

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299494

Otto Seidel.

I. I.



*Leopold I.*

*W. Lub...*

*Otto Seidel*  
M

# Die Anfangsgründe

der

# theoretischen Mechanik

mit Anwendungen auf Maschinen

zugleich als

Sammlung von Beispielen und Übungsaufgaben.

---

Mit den einfachsten mathematischen Hilfsmitteln  
für technische Fachschulen, Werkmeisterschulen und  
zum Selbststudium bearbeitet

von

R. Geigenmüller,

Lehrer für Mathematik und Mechanik  
am Technikum Mittweida.

---

Mittweida,

Verlag der Polytechnischen Buchhandlung von R. Schulze.

1888.

KD 531:621.0



II 7726

## Vorwort.

So reich unsere Schullitteratur an zum überwiegenden Teil vor-  
trefflichen Lehrbüchern der Mechanik ist — der Verfasser dieses  
Werkchens konnte trotz eifriger Nachforschung keines ausfindig  
machen, welches nach Auswahl und Behandlung des Stoffes als Leit-  
faden für den Unterricht an einer Werkmeisterschule sich eignete,  
und es wird dies auch leicht erklärlich, wenn man die Beschaffenheit  
des Schülermaterials, sowie die hiermit verbundene Ausnahmestellung,  
welche eine Werkmeisterschule fast allen andern Bildungsanstalten  
gegenüber einnimmt, in Betracht zieht.

Nachdem ein junger Mann eine gewöhnliche Volksschule durch-  
gemacht, dann seine Lehrzeit als Schmied, Schlosser oder Mechaniker  
beendet hat und hierauf eine Reihe von Jahren als Maschinenbauer,  
Monteur etc. praktisch thätig gewesen ist, fühlt er den Drang und  
die Fähigkeit, in geistiger und sozialer Beziehung eine Stufe höher  
zu steigen; er fasst — meist im Alter von 20 bis 30 Jahren —  
den Entschluss, Werkmeister zu werden und sich die hierzu nötige  
theoretische Bildung an einer in der Regel zwei bis drei Semester  
umfassenden Werkmeisterschule anzueignen.

Bedenkt man nun, dass ein solcher Schüler vermöge seines  
Alters und Bildungsgrades geistig wenig elastisch, dafür aber fast  
ausnahmelos eisern fleissig ist, dass er von dem früher in der Schule  
Gelernten wohl manches vergessen, dafür aber im praktischen Maschinen-  
bau auch vieles gelernt hat, so ist es dem Fachmanne klar, warum  
die bekannten Lehrbücher der Mechanik als Leitfaden für den Unter-  
richt an einer Werkmeisterschule gar nicht in Frage kommen können:  
die meisten noch mit elementaren Hilfsmitteln bearbeiteten Werke sind  
offenbar zu umfangreich und setzen schon in den ersten Kapiteln

einen zu hohen Grad mathematischer Bildung voraus; manche bieten auf der einen Seite zu viel oder zu hohe Theorie, auf der andern aber zu wenig Anwendungen; wieder andre thun zu viel des Guten im Erklären und Beschreiben, bringen aber zu wenig Formeln mit daran sich schliessenden Lösen von Zahlenbeispielen; denn der künftige Werkmeister ist mit dem Aussehen und sogar mit der Wirkungsweise verschiedener Maschinen vertraut, not thut ihm aber besonders die Kenntniss der zahlengemässen Bedingungen für jene Wirkungsweise.

Dazu kommt noch, dass auch auf die Anordnung des Stoffes besondere Rücksicht genommen werden muss, weil an den meisten Werkmeisterschulen der mechanische und der mathematische Unterricht zugleich beginnen; es war deshalb nötig, den einzelnen Abschnitten des Leitfadens eine solche Reihenfolge zu geben, dass der Unterricht mit dem jeweiligen mathematischen Wissen und Können des Schülers im Einklange steht, zugleich aber ohne dadurch den logischen Zusammenhang des Ganzen zu gefährden.

Sollte es dem Verfasser einigermaßen gelungen sein, den oben angedeuteten Verhältnissen und Bedürfnissen Rechnung zu tragen, so möchte dieses Büchlein solchen angehenden Technikern etc., welche der niederen Mathematik mächtig sind, auch zum Selbststudium empfohlen werden können; nur dürften Betreffende nicht versäumen, womöglich alle dem Werkchen beigefügten Aufgaben und Beispiele, welche übrigens fast ausnahmslos vom Verfasser selbst gebildet worden sind, gewissenhaft zu lösen, bezw. durchzurechnen — nicht nur, um aus dem Wissen ein Können zu machen, sondern auch, um sich für das Verständnis der einer Aufgabengruppe folgenden Paragraphen besser zu befähigen.

Mittweida, im Januar 1888.

**Der Verfasser.**



## Einleitung.

Der erste Eindruck, welchen wir von einem Körper erhalten, wird darin bestehen, ob derselbe seine Stellung gegen andere Körper ändert oder nicht; im ersten Falle sagen wir: er bewegt sich, im letzten dagegen heisst es: er ist in Ruhe oder im Gleichgewichte.

Die Mechanik kann nun schlechthin als die Wissenschaft von der Bewegung und dem Gleichgewichte der Körper definiert werden und zerfällt hiernach von selbst in die beiden Haupttheile der Bewegungslehre oder Dynamik und der Lehre vom Gleichgewichte oder Statik. Weil ferner alle Körper in feste, tropfbar flüssige und luft- oder gasförmige eingeteilt werden können, so gliedert sich jeder der beiden Haupttheile der Mechanik wiederum in drei Abschnitte, und das ganze Gebiet der Mechanik umfasst daher sechs Abteilungen, nämlich:

1. die Lehre von der Bewegung der festen Körper oder Geodynamik,
2. " " " " " " flüssigen " " Hydrodynamik,
3. " " " " " " luftförm. " " Aërodynamik,
4. " " vom Gleichgewichte " festen " " Geostatik,
5. " " " " " " flüssigen " " Hydrostatik,
6. " " " " " " gasförm. " " Aërostatik.

Hierzu wäre noch zu bemerken, dass man die Abschnitte 1 und 4 unter dem Namen Geomechanik, ferner 2 und 5 unter dem Namen Hydromechanik oder auch Hydraulik, sowie 3 und 6 unter dem Namen Aëromechanik zusammenzufassen pflegt, und dass die Aërodynamik auch Pneumatik genannt wird.

Ausserdem unterscheidet man aber auch zwischen einer theoretischen und einer angewandten oder praktischen Mechanik; die erstere stützt sich auf nur wenige Erfahrungssätze und leitet daraus mit Hilfe der reinen Mathematik sowohl die Bewegungsgesetze als auch die Bedingungen des Gleichgewichts ab; die letztere hingegen zeigt, wie die Resultate der theoretischen Mechanik zur Benützung der Naturkräfte verwendet werden können. Schon hieraus folgt, dass die theoretische der praktischen Mechanik notwendig vorausgehen muss.

Zunächst beschäftigen wir uns mit der Lehre von der Bewegung eines geometrischen Punktes, welche noch als rein mathematische Wissenschaft angesehen werden kann und auch unter den beiden Namen Phoronomie und Kinematik bekannt ist.

---

## Erstes Kapitel.

### Die wichtigsten Bewegungsarten.

#### § 1.

#### Einteilung der Bewegungen.

Bei einer jeden Bewegung kommen zunächst zwei Grössen in Betracht, nämlich erstens die Zeit, während welcher ein Punkt sich bewegt und zweitens der Weg, welchen letzterer dabei zurücklegt.

Denkt man sich nun die Zeit der Bewegung in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, z. B. in lauter Sekunden, zerlegt, so können die zugehörigen, vom Punkte durchlaufenen Räume entweder ebenfalls gleich lang, oder aber von einander verschieden sein; im ersteren Falle nennt man die Bewegung gleichmässig oder gleichförmig, im letzteren ungleichförmig. Die ungleichmässige Bewegung kann wiederum eine beschleunigte oder verzögerte sein, je nachdem die den gleichen Zeitabschnitten entsprechenden Wegstrecken zu- oder abnehmen.

Endlich unterscheidet man nach der Form der vom Punkte durchlaufenen Bahn geradlinige und krummlinige Bewegungen.

§ 2.

Die gleichförmige Bewegung.

Wenn ein Punkt in einer gewissen Zeit, etwa in 2 Minuten, eine bestimmte Strecke, beispielsweise 240 Meter, gleichmässig zurücklegt, so ergibt sich der in jeder Sekunde durchlaufene Weg ganz offenbar dadurch, dass man den Gesamtweg durch die verbrauchte Sekundenzahl dividiert, also für den angenommenen Spezialfall

$$240 : 120 = 2 \text{ Meter.}$$

Dieser bei der gleichförmigen Bewegung in einer Sekunde zurückgelegte Weg heisst die Geschwindigkeit des Punktes und erhält in der Regel die Bezeichnung  $c$  oder auch  $v$ . Bezeichnet man ausserdem die Sekundenzahl mit  $t$  und den in dieser Zeit vom Punkte zurückgelegten Weg mit  $s$ , so gilt allgemein die Formel

$$c = \frac{s}{t} \quad (1.)$$

Hieraus folgt weiter

$$s = ct \quad (2.)$$

oder in Worten: Bei der gleichförmigen Bewegung ist der Gesamtweg das Produkt aus der Geschwindigkeit und der in Sekunden ausgedrückten Zeit. Endlich ergibt sich aus 2

$$t = \frac{s}{c}, \quad (3.)$$

dennach die Regel: Behufs Berechnung der Zeit, welche ein Punkt braucht, um bei bekannter Geschwindigkeit einen bestimmten Weg zurückzulegen, hat man diesen durch jene zu dividieren.

Mit Hilfe der vorstehenden drei Formeln, resp. Regeln, können alle Aufgaben gelöst werden, welche sich auf gleichförmige Bewegungen beziehen; nur ist im Auge zu behalten, dass die Zeit  $t$  stets in Sekunden auszudrücken ist, sowie, dass der Gesamtweg  $s$  und die Geschwindigkeit  $c$  immer mit derselben Längeneinheit gemessen sind.

§ 3.

Beispiele.

1. Mit welcher Geschwindigkeit lief ein Reitpferd, welches in 32 Minuten einen Weg von 7968 Metern gleichmässig zurücklegte?

Lösung: In diesem Falle ist der Gesamtweg  $s = 7968 \text{ m}$ , die Zeit  $t = 32' = 32.60 = 1920''$  und folglich nach Formel 1

$$c = \frac{s}{t} = \frac{7968}{1920} = 4,15 \text{ m,}$$

die Geschwindigkeit des Reitpferdes.

2. Welchen Weg in geographischen Meilen (à 7420 m) kann ein geübter Schlittschuhläufer bei 9 Meter Geschwindigkeit während 2 Stunden zurücklegen?

Lösung: Hier hat man  $c = 9 \text{ m}$  und  $t = 2 \text{ St.} = 120' = 7200''$ , mithin ergibt sich nach Formel 2

$$s = ct = 9 \cdot 7200 = 64800 \text{ m} = \frac{64800}{7420} = 8,73 \text{ Meilen.}$$

3. In welcher Zeit würde ein Schnellzug bei ununterbrochener Fahrt und 12,5 Meter Geschwindigkeit unseren nächsten Himmelskörper, den Mond, erreichen, wenn letzterer gerade 52000 Meilen (à 7500 Meter) von der Erde entfernt ist?

Lösung: Es ist gegeben der Gesamtweg  $s = 52000 \cdot 7500 \text{ m}$ , die Geschwindigkeit  $c = 12,5 \text{ m}$ , und man erhält mittels Formel 3 die Zeit

$$t = \frac{s}{c} = \frac{52000 \cdot 7500}{12,5} = 31200000'' = 361,11 \text{ Tage.}$$

4. In welcher Zeit gelangt ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die Entfernung beider zu 20 Millionen und die Geschwindigkeit des Lichts zu 40 Tausend Meilen angenommen wird?

Antwort: In 8 Minuten 20 Sekunden.

5. Wie lange braucht eine Brieftaube, um bei 30 Meter Geschwindigkeit einen Weg von 9 Kilometern zurückzulegen?

Antwort: 5 Minuten.

6. Wie gross ist die Geschwindigkeit eines Dampfschiffes, welches in der Stunde 18 Kilometer zurücklegt?

Antwort: 5 Meter.

7. Wenn zum Herausziehen einer Tonne aus einem 210 Meter tiefen Schacht zwei und eine halbe Minute Zeit erforderlich ist, welches ist dann die Geschwindigkeit jener Tonne?

Antwort: 1,4 Meter.

8. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Infanterist, welcher in der Minute 112 Schritte à 0,8 Meter macht?

Antwort: 1,6 Meter. ←  $112 \cdot 0,8$

$112 \cdot 0,8 = 1,49$

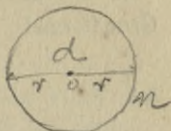
9. Welchen Weg legt derselbe bei ununterbrochenem Marsche pro Stunde zurück?

Antwort: 5,76 Kilometer.

10. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein horizontales Sägegatter, welches 200 Touren oder 400 Schnitte in der Minute macht, wenn jeder Zug 0,69 Meter lang ist?

Antwort: Mit 4,6 Meter Geschwindigkeit.

§ 4.



Die gleichförmige Kreisbewegung.

Wenn auch die in § 2 entwickelten Gesetze für die gleichförmige Bewegung von der Form des zurückgelegten Weges ganz unabhängig sind und daher ebensowohl für jede krummlinige als geradlinige Bewegung gelten, so erscheint es dennoch geboten, diejenige gleichmässige Bewegung, welche von einem Punkte auf der Peripherie eines Kreises erfolgt, noch besonders zu untersuchen.

Aus Gründen der Zweckmässigkeit hat man nämlich bei dieser für die Maschinenlehre so wichtigen Bewegungsart anstatt des Gesamtweges und der Zeit die beiden folgenden Grössen eingeführt:

1. den Durchmesser der Kreisbahn, welcher allgemein mit  $d$  bezeichnet wird und

2. die sogenannte Umlaufs- oder Tourenzahl, welche anzeigt, wie oft mal der Punkt den Kreisumfang in einer Minute durchläuft und welche wir mit  $n$  bezeichnen wollen.

Die Geschwindigkeit behält ihre Bedeutung (Weg pro Sekunde) und Bezeichnung ( $c$  oder  $v$ ) bei, wird aber hier aus nahe liegendem Grunde gewöhnlich auch Umfangsgeschwindigkeit genannt.

Die Beziehung, in welcher die vorstehenden drei Grössen  $c$ ,  $d$  und  $n$  zu einander stehen, finden wir durch folgende einfache Schlüsse: die Länge vom Umfange eines Kreises vom Durchmesser  $d$  ist bekanntlich

$$d\pi,$$

folglich der vom Punkte auf der Kreisperipherie in einer Minute zurückgelegte Weg

$$nd\pi$$

und mithin sein Weg in der Sekunde, das ist seine Umfangsgeschwindigkeit

$$c = \frac{nd\pi}{60}.$$

Dividieren wir Zähler und Nenner des letzteren Bruches durch die Zahl  $\pi = 3,1415926 \dots$  und runden das Verhältnis  $60 : \pi$  auf 19,1 ab, so erhalten wir für die gleichförmige Kreisbewegung die Grundformel

$$\text{Geschw. } c = \frac{nd}{19,1}. \quad (4.)$$

Hieraus erhält man leicht die Tourenzahl

$$\text{Leiden. } n = \frac{19,1c}{d} \quad (5.)$$

und den Durchmesser der Kreisbahn

$$\text{Durchm. } d = \frac{19,1c}{n}. \quad (6.)$$

Es kann füglich dem Leser anheim gestellt werden, die vorstehenden drei Formeln in Wortregeln zu übersetzen; jedenfalls aber ist es unerlässlich, sich bei Anwendungen zu vergegenwärtigen, dass  $n$  eine unbenannte Zahl darstellt und dass  $c$  und  $d$  mit gleicher Einheit gemessene Längen sind.

## § 5.

### Beispiele.

11. Wie gross ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Rande eines vertikalen Wasserrades, welches 6 Meter hoch ist und sich in einer Minute 4mal umdreht?

Lösung: Bekannt ist  $d = 6 \text{ m}$  und  $n = 4$ ; man findet daher nach Formel 4 die Umfangsgeschwindigkeit

$$c = \frac{nd}{19,1} = \frac{4 \cdot 6}{19,1} = 1,257 \text{ m.}$$

12. Erfahrungsgemäss muss für einen guten Mahlprozess bei 100 Umläufen pro Minute die Umfangsgeschwindigkeit 7,6 Meter betragen; welchen Durchmesser müsste man dem Steine geben?

Lösung: Aus  $n = 100$  und  $c = 7,6 \text{ m}$  folgt nach Formel 6

$$d = \frac{19,1c}{n} = \frac{19,1 \cdot 7,6}{100} = 1,45 \text{ m.}$$

13. Wie viele Umgänge in der Minute macht eine Turbine, deren Durchmesser 0,6 und deren Umfangsgeschwindigkeit 11 Meter beträgt?

Lösung: Mit Einsetzung von  $d = 0,6$  und  $c = 11$  in die Beziehung 5 ergibt sich die Tourenzahl

$$n = \frac{19,1c}{d} = \frac{19,1 \cdot 11}{0,6} = 350.$$

14. An einem Göpel von 5 Meter Länge zieht ein Pferd mit 1,2 Meter Geschwindigkeit; wie viel Umdrehungen in der Minute macht die Welle des Göpels?

Antwort: Circa 2,3 Umdrehungen.

15. Welche Umfangsgeschwindigkeit besitzt ein 5 Meter hohes Schwungrad bei 42 Touren in der Minute?

Antwort: Circa 11 Meter.

16. Wie lang muss der Durchmesser einer Riemenscheibe gewählt werden, um bei einer Umfangsgeschwindigkeit von 4 Metern 55 Umläufe per Minute zu erzielen?

Antwort: 1,39 Meter.

17. Mit welcher Geschwindigkeit fährt eine Lokomotive, deren Triebräder 1,6 Meter hoch sind und in einer Minute 126 Umgänge machen?

Antwort: Mit 10,555 Meter Geschwindigkeit.

18. Man berechne die Geschwindigkeit am Umfange eines Schwungrades, welches 4,85 Meter hoch ist und in der Minute 68 Umläufe macht.

Lösung:  $c = 17,266 \text{ m.}$

19. In der Rennbahn eines Pferdegöpels läuft ein schweres Zugpferd am vorteilhaftesten mit 0,85 Meter Geschwindigkeit; welchen Durchmesser muss man der Bahn geben, wenn das Pferd in jeder Minute einen Umlauf machen soll?

Antwort: Einen Durchmesser von 16,235 Meter Länge.

20. Ein Zahnrad soll mit 2 m Umfangsgeschwindigkeit laufen und 1,8 m Halbmesser erhalten; welche Tourenzahl ergibt sich für dasselbe?

Antwort:  $n = 10,6.$

11

§ 6.

**Riemen- und Räderverbindungen.**

Wenn zwei um ihre Mittelpunkte drehbare kreisrunde Scheiben durch einen über sie gelegten, straff gespannten und endlosen Riemen verbunden sind, so überträgt sich die Umfangsgeschwindigkeit der einen Scheibe auf die andere. Sind also  $C$  und  $c$  die Umlaufgeschwindigkeiten der treibenden, resp. getriebenen Scheibe, so gilt die Beziehung

$$C = c.$$

Bezeichnen wir nun die Tourenzahlen und die Durchmesser beider Riemenscheiben mit  $N$  und  $D$ , beziehungsweise mit  $n$  und  $d$ , so haben wir nach Nr. 4

$$C = \frac{ND}{19,1}, \text{ sowie } c = \frac{nd}{19,1},$$

und durch Gleichsetzung dieser beiden Werte von  $C$  und  $c$  ergibt sich

$$ND = nd \tag{7.}$$

oder in Worten: Das Produkt aus Tourenzahl und Durchmesser ist für die beiden durch einen Riemen verbundenen Scheiben dasselbe.

Dieses Gesetz gilt offenbar auch für zwei Zahnräder, deren Zähne genau ineinander greifen; doch kann man hierbei statt der Durchmesser auch die Zähnezahlen der entsprechenden Räder setzen. Sind nämlich letztere  $Z$ , resp.  $z$  und bezeichnen wir die Breite eines Zahnes, d. i. zugleich die Breite einer Zahnücke, mit  $b$ , so gelten die beiden Gleichungen

$$D\pi = 2bZ \text{ und } d\pi = 2bz.$$

Setzen wir diese beiden Werte in die aus Nr. 7 folgende Gleichung

$$ND\pi = nd\pi$$

ein, so entsteht

$$N2bZ = n2bz$$

oder

$$NZ = nz \tag{8.}$$

d. h.: Die Produkte aus Umlauf- und Zähnezahl sind für beide ineinander greifende Räder einander gleich.



§ 7.

Beispiele.

21. Von zwei durch einen Riemen verbundenen Scheiben hat die erste 1,5 Meter Durchmesser und macht 48 Umdrehungen per Minute. Wie gross muss der Radius der anderen Scheibe gewählt werden, um 100 Touren zu erzielen?

Lösung: Aus  $N = 48$ ,  $D = 1,5 m$  und  $n = 100$  folgt laut Formel 7

$$48 \cdot 1,5 = 100 d \text{ und hieraus } d = 0,72 \text{ Meter,}$$

die getriebene Scheibe muss demnach einen Halbmesser von 36 cm erhalten.

22. Ein Kegelrad von 108 Zähnen und 22 Umdrehungen in der Minute greift in ein Trieb mit 24 Zähnen, welches auf einer Mühlspindel sitzt. Wie viel Umläufe pro Minute macht die letztere?

Lösung: Mit Einsetzung von  $Z = 108$ ,  $N = 22$  und  $n = 24$  in Formel 8 ergibt sich

$$108 \cdot 22 = 24 \cdot x, \text{ mithin } x = 99,$$

die Umlaufzahl der Mühlspindel.

23. Auf der mit 75 Umdrehungen laufenden Transmissionswelle einer Maschinenfabrik sitzt eine Riemenscheibe von 84 cm Durchmesser und treibt eine Riemenscheibe von 45 cm Durchmesser auf einer Drehbankspindel. Wie viel Touren macht die letztere in einer Minute?

Antwort: 120.

24. Wie lang müsste aber der Durchmesser der Scheibe auf der Drehbankspindel sein, wenn letztere nur 100 Umläufe per Minute machen soll?

Antwort: 63 cm lang.

25. Auf der Welle eines Pferdegepels, welche sich in 10 Minuten 13 mal umdreht, sitzt ein Rad mit 160 Zähnen und greift in ein Trieb mit 20 Zähnen; man bestimme hieraus die Tourenzahl des Triebes.

Auflösung:  $n = 10,4$ .

26. Eine Ventilatorwelle soll durch eine Riemenscheibe von 2 Meter Durchmesser getrieben werden und mit 1500 Touren laufen. Welchen Durchmesser muss man der auf die Ventilatorwelle aufzu-

keilenden Scheibe geben, wenn sich die treibende Scheibe 135 mal in der Minute umdreht?

Antwort: Einen Durchmesser von 18 *cm*.

27. Ein zum Betriebe einer Mühlspindel dienendes Wasserrad macht 6 Umdrehungen in der Minute und trägt an seiner Welle ein Zahnrad mit 150 Zähnen, welches in ein Trieb mit 36 Zähnen eingreift. Auf der Welle des letzteren sitzt wieder ein Kegelrad von 120 Zähnen, welches schliesslich ein Trieb mit 30 Zähnen auf der Mühlspindel in Bewegung setzt; man berechne die Umlaufzahlen des ersten Triebes und der Mühlspindel.

Resultate: 25 und 100.

### § 8.

#### Die mittlere Geschwindigkeit.

Die in § 2 aufgestellte Definition der Geschwindigkeit (als Weg pro Sekunde) gilt lediglich für die gleichmässige Bewegung. Wenn dagegen ein Punkt sich ungleichmässig bewegt und in einer bestimmten Zeit ( $t$  Sekunden) einen bestimmten Weg ( $s$ ) zurücklegt, so spricht man von einer durchschnittlichen oder mittleren Geschwindigkeit und versteht darunter diejenige (gedachte) Geschwindigkeit, welche jener Punkt haben müsste, um in eben derselben Zeit  $t$  genau dieselbe Wegeslänge  $s$  gleichförmig zurückzulegen, welche doch in Wirklichkeit ungleichmässig durchlaufen wurde.

Es folgt hieraus, dass die mittlere Geschwindigkeit  $\gamma$  eines ungleichförmig bewegten Punktes mit derselben Formel 1 bestimmt werden kann, welche das Gesetz für die gleichmässige Bewegung ausdrückt, dass also

$$\gamma = \frac{s}{t} \quad (9.)$$

ist.

Wenn z. B. ein Eisenbahnzug in drei Stunden oder 10800 Sekunden die Strecke von 90 Kilometern zurücklegte, so war während dieser Zeit seine mittlere Geschwindigkeit  $\frac{90000}{10800} = 8\frac{1}{3}$  Meter — wie auch immer rasche und langsame Fahrt, sowie Stillstand an den Zwischenstationen aufeinander gefolgt sein mögen.

Aus der letzten Gleichung ergibt sich weiter

$$s = \gamma t \quad (10.)$$

eine Formel, mittels welcher man den von einem Punkte in der Zeit  $t$  ungleichförmig zurückgelegten Weg unter der Voraussetzung berechnen kann, dass die mittlere Geschwindigkeit jenes Punktes innerhalb derselben Zeit bekannt ist.

### § 9.

#### Beispiele.

28. Wie gross war die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Schiffes, welches in 50 Stunden den Weg von Calais nach Cork, eine Strecke von 100 deutschen Meilen (à 7500  $m$ ) zurücklegte?

Antwort:  $\gamma = 4\frac{1}{6}$  Meter.

29. Wie gross ist die mittlere Geschwindigkeit eines Schnellzuges bei 6 deutschen Meilen in der Stunde?

Antwort: 12;5 Meter.

30. Ein Körper schwimmt auf einem Flusse in 2 Stunden 900 Meter weit; wie gross berechnet sich hieraus die mittlere Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche des Flusses?

Antwort: 0,125 Meter.

31. Wenn durch eine mit immer gleicher Umfangsgeschwindigkeit gedrehte Kurbel eine kreisförmige in eine geradlinige Bewegung übergeführt wird, so ist letztere ungleichförmig. Man soll die durchschnittliche Geschwindigkeit der geradlinigen Bewegung aus der Länge  $l$  und der Umdrehungszahl  $n$  der Kurbel entwickeln.

Auflösung: Nach einer Kurbeldrehung ist der in gerader Linie zurückgelegte Weg dem doppelten Durchmesser des Kurbelwarzenkreises gleich, also  $4l$ , mithin nach einer Minute  $4ln$  und daher nach Formel 9

$$\gamma = \frac{4ln}{60} = \frac{ln}{15},$$

die mittlere Geschwindigkeit der geradlinigen Bewegung.

32. Man löse die vorige Aufgabe für den besonderen Fall, dass  $l = 35$  Centimeter und  $n = 42$  ist.

Resultat:  $\gamma = 0,98$  Meter.

33. In welchem Verhältnisse steht die mittlere Geschwindigkeit

keit  $\gamma$  der 31. Aufgabe zur Umfangsgeschwindigkeit  $c$  der Kurbelwarze?

Antwort: Es verhält sich  $\gamma : c = 2 : \pi = 0,6366 ; 1$ .

34. Der Kolben einer Dampfmaschine macht bei jeder Schwungradumdrehung zwei Hübe. Welches ist nun die mittlere Kolbengeschwindigkeit, wenn die Länge eines Kolbenhubes  $l$  Meter beträgt und die Tourenzahl des Schwungrades allgemein gleich  $n$  ist?

Auflösung: Der vom Kolben während einer Umdrehung des Schwungrades durchlaufene Weg ist  $2l$  Meter, demnach während einer Minute  $2ln$  Meter, und hieraus ergibt sich nach Formel 9

$$\gamma = \frac{2ln}{60} = \frac{ln}{30} \text{ Meter,}$$

die durchschnittliche Geschwindigkeit des Kolbens.

35. Wie gestaltet sich das Resultat der vorigen Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte  $l = 1,2$  Meter,  $n = 35$ ?

Antwort:  $\gamma = 1,4$  Meter.

36. Wie gross ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit einer Dampfmaschine, wenn die Hublänge  $0,93$  Meter und die Umlaufzahl des Schwungrades gleich  $50$  ist?

Antwort:  $\gamma = 1,55$  Meter.

## § 10.

### Die gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Eine Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiträumen um gleich viel zunimmt, heisst gleichförmig beschleunigt; es ist hier das Verständnis für folgende fünf Begriffe nötig:

1. die Zeit  $t$  und
2. der Gesamtweg  $s$  behalten die in § 2 angegebene Bedeutung,
3. die Anfangsgeschwindigkeit ist der Weg, welchen der Punkt innerhalb der ersten Sekunde zurücklegen würde, wenn keine Geschwindigkeitszunahme stattfände und soll mit  $c$  bezeichnet werden,
4. die sogenannte Beschleunigung, welche wir immer mit  $p$  bezeichnen wollen, ist das Wachstum der Geschwindigkeit pro Sekunde, und
5. die Endgeschwindigkeit ist die Strecke, welche der Punkt

nach der Zeit  $t$  in einer, also der  $(t + 1)$  ten Sekunde durchlaufen würde, wenn die Bewegung nach der  $t$  ten Sekunde plötzlich in eine gleichförmige überginge; diese Grösse soll in der Folge die Bezeichnung  $v$  erhalten.

An die vorstehenden Definitionen anknüpfend, erhalten wir eine Beziehung zwischen den vier Grössen  $c$ ,  $p$ ,  $t$  und  $v$  durch folgende einfache Betrachtung: es ist offenbar die Geschwindigkeit des Punktes

zu Anfang	der ersten	Sekunde	=	$c$ ,	
am Ende	" "	" "	=	$c + p$ ,	
" "	" "	zweiten	" "	=	$c + 2p$ ,
" "	" "	dritten	" "	=	$c + 3p$ ,
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	"
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	"

mithin

$$\text{am Ende der } t \text{ ten Sekunde} = c + tp,$$

und weil die Geschwindigkeit nach Verlauf von  $t$  Sekunden nichts anderes als die Endgeschwindigkeit  $v$  ist, so gilt die Gleichung

$$v = c + pt. \tag{II.}$$

Diese Formel lässt uns zwar die Natur der gegenseitigen Abhängigkeit zwischen den vier Grössen  $c$ ,  $p$ ,  $t$  und  $v$  erkennen, giebt aber keinen Aufschluss über den vom Punkte in der Zeit  $t$  zurückgelegten Gesamtweg  $s$ .

Da aber bei dieser Bewegungsart die Geschwindigkeit von  $c$  bis  $v$  ganz gleichmässig zunimmt, so ist der in  $t$  Sekunden durchlaufene Raum offenbar ebenso gross, als wenn die Bewegung eben so lange gleichförmig vor sich ginge mit einer mittleren Geschwindigkeit

$$v = \frac{c + v}{2},$$

es ist daher nach Formel 10

$$s = \frac{c + v}{2} t \tag{12.}$$

Setzt man den Wert von  $v$  aus 11 in 12 ein, so entsteht eine dritte Beziehung

$$s = \frac{c + c + pt}{2} t = \frac{2ct + pt^2}{2}$$

oder

$$s = ct + \frac{p}{2} t^2 \quad (13.)$$

Für den Fall, dass ein Punkt vom Ruhezustande aus in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung übergeht, ist seine Anfangsgeschwindigkeit Null, und wir erhalten folglich die hierher gehörigen Formeln dadurch, dass wir in den Gleichungen 11 bis 13

$$c = 0$$

setzen, nämlich

$$v = p t \quad (14.)$$

und

$$s = \frac{v}{2} t = \frac{p}{2} t^2 \quad (15.)$$

Die Lösung von Aufgaben, welche auf gleichförmig beschleunigte Bewegung Bezug haben, erfolgt nun in der Weise, dass man in den vorstehenden Formeln die gegebenen Zahlen an die Stelle der bezüglichen Buchstaben setzt und dann die entstehenden Gleichungen für die gesuchten Grössen auflöst.

## § 11.

### Beispiele.

37. Ein Körper beginnt seine Bewegung mit 1,5 Meter Geschwindigkeit, welche mit jeder Sekunde um 0,25 Meter wächst. Wie gross ist seine Geschwindigkeit nach 3 Minuten und welchen Weg hat der Körper in dieser Zeit zurückgelegt?

Auflösung: Durch Substitution von  $c = 1,5$ ;  $p = 0,25$  und  $t = 180$  in die Formeln 11 und 13 erhält man

$$v = c + p t = 1,5 + 0,25 \cdot 180 = 46,5 \text{ Meter}$$

als Endgeschwindigkeit, sowie

$$s = ct + \frac{p}{2} t^2 = \frac{3}{2} \cdot 180 + \frac{1}{8} (180)^2 = 4320 \text{ Meter,}$$

den in drei Minuten durchlaufenen Weg des Körpers. Letzteren hätte man auch mit Benützung von  $v = 46,5$  etwas kürzer nach Formel 12 berechnen können.

38. Welches war die Beschleunigung eines Punktes, dessen Geschwindigkeit während einer Minute von 3 auf 123 Meter stieg?

Auflösung: Mit Einführung der gegebenen Werte  $c = 3$ ,  $v = 123$  und  $t = 60$  in die Beziehung 11 entsteht

$$123 = 3 + p \cdot 60, \text{ woraus folgt } p = 2 \text{ Meter.}$$

39. Wie gross war aber die Beschleunigung eines Körpers, welcher seine Bewegung mit 4 Meter anfing und in einer Minute eine Strecke von 2400 Meter durchlief?

Auflösung: Setzt man  $s = 2400$ ,  $c = 4$  und  $t = 60$  in Nr. 13 ein und löst die hierdurch entstehende Gleichung für  $p$  auf, so ergibt sich  $p = 1,2$  Meter, die gesuchte Beschleunigung.

40. Wie lange muss sich ein Punkt bewegen, um bei einer Beschleunigung von 0,01 Meter, von einer Anfangsgeschwindigkeit von 4 Meter auf eine Endgeschwindigkeit von 16 Meter zu gelangen?

Antwort: 20 Minuten lang.

41. Wie viel Zeit braucht ein Punkt, um bei 3 Meter Anfangs- und 7 Meter Endgeschwindigkeit einen Weg von 4800 Meter zurückzulegen?

Antwort: 16 Minuten.

42. Man beobachtet, dass ein von der Ruhelage aus sich bewegendes Körper in 15 Sekunden einen Weg von 45 Metern zurücklegt. Welches war seine Beschleunigung?

Antwort:  $p = 0,4$  Meter.

43. Welches ist die Geschwindigkeit des Körpers in voriger Aufgabe nach einer weiteren halben Minute?

Antwort:  $v = 18$  Meter.

44. Auf den höchsten Punkt einer geneigten Ebene von 40 Meter Länge legt man eine Kugel, welche nun herabrollt und in 8 Sekunden am Fusse der schiefen Ebene ankommt. Man bestimme hieraus die Beschleunigung und die Endgeschwindigkeit der Bewegung.

Resultate:  $p = 1,25$  und  $v = 10$  Meter.

## § 12.

### Die gleichförmig verzögerte Bewegung.

Unter einer gleichförmig verzögerten Bewegung versteht man eine solche, bei welcher die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleichviel abnimmt. Die Abnahme der Geschwindigkeit pro Sekunde nennt man die Verzögerung und bezeichnet sie, wie die Beschleunigung, mit  $p$ . Ausserdem kommen hier die vier

Grössen  $c$ ,  $t$ ,  $v$  und  $s$  genau in derselben Bedeutung vor, wie oben; nur ist im voraus klar, dass hier, im Gegensatze zur beschleunigten Bewegung, die Anfangsgeschwindigkeit  $c$  immer grösser sein wird als die Endgeschwindigkeit  $v$ .

Weil aber jede Abnahme als eine negative Zunahme und mithin auch die Verzögerung als negative Beschleunigung angesehen werden kann, so ergeben sich die Gesetze für die gleichförmig verzögerte Bewegung, wenn man in den Beziehungen Nr. 11 und 13 —  $p$  an die Stelle von  $+p$  setzt, nämlich

$$v = c - pt \quad (16.)$$

und

$$s = ct - \frac{p}{2} t^2 \quad (17.)$$

Die Formel 12, in welcher die Grösse  $p$  überhaupt nicht vorkommt, gilt natürlich sowohl für die gleichförmig verzögerte, als auch für die gleichförmig beschleunigte Bewegung. Schliesslich sei noch erwähnt, dass der spezielle Fall  $c = 0$  selbstverständlich hier ausgeschlossen ist.

### § 13.

#### Beispiele.

45. Die Geschwindigkeit eines Körpers ist anfangs 38 Meter, vermindert sich aber aus irgend welcher Ursache per Sekunde um 0,4 Meter; wie gross ist die Geschwindigkeit nach einer Minute und welche Wegeslänge wurde in dieser Zeit durchlaufen?

Resultate:  $v = 14$  Meter und  $s = 1560$  Meter.

46. Nach wie viel Sekunden, vom Beginn der Bewegung an gerechnet, kommt dieser Körper zur Ruhe?

Lösung: Letztere tritt in dem Momente ein, wo die Endgeschwindigkeit gleich Null geworden ist. Setzen wir daher in Formel 16  $c = 38$ ,  $p = 0,4$  und  $v = 0$ , so ergibt sich

$$0 = 38 - 0,4 t$$

oder

$$t = \frac{38}{0,4} = 95;$$

die Bewegung hört also nach 95 Sekunden auf.



47. Man will die Geschwindigkeit eines Körpers, welche zu einem gewissen Zeitpunkte 30 Meter beträgt, durch allmähliche Verminderung in zwei Minuten auf die Hälfte reduzieren; wie gross muss da die Verzögerung sein?

Auflösung: Man setzt in Nr. 16  $c = 30$ ,  $v = 15$ ,  $t = 120$  und erhält

$$15 = 30 - 120 p,$$

folglich

$$p = 0,125 \text{ Meter,}$$

die gesuchte Verzögerung.

48. Eine auf einer Ebene fortrollende Kugel besitzt zuerst eine Geschwindigkeit von 6 Metern. Wie lange bewegt sich diese Kugel, wenn ihr die Bewegungshindernisse pro Sekunde 3 *cm* an Geschwindigkeit entziehen?

Antwort: 3 Minuten 20 Sekunden lang.

49. Wie weit entfernt sich die Kugel vom Anfangspunkt der Bewegung?

Antwort: 600 Meter.

50. Eine Lokomotive hat 15 Meter Geschwindigkeit und soll auf 900 Meter zum Stillstand gebracht werden. Welche Verzögerung muss ihr durch Bremsen erteilt werden?

Lösung: Hier bestimmen wir zunächst die nötige Bewegungszeit, indem wir in Nr. 12  $s = 900$ ,  $c = 15$  und  $v = 0$  substituieren, Aus der hierdurch entstehenden Gleichung

$$900 = \frac{15}{2} t$$

folgt

$$t = 120$$

und mit Einsetzung dieses Wertes und der anderen Zahlen in 17 erhält man

$$900 = 1800 - 7200 p$$

oder

$$p = 0,125 \text{ Meter,}$$

die gesuchte Verzögerung.

51. Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von 9 Metern eine schiefe Ebene hinaufgestossen und erreicht nach einer halben Minute die höchste Lage, von wo aus sie wieder umkehrt. Mit welcher Verzögerung bewegte sich die Kugel?

Antwort:  $p = 3 \text{ dm.}$

52. Wie weit hatte sich die Kugel vom Ausgangspunkt entfernt?

Antwort: 135 Meter.

53. Wann hatte sie eine Geschwindigkeit von 4 Metern?

Antwort: Nach  $16\frac{2}{3}$  Sekunden.

### § 14.

#### Der freie Fall und der senkrechte Wurf der Körper.

Besonders wichtige Anwendungen der letzten beiden Bewegungsarten haben wir im freien Fall und im senkrechten Wurf der Körper.

Wie die Erfahrung lehrt, bewegt sich nämlich ein seiner Unterstützung beraubter Körper bis zum Eintritte irgend eines Hindernisses in gerader, lotrechter Linie gleichförmig beschleunigt. Die Geschwindigkeitszunahme, hier auch die Beschleunigung oder Acceleration der Erdschwere genannt, beträgt nach genauen physikalischen Messungen im luftleeren Raume 9,81 Meter und wird allgemein mit  $g$  bezeichnet.

Da es nun ausserdem gebräuchlich ist, den nach  $t$  Sekunden zurückgelegten Weg, welcher hier Fallhöhe heisst, mit  $h$  zu bezeichnen, so erhalten wir zunächst die Formeln für den freien Fall von der Ruhe aus, wenn wir in 14 oder 15

$$g = 9,81 \text{ Meter} \quad (18.)$$

statt  $p$  und  $h$  an die Stelle von  $s$  einsetzen, nämlich

$$v = g t \quad (19.)$$

und

$$h = \frac{g}{2} t^2, \quad (20.)$$

ferner durch Substitution von  $t = \frac{v}{g}$  aus 19 in 20 nach geringer Umformung

$$h = \frac{v^2}{2 g} \quad (21.)$$

und hieraus

$$v = \sqrt{2 g h} \quad (22.)$$

Wird dagegen ein Körper mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit  $c$  vertikal empor geschleudert, so nimmt er eine gleichförmig verzögerte Bewegung an, seine Verzögerung ist  $g = 9,81$  Meter, und wir erhalten nach 16 und 17

$$v = c - gt, \quad (23.)$$

die Endgeschwindigkeit, sowie

$$h = ct - \frac{g}{2} t^2, \quad (24.)$$

die Wurf- oder Steighöhe des Körpers nach der Zeit  $t$ .

Allerdings ist in vorstehenden Angaben der Luftwiderstand gänzlich unberücksichtigt gelassen und zugleich haben die Formeln 18 bis 24 streng genommen nur Giltigkeit für nicht allzugrosse Fallräume; allein die letzteren sind, soweit sie in der Technik vorkommen, so klein und hiermit ist auch der Luftwiderstand so gering, dass bei Anwendung obiger Formeln ein nennenswerter Fehler nicht zu befürchten steht.

## § 15.

### Beispiele.

54. Welche Geschwindigkeit erhält und welche Höhe durchfällt ein Körper vom Ruhezustande aus in 5 Sekunden?

Resultate:  $v = 49,05$  und  $h = 122,625$  Meter.

55. Wie gross ist die Endgeschwindigkeit eines Körpers, der ohne Anfangsgeschwindigkeit eine Höhe von 20 Metern zu durchfallen hat?

Lösung: Aus Formel 22 ergibt sich  $v = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 20} = \sqrt{392,4} = 19,81$  Meter.

56. Die Endgeschwindigkeit eines aus 16,5 Meter Höhe herabfallenden Körpers anzugeben.

Resultat:  $v = 17,993$ , also circa 18 Meter.

57. Ein Dampfhammer wird 1,05 Meter hoch gehoben und fällt dann frei herunter; mit welcher Geschwindigkeit trifft er das zu schmiedende Eisenstück?

Antwort: Mit einer Geschwindigkeit von 4,54 Meter.

58. Welche Höhe hat ein mit 23,5 Meter Geschwindigkeit ankommender Körper durchfallen?

Lösung: Für  $v = 23,5$  ergibt sich aus Formel 21 die gesuchte Fallhöhe  $h = 28,15$  Meter.

59. Ein Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 196,2 Meter senkrecht empor geschleudert. Wie gross ist seine Geschwindigkeit nach 15 Sekunden?

Antwort:  $v = c - gt = 196,2 - 9,81 \cdot 15 = 49,05$  Meter.

60. Wie hoch ist der Körper in dieser Zeit gestiegen?

Antwort: 1839,4 Meter hoch.

61. Wie lange steigt der Körper überhaupt, d. h., wann erreicht er seinen höchsten Punkt, um dann umzukehren?

Lösung: Offenbar in dem Momente, wo seine Endgeschwindigkeit Null ist. Setzt man aber in Nr. 23  $v = 0$ ,  $c = 196,2$  und  $g = 9,81$ , so entsteht

$$0 = 196,2 - 9,81 t$$

und hieraus folgt  $t = 20$ ; folglich steigt der Körper 20 Sekunden lang.

62. Bis zu welcher Höhe hatte sich demnach der Körper erhoben?

Antwort: Bis zu 1962 Meter.

63. Ein Körper wurde vertikal emporgeschleudert und kam nach 50 Sekunden an die Ausgangsstelle zurück. Wie gross berechnet sich hieraus mit Vernachlässigung des Luftwiderstandes die Anfangsgeschwindigkeit?

Antwort: 245,25 Meter.

---

## Zweites Kapitel.

### Grundgesetze und Grundbegriffe der Mechanik.

#### § 16.

#### Das Grundgesetz vom Beharrungsvermögen.

Wie z. B. die Mathematik, so geht auch die theoretische Mechanik von gewissen Annahmen aus, die unmittelbar der Erfahrung entnommen sind und welche nun die Fundamentsteine für das Lehrgebäude der Mechanik abgeben. Diese Annahmen heissen die Grundsätze oder Axiome der Mechanik und ihre Richtigkeit wird nach-

träglich noch dadurch bestätigt, dass keine aus ihnen gezogene Folgerung den in der Natur beobachteten Thatsachen widerstreitet.

Von den vier Axiomen, welche der Mechanik im ganzen zu Grunde liegen, nennen wir als erstes das Grundgesetz vom Beharrungsvermögen oder von der Trägheit, nach welchem ohne äussere Veranlassung ein Körper weder den Zustand der Ruhe noch seine Bewegung irgend wie ändert: ist ein Körper einmal in Ruhe, so hat er auch das Bestreben, darin zu verharren, und ein bewegter Körper würde unaufhörlich eine gleichmässige Bewegung in gerader Linie verfolgen, wenn eben nicht äussere Ursachen vorhanden wären, welche entweder seine Geschwindigkeit oder seine Richtung oder beides zugleich abänderten.

Dass der erste Teil dieses Gesetzes richtig ist, dürfte ohne weiteres einleuchten; denn es bedarf z. B. für einen Menschen immer einer gewissen Anstrengung, um seinen oder einen anderen Körper in Bewegung zu setzen; für die Wahrheit des zweiten Teiles sprechen wohl auch viele Erscheinungen, so zum Beispiel, dass man beim scharfen Laufen nicht plötzlich einhalten kann, oder dass das Schwungrad einer Maschine noch fortläuft, nachdem der Dampfdruck bereits geraume Zeit zu wirken aufgehört hat u. s. w.; allein die letzte Konsequenz des oben angeführten Satzes zu beobachten sind wir niemals in der Lage, weil es keine einzige geradlinige und gleichförmige Bewegung von unbeschränkter Dauer giebt. Man muss daher den Scharfsinn bewundern, mit welchem der Italiener Galilei das Trägheitsgesetz zuerst richtig erkannt hat.

## § 17.

### Entwicklung des Begriffes „Kraft“.

Die im vorigen Paragraphen mehrfach erwähnten Ursachen, dass das Axiom vom Beharrungsvermögen nicht zum direkten und vollen Ausdrucke gelangt, bezeichnet man mit dem gemeinschaftlichen Namen „Kräfte“. Unter einer Kraft versteht man demnach alles dasjenige, was eine Bewegung hervorzurufen oder auch eine bereits bestehende Bewegung (in Bezug auf Richtung und Geschwindigkeit) abzuändern im Stande ist.

Wenn wir z. B. beobachten, dass die Geschwindigkeit eines lotrecht empor geworfenen Körpers beständig abnimmt, bis sie gleich

Null geworden ist — und dass dann der Körper in beschleunigter Bewegung zur Erde zurückkehrt, so muss notwendiger Weise eine Ursache angenommen werden, welche diese Geschwindigkeitsänderungen bewirkt; man nennt dieselbe bezeichnend Anziehungskraft der Erde oder auch Schwerkraft.

Wird ferner ein Körper auf einer horizontalen Ebene mit einer bestimmten Geschwindigkeit fortgestossen, so ist zwar die Schwerkraft aufgehoben und kann demgemäss eine Bewegungsänderung unmittelbar nicht hervorrufen; allein sie bewirkt doch einen Druck zwischen dem Körper und seiner Unterlage und hierdurch entsteht ein Bewegungswiderstand, welchen wir später unter dem Namen Reibung kennen lernen werden und welcher die nächste Ursache ist, dass auch die Bewegung eines auf horizontaler Bahn fortgeschleuderten Körpers eine verzögerte ist und folglich nach einer gewissen Zeit ganz aufhört.

Aber selbst wenn auch die Reibung vollständig beseitigt werden könnte, so bliebe doch immer noch der Luftwiderstand, welcher dem Körper in jeder Sekunde ebenfalls einen, wenn auch kleinen Teil seiner Geschwindigkeit entziehen und ihn demnach schliesslich zum Stillstand bringen würde.

Das führt zu der weiteren Frage, ob es nicht doch Körper giebt, welche weder von der Reibung, noch vom Luftwiderstande hemmend beeinflusst werden, und da dies mit voller Gewissheit von allen Himmelskörpern, also beispielsweise auch von unserer eigenen Erde behauptet werden kann, so kommt es darauf an, wie es sich mit deren Bewegungen verhält. Die Erfahrung lehrt nun, dass sich zwar alle Himmelskörper seit erdenklichen Zeiten bewegen und auch keine bleibende Geschwindigkeitseinbusse erlitten haben, dass dagegen eine ununterbrochene Änderung ihrer Richtung erfolgt, indem die Bahnen ihrer Mittelpunkte sämtlich krumme Linien sind.

Als Ursache für den letzteren Umstand muss auch hier eine Kraft gelten, nämlich diejenige Kraft, mit welcher irgend zwei Körper bestrebt sind, sich einander zu nähern und welcher man den Namen Gravitation beigelegt hat.

Es wird jetzt auch klar sein, warum niemals eine unmittelbare und alleinige Wirkung des Beharrungsvermögens beobachtet werden kann — weil es nämlich unmöglich ist, einen Körper der Einwirkung jeglicher Kraft zu entziehen.

§ 18.

**Einteilung der Kräfte.**

Die Ausführungen des vorigen Paragraphen lassen erkennen, dass die Kräfte zerfallen in solche, welche selbständig Bewegung zu erzeugen im Stande sind, wie z. B. die Schwerkraft und in solche, welche keine Bewegung hervorbringen, sondern nur bereits bestehende Bewegung verhindern oder abändern können, wie z. B. die Reibung und der Luftwiderstand.

Bewegende Kräfte sind ausser der Schwerkraft:

1. Das Beharrungsvermögen bewegter Körper, nach welchem beispielsweise ein abgestossener Billardball einen anderen ruhenden in Bewegung bringt.

2. Die Wärmekraft, vermöge welcher die Körper bei Temperaturwechsel sich ausdehnen oder zusammenziehen.

3. Der Magnetismus oder die Kraft, mit welcher sich zwei Magnete anziehen oder abstossen.

4. Die Elastizität oder Federkraft, welche hervortritt, wenn die Form oder das Volumen eines festen Körpers geändert wird.

5. Die Muskelkraft der Menschen und Tiere etc.

Von den Kräften der zweiten Art, welche auch hemmende Kräfte oder Widerstände heissen, nennen wir:

1. Die Trägheit ruhender Körper, nach welcher die Bewegung eines Körpers verzögert, resp. aufgehoben wird, wenn derselbe auf einen ruhenden Körper trifft.

2. Die Kohäsionskraft, das ist die Ursache, welche die Teilchen eines festen Körpers zusammenhält, so dass letztere einer Trennung widerstreben.

3. Die Adhäsionskraft, mit welcher zwei verschiedene, in innige Berührung gebrachte Körper aneinander haften (z. B. zwei eben geschliffene und glatt polierte Glasplatten).

Übrigens kann jede bewegende Kraft offenbar auch als Widerstand auftreten, nämlich dann, wenn sie der Bewegung eines Körpers entgegenwirkt.

Früher teilte man die Kräfte ausserdem noch ein in stetig oder dauernd und in momentan (augenblicklich) wirkende

Kräfte; allein genaue Untersuchungen neuerer Zeit haben ergeben, dass es Kräfte der letzteren Art überhaupt gar nicht giebt. Jede Kraft braucht eine bestimmte, wenn auch oft sehr kurze Zeit, um einem Körper eine gewisse Geschwindigkeit zu erteilen; jede Bewegung von der Ruhe aus ist also anfangs immer beschleunigt.

### § 19.

#### Bestimmungsstücke einer Kraft.

Mit dem Begriffe „Kraft“ sind folgende drei charakteristische Merkmale verbunden:

1. Der Angriffspunkt, d. i. die Stelle eines Körpers, auf welche die Kraft unmittelbar wirkt.

2. Die Richtung, d. i. die gerade Linie, in welcher die Kraft den Angriffspunkt wirklich fortbewegt oder doch fortzubewegen sucht oder endlich auch, dessen Bewegung zu hindern bestrebt ist.

3. Die Grösse oder die Intensität der Kraft, d. i. das Mass für ihre Wirkungsfähigkeit. Wie bereits bemerkt, besteht die sichtbare Wirkung jeder Kraft in Bewegung, resp. Bewegungsänderung. Ist aber das Eintreten der Bewegung eines Körpers dadurch verhindert, dass der Angriffspunkt der Kraft durch einen zweiten unbeweglichen Körper gestützt wird, so äussert sich die Wirkung der ersteren durch einen Druck auf den letzteren, und man kann daher die Kräfte messen, indem man die Drücke vergleicht, welche sie gegen feststehende Körper ausüben.

Weil man aber insbesondere den Druck, welchen ein bestimmter irdischer Körper vermöge der Schwerkraft auf seine Unterlage ausübt, das Gewicht dieses Körpers nennt, so können auch alle Drücke und demnach auch alle Kräfte nach Gewichten gemessen werden, es handelt sich nur noch darum, eine passende Gewichtseinheit festzustellen. Damit die Gewichts- und die Raummasse in genauem Zusammenhange stehen, hat man als solche das Gewicht eines Liters destillierten Wassers bei  $4^{\circ}$  Celsius gewählt, demselben den Namen Kilogramm und die Abkürzungsbezeichnung *kg* beigelegt.

Wir werden also im folgenden alle Kräfte durch das Kilogramm messen, ganz gleichgiltig, welcher Art diese Kräfte seien, ob sie sich



nun durch den Druck von Wasser oder Dampf, durch die Muskelthätigkeit von Menschen oder Tieren, durch die Trägheit bewegter oder ruhender Körper, ob sie sich in der Reibung, im Luftwiderstande etc. äussern.

## § 20.

### Das Grundgesetz der Wechselwirkung.

Das zweite Axiom der Mechanik besagt, dass die Kräfte nie einzeln, sondern immer nur paarweise in der Natur auftreten und zwar derartig, dass die beiden Kräfte einander gleich sind und in derselben geraden Linie nach entgegengesetzten Seiten wirken.

Der Druck, welchen ein Körper vermöge seines Gewichtes auf eine horizontale Ebene ausübt, ruft einen genau eben so grossen vertikalen Gegendruck hervor; ein an einem Faden hängender Körper erzeugt in ersterem eine Spannung, welche dem Gewichte des Körpers gleich, aber entgegengesetzt gerichtet ist; der Mond zieht die Erde mit derselben Stärke an, wie diese jenen; das Abstossen zweier Magnete ist ein vollkommen gegenseitiges; wenn ein Mensch einen Gegenstand senkrecht aufheben will, so sucht letzterer den ersteren in gleichem Masse lotrecht abwärts zu ziehen u. s. w. u. s. w.

Man könnte dieses Gesetz etwas kürzer auch so ausdrücken: Jede Kraftwirkung erzeugt eine gleich grosse Gegenwirkung, welche der ersteren diametral entgegengesetzt ist.

## § 21.

### Mechanische Arbeit.

Jede Kraft, welche einen Körper bewegt, hat Widerstände zu überwinden: beim Heben von Lasten auf gewisse Höhen das Gewicht der ersteren; während des Transportes von Gegenständen auf horizontaler Bahn mittels irgend welcher Fahrzeuge die Reibung; behufs Zersägens von Holz die Kohäsion; bei dem Werfen eines Steines ausser seinem Gewichte den Luftwiderstand und die Trägheit, letztere wenigstens so lange, als die Hand mit dem Steine in Berührung bleibt u. s. f.

Diese Überwindung eines Widerstandes auf bestimmter Wegstrecke, welche Leistung der Kraft oder auch mechanische Arbeit heisst, ist bei immer gleichem Widerstande einerseits dem letzteren selbst, andererseits aber auch dem vom Angriffspunkte der Kraft durchlaufenen Weg, mithin dem Produkte aus Widerstand und Weg proportional; denn es bedarf beispielsweise einer dreifachen Anstrengung: sowohl wenn die dreifache Last auf dieselbe Höhe — als auch, wenn die einfache Last auf eine dreimal so grosse Höhe gehoben werden soll, und es entspricht einer achtfachen Leistung, ob man nun eine achtfache Last auf die einfache, oder eine vierfache Last auf die doppelte oder aber die einfache Last auf die achtfache Höhe hebt etc.

Bedient man sich nun, wie bisher, des Meters als Weg- und des Kilogramms als Kraft-, resp. Widerstandseinheit, so ergibt sich ganz naturgemäss als Arbeitseinheit diejenige mechanische Arbeit, welche bei Überwindung des Widerstandes von einem Kilogramm auf der Wegstrecke von einem Meter verrichtet wird; diese Einheit der mechanischen Arbeit nennt man Kilogramm-meter oder auch Meterkilogramm und bezeichnet sie zur Abkürzung mit *mkg*. Wenn z. B. 13 Kilogramm Widerstand 6 Meter weit überwunden wird, so ist die geleistete Arbeit 13 mal 6 gleich 78 Meterkilogramme, folglich 78 mal so gross, als wenn der Widerstand ein Kilogramm und der Weg ein Meter gewesen wäre, oder, was auf dasselbe hinauskommt, als wenn ein Kilogrammstück einen Meter hoch gehoben würde.

Verallgemeinern wir das Gesagte, so ergibt sich die mechanische Arbeit  $A$ , welche zur Überwindung eines Widerstandes von  $W$  Kilogrammen längs einer Wegstrecke von  $s$  Metern nötig ist, durch die Formel

$$A = W \cdot s \quad (25.)$$

und zwar in Meterkilogrammen.

Unter der Bedingung, dass die bewegende Kraft  $P$  in der Richtung des Widerstandes (aber selbstredend entgegengesetzt) wirkt, ist übrigens nach dem im vorigen Paragraphen ausgesprochenen Grundgesetz der Wechselwirkung die erstere dem letzteren gleich, also

$$P = W,$$

und man kann daher in diesem Falle für den zu überwindenden Widerstand immer auch die arbeitende Kraft, folglich

$$A = P \cdot s \quad (26.)$$

setzen; wie sich aber die Sache gestaltet, wenn die Krafrichtung mit der Wirkungslinie des Widerstandes einen Winkel einschliesst, soll an späterer Stelle gezeigt werden.

Hier mache man sich aber noch den Unterschied zwischen den beiden Begriffen „Kraft“ und „mechanische Arbeit“, welche von Anfängern nicht selten verwechselt werden, vollkommen klar: Kraft ist die Ursache, mechanische Arbeit die, jedoch nicht notwendige Wirkung; die Kraft macht nur einen Faktor der mechanischen Arbeit aus, der andere Faktor ist der vom Angriffspunkte der Kraft durchlaufene Weg. Eine Kraft kann also nur dann Arbeit erzeugen, wenn sie den von ihr beeinflussten Körper wirklich zu bewegen im Stande ist, während sie sich im anderen Falle lediglich als Druck oder Zug äussert.

## § 22.

### Beispiele.

64. Welcher mechanischen Arbeit bedarf es, um einen 85 *kg* schweren Rammklotz 1,8 *m* hoch zu heben?

Antwort: 153 *mkg*.

65. Wie viel mechanische Arbeit ist nötig, um einen Hammer von 45 *kg* Gewicht 60 *cm* hoch zu heben?

Antwort: 27 *mkg*.

66. Ein Arbeiter trägt auf einer Laufbrücke 28 Ziegelsteine, von welchen jeder 3,5 *kg* wiegt, circa 6 Meter hoch. Wie gross ist die hierbei geleistete Arbeit, wenn das eigene Gewicht des Mannes 75 *kg* beträgt?

Antwort: 1038 *mkg*.

67. Welche mechanische Arbeit wäre aber bloss erforderlich, wenn die Last direkt an einem Seile empor gezogen würde?

Antwort: 588 *mkg*.

68. Zwei Arbeiter schaffen Getreidesäcke, von welchen jeder 57 *kg* wiegt, in die oberen Etagen eines Magazins und zwar trägt der eine 85 Säcke 9 Meter und der andere 102 Säcke 6 Meter hoch. Welches sind die von beiden verrichteten nützlichen mecha-

nischen Arbeiten (d. h. ohne Berücksichtigung der Eigengewichte) und wie verhalten sie sich?

Resultate:  $A_1 = 43605 \text{ mkg}$ ,  $A_2 = 34884 \text{ mkg}$ ,  $A_1 : A_2 = 5 : 4$ .

69. Man bestimme die Arbeit, welche ein Spaziergänger während eines 7500 Meter langen und horizontal verlaufenden Weges verrichtet unter der Annahme, dass sich sein 65 *kg* wiegender Körper bei jedem 75 *cm* langen Schritte um 24 Millimeter hebt.

Resultat: 15600 *mkg*.

70. Welche Arbeit leistet ein Infanterist, welcher selbst 72 *kg* und dessen gesamtes Gepäck 23 *kg* wiegt, per Minute, wenn er in der letzteren 110 Schritte macht und seinen Körper bei jedem Schritte um 3 *cm* hebt?

Antwort: 313,5 *mkg*.

71. Wie viel Arbeit würde aber dieser Mann in der Minute produzieren müssen, wenn er bei Besteigung einer Anhöhe seinen Körper per Schritt um 16 *cm* heben müsste, auch wenn er pro Minute nur 100 Schritte macht?

Antwort: 1520 *mkg*.

72. Der Gesamtwiderstand eines Fuhrwerks auf horizontaler guter Chaussee kann zu einem dreissigstel der Belastung angenommen werden. Welche mechanische Arbeit ist erforderlich, um einen 4500 *kg* schweren Frachtwagen einen Meter weiter zu bewegen?

Antwort: 150 *mkg*.

## § 23.

### Krafteffekt. Pferdestärke.

In den Formeln 25 und 26 für die mechanische Arbeit  $A$  treten lediglich die Kraft  $P$ , resp. der Widerstand  $W$ , und der Weg  $s$  auf, dagegen kommt die Zeit, während welcher die Arbeit erfolgt, gar nicht in Betracht. Es folgt hieraus, dass die mechanische Arbeit als solche von der Zeit ganz unabhängig ist, und in der That bleibt ja eine Arbeit offenbar dieselbe, ob sie nun in längerer oder kürzerer Zeit ausgeführt wird.

Wenn es sich aber, wie im gewerblichen Leben so häufig, darum handelt, die Leistungen von Kräften unter einander zu ver-

gleichem, so muss man die mechanischen Arbeiten bestimmen, welche jene Kräfte innerhalb derselben Zeit verrichten. Gewöhnlich nimmt man als Zeitraum die Sekunde an und nennt diejenige Arbeit, welche eine Kraft per Sekunde hervorbringt, den Effekt der Kraft.

Wirft z. B. ein Arbeiter stündlich 5 Kubikmeter Erde vom spezifischen Gewichte 1,8 auf eine durchschnittliche Höhe von 1,6 Metern, so ist die zu bewältigende Last  $5 \cdot 1800 \text{ kg}$ , die Hubhöhe  $1,6 \text{ m}$ , mithin die mechanische Arbeit pro Stunde  $5 \cdot 1800 \cdot 1,6 \text{ mkg}$  und folglich die Arbeit pro Sekunde

$$\frac{5 \cdot 1800 \cdot 1,6}{3600} = 4 \text{ mkg};$$

der Mann wendet demnach einen Krafteffekt von 4 Meterkilogrammen auf.

Bei Ausnützung der Naturkräfte durch Maschinen ergeben sich jedoch häufig so bedeutende Effekte, dass bei Zugrundelegung des Meterkilogramms Zahlen zu Stande kommen, welche wegen ihrer Höhe unbequem sind. Dies ist der Grund, warum man eine grössere Arbeitseinheit eingeführt hat, nämlich die sogenannte Maschinen-Pferdekraft, worunter der Effekt oder die sekundliche mechanische Arbeit von 75 Meterkilogrammen zu verstehen ist. Schon aus dieser Erklärung geht hervor, dass der Namen „Pferdekraft“ wenig sachgemäss erscheint, da ja, wie schon erwähnt, „Kraft“ und „Arbeit“ zwei wesentlich verschiedene Dinge sind. Weit besser bezeichnend würden allerdings die Worte „Pferdeleistung“ oder „Pferdearbeit“ sein; allein da diese Benennungen von Niemanden gebraucht werden, so entscheiden wir uns für den öfter vorkommenden und weniger verfänglichen Namen „Pferdestärke“ und bezeichnen letztere zur Abkürzung mit *P.S.* Nur nebenbei sei hier noch erwähnt, dass ein mittelstarkes animalisches Pferd bei angestrengter Thätigkeit und täglich achtstündiger Arbeitszeit einen Effekt von etwa 50 Meterkilogrammen auszuüben im Stande ist, so dass die durchschnittliche Leistung eines gewöhnlichen Pferdes nur etwa  $\frac{2}{3}$  einer Maschinen-Pferdestärke beträgt, ganz abgesehen davon, dass ersteres eben nur einen Teil des Tages zu arbeiten vermag.

Nach obiger Definition ergibt sich nun die Anzahl der Pferdestärken, mit welchen irgend eine Kraft wirkt, einfach dadurch, dass

der in Meterkilogrammen ausgedrückte Effekt der letzteren durch 75 dividiert wird; diese Pferdestärkenzahl wollen wir immer mit  $N$  bezeichnen.

Sollen z. B. mittels eines Pumpwerks in der Minute 2700 Liter Wasser 15 Meter hoch gehoben werden, so erfordert dies einen Krafteffekt

$$E = \frac{2700 \cdot 15}{60} = 675 \text{ mkg}$$

und mithin ist die Anzahl der nötigen Pferdestärken

$$N = \frac{675}{75} = 9.$$

Hierbei, sowie auch in den Beispielen des nächsten Paragraphen sind jedoch die Reibung und sonstigen Bewegungshindernisse vorläufig ausser Acht gelassen.

### § 24.

#### Beispiele.

73. Welchen Effekt liefert der in Beispiel 70 angeführte Soldat?

Antwort: 5,225 mkg.

74. Desgleichen der Infanterist im 71. Beispiel?

Antwort: 25,333 mkg.

75. Ebenso der Spaziergänger in Beispiel Nr. 69 unter der Bedingung, dass er zu seinem Spaziergange 2 Stunden und 10 Minuten gebraucht?

Antwort: 2 mkg.

76. Wie gross ist der Effekt eines Mannes, der auf den Griff einer Kurbel von  $l$  Meter Länge einen fortwährenden Druck von  $P$  Kilogrammen ausübt und die Kurbel in der Minute  $n$  mal umdreht?

Auflösung: Der vom Angriffspunkt der Kraft in einer Sekunde durchlaufene Weg ergibt sich durch Einsetzung von  $d = 2l$  in

Formel 4, nämlich  $c = \frac{2ln}{19,1}$  Meter und mithin ist

$$E = \frac{lnP}{9,55} \text{ mkg,}$$

der Effekt des Arbeiters.

77. Man löse die vorige Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte  $l = 40 \text{ cm}$ ,  $n = 18$  und  $P = 7 \text{ kg}$ .

Resultat: Cirka 5,28 *mkg*.

78. Der Klotz einer Ramme hat 450 *kg* und soll in der Minute 16mal auf eine Höhe von 1,4 Meter gehoben werden. Wie viel Arbeiter sind hierzu erforderlich, wenn man von jedem einen Effekt von 7 Meterkilogrammen verlangen kann?

Antwort: 24 Mann.

79. Wie viel Pferdestärken müsste zu diesem Zwecke eine Dampfmaschine entwickeln?

Antwort: 2,24 *PS*.

80. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe eines Pochwerkes, welches *m* Stempel besitzt, notwendig, wenn jeder Stempel *k* Kilogramm wiegt und in jeder Minute *n*mal auf *h* Meter Höhe gehoben wird?

Auflösung: Es ist das Gesamtgewicht der Stempel *m**k* Kilogramm, die Hubhöhe *h* Meter, folglich die mechanische Arbeit bei jedem Hub *m h k* Meterkilogramme, die Arbeit pro Minute *m n h k*, pro Sekunde  $\frac{m n h k}{60}$  Meterkilogramme oder in Pferdestärken

$$N = \frac{m n h k}{60 \cdot 75}.$$

81. Wie gestaltet sich das Resultat des letzten Beispiels für die speziellen Angaben *m* = 24, *k* = 90 *kg*, *n* = 7 und *h* = 50 *cm*?

Antwort: *N* = 1,68.

82. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe einer Dampfspritze, welche per Sekunde 36 Liter Wasser 25 Meter hoch werfen soll, erforderlich, wenn die Reibungsverluste unberücksichtigt gelassen werden?

Antwort: *N* = 12.

83. Welche mechanische Arbeit in Pferdekräften muss eine Dampfmaschine liefern, um per Stunde 120 Kubikmeter Wasser auf eine Höhe von 15 Metern zu befördern?

Antwort: *N* = 6,666...

84. An einem kleinen Wasserfalle stürzen per Minute 15 Kubikmeter Wasser 9 Meter hoch herab. Wie viel Pferdestärken gehen hier verloren?

Antwort: 30 *PS*.

85. Ein Fluss liefert an einer gewissen Stelle selbst in der trockensten Zeit noch ein Wasserquantum von 2 Kubikmeter pro

Sekunde. Auf wie viel Pferdestärken kann demnach bei einem Gefälle von 3 Metern unter allen Umständen gerechnet werden?

Antwort: Auf 80 *P.S.*

86. Welche mechanische Arbeit in Pferdestärken muss eine Lokomotive bei 6 Meter Geschwindigkeit entwickeln, wenn die Last des ganzen Zuges 300000 Kilogramm beträgt, und die Gesamtwiderstände gegen die Bewegung zu  $\frac{1}{200}$  der Belastung angenommen werden?

Lösung: Es ist der zu überwindende Totalwiderstand

$$= \frac{300000}{200} = 1500 \text{ kg,}$$

mithin die Arbeit in der Sekunde

$$= 1500 \cdot 6 = 9000 \text{ mkg} = \frac{9000}{75} = 120 \text{ P.S.}$$

## § 25.

### Mechanische Arbeit durch Maschinen. Wirkungsgrad.

Maschinen sind im allgemeinen Vorrichtungen zur Übertragung der Wirkung von Kräften von einem Körper auf den andern, und man bedient sich derselben, um gegebene Kräfte zur Verrichtung gewisser Arbeiten zu verwenden, wozu sich diese Kräfte unmittelbar nicht eignen würden. So können zum Beispiel die Kräfte des Windes, des Wasser oder des Dampfes nur unter Vermittelung von Mahl-, resp. Schneidemühlen dazu benützt werden, Getreide in Mehl zu verwandeln, resp. Baumstämme in Bretter zu zersägen etc. etc.

Die mechanische Arbeit, welche eine Kraft in einer bestimmten Zeit zu leisten fähig ist, kann jedoch durch eine Maschine nie vollständig nutzbar gemacht werden, weil häufig direkte Kraft- und Wegverluste stattfinden, immer aber Bewegungshindernisse auftreten, welche einen gewissen Teil jener mechanischen Arbeit absorbieren.

Sinkt z. B. an irgend einer Stelle eines Baches in jeder Sekunde  $\frac{1}{4}$  Kubikmeter Wasser 6 Meter tief herab, so ist in dieser fließenden Wassermenge allerdings ein Krafteffekt von

$$250 \cdot 6 = 1500 \text{ mkg} = \frac{1500}{75} = 20 \text{ P.S.}$$



enthalten, allein derselbe könnte vermitteltst eines Wasserrades nur teilweise auf die Welle des letzteren übertragen werden. Zunächst entsteht nämlich ein direkter Kraftverlust dadurch, dass ein gewisses Wasserquantum zwischen Rad und Gerinne sich bewegt, ohne auf die Schaufeln des Rades zu drücken, folglich auch ohne zu arbeiten; ferner hat ein Wegverlust seine Ursache in dem Umstande, dass das Gefälle behufs Vermeidung von Stauwasser nicht ganz ausgenützt werden darf, und endlich haben wir Bewegungshindernisse in der Zapfenreibung, in der Adhäsion, vermöge welcher durch das Rad Wasserpartikelchen emporgeschleudert werden, dann in Stößen u. s. w. zu suchen. Aus alledem geht hervor, dass die sich drehende Welle wesentlich weniger als 20 Pferdekräfte zu produzieren im Stande sein wird.

Man nennt nun die einer bewegenden Kraft innewohnende mechanische Arbeit die theoretische oder Totalarbeit, denjenigen Teil davon, welcher nach obigen in Kraft-, resp. Wegverlusten bestehen kann und durch Bewegungshindernisse konsumiert wird, die Nebenarbeit und endlich die Differenz beider, also diejenige Arbeit, welche von der Maschine wirklich übertragen wird, die effektive oder Nutzarbeit. Es besteht demnach die Gleichung

$$\text{Totalarbeit} = \text{Nebenarbeit} + \text{Nutzarbeit},$$

und es erhellt hieraus einerseits, dass die Nutzarbeit immer kleiner ist als die Totalarbeit und andererseits, dass aus zwei gegebenen die dritte dieser mechanischen durch einfache Addition oder Subtraktion berechnet werden kann. Es versteht sich wohl von selbst, dass die obige Gleichung nur gilt, wenn die Total-, die Neben- und die Nutzarbeit für dieselbe Zeit verstanden sind; nur sei noch bemerkt, dass speziell in Beziehung auf die Sekunde die erste und die letzte auch noch die Namen absoluter und relativer Effekt führen.

Weiterhin ist klar, dass eine Maschine um so leistungsfähiger und infolge dessen um so wertvoller ist, in einem je grösseren Verhältnisse die Nutzarbeit zur Totalarbeit steht, und man hat daher dieses Verhältnis zur Beurteilung der Güte einer Maschine unter dem Namen Wirkungsgrad in die Technik eingeführt. Aus der Definitionsgleichung

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Totalarbeit}}$$

folgt, zum Teil in Verbindung mit obigem, sofort dreierlei: 1. der Wirkungsgrad ist stets ein echter Bruch, also kleiner als eins; 2. eine Maschine ist um so vollkommener, je näher ihr Wirkungsgrad an der Einheit liegt und 3. kennt man die Totalarbeit und den Wirkungsgrad, so ergibt sich die

$$\text{Nutzarbeit} = \text{Wirkungsgrad} \times \text{Totalarbeit.}$$

So liefert beispielsweise eine Maschine, deren Wirkungsgrad  $\frac{3}{5}$  ist, bei einer Totalarbeit von 25 Pferdestärken eine effektive Arbeit von  $\frac{3}{5} \cdot 25 = 15 \text{ P.S.}$

### § 26.

#### Bestimmung der Effekte bei Wasserrädern, Turbinen und Dampfmaschinen.

Der absolute Effekt eines fließenden Gewässers, welches an einer bestimmten Stelle ein Wasserrad oder eine Turbine treiben soll, lässt sich leicht aus der per Sekunde zufließenden Wassermenge, dem sogenannten Aufschlagwasser und dem Höhenunterschiede zwischen den beiden Wasserspiegeln vor und nach dem Rade, welcher das Gefälle genannt wird, berechnen. Beträgt nämlich das erstere  $Q$  Liter und das letztere  $h$  Meter, so ist die sekundliche Totalarbeit des Wassers  $Qh$  Meterkilogramme oder in Pferdestärken

$$N = \frac{Qh}{75} \quad (27.)$$

Was die Dampfmaschinen anlangt, so beschränken wir uns hier auf solche, welche ohne Expansion und doppelt wirken, bei welchen der Dampf mit immer gleicher Stärke und abwechselnd gegen beide Seiten des Kolbens drückt; auch in diesem Falle bestimmen wir naturgemäss zunächst die Intensität der bewegenden Kraft in Kilogrammen, hierauf den vom Angriffspunkte der letzteren per Sekunde durchlaufenen Weg in Metern und erhalten sodann den Effekt der Kraft durch Multiplikation beider Resultate und zwar in Meterkilogrammen.

Hat der Dampf im Cylinder einen Überdruck von  $p$  Atmosphären, d. h. drückt er mit circa  $p$  Kilogrammen auf jeden

Quadratcentimeter der Kolbenfläche, so ist, wenn der Kolbendurchmesser  $d$  Centimeter beträgt, der arbeitende Gesamtdruck auf den Kolben

$$P = \frac{d^2 \pi p}{4} \text{ Kilogramme.}$$

Bezeichnet ferner  $l$  die Länge des Kolbenhubes in Metern und  $n$  die Tourenzahl des Schwungrades, so ist, weil der Kolben bei jeder Umdrehung des letzteren zwei Spiele macht, der Kolbenweg pro Minute  $2ln$  und folglich pro Sekunde

$$s = \frac{ln}{30} \text{ Meter.}$$

Hieraus ergibt sich weiter der absolute Effekt des Dampfes

$$E = P s = \frac{d^2 \pi p l n}{120} \text{ Meterkilogramme}$$

oder in Pferdestärken

$$N = \frac{E}{75} = \frac{d^2 l n p \pi}{9000} \quad (28.)$$

So erhalten wir z. B. die Totalarbeit einer Dampfmaschine ohne Expansion, deren Kolben 40 *cm* Durchmesser, sowie 75 *cm* Hub hat, deren Schwungrad 36 Umdrehungen per Minute macht und welche mit 4 Atmosphären Überdruck arbeitet, einfach dadurch, dass wir in letzter Formel

$$d = 40, l = 0,75, n = 36 \text{ und } p = 4$$

setzen, nämlich

$$N = 60,3$$

Pferdestärken in der Sekunde.

Hat man aber auf diese Weise die theoretische Arbeit berechnet, und es ist ausserdem der Wirkungsgrad einer Maschine bekannt, so erhält man, wie schon am Schlusse des vorigen Paragraphen erörtert, die Nutzarbeit der letzteren durch Multiplikation der beiden ersten. Wäre z. B. der Wirkungsgrad der Dampfmaschine im vorigen Beispiel 0,67, so würde sich der Nutzeffekt gleich

$$0,67 \cdot 60,3 = 40,2 \text{ PS}$$

ergeben.

Mittels zahlreicher Versuche und genauer Messungen, welche an späterer Stelle beschrieben und erklärt werden sollen, hat man nun den Wirkungsgrad für die verschiedenartigen Kraftmaschinen festge-

stellt und Resultate erlangt, welche durch die Theorie vollkommen bestätigt wurden.

Unter Voraussetzung guter Konstruktion und Ausführung ist der Wirkungsgrad

1. für unterschlächtige Wasserräder . . . . .	0,3	bis 0,4,
2. „ mittelschlächtige „ . . . . .	0,5	„ 0,6,
3. „ obereschlächtige „ . . . . .	0,6	„ 0,7,
4. „ Turbinen . . . . .	0,65	„ 0,75,
5. „ kleine Dampfmaschinen . . . . .	0,5,	
6. „ mittlere „ . . . . .	0,6,	
7. „ grosse „ . . . . .	0,7.	

Der Konsum an Steinkohlen beträgt bei Dampfmaschinen ohne Expansion pro Pferdestärke und Stunde 2 bis 3 Kilogramm.

Weil die vorstehenden Zahlen nur allgemeine Durchschnittswerte sind, so liegt es auf der Hand, dass ihre Anwendung auf einen besonderen Fall nur die Bedeutung einer schätzungsweisen Bestimmung der Nutzarbeit haben kann.

## § 27.

### Beispiele.

87. Eine Turbine hat 5,5 Meter Gefälle und empfängt 0,6 Kubikmeter Aufschlagwasser. Man bestimme den absoluten Effekt der Wasserkraft.

Resultat:  $N = 44 \text{ P S.}$

88. Wie viel Pferdestärken Nutzarbeit liefert diese Turbine, wenn ihr Wirkungsgrad 0,75 beträgt?

Antwort:  $N' = 33 \text{ P S.}$

89. Den Wirkungsgrad eines unterschlächtigen Wasserrades zu ermitteln, wenn dasselbe bei 15 Decimeter Gefälle und 0,5 Kubikmeter Aufschlagwasser eine nützliche Arbeit von 3,5 Pferden ergibt.

Resultat: 0,35.

90. Welches ist die effektive Arbeit  $N'$  einer hydraulischen Kraftmaschine überhaupt, wenn allgemein das Gefälle  $h$  in Decimetern, die pro Sekunde zufließende Wassermenge  $q$  in Kubikmetern gegeben sind und der Wirkungsgrad mit  $\eta$  bezeichnet wird?

Antwort:  $N' = \frac{4}{3} \eta q h \text{ P S.}$

91. Eine Dampfmaschine arbeitet mit voller Füllung und 3,5 Atmosphären Überdruck, der Kolben hat 25 *cm* Durchmesser und 50 *cm* Hub. Wie hoch berechnet sich der Wirkungsgrad dieser Maschine, wenn bei 45 Umdrehungen des Schwungrades in der Minute eine Nutzarbeit von 11,5 Pferdestärken durch direkte Messung sich herausstellt?

Auflösung: Nach Formel 28 ergibt sich der absolute Effekt in runder Zahl  $N = 18 \text{ PS}$ ; da ausserdem der Nutzeffekt  $N' = 11,5 \text{ PS}$  gegeben ist, so findet sich der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{11,5}{18} = \frac{23}{36} = 0,64.$$

92. Der Kolben einer einfach wirkenden Pumpe habe 2 *dm* Durchmesser und mache in einer Minute 27 Hübe von 125 *cm* Länge. Wie gross ist die zum Betriebe erforderliche mechanische Arbeit, wenn das Wasser auf eine Höhe von 14 Metern gehoben werden soll und durch Bewegungshindernisse  $\frac{1}{4}$  der Totalarbeit verloren geht?

Auflösung: Es ist das Wasserquantum

$$\text{pro Hub} = 3,1416 \cdot 12,5 = 39,27 \text{ Liter,}$$

$$\text{„ Minute} = 39,27 \cdot 27 = 1060,29 \text{ „}$$

$$\text{„ Sekunde} = 17,6715 \text{ Liter,}$$

welches zugleich 17,6715 *kg* wiegt; mithin ist die zum Heben des Wassers nötige Arbeit per Sekunde

$$17,6715 \cdot 14 = 147,401 \text{ mkg.}$$

Hierzu kommt noch die Nebenarbeit, welche  $\frac{1}{4}$  der gesamten, demnach  $\frac{1}{3}$  der vorstehenden Arbeit ausmacht. Die zum Betriebe der Pumpe erforderliche Gesamtarbeit ist daher

$$147,401 \cdot \frac{4}{3} = 196,535 \text{ mkg oder}$$

$$2,62 \text{ PS.}$$

93. Eine wie viel pferdige Dampfmaschine wäre aber für vorstehende Pumpe zu wählen, wenn der Lieferant der ersteren einen Wirkungsgrad von 0,66 garantiert?

Antwort: Eine vierpferdige Dampfmaschine.

94. Für eine Dampfmaschine ist der Kolbendurchmesser 30, der

Kolbenhub 60 *cm* und der Wirkungsgrad  $\frac{7}{11}$ ; wie viel Umdrehungen muss das Schwungrad in der Minute bei 4 Atmosphären machen, um einen Nutzeffekt von 24 Pferdestärken zu erzielen, wenn  $\pi$  zu  $\frac{22}{7}$  angenommen wird?

Antwort: Aus der Beziehung 28 ergibt sich nach Einsetzung der gegebenen Zahlenwerte  $n = 50$ .

95. Wie viel Atmosphären Überdruck müssten aber auf den Dampfkolben wirken, wenn der Betrieb einer Fabrik eine effektive Arbeit von 18 Pferdestärken und für das Schwungrad die Tourenzahl 60 verlangt?

Antwort:  $p = 2,5$ .

## § 28.

### Das Grundgesetz der Beschleunigung.

Nach dem dritten Grundgesetze der Mechanik erteilen irgend zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , welche nacheinander auf ein und denselben Körper wirken, letzterem diejenigen beiden Beschleunigungen  $p_1$  und  $p_2$ , welche sich genau so verhalten, wie jene Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  selbst; es besteht also die Proportion

$$P_1 : P_2 = p_1 : p_2 \quad (29.)$$

Um sich eine klare Vorstellung vom Inhalte dieses Erfahrungssatzes anzueignen, denke man sich auf einer vollkommen wagerechten Ebene einen Körper, etwa in Gestalt eines kleinen Wagens; an letzterem sei ein Faden befestigt, welcher in ebenfalls horizontaler Richtung über eine Rolle läuft und an dessen Ende eine Wagschale hängt. Jetzt wird offenbar eine Bewegung des Wagens erfolgen oder nicht, jenachdem die bewegende Kraft, nämlich das Gewicht der Schale, grösser oder kleiner ist als die Bewegungswiderstände, das sind in diesem Falle die Reibung und der Luftwiderstand.

Nun könnte man auf der einen Seite durch Mehrbelastung des Wagens die Reibung, auf der anderen Seite durch Auflegen von Gewichten auf die Wagschale die bewegende Kraft beliebig vergrössern und auf diese Weise einen Zustand herausprobieren, in welchem die bewegende Kraft den Bewegungswiderständen genau

das Gleichgewicht hält. Von diesem Momente an verhält sich unser Wagen gerade so, als wenn gar keine Kräfte auf ihn wirkten, z. B. würde ihn ein Anstoss nach dem Gesetze der Trägheit in eine gleichförmige Bewegung versetzen, und der ganze Apparat ist daher nunmehr für unseren Hauptzweck geeignet.

Bringen wir nämlich auf die Wagschale irgend ein Gewicht  $P_1$  und dann an dessen Stelle ein zweites beliebiges Gewicht  $P_2$ , so wird in beiden Fällen eine gleichförmig beschleunigte Bewegung des Wagens erfolgen, und die Geschwindigkeitszunahmen  $p_1$  und  $p_2$  werden sich genau so verhalten wie jene Gewichte  $P_1$  und  $P_2$ , welche sie verursacht hatten.

Bei einem wirklich ausgeführten Versuche würden statt der Beschleunigungen  $p_1$  und  $p_2$  zweckmässiger die Wege  $s_1$  und  $s_2$  zu messen sein, welche der Wagen beidemale vom Ruhezustande aus und zwar in derselben Zeit  $t$  zurücklegt; denn es gelten die Beziehungen

$$s_1 = \frac{P_1}{2} t^2 \quad \text{und} \quad s_2 = \frac{P_2}{2} t^2,$$

woraus folgt

$$s_1 : s_2 = P_1 : P_2.$$

Sind also die durchlaufenen Wege  $s_1$  und  $s_2$  den aufgelegten Gewichten  $P_1$  und  $P_2$  proportional, so ist die Richtigkeit des Grundgesetzes experimentell bestätigt.

Haben wir auf diese Weise ein volles Verständnis für das Axiom der Beschleunigung gewonnen, so erhellt auch leicht die Richtigkeit der Proportion

$$P : G = p : g, \tag{30.}$$

worin  $P$  eine Kraft bedeuten soll, welche für sich allein einem Körper vom Gewichte  $G$  eine Beschleunigung  $p$  erteilt; denn da, wie schon früher erwähnt, das Gewicht eines jeden Körpers für letzteren selbst im luftleeren Raume eine Acceleration  $g = 9,81$  Meter hervorbringt, so ist die Beziehung Nr. 30 einfach als ein spezieller Fall von Nr. 29 aufzufassen.

## § 29.

### Beispiele.

96. Ein bestimmter Körper erfährt jetzt durch eine Kraft von 24 *kg* eine Beschleunigung von 4 Metern; welche Beschleunigung

wird diesem Körper durch eine später auf ihn einwirkende Kraft von 42 *kg* mitgeteilt werden?

Lösung: Bezeichnet man die gesuchte Beschleunigung mit *x*, so besteht nach 29 die Proportion  $24 : 42 = 4 : x$ , woraus folgt  $x = 7$  Meter.

97. Welche Kraft wäre aber nötig, um demselben Körper eine Beschleunigung von 0,5 Metern zu erteilen?

Antwort: 3 Kilogramm.

98. Man soll das Gewicht *G* dieses Körpers ermitteln.

Lösung: Nach Formel 30 folgt  $24 : G = 4 : 9,81$  und hieraus  $G = 9,81 \cdot 6 = 40,86$  Kilogramm.

X 99. Auf die Wagschale des im vorigen Paragraphen besprochenen Apparats wird ein Übergewicht von einem Kilogramm gebracht. Wie gross berechnet sich nun das Gewicht des Wagens nebst etwaiger Ladung, wenn derselbe in 2 Sekunden einen Weg von 6 Metern zurücklegt?

Auflösung: Aus der Formel  $s = \frac{p}{2} t^2$  ergibt sich für  $t = 2$  und  $s = 6$ :

$$p = 3 \text{ Meter,}$$

die Beschleunigung und mit Einsetzung dieses Wertes, sowie  $P = 1$  und  $g = 9,81$  in Nr. 30  $1 : G = 3 : 9,81$  oder

$$G = 3,27 \text{ Kilogramm,}$$

das Gewicht des Wagens mit Belastung.

100. Eine Kugel von 98,1 *kg* Gewicht bewegt sich auf einer sehr glatten horizontalen Ebene in gerader Linie mit einer Beschleunigung von 3 Metern. Welche Kraft ist die Ursache dieser Bewegung, wenn von Reibung und Luftwiderstand abgesehen wird?

Antwort: Eine Kraft von 30 Kilogramm.

101. Das Gesamtgewicht eines Eisenbahnzuges beträgt 300000 *kg*. Wie viel Zugkraft muss die Lokomotive aufwenden, um demselben auf horizontaler Bahn in 2 Minuten eine Geschwindigkeit von 12 Metern zu erteilen, selbst wenn die vorhin genannten Bewegungshindernisse unberücksichtigt gelassen werden?

Auflösung: Zunächst erhält man mit Einführung von  $t = 120$  und  $v = 12$  in die bekannte Relation  $v = pt$  die Beschleunigung des Zuges  $p = 0,1$  Meter. Nun ergibt sich leicht nach Nr. 30  $P = 3058,1$  *kg*, die Zugkraft der Lokomotive.



§ 30.

Entwicklung des Begriffes „Masse“.

Denkt man sich einen bestimmten Körper, welchem die Kraft  $P_1$  die Beschleunigung  $p_1$  und eine andere Kraft  $P_2$  die Beschleunigung  $p_2$  erteilt, so gilt nach Nr. 29 die Beziehung

$$P_1 : P_2 = p_1 : p_2, \text{ w. f. } P_1 : p_1 = P_2 : p_2$$

oder

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2}.$$

Lässt man nun auf denselben Körper die ferneren Kräfte  $P_3, P_4, \dots$  — aber jede für sich allein — wirken und bezeichnet die hervorgebrachten Beschleunigungen mit  $p_3, p_4, \dots$ , so ist weiter

$$\frac{P_1}{p_1} = \frac{P_2}{p_2} = \frac{P_3}{p_3} = \frac{P_4}{p_4} = \dots$$

Wie viele Kräfte also auch nach einander auf einen und denselben Körper wirken mögen — der Quotient zwischen jeder derselben und der von ihr erzielten Beschleunigung bleibt immer derselbe! Es ist dies eine Thatsache, welche auch aus der Proportion 30 hervorgeht, wenn man sie in der Form

$$\frac{P}{p} = \frac{G}{g}$$

schreibt; denn weil für irgend einen Körper das Gewicht  $G$  und die Acceleration  $g$  der Erdschwere genau bestimmbare Grössen sind, so hat auch das Verhältnis  $P : p$  für jeden Körper einen ganz bestimmten Wert. Dies Verhältnis heisst die Masse des Körpers und wird gewöhnlich mit  $M$  bezeichnet; man hat demnach

$$M = \frac{P}{p} = \frac{G}{g} \quad (31.)$$

oder in Worten: Die Masse eines Körpers ist der Quotient aus einer beliebigen auf den Körper wirkenden Kraft und der dem Körper von der Kraft erteilten Beschleunigung, speziell also auch der Quotient zwischen dem Gewichte des Körpers und der Acceleration der Erdschwere; man hüte sich aber vor Verwechselungen der beiden Begriffe „Gewicht“ und „Masse“: Das Gewicht eines Körpers ist der Druck des letzteren auf eine ruhende Unterlage und nimmt zu oder ab, je nachdem er sich dem Sitze der

Erdschwere nähert oder sich davon entfernt, während die Masse eines Körpers an allen nur denkbaren Orten die gleiche ist, weil mit dem Gewichte zugleich die Acceleration und zwar derart sich ändert dass der Quotient aus beiden der nämliche bleibt.

Um ein passendes Mass für die Masse zu erhalten, liegt am nächsten, als Einheit die Masse desjenigen Körpers festzusetzen, welchem von der Krafterinheit (ein Kilogramm) die Einheit der Beschleunigung (ein Meter) erteilt wird; das Gewicht dieses Körpers ergibt sich, wenn man in Nr. 31  $P = 1$ ,  $p = 1$  und  $g = 9,81$  setzt. Weil hierdurch

$$M = 1 \text{ und } G = 9,81 \text{ kg}$$

entsteht, so ist die Masseneinheit die Masse desjenigen Körpers, welcher bei uns 9,81 Kilogramme wiegt.

### § 31.

#### Beispiele.

102. Wie viel Masseneinheiten enthält ein Körper von 775 Kilogramm Gewicht?

Antwort: Zirka 79.

103. Welches ist die Masse eines Körpers, welchem eine Kraft von  $P$  Kilogrammen in  $t$  Sekunden eine Geschwindigkeit von  $v$  Metern erteilt?

Lösung: Aus  $v = pt$  folgt  $p = \frac{v}{t}$  und mit Einsetzung dieses

Wertes in 31:  $M = \frac{Pt}{v}$ .

104. Wie gestaltet sich das Resultat der vorigen Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte  $P = 7,5 \text{ kg}$ ,  $t = 2$  Minuten und  $v = 18 \text{ m}$ ?

Antwort:  $M = 50$ .

105. Man soll das Gewicht dieser Masse bestimmen.

Resultat:  $G = Mg = 490,5 \text{ kg}$ .

106. Wenn die Beschleunigung des freien Falles auf dem Monde  $1,7 \text{ m}$  beträgt, wie viel Kilogramm Druck übt eine an der Mondoberfläche befindliche Masse gegen ihre Unterlage aus, welche bei uns ein Kilogramm wiegen würde?

Lösung: Bezeichnen wir die gesuchte Anziehungskraft des Mondes auf die genannte Masse mit  $x$ , so gilt nach Nr. 30 die Proportion  $x : 1 = 1,7 : 9,81$ , woraus folgt  $x = 0,1733$  Kilogramm.

107. Welche Drücke würde aber dieselbe Masse auf dem Jupiter, resp. auf der Sonne gegen ihre Unterlage ausüben, wenn die Beschleunigungen des freien Falles auf diesen Himmelskörpern 26,3, resp. 270 Meter sind.

Resultat: 2,68 und 27,52 Kilogramm.

108. Welche Beschleunigung erzeugt eine Kraft von 68  $kg$ , welche auf einen Körper von 170 Masseneinheiten wirkt?

Antwort: eine Beschleunigung  $p = 0,4 m$ .

109. Ein Körper von 36  $kg$  Gewicht bewegt sich vom Ruhezustande aus gleichförmig beschleunigt und durchläuft in einer Minute den Weg von 68,67  $m$ . Man ermittle diejenige Kraft, welche diese Bewegung verursacht hat.

Lösung:  $P = 0,14 kg$ .

110. Wie verhalten sich die Beschleunigungen  $p_1$  und  $p_2$ , welche derselben Masse von zwei verschiedenen Kräften  $P_1$  und  $P_2$  erteilt werden.

Antwort: Direkt wie die letzteren, es gilt also die Proportion

$$p_1 : p_2 = P_1 : P_2.$$

111. Wie verhalten sich dagegen die Beschleunigungen, welche ein und dieselbe Kraft bei zwei verschiedenen Massen  $M_1$  und  $M_2$  erzeugt?

Antwort: Umgekehrt, wie die letzteren, so dass die Proportion besteht

$$p_1 : p_2 = M_2 : M_1.$$

112. Wie verhalten sich endlich zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$ , wenn die erstere einer Masse  $M_1$  die Beschleunigung  $p_1$  und die letztere einer Masse  $M_2$  die Beschleunigung  $p_2$  beibringt?

Antwort: Wie die Produkte aus Masse und Beschleunigung, also nach der Proportion

$$P_1 : P_2 = M_1 p_1 : M_2 p_2.$$

§ 32.

**Einführung von Kraft und Masse in die Bewegungsformeln.**

Wirkt auf einen Körper mit der Masse  $M$  eine bestimmte unveränderliche Kraft  $P$ , so geht der erstere in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung über und zwar ergiebt sich aus Nr. 31 die Beschleunigung

$$p = \frac{P}{M} \quad (32.)$$

oder in Worten:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}.$$

Nehmen wir nun vorerst an, dass der genannte Körper vor Einwirkung der Kraft  $P$  im Ruhezustande war, so wird derselbe, wie im ersten Kapitel gezeigt wurde, nach Verfluss von  $t$  Sekunden eine Geschwindigkeit

$$v = p t$$

besitzen und den Weg

$$s = \frac{p}{2} t^2$$

zurückgelegt haben. Mit Einsetzung des obigen Wertes von  $p$  in die beiden letzten Beziehungen entsteht aber

$$v = \frac{P}{M} t, \text{ sowie } s = \frac{P}{2 M} t^2,$$

oder, wenn wir

$$t = \frac{M v}{P}$$

aus der Gleichung links in die Gleichung rechts substituieren:

$$s = \frac{P}{2 M} \cdot \frac{M^2 v^2}{P^2} = \frac{M v^2}{2 P}$$

und hieraus durch Multiplikation mit  $P$ :

$$P s = \frac{M}{2} v^2. \quad (33.)$$

Die linke Seite der vorstehenden Gleichung stellt das Produkt aus der Kraft  $P$  und dem vom Angriffspunkte der letzteren zurückgelegten Weg  $s$ , mithin diejenige mechanische Arbeit dar, welche die Kraft  $P$  leistete, indem sie einen Körper von der Masse  $M$  durch

den Weg  $s$  getrieben und ihm die Geschwindigkeit  $v$  erteilt hat, eine Arbeit, welche der Körper vermöge seiner Trägheit jederzeit wieder verrichtet, sobald er durch Widerstände irgend welcher Art in den Zustand der Ruhe zurückgeführt wird.

Da man nun die rechte Seite jener Gleichung,  $\frac{1}{2} M v^2$ , die lebendige Kraft des Körpers nennt, so versteht man unter der lebendigen Kraft eines bewegten Körpers die Fähigkeit des letzteren, eine ganz bestimmte mechanische Arbeit zu leisten, und man erhält diese Arbeit zahlengemäss, wenn man die halbe Masse des Körpers mit dem Quadrate seiner Geschwindigkeit multipliziert.

Hat z. B. ein Körper von 981  $kg$  Gewicht eine Geschwindigkeit von 2  $m$ , so ist seine Masse

$$M = \frac{G}{g} = \frac{981}{9,81} = 100,$$

mithin seine lebendige Kraft

$$L = \frac{M}{2} v^2 = 50 \cdot 4 = 200 \text{ } mkg,$$

d. h. dieser Körper kann auf Grund seines Beharrungsvermögens eine mechanische Arbeit von 200  $mkg$  leisten, also z. B. einen Widerstand von 20  $kg$  10  $m$  weit überwinden.

Man wird bereits bemerkt haben, dass sich auch hier Name und Begriff wenig decken, dass es anstatt „lebendige Kraft“ viel passender „lebendige Arbeit“ oder „Arbeitsvermögen“ heissen müsste.

### § 33.

#### Beispiele.

113. Eine 7  $kg$  wiegende Granate verlässt den Lauf des Geschützes mit 720  $m$  Geschwindigkeit; man bestimme die lebendige Kraft dieser Granate.

Resultat: 184954 Meterkilogramme.

114. Wie hoch würde diese Granate vermöge ihrer lebendigen Kraft im luftleeren Raume steigen, wenn der Geschützlauf vertikal nach oben gerichtet wird?

Lösung: Ist die Steighöhe  $x$  Meter, so folgt aus  $7x = 184954$ ,  
 $x = 26422$ .

115. Wie gross ist die lebendige Kraft eines 10 *kg* schweren und mit 10 *m* Geschwindigkeit fortschreitenden Körpers?

Antwort: 50,97 *mkg*.

116. Welches ist das Arbeitsvermögen eines Körpers vom Gewichte  $G$ , welcher im luftleeren Raume von der Ruhe aus  $t$  Sekunden lang gefallen ist?

Antwort:  $L = \frac{1}{2} G g t^2$  Meterkilogramme, wenn  $G$  in Kilogrammen angegeben ist.

117. Ein Körper von 39,64 *kg* Gewicht gelangt mit 24 *m* Geschwindigkeit auf eine horizontale Eisfläche und legt auf letzterer ohne jede weitere bewegende Kraft noch einen Weg von 1600 Metern zurück. Wie hoch berechnet sich hieraus der durchschnittliche Bewegungswiderstand?

Lösung: Aus dem Umstande, dass die zur Überwindung der Bewegungshindernisse (Reibung und Luftwiderstand)  $W$  nötige Arbeit gleich der lebendigen Kraft des Körpers sein muss, ergibt sich  $W = 0,72$  *kg*.

118. Wie weit würde aber dieser Körper nur kommen, wenn der Bewegungswiderstand fortwährend 2 *kg* betrüge?

Antwort: 576 Meter.

119. Man bestimme das Arbeitsvermögen eines Schwungradkranzes, für welchen der äussere, resp. innere Durchmesser  $D$ , resp.  $d$  Dezimeter und die Breite  $b$  Dezimeter betragen, wenn die Umlaufzahl pro Minute  $n$  ist und das spezifische Gewicht des Eisens mit  $\gamma$  bezeichnet wird.

Auflösung: Der Kranz des Schwungrades ist ein Hohlzylinder und mithin sein Volumen

$$V = \frac{1}{4} (D^2 - d^2) b \pi \text{ Kubikdezimeter,}$$

sein Gewicht

$$G = \frac{1}{4} (D + d) (D - d) b \gamma \pi \text{ Kilogramme}$$

und seine Masse

$$M = \frac{\pi \gamma}{4 g} (D + d) (D - d) b.$$

Andererseits ist die mittlere Umfangsgeschwindigkeit des Radkranzes

$$v = \frac{n \frac{D+d}{2}}{19,1} = \frac{n(D+d)}{38,2} \text{ Dezimeter}$$

oder

$$v = \frac{n(D+d)}{382} \text{ Meter}$$

und mithin ergibt sich die lebendige Kraft des Schwungradkranzes

$$L = \frac{M}{2} v^2 = \frac{\pi \gamma}{8 g} (D+d) (D-d) b \frac{n^2 (D+d)^2}{145924}$$

oder, weil der Zahlenfaktor

$$\frac{\pi}{8 \cdot 145924 \cdot g} = 0,0000002743$$

ist:

$$L = 0,0000002743 (D+d)^3 (D-d) n^2 b \gamma \text{ Meterkilogramme,}$$

wobei, wie schon erwähnt, die Dimensionen  $D$ ,  $d$  und  $b$  in Dezimetern verstanden sind.

120. Welches ist die lebendige Kraft vom Ringe eines gusseisernen Schwungrades mit den Dimensionen  $D = 52 \text{ dm}$ ,  $d = 48 \text{ dm}$ ,  $b = 2,8 \text{ dm}$ , der Tourenzahl  $n = 57,3$  und dem spezifischen Gewichte  $\gamma = 7,3$ ?

Antwort:  $L = 73633 \text{ mkg.}$

121. Wie lange würde dieses Schwungrad lediglich in Folge seiner Trägheit einen Effekt von 16 Pferdestärken auszuüben im Stande sein?

Antwort: 1 Minute 1,36 Sekunden.

122. Es soll das Arbeitsvermögen eines schmiedeisernen Schwungradringes für  $D = 32$ ,  $d = 29$ ,  $b = 2$ ,  $n = 50$  und  $\gamma = 7,8$  berechnet werden.

Antwort:  $L = 7284,5 \text{ mkg.}$

123. Mit wie viel Pferdestärken würde der Schwungradkranz der vorigen Aufgabe auf Grund des Beharrungsvermögens eine Minute lang arbeiten?

Antwort: Mit zirka 1,6 PS.

§ 34.

Das Prinzip der lebendigen Kräfte.

Wirkt auf einen Körper mit der Masse  $M$ , welcher schon eine Geschwindigkeit von  $c$  Metern besitzt, in der Richtung und im Sinne seiner Bewegung eine einzige unveränderliche Kraft von  $P$  Kilogrammen ein, so erteilt die letztere dem ersteren eine Beschleunigung

$$p = \frac{P}{M},$$

und es hat folglich jener Körper nach  $t$  Sekunden die Geschwindigkeit

$$v = c + pt = c + \frac{P}{M} \cdot t$$

erlangt, sowie den Weg

$$s = ct + \frac{p}{2} t^2 = ct + \frac{P}{2M} t^2$$

zurückgelegt. Setzt man nun aus der vorletzten Beziehung

$$t = (v - c) \frac{M}{P}$$

in die letzte Gleichung für  $s$  ein, so ergibt sich

$$s = c(v - c) \frac{M}{P} + \frac{P}{2M} (v - c)^2 \frac{M^2}{P^2}$$

und hieraus nach kurzer Rechnung

$$Ps = \frac{M}{2} v^2 - \frac{M}{2} c^2 = \frac{M}{2} (v^2 - c^2). \quad (34.)$$

In der linken Seite der vorstehenden Gleichung erkennen wir jetzt diejenige mechanische Arbeit, welche die Kraft  $P$  leisten musste, um die Trägheit des Körpers mit der Masse  $M$  auf der Wegstrecke  $s$  zu überwinden, oder, um denselben von der Geschwindigkeit  $c$  auf die Geschwindigkeit  $v$  zu bringen, und die rechte Seite stellt die Differenz der beiden lebendigen Kräfte dar, welche dem Körper am Ende und am Anfange der Bewegung innewohnen, das ist die Zunahme des Körpers an lebendiger Kraft.

Wirkt also nur eine Kraft beschleunigend auf einen Körper, so ist ihre mechanische Arbeit gleich der im letzteren erzeugten lebendigen Kraft.

Nehmen wir ferner an, dass jetzt, wo der Körper die Geschwin-



digkeit  $v$  besitzt, an die Stelle der bewegenden Kraft  $P$  ein Widerstand  $W$  tritt, so entsteht offenbar eine verzögerte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v$  und der Verzögerung

$$p' = \frac{W}{M},$$

und mithin erhält man die Endgeschwindigkeit  $c$  und den nach  $t$  Sekunden zurückgelegten Weg des Körpers mittels der beiden Beziehungen

$$c = v - p' t \quad \text{und} \quad s' = vt - \frac{p'}{2} t^2.$$

Durch Elimination von  $p'$  und  $t'$  aus den vorstehenden drei Gleichungen ergibt sich nach einer der vorigen analogen Rechnung

$$Ws' = \frac{M}{2} (v^2 - c^2).$$

Weil  $Ws$  diejenige mechanische Arbeit darstellt, welche unser Körper vermöge seiner lebendigen Kraft bei Überwindung des Bewegungswiderstandes  $W$  geleistet hat, und weil die rechten Seiten der letzten und 34. Formel übereinstimmen, demnach auch

$$Ps = Ws'$$

ist, so gilt der Satz: Die mechanische Arbeit ( $Ps$ ), welche ein Körper aufnimmt, indem ihn eine Kraft  $P$  von einer kleineren Geschwindigkeit ( $c$ ) auf eine grössere Geschwindigkeit ( $v$ ) bringt, wird von diesem Körper stets wieder produziert, wenn ihn irgend ein Widerstand  $W$  nötigt, auf jene kleinere Geschwindigkeit ( $c$ ) zurückzugehen.

### § 35.

#### Wirkungsweise der Schwunräder.

Eine direkte Anwendung des letzten Satzes und damit zugleich eine Gelegenheit, das Prinzip der lebendigen Kräfte anschaulich zu machen, bietet die Wirkungsweise eines Schwungrades dar.

Bei vielen Maschinen ist nämlich entweder die bewegende Kraft, z. B. bei den Dampfmaschinen mit Expansion, oder der zu überwindende Widerstand, wie bei Metall- oder Holzbearbeitungsmaschinen, bei manchen beides zugleich veränderlich; durch die in Folge dessen eintretende ungleichförmige Bewegung würden Stösse hervor-

gerufen werden und letztere wieder nicht nur Beschädigungen der Maschinenteile, sondern auch Arbeitsverluste verursachen.

Um diese Nachteile zu vermeiden, bezw. zu vermindern, sucht man einen gleichmässigen Gang der Maschine zu erzielen und erreicht denselben wenigstens annähernd, wenn man auf einer mit grosser Tourenzahl laufenden und in der Nähe der zu regulierenden Kraft gelegenen Rotationswelle ein Rad mit verhältnismässig grossem Durchmesser und schwerem guss- oder schmiedeeisernem Kranze, ein sogenanntes Schwungrad, anbringt. Bei überschüssiger Kraft wird in diesem Schwungrad mehr Geschwindigkeit und hierdurch auch mehr lebendige Kraft erzeugt, letztere aber wieder in Nutzarbeit umgesetzt, so bald und so lange die Intensität der Widerstände diejenige der bewegenden Kraft übertrifft. Weil aber das Schwungrad bei seiner bedeutenden Masse und hohen Tourenzahl schon ziemliche Quantitäten Arbeit aufnehmen und abgeben kann, ohne seine Geschwindigkeit wesentlich zu ändern und weil andererseits die Intensitätsschwankungen der bewegenden Kraft und des Widerstands in der Regel nur von kurzer Dauer sind, so leuchtet ein, dass durch das Schwungrad ein nahezu gleichförmiger Gang der Maschine herbeigeführt werden muss.

Man könnte das Schwungrad nicht unpassend mit einem Gefässe vergleichen, in welchem sich ein bedeutendes Quantum lebendiger Kraft befindet und welchem man daher schon ziemliche Mengen mechanischer Arbeit zuführen oder entnehmen kann, ohne es dem Inhalte sonderlich anzumerken.

Selbstverständlich wird für solche Maschinen ein Schwungrad entbehrlich sein, in welchen schon sehr schwere Räder oder Scheiben mit hinreichender Umfangsgeschwindigkeit laufen und demnach das Schwungrad ersetzen; so wirken beispielsweise die Läufer einer Mahlmühle als Schwungräder.

Aber nicht bloss als Egalisator, sondern auch lediglich als Arbeitsansammler kann das Schwungrad dienen. Wenn nämlich eine gegebene Arbeitskraft zur Überwindung eines bestimmten und sehr bedeutenden Widerstandes nicht ausreicht, wie dies z. B. bei Walz- und Prägwerken vorkommt, so kann man jene Kraft zunächst nur auf das Schwungrad wirken lassen und hierdurch in letzterem so viel mechanische Arbeit aufspeichern, als zur Überwindung des vorhandenen Widerstandes erforderlich ist. Auch in diesem Falle trifft der Vergleich des Schwungrades mit einem Behälter von lebendiger

Kraft noch vollkommen zu, nur wird hier das Gefäss gänzlich oder doch nahezu entleert, ehe man es von neuem wieder anfüllt.

§ 36.

**Gleichförmigkeitsgrad des Schwungrades.**

Bezeichnet man die Zunahme an lebendiger Kraft, welche ein Schwungrad erfährt, indem seine Umfangsgeschwindigkeit von  $c$  auf  $v$  wächst, mit  $A$ , so gilt nach Nr. 34 die Beziehung

$$A = \frac{M}{2} (v^2 - c^2),$$

woraus folgt

$$A = M (v - c) \frac{v + c}{2},$$

oder, wenn man die mittlere Schwungradgeschwindigkeit

$$\frac{v + c}{2} = \gamma$$

setzt und durch  $A (v - c)$  dividiert:

$$\frac{1}{v - c} = \frac{M\gamma}{A}$$

und hieraus nach Multiplikation mit  $\gamma$ :

$$\frac{\gamma}{v - c} = \frac{M\gamma^2}{A}. \tag{35.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung, d. i. das Verhältnis zwischen der mittleren und der Differenz aus der grössten und kleinsten Umfangsgeschwindigkeit des Schwungrades, heisst der Gleichförmigkeitsgrad des letzteren und wird gewöhnlich mit  $\delta$  bezeichnet. Wie uns die Formel 35 sagt, ist der Gleichförmigkeitsgrad direkt proportional der Masse  $M$  des Schwungradkranzes und dem Quadrate seiner mittleren Geschwindigkeit  $\gamma$ , dagegen indirekt proportional der Arbeitsdifferenz  $A$ , welche das Rad erleidet.

Nach Grove ist zu nehmen

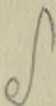
- |   |                         |
|---|-------------------------|
| bei Hammer- und Stampfwerken . . . . .      | $\delta = 5,$           |
| „ Pumpen und Schneidemühlen . . . . .       | $\delta = 20$ bis $30,$ |
| „ Webereien und Papiermaschinen > . . . . . | $\delta = 40,$          |
| „ Mahlmühlen . . . . .                      | $\delta = 50,$          |

bei Spinnereien mit niedrigen Garnnummern . . .  $\delta = 50$  bis 60,  
 " " " hohen " . . .  $\delta = 100$ .

Für gewöhnliche Dampfmaschinen wählt man

bei Riemenbetrieb . . . . .  $\delta = 35$  und  
 „ Zahnradbetrieb . . . . .  $\delta = 50$ .

Schliesslich sei noch erwähnt, dass  $\frac{1}{\delta}$  der Ungleichförmigkeitsgrad des Schwungrads genannt wird und dass unter  $\gamma$ ,  $c$  und  $v$  auch die entsprechenden Umfangsgeschwindigkeiten des Kurbelzapfens verstanden werden dürfen.



§ 37.

Beispiele.

124. Wie viel mechanische Arbeit ist erforderlich, um einen 8 kg schweren Körper von 4 auf 7 m Geschwindigkeit zu bringen?

Antwort: Eine Arbeit von 13,456 mkg.

125. In welcher Zeit bringt eine Kraft von 0,1 kg einen Körper von 10 kg Gewicht von 7 auf 17 m Geschwindigkeit?

Antwort: In einer Minute 42 Sekunden.

126. Welche Arbeit verrichtet ein Schwungrad von 10000 kg Gewicht vermöge seiner Trägheit, wenn die Umfangsgeschwindigkeit desselben von 15 auf 5 Meter heruntergeht?

Antwort: 101936 mkg.

127. Wie gross ist der Widerstand, welcher durch genannte Arbeit auf 5 Meter Länge überwunden wird?

Antwort: 20387,2 kg.

128. Man gebe den Gleichförmigkeitsgrad eines Schwungrades an, für welches die kleinste und die grösste Geschwindigkeit 13,2 und 12,8 Meter sind.

Lösung: Aus  $v = 13,2$  und  $c = 12,8$  folgt  $\gamma = 13$  und mithin der Gleichförmigkeitsgrad  $\delta = \frac{\gamma}{v - c} = 32,5$ .

129. Der Ring eines Schwungrades, welcher eine mittlere Geschwindigkeit  $\gamma = 12$  Meter und den Gleichförmigkeitsgrad  $\delta = 40$  besitzen soll, nimmt periodisch eine Arbeit von  $A = 720$  mkg auf,

um dieselbe sofort wieder abzugeben. Welches Gewicht muss nun dieses Schwungrad erhalten?

$$\text{Antwort: } G = \frac{A g \delta}{\gamma^2} = 1962 \text{ kg.}$$

130. Die Umfangsgeschwindigkeit eines 2943 Kilogramm schweren Schwungrades schwankt zwischen 9,7 und 10,1 Meter. Man soll den Gleichförmigkeitsgrad  $\delta$  und diejenige Arbeitsgrösse  $A$  ermitteln, welche das Schwungrad abwechselnd aufnimmt und wieder abgibt.

$$\text{Resultate: } \delta = 24,75 \text{ und } A = 1188 \text{ mkg.}$$

### § 38.

#### Vermischte Aufgaben über Kräfte und deren Effekte.

131. Ein Tourist, welcher samt Kleidern und Gepäck 80 Kilogramme wiegt, ersteigt in 5 Stunden einen Berg von 1600 Meter Höhe. Welchen Effekt muss derselbe durchschnittlich ausüben, wenn man annimmt, dass der Körper bei jedem Schritte um  $\frac{1}{8}$  der vertikalen Erhebung zurücksinkt?

Antwort: Einen mittleren Effekt von 8 Meterkilogrammen.

132. Eine Wasserpumpe macht  $\alpha = 25$  Hübe in der Minute und liefert bei jedem Hube  $q = 40$  Liter auf eine Höhe von  $H = 9$  Meter. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe nötig, wenn durch Nebenhindernisse  $\frac{1}{4}$  der theoretischen Arbeit verloren geht?

$$\text{Antwort: } N = \frac{q H \alpha}{3600} = 2,5 \text{ P S.}$$

133. Wie gestaltet sich aber das Resultat der vorigen Aufgabe, wenn statt des Wasserquantums  $q$  der Durchmesser  $d$  und die Hubhöhe  $h$  des Kolbens, und zwar beide in Metern, gegeben sind?

Antwort:  $N = 0,218 d^2 h H \alpha$  Pferdekkräfte.

134. Man löse die vorige Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte  $d = 0,3$ ,  $h = 1$ ,  $H = 10$ ,  $\alpha = 25$ .

Resultat:  $N = 4,9 \text{ P S.}$

134. In einem gegen den Horizont geneigten Kanal ist der normale Querschnitt des einflussenden Wassers 2 Quadratmeter und die Geschwindigkeit des letzteren an der Oberfläche 1,09 Meter, während die Oberflächengeschwindigkeit des Wassers am Ende des Kanales 5 Meter beträgt. Wie viel Pferdestärken sind in dem aus dem

Kanale kommenden Wasser enthalten, wenn die mittlere Geschwindigkeit eines Wasserlaufes nahezu  $\frac{9}{10}$  von derjenigen an der Oberfläche ist?

Lösung: Es ist das Gewicht des am oberen Kanalende per Sekunde zufließenden Wasserquantums  $G = 2 \cdot 1,09 \cdot 0,9 \cdot 1000 = 1962 \text{ kg}$ , folglich dessen Masse  $M = 200$ . Andererseits ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers am untern Ende  $v = 5 \cdot 0,9 = 4,5 \text{ m}$  und mithin nach Nr. 33 die sekundliche Arbeit  $= 100 \cdot 4,5 \cdot 4,5 = 2025 \text{ mkg}$  oder  $N = 27 \text{ PS}$ .

135. Auf die  $45 \text{ dm}$  langen und  $10,9 \text{ dm}$  breiten Schaufeln eines Schiffmühlenrades drückt Wasser mit  $1,2 \text{ m}$  Geschwindigkeit. Wenn nun dieses Rad eine Nutzarbeit von  $1,5$  Pferdestärken liefert, wie hoch berechnet sich dann der Wirkungsgrad des ersteren?

Auflösung: Auf die Schaufeln wirkt in jeder Sekunde ein Quantum Wasser vom Gewichte

$$G = 45 \cdot 10,9 \cdot 12 = 5886 \text{ kg},$$

mithin von der Masse

$$M = \frac{G}{g} = \frac{5886}{9,81} = 600$$

und der lebendigen Kraft

$$L = \frac{M}{2} v^2 = 300 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 432 \text{ mkg}.$$

Folglich besitzt das Wasser vermöge seiner Trägheit eine Arbeitskraft von

$$N = \frac{432}{75} = 5,76 \text{ PS}$$

und es ergibt sich der Wirkungsgrad des Schiffmühlenrades

$$\eta = \frac{1,5}{5,76} = 0,26.$$

136. Die vier Flügel einer Windmühle haben zusammen eine Fläche von  $100 \text{ qm}$ . Wie viel Nutzarbeit werden dieselben bei einer Windgeschwindigkeit von  $6 \text{ m}$  produzieren, wenn der Wirkungsgrad  $\frac{1}{2}$  und die Luft  $800$  mal leichter als Wasser ist?

Lösung: Ein Kubikmeter Luft wiegt  $\frac{1000}{800} = \frac{5}{4} \text{ kg}$ . In einer Sekunde wirken auf die Windmühlenflügel  $100 \cdot 6 = 600 \text{ cbm}$  mit

dem Gewichte  $600 \cdot \frac{5}{4} = 750 \text{ kg}$  und der lebendigen Kraft  $\frac{750}{2g} 36 \text{ mkg}$ .

Demnach ist die Arbeitskraft des Windes

$$N = \frac{750 \cdot 18}{75 \cdot g} = \frac{180}{g} = 18,346 \text{ P S}$$

und das Windrad liefert 9,2 Pferdestärken Nutzarbeit.

137. Man löse die vorige Aufgabe unter der Bedingung, dass die Fläche der Flügel  $F$  Quadratmeter, die Geschwindigkeit des Windes  $v$  Meter, das Gewicht des Kubikmeters Luft  $k$  Kilogramm betragen und der Wirkungsgrad  $\eta$  sei.

Resultat: Der Nutzeffekt beträgt  $\frac{fkv^3}{150g} \eta$  Pferdestärken.

138. Jemand schleudert einen Körper von  $G = 1,4 \text{ kg}$  Gewicht  $h = 9 \text{ m}$  vertikal aufwärts, indem er ihn auf der Strecke  $s = 0,6 \text{ m}$  unausgesetzt fortreibt. Mit welcher Stärke  $P$  hat die Hand auf den Körper gedrückt?

Lösung: Aus  $Ps = Gh$  folgt  $P = \frac{Gh}{s} = 21 \text{ kg}$ .

139. An den Enden eines über eine Rolle gelegten Fadens hängen die beiden Gewichte  $G_1$  und  $G_2$ , von welchen  $G_1 > G_2$ . Welches ist die Beschleunigung  $p$  der entstehenden Bewegung unter der Voraussetzung, dass vom Eigengewicht des Fadens, sowie von der Trägheit der Rolle, ferner von der Reibung und vom Luftwiderstande abgesehen wird?

Auflösung: Hier ist die bewegende Kraft  $P = G_1 - G_2$  und das Gewicht der bewegten Masse  $G = G_1 + G_2$ , mithin ist nach Nr. 30

$$(G_1 - G_2) : (G_1 + G_2) = p : g, \text{ w. f. } p = \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \cdot g.$$

140. Wie gross wird beispielsweise die Beschleunigung, wenn die beiden Gewichte 15,5 und 14,5  $\text{kg}$  betragen?

Antwort: 0,327 Meter.

### § 39.

#### Das Grundgesetz von der Unabhängigkeit der Bewegungen.

Das vierte und letzte allgemeine Grundgesetz der Mechanik lautet: Wirken auf einen Körper zwei Bewegungsursachen, so ist die

Ortsveränderung des ersteren die nämliche, ob nun die letzteren zugleich, oder aber nacheinander auf den Körper übertragen werden; mit anderen Worten: die eine Bewegung erfolgt unabhängig von der anderen.

Um von dem Inhalte dieses Satzes eine richtige Vorstellung zu gewinnen, nehmen wir an, es bewege sich ein Schiff von  $A$  nach  $B$  (Fig. 1) und schräg über das Verdeck wandere eine Person vom Punkte  $C$  nach dem Punkte  $D$ . Auf Grund des obigen Erfahrungsgesetzes wird dann die Person unter allen Umständen an die Stelle  $D'$  gelangen — ganz gleichgiltig, ob erst das Schiff und dann die Person, oder zunächst die letztere und hierauf das erstere, oder endlich, ob beide gleichzeitig ihre bezüglichen Wege zurücklegen.

Man sieht aber wohl, dass nur von der vollendeten Ortsveränderung die Rede ist, nicht aber von dem Wege, auf dem sie eintritt; denn dieser ist in allen drei Fällen ein anderer: im ersten  $CC'D'$ , im zweiten  $CDD'$  und im dritten eine zwischen  $CC'D'$  und  $CDD'$  liegende Linie  $CED'$ .

Wenn übrigens ein Punkt  $P$  gleichzeitig zwei geradlinige Bewegungen, z. B. von  $A$  nach  $B$  und von  $A$  nach  $C$  (Fig. 2) ausführt, so erhält man seine wirkliche Bahn, indem man die Linie  $AC$  parallel zu sich selbst mit  $A$  auf  $AB$  nach dem ersten und zugleich den Punkt  $P$  in der Beweglichen  $AC$  nach dem zweiten Bewegungsgesetze fortschreiten lässt. Sind nun die vom Punkte in den beiden Bewegungsrichtungen  $AX$  und  $AY$  in einer bestimmten Zeit  $t$  zurückgelegten Wege gleich  $AB$ , resp.  $AC$ , so befindet sich der erstere nach dieser Zeit offenbar im vierten Eckpunkte  $D$  eines Parallelogramms mit den Seiten  $AB$  und  $AC$ .

Betreffs der Form des Weges, auf welchem unser Punkt von  $A$  nach  $D$  gelangt, beschränken wir uns auf den für später wichtigen Fall, dass beide Einzelbewegungen gleichförmig beschleunigt sind und von der Ruhe aus erfolgen. Bezeichnen wir die Beschleunigungen in den Richtungen  $AX$  und  $AY$  mit  $p_1$  und  $p_2$ , so sind die in  $t$  Sekunden durchlaufenen entsprechenden Wege

$$AB = \frac{p_1}{2} t^2 \text{ und } BD = \frac{p_2}{2} t^2,$$

woraus durch Division beider folgt

$$AB : BD = p_1 : p_2.$$



Nach einer beliebigen Zwischenzeit  $\tau$  ist aber der Punkt  $P$  an einer Stelle mit den zugehörigen Wegen

$$AE = x = \frac{p_1}{2} \tau^2 \text{ und } EP = y = \frac{p_2}{2} \tau^2,$$

woraus sich ergibt

$$AE : EP = p_1 : p_2.$$

Aus den beiden vorstehenden erhellt aber die dritte Proportion

$$AE : EP = AB : BD$$

und hieraus, dass  $P$  auf der geraden Linie  $AD$  liegt, dass also die thatsächliche Bewegung des Punktes  $P$  auf der Diagonale des Parallelogrammes  $ABDC$  vor sich geht.

## Drittes Kapitel.

### Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

#### § 40.

#### Geometrische Darstellung der Kräfte. Zusammensetzung derselben im allgemeinen.

Jede Kraft kann graphisch dargestellt werden als eine Strecke, indem man die Grösse, die Richtung und den Angriffspunkt der ersteren (cfr. § 19) ausdrückt oder geometrisch versinnlicht durch die Länge, die Richtung und einen Endpunkt der letzteren; die Seite, nach welcher die Kraft wirkt, bezeichnet man durch eine an die Strecke oder deren Verlängerung gesetzte Pfeilspitze.

Bei der Darstellung verschiedener Kräfte durch begrenzte gerade Linien kommt es zunächst darauf an, eine passende Länge, welche die Krafteinheit (das Kilogramm) ausdrückt, zu wählen. Diese Länge trägt man auf der Richtungslinie jeder gegebenen Kraft ebenso oft ab, als mit wieviel Kilogramm Druck (oder Zug) die betreffende Kraft wirken soll und erhält hierdurch Strecken, welche jene gegebenen Kräfte veranschaulichen und deren Längen sich genau so verhalten wie die Intensitäten der durch sie repräsentierten Kräfte, folglich aber auch (nach § 28) wie die Beschleunigungen, welche die

Kräfte — jede für sich — dem angegriffenen Körper erteilen und mithin zugleich wie die Wege, welche der Körper unter dem Einflusse jeder einzelnen Kraft in einer bestimmten Zeit durchlaufen würde.

Wenn z. B. die drei Kräfte  $P_1 = 2\text{ kg}$ ,  $P_2 = 1\text{ kg}$  und  $P_3 = 4\text{ kg}$  den Körper  $K$  (Fig. 3) in den Punkten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  angreifen sollen, so zieht man durch letztere drei Gerade, welche die Richtungen der Kräfte angeben und macht nun  $A_1 C_1 = 2$ ,  $A_2 C_2 = 1$  und  $A_3 C_3 = 4$  Längeneinheiten, z. B. Centimeter. Dann sind die Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  durch die Strecken  $A_1 C_1$ ,  $A_2 C_2$ ,  $A_3 C_3$  geometrisch versinnlicht, und wenn diese drei Kräfte nacheinander auf den Körper  $K$  einwirkten, so würde letzterer drei verschiedene Beschleunigungen erfahren, welche sich wie

$$A_1 C_1 : A_2 C_2 : A_3 C_3 = 2 : 1 : 4$$

verhielten. Nehmen wir ferner an, dass in einer gewissen Zeit, etwa in drei Sekunden, die Kraft  $P_1$  den Körper von  $A_1$  nach  $C_1$  bewegt, so würde ihn in derselben Zeit  $P_2$  von  $A_2$  nach  $C_2$  und  $P_3$  von  $A_3$  nach  $C_3$  bringen.

Wirken nun mehrere Kräfte gleichzeitig und zwar zunächst auf nur einen Punkt  $A$  eines Körpers, so kann das Resultat im allgemeinen doch nur darin bestehen, dass dieser Körper während einer gewissen Zeit eine ganz bestimmte Ortsveränderung erfährt und da offenbar dieselbe Ortsveränderung in der nämlichen Zeit auch von nur einer Kraft erzielt werden kann, so ist es eine wichtige Aufgabe der Mechanik, diese letztere zu ermitteln.

Die einzelnen Kräfte heissen auch die Seitenkräfte oder Komponenten, die einzige Kraft, welche in gleicher Zeit dasselbe bewirkt, wie jene zusammengenommen, die Mittelkraft oder Resultante oder resultierende Kraft und die Aufgabe, die letztere aus den ersteren zu bestimmen, das Zusammensetzen der Kräfte.

#### § 41.

### Das Parallelogramm der Kräfte.

Die Resultante  $R$  von zwei Kräften  $P_1$  und  $P_2$ , welche einen Körper im Punkte  $A$  angreifen und durch die Strecken  $AB$ ,  $AC$  geometrisch dargestellt sind, wird ihrer Richtung und

Grösse nach ausgedrückt durch die Diagonale  $AD$  desjenigen Parallelogramms  $ABDC$  (Fig. 4), welches die beiden Linien  $AB = P_1$  und  $AC = P_2$  zu Seiten hat.

Die Richtigkeit dieses Gesetzes, welches gewöhnlich der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt wird, kann durch folgende Betrachtungen dargethan werden: die Kraft  $P_1$  für sich würde dem Körper eine geradlinige und gleichförmig beschleunigte Bewegung erteilen und ihn in irgend einer bestimmten Zeit  $t$  von  $A$  nach  $B$  treiben. Denkt man sich jetzt  $P_1$  weg und dafür die andere Kraft  $P_2$  wirkend, so wird abermals eine gleichmässig beschleunigte, geradlinige Bewegung hervorgerufen und auf Grund des vorigen Paragraphen der Körper während des gleichen Zeitraums  $t$  von  $B$  nach  $D$  geführt. Eine in umgekehrter Reihe hintereinander folgende Wirkung beider Kräfte würde bezüglich der Ortsveränderung zwar dasselbe Endresultat ergeben, nur würde der Körper einen andern Weg einschlagen, nämlich durch  $P_2$  zunächst von  $A$  nach  $C$  und dann durch  $P_1$  von  $C$  nach  $D$  gelangen.

Wenn aber nun schliesslich beide Kräfte zugleich dieselbe Zeit  $t$  hindurch wirksam sind, so muss nach § 39 der Punkt  $A$  die Diagonale  $AD$  des Parallelogramms  $ABDC$  durchlaufen, eine Bewegung, welche der Punkt auch dann genau ausführen würde, wenn nur eine, durch die Strecke  $AD$  graphisch dargestellte Kraft  $t$  Sekunden lang wirken würde. Mithin drückt die Diagonale jedes Parallelogramms  $ABDC$  die Resultierende  $R$  zweier Komponenten  $P_1$  und  $P_2$  aus, welche letztere durch die beiden im Anfangspunkte  $A$  der Diagonale zusammenstossenden Seiten  $AB$  und  $AC$  geometrisch dargestellt sind.

Hiernach kann man mit Leichtigkeit zwei auf einen Punkt  $A$  wirkende Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  mit Hilfe von Lineal und Zirkel zusammensetzen, indem man sie nach Richtung und Grösse als zwei in einem Punkte  $A$  zusammentreffender Strecken darstellt, letztere zu einem Parallelogramm ergänzt und durch  $A$  die Diagonale zieht, welche dann die gesuchte Mittelkraft von  $P_1$  und  $P_2$  repräsentiert.

Was die Ermittlung der Resultante  $R$  durch Rechnung anlangt, so kann dieselbe auf trigonometrischem Wege allgemein und ohne alle Schwierigkeiten erfolgen; hier wollen wir uns aber auf die Erledigung nur dreier, aber besonders wichtiger Spezialfälle beschränken:

1. Sind die beiden Komponenten lotrecht zu einander, so ist

das Kräfteparallelogramm ein Rechteck und folglich die Resultante als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $P_1$  und  $P_2$  nach dem Pythagoräischen Lehrsatz:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}. \quad (36.)$$

2. Lässt man den Winkel  $CAB = \alpha$  zwischen den beiden Komponenten (Fig. 5) kleiner werden bis zur Null, so läuft der Endpunkt  $D$  der Diagonale nach rechts auf einem Kreise mit dem Centrum  $B$  und dem Radius  $BD = BD' = AC = P_2$ , die Resultante  $AD = R$  wird hierdurch immer grösser und erhält für  $\alpha = 0$  den Wert  $AD' = AB + BD' = P_1 + P_2$  und mithin ist

$$R = P_1 + P_2 \quad (37.)$$

oder in Worten: Wirken zwei Kräfte auf einen Punkt in derselben Linie und nach derselben Seite, so ist die resultierende Kraft gleich der Summe der Komponenten.

3. Wenn man dagegen den Winkel  $CAB = \alpha$  wachsen lässt bis zu zwei Rechten, so bewegt sich der Punkt  $D$  auf demselben Kreise wie vorhin, aber nach links, die Diagonale  $DA$  nimmt in Folge dessen fortwährend ab und erhält bei  $\alpha = 180^\circ$  den Wert  $AD' = AB - BD' = P_1 - P_2$ . Demnach hat man

$$R = P_1 - P_2 \quad (38.)$$

oder in Form eines Lehrsatzes: Die Resultante zweier Komponenten, welche in einer Geraden auf einen Punkt nach entgegengesetzten Seiten wirken, ist gleich der Differenz beider und geht nach der Seite der grösseren Kraft.

Sind im letzten Falle die beiden Komponenten  $P_1$  und  $P_2$  einander gleich, so ergibt sich aus 38 die Resultierende

$$R = 0,$$

mithin erfolgt gar keine Bewegung und es gilt der Satz: Zwei gleiche Kräfte, welche auf einen Punkt in derselben Geraden nach verschiedenen Seiten wirken, halten sich das Gleichgewicht oder heben einander auf.

## § 42.

### Beispiele.

141. Man berechne die Mittelkraft zweier zu einander lotrechter Kräfte von 3 *kg* und 4 *kg*.

Lösung:  $R = 5 \text{ kg}$ .

142. Desgleichen, wenn die beiden Kräfte 39 und 52 *kg* betragen.

Lösung:  $R = 65 \text{ kg}$ .

143. Auf den Scheitel eines rechten Winkels wirken in dem einen Schenkel zwei Kräfte von 21 und 18, im andern zwei Kräfte von 27 und 53 *kg*, jedes Paar nach derselben Seite hin; es soll die Gesamteresultante durch Rechnung gefunden werden.

Lösung:  $R = 89 \text{ kg}$ .

144. In zwei sich senkrecht schneidenden Geraden wirken auf den Durchschnittspunkt *A* vier Kräfte von 48, 110, 12 und 33 *kg*, die erste nach rechts, die zweite nach oben, die dritte nach links und die letzte nach unten; wie gross berechnet sich hieraus die resultierende Kraft?

Antwort:  $R = 85 \text{ kg}$ .

145. Wenn ein Körper von 159 *kg* Gewicht durch zwei, einen rechten Winkel einschliessende Kräfte von 28 und 45 *kg* fortbewegt wird, wie gross ist dann die Resultante *P*, sowie die durch letztere bewirkte Beschleunigung *p*?

Antwort:  $P = 53 \text{ kg}$  und  $p = 3,27 \text{ m}$ .

146. Zwei gleiche Kräfte *P* bilden nacheinander die Winkel  $0^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$  und  $180^\circ$ ; man soll für jeden einzelnen Fall die Mittelkraft berechnen.

Resultate:  $2 P$ ,  $P\sqrt{3}$ ,  $P\sqrt{2}$ ,  $P$  und  $0$ .

147. Zwei Kräfte  $P_1 = 72 \text{ kg}$  und  $P_2 = 96 \text{ kg}$  wirken unter einem Winkel  $\alpha = 72^\circ$ ; man bestimme durch Zeichnung die Resultierende *R*, sowie die Winkel  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$ , welche *R* und  $P_1$  und  $P_2$  einschliesst.

Resultate:  $R = 136 \text{ kg}$ ,  $\alpha_1 = 42^\circ$ ,  $\alpha_2 = 30^\circ$ .

148. Ebenso, wenn  $P_1 = 111 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 244 \text{ kg}$  und  $\alpha = 109^\circ$  gegeben sind.

Resultate:  $R = 233 \text{ kg}$ ,  $\alpha_1 = 82^\circ$ .

149. Der Winkel, welchen die beiden Kräfte von 5 und 6 *kg* mit einander einschliessen, springt von  $0^\circ$  auf  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$  und  $180^\circ$ ; man ermittle diejenigen sieben Werte, welche dadurch die Resultante hintereinander annimmt.

Ergebnisse: 11 *kg*, 10,6 *kg*, 9,5 *kg*, 7,8 *kg*, 5,6 *kg*, 3 *kg* und 1 *kg*.

### Das Polygon der Kräfte.

Um mehr als zwei, z. B. die vier Kräfte  $AB = P_1$  (Fig. 6),  $AC = P_2$ ,  $AD = P_3$  und  $AE = P_4$ , welche sämtlich in  $A$  angreifen, zusammzusetzen, braucht man nur den Satz vom Parallelogramm der Kräfte wiederholt anzuwenden. Ergänzt man nämlich  $AB$  und  $AC$  zum Parallelogramm  $ABFC$ , so ist  $AF$  die Mittelkraft von  $P_1$  und  $P_2$ ; konstruiert man sodann aus  $AF$  und  $AD$  ein Parallelogramm  $AFGD$ , so drückt dessen Diagonale  $AG$  die Wirkung von  $AF$  und  $P_3$ , folglich auch von  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  aus, und vereinigt man endlich mit Hilfe des Parallelogramms  $AGHE$  die beiden Kräfte  $AG$  und  $AE$  zur Resultante  $AH = R$ , so stellt letztere die Mittelkraft von allen vier Komponenten  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  und  $P_4$  dar.

Lässt man aber die zur Bestimmung von  $R$  unnötigen Linien fort und verallgemeinert das vorstehende Verfahren auf beliebig viele in einem Punkte  $A$  angreifende Seitenkräfte, so ergibt sich die Regel: Soll ein System von beliebig vielen (etwa  $n$ ) auf einen Punkt  $A$  wirkenden und durch Strecken dargestellten Kräften  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  zusammengesetzt werden, so ziehe man durch den Endpunkt von  $P_1$  eine Linie, die parallel und gleich der zweiten Kraft  $P_2$ , dann durch den eben erhaltenen Punkt eine Gerade, welche parallel und gleich der dritten Komponente  $P_3$  ist und fahre so fort, bis man eine Strecke verzeichnet hat, welche parallel und gleich ist der letzten Seitenkraft  $P_n$ . Man erhält auf diese Weise eine gebrochene Linie, deren  $n$  Teile parallel und gleich sind denjenigen Strecken, welche die Kräfte  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  darstellen, und die Verbindungsgerade der Endpunkte dieser gebrochenen Linie drückt die Resultante aller  $n$  Einzelkräfte aus.

Wenn sich die gebrochene Linie spezieller Weise in  $A$  schliesst, so ist offenbar die Gesamtresultante gleich Null, die  $n$  Kräfte haben also in diesem Falle keine (sichtbare) Wirkung, oder, wie der hierfür gebräuchliche Ausdruck lautet: „sie halten sich das Gleichgewicht“.

Die erste Kraft, ferner die Strecken, von welchen jede einer der gegebenen Komponenten parallel und gleich ist, sowie die resultierende Kraft bilden zusammen ein Vieleck, welches das Polygon

der Kräfte genannt wird, und man kann daher auch sagen: Ein System von beliebig vielen in einer Ebene auf den Punkt  $A$  wirkenden Kräfte ruft keine Bewegung hervor oder ist im Gleichgewichte, wenn das Kräftepolygon dieselbe Anzahl von Seiten besitzt, als Komponenten vorhanden sind.

§ 44.

Beispiele.

150. Drei Kräfte von 9,21 und 15 *kg*, von welchen die beiden ersten einen Winkel von  $56^\circ$  und die beiden letzten einen solchen von  $104^\circ$  mit einander bilden, wirken auf einen Punkt  $A$  in einer Ebene. Man soll (durch Konstruktion) Grösse und Richtung der Mittelkraft bestimmen.

Lösung: Letztere ist 23,5 *kg* und schliesst mit der ersten Komponente einen Winkel von  $73^\circ 30'$  ein.

151. Welches ist die Grösse und Richtung der Resultante aus den vier in einer Ebene auf den Punkt  $A$  wirkenden Kräfte  $P_1 = 9,6$ ,  $P_2 = 8$ ,  $P_3 = 7,2$  und  $P_4 = 10$  *kg*, wenn auf einander folgend je zwei benachbarte Seitenkräfte die Winkel  $75^\circ$ ,  $30^\circ$  und  $90^\circ$  bilden?

Antwort: Es ist die Resultante  $R = 12,1$  *kg* und bildet mit  $P_1$  einen Winkel von  $89^\circ 15'$ .

152. Auf einen Punkt wirken die fünf Kräfte von 9, 10, 12, 5 und 4 *kg*, die vier letzteren bilden der Reihenfolge nach mit der ersten die Winkel  $70^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $200^\circ$  und  $240^\circ$ . Man soll durch Zeichnung die Resultierende  $R$  und ihren Winkel  $\alpha$  mit der ersten Kraft ermitteln.

Resultate:  $R = 14,6$  *kg* und  $\alpha = 91^\circ$ .

153. Desgleichen für die Komponenten von 4, 8, 12 und 16 *kg* mit den Winkeln von  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $135^\circ$ .

Resultate.  $R = 29$  *kg* und  $\alpha = 93^\circ 15'$ .

154. Ebenso für die Seitenkräfte von 10, 8, 6 und 2 *kg* und die Winkel  $90^\circ$ ,  $165^\circ$  und  $240^\circ$ .

Resultate:  $R = 8,5$  *kg* und  $\alpha = 68^\circ$ .

155. Von sechs Kräften, welche in einer Ebene den Punkt  $A$  angreifen und der Reihe nach 8, 15, 22, 29, 36 und 43 *kg* betragen, schliessen immer je zwei benachbarte einen Winkel von  $60^\circ$  ein; man berechne Grösse und Richtung der Mittelkraft.

Lösung: Dieselbe ist 42 *kg* und fällt in die Wirkungslinie der fünften Kraft.

§ 45.

Zerlegung der Kräfte.

In den vorstehenden Paragraphen haben wir gesehen, wie man zwei — oder auch mehrere — Kräfte zu einer einzigen Kraft vereinigen und sich hierdurch Aufschluss über das Gesamtergebnis der ersteren verschaffen kann.

Nicht selten jedoch macht es sich zur Beurteilung der Wirkung einer einzigen Kraft  $P$  auch umgekehrt nötig, zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  ausfindig zu machen, welche beide zusammen genau dasselbe bewirken, wie jene Kraft  $P$  für sich allein. Behufs Lösung dieser letzteren Aufgabe, welche das Zerlegen einer Kraft genannt wird, braucht man aber offenbar nur ein Parallelogramm  $ABCD$  (Fig. 7) zu konstruieren, welches die als Strecke  $AC$  gezeichnete Kraft  $P$  zur Diagonale hat; denn es stellen dann  $AB$  und  $AD$  zwei Kräfte  $P_1$  und  $P_2$  dar, welche nach § 41 dieselbe Wirkung haben, als  $AC = P$  für sich allein. Weil über einer Strecke  $AC$  als Diagonale unendlich viele Parallelogramme (wie z. B.  $AB'CD'$ ,  $AB''CD''$  etc.) möglich sind, so bleibt die vorliegende Aufgabe so lange unbestimmt, als nicht über Richtung und Grösse der Komponenten  $P_1$  und  $P_2$  zwei Bedingungen gegeben sind, resp. zwei Bestimmungen getroffen werden. Bekanntlich wird nun jedes Parallelogramm durch eine Diagonale in zwei kongruente Dreiecke geteilt und mithin reduziert sich die Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten konstruktiv auf die Verzeichnung eines Dreiecks, von welchem entweder zwei Winkel und eine Seite oder ein Winkel und zwei Seiten oder alle drei Seiten gegeben sind.

Wenn z. B. in der Längsrichtung eines Dachsparrens  $AE$  (Fig. 8), dessen unteres Ende in einen horizontalen Balken  $AF$  befestigt ist und welcher mit letzterem einen Winkel  $\alpha = 25^\circ$  einschliesst, ein Druck von  $800\text{ kg}$  existiert, so übt letzterer eine doppelte Wirkung aus: nämlich erstens einen gewissen Vertikaldruck  $V$ , mit welchem dann das den Balken  $AF$  tragende Mauerwerk belastet wird und zweitens einen Horizontalschub  $H$ , welcher in  $AF$  eine bestimmte Spannung erzeugt. Um die Grössen dieser beiden Wirkungen zu erhalten, konstruieren wir den gegebenen Druck von  $800\text{ kg}$  als Strecke  $AC$ , welche wir etwa  $8\text{ cm}$  lang machen, sodass jedes Centimeter  $100\text{ kg}$  ausdrückt, und verzeichnen nun über  $AC$  als Diagonale ein



Rechteck  $ABCD$ , dessen beiden Seiten  $AB$  und  $AD$  in horizontaler, bzw. vertikaler Richtung verlaufen und demgemäss auch die gesuchten Komponenten darstellen. Weil die Abmessungen von  $AB$  und  $AD$  7,25 und 3,38 Centimeter ergeben, so ist der Horizontalschub  $H = 725 \text{ kg}$  und der Verdikaldruck  $V = 338 \text{ kg}$ .

### § 46.

#### Beispiele.

156. Eine Kraft  $P = 100 \text{ kg}$  soll in zwei Seitenkräfte  $P_1$  und  $P_2$  zerlegt werden, welche mit der Richtung von  $P$  bezüglich die Winkel  $\alpha_1 = 71^\circ$  und  $\alpha_2 = 30^\circ 30'$  bilden; man ermittle durch Konstruktion die Seitenkräfte.

Resultate:  $P_1 = 51 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 96 \text{ kg}$ .

157. Eine Kraft  $P = 233 \text{ kg}$  in zwei Komponenten zu zerlegen, von welchen die eine  $111 \text{ kg}$  beträgt und mit  $P$  einen Winkel von  $82^\circ$  einschliesst; man bestimme Grösse und Richtung der anderen.

Resultate:  $244 \text{ kg}$  und  $26^\circ 30'$ .

158. Desgleichen  $P = 233 \text{ kg}$ , wenn  $P_1 = 296 \text{ kg}$  und  $\alpha_2 = 103^\circ$  gegeben sind; gesucht  $P_2$  und  $\alpha_1$ .

Resultate:  $P_2 = 138 \text{ kg}$ ,  $\alpha_1 = 27^\circ$ .

159. Man soll eine Kraft von  $91 \text{ kg}$  in zwei Komponenten von  $84$  und  $82 \text{ kg}$  zerlegen, welche Winkel bilden die letzteren mit der ersteren?

Antwort: Winkel von  $56^\circ$  und  $57^\circ 30'$ .

160. Welchen Normaldruck  $N$  erleidet eine wagerechte Ebene durch einen  $130 \text{ kg}$  schweren Körper, wenn an letzterem eine Kraft von  $110 \text{ kg}$  unter einem Winkel von  $65^\circ 20'$  gegen den Horizont aufwärts wirkt, und mit welcher Kraft  $P$  wird dieser Körper in horizontaler Richtung fortgezogen?

Resultate:  $N = 30 \text{ kg}$  und  $P = 46 \text{ kg}$ .

161. Mit welcher Beschleunigung würde sich der in voriger Aufgabe genannte Körper unter der Annahme bewegen, dass der Reibungswiderstand den sechsten Teil des Normaldruckes beträgt?

Antwort: Mit der Beschleunigung  $p = 3,1 \text{ Meter}$ .

162. Die Hängesäule  $AB$  eines einfachen Hängewerks (Fig. 9)

ist auf 10000 *kg* Zug beansprucht. Man bestimme (durch Konstruktion und durch Rechnung) denjenigen Druck *D*, welchen jede der beiden unter  $45^{\circ}$  gegen den Horizont geneigten Streben *AC* und *AE* auszuhalten hat.

Resultat:  $D = 7071 \text{ kg}$ .

163. Die beiden gleich langen Streben *AC* und *BE* eines doppelten Hängewerks (Fig. 10) sind unter  $\alpha = 45^{\circ}$  gegen den Horizont geneigt und durch einen wagerechten Spannriegel *AB* verbunden. Man berechne die Drücke *D* in den Streben und den Druck *P* im Spannriegel, wenn an jeder der beiden vertikalen Hängestangen eine Last  $Q = 6000 \text{ kg}$  wirkt.

Lösungen:  $D = Q \sqrt{2} = 8485 \text{ kg}$  und  $P = Q = 6000 \text{ kg}$ .

164. Wie gestalten sich aber die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn  $\alpha = 60^{\circ}$  ist?

Antwort:  $D = \frac{2}{3} Q \sqrt{3} = 6928 \text{ kg}$ ,  $P = \frac{1}{3} Q \sqrt{3} = 3464 \text{ kg}$ .

165. Ferner, wenn  $\alpha = 30^{\circ}$  ist?

Antwort:  $D = 2 Q = 12000 \text{ kg}$ ,  $P = Q \sqrt{3} = 10392 \text{ kg}$ .

166. An einem mit seinen Endpunkten befestigten Seile hängt eine Last von 100 *kg*. Wie gross sind die Spannungen in den beiden Seilstücken, welche zum Horizont unter Winkeln von  $10^{\circ}$  und  $20^{\circ}$  geneigt sind, wenn vom Eigengewicht des Seiles abgesehen wird?

Antwort: 188, resp. 197 *kg*.

## § 47.

### Verlegung des Angriffspunktes. Gleichgewicht zweier Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten.

Nachdem wir bisher gesehen haben, in welcher Weise beliebig viele auf einen Punkt *A* wirkende Kräfte zusammengesetzt werden können, wenden wir uns zu solchen Kräften, welche einen festen Körper in verschiedenen Punkten angreifen und beginnen mit dem einfachsten Fall, dass zwei gleiche Kräfte  $AC = BD = P$  (Fig. 11) in derselben Linie, aber nach entgegengesetzten Seiten wirken.

Die unmittelbare Folge dieser beiden Kräfte wird allerdings eine Verrückung der einzelnen Körperteilchen sein; denn letztere werden

sich nähern oder von einander entfernen, je nachdem die Kräfte den Körper auf Druck oder Zug beanspruchen und der ganze Körper wird daher im ersten Falle zusammengepresst, im andern ausgedehnt werden. Allein die Formänderung, welche der Körper hierdurch erleidet, ist in den von uns zu betrachtenden Fällen so gering und erfolgt überdies in so kurzer Zeit, dass wir die Körper als vollkommen starr und demnach die gegenseitige Lage der Angriffspunkte als unveränderlich ansehen dürfen.

Nun ist weiter klar, dass sich die Wirkung einer Kraft  $AC = P$  in ihrer Richtungslinie fortpflanzt und daher die nämliche sein muss, ob nun  $P$  in  $A$  oder  $A_1$  oder  $A_2$  oder in  $B$  angreift; es gilt mithin der Satz: Die Wirkung einer Kraft bleibt dieselbe, wenn ihr Angriffspunkt in ihrer Richtungslinie beliebig verlegt wird und die Voraussetzung erfüllt ist, dass der neue mit dem alten Angriffspunkt in fester Verbindung steht.

Verschieben wir aber entweder  $AC$  nach  $B$  oder auch  $BD$  nach  $A$ , so tritt der am Schlusse des § 41 erwähnte Fall ein, und es besteht folglich der weitere Satz: Zwei gleiche Kräfte, welche in derselben Geraden auf zwei fest verbundene Punkte nach entgegengesetzten Seiten wirken, heben einander auf.

### § 48.

#### Kräfte in einer Ebene an fest verbundenen Punkten angreifend.

Jetzt sind wir auch imstande, zwei Kräfte  $AD = P$  und  $BE = Q$ , welche in derselben Ebene liegen und auf zwei beliebige Punkte  $A$ ,  $B$  eines festen Körpers wirken, zusammensetzen: wir verlegen dieselben einfach in ihren Wirkungslinien bis an den Schnittpunkt  $C$  der letzteren (Fig. 12), machen also  $CF = AD = P$ ,  $CG = BE = Q$  und ergänzen  $FCG$  zu einem Parallelogramm  $FCGL$ , dessen Diagonale  $CL$  nach Grösse und Richtung die Resultierende der beiden Komponenten  $P$  und  $Q$  darstellt. Weil übrigens der Angriffspunkt der Resultante jeder andere Punkt in ihrer Richtungslinie sein kann, so verlegen wir ersteren nach  $M$ , so dass  $MN = CL = R$  die Mittelkraft von  $AD = P$  und  $BE = Q$  repräsentiert.

Es ist schliesslich leicht einzusehen, wie man mit Hilfe des vorstehenden Verfahrens beliebig viele Kräfte, welche in einer Ebene

liegen und einen festen Körper in irgend welchen Punkten angreifen, zusammensetzen kann: man braucht nur die Resultante der beiden ersten Kräfte mit der dritten Kraft zu vereinigen, dann die hierdurch erzielte Resultierende der drei ersten Kräfte mit der vierten Komponente zu verbinden und so fortzufahren, bis man auch die letzte Seitenkraft berücksichtigt hat.

§ 49.

**Zwei parallele Kräfte in der Ebene.**

Nur für parallele Kräfte lässt die soeben angeführte Methode im Stich, weil dann der Schnittpunkt der Angriffslinien in's Unendliche fällt. Um hier zum Ziele zu gelangen, benützen wir zwei gleiche Hilfskräfte  $AD = S = A'D' = S'$ , (Fig. 13), welche in der festen Verbindungsgeraden  $AA'$  der Angriffspunkte beider paralleler Komponenten

$$AB = P \text{ und } A'B' = P',$$

jedoch nach entgegengesetzten Seiten wirken; dieselben heben nach § 47 einander auf und ändern mithin an der Wirkung unseres Kraftsystems nicht das geringste, sodass die Resultante der vier Kräfte  $P, S, P'$  und  $S'$  zugleich die Resultante unserer beiden parallelen Kräfte ist.

Nun stellen die Diagonalen  $AE$  und  $A'E'$  der Parallelogramme  $ABED$  und  $A'B'E'D'$  die Resultierenden von  $P$  und  $S$ , resp. von  $P'$  und  $S'$  dar, folglich ist die gesuchte Mittelkraft von  $P$  und  $P'$  identisch mit der Mittelkraft von  $AE$  und  $A'E'$ , wir könnten daher die letztere nach § 48 erhalten als Diagonale eines Parallelogramms, welches aus den Seiten  $CF = AD$  und  $CF' = A'D'$  zu verzeichnen wäre; allein da uns für diesen wichtigen Fall eine rein konstruktive Lösung der Aufgabe aus später ersichtlichen Gründen nicht genügen kann, so schlagen wir von hier ab einen anderen Weg ein: wir setzen die beiden Kräfte  $CF$  und  $CF'$  nicht zusammen, sondern zerlegen jede in zwei Komponenten, wovon die eine parallel zu  $AA'$ , die andere parallel zu  $AB = P$ , demnach auch parallel zu  $A'B' = P'$  läuft, nämlich  $CF$  mittels des Parallelogramms  $CHFG$  in die Seitenkräfte  $CG$  und  $CH$ , sowie  $CF'$  durch das Parallelogramm  $CH'F'G'$  in die beiden Komponenten  $CG'$  und  $CH'$ .

Jetzt ist einerseits wegen Kongruenz der Parallelegramme  $CHFG$  und  $ABED$

$$CG = AD = S, CH = AB = P$$

und andererseits wegen Kongruenz der Parallelegramme  $CH'F'G'$  und  $A'B'E'D'$

$$CG' = A'D' = S', CH' = A'B' = P'.$$

Weil aber nach Voraussetzung  $S = S'$ , folglich auch  $CG = CG'$ , so heben die letzteren zwei Kräfte, die in einer Linie und nach entgegengesetzten Seiten auf den Punkt  $C$  wirken, einander auf; mithin verbleiben die bewegenden Kräfte  $CH = P$  und  $CH' = P'$ , welche, als in derselben Geraden und in demselben Sinne wirkend, sich summieren und wir haben als Gesamteresultante

$$R = P + P'.$$

Verlegen wir endlich den Angriffspunkt  $C$  von  $R$  nach  $M$ , so lässt sich letzterer Punkt folgendermassen bestimmen: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $CMA$  und  $CHF$ , sowie  $CMA'$  und  $CH'F'$  folgen die Proportionen

$$CM : CH = MA : HF \text{ und } CM : CH' = MA' : H'F',$$

und hieraus die Produktengleichungen

$$CM.HF = CH.MA \text{ und } CM.H'F' = CH'.MA',$$

oder, wenn man nach obigem  $HF = CG = S$ ,  $H'F' = CG' = S'$ ,  $CH = P$  und  $CH' = P'$  substituiert:

$$CM.S = P.MA \text{ und } CM.S' = P'.MA'.$$

Wegen  $S = S'$  ist aber auch  $CM.S = CM.S'$  und demgemäss

$$P.MA = P'.MA'$$

oder in Form einer Proportion:

$$P : P' = MA' : MA. \quad (39.)$$

Die Zusammenfassung vorstehender Resultate führt zu dem wichtigen Satze: Die Mittelkraft zweier paralleler Komponenten, welche an den Endpunkten einer festen Strecke wirken, ist gleich der Summe der Komponenten, ausserdem parallel zu letzteren, und ihr Angriffspunkt, auch Mittelpunkt der parallelen Kräfte genannt, teilt die feste Strecke dergestalt, dass sich die Abschnitte umgekehrt verhalten wie die Kräfte, die an den Endpunkten wirken.

§ 50.

Beispiele.

167. Zwei Kräfte  $P = 7 \text{ kg}$  und  $Q = 10 \text{ kg}$  ergreifen die Endpunkte einer festen, einen Meter langen Strecke  $AB$  und bilden mit den Verlängerungen der letzteren Winkel von  $67^\circ$  und  $48^\circ$ . Man bestimme auf konstruktivem Wege die Resultante  $R$ , ferner den Winkel  $\alpha$  zwischen  $P$  und  $R$ , sowie endlich den Punkt  $C$ , in welchem  $R$  die Gerade  $AB$  schneidet.

Resultate:  $R = 14,4 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 39^\circ$  und  $AC = 54 \text{ cm}$ .

168. Desgleichen, wenn die beiden Kräfte  $P = 8 \text{ kg}$ ,  $Q = 6 \text{ kg}$ , die bezüglichen Winkel  $30^\circ$  und  $60^\circ$ , sowie  $AB = 120 \text{ cm}$  gegeben sind.

Resultate:  $R = 10 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 37^\circ$  und  $AC = 67,5 \text{ cm}$ .

169. Eine möglichst einfache Konstruktion für den Mittelpunkt  $M$  (Fig. 14) zweier paralleler Kräfte  $AC = P$  und  $BD = Q$  anzugeben.

Auflösung: Macht man  $AE = BD$  und verlängert  $BD$  um  $BF = AC$ , so schneidet die Verbindungsgerade  $EF$  die Strecke  $AB$  im gesuchten Punkte  $M$ . Beweis?

170. Wenn in der vorigen Aufgabe allgemein  $AB = d$  gesetzt wird, wie gross berechnen sich die Abschnitte  $AM = x$  und  $MB = y$ ?

Antwort:  $x = \frac{Qd}{P+Q}$  und  $y = \frac{Pd}{P+Q}$ .

171. Welche Resultate erhält man für die speziellen Zahlen  $P = 7 \text{ kg}$ ,  $Q = 15 \text{ kg}$  und  $d = 44 \text{ cm}$ ?

Antwort:  $x = 30 \text{ cm}$ ,  $y = 14 \text{ cm}$ .

172. Drei parallele Kräfte von 22, 52 und 26  $\text{kg}$  wirken in den Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  einer starren Geraden. Wie weit ist der Angriffspunkt  $M$  der Mittelkraft von  $A$  entfernt, wenn  $AB = 50$  und  $BC = 100 \text{ cm}$  gegeben sind?

Antwort:  $AM = 65 \text{ cm}$ .

173. Desgleichen, wenn die Kräfte 7, 3 und 5  $\text{kg}$  betragen und die Abschnitte  $AB = 35 \text{ cm}$ ,  $BC = 16 \text{ cm}$  sind?

Antwort:  $AM = 24 \text{ cm}$ .

## Viertes Kapitel.

### Von den parallelen Kräften im Raume.

#### § 51.

#### Statisches Moment einer Kraft.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung solcher Kräfte, welche im Raume wirken und ein System fest verbundener Punkte, also z. B. beliebige Punkte eines starren Körpers angreifen. Denken wir uns jetzt in beliebiger Lage zum Körper eine Ebene, mit welcher der Angriffspunkt jeder Kraft fest verbunden sei, so kommt es vor allem darauf an, sich die Wirkung einer solchen Kraft auf die Ebene zu vergegenwärtigen und womöglich ein genaues Mass für diese Wirkung äusfindig zu machen.

Eine Kraft  $AB = P$  (Fig. 15), deren Angriffspunkt  $A$  ausserhalb einer Ebene  $MN$  liegt und mit letzterer in festem Zusammenhange steht, wird aber offenbar das Bestreben haben, die Ebene aus ihrer Lage herauszudrehen, und weil diese Drehbestrebung einerseits der Grösse der Kraft  $P$  selbst, andererseits proportional ist der Länge des von  $A$  auf die Ebene gefällten Lotes  $AC = p$ ,\*) so bietet sich als ein geeignetes Mass für die Gesamtwirkung der Kraft das Produkt  $P.p$  dar. Zu merken ist hierbei noch, dass das Lot  $AC = p$  der Hebelsarm der Kraft  $P$ , die Ebene  $MN$  Momentenebene und das Produkt  $P.p$  das statische Moment der Kraft  $P$  in Bezug auf die Ebene  $MN$  heisst.

Zwar ist jedes statische Moment das Produkt aus einer Kraft und einer Strecke, darf aber keineswegs mit dem Begriffe „mechanische

\*) Sollte dies nicht ohne weiteres einleuchten, so stelle man sich eine mittels Scharnieren um eine horizontale Achse drehbar gemachte ebene Tafel vor, welche vermöge ihres Eigengewichts eine vertikale Lage annehmen und auf Grund des letzteren, sowie der in den Scharnieren stattfindenden Reibung jeder Bewegung widerstreben wird. Schlägt man jetzt einen Metallstift senkrecht in die Ebene und hängt an sein freies Ende ein Gewicht  $P$ , so wird das letztere die Tafel aus ihrer Anfangslage herausdrehen und zwar wird die Wirkung, das ist hier der Ausschlagwinkel, um so grösser sein: 1) je grösser man das angehängte Gewicht nimmt und 2) je weiter der Stift aus der Tafel hervorragt.

Arbeit“ verwechselt werden. Wenn daher die Kraft in Kilogrammen und der Hebelsarm in Metern ausgedrückt sind, so könnte man als Einheit des statischen Moments ein Kilogramm-meter (*kym*) festsetzen im Gegensatz zur Arbeitseinheit Meterkilogramm (*mkg*); allein in der Hauptsache ist das statische Moment nicht Endzweck, sondern nur Mittel zum Zweck, und es kommt daher auch vorläufig nur daran an, alle Kräfte mit dem Kilogramm und alle Hebelsarme mit derselben Längeneinheit zu messen.

Dagegen ist bei jeder hierhergehörigen Untersuchung wohl zu beachten, ob die einzelnen Kräfte die Momentenebene in gleichem oder im entgegengesetzten Sinne zu drehen suchen. Ist ein solcher Gegensatz vorhanden, so muss ihm algebraisch dadurch Rechnung getragen werden, das man die Momente der in einem gewissen Sinne drehenden Kräfte positiv und diejenigen der entgegengesetzt drehenden Kräfte negativ einführt. In den nächsten Paragraphen wollen wir nun vor allem einen ungemein wichtigen Satz über die statischen Momente paralleler Kräfte entwickeln.

§ 52.

**Zwei parallele Kräfte im Raume.**

Es seien  $A_1 B_1 = P_1$  und  $A_2 B_2 = P_2$  (Fig. 16) zwei parallele Kräfte, deren Angriffspunkte mit der Ebene  $MN$  in fester Verbindung stehen und von letzterer um die Strecken

$$A_1 C_1 = p_1, \quad A_2 C_2 = p_2$$

entfernt sind. Nun wissen wir zunächst aus § 49, dass ihre Resultante

$$AB = R = P_1 + P_2,$$

ausserdem parallel zu beiden Komponenten ist und dass der Angriffspunkt  $A$  auf der Verbindungsgeraden  $A_1 A_2$  letztere nach der Proportion

$$AA_2 : AA_1 = P_1 : P_2$$

teilt. Zieht man aber jetzt durch  $A$  die Linie  $D_1 D_2$  parallel zu  $C_1 C_2$ , so entstehen zwei ähnliche Dreiecke  $D_2 A A_2$  und  $D_1 A A_1$ , folglich verhält sich

$$AA_2 : AA_1 = A_2 D_2 : A_1 D_1$$

und mithin auch

$$P_1 : P_2 = A_2 D_2 : A_1 D_1.$$



Bezeichnet man nunmehr den Hebelsarm  $AC$  der Resultante mit  $r$ , so erkennt man aus der Figur ohne weiteres die Richtigkeit der Beziehungen

$$A_2 D_2 = A_2 C_2 - AC = p_2 - r,$$

sowie

$$A_1 D_1 = AC - A_1 C_1 = r - p_1.$$

Mit Einsetzung derselben in die letzte Proportion ergibt sich

$$P_1 : P_2 = (p_2 - r) : (r - p_1)$$

oder

$$(P_1 + P_2) r = P_1 p_1 + P_2 p_2$$

oder endlich, weil  $P_1 + P_2 = R$  ist:

$$Rr = P_1 p_1 + P_2 p_2, \quad (40.)$$

in Worten: Sind die Angriffspunkte zweier paralleler Kräfte mit einer Ebene fest verbunden, so ist in Bezug auf letztere das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente der Seitenkräfte.

### § 53.

#### Parallele Kräfte an beliebigen Punkten eines festen Systems.

Der soeben entwickelte Satz lässt sich, indem man ihn wiederholt anwendet, ohne jede Schwierigkeit erweitern auf beliebig viele Kräfte

$$P_1, P_2, P_3, P_4, \dots, P_n,$$

deren Angriffspunkte untereinander fest verbunden sind und von einer (beliebig gedachten) Ebene  $MN$  die Abstände

$$p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n,$$

besitzen mögen; denn bezeichnen wir die Resultierende der beiden ersten Kräfte mit  $R_1$ , ihren Hebelsarm in Bezug auf erwähnte Ebene mit  $r_1$ , dann die Resultierende von  $P_1, P_2, P_3$  mit  $R_2$ , ihren Hebelsarm mit  $r_2$ , ferner die Resultierende der vier ersten Kräfte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  mit  $R_3$ , ihren Hebelsarm mit  $r_3$  u. s. f. die Gesamresultierende aller  $n$  Kräfte mit  $R$ , den Abstand ihres Angriffspunktes von der Ebene  $MN$  mit  $r$ , so gelten die  $n - 1$  Gleichungspaare

$$R_1 = P_1 + P_2 \text{ und } R_1 r_1 = P_1 p_1 + P_2 p_2,$$

$$R_2 = R_1 + P_3 \quad \text{„} \quad R_2 r_2 = R_1 r_1 + P_3 p_3,$$



der Resultante bestimmen, indem man seine Abstände  $x$  und  $y$  von den Quadratseiten  $A_1 A_2$  und  $A_1 A_4$  angiebt.

Lösung:  $x = 280$  und  $y = 275$  Millimeter.

175. Man bestimme den Mittelpunkt dreier paralleler Kräfte  $P_1 = 80 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 60 \text{ kg}$  und  $P_3 = 110 \text{ kg}$ , welche die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $A_1 A_3 = 30$  und  $A_2 A_3 = 40$  Centimeter angreifen.

Lösung: Der Kräftemittelpunkt ist von beiden Katheten 96 Millimeter entfernt.

176. Drei beliebige Kräfte  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  wirken in den Eckpunkten  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite  $a$  senkrecht zur Ebene des letzteren. Welches sind die Abstände  $x$ ,  $y$  und  $z$  des Kräftemittelpunktes  $A$  von den drei Seiten  $A_2 A_3$ ,  $A_3 A_1$  und  $A_1 A_2$ ?

$$\text{Antwort: } x = \frac{a P_1 \sqrt{3}}{2R}, \quad y = \frac{a P_2 \sqrt{3}}{2R} \quad \text{und} \quad z = \frac{a P_3 \sqrt{3}}{2R},$$

worin  $R = P_1 + P_2 + P_3$ .

177. Wohin fällt aber  $A$ , wenn spezieller Weise die drei Kräfte einander gleich sind?

Antwort: In den Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks.

178. In den Eckpunkten, den Seitenmittelpunkten und dem Durchschnittspunkte der Diagonalen eines Rechtecks, dessen Seiten 90 und 120 Centimeter betragen, wirken in fortlaufender Reihenfolge die neun parallelen Kräfte von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 Kilogramm. Es sollen die Abstände  $x$  und  $y$  des Kräftemittelpunktes von der ersten und letzten Rechteckseite berechnet werden.

Resultat:  $x = 76 \text{ cm}$ ,  $y = 41 \text{ cm}$ .

179. Zehn Kräfte von 2, 4, 6, 8, 10, 9, 7, 5, 3 und 1 Kilogramm wirken in paralleler Richtung und nach derselben Seite; ihre Angriffspunkte sind fest verbunden und haben von einer durch das System gelegten Ebene die bezüglichen senkrechten Abstände von 10, 5, 20, 15, 6, 40, 0, 48, 10 und 40 Centimeter, die ersten fünf liegen vor, die übrigen hinter der Ebene. Man ermittle die Resultante  $R$ , ihr statisches Moment in Bezug auf die erwähnte Ebene und ihren Hebelsarm  $x$ .

Lösung:  $R = 55$ ,  $Rx = -330$ ,  $x = -6 \text{ cm}$ , der Kräftemittelpunkt liegt also hinter der Momentenebene.

180. Acht parallele und nach derselben Seite hin wirkende Kräfte von 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 Kilogramm ergreifen die Ecken eines Würfels von 9 dm Seite in der aus Fig. 17 ersichtlichen Anordnung. Man lege sich nun drei zu einander lotrechte Ebenen an, von welchen jede den Würfel halbiert und berechne mit Hilfe des Momentsatzes die drei Abstände  $x$ ,  $y$  und  $z$ , des Kräftemittelpunktes, indem man die Momente jener Kräfte, deren Angriffspunkte in Beziehung auf die angenommenen Ebenen rechts, vorne und oberhalb sich befinden, positiv, demgemäss die Momente aller übrigen Kräfte negativ setzt.

Lösung:  $x = 0$ ,  $y = -1$  dm und  $z = -2$  dm; der Angriffspunkt der resultierenden Kraft liegt also in der ersten, links der zweiten und unter der dritten Ebene.

181. Wohin würde aber der Mittelpunkt der acht Kräfte zu liegen kommen, wenn letztere gleich gross wären?

Antwort: In den Durchschnittspunkt der drei Momentenebenen (Mittelpunkt des Würfels).

### § 55.

#### Gleichgewichtsbedingung für parallele Kräfte, welche an einem festen Körper wirken.

Aus Formel 46 des § 53 folgt für den Hebelsarm der Resultante eines Systems paralleler Kräfte

$$r = \frac{\Sigma (Pp)}{R}.$$

Suchen nun die einzelnen Kräfte die Momentenebene in verschiedenem Sinne zu drehen, so stellt der Zähler des Bruches rechter Hand eine algebraische Summe dar, und es ist dann spezieller Weise möglich, dass ersterer gleich Null wird. Weil aber in diesem Falle auch  $r$  verschwindet, so ist

$$\Sigma (Pp) = 0 \tag{47.}$$

die Bedingung dafür, dass der Angriffspunkt der Mittelkraft in der Momentenebene liegt.

Wenn aber jetzt ausserdem die Momentenebene in der Richtung der Resultante feste Stützpunkte findet, so wird offenbar die Wirkung durch Gegendrücke in diesen Unterstützungspunkten aufgehoben, mit

gleich der Summe der abwärts gerichteten Kräfte sein; in der That erhält man durch Subtraktion der letzten von der drittletzten Gleichung

$$X - Y = P + Q.$$

§ 57.

Beispiele.

182. Auf eine Eisenbahnschiene, welche in ihren Endpunkten  $A$  und  $B$  unterstützt ist, wirkt ausser dem Eigengewicht von  $150 \text{ kg}$ , welches im Halbirungspunkte  $C$  der Schiene angreift, noch eine Last von  $600 \text{ kg}$  in  $D$ . Man berechne die Drücke  $X$  und  $Y$ , welche in den Auflagerpunkten  $A$  und  $B$  stattfinden unter der Bedingung, dass  $AB = 4 \text{ m}$  und  $AD = 1 \text{ m}$  ist.

Resultate:  $X = 525 \text{ kg}$ ,  $Y = 225 \text{ kg}$ .

183. Ein eiserner Träger von  $300 \text{ kg}$  Gewicht und  $6,1 \text{ m}$  Länge ist an beiden Enden auf  $10 \text{ cm}$  Länge gelagert und trägt zwei Lasten von  $1000 \text{ kg}$  und  $700 \text{ kg}$ , deren Angriffspunkte vom linken Endpunkte  $85 \text{ cm}$  und  $125 \text{ cm}$  entfernt sind. Welches sind die Reaktionen  $X$  und  $Y$ , welche in den Mitten der Auflagerflächen wirken?

Antwort:  $X = 1576 \frac{2}{3}$  und  $Y = 423 \frac{1}{3} \text{ kg}$ .

184. Wie gestalten sich aber die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn der Träger in seiner ganzen Länge noch mit  $30 \text{ kg}$  pro laufenden Meter belastet ist?

Antwort:  $X = 1668 \text{ kg}$ ,  $Y = 514 \frac{2}{3} \text{ kg}$ .

185. Eine an ihren Enden gelagerte cylindrische Welle von  $200 \text{ kg}$  Gewicht misst von Mitte zu Mitte der Lagerung  $125 \text{ cm}$ . Sie ist beansprucht durch vier Kräfte von  $2000$ ,  $625$ ,  $750$  und  $1200 \text{ kg}$ , deren Angriffspunkte von der linken Lagermitte um  $25$ ,  $40$ ,  $50$  und  $80 \text{ cm}$  abstehen. Man soll die beiden Drücke in den Zapfenlagern bestimmen.

Resultate:  $X = 3007 \text{ kg}$ ,  $Y = 1768 \text{ kg}$ .

186. Eine Radachse (Fig. 20) ist in  $A$  und  $B$  gelagert, dagegen in  $C$  und  $D$  durch  $Q = 800 \text{ kg}$  und  $Q' = 450 \text{ kg}$  belastet. Man ermittle die Reaktionen  $X$  und  $Y$  in  $A$  und  $B$ , wenn  $AC = 1,1 \text{ m}$ ,  $CB = 0,9 \text{ m}$  und  $BD = 1 \text{ m}$  gegeben sind.

Resultate:  $X = 135 \text{ kg}$  und  $Y = 1115 \text{ kg}$ .

187. Die vorige Aufgabe wurde unter Vernachlässigung des Eigengewichts der Achse gelöst. Was erhält man aber für  $X$  und  $Y$  unter Berücksichtigung des Achsengewichtes  $G = 120 \text{ kg}$ , wenn dasselbe in einem Abstände  $BE = 0,75 \text{ m}$  links von  $B$  wirkt?

Antwort:  $X = 180 \text{ kg}$  und  $Y = 1190 \text{ kg}$ .

188. Man löse die Aufgabe 186 unter der allgemeinen Annahme, dass  $AC = a$ ,  $CB = b$  und  $BD = c$  sei.

Lösung:  $X = \frac{bQ - cQ'}{a + b}$ ,  $Y = \frac{aQ + (a + b + c)Q'}{a + b}$ .

## Fünftes Kapitel.

### Die Lehre vom Schwerpunkte.

§ 58.

#### Erklärungen.

Denkt man sich einen festen Körper aus zahllosen und folglich verschwindend kleinen Teilchen — materiellen Punkten — zusammengesetzt, so wirkt auf jedes dieser Teilchen eine Kraft, welche nahe am Erdmittelpunkte ihren Sitz hat und Anziehungskraft der Erde oder Schwerkraft genannt wird.

Bei der im Verhältnis zu den Dimensionen eines irdischen Körpers ungeheuren Entfernung des Erdzentrums können alle diese Kräfte als vollkommen parallel angesehen werden, und es wirkt daher auf jeden starren Körper ein System unendlich vieler paralleler Kräfte, deren Angriffspunkte untereinander fest verbunden sind und welche sich mithin zu einer Resultante zusammensetzen. Weil die Grösse der letzteren das Gewicht und ihr Angriffspunkt der Schwerpunkt des Körpers heisst, so kann man den Schwerpunkt eines Körpers definieren als denjenigen Punkt, in welchem das Eigengewicht eines Körpers angreift oder auch als den Mittelpunkt aller parallelen Kräfte, welche vom Erdmittelpunkte aus auf die einzelnen materiellen Punkte eines Körpers wirksam sind.

In der Schwerpunktlehre teilt man alle Gebilde ein in Linien,

Flächen und Körper und versteht darunter mathematische Linien, Flächen und Körper, über welchen aber irgend eine Materie ausgebreitet, resp. welche von solcher erfüllt sind. Gewissermassen als Modell einer materiellen Linie könnte ein sehr schwacher unbiegsamer Metalldraht und als materielle Fläche etwa ein dünnes starres Metallblech gelten. Speziell nennt man nun wieder diejenigen materiellen Linien, Flächen und Körper homogen, von welchen gleiche (Längen-, bzw. Flächen-, bzw. Volumen-) Teilchen an allen möglichen Stellen des Gebildes gleich viel wiegen. So wird beispielsweise ein Metalldraht homogen genannt werden dürfen, wenn er überall gleichen Querschnitt besitzt; denn zerschneidet man ihn in lauter millimeterlange oder noch kürzere Stückchen gleicher Länge, so wiegt eines genau so viel wie alle anderen. Wenn man ferner einen homogenen Körper in noch so kleine aber gleiche Teilchen zerlegt, so müssen alle dasselbe Gewicht besitzen. Dagegen nennt man heterogen ein Gebilde, dessen einzelne gleich grosse Teile ihrem Gewichte nach verschieden sind, z. B. ein als Ganzes aufgefasstes Gebäude oder ein aus verschiedenen Metallen gefertigter Gegenstand, ja selbst ein an den einzelnen Stellen ungleich stark gehämmertes Stück Eisen müsste streng genommen als heterogen betrachtet werden.

Schliesslich wäre noch als hierhergehörig zu bemerken, dass eine Ebene, welche durch den Schwerpunkt eines Gebildes hindurchgeht, Schwerebene und analog eine Gerade, die den Schwerpunkt enthält, Schwerlinie oder Schwerachse jenes Gebildes genannt wird.

## § 59.

### Fundamentalsatz der Schwerpunktslehre.

Ein für die folgenden Schwerpunktsbestimmungen besonders wichtiger und äusserst fruchtbarer Satz lautet: Jede Symmetrieebene\*) eines homogenen Raumgebildes ist in Bezug auf letzteres zugleich Schwerebene.

---

\*) Die Symmetrieebene einer Raumfigur ist eine durch letztere hindurch gelegte mathematische Ebene von folgender charakteristischen Eigenschaft: Fällt man von irgend einem Punkte der Raumgrösse ein Lot auf die Ebene und verlängert dasselbe nach der andern Seite um sich selbst, so trifft man stets wieder auf einen Punkt des Gebildes. So ist z. B.

Beweis: Denkt man sich das betreffende Raumgebilde in zahllose gleiche Massenteilchen zerlegt und nimmt die Symmetrieebene als Momentenebene an, so entspricht jedem Teilchen auf der einen Seite der Ebene ein solches auf der anderen, welches mit jenem gleiches Gewicht und gleichen Abstand, folglich auch gleiches statisches Moment hat. Da die Momente zweier solcher einander gegenüber liegenden Teilchen mit verschiedenen Vorzeichen versehen werden müssen, so ist die Summe der statischen Momente aller Massenteilchen, aus welchen das homogene Gebilde besteht, in Bezug auf die Symmetrieebene als Momentenebene gleich Null, und mithin liegt nach § 55, Beziehung 47, der Angriffspunkt der Resultante aller parallelen Kräfte, dass ist der Schwerpunkt des Raumgebildes, in der Symmetrieebene.

In vorstehendem allgemeinen Satze ist als Spezialfall offenbar auch die Regel enthalten, dass jede Symmetrieachse \*) irgend welcher ebenen und homogenen Figur gleichzeitig eine Schwerlinie der letzteren darstellt.

## § 60.

### Schwerpunkte homogener geradliniger Gebilde.

a) Der Schwerpunkt einer Strecke ist der Mittelpunkt der letzteren.

Beweis: Denn jede durch die Strecke selbst gehende, so wie die in ihrem Mittelpunkte senkrecht errichtete Ebene ist Symmetrieebene.

b) Der Schwerpunkt eines Winkels liegt auf der Verbindungs-

---

eine Symmetrieebene diejenige, welche durch die Axe eines Cylinders oder eines Kegels oder durch den Mittelpunkt einer Kugel gelegt wird und zwar sowohl für die Oberfläche als für das Volumen des betreffenden Körpers; ferner ist jede ebene Spiegelfläche eine Symmetrieebene zwischen einem beliebigen Gegenstande und seinem Bilde. Zwar teilt hiernach jede Symmetrieebene den Körper in zwei gleich grosse Teile, welche letzteren aber nicht notwendig kongruent zu sein brauchen; beispielsweise besteht ein normal gewachsenes und regelrecht stehendes Pferd wohl aus zwei symmetrischen Hälften, letztere können aber absolut nicht zur Deckung gebracht werden.

\*) Unter Symmetrieachse einer ebenen Figur versteht man einfach eine gerade Linie, welche die Figur in zwei kongruente Stücke scheidet.



strecke der Halbierungspunkte beider Schenkel und teilt die erstere im umgekehrten Verhältnis der letzteren.

Beweis: Die Gewichte der beiden Schenkel greifen in deren Mittelpunkten  $D$  und  $E$  (Fig. 21) an und verhalten sich direkt wie die Längen\*), also wie  $AB : AC$ ; mithin liegt nach § 49 der Schwerpunkt  $S$  so, dass die Proportion

$$SD : SE = AC : AB$$

erfüllt ist.

Konstruktion: Verbindet man den Halbierungspunkt  $F$  von  $BC$  mit  $D$  und  $E$ , so schneidet die den Winkel  $DFE$  Halbierende die Linie  $DE$  im Schwerpunkte  $S$ , denn im Dreiecke  $DEF$  verhält sich bekanntlich

$$SD : SE = FD : FE$$

oder, weil

$$FD = AE = \frac{1}{2} AC \text{ und } FE = AD = \frac{1}{2} AB$$

ist:

$$SD : SE = \frac{1}{2} AC : \frac{1}{2} AB = AC : AB,$$

wie es sein soll.

c) Der Schwerpunkt eines Dreiecksumfanges ist der Mittelpunkt vom eingeschriebenen Kreise des Dreiecks  $DEF$  (Fig. 22), welches die Mitten der Seiten vom ursprünglichen Dreiecke  $ABC$  zu Ecken hat.

Beweis: Betrachtet man vorerst den Umfang des Dreiecks zusammengesetzt aus dem Winkel  $BAC$  und der Seite  $BC$ , so verbindet die Halbierungslinie des Winkels  $DFE$  den Schwerpunkt  $F$  der Seite  $BC$  mit dem Schwerpunkte  $G$  des Winkels  $BAC$ , enthält also selbst den Schwerpunkt des Dreiecksumfanges. Nimmt man zweitens an, der Dreiecksumfang bestehe aus dem Winkel  $BCA$  und der Seite  $AB$ , so ist aus gleichen Gründen die den Winkel  $EDF$  Halbierende  $DH$  eine Schwerlinie unseres Gebildes, und mithin bezeichnet der Durchschnittspunkt  $S$  zwischen  $FG$  und  $DH$  den Schwerpunkt vom Umfange des Dreiecks  $ABC$ .

---

\*) Bezeichnet man nämlich die Gewichte zweier beliebiger homogener Linien mit  $G_1$  und  $G_2$ , ihre Längen mit  $L_1$  und  $L_2$ , sowie das Gewicht pro Längeneinheit mit  $\gamma$ , so hat man  $G_1 = \gamma L_1$ ,  $G_2 = \gamma L_2$  und mithin

$$G_1 : G_2 = \gamma L_1 : \gamma L_2 = L_1 : L_2.$$

d) Der Schwerpunkt eines Vierecksumfanges kann ebenfalls als Schnittpunkt zweier Schwerlinien erhalten werden, indem man ihn zweimal in je zwei einander gegenüberliegende Winkel zerlegt und deren Schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$ , resp.  $S_3$  und  $S_4$  durch gerade Linien verbindet; der Schnittpunkt zwischen  $S_1 S_2$  und  $S_3 S_4$  stellt den Schwerpunkt des Vierecksumfanges dar. Zur Übung führe man die Konstruktion genau aus.

### § 61.

#### Fortsetzung.

Haben wir im vorigen Paragraphen die Schwerpunkte von homogenen Linien konstruktiv bestimmt, so soll nunmehr auch gezeigt werden, wie die Lösung derselben Aufgabe auf dem Wege der Rechnung erfolgen kann.

Zu diesem Behufe ist es nur nötig eine Momentenebene — für ebene Figuren genügt eine Momentenachse — in zweckmässig gewählter Lage anzunehmen und in Bezug auf dieselbe das statische Moment der Resultante gleich der Summe der Momente aller parallelen Komponenten, das ist hier: das Moment vom Gewichte des Ganzen gleich der Summe der Momente von den Gewichten seiner einzelnen Teile zu setzen.

Hierbei ist es auch erlaubt, statt der Gewichte die Längen der vorkommenden Linien in Rechnung zu bringen; denn besteht ein Liniengebilde von der Gesamtlänge  $L$  aus  $n$  Teilen mit den Längen  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$ , sodass

$$L = l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n = \Sigma (l),$$

bezeichnen wir ferner den Abstand des Gesamtschwerpunktes von einer bestimmten Ebene mit  $x$ , die Schwerpunktabstände der einzelnen Teile von derselben Ebene mit  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  und das Gewicht der Längeneinheit mit  $\gamma$ , so gilt nach dem Momentensatze (§ 54, Formel 42 oder 46) die Gleichung

$$L \gamma x = l_1 \gamma x_1 + l_2 \gamma x_2 + l_3 \gamma x_3 + \dots + l_n \gamma x_n$$

und hieraus folgt nach Division durch  $\gamma$

$$L x = l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + \dots + l_n x_n = \Sigma (lx).$$

Weil ein Punkt in der Ebene durch seine Abstände von zwei gegebenen Geraden bestimmt ist, so hat man für ebene Gebilde das

vorstehend erläuterte Verfahren im allgemeinen zweimal anzuwenden. Es seien z. B. die drei Seiten eines Dreiecks (Fig. 22)  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  und die zu  $b$  gehörige Höhe  $BK = h$ . Bezeichnen wir dann den Schwerpunktsabstand des Dreiecksumfangs von  $b$  mit  $x$ , so haben wir in Bezug auf  $AC$  als Momentenachse

$$(a + b + c) x = a \cdot \frac{h}{2} + b \cdot 0 + c \cdot \frac{h}{2}$$

und mithin

$$x = \frac{a + c}{a + b + c} \cdot \frac{h}{2}.$$

Analog ergibt sich, wenn man  $AB$  zur Momentenachse wählt, die Entfernung des Schwerpunktes von ersterer

$$y = \frac{a + b}{a + b + c} \cdot \frac{k}{2},$$

worin  $k$  die auf der Seite  $c$  stehende Dreieckshöhe bezeichnet.

Dagegen reicht bei symmetrischen ebenen Gebilden zur Ermittlung des Schwerpunkts ein einziger Abstand und demgemäss auch lediglich eine Momentengleichung aus, da ja ersterer in der Symmetrieachse liegt. So sei das durch Figur 23 dargestellte Liniengebilde homogen und für  $AB$  symmetrisch. Setzen wir nun  $AB = a$ ,  $CD = b$ ,  $EF = c$  und den Schwerpunktsabstand  $AS = x$ , so folgt aus der Gleichung der auf  $CD$  bezogenen Momente

$$(a + b + c) x = a \cdot \frac{a}{2} + b \cdot 0 + c \cdot a;$$

$$x = \frac{a + 2c}{a + b + c} \cdot \frac{a}{2},$$

wodurch die Lage des Schwerpunktes völlig bestimmt ist.

## § 62.

### Beispiele.

189. Wo liegt der Schwerpunkt eines rechten Winkels mit den Schenkeln  $a$  und  $b$ ?

Antwort: Er hat von  $b$  und  $a$  die Abstände

$$x = \frac{a}{a + b} \cdot \frac{a}{2} \text{ und } y = \frac{b}{a + b} \cdot \frac{b}{2}$$

190. Die für  $AB$  symmetrische Figur 24 besteht aus den Strecken  $AB = a$ ,  $CE = DF = b$  und  $CD = c$ ; man berechne den Schwerpunktsabstand  $AS = x$ .

Resultat: 
$$x = \frac{a^2 + 2b^2}{2(a + 2b + c)}$$

191. Was erhält man aus der letzten Formel für die Zahlenwerte  $a = 2 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ cm}$  und  $c = 6 \text{ cm}$ ?

Antwort:  $x = 3 \text{ mm}$ .

192. Welcher Wert ergibt sich aber für  $c = b = a$ ?

Antwort:  $x = \frac{3}{8} a$ .

193. Ein Gebilde ist zusammengesetzt aus einer Strecke  $CD = 6a$ , eines in deren Mittelpunkte  $A$  errichteten Lotes  $AB = 4a$  und den Verbindungsgeraden  $BC$  und  $BD$ . Wie weit ist der Schwerpunkt von  $A$  entfernt?

Antwort: Um  $x = 1,4 a$ .

194. Man ermittle die Schwerpunktslage einer Figur, welche aus dem Umfange eines gleichseitigen Dreiecks von der Seite  $a$  und einer Höhe besteht.

Lösung: Der Schwerpunkt liegt in der Höhe und ist von der zugehörigen Seite um  $x = \frac{7\sqrt{3} + 2}{44} a = 0,321 a$  entfernt.

### § 63.

#### Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens.

Wie schon aus dem Bisherigen klar hervortritt, giebt es zwei Grundmittel, mit Hilfe welcher der Schwerpunkt eines homogenen Gebildes ermittelt werden kann, nämlich erstens die Feststellung etwaiger Symmetrieebenen, resp. Symmetrieachsen, und, wenn die letzteren gar nicht oder doch nicht in genügender Anzahl vorhanden sein sollten, die Zerlegung des Gebildes in einzelne Bestandteile, deren Schwerpunkte man bereits kennt.

Was nun irgend einen Kreisbogen  $ACB$  (Fig. 25) anlangt, so ist zwar zunächst derjenige Radius  $OC = r$ , welcher die Sehne  $AB = s$  und damit zugleich die Länge  $b$  des Bogens halbiert, eine Symmetrie- und demnach auch Schwerachse; um aber den Abstand

$OS = x$  des Schwerpunktes von  $O$  zu erhalten, sind wir genötigt, den Bogen  $ACB$  in unendlich viele, am besten gleich lang gedachte, Teilchen zu zerlegen. Diese letzteren, welche wir Bogenelemente nennen wollen, sind dann bei ihrer verschwindenden Länge als geradlinig anzusehen, und es kommt jetzt darauf an, einen mathematischen Hilfssatz zu entwickeln, welcher von jedem solchen Kreisbogenstückchen gilt.

Zu dem Ende greifen wir ein Kreisbogenelement  $GE$  an beliebiger Stelle heraus, ziehen durch  $O$  eine Parallele  $MN$  zu  $AB$ , ferner  $EF$  parallel  $CO$ ,  $GH$  parallel  $AB$  und verbinden  $E$  mit  $O$ . Hierdurch entstehen zwei bei  $F$  und  $H$  rechtwinkliche Dreiecke, deren Hypotenusen  $EO$ ,  $GE$ , sowie deren Katheten  $EF$ ,  $GH$  lotrecht zu einander sind, sodass der Proportion

$$OE : EF = EG : GH$$

genügt wird. Setzen wir hierin den Radius  $OE = r$ , das Bogenelement  $EG = e$ , die Projektion des letzteren auf die Sehne, das ist  $GH = G'H' = p$ , sowie seinen Abstand von  $MN$ , nämlich  $EF = y$ , so folgt

$$r : y = e : p$$

und hieraus

$$ey = rp.$$

Bezeichnen wir nun alle Elemente des Kreisbogens vom Punkte  $A$  bis zum Punkte  $B$  fortlaufend mit

$$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n,$$

ferner ihre bezüglichlichen Abstände von der Geraden  $MN$  mit

$$y_1, y_2, y_3, \dots, y_n,$$

so ist in Bezug auf  $MN$  als Momentenachse das statische Moment des ganzen Kreisbogens gleich der Summe der Momente aller seiner Teile, also

$$bx = e_1 y_1 + e_2 y_2 + e_3 y_3 + \dots + e_n y_n = \Sigma (ey).$$

Jetzt können wir aber diese Summation unendlich vieler Grössen mit Hilfe der oben entwickelten und allgemein giltigen Formel  $ey = rp$  wirklich ausführen; denn sind die Projektionen aller Bogenelemente auf die Sehne  $AB$  der Reihe nach

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n,$$

so haben wir

$$e_1 y_1 = rp_1, e_2 y_2 = rp_2, e_3 y_3 = rp_3, \dots, e_n y_n = rp_n,$$

folglich

$$\begin{aligned} bx &= rp_1 + rp_2 + rp_3 + \dots + rp_n = \Sigma(rp) \\ &= r(p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n) = r\Sigma(p) \end{aligned}$$

und mithin, weil offenbar

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = \Sigma(p) = s$$

ist,

$$bx = rs$$

oder

$$x = \frac{rs}{b} \tag{48.}$$

als Schwerpunktsabstand eines Kreisbogens vom Mittelpunkte des letzteren. Speziell für  $s = 2r$  und  $b = r\pi$  entsteht aus 48

$$x = \frac{2r}{\pi}, \tag{49.}$$

der Schwerpunktsabstand des halben Kreisumfanges vom Centrum

Die Formel 48 kann übrigens für die Anwendung wesentlich bequemer gestaltet werden, wenn man den Zentriwinkel  $AOB = \alpha$  einführt; denn dann hat man einerseits  $b = r\alpha$  und andererseits,

weil Winkel  $COB = \frac{\alpha}{2}$  ist,

$$\frac{BD}{OB} = \frac{s}{2r} = \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ mithin } s = 2r \sin \frac{\alpha}{2}$$

und Nr. 48 geht über in

$$x = \frac{2r}{\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}, \tag{50.}$$

eine Formel, bei deren Gebrauch man wohl beachte, dass der Winkel  $\alpha$  als Divisor stets im Bogenmass zu nehmen ist.

#### § 64.

#### Beispiele.

195. Es sollen die Schwerpunktsabstände von sechs Kreisbögen mit dem gemeinschaftlichen Radius  $r$  und den Zentriwinkeln  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $300^\circ$  angegeben werden.

Resultate:

$$\frac{3r}{\pi} = 0,995r, \quad \frac{2r\sqrt{2}}{\pi} = 0,9r, \quad \frac{3r\sqrt{3}}{2\pi} = 0,827r, \quad \frac{3r\sqrt{3}}{4\pi} = 0,4135r,$$

$$\frac{2r\sqrt{2}}{3\pi} = 0,3r \text{ und } \frac{r}{2\pi} = 0,159r.$$

196. Ein Kreisbogen ist gegeben durch seinen Halbmesser von 789 Millimeter und den Zentriwinkel  $\alpha = 124^{\circ} 18'$ . Welches ist der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte?

Antwort:  $x = 643,13 \text{ mm}$ .

197. Ein homogenes Gebilde besteht aus einem halben Kreisumfang und einem, den letzteren halbierenden Radius. Wie weit ist der Schwerpunkt vom Zentrum entfernt?

Antwort:  $x = \frac{5}{\pi + 1} \cdot \frac{r}{2}$ .

198. Wie gestaltet sich aber das Resultat, wenn noch der die Endpunkte der halben Kreisperipherie verbindende Durchmesser hinzukommt?

Antwort:  $x = \frac{5}{\pi + 3} \cdot \frac{r}{2}$ .

199. Um welche Strecke  $y$  müsste in Aufgabe 197, resp. 198 der Halbmesser nach der dem Halbkreise entgegengesetzten Seite verlängert werden, damit der Schwerpunkt des Ganzen in das Zentrum fällt?

Antwort: Um  $y = r\sqrt{5}$ .

## § 65.

### Schwerpunkte homogener ebener Flächen.

a) Der Schwerpunkt einer Dreiecksfläche liegt im Durchschnitt der die Seiten halbierenden Transversalen.

Beweis: Denkt man sich die Höhe  $BG = h$  des Dreiecks  $ABC$  (Fig. 26) in zahllose gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte Parallele zu  $AC$  gezogen, so zerfällt die ganze Dreiecksfläche in lauter homogene Strecken, deren sämtliche Schwerpunkte auf derjenigen Transversale  $BE$  liegen, welche alle halbiert, und mithin ist

*BE* Schwerlinie.\*) Aus gleichen Gründen enthält aber auch die Transversale *AD*, welche *BC* halbiert, den Schwerpunkt *S* des Dreiecks *ABC* und obiger Satz ist bewiesen.

Zusatz: Der Schwerpunkt *S* einer Dreiecksfläche ist von jeder Seite um den dritten Teil der zugehörigen Höhe, also um  $SF' =$

$$x = \frac{h}{3} \quad (51.)$$

entfernt; denn aus der Planimetrie ist bekannt, das sich

$$ES : EB = 1 : 3$$

verhält. Nun gilt wegen Ähnlichkeit der beiden Dreiecke *ESF'* und *EBG* die Proportion

$$ES : EB = SF' : BG,$$

mithin

$$1 : 3 = x : h,$$

woraus ohne weiteres die Beziehung 51 folgt.

b) Der Schwerpunkt eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt beider Diagonalen, weil letztere sich gegenseitig halbieren und folglich jede die Schwerpunkte der beiden Dreiecke verbindet, in welche das Parallelogramm durch die andere Diagonale zerlegt wird.

c) Sind  $AD = a$ ,  $BC = b$  die parallelen Seiten und  $GH = h$  die Höhe eines Trapezes *ABCD* (Fig. 27), so liegt der Schwerpunkt *S* auf der Verbindungslinie *EF* der Mittelpunkte beider paralleler Seiten in einem Abstände  $GS =$

$$x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3} \quad (52.)$$

von der Seite  $AD = a$ .

---

\*) Da das Gewicht eines jeden Gebildes im Schwerpunkte angreift, so darf man sich das erstere in den letzteren konzentriert vorstellen, wodurch man statt jenes Gebildes mechanisch genommen einen materiellen Punkt erhält. Die Gewichte der homogenen Strecken, in welche das Dreieck *ABC* zerlegt wurde, wirken demnach genau so, wie eine gleiche Anzahl materieller Punkte, welche sich auf der Geraden *BE* in gleichen Abständen aneinander reihen und offenbar eine materielle Linie bilden.

Weil aber die homogenen Strecken von *B* aus gegen *AC* zu immer länger und demnach die materiellen Punkte von *B* nach *E* hin immer gewichtiger werden, so stellt *BE* keine homogene, sondern eine heterogene Gerade dar und es erklärt sich jetzt auch auf diese Weise, warum der Schwerpunkt *S* des Dreiecks näher an *E* als an *B* liegt. Diese Art der Anschauung wird uns später Dienste leisten.



Beweis: Der erste Teil des Satzes folgt aus dem Umstande, dass  $EF$  jede Parallele zu  $AD$  halbiert. Zieht man weiter  $AC$  und nimmt  $AD$  als Momentenachse an, so ist für das Dreieck  $ABC$  der Schwerpunktsabstand  $KN = \frac{2}{3}h$ , der Flächeninhalt  $= \frac{1}{2}bh$ , somit das statische Moment  $= \frac{1}{3}bh^2$ \*) und für das Dreieck  $ACD$  der Schwerpunktsabstand  $JP = \frac{1}{3}h$ , der Inhalt  $= \frac{1}{2}ah$ , demnach das statische Moment  $= \frac{1}{6}ah^2$ . Weil nun ferner das auf dieselbe Axe  $AD$  bezogene Moment des Trapezes  $= \frac{a+b}{2}hx$  ist, so gilt nach § 53 die Gleichung

$$\frac{a+b}{2}hx = \frac{ah^2}{6} + \frac{bh^2}{3},$$

deren Auflösung für  $x$  den obigen Wert liefert.

Konstruktion: Verlängert man  $BC$  um  $BM = a$ ,  $AD$  um  $DL = b$  und verbindet  $L$  mit  $M$ , so wird  $EF$  von  $LM$  im Schwerpunkte  $S$  des Trapezes geschnitten; denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $SEL$  und  $SFM$  folgt die Verhältnissgleichheit der Grundlinien und Höhen

$$EL : SG = FM : SH$$

oder

$$\left(\frac{a}{2} + b\right) : x = \left(a + \frac{b}{2}\right) : (h - x)$$

und hieraus

$$x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{h}{3},$$

wie es Formel 52 verlangt.

d) Der Schwerpunkt eines Kreisausschnittes liegt auf der Halbierungslinie  $OC$  des Zentriwinkels  $AOB = \alpha$  (Fig. 28) in einem Abstände  $OS =$

$$x = \frac{4r}{3\alpha} \sin \frac{\alpha}{2}, \quad (53.)$$

vom Kreismittelpunkte  $O$ , wenn  $r$  den Halbmesser des Sektors bezeichnet.

\*) Wie in § 61 für homogene Linien kann ohne Schwierigkeit bewiesen werden, dass auch für homogene Flächen an die Stelle der Gewichte die Inhalte gesetzt werden dürfen.

Beweis: Denkt man sich den Bogen  $AB$  wiederum in unendlich viele gleiche Teile geteilt und jeden Teilpunkt mit  $O$  verbunden, so zerfällt die Sektorfläche in kongruente und daher gleich viel wiegende gleichschenklige Dreiecke mit derselben Höhe  $r$  und der gemeinschaftlichen Spitze  $O$ , deren Schwerpunkte sämtlich um

$$OA' = OB' = \frac{2}{3}r$$

von  $O$  entfernt sind. Wenn man sich nun das Gewicht jedes dieser Dreiecke in seinen Schwerpunkt konzentriert vorstellt, so entsteht ein homogener Kreisbogen vom Radius  $\frac{2}{3}r$  und dem Zentriwinkel  $\alpha$ , dessen Schwerpunkt  $S$  zugleich der Schwerpunkt des Kreisabschnitts ist, und man erhält mithin  $x$ , wenn man in 50  $\frac{2}{3}r$  für  $r$  setzt, hierdurch ergibt sich aber die Formel 53. Mit Einsetzung des speziellen Wertes  $\alpha = \pi = 180^\circ$  in Nr. 53 folgt

$$x = \frac{4r}{3\pi} \quad (54.)$$

der Schwerpunktsabstand einer Halbkreisfläche vom Zentrum.

### § 66.

#### Beispiele.

200. Den Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks durch Zerlegung in Dreiecke konstruktiv zu ermitteln.

201. Ebenso für eine beliebige Fünfecksfläche, indem man letztere durch Diagonalen zweimal in je ein Viereck und ein Dreieck zerfällt.

202. Man soll den Schwerpunkt eines halben regelmässigen Sechsecks bestimmen, wenn die Teillinie durch zwei Eckpunkte geht.

Lösung: Er ist von letzterer um  $x = \frac{2}{9} a \sqrt{3}$  entfernt, unter  $a$  die Seite des regulären Sechsecks verstanden.

203. Eine Kreissektorfläche ist bestimmt durch  $r = 333 \text{ mm}$  und  $\alpha = 77^\circ$ ; man berechne den Abstand des Schwerpunktes vom Zentrum.

Resultat:  $x = 205,67$  Millimeter.

204. Desgleichen, wenn  $r = 0,876$  Meter und  $\alpha = 192^{\circ} 46'$  ist.  
 Resultat:  $x = 0,345$  Meter.

205. Die Figur 29 besteht aus zwei Rechtecken mit den Seiten  $JG = a$ ,  $JK = CE = b$  und  $CD = c$  und ist in Bezug auf  $AB$  symmetrisch; wie weit ist der Schwerpunkt von  $JK$  entfernt?

Antwort: Um  $x = \frac{a^2 + 2ac + bc}{2(a + c)}$ .

206. Wie gestaltet sich das letzte Resultat, wenn beide Rechtecke kongruent sind?

Antwort:  $x = \frac{3a + b}{4}$ .

207. Ein Trapez  $ABCD$  mit den parallelen Seiten  $AD = a$  und  $BC = b$  hat zwei rechte Winkel  $DAB$  und  $ABC$ ; welches ist die Entfernung des Schwerpunktes von  $AB$ ?

Antwort:  $x = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)}$ .

208. Ein reguläres Sechseck von der Seite  $a$  wird durch eine zu zwei Seiten senkrechte Gerade halbiert; in welcher Entfernung  $x$  von letzterer liegt der Schwerpunkt einer solchen Hälfte?

Antwort: In der Entfernung  $x = \frac{7}{18}a$ .

209. Wo liegt der Schwerpunkt einer homogenen Fläche, welche aus einem Halbkreise vom Durchmesser  $AB = 2r$  und einem gleichschenkligen Trapeze mit den parallelen Seiten  $AB = 2r$ ,  $CD = r$  und der Höhe  $OE = r$  zusammengesetzt ist?

Antwort: Im Mittelpunkte  $O$  des Halbkreises.

210. Ein Kreisringstück ist gegeben durch die Radien  $R$ ,  $r$  und den Zentriwinkel  $2\alpha$ , es soll der Abstand  $x$  des Schwerpunktes vom Mittelpunkte angegeben werden.

Antwort:  $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ .

## § 67.

### Schwerpunkte homogener krummer Flächen.

a) Der Schwerpunkt eines Zylindermantels ist der Mittelpunkt seiner Achse.

Beweis: Denn drei zu einander lotrechte Ebenen, von welchen

die beiden ersten durch die Achse selbst und die letzte durch den Halbierungspunkt der Axe hindurchgehen, sind Symmetrie- und folglich auch Schwerebenen; dieselben schneiden sich aber im genannten Punkte.

b) Der Schwerpunkt eines Kegelmantels liegt auf der Achse des letzteren und ist von der Basis um den dritten Teil der Höhe entfernt.

Beweis: Teilt man die Peripherie des Grundkreises in unzählige gleiche Teile und verbindet jeden Teilpunkt mit der Spitze  $D$  des Kegels (Fig. 30), so zerfällt die Kegelmantelfläche in zahllose kongruente gleichschenklige Dreiecke. Die sämtlichen Schwerpunkte der letzteren bilden aber eine homogene Kreislinie, welche jede Seitenlinie  $BD$  des Kegels in dem Verhältnisse

$$BB' : BD = 1 : 3$$

teilt und deren Zentrum  $S$  zugleich der Schwerpunkt des Kegelmantels ist. Zieht man jetzt  $SE \parallel DB$  und setzt zur Abkürzung  $CS = x$ ,  $CD = h$ , so besteht wegen Ähnlichkeit der beiden Dreiecke  $CES$  und  $CBD$  die Proportion

$$x : h = BB' : BD = 1 : 3,$$

woraus folgt

$$x = \frac{h}{3}. \quad (55.)$$

c) Der Schwerpunkt eines Kegelstumpfmantels mit den beiden Radien  $R$ ,  $r$  und der Höhe  $h$  liegt auf der Achse und zwar in einem Abstände

$$x = \frac{R + 2r}{R + r} \cdot \frac{h}{3} \quad (56.)$$

vom Mittelpunkte des Kreises vom Radius  $R$ , gleichgiltig, ob  $R$  grösser oder kleiner als  $r$  sei.

Beweis: Wir denken uns eine der beiden Kreisperipherien in unendlich viele ( $n$ ) gleiche Teile geteilt und durch jeden Teilpunkt, sowie durch die Axe Ebenen geführt. Hierdurch zerfällt die Kegelstumpfmantelfläche in  $n$  unter sich kongruente Trapeze mit den beiden parallelen Seiten

$$a = \frac{2R\pi}{n}, \quad b = \frac{2r\pi}{n}$$

und der Höhe  $s$  (Seitenlinie des Kegelstumpfs), folglich nach Nr. 52 mit dem Schwerpunktsabstande

$$AD = x = \frac{a + 2b}{a + b} \cdot \frac{s}{3} = \frac{R + 2r}{R + r} \cdot \frac{s}{3}$$

von der Seite  $a$  (Fig. 31). Die Schwerpunkte aller dieser Trapeze bilden auf dem Kegelstumpfmantel eine homogene Kreisperipherie, deren Mittelpunkt  $S$  identisch mit unserem Schwerpunkte ist. Ziehen wir nun  $DN$  und  $BL$  parallel  $CM$ , so verhält sich

$$DN : BL = AD : AB$$

oder, weil  $DN = SM = x$ ,  $BL = CM = h$ ,  $AD = x$  und  $AB = s$  ist,

$$x : h = x : s.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{h}{s} x,$$

und mit Einsetzung des obigen Wertes von  $x$  ergibt sich Formel 56.

d) Der Schwerpunkt einer Kugelzonenfläche liegt in der Mitte ihrer Axe.

Beweis: Zerlegen wir die Höhe der Kugelzone in zahllose gleiche Teile und denken uns durch sämtliche Teilpunkte ein System von Ebenen lotrecht zur Höhe, so zerfällt die Kugelzonenfläche in unendlich viele Kugelzonen, welche alle dieselbe verschwindend kleine Höhe  $\delta$  und einen gemeinschaftlichen Kugelradius  $r$ , folglich auch den gleichen Flächeninhalt  $2r\pi\delta$  und demgemäss gleiches Gewicht besitzen. Denkt man sich aber jetzt die Gewichte dieser Zonen in ihre Schwerpunkte, das sind ihre Mittelpunkte, vereinigt, so entsteht eine homogene Linie\*), welche genau mit der Achse der Kugelzone zusammenfällt und deren Mittelpunkt daher den Schwerpunkt der letzteren darstellt.

Zusatz. Das vorstehend Gesagte gilt ganz offenbar auch für die Kugelkalotte und mithin ist der Schwerpunkt der letzteren der Halbierungspunkt ihrer Axe.

\*) Man vergleiche die Ausführungen in der Fussnote des § 65.

§ 68.

Beispiele.

211. Wo liegt der Schwerpunkt eines zylindrischen, oben offenen Gefässes, welches aus überall gleich dickem Metallblech besteht und durch seinen Radius  $r$ , sowie seinen Halbmesser  $r$  bestimmt ist?

Antwort: Auf seiner Achse in einer Entfernung  $x = \frac{h^2}{2h + r}$  vom Boden.

212. Man bestimme für einen Kegelstumpfmantel den Schwerpunktabstand  $x$  von der kleinen Grundfläche, wenn  $R = 5a$ ,  $r = 2a$  und  $h = 3,5a$  gegeben sind.

Resultat:  $x = 2a$ .

213. Ein homogenes Blechgefäss wird aus einem Kegelstumpfmantel mit den Radien  $R = 7a$ ,  $r = 3a$  und der Höhe  $h = 3a$ , sowie aus einer Kreisfläche mit dem Radius  $r$  gebildet; es ist der Abstand  $x$  des Schwerpunktes von der Bodenfläche anzugeben.

Resultat.  $x = \frac{85}{59} a$ .

214. Desgleichen, wenn die seitliche Wandung eine Zone mit dem Kugelradius  $r$ , sowie der Höhe  $\frac{1}{2}r$  und der Boden ein Kreis mit dem Durchmesser  $r$  ist.

Resultat:  $x = \frac{1}{5}r$ .

215. Ein kesselförmiges Gefäss besteht aus einer Kugelhaube mit dem Radius  $r$ , sowie der Höhe  $\frac{1}{2}r$  und einem sich tangential anschliessenden Kegelstumpfmantel von der Höhe  $\frac{r}{2}$ ; man bestimme die Entfernung  $x$  des Schwerpunktes  $S$  vom tiefsten Punkte der Kugelhaube.

Resultat:  $x = \frac{41}{78} r$ .

§ 69.

**Schwerpunkte von Prisma und Zylinder, Pyramide und Kegel.**

a) Der Schwerpunkt eines Prismas halbiert die Verbindungslinie der Schwerpunkte beider paralleler Endflächen.

Beweis: Denn denkt man sich wiederum die Höhe des Prismas in unbeschränkt viele gleiche Teilchen eingeteilt und durch jeden Teilungspunkt eine Ebene parallel zur Grundfläche des Prismas gelegt, so wird letzteres in unzählige unter sich kongruente und daher gleich schwere Platten zerschnitten, deren Schwerpunkte eine homogene Strecke bilden, nämlich die oben genannte Verbindungsgerade; der Mittelpunkt dieser letzteren ist demgemäss zugleich der Schwerpunkt vom Prisma.

b) der Schwerpunkt eines homogenen Vollzylinders liegt in der Mitte seiner Achse.

Beweis wie unter a.

c) Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt auf derjenigen Geraden, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Basis verbindet, und teilt diese Verbindungsstrecke in dem Verhältnis von 1 : 3, so dass der kleinere Abschnitt der dritte Teil ist vom grösseren. Bezeichnet  $h$  die Höhe der Pyramide, so ist der Abstand ihres Schwerpunktes von der Basis

$$x = \frac{h}{4}. \quad (57.)$$

Beweis: Die Richtigkeit vom ersten Teil dieses Satzes dürfte nach dem bisherigen ohne weiteres einleuchten; den zweiten und dritten Teil der Behauptung wollen wir vorerst für eine dreiseitige Pyramide  $ABCD$  (Fig. 32) beweisen.

Betrachten wir  $ABC$  als Grundfläche und  $D$  als Spitze der Pyramide, so ist der Durchschnittspunkt  $G$  der die Gegenseiten halbierenden Transversalen  $BF$ ,  $AE$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $ABC$  und folglich  $GD$  eine Schwerlinie der Pyramide. Sehen wir dagegen  $BCD$  als Basis und  $A$  als Spitze an, so ist der Schnittpunkt  $O$  zwischen den die Seiten  $BC$  und  $CD$  halbierenden Transversalen  $DE$  und  $BJ$  der Schwerpunkt des Dreiecks  $BCD$  und demnach  $OA$  eine zweite Schwerachse der Pyramide. Mithin ergibt sich der

Schwerpunkt der Pyramide als Durchschnitt zwischen  $GD$  und  $OA$  und es kommt jetzt darauf an, die Lage von  $S$  durch eine Proportion auszudrücken. Weil aber nach § 65

$$EG : EA = EO : ED = 1 : 3$$

sich verhalten, so ist Dreieck  $EGO$  ähnlich  $EAD$  und folglich einerseits  $GO \parallel AD$  und andererseits

$$GO : AD = 1 : 3.$$

Aus der Parallelität von  $GO$  und  $AD$  erkennen wir wieder die Ähnlichkeit der Dreiecke  $SGO$  und  $SDA$  und hiermit das Bestehen der weiteren Proportionen

$$SG : SD = GO : AD = 1 : 3$$

oder

$$SG : (SG + SD) = 1 : (1 + 3)$$

das ist

$$SG : DG = 1 : 4.$$

Wenn wir schliesslich vom Schwerpunkte und von der Spitze auf die Basis der Pyramide die Lote  $SL = x$  und  $DM = h$  fällen und ihre Fusspunkte mit  $G$  verbinden, so entstehen abermals zwei ähnliche Dreiecke  $GLS$  und  $GMD$ ; mithin verhält sich

$$SL : DM = SG : DG \text{ oder } x : h = 1 : 4,$$

woraus die Richtigkeit von Formel 57 erhellt.

Davon, dass diese letztere auch für beliebig vielseitige Pyramiden gilt, überzeugt man sich leicht durch folgende einfache Betrachtung: Führt man durch die Spitze und die von einem Eckpunkte ausgehenden Diagonalen der Grundfläche ebene Schnitte, so zerfällt die Gesamtpyramide in lauter dreiseitige Pyramiden mit der gemeinsamen Höhe  $h$ . Die Schwerpunkte der letzteren liegen sämtlich in einer Ebene, welche in der Entfernung  $\frac{h}{4}$  parallel zur Grundfläche der vielseitigen Pyramide läuft und mithin liegt auch der Schwerpunkt der letzteren in derselben Ebene.

d) Der Schwerpunkt eines Kegels liegt in der Axe und um den vierten Teil der Höhe von der Basis entfernt; denn ein gerader Kreiskegel kann als regelmässige Pyramide mit unendlich vielen Seitenflächen aufgefasst werden.



§ 70.

**Schwerpunkte vom Pyramiden- und vom Kegelstumpfe.**

a) Der Schwerpunkt einer abgestumpften Pyramide mit den beiden Grundflächen  $F, f$  und der Höhe  $h$  steht von  $F$  um

$$x = \frac{F + 2\sqrt{F \cdot f} + 3f}{F + \sqrt{Ff} + f} \cdot \frac{h}{4} \quad (58.)$$

ab, ob nun  $F$  grösser oder kleiner ist als  $f$ .

Beweis: Denken wir uns zum Pyramidenstumpfe die Ergänzungspyramide mit der Basis  $deglm = f$  (Fig. 33) und der Höhe  $CN = z$ , so verhält sich bekanntlich

$F : f = (z + h)^2 : z^2$  oder  $\sqrt{F} : \sqrt{f} = (z + h) : z$   
und hieraus folgt nach kurzer Rechnung

$$z = \frac{h\sqrt{f}}{\sqrt{F} + \sqrt{f}} \quad \text{und} \quad z + h = \frac{h\sqrt{F}}{\sqrt{F} + \sqrt{f}}.$$

Nun muss in Bezug auf die untere Endfläche  $DEGLM$  das statische Moment der grossen Pyramide gleich der Summe der Momente aus dem Pyramidenstumpfe und der kleinen Pyramide, also

$$\frac{z + h}{3} F \cdot \frac{z + h}{4} = \frac{h}{3} (F + \sqrt{Ff} + f) \cdot x + \frac{z}{3} f \left( h + \frac{z}{4} \right)$$

sein und hieraus ergibt sich mit Einsetzung der obigen Werte von  $z$  und  $z + h$  nach kurzer Rechnung

$$(F + \sqrt{Ff} + f) x = \frac{F^2 - 4f\sqrt{Ff} + 3f^2}{F - 2\sqrt{Ff} + f} \cdot \frac{h}{4}$$

oder, weil

$$(F^2 - 4f\sqrt{Ff} + 3f^2) : (F - 2\sqrt{Ff} + f) = F + 2\sqrt{Ff} + 3f$$

ist:

$$x = \frac{F + 2\sqrt{Ff} + 3f}{F + \sqrt{Ff} + f} \cdot \frac{h}{4},$$

w. z. b. w.

b) Der Schwerpunkt eines Kegelstumpfes liegt in der Achse und zwar um

$$x = \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2} \cdot \frac{h}{4} \quad (59.)$$

vom Grundkreise mit dem Halbmesser  $R$  entfernt, wenn  $R, r$  die beiden Radien und  $h$  die Höhe des abgestumpften Kegels bezeichnen.

Beweis: Denn weil ein abgekürzter Kegel nur ein besonderer Fall des Pyramidenstumpfes ist, so erhält man den Schwerpunktsabstand des ersteren durch Einsetzung von  $F = R^2 \pi$  und  $f = r^2 \pi$  in Formel 58. Nach Reduktion mit  $\pi$  ergibt sich Formel 59.

§ 71.

**Schwerpunkte vom Kugelausschnitt und Kugelabschnitt.**

a) Der Schwerpunkt eines Kugelausschnitts vom Kugelradius  $r$  und der Kalottenhöhe  $h$  ist vom Kugelmittelpunkte

$$x = \frac{3}{8} (2r - h) \quad (60.)$$

entfernt.

Beweis: Denkt man sich die Kugelhaubenfläche in zahllose gleiche Teile zerlegt und betrachtet jedes dieser Teilchen als Basis einer Pyramide, deren Spitze sich in  $O$  (Fig. 34) befindet, so zerfällt der ganze Kugelsektor in unendlich viele Pyramiden mit der gemeinschaftlichen Höhe  $r$ . Die Schwerpunkte aller dieser Pyramiden sind nun nach 57 um  $\frac{3}{4} r$  von  $O$  entfernt und bilden daher eine homogene Kugelkalotte mit dem Halbmesser  $OE = \frac{3}{4} r$  und der Höhe  $EF = \frac{3}{4} h$ . Weil aber der Schwerpunkt  $S$  dieser Kalotte, welcher zugleich Schwerpunkt des Kugelausschnitts ist, in der Mitte der Kalottenhöhe liegt, weil also

$$ES = \frac{1}{2} EF = \frac{3}{8} h,$$

so findet sich

$$OS = OE - ES = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h = \frac{3}{8} (2r - h).$$

b) Der Schwerpunkt eines Kugelabschnitts hat vom Kugelmittelpunkte den Abstand

$$x = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}, \quad (61.)$$

worin  $r$  und  $h$  dieselbe Bedeutung haben, wie vorhin.

Beweis: Ein Kugelsektor kann durch eine Ebene  $AB$  (Fig. 35) jederzeit in einen Kugelabschnitt und einen Kegel zerlegt werden. Für letzteren ist nun die Höhe

$$OD = OC - CD = r - h,$$

folglich bestimmt sich nach dem Pythagoras sein Halbmesser  $DB = y$  aus der Gleichung

$$y^2 = r^2 - (r - h)^2 = 2rh - h^2 = h(2r - h),$$

mithin ergiebt sich weiter sein Volumen

$$V' = \frac{1}{3} y^2 \pi \cdot OD = \frac{1}{3} \pi h (2r - h) (r - h)$$

und weil ausserdem nach 57 der Abstand des Schwerpunktes von der Spitze

$$OL = \frac{3}{4} OD = \frac{3}{4} (r - h)$$

beträgt, so ist das statische Moment des Kegels in Bezug auf eine durch  $O$  normal zu  $OC$  gelegte Ebene

$$V' \cdot OL = \frac{1}{4} \pi h (2r - h) (r - h)^2.$$

Ferner haben wir für den Kugelsektor den Inhalt

$$V'' = \frac{2}{3} r^2 \pi h,$$

den Schwerpunktsabstand

$$OK = \frac{3}{8} (2r - h)$$

demnach das auf die Ebene  $MN$  bezogene Moment

$$V'' \cdot OK = \frac{1}{4} r^2 \pi h (2r - h)$$

und weil endlich das Volumen des Kugelsegments

$$V = \frac{1}{3} h^2 \pi (3r - h)$$

ist, so gilt die Momentengleichung

$$\frac{1}{4} r^2 \pi h (2r - h) = \frac{1}{4} \pi h (2r - h) (r - h) + \frac{1}{3} h^2 \pi (3r - h) x,$$

woraus durch Auflösung nach  $x$  die Formel 61 entsteht.

§ 72.

Beispiele.

216. Ein homogener Körper ist aus einem Prisma und einer Pyramide mit gemeinschaftlicher Basis zusammengesetzt. Wie müssen sich die Höhen von Prisma und Pyramide zu einander verhalten, damit der Schwerpunkt des ganzen Körpers in die Zusammenstossungsebene seiner beiden Bestandteile fällt?

Antwort: Wie  $1 : \sqrt{6}$ .

217. Man bestimme für einen abgestumpften Kegel den Schwerpunktsabstand von der grösseren Endfläche, wenn die Höhe  $h$  ist und der grosse Radius das zwei-, resp. das vierfache vom kleineren beträgt.

Resultate:  $\frac{11}{28} h$ , resp.  $\frac{9}{28} h$ .

218. Welches ist der Schwerpunktsabstand  $x$  einer Halbkugel zum Radius  $r$  vom Zentrum?

Antwort:  $x = \frac{3}{8} r$ .

219. Ein Zylinder, eine Halbkugel und ein Kegel haben dieselbe Höhe. Wie verhalten sich die Abstände ihrer Schwerpunkte von den Grundflächen?

Antwort: Wie  $4 : 3 : 2$ .

220. Es soll für ein Kugelsegment mit dem Kugelradius  $r$  und der Kalottenhöhe  $h$  die Entfernung  $x$  des Schwerpunktes von der Ebene des Begrenzungskreises angegeben werden.

Resultat:  $x = \frac{4r - h}{3r - h} \cdot \frac{h}{4}$ .

221. Welchen Wert erhält man für den speziellen Fall  $h = \frac{r}{2}$ ?

Antwort:  $x = \frac{7}{20} r$ .

222. Wie weit ist der Schwerpunkt einer halben Hohlkugel mit den Radien  $R, r$  vom Mittelpunkte entfernt?

Antwort: Um  $x = \frac{3}{8} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3}$ .

223. Speziell, wenn  $R = 3r$  ist?

Antwort:  $x = \frac{15}{13} r$ .

224. An einer Halbkugel vom Radius  $r$  und dem spezifischen Gewichte  $s$  ist ein Zylinder mit demselben Halbmesser und dem spezifischen Gewichte  $\gamma$  befestigt. Welche Länge  $x$  muss der Zylinder haben, damit der Schwerpunkt des ganzen Körpers mit dem Kugelmittelpunkte zusammenfällt?

Antwort: Die Länge  $x = r \sqrt{\frac{s}{2\gamma}}$ .

225. Was ergibt sich für  $x$ , wenn die Halbkugel aus Stahl vom spezifischen Gewicht 7,68 und der Zylinder aus Korkholz vom spezifischen Gewichte 0,24 besteht?

Antwort:  $x = 4r$ .

226. Man löse die beiden letzten Aufgaben für den Fall, dass an der Halbkugel statt des Zylinders ein Kegel angebracht sei.

Resultate:  $x = r \sqrt{\frac{3s}{\gamma}} = r \sqrt{96} = 9,798 r$ .

### § 73.

#### Von den verschiedenen Gleichgewichtszuständen der Körper.

Wie bereits erläutert wurde, ist das Gewicht jeden Körpers eine Kraft, welche im Schwerpunkte angreift und vertikal abwärts wirkt. Findet nun die durch den Schwerpunkt gehende lotrechte Gerade feste Unterstützung — sei es, dass der Körper in einer durch die gedachte gerade Linie gehenden Achse aufgehängt ist oder aber mit einer senkrecht unter dem Schwerpunkte liegenden Stelle auf einer horizontalen Ebene ruht —, so äussert sich das Gewicht durch einen Druck auf den Stützpunkt und wird nach dem zweiten Grundgesetz durch einen gleich grossen Gegendruck aufgehoben, der Körper befindet sich also im Gleichgewichte.

Wenn jetzt dieser Körper durch irgend eine seitlich wirkende Kraft etwas aus seiner Lage herausgebracht wird, so kann der Schwerpunkt hierdurch entweder höher oder tiefer zu liegen kommen oder aber in seiner ursprünglichen Lage verbleiben, im letzteren Falle also entweder seine Lage gar nicht ändern oder sich auf einer horizontalen Linie bewegen.

Nach Wegfall der das Gleichgewicht störenden Kraft wird der Körper im zuerst genannten Falle in seine Anfangslage zurückkehren

(Fig 36 *a u. b*), und man sagt dann; er war im stabilen Gleichgewichte. Im zweiten Falle sucht sich der Körper eine neue Gleichgewichtslage, und man nennt sein ursprüngliches Gleichgewicht ein labiles (Fig. 37 *a u. b*). Im dritten Falle ist der Körper in jeder Lage sofort wieder im Gleichgewicht, letzteres war und ist ein indifferentes (Fig. 38 *a u. b*).

Hiernach ist z. B. im indifferenten Gleichgewicht jede auf einer horizontalen Ebene ruhende homogene Kugel, ferner jeder mit einer Seitenlinie aufliegende homogene Zylinder oder auch Kegel, und irgend ein mit einer Fläche auf horizontaler Ebene stehende Körper befindet sich in stabilem oder labilem Gleichgewichte, jenachdem der Fusspunkt des vom Schwerpunkte auf die Unterstüßungsfläche herabgelassenen Lotes innerhalb oder auf die Begrenzungslinie der letzteren fällt.

## § 74.

### Beispiele.

227. Ein aus einer Halbkugel vom Radius  $r$  und aus einem Zylinder von gleichem Radius und der Höhe  $x$  zusammengesetzter homogener Körper ruht mit dem tiefsten Punkte der Halbkugel auf einer Horizontalebene, so dass die Achse des Körpers vertikal gerichtet ist. Bei welchem Werte von  $x$  herrscht stabiles, wann labiles und wann indifferentes Gleichgewicht?

Antwort: Je nachdem  $x \underset{=}{\leq} \frac{r}{2} \sqrt{2}$  ist.

228. Wie gestalten sich aber die Bedingungen, wenn an der Halbkugel statt des Zylinders ein Kegel befestigt ist?

Antwort:  $x \underset{=}{\leq} r \sqrt{3}$ .

229. An eine bleierne Halbkugel vom Radius  $r$  ist ein Zylinder aus Korkholz mit demselben Halbmesser konzentrisch angeleimt. Wie lang darf der Zylinder nur gemacht werden, damit sich der Körper aus jeder beliebigen Lage senkrecht aufrichte, wenn die spezifischen Gewichte von Blei und Korkholz 11,35 und 0,24 sind?

Antwort: Nicht über  $3,438 r$ .

230. Die Achse eines schiefen Zylinders vom Halbmesser  $r$  und der Höhe  $x$  bildet mit der horizontal aufliegenden Grundfläche einen

Winkel  $\alpha$ . Wie gross muss  $x$  gewählt werden, damit der Zylinder im labilen Gleichgewichte ist?

Antwort:  $x = 2rtg\alpha$ .

231. Welchen kleinsten Winkel  $\alpha$  darf die Achse eines homogenen schiefen Kegels mit der horizontal stehenden Basis einschliessen, damit letzterer noch im Gleichgewichte sich befindet.

Antwort: Denjenigen, welcher durch die Beziehung  $tg\alpha = \frac{h}{4r}$  bestimmt ist.

---

## Sechstes Kapitel.

### Von den einfachen Maschinen.

#### § 75.

#### Definitionen.

Schon in § 25 wurde der Begriff „Maschine“ festzustellen versucht, jedoch mehr im Hinblick auf ihren technischen Zweck. Rein sachlich könnte man jede Maschine auch bezeichnen als eine Verbindung von festen, beweglichen und unbeweglichen Körpern, an welchen sich zwei oder mehr Kräfte durch Abänderung ihrer Angriffspunkte, ihrer Richtung und Stärke das Gleichgewicht zu halten imstande sind. So ist z. B. ein gewöhnlicher Flaschenzug als Maschine zu betrachten, weil an ihm die Muskelkraft und das Gewicht eines Arbeiters, welche am freien Seilende wirken, einer verhältnismässig grossen, an der unteren Flasche hängenden Last das Gleichgewicht zu halten vermögen.

Jede Maschine heisst nun einfach, wenn in ihr lediglich ein beweglicher Körper vorkommt, oder, was auf dasselbe hinaus läuft, wenn in der ersteren kein Bestandteil selbst wieder Maschine ist. Gewöhnlich zählt man zu den einfachen Maschinen den Hebel, die Rolle, das Rad an der Welle, die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube. Als Grundlagen können aber ausschliesslich der Hebel und die schiefe Ebene gelten; denn die Rolle und das Wellrad sind nur besondere Formen des Hebels und der Keil, sowie die Schraube lassen sich leicht auf die schiefe Ebene zurückführen.

## § 76.

**Der Hebel.**

Es ist dies ein um einen festen Punkt  $C$  (Fig. 39) drehbarer Körper, an welchem mindestens zwei Kräfte, z. B.  $AF = P$  und  $BN = Q$ , wirksam sind. Das Lot, welches vom Drehpunkte auf die Wirkungslinie einer Kraft gefällt werden kann, heisst der Hebelsarm der letzteren, sodass für unseren Fall  $CD = p$  der Hebelsarm von  $P$  und  $CE = q$  derjenige von  $Q$  ist. Ferner nennt man das Produkt jeder Kraft in ihren Hebelsarm das statische Moment derselben in Bezug auf den Drehpunkt; man hat also in der Mechanik zwischen statischen Momenten in Beziehung auf eine Ebene, resp. Achse und zwischen solchen in Bezug auf einen Punkt zu unterscheiden. Auch hier hat man die Momente von zwei Kräften, welche den Hebel in entgegengesetztem Sinne zu drehen suchen, mit verschiedenen Vorzeichen zu versehen. Setzt man demnach das statische Moment der Kraft  $P$  gleich  $Pp$ , so muss dasjenige von  $Q$  mit  $-Qq$  in Rechnung gebracht werden.

Man kann die Hebel einteilen:

1) in mathematische und physische, je nachdem man vom Eigengewichte des Hebelkörpers absieht oder dasselbe berücksichtigt,

2) in geradlinige und Winkelhebel, jenachdem die Kräfte parallel sind oder nicht, jenachdem also die Hebelsarme eine gerade Linie oder Winkel bilden und, wenn nur zwei Kräfte wirken,

3) in einarmige und zweiarmige Hebel, jenachdem der Drehpunkt innerhalb oder ausserhalb der beiden Punkte liegt, in welchen die Kräfte den Hebel angreifen.

Der Hebel kommt in den mannigfaltigsten Formen zur Anwendung, z. B. als Hebebaum, Wage, Scheere, Bohrer, Pumpenschwengel (zweiarmig), ferner als Schubkarren, Sicherheitsventil, (einarmig), Drücker am Schloss etc. etc.

## § 77.

**Gleichgewicht am Hebel.**

An jedem Hebel herrscht Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe der statischen Momente sämtlicher



am Hebelkörper wirkenden Kräfte in Bezug auf den Drehpunkt gleich Null ist.

Der Beweis dieses ungemein wichtigen Satzes lässt sich zunächst für parallele Kräfte leicht auf die Bedingung 47 des § 55 zurückführen; denn denkt man sich eine durch den Drehpunkt gehende und zu den Hebelsarmen aller Kräfte senkrechte Ebene, so ist nach obiger Voraussetzung die Summe der statischen Momente in Bezug auf diese Ebene ebenfalls gleich Null und mithin liegt der Angriffspunkt der Resultante in der gedachten Ebene. Da aber letztere durch den Drehpunkt oder die Drehachse des Hebels gestützt wird, so kann keine Bewegung entstehen sondern die Wirkung der Resultante äussert sich bloß als einen Druck auf den Stützpunkt des Hebels, welcher der algebraischen Summe aller vorhandenen parallelen Kräfte gleich ist. Trägt z. B. ein in einem festen Scharnier frei beweglicher Stab links vom Drehpunkte die Lasten  $L$ ,  $Q$  und wirkt rechts ausser dem Eigengewichte  $G$  des Stabes noch eine Kraft  $P$  vertikal abwärts, bezeichnen ferner  $l$ ,  $q$ ,  $a$  und  $p$  die senkrechten Abstände der Wirkungslinien dieser vier Kräfte von der Drehachse, so findet nach vorstehendem Gleichgewicht statt, sobald die Bedingung

$$Pp + Ga - Qq - Ll = 0$$

erfüllt ist, und wird hierbei in der Unterstüzung ein Druck

$$D = P + G + Q + L$$

ausgeübt.

Für Winkelhebel beschränken wir den Beweis obigen Satzes auf den Fall, dass der Hebelkörper von zwei in einer Ebene wirkenden Kräfte  $AD = P$  und  $BE = Q$  (Fig. 12) angegriffen wird. Soll hier Gleichgewicht bestehen, so muss die Resultante von  $P$  und  $Q$ , das ist nach § 48 die Diagonale  $CL$  des Parallelogramms  $FCGL$ , welches aus den Seiten

$$CF = AD = P \text{ und } CG = BE = Q$$

gebildet ist, oder auch die Verlängerung dieser Diagonale durch den Drehpunkt  $M$  des Hebels gehen.

Fällt man jetzt von  $F$  und  $G$  die Lote  $Ff$ ,  $Gg$  auf  $CL$ , ferner

$$MH = p \text{ und } MI = q$$

von  $M$  senkrecht auf  $CD$ , resp.  $CE$  und verbindet  $M$  mit  $F$  und  $G$ , so sind wegen

$$Ff = Gg$$

die beiden Dreiecke  $CMF$  und  $CMG$  inhaltsgleich, mithin auch, wenn man in denselben  $CF$ , bezw.  $CG$  als Grundlinien betrachtet:

$$CF \cdot MH = CG \cdot MI$$

und hieraus ergibt sich mit Einsetzung der oben stehenden Werte

$$Pp = Qq$$

oder

$$Pp - Qq = 0,$$

die behauptete Gleichgewichtsbedingung. Der Druck in der Drehachse ist auch hier die Resultante  $CL = MN = R$ ; bezeichnet man den Winkel  $DCE$ , welchen die Richtungen von  $P$  und  $Q$  einschliessen, mit  $\alpha$ , so findet sich, weil  $\sphericalangle CGL = 180^\circ - \alpha$ , ferner  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$  und  $GL = CF = P$  ist:

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}, \quad (62.)$$

wobei aber das Eigengewicht des Hebelkörpers vernachlässigt wurde.

## § 78.

### Beispiele.

232. Unter welcher Bedingung wirkt ein physischer zweiarmiger Hebel genau so wie ein mathematischer?

Antwort: Wenn der Schwerpunkt des Hebelkörpers in der Drehachse liegt.

233. An den Endpunkten  $A$  und  $B$  eines gewichtslosen Stabes von der Länge  $a$  wirken die beiden Lasten  $P$  und  $Q$ . In welcher Entfernung von  $A$  muss sich der Stützpunkt  $C$  befinden, damit Gleichgewicht stattfindet?

Antwort: In der Entfernung  $AC = \frac{aQ}{P+Q}$

234. Eine homogene prismatische Stange  $CA$  von der Länge  $a$  und dem Gewichte  $G$  ist um  $C$  drehbar und im Abstände  $CB = b$  durch  $Q$  belastet. Man bestimme die in  $A$  vertikal aufwärts wirkende und zur Herstellung des Gleichgewichtszustandes nötige Kraft  $P$ , sowie den im Punkte  $C$  herrschenden Druck  $D$ .

Resultate:  $P = \frac{aQ}{b} + \frac{G}{2}$  und  $D = Q + G - P$ .

235. Die Länge eines Hebels aus Metall von 12 kg Gewicht und prismatischer Form sei 3 m, sein Stützpunkt von dem mit 80 kg

belasteten Ende  $0,6\text{ m}$  entfernt. Welches Gewicht am anderen Ende bringt den Hebel ins Gleichgewicht?

Antwort:  $15,5\text{ kg}$ .

236. Man will einen hartgebrannten Ziegelstein auf seinen Widerstand gegen das Zerdrücken untersuchen und stellt ihn zu diesem Behufe derartig unter einen  $3\text{ m}$  langen einarmigen Hebel, dass die obere  $20\text{ cm}$  lange und  $5\text{ cm}$  breite Ziegelfläche vom Hebelkörper vollständig überdeckt und ihre Mittellinie von der Drehachse um  $10\text{ cm}$  entfernt ist, während man das freie Hebelende vermittelt einer Wagschale so lange belastet, bis der Bruch des Ziegels erfolgt. Wenn nun der letztere bei  $270\text{ kg}$  Belastung zerdrückt wird, welchen Druck pro  $q\text{cm}$  kann dann ein Ziegelstein derselben Qualität in der äussersten Grenze vertragen?

Antwort: Einen Druck von  $81\text{ kg}$ .

237. Der Kolben einer Druckpumpe wird vermittelt eines Schwengels durch die Kraft  $P = 16\text{ kg}$  in Bewegung gesetzt. Wie viel Druck kommt auf den  $q\text{cm}$  der kreisförmigen Kolbenfläche von  $8\text{ cm}$  Durchmesser, wenn die Hebelsarme von Kraft und Kolbenstange  $1\text{ m}$  und  $15\text{ cm}$  betragen?

Antwort:  $2,122\text{ kg}$ .

238. Die beiden Arme eines Hebelventiles sind  $13$ , resp.  $64\text{ cm}$  lang, und die dem Dampfdruck ausgesetzte Fläche des Ventiles hat  $21\text{ qcm}$  Inhalt. Mit wie viel  $kg$  muss nun das äussere Ende des Hebels belastet werden, wenn sich das Ventil bei  $5$  Atmosphären Überdruck öffnen soll und das Eigengewicht des Apparats vernachlässigt wird?

Antwort: Mit  $21,33\text{ kg}$ .

239. Welches Gewicht dürfte aber bloß angehängt werden, wenn man die Eigengewichte der prismatisch geformten Hebelstange und des Ventils, welche  $6$ , resp.  $2,5\text{ kg}$  betragen, in Rücksicht zieht?

Antwort:  $17,82\text{ kg}$ .

240. Auf wie viel Atmosphären könnte der Dampfdruck bei der ersten Belastung von  $21,33\text{ kg}$  thatsächlich steigen, ehe das Ventil sich öffnen würde?

Antwort: Auf  $5,82$  Atmosphären Überdruck.

241. An einem um den Zapfen  $C$  drehbaren Winkelhebel hängt eine Last  $Q$  mit dem Hebelarme  $CB = b$  und soll im Gleichgewicht erhalten werden von einer am Arme  $CA = a$  horizontal wirkenden

Kraft  $P$ . Es soll  $P$  und der Zapfendruck  $x$  in  $O$  bestimmt werden, wenn die Wirkungslinie vom Eigengewichte  $G$  des Hebelkörpers einen senkrechten Abstand  $CD = c$  von  $C$  besitzt.

Resultate: Es ergibt sich die Kraft  $P = \frac{Qb + Ge}{a}$  und der Zapfendruck  $x = \sqrt{P^2 + (Q + G)^2}$ .

242. Man löse die letzte Aufgabe für die besonderen Zahlenwerte  $Q = 650$ ,  $G = 150$  kg,  $b = 0,4$ ,  $a = 0,6$  und  $c = 0,1$  m.

Resultate:  $P = 458\frac{1}{3}$  kg,  $x = 922$  kg.

243. Desgleichen, wenn  $Q = 225$ ,  $G = 50$ ,  $b = 9$ ,  $a = 10$  und  $c = 2,5$  sind.

Resultate:  $P = 215$  und  $x = 349$  kg.

## § 79.

### Stabilität der Körper.

Befindet sich ein fester Körper auf einer (horizontalen oder geneigten) Ebene im stabilen Gleichgewichte, und ist ausserdem ein Verschieben des ersteren in der Richtung der letzteren durch irgend ein Hindernis unmöglich gemacht, so kann dieser Körper durch eine in nicht vertikaler Richtung wirkende Kraft  $P$  (Fig. 40) höchstens umgeworfen werden.

Weil nun im Schwerpunkte  $S$  das Eigengewicht  $G$  des Körpers angreift, so haben wir in letzterem einen Hebel mit der Drehachse, resp. dem Drehpunkte  $C$  zu erblicken. Bezeichnen daher  $CD = a$  und  $CB = e$  die beiden Lote, welche von  $C$  auf die Wirkungslinien von  $P$  und  $G$  gefällt werden können, so herrscht Gleichgewicht unter der Bedingung, dass die Gleichung

$$Pa = Ge \tag{63.}$$

stattfindet, und es wird demnach ein Umkippen des Körpers eintreten oder nicht, je nachdem

$$Pa > Ge, \text{ folglich } P > \frac{Ge}{a}$$

ist. Man erkennt hieraus, dass die Bestrebung, mit welcher der Körper vermöge seines Gewichtes einem Umstürzen entgegenwirkt, lediglich abhängt von dem Produkte  $Ge$ , das ist von dem statischen Momente des Körpergewichtes in Bezug auf die Kippkante. Da aber

das Widerstreben eines Körpers gegen das Umkanten seine Stabilität oder Standfähigkeit (mitunter auch Standfestigkeit) genannt und nach vorstehendem zweckmässig durch das Moment  $Ge$  gemessen wird, so ist

$$St = Ge \quad (64.)$$

die Stabilität eines Körpers vom Gewichte  $G$ , wenn  $e$  den Abstand der durch den Schwerpunkt gezogenen Vertikallinie von der Kippkante bezeichnet. Um Irrtümern vorzubeugen, drücke man stets  $G$  in Kilogrammen,  $e$  in Metern aus, wodurch man die Stabilität  $St$  in Kilogrammetern erhält.

So besitzt z. B. ein Kegel, dessen Halbmesser  $r$ , dessen Höhe  $h$  Meter und dessen spezifisches Gewicht  $\gamma$  beträgt, das Volumen

$$V = \frac{1}{3} r^2 \pi h \text{ Kubikmeter} = \frac{1000}{3} r^2 \pi h \text{ Kubikdezimeter,}$$

folglich das Gewicht

$$G = \frac{1000}{3} r^2 \pi h \gamma \text{ Kilogramm}$$

und mithin auf horizontaler Ebene die Stabilität  $St = Gr$  oder

$$St = \frac{1000}{3} r^3 \pi h \gamma \text{ Kilogrammmeter.}$$

Eine Kraft  $P$ , welche in der Spitze senkrecht zur Höhe des Kegels wirkt, hat den Hebelsarm  $h$ , demnach das Moment  $Ph$  und ist also im stande, die Stabilität des Kegels aufzuheben, wenn

$$Ph > St$$

oder

$$P > \frac{1000}{3} r^3 \pi \gamma.$$

Für  $r = 0,1 \text{ m}$  und  $\gamma = 7,5$  erhält die rechte Seite vorstehender Ungleichung den Wert 7,854. Wenn folglich  $P$  etwas grösser als 7,854  $kj$  ist, so wird der Kegel umgeworfen, wie hoch er auch sei.

Ferner habe eine Mauer von der Länge  $l$  und dem spezifischen Gewichte  $\gamma$  einen trapezförmigen Querschnitt mit den parallelen Seiten  $AB = a$ ,  $CD = b$  und der Höhe  $BC = h$  (Fig. 41), sämtliche Dimensionen in Metern verstanden. Dann ist zunächst der räumliche Inhalt dieser Mauer

$$V = \frac{a + b}{2} hl \text{ Kubikmeter} = 500 (a + b) hl \text{ Kubikdezimeter.}$$

und ihr Gewicht

$$G = 500 (a + b) h l \gamma \text{ Kilogramm.}$$

Andererseits hat man nach dem Resultate der Aufgabe 207

$$BE = \frac{a^2 + ab + b^2}{3(a + b)} \text{ Meter}$$

und weil offenbar

$$AE = a - BE = \frac{2a^2 + 2ab - b^2}{3(a + b)} \text{ Meter}$$

ist, so ergibt sich leicht

$$St = G \cdot BE = \frac{500}{3} (a^2 + ab + b^2) h l \gamma \text{ Kilogramm-meter,}$$

die Standfähigkeit der Mauer gegen das Kanten um  $B$ , sowie

$$St' = G \cdot AE = \frac{500}{3} (2a^2 + 2ab - b^2) h l \gamma \text{ Kilogramm-meter,}$$

die Stabilität derselben Mauer gegen das Kanten um  $A$ .

Wäre beispielsweise  $a = 0,8$ ,  $b = 0,5$ ,  $h = 2$ ,  $l = 6$  und  $\gamma = 2,4$ , so würden wir

$$St = 6192 \text{ und } St' = 8784 \text{ kgm}$$

erhalten.

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass von dem vorstehend definierten Begriffe wohl zu unterscheiden ist die sogenannte dynamische oder Arbeitsstabilität, worunter man die zum Umstürzen eines Körpers erforderliche mechanische Arbeit zu verstehen hat. Wird nämlich ein Körper um die Kante  $C$  (Fig. 42) so weit gedreht, bis sein Schwerpunkt lotrecht über der Drehachse liegt, so bedarf es hierzu einer Arbeit, welche dem Produkte aus dem Gewichte  $G$  des Körpers in die Hubhöhe  $DS' = s$  seines Schwerpunktes gleich ist; man hat daher zunächst die Arbeitsstabilität

$$A = Gs$$

zu setzen. Bezeichnen aber  $AS = d$  den Abstand des Schwerpunktes von der Standebene und  $AC = e$ , wie früher, die Entfernung der durch  $S$  gehenden Vertikalen von der Kippkante, so erkennt man leicht aus der Figur die Richtigkeit der Beziehungen

$$CS' = CS = \sqrt{d^2 + e^2}, \quad CD = AS = d$$

und

$$DS' = CS' - CD,$$

mithin auch die Gültigkeit der Formel

$$s = \sqrt{d^2 + e^2} - d.$$

Hierdurch erhalten wir die Arbeitsstabilität

$$A = G (\sqrt{d^2 + e^2} - d), \quad (65.)$$

worin wieder  $G$  in Kilogrammen,  $d$  und  $e$  in Metern auszudrücken sind.

Beispielsweise ist für ein rechtwinkliges Parallelepipedon aus Granit mit dem spezifischen Gewichte  $\gamma = 2,5$ , dessen Basis ein Quadrat von der Seite  $a = 0,72 \text{ m} = 7,2 \text{ dm}$  und dessen Höhe  $h = 1,54 \text{ m} = 15,4 \text{ dm}$  sind, zunächst das Gewicht

$$G = a^2 h \gamma = (7,2)^2 \cdot 15,4 \cdot 2,5 = 1995,84 \text{ kg}.$$

Weiter ist in diesem Falle

$$d = \frac{h}{2} = 0,77 \text{ m} \text{ und } e = \frac{a}{2} = 0,36 \text{ m},$$

mithin

$$\sqrt{d^2 + e^2} = 0,85 \text{ m}$$

und folglich

$$A = 1995,84 \cdot 0,08 = 159,6672 \text{ mkg},$$

die dynamische Stabilität des Parallelepipedons, welches mit seiner quadratischen Basis auf horizontaler Ebene steht.

Wenn dagegen das erstere mit einer rechteckigen Seitenfläche aufliegt, so haben wir

$$d = \frac{a}{2} = 0,36 \text{ m} \text{ und } e = \frac{h}{2} = 0,77 \text{ m},$$

demnach

$$\sqrt{d^2 + e^2} - d = 0,85 - 0,36 = 0,49 \text{ m}$$

und es ergibt sich hier die Arbeitsstabilität

$$A' = 1995,84 \cdot 0,49 = 977,9616 \text{ mkg}.$$

## § 80.

### Beispiele.

243. Man bestimme die statische und die dynamische Stabilität einer vertikalen Mauer, welche  $b$  Meter breit,  $h$  Meter hoch,  $l$  Meter lang ist und das spezifische Gewicht  $\gamma$  besitzt.

Resultate: Die erstere ist  $St = 500 b^2 h l \gamma$  und die letztere  $A = 500 b h l \gamma (\sqrt{b^2 + h^2} - h)$  Meterkilogramm.

244. Eine abgestumpfte regelmässige Pyramide hat zu Endflächen zwei Quadrate von 2 und 1 *dem* Seite, 2,8 *m* Höhe, das spezifische Gewicht 3 und ruht mit der grösseren Grundfläche auf horizontaler Ebene. Welches sind die beiden Stabilitäten gegen das Drehen um eine Basiskante?

Antwort:  $St = 19,6$  und  $A = 0,79$  *mkg*.

245. Welches ist die Standfestigkeit einer treppenförmigen Mauer, deren Querschnitt durch  $BC = CD = DE = EF = FG = GH = a$  *dem* (Fig. 43) bestimmt ist, pro laufenden Meter und in Beziehung auf die Drehkante  $A$ , wenn das spezifische Gewicht des Materiales allgemein mit  $\gamma$  bezeichnet wird?

Antwort:  $70 a^3 \gamma$  Kilogrammometer.

246. Was ergibt sich aber für die statische Stabilität per laufenden Meter derselben Mauer in bezug auf die Kippkante  $H$ ?

Antwort:  $110 a^3 \gamma$  Kilogrammometer.

247. Ein beladener Wagen, dessen Vorder- und Hinterräder eine Spurweite von 1,2 *m* haben, wiegt 2 Tonnen, und sein Schwerpunkt liegt in der Symmetrieebene 1,5 *m* hoch über dem Boden. Wie gross ist seine Standfähigkeit gegen das seitliche Umwerfen auf horizontaler Strasse?

Antwort: 1200 *kgm*.

248. Man berechne die Standfestigkeit eines  $h = 24$  *m* hohen Schornsteins von kreisförmigem Querschnitt, wenn an seinen beiden Enden die äusseren Durchmesser  $D = 1,8$  *m*,  $\mathfrak{D} = 1$  *m*, die inneren  $d = 1$  *m*,  $\mathfrak{d} = 0,6$  *m* betragen und ein Kubikmeter Mauerwerk  $n = 1600$  *kg* wiegt.

$$\text{Resultat: } St = \left[ D^2 + Dd + d^2 - (\mathfrak{D}^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{d} + \mathfrak{d}^2) \right] \cdot \frac{D\pi hn}{24} \\ = 38454 \text{ } kgm.$$

249. Welche horizontalgerichtete Kraft müsste also am oberen Ende des Schornsteins wirksam sein, um letztere umzuwerfen?

Antwort: Eine Kraft von 1538,2 *kg*.



§ 81.

**Beurteilung der Stabilität eines Körpers aus seinem Gewichte und der Lage seines Schwerpunktes.**

Aus Formel 63 folgt, dass die zum Umwerfen eines um eine Kante  $C$  drehbaren Körpers vom Gewichte  $G$  erforderliche Kraft etwas grösser als

$$P = \frac{Ge}{a}$$

sein muss, wenn  $e$  und  $a$  die beiden Hebelsarme von  $G$  und  $P$  in bezug auf jene Drehkante darstellen.

Nehmen wir nun speziellerweise an, dass die Kraft  $P$  in horizontaler Richtung durch den Schwerpunkt geht, so ist  $a = d$  die Höhe des Schwerpunkts über der Kippkante und wir erkennen aus der Beziehung

$$P = \frac{Ge}{d}$$

ohne weiteres, dass die umwerfende Kraft  $P$  um so bedeutender sein muss, je grösser  $G$  und  $e$ , je kleiner dagegen  $d$  ist, dass also ein Körper um so fester steht, je schwerer er ist, je weiter seine Falllinie (das durch den Schwerpunkt gehende Lot) von der Kippkante absteht und je tiefer sein Schwerpunkt liegt.

Dieser wichtige Satz lässt sich aber auch — und zwar ohne jede spezielle Annahme — aus der Formel 65 entwickeln, wenn man bedenkt, dass ein Körper offenbar um so fester steht, je mehr es mechanischer Arbeit bedarf, ihn umzuwerfen. Diese mechanische Arbeit

$$A = G(\sqrt{d^2 + e^2} - d)$$

wächst zunächst, wie unmittelbar ersichtlich, zugleich mit  $G$  und  $e$ ; multiplizieren und dividieren wir aber die rechte Seite der letzten Gleichung mit

$$\sqrt{d^2 + e^2} + d,$$

so ergibt sich

$$A = \frac{Ge^2}{\sqrt{d^2 + e^2} + d}$$

und hieraus geht hervor, dass mit zunehmenden  $d$  der Nenner vorstehenden Bruches wächst, während der Zähler ungeändert bleibt, folglich der Wert des ganzen Bruches, das ist die mechanische Arbeit  $A$ , abnimmt.

§ 82.

Die Rolle.

Es ist dies eine kreisrunde und um ihren Mittelpunkt drehbare Scheibe, welche am Rande mit einer Aushöhlung versehen ist; letztere dient zur Aufnahme eines Seiles, an dessen Enden Kraft und Last wirken. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Ist der Mittelpunkt der Rolle unbeweglich, so wird dieselbe eine feste genannt, und es herrscht Gleichgewicht, wenn die Last  $BK = Q$  (Fig. 44), welche an dem einen Seilende angreift, gleich der Kraft  $AJ = P$  ist, welche am anderen Seilende wirkt, wenn also die Gleichung

$$P = Q \quad (66.)$$

besteht; denn die feste Rolle ist ein Hebel mit den gleichen Armen  $MA = MB = r$ .

Verlegen wir Kraft und Last an den Schnittpunkt  $C$  ihrer Wirkungslinien, machen wir also  $CE = CF = AJ = BK = P = Q$ , so stellt die Diagonale

$$CD = R$$

des Rhombus  $CEDF$  den Druck dar, welcher in  $M$  stattfindet. Bezeichnet  $\alpha$  den Winkel  $BCA$ , welchen die nach rückwärts verlängerten Seilenden einschliessen, so haben wir

$$CH = CE \cos \frac{\alpha}{2}$$

oder, weil  $CE = P$  und  $CD = 2 CH$ ,

$$R = 2 P \cos \frac{\alpha}{2} \quad (67.)$$

Für den Fall, dass die Seilenden parallel sind, ist  $\alpha = 0$  und folglich

$$R = 2 P \quad (68.)$$

b) Wenn das eine Seilende befestigt und die Last  $Q$  im Mittelpunkte der Rolle angehängt ist (Fig. 45), in welchem Falle die Rolle

eine lose heisst, so erhalten wir die Gleichgewichtsbedingung, indem wir in 67 für den Druck  $R$  die Last  $Q$  substituieren, nämlich

$$Q = 2 P \cos \frac{\alpha}{2} \text{ oder } P = \frac{Q}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (69.)$$

Man bemerkt, dass man mit derselben Kraft einer um so grösseren Last das Gleichgewicht halten kann, je kleiner der Winkel  $\alpha$  ist, welchen die Seilenden bilden. Der grösste Wert für  $Q$  tritt ein, wenn  $\alpha = 0$  ist, somit die Seilenden parrallel sind; dann ist

$$Q = 2 P \text{ oder } P = \frac{Q}{2}. \quad (70.)$$

Selbstverständlich ist aber bei der losen Rolle das Eigengewicht der letzteren in der Last  $Q$  einbegriffen.

Übrigens kann man auch in 69 statt des Winkels  $\alpha$  den Radius  $MA = r$  der Rolle und die Sehne  $AB = s$  des vom Seile umspannten Bogens einführen. Weil nämlich in Figur 44 die Winkel  $ALM$  und  $MAC$  Rechte sind, so ist Winkel  $MAL = MCA = \frac{\alpha}{2}$

und folglich

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{LA}{MA} = \frac{s}{2r}.$$

Mit Einsetzung dieses Wertes in 69 erhält man aber

$$Q = 2 P \frac{s}{2r} = P \frac{s}{r}$$

oder in Form einer Proportion

$$P : Q = r : s, \quad (71.)$$

in Worten: Eine lose Rolle befindet sich im Gleichgewichtszustande, wenn die Kraft zur Last (einschliesslich des Rollengewichts) wie der Halbmesser der Rolle zur Umspannungssehne sich verhält.

### § 83.

#### Beispiele.

250. Man bestimme den Druck auf den Zapfen einer festen Rolle, wenn die Last  $50 \text{ kg}$  beträgt, die beiden Seilenden einen Winkel von  $20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 120, 150,$

170, 180° einschliessen und das Eigengewicht der Rolle unberücksichtigt bleibt.

Resultate: 98,5 kg, 96,6 kg, 94 kg, 90,6 kg, 86,6 kg, 81,9 kg, 76,6 kg, 70,7 kg, 64,3 kg, 50 kg, 25,9 kg, 8,7 kg und 0 kg.

251. Welchen Winkel müssen die beiden Seilenden einschliessen, wenn der Zapfendruck (ohne Rücksicht auf das Gewicht der Rolle) die Hälfte der Last betragen soll?

Antwort: 151° 2' 42''

252. Wie gross stellt sich aber der Zapfendruck unter Rücksichtnahme auf das Eigengewicht  $G$  der Rolle heraus, sobald die Kraft  $P$  und die Last  $Q$  gleiche Winkel mit dem Horizont bilden, nämlich 1. 90°, 2. 60°, 3. 45°, 4. 30° und 5. 0°.

Resultate:  $R_1 = 2Q + G$ ,  $R_2 = Q\sqrt{3} + G$ ,  $R_3 = Q\sqrt{2} + G$ ,  $R_4 = Q + G$  und  $R_5 = G$ .

253. Mittels einer losen Rolle von 10 kg Gewicht sollen 190 kg bei parallel gerichteten Seilenden gehoben werden. Welche Kraft ist hierzu nötig, wenn die Bewegungswiderstände ein Zehntel der Last ausmachen?

Antwort: Eine Kraft von 110 kg.

254. Der wievielte Teil vom Umfange einer beweglichen Rolle muss durch das Seil berührt werden, damit die Kraft genau gleich der zu hebenden Last ist?

Antwort: Der dritte Teil.

255. Auf ein horizontal gespanntes, 6 m langes Drahtseil wird in der Mitte eine 8 kg schwere lose Rolle aufgesetzt und letztere mit 72 kg belastet, so dass sich das Seil an dieser Stelle um 1 dm senkt; es ist zu berechnen, um wieviel durch diese Belastung die Spannung des Seiles vermehrt wird.

Antwort: Um zirka 1200 kg.

256. Wie gross würde aber die Spannung im Seile werden, vorausgesetzt, dass letzteres vor Auflegung der Rolle genau geradlinig gespannt war\*) und eine Ausdehnung des Seiles ausgeschlossen wäre?

Antwort: Unendlich gross.

---

\*) Was allerdings mathematisch genau in Wirklichkeit unerreichbar ist.

§ 84.

Das Rad an der Welle.

Hierunter versteht man einen um seine Achse drehbaren Zylinder, auf welchem ein Rad mit gleicher Drehachse befestigt ist. Um den Zylinder ist ein Seil oder eine Kette geschlungen, an welcher die Last  $BD = Q$  (Fig. 46) hängt, und letztere wird im Gleichgewicht erhalten durch eine tangential an der Peripherie des Rades wirkende Kraft  $AC = P$ .

Das Wellrad ist nun offenbar ein Hebel mit der Drehachse  $M$ ; der Radius der Welle,  $MB = r$ , ist der Hebelarm der Last  $Q$ , und der Halbmesser des Rades,  $MA = R$ , ist der Arm der Kraft  $P$ ; es besteht daher Gleichgewicht, wenn

$$PR = Qr, \quad (72.)$$

wenn also das Produkt aus Last und Wellradius gleich dem Produkte aus Kraft und Radhalbmesser ist.\*)

Diese einfache Maschine tritt unter verschiedenen Formen auf: sie heisst Haspel, wenn die Welle horizontal, und Winde oder Göpel, wenn die Welle vertikal steht; hat bei dem Haspel das Rad eine Auskehlung zur Aufnahme des Seiles, so führt er den Namen Seilrad, und jenachdem bei lotrecht stehender Welle die Kraft von Menschen oder Pferden ausgeübt wird, nennt man die Vorrichtung Erdwinde (Gangspille, Laufspille) oder Pferdögöpel.

§ 85.

Beispiele.

257. Ein Wellrad besitzt die Radien  $R = 0,6 \text{ m}$  und  $r = 0,12 \text{ m}$ . Welcher Last  $Q$  kann durch  $65 \text{ kg}$  Kraft das Gleichgewicht gehalten werden?

Antwort: Einer Last  $Q = 325 \text{ kg}$ .

258. Wie lang müsste man aber bei sonst gleichen Umständen

---

\*) Hierbei ist freilich von der Seilstärke abgesehen worden. Ist diese im Verhältnis zum Halbmesser beträchtlich, so hat man als Hebelsarm von Kraft, resp. Last, dasjenige Lot zu betrachten, welches von der Mitte des aufgewickelten Seiles auf die Drehachse gefällt werden kann.

den Halbmesser  $R$  des Rades machen, um einer Last von  $500 \text{ kg}$  das Gleichgewicht zu halten?

Antwort:  $\frac{12}{13} = 0,923 \text{ m}$  lang.

259. Mittels eines Wellrades, dessen Halbmesser  $120$  und  $800 \text{ mm}$  betragen, soll eine Last von  $600 \text{ kg}$  gehoben werden. Welche Kraft  $P$  ist hierzu erforderlich, wenn die Bewegungshindernisse  $\frac{1}{4}$  der Last ausmachen?

Antwort:  $P = 112,5 \text{ kg}$ .

260. Es soll die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für ein Wellrad unter Beachtung der halben Dicke  $\varrho$  des Lastseiles angegeben werden, angenommen, dass letzteres in der ersten Lage sich auf die Welle windet.

Lösung:  $PR = Q(r + \varrho)$ .

261. Ebenso, wenn sich das Seil in 2, resp. 3 Lagen aufwindet.

Lösung:  $PR = Q(r + 3\varrho)$ , resp.  $PR = Q(r + 5\varrho)$ .

262. Für ein Seilrad sind die Durchmesser von Welle und Rad  $d$ , resp.  $D$ , und die Durchmesser der entsprechenden Seile  $\delta$ , resp.  $\delta$ . Man entwickle die Gleichgewichtsbedingung unter der Voraussetzung, dass das Lastseil in nur einer Lage sich aufwindet.

Lösung:  $P(D + \delta) = Q(d + \delta)$ .

263. Man berechne  $P$  für den Fall, dass  $D = 1,985 \text{ m}$ ,  $d = 0,17 \text{ m}$ ,  $\delta = 40 \text{ mm}$ ,  $\delta = 15 \text{ mm}$  und  $Q = 500 \text{ kg}$  sei, wenn ausserdem festgestellt ist, dass Reibung und Seilsteiifigkeit  $\frac{1}{3}$  der Last in Anspruch nehmen.

Resultat:  $P = 70 \text{ kg}$ .

264. Mittels einer Erdwinde von  $3 \text{ m}$  Durchmesser soll durch eine Kraft von  $48 \text{ kg}$  einer Last von  $750 \text{ kg}$  das Gleichgewicht gehalten werden. Wie gross muss der Wellendurchmesser sein, wenn die Dicke des Lastseils  $35 \text{ mm}$  beträgt.

Antwort:  $157 \text{ mm}$ .

## § 86.

### Die schiefe Ebene.

Auf einer unter dem Winkel  $HGJ = \alpha$  gegen den Horizont geneigten Ebene (Fig. 47) befindet sich eine durch die Strecke  $ME$

dargestellte Last  $Q$ ; letztere soll im Gleichgewicht erhalten werden mittels einer aufwärts wirkenden Kraft  $MF = P$ , welche im Schwerpunkte des Lastkörpers angreift und mit der schiefen Ebene einen beliebigen Winkel  $FMB = \beta$  einschliesst.

Um die Gleichgewichtsbedingung zu erfahren, zerlegen wir sowohl die Kraft als die Last in je zwei Komponenten, wovon die eine parallel und die andere senkrecht zur schiefen Ebene gerichtet ist. Weil der Winkel  $GOE = MOH$  sowohl von  $HGJ = \alpha$  als von  $OMC$  zu einem Rechten ergänzt wird, so ist  $\sphericalangle OMC = MEA = \alpha$  und mithin sind die beiden Seitenkräfte der Last  $ME = Q$ :

$$MC = Q \cos \alpha, \quad MA = Q \sin \alpha,$$

wovon die erste angiebt, wie stark die Last  $Q$  auf die schiefe Ebene drückt und die zweite die Grösse des Bestrebens erkennen lässt, mit welcher  $Q$  längs der Ebene herunterlaufen will.

Auch die Kraft  $MF = P$  zerlegt sich in die beiden Wirkungen

$$MD = P \sin \beta, \quad MB = P \cos \beta,$$

wovon die eine den Lastkörper senkrecht von der geneigten Ebene abheben und die andere ihn parallel zur letzteren aufwärts ziehen will. Es herrscht also offenbar Gleichgewicht, wenn

$$MB = MA$$

oder

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha,$$

wenn also die Kraft

$$P = Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \quad (73.)$$

ist, und es wird hierbei von der schiefen Ebene ein Normaldruck aufgenommen, welcher sich findet

$$N = MC - MD$$

oder mit Benützung obiger Werte

$$N = Q \cos \alpha - P \sin \beta,$$

woraus mit Rücksicht auf (73) folgt

$$N = Q \cos \alpha - Q \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \cdot \sin \beta,$$

$$N = Q \cdot \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \beta}$$

und hieraus, weil bekanntlich  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$ :

$$N = Q \cdot \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \beta}. \quad (74.)$$

Für eine horizontale Ebene ist  $\alpha = 0$  und folglich erhalten wir aus den Formeln 73 und 74:

$$P = 0 \text{ und } N = Q.$$

In der That ist leicht begreiflich, dass auf horizontaler Ebene zur Erhaltung des Gleichgewichts gar keine Kraft erforderlich und dass dann der Normaldruck der Last selbst gleich ist.

Auf der schiefen Ebene sind aber bezüglich des Winkels  $\beta$  zwei besondere Fälle als wichtig hervorzuheben: Ist nämlich erstens  $\beta = 0$ , also die Kraft  $P$  parallel zur schiefen Ebene, so ergibt sich wegen  $\cos \beta = 1$  aus Formel 73

$$P = Q \sin \alpha \tag{75.}$$

als die der Last  $Q$  das Gleichgewicht haltende Kraft und aus 74 erhält man

$$N = Q \cos \alpha, \tag{76.}$$

den hierbei auf die schiefe Ebene ausgeübten Normaldruck.

Wenn zweitens  $\beta = -\alpha$ , mithin  $P$  horizontal wirkt, so wird  $\cos \beta = \cos \alpha$  und folglich ergeben sich aus 73 und 74 für  $P$  und  $N$  die Werte

$$P = Q \operatorname{tg} \alpha \tag{77.}$$

und

$$N = \frac{Q}{\cos \alpha} = Q \operatorname{sec} \alpha. \tag{78.}$$

Legt man durch den tiefsten und höchsten Punkt der schiefen Ebene eine Horizontale und eine Vertikale  $GJ$  und  $HJ$ , so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck  $GJH$ , dessen Seiten  $GJ = b$  die Basis,  $JH = h$  die Höhe und  $GH = l$  die Länge der schiefen Ebene genannt werden. Mit Einsetzung von

$$\sin \alpha = \frac{h}{l}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{l} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{b}$$

in die Beziehungen 75 bis 78 erhält man

$$P = \frac{h}{l} Q \quad \text{und} \quad N = \frac{b}{l} Q,$$

sowie

$$P = \frac{h}{b} Q \quad \text{und} \quad N = \frac{l}{b} Q.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgen die Proportionen

$$P : Q = h : l \quad \text{und} \quad N : Q = b : l, \tag{79.}$$



mithin gilt der Satz: Eine parallel zur schiefen Ebene gerichtete Kraft hält einer Last das Gleichgewicht, wenn die erstere zur letzteren sich verhält wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge und dabei steht der Normaldruck zur Last in demselben Verhältnis, wie die Basis zur Länge der schiefen Ebene.

Aus den beiden letzten obigen Gleichungen erhält man leicht

$$P : Q = h : b \text{ und } N : Q = l : b, \quad (80.)$$

in Worten: Bei horizontal wirkender Kraft herrscht an der schiefen Ebene Gleichgewicht, wenn das Verhältnis aus Kraft und Last übereinstimmt mit dem Verhältnis aus der Höhe und Basis der schiefen Ebene; der Normaldruck auf die Unterlage verhält sich dann zur Last, wie die Länge zur Basis der schiefen Ebene.

### § 87.

#### Beispiele.

265. Eine Last von 1000 *kg* ruht auf einer unter  $20^\circ$  zum Horizont geneigten Ebene und soll im Gleichgewichte erhalten werden durch eine Kraft, welche einen Winkel von  $42^\circ$  mit dem Horizont einschliesst; wie gross muss diese Kraft sein?

Antwort:  $P = 368,88 \text{ kg}$ .

266. Man bestimme denjenigen Normaldruck, welchen die schiefe Ebene der vorigen Aufgabe auszuhalten hat.

Lösung:  $N = 801,5 \text{ kg}$ .

267. Unter welchem Winkel muss eine Ebene gegen den Horizont geneigt sein, damit eine parallel zur schiefen Ebene wirkende Kraft einer 20 mal so grossen Last das Gleichgewicht zu halten vermag?

Antwort: Unter dem Winkel  $\alpha = 2^\circ 51' 58''$ .

268. Um wieviel muss eine schiefe Ebene pro 100 *m* steigen, wenn eine parallel zur letzteren gerichtete Kraft von 3 *kg* einer Last von 150 *kg* das Gegengewicht halten soll?

Antwort: Um 2 Meter.

269. Bei welchem Neigungswinkel würde ein Körper auf einer schiefen Ebene mit einer Beschleunigung von 2 *m* herabgleiten, wenn Reibung und Luftwiderstand nicht vorhanden wären?

Antwort: Bei  $\alpha = 11^{\circ} 45' 50''$ .

270. Mit welcher Beschleunigung rollt eine Kugel auf einer unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigten Ebene ohne Rücksicht auf die Bewegungshindernisse?

Antwort: Mit der Beschleunigung  $p = g \sin \alpha$ , worin  $g = 9,81 \text{ m}$  ist.

271. Welche Proportion besteht demnach zwischen den Grössen  $p$ ,  $g$  einer-, sowie zwischen der Höhe  $h$  und der Länge  $l$  einer schiefen Ebene andererseits?

Antwort: Die Proportion  $p : g = h : l$ .

272. Auf zwei schiefen Ebenen mit der gemeinschaftlichen Höhe  $h$  und den Längen  $l$ , resp.  $l'$  befinden sich zwei Lasten  $Q$  und  $Q'$ , welche durch ein über eine feste Rolle gelegtes Seil derartig verbunden sind, dass die Enden des letzteren parallel zu den Längen des letzteren laufen. Welches ist hier die Gleichgewichtsbedingung?

Antwort: Es muss sich  $Q : Q' = l : l'$  verhalten.

273. Man bestimme und vergleiche die beiden Endgeschwindigkeiten, welche ein Körper erhält, indem er von der Ruhe aus: erstens die ganze Länge  $l$  einer schiefen Ebene durchrollt und zweitens die Höhe der letzteren frei durchfällt, ohne in beiden Fällen die Bewegungswiderstände zu beachten.

Resultat: Sie sind einander gleich, nämlich gleich  $\sqrt{2gh}$ .

274. Wie verhalten sich aber die entsprechenden Bewegungszeiten?

Antwort: Wie  $l$  zu  $h$ , also wie die vom Körper zurückgelegten Wege.

## § 88.

### Der Keil.

In der Mechanik begreift man unter „Keil“ ein dreiseitiges Prisma, dessen normaler Querschnitt entweder ein rechtwinkliges oder ein gleichschenkliges Dreieck ist; im ersten Falle wird der Keil einfach, im anderen Falle doppelt genannt. Diejenige Seite des Dreiecks (eine Kathete vom rechtwinkligen, resp. die Basis vom gleichschenkligen Dreieck), auf welche die Kraft  $P$  — und zwar fast immer lotrecht — wirkt, heisst der Rücken, die anderen beiden Dreiecksseiten heissen die Seiten des Keiles; den dem Rücken

gegenüberliegenden Winkel nennt man den Keilwinkel und die Entfernung seines Scheitels vom Rücken die Höhe des Keiles.

Bezüglich des Gleichgewichts am Keile unterscheiden wir drei Fälle:

I. Der Widerstand wirkt senkrecht zur Seite eines einfachen Keiles und ist frei.

Zerlegen wir den durch die Strecke  $AC$  (Fig. 48) dargestellten und zur Seite  $EG = s$  vertikal gerichteten Widerstand  $Q$  in zwei Komponenten  $AB$  und  $AD$ , welche parallel zur Höhe  $EF = h$  und zum Rücken  $FG = b$  des Keiles sind, so wirkt  $AD$  lediglich als Druck auf die Keilunterlage  $LM$ , und es besteht daher Gleichgewicht, wenn die normal zum Rücken des Keiles wirksame Kraft  $JK = P$  mit  $AB$  übereinstimmt, wenn also

$$P = AB$$

ist. Es folgt aber weiter aus

$$\sphericalangle CAD = ACB = GEF = \alpha$$

$$AB = AC \sin \alpha, AD = AC \cos \alpha$$

oder mit Einführung der obigen Bezeichnungen

$$P = Q \sin \alpha, \tag{81.}$$

die das Gleichgewicht erhaltende Kraft und

$$N = Q \cos \alpha, \tag{82.}$$

der hierbei stattfindende Normaldruck, welchen der Keil auf seine Unterlage ausübt.

Im rechtwinkligen Dreiecke  $FGH$  hat man auch

$$\sin \alpha = \frac{FG}{EG} = \frac{b}{s} \text{ und } \cos \alpha = \frac{EF}{EG} = \frac{h}{s}$$

und mithin

$$P = Q \cdot \frac{b}{s}, N = Q \cdot \frac{h}{s}, \tag{83.}$$

die Kraft  $P$  und den Normaldruck  $N$ , ausgedrückt durch den Widerstand  $Q$  und die Dimensionen des Keiles.

II. Zwei gleiche Widerstände wirken senkrecht auf die Seiten eines doppelten Keiles und sind frei.

Hier herrscht offenbar Gleichgewicht, wenn die Resultante der beiden Widerstände  $FE_1 = FE_2 = Q$  (Fig. 49), das ist die Diagonale  $FG$  des Rhombus  $E_2GE_1F$ , gleich und entgegengesetzt der Kraft  $CF = P$ , wenn also

$$P = FG$$

ist. Setzen wir aber wiederum die Seite des Keiles  $AB = AD = s$ , den Rücken  $BD = b$  und den halben Keilwinkel

$$BAC = CAD = \alpha$$

so ergibt sich wegen  $\sphericalangle FE_1H = CAD = \alpha$  und  $FH = FE_1 \sin \alpha = Q \sin \alpha$ :

$$FG = 2FH = 2Q \sin \alpha$$

und mithin

$$P = 2Q \sin \alpha$$

oder, weil

$$\sin \alpha = \frac{JD}{AD} = \frac{b}{2s}:$$

$$P = Q \cdot \frac{b}{s} \tag{84.}$$

als Bedingung des Gleichgewichts für den doppelten Keil.

Da sowohl aus der ersten Beziehung von Nr. 83 als aus 84 die Proportion

$$P : Q = b : s$$

sich formen lässt, so findet in beiden vorstehenden Fällen Gleichgewicht statt, wenn die Kraft  $P$  zum Widerstand  $Q$  sich verhält, wie der Rücken  $b$  des Keiles zu seiner Seite  $s$ .

III. Ein Widerstand oder eine Last wirkt parallel zum Rücken eines einfachen Keiles und ist unfrei.

Der Last  $AC = Q$  muss in diesem Falle notwendiger Weise durch eine Führung  $KK'$  (Fig. 50) die feste Wirkungslinie  $CA$  vorgeschrieben sein, da ohne jene Führung nur ein Herabgleiten der Last auf der Seitenfläche des Keiles, dagegen kein Gleichgewicht stattfinden könnte.

Um die Bedingung für letzteres zu erhalten, zerlegt man  $AC = Q$  in zwei Seitenkräfte  $AD$  und  $AB$ , von welchen  $AD$  senkrecht zum Rücken  $FG = b$  und  $AB$  senkrecht zur Seite des Keiles gerichtet ist. Die erste Komponente  $AD$  wird von der festen Führung  $KK'$  aufgenommen, hat also auf den Keil selbst gar keinen Einfluss. Es bleibt demnach als Wirkung auf den Keil nur die Kraft

$$AB = \frac{Q}{\cos \alpha},$$

weil ja  $\sphericalangle ACD = CAB = FEG = \alpha$ , wie früher. Da nun diese Kraft lotrecht zur Seite des Keils und frei wirkt, so ergibt sich die

hierher gehörige Gleichgewichtsbedingung dadurch, dass wir in der

81. Formel  $\frac{Q}{\cos \alpha}$  an die Stelle von  $Q$  setzen, nämlich

$$P = \frac{Q}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = Q \operatorname{tg} \alpha.$$

Mit Berücksichtigung von  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{GF}{GE} = \frac{b}{h}$  folgt hieraus

$$P : Q = b : h, \quad (85.)$$

also der Satz: Wirkt eine Last unfrei und parallel zum Rücken eines einfachen Keiles, so besteht Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie der Rücken zur Höhe des Keiles.

### § 89.

#### Beispiele.

275. Rücken und Höhe eines einfachen Keiles sind 40 und 399 Millimeter lang. Welchen Druck normal zur Seite kann man mit 10 *kg* Kraft lotrecht zum Rücken ausüben?

Antwort: 100,25 *kg*.

276. Wie gross ist hierbei der Druck auf die Unterlage des Keiles?

Antwort: 99,75 *kg*.

277. Wie gross muss der Winkel an der Schneide eines doppelten Keiles gewählt werden, wenn man mit einer gegebenen Kraft den 20fachen Widerstand (senkrecht zur Seitenfläche) ausüben will?

Antwort: 2° 51' 54''.

278. Rücken und Seite eines doppelten Keiles verhalten sich wie 3 : 20. Mit welcher Kraft senkrecht zum Rücken kann man 100 *kg* Seitenpressung erreichen?

Antwort: Mit 15 *kg*.

279. Man will eine auf einer horizontalen Ebene ruhende Last von 10000 *kg* mittels einfachen Keiles, dessen Rücken 48 und dessen Seite 577 Millimeter betragen, senkrecht in die Höhe treiben. Welche Kraft ist hierzu nötig, wenn, wie immer, von sämtlichen Reibungswiderständen abgesehen wird?

Antwort: Rund 835 *kg*.

280. Wie kann man über die Wirkung einer Kraft  $P$  Aufschluss erhalten, wenn dieselbe nicht senkrecht, sondern unter einem Winkel  $\alpha$  zum Rücken des Keiles gerichtet ist?

Antwort: Indem man  $P$  in zwei Komponenten zerlegt, wovon die eine in die Richtung des Rückens fällt und die andere lotrecht zu letzterem ist; die erste,  $P \cos \alpha$ , sucht den Keil aus seiner Lage herauszudrehen, die zweite,  $P \sin \alpha$ , wirkt in der oben angegebenen Weise.

### § 90.

#### Die Schraube.

Die Form und die Namen der einzelnen Bestandteile einer Schraube dürfen hier wohl als bekannt vorausgesetzt werden; in ihrer mechanischen Wirkungsweise kann aber diese einfache Maschine offenbar aufgefasst werden als ein auf einen geraden Kreiszyylinder aufgewickelter Keil, dessen Rücken  $A'B'$  (Figur 51) durch die Höhe  $AB$  eines Schraubenganges und dessen Höhe  $A'C'$  durch den Umfang des Schraubenkerns dargestellt wird.

Wenn nun in der Richtung der Schraubenachse ein Widerstand  $Q$  zu überwinden ist durch eine Kraft  $P'$ , welche tangential am Umfange des Schraubenkernes wirkt, so findet der Fall III des § 88 statt; denn die Last  $Q$  wirkt parallel und die Kraft  $DE = P'$  senkrecht zum Rücken des Keiles, während die Führung von  $Q$  durch die Schraubenmutter besorgt wird. Zugleich wird man aber auch einsehen, dass als Hebelsarm der Kraft  $P'$  nicht der Halbmesser des Schraubenkernes, sondern richtiger das arithmetische Mittel aus dem inneren und äusseren Radius des Schraubengewindes zu setzen ist; denn da alle Druckkräfte auf die Schraubenfläche parallel und nahezu gleich sind, so liegt der resultierende Druck fast genau auf der Mittellinie der Schraubenfläche. Wird daher die Ganghöhe mit  $g$  und der mittlere Radius des Schraubengewindes mit  $r$  bezeichnet, so ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung für die Schraube dadurch, dass man in Formel 85

$$P = P', b = g, h = 2r\pi$$

setzt und für  $P'$  auflöst, nämlich

$$P' = \frac{g}{2r\pi} Q.$$

In den meisten Fällen wird mit dem Schraubenbolzen ein Hebelarm  $R$  verbunden, an welchem die bewegende Kraft  $P$  wirkt. Aus

$$PR = P'r$$

folgt

$$P' = \frac{R}{r} P$$

und mit Einsetzung dieses Wertes in die obige Gleichung für  $P'$ :

$$\frac{R}{r} P = \frac{g}{2r\pi} Q$$

oder

$$P = \frac{g}{2R\pi} Q \quad (86.)$$

als Bedingung des Gleichgewichts für die Schraube ohne Rücksicht auf Reibung.

### § 91.

#### Beispiele.

281. Für eine Schraube sind der innere und der äussere Radius des Gewindes 60 und 70 mm, die Ganghöhe beträgt 4 mm und das Eigengewicht ist 35 kg. Welche Kraft muss am mittleren Schraubenbolzenumfang wirken, um einer Last von 350 kg das Gleichgewicht zu halten, wenn vom Reibungswiderstande abgesehen wird?

Antwort: Die Kraft  $P = 3,7706 \text{ kg}$ .

282. An dem 0,8 m langen Hebelsarm einer Schraubenpresse lässt man eine Kraft von 50 kg wirken. Welcher Druck wird bei 35 mm Ganghöhe ohne Rücksicht auf Reibung ausgeübt?

Antwort: Der Druck  $Q = \frac{2R\pi P}{g} = 7180,8 \text{ kg}$ .

283. Man hat eine Schraube von 30 mm Ganghöhe und will mittels derselben durch eine Kraft von 25 kg einen Druck von 1000 kg erzeugen. Wie lang muss der Hebelsarm der Kraft genommen werden?

Antwort:  $R = \frac{Qg}{2P\pi} = 191 \text{ mm}$ .

284. Man bestimme das Verhältnis zwischen Kraft und Last an einer Schraube, deren Bolzen 15 cm Durchmesser hat und deren

Ganghöhe 25 *mm* beträgt, wenn die Kraft tangential am Umfange des Bolzen wirkt und die Reibung vernachlässigt wird?

Antwort:  $P : Q = 1 : 18,85$ .

285. Welches wäre aber dies Verhältnis, wenn die Kraft an einem 1,57 *m* langen Hebelsarm angreift?

Antwort:  $P : Q = 1 : 394,58$ .

286. Mittels einer Schraubenpresse, deren Ganghöhe 25 *mm* beträgt, will man einen Druck von 3000 *kg* ausüben. Welche Kraft muss an dem 2 *m* langen Hebel wirksam sein?

Antwort: Die Kraft  $P = 5,968$  *kg*, also rund 6 *kg*.

287. Am Hebelarm derselben Presse lässt man aber jetzt eine Kraft von 50 *kg* wirken und fragt nach dem hierdurch hervorgerufenen Druck.

Lösung:  $Q = 25132,7$  *kg*.

288. Wie gross ist die Ganghöhe *g* einer  $G = 100$  *kg* wiegenden Schraube, wenn man mit Hilfe derselben durch eine Kraft  $P = 80$  *kg*, welche am Hebelsarm  $R = 1,5$  *m* wirkt, eine Last  $Q = 16000$  *kg* zu heben im stande ist?

Antwort:  $g = \frac{2 R \pi P}{Q + G} = 0,04683$  Meter, also beinahe 47 Millimeter.

## § 92.

### Mechanische Arbeit der Kräfte an einfachen Maschinen.

Wenn ein mathematischer Hebel, an welchem die Kraft  $P$  mit dem Hebelsarm  $CA = p$  (Fig. 52) der Last  $Q$  mit dem Arme  $CB = q$  das Gleichgewicht hält, sodass

$$Pp = Qq$$

ist, einen Stoss erhält, so wird der Hebelkörper in Bewegung übergehen. Diese letztere muss aber nach dem Grundgesetze vom Beharrungsvermögen so lange gleichförmig sein, als zwischen den am Hebel wirksamen Kräften Gleichgewicht herrscht, so lange also die letzteren selbst unveränderlich sind und gleiche Hebelsarme behalten, d. h. perpendicular zu  $CA$ , resp.  $CB$  bleiben; denn in diesem Falle wird sich der Hebelkörper genau so verhalten, als wenn die beiden Kräfte  $P$  und  $Q$  überhaupt gar nicht vorhanden wären — alles das



aber immer wieder nur unter der Voraussetzung, dass der Hebel weder von Reibung noch von Luftwiderstand beeinflusst wird.

Nehmen wir jetzt an, der Hebel habe sich von seiner ursprünglichen Lage aus um den beliebigen Winkel

$$ACA' = BCB' = \gamma$$

gedreht, so sind die von den Angriffspunkten  $A$ ,  $B$  der Kraft  $P$ , resp. der Last  $Q$  zurückgelegten Wege dargestellt durch die Kreisbögen

$$AA' = p\gamma, \text{ bzw. } BB' = q\gamma,$$

und mithin sind die von  $P$ , bzw.  $Q$  geleisteten mechanischen Arbeiten

$$P \cdot \widehat{AA'} = Pp\gamma, \text{ bzw. } Q \cdot \widehat{BB'} = Qq\gamma.$$

Multipliziert man aber die Gleichgewichtsbedingung  $Pp = Qq$  mit  $\gamma$ , so entsteht

$$Pp\gamma = Qq\gamma$$

oder

$$P \cdot \widehat{AA'} = Q \cdot \widehat{BB'},$$

und man erkennt hieraus, dass die von  $P$  und  $Q$  am Hebel geleisteten Arbeiten einander gleich sind.

Dieser Satz, dessen Richtigkeit auch für die feste Rolle und das Wellrad ohne weiteres einleuchtet, gilt aber unter den oben gemachten Annahmen auch für mehr als zwei am Hebel wirkenden Kräfte; denn sind letztere allgemein

$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

und ihre zugehörigen Arme

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_n,$$

so ist die Bedingung des Gleichgewichts

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + P_3 p_3 + \dots + P_n p_n = 0,$$

wobei aber die in verschiedenem Sinne drehenden Kräfte mit entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind. Multipliziert man diese Gleichung mit einem Winkel  $\gamma$  (im Bogenmass), um welchen sich der Hebel nach irgend einer Zeit gedreht haben soll, so folgt

$$P_1 p_1 \gamma + P_2 p_2 \gamma + P_3 p_3 \gamma + \dots + P_n p_n \gamma = 0,$$

oder, weil die Kreisbögen

$$p_1 \gamma, p_2 \gamma, p_3 \gamma, \dots, p_n \gamma$$

die von den Angriffspunkten der Kräfte beschriebenen Wege

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$$

bezeichnen:

$$P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \dots + P_n s_n = 0.$$

Mithin ist an einem in gleichförmiger Bewegung begriffenen Hebel innerhalb eines beliebigen Zeitraumes die algebraische Summe der mechanischen Arbeiten sämtlicher Kräfte der Null gleich oder mit anderen Worten: die (absolute) Summe der Arbeiten aller bewegenden Kräfte ist gleich der Summe der Arbeiten, welche die zu überwindenden Widerstände konsumieren.

Hieraus geht hervor, dass mittels eines Hebels in seinen verschiedenen Formen niemals ein Gewinn von mechanischer Arbeit zu erreichen ist; denn, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren, oder auch, weil die Angriffspunkte von Kraft und Last ihre Wege in derselben Zeit zurücklegen: was an Kraft gewonnen wird, geht an Geschwindigkeit verloren und umgekehrt.

Die Giltigkeit dieses wichtigen Satzes ist zwar von bedeutenden Mathematikern für alle einfachen und zusammengesetzten Maschinen und unter allen möglichen Umständen bewiesen worden — wir wollen uns aber an dieser Stelle darauf beschränken, seine Richtigkeit nur noch an der schiefen Ebene zu zeigen.

Hierbei können wir uns unter Vernachlässigung der Reibung auf den günstigsten Fall beschränken, dass die Kraft parallel zur schiefen Ebene wirkt; denn in allen anderen Fällen arbeitet nur die Komponente  $MB$  (Fig. 47), welche gleiche Richtung mit  $GH$  besitzt und stets kleiner als  $MF$  ist, während die andere normal zu  $GH$  gerichtete Seitenkraft lediglich den Druck der Last  $Q$  auf die schiefe Ebene vermindert.

Wenn nun die zur schiefen Ebene  $GH$  parallele Kraft  $P$  die Last  $Q$  durch die ganze Länge  $l$  der ersteren gleichförmig aufwärts bewegt, so ist die von  $P$  geleistete mechanische Arbeit

$$A = Pl$$

oder, weil nach Nr. 79

$$P = Q \frac{h}{l}$$

ist,

$$A = Q \frac{h}{l} \cdot l = Qh.$$

Die genau gleiche Arbeit müsste aber auch ohne schiefe Ebene aufgewendet werden, um die nämliche Last  $Q$  auf dieselbe Höhe  $h$  direkt vertikal emporzuheben, sodass also vermittelt der schiefen Ebene gleichfalls kein Arbeitsgewinn erzielt werden kann, selbst wenn von der Reibung abstrahiert und der Arbeitskraft  $P$  die vorteilhafteste Richtung angewiesen wird.

Nach alledem wird es nun völlig klar sein, warum bei jeder Maschine die Nutzarbeit geringer sein muss als die Totalarbeit.

## Siebentes Kapitel.

### Zusammengesetzte Maschinen.

§ 93.

#### Hebelverbindungen.

Sind mehrere Hebel unter einander so verbunden, dass an den beiden äussersten die Kraft  $P$  und die Last  $Q$  angreifen, während die Endpunkte von je zwei benachbarten durch Druck (oder Zug) auf einander wirken, so lässt sich die Entwicklung der Gleichgewichtsbedingung leicht auf den einfachen Hebel zurückführen, wenn man bedenkt, dass das ganze Hebelsystem im Gleichgewichte sein muss, sobald es jeder einzelne Hebel ist.

Das Hebelwerk Fig. 53 bestehe zum Beispiel aus drei Hebeln mit den Drehpunkten  $C, C', C''$  und den Armen  $AC = p, CD = q, DC' = p', C'E = q', EC'' = p'', C''B = q''$ , am linken Endpunkte  $A$  greife die Kraft  $P$  an, welche der in  $B$  wirksamen Last  $Q$  das Gegengewicht halten soll.

Bezeichnen wir jetzt die Drücke, welche zwischen den Enden der Hebel stattfinden und in den Mittelpunkten  $D$ , resp.  $E$  der Berührungsf lächen angreifen, mit  $X$ , bezw.  $Y$ , so gelten im Gleichgewichtszustande die Beziehungen

$$\begin{aligned} Pp &= Xq \\ Xp' &= Yq' \\ Yp'' &= Qq''. \end{aligned}$$

Durch Multiplikation folgt

$$PXYpp'p'' = XYQqq'q''$$

und durch Division mit  $XY$

$$Ppp'p'' = Qqq'q'',$$

die gewünschte Gleichgewichtsbedingung.

§ 94.

**Räderwerke.**

Eine besonders wichtige Anwendung des im vorigen Paragraphen Gesagten haben wir in den Räderwerken, bei welchen mehrere Wellenräder derartig miteinander verbunden sind, dass von der Peripherie jeden Rades auf die Welle des folgenden Kraft übertragen wird.

Diese Kraftübertragung kann nun bei unmittelbarer Berührung der Maschinenteile entweder (unter starkem Normaldruck) durch die Reibung (Friktionsräder) oder auch durch Verzahnung (Zahn-  
räder) bewerkstelligt werden. Im ersten Falle sind als Hebelsarme in Rechnung zu bringen die Halbmesser der Rad- und Wellenperipherie selbst, im anderen diejenigen beiden Lote, welche vom Druckpunkte zweier ineinander greifender Zähne auf die zugehörigen Drehachsen gefällt werden können. Denkt man sich aber von den Fusspunkten der genannten Lote aus zwei (sich berührende) Kreise beschrieben, so ist klar, dass der zweite auf den ersten Fall zurückgeführt ist.

So zeigt z. B. Figur 54 eine Verbindung von vier Wellrädern mit den Drehachsen  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  und  $M_4$ ; die Radhalbmesser seien

$$M_1 A = R_1, M_2 A_1 = R_2, M_3 A_2 = R_3, M_4 A_3 = R_4$$

und die Radien der Wellen, resp. Getriebe

$$M_1 A_1 = r_1, M_2 A_2 = r_2, M_3 A_3 = r_3, M_4 A_4 = r_4,$$

in  $A$  sei die Kraft  $P$  am Hebelsarme  $R_1$  und in  $A_4$  die Last  $Q$  am Arme  $r_4$  wirksam.

Um die Gleichgewichtsbedingung zu erhalten, bezeichnen wir die Drücke, welche in den Punkten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  tangential zu den sich berührenden Kreisen wirken und wovon jeder nach § 20 einen gleich grossen Gegendruck hervorruft, mit  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , und haben

$$\begin{aligned} PR_1 &= Xr_1, \\ XR_2 &= Yr_2, \end{aligned}$$

$$YR_3 = Zr_3,$$

$$ZR_4 = Qr_4.$$

Durch Multiplikation vorstehender Gleichungen folgt aber

$$PXYZR_1R_2R_3R_4 = XYZQR_1r_2r_3r_4$$

und hieraus mittels Division durch  $XYZ$

$$PR_1R_2R_3R_4 = QR_1r_2r_3r_4$$

oder

$$P : Q = r_1r_2r_3r_4 : R_1R_2R_3R_4,$$

in Worten: An einem Räderwerke herrscht Gleichgewicht, wenn die Kraft (am Umfange des ersten Rades) zur Last (an der Peripherie der letzten Welle) sich verhält, wie das Produkt aller Wellenradien zum Produkte sämtlicher Radhalbmesser.

Befindet sich das Räderwerk in gleichförmiger Bewegung und bezeichnet man die Geschwindigkeiten der Punkte  $A, A_1, A_2, A_3, A_4$  mit  $c, v_1, v_2, v_3, v$ , so hat man

$$v_1 = \frac{r_1}{R_1} c, \quad v_2 = \frac{r_2}{R_2} v_1$$

$$v_3 = \frac{r_3}{R_3} v_2, \quad v = \frac{r_4}{R_4} v_3,$$

woraus folgt

$$v_1v_2v_3v = \frac{r_1r_2r_3r_4}{R_1R_2R_3R_4} cv_1v_2v_3,$$

$$v = \frac{r_1r_2r_3r_4}{R_1R_2R_3R_4} c,$$

$$r_1r_2r_3r_4 : R_1R_2R_3R_4 = v : c,$$

oder, wenn man dies Verhältnis in die obige Proportion einsetzt,

$$P : Q = v : c,$$

so dass sich, wenn von allen Bewegungshindernissen abgesehen wird, die am Räderwerke wirksamen Kräfte umgekehrt wie die Geschwindigkeiten ihrer Angriffspunkte verhalten. In anderer Form lautet dieser Satz: Die Effekte von Kraft und Last sind einander gleich; denn aus der letzten Beziehung folgt

$$Pc = Qv.$$

Man kann demnach auch durch irgend welche Räderverbindungen niemals einen Gewinn an mechanischer Arbeit (s. § 92) erzielen; ihr Vorteil besteht vielmehr lediglich darin, dass man entweder mit geringer Kraft grosse Lasten zu heben vermag, wie durch Winden und Krähne, oder darin, mittels vorhandener bedeutender Kräfte sehr

grosse Geschwindigkeiten zu erzeugen, wie dies beispielsweise bei Mühlen, Spinnereien etc. beobachtet werden kann; nach obigem verliert man aber dabei im ersten Falle an Geschwindigkeit, im zweiten an Kraft genau so viel, dass die letzte Formel erfüllt ist, wobei jedoch die Bewegungshindernisse noch nicht einmal in Betracht gezogen sind.

Schliesslich sei nur noch erwähnt, dass das vorstehend Gesagte selbstverständlich auch Anwendung auf Verbindungen von Riemenscheiben und Kettenrädern finden kann.

### § 94.

#### Beispiele.

289. Welche Last kann durch das Hebelwerk Fig. 53 mit einer Kraft von 50 Kilogramm gehoben werden, wenn  $CA = 85$ ,  $CD = 17$ ,  $C'D = 78$ ,  $C'E = 13$ ,  $C''E = 120$  und  $C''B = 20$  cm sind ohne Rücksicht auf Reibung und Eigengewichte der Hebelkörper.

Antwort: Die Last  $Q = 9000$  kg.

290. Man bestimme die Drücke  $X$  und  $Y$  in den Punkten  $D$  und  $E$ .

Resultate:  $X = 250$  kg und  $Y = 1500$  kg.

291. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung anzugeben, wenn alle drei Hebel dasselbe Gewicht  $G$ , nach links die Arme  $p$ , nach rechts die gleich langen Arme  $q$  besitzen und der Schwerpunkt jedes Hebelkörpers links im Abstände  $d$  von der Drehachse liegt.

Lösung:  $Pp^3 + Gd(p^2 + pq + q^2) = Qq^3$ .

292. Wie gross ist  $P$ , wenn  $p = 100$ ,  $q = 10$ ,  $d = 40$ ,  $G = 2,5$  kg und  $Q = 1000$  kg?

Antwort:  $P = 0,111$  kg, es müsste also zur Herstellung des Gleichgewichtes eine Kraft von 111 Gramm in  $A$  aufwärts wirken.

293. Wie weit müssten aber die Schwerpunkte von den Drehpunkten der drei Hebel entfernt sein, damit die Eigengewichte der letzteren allein im Stande wären, das Gleichgewicht herzustellen?

Antwort: Um  $d = \frac{Q}{G} \cdot \frac{q^3}{p^2 + pq + q^2} = 36^4/111$ .

294. Die Enden  $E$  und  $F$  zweier horizontal liegender und um  $C$  und  $D$  drehbarer Hebel  $AE$  und  $CF$  (Fig. 55) sind durch eine vertikal gerichtete Schnur  $EF$  verbunden; in  $A$  und  $B$  wirken die

Kraft  $X$  und die Last  $Q$  senkrecht abwärts. Für welchen Wert von  $X$  besteht Gleichgewicht, wenn von den Eigengewichten der Hebel, sowie der Schnur abgesehen wird und  $CB = l$ ,  $CF = L$ ,  $DE = r$ ,  $DA = R$  ist?

Antwort: Für  $X = \frac{lr}{LR} Q$ .

295. Man soll die Gleichgewichtsbedingung und die Spannung  $y$  in der Schnur  $EF$  unter Berücksichtigung der Eigengewichte  $G$  und  $G'$  beider Hebel  $DF$  und  $AE$  angeben, vorausgesetzt, dass letztere durch ihre Schwerpunkte halbiert werden.

Auflösung: Das Ganze ist im Gleichgewichte, wenn

$$RX = \left( \frac{l}{L} Q + \frac{G}{2} \right) r - \frac{R - r}{2} G'$$

und die hierbei in der Schnur stattfindende Spannung

$$y = \frac{l}{L} Q + \frac{G}{2}.$$

296. In welchem Verhältnisse stehen an dem Räderwerke Fig. 54 Kraft und Last, wenn die grossen Radien 120, 150, 100 und 110, dagegen die Wellhalbmesser 25, 30, 22 und 24 Centimeter lang sind?

Antwort: In dem Verhältnisse 1 : 500.

297. Bei einer Seilwinde mit zweifacher Räderübersetzung wirkt die Kraft  $P$  an einer 37,5 cm langen Kurbel, an deren Achse zugleich ein Getriebe mit 25 cm Durchmesser sitzt. Letzteres greift in ein Zahnrad von 1 Meter Durchmesser, auf dessen Welle wieder ein Getriebe von 8,5 cm Halbmesser befestigt ist. Endlich wirkt letzteres auf ein Rad von 170 cm Durchmesser, an dessen Welle mit einem Radius von 15 cm mittels eines Seiles eine Last  $Q$  emporgehoben werden soll. Wie verhalten sich  $P$  und  $Q$  im Gleichgewichtszustande?

Antwort: Wie 1 : 100.

## § 95.

### Die Differentialwelle.

Mit dem in § 85 beschriebenen Rade an der Welle kann unter sonst gleichen Umständen durch eine bestimmte Kraft eine um so grössere Last gehoben werden, je kleiner der Wellendurchmesser

genommen wird. Weil aber die Tragfähigkeit der Welle zugleich mit ihrem Durchmesser abnimmt, so darf man bezüglich des letzteren nicht unter eine gewisse Grenze herabgehen.

Um aber doch den Zweck zu erreichen, bedient man sich einer Maschine, der sogenannten Differentialwelle, bei welcher eine (oder zwei) Kurbeln von der Länge  $AC = l$  (Fig. 56) auf zwei fest verbundene Wellen mit gemeinschaftlicher Drehachse aber verschiedenen Halbmessern  $R$  und  $r$  wirken. Um die letzteren sind nämlich die beiden Enden eines Seiles, welches eine lose Rolle umfasst, in entgegengesetztem Sinne so aufgewickelt, dass die beiden Stücke  $a$  und  $b$  möglichst parallel sind und es auch während der Bewegung bleiben.

Dann verursacht die am Haken der Rolle befestigte Last  $Q$  im Seile nach § 70 eine Spannung  $\frac{Q}{2}$ , die Spannung im Seilstück  $b$  und die Kraft  $P$  an der Kurbel  $CA$  drehen aufwärts, dagegen die Spannung  $\frac{Q}{2}$  im Seilstück  $b$  abwärts und mithin ist die Gleichgewichtsbedingung

$$Pl + \frac{Q}{2} r - \frac{Q}{2} R = 0$$

woraus folgt

$$P = \frac{R - r}{2l} Q. \quad (87.)$$

Wirkt  $P$  an jeder von zwei Kurbeln und will man ausserdem das Rollengewicht  $G$  berücksichtigen, so hat man als Gleichgewichtsbedingung

$$P = \frac{R - r}{4l} (Q + G).$$

Man sieht, dass die Differentialwelle ohne Rücksicht auf Reibung genau so wie ein Haspel mit dem Wellenradius  $\frac{R - r}{2}$  wirkt, während dabei die Durchmesser der ersteren beliebig gewählt werden können.



§ 96.

Beispiele.

298. An einer Differentialwelle sind die Radien  $R = 8 \text{ cm}$ ,  $r = 6 \text{ cm}$  und die Kurbellänge beträgt  $360 \text{ mm}$ ; welcher Last können zwei Arbeiter das Gleichgewicht halten, wenn jeder mit  $10 \text{ kg}$  auf den Kurbelgriff drückt?

Antwort: Einer Last  $Q = 720 \text{ kg}$ .

299. Mit einer Differentialwelle sollen  $1200 \text{ kg}$  gehoben werden; der Kurbelradius betrage  $0,36 \text{ m}$  und die beiden Wellendurchmesser  $24$ , bez.  $21 \text{ cm}$ . Wie gross ist die nötige Kraft?

Antwort:  $P = 25 \text{ kg}$ .

300. Wie gross müsste aber der grössere Durchmesser in der vorigen Aufgabe sein, wenn man mit  $25 \text{ kg}$  eine Last von  $2000 \text{ kg}$  fördern wollte?

Antwort:  $22,8 \text{ cm}$ .

§ 97.

**Der gemeine Flaschenzug.**

Auch die zweckmässige Vereinigung loser und fester Rollen durch ein einziges Seil oder mehrere Seilstücke zu zusammenhängenden Systemen liefert mehrere zum Heben schwerer Lasten geeignete Maschinen. Die Gleichgewichtsbedingung für eine solche Rollenverbindung wird in jedem speziellen Falle leicht aufzufinden sein, wenn man beachtet: 1. dass jede einzelne Rolle für sich im Gleichgewichte sein muss und 2. dass bei Vernachlässigung von Reibung und Seilsteifigkeit ein in sich zusammenhängendes Seilstück, resp. Kette, überall gleich stark gespannt ist.

So besteht beispielsweise der gemeine Flaschenzug (Fig. 57) aus einer beliebigen Anzahl von Rollen, welche in zwei Gehäusen (Kloben oder Flaschen) angebracht sind und über welche ein Seil läuft. Das eine Seilende ist an einem der beiden Kloben befestigt, am andern wirkt die Kraft  $P$ ; die untere Flasche  $A$  ist beweglich und trägt die Last, die obere Flasche  $B$  ist befestigt.

Beträgt nun die Anzahl aller Rollen in beiden Flaschen  $n$ , so ist die für das Gleichgewicht nötige Kraft

$$P = \frac{Q}{n}; \quad (88.)$$

denn weil die Last  $Q$  an genau ebenso vielen Seilstücken hängt als Rollen vorhanden sind, und weil die Spannung in allen Teilen des Seiles dieselbe, nämlich  $\frac{Q}{n}$  ist, so muss auch die Kraft  $P$  gleich  $\frac{Q}{n}$  sein, ganz gleichgiltig, ob in der unteren Flasche  $A$  ebenso viel Rollen sind als in der oberen, oder aber eine weniger. Letzteren Falls heisst der Flaschenzug unsymmetrisch, und es muss das innere Seilende an dem beweglichen Gehäuse festgemacht sein.

§ 98.

**Der Potenzflaschenzug.**

Diese Hebemaschine, welche auch Rollenzug heisst und deren Einrichtung durch die Figur 58 veranschaulicht ist, besteht aus einer festen und mehreren beweglichen Rollen; jede der letzteren wird von einem besonderen Seilstücke umfasst, dessen linkes Ende befestigt ist und dessen rechtes Ende am Haken der nächst höheren Rolle hängt; die Last  $Q$  wirkt an der untersten losen, die Kraft  $P$  an der festen Rolle.

Laufen nun alle Seilstücke zueinander parallel, so ist offenbar die Spannung in den beiden Seilenden der ersten (untersten) Rolle, also in  $b$

$$\frac{1}{2} Q,$$

folglich die Spannung in den beiden Seilenden der zweiten losen Rolle, in  $d$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} Q = \frac{1}{2^2} Q,$$

mithin die Spannung in den Seilenden der dritten Rolle, in  $f$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} Q = \frac{1}{2^3} Q,$$

u. s. w., u. s. w., demnach in den Seilenden der letzten,  $n^{\text{ten}}$  losen Rolle

$$\frac{1}{2^n} Q.$$

Diese Spannung pflanzt sich aber durch das letzte Seilstück über die feste Rolle fort und wird aufgehoben durch die ihr gleiche Kraft  $P$ ; es ist daher

$$P = \frac{1}{2^n} Q \quad (89.)$$

die Bedingung des Gleichgewichts für einen Potenzflaschenzug mit  $n$  losen Rollen.

§ 99.

Beispiele.

301. Welche Last kann ein Mann bei 50  $kg$  Zug mittels eines Flaschenzugs von 7 Rollen heben, wenn das Seil 9 und die untere Flasche 16  $kg$  wiegt?

Antwort: 325  $kg$ .

302. Wie viel Männer wären nötig, um einer Last von 750  $kg$  an einem symmetrischen Flaschenzug von je drei Rollen zu heben, wenn die Kraft eines Mannes zu 30  $kg$  gerechnet und das Gewicht der beweglichen Flasche und des Seiles vernachlässigt wird?

Antwort: Fünf; denn zum Gleichgewicht wären 125  $kg$ , also  $4\frac{1}{6}$  Mannskraft erforderlich.

303. Welche Kraft  $P$  ist erforderlich, um mittels eines acht lose Rollen enthaltenden Potenzflaschenzuges einer Last von 10 000  $kg$  das Gleichgewicht zu halten, wenn man die Gewichte der losen Rollen und Seile unberücksichtigt lässt?

Antwort:  $P = 39,06 kg$ .

304. Ein Rollenzug besteht aus 3 beweglichen Rollen, von denen jede 6  $kg$  wiegt; welcher Last kann man mit 30  $kg$  Kraft das Gegengewicht halten?

Antwort: Der Last  $Q = 198 kg$ .

305. Die  $n$  losen Rollen eines Potenzflaschenzuges, welcher mit  $Q$  Kilogrammen belastet ist, wiegen je  $q$  Kilogramm; wie gross ist im Gleichgewichtsfall die Spannung  $P$  des über die feste Rolle laufenden Seiles?

$$\text{Antwort: } P = \frac{Q - q}{2^n} + q.$$

306. Wie gross ist die Anzahl  $n$  der beweglichen Rollen an einem Potenzflaschenzuge, wenn jede Rolle  $q = 6 kg$  wiegt und durch

die Kraft  $P = 55,25 \text{ kg}$  der Last  $Q = 400 \text{ kg}$  das Gegengewicht gehalten werden soll?

Antwort: Aus  $2^n = \frac{Q - q}{P - q} = 8$  folgt  $n = 3$ .

§ 100.

**Der Differentialflaschenzug.**

Zur Hebung schwerer Lasten durch Menschenhand eignet sich besonders auch der Differentialflaschenzug. Derselbe besteht aus zwei auf derselben Achse sitzenden und fest verbundenen (gewöhnlich in einem Stück gegossenen) Rollen, welche an ihren Umfängen in gleichen Abständen mit Zähnen versehen sind und deren Radien  $OA = OC = R$ ,  $OB = r$  (Fig. 59) sich nur wenig voneinander unterscheiden. Um diese beiden Rollen (Kettenscheiben) ist eine endlose Kette, deren ebenfalls gleich langen Glieder genau in jene Zähne eingreifen, so gelegt, dass zwei herabhängende Schleifen entstehen. Die Schleife  $ADFE B$  trägt eine gewöhnliche Rolle mit der Last  $Q$ , während die hebende Kraft  $P$  in demjenigen Teile der anderen Schleife wirkt, welcher von der grösseren Kettenscheibe herabfällt.

Die Gleichgewichtsbedingung ergibt sich leicht, wenn man bedenkt, dass die obere Flasche als ein um die Achse  $O$  drehbarer Hebel betrachtet werden kann, an welchem drei Kräfte wirksam sind, nämlich in  $A$  und  $B$  die zwei gleichen Spannungen  $\frac{Q}{2}$  und in  $C$  der Zug  $P$ . Da die erste den Hebelkörper links, die beiden letzten ihn aber rechts herum zu drehen suchen, so herrscht Gleichgewicht, wenn

$$PR + \frac{Q}{2} r = \frac{Q}{2} R$$

oder

$$P = \frac{R - r}{2R} Q \tag{90.}$$

ist. An die Stellen der Radien  $R$  und  $r$  können übrigens auch die Zähnezahlen  $Z$  und  $z$  beider Kettenscheiben gesetzt werden; denn ist  $b$  die Entfernung der Mittelpunkte zweier Nachbarzähne, so haben

wir, weil in beiden Kettenrollen alle Zähne gleich weit von einander abstehen müssen,

$$2R\pi = bZ, \quad 2r\pi = bx,$$

folglich

$$R = \frac{bZ}{2\pi}, \quad r = \frac{bx}{2\pi}$$

und mit Einführung dieser letzten beiden Werte in die obige Formel für  $P$  entsteht nach Abkürzung mit  $\frac{b}{2\pi}$ :

$$P = \frac{Z - x}{2Z} Q \quad (91.)$$

Die Vorteile dieser Hebevorrichtung sind grosse Hubkraft bei einfacher Konstruktion und beliebiges Stillhalten der gehobenen Last ohne jede Kraftaufwendung, da für gewöhnlich die Zapfenreibung genügt, um das freiwillige Zurückgehen der Last zu verhüten. Als Nachteil muss aber die Empfindlichkeit gegen Überlastung genannt werden. Durch letztere können nämlich einzelne Glieder des gespannten Teiles der Kette gestreckt werden; sie passen dann nicht mehr in die Zähne der Rollen und es ist wenigstens die Kette unbrauchbar geworden.

### § 101.

#### Beispiele.

307. Die beiden <sup>Radien</sup> ~~Durchmesser~~ der Kettenrollen eines Differential-Flaschenzuges sind 33 und 36 *cm* lang; wie verhalten sich Kraft und Last im Gleichgewichtszustande?

Antwort: Wie 1 : 24.

308. Wie muss allgemein das Verhältnis zwischen den beiden Kettenscheibenradien  $r$  und  $R$  ( $\frac{r}{R} = x$ ) gewählt werden, damit man durch irgend eine Kraft einer  $n$  mal grösseren Last das Gleichgewicht halten kann, wenn Reibung, Ketten- und Rollengewicht unberücksichtigt bleiben?

Antwort:  $x = \frac{n - 2}{n}$ .

309. Die beiden Scheiben eines Differentialflaschenzuges haben

20 und 18 Zähne. Welche Kraft ist zur Hebung von 4000 *kg* erforderlich?

Antwort: 200 *kg*.

310. Für die beiden festen Rollen eines Differentialflaschenzuges die (geringsten) Zähnezahlen anzugeben, wenn sich die Kraft zur Last wie 1 : 100 verhalten soll.

Resultat: 49 und 50.

§ 102.

**Die Schraube ohne Ende.**

Eine Schraubenspindel kann vermittelt einer Kurbel von der Länge *l* um ihre (meist horizontal liegende) Achse gedreht werden, ist aber (durch Zapfen- und Halslager) an der fortschreitenden Bewegung gehindert. Das Schraubengewinde, dessen Ganghöhe *g* sei, greift genau in die schrägen Zähne eines Wellenrades mit den Halbmessern *R* und *r*.

Soll nun eine die Kurbel bewegende Kraft *P* der an der Seiltrommel hängenden Last *Q* das Gleichgewicht halten, und bezeichnen wir den zwischen dem Gewinde der Schraube und den Zähnen des Wellrades stattfindenden Druck mit *X*, so ist einerseits nach § 90, Formel 86

$$2l\pi P = gX,$$

andererseits nach § 85, Formel 72

$$XR = Qr.$$

Durch Multiplikation beider Beziehungen folgt

$$2l\pi PXR = gXQr$$

und durch Division mit *X*

$$2l\pi RP = grQ$$

oder

$$P = \frac{gr}{2l\pi R} Q, \quad (92.)$$

die Bedingung des Gleichgewichts an der Schraube ohne Ende.

§ 103.

Beispiele.

311. An einer Schraube ohne Ende ist die Ganghöhe  $g = 12 \text{ cm}$ , der Halbmesser des Zahnrades  $R = 0,8 \text{ m}$ , der Radius der Seiltrommel  $r = 10 \text{ cm}$  und die Länge des Kurbelarmes  $l = 48 \text{ cm}$ . Welche Kraft ist nötig, um der Last  $Q = 15000 \text{ kg}$  das Gleichgewicht zu halten?

Antwort:  $74,6 \text{ kg}$ .

312. Wie müsste das Verhältnis zwischen den Radien  $r$  und  $R$  ( $\frac{r}{R} = x$ ) gewählt werden, um mit einer gegebenen Schraube ohne Ende, deren Ganghöhe  $g = 10 \text{ cm}$  und Kurbellänge  $l = 50 \text{ cm}$  sind, durch eine Kraft  $P = 30 \text{ kg}$  eine Last  $Q = 6000 \text{ kg}$  zu heben?

Antwort: Aus  $x = \frac{2l\pi P}{gQ} = \frac{\pi}{20}$  folgt nahezu

$$r : R = 157 : 1000.$$

313. In welchem Verhältnisse stehen bei einer Schraube ohne Ende während des Gleichgewichts Kraft und Last, wenn sich die Halbmesser des Zahnrades  $r : R = 1 : 7$  verhalten, der Kurbelarm das 6fache der Ganghöhe beträgt und die Zahl  $\pi$  zu  $\frac{22}{7}$  angenommen wird?

Antwort: In dem Verhältnis  $P : Q = 1 : 264$ .

§ 104.

Die Differentialschraube.

Während der Hebel in seinen verschiedenen Formen (Rolle, Wellrad) und Zusammensetzungen (Hebel- und Räderwerke, Flaschen- und Rollenzüge, Differentialhaspel etc.), sowie auch die schiefe Ebene zur Hebung von Lasten oder zur Überwindung von Widerständen vorwiegend benützt werden, eignen sich Keil und Schraube besonders auch zur Erzeugung eines bedeutenden Druckes. Aus der Formel 86 in § 90 folgt aber

$$Q = \frac{2R\pi P}{g}$$

und man erkennt hieraus, dass durch eine Schraube unter sonst gleichen Umständen ein um so grösserer Druck  $Q$  erzielt wird, je kleiner die Ganghöhe  $g$  ihres Gewindes ist.

Je kleiner man aber  $g$  macht, desto dünner werden naturgemäss die Schraubengänge und man gelangt auf diesem Wege bald zu einer gewissen Grenze, welche nicht überschritten werden darf, wenn man das Abscheren des Gewindes vom Schraubenkerne verhüten will.

Um nun aber doch den grösseren Druck mit Vermeidung der zuletzt genannten Gefahr zu erreichen, hat man auf ein und denselben Spindel zwei Schraubengewinde mit verschiedenen Ganghöhen  $g$ , bzw.  $h$  und in gleichem Sinne laufend, eingeschnitten. Die Spindel ist mittels eines Hebelarms  $R$  um ihre Achse drehbar, dagegen durch Zapfen- und Halslager an jeder fortschreitenden Bewegung verhindert; die den beiden Schraubengewinden zugehörigen Muttern sind Platten, welchen eine geeignete seitliche Führung nur eine fortschreitende Bewegung gestattet und die sich nähern oder von einander entfernen, je nachdem am Hebel in dem einen oder dem anderen Sinne gedreht wird.

Erleidet jetzt irgend eine Masse zwischen den beiden Platten die Pressung  $Q$ , so entsteht an der oberen Platte ein ebenso grosser Druck, welchen wir positiv setzen wollen und welcher nach § 90 am mittleren Schraubenbolzenradius  $r$  eine Drehkraft  $P_1$  mit dem statischen Moment

$$P_1 r = \frac{g}{2\pi} Q$$

erzeugt. Dieser Druck ruft jedoch laut Grundgesetz von Wirkung und Gegenwirkung einen gleich grossen Gegendruck —  $Q$  hervor, welcher am Spindelumfang eine umgekehrt wie  $P_1$  drehende Kraft  $P_2$  mit dem Moment

$$P_2 r = - \frac{h}{2} Q$$

entstehen lässt. Mithin ist das resultierende Moment beider Drehkräfte

$$(P_1 + P_2) r = \frac{g}{2\pi} Q - \frac{h}{2} Q = \frac{g - h}{2\pi} Q$$

und weil dasselbe aufgehoben werden muss durch das Moment der am Arm  $R$  wirksamen Kraft  $P$ , so ist



$$PR = \frac{g - h}{2\pi} Q$$

oder

$$\frac{P}{Q} = \frac{g - h}{2R\pi} \quad (93.)$$

die Bedingung des Gleichgewichts an der Differential-  
schraube.

Man sieht, dass die letztere dasselbe Kraftverhältnis bietet, wie eine gewöhnliche Schraube von der Ganghöhe  $g - h$ , zugleich aber auch, dass jene eine weit grössere Festigkeit gewährt als diese.

### § 105.

#### Beispiele.

314. Man bestimme das Verhältnis zwischen Kraft und Last für eine Differentialschraube, an welcher die Ganghöhe des oberen steileren Gewindes  $g = 25 \text{ mm}$ , diejenige des anderen  $h = 21 \text{ mm}$  und die Länge des Hebels  $R = 0,7 \text{ m}$  betragen.

Resultat: Es verhält sich rund  $P : Q = 1 : 1100$ .

315. Wie gross sind die Steigungswinkel  $\alpha$  und  $\beta$  beider Schraubengewinde, wenn der Durchmesser des Schraubenbolzens  $d = 7 \text{ cm}$  ist:

$$\text{Antwort: Aus } tg\alpha = \frac{g}{d\pi} = \frac{5}{14\pi} \text{ und } tg\beta = \frac{h}{2\pi} = \frac{3}{10\pi}$$

folgt

$$\alpha = 6^\circ 29' 9'' \text{ und } \beta = 5^\circ 27' 17''.$$

316. Die Gleichgewichtsbedingung für eine Differentialschraube aus den Steigungswinkeln  $\alpha$  und  $\beta$  beider Gewinde und der Verhältniszahl  $n$  zwischen dem Hebelsarm  $R$  und dem mittleren Spindelradius  $r$  anzugeben.

$$\text{Lösung: } \frac{P}{Q} = \frac{tg\alpha - tg\beta}{n}$$

317. Was ergibt sich für den speziellen Fall  $\alpha = 40^\circ$ ,  $\beta = 36^\circ$  und  $n = \frac{R}{r} = 12$ ?

$$\text{Antwort: Es ist abgerundet } \frac{P}{Q} = \frac{1}{106,6}$$

## § 106.

**Schlussbetrachtung.**

Wir haben im vorstehenden die Gleichgewichtsbedingungen für einige zusammengesetzte Maschinen entwickelt — nicht etwa bloss um der Schlussresultate willen, sondern hauptsächlich auch deswegen, um dem Anfänger zu zeigen, wie er durch einige Überlegung den Gleichgewichtszustand irgend einer zusammengesetzten Maschine auf die Beziehungen für das Gleichgewicht an einfachen Maschinen zurückführen kann: er braucht nur die erstere in ihre letzten Bestandteile zu zerlegen und die Kräfte an den Übertragungspunkten zu ermitteln. Von  $P$  oder  $Q$  ausgehend, erhält man mit Elimination der fort-pflanzenden Zwischenkräfte leicht die gewünschte Gleichgewichtsbedingung zwischen  $P$  und  $Q$ .

Alle auf diese Weise abgeleiteten Formeln sind nun zwar vollkommen richtig, wenn die Maschine im Ruhezustande sich befindet und müssten es nach dem Gesetze vom Beharrungsvermögen auch bleiben, so lange die einzelnen Maschinenteile sich gleichförmig bewegen (siehe § 92), allein die Erfahrung lehrt, dass dem nicht so ist. Um eine Maschine im gleichförmigen Gang zu halten, ist vielmehr stets eine grössere Kraft erforderlich, als es die bisher entwickelten Gleichgewichtsformeln verlangen und ist die Ursache davon in den Bewegungshindernissen, vor allem in dem Reibungswiderstande zu suchen. Weil die Reibung unter Umständen von sehr wesentlichem Einflusse sein kann, wollen wir ihre Wirkung im nächsten Kapitel einer näheren Betrachtung unterziehen.

---

**Achtes Kapitel.****Von der Reibung.**

## § 107.

**Allgemeines.**

Wenn zwei feste Körper zusammengedrückt werden, so äussert sich gegen das Verschieben derselben in der Richtung der Berührungsfächen stets ein gewisser Widerstand, welcher Reibung genannt wird.

Diese Erscheinung rührt offenbar daher, dass alle Körper an ihren Oberflächen nie absolut glatt, sondern mit geringeren oder grösseren Erhöhungen und Vertiefungen behaftet sind, selbst dann, wenn letztere auch nicht gefühlt oder mit blossem Auge gesehen werden können. Diese Unebenheiten beider Körper greifen nun ineinander ein und müssen folglich bei stattfindender Bewegung auseinander gehoben, umgebogen oder abgerieben werden.

Aus der obigen Definition folgt, dass die Reibung 1) in der Richtung der Berührungsfläche und 2) der beabsichtigten oder bereits vorhandenen Bewegung gerade entgegen wirkt, also hindernd bei der Erzeugung, fördernd bei der Hemmung der letzteren.

Nach der Art der Bewegung des reibenden Körpers unterscheidet man gleitende und rollende oder wälzende Reibung; bei der ersteren bewegen sich die einzelnen Punkte des Körpers in der Richtung der Berührungsfläche, bei der letzteren haben die Oberflächenpunkte eine drehende und zugleich fortschreitende Bewegung. Eine besondere Art der gleitenden Reibung ist diejenige zwischen einem um seine geometrische Achse rotierenden Zapfen und seinem Lager, die sogenannte Zapfenreibung.

## § 108.

### **Erfahrungsgesetze nach Morin.**

Auf Grund der im vorigen Paragraphen enthaltenen Angabe über Richtung und Grösse des Reibungswiderstandes liegt es sehr nahe, die gleitende Reibung direkt durch folgenden einfachen Apparat zu messen: an einem kleinen Schlitten, welcher durch Gewichte beliebig belastet werden kann und auf wagerechten Schienen ruht, ist eine Schnur befestigt, die in horizontaler Richtung über eine feste Rolle läuft und an deren Ende eine Wagschale hängt. Die letztere wird nun genau so belastet, dass ein Anstoss genügt, um den Schlitten in eine gleichförmige Bewegung zu versetzen. Sieht man von der sehr geringen Reibung in den Zapfen der Rolle ab, so stellt das Eigengewicht der Wagschale und deren Belastung diejenige Kraft, welche die gleitende Reibung überwindet, also zugleich den Reibungswiderstand selbst dar.

Indem man den Schlitten mehr oder weniger belastet, sowie Schienen und Schlittenkufen aus verschiedenen Materialien, mit verschiedenen Breiten und Oberflächenbeschaffenheiten anwendet, hat man es in der Hand, die Reibungswiderstände unter allen möglichen vorkommenden Umständen zu messen.

Coulomb und Morin waren es zuerst, welche auf diese Art zahlreiche Versuche anstellten und aus dem gesammelten Beobachtungsmaterial Schlüsse zogen. Unter der einschränkenden Voraussetzung, dass die sich reibenden Körper an den Berührungsflächen einen gewissen Grad von Ebenheit und Glätte besitzen und sich weder bedeutend erwärmen, noch merklich abnützen, gelangten sie zu folgenden Sätzen:

1. Der Reibungswiderstand hängt ab von dem Stoffe, aus welchen die reibenden Körper bestehen und von der Beschaffenheit der Berührungsflächen; er ist um so kleiner, je glatter und härter die Körper sind. Die Reibung zwischen eingeschmierten Flächen ist in der Regel geringer als diejenige ungeschmierter Flächen und richtet sich wieder nach der Art der Schmiere; Öle und Fette vermindern z. B. die Reibung bei Metallen, ebenso Talg, Seife und Graphit bei Holz auf Holz, während Wasser und Öl zwischen den Berührungsflächen zweier Hölzer die Reibung vermehren; ferner zeigt Holz auf Holz eine geringere Reibung, wenn die Fasern parallel und im Sinne der Bewegung, als wenn sie rechtwinklig zueinander gerichtet sind u. s. w.

2. Der Reibungswiderstand ist unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche, wenn letztere nicht so klein ist, dass sich der eine Körper in den andern eindrückt.

3. Die Reibung aus der Ruhe ist grösser als die Reibung während der Bewegung. Die erstere würde in dem oben beschriebenen Experimente gemessen werden durch die Belastung mit Eigengewicht der Wagschale, welche den Körper aus längerem Ruhezustand in Bewegung versetzt; die Reibung in der Bewegung dagegen nur durch eine horizontale Kraft, welche im stande ist, die bereits eingeleitete Bewegung gleichförmig zu erhalten.

4. Der Reibungswiderstand während der Bewegung ist unabhängig von der Geschwindigkeit.

5. Der Reibungswiderstand ist proportional dem

Normaldruck zwischen den Berührungsflächen der sich reibenden Körper.

Nach neueren Versuchen von Bochet, Rennie und andern lassen sich aber einige dieser Gesetze nicht unbedingt mehr aufrecht erhalten; wenigstens scheint festzustehen, dass sich die Reibung mit dem Drucke auf die Einheit der Berührungsfläche und mit der Geschwindigkeit, namentlich bei hohen Werten dieser Grössen, beträchtlich ändert.

§ 109.

**Reibungskoeffizient.**

Man denke sich zwei ganz bestimmte Körper erst mit einem Druck von 1 *kg* und dann mit einem beliebigen Druck von *N* Kilogrammen in lotrechter Richtung zur Berührungsfläche zusammengepresst und bezeichne die hierdurch entstehenden Reibungswiderstände mit *f*, bezw. *W*; dann gilt nach dem fünften Erfahrungsgesetz von Morin die Proportion

$$f : W = 1 : N,$$

woraus folgt

$$f = \frac{W}{N}, \quad (94.)$$

oder, weil *f* der Reibungskoeffizient für die obigen beiden Körper genannt wird, die Wortgleichung

$$\text{Reibungskoeffizient} = \frac{\text{Reibungswiderstand}}{\text{Normaldruck}}.$$

Aus der Beziehung 94 ergibt sich

$$W = f \cdot N, \quad (95.)$$

so dass, wenn für einen bestimmten Fall *f* und *N* bekannt sind, der Reibungswiderstand erhalten werden kann, indem man den Normaldruck mit dem Reibungskoeffizienten multipliziert.

§ 110.

**Beispiele.**

318. Ein Schlitten, welcher samt Belastung 1500 *kg* wiegt, wird auf horizontaler Bahn durch eine ebenfalls horizontal wirkende Kraft

gleichmässig fortbewegt. Zwischen dem Schlitten und der Zugkraft ist eine Federwage eingeschaltet, welche auf 55 *kg* zeigt. Wie gross berechnet sich hieraus der Reibungskoeffizient in der Bewegung?

Antwort:  $f = \frac{11}{300} = 0,0367.$

319. Welches war der Reibungskoeffizient in der Ruhe, wenn bei Beginn der Bewegung eine Zugkraft von 105 *kg* nötig war?

Antwort:  $f_0 = 0,07.$

320. Eine horizontal gerichtete Kraft *P* erteilt einem Körper vom Gewichte *G* auf horizontaler Ebene die Beschleunigung *p* Meter. Man ermittle den hierbei wirksamen Reibungskoeffizienten unter der Annahme, dass der Luftwiderstand und die Geschwindigkeit ohne wesentlichen Einfluss auf die Bewegung sind.

Lösung:  $f = \frac{P}{G} - \frac{p}{g}$ , worin  $g = 9,81$  *m*, die Fallbeschleunigung bedeutet.

321. Welches würde demnach der Reibungskoeffizient für den Fall sein, dass auf diese Weise einem Körper von 90 *kg* durch eine Kraft von 30 *kg* eine Beschleunigung von 23 Dezimetern erteilt wird?

Antwort:  $f = 0,21.$

322. Man gebe eine Formel für den Reibungskoeffizienten an, wenn unter den in Aufgabe 320 angeführten Umständen der Körper in *t* Sekunden vom Ruhezustande aus *s* Meter zurücklegt.

Lösung:  $f = \frac{P}{G} - \frac{2s}{gt^2}.$

323. Die letzte Aufgabe für die speziellen Zahlenwerte  $P = 12$  *kg*,  $G = 130$  *kg*,  $s = 17,1$  *m* und  $t = 10''$  zu lösen.

Resultat:  $f = 0,057.$

324. Der kleinste aller bis jetzt bekannten Koeffizienten der gleitenden Reibung ist nach Rennie derjenige bei Eisen auf Eis, nämlich 0,0143. Wenn nun ein 80 *kg* schwerer Schlittschuhläufer in einem gewissen Moment eine Geschwindigkeit von 12 *m* besitzt, wie lange und wie weit wird er dann noch lediglich in Folge der Trägheit und abgesehen vom Luftwiderstande, dahin gleiten?

Antwort: In zirka  $t = 100$  Sekunden wird er noch  $s = 600$  *m* weit laufen, doch werden diese Zahlen in Wirklichkeit durch den Einfluss des Luftwiderstandes erheblich verringert.

325. Welche Verzögerung erfährt ein beliebiger auf horizontaler Ebene fortgestossener Körper lediglich durch Einwirkung der gleitenden Reibung mit dem Koeffizienten  $f$ ?

Antwort:  $p = fg$ .

326. Ein Eisenbahnzug hat die Geschwindigkeit  $v = 12 m$  erlangt. Welche Strecke  $s$  wird er nach abgesperrem Dampfe auf horizontaler Bahn ohne Rücksicht auf Luftwiderstand noch zurücklegen, wenn der Reibungskoeffizient  $f = 0,005$  ist?

Antwort:  $s = \frac{v^2}{2fg} = \frac{v^2}{0,0981} = 1468 m$ .

327. Wie hoch berechnet sich die Dampfkraft einer Lokomotive, welche auf horizontaler Strecke einem Zuge in  $t = 240'$  eine Geschwindigkeit  $v = 12 m$  mitteilt, wenn die Lokomotive und sämtliche Wagen eine Last  $Q = 100\ 000 kg$  repräsentieren und der Reibungskoeffizient  $f = 0,005$  ist?

Antwort:  $P = Q \left( f + \frac{v}{gt} \right) = 1010 kg$ .

328. Mit wie viel Pferdestärken muss die Lokomotive arbeiten, um die in voriger Aufgabe gestellten Bedingungen zu erfüllen?

Antwort: Mit  $N = \left( f + \frac{v}{gt} \right) \frac{Qv}{150} = 80,8$  Pferdest.

## § 111.

### Koeffizienten der gewöhnlichen gleitenden Reibung nach Morin.

Aus den Versuchen von Morin ergaben sich die Koeffizienten der gleitenden Reibung für die Körper aus den häufig vorkommenden Materialien in den verschiedenen Beschaffenheiten ihrer Oberflächen. Sie finden sich in jedem Lehrbuch der Mechanik, sowie Ingenieurkalender und wir wollen hier nur einige der wichtigsten anführen. In der folgenden Tabelle, welche der „Hütte“ entnommen ist, bedeutet  $=$ , dass die Bewegung in der Richtung der Fasern beider Körper,  $\ddagger$ , dass sie normal gegen die Fasern des gleitenden Körpers und  $\perp$ , dass sich Hirnholz auf Langholz in der Faserrichtung des letzteren bewegt.

Namen der reibenden Körper	Lage der Fasern	Zustand der Oberflächen	Reibungskoeffizient	
			der Ruhe	der Bewegung
Gusseisen auf Gusseisen		wenig fettig	0,16	0,15
oder Bronze . . .	.	mit Wasser	.	0,31
Schmiedeeisen auf Schmiedeeisen . . .	.	trocken	.	0,44
Bronze auf Gusseisen .	.	wenig fettig	0,13	.
„ „ Schmiedeeisen .	.	trocken	.	0,21
„ „ Bronze . .	.	etwas fettig	.	0,16
	.	trocken	.	0,20
Gusseisen auf Eiche .	}	= trocken	.	0,49
		= mit Wasser	0,65	0,22
		= trockne Seife	.	0,19
Schmiedeeisen auf Eiche	}	= mit Wasser	0,65	0,26
		= mit Talg	0,11	0,08
		= trocken	0,62	0,48
		= trockne Seife	0,44	0,16
Eiche auf Eiche . .	}	‡ trocken	0,54	0,34
		‡ mit Wasser	0,71	0,25
		⊥ trocken	0,43	0,19
Rindsleder auf Eiche	}	hohe trocken	0,43	0,33
		Kante mit Wasser	0,79	0,29
Lederriemen auf Eichen-				
trommel . . . . .	=	trocken	0,47	0,27
Hanfseil auf Eiche . .	=	trocken	0,80	0,52
Lederriemen auf Guss-	}	flach „	0,54	0,30
		eisen . . . . .	„ mit Wasser	0,38
Rindsleder als Kolben-	}	flach mit Wasser	0,62	.
		liderung . . . . .	flach Öl, Seife	0,12

§ 112.\*)

**Einfluss des spezifischen Druckes und der Geschwindigkeit auf die Reibung.**

Wenn das zweite und vierte der Morin'schen Reibungsgesetze unbeschränkte Giltigkeit besäßen, so würden die vorhin aufgeführten

\*) Die Paragraphen 112 und 113 können auch überschlagen werden, ohne das Verständnis für den Inhalt der darauf folgenden zu gefährden.



Koeffizienten konstante (unveränderliche) Zahlen und unter allen Umständen anwendbar sein. Da aber, wie schon erwähnt, der Reibungskoeffizient auch vom spezifischen Druck (Normaldruck auf die Einheit der Berührungsfläche) und in noch höherem Grade von der Geschwindigkeit der reibenden Körper abhängt, so bedürfen Morin's Koeffizienten nach dieser doppelten Richtung hin einer Ergänzung, resp. einer Korrektur; v. Reiche rät sogar von ihrer Anwendung auf technische Aufgaben entschieden ab, „da sie unter Verhältnissen ermittelt seien, welche bei Maschinen nur ausnahmsweise vorkommen“. Jedenfalls ist es bei dem gegenwärtigen Stande der Dinge nicht mehr gut möglich, sich der Rücksichtnahme auf obige Einflüsse auf die Reibung zu entziehen.

Um zunächst einen Einblick in die Wirkung des spezifischen Druckes auf den Koeffizienten der gewöhnlichen gleitenden Reibung zu erhalten, entnähmen wir der „Hütte“ eine Tabelle über die

Reibungskoeffizienten nach Versuchen von Rennie:

Druck pro qcm in kg	Gusseisen auf Schmiede- eisen	Schmiede- eisen auf Schmiede- eisen	Stahl auf Gusseisen	Messing auf Gusseisen	Bemerkung
Reibungskoeffizienten der Bewegung:					
8,79	0,140	0,174	0,166	0,157	Die Oberflächen wurden geschmiert und dann abgewischt, so dass keine dazwischen befindliche Lage Schmiere die innige Berührung hindern konnte.
13,08	0,250	0,275	0,300	0,225	
15,75	0,271	0,292	0,333	0,219	
18,28	0,285	0,321	0,340	0,214	
20,95	0,297	0,329	0,344	0,211	
23,62	0,312	0,333	0,347	0,215	
26,22	0,350	0,351	0,351	0,206	
31,50	0,395	0,395	0,354	0,208	
34,10	0,403	0,366	0,356	0,221	
36,77	0,409	0,366	0,357	0,223	
47,25	—	0,376	0,473	0,233	

Während, wie die vorstehende Tabelle zeigt, der steigende spezifische Druck auf die Berührungsfläche den Reibungskoeffizienten mit geringen Ausnahmen vergrößert, hat die wachsende Geschwindigkeit der reibenden Körper die entgegengesetzte Wirkung;

denn nach Versuchen, die Bochet in sehr ausgedehntem Masse durchgeführt hat, nimmt der Koeffizient  $f$  der gleitenden Reibung mit grösser werdender Geschwindigkeit ab. Bochet folgerte aus seinen Versuchen die Erfahrungsformel

$$f = \frac{f_0 - f'}{1 + 0,3 v} + f', \quad (96.)$$

worin  $v$  die Geschwindigkeit einer beliebigen Bewegung in Metern,  $f_0$  und  $f'$  aber die Werte von  $f$  bei einer ganz langsamen, bzw. bei einer sehr schnellen Bewegung bedeuten. Bezeichnet  $p$  den spezifischen Druck in Kilogrammen, so hat man zu setzen:

I. für trocknes weiches Holz bei  $p > 10 \dots f_0 = 0,6$ , und  $f' = 0,3$ , folglich

$$f = \frac{0,3}{1 + 0,3 v} + 0,3;$$

II. für trocknes hartes Holz bei demselben Druck  $\dots f_0 = 0,55$  und  $f' = 0,25$ , mithin

$$f = \frac{0,3}{1 + 0,3 v} + 0,25;$$

III. für halbpoliertes, trocknes oder nasses Eisen bei  $p > 300 \dots f_0 = 0,3$  und  $f' = 0,15$ , demnach

$$f = \frac{0,15}{1 + 0,3 v} + 0,15;$$

IV. für halbpoliertes, trocknes Eisen bei  $p > 100$ , für poliertes und geschmiertes Eisen bei  $p > 20$  und für nicht harziges, genäss-tes Holz bei  $p > 20$

$$f_0 = 0,25 \text{ und } f' = 0,075,$$

also

$$f = \frac{0,175}{1 + 0,3 v} + 0,075;$$

V. für poliertes und angefettetes Holz bei  $p > 20 \dots f_0 = 0,16$  und  $f' = 0,06$ , somit

$$f = \frac{0,1}{1 + 0,3 v} + 0,06.$$

Um den Einfluss der Geschwindigkeit auf den Reibungskoeffizienten näher kennen zu lernen, braucht man nur aus den vorstehenden fünf Formeln  $f$  für verschiedene Werte von  $v$  auszurechnen und die Resultate zu vergleichen.

Setzt man beispielsweise in der letzten Gleichung unter  $V$  für  $v$  der Reihe nach

0, 1, 2, 3, 4, 5 Dezimeter,

so erhält man für  $f$  die zugehörigen auf drei Dezimalen abgerundeten Werte

0,160; 0,157; 0,154; 0,152; 0,149; 0,147;

ferner ergeben sich für die mittleren Geschwindigkeiten

2, 4, 6, 8, 10, 12 Meter

die Reibungskoeffizienten

0,123; 0,105; 0,096; 0,089; 0,085; 0,082

und für die grösseren Geschwindigkeiten von

20, 40, 60, 80, 100 Metern

die entsprechenden Koeffizienten

0,074; 0,068; 0,0653; 0,0640; 0,0632.

Hieraus ist zu erkennen, dass bei gleichmässig wachsender Geschwindigkeit der Reibungskoeffizient zwar beständig, doch immer langsamer abnimmt und dass unter sonst gleichen Umständen der Reibungskoeffizient bei sehr kleinen Geschwindigkeiten zwischen 0 und 2 bis 3 Dezimeter nahezu als unveränderlich angesehen werden kann.

### § 113.

#### Beispiele.

329. Ein horizontales, gusseisernes Sägegatter von 100 *kg* Gewicht läuft in Bronzebahnen. Wie gross ist die Reibung nach Morin, wenn die Berührungsflächen wenig gefettet sind?

Antwort: 15 *kg*.

330. Welcher Effekt geht durch die Reibung in voriger Aufgabe per Sekunde verloren, wenn das Sägegatter 0,94 *m* Hubhöhe hat und während einer Minute 110 Züge macht?

Antwort: 25,85 *mkg*, also reichlich  $\frac{1}{3}$  Pferdestärke.

331. Auf horizontaler gusseiserner Bahn bewegt sich ein Schlitten, welcher samt Belastung 3920 *kg* wiegt und dessen beiden Kufen 1 *m* lang, sowie 1,5 *cm* breit sind. Wie hoch bestimmt sich nach

Rennie der Reibungswiderstand, wenn die Kufen a) aus Messing, b) aus Stahl und c) aus Schmiedeeisen bestehen?

Lösungen: Zu a) 782 *kg*, zu b) 1176 *kg* und zu c) 980 *kg*.

332. Wie gross würden aber die Reibungswiderstände in den drei Fällen sein, wenn die Belastung des Schlittens inkl. Eigengewicht nur 264 *kg* betrüge?

Antwort: 39,64 *kg*, 41,45 *kg* und 39,96 *kg*.

333. Man bestimme den Reibungskoeffizienten für trockenes weiches Holz bei

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Meter

Geschwindigkeit auf die Tausendstel genau unter der Voraussetzung, dass der Druck auf ein Quadratcentimeter Berührungsfläche mehr als 10 *kg* beträgt?

Resultate: 0,600; 0,531; 0,488; 0,458; 0,436; 0,420; 0,407; 0,397; 0,388; 0,381 und 0,375.

334. Wie viel betragen demnach die successiven Abnahmen des Reibungskoeffizienten der letzten Aufgabe, wenn die Geschwindigkeit in zehn gleichen Abständen von 0 auf 10 Meter ansteigt?

Antwort: 69, 43, 30, 22, 16, 13, 10, 9, 7 und 6 Tausendteile.

335. Bei welcher Geschwindigkeit würde der unter II. angeführte Reibungskoeffizient genau gleich  $\frac{1}{2}$  sein?

Antwort: Bei  $\frac{2}{3}$  Meter Geschwindigkeit.

336. Diejenige Geschwindigkeit zu ermitteln, welche unter den sub IV angegebenen Bedingungen für den Reibungskoeffizienten den Wert 0,1 verursacht.

Resultat: 20 Meter.

## § 114.

### Reibung auf horizontaler Bahn.

Eine Last  $Q$  ruht auf horizontaler Ebene  $LM$  (Fig. 60) und soll fortgezogen werden durch eine Kraft  $AB = P$ , welche mit dem Horizont einen beliebigen Winkel  $BAC = \beta$  einschliesst.

Offenbar ist die Wirkung der Kraft  $P$  auf die Last  $Q$  insofern eine doppelte, als sie die letztere einerseits auf  $LM$  weiter zu bewegen, andererseits vertikal emporzuheben sucht; wir zerlegen daher  $P$  nach den genannten Richtungen in die beiden Komponenten

$$AC = P \cos \beta \text{ und } AD = P \sin \beta.$$

Die erstere hat bei der horizontalen Bewegung des Körpers die Reibung zu überwinden und heisst deshalb die Arbeitskomponente; die andere wirkt genau entgegengesetzt der Last  $Q$ , es verbleibt daher der Normaldruck

$$N = Q - AD = Q - P \sin \beta$$

und mithin ist, wenn  $f$  den Reibungskoeffizienten bezeichnet, der Reibungswiderstand

$$W = fN = Qf - P f \sin \beta.$$

Weil aber dieser Reibungswiderstand im Gleichgewicht gehalten werden soll durch die Komponente  $AC = P \cos \beta$ , so haben wir

$$P \cos \beta = Qf - P f \sin \beta,$$

woraus folgt

$$P = \frac{Qf}{\cos \beta + f \sin \beta} \quad (97.)$$

als diejenige Kraft, welche der Reibung gerade das Gegengewicht hält.

### § 115.

#### Reibung auf der schiefen Ebene.

Wir wollen nun die Bedingung des Gleichgewichts, welcher ein Körper auf schiefer Ebene unterliegt, mit Rücksicht auf die gleitende Reibung entwickeln. Wie in § 86 bezeichnen wir zu dem Zwecke den Neigungswinkel  $HGJ$  (Fig. 47) der schiefen Ebene mit  $\alpha$ , die Last  $ME$  auf letzterer mit  $Q$ , die Kraft  $MF$  mit  $P$  und den Winkel  $FMB$  zwischen ihr und der schiefen Ebene mit  $\beta$  und zerlegen  $Q$  und  $P$  in je zwei Seitenkräfte senkrecht und parallel zur schiefen Ebene, nämlich  $ME = Q$  in

$$MC = Q \cos \alpha \text{ und } MA = Q \sin \alpha$$

sowie  $MF = P$  in

$$MD = P \sin \beta \text{ und } MB = P \cos \beta.$$

Dann ist der auf die schiefe Ebene ausgeübte Normaldruck

$$N = MC - MD = Q \cos \alpha - P \sin \beta$$

und folglich der Reibungswiderstand

$$W = fN = Q f \cos \alpha - P f \sin \beta,$$

wenn  $f$ , wie gewöhnlich den Koeffizienten der stattfindenden Reibung bezeichnet.

Soll jetzt eine Bewegung der Last aufwärts erfolgen, so wirkt

die Reibung hindernd, folglich muss für den Gleichgewichtszustand die Arbeitskomponente

$$MB = MA + W$$

oder

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha + Q f \cos \alpha - P f \sin \beta$$

sein. Die Auflösung dieser Gleichung nach  $P$  ergibt

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \beta + f \sin \beta}, \quad (98.)$$

worin  $P$  so bestimmt ist, dass die geringste Vergrößerung eine Aufwärtsbewegung der Last  $Q$  zur Folge hätte.

Wenn dagegen eine Abwärtsbewegung der Last  $Q$  beabsichtigt wird, so tritt der Reibungswiderstand für die Komponente  $MB$  fördernd ein und es ist mithin die Bedingung des Gleichgewichts

$$MB = MA - W$$

oder

$$P \cos \beta = Q \sin \alpha - Q f \cos \alpha + P f \sin \beta,$$

woraus man erhält

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{\cos \beta - f \sin \beta} \quad (99.)$$

als diejenige Kraft, welche eben noch ein Abwärtsgleiten der Last  $Q$  verhütet. So lange also der Wert von  $P$  zwischen den durch die rechten Seiten der Gleichungen 98 und 99 dargestellten Zahlengrößen liegt, kann keine Bewegung entstehen.

Auch hier sind bezüglich der Krafrichtung die zwei besonderen Fälle wichtig, dass dieselbe parallel zur Länge und parallel zur Basis der schiefen Ebene ist.

I. Wenn  $P$  parallel zur schiefen Ebene und folglich  $\beta = 0$  ist, so erhalten wir aus 98

$$P = Q (\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad (100.)$$

diejenige Kraft, welche die Last aufwärts zu ziehen sucht und dabei die Reibung überwindet und aus 99

$$P = Q (\sin \alpha - f \cos \alpha), \quad (101.)$$

die Kraft, welche gerade noch ausreicht, um mit Hilfe der Reibung die Last vor dem Herabgleiten zu bewahren.

II. Ist  $P$  parallel zur Basis der schiefen Ebene, so haben wir  $\beta = -\alpha$  zu setzen, und es ergibt sich, weil

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

ist, aus 98

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha}$$

oder

$$P = Q \cdot \frac{tg \alpha + f}{1 - f tg \alpha}, \quad (102.)$$

die Kraft, welche mindestens nötig ist, um die Last aufwärts zu bewegen. Dagegen entsteht aus 99 in analoger Weise

$$P = Q \cdot \frac{tg \alpha - f}{1 + f tg \alpha}, \quad (103.)$$

als diejenige Kraft, welche eben noch im stande ist, die Last  $Q$  von einem Heruntergleiten auf der schiefen Ebene abzuhalten.

### § 116.

#### Beispiele.

337. Auf einer Horizontalebene soll eine Last von 1000 *kg* durch eine Kraft in Bewegung gesetzt werden, welche mit dem Horizont nach einander Winkel von 0, 10, 20 und 30 Grad einschliesst. Wie gross muss jene Kraft in jedem einzelnen Falle sein, wenn der Reibungskoeffizient der Ruhe 0,3 beträgt?

Antwort:  $P_0 = 300 \text{ kg}$ ,  $P_1 = 289,3 \text{ kg}$ ,  $P_2 = 287,8 \text{ kg}$  und  $P_3 = 296,3 \text{ kg}$ .

338. Wie gross würde aber die Kraft sein müssen, wenn ihr Winkel mit dem Horizont 40, 50 und 60° wäre?

Antwort:  $P_4 = 312,8 \text{ kg}$ ,  $P_5 = 344,5 \text{ kg}$  und  $P_6 = 395,9 \text{ kg}$ .

339. Auf einer schiefen Ebene, welche einen Winkel von 12° mit dem Horizont einschliesst, befindet sich eine Last von 500 *kg*; an letzterer wirkt eine Kraft unter einem Winkel von 23° gegen den Horizont. Wie gross muss diese Kraft sein, um eine Aufwärtsbewegung zu bewirken und wie gross, um ein Abwärtsgleiten zu verhindern, wenn der Reibungskoeffizient 0,2 ist?

Antwort: 197,85 *kg*, resp. 6,51 *kg*.

340. Eine sehr glatte Schlittenbahn steigt um 10%<sub>0</sub>. Wie viel Kraft parallel zur Bahn ist nötig, um eine Last von 2500 *kg* aufwärts zu befördern, wenn der Reibungskoeffizient zu 0,04 angenommen wird?

Antwort: 340 *kg*.

341. Welche Kraft wäre bei nur 2<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Steigung erforderlich?

Antwort: 147,1 *kg*.

342. Man bestimme die Kräfte, welche in den beiden letzten Aufgaben wirken müssten, um den Schlitten am Zurückgehen zu hindern.

Resultate: Bei 10<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Steigung ist eine Kraft von 160 *kg* erforderlich, bei 2<sup>0</sup>/<sub>0</sub> Steigung dagegen gar keine; denn weil sich aus Formel 101  $P = -48,5$  ergibt, so müsste noch eine Kraft von 48,5 *kg* abwärts ziehen, um den Schlitten zum Zurückgehen zu bringen.

### § 117.

#### Der Reibungswinkel.

Ruht ein Körper vom Gewichte  $G$  auf einer unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigten Ebene, ohne dass eine weitere Kraft auf ersteren wirkte, so zerlegt sich  $G$  in zwei Komponenten, nämlich in die parallel zur schiefen Ebene abwärts gerichtete Zugkraft

$$K = G \sin \alpha$$

und in den Normaldruck

$$N = G \cos \alpha.$$

Es ist daher der Reibungswiderstand

$$W = fG \cos \alpha,$$

welcher der Zugkraft genau entgegengesetzt wirkt und mithin die Resultante zwischen beiden

$$K - W = G(\sin \alpha - f \cos \alpha).$$

Für  $\alpha = 0$ , also auf horizontaler Ebene, wäre  $K = 0$  und  $W = fG$ . Lässt man jetzt  $\alpha$  stetig wachsen, so nimmt  $\sin \alpha$  zu und  $\cos \alpha$  ab, folglich wird  $K = G \sin \alpha$  grösser, dagegen  $W = fG \cos \alpha$  kleiner, und es muss mithin einmal der Moment eintreten, wo  $K$  gleich  $W$  wird. Dieser Fall findet aber nach der letzten Gleichung statt, wenn

$$\sin \alpha - f \cos \alpha = 0$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = f$$

ist. Diesen besonderen Wert von  $\alpha$ , bei welchem der Körper zu



gleiten beginnen will, nennt man den Reibungswinkel; bezeichnen wir denselben mit  $\varrho$ , so haben wir

$$tg \varrho = f \quad (104.)$$

eine Beziehung, welche uns sagt, dass die goniometrische Tangente des Reibungswinkels dem Reibungskoeffizienten gleich ist und uns ein einfaches Mittel an die Hand giebt, um den Reibungskoeffizienten experimentell zu bestimmen: Man braucht bloss den fraglichen Körper auf eine um eine Achse bewegliche Ebene zu legen und letztere so lange vorsichtig zu drehen, bis der Körper zu gleiten beginnt, resp. sich gleichförmig die schiefe Ebene herunter bewegt. Der gefundene Grenzwinkel ist der Reibungswinkel und folglich nach 104 seine Tangente der Reibungskoeffizient; natürlich hat dies Verfahren auch noch Geltung für die wälzende Reibung.

Setzt man den Wert von  $f$  aus 104 in 98 ein, so folgt

$$P = Q \cdot \frac{\sin \alpha + tg \varrho \cos \alpha}{\cos \beta + tg \varrho \sin \beta} = Q \frac{\sin \alpha \cos \varrho + \sin \varrho \cos \alpha}{\cos \beta \cos \varrho + \sin \varrho \sin \beta}$$

oder

$$P = Q \cdot \frac{\sin (\alpha + \varrho)}{\cos (\beta - \varrho)} \quad (105.)$$

die Kraft zum Aufwärtsziehen und analog aus 99

$$P = Q \cdot \frac{\sin (\alpha - \varrho)}{\cos (\beta + \varrho)}, \quad (106.)$$

die Kraft gegen das Abwärtsgleiten auf der schiefen Ebene.

### § 118.

#### Beispiele.

343. Einer der grössten Reibungskoeffizienten ist derjenige von Kalkstein auf Kalkstein bei gespitzter Oberfläche, nämlich  $f = 0,78$ . Bei welcher Neigung zum Horizont würden dieselben anfangen, auf einander hinzugleiten?

Antwort: Bei  $37^{\circ} 57'$ .

344. Auf einer unter dem Winkel  $\alpha$  gegen den Horizont geneigten Ebene befindet sich eine Last  $Q$ , an welcher eine zur Ebene parallel gerichtete aufwärts strebende Kraft  $P$  wirkt. Wie gross muss  $P$  sein, damit 1) die geringste Vermehrung eine Aufwärts- und

2) die kleinste Verminderung eine Abwärtsbewegung zur Folge hat, wenn der Reibungswinkel mit  $\varrho$  bezeichnet wird?

Antwort:  $P = Q \cdot \frac{\sin(\alpha \pm \varrho)}{\cos \varrho}$ , worin das obere Zeichen für

den ersten, das untere für den zweiten Fall gilt.

345. Die vorige Aufgabe für die Zahlenwerte  $Q = 369 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 10^\circ$  und  $\varrho = 4^\circ$  zu lösen.

Resultate:  $89,49 \text{ kg}$ , resp.  $38,68 \text{ kg}$ .

346. Auf einer unter  $\alpha = 16^\circ$  zum Horizont geneigten Ebene wird eine Last  $Q = 1000 \text{ kg}$  mittels der zur schiefen Ebene parallelen Kraft  $P = 467,9 \text{ kg}$  gleichförmig aufwärts gezogen. Man bestimme hieraus den Reibungskoeffizienten und den Reibungswinkel.

Lösung: Aus  $f = \operatorname{tg} \varrho = \frac{P}{Q \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha$  ergibt sich rund  $f = 0,2$  und  $\varrho = 11^\circ 30'$ .

347. Ein Körper durchläuft die ganze Länge  $l$  einer schiefen Ebene, welche mit dem Horizont den Winkel  $\alpha$  bildet, in  $t$  Sekunden gleichförmig beschleunigt vom Ruhezustande aus. Man soll aus diesen Angaben den Koeffizienten der stattfindenden Reibung berechnen.

Lösung:  $f = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2l}{g t^2 \cos \alpha}$ .

348. Was erhält man für  $f$ , wenn  $l = 25 \text{ m}$ , die Höhe der schiefen Ebene  $h = 7 \text{ m}$  und  $t = 25''$  gegeben sind?

Antwort:  $0,283$ .

## § 119.

### Reibung an der Schraube.

Die Schraube ist in ihrer mechanischen Wirkungsweise zu betrachten als eine schiefe Ebene, deren Höhe und Basis dargestellt werden durch die Ganghöhe  $A'B' = g$  und den Spindelumfang  $CA' = 2r\pi$  (Fig. 51) der Schraube; der Winkel der schiefen Ebene mit dem Horizont ist zugleich der Steigungswinkel  $B'CA' = \alpha$  des Schraubengewindes.

Weil ausserdem die Kraft  $P'$  tangential am mittleren Schraubenumfang, also in Hinsicht auf die schiefe Ebene parallel zur Basis wirkt, so ist auf Grund der beiden Formeln 102 und 103

$$P' = Q \cdot \frac{tg\alpha \pm f}{1 \mp ftg\alpha}, \quad (107.)$$

die Kraft, welche die Last  $Q$  und die Reibung zu überwinden im stande ist oder aber die Schraube mit Hilfe des Reibungswiderstandes am Zurückgehen eben noch hindert, je nachdem die beiden oberen oder die beiden unteren Vorzeichen gelten.

Die Formel 107 kann zunächst, je nach dem praktischen Bedürfnis, in zweifacher Hinsicht, umgeformt werden. Will man erstens statt des Neigungswinkels  $\alpha$  die Ganghöhe  $g$  und den mittleren Bolzenhalbmesser  $r$  einführen, so setzt man

$$tg\alpha = \frac{A'B'}{A'C} = \frac{g}{2r\pi}$$

und erhält

$$P' = Q \cdot \frac{\frac{g}{2r\pi} \pm f}{1 \mp \frac{fg}{2r\pi}}$$

oder

$$P' = Q \cdot \frac{g \pm 2fr\pi}{2r\pi \mp fg}. \quad (108.)$$

Zweitens kann man mittels der Formel 104

$$f = tg\varrho$$

den Reibungswinkel  $\varrho$  an die Stelle des Reibungskoeffizienten bringen; Formel 107 geht über in

$$P' = Q \frac{tg\alpha \pm tg\varrho}{1 \mp tg\alpha tg\varrho}$$

oder mit Benützung sehr bekannter goniometrischer Beziehungen

$$P' = Q tg(\alpha \pm \varrho). \quad (109.)$$

Wenn die Umdrehungskraft der Schraube,  $P$ , nicht am Hebelsarm  $r$ , sondern am Hebelsarm  $R$  wirkt, so ergibt sich aus  $PR = P'r$

$$P' = \frac{R}{r} P$$

und mithin ist nach 108 und 109

$$P = \frac{r}{R} \cdot \frac{g \pm 2fr\pi}{2r\pi \mp fg} Q = \frac{r}{R} Q tg(\alpha \pm \varrho). \quad (110.)$$

Die vorstehenden Gleichungen gelten jedoch nur für Schrauben,

mit rechteckigem (flachem) Gewinde. Wie man sich durch Zerlegung von  $Q$  in zwei Komponenten leicht überzeugen kann ist bei Schrauben mit dreieckigem (scharfem) Gewinde der Normaldruck auf die Schraubenfläche und mithin auch der Reibungswiderstand, bedeutend grösser und zwar um so mehr, je grösser der Winkel ist, den die Erzeugungslinie der Schraubenfläche mit der Achse des Schraubenbolzens bildet.

Dies ist der Grund, warum sich das rechteckige Gewinde am besten zu den Kraftmaschinen, das dreieckige (trapezförmige) sich dagegen mehr zur Befestigung eignet; bei Befestigungsschrauben kommt aber offenbar ausser der Reibung im Gewinde auch noch diejenige zwischen der Schraubenmutter und ihrer Unterlage in Betracht.

§ 120.

**Wirkungsgrad der Schraube.**

Bereits in § 25 wurde erklärt, dass für eine jede Maschine der

$$\text{Wirkungsgrad } \eta = \frac{\text{nutzbar gemachte Arbeit}}{\text{aufgewandte Arbeit}}$$

ist, worin sich beide Arbeiten auf dieselbe Zeit zu beziehen haben.

Da nun offenbar bei einer Schraube als Bewegungshindernis lediglich die Reibung in Betracht kommen kann, so wird die aufgewandte Arbeit geleistet durch diejenige Kraft  $P'$ , welche die Last  $Q$  mit Reibung gleichförmig zu bewegen vermag, dagegen würde die nutzbar gemachte Arbeit produziert werden von jener Kraft  $P''$ , welche die nämliche Last  $Q$  ohne Reibung auf dieselbe Höhe gleichmässig zu heben im stande wäre. Legt der Angriffspunkt jeder dieser beiden Kräfte, welche wir der Einfachheit halber am mittleren Bolzenumfang wirken lassen wollen, den Weg  $s$  zurück, so ist

$$\eta = \frac{P''s}{P's} = \frac{P''}{P'}$$

der Wirkungsgrad der Schraube. Es war aber nach § 90

$$P'' = \frac{g}{2r\pi} Q$$

oder, da

$$\frac{g}{2r\pi} = tg\alpha$$

ist,

$$P'' = Q tg\alpha.$$

Weil ferner aus Formel 109 mit Benützung des oberen Vorzeichens

$$P' = Q tg(\alpha + \varrho)$$

sich ergibt, so folgt

$$\eta = \frac{tg\alpha}{tg(\alpha + \varrho)}. \quad (111.)$$

Diese Formel sagt uns, dass der Wirkungsgrad  $\eta$  einer Schraube mit rechteckigem Gewinde, einerseits vom Steigungswinkel  $\alpha$  des letzteren und andererseits vom Reibungswinkel  $\varrho$ , das ist zugleich vom Reibungskoeffizienten  $f$  abhängt. Der Einfluss von  $\eta$  auf  $\varrho$  ist ohne weiteres klar; denn weil für denselben Wert von  $\alpha$  der Nenner des obigen Bruches —  $tg(\alpha + \varrho)$  — wächst, während der Zähler ( $tg\alpha$ ) unverändert bleibt, so fällt  $\eta$  bei einem bestimmten Steigungswinkel um so geringer aus, je grösser  $\varrho$ , je bedeutender mithin auch der Reibungskoeffizient ist, eine Thatsache, die ja von vorne herein feststand.

Nicht so leicht ist zu erkennen, wie der Wirkungsgrad  $\eta$  bei konstantem  $\varrho$  mit dem Steigungswinkel  $\alpha$  sich ändert, weil in der Beziehung 111 mit wachsendem  $\alpha$  sowohl der Zähler  $tg\alpha$  als auch der Nenner  $tg(\alpha + \varrho)$  zunehmen. Um doch ein Urteil über die Natur der Abhängigkeit zwischen  $\alpha$  und  $\eta$  zu gewinnen nehmen wir den Reibungskoeffizienten beispielweise zu 0,17 bis 0,18, mithin den Reibungswinkel  $\varrho$  rund zu  $10^\circ$  an und setzen für den Steigungswinkel der Reihe nach

0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 Grad

in Formel 111 ein. Als zugehörige Werte des Wirkungsgrades  $\eta$  erhalten wir

0; 0,48; 0,63; 0,69; 0,71; 0,69; 0,63; 0,48; 0

und sehen nun, dass mit wachsendem Steigungswinkel der Wirkungsgrad  $\eta$  erst zu- und später wieder abnimmt. Da im vorliegenden Falle der grösste Wert von  $\eta$ , nämlich 0,71, bei  $\alpha = 40^\circ$  eintritt, so wäre der letztere der günstigste Steigungswinkel für Bewegungsschrauben unter der Bedingung, dass der Reibungswinkel  $10^\circ$  beträgt.

Für die Reibungswinkel

6, 8, 12, 14, 16 Grad

würden wir auf analoge Weise die respektiven Werte von

42, 41, 39, 38, 37 Grad

als diejenigen Steigungswinkel erhalten, welche die höchsten Wirkungsgrade erzielen. nämlich

0,81; 0,76; 0,66; 0,61; 0,57.

Man sieht, dass zur Erreichung des möglichst grossen Nutzeffektes bei den Bewegungsschrauben sehr erhebliche Steigungen der Gewinde nötig sind. Zu Gunsten grosser Drücke geht man in der Praxis häufig sehr unvorteilhaft hiervon ab.

## § 121.

### Beispiele.

349. Unter welcher Bedingung wird eine Schraube mit rechteckigem Gewinde vor dem freiwilligen Zurückgehen bewahrt, wenn der Steigungswinkel  $\alpha$ , die Ganghöhe  $g$  und der mittlere Spindelhalbmesser  $r$  ist?

Antwort: Es muss der Reibungswinkel  $\varrho > \alpha$  oder der Reibungskoeffizient  $f > \frac{g}{2r\pi}$  sein.

350. Für eine Schraube ist der mittlere Bolzenradius 3 *cm*, die Ganghöhe des rechteckigen Gewindes 1 *cm* und der Reibungskoeffizient 0,14. Welcher Druck kann durch eine Kraft von 50 *kg* ausgeübt werden, wenn letztere am Ende eines durch den Schraubenkopf gesteckten Hebelarmes 0,6 *m* wirkt?

Antwort: Zirka 5142 *kg*.

351. Wie gross würde sich aber der Druck ohne Rücksicht auf Reibung herausstellen?

Antwort: Auf rund 18 850 *kg*.

352. Welches wäre demnach der Wirkungsgrad dieser Schraube?

Antwort:  $\eta = \frac{5142}{18850} = 0,273$ .

353. Würde die Schraube am freiwilligen Zurückgehen lediglich durch die Reibung gehindert werden?

Antwort: Ja; denn es ist  $\frac{g}{2r\pi} = \frac{1}{6\pi} = 0,053 \dots$  bei weitem kleiner als  $f = 0,14$ .

354. Man bestimme den Steigungswinkel  $\alpha$  und den Reibungswinkel  $\varrho$  der in Rede stehenden Schraube.

Resultate:  $\alpha = 3^\circ 2' 12''$ ,  $\varrho = 7^\circ 58' 11''$ .

355. Den Wirkungsgrad  $\eta$  nunmehr nach Formel 111 zu berechnen.

Lösung:  $\eta = 0,277$ .

356. Wenn  $\varrho$  auf  $8^\circ$  abgerundet wird, bei welchem Steigungswinkel würde der grösste Wirkungsgrad eintreten?

Antwort: Bei  $\alpha = 41^\circ$  würde  $\eta$  am grössten, nämlich gleich 0,76 sein.

357. Welches Verhältnis zwischen Kraft und Last würde jetzt bestehen müssen, damit jene imstande ist, diese

a) gleichförmig aufwärts zu bewegen und

a) eben noch vor dem Zurückgehen zu bewahren?

Lösungen: zu a)  $P : Q = 1 : 17,386$ .

zu b)  $P : Q = 1 : 31,315$ .

## § 122.

### Zapfenreibung.

Da die Zapfenreibung nur eine spezielle Art der gleitenden Reibung ist, so gelten natürlich für erstere auch die gleichen Gesetze, wie für letztere. Bezeichnet daher  $\varphi$  den Reibungskoeffizienten, so ist, wie früher, der Widerstand bei der Zapfenreibung

$$W = \varphi N,$$

sobald  $N$  den Normaldruck zwischen den reibenden Flächen bedeutet.

Was nun den Koeffizienten  $\varphi$  der Zapfenreibung anlangt, so ist derselbe nach Versuchen von Morin bei Zapfen aus Schmiedeeisen oder Gusseisen, laufend in Lagern aus Gusseisen, Glockengut oder Messing, geschmiert mit Talg, Öl oder Schweinefett:

bei ununterbrochener guter Unterhaltung,  $= 0,054$

und bei gewöhnlicher Abwartung,  $= 0,07$  bis  $0,08$ .

Dagegen ergaben neuere Versuche von Waltjen und Rühlmann,

welche mit einer grossen Anzahl von Schmiermitteln ausgeführt wurden, dass der Wert von  $\varphi$  meist zwischen 0,02 und 0,03 liegt und endlich findet Kirchweger den Koeffizienten der Zapfenreibung bei Schmirung mit Rüböl oder Kohäsionsöl

1. für Schmiedeeisen auf Bronze = 0,014 und

2. für Schmiedeeisen auf Weissguss = 0,01.\*)

Stimmen auch die Ergebnisse der letzteren Versuche nicht überein, so zeigen sie doch, dass die Koeffizienten der Zapfenreibung jedenfalls erheblich kleiner sind, als die von Morin angegebenen Werte.

### § 123.

#### Reibung am zylindrischen Tragzapfen.

Da der Reibungswiderstand  $W$  bei einem horizontalen und zylinderrförmigen Zapfen in der Richtung der Tangenten am Zylindermantel wirkt, so ist in Bezug auf die Drehachse sein Hebelsarm gleich dem Halbmesser  $r$  des Zapfens und sein statisches Moment

$$M = Wr = \varphi Nr, \quad (112.)$$

das heisst: Das Reibungsmoment für einen zylindrischen Tragzapfen ist gleich dem Produkte aus dem Reibungskoeffizienten, dem Normaldruck und dem Zapfenhalbmesser.

Die zur Überwindung der Reibung nötige mechanische Arbeit ist nach § 21, Formel 25 gleich Widerstand mal Weg, also während einer Umdrehung des Zapfens

$$Ws = W2r\pi = 2\pi r\varphi N,$$

folglich, wenn  $n$  die Tourenzahl bezeichnet, innerhalb einer Minute

$$A = 2\pi r\varphi Nn$$

und mithin

$$E = \frac{2\pi}{60} r\varphi Nn$$

die Arbeitsgrösse, welche die Zahnreibung während einer Sekunde beansprucht. Wird  $r$  in Metern und  $N$  in Kilogrammen aus-

---

\*) Kirchweger schloss ausserdem aus seinen Versuchen, dass der Reibungskoeffizient unabhängig sei vom spezifischen Druck und von der Geschwindigkeit.



gedrückt, so ergibt sich aus der letzten Gleichung  $E$  in Meterkilogrammen; man erhält daher mittels Division durch 75

$$\mathfrak{N} = \frac{E}{75} = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} r \varphi N n$$

oder, weil

$$\frac{2\pi}{60 \cdot 75} = 0,0013962 \sim 0,0014$$

ist:

$$\mathfrak{N} = 0,0014 r \varphi N n, \quad (113.)$$

den durch die Reibung am zylindrischen Tragzapfen pro Sekunde verursachten Arbeitsverlust in Pferdekraften.

Wäre z. B. der Zapfendruck 8000 *kg*, der Zapfenradius 6 *cm*, der Reibungskoeffizient 0,05 und die Umdrehungszahl in der Minute 7, so hätten wir in der letzten Formel

$$r = 0,06; \varphi = 0,05; N = 8000; n = 7$$

zu setzen und bekämen

$$\mathfrak{N} = 0,0014 \cdot 0,06 \cdot 0,05 \cdot 8000 \cdot 7 = 0,2352;$$

die Zapfenreibung würde also in diesem Falle nicht ganz  $\frac{1}{4}$  Pferdestärke konsumieren.

## § 124.

### Zapfenreibung am Wellenrade.

Die Kraft  $P$  hat den Halbmesser  $R$  des Rades und die Last  $Q$  den Halbmesser  $r'$  der Welle zum Hebelsarm; das Gewicht des Wellrades sei  $G$ , der Zapfendruck  $N$ , der Zapfenradius  $r$  und der Reibungskoeffizient  $\varphi$ . Dann ist die Bedingung für den Zustand der gleichförmigen Bewegung im Sinne der Kraft:

$$PR = Qr' + \varphi Nr. \quad (114.)$$

Der Zapfendruck hängt hierbei offenbar von den am Wellenrade wirksamen Kräften  $P$ ,  $Q$ ,  $G$  und den Richtungen derselben ab; wir können uns dies bezüglich auf die Anführung der beiden am häufigsten vorkommenden Fälle beschränken:

1. Sind  $P$ ,  $Q$  und  $G$  parallel, so haben wir

$$N = Q + G \pm P,$$

je nachdem  $P$  vertikal abwärts oder vertikal aufwärts wirkt; mithin geht 114 über in

$$PR = Qr' + \varphi(Q + G)r \pm \varphi Pr,$$

woraus folgt

$$P = \frac{Qr' + (Q + G)r\varphi}{R \mp r\varphi} \quad (115.)$$

als diejenige Kraft, welche sowohl die Last  $Q$  als auch die Zapfenreibung zu überwinden im stande ist. Man hat hierbei das obere oder das untere der beiden Vorzeichen im Nenner zu nehmen, je nachdem  $P$  lotrecht nach unten oder lotrecht nach oben wirkt; es ist leicht zu übersehen, dass bei allen möglichen Richtungen, die  $P$  haben kann, im ersten Fall der Zapfendruck und mithin auch die Reibung — unter sonst gleichen Umständen — am grössten, dass dagegen im letzten Falle  $N$  und  $W$  am kleinsten ausfallen. Das obere Zeichen liefert daher für  $P$  den möglichst grossen, das untere den möglichst kleinen Wert.

2. In der Regel bildet die Kraft  $P$  einen rechten Winkel mit  $Q$  und  $G$ , und man hat dann nach dem Pythagoräischen Lehrsatz

$$N = \sqrt{P^2 + (Q + G)^2}.$$

Mit Einführung dieses Wertes in die Gleichung 114 würden wir aber eine für  $P$  quadratische Gleichung und für die Anwendung viel zu umständliche Ausdrücke erhalten. Wir benützen daher Poiselet's Näherungsformel

$$\sqrt{P^2 + (Q + G)^2} = 0,4 P + 0,96 (Q + G),$$

wodurch unter der Bedingung, dass

$$P < G + Q$$

ist, höchstens der Fehler von 4 pro Zent des wahren Werts begangen wird — ein Fehler, welcher kaum in Betracht kommt, wenn man an die unsichere Bestimmung des Reibungskoeffizienten und an die vielen Zufälligkeiten denkt, welche letzteren beeinflussen können. Wir setzen den obigen Näherungswert in 114 ein und erhalten

$$PR = Qr + 0,4 Pr\varphi + 0,96 (Q + G) r\varphi$$

und somit

$$P = \frac{Qr' + 0,96 (Q + G) r\varphi}{R - 0,4 r\varphi}. \quad (116.)$$

Wenn die Kraft  $P$  an einer Kurbel normal zur letzteren arbeitet, so erleidet der Zapfendruck eine beständige Änderung und schwankt zwischen den beiden äussersten Werten  $Q + G + P$  und  $Q + G - P$ , ist also im Mittel  $Q + G$ . Für

$$N = Q + G$$

ergiebt sich aber aus 114

$$PR = Qr' + (Q + G) r \varphi$$

und folglich ist

$$P = \frac{Qr' + (Q + G) r \varphi}{R} \quad (117.)$$

diejenige durchschnittliche Kraft, welche an einer Kurbel die Last  $Q$ , sowie die Zapfenreibung überwinden kann.

§ 125.

### Zapfenreibung an der Rolle.

Bezeichnet man die Radien der festen Rolle und des Zapfens mit  $R$ , bezw.  $r$  und nimmt zunächst an, dass  $P$  und  $Q$  gleich gerichtet sind, so ist bei Vernachlässigung des geringen Eigengewichtes der Rolle der Zapfendruck

$$N = P + Q,$$

mithin der Widerstand der Zapfenreibung

$$W = N \varphi = (P + Q) \varphi,$$

und es folgt aus der Gleichgewichtsbedingung

$$PR = QR + (P + Q) r \varphi:$$

$$P = \frac{R + r \varphi}{R - r \varphi} Q, \quad (118.)$$

die Kraft, welche, abgesehen von der Seilreibung, die Last  $Q$  gleichmäßig zu heben fähig ist.

Soll dagegen die Last  $Q$  nur am Zurückgehen gehindert werden, so wirkt die Zapfenreibung gegen letzteres und im Sinne von  $P$ , es ist daher die Gleichgewichtsbedingung

$$PR + (P + Q) r \varphi = QR,$$

woraus entsteht

$$P = \frac{R - r \varphi}{R + r \varphi} Q, \quad (119.)$$

die Kraft, welche mit Hilfe der Zapfenreibung und ohne Rücksicht auf Seilreibung, der Last  $Q$  nur ein gleichförmiges Herabsinken gestatten würde.

Bilden die beiden Seilenden einen rechten Winkel, so ist der Zapfendruck

$$N = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

oder, weil  $P$  und  $Q$  nur sehr wenig verschieden sind, annähernd

$$N = Q \sqrt{2},$$

mithin das Reibungsmoment

$$M = r \varphi Q \sqrt{2}$$

und die Gleichgewichtsbeziehung

$$PR \mp r \varphi Q \sqrt{2} = QR$$

oder

$$P = \frac{R \pm r \varphi \sqrt{2}}{R} Q = \left(1 \pm \frac{r \varphi \sqrt{2}}{R}\right) Q, \quad (120.)$$

worin man das obere oder untere Zeichen gelten lassen muss, je nachdem die Last  $Q$  gehoben oder vor dem Zurückgehen eben noch bewahrt werden soll.

An der losen Rolle ist der Zapfendruck unter allen Umständen gleich der Last  $Q$ , vermehrt um das Eigengewicht  $G$  des Rollenkörpers, folglich das Moment der Zapfenreibung

$$M = (Q + G) r \varphi.$$

Sind nun die Seilenden vertikal, so ist das statische Moment der Last mit Rollengewicht  $(Q + G) R$  und das Moment der Kraft  $2PR$ , mithin die Bedingung des Gleichgewichts für Aufwärtsbewegung

$$2PR = (Q + G) R + (Q + G) r \varphi$$

woraus sich ergibt

$$P = \frac{R + r \varphi}{2R} (Q + G). \quad (121.)$$

Wir haben das Eigengewicht  $G$  bei der festen Rolle vernachlässigt, dagegen bei der losen berücksichtigt, weil es dort nur die Reibung, hier aber auch zugleich die Kraft  $P$  beeinflusst.

## § 126.

### Beispiele.

358. Ein 9 Meter hohes Wasserrad wiegt 12000 Kilogramm. Welche Kraft  $P$  muss tangential an seiner Peripherie wirken, um das Rad in gleichförmiger Bewegung zu erhalten, wenn der Zapfenradius 8 cm ist, der Reibungskoeffizient 0,03 beträgt und der Ein-

fluss von  $P$  auf den Zapfendruck als verschwindend betrachtet wird?

Antwort:  $P = 6,4 \text{ kg}$ .

359. Wie gross würde sich aber diese Kraft  $P$  herausstellen, wenn man ihre Einwirkung auf den Zapfendruck berücksichtigt und annimmt, dass sie vertikal abwärts wirkt, also diejenige Richtung hat, in welcher sie den Zapfendruck am meisten verstärkt?

Antwort: Es ergibt sich  $P = 6,4034 \text{ kg}$ , also ein von  $6,4 \text{ kg}$  äusserst wenig verschiedener Wert.

360. Man bestimme die sekundlichen Arbeiten, welche an dem Wasserrade einerseits die Zapfenreibung konsumiert und andererseits die Kraft  $P$  an der Radperipherie produziert.

Lösung: Für beide erhält man  $12,1 \text{ mkg}$ .

361. Mittels eines Wellrades, für welches  $R = 100 \text{ cm}$ ,  $r' = 18 \text{ cm}$ ,  $r = 4 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 0,06$  und  $G = 150 \text{ kg}$  gegeben sind, soll eine Last von  $1000 \text{ kg}$  gehoben werden; man bestimme die hierzu nötige Kraft, wenn dieselbe 1) vertikal abwärts und 2) vertikal aufwärts gerichtet ist.

Resultate: Zu 1)  $P = 183,25 \text{ kg}$  und zu 2)  $P = 182,32 \text{ kg}$ .

362. Welches sind die Wirkungsgrade des Wellrades in diesen beiden Grenzfällen unter der Voraussetzung, dass von der Seilsteifigkeit abstrahiert wird?

Antwort:  $0,982$ , resp.  $0,987$ .

363. Was ergibt sich in Aufgabe 361 für eine Kraft, welche horizontal am Umfange des Rades wirkt?

Antwort:  $P = 182,84 \text{ kg}$ .

364. Welche Last kann mit Hilfe eines  $60 \text{ kg}$  wiegenden Haspels, dessen Wellenhalbmesser (einschliesslich der halben Seilstärke)  $12 \text{ cm}$  und dessen Zapfenradius  $2 \text{ cm}$  lang sind, gehoben werden, wenn an den beiden  $42 \text{ cm}$  langen Kurbeln jeder von 2 kräftigen Arbeitern durchschnittlich einen Normaldruck von  $10 \text{ kg}$  ausübt und der Reibungskoeffizient zu  $0,1$  angenommen wird?

Antwort: Eine Last von  $67,87 \text{ kg}$ .

365. An einer Brunnenwinde ist die Kurbel  $40 \text{ cm}$ , der Wellendurchmesser  $20 \text{ cm}$  und der Zapfenradius  $2 \text{ cm}$  lang; um die Welle ist ein  $2 \text{ cm}$  dickes Seil geschlungen, welches an dem einen Ende einen  $15 \text{ kg}$  wiegenden leeren und am anderen Ende einen  $75 \text{ kg}$  schweren vollen Eimer trägt. Welchen mittleren Druck auf den Kurbelgriff

hat man anzuwenden, wenn der Reibungskoeffizient 0,07 und das Gewicht der Winde 50 *kg* ist?

Antwort: Den Druck  $P = 16,99 \sim 17 \text{ kg}$ .

366. Für eine Differentialwelle sind die beiden Halbmesser der Welle (incl. der halben Seildicke)  $\Re$  und  $r$ , die Kurbellänge  $l$ , der Zapfenradius  $r$  und der Zapfenreibungskoeffizient  $\varphi$ . Man entwickle die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für das Emporziehen der Last  $Q$  durch die Kraft  $P$  unter Berücksichtigung der Zapfenreibung und mit Vernachlässigung der Seilsteifigkeit.

Lösung: 
$$\frac{P}{Q} = \frac{\Re - r + 2r\varphi}{2l}$$

367. Die Bedingung des Gleichgewichts gegen das Zurückgehen der Last anzugeben.

Lösung: 
$$\frac{P}{Q} = \frac{\Re - r - 2r\varphi}{2l}$$

368. Was ergibt sich in den beiden vorstehenden Fällen bei Rücksichtnahme auf das Eigengewicht der Differentialwinde?

Antwort: 
$$P = \frac{\Re - r}{2l} Q \pm \frac{r\varphi}{l} (Q + G)$$

369. Zwischen welchen Grenzen von  $P$  würde demnach eine Differentialwelle im Gleichgewichtszustande sich befinden für den Fall, dass  $l = 40 \text{ cm}$ ,  $\Re = 12 \text{ cm}$ ,  $r = 10 \text{ cm}$ ,  $r = 2 \text{ cm}$ ,  $\varphi = 0,08$ ,  $Q = 4000 \text{ kg}$  und  $G = 100 \text{ kg}$  sind?

Antwort: Zwischen 116,4 *kg* und 83,6 *kg*.

370. Wie gross ist der Wirkungsgrad dieser Differentialwinde?

Antwort: 0,859.

371. Vermittelst einer festen Rolle soll eine Last von 100 *kg* gehoben werden. Welches ist die hierzu erforderliche Kraft, wenn der Zapfenhalbmesser 1 *cm*, der Rollenhalbmesser 16 *cm* und der Winkel zwischen den verlängerten Seilenden  $60^\circ$  und der Reibungskoeffizient 0,08 gegeben sind?

Antwort:  $P = 100,866 \text{ kg}$ .

### Das Bremsdynamometer.

Um die Arbeitskraft einer Betriebsmaschine genau zu erfahren, bedient man sich eines Apparats, welcher das Bremsdynamometer

oder der Prony'sche Zaum genannt wird. Derselbe ist in Figur 62 dargestellt und besteht in der Hauptsache aus einem längeren Hebel  $BA$ , an welchem rechts zwei segmentartig ausgeschnittene Holzstücken  $DD$  durch die beiden Schrauben  $EF$  befestigt sind und an dessen linkem Ende  $A$  eine Wagschale hängt.

Diesen Apparat steckt man nun so auf die vom Motor bewegte Welle  $C$ , dass letztere durch die Backen oder Sättel  $DD$  genau umschlossen wird und ein Anziehen der Schraubenmutter  $EE$  eine Pressung, infolgedessen auch Reibung zwischen dem Umfange der Welle und den inneren Flächen der beiden Bremsbacken erzeugt; zwei feste Hindernisse  $G$  und  $H$ , welche oberhalb und unterhalb des Hebels angebracht werden, verhüten ein Umherschleudern des letzteren und gestatten seiner Bewegung einen nur geringen Spielraum.<sup>3</sup>

Hat man jetzt alle Arbeitsmaschinen von der Betriebswelle getrennt und zieht die Mutter  $EE$  in dem Masse an, dass die Welle diejenige Anzahl  $n$  von Umdrehungen per Minute macht, welche sie für den gewöhnlichen Betrieb der Anlage haben muss, so ist die Nutzarbeit unserer Kraftmaschine künstlich in Reibung umgesetzt: es kommt also nur noch darauf an, diejenige mechanische Arbeit, welche durch den Reibungswiderstand  $W$  am Umfange der Welle  $C$  verbraucht wird, genau zu messen.

Zu dem Ende belastet man die in  $A$  aufgehängte Wagschale so lange mit Gewichten, bis der Hebelsarm  $BA$  zwischen  $G$  und  $H$  horizontal frei schwebt. In dem Moment, wo letztere Thatsache eingetreten ist und zugleich die Welle  $C$  die vorgeschriebene Tourenzahl  $n$  hat, kann das Experiment als glücklich beendet angesehen werden; denn bezeichnen wir den Halbmesser  $CJ$  der Betriebswelle mit  $r$ , die Belastung des Punktes  $A$  mit  $Q$  und den Hebelsarm von  $Q$  in Bezug auf die Wellenachse mit  $l$ , so sind  $Wr$ ,  $Ql$  die statischen Momente von  $W$  und  $Q$  in Beziehung auf  $C$ , und es ergibt sich aus der Momentengleichung

$$Wr = Ql$$

der Reibungswiderstand

$$W = \frac{l}{r} Q.$$

Mithin ist der Arbeitsverbrauch der Reibung nach einer vollen Umdrehung der Welle

$$2r\pi \cdot W = 2\pi lQ,$$

also nach einer Minute

$$A = 2\pi \ln Q$$

und demnach während einer Sekunde

$$E = \frac{A}{60} = \frac{\pi}{30} \ln Q,$$

das ist zugleich der Nutzeffekt der Kraftmaschine in Meterkilogrammen, sobald man nur  $l$  in Metern und  $Q$  in Kilogrammen ausdrückt. Mittels Division durch 75 entsteht

$$N = \frac{E}{75} = \frac{\pi}{2250} \ln Q,$$

oder, weil

$$\frac{\pi}{2250} = 0,001396 \sim 14$$

ist,

$$N = 0,0014 \ln Q, \quad (122.)$$

die sekundliche Nutzarbeit der Kraftmaschine (Wasserrad, Turbine, Dampfmaschine etc.) in Pferdekraften.

Bezüglich der Anwendung von Prony's Zaum in der Praxis sei noch bemerkt:

1. Wenn die Betriebswelle  $C$  zu schwach oder nicht genau zylindrisch, resp. nicht sauber abgedreht ist, so umgibt man sie mit einem gusseisernen Bremsringe, dessen Achse mit der Rotationsachse der Welle genau zusammenfällt und welcher selbstverständlich an die letztere fest angeschraubt werden muss. Liegt die Tourenzahl der Welle zwischen 15 und 30, so macht man nach Poncelet den Durchmesser des Bremsringes bei einer sekundlichen Arbeit

von 6 bis 8 Pferdestärken 16 Zentimeter,

„ 15 „ 25 „ 30 bis 40 Zentimeter und

„ 40 „ 60 „ 65 „ 80 „

lang, damit der zwischen der Welle und den Bremsätteln notwendige Druck nicht zu gross wird und von einem oder zwei Menschen mit Hilfe von Schraubenschlüsseln bequem hervorgebracht werden kann.

2. Um einer zu grossen Erhitzung der sich reibenden Körper vorzubeugen, wird vermittelst des Kanals  $K$  den Reibungsflächen beständig Seifenwasser zugeführt.

3. In der Belastung  $Q$  ist nicht nur das Eigengewicht der Wagschale, sondern auch das auf den Punkt  $A$  reduzierte Eigen-



gewicht des Bremsdynamometers einbegriffen. Wiegt nämlich der ganze Apparat  $G$  Kilogramm und ist  $a$  der kürzeste Abstand seines Schwerpunktes  $S$  von einer durch  $C$  gehenden Senkrechten, so wirkt eine Kraft  $P$  mit dem Hebelsarm  $l$  genau dasselbe wie  $G$ , wenn

$$Pl_{\frac{1}{3}} = Ga$$

ist. Folglich haben wir in

$$P = \frac{a}{l} G$$

das auf den Druckpunkt  $A$  reduzierte Eigengewicht vom Prony'schen Zaum; die Länge  $a$  kann hierbei experimentell leicht festgestellt werden, indem man den Apparat auf einer scharfen Schneide, z. B. auf einer dreikantigen Feile, so lange verschiebt, bis er frei schwebt; \*) denn dann liegt der Schwerpunkt  $S$  des Bremsdynamometers lotrecht über der Feilkante.

Übrigens kann man die ganze letzte Operation sparen, wenn man das Bremsdynamometer ausbalanciert, d. h. den Hebel links von  $C$  derartig belastet, dass der Schwerpunkt vertikal über der Drehachse  $C$  zu liegen kommt; denn in diesem Falle ist  $a$  und demnach auch  $P$  gleich Null.

4. Die Belastung  $Q$  kann auch ersetzt werden durch die Spannung eines Seiles, dessen Enden einerseits in  $A$  am Hebel und andererseits an einer Federwage befestigt sind. Ist dieses Seil genau lotrecht gespannt, so zeigt die Federwage direkt den Druck  $Q$  an, welcher notwendig ist, um der Reibung in jedem Augenblick das Gleichgewicht zu halten.

5. Bei vertikal stehender Welle kann zwar das Bremsdynamometer ebenfalls zweckentsprechend benützt werden, es muss aber dann der Endpunkt  $A$  des Hebels in einer horizontalen Führung laufen, weil sonst das Eigengewicht eine Verdrehung der ganzen Bremse herbeiführen könnte. Die Zugkraft  $Q$  in  $A$  kann entweder mit einer Federwage oder auch durch ein Gewicht gemessen werden, welches an einem über eine feste Rolle geleiteten Seile hängt; selbstverständ-

---

\*) Noch einfacher findet man den Druck  $P$ , welchen das eigene Gewicht  $G$  des Instrumentes im Punkte  $A$  ausübt, wenn man den Sattel  $D$  lose auf eine Welle setzt und den Endpunkt  $A$  des Hebels an eine Federwage hängt; die Zugkraft an letzterer giebt  $P$  an.

lich muss das Seilstück von  $A$  bis zur Rollenperipherie genau horizontal und ausserdem perpendikulär zum Hebel  $BA$  gerichtet sein.

6. Offenbar kann man mit dem Bremszaum für ein und dieselbe Kraftmaschine eine ganze Reihe von Versuchen anstellen, indem man den Nutzeffekt bei verschiedenen Umfangsgeschwindigkeiten der Betriebswelle bestimmt. Ein Vergleich der erhaltenen Resultate lässt dann erkennen, bei welcher Tourenzahl die Nutzarbeit am grössten ist

### § 128.

#### Beispiele.

372. Um die Nutzleistung eines Wasserrades, welches in einer Minute 6 Umdrehungen machen soll, zu erfahren, setzt man auf seine Welle ein vorher ausbalanciertes Bremsdynamometer, dessen Hebelsarm  $3,6\ m$  lang ist. Nachdem man durch vorsichtiges Anziehen der Bremsbacken durch die Schraubenmutter die vorgeschriebene Tourenzahl und durch allmähliches Auflegen von Gewichten auf die Wagschale den Gleichgewichtszustand des Instrumentes herbeigeführt hat, addiert man [die aufgelegten Gewichtsstücke zusammen und findet  $226,25\ kg$ . Wie gross berechnet sich hieraus der Nutzeffekt des Wasserrades in Pferdestärken?

Antwort:  $N = 7,2\ PS$ .

373. Welches ist der Wirkungsgrad des Wasserrades in voriger Aufgabe, wenn in jeder Sekunde 850 Liter Wasser zufließen und das nutzbare Gefälle  $1,5$  Meter beträgt?

Antwort:  $\eta = \frac{7,2}{17} = 0,42$ .

374. Die Nutzarbeit einer Turbine zu berechnen, wenn bei 76 Umdrehungen in der Minute der  $2,9$  Meter lange Hebelsarm des Bremsdynamometers auf die Federwage einen Druck von  $147,5\ kg$  ausübt?

Resultat:  $45,513\ PS$ .

375. Wie hoch stellt sich der Wirkungsgrad dieser Turbine, wenn das Aufschlagwasser  $1,6$  Kubikmeter und das Gefälle  $3$  Meter beträgt?

Antwort:  $\eta = 0,71$ .

376. Für das Wasserwerk der Stadt Bern wurden 1878 zwei

ganz gleiche Turbinen von zusammen 230 Pferden ausgeführt (G. Meissner, „Wasserräder und Turbinen“), und garantierten die Lieferanten eine Nutzleistung von 70 Prozenten. Vor Übernahme der Motoren seitens der Stadt Bern sollten die Leistungen beider Turbinen von Sachverständigen festgestellt werden und wurden zu dem Ende zwei sorgfältige Versuche mit einem Bremsdynamometer, dessen Hebel genau 4 Meter lang war, vorgenommen.

Die erste Turbine hatte ein totales Gefälle von 1,712 Meter, das Aufschlagwasser betrug 6675 Liter und bei 100 Umdrehungen der Turbinenwelle in der Minute war eine Belastung des Hebels von 180 Kilogramm notwendig; wie hoch berechnet sich hieraus der theoretische und der Nutzeffekt in Pferdestärken?

Antwort: ersterer zu 152,348 und letzterer zu 100,8 *PS*.

377. Weil aber der Prony'sche Zaum nicht direkt an der Turbinenwelle, sondern erst an einer zweiten Transmissionswelle angebracht werden konnte, so kommt zur gebremsten Leistung von 100,8 *PS* noch der Arbeitskonsum der Reibung zweier konischer Räderpaare und der beiden Transmissionswellen in ihren Lagern. Um den Reibungswiderstand zu messen, wurde die Turbine gänzlich vom Wasser entleert, jede Belastung der ausbalancierten Bremse entfernt und allmählich auf das Hebelende Gewichte gelegt. Wenn nun bei 13 *kg* die Transmission samt Turbine sich zu drehen anfing, wie hoch berechnet sich dann der Arbeitsverbrauch durch Reibung und mithin die effektive Leistung der Turbine?

Antwort: Die Reibungsarbeit ist bei hundert Touren pro Sekunde 7,2 *PS* und folglich die Nutzarbeit der ersten Turbine 108 Pferdestärken.

378. Wie gross ist demnach der Wirkungsgrad der ersten Turbine?

Antwort: 0,7089 oder rund 71 Prozent.

379. Für die zweite Turbine war das Gefälle 1,69 Meter, die sekundliche Wassermenge 6480 Liter und bei 97,6 Umdrehungen per Minute die Hebelbelastung des Bremsapparates 179,5 *kg*. Man bestimme hieraus die Totalarbeit, die Nutzarbeit und den Wirkungsgrad der Turbine, wenn der Verlust durch die Reibung der Transmission so gross wie vorhin angenommen wird.

Resultate: Totalarbeit 146 Pferde, Nutzarbeit  $98 + 7,2 = 105,2$  Pferde und der Wirkungsgrad 0,72 oder 72 Prozent.

§ 129.

**Reibung am vollen ebenen Spurzapfen.**

Wenn eine Wellenachse vertikal gerichtet ist, so entsteht an der kreisförmigen Basis des zylindrischen Zapfens die gewöhnliche gleitende Reibung und sind daher die in §§ 111 und 112 zusammengestellten Koeffizienten anzuwenden.

Was aber das statische Moment dieser Reibungsart in Bezug auf die Drehachse anbelangt, so können wir bei neuen Spurzapfen annehmen, dass in der der Richtung der Wellenachse wirkende Druck  $D$  sich gleichmässig auf die Unterstützungsfläche verteilt und dass daher auf alle Punkte der letzteren gleich grosse und parallele Kräfte wirken.

Zerlegen wir jetzt die Basis des Zapfens durch die Radien  $OB$ ,  $OE \dots$  (Fig. 61) in zahllose Sektoren, welche als Dreiecke betrachtet werden können, so ist der Angriffspunkt der Resultante von allen auf die einzelnen Punkte der letzteren wirkenden Normalkräfte laut der in § 58 angeführten Definition zugleich der Schwerpunkt der homogenen Dreiecksfläche  $BOE$ ; die resultierenden Drücke sämtlicher Sektoren, aus welchen die Kreisfläche besteht, wirken daher in der Peripherie eines Kreises, welcher mit dem Halbmesser  $\frac{2}{3}r$  um  $O$  beschrieben wird.

Es ist folglich das Moment des Reibungswiderstandes

$$W = fD$$

in Beziehung auf die Rotationsachse:

$$M = \frac{2}{3}rfD. \quad (123.)$$

Die durch die Reibung verbrauchte Arbeit ist in vorstehendem Falle während einer Umdrehung des Zapfens

$$2 \cdot \frac{2}{3}r\pi W = \frac{4}{3}\pi frD,$$

folglich bei der Tourenzahl  $n$  innerhalb einer Minute

$$A = \frac{4}{3}\pi fnrD$$

mithin während einer Sekunde

$$E = \frac{A}{60} = \frac{\pi}{45}fnrD$$

und zwar in Meterkilogrammen, sobald  $r$  mit Meter und  $D$  mit Kilogrammen gemessen sind. Hieraus ergibt sich weiter

$$N = \frac{E}{75} = \frac{\pi}{3375} frnD$$

oder, weil  $\frac{\pi}{3375} = 0,0009308 \sim 0,000931$  ist:

$$N = 0,000931 frnD, \quad (124.)$$

der durch die Reibung am stehenden Kreiszapfen verursachte Reibungsverlust in Pferdestärken.

Hierbei ist natürlich die (sehr geringe) Reibung am Mantel des Zapfens, welche durch kleine Schwankungen der Welle und dadurch herbeigeführte seitliche Drücke verursacht werden kann, nicht mit in Betracht gezogen worden.

Fängt der neue Zapfen an zu laufen, so ist die Abnutzung desselben nach der Peripherie zu wegen der grösseren Geschwindigkeit bedeutender als nach dem Mittelpunkte zu und in Folge dessen bleibt die Verteilung des Normaldrucks auf die Grundplatte nicht gleichmässig, sondern derselbe wird nach dem Umfange der kreisförmigen Basis hin allmählich geringer; hierdurch rückt aber die (kreisförmige) Angriffslinie des resultierenden Druckes mit der Zeit etwas näher an den Mittelpunkt  $O$  heran. Diese ungleichförmige Abnutzung des Zapfens dauert aber offenbar nur so lange an, bis zwischen der Einwirkung der Geschwindigkeitsdifferenz und dem Einflusse des Druckunterschiedes ein Ausgleich stattgefunden hat; von diesem Augenblicke an erfolgt die weitere Abnutzung des Zapfens gleichmässig und man sagt: der Zapfen hat sich eingelaufen.

Durch schätzungsweise Rechnung ward gefunden und die Erfahrung hat bestätigt, dass die Druckresultante im Abstände  $\frac{r}{2}$  vom Zentrum  $O$  angreift; es wäre demnach für den eingelaufenen vollen Stützzapfen das Reibungsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} rfD \quad (125.)$$

und der Verbrauch an Arbeit pro Minute

$$fDr\pi n,$$

folglich per Sekunde

$$\frac{\pi}{60} frnD$$

oder in Pferden

$$\mathfrak{R} = \frac{\pi}{4500} frnD = 0,000698 frnD. \quad (126.)$$

Aus den Formeln 123 bis 126 können wir schliessen, dass unter sonst gleichen Umständen die Reibung an neuen Stützapfen grösser ist als an den eingelaufenen und zwar um  $33\frac{1}{3}\%$ ; denn setzen wir die Gleichungen 123 und 125, bezw. 124 und 126 ins Verhältnis, so folgt

$$M : \mathfrak{R} = N : \mathfrak{R} = 4 : 3.$$

### § 130.

#### Zwei allgemeine Bemerkungen über Zapfenreibung.

Wir haben im vorstehenden die Reibung nur für zwei Zapfenformen bestimmt, nämlich für den zylindrischen Tragzapfen, sowie für den vollen ebenen Spurzapfen, und zwar schon aus dem Grunde, weil die Hilfsmittel der niederen Mathematik nicht ausreichen, um die Reibung auch für andere, hie und da vorkommende Formen (z. B. konische, Kugel- und Antifriktionszapfen) zu ermitteln.

Glücklicher Weise werden aber die beiden zuerst genannten, die eigentlichen Normalzapfen, in der Praxis fast ausschliesslich angewendet und zwar mit vollem Rechte; denn wie von Reiche zeigt, verbrauchen sie unter sonst gleichen Umständen von allen Zapfenformen durch die Reibung am wenigsten mechanische Arbeit, erfordern also auch das geringste Mass von Schmiere und verursachen zugleich die unbedeutendste Materialabnutzung.

Die Formeln 113, 124 und 126 lassen erkennen, dass der durch die Zapfenreibung pro Sekunde verursachte Arbeitsverlust mit dem Reibungskoeffizienten  $f$ , resp.  $g$ , dem Zapfenhalbmesser  $r$ , der Umlaufzahl  $n$  und dem Zapfendruck  $D$  gleichmässig wächst; man sollte daher, so weit es die praktischen Verhältnisse gestatten, diese vier Grössen immer so klein als möglich zu machen suchen. Hat man dies auch bezüglich der beiden letzten meistens weniger in der Hand, so kann man doch den Zapfenradius stets so gering machen, als es die Festigkeit auf die Dauer erfordert und ist auch imstande, den Reibungskoeffizienten durch reichliche stetige Zufuhr von gutem Öl oder durch geeignete Schmiermittel auf ein Minimum herabzudrücken.

§ 131.

Beispiele.

380. Das Gewicht einer Turbine samt Welle und darauf sitzendem Zahrade beträgt  $1800 \text{ kg}$ , die Stärke des Stiftes an der Basis  $2,5 \text{ cm}$  und die Anzahl seiner Umdrehungen in der Minute 100. Wie viel Arbeit pro Sekunde konsumiert die Reibung des Stiftes, wenn derselbe a) noch neu und b) schon eingelaufen ist, den Reibungskoeffizienten zu  $0,1$  angenommen?

Lösungen: a)  $15,7$  und b)  $11,8$  Meterkilogramm.

381. Bei einer anderen  $2500 \text{ kg}$  wiegenden Turbine, welche während einer Minute 32 Umläufe macht, ist der Halbmesser des ebenflächig-kreisförmigen und bereits eingelaufenen Stifzapfens  $3 \text{ cm}$ , der Reibungskoeffizient  $0,075$ , das Aufschlagwasserquantum pro Sekunde  $0,6 \text{ cbm}$  und das Gefälle  $1,6 \text{ m}$ . Man bestimme den durch die Zapfenreibung verursachten Arbeitsverlust im Verhältnis zum absoluten Effekt.

Lösung: Die Reibungsarbeit beträgt  $9,425 \text{ mkg}$ , die Totalarbeit  $960 \text{ mkg}$  in der Sekunde, folglich die erstere nahezu  $1\%$  der letzteren.

382. Der Läufer eines Mahlganges wiegt  $900 \text{ kg}$  und macht 100 Umgänge per Minute, während der stählerne und gut eingelaufene Spurzapfen des  $80 \text{ kg}$  schweren Mühleisens  $48 \text{ mm}$  Durchmesser hat. Wie viel Reibungsarbeit wird sekundlich aufgebraucht, wenn der Koeffizient zu  $0,06$  angenommen werden darf?

Antwort:  $7,24$  Meterkilogramm.

383. Man bestimme für einen noch neuen, stehenden und ebenen Ringzapfen das Reibungsmoment  $M$  und die sekundliche Reibungsarbeit  $E$ , wenn die beiden Radien  $R, r$  der Berührungsflächen in Metern, der Zapfendruck  $D$  in Kilogrammen, die Tourenzahl  $n$  und der Koeffizient  $f$  der gewöhnlichen gleitenden Reibung gegeben sind.

Auflösung: Teilt man den Kreisring durch Radien in zahllose (gleiche) Stücke, so ist  $\bar{x}$  nach dem Resultate der Aufgabe 210 für ein jedes solches Ringstück der Abstand des Schwerpunktes vom Zentrum, das ist zugleich der Hebelsarm des resultierenden Zapfendruckes,

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r},$$

weil für verschwindende Zentriwinkel die Bögen sich nicht mehr von den zugehörigen Sehnen unterscheiden und folglich auch  $\alpha = \sin \alpha$  ist; mithin ergibt sich als Moment der Reibung eines ebenen Ringzapfens

$$M = \frac{2}{3} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} fD.$$

Leicht erhält man jetzt auch den Reibungseffekt

$$E = \frac{\pi}{45} \cdot \frac{R^2 + Rr + r^2}{R + r} fnD \text{ Meterkilogramme.}$$

384. Wie hoch stellt sich aber das Moment  $\mathfrak{M}$  und der sekundliche Arbeitskonsum  $\mathfrak{E}$  heraus, wenn sich der in voriger Aufgabe genannte Ringzapfen bereits vollkommen eingelaufen hat, so dass man als Hebelsarm des resultierenden Zapfendruckes das Mittel aus den beiden Halbmessern  $R$  und  $r$  annehmen darf?

Resultate: Es ergibt sich  $\mathfrak{M} = \frac{R + r}{2} fD$  und

$$\mathfrak{E} = \frac{\pi}{60} f(R + r)nD \text{ Meterkilogramme.}$$

## § 132.

### Die wälzende Reibung.

Auch für die rollende Reibung ist noch keineswegs eine definitiv feststehende Theorie vorhanden; es ist aber für die Praxis vorläufig vollkommen ausreichend, wenn man mit Coulomb annimmt, dass der Widerstand dieser Reibungsart direkt proportional dem Drucke  $Q$  gegen die Unterlage und verkehrt proportional ist dem Halbmesser  $R$  des rollenden Zylinders.

Es lassen sich diese beiden Gesetze sogar theoretisch begründen; denn wenn ein Cylinder mit dem Radius  $CA = CL = R$  (Fig. 63) und der Belastung  $Q$  auf einer horizontalen Ebene  $XY$  an ein Hindernis bei  $A$  (welches auch durch Eindrücken der Walze in die Unterlage entstehen kann) stösst, über welches er durch eine in der Walzenachse  $C$  angreifende horizontale Kraft  $P$  hinweggehoben wer-



den soll, so sind die Hebelsarme von  $P$ , resp.  $Q$  die Strecken  $AB$ , resp.  $AE$  und folglich herrscht zwischen beiden Kräften Gleichgewicht, wenn die Beziehung

$$P \cdot AB = Q \cdot AE$$

oder

$$P = \frac{AE}{AB} \cdot Q$$

besteht. Ist nun das Hindernis bei  $A$  im Verhältnis zum Walzenhalbmesser sehr klein, so ist  $AB$  nahezu gleich  $CL = R$  und mithin

$$P = AE \cdot \frac{Q}{R}.$$

Die Strecke  $AE$ , welche offenbar lediglich von der Beschaffenheit des Weges abhängt und selbstverständlich mit derselben Längeneinheit wie  $R$  gemessen werden muss, heisst der Koeffizient der wälzenden Reibung. Bezeichnen wir letzteren mit  $\psi$ , so ist

$$P = \psi \cdot \frac{Q}{R} \quad (127.)$$

diejenige Kraft, welche im Mittelpunkt der Walze in horizontaler Richtung wirkt und die rollende Reibung auf wagerechter Bahn zu überwinden imstande ist; geht die Bewegung auf schiefer Ebene vor sich und ist  $P$  parallel zur letzteren, so hat an die Stelle von  $Q$  der Normaldruck  $N$  zu treten.

Wird  $R$  in Zentimetern ausgedrückt, so ist nach Versuchen von Coulomb: auf Unterlage von Eichenholz

für Walzen aus Pockholz  $\psi = 0,046$

„ „ „ Ulmenholz  $\psi = 0,08$

und auf eisernen Schienen

für gusseiserne Räder  $\psi = 0,05.$

### § 133.

#### Reibung bei Fuhrwerken.

An jedem Rade eines Fuhrwerks treten die rollende und die Zapfenreibung zugleich auf. Stellt  $Q$  die Belastung nebst dem Eigengewichte des Wagens dar, sind  $R, r$  die Halbmesser des Rades,

bezw. des Zapfens und, wie früher,  $\varphi$  und  $\psi$  die Koeffizienten beider Reibungsarten, so haben wir in Beziehung auf die Drehachse als Moment der Zapfenreibung  $\varphi r Q$  und als Moment der wälzenden Reibung  $\psi \cdot \frac{Q}{R} R = \psi Q$ . Mithin ist das Moment der horizontalen Kraft  $P$

$$PR = \varphi r Q + \psi Q,$$

woraus folgt

$$P = \frac{Q}{R} (\varphi r + \psi). \quad (128.)$$

Weil  $r$  im Zähler und  $R$  im Nenner steht, so braucht auf horizontalem Wege die Horizontalkraft  $P$ , welche das Fahrzeug bewegt, um so geringer zu sein, je kleiner der Zapfenradius und je grösser der Radhalbmesser ist. Auf die Anzahl der Räder kommt es hierbei nicht an, weil der Reibungswiderstand derselbe bleibt, ob nun der Druck  $Q$  auf einer einzigen Achse lastet oder sich auf beliebig viele verteilt.

Fasst man aber beide Reibungsarten zusammen und setzt die Zugkraft  $P$  proportional der Last  $Q$ , also

$$P = \mu Q, \quad (129.)$$

so ist nach Versuchen von Morin der Widerstandskoeffizient  $\mu$

auf sehr guter, trockner und ebener Schotterstrasse  $\frac{1}{50}$  bis  $\frac{1}{83}$ ,

auf harter Schotterstrasse mit leichten Geleisen

und weichem Kot . . . . .  $\frac{1}{27}$  bis  $\frac{1}{45}$ ,

auf schlechter Schotterstrasse mit hartem rauhen

Grunde . . . . .  $\frac{1}{13}$  bis  $\frac{1}{21}$ ,

auf sehr gutem Pflaster . . . . .  $\frac{1}{65}$  bis  $\frac{1}{108}$ ,

auf festem Erddamm . . . . .  $\frac{1}{27}$  bis  $\frac{1}{45}$ ,

auf einer Brückenbahn von Holz . . . . .  $\frac{1}{43}$  bis  $\frac{1}{71}$

und

für Eisenbahnwagen . . . . .  $\frac{1}{250}$  bis  $\frac{1}{370}$ .

Die links stehenden grösseren Zahlen ergaben sich bei Wagen mit 1,25 Meter hohen Rädern, dagegen die rechts stehenden kleineren Werte bei Versuchen mit Wagen, deren Räder 2,1 Meter im Durchmesser massen; für Räder, deren Durchmesser innerhalb dieser Grenzen liegen, könnte man verhältnismässige Zwischenwerte wählen.

§ 134.

Beispiele.

385. Welche Kraft ist nötig, um die rollende Reibung einer 42 000 *kg* wiegenden Lokomotive zu überwinden, wenn die Durchmesser der Räder 1,4 Meter betragen?

Antwort:  $P = 30 \text{ kg}$ .

386. Ein Zylinder aus Ulmenholz von 10 *kg* Gewicht und 50 *cm* Durchmesser liegt auf einer horizontalen Bahn von Eichenholz; man bestimme diejenige durch die Axe des Zylinders gehende Horizontalkraft, welche den letzteren gleichförmig zu bewegen im stande ist.

Resultat: 32 Gramm.

387. Eine Last soll auf horizontaler Bahn *XY* (Fig. 64) vermittels der Walzen *A*, *B* und der Platte *CD* durch die in *C* wirkende Horizontalkraft *P* fortbewegt werden; die Last incl. Platte sei mit *Q*, der Halbmesser der Walzen mit *r*, die Koeffizienten der rollenden Reibung, einerseits zwischen Walzen und Unterlage, andererseits zwischen Walzen und Platte, seien mit  $\psi$ , resp.  $\psi'$  bezeichnet. Es soll *P* mit und ohne Berücksichtigung des Gewichtes *G* beider Rollen ermittelt werden.

Resultate: Man findet  $P = \frac{\psi(Q + G) + \psi'Q}{2r}$  bei Berücksichtigung

und  $P = (\psi + \psi') \frac{Q}{2r}$  bei Vernachlässigung des Eigengewichtes beider Walzen.

388. Ein Körper von 240 *kg* Gewicht soll mittels hölzerner Walzen von 17,2 *cm* Durchmesser und einer zwischengelegten Eichenholzbohle auf gutem ebenen Steinpflaster fortgeschafft werden. Wie

gross muss mindestens die Zugkraft  $P$  sein, wenn die bezüglichen Reibungskoeffizienten 0,16 und 0,74 sind?

Antwort: 12,05 *kg*.

389. Ein Wagen, welcher samt Belastung 3000 *kg* wiegt und dessen Räder 1,675 Meter hoch sind, soll auf guter, trockner und wagerechter Strasse fortgezogen werden. Welcher Zugkraft bedarf es?

Antwort: 48,07 *kg*.

390. Wie viel Zugkraft wäre aber bei 3% Steigung erforderlich?

Antwort: 198,07 *kg*.



# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorwort . . . . .	3
Einleitung . . . . .	5
<b>Erstes Kapitel.</b> Die wichtigsten Bewegungsarten . . . . .	<b>6</b>
§ 1. Einteilung der Bewegungen . . . . .	6
§ 2. Die gleichförmige Bewegung . . . . .	7
§ 3. Beispiele . . . . .	7
§ 4. Die gleichförmige Kreisbewegung . . . . .	9
§ 5. Beispiele . . . . .	10
§ 6. Riemen- und Räderverbindungen . . . . .	12
§ 7. Beispiele . . . . .	13
§ 8. Die mittlere Geschwindigkeit . . . . .	14
§ 9. Beispiele . . . . .	15
§ 10. Die gleichförmig beschleunigte Bewegung . . . . .	16
§ 11. Beispiele . . . . .	18
§ 12. Die gleichförmig verzögerte Bewegung . . . . .	19
§ 13. Beispiele . . . . .	20
§ 14. Der freie Fall und der senkrechte Wurf der Körper . . . . .	22
§ 15. Beispiele . . . . .	23
<b>Zweites Kapitel.</b> Grundgesetze und Grundbegriffe der Mechanik . . . . .	<b>24</b>
§ 16. Das Grundgesetz vom Beharrungsvermögen . . . . .	24
§ 17. Entwicklung des Begriffes „Kraft“ . . . . .	25
§ 18. Einteilung der Kräfte . . . . .	27
§ 19. Bestimmungsstücke einer Kraft . . . . .	28
§ 20. Das Grundgesetz der Wechselwirkung . . . . .	29
§ 21. Mechanische Arbeit . . . . .	29
§ 22. Beispiele . . . . .	31
§ 23. Krafteffekt. Pferdestärke . . . . .	32
§ 24. Beispiele . . . . .	34
§ 25. Mechanische Arbeit durch Maschinen. Wirkungsgrad . . . . .	36
§ 26. Bestimmung der Effekte bei Wasserrädern, Turbinen und Dampfmaschinen . . . . .	38
§ 27. Beispiele . . . . .	40

	Seite
§ 28. Das Grundgesetz der Beschleunigung . . . . .	42
§ 29. Beispiele . . . . .	43
§ 30. Entwicklung des Begriffes „Masse“ . . . . .	45
§ 31. Beispiele . . . . .	46
§ 32. Einführung von Kraft und Masse in die Bewegungsformeln	48
§ 33. Beispiele . . . . .	49
§ 34. Das Prinzip der lebendigen Kräfte . . . . .	52
§ 35. Wirkungsweise der Schwungräder . . . . .	53
§ 36. Gleichförmigkeitsgrad des Schwungrades . . . . .	55
§ 37. Beispiele . . . . .	56
§ 38. Vermischte Aufgaben über Kräfte und deren Effekte . . .	57
§ 39. Das Grundgesetz von der Unabhängigkeit der Bewegungen	59
<b>Drittes Kapitel. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte . . .</b>	<b>61</b>
§ 40. Geometrische Darstellung der Kräfte. Zusammensetzung derselben im allgemeinen . . . . .	61
§ 41. Das Parallelogramm der Kräfte . . . . .	62
§ 42. Beispiele . . . . .	64
§ 43. Das Polygon der Kräfte . . . . .	66
§ 44. Beispiele . . . . .	67
§ 45. Zerlegung der Kräfte . . . . .	68
§ 46. Beispiele . . . . .	69
§ 47. Verlegung des Angriffspunktes. Gleichgewicht zweier Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten . . . . .	70
§ 48. Kräfte in einer Ebene an fest verbundenen Punkten an- greifend . . . . .	71
§ 49. Zwei parallele Kräfte in der Ebene . . . . .	72
§ 50. Beispiele . . . . .	74
<b>Viertes Kapitel. Von den parallelen Kräften im Raume . . . . .</b>	<b>75</b>
§ 51. Statisches Moment einer Kraft . . . . .	75
§ 52. Zwei parallele Kräfte im Raume . . . . .	76
§ 53. Parallele Kräfte an beliebigen Punkten eines festen Systems	77
§ 54. Beispiele . . . . .	78
§ 55. Gleichgewichtsbedingung für parallele Kräfte, welche an einem festen Körper wirken . . . . .	80
§ 56. Bestimmung von Reaktionen . . . . .	81
§ 57. Beispiele . . . . .	83
<b>Fünftes Kapitel. Die Lehre vom Schwerpunkte . . . . .</b>	<b>84</b>
§ 58. Erklärungen . . . . .	84
§ 59. Fundamentalsatz der Schwerpunktslehre . . . . .	85
§ 60. Schwerpunkte homogener geradliniger Gebilde . . . . .	86
§ 61. Fortsetzung . . . . .	88
§ 62. Beispiele . . . . .	89
§ 63. Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens . . . . .	90
§ 64. Beispiele . . . . .	92
§ 65. Schwerpunkte homogener ebener Flächen . . . . .	93

	Seite
§ 66. Beispiele . . . . .	96
§ 67. Schwerpunkte homogener krummer Flächen . . . . .	97
§ 68. Beispiele . . . . .	100
§ 69. Schwerpunkte von Prisma und Zylinder, Pyramide und Kegel . . . . .	101
§ 70. Schwerpunkte vom Pyramiden- und vom Kegelstumpfe . . . . .	103
§ 71. Schwerpunkte vom Kugelausschnitt und Kugelabschnitt . . . . .	104
§ 72. Beispiele . . . . .	106
§ 73. Von den verschiedenen Gleichgewichtszuständen der Körper . . . . .	107
§ 74. Beispiele . . . . .	108
<b>Sechstes Kapitel.</b> Von den einfachen Maschinen . . . . .	109
§ 75. Definitionen . . . . .	109
§ 76. Der Hebel . . . . .	110
§ 77. Gleichgewicht am Hebel . . . . .	110
§ 78. Beispiele . . . . .	112
§ 79. Stabilität der Körper . . . . .	114
§ 80. Beispiele . . . . .	117
§ 81. Beurteilung der Stabilität eines Körpers aus seinem Gewichte und der Lage seines Schwerpunktes . . . . .	119
§ 82. Die Rolle . . . . .	120
§ 83. Beispiele . . . . .	121
§ 84. Das Rad an der Welle . . . . .	123
§ 85. Beispiele . . . . .	123
§ 86. Die schiefe Ebene . . . . .	124
§ 87. Beispiele . . . . .	127
§ 88. Der Keil . . . . .	128
§ 89. Beispiele . . . . .	131
§ 90. Die Schraube . . . . .	132
§ 91. Beispiele . . . . .	133
§ 92. Mechanische Arbeit der Kräfte an einfachen Maschinen . . . . .	134
<b>Siebentes Kapitel.</b> Zusammengesetzte Maschinen . . . . .	137
§ 93. Hebelverbindungen . . . . .	137
§ 94. Räderwerke . . . . .	138
§ 94. Beispiele . . . . .	140
§ 95. Die Differentialwelle . . . . .	141
§ 96. Beispiele . . . . .	143
§ 97. Der gemeine Flaschenzug . . . . .	143
§ 98. Der Potenzflaschenzug . . . . .	144
§ 99. Beispiele . . . . .	145
§ 100. Der Differentialflaschenzug . . . . .	146
§ 101. Beispiele . . . . .	147
§ 102. Die Schraube ohne Ende . . . . .	148
§ 103. Beispiele . . . . .	149
§ 104. Die Differentialschraube . . . . .	149
§ 105. Beispiele . . . . .	151

	Seite
§ 106. Schlussbetrachtung . . . . .	152
<b>Achtes Kapitel. Von der Reibung . . . . .</b>	<b>152</b>
§ 107. Allgemeines . . . . .	152
§ 108. Erfahrungsgesetze nach Morin . . . . .	153
§ 109. Reibungskoeffizient . . . . .	155
§ 110. Beispiele . . . . .	155
§ 111. Koeffizienten der gewöhnlichen gleitenden Reibung nach Morin . . . . .	157
§ 112. Einfluss des spezifischen Druckes und der Geschwindigkeit auf die Reibung . . . . .	158
§ 113. Beispiele . . . . .	161
§ 114. Reibung auf horizontaler Bahn . . . . .	162
§ 115. Reibung auf der schiefen Ebene . . . . .	163
§ 116. Beispiele . . . . .	165
§ 117. Der Reibungswinkel . . . . .	166
§ 118. Beispiele . . . . .	167
§ 119. Reibung an der Schraube . . . . .	168
§ 120. Wirkungsgrad der Schraube . . . . .	170
§ 121. Beispiele . . . . .	172
§ 122. Zapfenreibung . . . . .	173
§ 123. Reibung am zylindrischen Tragzapfen . . . . .	174
§ 124. Zapfenreibung am Wellenrade . . . . .	175
§ 125. Zapfenreibung an der Rolle . . . . .	177
§ 126. Beispiele . . . . .	178
§ 127. Das Bremsdynamometer . . . . .	180
§ 128. Beispiele . . . . .	184
§ 129. Reibung am vollen ebenen Spurzapfen . . . . .	186
§ 130. Zwei allgemeine Bemerkungen über Zapfenreibung . . . . .	188
§ 131. Beispiele . . . . .	189
§ 132. Die wälzende Reibung . . . . .	190
§ 133. Reibung bei Fuhrwerken . . . . .	191
§ 134. Beispiele . . . . .	193



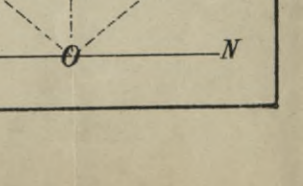
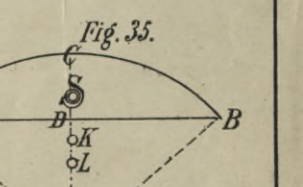
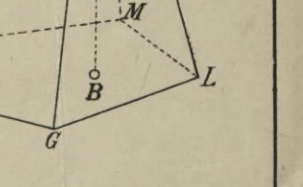
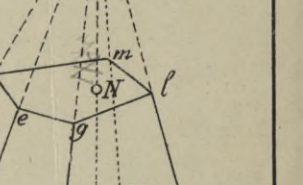
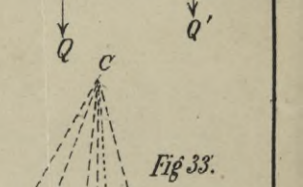
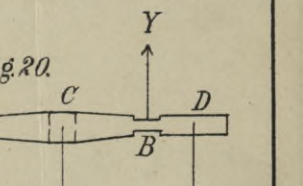
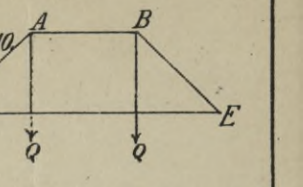
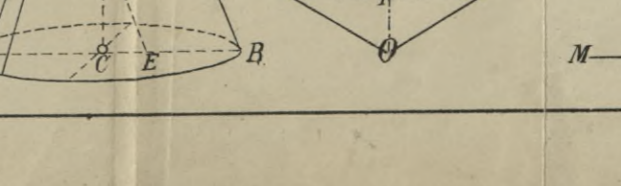
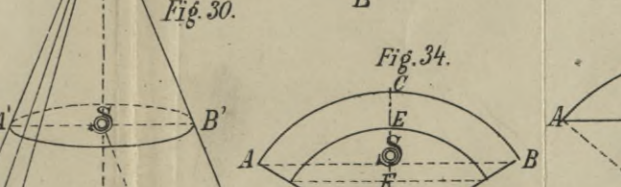
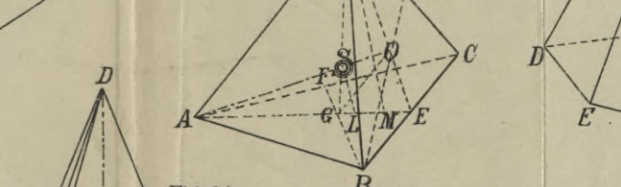
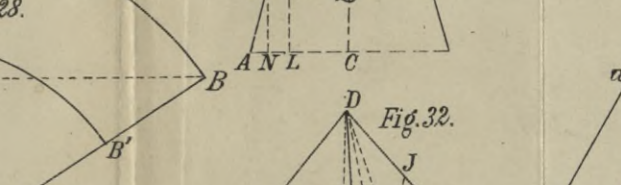
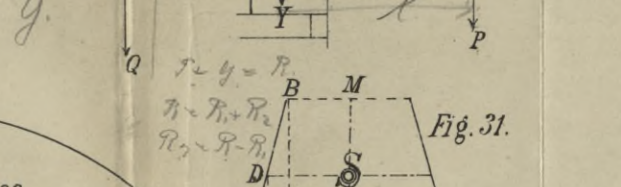
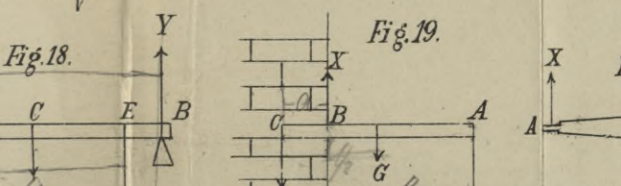
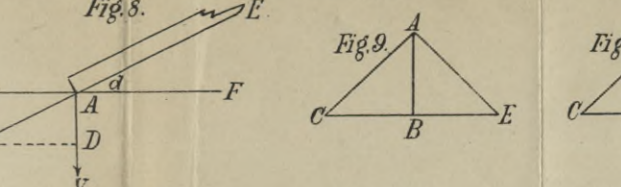
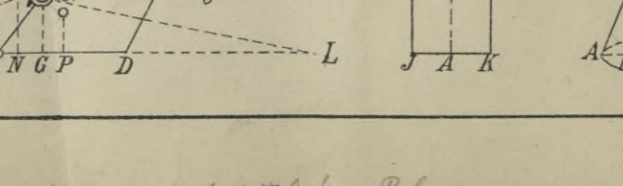
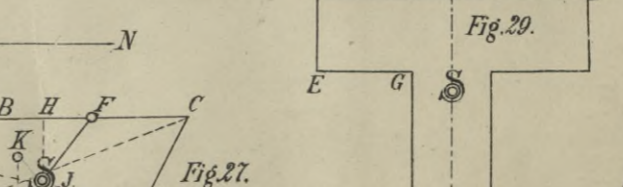
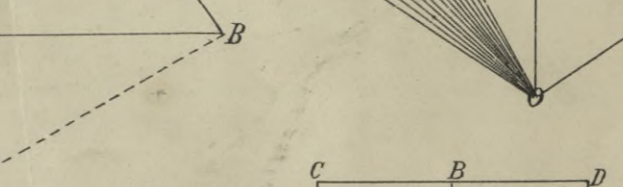
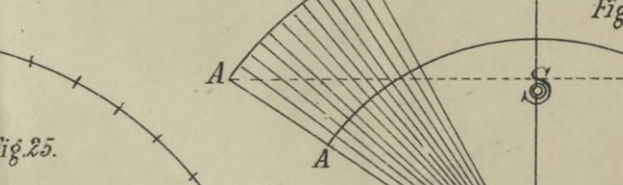
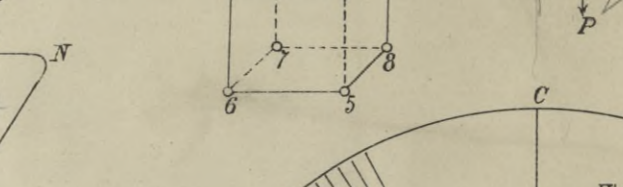
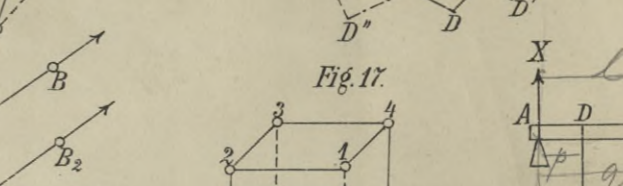
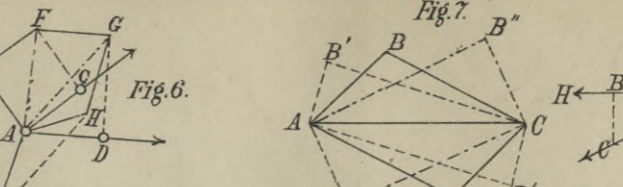
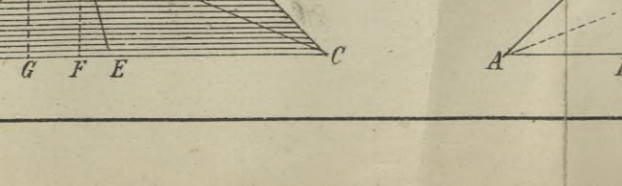
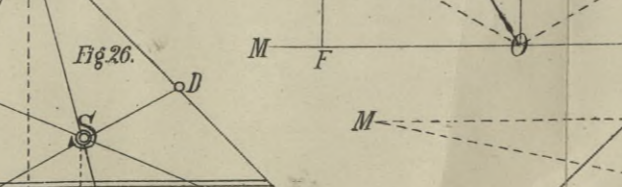
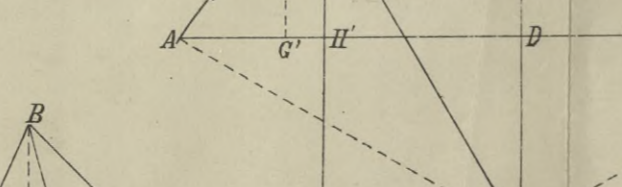
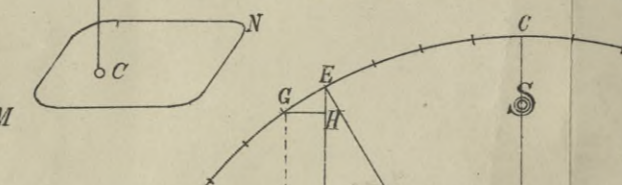
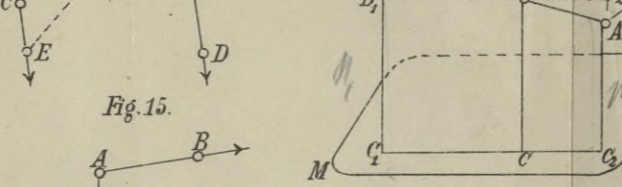
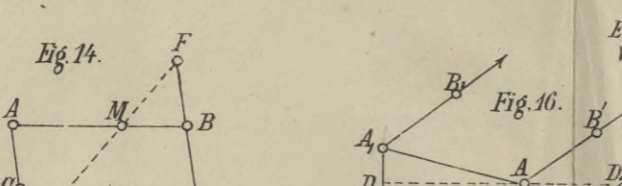
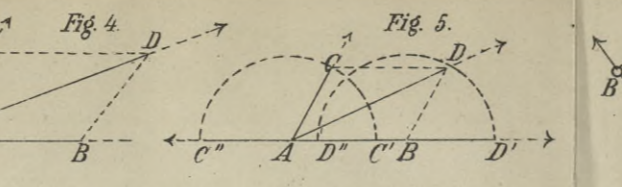
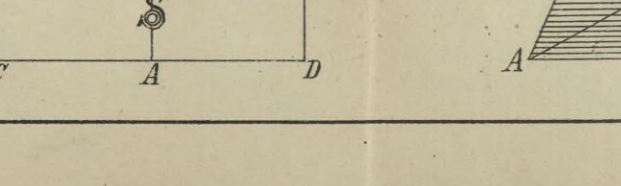
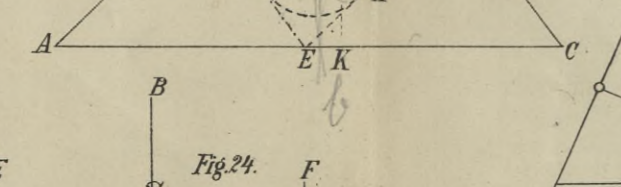
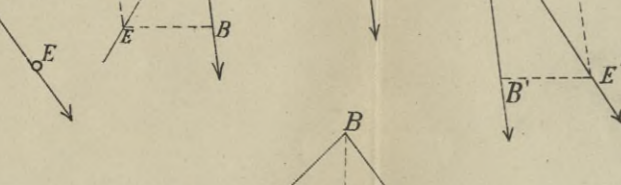
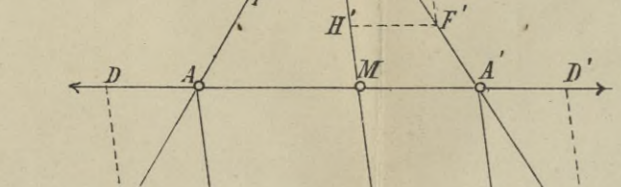
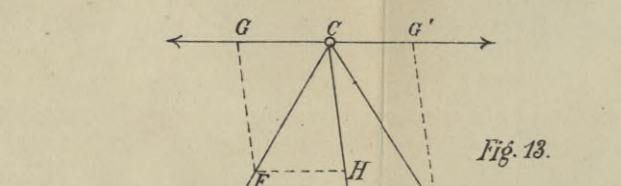
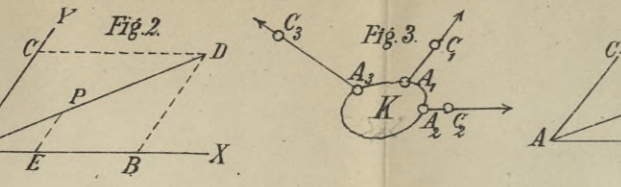
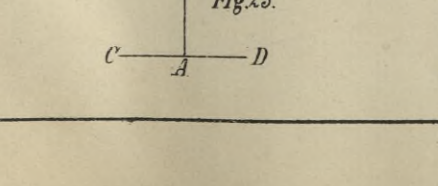
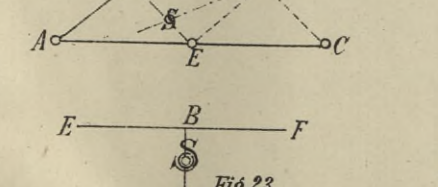
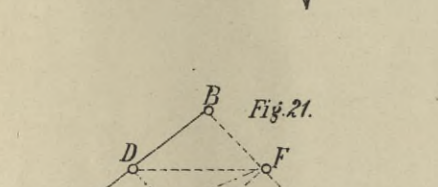
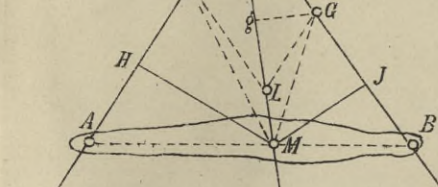
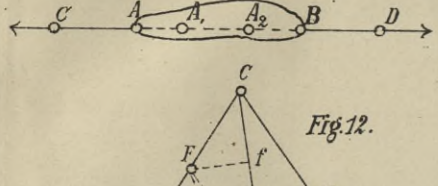
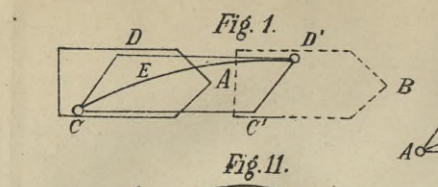
## Bemerkte Druckfehler und Irrtümer,

welche vor dem Gebrauche des Buches zu verbessern sind.

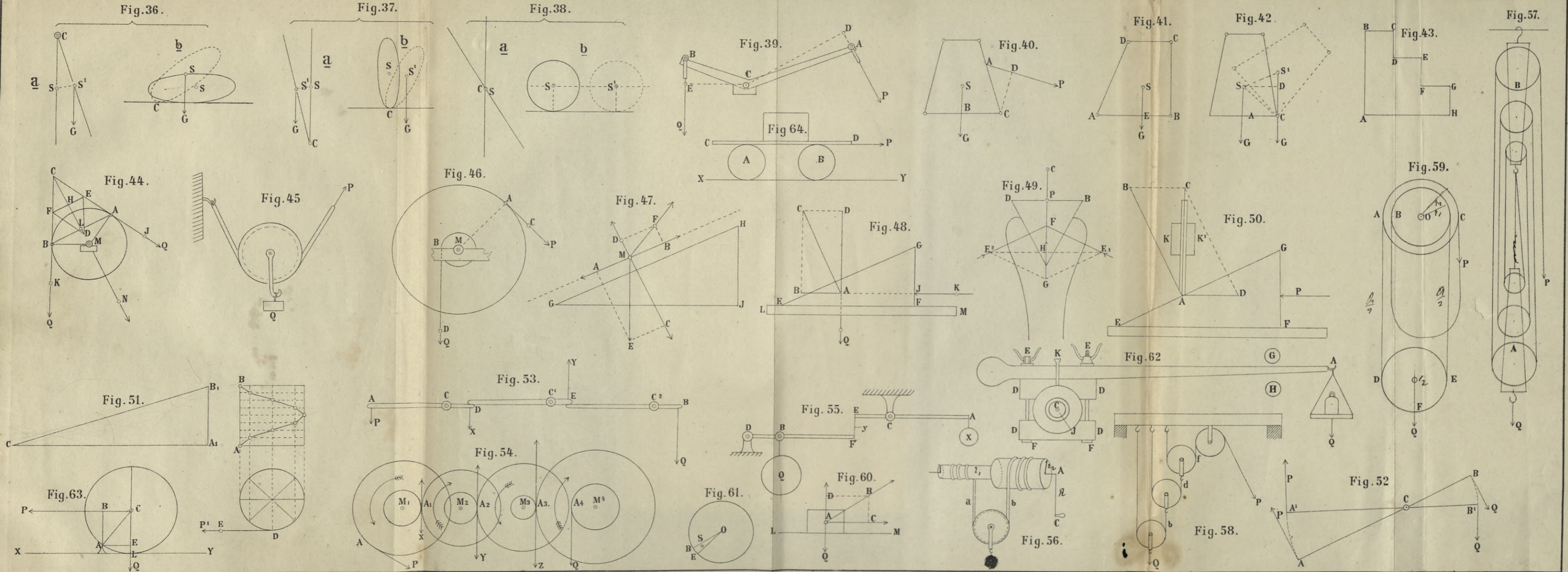
Es ist zu setzen:

Seite	8,	Zeile	10	von oben	8,72	statt	8,46
	„	„	8,	„	2	„	unten 120 statt 112
	„	„	13,	„	13	„	oben $\varkappa$ statt $n$
	„	„	13,	„	15	„	„ $n$ statt $\varkappa$
	„	„	13,	„	22	„	„ 140 statt 120
	„	„	19,	„	5	„	„ 4 Meter Geschwindigkeit
	„	„	41,	„	3	„	„ 52 <i>cm</i> statt 50 <i>cm</i>
	„	„	41,	„	23	„	„ 247,401 statt 147,401; mithin
	„	„	41,	„	6	„	unten 4,4 statt 2,62 und
	„	„	41,	„	2	„	„ 6,6pferdige statt vierpferdige
	„	„	44,	„	11	„	oben 58,86 statt 40,86
	„	„	50,	„	11	„	„ 39,24 statt 39,64
	„	„	59,	„	5	„	„ $f$ statt $F$
	„	„	93,	„	2	„	„ 0,955 statt 0,995
	„	„	93,	„	3	„	„ $\frac{3r}{5\pi} = 0,191 r$ statt $\frac{r}{2\pi} = 0,159 r$
	„	„	100,	„	5	„	„ seine Höhe $h$ statt seinen Radius $r$ ,
	„	„	106,	„	6	„	unten $\frac{7}{40} r$ statt $\frac{7}{20} r$ ,
	„	„	108,	„	3	„	„ 4,863 $r$ statt 3,438 $r$ ,
	„	„	112,	„	3	„	„ $\frac{bQ}{a}$ statt $\frac{aQ}{b}$
	„	„	113,	„	3	„	oben 22 <i>kg</i> statt 15,5 <i>kg</i>

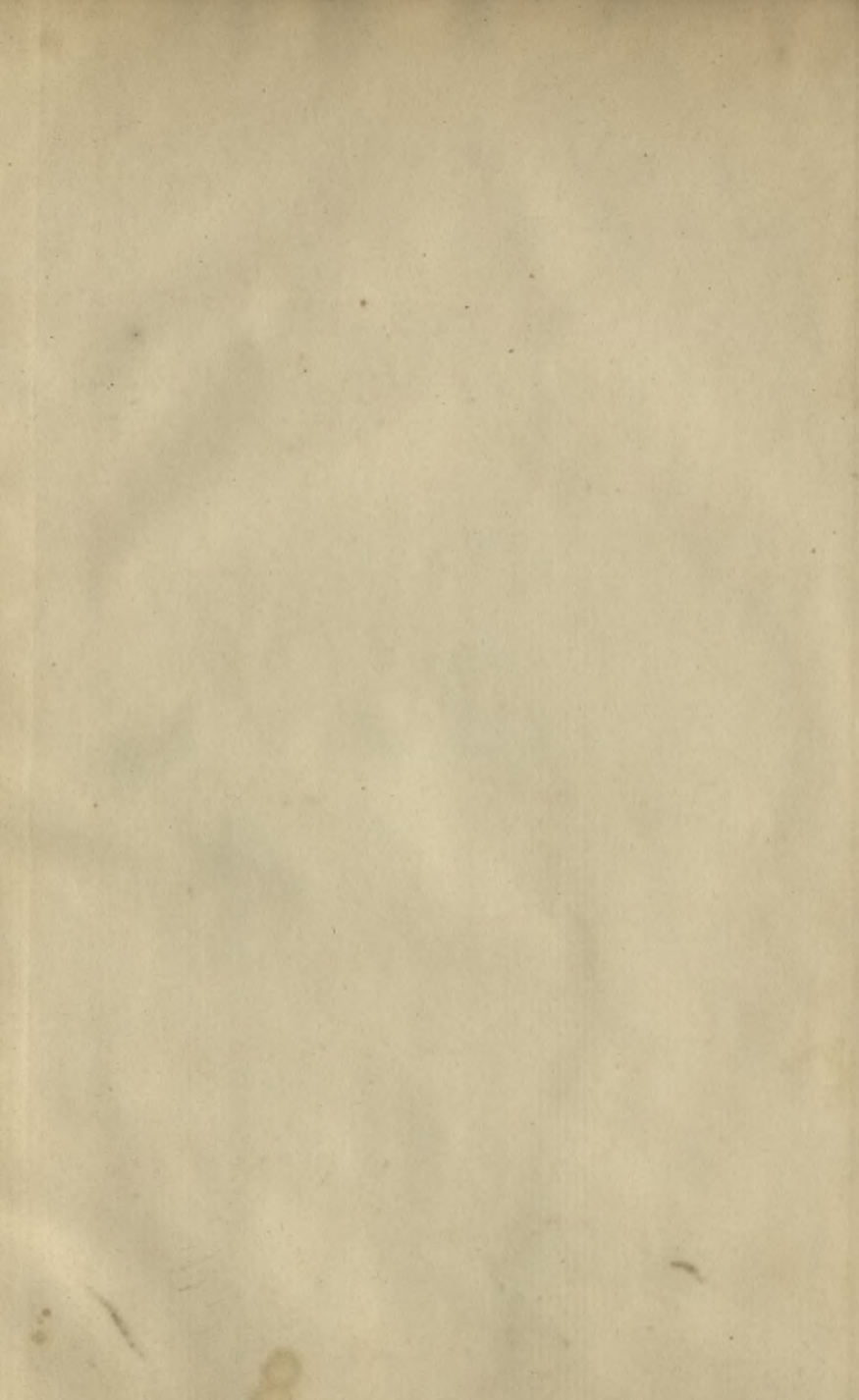


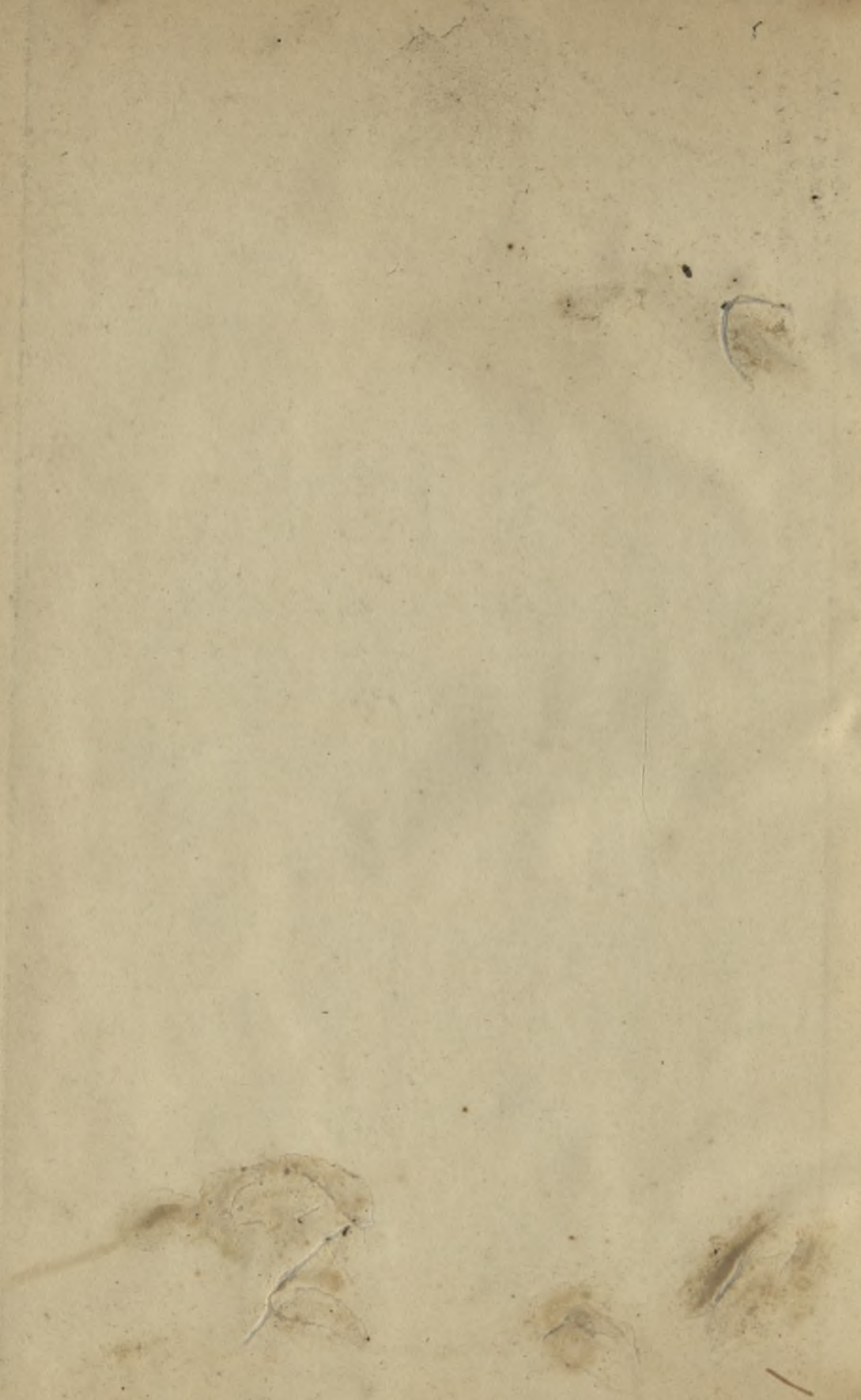
















WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

IV

7726

L. inw.

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



100000299494