züge der Geschichte des Rechnens

von

K. Zepf

Karlsruhe, Friedrich Gutsch

Aus der
Margarita Philosophica
des Gregor Reisch in Freiburg i/B.
1583.

Grundzüge
der
Geschichte des Rechnens

nebst kurzen Erläuterungen verschiedener
Rechnungsarten
der
Kulturvölker alter und neuer Zeit

von

K. ZEPF.

Mit einem Titelbild, vier lithographierten Tafeln
und mehreren Abbildungen.

Karlsruhe
Verlag der Hofbuchhandlung Friedrich Gutsch.

18

Vorwort.

Angeregt durch seine berufliche Tätigkeit machte der Unterzeichnete vor mehreren Jahren auf der hiesigen Universitätsbibliothek nach einer größeren Anzahl fachwissenschaftlicher und kulturgeschichtlicher Werke eingehende Studien über die Geschichte der Mathematik. Im vorigen Sommer unterzog er ihre Ergebnisse unter Berücksichtigung der in der Zwischenzeit erschienenen neuen Auflagen und sonstiger Neuerscheinungen, soweit sie ihm zugänglich waren, einer genauen Durchsicht und entschloß sich, vorliegenden Auszug als „Grundzüge der Geschichte des Rechnens" herauszugeben. Die kleine Arbeit dürfte dem künftigen Lehrer und der künftigen Lehrerin manche Anregung geben und auch verschiedenen, bereits im Amte stehenden Kollegen willkommen sein, denen keine größeren Werke zur Verfügung stehen, oder die weder Zeit noch Lust haben, umfangreiche Spezialwerke zu lesen, die gewöhnlich das gesamte Gebiet der Mathematik umfassen und die elementare Arithmetik nur nebenbei streifen. Die an vielen Stellen eingestreuten sachlichen Erläuterungen sollen denen, die dem Stoffe etwas fernstehen, das Verständnis erleichtern oder in Vergessenheit Geratenes auffrischen.

Freiburg i. Br., Ostern 1906.

K. Zepf.

Vorwort

Angeregt durch meine berufliche Tätigkeit machte der Unterzeichnete vor mehreren Jahren, auf der hiesigen Universitätsbibliothek, gestützt auf eine größere Anzahl fachwissenschaftlicher und kulturgeschichtlicher Werke eingehende Studien über die Geschichte der Mathematik. Im vorigen Sommer unterzog er ihre Ergebnisse unter Berücksichtigung der in der Zwischenzeit erschienenen neuen Auflagen und sonstiger Neuerscheinungen, soweit sie ihm zugänglich waren, einer genauen Durchsicht und entschloß sich, vorliegenden Auszug als „Grundzüge der Geschichte des Rechnens" herauszugeben. Die kleine Arbeit dürfte dem künftigen Lehrer und der künftigen Lehrerin manche Anregung geben und auch vielen Kollegen, bereits im Amte stehenden Lehrern willkommen sein, denen keine größeren Werke zur Verfügung stehen, oder die weder Zeit noch Lust haben, umfangreiche Spezialwerke zu lesen, die gewöhnlich das gesamte Gebiet der Mathematik umfassen und die elementare Arithmetik nur nebenbei streifen. Die an vielen Stellen eingestreuten geschichtlichen Erläuterungen sollen dazu dienen, um dem Stoffe etwas [illegible] des Unterrichts [illegible] oder in Vergessenheit Geratenes [illegible].

[illegible] i. Br., Ostern [illegible]

K. Zepf

Inhaltsverzeichnis.

§ 1.

Einleitung.

Die Sinnesorgane melden uns schon in der frühesten Jugend häufig eine Reihe räumlich nebeneinanderstehender Gebilde, eine Anzahl sich zeitlich nacheinander abspielender Vorgänge. Gelangen diese Meldungen zum Bewußtsein, so erwecken sie in uns Vorstellungen, die die Grundlagen für die Erkenntnisse bilden. Aus solchen Erkenntnissen baut sich dann der Verstand seine ersten Zahlbegriffe auf, und die Sprache gibt ihnen die Namen.

Da alle Völker auf die gleiche Weise mit der Außenwelt verbunden sind, so finden sich die Zahlbegriffe überall, selbst bei den auf der niedersten Kulturstufe stehenden Naturmenschen,[1] und alle Sprachen weisen eine bestimmte Anzahl Zahlwörter auf. Bei den Naturvölkern kommen sie freilich meistens nur in ganz beschränktem Maße vor. So haben z. B. die Bewohner der Südsee, die von Mikronesien, nur für die Zahlen 1 und 2 Benennungen. Die Zahl 1 heißt ke-yap, die Zahl 2 pullet. Die Begriffe 3 und 4 unterscheiden sie noch; 3 heißt ke-yap-pullet, 4 pullet-pullet. Was darüber hinausgeht, wird „viel“ genannt. Ähnlich verhält es sich bei einigen Stämmen Zentral-Afrikas. Diese sind zwar auf einer ziemlich hohen Stufe der Zivilisation angelangt, haben feste Wohnsitze, treiben Ackerbau und Viehzucht und stehen seit langer Zeit unter sich und mit Arabern in Handelsbeziehungen; doch fehlen ihnen die über 4 hinausgehenden Zahlbegriffe, oder sie sind in deren Handhabung so unsicher, daß sie sie praktisch nicht verwerten. So erzählt ein Forscher, daß ein Eingeborener, der sechs Hämmel für je zwei Werteinheiten verkaufte, für jeden Hammel den entsprechenden

[1] „Zählen, insofern damit nur das bewußte Zusammenfassen bestimmter Einzelwesen gemeint ist, bildet keine menschliche Eigentümlichkeit; auch die Ente zählt ihre Jungen.“ Cantor, Geschichte der Mathematik. 3 Bände. 1894—1900.

Geldbetrag einzeln verlangte, der Verkauf also nur ein Tausch gewesen sei.

Verschiedene Stämme auf Polynesien kennen die Zahlen 1 bis 7, haben aber für deren Bezeichnung auch nur zwei Wörter, das eine für 1, das andere für 2. Die anderen fünf Zahlen werden durch die additive Wiederholung dieser beiden Zahlen bezeichnet. So ist z. B. $7 = 2 + 2 + 2 + 1$.

Die Grundidee des dekadischen Zahlensystems findet sich bei den Bantuvölkern Afrikas. Diese besitzen für die Zahlen 1 bis 5 besondere Wörter. Die Zahl 5 wird mit dem Wort für Hand, die Zahl 6 mit Hand + 1, 7 mit Hand + 2 usw., 10 mit Hand-Hand und 20 mit Mensch bezeichnet. Jede andere Zahl heißt „viel". Auch die Hottentotten besitzen dieses System, sie zählen aber weiter bis 100 und nennen diese Zahl die große Zehn.[1])

Wird man ähnliche Zustände in den Anfängen des Kulturlebens der klassischen Völker des Altertums suchen dürfen? In den vorhistorischen Zeiten dürften derartige Verhältnisse vorgelegen haben, aber schon in den Zeiten der vorwissenschaftlichen Mathematik[2]) waren die Zahlbegriffe ziemlich geklärt; es entstanden schon frühe eine Reihe ausgebildeter Zahlensysteme, die auf eine mehr oder minder geistreiche Art bezeichnet und verwertet wurden. Die bekanntesten sind die, die sich an die Anzahl unserer Finger anlehnen. Ein System benützt die Anzahl der Finger einer Hand als Grundzahl, ein anderes die von beiden, und ein drittes die der Glieder der Hände und Füße. Das erste ist das Quinar-, das zweite das Dezimal- und das dritte das Vigesimalsystem.[3]) Es treten aber auch noch andere Zahlen als Grundzahlen auf. So kennt man ein Achter-, ein Elfer-, ein Zwölfer- und ein

---

1) Hellwald, Naturgeschichte des Menschen.

2) „Die Anfänge der wissenschaftlichen Arithmetik (arithmos = Zahl, techne = Kunst) kann man mit Sicherheit nicht viel vor das 6. Jahrhundert v. Chr. setzen. Ihre Begründer waren die Griechen, welche das Material, das sie von den Ägyptern und Babyloniern übernahmen, wissenschaftlich verarbeiteten und weiter ausbauten." Zeuthen, Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter.

3) Quini = je fünf; decimus = der Zehnte; vicesimus = der Zwanzigste; duodecimus = der Zwölfte; sexagesimus = der Sechzigste. Dekadisch nach dem griechischen deka = 10.

Sechzigersystem. Das Zwölfersystem, Duodezimalsystem genannt, bildete die Grundlage der römischen Maße, und das Sechzigersystem, das Sexagesimalsystem, entstand wahrscheinlich in der babylonischen Astronomie, von wo aus es zu den andern Kulturvölkern überging. Das bekannteste und gebräuchlichste aller Zahlensysteme ist freilich dasjenige, in welchem je zehn Einheiten als neue Einheit höherer Ordnung zusammengefaßt werden, d. h. das dezimale, das dekadische System. Die Sprachen besitzen für seine Zahlen eine größere oder kleinere Anzahl Wörter. So haben z. B. die modernen Kultursprachen 13 verschiedene Zahlwörter, 9 für die ersten 9 Zahlen und 4 für 4 Potenzen von 10. Die Sanskritsprache enthält Wörter für die Zahlen 1 bis 9 und für 16 Potenzen von 10; und die Chinesen haben heute noch Namen für 1 bis 9 und für 10^1 bis 10^{18}.

Wie weit die buddhistische Phantasie im Ausbau des dezimalen Systems ging, ist aus einer Stelle zu ersehen, die von einem chinesischen Schriftsteller des Altertums stammt: „Buddha lehrt, daß es drei Numerationssysteme gibt. Das erste, das niedere System, läßt die Einheiten um das 10fache wachsen, das zweite um das 100fache, das dritte, das obere System, schreitet nach der mit sich selbst vervielfachten Grundzahl fort und bildet die Methode der 10 großen Zahlen, welche Buddha allein begreifen kann, und welche eine Idee erwecken von dem was ist, von der unerschöpflichen, unbegrenzten Natur, von den reinen Verdiensten der Weisen, von den Zeiträumen der Existenzen, welche das Schicksal der unveränderlichen Geister durchlaufen. Die erste der Zahlen ist 1 mit 34 Nullen, die zweite 1 mit 68, die letzte 1 mit 340 Nullen. Diese wird noch übertroffen von einer, die man gar nicht angeben kann. Ihr Name bedeutet die Anzahl der Atome, aus denen der göttliche Berg Su Meru besteht.“

Es ist höchst wahrscheinlich, daß die Grundidee des dekadischen Zahlensystems bei den meisten Völkern selbständig entstand. Ist doch der Gebrauch der zehn Finger beim Rechnen, der besonders früher eine große Rolle spielte, ein zu natürliches Hilfsmittel, das allen Völkern zu Gebote stund, und welches heute noch von unseren Naturvölkern nicht nur praktisch verwertet, sondern auch, wie wir oben gesehen haben, zur Benennung der Zahlen benützt wird.

Obwohl das dezimale Zahlensystem bei den meisten Völkern Jahrhunderte lang bekannt und im Gebrauch war, wurde es doch nicht Gemeingut. Seine schriftliche Darstellung war nämlich bis zum 4. Jahrhundert n. Chr. so umständlich und schwerfällig, daß es nur wenige beherrschten, und daß selbst von diesen nur einzelne in alle Geheimnisse der vier Spezies eindringen konnten. Die Kenntnisse und Fertigkeiten des Volkes erstreckten sich auf die Grundidee des Systems, auf das Numerieren, Addieren und Subtrahieren. Noch bei den Römern galten die für Rechenkünstler, die multiplizieren und dividieren konnten.[1]) Das dezimale Zahlensystem ist für das gewöhnliche Volk, ja selbst für die Gelehrten, erst dann genießbar und fruchtbringend geworden, nachdem man gelernt hatte, alle Zahlen mit möglichst wenig Zeichen, den (arabischen) Ziffern, bildlich darzustellen, und diesen Zeichen **Ziffernwerte** und **Stellenwerte** beizulegen. Diese **Doppelwertigkeit** der Zahlzeichen findet sich zuerst in Indien, aber erst am Ende des 4. Jahrhunderts n. Chr. Von hier aus verbreiteten sie sich mit ihrer Doppelwertigkeit über Arabien nach Nordafrika, gelangten in das Abendland und fanden im 12. Jahrhundert in Deutschland Eingang und Verwendung.

Was nun die Art der Zahlendarstellung bei den alten Kulturvölkern anbelangt, so wollen wir uns umsehen bei den Ägyptern, Babyloniern, Chinesen, Griechen, Römern, Israeliten, Indern, Arabern und Christen und das Rechnen selbst, soweit uns Material zur Verfügung steht, etwas näher betrachten.

§ 2.

Die Ägypter.

Das Niltal ist eine Stätte uralter Kultur und Wissenschaft gewesen. Die noch heute gut erhaltenen Schriftdenkmäler weisen teilweise weit über das Jahr 3000 v. Chr. hinaus. Das ägyptische Reich wurde von 30 Dynastien beherrscht. Mena (Menes), der

[1]) Numerus = Zahl, addĕre = hinzufügen (ad = zu, dāre = geben), subtrahĕre = abziehen, multus = viel, multiplicare = vervielfältigen (viele Falten machen), dividĕre = teilen.

Gründer der ersten, hat um das Jahr 4500 v. Chr. gelebt. Aus den drei ersten Dynastien fehlen aber alle Denkmäler und Dokumente. Erst mit der vierten betritt man den eigentlichen historischen Boden. Die Könige der vierten Dynastie, seit 3686 v. Chr. am Ruder,[1]) sind die bekannten Pyramiden-Erbauer Chufu, Chafra und Menakara.[2]) Bis zur 12. Dynastie machten sich keine fremden Einflüsse bemerkbar. Deswegen darf man annehmen, daß die Schrift und die in den Priesterschulen gelehrten Wissenschaften ursprüngliches Eigentum der Ägypter sind.

Um das Jahr 2000 v. Chr. begannen von Osten her Einfälle räuberischer Wüstenstämme, die sich Schus (Räuber) nannten, und denen es innerhalb 200 Jahren gelang, die eingeborene Dynastie zu stürzen. Die 14. und 15. Dynastie gehören nun den Hik-Schus, den Hiksoskönigen an. Unter dem letzten Hiksoskönig wurde von **Ahmes**, einem Nachkommen der alten Könige, dem es später gelang, die Eindringlinge zu vertreiben und sich an deren Stelle zu setzen, ein Rechenbuch geschrieben, das wir weiter unten etwas näher betrachten wollen. Dieses Rechenbuch ist wohl das älteste, das uns erhalten geblieben ist; um so größeres Interesse dürfte es erwecken. Doch müssen wir uns vorerst etwas näher mit der Schrift der Ägypter befassen.

Die Schrift der Ägypter, bekanntlich Hieroglyphenschrift genannt[3]), besteht aus etwa 900 kleinen Abbildungen sinnlich wahrnehmbarer Gegenstände. Menschen in verschiedenen Stellungen, Vierfüßler, Vögel, Gerätschaften, Pflanzen, Teile von Menschen, Tieren und Pflanzen spielen dabei eine Hauptrolle. Diese Zeichen sind bald wörtlich, bald symbolisch zu nehmen, manchmal sind es auch Zeichen einer eigentlichen Buchstabenschrift, bei welchen das Bild den ersten Laut des durch dasselbe dargestellten Wortes bedeutet. So bezeichnet z. B. der Löwe ein „L“, weil er auf ägyptisch Labu heißt, der Adler ein „A“ (Achem), die Mütze ein „K“ (Klaft).

Nun besitzen aber viele Wörter denselben Anfangsbuchstaben, deswegen gibt es auch für einen und denselben Laut oft

---

[1]) Cantor.

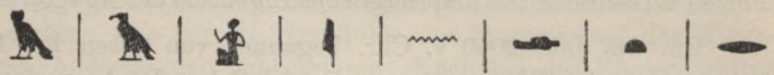
[2]) „Die vierte Dynastie beginnt spätestens 2830 v. Chr.“ Adolf Ermann, Ägypten.

[3]) Hieros = heilig, glyphein = einschneiden (griechisch).

mehrere Bilder. So wird z. B. das K noch durch eine Schale (Kelol) dargestellt.

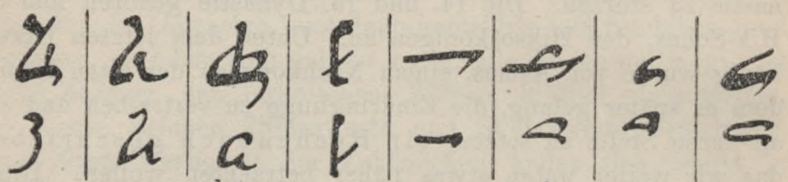
Die Hieroglyphenschrift wurde mit der Zeit vereinfacht und hieß dann hieratische Schrift.[1]) Beide Schriften waren nur den Priestern bekannt. Aus der hieratischen Schrift entwickelte sich später eine neue, die auch dem Volke gelehrt wurde und deswegen demotische Schrift heißt.

Hieroglyphe:

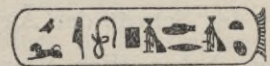


Hieratisch: 1. d. mittl., 2. d. neuen Reiches.

1.
2.



m a determinativ e n d t r

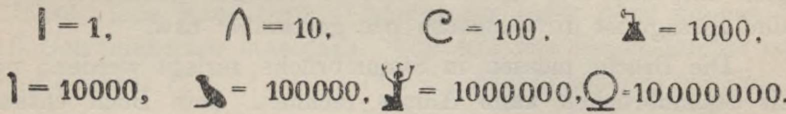
 = Kleopatra.

Merkwürdigerweise überlieferten uns die Griechen, von denen manche in die Geheimnisse der ägyptischen Schriften eingeweiht waren, keinerlei Anhaltspunkte zu deren Entzifferung. Diese war dem Anfang des 19. Jahrhunderts vorbehalten. Den Anstoß hierzu gab die ägyptische Expedition des ersten Napoleon. Die die Expedition begleitenden Gelehrten entdeckten bei Rosette einen Stein, welcher dreierlei Inschriften enthält. Die erste besteht aus Hieroglyphen, die zweite aus demotischen Schriftzeichen, und die dritte sagt auf griechisch, daß die ägyptische Priesterschaft dem König Ptolemäus Epiphanes im neunten Jahre seiner Regierung (197 v. Chr.) gewisse Ehrenbezeugungen bewilligt habe, welche auf diesem Stein mit heiliger, mit landesüblicher und mit griechischer Schrift aufgeschrieben seien. Gelehrte verschiedener Nationen beschäftigten sich jahrzehntelang mit der Entzifferung dieser Zeichen, und heute kann man alle

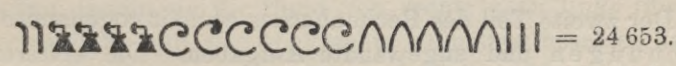
[1]) Hierarchie = Priesterherrschaft, demos = Volk.

Inschriften und Urkunden lesen, welche im letzten Jahrhundert in großer Zahl meistens in gutem Zustande in Pyramidengräbern und sonstigen Totenkammern und in Tempelruinen aufgefunden wurden. Die schriftlichen Überlieferungen geben uns ein getreues Abbild vom Kultur- und Geistesleben der alten Ägypter und machen uns auch bekannt mit dem Stande ihrer arithmetischen Kenntnisse.

Was nun die Darstellung der Zahlen anbelangt, so erfolgt diese auf den ältesten Denkmälern dadurch, daß die Anzahl der Einheiten durch die Anzahl der betreffenden Bilder gegeben wurde. So ist z. B. die Zahl „9 Götter“ durch neun Abbildungen der Gottheit veranschaulicht. Manchmal sind die Zahlwörter ausgeschrieben, meistens aber werden sie durch besondere Zeichen, durch Ziffern, gegeben. Die Schrift besitzt Ziffern für die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10 000, 100 000, 1 000 000 und 10 000 000.



Die Ziffer für 1 ist eine Meßstange, für 10 ein doppelter Spitzbogen, für 100 ein Palmblatt, für 1000 eine Lotospflanze, für 10 000 ein Finger, für 100 000 eine Kaulquappe, für 1 000 000 ein sich verwundernder Mann, für 10 000 000 ein unterstrichener Kreis[1]) Es sind also für die Potenzen von 10 besondere Ziffern vorhanden. Beim Anschreiben der Zahlen wird die einzelne Ziffer so oft wiederholt, als Einheiten der betreffenden Potenz anzugeben sind. Die Zahl 24 653 wurde mithin folgendermaßen geschrieben:



Auf den ersten Blick hat es den Anschein, als ob die Ägypter die Zahlen im Prinzip auf die gleiche Weise dargestellt hätten wie wir. Dem ist aber nicht so, denn sie schrieben, wie alle orientalischen Völker, von rechts nach links und nicht von links nach rechts. Besondere Aufmerksamkeit schenkten die ägyptischen Rechenbücher den Brüchen, sie kennen aber, abgesehen vom Bruche $^2/_3$,

---

[1]) „In dem Zeichen für 100 wollten einige einen Priesterstab, in dem für 1000 eine Lampe erkennen.“ Cantor.

nur Stammbrüche; diese werden angeschrieben, indem man die Zahl des Nenners hinschreibt und ein Pünktchen darüber setzt.

Über die Rechenkunst der Ägypter sind wir gut unterrichtet. Einesteils verdanken wir den Römern und Griechen manche wertvolle Mitteilungen, andernteils machen uns ägyptische Rechenbücher, die auf uns gekommen sind, direkt mit ihr vertraut. So kennt man das Rechenbuch des Königs Ahmes, von dem wir schon vorhin sprachen, zwei Papyrushandschriften aus der Pyramide Illahun, die 1889/90 aufgefunden wurden, die Ackerlisten des Tempels von Edfu und noch manche andere.

Das Rechenbuch Ahmes war nicht für Anfänger bestimmt; ohne Lehrer kann es kaum gedacht werden, da es von Anfang an vorwiegend mit Brüchen rechnet und eine Reihe unklarer Vorschriften enthält. Ahmes stellt Aufgaben verschiedener Art und löst sie, indem er hinzufügt, „macht es also", oder „gesagt ist dir", „mache wie geschieht" usw.

Die Brüche müssen in Stammbrüche zerlegt werden; nur mit Stammbrüchen kann Ahmes rechnen. Sein Buch enthält eine Tabelle solcher Zerlegungen, z. B. $^2/_5 = {}^1/_3 + {}^1/_{15}$ (das Zeichen + kennt Ahmes nicht; er schreibt: $^2/_5$ — $^1/_3$ $^1/_{15}$) $^2/_7 = {}^1/_4 + {}^1/_{28}$; $^2/_{42} = {}^1/_{30} + {}^1/_{141} + {}^1/_{470}$; $^2/_{99} = {}^1/_{66} + {}^1/_{198}$. Das Zerlegen der Brüche setzt eine Gewandtheit im Zerlegen der Zahlen voraus und war den zahlentheoretischen Kenntnissen sehr förderlich.

Geben wir einige Aufgaben aus Ahmes!

Nr. 23. Ergänze $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_{30}$, $^1/_{45}$ additiv zu 9.

Nr. 13. Ergänze $^1/_{161}$, $^1/_{112}$ multiplikativ zu 1.

Nr. 32. Mache $1\,^1/_3$ und $^1/_4$ zu 2.

Der zweite Teil des Rechenbuches enthält sogenannte Hau-Rechnungen und angewandte Aufgaben. Die ersteren entsprechen unseren Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten. So lauten z. B. Nr. 31: Haufen, sein $^2/_3$, sein $^1/_2$, sein $^1/_7$, sein 1 Ganzes, es beträgt 33. Nr. 63: Vorschrift, zu verteilen 700 Brote unter 4 Personen, $^2/_3$ für einen, $^1/_2$ für den Zweiten, $^1/_3$ für den Dritten, $^1/_4$ für den Vierten.

Die angewandten Aufgaben lehren, wie man Eßwaren als Besoldung zu verteilen hat, wie beim Eintauschen von Brot gegen Bier das Wertverhältnis zu finden ist, wie man die Größe eines Ackers berechnet, den Rauminhalt einer Scheune bestimmt usw. Einige Aufgaben setzen die Kenntnisse der Reihen voraus. So sagt z. B. Nr. 40: „Brote 100 an Personen 5; $^1/_7$ von 3 ersten das von Personen 2 letzten. Was ist der Unterschied?" Ahmes will eine arithmetische Reihe von 5 Gliedern gebildet haben von der Form a, a—d, a—2 d, a—3 d, a—4 d, und es soll nun gleich sein $\frac{a + (a-d) + (a-2\,d)}{7} = (a-3\,d) + (a-4\,d)$.

Er sagt nun: „Mache wie geschieht, der Unterschied $5\,^1/_2$,[1]) die Reihe ist: 1, $6\,^1/_2$, 12, $17\,^1/_2$, 23". Die Summe dieser Zahlen beträgt aber nur 60, man muß deswegen jedes Glied $1\,^2/_3$mal größer machen. Die Reihe heißt nun $1\,^2/_3$ ($10\,^2/_3$, $^1/_6$), 20, $29\,^1/_6$, $38\,^1/_3$. Ahmes kennt also schon die Regel vom falschen Ansatz, die Regula falsi, der wir im Verlaufe unserer Arbeit noch öfters begegnen werden. Nr. 70 ist eine geometrische Reihe. Sie lautet: 7 Personen besitzen je 7 Katzen, jede Katze vertilgt 7 Mäuse, jede Maus frißt 7 Ähren, aus jeder Ähre können 7 Maß Getreidekörner entstehen. Von wie viel Gegenständen ist hier die Rede? ($7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$. Siehe Leonardo von Pisa.)

Die Ägypter kannten und pflegten das Fingerrechnen, das instrumentale Rechnen und das schriftliche Rechnen.

Die Finger der linken Hand bedeuteten, vom kleinen Finger ausgehend, die Zahlen 1—5, der ausgestreckte Daumen der rechten Hand 6, Daumen und Zeigefinger 7 usw.

Über das instrumentale Rechnen, das Rechnen auf dem Rechenbrett, sagt Herodot, der Ägypten aus eigener Anschauung kennt: „Die Ägypter rechnen mit Steinen und schreiben Schriftzüge, indem sie die Hand von rechts nach links führen". Das Rechenbrett muß also senkrechte Kolumnen besessen haben, denn beim Verschieben von rechts nach links erfahren die Steinchen eine Verzehnfachung ihres Wertes, was ein Rechenbrett, auf dem man mit dezimalen Zahlen rechnet, verlangt. Merkwürdigerweise ist auf den fast unzähligen Wandgemälden bis jetzt noch nirgends ein Rechenbrett gefunden worden.

Das schriftliche Rechnen war sehr schwerfällig. So wird z. B. die Aufgabe 8 · 8 in manchen Handschriften dadurch ge-

[1]) Wie er den Unterschied findet, ist nicht zu ersehen.

löst, daß das Multiplizieren nur als Verdoppeln auftritt $1 \cdot 8 = 8$, $2 \cdot 8 = 16$, $4 \cdot 8 = 32$, $8 \cdot 8 = 64$. Beim Dividieren wird z. B. nicht gefragt, wie viel mal ist 7 in 77 enthalten, sondern mit welcher Zahl muß 7 multipliziert werden, damit 77 herauskommt. Das Verfahren lautet: $\mathbf{1} \cdot 7 = 7$, $\mathbf{2} \cdot 7 = 14$, $4 \cdot 7 = 28$, $\mathbf{8} \cdot 7 = 56$, und da $77 = 56 + 14 + 7$ ist, so ist der 7. Teil von $77 = 8 + 2 + 1 = 11$. Der Rechner unterstreicht die Faktoren 8, 2 und 1.[1])

In der Geometrie besaßen die Ägypter mangelhafte Kenntnisse. Da durch die Nilüberschwemmungen jedes Jahr neue Feldausmessungen und Flächenberechnungen nötig wurden, hätte man erwarten dürfen, daß sie diese beherrschten. Dem war aber nicht so. Die Flächeninhalte der Parallelogramme und Dreiecke finden sie, indem sie, ohne Rücksicht auf die Größe des einschließenden Winkels, einfach zwei benachbarte Seiten miteinander multiplizieren. — Beim Dreieck wird das Produkt halbiert. — Auch für das Paralleltrapez kennen sie den Begriff „Höhe“ nicht. Die Kreisfläche setzen sie gleich einem Quadrat, dessen Seite $^8/_9$ vom Kreisdurchmesser beträgt. $J = (\text{Durchmesser} - {}^1/_9\ \text{Durchmesser})^2 = 3{,}1605\ r^2$.

Die mathematischen Kenntnisse der Ägypter scheinen Jahrhunderte lang auf der gleichen Stufe stehen geblieben zu sein. Die 1500 Jahre nach Ahmes entstandenen Ackerlisten des Tempels von Edfu enthalten noch die gleichen Aufgaben und Probleme wie das Rechenbuch Ahmes und zeigen keinerlei Fortschritte.

„Als theoretische Wissenschaft hatte die Mathematik der Ägypter wenig zu bedeuten; den praktischen Bedürfnissen des täglichen Lebens konnte sie wohl genügen.“[1])

§ 3.

Die Babylonier.

Das zweite Kulturvolk des Altertums, bei dem sich schon in den ältesten Zeiten ein reiches und vielseitiges Geistesleben zeigte, und von welchem uns die Schriftsprache in sehr gutem Zustande erhalten geblieben ist, war jenes, welches die Länder des Euphrat und Tigris bewohnte. Nur wenige Meilen von

[1]) Ermann.

einander entfernt standen hier die Weltstädte Babylon, Ninive, Seleucia, Ktesiphon und Bagdad, deren Überreste noch heute Zeugnis geben von alter und ältester Kultur. Die Existenzbedingungen müssen hier für diese so stark bevölkerten Gegenden sehr günstige gewesen sein. Es war „das Land, das von Milch und Honig floß“. Babylon war schon in den frühesten Zeiten ein Hauptmarktplatz der damaligen Welt und spielte in handelspolitischer Hinsicht die Rolle, die Italien im Mittelalter und England im vorigen Jahrhundert ausübten. Aus dem Osten kamen Edelmetalle und Edelsteine (Onyxe, Sarder, Lapis-Lazuli, Rubine, Saphire, Smaragde und Diamanten), die zu Schmucksachen aller Art, zu Siegelringen usw. verarbeitet wurden; ferner Baumwolle, Wolle und Seide, Cochenille und andere Farbstoffe. Der ferne Süden lieferte Perlen, Elfenbein, Gewürze, feine Holzarten zum Ausschnitzen kunstvoller Stäbe; der Norden brachte Getreide, Tierhäute usw. Die Rohmaterialien wurden hier verarbeitet und die Fabrikate, wohin auch wohlriechende Wasser und Parfümerien aller Art zu rechnen sind, nach allen Richtungen wieder in die Welt hinausgeliefert. Besonders waren es die Schiffe der Phönizier, welche diese Produkte als „Sidonische Waren“ nach Westen brachten. Daß unter diesen Verhältnissen das praktische Rechnen sehr gepflegt wurde und gepflegt werden mußte, ist selbstverständlich und durch neue Ausgrabungen direkt bestätigt. Ein amerikanischer Forscher fand vor einigen Jahren eine große Anzahl Urkunden, welche Schuldscheine, Schuldverschreibungen, Mitgiftverträge, Verträge über Kauf und Tausch von Häusern und Sklaven enthalten und auf kleine Ziegelsteine von der Größe unserer Kabinettphotographien niedergeschrieben sind. Sie sind von den Bankfirmen Egibi und Sohn (7. Jahrhundert v. Chr.) und Maruschu und Sohn (5. Jahrhundert v. Chr.) ausgestellt, mit dem Firmensiegel und dem des Partners versehen und lehren, daß sich die genannten Bankhäuser mit fast allen Zweigen des heutigen Bankwesens befaßten. Sie hatten Verbindungen mit allen Handelsplätzen der damaligen Welt, wechselten Geld, liehen solches aus, aber nur zu 20 %, lombardierten, erhoben Gelder auf fremde Rechnung, tilgten Verbindlichkeiten anderer usw.

Auch in wissenschaftlicher Hinsicht waren die Chaldäer weit vorgeschritten, besonders in der Astronomie. Schon im

Jahre 1700 v. Chr. wurde für den König Sargon ein astrologisches Werk verfaßt,[1]) in welchem das Eintreffen von Finsternissen für bestimmte Tage gemeldet wird mit eingehenden Erörterungen über die mutmaßlichen Folgen für diese Tage. Für solche Voraussetzungen war aber ein großes statistisches Material notwendig, das nur im Verlaufe von Jahrtausenden hatte gewonnen werden können.

Babylonischen Ursprungs ist die siebentägige Woche, das 360tägige Jahr,[2]) die Einteilung der kreisförmigen Sonnenbahn in 360 Grad, die Einteilung des Kreises, des vollen Winkels in 360 Grad, des Grades in 60 Minuten à 60 Sekunden. Babylonisch ist ferner die ursprüngliche Einteilung des Tages in 60 Stunden, aus denen später 12, respektive $2 \cdot 12 = 24$ Stunden wurden (der sechste Teil von 360 (= 60) wurde wahrscheinlich deswegen als neue Einheit gewählt, weil sich der Radius des Kreises sechsmal auf der Peripherie auftragen läßt). Sonnenuhr, Sanduhr und Wasseruhr seien babylonische Erfindungen.

Besonderes Interesse erweckt das babylonische Maßsystem. In diesem tritt uns das erste Naturmaß entgegen. Seine Einheiten wurden folgendermaßen gewonnen. In einem Gefäß wurde Wasser auf konstanter Niveauhöhe gehalten, indem man es von oben her einerseits zuführte, andererseits ableitete. Im Boden des Gefäßes befand sich eine Röhre von bestimmtem Querschnitt, durch welche Wasser unter gleichem Drucke abfloß. Man sammelte nun das der Röhre in der Zeit von einer Sonnenkulmination bis zur nächsten entströmende Wasser, teilte es in 24 gleiche Teile, füllte einen Würfel mit einem dieser Teile und hatte in seiner Kante die Einheit des Längenmaßes, in der Basis die Einheit des Flächenmaßes, in dem Rauminhalt die Einheit des Hohlmaßes und im Gewichte des Wassers die Einheit des Gewichtes. Die letztere hieß Talent. Das Talent bildete auch die Grundlage der Wertmaße, indem festgelegt wurde, wie viel Werteinheiten aus einem Talent Silber, resp. einem Talent Gold geprägt werden sollten. Die Maßeinheiten erhielten dann duodezimale Gliederung ($12 = 1/_5$ von 60; 5 Finger?).

---

[1]) Der Engländer Sayce entzifferte und übersetzte dieses Werk.

[2]) Die Chaldäer glaubten anfänglich, die Sonne lege in 360 Tagen einen vollen Kreis zurück. Die siebentägige Woche hängt mit den Mondphasen zusammen.

In Babylon tritt uns also ein Zahlensystem entgegen, in welchem je 60 Einheiten einer niederen Ordnung eine Einheit einer höheren bilden: das Sexagesimalsystem. Das Sexagesimalsystem wurde vorwiegend in Bezug auf Kreis-, Winkel- und Zeiteinteilung verwendet, aber auch noch neben dem Dezimalsystem im bürgerlichen Leben benützt, obwohl hier das letztere, als das ältere, vorherrschte. Dies lehrt uns die im Jahre 1854 bei Senkereh am Euphrat aufgefundene Tafel. Diese Tafel enthält die ersten 60 Quadratzahlen. Es wird darauf gesagt: $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $49 = 7^2$, $1 \cdot 4 = 8^2$, $1 \cdot 21 = 9^2$, $1 \cdot 40 = 10^2$, $2 \cdot 1 = 11^2$, $2 \cdot 24 = 12^2$, $2 \cdot 49 = 13^2$ usw. In dem Ausdruck $1 \cdot 4 = 8^2$ kann 1 nur 60 bedeuten, $1 \cdot 4$ muß also $60 + 4 = 64$ heißen. $2 \cdot 49 = 13^2 = 169 = 2 \cdot 60 + 49$ usw.

Die Zahl 60 ist also in der Tat Grundzahl eines Zahlensystems, das nicht bloß in Bezug auf Grad und Stunden Verwendung fand. Dafür spricht noch der Umstand, daß die Babylonier die Nennwörter Soß, Ner und Sar hatten, die mit dem 60er System im engsten Zusammenhang stunden, da Soß = 60, Ner = 600 und Sar = 3600 bedeutet.

Wie die Babylonier mit diesem Sexagesimalsystem rechneten, darüber steht uns bis jetzt leider noch kein direktes Material zur Verfügung, aber wir wissen, wie es die Griechen, und nach ihnen die übrigen Kulturvölker, benützten.

Ptolemäus erklärt das Sexagesimalsystem in seinem Lehrbuch der Astronomie, in dem Almagest, und nennt es eine babylonische Erfindung, und verschiedene Kommentare zu diesem Werke lehren seine Anwendungen. In der lateinischen Übersetzung des Almagest werden die 60stel partes minutae primae, die 3600stel partes minutae secundae, die 216000stel partes minutae tertiae[1] genannt, woraus andere Sprachen ihre „Minuten“ und „Sekunden“ hernahmen.

Die Zahl 24, $^{17}/_{60}$, $^{39}/_{3600}$, $^{43}/_{216000}$ wurde schon von den Griechen $24^0\ 17'\ 39''\ 43'''$ geschrieben. Dabei hatten sie nicht bloß Winkel oder Zeitteile im Auge, sondern auch unbenannte, absolute Zahlen. Die Sexagesimalbrüche spielten bei ihnen die Rolle, die heute unsere Dezimalbrüche besitzen. Theon, Archimedes u. a. m. multiplizieren z. B. $5^0\ 8'\ 6''$ mit $9^0\ 5'\ 13''$ nach der Formel $(a + b + c)\ (f + g + h)$ und erhalten $45^0\ 25'\ 65''\ 72'\ 40''\ 104'''\ 54''\ 30'''\ 78'''' = 45^0\ 97'\ 159''\ 134'''\ 78'''' = 46^0\ 39'\ 41''\ 15'''\ 18''''$ = annähernd $46^0\ 40' = 46\ ^{40}/_{60} = 46\ ^2/_3$. Wenn die Zeichen ^{0}, $'$, $''$, $'''$ Benennungen anstatt Stellenanzeiger (Indexe) wären, so

1) minutus, a, um = klein; pars (tes) = der Teil.

hätte die Multiplikation keinen Sinn. Man kann weder 3 Mark mit 5 Mark noch 3 Grad mit 5 Grad multiplizieren.

Die Sexagesimalbrüche mußten auch lange Zeit beim Wurzelausziehen und zum Aufsuchen von Näherungswerten Dienste leisten. Wir werden das Verfahren im 5. Kapitel näher betrachten.

Die Babylonier stellten die Zahlen mit den Zeichen ihrer Schriftsprache dar. Diese heißt bekanntlich Keilschrift, weil ihre Buchstaben aus Keilen und Winkelhaken bestehen.

Wie wir schon bei den Ägyptern sahen, übermittelten uns weder die Griechen noch die Römer das Verständnis für die Hieroglyphen. Ähnlich verhält sich die Sache bei der Keilschrift. Auch hier mußte erst die neueste Zeit zeigen, was ihr Scharfsinn zu leisten vermochte.

Im Anfange des vorigen Jahrhunderts versuchte man, die sich auf verschiedenen Grab- und Baudenkmälern Babylons vorfindenden Inschriften zu entziffern. Im Jahre 1800 entdeckte man den Wortteiler, ein Zeichen, das in jeder Zeile in bestimmten Abständen immer wieder auftritt, und im Jahre 1802 wurde wahrgenommen, daß die Chaldäer von rechts nach links schrieben,[1]) und daß eine Buchstabenschrift vorliegt und keine Bilderschrift.[2]) Die Forscher nahmen dann bald wahr, daß ein bestimmtes Wort auf vielen großen Grabdenkmälern öfters vorkommt und schlossen daraus, daß es „König" heiße. War dem so, so kannte man den Sinn des Wortes, den Wortlaut aber noch nicht. Auf ähnliche Weise suchte und fand man durch Erraten manche Wörter. Um nun den Wortlaut zu finden, verglich man bekannte Wörter, z. B. Darius und Xerxes. Das dritte Zeichen in beiden ist der Buchstabe „r" für den Laut „r". Nun hatte man das Keilschrift-

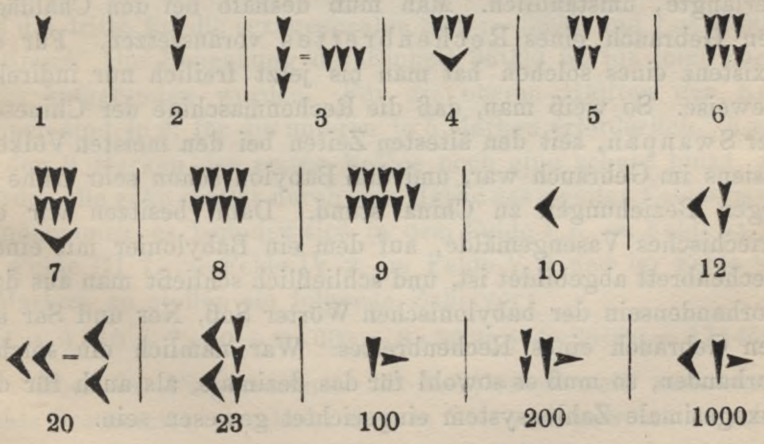
[1]) Die Zeilen sind rechts geradlinig abgegrenzt.

[2]) Ein und dasselbe Zeichen tritt innerhalb eines Wortes wiederholt auf, was bei einer Schrift, in der ein Bild einem ganzen Begriff entspricht, nicht möglich ist.

zeichen für den Laut r. So gelang es allmählich, für eine größere Anzahl Zeichen die entsprechenden Laute zu finden. Die übrigen wurden dann auf indirektem Wege gesucht.

Das Entziffern der Keilschrift war also eine ungemein mühesame Arbeit, und es gehörte eine bewundernswerte Geduld dazu, es zum Abschluß zu bringen. Es waren die Gelehrten Grotefond, Burnouf, Lassen, Benfey, Oppert, Rawlinson, Hinks, Spiegel, Schrader, Menant u. a., welchen es innerhalb mehrerer Jahrzehnte gelang, diese Geheimschrift ihres Schleiers zu berauben, und seit Ende der 70er Jahre des vorigen Jahrhunderts kann man alle Keilschrifturkunden lesen. Es wurden nun teils auf Kosten europäischer Regierungen, teils auf Kosten von Gesellschaften oder reicher Privatleute auf den Ruinen Babylons, Ninives usw. umfangreiche Ausgrabungen veranstaltet, die ein reiches Ergebnis lieferten. Man fand ganze Bibliotheken — in Tonplättchen eingeschriebene Aufzeichnungen verschiedenen Inhaltes —, die uns einen klaren Einblick in die Leiden und Freuden der alten Chaldäer und in ihre Geistestätigkeiten gestatten.

Die Zahlzeichen der Babylonier sind durch verschiedene Kombinationen ihrer Keile und Haken gebildet. Bei den ersten 9 Zahlen richtet sich die Menge der Zeichen nach der Anzahl der Einheiten; das Zeichen für 10 besteht aus zwei zu einem Winkelhaken vereinigten Keilen, für die übrigen Zehner wird dieses Zeichen wiederholt. 100 wird durch einen horizontalen und durch einen vertikalen Keil ausgedrückt usw.



Der besseren Übersichtlichkeit wegen wollen wir den senkrechten Keil mit a, den wagrechten mit b und den Winkelhaken mit c bezeichnen und die Zahlen durch diese Buchstaben ausdrücken. Wir erhalten $1 = a$, $2 = aa$ oder $\begin{matrix}a\\a\end{matrix}$, $3 = aaa = \begin{matrix}aa\\a\end{matrix}$

$10 = c$, $12 = c\begin{matrix}a\\a\end{matrix}$, $20 = cc$ oder $\begin{matrix}a\\a\end{matrix}c$, $30 = ccc$ oder $\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}c$, $23 = \begin{matrix}caa\\ca\end{matrix}$,

$100 = ab$, $223 = \begin{matrix}a\\a\end{matrix}ab\begin{matrix}caa\\ca\end{matrix}$, $1000 = c^{ab}$, $4000 = \begin{matrix}aaa\\a\end{matrix}c^{ab}$,

$5436 = \begin{matrix}aaa\\aa\end{matrix}c^{\begin{matrix}abaa\\aa\end{matrix}}ab\begin{matrix}ccaaa\\caaa\end{matrix}$.

Wir haben hier die überraschende Tatsache, daß die Zahlzeichen *Doppelwertigkeit* besitzen: sie haben außer den *Einerwerten* im gewissen Sinne noch *Stellenwerte*. So ist $30 = 3 \cdot 10 = \begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}c$ und $23 = 20 + 3 = \begin{matrix}caa\\ca\end{matrix}$. Die Zeichen haben also bald additive, bald multiplikative Bedeutung. Das erstere ist der Fall, wenn sie *nachstehen*, das letztere, wenn sie *vorausstehen*.

Diese Art der Zahlendarstellung ist sehr geistreich und viel sinniger und praktischer als die der Ägypter, Griechen und Römer. Sie ist zweifellos der Vorläufer und Pfadebner der heutigen, aus Indien stammenden Art. Immerhin ist sie noch breit und schwerfällig und für ein rasches, schriftliches Rechnen, wie es das tagtägliche Leben eines so emsigen Handelsvolkes verlangte, umständlich. Man muß deshalb bei den Chaldäern den Gebrauch eines *Rechenbrettes* voraussetzen. Für die Existenz eines solchen hat man bis jetzt freilich nur indirekte Beweise. So weiß man, daß die Rechenmaschine der Chinesen, der *Swanpan*, seit den ältesten Zeiten bei den meisten Völkern Asiens im Gebrauch war, und daß Babylon schon sehr frühe in regen Beziehungen zu China stund. Dann besitzen wir ein griechisches Vasengemälde, auf dem ein Babylonier mit einem Rechenbrett abgebildet ist, und schließlich schließt man aus dem Vorhandensein der babylonischen Wörter Soß, Ner und Sar auf den Gebrauch eines Rechenbrettes. War nämlich ein solches vorhanden, so muß es sowohl für das dezimale, als auch für das sexagesimale Zahlensystem eingerichtet gewesen sein.

Cantor stellt sich dieses Rechenbrett der Babylonier folgendermaßen vor:

Das hypothetische Rechenbrett der Babylonier.

Sar = 3600	Soß = 60	Einer
V	III	I
9 Marken à 3600 Einheiten = 32400 Einheiten	9 Marken à 60 Einheiten = 540 Einheiten	9 Marken = 9 Einheiten
VI	IV	II
5 Marken à 36000 Einheiten = 180000 Einheiten	5 Marken à 600 Einheiten = 3000 Einheiten	5 Marken à 10 Einheiten = 50 Einheiten
? = 36000	Ner = 600	Zehner

Es besteht aus drei senkrechten Kolumnen, die durch eine horizontale Linie in zwei Abteilungen zerfallen. Die erste Kolumne ist für die dezimalen Einheiten Einer und Zehner, die zweite für die sexagesimalen Soß (= 60) und Ner (= 600), und die dritte für die sexagesimalen Sar (= 3600) und ? = 36000 bestimmt. Die Benennung der Einheit 36000 ist bis jetzt noch nicht aufgefunden worden. Für die oberen Hälften der Kolumnen sind je 9, für die unteren je 5 Marken erforderlich. Kam zu den 9 Marken des ersten Feldes noch eine zehnte hinzu, so wurden alle zehn ersetzt durch eine Marke des zweiten Feldes usw. Angenommen, es befinden sich in dem Felde I 6, im Felde II 3, im Felde III 7, im Felde IV 2, im Felde V 8 und im Felde VI 4 Marken, so stellen sie folgende Zahl vor:

$$6 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 60 + 2 \cdot 600 + 8 \cdot 3600 + 4 \cdot 36000 = 174456.$$

Über das Fingerrechnen der Babylonier weiß man auch nichts Bestimmtes, es scheint aber in Gebrauch gewesen zu sein, denn der Perser Orontes behauptet, der kleine Finger der linken Hand bedeute „eins“ und „eine Myriade“. Mithin müssen auch die übrigen Finger Zahlenbedeutungen besessen haben. „Die Auffindung und Entzifferung neuer Schriftdenkmäler bringt jedenfalls in den nächsten Jahrzehnten weitere Aufklärungen.“

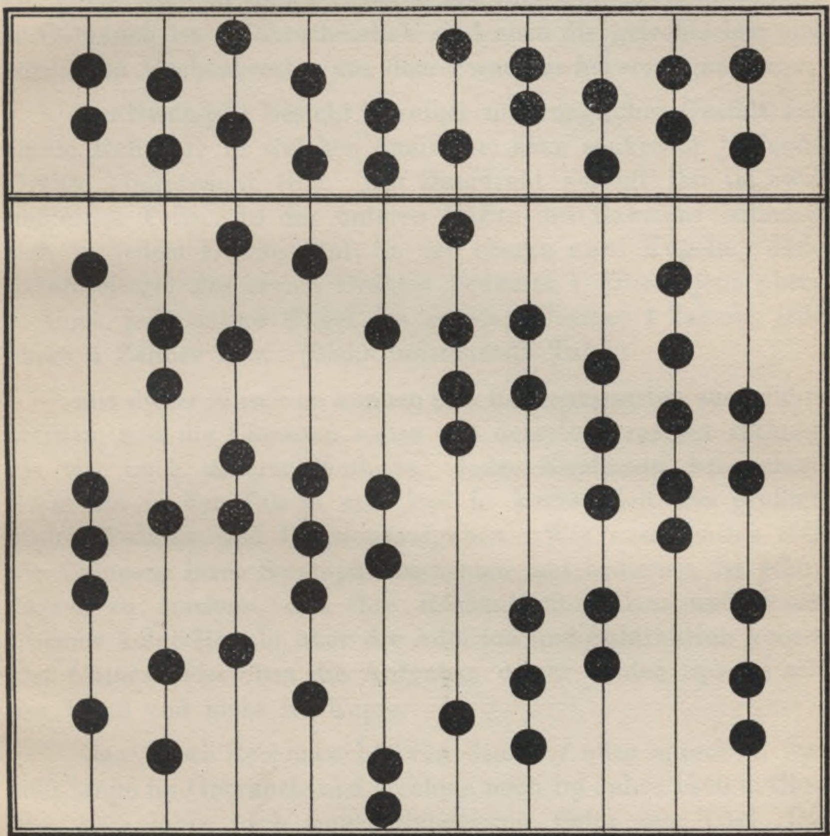
§ 4.

Die Chinesen.

Die Chinesen besitzen eine Bilderschrift wie die Ägypter; sie behaupten, ihr erster Kaiser habe sie im Jahre 2950 v. Chr. erfunden. Diese Schrift weist etwa 500 Bilder auf, die einzeln oder verbunden benützt werden. Flexionen kennt die Sprache nicht.

Unter diesen 500 Bildern befinden sich solche für die Zahlen 1 bis 9, dann für 10, 100 und 1000. Es sind also im ganzen 13 Ziffern vorhanden. Die übrigen Zahlen werden als Summen oder Produkte dargestellt und zwar nach dem Prinzip der Stellenwertigkeit. Ist z. B. a das Zeichen für 5 Einer, b das für 1 Zehner, so bedeutet $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b} = 15$, $\genfrac{}{}{0pt}{}{b}{a}$ aber 50. — Die Chinesen schreiben von oben nach unten. — Auch in China ist die Schrift des täglichen Lebens, die Kaufmannsschrift, einfacher als die der Gelehrten. In dieser tritt uns zum erstenmal, und zwar schon sehr frühe, ein Zeichen für das Fehlen einer Sorte Einheiten, die Null, entgegen. Es ist dies ein kleiner Kreis. Doch hat die chinesische Null keineswegs die große Bedeutung, welche die viel später auftretende indische Null erhielt. Der Grund hiefür liegt darin, daß die Chinesen für drei Potenzen von zehn drei Ziffern besaßen, welche verhinderten, daß das Gesetz der indischen Stellenwertigkeit, dem sie nach der Einführung der Null sehr nahe gekommen waren, zum Ausdruck kam. Stellten sie z. B. eine Zahl durch ab, eine andere durch ba dar, so erreichten sie zwar, daß die Werte in dem einen Fall additiv, im anderen multiplikativ auftreten, aber nicht, daß ein und dasselbe Zeichen bald Einer, bald Zehner bedeutet. Das eigentliche Prinzip der Stellenwertigkeit war also damit nicht erreicht.

Swan-pân der Chinesen.



Wie chinesische Geschichtschreiber berichten, habe ein Minister des Kaisers Huang-Ti, der um das Jahr 2640 v. Chr. regierte, die Rechenmaschine, den Swan-pân, erfunden und ein anderer Minister des gleichen Herrschers das erste Rechenbuch geschrieben. Die chinesische Rechenmaschine hat in ganz Asien Verbreitung gefunden; später wurde sie auch in Rußland bekannt und gelangte von hier aus in das westliche Europa, wo sie heute noch in vielen Schulen als russische Rechenmaschine in Gebrauch ist. Wahrscheinlich sind auch die griechischen und römischen Rechenbretter aus dem Swanpan hervorgegangen.

Der Swan-pân besteht in seiner ursprünglichen Gestalt aus einem Rahmen, in welchen (meistens) zehn senkrecht laufende Drähte eingespannt sind. Ein Querdraht zerlegt ihn in zwei ungleiche Teile. In der unteren Hälfte des Rahmens befinden sich in jedem Drahte fünf, in der oberen zwei Kugeln. Jede untere Kugel des ersten Drahtes bedeutet 1 Einer, jede obere 5 Einer, jede untere Kugel des zweiten Drahtes 1 Zehner, jede obere 5 Zehner usw. (Siehe beistehende Tafel.)

Mit dieser Maschine können alle Rechnungsarten ausgeführt werden, und die Chinesen sollen mit derselben rascher rechnen als wir nach unserer Methode. Jeder Kaufmann hat seinen Swan-pân in der Tasche und löst in kurzer Zeit die größten Multiplikations- und Divisionsaufgaben. Wie ausnahmslos sich die Chinesen ihres Swan-pân bedienten und bedienen, ist schon daraus zu ersehen, daß ihre Rechenbücher alten und neuen Datums keine Regeln über die Addition und Subtraktion geben. Der Chinese löst eben die Aufgaben dieser beiden Spezies mit der Hand und nicht im Kopfe.

Das „Erste Rechenbuch“, von dem wir oben sprachen, war sehr lange im Gebrauch und erschien noch im Jahre 1240 n. Chr., also 4000 Jahre nach seiner Entstehung, unter dem Titel „Die neun Abschnitte der Rechenkunst“. Inwieweit es in diesem langen Zeitraum seine ursprüngliche Gestalt verändert hat, entzieht sich unserer Beurteilung. Die „neue“ Auflage enthält Gesellschafts- und Mischungsrechnungen, behandelte die Quadrat- und die Kubikwurzel, die Binominalkoeffizienten, lehrt das Auflösen von Gleichungen und bringt 24 geometrische Aufgaben, unter denen manche den pythagoräischen Lehrsatz voraussetzen.

§ 5.

Die Griechen.

In Griechenland findet man auf den ältesten Baudenkmälern die Zahlwörter ausgeschrieben, später erfolgte die Bezeichnung der Zahlen durch die Anfangsbuchstaben der Zahlwörter. Man schrieb Jota (J) für die Einheit[1]), Pi (pente) für 5, D (deka) für 10, H (hekaton) für 100, X (chilia für 1000, My (myria) für 10000. Die gleichen Zeichen wurden, in- und nebeneinandergesetzt, auch gebraucht, um Vielfache von 5 als Einheiten verschiedenen Ranges darzustellen. Diese Zeichen wurden von dem byzantinischen Grammatiker Herodianus, der um das Jahr 200 n. Chr. lebte, erklärt und hießen von nun an herodianische Zeichen.

Vom Jahre 300 v. Chr. an bürgerte sich von Alexandrien aus der Gebrauch ein, die Zahlen durch die Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen. Die ersten neun Buchstaben bedeuteten die Zahlen 1 bis 9, die zweiten neun die Zahlen 10, 20 bis 90, neun weitere die Zahlen 100, 200 bis 900. Dazu waren also 27 Buchstaben erforderlich; das griechische Alphabet besaß aber nur 24, es wurden deswegen drei Buchstaben aus einem älteren Alphabet entlehnt; für die Tausender wurden die gleichen Zeichen gebraucht wie für die Einer, nur setzte man links unten einen Strich daneben, a = 1, ,a = 1000, ,b = 2000. 10000 = ä = Myria = My; 20000 = b̈ = dyo Myriades usw., die Null kannten die Griechen nicht. Um anzudeuten, daß die Buchstaben nicht als Lautzeichen, sondern als Zahlzeichen, als Ziffern, aufzufassen seien, setzte man einen horizontalen Strich darüber (2345 = $\overline{,\text{bvne}}$)[2]). Brüche werden oft benützt. Ihre Bezeichnung erfolgte dadurch, daß man Zähler und Nenner zweimal nebeneinander stellte und den ersteren mit einem, den letzteren mit zwei Accenten versah, z. B. $^3/_4$ c′d″c′d″. Bei Stammbrüchen fiel der Zähler weg, $^1/_2$ = b"b".

Die große Anzahl Zahlzeichen war der Technik des Rechnens sehr hinderlich. Hatte sich jemand die vier Spezies im Zahlenkreis 1 bis 10 eingeübt, so hatte er für die nächsten

---

[1]) „Das Zeichen ‚J' war vielleicht nur ein gerader Strich, der später als Jota gelesen wurde." Cantor.

[2]) Selbstverständlich muß man sich hier die griechischen Buchstaben denken.

Kreise wenig gewonnen, weil er immer wieder auf neue Zeichen und auf neue Wörter stieß. Das schriftliche Rechnen trat deswegen im gewöhnlichen Leben in den Hintergrund zu Gunsten des Kopfrechnens, das eine wesentliche Stütze fand einerseits am Fingerrechnen, andererseits am instrumentalen Rechnen, am Rechnen auf dem Rechenbrett.

Im Fingerrechnen besaßen die Griechen eine große Gewandtheit. Für die Zahl 1 bog man den 5. Finger der linken Hand einwärts, für 2 den 5. und 4., für 3 den 5., 4. und 3., für 4 den 2., für 5 den 3., für 6 den 4.; für 7 legte man den 5. um, für 8 den 4. und 5., für 9 den 3., 4. und 5. Tat man das Gleiche mit den Fingern der rechten Hand, so bedeutete dies die Zahlen 1000, 2000 bis 9000.

Bog man den Zeigfinger der linken Hand zum Daumen, so war dies das Zeichen für 10; für 20 streckte man den Zeigfinger und bedeckte den Daumen mit den übrigen, für 30 legte man die Zeigfingerspitze an die Daumenspitze und streckte beide vorwärts usw. Führte man die gleichen Bewegungen mit der rechten Hand aus, so bezeichnete man damit die Zahlen 100, 200 usw. bis 900.

Das Rechenbrett finden wir bei allen Kulturvölkern des Altertums. Sein Prinzip haben wir beim Swan-pân kennen gelernt. Der Grundgedanke ist genau der der jetzt üblichen Zahlendarstellung: die materiellen Zahlzeichen haben Zeichenwerte und Stellenwerte (Ziffernwerte und Stellenwerte). Man muß sich wundern, daß Jahrtausende vergingen, bis die hier gegebene Idee der Stellenwertigkeit in der schriftlichen Darstellung der Zahlen Verwendung fand. Dies liegt zum größten Teil darin begründet, daß das Rechenbrett das Fehlen der Einheiten irgend einer Ordnung ohne weiteres andeutet. Nun besaßen aber die Schriftsprachen kein Zeichen für das „Nichts“, keine Null, deswegen konnte man den schriftlichen Zahlzeichen keine Stellenwertigkeit beilegen.

Das Rechenbrett der Griechen hieß „Abax“, Staubbrett (abak = Staub). Die Mathematiker, besonders die Pythagoräer, benützten es nämlich vorwiegend zum Aufzeichnen der Figuren für geometrische und zum Aufschreiben von Zahlen für arithmetische Beweise. Zu diesem Zwecke bestreuten sie es mit blauem Sand, trugen mit Hilfe eines Stäbchens die Figuren, resp. die Zahlen ein und konnten sie so leicht auslöschen und von neuem entstehen lassen. Wichtiger aber waren die Dienste, die der Abax dem praktischen Rechner zu leisten hatte. Zu diesem Zwecke war er in mehrere Kolumnen eingeteilt, die senkrecht auf den Rechner zuliefen, und in welche bewegliche Marken gelegt wurden. Diese Marken hatten, je nach der Kolumne, in der sie sich befanden, verschiedene Stellenwerte, wie aus einer Bemerkung des griechischen Schriftstellers Polybius, der von 203 bis 121 v. Chr. lebte, zu ersehen ist: „Die Höflinge gleichen den Marken des Abax; wie diese nach dem Willen des Rechnenden bald ein Chalkos, bald ein Talent[1]) gelten, so sind die Höflinge auf den Wink des Königs bald hoch beglückt, bald tief elend“.

In dieser Zeit war also das Abaxrechnen der Griechen allgemein bekannt. Es wird aber angenommen, daß es schon benützt wurde, als die herodianischen Zeichen in Gebrauch kamen, d. h. um das Jahr 600 v. Chr. Für diese Anschauung spricht die im Jahre 1846 auf der Insel Salamis aufgefundene „Tafel von Salamis“, eine aus Marmor bestehende, 1,5 m lange, 0,75 m breite, in 5 Haupt- und 4 Nebenkolumnen eingeteilte Rechentafel, auf der sich 13 mm hohe Ziffern, die herodianischen Zeichen, befinden. Wie aus der Tafel zu ersehen ist, bedeuten die am weitesten links liegenden Marken Talente, dann kommen weiter nach rechts hin Fächer für 1000, 100 und 10 Drachmen und ein Fach für einzelne Drachmen. Die Nebenkolumnen waren für den Obolus, den halben, viertel und achtel Obolus (Chalkos) bestimmt.

Die in beistehender Tafel veranschaulichte Zahl bedeutet also:

2 Talente, 3426 Drachmen, 3 Oboli, $^1/_2$ Obolus, $^3/_4$ Obolus und 7 Chalkos = 9425 Drachmen, 3, $^1/_2$, $^3/_4$ Obolus und 7 Chalkos.

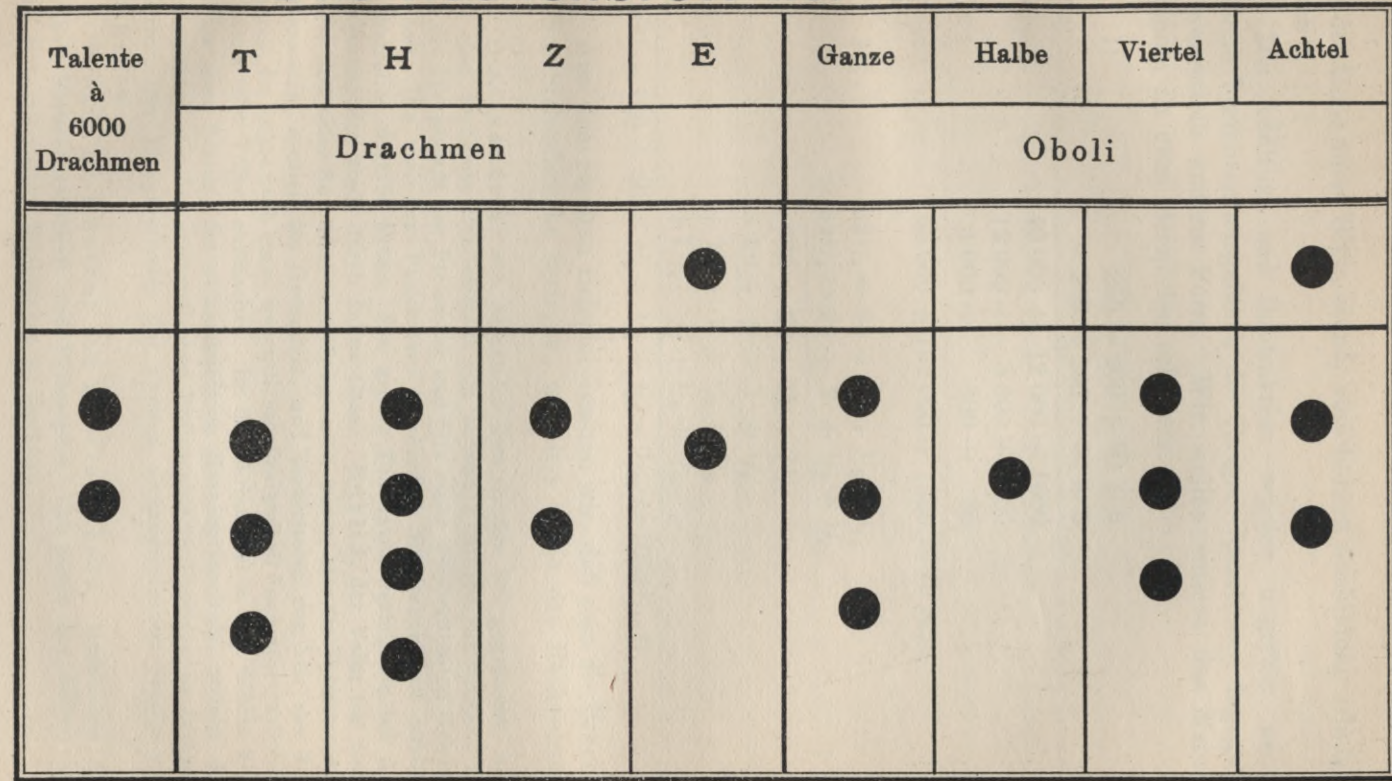
Wie man mit Hilfe des Rechenbrettes die Rechenoperationen ausführte, wollen wir weiter unten zeigen.

Das schriftliche Rechnen gehört in Griechenland jedenfalls einer ziemlich späten Zeit an. Es soll erst in der alexandrinischen Schule, welche zur Zeit Euklids (um das Jahr 300—200 v. Chr.)

---

[1]) 1 Talent (= 4521 Mark) = 6000 Drachmen; $^1/_6$ Drachme = 1 Obolus; $^1/_8$ Obolus = 1 Chalkos.

Das Rechenbrett der Griechen.



Anmerkung: Ein Querstrich teilt die Kolumnen in zwei Teile. Die in den oberen Abschnitten liegenden Marken bedeuten jeweils 5 Einheiten.

auf der Höhe ihrer Blüte stund, eine höhere Ausbildung erlangt haben[1]).

Die Addition und Subtraktion wurden ungefähr nach unserem Verfahren ausgeführt, die übrigen Operationen dagegen in wesentlich anderer Form. Wir wollen vorerst das Multiplizieren an zwei Beispielen erläutern.

1)
$$\begin{array}{r}
265 = 200 + 60 + 5 \\
\times\ 265 = 200 + 60 + 5 \\
\hline
40\,000 + 12\,000 + 1000 \\
12\,000 + 3\,600 + 300 \\
1\,000 + 300 + 25 \\
\hline
53\,000 + 159\,000 + 1325 = 70\,225
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l}
32^3/_4 = 30 + 2 + {}^1/_2 + {}^1/_4 \\
\times\ 32^3/_4 = 30 + 2 + {}^1/_2 + {}^1/_4 \\
\hline
900 + 60 + 15 + 7^1/_2 \\
+ 60 + 4 + 1 + {}^1/_2 \\
+ 15 + 1 + {}^1/_4 + {}^1/_8 \\
+ 7^1/_2 + {}^1/_2 + {}^1/_8 + {}^1/_{16} \\
\hline
900 + 120 + 50 + {}^4/_2 + {}^1/_4 + {}^2/_8 + {}^1/_{16} = 1032\,{}^9/_{16}
\end{array}$$ [2])

Aus dem zweiten Beispiel ersehen wir, daß man die Brüche in ihre Stammbrüche zerlegte, wie dies schon das Rechenbuch

---

[1]) Alexandria, von Alexander dem Großen 332 gegründet, war bald eine berühmte Handelsstadt von nahezu 1 Million Einwohner. Es war die Hauptstadt der Ptolemäer und Sitz einer weltberühmten Gelehrsamkeit. Die von den Ptolemäern gegründete Bibliothek soll 400 000 Bücherrollen umfaßt haben. Ein großer Teil davon verbrannte bei der Belagerung der Stadt durch Julius Cäsar. Euklid, der Vater der Geometrie und seine Schüler und Epigonen waren hier die Vertreter der Mathematik, speziell der Geometrie, und verbreiteten von hier aus ihre Lehren, die heute noch einen wesentlichen Bestandteil des mathematischen Wissens aller Völker ausmachen. Im 3. Jahrhundert n. Chr. blühte hier wieder eine Schule, die alexandrinische Katachetenschule, welche das Christentum mit der aristotelischen Philosophie in Einklang zu bringen suchte. Der Hauptvertreter der zweiten alexandrinischen Schule war Origenes.

[2]) Nach Dr. Günther und Dr. Windelband. Geschichte der antiken Naturwissenschaft und Philosophie. (An Stelle der Ziffern hat man sich griechische Buchstaben zu denken.)

Ahmes verlangte. Über die Multiplikation der Sexagesimalbrüche siehe Seite 19.

Über die Division der dekadischen Zahlen ist nichts näheres bekannt, da man weder eine theoretische Anleitung noch ein ausgeführtet Beispiel besitzt, dagegen kennt man die der Sexagesimalbrüche. Diese spielen bei den Griechen die Rolle, die die Dezimalbrüche heute für uns besitzen. Wie wir schon früher sahen, wurden die Zahlen $^{7}/_{60}$, $^{19}/_{60^2}$, $^{37}/_{60^3}$, $^{45}/_{60^4}$ angeschrieben in der Form 7′, 19″, 37‴, 45⁗ und gelesen: 7 partes minutae primae, 19, p. m. secundae, 37, p. m. tertiae 45, p. m. quartae. Da die Reihen sehr stark konvergent sind, eignen sie sich sehr gut zum Aufsuchen von Näherungswerten der Division und des Wurzelausziehens. Eine sexagesimale Division besitzen wir von Theon, der um das Jahr 360 n. Chr. in Alexandrien lebte. Sie lautet:

$$1515^0\ 20'\ 15'' : 25^0\ 12'\ 10'' =$$

1) $1515^0 : 25 = \mathbf{60}^0$, Rest 15^0; $15^0 = 900'$; $900' + 20' = 920'$, $920' - 60 \cdot 12' = 200$; $200 - 60 \cdot 10'' = 190'$; Rest $190'\ 15''$

2) $190' : 25 = \mathbf{7}$, Rest $15'$; $15' = 900''$; $900'' + 15'' = 915''$, davon sind abzuziehen $7 \cdot 12'$ und $7 \cdot 10''$; Rest $829''\ 50'''$

3) $829'' : 25 = \mathbf{33}$.

Es ist also $1515^0\ 20'\ 15'' : 25^0\ 12''\ 10'' = 60^0\ 7'\ 33''$. Auch das Wurzelausziehen hat uns Theon übermittelt. Wir wollen nach seinem Verfahren $\sqrt{3400}$ suchen.

1) $\sqrt{3400} = \mathbf{58}$, Rest 36; $36^0 = 2160'$;

2) $2160 : 2 \cdot 58 = 2160 : 116 = \mathbf{18}'$, Rest $72'$, $72' = 4320''$; davon muß $18' \cdot 18' = 324''$ abgezogen werden, $4320'' - 324'' = 3996''$;

3) $3996'' : 2\ (58^0\ 18') = 3996 : 116^0\ 36'$, $3996'' : 116 = \mathbf{34}''$, Rest $52''$; $52'' = 3120'''$ usw.

Es ist also $\sqrt{3400} = 58^0\ 18'\ 34'' = 58\ ^{17}/_{60}\ ^{34}/_{3600}$.

Was die wissenschaftliche Arithmetik anbelangt, so gelten Pythagoras und seine Schüler als deren Begründer. **Pythagoras** von Samos hat um das Jahr 500 v. Chr. gelebt. Griechische Schriftsteller, wie Isokrates (400 v. Chr.), Strabon (60 vor bis 25 nach Christus) und einige andere berichten, er habe sich in die ägyptische Priesterschule Thebens aufnehmen lassen, sei gelegentlich der Eroberung Ägyptens durch den Perserkönig Kambyses 525 in die babylonische Gefangenschaft geraten, habe als Grieche besondere Vorrechte genossen, sich mit dem chaldäischen Wissen bekannt gemacht und sei nach zehnjähriger Gefangenschaft freigelassen worden. Diese Reisen wurden aber von Gelehrten alter und neuer Zeit in das Gebiet der Sage verwiesen, da die Glaubwürdigkeit der alten Schriftsteller, die darüber berichten, angezweifelt wurde. Zu diesen Streitfragen äußert sich Cantor dahin, daß der ägyptische Aufenthalt so viel als gesichert dastehe, der babylonische aber eine Sage sei, die jedoch der historischen Wahrheit ziemlich nahe komme. Die pythagoräische Lehre enthalte eine Reihe babylonischer Elemente, die in hohem Maße rätselhaft seien, wenn man ganz verwerfe, daß Pythagoras oder seine Schüler an die Quelle geraten seien.

Die Pythagoräer unterschieden zwischen Arithmetik und Logistik, d. h. zwischen Zahlentheorie und praktischer Rechenkunst. Die letztere war allgemeines Bedürfnis, nicht Wissenschaft, und wurde theoretisch und praktisch schon lange gelehrt und gepflegt, ehe die Pythagoräer die erstere begründeten. Die Pythagoräer betrachteten die Eigenschaften der Zahlen ohne Rücksicht auf deren rechnerische Verknüpfung und schufen die Begriffe befreundeter, vollkommener, überschießender und mangelhafter Zahlen[1]). Die Primzahlen hießen Linearzahlen, Zahlen mit zwei Faktoren Flächenzahlen und solche mit drei Faktoren Körperzahlen.

Eine besondere Aufmerksamkeit wurde dem Summieren der Reihen gewidmet. Man fand, daß $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ und $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n \cdot (n + 1)$ ist und nannte die Summe der ersten Reihe Dreieckzahl, die der zweiten Quadratzahl und die der

[1]) Zwei Zahlen heißen befreundet, wenn jede aus der Summe der Faktoren der anderen besteht. So hat z. B. die Zahl 220 die Faktoren 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 und 110; ihre Summe beträgt 284. Die Faktoren von 284 heißen 1, 2, 4, 71, 142. Die Summe dieser Faktoren ist gleich 220. Die vollkommenen Zahlen sind gleich der Summe der eigenen Faktoren $6 = 1 + 2 + 3$; $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Ist diese Summe größer, so hat man eine überschießende, ist sie kleiner, eine mangelhafte Zahl.

dritten heteromeke Zahl[1]) Die Pythagoräer hatten das Bestreben, die Zahlen und die Zahlengesetze geometrisch zu veranschaulichen. Man vermutet, Pythagoras habe dabei den nach ihm benannten Satz gefunden. Das Zahlengesetz $(3\,n)^2 + (4\,n)^2 = (5\,n)^2$ war schon lange vor seiner Zeit in Babylon bekannt. Pythagoras soll es dort kennen gelernt haben. Er hat dann auch gezeigt, daß nicht bloß die Zahlen 3n, 4n, 5n als Seitenlängen von rechtwinkeligen Dreiecken auftreten, sondern alle, welche den Gliedern der Gleichung $\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2 + a^2$ entsprechen. Setzt man in dieser Gleichung für a die ungeraden Zahlen, und in der Gleichung $(3\,n)^2 + (4\,n)^2 = (5\,n)^2$ für n beliebige Zahlen ein, so erhält man Zahlen, die pythagoräische Dreieckszahlen genannt werden. Plato (429—347) fand, daß auch die Gleichung $\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1\right]^2 = \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1\right]^2 + a^2$ solche pythagoräische Zahlen liefert.

Die Pythagoräer behandelten auch die arithmetischen, geometrischen und harmonischen Proportionen[2]) und nannten eine geometrische Proportion die aus zwei Zahlen, ihrem arithmetischen und harmonischen Mittel gebildet ist, musikalische Proportion; $a : \frac{a+b}{2} = \frac{2 \cdot ab}{a+b} : b$ ist eine musikalische Proportion. Wie wir schon oben gesehen haben, befaßten sie sich wenig oder gar nicht mit den Rechenproblemen des praktischen Lebens. Dagegen soll ein außerhalb ihrer Schule stehender Mathematiker, Hypokrates von Chios, im Jahre 440 ein Lehrbuch für diese Zwecke geschrieben haben.

Vom dritten Jahrhundert v. Chr. ab drückten die Werke des Alexandriners **Euklid** dem gesamten mathematischen Wissen vieler Jahrhunderte einen charakteristischen Stempel auf. Euklid schrieb verschiedene Werke, unter denen seine „Elemente“ die wichtigsten waren. Diese Elemente bestanden aus 13 Büchern.

---

[1]) Stellt man diese Zahlen, durch Punkte oder Kreise veranschaulicht, untereinander, so entstehen dreieckige Figuren.

Hetĕros = anders beschaffen.

[2]) $a - x : x - b = a : b$ = harmonische Proportion.

$$x = \frac{2 \cdot ab}{a+b} = \text{harmonisches Mittel.}$$

Die ersten 6 behandelten planimetrische Probleme, das 7., 8., 9. und 10. die Lehre von den Zahlen, die Proportionen, die Reihen und einzelne Gleichungen. Die letzteren wurden aber nicht algebraisch gelöst, sondern geometrisch, d. h. die Größen wurden als Linien dargestellt usw. Das 11., 12. und 13. Buch führt den Leser in die Stereometrie ein.

Die Lehre von den Zahlen entwickelt Euklid im Anschluß an die Proportionen, die im 7., 8. und 9. Buche fortwährend auftreten. Er spricht von der Teilbarkeit der Zahlen, von Primzahlen, vom größten Maß und kleinsten Vielfachen. Angewandte Aufgaben kommen keine vor.

Ein berühmter Mathematiker der nacheuklidischen Zeit war **Archimedes** von Syrakus, der im Jahre 212 fiel, als die Römer die Stadt eroberten. Archimedes beschäftigte sich vorwiegend mit geometrischen Aufgaben, entdeckte das nach ihm benannte „Archimedische Prinzip“ (die Krone des Königs Hiero) und schrieb ein Buch über die Rechenkunst, das er „Grundzüge“ nannte. In diesem teilt er die dekadischen Zahlen in *Oktaden* ein. Die erste Oktade umfaßt die Zahlen 1 bis 10^{8}, die zweite die von 10^{8} bis 10^{16} usw. Die Einheit der 26. Oktade ist 10^{200}. Diese Oktaden setzt Archimedes fort bis zur 10^{8} und nennt die Zahlen der ganzen Reihe die *erste Periode*. An diese schließt sich die zweite Periode, deren Einheit 1 mit 800 Millionen Nullen ist, an diese die dritte, die vierte u. s. f. In seiner *Sandrechnung* zeigte er dann, daß man immer wieder eine Zahl angeben könne, die größer sei als die, welche man bis jetzt für die größte gehalten habe. (Es wird hier die Frage aufgeworfen, wie viele Sandkörner enthält eine Kugel vom Radius Erdmittelpunkt - Fixsternenhimmel (= 20 000 Erdradien), wenn 10 000 Sandkörnchen die Größe eines Mohnkornes besitzen.)

Einen großen Einfluß gewann **Eratosthenes**, ein Zeitgenosse von Archimedes. Geboren in Kyrene, an der Nordküste Afrikas, verbrachte er den größten Teil seines Lebens in Alexandrien und wurde hier Vorsteher der weltberühmten Bibliothek. Er schrieb verschiedene Bücher, von denen wir die über Geographie, Chronologie und Würfelverdoppelung erwähnen wollen. Eratosthenes war der erste Grieche, welcher Umfang und Größe der Erde genau zu bestimmen versuchte. Auf altägyptische Messungen gestützt, berechnete er die Entfernung der Stadt

Syene (das heutige Assuan in 24° n. Br.) bis Alexandrien (31° n. Br.) zu 800 km, suchte auf Grund der Polhöhen beider Orte die Länge eines Grades und daraus die Größe der Erde. Die Ergebnisse seiner Forschungen verwertete er auch bei der Anfertigung der die Kugelgestalt der Erde voraussetzenden Karte. Diese enthält Meridiane und Parallelkreise und ist das Urbild unseres Gradnetzes.

Eratosthenes kannte die Schiefe der Ekliptik und ist wahrscheinlich der geistige Urheber des Ediktes von Kanopus.[1]) Am 7. März 238 v. Chr. veröffentlichte eine in Kanopus bei Alexandrien versammelte Priesterschaft einen Erlaß, welcher das Kalenderjahr mit dem Laufe der Sonne in Einklang zu bringen suchte. Das altägyptische Jahr umfaßte ursprünglich 360 Tage, war also um $5^1/_4$ Tage zu kurz. Die Festtage durchwanderten deswegen in 70 Jahren das tropische Jahr. Um dies zu verhindern, wurden schon frühe 5 Schalttage angefügt. Dadurch wurde aber noch keine vollkommene Stabilität erzielt. Das neue Jahr war immer noch um 0,24225 Tage zu kurz, und Feste, die im Winter zu feiern waren, fielen nach 720 Jahren in den Sommer hinein und umgekehrt. Das genannte Edikt verlangt nun, daß jedes vierte Jahr einen sechsten Schalttag erhalten soll, an dem das Fest der Euergeten zu feiern sei. Merkwürdigerweise geriet diese Verordnung bald wieder in Vergessenheit. 200 Jahre später wurde ihr der Julianische Kalender gerecht. Ob sein Urheber, der Astronom Sosigenes, das $365^1/_4$tägige neuägyptische Jahr gekannt hat oder nicht, läßt sich nicht mehr entscheiden.

In seinem „Siebproblem" lehrt Eratosthenes das Aufsuchen aller Primzahlen. Es lautet: Man schreibe alle ungeraden Zahlen in eine Reihe, streiche, von 3 ausgehend, jede dritte, von 5 aus jede fünfte, von 7 aus jede siebente usw., der Rest besteht nun aus den Primzahlen.

Der erste Schriftsteller, der die arithmetischen Lehren der Griechen in logischem Aufbau, ohne Bezug auf die Geometrie, zusammenstellte, war **Nikomachus** aus Gerasa in Arabien. Dieser lebte um das Jahr 100 n. Chr. und bereicherte auch die Arithmetik um mehrere Zahlengesetze. So zeigte er im Anschluß an das Gesetz: die Summe der ungeraden Zahlen ist stets eine

---

[1]) Das Edikt von Kanopus wurde im April 1866 aufgefunden.

Quadratzahl,[1]) daß auch die Kubikzahlen als Summen von ungeraden Zahlen auftreten. So ist $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$, $21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 5^3$, $31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41 = 6^3$ usw. Sein Lehrbuch wurde bald in das Lateinische übersetzt und dadurch zur Quelle, aus der die Schriftsteller verschiedener Völker jahrhundertelang schöpften. In welchem Ansehen es stund, kann man aus dem Lobe entnehmen, das man das ganze Mittelalter hindurch einem guten Rechner spendete, indem man von ihm sagte, er rechne wie Nikomachus aus Gerasa. Wie man Euklid den Vater der Geometrie nannte, so hieß Nikomachus der Vater der Arithmetik.

Von anderen Mathematikern wollen wir noch kurz erwähnen Ptolemäus Claudius, Diophantos, Theon und Artabastes. Die ersten drei lebten in Alexandria, der letzte in Smyrna. Ptolemäus verfaßte um das Jahr 130 n. Chr. ein Lehrbuch der Astronomie, in welchem er zuerst die arithmetischen Grundbegriffe lehrte. Dieses Buch wurde unter dem Namen Almagest[2]) bekannt und bildete das ganze Mittelalter hindurch die Grundlage des astronomischen Wissens. Diophantos (350 n. Chr.) schrieb ein Lehrbuch der Arithmetik und gilt als der Erfinder der nach ihm benannten unbestimmten Gleichungen. Theon (400 n. Chr.) gab Erläuterungen zum Almagest und übermittelte uns die Anwendung der Sexagesimalbrüche zur Aufsuchung von Näherungswerten. Artabastes (400—500) verfaßte eine Handschrift arithmetischen Inhalts, in der die Ausdrücke „politische Arithmetik" und „Regel detri" zum erstenmal auftreten.

§ 6.

Die Römer.

Die Römer stellten die Zahlen ursprünglich durch einzelne Striche dar, später benützten sie Buchstaben und schließlich die noch heute gebräuchlichen „römischen Ziffern". Die erste Art findet man vorwiegend auf etrurischen Baudenkmälern; man

[1]) $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ usw.

[2]) Der Titel des Buches hieß: „Lehrgebäude der Astronomie". Die Araber verstümmelten ihn zu „Almagest".

nimmt deswegen an, sie stamme aus Etrurien. Über die Bedeutung und das Herkommen der als Ziffern benützten Buchstaben weiß man nichts Bestimmtes, nur so viel scheint festzustehen, daß sie nicht dem Alphabet entnommen waren in dem Sinne, wie es bei den Griechen der Fall war. Es sind aber auch nicht die Anfangsbuchstaben der lateinischen Zahlwörter. Manche vermuten, es seien die der etrurischen; da man aber diese nicht kennt, läßt sich die Frage nicht entscheiden.

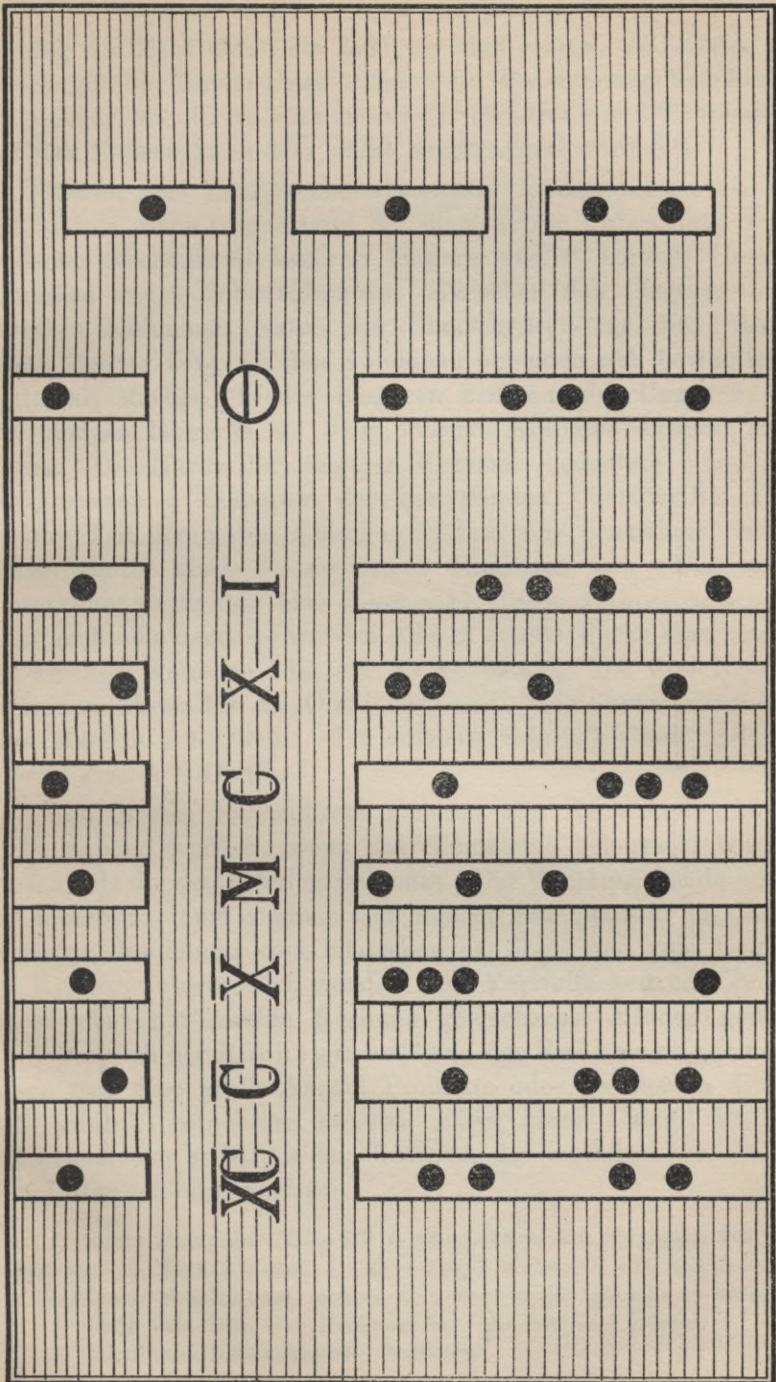
Die Frage über die Entstehung und das Herkommen der römischen Ziffern ist ebenfalls noch eine offene. Von verschiedenen Gelehrten wurde angenommen, sie seien aus einzelnen Strichen entstanden. So habe das Zeichen für 5 ursprünglich die Gestalt \/ gehabt, und das für 10 sei ein doppelter Fünfer gewesen. Andere stellen dies in Abrede. Das Zeichen X stamme vom Zeichen für 100, vom C (centum = 100), und der Fünfer sei die Hälfte vom Zehner. Das L (= 50) sei die untere Hälfte vom C (= 100) und das D (= 500) die vordere Hälfte vom M (mille = 1000).

In neuerer Zeit wurde aber auch zu beweisen gesucht, daß die römischen Ziffern hervorgegangen seien aus Bildern der Fingerstellungen für die betreffenden Zahlen, daß sie also im engsten Zusammenhange stünden mit dem Fingerrechnen.

Eine Bruchrechnung, selbst im bescheidenen Umfange der griechischen Logistik, besaßen die Römer nicht. Sie kannten duodezimale Teile der Münzen und Gewichte[1]) und hatten zu deren Bezeichnung und Darstellung 11 Bruchnamen und 11 Bruchzeichen. Dem sexagesimalen Bruchsystem der Babylonier steht also hier ein duodezimales der Lateiner gegenüber. Bei uns sind beide ersetzt durch das dezimale.

Was nun das Rechnen selbst anbelangt, so wurde es als Fingerrechnen, als Rechnen auf dem Rechenbrett und als Tabellenrechnen geübt. Das Fingerrechnen hat die älteste Überlieferung für sich. König Numa kannte es schon. Er ließ ein Standbild des Janus errichten, dessen Finger-

[1]) 1 As = 12 Unzen à 12 Obuli (= 327,45 Gramm Kupfer) = 47 Pf., also 1 Obulus = $^1/_{12}$ Unze, 1 Unze = $^1/_{12}$ As.


$\overline{XC}$ $\overline{C}$ $\overline{X}$ M C X I

stellung die Zahl 355,[1]) als Zahl der Jahrestage, andeutete. — Die Finger der linken Hand dienten zur Bezeichnung der Einer und Zehner, die der rechten zu der der Hunderter und Tausender. Auf das Nähere kann hier nicht eingegangen werden.[2])

Neben dem Fingerrechnen war das Abakusrechnen üblich und bildete einen Gegenstand des elementaren Unterrichts. Das römische Rechenbrett hatte 8 längere und 8 kürzere Hauptkolumnen und 3 Nebenkolumnen. Zwischen den längeren und kürzeren Kolumnen waren die Überschriften für die Unzen, Einer, Zehner usw. In den Kolumnen befanden sich bewegliche Stifte mit Marken, in der längeren Kolumne der Unzen 5, in den übrigen längeren 4. Jede kürzere Kolumne enthielt eine Marke. Die Marke der längeren Kolumne bedeutete eine, die der kürzeren 5 Einheiten der betreffenden Überschrift. Der kürzere Teil der ersten Kolumne bildete eine Ausnahme, seine Marke stellte nicht 5, sondern 6 Einheiten vor. Die erste Hauptkolumne konnte also $5 + 6 = 11$ Unzen veranschaulichen. Kam noch eine dazu, so wurden alle 12 ersetzt durch eine Marke der zweiten Kolumne, die ein As bedeutete. Die drei Nebenkolumnen waren für die Obuli bestimmt. Die unterste enthielt zwei Marken à 1 Obulus, die mittlere eine à 3 Obuli und die oberste eine à 6 Obuli.

Mit diesem Rechenbrett konnten alle Rechenoperationen vorgenommen werden, wenn das Einmaleins beherrscht wurde. Dies wurde in den Schulen eingeübt. Der Vorübergehende hörte das montone: unum et unum duo, duo et duo quattuor im Chore hersagen, das häufig vom Klatschen der Rute und vom Heulen der Knaben unterbrochen wurde. Dem Vervielfachen und Teilen waren aber nur geübte Rechner gewachsen. Minder geübte bedienten sich der Rechentabellen, der Rechenknechte,[3]) denen man eine große Anzahl Produkte oder Quotienten direkt oder indirekt entnehmen konnte. Einer dieser Calculi ist auf uns gekommen, es ist der des Victorius, der im Jahre 457 n. Chr. eine Osterrechnung verfaßte.

[1]) Numa Pompilius (715—672 v. Chr.) führte ein Mondjahr von 355 Tagen ein. 5 Monate hatten $5 \cdot 29 = 145$, 7 Monate $7 \cdot 30 = 210$ Tage. Ein 13. Monat (Schaltmonat) suchte dem Sonnenjahr gerecht zu werden.

[2]) Siehe Friedlein, Das Rechnen der Griechen und Römer.

[3]) Calculus = Rechenknecht, Faulenzer.

Die Römer haben sich weder in der Philosophie noch in der Mathematik als selbständige Forscher gezeigt. In der Zeit der Entwicklung des römischen Weltreiches war für philosophische Spekulationen und zahlentheoretische Untersuchungen überhaupt kein Boden vorhanden. Die Erziehung und Heranbildung der Jugend war den Sklaven überlassen, und diese hatten auch die geschäftlichen Rechenvorfälle des täglichen Lebens zu besorgen. Der praktischen Geometrie wurde mehr Beachtung geschenkt. Jedes römische Heer hatte seinen Feldmesser, welcher die Lager abstecken und einteilen und die eroberten Gebiete unter die Ansiedler verteilen mußte. Erst nachdem Griechenland erobert war, und infolgedessen eine größere Anzahl Griechen in Italien lebten, machte sich ein höheres Streben bemerklich. Besonders war es die Richtung der Pythagoräer, an die sich die Römer anschlossen. Von Gelehrten, die mathematische Werke schrieben oder solche aus dem Griechischen übersetzten, sind zu erwähnen: Marcus Terentius Varro 116—27, v. Chr. — ein Freund Ciceros —, Marcus Vitruvius Pallo, 15 v. Chr., Sextus Julius Frontinus, 80 n. Chr., und Appuleius von Madaura in Numidien. Der letztere übersetzte 150 n. Chr. die Werke des Nikomachus in das Lateinische und erschloß damit den Römern das arithmetische Wissen der Griechen. Er soll auch ein eigenes Rechenbuch geschrieben haben. Ein im Jahre 1540 in Paris erschienenes Rechenbuch sagt nämlich, Appuleius habe den Römern das kaufmännische Rechnen gelehrt. Nach Appuleius gewannen Cassiodorus und Manlius Boëthius einen größeren Einfluß auf die mathematische Schulung der Römer.

Aurelius Cassiodorus, im Jahre 500 n. Chr. Geheimschreiber und erster Berater des ostgotischen Königs Theodorich, zog sich später in ein Kloster zurück, wo er eine reiche literarische Tätigkeit entfaltete und das Abschreiben der Bücher als eine Gott wohlgefällige Beschäftigung pries. Er erfand besondere Lampen, damit die Mönche auch nachts „arbeiten" konnten. Auf die Anregung des Cassiodorus hin gelangten viele Bibliotheken in den Besitz wertvoller Schriften der Alten.

Das Hauptwerk von Cassiodorus: de artibus ac disciplinis liberarium litterarium verdient in der Geschichte der Pädagogik ernste Beachtung, weil er in ihm alles irdische Wissen in zwei Hauptgruppen einteilt, in das **Trivium** Grammatik, Dialektik und Rhetorik und in das **Quadrivium** Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie. Diese Zweiteilung blieb das ganze Mittelalter hindurch für das gesamte Unterrichtswesen maßgebend.

Manlius Boëthius, ein Zeitgenosse des Cassiodorus, übersetzte viele Werke der Griechen in das Lateinische und schrieb Lehrbücher über Arithmetik, Musik und Geometrie. Die Arithmetik ist nach seinen eigenen Worten eine Bearbeitung des Werkes von Nikomachus. Die Zahlen 1 bis 9 nennt er Fingerzahlen, die Zehner Gelenkzahlen und die übrigen zusammengesetzte Zahlen.[1]

Boëthius behandelte zuerst das Multiplizieren und Dividieren. Er zählt die Produkte auf, die entstehen, wenn man mit Einer, mit Zehner, mit Hunderter vervielfacht. Bei der Division erscheint zum erstenmal die sogenannte komplementäre Division, die dann das ganze Mittelalter hindurch eine Rolle spielt. Wir wollen deswegen ihr Prinzip an einem Beispiel erklären. Der Divisor wird um das „Komplement" erhöht, d. h. um die Differenz zwischen ihm und der nächst höheren Gelenkzahl. Man dividiert nun durch diese Gelenkzahl und vergrößert dann den Rest um das Produkt aus Quotient und Komplement, z. B. 1745 : 37.

$$\begin{array}{l} 1745 : 40 = 40 + 6 + 1 = 47,\ \text{Rest } 6. \\ \underline{1600} \\ \underbrace{145 + 120}_{265};\quad 265 : 40 = 6 \\ \qquad\qquad\quad \underline{240} \\ \qquad\qquad\quad \underbrace{25 + 18}_{43};\quad 43 : 40 = 1; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{40} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 3 + 3 = 6. \end{array}$$

Zum ersten Reste (145) zählt man das Produkt aus $40 \cdot 3 = 120$, zum zweiten (25) das aus $6 \cdot 3 = 18$ usw.

In der Einleitung zu seiner Geometrie sagt Boëthius, die Pythagoräer hätten sich, um bei der Multiplikation und Division nicht in Irrtümer zu verfallen, einer Tafel bedient, der mensa Pythagoraea, die später Abakus genannt worden sei. Er beschreibt nun diese Tafel näher, bringt aber an Stelle der

[1]) Fingerzahlen = digiti, Gelenkzahlen = articuli.

Marken phantastisch geformte Zeichen, Ziffern, die er Apices nennt.[1]) Diese Apices signalisieren das Erscheinen der Positionsarithmetik.

Boëthius betont, man könne mit den „pythagoräischen Apices“ bald eine bestimmte Anzahl Einer, bald eine bestimmte Anzahl Zehner usw. bezeichnen, je nachdem man sie in eine andere Kolumne setze. — Die Null kennt er nicht, seine Ziffern sind deswegen nur in Kolumnen zu gebrauchen.

Boëthius spricht wiederholt von einem lateinisch schreibenden Architas; seine Apices sollen aus einem Werke dieses Gelehrten stammen. Nun kennt aber die Geschichte nur einen Archytas, der um das Jahr 400 v. Chr. in Tarent einer pythagoräischen Schule angehörte. Dieser lateinische Architas ist deswegen wahrscheinlich nichts anderes als eine lateinische Übersetzung der Werke des griechischen Archytas. Die Apices würden also diesem Griechen Archytas oder einem seiner Schüler zuzuschreiben sein. Dieser Frage werden wir in einem späteren Kapitel näher treten.[2]) Boëthius beteiligte sich auch an religiösen und politischen Kämpfen; er stand auf Seite der römischen Geistlichkeit, während Theodorich und seine Anhänger Arianer waren, und suchte dem römischen Senat mehr Freiheiten und größere Rechte zu verschaffen. Theodorich ließ ihn verhaften und nach längerer Gefangenschaft im Jahre 524 n. Chr. hinrichten. Später wurde er heilig gesprochen.

Von nun an tritt das Abakusrechnen in vereinfachter Form auf, da man für die Anzahl der Einheiten der einzelnen Ordnungen immer nur *eine* Marke (eine Ziffer) nötig hatte. Wir wollen an einigen Beispielen zeigen, wie man jetzt mit Hilfe des Abakus rechnete.

1. Addiere die Zahlen LXXVI und XXXXVIII.

C	X	I
	7	6
	4	8
	~~1~~	4
1	2	

Man setzt die entsprechenden Apices ein, addiert im Kopfe $6 + 8 = 14$, setzt die ganze Summe ein, addiert $1 + 4 + 7 = 12$, nimmt 1 weg, setzt dafür 12 ein und hat nun 4 Einer, 2 Zehner und 1 Hunderter. Die Summe wird in römischen Ziffern dargestellt = CXXIV.

1) Apex (-icis) = kleiner Kegel.

2) Siehe Seite 47.

2. Multipliziere 34 mit 26.

C	X	I
	2	6
	3	4
	~~2~~	4
~~1~~	~~8~~	
	~~8~~	
~~6~~		
~~1~~	8	
8		

$4 \cdot 6 = 24,\ 3 \cdot 6 = 18,$

$4 \cdot 2 = \ 8,\ 3 \cdot 2 = \ 6.$

Das Produkt enthält 4 Einer, 8 Zehner und 8 Hunderter, heißt also DCCCLXXXIV = 884.

Die Division wird nach dem komplementären Verfahren, das wir oben besprochen haben, durchgeführt. Da die schriftliche Erklärung (der vielen Apices wegen, die wieder weggenommen werden müssen) sehr weitschweifig würde, wollen wir nicht näher darauf eingehen.[1])

§ 7.

Die Israeliten.[2])

Wie die Griechen, so benützten auch die Israeliten die Buchstaben ihres Alphabets als Zahlzeichen, aber erst von der letzten Hälfte des ersten Staatslebens ab. Vorher bedienten sie sich einzelner Striche oder der Zahlwörter. Die Zahlen 1—9 wurden durch die ersten 9 Buchstaben, die Zahlen 10—90 durch die zweiten 9 usw. dargestellt. Von den Brüchen waren nur $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_{10}$, $^2/_{10}$, $^3/_{10}$ usw. in Gebrauch.

Die Bibel kennt die Addition, die Subtraktion, die Multiplikation, das Potenzieren und das Dividieren. Eine zusammengesetzte Rechnung befindet sich in 3. Moses 27, 19. Da schon unter der syrischen Herrschaft die gebildeten Juden nur griechisch sprachen, so hörte die hebräische Sprache auf, eine lebende Sprache zu sein. Sie wurde nur noch als Sprache der hl. Schrift und des jüdischen Kultus gepflegt. Aus diesem Grunde kann sich die Arithmetik der Juden nicht wesentlich von der der Griechen unterscheiden. Daß die Juden die theoretische Arithmetik irgendwie gefördert

---

[1]) Siehe Friedlein, Das Rechnen der Griechen und Römer.

[2]) Nach Dr. Homburger, Real-Enzyklopädie für Bibel und Talmud.

hätten, läßt sich nicht nachweisen. „Der Tempelabriß in Ezechiel setzt aber nicht unbedeutende mathematische Kenntnisse voraus.“ Siehe auch § 9.

§ 8.

Die Inder.

Um das Jahr 1400 v. Chr. wanderten Arier in das heutige Dekhan ein, unterjochten die eingeborene Bevölkerung und machten ihre Sprache, das Sanskrit, zur Volkssprache. Diese ging aber als solche wieder verloren und war vom 6. Jahrhundert v. Chr. ab nur noch als tote Sprache die Sprache der Schule und der Gelehrsamkeit. In dieser Sprache sind eine große Anzahl Werke verschiedenen Inhalts verfaßt, die uns einen Einblick in das Kultur- und Geistesleben der Hindu, resp. ihrer Gelehrten, der Brahmanen, gestatten. Aus manchem dieser Werke ist zu ersehen, daß Gedanken griechischer Philosophen und Mathematiker schon frühe Eingang in Indien gefunden haben. Umgekehrt läßt sich aber auch nachweisen, daß auch Griechen, besonders die Alexandriner, aus indischen Quellen schöpften. Es fand also schon in den ältesten Zeiten ein geistiger Verkehr zwischen dem Osten und dem Westen statt, der dann durch die Eroberungszüge von Alexander dem Großen noch weiter gefördert wurde. Für diese geistige Wechselwirkung spricht besonders das astronomische Lehrbuch Surya Siddhanta, welches zwischen dem 3. und 4. Jahrhundert v. Chr. von einem unbekannten Gelehrten verfaßt wurde und verschiedene griechische Ausdrücke enthält, die trotz ihrer indischen Verkleidung leicht zu erkennen sind.

Wenn von den Griechen behauptet wird, die Geometrie sei ein Ergebnis ihrer Geistestätigkeit, so muß von den Indern hervorgehoben werden, daß man es ihnen zu verdanken hat, daß die elementare Arithmetik, die Technik des bürgerlichen Rechnens, Gemeingut der Völker geworden ist. Die Inder sind die Erfinder unserer Ziffern, der Positionsarithmetik und der mechanischen Ausführungen der Berechnungen.

Sie haben sich schon frühe mit großen Zahlen beschäftigt und Namen für die dezimalen Einheiten bis zu 10^{17} gebildet.

Buddha habe sogar Wörter für die Potenzen 10^1 bis 10^{54} gehabt. Das Bestreben, die Zahlen auf einfache Art schriftlich darzustellen, führte sie zur Erfindung der 9 Ziffern. Diese treten schon auf uralten Inschriften auf. Die Null erscheint viel später. Im 2. Jahrhundert war sie noch nicht bekannt, denn sonst wäre sie damals, als durch den indisch-alexandrinischen Verkehr die indischen Ziffern nach Westen gelangten und dort als pythagoräische Zeichen, als Apices, Verwendung fanden, gleichzeitig bekannt geworden. Architas, respektive Boëthius, kennt sie aber nicht. Sie ist höchst wahrscheinlich im 4. Jahrhundert n. Chr. erfunden worden. Gesichert ist ihr Vorkommen seit dem Jahre 400 n. Chr. (Siehe Seite 47.)

Wie man jetzt allgemein annimmt, waren die 9 alten indischen Ziffern, aus denen die unsrigen hervorgegangen sind, nichts anderes als die Anfangsbuchstaben der ersten 9 Zahlwörter auf Sanskrit. (Siehe die Tafel.[1])

Nach der Erfindung der Null war es möglich, alle Zahlen auf höchst einfache und sinnreiche Weise schriftlich darzustellen: man gab den einzelnen Zahlzeichen **Ziffernwerte** und **Stellenwerte** und kam damit zu der sogenannten **Positionsarithmetik,** die nicht nur der Mathematik, sondern vor allem der ganzen Menschheit in den alltäglichen Vorfällen des praktischen Lebens hervorragende Dienste geleistet hat und in aller Zukunft leisten wird. Erst durch die Positionsarithmetik ist das Rechnen Gemeingut des Volkes aller Nationen geworden. Vorher war es nur privilegiertes Eigentum von einzelnen Bevorzugten.

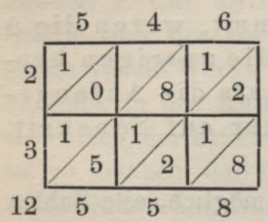
Eigentliche mathematische Schriftsteller scheint es in Indien nicht gegeben zu haben, dagegen fanden Astronomie und Astrologie ihre berufsmäßigen Vertreter, und da diese genötigt waren, gewisse mathematische Kenntnisse vorauszusetzen, so entwickelten

---

[1]) Am 6. Juni 1906 hielt Dr. Mischke in Tokio einen Vortrag über die Herkunft unserer Ziffern, in welchem er auf Grund ihrer Gestalt zu beweisen suchte, daß sie aus den chinesischen Ziffern hervorgegangen, und daß diese aus den Bildern der Fingerstellungen für die Zahlen entstanden seien. Beide könnten aber auch aus einer gemeinsamen Quelle abstammen, von der sich dann die chinesischen Ziffern weniger entfernt hätten als die arabisch-indischen.

sie in den Einleitungskapiteln ihrer Lehrbücher die Elemente der mathematischen Lehren. So besitzen wir Werke von den Astronomen Aryabatta, geb. 476 n. Chr., Brahmagupta, geb. 598 n. Chr., und Bhaskara, geb. 1114 n. Chr., die uns mit dem Rechenverfahren jener Zeiten so nebenbei bekannt machen.

Wir sehen hier, daß es nicht wesentlich verschieden war von dem, das wir heute benützen. So wird z. B. die Aufgabe 835 — 648 gelöst, indem entweder gesagt wird, 8 von 15 bleibt 7, 4 von 12 bleibt 8, 6 von 7 bleibt 1 (Rest = 187), oder es wird das sogenannte Additionsverfahren angewandt: 8 + 7 = 15, behalte 1, 1 + 4 = 5; + 8 = 13, behalte 1, 1 + 6 = 7; + 1 = 8. Das folgende Beispiel zeigt, wie die Inder vervielfachten. 23 · 546.



Man schreibt die Faktoren an die Seiten eines in Quadrate eingeteilten Rechtecks, zieht alle Diagonalen, vervielfacht nun, mit einem beliebigen Faktor beginnend, setzt die Produkte auf die in beistehender Figur angedeutete Weise in die Quadrate ein und addiert die in den schiefen Reihen stehenden Zahlen. — Die Resultate aller 4 Spezies werden durch die Neunerprobe geprüft, die in dem zahlentheoretischen Satze begründet ist, daß die Ziffernsumme (Quersumme) einer Zahl den gleichen Rest liefert wie die Zahl selbst. Siehe § 10.

Nachdem die 4 Spezies und das Wurzelausziehen erklärt sind, bringen die Rechenbücher eine Reihe angewandter Aufgaben. Es sind Regeldetri-Rechnungen direkten und indirekten Verhältnisses, Zins- und Zinseszinsaufgaben, Gesellschafts- und Mischungsrechnungen, Permutationen, Reihen, Regula falsi-Aufgaben, geometrische und trigonometrische Probleme und Gleichungen. Bei den Zinsrechnungen beträgt der monatliche Zinsfuß gewöhnlich 5 %.

Viele Aufgaben sind in ein poetisches Gewand eingekleidet, welches gewöhnlich dem Stoffe trefflich angepaßt ist. „Von einem Schwarm Bienen läßt sich $1/5$ auf einer Kadamablüte und $1/3$ auf der Silindablume nieder. Der dreifache Unterschied der beiden Zahlen flog nach den Blüten eines Kutapa; eine einzige Biene blieb übrig, welche in der Luft hin- und herschwebte, gleichzeitig angezogen durch den lieblichen Duft einer Jasmin und eines Pandamus. Sage mir, süßes Mädchen mit den glitzernden Augen, sage mir die Anzahl der Bienen.“ „Bei verliebtem Ringen brach eine Perlenschnur. $^1/_6$ der Perlen fiel zu Boden, $^1/_5$ blieb auf dem Lager liegen, $^1/_3$ rettete das Mädchen, $^1/_{10}$ nahm der Geliebte an sich. 6 Perlen blieben aufgereiht. Sage mir, reizendes Weib, wie viel Perlen hat die Schnur enthalten?“

Die Regeldetri-Rechnungen sind indischen Ursprungs — die Griechen benützten, wie wir früher sahen, die Proportionen zum Auflösen der sogenannten Geschäftsrechnungen —; sie werden auf direkte und indirekte Verhältnisse angewandt. „30 Balken von 12 Zoll Dicke, 16 Zoll Breite und 14 Fuß Länge kosten 100 Nischkas; was kosten 14 Balken von 8 Zoll Dicke, 12 Zoll Breite und 10 Fuß Länge? Wenn es 8 Drachmen kostet, die ersten Balken eine Meile weit fortzuschaffen, wie viel kostet es dann, die letzten Balken 6 Meilen zu befördern?“ „Eine Sklavin von 16 Jahren kostet 32 Nischkas, was kostet eine von 20 Jahren?“ $16 \cdot 32 : 20 = 25{,}60$ Nischkas. Die indischen Rechenbücher lösen ihre Aufgaben nach bestimmten Regeln, die ohne weitere Erklärung oder Begründung geboten und angewandt werden. Z. B.: von vier Juwelieren besitzt A 8 Rubine, B 10 Saphire, C 100 Perlen und D 5 Diamanten. Es schenkt nun jeder den drei anderen ein Stück von seinem Eigentum und sie besitzen nun gleich viel. In welchem Wertverhältnis stehen die Edelsteine? Es heißt nun: ziehe von den Zahlen 8, 10, 100 und 5 die Anzahl der Personen ab, teile den Rest in ihr kleinstes Vielfache und du erhältst 24, 16, 1, 96. Der Diamant ist also 96mal wertvoller als die Perle usw.

§ 9.

Die Araber.

Die Araber gründeten um das Jahr 2500 v. Chr. unter der Dynastie der Hamyariten ein Reich, das 2000jährigen Bestand gehabt haben soll. Sie standen in den ältesten Zeiten in einem großen Rufe von Bildung und Gelehrsamkeit, so daß Salomons Weisheit von seinen Zeitgenossen mit der der Araber verglichen wurde. Ihre Schrift hatte für die Zahlen 1, 5, 10, 20 einzelne Zeichen. Mit diesen vier Ziffern stellten sie alle Zahlen dar. Durch die Eroberungszüge der Babylonier wurden auch die

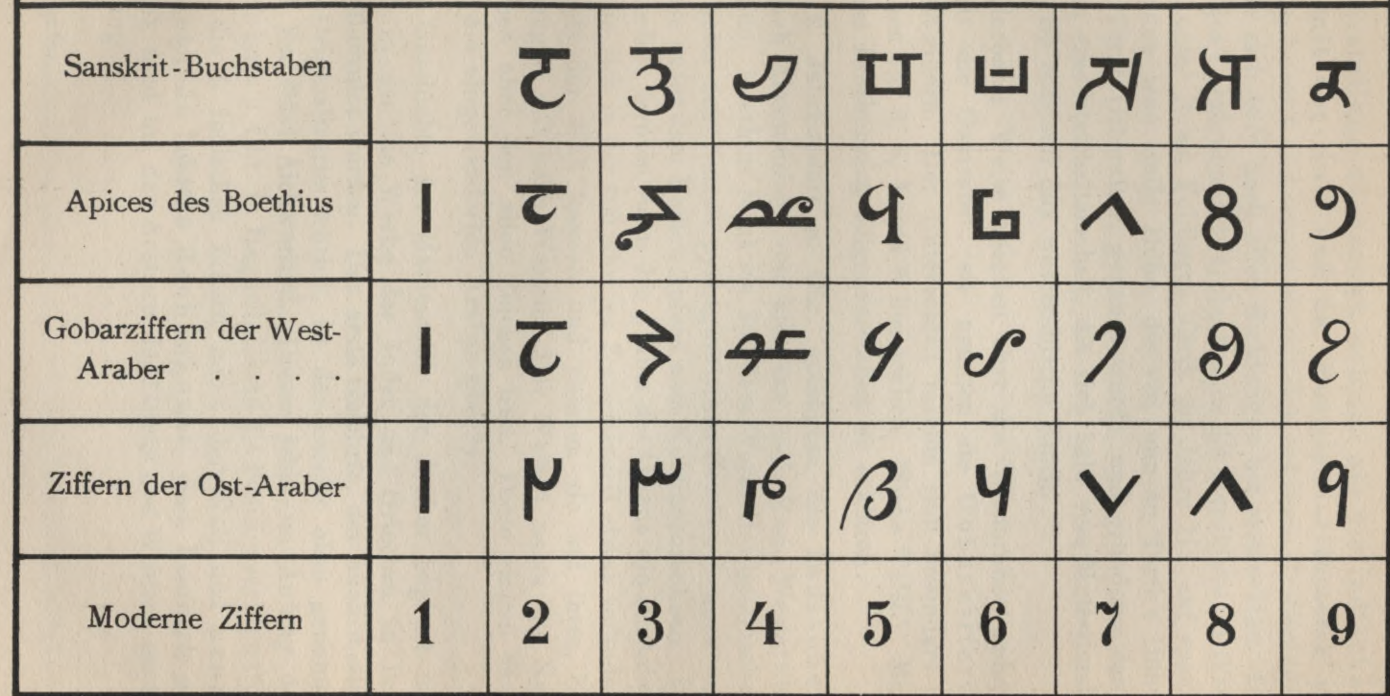
Araber in Mitleidenschaft gezogen und infolge dessen mit innerasiatischer und griechischer Bildung bekannt.

Um die Mitte des 7. Jahrhunderts n. Chr. entwickelte sich eine neue Schrift, die sich besonders in der am Euphrat gelegenen Stadt Kufa ausbildete und vor allem zum Niederschreiben des Korans benützt wurde. Die ursprüngliche Schrift verschwand. Die neue Schrift enthält 22 Buchstaben, die von den Phöniziern übernommen seien. Die Zahlen wurden von nun an, nach griechischem Muster, durch diese 22 Buchstaben, zu denen noch 6 alt-arabische hinzukamen, dargestellt und zwar von rechts nach links, weil die Araber, wie alle Semiten, in dieser Richtung schrieben. Im Anfange des 9. Jahrhunderts n. Chr. tritt nun plötzlich eine andere Zahlenbezeichnung und eine andere Zahlendarstellung auf: die Zahlen werden mit besonderen Ziffern und außerdem von links nach rechts geschrieben. Da diese Schreibart der früheren entgegengesetzt gerichtet ist, und sich außerdem nur auf die Zahlen beschränkt, so ist deren fremdländischer Ursprung unstreitig. Wie ist diese Erscheinung zu erklären?

Unter der Regierung des Kalifen Almansûr (754—775) wurden mehrere indische und griechische Werke verschiedenen Inhaltes in das Arabische übersetzt. Seine Nachfolger Hârûn Arraschid (786—809) und Almamûn (813—833), die mit Erfolg anfingen, ihre Herrschaft zu erweitern, spornten zu weiteren Übersetzungen an, damit ihre Untertanen den benachbarten Völkern in geistiger Beziehung ebenbürtig würden. So lernten die Araber medizinische, philosophische, astronomische und mathematische Werke anderer Nationen kennen. Aus dem Sanskrit gab Al Fazârî die Astronomie Siddhânta unter dem Namen Sindhind in arabischer Sprache heraus, Alchwarizmi übersetzte das Werk des Brahmagupta, andere erschlossen den Arabern Euklid und Ptolemäus und einige andere. Aber auch schon früher kamen die Araber mit der indischen Kultur in Berührung und zwar in persönliche Berührung, als sie unter dem Omaijaden Welid I in den Jahren 705—715 auf Eroberungszügen bis an den Indus vordrangen.

Sie hatten also reichlich Gelegenheit, sich indische Wissenschaft anzueignen. Von der Zweckmäßigkeit der indischen

Entwicklung unserer Ziffern.



Zahlendarstellung überzeugt, nahmen sie die indischen Ziffern mit der Null und der Positionsarithmetik in ihre Sprache auf und trugen sie mit sich auf ihren Eroberungszügen, die sich bald nach allen Richtungen hin erstreckten. Im Verlaufe des 7. Jahrhunderts eroberten sie die Nordküste Afrikas, besetzten unter ihrem Feldherrn Târik im Jahre 711 auf spanischem Boden jene steile Höhe, die von nun an Târik's Höhe, Dschebel Târik, Giberaltar, genannt wurde, und gründeten dann in Spanien eine Statthalterschaft, die sich bald vom Mutterlande loslöste. So entstand das westarabische Reich.

Sonderbarer Weise besaßen aber die Westaraber andere Ziffern als die Ostaraber, sie nannten sie Gobarziffern, Staub(brett)ziffern. Der Unterschied machte sich besonders in den Zeichen für 5, 6, 7 und 8 bemerklich. (Siehe Tafel.) Man sucht diese Erscheinung folgendermaßen zu erklären:

Im 2. Jahrhundert n. Chr. gelangten die indischen Ziffern nach Alexandrien, von hier aus nach Rom, Westafrika und Spanien. Boëthius lernt sie aus dem Werke des lateinischen Architas unter dem Namen pythagoräischen Zeichen kennen und benützt sie unter dem Namen Apices zum Kolumnenrechnen. Im 8. Jahrhundert lernten dann die Araber des Ostens die indischen Ziffern, die sich in der 600jährigen Zwischenzeit etwas verändert hatten, mit der Null kennen und nahmen sie auf ihren Eroberungszügen mit nach Westen. Der Westen nahm die Null auf, blieben aber den alten Zeichen treu. Diese gingen dann auch auf die eingewanderten Araber über.[1])

Die Geschichte der Mathematik der Araber beginnt mit der Zeit, in der die Werke der Inder und Griechen in ihre Sprache übersetzt wurden. Der erste Gelehrte, der auch mathematische Originalwerke schrieb, ist der bereits oben genannte **Muhamed ibn Mûsâ Alchwarizmi.** Dieser lebte im Anfang des 9. Jahrhunderts n. Chr. in Bagdad, lehrte die Positionsarithmatik, benützte die 9 indischen Ziffern nebst der Null und nennt seine Methode **indische** Rechenkunst. Sein Lehrbuch der Arithmetik fand bei den Arabern des Ostens und Westens große Verbreitung.

---

[1]) Cantor.

Die Lehre von der Positionsarithmetik wurde von nun an nach seinem Familiennamen Alchwarizmi Algorithmus[1]) und die, welche sich ihrer bedienten, Algorithmiker genannt im Gegensatz zu den Anhängern des Rechenbrettes, die Abacisten hießen.

Muhammed behandelt zuerst die Darstellung der Zahlen und bemerkt dabei, daß seine Ziffern nicht genau mit den indischen übereinstimmen, und daß auch andere Völker ähnliche besitzen. Dann lehrt er die Addition und die Subtraktion. „Ist die Summe größer als 9, so nehme die Zehner zu der folgenden Stelle und schreibe an die ursprüngliche nur das, was unter 10 noch übrig ist; bleibt nichts übrig, so setze den Kreis,[2]) damit die Stelle nicht leer sei, und man versucht wäre, die zweite Stelle für die erste zu nehmen.“ Das Addieren und Subtrahieren wird von der höchsten Stelle aus, das Halbieren von der niedersten, das Verdoppeln, Multiplizieren und Dividieren wieder von der höchsten aus begonnen. „Die Arbeit wird so, so Gott will, nützlicher und leichter.“

Das Multiplikationsverfahren ist das der Inder. Die Division wird in der umgekehrten Reihenfolge ausgeführt; der Divisor kommt unter den Dividenden; der Quotient über ihn zu stehen. Im Anschluß an die Division kommt der Verfasser auf die Brüche zu sprechen und bemerkt, die Inder hätten sich der 60igteiligen Brüche bedient. Diese werden nun erklärt und rechnerisch verwertet. Das Rechenbrett kennt Muhammed nicht. Später wurde ihm die Begründung der Lehre von den Gleichungen zugeschrieben, weil er berichtet, der Kalif Almamûn habe ihn aufgefordert, ein Werk über Aldschebr und Almukâbala zu schreiben, das sich auf das Leichteste und Gebräuchlichste in der Arithmetik und ihren praktischen Anwendungen beschränke. Dem Wortlaute nach heißen jene Ausdrücke Wiederherstellung und Gegenüberstellung, Worte, die ohne weiteres nichts sagen, und die Muhammed auch nicht erklärt.

---

[1]) Das Lehrbuch des Alchwarimzi wurde im Jahre 1120 von einem englischen Mönch, namens Atelhart von Bath, in das Lateinische übersetzt. Die Übersetzung beginnt mit den Worten: „Dixit Algorithmi“ es sprach Alchwarizmi.

[2]) Bei den Indern hieß die Null Cûnga = das Leere, das von den Arabern mit Sifra übersetzt wurde. Aus dem Sifra entstand unser „Ziffer“. Das Wort Null kommt vom Lateinischen nullus a. um keiner.

Es muß sich dabei also um etwas handeln, was den Fachgenossen bereits bekannt war. Muhammed kann demnach nicht der Erfinder der Algebra sein. Das, was er als Aldschebr bietet, ist zum größten Teil griechischen, zum kleineren Teil indischen Ursprungs.

Auch bei den Arabern des Westens wurden die mathematischen Wissenschaften gepflegt und gefördert. Ihr Reich stand um das Jahr 1000 auf der Höhe seines Ruhmes. Kunst und Wissenschaften fanden bei den Kalifen Cordovas außerordentliche Wertschätzung und Unterstützung. Besonders waren es die philosophischen und mathematischen Werke der Griechen, denen die Mauren hohe Beachtung schenkten, und die sie in großer Anzahl in ihre Sprache übersetzten. So entstanden umfangreiche Bibliotheken. Die der Hauptstadt soll 600 000 Bände umfaßt haben. Es strömten deswegen aus der ganzen muhammedanischen Welt Wissenbedürftige nach Cordova, Sevilla und Granada, um sich hier weiter zu bilden. Bald zogen die arabischen Gelehrten die Aufmerksamkeit jüdischer und christlicher Kreise auf sich. Man begann, ihre Arbeiten in das Kastilianische und in das Lateinische zu übersetzen, um sie auch Nichtarabern zugänglich zu machen. So entstanden eine Reihe Übersetzungsschulen. Die hervorragendste war die in Toledo, das in der zweiten Hälfte des 12. Jahrhunderts bereits wieder christlich war.

Durch diese Übersetzungen aus dem Arabischen wurde das Abendland eigentlich erst mit manchen wissenschaftlichen Geistesprodukten des klassischen Altertums näher bekannt, da ihm jetzt erst die Quellen in ausgiebigerem Maße zugänglich waren, wenn auch indirekt in doppelter oder in dreifacher Hinsicht.[1])

An diesen Arbeiten beteiligten sich auch verschiedene jüdische Schriftgelehrte, wie Abraham Ibn Esra, Elia Mizrachi, Maimonidas, Johannes von Luna (Johann von Sevilla) u. a. m. Der letztere übersetzte ein Rechenbuch und eine Algebra aus dem Arabischen. Das erstere ist für uns insofern wichtig, weil in ihm zum ersten Mal Dezimalbrüche vorkommen, freilich keine modernen Dezimalbrüche, sondern

---

[1]) Griechisch-Arabisch-Lateinisch. Lateinisch-Arabisch-Lateinisch. Griechisch-Lateinisch-Arabisch-Lateinisch. Arabisch-Kastilianisch.

solche der Idee nach. Beim Wurzelausziehen werden nämlich dem Radikanden 2 n Nullen angehängt, dann wird die Wurzel nach dem heutigen Verfahren ausgezogen. Die nach den Ganzen der Wurzel kommenden Stellen bilden dann den Zähler eines Bruches vom Nenner 1 mit n Nullen.

Auch die Westaraber kannten das Abakusrechnen nicht. Der Positionsarithmetik war es eben entbehrlich.

„Den Arabern ist man großen Dank schuldig, weil sie das Rechnen, die Arithmetik und die Algebra in leicht zugänglichen Formen in das Abendland brachten. Mit ihrer frischen Wüstenkraft waren sie würdige Erben antiker Geistesarbeit, die das anvertraute Gut zu wahren und zu mehren verstanden. Wohin sie auch auf ihren Eroberungszügen kamen, brachten sie, als Krieger und Lehrer zugleich, ihre Wissenschaft mit. Besiegten gaben sie als ersten Tribut ihre Bildung; gezwungen, ein Gebiet zu verlassen, nahmen sie auf der Flucht auch das Wissen mit. So verkümmerten die mathematischen und astronomischen Lehren in Spanien vollständig, nachdem der letzte Maure verschwunden war."

§ 10.

Die abendländischen Christen.

Wie wir schon bei den Römern gesehen haben, fanden die mathematischen Wissenschaften bei den Christen der ersten Jahrhunderte Vertreter und Förderer. Wir erinnern an Cassiodorus und an Boëthius. Kurz nach jener Zeit erwarben sich auch verschiedene kirchliche Würdenträger anderer Nationen große Verdienste um die Verbreitung arithmetischer Kenntnisse. Es sind dies:

1. **Isidor**, Bischof von Sevilla. Dieser wurde im Jahre 570 in Carthagena geboren und gelangte mit 30 Jahren auf den Bischofsstuhl. Er schrieb eine Encyklopädie von 20 Büchern, von denen das dritte die mathematischen Wissenschaften behandelte. Die Zahl steht bei Isidor in hohen Ehren; er sagt: „Nimm die Zahl aus allen Dingen, und Alles geht zu Grund. Raube dem Jahrhundert die Rechnung, und die

Gesamtheit wird von blinder Unwissenheit ergriffen, und nicht kann vom Tier unterschieden werden, wer die Verfahren des Calcüls nicht kennt."

In seinem Buch spricht er in erster Reihe vom Wesen der Zahl, hierauf behandelt er die Linear-, die Flächen- und die Körperzahlen und lehrt dann die Proportionen. Merkwürdigerweise gibt er keine Auskunft über die 4 Spezies und spricht nur von kleinen Steinchen, welche die Alten in der Hand zu halten und Zahlen daraus zusammenzulegen pflegten. Von den Apices des Boëthius spricht er nicht. Indische Ziffern und Positionsarithmetik sind ihm unbekannt. — Seine Encyklopädie war lange Zeit die Hauptquelle des Wissens. — Größere Verdienste als durch seine Bücher erwarb er sich durch Gründung von Klosterschulen, in welchen den Kindern die notwendigsten Kenntnisse gelehrt wurden.

2. **Beda Venerabilis** starb als Mönch in einem englischen Kloster (735). Er schrieb verschiedene Werke theologischen, historischen und mathematischen Inhaltes. In den letzteren lehrte er das Fingerrechnen, das Rechnen mit Unzen und das Bestimmen des Osterfestes. Die Grundoperationen behandelt er ebenfalls nicht. Auch für ihn gibt es keine Apices und keine indischen Ziffern.

3. Der Angelsachse **Alkuin** war Leiter der Yorker Klosterschule. Auf einer Romreise kam er im Jahre 780 in Parma mit Karl dem Großen zusammen, der ihn an seinen Hof einlud. Alkuin folgte dieser Einladung. Im Jahre 790 kam er dann als Abt in das Kloster von Tours; hier gründete er eine berühmte Klosterschule, aus der viele Lehrer hervorgingen, die in seinem Geiste an anderen Orten wirkten. Er starb 804.

Alkuin schrieb verschiedene Bücher, darunter auch arithmetische. Die letzteren enthielten Rechenaufgaben aus allen Gebieten des bürgerlichen Lebens, aber auch solche zur Schärfung des Verstandes, die er Rätselaufgaben nannte, z. B.: 1) Zwei Männer kaufen für 100 Solidi Schweine, je 5 Stück zu 2 Solidi. Die Schweine teilen sie unter sich, verkaufen sie, wie sie sie gekauft haben und behalten doch einen Nutzen übrig. Wie ging dies zu? (Die Anzahl der Schweine beträgt $100 \cdot {}^5/_2 = 250$ Stück. Davon kommen auf jeden Händler 125 Stück. A nimmt 125 fette, B 125 magere. Der erstere verkauft das Stück für $^1/_2$ und der letztere für $^1/_3$ Solidus. A löst $125 \cdot {}^1/_2$ und B $125 \cdot {}^1/_3 = 62\,{}^1/_2 + 41\,{}^2/_3 = 104\,{}^1/_6$ Solidi. Sie gewinnen mithin $4\,{}^1/_6$ Solidi, obwohl sie die Schweine so verkauften, wie sie dieselben eingekauft hatten, d. h. je 5 Stück für 2 Solidi, denn A verkauft 2 Stück für 1 Solidus und B 3 Stück für 1 Solidus, macht zusammen 5 Stück für 2 Solidi.) 2) 100 Scheffel Weizen werden unter 100 Personen so verteilt, daß ein Mann 3, eine Frau 2 und 1 Kind $^1/_2$ Scheffel bekommt. Wie viel Männer, Frauen und Kinder waren es? Die Antwort lautet 11 Männer, 15 Frauen und 74 Kinder. Die Lösung ist aber nicht einmal angedeutet. Es ist hier angezeigt, hervorzuheben, daß dies die erste diophantische Gleichung ist, die uns in lateinischer Sprache entgegentritt. 3) Ein Hund verfolgt einen Hasen, der 150 Fuß voraus ist, aber nur 7 Fuß weite Sprünge macht, während der Hund 9 Fuß weit springt. Nach wie viel Sprüngen hat der Hund den Hasen eingeholt? Es wird gesagt, die Losung laute $^{150}/_2 = 75$ Sprünge usw.

Die 42. Aufgabe lehrt das Summieren der arithmetischen Reihen, indem gezeigt wird, daß je zwei zum Anfang und zum Ende symmetrisch liegende Glieder gleiche Summen besitzen. Zwei Stellen seines Werkes lassen vermuten, daß er die Apices des Boëthius kennt, aber nicht zu verwerten weiß. Die indischen Ziffern und die Positionsarithmetik sind ihm unbekannt.

4. **Odo, Abt von Cluny** starb 943. In einer im 13. Jahrhundert erschienenen Handschrift wird von Odo behauptet, er habe in einem Lehrbuch der Arithmetik das Abakusrechnen mit Hilfe der Apices behandelt. Dieses Lehrbuch wurde aber bis jetzt noch nicht aufgefunden.

5. Ein berühmter Gelehrter war der Franzose **Gerbert,** der im Jahre 999 als Sylvester II den päpstlichen Thron bestieg. Als Scholastiker benützte er in Rheims die Werke des Boëthius und unterrichtete in Philosophie, Rethorik, Mathematik, Musik und Astronomie. Er lehrte die 4 Spezies mit Hilfe des Abakus und der Apices und wird deswegen in einer Chronik von Verdun der zweite Boëthius genannt. Kaiser Otto III. schrieb ihm im Jahre 994 und bat ihn dringend, ihn zu besuchen, um in ihm den Geist der Griechen zu erwecken und ihm das Buch der Arithmetik zu erklären. Gerbert nahm die Einladung an mit

den Worten: „Wahrlich, etwas Göttliches liegt darin, daß ein Mann wie du, Grieche von Geburt, Römer von Herrschermacht, gleichsam aus erbschaftlichen Rechten, nach den Schätzen der Griechen- und Römerweisheit sucht.“

Als Papst verfaßte er eine aus 12 Hexametern bestehende Inschrift für ein Denkmal des Boëthius, mit welchem Otto III. das Grab des berühmten Gelehrten zu Pavia schmückte.

Die realististen Studien, die durch Alcuin in die Klosterschulen kamen, waren vor Gerberts Auftreten wieder verschwunden. Weltliches Wissen wurde nur von einzelnen Mönchen gepflegt. Die Klosterbibliotheken sahen meistens sehr ärmlich aus und bestanden gewöhnlich nur aus 15 bis 20 Bänden, die einzeln angekettet waren. Gerbert brachte neues Leben und neues Streben auf. Durch Abschreiben, das schon Cassiodorus als die verdienstlichste körperliche Arbeit mit begeisterten Worten pries, wurden nun wieder in den meisten Klöstern seltener gewordene Handschriften vervielfältigt, darunter auch die mathematischen. Mit Gerberts wachsendem Ansehen fand das Abakusrechnen im Abendlande allgemeine Verbreitung.

6. **Bernelinus,** ein Schüler Gerberts, hat ein Buch über das Abakusrechnen geschrieben, das später durch den Druck vervielfältigt wurde. Er bediente sich der Apices und der römischen Ziffern. Die Null kennt er nicht. Ein besonderer Abschnitt lehrt das Rechnen mit Brüchen, aber nur mit Duodezimalbrüchen.

7. **Hermanus Contraktus,** Sohn eines schwäbischen Grafen, lebte als Mönch im Kloster Reichenau, wo er als berühmter Lehrer der Mathematik viele Schüler aus allen Ländern an sich zog. Er war verkrüppelt und konnte nur mit Mühe verständlich sprechen, entwickelte aber seine Lehren mit herzgewinnender Liebenswürdigkeit und meisterhafter Klarheit, so daß die Schüler über seine körperlichen Mängel wegsahen. Hermanus schrieb eine Abhandlung über den Abakus und hat neben Gerbert am meisten zur Verbreitung des Kolumnenrechnens beigetragen. Er beschäftigte sich auch mit astronomischen Arbeiten und verfaßte zwei Bücher über den Nutzen des Astrolabiums. In Hermanus Werken treten uns zum ersten Mal wieder außer den Duodezimalbrüchen auch Brüche mit verschiedenen Nennern

entgegen. Er hatte also das Bewußtsein, es gebe auch eine allgemeine Bruchlehre, nicht bloß eine duodezimale, wie man vor ihm, nach römischem Vorbilde, allgemein angenommen hatte. Er starb 1054, 41 Jahre alt.

8. **Radulph von Laon,** gestorben 1131, benützte beim Abakusrechnen neben den Apices noch eine weitere Marke, die er Sipos nannte und dazu gebrauchte, die Kolumne, in der eben gerechnet wird, zu markieren.

§ 11.

Die Algorithmiker.

Im Anfang des 11. Jahrhunderts wurde die Dialektik von den Schülern Gerberts in die Theologie aufgenommen und dadurch für den Begründer derselben, für Aristoteles, größeres Interesse erweckte. Man kannte aber nur einige Werke von ihm, und auch diese lagen nicht im Original vor, sondern in lateinischen Übersetzungen. Nun standen damals die Araber Spaniens in einem großen Rufe der Gelehrsamkeit; es wurde bekannt, daß sie die meisten Werke der Alten in ihre Sprache übertragen hätten. Man suchte nun in der arabischen Literatur nach den Schätzen des klassischen Altertums und begann, eine Reihe arabischer Bücher in das Lateinische zu übersetzen. Bei dieser Gelegenheit wurden auch verschiedene mathematische Werke dem christlichen Abendland erschlossen. So übersetzte Atelhart von Bath die astronomischen Tafeln und die Rechenbücher des Alchwarizmi, Gerhard von Cremona den Almagest, die Bücher des Euklid und verschiedene andere Werke, auf die wir nicht näher eingehen wollen. Durch die lateinische Übersetzung der Werke des Alchwarizmi wurde das Abendland mit den indischen Ziffern und der Positionsarithmetik bekannt, und man hätte erwarten sollen, beide würden überall freudig begrüßt werden. Dem war aber nicht so. Im Gegenteil, es entstanden zwischen den Anhängern des Kolumnenrechnens, den **Abacisten,** und jenen der neuen Methode, den **Algorithmikern,** ein hartnäckiger Kampf. Die ersteren hielten das Rechnen ohne mechanische Hilfsmittel, ohne Rechenbrett, für viel zu schwer und erklärten außerdem, es sei für eine neue Art der

Zahlendarstellung kein Bedürfnis vorhanden, da die römischen Ziffern leicht zu schreiben seien und alle Zahlen zur klaren Anschauung bringen. Es gab sogar noch lange Zeit verschiedene Algorithmiker, welche die Rechenprobleme nach der alten Methode ausrechneten und nur das Ergebnis mit arabischen Ziffern anschrieben.

Zwischen den Vertretern der beiden Richtungen bestanden aber nicht nur in der Art der Zahlendarstellung und in der Technik des Rechnens Unterschiede, sondern noch in verschiedenen anderen Punkten. So lehren z. B. die Algorithmiker die Sexagesimalbrüche, die Abacisten die Duodezimalbrüche; die ersteren behandeln das Duplieren und Medieren als besondere Spezies, die letzteren im Anschluß an das Multiplizieren und Dividieren. Die Algorithmiker schenken dem Wurzelausziehen große Aufmerksamkeit, die Abacisten vernachlässigen es ganz oder behandeln es nur so nebenbei usw.

Mit dem Jahre 1200 beginnt für Europa eine neue Epoche. Es ist nun im Besitz der Ergebnisse mathematischer Forschungen verschiedener Zeiten und verschiedener Völker. Die Geometrie des Euklid, die Arithmetik des Nikomachus, die Astronomie des Ptolemäus und die Werke des Boëthius liegen teils im Urtext, teils aus arabischen Werken in lateinischen Übersetzungen vor. Durch Atelhart von Bath und Gerhard von Cremona wurden ihm die indischen Ziffern mit der Null und der Positionsarithmetik, die Algebra als Lehre von den Gleichungen und die Anfänge der Trigonometrie zugänglich. Es bedarf jetzt nur der geeigneten Männer, diesem reichen Wissensstoff allgemeine Verbreitung zu verschaffen, und als solche treten in erster Reihe auf Leonardo von Pisa und Jordanus Nemorarius in Paris.

Leonardo von Pisa lebte um das Jahr 1200 n. Chr. Er wurde in seiner Jugend mit den Abakusrechnen gründlichst vertraut gemacht und lernte auf Reisen, die er als Kaufmann nach Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und der Provence unternahm, das Rechenbuch des Alchwarizmi, die indischen Ziffern und die indische Rechenmethode kennen. Die großen Vorteile der indischen Logistik erkennend, beschloß er, sie in seiner Heimat zu lehren und zu verbreiten, und schrieb zu diesem Zwecke mehrere arithmetische Werke. Das wichtigste davon ist das liber abaci. Dieses beginnt mit folgenden Worten: „Novem figurae indorum hae sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1 cum his itaque novem figuris et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus“ und besteht aus 15 Abschnitten. Der erste erklärt die neuen Zeichen; ihren Ziffernwert nennt er significatio accidentalis, den Stellenwert significatio naturalis. Die nächsten 6 Abschnitte behandeln die 4 Spezies mit ganzen und gebrochenen Zahlen; vier weitere sind den Geschäftsrechnungen gewidmet; der 12. und 13. bringt „mannigfaltige“ Aufgaben, der 14. das Wurzelausziehen und der 15. geometrische Berechnungen und Aufgaben aus der Algebra und Almu Kabala. Leonardo setzt Tabellen voraus, die das kleine und das große Einmaleins enthalten und auswendig beherrscht werden müssen. Alle Rechnungen sind durch die Neunerprobe zu prüfen.

Wir sind in unseren Ausführungen schon wiederholt auf die Neunerprobe gestoßen und werden ihr auch weiterhin noch öfters begegnen. Nun hat der Verfasser die Wahrnehmung gemacht, daß sie in neuerer Zeit etwas in Vergessenheit geraten zu sein scheint.[1]) Es dürfte deswegen angezeigt erscheinen, ihr Wesen, wenn auch nur in der Anwendung auf die Multiplikation und die Division, etwas näher zu erläutern. Wir wollen zuerst eine Multiplikations- und eine Divisionsaufgabe prüfen und dann einen kurzen zahlentheoretischen, elementaren Beweis geben.

I. **583 · 436 = 254188**

1. $5 + 8 + 3 = \qquad\qquad = 16;\ 16 : 9 = 1$ Rest 7
2. $4 + 3 + 6 = \qquad\qquad = 13;\ 13 : 9 = 1$ Rest 4
3. $4 \cdot 7 = \qquad\qquad = 28;\ 28 : 9 = 3$ Rest 1
4. $2 + 5 + 4 + 1 + 8 + 8 = 28;\ 28 : 9 = 3$ Rest 1

Da die Reste in Punkt 3 und 4 gleich groß sind (Rest 1 = Rest 1), so ist das Produkt richtig.

II. **562 : 43 = 13,06 Rest 42**

1. $5 + 6 + 2 = \qquad = 13:\ 13 : 9 = 1$ Rest 4
2. $4 + 3 = \qquad = 7;\ 7 : 9 = 0$ Rest 7
3. $1 + 3 + 6 = \qquad = 10;\ 10 : 9 = 1$ Rest 1
4. $4 + 2 = \qquad = 6;\ 6 : 9 = 0$ Rest 6
5. $7 \cdot 1 + 6 = 7 + 6 = 13;\ 13 : 9 = 1$ Rest 4.

Die in Nr. 1 und in Nr. 5 auftretenden Reste sind gleich groß (Rest 4 = Rest 4), deswegen ist die Aufgabe richtig gelöst.

---

[1]) Er wurde schon öfters aus verschiedenen Teilen des Landes unter Bezugnahme auf Aufgaben, die er in den Lehrerinnenprüfungen stellte, um nähere Auskunft über die Neunerprobe angegangen.

Die in den Rubriken 1 bis 4, resp. 1 bis 5 angeführten Nebenrechnungen werden natürlich alle im Kopf ausgeführt. Man schreibt nur die Reste, mit kleinen Ziffern, neben die entsprechenden Zahlen. Die Neunerprobe versagt, wenn man mehrere Fehler macht, deren algebraische Summe 9 oder ein Vielfaches von 9 beträgt. Sie stützt sich auf folgenden zahlentheoretischen Lehrsatz: Dividiert man die Faktoren und das reelle Produkt durch eine **beliebige** Zahl, so ist das Produkt der Faktorenreste gleich dem Reste, den das reelle Produkt liefert.

Beweis: $46 : 7 = 6$ Rest 4; $46 = 6 \cdot 7 + 4$
$37 : 7 = 5$ Rest 2; $37 = 5 \cdot 7 + 2$

$$46 \cdot 37 = (6 \cdot 7 + 4) \cdot (5 \cdot 7 + 2) = 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 + 6 \cdot 7 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 2.$$

Dividieren wir beide Seiten durch 7, so erhalten wir

$$\frac{46 \cdot 37}{7} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7}{7} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 2}{7} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 7}{7} + \frac{4 \cdot 2}{7}$$
$$= 6 \cdot 7 \cdot 5 + 6 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + \frac{4 \cdot 2}{7}.$$

Das reelle Produkt kann also nur den Rest liefern, der bei der Division von $4 \cdot 2$ entsteht. — Als Prüfstein kann man jede beliebige Zahl nehmen, man benützt aber gewöhnlich 9 (oder 11), weil man bei diesen die Reste leicht findet: Die Ziffernsumme einer Zahl (Quersumme) gibt, durch 9 geteilt, den gleichen Rest, wie die Zahl selbst. (Die algebraische Ziffernsumme einer Zahl gibt, durch 11 geteilt, den gleichen Rest, wie die Zahl selbst.)

Leonardo schreibt bei der Addition die Summanden untereinander, die Summe über sie; die Zahlen, welche 9 übersteigen, werden an den Fingern vorgemerkt. — Das Subtraktionsverfahren ist aus folgendem Beispiel zu ersehen:

$$69\,461 - 25\,894 = 43\,567$$

4 3 5 6 7
6 9 4 6 1
2 5 8 9 4

1. $11 - 4 = 7$;
2. $1 + 9 = 10$; $16 - 10 = 6$
3. $1 + 8 = 9$; $14 - 9 = 5$
4. $1 + 5 = 6$; $9 - 6 = 3$
5. $6 - 2 = 4$.

Diese Art entspricht im Prinzip unserer Subtraktion nach dem Additionsverfahren. Nach diesem lösen wir die Aufgabe bekanntlich folgendermaßen:

1. $4 + 7 = 11$; $4 + 7 = 11$; schreibe 7 an, behalte 1
2. $1 + 9 = 10$; $10 + 6 = 16$; schreibe 6 an, behalte 1
3. $1 + 8 = 9$; $9 + 5 = 14$; schreibe 5 an, behalte 1
4. $1 + 5 = 6$; $6 + 3 = 9$; schreibe 3 an
5. $2 + 4 = 6$; schreibe 4 an.

Die Multiplikation wird in 8 Abteilungen gelehrt. Wir wollen nur einen Fall näher betrachten. Es soll 87 mit 56 multipliziert werden.

4 6 9 8
8 7
5 4

1. $4 \cdot 7 = 28$; schreibe 8 an, behalte 2
2. $4 \cdot 8 = 32$; $+ 2 = 34$; $+ 35 = 69$; schreibe 9, behalte 6
3. $5 \cdot 8 = 40$; $+ 6 = 46$; schreibe 46 an.

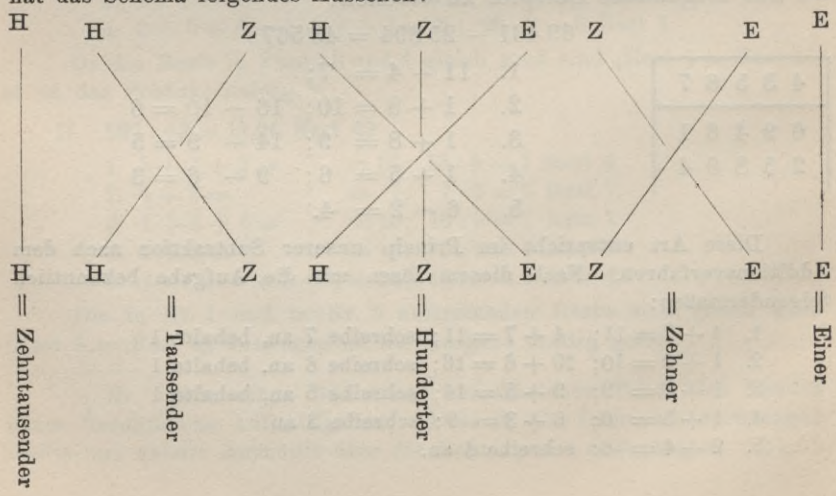
Auch diese Art Multiplikation hat sich bis auf unsere Zeit erhalten. Sie ist unter dem Namen symmetrische Multiplikation bekannt und wird besonders in den südlichen Ländern Europas vielfach angewandt. Sie macht an das Kopfrechnen erhebliche Ansprüche, erzeugt deswegen eine große Gewandtheit darin und führt rasch zum Ziel. Es wäre wünschenswert, daß sie auch bei uns gepflegt würde. Die Schüler bringen ihr, als etwas Neuem, großes Interesse entgegen.

Wir wollen sie an einem Beispiel erläutern:

$$\begin{array}{r} 5\,627 \times \\ 3\,498 \\ \hline 196\,863\,246 \end{array}$$

1. $8 \cdot 7 = 56$; behalte 5
2. $8 \cdot 2 = 16$; $+ 5 = 21$; $+ 63 = 84$; behalte 8
3. $8 \cdot 6 = 48$; $+ 8 = 56$; $+ 28 = 84$; $+ 18 = 102$; behalte 10
4. $8 \cdot 5 = 40$; $+ 10 = 50$; $+ 21 = 71$; $+ 54 = 125$; $+ 8 = 133$; behalte 13
5. $9 \cdot 5 = 45$; $+ 13 = 58$; $+ 6 = 64$; $+ 24 = 88$; behalte 8
6. $4 \cdot 5 = 20$; $+ 8 = 28$; $+ 18 = 46$; behalte 4
7. $3 \cdot 5 = 15$; $+ 4 = 19$.

Es werden selbstverständlich nur die zwei Faktoren und das reelle Produkt angeschrieben. Alles übrige wird im Kopf ausgeführt. Den Namen hat diese Multiplikation daher, weil die Ausführung nach einem symmetrischen Schema vor sich geht. Für zwei dreistellige Faktoren hat das Schema folgendes Aussehen:



Haben die zwei Faktoren eine ungleiche Anzahl Stellen, so werden Nullen eingesetzt, z. B. $4038 \cdot 573 = 4038 \cdot 0573$.

Der Division widmet Leonardo 24 Seiten. Zuerst werden die Zahlen 1 bis 60 dividiert durch 2, 3 usw. bis 13. Die Übungen sind auswendig zu lernen. Bei der Division durch 10 werden die Einer gestrichen und als Zähler eines Bruches vom Nenner 10 vor die Zahl gestellt, z. B. $2546 : 10 = \frac{6}{10}\,254$. Ist der Divisor mehrstellig, so hat man vorerst die „Regula" aufzustellen. Unter dieser versteht Leonardo einen Bruch, dessen Nenner aus den Faktoren des Divisors besteht, und dessen Zähler 1 mit so viel Nullen enthält, als der Nenner Faktoren hat. Für die Aufgabe $749 : 75$ heißt die Regula $= \frac{1 \cdot 0 \cdot 0}{3 \cdot 5 \cdot 5}$. Nun wird durch 3 dividiert ($= 249$ Rest 2). Der Rest 2 kommt in die Regula an Stelle von 1. Hierauf teilt man 249 durch 5 ($= 49$ Rest 4), setzt diesen Rest 4 in die Regula an die Stelle der ersten Null, teilt 49 durch den dritten Faktor (5), erhält 9 Rest 4, setzt den neuen Rest für die zweite Null in die Regula. Die Regula heißt nun $\frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 5}$, und der Quotient lautet

$$9 + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 5} + \frac{4}{5} = 9\,\frac{74}{75}.$$

Die bürgerlichen Rechnungsarten werden auf verschiedene Weise gelöst. Leonardo benützt den „Satz von den drei Zahlen" (den Dreisatz, die Regeldetri) den Fünfsatz, die Regulakata, die welsche Praxis und die Proportionen.

Im Dreisatz ist von drei Zahlen die Rede, aus denen eine vierte zu bestimmen ist. Zwei Zahlen bestimmen Menge und Preis einer Ware. Diese werden an das obere Ende der Tafel geschrieben und zwar die erste Zahl rechts, die zweite links. Die dritte Zahl wird unter die ihr gleichnamige der beiden ersten gesetzt. Die vierte Zahl wird nun gefunden, indem man die dritte mit der ihr schräg gegenüberliegenden vervielfacht und das Produkt durch die andern teilt. Heißt z. B. die Aufgabe: 5 m kosten 28 ℳ, a) wieviel ℳ kosten 9 m, oder b) wieviel m erhält man für 17 ℳ, so lauten die zwei Ansätze:

a)

$$\begin{array}{ll} 28\ \mathcal{M} & 5\ \text{m} \\ & 9\ \text{m} \\ \hline \end{array}$$

$$= \frac{9 \cdot 28}{5} = 50{,}40\ \mathcal{M}$$

b)

$$\begin{array}{ll} 28\ \mathcal{M} & 5\ \text{m} \\ 17\ \mathcal{M} & \\ \hline \end{array}$$

$$= \frac{5 \cdot 17}{28} = 3\ \text{m}$$

Bei verschiedenen Aufgaben kommt ein Fünfsatz vor, d. h. aus fünf gegebenen Zahlen soll man eine sechste suchen. So lautet z. B. eine mit indirekten Verhältnissen: Wieviel Tage können 10 Pferde mit 16 Sestern Gerste gefüttert werden, wenn 5 Pferde in 9 Tagen 6 Sester fressen?

Der Ansatz lautet:

$$\begin{array}{lll} 9\ \text{Tage} & 6\ \text{Gerste} & 5\ \text{Pferde} \\ & 16\ \text{Gerste} & 10\ \text{Pferde} \\ \hline \end{array}$$

$$= \frac{9 \cdot 16 \cdot 5}{6 \cdot 10} = 12\ \text{Tage.}$$

Die Regula kata entspricht unserem Kettensatz. Durch diese löst er die Aufgabe: 12 Imperalen gelten 31 Pisaner, 23 Pisaner gelten 12 Januiner, 13 Januiner gelten 12 Turiner, 11 Turiner gelten 12 Barcelloner. Wie viel Barcelloner gelten 15 Imperalen?

$$\begin{array}{ccccc} \text{Barc.} & \text{Tur.} & \text{Jan.} & \text{Pis.} & \text{Imp.} \\ ? & 12 & 13 & 31 & 12 \\ 12 & 11 & 12 & 23 & 15 \\ \text{Barc.} & \text{Tur.} & \text{Jan.} & \text{Pis.} & \text{Imp.} \\ \hline \end{array}$$

$$= \frac{12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 31 \cdot 15}{11 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 12}$$

Die Regula falsi und die welsche Praktik werden wir später näher betrachten. (Siehe Register.)

Bei den Reihen bringt Leonardo eine Aufgabe, die vom historischen Standpunkte aus sehr interessant ist, weil die gleiche Idee schon im Rechenbuch Ahmes vorkommt. Diese lautet: 7 alte Weiber gehen nach Rom, jede hat 7 Maulesel, von denen jeder 7 Säcke trägt. In jedem Sack stecken 7 Brote und in jedem Brot 7 Messer. Zu jedem Messer gehören 7 Scheiden. Wie viele Gegenstände gehen nach Rom? Wie kommt Leonardo zu dieser Aufgabe, da die Hieroglyphen erst 600 Jahre später entziffert wurden?? Leonardo selbst war ein sehr gewandter Rechner, der seine Landsleute in Erstaunen setzte. Am

Hofe Friedrichs II. gab er Vorstellungen im Lösen schwieriger Aufgaben. Große Bewunderung erweckte die arithmetische Lösung folgender diophantischer Gleichung: Man kauft für 30 Solidi 30 Vögel; 3 Sperlinge kosten 1 Solidus, 2 Turteltauben ebenfalls 1 Solidus, für eine Schlagtaube bezahlt man 2 Solidi. Wieviel Vögel jeder Art waren es? ($\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + (30 - x - y) \cdot 2 = 30$. Daraus $x = 18 - \frac{9}{10}y$; da x eine ganze, positive Zahl sein muß, so kann y nur den Wert 10 annehmen, und man erhält für $x = 18 - 9 = 9$. Es waren also 9 Sperlinge, 10 Turteltauben und 11 Schlagtauben).

Leonardo lernte bei den Arabern auch die Algebra kennen und führte sie im Abendlande ein. Bei ihm treten zum erstenmal die Ausdrücke plus und minus auf. Später schrieb er auch eine „Praxis der Geometrie", in der er verschiedene schwierigere Gebiete seines Rechenbuches zu vereinfachen suchte. Bei vollkommener mathematischer Klarheit und Strenge war es nämlich für nicht arithmetisch geschulte Köpfe abschreckend schwierig, und da es doch vorwiegend Probleme behandelte, die für die kaufmännische Praxis wichtig waren, so läßt es sich begreifen, daß es in den Kreisen, für die es bestimmt war, nicht die beste Aufnahme fand. Darin liegt es auch zum großen Teil begründet, daß die Algorithmiker mit Erfolg von den Abacisten angegriffen werden konnten. Noch im Jahre 1500 hielt man das Zifferrechnen mancherorts für viel zu schwer. Man rechnete am Rechenbrett und mit römischen Ziffern und „übersetzte" dann das Ergebnis in die indische Schreibweise. Die Werke von Leonardo fanden eigentlich erst 200 Jahre nach seinem Tode die rechte Würdigung, nachdem der Boden von anderer Seite für die Positionsarithmetik besser vorbereitet war. „Leonardo war ein gewandter Rechner, ein feiner Geometer, ein geistreicher Algebraiker, wie es vor ihm nur Vereinzelte gab. Er wußte die Algebra auf geometrische Fragen anzuwenden und war geradezu schöpferischer Zahlentheoretiker."

Jordanus Nemorarius. Wenn wir in Leonardo von Pisa einen Vertreter der bürgerlichen Kreise als Mathematiker kennen lernten, so tritt uns in Jordanus ein solcher des Gelehrtenstandes entgegen. Zu den Gelehrten zählten alle die, welche auf Grund eines bestimmten Studienganges Kenntnisse im Trivium: Grammatik, Rhetorik und Dialektik und im Quadrivium: Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie nachweisen konnten;[1]) das Trivium war unerläßlich, von dem Quadrivium konnte abgesehen werden. Da Leonardo das erstere nicht besaß, so konnte er auch nicht Lehrer an der von seinem Freunde Friedrich II. neugegründeten Universität in Neapel werden, obwohl er im Quadrivium seine Zeitgenossen weit überragte.

Jordanus war aus Sachsen gebürtig und trat im Jahre 1220 in Paris in den Orden der Dominikaner ein. Diese pflegten die Wissenschaften in hohem Maße und besaßen an vielen Orten berühmte Klosterschulen — Hochschulen. Jordanus wurde später Ordensgeneral und starb im Jahre 1250. (?) Er schrieb ein Rechenbuch, Algorithmus demonstratus, eine Arithmetik, eine Algebra und ein größeres geometrisches Werk. Außerdem behandelt er noch andere Fragen, die für uns nicht in Betracht kommen. Man fand Kopien seiner Werke in Basel, Cambridge, Dresden, Erfurt, Mailand, München, Oxford, Paris, Rom, Thorn, Venedig und Wien. Aus diesem Verzeichnis ersehen wir, welch großen Einfluß Jordanus auf ganz Europa ausgeübt hat. In seiner Arithmetik, für die er auch die Werke des Nikomachus und Boëthius benützte, bedient er sich zur Ableitung zahlentheoretischer Gesetze der Buchstaben und zwar im Sinne unserer allgemeinen Zahlen und wurde damit zum Begründer der heutigen „Buchstaben"-Rechnung. Es kam zwar schon früher vor, daß einzelne Schriftsteller, wie Aristoteles, Pappus, Diophantos und einige Araber auf Buchstaben hinwiesen, die beliebige Zahlen bedeuten können, aber dies war immer nur ein vereinzeltes Vorkommen.

Im Algorithmus demonstratus wird zuerst das dekadische Zahlensystem mit seinen zehn Ziffern erklärt, wobei die Null cifra, circulus oder figura nihili genannt wird. Dann bringt er die Finger-, die Gelenk- nnd die zusammengesetzten Zahlen des Boëthius, behandelt die 6 Spezies — er lehrt nämlich Duplieren und Medieren als besondere Operationen — und prüft die Resultate mit der Neunerprobe. Die Sexagesimalbrüche werden von den gewöhnlichen Brüchen getrennt behandelt und ohne Nenner

[1]) Siehe bei Cassiodorus.

angeschrieben. 3 Ganze $^{15}/_{60}$, $^{37}/_{60^2}$, $^{45}/_{60^3}$, $^{52}/_{60^4}$ = $3^0\,15'\,37''\,45'''\,52''''$. Der Algorithmus demonstratus war das erste wissenschaftliche Werk, welches die Positionsarithmetik mit größerem Erfolg in die Welt hinaustrug. Dies hatte zum großen Teil seinen Grund darin, daß der Verfasser General eines weitverzweigten und einflußreichen Ordens war. Auf die zahlreichen übrigen Schriften von Jordanus können wir nicht näher eingehen.

In den nächsten Jahrhunderten entstanden nun in den meisten Ländern Europas algorithmische Rechenbücher, die sich mehr oder weniger an den Algorithmus demonstratus des Jordanus anschlossen, bald die theoretische, bald die praktische Seite mehr in den Vordergrund stellend. Wir wollen uns aber nun vorwiegend nur noch im engeren Vaterland umsehen.

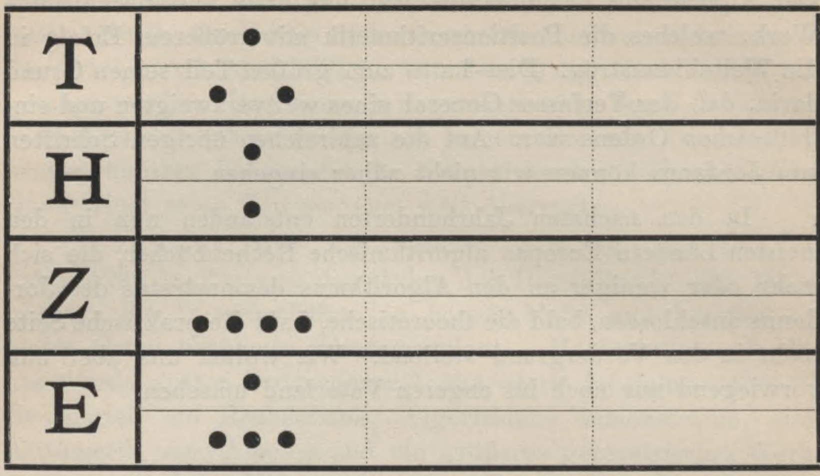
§ 12.

Deutsche Rechenmeister.

Wie wir im vorigen Kapitel sahen, entspann sich zwischen den Abacisten und den Algorithmikern ein harter Kampf, der schließlich mit dem Siege der letzteren endete. Nachdem aber dann der Abakus etwa 200 Jahre lang verschwunden war, tauchte er plötzlich wieder auf in der Form eines Rechenbrettes mit **wagerechten** Kolumnen und nannte sein Rechenverfahren das Rechnen auf der Linie. Dieses Rechenbrett wurde heimisch in Deutschland, England und Frankreich. In Italien kannte man es nicht.

Das Rechenbrett, Rechenbank genannt, hatte also, wie bereits gesagt, wagerechte Kolumnen, während die des Abakus senkrecht verliefen. Sie waren zur Aufnahme von Rechenpfennigen, „Raitpfennigen“ (franz. jetons, engl. counters) bestimmt, in zwei Hälften eingeteilt und am linken Rande mit E, Z, H, T usw. bezeichnet. In der unteren Hälfte der Kolumne bedeutet der Raitpfennig eine, in der oberen fünf Einheiten. Zur Darstellung von 9 Einheiten brauchte man also $1 + 4 = 5$ Marken, während Boëthius und seine Schüler nur eine nötig hatten. Die in beistehender Figur ausgelegte Zahl bedeutet also 7648.

Rechenbank.



In dem Auftreten der Rechenbank hat man einen Rückschritt erblickt und nach seinen Ursachen geforscht, konnte aber keine befriedigende Antwort erhalten. Dagegen konnte man nachweisen, daß in der Übergangszeit vom Abakus zum Rechenbrett, in der Zeit von 1300 bis 1500, stets Rechenpfennige im Gebrauch waren; es gab in jenen Zeiten sogar ein Gewerbe „Raitpfennigmacher“. Mit den Rechenpfennigen können auch Analphabeten rechnen, und ein italienischer Humanist spricht sich im 14. Jahrhundert hochmütig dahin aus, die Alten hätten sich beim Rechnen der Steinchen bedient, „einer Sitte, die sich heute noch bei ungebildeten Völkern erhalten habe“. Es ist mehr wie wahrscheinlich, daß das Rechnen mit Steinchen, Marken und dergl. seit den ältesten Zeiten bei allen Völkern stets im Gebrauch war, und daß sich die Analphabeten noch zur Zeit des Abakus- und Positionsrechnens solcher materieller Hilfsmittel bedienten. Zieht man in Betracht, daß bis in das späte Mittelalter hinein ein hoher Prozentsatz der oberen Gesellschaftskreise weder lesen noch schreiben konnten, so wird man verstehen, daß das Rechnen mit Marken eine große Rolle spielen mußte. Habe doch selbst Karl der Große erst in seinen späteren Tagen lesen und schreiben gelernt.

Italien kannte die Rechenbank nicht. Dies hat seinen Grund wohl darin, daß durch Leonardo von Pisa und seine

Schüler ein wissenschaftliches Laien- und Kaufmannsrechnen entstand, „während in den übrigen Ländern Europas in jenen Kreisen der alte Schlendrian weiter lebte“.

Wann und wo die Rechenbank zuerst auftrat, läßt sich nicht mehr entscheiden. Wir wissen nur, daß sie am Ende des 15. Jahrhunderts *plötzlich* in zahllosen Handschriften und Lehrbüchern neben dem Ziffernrechnen beschrieben und empfohlen wird. Wahrscheinlich verdankt sie ihre Entstehung der Anregung irgend eines Pädagogen, der den Unterricht anschaulich zu gestalten wußte, und da die Marken überall vorhanden waren, so war der Schritt bis zur Bank kein großer. Hatte man doch in dem Abakus der Alten ein Vorbild, das zwar der Geschichte angehörte, aber nicht in Vergessenheit geraten sein konnte. Die Rechenbank erhielt wohl deswegen *wagerechte* Kolumnen, damit man sie in den Schulen an die Wand hängen und so zur Aufnahme von „Rait“pfennigen verwenden konnte. (Rait = reiten.)

Das erste deutsche Rechenbuch, das gedruckt wurde, erschien im Jahr 1482 beim Buchdrucker *Heinrich Petzensteiner* in Bamberg und war von dem Nürnberger Rechenmeister **Ulrich Wagner** verfaßt. Es sind aber von ihm nur 9 kleine Pergamentblätter erhalten geblieben. Im nächsten Jahr druckte Petzensteiner ein zweites Rechenbuch, das wir noch heute als „Bamberger Rechenbuch vom Jahre 1483“ besitzen. Es besteht aus 21 Kapiteln. Die ersten 9 behandeln die 4 Spezies mit ganzen und gebrochenen Zahlen. Beim Vervielfachen werden 5 Fälle unterschieden: 1. Beide Faktoren bestehen aus einer Ziffer mit n Nullen; 2. Der eine Faktor ist *ein*-, der andere *mehrstellig*; 3. Beide Faktoren liegen zwischen 10 und 20 (das Verfahren folgt der Formel $(10 + a) \cdot (10 + b) = ab + 10 \cdot (a + b) + 100$); 4. Beide Faktoren bestehen aus zwei „bedeutlichen Ziffern“ (46 · 77); 5. Die Faktoren sind vielstellig. Die Aufgabe 425 · 368 wird folgendermaßen gelöst:

```
        4 2 5
   ─────────────────
        3 4 0 0 ╱ 8
      2 5 5 0 ╱ 6
    1 2 7 5 ╱ 3
   ─────────────────
    1 5 6 4 0 0
```

Das 10. Kapitel spricht von der Regeldetri als „gulden Regel die so kospar und nuez ist den all ander regel zu gliechen weys als golt übertrifft alle and metall“.

Die Kapitel 11, 12 und 13 lehren die Umrechnung der Geldsorten, die Gewinn- und Verlustrechnungen. Kapitel 14 bringt die Tolletrechnung.[1]) „Sie lehret durch die Rechenpfennig ein metall aus dem andern ziehen.“ (Auf dem Rechenbrett wurde mit Hilfe der Rechenpfennige der Feingehalt der Legierungen berechnet.) Kapitel 15: Warentausch. Kapitel 16: „Soltrechnung“ und „Vom Wandern“. „Es seyn zwen gesellen, die gend gen Rom. Eyner get alle tag 6 meyl, der ander geth an dem ersten tage 1 meyl, an dem andern zwen und alle tag eyner meyl mer dan vor. Nu wildu wissen in wie viel tagen eyner als vil hat gangen als der ander. So nim di zal zwir die der gleych geht“ usw. Die Kapitel 15, 16, 17 und 18 bringen Aufgaben verschiedenen Inhaltes aus dem kaufmännischen Leben und 19, 20 und 21 Tabellen, sogenannte Faulenzer, die ausgeführte Additionen und Multiplikationen enthalten.

Aus seiner ganzen Anlage und seinem Inhalte ist zu ersehen, daß das Bamberger Rechenbuch 1483 weder für Schulen noch für den ersten Unterricht bestimmt war. Nach Leonardos Werken von einem Kaufmann geschrieben, war es sehr wahrscheinlich das Rechenbuch der in der Praxis stehenden Kaufleute.

Im Jahr 1489 ließ **Johannes Widmann** bei Conradem Kacheloffen in Leipzig ein Rechenbuch drucken unter dem Titel: „Behende und hübsche Rechnung auf allen Kauffmannschaft“, das sich auf Euklid, Boëthius, Jordanus u. a. beruft, in vielen Punkten aber wörtlich mit dem vorigen übereinstimmt, ohne es namhaft gemacht zu haben. Widmann war Lehrer an der Universität in Leipzig. Sein Buch besteht aus drei Teilen; der erste handelt „vo Kunst und art der zal an yr selbst“, der zweite „vo der ordnung der zal“, der dritte „als vil höcher dienet“ von „der art des messens, die die geometria genannt ist“. Nach dem Vorgange des Jordanus bringt er das Duplieren und Medieren wieder als besondere Operationen, was der Verfasser des Bamberger Rechenbuches, als Schüler Leonardos, nicht getan hat. Für alle Rechnungsarten und für eine große Anzahl

[1]) Tollet vom italienischen tavoletta = kleine Tafel.

einzelner Rechnungen gibt Widmann bestimmte Regeln, die aber ohne alle Begründung oder Ableitung geboten werden. So ist die Rede von der Regula pulchra, der Regula inventionis, der Regula legis, der Regula augmenti und decrementi, der Regula sententiarum, der Regula bona, der Regula plurima, der Regula pagamenti, der Regula lucri, der Regula excessus, der Regula cosse oder Regula Algobre genannt, der Regula falsi.

Die Regula pagamenti entspricht der Regula cata des Leonardo. Hier finden wir auch die gleiche Aufgabe wie bei Leonardo: „Eyner gent zu wyen yn eyn wechselpanck und hat 30 ₰ Nurmberger also sprechen zu dem wechssler liber wechsel mir die 30 ₰ vnd gieb mir wiener dafur als vil sy dan wert seyn also weiss der wechsler nicht wie vil er ym wiener ssol geben vnd begert der muncz underrichtung. Also untterweyst yenner de wechsler und spricht 7 wyener gelten 9 linczer 8 linczer gelten 11 passawer, 12 passawer gelten 13 villshofer vnd 15 villshofer gelten 10 regensperger vnd 8 regensperger gelten 18 neumerker und 5 neumerker gelten 4 nurmberger. Wiltu wissen wie viel wiener kummen umb 30 nurmberger secz die Figur und multiplicier in Kreucz durchaus auf 2 tage vnd

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 7 & & 9 & & 12 & & 13 & & 8 & & 18 & & 30 \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & 8 & & 11 & & 15 & & 10 & & 5 & & 4 \end{array}$$

dividir so cumbt $\dfrac{7 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 30}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 10 \cdot 18 \cdot 4} = 13 \dfrac{13}{429}$.

Die Regula lucri berechnet den Zins. „Eyner leycht dem Andern 25 fl. 2 Jar umb gewin. Nun wen die 2 iar vergangen sein so giebt yenner dem wider sein Hauptsum und für Gewin und Gewinß gewin gibt er ym 24 fl. Nu ist die frag. Wie viel haben die 25 fl. gewonnen im ersten jar.“ Die Regel lautet: „Multiplicier die hauptsum yn den gewin darnach multiplicier die hauptsum in sich selbst quadrate Und addir das product zu dem ersten product Und die wurtzel der ganzen sum so du davon subtrahierest dy hauptsum bericht den gewin.“ Von der Regula falsi sagt er: „Nu soltu wissen das Regula falsi ist eyn regel durch welche man aller Regel machen mag“.

Die Resultate werden mit der Neuner- und mit der Siebenerprobe geprüft.

In Widmanns Rechenbuch treten für die Worte plus und minus, die Leonardo schon gebraucht hat, zum ersten Mal die Zeichen + und — auf. Er ist der erste deutsche Lehrer, welcher auch die Algebra lehrte. Diese wurde Regel Algobre oder Regel cosse genannt.

Vom Anfang des 16. Jahrhunderts ab erschienen sehr viele Rechenbücher, die von Universitätslehrern, Ordensgeistlichen, Lehrern weltlicher Lateinschulen oder Privatschulen verfaßt waren oder aus kaufmännischen Kreisen stammten. Die meisten legten das Hauptgewicht auf die Erzielung mechanischer Rechenfertigkeiten und lösten ihre Aufgaben mit Hilfe einzelner Rechenregeln. Wir wollen nur diejenigen erwähnen, die irgend einen Fortschritt erkennen lassen oder in sonstiger Hinsicht das Interesse erwecken.

Im Jahr 1501 verfaßte **Johannes Huswirt** ein Rechenbuch in lateinischer Sprache, in welchem das Wort cifra bald die Bedeutung der Null, bald die der Ziffer hatte. Er spricht vom Federrechnen und vom Linienrechnen und schließt beim ersteren das Duplieren an das Multiplizieren und das Medieren an das Dividieren an, beim letzteren dagegen werden beide zwischen der Subtraktion und Multiplikation behandelt.

Im gleichen Jahr erschien in Leipzig von **Balthasar Licht** der Algorithmus Linealis, und vom Jahr 1513 ab in Krakau ein solcher in 15 Auflagen von **Johann von Landshut.** Im Jahr 1520 verfaßte **Heinrich Stromer** in Auerbach ein Rechenbuch, in welchem für die Regeldetri folgende Vorschriften gegeben werden:

1. Die Fragezahl soll immer rechts stehen.
2. Die erste und dritte Zahl müssen in Sache und Benennung übereinstimmen.
3. Die vierte, aus der Regel hervorgehende Zahl muß der zweiten entsprechen.

   Vervielfache nun die zweite mit der dritten und teile das Produkt durch die erste, so hast du die vierte. (Siehe anch bei Adam Riese!)

Gregor Reisch, Prior des Karthäuserklosters in Freiburg i. Br., ließ 1503 seine Margaritha philosophika drucken, die in

7 Büchern die 7 freien Künste [1]) in Form von Zwiegesprächen behandelt. Auf dem Titelblatt von jedem Buch befindet sich eine symbolische Abbildung. Die des Rechenbuches enthält in der Mitte eine Frau, die Arithmetika, die in jeder Hand ein offenes Buch hält, und deren Kleid die Progressionen 1, 2, 4, 8 und 1, 3, 9, 27 trägt. Links von ihr sitzt Pythagoras, der auf einem Rechentisch die Zahlen 1241 und 81 mit Rechenpfennigen angelegt hat und die rechte Hand einem Haufen weiterer Rechenpfennige nähert. Rechts von der Arithmetik sitzt Boëthius, mit Ziffern rechnend. Der Inhalt des Buches befaßt sich mit den 4 Spezies, den Brüchen, den Sexagesimalbrüchen, dem Rechenbrettrechnen und der Regeldetri. Die Margaritha wurde in Straßburg und in Paris nachgedruckt und fand eine weite Verbreitung. (Siehe das Titelbild.)

Theoderich Tzwivel bemerkt in seinem 1507 erschienenen Algorithmus, daß das Duplieren und Medieren keine besondern Rechenoperationen seien; er behandelt sie aber dennoch als solche.

Jakob Köbel, Stadtschreiber von Oppenheim, verfaßte 1514 ein „Rechenbuch auf der Linien“ und 1520 ein solches „auf der Feder“. Beide erlebten eine große Anzahl Auflagen und fanden die weiteste Verbreitung.

Im Jahr 1521 erschien von Heinrich Schreiber, der unter dem Namen **Grammateus** bekannt ist und Lehrer an der Wiener Universität war, ein Rechenbuch, dessen Titel eine vollständige Inhaltsangabe enthält. „Ayn new Künstlich Buech welches gar gewiß und behend lernet nah der gemeinen regel Detre, welschen practic, regeln falsi und etlichen regeln cosse mancherley schöne und zu wissen notdürftig rechnung auff Kauffmannschafft. Auch nach den proportion der Kunst des gesangs jm diatonischen geschlest ausz zutaylen monochordum orgelpfeyffen und andere jnstrument ausz der Erfindung Pythagore. Weitter ist hierinnen begriffen buechhalten durch das zornal, Kaps und schuldbuch. Visier zu machen durch den Quadrat und Triangel mit vil andern lustigen stücken der Geometrey.“

---

[1]) Siehe Trivium und Quadrivium.

Grammateus bringt nach der Addition sofort die Multiplikation: „in dieser operation werden funden alle aigenschaften der addition“. Duplatio und Mediato schafft er als besondere Operationen ab. Auch Grammateus gibt eine Reihe Regeln ohne alle Beweise. Die Richtigkeit der Lösung wird mit der Neunerprobe dargetan. Von der Regula falsi bemerkt er: „sie ist erfunden von wegen mancherley nutzbarkeit, nach der regula Cosse die allerkunstreichst“.

Das erste Lehrbuch der Algebra, das in deutscher Sprache erschien, wurde von **Christof Rudolff**, einem Schüler des Grammateus, herausgegeben. Vom gleichen Verfasser erschien auch ein Rechenbuch (1526), in welchem andeutungsweise von Dezimalbrüchen gesprochen wird. Er sagt nämlich, die Division durch Potenzen von 10 lasse sich auch so ausführen, daß man vom Dividenden so viele Stellen „mit einer virgel“ abschneide, als der Divisor Nullen habe. Doch wurde die Tragweite dieser Bemerkung nicht erkannt, weder von ihm noch von seinen Schülern. Rudolff lehrte nach dem Ziffernrechnen das Rechnen auf den Linien, welches bei einfachen Aufgaben am bequemsten, aber „zu subtilen Rechnungen zum dickermal seumlich sey“. Die Richtigkeit der Rechnung wird mit der Neunerprobe bewiesen, aber nebenbei bemerkt: „die gewissest prob so man gehaben mag, ist wenn ein species die ander probiert“. In dem „Rechenbüchlein“ bringt Rudolff die welsche Praktik und sagt: „in diesen Rechnung ligt vil das du ein zal ordentlich zerstreuest; si ist nichts anders dann ein geschwinder auszug in die regel de tri“. Das „Exempelbüchlein“ verlangt auch den Kettensatz. Rudolff legt besonderen Wert auf die methodische Behandlung des Stoffes und gibt verschiedene Beispiele zur „erhebung des verstandts“.

Petrus Apianus, Professor der Astronomie in Ingolstadt, ließ im Jahr 1527 ein Rechenbuch erscheinen, das in methodischer und sachlicher Hinsicht allen Ansprüchen genügen sollte. Wesentlich Neues bietet er nicht.

Der populärste Rechenlehrer des ganzen Mittelalters war **Adam Riese.** Zur mythischen Figur geworden spielt sein Name heute noch eine sprichwörtliche Rolle: „$2 \cdot 3 = 6$, sagt Adam Riese“.

Riese wurde 1492 in Franken geboren, trat 1522 in Erfurt als „Rechenmayster“ auf und wurde 1525 Bergbeamter in Annaberg in Sachsen. In beiden Städten gründete er Privatschulen, an denen er selbst den Rechenunterricht erteilte. Er schrieb 4 Rechenbücher. Das dritte und wichtigste hat den Titel: „Rechnung nach der Lenge auff den Linichen und Feder Darzu forteil und behendigkeit durch die proportiones Praktika genannt mit gründlichem unterricht des visirens. Durch Adam Riesen im 1550 Jahr.

Die Rieseschen Rechenbücher erlebten mehr als 100 Jahre lang fortwährend neue Auflagen und drückten dem gesamten elementaren Rechenunterricht dieser Zeit einen charkteristischen Stempel auf. Sie zeigen folgende Gliederuug:

1. Numeration.
2. Das Rechnen mit dem Zahlenpfennig auf der Linie (Rechenbank).
3. Das Rechnen auf der Feder (Zifferrechnen).
4. Regula detra.
5. Welsche Praktik.
6. Regula falsi.

Die drei ersten Kapitel lehnen sich inhaltlich mehr oder weniger wörtlich an die Rechenbücher früherer Autoren an. Der Regeldetri gibt Riese folgenden Wortlaut:

„Regula detra ist eine regel von dreien dingen. setz hinten, was du wissen willst, wird die frag geheißen. das ihm unter den andern zweyen an namen gleich ist, setz forn, und das einander ding bedeutet, mitten, darauf multiplicier was hinden und mitten, das drauß kompt, theil ob mit dem fordern, so hastu wie theuer das dritte kompt und dasselbig ist an namen gleich dem ersten.

Wenden wir diese Regel auf die Aufgabe an, was kosten 7 m, wenn $2^1/_2$ m 8,50 ℳ kosten, so heißen die „drei Dinge“ 7 m, $2^1/_2$ m, 8,50 ℳ, und wir erhalten folgenden Ansatz:

$2^1/_2$ m, 8,50 ℳ, 7 m. Die Lösung lautet nun: $7 \cdot 8{,}50 : 2^1/_2 = 23{,}80$ ℳ

Auch in der Bruchlehre werden die Regeln nicht entwickelt. „Thu yhm also.“ Stimmt die Probe „so haste yhm recht gethan“.

Die Regula falsi tritt, wie wir schon wiederholt gesehen haben, seit den ältesten Zeiten bei den verschiedensten Völkern auf. Sie diente zum Lösen von schwierigen Aufgaben aller Art und hat der Menschheit lange Zeit gute Dienste geleistet. Heute wird sie nur noch zum Lösen höherer Gleichungen benützt. Ihr Wesen besteht im Princip darin, daß man eine Aufgabe durch eine beliebige Zahl als gelöst annimmt, diesen angenommenen Wert einsetzt und untersucht, ob er zu groß oder zu klein ist. Im ersten Fall wird er durch einen kleineren, im zweiten durch einen größeren ersetzt. Durch Probieren findet man schließlich den wahren Wert.

Adam Riese löst folgende Aufgabe mit Hilfe der Regula falsi: Von einer Summe nimmt $A = {}^1/_3$, $B = {}^1/_4$, $C = {}^1/_5$, $D = {}^1/_6$ und E den aus 6 fl bestehenden Rest. Wie groß war die Summe? Riese nimmt an, die fragliche Summe sei gleich dem Hauptnenner der Brüche ${}^1/_3$, ${}^1/_4$, ${}^1/_5$, ${}^1/_6$, also $= 60$; es würden nun erhalten $A = 60 : 3 = 20$ fl, $B = 60 : 4 = 15$ fl, $C = 60 : 5 = 12$ fl, $D = 60 : 6 = 10$ fl und $E = 60 - 20 - 15 - 12 - 10 = 3$ fl. Da aber der Anteil des $E = 6$ fl beträgt, so erhält jeder das Doppelte usw.

Die welsche Praktik[1]) handelt von den Geschäftsrechnungen der kaufmännischen Praxis. Sie kam von Italien nach Deutschland und fand in den meisten Rechenbüchern des Mittelalters eingehende Beachtung. Italien war damals bekanntlich der Hauptstapelplatz des Warenhandels Europas; die Großkaufleute Deutschlands waren deswegen genötigt, mit Italien Geschäftsverbindungen anzuknüpfen. Viele schickten ihre Söhne dorthin in die Lehre, damit sie in der Warenkunde und Buchführung ausgebildet und mit der Technik des kaufmännischen Rechnens vertraut wurden. Diese brachten dann die Rechenkunst als „welsche Praktik" mit nach Deutschland zurück. Sie umfaßte die Warenrechnungen aller Art, die Gewinn- und Verlustrechnungen, besonders aber die Währungsrechnungen. Gerade die letzteren waren von großer Bedeutung, weil jedes Land und jedes Ländchen eigene Maße und eigene Geldsorten hatte.

In Folge dieser Handelsbeziehungen drang nun auch die indische Positionsarithmetik und das neue Rechenverfahren, das

---

[1]) Welsch vom althochdeutschen walch = fremd.

bis jetzt immer nur das Privilegium einiger Auserwählten war, in weitere Kreise ein.

Die welsche Praktik spielt noch im heutigen kaufmännischen Rechnen eine große Rolle. Doch versteht man jetzt unter ihr vorwiegend die Lösungsart, welche die Zahlen in Faktoren oder Teilsummen zerlegt, diese Teilwerte berechnet und addiert. Z. B. was kosten $23^1/_4$ m, wenn man für 28 m 74,80 ℳ bezahlt?

Auflösung: 28 m = 74,80 ℳ

14 m = 37,40 ℳ (die Hälfte)
7 m = 18,70 ℳ „ „
2 m = 5,34 ℳ ($^1/_7$ von 14 m)
$^1/_4$ m = 0,67 ℳ ($^1/_8$ „ 2 m)

$23^1/_4$ m = 62,11 ℳ

Wie aus der kurzen Inhaltsangabe der Rieseschen Rechenbücher zu ersehen ist, bringen sie weder neue Gedanken noch besondere Rechenvorteile. Der Grund ihres großen Einflusses muß also in anderer Hinsicht gesucht werden. Es ist der „Rechenmayster“, der geborene Pädagoge, der uns in Riese entgegentritt, und dem seine Bücher den großen Erfolg zu verdanken hatten. Riese entwickelt die Zahlbegriffe an den Rechenpfennigen; an der Rechenbank führt er dann seine Schüler in die 4 Spezies ein. Die Pestalozzi'sche Forderung: „erst Anschauung, dann Verarbeitung“ ist also schon bei Riese realisiert. Dann legt Riese ein Hauptgewicht stets darauf, neue Ideen, neue Rechnungsarten an möglichst einfachen Beispielen einzuüben und dies so lange fortzusetzen, bis sie nach allen Richtungen geklärt sind. Erst jetzt geht er zu schwierigeren Aufgaben über. Aber auch hier wußte er zweckdienlich anzuknüpfen und den Stoff sachlich geordnet aufzubauen. Das bereits Erlernte wird immer und immer wieder repetiert. Fünfmal, sechsmal kommt dieselbe Aufgabe mit ganz unwesentlichen Abänderungen. Riese weiß, daß nur Übung den Meister macht. Sein Zeitgenosse Michael Stiefel, der ihn in wissenschaftlicher Hinsicht weit überragte, nennt seine Aufgaben holdselig und nimmt manche davon in sein eigenes Rechenbuch auf.

Michael Stiefel war ursprünglich Augustinermönch und beteiligte sich auf Seite Luthers an der Reformation; später wurde er Pfarrer in der Nähe von Wittenberg. Im Jahre 1545 ließ er eine Arithmetik drucken, in welcher er Potenzreihen für verschiedene Basen aufstellte und damit der Erfindung der Logarithmen sehr nahe kam.

Kaspar Paucer verfaßte im Jahr 1556 in lateinischer Sprache einen kurzgefaßten Lehrgang des Rechnens mit Sexagesimalbrüchen und gab darin auch eine Anweisung zur Lösung von quadratischen Gleichungen.

Simon Jakob erklärt in seinem 1565 erschienenen Rechenbuche: „Das Linienrechnen ist zu Hausrechnungen, da man viel Summierens, Ausgebens und Eynehmens bedarff, förderlich aber in Kunstrechnungen offtenmal verhinderlich“.

John Neper (Napier), ein schottischer Edelmann, erfand im Anfang des 17. Jahrhunderts die Logarithmen und einen Apparat zur maschinellen Ausführung der Multiplikation und der Division. Dieser hat sich aber nicht bewährt. Die Jesuiten Cirmann (1640) und Schott (1660) konstruierten ebenfalls Rechenmaschinen, die angeblich gut funktionierten. Ihren Bau kennt man nicht mehr.

Blaise Pascal, der berühmte Mathematiker und Philosoph, erfand 1642 eine Rechenmaschine, bei der durch Kurbeldrehungen ein Räderwerk die Resultate der 4 Spezies „ausrechnete“. Man hatte jeweils nur bestimmte Einstellungen zu machen. Der Theorie nach richtig, versagte die Maschine aber meistens, da die damaligen Mechaniker nicht im Stande waren, sie den Ideen des Erfinders entsprechend präzis genug auszuführen. Spätere Erfinder, wie Leibnitz, Müller, Babbache u. a. hatten mit ihren Rechenmaschinen größeren Erfolg. Am vollkommensten ist das Arithmometer von Thomas aus Kolmar, das jetzt in Paris, Wien und Glashütte fabriziert wird.

Tobias Beutel schrieb 1650 ein Rechenbuch, welches die Regeln in Reimen enthielt und 8 Auflagen erlebte.

Der Engländer **Wallis** behandelte 1660 das Verwandeln der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche und in Sexagesimalbrüche und zeigte, daß die entstehenden Dezimalbrüche entweder endliche oder periodische sind, und daß die Periode höchstens n—1 Stelle haben kann, wenn n der Nenner des gemeinen Bruches ist.

Erhard Weigel, Professor in Jena, wollte 1673 das dezimale Zahlensystem durch das tetradische (Basis 4) ersetzt wissen.

Er nennt sein System Tetractys und behauptet, die Viererteilung sei das Natürliche und Nächstliegende, während „die Zehnzahl ein künstlich Gemachtes“ sei.

François Barême veröffentlichte 1677 in Paris ein Rechenbuch, das viele Auflagen erlebte und den Verfasser in Frankreich sehr populär machte. Wie wir heute von Adam Riese sprechen, spricht der Franzose von seinem Barême.

Seit dem 15. Jahrhundert standen die öffentlichen Schulen und die Klosterschulen ganz unter dem Einflusse der Humanisten.[1]) Diese wollten die klassischen Studien als Hauptbildungsmittel bevorzugt wissen und duldeten die Realien notgedrungen so nebenbei. Durch die im 18. Jahrhundert auftretenden Pietisten und Philantropen[2]) kam allmählich eine andere Anschauung zur Geltung. Es wurde den Realien mehr Beachtung geschenkt und außerdem der ganze Unterrichtsbetrieb wesentlich gefördert. Die Pietisten, die Anhänger von P. J. Spener, 1666 Senior der Geistlichkeit in Frankfurt a. M., faßten die Erziehungskunst im Geiste der christlichen Nächstenliebe auf und wollten die Kinder aller Stände für das praktische Leben gründlichst vorbereiten. Sie legten deswegen den Schwerpunkt des Unterrichts auf die Realien und nannten ihre Schulen Realschulen. Die Philantropen huldigten den Grundsätzen Rousseaus, Basedows, Campes, Salzmanns u. e. a. und verlangten als erstes Prinzip aller Erziehung Naturgemäßheit, Menschenfreundlichkeit und Gemeinnützigkeit.

a) Pietisten. 1. **Christoph Semler** (1669—1740) veröffentlichte 1705 eine Schrift: „Nützliche Vorschläge von Aufrichtung einer mathematischen Handwerkerschule bey der Stadt Halle“, in welcher er verlangte, daß die Kinder in der Schule für das gemeine Leben „präparieret werden“. Da die wenigsten zum Studieren, die meisten aber „zu andern Professionen und zu Handwerkern gelangten“, so müßte ihnen während der Schulzeit so viel als möglich Anschauung geboten werden. Materialien und Instrumente seien ihnen in natura oder im Modell vorzuzeigen, denn oculare Demonstrationen gäben am

---

[1]) Human = menschlich, menschenfreundlich.

[2]) Piĕtas = Frömmigkeit, philos = lieb, anthropos = Mensch.

besten deutliche Vorstellungen." Die Berliner Akademie pflichtete Semlers Ansichten bei, und die erste Realschule wurde 1708 in Halle eröffnet. Sie hielt sich aber nur drei Jahre lang. Im Jahr 1739 wurde ein neuer Versuch gemacht; dieser hatte aber auch keinen besseren Erfolg als der erste. — Semler darf als der Vorgänger Pestalozzis betrachtet werden.

Die Anschauungen und Vorschläge Semlers wurden mit größerem Glücke verfochten von

2. **Johann Julius Hecker,** dem Prediger an der Dreifaltigkeitskirche in Berlin. Dieser gründete eine Realschule, die aus mehreren Klassen bestund, von denen eine arithmetische, eine geometrische und eine physikalische hervorzuheben sind. Die Heckersche Schule hatte ebenfalls mit vielen Schwierigkeiten zu kämpfen, fand aber die Beachtung der Bevölkerung und die Unterstützung des Königs von Preußen.

b) Philantropen. Den größten Einfluß auf die Umgestaltung des mathematischen Unterrichts übte

Christian Wolf aus. Er war Professor der Mathematik und Physik in Halle, wurde von Friedrich Wilhelm I. 1723 als Irrlehrer des Landes verwiesen, von Friedrich dem Großen aber 1740 ehrenvoll nach Marburg zurückberufen. Wolf war ein Gegner der Pietisten und bekämpfte sie ihrer frömmelnden Richtung wegen. Seine nüchterne, streng logische Lehrmethode beherrschte lange Zeit den Lehrgeist der deutschen Hochschulen und ist heute noch ein Vorbild exakter Forschung. Wolf war der erste, der das Regelrechnen mit großer Schärfe bekämpfte. Es sei nicht die mathematische Wahrheit an sich, die den Verstand kräftige, sondern der Weg, auf dem diese Wahrheit gewonnen und erkannt werde. Deswegen falle ihr Nutzen als Bildungsmittel fort, wenn sie als Ergebnis einer Gedächtnisarbeit anstatt einer Verstandesarbeit gewonnen werde. „Der Schüler muß jederzeit gefragt werden, warum er dieses so und nicht anders macht, damit er nicht allein den Grund der Rechnung einsieht, sondern sich auch daran gewöhnt, nichts ohne Grund von jemand anzunehmen." Die Forderungen Wolfs suchte besonders der Pädagoge

Basedow, das Haupt der Philantropen, zu realisieren. Er wurde 1723 in Hamburg geboren, wirkte einige Jahre als Professor an der Ritterakademie zu Sorö und am Gymnasium zu Altona. Durch Rousseaus „Emil“ begeistert, trat er als Reformator des Erziehungswesens auf und gab 1774 sein aus 4 Bänden bestehendes „Elementarwerk“ heraus, in welchem er die einzelnen Lehrgegenstände im Sinne Wolfs und Rousseaus behandelte. Im gleichen Jahr gründete er in Dessau die berühmte Musterschule, das Philantropin, trat aber schon nach zwei Jahren von dessen Leitung zurück. Er starb 1790.

Die Forderungen und Vorschläge der Pietisten und Philantropen drangen aber nur allmählich durch. Die Rechenlehrer waren in dem Geiste des Regelrechnens erzogen. Dieses stellte keine besonderen Ansprüche an ihr Lehrgeschick und an ihre Lehrtätigkeit. Deswegen fanden Neuerscheinungen, die im Sinne des alten Schlendrians verfaßt waren, noch lange Zeit überall die beste Aufnahme. So beherrschten die nach altem Stil verfaßten Rechenbücher von **Christian Pescheck** (1676—1747) bis in das 19. Jahrhundert hinein die Rechenmethode vieler deutschen Schulen und „fanden ungeheueren Beifall“. Es erschienen noch 50 Jahre nach seinem Tode neue Auflagen. Einen weitaus höheren Wert als die Pescheck'schen Rechenbücher besaß „die demonstrative Rechenkunst“ von **Christlieb von Clausberg** (1689—1751). Clausberg erteilte in verschiedenen Handelsstädten (Danzig, Hamburg, Lübeck) Rechenunterricht und war später der Hauslehrer des dänischen Kronprinzen. Sein Rechenbuch enthielt zwar noch eine Reihe Regeln und Rechenvorteile, aber diese waren nicht auf Treu und Glauben für richtig hinzunehmen, sondern sie wurden mehr oder weniger anschaulich entwickelt und begründet. Clausberg ist ein Freund vom Kopfrechnen, findet aber das große Einmaleins für überflüssig. An Stelle der Neunerprobe empfiehlt er die Elferprobe. Von der Regeldetri sagt Clausberg, sie sei die Grundlage des praktischen Rechnens, habe aber nur für jenen Rechner, der denken und in den Geist einer Aufgabe einzudringen vermöge, wirklichen Wert, da sie, wie alles in der Welt, ihre Grenzen habe. Große Aufmerksamkeit schenkt er den Zins- und Wechselrechnungen.

Auf gleicher Höhe, wie die Clausbergsche „Rechenkunst“, steht auch das Rechenbuch von **Gotthold Hübsch.** Hübsch war Rechenlehrer an der Fürstenschule zu Pforta und ließ 1748 eine Arithmetika portensis erscheinen, in welcher er erklärte, die

Rechenkunst sei ein Schleif- oder Wetzstein, die distinkt ordentlich und vorsichtig denken lehre. Er legt mehr Gewicht auf die Methode als auf Übungen. Das Übungsmaterial ist deswegen beschränkt. Die Erklärungen werden auf ihre Richtigkeit, die Rechenvorteile auf die Anwendbarkeit, und die Proben auf die Zuverläßigkeit geprüft. Das Kopfrechnen sei zwar wichtig, bilde sich aber von selbst, wenn viel mit der Feder gerechnet werde. Hübsch war der erste, der beim schriftlichen Rechnen auf Sorgfalt in der äußeren Darstellung sah, peinliche Reinlichkeit, Deutlichkeit und Ordnung verlangte.

Wie wir weiter oben sahen, erfand der Schotte Napier im Anfange des 18. Jahrhunderts die Logarithmen. Einige Jahre später brachte sie auch, unabhängig von Napier, der Schweizer Jost Burgi. Beiden waren wahrscheinlich die Potenzreihen des Michael Stifel bekannt. Mithin wäre dieser der eigentliche Erfinder. Übrigens hat schon im Jahr 1484 der Franzose Chuquet in einem arithmetischen Werke gesagt, daß die „Ordnungszahl" eines Produktes gleich sei der Summe der „Ordnungszahlen" seiner Faktoren ($3^2 \cdot 3^3 = 3^5$).

Nachdem die Logorithmen erfunden waren, wurden sie von den Gelehrten aller Nationen freudig begrüßt. Es entstanden eine Reihe Systeme, von denen das von **Henry Briggs**, welcher die Zahl 10 als Basis der Potenzreihen annahm, als das zweckmäßigste für die elementare Mathematik anerkannt wurde (1620).

Mit der Erfindung der Logarithmen bricht für die Arithmetik ein neues Zeitalter an. Multiplizieren und Dividieren werden zum Addieren und Subtrahieren, Potenzieren und Radizieren zum Multiplizieren und Dividieren, und die Trigonometrie, die schon vor Jahrtausenden in China und Indien aufkam, erlangte erst jetzt ihre große praktische Bedeutung.

Einige Jahre später führte **Kepler** die Begriffe der unendlichen Größen in die Arithmetik ein. **Borrow, Newton** und **Leibniz** bauten auf ihnen das stolze Gebäude der höheren Mathematik auf, welche in ihrer Anwendung auf Geometrie, Naturwissenschaft und Technik so ungemein fruchtbringend werden sollte.

In neuerer Zeit ist von seiten verschiedener Gelehrten schon wiederholt in Vorschlag gebracht worden, das dekadische Zahlensystem durch das dodekadische zu ersetzen, weil die Basis 12 vier Faktoren besitze, die Basis 10 aber deren nur 2 habe. Die Rechenoperationen blieben im Prinzip die gleichen, nur könnte man sie öfters vereinfachen. Vor Allem aber müßte man für die Zahlen 10 und 11 zwei neue Ziffern einführen, da die 12 Einheiten des neuen „Zehners“ durch die Zeichen 10 dargestellt werden müßten. Immerhin dürfte aber, falls sich die Vorschläge verwirklichen sollten, die Übergangsperiode mit vielen Schwierigkeiten verbunden sein. Außerdem würden auch duodezimale Maßsysteme nötig werden.

Zahlensysteme. Im Anschluß an oben genannte Vorschläge, das dekadische Zahlensystem durch das dodekadische zu ersetzen, wollen wir an einigen Beispielen zeigen, wie man die Zahlen aus einem System in ein anderes übertragen kann, und wie die 4 Spezies in beliebigen Systemen auszuführen sind.

I. Bekanntlich treten im dekadischen System die einzelnen Zahlen als Summen von Potenzen der Grundzahl (Basis) 10 auf. Die Koeffizienten dieser Potenzen sind die Ziffern des Systems; sie sind immer kleiner als die Grundzahl. So ist z. B. $6745{,}389 = 6 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 + \frac{3}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000} = 6 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 8 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3}$.

Stellen wir Potenzreihen irgend einer anderen Basis auf, z. B. der Basis 8, und geben auch ihren Koeffizienten Stellenwerte, wie sie die der dekadischen Zahlen besitzen, so lassen sich auch diese Reihen, den Forderungen der Positionsarithmetik entsprechend, in einfacher Form ausdrücken und anschreiben. Z. B. $5 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2} = 5432{,}76$ (Basis 8). Über den „wahren Wert“ dieser oktadischen Zahl 5432,76 besitzen wir vorerst kein klares Urteil, erhalten aber ein solches, sobald wir sie als Potenzreihe darstellen und dann ihre reelle Summe suchen. Es ist: $5432{,}76$ (B. 8) $= 5 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2} = 2560 + 256 + 24 + 2 + 0{,}875 + 0{,}09375 = 2842{,}96875(10)$.

II. Das **Multiplizieren** und **Dividieren** der Zahlen beliebiger Systeme mit reinen **Potenzen der betreffenden Basis** erfolgt durch ein Verschieben des Kommas.

1. $3{,}478 \cdot 10^2 = 347{,}8$ (Basis 10)
2. $6584{,}3 : 10^3 = 6{,}5843$ (Basis 10)
3. $24{,}357 \cdot 12^2 = 2435{,}7$ (Basis 12)
4. $5243{,}6 : 8^4 = 0{,}52436$ (Basis 8)

Beweis zu Nr. 3:

$$\begin{aligned} 24{,}357 \cdot 12^2 &= (2 \cdot 12^1 + 4 \cdot 12^0 + 3 \cdot 12^{-1} + 5 \cdot 12^{-2} + 7 \cdot 12^{-3}) \cdot 12^2 \\ &= 2 \cdot 12^3 + 4 \cdot 12^2 + 3 \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0 + 7 \cdot 12^{-1} \\ &= 2435{,}7. \end{aligned}$$

Anmerkung. Ist die Zahl n die Basis eines Systems, so verlangt die Positionsmathematik, daß man die Potenzen $n^1 = 10$, $n^2 = 100$, $n^3 = 1000$, $n^4 = 10{,}000$ usw. anzuschreiben hat. Es wäre nun vielleicht zweckmäßig, die Zahlen $a \cdot n^0 =$ Einer, $b \cdot n^1 =$ Zehner, $c \cdot n^2 =$ Hunderter usw. zu nennen; dabei müßte man sich freilich daran gewöhnen, unter „Zehn" die erste Potenz der Grundzahl, unter „Hundert" ihre zweite Potenz usw. zu verstehen. Die Aufgaben Nr. 3 und Nr. 4 müßten also folgendermaßen geschrieben werden:

3) $24{,}357 \cdot 12^2 = 24{,}357 \cdot 100 = 2435{,}7$ (B. 12)
4) $5243{,}6 : 8^4 = 5243{,}6 : 10{,}000 = 0{,}52436$ (B. 8)

III. Das Übertragen einer dekadischen Zahl in ein anderes System.

A. Es soll die dekadische Zahl 2423 im oktadischen System ausgedrückt werden. Da die neue Zahl als Summe von Potenzen der Basis 8 auftreten muß, also als Summe von Produkten vom Faktor 8, so hat man die dekadische Zahl durch 8 zu dividieren. Z. B.

1. $2423 : 8 = 302$ **Rest 7**
2. $302 : 8 = 37$ **Rest 6**
3. $37 : 8 = 4$ **Rest 5**
4. $4 : 8 = 0$ **Rest 4**

Aus diesen Gleichungen folgt, daß

3. $37 = 4 \cdot 8 + 5$
2. $302 = 8 \cdot 37 + 6 = 8 \cdot (4 \cdot 8 + 5) + 6 = 4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6$
1. $2423 = 8 \cdot 302 + 7 = 8 \cdot (4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6) + 7 = 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 7$ ist.

Es ist also 2423 (Basis 10) = 4567 (Basis 8).

Dividiert man auf die angegebene Weise so lange, bis der Quotient Null auftritt, so hat man im ersten Rest die „Einer", im zweiten die „Zehner", im dritten die „Hunderter" usw. der neuen Zahl.

Probe: 4567 (Basis 8) $= 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 7 = 2048 + 320 + 48 + 7 = 2423$.

B. 827 (B. 10) = ? Basis 5.

Auflösung: $827 : 5 = 165 : 5 = 33 : 5 = 6 : 5 = 1 : 5 = 0$
Rest 2 Rest 0 Rest 3 Rest 1 Rest 1

Also 827 (B. 10) = 11 302 (B. 5).

Probe: 11302 (B. 5) $= 1 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 = 625 + 125 + 75 + 2 = 827$.

C. a) Liegen die dekadischen Zahlen als Dezimalbrüche vor, so hat man mit der neuen Basis zu multiplizieren. Z. B. 0,568 (Basis 10) = ? Basis 5.

Auflösung: 1. $5 \cdot 0{,}568 = 2{,}840$ (2)
2. $5 \cdot 0{,}84 = 4{,}20$ (4)
3. $5 \cdot 0{,}2 = 1$ (1)

Es ist mithin 0,568 (B. 10) = 0,241 (Basis 5).

Beweis. Die erste Multiplikation lieferte 2 Ganze. Sollten diese in den alten Zustand zurückgeführt werden, müßte man sie durch 5 dividieren, oder, was dasselbe ist, mit 5^{-1} multiplizieren. Die 4 Ganzen des II. Ganges sind durch die zweimalige Multiplikation mit 5, also durch Multiplikation mit 5^2 entstanden. Eine Division durch 5^2 oder eine Multiplikation mit 5^{-2} hebt die Wirkung wieder auf. Die Ganzen des III. Ganges sind die Folge einer dreimaligen Multiplikation mit 5; sie sind also durch 5^3 zu teilen usw. Es ist also $0{,}568 = \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{1}{125} = 2 \cdot 5^{-1} + 4 \cdot 5^{-2} + 1 \cdot 5^{-3} = 0{,}245$ (B. 5).

Probe: $0{,}245$ (B. 5) $= \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{1}{125} = 0{,}4 + 0{,}16 + 0{,}008 = 0{,}568$ (B. 10).

b) Bei gemischten Dezimalzahlen müssen die Ganzen nach dem Divisions-, die Dezimalstellen nach dem Multiplikationsverfahren behandelt werden. Z. B.: 547,96875 (B. 10) = ? Basis 8.

Auflösung: 1. $547 : 8 = 68 : 8 = 8 : 8 = 1 : 8 = 0$
Rest **3**, Rest **4**, Rest **0**, Rest **1**.

2. $0{,}96875 \cdot 8 = \mathbf{7}{,}75$; $0{,}75 \cdot 8 = \mathbf{6}$.

Es ist nun 547,96875 (B. 10) = 1043,76 (B. 8).

Probe: 1043,76 (B. 8) $= 1 \cdot 8^3 + 0 \cdot 8^2 + 48^1 + 3 \cdot 8^0 + 7 \cdot 8^{-1} + 6 \cdot 8^{-2} = 512 + 32 + 3 + \frac{7}{8} + \frac{6}{64} = 547{,}96875$ (B. 10).

Bei diesen Übertragungen entstehen meistens unendliche Reihen.

IV. a) **Addition.** Addiere die duodezimalen Zahlen 5642, 6856, 3962, 8754, 9627.

```
 5 6 4 2
 6 8 5 6
 3 9 6 2
 8 7 5 4
 9 6 2 7
---------------
2 (10) 1 (11) 9
```

Erklärung. Die Summe der Einer beträgt 21; $21 = 1 \cdot 12 + 9$; schreibe 9 an, behalte 1 und zähle ihn zu den „Zehnern" der zweiten Reihe. Die Summe der Zehner beträgt 23; $23 = 1 \cdot 12 +$ Elf. Da wir für Elf keine Ziffer besitzen, müßten wir eine solche erfinden. Wir wollen aber unsere zwei Ziffern für Elf in Klammern setzen usw.

b) **Subtraktion.** 754 321 (B. 8) — 267 524 (B. 8).

```
  754 321
— 267 524
---------
  464 575
```

Erklärung. 4 von 1 kann ich nicht, leihe ich einen „Zehner". Dieser hat 8 Einer, $8 + 1 = 9$; $9 - 4 = 5$ usw.

c) **Multiplikation.** $672 \cdot 438$ (B. 9).

```
   672
   438
------
  6037
 2236
3018
------
331307
```

Erklärung:

1. $8 \cdot 2 = 16$; $16 = 1 \cdot 9 + 7$
2. $8 \cdot 7 = 56$; $+ 1 = 57$; $= 6 \cdot 9 + 3$
3. $8 \cdot 6 = 48$; $+ 6 = 54$; $= 6 \cdot 9 + 0$ usw.

c) **Division.** 432332 : 534 (B. 6) = 452

```
432332 : 534 (B. 6) = 452
3424
 4553
 4402
  1512
  1512
  ====
```

§ 13.

Die Erfindung der Dezimalbrüche.

Wenn man von der Erfindung der Dezimalbrüche spricht, so kann es sich nur darum handeln, darzutun, von w e m und w a n n sie zuerst o h n e N e n n e r angeschrieben wurden und zwar angeschrieben im Sinne der Positionsarithmetik. Als Brüche waren sie schon längst bekannt und bei den meisten Völkern seit den ältesten Zeiten in Gebrauch, wenn auch meistens in sehr bescheidenem Maße, so daß sie ganz in den Hintergrund traten. Eine größere Bedeutung hatten stets nur die Brüche, die mit den Maß- und Münzsystemen zusammenhingen, und da diese gewöhnlich keine dezimale Gliederung besaßen, so spielten auch die Dezimalbrüche keine Rolle. So waren z. B. bei den Babyloniern die Sexagesimalbrüche die wichtigsten, wenigsten in den wissenschaftlichen Systemen. Diese wurden entweder in Bruchform angeschrieben, oder aber es wurde ihnen, wie wir bereits früher sahen, der Charakter der Stellenwertigkeit verliehen, der den Nenner entbehrlich machte. Statt $24\,{}^{17}/_{60}, {}^{43}/_{60^2}, {}^{52}/_{60^3}, {}^{21}/_{60^4}$ schrieb man $24^0, 17', 43'', 52''', 21''''$. Da diese Brüche von Babylon aus nach Griechenland gelangten, und die Griechen in der Astronomie und in der Kreis- und Zeitmessung das babylonische Maßsystem mit übernahmen, so spielten sie auch hier eine große Rolle. Im bürgerlichen Leben traten sie freilich zu Gunsten der Halben, Viertel, Sechstel und Achtel zurück, weil das Münzsystem Drachmen, $^1/_6$ Drachme = 1 Obulus, $^1/_2$ Obulus, $^1/_4$ Obulus und $^1/_8$ Obulus = 1 Chalkos enthielt.

Die Römer besaßen das ausgesprochene Duodezimalsystem; sie hatten aber für alle 12 Zwölftel besondere Zeichen und besondere Namen. Es lag deswegen kein Bedürfnis vor, beim Anschreiben auf die Stellung irgendwie Rücksicht zu nehmen.

Der erste Mathematiker, der unseres Wissens wenigstens, andeutungsweise Dezimalbrüche im Sinne der Positionsarithmetik anwandte, war Johann Luna (Johann von Sevilla). Im Jahr 1150 hing er beim Wurzelausziehen $n \cdot 2$ Nullen an den Radikanden und schrieb dann die nach den Ganzen kommenden Stellen der Wurzel als Zähler eines Bruches an, dessen Nenner 10^n hieß, z. B. $\sqrt{4378} = \sqrt{4378 - 000000} = 66 - 166 = 66\,{}^{166}/_{10^3} = 66\,{}^{166}/_{1000}$. Ähnlich verfuhr Jordanus im Jahre 1200. Im Jahr 1484 teilte der Italiener Borgi durch $a \cdot 10^n$, indem er im Dividenden von den Einern aus n Stellen abstrich, den Rest durch a dividierte, den dabei entstehenden Rest vor die abgestrichenen Stellen setzte und die Zahl a mit n Nullen als Nenner darunter schrieb. Er verfuhr also folgendermaßen: $235\,875 : 6000 = 235 : 6 = 39$ Rest 1. Schrieb er nun den Rest 1 vor die abgestrichenen Stellen 875 und setzt den Divisor 6000 darunter, so erhielt er $39\,{}^{1875}/_{6000}$.

Das im Jahr 1525 erschienene Rechenbuch von Rudolff sagt, man teile die Zahlen durch Potenzen von 10, indem man „mit einer virgl“ so viele Stellen abstreiche, als der Divisor Nullen habe. Rudolff ist mit dieser Regel der Erfindung der Dezimalbrüche sehr nahe gekommen, aber daß eine folgenschwere Erfindung in ihr enthalten sei, erkannten weder er noch seine Zeitgenossen. Immerhin war nun der Boden für das Erscheinen der Dezimalbrüche vorbereitet, und ein in französischer Sprache in Leyden erschienenes Lehrbuch brachte sie im Jahr 1585. Sein Verfasser war ein Niederländer, namens **Simon Stevin.** Das genannte Lehrbuch besteht aus 4 Teilen. Der erste Teil ist eine Arithmetik, der zweite behandelt die 4 ersten Bücher des Diophant, der dritte die Pratique d'Ariméthique, und der vierte hat den Titel: „La Disme enseignant facilement expedier par nombres entiers sans rompus tous comptes se rencontrant aux affaires des Hommes“. Im vierten Teil lehrt er, wie man alle Rechnungen, die im menschlichen Leben vorkommen, ohne Brüche ausführen könne, wenn man die Dezimalbrüche einführe und sie, der Positionsarithmetik entsprechend, verwerte. Wir wissen heute, daß sie tatsächlich das leisten, was Stevin versprach. Er selbst war von der Durchführbarkeit seines Vorschlages fest überzeugt und forderte von den Regierungen dezimalgeteilte Maße, Münzen und Gewichte. Er schreibt, wenn auch die Einführung der Dezimalbrüche nicht so bald in Aussicht stehe, wie er es wünsche, so sei er doch sicher, daß ein künftiges Geschlecht, wenn die Menschennatur die gleiche bleibe, nicht auf die Dauer einen so großen Vorteil außer acht lassen werde. Er ahnte freilich nicht, daß es noch zwei Jahrhunderte dauern sollte, bis man anfing, seine Gedanken und Vorschläge zu verwirklichen. Dies war der großen französischen Revolution vorbehalten.

Stevin zeigte in seinem „La Disme“, wie man Dezimalbrüche ohne Nenner anschreiben könne, und wie mit ihnen gerechnet werden müsse. — So ganz fällt der Nenner freilich noch nicht fort, da einzelne Stellenanzeiger vorgesehen sind. So schreibt Stevin z. B. statt 37,784 = 37 (0), 7 (1), 8 (2), 4 (3). Bei den Ausführungen der Rechnungen schreibt er die Stellenanzeiger über die betr. Stellen, dadurch gewinnt die Schreibart an Übersichtlichkeit.

Statt		schreibt er	(0)		(1)	(2)	(3)
	48,564		4	8	5	6	4
	17,358		1	7	3	5	8
	29,762		2	9	7	6	2
	---		---	---	---	---	---
	95,684		9	5	6	8	4

Stevins Stellenanzeiger wurde um das Jahr 1600 von **Joost Bürgi**, von dem wir schon im vorigen Kapitel sprachen, durch ein Pünktchen oder durch eine, den Einern zugekehrte, Halbklammer ersetzt. Bürgi war ursprünglich einfacher Uhrmachergehilfe, wurde dann Hofuhrmacher in Kassel, kam als kaiserlicher Kammeruhrmacher nach Prag und eignete sich allmählich als Autodidakt umfangreiche mathematische Kenntnisse an. Er konstruierte mehrere wissenschaftliche Instrumente für Astronomie und Geometrie, schrieb „arithmethische und geometrische Progreßtabulen“ (Logarithmentafeln) und vervollkommnete die trigonometrischen Tafeln, indem er Sinustafeln **auf 8 Dezimalstellen** berechnete. In Prag lernte er den Astronomen **Kepler** kennen, und so vereinigte das Geschick zwei hochbegabte Männer: Kepler, ausgezeichnet als theoretischer Mathematiker und wissenschaftlich geschulter Astronom, Bürgi, hervorragend als intelligenter Praktiker und tüchtiger Mathematiker. Über Bürgis Dezimalbruchdarstellung schreibt Kepler im Jahr 1616, sie sei von Joost Bürgen zu der Sinusrechnung erdacht. Demnach wäre Bürgi, unabhängig von Stevin, der zweite Erfinder der Dezimalbrüche. Dies ist um so wahrscheinlicher, weil er ohne eigentlichen Unterricht aufwuchs, keine fremden Sprachen kannte und deswegen in der Literatur nicht bewandert war. Bürgi kennt schon das abgekürzte Rechnen mit Dezimalzahlen. So vervielfacht er z. B. 1,2358 mit 0,1234 folgendermaßen:

0	1	2	3	4	
1	2	3	5	8	
0	1	2	3	4	
	0	2	4	6	8
		0	3	7	0
			0	6	1
				0	9
0	1	5	2	5	

Merkwürdigerweise kommt hier kein Abteilungszeichen vor.

Die Dezimalbrüche fanden bei verschiedenen Mathematikern sofort großen Beifall. **Vieta**, der größte französische Mathematiker des 17. Jahrhunderts, tritt in seinem im Jahre 1609 erschienenen Canon unter entschiedener Absage an die Sexagesimalbrüche zu Gunsten der Dezimalbrüche ein. Er stellt sie in seinem Buche durch kleine Lettern dar. Spätere Auflagen enthalten zwischen den Ganzen und den Dezimalstellen noch einen senkrechten Strich. Der deutsche Astronom **Pitiscus** aus Grüneberg in Schlesien ließ im Jahr 1612 trigonometrische Tabellen drucken mit Dezimalstellen, die durch einen Punkt von den Ganzen getrennt waren.

Im Verlaufe des 17. und 18. Jahrhunderts wurden die Dezimalbrüche von den Mathematikern aller Nationen übernommen. Das Volk aber, noch nicht im Besitze dezimalgeteilter Maße, brachte ihnen weniger Interesse entgegen. Ihm genügten die gemeinen Brüche. Erst dann, nachdem die große Revolution in Frankreich, dem Drucke der Gelehrten nachgebend, die metrischen Maße und Gewichte mit ihrer dezimalen Gliederung eingeführt hatte, drangen sie, wenn auch vorerst nur in Frankreich, in weitere Kreise ein. Im 19. Jahrhundert gingen dann die französischen Maße in die meisten Staaten Europas über. Infolgedessen waren deren Angehörige genötigt, sich in die Dezimalbrüche einzuarbeiten und sich ihrer tag-täglich zu bedienen, so daß sie nun Gemeingut Aller geworden sind.

§ 14.

Die Entwicklung der gegenwärtigen Rechenmethode.

A. Die Periode des Regelrechnens. Wie wir aus den Rechenbüchern des Mittelalters ersahen, drehte sich der Rechenunterricht jener Zeit vorwiegend darum, dem Schüler gewisse mechanische Fertigkeiten im Lösen von Aufgaben praktischen Inhaltes beizubringen. Der Rechenlehrer machte die Aufgaben nach bestimmten Schablonen vor und war zufrieden, wenn sie der Schüler nachmachen konnte. Ob dieser in den Geist der Aufgabe einzudringen vermöge, ob er eine Spur Verständnis vom Gange der Lösung besitze, kam nicht in Betracht. Für jede Rechnungsart waren feste Regeln vorhanden, geheiligt durch die Tradition, erprobt durch die Erfahrung; diese hatte sich der Rechner anzueignen, er mußte es lernen, sie anzuwenden. Woher die Regel stammte, auf welche Weise sie mit den Ideen der Aufgabe zusammenhing, warum sie das richtige Resultat lieferte, dies alles war gewöhnlich Nebensache. Die Rechenlehrer wußten dies meistens selbst nicht. Nun dürfen wir freilich nicht vergessen, daß die Lehre vom Unterrichten in jener Zeit eben erst im Entstehen war, und daß gewöhnlich keine Kinder, sondern Erwachsene unterrichtet wurden, die das Rechnen aus rein praktischen Gründen lernen wollten.

Der Hauptvertreter des Regelrechnens im 18. Jahrhundert war Christian Pescheck, Professor am Gymnasium in Zittau, der ein Rechenbuch für das Gymnasium und ein solches für die Elementarschule schrieb. Auch dieser kleidete, wie verschiedene seiner Vorgänger, die Regeln in Verse ein, die die Schüler auswendig lernen mußten. So lautet z. B. seine Regeldetri:

„Die letzten zwei multipliciere,
Was kömmt, durchs erste dividiere.“

Als man gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts anfing, der durch Spinoza, Locke und Leibniz neubelebten Psychologie mehr Beachtung zu schenken, machte sich eine Strömung gegen das Regelrechnen geltend, die bald weitere Kreise zog und in verschiedenen Schulordnungen zum Ausdruck gelangte. So verlangten z. B. die Schulordnungen von Gotha, Halle und Braunschweig-Lüneburg (1710—1740): „Der Docens hat bei den Scholaren dahin zu sehen, daß er ihnen nicht allein Regeln und Exempel gebe, sondern bei den Exempeln jeder Zeit den rechten Weg der Regel zeige, damit sie diese im Leben so wichtige Wissenschaft mit Verstand begreifen, nicht aber, wie vielfältig zu geschehen pflegt, nur ohne Verstand memorieren." Dann waren es aber besonders die Pietisten und Philantropen, die für neuere Anschauungen bahnbrechend zu wirken suchten. (Siehe § 12.)

B. Reformversuche. Unter dem Einfluß dieses neuen Geistes entstanden von der Mitte des 18. Jahrhunderts ab mehrere Rechenwerke, in denen nun auch das formale Prinzip zum Ausdruck kam.

In erster Reihe sind hier zu nennen die von **Bernhard Overberg,** geb. 1754, gestorben 1826 als Direktor des Priesterseminars in Münster; **A. H. Niemeyer,** geb. 1754, Direktor der Franckeschen Stiftung in Halle, gest. 1828, und **F. G. Dinter,** geb. 1760, Seminardirektor in Sachsen, gestorben als Schulrat 1831 in Königsberg.

Diese Rechenbücher waren im allgemeinen nach folgenden Gesichtspunkten abgefaßt:

1. Der Rechenunterricht darf nicht mit Definitionen und Erläuterungen begonnen werden. „Lehret zählen!"
2. Pfleget das Kopfrechnen, ehe ihr das schriftliche Rechnen beginnt.
3. Führet die abstrakten Zahlen auf konkrete zurück.
4. Gebet keine Regeln. Der Schüler muß diese selber finden.
5. Das Kind darf nichts rechnen, von dem es den Grund nicht einsieht.
6. Große Zahlen haben für den Unterricht keinen Wert.

Den größten Einfluß auf die Anbahnung neuer Ideen gewann aber **Heinrich Pestalozzi** (1746—1827). Nach Pestalozzi bildet die **Anschauung** die Grundlage alles Erkennens. Nur das, was durch Anschauung gewonnen ist, hat dauernden Wert. Deswegen ist auch im Rechenunterricht das Hauptgewicht auf Anschauung zu legen. Die logischen Begriffe für die ersten hundert Zahlen werden in seiner Schule an einer Tabelle entwickelt, die in zehn Reihen zehn Rechtecke enthält, in welchen sich senkrechte Striche befinden. Jedes Rechteck der ersten Reihe enthält je einen Strich, jedes der zweiten je zwei, jedes der dritten je drei usw. An dieser Tabelle wird die Entstehung der Zahl, ihre Zerlegung in Summanden und Faktoren entwickelt und zwar in streng vorgeschriebener Weise. Auch die vier Spezies werden an ihr gelehrt und geübt. Eine zweite Tabelle erläutert das Wesen der Brüche. Diese werden an 36 parallelen, verschieden geteilten Linienpaaren und an 100 gleichen Quadraten, die in Halbe, Drittel, Viertel usw. eingeteilt sind, veranschaulicht. Zu den beiden Tabellen gehörten Rechenhefte, welche mehr als 20000 Fragen enthielten, die „so gerichtet sind, daß jede vollendete Anschauung die nächstfolgende im Geiste des Kindes begründet“ (Pestalozzi). Daß diese maßlose Ausdehnung der Anschauung ihr gutes Prinzip wesentlich heruntersetzte, ja fast annullierte, bedarf keines Beweises. „Der Unterricht artete zur Dressur des so verpönten Regelrechnens aus.“ „Die Knaben sind so dressiert, daß sie die schwierigsten Bruchrechnungen mit einer Gewandtheit und Sicherheit im Kopfe ausrechnen, wie sie der geübteste Rechner kaum auf dem Papier herausbringt.“ Wie weit das Zerlegen und Aufbauen der Zahlen an den Tabellen getrieben wurde, ergibt sich aus folgendem Beispiel: „4mal der 5. Teil einer unbekannten Zahl ist gleich 6mal dem 7. Teil von 4mal dem 5. Teil von 70. Wie heißt die Zahl?“

Die Schüler wurden mit den Ziffern erst dann bekannt gemacht, nachdem der ganze Rechenstoff durchgearbeitet war. Das schriftliche Rechnen kam also erst dann, nachdem man „die Arbeit hinter sich hatte“.

Wenn auch von der Pestalozzischen Rechenmethode im allgemeinen anerkennend gesagt wurde, „sie gründet sich auf Anschauung, schärft die Aufmerksamkeit, übt das Gedächtnis und die Einbildungskraft, veranlaßt Urteile und Schlüsse und darf daher als eine sehr zweckmäßige Vorübung des ganzen Vorstellungsvermögens empfohlen werden“, so konnte sie sich in den deutschen Schulen doch nicht einbürgern, oder sie verschwand wieder, wo sie eingeführt war. Aber Pestalozzis Geist verschwand nicht; er wirkte befruchtend auf die Erziehungskunst aller Länder ein und wird noch lange der Glanzpunkt in der Geschichte der Pädagogik sein.

Wie man dem Regelrechnen seinerzeit mit Recht vorwarf, es sei kein Zahlenrechnen, sondern nur ein Ziffernrechnen, so hielt man der Pestalozzischen Schule entgegen, sie vernachlässige das Ziffernrechnen zu Gunsten des Zahlenrechnens und tadelte außerdem, daß sie in dem kindlichen Geiste nur unvollkommene Zahlbegriffe erwecke, weil sie dieselben nur auf geometrische Vorstellungen gründe. Dann wurde dem Pestalozzischen Grundsatze „Bildung der Kraft des Geistes an der abstrakten Zahl“ die Forderung: „Bildung für das Leben an konkreten Beispielen“ gegenübergestellt.

C. Ausgleich der Gegensätze. Unter dem Einfluß der Anregungen Pestalozzis entstanden in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts verschiedene Rechenbücher, die die Hauptmängel seiner Methode zu vermeiden suchten und zum Teil auch neue Leitsätze aufstellten. Hierher gehören die Arbeiten von Tillich, Rebs, Hoffmann, Stern, Stephani, Türk, Harnisch u. a. m. Diese verlangten:

1. Das Rechnen hat die harmonische Ausbildung aller geistigen Kräfte zum Ziel.
2. Kopfrechnen und schriftliches Rechnen dürfen nicht getrennt behandelt werden, ebensowenig das formale und das materiale Rechnen.
3. Der Zahlbegriff muß durch Anschauung gewonnen werden, aber er muß so in das geistige Eigentum übergehen, daß er unabhängig von ihr existiert. Die Anschauung muß auch universaler Art sein.[1])
4. Die Anschauung darf nicht in Spielereien ausarten.

Von einigen Methodikern wurde auch die erzieherische und sittliche Wirkung des Rechenunterrichts, wie dies schon Pesta-

[1]) Es machten sich aber auch gegenteilige Stimmen geltend. „Die Zahlbegriffe stammen nicht aus Sinneseindrücken, sie sind das Ergebnis einer Erfindung, der Erfindung des Zählens.“ (Tanck.) „Die Zahlbegriffe stammen nicht von außen, sie entstehen durch eine schöpferische Betätigung des Menschengeistes.“ (Knilling.) „Es gibt keine Zahlenvorstellungen, sondern nur Zahlbegriffe, die Zahlen haben absolut keinen konkreten Beigeschmack.“ (Sachse.)

lozzi und Herbart getan hatten, betont. „Der Rechenunterricht bildet für das Gute, Wahre und Tüchtige; er duldet nur das Wahre, hat also eine sittliche Wirkung.“ (Diesterweg.) „Er fördert nicht nur Verstandes-, sondern auch allgemeine Menschenbildung.“ (Kehr.) Ähnlich äußern sich Stern, Kaselitz, Beetz, besonders aber Grube. Von diesem erschien 1842 eine kleine Schrift unter dem Titel: „Wie wirkt der Unterricht sittliche Bildung?“ in der er ausführte, daß im Reiche der Zahlen unbedingte Gesetze herrschen, die keine Ausnahme gestatten, und daß in der Sprache der Arithmetik eine Bestimmtheit und Knappheit zum Ausdrucke komme, die Sinn für Ordnung entwickle und die Phantasie zügle . . . . die Zahlen eröffnen Ausblicke in die Großartigkeit und Unendlichkeit der Räume und Zeiten und erwecken deswegen ohne besondere Worte Gefühle der Bewunderung für die Schöpfung . . . . die Mathematik übt im raschen Erfassen und Verwenden gegebener Bedingungen und kräftigt so eine Eigenschaft, die zum sittlichen Handeln sehr häufig notwendig ist“. Von anderer Seite wird die ethische Wirkung des Rechenunterrichts in Abrede gestellt. „. . . das Rechnen macht den Menschen nicht um einen einzigen höheren sittlichen Gedanken reicher . . . . die Denktätigkeit ist eine unproduktive, gemüts- und herzlose; es ist sinnloses Geschwätz, wenn Grube dem Rechnen ethische Wirkung beilegt.“ (Körner.) „Es ist ein verfehltes Bestreben, dem Rechnen besonders formal bildende Momente beizulegen . . . . es hat sich ausschließlich in den Dienst des praktischen Lebens zu stellen, um eine nötige Fertigkeit für Handel und Verkehr zu erzeugen.“ (Knilling.) „Die sittlich bildende Wirkung des Rechenunterrichtes liegt nicht im Rechenstoff und nicht in der Art seiner Verarbeitung, sondern in der Person, dem Geschick und Willen des Lehrers, in den Rechenstunden unbedingte Stille und strenge Aufmerksamkeit zu erzielen.“ (Steuer.)

In methodischer Hinsicht brachte Grube als neuen Gedanken die Forderung, es dürften nicht die einzelnen Operationen im Vordergrund des Unterrichtes stehen, sondern die einzelnen Zahlen; an diesen müßten sämtliche Operationen vorgenommen werden. Die monographische Zahlenbehandlung. Diese Anschauung fand verschiedene Freunde, aber auch scharfe Gegner. Man einigte sich schließlich dahin, daß nicht einzelne

Zahlen im Sinne Grubes zu behandeln seien, sondern Zahlengruppen.

D. Anschauungsmittel. Um der Forderung Pestalozzis, jeder Unterricht müsse sich auf Anschauung gründen, gerecht zu werden, sahen sich verschiedene Methodiker in der Vergangenheit nach Anschauungsmitteln für den Rechenunterricht um, oder sie suchten neue zu erfinden. So entstanden eine Reihe körperlicher und graphischer Lehrmittel.

a. Materielle Anschauungsmittel.

1. Stäbchen. Die Schüler haben Stäbchen mitzubringen, die einzeln oder in Bündeln vereinigt, Einer, Zehner, Hunderter usw. vorstellen.
2. Rechenmarken. Man benützt kleine, mittlere und große Scheiben aus Karton oder Blech zur Darstellung der Einer, Zehner und Hunderter.
3. Das Löcherbrett von Gersbach. In ein System von horizontalen und vertikalen Lochreihen werden farbige Holzstifte gesteckt. Es tritt in verschiedenen Abänderungen und unter verschiedenen Namen auf.
4. Tillichs Rechenkasten mit seinem Würfelsystem.
5. Die russische Rechenmaschine wurde wiederholt „verbessert" und tritt unter den verschiedensten Namen auf. Hat die weiteste Verbreitung gefunden.
6. Rechenkästlein und Rechenmaschine von Dr. Lay (siehe unter b 4.).
7. Verschiedene andere.

b. Graphische Anschauungsmittel.

1. Die Pestalozzischen Tabellen in vereinfachter Form.
2. Die Heerschen Rechenfiguren. Weiße Scheiben in schwarzen Quadraten.
3. Sterns Quadratfeld. In die Schiefertafel werden $10 \cdot 10 = 100$ Quadrate eingeritzt, in welche die Schüler „Ringlein" eintragen.
4. Zahlbildertabellen.

Wie die Erfahrung lehrt, ist das Auge nicht im Stande, eine größere Anzahl nebeneinander stehender Gebilde auf einmal zu erfassen. Die Sicherheit der augenblicklichen Auffassung einer Vielheit geht kaum über vier Einheiten hinaus. Dies ist in der physiologischen Beschaffenheit des Auges begründet. Soll eine durch eine Gruppe von Einheiten dargestellte Zahl auf einen Blick erfaßt und erkannt werden, so müssen ihre Einheiten so geordnet sein, daß ein kreisförmiges oder quadratisches Netzhautbild entsteht, welches von der Netzhautgrube des Auges aufgefangen werden kann. In Würdigung dieser Erkenntnis, oder geleitet durch die Erfahrung, brachten verschiedene Rechenlehrer Zahlbilder in den Vorschlag, welche annähernd solche Netzhautbilder liefern. Es waren dies Busse, Born, Böhme, Hentschel, Beetz und Dr. Lay. Der letztere prüfte die einzelnen durch psychologische Experimente und fand, daß die seinigen, die der quadratischen Form am vollkommensten entsprechen, angeblich die besten Resultate lieferten.

An diesen Zahlbildertabellen läßt man nun in vielen Schulen die Zahlen 1—20 durch Addition und Multiplikation entstehen und zerlegt sie wieder durch Subtraktion und Division, z. B. Behandlung der Zahl 8 (nach Dr. Lay).

$7 + 1 = 8$	$8 - 1 = 7$	$7 + ? = 8$	$8 - ? = 7$
$6 + 2 = 8$	$8 - 2 = 6$	$6 + ? = 8$	$8 - ? = 6$
usw.	usw.	usw.	usw.
$8 = 8 \cdot 1$	$8 : 1 = 8$	$8 = ? \cdot 1$	$8 : ? = 8$
$8 = 2 \cdot 4$	$8 : 2 = 4$	$8 = ? \cdot 2$	$8 : ? = 4$
$8 = 4 \cdot 2$	$8 : 4 = 2$	$8 = ? \cdot 4$	$8 : ? = 4$

E. Die schriftlichen Lösungsarten der angewandten Aufgaben.

1. Proportionssatz. Regeldetri. Die angewandten Aufgaben wurden sehr lange mit Hilfe der Proportion $a : b = c : x$; $x = \frac{b \cdot c}{a}$ gelöst. Dabei wurde aber meistens nur das Ergebnis $\frac{b \cdot c}{a}$ angeschrieben, und zwar auf Grund einer mechanisch angelernten Regel, der Regel von den drei Größen, der Regeldetrie. Sind z. B. die Aufgaben gegeben: 1. Was kosten 9 m, wenn 5 m 12 Mk. kosten, und 2. Wie lange brauchen 9 Arbeiter zu einer Arbeit, die von 5 Arbeitern in 12 Tagen beendet wird, so lautet die Regel: Schreibe die Größen der Reihe nach nebeneinander, das Frageglied hinten, „das ihm am Namen gleiche vorn“ und dividiere bei geraden Verhältnissen mit dem ersten,

bei umgekehrten mit dem dritten Gliede in das Produkt der beiden andern. (Siehe auch Seite 59, 68, 71.) Also:

1. 5 m 12 Mk. 9 m ; die 9 m kosten $= \frac{12 \cdot 9}{5}$ Mk.

2. 5 Arb. 12 Tg. 9 Arb.; die 9 Arbeiter brauchen $= \frac{12 \cdot 5}{9}$ Tage.

2. Die welsche Praktik. (Siehe auch Seite 72.) Kaufmännische Kreise und viele Schulen bedienten sich während des ganzen Mittelalters der welschen Praktik. Diese ist die Vorläuferin des Schlußrechnens; sie besitzt einen hervorragend bildenden Wert, da sie jeden gedankenlosen Mechanismus ausschließt und den Rechner fortwährend veranlaßt, sich zu besinnen, wie er die Zahlen am zweckmäßigsten zerlegt. Manchmal ist sie aber mit großen Umständen und Weitläufigkeiten verknüpft, sodaß sie in unserem Schulrechnen nur eine untergeordnete Rolle spielen kann. In den Handelsschulen steht sie aber heute noch im Vordergrund.

3. Die Rees'sche Regel. Der Kettensatz. Vom Holländer Franz von Rees erschien im Jahr 1720 ein Rechenbuch, welches die Regeldetrie in neuer Form anwandte, die von nun an die Rees'sche Regel hieß.

Nach dieser werden die drei Zahlen so in einer Säule geordnet über- resp. nebeneinander gestellt, daß das Produkt der rechtsstehenden Zahlen durch die linksstehende zu dividieren ist. Wenden wir sie auf die in E. 1 genannten Aufgaben an, so erhalten wir die Ansätze:

1.
$$\begin{array}{r|l} ?\ \text{Mk.} & 9\ \text{m} \\ 5\ \text{m} & 12\ \text{Mk.} \\ \hline \end{array} = \frac{12 \cdot 9}{5}$$

2.
$$\begin{array}{r|l} ?\ \text{Tage} & 9\ \text{Arb.} \\ 5\ \text{Arb.} & 12\ \text{Tage} \\ \hline \end{array} = \frac{12 \cdot 9}{5}$$

Nun ist aber, wie uns schon ein flüchtiges Überlegen sagt, die zweite Lösung falsch, und man muß deswegen den Ansatz so schreiben, als ob nach der Arbeitszeit von 5 Arbeitern gefragt wäre. Es muß also heißen:

$$\begin{array}{r|l} ?\ \text{Tage} & 5\ \text{Arbeiter} \\ 9\ \text{Arb.} & 12\ \text{Tage} \\ \hline \end{array} = \frac{12 \cdot 5}{9}$$

Die Anwendung des Rees'schen Satzes auf die indirekten Verhältnisse ist demnach sehr gekünstelt!

Aus dem Rees'schen Satze ist der moderne Kettensatz hervorgegangen, der uns übrigens dem Prinzipe nach schon bei Leonardo von Pisa als regula cata und bei verschiedenen anderen Autoren entgegengetreten ist.

Der Kettensatz eignet sich ganz vorzüglich zur Lösung von Problemen, die eine größere Anzahl Glieder enthalten, welche von einander abhängen. Er wird deswegen besonders in Handelsschulen gepflegt. Wir wollen die Dienste, die er zu leisten vermag, an folgender Aufgabe erläutern: Eine goldene Kette wiegt brutto 21 Gramm; sie ist 14 karätig. Der Fabrikant schlägt 30 % zum Goldwert und der Juwelier 15 % zum Fabrikpreis. Wie teuer ist die Kette beim Juwelier, wenn 1 kg Gold 2800 Mk. kostet?

Auflösung.

? Mk.	21 g Legierung, wenn
24 g Legierung	14 g Feingold enthalten, und
1000 g Feingold	2800 Mk. Goldwert besitzen, und
100 Mk. Goldwert	130 Mk. Fabrikpreis sind, und
100 Mk. Fabrikpreis	115 Mk. Juwelierverkauf gelten

$$
\begin{array}{ll}
100 \text{ Mk. Fabrikpreis} & = 115 \text{ Mk. Juwelierverkauf} \\
1 & = \dfrac{115}{100} \\
130 & = \dfrac{115 \cdot 130}{100} \\
100 \text{ Mk. Goldwert} & = 130 \text{ Mk. Fabrikpreis} = \dfrac{155 \cdot 130}{100} \\
1 & = \dfrac{115 \cdot 130}{100 \cdot 100} \\
2800 & = \dfrac{115 \cdot 130 \cdot 2800}{100 \cdot 100} \\
1000 \text{ g Feingold} & = \text{ebensoviel} \\
1 & = \dfrac{115 \cdot 130 \cdot 2800}{100 \cdot 100 \cdot 1000} \\
14 & = \dfrac{115 \cdot 130 \cdot 2800 \cdot 14}{100 \cdot 100 \cdot 1000} \\
24 \text{ g Legierung} & = \text{ebensoviel} \\
1 & = \dfrac{115 \cdot 130 \cdot 2800 \cdot 14}{100 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 24} \\
21 & = \dfrac{115 \cdot 130 \cdot 2800 \cdot 14 \cdot 21}{100 \cdot 100 \cdot 1000 \cdot 24} = 51{,}30 \text{ Mk.}
\end{array}
$$

Nach der Rees'schen Regel beginnt man den Ansatz mit dem Fragesatz und reiht dann derart Glied an Glied, daß der nachfolgende Satz immer mit der Zahl beginnt, die die gleiche Benennung hat wie die letzte Zahl des vorausgehenden. Der Ansatz ist beendet, wenn das letzte Glied die Benennung vom Frageglied hat.

Die Auflösung erfolgt anfänglich nach den Regeln des Schlußrechnens, kann aber, sobald die Schüler mit dieser „logischen Lösung" vertraut sind, durch die rein mechanische ersetzt werden: Die rechte Seite des Ansatzes bildet den Zähler eines Bruches, dessen Nenner aus der linken Seite besteht. Auf die Anwendung des Kettensatzes zur Lösung von Aufgaben mit indirekten Verhältnissen wollen wir nicht näher eingehen.

Es wurde von verschiedenen Methodikern geltend gemacht, der Kettensatz enthalte keine formalbildenden Momente und sinke zu einer mechanischen Regel, zu einer toten Form herab. Dem möchten wir entgegenhalten, daß schon das Anschreiben des Satzes ziemliche Anforderungen an die Verstandeskräfte des Schülers stellt; er muß vollständig in den Geist der Aufgabe eindringen, muß sie zergliedern, die von einander abhängenden Größen aufsuchen und entsprechend zusammenstellen. Das Gedächtnis hat hierbei wenig zu tun, es ist fast alle reine Verstandesarbeit. Und was ist dann die logische Lösung anders als ein fortwährendes Schließen von einer Größe auf die andere? Wenn das so sehr gerühmte Schlußrechnen „die Arbeit des gesunden Verstandes", „die Verkörperung der geistigen Operation" ist, so dürfen die gleichen Eigenschaften in noch weit höherem Maße dem Kettensatz zugesprochen werden. Eine andere Frage dürfte aber die sein, ob er nicht über die Bedürfnisse der einfachen Schulen hinausgehe, und diese wird zu bejahen sein.

4. Die Basedowsche Regel diente früher zum Lösen der sogenannten mehrgliederigen Zweisatzrechnungen. Z. B. für wieviel Pferde reichen 40 Zentner Heu 5 Wochen lang aus, wenn man mit 60 Zentner Heu 10 Pferde 3 Wochen lang füttern kann? Die Aufgabe wird zunächst in zwei Zeilen geordnet angeschrieben:

10 Pferde 60 Zentner 3 Wochen
? Pferde 40 Zentner 5 Wochen.

Basedow schreibt jetzt das Frageglied in die linke und das darüber stehende Glied in die rechte Seite des Rees'schen Schemas und legt sich nun die Frage vor, ob die 40 Zentner als Faktor oder als Divisor aufzutreten haben — je mehr Nahrung, desto mehr Pferde — d. h. 40 wird Faktor. Durch ähnliche Überlegung sieht er für jede Zahl nach, ob sie Faktor oder Divisor wird, und erhält folgenden Ansatz:

? Pferde	10 Pferde
60 Zentner	40 Zentner
5 Wochen	3 Wochen

$$= \frac{3 \cdot 40 \cdot 10}{5 \cdot 60} = 4 \text{ Pferde.}$$

Auch der Basedow'sche Ansatz stammt, wie der Rees'sche, direkt oder indirekt aus dem Werke des Leonardo von Pisa. Während aber der letztere seine Ansätze nur als reine Gedächtnisregeln gibt, treten sie jetzt als Folgen von Verstandesschlüssen auf.

5. Das Schlußrechnen. Der Zweisatz. Wenn man für 5 kg einer Ware 60 Pfg. bezahlte und möchte wissen, was 7 kg kosten, so wird man, wenn man auch das eigentliche Rechnen nicht besonders gelernt hat, aber die 4 Spezies notdürftig beherrscht, sagen:

Zahle ich für 5 kg = 60 Pfg.,
so kostet mich 1 kg = 60 : 5 = 12 Pfg.
und 7 kg = 7 · 12 = 84 Pfg.

Bei dieser geistigen Arbeit ist die logische Tätigkeit die denkbar einfachste; auch das Gedächtnis hat dabei nichts besonderes zu leisten, da weder Regeln noch Ansätze nötig sind. Auch die Aufgaben mit indirekten Verhältnissen setzen weiter nichts voraus, als daß man ein volles Verständnis von den darin enthaltenen Dingen und Tätigkeiten besitzt, daß also Voraussetzungen erfüllt sind, die mit dem Rechnen selbst nur lose zusammenhängen.

Diese Zurückführung auf die Einheit und der nachfolgende Übergang zur zweiten Mehrheit ist gewiß das Rechnen der verständigen Menschen aller Zeiten gewesen, wurde aber erst von der Pestalozzischen Schule in den Vordergrund des Rechenunterrichts gestellt. Dazu nötigte sie der zur Herrschaft gelangte formale Unterrichtszweck; der Schüler sollte von der Anschauung aus zu klaren Begriffen geführt werden, und es sollte das Kopfrechnen im Kernpunkt des Unterrichts stehen. Hierzu eignete sich aber das bisher übliche Schulrechnen nicht, wohl aber das Verfahren des gemeinen Mannes. Das logische Schließen von der Mehrheit auf die Einheit und von dieser auf eine zweite Mehrheit war also eine notwendige Folge ihres ganzen Unterrichtsbetriebs. Eine äußere Form fand, resp. suchte, sie für ihr Schlußrechnen nicht, da sie überhaupt keinen Wert auf die Rechenfertigkeit für das praktische Leben legte. Soweit sie einen Ansatz anwandte, bediente sie sich der Proportion, und diese führt zur Bruchform des Regelrechnens.

Aus dieser Bruchform und dem Pestalozzischen Schlußrechnen entstand nun die Ansatzform, die unter dem Namen Zweisatz bekannt wurde. Es war der Karlsruher Seminardirektor Stern, der die Einseitigkeit des formalen Zweckes erkannte und neben der reinen Geistesschärfung auch den Anforderungen des praktischen Lebens gerecht werden wollte, und dem es im Jahre 1832 gelang, die Vorzüge des Schlußrechnens mit dem Bruchansatz zu verbinden. Er nannte seine Ansatzform Zweisatz, weil sie aus zwei Sätzen bestehe, dem Bedingungssatz und dem Fragesatz; sie ist eigentlich nichts anderes als eine übersichtliche Darstellung der Aufgabe in zwei Sätzen, wie wir sie bei Leonardo, bei Riese u. e. a. kennen gelernt haben. Auch Basedow, Busse 1808 und Schellenberg 1822 bringen sie, verbinden sie aber nicht mit dem Pestalozzischen Schlußrechnen, wie es Stern getan hat.

Die größten Verdienste um die Einführung des Zweisatzes erwarben sich Hentschel und Scholz, die ihn in ihre Rechenbücher aufnahmen und ihm dadurch die weiteste Verbreitung sicherten. So wurde der Zweisatz überall bekannt und geschätzt. Er fand aber auch Gegner. Zu diesen gehörten Diesterweg und Heuser. Diese schrieben: „Der Zweisatz ist ein zudringlicher Fremdling“. „Er bringt einen Rückschritt“. „Er verfährt mechanisch“. „Lehrt das Kürzen der Brüche mechanisch“. „Apage, d. h. weg mit ihm aus dem Bereiche der Lernenden“. Diesterweg wollte die Proportion, die Basedowsche und die Rees'sche Regel beibehalten wissen. Der bekannte Rechenlehrer Scherer hielt den Zweisatz für überflüssig, da man sämtliche bürgerliche Rechnungsarten, die für die Elementarschule in Betracht kommen, durch das einfache Schlußrechnen, ohne bestimmte Ansatzform, lösen könne.

Über das Schlußrechnen selbst, mit oder ohne Ansatz, herrschte am Ende des 19. Jahrhunderts nur eine Stimme: „Es ist die Elementarmethode, die keiner Vorübung bedarf; es ist die Methode der Praxis, die für alle Bedürfnisse des Volkes ausreicht; es läßt das Ergebnis leicht und sicher finden und fällt nicht der Vergessenheit anheim“ usw. usw.

Werfen wir noch einmal einen Blick rückwärts, so sehen wir, daß in den letzten Jahrhunderten jedes einzelne einen bestimmten Ansatz bevorzugte: das 16. die Regeldetri, das 17. die welsche Praktik, das 18. den Kettensatz und das 19. den Zweisatz. Was wird uns das 20. Jahrhundert bringen?

Es wird behauptet, die gegenwärtige Methode des Schulrechnens dürfe nun als abgeschlossen betrachtet werden. Es sei die Methode, welche den unwandelbaren Gesetzen der Entwicklung des menschlichen Geistes wie dem Wesen des Lehrstoffes angemessen sei, und welche durch formale Bildung zugleich materiellen Gewinn für das Leben erziele. Weder das praktische noch das geistbildende Element dränge sich in ihr in den Vordergrund. Beide würden sich gegenseitig im richtigen Verhältnis durchdringen und beleben, zum Segen des gesamten Unterrichts. Dem dürfte entgegenzuhalten sein, daß auch in der Schule jeder Stillstand einen Rückschritt bedeutet, und daß gerade in der gegenwärtigen Zeit, in der die großartigen Errungenschaften der Naturwissenschaften so tief eingreifen in das Leben des gesamten Volkes, neue Pflichten an die Schule herantreten, welche ihr neue Arbeit bringen und es ihr deswegen stets warm an das Herz legen, immer Mittel und Wege zu suchen, dem jugendlichen Geiste die sich häufenden Arbeitslasten zu erleichtern. Sie wird in ihrem Bestreben auch wesentlich unterstützt werden von der bis jetzt noch in den Kinderschuhen steckenden experimentellen Psychologie, der in diesem Jahrhundert jedenfalls die führende Rolle in der Pädagogik zufallen dürfte.

Schluß. Fragen wir zum Schluß nach den in den letzten Jahrhunderten erprobten Leitsätzen eines rationellen Rechenunterrichts, welche in unsere Lehrpläne und Schulbücher übergegangen sind, so finden wir der Hauptsache nach folgende:

1. Die Schule hat den Zahlbegriff, den das Kind bereits mitbringt, zu klären, zu befestigen und zu vertiefen. Zu diesem Zwecke benützt sie Zahlbilder graphischer oder materieller Art.

2. An diesen Zahlbildern sind in zweiter Reihe die vier Spezies im Prinzip einzuüben.
3. Auch auf allen übrigen Stufen muß womöglich stets von der Anschauung ausgegangen werden; die dezimalen Maßeinheiten (Längenmaße, Geld, Gewichte) sind als Anschauungsmittel ausgiebig zu verwerten, besonders im Dezimalrechnen und in der Bruchlehre.
4. Die Ergebnisse der Anschauung sind unmittelbar in Übungen und Anwendungen zu verwerten.
5. Rechenregeln werden nicht gegeben; falls solche nötig werden, sind sie durch Anschauung zu gewinnen und durch Übungen zu befestigen.
6. Das mündliche Rechnen steht stets im Vordergrund der Übungen, es hat sich aber nur kleinerer Zahlen zu bedienen und dient zum Befestigen der als wahr erkannten Rechengesetze.
7. Das schriftliche Rechnen ist in stetem Zusammenhang mit dem mündlichen zu behandeln.
8. Auf allen Stufen ist der Lehrstoff der vorausgegangenen Stufen als Material für das Neue zu verwerten.
9. Bei neuen Rechnungsarten ist immer ein Normalverfahren einzuhalten, bei dem man bis zur völligen Beherrschung zu verweilen hat. Erst dann ist es angezeigt, auf Kürzungen und Vorteile hinzuweisen.
10. Mathematische Formeln, über deren Genesis der Schüler nicht sofort jederzeit Aufschluß geben kann, sind unzulässig, da ihre Anwendung nur Gedächtnis-, aber keine Verstandesarbeit voraussetzt.
11. Der ganze Rechengang muß im einzelnen wie im ganzen genetisch abgestuft sein.
12. Jede Rechenstunde soll richtiges Rechnen fordern und fördern.

Die Kernpunkte dieser Grundsätze sind in folgende drei Forderungen kurz zusammengedrängt:

1. Einsicht in das Verfahren.
2. Übung bis zur Schlagfertigkeit.
3. Anwendung auf das praktische Leben und auf die Fächer des Wissens.

Register.

HOF-BUCHDRUCKEREI FRIEDRICH GUTSCH, KARLSRUHE.

Universalapparat Zepf

Lehrmittel zur Einführung in die Grundlehren vom

Elektrischen Strom

Professor C. Bopp's Verlag
Stuttgart.

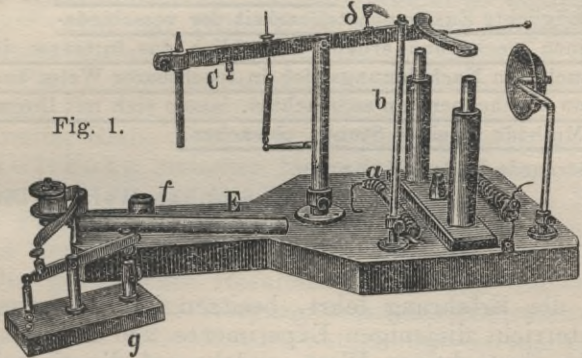


Fig. 1.

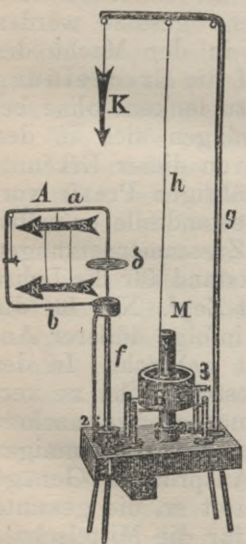


Fig. 2.

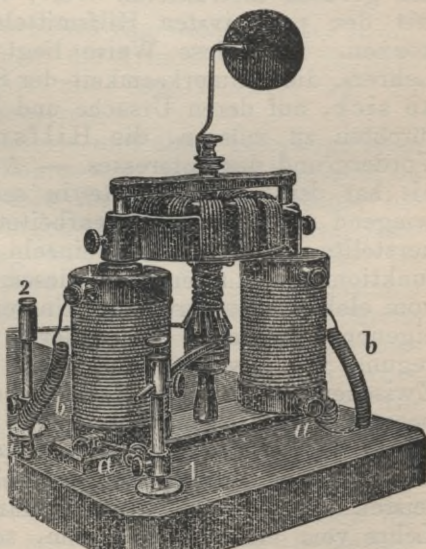
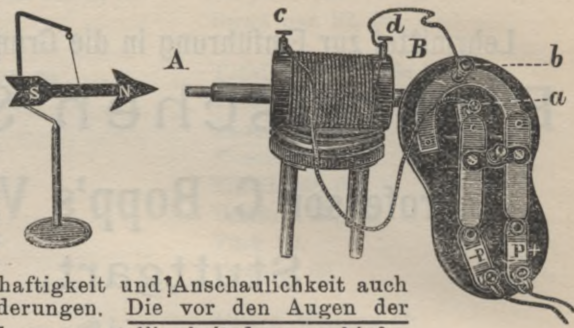


Fig. 3.

Der Universalapparat Zepf

wurde von verschiedenen Behörden amtlich empfohlen und auf der Ausstellung in Baden-Baden mit der goldenen Medaille ausgezeichnet. Eine große Anzahl Atteste betonen die vorzüglichen Dienste, die er im Unterrichte zu leisten vermag.



Es sei an dieser Stelle nur auf das beistehende hingewiesen:

Mit Ihrem Apparat bin ich sehr zufrieden. Alle einzelnen Teile funktionieren tadellos und entsprechen nach Dauerhaftigkeit und Anschaulichkeit auch hochgestellten Anforderungen. Die vor den Augen der Schüler ermöglichte Zusammenstellbarkeit der verschiedenen Maschinen weckt und erhöht tatsächlich das Interesse der Schüler und regt auch den Nachahmungstrieb in fruchtbarer Weise an. Partien, die sonst ein Wochenpensum ausmachten, lassen sich mit Ihrem Apparate und Ihrer Methode in einer Stunde abmachen.

St. Bernards-Kolleg Meherau.

P. Stephan Weixer, Direktor.

Wie die Erfahrung lehrt, besitzen im naturwissenschaftlichen Unterricht diejenigen Experimente und Demonstrationen den größten instruktiven Wert, welche auf die einfachste Art, mit den primitivsten Hilfsmitteln, in Szene gesetzt werden können. Auf diese Weise liegt es ganz in der Macht des Lehrers, die Aufmerksamkeit der Schüler auf die Erscheinung an sich, auf deren Ursache und Wirkung zu lenken, ohne befürchten zu müssen, die Hilfsmittel drängen sich in den Vordergrund des Interesses. — Ausgehend von dieser Erkenntnis hat der Unterzeichnete in seiner langjährigen Praxis vorwiegend mit Apparaten gearbeitet, deren Bestandteile er selbst herstellte und die dann einzeln oder in Zusammensetzungen funktionieren mußten. Auf diesem Wege entstand für die Lehre vom elektrischen Strom der Universalapparat Zepf. Nur für die eigenen Bedürfnisse konstruiert, wurde er infolge äußerer Anregung vor etwa 10 Jahren auf den Markt gebracht. In der Zwischenzeit war der Herausgeber stets bestrebt, ihn zu verbessern und für Unterrichtszwecke immer brauchbarer zu machen. Heute liegt er nun in einer Form vor, die nach dem einstimmigen Urteil seiner Käufer den weitgehendsten Ansprüchen Genüge leistet. Hinsichtlich seines Umfanges gestattet er, die gesamte Lehre vom elektrischen Strom, soweit sie für die Mittelschule in Betracht kommt, zu entwickeln, eine Erscheinung aus der andern hervorgehen zu lassen und einen Apparat in den andern überzuführen.

Ausgehend von der Erscheinung, daß der stromdurchflossene Leiter Eisenfeilspäne anzieht, also magnetisch ist, werden die magnetischen Eigenschaften der Drahtrolle und die des Elektromagneten vorgeführt; diese werden dann in Verbindung mit verschiedenen anderen Teilen zum Aufbau vieler Apparate und Maschinen benützt. Dann dienen sie zur Entwicklung des Begriffes „magnetisches Feld“. Es werden mit Hilfe des Apparates Fig. 1 (und des Stabmagneten Fig. 2) die Eisenstaubkraftlinien a) ungleicher, b) gleicher Pole vorgeführt und zwar 1. in der zur Polachse senkrechten, 2. in der zu ihr parallelen Ebene. Setzt man nun die Polschuhe auf die ungleichen Pole der Magnetschenkel des Apparates Fig. 1, so läßt sich das „homogene magnetische Feld“ sehr hübsch vorführen. Auch die für die Magnetinduktion so wichtige „Permeabilität“ wird mit Hilfe eines auf Holz aufgeschraubten, kurzen Eisenstäbchens, das man im magnetischen Feld des Apparates Fig. 1 mit Karton bedeckt, auf den man Eisenfeile siebt, gezeigt.

In zweiter Reihe wird dann die für die Praxis so wichtige Wechselwirkung zwischen Magnetpol und stromdurchflossenen Leiter zur Erscheinung gebracht (mit Hilfe des Apparates Fig. 2) und durch eine, von allen Seiten anerkannte Regel, die der Verfasser aufgestellt hat, für das Gedächtnis fixiert. Die gewonnenen Resultate bilden nun die Grundlage für den Aufbau und die Wirkungsweise des Gleichstrommotors (siehe Fig. 3), des Solenoidampèrmeters, des Galvanoskops und der Tangentenbussole.

Im Anschluß an die magnetischen Eigenschaften des stromdurchflossenen Leiters werden dann die dynamischen Wirkungen zweier Stromsysteme vorgeführt mit dem Hinweis auf die Wirkungsweise der Induktionsmotoren.

Mit Hilfe zweier Drahtquadrate und eines Telephons resp. des Galvanoskops, wird die Lehre von der Elektroinduktion eingeleitet; eine kleine sinusoidale Wechselstrommaschine, bestehend aus einigen Drahtwindungen und einem drehbaren Stabmagneten, dient zur Einführung in die Magnetinduktion. Im Anschluß an diese Erscheinung wird eine neue Magnetinduktionsregel abgeleitet, die vom Lauf der magnetischen und kreisförmigen Kraftlinien aus die Richtung des Induktionsstromes für alle Maschinen und für alle Verhältnisse leicht und sicher — ohne alle Manipulationen — auffinden läßt. Diese neue Induktionsregel wurde überall anerkannt und fand großen Beifall. Nun wird auf das Gestell Fig. 1 die Gleichstrom-, die Wechselstrom- und die Drehstrommaschine aufgebaut. Im Galvanoskop und im Drehstrommotor kommen die entsprechenden Induktionsströme zum Ausdruck. Am Drehstrommotor wird vorher mit Hilfe eines Batteriestromes der Begriff

„Drehfeld“ erläutert. (Ein hängender Magnetpfeil wandert im Kreise herum; dasselbe ist der Fall mit borstenförmigen Eisenstaubgebilden, die auf den Polen des Ringmagneten entstehen.) Daß auch die Bestandteile der Meßinstrumente im Universalapparat Zepf enthalten sind, soll nebenbei bemerkt werden. — Auch die Wärme- und die chemischen Wirkungen können schön zur Vorführung gebracht werden. — So bringt z. B. der Apparat zur Erzeugung des „Bleibaumes“ die Wanderung der Jonen in vorzüglicher Weise zum Ausdruck.

Zum Schlusse wollen wir nochmals hervorheben, daß in dem Universalapparat Zepf die einzelnen Apparate nicht fertig vorliegen, **sondern daß sie während des Unterrichtes vor den Augen der Schüler — und auch von diesen selbst — aufgebaut werden müssen.** Dadurch werden die Schüler mit Bau und Wirkungsweise spielend vertraut. Dann haben die Bestandteile in den verschiedensten Zusammensetzungen und bei den verschiedensten Apparaten immer wieder Dienste zu leisten. Daraus ersehen die Schüler in sehr auffälliger Weise, daß der neue Apparat und die neue Erscheinung auf das Engste zusammenhängen mit Apparaten und Erscheinungen, die dem Verständnis bereits erschlossen sind.

Der Unterzeichnete hat seinen Apparat schon wiederholt in öffentlichen Vorträgen benützt. Er möchte an dieser Stelle nur auf zwei hinweisen, die er seinerzeit in Freiburg hielt.

Darüber berichteten u. a. die Zeitungen:

„.... Herr Zepf verfügte über eine große Zahl hochinteressanter, eigener Apparate, die durchweg vorzüglich funktionierten, so daß er seine Zuhörer jeweils bis zum Schlusse seiner mehr als zweistündigen Vorträge in Spannung erhielt, ja sie geradezu zu fesseln verstand.“ ...

Freiburger Zeitung (Über Vorträge, die im Freiburger Gewerbeverein gehalten wurden).

„.... Der dichtgefüllte Saal lauschte mit der gespanntesten Aufmerksamkeit den $2^1/_2$stündigen, hochinteressanten Ausführungen des Vortragenden, der mit großer Gewandtheit die verschiedensten Apparate und Maschinen entstehen und arbeiten ließ.“ ...

Breisgauer Zeitung (Über Vorträge im Lokalverein der Vorstadt Herdern).

Mit dem 1. Oktober d. J. geht der Verlag des Universalapparates Zepf an die Firma Professor C. Bopps Verlag in Stuttgart über. Diese läßt ihn in den Präzisionswerkstätten ihres Verlages anfertigen und ist zu allen weiteren Auskünften gerne bereit.

Die illustrierte Preisliste mit einer kurzen, schematischen Entwicklung des Lehrstoffes kann von dem neuen Verlag gratis und franko bezogen werden.

Karlsruhe i. B., den 20. September 1907.

K. Zepf.

Verlag der Hofbuchhandlung Friedrich Gutsch in Karlsruhe

Sammlung vaterl. und geschichtl. Schauspiele zu Schüler-Aufführungen an Mittelschulen. 1. Die Heimkehr. Dramatisches Bild aus Badens Vergangenheit. 2. Der Klausner von Geroldsau. Dramatisches Bild aus Badens Vergangenheit. 3. Die Nachbarn. 4. Theodor Körners letzte Tage. Szene aus den Befreiungskriegen. 5. Die Köhler von Zähringen Nach einer Sage aus deutscher Vorzeit. Sämtliche von A. Büchle 6. Der Schmied von Ruhla. Dramatische Dichtung von Leopold Ripcke. Jedes Heftchen broschiert 50 Pfennig.

Heft 1—5 elegant gebunden in einem Band M. 3.—. Besonders geeignet zu Schüler-Prämien.

Jeder Schulleiter wird es schon empfunden haben, wie gering die Zahl von patriotischen Festspielen ist, die sich zur Aufführung durch Schüler an vaterländischen Feiertagen wirklich eignen; und solche Aufführungen werden doch dem Vortrag epischer und lyrischer Gedichte insofern mit Recht vorgezogen, weil sie, wenn leidlich gelungen, in entschieden höherem Grade Feststimmung zu erzeugen imstande sind, und weil sie für die Darsteller einen eigentümlichen, nicht gering zu schätzenden erziehlichen Wert haben. Dem bezeichneten Mangel wird nun durch obige Dichtungen abgeholfen, die so recht den der heranwachsenden Jugend gemäßen Ton treffen und der Darstellung keinerlei szenische Schwierigkeiten bieten. (Das humanistische Gymnasium. 1904. VI.)

Sophokles' Tragödien. Übersetzt von G. Wendt. 2. Aufl. 1. Aias. — 2. Antigone. — 3. Elektra. — 4. Ödipus. — 5. Die Trachinierinnen. — 6. Philoktet. — 7. Ödipus auf Kolonos. Preis: Einzelbändchen kart. in Orig.-Decke je M. 1.50. Nr. 1—7 auf stärkerem Papier in 2 Bände vereinigt, eleg. geb. Geschenkbände M. 10.—.

Anläßlich der Jubiläumsfeier des Konstanzer Gymnasiums (1904) wurde von Schülern Wendts Antigone zur Aufführung gebracht, wozu die Konstanzer Nachrichten bemerken: Wendt ist bekanntlich ein anerkannter Meister auf diesem Gebiete. Überall sind die antiken Metra im wesentlichen beibehalten, sodaß das eigenartige Gepräge der alten Dichtungen glücklich erhalten ist, ohne daß im geringsten der Sprache Gewalt angetan wird. Außer einer allgemeinen Einleitung über das Wesen der antiken Tragödie orientieren ziemlich ausführlich gehaltene Vorbemerkungen und Fußnoten über die szenische Einrichtung, sowie über alles zum Verständnis und richtiger Würdigung Erforderliche. Druck und Einband sind prächtig.

Reden aus der Schule und für die Schule. Von G. Wendt. Broschiert M. 2.50.

Deutsches Lesebuch. Von G. Wendt. 1. Teil für die beiden unteren Klassen der Gymnasien und Realschulen. 5. Auflage. Gebunden M. 1.50. 2. Teil für die Quarta, Tertia und Untersekunda der Gymnasien und Realschulen. 4. Auflage. M. 2.50. 3. Teil für die Obersekunda und Prima der Gymnasien und Realschulen. 2. Auflage. Gebunden M. 3.50.

Gedächtnisrede auf Ludwig Uhland. Von Prof. Dr. Alb. Weckesser. Geheftet 50 Pf.

Untersuchungen zur Geographie der Odyssee. Mit Abbildungen und Kärtchen. Von Prof. Dr. G. Lang. Geh. M. 3.—.

Die Broschüre richtet sich im wesentlichen gegen Prof. Dr. W. Dörpfeld, der bekanntlich das homerische Ithaka im heutigen Leukas wiedererkennen möchte.

Verlag der Hofbuchhandlung Friedrich Gutsch in Karlsruhe

Städte der Heimat. Gedichte von Peter Schnellbach. Geheftet M. 1.50, elegant gebunden M. 2.—.

Schnellbach hat sich als bürgerlicher Dichter einen Namen und Anerkennung außerhalb unsrer Heimat verschafft. Die feste Geradheit seines Wesens, seine ehrliche Begeisterung und sein Haß gegen die Niedertracht in jeder Form machen ihn zum Freunde jedes liberal gesinnten Mannes. So sind auch seine neuesten Gedichte zum Preis der Heimat voll inniger Liebe zu dem Land der Freiheit, als das wir unser liebes Baden rühmen dürfen. Die Form ist bei Schnellbach immer tadellos nnd verfällt nie ins Triviale. Dadurch werden uns auch manche Gedichte lieb, deren Inhalt an sich vielleicht des Sangs nicht wert wäre. Alles liest sich in der herzerwärmenden Schlichtheit äußerst gemütlich und anheimelnd. So bildet das sehr gut ausgestattete Bändchen eine Gabe, für die die Schule wie das Haus gleich dankbar sein werden. Mit der Sammlung des Kollegen Hofmann (Gedichte zur Heimatkunde Badens) zusammen wird es dem eisernen Bestand einer badischen Schule sich einreihen.

(Südwestdeutsche Schulblätter, 1904 Nr. 10.)

Gedichte zur Heimatkunde Badens. Herausgegeben von Professor Dr. Karl Hofmann. Geh. M. 1.20, geb. M. 1.50. Seiner Königl. Hoheit dem Großherzog Friedrich von Baden gewidmet.

Auch die, welche jenen schönsten Teil Deutschlands nicht ihre Heimat nennen, werden das Buch mit Freude lesen. Da klingt und singt es von Alt-Heidelberg, da rauscht der Schwarzwald, da wandern wir die entzückende Bergstraße, wir rasten im Odenwald, es grüßen uns die Burgen, und das Gemäuer erzählt uns wunderbare Sagen und Geschichten. Und die Geschichte dieser Gaue, denen wir alle etwas Heimatsehnsucht entgegenbringen, durchleben wir in ausgewählten Gedichten. Mit glücklichem Griff hat der Sammler hier eine Perlenkette schöner Gedichte aneinandergereiht.

(Neue Preußische (Kreuz-)Zeitung Nr. 441 vom 20. September 1903.)

Lopodunum-Ladenburg 98 bis 1898. Eine achtzehnhundertjährige Stadtgeschichte. Von A. J. Sievert. Mit Abbildungen. Geb. Mark 4.—.

„Auf achtzehn Jahrhunderte geschichtlicher Entwicklung zurückschauen zu dürfen, das ist ein Vorrecht, das nicht viele Städte auf dem rechten Ufer des Rheins in Anspruch nehmen können." Das ist richtig, Lopodunum erhielt nämlich i. J. 98 von Trajan als Vorort der civitas Ulpiana Stadtrechte, und zahlreiche Funde aus römischer Zeit gewähren das Bild einer belebten Grenz- und Beamtenstadt. Dann taucht der Flecken unter den Merowingern als Königspfalz wieder auf und hat, zwischen geistlichen und weltlichen Gewalten und nahe an der Bergstraße gelegen, eine ungemein bewegte Vergangenheit, oftmals der Schauplatz wilder Kämpfe bis zum badischen Aufstand 1848 und immer der treue Spiegel der auf- und absteigenden vaterländischen Geschicke. Sievert erzählt das musterhaft lebendig, aus den Quellen schöpfend und doch nie trocken, geschickt die Welthändel mit der Ortsgeschichte verbindend.

(Monatschrift für Gottesdienst und kirchl. Kunst 1904, Heft 5.)

Karlsruher Erinnerungen und Wünsche. Von L. v. Pezold. Geh. Mk. 1.—.

Die Ortsnamen des Großherzogtums Baden. Ein Beitrag zur Heimatkunde. Von Prof. Otto Heilig. Geh. M. 3.—, geb. M. 3.60.

Das Werk wird in erster Reihe ein brauchbares Hilfsmittel für die Hand des Lehrers sein, der ja im deutschen, geschichtlichen, geographischen oder naturkundlichen Unterricht häufig Gelegenheit nehmen muß, heimatliche Namenkunde zu treiben. Doch kann das Buch, da es gemeinfaßlich geschrieben ist, auch allen sonstigen Gebildeten empfohlen werden, die sich auf dem Gebiete der Ortsnamenkunde Rats holen wollen. Insbesondere sollte jede Gemeinde, jede Volks-, jede Schülerbibliothek sich das Buch anschaffen.

Verlag der Hofbuchhandlung Friedrich Gutsch in Karlsruhe

Wandkarte des Kreises Karlsruhe mit ausgeschriebenen und mit abgekürzten Ortsnamen. Bearbeitet von Reallehrer Karl Rud. Bürkel. Maßstab 1 : 50 000. Preis aufgezogen M. 10.—.

Im Mai. Ein Sträußchen Schneeglöckchen, Primeln und Pfingstnelken aus dem Schwarzwald von Wilh. Kammerer. Titelbild von Prof. W. Hasemann in Gutach. Brosch. M. 1.—. geb. M. 1.50.

Zähringer im Dienst für Kaiser und Reich. Historische Festschrift von Prof. Dr. K. Brunner. Reich illustriert mit Bildern von Hans Thoma, Ferd. Keller, Anton von Werner u. a. Brosch. 50 Pfg.

„Das Beste an der Geschichte ist die Begeisterung, die sie erweckt". An dieses Wort des Altmeisters Goethe wurden wir erinnert, als wir dieser Tage ein neuerschienenes Werkchen zur Hand bekamen, das zugleich eine Festschrift zum 9. und 20. September darstellt. Betitelt ist es: „Zähringer im Dienst für Kaiser und Reich", und Verfasser ist Prof. Dr. Brunner hier. In fesselnder Art zeigt die Schrift, wie es besonders 4 markante Persönlichkeiten des Zähringer Geschlechts waren, die in schwerer Zeit als kerndeutsche Männer das wahre nationale Interesse zu fördern bemüht waren. Es waren dies: Friedrich von Baden, der Kampf- und Todesgenosse des letzten Staufers Konradin, dann der kriegsgewaltige Markgraf Ludwig Wilhelm, der Türkenbesieger, der edle Markgraf und Großherzog Karl Friedrich und endlich unser Großherzog Friedrich, der „gute Genius Deutschlands", der in der Einigung Deutschlands und dem Aufbau des neuen Reiches eine Hauptaufgabe seines Lebens sah. Zahlreiche, mit Geschmack ausgewählte und vortrefflich reproduzierte Bilder von Hans Thoma, Ferd. Keller, Anton v. Werner, Feodor Dietz u. a. begleiten erläuternd den Text und sind eine Zierde des Buches, dessen Preis — nur 50 Pfennig — entschieden als billig zu bezeichnen ist. Wir wünschen dem gediegenen Buch, das seinem Verfasser alle Ehre macht, weite Verbreitung.

(Generalanzeiger für Pforzheim u. Umgebung.)

Die doppelte Buchführung für den Schul- und Selbstunterricht. 5. Auflage. Von Aug. Bergmann, Dozent für Buchführungswesen an der Techn. Hochschule in Karlsruhe. Geb. M. 3.50.

Die „Freiburger Zeitung" nennt das Werkchen . . . eine fleißige und gewissenhafte Arbeit . . . Wenn auch in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt, ist das Buch doch gewiß auch in kaufmännischen Fortbildungs- bezw. Handelsschulen mit Erfolg zu verwenden.

Zwölf Buchführungshefte zu Bergmanns doppelter Buchführung. Zusammen M. 3.20.

Dreistellige Logarithmen der Zahlen und Trigonometrischen Funktionen. Von Professor Heun. Kartoniert 40 Pfennig.

Physikalische Wandtafeln für den Schulunterricht (mit erläuterndem Text) entworfen von Direktor Dr. Otto Ehrhardt. 21 Blatt im Format 70×55 cm in 3 Gruppen zu je 7 Blatt. Preis der vollständigen Sammlung (unaufgezogen) M. 15.—, aufgezogen mit einer Mappe M. 33.25.

Versuchsergebnisse und Erklärungsversuche nebst einem Verzeichnis sämtlicher Publikationen von Dr. Otto Lehmann, Professor der Physik a. d. Techn. Hochschule in Karlsruhe. Brosch. M. 1.—.

Anleitung zu den Übungen im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule zu Karlsruhe. Von Dr. Hermann Sieveking. Gebunden M. 2.40.