Müller-Breslau

Erddruck auf Stützmauern

Nr 103 [illegible] [illegible]
" 104 [illegible]

Mikołaj Pogorzelski
stud. ing.

Erddruck auf Stützmauern

Von

Dr.-Ing. Heinrich Müller-Breslau,

Geh. Regierungsrat,
Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

Mit 108 Abbildungen im Text und 4 Tafeln.

Stuttgart
Alfred Kröner Verlag
1906.

Wallishausser'sche k. u. k. Hof-Buchhandlung
Adolf W. Künast,
Wien I, Lichtensteg 1. (Eckhaus Rotenturmstrasse 13)

Vorwort.

Das vorliegende Buch gibt im ersten Abschnitte eine Darstellung der Theorie des Seitendruckes kohäsionsloser Erde auf Stützmauern, mit besonderer Berücksichtigung des unteren Grenzwertes — des sogenannten aktiven Erddruckes.

Den Ausgangspunkt bildet das *Coulomb*sche Prinzip, das älteste und bis jetzt noch nicht übertroffene Rüstzeug der wissenschaftlichen Erddruckbestimmung. In Verbindung mit der Annahme einer ebenen Gleitfläche bildet es noch heute die am häufigsten benutzte Grundlage für die Berechnung von Stützmauern.

An die Darstellung der *Coulomb*schen Theorie schliefst sich im § 3 die Entwickelung der von der Betrachtung eines unendlichen Erdkörpers mit ebener Oberfläche ausgehenden *Rankine*schen Lehre, wobei der Zusammenhang beider Theorien dargelegt und die zweite, nach Entwickelung des *Rankine*schen Hauptsatzes, auf die erste zurückgeführt wird.

Der viel umstrittene Winkel zwischen Erddruck und Wandfläche wird von vornherein als ein Erfahrungswert bezeichnet, über den sich keine vollständig sichere Aussage machen läfst. Die gebundene Wegweisung der *Rankine*schen Theorie, welche diesen Winkel nicht von der Beschaffenheit der Wand, sondern nur von der Neigung des Geländes abhängig macht, mag manchem Anfänger erwünschter sein. Für das Entwerfen von Stützmauern kann aber nur eine Theorie in Frage kommen, welche gestattet, über die dem Erddrucke zuzuweisende Richtung von Fall zu Fall auf Grund der Erfahrung zu entscheiden. Dazu kommt das vollständige Versagen der *Rankine*schen Theorie bei unebener oder ungleichmäfsig belasteter Oberfläche des Erdkörpers.

Trotz alledem sind die Ergebnisse der *Rankine*schen Theorie ebenfalls von grofsem praktischen Wert. Denn wenn auch die Richtung des Erddruckes von erheblicher Wirkung auf die den Baugrund und die Mauerquerschnitte beanspruchenden *Momente* ist, so beeinflufst sie doch anderseits, nach den Feststellungen des Verfassers, in vielen wichtigen Fällen die *Gröfse* des

Erddruckes so wenig, dafs zur Bestimmung dieser *Gröfse* die einfachen Verfahren mit Vorteil angewendet werden dürfen, die sich aus der Theorie des unendlichen Erdkörpers folgern lassen. Die Zahlenbeispiele auf Seite 85 und 86 dürften beweisen, dafs die Berechnung des Erddruckes auf gebrochene Wandflächen durch Benutzung dieser Regel erheblich abgekürzt werden kann.

Am deutlichsten tritt wohl die Überlegenheit der *Coulomb*schen Theorie bei den im § 4 behandelten Aufgaben über unstetige Belastung des Geländes und Auftreten mehrerer Maxima des erforderlichen Wandwiderstandes vor Augen. Zwar hat *Coulomb* selbst diese Fälle nicht einmal erwähnt, man braucht aber nur an seinem Prinzip festzuhalten, um auch hier — immer freilich mit dem Notbehelfe ebener Gleitflächen — zum Ziele zu gelangen.

Das eine darf allerdings nicht aufser Acht gelassen werden. Die *Coulomb*sche Theorie, und ebenso die nur einen Sonderfall behandelnde Theorie von *Rankine*, gibt nur Auskunft über die *Grenzwerte* des Erddruckes. Für den die Mauer *angreifenden* (aktiven) Erddruck liefert sie den *kleinsten* mit den Gleichgewichtsbedingungen gerade noch verträglichen Wert, für den zu den stützenden Kräften gehörigen *widerstehenden* (passiven) Erddruck gibt sie nur das *gröfste* noch zulässige Mafs an. Da dies aber eine Auskunft ist, die als eine Theorie der *günstigsten* Möglichkeiten bezeichnet werden mufs, so ist eine tunlichst einwandfreie Ermittelung der Grenzwerte geboten. Die Beschränkung auf die Annahme ebener Gleitflächen ist deshalb für die wissenschaftliche Erforschung des Erddruckes unzureichend und die Ausdehnung der Untersuchung auf krumme Gleitflächen unerläfslich. Es mufs zum mindesten gezeigt werden, dafs es von krummen Schnittflächen begrenzte Erdprismen gibt, die zur Sicherung ihres Gleichgewichtes eines gröfseren Wandwiderstandes bedürfen, oder — wenn es sich um den widerstehenden Erddruck handelt — bereits durch kleinere Wanddrucke aus dem Gleichgewicht gebracht werden können, als die von den üblichen ebenen Schnitten abgetrennten Erdkörper. Eine strenge Ermittelung des Druckes auf eine krumme Gleitfläche ist, für kohäsionslose Erde und unter der üblichen Annahme eines dem Normaldrucke proportionalen Reibungswiderstandes, bereits im Jahre 1888 von Herrn *F. Kötter* angegeben worden. Diese wichtige Arbeit hat aber, wegen der geringen Verbreitung des Blattes, in dem sie zuerst veröffentlicht worden war*), nicht die ihr gebührende Beachtung gefunden. Verfasser lernte sie erst durch eine freundliche Mitteilung ihres

---

*) Nähere Angaben auf Seite 107.

Urhebers kennen, nachdem er selbst auf anderem Wege ein Verfahren gefunden hatte, welches gestattet, mit genügender Annäherung den Druck auf eine krumme Gleitfläche zu bestimmen, deren Gleichung nicht bekannt zu sein braucht, die also beispielsweise durch die Beobachtung gefunden sein kann. Im § 6 sind beide Lösungen mitgeteilt und zur Bestimmung des Druckes auf eine Wand benutzt worden.

Der zweite Abschnitt des vorliegenden Buches berichtet über neue Erddruckversuche, welche der Verfasser in der auf seine Anregung an der Technischen Hochschule zu Berlin entstandenen Versuchsanstalt für Statik der Baukonstruktionen durchgeführt hat. Sie bilden den Anfang einer in die Wege geleiteten umfangreichen Erddruckuntersuchung, über deren Arbeitsplan am Schlufs des Buches eine kurze Mitteilung gemacht wird.

Besonderen Dank schuldet der Verfasser dem Konstruktionsingenieur der von ihm verwalteten Lehrkanzel, Herrn Professor Dr.-Ing. *H. Reisner*, für seine wertvolle Unterstützung bei der Vorbereitung und Durchführung sämtlicher Versuche, sowie Herrn Regierungsbaumeister *H. Müller-Breslau* für seine Mitwirkung bei den photographischen Arbeiten.

Capri, im April 1906.

H. Müller-Breslau.

Inhaltsverzeichnis.

Berichtigungen.

Seite 16 Zeile 8 von oben: 1,77 statt 177.
„ 22 „ 1 „ unten: $\frac{d\delta}{d\varphi}$ „ δ.
„ 75 „ 18 „ oben: G'' „ G'.
„ 82 „ 6 „ unten: E_{II} „ H.
„ 77. Im Kräfteplane der Fig. 72 sollen E_4 und K'_4 in ein und derselben Geraden liegen.

Erster Abschnitt.

Theorie des Erddruckes auf Stützmauern.

§ 1.

Ermittelung des Erddruckes auf eine Stützmauer nach dem *Coulomb*schen Prinzip.

1. Erddruck auf eine ebene Wandfläche. Aus einer unendlich langen Mauer, die nach der wagerechten Längsrichtung gleichmäfsig mit kohäsionsloser, in allen Punkten gleich beschaffener Erde hinterfüllt ist, sei ein Stück von der Länge 1 herausgeschnitten.

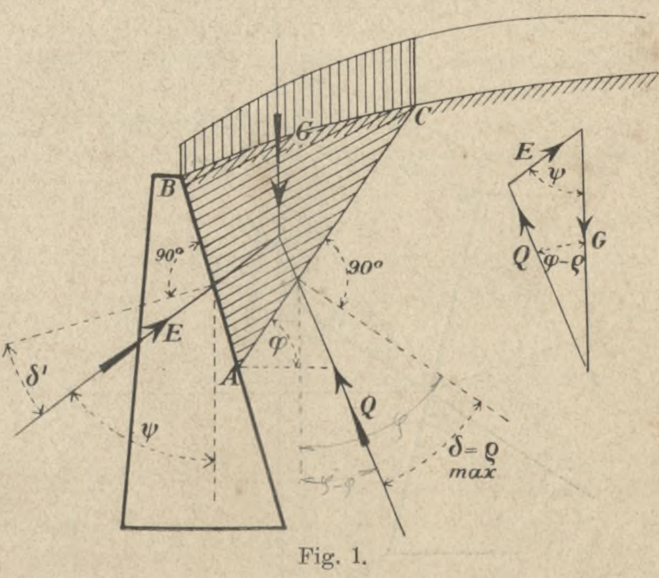


Fig. 1.

Von irgend einem Punkte A der hinteren Wandfläche aus sei durch den Erdkörper ein *ebener* Schnitt geführt, der das Gelände im Punkte C trifft (Fig. 1). Das Gewicht des Erdprismas ABC, einschliefslich der auf der Oberfläche BC ruhenden, lotrecht angenommenen Belastung sei G.

Dem Gewichte G wird das Gleichgewicht gehalten durch den Widerstand E der Wandfläche AB und den an der Fläche AC angreifenden Gegendruck Q der unterhalb AC liegenden Erdmasse. Es bilde Q mit dem Schnitt AC den Winkel $90^0 - \delta$ und E mit der Wand den Winkel $90^0 - \delta'$.

Wären die Richtungen von Q und E bekannt, so ließen sich diese beiden Kräfte durch Zerlegung von G ermitteln. Da dies aber nicht der Fall ist, so ist die Aufgabe statisch unbestimmt. Nimmt man jedoch an, es sei der Winkel δ' durch die Erfahrung bekannt, und macht man ferner die Annahme, es sei der Reibungswinkel ρ zwischen Erde und Erde unabhängig von der Größe der Fläche AC und von dem auf diese Fläche wirkenden Drucke, so ist man imstande, denjenigen Widerstand E anzugeben, der *mindestens* vorhanden sein muſs, damit Gleichgewicht bestehen kann. Es darf nämlich der mit abnehmendem Widerstande E wachsende Winkel δ höchstens den Wert ρ annehmen. Bildet also der Schnitt AC mit der Wagerechten den Winkel φ und E mit der Lotrechten den Winkel ψ, so folgt aus dem Kräftedreieck in Fig. 1 für den Grenzfall $\delta_{max} = \rho$ der Widerstand

$$1) \qquad E = \frac{G \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \rho + \psi)}.$$

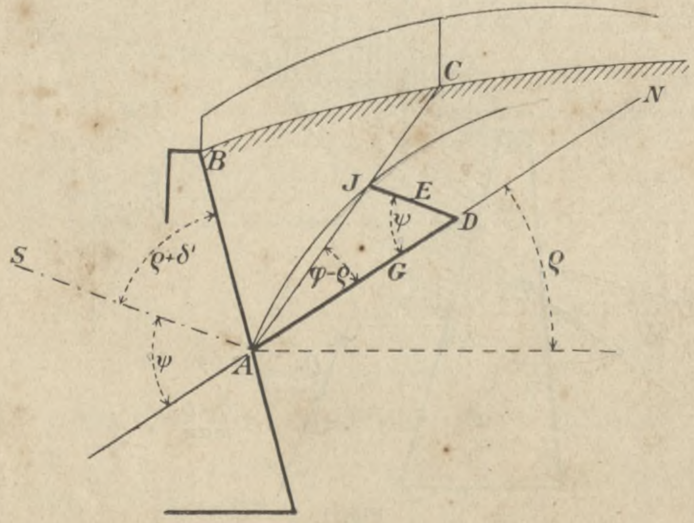


Fig. 2.

Zeichnerisch findet man diesen Wert E, indem man in Fig. 2 auf der gegen die Wagerechte unter ρ geneigten Geraden AN die Strecke $\overline{AD} = G$ aufträgt und von D aus unter dem Winkel ψ gegen AN eine Gerade zieht, welche AC in J trifft. Man erhält

$E = DJ$. Wiederholt man dieses Verfahren für verschiedene von demselben Punkte A aus durch den Erdkörper geführte Schnitte, so beschreibt der Punkt J eine Kurve, deren Abszissen die Gewichte G und deren Ordinaten die erforderlichen Widerstände E sind. Die gröfste Ordinate gibt die Grenze an, unter welche der Widerstand E der Wandfläche AB nicht sinken darf, ohne das Gleichgewicht zu stören.

Zur analytischen Berechnung dieses unteren Grenzwertes E dient die Formel

$$2) \qquad E = \left(\frac{G \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \rho + \psi)}\right)_{max}.$$

Eine Schnittfläche AC, in deren sämtlichen Teilen beim Eintreten eines Grenzzustandes des Gleichgewichts der Widerstand gegen Gleiten voll ausgenutzt wird, heifst *Gleitfläche.* Diese Bezeichnung ist der Vorstellung entsprungen, dafs eine durch den unteren Endpunkt der Wand gelegte Gleitfläche beim geringsten Nachgeben der Mauer und im ersten Augenblicke der Bewegung die Grenze bildet zwischen dem in Bewegung geratenden und dem in Ruhe bleibenden Teile der Erdmasse.

Der Reibungswinkel ρ ist gleich dem *natürlichen Böschungswinkel*, d. h. gleich dem Winkel, den die steilste Böschung einer seitlich nicht gestützten, kohäsionslosen Erdmasse mit der Wagerechten bildet; er kann leicht gemessen werden. Mittelwerte von ρ enthält die folgende Tabelle*):

Erdart	ρ	tg ρ	Gewicht von 1 cbm kg
Dammerde, trocken	35°—40°	0,700—0,839	1400
„ natürlich-feucht . .	45°	1,000	1600
„ gesättigt-nafs . . .	27°	0,510	1800
Sand, trocken	30°—35°	0,577—0,700	1580—1650
„ natürlich-feucht	40°	0,839	1800
„ gesättigt-nafs	25°	0,466	2000
Lehmboden, trocken	40°—45°	0,839—1,000	1500
„ nafs	20°—25°	0,364—0,466	1900
Tonerde, trocken	40°—50°	0,839—1,192	1600
„ nafs	20°—25°	0,364—0,466	2000
Kies, trocken	35°—40°	0,700—0,839	1800—1850
Gerölle, eckig	45°	1,000	1800
„ rundlich	30°	0,577	1800

*) Vergl. auch: Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Teil I, Band 2, Kapitel III, bearbeitet von *Häseler*, S. 208. *Möller*, Erddruck-Tabellen, Leipzig 1902, S. 49. Ingenieurs-Taschenbuch *Hütte*, 1905, S. 297.

Über den Winkel δ' läfst sich nur aussagen, dafs er bei vollkommen glatter Wand gleich Null ist, sonst aber höchstens gleich dem Reibungswinkel ρ' zwischen Erde und Mauerwerk sein darf, wobei $\rho' \lesseqgtr \rho$ ist, weil sonst der dicht neben der Wand durch die Erdmasse parallel zur Wandfläche geführte Schnitt einen aufserhalb des Reibungswinkels liegenden Druck erfahren würde. Die Gröfse des Winkels δ' hängt von den Bewegungen ab, welche die Mauer und die an die Mauer grenzenden Erdteilchen vor Eintritt des Ruhezustandes ausführen. Die Mauer besteht aus elastischem Stoffe, wird auf nachgiebigem Baugrunde aufgeführt und mit Erde hinterfüllt. Unter dem Einflufs der auf sie einwirkenden Kräfte ändert sie allmählich ihre Form; auch sinkt sie etwas in den Baugrund ein. Dabei erfährt sie eine wagerechte und eine senkrechte Verschiebung und, infolge der ungleichmäfsigen Belastung des Baugrundes, auch eine Drehung. Die Erdmasse ist selbst nach beendeter Schüttung noch nicht in Ruhe; es dauert oft geraume Zeit, ehe sie sich vollständig gesackt hat. Die Folge dieser Bewegungen sind Verschiebungen der Erdteilchen längs der Wand. Verschieben sich die Erdteilchen gegen die Wand nach abwärts, so entsteht in der Wandfläche ein aufwärts gerichteter Reibungswiderstand.

Ändern sich die auf Mauer und Erdkörper wirkenden Kräfte, so werden neue Bewegungen und neue Widerstände erzeugt. Wird z. B. auf die Mauer nachträglich eine gröfsere Last aufgebracht, welche sich gleichmäfsig über die Sohle verteilt, so senkt sich die Mauer in lotrechter Richtung. Der Reibungswiderstand in der Wandfläche wird hierdurch verkleinert. Trägt der Erdkörper ein Eisenbahngleis, so bringt jeder Eisenbahnzug eine neue vorübergehende Störung des Gleichgewichts hervor, die mit Verschiebungen der Erdteilchen gegen die Wandfläche verbunden ist. Welchen Einflufs übt nun diese wechselnde Belastung und Entlastung des Erdkörpers auf die Wandreibung aus? Wie wirken die Erschütterungen? Das sind Fragen, die nur an der Hand von Versuchen beantwortet werden können. Selbst wenn wir alle dynamischen Wirkungen aufser acht lassen, können wir keine sichere Auskunft über die Gröfse der Wandreibung erteilen und sind auf die Schätzung angewiesen. Hierbei spielen die an ausgeführten Bauwerken gesammelten Erfahrungen eine grofse Rolle. Annahmen, die bei der Berechnung bewährter Konstruktionen gemacht worden sind, dürfen auch auf andere, neu zu errichtende Bauwerke, bei denen ähnliche Verhältnisse vorliegen, übertragen werden, und es kann dem Anfänger nicht dringend genug empfohlen werden, sich durch Untersuchung ausgeführter Bauwerke selbst ein Urteil zu bilden; er wird dann bald erkennen, daſs der einfluſsreichste Erfahrungswert der Winkel δ' ist. Wir verweisen schon hier auf das in Nr. 10 durchgerechnete Beispiel. In Fig. 31 haben wir das Gesetz, nach welchem die von der Mauer auf ihre Grundfläche ausgeübte Pressung σ sich mit dem Winkel δ' ändert, durch eine Kurve dargestellt, deren Abszissen die Werte δ' und deren Ordinaten die zugehörigen σ sind. Von der Wahl des Winkels δ' hängt also sehr viel ab. Eine Überschätzung des Reibungswiderstandes an der Wand führt zu einem unsicheren Bauwerk; eine Unterschätzung verursacht überflüssige Mehrkosten. Daſs die Meinungen über den in Rechnung zu stellenden Wert δ' sehr auseinandergehen, darf bei dieser Sachlage nicht überraschen. Am sichersten gehen natürlich diejenigen, welche stets $\delta' = 0$ setzen; sie bilden aber die Minderheit. Daſs diese Vorsicht in der Regel übertrieben ist, beweisen zahlreiche Ausführungen von Stützmauern, die nachweislich hätten umstürzen müssen, wenn δ' stets gleich 0 wäre *).

Die überwiegende Mehrzahl der ausführenden Ingenieure rechnet mit $\delta' = \rho'$ und nimmt sogar $\rho' = \rho$ an, weil bei dem gewöhnlichen Rauhigkeitsgrade der Wände $\rho' > \rho$ ist. In der Literatur wird diese Ansicht vertreten von *Winkler*, *Engesser*, *Häseler*. *Engesser* empfiehlt jedoch die Annahme $\delta' = \rho$ nur bei ruhender Belastung; treten unter dem Einflusse von Betriebslasten Erschütterungen auf, wie beispielsweise bei Stützmauern unter Eisenbahndämmen, so spricht er sich bei Mauern ohne Überschüttung für $\delta' = 0$ aus und nur bei Mauern mit sehr hoher Überschüttung für $\delta' = \rho$, weil der Einfluſs der Erschütterungen

*) Vergl. die Mitteilung von *Flamant* in den Annales des Ponts et Chaussées 1882, Juni, S. 616. Beachtenswert sind auch die Stützmauern, welche *Leygue* konstruiert hat, nachdem er selbst umfangreiche Versuche über die Gröſse und Lage des Erddrucks angestellt hatte; vergl. Annales des Ponts et Chaussées 1885, II, S. 788. *Leygue* fand selbst für Glaswände einen von ρ nur um etwa 6 v. H. abweichenden Winkel δ'. Allerdings entstanden bei diesen in sehr kleinem Maſsstabe angestellten Versuchen verhältnismäſsig groſse Wandbewegungen, die sich mit den Bewegungen von Stützmauern nicht gut vergleichen lassen. Die frei bewegliche Wand war mit einer festen Wand durch Spiralfedern verbunden. Wurden nun diese Spiralfedern durch den Erddruck zusammengepreſst, so traten kleine, auf der beweglichen Wand im Innern der Spiralfedern sitzende Pflöcke durch in der festen Wand ausgesparte Löcher. Aus der Gröſse der Verschiebung der Pflöcke wurde auf die Gröſse des Erddrucks geschlossen. Da die unteren Pflöcke sich stärker verschoben wie die oberen, so neigte sich die bewegliche Wand nach der Erdseite hin, während sich Stützmauern in der Regel nach der entgegengesetzten Seite drehen.

auf die Wandreibung mit wachsender Höhe der Überschüttung und der Mauer abnehmen wird. Für dazwischenliegende Überschüttungshöhen ermittelt er die erforderliche Mauerstärke durch Einschaltung zwischen den für die beiden Grenzfälle gefundenen Mauerstärken*). *Möller* stellt in seinen *Erddrucktabellen* (S. 46) nur einen Teil der Wandreibung in Rechnung und empfiehlt in der Regel:

$\delta' = \frac{2}{3} \rho$ unter gewöhnlichen Verhältnissen; z. B. bei dickeren Wänden aus Mauerwerk mit geputzter Rückseite oder bei Holz mit rauhem Sägeschnitt;

$\delta' = \frac{1}{3} \rho$ bei schmalen und glatten Wänden; z. B. bei gehobeltem Holz und bei runden und daher sehr glatten Pfählen.

Über einige vom Verfasser angestellte Versuche berichtet der zweite Abschnitt; sie sprechen selbst bei rauhen Wänden für die Annahme eines Bruchteiles des Wertes ρ und zeigen deutlich, dafs die Beibringung sicherer Werte δ' das Hauptziel der experimentellen Erddruckforschung bilden mufs. Da nun die Wahl des Winkels δ' von Fall zu Fall getroffen werden mufs, so ergibt sich für eine allen Ansprüchen genügende Erddrucktheorie die Bedingung, *den Winkel δ' zunächst unbestimmt zu lassen und Verfahren zu entwickeln, die für jedes δ' brauchbar sind.* Nur dann ist es möglich, den Einflufs dieses wichtigen Wertes zu prüfen und die endgültige Entscheidung von dem Ausfalle dieser Prüfung abhängig zu machen. Das mag vielen selbstverständlich klingen, — es gibt aber noch heute Vertreter einer anderen Theorie, welche dem Ingenieur bezüglich des einflufsreichsten aller Erfahrungswerte die Hände bindet; im § 3 unter Nr. 18 werden wir näher hierauf eingehen.

Durch die in den Figuren 1 und 2 durchgeführte Untersuchung ist die zuerst von *Coulomb* gestellte und behandelte Frage nach dem Widerstande, den die Wandfläche AB mindestens leisten mufs, noch keineswegs erledigt; denn sie gibt den unteren Grenzwert E nur für Erdprismen an, die durch *ebene* Schnitte AC abgetrennt werden. Um zu einem einwandfreien Mindestwerte E zu gelangen, müfste man auch alle möglichen *krummen* Schnitte in Betracht ziehen. Die genaue Lösung dieser Aufgabe stöfst aber auf grofse Schwierigkeiten und wird sich kaum in voller Strenge für die Praxis verwerten lassen; sie besteht aus zwei

*) Für stark nach vorn überhängende Wände geben *Winkler* und *Engesser* eine andere Regel, die man im § 3 unter Nr. 18 findet.

Teilen. Zuerst mufs das Gesetz gefunden werden, nach welchem sich der Druck Q über eine Schnittfläche von gegebener Form verteilt, weil dann erst die Richtung der aus verschieden geneigten Drucken sich zusammensetzenden Kraft Q angegeben werden kann; und zweitens mufs unter allen möglichen Schnittflächen diejenige ausgewählt werden, welche den gröfsten Wandwiderstand erfordert. Dieser zweite Teil der Untersuchung führt aber auf eine schwierige Aufgabe der Variationsrechnung.

Im § 6 werden wir uns auch mit krummen Gleitflächen beschäftigen. Vorläufig beschränken wir uns auf *ebene* Schnitte und zeigen zunächst, wie sich die in Fig. 1 dargestellte Ermittelung von E auch auf den Fall einer gebrochenen Wandfläche übertragen läfst.

2. Erddruck auf gebrochene und gekrümmte Wandflächen. Die Drucke auf die einzelnen Wandstücke seien E_1, E_2, E_3 . . . (Fig. 3). Es genügt, die Ermittelung von E_3 unter der Voraussetzung zu beschreiben, dafs E_1 und E_2 bereits gefunden sind.

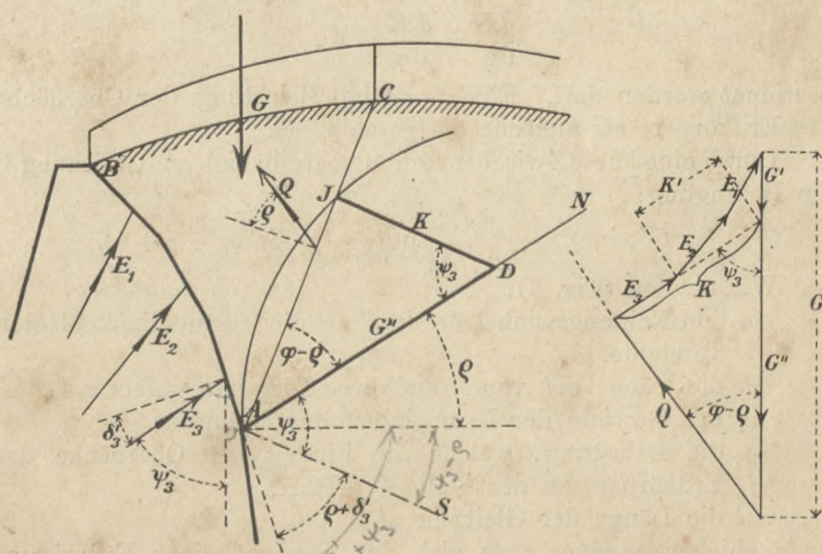


Fig. 3.

Den an dem Erdprisma ABC angreifenden Kräften G, Q, E_1, E_2, E_3 mufs ein geschlossenes Kräftepolygon entsprechen. Die Verlängerung der Seite E_3 zerlegt G in G' und G''. Der obere Teil G' ist bekannt, denn von E_1 und E_2 kennt man Gröfse und Richtung und von E_3 die Richtung. Die Schlufslinie K' des Kräftezuges $E_2 E_1 G'$ ist ebenfalls gegeben; es ist also die Aufgabe, E_3 zu bestimmen, zurückgeführt auf die in Fig. 3 dargestellte Ermittelung von

$$K = E_3 + K'.$$

Rechnerisch erhält man:

$$3)\qquad K = \left[\frac{G'' \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \rho + \psi_3)}\right]_{max}.$$

Eine krumme Wandfläche zerlege man in einzelne Teile und betrachte diese als eben; werden sie klein genug gewählt, so darf man ihre Mittelpunkte als Angriffspunkte der Drucke E ansehen.

Die zur Darstellung von E und K in den Figuren 2 und 3 benutzte Kurve hat *Culmann* eingeführt; sie soll in der Folge die *Culmann*sche *E-Linie* bezw. *K-Linie* genannt werden. Die Ordinatenachse AS heifst *Stellungslinie*; sie bildet mit der Wandfläche den Winkel $\rho + \delta'$ (Fig. 2 u. 3).

3. Der *Rebhann*sche Satz. Wir fügen jetzt zu den bereits vorgetragenen Voraussetzungen noch die Bedingung, dafs $dE | d\varphi$ eine stetige Funktion von φ sei, dafs also der Widerstand, den die Wand mindestens leisten mufs, durch die Gleichung

$$4)\qquad \frac{dE}{d\varphi} = \frac{dK}{d\varphi} = 0$$

bestimmt werden darf. Eine unstetige Belastung der Oberfläche des Erdkörpers sei zunächst ausgeschlossen.

Durch eine kurze Zwischenrechnung ergibt sich aus Gleichung 4) die Bedingung:

$$5)\qquad G'' \sin\psi = -\frac{d\,G''}{d\varphi} \sin(\varphi - \rho) \sin(\varphi - \rho + \psi).$$

Wir nennen (Fig. 4):

α den Neigungswinkel der in C an die Geländelinie gelegten Tangente,
h die Länge des von A auf diese Tangente gefällten Lotes,
γ das Gewicht der Raumeinheit der Erdmasse,
p die Belastung, welche die Einheit der Oberfläche des Erdkörpers an der Stelle C erfährt,
l die Länge der Gleitlinie AC

und schicken voraus, dafs sich das Gewicht eines Erdprismas von der Länge 1, dessen Querschnitt ein Dreieck von der Grundlinie d und der Höhe h ist, und dessen Seite d mit pd belastet ist (Fig. 5), auf die Form bringen läfst

$$6)\qquad G = \gamma' F,$$

wo F den Flächeninhalt des Dreiecks bedeutet und

$$7)\qquad \gamma' = \gamma + \frac{2p}{h}$$

ist. Das Gewicht des durch den Winkel $d\varphi$ bestimmten Erdprismas $A C' C$ ist hiernach gleich $\frac{1}{2} \gamma' l^2 d\varphi$, und wir erhalten somit

$$8) \qquad \frac{d G''}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \gamma' l^2.$$

Das Minuszeichen ist erforderlich, weil G'' mit wachsendem Winkel φ abnimmt.

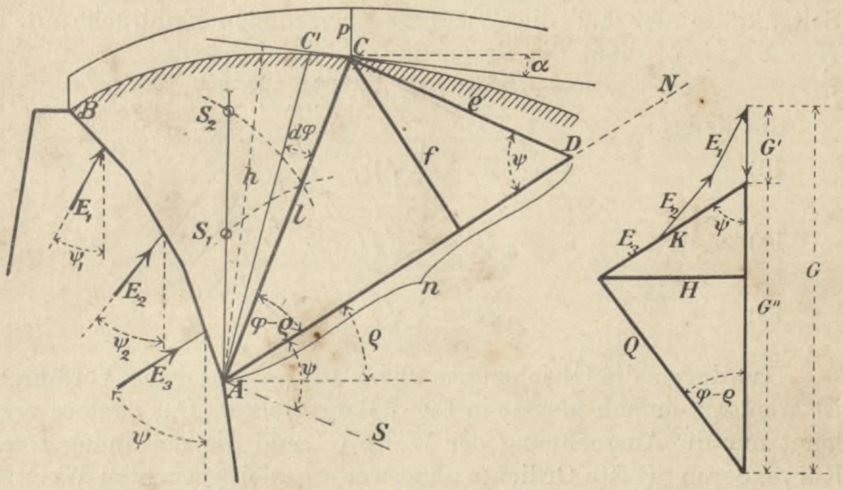


Fig. 4.

Jetzt ziehen wir (Fig. 4) von C aus eine Parallele zur Stellungslinie $A S$ bis zu ihrem Schnittpunkte D mit der natürlichen Böschung $A N$, bezeichnen mit

e die Länge der Strecke $C D$,
n „ „ „ „ $A D$,
f „ „ des Lotes von C auf $A N$,

setzen in Gleichung 5)

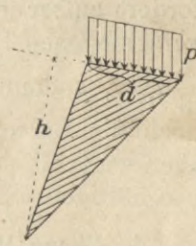


Fig. 5.

$$\sin(\varphi - \rho + \psi) = \sin\psi \frac{n}{l},$$

$$\sin(\varphi - \rho) = \frac{f}{l}$$

und erhalten zur Bestimmung der Lage der Gleitlinie die Bedingung

$$9) \qquad G'' = \frac{1}{2} \gamma' f n,$$

die wir kurz den *Rebhann*schen Satz nennen wollen, weil sie zuerst von *Rebhann* — wenn auch in etwas anderer und weniger allgemeiner Form — aufgestellt worden ist*).

*) Ist das Gelände unbelastet, und wird an Stelle der Kraft K die Mittelkraft von E_1, E_2 und E_3 als Unbekannte eingeführt, deren Richtung

Tragen wir nun auf den verschiedenen Schnittlinien AC die zugehörigen Strecken $\overline{AS_1} = G''$ und $\overline{AS_2} = \frac{1}{2}\gamma' f n$ auf, so erhalten wir zwei Kurven, durch deren Schnittpunkt die gesuchte Gleitlinie geht.

Zur Berechnung der Kräfte K und Q und der für gewisse analytische Untersuchungen wichtigen Summe der wagerechten Seitenkräfte der auf die Wand AB wirkenden Erddrucke, d. i. $H = \Sigma E \sin\psi$, dient die Proportion

$$K : Q : H : G'' = e : l : f : n.$$

Sie liefert:

$$K = \frac{1}{2}\gamma' f e, \tag{10}$$

$$Q = \frac{1}{2}\gamma' f l, \tag{11}$$

$$H = \frac{1}{2}\gamma' f^2. \tag{12}$$

Das durch die Gleichungen 9) bis 12) beschriebene Verfahren ist weniger einfach als das in Fig. 3 dargestellte. Das letztere verlangt nur die Ausrechnung der Werte G'' und die Zeichnung *einer* Kurve, deren gröfste Ordinate ohne weiteres den gesuchten Wert K und die Lage der Gleitlinie bestimmt. Das zweite Verfahren fordert aufser der Berechnung von G'' noch die Darstellung der verschiedenen Strecken f und n und die Ausrechnung der Werte $\frac{1}{2}\gamma' f n$, sodann die Aufzeichnung *zweier* Kurven und schliefslich noch die Berechnung von K. Die Gleichungen 9) bis 12) sind aber wertvoll für gewisse Sonderfälle, mit denen wir uns nunmehr beschäftigen wollen.

4. Ebene Wand und ebenes Gelände. Die *Poncelet*sche Konstruktion des Erddruckes. Ist das Gelände eben und gleichmäfsig belastet, und ist auch die Wandfläche AB eine Ebene, so ergibt sich, mit der Bezeichnung $\overline{BC} = d$, Fig. 6,

$$G'' = G = \frac{1}{2}\gamma' h d,$$

und die Gleichung 9) geht über in

---

aber als bekannt angenommen, so geht die Gleichung 9) über in $G = \frac{1}{2}\gamma f n$. Da nun $\frac{G}{\gamma}$ gleich dem Inhalte des Querschnittes ABC des Erdprismas ist, so folgt, dafs die Gleitlinie AC die Fläche $ABCDA$ halbiert. Dies ist der eigentliche *Rebhann*sche Satz; er ist später durch *Winkler* erweitert worden.

$$\frac{1}{2}\,h\,d = \frac{1}{2}\,f\,n.$$

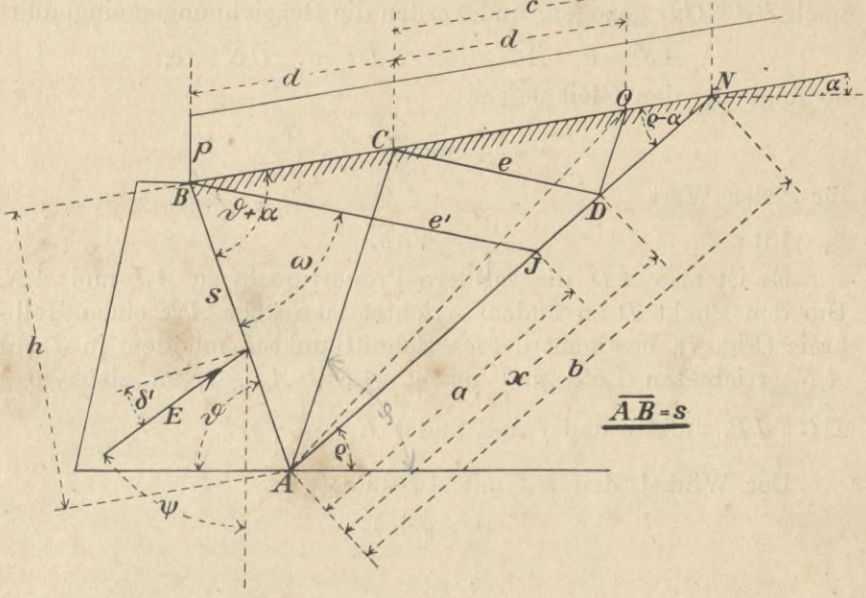


Fig. 6.

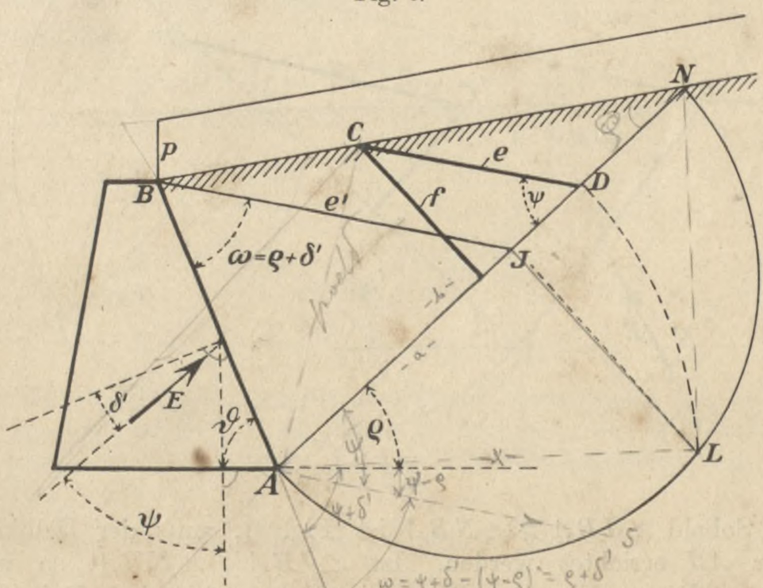


Fig. 7.

$x = \sqrt{ab}$

Hiernach sind die Dreiecke ABC und ADC inhaltsgleich. Wie grofs p und γ sind, ist dabei gleichgültig. Die Lage der

Gleitlinie AC ist unabhängig von der Belastung p und dem Gewichte γ. Zieht man nun $DO \parallel AC$, so mufs auch $\triangle ABC = \triangle ACO$ sein, und hieraus folgt $CO = CB$. Wird noch $BJ \parallel CD$ gezogen, und werden die Bezeichnungen eingeführt

$$\overline{AJ} = a, \quad \overline{AN} = b, \quad \overline{AD} = x, \quad \overline{CN} = c,$$

so folgt aus den Gleichungen:

$$\frac{b}{x} = \frac{c}{d} \text{ und } \frac{b-x}{x-a} = \frac{c}{d}$$

für x der Wert

13) $$x = \sqrt{ab}.$$

Es ist also AD die mittlere Proportionale zu AJ und AN. Um den Punkt D zu finden, errichtet man über AN einen Halbkreis (Fig. 7), bestimmt dessen Schnittpunkt L mit dem in J auf AN errichteten Lote und macht $AD = AL$. Nun zieht man $DC \parallel JB$, mifst e und f und findet $E = \frac{1}{2}\gamma' fe$.

Der Winkel, den BJ mit AB bildet, ist

$$\omega = \rho + \delta'.$$

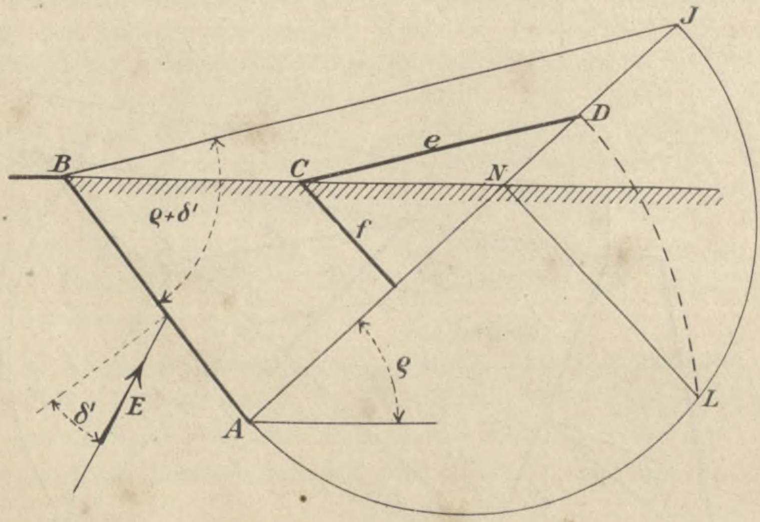


Fig. 8.

Sobald $\angle JBA > \angle NBA$ ist (Fig. 8), mufs der Halbkreis über AJ errichtet werden. Ist $\angle JBA = \angle NBA$, so wird $BC = CD = e$ (Fig. 9). Wird die Erde unter dem Reibungswinkel ρ angeschüttet, so rücken die Punkte C und N ins Unendliche (Fig. 10); es entsprechen allen Punkten der Geländelinie die gleichen Strecken e und f.

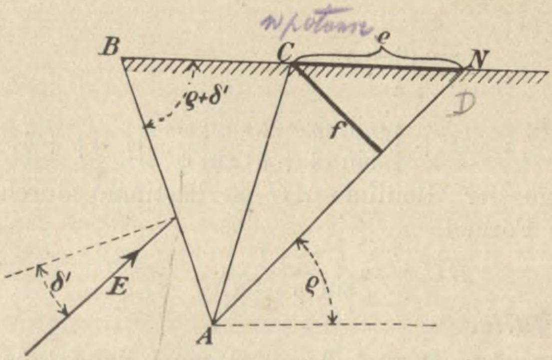


Fig. 9.

Auch die analytische Berechnung von E gestaltet sich an der Hand der *Poncelet*schen Gleichung 13) sehr einfach.

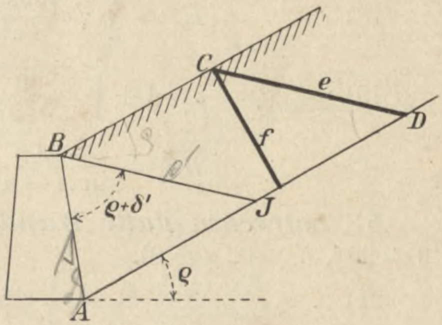


Fig. 10.

Bezeichnet (Fig. 6)

s die Länge des Wandstückes AB,

ϑ den Neigungswinkel von AB gegen die Wagerechte,

e' die Länge der Strecke BJ,

so findet man

$$\frac{e}{e'} = \frac{b - x}{b - a} = \frac{b - \sqrt{ab}}{b - a} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a}{b}}},$$

$$\frac{e'}{s} = \frac{\sin(\vartheta + \rho)}{\sin \psi},$$

$$a = s\frac{\sin \omega}{\sin \psi}, \qquad b = s\frac{\sin(\vartheta + \alpha)}{\sin(\rho - \alpha)},$$

und schliefslich

$$E = \frac{1}{2}\gamma' f e = \frac{1}{2}\gamma' e^2 \sin \psi.$$

Für die Durchführung der analytischen Berechnung von Stützmauern empfiehlt sich in der Regel die Zerlegung des Erddrucks in eine wagerechte Seitenkraft E_w und eine lotrechte Seitenkraft E_l.

Man erhält

$$E_w = E \sin \psi = \frac{1}{2}\gamma'(e \sin \psi)^2,$$

$$E_l = E_w \operatorname{cotg} \psi$$

und nach Einsetzen der oben angegebenen Werte

$$14) \qquad E_w = \frac{1}{2}\gamma' s^2 \nu^2,$$

wo

$$15)\qquad \nu = \frac{\sin(\vartheta + \rho)}{\varepsilon}$$

und

$$16)\qquad \varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho - \alpha)\sin\omega}{\sin(\vartheta + \alpha)\sin\psi}}, \quad \omega = \rho + \delta', \quad \psi = \vartheta - \delta'.$$

Die Lage der Gleitlinie AC ist bestimmt durch die leicht abzuleitende Formel

$$17)\qquad \overline{BC} = s\nu \frac{\varepsilon - 1}{\sin(\rho - \alpha)}.$$

Sonderfälle.

a) Lotrechte Wand $(\vartheta = 90^0)$ ***und schräges Gelände.***

$$18)\qquad E_w = \frac{1}{2}\gamma' s^2 \frac{\cos^2\rho}{\varepsilon^2},$$

$$19)\qquad \varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho - \alpha)\sin(\rho + \delta')}{\cos\alpha\cos\delta'}},$$

$$20)\qquad \overline{BC} = \frac{s\cos\rho}{\sin(\rho - \alpha)} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}.$$

b) Lotrechte glatte Wand und wagerechtes Gelände $(\vartheta = 90^0,\ \delta' = 0,\ \alpha = 0)$.

$$21)\qquad E = E_w = \frac{1}{2}\gamma' h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right).$$

$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$$22)\qquad \overline{BC} = h\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right).$$

Die Formeln 21) und 22) lassen sich auch wie folgt ableiten.

Ist $\delta' = 0$, so bildet $\overline{BJ}$ mit $\overline{BA}$ den Winkel ρ (Fig. 11), und es ist daher $BJ \perp AN$. Zieht man nun $CD \parallel BJ$, so müssen, damit AC die Gleitfläche ist, die beiden Dreiecke ABC und ACD inhaltsgleich sein. Daraus folgt aber: $\angle BAC = \angle CAD = 45^0 - \frac{\rho}{2}$ und $\overline{AD} = \overline{AB} = h$. Nun ist

$$f = e = \overline{CD} = h \cdot \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) \text{ und}$$

$$E = \frac{1}{2}\gamma' fe = \frac{1}{2}\gamma' h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right);$$

ferner ergibt sich: $\overline{BC} = h\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right).$

c) Lotrechte Wand, wagerechtes Gelände $(\vartheta = 90^0,\ \alpha = 0)$, ***Voraussetzung*** $\delta' = \rho$. Es sei also $\rho' = \rho$, und es werde der Reibungswiderstand an der Wand gerade erschöpft.

$$23)\qquad E_w = \frac{1}{2}\gamma' h^2 \frac{\cos^2\rho}{(1 + \sqrt{2}\sin\rho)^2}$$

und

24) $$E = E_w \sec \rho = \frac{1}{2}\gamma' h^2 \frac{\cos \rho}{(1+\sqrt{2}\sin \rho)^2}.$$

Um den Einflufs der Wandreibung auf die Gröfse des Erddrucks E zu prüfen, stellen wir die nach den Gleichungen 21) und 24) für verschiedene Werte ρ berechneten Drucke E einander gegenüber. Es ergibt sich für

	$\rho = 25^0$	30^0	35^0	40^0
nach Gleichung 21) $\frac{E}{\gamma' h^2}$	$= 0{,}203$	0,166	0,136	0,109
nach Gleichung 24) $\frac{E}{\gamma' h^2}$	$= 0{,}178$	0,149	0,124	0,105.

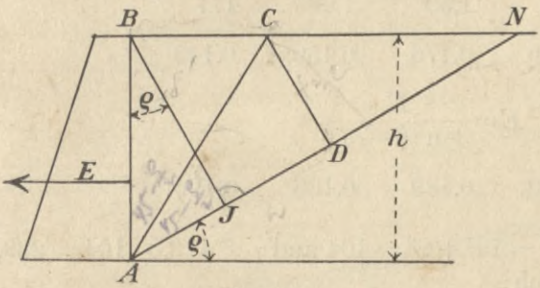


Fig. 11.

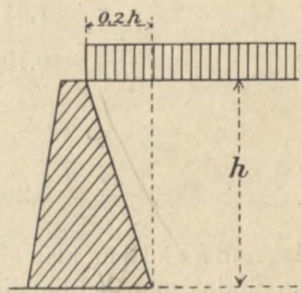


Fig. 12.

Nach diesen Zahlenreihen hat die Reibung an der Wand keinen wesentlichen Einflufs auf die *Gröfse* des Erddruckes. Ist z. B. $\rho = 25^0$, $h = 10$ m, $\gamma = 1{,}8$ t/m³, $p = 2{,}5$ t/m², also

$$\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h} = 2{,}3 \text{ t/m}^3,$$

so findet man für $\delta' = 0$ und $\delta' = \rho$ die nur wenig voneinander abweichenden Werte $E = 46{,}5$ t und $E = 41$ t, bei deren Vergleichung man an die noch so wenig gesicherten Grundlagen der heutigen Erddrucktheorie denken mufs. Der Verfasser empfiehlt daher, die *Gröfse* des Erddruckes auf eine lotrechte Wand bei wagerechtem Gelände stets mittels der einfachen Formel 21) zu bestimmen, auch dann, wenn bei der Feststellung der *Richtung* des Erddruckes mit einem an der Wand auftretenden Reibungswiderstande gerechnet werden darf. Der Sicherheitsgrad der Mauer wird durch diese Rechnungsweise etwas erhöht, und dafs dies wünschenswert ist, lehrt die Berechnung des Erddruckes auf Grund der Annahme gekrümmter Gleitflächen. Wir verweisen auf den Schlufs des § 6, ferner auf die im zweiten Abschnitt, § 10, mitgeteilten Ergebnisse unserer Erddruckversuche.

In ähnlicher Weise darf man bei den meisten für Stützmauern in Frage kommenden Wandneigungen verfahren. Es sei (Fig. 12),

$\operatorname{cotg} \vartheta = \frac{1}{5}$, also $\vartheta = 78^0\, 41'$, $\rho = 30^0$, $\alpha = 0$, $\gamma' = 2{,}3$ t/m³, und es soll der Einfluſs des Winkels δ' auf die *Gröſse* des Erddruckes geprüft werden. Man erhält nach Gleichung 14 und 15:

$$25)\qquad E_w = \frac{1}{2}\gamma' s^2 \frac{\sin^2(\vartheta + \rho)}{\varepsilon^2} = 0{,}448 \frac{\gamma' s^2}{\varepsilon^2}$$

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin\rho \sin(\rho + \delta')}{\sin\vartheta \sin(\vartheta - \delta')}}$$

$$= 1 + \sqrt{\frac{0{,}500 \sin(\rho + \delta')}{\sin(\vartheta - \delta')}}$$

und für	$\delta' = 0$	10^0	20^0	30^0
	$\varepsilon = 1{,}51$	1,59	1,68	177
	$\frac{E_w}{\gamma' s^2} = 0{,}196$	0,176	0,159	0,143

$$E = \frac{E_w}{\sin(\vartheta - \delta')}$$

$\frac{E}{\gamma' s^2} = 0{,}200$	0,189	0,186	0,190.

Ist nun $h = 10$ m, also $s^2 = 10^2 + 2^2 = 104$ und $\gamma' s^2 = 2{,}3 \cdot 104 = 239$, so findet man schlieſslich:

$E = 48$ t, 45 t, 44,5 t, 45,5 t.

Die Unterschiede sind wieder unwesentlich.

5. Belastungsfläche einer ebenen Wand bei ebenem Gelände. Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung des Angriffspunktes des Erddruckes für den Fall ebener Wand und ebenen Geländes und zerlegen den Wert

$$E = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h}\right) f e$$

in den nur von γ abhängigen Bestandteil

$$26)\qquad E_\gamma = \frac{1}{2}\gamma f e$$

und den nur von p abhängigen Teil

$$27)\qquad E_p = \frac{p f e}{h}.$$

Zwischen diesen auf das Wandstück $\overline{AB} = s$ wirkenden Drucken und den Drucken E'_γ und E'_p auf das Wandstück $\overline{A'B} = s'$ (Fig. 13) bestehen die Beziehungen

$$28)\qquad E'_\gamma = E_\gamma \frac{h'^2}{h^2},$$

29) $$E'_p = E_p \frac{h'}{h},$$

denn es verhält sich

$$f' : f = e' : e = h' : h = s' : s.$$

Die Drucke E'_p kann man also nach Fig. 13*a* durch eine *Gerade* darstellen, die Drucke E'_γ durch eine *Parabel*.

Der Druck, den die Einheit der Länge h' an der Stelle A' erfährt, sei k. Er setzt sich zusammen aus

$$k_p = \frac{dE'_p}{dh'} = \frac{E_p}{h}$$

und

$$k_\gamma = \frac{dE'_\gamma}{dh'} = \frac{2E_\gamma h'}{h^2}.$$

Der erste Wert ist konstant, der zweite ist proportional h'.

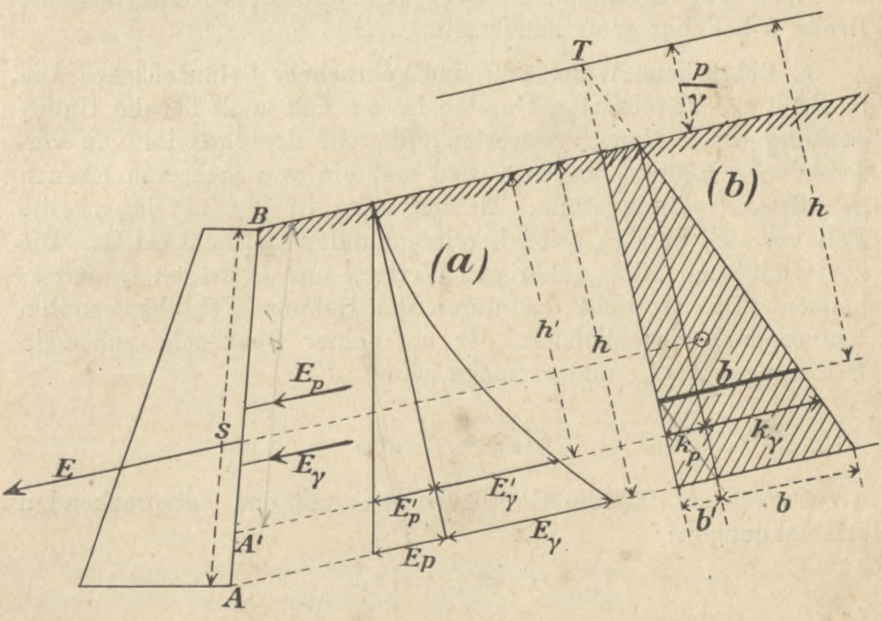


Fig. 13.

Die *Belastungsfläche* der Wand besteht also nach Fig. 13*b* aus einem *Rechteck* von der Breite

$$b' = \frac{E_p}{h}$$

und einem *Dreieck* von der Grundlinie

30) $$b = \frac{2E_\gamma}{h} = \frac{\gamma f e}{h}.$$

bei b falsch denn $h' = h$ sonst $b = \frac{2E_\gamma h'}{h^2} = \frac{2E_\gamma h}{h^2}$ integrieren

Nun verhält sich

$$b' : b = E_p : 2 E_\gamma = \frac{p}{\gamma} : h,$$

und daraus folgt, dafs sich die Seiten des durch Zusammensetzung des Rechtecks und des Dreiecks entstandenen Trapezes in einem Punkte T schneiden, der vom Gelände den Abstand $\frac{p}{\gamma}$ hat. Die Belastungsfläche ist also durch die Bedingung bestimmt, dafs sie im Abstande h vom Punkte T die durch die Formel 30) gegebene Breite b besitzt.

Der Druck E_p greift im Mittelpunkte von AB an, der Druck E_γ im oberen Endpunkte des untersten Drittels von AB. Der Schwerpunkt des Belastungstrapezes bestimmt den Angriffspunkt von $E = E_p + E_\gamma$. Will man dieses Trapez nur zur Ermittelung des Angriffspunktes von E benutzen, so darf man die Breite b beliebig grofs annehmen.

6. Gebrochene Wandfläche und gebrochene Geländefläche. Die in Nr. 3 u. 4 abgeleiteten Gesetze lassen sich auch bei der Untersuchung einer Mauer verwerten, die auf der Erdseite von verschiedenen Ebenen begrenzt wird und ein von mehreren Ebenen gebildetes Gelände stützt. Es liege der in Fig. 14 dargestellte Fall vor. E_1 und E_2 seien bereits gefunden; gesucht sei E_{III}. Die zur Gleitfläche $A\,C_0$ gehörigen Werte f und n mögen f_0 und n_0 heifsen. Das Gewicht des durch den Schnitt $A\,C_0$ abgetrennten Erdkörpers, einschliefslich der auf seiner Oberfläche ruhenden Belastung, sei G_0; und es möge sein

$$G''_0 > \frac{1}{2}\gamma' f_0 n_0.$$

Ferner sei für die Gleitfläche $A\,C_1$ mit den entsprechenden Bezeichnungen:

$$G''_1 < \frac{1}{2}\gamma' f_1 n_1.$$

Dann trifft die Gleitfläche $A\,C$ das Gelände innerhalb der gleichförmig mit p belasteten Strecke $C_0 C_1$. Wird nun in der Verlängerung der Geraden $C_0\,C_1$ ein Punkt B'_{III} so bestimmt, dafs die beiden Dreiecke $A B'_{III} C$ und $A C D$ inhaltsgleich sind und hierauf $B'_{III} J$ unter dem Winkel ψ_{III} gegen die natürliche Böschung gezogen, so ist offenbar $A D$ die mittlere Proportionale zu $A J$ und $A N$. Für die Gleitfläche $A\,C$ gilt aber die Gleichung

$$G'' = G - G' = \frac{1}{2}\gamma' f n = \gamma' \cdot \triangle\, ACD,$$

und es mufs daher der Abstand x des Punktes B'_m von C_0 so gewählt werden, dafs

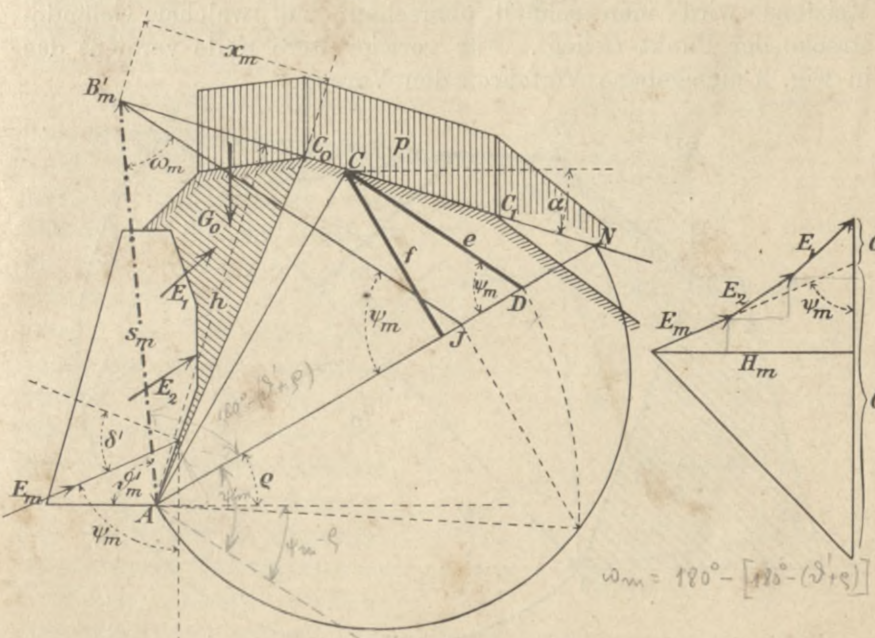
$$\gamma' \cdot \triangle A B'_m C = G - G' - G''.$$

wird. Das gibt, wenn $\overline{C_0 C} = \xi$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{2}\gamma'(x+\xi)h = G_0 + \frac{1}{2}\gamma'\xi h - G',$$

woraus:

31) $$x = \frac{G_0 - G'}{\frac{1}{2}\gamma h + p} = \frac{G_0 - G'}{\frac{1}{2}\gamma' h}.$$



$\omega_m = 180° - [180° - (\vartheta' + \varrho)] - \psi_m = \vartheta'$

Fig. 14.

Jetzt kann man die Lage des Punktes D auf die in Fig. 14 angegebene Weise konstruieren und den Erddruck

$$E_m = K - K'$$

berechnen, wo

$$K = \frac{1}{2}\gamma' f e$$

ist. Will man die Formeln 14) bis 16) benutzen, so beachte man, dafs an die Stelle von E_w nunmehr die wagerechte Seitenkraft H_m von K tritt, dafs für ϑ der Neigungswinkel ϑ'_m der Geraden AB'_m und für s die Länge $s_m = \overline{AB'_m}$ gesetzt werden mufs, schliefslich dafs $\omega = \rho + \vartheta'_m - \psi_m$ ist. Man erhält also:

32) $$H_m = \sum_1^m E_w = \frac{1}{2}\gamma' s^2{}_m \nu^2,$$

wo

33) $$\nu = \frac{\sin(\vartheta'_m + \rho)}{\varepsilon},$$

34) $$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho - \alpha)\sin(\rho + \vartheta'_m - \psi_m)}{\sin(\vartheta'_m + \alpha)\sin\psi_m}}.$$

Ferner ist

35) $$\overline{B'_m C} = s_m \nu \frac{\varepsilon - 1}{\sin(\rho - \alpha)}.$$

Meistens wird man schnell übersehen, auf welcher Geländestrecke der Punkt C liegt. Für verwickeltere Fälle verdient das in Fig. 3 angegebene Verfahren den Vorzug.

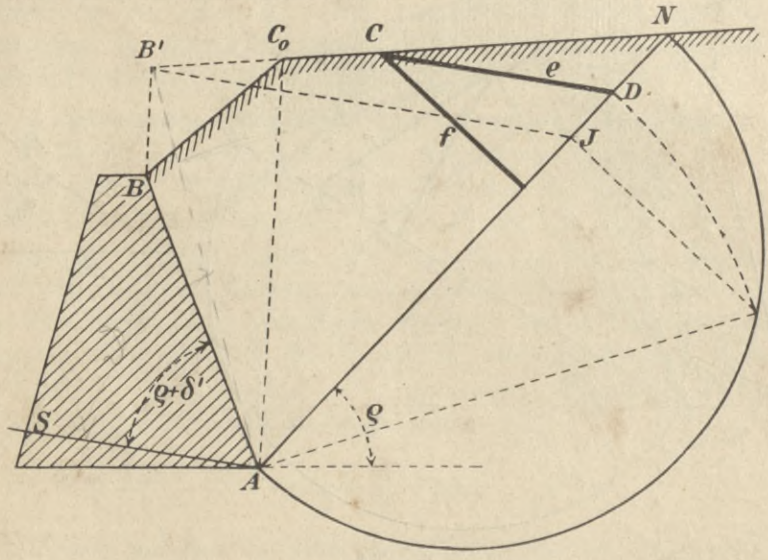


Fig. 15.

Zuweilen empfiehlt es sich, die Lage des Punktes B' zeichnerisch zu bestimmen. Fig. 15 stellt einen solchen Fall dar. Man findet den in der Verlängerung der Geländelinie $C_0 C$ liegenden Punkt B', indem man $BB' \parallel AC_0$ zieht. Dann sind die Dreiecke ABC_0 und $AB'C_0$ inhaltsgleich. Nun wird $B'J \parallel AS$ gezogen, die Ermittelung der Strecken e und f durchgeführt und

$$E = \frac{1}{2}\gamma f e$$

berechnet.

Im allgemeinen ziehen wir es vor, x durch Rechnung zu bestimmen; wir haben in der Regel gefunden, dafs Rechenschieber oder Rechentafel schneller zum Ziele führen als das zeichnerische Verfahren, dessen Hilfslinien aufserdem die Übersicht erschweren.

7. Der obere Grenzwert des Erddruckes. Dem *unteren* Grenzzustande des Gleichgewichts läfst sich nun ein *oberer* Grenzzustand an die Seite stellen. Man kann fragen, wie hoch darf der Druck E auf das Erdprisma ABC höchstens werden, ohne dafs das Gleichgewicht gestört wird. Die Antwort gibt die in Fig. 16 ausgeführte Zerlegung von G. Es wurden die Vorzeichen der Winkel ρ und δ' umgekehrt. Der *kleinste* der auf diese Weise gefundenen Werte darf nicht überschritten werden.

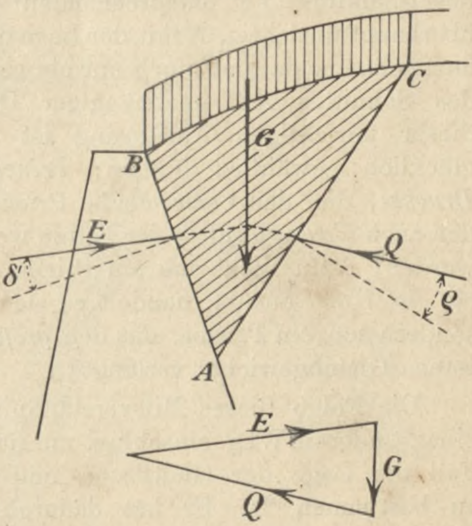


Fig. 16.

Um diesen oberen Grenzwert von E handelt es sich, wenn eine Mauer durch eine gröfsere Kraft, z. B. den Schub eines flachen Bogens, an einen Erdkörper angedrückt wird und der Widerstand, den der Erdkörper höchstens leistet, ermittelt werden soll. Da der Erddruck jetzt zu den die Mauer stützenden Kräften zählt, so darf der Sicherheit wegen nur ein Bruchteil seines oberen Grenzwertes in Rechnung gestellt werden. Man pflegt aber auf seine Mitwirkung vorläufig nicht zu rechnen; denn es gibt keinen Widerstand ohne vorangegangene Formveränderung, und zurzeit fehlt noch jede Grundlage für die Beurteilung der Verschiebung, welche die Mauer erleidet, bevor der verlangte Erdwiderstand zur Wirkung kommt.

Der untere Grenzwert von E führt auch den Namen *aktiver* (*angreifender*) Erddruck, der obere Grenzwert den Namen *passiver* (*widerstehender*) Erddruck. Wenn in der Folge ohne nähere Bezeichnung nur vom Erddruck die Rede ist, so ist immer der angreifende Erddruck gemeint.

§ 2.

Bestimmung des Erddruckes auf eine Stützmauer mittels der Bedingung $\frac{d\delta}{d\varphi} = 0$, $\delta_{max} = \rho$.

8. Gröfse und Lage der Drucke Q und E. Das *Coulomb*sche Prinzip ist trotz seines einfachen und überzeugenden Gedankenganges nicht ohne Anfechtung geblieben. So erklärte *Winkler*, es lasse sich nicht ohne weiteres einsehen, warum der wirkliche Erddruck gerade das Maximum aller, den verschiedenen Lagen des Schnittes AC entsprechenden Werte E sein solle; es sei überhaupt unrichtig, E mit der Lage des Schnittes AC veränderlich anzunehmen, da sich doch nur ein ganz bestimmter, von der Lage des Schnittes AC unabhängiger Druck äufsern könne. — Zu dieser unrichtigen Auffassung ist *Winkler* durch den wenig glücklich gewählten Namen: *Prinzip vom Prisma des gröfsten Druckes*, den das *Coulomb*sche Prinzip in der Folge erhielt, und den auch *Coulomb* selbst der Kürze wegen gebraucht hatte, verleitet worden; denn nicht um ein Prisma, welches den *gröfsten Druck auf die Wand* ausübt, handelt es sich in der Theorie von *Coulomb*, sondern um ein Prisma, das den *gröfsten Widerstand* zur Sicherung seines Gleichgewichts verlangt*).

Die Folge dieses Mifsverständnisses war nun, dafs *Winkler* einen anderen Weg einschlug, um für einen möglichst allgemeinen Fall die Lage der Gleitfläche und die Gröfse des Erddruckes zu bestimmen**). Er hat dadurch den Grund gelegt zu der folgenden wichtigen Untersuchung.

Im Grenzzustande des Gleichgewichts bildet der Gleitflächendruck Q mit der Normale der Gleitfläche den Reibungswinkel ρ. Für jede andere durch denselben Punkt A gelegte Schnittfläche wird der Winkel zwischen der Druckrichtung und der Normale einen Wert δ annehmen, der kleiner ist als ρ. *Werden Unstetigkeiten ausgeschlossen*, so ist δ eine stetige Funktion des Neigungs-

---

*) Vergl. *Kötter*, „Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck“, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung II, 1893. In dieser eingehenden, durch eine klare Darstellung des *Coulomb*schen Prinzips sich auszeichnenden Arbeit über den Erddruck wird überzeugend nachgewiesen, dafs *Winkler* und *Rebhann* (der das *Coulomb*sche Prinzip ebenfalls für unrichtig erklärt hat) die grundlegende Arbeit *Coulombs* nicht gekannt und aus einer fehlerhaften Quelle zweiter Hand geschöpft haben.

**) Einen einfachen Sonderfall hatte bereits vorher *Weingarten* in dieser Weise behandelt. Zeitschrift für Bauwesen 1870. S. 122.

winkels φ der Schnittfläche AC, und es kann dann die Lage der Gleitfläche auch mittels der Bedingung

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = 0,\ \delta_{max} = \rho$$

bestimmt werden.

Es sei nun $OC'C$ ein Erdprisma, dessen Begrenzung OC ein Stück einer ebenen Gleitfläche ist (Fig. 17). Der Winkel $C'OC$ sei gleich $d\varphi$, und die Länge von OC sei z. Auf die Fläche OC wirke der Druck Q_z, auf OC' der Druck Q'_z; ersterer bildet der Voraussetzung nach mit der Normale der Fläche OC den Winkel

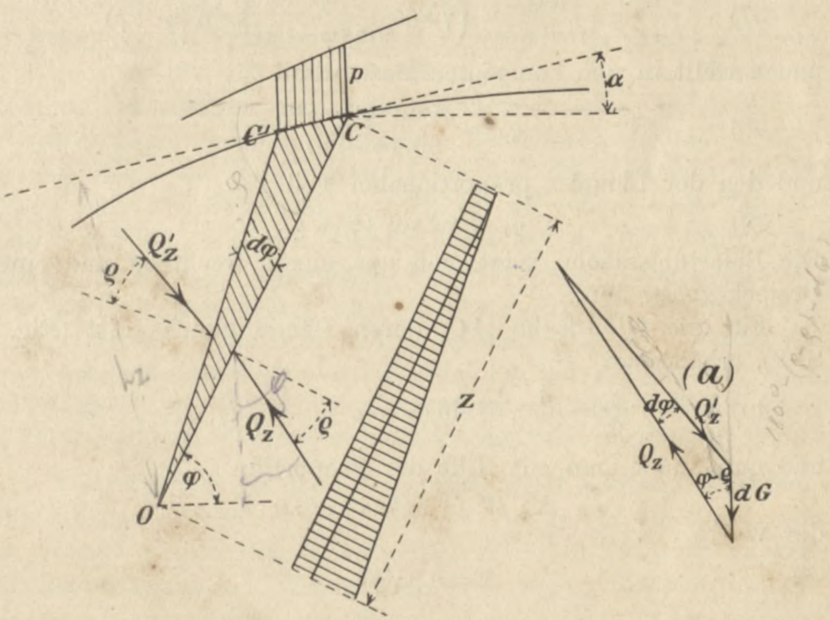


Fig. 17.

$\delta = \rho$. Da aber dieser Winkel ein Maximum werden soll, so mufs seine Änderung Null sein, und es schliefst daher Q'_z mit der Normale der Fläche OC' ebenfalls den Winkel ρ ein. Daraus folgt, dafs Q_z mit Q'_z den Winkel $d\varphi$ bildet.

Von dem Kräftedreieck dG, Q_z, Q'_z kennt man also die Winkel und die Länge einer Seite; man ist daher imstande, den Druck Q_z auf die Gleitfläche zu berechnen. Man findet

$$Q_z = \frac{dG \sin(\varphi - \rho)}{d\varphi};$$

ferner nach Gleichung 8):

$$\frac{dG}{d\varphi} = \frac{1}{2}\gamma' z^2 = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h_z}\right) z^2,$$

wo $h_z = z \sin(\varphi - \alpha)$ die Länge des von O auf die Verlängerung der Seite CC' gefällten Lotes bedeutet. Hiernach ergibt sich

$$Q_z = \frac{1}{2} \gamma' z^2 \sin(\varphi - \rho)$$

und nach Einsetzen des Wertes γ'

$$36)\qquad Q_z = \left(\frac{1}{2} \gamma z^2 + \frac{p z}{\sin(\varphi - \alpha)}\right) \sin(\varphi - \rho).$$

Die Belastung der Längeneinheit der Gleitlinie AC hat also im Abstande z von C den Wert

$$37)\qquad q = \frac{d Q_z}{d z} = \left(\gamma z + \frac{p}{\sin(\varphi - \alpha)}\right) \sin(\varphi - \rho)$$

und zerfällt in den konstanten Bestandteil

$$38)\qquad q_p = \frac{p \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

und den der Länge z proportionalen Teil

$$39)\qquad q_\gamma = \gamma z \sin(\varphi - \rho).$$

Die Belastungsfläche setzt sich aus einem Rechteck und einem Dreieck zusammen.

Für die Gleitfläche AC, deren Länge gleich l ist (Fig. 4, S. 9), erhält man

$$40)\qquad Q = \frac{1}{2} \gamma' l^2 \sin(\varphi - \rho) = \frac{1}{2} \gamma' l f,$$

und nun findet man mit Hilfe der Proportion

$$K : H : G'' : Q = e : f : n : l$$

die Werte

$$K = \frac{1}{2} \gamma' f e,$$

$$H = \frac{1}{2} \gamma' f^2,$$

$$G'' = \frac{1}{2} \gamma' f n,$$

*welche mit den in Nr. 3 mit Hilfe des Coulomb*schen *Prinzips gewonnenen Werten übereinstimmen.*

Ein neues auffallendes Ergebnis ist allerdings hinzugekommen. Die Bedingung $\frac{d\delta}{d\varphi} = 0$ liefert nicht nur die Gröfse des Gleitflächendruckes Q, sondern auch die Lage des *Angriffspunktes* dieser Kraft *). Zerlegt man Q in die beiden Bestandteile

---

*) Dies ist in anderer Weise und für $p = 0$ zuerst von *Mohr* nachgewiesen worden.

$$Q_p = \frac{pl \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \alpha)}$$

und

$$Q_\gamma = \frac{1}{2} \gamma l^2 \sin(\varphi - \rho),$$

so greift Q_p im Mittelpunkte der Gleitlinie AC an und Q_γ im oberen Endpunkte des unteren Drittels von AC. Ist aber der Angriffspunkt von Q bekannt, so kann man auch die Lage des Angriffspunktes von E finden.

Wir haben dieses Ergebnis ein auffallendes genannt, weil es einen Schlufs gestattet, dessen Unrichtigkeit einleuchtend ist. Die Verteilung des Druckes längs der ebenen Gleitfläche AC ist nach Gleichung 38) und 39) nur abhängig von der im Punkte C wirksamen Belastung p und dem Neigungswinkel α der in C an die Geländefläche gelegten Tangente. Eine nachträgliche Änderung der Form des Erdprismas ABC und des Gesetzes, nach welchem sich die Belastung der Fläche BC über diese Fläche verteilt, würden demnach keinen Einflufs auf die Lage des Druckes Q ausüben, solange das Gewicht G'' und die Werte p und α an der Stelle C ungeändert bleiben, was offenbar unrichtig ist. Da nun aber die Ableitung des zu diesem Ergebnis führenden Satzes über die Lage von Q fehlerfrei ist, so müssen wir umgekehrt schliefsen: *Die Gleitfläche kann im allgemeinen keine Ebene sein.* Die nächsten Untersuchungen werden dies bestätigen.

9. Widersprüche infolge der Annahme einer ebenen Gleitfläche. Schliefst man nach Nr. 8 aus der Lage von Q auf die Lage von E, so gelangt man zu Ergebnissen, die mit den im § 1 gewonnenen nicht übereinstimmen. Wir wollen dies an dem leicht zu überblickenden Sonderfalle einer ebenen Wand AB, die einen Erdkörper mit ebener, gleichmäfsig belasteter Oberfläche stützt, zeigen.

AC sei die Gleitfläche (Fig. 18). Ein lotrechter Schnitt AB_0 zerlege das Erdprisma ABC in zwei Teile. Die Gewichte dieser Teile seien G_1 und G_2, ihre Belastungen P_1 und P_2.

Macht man $\overline{AD} = \frac{1}{2}\,\overline{AB}$, $\overline{AN} = \frac{1}{3}\,\overline{AB}$, $\overline{AJ} = \frac{1}{2}\,\overline{AC}$ und $\overline{AH} = \frac{1}{3}\,\overline{AC}$, so ist

D	der	Angriffspunkt	der Kräfte	P_1	und	E_p,
N	„	„	„ „	G_1	„	E_γ,
J	„	„	„ „	P_2	„	Q_p,
H	„	„	„ „	G_2	„	Q_γ.

Setzt man P_2 mit Q_p zusammen, ferner G_2 mit Q_γ, so erhält man die auf die lotrechte Schnittfläche AB_0 wirkenden Drucke E_{0p} und $E_{0\gamma}$. Dieselben Werte E_{0p} und $E_{0\gamma}$ mufs auch die Zusammensetzung von P_1 mit E_p und von G_1 mit E_γ geben, und daraus folgt, dafs E_{0p} mit der Linie DJ und $E_{0\gamma}$ mit der Linie NH zusammenfallen mufs. Der Druck E_0 auf die lotrechte Fläche AB_0 ergibt sich aus dieser Betrachtung parallel zur Oberfläche.

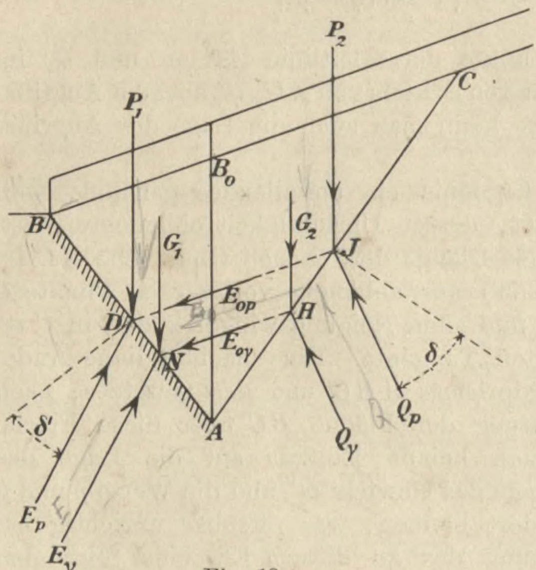


Fig. 18.

Die Ermittelung des Druckes

$$E_0 = E_{0p} + E_{0\gamma}$$
$$= \frac{1}{2}\gamma' f_0 e_0$$

kann jetzt nach dem im § 1 angegebenen Verfahren durchgeführt werden, weil seine Richtung von vornherein bekannt ist. Kennt man aber E_0, so erhält man den Druck E auf die Wand AB als die Mittelkraft der drei Kräfte E_0, P_1 und G_1. Die Richtung der Kraft E ist also nicht mehr frei wählbar, sondern eindeutig bestimmt.

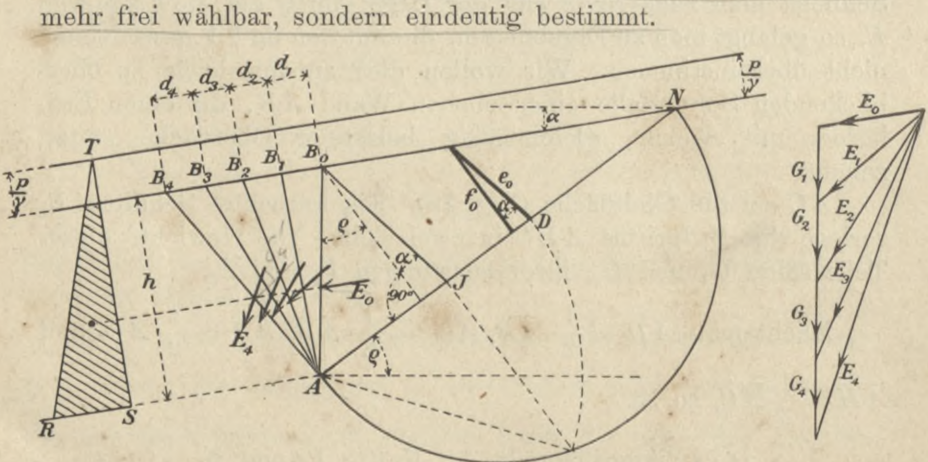


Fig. 19.

In Fig. 19 ist diese Konstruktion des Erddrucks für verschiedene Wandlagen AB_0, AB_1, ... durchgeführt worden. Für die lotrechte Fläche ist $\delta' = \alpha$. Die Stellungslinie $B_0 J$ bildet mit der Fläche $A B_0$ den Winkel $\rho + \alpha$ und mit der Normale der natürlichen Böschung AN den Winkel α. Die Gewichte der Erdprismen $A B_0 B_1$, $A B_1 B_2$, ... einschliefslich ihrer Belastungen sind gleich $\frac{1}{2} \gamma' h d_1$, $\frac{1}{2} \gamma' h d_2$, ... Der Kräftemafsstab wurde so gewählt, dafs diese Gewichte durch die Strecken $2 d_1$, $2 d_2$ .... dargestellt werden. Für die Wandflächen $A B_1$, $A B_2$ .... ergeben sich die Erddrucke E_1, E_2 ....; ihre Angriffspunkte wurden nach S. 17 durch den Schwerpunkt eines Trapezes mit beliebig angenommener Grundlinie bestimmt. Bilden die Erddrucke E mit den Normalen der entsprechenden Wandflächen Winkel δ'_1, δ'_2, δ'_3, ... die kleiner sind als der Reibungswinkel ρ', so ist Gleichgewicht möglich. Ist die Wandfläche vollkommen glatt, oder liegen besondere Umstände vor, welche es verbieten, mit der Wandreibung zu rechnen, so ist das Ergebnis der Konstruktion nur brauchbar, wenn sich zufällig $\delta' = 0$ ergibt. Die in Fig. 19 durchgeführte Konstruktion des Erddrucks kann deshalb als eine allgemein brauchbare Lösung nicht bezeichnet werden.

Für die weitere Untersuchung des nachgewiesenen Widerspruches werden uns die beiden folgenden, für jeden ebenen Spannungszustand gültigen Sätze der Festigkeitslehre gute Dienste leisten:

1. Wird in irgend einem Punkte S ein Flächenelement von der Richtung a durch eine Spannung von der Richtung b beansprucht, so hat in diesem Punkte die Spannung in einer Fläche von der Richtung b die Richtung a.
2. Die durch den Punkt S gehenden Flächenrichtungen bilden mit den zugehörigen Spannungsrichtungen einen involutorischen Büschel konjugierter Richtungen.

Die auf die Flächenelemente a und b wirkenden Kräfte mögen mit A und B bezeichnet werden (Fig. 20). Ist $A \parallel b$, so mufs $B \parallel a$ sein. Denn wäre B nicht $\parallel a$, sondern hätte es die Lage B', so würde ein das Körperteilchen drehendes Kräftepaar entstehen. Damit ist der erste Satz bewiesen.

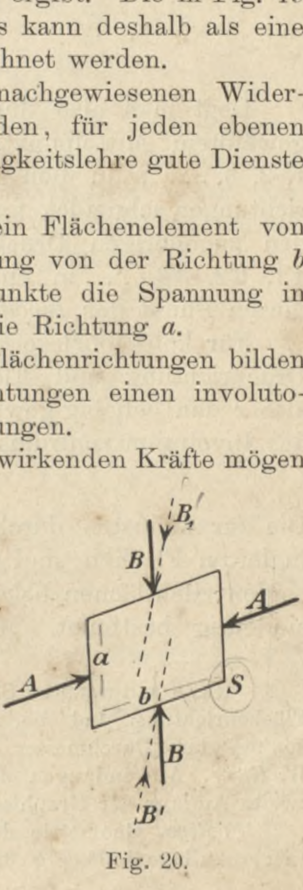


Fig. 20.

Wir betrachten jetzt ein dreiseitiges Prisma von den Abmessungen a, b, c (Fig. 21). Den auf die Flächen a, b, c wirkenden Kräften A, B, C entspricht ein Kräftedreieck. Lassen wir bei ungeändert bleibendem a die Seite b wachsen, so beschreiben, da B proportional b ist, die von den c und C gebildeten Strahlenbüschel ähnliche gerade Punktreihen. Die beiden Strahlenbüschel sind also projektiv. Fassen wir nun umgekehrt die Strahlen C als Flächenrichtungen auf, so geben nach dem ersten Satze die ihnen entsprechenden Strahlen c die Kraftrichtungen an. Damit ist auch der zweite Satz bewiesen*).

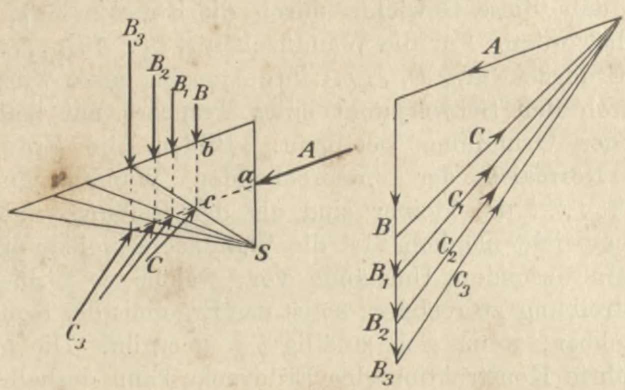


Fig. 21.

Legt man also durch den Punkt S einen Kreis mit beliebig gewähltem Mittelpunkte (Fig. 22) und bestimmt die Punkte 1, 2, 3, ..., in denen er die von S ausgehenden Flächenrichtungen schneidet, ferner seine Schnittpunkte 1′, 2′, 3′, ... mit den zugehörigen Druckrichtungen, so treffen sich die Sehnen 1′1, 2′2, 3′3 .... in ein und demselben Punkte J. Man nennt diesen Punkt das *Involutionszentrum***).

Für kohäsionslose Erde ist nun der kleinste Winkel zwischen Druckrichtung und Flächenrichtung gleich $90^{0} - \rho$. Bedeutet also r den beliebig gewählten Kreishalbmesser, so ist der Abstand des Involutionszentrums J vom Kreismittelpunkte M:

$$\overline{JM} = r \sin \rho.$$

Die zur kleinsten durch J gehenden Kreissehne gehörigen konjugierten Flächen sind Gleitflächen. Ist die Richtung einer der beiden Gleitflächen bekannt, so ist auch die Lage des Punktes J eindeutig bestimmt. Man zeichnet zwei konzentrische Kreise,

*) Die mitgeteilten Sätze folgen auch ohne weiteres daraus, dafs die Flächenrichtung und die zugehörige Druckrichtung als die Richtungen konjugierter Durchmesser einer Ellipse anzusehen sind. Vergl. auch *W. Ritter*, Anwendungen der Graphischen Statik. Teil I, S. 5, sowie die zweite Auflage der Graphischen Statik von *Culmann*, S. 529.

**) *Reye*, Geometrie der Lage, I. Abt. Erste Auflage 1866, Fig. 58. Vierte Auflage 1898, Fig. 62.

deren Halbmesser sich zu einander verhalten wie $\sin \rho : 1$, zieht von dem auf dem äufseren Kreise beliebig angenommenen Punkte S aus eine den äufseren Kreis im Punkte C schneidende Parallele zur Gleitfläche und legt durch den Punkt C an den inneren Kreis eine Tangente. Der Berührungspunkt J ist das Involutionszentrum (Fig. 24).

Kennt man umgekehrt

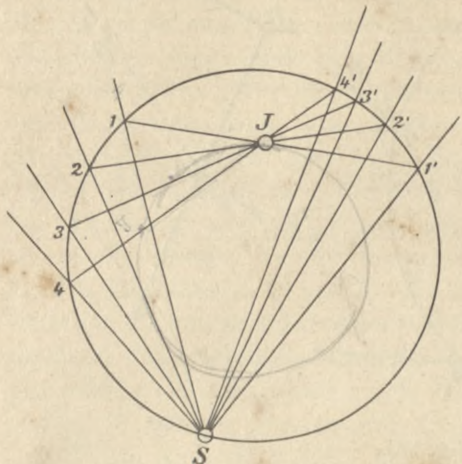


Fig. 22.

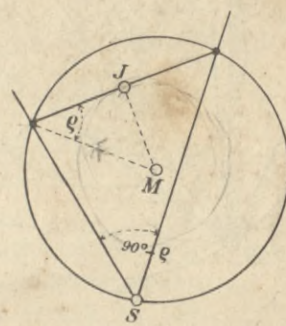


Fig. 23.

die zu irgend einer Flächenrichtung $S\,1$ gehörige Druckrichtung $S\,1'$ (Fig. 25), verfügt man also über zwei konjugierte Richtungen, so schneidet die durch diese Richtungen bestimmte Sehne des äufseren Kreises den inneren Kreis in den beiden Involutionszentren der beiden Grenzzustände des Gleichgewichts.

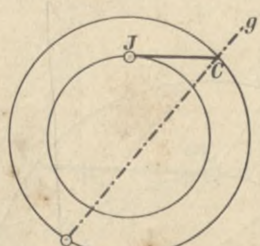


Fig. 24.

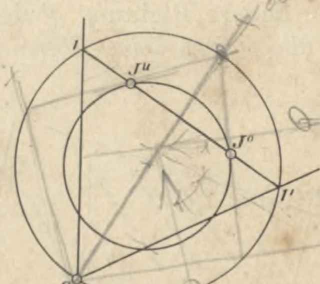


Fig. 25.

Es liege nun eine nach § 1 gefundene ebene Gleitfläche AC vor (Fig. 26). Der Punkt J sei auf die beschriebene Weise bestimmt worden; er gilt für alle Punkte der Geraden AC. Nun erfährt aber im Geländepunkte C das Element der Oberfläche die lotrechte Belastung p, und es sind deshalb die lotrechte Richtung LS und die zur Geländetangente parallele Richtung SO konjugierte Richtungen. Die Sehne LO wird den inneren Kreis im

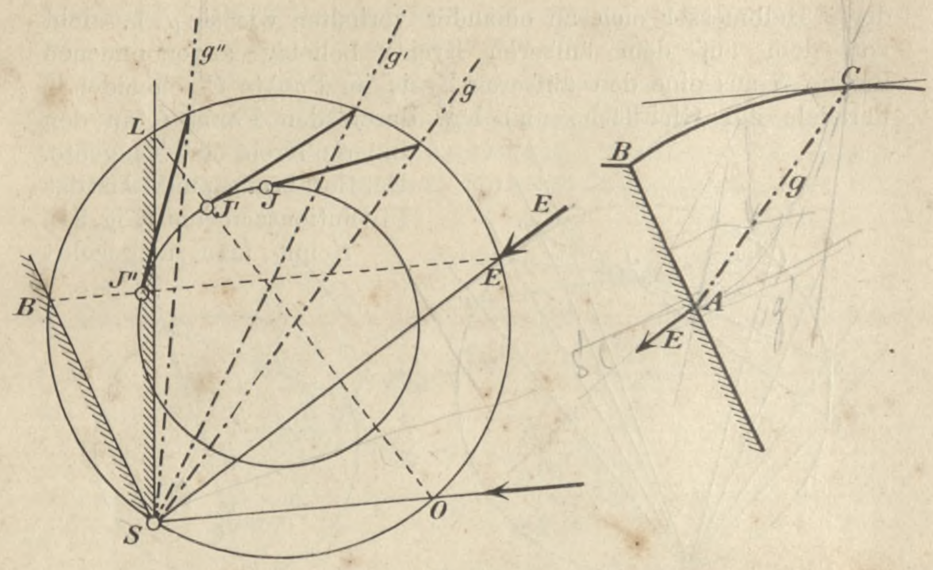


Fig. 26.

allgemeinen nicht im Punkte J, sondern in einem anderen Punkte J' schneiden, und dieses neue Involutionszentrum bestimmt auch eine andere Richtung g' des von C ausgehenden Gleitflächenelementes. Im Punkte A dagegen bestimmen die Wandrichtung $\overline{SB} \parallel \overline{AB}$ und die unter δ' gegen die Normale angenommene Erddruckrichtung $\overline{SE} \parallel E$ wieder ein anderes Involutionszentrum J'' und eine andere Richtung g'' der Gleitfläche. *Die Gleitfläche kann also im allgemeinen keine Ebene sein.*

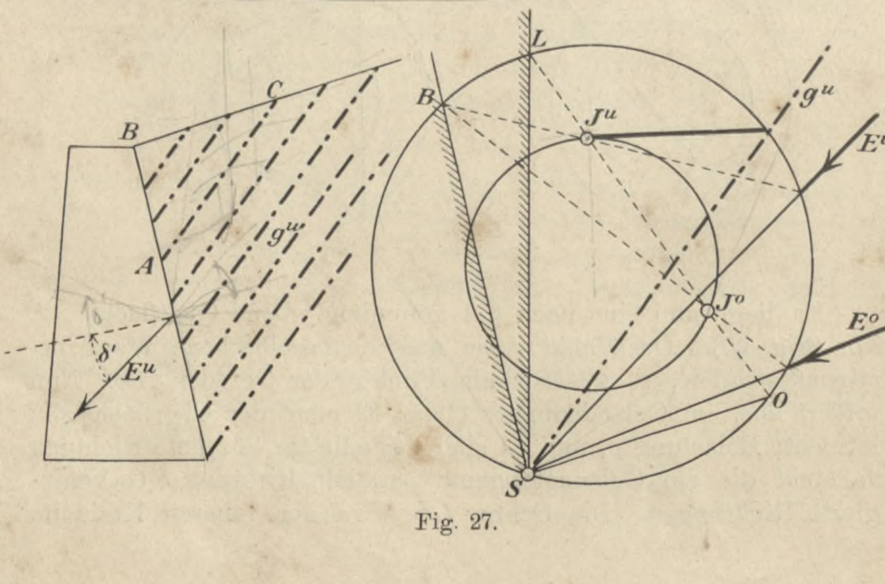


Fig. 27.

Die Möglichkeit, die Gleichgewichtsbedingungen mit ebenen Gleitflächen zu erfüllen, liegt aber vor, sobald das Gelände eben ist und die Wand einen bestimmten Rauhigkeitsgrad besitzt. Alle Gleitflächen schneiden das Gelände unter demselben Winkel (Fig. 27). Sind sie eben, so sind für alle Punkte aller Gleitflächen, also für alle Punkte der Erdmasse, die lotrechte Richtung und die Geländerichtung konjugierte Richtungen. Der Druck auf jede lotrechte Fläche ist parallel zur Oberfläche. Für den Erddruck auf die Wandfläche AB liefern die beiden Involutionszentren die Erddruckrichtungen E^u und E^o; die steilere Richtung E^u entspricht dem *unteren* Grenzzustande des Gleichgewichts, die andere dem *oberen* Grenzzustande. Die Gleitflächenrichtung g haben wir in Fig. 27 nur für den unteren Grenzzustand eingetragen.

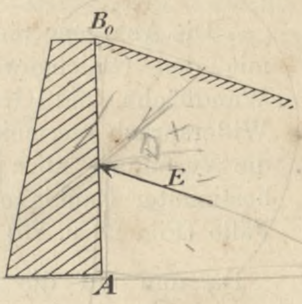


Fig. 28.

Wohin es nun führen würde, den Druck auf eine lotrechte Fläche stets parallel zur Oberfläche anzunehmen, lehrt ein Blick auf die Figur 28. Die in die Wandfläche fallende Seitenkraft

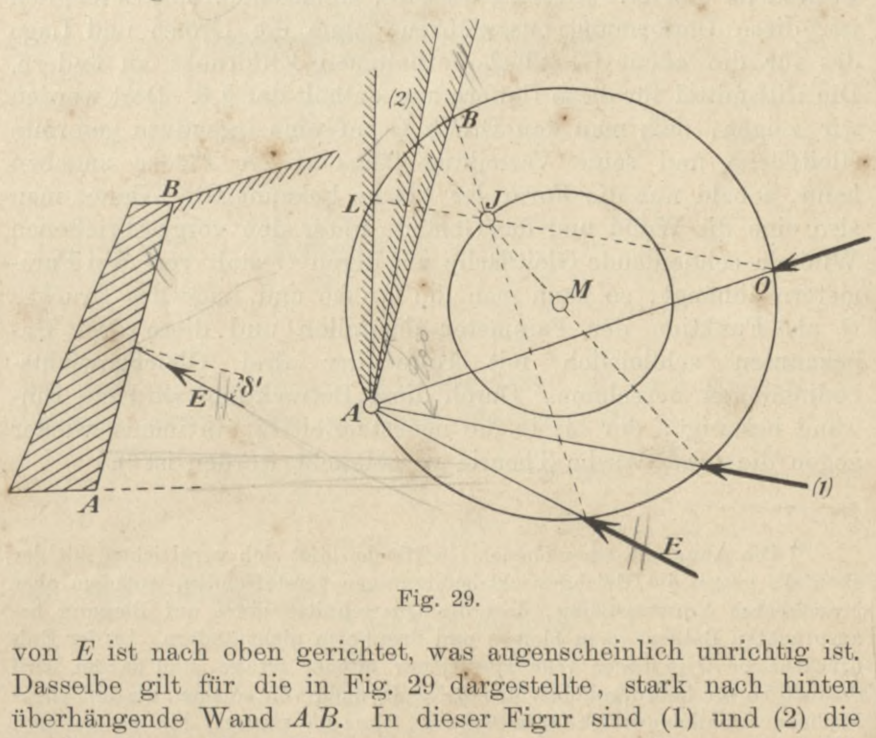


Fig. 29.

von E ist nach oben gerichtet, was augenscheinlich unrichtig ist. Dasselbe gilt für die in Fig. 29 dargestellte, stark nach hinten überhängende Wand AB. In dieser Figur sind (1) und (2) die durch die gröfste Kreissehne bestimmten, sich *rechtwinklig* schneidenden konjugierten Richtungen, die sogenannten *Hauptrichtungen.*

Das Ergebnis der vorstehenden Untersuchung können wir wie folgt zusammenfassen:

Die Annahme einer ebenen Gleitfläche steht im allgemeinen mit den Gleichgewichtsbedingungen in Widerspruch. Sind Wandfläche und Geländefläche Ebenen, so läfst sich dieser Widerspruch vermeiden, aber nur unter Verzichtleistung auf die Verfügung über den Winkel δ' und für Wandflächen von bestimmter Rauhigkeit; auch ergeben sich hierbei für wichtige Fälle (Fig. 28 u. 29) unwahrscheinliche Erddruckrichtungen.

Da nun auf die freie Wahl des Winkels δ' aus den in Nr. 1 vorgetragenen Gründen nicht verzichtet werden kann, so will es zunächst scheinen, dafs nichts übrig bleibe als die mit sehr zeitraubenden Rechnungen verbundene Einführung gekrümmter Gleitflächen. Es gibt aber einen einfachen Ausweg. Man betrachte die ebene Gleitfläche lediglich als eine Annahme zur Vereinfachung der Rechnung und denke sie nachträglich durch eine gekrümmte Gleitfläche ersetzt. Hierzu genügt es, einzusehen, dafs es möglich ist, diese Umformung auszuführen, ohne die Gröfse und Lage des für die ebene Gleitfläche erhaltenen Erddrucks zu ändern. Die Hilfsmittel für diese Umformung enthält der § 6. Dort werden wir zeigen, dafs man den Druck Q auf eine irgendwie geformte Gleitfläche und seine Verteilung längs dieser Fläche angeben kann, sobald nur die Form der Fläche bekannt ist. Nimmt man also eine die Wand und das Gelände unter den vorgeschriebenen Winkeln schneidende Gleitfläche an, deren Gestalt von drei Parametern abhängt, so kann man die Gröfse und Lage des Druckes Q als Funktion der Parameter darstellen und diese drei Unbekannten schliefslich mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen berechnen. Durch diese Betrachtung wird ein Einwand beseitigt, der bis in die neueste Zeit hinein immer wieder gegen die *Coulomb*sche Theorie vorgebracht worden ist*).

*) Die Annahme einer ebenen Gleitfläche läfst sich vergleichen mit der ebenfalls gegen die Gleichgewichtsbedingungen verstofsenden, trotzdem aber brauchbaren Voraussetzung, dafs die Querschnitte eines auf Biegung beanspruchten Balkens eben bleiben und ihre Form nicht ändern. In der Erddrucktheorie tritt dieser Widerspruch nur offener zutage, und darum wird er auch so oft hervorgehoben und getadelt, auch von solchen, die mit ebenbleibenden Balkenquerschnitten rechnen, ohne zu wissen, dafs sie dadurch einen ähnlichen Fehler begehen.

10. Zahlenbeispiel zur Erläuterung des Einflusses des Winkels δ'. Eine Stützmauer habe die in Fig. 30 angegebenen Abmessungen. Es sei $\alpha = 30^0$, $\rho = 36^0$, und es werde geschätzt $\rho' = \frac{3}{4}\rho = 27^0$. Es soll der Druck σ, den die Mauer an der Vorderkante auf die Flächeneinheit des Baugrundes ausübt, für verschiedene, zwischen 0^0 und 27^0 liegende Winkel δ' berechnet werden. Das Gewicht

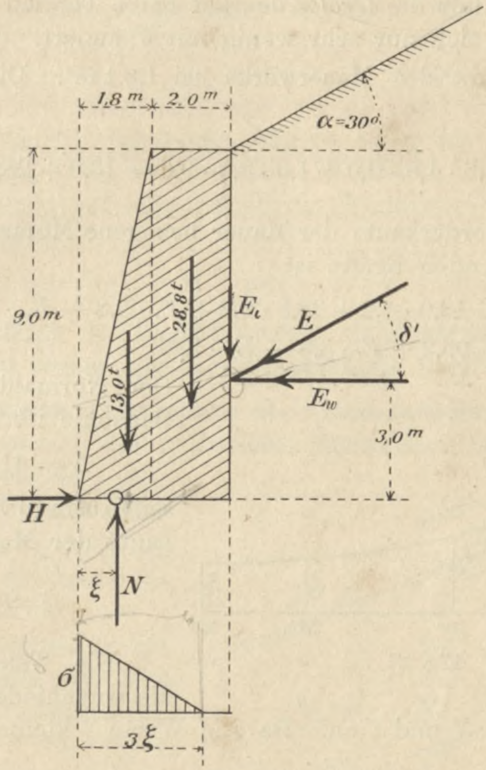


Fig. 30.

der Erde sei $\gamma = 1{,}8\,\text{t/m}^3$. Die Oberfläche des Erdkörpers sei unbelastet. Dann ergibt sich nach Gleichung 18)

$$E_w = \frac{1}{2}\gamma s^2 \frac{\cos^2\rho}{\varepsilon^2} = \frac{1}{2}\cdot 1{,}8\cdot 9^2\cdot\frac{0{,}654}{\varepsilon^2}.$$

$$E_w = \frac{47{,}7\,\text{t}}{\varepsilon^2},$$

wo nach Gleichung 19)

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho-\alpha)\sin(\rho+\delta')}{\cos\alpha\,\cos\delta'}}.$$

Um diesen Ausdruck möglichst schnell für verschiedene Werte δ' berechnen zu können, schreiben wir

$$\text{41)} \qquad \varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho - \alpha)}{\cos \alpha} (\sin \rho + \cos \rho \operatorname{tg} \delta')}$$

$$= 1 + \sqrt{0{,}071 + 0{,}098 \operatorname{tg} \delta'}.$$

Die Tabelle auf S. 35 enthält für $\delta' = 27^0, 20^0, 10^0, 5^0, 0^0$ die Werte ε, ferner die Kräfte E_w, $E_t = E_w \operatorname{tg} \delta'$ und $E = E_w \sec \delta'$. Man erkennt, dafs die *Gröfse* des auf halbe Tonnen abgerundeten Erddruckes E sich nur sehr wenig mit δ' ändert.

Das Gewicht des Mauerwerks sei 1,6 t/m³. Die Stützmauer wiegt also:

$$G = \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}8 \cdot 9{,}0 + 1{,}6 \cdot 2{,}0 \cdot 9{,}0 = 13{,}0 + 28{,}8 = 41{,}8 \,\text{t}.$$

Das auf die Vorderkante der Mauer bezogene Moment der an der Mauer angreifenden Kräfte ist

$$M = 13{,}0 \cdot 1{,}2 + 28{,}8 \cdot 2{,}8 + E_t \cdot 3{,}8 - E_w \cdot 3{,}0$$

$$= 96{,}2 + E_t \cdot 3{,}8 - E_w \cdot 3{,}0.$$

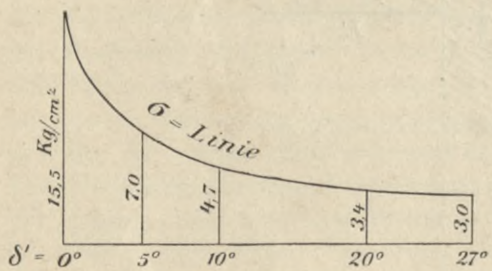


Fig. 31.

Der Normaldruck auf die Bausohle ist

$$N = 41{,}8 + E_t;$$

sein Abstand von der Vorderkante der Mauer beträgt

$$\xi = \frac{M}{N}.$$

Die Tabelle gibt für die verschiedenen Winkel δ' die Werte M, N und ξ an. Da alle Werte ξ kleiner sind als

$$\frac{1}{3}(1{,}8 + 2{,}0) = 1{,}27 \text{ m},$$

so liegt der Angriffspunkt von N aufserhalb des Kerns des wagerechten Mauerquerschnitts. Der Druck N verteilt sich daher nur über ein Rechteck von der Breite $3\,\xi$ und der senkrecht zur Bildfläche gemessenen Länge 1, und es ergibt sich deshalb für die Baugrundpressung σ an der Vorderkante der Wand aus der Gleichung

$$\sigma \cdot 1 \cdot 3\xi \cdot \frac{1}{2} = N$$

der Wert

$$\sigma = \frac{2\,N}{3\,\xi}.$$

	tg δ'	ε	ε²	E_w	E_t	E	M	N	ξ	σ
δ' = 27°	0,510	1,35	1,82	26	13	29	67,6	54,8	1,23	30
20°	0,364	1,33	1,77	27	10	29	53,2	51,8	1,03	34
10°	0,176	1,30	1,69	28	5	28,5	31,2	46,8	0,67	47
5°	0,087	1,28	1,64	29	2,5	29	18,7	44,3	0,42	70
0°	0	1,27	1,61	29,5	0	29,5	7,7	41,8	0,18	155
				Tonnen			tm	t	m	$\frac{t}{m^2}$

Die in Fig. 31 gezeichnete Kurve zeigt das Anwachsen der Druckspannung σ bei abnehmendem Winkel δ'; sie gibt eine deutliche Vorstellung von der Gröſse des Einflusses dieses wichtigen Erfahrungswertes.

§ 3.

Die Grenzzustände des Gleichgewichtes einer unendlichen Erdmasse mit ebener, gleichmäſsig belasteter Oberfläche.

11. Hauptsatz. Anwendung des *Coulomb*schen Prinzips. Die sogenannte *neuere*, durch *Rankine* begründete Theorie des Erddruckes geht von der Untersuchung der Grenzzustände des Gleichgewichts einer unendlichen Erdmasse mit ebener Oberfläche aus.

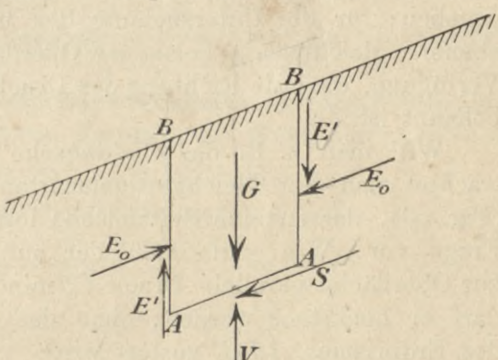


Fig. 32.

Die Erdmasse sei kohäsionslos und in allen Punkten von gleicher Beschaffenheit. Die Oberfläche sei gleichmäſsig mit p belastet. Durch zwei lotrechte Schnitte AB (Fig. 32) und den zur Oberfläche parallelen Schnitt AA sei ein Prisma abgetrennt, dessen Gewicht einschlieſslich der auf der Oberfläche ruhenden Last gleich G ist. Die auf die Seitenflächen AB wirkenden Drucke seien nach den Richtungen BB und AB in die Seitenkräfte E_0 und E' zerlegt, der an der Fläche AA angreifende Druck nach denselben Richtungen in die Seitenkräfte S und V.

Setzt man

1. die Summe der parallel zu BB wirkenden Kräfte gleich Null,

2. die Summe der parallel zu AB wirkenden Kräfte gleich Null,

so findet man

42) $$S = 0 \text{ und } V = G,$$

während sich aus der Bedingung für das Gleichgewicht gegen Drehen

$$E' = 0$$

ergibt. Daraus folgt: Der Druck auf eine lotrechte Fläche ist parallel zur Oberfläche, und der Druck auf eine zur Oberfläche parallele Fläche ist lotrecht. *Für jeden beliebigen Punkt der Erdmasse sind also die lotrechte Richtung und die Oberflächenrichtung konjugierte Richtungen.*

Durch diesen von *Rankine* aufgestellten Hauptsatz und durch die früher über den Reibungswiderstand gemachte Voraussetzung ist jeder der beiden Grenzzustände des Gleichgewichts der unendlichen Erdmasse mit ebener Oberfläche eindeutig bestimmt. Die im § 1 angegebenen Verfahren zur Darstellung des Erddrucks können auch für den jetzt vorliegenden Fall benutzt werden. Der einzige Unterschied ist der: Im § 1 gingen wir von der *Annahme* aus, es sei die Richtung des auf die *Wandfläche* wirkenden Erddruckes gegeben; für die Untersuchung des unendlichen Erdkörpers mit ebener, gleichmäfsig belasteter Oberfläche steht die *Tatsache* zur Verfügung, dafs die Richtung des Druckes auf eine *lotrechte Fläche* bekannt ist.

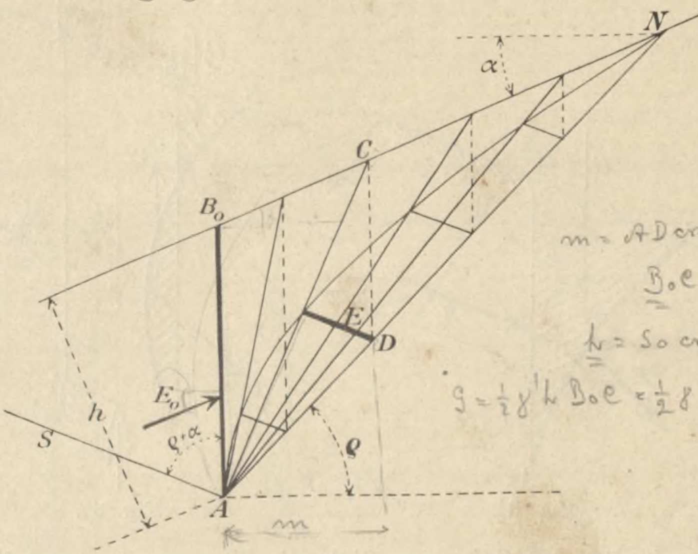
Will man z. B. das *Coulomb*sche Prinzip benutzen, so betrachtet man den Gleichgewichtszustand eines Erdprismas AB_0C (Fig. 33), dessen eine Seitenfläche lotrecht ist, und legt sich die Frage vor: Wie grofs mufs der auf die Fläche AB_0 wirkende, zur Oberfläche parallele Druck E_0 mindestens sein, und wie grofs darf er höchstens werden, ohne dafs der Gleichgewichtszustand des Erdprismas AB_0C gestört wird.

Fig. 33 zeigt die Ermittelung des unteren Grenzwertes E mit Hilfe der *Culmann*schen E-Linie. Der Kräftemafsstab wurde so gewählt, dafs das Gewicht $G = \frac{1}{2}\gamma' h\, \overline{B_0C}$ des Erdprismas AB_0C durch die Strecke AD dargestellt wird, wobei $CD \parallel AB_0$ ist. Es ist nämlich G proportional $\overline{AD}$, weil es sich auf die Form bringen läfst

$$G = \frac{1}{2}\gamma' s_0 \cos\rho\, \overline{AD},$$

wo s_0 die Länge der Strecke AB_0 bedeutet. Die E-Linie ist eine Hyperbel.

In Fig. 19 ist dieselbe Aufgabe bereits mittels der ebenfalls auf das *Coulomb*sche Prinzip sich stützenden *Poncelet*schen Konstruktion gelöst worden. Auf die Richtung von E_0 wurde dort auf anderem Wege geschlossen.



$m = AD \cos\rho = B_0C \cos\alpha$

$B_0C = \frac{\cos\rho}{\cos\alpha} AD$

$h = s_0 \cos\alpha$

$G = \frac{1}{2}\gamma' h\, B_0C = \frac{1}{2}\gamma' s_0 \cancel{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\rho}{\cancel{\cos\alpha}}$

Fig. 33.

Will man E_0 durch Rechnung bestimmen, so setze man in die auf S. 13 u. 14 abgeleiteten Formeln die Werte ein

$$\delta' = \alpha, \quad \vartheta = 90^{\circ}, \quad \psi = 90^{\circ} - \alpha.$$

Nach einer einfachen Umformung findet man

$$43) \qquad E_{\omega} = E_0 \cos\alpha = \frac{1}{2}\gamma' s^2 \frac{\cos^2\rho}{\varepsilon^2},$$

wo

$$\gamma' = \gamma + \frac{2p}{h},$$

$$44) \qquad \varepsilon = 1 + \sec\alpha \sqrt{\sin(\rho - \alpha)\sin(\rho + \alpha)}.$$

Kennt man aber den Druck E_0 auf die lotrechte Fläche AB_0, so kann man auch den Druck auf eine irgendwie geformte Zylinderfläche AB angeben, indem man E_0 mit dem Gewichte G des Erdprismas AB_0B zusammensetzt (Fig. 34). Schneidet die krumme Schnittfläche AB die Lotrechte AB_0 (Fig. 35), so nehme man zunächst die Schnitte $AA' \parallel BB_0$ und $A'B'_0 \parallel AB_0$ zu Hilfe. Dann ist der Druck E auf AB die Mittelkraft aus dem Drucke E_0, dem Gewichte des Erdprismas $BAA'B'_0$ und dem auf die Fläche AA' wirkenden Drucke V. Nun ist aber V gleich dem Gewichte G_3 des Erdprismas $AB_0B'_0A'$, und daraus folgt, dafs E die Mittelkraft ist aus E_0 und den Gewichten G_1 und G_2 der beiden in Fig. 35 schraffierten Erdprismen, wobei G_2 von unten nach oben gerichtet angenommen werden muſs.

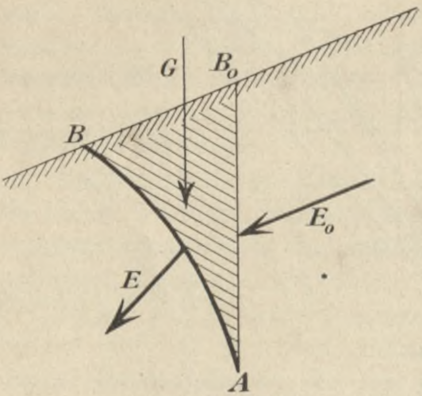


Fig. 34.

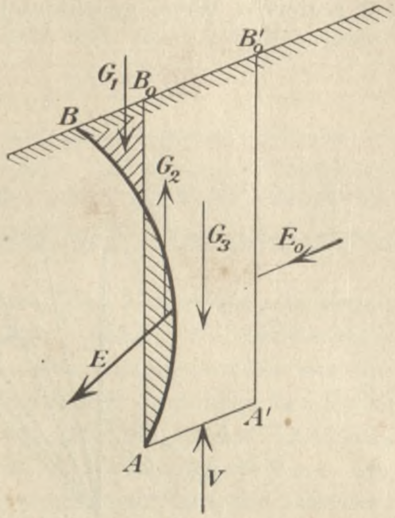


Fig. 35.

Damit könnten wir eigentlich die Theorie des unendlichen Erdkörpers mit ebener, gleichmäſsig belasteter Oberfläche als erledigt ansehen. Wir wollen aber noch eine weitere Reihe von Lösungen dieser Aufgabe beschreiben.

12. Anwendung der Involution der konjugierten Kräfte- und Schnittrichtungen. Gesucht sei der Druck E auf irgend eine ebene Fläche AA' (Fig. 36) für beide Grenzzustände des Gleichgewichts. Wir betrachten den Gleichgewichtszustand eines Erdprismas, das begrenzt wird von der Fläche AA' und den lotrechten Schnittflächen $A'B'$ und AB. Die gleichmäſsige Belastung p der Oberfläche des Erdkörpers ersetzen wir durch eine Erdschüttung, welche — rechtwinklig zur Oberfläche gemessen — die Höhe $\frac{p}{\gamma}$ hat. Dem Gewichte G des schraffierten Erdkörpers muſs das Gleichgewicht gehalten werden durch den an der Fläche AA' angreifenden Druck E und den auf die Fläche AA'' wirkenden Druck E_0. Die Erddrucke auf die Flächen $A'B'$ und $A''B$ heben sich gegenseitig auf. Wir zeichnen zwei konzentrische Kreise, deren Radien sich zu einander verhalten wie $\sin\rho : 1$, ziehen von einem beliebigen Punkte S des äuſseren Kreises aus $SL \parallel AB$ und $SO \parallel B'B$ und bestimmen mit Hilfe der Sehne LO die beiden Involutionszentren J^u und J^0. Nun ziehen wir $SD \parallel AA'$ und finden mit Hilfe der Sehnen DJ^u und DJ^0 die Richtungen der

Erddrucke E^u und E^o für die beiden Grenzzustände des Gleichgewichts. Die Gröfse dieser Drucke erhalten wir durch Zerlegung des Gewichtes G nach den Richtungen von E_0 und E^u, beziehungsweise E_0 und E^o.

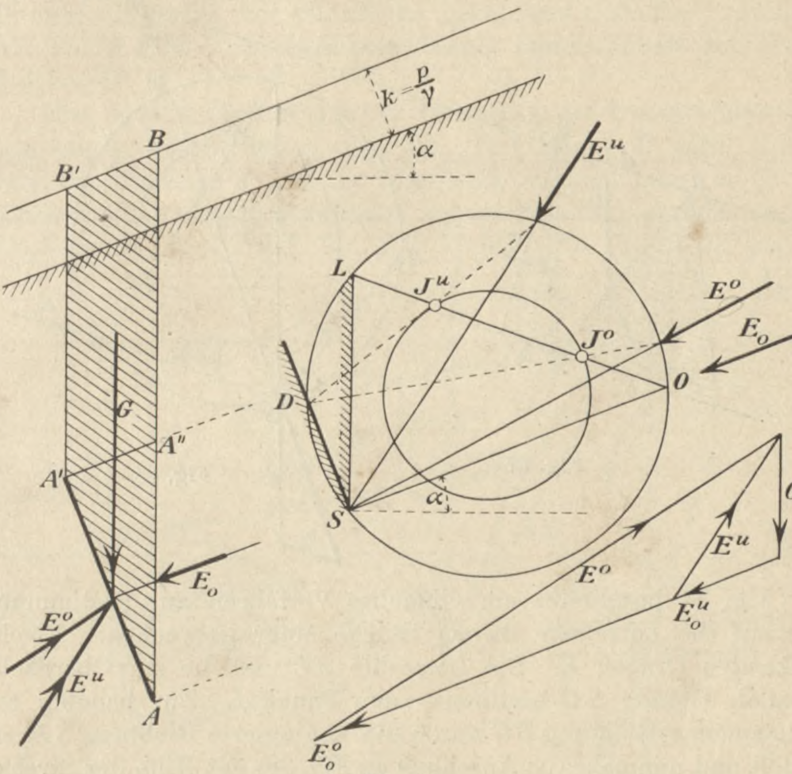


Fig. 36.

Besonders wichtig ist die folgende Untersuchung. Es sollen — zunächst für den Fall einer unbelasteten Oberfläche — die auf die Flächen AB_0 und AB (Fig. 37) wirkenden Erddrucke E_0 und E durch die Gewichte von Wasserprismen dargestellt werden, deren Querschnitte Dreiecke von der Höhe h und den Grundlinien b_0 und b sind. Das Gewicht G des Erdprismas ABB_0 und die Drucke E_0 und E verhalten sich zu einander wie $\gamma d : b_0 : b$, wo γ das spezifische Gewicht der Erde ist*). Hieraus folgt ohne weiteres die in Fig. 38 angegebene Konstruktion der Grundlinien b_0 und b für den unteren Grenzzustand des Gleichgewichts. Ist die Ober-

*) Wählt man die Tonne und das Meter zu Einheiten, so wird das Gewicht der Raumheit der Erdmasse und das spezifische Gewicht durch dieselbe Zahl ausgedrückt. Der in Quadratmetern ausgedrückte Inhalt der Belastungsfläche gibt dann den Erddruck in Tonnen an.

fläche des Erdkörpers mit p belastet, so mufs das Belastungsdreieck auf die in Fig. 13 *b* (S. 17) beschriebene Weise durch ein Trapez ersetzt werden.

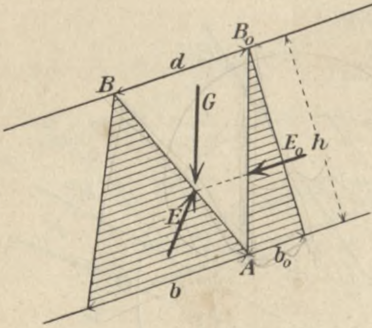


Fig. 37.

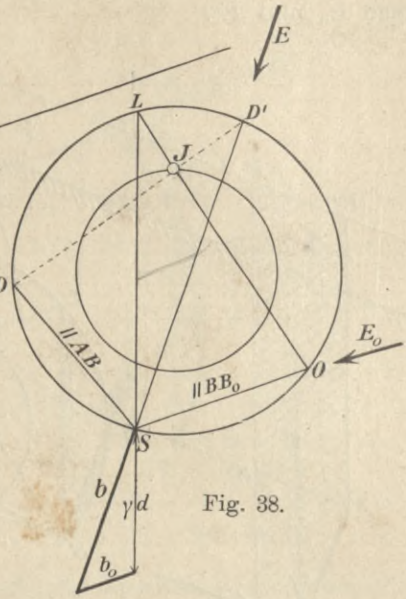


Fig. 38.

Fig. 39 beschreibt ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der auf die einzelnen ebenen Stücke einer gebrochenen Fläche wirkenden Drucke E. Die Lotrechte SL und die zur Oberfläche parallele Gerade SO bestimmen den Punkt J. Zur beliebig angenommenen Richtung SC wurde die konjugierte Richtung SD ermittelt und nunmehr (im Anschlufs an Fig. 38) mit Hilfe der Strecke $\overline{SA} = \gamma\, d$ die Grundlinie b_0 des Belastungsdreiecks der lotrechten Schnittfläche SL gefunden. Die Herstellung der Belastungsfläche mit

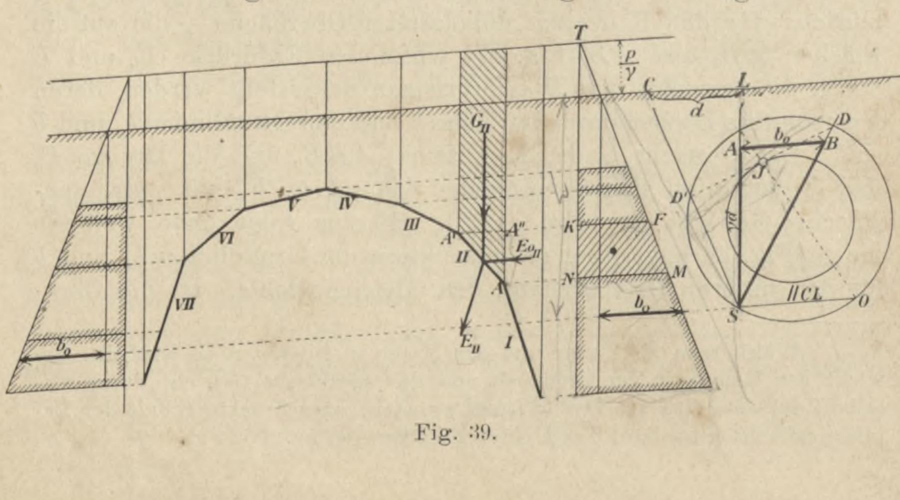


Fig. 39.

Berücksichtigung von p geschah nach Fig. 13 *b*. Der Druck E_{II} auf das ebene Flächenstück *II* setzt sich zusammen aus dem Gewichte G_{II} des schraffierten Erdprismas und dem parallel zur Oberfläche wirkenden Drucke $E_{0\,II}$ auf die Fläche $A\,A''$. Die durch A'' und A parallel zur Oberfläche gezogenen Geraden begrenzen den Teil $KFMN$ der Belastungsfläche, dessen Inhalt den Druck $E_{0\,II}$ angibt.

Eine andere Darstellung der Verteilung des Druckes über eine gebrochene Fläche zeigt Fig. 40. Der Punkt P wird in beliebigem Abstande h von der Oberfläche angenommen; er ist der Scheitel eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen parallel zu den Flächenrichtungen *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* sind. Die Fläche *IV* ist lot-

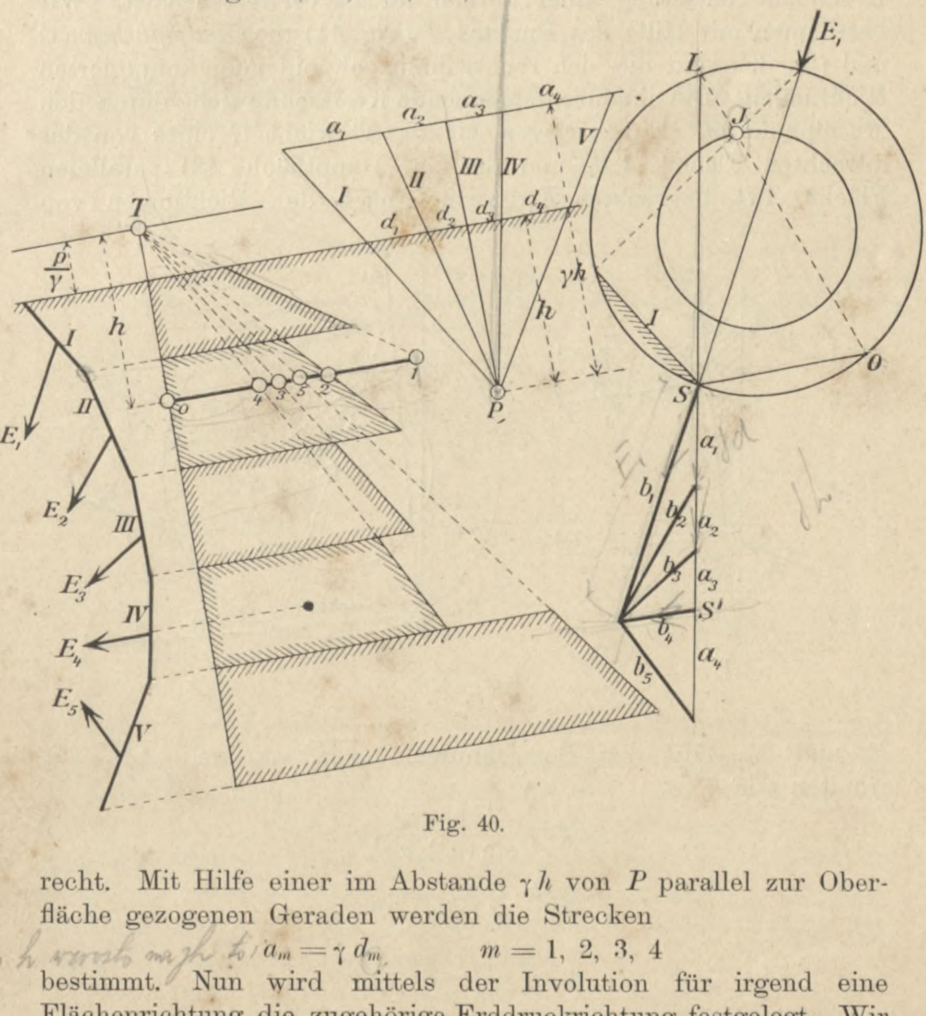


Fig. 40.

recht. Mit Hilfe einer im Abstande γh von P parallel zur Oberfläche gezogenen Geraden werden die Strecken

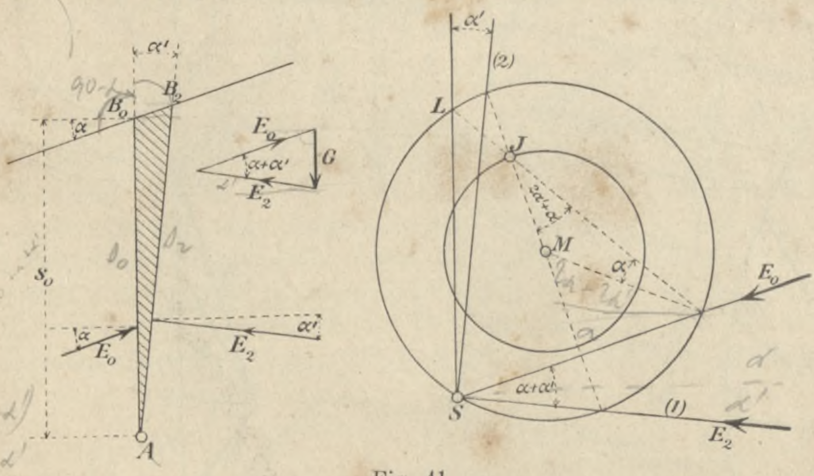
$$a_m = \gamma\, d_m \qquad m = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

bestimmt. Nun wird mittels der Involution für irgend eine Flächenrichtung die zugehörige Erddruckrichtung festgelegt. Wir wählten Fläche I, fanden die Richtung E_1, trugen auf der Verlängerung der Geraden LS die Strecke $\overline{SS'} = a_1 + a_2 + a_3$ ab, bestimmten zunächst die Grundlinien $b_4 \parallel \overline{SO}$ und b_1 und hierauf mit Hilfe der Strecken a_1, a_2 und a_4 auch die Grundlinien b_2, b_3, b_5. Die Richtungen der Strahlen b geben die Richtungen der Erddrucke an. Auf einer im Abstande h vom Punkte T parallel zur Oberfläche gezogenen Geraden wurden schliefslich die Strecken

$$0 - 1 = b_1,\quad 0 - 2 = b_2,\quad 0 - 3 = b_3,\quad 0 - 4 = b_4,\quad 0 - 5 = b_5$$

aufgetragen und die Belastungsflächen gezeichnet.

Es möge noch gezeigt werden, wie sich der involutorische Kreis zur Herleitung einer Formel für E_0 verwerten läfst. Wir bestimmen mit Hilfe des Punktes J (Fig. 41) die *Hauptflächen* (1) und (2), das sind die sich rechtwinklig schneidenden konjugierten Richtungen. Die ihnen entsprechende Kreissehne geht durch den Mittelpunkt M. Nun zerlegen wir das Gewicht G eines von der lotrechten Fläche AB_0 und der zur Hauptfläche (2) parallelen Fläche AB_2 begrenzten Erdprismas nach den Richtungen von



$-(90+\alpha+\alpha')$
$-90-\alpha-\alpha'$
$0-(\alpha+\alpha')$

Fig. 41.

E_0 und E_2. Mit den Bezeichnungen $\overline{AB_0} = s_0$ und $\overline{AB_2} = s_2$ erhalten wir

$$E_0 = \frac{G \cos \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')},$$

$$G = \frac{1}{2} \gamma' s_0 s_2 \sin \alpha',$$

$$s_2 = \frac{s_0 \cos \alpha}{\cos(\alpha + \alpha')},$$

und schliefslich

$$45)\qquad E_0 = \frac{1}{2}\,\gamma'\, s_0^2\, \frac{\cos\alpha \sin 2\,\alpha'}{\sin 2\,(\alpha + \alpha')}.$$

Der Winkel α' ist durch die Gleichung bestimmt:

$$46)\qquad \sin(2\,\alpha' + \alpha) = \frac{\sin\alpha}{\sin\rho}.$$

Daſs die Formeln 43) und 45) ein und denselben Wert E_0 liefern, läſst sich durch eine Umformung beweisen, deren Ausführung wir dem Leser überlassen.

Für den Hauptdruck E_2 erhält man

$$47)\qquad E_2 = E_0\,\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha'}.$$

Im Falle $\alpha = 0$ ergibt sich

$$48)\qquad E_0 = E_2 = \frac{1}{2}\,\gamma'\, h^2\, \mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right).$$

13. Der Spannungskreis von *Culmann* und *Rankine*. Wir beziehen den Erdkörper auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz x, y

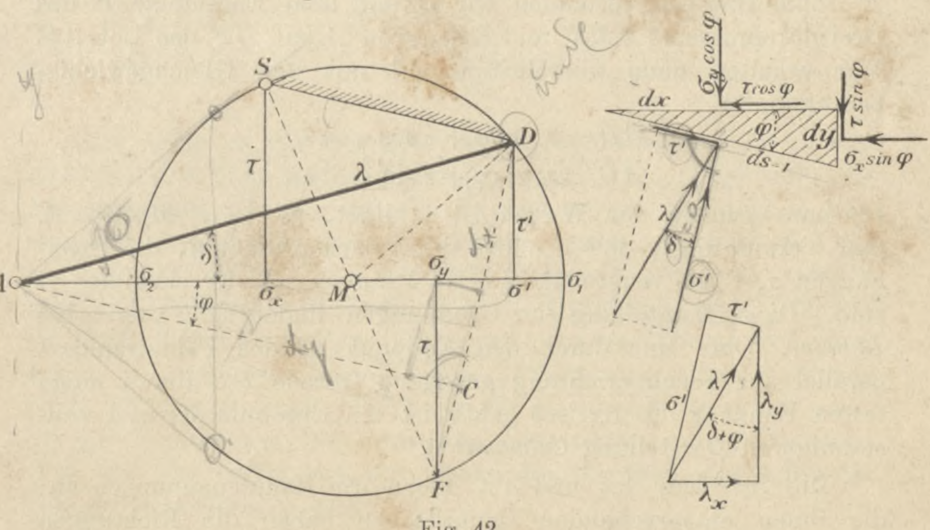


Fig. 42.

und schneiden an irgend einer Stelle ein dreiseitiges Prisma von der Länge 1 und den Querschnittsabmessungen dx, dy, ds heraus. Die Normalspannungen in den Seitenflächen dy und dx bezeichnen wir mit σ_x und σ_y, die gleichgroſsen Schubspannungen mit τ. Die Spannung in der Fläche ds sei λ und sei zerlegt in die Normalspannung σ' und die Schubspannung τ'. Die Spannungen σ_x, σ_y und τ seien gegeben; es sollen die Spannungen λ für alle möglichen Lagen der Fläche ds dargestellt werden.

Bezeichnet man den Winkel zwischen ds und dx mit φ und setzt man $ds = 1$, so wirken auf die Fläche dy die Kräfte $\sigma_x \sin\varphi$

und $\tau \sin \varphi$, auf die Fläche dx die Kräfte $\sigma_y \cos \varphi$ und $\tau \cos \varphi$ und auf die Fläche ds die Kraft λ. Wird λ nach den Richtungen x und y in die Seitenkräfte λ_x und λ_y zerlegt, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen:

$$49) \quad \begin{cases} \lambda_x = \sigma_x \sin \varphi + \tau \cos \varphi \\ \lambda_y = \sigma_y \cos \varphi + \tau \sin \varphi. \end{cases}$$

Auf einer Parallelen zur x-Achse tragen wir die Strecken auf:

$$\overline{A\sigma_x} = \sigma_x \text{ und } \overline{A\sigma_y} = \sigma_y,$$

errichten sodann im Punkte σ_x auf der Geraden $A\sigma_x$ ein Lot von der Länge

$$\overline{\sigma_x S} = \tau,$$

und legen durch den Punkt S einen Kreis, dessen Mittelpunkt M die Strecke $\sigma_x \sigma_y$ halbiert. Ziehen wir nun durch S eine Parallele zur Fläche ds bis zu ihrem Schnittpunkte D mit dem Kreise, so gibt die Strecke AD die Gröfse der Spannung λ an.

Zum Beweise verbinden wir D mit dem Endpunkte F des Kreisdurchmessers SMF und fällen von A auf DF das Lot AC. Wir erhalten dann übereinstimmend mit den Gleichgewichtsbedingungen:

$$\overline{CD} = \sigma_x \sin \varphi + \tau \cos \varphi = \lambda_x$$
$$\overline{AC} = \sigma_y \cos \varphi + \tau \sin \varphi = \lambda_y.$$

Da nun λ_y mit λ den Winkel $\delta + \varphi$ bildet, so ist $\angle MAD = \delta$, und hieraus folgt, dafs λ und δ die Polarkoordinaten, die Spannungen σ', τ' die rechtwinkligen Koordinaten des Kreispunktes D sind. Diese Darstellung der Spannungen findet sich zuerst bei *Rankine*. Dafs eine durch den Endpunkt D des Fahrstrahles λ parallel zur Flächenrichtung gezogene Gerade DS durch einen festen Punkt S des Kreises geht, ist ein Ergebnis der viel vollständigeren Darstellung *Culmanns* *).

Die Strecken $A\sigma_1$ und $A\sigma_2$ geben die Hauptspannungen an; die ihnen entsprechenden Hauptflächen haben die Richtungen $S\sigma_1$ und $S\sigma_2$ (Fig. 43). Die beiden Hauptflächen bilden ein Paar konjugierter Richtungen. Wählt man also den Punkt S zum Mittelpunkte der Involution der konjugierten Kräfte- und Flächenrichtungen, so liegt das Involutionszentrum J in der Sehne $\sigma_1 \sigma_2$; sein Abstand JM vom Kreismittelpunkte verhält sich zum Kreishalbmesser wie $\sin \delta_{max} : 1$. Daraus folgt, dafs J in der Verbindungslinie der Berührungspunkte T_1, T_2 der durch den Punkt A gehenden Kreistangenten liegt. Die konjugierten Richtungen ST_1 und ST_2 bilden miteinander den Winkel $90^0 - \delta_{max}$. Die Kreis-

*) Wir verweisen auf die literarische Anmerkung in Nr. 15.

sehne DJD' bestimmt die Richtung $D'S$ der zur Fläche SD gehörigen Druckrichtung λ.

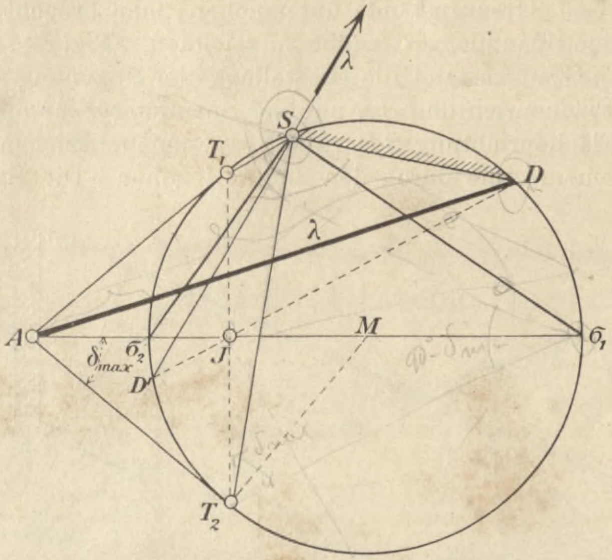


Fig. 43.

Für einen im unteren oder oberen Grenzzustande des Gleichgewichts sich befindenden Erdkörper ist $\delta_{max} = \rho$. Tritt noch die Einschränkung hinzu, dafs der Erdkörper von unendlicher Ausdehnung ist und eine ebene Oberfläche besitzt, so läfst sich der Spannungskreis für jeden der beiden Grenzzustände des Gleichgewichts eindeutig bestimmen, weil die Druckspannung λ_g für ein zur Geländefläche paralleles Flächenelement nach Nr. 11 von vornherein bekannt ist. Die auf dieses Flächenelement ds wirkende Kraft ist nämlich (nach Gleichung 42) gleich dem Gewichte $\gamma h ds$ der auf ds ruhenden, von lotrechten Schnitten begrenzten Erdsäule (Fig. 44). Es ergibt sich also, wenn die Oberfläche zunächst unbelastet angenommen wird,

$$50) \qquad \lambda_g = \gamma h.$$

Der Winkel δ, den λ_g mit der Normale von ds bildet, ist gleich dem Neigungswinkel α der Oberfläche. Daraus folgt: zieht man durch den Punkt A unter dem Winkel α gegen die wagerecht angenommene x-Achse die Sekante ASS', so kann man den Strahl AS' oder den Strahl AS als Spannung in der zur Oberfläche parallelen Fläche ds auffassen. Im ersten Falle macht man $AS' = \gamma h$, im zweiten Falle $AS = \gamma h$. Der erste Fall entspricht dem *unteren*, der zweite dem *oberen* Grenzzustande des Gleichgewichts. Das eine Mal ist S der Mittelpunkt der Involution der konjugierten Kräfte- und Flächenrichtungen, das zweite Mal ist dies der Punkt S'. Mit Hilfe eines und desselben Kreises kann man also *beide* Grenzzustände untersuchen; man braucht nur zwei verschiedene Spannungsmafsstäbe zu zeichnen. Figur 44 zeigt für den *unteren* Grenzzustand die Darstellung der Spannung λ_0 für die lotrechte Flächenrichtung SL und der Spannung λ für eine zu AB parallele Flächenrichtung SD. Die Spannungen beziehen sich auf Flächenelemente, die durch den Punkt A gehen. Die Belastungs-

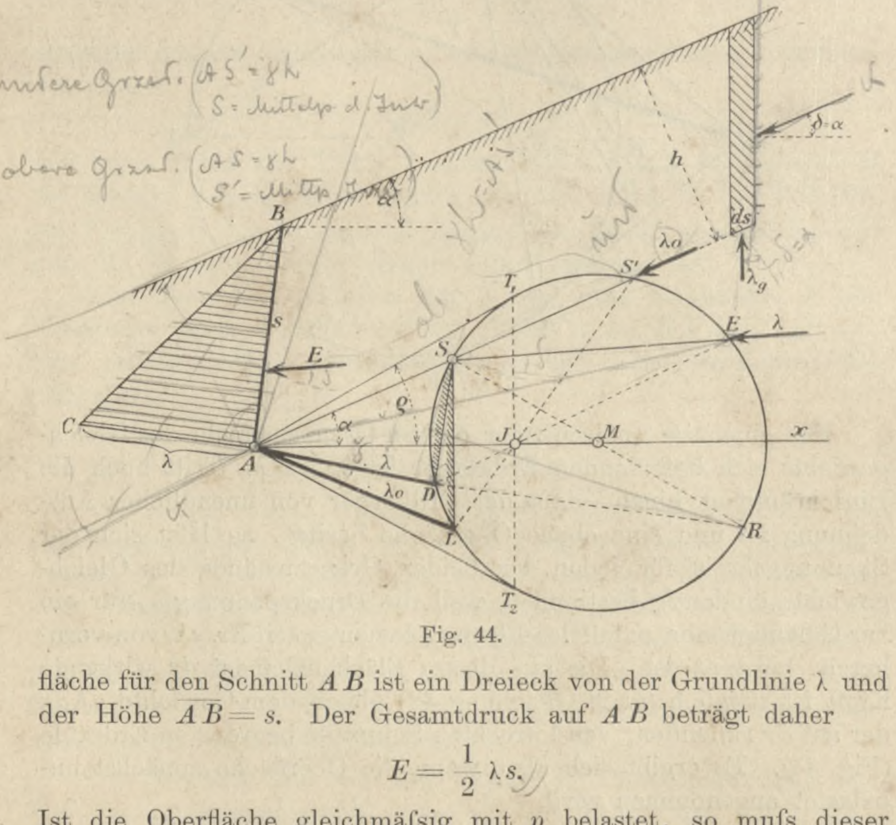


Fig. 44.

fläche für den Schnitt AB ist ein Dreieck von der Grundlinie λ und der Höhe $\overline{AB} = s$. Der Gesamtdruck auf AB beträgt daher

$$E = \frac{1}{2}\lambda s.$$

Ist die Oberfläche gleichmäfsig mit p belastet, so mufs dieser Wert noch mit

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = 1 + \frac{2p}{\gamma h}$$

multipliziert werden.

Schneidet die Gerade SD den Kreis unter einem sehr flachen Winkel — was eintritt, wenn D sehr nahe bei S liegt, — so trage man, zur Vermeidung von Ungenauigkeiten, den Durchmesser SMR ein und bestimme D mit Hilfe von $RD \perp AB$. Das ganze Verfahren dürfte übrigens kaum zu empfehlen sein; es ist weniger übersichtlich und auch weniger einfach als das in den Figuren 38, 39 und 40 angegebene. Hingegen darf der folgende, in Fig. 45 beschriebene Weg als ein brauchbares Seitenstück zu Fig. 40 bezeichnet werden.

Der Spannungskreis wird in Fig. 45 nur zur Ermittelung der zu der lotrechten Schnittfläche $A' B_0$ gehörigen Strecke b_0 benutzt. Die übrigen Werte b_1, b_2, $b_3 \ldots$ werden genau wie in Fig. 40 mit Hilfe der Strecken a_1, a_2, $a_3 \ldots$ bestimmt. Die Richtungen

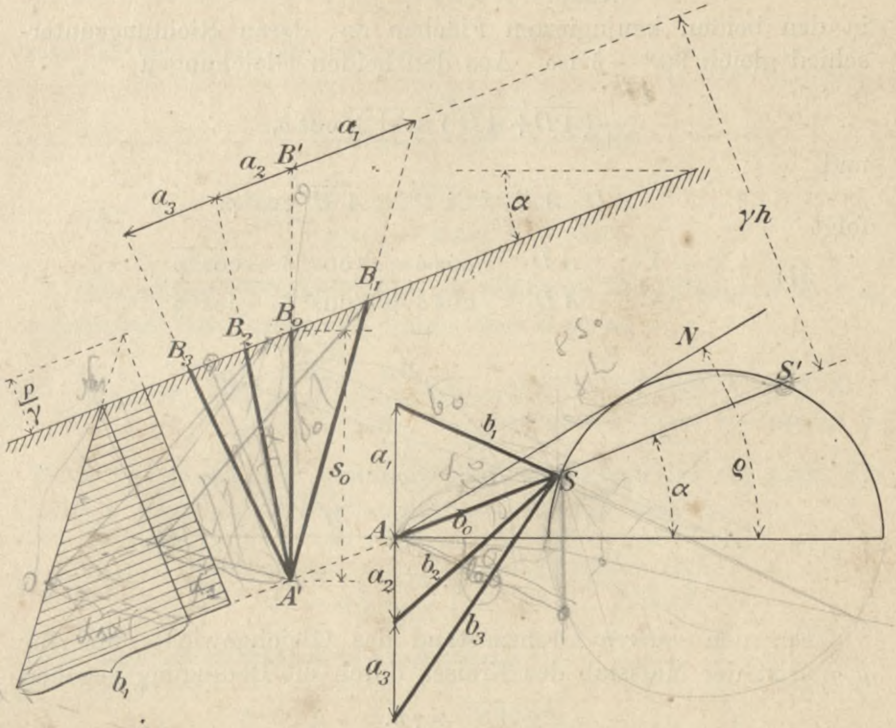


Fig. 45.

der Strahlen b_1, $b_2 \ldots$ geben auch die Richtungen der auf die Flächen $A' B_1$, $A' B_2 \ldots$ wirkenden Drucke an. Zur Feststellung des Mafsstabes des Spannungskreises ist zu beachten, dafs zwischen der Spannung λ_0 und der Strecke b_0 die Beziehung

$$E_0 = \frac{1}{2} \lambda_0 s_0 = \frac{1}{2} b_0 h$$

besteht, wo $s_0 = \overline{A' B_0}$ ist. Daraus folgt

$$b_0 = \lambda_0 \frac{s_0}{h},$$

und es mufs daher für den *unteren* Grenzzustand die Strecke $\overline{A S'} = \gamma s_0$ (anstatt γh) gemacht werden.

Für den *oberen* Grenzzustand mufs $\overline{A S} = \gamma s_0$ sein. Es ergibt sich dann $b_0 = \overline{AS'}$, und der Punkt S' wird der Mittelpunkt des Büschels der Strahlen b.

14. Die *Rankine*schen Formeln. Trifft eine vom Punkte A aus unter irgend einem Winkel δ gegen die Wagerechte gezogene Gerade den Spannungskreis in den Punkten D und D' (Fig. 46), so gibt der Bruch $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AD'}}$ das Verhältnis der Spannungen λ und λ' in den beiden konjugierten Flächen an, deren Richtungsunterschied gleich $90^0 - \delta$ ist. Aus den beiden Gleichungen

$$\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AD'}) = \overline{AM}\cos\delta,$$

und

$$\overline{AD}\cdot\overline{AD'} = \overline{AT}^2 = \overline{AM}^2\cos^2\rho,$$

folgt

$$51)\qquad \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AD'}} = \frac{\cos\delta - \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\rho}}{\cos\delta + \sqrt{\cos^2\delta - \cos^2\rho}}.$$

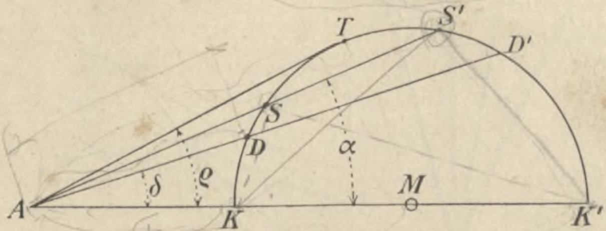


Fig. 46.

Für den *unteren* Grenzzustand des Gleichgewichts und für $p = 0$ ist der Mafsstab des Kreises durch die Bedingung gegeben

$$\overline{AS'} = \gamma h.$$

Die Druckspannung im lotrechten Flächenteilchen ist also

$$52)\qquad \lambda_0 = \gamma h\frac{\overline{AS}}{\overline{AS'}} = \gamma h\frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}.$$

Für den *oberen* Grenzzustand mufs

$$\overline{AS} = \gamma h$$

gemacht werden. Es entsteht dann

$$53)\qquad \lambda_0 = \gamma h\frac{\overline{AS'}}{\overline{AS}} = \gamma h\frac{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}.$$

Das Verhältnis der *Hauptspannungen* $\lambda_2 = \sigma_2$ und $\lambda_1 = \sigma_1$ ist

$$54)\qquad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AK'}} = \frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}.$$

Die Werte der Hauptspannungen sind für den *unteren* Grenzzustand

$$55)\qquad \sigma_1 = \frac{\gamma\, h\,(1 + \sin\rho)}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}},$$

$$56)\qquad \sigma_2 = \frac{\gamma\, h\,(1 - \sin\rho)}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}},$$

und für den *oberen* Grenzzustand

$$57)\qquad \sigma_1 = \frac{\gamma\, h\,(1 + \sin\rho)}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}},$$

$$58)\qquad \sigma_2 = \frac{\gamma\, h\,(1 - \sin\rho)}{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}.$$

Der *untere* Grenzwert des auf eine lotrechte Fläche $\overline{AB_0} = s_0$ wirkenden Gesamtdruckes nimmt den Wert an

$$59)\qquad E_0 = \frac{1}{2}\gamma\,\lambda_0\, s_0 = \frac{1}{2}\gamma\, s_0^2 \cos\alpha\,\frac{\cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}.$$

Diese Gleichung geht, wenn Zähler und Nenner des Bruches mit $\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}$ multipliziert werden, über in

$$E_0 = \frac{\gamma\, s_0^2}{2\cos\alpha}\left(\frac{\cos\rho\cos\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\rho}}\right)^2$$

und nach einer einfachen Umformung in

$$E_0 = \frac{\gamma\, s_0^2}{2\cos\alpha}\left(\frac{\cos\rho}{1 - \sec\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\rho)\sin(\alpha-\rho)}}\right)^2.$$

Das ist derselbe Wert, der sich auf Seite 37 aus der im § 1 mittels des *Coulomb*schen Prinzips entwickelten allgemeinen Formel ergab.

15. Literarische Anmerkung. Den Hinweis auf *Rankine* und *Culmann* (S. 44) ergänzen wir durch die folgende Mitteilung. In der Abhandlung: *On the stability of loose earth*, erschienen in den Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1857, Vol. 147, Part. I, hat *Rankine* die neuere Theorie des Erddruckes vorwiegend analytisch entwickelt, aber auch (auf S. 11 in Fig. 1) die folgende graphische Darstellung der Spannungen λ angegeben.

Im Punkte A seien die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 bekannt.

Gesucht sei die Spannung λ in einer Fläche AB (Fig. 47), deren Normale AN mit der Richtung AA' der Hauptspannung σ_1 den Winkel φ' bildet. *Rankine* trägt auf der Normale die Strecke $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ auf, bestimmt auf AA' den Punkt C so, dafs $\overline{CM} = \overline{AM}$ ist und macht $\overline{MD} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$. Die Strecke AD

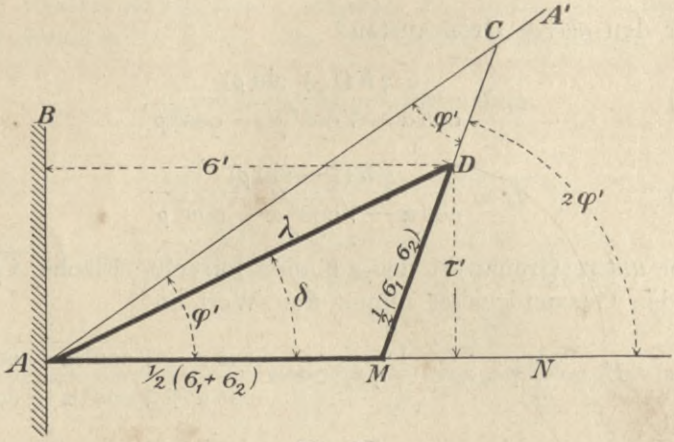


Fig. 47.

gibt dann die Gröfse und Richtung der Spannung λ an. Der Winkel DAM ist also gleich δ. Zum Beweise benutzt *Rankine* die bekannten Gleichungen

$$60)\quad \begin{cases} \sigma' = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\varphi' \\ \tau' = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\varphi'\,{}^{*}). \end{cases}$$

Wiederholt man dieses Verfahren für alle Flächenrichtungen und trägt man die Winkel δ an ein und dieselbe Gerade AN an, so beschreibt der Punkt D einen Kreis vom Halbmesser $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$, und dieser Kreis stimmt mit dem in Fig. 42 auf anderem Wege entwickelten Spannungskreise überein.

Rankine hat den Schritt, die δ an eine feste Gerade anzutragen, erst in seinem Handbuche: A Manual of applied mechanics **) getan, und zwar zuerst durch Lösung der Aufgabe:

---

*) Vergl. die Anmerkung auf S. 57.

**) Die erste Auflage erschien 1858. Der Leser findet die *Rankine*schen Konstruktionen in der von *Kreuter* besorgten deutschen Übersetzung der zwölften Auflage: *Rankine*, Handbuch der Ingenieurkunst. Wien 1880.

Es sind zwei Spannungen λ_1 und λ_2 nach Gröfse und Richtung gegeben; gesucht sind die Hauptspannungen σ_1 und σ_2. *Rankine* trägt an eine beliebige Gerade AN (Fig. 48) die Winkel $D_1AN = \delta_1$ und $D_2AN = \delta_2$ an, macht $\overline{AD_1} = \lambda_1$ und $\overline{AD_2} = \lambda_2$, verbindet D_1 mit D_2 und errichtet im Halbierungspunkte E von D_1D_2 auf dieser Geraden ein Lot, welches AN im Punkte M trifft. Er findet

$$\sigma_1 = \overline{OM} + \overline{MD_1}$$

$$\sigma_2 = \overline{OM} - \overline{MD_1}.$$

Sind λ_1 und λ_2 die Spannungen in konjugierten Flächen, so ist $\delta_1 = \delta_2$; es liegen dann die drei Punkte AD_1D_2 in einer Geraden. *Rankine* benutzt nur die obere Hälfte des Kreises (Fig. 46). Für kohäsionslose Erde setzt er $\delta_{max} = \rho$ und für den Fall des unendlichen Erdkörpers mit ebener Oberfläche $\overline{AS'} = \gamma h$ oder $\overline{AS} = \gamma h$, je nachdem der untere oder der obere Grenzzustand untersucht werden soll.

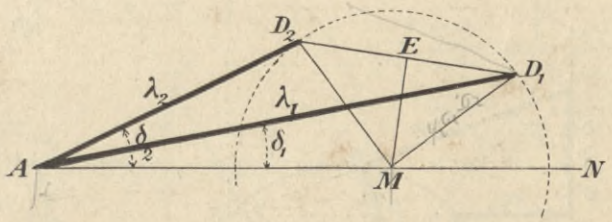


Fig. 48.

Auf einem ganz anderen Wege hat *Culmann* in seiner Graphischen Statik (1864) den Spannungskreis entwickelt. Er setzt die an dem Prisma $dx\ dy\ ds$ angreifenden Kräfte zu einem geschlossenen Polygon zusammen und nimmt hierbei $dy = 1$ an. In Fig. 49 haben wir diese Darstellung wiedergegeben; sie setzt ungleiche Vorzeichen der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 voraus. Die x-Achse ist parallel zu der Fläche, für welche $\sigma_y = 0$ ist. Aus dieser Abbildung folgt auch, dafs die durch die Endpunkte D der Fahrstrahlen λ parallel zu den Flächenrichtungen gezogenen Geraden DS durch einen festen Punkt S des Kreises gehen.

Im Jahre 1871 hat *Mohr* in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover einen *Beitrag zur Theorie des Erddruckes* veröffentlicht, in welcher er den *Culmann*schen Spannungskreis — ohne *Culmann* zu nennen — in derselben Weise entwickelt, wie dies der Begründer der graphischen Statik getan hat. Er setzt ebenfalls die an dem Prisma $dx\ dy\ ds$ angreifenden Kräfte zu einem geschlossenen Polygon zusammen und macht auch die Annahme $dy = 1$. Der feste Punkt S wird — genau wie bei *Culmann* — als Schnittpunkt der Kräfte τ und $\tau' \operatorname{cosec} \varphi$ gewonnen. Im festen Punkte F schneiden sich σ_x und $\sigma' \operatorname{cosec} \varphi$. In Fig. 50 ist diese Darstellung wiedergegeben worden. Die Hauptspannungen haben gleiche Vorzeichen. Den Maſsstab

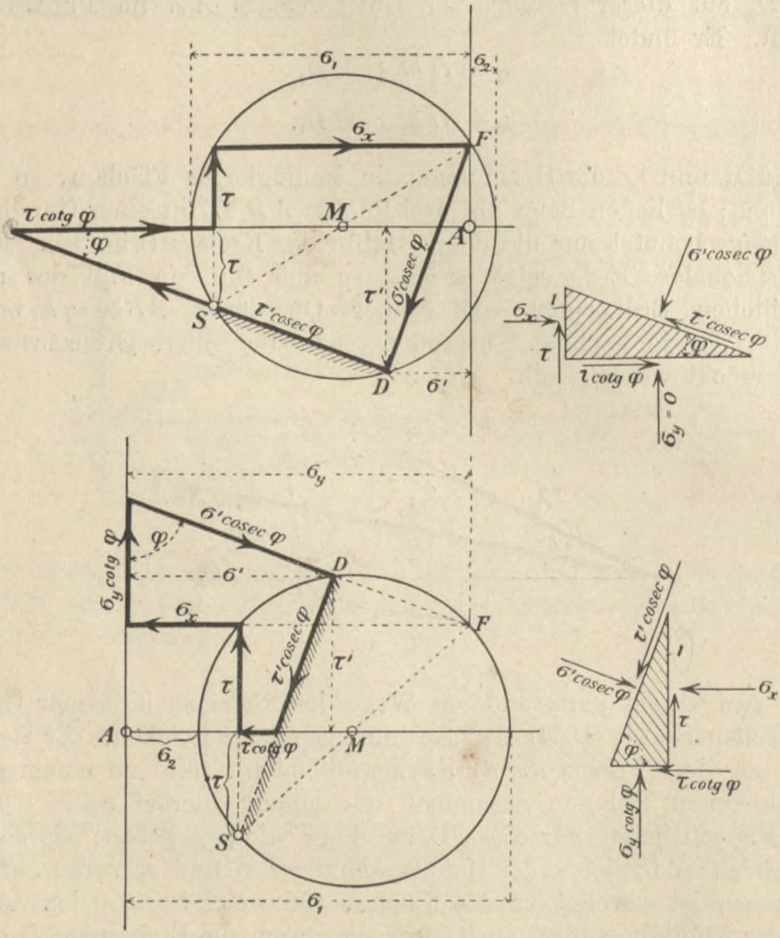


Fig. 49/50.

des Kreises bestimmt *Mohr* nach *Rankine* durch die Angaben $\delta_{max} = \rho$ und $\overline{AS'} = \gamma h$ oder $\overline{AS} = \gamma h$. Die Eigenschaft, daſs die Verbindungsgeraden konjugierter Punkte D und D' durch einen festen Punkt J gehen, beweist *Mohr*, ohne die Involution zu Hilfe zu nehmen.

Auch *Rankine* wird von *Mohr* in seiner ersten Arbeit gar nicht und auch später nur unvollständig angeführt. Noch in seinen erst vor kurzem erschienenen *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik* (1906) spricht *Mohr* von *Rankine* nur als dem *Begründer* der neueren Theorie des Erddrucks, mit dem Zusatze, er habe diese Theorie auf analytischem Wege dargestellt. Die Übergehung der *Rankine*schen Konstruktionen mufs um so mehr auffallen, als *Mohr* in seinem neuen Buche zur Entwicklung des Spannungskreises nicht mehr das *Culmann*sche Kräftepolygon, sondern die Gleichungen 60) benutzt, mithin gerade den Weg einschlägt, den *Rankine* im Jahre 1857 angegeben hat*).

16. Der Spannungskreis von *Weyrauch*. Eine eigenartige Darstellung der Spannungen hat *Weyrauch* (1880) angegeben. Auf einer Parallelen zur x-Achse werden die Strecken $\overline{AX} = \sigma_x$ und $\overline{XY} = \sigma_y$ aufgetragen (Fig. 51). Im Punkte X wird auf der Ge-

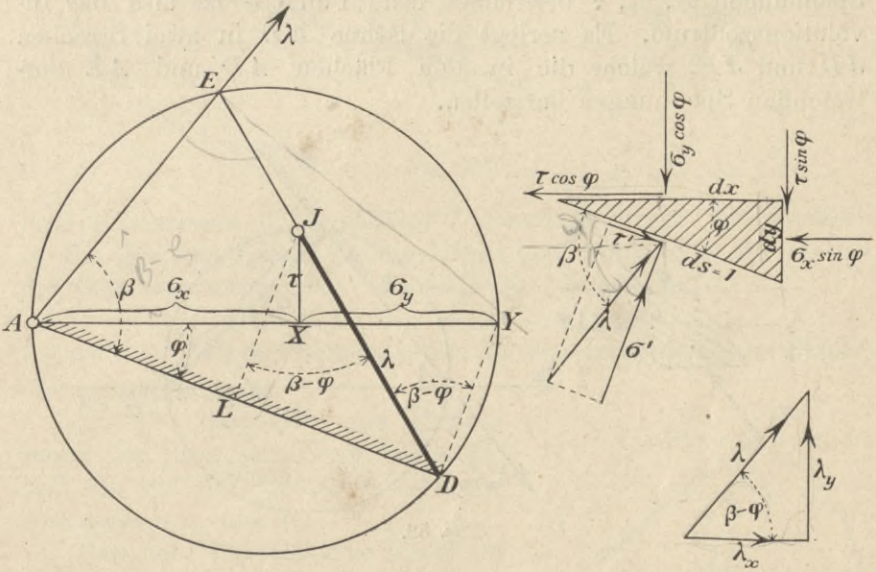


Fig. 51.

raden AY ein Lot von der Länge $\overline{XJ} = \tau$ errichtet. Hierauf wird ein Kreis gezeichnet, dessen Durchmesser die Strecke $\overline{AY} = \sigma_x + \sigma_y$ ist. Zieht man nun von A aus zu einer beliebigen Flächenrichtung ds eine Parallele, welche den Kreis in D trifft, so gibt die Strecke JD die Gröfse der in der Fläche ds

*) In seinem neuen Buche weist *Mohr* auf Seite 219 auf *Culmann* mit der Bemerkung hin, es habe dieser den Spannungskreis auf anderem Wege entwickelt wie er. Das gilt aber nur für die zweite, den *Rankine*schen Weg einschlagende Herleitung *Mohrs*, nicht aber für seine erste, mit der *Culmann*schen Entwicklung übereinstimmende Darstellung.

herrschenden Spannung λ an. Zum Beweise fälle man von J das Lot JL auf AD. Man erhält dann

$$\overline{JL} = \sigma_x \sin\varphi + \tau \cos\varphi = \lambda_x$$

$$\overline{LD} = \sigma_y \cos\varphi + \tau \sin\varphi = \lambda_y,$$

das sind die durch die Gleichgewichtsbedingungen 49) vorgeschriebenen Seitenkräfte der Spannkraft λ *).

Verlängert man nun die Gerade DJ, bis sie den Kreis in E trifft, und bezeichnet den Neigungswinkel der Spannung λ gegen die Fläche ds mit β, so ist $\angle EAY = \angle EDY$ gleich dem Winkel $\beta - \varphi$, den λ mit λ_x bildet. Daraus folgt aber, dafs $\angle EAD = \beta$ ist, dafs also die Gerade AE die Richtung der zur Flächenrichtung AD gehörigen Spannung λ angibt. Der durch die gegebenen Spannungen σ_x, σ_y, τ bestimmte feste Punkt J ist also das Involutionszentrum. Es zerlegt die Sehne ED in zwei Strecken JD und JE, welche die in den Flächen AD und AE auftretenden Spannungen darstellen.

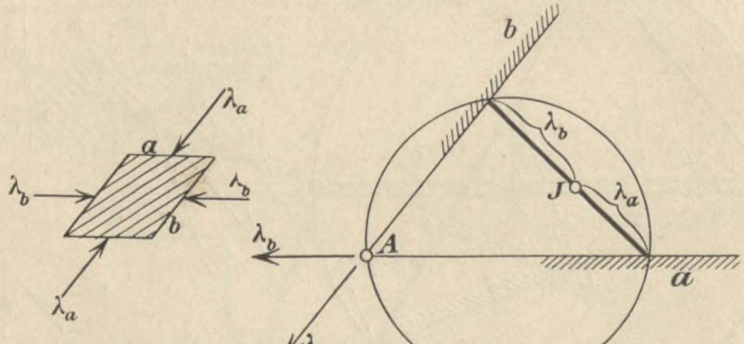


Fig. 52.

In Fig. 52 haben wir dieses einfache Ergebnis noch einmal unter Weglassung aller Hilfslinien vorgeführt. Die beiden konjugierten Flächen sind mit a und b bezeichnet worden, die zugehörigen Spannungen mit λ_a und λ_b.

---

*) *Weyrauch* entwickelt seinen Kreis in der Weise, dafs er die Spannungen σ' und τ' auf die Form

$$\sigma' = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\varphi - \tau \sin 2\varphi$$

$$-\tau' = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi - \tau\cos 2\varphi$$

bringt und die einzelnen Glieder konstruiert.

Fig. 53 zeigt die Ermittelung der Gröfse der Spannungen λ' und λ'' und deren Seitenwerte σ', τ' und σ'', τ' für zwei sich rechtwinklig schneidende Flächen AD' und AD''. Das vom Punkte J auf den

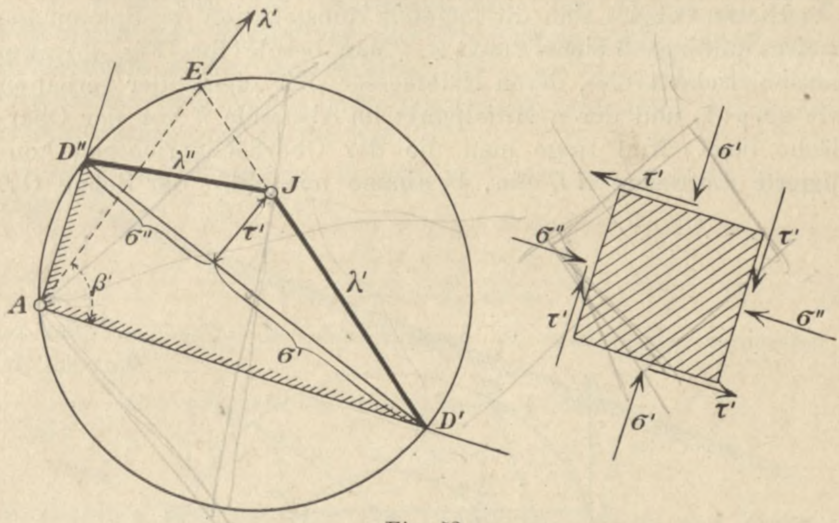


Fig. 53.

Kreisdurchmesser $D'D''$ gefällte Lot zerlegt diesen Durchmesser in die Strecken σ' und σ''; die Länge des Lotes gibt die Gröfse der Schubspannung τ' an. Es folgt dies daraus, dafs

$$\angle ED'D'' = \angle EAD'' = 90^0 - \beta'$$

ist, wo β' den Winkel bedeutet, den die Spannung λ' mit der Fläche AD' einschliefst.

Fig. 54 beschreibt die Bestimmung der Lage der Hauptflächen (1) und (2) und der Gröfse der Hauptspannungen σ_1 und σ_2.

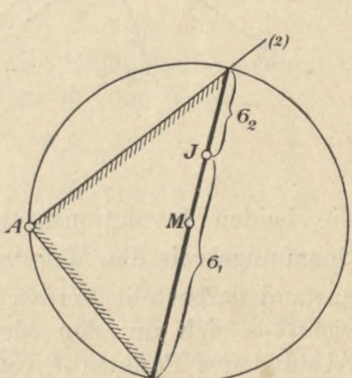


Fig. 54.

Soll der *Weyrauch*sche Kreis zur Darstellung der Spannungen in einem kohäsionslosen Erdkörper, für den ein ebener Spannungszustand besteht, benutzt werden, so mufs das Involutionszentrum (nach S. 29) auf einem Kreise liegen, der denselben Mittelpunkt besitzt wie der Spannungskreis und dessen Halbmesser sich zu dem Halbmesser des Spannungskreises verhält wie $\sin \rho : 1$. Handelt es sich insbesondere um den unendlichen Erdkörper mit ebener Oberfläche, so treten noch die Bedingungen hinzu, dafs erstens die lotrechte Richtung und die Oberflächenrichtung einander konjugiert sind, und dafs zweitens die Spannung in einer zur Oberfläche parallelen Fläche im Abstande h von der Oberfläche den Wert γh besitzt.

Hieraus ergibt sich die folgende Konstruktion des Spannungskreises für irgend einen Punkt A. Man beschreibe (Fig. 55) zwei konzentrische Kreise, deren Halbmesser sich zueinander verhalten wie $\sin \rho : 1$, und deren Mittelpunkt im Abstande h von der Oberfläche liegt. Nun trage man die der Oberflächenrichtung konjugierte Lotrechte AL ein, bestimme mit Hilfe der Sehne OL

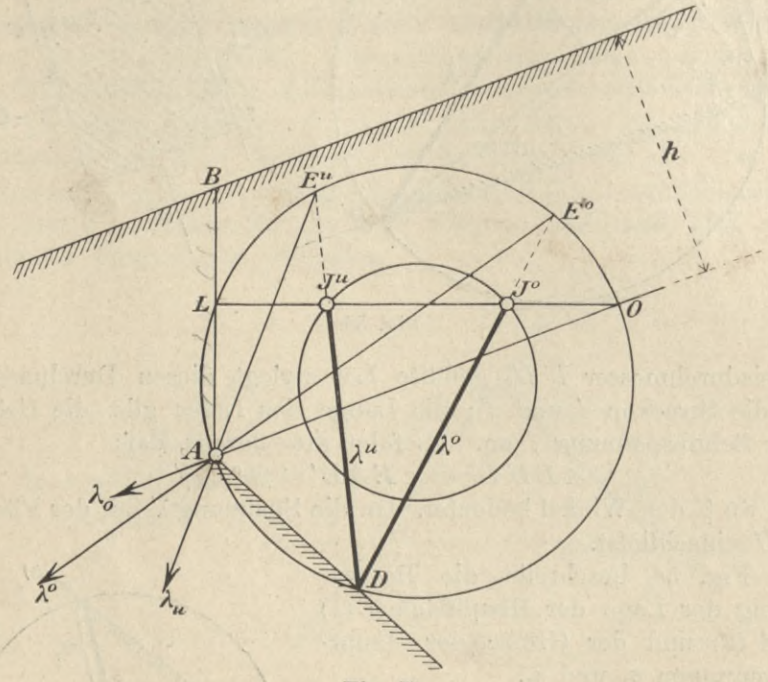


Fig. 55.

die beiden Involutionszentren J^u und J^o und wähle für den Spannungskreis den Mafsstab $\overline{J^u O} = \gamma h$, sobald der *untere* Grenzzustand dargestellt werden soll, hingegen den Mafsstab $\overline{J^o O} = \gamma h$, wenn es sich um den *oberen* Grenzzustand handelt. Denn der Abstand des Punktes J vom Punkte O gibt die Spannung in der zur Oberfläche parallelen Fläche $A\,O$ an, und diese Spannung ist immer gleich γh. Für die lotrechte Fläche erhält man jetzt im Punkte A die Spannungen

$$\lambda_0{}^u = \overline{L J^u}, \quad \lambda_0{}^o = \overline{L J^o}$$

und für die Fläche AD:

$$\lambda^u = \overline{D J^u}, \quad \lambda^o = \overline{D J^o}.$$

Die Richtungen der Spannungen λ'' und λ^0 werden durch die Geraden $E''A$ und E^0A bestimmt.

17. Benutzung der Spannungskreise von *Culmann* und *Weyrauch* zur Darstellung der Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte. Es möge hier eine wichtige kurze Betrachtung eingeschaltet werden, die allerdings nichts mit der Erddrucktheorie zu tun hat.

Aus dem Kräfteplane in Fig. 42 findet man für die Spannungen σ' und τ' die Werte

$$\sigma' = \lambda_x \sin\varphi + \lambda_y \cos\varphi$$
$$\tau' = \lambda_x \cos\varphi - \lambda_y \sin\varphi$$

und mit Beachtung der Gleichungen 49) nach einer einfachen Umformung

$$61)\quad \begin{cases} \sigma' = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau' = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\varphi + \tau\cos 2\varphi \text{ *)}. \end{cases}$$

Nun bestehen aber zwischen den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten ebener Querschnitte ganz ähnliche Beziehungen wie zwischen den σ und τ. Kennt man die auf das rechtwinklige Achsenkreuz xy bezogenen Trägheitsmomente

$$J_x = \int y^2\, dF, \quad J_y = \int x^2\, dF$$

und das Zentrifugalmoment

$$J_{xy} = \int xy\, dF,$$

so findet man für das durch denselben Koordinatenanfangspunkt gelegte rechtwinklige Achsenkreuz $\xi\eta$ (Fig. 56) die Werte

$$62)\quad \begin{cases} J_\xi = J_y \sin^2\varphi + J_x \cos^2\varphi + J_{xy}\sin 2\varphi \\ J_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(J_y - J_x)\sin 2\varphi + J_{xy}\cos 2\varphi. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form wie die Gleichungen 61). Aus dem in Fig. 42 dargestellten *Culmann*schen *Spannungskreise* ergibt sich daher ohne weiteres der in Fig. 56 abgebildete *Trägheitskreis*. Er löst die Aufgabe, aus den gegebenen drei

---

*) Fallen die Achsen x und y mit den Hauptachsen (1) und (2) zusammen, ist also $\tau = 0$, so gehen die Formeln 61) über in

$$\sigma' = \sigma_1 \sin^2\varphi' + \sigma_2\cos^2\varphi' = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi'$$
$$\tau' = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\sin 2\varphi'.$$

Dies sind die auf S. 50 angeführten Gleichungen 60).

Querschnittsmomenten J_x, J_y, J_{xy} die Querschnittsmomente J für alle durch S gelegten rechtwinkligen Achsenkreuze zeichnerisch zu ermitteln.

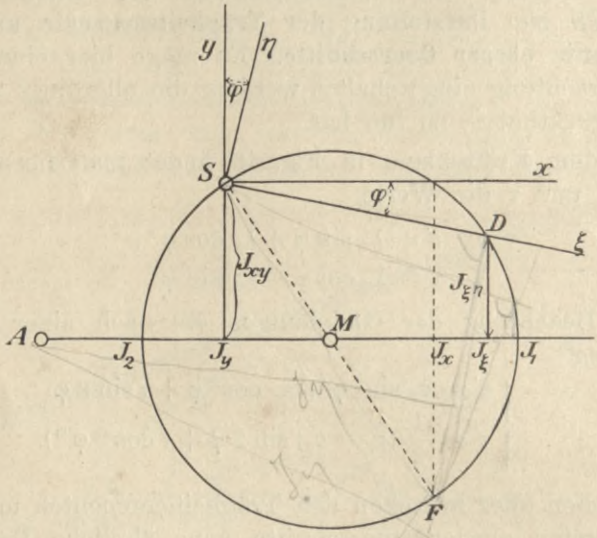


Fig. 56.

Ganz in derselben Weise läfst sich dem *Weyrauch*schen *Spannungskreis* ohne weiteres ein *Weyrauch*scher *Trägheitskreis* an die Seite stellen. Fig. 57 zeigt die Bestimmung des Kreises und

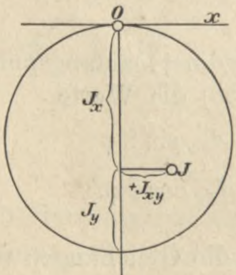


Fig. 57.

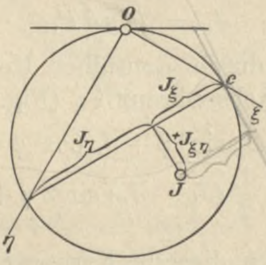


Fig. 58.

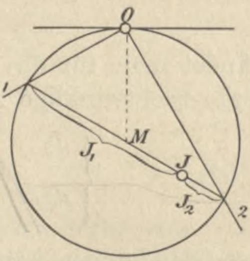


Fig. 59.

des Involutionszentrums J mit Hilfe von drei gegebenen Querschnittsmomenten J_x, J_y, J_{xy}. Fig. 58 beschreibt die Bestimmung von J_ξ, J_η, $J_{\xi\eta}$ für das Achsenkreuz $\xi\,\eta$. In Fig. 59 sind die Richtungen der Hauptachsen und die Hauptträgheitsmomente ermittelt worden. Wir haben diese drei Vorgänge getrennt dargestellt, um möglichst einfache Figuren zu erzielen, die sich auf den ersten Blick übersehen lassen.

Für ein schiefwinkliges Achsenkreuz $x\eta$ erhält man nach Fig. 60 das Zentrifugalmoment

$$J_{x\eta} = \int y\eta \, dF = \int y\,(x \cos\alpha - y \sin\alpha)\, dF,$$

$$J_{x\eta} = J_{xy} \cos\alpha - J_x \sin\alpha$$

und erkennt, dafs der Wert $J_{x\eta}$ durch die Länge des vom Punkte J auf die den Achsen x, η entsprechende Kreissehne CD bestimmt

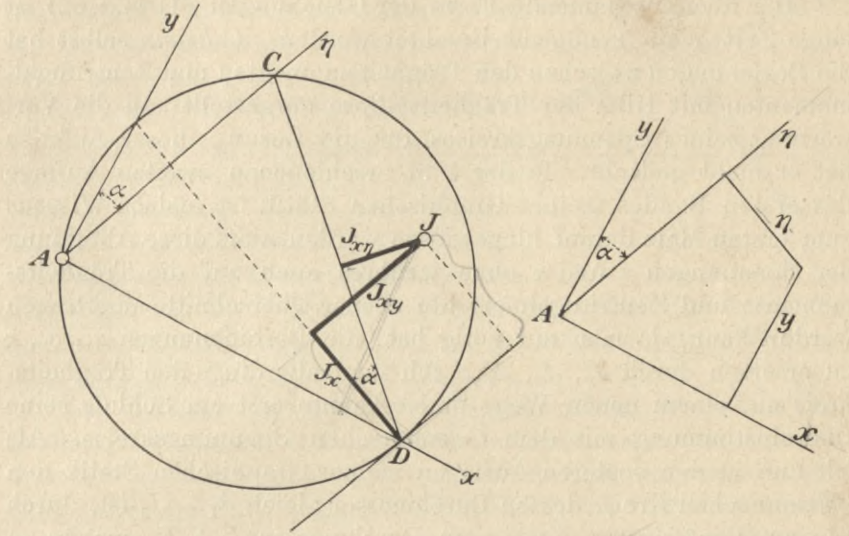


Fig. 60.

wird. Erwägt man noch, dafs das Trägheitsmoment J_ξ in Fig. 58 auch gleich der Länge des Lotes ist, das vom Punkte J auf die in C an den Kreis gelegte Tangente gefällt wird, so gelangt man zu der in Fig. 61 gezeigten Darstellung der Trägheitsmomente und des Zentrifugalmomentes für das schiefwinklige Achsenkreuz $x\eta$.

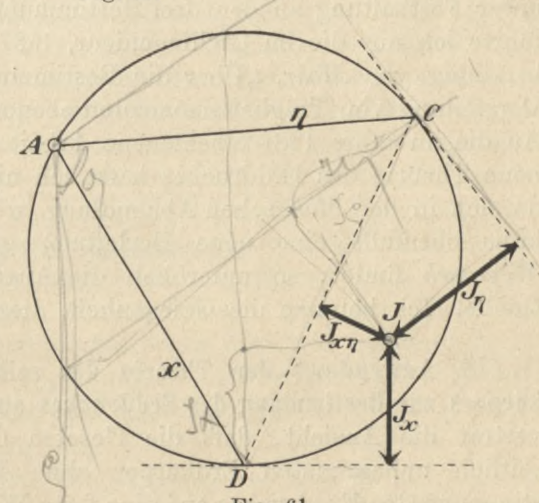


Fig. 61.

Zur Bestimmung des *Weyrauch* schen Trägheitskreises kann man an Stelle der Werte J_x, J_y, J_{xy} auch drei andere Querschnittsmomente benutzen, z. B. drei Trägheitsmomente, oder zwei Zentrifugalmomente und ein Trägheitsmoment, oder drei Zentrifugalmomente. In allen dem Verfasser in seiner Praxis vorgekommenen Fällen — und ihre Anzahl ist ziemlich grofs — haben sich jedoch die Bestimmungsstücke J_x, J_y, J_{xy} als die zweckmäfsigsten erwiesen. Die in den Figuren 57—59 angegebenen Darstellungen haben auch die weiteste Verbreitung gefunden.

Die übereinstimmende Form der Gleichungen 61) und 62) ist lange Zeit nicht genügend beachtet worden. *Culmann* selbst hat die Beziehungen zwischen den Trägheitsmomenten und Zentrifugalmomenten mit Hilfe der Trägheitsellipse dargestellt; an die Verwertung seines Spannungskreises für die Lösung dieser Aufgabe hat er nicht gedacht. In der 1887 erschienenen zweiten Auflage des ersten Bandes meiner Graphischen Statik ist meines Wissens zum ersten Male darauf hingewiesen worden, dafs diese Abbildung der Spannungen σ und τ ohne weiteres auch auf die Trägheitsmomente und Zentrifugalmomente ebener Querschnitte übertragen werden kann, da man nur nötig hat, die Bezeichnungen σ_x, σ_y, τ zu ersetzen durch J_y, J_x, J_{xy}. Ich fand allerdings den Trägheitskreis auf einem neuen Wege und erkannte erst am Schlufs seine Übereinstimmung mit dem *Culmann*schen Spannungskreise. Als ich nun in den späteren Auflagen meiner Graphischen Statik den *Culmann*schen Kreis, dessen Durchmesser gleich $J_1 - J_2$ ist, durch den zweckmäfsigeren Kreis vom Durchmesser $J_1 + J_2$ ersetzte — unter Festhaltung an den drei Bestimmungsstücken J_x, J_y, J_{xy} — führte ich nur die im Civilingenieur, 1887, S. 43 erschienene Abhandlung von *Mohr*, „Über die Bestimmung und die graphische Darstellung von Trägheitsmomenten ebener Flächen“ als Quelle an. An die im Jahre 1881 erschienene Arbeit von *Weyrauch* über die neue Theorie des Erddruckes hatte ich nicht mehr gedacht, und da sich in der *Mohr*schen Abhandlung, welche für den Trägheitskreis ebenfalls eine neue Herleitung gab, kein Hinweis auf *Weyrauch* findet, so unterblieb die Angabe der ursprünglichen Quelle. Ich benutze die Gelegenheit, dies nachzuholen.

18. Anwendung der Theorie des seitlich unbegrenzten Erdkörpers zur Bestimmung des Erddruckes auf feste Wände. *Rankine* vertrat die Ansicht, dafs die Gesetze der Druckverteilung im seitlich unbegrenzten Erdkörper ohne Einschränkung zur Bestimmung des Erddruckes auf eine feste Wand angewendet werden dürfen, dafs also der für eine Fläche AB gefundene Druck sich nicht ändere, wenn der eine der beiden, durch die Fläche AB getrennten Teile des Erdkörpers durch eine Stützmauer ersetzt wird. Nun führt aber die Ersetzung des linken Teiles des Erdkörpers in Fig. 62 auf eine nach vorn überhängende Wand und eine ansteigende Geländefläche, während sich im anderen Falle eine nach hinten geneigte Wand und eine fallende Geländefläche ergibt. Die *Rankine*sche Theorie würde für beide Wände denselben Druck E liefern, was offenbar unrichtig ist. Die Anwendung der Theorie des seitlich unbegrenzten Erdkörpers auf den durch eine Mauer oder ein Gewölbe gestützten Erdkörper mufs also zum mindesten gewissen Einschränkungen unterworfen werden. Über die Grenzen der Anwendung gehen die Meinungen auseinander. Nur in einem Punkte herrscht wohl jetzt Einverständnis, nämlich darüber, dafs die Anwendung dieser Theorie ausgeschlossen ist, sobald sie für den *unteren* Grenzzustand des Gleichgewichts, auf dessen Betrachtung wir uns hier beschränken, einen Winkel δ' (Fig. 1) liefert, der kleiner als Null ist.

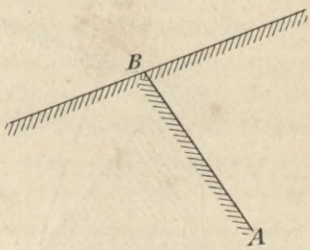


Fig. 62.

Der Verfasser hat zu der vorliegenden Frage bereits in Nr. 1 Stellung genommen und der älteren Theorie aus dem einfachen Grunde den Vorzug gegeben, weil sie die Bestimmung des Erddruckes für jeden beliebigen Winkel δ' lehrt und dem entwerfenden Ingenieur die Möglichkeit bietet, über diesen wichtigen Wert von Fall zu Fall zu entscheiden. Damit soll aber nicht gesagt werden, dafs die in Nr. 11, 12 und 14 beschriebenen Darstellungen des Erddruckes nur wissenschaftlichen und keinen praktischen Wert haben. Im Gegenteil, sie leisten auch bei der Berechnung von Stützmauern gute Dienste, weil nach den in Nr. 4 und 10 mitgeteilten Ergebnissen vergleichender Rechnungen die *Gröfse* des Erddruckes bei den hauptsächlich in Betracht kommenden Wandneigungen so wenig von dem Winkel δ' abhängig ist, dafs die einfachen, in den Figuren 40 und 45 angegebenen Verfahren auch dann mit Vorteil verwendet werden können, wenn man den Richtungswinkel δ' nicht nach der *Rankine*schen Theorie, sondern zweckmäfsiger ganz frei, unter Anpassung an die besonderen Bedingungen der zu lösenden Aufgabe zwischen den Grenzen 0 und ρ' wählt. Auch darf der Vorschlag von *Winkler* und *Engesser* als zweckmäfsig bezeichnet werden, die Richtung des Erddruckes auf eine nach vorn überhängende Wand nach der *Rankine*schen Theorie zu berechnen, sobald deren Neigungswinkel ϑ so klein ist, dafs die Wandfläche aufserhalb der beiden Gleitflächen AC_1 und AC_2 des seitlich unbegrenzten Erdkörpers liegen (Fig. 63). Es handelt sich hierbei aber nur um eine *Annahme*, die dem praktischen Gefühl zusagt und die selbstverständlich aufgegeben werden mufs, sobald sie zu einem Werte δ' führt, der gröfser als der Reibungswinkel ρ' ist.

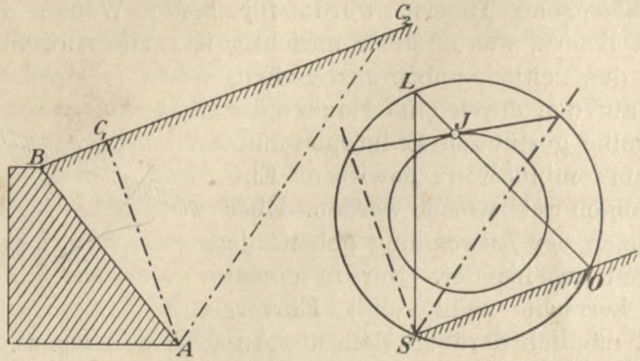


Fig. 63.

Bei Stützmauern dürfte der in Fig. 63 dargestellte Ausnahmefall selten vorkommen; er spielt aber eine Rolle bei der *Berechnung von Gewölben*, auf denen eine Erdmasse ruht. Hier wird die in Fig. 39 angegebene Darstellung des Erddruckes gute Dienste leisten. Die beliebig wählbare Richtung SC haben wir dort so angenommen, dafs die Gerade $D'D$ den inneren Kreis berührt. Dann geben die Richtungen der konjugierten Geraden SD' und SD die Richtungen der beiden Gleitflächen an, und es läfst sich nun feststellen, welche der Flächen *I, II, III* . . . . steiler sind als die Gleitflächen. Dies ist wichtig, denn wenn auch der Einflufs der Winkel δ' auf die Beanspruchung des Gewölbes nicht so grofs ist wie auf die Beanspruchung einer Stützmauer, so dürfte es doch nicht zweckmäfsig sein, für alle Gewölbeflächen die nach der *Rankine*schen Theorie sich ergebenden Erddruck*richtungen* als einwandfreie Endwerte, mit denen allein zu rechnen sei, zu betrachten. Es ist vielmehr ratsam, den Drucken auf die steileren Flächen auch noch andere, zwischen 0 und ρ' liegende Richtungen zuzuweisen und unter dieser Voraussetzung noch eine zweite Berechnung des Gewölbes vorzunehmen.

So werden sich z. B. die Flächen *I* und *VII* in Fig. 39 beim Sacken der Erde ganz ähnlich verhalten wie Stützmauern mit geringen eigenen Bewegungen. Der oberste Grenzwert des Reibungswiderstandes ist deshalb in diesen Flächen nicht ausgeschlossen. Wirkt er ungünstig, was ganz von der Form und Stärke des Gewölbes abhängt, so mufs man seinen Einflufs berücksichtigen.

Es möge hier die Bemerkung eingeschaltet werden, dafs es in der Statik der Baukonstruktionen auch noch andere Fälle gibt, in denen es ratsam ist, wegen der Unsicherheit der Grundlagen eine Reihe vergleichender Untersuchungen mit verschiedenen Annahmen bezüglich der Erfahrungswerte durchzuführen. Das klarste Bild erhält man, wenn man, soweit dies möglich ist, die im Bauwerk auftretenden Spannungen als Funktion der den gröfsten Einflufs ausübenden und auf Schätzung beruhenden Erfahrungswerte darstellt, wie dies in Fig. 31 mit der Bodenpressung σ einer Stützmauer und in des Verfassers Graphischer Statik, Bd. I, 1905, S. 100 mit der Beanspruchung σ des wagerechten Querschnitts eines Schornsteins geschehen ist. Das eine Mal ist σ als Funktion des unsicheren Wertes δ' abgebildet worden, bei der Schornsteinuntersuchung als Funktion des Winddrucks, über dessen Gröfse wir ebenfalls keine bestimmten Angaben machen können. Wer sich nur zu der *Rankine*schen Erddrucktheorie bekennt und die freie Wahl des Winkels δ' ausschliefst, ist an ein festes Schema gefesselt.

Die *Coulomb*sche Theorie besitzt aber noch heute Gegner. Erst ganz vor kurzem hat *Mohr* — in seinen *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik* — sich gegen diese Theorie unter Vorbringung einer Reihe von Gründen gewandt, deren Besprechung uns notwendig erscheint. *Mohr* behauptet*:

1. Die *Coulomb*sche Theorie liefere drei sich nicht in einem Punkte schneidende Kräfte E, G, Q, widerspreche mithin der Hauptbedingung des Gleichgewichts und sei aus diesem Grunde unbrauchbar**). Manche Ingenieure glauben, den Irrtum in der willkürlichen Annahme einer *ebenen* Gleitfläche suchen zu müssen und halten eine Berichtigung für möglich durch die Wahl einer gekrümmten Gleitfläche, die den Bedingungen der Statik entspricht. Dem sei jedoch entgegenzuhalten, dafs keine einzige der Voraussetzungen, die der *Coulomb*schen Theorie zugrunde liegen, mit der Wirklichkeit sich deckt.

2. Wenn eine Stützmauer einstürzt, so verschiebe sich nicht etwa ein zusammenhängendes Erdprisma auf einer ebenen oder auf einer gekrümmten Gleitfläche, sondern der gestützte Erdkörper falle in sich zusammen, indem die Erdteilchen in unzähligen Gleitflächen sich gegeneinander verschieben, während

*) Wir haben die Einwände numeriert, um uns bei ihrer Besprechung auf die einzelnen Punkte beziehen zu können.

**) Diesen Einwand hat *Mohr* bereits 1872 in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, S. 67, in einer Auseinandersetzung mit *Winkler* gegen die *Coulomb*sche Theorie erhoben.

der stehenbleibende Erdkörper nicht von einer Gleitfläche, sondern von der natürlichen Böschung begrenzt wird.

3. Der Einsturz der Mauer sei gerade das Ereignis, welches verhütet werden soll. Die hierbei auftretenden Kräfte haben für den Baumeister nur ein nebensächliches Interesse. Daher sei auch die Annahme, dafs der Erddruck mit der Normalen der Wandfläche den Reibungswinkel ρ' einschliefsen müsse, durchaus unbegründet. Reibungswiderstände können nur erzeugt werden durch *Bewegung*, und *vor* Eintritt der Bewegung könne von Reibung nicht die Rede sein. Es käme auf die Gröfse des Druckes an, den ein *ruhender* Erdkörper gegen eine *ruhende* Wand ausübt. Gegen die bisher angestellten Erddruckversuche wendet *Mohr* ein, dafs sie den Erddruck nicht im Ruhezustande messen, denn bei allen diesen Versuchen habe man den mefsbaren Gegendruck gegen eine bewegliche Wand, die auf ihrer anderen Seite den Druck des Erdkörpers aufnahm, so lange verringert, bis eine *sichtbare* Bewegung des Erdkörpers, also eine *auffällige* Störung des Gleichgewichts eingetreten war.

4. Die Voraussetzung der *Rankine*schen Theorie sei in allen Fällen, wo sie zulässig ist*), die einfachste und die natürlichste, sie stehe weder mit einer bekannten Erfahrungstatsache noch mit den Gesetzen der Statik in Widerspruch.

Zum Punkte 1 der *Mohr*schen Einwände ist zu bemerken, dafs die wichtigste Voraussetzung der *Coulomb*schen Theorie in der *Beschränkung auf die beiden Grenzzustände des Gleichgewichts* besteht. Diese Voraussetzung bildet aber auch die Grundlage der *Rankine*schen Theorie. Ebenso machen beide Theorien dieselbe Voraussetzung bezüglich der Reibung im Inneren des Erdkörpers. Wenn man also *alle* Voraussetzungen der *Coulomb*schen Theorie als mit der Wirklichkeit sich nicht deckend bezeichnet, so entzieht man auch der *Rankine*schen Theorie den festen Boden. Beide Theorien unterscheiden sich nur durch die Annahme der Richtung des Erddruckes. Bezüglich des Einwandes der nicht im Gleichgewicht befindlichen Kräfte E, G und Q verweisen wir auf die Untersuchung in Nr. 9.

Zu 2. bemerken wir, dafs *Coulomb* zwar von der Frage ausgeht, wie grofs der Widerstand sein mufs, den die Wand AB mindestens zu leisten hat, um das die gröfste Stützkraft erfordernde Erdprisma ABC am Abgleiten auf der Fläche AC zu *verhindern*, dafs man aber mit dieser Fragestellung keineswegs die sonderbare

---

*) Es handelt sich hier um die Erfüllung der zuerst von *Mohr* aufgestellten Bedingung $\delta' \gtreqless 0$.

Ansicht zu verbinden braucht, es gleite beim *Einsturz* einer Mauer ein *zusammenhängendes* Erdprisma auf einer ebenen oder auf einer gekrümmten Gleitfläche herunter, *ohne zu zerfallen.* Die Gleitflächen spielen in beiden Theorien *genau* dieselbe Rolle; sie sind die Flächen, in denen beim Eintreten eines Grenzzustandes des Gleichgewichts der Reibungswiderstand voll ausgenutzt wird. Um diese Übereinstimmung klar hervortreten zu lassen, haben wir in Nr. 9 gezeigt, wie man die Lage der Gleitfläche und die Gröfse des Erddruckes auf eine Fläche im unendlichen Erdkörper mit ebener Oberfläche auch mit Hilfe des *Coulomb*schen Prinzips bestimmen kann.

Der unter 3. von *Mohr* gegen die *Coulomb*sche Theorie vorgebrachte Einwand mufs zurückgewiesen werden, weil *Coulomb* die ihm von *Mohr* zugeschobene Annahme, es müsse stets $\delta' = \rho'$ sein, gar nicht gemacht hat. Im Gegenteil — *Coulomb* warnt sogar vor der Berücksichtigung des Reibungswiderstandes der Wand. Er beginnt seine Untersuchung, die sich nur mit einer lotrechten Wand und wagerechtem Gelände beschäftigt, mit dem Falle $\delta' = 0$, behandelt hierauf den Einflufs der Wandreibung, wobei er zwischen Erde und Mauerwerk eine von tg ρ abweichende Reibungsziffer einführt und zeigt dann in einem für den Sonderfall $\delta' = \rho$ gerechneten Zahlenbeispiele den günstigen Einflufs der Wandreibung auf die Standsicherheit der Mauer. Die mittels dieser Rechnung erhaltene Mauerstärke erscheint ihm aber nicht genügend sicher; er sagt u. a.:

Le frottement des terres contre la maçonnerie n'est pas aussi fort que celui des terres sur elles-mêmes.

Souvent les eaux filtrant à travers les terres, se rassemblent entre les terres et la maçonnerie et forment des napes d'eau qui substituent la pression d'un fluide sans frottement à la pression des terres; quoique, pour obvier à cet inconvénient, l'on pratique derrière les revêtements des tuyaux verticaux et des égouts au pied de ces mêmes revêtements, pour laisser écouler les eaux; ces égouts s'engorgent, ou par les terres que les eaux entraînent, ou par la gelée, et deviennent quelquefois inutiles.

Dürfte übrigens von der Reibung an der Wand keine Rede sein, wie dies *Mohr* unter 3. behauptet, so fiele damit wohl die von ihm verteidigte *Rankine*sche Theorie, mit Ausnahme des Sonderfalles $\delta' = 0$, nicht aber eine Theorie, die für jeden zwischen 0 und ρ' liegenden Winkel δ' gilt.

Dem von *Mohr* gegen die Wandreibung vorgebrachten Grunde: es handle sich um den Druck ruhender Erde gegen eine ruhende Wand, ein Reibungswiderstand sei vor Eintritt einer Bewegung nicht denkbar, stellen wir die Frage gegenüber: Gibt es denn überhaupt einen Widerstand ohne vorangegangene Bewegung? Sind z. B. die inneren Kräfte einer Brücke mit den Lasten im Gleichgewicht, bevor sich die Brücke bis zur Ruhelage durchgebogen hat? Bei Stützmauern tritt zu der eigenen Formänderung und dem Nachgeben des Baugrundes noch die Bewegung der sich sackenden Erde; es sind also genügende Ursachen zur Erzeugung von Wandreibung vorhanden, bevor sich Erde und Wand in der Ruhelage befinden.

Am deutlichsten tritt die Hinfälligkeit der Behauptungen *Mohrs* zutage, wenn der Erddruck auf eine Stützmauer während der Herstellung des Erdkörpers verfolgt wird. Die Wandfläche sei lotrecht, die Erde werde ganz gleichmäfsig in wagerechten Schichten geschüttet. Solange die Oberfläche wagerecht ist, erfährt nach *Mohr* die Wand nur einen wagerechten Druck, denn — so belehrt er uns unter 3. — von Reibung in der Wandfläche könne vor Eintritt einer Bewegung nicht die Rede sein. Sobald aber die Herstellung der schrägen Oberfläche durch schrittweise Vergröfserung von α erfolgt, nimmt der Erddruck nach *Mohr* in allen Punkten der Wand eine zur Oberfläche parallele schräge Richtung an. Die hierzu erforderliche Wandreibung wird von jetzt an, unter Aufhebung der unter 3. angegebenen Gründe, nicht nur geduldet, sondern sogar *vorgeschrieben*, denn — so belehrt uns *Mohr* jetzt unter 4. — die Voraussetzung des zur schrägen Oberfläche parallelen Erddruckes sei die einfachste und natürlichste und stehe mit keiner bekannt gewordenen Erfahrungstatsache in Widerspruch.

Zu dem von *Mohr* über die bisher angestellten Erddruckversuche abgegebenen Urteile bemerke ich, dafs der französische Ingenieur *Siégler* nach einem im Jahre 1887 in den Annales des ponts et chaussées XIII, S. 500 erstatteten Berichte mittels einer sinnreichen, jede Wandbewegung ausschliefsenden Vorrichtung nachgewiesen hat, dafs der Seitendruck eines wagerecht abgeglichenen Erdkörpers nicht wagerecht zu sein braucht. Er benutzte einen Kasten (Fig. 64) von 0,15 m Breite, 0,25 m Länge und 0,40 m Höhe, ohne Boden, der auf zwei Schneiden ruhte. Unter der einen Schneide befand sich ein Reibungsdynamometer, an dessen beweglicher Platte eine über eine feste Rolle geführte, ein Gewicht tragende Schnur angriff. Aus der Gröfse des oberen Grenzwertes dieses Gewichtes schlofs *Siégler* auf den die Schneide belastenden senkrechten Druck. Ein vom Kasten unabhängiger Boden ruhte auf einer gleichartigen Mefsvorrichtung. Der Kasten wurde sorgfältig in wagerechten Schichten mit reinem

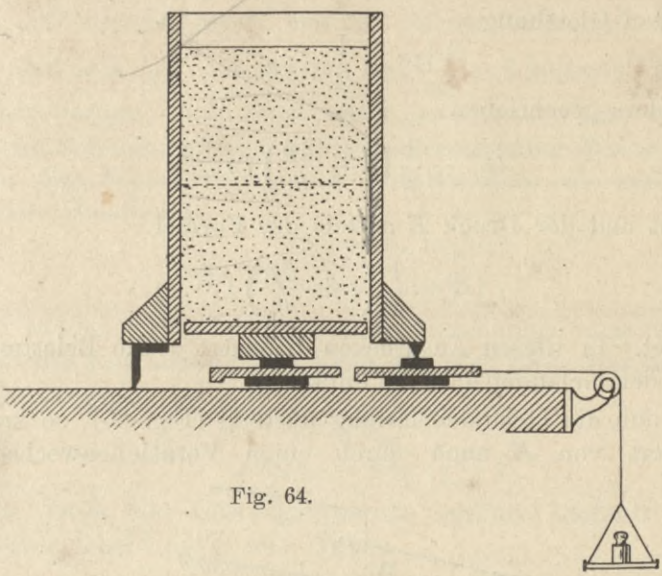


Fig. 64.

Sande ($\rho = 33^{0}$, $\gamma = 1{,}6$ kg/dm^{3}) gefüllt. Zuerst wurden 8 kg Sand hineingebracht, hierauf nochmals 8 kg. Die Messung ergab die folgenden lotrechten Drucke auf die Seitenwände und den Boden:

Gewicht des Sandes	Höhe der Schüttung	Lotrechter Druck auf die Seitenwände	Lotrechter Druck auf den Boden	Summe der beiden Drucke
$G = 8$ kg	0,18 m	$V = 4{,}4$ kg	4,0 kg	8,4 kg
16 kg	0,36 m	10,0 kg	5,8 kg	15,8 kg

Der Unterschied zwischen der Summe der Drucke und dem Gewicht des eingefüllten Sandes beträgt nur 5 v. H. Wegen der Kleinheit der Versuchsvorrichtung lassen sich Schlüsse auf die bei Stützmauern anzunehmenden Winkel δ' nicht ziehen.

§ 4.

Unstetige Belastung des Geländes.

19. Allgemeine Untersuchung. Die in Nr. 3 bis 6 vom *Coulomb*schen Prinzip gemachten Anwendungen setzen voraus, dafs der Differentialquotient des erforderlichen Widerstandes E einer Wandfläche AB eine stetige Funktion des Neigungswinkels φ der ebenen Schnittfläche AC ist. Die Lage der Gleitfläche wurde mit Hilfe der aus der Bedingung

$$\frac{dE}{d\varphi} = \frac{dK}{d\varphi} = 0$$

gefolgerten Gleichung

$$G'' = \frac{1}{2}\gamma' f n,$$

oder anders geschrieben:

$$G'' - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h}\right) f n = 0 \tag{63}$$

bestimmt und der Druck E mittels der Formel

$$K = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h}\right) f e \tag{64}$$

berechnet. In diesen Ausdrücken bedeutet p die Belastung der Einheit der Geländefläche im Punkte C.

Ist nun die Geländebelastung unstetig (Fig. 65), so kann ein Gröfstwert von K auch durch einen Vorzeichenwechsel des

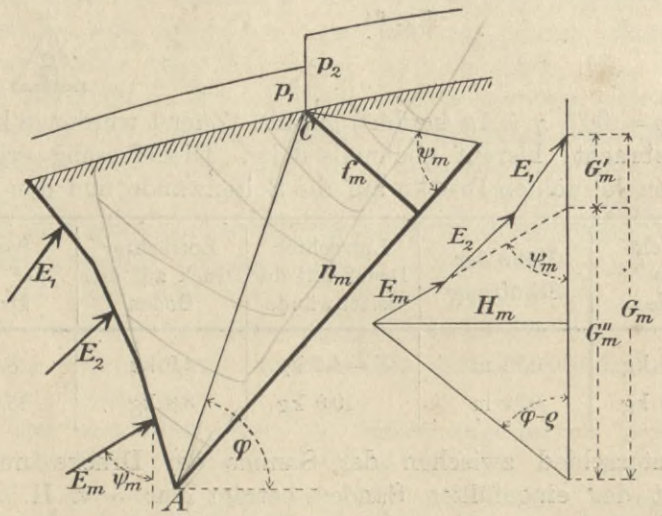


Fig. 65.

Differentialquotienten herbeigeführt werden. Geht nämlich die Belastung p an einer Stelle C sprungweise aus p_1 in p_2 über, so gehören zu der Schnittfläche AC die beiden Werte

$$\left\{\begin{array}{l} G''_m - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p_1}{h_m}\right) f_m n_m, \\ G''_m - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p_2}{h_m}\right) f_m n_m. \end{array}\right. \tag{65}$$

Sind beide Werte positiv, so liegt die Gleitfläche rechts von dem nach der Unstetigkeitsstelle führenden Schnitt AC, sind sie beide negativ, so liegt die Gleitfläche links von AC. Ist dagegen der erste Wert positiv, der zweite negativ, so entspricht dem

Schnitt AC ein Gröfstwert von K. Dieser Gröfstwert darf aber nicht mehr nach der nur für den Fall $\frac{dK}{d\varphi}=0$ gültigen Formel 64) berechnet werden, was schon daran zu erkennen ist, dafs sich wegen der Zweideutigkeit von p zwei verschiedene Werte ergeben würden. Zur Berechnung von K mufs vielmehr die auf Seite 8 abgeleitete Gleichung

$$66)\qquad K_m = \frac{G''_m \sin(\varphi_m - \rho)}{\sin\{(\varphi_m - \rho) + \psi_m\}}$$

benutzt werden. Für analytische Untersuchungen empfiehlt sich meistens die Berechnung der Kraft H_m (Fig. 65). Für diese gilt jetzt die Formel:

$$67)\qquad H_m = \frac{G''_m}{\operatorname{cotg}\psi_m + \operatorname{cotg}(\varphi - \rho)}.$$

Der durch die Unstetigkeitsstelle geführte Schnitt AC ist Gleitfläche, sobald die beiden Werte

$$68)\qquad \begin{cases} H_m - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p_1}{h_m}\right)f^2{}_m, \\ H_m - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p_2}{h_m}\right)f^2{}_m \end{cases}$$

verschiedene Vorzeichen haben.

Die Werte 65) bezw. 68) können aber auch bei *stetiger* Belastung verschiedene Vorzeichen besitzen, sobald nämlich der Punkt C mit einem Eckpunkte der Geländelinie zusammenfällt. Es gehören dann zu C zwei Geländetangenten und im allgemeinen zwei verschiedene Strecken h.

Zu den im § 1 durchgeführten Untersuchungen haben wir ferner noch nachzutragen, dafs der erforderliche Widerstand einer Wandfläche für *verschiedene* Schnitte AC ein Maximum werden kann, und dafs man dann mit dem gröfsten der Werte E_{max} bezw. K_{max} rechnen mufs. Dieser Fall kann sowohl bei stetiger als auch bei unstetiger Belastung eintreten. Ein Beispiel zeigt Fig. 66. Die dort gezeichnete *Culmann*sche E-Linie besitzt zwei Maxima und führt deutlich vor Augen, wie unrichtig die weit verbreitete Ansicht ist, dafs der Druck auf eine Wand stets unabhängig sei von den Erdmassen und Geländebelastungen, die jenseits einer die Bedingung

$$\frac{d\delta}{d\varphi}=0,\quad \delta_{max}=\rho$$

erfüllenden, durch den Fufs der Wand gehenden Gleitfläche AC' liegen. Bei derartigen Aufgaben erkennt man den Vorzug des

*Coulomb*schen Prinzips mit seiner klaren Fragestellung*). An die Voraussetzung ebener Schnittflächen ist man freilich wegen der grofsen rechnerischen Schwierigkeiten, die im Gefolge gekrümmter Schnittflächen auftreten, auch bei unstetiger Belastung des Geländes vorläufig gebunden, und es gehört daher mit zu den

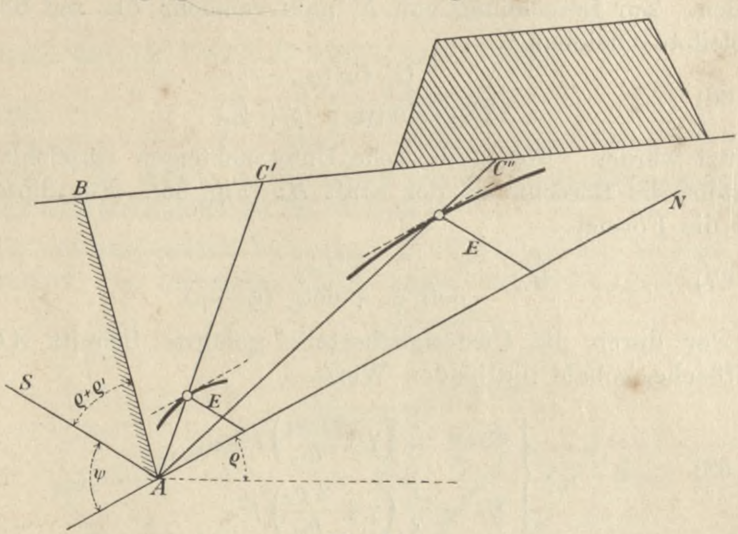


Fig. 66.

wichtigsten Aufgaben der experimentellen Erddruckforschung, die Brauchbarkeit dieser Voraussetzung zu prüfen. Im zweiten Teile dieses Buches wird der Verfasser die Ergebnisse einiger nach dieser Richtung bereits angestellten Versuche mitteilen.

Wir betrachten noch den in Fig. 67 dargestellten Fall. Das Gelände sei eben und gleichmäfsig mit p belastet. Aufserdem ruhe auf dem Gelände eine Last P, die sich auf einen kleineren Teil der Geländefläche verteilt. Es habe sich herausgestellt, dafs die Gleitfläche das Gelände rechts von der Last P schneidet. Dann kann man mit Hilfe der in Nr. 6 durchgeführten Untersuchung die Kraft H_m auf die Form

$$H_m = \sum_1^m E_w = \frac{1}{2}\gamma'_m f^2 = \frac{1}{2}\gamma' s_m{}^2 \nu^2$$

bringen, wo

$$\nu = \frac{\sin(\vartheta'_m + \rho)}{\varepsilon},$$

und

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho - \alpha)\sin(\rho + \vartheta'_m - \psi_m)}{\sin(\vartheta'_m + \alpha)\sin\psi}}.$$

*) *Coulomb* selbst erwähnt allerdings weder die Unstetigkeiten noch das Auftreten mehrerer Maxima.

Ferner kann man die Lage der Gleitfläche rechnerisch mittels der Formel

$$\overline{B'_m C_m} = s_m \nu \frac{\varepsilon - 1}{\sin(\rho - \alpha)}$$

bestimmen. Die Lage des Punktes B'_m ist durch die Bedingung gegeben, daſs das Gewicht eines Erdprismas $B'_m A_m C_m$ einschlieſslich einer von C_m bis B'_m reichenden gleichförmigen Belastung p ebenso

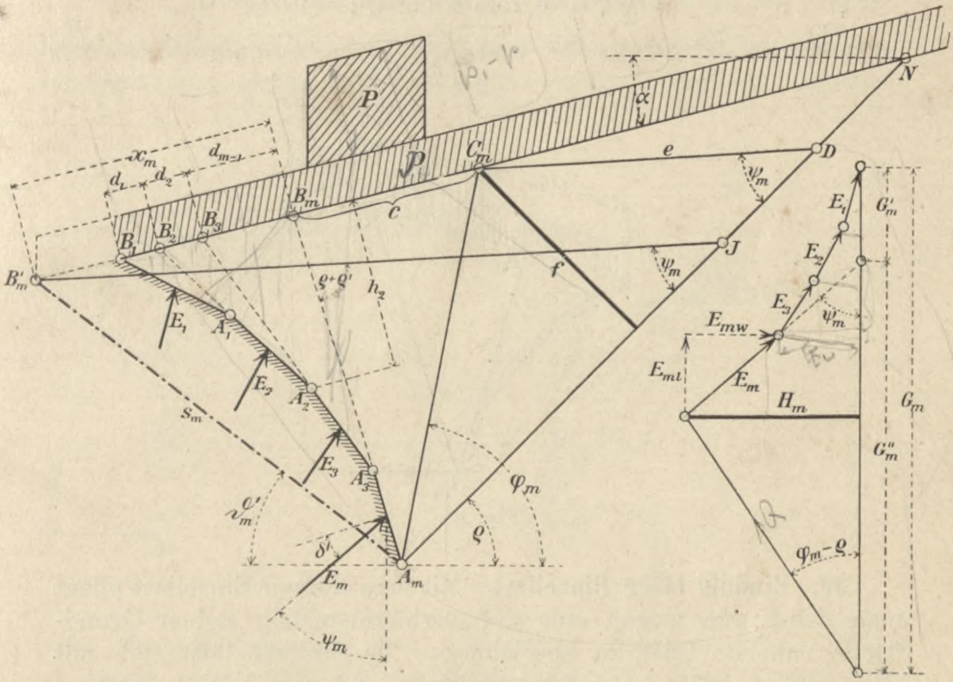


Fig. 67.

groſs ist wie das Gewicht G''_m. Die Länge x_m der Strecke $B_m B'_m$ muſs also der Gleichung genügen

$$\frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h_m}\right)(x_m + c)\, h_m = G''_m = G_m - G'_m,$$

wo, mit den der Fig. 67 zu entnehmenden Bezeichnungen,

$$G_m = P + p\sum_1^{m-1} d + pc + \frac{1}{2}\gamma \sum_1^{m-1} d\,h + \frac{1}{2}\gamma\, c\, h_m.$$

Man erhält

69) $$x_m = \frac{\frac{1}{2}\gamma \sum_1^{m-1} d\,h + p\sum_1^{m-1} d + P - G'_m}{\frac{1}{2}\gamma h_m + p},$$

worin zu setzen

$$70)\qquad G'_m = \sum_1^{m-1} E_\iota - \operatorname{cotg} \psi_m \sum_1^{m-1} E_{\iota\iota}.$$

Für den in Fig. 68 dargestellten Fall findet man, wenn der Punkt C_m dem mit p_1 belasteten Teile der Geländefläche angehört,

$$71)\qquad x_m = \frac{\frac{1}{2}\gamma \sum_1^{m-1} dh + p_1 \sum_1^{m-1} d - (p_1 - p)u - G'_m}{\frac{1}{2}\gamma h_m + p_1}.$$

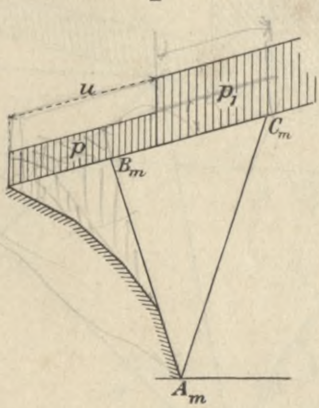


Fig. 68.

20. Einflufs einer Einzellast. Mit dem Namen Einzellast pflegt man der Kürze wegen eine auf verhältnismäfsig kleiner Grundfläche ruhende Last zu bezeichnen. Ihr Einflufs läfst sich mit Hilfe des in Nr. 19 beschriebenen Verfahrens leicht angeben. Wir wollen dies an einem Beispiele zeigen, vorher aber eine von anderer Seite angegebene Lösung dieser Aufgabe kurz andeuten, um zu zeigen, zu welchem Fehler das Abgehen von dem durch die *Coulomb*sche Fragestellung vorgezeichneten einfachen Wege geführt hat.

Professor *Mehrtens* stellt in dem im Jahre 1904 erschienenen zweiten Bande seiner Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen auf Seite 291 und 292 folgende Behauptung auf: Hat man zunächst für unbelastetes Gelände eine Gleitfläche AC gefunden (Fig. 69), so ändert sich deren Lage nicht, wenn aufserhalb der Strecke BC eine Einzellast P hinzutritt; der Einflufs einer solchen Last P auf den die Wand beanspruchenden Erddruck ist gleich Null. Tritt dagegen die Einzellast zwischen den Punkten B und C hinzu, so ruft sie eine steilere Lage AC_0 der Gleitfläche hervor;

der Angriffspunkt des von ihr erzeugten Erddruckes gehört einer Strecke $A'A''$ an, welche von zwei durch den Angriffspunkt D von P gelegten Gleitflächen DA' und DA'' begrenzt wird. Die Gleitfläche DA' ist parallel zu AC, und die Gleitfläche DA'' ergibt sich, wenn die Last P zu dem Gewichte des Erdprismas $A''BD$ hinzugerechnet wird. Die Gleitflächen bestimmt *Mehrtens* auf ziemlich umständliche Weise mit Hilfe der Bedingung $\frac{d\delta}{d\varphi} = 0$, $\delta_{max} = \rho$. Schliefslich hebt er noch hervor, dafs es Einzellasten in Wirklichkeit nicht gibt, und dafs die beiden Gleitflächen nie genau von einem mathematischen Punkte ausgehen, sondern

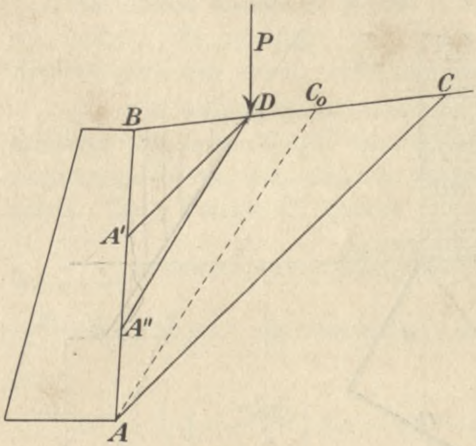


Fig. 69.

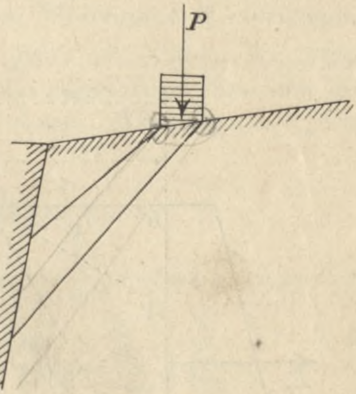


Fig. 70.

von den Endpunkten der belasteten Strecke (Fig. 70 *); er meint aber, dafs die Annahme einer in einem Punkte angreifenden Last insofern berechtigt sei, als dabei die Standsicherheit der Mauer sich immer *kleiner*, bei gleichem Sicherheitsgrade also ihre Stärke *gröfser* ergeben mufs als in Rechnungsfällen, wo Einzellasten über gewisse Strecken verteilt angenommen werden. Dafs diese Auffassung unrichtig ist, leuchtet wohl ohne weiteres ein; zu welch grobem Fehler sie führen kann, mag folgendes Zahlenbeispiel zeigen **):

*) Auch diese Auffassung ist fehlerhaft; denn es ist möglich, durch jeden Endpunkt der belasteten Strecke *zwei* Gleitflächen zu legen, welche der Bedingung $\frac{d\delta}{d\varphi} = 0$, $\delta_{max} = \rho$ genügen, weil die Lage der Gleitfläche von der Belastung abhängt und diese in jedem der beiden Endpunkte die zwei Werte 0 und p besitzt.

**) Ein zweites Beispiel findet sich im § 5.

Eine glatte, lotrechte Wand (Fig. 71) stütze eine wagerecht abgeglichene Erdmasse, die wir zunächst unbelastet annehmen wollen. Es sei

$$h = 3{,}0 \text{ m},\ \rho = 30^0,\ \gamma = 1{,}6 \text{ t/m}^3.$$

Die Gleitfläche AC ist nach S. 14 bestimmt durch die Strecke

$$\overline{BC} = h \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = 3{,}0 \cdot 0{,}577 = 1{,}73 \text{ m};$$

und die Gröfse des Erddruckes ist

$$E = \frac{1}{2}\gamma h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{6}\gamma h^2 = \frac{1}{6} \cdot 1{,}6 \cdot 9 = 2{,}4 \text{ t}.$$

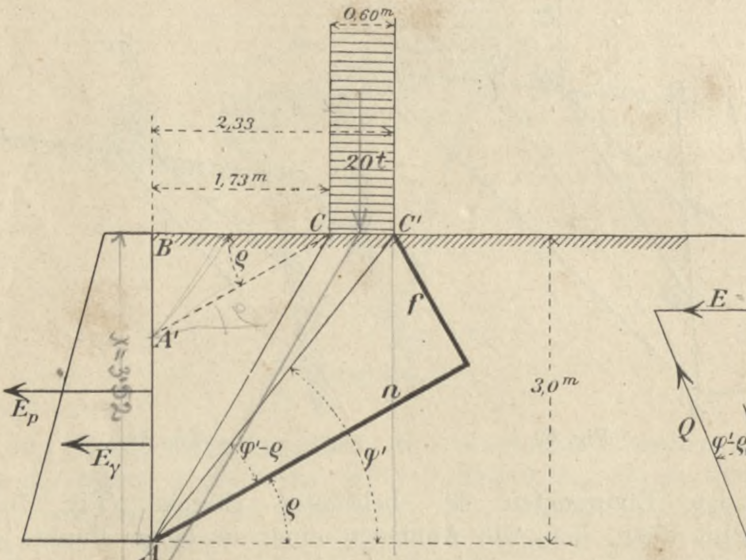


Fig. 71.

Nun werde auf der Strecke $\overline{CC'} = 0{,}60$ m eine Last $P = 20$ t aufgebracht. Nach der Ansicht von *Mehrtens* wäre diese Last, da sie rechts von der Strecke BC liegt, ohne Einflufs auf den Erddruck E. Nach der von ihm gegebenen Regel müfste sogar zur Erhöhung der Sicherheit die Last im Mittelpunkte der Strecke CC' vereinigt werden, woraus dann folgen würde, dafs der Einflufs von P auf den Wanddruck E so lange gleich Null ist, als die Wandhöhe den Wert

3·0 : 1·73 = x : (1·73 + 0·3)

$$3{,}0\,\frac{1{,}73 + 0{,}30}{1{,}73} = 3{,}52 \text{ m}$$

$x = \frac{3·0\,(1·73 + 0·3)}{1·73} = 3·52$

nicht überschreitet.

Führen wir nun den Schnitt AC', so finden wir, dafs das

Erdprisma ABC' zur Sicherung seines Gleichgewichtes einen Wandwiderstand E erfordert, der *mindestens*

$$E = G \operatorname{tg} (\varphi' - \rho)$$

ist. Mit

$$\operatorname{cotg} \varphi' = \frac{1{,}73 + 0{,}60}{3{,}0} = 0{,}777, \quad \varphi' = 52^0\,10', \quad \operatorname{tg}(\varphi' - \rho) = 0{,}41,$$

$$G = \frac{1}{2}\, 1{,}6 \cdot 2{,}33 \cdot 3{,}0 + 20 = 5{,}6 + 20 \text{ t} = 25{\cdot}6 \text{ t}$$

erhalten wir

$$E = (5{,}6 + 20)\, 0{,}41 = 2{,}3 + 8{,}2 = 10{,}5 \text{ t}.$$

Bei einem kleineren Werte E ist an Gleichgewicht gar nicht zu denken. Es ist sogar wahrscheinlich, dafs es krumme Schnittflächen gibt, die einen noch gröfseren Widerstand E verlangen.

Da die aufgebrachte Last sehr grofs ist, haben wir ohne weiteres den Schnitt AC' als Gleitfläche angesehen, ohne erst die beiden Ausdrücke 65) und 66) auszurechnen. Wir holen dies jetzt nach. Zum Punkte C' gehört

$$fn = 1{,}4 \cdot 3{,}5 = 5,$$

ferner ist

$$G'' = G = 25{,}6 \text{ t}. \quad \text{Im Punkte } C' \text{ ist } p_1 = \frac{20}{0{,}6} = 33{,}3 \text{ t/m}^2, \; p_2 = 0,$$

also

22·2 23·8 11·9×5 / 59·5

$$G'' - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p_1}{h}\right) fn = 25{,}6 - \frac{1}{2}\left(1{,}6 + \frac{66{,}6}{3{,}0}\right) 5 \angle 0,$$

0·8×5 4·0

$$G'' - \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p_2}{h}\right) fn = 25{,}6 - \frac{1}{2}\, 1{,}6 \cdot 5 = 21{\cdot}6 > 0.$$

Daraus folgt, dafs der Fläche AC' in der Tat ein Maximum des Wertes E entspricht.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes von E scheint es zunächst am einfachsten und zweckmäfsigsten zu sein, E in die Bestandteile $E_\gamma = 2{,}3$ t und $E_p = 8{,}2$ t zu zerlegen und E_γ im oberen Endpunkte des unteren Drittels der Wandfläche AB anzunehmen, hingegen E_p im Mittelpunkte der Strecke AA', wo A' der Punkt ist, in welchem eine von C aus unter dem Neigungswinkel ρ gezogene Gerade die Wandfläche BA trifft. Denn für das Wandstück $A'B$ liefert die *Coulomb*sche Theorie einen von der Belastung P unabhängigen Erddruck.

Unsere Versuche haben indes gezeigt, dafs der Angriffspunkt von E_p höher liegt, und dafs es sich im vorliegenden Falle empfiehlt, zur gröfseren Sicherheit E_p im Mittelpunkte von AB angreifend anzunehmen.

§ 5.

Zahlenbeispiele.

Den Abschlufs der auf der Annahme ebener Gleitflächen beruhenden Theorie des Erddruckes auf Stützmauern mögen drei gröfsere Zahlenbeispiele bilden.

21. Erstes Beispiel. Die in Fig. 72 abgebildete Mauer stützt einen wagerecht abgeglichenen Erdkörper, dessen Oberfläche mit $p = 2{,}4$ t/m² belastet ist. Es ist für die Erde $\gamma = 1{,}6$ t/m³, $\rho = 30^0$ und für das Mauerwerk $\gamma_m = 2{,}1$ t/m³. Es soll der Winkel

$$\delta' = \frac{3}{4}\rho = 22\frac{1}{2}^0 = \frac{\pi}{8}$$

in Rechnung gestellt werden. Besondere Umstände, welche gegen die Berücksichtigung der Wandreibung sprechen, liegen nicht vor. Die Neigungswinkel der die Mauer begrenzenden Ebenen sind gegeben. Die Stärke der Mauer soll so bemessen werden, dafs die Pressung auf den Baugrund höchstens 4 kg/cm² beträgt.

Erste Lösung. Wir schlagen den in den Figuren 14 und 67 beschriebenen Weg ein und bestimmen die Strecken x_m mittels der Gleichung 69), welche sich auch wie folgt schreiben läfst.

$$\text{72)} \qquad x_m = \frac{\sum\limits_1^{m-1} \gamma' dh - G'_m}{\frac{1}{2}\gamma'_m h_m},$$

wo

$$\frac{1}{2}\gamma'_m = \frac{1}{2}\gamma + \frac{p}{h_m} = 0{,}8 + \frac{2{,}4}{h_m}.$$

Zu $h_m =$	2,0 m	4 m	6 m	8 m
gehört $\frac{1}{2}\gamma'_m =$	2,0	1,4	1,2	1,1 t/m³
$\frac{1}{2}\gamma'_m h_m =$	4,0	5,6	7,2	8,8
$d_m =$	0,8	0,8	1,2	
$\frac{1}{2}\gamma'_m h_m d_m =$	3,2 t	4,5 t	8,6 t	

Für die Wandfläche I wurde mittels der *Poncelet*schen Konstruktion der Druck

$$E_1 = \frac{1}{2}\gamma' f_1 e_1 = 2{,}0 \cdot 1{,}22 \cdot 1{,}84 = 4{,}5 \text{ t}$$

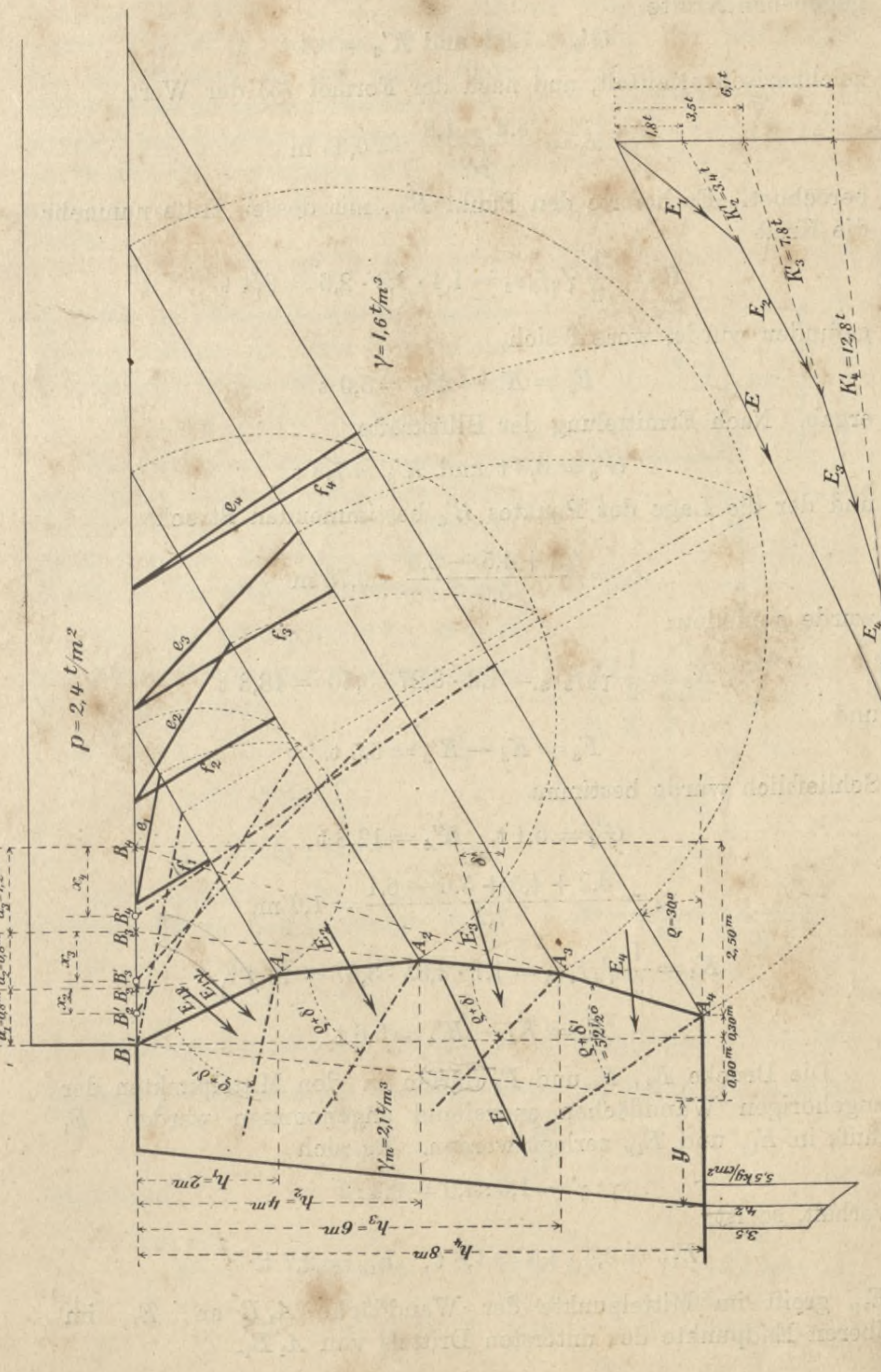

p = 2,4 t/m²
γ = 1,6 t/m³
γm = 2,1 t/m³
h₁ = 2m
h₂ = 4m
h₃ = 6m
h₄ = 8m
ρ = 30°
2,50m
5,5 kg/cm²
4,2
3,5

Fig. 72.

bestimmt. Dann wurden die durch E_1 und die Richtung von E_2 gegebenen Kräfte

$$G'_2 = 1{,}8 \text{ t und } K'_2 = 3{,}4 \text{ t}$$

zeichnerisch ermittelt, und nach der Formel 73) der Wert

$$x_2 = \frac{3{,}2 - 1{,}8}{4{,}0} = 0{,}35 \text{ m}$$

berechnet. Er lieferte den Punkt B'_2, mit dessen Hilfe nunmehr die Kraft

$$K_2 = \frac{1}{2}\gamma'_2 f_2 e_2 = 1{,}4 \cdot 2{,}3 \cdot 2{,}6 = 8{,}4 \text{ t}$$

gefunden wurde, worauf sich

$$E_2 = K_2 - K'_2 = 5{,}0 \text{ t}$$

ergab. Nach Ermittelung der Hilfskräfte

$$G'_3 = 3{,}5 \text{ t und } K'_3 = 7{,}8 \text{ t}$$

und der die Lage des Punktes B'_3 bestimmenden Strecke

$$x_3 = \frac{3{,}2 + 4{,}5 - 3{,}5}{5{,}6} = 0{,}75 \text{ m}$$

wurde gefunden:

$$K_3 = \frac{1}{2}\gamma'_3 f_3 e_3 = 1{,}2 \cdot 3{,}27 \cdot 3{,}40 = 13{,}3 \text{ t}$$

und

$$E_3 = K_3 - K'_3 = 5{,}5 \text{ t.}$$

Schliefslich wurde bestimmt

$$G'_4 = 6{,}1 \text{ t}, \quad K'_4 = 12{,}8 \text{ t},$$

$$x_4 = \frac{3{,}2 + 4{,}5 + 5{,}6 - 6{,}1}{7{,}2} = 1{,}0 \text{ m},$$

$$K_4 = \frac{1}{2}\gamma'_4 f_4 e_4 = 1{,}1 \cdot 3{,}85 \cdot 3{,}87 = 16{,}4 \text{ t},$$

$$E_4 = K_4 - K'_4 = 3{,}6 \text{ t.}$$

Die Drucke E_2, E_3 und E_4 dürfen in den Mittelpunkten der zugehörigen Wandflächen angreifend angenommen werden. E_1 mufs in $E_{1\gamma}$ und E_{1p} zerlegt werden. Da sich

$$\gamma : \gamma' = 1{,}6 : 4{,}0 = 0{,}4 : 1$$

verhält, so ist

$$E_{1\gamma} = 0{,}4 \cdot 4{,}5 = 1{,}8 \text{ t}, \quad E_{1p} = 2{,}7 \text{ t.}$$

E_{1p} greift im Mittelpunkte der Wandfläche $A_1 B$ an, $E_{1\gamma}$ im oberen Endpunkte des untersten Drittels von $A_1 B_1$.

Ermittelung der oberen Mauerstärke y. Die Neigung der vorderen Wandfläche $B'A'$ (Fig. 73) sei vorgeschrieben. Wir ziehen $BS \parallel B'A'$, machen $SD = DB$, setzen die Erddrucke E_1, E_2, E_3 und E_4 mit Hilfe eines Seilpolygons zu einer Mittelkraft E zusammen und bestimmen deren Schnittpunkt mit der Lotrechten DT. Dann zerlegen wir E in E_w und E_l. Wir finden

$$E_w = 16{,}2 \text{ t}, \quad E_l = 7{,}5 \text{ t}.$$

E_w greift im Abstande 3,27 m von der Sohle der Mauer an. Das Moment des Erddrucks, bezogen auf den Punkt T, ist

$$M = 16{,}2 \cdot 3{,}27 = 52{,}97 \text{ tm}.$$

Das Gewicht des rechts von der Lotrechten durch B gelegenen Teiles der Mauer beträgt 13,4 t, sein Schwerpunkt liegt im Abstande 0,91 m vom Punkte D. Das Mauerwerkprisma BSS' wiegt $2{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 8{,}0 \cdot \frac{1}{2} = 7{,}6$ t. Das auf den Punkt T bezogene Angriffsmoment ist also im ganzen

$$M = 52{,}97 - 7{,}6 \cdot 0{,}15 - 13{,}4 \cdot 0{,}91 + 2{,}1 \cdot 8{,}0\, y\, \frac{y}{2},$$

$$M = 39{,}64 + 8{,}4\, y^2.$$

Die lotrechte Seitenkraft des Druckes auf die Sohle beträgt

$$N = 7{,}5 + 7{,}6 + 13{,}4 + 2{,}1 \cdot 8{,}0\, y,$$
$$N = 28{,}5 + 16{,}8\, y.$$

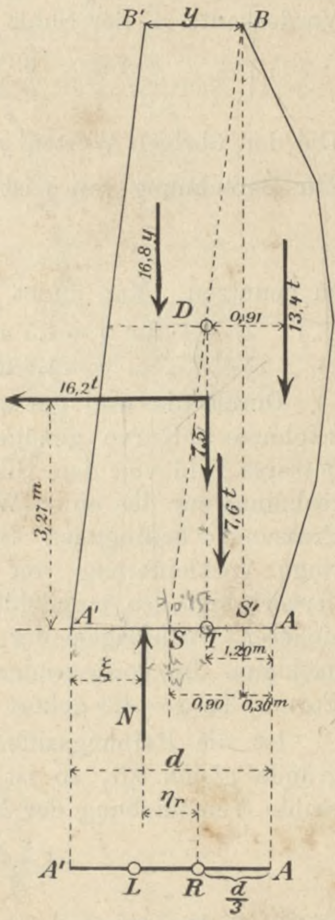


Fig. 73.

Der Angriffspunkt des Druckes N hat vom Punkte T die Entfernung $\frac{M}{N}$ und von der vorderen Kante der Sohle den Abstand

$$\xi = y + 0{,}45 - \frac{M}{N}.$$

Man findet

für $y =$	1,8 m	1,5 m	1,2 m
„ $M =$	66,86 tm	58,54 tm	51,74 tm
„ $N =$	58,7 t	53,7 t	48,7 t
„ $\xi =$	1,11 m	0,86 m	0,59 m.

Da für $y = 1{,}8$ m die Breite der Sohle $d = 3{,}0$ m beträgt, so ist 1.11 = $\xi > \frac{1}{3} d$. = 1 Der Druck N greift also noch innerhalb des Kerns an. Sein Abstand vom rechten Kernpunkte ist $\eta_r = 0{,}89$ m. An der Vorderkante A' der Sohle entsteht die Pressung

$$\sigma = \frac{6\, N \eta_r}{d^2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 58{,}7 \cdot 0{,}89}{9{,}0} = 35 \text{ t/m}^2 = 3{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Die den übrigen Werten y entsprechenden ξ sind kleiner als $\frac{1}{3} d$. Zur Berechnung von σ ist daher die Formel

$$\sigma = \frac{2\, N}{3\, \xi}$$

zu benutzen. Man findet

für $y = 1{,}5$ m $\qquad \sigma = 4{,}2$ kg/cm²,

„ $y = 1{,}2$ m $\qquad \sigma = 5{,}5$ kg/cm².

Durch die drei gerechneten Werte σ ist die in Fig. 72 gezeichnete σ-Kurve genügend genau bestimmt. Sie liefert ein besseres Bild von dem Sicherheitsgrade der Mauer als die Ausrechnung nur des einen Wertes y, der durch die vorgeschriebene Pressung σ bedingt ist. Stellt sich heraus, dafs bereits eine geringe Verkleinerung von y eine wesentliche Erhöhung von σ hervorbringt, so empfiehlt es sich, mit Rücksicht auf die unsicheren Grundlagen der Erddrucktheorie den Wert σ zu ermäfsigen. Im vorliegenden Falle besitzt die σ-Linie eine günstige Form. Zu $\sigma = 4{,}0$ gehört $y = 1{,}55$ m. Es entsteht $N = 54{,}5$ t.

Ist die Reibungsziffer zwischen der Sohle und dem Baugrunde gleich 0,5, so ist der Sicherheitsgrad gegen eine wagerechte Verschiebung der Mauer gleich

$$\frac{0{,}5\, N}{H} = \frac{27{,}25}{16{,}2} = 1{,}7.$$

Dieser Sicherheitsgrad ist ausreichend.

Zweite Lösung. Die Umständlichkeit der beschriebenen Ermittelung des Erddruckes steht in keinem richtigen Verhältnis zu den noch nicht genügend geklärten Unterlagen der Theorie. Zu einer wesentlich einfacheren und dabei ebenso brauchbaren Darstellung des Druckes E_m auf irgendein Wandstück $A_m A_{m-1}$ gelangt man mit Hilfe der Annahme, es sei dieser Druck ebenso grofs wie der Druck E_m auf den Teil $A_m A_{m-1}$ einer ebenen Wandfläche $A_m B_m$, die ohne Unterbrechung bis zur Oberfläche reicht. Die Belastung p wird hierbei nach Seite 17 (Fig. 13) durch eine Erdschüttung von der Höhe $\frac{p}{\gamma}$ berücksichtigt. Um z. B. E_3 zu erhalten (Fig. 74), zeichne man das zur Wandfläche $A_3 B_3$ gehörige Belastungsdreieck und schneide von diesem mittels der durch die Punkte A_2 und A_3 gelegten wagerechten Geraden das in der Figur schraffierte Trapez ab. Ist seine Höhe gleich a und seine mittlere Breite gleich b'_3, so findet man

$$E_3 = a\, b'_3.$$

Das Belastungsdreieck aber bestimme man nach Gleichung 30) auf Seite 17 mittels der Formel

$$b_3 = \frac{\gamma\, e_3 f_3}{h},$$

wo e_3 und f_3 die für eine beliebig angenommene Wandhöhe h mit Hilfe der *Poncelet*schen Konstruktion gefundenen Strecken sind. Durch den Schwerpunkt des Trapezes ist der Angriffspunkt von E_3 bestimmt.

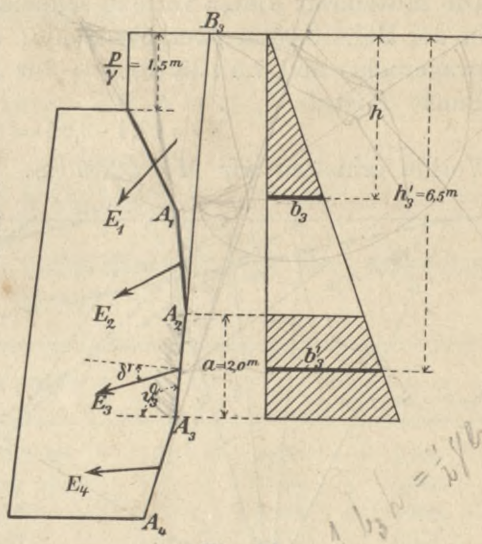


Fig. 74.

Nimmt man aber den Druck E_3 in der Mitte der Fläche $A_3 A_2$ angreifend an, was stets zu empfehlen ist, so braucht man das Belastungsdreieck erst gar nicht zu zeichnen; man findet dann die Strecke b'_3, deren Abstand von der Oberfläche gleich h'_3 sei, schneller durch Rechnung. Es ist

$$b'_3 = \frac{\gamma\, e_3 f_3}{h} \cdot \frac{h'_3}{h},$$

und es ergibt sich daher für E_3 der Wert

$$E_3 = \frac{\gamma\, a}{h^2}\, h'_3 e_3 f_3.$$

Im vorliegenden Falle empfiehlt es sich, $h = 4{,}0$ m zu wählen; man erhält dann wegen $\gamma = 1{,}6$ und $a = 2{,}0$ m den Ausdruck

$$E_3 = 0{,}2\, h'_3 e_3 f_3.$$

In Fig. 75 ist die Ermittelung der zu den vier Wandlagen gehörigen Werte e und f mit Hilfe eines und desselben Halbkreises durchgeführt worden. Die Strecken f braucht man nicht einzuzeichnen; sie lassen sich in der bekannten Weise messen, daſs man mit dem Zirkel um die Punkte 1, 2, 3, 4 Kreise beschreibt, welche die natürliche Böschung berühren.

Die beschriebene Konstruktion und Rechnung ergibt

4.5 5.0 5.5

$$E_1 = 4{,}5 \text{ t} \qquad E_2 = 4{,}9 \text{ t} \qquad E_3 = 5{,}3 \text{ t} \qquad E_4 = 5{,}1 \text{ t}.$$

Die Mittelkraft dieser Drucke schneidet die Gerade DT (Fig. 73) in der Höhe 3,05 m über der Sohle; ihre Seitenkräfte sind 17,4 t (wagerecht) und 7,5 t (lotrecht); ihr Moment in bezug auf den Punkt T ist

$$M = 17{,}4 \cdot 3{,}05 = 53{,}00 \text{ tm}.$$

Vorhin erhielten wir $M = 52{,}97$ tm.

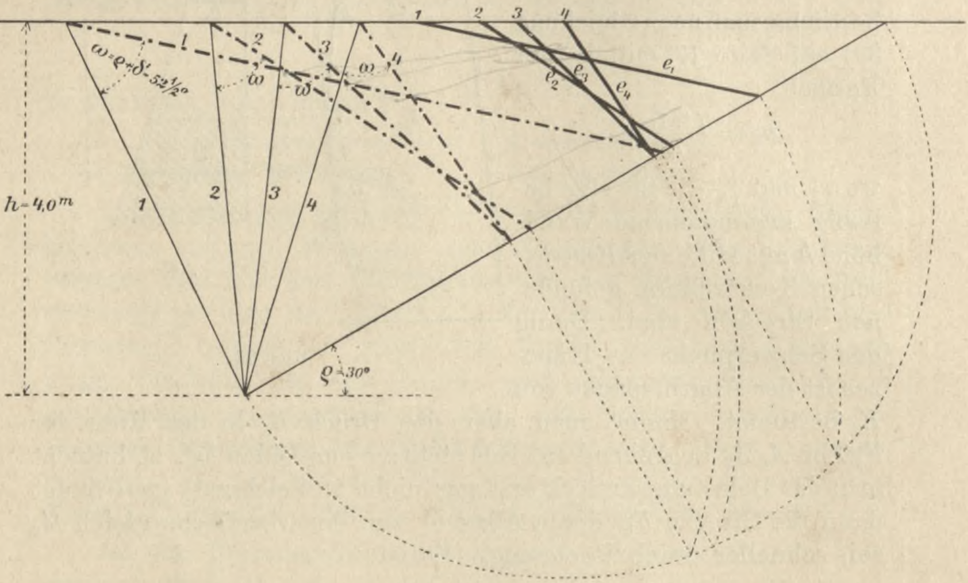


Fig. 75.

Dritte Lösung. Sehr schnell führt auch das folgende rechnerische Verfahren zum Ziele. Für die Breite b des Belastungsdreiecks ergibt sich aus der Bedingung (siehe Gleich. 14—16)

$$\frac{bh}{2} = E = \frac{H}{\sin\psi} = \frac{1}{2}\gamma\frac{s^2\nu^2}{\sin\psi} = \frac{1}{2}\gamma\frac{h^2\nu^2}{\sin\psi\sin^2\vartheta}$$

die einfache Formel

73) $$b = \frac{\gamma h}{\sin\psi}\mu^2,$$

wo

74) $$\mu = \frac{\sin(\vartheta+\rho)}{\varepsilon\sin\vartheta},$$

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin\rho\sin(\rho+\delta')}{\sin\vartheta\sin\psi}}, \qquad \psi = \vartheta - \delta'.$$

Der Erddruck E auf das Wandstück, dessen lotrechte Projektion gleich a ist, beträgt mithin

$$E = \gamma a h' \frac{\mu^2}{\sin \psi}. \tag{75}$$

Im vorliegenden Falle ist $\rho = 30^0$, $\delta' = 22\frac{1}{2}^0$, also

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{0{,}397}{\sin \vartheta \sin \psi}}.$$

Den vier Wandflächen entsprechen die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werte:

	cotg ϑ	ϑ	$\psi = \vartheta - \delta'$	ε	μ	$\frac{\mu^2}{\sin \psi}$
1	+ 0,4875	64°	41° 30′	1,82	0,605	0,552
2	+ 0,0875	85°	62° 30′	1,67	0,545	0,339
3	— 0,1125	96° 30′	74°	1,64	0,494	0,254
4	— 0,3125	107° 20′	85°	1,65	0,430	0,186

Für die Winkel genügt eine Genauigkeit von 10′. Die in den Taschenbüchern sich findenden Tabellen der Sinus und Cosinus reichen also aus. Für diese Werte selbst genügen bereits zwei bis drei Dezimalstellen, so dafs die ganze Rechnung mittels Rechenschieber oder Rechentafel sehr schnell erledigt werden kann.

Aus den Zahlen der letzten Spalte findet man, mit $\gamma a = 1{,}6 \cdot 2{,}0 = 3{,}2$,

$$E_1 = 3{,}2 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}552 = 4{,}4 \text{ t}$$
$$E_2 = 3{,}2 \cdot 4{,}5 \cdot 0{,}339 = 4{,}9 \text{ t}$$
$$E_3 = 3{,}2 \cdot 6{,}5 \cdot 0{,}254 = 5{,}3 \text{ t}$$
$$E_4 = 3{,}2 \cdot 8{,}5 \cdot 0{,}186 = 5{,}1 \text{ t}.$$

Sind die Drucke E für eine gröfsere Anzahl von Flächen zu bestimmen, so genügt es, einzelne Werte $\frac{\mu^2}{\gamma \sin \psi}$ zu berechnen und die übrigen zeichnerisch einzuschalten.

In Fig. 76 sind die Werte $\frac{\mu^2}{\gamma \sin \psi}$ für zehn Wandflächen auf den Verlängerungen dieser Flächen von der Geländelinie aus aufgetragen worden; ihre Endpunkte liegen in einer schwach gekrümmten Kurve, die von einer Geraden nur sehr wenig abweicht. Es wurde $\rho = 30^0$ und $\delta' = 22^1/_2{}^0$ angenommen. Die Cotangenten der Neigungswinkel der Wandflächen sind

$$\operatorname{cotg} \vartheta = +0{,}5 \ +0{,}4 \ +0{,}3 \ +0{,}2 \ +0{,}1 \ \pm 0 - 0{,}1 \ -0{,}2 \ -0{,}3 \ -0{,}4.$$

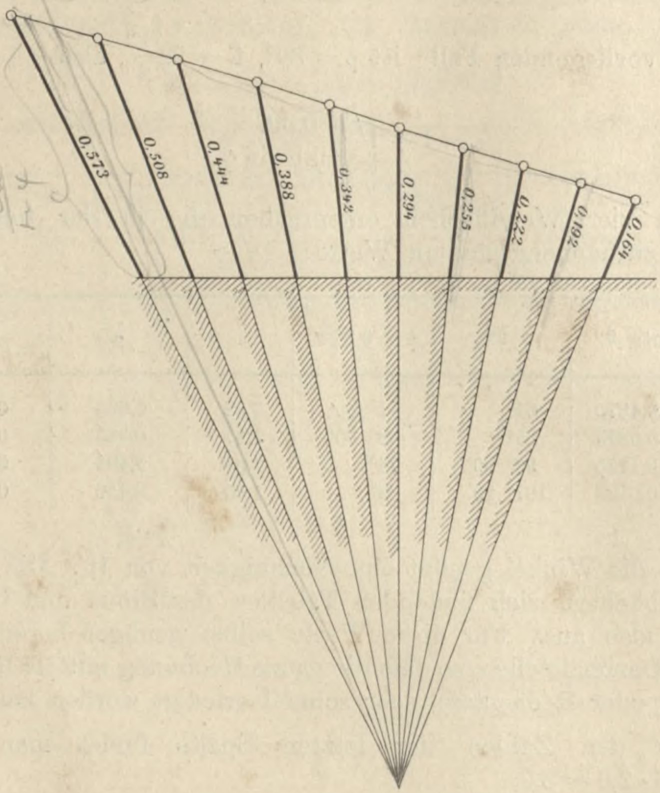


Fig. 76.

22. Zweites Beispiel. Für die in Fig. 77 dargestellte Mauer liefern die zweite und dritte der im ersten Beispiele angegebenen Lösungen (mit $\gamma = 1{,}6$ t/m³, $p = 2{,}4$ t/m², $\rho = 30^0$, $\delta' = 22^1/_2{}^0$) die Erddrucke

a) $$E_1 = 4{,}6 \text{ t}, \ E_2 = 6{,}4 \text{ t}, \ E_3 = 7{,}1 \text{ t}, \ E_4 = 9{,}0 \text{ t}.$$

Da nun alle Wandflächen nach vorn überhängen, so ist es nach Seite 61 zulässig, die Gröfse dieser Drucke nach dem für den seitlich unbegrenzten Erdkörper angegebenen Verfahren zu bestimmen.

Fig. 77 ergibt sich ohne weiteres aus Fig. 40. Die Strahlen 1, 2, 3, 4 sind parallel zu den vier Wandflächen. Die Lotrechte SL wurde durch den Kreismittelpunkt M gezogen. Das

Involutionszentrum J liegt dann in der Geraden SL im Abstande $\overline{JM} = \overline{LM} \sin \rho$ von M. Es wurde $h = 4$ m angenommen. Die mittleren Breiten der zu den einzelnen Wandstücken gehörigen Belastungsflächen sind

$$b' = \quad 2{,}40 \text{ m} \qquad 3{,}20 \text{ m} \qquad 3{,}55 \text{ m} \qquad 4{,}55 \text{ m},$$

man erhält also

$$E = a\,b' = 2{,}0\,b' = \quad 4{,}8 \text{ t} \qquad 6{,}4 \text{ t} \qquad 7{,}1 \text{ t} \qquad 9{,}1 \text{ t}.$$

Diese Werte stimmen mit den vorhin erhaltenen fast genau überein.

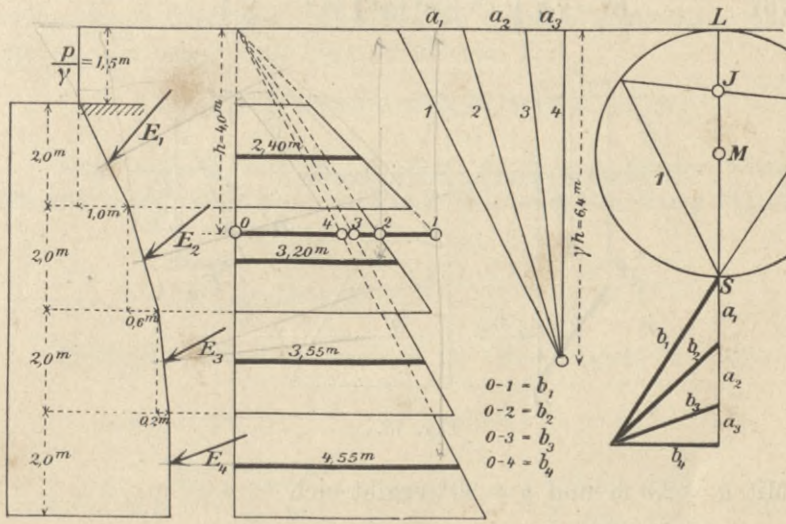


Fig. 77.

Nimmt man die Mittelpunkte der Wandflächen als Angriffspunkte der Drucke E an, so braucht man die Belastungsflächen nicht zu zeichnen. Man findet die Erddrucke dann schneller mit Hilfe der Formel

$$E_m = a\, b_m \frac{h'_m}{h}.$$

Eine Ausnahme bildet höchstens der Druck E_1, aber auch nur dann, wenn die Belastung p verhältnismäfsig klein ist. Zur Bestimmung seines Angriffspunktes kann dann ein Trapez von beliebiger Breite b_1 benutzt werden.

Ein anderes, sehr kurzes rechnerisches Verfahren ist das folgende. Die wagerechte Seitenkraft des auf das Wandstück AA

(Fig. 78) wirkenden Erddrucks ist nach der für den seitlich unbegrenzten Erdkörper geltenden Theorie bei wagerechter Oberfläche

$$= \frac{2E}{h} = \frac{2\gamma + e}{h} \qquad E_w = a\,b' = a\,\gamma\,h'\,\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right).$$

Die lotrechte Seitenkraft ist

$$E_l = G = c\,\gamma\,h',$$

unter c die wagerechte Projektion der Strecke AA' verstanden. Man erhält also

$$E = \sqrt{E_w^{\,2} + E_l^{\,2}},$$

$$76) \qquad E = \gamma\,h'\sqrt{c^2 + a^2\,\mathrm{tg}^4\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right)}.$$

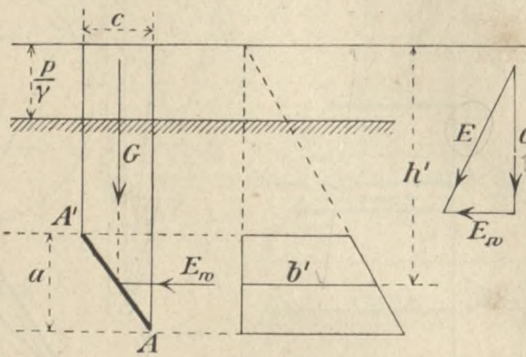


Fig. 78.

Mit $a = 2{,}0$ m und $\rho = 30^0$ ergibt sich

$$E = 1{,}6\,h'\sqrt{c^2 + 0{,}444},$$

also für	$h' = 2{,}5$ m	4,5 m	6,5 m	8,5 m
und	$c = 1{,}0$ m	0,6 m	0,2 m	0
	$E = 4{,}8$ t	6,4 t	7,1 t	9,1 t.

Wir heben schliefslich noch hervor, dafs die nach den vorstehenden Verfahren berechneten Erddrucke nicht parallel zu den Strahlen b_1, b_2, b_3, b_4 in Fig. 77 angenommen werden (wie dies im seitlich unbegrenzten Erdkörper geschehen müfste), sondern unter dem Winkel $\delta' = 22^1/_2{}^0$ gegen die Wandnormalen.

23. Drittes Beispiel. Es soll der Erddruck auf die in Fig. 79 dargestellte Wand analytisch bestimmt werden. Der wagerecht abgeglichene Erdkörper trage die gleichmäfsig über die Fläche $2{,}0 \cdot 1{,}0$ qm verteilte Belastung $P = 60$ t. Es ist also $p = 30$ t/m². Weiter sei $\gamma = 1{,}6$ t/m³, $\rho = 30^0$, $\delta' = \rho = 30^0$.

1. Erddruck auf die schräge Fläche $A_1 B_1$. Neigungswinkel $\vartheta_1 = 68^0$, $\psi_1 = \vartheta_1 - \delta' = 38^0$. Wird zunächst angenommen, die Gleitfläche $A_1 C_1$ schneide das Gelände links von der Last P, so erhält man mittels der Gleichungen 14)—17), S. 13 u. 14,

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin \rho \sin(\rho + \delta')}{\sin \vartheta_1 \sin \psi_1}} = 1 + \sqrt{\frac{0{,}50 \cdot 0{,}87}{0{,}93 \cdot 0{,}62}} = 1{,}87,$$

$$\nu = \frac{\sin(\vartheta_1 + \rho)}{\varepsilon} = \frac{0{,}990}{1{,}87} = 0{,}53, \quad s_1 = \overline{A_1 B_1} = 5{,}4 \text{ m},$$

$$\overline{B_1 C_1} = s \nu \frac{\varepsilon - 1}{\sin \rho} = 5{,}4 \cdot \frac{0{,}53 \cdot 0{,}87}{0{,}50} = 5{,}0 \text{ m}.$$

Da dieser Wert kleiner als 6,0 m ist, so ist eine die Last P nicht schneidende Gleitfläche zunächst als möglich anzusehen. Ihr entspricht die wagerechte Seitenkraft von E_1:

$$E_{1w} = \frac{1}{2} \gamma s_1^2 \nu^2 = 0{,}8 \cdot 29 \cdot 0{,}28 = 6{,}5 \text{ t}.$$

Nun nehmen wir an, es liege C_1 innerhalb der belasteten Strecke und bestimmen den Punkt B'_1 nach Gleichung 71) mittels

$$x = \frac{-pu}{\frac{1}{2}\gamma h + p} = \frac{-30 \cdot 6}{0{,}8 \cdot 5 + 30} = -5{,}3 \text{ m}.$$

Es ergibt sich dann nach S. 20, Gleichungen 32—35)

$$\operatorname{tg}(\vartheta'_1 - 90^0) = \frac{5{,}3 - 2{,}0}{5{,}0} = 0{,}66, \quad \vartheta'_1 = 90^0 + 33^0,$$

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin \rho \sin(\vartheta'_1 + \rho - \psi_1)}{\sin \vartheta'_1 \sin \psi_1}} = 1 + \sqrt{\frac{0{,}50 \cdot 0{,}91}{0{,}84 \cdot 0{,}62}} = 1{,}93,$$

$$\nu = \frac{\sin(\vartheta'_1 + \rho)}{\varepsilon} = 0{,}225, \quad s'_1 = \overline{B'_1 A_1} = 6{,}0 \text{ m},$$

$$\overline{B'_1 C'_1} = s'_1 \nu \frac{\varepsilon - 1}{\sin \rho} = \frac{6{,}0 \cdot 0{,}225 \cdot 0{,}93}{0{,}50} = 2{,}51 \text{ m}.$$

C'_1 liegt mithin innerhalb der belasteten Strecke dicht bei C_m. Dieser zweiten Gleitfläche entspricht

$$E_{1w} = \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{p}{h}\right) s_1^2 \nu^2 = \left(0{,}8 + \frac{30}{5}\right) 36 \cdot 0{,}051 = 12 \text{ t},$$

und dieser Druck ist fast doppelt so grofs als der durch die erste Rechnung gefundene.

Hinsichtlich des Angriffspunktes des Erddruckes auf $A_1 B_1$ glauben wir vorläufig, d. h. bis zur Beibringung ausreichender Versuchsergebnisse, mit der Annahme genügend sicher gehen zu müssen, daſs der vor Aufbringung der Last P entstandene Druck $E_{1w} = 6{,}5$ t vom Punkte A_1 den Abstand $\frac{1}{3}$ 5,0 m = 1,7 m hat und der Zuwachs 12 — 6,5 = 5,5 t infolge der Belastung P den Abstand $\frac{1}{2}\,h = 2{,}5$ m. Für die zugehörigen lotrechten Seitenkräfte E_{1l} erhalten wir mit $\operatorname{cotg}\psi_1 = 1{,}28$ die Werte

$$1{,}28 \cdot 6{,}5 = 8{,}5 \text{ t und } 1{,}28 \cdot 5{,}5 = 7{,}0 \text{ t, im ganzen rund } 15 \text{ t.}$$

2. Erddruck auf den lotrechten Teil der Wand. Für diesen Teil ist durchweg $\psi_m = 90^0 - \rho = 60^0$. Zuerst untersuchen wir, für welche der Punkte A_2, A_3 ... die Gleitfläche durch den Endpunkt C_m der belasteten Strecke geht. Für den Punkt A_2 ist

$$G_2 = \frac{1{,}6}{2}(2 \cdot 5 + 6 \cdot 7) + 60 = 102 \text{ t},$$

$$G'_2 = E_{1l} - \operatorname{cotg}\psi_2 \, E_{1w} = 15 - 0{,}58 \cdot 12 = 8 \text{ t},$$

$$G''_2 = G_2 - G'_2 = 94 \text{ t}.$$

Für jeden folgenden Punkt A wächst G_m um

$$\Delta\, G = \frac{1{,}6}{2}\, 2 \cdot 6 = 10 \text{ t}.$$

Die Zahlentafel enthält die Werte G_m, die Neigungswinkel φ_m der Flächen $A_m C_m$, die Kräfte (nach S. 69, Gleichung 67)

$$H_m = \frac{G''_m}{\operatorname{cotg}\psi_m + \operatorname{cotg}(\varphi_m - \rho)} = \frac{G''_m}{0{,}58 + \operatorname{cotg}(\varphi_m - \rho)},$$

und die Strecken f_m, das sind die Lote von den Punkten A_m auf eine durch C_m unter ρ gezogene Gerade. Man findet (mit $\overline{A_2 C_m} = l_2 = 9{,}22^m$)

$$f_2 = l_2 \sin(\varphi_2 - \rho) = 9{,}22 \cdot 0{,}33 = 3{,}0 \text{ m},$$

$$f_m = f_{m-1} + \Delta f,\ \Delta f = 2{,}0 \cos\rho = 2{,}0 \cdot 0{,}87 = 1{,}7 \text{ m}.$$

Schlieſslich wurden in die Tafel noch die Werte

$$H_m - \frac{1}{2}\gamma f_m^2$$

eingetragen.

m	G''_m	$\operatorname{tg}\varphi_m$	φ_m	$\operatorname{cotg}(\varphi_m - \rho)$	H_m	f_m	$H_m - \frac{1}{2}\gamma f_m^2$
2	94 t	1,17	49° 30′	2,82	28 t	3,0 m	+ 21
3	104 t	1,50	56° 20′	2,02	40 t	4,7 m	+ 22
4	114 t	1,83	61° 20′	1,64	51 t	6,4 m	+ 11
5	124 t	2,17	65° 20′	1,41	62 t	8,1 m	+ 10
6	134 t	2,50	68° 10′	1,27	72 t	9,8 m	— 3

Zum Wandteile $B_1 A_2$ gehört nun der Ausdruck

$$H_2 - \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{p}{h_2}\right) f_2{}^2 = 21 - p\frac{f_2{}^2}{h_2} = 21 - p\frac{9}{7,0}.$$

Er nimmt für $p = 0$ den Wert $+21$ t an

„ $p = \frac{60}{2,0}$ „ -18 t.

Es tritt ein Zeichenwechsel ein; mithin geht die zu A_2 gehörige Gleitfläche durch den Endpunkt C_m der belasteten Strecke. Das gilt auch für A_3, A_4, A_5, und man erhält daher für die Wandteile $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_5$:

$$E_{2w} = 28 - 12 = 16 \text{ t (weil } E_{1w} = 12 \text{ t)},$$
$$E_{3w} = 40 - 28 = 12 \text{ t},$$
$$E_{4w} = 51 - 40 = 11 \text{ t},$$
$$E_{5w} = 62 - 51 = 11 \text{ t},$$

Dem Punkte A_6 entsprechen zwei negative Werte

$$H - \left(\frac{1}{2}\gamma + \frac{p}{h}\right) f^2;$$

es wächst also H mit abnehmendem Winkel φ. Die zu A_6 gehörige Gleitfläche schneidet das Gelände rechts von der belasteten Strecke. Wir berechnen (S. 71, Gleichung 69):

$$x_6 = \frac{\frac{1}{2}\gamma\, d_1 h_1 + P - G'_2}{\frac{1}{2}\gamma\, h_6} = \frac{0,8 \cdot 2 \cdot 5 + 60 - 8}{0,8 \cdot 15} = 5,0 \text{ m},$$

$$s_6{}^2 = 15^2 + 5^2 = 250, \quad s_6 = \overline{A_6 B'_6} = 15,8 \text{ m},$$

$$\operatorname{tg}(90^0 - \vartheta'_6) = \frac{1}{3}, \quad \vartheta'_6 = 72^0, \quad \psi_6 = 90^0 - \rho = 60^0,$$

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin\rho \sin(\vartheta'_6 + \rho - \psi_6)}{\sin\vartheta'_6 \sin\psi_6}} = 1 + \sqrt{\frac{0,50 \cdot 0,67}{0,95 \cdot 0,87}} = 1,64,$$

$$\nu = \frac{\sin(\vartheta'_6 + \rho)}{\varepsilon} = \frac{0,978}{1,64} = 0,60,$$

$$\overline{B'_6 C_6} = s_6 \nu \frac{\varepsilon - 1}{\sin\rho} = 15,8 \cdot 0,60 \frac{0,64}{0,50} = 12,1 \text{ m},$$

$$H_6 = \frac{1}{2}\gamma\, s_6{}^2 \nu^2 = 0,8 \cdot 250 \cdot 0,36 = 72 \text{ t}.$$

$$E_{6w} = 72 - 62 = 10 \text{ t}.$$

Die Übereinstimmung des vorstehenden Wertes H_6 mit dem vorhin gefundenen darf nicht überraschen. In der Nähe der Gleitfläche üben geringe Änderungen von φ nur einen unwesentlichen Einfluſs auf H aus. Aus der Kleinheit des Wertes

$$H_6 - \frac{1}{2}\gamma f_6{}^2$$

hätte man ohne weiteres schliefsen können, dafs die zweite Berechnung von H_6 entbehrlich war.

Die zu den wagerechten Seitenkräften E_{2w} bis E_{6w} gehörigen lotrechten Seitenkräfte E_l einzeln zu berechnen, ist nicht nötig,

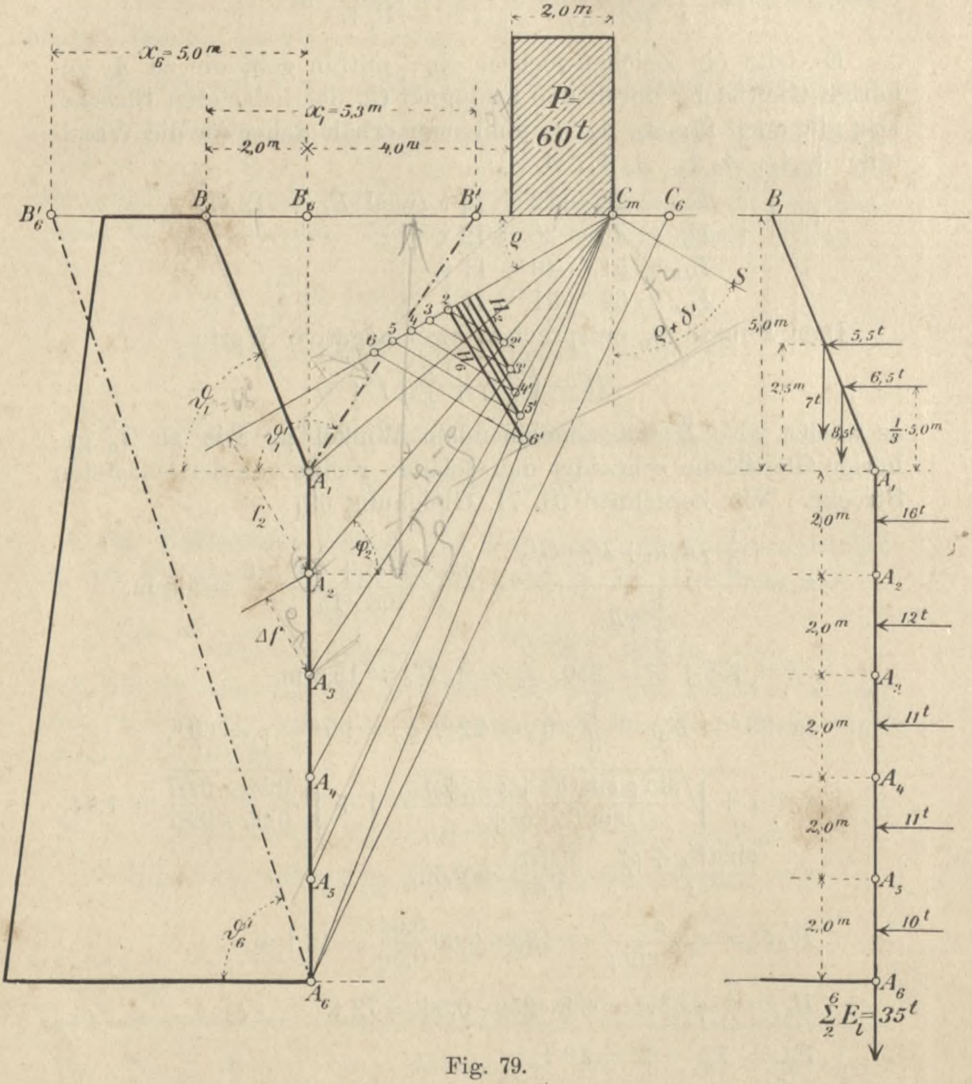


Fig. 79.

da die Kräfte E_{2l} bis E_{6l} in ein und dieselbe Linie fallen. Es genügt, ihre Summe anzugeben. Man findet

$$\sum_2^6 E_l = \operatorname{cotg} \psi \sum_2^6 E_w = 0,58\,(72 - 12) = 35 \text{ t}.$$

Die Berechnung der erforderlichen Wandstärke erfolgt jetzt genau wie im ersten Zahlenbeispiele. Wir brauchen also hierauf nicht weiter einzugehen.

Fig. 79 zeigt noch die zeichnerische Ermittelung der Werte H. Es wurden auf der von C_m aus unter dem Winkel ρ gegen die Wagerechte gezogenen Geraden die Strecken

$$\overline{C_m 2} = G''_2,\ \overline{C_m 3} = G''_3 \ldots.$$

abgetragen und durch die Punkte 2, 3 .... Parallelen zur Stellungslinie $C_m S$ bis zu deren Schnittpunkten 2′, 3′ .... mit den entsprechenden Strahlen $C_m A_m$ gezogen. Die Längen der von den Punkten 2′, 3′ .... auf die Gerade $C_m 6$ gefällten Lote sind dann gleich den Werten H.

Schliefslich empfehlen wir dem Leser, das Beispiel noch einmal mit einem kleineren Winkel δ' $\left(\text{etwa } \delta' = \frac{1}{2} \rho = 15^0\right)$ durchzurechnen, um den Einflufs dieses nicht sicher feststehenden Erfahrungswertes zu prüfen.

Dafs alle Verfahren, den Einflufs schwerer Einzellasten zu verfolgen, nur als Notbehelfe anzusehen sind, weil noch zu wenig Erfahrungen vorliegen, haben wir bereits ausgesprochen; wir wollen aber nicht unterlassen, dies nochmals hervorzuheben *). Die vom Verfasser angestellten Versuche mit Einzellasten, über die im zweiten Abschnitte berichtet wird, dürften die einzigen bisher ausgeführten sein.

§ 6.

Ermittelung des Erddruckes auf eine krumme Gleitfläche.

24. Näherungsverfahren. Es sei ADC eine Gleitfläche für den unteren Grenzzustand des Gleichgewichts (Fig. 80). Der Winkel δ', den der Druck E auf die Wand mit der Normale zur Wand einschliefst, sei bekannt. Dann bestimmen die Wandrichtung und die Richtung von E das zum Punkte A gehörige Involutionszentrum J_u. Mittels einer in J_u an den inneren Kreis gelegten Tangente findet man die Richtung t_A der Gleitfläche im Punkte A.

Die Oberfläche des Erdkörpers trage eine lotrechte, stetige Belastung p. Im Punkte C bestimmen die lotrechte Richtung und die Oberflächenrichtung als konjugierte Richtungen das Involutionszentrum und die Richtung t_C der Gleitfläche.

Nehmen wir nun an, es liege eine Gleitfläche vor, deren Endtangenten die vorgeschriebenen Richtungen haben, und suchen

*) Ein Kennzeichen für den Notbehelf ist die durch den Punkt C_m angenommene Gleitlinienschaar.

wir den an dieser krummen Fläche angreifenden Erddruck zu bestimmen. In einem beliebigen Punkte D der Gleitfläche ziehen wir die Tangente t_D und ermitteln mit deren Hilfe einen zum Punkte D gehörigen Punkt J_u. Sodann bestimmen wir zur lotrechten Richtung I die konjugierte Richtung I' und messen oder berechnen den Winkel β, den I' mit der Wagerechten bildet.

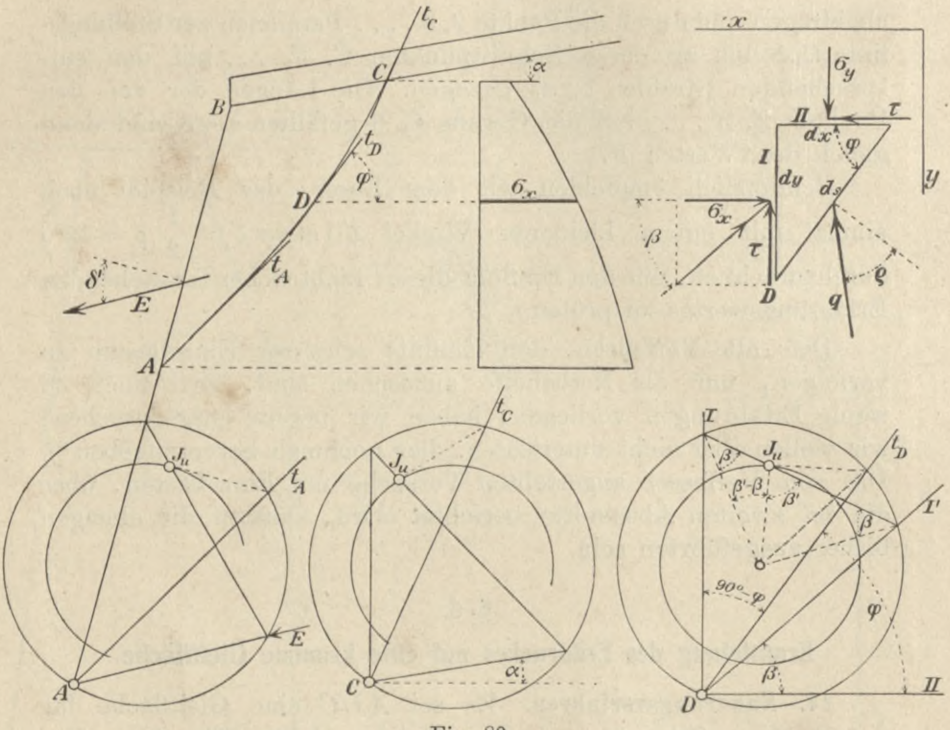


Fig. 80.

Zwischen β und φ besteht die Beziehung

77) $$90^\circ - \varphi = \frac{1}{2}(90^\circ - \rho + \beta' - \beta),$$

wo

78) $$\frac{\sin \beta'}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \rho}.$$

Es ergibt sich

79) $$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \rho \, \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \rho - (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \rho)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \rho + (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \rho)^2}.$$

Nun betrachten wir an der Stelle D ein dreiseitiges Erdprisma, das begrenzt wird von der wagerechten Fläche dx, der lotrechten Fläche dy und dem Gleitflächenelement ds. Die Druckspannung in ds sei q. In dy herrschen die Spannungen σ_x und τ, in dx

die Spannungen σ_y und τ. Zwischen τ und σ_x besteht die Beziehung

80) $$\tau = \sigma_x \operatorname{tg} \beta.$$

Indem wir die Summe der in der Richtung der x-Achse wirksamen Kräfte gleich Null setzen, erhalten wir

$$q\, ds \sin(\varphi - \rho) = \sigma_x dy - \tau dx,$$

und, wenn wir τ mittels Gleichung 80) durch σ_x ausdrücken,

81) $$q = \frac{\sigma_x \sin(\varphi - \beta)}{\cos\beta \sin(\varphi - \rho)}.$$

Die Berechnung von q ist also zurückgeführt auf die Berechnung von σ_x.

Die Spannungen σ_x tragen wir auf den Wagerechten durch die zugehörigen Punkte D von einer lotrechten Abszissenachse aus als Ordinaten auf und nennen die so erhaltene Kurve die σ_x-Linie; ihre Ermittelung ist das Ziel unserer Untersuchung.

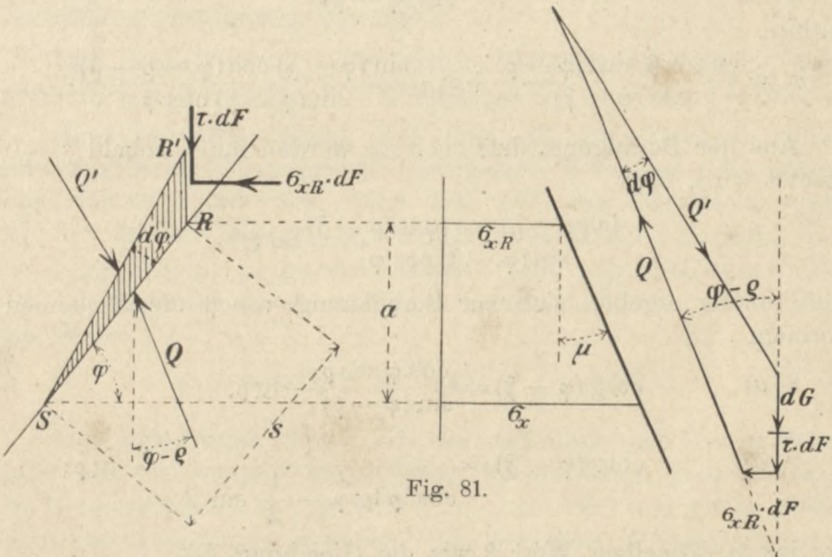


Fig. 81.

Sei nun RS (Fig. 81) ein ebenes Stück einer Gleitfläche und σ_{xR} der Wert von σ_x im Punkte R. Durch die lotrechte Fläche RR' und durch die beiden, den Winkel $d\varphi$ einschliefsenden Flächen SR und SR' sei ein Prisma abgetrennt. An den Flächen SR und SR' greifen die Drucke Q und Q' an, an der Fläche $dF = \overline{RR'}$ die Kräfte $\sigma_{xR} dF$ und τdF. Da Q' mit Q den Winkel $d\varphi$ bildet*), so folgt aus dem Kräfteplane in Fig. 81

$$(dG + \tau dF) \sin(\varphi - \rho) + \sigma_{xR} dF \cos(\varphi - \rho) = Q\, d\varphi,$$

*) Unstetigkeiten schliefsen wir aus.

worin zu setzen ist:

$$dG = \frac{1}{2}\gamma s^2 d\varphi,$$

$$dF = \frac{s\,d\varphi}{\cos\varphi},$$

$$\tau = \sigma_{xR} \operatorname{tg}\beta.$$

Man findet

$$Q = \frac{1}{2}\gamma s^2 \sin(\varphi - \rho) + \sigma_{xR}\frac{s\cos(\varphi - \rho - \beta)}{\cos\beta\cos\varphi},$$

und

$$82)\qquad q = \frac{dQ}{ds} = \gamma s \sin(\varphi - \rho) + \sigma_{xR}\frac{\cos(\varphi - \rho - \beta)}{\cos\beta\cos\varphi}.$$

Nun ist nach Gleichung 81)

$$83)\qquad \sigma_x = q\frac{\cos\beta\sin(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \beta)};$$

mithin

$$\sigma_x = \frac{\gamma s\cos\beta\sin^2(\varphi - \rho)}{\sin(\varphi - \beta)} + \sigma_{xR}\frac{\sin(\varphi - \rho)\cos(\varphi - \rho - \beta)}{\sin(\varphi - \beta)\cos\varphi}.$$

Aus der Bedingung, dafs $\sigma_x = \sigma_{xR}$ werden mufs, sobald $s = 0$ gesetzt wird, folgt

$$\frac{\sin(\varphi - \rho)\cos(\varphi - \rho - \beta)}{\sin(\varphi - \beta)\cos\varphi} = 1,$$

und hieraus ergeben sich zur Berechnung von β die bequemen Formeln

$$84a)\qquad \operatorname{cotg}(\varphi - \beta) = \frac{\cos\varphi\sec\rho}{\sin(\varphi - \rho)} - \operatorname{tg}\rho,$$

$$84b)\qquad \operatorname{cotg}(\varphi - \beta) = \frac{1}{\cos^2\rho\operatorname{tg}\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\rho} - \operatorname{tg}\rho;$$

sie liefern denselben Wert β wie die Gleichung 79).

Wird nun

$$s = \frac{a}{\sin\varphi}$$

gesetzt, so geht die für σ_x gefundene Gleichung über in

$$\sigma_x = \gamma a\frac{\cos\beta\operatorname{cotg}\varphi\sin(\varphi - \rho)}{\cos(\varphi - \rho - \beta)} + \sigma_{xR}.$$

Zu einer geraden Gleitfläche gehört eine gerade σ_x-Linie, deren Neigungswinkel μ durch die Formel

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\sigma_x - \sigma_{xR}}{a}$$

bestimmt ist. Es besteht also zwischen den Winkeln φ und μ die einfache Beziehung

$$85)\quad \operatorname{tg} \mu = \frac{\gamma \cos \beta \operatorname{cotg} \varphi \sin (\varphi - \rho)}{\cos (\varphi - \rho - \beta)} = \frac{\gamma \operatorname{cotg} \varphi}{\operatorname{cotg} (\varphi - \rho) + \operatorname{tg} \beta}.$$

Diese Gleichung gestattet, zu jeder Gleitfläche, deren Gleichung nicht bekannt zu sein braucht, mit einer für die Praxis genügenden Genauigkeit und in verhältnismäfsig kurzer Zeit die zugehörige σ_x-Linie zu ermitteln.

Man ersetze die krumme Gleitfläche durch ein Polygon von möglichst kleinen Seitenlängen mit geringen Richtungsunterschieden, ermittele ein zugehöriges σ_x-Polygon und runde schliefslich dessen Ecken ab. In Nr. 25 werden wir eine strenge Lösung mitteilen, welche es möglich macht, die Zuverlässigkeit der Näherungsrechnung zu prüfen.

Ein Zahlenbeispiel möge unser Verfahren und seine Verwendung zur Berechnung des Erddruckes auf eine Wand erläutern.

Eine lotrechte Wand AB (Fig. 82 auf Tafel I) stütze eine wagerecht abgeglichene, unbelastete Erdmasse. Es werde angenommen, dafs der obere Teil CC' der Gleitfläche eben sei, der untere dagegen gekrümmt. Die Wand sei rauh, und es möge $\delta' = \rho' = \rho$ gesetzt werden. Für die Neigungswinkel der Gleitlinientangenten t_A und t_C (siehe Abb. 80) erhält man die Werte

$$\varphi_A = \rho = 30^0, \quad \varphi_C = 45^0 + \frac{1}{2} \rho = 60^0.$$

Der gekrümmte Teil $C'A$ der Gleitlinie sei so geformt, dafs ihm ein Polygon umschrieben werden kann, dessen Seiten die Neigungswinkel 58^0, 56^0, 54^0, ... 32^0, 30^0 und gleich grofse lotrechte Projektionen a haben. Die lotrechten Projektionen der Gleitlinienstücke CC' und $C'A$ mögen η_o und η_u heifsen. Es ist

$$\eta_o + \eta_u = h \text{ und } a = \frac{1}{15} \eta_u.$$

In Fig. 82 geben die Strahlen des Büschels I die Richtungen φ an; von ihren Schnittpunkten mit der Lotrechten JK aus wurden die zu den einzelnen Winkeln φ gehörigen Zahlen $\operatorname{tg} \mu / \gamma$ als wagerechte Ordinaten aufgetragen. Die Kurve, welche deren Endpunkte verbindet, ist von solcher Art, dafs wenige Punkte zu ihrer Festlegung genügen. Es wurde Gleichung 84 b benutzt; sie lautet für $\rho = 30^0$

$$\operatorname{cotg}(\varphi-\beta)=\frac{1}{0{,}750\operatorname{tg}\varphi-0{,}433}-0{,}577$$

und liefert

für $\varphi=$	58^0	52^0	46^0	44^0	38^0	32^0
$\beta=$	4^0	$14^0\,50'$	$22^0\,50'$	$24^0\,40'$	$28^0\,30'$	$29^0\,55'$
$\frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\mu=$	0,320	0,285	0,247	0,232	0,167	0,055.

Zu $\varphi=45^0+\frac{1}{2}\rho=60^0$ gehört $\beta=0$ und

$$\frac{\operatorname{tg}\mu}{\gamma}=\operatorname{tg}^2\left(45^0-\frac{1}{2}\rho\right)=\operatorname{tg}^2 30^0=\frac{1}{3},$$

und zu $\varphi=\rho=30^0$ gehört $\operatorname{tg}\mu=0$.

Mit Hilfe dieser Werte wurde die $\operatorname{tg}\mu/\gamma$-Kurve gezeichnet. Die Projektionen ihrer Ordinaten auf eine wagerechte Gerade KK' im Abstande 1 von J bestimmen einen Büschel II, dessen Strahlen die Neigungswinkel der Seiten des σ_x/γ-Polygons angeben. In unserer Zeichnung wurde die Strecke KJ nicht gleich 1, sondern gleich 0,5 gemacht. Die dadurch erforderlich gewordene Halbierung der Werte σ_x/γ ist durch die Wahl des Mafsstabes erledigt worden. Der Längenmafsstab der Zeichnung ist $a=1$.

Bezeichnet nun $\mathfrak{F}$ den Inhalt der zu einem Gleitflächenstück gehörigen σ_x/γ-Fläche, so ist der Druck auf dieses Stück nach Gleichung 81) offenbar

$$86)\qquad \Delta Q=\gamma\frac{\mathfrak{F}\sin(\varphi-\beta)}{\cos\beta\sin(\varphi-\rho)}\frac{s}{a}=\frac{\gamma\mathfrak{F}\sin(\varphi-\beta)}{\cos\beta\sin(\varphi-\rho)\sin\varphi}.$$

Zerlegt man ΔQ nach wagerechter und lotrechter Richtung, so erhält man für die wagerechte Seitenkraft den Wert

$$87)\qquad \Delta H=\Delta Q\sin(\varphi-\rho)=\frac{\gamma\mathfrak{F}\sin(\varphi-\beta)}{\cos\beta\sin\varphi}$$

und hierauf für die lotrechte Seitenkraft den Wert

$$\Delta V=\Delta H\operatorname{cotg}(\varphi-\rho).$$

Wir trennen die Fläche $\mathfrak{F}$ in zwei durch verschiedene Schraffierung kenntlich gemachte Teile. Mit $\mathfrak{F}'$ bezeichnen wir den Inhalt des rechts von der Lotrechten durch den Punkt N' gelegenen Teiles; er ist unabhängig von η_0. Nennen wir die mittlere Breite dieser Fläche z, so erhalten wir

$$\mathfrak{F}'=z\,a^2 \text{ *)}.$$

---

*) Die Multiplikation mit a^2 ist erforderlich, weil der Längenmafsstab der Zeichnung $a=1$ ist. Die Tafel I wurde ursprünglich im Mafsstabe $a=10^{mm}$ gezeichnet. Für die zu $\varphi=50^0$ gehörige Fläche $\mathfrak{F}'$ ergab sich $z=26{,}9^{mm}$. Da nun $\overline{JK}=0{,}5$ statt 1,0 angenommen wurde, so ist $z=\frac{1}{2}\cdot\frac{26{,}9}{10}a=1{,}345\,a$ und $\mathfrak{F}'_5=1{,}345\,a^2$.

Der links von der Lotrechten durch N' gelegene Teil der Fläche $\mathfrak{F}$ hat den Inhalt

$$\mathfrak{F}'' = \frac{1}{3}\,\eta_0\,a,$$

denn es ist

$$\overline{N''N'} = \eta_0\,\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{3}\,\eta_0\ ^*).$$

Der Druck $\Delta\,Q$ ist also bestimmt durch die Seitenkräfte

$$\Delta\,H = \Delta\,H' + \Delta\,H''$$

und

$$\Delta\,V = \Delta\,V' + \Delta\,V'',$$

wo

88) $$\Delta\,H' = z\,a^2\,\frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos\beta\sin\varphi}\gamma,$$

89) $$\Delta\,H'' = \frac{1}{3}\,\eta_0\,a\,\frac{\sin(\varphi - \beta)}{\cos\beta\sin\varphi}\,\gamma,$$

90) $$\Delta\,V' = \Delta\,H'\,\mathrm{cotg}\,(\varphi - \rho),$$

91) $$\Delta\,V'' = \Delta\,H''\,\mathrm{cotg}\,(\varphi - \rho).$$

Es wurden die den Winkeln

$$\varphi = 58^0 \quad 52^0 \quad 46^0 \quad 44^0 \quad 38^0 \quad 32^0$$

entsprechenden Werte

$$\frac{\Delta\,H'}{\gamma\,a^2},\quad \frac{\Delta\,H''}{\gamma\,\eta_0\,a},\quad \frac{\Delta\,V'}{\gamma\,a^2},\quad \frac{\Delta\,V''}{\gamma\,\eta_0\,a}$$

berechnet und die übrigen Werte zeichnerisch eingeschaltet. Zur sicheren Festlegung der in Fig. 82 dargestellten Kurven genügen

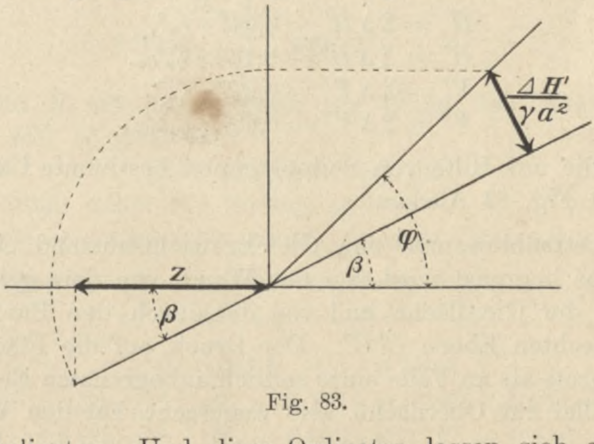


Fig. 83.

wenige Ordinaten. Und diese Ordinaten lassen sich auch leicht konstruieren. Fig. 83 zeigt die Darstellung von $\Delta\,H'/\gamma\,a^2$; sie

*) Wegen $\overline{JK} = 0{,}5$ ist auf der Zeichnung $\overline{N''N'} = \frac{2}{3}\,\eta_0$.

bedarf wohl keiner weiteren Erklärung. Die Konstruktion des Winkels β haben wir in Fig. 80 angegeben. Da man auch die zur Ermittelung der Werte $\operatorname{tg} \mu / \gamma$ erforderlichen trigonometrischen Rechnungen zeichnerisch erledigen kann, so läfst sich fast die ganze Untersuchung mit Lineal und Zirkel durchführen.

Einen einfachen Sonderfall bildet der Druck auf das unter dem Winkel ρ geneigte unterste Stück der Gleitfläche. Für $\varphi = \rho$ wird auch $\beta = \rho$. Die Formel 81 geht dann über in

$$92)\qquad q = \frac{\sigma_x}{\cos \rho}.$$

Der Druck auf dieses Gleitflächenstück ist lotrecht ($\Delta H = 0$) und hat die Gröfse

$$93)\qquad V = q s = \frac{\sigma_x a}{\cos \rho \sin \rho};$$

er setzt sich zusammen aus

$$94)\qquad \Delta V' = \frac{z_{15} a^2 \gamma}{\cos \rho \sin \rho} = 7{,}13\, \gamma a^2 \text{ und}$$

$$95)\qquad \Delta V'' = \frac{\frac{1}{3} \eta_o a \gamma}{\cos \rho \sin \rho} = 0{,}77\, \gamma \eta_o a.$$

Die Zusammenzählung der an der Gleitfläche $A C'$ angreifenden Kräfte liefert, mit $a = \frac{1}{15} \eta_u$, die folgenden Mittelkräfte:

$$\begin{aligned} H' &= \Sigma \Delta H' = 0{,}047\, \gamma \eta_u^2, \\ H'' &= \Sigma \Delta H'' = 0{,}169\, \gamma \eta_u \eta_o, \\ V' &= \Sigma \Delta V' = 0{,}277\, \gamma \eta_u^2, \\ V'' &= \Sigma \Delta V'' = 0{,}697\, \gamma \eta_u \eta_o. \end{aligned}$$

Über die mit Hilfe von Seilpolygonen bestimmte Lage dieser Kräfte gibt Fig. 84 Auskunft.

Wir betrachten nun den Gleichgewichtszustand eines Erdprismas, das begrenzt wird von der Wand, von dem gekrümmten Teile $A C'$ der Gleitfläche und von der durch den Punkt C' gelegten lotrechten Ebene $C' C''$. Der Druck auf die Fläche $C' C''$ ist ebensogrofs als im Falle eines seitlich unbegrenzten Erdkörpers; er ist parallel zur Oberfläche, also wagerecht, hat den Wert

$$H_o = \frac{1}{2} \gamma \eta_o^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1}{6} \gamma \eta_o^2$$

und greift im Abstande $\frac{2}{3} \eta_o$ von der Oberfläche an.

Das Gewicht des betrachteten Erdprismas besteht aus den beiden Teilen

$$G_o = 1{,}088\, \eta_o \eta_u$$

und $$G_u = 0{,}642\, \eta_u^2.$$

G_u hat von der Wand den Abstand $0{,}396\, \eta_u$. Der Erddruck E auf die Wand AB setzt sich zusammen aus

$$E_w = H_o + H' + H'' = \frac{1}{6} \gamma \eta_o^2 + 0{,}047\, \gamma \eta_u^2 + 0{,}169\, \gamma \eta_o \eta_u$$

und $$E_l = G_o + G_u - V' - V'' = 0{,}391\, \gamma \eta_o \eta_u + 0{,}365\, \gamma \eta_u^2.$$

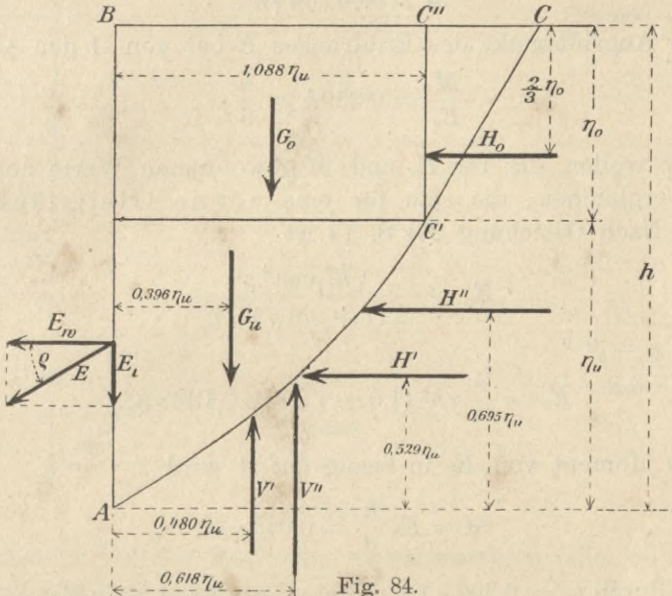


Fig. 84.

Da nun E mit der Normale zur Wand den Winkel ρ einschliefsen soll, so mufs sein

$$E_l = E_w \operatorname{tg} \rho = 0{,}577\, E_w,$$

und man erhält daher die Bedingung

$$0{,}391\, \eta_o \eta_u + 0{,}365\, \eta_u^2 = 0{,}096\, \eta_o^2 + 0{,}027\, \eta_u^2 + 0{,}098\, \eta_o \eta_u,$$

woraus, wegen $\eta_o = h - \eta_u$, die Gleichung folgt:

$$\eta_u^2 - 9{,}51\, h \eta_u + 1{,}88\, h^2 = 0\,;$$

sie liefert

$$\eta_u = 0{,}202\, h, \quad \eta_o = 0{,}798\, h,$$

$H_o = 0{,}106\, \gamma h^2$	$G_o = 0{,}175\, \gamma h^2$	$V' = 0{,}011\, \gamma h^2$
$H' = 0{,}002\, \gamma h^2$	$G_u = 0{,}026\, \gamma h^2$	$V'' = 0{,}112\, \gamma h^2$
$H'' = 0{,}027\, \gamma h^2$	$G = 0{,}201\, \gamma h^2$	$V = 0{,}123\, \gamma h^2$
$E_w = 0{,}135\, \gamma h^2$	$V = 0{,}123\, \gamma h^2$	
	$E_l = 0{,}078\, \gamma h^2$	

$$\frac{E_t}{E_w} = \frac{78}{135} = 0{,}577 \text{ (Probe).}$$

Das Angriffsmoment des Erddruckes in bezug auf den Fufs A der Wand ist

$$M = + H_o \left(h - \frac{2}{3}\,\eta_o\right) + H' \cdot 0{,}529\,\eta_u + H'' \cdot 0{,}695\,\eta_u$$

$$+ V' \cdot 0{,}480\,\eta_u + V'' \cdot 0{,}618\,\eta_u - G_o \cdot 0{,}544\,\eta_o - G_u \cdot 0{,}396\,\eta_u \cdot$$

Man erhält:

$$M = 0{,}04\,734\,\gamma h^2.$$

Der Angriffspunkt des Erddruckes E hat von A den Abstand

$$\frac{M}{E_w} = 0{,}350\,h > \frac{h}{3}\cdot$$

Wir wollen die für E_w und M gewonnenen Werte noch mit denen vergleichen, die sich für eine e b e n e G l e i t f l ä c h e ergeben. Nach Gleichung 23) S. 14 ist

$$E_w = \frac{\gamma h^2 \cos^2 \rho}{2\,(1 + \sin \rho \sqrt{2})^2}$$

und für $\rho = 30^0$

$$E_w = \frac{3}{2}\,\gamma h^2 \,(1{,}5 - \sqrt{2}) = 0{,}129\,\gamma h^2.$$

Das Moment von E_w in bezug auf A wird

$$M = E_w\,\frac{h}{3} = 0{,}043\,\gamma h^2.$$

Die durch $\eta_u = 0{,}202\,h$ bestimmte Gleitfläche ist in Fig. 85 mafsstäblich dargestellt worden. Die strichpunktierte Gerade gibt die Gleitfläche der Coulombschen Theorie an. Die unebene Fläche liefert Werte E_w und M, die um 6 v. H. bezw. 10 v. H. gröfser sind als die einer ebenen Gleitfläche entsprechenden Zahlen. Durch Änderung der Form des krummen Teiles der Gleitfläche lassen sich noch etwas gröfsere Werte von E und M erzielen; man braucht nur mit der Kurve näher an die beiden Tangenten t_A und t_C heranzugehen. Statt des einen Parameters η_o / η_u, den wir mit Hilfe der Grenzbedingung $E_t / E_w = \operatorname{tg} \rho$ bestimmten, könnte man deren zwei einführen und den Einflufs des zweiten auf E_w und M und schliefslich auf die Beanspruchung der Wand verfolgen. Dafs es sich aber nicht lohnt, eine solche umständlichere Rechnung anzustellen, geht aus der folgenden Betrachtung hervor.

Wir wollen annehmen, dafs die beiden Tangenten t_A und t_C durch ein ganz kurzes Kurvenstück verbunden seien und dieses

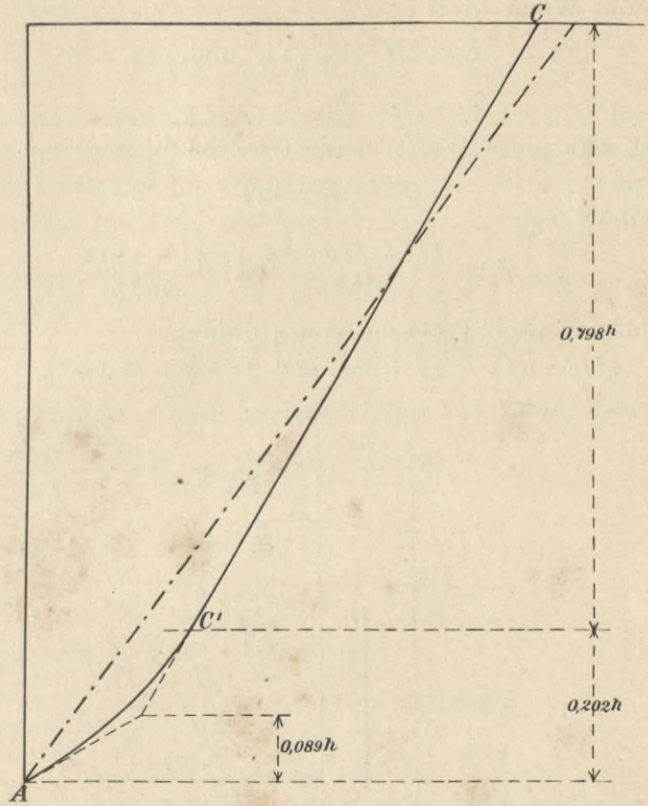


Fig. 85.

Kurvenstück bei der Rechnung vernachlässigen (Fig. 86). Indem wir zur Abkürzung setzen

$$\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = \varepsilon',$$

erhalten wir für die Fläche $C'C'' = 1 \cdot \eta$ den wagerechten Druck

$$H = \frac{1}{2}\gamma\varepsilon'\eta^2,$$

und für den Punkt C' die Spannung

$$\sigma_x = \gamma\varepsilon'\eta.$$

Der Druck auf die Gleitfläche AC' wird nach Gleichung 93)

$$V = \frac{\sigma_x(h-\eta)}{\cos\rho\sin\rho} = \frac{\gamma\varepsilon'\eta(h-\eta)}{\cos\rho\sin\rho}$$

und das Gewicht des Erdprismas $AC'C''B$:

$$G = \frac{1}{2}\gamma(h+\eta)(h-\eta)\operatorname{cotg}\rho = \frac{1}{2}\gamma(h^2-\eta^2)\operatorname{cotg}\rho.$$

Auf die Wand wirkt

$$E_w = H = \frac{1}{2} \gamma \varepsilon' \eta^2 \text{ und}$$

$$E_l = G - V.$$

Setzt man diese Werte in die Grenzbedingung

$$E_w = E_l \operatorname{cotg} \rho$$

ein, so erhält man

$$\frac{1}{2} \varepsilon' \eta^2 = \frac{(h^2 - \eta^2) \cos^2 \rho}{2 \sin^2 \rho} - \frac{\eta (h - \eta) \varepsilon'}{\sin^2 \rho},$$

und wenn man nach Potenzen von η ordnet,

$$\eta^2 (\varepsilon' \sin^2 \rho - 2 \varepsilon' + \cos^2 \rho) + 2 \varepsilon' h \eta = h^2 \cos^2 \rho.$$

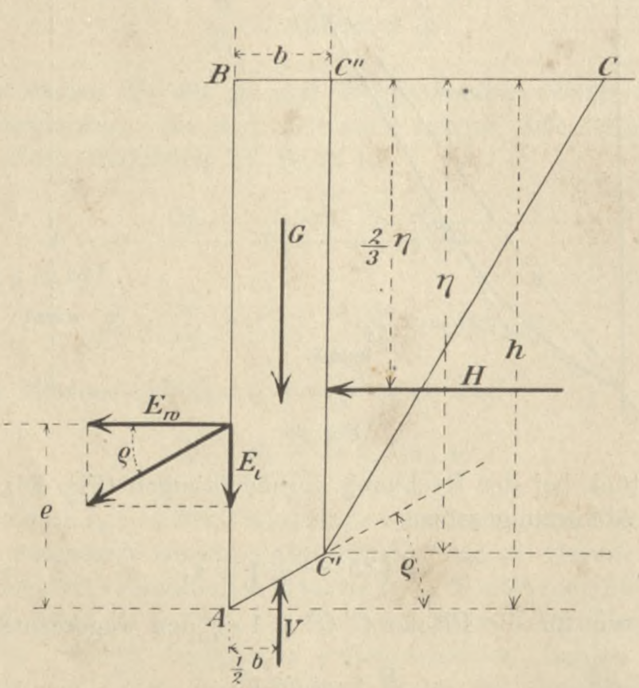


Fig. 86.

Setzt man

$$\varepsilon' = \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} = \frac{\cos^2 \rho}{(1 + \sin \rho)^2},$$

so geht diese Gleichung zur Berechnung von η über in

96) $\eta^2 (2 \sin^2 \rho + 2 \sin \rho - 1) + 2 h \eta = h^2 (1 + \sin \rho)^2$;

ihre Lösung ist:

97) $$\eta = h \frac{-1 + \sin \rho \sqrt{5 + 6 \sin \rho + 2 \sin^2 \rho}}{2 \sin \rho + 2 \sin^2 \rho - 1}.$$

Das Angriffsmoment für den Punkt A wird

$$M = H\left(h - \frac{2}{3}\eta\right) + V\frac{b}{2} - G\left(\frac{b}{2} - \xi\right),$$

wo ξ den durch die Schwerachse des Trapezes $ABC''C'$ bestimmten Abstand der Kraft G von der Kraft V bezeichnet. Beachtet man nun, dafs einerseits $E_{w} = H$ ist, anderseits aber $E_{w} = E_{l} \operatorname{cotg} \rho = (G - V) \operatorname{cotg} \rho$, und setzt man noch $b = (h - \eta) \operatorname{cotg} \rho$, so findet man

98) $$H = (G - V) \operatorname{cotg} \rho$$

und kann den Ausdruck für M umformen in

99) $$M = H\left(\frac{h}{2} - \frac{\eta}{6}\right) + G\xi.$$

Der Abstand e des Angriffspunktes des Erddruckes E vom Punkte A ist nun

$$e = \frac{M}{H},$$

und es ergibt sich daher

100) $$e = \frac{h}{2} - \frac{\eta}{6} + \frac{G\xi}{H}.$$

Setzt man in diese Gleichung:

$$G = \frac{1}{2}\gamma(h + \eta)(h - \eta) \operatorname{cotg} \rho,$$

$$\xi = \frac{b}{2} - \frac{b}{3}\,\frac{h + 2\eta}{h + \eta} = \frac{b}{6}\,\frac{h - \eta}{h + \eta},$$

$$H = \frac{1}{2}\gamma\eta^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = \frac{\cos^2\rho}{(1 + \sin\rho)^2},$$

so gelangt man zu der Formel

101) $$e = \frac{1}{2}h - \frac{1}{6}\eta + \frac{1}{6}\,\frac{(h-\eta)^3}{\eta^2}\left(1 + \frac{1}{\sin\rho}\right)^2.$$

Das dritte Glied darf vernachlässigt werden; es genügt, mit

102) $$e = \frac{1}{2}h - \frac{1}{6}\eta$$

zu rechnen. Für unser Zahlenbeispiel ergibt sich

$\eta = h(-2 + \sqrt{8,5}) = 0,915\,h$, $h - \eta = 0,085\,h$ (vorhin $0,089\,h$),

$E_{w} = \frac{1}{6}\gamma\, 0,915^2\, h^2 = 0,140\,\gamma h^2$ (vorhin $0,135\,\gamma h^2$),

$e = 0,348\,h$ (vorhin $0,350\,h$) *).

---

*) Bei Berücksichtigung des dritten Gliedes der Formel 101) erhält man $e = 0,349\,h$.

Aus den geringen Abweichungen erkennt man, dafs die Gestalt der zwischen die beiden Tangenten t_A und t_C eingeschalteten Kurve keinen erheblichen Einflufs haben kann*).

Wir wollen noch untersuchen, welchen Einflufs eine auf die Hinterfüllungserde aufgebrachte *gleichmäfsige Belastung* p ausübt. Der Druck auf die lotrechte Fläche $C'C''$ (Fig. 84) geht über in

$$H = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{h}\right)\eta_o^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{1}{2}\rho\right) = \frac{1}{6}\gamma\eta_o^2 + \frac{1}{3}p\eta_o,$$

und dem Punkte C' entspricht nunmehr

$$\sigma_x = \frac{1}{3}\gamma\eta_o + \frac{1}{3}p\eta_o = \frac{1}{3}\gamma(\eta_o + h_e),$$

wo $h_e = p/\gamma$ die Höhe einer Erdschicht von gleichem Gewichte wie p bedeutet. Der Inhalt der Fläche $\mathfrak{F}''$ beträgt jetzt

$$\mathfrak{F}'' = \frac{1}{3}(\eta_o + h_e)\,a$$

und man erhält:

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{6}\gamma\eta_o(\eta_o + 2h_e),\\
H' &= 0{,}047\,\gamma\eta_u^2\\
H'' &= 0{,}169\,\gamma\eta_u(\eta_o + h_e),\\
V' &= 0{,}277\,\gamma\eta_u^2,\\
V'' &= 0{,}697\,\gamma\eta_u(\eta_o + h_e),\\
G_o &= 1{,}088\,\gamma\eta_u(\eta_o + h_e),\\
G_u &= 0{,}642\,\gamma\eta_u^2,\\
E_w &= H + H' + H'',\\
E_l &= G_o + G_u - V' - V''.
\end{aligned}$$

Die aus der Grenzbedingung $E_l = 0{,}577\,E_w$ folgende quadratische Gleichung zur Berechnung von η_u geht über in

$$\eta_u^2 - 9{,}51\,(h + h_e)\,\eta_u + 1{,}88\,h\,(h + 2h_e) = 0.$$

Es sei z. B. $h = 6{,}0$ m, $h_e = 1{,}5$ m (für $\gamma_e = 1{,}6$ t/m³ also $p = 2{,}4$ t/m²). Dann ergibt sich

$$\eta_u = 1{,}45 \text{ m} = 0{,}242\,h \text{ (vorhin } 0{,}202\,h\text{)}, \quad \eta_o = 4{,}55 \text{ m},$$

$$\begin{array}{ll|l|l}
H = & \left\{\begin{array}{r} 2{,}28\,\gamma \\ +\,3{,}45\,\gamma \end{array}\right. & \begin{array}{l} G_o = 9{,}54\,\gamma \\ G_u = 1{,}35\,\gamma \end{array} & \begin{array}{l} V' = 0{,}58\,\gamma \\ V'' = 6{,}12\,\gamma \end{array} \\
\hline
H' = & 0{,}10\,\gamma & G = 10{,}89\,\gamma & V = 6{,}70\,\gamma \\
H'' = & 1{,}48\,\gamma & V = 6{,}70\,\gamma & \\
\hline
E_w = & 7{,}31\,\gamma & E_l = 4{,}19\,\gamma &
\end{array}$$

$$\frac{E_l}{E_w} = \frac{419}{731} = 0{,}574.$$

---

*) Zahlenrechnungen für verschiedene Kurven unter Anwendung verschiedener Abstufungen der Werte φ haben dies bestätigt. Ein Beispiel, welches die Einschaltung eines Kreisbogens behandelt, steht am Schlufs von Nr. 26.

Für die Hebelarme der Kräfte H', H'', G_o, G_u, V', V'' gelten nach wie vor die in die Fig. 84 eingetragenen Vielfachen von η_u. Die Kraft H ist zu zerlegen in den von p abhängigen Teil $2{,}28\,\gamma$ und den Rest $3{,}45\,\gamma$. Der erste Teil greift im Abstande $\frac{1}{2}\,\eta_o$, der andere in der Entfernung $\frac{2}{3}\,\eta_o$ von der Oberfläche an. Das Angriffsmoment M für den Fufs A der Wand wird

$$M = 17{,}93\,\gamma.$$

Die Annahme einer ebenen Gleitfläche liefert

$$E_w = 0{,}129\,\gamma h\,(h + 2\,h_e) = 6{,}97\,\gamma,$$

$$M = 0{,}129\,\gamma h\left(h \cdot \frac{h}{3} + 2\,h_e \cdot \frac{h}{2}\right) = 16{,}25\,\gamma.$$

Um schliefslich noch die angenäherte Gleichung 96) für den Fall einer mit p belasteten Hinterfüllungserde zu erweitern, setzen wir

$$H = \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{2p}{\eta}\right)\varepsilon'\eta^2 = \gamma\left(\frac{1}{2}\,\eta^2\varepsilon' + h_e\eta\,\varepsilon'\right),$$

$$G = \frac{1}{2}\,\gamma\,(h^2 - \eta^2)\operatorname{cotg}\rho + \gamma h_e\,(h - \eta)\operatorname{cotg}\rho,$$

$$V = \frac{\gamma\,\varepsilon'\,(\eta + h_e)\;(h - \eta)}{\sin\rho\;\cos\rho}$$

und finden aus der Bedingung $E_w = E_l \operatorname{cotg}\rho$ auf demselben Wege, der zu der Gleichung 96) führte:

$$\text{103)}\quad \eta^2\,(2\sin^2\rho + 2\sin\rho - 1) + 2\,\eta\,[h + 2\,h_e\sin\rho\,(1 + \sin\rho)] = h^2\,(1 + \sin\rho)^2 + 2\,h_e h\sin\rho\,(2 + \sin\rho),$$

welche man zweckmäfsig nicht allgemein, sondern von Fall zu Fall auflöst. Für $\rho = 30^0$ erhält man z. B.

$$\text{104)}\quad \eta = -(2\,h + 3\,h_e) - \sqrt{8{,}5\,h^2 + 17\,h\,h_e + 9\,h_e^2}.$$

Bei der Berechnung des Angriffsmomentes M für den Fufs A der Wand wollen wir gleich von vornherein das Gewicht G im Abstande $\frac{1}{2}\,b = \frac{1}{2}\,(h - \eta)\operatorname{cotg}\rho$ von der Wand annehmen. Der Druck auf die Fläche $C'C''$ mufs zerlegt werden in

$$H_p = \gamma\,\varepsilon' h_e\eta \quad\text{und}\quad H_\gamma = \frac{1}{2}\,\gamma\,\varepsilon'\eta^2.$$

H_p greift im Abstande $\frac{1}{2}\,\eta$ von der Oberfläche an, H_γ im Abstande $\frac{2}{3}\,\eta$. In der Richtungslinie von H_p fügen wir zwei sich tilgende Kräfte H_γ hinzu, setzen $H_p + H_\gamma = H$ und erhalten

$$M = H\left(h - \frac{1}{2}\,\eta\right) - H_\gamma\,\frac{\eta}{6} - (G - V)\;(h - \eta)\operatorname{cotg}\rho.$$

Wird $(G - V) \operatorname{cotg} \rho = H$ gesetzt, so ergibt sich die einfache Formel

105) $$M = \frac{1}{2} H h - \frac{1}{6} H_\gamma \eta.$$

Für $h = 6{,}0$ m und $h_e = 1{,}5$ m ergibt sich $\eta = 5{,}39$ m, und man erhält $H_p = 2{,}70\,\gamma$, $H_\gamma = 4{,}84\,\gamma$, $H = 7{,}54\,\gamma$ (vorhin $7{,}31\,\gamma$), $M = 18{,}3\,\gamma$ (vorhin $17{,}9\,\gamma$).

In ähnlicher Weise läfst sich auch der Erddruck und sein Angriffsmoment M für eine geneigte Wand und eine geneigte ebene Oberfläche berechnen. Wir verzichten aber fürs erste darauf, allgemeine Formeln abzuleiten und beschränken uns auf die Anführung der aus der geometrischen Konstruktion der Tangenten t_A und t_C sich ergebenden Neigungswinkel φ_A und φ_C (Fig. 80).

Bezeichnet ϑ_l den Neigungswinkel der Wand gegen die Lotrechte (positiv für eine nach der Erdseite überhängende Wand), und sind α' und ρ'' Hilfswinkel, die durch die Gleichungen bestimmt sind,

106) $$\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\sin \rho}, \quad \sin \delta'' = \frac{\sin \delta'}{\sin \rho},$$

so ist

107) $$\varphi_C = 45^0 + \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{2} (\alpha' - \alpha),$$

und

108) $$\varphi_A = 45^0 + \frac{1}{2} \rho - \frac{1}{2} (\delta'' - \delta') - \vartheta_l.$$

Ist $\delta' = \rho$, so ist t_A parallel zu dem auf die Wand wirkenden Erddruck.

Bei nicht zu grofsem Richtungsunterschiede der beiden Tangenten t_A und t_C darf man wieder eine aus zwei Ebenen bestehende Gleitfläche einführen. Den parallel zur Oberfläche gerichteten Druck E_0 auf die lotrechte Fläche $C'C''$ bestimmt man mit Hilfe der Gleichung 43). Hat man z. B. gefunden

$$H_0 = E_0 \cos \alpha = \frac{1}{2} \gamma' s^2 \nu^2 = \frac{1}{2} \gamma s^2 \nu^2 + p \frac{s}{h} s \nu^2,$$

so findet man, wegen $s / h = 1 / \cos \alpha$ im Punkte C'

$$\sigma_x = \gamma s \nu^2 + \frac{p \nu^2}{\cos \alpha}$$

und kann nunmehr die auf die Gleitfläche AC' wirkenden Drucke V und H bestimmen.

25. Die *Kötter*sche Formel für den Gleitflächendruck q*). An der Stelle xy des Erdkörpers denken wir ein Parallelepipedum $ABCD$ abgegrenzt (Fig. 87), dessen Kanten die Abmessungen dx und dy haben. Die Kantenlänge rechtwinklig zur Bildebene sei eins. Die Spannungen in den Flächen AB und CD sind

$$\sigma_x,\ \tau \text{ und } \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx,\ \tau + \frac{\partial \tau}{\partial x}\,dx,$$

in den Flächen AD und BC:

$$\sigma_y,\ \tau \text{ und } \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,dy,\ \tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\,dy.$$

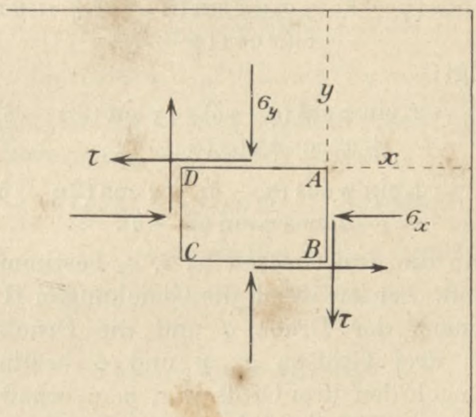


Fig. 87.

Die Gleichgewichtsbedingungen lauten:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\,dx \cdot dy + \frac{\partial \tau}{\partial y}\,dy \cdot dx = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\,dy \cdot dx + \frac{\partial \tau}{\partial x}\,dx \cdot dy = \gamma\,dx\,dy.$$

Es gelten also die Gleichungen:

$$\text{I}a. \qquad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0,$$

$$\text{I}b. \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} = \gamma.$$

---

*) *Kötter*, Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck. Sitzungsbericht der Königl. Preufsischen Akademie der Wissenschaften. 1903. *Kötter* hat diese wichtige Aufgabe bereits 1888 gelöst und in den Verhandlungen der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin, Jahrgang 7, veröffentlicht. Die zweite, in den Sitzungsberichten der Akademie mitgeteilte Lösung ist einfacher und übersichtlicher und wird oben wiedergegeben.

Nun betrachten wir das dreiseitige Prisma $dx\,dy\,ds$ in Fig. 80, nehmen an Stelle des Winkels ρ für die Neigung des Druckes q den Winkel δ an und setzen erst die Summe der nach der Richtung von q wirkenden Kräfte gleich Null, und hierauf ebenso die Summe der rechtwinklig zu q wirkenden Kräfte. Da die vom Eigengewichte des Prismas herrührenden Glieder unendlich klein von der zweiten Ordnung sind, so erhalten wir die für alle Flächenteilchen ds geltenden Gleichungen:

$$q\,ds = \sigma_x\,dy \sin(\varphi - \delta) + \sigma_y\,dx \cos(\varphi - \delta) - \tau\,dy \cos(\varphi - \delta) \\ - \tau\,dx \sin(\varphi - \delta),$$

$$0 = \sigma_x\,dy \cos(\varphi - \delta) - \sigma_y\,dx \sin(\varphi - \delta) + \tau\,dy \sin(\varphi - \delta) \\ - \tau\,dx \cos(\varphi - \delta).$$

Hieraus folgt:

II *a*. $$q = \sigma_x \sin\varphi \sin(\varphi - \delta) - \tau \sin(2\varphi - \delta) \\ + \sigma_y \cos\varphi \cos(\varphi - \delta),$$

II *b*. $$0 = \sigma_x \sin\varphi \cos(\varphi - \delta) - \tau \cos(2\varphi - \delta) \\ - \sigma_y \cos\varphi \sin(\varphi - \delta).$$

Insofern nun die drei Gröfsen σ_x, τ, σ_y bestimmte Funktionen von x und y sind, werden durch die Gleichungen II *a* und II *b* für *jedes* Linienelement der Druck q und die Druckneigung δ als Funktionen der drei Gröfsen x, y und φ bestimmt. Die Ableitungen von δ nach den drei Gröfsen x, y, φ erhalten wir, indem wir auf Gleichung II *b* die bekannten Gesetze des partiellen Differenzierens anwenden, wobei wir noch sofort bemerken, dafs die partielle Ableitung von II *b* nach δ offenbar gleich $+q$ ist. Demnach gelten für die Ableitungen von δ die drei Gleichungen

III *a*. $$0 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \sin\varphi \cos(\varphi - \delta) - \frac{\partial \tau}{\partial x} \cos(2\varphi - \delta) \\ - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \cos\varphi \sin(\varphi - \delta) + q\,\frac{\partial \delta}{\partial x},$$

III *b*. $$0 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \sin\varphi \cos(\varphi - \delta) - \frac{\partial \tau}{\partial y} \cos(2\varphi - \delta) \\ - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cos\varphi \sin(\varphi - \delta) + q\,\frac{\partial \delta}{\partial y},$$

III *c*. $$0 = \sigma_x \cos(2\varphi - \delta) + 2\tau \sin(2\varphi - \delta) \\ - \sigma_y \cos(2\varphi - \delta) + q\,\frac{\partial \delta}{\partial \varphi}.$$

Die vorstehend mit römischen Ziffern bezeichneten Formeln gelten für alle Linienelemente; wollen wir zu den Elementen der Gleitfläche übergehen, so müssen wir dem Neigungswinkel δ seinen gröfsten Wert ρ beilegen und gleichzeitig die drei Ableitungen von δ nach x, y und φ gleich Null setzen. Diese speziellen Formeln wollen wir durch arabische Ziffern kennzeichnen. Wir erhalten zunächst aus III a—III c die Formeln

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \sin\varphi \cos(\varphi - \rho) - \frac{\partial \tau}{\partial x} \cos(2\varphi - \rho) - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} \cos\varphi \sin(\varphi - \rho),$$

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} \sin\varphi \cos(\varphi - \rho) - \frac{\partial \tau}{\partial y} \cos(2\varphi - \rho) - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \cos\varphi \sin(\varphi - \rho),$$

$$(3) \qquad 0 = \sigma_x \cos(2\varphi - \rho) + 2\tau \sin(2\varphi - \rho) - \sigma_y \cos(2\varphi - \rho).$$

Die Formel II a für q läfst zunächst noch eine leicht vorzunehmende Umformung zu, welche liefert

$$\text{IV}\,a. \qquad q = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\cos\delta - \frac{1}{2}[\sigma_x \cos(2\varphi - \delta) + 2\tau \sin(2\varphi - \delta) - \sigma_y \cos(2\varphi - \delta)].$$

Setzen wir hierin $\delta = \rho$, so erhalten wir mit Rücksicht auf Gleichung (3)

$$(4) \qquad q = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\cos\rho.$$

Endlich erhalten wir aus II b zunächst

$$\text{IV}\,b. \qquad 0 = \frac{1}{2}[\sigma_x \sin(2\varphi - \delta) - 2\tau \cos(2\varphi - \delta) - \sigma_y \cos(2\varphi - \delta)] + \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\sin\delta,$$

oder, wenn wir unter Benutzung von (4) auch hier zur Gleitfläche übergehen,

$$(5) \qquad q \operatorname{tg}\rho = -\frac{1}{2}[\sigma_x \sin(2\varphi - \rho) - 2\tau \cos(2\varphi - \rho) - \sigma_y \cos(2\varphi - \rho)].$$

Die unter (1)–(5) aufgeführten Gleichungen dürfen, da sie nicht mehr für jedes Linienelement gelten, auch nicht mehr partiell nach x, y und φ differenziert werden, wohl aber dürfen sie, da sie für alle Linienelemente der Gleitfläche gelten, nach der Bogenlänge s der letzteren differenziert werden, und zwar nach der Formel

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial U}{\partial y}\sin\varphi + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{ds}.$$

So erhalten wir aus (4) die Formel

$$(6)\quad \frac{dq}{ds} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)\cos\varphi\cos\rho + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)\sin\varphi\cos\rho,$$

und aus (3)

$$\begin{aligned} 0 = &\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)\cos\varphi\cos(2\varphi-\rho) + 2\frac{\partial \tau}{\partial x}\cos\varphi\sin(2\varphi-\rho) \\ &+ \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)\sin\varphi\sin(2\varphi-\rho) + 2\frac{\partial \tau}{\partial y}\sin\varphi\cos(2\varphi-\rho) \\ &- 2\left[\sigma_x\sin(2\varphi-\rho) - 2\tau\cos(2\varphi-\rho) - \sigma_y\sin(2\varphi-\rho)\right]\frac{d\varphi}{ds}, \end{aligned}$$

was mit Rücksicht auf (5) die Formel

$$\begin{aligned} &4q\operatorname{tg}\rho\frac{d\varphi}{ds} = \\ &-\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)\cos\varphi\cos(2\varphi-\rho) - 2\frac{\partial \tau}{\partial x}\cos\varphi\sin(2\varphi-\rho) \\ &-\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)\sin\varphi\cos(2\varphi-\rho) - 2\frac{\partial \tau}{\partial y}\sin\varphi\sin(2\varphi-\rho) \end{aligned}$$

ergibt.

Aus (6) und (7) ergibt sich dann weiter:

$$(8)\qquad \frac{dq}{ds} - 2q\operatorname{tg}\rho\frac{d\varphi}{ds} =$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\cos^2\varphi\cos(\varphi-\rho) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\cos\varphi\sin\varphi\sin(\varphi-\rho) + \frac{\partial \tau}{\partial x}\cos\varphi\sin(2\varphi-\rho) \\ &\quad + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\sin\varphi\cos\varphi\cos(\varphi-\rho) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\sin^2\varphi\sin(\varphi-\rho) \\ &\quad + \frac{\partial \tau}{\partial y}\sin\varphi\sin(2\varphi-\rho). \end{aligned}$$

Indem wir hierin für

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\cos\varphi\sin(\varphi-\rho)$$

und für

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\sin\varphi\cos(\varphi-\rho)$$

die beiden Werte setzen, welche sich aus (1) und (2) ergeben, nämlich

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\cos\varphi\sin(\varphi-\rho) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\sin\varphi\cos(\varphi-\rho) - \frac{\partial \tau}{\partial x}\cos(2\varphi-\rho)$$

und

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\sin\varphi\cos(\varphi-\rho) = \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\cos\varphi\sin(\varphi-\rho) + \frac{\partial \tau}{\partial y}\cos(2\varphi-\rho),$$

so erhalten wir die Gleichung

$$\frac{dq}{ds} - 2q \operatorname{tg} \rho \frac{d\varphi}{ds} =$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cos(\varphi-\rho)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \frac{\partial \tau}{\partial x}[\sin(2\varphi-\rho)\cos\varphi - \cos(2\varphi-\rho)\sin\varphi]$$

$$+ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \sin(\varphi-\rho)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) + \frac{\partial \tau}{\partial y}[\cos(2\varphi-\rho)\cos\varphi + \sin(2\varphi-\rho)\sin\varphi],$$

oder wenn wir die Glieder mit Hilfe bekannter trigonometrischer Beziehungen vereinfachen,

$$\frac{dq}{ds} - 2q \operatorname{tg} \rho \frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\right) \cos(\varphi - \rho) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right) \sin(\varphi - \rho).$$

Benutzen wir noch die Gleichungen Ia und Ib, so erhalten wir schliefslich folgende Differentialgleichung zur Bestimmung des Druckes an der Gleitfläche:

$$(9) \qquad \frac{dq}{ds} - 2q \operatorname{tg} \rho \frac{d\varphi}{ds} = \gamma \sin(\varphi - \rho),$$

deren Lösung sich unmittelbar hinschreiben läfst.

$$109) \qquad q = \gamma e^{2\varphi \operatorname{tg} \varrho} \int e^{-2\varphi \operatorname{tg} \varrho} \sin(\varphi - \rho)\, ds.$$

Die erforderliche Quadratur gestaltet sich besonders einfach, wenn die Bogenlänge, wie z. B. bei der Zykloide und ähnlichen Kurven, durch ein einzelnes Glied von der Form

$$A \sin(\mathfrak{A} \varphi + \alpha)$$

oder ein lineares Aggregat von solchen Gliedern dargestellt ist. Jedem solchen Gliede entspricht dann ein Bestandteil von der Form

$$a_1 \sin(\varphi - \rho) \cos(\mathfrak{A} \varphi + \alpha) + a_2 \cos(\varphi - \rho) \cos(\mathfrak{A} \varphi + \alpha)$$
$$+ b_1 \sin(\varphi - \rho) \sin(\mathfrak{A} \varphi + \alpha) + b_2 \cos(\varphi - \rho) \sin(\mathfrak{A} \varphi + \alpha),$$

dessen Koeffizienten sich leicht bestimmen lassen. Zu diesen Gliedern tritt dann noch das mit einem willkürlichen Faktor C behaftete Glied

$$\gamma C e^{2\varphi \operatorname{tg} \varrho}.$$

An die vorstehend wiedergegebene Entwicklung von *Kötter* knüpfen wir die folgende Betrachtung.

Die Seitenkräfte E_w und E_l des zu einer gekrümmten Gleitfläche AC gehörigen erforderlichen Widerstandes E der

Wandfläche AB sind mit den in die Fig. 88 eingetragenen Bezeichnungen

$$E_w = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q \sin(\varphi - \rho)\, ds,$$

$$E_l = \gamma \int_0^{\xi} y\, dx + \frac{p\,(a+\xi)}{\cos\alpha} + \frac{\gamma\, a\, h}{2} - \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q \cos(\varphi - \rho)\, ds,$$

wo

$$q = \gamma\, e^{2\varphi \operatorname{tg} \varrho} \left[\int e^{-2\varphi \operatorname{tg}\varrho} \sin(\varphi - \rho)\, ds + C \right].$$

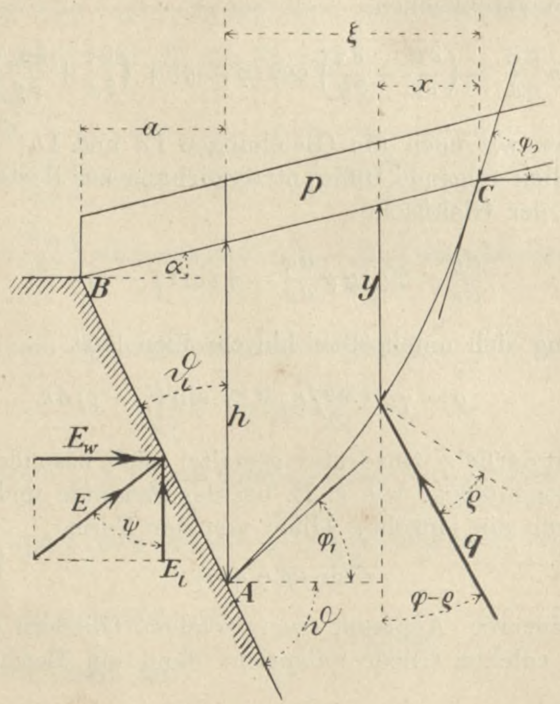


Fig. 88.

Zur Bestimmung der Integrationskonstante C dient die Bedingung, daſs der Druck q im Endpunkte C der Gleitfläche den Wert

$$q = p\, \frac{\sin(\varphi_0 - \rho)}{\sin(\varphi_0 - \alpha)}$$

annehmen muſs.

Der Winkel, den der Erddruck mit der Wand bildet, sei vorgeschrieben. Es ist also ψ ein bekannter Wert. Zwischen E_w und E_l besteht die Beziehung

$$E_w = E_l \operatorname{cotg} \psi,$$

und man erhält daher den erforderlichen Wandwiderstand E, wenn man die eine der beiden Seitenkräfte von E zu einem Maximum macht.

Nun mufs allerdings hervorgehoben werden, dafs sich mit der Gestalt der Gleitfläche nicht nur die Gröfse des erforderlichen Widerstandes E ändert, sondern auch die Lage seines Angriffspunktes. Will man sich also beim Entwurfe einer Stützmauer mit der ungünstigsten Möglichkeit abfinden, so mufs man andere Werte zu Maxima machen. So könnte man z. B. die Frage aufwerfen: Bei welcher Gestalt der Gleitfläche übt die Mauer den gröfsten Druck auf den Baugrund aus? An eine strenge Lösung derartiger Aufgaben ist aber nicht zu denken. Schon die Ermittelung des gröfsten Wertes E führt zu einer schwierigen Aufgabe der Variationsrechnung, und es ist wohl nicht zu erwarten, dafs eine für die Praxis brauchbare Lösung erhalten wird. Selbst wenn die Anwendung der Variationsrechnung dadurch umgangen wird, dafs die Gestalt der Gleitfläche von einer endlichen Anzahl von Parametern abhängig gemacht wird, ist die zu leistende Rechnungsarbeit sehr grofs; sie würde nicht im richtigen Verhältnis zu den noch nicht genügend gesicherten Grundlagen unserer heutigen Erddrucktheorie stehen. Der Hauptwert der Theorie der gekrümmten Gleitflächen liegt daher auf wissenschaftlichem Gebiete; welch wichtige Dienste sie hier leistet, haben wir bereits am Schlufs von Nr. 9 (S. 32) gesehen.

26. Berechnung des Druckes auf eine Gleitlinie, die aus einer oder zwei Geraden und einem Kreisbogen besteht. In Nr. 24 zeigten wir die angenäherte Berechnung des Druckes auf eine Gleitlinie, deren oberer Teil gerade und deren unterer Teil gekrümmt ist. Den einzigen Parameter, von dem die Gestalt der Gleitlinie abhing, bestimmten wir mit Hilfe der Bedingung $\delta' = \rho$. Eine ganz ähnliche Aufgabe wollen wir jetzt mit Hilfe der genauen Gleichung 109) auf Seite 111 lösen.

Die Gleitlinie bestehe nach Fig. 89 aus der Geraden CC' und dem diese Gerade im Punkte C' berührenden Kreisbogen $C'A$. Die Winkel φ_0 und φ_1 seien nach S. 106 mit Hilfe der Formeln berechnet worden:

$$\varphi_0 = 45^0 + \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)$$

$$\varphi_1 = 45^0 + \frac{1}{2}\rho - \frac{1}{2}(\delta'' - \delta') - \vartheta_l;$$

wo α' und δ'' bestimmt sind durch

$$\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{\sin\rho}, \qquad \sin\delta'' = \frac{\sin\delta'}{\sin\rho}.$$

Der Druck q hat an der Stelle C' nach den Gleichungen 38) und 39) auf Seite 24 den Wert

$$q_0 = p \frac{\sin(\varphi_0 - \rho)}{\sin(\varphi_0 - \alpha)} + \gamma s_0 \sin(\varphi_0 - \rho),$$

unter s_0 die Länge der Strecke CC' verstanden.

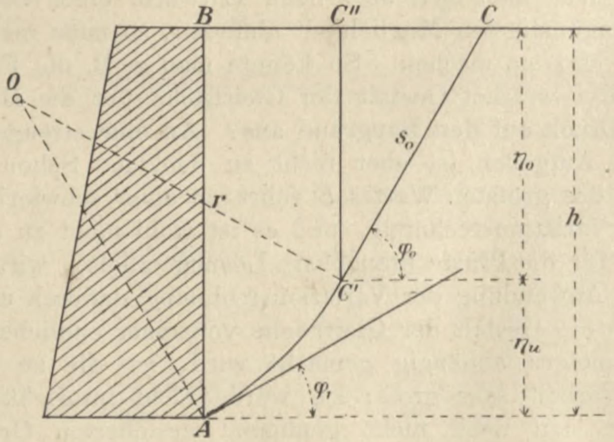


Fig. 89.

Für die kreisförmige Gleitlinie $C'A$ gilt, wenn $\gamma = 1$ gesetzt und der Halbmesser mit r bezeichnet wird, die Formel

$$q = e^{2\varphi \operatorname{tg} \varrho} \left[- r \int e^{-2\varphi \operatorname{tg} \varrho} \sin(\varphi - \rho)\, d\varphi + C\right].$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \rho} = \varkappa,$$

so erhält man

$$\int e^{-2\varphi \operatorname{tg} \varrho} \sin(\varphi - \rho)\, d\varphi = - \varkappa e^{-2\varphi \operatorname{tg} \varrho} \left[2 \operatorname{tg} \rho \sin(\varphi - \rho) + \cos(\varphi - \rho)\right]$$

und

$$q = \varkappa r \left[2 \operatorname{tg} \rho \sin(\varphi - \rho) + \cos(\varphi - \rho)\right] + C e^{2\varphi \operatorname{tg} \varrho}.$$

Da nun $\varphi = \varphi_0$ den Wert $q = q_0$ liefern mufs, so ergibt sich

$$C = e^{-2\varphi_0 \operatorname{tg} \varrho} \left\{ q_0 - \varkappa r \left[2 \operatorname{tg} \rho \sin(\varphi_0 - \rho) + \cos(\varphi_0 - \rho)\right] \right\},$$

und man findet daher:

110) $$q = \varkappa r \left[2 \operatorname{tg} \rho \sin(\varphi - \rho) + \cos(\varphi - \rho)\right] + q' e^{-2(\varphi_0 - \varphi) \operatorname{tg} \varrho},$$

wo

111) $$q' = q_0 - \varkappa r \left[2 \operatorname{tg} \rho \sin(\varphi_0 - \rho) + \cos(\varphi_0 - \rho)\right].$$

Die Summen der lotrechten Seitenkräfte der auf die krumme Gleitfläche wirkenden Drucke $q\,ds$ ist

$$V = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q \cos(\varphi - \rho)\, ds = r \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} q \cos(\varphi - \rho)\, d\varphi,$$

und die Summe der wagerechten Seitenkräfte:

$$H = r \int_{\varphi_1}^{\varphi_0} q \sin(\varphi - \rho)\, d\varphi.$$

Führt man die leichte Integration aus und setzt man

$$\sin^2(\varphi_0 - \rho) - \sin^2(\varphi_1 - \rho) = \sin(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho)\sin(\varphi_0 - \varphi_1)$$

$$\sin 2(\varphi_0 - \rho) - \sin 2(\varphi_1 - \rho) = 2\cos(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho)\sin(\varphi_0 - \varphi_1),$$

so erhält man

$$112)\quad V = \frac{\varkappa r^2}{2}\Big[\sin(\varphi_0 - \varphi_1)\Big\{2\operatorname{tg}\rho\sin(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho) + \cos(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho)\Big\}$$
$$+ \varphi_0 - \varphi_1\Big] + \varkappa q' r\Big[2\operatorname{tg}\rho\cos(\varphi_0 - \rho) + \sin(\varphi_0 - \rho)$$
$$- e^{-2(\varphi_0 - \varphi_1)\operatorname{tg}\varrho}\Big\{\sin(\varphi_1 - \rho) + 2\operatorname{tg}\rho\cos(\varphi_1 - \rho)\Big\}\Big]$$

und

$$113)\quad H = \frac{\varkappa r^2}{2}\Big[\sin(\varphi_0 - \varphi_1)\Big\{\sin(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho)$$
$$- 2\operatorname{tg}\rho\cos(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho)\Big\} + 2\operatorname{tg}\rho(\varphi_0 - \varphi_1)\Big]$$
$$+ \varkappa q' r\Big[2\operatorname{tg}\rho\sin(\varphi_0 - \rho) - \cos(\varphi_0 - \rho)$$
$$- e^{-2(\varphi_0 - \varphi_1)\operatorname{tg}\varrho}\Big\{2\operatorname{tg}\rho\sin(\varphi_1 - \rho) - \cos(\varphi_1 - \rho)\Big\}\Big].$$

Um die Lage des auf das Gleitlinienstück $C'A$ wirkenden Gesamtdruckes bestimmen zu können, berechnen wir noch das Moment dieses Druckes bezogen auf den Kreismittelpunkt O als Drehpunkt. Zu dem Zwecke zerlegen wir den auf ds wirkenden Druck in eine durch den Kreismittelpunkt gehende Seitenkraft und eine hierzu rechtwinklige Seitenkraft $q\,ds\sin\rho$. Erstere ist ohne Einflufs auf das gesuchte Moment. Da nun alle Seitenkräfte $q\,ds\sin\rho$ am Hebelarme r wirken, so entsteht

$$M = r\sin\rho\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} q\,ds = r^2\sin\rho\int_{\varphi_1}^{\varphi_0} q\,d\varphi.$$

Man erhält:

$$114)\quad M = 2\varkappa r^3\sin\rho\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_1)\Big[\cos\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho)$$
$$+ 2\operatorname{tg}\rho\sin\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1 - 2\rho)\Big] + \frac{1}{2}q' r^2\cos\rho\left(1 - e^{-2(\varphi_0 - \varphi_1)\operatorname{tg}\varrho}\right).$$

Nun untersuchen wir den Gleichgewichtszustand eines Erdprismas, das begrenzt wird von der Wandfläche BA, der kreisförmigen Gleitlinie $A'C$ und dem lotrechten Schnitte $C''C'$. Das

Gewicht des Prismas einschliefslich der auf der Oberfläche BC' ruhenden Belastung sei G. Auf die Schnittfläche $C'' C'$ wirkt parallel zur Oberfläche ein Druck E_0, der mittels der Gleichung 43) berechnet werden kann. Für die Seitenkräfte des Wandwiderstandes E finden wir die Werte

$$E_w = E_0 \cos \alpha + H,$$

und

$$E_l = G + E_0 \sin \alpha - V.$$

Der Gleitlinienparameter r ist durch die Bedingung gegeben:

$$E_w = E_l \operatorname{cotg} \psi.$$

Mit Hilfe der Momentengleichung in bezug auf den Kreismittelpunkt O läfst sich schliefslich der Angriffspunkt von E bestimmen.

Zahlenbeispiel. Die Wand sei lotrecht, die Geländefläche wagerecht und unbelastet, der Winkel δ' sei gleich ρ. Dann ist

$$\varphi_0 = 45^0 + \frac{1}{2} \rho \quad \text{und} \quad \varphi_1 = \rho,$$

und man erhält, wenn man zur Abkürzung setzt

$$45^0 - \frac{1}{2} \rho = \omega,$$

für $\gamma = 1$ die folgenden Werte:

$$115) \quad q_0 = s_0 \sin(\varphi_0 - \rho) = \eta_0 \frac{\sin(\varphi_0 - \rho)}{\sin \varphi_0} = \eta_0 \operatorname{tg} \omega,$$

$$116) \quad q' = \eta_0 \operatorname{tg} \omega - \varkappa r \left(2 \operatorname{tg} \rho \sin \omega + \cos \omega\right),$$

$$117) \quad V = \varkappa r^2 \left(\operatorname{tg} \rho \sin^2 \omega + \frac{1}{4} \sin 2\omega + \frac{1}{2} \omega\right)$$
$$+ \varkappa q' r \left(2 \operatorname{tg} \rho \cos \omega + \sin \omega - 2 \operatorname{tg} \rho \, e^{-2\omega \operatorname{tg} \varrho}\right),$$

$$118) \quad H = \varkappa r^2 \left[\operatorname{tg} \rho \left(\omega - \frac{1}{2} \sin 2\omega\right) + \frac{1}{2} \sin^2 \omega\right]$$
$$+ \varkappa q' r \left(2 \operatorname{tg} \rho \sin \omega - \cos \omega + e^{-2\omega \operatorname{tg} \varrho}\right),$$

$$119) \quad M = \varkappa r^3 \sin \rho \left[2 \operatorname{tg} \rho (1 - \cos \omega) + \sin \omega\right]$$
$$+ \frac{1}{2} q' r^2 \cos \rho \left(1 - e^{-2\omega \operatorname{tg} \varrho}\right).$$

$$r = \frac{\eta_u}{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0}.$$

Ist, wie in dem in Nr. 24 gerechneten Zahlenbeispiele, $\rho = 30^0$, so wird (Fig. 90)

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \varkappa = \frac{1}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \rho} = \frac{3}{7},$$

$$\varphi_0 = 60^0, \qquad \varphi_1 = 30^0, \qquad r = \frac{\eta_u}{0{,}366}, \qquad \omega = 30^0$$

$$e^{-2\omega \operatorname{tg} \varrho} = 0{,}547, \qquad q_o = 0{,}577\, \eta_o, \qquad q' = 0{,}577\, \eta_o - 1{,}69\, \eta_u,$$

$$V = 0{,}586\, \eta_o \eta_u + 0{,}272\, \eta_u^2,$$
$$H = 0{,}174\, \eta_o \eta_u + 0{,}056\, \eta_u^2.$$

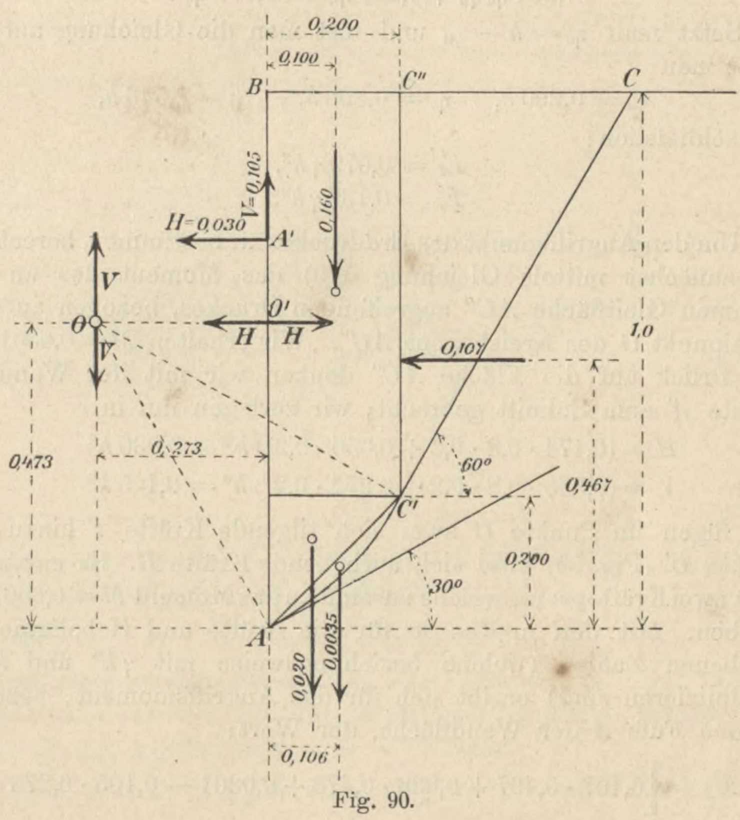


Fig. 90.

Da im vorliegenden Falle $\varphi_o = 90^0 - \varphi_1$ ist, so ist die wagerechte Projektion des Kreisbogens AC' ebensogrofs wie die vertikale Projektion η_u, und es ist daher das Gewicht G des Erdprismas $BAC'C''$:

$$G = \eta_o \eta_u + \frac{1}{2} \eta_u^2 + 0{,}0118\, r^2 = \eta_o \eta_u + 0{,}588\, \eta_u^2.$$

Der Erddruck auf die lotrechte Fläche $C'C''$ ist

$$E_o = \frac{1}{2}\,\eta_o^2\,\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{1}{2}\,\rho\right) = \frac{1}{6}\,\eta_o^2,$$

folglich ergibt sich

$$E_w = \frac{1}{6}\,\eta_o^2 + 0{,}174\,\eta_o\,\eta_u + 0{,}056\,\eta_u^2$$

und

$$E_l = G - V = 0{,}414\,\eta_o\,\eta_u + 0{,}316\,\eta_u^2.$$

Die Bedingung

$$E_l = E_w\,\mathrm{tg}\,\rho = 0{,}577\,E_w$$

liefert die Gleichung

$$0{,}314\,\eta_o\,\eta_u + 0{,}284\,\eta_u^2 = 0{,}096\,\eta_o^2.$$

Setzt man $\eta_o = h - \eta_u$ und löst man die Gleichung auf, so findet man

$$\eta_u = 0{,}200\,h, \qquad \eta_o = 0{,}800\,h, \qquad r = 0{,}546\,h,$$

und schliefslich:

$$E_l = 0{,}079\,\gamma\,h^2,$$
$$E_w = 0{,}137\,\gamma\,h^2.$$

Um den Angriffspunkt des Erddruckes zu bestimmen, berechnen wir zunächst mittels Gleichung 119) das Moment des an der krummen Gleitfläche $A\,C''$ angreifenden Druckes, bezogen auf den Mittelpunkt O des Kreisbogens $A\,C''$. Wir erhalten $M = 0{,}0301\,\gamma\,h^2$. Den Druck auf die Fläche $A\,C''$ denken wir mit der Wand im Punkte A' zum Schnitt gebracht; wir zerlegen ihn in

$$H = (0{,}174 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}056 \cdot 0{,}2^2)\,h^2 = 0{,}030\,h^2$$

und

$$V = (0{,}586 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 + 0{,}272 \cdot 0{,}2^2)\,h^2 = 0{,}105\,h^2$$

und fügen im Punkte O zwei sich tilgende Kräfte V hinzu, im Punkte O' (Fig. 90) zwei sich aufhebende Kräfte H. Es entstehen dann zwei Kräftepaare, welche zusammen das Moment $M = 0{,}0301\,\gamma\,h^2$ ausüben. Mit den in Fig. 90 für die Kräfte und Hebelarme angegebenen Zahlen (welche beziehungsweise mit $\gamma\,h^2$ und h zu multiplizieren sind) ergibt sich für das Angriffsmoment, bezogen auf den Fufs A der Wandfläche, der Wert:

$$M_A = \Big[0{,}107 \cdot 0{,}467 + 0{,}030 \cdot 0{,}473 + 0{,}0301 - 0{,}105 \cdot 0{,}273$$
$$- 0{,}16 \cdot 0{,}10 - 0{,}02 \cdot \frac{0{,}20}{3} - 0{,}0035 \cdot 0{,}106\Big]\,\gamma\,h^3.$$

$$M_A = 0{,}0479\,\gamma\,h^3.$$

Der Angriffspunkt des Erddruckes hat also vom Punkte A den Abstand

$$e = \frac{M_A}{E_w} = 0{,}347\,h.$$

Die hier untersuchte Gleitfläche weicht von der in Fig. 85 auf S. 101 dargestellten nur sehr wenig ab. Bei der letzteren war die wagerechte Projektion des gekrümmten Teiles gleich 1,088 η_u (statt η_u); wir fanden in Nr. 24, S. 99 u. 100, die Werte

$$E_l = 0{,}078\,\gamma h^2, \quad E_w = 0{,}135\,\gamma h^2, \quad e = 0{,}350\,h,$$

welche mit den jetzt erhaltenen gut übereinstimmen.

Es möge nun zwischen die gekrümmte Gleitfläche und die Wand noch ein ebenes Gleitflächenstück AA' (Fig. 91) eingeschaltet werden, dessen Neigungswinkel $\varphi_1 = \rho$ ist. Seine Länge sei

$$s = \overline{AA'} = \frac{\eta}{\sin \varphi_1}.$$

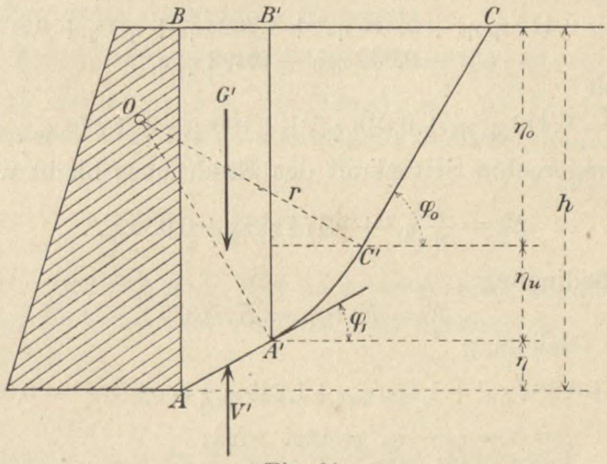


Fig. 91.

Bezeichnet q_1 den Gleitflächendruck im Punkte A', so gilt für die ebene Gleitfläche AA' die Formel

$$120) \qquad q = q_1 + \gamma s \sin(\varphi_1 - \rho).$$

Im vorliegenden Falle ist $\varphi_1 = \rho$, also $q = q_1$. Der Wert q_1 ergibt sich aus der für den Kreisbogen gültigen Formel 110), wenn $\varphi = \varphi_1$ gesetzt wird. Es ist demnach

$$121) \qquad q_1 = \varkappa r\,[2\,\mathrm{tg}\,\rho \sin(\varphi_1 - \rho) + \cos(\varphi_1 - \rho)] + q'\,e^{-2(\varphi_0 - \varphi_1)\,\mathrm{tg}\,\varrho}$$

und für $\varphi_o = 45^0 + \frac{1}{2}\rho$ und $\varphi_1 = \rho$:

$$122) \qquad q_1 = \varkappa r + q'\,e^{-2\omega\,\mathrm{tg}\,\varrho},$$

also im vorliegenden Falle ($\omega = \rho = 30^0$) für $\gamma = 1$:

$$q_1 = \frac{3}{7}\,\frac{\eta_u}{0{,}366} + (0{,}577\,\eta_o - 1{,}69\,\eta_u)\,0{,}547 = 0{,}316\,\eta_o + 0{,}246\,\eta_u.$$

Auf das Gleitflächenstück AA' wirkt demnach ein lotrecht gerichteter Druck

$$V' = q_1 s = \frac{q_1 \eta}{\sin \rho} = 0{,}632\, \eta_o \eta + 0{,}492\, \eta_u \eta.$$

Das Gewicht des zwischen der Wand und dem lotrechten Schnitte $A'B'$ liegenden Teile des Erdkörpers beträgt

$$G' = \eta \operatorname{cotg} \rho \left(\eta_o + \eta_u + \frac{1}{2}\eta\right) = 1{,}732\,(\eta_o + \eta_u)\,\eta + 0{,}866\,\eta^2.$$

Die vorhin gefundene lotrechte Seitenkraft

$$E_l = 0{,}414\, \eta_o \eta_u + 0{,}316\, \eta_u^2$$

wächst um $G' - V'$. Es entsteht also jetzt

$$E_l = 0{,}414\, \eta_o \eta_u + 0{,}316\, \eta_u^2 + 1{,}732\,(\eta_o + \eta_u)\,\eta + 0{,}866\,\eta^2$$
$$- 0{,}632\, \eta_o \eta - 0{,}492\, \eta_u \eta.$$

Man erhält

$$E_l = 0{,}414\, \eta_o \eta_u + 0{,}316\, \eta_u^2 + 1{,}100\, \eta_o \eta + 1{,}240\, \eta_u \eta + 0{,}866\, \eta^2.$$

Die wagerechte Seitenkraft des Erddruckes bleibt wie vorhin

$$E_w = \frac{1}{6}\eta_o^2 + 0{,}174\, \eta_o \eta_u + 0{,}056\, \eta_u^2.$$

Die Bedingung

$$E_l = E_w \operatorname{tg} \rho = E_w\, 0{,}577$$

liefert die Gleichung

$$0{,}314\, \eta_o \eta_u + 0{,}284\, \eta_u^2 + 1{,}100\, \eta_o \eta + 1{,}240\, \eta_u \eta + 0{,}866\, \eta^2 - 0{,}096\, \eta_o^2 = 0,$$

und, wenn $\eta = h - \eta_o - \eta_u$ gesetzt wird:

$$0{,}294\, \eta_o \eta_u + 0{,}090\, \eta_u^2 + 0{,}632\, \eta_o h + 0{,}330\, \eta_o^2 + 0{,}492\, \eta_u h = 0{,}866\, h^2.$$

Hieraus folgt

$$\eta_o^2 + 2\,\eta_o\,(0{,}958\, h + 0{,}445\, \eta_u) = 2{,}624\, h^2 - 1{,}491\, \eta_u h - 0{,}273\, \eta_u^2.$$

Wird η_o durch η_u ausgedrückt, so wird schliefslich der Erddruck E_w als Funktion des einzigen noch unbestimmten Gleitflächenparameters η_u erhalten, und es kann nunmehr η_u so gewählt werden, dafs E_w den gröfsten Wert annimmt. Man findet

für $\eta_u =$	0	$0{,}05\, h$	$0{,}10\, h$	$0{,}20\, h$
$\eta_o =$	$0{,}924\, h$	$0{,}893\, h$	$0{,}857\, h$	$0{,}800\, h$
$\eta =$	$0{,}076\, h$	$0{,}057\, h$	$0{,}043\, h$	0
$\dfrac{E_w}{\gamma h^2} =$	0,142	0,141	0,138	0,137.

Der gröfste Wert E ergibt sich also für $\eta_u = 0$; ihm entspricht auch der gröfste Wert η_o. Der untere, nicht mit der Gleitfläche des seitlich unbegrenzten Erdkörpers zusammenfallende Teil der Gleitfläche mufs also, wenn ein möglichst grofser Wert E erhalten werden soll, so kurz wie möglich angenommen werden, gerade so grofs, als erforderlich ist, um die vorgeschriebene Neigung des Erddruckes gegen die Wandnormale hervorzubringen. Denkt man den gekrümmten Teil der Gleitfläche durch eine Ebene ersetzt, deren Neigung φ_1 ist, was bei nicht zu grofsem Unterschiede zwischen den Winkeln φ_0 und φ_1 zulässig ist, so erhält man einen etwas zu grofsen Wert E, da nicht anzunehmen ist, dafs die wirkliche Gleitfläche aus zwei Ebenen besteht. Wir haben hierauf bereits in Nr. 24 hingewiesen. Dort erhielten wir mittels einer sehr einfachen Rechnung (S. 103) den Wert $E_w = 0{,}140\,\gamma h^2$, der von dem jetzt gewonnenen fast gar nicht abweicht. Zu dieser Seitenkraft E_w gehört

$$E = E_w \sec \rho = 0{,}14 \cdot 1{,}155\,\gamma h^2 = 0{,}162\,\gamma h^2.$$

Auf S. 15 empfahlen wir, zur Berechnung des Erddruckes E auf eine lotrechte Wand bei wagerechtem Gelände stets die einfache für $\delta' = 0$ gültige Formel

$$E = \frac{1}{2}\,\gamma h^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right)$$

zu benutzen, den Druck E aber nicht wagerecht, sondern unter dem Neigungswinkel δ' anzunehmen. Im vorliegenden Falle erhalten wir dann

$$E = \frac{1}{6}\,\gamma h^2 = 0{,}167\,\gamma h^2.$$

Die Tatsache, dafs es krumme Schnitte gibt, welche gröfsere Wandwiderstände erfordern, als die gebräuchlichen ebenen Schnitte, dürfte also wohl geeignet sein, unseren zu einer grofsen Vereinfachung der Erddruckberechnung führenden Vorschlag zu unterstützen.

Zweiter Abschnitt.

Neue Versuche zur Bestimmung des Erddruckes.

§ 7.

Die Vorrichtung zur Bestimmung der Größe und Lage des Erddruckes.

27. Entwickelung des Grundgedankens. Aus einer unendlich langen Stützmauer, die nach der Längsrichtung gleichmäfsig mit Erde hinterfüllt ist, sei ein Stück von beliebiger Länge herausgeschnitten. Der Baugrund sei ersetzt durch drei, die Mauer gegen feste Punkte stützende Stäbe 1, 2, 3 (Fig. 92), deren Achsen

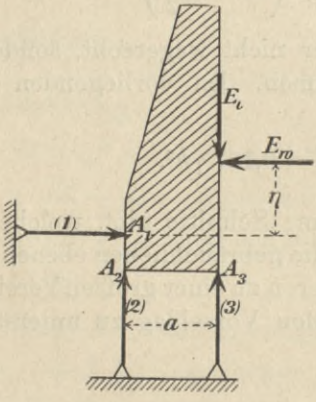


Fig. 92.

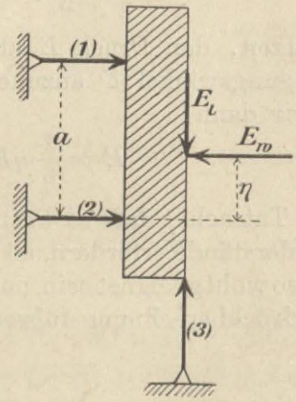


Fig. 93.

in der die Mittelkraft E des Erddruckes enthaltenden lotrechten Halbierungsebene der Mauer liegen, und deren Abmessungen und Elastizitätsmodel so gewählt seien, dafs die Verschiebungen ihrer Angriffspunkte A_1, A_2, A_3 mit den wirklichen, durch die Zusammendrückung des Baugrundes verursachten Bewegungen übereinstimmen. Der Erddruck möge in diesen drei Stäben Spannkräfte S_1, S_2, S_3 hervorrufen und die Stablängen s_1, s_2, s_3 um Δs_1, Δs_2, Δs_3 ändern.

Stellen wir uns nun vor, es seien die Δs durch Beobachtung gefunden und die Stabkräfte S aus ihnen berechnet worden. Dann kennen wir alle die Mauer stützenden Kräfte und sind imstande, Gröfse, Richtung und Angriffspunkt des Erddruckes anzugeben.

Wird z. B. eine lotrechte Wand nach Fig. 92 durch einen wagerecht liegenden und zwei lotrecht stehende Stäbe gestützt, so erhält man, wenn eine Kraft S positiv genommen wird, sobald sie den Stab auf Druck beansprucht, die Gleichungen

$$E_w = S_1,$$
$$E_l = S_2 + S_3,$$
$$E_w \eta = S_2 a$$

und hieraus

$$\eta = a \frac{S_2}{E_w}.$$

Erfolgt die Stützung einer lotrechten Wand nach Fig. 93 durch zwei wagerecht liegende und einen lotrecht stehenden Stab, so ergibt sich

$$E_w = S_1 + S_2,$$
$$E_l = S_3,$$
$$\eta = a \frac{S_1}{E_w}.$$

Tritt nun an die Stelle der nach der Längsrichtung ganz gleichmäfsig belasteten Mauer ein irgendwie geformter Körper von endlichen Abmessungen, der einen Erddruck aufzunehmen hat, und soll dieser Erddruck durch die Spannkräfte S von Stützstäben gemessen werden, so ist die Anzahl der Stäbe auf sechs zu erhöhen, weil sechs Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden müssen, beispielsweise bei Einführung rechtwinkliger Koordinaten x, y, z die bekannten Bedingungen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\Sigma M_x = 0, \ \Sigma M_y = 0, \ \Sigma M_z = 0.$$

Die Lage der Mefsstäbe mufs so gewählt werden, dafs es möglich ist, die sechs Gleichgewichtsbedingungen eindeutig aufzulösen.

Die auf die Elemente der Oberfläche des Körpers wirkenden Erddrucke lassen sich im allgemeinen nicht mehr zu einer Mittelkraft vereinigen. Die einfachste Form ihrer Zusammensetzung ist ein sogenanntes Kraftkreuz, das sind zwei Kräfte, welche sich kreuzen, ohne sich zu schneiden.

Es werde z. B. eine unregelmäfsig belastete ebene Wand von endlicher Länge auf die in Fig. 94 angegebene Weise durch vier wagerechte Stäbe 1, 2, 3, 6 und zwei lotrechte Stäbe 4, 5 gestützt. Die Achse des Stabes 6 ist parallel zu der den Erddruck aufnehmenden Wandfläche, die Achse des Stabes 1 liege in der die Wand halbierenden, auf der Wand lotrecht stehenden Ebene, die Stabachsen 2 und 3 sind parallel zu der Stabachse 1. Die Angriffspunkte A_4, A_5, A_6 liegen in einer zur Wandfläche parallelen

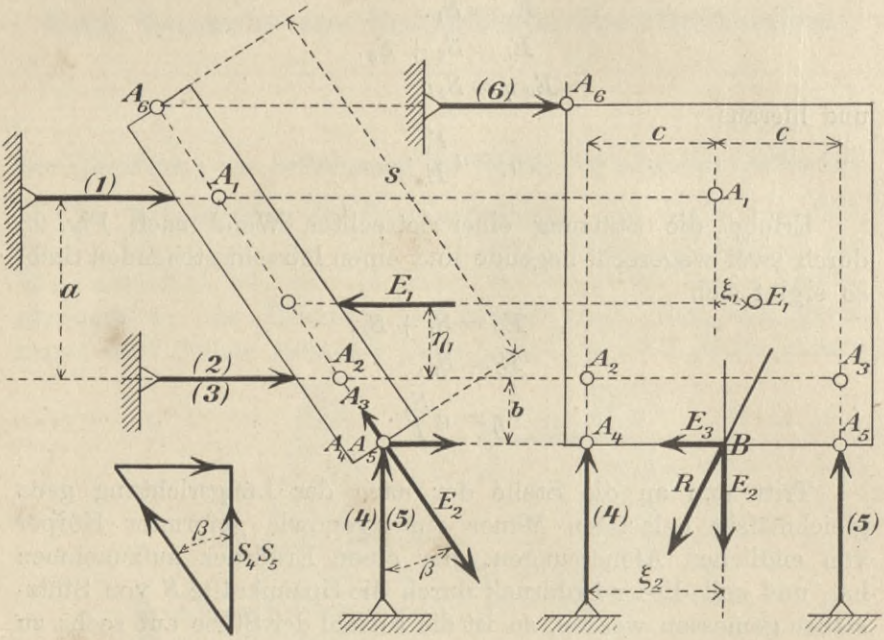


Fig. 94.

Ebene, welche mit der durch die Stabachsen 4 und 5 gelegten Ebene den Winkel β bildet. Die Stabachsen 1, 2, 3 schneiden diese Ebene in den Punkten A_1, A_2, A_3. Der auf die Wandfläche wirkende Erddruck sei durch drei Kräfte E_1, E_2, E_3 ersetzt. E_1 sei parallel zu den Stabachsen 1, 2, 3. E_3 und E_2 liegen in der Ebene $A_4 A_5 A_6$; E_3 sei parallel zur Stabachse 6, E_2 rechtwinklig hierzu. Werden die Stabkräfte S_4 und S_5 nach den Richtungen von E_1 und E_2 in die Seitenkräfte $S_4 \operatorname{tg} \beta$, $S_5 \operatorname{tg} \beta$ und $S_4 \sec \beta$, $S_5 \sec \beta$ zerlegt, so erhält man für die drei Kräfte E_1, E_2, E_3 die Werte:

$$E_1 = S_1 + S_2 + S_3 + (S_4 + S_5) \operatorname{tg} \beta,$$

$$E_2 = (S_4 + S_5) \sec \beta,$$

$$E_3 = S_6.$$

Die Lage von E_1 ist durch die beiden Momentengleichungen

$$E_1\,\eta_1 = S_1\,a - (S_4 + S_5)\,\mathrm{tg}\,\beta \cdot b$$

und

$$E_1\,\xi_1 = [S_3 - S_2 + (S_5 - S_4)\,\mathrm{tg}\,\beta]\,c$$

bestimmt.

Die Mittelkraft R aus E_2 und E_3 mufs den mit der Ebene $A_4\,A_5\,A_6$ zusammenfallenden Kräften S_6, $S_4 \sec\beta$ und $S_5 \sec\beta$ das Gleichgewicht halten; sie schneide die Verbindungslinie der beiden Angriffspunkte A_4 und A_5 im Punkte B, und es werde die Strecke $A_4\,B$ mit ξ_2 bezeichnet. Dann lautet die Momentengleichung in bezug auf den Punkt A_4:

$$E_2\,\xi_2 = S_5 \sec\beta \cdot 2\,c - S_6\,s.$$

Damit ist das aus den beiden Kräften R und E_1 bestehende Kraftkreuz, welches dem Erddruck auf die Wandfläche gleichwertig ist, bestimmt.

Auf den vorstehenden Betrachtungen beruht nun der vom Verfasser zur Ermittelung des Erddruckes eingeschlagene Weg. Es ist der Versuch gemacht worden, den wirklichen Vorgang bei der Beanspruchung einer Stützmauer durch Erddruck nachzubilden.

Eine auf elastischen Stützen ruhende Wand wird langsam mit Erde hinterfüllt. Die vom Eigengewichte der Wand abhängigen Anfangswerte der Stützenwiderstände wachsen infolge des Erddruckes allmählich an. Die Gröfse dieser Widerstände wird an Spannungsmessern abgelesen und gibt Aufschlufs über den im Zeitpunkte der Ablesung herrschenden Erddruck. Das Verfahren ermöglicht eine dauernde Beobachtung des Erddruckes. Die Bestimmung dieses Druckes kann in einem beliebigen Zeitpunkte nach Beendigung der Füllung, nachdem sich also die Erde gesackt hat, vorgenommen und in jedem Augenblicke wiederholt werden. Das Verfahren gestattet eine bequeme Feststellung des Einflusses von Lasten, die an beliebiger Stelle auf die Oberfläche der Erdmasse gelegt werden. Auch eine Reihe anderer wichtiger Fragen kann auf diesem Wege beantwortet werden. Man kann z. B. feststellen, wie sich der Erddruck ändert, wenn die trocken hinter der Wand aufgefüllte Erde nachträglich mehr oder weniger stark durchnäfst wird. Man kann untersuchen, wie der Erddruck von einer nachträglichen, durch andere auf die Wand wirkende Kräfte erzeugten Bewegung der Wand beeinflufst wird. Man kann die Wirkung von Erschütterungen prüfen usw.

Bislang sind vom Verfasser allerdings nur Versuche mit trockenem, nahezu kohäsionslosem Sande, lotrechter Wand und mit Stützstäben von bestimmter Elastizität, deren Verkürzungen also nicht beliebig geändert werden können, angestellt worden. Die Erledigung des am Schlufs dieser Mitteilungen kurz skizzierten weiteren Arbeitsplanes wird noch viele Jahre in Anspruch nehmen, da es sich um zeitraubende Dauerversuche handelt, die schliefslich in möglichst grofsem Mafsstabe angestellt werden müssen, wenn sie zuverlässige Schlüsse auf den in der Wirklichkeit auftretenden Erddruck gestatten sollen. Immerhin dürften die bis jetzt gewonnenen Versuchsergebnisse nicht ganz wertlos sein.

28. Der Mefsstab (Fig. 95, 96, 97) besteht aus zwei leicht gekrümmten, 16 mm breiten, 5 mm starken, aus Tiegelgufsstahl gefertigten Blattfedern, deren Abmessungen so gewählt wurden, dafs einer Verkürzung der 385 mm betragenden Länge des Mefsstabes um Δs eine gegenseitige Verschiebung der Scheitel der Blattfedern um etwa $12\,\Delta s$ entspricht. Diese Bewegung der Blattfedern wird in beträchtlicher Vergröfserung durch einen Fühlhebelmechanismus auf einen Zeiger übertragen, der schliefslich an einer Skala die Belastung des Stabes in Kilogrammen angibt. An die Federn f und f' sind die Backen b und b' angeschraubt. Die gröfsere, linke Backe b trägt an ihrem unteren Ende einen gelenkartig gelagerten Winkelhebel w, der gegen b durch die zwei Klemmschrauben k und K zwecks Einstellung der Vergröfserung der Federung festgelegt werden kann. Dieser Winkelhebel w ist durch ein Gelenk an seinem wagerechten Ende mit einem Hebel h verbunden, welcher eine Schneide n und eine

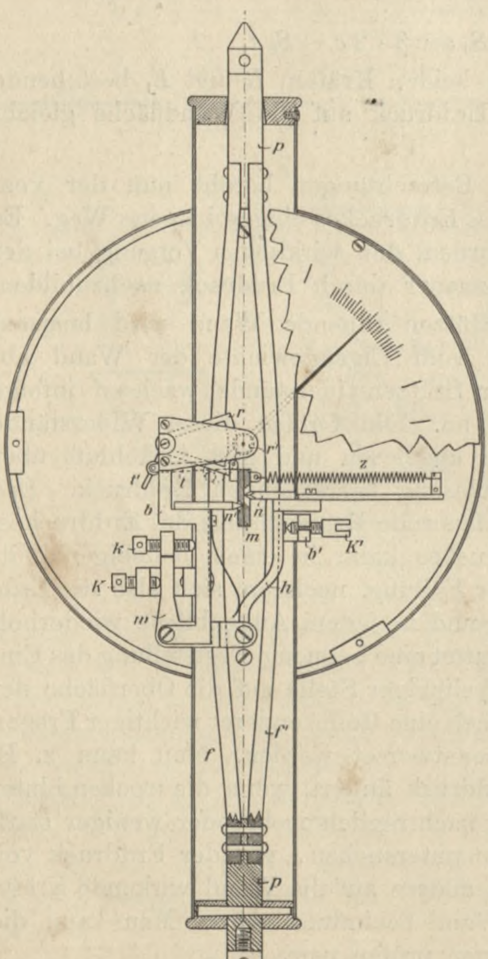


Fig. 95.

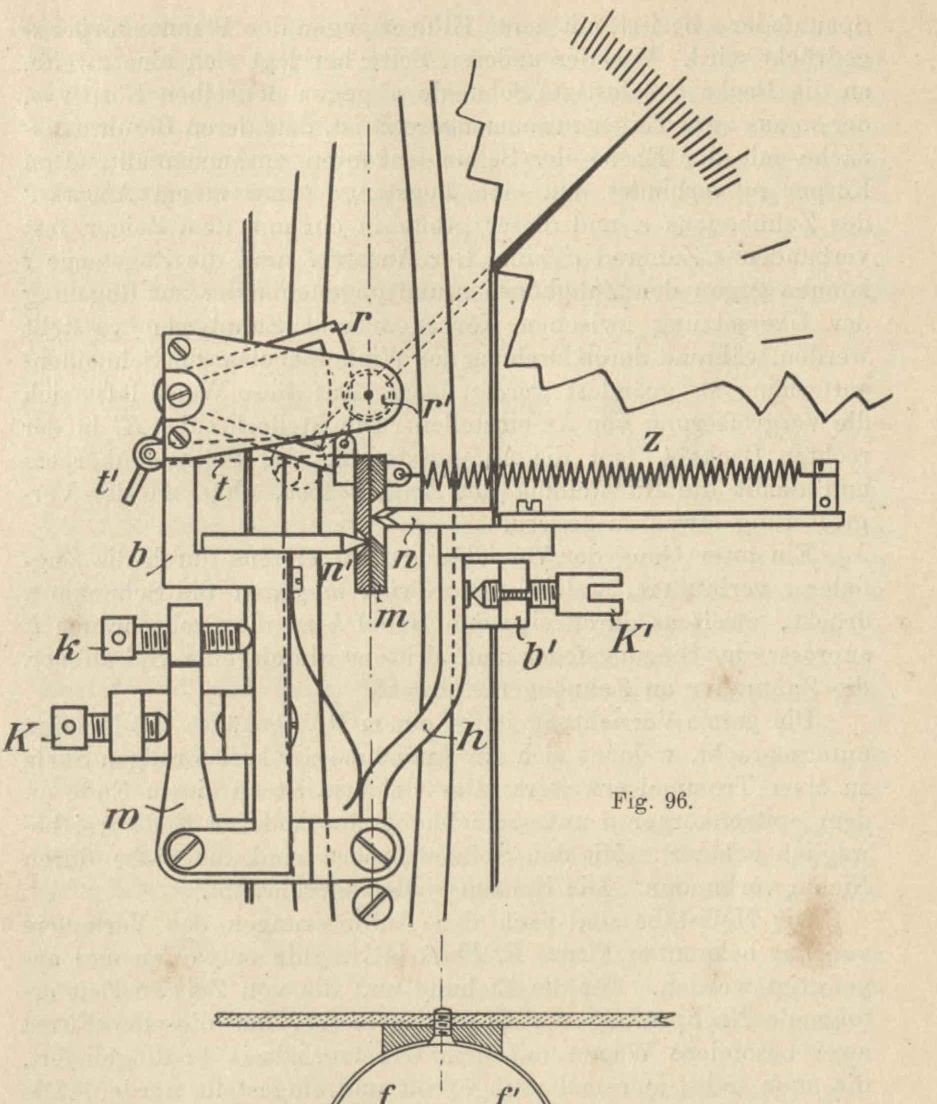


Fig. 96.

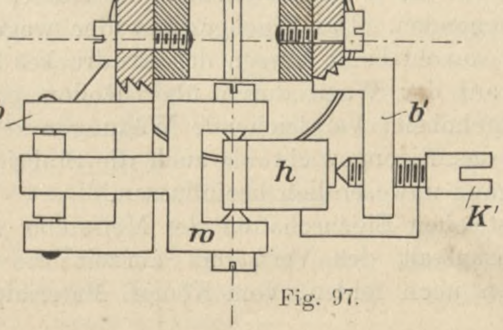


Fig. 97.

Spannfeder *z* besitzt, mit deren Hilfe er gegen den Pfannenkörper *m* gedrückt wird. Von der anderen Seite her legt sich eine zweite, an die Backe *b* befestigte Schneide *n'* gegen denselben Körper *m*, der so aus zwei Teilen zusammengesetzt ist, dafs deren Berührungsfläche mit der Ebene der Schneidenkanten zusammenfällt. Den Körper *m* verbindet nun eine Zugstange *t* mit einem Ansatz *t'* des Zahnbogens *r*, und dieser greift in ein mit dem Zeiger fest verbundenes Zahnrad *r'* ein. Der Ansatz *t'* und die Zugstange *t* können gegen den Zahnbogen *r* und gegeneinander zur Regelung der Übersetzung zwischen Körper *m* und Zahnbogen verstellt werden, während durch Drehung des Winkelhebels *w* die Schneidenentfernung *nn'* geändert werden kann. Auf diese Weise läfst sich die Vergröfserung von Δs einstellen. Die Stellschraube *K'* in der rechten Backe *b'* legt die Anfangsstellung des Schneidenkörpers und damit die Nullstellung des Zeigers fest, ohne an der Vergröfserung etwas zu ändern.

Ein toter Gang der Vorrichtung wird erstens durch die Zugfeder *z* verhindert, welche den Körper *m* gegen die Schneide *n* drückt, zweitens durch eine den Hebel *h* an die Stellschraube *k'* anpressende Biegungsfeder und drittens durch eine Spiralfeder, die Zahnrad *r* an Zahnbogen *r* drückt.

Die ganze Vorrichtung ist in einem Rohrgehäuse aus Messing untergebracht, welches sich zur Aufnahme der kreisförmigen Skala zu einer Trommel erweitert. Das Gehäuse ist an einem Ende an dem Spitzenkörper *p* unverschieblich, am anderen Ende frei beweglich gelagert. Mit den Spitzenkörpern sind die Stäbe durch Nieten verbunden. Die Spitzen sind eingeschraubt.

Die Mefsstäbe sind nach den Anforderungen des Verfassers von der bekannten Firma *R. Fuefs* in Steglitz entworfen und angefertigt worden. Für die Eichung und die von Zeit zu Zeit erfolgende Nachprüfung der Spannungsmesser hat dieselbe Firma zwei besondere Wagen mit dem Hebelverhältnis 1 : 10 geliefert, die auch selbst jedesmal nachgeprüft und eingestellt werden. Die eine Wage eicht die lotrecht stehenden Mefsstäbe, die andere die wagerecht liegenden. Das Eigengewicht der wagerechten Mefsstäbe wurde sowohl beim Messen des Erddruckes als auch beim Nachprüfen auf der Wage durch über Rollen geführte Gegengewichte aufgehoben. Vergleichende Wägungen zeigten übrigens, dafs sowohl das Eigengewicht als auch die Stabrichtung das Ergebnis nur ganz unwesentlich beeinflussen.

Die elastischen Eigenschaften der Mefsstäbe wurden, da in der Versuchsanstalt des Verfassers zurzeit die erforderlichen Vorrichtungen noch fehlen, vom Königl. Materialprüfungsamt in

Grofs-Lichterfelde mit Hilfe von *Martens*schen Spiegelapparaten festgestellt. Es wurden die Formveränderungen zweier Mefsstäbe untersucht. Beide verhielten sich recht gleichmäfsig sowohl für sich allein als auch im Vergleich miteinander. Bei dem einen ergab sich die Zusammendrückung ohne die Spitzenverdrückung für 10 Skalenteile (das sind 10 kg) zu $4{,}92 \cdot 10^{-3}$ mm, bei dem anderen zu $4{,}93 \cdot 10^{-3}$ mm. Die Mefsstäbe sind zur Aufnahme von Drucken bis zu 200 kg bestimmt. Für die Lastanzeige von 30—200 kg betrug die Verdrückung einer Spitze $12{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm und die gesamte Änderung der Stablänge s:

$$\Delta s = (83{,}86 + 2 \cdot 12{,}5)\, 10^{-3} = 108{,}86 \cdot 10^{-3} \text{ mm.}$$

Das gibt also für 100 kg Belastung rund

$$\Delta s = 0{,}064 \text{ mm.}$$

29. Die Versuchsvorrichtung ist auf Tafel II dargestellt worden. Zur Aufnahme des Sandes, dessen Seitendruck gemessen werden soll, dient ein oben und vorn offener Kasten von 1015 mm Breite und 1970 mm Länge mit wagerechtem Boden und mit senkrechten Seitenwänden, die zur Verminderung des Reibungswiderstandes mit oxydiertem und mit Graphit eingeriebenem Stahlblech bekleidet sind und deren Oberkante unter etwa 30^0 ansteigt. Der Boden ist mit vier drehbaren Klappen versehen, die durch je einen Riegel geöffnet und geschlossen werden können. Um Stöfse beim Entleeren des Kastens zu vermeiden, wird der Vorschub und Rückzug jedes Riegels durch einen Spindelbetrieb bewirkt. Auch die Hinterwand enthält eine verschliefsbare Klappe zum bequemen Einebnen und Herauslassen des Sandes.

Die Vorderwand des Kastens ist beweglich und wird durch vier wagerecht liegende und zwei senkrecht stehende Stäbe auf die bereits in Nr. 27 an der Hand der Textfigur 94 beschriebene Weise gestützt. Der zur Wandfläche parallel liegende wagerechte Stab ist vorläufig noch ohne Spannungsmesser. Die Spielräume zwischen der beweglichen Wand und den festen Wänden des Kastens betragen etwa 2 mm. Damit der bei den Versuchen verwendete feinkörnige Sand, der weiter unten noch genauer beschrieben werden soll, nicht durch diese Spielräume herausrieselt, wurden Winkelstreifen von etwa 30 mm Breite aus dünnem, geöltem Pauspapier lose vor diese Fugen gelegt; sie erfüllten bei vorsichtigem Einschütten des Sandes vollkommen ihren Zweck.

Da sämtliche Stäbe nur imstande sind, Drucke aufzunehmen, mufste die bewegliche Wand mit Hilfe von zwei Gegengewichten

(46,5 kg und 10 kg) gegen die vier wagerecht liegenden Stäbe angeprefst werden. Auf die senkrechten Mefsstäbe übt das Gewicht der beweglichen Wand (rund 60 kg für eine rauhe und 75 kg für eine mit Spiegelglas belegte Wand) einen genügenden Anfangsdruck aus. Aufserdem ist das Eigengewicht jedes wagerechten Mefsstabes durch ein an einer beweglichen Rolle hängendes Gegengewicht aufgehoben. Die die bewegliche Rolle tragende Schnur verbindet die Enden des Rohrgehäuses des Mefsstabes und läuft über zwei feste Rollen.

Die lotrechten Mefsstäbe haben ihre Widerlager auf einem an den vorderen Stützen des Kastens befestigten [-Eisen. Die drei wagerechten Mefsstäbe stützen sich gegen zwei I-Eisen Nr. 30 und einen sehr steifen Bock von Dreieckform. Das obere I-Eisen kann verlegt werden, so dafs sich die bewegliche Wand auch schräg stellen läfst. Bis jetzt sind aber nur Versuche mit lotrechter Wand gemacht worden. Für die weiteren Versuche mit geneigten Wänden hat der Verfasser eine neue gröfsere Vorrichtung erbaut, über welche später berichtet werden soll. Die Auflager der Mefsstäbe sind in gewissen Grenzen einstellbar. Kasten und Bock haben ein gemeinsames festes Auflager. Die äufseren Stützpunkte von Kasten und Bock sind beweglich gelagert, so dafs die ganze Ausdehnung infolge Erwärmung von der Ebene der Mefswand aus nach den Endauflagern hin vorschreitet und der Einflufs von Temperaturänderungen nach Möglichkeit ausgeschaltet wird.

Die Mefswand besteht aus einer 30 mm dicken, durch Winkeleisen verstärkten Holzplatte und ist mit Pfannenlagern für die Mefsstäbe versehen. Die Innenseite ist mit Schmirgelleinwand Nr. 4, Marke Hirschkäfer, der Vereinigten Maschinen- und Schmirgelwerke zu Hainholz-Hannover überzogen. Für Versuche mit glatter Wand wurde eine 6 mm starke Spiegelglasplatte durch Winkelstücke auf der rauhen Wand festgeklemmt.

Die Schüttung des Sandes erfolgte durch einen *Flohr*schen, von Hand betriebenen Laufkran mit daran hängendem Blechkasten von 0,75 cbm Inhalt. Die Bodenfläche des Schüttkastens ist schräg. Die Vorderwand besteht aus einem Schieber, der durch einen Hebel geöffnet und auch während der Schüttung geschlossen werden kann.

§ 8.

Ermittelung der Werte γ, ρ, ρ'.

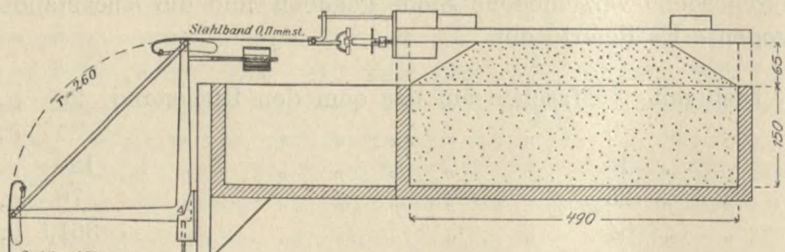
30. Der Versuchssand. Zu den Versuchen wurde ein feinkörniger von den Berliner Mörtelwerken gelieferter Sand verwendet. Der Sand wurde zunächst im Kesselraume der Zentralheizung der Technischen Hochschule gründlich getrocknet; er wird seither in dem vollständig trockenen, während des Winterhalbjahrs gut geheizten Versuchsraume aufbewahrt. Um ein Bild von der Korngröfse zu erhalten, wurden 50 kg Sand nacheinander durch sechs verschiedene Siebe gegeben und die Rückstände gewogen. Es lieferte ein

Sieb	mit	4	Maschen	auf	das	qcm	den	Rückstand	20 g,
„	„	9	„	„	„	„	„	„	85 g,
„	„	16	„	„	„	„	„	„	120 g,
„	„	25	„	„	„	„	„	„	70 g,
„	„	64	„	„	„	„	„	„	361,5 g,
„	„	121	„	„	„	„	„	„	940,5 g,
									1 597,0 g,
								Rest	48 370,0 g,
									49 967,0 g.

Wurde ein Litergefäfs mit Sand gefüllt, ohne es zu schütteln, so ergab sich ein spezifisches Gewicht des Sandes von $\gamma = 1,58$; eingerüttelter Sand besafs $\gamma = 1,60$. Lose in einem Kasten von den Abmessungen $41 \cdot 21 \cdot 20,75$ cm geschütteter Sand lieferte $\gamma = 1,56$. Nun wurde auf den Boden des Kastens der Versuchsvorrichtung eine flache Zinkschale von $40 \cdot 40 \cdot 5$ cm Gröfse gestellt, der Sand eingefüllt und vor Beendigung der Füllung dicht unter der wagerechten Oberfläche eine zweite, ebenso grofse Zinkschale eingesetzt. Für den Sand im oberen Kasten ergab sich $\gamma = 1,58$, im unteren $\gamma = 1,61$. Für die Nachrechnung der Versuche genügt die erste Dezimalstelle, also die Annahme von $\gamma = 1,6$; die zweite Dezimalstelle ist schon nicht mehr ganz sicher.

Zur Feststellung des Winkels ρ wurde Sand in den Kasten der Versuchsvorrichtung so eingefüllt, dafs sich eine von der Oberkante der beweglichen Wand ausgehende natürliche Böschung bildete. Nun wurde die hinterste Bodenklappe langsam geöffnet und ein Teil des eingefüllten Sandes herausgelassen. Die dadurch entstehende Böschung nahm sehr regelmäfsig den auf ganze Grade abgerundeten Neigungswinkel $\rho = 32^0$ an.

31. Der Winkel ρ'. Um die Rauhigkeit der mit Schmirgelleinwand bekleideten beweglichen Wand zu kennzeichnen, wurde der folgende Versuch angestellt. Auf einen Kasten von den lichten Abmessungen 49·49·15 cm (Fig. 98) wurde ein die Seitenwände verlängernder Rahmen von 6,5 cm Höhe gesetzt. Nun wurde der Kasten mit Sand gefüllt, die Oberfläche mit einem Lineal glatt gestrichen und der Rahmen vorsichtig abgehoben. Auf die sich bildende, vollkommen ebene Oberfläche wurde eine mit Schmirgelleinwand bekleidete, mit Gewichten beschwerte Holzplatte gelegt



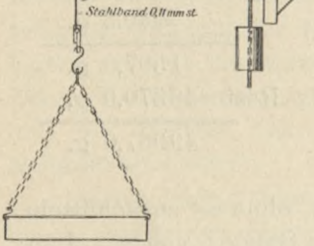


Fig. 98.

und nunmehr untersucht, bei welcher Gröfse einer an der Unterseite der Platte angreifenden wagerechten Zugkraft die Möglichkeit eines Gleichgewichtszustandes aufhört. Dabei mufs natürlich daran gedacht werden, dafs das Entstehen des hier in Frage stehenden Reibungswiderstandes zwischen Platte und Sand mit einer Formänderung der Platte — die aber im vorliegenden Falle vernachlässigbar ist — und einer geringen Bewegung und Lagenänderung der Platte und der in ihrer nächsten Umgebung liegenden Sandteilchen verbunden ist; denn bei nachgiebigen Körpern ist ein Widerstand ohne vorangegangene Bewegung nicht denkbar.

Ein wagerecht liegendes Stahlband von 0,11 mm Stärke verbindet nun die Platte mit einem auf einer Schneide ruhenden gleicharmigen Winkelhebel, dessen Schwerachse durch verstellbare Gegengewichte mit der Schneidenachse zur Deckung gebracht ist und der — wieder an einem 0,11 mm starken Stahlbande — eine Gewichtsschale trägt. Durch langsam in die Schale eingefülltes Schrot wurde ein stetig wachsender Zug auf die Platte übertragen. Die kleinen Bewegungen der Platte waren sehr unregelmäſsig und setzten sich aus allmählich verlaufenden und ruckweisen Verschiebungen zusammen. Der Normaldruck der Platte auf die Sandoberfläche schwankte je nach der Gröſse der aufgebrachten Gewichte zwischen 10,95 und 20,95 kg.

Will man die Grenze finden, bei welcher gerade noch Gleichgewicht möglich ist, so muſs man den letzten Teil der Schrotlast sehr langsam aufbringen und ab und zu eine Pause machen, um sich zu überzeugen, daſs nach der kleinen Bewegung wieder eine Ruhelage eingetreten ist. Die Dauer eines Versuches betrug $1^1/_4$ bis $1^1/_2$ Stunden. Der Mittelwert der Ergebnisse von 13 Versuchen ist $\operatorname{tg} \rho' = 0{,}604$, also $\rho' = 31^\circ 8'$. Nach den auf die Platte aufgebrachten Belastungen geordnet waren die Mittelwerte:

I) $\rho' = 31^\circ 38'$ bei einem Normaldruck von 10,95 kg,
II) $\rho' = 31^\circ 15'$ „ „ „ „ 15,95 kg,
III) $\rho' = 30^\circ 45'$ „ „ „ „ 20,95 kg.

Die gröſste Abweichung der Versuchswerte untereinander betrug

bei I (vier Versuche) 9 v. H.,
„ II (drei „) 5 v. H.,
„ III (sechs „) 5 v. H.

Ein wesentlicher Einfluſs der Gröſse des Normaldruckes auf den Reibungswinkel ρ' läſst sich hieraus nicht folgern. Der gröſste unter III gefundene Wert $\rho' = 31^\circ 17'$ war gröſser als der kleinste unter I gefundene Wert $\rho' = 30^\circ 17'$. Der von der Platte zurückgelegte Weg betrug rund 4 mm.

§ 9.

Photographische Versuche.

32. Für die Erforschung des Erddruckes ist es nicht unwichtig, festzustellen, welcher Teil einer durch eine Wand gestützten Erdmasse in Bewegung gerät, wenn die Wand etwas nachgibt. Die Beantwortung dieser Frage hat der Verfasser in seinen Arbeitsplan mit aufgenommen.

In einem Kasten von den lichten Abmessungen 600 · 1000 · 500 mm, dessen Seitenwände aus 6 mm (später 8 mm) starkem Spiegelglase bestehen (Fig. 99), wird eine mit grobkörnigem Sande hinterfüllte, auf der Rückseite mit Schmirgelleinwand beleimte, 395 mm hohe Holzwand zum Ausweichen gebracht, und zwar entweder in wagerechter Richtung verschoben oder um ihre untere Innenkante gedreht.

Die Verschiebung der oberen Wandkante betrug bei den bis jetzt angestellten Versuchen 1—6 mm; sie wird durch eine Schraubenspindel von 4 mm Ganghöhe mittels Kurbel geregelt. Der Vorgang wird photographiert. Die Geschwindigkeit der Wandbewegung muſs nach der von Lichtstärke und Blende abhängigen Belichtungszeit bemessen werden. Das Licht fällt seitlich ein, damit die Sandkörner kräftige Schatten werfen und Reflexe in der Vorderfläche des Spiegelglases vermieden werden.

Die ersten Aufnahmen wurden im photochemischen Laboratorium der Technischen Hochschule mit einem *Voigtländer Apochromat-Collinear* von 60 cm Brennweite gemacht. Seit Frühjahr 1905 besitzt

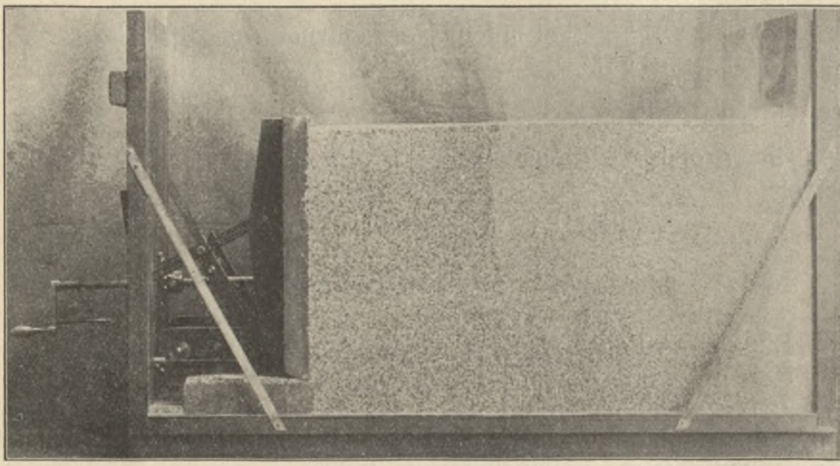


Fig. 99.

das Laboratorium für Statik der Baukonstruktionen ein eigenes photographisches Atelier. Es wird jetzt mit einem *Voigtländer Triple Anastigmat* von 60 cm Brennweite und einer Kamera *Stegemann*scher Bauart, welche die Verwendung von Platten bis zu 70 × 80 cm Gröſse gestattet, gearbeitet. Auf den Tafeln III und IV sind einige Aufnahmen wiedergegeben worden; es muſsten des kleinen Maſsstabes wegen solche von stärker bewegten Wänden ausgewählt werden. Der Einfluſs der Gröſse der Bewegung der Wand zwischen den oben angegebenen Grenzen auf die Gröſse und die Form der Begrenzung des sich bewegenden Teiles des Sandes war übrigens auffallend gering. Die Figuren 100 und 101 zeigen die Wirkung einer Drehung der Wand um 0,9° bezw. 0,6° bei verschiedenen Neigungen der Wand und der Oberfläche des Sandes. Fig. 102 stellt den Einfluſs einer wagerechten Verschiebung der Wand um

4 mm dar. Die eingezeichneten Geraden geben die Richtungen der *Coulomb*schen Gleitlinien für den Fall $\delta' = \rho = 33^0$ an, wozu noch zu bemerken ist, dafs die Gröfse des Winkels δ' keinen erheblichen Einflufs auf die Richtung dieser Linie hat. Für $\delta' = 0$ ist die Gleitlinie steiler als für $\delta' = \rho$. Fig. 103 stellt den Fall einer auf der Oberfläche der Sandmasse ruhenden Einzellast dar. Die Einzellast, von der unsere Figur nur den untersten Teil zeigt, bestand aus einem ohne Mörtel ausgeführten kleinen Mauersteinpfeiler von 32,5 cm Höhe und den Grundrifsabmessungen 50 · 12 cm. Der Pfeiler stand auf einem Brett von 50 cm Breite (senkrecht zur Bildfläche gemessen) und 12 cm Länge.

Die Versuche sollen mit verschieden geformten Wänden fortgesetzt werden; auch soll versucht werden, die Wandbewegungen noch zu verkleinern. Verfasser unterläfst es, schon jetzt Schlüsse aus den Versuchsergebnissen zu ziehen. Er macht nur darauf aufmerksam, dafs die durch die Reibung an den Glaswänden natürlich etwas beeinflufste Grenze zwischen dem in Ruhe bleibenden und dem in Bewegung geratenden Sande in der Nähe der *Coulomb*schen Gleitlinie liegt, und dafs die unteren Teile der in den Figuren 100 bis 102 dargestellten Grenzlinien etwas nach unten gekrümmt sind, ähnlich wie bei der in Fig. 85 auf S. 101 gezeichneten Gleitlinie. In Fig. 103 fällt der untere Teil der Grenzlinie nahezu mit der durch den Fufs der Wand und den hinteren Endpunkt der Last bestimmten Geraden zusammen; der obere Teil ist gekrümmt.

§ 10.

Versuche zur Bestimmung des Erddruckes.

33. Formeln zur Nachrechnung der Versuche. Aus den Spannkräften S_1, S_2 .... S_5 der Mefsstäbe und den Abmessungen $a = 810$ mm, $c = 110$ mm, $b = 13$ mm für die rauhe bezw. 19 mm für die glatte Wand ergeben sich mit den Bezeichnungen (Fig. 104)

$$O = S_1 \text{ und } U = S_2 + S_3$$

die Werte

123) $$E_w = O + U,$$

124) $$E_l = S_4 + S_5,$$

125) $$s_u = \frac{810\, O + \frac{13}{19} E_l}{E_w} - 110 \text{ mm}.$$

Es wurden bisher nur Versuche mit lotrecht stehender Wand gemacht. Die Ergebnisse sollen mit denen verglichen werden, welche die *Coulomb*sche Theorie unter der Voraussetzung *ebener*

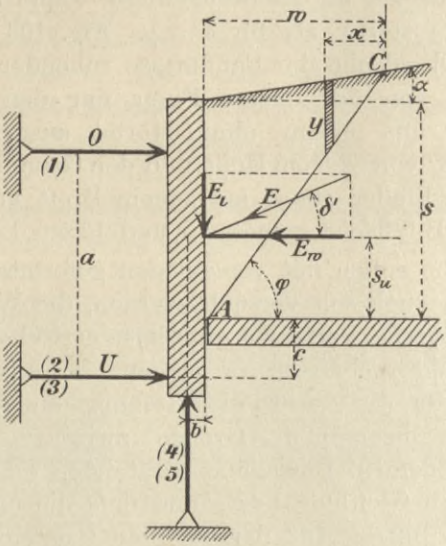


Fig. 104.

Gleitflächen liefert. In die Formeln 18) bis 20), Seite 14, ist $s = 0{,}744$ m, $\gamma = 1600$ kg/m^3 und $\rho = 32^0$ einzusetzen; auch mufs der Wert E_w mit der Wandbreite 1,015 m multipliziert werden. Man erhält

$$E_w = \frac{323}{\varepsilon^2}\ \text{kg},$$

wo

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\rho - \alpha)\sin(\rho + \delta')}{\cos\alpha\cos\delta'}}.$$

Für δ' ist der beobachtete Winkel zu nehmen.

Die Lage der Gleitfläche ist bestimmt durch die Strecke

$$\overline{BC} = \frac{s\cos\rho}{\sin(\rho - \alpha)}\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{63}{\sin(\rho - \alpha)}\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\ \text{cm}.$$

Ist $\alpha = 0$, so ergibt sich

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{0{,}530\,\frac{\sin(\rho + \delta')}{\cos\delta'}},$$

und

$$\overline{BC} = s\operatorname{cotg}\rho\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 119\,\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\ \text{cm}.$$

Ist $\alpha = -\rho$, so wird

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{1{,}060 \frac{\sin(\rho + \delta')}{\cos \delta'}},$$

und

$$\overline{BC} = \frac{s}{2 \sin \rho} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 70 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \text{ cm}.$$

Zu dem bei der Anwendung von Seitenwänden gemessenen Erddruck mufs vor der Vergleichung mit den Ergebnissen der vorstehenden Formeln ein Zuschlag gemacht werden, der die Reibungswiderstände der Seitenwände berücksichtigt. Die zuverlässige Ermittelung dieses Zuschlages ist sehr schwierig. *Winkler* und *Donath* stellten bei ihren Erddruckmessungen*) eine zweite Reihe von Versuchen an, bei der in dem Kasten eine zu den Seitenwänden parallele dünne Zwischenwand eingebaut wurde, wodurch sich die Reibung nach ihrer Ansicht verdoppelte; aus dem Unterschiede der Angaben schlossen sie auf den Einflufs der Reibung. Je gröfser nun die Abmessungen der Versuchsvorrichtung sind, desto schwieriger ist die Herstellung einer dünnen *eben bleibenden* Zwischenwand und die gleichartige Füllung und Belastung der durch die Zwischenwand getrennten Räume. Auch darf man nicht ohne weiteres behaupten, dafs sich die Drucke auf die Seitenwände infolge des Einbaus der Zwischenwand nicht ändern. Beide Forscher kommen zu ganz verschiedenen Ergebnissen. *Donath* fand, dafs die Reibung an den aus Zinkblech hergestellten Seitenwänden den Erddruck auf eine lotrechte quadratische Wand von 60^{cm} Seitenlänge bei wagerechter Begrenzung des Sandes um etwa 17 v. H. verminderte. *Winkler* fand, dafs man den bei Anwendung von Seitenwänden gefundenen Erddruck mit

$$1 + 0{,}116 \frac{s}{b} \operatorname{tg} \rho'$$

multiplizieren mufs, um den Erddruck einer nach der Längsrichtung unbegrenzten Erdmasse zu erhalten. b bedeutet die Breite der beweglichen Wand. Für die von *Donath* benutzte Mefswand würde hiernach selbst der zu hoch geschätzte Wert $\operatorname{tg} \rho' = 0{,}6$**) nur einen Zuschlag von 7 v. H. liefern.

Der Verfasser wird versuchen, den störenden Einflufs der

---

*) Siehe das Literaturverzeichnis.

**) In dem *Donath*schen Berichte fehlt die Angabe des Wertes ρ' für die Seitenwände Bei den Versuchen *Winkler*s war für die bewegliche Wand, für die Seitenwände und die Zwischenwand $\operatorname{tg} \rho' = 0{,}57$.

Seitenwände auf anderem Wege auszuschalten*). Dies soll aber erst mit Hilfe der neu erbauten gröfseren Versuchsvorrichtung geschehen, die im nächsten Winterhalbjahre in Betrieb gesetzt werden wird. Für die vorläufig aus den Versuchsergebnissen zu ziehenden Schlüsse genügt die folgende Überschlagsrechnung.

Die Oberfläche des Sandes sei gleichmäfsig mit p belastet. Der Normaldruck auf das Teilchen $y\,dx$ der Seitenfläche ABC (Fig. 104) des Druckprismas soll gesetzt werden:

$$dN = \frac{1}{2}\gamma' y^2\,dx\,\mathrm{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = 0{,}15\,dx\,(\gamma y^2 + 2py).$$

Die Summe der Normaldrucke auf die beiden Flächen ABC ist dann

$$N = 0{,}30\left[\gamma\int_0^w y^2\,dx + 2p\int_0^w y\,dx\right] = 0{,}30\left[\frac{1}{3}\gamma s^2 w + psw\right]$$
$$= (88{,}6 + 0{,}223\,p)\,w \text{ kg},$$

wo w den in Metern ausgedrückten Abstand des Punktes C von der Geraden AB bedeutet.

Für den Reibungswinkel zwischen Sand und Seitenwand wurde mittels der in Nr. 31 beschriebenen Vorrichtung der Wert $\rho'_{max} = 14^0$ gefunden**). Hierzu gehört $\mathrm{tg}\,\rho' = 0{,}25$, und es soll daher der Reibungswiderstand beider Seitenwände auf

$$R = 22\,w + 0{,}056\,pw \text{ kg}$$

veranschlagt werden. Indem wir nun annehmen, dafs dieser Widerstand in der Richtung der Gleitfläche AC wirkt, schätzen wir den Einflufs der Seitenwände auf die Gröfse des Erddrucks:

$$\Delta E = R\cos(\varphi - \delta').$$

Der Verfasser ist überzeugt, dafs bei den sehr kleinen und langsam mit der Sandschüttung anwachsenden Verschiebungen der Wand kleinere Werte ΔE entstehen werden, als die Rechnung liefert. Der wirkliche Vorgang hängt von der Art der Schüttung des Sandkörpers ab und läfst sich rechnerisch nicht verfolgen.

34. Versuche mit rauher Wand. Einflufs einer Einzellast. In der folgenden Beschreibung der Versuche ist die Bezeichnung T_n gleichbedeutend mit *am nten Tage*.

---

*) Die Seitenwände beeinflussen nicht nur die Gröfse des Erddruckes, sondern auch die Richtung und die Lage des Angriffspunktes.

**) Dieser Winkel ist erheblich kleiner als der für eine Glasplatte gefundene Winkel 22⁰.

Die Messungen wurden stets zur Mittagzeit zwischen 12^h und 3^h vorgenommen. Aufser der um diese Zeit im Versuchsraume herrschenden Temperatur t wurden noch die seit Ausführung der letzten Messung eingetretenen Temperaturen t_{max} und t_{min} festgestellt.

Die wagerechten Verschiebungen der Angriffspunkte der Stäbe O und U und die lotrechte Senkung der Wand bezeichnen wir mit η_o, η_u und η_l. Es wurden nur die Längenänderungen der Mefsstäbe berücksichtigt; der Einflufs der Formänderungen der die Mefsstäbe stützenden Träger darf vernachlässigt werden.

Wir beginnen mit der etwas ausführlicheren Beschreibung eines Versuches, der am 27. Oktober begann und am 27. November (1905) endete.

T_1. Es wurde der Sand unter $\alpha = -\rho$ langsam eingefüllt und unmittelbar darauf festgestellt:

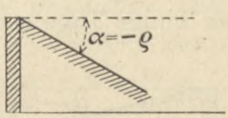


Fig. 105.

O	U	E_w	E_l	E	δ'	s_u	$s_u : h$
32,7 kg	46,7 kg	79,4 kg	38,2 kg	88 kg	25° 48′	23,0 cm	0,310

$\eta_o = 0{,}021$ mm $\quad \eta_u = 0{,}015$ mm $\quad \eta_l = 0{,}012$ mm.

Der Erddruck wurde nun einige Tage beobachtet. Es wurde gefunden:

	Temperaturen	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	h_u cm	$s_u : s$
T_2	16,7° · 21° · 21,5°	33,1	47,3	80,4	39,4	89	26° 3′	23,0	0,310
T_5	17,3° · 22,4° · 22,8°	33,2	47,7	80,9	39,6	90	26° 5′	22,9	0,308
T_8	19° · 21,6° · 22.5°	32,1	46,2	78.3	39,5	88	26° 46′	23,9	0,321

Zu $\delta' = 26°$ und $\alpha = -\rho$ gehört

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{1{,}06 \, \frac{0{,}85}{0{,}90}} = 2{,}00,$$

$$\overline{BC} = 70 \, \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 35 \text{ cm},$$

$$w = 0{,}35 \cos \rho = 0{,}30 \text{ m},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{s}{w} - \operatorname{tg}\rho = 1{,}96, \quad \varphi = 63^0.$$

Der Zuschlag für die Reibung an den Seitenwänden beträgt daher rund $\Delta E = 5$ kg, das sind 6 v. H.

Die *Coulomb*sche Theorie liefert

$$E = \frac{323 \sec \delta'}{\varepsilon^2} = 89 \text{ kg}.$$

Setzt man bei der Berechnung der *Gröſse* von E den Winkel $\delta' = 0$ — eine vom Verfasser auf S. 15 empfohlene Vereinfachung — so findet man

$$\varepsilon = 1 + \sqrt{2} \sin \rho = 1{,}75 \text{ und } E = 105 \text{ kg}.$$

Am achten Tage wurde durch Nachfüllen von Sand die Böschung $\alpha = -\,{}^1\!/_2\,\rho = -16^0$ hergestellt. Der Erddruck wurde sofort gemessen und dann wieder einige Tage beobachtet. Es ergab sich:

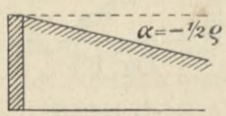


Fig. 106.

	Temperaturen	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
T_8		40,9	53,8	94,7	47,6	**106**	26° 41′	24,6	0,331
T_9	18,1° · 20° · 20°	42,0	55,2	97,2	47,7	**108**	26° 8′	24,6	0,331
T_{11}	18,7° · 20,5° · 21,3°	41,0	54,3	95,3	49,0	**107**	27° 12′	24,5	0,330
T_{13}	18,5° · 21,6° · 21,8°	40,7	53,2	93,9	47,5	**105**	26° 50′	24,8	0,333

Die neu aufgebrachte Sandmasse erzeugte die Verschiebungen

$$\eta_o = 0{,}006 \text{ mm}, \quad \eta_u = 0{,}0025 \text{ mm}, \quad \eta_l = 0{,}0025 \text{ mm}.$$

Zu $\delta' = 26^0$ und $\alpha = -16^0$ gehört

$$\varepsilon = 1{,}85, \quad \overline{BC} = 39 \text{ cm}, \quad w = 0{,}37 \text{ m}, \quad \varphi = 60^0.$$

Der Zuschlag für die Reibung an den Seitenwänden beträgt also rund 7 kg, das sind 6 ½ v. H.

Durch Rechnung erhält man

$$\text{für } \delta' = 26^0, \quad E = 98 \text{ kg},$$
$$\text{„} \quad \delta' = 0, \quad E = 119 \text{ kg}.$$

Nach Herstellung der wagerechten Oberfläche der Sandmasse ergab sich:

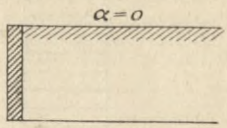


Fig. 107.

	Temperaturen	O kg	U kg	E_w kg	E_t kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
T_{13}		53,0	63,2	116,2	55,5	**129**	25° 32′	26,6	0,358
T_{14}	18,5°·22,3°·22,5°	51,0	62,5	113,5	59,3	**128**	27° 35′	26,1	0,351
T_{15}	18,6°·22,2°·23,4°	52,3	62,3	114,6	60,6	**130**	27° 52′	26,7	0,359
T_{16}	18,7°·21,5°·23,3°	48,6	61,5	110,1	58,8	**125**	28° 6′	25,4	0,342
T_{18}	18,5°·21,5°·23,5°	49,1	61,1	110,2	59,4	**125**	28° 20′	25,8	0,347
T_{19}	18,6°·22° ·23°	51,3	61,2	112,5	58,2	**127**	27° 22′	26,6	0,358

Die neu aufgebrachte Sandmasse erzeugte

$$\eta_o = 0{,}008 \text{ mm}, \quad \eta_u = 0{,}003 \text{ mm}, \quad \eta_l = 0{,}003 \text{ mm}.$$

Zu $\delta' =$ rund 26° und $\alpha = 0$ gehört

$$\varepsilon = 1{,}71, \quad \overline{BC} = w = 0{,}50 \text{ m}, \quad \varphi = 56^0, \quad \Delta E = 10 \text{ kg}.$$

Die Rechnung liefert für $\delta' = 26^0$ den Erddruck $E = 124$ kg und für $\delta' = 0$

$$E = \frac{1}{2}\,\gamma\, s^2 \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = 136 \text{ kg}.$$

Jetzt wurde auf die Oberfläche des Sandes eine Einzellast von 735,4 kg gebracht, die aus sieben übereinandergelagerten, annähernd gleich schweren Schichten gufseiserner Platten bestand (Fig. 108). Die Länge der belasteten Fläche betrug 27 cm, die Breite war fast gleich der Wandbreite, es blieb nur ein geringer Spielraum. Der Abstand der belasteten Strecke von der Innenkante der Wand betrug 50 cm; er war gleich $\overline{BC}$ gewählt worden, um die irrige Ansicht zu widerlegen, dafs eine aufserhalb der Strecke BC aufgebrachte Belastung keinen Einflufs auf den Erddruck E ausübe*).

Die zu einer Schicht gehörenden vier Platten wurden gleichzeitig und ganz langsam mit Hilfe des Laufkranes aufgelegt. Wenige Minuten nach Aufbringung einer Schicht wurde der zugehörige Erddruck festgestellt. Beginn der Belastung 11ʰ 50′, Schlufs 12ʰ 35′. Der Erddruck wurde hierauf noch eine Woche lang beobachtet.

*) Wir haben diese von Professor *Mehrtens* in seinem 1904 erschienenen Lehrbuche vertretene Ansicht bereits im § 4 (Nr. 20) besprochen.

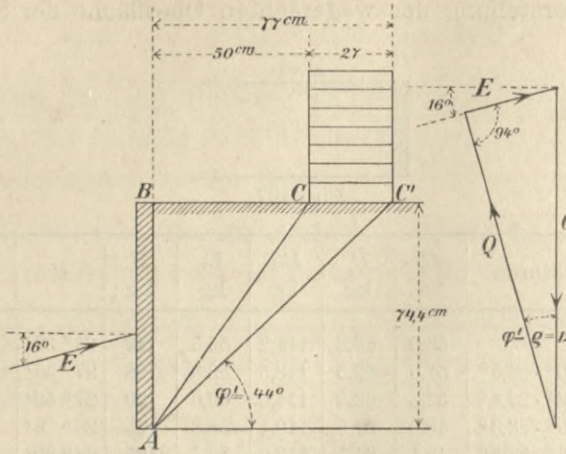


Fig. 108.

	Temperaturen	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
	Nach Aufbringung der								
T_{19}	ersten Schicht:	64,7	70,8	135,5	62,2	**149**	24° 39′	28,3	0,380
	zweiten „	74,9	80,6	155,5	64,8	**168**	22° 38′	28,6	0,384
	dritten „	84,5	87,9	172,4	68,4	**185**	21° 37′	29,2	0,392
	vierten „	95,4	96,1	191,5	69,4	**204**	19° 55′	29,8	0,400
	fünften „	105,0	103,5	208,5	71,0	**220**	18° 48′	30,2	0,406
	sechsten „	116,1	111,2	227,3	71,8	**238**	17° 32′	30,8	0,414
	siebenten „	129,3	121,1	250,4	70,6	**260**	15° 46′	31,2	0,420
T_{20}	18,3° · 20° · 23°	115,4	114,0	229,4	75,4	**241**	18° 12′	30,1	0,405
T_{22}	18,3° · 21° · 22,8°	115,5	114,3	229,8	80,0	**243**	19° 12′	30,2	0,406
T_{25}	16° · 17,5° · 17,5°	113,4	111,3	224,7	80,4	**239**	19° 42′	30,3	0,407
T_{26}	15,9° · 17,6° · 17,6°	114,4	111,1	225,5	81,9	**240**	19° 59′	30,5	0,410

Der Erddruck ist also durch die aufgelegte Einzellast verdoppelt worden; am gröfsten war er unmittelbar nach Aufbringung der Belastung. Am Tage T_{19} entstanden die Wandverschiebungen

$$\eta_o = 0{,}048 \text{ mm}, \quad \eta_u = 0{,}019 \text{ mm}, \quad \eta_l = 0{,}005 \text{ mm};$$

sie sind immer noch als sehr klein zu bezeichnen.

Bei der Anwendung des *Coulomb*schen Prinzips darf man die nach dem Endpunkte C' der belasteten Strecke CC' (Fig. 108) führende Gerade als Gleitlinie ansehen*). Man erhält

*) Führt man die Rechnung nach dem im § 4 gezeigten Verfahren vollständig durch, so findet man den Endpunkt der Gleitfläche noch unter der Last, im Abstande von rund 2 cm vom Punkte C'. Der Wert E weicht aber von dem oben berechneten nur ganz unwesentlich ab.

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{74{,}4}{77} = 0{,}966 \qquad \varphi' = 44^0$$

und für $\delta' =$ rund $16^0 = {}^1/_2\,\rho$ mit den in das Kräftedreieck eingeschriebenen Winkeln

$$E = G\,\frac{\sin 12^0}{\sin 94^0} = 0{,}208\,G.$$

Das Gewicht des Sandprismas ABC' ist

$$G_\gamma = {}^1/_2\,1600 \cdot 0{,}744 \cdot 1{,}015 \cdot \overline{BC'} = 604\,\overline{BC'} = 465 \text{ kg},$$

und man erhält

$$E = 0{,}208\,(465 + 735) = 250 \text{ kg}.$$

Nimmt man bei der Berechnung der Gröfse von E den Winkel $\delta' = 0$ an, so findet man

$$E = G \operatorname{tg}(\varphi' - \rho) = 256 \text{ kg}.$$

Auf die Angabe eines die Reibung an den Seitenwänden berücksichtigenden Zuschlages müssen wir verzichten, da jeder Anhaltspunkt hierzu fehlt. Wir müssen uns also vorläufig darauf beschränken, festzustellen, dafs der auf Grund der Annahme einer ebenen Gleitfläche für den unteren Grenzzustand des Gleichgewichts berechnete Erddruck kleiner ist als der gemessene. Immerhin darf ausgesprochen werden, dafs diese einfache Rechnung gute Dienste leistet. Nur empfiehlt es sich, um sicher zu gehen, beim Auftreten schwerer Einzellasten möglichst vorsichtige Annahmen zu machen.

Wir stellen noch die folgende Betrachtung an. Wir fanden vor Aufbringung der Last den Erddruck $E_{w\gamma} = 112$ kg, unmittelbar nachher $E_w = 250$ kg. Machen wir nun die übliche Annahme, dafs $E_{w\gamma}$ in der Höhe ${}^1/_3\,s$ angreift, so entsteht die Frage: in welcher Höhe s_p mufs $E_{wp} = 250 - 112 = 138$ kg angenommen werden, damit das Moment in bezug auf die untere Innenkante der Wand ebenso grofs ist, wie bei Einführung der gemessenen Werte. Es ergibt sich die Gleichung

$$138\,s_p + 112\,\frac{s}{3} = 250 \cdot 0{,}420\,s$$

und hieraus folgt

$$s_p = 0{,}49\,s = \text{rund } {}^1/_2\,s.$$

Noch am Tage T_{26} wurde die Belastung wieder entfernt. Der sich einstellende Erddruck wurde sofort und zwei Tage später gemessen. Dann wurden die Fenster geöffnet, die Heizung abgestellt und die Änderungen des Erddruckes bei gröfseren Wärmeschwankungen in einem Zeitraume von vier Tagen beobachtet. Diese Änderungen bewegten sich innerhalb derselben Grenzen wie bei geschlossenen Fenstern, ein Beweis, dafs gröfsere Messungsfehler infolge der geringen Wärmeschwankungen während der ersten 26 Tage ausgeschlossen sind. Den Einflufs der Wärme und des Feuchtigkeitsgrades vollständig zu beseitigen, ist natürlich unmöglich; denn sowohl der Kasten und seine Unterstützungen, als auch der Sandkörper ändern innerhalb enger Grenzen unausgesetzt ihre Form. Es wurde gemessen:

	Temperaturen	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
	Abnahme der Einzellast in 40 Minuten:								
T_{26}		99,0	100,3	199,3	43,9	**204**	12° 25′	29,4	0,395
T_{28}	15°·16° ·17,8°	96,2	97,5	193,7	42,5	**198**	12° 23′	29,5	0,396
	Fenster geöffnet, Heizung abgestellt:								
T_{29}	5,5°·9,3° ·16,0°	93,4	99,3	192,7	48,4	**199**	14° 6′	28,6	0,384
T_{30}	7,5°·9,0° · 9,5°	87,9	100,8	188,7	50,2	**195**	14° 54′	27,1	0,364
	Fenster geschlossen, Heizung geöffnet:								
T_{32}	9,0°·17,6°·19,7°	88,9	100,5	189,4	55,3	**197**	16° 17′	27,4	0,368

Beachtenswert ist die verhältnismäfsig geringe Abnahme des Erddruckes nach Entfernung der Einzellast; sie zeigt den nachhaltigen Einflufs einer etwa eingetretenen Überlastung der Hinterfüllungserde einer Stützmauer. Die Längenänderungen der Mefsstäbe betrugen bei Abnahme der Last am Tage T_{26}:

$$\eta_o = -0{,}010 \text{ mm} \quad \eta_u = -0{,}0035 \text{ mm} \quad \eta_l = -0{,}012 \text{ mm}.$$

Wenn diese Formänderungen auch sehr gering sind, so bewirken sie doch ein Vordringen der Wand gegen den Erdkörper und rufen einen widerstehenden (passiven) Erddruck hervor. Dieser Fall ist wichtig für Wände, die entweder selbst sehr elastisch sind oder auf einer sehr elastischen Unterlage ruhen, z. B. Bohlenwände oder solche aus Eisenbeton, Stützmauern auf elastischen Pfahlrosten, Stirnmauern gewölbter Brücken und ähnliche Konstruktionen. Hier wird nach der Entlastung der Hinterfüllungserde stets ein mehr oder minder starkes Zurückfedern der Wand stattfinden, und es gehört mit zu den wichtigsten Aufgaben der experimentellen Erddrucksforschung, den Erddruck auf elastische

Wände unter dem Einflusse einer wechselnden Belastung und Entlastung des Erdkörpers zu bestimmen.

Wir lassen nun die bei drei ähnlichen Versuchen gewonnenen Werte folgen. Es wurde der Sand in derselben Weise eingefüllt, auch wurde wieder mit $\alpha = -\rho$ begonnen, die Schüttung aber ohne Unterbrechung bis $\alpha = 0$ ausgeführt. Der Abstand der Last von der Innenseite der Wand betrug 51 cm. Die Temperaturen bewegten sich in denselben engen Grenzen wie bei dem zuerst beschriebenen Versuche.

	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
				I. Sand geschüttet bis $\alpha = 0$:				
T_1	54,5	61,5	116,0	62,8	**132**	28° 26′	27,8	0,374
T_4	54,5	64,3	118,8	63,4	**135**	28° 5′	26,9	0,362
		$\eta_o = 0{,}035$ mm		$\eta_u = 0{,}021$ mm		$\eta_l = 0{,}020$ mm.		
				Einzellast 735,4 kg aufgelegt:				
T_4	134,6	125,4	260,0	76,3	**271**	16° 22′	31,4	0,422
T_9	124,6	115,7	240,3	81,2	**254**	18° 43′	31,4	0,422
				II. Sand geschüttet bis $\alpha = 0$:				
T_1	54,4	63,8	118,2	62,7	**134**	27° 57′	27,0	0,363
T_4	53,0	64,6	117,6	62,7	**133**	28° 4′	26,2	0,352
				Einzellast 735,4 kg aufgelegt:				
T_4	126,4	124,8	251,2	85,2	**265**	18° 44′	30,2	0,406
T_8	112,5	116,3	228,8	85,5	**244**	20° 29′	29,3	0,394
				III. Sand geschüttet bis $\alpha = 0$:				
T_1	56,0	64,2	120,2	64,4	**136**	28° 11′	27,4	0,368
T_4	56,0	65,0	121,0	62,7	**136**	27° 23′	27,1	0,364
				Einzellast 735,4 kg aufgelegt:				
T_4	135,3	126,7	262,0	81,3	**274**	17° 14′	31,2	0,420
T_8	119,4	117,9	237,3	85,0	**252**	19° 42′	30,2	0,406

Es wurden noch Versuche mit anderen Lagen der Einzellast angestellt. Für jede dieser Lastlagen liegt allerdings bis jetzt nur ein Versuch vor. Die näher an der Wand aufgelegten Lasten mufsten mit Rücksicht auf die Tragfähigkeit der Mefsstäbe kleiner gewählt werden wie bei den vorhin beschriebenen Versuchen. Die Länge der belasteten Strecke betrug wieder 27 cm.

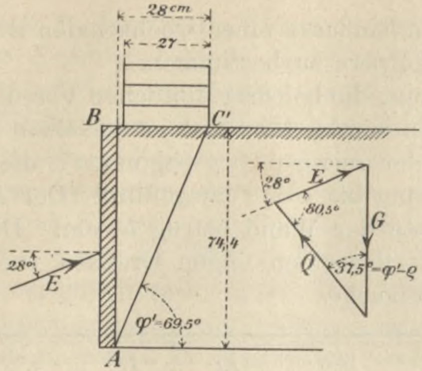


Fig. 109.

a) Einzellast 314,4 kg in 1 cm Abstand von der Wand.

	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
	Geschüttet bis $\alpha = o$:							
T_1	54,8	64,4	119,2	60,5	**134**	26° 55′	26,9	0,362
T_5	53,8	63,6	117,4	63,5	**133**	28° 24′	26,8	0,360
	Einzellast aufgebracht:							
T_5	148,7	118,7	267,4	139,6	**302**	27° 34′	34,7	0,466
T_9	146,3	119,4	265,7	140,6	**301**	27° 53′	34,4	0,462

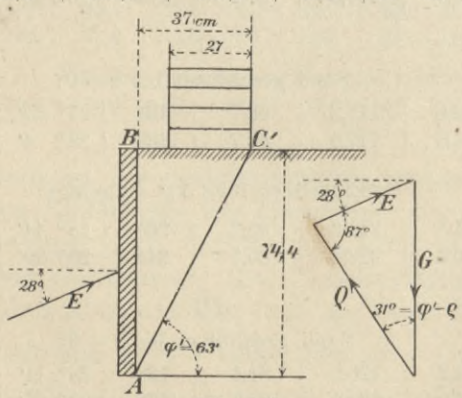


Fig. 110.

b) Einzellast 418,8 kg in 10 cm Abstand von der Wand.

	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
	Geschüttet bis $\alpha = o$:							
T_1	54,4	64,2	118,6	63,6	**135**	28° 12′	26,8	0,360
T_3	54,0	64,8	118,8	64,0	**135**	28° 19′	26,5	0,356
	Einzellast aufgebracht:							
T_3	158,6	138,6	297,2	148,2	**332**	26° 30′	32,9	0,442
T_5	152,5	135,2	287,7	153,0	**326**	28° 0′	32,6	0,438
T_{25}	145,5	131,2	276,7	148,2	**314**	28° 10′	32,3	0,434

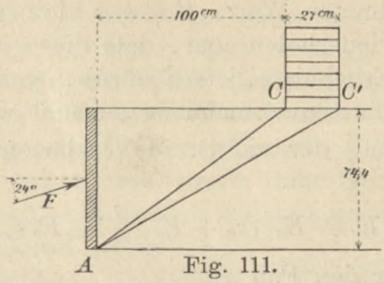


Fig. 111.

c) Einzellast 735,4 kg in 100 cm Abstand von der Wand.

	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
				Geschüttet bis $\alpha = o$:				
T_1	55,8	65,2	121,0	64,5	**137**	28° 4′	27,1	0,364
T_3	54,9	64,5	119,4	65,6	**136**	28° 47′	27,0	0,363
				Einzellast aufgebracht:				
T_3	84,6	92,1	176,7	79,4	**194**	24° 17′	28,4	0,382
T_6	82,1	93,1	175,2	80,4	**193**	24° 39′	27,5	0,370

Für die beiden Belastungsfälle in Fig. 109 und 110 sind die nach dem hinteren Ende der belasteten Strecken geführten Schnitte nach der in Nr. 19 und 20 aufgestellten Theorie Gleitflächen. Ihre Neigungswinkel φ' sind 69,5° und 63°. Man erhält also

$$\varphi' - \rho = 37,5^\circ \text{ bezw. } 31,5^\circ.$$

Die Gewichte der Erdprismen ABC' sind

$$G_\gamma = 604 \cdot 0,28 = 169,1 \text{ kg bezw. } 604 \cdot 0,37 = 223,5 \text{ kg},$$

und man erhält daher

$$G = 169,1 + 313,4 = 483 \text{ kg und } G = 223,5 + 418,8 = 642 \text{ kg}.$$

Wird für δ' der runde Wert 28° eingeführt, so besitzen die Kräftedreiecke die in den Figuren 109 und 110 angegebenen Winkel, und es ergibt sich für den Fall *a*)

$$E = 483 \frac{\sin 37,5}{\sin 80,5} = 483 \frac{0,609}{0,986} = 295 \text{ kg},$$

für den Fall *b*)

$$E = 642 \frac{\sin 31}{\sin 87} = 642 \frac{0,515}{0,999} = 331 \text{ kg}.$$

Diese Werte weichen von den gemessenen Drucken nur wenig ab. Zu den letzteren mufs aber noch ein Zuschlag für die Reibung an den Seitenwänden gemacht werden. Wir können also vorläufig wieder nur schliefsen, dafs die unter der Voraussetzung ebener

Gleitflächen gerechneten Werte E etwas kleiner sind als die gemessenen. Wir wiederholen aber, dafs diese einfache Rechnung ganz brauchbare Ergebnisse liefern dürfte, wenn hinsichtlich der Werte γ, ρ, δ' ungünstige Annahmen gemacht werden.

Zur Berechnung der auf S. 143 erklärten Strecke s_p dient die Gleichung

$$(E_w - E_{w\gamma})\, s_p + E_{w\gamma} \frac{s}{3} = E_w\, s_u.$$

Man erhält für den Fall a)

$$(267 - 117)\, s_p + 117 \frac{s}{3} = 267 \cdot 0{,}47\, s,$$

$$s_p = 0{,}58\, s$$

und für den Fall b)

$$(297 - 119)\, s_p + 119 \cdot \frac{s}{3} = 297 \cdot 0{,}44\, s,$$

$$s_p = 0{,}51\, s = \text{rund } \frac{1}{2}\, s.$$

Es werden noch umfangreiche Versuche nötig sein, um genügende Sicherheit über die Höhenlage des durch eine Einzellast erzeugten Erddruckes E_p zu gewinnen.

Eine Nachrechnung des Belastungsfalles c) ist bei dem gegenwärtigen Stande der Erddrucktheorie nicht möglich. Der Neigungswinkel der Schnittfläche AC ist $36^0\ 39'$, also nur um $4^0\ 39'$ gröfser als der natürliche Böschungswinkel.

35. Versuche mit rauher Wand. Einflufs einer gleichförmigen Belastung. Zunächst möge wieder ein Versuch von längerer Dauer beschrieben werden. Die an den Tagen T_1 bis T_{20} gemessenen Erddrucke sind zu vergleichen mit den Ergebnissen der ersten 19 Tage des auf den Seiten 139—141 beschriebenen Versuches.

	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
	Sand eingefüllt bis $\alpha = -\rho$:							
T_1	33,8	49,4	83,2	42,6	**93**	$27^0\ 7'$	22,6	0,304
T_7	33,6	50,4	84,0	42,0	**94**	$26^0\ 34'$	22,0	0,296
	weiter geschüttet bis $\alpha = -\frac{1}{2}\rho$:							
T_7	43,4	57,0	100,4	53,1	**114**	$27^0\ 3'$	24,7	0,332
T_{14}	42,5	55,7	98,2	49,2	**110**	$26^0\ 37'$	24,7	0,332
	weiter geschüttet bis $\alpha = 0$:							
T_{14}	52,2	63,0	115,2	58,1	**129**	$26^0\ 46'$	26,4	0,355
T_{20}	53,3	64,5	117,8	59,4	**132**	$26^0\ 46'$	26,3	0,354

Nun wurde eine gleichmäfsige Belastung von 362 kg/qm aufgebracht, bestehend aus sieben Querreihen gleich schwerer gufseiserner Platten. Die zu einer Querreihe gehörenden Platten wurden gleichzeitig mit Hilfe des Laufkranes aufgelegt. Die Aufbringung der ganzen Belastung dauerte 65 Minuten. Die Last blieb einige Tage liegen und wurde dann abwechselnd entfernt und wieder aufgelegt. Die durch die Last hervorgerufenen Längenänderungen der Mefsstäbe sind

$$\eta_o = 0{,}026 \text{ mm}, \quad \eta_u = 0{,}011 \text{ mm}, \quad \eta_l = 0{,}012 \text{ mm}.$$

Es wurden folgende Erddrucke gemessen.

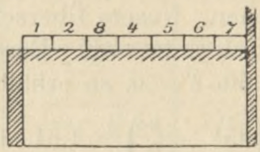


Fig. 112.

	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
	Belastung von der Wand aus vorschreitend aufgebracht:							
T_{20}	90,4	98,1	188,5	96,6	**212**	27° 8′	28,5	0,385
T_{25}	93,8	99,4	193,2	96,7	**216**	26° 35′	29,0	0,390
	Belastung von hinten aus wieder abgenommen:							
T_{25}	81,3	90,5	171,8	52,9	**179**	17° 7′	27,7	0,372
T_{29}	81,0	83,6	164,6	49,3	**172**	16° 40′	29,2	0,392
	Belastung wieder aufgebracht:							
T_{29}	93,6	96,2	189,8	91,3	**211**	25° 41′	29,6	0,398
T_{32}	95,7	96,5	192,2	94,8	**214**	26° 15′	30,0	0,403
	Belastung wieder abgenommen:							
T_{32}	79,8	93,8	173,6	52,4	**181**	16° 48′	26,6	0,358
T_{36}	79,6	83,8	163,4	46,8	**170**	15° 59′	28,8	0,387
	Belastung wieder aufgebracht,							
T_{36}	93,0	94,5	187,5	95,7	**211**	27° 2′	29,8	0,401
T_{42}	94,7	98,1	192,8	94,3	**215**	26° 10′	29,4	0,395
	Belastung wieder abgenommen:							
T_{42}	80,5	95,3	175,8	50,2	**183**	15° 56′	26,5	0,356
T_{44}	79,9	92,7	172,6	48,9	**179**	15° 49′	26,9	0,362

Um die für gleichmäfsige Belastung gemessenen Erddrucke mit denen der *Coulomb*schen Theorie zu vergleichen, ermitteln wir zunächst das Verhältnis

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = 1 + \frac{2p}{h\gamma} = 1 + \frac{2 \cdot 362}{0{,}744 \cdot 1600} = 1{,}61$$

und zerlegen E_w in

$$E_{w\gamma} = \frac{323}{\varepsilon^2} \text{ (S. 136)},$$

und

$$E_{wp} = 0{,}61 \frac{323}{\varepsilon^2} = \frac{197}{\varepsilon^2}.$$

Es ist δ' rund 26^0. Hierzu gehört $\varepsilon = 1{,}71$ und $\varepsilon^2 = 2{,}92$, also

$$E_{w\gamma} = 111 \text{ kg}, \quad E_{wp} = 68 \text{ kg}, \quad E_w = 179 \text{ kg},$$

$$E = 179 \cdot \sec \delta' = 179 \cdot 1{,}113 = 200 \text{ kg}.$$

Dieser Wert ist etwas kleiner als der gemessene Erddruck. Zu letzterem ist noch der Zuschlag für den Reibungswiderstand der Seitenwände zu machen. Unsere Überschlagsrechnung (S. 138) liefert rund $\Delta E = 17$ kg, d. s. 10 v. H. Berechnet man die Gröfse von E unter der Annahme $\delta' = 0$, so erhält man

$$E = \frac{1}{2} \gamma' s^2 \operatorname{tg}^2 \left(45^0 - \frac{\rho}{2}\right) = 1{,}61 \cdot 136\,^{*)} = 220 \text{ kg}.$$

Nimmt man an, dafs die für $\delta' = 26^0$ berechneten Drucke E_{wp} und $E_{w\gamma}$ in der Höhe $\frac{1}{2} s$ bezw. $\frac{1}{3} s$ angreifen, so findet man die Angriffshöhe von E aus der Gleichung

$$111 \frac{s}{3} + 68 \frac{s}{2} = 179\, s_u.$$

Es ergibt sich $s_u = 0{,}397\, s$, ein Wert, der von dem gemessenen nur wenig abweicht.

Wir teilen noch die folgende Versuchsreihe für wiederholte gleichmäfsige Belastung mit.

	O kg	U kg	E_w kg	E_l kg	E kg	δ'	s_u cm	$s_u : s$
T_1	geschüttet bis $\alpha = 0$:							
T_5	55,4	64,8	120,2	64,8	**137**	28° 20′	27,0	0,363
T_5	$p = 362$ kg/qm aufgebracht:							
T_7	96,0	97,0	193,0	97,2	**216**	26° 44′	29,9	0,402
T_7	entlastet:							
T_9	82,8	90,1	172,9	52,8	**181**	16° 59′	28,2	0,379
T_9	belastet:							
T_{11}	99,7	93,7	193,4	96,2	**216**	26° 24′	31,4	0,422
T_{11}	entlastet:							
T_{14}	83,6	84,2	167,8	55,9	**177**	18° 25′	29,8	0,400
T_{14}	belastet:							
T_{18}	102,0	92,0	194,0	98,0	**217**	26° 48′	32,2	0,433
T_{18}	entlastet:							
T_{20}	85,6	82,2	167,8	53,4	**176**	17° 39′	30,7	0,413

*) Für $p = 0$ fanden wir den Wert $E = 136$ kg.

Schliefslich geben wir noch eine Zusammenstellung von *Durchschnittswerten* für die bisher untersuchten Fälle. Die auf Grund der gemessenen Winkel δ' berechneten Erddrucke haben wir in Klammern beigefügt. Zu den gemessenen Drucken tritt noch der die Reibung an den Seitenwänden berücksichtigende Zuschlag. Aber auch ohne diesen Zuschlag sind die gemessenen Erddrucke gröfser als die berechneten. Von den beiden für gleichmäfsig belastete Oberfläche angegebenen Werten $s_u : s$ gilt der kleinere für einmalige, der gröfsere für wiederholte Belastung.

		E kg	δ'	$s_u : s$
Oberfläche unbelastet	$\alpha = -\rho$	91 (89)		0,31
	$\alpha = -\frac{1}{2}\rho$	113 (98)		0,33
	$\alpha = 0$	134 (124)	27°	0,36
	$\alpha = +\frac{1}{2}\rho$	195 (183)	$= 0,8\,\rho$	0,375
Oberfläche mit $p = 362$ kg/qm belastet	$\alpha = 0$	215 (200)		0,40 – 0,42

36. Versuche mit glatter Wand. Es wurden auch einige Versuche mit einer mit Spiegelglas belegten Wand angestellt, hauptsächlich um den Winkel δ' für glatte Wände zu messen. Die mitgeteilten gut abgerundeten Durchschnittswerte zeigen, was schon *Leygue* bei seinen Versuchen gefunden hat, dafs bei trockenem Sande wesentliche Unterschiede zwischen den Erddrucken auf glatte und rauhe Wände nicht bestehen. Der Winkel δ' schwankte zwischen 19° und $22\frac{1}{2}$°; er ist also im Mittel 21°.

	E kg	δ'	$s_u : s$
$\alpha = -\rho$	90		0,31
$\alpha = -\frac{1}{2}\rho$	120	21°	0,33
$\alpha = 0$	140		0,38
$\alpha = +\frac{1}{2}\rho$	200		0,40

37. Folgerungen aus den Versuchen. Die gemessenen Erddrucke waren durchweg gröfser als die mittels des *Coulomb*schen Prinzips unter der Voraussetzung *ebener* Gleitflächen berechneten Drucke. Dieses Ergebnis darf eigentlich nicht überraschen, denn im § 6 haben wir nachgewiesen, dafs es unebene Gleitflächen gibt, welche einen gröfseren Wandwiderstand erfordern als die ebenen Schnitte. Dazu kommt, dafs die *Coulomb*sche Theorie überhaupt nur den Mindestwiderstand liefert, den die Wand leisten mufs, damit gerade noch Gleichgewicht möglich ist, und dafs dieser Mindestwiderstand aus der Annahme hervorgeht, es werde der Reibungswiderstand in allen Punkten der in Frage kommenden Schnittfläche erschöpft.

Trotz dieses Ausfalles der Versuche hält es der Verfasser wegen der geringen Unterschiede zwischen den gemessenen und berechneten Werten für zulässig, bei der Ermittelung des Erddruckes auf eine Stützmauer an der einfachen Annahme ebener Gleitflächen und der Beschränkung auf den unteren Grenzzustand des Gleichgewichtes festzuhalten, denn man darf auch nicht aufser Acht lassen, dafs dem Reibungswiderstande in der Regel ein Kohäsionswiderstand zu Hilfe kommt. Es mufs aber durch entsprechende Abmessungen der Mauer dafür gesorgt werden, dafs eine geringe Erhöhung des Erddruckes nicht sofort ein starkes Anwachsen der Pressungen σ zur Folge hat — eine wichtige Regel, auf die bereits in dem Zahlenbeispiele in Nr. 21 hingewiesen wurde. Auch empfiehlt der Verfasser, die bei der Berechnung hoher Schornsteine infolge der Unsicherheit über die Gröfse des Winddruckes eingebürgerte Bestimmung, dafs mindestens die Hälfte des Querschnitts unter Druck stehen mufs — ganz gleichgültig, wie grofs die Pressung σ ist — auch auf Stützmauern auszudehnen. Hier ist diese Forderung sogar in noch höherem Mafse berechtigt, weil sich aufser der Gröfse auch die viel einflufsreichere Richtung des Erddruckes nicht mit Sicherheit angeben läfst. Es sollte also der Mittelpunkt des auf einen Mauerquerschnitt wirkenden Druckes von der stärkst gedrückten Kante des Querschnitts mindestens den Abstand $\xi = \frac{1}{6}\, d$ haben; besser ist $\xi_{min} = \frac{1}{4}\, d$ (Bezeichnungen in Fig. 73 auf Seite 79).

Die Annahme, es bilde der Erddruck mit der Normale zur Wandfläche den Winkel ρ, hält der Verfasser nach dem Ausfalle seiner Versuche nicht für ratsam; es erscheint ihm zweckmäfsiger, diesen Wert selbst bei rauhen Wänden und sorgfältiger Entwässerung des Erdkörpers auf etwa $\delta' = \frac{3}{4}\, \rho$ herabzusetzen. Die Versuche mit schweren Einzellasten ergaben zum Teil noch kleinere Werte δ'; es fiel hier δ' bis $\frac{1}{2}\, \rho$; in diesem Falle erscheint daher besondere Vorsicht geboten.

Besonders wichtig ist, dafs — entgegen der Anschauung *Rankines* — der Neigungswinkel α der Oberfläche des Sandes keinen Einfluſs auf den Neigungswinkel δ' des Erddruckes gehabt hat.

Beachtenswert ist auch, daſs durch abwechselnde Belastung und Entlastung der Angriffspunkt des Erddrucks etwas höher gerückt werden kann. Man wird hiermit zu rechnen haben, wenn eine von zwei nahen Wänden gestützte Erdmasse unausgesetzt schwer belastet und wieder entlastet und dadurch immer mehr zusammengepreſst wird. Als Beispiele führen wir an: Eisenbahnkörper zwischen Felshang und Stützmauer, Erdmasse zwischen den Stirnmauern gewölbter Brücken oder zwischen längeren Flügelmauern von Brückenwiderlagern. Die Vorstellung eines unteren Grenzzustandes des Gleichgewichts läſst hier im Stich. Verfasser sind aus seiner Gutachtertätigkeit mehrere Fälle bekannt, wo die bisher übliche Berechnungsweise zu unzulänglichen Abmessungen geführt hat und gefahrdrohende Verschiebungen der Mauern und Rissebildungen eingetreten waren. Es wird noch umfangreicher Dauerversuche bedürfen, um für die sichere Lösung dieser schwierigen Aufgaben eine feste Grundlage zu schaffen. Bis dahin wird man gut tun, sich in derartigen Fällen durch vorsichtige Annahmen vor Miſserfolgen zu schützen.

38. Arbeitsplan für die Fortsetzung der Versuche. Wir schlieſsen unsere Mitteilungen mit einer kurzen Anführung der Aufgaben, zu deren Lösung die für die nächste Zeit geplanten Versuche beitragen sollen, und wiederholen zunächst, daſs auſser der bisher benutzten Versuchsvorrichtung im nächsten Winterhalbjahre eine neu erbaute gröſsere Vorrichtung in Betrieb gesetzt werden soll, welche u. a. gestattet, den gegenseitigen Abstand der Seitenwände innerhalb weiterer Grenzen zu verändern, um durch Vergleichung der bei verschiedenen Abständen gemessenen Erddrucke den Einfluſs der Seitenwände zu bestimmen. Es sollen die folgenden Versuche angestellt werden.

1. Bestimmung des Erddruckes auf schräge Wandflächen bei verschiedenen Neigungen der Oberfläche der Erdmasse.

2. Erddruck auf eine gebrochene Wandfläche.

3. Versuche mit verschiedenen Erdarten. Einfluſs der Kohäsion.

4. Dauerversuche zur Erforschung des Einflusses wiederholter Be- und Entlastung der Hinterfüllungserde.

5. Einfluſs bewegter Lasten. Es soll auf die Oberfläche des Erdkörpers ein Gleis gelegt und auf diesem ein kleiner, schwer belasteter Wagen längere Zeit mittels selbsttätig wirkenden elektrischen Antriebes hin und her bewegt werden *).

*) Der neu erbaute Erdbehälter hat die Grundabmessungen 3,0 · 3,0 m.

6. Einfluſs von Erschütterungen. Es sind bereits zwei Vorversuche gemacht worden, davon der eine im Anschluſs an den auf Seite 148 und 149 ausführlicher beschriebenen Versuch. Wir fanden am Tage T_{20} vor Aufbringung der gleichmäſsigen Belastung $E = 132$ kg und $\delta' = 26^0\, 46'$, hierauf nach mehrfacher Be- und Entlastung am Tage T_{44} für unbelastete Erde den wesentlich gröſseren Druck $E = 179$ kg und $\delta' = 15^0\, 49'$. Nun wurden am Tage T_{44} fünf Minuten lang mit einem 2,5 kg schweren Hammer gegen die bewegliche Wand leichte wagerechte Schläge von etwa 2 cm Schlaghöhe geführt. Die Schläge folgten schnell aufeinander; ihr Angriffspunkt wanderte in der lotrechten Mittellinie der Wand. Der Erddruck ging infolge dieser Erschütterung von 179 kg herunter auf 130 kg. δ' stieg auf $25^0\, 35'$, und zwar erfolgte diese Veränderung bereits in den ersten drei Minuten. Nun wurden, wieder fünf Minuten lang, lotrechte Hämmerschläge auf die Mitte der Oberkante der Wand geführt; sie bewirkten $E = 128$ kg, $\delta' = 25^0\, 24'$. Am nächsten Tage wurde gemessen: $E = 131$ kg, $\delta' = 24^0\, 33'$. Die Erschütterungen hatten also einen günstigen Einfluſs; sie stellten beinahe den Zustand wieder her, der vor der wechselweisen Be- und Entlastung des Erdkörpers bestanden hatte. Nun wurde der Kasten entleert und von neuem mit Sand gefüllt. Es entstand $E = 120$ kg, $\delta' = 27^0\, 0'$. Lotrechte Schläge von gleicher Art und Zeitdauer wie vorhin bewirkten $E = 121$ kg, $\delta' = 24^0\, 55'$. Gleich darauf folgende wagerechte Schläge führten zu $E = 126$ kg, $\delta' = 25^0\, 47'$. Am nächsten Tage wurde gemessen: $E = 124$ kg, $\delta' = 27^0\, 10'$. Die Schläge wurden wiederholt. Nach Beendigung der lotrechten Schläge ergab sich $E = 121$ kg, $\delta' = 24^0\, 20'$ und nach Aufhören der nun folgenden wagerechten Schläge $E = 127$ kg, $\delta' = 25^0\, 10'$. Zwei Tage später wurde gemessen: $E = 123$ kg, $\delta' = 27^0\, 18'$. Einen wesentlichen Einfluſs haben bei dem zweiten Versuche die bei der kleinen Schütthöhe und geringen Wandmasse immerhin beträchtlichen Erschütterungen weder auf die Gröſse noch auf die Richtung des Erddrucks ausgeübt. Bei den weiteren Versuchen wird es sich auch darum handeln, den Einfluſs von Stöſsen zu verfolgen, welche unmittelbar am Erdkörper angreifen; besonders muſs die Wirkung lange andauernder Erschütterungen untersucht werden.

7. Einfluſs der Art der Schüttung des Erdkörpers. Bei den bisher angestellten Versuchen wurde mit dem Einfüllen des Sandes an der beweglichen Wand begonnen. Der Sand wurde in schrägen, von dieser Wand aus fallenden Schichten geschüttet, um möglichst viele Werte E und δ' für die Fälle $\alpha = -\rho$ und $\alpha = -\frac{1}{2}\rho$ zu erhalten.

Nun wird aber die Art der Schüttung nicht ohne Einflufs auf Gröfse und Lage des Erddruckes sein, und es sollen deshalb auch Versuche mit wagerechten Schichten oder mit schrägen, von der hinteren Kastenwand aus abfallenden Schichten gemacht werden. Diese letzte Art der Schüttung wurde bereits einmal — bei dem zweiten unter 6) beschriebenen Erschütterungsversuche — ausgeführt und lieferte den kleinsten der bisher für $\alpha = 0$ erhaltenen Erddrucke. Je gröfser übrigens die Abmessungen des Erdbehälters sind, desto weniger darf man selbst bei ein und derselben Schüttweise auf die gleiche Lagerung der Erdmasse rechnen. Gröfse des Schüttkastens und Fallhöhe spielen sicher eine Rolle. Es ist in Aussicht genommen, den gröfseren Behälter auch durch Arbeiter mittels Spaten füllen zu lassen.

8. Der Sand wird trocken eingefüllt und nachträglich durchnäfst. Diese Durchnässung soll sowohl von oben als auch von unten aus erfolgen. Zu diesem Zwecke sind im Boden des Erdbehälters Öffnungen angebracht, die mittels Rohrleitungen mit einem hochgelegenen Wasserbehälter in Verbindung stehen. Es kann auf diese Weise der Fall eines bis zu einer gewissen Höhe reichenden Grundwasserstandes im kleinen nachgebildet werden. Um den Sand schnell wieder trocknen zu können, ist eine gröfsere, elektrisch betriebene Trockenanlage erbaut worden.

9. An einer in den Erdkörper eingebetteten Platte greift eine Zugkraft an. Wie grofs ist der widerstehende (passive) Erddruck?

Eine eingehende Untersuchung des widerstehenden Erddruckes ist besonders wichtig für verschiedene Aufgaben des Grundbaus.

10. Die bewegliche, auf Mefsstäben ruhende Wand wird mit der dahinter liegenden Erdmasse in der bekannten Weise durch eine Zugstange und eine in den Erdkörper eingebettete Platte verankert. Es soll der Erddruck auf die Wand und die Spannung in der Zugstange für verschiedene Lagen der Zugstange und der Ankerplatte gemessen werden.

11. Druck auf einen Teil einer wagerechten oder geneigten Bodenfläche eines mit Erde gefüllten Behälters.

12. Versuche über den Einflufs der Wandbewegung auf Gröfse und Lage des Erddruckes. Die neue Vorrichtung gestattet, die Verschiebungen η_o, η_u, η_i innerhalb weiterer Grenzen zu verändern. Die Mefsstäbe ruhen an dem einen Ende auf kleinen, durch Schneiden gestützten Balken, deren Spannweite zur Erzeugung gröfserer Verschiebungen verlängert werden kann. Auch soll versucht werden, die Wandbewegung nahezu ganz zu be-

seitigen. Dieses Ziel läfst sich auf verschiedene Weise erreichen. Einmal dadurch, dafs der Mefsstab auf dem Kolben eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäfses ruht, und jede Verkürzung des Mefsstabes durch Nachfüllen von Flüssigkeit auf elektrischem Wege sofort wieder aufgehoben wird, oder dadurch, dafs der Mefsstab unter einem konstanten Anfangs-

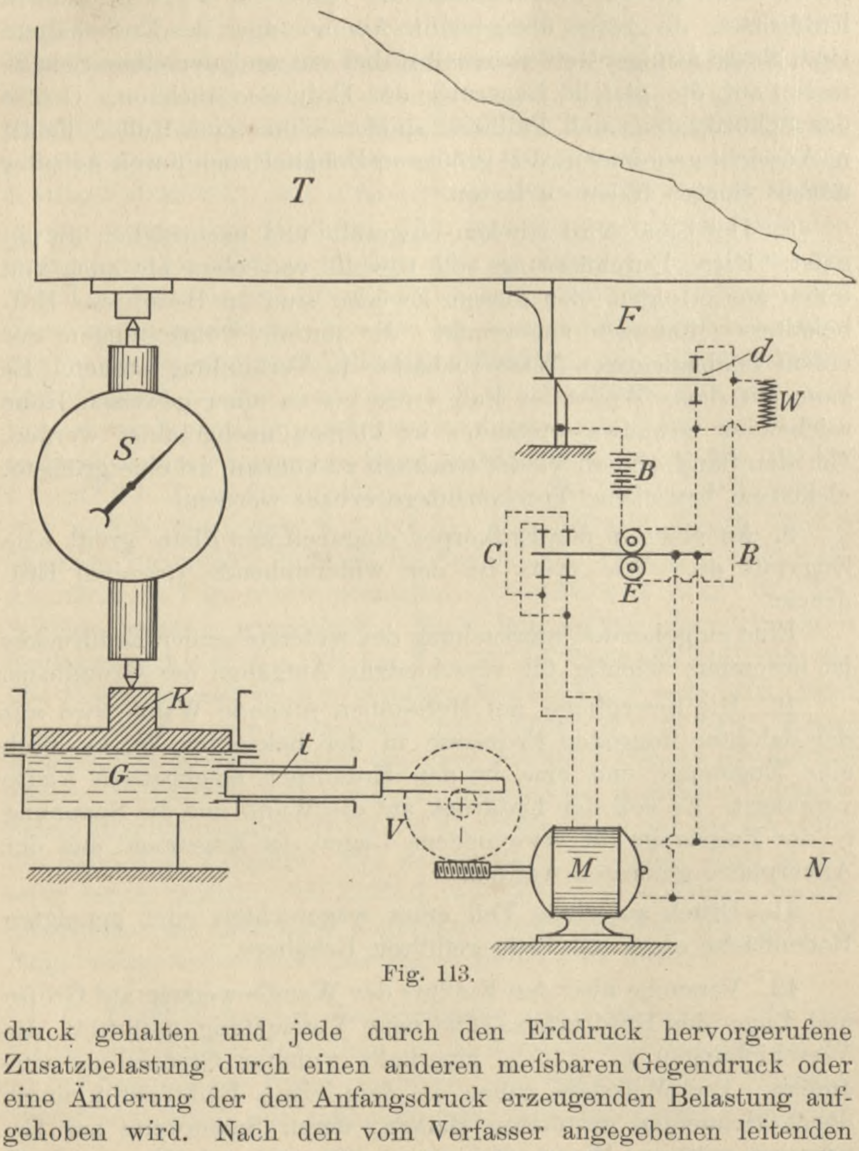


Fig. 113.

druck gehalten und jede durch den Erddruck hervorgerufene Zusatzbelastung durch einen anderen mefsbaren Gegendruck oder eine Änderung der den Anfangsdruck erzeugenden Belastung aufgehoben wird. Nach den vom Verfasser angegebenen leitenden Gesichtspunkten hat die Firma *Fuefs* bereits Entwürfe aufgestellt. Der eine möge kurz beschrieben werden.

Der Meſsstab S ruht mit seiner unteren Spitze auf dem Kolben K, der den oberen Abschluſs eines mit Glyzerin gefüllten Behälters G bildet. Durch einen seitlich eingeführten Tauchkolben wird der Flüssigkeitsspiegel gehoben oder gesenkt, sobald ein kleiner Elektromotor M eine Drehung des Vorgeleges V in der einen oder anderen Richtung bewirkt. An der den Erddruck aufnehmenden, beweglichen Wand T ist ein Fühlhebelkontakt Fd angebracht, der mit einem Relais elektrisch verbunden ist. Bei einer Abwärtsbewegung der Wand T wird sich das lange Ende des Kontaktarmes gegen den oberen Kontakt d legen und eine Spule des Relais so erregen, daſs der Kontaktarm des Relais sich gegen die *beiden* Kontakte C legt. Hierdurch wird die Feldwicklung des Motors so geschaltet, daſs der Motor eine den Tauchkolben tiefer in den Behälter G hineinführende Bewegung vollzieht und den Kolben K so lange anhebt, bis der Strom bei d unterbrochen wird. Geschieht dies, so kommt das Ganze zum Stillstehen. Erst bei einer neuen Auf- oder Abwärtsbewegung der Wand wiederholt sich das Spiel in der einen oder anderen Richtung. Temperaturänderungen haben keinen Einfluſs auf die Wirkungsweise der Vorrichtung. Mit W ist ein bifilar gewickelter Widerstand bezeichnet, der die Funkenbildung bei d verhindert. B ist die Relaisbatterie, N das Starkstromnetz. Der Kolben K ist als Membrankolben gedacht. Die Vorrichtung ist auch für die wagerechten Meſsstäbe brauchbar.

Es ist ein umfangreicher Arbeitsplan, dessen Erledigung sich die Erddruckabteilung der dem Verfasser unterstellten Versuchsanstalt für Statik der Baukonstruktionen zum Ziele gesteckt hat. Vielleicht führt seine Mitteilung dazu, daſs auch an anderen technischen Hochschulen ähnliche Anstalten ins Leben gerufen werden, um für eines der wichtigsten und noch am wenigsten erforschten Gebiete der Ingenieurwissenschaft sichere Grundlagen zu schaffen.

Literatur.

Coulomb, Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mém. de mathématique et de physique présentés à l'Acad. Royale des sciences par divers savants. T. VII Année 1773. Paris 1776.
Auch enthalten in:

Coulomb, Théorie des machines simples. Paris 1821. S. 318.

Rankine, On the stability of loose earth. Phil. Transactions of the London Royal Soc. 1857. S. 9.

Rankine, A Manual of applied mechanics. Erste Auflage. London 1858.

Rankine, Handbuch der Bauingenieurkunst, nach der 12. Auflage des englischen Originalwerkes deutsch bearbeitet von *Kreuter*. Wien 1880.

C. Culmann, Die graphische Statik, Abschnitt XIII, Theorie der Stütz- und Futtermauern. Zürich 1866.

G. Rebhann, Theorie des Erddrucks und der Futtermauern mit besonderer Rücksicht auf das Bauwesen. Wien 1871.

E. Winkler, Neue Theorie des Erddrucks nebst einer Geschichte der Theorie des Erddrucks und der hierüber angestellten Versuche. Wien 1872. Der Hauptinhalt dieser wichtigen Arbeit stammt aus der von *Winkler* der Universität Leipzig im Jahre 1860 eingereichten Doktordissertation.

O. Mohr, Beiträge zur Theorie des Erddrucks; Zeitschr. des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1871, S. 344, und 1872, S. 67 und 245. — Man vergleiche die literarische Anmerkung in Nr. 15 des vorliegenden Buches.

J. J. Weyrauch, Zur Theorie des Erddrucks; Zeitschr. für Baukunde 1878. S. 193. Unter anderem wird mittels des *Poncelet*schen Satzes $x = \sqrt{a\,b}$ die für jeden Winkel δ' gültige Erddruckformel abgeleitet.

E. Cramer, Die Gleitfläche des Erddruckprismas und der Erddruck gegen geneigte Stützwände. Berlin. Zeitschr. für Bauwesen 1879, S. 521.

Fr. Engesser, Geometrische Erddrucktheorie. Zeitschrift für Bauwesen. Berlin 1880. S. 189.

J. J. Weyrauch, Theorie des Erddrucks auf Grund der neueren Anschauungen. Allgemeine Bauzeitung. Wien 1881. Einführung des Spannungskreises vom Durchmesser $\sigma_{max} + \sigma_{min}$.

E. Winkler, Über Erddruck auf gebrochene und gekrümmte Wandflächen. Zentralblatt der Bauverwaltung. Berlin 1885. Erweiterung des *Rebhann*schen Satzes.

Adolf Francke, Die inneren Kräfte eines durch Ebenen begrenzten Erdkörpers nebst Anwendung auf die Ermittelung des Druckes gegen Stütz- und Druckwände. Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1888.

Fr. Engesser, Neuere Versuche über die Richtung und Gröfse des Erddrucks gegen Stützwände. Deutsche Bauzeitung 1893. S. 325.

F. Kötter, Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung. II, 1893. Verfasser beschränkt sich nicht auf geschichtliche Mitteilungen und kritische Betrachtungen, sondern liefert auch eigene, interessante Beiträge.

M. Möller, Erddrucktabellen. Leipzig 1902.

F. Kötter, Die Bestimmung des Drucks an gekrümmten Gleitflächen, eine Aufgabe aus der Lehre vom Erddruck. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften. Berlin 1903. Im Einverständnis mit dem Herrn Verfasser wiedergegeben im § 6, Nr. 25 des vorliegenden Buches.

G. Mehrtens, Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen und Festigkeitslehre. Bd. II 1904, § 9. Vergl. § 4, Nr. 20 und Seite 141 des vorliegenden Buches.

Häseler, Stütz- und Futtermauern, Handbuch der Ingenieurwissenschaften Teil I, Band II, Kapitel III. Leipzig 1905.

O. Mohr, Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik. Berlin 1905. Abhandlung VI. Graphostatische Darstellung der neueren Lehre vom Erddruck. Vergl. § 3, Nr. 15 und S. 63—66 des vorliegenden Buches.

Berichte über beachtenswerte neuere Erddruckversuche enthalten die Schriften:

L. Leygue, Nouvelle recherches sur la poussée des terres et le profil de revêtement le plus économique. Annales des ponts et chaussées (6) X. 1885. II. S. 788. Einen Bericht über die Ergebnisse und Formeln von *Leygue* enthält die Abhandlung:

G. Lang, Zur Bestimmung des Erddrucks auf Stützmauern nach *Leygue*. Rigaische Industriezeitung, 1888, Nr. 14.

A. D. Donath, Untersuchungen über den Erddruck auf Stützwände. Zeitschrift für Bauwesen 1891.

V. J. Kurdjümoff, Zur Frage des Widerstandes der Gründungen auf natürlichem Boden. Civilingenieur 1892. S. 292. Es werden mittels der Photographie die Bewegungen verfolgt, welche beim Einsinken eines Klotzes in eine Sandmasse entstehen.

H. Engels, Untersuchungen über den Seitendruck der Erde auf Fundamentkörper. Zeitschrift für Bauwesen 1896.

Ausführliche literarische und geschichtliche Angaben finden sich in *Kötters* Entwicklung der Lehre vom Erddruck.

Altenburg.
Piererſche Hofbuchdruckerei
Stephan Geibel & Co.

Beilage.

In seinen vor kurzem erschienenen *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Berlin 1906, setzt Herr *Mohr* eine Polemik fort, die sich zwischen ihm und mir im Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, 1903 im Anschlufs an Fragen, betreffend die Berechnung räumlicher Fachwerke abgespielt hat. Es geschieht dies in einem Tone, der zwar beweist, dafs Herr *Mohr* um sachliche Gründe verlegen ist, der mich aber doch zwingt, mit einer Entgegnung nicht zu zögern.

Herr *Mohr* ist der Meinung, dafs ich das Anwendungsgebiet der *Maxwell*schen Theorie des Fachwerks überschätze und dem grofsen englischen Gelehrten Auffassungen zuschreibe, die dieser in Wirklichkeit gar nicht gehabt hat. Er schliefst seine Kritik mit den Worten: „Derartige Bestrebungen, Ergebnisse der deutschen Wissenschaft Ausländern zuzueignen, sind in der literarischen Tätigkeit des Herrn *Müller-Breslau* nicht neu. In dieser Absicht wurde bei einer früheren Gelegenheit versucht, die Sätze *Castiglianos* mit allerlei Zutaten auszustatten, an die *Castigliano* selbst nicht gedacht hatte. Auch die falsche Darstellung des *Williot*schen Verfahrens gehört hierher."

Der in diesem Satze sich ausprägende, sachlich nicht begründete und in der Wissenschaft glücklicherweise nicht heimische Chauvinismus fand den Beifall des Herrn Professor *Mehrtens*, dem ich vor einiger Zeit einen recht groben Fehler — von dem am Schlufs dieser Erwiderung die Rede sein wird — nachweisen mufste. Im dritten Bande seiner Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen schliefst er sich Herrn *Mohr* an und knüpft sogar an seine eine bedenkliche Unkenntnis verratende Angabe über das Anwendungsgebiet der Verfahren von *Maxwell* und *Castigliano* die Behauptung: mein Ausspruch, „es bilden neben den *Maxwell*schen Sätzen die Sätze von *Castigliano* die Grundpfeiler der gegenwärtigen Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen", sei unwahr. Sein Angriff fällt damit in die Klasse der Schriften, gegen welche das Niedrigerhängen die beste Abwehr ist.

Ich beginne meine Entgegnung mit einer Besprechung der klassischen Arbeit *Maxwells**), wobei ich durchweg — auch dort, wo ich den englischen Text wörtlich wiedergebe — die Bezeichnungen *Maxwells* durch die von mir benutzten weit verbreiteten Bezeichnungen ersetze. Dies wird manchem

*) *Maxwell*, On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. Philosophical Magazine. Vol. XXVII. S. 294.

Leser die Vergleichung der *Maxwell*schen und der späteren Arbeiten erleichtern.

Nach einer kurzen Einleitung wendet sich *Maxwell* zur Lösung der *Grundaufgabe:* Gesucht ist die Änderung δ der Entfernung BC zweier Knotenpunkte B und C eines Fachwerks infolge der Änderung $\triangle s$ der Länge s irgendeines Stabes A (Fig. I)*). Er bringt zwischen den Punkten B und C einen Zug P an, ermittelt die im Stabe A hierdurch hervorgerufene Spannkraft S und betrachtet das Fachwerk als eine Maschine, an welcher die beiden Kräfte P einen Widerstand S überwinden. Das *Clapeyron*sche Gesetz liefert die Arbeitsbedingung

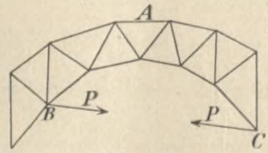


Fig. I.

$$\text{I)} \qquad \frac{1}{2} P\delta + \frac{1}{2} S \triangle s = 0.$$

Bedeutet nun S' die im Stabe A durch den Zug $P = 1$ erzeugte Spannkraft, so ist $S = PS'$, und es ergibt sich aus I) die Grundgleichung

$$\text{II)} \qquad \delta = - S' \triangle s.$$

Aus ihr folgert *Maxwell* den Satz:

Ist S' die Spannkraft im Stabe A infolge einer Zugeinheit zwischen den Punkten B und C, so bringt eine Dehnung des Stabes A von der Gröfse $\triangle s = 1$ die Punkte B und C einander näher um eine Strecke S'.

Dieser Satz liefert die zu einer **willkürlich gewählten** Längenänderung $\triangle s$ gehörige Knotenpunktverschiebung δ. Werden sämtliche Stablängen um willkürliche Werte $\triangle s$ geändert, so entsteht

$$\text{III)} \qquad \delta = - \Sigma S' \triangle s.$$

Wir wollen dieses Gesetz auf ein in der Arbeit *Maxwells* nicht enthaltenes Beispiel anwenden.

Sind B und C die in ein und derselben Wagerechten liegenden Kämpfergelenke eines Zweigelenkbogens, ist ferner $\triangle l$ die beobachtete Änderung der Stützweite l und X der eine der beiden wagerechten Stützenwiderstände, so ist nach dem bewiesenen Satze

$$\triangle l = - \Sigma S' \triangle s = - \Sigma S' \left(\frac{Ss}{EF} + \varepsilon t s \right),$$

wo $S = S_0 + S'X$ ist, wenn S_0 die Spannkraft infolge der bekannten Lasten bedeutet. Man findet

$$X = \frac{- \Sigma S_0 S' \rho - \Sigma S' \varepsilon t s - \triangle l}{\Sigma S'^2 \rho}, \; \rho = \frac{s}{EF}.$$

Von dieser Lösung, welche *Temperaturänderungen* und *Stützenverschiebungen* berücksichtigt, ohne ein anderes Hilfsmittel zu benutzen als den von *Maxwell* aufgestellten Satz, unterscheidet sich die zehn Jahre später von Herrn *Mohr* in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1874, angegebene Lösung nur dadurch, dafs Herr *Mohr* die Gleichung II) mittels des Prinzips der virtuellen Verrückungen ableitet.

Herr *Mohr* beginnt seine wegen der wertvollen *Anwendungen* von mir trotz der Priorität *Maxwells* stets als *bahnbrechend* bezeichneten Beiträge zur Theorie des Fachwerks**) mit der Berechnung des Horizontalschubes eines

---

*) Die *Maxwell*sche Arbeit selbst enthält keine Figuren.

**) Man findet sie in meiner Graphischen Statik II am Schlufs jedes Abschnittes im Quellenverzeichnis.

Zweigelenkbogens und bestimmt die von der Längenänderung $\triangle s$ *) eines Stabes A erzeugte Änderung $\triangle l$ der Stützweite l wie folgt:

„Man kann diese Bewegung auch hervorrufen durch einen Horizontalschub X gegen die Auflager, welcher in der elastischen Stange A die Spannung $S'X$ erzeugt. Während die Kraft X den Weg $\triangle l$ zurücklegt und sonach die mechanische Arbeit $-X\triangle l$ leistet, wird die widerstehende Spannung $S'X$ der Stange A auf dem Wege Δs überwunden und dadurch die mechanische Arbeit $S'X\triangle s$ absorbiert. Nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeit sind diese Arbeiten gleich grofs und demnach

$$-X\triangle l = S'X\triangle s$$

oder

$$-\triangle l = S'\triangle s.\text{“}$$

Mit der oben von der Gleichung III) gemachten Anwendung vergleiche man nun die Behauptung des Herrn *Mehrtens*, das Verfahren von *Maxwell* lasse bei der Ermittelung des Einflusses von Temperaturänderungen und Stützenverschiebungen im Stich, ferner den von Herrn *Mehrtens* gebilligten Ausspruch des Herrn *Mohr: Die Natur des Clapeyronschen Theorems gestattet nicht ohne weiteres, die Betrachtung auf die Bestimmung der Temperatureinwirkungen auszudehnen.* Diese Behauptungen sind falsch und irreführend; denn sobald eine Längenänderung $\triangle s = 1$ eine Knotenpunktverschiebung $\delta = -S'$ verursacht, wie dies *Maxwell* klipp und klar ausspricht, so erzeugt $\triangle s = \varepsilon t s$ die Verschiebung $\delta = -S'\varepsilon t s$. Was hätte wohl *Maxwell* mit der Gleichung I) anfangen sollen, wenn er für $\triangle s$ nur die von der Spannkraft S' erzeugte Längenänderung $\triangle s = S'\rho$ hätte einsetzen dürfen.

Ich lasse nun die wichtigsten Stellen der *Maxwell*schen Arbeit folgen:

Theorem. If S' be the tension of the piece A due to a tension-unity between the points B and C, then an extension-unity taking place in A will bring B and C nearer by a distance S'.

For let P be the tension and $\triangle s$ the extension of A, S be the tension and δ the extension of the line BC; then supposing all the other pieces inextensible, no work will be done except in stretching A, or

$$\frac{1}{2}P\delta + \frac{1}{2}S\triangle s = 0.$$

But $S = PS'$, therefore

$$\delta = -S'\triangle s,$$

which was to be proved.

Problem I. A tension P_m is applied between the points m_1 and m_2 of a frame, which is simply stiff; to find the extension of the line joining n_1 and n_2, all the pieces except A being inextensible, the extensibility of A being ρ.

Determine the tension in each piece due to unit tension between m_1 and m_2, and let S_m be the tension in A due to this cause.

Determine also the tension in each piece due to unit tension between n_1 and n_2 and let S_n be the tension in the piece A due to this cause.

Then the actual tension of A is $P_m S_m$ and its extension is $P_m S_m \rho$ and the extension of the line $n_1 n_2$ due to this cause is $-P_m S_m S_n \rho$ by the last theorem.

---

*) Die von Herrn *Mohr* angewandten Bezeichnungen habe ich durch die oben benutzten ersetzt.

Cor. If the other pieces of the frame are extensible, the complete value of the extension in $n_1 n_2$ due to a tension P_m in $m_1 m_2$ is

IV) $$= -P_m \Sigma S_m S_n \rho,$$

where $\Sigma S_m S_n \rho$ means the sum of the products of $S_m S_n \rho$, which are to be found for each piece in the same way as they were found for A.

Aus dieser Anwendung der Gleichung $1 \cdot \delta = -S' \triangle s$ auf den Belastungszustand $P_n = 1$ und die hiervon unabhängigen, von der Belastung P_m hervorgerufenen Formänderungen δ und $\triangle s$ geht klar und deutlich hervor, dafs *Maxwell* die $\triangle s$ und δ **als virtuelle Verrückungen verwertet,** und dafs er die Gleichung II) genau so benutzt hat, wie nach ihm Herr *Mohr*.

Mit $P_m = 1$ entsteht

$$\delta_{n\,m} = -\Sigma S_m S_n \rho.$$

Herr *Mehrtens* schreibt diese Gleichung a. a. O. S. 88 mit Unrecht Herrn *Mohr* zu. Die dort von ihm angeführten wichtigen Anwendungen: Ersetzung der Verschiebungen eines Punktepaares durch die gegenseitige Drehung eines Geradenpaares, Gegenüberstellung von Drehung und Verschiebung, habe ich in meinen *Neueren Methoden*, erste Auflage 1886, angegeben.

Aus dem Ausdrucke IV) folgert *Maxwell* den bekannten Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen, $\delta_{n\,m} = \delta_{m\,n}$, dem ich den Namen *Maxwell*scher Satz beigelegt habe, eine Benennung, die sich schnell eingebürgert hat.

Die Gleichungen zur Berechnung der Spannkräfte in den überzähligen Stäben X_a, X_b, X_c .... eines statisch unbestimmten Fachwerks, an welchem zwischen irgend zwei Punkten B und C ein Zug P angreift, entwickelt *Maxwell* wie folgt:

Let S_a, S_b, S_c, ... be the tensions in A due to unit tension in X_a, X_b, X_c, ...; also let X_a, X_b, X_c .... be the tensions of X_a, X_b, X_c.... and ρ_a, ρ_b, ρ_c, ... their extensibilities. Then the tension in A

$$= PS' + X_a S_a + X_b S_b + X_c S_c + \ldots;$$

the extension of A

$$\triangle s = \rho(PS' + X_a S_a + X_b S_b + X_c S_c + \ldots);$$

the extension of X_a

$$\text{V)}\left\{\begin{array}{l} = -P\Sigma S' S_a \rho - X_a \Sigma S_a^2 \rho - X_b \Sigma S_a S_b \rho - X_c \Sigma S_a S_c \rho - \cdots = X_a \rho_a \\ \text{the extension of } X_b \\ = -P\Sigma S' S_b \rho - X_a \Sigma S_a S_b \rho - X_b \Sigma S_b^2 \rho - X_c \Sigma S_c S_b \rho - \cdots = X_b \rho_b \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{usw.} \end{array}\right.$$

Hier haben wir die Anwendung der Gleichung $1 \cdot \delta = -\Sigma S' \triangle s$ auf die gedachten Belastungszustände $X_a = 1$, $X_b = 1$ ...., und die hiervon unabhängigen wirklichen Formänderungen δ und $\triangle s$.

Wir knüpfen an die vorstehende Entwickelung noch die folgende Betrachtung.

Stellt man in den Gleichungen V) auf der linken Seite den Wert $\triangle s$ wieder her, so erhält man

$$-\Sigma S_a \triangle s = X_a \rho_a; \quad -\Sigma S_b \triangle s = X_b \rho_b; \; \ldots$$

Die Summen erstrecken sich nur über die notwendigen Stäbe. Dehnt man sie über alle Stäbe aus, so findet man:

VI) $$\Sigma S_a \triangle s = 0; \quad \Sigma S_b \triangle s = 0; \; \ldots$$

Der überzählige Stab X_a liefert zur Summe $\Sigma S_a \triangle s$ den Beitrag $X_a \rho_a$ und zu allen übrigen Summen den Beitrag 0. Ähnlich verhalten sich X_b, X_c, ... Stützenbewegungen kann man bei der Anwendung dieser Gleichungen in der Weise berücksichtigen, dafs man die Stützen durch Stäbe ersetzt, deren Längenänderungen mit den vorgeschriebenen Stützenverschiebungen übereinstimmen. Bezeichnet man dann die Spannkräfte in den Auflagerstäben mit C, die Längen dieser Stäbe mit c und nimmt man die Kräfte C positiv an, sobald sie in den Stäben Druckspannungen hervorrufen, so nehmen die Gleichungen VI) die Form an

VII) $$\Sigma C_a \triangle c = \Sigma S_a \triangle s; \quad \Sigma C_b \triangle c = \Sigma S_b \triangle s; \; \ldots .$$

Das sind die Gleichungen, welche ich in meinen „Neueren Methoden" 1904, S. 23 mit Fug und Recht *Maxwellsche Gleichungen* genannt habe. *Zu ihrer Herleitung ist weiter nichts erforderlich, als die an der Spitze dieses Berichtes stehende von Maxwell herrührende Gleichung II).* Die Auffassung der Verschiebungen von Knotenpunkten als Längenänderungen von Stäben, welche diese Stäbe mit aufserhalb des Fachwerks liegenden festen Punkten verbinden, findet sich ebenfalls bereits bei *Maxwell.* Die fragliche Stelle lautet:

In structures acted on by weights, in which we wish to determine the deflection at any point, we may regard the points of support as the extremities of pieces, connecting the structure with the centre of the earth; and if the supports are capable of resisting a horizontal thrust, we must suppose them connected by a piece of equivalent elasticity *). The deflection is then the shortening of a piece, extending from the given point to the centre of the earth.

Über das Verfahren von *Castigliano*, welches nach der Behauptung des Herrn *Mehrtens* ebenfalls versagen soll, wenn es sich um Temperatureinwirkungen und Stützenverschiebungen handelt, kann ich mich mit Rücksicht auf die vorstehenden Erörterungen kurz fassen. Es genügt, auf die Grundlage dieses Verfahrens, den Satz von der Abgeleiteten der Formänderungsarbeit

VIII) $$\delta = \frac{\partial A}{\partial P},$$

hinzuweisen, der in ähnlicher Weise, unter Umständen mit Benutzung von Auflagerstäben, verwendet wird. wie die *Maxwell*sche Gleichung III). Mit der sonderbaren Behauptung des Herrn *Mehrtens*, dieser Satz versage bei der Ermittelung des Einflusses der Stützenverschiebungen, brauche ich mich wohl nicht weiter zu befassen. Temperatureinwirkungen erledigt *Castigliano* in Verbindung mit der Berechnung von Systemen, in denen schon vor der Einwirkung äufserer Kräfte Spannungen vorhanden sind, im Kapitel 1 Nr. 16 und 18 und im Kapitel 10 Nr. 6 des ersten Teiles seines Werkes: Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications. Dort findet sich auch eine Reihe von Zahlenbeispielen. Die Überschrift von Nr. 6 lautet: *Lehrsatz über den Einflufs von Temperaturänderungen.*

Der Zusammenhang zwischen den Verfahren von *Maxwell* und *Castigliano* ist von mir zuerst ganz kurz in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1884, S. 211 und dann ausführlicher in meinen

---

*) Beispiel: Verbindung der Kämpfergelenke eines Zweigelenkbogens durch eine Zugstange, deren Verlängerung gleich dem beobachteten $\triangle l$ ist.

Neueren Methoden, erste Auflage 1886, durch die Anwendung der *Maxwell* schen Grundgleichung $\delta = -\Sigma S' \triangle s$ auf einen beliebig gestalteten elastischen Körper gezeigt worden. Es entsteht mit den *Grashof* schen Bezeichnungen σ, τ, ε, γ die Gleichung

$$\delta = \int (\sigma'_x \varepsilon_x + \sigma'_y \varepsilon_y + \sigma'_z \varepsilon_z + \tau'_x \gamma_x + \tau'_y \gamma_y + \tau'_z \gamma_z)\, dV,$$

aus der ich den Satz $\delta = \frac{\partial A}{\partial P}$ und den Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit ableitete.

Bald nach dem Erscheinen meines Buches entbrannte zwischen Herrn *Mohr* und mir im *Civilingenieur* 1886 ein Meinungsstreit über *Castigliano* unter der von Herrn *Mohr* gewählten Überschrift: *Über die Elastizität der Deformationsarbeit.* Herr *Mohr* weist in seinen *Abhandlungen* S. 434 auf diesen Streit hin. Ich kann ebenfalls auf das dringendste empfehlen, diese Auseinandersetzungen zu lesen und auch von der gegen Herrn *Mohr* sich wendenden Besprechung dieses Streites im *Jahrbuche für die Fortschritte der Mathematik*, 1886, S. 952 Kenntnis zu nehmen.

An dieser Stelle begnüge ich mich damit, auf einen Punkt hinzuweisen. Das wird genügen, um die Kampfesweise des Herrn *Mohr* in das rechte Licht zu setzen. Herr *Mohr* bestreitet u. a. ebenfalls die Möglichkeit, mit Hilfe des *Castigliano* schen Verfahrens bei der Berechnung eines statisch unbestimmten Trägers den Einflufs von Stützenverschiebungen zu verfolgen und bezeichnet die von mir ins Feld geführte Ersetzung der Stützen durch gleichwertige Stäbe, deren Formänderungsarbeit zu der des Trägers hinzuzurechnen ist, als eine unzulässige Dehnung (Elastizität) des Begriffes Deformationsarbeit, trotzdem er selbst in der „Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins“ zu Hannover, 1875, Seite 18, sagt: „*Die Bedingungen, welche die Stützenlage der Formänderung der Träger auferlegt, kann man auf einfache Weise in Rechnung bringen, indem man fingierte Konstruktionsteile in die Betrachtung einführt.*“ Jetzt geht Herr *Mohr* sogar so weit, mir vorzuwerfen, ich hätte durch meinen Hinweis auf dieses Hilfsmittel dem Ausländer *Castigliano* ein Ergebnis deutscher Wissenschaft zugeeignet — damit meint er natürlich seine eigene Leistung und hängt der Sache nur ein patriotisches Mäntelchen um —, obgleich ihm nicht einmal die Priorität der Einführung fingierter Konstruktionsteile gebührt, wie die oben wiedergegebene Stelle der *Maxwell* schen Arbeit beweist.

Bei der Würdigung der Verdienste *Castiglianos* mufs noch ganz besonders hervorgehoben werden, dafs dieser leider sehr früh verstorbene Forscher sich nicht auf die verhältnismäfsig leichte Theorie des Fachwerks beschränkt, sondern sein Verfahren auch auf wesentlich schwierigere Aufgaben angewendet hat. Das ist auch von weiten Kreisen anerkannt worden.

Noch im Jahre 1900 schrieb Herr *Mehrtens* in seiner gelegentlich der Pariser Weltausstellung verfafsten Denkschrift: Der deutsche Brückenbau im XIX. Jahrhundert, auf Seite 14 über die Sätze *Castiglianos*: „Mit den genannten Sätzen über die Formänderungsarbeit elastischer Körper hat *Castigliano* besonders *die analytische Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen* in ausgiebigster Weise bereichert, so dafs heute die schwierigsten Aufgaben dieser Art analytisch in einfacher Art zu lösen sind.“ Und auf Seite 36 stellt er sogar die absonderliche Behauptung auf, dafs „Konstruktionen, in denen alle oder einzelne Lasten nicht in den Knoten angreifen, die also nicht mehr als reine Stabwerke aufgefafst werden können, weil auch Biegungen vorkommen, *am einfachsten analytisch nach den Sätzen von der kleinsten Form-*

änderungsarbeit berechnet werden". Danach wäre also das *Maxwell*sche Verfahren nur für das Fachwerk brauchbar. Von den umfangreichen Anwendungen, die ich von diesem Verfahren auf die Berechnung biegungsfester Tragwerke bereits in der ersten Auflage meiner *Neueren Methoden* 1886 gemacht hatte, scheint Herr *Mehrtens* damals noch keine Kenntnis gehabt zu haben*). Der ganze Vorgang ist bezeichnend für die Arbeitsweise und Urteilsweise des Herrn *Mehrtens*, der heute die Hinzurechnung der *Castigliano*schen Sätze zu den Grundpfeilern der gegenwärtigen Theorie der statisch unbestimmten Konstruktionen für eine **Unwahrheit** erklärt, nachdem er kurz vorher ihren hervorragenden Einflufs auf die Entwickelung der Statik der Baukonstruktionen vor aller Welt in einer Weise bekannt hatte, die sogar nicht frei von Übertreibung war!

Ich schliefse meine Erwiderung in der Sache *Castigliano* mit einem Hinweise auf das von Herrn *Mehrtens* erwähnte Gutachten der römischen Akademie über den Prioritätsstreit zwischen *Menabrea* und *Castigliano* bezüglich des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit. Dieses Gutachten erklärt, dafs der Satz älter ist als die Arbeiten der beiden verdienstvollen Forscher, denen beiden die Akademie nur Lob spendet; es bestätigt aber durchaus meine und Anderer Wertschätzung dieses Satzes und nennt ihn ein allgemeines Prinzip, dem es sicher vorbehalten ist, immer weitere Anwendung zu finden**). Dafs *Menabrea* den Satz früher ausgesprochen hat als *Castigliano*, habe ich in den geschichtlichen Mitteilungen meiner *Neueren Methoden* (die Herr *Mehrtens* in seinem Buche, Band III, Seite 428, Absatz 2, zum Teil beinahe wörtlich benutzt hat) hervorgehoben; ich habe aber auch darauf hingewiesen, dafs bereits *Euler* infolge einer Anregung seitens *Bernoulli*s eine spezielle Anwendung von diesem Satze gemacht hat.

Ich wende mich nun zum Falle *Williot*. Im zweiten Bande meiner Graphischen Statik (1892, 1903) wird am Anfang des ersten Paragraphen das bekannte *Williot*sche Verfahren entwickelt. Es folgt dann eine Reihe von Aufgaben über die Darstellung von Verschiebungsplänen, zu deren Herstellung aufser dem *Williot*schen Plane noch bekannte Hilfsmittel angewendet werden, nämlich die Zusammensetzung zweier Verschiebungen, und für schwierigere Fälle Polbestimmungen. Zum Schlufs wird, meines Wissens zum ersten Male, gezeigt, wie man die Knotenpunktverschiebungen eines jeden Fachwerks durch wiederholte Anwendung des *Williot*schen Verfahrens und Auflösung eines Systems linearer Gleichungen finden kann. Der § 6 der 1892 erschienenen Auflage brachte ferner u. a. eine Anwendung des *Williot*schen Verfahrens auf die Darstellung der Ver-

---

*) Wie ausgiebig Herr *Mehrtens* in seinem Buche meine Arbeiten über die Verfahren von *Maxwell* und *Castigliano* benutzt hat, lehrt schon eine flüchtige Vergleichung. Es genügt, den Untersuchungen auf Seite 68, 69, auf Seite 220 und auf Seite 234, 235 des dritten Bandes des *Mehrtens*schen Buches die folgenden Seiten meiner *Neueren Methoden* (ich wähle die Auflage von 1893) der Reihe nach gegenüberzustellen: Seite 204, Seite 189, Seite 66—68. Auch verweise ich auf die Einleitung des zweiten Bandes meiner Graphischen Statik.

**) Eine beachtenswerte eigenartige Anwendung bringt die soeben erschienene Habilitationsschrift: *K. Wieghardt*, Über einen Grenzübergang der Elastizitätslehre und seine Anwendung auf die Statik hochgradig statisch unbestimmter Fachwerke. Berlin 1906. Seite 15.

schiebungspläne kinematischer Ketten. Für den § 1 wählte ich die Überschrift „*Williot*sche Verschiebungspläne“, weil das von *Williot* angegebene Verfahren bei Lösung aller Aufgaben herangezogen wurde. Was ich selbst beigetragen habe, hielt ich nicht für nötig, besonders anzuführen. Dafs hierdurch nicht beabsichtigt worden ist, den Inhalt des ganzen Abschnitts als Arbeit *Williots* auszugeben, hebe ich nur hervor, weil mir Herr *Mohr* eine solche Absicht untergeschoben hat. Dafs seine Behauptung falsch ist, beweist der Satz am Schlufs des § 3. Dort sage ich, dafs sich die in den §§ 2 und 3 angegebenen Darstellungsweisen auf ähnliche Art erweitern lassen, wie dies im § 1 mit dem von *Williot* **ursprünglich auch nur für einen sehr einfachen Fall angegebenen Verfahren** geschehen ist. Dafs die Untersuchungen des ersten Abschnitts des zweiten Bandes meiner Graphischen Statik bereits Ende 1887 fertiggestellt waren und durch eine im letzten Hefte des Civilingenieur von 1887 erschienene Arbeit des Herrn *Mohr*, die sich nur mit ganz leichten Aufgaben beschäftigt, in keiner Weise beeinflufst worden sind, habe ich Herrn *Mohr* schon im Zentralblatt der Bauverwaltung erklärt. Ich verweise auch auf eine von mir in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover, 1888, S. 51 veröffentlichte Arbeit, die sich beim Erscheinen der *Mohr*schen Abhandlung bereits in den Händen der Schriftleitung befand, was auch in einer Fufsnote hervorgehoben worden ist. In welcher Weise Herr *Mohr* in seiner Abhandlung das *Williot*sche Verfahren und meine vorher erschienenen Arbeiten benutzt hat, zeigt Fig. II. In das

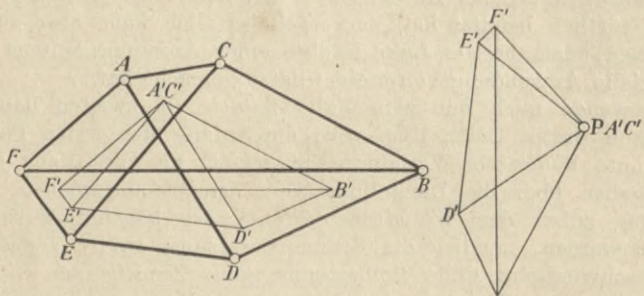


Fig. II.

hier gezeichnete *Paskal*sche Sechseck habe ich die von mir zum Beweise der vorhandenen Beweglichkeit, die im vorliegenden Falle bekanntlich unendlich klein ist, eingeführte parallellinige Figur $A'B'C'D'E'F'$, von der im allgemeinen drei Punkte willkürlich gewählt werden dürfen, so eingezeichnet, dafs A' und C' zusammenfallen. Daneben habe ich die von Herrn *Mohr* zur Führung desselben Beweises benutzte Figur $A'B'$.... angegeben. Man erhält sie, wenn man die parallellinige Figur um 90^0 dreht; sie stellt in dieser Lage einen *Williot*schen Verschiebungsplan vor, dessen Pol der Doppelpunkt $A'C'$ ist. Dafs die von Herrn *Mohr* mit der Figur $A'B'C'$ . . . vorgenommene Drehung eine Vereinfachung sei, wird wohl niemand behaupten, denn die parallellinige Figur ist leichter zu zeichnen und übersichtlicher als die normallinige.

Eine merkwürdige Rolle spielt im Falle *Williot* Herr *Mehrtens*. Im ersten Bande seiner Vorlesungen über Statik der Baukonstruktionen gibt er im § 12 meine auf der Benutzung der *lotrechten Geschwindigkeiten* beruhende

Theorie des Fachwerks wieder und führt als Quelle in erster Linie — — den Franzosen *Williot* und aufserdem nur noch die vorhin erwähnte Arbeit von *Mohr* an, trotzdem keiner der Genannten das von mir in die Theorie des Fachwerks eingeführte wichtige Hilfsmittel der lotrechten Geschwindigkeiten benutzt hat, und die Arbeit von *Mohr* aufserdem später erschienen ist als die meinige. Selbst eigenartige Aufgaben entlehnt Herr *Mehrtens* meinen Arbeiten, z. B. die kinematische Untersuchung eines über drei Öffnungen gespannten Bogenträgers mit festen Kämpfergelenken, mit Scheitelgelenk und zwei unversteiften Vierecken über den aus Pendelsäulen bestehenden Mittelstützen. Man vergleiche auch *Mehrtens*, Bd. I, Fig. 263 mit Abb. 18 meiner Abhandlung im Zentralblatt der Bauverwaltung 1902, S. 502.

Dafs Herr *Mehrtens* meine Darstellung der Einflufslinien in sehr grofsem Umfange ohne Quellenangabe benutzt hat, habe ich schon an anderer Stelle hervorgehoben. Man vergleiche die Figuren: 59 bis 61 *II* — 114 *II* — 142, 143, 144 *II* — 203, 205, 206, 207, 228 *III* — 177, 178 *III* — 188 *III* des *Mehrtens*schen Buches der Reihe nach mit den folgenden Figuren meiner Graphischen Statik (Bd. I 1887, Bd. II 1892): 266 bis 271 *I* — 383 *I* — 142, 148, 149 *I* — 221 bis 228 *II* — 318 *II e* u. *f* — 262 *II*. Die beigefügte römische Ziffer bezeichnet den Band. Der von Herrn *Mehrtens* vorgebrachten Behauptung, er verdanke diese Darstellung der Einflufslinien *Winkler*, widerspricht der Inhalt der *Winkler*schen Veröffentlichungen. Ich verweise u. a. auf *Winkler*, Theorie der Brücken, II. Heft, Theorie der gegliederten Balkenträger, 1881. Im Kapitel VI, Balken mit polygonalen Gurten und einteiligem Gitterwerk, findet sich z. B. nur eine einzige Einflufslinie, Fig. 73; sie gilt für die lotrechte Seitenkraft der Spannkraft einer Diagonale und wird keineswegs nach dem von Herrn *Mehrtens* meinem Buche entnommenen Verfahren der Benutzung der Spannkräfte D' und D'' für $A = 1$ bezw. $B = 1$ dargestellt. Die von Herrn *Mehrtens* in Fig. 250 *III* angegebene einfache Konstruktion der Kämpferdruckrichtungen eines gelenklosen Bogens findet sich bereits in einer von mir in der Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover 1884 veröffentlichten Abhandlung auf Seite 637 und in der letzten Auflage meiner Graphischen Statik Bd. II, S. 356. Für die wichtige allgemeine Bestimmung des Gewichtes w eines Stabzugknotens führt Herr *Mehrtens* (Bd. III, S. 123) als Quelle eine 1889 erschienene Arbeit von *Land* an, obgleich *Land* an zwei Stellen auf meine vorher (1885, 1886) erschienenen Arbeiten, denen sich Herr *Mehrtens* auch bezüglich der Bezeichnungen anschliefst, hingewiesen hat, usw.

Noch drei andere Punkte mufs ich berühren.

Am Schlufs der Abhandlung IX: *Die elastische Linie*, bemängelt Herr *Mohr* (a. a. O. Seite 327), dafs ich seine Arbeit: *Beitrag zur Theorie der Holz- und Eisenkonstruktionen*, Zeitschrift des Architekten- und Ingenieurvereins zu Hannover, 1868, Seite 19, in meiner Graphischen Statik nicht mit aufgeführt habe. Er findet die Hervorhebung seines heute wohl allgemein bekannten Verdienstes um die Darstellung der elastischen Linie in den geschichtlichen Angaben meiner *Neueren Methoden*. In meiner Graphischen Statik sollen geschichtliche Angaben über die Theorie der elastischen Linie und ihre Verwertung bei der Untersuchung des kontinuierlichen Balkens am Schlufs des noch nicht vollendeten Abschnittes über diesen Gegenstand gebracht werden *).

---

*) Wegen der Verzögerung der Herstellung der zweiten Abteilung des zweiten Bandes hatte ich die Absicht, in der letzten, 1903 erschienenen Auflage der ersten Abteilung diese geschichtlichen Mitteilungen zu bringen. In

Dort wird neben den bekannten Arbeiten von *Culmann*, *Winkler* und *Weyrauch* auch die vorgenannte Abhandlung des Herrn *Mohr* gewürdigt werden, wobei ich allerdings hervorheben mufs, dafs Herr *Mohr* in dieser Abhandlung eines der wichtigsten Hilfsmittel der Theorie der kontinuierlichen Träger, die *Fixpunkte,* welche vor ihm schon *Culmann* benutzt hat, verwertet, ohne die Urheberschaft *Culmanns* zu erwähnen. Ich bemerke noch beiläufig, dafs ich die Deutung der elastischen Linie als Momentenkurve eines einfachen Balkens in meinem 1875 erschienenen Erstlingsbuche *) auf anderem Wege als Herr *Mohr*, dessen Arbeit mir damals nicht bekannt war, gefunden habe. Ich hatte mir die Aufgabe gestellt, die elastische Linie elementar zu behandeln und fand ohne weiteres diesen einfachen Weg.

Der zweite Punkt betrifft die *Berechnung des räumlichen Fachwerks mittels des Ersatzstabverfahrens;* sie gab die Veranlassung zu der gegenwärtigen Polemik. Meine erste Arbeit über das Raumfachwerk erschien im Zentralblatt der Bauverwaltung 1891; sie weist auf eine frühere Arbeit *Hennebergs* mit den Worten hin: „In anderer Weise macht *Henneberg* in seinem ausgezeichneten Werke *Statik der starren Systeme* (Darmstadt 1886) von dem Verfahren der Umwandlung eines Fachwerks Gebrauch, indem er ein statisch bestimmtes, ebenes oder räumliches Fachwerk von n Knoten in ein solches von $n—1$ Knoten und schliefslich in ein Dreieck bezw. ein Tetraeder überführt.“ Ich schicke dies voraus, um zu beweisen, dafs ich Herrn *Hennebergs* Priorität der Benutzung der Stabvertauschung nie bestritten habe. Wohl aber habe ich behauptet — und das ist auch von verschiedenen Seiten anerkannt worden —, dafs ich die Stabvertauschung in anderer und viel allgemeinerer Weise handhabe als Herr *Henneberg.* Mein Verfahren hat unstreitig die weitere Verbreitung gefunden und findet sich — ohne Quellenangabe — auch in dem Buche des Herrn *Mehrtens*, der die speziellen Regeln *Hennebergs* nicht einmal erwähnt. Eine Gegenüberstellung der beiden Verfahren findet der Leser in der neuesten Auflage meiner *Neueren Methoden* 1905. Hier begnüge ich mich, auf die nach festen Punkten aufserhalb des Fachwerks führenden Ersatzstäbe meines Verfahrens hinzuweisen, deren Richtung so gewählt werden kann, dafs die Gleichgewichtsbedingungen eine möglichst einfache Form annehmen.

Gleich das zweite der von mir vorgeführten Beispiele enthält folgenden Sonderfall. An einem Knotenpunkte greifen nur zwei unbekannte Stabkräfte an. Der hinzugefügte Ersatzstab hat die Richtung eines Stabes, dessen Spannkraft S bereits bekannt ist. Die Gleichgewichtsbedingungen ergeben für die Unbekannte $S + Y$ einen Wert A. Dann liefert die Bedingung

$$Y = A - S = 0$$

eine der Gleichungen zur Berechnung der Spannkräfte der beseitigten Stäbe.

Im Jahrgange 1902 des Zentralblatts der Bauverwaltung hat nun Herr *Mohr* auf Seite 634 ein Verfahren veröffentlicht, das sich von dem soeben geschilderten Sonderfalle meiner Berechnungsweise nur dadurch unterscheidet, dafs die Hinzufügung des Ersatzstabes unterbleibt, für die bereits bekannte Stabkraft S ein zweiter Wert A berechnet und die Gleichung

$$S = A$$

aufgestellt wird. Ich habe diese elementare Sache hier nur erwähnt wegen

---

der Eile, mit der diese Auflage schliefslich gedruckt werden mufste, ist dies leider vergessen worden.

*) *H. Müller*, Elementares Handbuch der Festigkeitslehre. Berlin 1875.

der Bemerkungen des Herrn *Mohr* auf Seite 459 seiner „*Abhandlungen*" und wegen der Ausführungen des Herrn *Mehrtens* nuf Seite 439 des dritten Bandes seines Buches.

Der dritte und letzte Punkt ist folgender:

In der Zeitschrift für Architektur- und Ingenieurwesen, Wochenausgabe 1898, S. 329, hat Herr *Mehrtens* eine statisch bestimmte mehrteilige Wandgliederung von Gitterträgern angegeben, mit den statisch unbestimmten Anordnungen verglichen und ersteren erhebliche Vorzüge zugesprochen. Im ersten Bande meiner *Graphischen Statik*, 1901, S. 534, zeigte ich nun, dafs die von Herrn *Mehrtens* vorgenommenen Vergleichungen unrichtig und die angegebenen Wandgliederungen wertlos seien. Darauf suchte Herr *Mehrtens* in der *Deutschen Bauzeitung* 1901, Nr. 80 und 90, 1902 Nr. 12 meine Einwürfe als in allen Punkten unberechtigt zurückzuweisen. Im zweiten Bande meiner Graphischen Statik, 3. Aufl. S. 469—473, fügte ich zu der im ersten Bande durchgeführten Untersuchung des *Spannungszustandes* der fraglichen Träger eine Darstellung der *Formveränderungen*, die denn auch zu dem erwarteten überaus kläglichen Ergebnisse führte. Ich sprach dabei von Trägern *Mehrtens*scher Bauart.

Im *Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1905, Nr. 68 S. 426 veröffentlichte nun Herr *Bender* eine sehr interessante Abhandlung über Netzwerke *Mehrtens*scher Bauart und brachte Beispiele, durch welche die in meinem Zahlenbeispiele hervorgetretenen ungünstigen Spannungszustände noch übertrumpft wurden.

Daraufhin legte Herr *Mehrtens* im Zentralblatt der Bauverwaltung 1905, S. 580 Verwahrung ein gegen die Verbindung seines Namens mit den von mir und Herrn *Bender* untersuchten Trägern. Er habe diese Träger den Fachgenossen niemals empfohlen, sondern nur zum ersten Male nachgewiesen, dafs derartige Wandgliederungen statisch bestimmt angeordnet werden können; er verstehe nicht, warum man von diesen Trägern soviel Aufhebens mache und an deren unfruchtbare Berechnung so viel Zeit und Mühe verschwende.

Die Versicherung des Herrn *Mehrtens*, jene Systeme niemals empfohlen zu haben, (die er im dritten Bande seiner Vorlesungen wiederholt), steht nun in grellem Widerspruch mit den folgenden Tatsachen, die ich Herrn *Mehrtens* bereits im Zentralblatt der Bauverwaltung 1905, S. 647 entgegengehalten habe:

1. Herr *Mehrtens* hat sich keineswegs damit begnügt, den Nachweis der statischen Bestimmtheit zu führen, sondern er hat der neuen Trägerart die Empfehlung mit auf den Weg gegeben: „Vergleicht man schliefslich die gebräuchlichen mehrteiligen Netzwerke mit den erörterten endlosen statisch bestimmten Netzwerken, so finden sich die mehr als zweiteiligen unbestimmten Anordnungen insofern im Nachteil, als sie stets $(t-2)^1/_2$ Viereckzüge (wo t die Teilungsziffer bedeutet) enthalten, die beweglich sind und für die Lastübertragung nicht taugen. *Dagegen verteilen die statisch bestimmten mehrteiligen Netzwerke alle Lasten gleichmäfsig über das gesamte Stabwerk der Wand, der Gurte und der Ständer.*"

2. In der Deutschen Bauzeitung schreibt Herr *Mehrtens* zu seiner Verteidigung u. a. (1902, S. 74): „Ich füge noch hinzu, dafs man in Amerika mit der von mir *vorgeschlagenen* statisch bestimmten mehrteiligen Wandgliederung Versuche angestellt hat", und auf S. 75 sagt er von den fraglichen Trägern: „Eine gröfsere Bedeutung haben sie für den Kriegsbrückenbau, und hierfür habe ich sie seinerzeit *an mafsgebender Stelle in Vorschlag gebracht*".

3. Im Jahre 1899 hatte Herr *Mehrtens* sogar den Versuch gemacht, sich seine Erfindung patentieren zu lassen. Die Patentanmeldung ist am 20. Februar 1899 unter M. 15152 Kl. 19 ausgelegt worden. Der Patentanspruch lautete: „Statisch bestimmtes mehrteiliges Netzwerk für Träger und Pfeiler, dadurch gekennzeichnet, dafs die rechts- und linksfallenden Wandstäbe einen die ganze Träger- oder Pfeilerwand zwischen Ständern und Gurten ausfüllenden, ununterbrochenen Zug bilden, der von einer Ständerecke ausgeht und in einer anderen Ständerecke endigt." In der Erläuterung des Patentanspruches behauptete Herr *Mehrtens*, dafs eine an einem beliebigen Knoten angreifende Einzellast sämtliche Wandstreben sehr gleichmäfsig spanne, und folgert hieraus, dafs das von ihm erfundene Netzwerk sich eigne: „für Träger aller Art, bei denen man die Wirkung von Einzellasten möglichst gleichzeitig über die Trägerwand verteilen will, z. B. für Träger von grofsen Stützweiten, in denen man nicht zu grofse Querträgerentfernungen erhalten will, für Windverbände grofser Brücken, für Träger von Hängebrücken, wenn es sich um gleichmäfsige Übertragung von Einzellasten auf Kabel und Ketten handelt". Auch für Pfeiler sei das Netzwerk mit ununterbrochenem Strebenzuge verwendbar.

Diese öffentlich ausgelegte Patentanmeldung beweist, dafs Herr *Mehrtens* seine Erfindung nicht nur empfohlen, sondern sogar in recht überschwenglicher Weise empfohlen hat, denn es ist ein wichtiges und umfangreiches Anwendungsgebiet, das er an seiner Erfindung rühmt, um dem Patentamte die Möglichkeit ihrer gewerblichen Verwertung zu beweisen*). Am meisten aber mufs es befremden, dafs Herr *Mehrtens*, nach der in der Deutschen Bauzeitung abgegebenen Erklärung, für wichtige Aufgaben der Landesverteidigung an mafsgebender Stelle ein Brückensystem in Vorschlag gebracht haben will, das nach dem jetzt von ihm selbst gefällten, vernichtenden Urteile so unbrauchbar ist, dafs es sich nicht einmal lohnt, „an dessen unfruchtbare Berechnung Zeit und Mühe zu verschwenden".

Die mitgeteilten Tatsachen reden eine deutliche Sprache; sie kennzeichnen Denkweise und Arbeitsweise des Herrn *Mehrtens*.

---

*) § 1, Absatz 1 des Patentgesetzes lautet: „Patente werden erteilt für neue Erfindungen, *die eine gewerbliche Verwertung gestatten*".

H. Müller-Breslau.

Bestimmung des Erddrucks an einer gekrümmten Gleitfläche.

Tafel I.

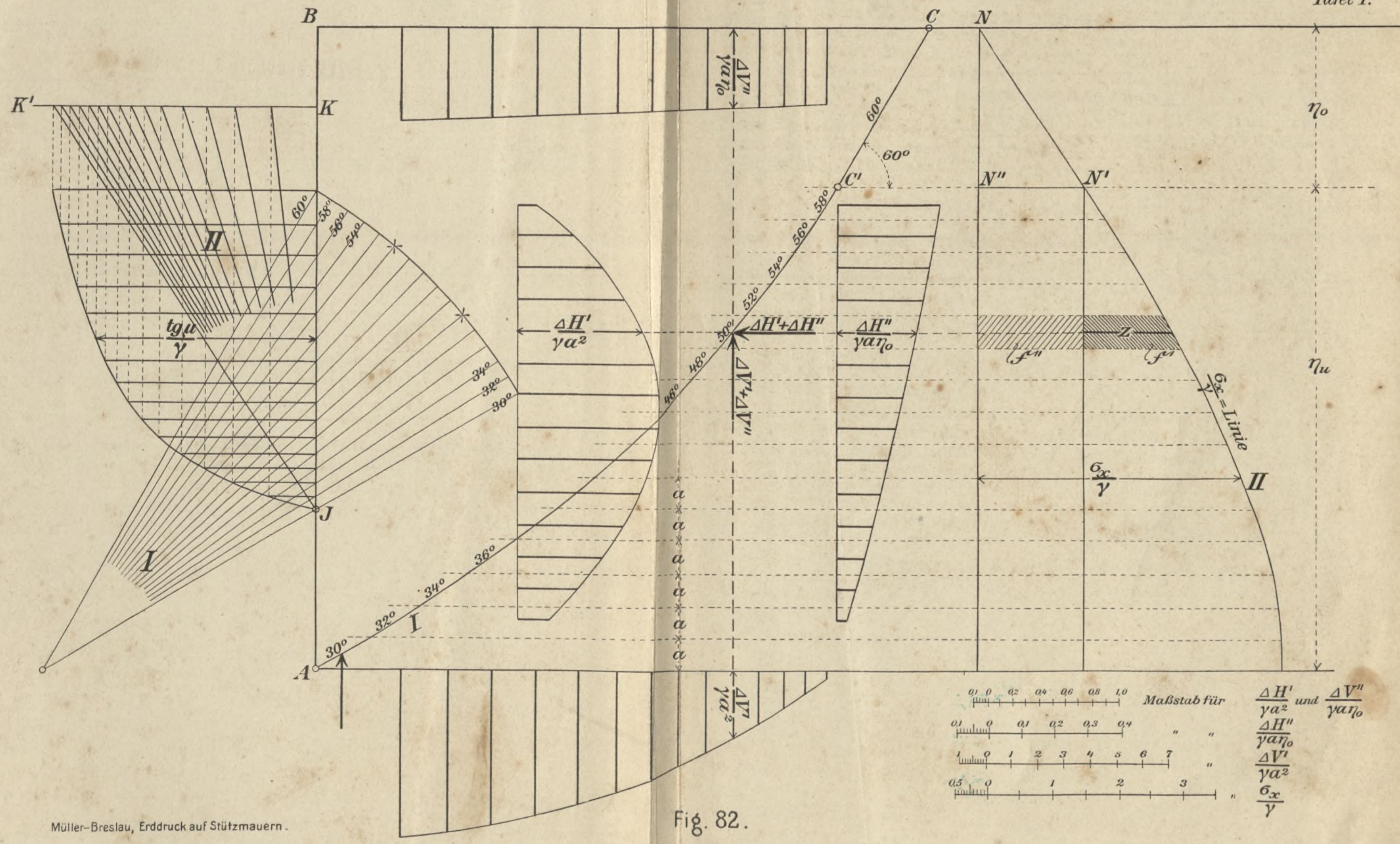
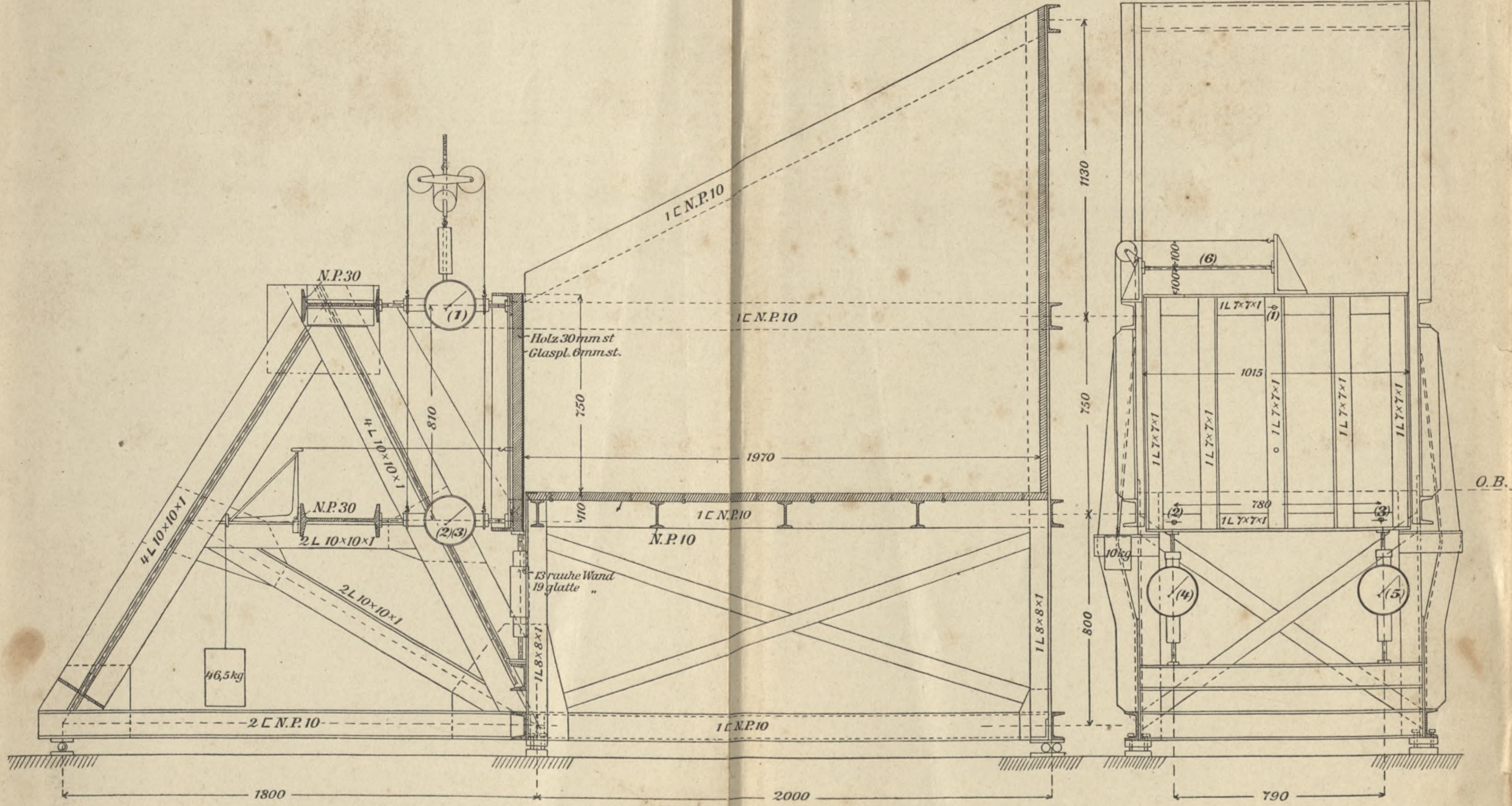


Fig. 82.



Müller-Breslau, Erddruck auf Stützmauern.

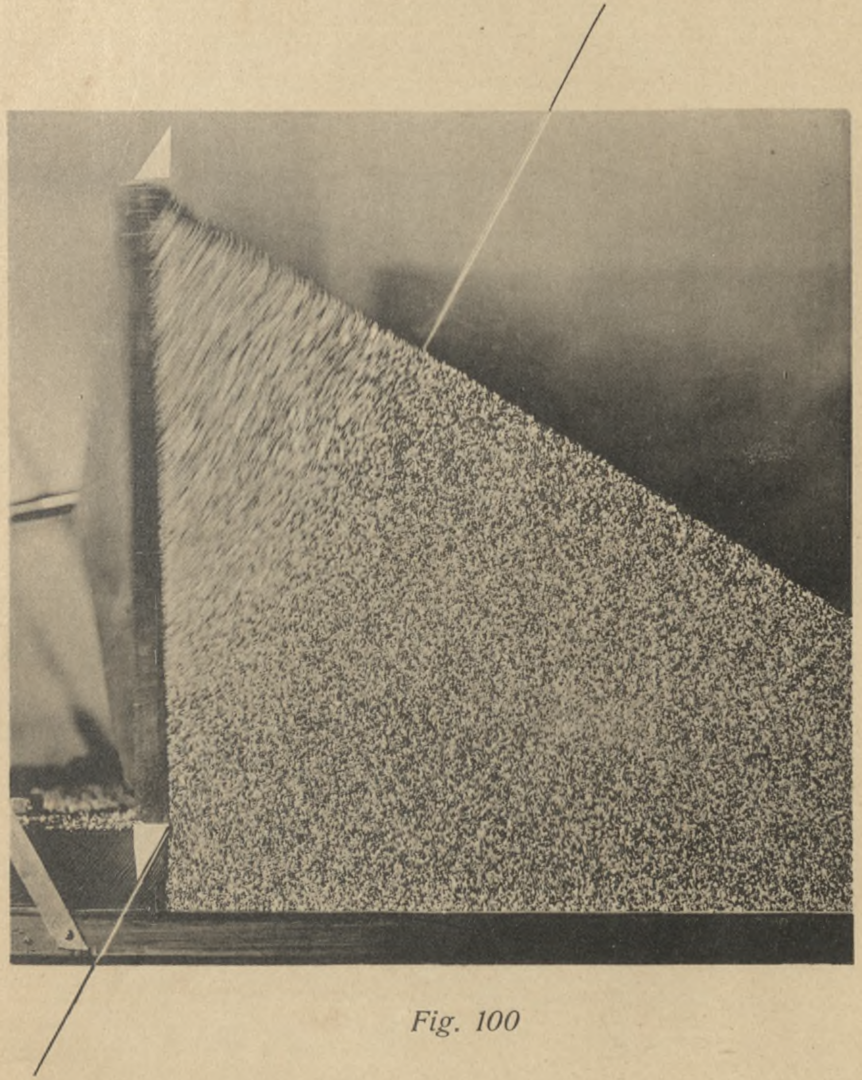


Fig. 100

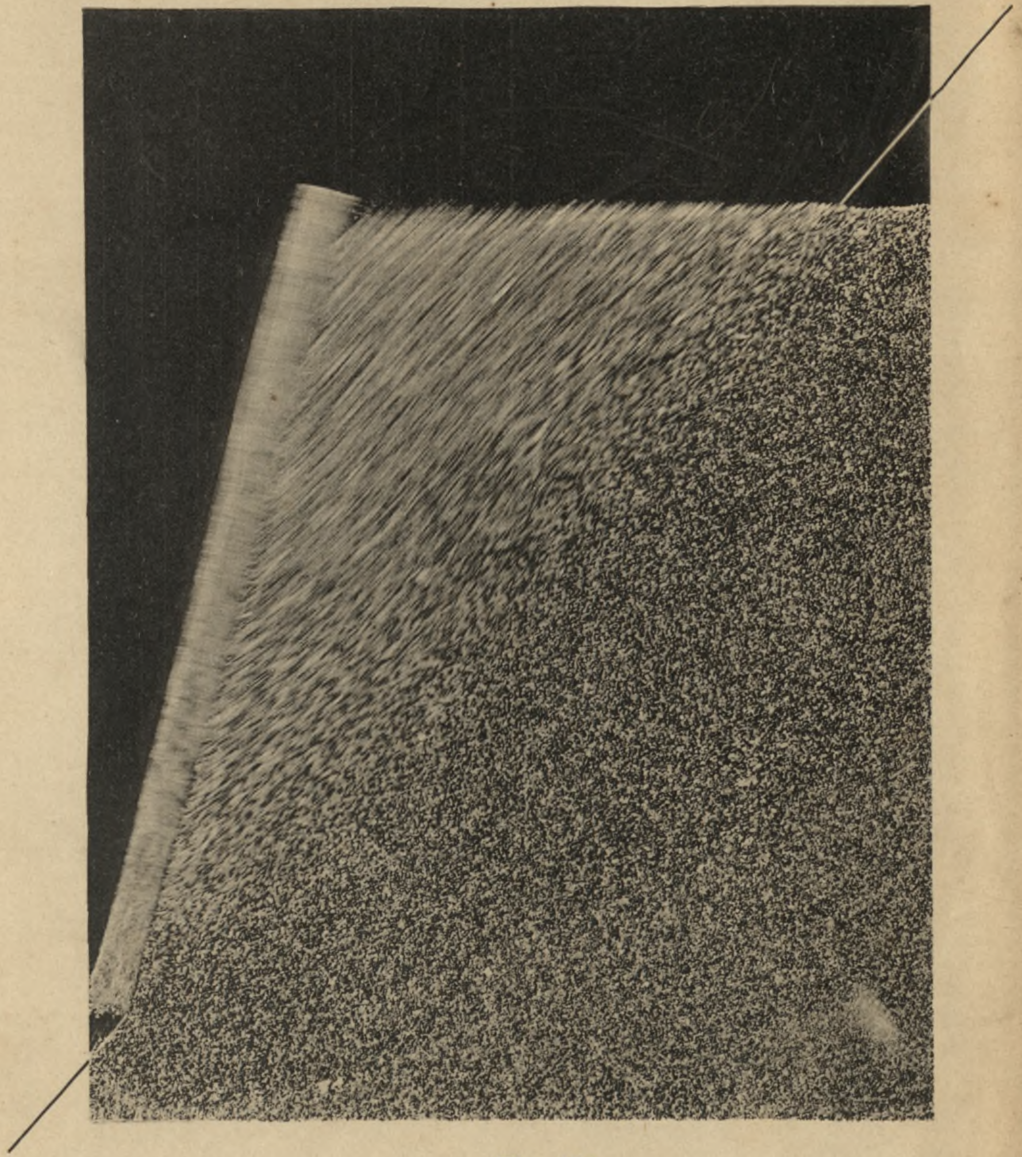


Fig. 101

Meisenbach, Riffarth & Co., Berlin-Schöneberg

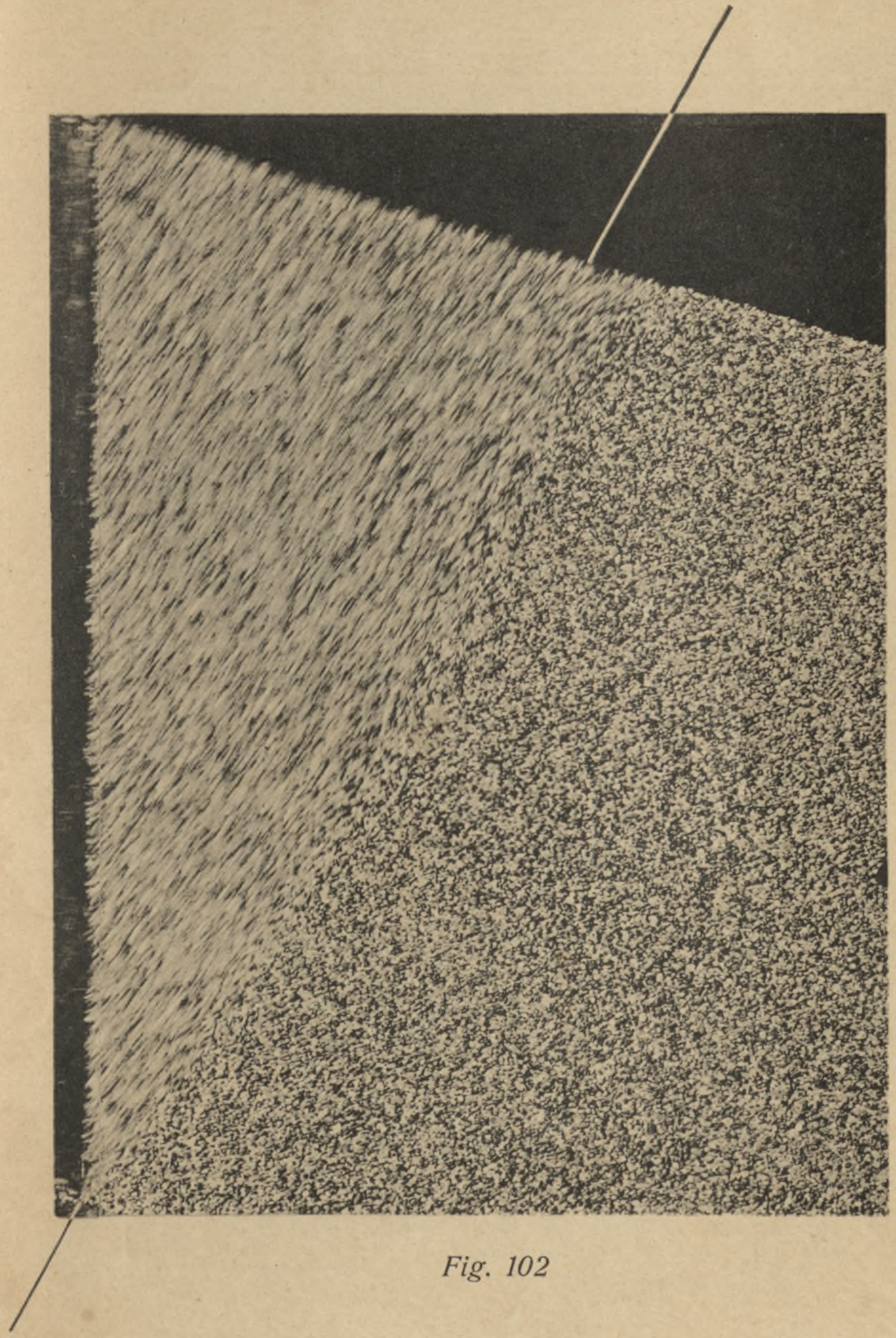


Fig. 102

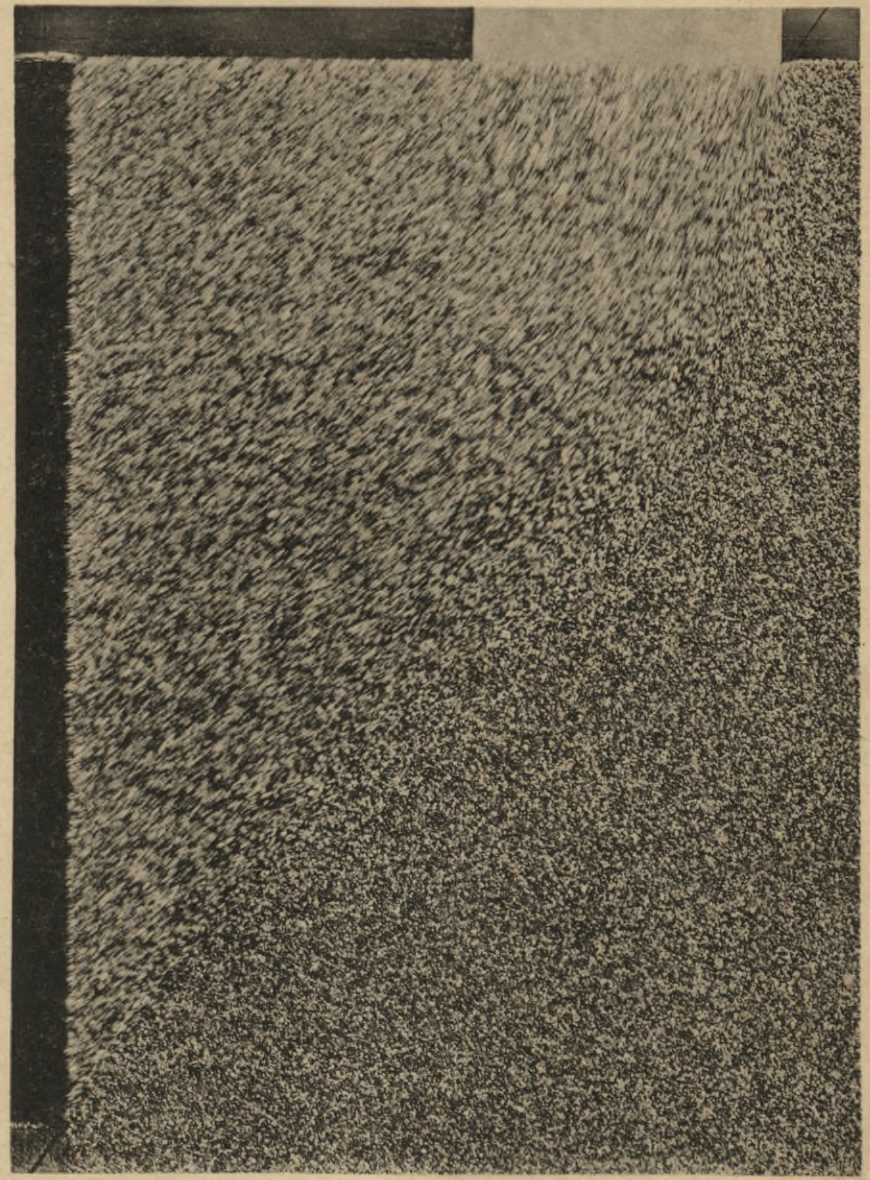


Fig. 103

Meisenbach, Riffarth & Co., Berlin-Schönebe