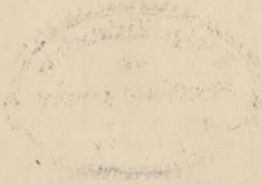
1,50



20.00

FORSCHERARBEITEN AUS DEM GEBIETE DES EISENBETONS

Graphostatische Untersuchung

der

Beton- und Betoneisenträger

von

Paul Weiske
Diplom-Ingenieur und kgl. Oberlehrer.

Von der Königlichen Technischen Hochschule Hannover zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigte Dissertation.

Referent:
Geh. Reg.-Rat Professor Barkhausen.
Korreferent:
Professor G. Lang.

(Hiezu eine Tafel.)

= WIEN =
Verlag von „BETON & EISEN“ (Dr. Fritz v. Emperger)
1904

GRAPHOSTATISCHE UNTERSUCHUNG

DER

BETON- UND BETONEISENTRÄGER

VON

PAUL WEISKE
DIPLOM-INGENIEUR UND KGL. OBERLEHRER.

VON DER KÖNIGLICHEN TECHNISCHEN HOCHSCHULE HANNOVER
ZUR ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTOR-INGENIEURS
GENEHMIGTE DISSERTATION

REFERENT: GEH. REGIERUNGSRAT PROFESSOR G. BARKHAUSEN.
KORREFERENT: PROFESSOR G. LANG.

(HIEZU EINE TAFEL.)

= WIEN =
VERLAG VON „BETON & EISEN“ (DR. FRITZ v. EMPERGER)
1904.

INHALT.

Druck von R. Spies & Co., Wien

VORWORT.

Die folgende Abhandlung enthält eine graphostatische Untersuchung der Beton- und Betoneisenträger, welche sich im wesentlichen auf die Grundgesetze der graphischen Statik über die Ermittlung der statischen Momente und Trägheitsmomente von Flächen stützt.

Es wird gezeigt, wie mit Benützung von Versuchsergebnissen über die Veränderlichkeit des Beton-Druck- und Zug-Elastizitätsmoduls die Spannungsverhältnisse für die verschiedenen Belastungsstufen und Armierungen ermittelt werden können.

Möge diese Arbeit mit dazu beitragen, daß die theoretischen Grundlagen der Betoneisenkonstruktionen immer mehr mit den tatsächlichen Verhältnissen in Einklang kommen.

Kassel, im November 1903.

Dipl. Ing. **Paul Weiske**

Königlicher Oberlehrer.

I.

Einleitung.

Zwischen der Dehnung oder Verkürzung ε, die ein Stab durch eine auf denselben wirkende Normalkraft P erleidet, und der hierdurch entstehenden Spannung σ besteht allgemein die Beziehung:

$$\varepsilon = \alpha \cdot \sigma.$$

Hiebei ist σ die auf die Flächeneinheit bezogene Beanspruchung des Stabes vom Querschnitte F aus der Kraft P, also $\sigma = \frac{P}{F}$.

ε ist die auf die Längeneinheit bezogene Dehnung oder Verkürzung, also $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, wenn Δl die hervorgerufene Verlängerung oder Verkürzung des Stabes von der Länge l ist.

α ist ein von der physischen Beschaffenheit des Stoffes abhängiger Koeffizient, der durch Versuche zu bestimmen ist.

Aus Versuchen hat sich ergeben, daß α nur für wenig Baustoffe, wie Schmiedeeisen und Stahl, innerhalb der für die Anwendung im Baufach gegebenen Spannungsgrenzen konstant oder nahezu konstant ist, das heißt von σ unabhängig.

Für andere wichtige Baustoffe, wie Gußeisen, Steine, Beton, ist α von der Größe der Spannung abhängig, also

$$\alpha = \varphi(\sigma).$$

Wir wollen unsere Untersuchungen bezüglich der Zahlenwerte auf Betonkörper beschränken, wenngleich der allgemeine Teil derselben auch auf die übrigen Stoffe sich anwenden läßt.

Für die Betonkörper kann aus Versuchen von Bach-Schüle, Grut-Nielsen u. a. mit Sicherheit angenommen werden, daß α mit der Beanspruchung σ wächst.

In dem Produkte $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$ muß daher mit wachsendem ε der Wert von σ kleiner ausfallen, als wenn α eine konstante Größe wäre. Hierbei wird Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt.

Bei Betonzugspannungen wächst α noch schneller mit σ als bei Betondruckspannungen.

Für auf Biegung beanspruchte Balken folgt für

$$\alpha = \text{konstant}$$

Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung, also geradlinige Spannungsverteilung.

Aus der Annahme

$$\alpha = \varphi(\sigma)$$

folgt kurvenförmige Spannungsverteilung, u. zw. für Betonkörper eine langsamere Zunahme der Spannungen mit wachsender Dehnung.

Bei einem auf Biegung beanspruchten Betonbalken wirken daher die in der Nähe der Nullinie liegenden Fasern in stärkerem Maße mit und entlasten die äußeren Fasern. Bei wachsender Beanspruchung des Balkens verschiebt sich die Nullinie aus der ursprünglichen Schwerpunktlage (Spannungszustand Null) nach der Druckseite hin. Daher wird die Druckzone kleiner und die Zugzone größer. Die Betonzugspannungen fallen bedeutend kleiner aus, als es die Berechnung bei Annahme geradliniger Spannungsverteilung ergeben würde, so daß sich der Widerspruch erklärt, daß ein auf Biegung beanspruchter Betonbalken scheinbar größere Zugfestigkeit besitzt, als wenn er auf Zug beansprucht würde.

Ein genaues Urteil über die Art der Spannungsverteilung in Betonträgern kann man sich nur bilden, wenn der Verlauf der gegenseitigen Abhängigkeit von α und σ in der Gleichung

$$\alpha = \varphi(\sigma)$$

aus Versuchen hinreichend für die verschiedenen Mischungsverhältnisse und Materialien bekannt ist.

Man kann dann nach Konstruktion der Dehnungskurven für Zug und Druck die Aufgabe der Spannungsberechnung rechnerisch oder zeichnerisch weiter behandeln.

Für die rechnerische Behandlung ergibt sich die Notwendigkeit, die aus Versuchen zu bestimmenden Dehnungskurven in eine möglichst einfache mathematische Form zu kleiden, doch so, daß dem Material möglichst wenig Zwang angetan wird. Je weniger letzteres geschieht, um so mehr werden die berechneten Spannungen mit den wahren Spannungen übereinstimmen. Doch werden die Rechnungen außerordentlich verwickelt, bezw. für die Praxis unbrauchbar, wenn man auf volle Genauigkeit Anspruch machen will.

Bei der zeichnerischen Behandlung kann man sich den aus Versuchen gewonnenen Resultaten eher anschmiegen und kann sogar auf die Aufstellung einer Gleichung für die Dehnungskurven verzichten. Durch passende Wahl des Verfahrens kann man die Spannungsverteilung im Betonkörper bei wachsender Belastung verfolgen, soweit das Beobachtungsmaterial reicht, in einem einzigen Schaubilde.

Wir wollen in der folgenden Abhandlung versuchen, dieses Schaubild zu konstruieren für Betonträger und für Betoneisenträger. Teilweise werde ich mich auf frühere Publikationen von mir beziehen. Dieselben sind:

1. Beitrag zur Berechnung der Beton- und Betoneisenträger. „Dinglers Polyt. Journal" 1902, Heft 46.

2. Die Anwendung von Kraft- und Seileck auf die Berechnung der Beton- und Betoneisenträger. „Dinglers Polyt Journal" 1903, Heft 49/50.

Ferner habe ich bei der Bearbeitung benutzt:

Bach: „Elastizität und Festigkeit". Berlin, Julius Springer, 1902.

Barkhausen: Die Verbundkörper aus Mörtel und Eisen im Bauwesen. „Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen" 1901, Heft 2.

Spitzer: „Über die Versuchsergebnisse bei Erprobung von Beton- und Betoneisenkonstruktionen". Wien 1901, Selbstverlag.

Wayss & Freytag: „Der Betoneisenbau. Seine Anwendung und Theorie." 1902, Selbstverlag.

II.

Der Elastizitätsmodul des Betons.

Für die folgenden Betrachtungen empfiehlt es sich nicht den Dehnungskoeffizienten α in die Rechnung einzuführen, sondern seinen reziproken Wert, den Elastizitätsmodul $E = \frac{1}{\alpha}$.

Ist die Endspannung aus einer von Null bis P wachsenden Kraft σ, die aus Versuchen bestimmte Dehnung ε, so ist der mittlere Dehnungskoeffiizient in dem Intervalle von 0 bis σ

$$\alpha = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

oder der mittlere Elastizitätsmodul:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}.$$

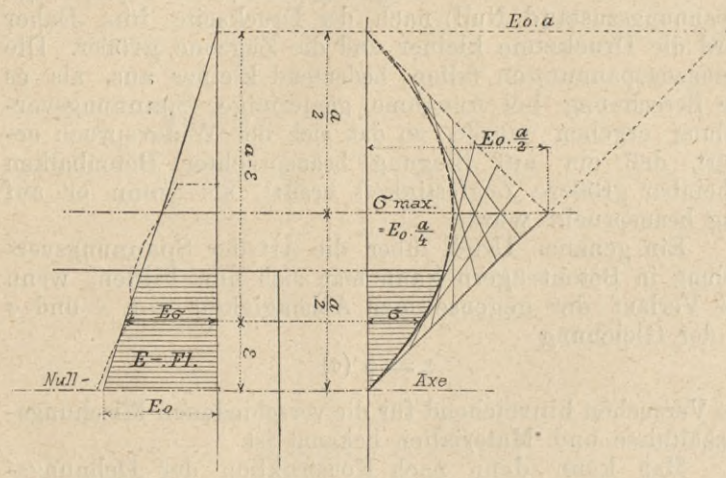


Fig. 1.

Man trägt in Fig. 1 auf einer senkrechten Achse die Werte ε auf, senkrecht dazu als Ordinaten die zugehörigen E-Werte. Dann bilden die Verbindungsgeraden der Endpunkte der E-Werte einen gebrochenen Linienzug, welcher für Beton eine abfallende Tendenz nach der ε-Achse hat, u. zw. für Zug stärker als für Druck.

Wir wollen diese Fläche die E-Fläche nennen. Die Form derselben ist wesentlich bedingt durch die Gestalt des Linienzuges, der die Endpunkte der E-Werte verbindet.

Insbesondere ist für die Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung E konstant. Dann ist die E-Kurve eine Parallele zur ε-Achse und die E-Fläche ist ein Rechteck von dem Inhalte $E \cdot \varepsilon$. Die Spannung, welche der Dehnung ε entspricht, ist $\sigma = E\,\varepsilon$. Das Spannungsdiagramm ist geradlinig wegen des konstanten Wertes von E. Ist E veränderlich, so liegt es nahe, die gebrochene E-Linie durch, wenn möglich, eine Gerade oder durch zwei Geraden zu ersetzen; von diesen Geraden kann eine Gerade (gewöhnlich diejenige für niedere Spannungen) sogar parallel zur ε-Achse sein. Man rechnet dann annäherungsweise bis zu einer gewissen Grenze (Proportionalitätsgrenze) mit konstantem ε und hat innerhalb derselben geradlinig wachsende Spannungsverteilung.

Ist die E-Kurve ersetzt durch eine nach der ε-Achse fallende Gerade, so erhält man parabolische Spannungsverteilung.

Mit den Bezeichnungen der Fig. 1 ist nämlich:

$$E_\sigma : E_0 = (a - \varepsilon) : a$$

oder

$$E_\sigma = E_0 - \frac{\varepsilon}{a} \cdot E_0$$

und

$$\sigma = E_\sigma \cdot \varepsilon = E_0 \cdot \varepsilon - \left(\frac{E_0}{a}\right) \cdot \varepsilon^2,$$

d. h. die Spannung wächst langsamer als die Dehnung, u. zw. parabolisch.

Die Spannung σ ist 0 für:

1. $\varepsilon = 0$, d. h. im spannungslosen Anfangszustand, und
2. $\varepsilon = a$, d. h., wenn der Elastizitätsmodul bis auf Null abgenommen hat.

Zwischen beiden Werten liegt ein Maximum, welches man durch Differenzieren der σ-Gleichung erhält. Es ist:

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 - \frac{E_0}{a} \cdot 2\,\varepsilon = \text{Null}$$

für

$$\varepsilon = \frac{a}{2}.$$

Die zweite Abteilung ist negativ, denn es ist:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} = -\frac{2}{a} \cdot E_0.$$

Der Maximalwert von σ ist:

$$\sigma_{\max} = E_0 \frac{a}{2} - \frac{E_0}{a} \cdot \frac{a^2}{4} = E_0 \cdot \frac{a}{4},$$

also halb so groß, als wie er bei konstantem $E = E_0$ bei der Dehnung $\varepsilon = \frac{a}{2}$ sein würde.

Mit Hilfe dieser Daten ist die Konstruktion des Spannungsdiagrammes in Fig. 1 ohneweiters ersichtlich.

Die angestellte Betrachtung ist rein theoretisch, insofern, als es kaum einen Stoff geben wird, dessen E-Kurve sich von Anfang bis zu Ende durch eine Gerade ersetzen ließe. Insbesondere ist der Grenzfall $\sigma = 0$ für $\varepsilon = a$, also der Gedanke, daß bei zunehmender Dehnung nach Überschreitung einer Maximalgrenze die Spannung sogar bis auf Null wieder abnehmen kann, wohl mit Versuchsergebnissen nicht in Einklang zu bringen.

Es wird sich später zeigen aus der Betrachtung der E-Fläche Fig. 4 (siehe Tafel), daß man die E-Kurve bei Beton annäherungsweise für Druck durch eine flacher zur ε-Achse geneigte Gerade, für Zug durch eine steiler geneigte Gerade ersetzen kann.

Innerhalb der in den Baukonstruktionen einzuhaltenden Grenzen käme für die Druckseite nur der Anfang der Parabel der Spannungen in Frage, während auf der Zugseite, falls Eiseneinlagen vorhanden sind, die Parabel der Spannungen bis zum Werte $\sigma_{\max}$ benutzt wird. Versuche haben gezeigt, daß sich der Beton, nachdem er auf der Zugseite die höchste Spannung erreicht hat, ohne wesentlichen Spannungszuwachs weiter dehnt. Im Spannungsdiagramm der Zugseite würde sich also an den Scheitel der Parabel eine senkrechte Tangente anschließen. (Immer Eiseneinlagen vorausgesetzt.) Die entsprechende E-Kurve kann nun natürlich keine fallende Gerade mehr sein. Vielmehr ist die E-Kurve eine gleichseitige Hyperbel, welche die ε-Achse zur Asymptote hat und in dem Abstande $\varepsilon = \frac{a}{2}$ an Stelle der Geraden tritt, denn es ist:

$$\sigma = E_\sigma \cdot \varepsilon = c \text{ konstant, daher}$$

$$E_\sigma = \frac{c}{\varepsilon},$$

d. h. mit geradlinig zunehmenden ε nehmen die E-Werte hyperbolisch ab.

Da die hyperbolische E-Kurve die ε-Achse zur Asymptote hat, so wird der Wert $E_\sigma = \text{Null}$ bei noch so großen Dehnungen ε nie erreicht.

Eine derartige Konstruktion des Spannungsdiagramms: steile Parabel auf der Druckseite, flache Parabel auf der Zugseite bis zum Scheitel und daran anschließend eine Tangente parallel zur ε-Achse dürfte dem wirklichen Verlauf der Spannungen sehr nahe kommen.

Die analytische Behandlung auf ähnlicher Grundlage ist von Haberkalt angegeben.

Die steile Parabel auf der Druckseite läßt sich innerhalb der zulässigen Spannungsgrenzen durch eine Gerade ersetzen. Ebenso kann man auf der Zugseite zwei Geraden wählen: die erste ersetzt die Parabel, die zweite ist mit der Tangente identisch. Auf dieser Grundlage hat Barkhausen Formeln zur Berechnung der Betoneisenträger aufgestellt. Haberkalt hat an einem Zahlenbeispiele gezeigt, daß die nach beiden Methoden berechneten Spannungswerte nicht viel voneinander abweichen.

Dem Barkhausen'schen Diagramm entsprechen als E-Kurven auf der Druckseite eine Parallele zur ε-Achse, auf der Zugseite ebenfalls eine Parallele bis zur Streckgrenze und von da an eine gleichseitige Hyperbel.

Die Ersetzung der E-Kurve durch Gerade geschieht graphisch durch Interpolation oder analytisch nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Obgleich es bei der nachfolgenden graphischen Behandlung der Beton- und Betoneisenträger für einen einzelnen vorliegenden Fall kein Bedürfnis ist, die E-Kurve durch eine Gleichung auszudrücken, wenn die einzelnen E-Werte aus Versuchen bekannt sind, so ist doch wünschenswert, zu einer Gleichung zu kommen, um auch Schlüsse auf nicht untersuchte Konstruktionen ziehen zu können.

Wir wollen in folgendem nach der Methode der kleinsten Quadrate zwischen die verschiedenen E-Punkte eine Kurve interpolieren, welche sich der E-Linie möglichst anschmiegt, und wählen für den mathematischen Ausdruck derselben die von Bach-Schüle aufgestellte Formel:

$$\varepsilon = \alpha_1 . \sigma^m$$

oder

$$\varepsilon = \frac{1}{E_1} \sigma^m.$$

In dieser Gleichung bedeutet E_1 den Elastizitätsmodul für das Intervall von $\sigma = 0$ bis $\sigma = 1$, m ist ein Exponent, der für Beton größer ist als 1.

Die Gleichung besagt also gleichfalls, daß die Dehnungen schneller wachsen als die Spannungen.

Für Zug ist E_1 kleiner und m größer als für Druck.

Will man die Gleichung in Beziehung bringen zu den aus Versuchen gewonnenen Werten E für gleiche Spannungen σ und Dehnungen ε, so müssen folgende beiden Gleichungen nebeneinander gelten:

$$\text{I. } \varepsilon = \frac{1}{E_1} \sigma^m$$

$$\text{II. } \varepsilon = \frac{1}{E_\sigma} . \sigma.$$

Hieraus folgt:

$$\text{III. } E_\sigma = \frac{E_1}{E^{m-1}}.$$

Hiebei ist E_σ der bei Versuchen bei Eintreten der Spannung σ bestimmte Wert oder der für einen Betonkörper zu berechnende, einer Spannung σ entsprechende Wert des Elastizitätsmoduls, wenn E_1 und m bekannt sind oder angenommen werden.

Durch Logarithmieren der Gleichung III erhält man:

$$\log E_\sigma = \log E_1 - (m - 1) \log \sigma$$

oder

$$\log E_1 - (m - 1) \log \sigma - \log E^\sigma = 0.$$

Soll aus Versuchen eine Kurve bestimmt werden, welche sich den Versuchswerten möglichst anschmiegt, so sind in der Gleichung:

$$\log E_1 - (m - 1) \log \sigma - \log E_\sigma = 0$$

die Werte $\log E_1$ und $(m - 1)$ als Unbekannte einzuführen und die Werte $\log \sigma$ und $\log E_\sigma$ aus Versuchen als bekannte Größen zu entnehmen.

Setzt man zur Vereinfachung $\log E_1 = x$ und $(m - 1) = y$, die gegebenen Größen $\log \sigma = b$, $\log E_\sigma = c$, so lautet die Bedingungsgleichung:

$$x - b\,y - c = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer geraden Linie. Sind n Messungen für n Belastungsstufen vorhanden, so hat man aus den n Bedingungsgleichungen die zwei Normalgleichungen für die Unbekannten x und y zu bilden nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Normalgleichungen lauten:

$$[a\,a]\,x + [a\,b]\,y + [a\,c] = 0$$
$$[a\,b]\,x + [b\,b]\,y + [b\,c] = 0.$$

Da die Koeffizienten von x, also alle Werte $a = 1$ sind, so sind für die n Bedingungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
&[a\,b] = n \\
&[a\,b] = [b] \quad = - \Sigma \log \sigma \\
&[a\,c] = [c] \quad = - \Sigma \log E_\sigma \\
&[b\,b] = [b^2] = \quad \Sigma (\log \sigma)^2 \\
&[b\,c] = [b\,c] = \quad \Sigma \log \sigma . \log E_\sigma.
\end{aligned}$$

Hierin bedeuten die [ ] Klammern die Summen der n Glieder aus den einzelnen Gleichungen. Es ergibt sich aus den beiden Normalgleichungen

$$x = - \frac{[b^2]\,[c] - [b]\,[b\,c]}{n . [b^2] - [b]^2}$$

und

$$y = - \frac{n\,[b\,c] - [b]\,[c]}{n\,[b^2] - [b]^2}$$

oder mit Anwendung auf unsere Ausdrücke:

$$\log E_1 = \frac{\Sigma (\log \sigma)^2\, \Sigma \log E_\sigma - \Sigma \log \sigma\, \Sigma \log \sigma . \log E^\sigma}{n\, \Sigma \log \sigma^2 - (\Sigma \log \sigma)^2}$$

$$m - 1 = - \frac{n . \Sigma \log \sigma . \log E_\sigma - \Sigma \log \sigma\, \Sigma \log E_\sigma}{n\, \Sigma (\log \sigma)^2 - (\Sigma \log \sigma)^2.}$$

Dies ist die analytische Bestimmung von E_1 und m aus gegebenen Versuchsresultaten.

Einfacher ist es in Fig. 3, die Logarithmen der Spannungen auf einer wagrechten Achse aufzutragen und dazu senkrecht als Ordinaten die Logarithmen der E-Werte. Die Verbindungslinie der Endpunkte ist ein gebrochener Linienzug, zwischen welchen eine Gerade interpoliert wird. Diese Gerade schneidet auf der Senkrechten durch den Nullpunkt der $\log \sigma$-Achse den Wert $\log E_1$ ab. Denn es ist in der Gleichung:

$$\log E_\sigma = \log E_1 - (m - 1) \log \sigma$$

für $\sigma = 1$; $\log \sigma = 0$, also $\log E_\sigma = \log E_1$ und $E_\sigma = E_1$.

Ferner ist für $\sigma = 10$, $\log E_{10} = \log E_1 - (m - 1) \log 10$ oder $(m - 1) = \log E_1 - \log E_{10}$, da $\log 10 = 1$ ist.

Um also $m - 1$ zu erhalten, braucht man nur im Endpunkte von log 10 eine Senkrechte zu errichten bis zum Schnitt mit der $\log E$-Geraden und durch den Schnittpunkt eine Parallele zur $\log \sigma$-Achse bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse zu ziehen. Die Diskussion der Logarithmusgleichung liefert dann noch weiter für $\sigma = 0$ den Wert $E_0 = \infty$ und für $\sigma = \infty$ den Wert $E_\infty = 0$.

Übrigens zeigt auch das Schaubild der Logarithmen der Elastizitätsmodulen, ob es wohl angezeigt ist, für alle

Versuchswerte eine einzige Ausgleichgerade der Logarithmen zu bestimmen, oder ob man nicht bei zu großen Abweichungen der Punkte untereinander zwei oder mehr Geraden mit verschiedener Neigung gegen die $\log \sigma$-Achse interpoliert.

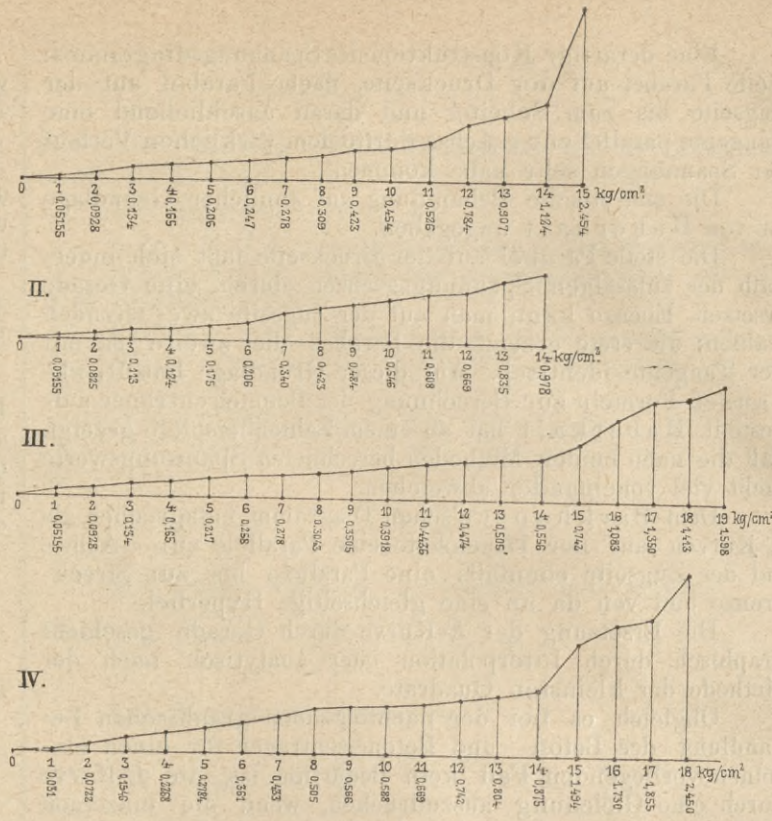


Fig. 2.

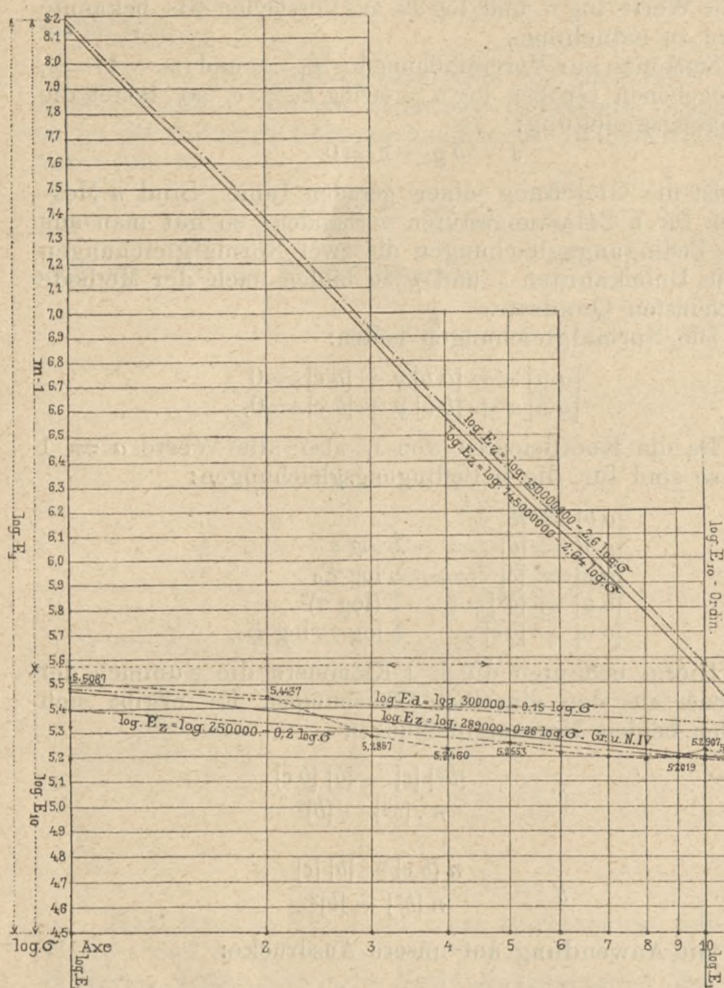
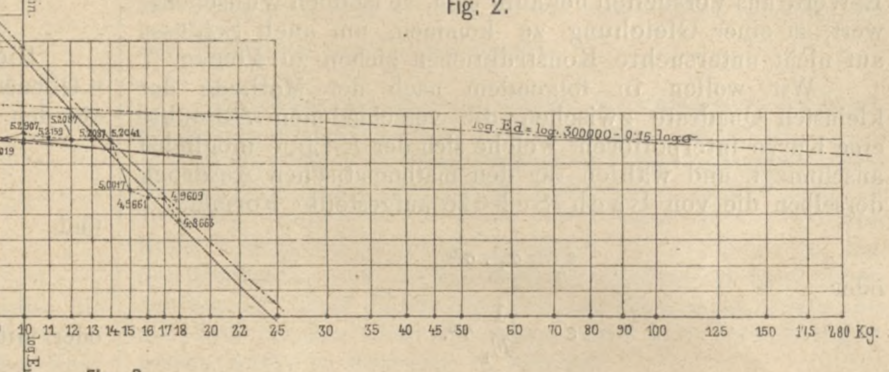



Fig. 3.

Zunächst soll die Berechnungsmethode an einem bereits vorliegenden Beispiele noch kurz erläutert werden:

Beispiel: Granit (Zug) siehe Bach, Elastizität und Festigkeit, 4. Auflage, Seite 67.

Tabelle.

σ	ε	E	$\log E$	$\log \sigma$	$\log \sigma^2$	$\log E . \log \sigma$
3·5	1·43	146.900	5·1670	0·5441	0·2960	2·8114
7·0	3·82	109.900	5·0410	0·8451	0·7142	4·2601
14·0	9·61	87.400	4·9415	1·1461	1·3135	5·6635
21·01	16·60	75.900	4·8802	2·3224	1·7487	6·4536
kg/m^2	$\frac{x}{1200 \cdot 50}$		20·0297	3·8577	4·0724	19·1876

Es ist:

$$\log E_1 = \frac{\Sigma \log \sigma^2 \, \Sigma \log E - \Sigma \log \sigma \,.\, \Sigma \log \sigma \,.\, \log E}{n \,.\, \Sigma \log \sigma^2 - (\Sigma \log \sigma)^2}$$

$$\text{und } m - 1 = - \frac{n \, \Sigma \log \sigma \,.\, \log E - \Sigma \log \sigma \,.\, \Sigma \log E}{n \, \Sigma \log \sigma^2 - (\Sigma \log \sigma)^2}$$

Also ist:

$$\log E_1 = \frac{4 \cdot 0724 \,.\, 20 \cdot 0297 - 3 \cdot 8577 \,.\, 19 \cdot 1876}{4 \,.\, 4 \cdot 0724 - 3 \cdot 8577} = 5 \cdot 371.$$

$$E_1 = 235.000.$$

$$m - 1 = - \frac{4 \,.\, 19 \cdot 1876 - 3 \cdot 8577 \,.\, 20 \cdot 0297}{4 \,.\, 4 \cdot 0724 - 3 \cdot 8577} = 0 \cdot 37.$$

$$m = 0 \cdot 37 + 1 = 1 \cdot 37.$$

Also ist

$$\varepsilon = \frac{1}{235.000} \sigma^{1 \cdot 37}.$$

Von Bach ist angegeben $E_1 = 235.000$ und $m = 1 \cdot 374$. An gleicher Stelle hat Bach die Beziehungen zwischen Dehnungen und Spannungen von Körpern aus reinem Zement, aus Zementmörtel und aus Beton angegeben, wie sie sich aus Druckversuchen ergeben haben. Beispielsweise ist angegeben für eine Mischung:

1 Zement, 3 Donausand

$$\varepsilon = \frac{1}{315.000} \sigma^{1 \cdot 15},$$

1 Zement, $4^1/_2$ Donausand

$$\frac{1}{230.000} \sigma^{1 \cdot 17}.$$

Will man für die Betoneisenkonstruktionen, bei welchen fette Betonmischungen 1 : 3 bis 1 : 4 angewendet werden, einen Mittelwert für E_1 und m einführen, so wähle man $E_1 = 300.000$ und $m = 1 \cdot 15$, also $\varepsilon = \frac{1}{300.000} \sigma^{1 \cdot 15}$, eine Gleichung die auch von Wayss & Freytag, „Betoneisenbau“ Seite 75, benutzt wird.

Mit Hilfe der Gleichung

$$\boldsymbol{\log E = \log E_1 - (m - 1) \log \sigma}$$

sind in folgenden Tabellen für $\varepsilon = \frac{1}{300.000} \sigma^{1 \cdot 15}$, also $E_1 = 300.000$ und $m = 1 \cdot 15$, die zusammengehörigen Werte

Druck (—··—··— Linie, Fig. 3).

σ	E	$\alpha = \frac{1}{E}$	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = x \cdot \frac{1}{10^6}$
1	300.000	0·0000033	$3{\cdot}3 \cdot \frac{1}{10^6}$
2	270.000	0·0000037	7·4
3	254.000	0·0000039	11·7
4	244.000	0·0000041	16·4
5	236.000	0·0000042	21·0
6	229.000	0·0000044	26·4
7	224.000	0·0000045	31·5
8	220.000	0·0000045	36·0
9	216.000	0·0000046	41·4
10	212.000	0·0000047	47·0
11	209.000	0·0000048	52·8
12	207.000	0·0000048	57·6
13	204.000	0·0000049	63·7
14	202.000	0·0000050	70·0
15	200.000	0·0000050	75·0
16	198.000	0·0000051	81·6
17	196.000	0·0000051	86·7
18	194.000	0·0000052	93·6
20	191.000	0·0000052	104
22	189.000	0·0000053	117
25	185.000	0·0000054	135
30	180.000	0·0000056	168
35	176.000	0·0000057	200
40	173.000	0·0000058	232
45	170.000	0·0000059	266
50	167.000	0·0000060	300
60	162.000	0·0000062	372
70	159.000	0·0000063	441
80	156.000	0·0000064	512
90	153.000	0·0000065	585
100	150.000	0·0000067	670
125	145.000	0·0000069	863
150	141.000	0·0000071	1065
175	138.000	0·0000072	1260
200	136.000	0·0000074	1480

von σ, ε und E zusammengestellt, u. zw. in der ersten Tabelle nach den Spannungen, in der zweiten Tabelle nach den Verkürzungen geordnet. Die zweite Tabelle ist aus der graphischen Konstruktion der E-Linie mit Hilfe der ersten Tabelle entstanden. Diese Tabelle enthält auch die zu jeder Verkürzung gehörige Verhältniszahl $\frac{E_e}{E_b}$. Der Elastizitätsmodul E_e ist dabei zu 2,000.000 angenommen. Schließlich sind noch die zusammengehörigen, gleichen Verkürzungen entsprechenden Eisen- und Betondruckspannungen angegeben, welche gleichfalls das Verhältnis m haben. Die Eisenspannungen und $\frac{E_e}{E_b}$ Werte von 2000 kg/cm^2 an sind eingeklammert, weil bei der Annahme der Proportionalitätsgrenze des Eisens bei etwa 2000 kg/cm^2, nach Überschreiten derselben der Elastizitätsmodul des Eisens ebenfalls abnimmt und die Eisenspannungen langsamer wachsen als die Dehnungen.

Für die Bestimmung der Koeffizienten E_1 und $m = \frac{E_e}{E_b}$ aus Zugversuchen waren mir zunächst die Mitteilungen in Wayss & Freytag, „Betoneisenbau“, zugänglich.

In folgendem seien die Resultate der nach den aufgestellten Gleichungen von mir angestellten Berechnungen mitgeteilt; die Berechnungen wurden außerdem graphisch geprüft.

Versuch I. Mischung 1 : 3, Wasserzusatz 8%, Giltigkeit der Gleichung bis $\sigma = 9{\cdot}2$ kg/cm^2 Zug:

$$E_1 = 293.500, m = 1{\cdot}17,$$

also

$$\varepsilon = \frac{1}{293.500} \sigma^{1{\cdot}17}.$$

Versuch II. Mischung 1 : 3, Wasserzusatz 14%, Giltigkeit der Gleichung bis $\sigma = 7{\cdot}7$ kg/cm^2 Zug:

Druck (in Fig. 4 oben dargestellt).

$\varepsilon = x \cdot \frac{1}{10^6}$	E	m	σ_e kg/cm^2	σ_b kg/cm^2
25	235.000	8·7	50	5·5
75	200.000	10·0	150	15
125	188.000	10·6	250	23·5
175	180.000	11·1	350	31·5
225	175.000	11·4	450	39·5
275	170.000	11·8	550	46·5
325	166.008	12·0	650	54
375	163.000	12·3	750	61
425	160.000	12·5	850	68
475	158.000	12·7	950	75
525	156.000	12·8	1050	82
575	154.000	13·0	1150	88
625	152.500	13·1	1250	95
675	151.000	13·2	1350	102
725	149.500	13·4	1450	108
775	148.000	13·5	1550	115
825	147.000	13·6	1650	121
875	146.000	13·7	1750	128
925	145.000	13·8	1850	134
975	144.000	13·9	1950	140
1025	143.000	(14·0)	(2050)	146
1075	142.000	(14·1)	(2150)	152
1125	141.000	(14·2)	(2250)	158
1175	140.000	(14·3)	(2350)	164
1225	139.000	(14·4)	(2450)	170
1275	138.000	(14·5)	(2550)	176
1325	137.500	(14·5)	(2650)	182
1375	137.000	(14·6)	(2750)	188
1425	136.500	(14·6)	(2850)	194
1475	136.000	(14·7)	(2950)	200

$$E_1 = 245.500, m = 1{\cdot}15,$$

also

$$\varepsilon = \frac{1}{245.000} \sigma^{1{\cdot}15}.$$

Versuch III. Mischung 1 : 4, Wasserzusatz 8%, Giltigkeit der Gleichung bis $\sigma = 7{\cdot}8$ kg/cm^2:

$$E_1 = 299.000, m_1 = 1{\cdot}22,$$

also

$$E = \frac{1}{299.000} \sigma^{1{\cdot}22}.$$

Versuch IV. Mischung 1 : 4, Wasserzusatz 14%, Giltigkeit der Gleichung bis $\sigma = 6{\cdot}2$ kg/cm^2:

$$E_1 = 294.000, m_1 = 1{\cdot}23,$$

also

$$\varepsilon = \frac{1}{294.000} \sigma^{1{\cdot}23}.$$

Instruktiver sind die Versuche von Grut und Nielsen Dem Vortrag von J. Spitzer „Über Versuchsergebnisse bei Erprobung von Beton und Betoneisenkonstruktionen, Wien 1901“ sind die in Fig. 2, I bis IV dargestellten Dehnungskurven der Versuchskörper entnommen.

Die Berechnung lieferte folgende Gleichungen der Dehnungskurven:

I. Grut und Nielsen I bis 15 kg/cm^2 Spannung:

$$\varepsilon = \frac{1}{283.000} \sigma^{1{\cdot}22}.$$

II. Grut und Nielsen II bis 14 kg/cm^2 Spannung (Bruch):

$$\varepsilon = \frac{1}{291.000} \sigma^{1{\cdot}17}.$$

III. Grut und Nielsen III bis 19 kg/cm^2 Spannung (Bruch):

$$\varepsilon = \frac{1}{212.000} \sigma^{1{\cdot}11}.$$

IV. Grut und Nielsen IV bis 18 kg/cm^2 Spannung:

$$\varepsilon = \frac{1}{342.000} \sigma^{1{\cdot}39}.$$

Aus der näheren Untersuchung der Dehnungsdiagramme ergibt sich, daß sich der ganze Verlauf der Abhängigkeit zwischen Dehnung und Spannung nur schlecht durch eine Gleichung zum Ausdruck bringen läßt.

Die Dehnungen wachsen bei niedrigen Spannungen ziemlich proportional den Spannungen, während sie bei höheren Spannungen viel schneller als diese wachsen. Wir haben die Kurve I zunächst näher untersucht und die Dehnungsgleichungen aufgestellt für die Intervalle von 0 bis 9 kg/cm^2, für 0 bis 12 kg/cm^2 und für 0 bis 14 kg/cm^2. Dieselben lauten:

a) für 0 bis 9 kg/cm^2

$$\varepsilon = \frac{1}{202.000}\,\sigma^{1\cdot 09},$$

b) für 0 bis 12 kg/cm^2

$$\varepsilon = \frac{1}{223.000}\,\sigma^{1\cdot 01},$$

c) für 0 bis 14 kg/cm^2

$$\varepsilon = \frac{1}{249.700}\,\sigma^{1\cdot 11}.$$

In dem Intervall von 14 auf 15 kg/cm^2 findet ein derartiger Dehnungszuwachs statt (größer als in dem Intervall von 0 bis 14 kg/cm^2), daß bei Berücksichtigung dieses Intervalls die Dehnungsgleichung nunmehr sich darstellt in der Form:

$$\varepsilon = \frac{1}{283.000}\,\sigma^{1\cdot 22}.$$

Vergleicht man die berechneten Gleichungen, so zeigt sich ein stetes Wachsen der Werte E_1, je mehr man die höheren Spannungen in die zu berechnende Kurve einschließt:

Der Exponent m wird sehr beeinflußt durch das Schwanken der Dehnungskurve; bald wachsen die Dehnungen schneller, bald langsamer in den Intervallen zwischen den einzelnen kg/cm^2 Spannungswerten. Ein langsameres Wachsen der Dehnungen bedingt eine Abnahme von m, ein schnelleres Wachsen eine Zunahme von m. Diesen Erwägungen entsprechend haben wir für Kurve IV drei Berechnungen durchgeführt:

a) für die ganze Kurve IV von 0 bis 18 kg/cm^2. Man erhielt, wie oben mitgeteilt, die Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{1}{342.000}\,\sigma^{1\cdot 39},$$

b) für das Intervall von 0 bis 14 kg/cm^2

$$\varepsilon = \frac{1}{289.000}\,\sigma^{1\cdot 26},$$

c) für das Intervall von 14 bis 18 kg/cm^2

$$\varepsilon = \frac{1}{145,500.000}\,\sigma^{3\cdot 64}.$$

Die Kurve IV zeigt ebenso wie die Kurven I und III von 14 kg/cm^2 Spannung ab ein vergleichsweise schnelleres Wachsen der Dehnungen als vorher.

Daher wurde für die durch diesen Spannungswert getrennten Intervalle die Berechnung einer Kurve besonders durchgeführt.

Die zweite Kurve hat einen viel größeren Wert von m. Die Dehnungen wachsen fast mit der vierten Potenz der Spannungen. Dafür ist aber die Konstante $\alpha = \frac{1}{E_1}$ bedeutend geringer. E_1 würde den Elastizitätsmodul für 1 kg/cm^2 Spannung bedeuten, wenn die Kurve auch in dem Intervalle von 0 bis 14 kg/cm^2 Giltigkeit hätte. Sämtliche Gleichungen sind auch noch graphisch kontrolliert.

In Fig. 3 ist nach dem von uns oben abgeleiteten Verfahren die Gleichung:

$$\log E_\sigma = \log E_1 - (m - 1) \log \sigma$$

für die Kurve Gruf-Nielsen IV graphisch dargestellt.

Auf der wagrechten Achse sind die $\log \sigma$-Werte, auf der da zu senkrechten Achse die $\log E$-Werte aufzutragen. Als Maßstab der $\log \sigma$-Achse ist die untere Teilung des 25 *cm*-Rechenschiebers benutzt. Der 0-Punkt der $\log E$-Achse hat den Anfangswert erhalten $\log E = 4\cdot 5000$. Jedem Teilstrich auf dieser Achse entspricht ein Zuwachs von 0·1. Zunächst sind die den einzelnen Spannungen entsprechenden $\log E$-Werte nach $\log E = \log \sigma - \log \varepsilon$ aus der Dehnungskurve IV eingetragen. Die Endpunkte der $\log E$-Werte sind durch einen Linienzug verbunden. Man erkennt, daß der Linienzug von 0 bis 14 kg/cm^2 Spannung ziemlich stetig zur $\log \sigma$-Achse abfällt. Von 14 bis 18 kg/cm^2 erhält der Linienzug einen scharfen Knick nach unten und die $\log E$-Werte nehmen nun bedeutend schneller ab.

In der Figur sind nunmehr die den oben angegebenen drei Kurven entsprechenden, die Logarithmengleichung zur Darstellung bringenden Geraden eingetragen.

Das Eintragen geschieht in folgender Weise:

Auf der $\log E$-Achse wird der Wert $\log E_1$ aufgetragen. Im Endpunkt von $\log (10)\, kg/cm^2$ trägt man den Wert $\log E_{10} = \log E_1 - (m - 1)$ auf. Die Verbindungsgerade von den Endpunkten der Werte $\log E_1$ und $\log E_{10}$ ist die verlangte Gerade.

Man erkennt aus der Figur, daß die Ersetzung des gebrochenen Linienzuges durch zwei Gerade genauere Annäherung liefert als diejenige durch eine Gerade. Gleichfalls zeigt die Figur, daß die durch die Berechnung gewonnenen Werte E und m Gerade liefern, welche sich sehr gut dem Beobachtungsmaterial anschmiegen.

Hinsichtlich der Kurve III soll bemerkt werden, daß in der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{212.000}\,\sigma^{1\cdot 11}$$

der Exponent $m = 1\cdot 11$ stark beeinflußt wird durch das langsame Wachsen der Dehnungen in dem Intervalle von $\sigma = 8$ kg/cm^2 bis $\sigma = 14$ kg/cm^2. Während der Verlauf der Dehnungskurve bis 8 kg/cm^2 Spannung nahezu derselbe ist wie bei Kurve I, wachsen in dem genannten Intervalle die Dehnungen sogar langsamer als die Spannungen, um dann von 14 kg/cm^2 Spannung ab sehr stark, wenn auch mit Schwankungen, zuzunehmen.

Trägt man in der beschriebenen Weise die $\log E$-Werte auf, so erhält man einen Linienzug, der bis 14 kg/cm^2 langsam gegen die $\log \sigma$-Achse ansteigt, von dieser Spannung aber ab sehr stark gegen die $\log \sigma$-Achse fällt.

Für das erste Intervall heißt die Dehnungsgleichung dementsprechend:

$$\varepsilon = \frac{1}{200.000}\,\sigma^{0\cdot 9}$$

und für das zweite Intervall

$$\varepsilon = \frac{1}{177,000.000}\,\sigma^{3\cdot 51}$$

Die Richtigkeit beider Gleichungen ist graphisch kontrolliert.

Aus den mitgeteilten Versuchsresultaten scheint hervorzugehen, daß der Beton auf Zug bis zu einer gewissen Grenze, der Streckgrenze, sich ähnlich verhält wie gegen Druck. Von dieser Grenze an wachsen die Dehnungen bedeutend schneller als die Spannungen.

Für reine Betonkonstruktionen ist die Zugfestigkeit die Grenze dieser zweiten Phase.

Bei Betoneisenkonstruktionen aber schließt sich noch eine dritte Phase an.

Nach den Considère'schen Versuchen ist der Beton im Verbundkörper, selbst wenn die Spannungen die Zugfestigkeit der reinen Betonkörper erreicht haben, noch bedeutender Streckungen fähig.

Das Eisen hindert im Beton das Entstehen der lokalen Risse oder die Bildung der sogenannten Einschnürstelle. Hiedurch wird der Zustand des Fließens des Betons verlängert. Es scheint erwiesen, daß Risse erst eintreten, wenn das Eisen seine Proportionalitätsgrenze überschritten hat.

Nehmen wir diese bei 2000 kg/cm^2 Spannung an und beträgt der Elastizitätsmodul des Eisen $E_e = 2{,}000.000$, so ist die entsprechende Dehnung des Eisens:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{2000}{2{,}000.000} = \frac{1}{1000};$$

also auf 1 m Meßlänge bezogen ist $\varepsilon = 1$ mm.

Da wir im Verbundkörper gleiche Formänderungen annehmen, solange die Konstruktion noch rißfrei ist, so ist die Dehnung des das Eisen einhüllenden Betons dieselbe.

Bei dieser Dehnung befindet sich der Beton in der dritten Phase, in welcher derselbe seine größte Zugspannung (die Zugfestigkeit des reinen Betons) konstant beibehält, da man doch nicht annehmen kann, daß durch die Eiseneinlagen die Zugfestigkeit des Betons als solche erhöht wird.

Für den kritischen Zustand des Anrisses ist daher der Elastizitätsmodul des Betons auf Zug:

$$E_z = \frac{\sigma_{max}}{\frac{1}{1000}} = 1000\,\sigma_{max}.$$

Die Zugfestigkeit wird nach den Versuchen von Hanisch und Spitzer im Mittel zu 25 kg/cm^2 angenommen für die Betonmischungen:

1 Zement und 3—4 Teile Sand.

Demnach würde der Elastizitätsmodul des Betons auf Zug bei dem Zustand des Anrisses abgenommen haben bis zu: $E_z = 1000 . 25 = 25.000$.

Daher wäre für diesen Fall

$$m = \frac{E_e}{E_z} = \frac{2{,}000.000}{25.000} = 80.$$

In der dritten Phase wird also konstante Spannung des Betons angenommen. Hieraus ergibt sich, wie oben ausgeführt wurde, ein hyperbolischer Verlauf der E-Linie.

Da wir für die weiter folgende Behandlung der Theorie der Beton- und Betoneisenträger einen bestimmten Verlauf der E-Linie annehmen müssen, um überhaupt Zahlenbeispiele berechnen zu können, wollen wir nunmehr folgende Zahlenwerte zugrunde legen:

I. Phase bis ca. 15 kg/cm^2

$$\varepsilon = \frac{1}{250.000}\,\sigma^{1\cdot 2} \quad (—\,.\,— \text{ in Fig. 3}).$$

II. Phase von ca. 15 kg/cm^2 bis $\sigma_{max.} = 25$ kg/cm^2

$$\varepsilon = \frac{1}{150{,}000.000}\,\sigma^{3\cdot 6} \quad (—\,.\,— \text{ in Fig. 3}).$$

III. Phase: $\varepsilon_z = \frac{\sigma_{max}}{\varepsilon}$ abnehmend bis 25.000.

Für die erste Phase bis zur Streckgrenze ist E_1 etwas kleiner und m etwas größer als wie bei der Dehnungsgleichung der Druckseite angenommen.

Für die zweite Phase sind die Werte höher angenommen, um das schnelle Wachsen der Dehnungen zum Ausdruck zu bringen.

In Fig. 3 sind die Geraden, welche den zugehörigen Gleichungen:

$$\log E_\sigma = \log E_1 - (m - 1) \log \sigma$$

entsprechen, gleichfalls eingetragen.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch Rechnung folgende Werte, welche tabellarisch zusammengestellt sind.

I. Von 1 bis 15 kg/cm^2 Zug

nach der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{250.000}\,\sigma^{1\cdot 2}$$

berechnet nach $\log E = \log 250.000 - 0{\cdot}2 \log \sigma$.

σ	E	$\alpha = \frac{1}{E}$	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = x \cdot \frac{1}{10^6}$
1	250.000	0·0000040	$4{\cdot}0 \cdot \frac{1}{10^6}$
2	218.000	0·0000046	9·2
3	201.000	0·0000050	15·0
4	189.000	0·0000053	21·2
5	181.000	0·0000055	27·5
6	175.000	0·0000057	34·2
7	169.000	0·0000059	41·3
8	165.000	0·0000061	48·8
9	161.000	0·0000062	55·8
10	158.000	0·0000063	63·0
11	155.000	0·0000065	71·5
12	152.000	0·0000066	79·2
13	150.000	0·0000067	87·1
14	148.000	0·0000068	95·2
15	146.000	0·0000068	102·0

II. von 14 bis 25 kg/cm^2 Zug

nach der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{1}{150{,}000.000}\,\sigma^{3\cdot 6}$$

berechnet nach $\log E = \log 150{,}000.000 - 2{\cdot}6 \log \sigma$.

σ	E	$\alpha = \frac{1}{E}$	$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = x \cdot \frac{1}{10^6}$
14	157.000	0·0000064	89·6
15	131.000	0·0000076	114
16	111.000	0·0000090	144
17	95.000	0·0000105	179
18	82.000	0·0000122	220
20	62.000	0·0000161	322
22	48.000	0 0000208	457
25	35.000	0·0000286	715

III.

Abnahme des Elastizitätsmoduls bei konstanter Spannung $\sigma_{max} = kg/cm^2$

nach der Gleichung

$$E_z = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{x} \cdot 10^6.$$

σ	ε	$E = \frac{\sigma}{E}$
25	$750 \cdot \frac{1}{10^6}$	$\frac{25{,}000.000}{750} = 33.300$
25	$850 \cdot \frac{1}{10^6}$	$\frac{25{,}000.000}{850} = 29.400$
25	$950 \cdot \frac{1}{10^6}$	$\frac{25{,}000.000}{950} - 26.300$
. . .	. . .	. . .

etc.

Mit Hilfe der in den Tabellen I bis III aufgeführten Werte sind die E-Linien aufgetragen. Die den Tabellen I und II entsprechenden E-Linien schneiden sich in einer Spitze, an der Übergangsstelle sind daher die Kurven durch eine dritte, sich an beide anschmiegende kurze Kurve ausgeglichen.

Nunmehr sind, wie auf der Druckseite, die zugehörigen Spannungen und E-Werte nach Dehnungen geordnet in folgender Tabelle zusammengestellt.

Zug (in Fig. 4 unten dargestellt).

$E = x . \frac{1}{10^6}$	E	m	Eisenspannung σ_e	Betonzugspannung (auf $^1/_2$ kg abgerundet) σ_z
25	186.000	11	50	4·5
75	144.000	14	150	10·5
125	116.000	17	250	14·5
175	95.000	21	350	16·5
225	80.000	25	450	18·5
275	70.000	28	550	19·5
325	62.000	32	650	20·5
375	56.000	36	750	21
425	51.000	39	850	21·5
475	47.000	43	950	22
525	43.000	47	1050	22·5
575	40.000	50	1150	23
625	38.000	53	1250	23·5
675	36.000	56	1350	24
725	34.000	59	1450	24·5
775	32.000	62	1550	25
825	30.000	66	1650	25
875	28.500	70	1750	25
925	27.000	74	1850	25
975	25.500	78	1950	25

In Fig. 4 sind auf einer senkrechten Achse die Dehnungen und in den Endpunkten der Dehnungen die zugehörigen Elastizitätsmoduln und die Spannungen aufgetragen. Man erhält hierdurch die durch die E-Linien begrenzten E-Flächen und die Spannungs-Diagramme auf der Zug- und Druckseite.

Auf der Zugseite ist als untere Grenze die Proportionalitätsgrenze des Eisens angenommen, welche bei 2000 kg/cm^2 Spannung festgesetzt ist.

Auf der Druckseite ist als obere Grenze die Druckfestigkeit des Betons angenommen, welche auf 200 kg/cm^2 für guten Beton festgesetzt ist.

Es soll bemerkt werden, daß die berechneten Zahlenwerte nur als ein Beispiel angesehen sein wollen, welches benutzt werden soll, um den nächstfolgenden Untersuchungen als Unterlage zu dienen.

Es muß weiteren Versuchen überlassen werden, die einzelnen E-Werte besonders für die Zugseite für die verschiedenen Mischungsverhältnisse noch genau zu bestimmen.

Für schwach armierte Platten, deren Bruch durch Zerreißen der Eisenstangen erfolgt, muß die Figur auf der Zugseite mit Berücksichtigung des nach Überschreiten der Proportionalitätsgrenze veränderlichen Elastizitätsmoduls des Eisens weiter fortgesetzt werden.

Die in der Fig. 4 angegebene untere Grenze auf der Zugseite entspricht dem kritischen Zustand des Anrisses in der Voraussetzung, daß die Risse im Beton erst eintreten, wenn der Fließzustand des Eisens beginnt, wenn also die Proportionalitätsgrenze desselben überschritten ist.

Soll die Gestalt der E-Fläche durch geradlinige Begrenzung vereinfacht werden, so ersetzt man sie auf der Druck- und Zugseite durch Trapeze. Hiedurch erhält man, wie oben schon ausgeführt, parabolische Spannungsverteilung.

III.

Die Anwendung von Kraft- und Seileck auf die Berechnung der Normalspannungen der Beton- und Betoneisenträger. *)

Die Lage der Nullinie eines Balkens wird bestimmt durch die Gleichung der wagrechten Kräfte.

*) In dem Aufsatze: „Die Anwendung von Kraft- und Seileck auf die Berechnung der Beton- und Betoneisenträger" in Dinglers „Polyt. Journal", Heft 49/50 1903, ist die Behandlung der Beton- und Betoneisenträger auf derselben Grundlage durchgeführt, jedoch mit der Vereinfachung, daß zwar der Elastizitätsmodul auf Druck von dem auf Zug verschieden, aber beide für denselben Querschnitt konstant, und zwar mit verschiedenen Werten für verschiedene Belastungszustände angenommen sind. Unter dieser Annahme werden die E-Flächen Rechtecke verschiedener Breite. Hier ist die Aufgabe auf Grund der vorhergehenden Untersuchungen allgemeiner behandelt.

Dieselbe lautet:

$$\underset{\text{Druck}}{\int_0^{e_I}} \sigma \,.\, df = \underset{\text{Zug}}{\int_0^{e_{II}}} \sigma \, df$$

oder da $\sigma = E \,.\, \varepsilon$ ist:

$$\underset{\text{Druck}}{\int_0^{e_I}} E \,.\, \varepsilon \,.\, df = \underset{\text{Zug}}{\int_0^{e_{II}}} E \,.\, \varepsilon \,.\, df$$

Da das Ebenbleiben der Querschnitte vorausgesetzt wird, so ist:

$$\varepsilon : \varepsilon_I = x : e_I \text{ und } \varepsilon : \varepsilon_{II} = x : e_{II}$$

wenn x den für jedes Flächenteilchen veränderlichen Abstand von der Nullinie bedeutet, und wenn ε_I und e_I, ε_{II} und e_{II} die den äußersten Fasern zukommenden Dehnungen und Abstände von der Nullinie sind.

Demnach geht die Grundgleichung über in:

$$\frac{\varepsilon_I}{e_I} \,.\, \underset{\text{Druck}}{\int_0^{e_I}} E\, df \,.\, x = \frac{\varepsilon_{II}}{e_{II}} \underset{\text{Zug}}{\int_0^{e_{II}}} E\, df \,.\, x.$$

Läßt man die gleichen Größen $\frac{\varepsilon_I}{e_I}$ und $\frac{\varepsilon_{II}}{e_{II}}$ weg, so ergibt sich:

$$\underset{\text{Druck}}{\int_0^{e_I}} E \,.\, df \,.\, x = \underset{\text{Zug}}{\int_0^{e_{II}}} E\, df \,.\, x.$$

Da die Dehnungen proportional sind den Abständen von der Nullinie, so kann man das Schaubild (Fig. 4) auch auffassen als Darstellung der Spannungsverteilung und der Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls in einem Balken beliebiger Höhe, der auf Biegung beansprucht wird und der in der wagrechten Achse seine Nullinie hat.

Die E-Fläche behält ihre Bedeutung, nur sind die E-Werte in den zugehörigen Abständen von der Nullinie aufgetragen.

Insbesondere erhält der Ausdruck $\int_0^e E\, df\, x$ die Bedeutung des statischen Momentes der E-Fläche in Bezug auf die Nullachse, wenn die Breite der Flächenstreifen df parallel zur Nullinie konstant ist. Ist dies nicht der Fall, so muß man aus der E-Fläche eine neue konstruieren, bei welcher jeder Wert von E mit der zugehörigen Breite des Balkens multipliziert ist.

Wir setzen bei dieser allgemeinen Behandlung konstante Breite, also rechteckigen Querschnitt voraus.

Nunmehr zerlegen wir die E-Fläche in parallele Streifen und fassen die Flächengrößen der einzelnen Streifen als Kräfte auf. Wir zeichnen zu beiden Kräftegruppen der Druck- und Zugzone zwei besondere Seilecke mit dem gleichen Polabstand H von der Nullinie ausgehend.

Mit Hilfe dieser beiden Seilecke, die wir D-Linie und und Z-Linie nennen wollen, lassen sich zunächst zusammengehörige Spannungswerte von Zug und Druck für reine Betonkörper bestimmen.

Man bestimmt auf der Z-Linie einen Punkt, im Abstand e_{II} von der Nullinie und legt durch denselben eine Tangente an die Z-Linie. Dieselbe wird verlängert bis zum Schnitt mit der Nullachse. Durch den Schnittpunkt legt man eine Tangente an die D-Linie. Der Berührungspunkt hat von der Nullachse die Entfernung e_I. Zieht man durch die Berührungspunkte Parallele zur Nullachse in die E-Fläche und Spannungsdiagramme, so werden die zugehörigen Werte:

$$E_I \text{ und } E_{II},\ \sigma_I \text{ und } \sigma_{II}$$

herausgeschnitten.

In Fig. 5 ist der mittlere Teil der Fig. 4 in doppeltem Maßstab mit kleiner Polweite noch einmal gezeichnet. Mit Hilfe derselben sollen die der Biegungsfestigkeit einer reinen Betonplatte entsprechenden Werte: σ_I und σ_{II}, e_I und e_{II} festgestellt werden.

Die Biegungsfestigkeit ist abhängig von der Betonzugfestigkeit bezw. Dehnungsfähigkeit. Letztere wird zu 0·3 *mm* pro *m* angenommen. Hiedurch ist der Ausgangspunkt der Konstruktion in Fig. 5 bestimmt. Die ermittelten Werte sind:

$$\sigma_I \text{ Druck} = 35\, kg/tm^2$$

$$\sigma_{II} \text{ Zug} = 20\, kg/cm^2$$

$$\frac{e_I \text{ Druck}}{e_{II} \text{ Zug}} = \frac{3{\cdot}9}{6{\cdot}1} = 0{\cdot}64,$$

oder

$$\frac{e_I}{e_I + e_{II}} = \frac{3{\cdot}9}{10{\cdot}0} = 0{\cdot}39$$

und

$$\frac{e_{II}}{e_I + e_{II}} = \frac{6{\cdot}1}{10{\cdot}0} = 0{\cdot}61.$$

Bezüglich der Konstruktion des Kraftteckes ist noch folgendes zu bemerken. Die einzelnen Streifen der E-Fläche werden als Trapeze aufgefaßt, deren mittlere Höhen die angegebenen E-Werte sind. Bei der geringen Breite der Trapeze wird die Schwerlinie als mit diesen mittleren Höhen zusammenfallend angenommen.

Da die Streifen alle dieselbe Breite haben und auch rechteckiger Querschnitt vorausgesetzt ist, so sind die aufgetragenen E-Werte den Inhalten der einzelnen Streifen der E-Fläche, multipliziert mit der Tiefe des rechteckigen Querschnittes proportional.

Wir können auch sagen:

In der Grundgleichung:

$$\int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} E\,.\,df\,.\,x = \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} E\,df\,x$$

ist für alle Flächenstreifen df konstant. Setzt man daher $df = 1$, so geht die Gleichung über in

$$\int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} E\,.\,x = \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} E\,.\,x.$$

Die E-Werte drücken also gewissermaßen die Leistungsfähigkeit jedes einzelnen der gleichen Flächenstreifen aus.

Im Kräftemaßstab ist als Einheit der E-Werte gewählt:

$$1\, cm = 100.000.$$

Der Polabstand H ist gewählt:

für Fig. 4 $H = 1{,}500.000$
für Fig. 5 $H = 1{,}000.000$.

Zur Bestimmung der Aufnahmsfähigkeit einer bestimmten Belastung, bezw. eines äußeren Momentes ist die Momentengleichung erforderlich.

Dieselbe lautet:

$$M = \int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} \sigma\, df\,.\,x + \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} \sigma\,.\,df\,x.$$

Man ersetzt wieder unter dem Integralzeichen die Werte $\sigma\,.\,df\,.\,x$ durch $\underset{\text{Druck}}{E}\,.\,\frac{\varepsilon_I}{e_I}\,.\,df\,.\,x$ oder $\underset{\text{Zug}}{E}\,.\,\frac{\varepsilon_{II}}{e_{II}}\,.\,df\,.\,x.$

Dann ist:

$$M = \frac{\varepsilon_I}{e_I} \int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} E\,.\,df\,.\,x^2 + \frac{\varepsilon_{II}}{e_{II}} \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} E\,.\,df\,.\,x^2.$$

$$= \frac{\varepsilon_I}{e_I}\left[\int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} E\,d\,f\,x^2 + \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} E\,d\,f\,x^2\right].$$

$$= \frac{\varepsilon_{II}}{e_{II}}\left[\int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} E\,.\,d\,f\,.\,x^2 + \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} E\,.\,d\,f\,.\,x^2\right].$$

Man kann weiter setzen:

$$\varepsilon_I = \frac{\sigma_I}{E_I}$$

und

$$\varepsilon_{II} = \frac{\sigma_{II}}{E_{II}}.$$

Mit diesen Werten geht die Gleichung über in:

$$M = \sigma_I\,.\,\frac{\left[\int_0^{e_I} E\,d\,f\,x^2 + \int_0^{e_{II}} E\,d\,f\,x^2\right]}{e_I\,.\,E_I}$$

und

$$M = \sigma_{II}\,.\,\frac{\left[\int_0^{e_I} E\,.\,d\,f\,.\,x^2 + \int_0^{e_{II}} E\,d\,f\,x^2\right]}{e_{II}\,.\,E_{II}}.$$

Der Klammerausdruck des Zählers ist das Trägheitsmoment der mit den jeweiligen Querschnittsbreiten multiplizierten E-Flächen streifen auf der Druck- und Zugseite in Bezug auf die Nullinie und werde mit J_a bezeichnet.

Setzt man noch

$$\frac{J_a}{e_I\,.\,E_I} = W_I$$

und

$$\frac{J_a}{e_{II}\,.\,E_{II}} = W_{II},$$

so bedeuten W_I und W_{II} die Widerstandsmomente für die äußersten Fasern und es ist:

$$\sigma_I = \frac{M}{W_I}$$

und

$$\sigma_{II} = \frac{M}{W_{II}}.$$

Die Spannungsberechnung ist hiedurch auf die einfachen Biegungsformeln zurückgeführt.

W_I und W_{II} haben die Bedeutung der Widerstandsmomente für die äußersten Fasern. Das Trägheitsmoment J_a eines Betonkörpers ist also durchaus abhängig von der Beanspruchung.

Der Ausdruck J_a ist gewählt, um anzudeuten, daß der Begriff des Trägheitsmomentes in obigem Sinne erweitert ist, er ist also nicht mit dem rein geometrischen Begriff J der Festigkeitslehre identisch.

Die analytische Berechnung desselben ist umständlich. Einfacher und vor allem anschaulicher ist die graphische Lösung der Aufgabe.

Nachdem auf dem oben gezeigten Wege die zusammengehörigen Werte σ_z und σ_d bestimmt sind, erhält man durch die D-Linie, die Z-Linie und die zugehörigen von der Nullachse ausgehenden Tangenten eine geschlossene Figur, deren Inhalt mit F bezeichnet werden möge.

Nunmehr ist:

$$J_a = 2\,F\,.\,H.$$

Hiebei ist:

$$J_a = \left[\int_0^{e_I} E\, d f\, x^2 + \int_0^{e_{II}} d f\, x^2 \right]$$

und H der Polabstand des zur Konstruktion der D-Linie und Z-Linie verwendeten Krafteckes.

Die J_a-Fläche gehört zu einem Balken von der Höhe:

$$h = e_I + e_{II}$$

und läßt sich leicht auf jede Balkenhöhe reduzieren.

Wir haben bei der Bestimmung der zusammengehörigen Werte e_I und e_{II}, der Abstände der gewissen zusammengehörigen Spannungen entsprechenden äußersten Fasern von der Nullachse und bei der graphischen Ermittlung des Trägheitsmomentes Gebrauch gemacht von den bekanntesten Sätzen der graphischen Statik:

1. Das statische Moment mehrerer Parallelkräfte in Bezug auf eine parallele Achse ist gleich dem Produkte aus dem Polabstande H und dem Abschnitte y, welchen die die Kräfte einschließenden äußersten Seilecksseiten auf der Achse abschneiden:

$$\boldsymbol{S = H \,.\, y.}$$

2. Das Trägheitsmoment mehrerer Parallelkräfte in Bezug auf eine parallele Achse ist gleich dem doppelten Produkte aus der Fläche, welche von dem die Kräfte einschließenden Seilzuge (einschließlich Schlußseite) und der Achse eingeschlossen wird, und aus dem Polabstande:

$$\boldsymbol{J = 2\, H \,.\, F.}$$

Der Satz 1 wird benützt zur Bestimmung der Werte e_I und e_{II}.

Das statische Moment der E-Fläche auf der Druckseite muß gleich sein dem statischen Moment der E-Fläche auf der Zugseite für zusammengehörige Werte σ_d und σ_z. Legt man daher durch einen Punkt der Nullinie zwei Tangenten an die D-Linie und die Z-Linie, so können diese aufgefaßt werden als Schlußseiten von Seillinien, welche auf beiden Seiten der Nullinie Parallelkräfte einschließen. Die statischen Momente dieser beiden Kräftegruppen in Bezug auf die Nullinie sind gleich, weil die Abschnitte zwischen den Seilecksseiten auf der Nullinie gleich sind und weil der Pol H für die D-Linie und Z-Linie gemeinsam ist.

Daher muß die Achse, von welcher die D-Linie und die Z-Linie ausgehen, die Nullinie eines Balkens sein, dessen äußerste Fasern unter der Spannung σ_I und σ_{II} stehen, und die Werte e_I und e_{II} sind die Abstände der äußersten Fasern von der Nullinie.

Wenn auf diese Weise die Lage der Nullinie eines Balkens von der Höhe $h = e_I + e_{II}$ richtig bestimmt ist, läßt sich nunmehr der zweite Satz von Mohr von der graphischen Berechnung des Trägheitsmomentes ohneweiters anwenden.

Die Berechnung der J-Fläche geschieht mittels Planimeters oder mit Hilfe der Simpson'schen Regel, welche schon mit wenig Teilungen gute Werte liefert.

Es soll noch erwähnt werden, daß zur genaueren Konstruktion der Tangenten die Seilecksseiten der D-Linie und Z-Linie bis zur Nullachse sämtlich verlängert sind, so daß es sehr bequem ist, zwischen diese eine Tangente zu interpolieren, bezw. den Berührungspunat mit großer Genauigkeit anzugeben.

Außer der Figur 4, welche zur Berechnung bei sehr hohen Spannungen benützt werden soll, ist der mittlere Teil der Figur in doppeltem Maßstabe noch einmal dargestellt für die genauere Ermittlung bei niedrigen Spannungen (siehe Fig. 5), wie bereits oben erwähnt.

Bevor wir auf die weitere Behandlung der Betoneisenträger näher eingehen, wollen wir das Verfahren an einem Zahlenbeispiel erörtern.

Oben wurde die der Zugfestigkeit $\sigma_z = 20\ kg/cm^2$ entsprechende Druckspannung $\sigma_d = 35 kg/cm^2$ bestimmt. Die zugehörigen Werte e_I und e_{II} ergeben sich zu 3·9 *cm* und 6·1 *cm* für einen Balken von 10 *cm* Höhe.

Es soll das Moment berechnet werden, welches dieser Balken aufnehmen kann. Die Tiefe des Balkens soll 100 *cm* betragen. Zunächst wird die J_a-Fläche berechnet. Dieselbe kann aufgefaßt werden als Differenz eines Trapezes und einer durch die D-Linie oder Z-Linie begrenzten Fläche, deren Inhalt sich leicht nach der Simpson'schen Regel bestimmen läßt.

Es genügt, die mittlere Ordinate festzustellen.

Dann lautet die Simpson'sche Regel:

$$F = \frac{h}{6}(y_0 + 4\, y_m + y_1).$$

In unserem Falle ist $y_0 = 0$.

Daher ist mit den Zahlenwerten der Fig. 5:

a) auf der Druckseite:

$$F_1 = 39 \left[\frac{1}{2}(35{\cdot}6 + 18{\cdot}5) - \frac{1}{6}(4 \,.\, 21{\cdot}8 + 35{\cdot}6) \right]$$

$$= 256{\cdot}62\ mm^2;$$

b) auf der Zugseite:

$$F_2 = 61 \left[\frac{1}{2}(50 + 18{\cdot}5) - \frac{1}{6}(4 \,.\, 30{\cdot}5 + 50{\cdot}0) \right]$$

$$= 340{\cdot}38\ mm^2.$$

Die gesamte Fläche hat den Inhalt:

$$F = 256{\cdot}62 + 340{\cdot}38 = 597\ mm^2.$$

Das Trägheitsmoment berechnet sich nach:

$$J_a = 2\, H \,.\, F$$

mit $H = 1{,}000.000$ und $F = 597$ zu

$$J_a = 1.194{,}000.000.$$

Das Widerstandsmoment berechnet sich nach der Formel:

$$W_I = \frac{J_a}{E_I\, e_I}.$$

Mit dem zugehörigen, aus der E-Fläche entnommenen Werte von $E_I = 178.000$ und mit $e_I = 3{\cdot}9$ ist:

$$W_I = \frac{1.194{,}000.000}{178.000 \,.\, 3{\cdot}9} = \frac{1.194{,}000.000}{694.200} = 1734\ cm^3.$$

Daher ist das Bruchmoment der reinen Betonplatte:

$$M_{br} = \sigma_I \,.\, W_I = 35 \,.\, 1734 = 60.690\ cm/kg.$$

Die Höhe des Balkens ist:

$$h = e_I + e_{II} = 3{\cdot}9 + 6{\cdot}1 = 10\ cm.$$

Nach den gewöhnlichen Biegungsformeln ist das Widerstandsmoment für einen Balken von 10 *cm* Höhe:

$$W = \frac{d\, h^2}{6} = \frac{100 \,.\, 10^2}{6} = 1667\ cm^3.$$

Daher wäre die Biegungsfestigkeit der Betonplatte, nach dieser Formel berechnet:

$$k = \frac{M}{W} = \frac{60.690}{1667} = 36{\cdot}4\ kg/cm^2,$$

wenn angenommen wird, daß der Beton bei 0·3 *mm* per *m* Dehnung reißt, und wenn seine Elastizitätsverhältnisse mit den angenommenen übereinstimmen.

Das Resultat unserer Berechnung stimmt ganz gut mit den Versuchsergebnissen überein. Die größte Zugspannung ist fast halb so groß wie die nach den gewöhnlichen Biegungsformeln ermittelte Biegungsfestigkeit.

Aus dem durchgeführten Beispiele erkennt man, daß die angewendete graphische Methode geeignet ist, die

Spannungsverteilung in einem Träger bis zum Bruche zu verfolgen.

Nunmehr wollen wir die Methode auch auf die Berechnung von Betoneisenträgern ausdehnen.

Bekanntlich haben wir in der Einlage von Eisenstäben auf der Zugseite ein Mittel, die Druckfestigkeit des Betons besser auszunützen. Die Zugspannungen des Betons werden durch das Einlegen der Stäbe gewissermaßen in ihrer Wirkung auf den Grad der Sicherheit der Konstruktion unschädlich gemacht, da die Eiseneinlagen das Entstehen von Rissen verhindern, solange die Proportionalitätsgrenze der Eisenspannungen noch nicht überschritten ist.

Es kommt also nach dieser Anschauung auf die Druckfestigkeit des Betons und auf die richtige Wahl der Eisenmenge in erster Linie an. Gleichwohl soll man aber die Zugfestigkeit des Betons nicht ohneweiters bei Seite setzen, denn wenn auch durch das Einlegen von Eisenstäben die Fließgrenze des Betons verlängert wird, so muß sich ein Beton mit höherer Zugfestigkeit immer noch günstiger verhalten als ein Beton mit niedriger Zugfestigkeit, ganz abgesehen davon, daß die Adhäsionskraft des Betons am Eisen bei den fetteren Betonsorten mit größerer Zugfestigkeit größer ist.

In dem Spannungsdiagramm auf der Zugseite ist das Diagramm der Eisenspannungen hinzugefügt (siehe Fig. 4 und 5). Entsprechend der Annahme, daß im Verbundkörper die Formänderungen von Beton und Eisen gleich sein müssen, ist für die Stelle der Eiseneinlage:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_e}{E_e} = \frac{\sigma_b}{E_b}$$

oder

$$\sigma_e = \sigma_b \cdot \frac{E_e}{E_b} = m \cdot \sigma_b.$$

In Fig. 4 sind die den Werten E_b und E_e für jede Dehnung ε entsprechenden Spannungen σ_e und σ_b, sowie die Werte von m — in Intervallen von $\frac{50}{10^6}$ zu $\frac{50}{10^6}$ Dehnung — angegeben.

Wir wollen in Fig. 5 die zulässige Druckspannung σ_d annehmen zu 40 kg/cm^2. Durch den entsprechenden Punkt der D-Linie ziehen wir eine Tangente an diese bis zum Schnitte der Nullinie. Würde man nun durch diesen Punkt eine Tangente an die Z-Linie legen, so erhielte man eine Zugspannung im Beton, welche einer Dehnung entsprechen würde, die im Beton ohne Armierung eine Sicherheit der Konstruktion einfach ausschließen würde.

Die Proportionalitätsgrenze des Eisens ist bei 2000 kg/cm^2 angenommen. Dieser Spannung würde eine Dehnung von 1 mm per Meter entsprechen. Durch die Eiseneinlagen wird der Beton befähigt, diese Streckung mitzumachen.

Wir wollen aber in der äußersten Zugfaser unseres Balkens 25% dieser Streckung, also 0·25 mm nicht überschreiten.

Hiedurch läßt sich leicht in Fig. 5 der Punkt der Z-Linie bestimmen, zu welchem die genannte Dehnung gehört. Durch diesen Punkt legt man eine Tangente an die Z-Linie, welche die Nullinie in einem Punkte schneidet, welcher zwischen dem Endpunkte der Tangente der Druckseite und dem Anfangspunkte der D- und Z-Linie liegt.

Die beiden Schnittpunkte A und B der Tangenten mit der Nullinie begrenzten eine Strecke y.

Das Produkt $H \cdot y = S$ ist der fehlende Beitrag zu dem Ausdrucke

$$\int_0^{e_{II}} E\,d\,f\,x,$$

der vorhanden sein müßte, wenn die angenommene Nulllinie richtig wäre.

Dieser fehlende Beitrag wird durch die Eiseneinlage geleistet. Die Eiseneinlage kann etwa $\frac{h}{8}$ über der äußersten Zugfaser angenommen werden. Hiedurch wird ein Punkt C auf der Tangente der Zugseite bestimmt. Man verbindet noch C mit A. Dann entsteht ein Dreieck. Dieses Dreieck, welches in Fig. 5 schraffiert ist, ist der Beitrag der Eiseneinlage zur J-Fläche.

Der analytische Ausdruck für die Bestimmung der Nullinie ergibt sich aus der Gleichung der wagrechten Kräfte zu:

$$\int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} E\,d\,f \cdot x = \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} E\,d\,f\,x + E_e \cdot f_e \cdot x_e.$$

Ebenso erhält man den für die Berechnung der Tragfähigkeit des armierten Balkens wichtigen Ausdruck J_a aus der Momentengleichung:

$$J_a = \left[\int_{0\ \text{Druck}}^{e_I} E\,d\,f\,x^2 + \int_{0\ \text{Zug}}^{e_{II}} E\,d\,f\,x^2 + E_e \cdot f_e \cdot x_e^2\right].$$

Sind die Eiseneinlagen in Bezug auf die Höhenlage mehrteilig, so erhält man für die Eiseneinlagen ebenfalls Summenausdrücke. In der graphischen Darstellung erscheint dann ebenfalls für die Gerade $C\,A$ ein gebrochener Linienzug.

Nunmehr wollen wir die Tragfähigkeit des in Fig. 5 festgelegten armierten Balkens bestimmen.

Wir entnehmen aus der Figur 5 folgende Werte. Abstände der äußersten Fasern von der Nullinie:

$$e_I = 4{\cdot}6\ cm,\ e_{II} = 5\ cm$$

Elastizitätsmodul der äußersten Druckfaser

$$E_I = 174.000$$

größte Druckspannung im Beton: $\sigma_d = 40\ kg/cm^2$,
größte Zugspannung im Beton: $\sigma_z = 19{\cdot}0\ kg/cm^2$,
Zugspannung der Eiseneinlage: $\sigma_e = 380\ kg/cm^2$.

Die J-Fläche wird in derselben Weise wie bei reinen Betonträgern berechnet, in der Zugzone kommt noch das Dreieck für die Eiseneinlagen hinzu.

Die J-Fläche hat einen Inhalt:
auf der Druckseite:

$$F_1 = 46\left[\frac{1}{2}(38 + 24) - \frac{1}{6}(4 \cdot 24{\cdot}2 + 38)\right] = 392{\cdot}5\ mm^2,$$

auf der Zugseite

$$F_2 = 50\left[\frac{1}{2}(15{\cdot}4 + 44) - \frac{1}{6}(4 \cdot 26{\cdot}2 + 44)\right] + \frac{8{\cdot}6 \cdot 38}{2} = 245 + 163{\cdot}4 = 408{\cdot}4\ mm^2,$$

im ganzen $F = 800{\cdot}9\ mm^2 = 8{\cdot}009\ cm^2$.

Für 100 cm Tiefe ist daher

$$J_a = 2\ H \cdot F \cdot 100$$

oder mit $H = 1{,}000.000$

$$J_a = 2 \cdot 800{\cdot}9 \cdot 1{,}000.000,$$
$$J_a = 1601{,}800.000,$$
$$W_d = \frac{J_a}{E_I \cdot e_I}.$$

Es ist aber $E_I \cdot e_I = 174.000 \cdot 4{\cdot}6 = 800.400$.

Daher ist

$$W_d = \frac{1601{,}800.000}{800.400} = 2001\ cm^3.$$

Hieraus ergibt sich

$$M = \sigma_d \cdot W_d = 40 \cdot 2001 = 80.040\ cm/kg.$$

Die Höhe des Balkens ist 9·6 cm.

Nunmehr berechnen wir den Prozentsatz der Armierung.

Im Krafteck für die Zugseite verlängern wir die Gerade, auf welcher die Kräfte aufgetragen sind, und tragen auf derselben zunächst 20 *cm* ab. Da jeder Millimeter einen Wert $E = 10.000$ darstellt, so stellt die Strecke von 20 *cm* $E_e = 2,000.000$ dar. Als Teil des Kraftecks aufgefaßt, stellt die Strecke aber ein Flächenelement der E-Fläche dar, welches die Höhe $E = 2,000.000$ hat.

Zieht man nun im Krafteck zwei Parallele zu den Dreiecksseiten CA und CB im Seileck der Figur 5 so, daß sie sich auf einer Parallelen im Abstand der Poldistanz H von der Kräftestrecke schneiden, so wird auf dieser die Strecke $A'B'$ abgeschnitten.

Das Verhältnis $\frac{A'B'}{20}$ in *cm* gibt an, der wievielte Teil eines Flächenelementes als Eisenquerschnitt hinzugefügt werden muß, um die gewünschte Spannungsverteilung herbeizuführen.

Genauer ist, wenn man von E_e erst den E_z-Wert in gleichem Abstand von der Nullinie abzieht, weil durch das Einlegen der Stäbe der Beton an gleicher Stelle wegfällt.

In unserem Beispiel ist an der Stelle der Eiseneinlage $E_z = \infty 90.000$, demnach $E_e - E_z = 2,000.000 - 90.000 = 1,910.000$. Die Strecke $A'B'$ ist im Kräftemaßstab gemessen $2{\cdot}34 \,.\, 100.000 = 234.000$.

Demnach ist $\frac{234.000}{1,910.000} = 0{\cdot}1225 \times$ Flächenelement Eisenquerschnitt erforderlich.

Der Balken hat eine Höhe von 9·6 *cm*. Da jedes Flächenelement 1 *cm* Höhe hat, so enthält der Balken 9·6 Flächenelemente. Die Armierung ist also auf ein Flächenelement bezogen:

$$\frac{0{\cdot}1225}{9{\cdot}6} = 0{\cdot}0127 \,.\, 1.\ \text{Flächenelement oder } 1{\cdot}27\%.$$

Das Verhältnis des Betonquerschnittes zum Eisenquerschnitt ist also

$$\mu = \frac{F_b}{F_e} = \frac{100}{1{\cdot}27} = 78{\cdot}5.$$

Nunmehr ist die Berechnung des Balkens auf den Normalbalken von 10 *cm* Höhe und 100 *cm* Breite zu reduzieren.

Unter der Voraussetzung desselben Prozentsatzes der Armierung und der gleichen Höhenlage derselben, also $\frac{h}{8}$ über der Zugkante, verhalten sich die Tragfähigkeiten auch der armierten Balken von gleicher Breite wie die Quadrate der Höhen. Nennen wir das Tragmoment des Balkens von 10 *cm* Höhe M_{10}, so gilt also die Beziehung

$$M_{10} = \frac{10^2}{h^2} \,.\, M_h$$

oder für unser Beispiel:

$$M_{10} = \frac{100}{9{\cdot}6^2} \,.\, 80.040$$

$$= \frac{100}{92{\cdot}16} \,.\, 80.040 = 86843\ cm/kg.$$

Ist ein Moment M gegeben und wird die Höhe des armierten Betonbalkens gesucht, so ergibt sich dieselbe zu

$$h = 10 \sqrt{\frac{M}{M_{10}}} = \frac{10\sqrt{M}}{\sqrt{86.843}} = 0{\cdot}034 \sqrt{M}$$

$$h = 0{\cdot}034 \sqrt{M}.$$

Hiebei ist h die Höhe des ganzen Balkens in *cm*, $\sigma_d = 40\ kg/cm^2$, $\sigma_z = 19\ kg/cm^2$, $\sigma_e = 380\ kg/cm^2$ und $\mu = \frac{F_b}{F_e} = 78{\cdot}5$.

Man erkennt, daß es nur einmal erforderlich ist, auf Grund von Versuchsresultaten die genaue Berechnung eines Balkens durchzuführen. Man ist dann imstande, auf höchst einfache Weise Plattenbalken derselben Armierung und mit denselben Mischungsverhältnissen unter Zugrundelegung bestimmter Spannungen zu entwerfen.

Es soll noch einmal hervorgehoben werden, daß die abgeleitete Formel nur bedingt richtig ist, nämlich dann, wenn die Gültigkeit des angenommenen Verlaufes der Dehnungen durch weitere Versuche bewiesen ist.

Wir wenden uns jetzt der wichtigen Frage der Höhe der Eisenarmierung zu, mit welcher die Frage der Sicherheit der Konstruktion in engem Zusammenhange steht.

Auch diese Frage kann auf graphischem Wege beantwortet werden.

Wir beschränken uns auf die Ermittlung der Biegungsmomente in dem kritischen Zustand des Anrisses, wenn das Eisen seine Proportionalitätsgrenze überschritten hat.

Wir nehmen mit anderen an, daß mit der Querschnittsverkleinerung des Eisens die Adhäsion des Betons am Eisen überwunden wird und daß nunmehr der Beton seinem eigenen Naturgesetz folgend reißt.

Die kritische Eisenspannung haben wir zu 2000 kg/cm^2 angenommen. Wir wollen die Höhe der Armierung bestimmen unter der Bedingung, daß gleichzeitig die Druckfestigkeit des Betons voll ausgenutzt wird. Letztere hatten wir zu 200 kg/cm angenommen.

Wir wollen der Einfachheit halber die Zugspannungen unter der Eiseneinlage vernachlässigen und die durchschnittliche Spannung im Eisen (im Schwerpunkt) zu 1950 kg/cm^2 annehmen.

In Figur 4 schneidet die letzte Seilecksseite der D-Linie die Nullinie im Punkte P, dieser Punkt wird mit dem Punkte Q der Z-Linie, welchem die Eisenspannung von 1950 kg/cm^2 entspricht, verbunden. Die letzten Seilecksseiten der D- und Z-Linie sind senkrecht zur Nullachse gewählt.

Man erkennt an der Figur 4, wie bedeutend jetzt der Einfluß der Eiseneinlagen geworden ist, so daß ohne großen Fehler die Betonzugspannungen überhaupt vernachlässigt werden könnten.

Zur Bestimmung der J-Fläche wenden wir das frühere Verfahren an. Um größere Genauigkeit zu bekommen, haben wir bei der D-Linie vier Zwischenwerte genommen.

Für vier Zwischenwerte lautet die Simpson'sche Regel:

$$F = \frac{h}{3}\left[y_1 + 4\,y_2 + 2\,y_3 + 4\,y_4 + y_5\right]$$

Hiebei ist h der konstante Abstand der einzelnen Ordinaten.

Mit den Zahlenwerten der Figur 4 ist die Druckfläche der J-Fläche:

$$F_1 = 14{\cdot}75 \,.\, 22{\cdot}26 - \frac{14{\cdot}75}{4\,.\,3}\Big[0 + 4\,.\,9{\cdot}82 + 2\,.\,16{\cdot}72 +$$

$$+ 4\,.\,20{\cdot}9 + 22{\cdot}26\Big] = 14{\cdot}75\left[22{\cdot}26 - \frac{1}{12}\,.\,178{\cdot}58\right] =$$

$$= 108{\cdot}869\ cm.$$

Die Zugfläche ist:

$$F_2 = 9{\cdot}75\left[\frac{1}{2}\Big(22{\cdot}26 + 2{\cdot}9\Big) - \frac{1}{6}\Big(4\,.\,2{\cdot}36 + 2{\cdot}9\Big)\right] =$$

$$= 102{\cdot}57.$$

Die gesamte J-Fläche ist also

$$F = 108{\cdot}86 + 102{\cdot}57 = 211{\cdot}43\ cm^2.$$

Demnach ist für die Tiefe von 100 *cm*; mit $H = 1,500.000$

$$J_a = 2\,F\,.\,H\,.\,100$$

$$J_a = 2\,.\,21143\,.\,1,500.000 = 63\,429,000.000\ cm^4$$

und

$$W_d = \frac{J_a}{E_I \cdot e_I} = \frac{63.429,000.000}{136.000 \cdot 14{\cdot}75} = \frac{63,429.000}{2006}$$

$$W_d = 31.619\ cm^3.$$

Demnach ist das Biegungsmoment für den kritischen Zustand des Anrisses:

$$M = 200 \cdot 31.619 = 6,321.800\ cmkg.$$

Der Abstand der äußersten Druckfaser vom Eisenquerschnitt ist

$$h_1 = 14{\cdot}75 + 9{\cdot}75 = 24{\cdot}50\ cm.$$

Schlägt man noch $\frac{h}{8} = \frac{h_1}{7} = \frac{24{\cdot}50}{7} = 3{\cdot}5\ cm$ als Abstand der Eiseneinlage von der untersten Zugfaser hinzu, so erhält man die Höhe des Balkens:

$$h = 24{\cdot}5 + 3{\cdot}5 = 28\ cm.$$

Wir wollen das Moment auf einen Normalbalken von 10 *cm* Höhe mit gleichprozentiger Armierung und derselben Breite von 100 *cm* reduzieren. Dann ist

$$M_{10} = \frac{10^2}{h^2} \cdot M_h = \frac{100}{784} \cdot M_h$$
$$= 0{\cdot}1276 \cdot M_h$$
$$= 0{\cdot}1276 \cdot 6,321.800$$
$$= 806.662\ cmkg.$$

Ohne Berücksichtigung der Armierung hat der Balken nach den gewöhnlichen Biegungsformeln ein Widerstandsmoment von

$$W = \frac{1}{6}\, d\, h^2 = \frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 100 = 1667\ cm^3.$$

Demnach wäre die Biegungsfestigkeit des Balkens, nach dieser Formel ausgedrückt:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{806.662}{1667} = \mathbf{484}\ kg/cm.$$

Diese große Biegungsfestigkeit ist eine Folge der starken Armierung, welche nötig ist, wenn gleichzeitig die Spannungen $\sigma_d = 200\ kg/cm^2$ und $\sigma_e = 2000\ kg/cm^2$ auftreten sollen.

Der Prozentsatz des Eisens berechnet sich nach dem bereits oben angegebenen Verfahren.

Im Krafteck wird auf der den Beitrag der Eiseneinlagen darstellenden Geraden durch die Parallele zu PQ eine Strecke von 29·28 *cm* abgeschnitten.

Demnach ist das Hinzufügen von

$$\frac{29{\cdot}28}{20} = 1{\cdot}464 \cdot 1 \text{ Flächenelement}$$

als Eisenquerschnitt erforderlich.

In Fig. 4 hat ein Flächenelement die Höhe von 0·5 *cm*. Auf die ganze Höhe von 28 *cm* kommen also 56 Flächenelemente.

Die Armierung ist also auf ein Flächenelement bezogen:

$$\frac{1{\cdot}464}{56} = 0{\cdot}02614$$

oder

$$2{\cdot}614\,\%.$$

Das Querschnittsverhältnis des Betons zum Eisen ist also

$$\mu = \frac{100}{2{\cdot}614} = 38{\cdot}26.$$

Man kann auch den Standpunkt vertreten, daß bei der Bestimmung der Biegungsfestigkeit im kritischen Zustand des Anrisses die Zugspannungen überhaupt vernachlässigt werden können, weil der Beitrag der Zugfläche des Betons nunmehr sehr gering ist, und weil der Zustand des Aufreißens der Betonfläche durch Entstehen kleiner Haarrisse eingeleitet wird, so daß man im Beginne des Anrisses nicht mehr die ganze Betonzugfläche einsetzen kann. Teilweise wurde dies schon oben berücksichtigt, durch Vernachlässigung der Betonzugspannungen bis zur Eiseneinlage.

Die Frage, die wir zu beantworten haben, ist also: Wie groß muß die Armierung bei Vernachlässigung der Betonzugspannungen sein, wenn gleichzeitig die größte Druckspannung $\sigma_d = 200\ kg/cm^2$ und die Eisenspannung $\sigma_e = 2000\ kg/cm$ betragen? Wie groß ist das Moment, welches der Balken bei dieser Armierung nach dem Aufreißen der Betonzugfläche unter Beibehaltung obiger Spannungen aufnehmen kann?

Der Prozentsatz der Armierung wird etwas größer. Der Beitrag des Eisens zur J-Fläche wird nunmehr dargestellt durch das Dreieck $O\,Q'P$.

Die entsprechende Parallele im Krafteck wird jetzt etwas flacher als vorher. Der Abschnitt auf der Kraftstrecke ist 33·7 *cm*.

Demnach ist der Eisenquerschnitt auf 1 Flächenelement bezogen:

$$\frac{33{\cdot}7}{20 \cdot 56} = 0{\cdot}0298 = 2{\cdot}98\,\% = \text{rund } 3\,\%.$$

Nunmehr ist auch die Größe des Biegungsmomentes bei dem Zustand des Anrisses etwas verändert.

Der Beitrag des Eisens auf der Zugseite zur J-Fläche ist:

$$F_z = \frac{22{\cdot}26 \cdot 9{\cdot}75}{2} = \frac{217.035}{2} = 108{\cdot}52\ cm^2.$$

Da der Beitrag der Betonzugseite wegfällt, derjenige der Druckseite unverändert ist, so ist die J-Fläche

$$F = 108{\cdot}52 + 108{\cdot}86 = 217{\cdot}38\ cm^2.$$

Also ist:

$$J_a = 2\,H \cdot F \cdot 100$$

$$J_a = 2 \cdot 217{\cdot}38 \cdot 1,500.000 \cdot 100 = 65.214,000.000$$

und

$$W_d = \frac{J_a}{E_I\, e_I} = \frac{65.214,000.000}{14{\cdot}75 \cdot 136.000} = \frac{65,214{\cdot}000}{2006} =$$
$$= 32.509\ cm^3.$$

Daher

$$M = 200 \cdot 32509 = 6,501.800\ cmkg.$$

Dieser Wert bezieht sich auf 28 *cm* Höhe des Balkens.

Das entsprechende Biegungsmoment des Normalbalkens von 10 *cm* Höhe und 100 *cm* Breite für die Spannungen von $\sigma_e = 2000\ kg/cm$ bei 2·98 % Armierung ist demnach

$$M = 0{\cdot}1276 \cdot 6,501.800 = \mathbf{829.630\ cmkg}.$$

Die Biegungsfestigkeit wäre also nach den gewöhnlichen Formeln ausgedrückt:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{829.630}{1667} = \mathbf{497\ kg/cm^2}.$$

Der Eisenquerschnitt ist bei den üblichen Armierungen nicht so reichlich.

Es soll nun eine Methode angegeben werden, wie sich die kritischen Biegungsmomente für jede Armierung berechnen lassen. Wir wollen hiebei die Betonzugspannungen vernachlässigen.

In Fig. 4 wird der Abschnitt der Nullachse innerhalb der J-Fläche OP in sechs gleiche Teile geteilt und die einzelnen Teilpunkte werden mit Q' verbunden. Zu den Verbindungslinien zieht man im Krafteck Parallele, welche auch die Kraftstrecke des Eisens von 33·7 *cm* Länge in sechs gleiche Teile teilen. Die Strecke, vom Anfangspunkt bis zu jedem

Teilpunkt gemessen, stellt einen gewissen Prozentsatz Eisenmenge dar.

Die für diesen Prozentsatz giltige J-Fläche und Druckspannungen der äußersten Faser erhält man, wenn man durch die Teilpunkte auf der Nullachse Tangenten an die D-Linie legt.

Nimmt man noch an, daß die Eiseneinlage $\frac{h}{8}$ von der Betonzugaußenkante entfernt ist, oder $\frac{h_1}{7}$, wobei h_1 der Abstand der Druckaußenkante von der Eiseneinlage ist, so berechnen sich die Höhen der zu den einzelnen J-Flächen gehörigen Balken zu:

$$h_{\mathrm{I}} = (5{\cdot}25 + 9{\cdot}75) \,.\, \frac{8}{7} = 17{\cdot}14$$

$$h_{\mathrm{II}} = (7{\cdot}85 + 9{\cdot}75) \,.\, \frac{8}{7} = 20{\cdot}11$$

$$h_{\mathrm{III}} = (9{\cdot}75 + 9{\cdot}75) \,.\, \frac{8}{7} = 22{\cdot}29$$

$$h_{\mathrm{IV}} = (11{\cdot}5 + 9{\cdot}75) \,.\, \frac{8}{7} = 24{\cdot}29$$

$$h_{\mathrm{V}} = (13{\cdot}2 + 9{\cdot}75) \,.\, \frac{8}{7} = 26{\cdot}23$$

$$h_{\mathrm{VI}} = (14{\cdot}75 + 9{\cdot}75) \,.\, \frac{8}{7} = 28{\cdot}00$$

Ein Flächenelement hat die Breite von 0·5 *cm*. Daher sind in den verschiedenen Balken an Flächenelementen enthalten:

I $n_1 = 34{\cdot}3$
II $n_2 = 40{\cdot}2$
III $n_3 = 44{\cdot}6$
IV $n_4 = 48{\cdot}6$
V $n_5 = 52{\cdot}5$
VI $n_6 = 56{\cdot}0$

Für die ganze Balkenhöhe ist an Eisenquerschnitt erforderlich bei:

I $\frac{33{\cdot}7}{20} \,.\, \frac{1}{6} = 0{\cdot}2775$ Flächenelement Eisen,
II $\frac{33{\cdot}7}{20} \,.\, \frac{2}{6} = 0{\cdot}5550$ " "
III $\frac{33{\cdot}7}{20} \,.\, \frac{3}{6} = 0{\cdot}8325$ " "
IV $\frac{33{\cdot}7}{20} \,.\, \frac{4}{6} = 1{\cdot}1100$ " "
V $\frac{33{\cdot}7}{20} \,.\, \frac{5}{6} = 1{\cdot}3875$ " "
VI $\frac{33{\cdot}7}{20} \,.\, \frac{6}{6} = 1{\cdot}6650$ " "

Auf ein Flächenelement bezogen, ist daher der Prozentsatz der Eisenmenge bei:

I $p_1 = \frac{0{\cdot}2775}{34{\cdot}3} = 0{\cdot}0081 = 0{\cdot}81\%$
II $p_2 = \frac{0{\cdot}5550}{40{\cdot}2} = 0{\cdot}0138 = 1{\cdot}38\%$
III $p_3 = \frac{0{\cdot}8325}{44{\cdot}6} = 0{\cdot}0186 = 1{\cdot}86\%$
IV $p_4 = \frac{1{\cdot}1100}{48{\cdot}6} = 0{\cdot}0229 = 2{\cdot}29\%$
V $p_5 = \frac{1{\cdot}3875}{52{\cdot}5} = 0{\cdot}0264 = 2{\cdot}64\%$
VI $p_6 = \frac{1{\cdot}6650}{56} = 0{\cdot}0298 = 2{\cdot}98\%$.

Mit Hilfe dieser Werte ist in Fig. 1 eine Kurve konstruiert. Senkrecht unter jedem Teilpunkt der Nullachse ist der zugehörige p-Wert aufgetragen. Die Endpunkte sind durch eine Kurve miteinander verbunden, welche man die Eisenprozentkurve nennen könnte. Für jeden beliebigen Punkt der Nullachse kann man nunmehr die zusammengehörigen Werte der J_a-Fläche und des Eisenprozentgehaltes leicht bestimmen, unter der Voraussetzung, daß die Eisenspannung $= 2000$ *kg/cm²* ist und die Betonzugspannungen vernachlässigt werden sollen. Es ist klar, daß sich das gleiche Verfahren auch auf andere Spannungszustände mit oder ohne Vernachlässigung der Betonzugspannungen übertragen läßt.

Wir wollen nunmehr die Biegungsfestigkeit beim Anriß für den oben berechneten armierten Balken mit 1·27% Eisenmenge berechnen.

Aus den Maßen der Fig. 4 berechnet sich die J-Fläche:

Auf der Zugseite:

$$F_1 = \frac{9{\cdot}75 \,.\, 6{\cdot}6}{2} = 32{\cdot}175.$$

Auf der Druckseite:

$$F_2 = 7{\cdot}375\left[\frac{1}{2}\left(16{\cdot}72 + 6{\cdot}6\right) - \frac{1}{6}\left(4 \,.\, 9{\cdot}82 + 16{\cdot}72\right)\right]$$
$$= 17{\cdot}184 \; cm^2.$$

Daher $F = 32{\cdot}175 + 17{\cdot}184 = 49{\cdot}36 \; cm^2$.

Für 100 *cm* Tiefe:

$$F = 4936 \; cm^2.$$

Daher ist: $J_a = 2\,H \,.\, F$
$= 2 \,.\, 1{,}500.000 \,.\, 4936$
$= 14.808{,}000.000.$

Für die äußerste Druckfaser ist:

$$E_{\mathrm{I}} = 149.000 \text{ und } e_{\mathrm{I}} = 7{\cdot}375.$$

Daher $E_{\mathrm{I}} \,.\, e_{\mathrm{I}} = 1{,}098.875$

$$\text{und } W_d = \frac{J_a}{E_{\mathrm{I}} \,.\, e_{\mathrm{I}}} = \frac{14.808{,}000.000}{1{,}098.875} = 13.475 \; cm^3.$$

Daher ist das Biegungsmoment für den Zustand des Anrisses bei $\sigma_{\mathrm{I}} = 110$ *kg/cm²* Druck

$$M = 110 \,.\, 12.290$$
$$= 1{,}482.250 \; cm/kg.$$

Die Höhe des Balkens ist hierbei:

$$h = \left(7{\cdot}375 + 9{\cdot}75\right) \,.\, \frac{8}{7} = 19{\cdot}57 \; cm.$$

Das Moment für den Normalbalken von 10 *cm* Höhe ist daher:

$$M_{10} = \frac{10^2}{19{\cdot}57^2} M_h$$
$$= \frac{100}{383} \,.\, 1{,}482.250$$
$$= 387\,010 \; cm/kg.$$

Nach den gewöhnlichen Biegungsformeln wäre daher die Biegungsfestigkeit bei 1·27% Armierung für den Zustand des Anrisses:

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{387.010}{1667}$$
$$= 232 \; kg/cm.$$

Spitzer gibt an, daß nach Versuchen Bauschingers die Biegungsfestigkeit von Betonplatten mit dem Mischungsverhältnis 1 : 3 bei 1% Armierung 141 kg/cm^2, dagegen bei 1·45% Armierung 247 kg/cm^2 für den Zustand des Anrisses betrug.

Mit diesen Resultaten stimmen unsere Rechnungen gut überein.

Die Bruchfestigkeit liegt nicht viel höher. Bauschinger gibt dieselbe für den ersten Balken zu 178 kg/cm^2, bei dem zweiten zu 265 kg/cm^2 an. Sie wäre also bei unserem Balken bei etwa 250 kg/cm^2 zu erwarten.

Für die Beurteilung der Sicherheit dürfte das Verhältnis des Momentes für den Zustand des Anrisses zu dem Moment, für welches die Konstruktion berechnet ist, maßgebend sein.

Das letztere Moment betrug:

$$M_1 = 86.843 \ cm/kg.$$

Das erstere Moment betrug:

$$M_2 = 387.010 \ cm/kg.$$

Die Sicherheit gegen das Auftreten des Anrißzustandes ist also:

$$a = \frac{387.010}{86.843} = 4{\cdot}45.$$

Würde das Moment allmählich bis zum Aufreißen des Betons erhöht, so würde sich die Druckspannung steigern von $\sigma = 40 \ kg/cm^2$ auf $\sigma = 110 \ kg/cm^2$, die Eisenspannung von $\sigma_e = 380 \ kg/cm^2$ auf $\sigma_e = 2000 \ kg/cm^2$. Die Betonzugspannungen wuchsen von 19 kg/cm^2 bis 25 kg/cm^2 und blieben dann bis zum Reißen des Betons konstant. Der Elastizitätsmodul auf Druck nahm in der äußersten Faser ab von 174.000 auf 149.000, derjenige auf Zug in der äußersten Faser von 90.000 bis ca. 25.000 (siehe Fig. 4 und 5).

IV.

Die Anwendung von Kraft- und Seileck auf die Berechnung von Schubspannungen der Beton- und Betoneisenträger.

Die Verteilung der Schubspannungen in einem auf Biegung beanspruchten Träger ist abhängig von der Verteilung der Normalspannungen.

Denkt man sich aus dem Balken ein Körperelement herausgeschnitten, welches durch zwei Querschnitte in der Entfernung der Längeneinheit, die wir uns beliebig klein vorstellen wollen, begrenzt wird, und führen wir in der Entfernung x von der Biegungsachse einen Parallelschnitt zur Nullinie, so berechnen sich die an der Schnittfläche von der Tiefe w und der Breite 1 auftretenden wagrechten Schubspannungen zu:

$$\tau \, . \, w = Q \, . \, \frac{S}{J}.$$

Hiebei ist Q die Querkraft an dem Balkenelemente, welche für die Breite desselben konstant angenommen wird, S das statische Moment des abgeschnittenen Balkenteiles in Bezug auf die Nullinie und J das Trägheitsmoment des ganzen Querschnittes.

Die angegebene Formel gilt zunächst für solche Körper, welche Proportionalität zwischen Dehnung und Spannung besitzen.

Sie gilt aber auch in übertragenem Sinne für Körper, welche einem beliebigen Formänderungsgesetze folgen, mit der Einschränkung des Ebenbleibens der Querschnittte, wenn man unter:

$$S_a \text{ den Ausdruck } \int_x^{e_I} E \, d \, F \, . \, x$$

und unter

$$J_a \text{ den Ausdruck } \int_{e_{II}}^{e_I} E \, d \, F x^2$$

versteht, wenn also wieder jeder Flächenstreifen unter dem Integralzeichen mit dem zugehörigen Elastizitätsmodul multipliziert wird.

Die Erweiterung der angezogenen Formel auch auf diese Stoffe läßt sich in derselben Weise herleiten, in welcher die Formel überhaupt abgeleitet ist. (Siehe auch meinen Aufsatz: Graphostatische Untersuchung der Schubspannungen in Beton- und Betoneisenträgern. „Beton & Eisen" 1904, Heft 1 und 2.)

Die Formel gilt nicht allein für reine Betonträger, sondern auch für Betoneisenträger. Die für die Eiseneinlagen hinzutretenden Glieder $E_e \, . \, f_e \, x_e$ und $E_e \, . \, f_e \, x_e^2$ sollen in den allgemeinen Werten $\int E \, d \, f \, . \, x$ und $\int E \, d \, f \, x^2$ mit enthalten sein.

Der Ausdruck

$$\int E \, d \, f \, x$$

wird graphisch erhalten in dem Produkte $H \, . \, y$.

Hiebei ist H der Polabstand des Kraftecke und y der Abschnitt auf der Nullachse, welcher von den Tangenten an die D-Linie oder Z-Linie, die dem abgeschnittenen Flächenteil entsprechen, eingeschlossen wird.

Der Ausdruck

$$\int E \, d \, F \, x^2$$

wird graphisch erhalten in dem Produkte

$$J = 2 \, H \, . \, F.$$

Hiebei ist F der Inhalt der J-Fläche.

Demnach ist:

$$\tau \, . \, w = Q \, \frac{S}{J} = \frac{Q \, . \, H \, . \, y}{2 \, H \, . \, F} = \frac{Q}{2} \, \frac{y}{F}.$$

Setzt man noch

$$F = \frac{1}{\alpha} \, h \, . \, y_0,$$

wobei y_0 der Abschnitt auf der Nullachse ist, der einer Querschnittshälfte entspricht, und h die Höhe des Balkens ist, so ist

$$\tau \, . \, w = \frac{Q}{2} \, \frac{y}{F} = \left(\frac{\alpha}{2} \, \frac{Q}{h} \right) \frac{y}{y_0}.$$

y wächst für die verschiedenen Parallelschnitte zwischen den Abständen der äußersten Faser und der Nullinie von $y = 0$ bis $y = y_0$.

Der Ausdruck $\tau \, w$ wird ein Maximum für $y = y_0$.

Dann ist:

$$(\tau \, w)_{max} = \frac{\alpha}{2} \, \frac{Q}{h} \cdot \frac{y^0}{y_0} = \frac{\alpha}{2} \, \frac{Q}{h}.$$

Für konstantes $w = b$ ist:

$$\tau_{max} = \frac{\alpha}{2} \, \frac{Q}{b \, . \, h}.$$

Machen wir die Voraussetzung, daß der Elastizitätsmodul für Zug und Druck derselbe ist, so werden bei konstanter Breite b D-Linie und Z-Linie kongruente Parabelstücke, die Nullinie liegt in der Mitte des Balkens. Durch passende Wahl des Pols erreicht man, daß die Endtangenten an die beiden Linien auf der Nullachse senkrecht stehen und zusammenfallen, dann wird die J-Fläche begrenzt von einer senkrechten Geraden und zwei gleichen Parabelstücken, die der Geraden ihre konvexe Seite zukehren. Der Inhalt der J-Fläche ist also:

$$F = \frac{1}{3} \, h \, . \, y_0,$$

folglich ist

$$\alpha = 3,$$

daher

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b\,h}.$$

Dies Resultat wird durch die Rechnung ebenfalls gefunden.

Nehmen wir nunmehr für die Druckseite und für die Zugseite verschiedene Werte E_d und E_z an, die aber innerhalb der beiden Teile des Querschnittes konstant sein sollen, so erhält man wieder Parabeln als D-Linie und Z-Linie, jedoch verschiedener Form. Durch passende Wahl des Pols kann man aber wieder erreichen, daß die Endtangenten auf der Nullachse senkrecht stehen und zusammenfallen. Daher ist der Inhalt der J-Fläche:

$$J = \frac{1}{3} e_I \cdot y_0 + \frac{1}{3} e_{II}\, y_0 = \frac{1}{3}(e_I + e_{II})\, y = \frac{1}{3} h\, y_0,$$

folglich ist

$$\alpha = 3$$

und

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{Q}{b\,h}.$$

Wenn also auch für verschiedene Belastungsstufen die E-Werte verschieden angenommen werden müssen, wodurch sich die Nullinie bei steigender Belastung nach der Druckseite hin verschiebt, so ändert sich doch nicht der Maximalwert τ_{max} in der Höhe der Nullachse, soweit er von den Abmessungen des Querschnittes abhängig ist, er ist also bei den gemachten Annahmen nur mit der Querkraft Q veränderlich.

Dasselbe Resultat hat S a n d e r s rechnerisch festgestellt in „Beton & Eisen“ 1903, Heft 3, Seite 204 ff.

Mit Hilfe der y-Werte läßt sich nun das Diagramm der Schubspannungen aufzeichnen. Man trägt von einer senkrechten Achse aus die den verschiedenen Abständen von der Nullinie entsprechenden y-Werte auf. Die entstehende Fläche ist das Diagramm der Schubspannungen $\tau\,.\,w$. Hiebei ist als Einheit des Maßstabes $\frac{\alpha}{2} \frac{Q}{h\,y_0}$ gewählt.

In Fig. 6 ist die Konstruktion der Diagramme dargestellt, u. zw. für Betonträger mit und ohne Eiseneinlagen.

Die Eiseneinlage erzeugt auf der Zugseite für jede Höhenschicht zwischen Nullinie und Eiseneinlage einen konstanten Beitrag zu dem Diagramm. Der Beitrag der Eiseneinlage ist also ein Rechteck. Würde man die Zugspannungen des Betons überhaupt vernachlässigen, so würde das Diagramm auf der Zugseite ein Rechteck sein von der Breite y_0 der J-Fläche und der Höhe gleich dem Abstande der Nullinie von der Eiseneinlage.

In Fig. 6 sind die Betonzugspannungen nicht vernachlässigt, daher entsteht auf der Zugseite unterhalb der Eiseneinlage ein Sprung im Diagramm.

Da die Schubspannungen immer paarweise am senkrechten und wagrechten Schnitt auftreten, so gilt das Diagramm sowohl für die wagrechten wie für die gleich großen senkrechten Schubspannungen.

Die Summe der sämtlichen Schubspannungen am senkrechten Schnitt muß wieder gleich der Querkraft Q sein, also muß sein:

$$Q = \sum_{-e_I}^{e_{II}} \tau\,.\,w = \frac{Q}{2} \frac{y_1}{F} + \frac{Q}{2} \frac{y_2}{F} + \ldots + \frac{Q\,y_0}{2\,F} =$$

$$= \frac{Q}{2F} [y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_e]_{-e_I}^{e_{II}}$$

Der Klammerausdruck ist nichts anderes als der Inhalt des graphisch bestimmten Diagrammes der Spannungen $\tau\ w$.

Die abgeleitete Gleichung verlangt, daß:

$$[y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\, y_0]_{e_I}^{e_{II}} = 2\,F \text{ ist.}$$

Das aus der J_a-Fläche konstruierte Diagramm der Schubspannungen hat den doppelten Inhalt der J_a-Fläche.

Bei dem Rechteck mit konstantem Elastizitätsmodul ist die $\tau\ w$-Fläche parabolisch und hat den Inhalt:

$$F = \frac{2}{3} \cdot h \cdot y_0.$$

Fügt man noch den Multiplikator $\frac{3}{2} \frac{Q}{y_0\,h}$ hinzu, so erhält man als Summenausdruck für sämtliche vertikalen Schubkräfte:

$$\Sigma\,\tau\,.\,w = \frac{2}{3} h\,.\,y_0\,.\,\frac{3}{2} \frac{Q}{y_0\,h} = Q.$$

Ebenso erhält man bei der Annahme verschiedener, aber für die beiden Teile des Querschnittes konstanter E_d und E_z parabolische Verteilung der $\tau\,.\,w$-Werte, u. zw. mit zwei verschiedenen Parabeln auf der Zug- und Druckseite. Der Inhalt der Schubdiagrammfläche ist wieder doppelt so groß wie der Inhalt der J_a-Fäche.

Dasselbe muß auch Giltigkeit haben bei beliebigem Formänderungsgesetz, da die Gleichung der senkrechten Kräfte bestehen bleibt. Nur sind die Begrenzungskurven der $\tau\ w$-Fläche keine Parabeln mehr.

Wir wollen noch den Koeffizienten α für die verschiedenen Zahlenbeispiele der Abhandlung berechnen:

Es ist:

$$(\tau\,.\,w)_{max} = \frac{Q}{2\,F} \cdot y_0 = \frac{\alpha}{2} \frac{Q}{h}$$

daher

$$\alpha = \frac{2\,y_0 \cdot h}{2\,F} \cdot \frac{Q}{Q} = \frac{y_0 \cdot h}{F}$$

d. h. α ist das Verhältnis des der J_a-Fläche umgeschriebenen Rechteckes zu der J_a-Fläche selbst, wenn die J_a-Fläche in eine krummlinig begrenzte Figur mit der Grundlinie h und der Höhe y_0 verwandelt wird. Dieser geometrische Zusammenhang ist in meinem Aufsatz: „Graphostatische Untersuchung der Schubspannungen in Beton- und Betoneisenträgern“ weiter ausgeführt.

B e i s p i e l e.

1. Betonplatte bis zum Bruch belastet:

Es war:

der Inhalt der J-Fläche $F = 5{\cdot}97\ cm^2$, $h = 10\ cm$, $y = 1{\cdot}85\ cm$.

$$\alpha = \frac{h\,.\,y_0}{F} = \frac{10\,.\,1{\cdot}85}{5{\cdot}97} = 3{\cdot}082.$$

2. Betonplatte mit $1{\cdot}27\%$ Eiseneinlage bis zur zulässigen Beanspruchung belastet:

$$J_{fl} = 8{\cdot}009\ cm^2$$

$$h = 9{\cdot}6\ cm\quad y_0 = 2{\cdot}4$$

$$\alpha = \frac{y_0\,h}{F} = \frac{2{\cdot}4\,.\,9{\cdot}6}{8{\cdot}009} = 2{\cdot}875.$$

3. Betonplatte mit $1{\cdot}27\%$ Eiseneinlage bis zum Anriß belastet mit Vernachlässigung der Betonzugspannungen.

$$J_{fl} = 49{\cdot}36\ cm^2$$

$$y_0 = 6{\cdot}6\ cm,\quad h = 19{\cdot}57\ cm$$

$$\alpha = \frac{y_0 \cdot h}{F}$$

$$\alpha = \frac{19{\cdot}57\,.\,6{\cdot}6}{49{\cdot}36} = 2{\cdot}616.$$

4. Betonplatte mit 2·614% Eiseneinlage bis zum Anriß belastet ohne Vernachlässigung der Betonzugspannungen:

$$J_{fl} = 211{\cdot}43\ cm^2$$

$$h = 28\ cm,\quad y_0 = 22{\cdot}26\ cm$$

$$\alpha = \frac{h\,y_0}{F} = \frac{28\,.\,22{\cdot}26}{211{\cdot}43} = \alpha = 2{\cdot}948.$$

5. Betonplatte mit 2·98% Armierung bis zum Anriß belastet, mit Vernachlässigung der Betonzugspannungen.

$$F = 217{\cdot}38,$$

$$h = 28,\ y_0 = 22{\cdot}26,$$

$$\alpha = \frac{h\,y_0}{F} = \frac{28\,.\,22{\cdot}26}{217{\cdot}38}$$

$$\alpha = 2{\cdot}867.$$

Die berechneten Werte α gelten für die verschiedensten Armaturen, Belastungszustände und Normalspannungen. Sie bleiben sämtlich um ein Geringes unter dem Wert $\alpha = 3$, welcher für rechteckigen Querschnitt mit konstantem Elastizitätsmodul für Druck und Zug gefunden wurde.

Es kann daher empfohlen werden, die Schubspannungen so zu berechnen, als wenn der Betonträger konstanten Elastizitätsmodul hätte, und die Eiseneinlagen überhaupt nicht zu berücksichtigen. Man erhält dann die Schubspannungen etwas zu groß.

Bei der reinen Betonplatte ohne Eiseneinlage (Beispiel 1) ist α etwas größer als 3. Dies ist auch nicht anders zu erwarten, weil der Abstand des Druck- und Zugmittelpunktes wegen der kurvenförmigen Spannungsdiagramme kleiner als $^2/_3\,h$ ist. Da jedoch selbst bei der Bruchbelastung sich der Wert von α nicht viel von 3 unterscheidet und α offenbar mit zunehmender Belastung wächst, weil das Spannungsdiagramm auf der Zugseite immer flacher wird, so kann auch für reine Betonplatten $\alpha = 3$ beibehalten werden. Für Rippenplatten (ohne Eiseneinlagen) ist dagegen $\alpha = 3$ zu günstig. Für Rippenplatten mit Eiseneinlagen sinkt α unter 3, so daß auch hier mit $\alpha = 3$ gerechnet werden kann. Vergleiche die Schlußbemerkung meines oben genannten Aufsatzes.

Für den Betonträger mit 1·27% Armierung beträgt demnach die Schubspannung bei einem Auflagerdruck von 1737 *kg* für 100 *cm* Tiefe und bei einer Höhe des Balkens von 10 *cm*:

$$\tau_b = \frac{3\,Q}{2\,F_b} = \frac{3\,.\,1737}{2\,.\,100\,.\,10} = \infty\ 2{\cdot}6\ kg/cm^2.$$

Hiebei ist der Auflagerdruck Q aus der Momentengleichung

$$M = 86.843\ cmkg$$

berechnet, wenn die Länge des Balkens zu 2 *m* und die Belastung gleichmäßig verteilt angenommen ist.

Steigt das Moment bis zur Bruchlast:

$$M_{br} = 387{\cdot}010\ cmkg,$$

so wird $Q_{max} = 7740\ kg$ und die größte Schubspannung erhält man zu:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{F_b} = \frac{3}{2}\,\frac{7740}{1000}$$

$$\tau_{max} = \infty\ 11{\cdot}6\ kg/cm^2.$$

Nach den Versuchen von W a y s s und F r e y t a g kann man bei fetten Betonmischungen 1 : 3 bis 1 : 4 mit einer Schubfestigkeit von ca. 30 kg/cm^2 rechnen, so daß eine Zerstörung am Auflager durch Überwindung der Schubfestigkeit nicht zu befürchten wäre.

Schließlich wäre noch die Umfangsspannung zwischen Mörtel und Eisen zu untersuchen.

Denkt man sich einen Schnitt um den Umfang der Eiseneinlage geführt, so müßten zur Herstellung des Gleichgewichtes Umfangsspannungen angebracht werden von der Größe:

$$n\,.\,\tau_u\,.\,u_e = \frac{Q\,.\,S_e}{J_a}.$$

Hiebei ist S_e das statische Moment der Eisenfläche in Bezug auf die Nullachse und J das Trägheitsmoment des ganzen Betonquerschnittes; ferner ist τ_u die gleichmäßig verteilt gedachte Schubspannung am Umfang, u_e der Umfang e i n e r Eiseneinlage und n die Anzahl der Eiseneinlagen.

Da $S_e = H\,.\,y_e$ ist, und $J_a = 2\,H\,.\,F$ ist, } nach den früheren Bezeichnungen,

so ist

$$\tau_u = \frac{Q\,.\,H\,.\,y_e}{2\,H\,.\,F}\cdot\frac{1}{n\,.\,u_e}$$

$$= \frac{1}{2\,n}\,\frac{Q}{F}\cdot\frac{y_e}{u_e}.$$

y_e ist der Abschnitt auf der Nullachse, der durch den Beitrag der Eiseneinlage zur J-Fläche F entsteht.

Gewählt sind zehn Eiseneinlagen à 13 *mm* Φ, so daß die Eisenmenge

$$f_e = 10\,.\,1{\cdot}327 = 13{\cdot}27\ cm^2$$

beträgt.

Die Armierung ist also 1·33% angenommen, etwas stärker als 1·27%. Der Umfang u_e ist 4·084 *cm*.

Ferner ist für $M = 86{\cdot}843\ cmkg$,

$$y_e = 0{\cdot}86\ cm \text{ und } F = 8{\cdot}009\ cm^2.$$

Daher ist

$$\tau_u = \frac{1}{2\,.\,10}\cdot\frac{1737}{8{\cdot}009}\cdot\frac{0{\cdot}86}{4{\cdot}084} = \infty\,\frac{1494}{653}$$

$$= \infty\ 2{\cdot}3\ kg/cm^2.$$

Steigt das Moment bis zum Bruchmoment:

$$M_{br} = 387.010\ cmkg,$$

so wird:

$$J_e = 6{\cdot}6\ cm,\ F = 49{\cdot}36\ cm^2,$$

$$Q = 7740\ kg,$$

und

$$\tau_{u\,max} = \frac{1}{2\,n}\,\frac{Q}{F}\cdot\frac{y_e}{u}$$

$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{7740}{49{\cdot}36}\cdot\frac{6{\cdot}6}{4{\cdot}084}$$

$$= 12{\cdot}2\ kg/cm^2.$$

Nach den Versuchen von B a u s c h i n g e r, W a y s s und F r e y t a g kann die Haftfestigkeit des Mörtels am Eisen zu ca. 40 kg/cm^2 angenommen werden für die in Frage stehenden Mischungen bei einem Wasserzusatz von 15%. (W a y s s und F r e y t a g, Betoneisenbau, Seite 64.) Es ist also anzunehmen, daß die Konstruktion nicht durch Überwinden der Haftfestigkeit des Mörtels am Eisen gefährdet wird.

V.

Schlußwort.

Das in den vorhergehenden Abschnitten abgeleitete Verfahren ist klargelegt worden an einem rechteckigen Balkenquerschnitt mit Eiseneinlagen auf der Zugseite.

Dasselbe läßt sich ohne weiteres erweitern auf Balken mit mehrteiligen Eiseneinlagen auf der Zugseite und auf Balken mit beiderseitigen Eiseneinlagen auf der Zugseite und auf der Druckseite.

Auf Rippenplatten kann das Verfahren ebenfalls angewendet werden; man muß dann für die Rippe die E-Fläche auf das Verhältnis der Breite der Rippe zu der Breite der Platte reduzieren.

Am einfachsten ist es, wenn man die Anordnung so wählt, daß die Nullinie mit der Plattenunterkante zusammenfällt. Im anderen Falle muß man in der Druckzone die Lage der Plattenunterkante versuchsweise annehmen. Auch die Untersuchung mit gedrückter Rippe und gezogener Platte geschieht auf ähnliche Weise.

Auch bei Rippenplatten entwickelt man zunächst einen der zu entwerfenden Anordnung ähnlichen Träger, und kann dann leicht Formeln ableiten für den Träger, welcher dem aufzunehmenden Moment entspricht.

Die Konstruktion des Spannungsdiagramms, der D-Linie und Z-Linie, der Inhalt der J-Fläche und demnach auch die Berechnung der Tragfähigkeit der Balken ist wesentlich abhängig von der Annahme der Gestalt der E-Fläche. Je mehr sich die E-Linie den wirklichen Verhältnissen nähert, desto größer ist die Genauigkeit der Rechnung.

Wir wollen im folgenden zum Vergleich für einige Berechnungsmethoden die Gestalt der E-Linie angeben.

I. Geradlinige Spannungsverteilung in der Druckzone, Vernachlässigung der Betonzugspannungen, Aufnahme sämtlicher Zugspannungen durch die Eiseneinlagen. Angenommen wird das Verhältnis $m = \frac{E_d}{E_e}$.

Die E-Fläche ist für die Druckzone ein Rechteck. Die E-Fläche für die Betonzugzone fällt weg. (Für die Eiseneinlagen ist die E-Fläche ebenfalls ein schmales Rechteck von m-facher Höhe.) Das Verfahren ist das in der Praxis übliche; siehe auch Wayss & Freitag, Der Betoneisenbau.

II. Geradlinige Spannungsverteilung in der Druckzone und in der Zugzone. Der Elastizitätsmodul des Betons wird als Mittelwert zwischen denjenigen auf Druck und Zug angenommen und entsprechend ist auch $m = \frac{E_b}{E_b}$ für den ganzen Querschnitt konstant. Die E-Fläche für den Beton ist für den ganzen Querschnitt ein Rechteck. Das Eisen wird mit dem m-fachen Querschnitt eingeführt. Diese Methode ist von Melan angegeben.

Das gleiche Ergebnis erhält man, wenn man die Wirkung der Eiseneinlage auf den Betonquerschnitt als eine statisch unbestimmte Kraft einführt, die aus der Gleichheit der Formänderungen an der Stelle der Eiseneinlagen von Beton und Eisen sich bestimmen läßt; siehe Walter und Weiske, Statische Berechnung der Träger und Stützen aus Beton mit Eiseneinlagen, Kassel, Kempf 1902.

III. Geradlinige Spannungsverteilung in der Druck- und Zugzone. Der Elastizitätsmodul wird für Druck und Zug verschieden, jedoch für denselben Querschnitt konstant angenommen. Man hat also auch zwei Verhältniswerte: $m_1 = \frac{E_e}{E_d}$ und $m = \frac{E_e}{E_z}$.

Die E-Flächen sind auf beiden Seiten der Nullinie Rechtecke verschiedener Breite. Auf dieser Grundlage beruhen die Methoden von Sanders, Weiske.

IV. Geradlinige Spannungsverteilung in der Druckzone bis zur Streckgrenze, von da ab konstante Betonzugspannung bis zur äußersten Faser. Der Wert $m = \frac{E_e}{E_z}$ für die Eiseneinlage nimmt mit der Höhe des Teiles der Zugzone, der über die Streckgrenze hinaus gespannt ist, zu.

Die E-Fläche ist in der Druckzone ein Rechteck, in der Zugzone ebenfalls ein Rechteck bis zur Streckgrenze; von da ab geht die geradlinige E-Linie über in eine gleichseitige Hyperbel, wie oben nachgewiesen wurde.

Diese Methode ist von Barkhausen angegeben in dem Aufsatz: „Die Verbundkörper aus Mörtel und Eisen im Bauwesen", Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1901, Heft 2.

V. Parabolische Spannungsverteilung in Zug- und Druckzone. Die E-Flächen sind Trapeze. Die E-Linien sind Gerade, welche mit wachsender Dehnung gegen die ε-Achse fallen. Die analytische Behandlung ist von Haberkalt angegeben in der Österreichischen Wochenschrift für öffentlichen Baudienst 1902, 29. November.

Für jede der angegebenen Methoden lassen sich nun entsprechende graphische Untersuchungen ableiten, welche auf denselben Grundgesetzen der graphischen Statik beruhen, welche hier benutzt sind. Man kann auch sagen: Das hier gegebene Verfahren ist das allgemeine, aus dem sich die Anwendung auf vereinfachende Annahmefälle ohneweiters ergibt. Im einzelnen kann man die Methode dann noch praktischer gestalten, wie es beispielsweise für die Methoden I—III angegeben ist in dem Aufsatze: Weiske, Die Anwendung von Kraft- und Seileck auf die Berechnung der Beton- und Betoneisenträger.

Die Anwendung auf die Methoden IV und V behalte ich mir für einen besonderen Aufsatz vor.

Auf Anregung meines Lehrers, des Herrn Professor G. Lang-Hannover, habe ich mich nach Fertigstellung dieser Arbeit mit dem hyperbolischen Spannungsverteilungsgesetz für Baustoff mit veränderlichem Elastizitätsmodul beschäftigt und gefunden, daß die analytisch-graphische Behandlung desselben schneller zum Ziele führt als diejenige des Potenzgesetzes.

Lang schlägt in seinem Buche: „Der Schornsteinbau", Heft I, Seite 127, Hannover, Helwings Verlagsbuchhandlung, zum Ausdruck für die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls mit zunehmender Spannung und Temperatur das Gesetz vor:

$$\underset{(t\,\sigma)}{E} = E_0 - c\,.\,t - d\,.\,\sigma.$$

Sehen wir von dem Einfluß der Temperatur vorläufig ab, so erhalten wir für die Dehnung ε den Ausdruck:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 - d\,\sigma}$$

$$\text{oder } \sigma = \frac{E_0}{1 + d\,\varepsilon}\,.\,\varepsilon = E_\sigma\,.\,\varepsilon.$$

Hiebei ist $E_\sigma = \frac{E_0}{1 + d\,\varepsilon} = E_0 - d\,.\,\sigma$.

Ferner ist $d = \frac{E_0}{k}$, wobei k die Bruchspannung des Materials bedeutet, so daß $E_\sigma = E_0\left(1 - \frac{\sigma}{k}\right)$ ist.

Für $\sigma = k$ ist $E_\sigma = 0$ und $\varepsilon = \frac{\sigma}{E_\sigma} = \frac{k}{0} = \infty$; durch die letztere Beziehung wird zum Ausdruck gebracht, daß die Trennung stattfindet, indem die Dehnungen beliebig groß werden.

Trägt man auf einer Achse die Dehnungen ε, dazu senkrecht die Spannungen auf, so hat das Spannungsdiagramm eine Asymptote parallel zur ε-Achse im Abstand k von der ε-Achse. Der Fließzustand des Baustoffes bei hohen Dehnungen bezw. Spannungen wird also gut zum Ausdruck gebracht.

Die Konstruktion des Spannungsdiagramms geschieht sehr einfach auf graphischem Wege mit Hilfe der geradlinig mit der Spannung sich verkleinernden E-Fläche, was ich mir für eine besondere Darlegung vorbehalte.

Vorher müssen die Konstanten der linearen Gleichung:

$$E_0 - d\,.\,\sigma - E_\sigma = 0$$

E_0 und d mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aus n Messungen, welche die Werte σ und E_σ liefern, bestimmt werden.

Zu ihrer Berechnung dienen die Gleichungen:

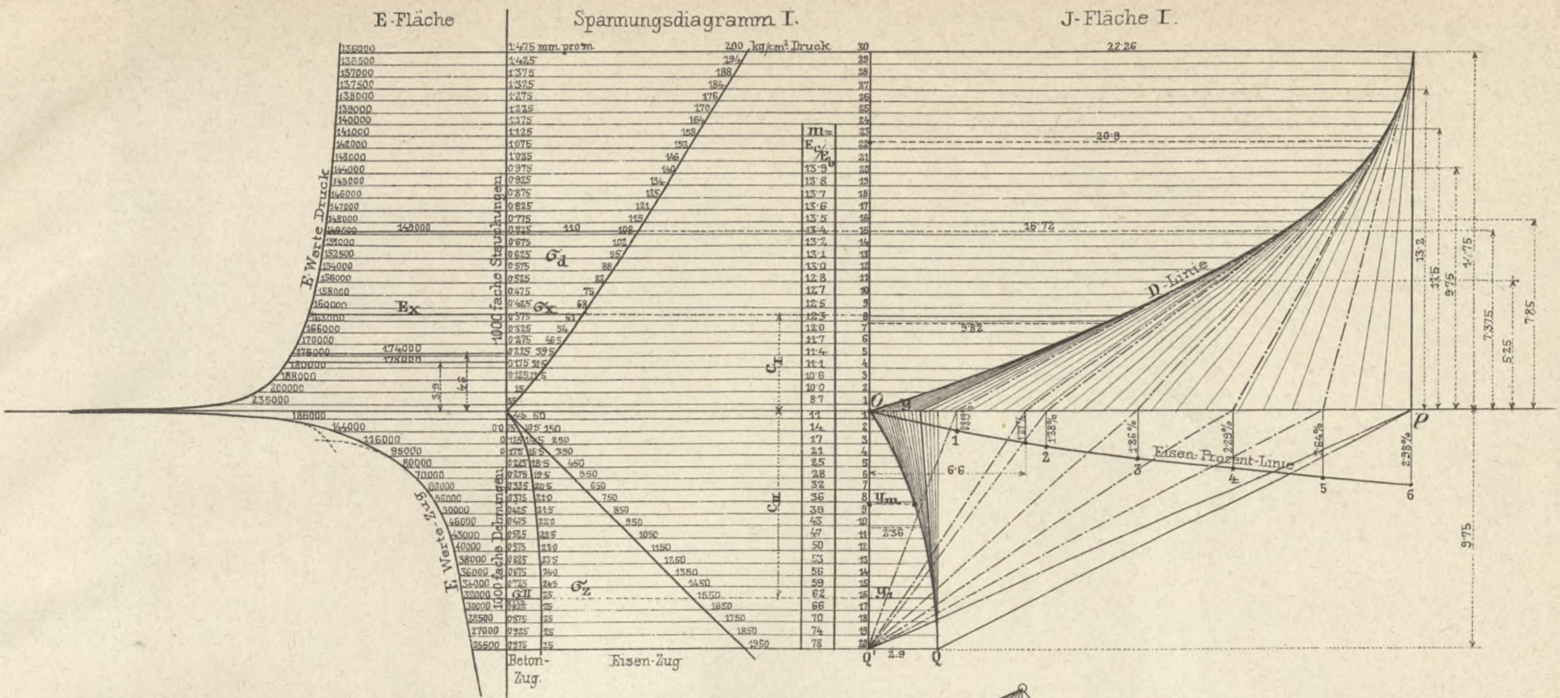
$$E_0 = \frac{\Sigma\,\sigma^2\,.\,\Sigma\,E_\sigma - \Sigma\,\sigma\,.\,\Sigma\,E_\sigma\,.\,\sigma}{n\,.\,\Sigma\,\sigma^2 - (\Sigma\,\sigma)^2}$$

und

$$d = -\frac{n\,.\,\Sigma\,\sigma\,.\,E_\sigma - \Sigma\,\sigma\,.\,\Sigma\,E_\sigma}{n\,\Sigma\,\sigma^2 - (\Sigma\,\sigma)^2}.$$

Der für einen Träger vorhandene Temperaturzustand t kann berücksichtigt werden, indem man den Anfangswert E_0 durch $(E_0 - c\,.\,t)$ ersetzt.

Fig. 4.



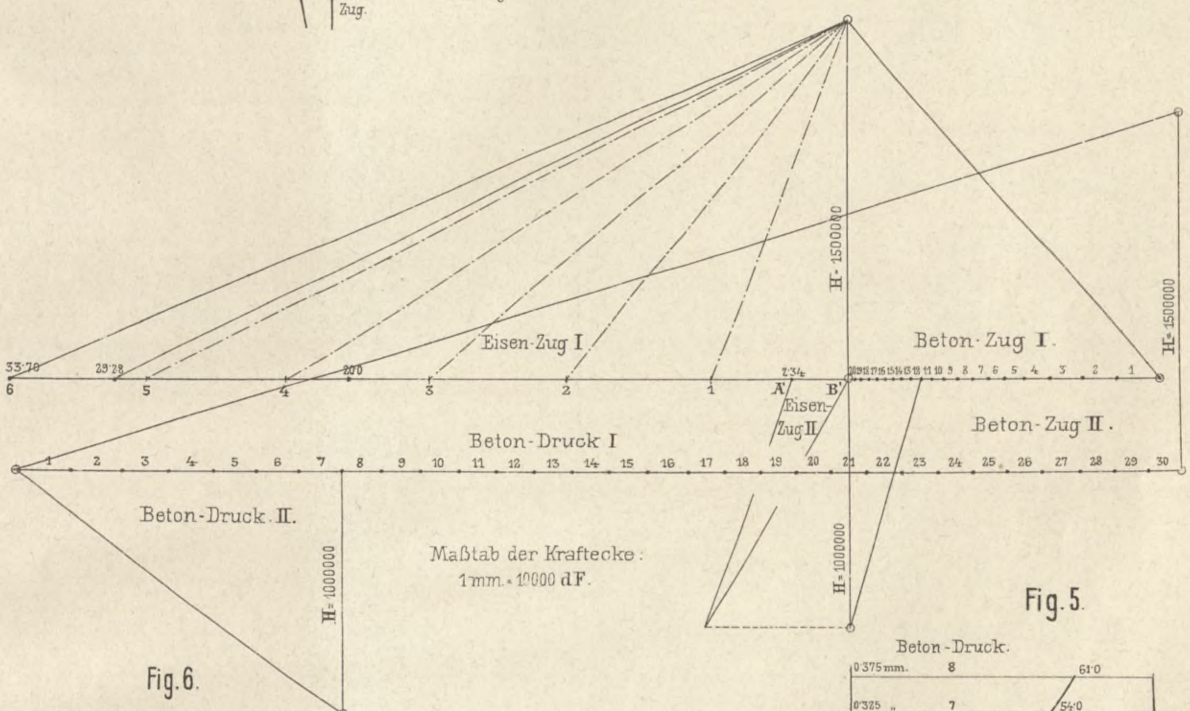


Fig. 6.

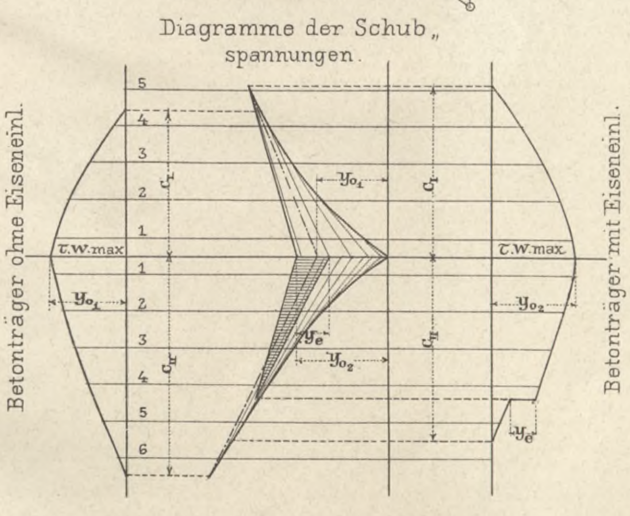
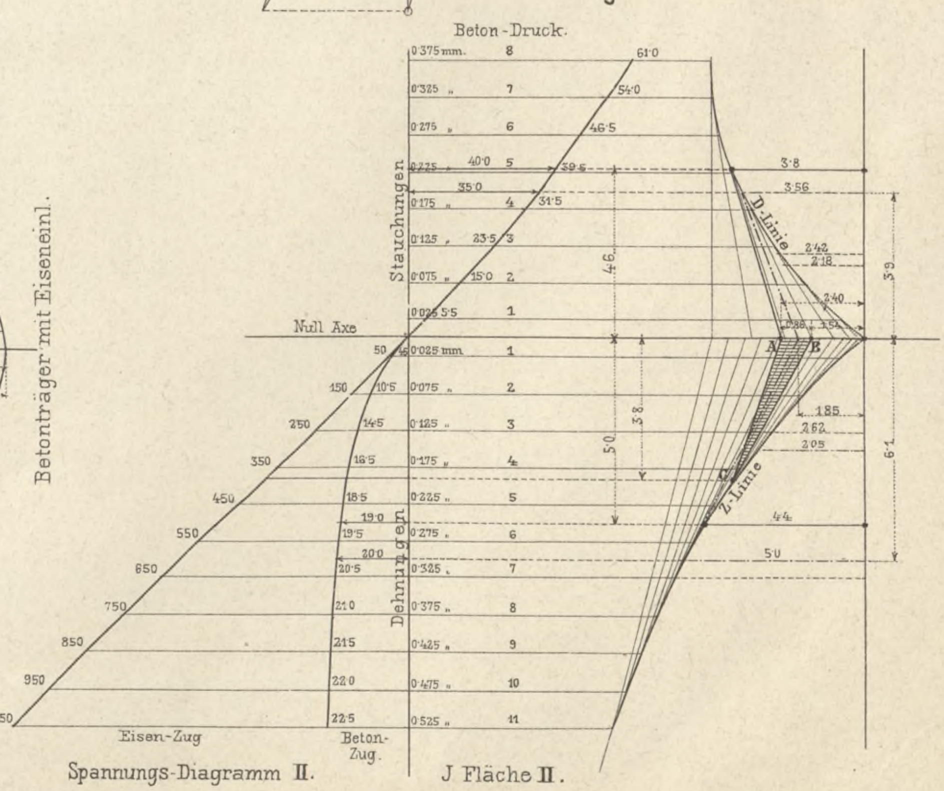


Fig. 5.



20.00

20.00