein, je nachdem sie denselben schneidet, berührt oder nicht schneidet. Der Kreis ist desshalb eine Curve zweiten Grades.

Eine Gerade hat mit einem Kegelschnitte zwei, einen oder keinen Punkt gemein, jenachdem sie denselben schneidet, berührt oder nicht schneidet. Der Kegelschnitt ist desshalb eine Curve zweiten Grades.

Von einem Punkte aus lassen

Von einem Punkte aus lassen

sich an einen Kreis zwei, eine oder keine Tangente legen, je nachdem er ausser dem Kreise, auf demselben, oder innerhalb desselben liegt. Der Kreis ist desshalb eine Curve zweiter Klasse.

Zieht man aus einem Punkte p *in der Ebene eines Kreises Gerade, von denen irgend eine den Kreis in* p_1 *und* p_2 *treffen möge, und bestimmt jedesmal zu* p, p_1 *und* p_2 *den vierten harmonischen,* p *zugeordneten Punkt* p', *so ist der Ort dieses Punktes* p' *eine Gerade* P, *welche die Polare des Punktes* p *in Bezug auf den Kreis heisst. Umgekehrt wird* p *der Pol der Geraden* P *genannt.*

In Bezug auf einen Kreis gehört zu jedem Punkte der Ebene stets eine, aber auch nur eine Polare, und zu jeder Geraden stets ein, aber auch nur ein Pol. Liegt der Pol p *ausserhalb des Kreises, so schneidet die Polare* P *den Kreis in zwei Punkten und ist zugleich die Berührungssehne der von* p *aus an den Kreis gelegten Tangenten. Befindet sich* p *auf dem Kreise selbst, so ist die zugehörige Polare die Tangente in* p. *Wenn schliesslich der Pol im Innern des Kreises liegt, so schneidet die Polare den Kreis nicht.*

Die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kreis, der gezeichnet vorliegt, kann mittelst des Lineals allein construirt werden; auch ergibt diese Construction zugleich die möglichen Tangenten, die

sich an einen Kegelschnitt zwei, eine oder keine Tangente legen, je nachdem er ausserhalb des Kegelschnittes, auf demselben oder innerhalb desselben liegt. Der Kegelschnitt ist desshalb eine Curve zweiter Klasse.

Zieht man aus einem Punkte p *in der Ebene eines Kegelschnittes Gerade, von denen irgend eine den Kegelschnitt in* p_1 *und* p_2 *treffen möge, und bestimmt jedesmal zu* p, p_1 *und* p_2 *den vierten harmonischen* p *zugeordneten Punkt* p', *so ist der Ort dieses Punktes* p' *eine Gerade* P, *welche die Polare des Punktes* p *in Bezug auf den Kegelschnitt heisst. Umgekehrt wird* p *der Pol der Geraden* P *genannt.*

In Bezug auf einen Kegelschnitt gehört zu jedem Punkte der Ebene stets eine, aber auch nur eine Polare und zu jeder Geraden stets ein, aber auch nur ein Pol. Liegt der Pol p *ausserhalb des Kegelschnittes, so schneidet die Polare* P *den Kegelschnitt in zwei Punkten und ist zugleich die Berührungssehne der von* p *aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten. Befindet sich* p *auf dem Kegelschnitte selbst, so ist die zugehörige Polare die Tangente in* p. *Wenn schliesslich der Pol im Innern des Kegelschnittes liegt, so schneidet die Polare den Kegelschnitt nicht.*

Die Polare irgend eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt, der gezeichnet vorliegt, kann mittelst des Lineals allein construirt werden; auch ergibt diese Construction zugleich die möglichen Tangenten, *von dem Punkte aus an den Kreis gehen, linear.*

Bewegt sich ein Punkt p auf einer Geraden G, so dreht sich seine Polare in Bezug auf einen festen Kreis um einen Punkt, welcher der Pol von G ist. Umgekehrt, dreht sich eine Gerade G um einen festen Punkt p, so durchläuft der Pol von G in Bezug auf einen gegebenen Kreis eine Gerade, welche die Polare von p ist.

die von dem Punkte aus an den Kegelschnitt gehen, linear.

Bewegt sich ein Punkt p auf einer Geraden G, so dreht sich seine Polare in Bezug auf einen festen Kegelschnitt um einen Punkt, welcher der Pol von G ist. Umgekehrt, dreht sich eine Gerade G um einen festen Punkt p, so durchläuft der Pol von G in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt eine Gerade, welche die Polare von p ist.

§. 26. Die Sätze von Pascal und Brianchon.

Die Sätze von Pascal und Brianchon, welche in §. 4. und §. 6. für den Kreis und in §. 23. für jeden Kegelschnitt abgeleitet worden sind, lassen sich zufolge der Betrachtungen in §. 25. sofort vom Kreise auf den Kegelschnitt übertragen. *Sie beweisen, dass einerseits durch fünf seiner Punkte und anderseits durch fünf seiner Tangenten ein Kegelschnitt bestimmt ist, auch dienen sie als Mittel, um in dem einen oder andern Falle beliebig viele andere Punkte und Tangenten des Kegelschnitts mittelst des Lineals allein zu construiren*).*

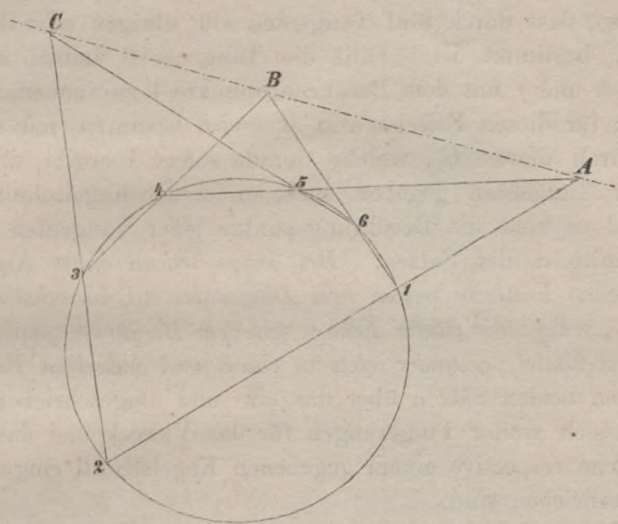
Sind z. B. die fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 fest, während der sechste 6 sich in dem Kegelschnitte K bewegt, so bleibt von den drei Durchschnittspunkten gegenüberliegender Seiten des Sechsecks 123 456 blos A fest und B, C bewegen sich, jedoch vermöge des Pascal'schen Satzes so, dass die durch sie bestimmte Gerade G stets durch A geht, also sich um diesen Punkt A dreht. Wenn daher umgekehrt durch A irgend eine Transversale G gezogen wird, so muss dieselbe die zwei festen Geraden 23, 34 stets in zwei solchen Punkten C, B schneiden, welche, wenn sie beziehlich mit den festen Punkten 5, 1 durch Gerade $C5$, $B1$ verbunden werden, irgend einen neuen sechsten Punkt 6 des Kegelschnittes K bestimmen. Wenn also G um A gedreht wird, so müssen C und B sich so bewegen, oder die Geraden $C5$, $B1$ sich um die festen Punkte 5, 1 so drehen, dass der Punkt 6 den ganzen Kegelschnitt durchläuft und beschreibt, demnach ist durch die fünf festen Punkte 12345 nur ein einziger Kegelschnitt möglich.

---

*) In den Figuren 130, 131, 132 ist der Bequemlichkeit wegen statt eines allgemeinen Kegelschnitts ein Kreis gezeichnet worden.

Fällt 6 in seiner Bewegung endlich mit dem festen 1 zusammen, so wird $B1$ Tangente in 1. Daraus lernt man, in den fünf festen Punkten 1 2 3 4 5 Tangenten an K zu legen, wenn K nicht gezeichnet vorliegt, sondern nur jene fünf Punkte gegeben sind. Durch den

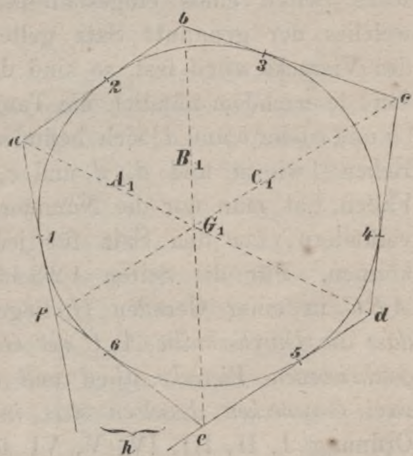
Fig. 130.



Durchschnitt C der festen, gegebenen Geraden 2 3, 1 5, und durch A ziehe man G, so muss diese Geraden der festen 3 4 in demjenigen Punkte B begegnen, durch welchen die Tangente in 1 geht, wodurch diese gefunden ist; ebenso die übrigen. Diese Construction gründet sich also auf folgenden besondern Satz [wobei nämlich eine Seite des eingeschriebenen Sechsecks unendlich klein, d. h. eine Tangente wird]: *Bei jedem irgend einem Kegelschnitt eingeschriebenen Fünfeck fallen die Durchschnitte A, C zweier Paar Gegenseiten mit dem Durchschnitte B der fünften Seite und der Tangente in der ihr gegenüberliegenden Ecke in irgend eine und dieselbe Gerade.*

Sind andererseits fünf Tangenten 1, 2, 3, 4, 5 eines Kegel-

Fig. 131.



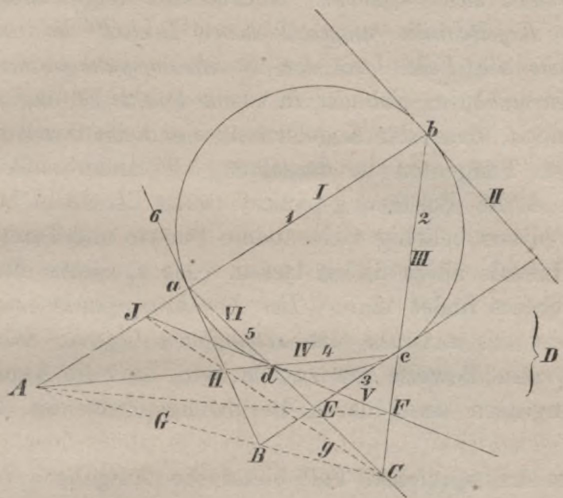
schnittes K_1 fest, so sind in Rücksicht des Sechsecks, welches sie mit irgend einer sechsten 6 bilden, auch die vier Ecken a, b, c, d fest, so wie die Hauptdiagonale A_1, und es muss daher, wenn die Tangente 6 ihre Lage ändert, der Durchschnitt G_1 der zwei übrigen Hauptdiagonalen B_1, C_1 jene feste Gerade A_1 durchlaufen, so dass umgekehrt jedem Punkte G_1 in A_1 eine bestimmte Tangente 6 entspricht, und zwar so, dass durch fünf Tangenten alle übrigen oder der Kegelschnitt K_1 bestimmt ist. Fällt die Tangente 6 endlich auf 1, so fällt e mit h und f mit dem Berührungspunkte 1 zusammen, und auch umgekehrt; für diesen Fall ist also $B_1 = bh$ bestimmt, mit ihm auch G_1 und durch diesen C_1, welche Gerade sofort 1 ergibt, d. h. wenn fünf seiner Tangenten gegeben sind, so ist der Kegelschnitt K_1 bestimmt und es sind die Berührungspunkte jener Tangenten leicht zu finden vermittelst des Satzes: *Bei jedem irgend einem Kegelschnitte umgeschriebenen Fünfecke treffen zwei Diagonalen* ad, bh *nebst derjenigen Geraden* $c1$, *welche die fünfte Ecke* c *mit dem Berührungspunkte* 1 *ihrer Gegenseite verbindet, einander stets in einem und demselben Punkte* G_1.

Aus den beiden Sätzen über das ein- und umgeschriebene Sechseck lassen sich weiter Folgerungen für das Viereck und das Dreieck ziehen, welche respective einem gegebenen Kegelschnitt eingeschrieben oder umgeschrieben sind.

Werden nämlich bei einem eingeschriebenen Sechseck zwei Seiten gleichsam aus dem Kegelschnitte ausgestossen, so dass sie in Tangenten übergehen, so muss dennoch die Eigenschaft des Pascal'schen Satzes bestehen bleiben, so dass die vier Seiten jedes eingeschriebenen Vierecks nebst zwei Tangenten in irgend zwei Ecken desselben als sechs Seiten eines eingeschriebenen Sechsecks anzusehen sind, für welches der genannte Satz gelten muss. Hält man die vier Seiten des Vierecks $abcd$ fest, so sind dabei noch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich die Tangenten an gegenüberstehenden Ecken [a und c oder b und d] sich befinden, oder aber an aufeinanderfolgenden Ecken [wie a und d, d und c, c und b, b und a]. Nach diesen Fällen hat man nur die Nummern der sechs Seiten des Sechsecks zu verändern, um den Satz für jeden Fall insbesondere anwenden zu können. Für die Seiten 1 2 3 4 5 6 folgt z. B. dass die drei Punkte ABC in einer Geraden G liegen, d. h. in Bezug auf das Viereck, *dass die Durchschnitte* A, C *der Gegenseiten eines dem Kegelschnitte eingeschriebenen Vierecks* $abcd$ *und der Durchschnitt* B *der Tangenten in zwei Gegenecken desselben stets in einer Geraden* G *liegen.* Für die Ordnung I, II, III, IV, V, VI folgt aber auch, *dass die nämlichen Punkte* A, C *mit dem Durchschnitte* D *der Tangenten in* b, d *auf der-*

selben Geraden liegen, welche folglich mit G zusammenfällt. Für den andern Fall, wo die Seiten des Sechsecks in der Ordnung 1 2 3 4 V VI genommen werden, folgt, dass A, F, E in einer Geraden liegen; ebenso

Fig. 132.



befinden sich auch J, H, C in einer Geraden. Man findet in dieser Weise für das vollständige Viereck $abcd$ [die Definition des vollständigen Vierecks schliesst sich durchaus der in §. 5. gegebenen für das vollständige Vierseit an] und das zugehörige vollständige umgeschriebene Vierseit drei Gerade G und zwölf Gerade g [im Sinne von CHJ]. Andererseits, wenn man von der Betrachtung des vollständigen Vierseits ausgeht, erhält man drei Punkte G_1 und zwölf Punkte g_1.

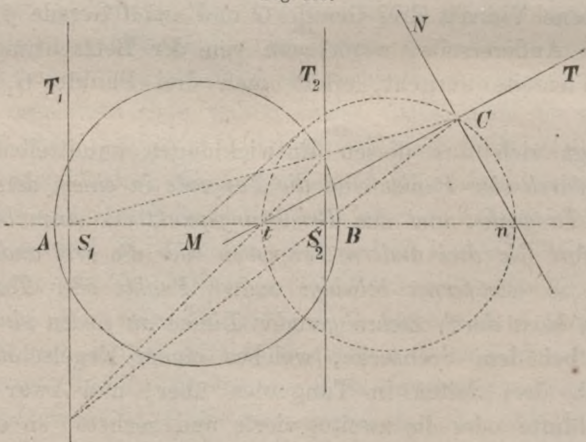
Es zeigt sich aus diesen Entwicklungen unmittelbar, *dass ein Kegelschnitt durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben, oder durch vier Tangenten und den Berührungspunkt der einen bestimmt ist, und wie sofort die drei andern Tangenten oder die drei andern Berührungspunkte, so wie ferner beliebige andere Punkte oder Tangenten des Kegelschnitts, bloss durch Ziehen gerader Linien zu finden sind.* —

Gehen bei dem Sechsecke, welches einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, drei Seiten in Tangenten über, und zwar die erste, dritte und fünfte oder die zweite, vierte und sechste, so ergibt sich: dass bei jedem irgend einem Kegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke die drei Punkte A, B, C, in welchen die Seiten mit den Tangenten in den Gegenecken sich schneiden, allemal in irgend einer Geraden G liegen. Ebenso: dass bei jedem eingeschriebenen Dreiecke die drei

Punkte, in welcher die drei Seiten von den Berührungssehnen geschnitten werden, in einer Geraden liegen. Oder: *Dass bei jedem Kegelschnitte die Seiten irgend zweier zusammengehöriger Dreiecke* [ein- und umgeschriebenen] *sich in drei solchen Punkten schneiden, welche in derselben Geraden sich befinden.* Andererseits folgt, *dass bei jedem, irgend einem Kegelschnitte umgeschriebenen Dreieck die drei Geraden $A_1 B_1 C_1$, welche die Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, einander in einem Punkte G_1 treffen**). Ebenso ergibt sich noch, dass der Kegelschnitt einerseits durch drei Punkte und zwei der Tangenten in denselben, und andererseits durch drei Tangenten und die Berührungspunkte zweier derselben bestimmt ist, so dass sich daraus beliebig viele andere Punkte und Tangenten leicht mittelst des Lineals allein finden lassen. Als spezieller Fall des eben abgeleiteten Satzes findet man: *Der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente halbirt das zwischen den Asymptoten liegende Stück derselben.* Man braucht zum Beweise nur zu beachten, dass die Asymptoten der Hyperbel Tangenten sind, deren Berührungspunkte im Unendlichen liegen.

Einen andern speziellen Fall bietet die Aufgabe: *Einen Kegelschnitt zu construiren, von welchem man die Scheitel S_1 und S_2 der grossen Axe und einen Punkt C kennt.* Man hat nämlich in den Senkrechten T_1 und T_2, welche in S_1 und S_2 auf $S_1 S_2$ errichtet werden können, zwei Tangenten des Kegelschnittes, also ist es mit Hülfe

Fig. 133.



*) Diese beiden Sätze lassen sich unabhängig vom Pascal'schen und Brianchon'schen Satz mit Hülfe der Transversalentheorie [siehe die durch Fig. 11 und 12 erläuterten Sätze des §. 3.] für den Kreis ganz elementar beweisen. Durch Projection werden sie sofort auf beliebige Kegelschnitte übertragen.

des ausgesprochenen Satzes leicht möglich, auch die Tangente T in C zu finden. Mit der Tangente ist zugleich die Normale N in C bestimmt, so dass sich die Schnittpunkte t und n von T und N mit der Hauptaxe unmittelbar ergeben. Diese bilden ein Punktenpaar, welches zu den Brennpunkten A und B conjugirt harmonisch liegt, da die Leitstrahlen des Punktes C zu Tangente und Normale in derselben harmonisch sind. Da zudem der Mittelpunkt M des Kegelschnittes bekannt ist, so führt folgende Construction zu A und B: Ueber tn als Durchmesser lege man einen Kreis und von M aus eine Tangente an denselben, so ist die Länge derselben gleich MA oder MB. *Liegt C zwischen T_1 und T_2, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse*), im andern Fall eine Hyperbel.*

Im Falle einer Parabel lautet die Aufgabe: *Gegeben der Scheitel S_1 und die Scheiteltangente T_1, so wie ein Punkt C der Parabel, man soll weitere Elemente derselben construiren.* Man findet zunächst die Tangente in C als die durch C gehende Diagonale desjenigen Parallelogramms, von welchem CS_1 und CP zwei aneinanderstossende Seiten sind, wenn P den Fusspunkt des von C auf die Scheiteltangente gefällten Perpendikels bedeutet. Der Brennpunkt B ergibt sich als der Schnittpunkt des in der Mitte Q auf die genannte Diagonale gefällten Perpendikels mit der Axe. Von hier aus kann man also zu den elementaren Parabelsätzen gelangen, die wir im Anfang des §. 17. auf anderem Wege abgeleitet hatten.

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich, dass wenn man von einem Kegelschnitt fünf Elemente, d. h. entweder fünf Punkte oder fünf Tangenten kennt, derselbe im Allgemeinen vollkommen bestimmt ist. Die Sätze von Pascal und Brianchon weisen aber auch auf den Schluss hin, dass umgekehrt durch jede beliebige fünf Punkte oder fünf Tangenten ein Kegelschnitt bestimmt ist. Eine Bestätigung findet diese Bemerkung darin, dass nach §. 19. irgend vier Gerade in der Ebene als Tangenten einer Parabel gewählt werden können, denn neben diesen vier Geraden ist auch die unendlich entfernte Gerade der Ebene eine Tangente dieser Parabel, so dass dieselbe in Wirklichkeit durch fünf Tangenten gegeben ist. Man kann also sagen: *Ein Kegelschnitt ist durch fünf seiner Punkte oder fünf seiner Tangenten*

*) Sind die beiden Scheitel $S_1 S_2$ der grossen oder der kleinen Axe einer Ellipse und ein Punkt C derselben gegeben, so kann man zur Construction weiterer Ellipsenpunkte auch die Methode anwenden, welche in §. 13. gegeben und durch Fig. 74 erläutert worden ist. Man ist dadurch unabhängig gemacht von der Untersuchung, ob die oben angegebene Construction wirklich ausführbar ist, d. h. ob es möglich sei, von M aus Tangenten an den Kreis tCn zu legen.

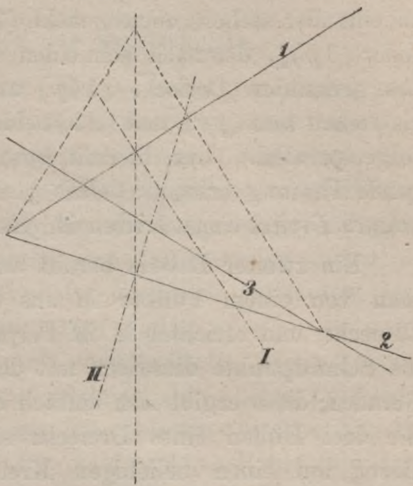
vollkommen bestimmt; umgekehrt lässt sich durch jede fünf Punkte ein, aber nur ein Kegelschnitt legen, und ebenso existirt stets ein, aber nur ein Kegelschnitt, der fünf gegebene Gerade berührt. Zwei Kegelschnitte können aus diesem Grunde nie mehr als vier Punkte oder vier Tangenten gemein haben. Hierbei ist die noch nicht hervorgehobene Voraussetzung gemacht, dass weder drei der Punkte des untersuchten Kegelschnitts in einer Geraden liegen, noch drei seiner Tangenten durch einen und denselben Punkt gehen; diese speziellen Fälle erledigen sich aber sofort, indem dann Kegelschnitte auftreten, die entweder aus den sämmtlichen Punkten zweier Geraden bestehen, oder aber, deren Tangenten die sämmtlichen Geraden sind, welche durch den einen oder den andern von zwei festen Punkten gelegt werden können.

Von grossem Belange ist noch eine Folgerung, welche wir aus dem Pascal'schen und dem Brianchon'schen Satze in ihrer allgemeinen Fassung ziehen wollen. Es ist nämlich bis jetzt nur gezeigt worden, dass jeder Kegelschnitt als Projection des Kreises aufgefasst werden kann; aber es gilt auch der umgekehrte Satz, *dass jede beliebige Projection des Kreises ein Kegelschnitt ist*, also nicht nur diejenigen, welche durch den geraden Kegel vermittelt werden. In der That, wenn man einen Kreis, der in der Ebene E liegt, vermittelst geradliniger Strahlen, die durch einen festen Punkt ausserhalb der Ebene E gehen, auf eine andere Ebene E_1 projicirt, welche nicht durch D geht und nicht zu E parallel ist, so erhält man in E_1 eine Figur, für welche sowohl der Satz von Pascal als derjenige von Brianchon gilt, d. h. jede beliebige Projection eines Kreises ist ein Kegelschnitt.

Zum Schlusse geben wir noch *zwei Anwendungen der Sätze von Pascal und Brianchon.*

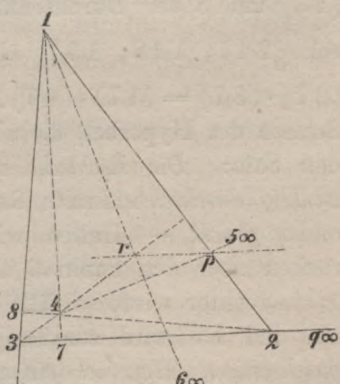
Die erste besteht in dem Beweise des bereits hergeleiteten Satzes: [§. 19.] *dass der Höhenpunkt eines der Parabel umschriebenen Dreiecks in der Leitlinie derselben liegt,* welcher Beweis mit Hülfe eines Brianchon'schen Sechsecks geführt wird. [Wir nennen Brianchon'sches Sechseck jedes Sechseck, in welchem sich die drei Hauptdiagonalen in demselben Punkte schneiden. Ebenso heisst jedes Sechseck, in welchem die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten in einer Geraden liegen, ein Pascal'sches Sechseck. Jedes solche Sechseck hat die Eigenschaft, dass seine Ecken auf einem Kegelschnitte liegen, während die Seiten eines Brianchon'schen Sechsecks Tangenten eines Kegelschnittes sind.] Zunächst erinnern wir an den Satz, dass der Durchschnitt zweier zu einander rechtwinkligen Tangenten der Parabel auf die Leitlinie fällt. Seien nun 1 und I, 2 und II zwei Paare zueinander senkrechtstehender Parabeltangenten, ferner 3 und die unendlich entfernte Gerade G_∞ der Ebene zwei weitere Tangenten der Parabel, so bilden 1I2II3G_∞ ein Brianchon'sches Sechseck, in welchem die Hauptdiagonalen sich in einem Punkte schneiden müssen. Wir wählen die Reihenfolge der Seiten des Sechsecks in der Art, dass (13) und (IIG_∞), (23) und (IG_∞), (1I) und (2II) zu Gegenecken werden. Die erste Hauptdiagonale ist unter dieser Voraussetzung, da (IIG_∞) der unendlich-entfernte Punkt von II sein wird und also die von (13) nach (IIG_∞) gezogene Gerade parallel zu II ist, offenbar das Perpendikel, das von dem Punkte (13) auf 2 gefällt werden kann, also die zu 2 gehörige Höhe des Dreiecks (123). Ebenso fällt die zweite Hauptdiagonale des Sechsecks mit der zu 1 gehörigen Höhe desselben Dreiecks zusammen. Durch den Schnittpunkt dieser Hauptdiagonalen, resp. durch den Höhenpunkt des Dreiecks (123) muss auch die dritte Hauptdiagonale gehen, welche aber die Leitlinie der Parabel ist. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen. —

Fig. 134.



Mit Hülfe des Pascal'schen Satzes lässt sich nachweisen, *dass der Höhenpunkt eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks ebenfalls auf dieser Hyperbel liegt.* Seien 123 die gegebenen Punkte auf der gleichseitigen Hyperbel, 4 der Höhenpunkt des von ihnen gebildeten Dreiecks und 5 und 6 die unendlich entfernten Punkte der Hyperbel, so dass also die Richtungen von Strahlen, welche von einem beliebigen Punkte der Ebene aus nach 5 und 6 gehen, zueinander senkrecht stehen. Es ist, um den Beweis unseres Satzes zu führen, einzig zu zeigen, dass das Sechseck 123456 ein Pascal'sches Sechseck ist, d. h. dass die Durchschnittspunkte seiner Gegenseiten auf einer Geraden liegen. Nun schneiden sich (12) und (45) in p, (23)

Fig. 135.



und (56) in dem unendlich entfernten Punkte q der Geraden (23) und schliesslich (34) und (61) in r; wenn also p, q, r in derselben Geraden liegen sollen, so müssen (pr) und (23) parallel sein. Im Dreiecke ($14p$) steht (16) [oder ($1r$)] senkrecht auf (45) [oder ($4p$)], weil die Richtungen der unendlich entfernten Punkte 5 und 6 senkrecht zu einander stehen, ebenso steht (34) [oder ($4r$)] senkrecht auf (12) [oder ($1p$)], demnach schneiden sich ($1r$) und ($4r$) im Höhenpunkt des genannten Dreiecks ($14p$) und pr ist die dritte Höhe desselben. Es stehen also (pr) und (23) beide auf (14) senkrecht und sind demzufolge parallel. Der hiermit bewiesene Satz lässt sich auch in folgende Fassung bringen: *Jede gleichseitige Hyperbel, welche einem gegebenen Dreieck eingeschrieben ist, geht auch durch den Höhenpunkt desselben.*

Ein zweiter Beweis beruht auf folgendem Gedankengange: Zieht man von einem Punkte M aus Strahlen nach den drei Ecken eines Dreiecks, und errichtet in M Perpendikel auf diese Strahlen, so liegen die Schnittpunkte derselben mit den Gegenseiten des Dreiecks in einer Geraden; diess ergibt sich einfach durch Polarisation des Satzes, „dass die drei Höhen eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden“ in Bezug auf einen beliebigen Kreis mit dem Mittelpunkte M. Man kann nun weiter zeigen: Wenn die von M aus nach einem der dem Dreiecke eingeschriebenen Kreise gezogenen Tangenten senkrecht zueinander stehen, so berührt die erwähnte Gerade diesen Kreis. Wird dieser letztere Satz auf einen um M geschlagenen Kreis polarisirt, so ergibt sich der vorhin bewiesene Satz.

Aus demselben wollen wir einige Folgerungen ziehen: Es sei wieder 4 der Höhenpunkt des einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks 123, ferner 7 der Durchschnitt von (14) und (23) und 8 der Durchschnitt von (24) und (13), so sind die Dreiecke 247, 148, 137 ähnlich, und demzufolge $\frac{(27)}{(47)} = \frac{(17)}{(37)}$ oder $(27) \cdot (37) = (17) \cdot (47)$. Es sind aber (23) und (14) zwei Sehnen der Hyperbel, die sich rechtwinklig schneiden, wir haben also den Satz: *Die Rechtecke unter den Abschnitten zweier einander rechtwinklig durchschneidender Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel sind einander gleich.* — Halten wir im Dreieck 123 die Seite 12 fest, verrücken aber den Punkt 3 auf der Hyperbel, so dass der Winkel bei 1 ein rechter wird, so fällt der Höhenpunkt 4 in den Scheitel 1 hinein und 17 wird zur Tangente im Punkte 1, d. h.: *In jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreieck ist das Perpendikel vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Tangente der Hyperbel.* Dieser Satz kann auch wie folgt ausgesprochen werden. *Wenn der Scheitel eines rechten Winkels auf einer gleichseitigen Hyperbel liegt, und man dreht den Winkel um seinen Scheitel, so bleibt die von seinen Schenkeln abgeschnittene Sehne stets senkrecht zur Tangente im Scheitel.*

§. 27. Polareigenschaften der Kegelschnitte.

Zu jedem beliebigen Punkte der Ebene gehört in Bezug auf einen Kegelschnitt stets eine, aber auch nur eine Polare, und jeder Geraden entspricht ein, aber auch nur ein Pol. Irgend eine durch den Pol gelegte Transversale schneidet auf der Polaren irgend einen Punkt aus, welcher in bekannter Zuordnung der vierte harmonische Punkt ist zum Pole und den Schnittpunkten der Transversalen mit dem Kegelschnitte. Sucht man also den Pol der unendlich entfernten Geraden in Bezug auf einen vorgelegten Kegelschnitt, so muss die ausgesprochene Eigenschaft ihre Gültigkeit noch besitzen, und es muss demnach der Pol in der Mitte liegen zwischen den beiden Punkten, welche eine beliebig durch ihn gelegte Transversale auf dem Kegelschnitte ausschneidet. Es hat aber gar kein anderer Punkt, als der Mittelpunkt des Kegelschnitts die angegebene Eigenschaft, *demzufolge ist der Pol der unendlich entfernten Geraden der Ebene in Bezug auf einen Kegelschnitt der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes.* Umgekehrt ist die Polare des Mittelpunktes eines Kegelschnittes in Bezug auf denselben die unendlich entfernte Gerade der Ebene. *Wenn der Mittelpunkt des Kegelschnittes innerhalb derselben liegt, so sind von ihm aus keine Tangenten an den Kegelschnitt möglich und derselbe hat keine unendlich entfernten Punkte, d. h. er ist Ellipse. Befindet sich der Mittelpunkt ausserhalb des Kegelschnittes, so ist derselbe Hyperbel, und er hat zwei unendlich entfernte Punkte, welche mit dem Mittelpunkte verbunden zwei Tangenten, die Asymptoten der Hyperbel ergeben. Schliesslich kann der Mittelpunkt auf dem Kegelschnitte selbst liegen, d. h. die unendlich entfernte Gerade der Ebene ist eine seiner Tangenten und er selbst eine Parabel.*

Durch diese Betrachtungen rechtfertigt sich aufs Neue die Bezeichnung *die unendlich entfernte Gerade der Ebene*, denn alle unendlich entfernten Geraden der Ebene haben in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt nur einen einzigen Pol; wären nämlich deren zwei vorhanden, so hätte der Kegelschnitt zwei Mittelpunkte und die Verbindungsgerade derselben würde auf dem Kegelschnitte eine Strecke ausschneiden, welche in zwei verschiedenen Punkten gehälftet würde, was unmöglich ist. Da nun alle unendlich entfernten Geraden denselben Pol gemein haben, so müssen sie, da zu jedem Pole im Allgemeinen nur eine Polare gehört, als in eine und dieselbe Gerade zusammenfallend betrachtet werden.

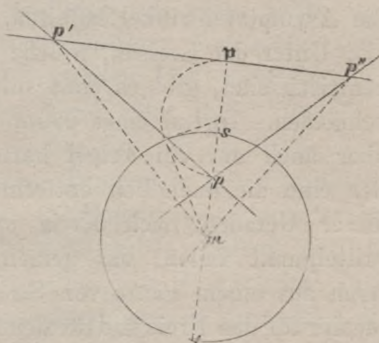
Jede durch den Mittelpunkt eines Kegelschnittes gehende Gerade heisst Durchmesser und ihr Pol liegt in unendlicher Entfernung. Umgekehrt ist die Polare jedes unendlich entfernten Punktes ein Durchmesser.

Aus den Grundeigenschaften von Pol und Polare leitet man sofort den Satz ab: *Bewegt sich ein Punkt auf einer Geraden, so dreht sich die Berührungssehne der beiden von ihm aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten um einen festen Punkt, den Pol jener Geraden.* Nun ist für Ellipse, Hyperbel und Parabel gezeigt worden, dass die Berührungssehne der beiden von irgend einem Punkte der Leitlinie aus an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten durch den zugehörigen Brennpunkt geht. *Ein Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie eines Kegelschnittes sind also stets Pol und Polare in Bezug auf denselben.* —

Ein Dreieck, welches in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt die Eigenschaft hat, dass die Polare einer jeden seiner Ecken mit der Verbindungsgeraden der beiden übrigen zusammenfällt, heisst ein *Tripel harmonischer Punkte des Kegelschnitts.* Es gibt unendlich viele solche Tripel, denn man kann einen der drei Punkte willkürlich wählen, ebenso noch auf der Polaren desselben den zweiten, und dann ist erst der dritte Punkt des Tripels vollständig bestimmt. Der Durchschnittspunkt irgend zweier Seiten des Tripeldreiecks ist der Pol der dritten Seite. Wenn man also als *Tripel harmonischer Strahlen* ein Dreiseit bezeichnet, in welchem jede Seite den Durchschnitt der beiden andern zum Pole hat, so kann man also sagen: *Die drei Seiten eines Tripeldreiecks bilden ein Tripel harmonischer Strahlen.* Aus der Construction der Polaren eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt, die durchaus nach §. 6. [Fig. 15] für jeden beliebigen Kegelschnitt ausgeführt werden kann, erkennt man die Richtigkeit des nachfolgenden Satzes: *In einem vollständigen Viereck, dessen Ecken $\alpha\alpha'\beta\beta'$ auf einem Kegelschnitte liegen, bilden die drei Diagonalpunkte $pp'p''$* [Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten] *ein Tripel harmonischer Punkte. Dieses Tripel ist aber allen Kegelschnitten gemein, welche durch die Ecken des vollständigen Vierecks gehen und ferner ist es das einzige Tripel, welches irgend zweien dieser Kegelschnitte gemein sein kann.* In der That, sei α einer von den vier Schnittpunkten der beiden Kegelschnitte, so bestimmt er mit dem Tripel $pp'p''$ das Viereck $\alpha\alpha'\beta\beta'$ vollständig, und zwar linear, während ein anderes Tripel $qq'q''$ offenbar ein anderes Viereck ergeben würde, was wider die Voraussetzung ist. Zwei Kegelschnitte, welche sich in vier Punkten schneiden, haben also immer ein, aber auch nur ein Tripel harmonischer Punkte gemein, welches durch die Schnittpunkte linear bestimmt ist. Man kann das auch so ausdrücken: *Schneiden sich zwei Kegelschnitte in vier Punkten, so existiren stets drei, aber auch nur drei Punkte, für welche die beiden Polaren in Hinsicht der gegebenen Kegelschnitte zusammenfallen.*

Ein Punkt p allein bestimmt, wie bereits bemerkt, das Tripel noch nicht; man kann auf der Polaren P desselben noch unendlich viele Punktenpaare $p'p''$ annehmen, welche das Tripel vervollständigen. Sind s und t die Durchschnitte von P mit dem Kegelschnitte, so sind p' und p'' ihnen harmonisch zugeordnet, und umgekehrt: jedes zu s und t harmonisch zugeordnete Punktenpaar ergibt mit p ein Tripel. Ebenso wird durch einen Strahl das Tripel noch nicht bestimmt; man kann nämlich von dem Pole dieses Strahles aus, insofern dies möglich ist, Tangenten an Kegelschnitt legen, und jedes Paar von Strahlen, welches diesen Tangenten harmonisch zugeordnet ist, ergibt ein Tripel. Von einem Tripel harmonischer Punkte liegt stets einer innerhalb des Kegelschnittes, die beiden andern ausserhalb; von den drei Strahlen eines Tripels schneiden zwei den Kegelschnitt, der dritte aber trifft ihn nicht.

Fig. 136.



Da bei einem Kreise die Polare stets senkrecht steht auf der Verbindungsgeraden von Pol und Mittelpunkt, *so ist der Mittelpunkt zugleich der Höhenpunkt aller dem Kreise zugehörigen Tripel;* es ist zudem klar, dass diese Tripel nur stumpfwinklige Dreiecke bilden können. Der Kreis ist durch eines seiner Tripel vollständig bestimmt; dasselbe bildet nach der eben gemachten Bemerkung ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen Höhenpunkt m der Mittelpunkt des zu bestimmenden Kreises ist. Um den Radius dieses Kreises zu finden, ziehe man die Gerade mp, wo p ein Tripelpunkt ist, und suche deren Durchschnitt $\mathfrak{p}$ mit $p'p''$. Es seien nun s und t die Durchschnitte des Kreises mit mp, so muss $ms^2 = mt^2 = mp \cdot m\mathfrak{p}$ sein, wodurch s und t bestimmt sind. Zur Construction lege man einen Halbkreis über $p\mathfrak{p}$, ziehe an diesen die Tangente von m aus, so ist die Länge derselben der Radius des gesuchten Kreises.

Wählt man den Mittelpunkt p eines gegebenen Kegelschnitts als den einen Punkt eines ihm zugehörigen Tripels, so liegen die beiden andern p' und p'' im Unendlichen; von den drei Strahlen des Tripels ist der eine, $p'p''$ die unendlich entfernte Gerade der Ebene, die beiden andern pp' und pp'' sind Durchmesser des Kegelschnittes. Da p' der Pol von pp'' ist, so folgt, dass die beiden von p' aus an den Kegelschnitt gelegten Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers pp'' berühren; zudem sind sie offenbar dem Durchmesser pp' parallel. Es gilt Aehnliches von p'' in Bezug auf pp', so dass man den Satz hat: Wenn von einem Tripel harmonischer Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt der eine Strahl die unendlich entfernte Gerade ist, so sind die beiden andern zwei solche Durchmesser, von denen jeder den Tangenten in den Endpunkten des andern parallel ist [insofern diese Tangenten wirklich vorhanden sind]. Bei der Ellipse sind also diese Durchmesser conjugirt, und dass dasselbe auch von der Hyperbel gilt, lässt sich leicht beweisen; also: *Irgend zwei conjugirte Durchmesser eines Kegelschnitts bilden mit der unendlich entfernten Geraden ein Tripel harmonischer Strahlen.* Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, so bilden die unendlich entfernten Punkte der Asymptoten mit den unendlich entfernten Punkten irgend eines Paares conjugirter Durchmesser ein System von harmonischen Punkten, woraus folgt, *dass irgend ein Paar conjugirter Durchmesser der Hyperbel zugeordnet harmonisch zu den Asymptoten liegen*, namentlich gilt diess auch von den Axen, welche die Asymptotenwinkel halbiren.

Unter den Kreisen, welche mit einem gegebenen Kegelschnitte concentrisch sind, gibt es stets solche, welche denselben in vier Punkten schneiden. Irgend einer dieser Kreise hat mit dem Kegelschnitte ein, aber auch nur ein Tripel harmonischer Strahlen gemein, von denen der eine die unendlich entfernte Gerade der Ebene ist, weil die Pole dieser Geraden nach Kreis und Kegelschnitt in den gemeinsamen Mittelpunkt fallen; das gemeinsame Tripel besteht also ausserdem noch aus einem Paare von Strahlen, welche zugleich conjugirte Durchmesser für den Kreis und für den Kegelschnitt sind. Nun bilden alle Paare conjugirter Durchmesser des Kreises rechte Winkel, und umgekehrt, irgend ein Paar senkrechte Durchmesser des Kreises sind conjugirt. *Es gibt also in einem Kegelschnitte, der einen Mittelpunkt hat und kein Kreis ist, stets ein, aber auch nur ein Paar zueinander senkrechter conjugirter Durchmesser.* —

Wir kommen noch einmal auf eine Bemerkung des vorigen Paragraphen zurück: dass jede Projection des Kreises ein Kegelschnitt ist. Wir können dieselbe noch allgemeiner fassen und sagen: *Jede*

Projection K_1 eines Kegelschnittes K ist wieder ein Kegelschnitt. Zunächst weiss man von K_1, dass es wie K ebensowohl dem Pascal'schen als dem Brianchon'schen Satze Genüge leistet. Im Ferneren bleiben für K_1 die harmonischen Eigenschaften von K bestehen; wenn also K_1 nicht zufälligerweise die unendlich entfernte Gerade der Ebene berührt, so hat es einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt, der zugleich einem [einzigen oder unendlich vielen] Tripel harmonischer Punkte angehört, dessen beide andere Punkte in zwei zueinander senkrechten Richtungen unendlich entfernt liegen. Damit ist gezeigt, dass K_1 Axen besitzt und da vom Tripel harmonischer Strahlen immer zwei mit K_1 sich in reellen Punkten schneiden, so haben wir auch mindestens zwei Axenscheitel. Vergleichen wir jetzt mit K_1 einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, der mit ihm die Scheitel S_1 und S_2 sowie einen beliebig auf K_1 zu wählenden Punkt C gemein hat, so sind K_1 und $\mathfrak{K}_1$ identisch, weil beide dem Pascal'schen Satze genügen und nach Früherem S_1, S_2 und C zur unzweideutigen Bestimmung von $\mathfrak{K}_1$ (und nun auch von K_1) vollkommen hinreichen. Wenn aber K_1 die unendlich entfernte Gerade der Ebene berührt, so haben wir nur die vorhin betrachteten K_1 und $\mathfrak{K}_1$ gleichzeitig in den Grenzfall übergehen zu lassen, der $\mathfrak{K}_1$ zur Parabel macht, als welche sich dann auch K_1 darstellt.

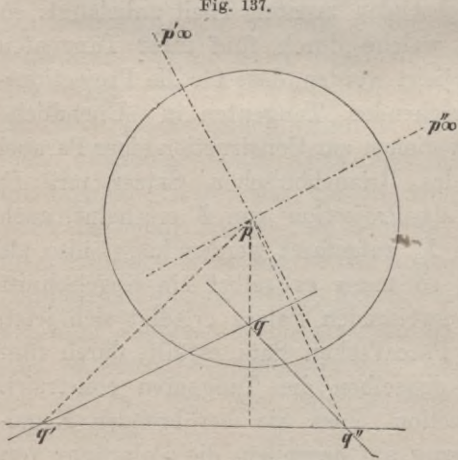
Diese Beweisführung vervollständigt auch die Richtigstellung des Satzes, dass jede Figur, welche dem Pascal'schen Satze in allen beliebigen Gruppen von sechs ihrer Punkte genügt, und dass jede Figur, welche den Brianchon'schen Satz in jeder Gruppe von sechs ihrer Tangenten erfüllt, ein Kegelschnitt sei. Was zunächst den zweiten Theil anbelangt, so kann die betreffende Figur F, welche durch fünf ihrer Tangenten unzweideutig bestimmt ist, so projicirt werden, dass für die Projectionsfigur F_1 eine der fünf entsprechenden Tangenten in's Unendliche rückt. Die vier übrig bleibenden dienen zur Construction einer Parabel (nach §. 19.), welche wegen des Brianchon'schen Satzes mit F_1 identisch ist. Da nun, wie F_1 als Projection von F erscheint, auch umgekehrt F als Projection von F_1 aufgefasst werden kann, also als Projection eines Kegelschnittes, so muss es selbst ein Kegelschnitt sein. Der erste Theil des zu beweisenden Satzes erledigt sich jetzt, indem man die $\mathfrak{F}$, welche den Pascal'schen Satz erfüllt, durch fünf ihrer Punkte bestimmt und in denselben die Tangenten construirt. Diese reichen aus zur Construction eines sie berührenden Kegelschnittes $\mathfrak{F}_1$. Bildet man in Bezug auf denselben die Polarfigur von $\mathfrak{F}$, so werden deren sämmtliche Tangenten zugleich Tangenten von F_1 sein (wegen des Brianchon'schen Satzes, dem sie zufolge der

Polarisation unterworfen werden), also sind die Punkte von $\mathfrak{F}$ zugleich Punkte von $\mathfrak{F}_1$, also auch $\mathfrak{F}$ ein Kegelschnitt.

Man kann nicht beliebige sechs Punkte in der Ebene wählen und festsetzen, sie sollen in bestimmter Ordnung genommen zwei Tripel $pp'p''$ und $qq'q''$ eines und desselben Kegelschnittes sein, sondern damit diess möglich ist, müssen die sechs Punkte auf einem und demselben Kegelschnitte liegen, dann aber ist die Bestimmung eine vollkommene, d. h. es gibt stets einen, aber auch nur einen Kegelschnitt, für welchen die genannten Punkte zwei Tripel bilden. Zum Beweise bedürfen wir des Satzes, *dass ein Kegelschnitt K und eine Gerade G in seiner Ebene, welche ihn nicht trifft, stets so projicirt werden können, dass der Kegelschnitt zum Kreise, die Gerade aber zur unendlich entfernten Geraden in der Ebene dieses Kreises wird.* Zunächst führen wir eine Projection so aus, dass die Gerade G in's Unendliche gerückt wird; diess geschieht, indem man einen beliebigen Punkt O im Raume wählt und von ihm aus K und G auf eine Ebene projicirt, welche zur Ebene durch O und G parallel ist. Da K und G nach Voraussetzung keinen Punkt gemein haben, so wird K eine Ellipse geworden sein, welche durch Parallelprojection [wodurch die unendlich entfernte Gerade wieder unendlich entfernte Gerade wird] leicht in einen Kreis zu verwandeln ist. So wie ein Kegelschnitt durch Projection immer wieder zu einem Kegelschnitte wird, so verwandelt sich auch ein Tripel stets wieder in ein Tripel der Projection.

Sei nun K der vorgelegte Kegelschnitt mit den beiden Tripeln $pp'p''$ und $qq'q''$, sei ferner $G = p'p''$ diejenige Gerade des ersten Tripels, welche K nicht schneidet, so können wir K und G so transformiren, dass sie zu einem Kreise und der unendlich entfernten Geraden in dessen Ebene werden. In der transformirten Figur sind $pp'p''$ ein Tripel in Bezug auf den Kreis, und zwar ist p der Mittelpunkt dieses Kreises, soll also ein Kegelschnitt durch die Tripelpunkte, oder auch nur durch p' und p'' gehen, so muss er eine gleichseitige Hyperbel sein. Durch $p'p''qq'q''$ ist eine gleichseitige Hyperbel bestimmt, welche nach einem im vorigen

Fig. 137.



§. bewiesenen Satze durch den Höhenpunkt des von $qq'q''$ gebildeten Dreiecks geht, und dieser Höhenpunkt ist, weil $qq'q''$ ein Tripel des Kreises bilden, der Punkt p. Die Punkte $pp'p''qq'q''$ liegen in der transformirten Figur auf einem und demselben Kegelschnitte, also befanden sie sich bereits in der ursprünglichen Lage auf einem Kegelschnitte. Dass nun umgekehrt sechs beliebige Punkte auf einem Kegelschnitte stets zwei Tripel harmonischer Punkte eines neuen Kegelschnittes sind, wird bewiesen, indem man den Kegelschnitt der sechs Punkte so in eine gleichseitige Hyperbel projicirt, dass zwei von ihnen in's Unendliche rücken, und dann den eben gegebenen Beweis rückwärts verfolgt.

Es ist bemerkenswerth, *dass auch die Strahlen zweier Tripel eines Kegelschnittes Tangenten eines neuen Kegelschnittes sind.* Wir gehen zum Beweis auf die einfache Figur zurück, in welche wir vorhin den Kegelschnitt und die beiden Tripel projicirten. Wir hatten einen Kreis mit dem Mittelpunkte p, dann auf der unendlich entfernten Geraden der Ebene zwei Punkte p' und p'', welche von p aus unter rechtem Winkel gesehen werden und schliesslich ein Tripel $qq'q''$. Jetzt ist zu zeigen, dass $p'p''$, $p''p$, pp', $q'q''$, $p''q$, qq' Tangenten eines und desselben Kegelschnittes sind. Dieser Kegelschnitt ist durch $p'p''$, pp', $q'q''$, $q''q$, qq' bestimmt, und zwar ist er eine Parabel, weil $p'p''$ die unendlich entfernte Gerade der Ebene ist. Dass nun auch $p''p$ die Parabel berührt, folgt daraus, dass p als Höhenpunkt des von den Parabeltangenten $q'q''$, $q''q$, qq' gebildeten Dreiecks in der Leitlinie derselben liegt; errichtet man aber in einem Punkte der Leitlinie ein Perpendikel auf einer Parabeltangente, so berührt dieses Perpendikel die Parabel ebenfalls, denn die Leitlinie ist der Ort der Durchschnittspunkte rechtwinkliger Tangenten, es ist also $p''p$ eine Tangente der eben bestimmten Parabel. Dass allgemein zwei beliebige Tripel harmonischer Strahlen eines Kegelschnittes Tangenten eines neuen Kegelschnittes sind, und dass umgekehrt irgend sechs Tangenten eines Kegelschnittes in bestimmter Gruppirung zu zweimal dreien als zwei Tripel eines andern Kegelschnittes aufgefasst werden können, soll nicht weiter ausgeführt werden.

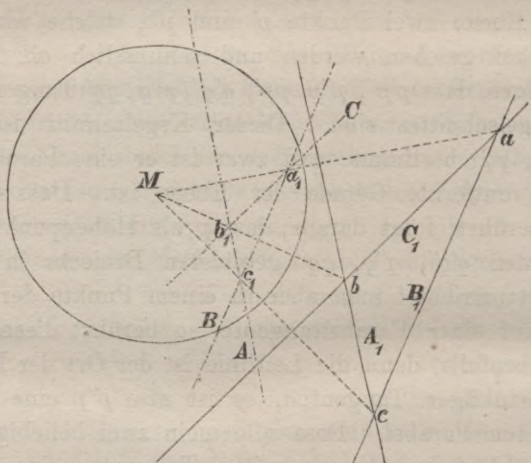
Dem Satz, dass Kegelschnitt und Gerade, welche sich nicht treffen, durch Projection in Kreis und unendlich entfernte Gerade verwandelt werden können, entspricht [indem man den Pol der Geraden einführt] der andere: *Ein Kegelschnitt und ein in seinem Innern gelegener Punkt können immer so projicirt werden, dass der Kegelschnitt zum Kreis und der Punkt zu dessen Mittelpunkt wird.*

Diess wollen wir anwenden um zu beweisen, *dass ein Dreieck abc*

mit den Seiten $A_1B_1C_1$ *und das von den Polaren* ABC *seiner Ecken nach einem Kegelschnitt* K *gebildete Dreieck* $a_1b_1c_1$ *so liegen, dass die Verbindungsgeraden correspondirender Ecken* aa_1, bb_1, cc_1 *durch den nämlichen Punkt* M *gehen.* Man nehme zu diesem Zwecke an, es sei eine Projection der Figur ausgeführt, in welcher K zum Kreis und M zu dessen Mittelpunkt geworden ist, wenn mit M der Schnittpunkt von bb_1 und cc_1 bezeichnet wird. [In der ursprünglichen Figur und in der Projection sollen entsprechende Elemente gleiche Benennung tragen.]

Betrachten wir die Punkte b und c so wie den Kreis K als gegeben, so sind zunächst auch die Polaren B und C von b und c bekannt, ebenso die mit ihnen parallelen Seiten B_1 und C_1 des Dreiecks abc, welches damit vollständig gegeben ist. Vom Dreieck $a_1b_1c_1$ ist vorderhand a_1 als Pol von A_1 gegeben, im Fernern ist c_1 als

Fig. 138.



Schnitt von B mit Mc, ebenso b_1 als Schnitt von C mit Mb bekannt. Wir haben demnach nur noch zu zeigen, dass die Verbindungsgerade aa_1 durch M geht. Es ist aber a_1 der Höhenpunkt des Dreiecks Mb_1c_1 und a der Höhenpunkt des ihm ähnlichen Dreiecks Mbc, also sind auch die Dreiecke Ma_1c_1 und Mac ähnlich, was nur dann eintreten kann, wenn aa_1 durch M geht.

Es sind, wie man sich leicht überzeugt, auch die Dreiecke abc und $a_1b_1c_1$ ähnlich und ihre correspondirenden Seiten laufen parallel. Kehrt man demnach von der Projection zur ursprünglichen Figur zurück, so ergibt sich der Satz: *Für ein Dreieck und sein Polardreieck in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen die Durchschnittspunkte correspon-*

direnden Seiten in einer Geraden. [Wobei allerdings der Beweis voraussetzt, dass diese Gerade den Kegelschnitt nicht treffe, so wie vorhin der Schnitt M von bb_1 und cc_1 im Innern des Keglschnittes angenommen wurde.]

Einen speziellen Fall gibt das einem Kegelschnitt umschriebene Dreieck mit seinem Polardreieck, dem Dreieck der Berührungspunkte. [Das Resultat, dass die Verbindungsgeraden der Ecken des ersten Dreiecks mit den correspondirenden des zweiten durch den nämlichen Punkt gehen, ist früher auch als Spezialfall der Satzes von Brianchon erkannt worden. (§. 26.)] — Wenn man, um zu einem zweiten Falle zu gelangen, an Stelle des allgemeinen Dreiecks abc ein Tripeldreieck des Kegelschnittes setzt, so verliert der Satz seine Bedeutung.

Da durchaus analog wie beim Kreise Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt sich eindeutig entsprechen, so folgt, dass die Sätze, welche wir für die Polarisation in Hinsicht eines Kreises auch für die Polarisation in Hinsicht eines Kegelschnittes ihre Gültigkeit beibehalten, insofern nur von metrischen Eigenschaften, wie von Strecken, Winkeln, Axen, Brennpunkten u. s. w. abgesehen wird. Es folgt daraus sofort, *dass die Polarfigur eines beliebigen Kegelschnittes in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt wieder ein Kegelschnitt ist*, und zwar gleichgültig, ob man die zu polarisirende von diesen beiden Curven auffasse als durch Punkte oder als durch Tangenten erzeugt. In der That, wenn für die ursprüngliche Figur der Satz von Pascal besteht, so gilt für die Polarfigur der Satz von Brianchon, und umgekehrt; übrigens bestimmt jeder von diesen beiden Sätzen für sich allein genommen eine Curve bereits als Kegelschnitt. Von den unendlich vielen Sätzen, die sich paarweise durch die Polarisation entsprechen, heben wir nur die nachfolgenden, im Verlaufe unserer Betrachtungen bereits bewiesenen Sätze hervor:

Ein vollständiges Vierseit wird gebildet durch vier beliebig in der Ebene gegebene Gerade, von denen keine drei durch denselben Punkt laufen und von denen keine zwei parallel sind. Dasselbe zählt vier Seiten, sechs Ecken [Durchschnittspunkte der Seiten] und drei Diagonalen [Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken]. Auf jeder Diagonale befinden sich vier harmonische Punkte, von denen einerseits

Ein vollständiges Vierseit wird gebildet durch vier beliebig in der Ebene gegebene Punkte, von denen keine drei auf derselben Geraden liegen, und von denen keiner in unendlicher Entfernung sich befindet. Dasselbe zählt vier Ecken, sechs Seiten [Verbindungsgeraden der Ecken] und drei Diagonalpunkte [Durchschnittspunkte gegenüberliegender Seiten]. Durch jeden Diagonalpunkt gehen vier harmonische Strahlen, von denen *die Ecken des Vierseits, anderseits die Durchschnittspunkte der angenommenen Diagonale mit den beiandern zugeordnet sind.*

einerseits die Seiten des Vierecks, anderseits die Verbindungsgeraden des angenommenen Diagonalpunktes mit den beiden andern zugeordnet sind.

Bei einem Dreiecke, das einem beliebigen Kegelschnitte eingeschrieben ist, treffen die Tangenten in den Ecken die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche auf einer Geraden liegen.

Drei Punkte, von denen jeder in Bezug auf einen Kegelschnitt der Pol der Verbindungsgeraden der beiden übrigen ist, heissen ein Tripel harmonischer Punkte desselben. Zwei Tripel harmonischer Punkte desselben Kegelschnittes sind Punkte eines neuen Kegelschnittes.

Bei einem Dreiecke, das einem beliebigen Kegelschnitt umschrieben ist, schneiden sich die Verbindungsgeraden der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten in einem Punkte.

Drei Geraden, von denen jede in Bezug auf einen Kegelschnitt die Polare des Durchschnittspunktes der beiden übrigen ist, heissen ein Tripel harmonischer Strahlen desselben. Zwei Tripel harmonischer Strahlen desselben Kegelschnittes sind Tangenten eines neuen Kegelschnittes.

u. s. w.

Legt man den gemeinsamen Schnittpunkt S von vier in der Reihenfolge $abcd$ harmonischen Strahlen, von welchen also a und c, b und d zugeordnet sind, irgendwie auf die Peripherie eines Kreises, so schneiden die Strahlen aus demselben vier Punkte $abcd$ aus, welche wir *vier harmonische Punkte des Kreises* nennen wollen. *Vier solche Punkte haben die Eigenschaft, dass sie mit jedem beliebigen Punkte des Kreises vier harmonische Strahlen bestimmen*, denn sei S' ein solcher Punkt, so sind die Winkel, welche $S'\mathfrak{a}$ und $S'\mathfrak{b}$ [die Strahlen unbegrenzt gedacht] miteinander bilden, resp. den Winkeln gleich, welche durch $S\mathfrak{a}$ und $S\mathfrak{b}$ erzeugt werden. Wenn aber vier Strahlen unter sich dieselben Winkel bilden, wie ihre entsprechenden in einem System harmonischer Strahlen, so sind sie ebenfalls harmonisch. Sind umgekehrt vier harmonische Punkte eines Kreises in der Zuordnung $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{d}$ gegeben, so ist der Ort der Punkte, von welchen aus diese vier Punkte durch harmonische Strahlen in der Zuordnung a und c, b und d projicirt werden, der Kreis, welchem dieses Viereck eingeschrieben ist. Polarisirt man die vier harmonischen Punkte des Kreises in Bezug auf den Kreis selbst, so erhält man vier Tangenten desselben, welche von jeder beliebigen andern Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten werden. Solche Tangenten heissen *harmonische Tangenten des Kreises*, und man hat demnach den Satz: Die

Tangenten in vier harmonischen Punkten eines Kreises sind vier harmonische Tangenten derselben, und umgekehrt die vier Berührungspunkte von harmonischen Tangenten eines Kreises sind vier harmonische Punkte derselben.

Durch Projection gehen diese Sätze in die nachfolgenden, allgemeinen über:

Bestimmen vier Punkte 𝔞𝔟𝔠𝔡 *eines Kegelschnitts mit irgend einem Punkte S desselben in bestimmter Zuordnung vier harmonische Strahlen, so erzeugt jeder andere Punkt des Kegelschnitts mit* 𝔞𝔟𝔠𝔡 *vier harmonische Strahlen in derselben Zuordnung.*

Die Tangenten in vier harmonischen Punkten sind vier harmonische Tangenten des Kegelschnittes und werden von jeder beliebigen andern Tangente in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Bestimmen vier Tangenten ab cd eines Kegelschnitts mit irgend einer Tangente T desselben in bestimmter Zuordnung vier harmonische Punkte, so schneidet jede andere Tangente des Kegelschnittes abcd in vier harmonischen Punkten von derselben Zuordnung.

Die vier Berührungspunkte von harmonischen Tangenten sind harmonische Punkte des Kegelschnitts, und sie bestimmen mit jedem Punkte desselben vier harmonische Strahlen.

Wir schliessen daran die folgenden Sätze, deren polar gegenüberstehende leicht gebildet werden können:

Die vier Scheitel von einem Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes sind vier harmonische Punkte desselben.

Sollen vier beliebig gelegene Punkte 𝔞𝔟𝔠𝔡 *mit einem Punkte S in bestimmter Zuordnung vier harmonische Strahlen erzeugen, so ist der Ort dieses Punktes S ein bestimmter Kegelschnitt, welcher durch die vier Punkte* 𝔞𝔟𝔠𝔡 *geht.*

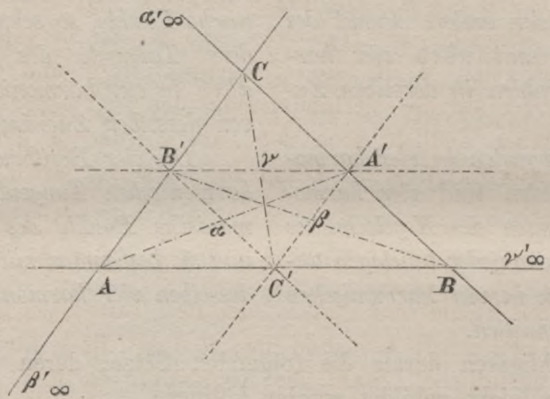
Vier harmonische Punkte eines Kegelschnittes haben die Eigenschaft, dass ihre Verbindungsgeraden mit einem beliebigen Punkte der Ebene vier neue harmonische Punkte mit derselben Zuordnung aus dem Kegelschnitte ausschneiden. Der Satz ist evident für einen Kreis und seinen Mittelpunkt oder einen unendlich entfernten Punkt, und daraus folgt durch Projection seine allgemeine Gültigkeit.

Die Tangenten in einem von zwei conjugirt harmonischen Punktenpaaren des Kegelschnittes treffen sich auf der Verbindungsgeraden des andern Paares.

Zur Anwendung der bis jetzt gegebenen Sätze über harmonische Punkte und über Tripel von Kegelschnitten, behandeln wir die elementare Aufgabe: *Alle Geraden zu finden, die ein gegebenes Dreieck in zwei flächengleiche Stücke theilen.* Seien ABC die Ecken des Dreiecks,

$B'B'C'$ die Mitten seiner Seiten, ss theilt zunächst jede der Mittellinien AA', BB', CC' das Dreieck in zwei andere, die unter sich gleichen Flächeninhalt haben. Nach einem in §. 16. bewiesenen Satze ist das Dreieck zwischen einer beweglichen Hyperbeltangente und den Asymptoten von constantem Inhalt, wir schliessen also: *Alle Geraden, welche den Inhalt eines gegebenen Dreiecks halbiren, sind Tangenten je an eine von drei Hyperbeln, von denen jede zwei Seiten des Dreiecks zu Asymptoten und die beiden nicht durch deren Schnitt-*

Fig. 139.



punkt gehenden Mittellinien zu Tangenten hat. Beachtet man, dass das zwischen den Asymptoten liegende Stück einer Hyperbeltangente im Berührungspunkte halbirt wird und bezeichnet man die Mitten von AA', BB', CC' resp. mit α, β, γ, so werden die drei Hyperbeln in folgender Art gegeben:

H_1 durch die Asymptoten AB, AC, die Tangenten BB', CC' und deren Berührungspunkte β, γ

H_2 durch die Asymptoten BC, BA, die Tangenten CC', AA' und deren Berührungspunkte γ, α

H_3 durch die Asymptoten CA, CB, die Tangenten AA', BB' und deren Berührungspunkte α, β.

Die drei Kegelschnitte H_1, H_2, H_3 stehen untereinander in den mannigfachsten Beziehungen, von denen wir die nachfolgenden hervorheben: Da Hyperbeln, welche dieselbe Gerade zur einen Asymptote haben, sich in deren unendlich entferntem Punkte berühren, so berühren sich, wenn α', β', γ' die unendlich entfernten Punkte von BC, CA, AB sind, H_2 und H_3 ausser in α noch in α', ebenso H_3 und H_1 in β', endlich H_1 und H_2 in γ'.

Die Punkte $A'B'C'$ bilden ein Tripel für jeden der drei Kegelschnitte. Wir beweisen diess beispielsweise für H_1. Da $A'\gamma B'\gamma'$ und $A'\beta C'\beta'$ zwei Gruppen harmonischer Punkte sind, so ist $B'C'$ die Polare von A'. Die Polare von B' geht also durch A' und da BB' Tangente an H_1 mit dem Berührungspunkte β ist, durch β; sie fällt also mit $C'A'$ zusammen, wie es sein muss. Daraus folgt unmittelbar, dass auch $A'B'$ die Polare von C' ist.

Die Berührungspunkte $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits, aus dem sich die drei Vierecke $\beta\gamma\beta'\gamma'$, $\gamma\alpha\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta\alpha'\beta'$ absondern lassen. Die Ecken derselben sind jeweilen harmonische Punkte für diejenige der Hyperbeln, auf der sie gelegen sind. In der That treffen sich z. B. die Tangenten in β und β' an H_1 im Punkte B', der auf der Verbindungsgeraden $\gamma\gamma'$ liegt.

Wir geben endlich noch den Satz: *Jeder der drei Kegelschnitte ist seine eigene Polarfigur in Bezug auf jeden der beiden andern*).*

§. 28. Kegelschnittbüschel und Kegelschnittschaar.

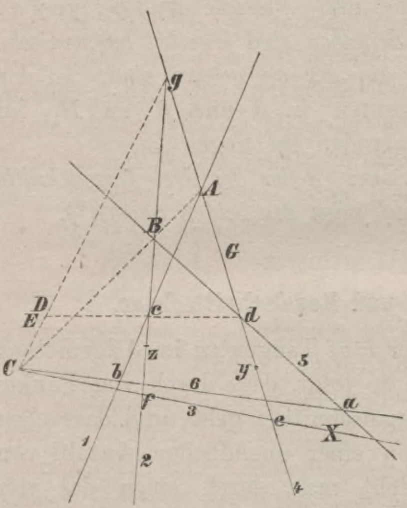
Da durch irgend fünf Punkte oder fünf Tangenten im Allgemeinen stets ein Kegelschnitt bestimmt ist, so folgt, dass durch vier Punkte $abcd$ eine unendliche Anzahl von Kegelschnitten geht, und dass eben so irgend vier Geraden $ABCD$ von einer unendlichen Anzahl von Kegelschnitten berührt werden. Zieht man durch einen der vier Punkte, z. B. durch d irgend eine Gerade G und nimmt in derselben einen bestimmten, übrigens fünften Punkt e an, so ist durch die fünf Punkte $abcde$ ein Kegelschnitt vollkommen bestimmt, und zwar kann er die Gerade G ausser in den zwei Punkten d, e in keinem andern Punkte treffen. Es ist demnach durch jeden Punkt in G ein eigenthümlicher Kegelschnitt bestimmt, und *daher gibt es eben so viele dem Viereck $abcd$ umschriebene Kegelschnitte $K\,(abcd)$, als in der Geraden G Punkte vorhanden sind.* Analoges findet anderseits statt, wenn man in einer der vier Geraden $ABCD$, etwa in D, einen beliebigen Punkt g annimmt und durch denselben irgend eine fünfte Gerade E zieht. — Die Gesammtheit aller Kegelschnitte durch vier feste Punkte $K\,(abcd)$ heisst *Kegelschnittbüschel* und die Gesammtheit aller Kegelschnitte, welche eine Gerade berühren, $K\,(ABCD)$, heisst *Kegelschnittschaar*.

---

*) Analoge Resultate können aufgestellt werden für das System von drei Kegelschnitten, welches aus zwei conjugirten Hyperbeln und der Ellipse besteht, die dieselben in den Endpunkten eines Paares conjugirter Durchmesser berührt [siehe §. 16.].

Zieht man durch zwei der vier gegebenen Grundpunkte des Büschels, etwa durch d, c, beliebige Geraden G, H, und verlangt in diesen zwei Punkte e, f, die demselben Kegelschnitt angehören, so sind sie wie folgt zu finden: Man fixire das Sechseck $cfedabc$ mit den Seiten 1 2 3 4 5 6, so bemerkt man, dass die fünf Seiten 1 2 4 5 6 desselben fest sind, also auch die Durchschnittspunkte von 1 und 4, 2 und 5, welche A und B heissen, ebenso der Punkt C, in welchem 6 von AB geschnitten wird. Durch diesen Punkt geht aber auch 3, daher muss das Punktenpaar ef, in welchem irgend ein Kegelschnitt des Büschels die Geraden GH schneidet, stes mit dem festen Punkte C in einer Geraden liegen und also werden alle jene Paare erhalten, wenn eine Gerade X um C gedreht wird. Es entspringt daraus der Satz: *Wird der Kegelschnittbüschel $K(abcd)$ durch irgend zwei Gerade G und H, wovon jede durch einen der Grundpunkte d, c geht, geschnitten, so dreht sich die Verbindungsgerade X der zweiten Durchschnitte e und f von G und H mit K um einen festen Punkt C, welcher mit den übrigen beiden Grundpunkten a, b in einer Geraden liegt.* Der polare Satz ist leicht herzustellen und lautet wie folgt: *Werden auf zwei der Grundtangenten C und D der Kegelschnittschaar $K(ABCD)$ zwei Punkte s_1 und s_2 angenommen, von welchen aus die beiden noch möglichen Tangenten E und F an einen beliebigen Kegelschnitt der Schaar gezogen seien, so beschreibt deren Durchschnittspunkt bei Veränderung des Kegelschnitts eine Gerade, welche durch den gemeinsamen Punkt von A und B geht.*

Fig. 140.



Werden in den Geraden G und H zu den zweimal drei Punkten gde und gcf die vierten harmonischen g zugeordneten Punkte y und z bestimmt, so lässt sich zeigen, dass die Gerade yz stets durch einen bestimmten festen Punkt p geht, während die Gerade ef sich um den Punkt C dreht. Denn zieht man Cg, so wird der Punkt, in welchem sie von yz getroffen wird, zu den drei festen Punkten CDg harmonisch sein, und ef, yz müssen sich auf der festen Geraden dc, in P treffen; ist nun auch P veränderlich, so muss doch der Strahl Pzy stets durch einen festen Punkt p gehen, weil er mit Pg, PD, PC harmonisch ist. Es ist aber die Gerade yz offenbar die Polare des Punktes g in Beziehung des jedesmaligen Kegelschnittes $abcdef$; daraus folgt: *Die Polaren irgend eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel treffen einander in einem und demselben Punkte;* und polar ergibt sich: *Die Pole irgend einer Geraden in Bezug auf eine Kegelschnittschaar liegen in einer und derselben Geraden.*

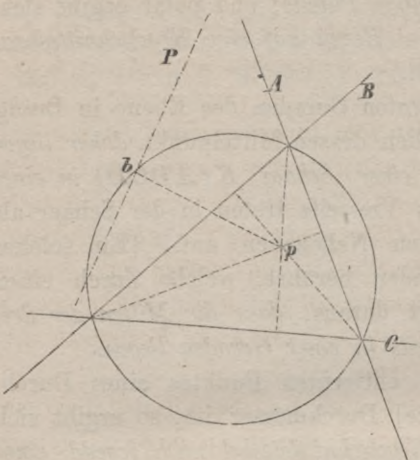
Der Pol der unendlich entfernten Geraden der Ebene in Bezug auf einen Kegelschnitt ist bekanntlich dessen Mittelpunkt, *daher liegen die Mittelpunkte der Kegelschnitte einer Schaar $K(ABCD)$ in einer Geraden.* Die drei Diagonalen des Vierseits treten in der Schaar als Kegelschnitte mit unendlich kleinen Nebenaxen auf. [Ein solcher Kegelschnitt wird von jeder Geraden berührt, welche durch einen seiner Endpunkte geht.] Es folgt daraus, *dass die Mitten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits in einer Geraden liegen.*

Da die Polare des unendlich entfernten Punktes eines Durchmessers der zugeordnete [conjugirte] Durchmesser ist, so ergibt sich der Satz: *Zieht man in einem Kegelschnittbüschel nach irgend einer Richtung die Durchmesser, so laufen deren conjugirte alle durch denselben Punkt.* — Im Kegelschnittbüschel $K(abcd)$ befinden sich auch die drei Kegelschnitte, welche je aus einem Paare von Gegenseiten des vollständigen Vierecks $abcd$ bestehen. Da nun alle Polaren eines Kegelschnittes, der aus zwei Geraden besteht, durch den Schnittpunkt dieser Geraden gehen, so folgt: *Zieht man aus einem beliebigen Punkte nach den Ecken des Diagonaldreiecks in einem vollständigen Viereck Strahlen, und sofort aus jedem dieser Diagonalpunkte den vierten, den nach dem angenommenen Punkte gehenden, zugeordneten Strahl, so treffen sich diese drei Strahlen in einem und demselben Punkte.*

Für die Kegelschnitte, die demselben Viereck $abcd$ umgeschrieben, oder demselben Vierseit $ABCD$ eingeschrieben sind, lassen sich aus der Schaar Parabeln, welche demselben Dreieck eingeschrieben sind, mit Hülfe früherer Sätze folgende Eigenschaften ableiten:

Es sei das Dreieck ABC, sein Höhenpunkt p und der ihm umgeschriebene Kreis m gegeben. Jeder Punkt b des letztern ist der Brennpunkt einer dem Dreieck ABC eingeschriebenen Parabel, deren Leitlinie durch p geht; der Strahl pb steht auf der Polaren P des Punktes p in Bezug auf die Parabel senkrecht. Est ist desshalb der Ort von P ein Kegelschnitt, welcher p zum Brennpunkt hat. Projicirt man nun die Parabelschaar (ABC) von irgend einem Punkte D aus auf eine Ebene E_1, so geht sie in eine Kegelschnittschaar $(A_1B_1C_1D_1)$ über, deren vierte Grundtangente D_1 die Projection der unendlich entfernten Geraden in der Ebene der Parabeln ist, und in Bezug auf diese Kegelschnittschaar kann man den Punkt p als einen beliebigen ansehen*). Man hat also allgemein den Satz: *Die Polaren eines Punktes in Bezug auf eine Kegelschnittschaar sind die Tangenten eines Kegelschnittes;* und durch Polarisation: *Die Pole einer beliebigen Geraden in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel liegen in einem neuen Kegelschnitte.*

Fig. 141.



Der zweite dieser beiden Sätze lässt sich auch wie folgt beweisen: Seien auf der gewählten Geraden G irgend vier harmonische Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gegeben, so erzeugen diese mit dem Büschel die Punkte u, x, y, z, in welchen sich ihre sämmtlichen Polaren resp. schneiden. Die vier Polaren $\alpha\beta\gamma\delta$ in Bezug auf einen der Kegelschnitte des Büschels sind aber vier, vom Pole p der Geraden G oder $\alpha\beta\gamma\delta$ ausgehende harmonische Strahlen, die resp. durch u, x, y, z gehen, folglich liegen alle Pole p so, dass sie mit $uxyz$ vier harmonische Strahlen bestimmen, d. h. auf einem Kegelschnitte, der durch die Punkte u, x, y, z geht. *Es ist leicht nachzuweisen, dass dieser Kegelschnitt, wie auch die Gerade G liegen möge, stets die Diagonalpunkte des von den Grundpunkten des Büschels gebildeten vollständigen Vierecks enthält.*

Wir bemerken einige spezielle Fälle der eben bewiesenen Sätze: *Zieht man in einer Kegelschnittschaar nach irgend einer Richtung parallele Durchmesser, so sind die ihnen conjugirten Durchmesser die gesammten Tangenten eines Kegelschnitts, welcher die drei Diagonalen des vollständigen Vierseits berührt, und ebenso die Gerade, welche die Mitten dieser*

*) Dabei ist allerdings zu bemerken, dass ein Vierseit V und ein Punkt S in der Ebene sich nur dann in die unendlich entfernte Gerade, ein Dreiseit und dessen Höhenpunkt projiciren lassen, wenn von den drei Strahlenpaaren, welche P mit den drei Paaren der Gegenecken von V verbinden, je zwei übereinandergreifen, so dass keines das andere ganz einschliesst oder ganz ausschliesst. Durch das Vierseit wird die Ebene in eilf (theils endliche, theils unendliche) Flächenstücke zerlegt und man kann leicht angeben, in welchen derselben S liegen muss, damit die verlangte Projection möglich werde.

Diagonalen verbindet. Umgekehrt, wird dem Vierseite, welches die letztgenannten Geraden bilden, irgend ein Kegelschnitt eingeschrieben, so ist jede Tangente derselben ein Durchmesser eines der Kegelschnitte der Schaar, und dann sind die, diesen Durchmessern conjugirten Durchmesser unter sich parallel. — Da, wie leicht einzusehen ist, die Mitte einer Seite eines volltändigen Vierecks der Mittelpunkt eines bestimmten, dem Viereck umschriebenen Kegelschnittes ist, so folgt:

Die Mittelpunkte der Kegelschnitte eines Büschels liegen in einem neuen Kegelschnitte, welcher durch die drei Diagonalpunkte des von den Grundpunkten des Büschels gebildeten vollständigen Vierecks und durch die sechs Mitten der Seiten desselben geht. Liegen die vier Grundpunkte $(abcd)$ des Büschels so, dass d der Höhenpunkt des von abc gebildeten Dreiecks ist, so besteht der Kegelschnittbüschel aus lauter gleichseitigen Hyperbeln, und der Ort ihrer Mittelpunkte ist der Kreis, welcher durch die Mitten der Seiten des Dreiecks abc, so wie durch die Fusspunkte der Höhen dieses Dreiecks geht. —

Wenn die vier Grundpunkte $abcd$ eines Kegelschnittsbüschels ein convexes Viereck bilden, so dass keiner von ihnen in dem Dreieck liegt, welches die drei andern bestimmen, so ist der Mittelpunktskegelschnitt des Büschels eine Hyperbel und es befinden sich sonach im Büschel zwei Parabeln, deren Mittelpunkte die unendlich entfernten Punkte dieser Hyperbel sind. Sei jetzt p der unendlich entfernte Punkt in der Axe einer der beiden Parabeln, so bestimmt er im Büschel ein System paralleler durch ihn gehender Durchmesser, deren conjugirte Durchmesser, wie bewiesen worden ist, sich in einem Punkte p_1 schneiden müssen. Aber einer dieser conjugirten Durchmesser ist die unendlich entfernte Gerade [welche der Axe der angenommenen Parabel entspricht], folglich liegt p_1 ebenfalls im Unendlichen, d. h. *die Kegelschnitte des Büschels haben ein System conjugirter Durchmesser, die unter sich parallel laufen und resp. mit den Axen der beiden im Büschel enthaltenen Parabeln gleichgerichtet sind.*

Befindet sich im Büschel $(abcd)$ ein Kreis, so müssen, weil sämmtliche Paare conjugirter Durchmesser des Kreises rechte Winkel einschliessen, die genannten Systeme conjugirter Durchmesser senkrecht zueinander stehen, d. h. die Axen der Kegelschnitte des Büschels sein. Also: *Die Axen sämmtlicher Kegelschnitte, welche durch ein Kreisviereck gehen, sind unter sich resp. parallel, und namentlich auch parallel den Axen der beiden unter ihnen befindlichen Parabeln, so dass also diese Parabelaxen senkrecht zueinander stehen.*

In dem Büschel treten auch drei Kegelschnitte auf, die je in zwei Geraden zerfallen. Die Axen eines solchen Kegelschnitts sind die Winkelhalbirenden der beiden Geraden, aus denen er besteht. Aus dieser Bemerkung lassen sich einige Sätze in Bezug auf die vier Punkte ableiten, in denen sich ein Kreis und ein Kegelschnitt treffen. Es müssen z. B. die Strahlen ab und cd, ac und bd, ad und bc mit jeder der Axen resp. gleiche Winkel bilden; hält man also den Kegelschnitt fest und verändert den Kreis derart, dass er stets durch a und b geht, so verändert die Sehne cd ihre Lage in der Weise, dass sie stets irgend einer ihrer Lagen parallel bleibt. Werden a und b als zusammenfallend angenommen, so berührt jeder Kreis durch a und b den Kegelschnitt in a. Unter allen diesen berührenden Kreisen, gibt es einen, von welchem noch einer der Punkte c und d mit a und b zusammenfällt; *dieser Kreis heisst der Krümmungskreis des Kegelschnittes in dem Punkte* a und kann mit Hülfe der entwickelten Eigenschaften leicht construirt werden.

Berichtigungen. ist verbessert

Seite 9 Zeile 17 v. o. lies $M_1 M_2$ statt M_1, M_2.
„ 36 „ 21 „ „ „ $AB = 2c$ statt $AB = 2a$.
„ 62 „ 12 v. u. „ $DC + DC$ statt $DC + DC$. DC'
„ 78 „ 6 v. o. „ $EG \,.\, GF$ statt $EG : GF$.
„ 113 „ 3 „ „ „ Punkt B statt Punkt A.
„ 114 „ 9 „ „ „ $\sphericalangle\, b_1 a_1$ statt $b_1 a$.
„ 114 „ 16 „ „ „ $\beta = BND$ statt $\beta = BDN$.
„ 118 „ 2 v. u. „ const $= k_1$ statt const $= k$.
„ 125 „ 2 v. o. „ $p = R$ statt $p - R$.
„ 126 „ 9 „ „ „ $o = o$ statt $0 = 0$.
„ 132 „ 13 „ „ „ $vk = ud$ statt $uk = ud$.
„ 134 „ 16 v. u. „ $HC : JD$ statt $HD : JC$.
„ 135 „ 8 9 v. o. „ $KJ : JD = CH : HK$ statt $KJ : JC = DH : HK$.
„ 135 „ 11. 12 „ „ „ in Betracht des Tangentendreiecks statt in Betracht der Tangente.
„ 138 „ 16 v. u. „ concaves statt convexes.
„ 139 „ 11 v. o. „ $abdc$ statt $abcd$.
„ 139 „ 3 v. u. „ Festsetzung statt Fortsetzung.