J.

Untersuchungen

über das

Gleichgewicht des elastischen Stabes

von

Dr. L. Pochhammer,
ord. Professor der Mathematik a. d. Universität Kiel.

Kiel 1879.

Universitäts-Buchhandlung

(Paul Toeche).

Vorrede.

Die nachstehenden Untersuchungen sind zu dem Zweck unternommen worden, für die Lehre vom Gleichgewicht des elastischen Stabes, welche sowohl ein erhebliches wissenschaftliches Interesse in Anspruch nehmen darf, als auch in den Festigkeitsbestimmungen von Balken, Trägern etc. eine ausgedehnte praktische Anwendung findet, eine allgemeingültige Grundlage zu gewinnen. Es ist bekannt, dass um die bezüglichen Probleme mathematisch genau zu behandeln, wenn auch nur in erster Annäherung, man dieselben auf die Differentialgleichungen zurückführen muss, welche für die Formveränderungen der elastischen Körper bestehen; denn nur durch letztere Gleichungen wird der Zusammenhang der einzelnen Verschiebungen der Massentheilchen genügend berücksichtigt. Als Rechnungen, in denen das Gleichgewicht elastischer Stäbe in dieser Art untersucht wird, sind vorzüglich die Arbeiten von de Saint-Venant und von Kirchhoff zu nennen. Dieselben betreffen indessen nur bestimmt abgegrenzte Fälle des allgemeinen Problems. De Saint-Venant war der Erste, der in den 2 Aufsätzen „De la torsion des prismes“ (Mém. des savants étrangers, 1855) und „Mémoire sur la flexion des prismes“ (Journ. de Liouville, Série II, Tome I, 1856) Gleichgewichtszustände eines cylindrischen Körpers mit Hilfe der Differentialgleichungen der Elasticitätstheorie bestimmte. Kirchhoff entwickelt in seiner Abhandlung „Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes“ (Crelle-Borchardt'sches Journal, Bd. 56, 1859) die Veränderungen, welche die angeführten Differentialgleichungen durch die Voraussetzung, dass die eine Dimension des Körpers unendlich klein wird, erfahren, und ist hierdurch im Stande, auch Fälle, wo die Formveränderung des Stabes nicht mehr als eine kleine bezeichnet werden darf, streng zu behandeln.

In den Abhandlungen von de Saint-Venant und von Kirchhoff wird der Gegenstand der Untersuchung durch die Annahme eingeschränkt, dass äussere Druckkräfte nur auf die Endflächen des betrachteten cylindrischen Körpers wirken, also die Mantelfläche desselben frei bleibt. In den nachfolgenden Rechnungen ist nun der Versuch gemacht worden, auf die Gleichgewichtszustände eines Stabes, dessen Mantelfläche ebenfalls von beliebigen Kräften angegriffen wird, näher einzugehen. Die Anwendungen der Elasticitätslehre weisen auf letzteren Fall besonders hin, da bei den Balken, Trägern etc. meistentheils gerade die Mantelfläche dem Drucke schwerer Körper ausgesetzt ist. In den genannten Abhandlungen wird der Querschnitt des Stabes als constant vorausgesetzt. Die hier durchgeführten Entwicklungen sind dagegen nicht minder für den Stab mit veränderlichem Querschnitt anwendbar (§ 8), wenn nur die Abweichungen des Stabes von der cylindrischen Gestalt innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Es sind daher auch die bei praktischen Aufgaben häufig vorkommenden Fälle eingeschlossen, wo die stärker in Anspruch genommenen Theile eines Trägers eine grössere Querschnittfläche haben.

Was die Behandlung der erwähnten Differentialgleichungen anbelangt, so bietet die direkte Integration derselben bereits in den einfachsten, den Stab betreffenden Problemen so grosse analytische Schwierigkeiten, dass hier nur von solchen Methoden die Rede sein soll, durch welche man, ohne die vollständigen Integrale herzustellen, Aufschluss über die Vorgänge bei der Deformation des Stabes erlangen kann. In den Rechnungen von de Saint-Venant geschieht letzteres dadurch, dass partikuläre Integrale der Differentialgleichungen ermittelt werden, woraus sich eine Reihe specieller Gleichgewichtszustände des Stabes ergeben. De Saint-Venant behandelt, wie Clebsch in seinem Lehrbuch der Elasticitätstheorie (Leipzig, 1862, pag. 73 und 94) bemerkt, nicht unmittelbar dasjenige Problem, das bei den Anwendungen vorzuliegen pflegt, und bei dem die von gegebenen Kräften herrührenden Verschiebungen gesucht werden, sondern das umgekehrte Problem, da er die Kräfte berechnet, die an der Endfläche des Stabes angebracht werden müssen, um bestimmte, als möglich erkannte Verschiebungen hervorzurufen. In der Abhandlung von Kirchhoff werden die Schwierigkeiten der Integration der Differentialgleichungen durch die Annahme verringert, dass der Querschnitt des Stabes unendlich klein sei; für die in erster Linie in Betracht kommenden Grössen werden daselbst Differentialgleichungen abgeleitet, welche mit den Gleichungen des Problems der Rotation eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt identisch sind.

Die im Folgenden enthaltenen Rechnungen schliessen sich insofern der Anschauungsweise Kirchhoff's an, als in dieselben ebenfalls von Anfang an die Voraussetzung eingeführt wird, dass die Dimensionen des Querschnitts des Stabes klein gegen die Stablänge sein sollen. Es ist diese Voraussetzung gewissermassen die Consequenz des Begriffs des Stabes. Jedoch werden hier die Durchmesser des Querschnitts des Stabes nicht als unendlich klein, sondern als endliche kleine Grössen angenommen, deren verschiedene Potenzen nach einander berücksichtigt werden. Die nachstehenden Entwicklungen sind daher Näherungsrechnungen; dieselben lassen aber einen beliebigen Grad der Annäherung zu, in ähnlicher Weise, wie dies bei der Integration einer Differentialgleichung durch unendliche Reihen der Fall ist. Das Mittel, um zu den verschiedenen angenäherten Gleichungen zu gelangen, besteht in einer streng durchgeführten Klassification der einzelnen Summanden nach Grössenordnungen; die Methode und die Principien der Rechnung sind im § 2 des ersten Abschnittes näher erörtert. Die Abhandlung Kirchhoff's bezieht sich auch auf die Fälle, wo der Stab ein krystallinischer Körper ist; dagegen wird hier der Stab als ein isotroper Körper angenommen. Ferner werden die Formveränderungen desselben im Folgenden als klein vorausgesetzt; das Problem der für Drähte etc. möglichen Gleichgewichtscurven, welches die Kirchhoff'schen Rechnungen umfassen, soll somit ausgeschlossen bleiben. Die hier gemachten Voraussetzungen passen sich den Aufgaben über die Festigkeitsbestimmung eines Balkens oder Trägers an; bei letzteren wird die Annahme, dass die Formveränderungen klein bleiben sollen, fast immer als zulässig erachtet werden dürfen.

In Betreff des Ergebnisses der angestellten Untersuchungen ist zwischen den Formeln der ersten Annäherung und den für die weiter-gehende Analyse geltenden Gleichungen zu unterscheiden. Die ersteren werden für eine beliebige Form des Querschnitts des Stabes ermittelt; bei den letzteren tritt die Vereinfachung ein, dass in den zu integrirenden Systemen von Differentialgleichungen nur zwei unabhängige Variable vorkommen. Die Werthe, die in erster Annäherung erhalten werden, liefern die Gestalt des gebogenen Stabes und die Grösse der zur Längsrichtung des Stabes parallelen Normalkraft. Im Uebrigen wird dann, in Folge der Verminderung der Zahl der unabhängigen Veränderlichen auf zwei, das Problem auf die Frage reducirt, welche Verzerrung die einzelnen zur Stabachse senkrechten Querschnitte erleiden.

Nachdem im ersten Abschnitt die allgemeinen Gleichungen für den cylindrischen (respective für den von der Cylindergestalt nur wenig abweichenden) Stab, dessen Querschnitt beliebig bleibt, abgeleitet worden sind, wird die Integration der transformirten, nur zwei unabhängige Variable enthaltenden Differentialgleichungen im zweiten und dritten Abschnitt für zwei einfache Fälle ausgeführt. Es wird nämlich einerseits der Stab, dessen Querschnitt ein voller Kreis ist, andererseits der Hohlcylinder mit ringförmigem, durch zwei concentrische Kreise begrenzten Querschnitt behandelt. Die Terme höherer Ordnung, welche durch diese Rechnungen gefunden werden, bilden die Ergänzung der in erster Annäherung geltenden Lösung und führen zu einer vollständigeren Kenntniss der Werthe der Verschiebungen und Druckkräfte. Es ergiebt sich, in Uebereinstimmung mit den Untersuchungen de Saint-Venant's, dass bei dem vollen Kreiscylinder die Massentheilchen, welche anfänglich auf einem Normalschnitt, d. h. auf einer zur Cylinderachse senkrechten Ebene, liegen, sich nach Einwirkung der äusseren Kräfte auf einer Fläche 3ten Grades befinden; nur sind die Parameter dieser Fläche hier (in Folge der Belastung der Mantelfläche des Cylinders) nicht constant, sondern von Querschnitt zu Querschnitt wechselnd. Ferner erkennt man, dass der Mittelpunkt (Schwerpunkt) eines beliebigen Normalschnittes im Allgemeinen nicht der sogenannten neutralen Schicht angehört, dass letzteres vielmehr nur eintritt, wenn keine äusseren Kräfte an dem Rande des betreffenden Querschnitts angebracht sind. In den Formeln, die man für die Verschiebungen und die Druckkräfte erhält, zerfallen die Summanden in zwei wesentlich von einander verschiedene Gruppen; die einen geben die Vorgänge der ersten angenäherten Lösung und alle unmittelbar zugehörigen begleitenden Erscheinungen (wie die Quercontraction etc.) an; die anderen beziehen sich auf die Verzerrung, welche ein beliebiger Normalschnitt durch die auf seinen Rand einwirkenden Kräfte erfahren würde, falls diese allein vorhanden wären. Der Werth der zur Längsrichtung des Stabes parallelen Normalkraft, welche für die Frage der Tragfähigkeit des Stabes hauptsächlich in Betracht kommt, wird auf 3 Ordnungen genau berechnet. Die Deformation des Hohlcylinders unterscheidet sich, wie im dritten Abschnitt gezeigt wird, von der des vollen Cylinders namentlich durch das Hinzutreten einer secundären Biegung, welche sich in den einzelnen zur Cylinderachse senkrechten Ebenen vollzieht.

Endlich werden im vierten Abschnitt bestimmte Fälle des ursprünglich gekrümmten Stabes betrachtet, auf welche das im ersten Abschnitt dargestellte Verfahren anwendbar ist. Dieselben beziehen sich auf die Aufgaben, bei denen die ursprüngliche Gestalt des Stabes durch eine ebene Curve angegeben wird, und die äusseren Druckkräfte zu der Ebene der letzteren Curve parallel sind. Für die Anwendungen haben gerade auch diese Probleme eine erhebliche Wichtigkeit, da man in gewissen Fällen, wo grosse Lasten zu tragen sind, eine in einer Vertikalebene liegende Curve als Stabachse wählt. Es werden indessen im Folgenden nur die allgemeinen Gleichungen entwickelt, bei denen sowohl der Umriss des Querschnitts des Stabes, als die obengenannte ebene Curve beliebig bleiben.

Die für die erste Annäherung geltenden Formeln, welche im ersten und im vierten Abschnitt abgeleitet werden, enthalten eine Begründung der Sätze, die Navier für die Stabbiegung aufgestellt, und durch die er mit grösstem Erfolge zuerst die Widerstandskräfte bei einem Stabe von beliebigem Querschnitt berechnet hat. Navier hat bekanntlich diese Sätze nicht streng bewiesen. Er geht von den Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems aus und wendet dieselben auf den Theil des Stabes, der durch irgend einen Normalschnitt abgetrennt wird, an; jedoch macht er in Bezug auf die speciellen Vorgänge der Deformation mehrere Voraussetzungen, die völlig unbewiesen bleiben. Navier nimmt einerseits an, dass die Massentheilchen, die anfangs zu je einem Normalschnitt des Stabes gehören, auch nachher in einer Ebene liegen, und dass diese Ebene senkrecht zur elastischen Linie steht; andererseits denkt er sich den cylindrischen Stab in ein Bündel von parallelen, unendlich dünnen Stäben aufgelöst, von denen er voraussetzt, dass sie keinen Druck auf einander ausüben. Hierdurch wird die Reduction des Biegungsproblems auf den einfachen (positiven oder negativen) Auszug der stabförmigen Körper möglich. Die von de Saint-Venant angegebenen Gleichgewichtszustände, bei denen nur die Endflächen des Stabes von äusseren Kräften in Anspruch genommen sind, finden sich (soweit es die Werthe der ersten Annäherung betrifft) in Uebereinstimmung mit dieser Theorie. In dem Wunsche, die Frage, ob die Navier'schen Sätze zutreffend seien oder nicht, für ein Beispiel, wo auch die Mantelfläche belastet ist, beantwortet zu sehen, hat der Verfasser in einer Abhandlung, die im 81ten Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals erschienen ist, — und deren Verhältniss zu den nachstehenden Untersuchungen im § 17 näher erörtert wird — gewisse Fälle des cylindrischen Stabes mit kreisförmigem Querschnitt behandelt, für welche die allgemeinen Differentialgleichungen sich ohne Schwierigkeit integriren lassen. Es ergab sich, dass die Navier'sche Theorie in erster Annäherung vollständig richtig ist, wenn auch die genaueren Ausdrücke der Verschiebungen selbstverständlich complicirtere Vorgänge darstellen. Zu dem gleichen Resultat führen die im Folgenden angestellten Rechnungen. Welches auch der Querschnitt und die Belastung des cylindrischen Stabes sei, in erster Annäherung haben die Werthe der Verschiebungen und Druckkräfte stets die von Navier behaupteten Eigenschaften (§ 5), und ähnliche Formeln gelten für die im vierten Abschnitt behandelten Aufgaben des ursprünglich gekrümmten Stabes (§ 28). Die Navier'schen Sätze werden aber im Folgenden durch eine zusammenhängende Analyse gewonnen. Desshalb dürften diese Entwicklungen vielleicht auch da willkommen sein, wo die Rechnungen auf die erste Annäherung beschränkt werden sollen, wie es bei den Vorträgen auf den polytechnischen Schulen meistens der Fall sein wird. Die Einleitung und die §§ 1—5, 8 (auch die §§ 22—28) enthalten einfache und keineswegs weitläuftige mathematische Operationen, so dass man mit verhältnissmässig geringer Mühe zu einer systematischen Herleitung jener Sätze gelangt. Ausserdem kann die Navier'sche Theorie, welche unvollständig ist, weil sie von den sechs inneren Druckkräften nur eine berücksichtigt, dann in beliebiger Weise durch die weiteren Bestimmungen der §§ 6, 7, 29 ergänzt werden, wodurch die einheitliche Darstellung der gesammten Deformation des Stabes gewahrt wird. Denn während die Navier'sche Theorie sowohl von der Torsion als von dem Auszug des Stabes abstrahirt, sind in den hier entwickelten Gleichungen alle Arten der elastischen Verschiebungen enthalten, und gleichzeitig ergiebt sich die relative Wichtigkeit der einzelnen Verschiebungen aus ihrer Grössenordnung.

Der Vollständigkeit halber ist den Untersuchungen eine Ableitung der allgemeinen Differentialgleichungen der isotropen Körper vorausgeschickt worden. Im Interesse derjenigen Leser, die sich weniger mit der Elasticitätstheorie beschäftigt haben sollten, erschien es angemessen, diese Einleitung hinzuzufügen, in welcher gesucht wird, die für das Folgende erforderlichen Formeln mit möglichst geringen mathematischen Mitteln herzustellen.

Es bleibt nur übrig, dem Wunsche Ausdruck zu geben, dass dieses Buch bei allen Freunden der rationellen Mechanik eine gütige Aufnahme finden möge.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.

Abschnitt III.

Der Hohlcylinder mit kreisförmigem Querschnitt.

Abschnitt IV.

Die angenäherten Differentialgleichungen für gewisse Fälle des ursprünglich gekrümmten Stabes.

Einleitung.

Die Differentialgleichungen für kleine Formveränderungen fester isotroper Körper.

Ein fester Körper, auf den äussere Kräfte wirken, erfährt in Folge dieser Einwirkung eine Formveränderung (Deformation), welche einerseits von seiner natürlichen Beschaffenheit, andererseits von der Grösse und Richtung der angebrachten Kräfte abhängt. Während in erster Annäherung bekanntlich die festen Körper als starr angesehen werden, ergiebt sich für die hier zu behandelnde genauere Theorie der Gleichgewichtsprobleme die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen den äusseren Kräften und den Formveränderungen, welche sie an den Körpern hervorbringen, mit Hülfe gewisser auf die Erfahrung gegründeter Annahmen festzustellen. Es soll im Folgenden die Ableitung derjenigen Differentialgleichungen reproducirt werden, welche unter der Voraussetzung gelten, dass die Formveränderung klein, und dass der feste Körper homogen und isotrop ist (d. h. an jedem Punkt und nach jeder Richtung hin das gleiche Verhalten zeigt). Von der Integration dieser Gleichungen unter gegebenen Grenzbedingungen hängt die Lösung der verschiedenen Probleme, die sich auf das Gleichgewicht der genannten Körper beziehen, ab.

I. Die Verschiebungen und ihre Differentialquotienten.

Man legt der Betrachtung einen Anfangszustand zu Grunde, welcher dem Falle entspricht, dass der feste Körper keinen äusseren Kräften unterworfen ist. In diesem anfänglichen Gleichgewichtszustand habe ein beliebiges Massentheilchen m des Körpers die rechtwinkligen linearen Coordinaten x, y, z; nach erfolgter Einwirkung der äusseren Kräfte habe es die Coordinaten $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$. Durch ξ, η, ζ werden somit die Componenten derjenigen Verschiebung bezeichnet, welche das Theilchen m bei dem Uebergang des Körpers von der Anfangslage in den neuen Gleichgewichtszustand erfährt. Die Grössen ξ, η, ζ sind die Unbekannten des Problems; dasselbe ist gelöst, sobald ξ, η, ζ als Functionen von x, y, z ermittelt sind. Man macht die Voraussetzung, dass ξ, η, ζ stetige Functionen sind, welche nach dem Taylor'schen Satz entwickelt werden können. Ein zu m benachbartes Massentheilchen m_i habe anfangs die Coordinaten $x+\mathfrak{a}_i$, $y+\mathfrak{b}_i$, $z+\mathfrak{c}_i$, seine Ausweichungscomponenten sein ξ_i, η_i, ζ_i. Die relativen Coordinaten des Theilchens m_i in Bezug auf das Theilchen m, welche ursprünglich gleich $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ sind, erhalten also durch die Deformation die Incremente $\xi_i-\xi$, $\eta_i-\eta$, $\zeta_i-\zeta$. Da die Verschiebungen als Functionen der Anfangscoordinaten aufgefasst werden, so stellen ξ_i, η_i, ζ_i die Werthe dieser Functionen für die Argumente $x+\mathfrak{a}_i$, $y+\mathfrak{b}_i$, $z+\mathfrak{c}_i$ dar, während ξ, η, ζ die Werthe derselben für x, y, z sind. Die Anwendung des Taylor'schen Satzes führt daher zu den Gleichungen:

$$
(1.)\quad \begin{cases}
\xi_i = \xi + \dfrac{d\xi}{dx}\mathfrak{a}_i + \dfrac{d\xi}{dy}\mathfrak{b}_i + \dfrac{d\xi}{dz}\mathfrak{c}_i + \ldots, \\[2ex]
\eta_i = \eta + \dfrac{d\eta}{dx}\mathfrak{a}_i + \dfrac{d\eta}{dy}\mathfrak{b}_i + \dfrac{d\eta}{dz}\mathfrak{c}_i + \ldots, \\[2ex]
\zeta_i = \zeta + \dfrac{d\zeta}{dx}\mathfrak{a}_i + \dfrac{d\zeta}{dy}\mathfrak{b}_i + \dfrac{d\zeta}{dz}\mathfrak{c}_i + \ldots.
\end{cases}
$$

Beschränkt man die Betrachtung auf die nächste Umgebung des Punktes m, so können wegen der Kleinheit der Abstände $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ die Summanden, welche mit den Grössen zweiter oder höherer Dimension $\mathfrak{a}_i^2$, $\mathfrak{a}_i\mathfrak{b}_i$ u. s. w. multiplicirt sind, vernachlässigt werden. Dann sind die Differenzen $\xi_i-\xi$, $\eta_i-\eta$, $\zeta_i-\zeta$, von denen die Veränderungen der relativen Coordinaten in der Umgebung von m abhängen, durch die 9 Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}$, ... $\frac{d\zeta}{dz}$ bestimmt. Es soll die mechanische Bedeutung dieser Differentialquotienten, die, wie ersichtlich, die gesammte Deformation der Umgebung von m enthalten, kurz erläutert werden.

Setzt man den Fall, dass $\frac{d\xi}{dx}$ von Null verschieden, die übrigen 8 Differentialquotienten aber gleich Null sind, so findet, abgesehen von der Ausweichung ξ, η, ζ, welche allen Theilchen der Umgebung von m gemeinsam ist, bei m_i nur die relative Verschiebung $\frac{d\xi}{dx}\mathfrak{a}_i$ parallel der x-Achse statt. Die Verschiebung ist somit für diejenigen Theilchen identisch, die anfänglich in derselben zur $x=$ Achse senkrechten Ebene liegen, und da sie der relativen Coordinate $\mathfrak{a}_i$ proportional ist, so stellt sie eine gleichmässige Zusammendrückung oder einen gleichmässigen Auszug in der zur x-Achse parallelen Richtung dar, jenachdem $\frac{d\xi}{dx}$ negativ oder positiv ist. Die Grösse $\frac{d\xi}{dx}$ hängt, ebenso wie die übrigen ersten Differentialquotienten, von der Wahl der Längeneinheit nicht ab; denn sie ist gleich dem Quotienten zweier Längen und giebt das Mass für die Zusammendrückung, respective den Auszug an. Man nennt dieselbe die lineare Dilatation in der Richtung der x-Achse. Man kann $\frac{d\xi}{dx}$ auch als diejenige Ausweichung bezeichnen, welche das von m um die Länge 1 entfernte und auf der Parallelen zur x-Achse gelegene Theilchen unter den obigen Voraussetzungen ausführen würde. — Eine analoge Bedeutung wie $\frac{d\xi}{dx}$ haben die Differentialquotienten $\frac{d\eta}{dy}$ und $\frac{d\zeta}{dz}$; man hat nur die x-Achse mit der y- und der z-Achse zu vertauschen.

Ist eine der Grössen $\frac{d\eta}{dx}$ oder $\frac{d\zeta}{dx}$ allein von Null verschieden, so führen wiederum die Theilchen, welche in je einer zur x-Achse senkrechten Ebene liegen, eine gleiche Bewegung, $\frac{d\eta}{dx}\,\mathfrak{a}_i$ oder $\frac{d\zeta}{dx}\,\mathfrak{a}_i$, aus, aber in einer zur x-Achse senkrechten Richtung. Denkt man sich also den betrachteten kleinen Massencomplex in dünne Schichten parallel der yz-Ebene getheilt, so drücken $\frac{d\eta}{dx}$ und $\frac{d\zeta}{dx}$ eine Gleitung dieser Schichten gegen einander aus, wobei die Dichtigkeit keine Aenderung erfährt. Entsprechendes gilt von den Grössen $\frac{d\xi}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d\xi}{dz}$, $\frac{d\eta}{dz}$. Man kann sich wegen der linearen Beschaffenheit der vorausgesetzten Ausdrücke von $\xi_i - \xi$, $\eta_i - \eta$, $\zeta_i - \zeta$ die einzelnen Bewegungen, die den 9 Differentialquotienten entsprechen, als nacheinander erfolgend vorstellen; denn hierdurch wird ein beliebiges Theilchen m_i genau zu demselben Ort geführt, als wenn die 9 Bewegungen gleichzeitig geschehen.

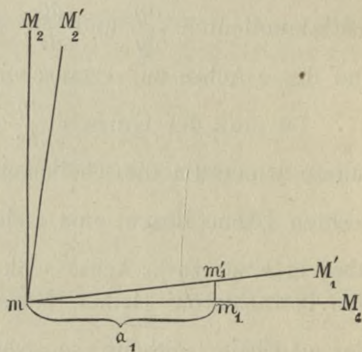
Es soll die Voraussetzung gemacht werden, dass die genannten 9 Differentialquotienten so klein sind, dass man ihre Quadrate und Produkte neben den ersten Potenzen vernachlässigen kann. In Folge dieser Annahme lässt sich die mechanische Bedeutung der 6 Differentialquotienten

$$\frac{d\eta}{dx},\ \frac{d\zeta}{dx},\ \frac{d\xi}{dy},\ \frac{d\zeta}{dy},\ \frac{d\xi}{dz},\ \frac{d\eta}{dz}$$

noch in anderer Weise aussprechen. Man ziehe von dem Theilchen m aus, dessen Umgebung man betrachtet, drei Gerade mM_1, mM_2, mM_3

parallel drei positiven den Zweigen der Coordinatenachsen, und setze den Fall, dass von den 9 Differentialquotienten nur $\frac{d\eta}{dx}$ von Null verschieden ist. Die anfänglich auf der Geraden mM_1 befindlichen Theilchen liegen dann nach Eintritt der Formveränderung auf einer anderen Geraden, welche mM_1' heissen möge. Die auf mM_2 und mM_3 befindlichen Theilchen bleiben dagegen auf diesen Geraden, wenn man sich das kleine Kreuz mM_1, mM_2, mM_3 gleichzeitig mit m und parallel mit sich selbst fortgerückt denkt. Da die durch $\frac{d\eta}{dx}$ ausgedrückte Verschiebung der y-Achse parallel ist, so ist durch dieselbe der rechte Winkel M_1mM_2 in den Winkel $M_1'mM_2$ übergegangen, welcher spitz oder stumpf ist, jenachdem $\frac{d\eta}{dx}$ das positive oder das negative Vorzeichen hat. Wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Differentialquotienten ist nun der Winkel M_1mM_1', um den sich der rechte Winkel M_1mM_2 vermindert hat, gleich $\frac{d\eta}{dx}$ zu rechnen. Denn $\frac{d\eta}{dx}$ ist, abgesehen vom Vorzeichen, gleich der trigonometrischen Tangente des Winkels M_1mM_1', da ein Theilchen m_1, welches auf der Geraden mM_1 im Abstand $\mathfrak{a}_1$ von m liegt, die relative Ausweichung $m_1m_1' = \mathfrak{a}_1\frac{d\eta}{dx}$ erleidet. Tangente und Bogen des kleinen Winkels M_1mM_1' sind hier als identisch zu betrachten, so dass der Winkel selbst den Werth $\frac{d\eta}{dx}$ hat. Das Vorzeichen bestimmt sich, wie leicht zu sehen, in der Art, dass das Increment des rechten Winkels M_1mM_2 stets gleich $-\frac{d\eta}{dx}$ ist. Wenn man analog den Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dy}$ allein von Null verschieden nimmt, so vermindert sich der rechte Winkel M_1mM_2 um einen Winkel M_2mM_2', welcher gleich $\frac{d\xi}{dy}$ ist. Denn alsdann tritt bei den Theilchen auf mM_1 keine Aenderung der relativen Coordinaten ein; dagegen gehen die auf mM_2 liegenden Theilchen auf die Linie mM_2' über, indem sie eine der x-Achse parallele Verrückung erleiden, welche im Abstande 1 von m gleich $\frac{d\xi}{dy}$ sein würde. Sind $\frac{d\xi}{dy}$ und $\frac{d\eta}{dx}$ gleichzeitig von Null ver-

Fig. 1.



schieden, so erfährt der rechte Winkel $M_1 m M_2$, da er in den Winkel $M'_1 m M'_2$ übergeht, den Zuwachs $-\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)$.

Setzt man nun den Fall, dass im Punkte m von den 9 Differentialquotienten nur $\frac{d\xi}{dy}$ und $\frac{d\eta}{dx}$ von Null verschieden sind, und dass zwischen diesen die Gleichung $\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}=0$ besteht, so findet bei dem Massencomplex, der die unmittelbare Umgebung von m bildet, gar keine Deformation statt. Vielmehr führt derselbe nur eine Rotation aus, bei der die Massentheilchen ihre anfängliche relative Lage zu m beibehalten, und deren Drehungsachse zur z-Achse parallel ist. Der Rotationswinkel stimmt mit $\frac{d\xi}{dy}$, $=-\frac{d\eta}{dx}$, oder mit $\frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)$ überein.

In den folgenden Rechnungen ergiebt dieser Umstand den Schluss, dass die elastischen Kräfte, die in der Umgebung von m durch die Deformation hervorgerufen werden, nur in bestimmter Weise von den 6 Differentialquotienten

$$\frac{d\xi}{dy},\ \frac{d\xi}{dz},\ \frac{d\eta}{dx},\ \frac{d\eta}{dz},\ \frac{d\zeta}{dx},\ \frac{d\zeta}{dy}$$

abhängen können, nämlich dass dieselben (bei der hier betrachteten Annäherung) ausschliesslich Functionen der Binome

$$\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy},\quad \frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz},\quad \frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}$$

sind. Sobald die letzteren Binome und gleichzeitig die Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$ für den Punkt m gleich Null sind, müssen auch die elastischen Kräfte daselbst verschwinden, da, wie bewiesen, alsdann in der unmittelbaren Umgebung von m gar keine Deformation stattfindet.

Für die Aenderung, welche die Dichtigkeit im Punkte m erfährt, ergiebt sich ein einfacher Ausdruck durch die Differentialquotienten der Verschiebungen. Die 6 Differentialquotienten

$$\frac{d\xi}{dy},\ \frac{d\xi}{dz},\ \frac{d\eta}{dx},\ \frac{d\eta}{dz},\ \frac{d\zeta}{dx},\ \frac{d\zeta}{dy}$$

haben, wie im Vorhergehenden gezeigt wurde, auf die Dichtigkeit keinen Einfluss. Dieselben können daher, wenn es sich um die Dichtigkeitsänderung im Punkte m handelt, gleich Null gesetzt werden, so dass nur $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$ von Null verschieden bleiben. Der Zuwachs der Dichtigkeit ergiebt sich unmittelbar aus dem Volumenzuwachs, welcher zunächst ermittelt werden soll. Die anfängliche constante Dichtigkeit heisse D. Man trage in der Anfangslage vom Theilchen m aus auf den drei (den Coordinatenachsen parallelen) Linien mM_1, mM_2, mM_3 die respectiven kleinen Strecken α, β, γ ab, und vervollständige das Parallelepiped, dessen Kanten diese Strecken sind. Die Verschiebungen, welche den Werthen $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$ entsprechen, verwandeln dasselbe in ein anderes kleines Parallelepiped, das ebenfalls rechtwinklig ist, und dessen Kanten, wie aus den oben angestellten Betrachtungen hervorgeht, gleich den Produkten $\alpha\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)$, $\beta\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)$, $\gamma\left(1+\frac{d\zeta}{dz}\right)$ sind. Das auf die Volumeneinheit bezogene Volumenincrement wird die kubische Dilatation genannt und möge durch den Buchstaben ϑ bezeichnet werden. Dann erhält man offenbar den Werth von ϑ, indem man den Zuwachs des Volumens des Parallelepipeds durch das ursprüngliche Volumen $\alpha\beta\gamma$ desselben dividirt. Auf diese Weise ergiebt sich die Gleichung

$$\vartheta=\left(1+\frac{d\xi}{dx}\right)\left(1+\frac{d\eta}{dy}\right)\left(1+\frac{d\zeta}{dz}\right)-1,$$

oder, weil die Produkte aus $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\eta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dz}$ neben den ersten Potenzen dieser Grössen vernachlässigt werden, die folgende:

$$(2.)\quad \vartheta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}.$$

Um hieraus das Increment der Dichtigkeit abzuleiten, hat man nur zu beachten, dass das Produkt aus Volumen und Dichtigkeit constant bleibt, da es die Masse darstellt. Die nach der Deformation vorhandene Dichtigkeit ist folglich gleich D, multiplicirt mit dem Quotienten aus dem Volumen des ersten und dem des zweiten Parallelepipeds. Der letztere Quotient ist aber gleich

$$\frac{1}{1+\frac{d\xi}{dx}}\;\frac{1}{1+\frac{d\eta}{dy}}\;\frac{1}{1+\frac{d\zeta}{dz}},$$

oder, wenn man entwickelt und die höheren Potenzen fortlässt, gleich

$$1-\frac{d\xi}{dx}-\frac{d\eta}{dy}-\frac{d\zeta}{dz}.$$

Daher findet man für den Zuwachs der Dichtigkeit den Werth $-D\vartheta$.

II. Die Druckkräfte.

Der Widerstand, den ein fester Körper den äusseren Kräften entgegensetzt, wird der Cohäsion zugeschrieben, deren Ursprung man in der gegenseitigen Anziehung und Abstossung der Moleküle sucht. Es soll hier auf die Art und Weise eingegangen werden, in welcher sich die Cohäsion an den einzelnen Flächen geltend macht. Wenn man irgend eine Ebene durch den betrachteten Körper legt, so wirken die Massentheilchen diesseits und die Massentheilchen jenseits derselben mit gewissen Kräften auf einander ein. Durch die Zusammenfassung dieser Kräfte entstehen die Druckkräfte, welche man der Fläche — nicht der Masse — proportional rechnet. (Der Begriff „Druckkraft" wird hier in dem allgemeineren Sinne angewendet, dass auch die Zugkräfte und die eine Gleitung bewirkenden Kräfte einbegriffen werden). Man nimmt an, dass die Molekularattractionen, aus denen die Druckkräfte sich zusammensetzen, nur innerhalb sehr kleiner Entfernungen beträchtliche Werthe haben, und dass daher zu den an einem bestimmten Punkt auftretenden Druckkräften nur die Massentheilchen der nächsten Umgebung, welche als Wirkungssphäre bezeichnet wird, beitragen, eine Voraussetzung, die man aus dem beobachteten grossen Unterschied zwischen den Cohäsions- und den Adhäsions-Kräften fester Körper abstrahirt. Nennt man m ein diesseits der Ebene und in unmittelbarer Nähe derselben gelegenes Massentheilchen, so kann man die Kräfte, mit denen die jenseits der Ebene befindlichen Theilchen auf m wirken, in eine Resultante vereinigen. Analog verfährt man bei allen in der Umgebung von m liegenden Theilchen m', m'' etc. Indem man dann diese Resultanten benachbarter Theilchen wegen der Stetigkeit der Aenderung als parallel annimmt, gelangt man zu dem Begriff der aus einer grossen Zahl solcher paralleler Kräfte bestehenden Druckkraft, welche somit der Grösse des Flächenelementes, an welchem sie auftritt, proportional ist. Man setzt nun ferner die Druckkräfte als stetige Functionen der Raumcoordinaten voraus. Sind ω und ω' zwei Flächenelemente, welche in der erwähnten Ebene, aber in verschiedenen Theilen derselben, liegen, so ist im Allgemeinen die Druckkraft, welche zu ω gehört, sowohl in Grösse als in Richtung von der zu ω' gehörigen verschieden. Die Grösse der ersteren Kraft werde durch das Produkt ωP, die der letzteren durch $\omega' P'$ gemessen; dann soll, jener Voraussetzung zufolge, bei Einschaltung der zwischen ω und ω' liegenden Flächenelemente der Werth P stetig in P' übergehen, und ebenso soll die Richtung der Kräfte eine stetige Aenderung aufweisen. — Bei der soeben angewendeten Bezeichnungsweise werden die Druckkräfte auf die Flächeneinheit bezogen. Denn die auf das Flächenelement ω wirkende Druckkraft wurde gleich ωP gesetzt; also stellt P die Druckkraft, welche zur Flächeneinheit gehört, dar, wenn man sich letztere in gleichmässiger Weise in Anspruch genommen denkt, derartig, dass bei jedem Element von der Grösse ω die gleiche und gleichgerichtete Kraft ωP vorhanden ist. Die Flächeneinheit soll in dieser Weise für alle Druckkräfte, die in den nachstehenden Rechnungen vorkommen, der Bezeichnung zu Grunde gelegt werden.

Bei jedem Flächenelement der betrachteten Ebene treten zwei nur durch das Vorzeichen von einander verschiedene Druckkräfte auf. Die Druckkraft, mit welcher an dem Element ω die Massentheilchen diesseits der Ebene auf die jenseits wirken, wird als gleich und entgegengesetzt derjenigen angesehen, welche die Einwirkung der Theilchen jenseits auf die diesseits darstellt, weil man sich alle Druckkräfte aus gegenseitigen Anziehungen und Abstossungen entstanden denkt. In dem Fall, dass die Ebene einer der Coordinatenebenen parallel ist, beziehen sich die im Folgenden eingeführten Bezeichnungen der Druckkraftscomponenten stets auf diejenige Druckkraft, welche aus der Einwirkung der Seite der grösseren Coordinaten auf die Seite der kleineren Coordinaten entspringt. Das Vorzeichen der Kräfte selbst ist, der allgemein gültigen Definition gemäss, positiv oder negativ, jenachdem dieselben die Coordinaten der Massentheilchen, auf die sie wirken, zu vergrössern oder zu verkleinern streben.

Ebenso wie die Verschiebungen ξ, η, ζ fasst man auch die Druckkräfte als Functionen der anfänglichen Coordinaten x, y, z auf. Es ist wohl zu beachten, dass die Druckkräfte, die nach der Deformation an irgend einem Punkte auftreten, nicht als unmittelbare Functionen der augenblicklichen Coordinaten, sondern als Functionen der ursprünglichen Coordinaten der daselbst befindlichen Massentheilchen hergestellt werden sollen. In Folge dessen geschieht auch die Bezeichnung der einzelnen Druckkräfte in der Art, dass man dieselben auf die Flächenelemente der Anfangslage, nicht auf die nach der Deformation vorhandenen, bezieht. Aus der zur x-Achse senkrechten Ebene, welche in der Anfangslage das Theilchen m enthält, schneide man ein kleines Rechteck aus, dessen eine Ecke in m liegt, und dessen Seiten dy und dz der y- und z-Achse parallel sind. Dasselbe geht, wenn man die auf ihm befindlichen Theilchen verfolgt, durch die Deformation in ein anderes Flächenelement über, welches im Allgemeinen sowohl nach Flächeninhalt, als nach Lage und Umriss von dem Rechteck der Anfangslage verschieden ist. Indessen soll die daselbst angreifende Druckkraft dennoch so bezeichnet werden, dass man sie proportional zu $dy\,dz$ rechnet, da man die eingetretene Aenderung der Grösse der Fläche leicht auf den Ausdruck der Kraft übertragen kann. Die der x-, y-, z-Achse parallelen Componenten der genannten Druckkraft, welche (nach der Deformation) auf das ursprünglich zur x-Achse senkrechte Flächenelement $dy\,dz$ wirkt, mögen durch

$$X_x\,dy\,dz\,, \quad Y_x\,dy\,dz\,, \quad Z_x\,dy\,dz$$

bezeichnet werden, so dass X_x, Y_x, Z_x die auf die Flächeneinheit bezüglichen Kräfte sind. Den oben gegebenen Definitionen gemäss sind X_x, Y_x, Z_x Functionen von x, y, z, die für das Argument x, y, z die am Punkte $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ auftretenden Druckkräfte darstellen, und sich auf die Einwirknng der Seite der grösseren x auf die Seite der kleineren x beziehen.

In analoger Weise betrachtet man im Anfangszustand zwei durch m gehende Rechtecke mit dem Inhalt $dx\,dz$ und $dx\,dy$, welche zur y-, respective z-Achse senkrecht stehen. Die Flächen, in die diese kleinen Rechtecke nach der Deformation übergegangen sind, mögen durch Druckkräfte in Anspruch genommen sein, welche parallel der x-, y-, z-Achse die Componenten

$$X_y\,dx\,dz, \quad Y_y\,dx\,dz, \quad Z_y\,dx\,dz,$$

bezüglich

$$X_z\,dx\,dy, \quad Y_z\,dx\,dy, \quad Z_z\,dx\,dy$$

haben. — Bei der hier angewendeten (von Kirchhoff herrührenden) Bezeichnungsweise der Componenten giebt der Index stets diejenige Coordinatenachse an, zu welcher das betreffende Flächenelement anfänglich senkrecht war, während der grosse Buchstabe der Richtung der Componente selbst entspricht.

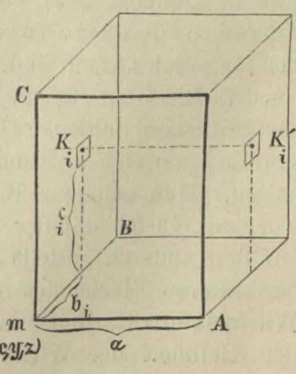
Die obigen 9 Componenten zerfallen in zwei Klassen. Die Grössen X_x, Y_y, Z_z nennt man Normalcomponenten, weil ihre Richtung mit der Normale des Flächenelements, auf das sie wirken, zusammenfällt. Die Kräfte Y_x, Z_x, X_y, Z_y, X_z, Y_z werden aus analogem Grunde Tangentialcomponenten genannt.

Ein fester Körper wird im Allgemeinen sowohl durch äussere Druckkräfte, die an seiner Oberfläche wirken, als auch durch Kräfte, welche der Masse proportional sind (wie z. B. die Schwerkraft), in Anspruch genommen. Grenzt man im Innern des Körpers irgend ein Volumen ab und sucht die Gleichgewichtsbedingungen für dasselbe auf, so hat man neben den der Masse proportionalen Kräften diejenigen inneren Druckkräfte zu berücksichtigen, welche an den Grenzflächen des Volumens auftreten. Es ist nun wesentlich, zu bemerken, dass falls das abgegrenzte Volumen sehr klein genommen wird, die der Masse proportionalen Kräfte von höherer Ordnung als die Druckkräfte sind. Die Grössen X_x, X_y, ..., welche die Werthe von Druckkräften für die Flächeneinheit angeben, sind von der Ordnung der endlichen Zahlen. Denn diese Kräfte sind im Stande, den Massenkräften, die sich auf endliche Massen beziehen, das Gleichgewicht zu halten. Man nehme z. B. den Fall, dass zwei der Schwerkraft unterworfene Würfel mit der Kante 1 vorhanden seien, und dass der eine auf den anderen gestellt werde. Dann ist die Druckkraft, welche an der unteren Fläche des oberen und an der oberen Fläche des unteren Würfels auftritt, gleich dem Gewicht des oberen Würfels, obwohl (wegen der Kleinheit der Wirkungssphäre) zu jener Druckkraft nur die anziehenden und abstossenden Kräfte einer ausserordentlich dünnen Schicht von Massentheilchen beitragen. Betrachtet man also ein Volumen, dessen sämmtliche Dimensionen sehr klein sind, so sind die Druckkräfte, die auf dasselbe wirken, von der zweiten Ordnung, weil sie der Fläche proportional sind, die Massenkräfte dagegen von der dritten, womit die obige Behauptung erwiesen ist. Dies führt zu dem weiteren Schluss, dass an jedem unbegrenzt kleinen Volumen die Druckkräfte, da sie ausserordentlich gross im Vergleich zu den Massenkräften sind, für sich allein im Gleichgewicht stehen müssen. Die der Masse proportionalen Kräfte kommen für ein sehr kleines Volumen erst in Betracht, nachdem die Grössen zweiter Ordnung sich gegenseitig aufgehoben haben.

III. Die Gleichgewichtsbedingungen für das Innere.

Um die Gleichgewichtsbedingungen, welche für einen Punkt im Innern des Körpers gelten, zu erhalten, ziehe man, wie oben, in der Anfangslage vom Theilchen m aus, dessen Coordination x, y, z sind, drei kleine Strecken mA, mB, mC parallel den positiven Coordinatenachsen, und construire das Parallelepiped, dessen Kanten dieselben bilden. Die Längen mA, mB, mC werden wiederum durch α, β, γ bezeichnet; das Theilchen m möge in endlichem Abstand von der Oberfläche des Körpers liegen. Auf das kleine Volumen, in welches das Parallelepiped nach Eintritt der Deformation übergegangen ist, kann man die 6 Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems anwenden, da diese für einen beliebigen Complex von Massentheilchen gelten. Die proportional zur Masse wirkenden Kräfte denke man sich an jedem einzelnen Theilchen zu einer einzigen Kraft vereinigt; die den Coordinatenachsen parallelen Componenten dieser letzteren, bezogen auf die Masseneinheit, nennt man X_0, Y_0, Z_0. Es sollen zunächst die drei Gleichgewichtsbedingungen, welche die Summen der Componenten der Kräfte betreffen, aufgestellt werden.

Fig. 2.



In der Seitenfläche des Parallelepipeds, die durch m geht und zur x-Achse senkrecht steht, sei in der Anfangslage K_i ein beliebiger Punkt, rings um welchen man sich ein unendlich kleines Flächenelement ω_i abgegrenzt denkt. Von dem Punkt K_i ziehe man parallel der x-Achse eine Gerade, deren Durchschnittspunkt mit der gegenüberliegenden Seitenfläche des Paralellepipeds durch K_i' bezeichnet wird, und schneide bei K_i' aus der Seitenfläche ein zu ω_i congruentes Flächenelement ω_i' aus. Der Punkt K_i stimmt in der x-Coordinate mit m überein; seine anderen Coordinaten seien $y+\mathfrak{b}_i$, $z+\mathfrak{c}_i$. Dann hat der Punkt K_i die Coordinaten $x+\alpha$, $y+\mathfrak{b}_i$, $z+\mathfrak{c}_i$. Die nach der Deformation auftretenden Druckkräfte X_x, Y_x, Z_x sind hiernach, abgesehen vom Vorzeichen, bei dem Element ω_i für das Argument x, $y+\mathfrak{b}_i$, $z+\mathfrak{c}_i$ und bei dem Element ω_i' für das Argument $x+\alpha$, $y+\mathfrak{b}_i$, $z+\mathfrak{c}_i$ zu nehmen. Man setzt voraus, dass die Druckkräfte, als stetige Functionen der Raumcoordinaten, nach dem Taylor'schen Satze entwickelt werden können. Indem man wegen der völlig unbegrenzten Kleinheit der Längen α, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ diese Entwickelungen auf die Glieder, welche mit den ersten Potenzen von α, $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{c}_i$ multiplicirt sind, beschränkt, erhält man für die der x-Achse parallelen Componenten die Gleichungen

$$X_x\,(x,\, y+\mathfrak{b}_i,\, z+\mathfrak{c}_i) = X_x + \frac{dX_x}{dy}\,\mathfrak{b}_i + \frac{dX_x}{dz}\,\mathfrak{c}_i,$$

$$X_x\,(x+\alpha,\, y+\mathfrak{b}_i,\, z+\mathfrak{c}_i) = X_x + \frac{dX_x}{dx}\,\alpha + \frac{dX_x}{dy}\,\mathfrak{b}_i + \frac{dX_x}{dz}\,\mathfrak{c}_i,$$

wobei die Function X_x rechts stets das Argument x, y, z hat. Nun sind bei ω_i die Druckkräfte ihrer Definition nach mit dem negativen Vorzeichen behaftet, weil das Parallelepiped daselbst von Kräften in Anspruch genommen wird, welche die Einwirkung der Seite der kleineren Coordinaten auf die Seite der grösseren Coordinaten darstellen. Bei ω_i' kommt dagegen gemäss derselben Definition das positive Vorzeichen zur Anwendung. Die der x-Achse parallele Componente, welche bei ω_i wirkt, wird folglich durch

$$-\,\omega_i\left\{X_x + \frac{dX_x}{dy}\,\mathfrak{b}_i + \frac{dX_x}{dz}\,\mathfrak{c}_i\right\}$$

und die bei ω_i' wirkende, wenn man die Gleichheit der Flächen ω_i und ω_i' berücksichtigt, durch

$$+\,\omega_i\left\{X_x + \frac{dX_x}{dx}\,\alpha + \frac{dX_x}{dy}\,\mathfrak{b}_i + \frac{dX_x}{dz}\,\mathfrak{c}_i\right\}$$

angegeben. Da man bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingung sämmtliche der x-Achse parallelen Componenten zu addiren hat, so kann man zunächst die bei ω_i und ω_i' auftretenden vereinigen; die Summe derselben ist aber gleich $\frac{dX_x}{dx}\,\alpha\,\omega_i$. Bei der ferneren Summation über die verschiedenen Elemente ω_i und ω_i', aus denen sich die beiden zur x-Achse senkrechten Seitenflächen des Parallelepipeds zusammensetzen, treten die Factoren $\frac{dX_x}{dx}$ und α vor das Summenzeichen, da sie bei dem Variiren von $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{c}_i$ unverändert bleiben. Die $\Sigma\,\omega_i$ wird aber gleich der Rechteckfläche $\beta\gamma$. Die Druckkräfte, welche auf die zwei betrachteten, einander gegenüberliegenden Seitenflächen wirken, tragen also zu der Summe der zur x-Achse parallelen Componenten den Werth

$$\frac{dX_x}{dx}\alpha\beta\gamma$$

bei. In analoger Weise ergeben sich die Ausdrücke

$$\frac{dX_y}{dy}\alpha\beta\gamma, \quad \frac{dX_z}{dz}\alpha\beta\gamma$$

als die Beiträge, welche die zur y-, resp. z-Achse senkrechten Seitenflächen zu der genannten Componentensumme liefern. Die Grössen zweiter Ordnung haben sich hier vollständig fortgehoben; die obigen übriggebliebenen Werthe sind, da sie $\alpha\beta\gamma$ als Factor enthalten, von der 3. Ordnung, also von derselben, wie die der Masse proportionalen Kräfte. Letztere liefern bei dem kleinen Parallelepiped für die der x-Achse parallele Richtung die Componente

$$D\,\alpha\beta\gamma\,X_0,$$

wo D die Dichtigkeit bedeutet. Hiernach lautet die Gleichgewichtsbedingung, welche sich auf die der x-Achse parallelen Componenten bezieht,

$$\alpha\beta\gamma\left\{\frac{dX_x}{dx}+\frac{dX_y}{dy}+\frac{dX_z}{dz}+D\,X_0\right\} = 0.$$

Nach Aufstellung der analogen Bedingungen für die zur y- und zur z-Achse parallelen Componenten und nach Division durch $\alpha\beta\gamma$ erhält man folglich das Gleichungssystem:

$$(3.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dX_x}{dx}+\frac{dX_y}{dy}+\frac{dX_z}{dz}+DX_0 = 0,\\ &\frac{dY_x}{dx}+\frac{dY_y}{dy}+\frac{dY_z}{dz}+DY_0 = 0,\\ &\frac{dZ_x}{dx}+\frac{dZ_y}{dy}+\frac{dZ_z}{dz}+DZ_0 = 0.\end{aligned}\right.$$

Im Fall der Bewegung hat man, nach dem d'Alembert'schen Princip, zu den obigen Componentensummen die Produkte aus der Masse des Parallelepipeds und den respectiven Beschleunigungscomponenten mit negativem Vorzeichen hinzuzufügen. Da die Coordinaten des Theilchens m zur beliebigen Zeit t durch $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ angegeben werden, und die Anfangscoordinaten x, y, z nicht von t abhängen, so sind die Beschleunigungscomponenten gleich $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$. Folglich treten die Summanden

$$-D\alpha\beta\gamma\frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad -D\alpha\beta\gamma\frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad -D\alpha\beta\gamma\frac{d^2\zeta}{dt^2}$$

zu den Componentensummen hinzu, so dass die rechten Seiten der Gleichungen (3.) dann nicht gleich 0, sondern gleich $D\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $D\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $D\frac{d^2\zeta}{dt^2}$ zu nehmen sind.

Die übrigen 3 Gleichgewichtsbedingungen beziehen sich auf die Kräftepaare. Dieselben liefern 3 Gleichungen, in denen die Druckkräfte selbst, nicht ihre Differentialquotienten, vorkommen, weil bei den Drehungsmomenten die Grössen beträchtlichster Ordnung sich nicht, wie es bei den Componentensummen der Fall war, gegenseitig fortheben. Als derjenige Punkt, von dem aus die Hebelarme gerechnet werden (der bekanntlich beliebig ist), werde der Mittelpunkt des betrachteten kleinen Parallelepipeds genommen. Um zunächst das Moment für diejenige Drehung, deren Achse der z-Achse parallel ist, zu bilden, zieht man durch den Mittelpunkt des Parallelepipeds eine Gerade QQ' parallel der z-Achse. Dann ergiebt sich das erwähnte Drehungsmoment, wenn jede zur x- oder y-Achse parallele Componente mit dem lothrechten Abstand ihrer Richtung von der Geraden QQ' multiplicirt, und sämmtliche Produkte unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Drehungsrichtung addirt werden. Man fixire wiederum auf den zur x-Achse senkrechten Seitenflächen des Parallelepipeds zwei Punkte K_i und K_i', deren anfängliche Coordinaten $x, y + \mathfrak{b}_i, z + \mathfrak{c}_i$, bezüglich $x + a, y + \mathfrak{b}_i, z + \mathfrak{c}_i$ sind, und grenze um dieselben zwei congruente Flächenelemente ω_i und ω_i' ab. Die Kräfte X_x, Y_x, welche bei ω_i' auf das Parallelepiped wirken, unterscheiden sich in ihrem absoluten Werthe von den bei ω_i wirkenden nur um Grössen höherer Ordnung, haben jedoch die entgegengesetzte Richtung. Es ist leicht zu sehen, dass die Normalkräfte X_x auf das betrachtete Drehungsmoment keinen Einfluss haben. Der lothrechte Abstand der Verbindungslinie $K_i K_i'$ von der Geraden QQ' ist Hebelarm sowohl für die bei K_i als die bei K_i' auftretende Kraft X_x, und da diese Kräfte einander gleich und entgegengesetzt sind, wenn von Grössen höherer Ordnung abgesehen wird, so heben ihre Drehungsmomente sich gegenseitig auf. Von den Tangentialkräften Y_x hat dagegen die bei K_i' wirkende einen Hebelarm, der in entgegengesetztem Sinne gemessen wird, als der Hebelarm für die Kraft Y_x bei K_i; und da die Kräfte selbst eine entgegengesetzte Richtung haben, so wirken ihre Drehungsmomente in gleichem Sinne. Die zwei Tangentialkräfte bei K_i und K_i' bilden ein Kräftepaar, dessen Moment gleich $\alpha\,\omega_i\,Y_x$ ist, da die Grösse der Kräfte durch $\pm\,\omega_i\,Y_x$, und der lothrechte Abstand ihrer Richtungen von einander durch α angegeben wird. Indem man über die beiden zur x-Achse senkrechten Seitenflächen summirt, wobei $\Sigma\omega_i$ gleich $\beta\gamma$ zu nehmen ist, gelangt man zu dem Resultat, dass diese Flächen zu dem Moment der in Rede stehenden Drehung den Beitrag

$$\alpha\beta\gamma\;Y_x$$

liefern.

Behandelt man ebenso die Flächen des Parallepipeds, die zur y-Achse senkrecht sind, so heben sich die Normalkräfte $\pm\,Y_y$ gegenseitig auf, und das von den Tangentialkräften X_y herrührende Moment hat den Werth $\alpha\beta\gamma X_y$. Indessen sind die Drehungsrichtungen dieses und des oben behandelten Kräftepaars einander entgegengesetzt, so dass einer der Ausdrücke $\alpha\beta\gamma Y_x$ und $\alpha\beta\gamma X_y$ mit -1 multiplicirt werden muss. Man rechne in der xy-Ebene diejenige Drehungsrichtung als die positive, bei welcher die positive x-Achse durch eine Drehung von 90^0 in die positive y-Achse fällt. Dann wird, falls die Kräfte Y_x und X_y positiv sind, durch erstere eine Drehung im positiven, durch letztere eine Drehung im negativen Sinne erstrebt. Die Momentensumme enthält daher die Terme $+\alpha\beta\gamma Y_x$ und $-\alpha\beta\gamma X_y$. Es ist ferner zu bemerken, dass die Kräfte, welche an den zur z-Achse senkrechten Seitenflächen des Parallelepipeds wirken, ohne Einfluss auf eine Drehung sind, deren Achse der z-Achse parallel ist; die zugehörigen Momente heben sich gegenseitig auf, da man an je zwei gegenüberliegenden Punkten entgegengesetzte Kräfte mit gleichen und gleichgerichteten Hebelarmen zu multipliciren hat. Endlich fallen die der Masse proportionalen Kräfte bei dieser Rechnung, wo α, β, γ beliebig klein gewählt werden können, ebenfalls fort. Denn die Momente, die von den Massenkräften herrühren, sind in Bezug auf die Grössen α, β, γ von der 4. Ordnung, also von höherer Ordnung als die Momente der Druckkräfte, so dass sie neben letzteren nicht in Betracht kommen. Da sich auf diese Weise das schliessliche Moment

$$\alpha\beta\gamma\,(Y_x - X_y)$$

ergeben hat, so liefert die erste der auf die Drehung bezüglichen Gleichgewichtsbedingungen die Gleichung

$$X_y = Y_x.$$

Die Betrachtung der Momente derjenigen Drehungen, deren Achse der x- und der y-Achse parallel ist, führt analog zu der Identität je zweier der übrigen 4 Tangentialkräfte, und man erhält somit das Gleichungssystem

$$(4.)\quad Y_z = Z_y,\; Z_x = X_z,\; X_y = Y_x.$$

Man beachte, dass im Fall der Bewegung die Gleichungen (4.) ebenfalls erfüllt sind. Denn die Kräfte, die man nach dem d'Alembert'schen Princip hinzuzufügen hat, gehören in die Ordnung der zur Masse proportionalen Kräfte, welche zu den Drehungsmomenten des kleinen Parallelepipeds überhaupt nur einen zu vernachlässigenden Beitrag liefern.

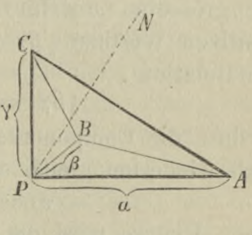
IV. Die Bedingungen für die Oberfläche.

Zu den Gleichungen (3.) und (4.), welche für jeden Punkt im Innern des Körpers gelten, treten weitere Gleichungen, welche sich auf die Oberfläche des Körpers beziehen. Die an irgend einem Oberflächenelement

$d\Omega$ angreifenden äusseren Druckkräfte vereinigt man in eine Resultante, und zerlegt letztere in ihre der x-, y-, z-Achse parallelen Componenten, die durch $Xd\Omega$, $Yd\Omega$, $Zd\Omega$ bezeichnet werden mögen. Die Grössen X, Y, Z sind Functionen derjenigen Coordinaten, welche die einzelnen Punkte der Oberfläche von einander unterscheiden. In dem betrachteten Körper sei P ein Punkt, der in unmittelbarer Nähe der Oberfläche liegt. Man führe von P aus eine Parallele zur x-Achse, welche die Oberfläche im Punkt A treffen möge, und bezeichne die Länge der kleinen Strecke PA durch α. Ebenso zieht man die kleinen Linien PB, PC, deren Länge β, γ sei, parallel der y- und der z-Achse bis zur Oberfläche. Das Oberflächenelement, welches die Punkte A, B, C enthält, ist wegen der unbegrenzten Kleinheit von α, β, γ als eben anzusehen; das Dreieck ABC, dessen Flächeninhalt man durch τ bezeichnet, bildet dann die Grundfläche einer kleinen dreiseitigen Pyramide, als deren Spitze man den Punkt P nimmt. Die nach aussen gerichtete und durch P gehende Normale PN der Oberfläche bilde mit den positiven Coordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν, welche zunächst als spitz vorausgesetzt werden sollen. Dann bestehen, da die 3 Seitenflächen der Pyramide die Projectionen der Basis sind, und die Neigungswinkel der Ebenen durch die Winkel zwischen ihren Normalen gemessen werden, die Beziehungen

$$\begin{aligned}\triangle PBC &= \tfrac{1}{2}\beta\gamma = \tau\cos\lambda,\\ \triangle PCA &= \tfrac{1}{2}\gamma\alpha = \tau\cos\mu,\\ \triangle PAB &= \tfrac{1}{2}\alpha\beta = \tau\cos\nu.\end{aligned}$$

Fig. 3.



Die Kräfte, die nach eingetretener Deformation auf die kleine Pyramide wirken, müssen einander das Gleichgewicht halten; es sollen die drei Bedingungen, die sich auf die Componentensummen beziehen, aufgestellt werden. Die Basis τ wird von den Componenten τX, τY, τZ angegriffen. Auf die Seitenfläche PBC, die zur x-Achse senkrecht steht, wirken die Druckkräfte

$$-\tfrac{1}{2}\beta\gamma X_x, \quad -\tfrac{1}{2}\beta\gamma Y_x, \quad -\tfrac{1}{2}\beta\gamma Z_x.$$

Denn die Werthe $-X_x$, $-Y_x$, $-Z_x$ stellen die Einwirkung der Seite der kleineren Coordinaten auf die Seite der grösseren Coordinaten dar, und da der Winkel λ als spitz vorausgesetzt ist, so liegt die kleine Pyramide von der Ebene PBC aus auf der Seite der grösseren x. In analoger Weise ergeben sich für die Druckkräfte, welche auf die Seitenflächen PCA und PAB der Pyramide wirken, die Ausdrücke:

$$-\tfrac{1}{2}\gamma\alpha X_y, \quad -\tfrac{1}{2}\gamma\alpha Y_y, \quad -\tfrac{1}{2}\gamma\alpha Z_y,$$
$$-\tfrac{1}{2}\alpha\beta X_z, \quad -\tfrac{1}{2}\alpha\beta Y_z, \quad -\tfrac{1}{2}\alpha\beta Z_z.$$

Die der Masse proportionalen Kräfte sind hier zu vernachlässigen, da sie von der 3. Ordnung in Bezug auf α, β, γ sind, die Gleichgewichtsbedingungen aber zu Beziehungen zwischen Grössen der 2. Ordnung führen. Indem man die Summen der Componenten parallel der x-, y-, z-Achse gleich Null setzt, erhält man die Gleichungen:

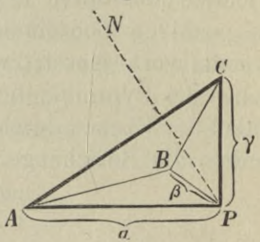
$$\tau X - \tfrac{1}{2}\beta\gamma X_x - \tfrac{1}{2}\gamma\alpha X_y - \tfrac{1}{2}\alpha\beta X_z = 0,$$
$$\tau Y - \tfrac{1}{2}\beta\gamma Y_x - \tfrac{1}{2}\gamma\alpha Y_y - \tfrac{1}{2}\alpha\beta Y_z = 0,$$
$$\tau Z - \tfrac{1}{2}\beta\gamma Z_x - \tfrac{1}{2}\gamma\alpha Z_y - \tfrac{1}{2}\alpha\beta Z_z = 0,$$

oder, nachdem man für die kleinen Flächen $\frac{1}{2}\beta\gamma$, $\frac{1}{2}\gamma\alpha$, $\frac{1}{2}\alpha\beta$ ihre Werthe $\tau\cos\lambda$, $\tau\cos\mu$, $\tau\cos\nu$ eingesetzt und durch τ dividirt hat, die folgenden

$$(5.)\quad \begin{cases} X_x\cos\lambda + X_y\cos\mu + X_z\cos\nu = X, \\ Y_x\cos\lambda + Y_y\cos\mu + Y_z\cos\nu = Y, \\ Z_x\cos\lambda + Z_y\cos\mu + Z_z\cos\nu = Z, \end{cases}$$

welche die gesuchten Oberflächenbedingungen darstellen.

Fig. 4.



In der obigen Rechnung wurde vorausgesetzt, das λ, μ, ν spitze Winkel seien; indessen gelten die Gleichungen (5.) allgemein. Setzt man den Fall, dass der Winkel λ, den die nach aussen gerichtete Normale mit der positiven x-Achse bildet, stumpf sei, so ist die zur x-Achse senkrechte Seitenfläche PBC den Druckkräften

$$+\tfrac{1}{2}\beta\gamma X_x,\ +\tfrac{1}{2}\beta\gamma Y_x,\ +\tfrac{1}{2}\beta\gamma Z_x$$

unterworfen, da die Pyramide alsdann die Einwirkungen der Seite der grösseren x erfährt. Gleichzeitig ergiebt sich aber zwischen den positiven Werthen $\frac{1}{2}\beta\gamma$ und τ, welche die Grösse der Flächen messen, die Relation

$$\tfrac{1}{2}\beta\gamma = \tau\cos(180^0 - \lambda) = -\tau\cos\lambda,$$

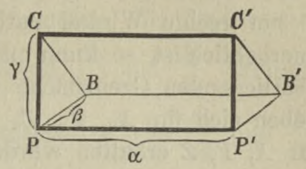
so dass die Componenten, die an der genannten Seitenfläche auftreten, doch wiederum gleich den Ausdrücken

$$-\tau\cos\lambda X_x,\ -\tau\cos\mu Y_x,\ -\tau\cos\nu Z_x$$

sind. Ebenso wird der Fall behandelt, dass μ oder ν stumpf ist.

Wenn endlich einer der Winkel, z. B. λ, ein rechter ist, so hat man nicht eine kleine Pyramide, sondern ein kleines dreiseitiges Prisma zu betrachten. Für $\lambda = 90^0$ ist das Oberflächenelement parallel zur x-Achse. Man ziehe nun innerhalb des Körpers, jedoch in unmittelbarer Nähe des betreffenden Oberflächenelements, eine Parallele PP' zur x-Achse und lege durch P und P' die bis zur Oberfläche gehenden Geraden PB und $P'B'$ parallel der y-Achse, sowie PC und $P'C'$ parallel der z-Achse. Die Länge PP' werde durch α, PB durch β, PC durch γ bezeichnet. Das dreiseitige Prisma, welches durch die congruenten rechtwinkligen Dreiecke PBC und $P'B'C'$ begrenzt ist, wird an den letztgenannten Endflächen durch Kräfte in Anspruch genommen, welche sich, bis auf Grössen höherer Ordnung, gegenseitig aufheben, da sie einander gleich und entgegengerichtet sind. Die rechteckförmigen Seitenflächen $BPP'B'$ und $CPP'C'$ sind die Projectionen der Fläche $BB'C'C$, welche zur Oberfläche des Körpers gehört, und es wiederholen sich in Betreff dieser 3 Flächen die Schlussfolgerungen, die im Vorhergehenden für die Seitenflächen der kleinen Pyramide erhalten wurden. Man gelangt hierdurch, wie leicht zu sehen, zu dem Resultat, dass die Gleichungen (5.) auch in dem Fall $\cos\lambda = 0$ erfüllt sein müssen, und analog kann man verfahren, wenn zwei der Winkel λ, μ, ν Rechte sind.

Fig. 5.



Somit ist bewiesen, dass die Gleichungen (5.) für jeden Punkt der Oberfläche des Körpers gelten. Dieselben behalten ihre Gültigkeit auch für den Fall der Bewegung, da in der obigen Entwicklung die der Masse proportionalen Kräfte ohne Einfluss geblieben sind.

V. Die Druckkräfte an beliebig gerichteten Flächenelementen.

Legt man durch einen Punkt m im Innern des Körpers ein Flächenelement τ, so hängt die Druckkraft, die bei τ auftritt, einerseits von der Lage des Punktes m, andererseits von der Neigung des kleinen Flächenstücks τ gegen die Coordinatenebenen ab. Bisher wurden nur die Fälle betrachtet, wo die Fläche τ einer der Coordinatenebenen parallel ist, und daher die Componenten der zugehörigen Druckkraft durch X_x, Y_x etc. angegeben werden. Es sei mn der eine Zweig der Normale, welche zu dem Flächenelement τ von m aus gezogen wird. Die Winkel, welche mn mit den positiven Coordinatenachsen bildet, mögen λ, μ, ν heissen. Man bezeichnet ferner die Druckkraft, die auf τ wirkt, reducirt auf die Flächeneinheit, durch R_n, die Componenten derselben parallel der x-, y-, z-Achse durch X_n, Y_n, Z_n; und zwar möge R_n die Einwirkung derjenigen Seite, innerhalb welcher der Normalenzweig mn liegt, auf die gegenüberliegende Seite ausdrücken. Die Grösse und Richtung der Kraft R_n ergiebt sich aus den zum Punkt m gehörigen Werthen X_x, Y_x, .. Z_z mittelst einer Rechnung, welche dem Beweise der Gleichungen (5.) völlig analog ist. Man nehme auf der Verlängerung der Linie mn, jedoch in unmittelbarer Nähe von m, einen Punkt P an, und ziehe von P aus parallel den drei Coordinatenachsen die drei kleinen Linien α, β, γ bis zum Flächenstück τ. Hierdurch wird wieder eine kleine dreiseitige Pyramide gebildet, deren eine Ecke P nur rechte Winkel enthält. Da die Form des Flächenelements τ unerheblich ist, so kann man, wie in IV, τ mit der dem Punkt P gegenüberliegenden Grenzfläche der Pyramide identisch nehmen. Dann ergeben sich für X_n, Y_n, Z_n genau dieselben Gleichungen, welche in IV für X, Y, Z erhalten wurden, nämlich

$$(6.)\quad \begin{cases} X_n = X_x \cos\lambda + X_y \cos\mu + X_z \cos\nu, \\ Y_n = Y_x \cos\lambda + Y_y \cos\mu + Y_z \cos\nu, \\ Z_n = Z_x \cos\lambda + Z_y \cos\mu + Z_z \cos\nu. \end{cases}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass wenn die 9 Componenten $X_x, X_y, .. Z_z$ für einen Punkt m bekannt sind, hierdurch auch sämmtliche Druckkräfte, welche bei den durch m gelegten Flächenelementen auftreten können, gegeben sind.

Denkt man sich das durch m gehende Flächenstück τ in alle möglichen verschiedenen Lagen gebracht und die zugehörige Druckkraft jedesmal in Grösse und Richtung durch eine von m ausgehende Linie dargestellt, so haben die Endpunkte dieser Linien als geometrischen Ort ein Ellipsoid, welches das Elasticitätsellipsoid des Punktes m genannt wird. Welche Druckkraft zu einem bestimmten Flächenelement gehört, kann auf geometrischem Wege mit Hülfe einer anderen Fläche zweiten Grades angegeben werden. Indessen wird hier auf die Entwicklung der erwähnten Lehrsätze verzichtet, da diese Einleitung auf die Herstellung der Differentialgleichungen selbst beschränkt werden soll. Die Kräfte, welche in die Hauptachsen des Ellipsoids fallen, stehen zu den Flächenelementen senkrecht, auf die sie wirken. Die grösste und die kleinste Druckkraft, die bei m vorkommt, ergiebt sich aus der grössten und kleinsten Halbachse des Ellipsoids.

VI. Die Differentialgleichungen für isotrope Körper.

Im Vorhergehenden wurde entwickelt, dass die kleine Formveränderung, die in der Umgebung eines beliebigen Punktes m statt findet, durch die ersten Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach x, y, z angegeben wird. Da es sich nun darum handelt, die Beziehungen festzustellen, welche zwischen der Deformation und den bei m auftretenden Druckkräften $X_x, X_y .. Z_z$ bestehen, so hat man letztere Kräfte als Functionen der genannten Differentialquotienten auszudrücken. Man schliesst zunächst aus der Erfahrung, dass diese Functionen lineare sind. Die Beobachtung zeigt, dass die Formveränderung, so lange sie unterhalb einer gewissen Grenze bleibt, den wirkenden Kräften direkt proportional ist. Die Ausdehnung, Zusammendrückung, Gleitung, Torsion, die man an irgend einem Theil des betrachteten Körpers wahrnimmt, verdoppelt sich, wenn die wirkenden Kräfte verdoppelt werden. In den linearen Functionen müssen ferner die Coefficienten von $\frac{d\eta}{dz}$ und $\frac{d\zeta}{dy}$ einander gleich sein, ebenso die von $\frac{d\zeta}{dx}$ und $\frac{d\xi}{dz}$, respective von $\frac{d\xi}{dy}$ und $\frac{d\eta}{dx}$. Denn an einem Punkte, wo die 6 Werthe

$$\frac{d\xi}{dx},\ \frac{d\eta}{dy},\ \frac{d\zeta}{dz},\ \frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy},\ \frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz},\ \frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}$$

verschwinden, sind, wie in I. erörtert wurde, auch alle elastischen Kräfte gleich Null, da dort überhaupt keine Deformation stattfindet. Man kann also für die inneren Druckkräfte die Gleichungen aufstellen

$$\begin{aligned}
X_x &= \mathfrak{A}_1 \frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{B}_1 \frac{d\eta}{dy} + \mathfrak{C}_1 \frac{d\zeta}{dz} \\
&\quad + \mathfrak{D}_1\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right) + \mathfrak{E}_1\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right) + \mathfrak{F}_1\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right), \\
Y_y &= \mathfrak{A}_2 \frac{d\xi}{dx} + \dots\dots + \mathfrak{F}_2\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right), \\
Z_z &= \mathfrak{A}_3 \frac{d\xi}{dx} + \dots\dots + \mathfrak{F}_3\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right), \\
Y_z = Z_y &= \mathfrak{A}_4 \frac{d\xi}{dx} + \dots + \mathfrak{F}_4\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right), \\
Z_x = X_z &= \mathfrak{A}_5 \frac{d\xi}{dx} + \dots + \mathfrak{F}_5\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right), \\
X_y = Y_x &= \mathfrak{A}_6 \frac{d\xi}{dx} + \dots + \mathfrak{F}_6\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right),
\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ .. $\mathfrak{F}_6$ constante Grössen bedeuten.

Es soll nun die Bedingung, dass der Körper ein isotroper sei, eingeführt werden, wodurch die letzteren Gleichungen in sehr viel einfachere übergehen. Im Fall der Isotropie darf keine Richtung innerhalb des Körpers vor der anderen bevorzugt sein. Die 36 Constanten, die in den obigen Ausdrücken der Kräfte vorkommen, reduciren sich dann auf 2. Man behandelt zuerst die Normalkräfte X_x, Y_y, Z_z.

In der Definition der Normalkraft X_x ist nur die Kenntniss der Richtung der positiven x-Achse vorausgesetzt, da hierdurch sowohl die Richtung der Componente, als auch die Lage des Flächenelements, auf das sie sich bezieht, bestimmt ist. Folglich darf die Vertauschung der y- und z-Achse den Ausdruck von X_x nicht ändern. Dies zeigt aber, dass $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{F}_1$ sein muss. Die Erwägung, dass die Vertauschung des positiven und des negativen Zweiges der y-Achse auf X_x

keinen Einfluss haben kann, liefert den weiteren Schluss, dass nach Anwendung der Substitution

$$y = -y', \ \eta = -\eta'$$

die Grösse X_x dieselbe Function von y', η' sein muss, als sie von y, η war, d. h.

$$X_x = \mathfrak{A}_1 \frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{B}_1 \frac{d\eta'}{dy'} + \mathfrak{C}_1 \frac{d\zeta}{dz}$$
$$+ \mathfrak{D}_1 \left(\frac{d\eta'}{dz} + \frac{d\zeta}{dy'}\right) + \mathfrak{E}_1 \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) + \mathfrak{F}_1 \left(\frac{d\xi}{dy'} + \frac{d\eta'}{dx}\right).$$

Aber da die Substitution die Beziehungen

$$\frac{d\eta}{dy} = \frac{d\eta'}{dy'}, \ \frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy} = -\left(\frac{d\eta'}{dz} + \frac{d\zeta}{dy'}\right), \ \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = -\left(\frac{d\xi}{dy'} + \frac{d\eta'}{dx}\right)$$

liefert, so geht der zuerst erwähnte Ausdruck von X_x in den folgenden über:

$$X_x = \mathfrak{A}_1 \frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{B}_1 \frac{d\eta'}{dy'} + \mathfrak{C}_1 \frac{d\zeta}{dz}$$
$$- \mathfrak{D}_1 \left(\frac{d\eta'}{dz} + \frac{d\zeta}{dy'}\right) + \mathfrak{E}_1 \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right) - \mathfrak{F}_1 \left(\frac{d\xi}{dy'} + \frac{d\eta'}{dx}\right).$$

Die Vergleichung der zwei Formeln für X_x, welche beide für beliebige Verrückungen Gültigkeit haben, beweist, dass für den isotropen Körper $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{F}_1 = 0$ ist. In analoger Weise führt die Substitution $z = -z'$, $\zeta = -\zeta'$ zu der Gleichung $\mathfrak{E}_1 = 0$. Indem man ferner berücksichtigt, dass die x-Achse in keiner Weise vor der y- oder z-Achse ausgezeichnet sein soll, erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{C}_3, \\ &\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_3, \\ &\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_3 = 0, \\ &\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_3 = 0, \\ &\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_3 = 0. \end{aligned}$$

Die Substitution $x = -x'$, $\xi = -\xi'$ lässt, da $\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\xi'}{dx'}$ ist, die Form von X_x ungeändert. In der That wird durch Vertauschung des positiven und des negativen Zweiges der x-Achse zwar die Richtung, in welcher die Componente positiv gerechnet wird, in die entgegengesetzte verwandelt; aber da die Seite der grösseren x gleichzeitig in die Seite der kleineren x' übergeht, so wird der Zeichenwechsel wieder aufgehoben und für die Druckkraft der frühere Ausdruck in den neuen Coordinaten erhalten. Auf die Normalkräfte hat hiernach die Vertauschung des positiven und des negativen Zweiges einer Coordinatenachse niemals einen Einfluss.

Von den Tangentialkräften Y_z, Z_x, X_y ändern dagegen bei einer solchen Vertauschung stets je zwei ihr Vorzeichen. Man setze $y = -y'$,

$\eta = -\eta'$ und bezeichne durch Y'_z die der y'-Achse parallele Componente, welche an dem zur z-Achse senkrechten Flächenelement auftritt. Dann ist $Y'_z = -Y_z$, und analog $Y'_x = -Y_x$; denn nur die Richtung, in welcher die Componente positiv zu rechnen ist, hat sich geändert, während bei dem Flächenelement die Seite der grösseren, respective kleineren Coordinaten dieselbe geblieben ist. Nach Einführung von y', η' hat man für Y'_z die Gleichung

$$Y'_z = -Y_z = -\mathfrak{A}_4\frac{d\xi}{dx} - \mathfrak{B}_4\frac{d\eta'}{dy'} - \mathfrak{C}_4\frac{d\zeta}{dz}$$
$$+\mathfrak{D}_4\left(\frac{d\eta'}{dz}+\frac{d\zeta}{dy'}\right) - \mathfrak{E}_4\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right) + \mathfrak{F}_4\left(\frac{d\xi}{dy'}+\frac{d\eta'}{dx}\right).$$

Da aber wegen der vorausgesetzten Symmetrie Y'_z dieselbe Function von x, y', z, ξ, η', ζ sein muss, welche Y_z von x, y, z, ξ, η, ζ ist, also zweitens auch die Gleichung

$$Y'_z = \mathfrak{A}_4\frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{B}_4\frac{d\eta'}{dy'} + \mathfrak{C}_4\frac{d\zeta}{dz}$$
$$+\mathfrak{D}_4\left(\frac{d\eta'}{dz}+\frac{d\zeta}{dy'}\right) + \mathfrak{E}_4\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right) + \mathfrak{F}_4\left(\frac{d\xi}{dy'}+\frac{d\eta'}{dx}\right)$$

für beliebige Werthe der Verschiebungen besteht, so muss

$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{B}_4 = \mathfrak{C}_4 = \mathfrak{E}_4 = 0$$

sein. Nach derselben Methode zeigt man, dass $\mathfrak{F}_4 = 0$ ist. Denn wenn y, η beibehalten, aber $z = -z'$, $\zeta = -\zeta'$ gesetzt werden, so wechselt die oben betrachtete Tangentialkraft wiederum das Zeichen, während der Summandus $\mathfrak{F}_4\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right)$ sich nicht ändert; dies führt zu der Gleichung $\mathfrak{F}_4 = 0$. — Die Schlüsse, welche in Bezug auf die Componente Y_z gezogen worden sind, übertragen sich auf die analogen Constanten der übrigen Tangentialkräfte, da der Körper nach den 3 Coordinatenachsen ein genau gleiches Verhalten zeigen soll. Man erhält hiernach das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_6 = 0,\\
&\mathfrak{B}_4 = \mathfrak{B}_5 = \mathfrak{B}_6 = 0,\\
&\mathfrak{C}_4 = \mathfrak{C}_5 = \mathfrak{C}_6 = 0,\\
&\mathfrak{D}_4 = \mathfrak{E}_5 = \mathfrak{F}_6,\\
&\mathfrak{E}_4 = \mathfrak{F}_4 = \mathfrak{D}_5 = \mathfrak{F}_5 = \mathfrak{D}_6 = \mathfrak{E}_6 = 0.
\end{aligned}$$

Der gemeinsame Werth der Coefficienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_3$ soll durch a, der Werth von $\mathfrak{D}_4$, $\mathfrak{E}_5$, $\mathfrak{F}_6$ durch b bezeichnet werden. Dann bestehen, den bisherigen Betrachtungen zufolge, für die Druckkräfte die Formeln:

$$X_x = a\,\frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{B}_1\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right),$$

$$Y_y = a\,\frac{d\eta}{dy} + \mathfrak{B}_1\left(\frac{d\zeta}{dz}+\frac{d\xi}{dx}\right),$$

$$Z_z = a\frac{d\zeta}{dz} + \mathfrak{B}_1\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right),$$

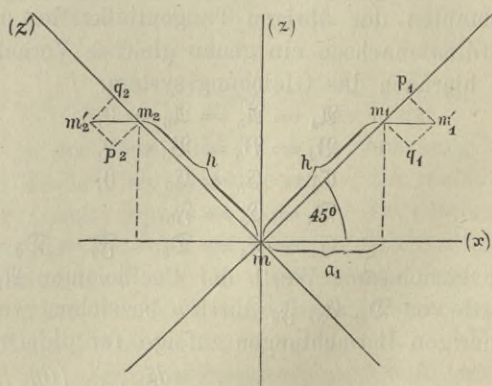
$$Y_z = Z_y = b\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$

$$Z_x = X_z = b\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right),$$

$$X_y = Y_x = b\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Diese Gleichungen enthalten die drei Constanten a, b, $\mathfrak{B}_1$. Indessen sind letztere noch durch eine Relation mit einander verbunden, und man kann daher $\mathfrak{B}_1$ durch a und b ausdrücken. Um die Relation herzustellen, soll zunächst eine Rechnung ausgeführt werden, die sich auf eine einfache Coordinatenverwandlung bezieht. Man denke sich, während die y-Achse beibehalten wird, die x- und z-Achse um 45^0 in der Drehungsrichtung, die von der positiven x-Achse zur positiven z-Achse fortschreitet, gedreht, und bezeichne die neuen Coordinatenachsen als die x'- und z'-Achse. Zu den alten und neuen Coordinatenachsen ziehe man vom beliebigen Punkt m aus Parallelen, und trage auf den Parallelen zur positiven x'- und z'-Achse die Strecken mm_1 und mm_2 von der Länge h ab. Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass die Umgebung von m eine Deformation erleidet, bei welcher allein $\frac{d\xi}{dx}$ von Null verschieden, die anderen 8 Differentialquotienten gleich Null sind. Man fragt nach den Ausweichungen, welche die Punkte m_1 und m_2 bei dieser Annahme parallel den neuen Coordinatenachsen machen. Der gegebene Werth von $\frac{d\xi}{dx}$ werde durch ε bezeichnet. Nennt man (wie in I) $\mathfrak{a}_i$ die anfängliche relative, der x-Achse parallele Coordinate des Theilchens m_i in Bezug auf m, so erfährt m_i die relative Verrückung $\varepsilon\mathfrak{a}_i$ in der Richtung der x-Achse.

Fig. 6.

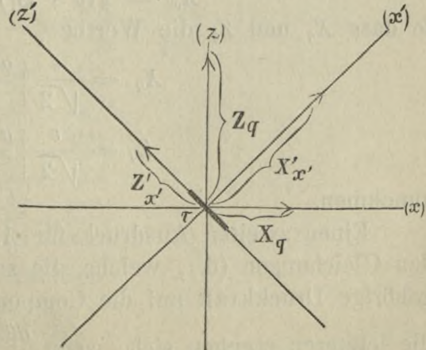


Für m_1, m_2 hat man $\mathfrak{a}_1 = \frac{h}{\sqrt{2}}$, $\mathfrak{a}_2 = -\frac{h}{\sqrt{2}}$. Daher macht m_1 eine Ausweichung $m_1 m_1' = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{2}}$ in der Richtung der positiven, m_2 eine gleich grosse Ausweichung $m_2 m_2'$ in der Richtung der negativen x-Achse. Bei der Projection der Längen $m_1 m_1'$ und $m_2 m_2'$ auf die Richtungen der x'- und z'-Achse hat man wiederum den Factor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ hinzuzufügen, so dass 4 Strecken $m_1 p_1$, $m_1 q_1$, $m_2 p_2$, $m_2 q_2$ von der Länge $\frac{h\varepsilon}{2}$ erhalten werden. Nennt man ferner ξ', ζ' die Verschiebungen, welche das Theilchen m parallel der x'- und z'-Achse erfährt, so kann man auch die Differentialquotienten $\frac{d\xi'}{dx'}, \frac{d\xi'}{dz'}, \frac{d\zeta'}{dx'}, \frac{d\zeta'}{dz'}$ zum Ausdruck der bei m_1 und m_2 stattfindenden Bewegung anwenden. Die relativen Verschiebungen des Theilchens m_1 parallel der x'- und z'-Achse werden dann durch die Producte $\frac{d\xi'}{dx'}h$, $\frac{d\zeta'}{dx'}h$, und die des Theilchens m_2 durch $\frac{d\xi'}{dz'}h$, $\frac{d\zeta'}{dz'}h$ angegeben. Die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den obigen Projectionen liefert die Werthe von $\frac{d\xi'}{dx'}, \frac{d\xi'}{dz'}, \frac{d\zeta'}{dx'}, \frac{d\zeta'}{dz'}$. Indem man berücksichtigt, dass die Verschiebungen $m_1 p_1$ und $m_2 q_2$ ein positives, $m_1 q_1$ und $m_2 p_2$ ein negatives Vorzeichen haben, erhält man, nach Fortlassung des gemeinsamen Factors h, die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{d\xi'}{dx'} = \frac{\varepsilon}{2}, & \frac{d\zeta'}{dx'} = -\frac{\varepsilon}{2}, \\ \frac{d\xi'}{dz'} = -\frac{\varepsilon}{2}, & \frac{d\zeta'}{dz'} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Die gesuchte Relation zwischen den Constanten a, b, $\mathfrak{B}_1$ wird nun dadurch ermittelt, dass man für gewisse Druckkräfte doppelte Ausdrücke erhält, wenn man zwei verschiedene Wege für die Ableitung derselben einschlägt. Man lege durch den Punkt m ein Flächenelement τ, das zur x'-Achse senkrecht steht, und bezeichne die auf τ wirkende Druckkraft durch τQ. Die Componenten von Q parallel der x-, y-, z-Achse mögen X_q, Y_q, Z_q heissen. Man zerlegt die Kraft Q ausserdem nach den neuen Coordinatenachsen; es seien $X'_{x'}$, $Z'_{x'}$ ihre der x'-

Fig. 7.



und z'-Achse parallelen Componenten. Dann können X_q, Z_q (Y_q hat hier den Werth 0) einerseits durch $X'_{x'}$, $Z'_{x'}$ ausgedrückt, andererseits nach V. berechnet werden. Man erhält X_q, wenn man $X_{x'}$ und $Z'_{x'}$ auf die Richtung der positiven x-Achse projicirt und die Projectionen addirt; das Analoge gilt von Z_q. Auf diese Weise entstehen die Gleichungen

$$X_q = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(X'_{x'} - Z'_{x'}\Big),$$

$$Z_q = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(X'_{x'} + Z'_{x'}\Big),$$

da die x'-Achse einen Winkel von 45^0 mit der x- und der z-Achse bildet. Die Grössen $X'_{x'}$ und $Z'_{x'}$ sind aber bekannt. Denn für diese Componenten gelten, wenn man die neuen Coordinaten anwendet, genau dieselben Formeln, welche für X_x, Z_x entwickelt wurden, da wegen der Isotropie des Körpers das eine Coordinatenkreuz nicht vor dem anderen bevorzugt sein kann. Indem man also in den oben erhaltenen Gleichungen die Werthe

$$X_x,\ Z_x,\ x,\ z,\ \xi,\ \zeta$$

durch

$$X'_{x'},\ Z'_{x'},\ x',\ z',\ \xi',\ \zeta'$$

ersetzt, ergiebt sich:

$$X'_{x'} = a\frac{d\xi'}{dx'} + \mathfrak{B}_1\left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz'}\right),$$

$$Z'_{x'} = b\left(\frac{d\zeta'}{dx'} + \frac{d\xi'}{dz'}\right).$$

Im vorliegenden speciellen Falle, wo

$$\eta = 0,\quad \frac{d\xi'}{dx'} = \frac{d\zeta'}{dz'} = \frac{\varepsilon}{2},\quad \frac{d\xi'}{dz'} = \frac{d\zeta'}{dx'} = -\frac{\varepsilon}{2}$$

sein soll, ist folglich

$$X'_{x'} = \tfrac{1}{2}(a + \mathfrak{B}_1)\,\varepsilon,\quad Z'_{x'} = -b\varepsilon,$$

so dass X_q und Z_q die Werthe

$$X_q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left\{\frac{a+\mathfrak{B}_1}{2} + b\right\},$$

$$Z_q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left\{\frac{a+\mathfrak{B}_1}{2} - b\right\},$$

annehmen.

Einen zweiten Ausdruck für X_q, respective Z_q, gewinnt man aus den Gleichungen (6.), welche die zu einem beliebigen Flächenelement gehörige Druckkraft auf die Componenten X_x, X_y etc. reduciren. Für die letzteren ergeben sich, wenn $\frac{d\xi}{dx} = \varepsilon$, die übrigen Differentialquotienten gleich 0 gesetzt werden, aus den oben abgeleiteten Gleichungen die Werthe:

$$X_x = a\varepsilon,\ Y_y = Z_z = \mathfrak{B}_1\varepsilon,$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

In den Gleichungen (6.) sind, da die Normale von τ einen Winkel von 45^0 mit der x- und der z-Achse, einen Rechten mit der y-Achse bildet, $\cos\lambda = \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\mu = 0$ zu nehmen. Also haben diesen Gleichungen zufolge die Kräfte X_q und Z_q die Werthe

$$X_q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}a,\quad Z_q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\mathfrak{B}_1.$$

Weil nun letztere Ausdrücke mit den zuvor erhaltenen

$$X_q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left\{\frac{a+\mathfrak{B}_1}{2}+b\right\},$$
$$Z_q = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\left\{\frac{a+\mathfrak{B}_1}{2}-b\right\}$$

identisch sein müssen, so hat man das Resultat, dass bei dem isotropen Körper zwischen den Coefficienten a, b, $\mathfrak{B}_1$ die Gleichungen

$$\frac{a+\mathfrak{B}_1}{2}+b = a,\quad \frac{a+\mathfrak{B}_1}{2}-b = \mathfrak{B}_1$$

bestehen, welche auf die eine Relation

$$\mathfrak{B}_1 = a-2b$$

zurückkommen.

Nach Einsetzung dieses Werthes von $\mathfrak{B}_1$ ergeben sich für die inneren Druckkräfte des isotropen Körpers die schliesslichen Formeln:

$$(7.)\quad \left\{\begin{aligned}
X_x &= a\frac{d\xi}{dx}+(a-2b)\left(\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}\right),\\
Y_y &= a\frac{d\eta}{dy}+(a-2b)\left(\frac{d\zeta}{dz}+\frac{d\xi}{dx}\right),\\
Z_z &= a\frac{d\zeta}{dz}+(a-2b)\left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right),\\
Y_z &= Z_y = b\left(\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}\right),\\
Z_x &= X_z = b\left(\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}\right),\\
X_y &= Y_x = b\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}\right).
\end{aligned}\right.$$

Durch Einführung der kubischen Dilatation

$$\vartheta = \frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}$$

kann man den 3 ersten Gleichungen (7.) die Form

$$(8.)\quad \begin{cases} X_x = (a-2b)\,\vartheta + 2b\,\dfrac{d\xi}{dx}, \\ Y_y = (a-2b)\,\vartheta + 2b\,\dfrac{d\eta}{dy}, \\ Z_z = (a-2b)\,\vartheta + 2b\,\dfrac{d\zeta}{dz} \end{cases}$$

geben.

An die Ableitung der Gleichungen (7.) müsste bei einer ausführlicheren Darstellung dieser Theorie der Nachweis geschlossen werden — auf den hier indessen verzichtet wird, — dass sich für die Constanten a und b aus der Forderung der Isotropie keine weiteren Beschränkungen ergeben. Zu diesem Behufe zeigt man, dass bei einer beliebigen Drehung des rechtwinkligen Coordinatenkreuzes aus den Gleichungen (7.) genau entsprechende Ausdrücke für die neuen Coordinaten erhalten werden.*)

Die Substitution der Werthe (7.) in die Gleichungen (3.), welche als gültig für einen beliebigen inneren Punkt bewiesen wurden, liefert die gesuchten Differentialgleichungen, denen die Verschiebungen ξ, η, ζ im Fall des Gleichgewichts des isotropen Körpers genügen. Man erhält auf diese Weise

$$(9.)\quad \begin{cases} (a-b)\dfrac{d\vartheta}{dx} + b\left(\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + \dfrac{d^2\xi}{dy^2} + \dfrac{d^2\xi}{dz^2}\right) + DX_0 = 0, \\ (a-b)\dfrac{d\vartheta}{dy} + b\left(\dfrac{d^2\eta}{dx^2} + \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \dfrac{d^2\eta}{dz^2}\right) + DY_0 = 0, \\ (a-b)\dfrac{d\vartheta}{dz} + b\left(\dfrac{d^2\zeta}{dx^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dy^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dz^2}\right) + DZ_0 = 0, \end{cases}$$

wo ϑ die kubische Dilatation, D die anfängliche Dichtigkeit bedeuten, und X_0, Y_0, Z_0 die Componenten der gegebenen äusseren, proportional zur Masse wirkenden Kraft sind. Für den Fall der Bewegung hat man, wie in III. erwähnt wurde, die rechten Seiten von (9.) nicht gleich 0, sondern respective gleich $D\dfrac{d^2\xi}{dt^2}$, $D\dfrac{d^2\eta}{dt^2}$, $D\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}$ zu nehmen.

Man kann den Gleichungen (9.) noch eine andere Form geben,

---

*) Man vergleiche das bekannte Lehrbuch von Lamé „Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité“, Paris, 1852, woselbst, pag. 43—52, §§ 18—20, die obigen Formeln der Druckkräfte des isotropen Körpers mit Hilfe der allgemeinen Coordinaten-Verwandlung abgeleitet werden. In Betreff der Bezeichnung der Constanten ist zu bemerken, dass die Lamé'schen Werthe λ und μ zu den hier vorkommenden Constanten a und b in der Beziehung

$$a = \lambda + 2\mu, \quad b = \mu$$

stehen.

bei welcher die Grössen ξ, η, ζ nur in der kubischen Dilatation ϑ und in den Ausdrücken

$$\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}, \quad \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}, \quad \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$$

vorkommen. Man benutzt die Relation

$$\frac{d\vartheta}{dx} - \left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right)$$

und die zwei analogen, die durch cyclische Permutation entstehen, und erhält dann aus (9.) das Gleichungssystem:

$$(10.)\quad \begin{cases} a\dfrac{d\vartheta}{dx} - b\left\{\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{d\zeta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dz}\right) - \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\xi}{dy} - \dfrac{d\eta}{dx}\right)\right\} + DX_0 = 0, \\ a\dfrac{d\vartheta}{dy} - b\left\{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\xi}{dy} - \dfrac{d\eta}{dx}\right) - \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{d\eta}{dz} - \dfrac{d\zeta}{dy}\right)\right\} + DY_0 = 0, \\ a\dfrac{d\vartheta}{dz} - b\left\{\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\eta}{dz} - \dfrac{d\zeta}{dy}\right) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\zeta}{dx} - \dfrac{d\xi}{dz}\right)\right\} + DZ_0 = 0. \end{cases}$$

Die Differenzen $\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}$, $\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}$, $\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}$ geben, wie in I. erwähnt wurde, die Rotationen eines beliebigen kleinen Massencomplexes an.

Die Gleichungen (9.) bilden in Gemeinschaft mit den Gleichungen (5.), die für die Oberfläche gelten, und in die ebenfalls die Ausdrücke (7.) einzusetzen sind, ein System, welches die Unbekannten ξ, η, ζ bestimmt. Nur 6 Constanten, die in ξ, η, ζ vorkommen, bleiben willkürlich, weil dieselben sich nicht auf die Formveränderung des betrachteten Körpers, sondern auf seine Fortbewegung und Drehung im Raum, während er für starr gilt, beziehen. Denn einerseits bedeuten die Werthe

$$\xi = \mathfrak{a}_0, \; \eta = \mathfrak{b}_0, \; \zeta = \mathfrak{c}_0,$$

wenn $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$ constant sind, eine Fortrückung des unverändert bleibenden Körpers. Andererseits wurde in I. ausgeführt, dass die Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dy}$ und $\frac{d\eta}{dx}$, wenn ihre Summe gleich Null ist, keine Deformation ausdrücken, sondern nur eine kleine Drehung, welche um eine Parallele zur z-Achse erfolgt. Das Entsprechende gilt von $\frac{d\eta}{dz}$ und $\frac{d\zeta}{dy}$, respective von $\frac{d\zeta}{dx}$ und $\frac{d\xi}{dz}$. Nun haben die Ausdrücke

$$\eta = -\mathfrak{a}z, \; \zeta = \mathfrak{a}y,$$
$$\zeta = -\mathfrak{b}x, \; \xi = \mathfrak{b}z,$$
$$\xi = -\mathfrak{c}y, \; \eta = \mathfrak{c}x,$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Constante bedeuten, die Eigenschaft, dass sie für jeden Punkt des Körpers die Gleichungen

$$\frac{d\eta}{dz}+\frac{d\zeta}{dy}=\frac{d\zeta}{dx}+\frac{d\xi}{dz}=\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dx}=0,$$

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{d\eta}{dy}=\frac{d\zeta}{dz}=0$$

erfüllen; dieselben stellen daher überhaupt keine Deformation, sondern drei kleine Drehungen des starren Körpers um die x-, y-, z-Achse dar. Hieraus ergiebt sich, dass im Ganzen bei dem vorliegenden, auf die Formveränderung bezüglichen Problem folgende Summanden, die von willkürlichen Constanten abhängen und vorläufig unbestimmt bleiben, in ξ, η, ζ enthalten sind:

$$(11.)\quad \begin{cases} \xi=\mathfrak{a}_0+\mathfrak{b}z-\mathfrak{c}y, \\ \eta=\mathfrak{b}_0+\mathfrak{c}x-\mathfrak{a}z, \\ \zeta=\mathfrak{c}_0+\mathfrak{a}y-\mathfrak{b}x. \end{cases}$$

Um die 6 willkürlichen Constanten $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu bestimmen, hat man die erforderlichen Angaben über die Lage des festen Körpers im Raum hinzuzufügen.

Von den in (7.) und (8.) vorkommenden Constanten a und b hängen andere Constanten ab, welche für die verschiedenen Einzelprobleme wichtig werden. Es sind zunächst zwei Coefficienten zu erwähnen, welche bei dem Auszug eines prismatischen Stabes den Zuwachs der Länge und die Verkleinerung des Querschnitts messen. Wird ein Stab, dessen Achse der z-Achse parallel sein möge, an den zu letzterer senkrechten Endflächen durch eine constante, der z-Achse parallele Kraft P in Anspruch genommen, während im Uebrigen keine Kräfte wirken, so wird sowohl den Differentialgleichungen (9.) als den Oberflächenbedingungen durch Ausdrücke von der Form

$$\xi=-\frac{Px}{E_1},\ \eta=-\frac{Py}{E_1},\ \zeta=\frac{Pz}{E},$$

wo E und E_1 constant sind, genügt. Die Bedingung, dass an den Grenzflächen des Stabes $Z_z=P$, $X_x=Y_y=0$ sein muss, liefert dann nach Anwendung der Gleichungen (7.) die folgenden Werthe für E und E_1:

$$(12.)\quad E=\frac{b(3a-4b)}{a-b},\ E_1=\frac{2b(3a-4b)}{a-2b}.$$

Man nennt E den **Elasticitätsmodul**. Der Werth $\frac{1}{E}$ giebt, da $\zeta=\frac{Pz}{E}$ ist, den Längenzuwachs an, welchen die Längeneinheit des Stabes bei dem Auszug durch die (auf die Flächeneinheit bezogene)

Kraft $P = 1$ erfährt.*) Die Verkleinerung des Querschnitts ist der Grösse $\frac{1}{E_1}$ proportional, wesshalb E_1 der Coefficient der Quercontraction heisst.

Die Grösse b wird meistens als der Torsionscoefficient bezeichnet, weil dieselbe für die Vorgänge der Torsion zunächst in Betracht kommt. Bei der gleichmässigen Compression eines Körpers durch constante Kräfte wird das Mass der Volumenverringerung durch die Differenz $3a - 4b$ bestimmt. In der Theorie der kleinen Schwingungen haben die Constanten a und b selbst eine hervorragende Bedeutung; denn wenn man das Medium unbegrenzt und von der Dichtigkeit 1 annimmt, so sind a und b gleich den Quadraten der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, mit denen die longitudinalen, respective die transversalen Schwingungen in dem Medium fortschreiten.

*) In dem Lamé'schen Lehrbuch bedeutet E diejenige Grösse, die hier durch $\frac{1}{E}$ bezeichnet ist (l. c. pag. 76).

Abschnitt I.

Die angenäherten Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des cylindrischen Stabes.

§ 1. Die Gleichgewichtsbedingungen für den Stab und für Abschnitte des Stabes.

Die Differentialgleichungen für die kleinen Formveränderungen isotroper Körper, welche in der Einleitung entwickelt worden sind, sollen auf das Problem des Gleichgewichts eines cylindrischen Stabes, an dessen Oberfläche beliebige Druckkräfte wirksam sind, angewendet werden. Die nachstehenden Untersuchungen betreffen indessen nicht die direkte Integration dieser Gleichungen, wie sie bei der erwähnten Aufgabe für den begrenzten Cylinder aufgestellt werden müssen. Es soll vielmehr gezeigt werden, dass das Gleichgewichtsproblem eine erheblich einfachere Behandlungsweise zulässt, wenn man durch Berücksichtigung der Stabform, d. h. des Ueberwiegens der einen Dimension, die Rechnung zu einer angenäherten macht, bei der die Terme verschiedener Grössenordnungen successiv gefunden werden. Die Differentialgleichungen transformiren sich hierdurch in andere, welche nicht 3, sondern nur 2 unabhängige Variable enthalten, und dem entsprechend beziehen sich die Bedingungen, denen die Begrenzung zu genügen hat, nicht mehr auf Flächen, sondern auf ebene Randcurven.

Wenn man das elastische Gleichgewicht eines begrenzten Cylinders betrachtet, ohne eine Annahme in Bezug auf die Dimensionen der Länge und des Querschnitts desselben zu machen, so sind in einem solchen Problem sowohl der Fall des Stabes als der Fall der Platte als auch alle Zwischenstufen enthalten. Es ist aber klar, dass die Erscheinungen und mechanischen Gesetze, welche in den genannten verschiedenen Fällen zur Geltung gelangen, vollständig von einander verschieden sind. Die Lösung des allgemeinen Falles muss zu Formeln führen, welche alle diese Gesetze gleichzeitig umfassen. Wenn daher speciell das Gleichgewicht des Stabes behandelt werden soll, so wird ein besonderes Verfahren, das sich der Natur der vorliegenden Aufgabe genau anpasst, zweckmässiger sein. Abgesehen davon, dass die analytischen Schwierigkeiten des allgemeinen Problems bisher nicht überwältigt sind, wäre die Behandlung desselben hier als ein Umweg anzusehen, da aus den vollständigen Integralen desselben erst alle diejenigen Terme zum Fortfall kommen müssten, welche nicht für den Stab, sondern für einen der anderen Fälle eine hervorragende Bedeutung gewinnen. Um die dem Stabe eigenthümlichen Gesetze unmittelbar abzuleiten, hat man die Bedingung, dass die zur Cylinderachse parallele Dimension vorwalten soll, von Anfang an in die Rechnung einzuführen, woraus sich dann die Eintheilung der verschiedenen Grössen nach bestimmten Ordnungen, sowie die Zerlegung der allgemeinen Gleichungen in eine grössere Zahl einfacherer Gleichungen ergiebt.

Es werden in diesem Abschnitt die Modificationen des allgemeinen Verfahrens, welche für einen cylindrischen Stab von beliebigem Querschnitt gelten, entwickelt werden. Die Integration selbst ist nur für den Fall des kreisförmigen Querschnitts ausgeführt worden, und zwar im 2. Abschnitt für den vollen Cylinder, im 3. für den Hohlcylinder. Im 4. Abschnitt wird das angewendete Verfahren unter gewissen Voraussetzungen auch auf den ursprünglich gekrümmten Stab ausgedehnt.

Von äusseren, proportional zur Masse wirkenden Kräften wird nur die Schwerkraft als vorhanden angenommen. Die Constante derselben soll durch Γ (nicht durch g) bezeichnet werden. Die Achse des cylindrischen Stabes sei parallel zur z-Achse, die Richtung der Schwerkraft parallel zur $-y$-Achse, so dass der Stab eine horizontale Lage hat. Die in der Einleitung genannten Componenten X_0, Y_0, Z_0 der äusseren Massenkraft haben also hier die Werthe:

$$Y_0 = -\Gamma,\ X_0 = Z_0 = 0.$$

Die seitliche Begrenzung des Stabes werde durch zwei der xy-Ebene parallele Flächen gebildet, deren Gleichungen $z = +l$ und $z = -l$ sein mögen.

Indem man, wie in der Einleitung, durch D die anfängliche constante Dichtigkeit, durch a und b die Elasticitätsconstanten des isotropen Mediums, durch x, y, z die Coordinaten irgend eines Theilchens in der Anfangslage und durch $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ die Coordinaten desselben nach der Verrückung bezeichnet, gelten für jeden Punkt im Innern die Gleichungen

$$(1.)\quad\begin{cases}\dfrac{dX_x}{dx}+\dfrac{dX_y}{dy}+\dfrac{dX_z}{dz}=0,\\[2mm] \dfrac{dY_x}{dx}+\dfrac{dY_y}{dy}+\dfrac{dY_z}{dz}-D\Gamma=0,\\[2mm] \dfrac{dZ_x}{dx}+\dfrac{dZ_y}{dy}+\dfrac{dZ_z}{dz}=0,\end{cases}$$

wo

$$(2.)\quad\begin{cases}X_x=a\dfrac{d\xi}{dx}+(a-2b)\left(\dfrac{d\eta}{dy}+\dfrac{d\zeta}{dz}\right),\\[2mm] Y_y=a\dfrac{d\eta}{dy}+(a-2b)\left(\dfrac{d\zeta}{dz}+\dfrac{d\xi}{dx}\right),\\[2mm] Z_z=a\dfrac{d\zeta}{dz}+(a-2b)\left(\dfrac{d\xi}{dx}+\dfrac{d\eta}{dy}\right),\\[2mm] Y_z=Z_y=b\left(\dfrac{d\eta}{dz}+\dfrac{d\zeta}{dy}\right),\\[2mm] Z_x=X_z=b\left(\dfrac{d\zeta}{dx}+\dfrac{d\xi}{dz}\right),\\[2mm] X_y=Y_x=b\left(\dfrac{d\xi}{dy}+\dfrac{d\eta}{dx}\right)\end{cases}$$

gesetzt ist.

Die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale irgend eines Oberflächenelementes mit den positiven Coordinatenachsen bildet, sollen wiederum λ, μ, ν, und die (auf die Flächeneinheit bezogenen) Componenten der äusseren Druckkraft, welche auf das Oberflächenelement wirkt, X, Y, Z genannt werden. Für die Mantelfläche des Cylinders ist $\nu=\frac{\pi}{2}$, $\cos\mu=\sin\lambda$; für die Endflächen ist $\lambda=\mu=\frac{\pi}{2}$, $\cos\nu=\pm 1$. Also gelten, nach (5.) der Einleitung, für einen beliebigen Punkt der Mantelfläche die Gleichungen

$$(3.)\quad\begin{cases}X_x\cos\lambda+Y_x\cos\mu=X,\\ X_y\cos\lambda+Y_y\cos\mu=Y,\\ X_z\cos\lambda+Y_z\cos\mu=Z,\end{cases}$$

und für einen beliebigen Punkt der Endflächen die folgenden

$$(4.)\quad X_z=\pm X,\ Y_z=\pm Y,\ Z_z=\pm Z,$$

wo das positive Vorzeichen sich auf die Fläche $z=l$, das negative auf die Fläche $z=-l$ bezieht. Die Grössen X, Y, Z sind gegebene Functionen der Oberflächencoordinaten.

In Betreff der Coordinatenachsen wird die nähere Bestimmung getroffen, dass die Gerade, welche im Anfangszustand die Schwerpunkte der einzelnen, zur Cylinderkante senkrechten Querschnitte verbindet, zur z-Achse genommen werden soll; die bekannten Formeln für die Schwerpunktscoordinaten ergeben dann die Gleichungen

$$(5.)\quad \iint x\,dx\,dy = 0,\ \iint y\,dx\,dy = 0,$$

in denen die Integrationen sich über den ganzen Querschnitt erstrecken. Ferner wählt man zur x- und y-Achse die Richtungen der Hauptträgheitsachsen des Cylinderquerschnitts, wodurch die Gleichung

$$(6.)\quad \iint xy\,dx\,dy = 0$$

entsteht. Die Hauptträgheitsmomente des genannten Querschnitts bezeichnet man durch A und B, seinen Flächeninhalt durch C, so dass

$$(7.)\quad \iint x^2\,dx\,dy = A,\ \iint y^2\,dx\,dy = B,\ \iint dx\,dy = C$$

ist, wo die Integrationen wieder über den ganzen Querschnitt auszudehnen sind.

Ausser den Gleichungen (1.) und den Bedingungen für die Oberfläche werden in den nachstehenden Rechnungen noch gewisse andere Gleichungen benutzt, welche aus den 6 Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems folgen. Man denke sich in der Anfangslage den Stab durch eine Ebene, welche zur z-Achse senkrecht steht und dieselbe im beliebigen Punkte z schneidet, in zwei Theile getheilt, und stelle für denjenigen Theil des Stabes, welcher die Massentheilchen zwischen der Schnittebene und der Grenzfläche $z = l$ umfasst, die genannten 6 Gleichgewichtsbedingungen nach Eintritt der Deformation auf. In denselben kommen ausser den gegebenen Oberflächenkräften X, Y, Z und der Schwerkraft die inneren Druckkräfte X_z, Y_z, Z_z vor, die sich auf die Schnittfläche beziehen. Es ist jedoch zu bemerken, dass die letzteren Kräfte hier mit negativen Vorzeichen behaftet sind, dass also zu dem Element $dxdy$ die Componenten

$$-X_z\,dx\,dy,\ -Y_z\,dx\,dy,\ -Z_z\,dx\,dy$$

gehören, weil daselbst die Seite der kleineren z auf den betrachteten Stabtheil einwirkt.

Zu den 3 Componentensummen, die zunächst behandelt werden sollen, liefern die inneren Druckkräfte die Beiträge

$$-\iint X_z\,dxdy,\ -\iint Y_z\,dxdy,\ -\iint Z_z\,dx\,dy,$$

wo die Integration sich über den ganzen Querschnitt erstreckt. Aus der Mantelfläche des Stabes schneide man durch 2 Vertikalebenen $z = \mathfrak{z}$ und $z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ eine kleine ringförmige Fläche aus; das Bogenelement der Curve, in der die Ebene $z = \mathfrak{z}$ die Mantelfläche schneidet, heisse $d\mathfrak{s}$, so dass $d\mathfrak{z}\,d\mathfrak{s}$ das Element der kleinen ringförmigen Fläche darstellt. Dann rühren von der Mantelfläche des betrachteten Stabtheils die Kräftesummen

$$\int_z^l d\mathfrak{z} \cdot \int X(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{s},$$

$$\int_z^l d\mathfrak{z} \int Y(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{s},$$

$$\int_z^l d\mathfrak{z} \int Z(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{s}$$

her, wo $X(\mathfrak{z})$ $Y(\mathfrak{z})$, $Z(\mathfrak{z})$ die Functionen X, Y, Z für das Argument $z = \mathfrak{z}$ bedeuten, und die Integration nach $\mathfrak{s}$ über die ganze Randcurve des Querschnitts auszudehnen ist. Indem man analog durch $X(l)$, $Y(l)$, $Z(l)$ die Werthe der Functionen X, Y, Z für $z = l$ bezeichnet, erhält man die auf die Endfläche $z = l$ bezüglichen Ausdrücke

$$\int\int X(l)\, dx\, dy, \quad \int\int Y(l)\, dx\, dy, \quad \int\int Z(l)\, dx\, dy.$$

Die Schwerkraft trägt, da die Masse des Stabtheiles gleich $DC\ (l-z)$ ist, zu den Componenten parallel der y-Achse den Werth

$$-\Gamma DC\,(l-z)$$

bei. Es entstehen also, wenn man zur Abkürzung

$$(8.)\quad \begin{cases} f_1 = \int_z^l d\mathfrak{z} \int X(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{s}, \\ g_1 = \int_z^l d\mathfrak{z} \int Y(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{s}, \\ h_1 = \int_z^l d\mathfrak{z} \int Z(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{s}, \end{cases}$$

$$9.\quad \begin{cases} f_2 = \int\int X(l)\, dx\, dy, \\ g_2 = \int\int Y(l)\, dx\, dy - \Gamma CD\,(l-z), \\ h_2 = \int\int Z(l)\, dx\, dy \end{cases}$$

und

$$f = f_1 + f_2, \quad g = g_1 + g_2, \quad h = h_1 + h_2$$

setzt, die Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} \int\int X_z\, dx\, dy = f_1 + f_2 = f, \\ \int\int Y_z\, dx\, dy = g_1 + g_2 = g, \\ \int\int Z_z\, dx\, dy = h_1 + h_2 = h. \end{cases}$$

Die Grössen f_1, g_1, h_1, g_2 sind, da die auf x und y bezüglichen Integrationen constante Grenzen haben, gegebene Functionen von z allein; f_2 und h_2 sind constant.

Bei Herstellung der Kräftepaare mögen die Hebelarme vom Schwerpunkt des betrachteten Querschnittes aus gerechnet werden. Dann sind für die an der Schnittfläche wirkenden Kräfte $-X_z$, $-Y_z$, $-Z_z$ die Hebelarme parallel der x- und y-Achse gleich x und y, der Hebelarm parallel der z-Achse gleich 0. Durch Anwendung der bekannten Formeln für die Drehungsmomente ergiebt sich daher, dass die Kräfte der Querschnittfläche zu der Drehung um die x-Achse, resp. die y-Achse, die Terme

$$-\int\int y\, Z_z\, dx\, dy, \quad +\int\int x\, Z_z\, dx\, dy$$

und zu der Drehung um die z-Achse den Term

$$-\int\int\{x\, Y_z - y\, X_z\}\, dx\, dy$$

liefern. Hierbei sind allerdings die Aenderungen nicht berücksichtigt worden, welche die Hebelarme in Folge der Deformation des Stabes erleiden. Indessen beziehen sich die gesammten Rechnungen nur auf den Fall kleiner Formveränderungen, bei denen die Quadrate und Produkte der Grössen $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}$ etc. neben den ersten Potenzen derselben vernachlässigt werden. Und da sowohl die Druckkäfte als auch die Inkremente der Hebelarme den ersten Potenzen jener Differentialquotienten proportional sind, so geben in den Produkten von Kraft und Hebelarm die genannten Inkremente nur zu Ausdrücken Veranlassung, welche die zweite Dimension in Bezug auf $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\xi}{dy}$ etc. haben.

Für die Componenten, die auf das Element $d\mathfrak{z}\, d\mathfrak{s}$ der Mantelfläche wirken, ist der zur Cylinderkante parallele Hebelarm gleich $\mathfrak{z} - z$, wo $\mathfrak{z}$ von z bis l variirt. Die an der Mantelfläche angebrachten Kräfte geben somit für die Drehungen um die x-, y-, z-Achse die Beiträge

$$\int_z^l d\mathfrak{z} \int\{yZ(\mathfrak{z}) - (\mathfrak{z} - z)\, Y(\mathfrak{z})\}\, d\mathfrak{s},$$

$$\int_z^l d\mathfrak{z} \int\{(\mathfrak{z} - z)\, X(\mathfrak{z}) - xZ(\mathfrak{z})\}\, d\mathfrak{s},$$

$$\int_z^l d\mathfrak{z} \int\{xY(\mathfrak{z}) - yX(\mathfrak{z})\}\, d\mathfrak{s},$$

wo die Integration nach $\mathfrak{s}$ sich wieder über die Randcurve des Querschnitts erstreckt. Von der Endfläche $z = l$ rühren, da der Hebelarm in der Richtung der z-Achse stets gleich $l - z$ zu nehmen ist, die Momente

$$\int\int yZ(l)\, dx\, dy - (l - z)\int\int Y(l)\, dx\, dy,$$

$$(l - z)\int\int X(l)\, dx\, dy - \int\int xZ(l)\, dx\, dy,$$

$$\int\int\{xY(l) - yX(l)\}\, dx\, dy$$

her. Aus der Schwerkraft endlich entsteht für die Drehung um die x-Achse, da der Hebelarm gleich $(\mathfrak{z} - z)$ ist, das Moment

$$\int dx\, dy \int_z^l (\mathfrak{z} - z)\, D\Gamma\, d\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2} CD\Gamma\, (l - z)^2,$$

während das entsprechende Moment für die Drehung um die z-Achse, wo der Hebelarm gleich x ist, wegen der ersten Gleichung (5.) verschwindet.

Indem man die resultirenden Momente der Drehungen um die y-,

x-, z-Achse gleich Null setzt, erhält man für den betrachteten Theil des Stabes die weiteren 3 Gleichgewichtsbedingungen

$$(11.)\quad \begin{cases} \int\int xZ_z\,dx\,dy = F_1 + F_2 + F_3 = F, \\ \int\int yZ_z\,dx\,dy = G_1 + G_2 + G_3 = G, \\ \int\int \{xY_z - yX_z\}\,dx\,dy = H_1 + H_2 = H, \end{cases}$$

wo die Integrationen nach x und y sich über den Cylinderquerschnitt erstrecken, und durch F_1, F_2, G_1, G_2, H_1 die folgenden gegebenen Functionen der Variable z

$$(12.)\quad \begin{cases} F_1 = -\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\,d\mathfrak{z}\int X(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{S}, \\ G_1 = -\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\,d\mathfrak{z}\int Y(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{S}, \end{cases}$$

$$(13.)\quad \begin{cases} F_2 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int xZ(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{S} - (l-z)\int\int X(l)\,dx\,dy, \\ G_2 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int yZ(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{S} - (l-z)\int\int Y(l)\,dx\,dy + \tfrac{1}{2}CD\Gamma(l-z)^2, \\ H_1 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int \{xY(\mathfrak{z}) - yX(z)\}\,d\mathfrak{S}, \end{cases}$$

sowie durch F_3, G_3, H_2 die folgenden Constanten

$$(14.)\quad \begin{cases} F_3 = \int\int xZ(l)\,dx\,dy, \\ G_3 = \int\int yZ(l)\,dx\,dy, \\ H_2 = \int\int \{xY(l) - yX(l)\}\,dx\,dy \end{cases}$$

bezeichnet sind.

Die Grössen f, g, h in (10.) stellen die resultirenden Componenten, und F, G, H in (11.) die resultirenden Drehungsmomente aller an dem betrachteten Stabtheil wirksamen äusseren Kräfte dar. Die Gleichungen (10.) und (11.) sagen daher aus, dass die Deformation des übrigen Theils des Stabes dieselbe ist, als wenn man sich jene resultirenden Componenten und Drehungsmomente auf den trennenden Querschnitt übertragen denkt.

Man bemerke, dass der Differentialquotient $\frac{dF_1}{dz}$ mit der in (8.) definirten Function f_1 identisch ist, ebenso $\frac{dG_1}{dz}$ mit g_1. Die Variable z kommt in F_1, G_1 einerseits als untere Integralgrenze, andererseits als Parameter der zu integrirenden Function vor, so dass die Anwendung der bekannten Differentiationsformel je 2 verschiedene Summanden liefert. Von diesen verschwindet indessen der eine wegen des Factors $\mathfrak{z} - z$, und man erhält:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dF_1}{dz} &= \int_z^l d\mathfrak{z} \int X(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{s} = f_1, \\ \frac{dG_1}{dz} &= \int_z^l d\mathfrak{z} \int Y(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{s} = g_1. \end{aligned}\right.$$

Wie am Schluss der Einleitung erwähnt wurde, sind der Elasticitätsmodul E und der Coefficient der Quercontraction E_1 mit a und b durch die Relationen

$$E = \frac{b\,(3a - 4b)}{a - b}, \quad E_1 = \frac{2b\,(3a - 4b)}{a - 2b}$$

verbunden. Es sind ausserdem die zwischen a, b, E, E_1 bestehenden Gleichungen

$$(15.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{E} + \frac{1}{E_1} = \frac{1}{2b}, \quad \frac{E}{E_1} = \frac{a - 2b}{2\,(a - b)}, \\ &1 + \frac{3a - 4b}{E} = \frac{a}{b}, \quad \frac{a - b}{E_1} + \frac{b}{E} = \frac{a}{2E} \end{aligned}\right.$$

zu erwähnen, welche in den nachstehenden Rechnungen mehrfach zur Anwendung kommen.

§ 2. Klassification der vorkommenden Werthe nach Grössenordnungen.

Die im Folgenden angestellten Untersuchungen beziehen sich auf den Fall, dass der betrachtete begrenzte Cylinder ein Stab (oder Balken) ist, d. h. dass die Dimension seiner Länge die Dimensionen seines Querschnitts erheblich übertrifft. Die Länge der Cylinderkante wurde $2l$ genannt. Der grösste Durchmesser, der sich in dem zur z-Achse senkrechten Cylinderquerschnitt ziehen lässt, habe die Länge $2c$. Dann macht man die Voraussetzung, dass der Quotient $\frac{c}{l}$ eine kleine Grösse sei. Indem man die Längeneinheit von der Ordnung der Grösse l wählt, kann man kurz c als kleine Grösse bezeichnen.

Die Variablen x und y sind von derselben Grössenordnung wie c, während zwischen den Werthen z und c keine derartige Beziehung stattfindet. In den folgenden Rechnungen sind nun sämmtliche vorkommenden Werthe nach ihrer Grössenordnung in Bezug auf c klassificirt worden. Die Ordnung von c^n wird als die $n$te, die Ordnung von $\frac{1}{c^n}$ als die $-n$te bezeichnet; alle Ausdrücke, auf deren Grösse der Werth von c keinen direkten Einfluss hat, die also mit abnehmendem c weder sehr klein, noch sehr gross werden, rechnet man der Ordnung 0 zu. Hiernach gehören die Coordinaten x, y zur Ordnung 1, die Coordinate z sowie die Constanten a, b, E, E_1, l, D, Γ zur Ordnung

0, der Flächeninhalt des Cylindermantels zur Ordnung 1, der Flächeninhalt C des Cylinderquerschnitts zur Ordnung 2. Die in (7.) angegebenen Trägheitsmomente A und B haben die Ordnung 4, da sie gleich Integralen sind, in denen ein positiver Ausdruck der Ordnung 2 über eine Fläche der Ordnung 2 integrirt wird. — Es ist offenbar, dass falls eine Gleichung Summanden von verschiedenen Grössenordnungen enthält, sie nur erfüllt sein kann, wenn die einer gleichen Ordnung angehörenden Terme der linken und der rechten Seite für sich übereinstimmen. Daher werden aus einer solchen Gleichung, sobald man die Grössenordnung jedes einzelnen Terms anzugeben im Stande ist, mehrere andere Gleichungen gewonnen.

Es ist nun auf das vorliegende Problem das Verfahren angewendet worden, die Unbekannten ξ, η, ζ nach jenen Grössenordnungen in ihre einzelnen Bestandtheile zu zerlegen und Gleichungen für diese Bestandtheile abzuleiten. Diejenigen Gleichungen, die im Folgenden näher ausgeführt sind, beziehen sich auf Werthe, welche den 5 niedrigsten Ordnungen angehören. Hierbei ist der Gesichtspunkt massgebend gewesen, dass noch alle Summanden beibehalten worden sind, welche zu einer Druckkraft 0ter Ordnung einen Beitrag liefern. Die Anfangsglieder von ξ, η, ζ (der ersten Annäherung entsprechend) werden für eine beliebige Querschnittform ermittelt und stimmen mit den Werthen überein, welche Navier in seiner Theorie der Stabbiegung, allerdings ohne ausreichenden Beweis, aufgestellt hat. Für die genauere Rechnung ergeben sich Differentialgleichungen, welche sämmtlich zu der bekannten Gleichung $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} = 0$ in Beziehung stehen.

Es soll hier, mit Rücksicht auf die Kleinheit der Grössen x, y, die Voraussetzung gemacht werden, dass die Unbekannten ξ, η, ζ mittelst der Mac-Laurin'schen Reihe nach x, y entwickelt werden können. Dann ist jede derselben gleich einer Summe von Termen der Form $Kx^m y^n$, wo K von x und y unabhängig ist. Wird ein Ausdruck $Kx^m y^n$, in welchem K weder x noch y enthält, nach x oder nach y differenzirt, so geht seine Grössenordnung in die um 1 niedrigere über. In die Rechnung selbst werden nun derartige Reihen für ξ, η, ζ nicht direkt eingeführt. Die gemachte Voraussetzung dient jedoch zur Begründung des Satzes, dass jeder Summandus der Grössen ξ, η, ζ oder ihrer Differentialquotienten durch die Differentiation nach x oder y, sofern er nicht überhaupt fortfällt, eine um 1 niedrigere Grössenordnung annimmt. Durch die Differentiation nach z wird dagegen, da z in keiner Beziehung zum Werth c steht, die Ordnung der einzelnen Glieder nicht geändert, abgesehen von dem Verschwinden der von z nicht abhängigen Summanden. — Es geht hieraus hervor, dass bei der angenäherten Rechnung die nach x und y genommenen Differentialquotienten gewisser Terme oft noch zu berücksichtigen sein werden, wo diese Terme selbst und ihre Ableitungen nach z schon in die Ordnung der zu vernachlässigenden Grössen gehören. Daher kommen für die Ausdrücke (2.) der inneren Druckkräfte verschiedene Näherungswerthe der Grössen ξ, η, ζ in Betracht, jenachdem letztere in Bezug auf x, y oder in Bezug auf z zu differenziren sind.

Um ein einfaches Beispiel für die Verschiedenheit der Grössenordnungen von ξ, η, ζ einerseits und von $\frac{d\xi}{dx}, \ldots \frac{d\zeta}{dy}$ andererseits zu geben, möge an den Fall erinnert werden, wo ein Stab in seiner Längsrichtung, parallel zur z-Achse, ausgezogen wird. Dann ist ξ eine Variable, welche die zur Quercontraction gehörigen, der x-Achse parallelen Verrückungen der einzelnen Theilchen darstellt. Der Differentialquotient $\frac{d\xi}{dx}$ liefert den Massstab für die Verkleinerung innerhalb des Querschnitts, indem er denjenigen Werth angiebt, um welchen im Querschnitt die Länge 1 kürzer werden würde, falls der Querschnitt eine solche Länge enthielte. Während also $\frac{d\xi}{dx}$ von derselben Ordnung wie die beobachtete Verlängerung des Stabes ist, gehört ξ der um 1 höheren Ordnung an, weil, wegen der vorausgesetzten Kleinheit des Querschnitts, der Massstab $\frac{d\xi}{dx}$ nur für eine kleine Länge zur Anwendung kommt.

Der numerische Werth der Druckkräfte wird, wie in der Einleitung angeführt ist, stets in der Weise bestimmt, dass man dieselben auf die Flächeneinheit übertragen denkt. Daher steht der Ausdruck der gegebenen, auf die Staboberfläche wirkenden Druckkräfte X, Y, Z in keiner unmittelbaren Beziehung zu der Grösse c, so dass nach der hier festgesetzten Klassification die Functionen X, Y, Z als Grössen von der Ordnung 0 bezeichnet werden müssen. Indessen erfordert letzteres eine nähere Erläuterung; denn in Betreff der Frage, wie beträchtliche Werthe von X, Y, Z zulässig sind, ist die Grösse von c doch von bestimmendem Einfluss. Es ist zu berücksichtigen, dass den Rechnungen die doppelte Voraussetzung zu Grunde liegt, dass c klein sei, und dass die Formveränderung des Stabes klein sei. Die Unterscheidung der Grössen nach ihren Ordnungen basirt auf der ersteren Voraussetzung; gleichzeitig giebt aber die letztere für die einzelnen Ausdrücke gewisse Grenzwerthe an, die nicht überschritten werden dürfen. Die Kräfte X, Y, Z müssen der Ordnung 0 zugerechnet werden, weil die durchgeführte Klassification sich auf die direkte Abhängigkeit der vorkommenden Werthe von der Grösse c bezieht, und ein solches Verhältniss bei X, Y, Z, wie die geometrische Anschauung zeigt, nicht vorliegt. Die Maximalwerthe jedoch, bis zu welchen X, Y, Z gewählt werden dürfen, nehmen ab, wenn c abnimmt. Die Bedingung, dass die Deformation klein bleibe, bildet den Ausgangspunkt der ganzen Betrachtung; auch die grössten vorkommenden Werthe von $\frac{d\xi}{dx}, \ldots \frac{d\zeta}{dz}$ müssen die Eigenschaft behalten, dass ihre Quadrate und Produkte neben den ersten Potenzen vernachlässigt werden können. Mit den in solcher Weise beschränkten Kräften X, Y, Z, die man der Ordnung 0 zurechnet, vergleicht man dann die übrigen Druckkräfte, sowie die sonstigen Werthe. Durch die Eintheilung in Grössenordnungen soll nichts über die absoluten Werthe gesagt, sondern nur das Verhältniss der verschiedenen Werthe zu einander fixirt werden. Wenn z. B. im Folgenden die Ordnung von X_z und Y_z gleich -1, die von Z_z gleich -2 ermittelt wird, so ist klar, dass trotz dieser negativen Ordnungszahlen die absoluten Werthe der genannten Kräfte in vielen Fällen sehr gering sein werden; denn alle Druckkräfte und Verschiebungen werden klein, sobald man die Belastung des Stabes genügend abnehmen lässt. Aber die Ordnungszahlen zeigen an, dass Z_z gross im Vergleich zu X_z, Y_z, und letztere gross im Vergleich zu den Oberflächenkräften X, Y, Z sind, da zwischen diesen Werthen ein ähnliches Verhältniss wie zwischen $\frac{1}{c^2}, \frac{1}{c}$ und 1 besteht. Die einzelnen Summanden der Druckkräfte und Verschiebungen sind im Allgemeinen einerseits mit positiven oder negativen Potenzen von c oder x, y multiplicirt, wodurch ihre Ordnung bestimmt wird; andererseits enthalten sie aber einen von den gegebenen Kräften X, Y, Z abhängigen Factor, welcher unendlich klein wird, wenn die Belastung des Stabes sich der Null nähert. Durch diesen letzteren Factor bleiben die Terme negativer Grössenordnung auch in dem Fall, dass c sehr klein wird, innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen, wegen der Voraussetzung, dass X, Y, Z nur solche Werthe annehmen dürfen, für welche die Deformation überall klein ist.

Die Componentensummen f_1, g_1, h_1, welche in (8.) definirt wurden, haben im allgemeinen Fall die Ordnung 1; denn sie sind gleich Integralen, in denen die Functionen 0^{ter} Ordnung X, Y, Z über das der 1^{sten} Ordnung angehörige Stück der Mantelfläche integrirt werden. Ferner sind f_2, g_2, h_2 Grössen der Ordnung 2, da in (9.) die Integrationen sich über die Querschnittfläche, die von der 2^{ten} Ordnung ist, erstrecken, und das Glied $- \Gamma CD (l - z)$ wegen des Factors C ebenfalls die Ordnung 2 hat. Von den auf die Drehungsmomente bezüglichen Ausdrücken gehören die in (12.) angegebenen Functionen F_1 und G_1 zur Ordnung 1, die Functionen (13.) F_2, G_2, H_1 zur Ordnung 2, endlich die in (14.) erwähnten Constanten F_3, G_3, H_2 zur Ordnung 3. Denn in (12.) sind die Integrationen über eine Fläche 1ster Ordnung auszudehnen, und die zu integrirenden Functionen haben die Ordnung 0, weil auch die Hebelarme $\mathfrak{z} - z$ von der 0ten Ordnung sind. In (13.) kommen dagegen entweder die Hebelarme x, y von der Ordnung 1 vor, oder man hat über eine Fläche 2ter Ordnung zu integriren; und in (14.) werden Functionen 1ster Ordnung über die der 2ten Ordnung angehörende Endfläche integrirt.

Indessen gelten die soeben ermittelten Grössenordnungen der Functionen f_1, g_1, h_1, F_1, F_2, G_1, G_2, H_1 nicht für alle Punkte des Stabes. Vielmehr sind diejenigen Stabtheile auszunehmen, die an die Endflächen $z = \pm l$ unmittelbar angrenzen, weil $l - z$, respective $-l - z$, daselbst eine kleine Grösse ist. In den obigen Erörterungen wurde die Differenz $l - z$ als eine Grösse 0ter Ordnung, und desshalb das Stück der Mantelfläche, welches bei den Integrationen vorkam, als eine Grösse 1ster Ordnung angesehen. So lange aber $l - z$ dieselbe Ordnung wie c hat, ist jener Theil der Mantelfläche nur von der Ordnung 2. Man erkennt, dass die Ordnungszahlen der erwähnten Functionen dann sämmtlich höher werden. Von dem Stabende $z = -l$ gilt dasselbe wie von dem Stabende $z = +l$, da das eine nicht vor dem anderen bevorzugt ist. Genau die gleiche Ausnahmestellung nehmen die Endstücke des Stabes in Betreff der unten behandelten Grössenordnungen der inneren Druckkräfte X_z, Y_z, Z_z ein, indem letztere für die Punkte, wo $l - z$ klein ist, eine höhere Ordnung als für die übrigen Punkte haben. Da aber alle weiteren Rechnungen auf der Feststellung der Grössenordnungen der erwähnten Functionen beruhen, so sollen im Folgenden die den Enden benachbarten Stabtheile von der Betrachtung überhaupt ausgeschlossen sein, in der Art, dass vollständig darauf verzichtet wird, die bei denselben auftretenden mechanischen Vorgänge näher zu ermitteln. Die gesammten Rechnungen gelten nur für diejenigen Theile des Stabes, welche von den Endflächen genügend weit entfernt sind, damit die Grösse $l - z$, respective $-l - z$, von der Ordnung 0, und nicht von der Ordnung 1 ist. In der That ist leicht zu sehen, dass die Behandlung der Deformation der Endstücke des Stabes in ein anderes Problem gehört, nämlich in dasjenige, wo nicht die eine Dimension vorwiegt, sondern alle drei Dimensionen gleichberechtigt auftreten. Denn für die Formveränderungen und die Druckkräfte, welche in der Nachbarschaft der freien Enden des Stabes vorkommen, ist es unerheblich, wie lang im Uebrigen der Stab ist. — In Folge der oben ausgesprochenen Beschränkung der Aufgabe kommen die Bedingungen (4.), die sich auf die Endflächen beziehen, hier nicht zur Anwendung. Dieselben sind zur Bestimmung derjenigen Unbekannten, welche zu den von den Endflächen entfernteren Stabtheilen gehören, nicht erforderlich. Die an den Endflächen wirkenden äusseren Druckkräfte sind indessen in den Gleichungen (10.) und (11.) berücksichtigt, wo die Werthe f_2, g_2, h_2, F_2, F_3, G_2, G_3, H_2 von denselben abhängen.

Die 6 inneren Druckkräfte X_x, X_y, ... Z_z sind in ihrer Grössenordnung erheblich von einander verschieden, was eine Folge der Verschiedenheit der Umstände ist, unter denen sie am cylindrischen Stabe zur Wirkung kommen. Denn es weichen sowohl die Ordnungen der Flächen von einander ab, an denen die Kräfte angreifen, als auch die Ordnungen der Hebelarme, welche für die Drehungsmomente anzuwenden sind. Zu Schlussfolgerungen in Betreff der Grössenordnungen der 3 Componenten X_z, Y_z, Z_z gelangt man durch die Gleichungen (10.) und (11.), deren rechte Seiten bekannte Functionen von z sind, während links Integrale stehen, in denen die zu integrirenden Functionen von X_z, Y_z, Z_z abhängen. In den Gleichungen (10.), die sich auf die Componentensummen beziehen, macht sich nur der Unterschied der Ordnung der Flächen, auf welche die Kräfte wirken, geltend. Indem links die Componenten X_z, Y_z, Z_z über den Querschnitt des Stabes, rechts X, Y, Z über die Mantelfläche summirt werden, ist Gleichgewicht nur möglich, wenn X_z, Y_z, Z_z die gegebenen Oberflächenkräfte X, Y, Z in demselben Masse übertreffen, wie die Mantelfläche grösser als die Querschnittfläche ist. Es mögen zunächst die beiden ersten Gleichungen (10.) betrachtet werden, die X_z und Y_z enthalten. Die rechten Seiten derselben sind von der 1sten Ordnung; denn f_1 und g_1 gehören dieser, f_2 und g_2 der 2ten Ordnung an. Da aber, wenn eine Function $n$ter Ordnung über eine Fläche 2ter Ordnung integrirt wird, die Ordnungszahl des Integrals sich auf $n+2$ erhöht, so ergiebt sich für X_z und Y_z aus den Gleichungen (10.) die Ordnung — 1. Dies Resultat wird durch die 3te Gleichung (11.) bestätigt, da deren beide Seiten alsdann die Ordnung 2 annehmen.

Die 2 ersten Gleichungen (11.), welche die Bedingungen für die Drehungsmomente in der xz- und yz-Ebene ausdrücken, liefern, weil der Unterschied der Hebelarme hinzutritt, den weiteren Schluss, dass Z_z noch von einer um 1 beträchtlicheren Ordnung als X_z und Y_z ist. Denn bei den erwähnten Drehungen hält die Kraft Z_z den an der Mantelfläche angebrachten Kräften das Gleichgewicht, obwohl zu letzteren theilweis Hebelarme der Ordnung 0, zu Z_z stets nur Hebelarme der Ordnung 1 gehören. Die rechten Seiten der 2 ersten Gleichungen (11.) haben die Ordnung 1, woraus für die links zu integrirenden Produkte xZ_z und yZ_z die Ordnung —1, und somit für die Kraft Z_z die Ordnung —2 folgt. Endlich giebt die 3te Gleichung (10.) die besondere Eigenschaft von Z_z an, dass das Integral $\int\int Z_z\, dx\, dy$, indem die Ausdrücke der Ordnung 0 sich gegenseitig fortheben, auf die Ordnung 1 zurückgeht.

Die Gründe, welche für X_z, Y_z, Z_z eine beträchtlichere Grössenordnung als die der gegebenen Kräfte X, Y, Z verlangen, sind für die übrigen inneren Druckkräfte X_x, Y_y, X_y nicht vorhanden. Letztere wirken auf Flächen, welche der Stabachse parallel sind, und die dieser Achse parallelen Schnittflächen des Stabes haben dieselbe Ordnung wie die Mantelfläche. Wenn man sich die Theilung des Stabes nicht, wie im § 1, durch einen zur z-Achse senkrechten Querschnitt, sondern durch eine beliebige der z-Achse parallele Ebene bewirkt denkt, und wiederum die Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems für den einen Abschnitt des Stabes aufstellt, so stehen den Flächen, an denen X, Y, Z angebracht sind, stets Flächen der gleichen Ordnung, an denen X_x, Y_y, X_y wirken, gegenüber, und ebenso gehören dann zu X, Y, Z einerseits und X_x, Y_y, X_y andererseits Hebelarme derselben Ordnung.

Die obigen Betrachtungen über die Grössenordnungen der Druckkräfte geben nun einen Anhalt für die Frage, durch welche Art von Functionen man die Befriedigung der Differentialgleichungen in dem Problem der Deformation des Stabes zu versuchen haben wird. Man hat das Resultat erhalten, dass die Kraft Z_z von beträchtlicherer Ordnung als alle übrigen inneren Druckkräfte ist, indem sie um 2 Ordnungen niedriger als die Oberflächenkräfte X, Y, Z sein muss, dass ferner X_z und Y_z die letztgenannten gegebenen Kräfte noch um 1 Ordnung übertreffen, während für X_x, Y_y, X_y sich kein Schluss, der eine negative Grössenordnung forderte, ergab. Die im Folgenden angestellten Rechnungen zeigen, dass in der That eine Lösung der vorgelegten Differentialgleichungen existirt, bei welcher Z_z die Ordnung —2, X_z und Y_z die Ordnung —1, und X_x, Y_y, X_y die Ordnung 0 haben. Um zu dieser Lösung zu gelangen, reicht es aus, die Bedingung zu Grunde zu legen, dass die Druckkraft Z_z eine beträchtlichere Grössenordnung habe, als die übrigen inneren Druckkräfte. Es soll daher zunächst die Frage behandelt werden:

> Von welcher Form müssen die Ausdrücke der Verschiebungen ξ, η, ζ sein, damit allein die Kraft Z_z die Ordnung —2 annimmt, die Componenten X_z, Y_z, X_x, Y_y, X_y dagegen eine höhere Ordnung als die —2te haben?

Nachdem im § 3 auf Grund dieser Forderungen die allgemeine Form der Verschiebungen ξ, η, ζ ermittelt ist, werden in den §§ 4—7 die näheren Bestimmungen für die unbekannten Functionen, die in den Ausdrücken von ξ, η, ζ enthalten sind, abgeleitet. Die Differentialgleichungen, welche sich hierbei ergeben, sind von der Beschaffenheit, dass die bei der Integration auftretenden willkürlichen Grössen durch die Bedingungen des Problems sämmtlich bestimmt sind, abgesehen von den in (11.) der Einleitung erwähnten Termen. Die Summanden beträchtlichster Ordnung von ξ, η, ζ werden mit Hülfe der Gleichungen (10.) und (11.) ermittelt. Im Uebrigen liefern die Oberflächenbedingungen (3.) die nöthigen Angaben für die vollständige Bestimmung der Functionen.

§ 3. Die Form der Functionen ξ, η, ζ.

Die Methode, die Summanden der Veränderlichen in Bezug auf ihre Grössenordnung zu unterscheiden, erfordert zunächst, die einzelnen Bestandtheile der Verschiebungen ξ, η, ζ besonders zu bezeichnen. Man trenne in ξ, η, ζ diejenigen Summanden, deren Ordnung durch eine grössere negative Zahl als -1 angegeben wird, von den übrigen, und nenne ihre Gesammtheit respective U_1, V_1, W_1. Ferner mögen U_2, V_2, W_2 die Bestandtheile -1^{ter} Ordnung von ξ, η, ζ darstellen. Der Rest von ζ, welcher alle Glieder von der 0^{ten} und von positiver Ordnung enthält, wird durch den Buchstaben w bezeichnet. Bei ξ, η fasst man die Terme 0^{ter} Ordnung in u_0, v_0, und die Terme positiver Ordnung in u, v zusammen. Es werden also für ξ, η, ζ die Summen

$$(16.)\quad \begin{cases} \xi = U_1 + U_2 + u_0 + u, \\ \eta = V_1 + V_2 + v_0 + v, \\ \zeta = W_1 + W_2 + w \end{cases}$$

substituirt, die man in die Formeln (2.) der inneren Druckkräfte einzusetzen hat.

Die Normalkräfte X_x, Y_y, Z_z gehen hierdurch in Ausdrücke über, welche man folgendermassen in je 2 Zeilen schreibt:

$$\begin{aligned}
X_x &= a\frac{d(U_1+U_2)}{dx} + (a-2b)\left\{\frac{d(V_1+V_2)}{dy} + \frac{dW_1}{dz}\right\} \\
&\quad + a\frac{d(u_0+u)}{dx} + (a-2b)\left\{\frac{d(v_0+v)}{dy} + \frac{d(W_2+w)}{dz}\right\}, \\
Y_y &= a\frac{d(V_1+V_2)}{dy} + (a-2b)\left\{\frac{d(U_1+U_2)}{dx} + \frac{dW_1}{dz}\right\} \\
&\quad + a\frac{d(v_0+v)}{dy} + (a-2b)\left\{\frac{d(u_0+u)}{dx} + \frac{d(W_2+w)}{dz}\right\}, \\
Z_z &= a\frac{dW_1}{dz} + (a-2b)\left\{\frac{d(U_1+U_2)}{dx} + \frac{d(V_1+V_2)}{dy}\right\} \\
&\quad + a\frac{d(W_2+w)}{dz} + (a-2b)\left\{\frac{d(u_0+u)}{dx} + \frac{d(v_0+v)}{dy}\right\}.
\end{aligned}$$

In den oberen Zeilen haben dann sämmtliche Summanden eine beträchtlichere Grössenordnung als die -1^{te}, während in den unteren Zeilen die Ordnungszahl stets gleich -1, 0 oder einer positiven Zahl ist. Denn da die Differentiation nach x oder y die Ordnung um 1 erniedrigt, die nach z dagegen die Ordnung unverändert lässt, so sind $\frac{dU_2}{dx}$ und $\frac{dV_2}{dy}$ von der -2^{ten}, $\frac{dW_2}{dz}$ von der -1^{ten} Ordnung, etc. Nun soll allein Z_z die Ordnung -2 erreichen: folglich müssen sich in X_x und Y_y die Terme, welche der -2^{ten} oder einer noch niedrigeren Ordnung angehören, gegenseitig aufheben. Auf diese Weise ergeben sich, wenn man den Bestandtheil von Z_z, der die Ordnung -2 hat, durch J bezeichnet, die 3 Gleichungen:

$$(17.)\quad \begin{cases} a\dfrac{d(U_1+U_2)}{dx}+(a-2b)\left\{\dfrac{d(V_1+V_2)}{dy}+\dfrac{dW_1}{dz}\right\}=0, \\[2ex] a\dfrac{d(V_1+V_2)}{dy}+(a-2b)\left\{\dfrac{d(U_1+U_2)}{dx}+\dfrac{dW_1}{dz}\right\}=0, \\[2ex] a\dfrac{dW_1}{dz}+(a-2b)\left\{\dfrac{d(U_1+U_2)}{dx}+\dfrac{d(V_1+V_2)}{dy}\right\}=J. \end{cases}$$

Dieselben bilden ein lineares algebraisches System für die 3 Unbekannten $\frac{d(U_1+U_2)}{dx}$, $\frac{d(V_1+V_2)}{dy}$, $\frac{dW_1}{dz}$. Aus den 2 ersten Gleichungen folgt durch Subtraction

$$\frac{d(U_1+U_2)}{dx}=\frac{d(V_1+V_2)}{dy},$$

so dass die Gleichungen

$$2(a-b)\frac{d(U_1+U_2)}{dx}+(a-2b)\frac{dW_1}{dz}=0,$$

$$2(a-2b)\frac{d(U_1+U_2)}{dx}+a\frac{dW_1}{dz}=J$$

entstehen, deren Auflösung zu den Werthen

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{d(U_1+U_2)}{dx}=\dfrac{d(V_1+V_2)}{dy}=-\dfrac{J}{E_1}, \\[2ex] \dfrac{dW_1}{dz}=\dfrac{J}{E} \end{cases}$$

führt. E und E_1 sind die in (12.) der Einleitung, sowie in (15.) dieses Abschnitts erwähnten Constanten:

$$E=\frac{b(3a-4b)}{a-b},\ E_1=\frac{2b(3a-4b)}{a-2b}.$$

J ist eine unbekannte Function von x, y, z, deren Summanden indessen ausschliesslich von der -2^{ten} Ordnung sind.

Aus den Gleichungen (18.) ergiebt sich, dass U_1 nicht von x, und V_1 nicht von y abhängt. Wenn ein Term der Ordnung — 2 nach x oder y differenzirt wird, so nimmt der Differentialquotient, falls er nicht gleich 0 ist, die Ordnung — 3 an. Nach der Definition von U_1, V_1 sind also die Differentialquotienten $\frac{dU_1}{dx}$, $\frac{dU_1}{dy}$, $\frac{dV_1}{dx}$, $\frac{dV_1}{dy}$, soweit sie nicht verschwinden, gleich Grössen, die nur Glieder von der — 3ten oder einer niedrigeren Ordnung enthalten. Die Summanden der Function J haben aber sämmtlich die Ordnung — 2. Folglich zerlegen sich die beiden ersten Gleichungen (18.) in je zwei andere, und man erhält aus (18.) das Gleichungssystem:

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{dU_1}{dx} = \dfrac{dV_1}{dy} = 0, \\[2mm] \dfrac{dU_2}{dx} = \dfrac{dV_2}{dy} = -\dfrac{J}{E_1}, \quad \dfrac{dW_1}{dz} = \dfrac{J}{E}. \end{cases}$$

Für die Kraft X_y ergeben die Gleichungen (2.) und (16.) den Ausdruck

$$\begin{aligned} X_y = b\left(\frac{dU_1}{dy} + \frac{dV_1}{dx}\right) + b\left(\frac{dU_2}{dy} + \frac{dV_2}{dx}\right) \\ + b\left(\frac{d(u_0+u)}{dy} + \frac{d(v_0+v)}{dx}\right), \end{aligned}$$

in welchem $\frac{dU_2}{dy}$ und $\frac{dV_2}{dx}$ von der — 2ten, $\frac{dU_1}{dy}$ und $\frac{dV_1}{dx}$ von niedrigerer Ordnung als der — 2ten sind. Da nun der Voraussetzung nach die Ordnung von X_y eine höhere als die — 2te ist, so müssen die genannten Differentialquotienten den Gleichungen

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{dU_1}{dy} + \dfrac{dV_1}{dx} = 0, \\[2mm] \dfrac{dU_2}{dy} + \dfrac{dV_2}{dx} = 0 \end{cases}$$

genügen.

Endlich haben die Componenten X_z und Y_z in Folge der Substitution (16.) die Werthe:

$$\begin{aligned} X_z &= b\left\{\frac{dU_1}{dz} + \frac{d(W_1+W_2)}{dx}\right\} \\ &\quad + b\left\{\frac{d(U_2+u_0+u)}{dz} + \frac{dw}{dx}\right\}, \\ Y_z &= b\left\{\frac{dV_1}{dz} + \frac{d(W_1+W_2)}{dy}\right\} \\ &\quad + b\left\{\frac{d(V_2+v_0+v)}{dz} + \frac{dw}{dy}\right\}. \end{aligned}$$

Die Ordnungszahl der Summanden

$$\frac{dU_1}{dz}, \frac{dV_1}{dz}, \frac{dW_1}{dx}, \frac{dW_1}{dy}, \frac{dW_2}{dx}, \frac{dW_2}{dy}$$

ist eine grössere negative Zahl als — 1. Also liefert die Forderung, dass X_z und Y_z nicht von beträchtlicherer Ordnung als der — 1ten sein sollen, die Gleichungen:

$$\begin{cases} \dfrac{dU_1}{dz} + \dfrac{d(W_1 + W_2)}{dx} = 0, \\ \dfrac{dV_1}{dz} + \dfrac{d(W_1 + W_2)}{dy} = 0. \end{cases}$$

Die 3 Grössen U_1, V_1, $W_1 + W_2$ müssen, den vorstehenden Rechnungen zufolge, gleichzeitig die 5 Differentialgleichungen

$$(21.) \begin{cases} \dfrac{dU_1}{dx} = \dfrac{dV_1}{dy} = \dfrac{dU_1}{dy} + \dfrac{dV_1}{dx} = 0, \\ \dfrac{dU_1}{dz} + \dfrac{d(W_1 + W_2)}{dx} = \dfrac{dV_1}{dz} + \dfrac{d(W_1 + W_2)}{dy} = 0 \end{cases}$$

befriedigen. Die 3 ersten Gleichungen, aus denen man $\frac{d^2U_1}{dy^2} = \frac{d^2V_1}{dx^2} = 0$ ableitet, zeigen, dass U_1 und V_1 die Form

$$U_1 = N_1 - N'y, \; V_1 = N_2 + N'x$$

haben, wo N_1, N_2, N' Functionen von z allein sind. Die Elimination von $W_1 + W_2$ aus den beiden letzten Gleichungen (21.) führt dann zu der Relation $\frac{d^2U_1}{dydz} = \frac{d^2V_1}{dxdz}$, aus welcher man für N' die Bedingung

$$\frac{dN'}{dz} = 0, \; N' = \text{Const.}$$

erhält. Nun drücken aber, wie am Schluss der Einleitung erörtert wurde, die Werthe

$$\xi = -N'y, \; \eta = N'x,$$

wenn N' constant ist, keine Formveränderung, sondern nur eine kleine Drehung des betrachteten elastischen Körpers (um die z-Achse) aus, bei welcher derselbe unverändert bleibt. Und da derartige Terme, die in (11.) der Einleitung vollständig angegeben sind, bei dem vorliegenden Problem ganz willkürlich bleiben, so können die Summanden $-N'y$ von U_1 und $+N'x$ von V_1 hier einfach fortgelassen werden. Auf diese Weise ergeben sich U_1 und V_1 als Functionen von z allein. Man trennt, mit Rücksicht auf das Folgende, von N_1 und N_2 den constanten Factor $\frac{1}{E}$ ab und setzt $N_1 = \frac{\mathfrak{F}}{E}$, $N_2 = \frac{\mathfrak{G}}{E}$, so dass die Gleichungen entstehen

$$(22.)\quad U_1 = \frac{\mathfrak{F}}{E},\ V_1 = \frac{\mathfrak{G}}{E},$$

und daher

$$\frac{d\,(W_1 + W_2)}{dx} = -\frac{1}{E}\,\frac{d\mathfrak{F}}{dz},\qquad \frac{d\,(W_1 + W_2)}{dy} = -\frac{1}{E}\,\frac{d\mathfrak{G}}{dz},$$

wo $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ nur von z abhängen. Für $W_1 + W_2$ folgt aus den letzteren Gleichungen der Ausdruck

$$(23.)\quad W_1 + W_2 = -\frac{1}{E}\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz}\,x + \frac{d\mathfrak{G}}{dz}\,y + \mathfrak{h}\right),$$

in welchem $\mathfrak{h}$ ebenfalls eine Function von z allein bedeutet.

Ueber die Grössenordnungen der Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ giebt die letzte der Gleichungen (19.) Aufschluss. Da nach derselben $\frac{dW_1}{dz}$ gleich $\frac{J}{E}$, also von der Ordnung -2 ist, so zeigt die nach z differenzirte Gleichung (23.) dass $\frac{d\mathfrak{h}}{dz}$ keine beträchtlichere Ordnung als die -2te, und $\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}$ keine beträchtlichere als die -3te haben können. Geht man von $\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}$, $\frac{d\mathfrak{h}}{dz}$ mittelst Integration zu den Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ selbst über, so treten allerdings gewisse Glieder von unbekannter Grössenordnung hinzu, nämlich bei $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ willkürliche lineare Functionen von z, die durch

$$\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{b}'z,\ \mathfrak{b}_0' + \mathfrak{a}'z$$

bezeichnet werden mögen, und bei $\mathfrak{h}$ eine willkürliche additive Constante $\mathfrak{c}_0'$. Aber nach (22.) und (23.) liefern diese Ausdrücke zu den Verschiebungen ξ, η, ζ nur die Beiträge

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\mathfrak{a}_0'}{E} + \dfrac{\mathfrak{b}'}{E}\,z, \\[2ex] \eta = \dfrac{\mathfrak{b}_0'}{E} + \dfrac{\mathfrak{a}'}{E}\,z, \\[2ex] \zeta = -\dfrac{\mathfrak{b}'}{E}\,x - \dfrac{\mathfrak{a}'}{E}\,y - \dfrac{\mathfrak{c}_0'}{E}, \end{cases}$$

welche in den Werthen (11.) der Einleitung enthalten sind. Da letztere hier überhaupt willkürlich bleiben und beliebig zu ξ, η, ζ hinzugefügt werden können, so wird die Allgemeinheit der Rechnung in keiner Weise beschränkt, wenn man die Constanten $\mathfrak{a}_0'$, $\mathfrak{b}_0'$, $\mathfrak{c}_0'$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$ (wie oben N') sämmtlich gleich Null setzt. Dann ergiebt sich für $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ dieselbe Grössenordnung wie respective für $\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}$, $\frac{d\mathfrak{h}}{dz}$, indem die Differentiation nach z die Ordnung nicht ändert. Also ist, gemäss der aus der letzten Gleichung (19.) gezogenen Folgerung, die Ordnung von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ nicht niedriger als die -3^{te}, die von $\mathfrak{h}$ nicht niedriger als die -2^{te}. Andererseits sind W_1 und W_2 als die Bestandtheile negativer Ordnung von ζ definirt worden. Daher müssen nach (23.) alle Summanden von $\mathfrak{h}$ einer negativen Ordnung angehören, und alle Summanden von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ eine niedrigere Ordnung als die -1^{te} haben. Hiermit ist bewiesen, dass man

$$(24.)\quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2,\ \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

setzen darf, wo $\mathfrak{h}_2$ nur Terme der -1^{ten}, die 3 Functionen $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{h}_1$ nur Terme der -2^{ten}, und $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}_1$ nur solche der -3^{ten} Ordnung enthalten. Die Gleichung (23.) trennt sich dann in die 2 Gleichungen:

$$(25.)\quad \begin{cases} W_1 = -\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{d\mathfrak{F}_1}{dz}\,x + \dfrac{d\mathfrak{G}_1}{dz}\,y + \mathfrak{h}_1\right), \\[2ex] W_2 = -\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{d\mathfrak{F}_2}{dz}\,x + \dfrac{d\mathfrak{G}_2}{dz}\,y + \mathfrak{h}_2\right). \end{cases}$$

Für die Grösse J, welche den Bestandtheil -2^{ter} Ordnung der Kraft Z_z darstellt, ergiebt sich aus der letzten Gleichung (19.) und der ersten Gleichung (25.) der Werth:

$$(26.)\quad J = -\left(\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}\,x + \frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}\,y + \frac{d\mathfrak{h}_1}{dz}\right).$$

Nachdem für U_1, V_1 die Gleichungen (22.), für W_1, W_2 die Gleichungen (25.) ermittelt worden sind, bleiben von den zu einer negativen Ordnung gehörigen Bestandtheilen von ξ, η, ζ die Grössen U_2, V_2 zu behandeln übrig. Zufolge von (19.) und (20.) haben U_2 und V_2, nachdem für J der Ausdruck (26.) substituirt ist, die 3 Gleichungen

$$(27.)\quad \begin{cases} \dfrac{dU_2}{dx} = \dfrac{dV_2}{dy} = \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}\,x + \dfrac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}\,y + \dfrac{d\mathfrak{h}_1}{dz}\right), \\[2ex] \dfrac{dU_2}{dy} + \dfrac{dV_2}{dx} = 0 \end{cases}$$

zu erfüllen. Durch Integration der beiden ersten Gleichungen erhält man

$$U_2 = \frac{1}{E_1}\left(\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}\,xy + \frac{d\mathfrak{h}_1}{dz}\,x\right) + \Pi_1\,(y, z),$$

$$V_2 = \frac{1}{E_1}\left(\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}\,xy + \frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}\,\frac{y^2}{2} + \frac{d\mathfrak{h}_1}{dz}\,y\right) + \Pi_2\,(x, z),$$

wo Π_1 und Π_2 willkürliche Functionen der bezüglichen Argumente y, z und x, z sind. Setzt man diese Werthe von U_2, V_2 in die 3^{te} Gleichung (27.) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{E_1}\,\frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}\,x + \frac{d\Pi_2\,(x, z)}{dx} = -\,\frac{1}{E_1}\,\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}\,y - \frac{d\Pi_1\,(y, z)}{dy}.$$

Nun ist die linke Seite der letzteren Gleichung frei von y, die rechte frei von x; folglich müssen sich beide Seiten auf eine Function von z allein reduciren, die durch $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet werden möge. Dann ist:

$$\frac{d\Pi_1(y, z)}{dy} = -\mathfrak{T}_1 - \frac{1}{E_1}\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}y,$$

$$\frac{d\Pi_2(x, z)}{dx} = \mathfrak{T}_1 - \frac{1}{E_1}\frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}x.$$

Indem man integrirt, gewinnt man für $\Pi_1(y, z)$ und $\Pi_2(x, z)$ die Werthe

$$\Pi_1(y, z) = -\mathfrak{T}_1 y - \frac{1}{E_1}\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}\frac{y^2}{2} + \mathfrak{P}_1,$$

$$\Pi_2(x, z) = \mathfrak{T}_1 x - \frac{1}{E_1}\frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}\frac{x^2}{2} + \mathfrak{Q}_1,$$

woselbst $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ zwei Functionen von z allein bedeuten. Daher sind U_2 und V_2 gleich den Ausdrücken:

$$(28.)\quad \left\{\begin{aligned} U_2 &= \frac{1}{E_1}\left(\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}\frac{x^2-y^2}{2} + \frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}xy + \frac{d\mathfrak{h}_1}{dz}x\right) - \mathfrak{T}_1 y + \mathfrak{P}_1,\\ V_2 &= \frac{1}{E_1}\left(\frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}\frac{y^2-x^2}{2} + \frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}xy + \frac{d\mathfrak{h}_1}{dz}y\right) + \mathfrak{T}_1 x + \mathfrak{Q}_1.\end{aligned}\right.$$

Von den von z abhängigen Grössen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$ gehören $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ (in allen ihren Summanden) zur Ordnung -1, dagegen $\mathfrak{T}_1$ zur Ordnung -2, da in U_2 und V_2 ausschliesslich die Glieder -1^{ter} Ordnung von ξ und η enthalten sind.

Durch die für U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2 abgeleiteten Bestimmungen gehen die inneren Druckkräfte in Functionen der Grössen u_0, v_0, u, v, w und der nur von z abhängigen Werthe $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$ über. Die Ausdrücke für die Normalkräfte X_x, Y_y, Z_z, welche am Anfang dieses Paragraphen aufgestellt wurden, lauten, nachdem der Werth (26.) von J berücksichtigt ist,

$$X_x = a\,\frac{d(u_0+u)}{dx} + (a-2b)\left\{\frac{d(v_0+v)}{dy} + \frac{d(W_2+w)}{dz}\right\},$$

$$Y_y = a\,\frac{d(v_0+v)}{dy} + (a-2b)\left\{\frac{d(u_0+u)}{dx} + \frac{d(W_2+w)}{dz}\right\},$$

$$Z_z = -\left(\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2}x + \frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2}y + \frac{d\mathfrak{h}_1}{dz}\right) + a\,\frac{d(W_2+w)}{dz} + (a-2b)\left\{\frac{d(u_0+u)}{dx} + \frac{d(v_0+v)}{dy}\right\}.$$

Bei der Componente X_y kommen die Gleichungen (20.) und bei X_z, Y_z die 2 letzten Gleichungen (21.) in Betracht, so dass die Werthe

$$X_y = b\left\{\frac{d(u_0+u)}{dy} + \frac{d(v_0+v)}{dx}\right\},$$

$$X_z = b\left\{\frac{d(U_2+u_0+u)}{dz} + \frac{dw}{dx}\right\},$$

$$Y_z = b\left\{\frac{d(V_2+v_0+v)}{dz} + \frac{dw}{dy}\right\}$$

erhalten werden. Für W_2, U_2, V_2 sind in die obigen Gleichungen die Ausdrücke (25.) und (28.) zu substituiren.

§ 4. Die Glieder u_0 und v_0.

Für die Bestandtheile von ξ, η, ζ, welche von der 0ten oder von positiver Ordnung sind, werden Differentialgleichungen erhalten, die sich aus den Gleichungen (1.) durch Trennung der einzelnen Ordnungen ergeben, während für die Grenzbedingungen gleichzeitig eine analoge Zerlegung der Relationen (3.) eintritt. Es sollen hier zunächst die Grössen u_0, v_0 behandelt werden, die als die Gesammtheit der zur 0ten Ordnung gehörigen Terme von ξ, η definirt sind.

Von den Druckkräften, welche in den 2 ersten Gleichungen (1.) vorkommen, hat keine die Ordnung -2. Man bezeichne die Bestandtheile -1ter Ordnung von X_x, Y_y, X_y der Abkürzung halber durch

$$[X_x]_{-1},\ [Y_y]_{-1},\ [X_y]_{-1}.$$

Dann entstehen, weil die nach x oder y genommenen Differentialquotienten der Grössen -1ter Ordnung, soweit sie nicht fortfallen, von der Ordnung -2 sind, und $\frac{dX_z}{dz}$, $\frac{dY_z}{dz}$, $D\Gamma$ die -1te, respective die 0te Ordnung haben, aus den 2 ersten Gleichungen (1.) die Bedingungen

$$(29.)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}[X_x]_{-1} + \dfrac{d}{dy}[X_y]_{-1} = 0, \\[2ex] \dfrac{d}{dx}[X_y]_{-1} + \dfrac{d}{dy}[Y_y]_{-1} = 0, \end{cases}$$

die für einen beliebigen Punkt des Inneren gelten. Ferner stehen in den 2 ersten Gleichungen (3.) rechts die gegebenen Oberflächenkräfte X, Y, welche znr Ordnung 0 gehören. Die Bestandtheile -1ter Ordnung der linken Seiten müssen also für sich verschwinden, so dass man für die Punkte der Oberfläche die Gleichungen

$$(30.)\quad \begin{cases} [X_x]_{-1}\cos\lambda + [X_y]_{-1}\cos\mu = 0, \\ [X_y]_{-1}\cos\lambda + [Y_y]_{-1}\cos\mu = 0 \end{cases}$$

erhält.

Man genügt nun den Gleichungen (29.) und (30.) in der Art, dass man für beliebige Werthe von x, y, z

$$(31).\quad [X_x]_{-1} = [Y_y]_{-1} = [X_y]_{-1} = 0$$

setzt. Die letztgenannten Ausdrücke hängen von den Grössen u_0, v_0, W_2 ab. Denn gemäss den am Schluss des vorigen Paragraphen angeführten Gleichungen sind in X_x, Y_y, X_y folgende Bestandtheile von der —1ten Ordnung enthalten:

$$[X_x]_{-1} = a\frac{du_0}{dx} + (a-2b)\left(\frac{dv_0}{dy} + \frac{dW_2}{dz}\right),$$

$$[Y_y]_{-1} = a\frac{dv_0}{dy} + (a-2b)\left(\frac{du_0}{dx} + \frac{dW_2}{dz}\right),$$

$$[X_y]_{-1} = b\left(\frac{du_0}{dy} + \frac{dv_0}{dx}\right).$$

Aus (31.) folgt daher zunächst

$$(32).\quad \begin{cases} a\,\dfrac{du_0}{dx} + (a-2b)\,\dfrac{dv_0}{dy} = -(a-2b)\,\dfrac{dW_2}{dz}, \\[2ex] a\,\dfrac{dv_0}{dy} + (a-2b)\,\dfrac{du_0}{dx} = -(a-2b)\,\dfrac{dW_2}{dz}, \end{cases}$$

oder

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{dv_0}{dy} = -\frac{a-2b}{2\,(a-b)}\,\frac{dW_2}{dz}.$$

Für $\dfrac{a-2b}{2\,(a-b)}$ kann man nach (15.) den Quotienten $\dfrac{E}{E_1}$ setzen. Indem man sodann für $\dfrac{dW_2}{dz}$ seinen Werth aus (25.) substituirt und die 3te Gleichung (31.) hinzunimmt, erhält man für die Functionen u_0 und v_0 das Gleichungssystem:

$$(33.)\quad \begin{cases} \dfrac{du_0}{dx} = \dfrac{dv_0}{dy} = \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2}\,x + \dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2}\,y + \dfrac{d\mathfrak{h}_2}{dz}\right), \\[2ex] \dfrac{du_0}{dy} + \dfrac{dv_0}{dx} = 0. \end{cases}$$

Dasselbe wird mit dem für U_2, V_2 abgeleiteten Gleichungssystem (27.) identisch, wenn man die Functionen U_2, V_2, $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{h}_1$ durch u_0, v_0, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{h}_2$ ersetzt. Also ergeben sich u_0 und v_0 gleich Ausdrücken, welche den Werthen (28.) von U_2 und V_2 analog gebildet sind, und aus letzteren entstehen, wenn statt

$$\mathfrak{F}_1,\ \mathfrak{G}_1,\ \mathfrak{h}_1,\ \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{Q}_1$$

bezüglich

$$\mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{G}_2,\ \mathfrak{h}_2,\ \mathfrak{T}_2,\ \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{Q}_2$$

geschrieben wird, d. h. es ist:

$$(34.)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2}\,\dfrac{x^2-y^2}{2} + \dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2}\,xy + \dfrac{d\mathfrak{h}_2}{dz}\,x\right) - \mathfrak{T}_2 y + \mathfrak{P}_2, \\ v_0 = \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2}\,\dfrac{y^2-x^2}{2} + \dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2}\,xy + \dfrac{d\mathfrak{h}_2}{dz}\,y\right) + \mathfrak{T}_2 x + \mathfrak{Q}_2. \end{cases}$$

Die Grössen $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$ hängen, wie $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, von z allein ab; ihre Ordnungen sind indessen um je 1 höher als die der letzteren Functionen. Da u_0 und v_0 nur Glieder der 0^{ten} Ordnung enthalten, so haben $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_2$ dieselbe Eigenschaft, während in $\mathfrak{T}_2$ nur Glieder der Ordnung -1 vorkommen. Um für das Folgende eine bequemere Bezeichnung zu erlangen, definirt man, entsprechend zu (24.), drei Grössen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichungen:

$$(35.)\quad \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2,\ \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2,\ \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2.$$

Man bemerke, dass die Lösung (31.) dem cylindrischen Stabe (inclusive des im § 8 behandelten Stabes) eigenthümlich ist und auf den ursprünglich krummen Stab nicht ausgedehnt werden kann. In dem 4^{ten} Abschnitt, wo Fälle von gekrümmten Stäben betrachtet werden, bleiben die Entwicklungen nur so lange den in diesem Abschnitt angestellten Rechnungen analog, als sie die einer negativen Ordnung angehörigen Summanden der Verschiebungen betreffen (wie im vorstehenden § 3). Die Gleichungen für die Terme 0^{ter} Ordnung werden dagegen völlig andere, indem die Kräfte X_x, Y_y, X_y sich dann nicht auf die 0^{te} Ordnung reduciren.

Für die Glieder -2^{ter} Ordnung von Z_z, die man durch J bezeichnete, wurde im Vorhergehenden die Gleichung (26.) abgeleitet. Es ergiebt sich nun aus (25.) und (34.) eine analoge Transformation des Bestandtheils -1^{ter} Ordnung von Z_z, welcher nach § 3 durch die Summe

$$a\,\frac{dW_2}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dy}\right)$$

dargestellt wird. Derselbe unterscheidet sich, da nach (19.) die Differentialquotienten $\dfrac{dU_1}{dx}$ und $\dfrac{dV_1}{dy}$ verschwinden, von dem in (17.) angeführten Ausdruck der Grösse J nur dadurch, dass W_2, u_0, v_0 an die Stelle von W_1, U_2, V_2 getreten sind. Ausserdem werden aber die 2 ersten Gleichungen (17.), wenn man auch in ihnen W_1, U_2, V_2 durch W_2, u_0, v_0 ersetzt, mit den Gleichungen (32.) identisch. Folglich kann man aus der Lösung (18.), die für das Gleichungssystem (17.) erhalten wurde, und die für J den Ausdruck $E\dfrac{dW_1}{dz}$ ergab, direkt schliessen, dass der Bestandtheil -1^{ter} Ordnung von Z_z den Werth

$$E\,\frac{dW_2}{dz} = -\left(\frac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2}\,x + \frac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2}\,y + \frac{d\mathfrak{h}_2}{dz}\right)$$

hat. Indem man ferner die Gleichungen (24.), (35.) auf die Ausdrücke von Z_z, X_z, Y_z anwendet, findet man für diese 3 Druckkräfte von negativer Grössenordnung die Formeln:

$$(36.)\quad \begin{cases} Z_z = -\left(\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,x + \dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,y + \dfrac{d\mathfrak{h}}{dz}\right) \\ \qquad\qquad + a\,\dfrac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dy}\right), \\ \dfrac{1}{b}\,X_z = \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^3\mathfrak{F}}{dz^3}\,\dfrac{x^2-y^2}{2} + \dfrac{d^3\mathfrak{G}}{dz^3}\,xy + \dfrac{d^2\mathfrak{h}}{dz^2}\,x\right) \\ \qquad\qquad - \dfrac{d\mathfrak{T}}{dz}\,y + \dfrac{d\mathfrak{P}}{dz} + \dfrac{dw}{dx} + \dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{1}{b}\,Y_z = \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^3\mathfrak{G}}{dz^3}\,\dfrac{y^2-x^2}{2} + \dfrac{d^3\mathfrak{F}}{dz^3}\,xy + \dfrac{d^2\mathfrak{h}}{dz^2}\,y\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{d\mathfrak{T}}{dz}\,x + \dfrac{d\mathfrak{Q}}{dz} + \dfrac{dw}{dy} + \dfrac{dv}{dz}. \end{cases}$$

Während bei Z_z sämmtliche Terme der -2^{ten} und der -1^{ten} Ordnung in dem Trinom

$$-\left(\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,x + \frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,y + \frac{d\mathfrak{h}}{dz}\right)$$

enthalten sind, kommt in den obigen Ausdrücken von $\frac{1}{b}\,X_z$ und $\frac{1}{b}\,Y_z$ je ein Summandus der -1^{ten} Ordnung vor, über dessen Natur noch keinerlei Aufschluss gewonnen ist. Es sind dies die Differentialquotienten $\frac{dw}{dx}$ und $\frac{dw}{dy}$. Im § 3 wurden u und v als Grössen von positiver Ordnung, w dagegen als eine Grösse 0^{ter} Ordnung definirt, so dass $\frac{dw}{dx}$ und $\frac{dw}{dy}$ die Ordnung -1, also die nämliche wie die Kräfte X_z und Y_z selbst, haben. In der That bleibt bei dem Bestandtheil 0^{ter} Ordnung von w (im Gegensatz zu u_0, v_0) auch die allgemeine Form vollständig unbekannt, solange nicht die Gestalt des Querschnitts des Stabes gegeben ist, wie im § 6 näher erörtert wird.

Für die Componenten X_x, Y_y, X_y, welche in Folge von (31.) von der 0^{ten} Ordnung sind, erhält man nach Berücksichtigung von (32.) und (33.) die Werthe:

$$(37.)\quad \begin{cases} X_x = a\,\dfrac{du}{dx} + (a-2b)\left(\dfrac{dv}{dy} + \dfrac{dw}{dz}\right), \\ Y_y = a\,\dfrac{dv}{dy} + (a-2b)\left(\dfrac{du}{dx} + \dfrac{dw}{dz}\right), \\ X_y = b\left(\dfrac{du}{dy} + \dfrac{dv}{dx}\right). \end{cases}$$

Die Verschiebungen ξ, η, ζ nehmen, wenn in (16.) die Ausdrücke (22.), (25.), (28.), (34.) substituirt, und die Gleichungen (24.), (35.) benutzt werden, die folgende Gestalt an:

$$(38.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\mathfrak{F}}{E} + \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,\dfrac{x^2-y^2}{2} + \dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,xy + \dfrac{d\mathfrak{h}}{dz}\,x\right) - \mathfrak{T}y + \mathfrak{P} + u, \\ \eta = \dfrac{\mathfrak{G}}{E} + \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,\dfrac{y^2-x^2}{2} + \dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,xy + \dfrac{d\mathfrak{h}}{dz}\,y\right) + \mathfrak{T}x + \mathfrak{Q} + v, \\ \zeta = -\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{d\mathfrak{F}}{dz}\,x + \dfrac{d\mathfrak{G}}{dz}\,y + \mathfrak{h}\right) + w. \end{cases}$$

Zur Herstellung der Werthe von ξ, η, ζ ist hiernach erforderlich, dass einerseits die nur von z abhängigen Grössen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ ermittelt, andererseits die Restglieder u, v, w als Functionen der 3 Variablen x, y, z (bis zu der gewünschten Annäherung) berechnet werden.

§ 5. Bestimmung der Grössen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$.

Die Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$, von denen nach (38.) und (36.) die beträchtlichsten Glieder sowohl der Ausweichungen ξ, η, ζ als der Kraft Z_z abhängen, ergeben sich leicht aus den im § 1 angeführten Gleichungen, die sich auf das Gleichgewicht des einen Stabtheils beziehen.

Man substituire in die beiden ersten Gleichungen (11.) und die dritte Gleichung (10.), welche

$$\begin{cases} \iint x\, Z_z \;dx\,dy = F_1 + F_2 + F_3, \\ \iint y\, Z_z \;dx\,dy = G_1 + G_2 + G_3, \\ \iint Z_z \;dx\,dy = h_1 + h_2 \end{cases}$$

lauten, für die Druckkraft Z_z den Ausdruck (36.). Dann treten bei den 3 ersten Summanden von Z_z die von z allein abhängigen Factoren $\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}$, $\dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}$, $\dfrac{d\mathfrak{h}}{dz}$ vor die Integralzeichen, worauf die Gleichungen (5.), (6.), (7.) zur Anwendung kommen. Man erhält diese Weise, nachdem für $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ die Werthe (24.) eingesetzt sind, das Gleichungssystem:

$$-A\,\frac{d^2(\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2)}{dz^2} + \iint\left\{a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right\} x\,dx\,dy$$
$$= F_1 + F_2 + F_3,$$

$$-B\,\frac{d^2(\mathfrak{G}_1+\mathfrak{G}_2)}{dz^2} + \iint\left\{a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right\} y\,dx\,dy$$
$$= G_1 + G_2 + G_3,$$

$$-C\,\frac{d(\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2)}{dz} + \iint\left\{a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right\} dx\,dy$$
$$= h_1 + h_2.$$

Von den rechts stehenden gegebenen Functionen von z gehören, wie im § 2 nachgewiesen wurde, F_1, G_1, h_1 zur 1sten, F_2, G_2, h_2 zur 2ten, und F_3, G_3 zur 3ten Ordnung. Links sind die in den 2 ersten Gleichungen vorkommenden Integrale

$$\int\int \left\{ a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right\} x\, dx\, dy,$$

$$\int\int \left\{ a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right\} y\, dx\, dy$$

von der Ordnung + 3, und das Integral

$$\int\int \left\{ a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\right\} dx\, dy$$

von der Ordnung + 2. Denn aus der Definition von u, v, w folgt für $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$ die Ordnung 0, und durch die Integration über den Querschnitt erhöht sich die Ordnungszahl der zu integrirenden Function um 2. In Betreff der genannten Integrale ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass sie eine noch höhere Ordnung, als oben angegeben, annehmen, da in denselben die Glieder beträchtlichster Ordnung sich in gewissen Fällen gegenseitig aufheben; aber jedenfalls sind sie, worauf es hier allein ankommt, nicht von niedrigerer Ordnung als der 3ten, respective der 2ten. Da ferner die Functionen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}_1$ die Ordnung — 3 haben, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{h}_1$ die Ordnung — 2, und $\mathfrak{h}_2$ die Ordnung — 1, endlich die Querschnittfläche C von der 2ten, und die Trägheitsmomente A und B von der 4ten Ordnung sind, so folgt für das Product $C\frac{d\mathfrak{h}_1}{dz}$ die Ordnung 0, für

$$A\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2},\ B\frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2},\ C\frac{d\mathfrak{h}_2}{dz}$$

die Ordnung + 1, und für

$$A\frac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2},\ B\frac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz_2}$$

die Ordnung + 2. Also ergiebt sich, wenn man in jeder der obigen 3 Gleichungen einerseits die Glieder der zwei beträchtlichsten Ordnungen links und rechts für sich vergleicht, andererseits die Reste einander gleich setzt, das System der folgenden 9 Gleichungen:

$$\begin{cases} -A\frac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2} = F_1, & -A\frac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2} = F_2, \\ -B\frac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2} = G_1, & -B\frac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2} = G_2, \\ C\frac{d\mathfrak{h}_1}{dz} = 0, & -C\frac{d\mathfrak{h}_2}{dz} = h_1, \end{cases}$$

$$
(39.)\quad \begin{cases}
\iint \left\{ a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right) \right\} x\,dx\,dy = F_3, \\
\iint \left\{ a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right) \right\} y\,dx\,dy = G_3, \\
\iint \left\{ a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right) \right\} dx\,dy = h_2.
\end{cases}
$$

Für die gesuchten Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ erhält man hieraus die Werthe:

$$
(40.)\quad \begin{cases}
\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,\quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2, \\
\mathfrak{F}_1 = -\frac{1}{A}\iint F_1 dz^2,\quad \mathfrak{F}_2 = -\frac{1}{A}\iint F_2\,dz^2, \\
\mathfrak{G}_1 = -\frac{1}{B}\iint G_1 dz^2,\quad \mathfrak{G}_2 = -\frac{1}{B}\iint G_2\,dz^2, \\
\mathfrak{h}_1 = 0,\quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2 = -\frac{1}{C}\int h_1\,dz.
\end{cases}
$$

Man bemerke, dass bei den unbestimmten Integralen (40.) die willkürlichen Integrationsconstanten fortgelassen werden können. Denn wie bei Gelegenheit der Gleichung (23.) erörtert wurde, hat die Vermehrung der Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ um Ausdrücke $\mathfrak{a}_0' + \mathfrak{b}'z$, $\mathfrak{b}_0' + \mathfrak{a}'z$, sowie die Vermehrung von $\mathfrak{h}$ um eine willkürliche Constante nur den Einfluss, dass zu ξ, η, ζ Summanden von der in (11.) der Einleitung bezeichneten Form hinzutreten.

Die Gleichungen (36.) für die Kräfte Z_z, X_z, Y_z gehen nach Substitution der Werthe (40.) in die folgenden über:

$$
(41.)\quad \begin{cases}
Z_z = \frac{F_1+F_2}{A}\,x + \frac{G_1+G_2}{B}\,y + \frac{h_1}{C} \\
\qquad + a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right), \\
\frac{1}{b}\,X_z = -\frac{1}{E_1}\left\{ \frac{d\,(F_1+F_2)}{dz}\,\frac{x^2-y^2}{2A} + \frac{d\,(G_1+G_2)}{dz}\,\frac{xy}{B} + \frac{dh_1}{dz}\,\frac{x}{C} \right\} \\
\qquad - \frac{d\mathfrak{T}}{dz}\,y + \frac{d\mathfrak{P}}{dz} + \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}, \\
\frac{1}{b}\,Y_z = -\frac{1}{E_1}\left\{ \frac{d\,(G_1+G_2)}{dz}\,\frac{y^2-x^2}{2B} + \frac{d\,(F_1+F_2)}{dz}\,\frac{xy}{A} + \frac{dh_1}{dz}\,\frac{y}{C} \right\} \\
\qquad + \frac{d\mathfrak{T}}{dz}\,x + \frac{d\mathfrak{Q}}{dz} + \frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}.
\end{cases}
$$

Die Bestandtheile der zwei beträchtlichsten Grössenordnungen (der — 2ten und der — 1ten) von Z_z sind hiermit vollständig ermittelt. Die übrigen inneren Druckkräfte, deren Anfangsglieder noch nicht bekannt sind, haben eine höhere Ordnung als Z_z. Daher kann man, wenn nur die erste Annäherung der Lösung aufgesucht werden soll, die ganze Rechnung in der Art beschränken, dass man ausschliesslich die gefundenen Anfangsglieder von Z_z beibehält, und neben denselben alle anderen Druckkräfte vernachlässigt. Man gelangt dann zu Formeln, welche den von Navier angegebenen entsprechen. Es sollen die Ausdrücke, die zu dieser angenäherten Lösung gehören, etwas näher discutirt werden. Die Componente Z_z ist nur um 1 Ordnung beträchtlicher als die Componenten X_z und Y_z. Indessen ist die erwähnte Annäherung doch ausreichend, um die überhaupt vorkommende Maximal-Druckkraft, deren Werth für alle Anwendungen der Theorie besonders wesentlich ist, mit der Genauigkeit von 2 Grössenordnungen zu berechnen. Denn die resultirende Druckkraft, welche auf ein ursprünglich zur z-Achse senkrechtes Flächenelement wirkt, wird durch

$$\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2}$$

dargestellt; und da in dem Radicandus der Quadratwurzel die Terme der Ordnungen — 4 und — 3 ausschliesslich von den Summanden negativer Ordnung von Z_z abhängen, so wird die Wurzel auf 2 Ordnungen genau ermittelt, wenn man, wie oben festgesetzt wurde, von Z_z nur die Bestandtheile — 2ter und — 1ter Ordnung beibehält und X_z und Y_z vernachlässigt, also

$$(42.)\quad \left\{\begin{aligned} Z_z &= -\left(\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,x + \frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,y + \frac{d\mathfrak{h}}{dz}\right) \\ &= \frac{F_1 + F_2}{A}\,x + \frac{G_1 + G_2}{B}\,y + \frac{h_1}{C}, \\ X_z &= Y_z = 0 \end{aligned}\right.$$

nimmt. Die Maximal-Druckkraft unterscheidet sich aber, wie mittelst der Gleichung des Elasticitätsellipsoids (Einleitung, V.) bewiesen wird, von dem Maximalwerthe der Quadratwurzel $\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2}$, und daher auch von dem Maximalwerth der Componente Z_z, nur um Grössen, welche den 2 beträchtlichsten Ordnungen nicht angehören. Eine Ausnahme machen die Fälle, in denen Z_z sich auf eine höhere Ordnung als die — 2te reducirt, was eintritt, sobald keine Biegung oder nur eine Biegung von höherer Ordnung stattfindet.

Da alle im Vorhergehenden abgeleiteten Formeln eine lineare Beschaffenheit in Bezug auf die Grössen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ haben, so können die von letzteren abhängigen Ausdrücke als die Summe derjenigen Terme aufgefasst werden, welche sich ergeben würden, wennn nur je eine der Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ von Null verschieden wäre. Die durch die Werthe $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ bedingten mechanischen Vorgänge sind also von einander unabhängig und können superponirt werden. Durch $\mathfrak{F}$ wird eine Biegung in der xz-Ebene, durch $\mathfrak{G}$ eine Biegung in der yz-Ebene, durch $\mathfrak{h}$ ein Auszug des Stabes in der Richtung der z-Achse bestimmt. Beschränkt man jede der Verschiebungen ξ, η, ζ auf ihre 2 beträchtlichsten Grössenordnungen, so erhält man nach (38.) die Ausdrücke

$$(43.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\mathfrak{F}}{E}, \quad \eta = \dfrac{\mathfrak{G}}{E}, \\ \zeta = -\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{d\mathfrak{F}}{dz}x + \dfrac{d\mathfrak{G}}{dz}y + \mathfrak{h}\right), \end{cases}$$

aus denen sich ergiebt, dass ζ im Allgemeinen eine um 1 höhere Ordnung als ξ und η hat. Man nehme zunächst $\mathfrak{F}$ von Null verschieden, dagegen $\mathfrak{G} = \mathfrak{h} = 0$, wodurch die Werthe (43.) in

$$(44.)\quad \xi = \frac{\mathfrak{F}}{E},\ \eta = 0,\ \zeta = -\frac{1}{E}\frac{d\mathfrak{F}}{dz}x$$

übergehen. Die anfänglich auf der z-Achse befindlichen Theilchen haben alsdann, da für sie $x = y = 0$, also auch $\zeta = 0$ ist, nach der Deformation die Coordinaten ξ, 0, z. Als geometrischen Ort der genannten Theilchen nach Eintritt der Deformation erhält man somit die in der Ebene der x, z liegende Curve

$$\xi = \frac{\mathfrak{F}}{E},$$

welche die elastische Linie der in der xz-Ebene erfolgenden Biegung genannt wird. Nach (40.) ist die Ordinate ξ eine gegebene Function der Abscisse z. — Die Gleichungen (44.) sagen ausserdem aus, dass die Theilchen, welche anfänglich auf einem zur Stabachse senkrechten Querschnitt liegen, nach der Biegung sich wieder innerhalb einer und derselben Ebene befinden, und dass diese Ebene normal zur elastischen Linie steht. Um die Punkte je einer zur Stabachse senkrechten Ebene zusammenzufassen, hat man z constant, x und y variabel zu nehmen, wodurch nach (44.) auch ξ constant wird, während ζ variabel bleibt. Man bezeichne die nach der Biegung vorhandenen Coordinaten durch x', y', z', so dass $x' = x + \xi$, $y' = y$, $z' = z + \zeta$ ist. Dann sind, zufolge der letzten Gleichung (44.), die Variablen x', z' durch die Relation

$$x' - \xi = -\frac{z' - z}{\dfrac{1}{E}\dfrac{d\mathfrak{F}}{dz}}$$

verbunden. Dies ist wegen der constanten Werthe von z, ξ, $\mathfrak{F}$ die Gleichung einer Ebene; und da der Factor von z' gleich dem negativen reciproken Werth des Differentialquotienten der Function $\frac{\mathfrak{F}}{E}$ ist, welche in der Gleichung der elastischen Linie vorkommt, so ist, wie behauptet wurde, die Ebene zu der elastischen Linie senkrecht.

Die Krümmung der elastischen Linie steht zu dem angenäherten Werth der Kraft Z_z in einer einfachen Beziehung. Bei einer ebenen Curve, deren Abscisse z, und deren Ordinate ξ ist, hat die Krümmung, wie bekannt, den Werth

$$\frac{\frac{d^2\xi}{dz^2}}{\left[1+\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Nun ist für die vorliegende Rechnung (wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Formveränderung, s. d. Einleitung, I.) das Quadrat der kleinen Grösse $\frac{d\xi}{dz}$ neben der Einheit zu vernachlässigen, so dass die Krümmung der elastischen Linie $\xi = \frac{\mathfrak{F}}{E}$ gleich dem Ausdruck

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = \frac{1}{E}\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2} = -\frac{F_1+F_2}{AE}$$

wird. Der angenäherte Werth (42.) von Z_z ist aber in dem hier betrachteten Falle, wo $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{h}$ verschwinden, gleich $\frac{F_1+F_2}{A}\,x$. Folglich ergiebt sich für die Biegung in der xz-Ebene aus den angenäherten Formeln der Satz, dass die Kraft Z_z gleich dem Produkt aus der Krümmung und der Function $-Ex$ ist, wie in Navier's Theorie der Stabbiegung vorausgesetzt wird.

Nimmt man nicht $\mathfrak{F}$, sondern $\mathfrak{G}$ als von Null verschieden an, so werden hierdurch nur die x- und y-Achse mit einander vertauscht; die Werthe (43.) drücken also dann eine analoge Biegung in der yz-Ebene aus. Wenn endlich $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} = 0$, und $\mathfrak{h}$ von Null verschieden ist, so wird durch (43.) ein Auszug (respective eine Compression) des Stabes in der Richtung seiner Achse dargestellt, da die Theilchen, welche auf je einem zur z-Achse senkrechten Querschnitt liegen, eine gleiche und dieser Achse parallele Verrückung ausführen.

Die erste Gleichung (41.) zeigt, dass in dem angenäherten Werthe (42.) von Z_z nicht allein die Terme (43.), sondern auch die Glieder U_2+u_0, V_2+v_0 der Verschiebungen ξ, η berücksichtigt sind. Denn der vollständige Ausdruck (41.) von Z_z unterscheidet sich von dem Ausdruck (42.) nur durch die von u, v, w abhängigen Summanden. Bei Beschränkung von ξ, η, ζ auf die Functionen (43.) würde man, zufolge von (2.), für Z_z den Werth

$$-\frac{a}{E}\left(\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,x+\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,y+\frac{d\mathfrak{h}}{dz}\right),$$

der weniger genau als der Werth (42.) ist, erhalten. Von $U_2 + u_0$, $V_2 + v_0$ sind es nun die Summanden

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{E_1}\left(\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\frac{x^2-y^2}{2}+\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}xy+\frac{d\mathfrak{h}}{dz}x\right), \\ \frac{1}{E_1}\left(\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\frac{y^2-x^2}{2}+\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}xy+\frac{d\mathfrak{h}}{dz}y\right), \end{array}\right.$$

welche einen Beitrag zu Z_z liefern. Dieselben drücken die Quercontraction (im positiven oder negativen Sinne) aus, welche sowohl bei der Biegung als bei dem Auszug des Stabes stets als begleitende Erscheinung auftritt. Sie stellen nämlich, wie aus (37.) hervorgeht, gerade diejenigen Terme dar, welche zu den Werthen (43.) hinzutreten müssen, damit die Componenten X_x und Y_y gleich Null sind. Dies entspricht aber genau der Definition der Quercontraction bei dem einfachen Auszug des Stabes (cfr. der Schluss der Einleitung). — Gemäss den Gleichungen (37.) verschwinden die Kräfte X_x, Y_y, X_y für beliebige Werthe von x, y, z, sobald man die Restglieder u, v, w gleich Null setzt. Der genannte Umstand gestattet die Interpretation, dass wenn man sich den Stab in eine Schaar von Längsfasern zertheilt denkt, die der Achse desselben parallel sind, bei der obigen angenäherten Lösung (welche u, v, w vernachlässigt) die einzelnen Längsfasern sich so verhalten, als ob sie gar keinen Einfluss auf einander ausübten. Diese Unabhängigkeit der unendlich dünnen, der z-Achse parallelen Prismen von einander ist bekanntlich ebenfalls eine der Voraussetzungen der Navier'schen Theorie.

Um eine genauere Lösung als die soeben behandelte, welche nur den Werth von Z_z berücksichtigt, zu erlangen, muss man die Bestandtheile beträchtlichster Ordnung der Restglieder u, v, w bestimmen. Von dem gewünschten Grade der Genauigkeit hängt die Ordnung ab, bis zu welcher man die Berechnung der Grössen u, v, w fortsetzt. Die hier angewendete Methode gestattet es, wie in den folgenden Entwicklungen gezeigt wird, eine beliebige Annäherung zu erreichen, während gleichzeitig bei allen vorkommenden Differentialgleichungen die Anzahl der unabhängigen Variablen sich auf 2 reducirt.

§ 6. Die Differentialgleichungen für die Terme höherer Ordnung der Verschiebung ζ.

Von der Grösse ζ, welche in (16.) gleich $W_1 + W_2 + w$ gesetzt wurde, sind die Bestandtheile W_1 und W_2, deren Ordnungszahl negativ ist, durch die Gleichungen (25.) und (40.) als Functionen von x, y, z hergestellt worden. Von dem Restglied w trennt man wiederum unter Einführung eines neuen Restgliedes $\mathfrak{w}$, die Bestandtheile der 2 beträchtlichsten Ordnungen ab und sucht Differentialgleichungen für dieselben auf.

Die dritte Gleichung (1.)

$$\frac{dX_z}{dx}+\frac{dY_z}{dy}+\frac{dZ_z}{dz}=0$$

geht, wenn man für die Componenten X_z, Y_z, Z_z ihre Werthe (41.) nimmt und die erste der Relationen (15.) benutzt, in die folgende über:

$$(45.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2w}{dx^2}+\dfrac{d^2w}{dy^2}+\dfrac{a}{b}\dfrac{d^2w}{dz^2}+\dfrac{a-b}{b}\left(\dfrac{d^2u}{dx\,dz}+\dfrac{d^2v}{dy\,dz}\right) \\ =-\dfrac{2}{E}\left\{\dfrac{d(F_1+F_2)}{dz}\dfrac{x}{A}+\dfrac{d(G_1+G_2)}{dz}\dfrac{y}{B}+\dfrac{1}{C}\dfrac{dh_1}{dz}\right\}. \end{cases}$$

Man wendet nun für w eine Substitution an, durch welche sowohl die erwähnte Zerlegung dieser Grösse bewirkt, als auch die rechte Seite von (45.) zum Fortfall gebracht wird. Man setzt

$$(46.)\quad \begin{cases} w=-\dfrac{x^2+y^2}{4E}\left\{\dfrac{d(F_1+F_2)}{dz}\dfrac{x}{A}+\dfrac{d(G_1+G_2)}{dz}\dfrac{y}{B}+\dfrac{2}{C}\dfrac{dh_1}{dz}\right\} \\ \qquad -\dfrac{d\mathfrak{P}}{dz}x-\dfrac{d\mathfrak{Q}}{dz}y+\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2+\mathfrak{w}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{W}_1$ nur Summanden 0ter, und $\mathfrak{W}_2$ nur Summanden 1ster Ordnung enthalten soll, während die Glieder höherer Ordnung in $\mathfrak{w}$ zusammengefasst sind. An Stelle von w werden also die 3 neuen Unbekannten $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{w}$ eingeführt. Da

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}\right)\left[-\frac{x^2+y^2}{4E}\left\{\frac{d(F_1+F_2)}{dz}\frac{x}{A}+\frac{d(G_1+G_2)}{dz}\frac{y}{B}+\frac{2}{C}\frac{dh_1}{dz}\right\}\right]$$
$$=-\frac{2}{E}\left\{\frac{d(F_1+F_2)}{dz}\frac{x}{A}+\frac{d(G_1+G_2)}{dz}\frac{y}{B}+\frac{1}{C}\frac{dh_1}{dz}\right\}$$

ist, so hebt sich die rechte Seite von (45.) fort. Ausser dem soeben genannten Ausdruck und ausser den Restgliedern

$$\frac{d^2\mathfrak{w}}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{w}}{dy^2}+\frac{a}{b}\frac{d^2\mathfrak{w}}{dz^2}+\frac{a-b}{b}\left(\frac{d^2u}{dxdz}+\frac{d^2v}{dydz}\right)$$

enthält die linke Seite von (45.) dann noch folgende Summanden:

$$\frac{d^2(\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2)}{dx^2}+\frac{d^2(\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2)}{dy^2}+\frac{a}{b}\frac{d^2(\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2)}{dz^2}$$
$$-\frac{a}{b}\frac{x^2+y^2}{4E}\left\{\frac{d^3(F_1+F_2)}{dz^3}\frac{x}{A}+\frac{d^3(G_1+G_2)}{dz^3}\frac{y}{B}+\frac{2}{C}\frac{d^3h_1}{dz^3}\right\}$$
$$-\frac{a}{b}\left(\frac{d^3\mathfrak{P}}{dz^3}x+\frac{d^3\mathfrak{Q}}{dz^3}y\right).$$

Von denselben gehören allein $\dfrac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx^2}$, $\dfrac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy^2}$ zur Ordnung -2, und allein

$\frac{d^2\mathfrak{W}_2}{dx^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{W}_2}{dy^2}$ zur Ordnung -1, indem bei diesen Differentialquotienten die Ordnungen 0 und 1 von $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ sich durch die zweimalige Differentiation nach x, y in -2 und -1 verwandelt haben. Alle übrigen Terme sind entweder von der 0ten oder von positiver Ordnung, wie man leicht erkennt, wenn man berücksichtigt, dass $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ die -1te, x, y, F_1, G_1, h_1 die 1ste, F_2, G_2, C die 2te, A, B die 4te Ordnung haben. Da ferner die beträchtlichsten Bestandtheile von u, v zur Ordnung 1, von $\mathfrak{w}$ zur Ordnung 2 gehören, so ist die Ordnungszahl der Differentialquotienten

$$\frac{d^2u}{dx\,dz},\ \frac{d^2v}{dy\,dz},\ \frac{d^2\mathfrak{w}}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{w}}{dy^2}$$

gleich 0, die von $\frac{d^2\mathfrak{w}}{dz^2}$ gleich 2. Also erhält man, indem man die Glieder -2ter und -1ter Ordnung für sich betrachtet, aus (45.) die 3 Gleichungen

$$(47.)\quad \frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy^2}=0$$

$$(48.)\quad \frac{d^2\mathfrak{W}_2}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{W}_2}{dy^2}=0,$$

$$(49.)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2\mathfrak{w}}{dx^2}+\frac{d^2\mathfrak{w}}{dy^2}+\frac{a}{b}\,\frac{d^2\mathfrak{w}}{dz^2}+\frac{a-b}{b}\left(\frac{d^2u}{dxdz}+\frac{d^2v}{dydz}\right)\\ &=\frac{a}{b}\,\frac{x^2+y^2}{4E}\left\{\frac{d^3(F_1+F_2)}{dz^3}\,\frac{x}{A}+\frac{d^3(G_1+G_2)}{dz^3}\,\frac{y}{B}+\frac{2}{C}\,\frac{d^3h_1}{dz^3}\right\}\\ &+\frac{a}{b}\left\{\frac{d^3\mathfrak{P}}{dz^3}\,x+\frac{d^3\mathfrak{Q}}{dz^3}\,y-\frac{d^2(\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2)}{dz^2}\right\},\end{aligned}\right.$$

welche für einen beliebigen Punkt des Innern erfüllt sein müssen.

Zu den Differentialgleichungen (47.) und (48.) für $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ treten Oberflächenbedingungen, die sich aus der 3ten Gleichung (3.)

$$X_z\cos\lambda+Y_z\cos\mu=Z$$

ergeben. Setzt man in die Ausdrücke (41.) der Druckkräfte X_z, Y_z den Werth (46.) von w ein, so erhält man, nach Berücksichtigung der ersten Gleichung (15.) und der ersten Gleichung (35.) und nach Einführung der abgekürzten Bezeichnungen

$$(50.)\quad \left\{\begin{aligned} L_1&=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\frac{dF_1}{dz}\,\frac{x^2}{4A}+\left(\frac{3}{E}-\frac{1}{b}\right)\frac{dF_1}{dz}\,\frac{y^2}{4A}\\ &\quad+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{E}\right)\frac{dG_1}{dz}\,\frac{xy}{2B}+\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}\,y,\\ M_1&=\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\frac{dG_1}{dz}\,\frac{y^2}{4B}+\left(\frac{3}{E}-\frac{1}{b}\right)\frac{dG_1}{dz}\,\frac{x^2}{4B}\\ &\quad+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{E}\right)\frac{dF_1}{dz}\,\frac{xy}{2A}-\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}\,x,\end{aligned}\right.$$

$$(51.)\quad \begin{cases} L_2 = \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\frac{dF_2}{dz}\frac{x^2}{4A}+\left(\frac{3}{E}-\frac{1}{b}\right)\frac{dF_2}{dz}\frac{y^2}{4A} \\ \qquad +\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{E}\right)\frac{dG_2}{dz}\frac{xy}{2B}+\frac{1}{2b}\frac{dh_1}{dz}\frac{x}{C}+\frac{d\mathfrak{T}_2}{dz}y, \\ M_2 = \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\frac{dG_2}{dz}\frac{y^2}{4B}+\left(\frac{3}{E}-\frac{1}{b}\right)\frac{dG_2}{dz}\frac{x^2}{4B} \\ \qquad +\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{E}\right)\frac{dF_2}{dz}\frac{xy}{2A}+\frac{1}{2b}\frac{dh_1}{dz}\frac{y}{C}-\frac{d\mathfrak{T}_2}{dz}x, \end{cases}$$

die folgenden Gleichungen für X_z und Y_z:

$$(52.)\quad \begin{cases} \frac{1}{b}X_z = \frac{d\mathfrak{W}_1}{dx}-L_1+\frac{d\mathfrak{W}_2}{dx}-L_2+\frac{d\mathfrak{w}}{dx}+\frac{du}{dz}, \\ \frac{1}{b}Y_z = \frac{d\mathfrak{W}_1}{dy}-M_1+\frac{d\mathfrak{W}_2}{dy}-M_2+\frac{d\mathfrak{w}}{dy}+\frac{dv}{dz}. \end{cases}$$

In den Summanden L_1 und M_1 haben, wie aus dem Vorhergehenden erhellt, sämmtliche Glieder die Ordnung -1, in L_2 und M_2 sämmtliche die Ordnung 0, während $\frac{du}{dz}, \frac{dv}{dz}, \frac{d\mathfrak{w}}{dx}, \frac{d\mathfrak{w}}{dy}$ von der 1sten Ordnung sind. Also werden die Bestandtheile -1ter Ordnung der Componenten X_z, Y_z durch $b\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx}-L_1\right)$, $b\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dy}-M_1\right)$, und die Bestandtheile 0ter Ordnung derselben durch $b\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dx}-L_2\right)$, $b\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dy}-M_2\right)$ angegeben. Nach Substitution der Werthe (52.) lautet die erwähnte dritte Gleichung (3.):

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx}-L_1\right)\cos\lambda+\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dy}-M_1\right)\cos\mu \\ +&\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dx}-L_2\right)\cos\lambda+\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dy}-M_2\right)\cos\mu \\ +&\left(\frac{d\mathfrak{w}}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos\lambda+\left(\frac{d\mathfrak{w}}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\cos\mu \end{aligned}\right\} = \frac{Z}{b}.$$

Da nun die gegebene Kraft Z die Ordnung 0 hat, so entstehen hieraus, wenn man die Summanden von -1ter, von 0ter und von positiver Ordnung von einander trennt, die 3 für die Oberfläche geltenden Gleichungen:

$$(53.)\quad \left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx}-L_1\right)\cos\lambda+\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dy}-M_1\right)\cos\mu = 0,$$

$$(54.)\quad \left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dx}-L_2\right)\cos\lambda+\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dy}-M_2\right)\cos\mu = \frac{Z}{b},$$

$$(55.)\quad \left(\frac{d\mathfrak{w}}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\cos\lambda+\left(\frac{d\mathfrak{w}}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\cos\mu = 0.$$

Sowohl in den Differentialgleichungen (47.), (48.) für $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, als auch in den Oberflächenbedingungen (53.), (54.) fehlen die Differentialquotienten der Unbekannten $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ nach z. In Folge dessen hat man bei der Integration der Gleichungen die Grösse z wie eine Constante anzusehen. Hiermit reducirt sich aber das Problem auf 2 Dimensionen. Die genannten Differentialgleichungen beziehen sich, da sie nur x und y als unabhängige Variable enthalten, ausschliesslich auf die Vorgänge innerhalb je eines (zur z-Achse senkrechten) Querschnittes des Stabes; die Gleichungen (53.) und (54.) werden zu Bedingungen für den Querschnittrand. Indem z als Parameter verschiedene Werthe annimmt, gelangt man zu den Bestimmungen für die verschiedenen Querschnitte; ausgeschlossen blieben hierbei indessen, nach § 2, diejenigen Theile des Stabes, welche den Enden desselben unmittelbar benachbart sind.

Die Functionen L_1, M_1, L_2, M_2 sind nicht völlig bekannt, da sie nach (50.), (51.) die noch nicht ermittelten, von z abhängigen Grössen $\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}$ und $\frac{d\mathfrak{T}_2}{dz}$ enthalten. Dies hat jedoch, da z in den obigen Differentialgleichungen für $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ nur als Parameter vorkommt, auf das Verfahren der Integration weiter keinen Einfluss. Die Werthe $\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}$ und $\frac{d\mathfrak{T}_2}{dz}$, welche besonders für die Torsion des Stabes in Betracht kommen, gelten bei der Integration der Gleichungen als vorläufig unbekannte, später zu bestimmende Constanten.

Die Bedingungen (53.) und (54.) nehmen eine etwas andere Form an, wenn man das Element dn der nach aussen gerichteten Normale der Randcurve des Querschnittes einführt. Da λ und μ die Winkel sind, welche die nach aussen gerichtete Normale mit der positiven x- und y-Achse bildet, so ist

$$\cos\lambda = \frac{dx}{dn}, \quad \cos\mu = \frac{dy}{dn}.$$

Aus (53.), (54.) ergiebt sich daher:

$$\frac{d\mathfrak{W}_1}{dn} = L_1\cos\lambda + M_1\cos\mu,$$

$$\frac{d\mathfrak{W}_2}{dn} = \frac{Z}{b} + L_2\cos\lambda + M_2\cos\mu.$$

Auf die Functionen $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ findet nun ein bekannter Satz, welcher die Differentialgleichungen der obigen Art betrifft, Anwendung. Soll eine stetige Function $\Omega(x, y)$ für ein zusammenhängendes Stück der xy-Ebene der Differentialgleichung $\frac{d^2\Omega}{dx^2} + \frac{d^2\Omega}{dy^2} = 0$ genügen, und soll ausserdem am Rande des Flächenstücks der Differentialquotient derselben nach der Normale, $\frac{d\Omega}{dn}$, mit einer gegebenen Function von x, y

übereinstimmen, so ist hierdurch der Werth von Ω eindeutig bestimmt, abgesehen von einer willkürlichen additiven Constante*). Im vorliegenden Falle ist an Stelle der Constante eine willkürliche additive Function von z allein zu setzen. Bis auf letztere und die ebenfalls nur von z abhängigen Grössen $\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}$, $\frac{d\mathfrak{T}_2}{dz}$ werden folglich $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ aus den obigen Differentialgleichungen, falls deren Integration für den betreffenden Cylinderquerschnitt durchgeführt werden kann, als bestimmte eindeutige Functionen von x, y, z gefunden.

Es möge noch erwähnt sein, dass weil die in (50.), (51.) definirten Werthe L_1, M_1, L_2, M_2 linear nach F_1, G_1, $\mathfrak{T}_1$, respective F_2, G_2, $\mathfrak{T}_2$, h_1 sind, die Gleichungen (53.) und (54.) zu dem Schluss führen, dass Superposition in Bezug auf die letzteren Grössen stattfindet. $\mathfrak{W}_1$ ergiebt sich also gleich der Summe dreier Ausdrücke, von denen der erste nur F_1, der zweite nur G_1, der dritte nur $\mathfrak{T}_1$ enthält; die ersteren stellen, wie aus § 5 folgt, begleitende Erscheinungen der zwei Biegungen (in der xz- und yz-Ebene) dar, während letzterer sich auf die Torsion des Stabes bezieht. Das Analoge gilt von der Function $\mathfrak{W}_2$; nur treten bei derselben noch die von Z abhängigen Glieder hinzu, welche die unmittelbare Einwirkung der am Querschnittrande angegebrachten äusseren Druckkraft auf die Theilchen des Querschnitts angeben.

§ 7. Die Differentialgleichungen für die Terme höherer Ordnung der Verschiebungen ξ und η.

Die Restglieder u und v, welche durch die Substitution (16.)

$$\xi = U_1 + U_2 + u_0 + u, \quad \eta = V_1 + V_2 + v_0 + v$$

eingeführt wurden, enthalten sämmtliche in ξ, η vorkommenden Summanden von positiver Grössenordnung. Dieselben sollen, ebenso wie bei w geschehen, in ihre den zwei niedrigsten Ordnungen angehörigen Bestandtheile und in neue Restglieder $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ zerlegt werden. Die Differentialgleichungen, denen diese Grössen genügen, gewinnt man aus den zwei ersten Gleichungen (1.):

$$\begin{cases} \dfrac{dX_x}{dx} + \dfrac{dX_y}{dy} + \dfrac{dX_z}{dz} = 0, \\[2ex] \dfrac{dX_y}{dx} + \dfrac{dY_y}{dy} + \dfrac{dY_z}{dz} - D\Gamma = 0. \end{cases}$$

Wenn man für X_x, Y_y, X_y die Werthe (37.), für X_z, Y_z die Werthe (41.) und für w seinen Werth (46.) einsetzt, so verwandeln sich, nach

*) Man vergleiche: Clebsch, Elasticitätstheorie, Leipzig 1862, pag. 80—81.

Benutzung der Relationen (15.), die genannten Gleichungen in die folgenden

$$(56.)\quad \begin{cases} a\dfrac{d^2u}{dx^2}+b\left(\dfrac{d^2u}{dy^2}+\dfrac{d^2u}{dz^2}\right)+(a-b)\dfrac{d^2v}{dx\,dy} \\ \qquad = \varLambda-(a-b)\dfrac{d^2(\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2+\mathfrak{w})}{dx\,dz}, \\ a\dfrac{d^2v}{dy^2}+b\left(\dfrac{d^2v}{dx^2}+\dfrac{d^2v}{dz^2}\right)+(a-b)\dfrac{d^2u}{dx\,dy} \\ \qquad = \varLambda'-(a-b)\dfrac{d^2(\mathfrak{W}_1+\mathfrak{W}_2+\mathfrak{w})}{dy\,dz}, \end{cases}$$

in denen zur Abkürzung durch $\varLambda$ und $\varLambda'$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \varLambda = {} & \frac{1}{4A}\,\frac{d^2(F_1+F_2)}{dz^2}\left\{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{E}\right)x^2+\left(\frac{a-b}{E}-\frac{2b}{E_1}\right)y^2\right\} \\ & +\left(\frac{a-b}{E}+\frac{2b}{E_1}\right)\frac{d^2(G_1+G_2)}{dz^2}\,\frac{xy}{2B}+b\,\frac{d^2\mathfrak{T}}{dz^2}\,y \\ & +(a-2b)\,\frac{d^2\mathfrak{P}}{dz^2}+\left(\frac{a-b}{E}+\frac{b}{E_1}\right)\frac{d^2h_1}{dz^2}\,\frac{x}{C}, \\ \varLambda' = {} & \frac{1}{4B}\,\frac{d^2(G_1+G_2)}{dz^2}\left\{\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{E}\right)y^2+\left(\frac{a-b}{E}-\frac{2b}{E_1}\right)x^2\right\} \\ & +\left(\frac{a-b}{E}+\frac{2b}{E_1}\right)\frac{d^2(F_1+F_2)}{dz^2}\,\frac{xy}{2A}-b\,\frac{d^2\mathfrak{T}}{dz^2}\,x \\ & +(a-2b)\,\frac{d^2\mathfrak{Q}}{dz^2}+D\varGamma+\left(\frac{a-b}{E}+\frac{b}{E_1}\right)\frac{d^2h_1}{dz^2}\,\frac{y}{C} \end{aligned}$$

bezeichnet sind. Für u und v wählt man nun die Substitution

$$(57.)\quad \begin{cases} u = \dfrac{d^2(F_1+F_2)}{dz^2}\left(\dfrac{x^2}{E}+\dfrac{3y^2-x^2}{E_2}\right)\dfrac{x^2}{24A}+\dfrac{d^2\mathfrak{T}}{dz^2}\,\dfrac{y^3}{6} \\ \qquad +\dfrac{d^2(G_1+G_2)}{dz^2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{E_1}+\dfrac{y^2}{2E_2}\right)\dfrac{xy}{6B}+(a-2b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{P}}{dz^2}\,\dfrac{x^2}{2a} \\ \qquad +\left(\dfrac{a-b}{E}+\dfrac{b}{E_1}\right)\dfrac{d^2h_1}{dz^2}\,\dfrac{x^3}{6aC}+\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{u}, \\ v = \dfrac{d^2(G_1+G_2)}{dz^2}\left(\dfrac{y^2}{E}+\dfrac{3x^2-y^2}{E_2}\right)\dfrac{y^2}{24B}-\dfrac{d^2\mathfrak{T}}{dz^2}\,\dfrac{x^3}{6} \\ \qquad +\dfrac{d^2(F_1+F_2)}{dz^2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{E_1}+\dfrac{x^2}{2E_2}\right)\dfrac{xy}{6A}+\left[(a-2b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{Q}}{dz^2}+D\varGamma\right]\dfrac{y^2}{2a} \\ \qquad +\left(\dfrac{a-b}{E}+\dfrac{b}{E_1}\right)\dfrac{d^2h_1}{dz^2}\,\dfrac{y^3}{6aC}+\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2+\mathfrak{v}, \end{cases}$$

und definirt die neuen Variablen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{v}$ in der Art, dass $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ sich ausschliesslich aus Termen der 1sten Ordnung, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$ aus Termen 2ten Ordnung zusammensetzen, und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ alle Summanden von höherer Ordnung enthalten. In den obigen Gleichungen bedeutet E_2 die Constante

$$(58.)\quad E_2 = \frac{a(3a-4b)}{b},$$

welche, wie leicht zu beweisen, mit den Constanten a, b, E, E_1 durch die Relationen

$$(59.)\quad \frac{2b}{E_1}+\frac{a}{E_2}=\frac{b}{E},\quad \frac{2a}{E_1}+\frac{a}{E_2}=\frac{a-b}{E}$$

verbunden ist. Aus (57.) ergiebt sich die Transformation

$$a\frac{d^2u}{dx^2}+b\frac{d^2u}{dy^2}+(a-b)\frac{d^2v}{dx\,dy}=$$
$$a\frac{d^2(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{u})}{dx^2}+b\frac{d^2(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{u})}{dy^2}+(a-b)\frac{d^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2+\mathfrak{v})}{dx\,dy}+\Lambda$$

und

$$a\frac{d^2v}{dy^2}+b\frac{d^2v}{dx^2}+(a-b)\frac{d^2u}{dx\,dy}=$$
$$a\frac{d^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2+\mathfrak{v})}{dy^2}+b\frac{d^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2+\mathfrak{v})}{dx^2}+(a-b)\frac{d^2(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2+\mathfrak{u})}{dx\,dy}+\Lambda'.$$

Die linken Seiten dieser 2 Gleichungen unterscheiden sich aber von den linken Seiten von (56.) nur dadurch, dass in letzteren noch die Terme $b\frac{d^2u}{dz^2}$, $b\frac{d^2v}{dz^2}$ vorkommen. Daher heben sich in Folge der Substitution (57.) die Grössen Λ und Λ' in (56.) fort. Sodann ist zu berücksichtigen, dass die Differentialquotienten

$$\frac{d^2\mathfrak{U}_1}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{U}_1}{dx\,dy},\ \frac{d^2\mathfrak{U}_1}{dy^2},\ \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dx\,dy},\ \frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dy^2},\ \frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx\,dz},\ \frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy\,dz}$$

die — 1te, und

$$\frac{d^2\mathfrak{U}_2}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{U}_2}{dx\,dy},\ \frac{d^2\mathfrak{U}_2}{dy^2};\ \frac{d^2\mathfrak{V}_2}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{V}_2}{dx\,dy},\ \frac{d^2\mathfrak{V}_2}{dy^2},\ \frac{d^2\mathfrak{W}_2}{dx\,dz},\ \frac{d^2\mathfrak{W}_2}{dy\,dz}$$

die 0te Ordnung haben, während die Grössen

$$\frac{d^2\mathfrak{u}}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{u}}{dx\,dy},\ \frac{d^2\mathfrak{u}}{dy^2},\ \frac{d^2\mathfrak{v}}{dx^2},\ \frac{d^2\mathfrak{v}}{dx\,dy},\ \frac{d^2\mathfrak{v}}{dy^2},\ \frac{d^2\mathfrak{w}}{dx\,dz},\ \frac{d^2\mathfrak{w}}{dy\,dz}$$

sowie sämmtliche Terme von $b\frac{d^2u}{dz^2}$ und $b\frac{d^2v}{dz^2}$ zu einer positiven Ordnung gehören. Indem man also auf den linken und rechten Seiten von (56.) die Summanden von — 1ter, von 0ter und von positiver Ordnung für sich einander gleichsetzt, zerlegen sich, nachdem man auch in $b\frac{d^2u}{dz^2}$ und $b\frac{d^2v}{dz^2}$ die Werthe (57.) substituirt hat, die Gleichungen (56.) in die folgenden 6 Gleichungen:

$$(60.)\quad \begin{cases} a\frac{d^2\mathfrak{U}_1}{dx^2}+b\frac{d^2\mathfrak{U}_1}{dy^2}+(a-b)\frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dx\,dy}=-(a-b)\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx\,dz}, \\ a\frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dy^2}+b\frac{d^2\mathfrak{V}_1}{dx^2}+(a-b)\frac{d^2\mathfrak{U}_1}{dx\,dy}=-(a-b)\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy\,dz}, \end{cases}$$

$$(61.)\quad \begin{cases} a\,\dfrac{d^2\mathfrak{U}_2}{dx^2}+b\,\dfrac{d^2\mathfrak{U}_2}{dy^2}+(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{V}_2}{dx\,dy}=-(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{W}_2}{dx\,dz},\\[2ex] a\,\dfrac{d^2\mathfrak{V}_2}{dy^2}+b\,\dfrac{d^2\mathfrak{V}_2}{dx^2}+(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{U}_2}{dx\,dy}=-(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{W}_2}{dy\,dz}, \end{cases}$$

$$(62.)\quad \begin{cases} a\,\dfrac{d^2\mathfrak{u}}{dx^2}+b\left(\dfrac{d^2\mathfrak{u}}{dy^2}+\dfrac{d^2\mathfrak{u}}{dz^2}\right)+(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{v}}{dx\,dy}=-\left\{\omega+(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{w}}{dx\,dz}\right\},\\[2ex] a\,\dfrac{d^2\mathfrak{v}}{dy^2}+b\left(\dfrac{d^2\mathfrak{v}}{dx^2}+\dfrac{d^2\mathfrak{v}}{dz^2}\right)+(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{u}}{dx\,dy}=-\left\{\omega'+(a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{w}}{dy\,dz}\right\}, \end{cases}$$

wo ω und ω' die Functionen

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{d^4(F_1+F_2)}{dz^4}\left(\frac{x^2}{E}+\frac{3y^2-x^2}{E_2}\right)\frac{bx^2}{24A}+\frac{d^4\mathfrak{T}}{dz^4}\,\frac{by^3}{6}\\ &\quad+\frac{d^4(G_1+G_2)}{dz^4}\left(\frac{x^2+y^2}{E_1}+\frac{y^2}{2E_2}\right)\frac{bxy}{6B}+(a-2b)\frac{d^4\mathfrak{P}}{dz^4}\,\frac{bx^2}{2a}\\ &\quad+\left(\frac{a-b}{E}+\frac{b}{E_1}\right)\frac{d^4h_1}{dz^4}\,\frac{bx^3}{6aC}+b\,\frac{d^2(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2)}{dz^2},\\ \omega' &= \frac{d^4(G_1+G_2)}{dz^4}\left(\frac{y^2}{E}+\frac{3x^2-y^2}{E_2}\right)\frac{by^2}{24B}-\frac{d^4\mathfrak{T}}{dz^4}\,\frac{bx^3}{6}\\ &\quad+\frac{d^4(F_1+F_2)}{dz^4}\left(\frac{x^2+y^2}{E_1}+\frac{x^2}{2E_2}\right)\frac{bxy}{6A}+(a-2b)\frac{d^4\mathfrak{Q}}{dz^4}\,\frac{by^2}{2a}\\ &\quad+\left(\frac{a-b}{E}+\frac{b}{E_1}\right)\frac{d^4h_1}{dz^4}\,\frac{by^3}{6aC}+b\,\frac{d^2(\mathfrak{V}_1+\mathfrak{V}_2)}{dz^2} \end{aligned}$$

bedeuten. In (60.) und (61.) finden sich die Unbekannten $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$ ausschliesslich nach x, y, nicht nach z, differenzirt, so dass z auch bei diesen Differentialgleichungen als constant zu gelten hat. Daher reducirt sich das Problem in Betreff der Grössen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$, wie früher in Betreff von $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$, auf zwei Dimensionen. Die auf den rechten Seiten von (60.), (61.) vorkommenden Variablen $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ darf man hier als bekannt ansehen. Denn für dieselben wurden im § 6 die Gleichungen (47.), (48.), (53.), (54.), durch welche sie eindeutig bestimmt sind, gefunden, und die Integration der letzteren Gleichungen nimmt man als ausgeführt an. Der Umstand, dass gewisse von z abhängige Werthe, die vorläufig unbekannt blieben, in $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ enthalten sind, ist für die Integration der Gleichungen (60.), (61.) nicht wesentlich, da z daselbst nur ein Parameter ist. Ausser den für das Innere geltenden Gleichungen (60.), (61.) ergeben sich aus den 2 ersten Gleichungen (3.) vier Oberflächenbedingungen, von denen zwei auf $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, und zwei auf $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$ Bezug haben.

Bevor jedoch auf diese Gleichungen näher eingegangen wird, soll kurz gezeigt werden, dass das obige, für $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ angewendete Verfahren sich beliebig auf die Bestandtheile höherer Ordnung von ξ, η, ζ ausdehnen lässt. Es werden immer abwechselnd je zwei Ordnungen von ζ und zwei Ordnungen von ξ, η bestimmt. Man erhält die Differentialgleichungen, welche für die Glieder höherer Ordnung von ξ, η, ζ im Innern gelten, durch weitere Zerlegung der Gleichungen (49.) und (62.). Als die Grundlage der ganzen Rechnung ist die Voraussetzung zu bezeichnen, dass durch die Differentiation nach x oder y, nicht aber durch die nach z, die Ordnung um je 1 erniedrigt wird. Nach (46.) enthält $\mathfrak{w}$ alle Summanden von ζ, welche der 2ten oder einer höheren Ordnung angehören. Man fasse in $\mathfrak{w}_1$ die Bestandtheile der 2ten und 3ten Ordnung von ζ zusammen, in $\mathfrak{w}_2$ die der 4ten und 5ten, in $\mathfrak{w}_3$ die der 6ten und 7ten etc. Ebenso bezeichne man durch $\mathfrak{u}_1$, resp. $\mathfrak{v}_1$, die Bestandtheile der 3ten und 4ten Ordnung von ξ, respective von η, ferner durch $\mathfrak{u}_2$, respective $\mathfrak{v}_2$, die der 5ten und 6ten Ordnung dieser Variablen, und so fort. Dann entsteht aus (49.) in Folge der Unterscheidung der Grössenordnungen zunächst eine Gleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dy^2} = \chi_1,$$

deren rechte Seite als eine bekannte Function zu betrachten ist, weil die in derselben enthaltenen Grössen $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ durch die vorher gefundenen Differentialgleichungen bestimmt werden. In (49.) sind, nachdem man für u, v die Werthe (57.) substituirt hat, die Differentialquotienten $\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dx^2}$ und $\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dy^2}$ die einzigen unbekannten Grössen, deren Summanden zu den Ordnungen 0 und 1 gehören, da $\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{u}}{dx\,dz}$, $\frac{d^2\mathfrak{v}}{dy\,dz}$ nur die Ordnung 2 erreichen. Auf diese Weise ergiebt sich die obige, nur die Unbekannte $\mathfrak{w}_1$ enthaltende Differentialgleichung. Dieselbe wird, wie leicht nachzuweisen, durch eine Oberflächenbedingung ergänzt, die aus der 3ten Gleichung (3.) folgt, und in der ebenfalls nur $\mathfrak{w}_1$ als unbekannte Variable vorkommt. Man leitet hierauf aus (62.) die 2 Gleichungen

$$\begin{cases} a\,\frac{d^2\mathfrak{u}_1}{dx^2} + b\,\frac{d^2\mathfrak{u}_1}{dy^2} + (a-b)\,\frac{d^2\mathfrak{v}_1}{dx\,dy} = \omega_1, \\ a\,\frac{d^2\mathfrak{v}_1}{dy^2} + b\,\frac{d^2\mathfrak{v}_1}{dx^2} + (a-b)\,\frac{d^2\mathfrak{u}_1}{dx\,dy} = \omega_1' \end{cases}$$

ab, in denen ω und ω_1' bekannte Functionen sind, wenn jetzt auch $\mathfrak{w}_1$ als bekannt angenommen wird. Zu diesen Gleichungen gelangt man, indem man in (62.) die Glieder 1ster und 2ter Ordnung für sich betrachtet; denn nur die Grössen

$$\frac{d^2\mathfrak{u}_1}{dx^2},\quad \frac{d^2\mathfrak{u}_1}{dx\,dy},\quad \frac{d^2\mathfrak{u}_1}{dy^2},\quad \frac{d^2\mathfrak{v}_1}{dx^2},\quad \frac{d^2\mathfrak{v}_1}{dx\,dy},\quad \frac{d^2\mathfrak{v}_1}{dy^2}$$

setzen sich aus Gliedern der genannten Ordnungen zusammen, während die übrigen unbekannten Differentialquotienten

$$\frac{d^2\mathfrak{u}_1}{dz^2}, \quad \frac{d^2\mathfrak{v}_1}{dz^2}, \quad \frac{d^2\mathfrak{w}_2}{dx\,dz}, \quad \frac{d^2\mathfrak{w}_2}{dy\,dz} \text{ etc.}$$

von der 3ten oder von höherer Ordnung sind. In derselben Weise erhält man nach einander aus (49.) und (62.) Gleichungen von der Form

$$\frac{d^2\mathfrak{w}_2}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{w}_2}{dy^2} = \chi_2,$$

$$\begin{cases} a\,\dfrac{d^2\mathfrak{u}_2}{dx^2} + b\,\dfrac{d^2\mathfrak{u}_2}{dy^2} + (a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{v}_2}{dx\,dy} = \omega_2, \\ a\,\dfrac{d^2\mathfrak{v}_2}{dy^2} + b\,\dfrac{d^2\mathfrak{v}_2}{dx^2} + (a-b)\,\dfrac{d^2\mathfrak{u}_2}{dx\,dy} = \omega_2', \end{cases}$$

$$\frac{d^2\mathfrak{w}_3}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{w}_3}{dy^2} = \chi_3, \text{ etc.}$$

und gleichzeitig ergiebt sich eine entsprechende Zerlegung der Oberflächenbedingungen (3.). Die Functionen χ_2, ω_2, ω_2', χ_3, ... müssen hier als bekannt gelten, da sie immer nur diejenigen Grössen, welche durch die vorhergehenden Gleichungen bestimmt sind, enthalten, und man die Integration dieser Gleichungen als erfolgt ansehen darf. Bei sämmtlichen Differentialgleichungen kommen nur x und y als unabhängige Variable vor; denn überall fehlen die Differentialquotienten der unbekannten Grössen nach z. Das Problem wird also in allen seinen Theilen auf zwei Dimensionen, d. h. auf die Vorgänge innerhalb je eines zur z-Achse senkrechten Querschnittes reducirt.

Aus den obigen Gleichungen geht hervor, dass die Rechnungen sich nach der angegebenen Methode bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit fortsetzen lassen. Indessen wird bei allen Anwendungen der Theorie die Ermittlung der Bestandtheile höherer Ordnung von ξ, η, ζ nicht mehr von Interesse sein, sobald dieselben zu den Druckkräften nur Beiträge, die klein im Vergleich zu den äusseren Kräften sind, liefern. Als klein gegen letztere sind im Allgemeinen schon alle Kräfte der Ordnung 1 zu bezeichnen, da sie zu den von aussen wirkenden Kräften in einem ähnlichen Verhältniss stehen, wie c zu 1. Da nun in den Formeln (2.) der inneren Druckkräfte nur die ersten Differentialquotienten von ξ, η, ζ vorkommen, so rühren von den Bestandtheilen 2ter Ordnung von ξ, η, ζ höchstens Terme der Ordnung 1 in den Ausdrücken der Kräfte her. Aus diesem Grunde sind im Folgenden die Summanden 2ter und höherer Ordnung von ξ, η, ζ nicht weiter berücksichtigt, und die Rechnungen in Betreff der Druckkräfte überall auf die Werthe von negativer oder 0ter Ordnung beschränkt worden.

Die Gleichungen (60.) für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ kann man auf die Form bringen:

$$\frac{d}{dx}\left\{a\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right)+(a-b)\frac{d\mathfrak{W}_1}{dz}\right\}+b\,\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}-\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right)=0,$$

$$\frac{d}{dy}\left\{a\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right)+(a-b)\frac{d\mathfrak{W}_1}{dz}\right\}-b\,\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}-\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right)=0.$$

Definirt man also φ_1 und ψ_1 als die Functionen

$$(63.)\quad\begin{cases}\varphi_1=a\left(\dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right)+(a-b)\dfrac{d\mathfrak{W}_1}{dz},\\[2ex] \psi_1=b\left(\dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right),\end{cases}$$

so entstehen aus (60.) die Gleichungen

$$(64.)\quad\begin{cases}\dfrac{d\varphi_1}{dx}+\dfrac{d\psi_1}{dy}=0,\\[2ex] \dfrac{d\varphi_1}{dy}=\dfrac{d\psi_1}{dx},\end{cases}$$

welche zeigen, dass die Summe $\psi_1+i\varphi_1$ eine Function des complexen Arguments $x+iy$ ist. Die nämliche Transformation ist auf die Gleichungen (61.) anwendbar. Aus der zweiten Gleichung (64.) folgert man, dass φ_1 und ψ_1 die nach x und y genommenen Differentialquotienten einer und derselben Function Ω_1 sind, und gelangt hierdurch zu dem Gleichungssystem:

$$(65.)\quad\begin{cases}\varphi_1=\dfrac{d\Omega_1}{dx},\ \psi_1=\dfrac{d\Omega_1}{dy},\\[2ex] \dfrac{d^2\Omega_1}{dx^2}+\dfrac{d^2\Omega_1}{dy^2}=0.\end{cases}$$

Mit den Differentialgleichungen (60.), (61.), welche für einen beliebigen Punkt des Innern befriedigt sein müssen, hat man wiederum die Gleichungen, die für die Begrenzung gelten, zu verbinden. Um die auf $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, respective $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$, bezüglichen Oberflächenbedingungen zu erhalten, trennt man in den 2 ersten Gleichungen (3.)

$$\begin{cases}X_x\cos\lambda+X_y\cos\mu=X,\\ X_y\cos\lambda+Y_y\cos\mu=Y\end{cases}$$

die Terme 0ter und 1ster Ordnung von den übrigen. Analog zu § 4 mögen durch

$$[X_x]_0,\ [Y_y]_0,\ [X_y]_0$$

die Bestandtheile 0ter, sowie durch

$$[X_x]_1,\ [Y_y]_1,\ [X_y]_1$$

die Bestandtheile 1ster Ordnung von X_x, Y_y, X_y bezeichnet werden. Dann ergeben sich, da die Oberflächenkräfte X, Y zur Ordnung 0 gehören, aus (3.) die Gleichungen

$$(66.)\ \begin{cases} [X_x]_0 \cos\lambda + [X_y]_0 \cos\mu = X, \\ [X_y]_0 \cos\lambda + [Y_y]_0 \cos\mu = Y \end{cases}$$

und

$$(67.)\ \begin{cases} [X_x]_1 \cos\lambda + [X_y]_1 \cos\mu = 0, \\ [X_y]_1 \cos\lambda + [Y_y]_1 \cos\mu = 0. \end{cases}$$

Die Grössen $[X_x]_0$, $[Y_y]_0$, $[X_y]_0$ hängen von $\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}$, $\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}$ und die Grössen $[X_x]_1$, $[Y_y]_1$, $[X_y]_1$ von $\frac{d\mathfrak{U}_2}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{U}_2}{dy}$, $\frac{d\mathfrak{V}_2}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{V}_2}{dy}$ ab. Indem man in die Formeln (37.) von X_x, Y_y, X_y den Werth (46.) für w, sowie die Werthe (57.) für u, v substituirt, und die Relationen (15.) und (59.) berücksichtigt, findet man für die Bestandtheile 0ter Ordnung der genannten Kräfte die Ausdrücke

$$[X_x]_0 = a\,\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx} + (a-2b)\left(\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy} + \frac{d\mathfrak{W}_1}{dz}\right) + \mathfrak{L},$$

$$[Y_y]_0 = a\,\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy} + (a-2b)\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx} + \frac{d\mathfrak{W}_1}{dz}\right) + \mathfrak{M},$$

$$[X_y]_0 = b\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy} + \frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right) + \mathfrak{N},$$

in denen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ die Functionen

$$(68.)\ \begin{cases} \mathfrak{L} = \frac{bF_1''x}{12A}\left\{\left(\frac{3}{E} - \frac{2}{E_2}\right)x^2 + 3\left(\frac{1}{E} - \frac{4}{E_1}\right)y^2\right\} - \frac{2b}{a}(a-2b)\,\mathfrak{Q}_1''y \\ \qquad + \frac{bG_1''y}{12B}\left\{\left(\frac{4}{E_1} + \frac{4}{E_2} - \frac{1}{E}\right)y^2 + 3\left(\frac{1}{E} - \frac{2}{E_2}\right)x^2\right\}, \\ \mathfrak{M} = \frac{bG_1''y}{12B}\left\{\left(\frac{3}{E} - \frac{2}{E_2}\right)y^2 + 3\left(\frac{1}{E} - \frac{4}{E_1}\right)x^2\right\} - \frac{2b}{a}(a-2b)\,\mathfrak{P}_1''x \\ \qquad + \frac{bF_1''x}{12A}\left\{\left(\frac{4}{E_1} + \frac{4}{E_2} - \frac{1}{E}\right)x^2 + 3\left(\frac{1}{E} - \frac{2}{E_2}\right)y^2\right\}, \\ \mathfrak{N} = \frac{bF_1''y}{6A}\left\{\frac{y^2}{E_1} + 3\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)x^2\right\} \\ \qquad + \frac{bG_1''x}{6B}\left\{\frac{x^2}{E_1} + 3\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)y^2\right\} + \frac{b\mathfrak{T}_1''}{2}(y^2 - x^2) \end{cases}$$

bedeuten. Zur Abkürzung ist

$$(69.)\ \begin{cases} \frac{d^2F_1}{dz^2} = F_1'', \quad \frac{d^2G_1}{dz^2} = G_1'', \\ \frac{d^2\mathfrak{T}_1}{dz^2} = \mathfrak{T}_1'', \quad \frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2} = \mathfrak{P}_1'', \quad \frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2} = \mathfrak{Q}_1'' \end{cases}$$

gesetzt worden. Auf diese Weise ergeben sich aus (66.) die Gleichungen

$$
(70.)\begin{cases}
\left\{a\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right)-2b\,\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right\}\cos\lambda+b\left\{\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right\}\cos\mu \\
\qquad = X-\left\{\mathfrak{L}+(a-2b)\,\frac{d\mathfrak{W}_1}{dz}\right\}\cos\lambda-\mathfrak{N}\cos\mu, \\
\left\{a\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right)-2b\,\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}\right\}\cos\mu+b\left\{\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right\}\cos\lambda \\
\qquad = Y-\left\{\mathfrak{M}+(a-2b)\,\frac{d\mathfrak{W}_1}{dz}\right\}\cos\mu-\mathfrak{N}\cos\lambda,
\end{cases}
$$

welche für alle Punkte der Mantelfläche des Stabes mit Ausnahme der den Endflächen benachbarten gelten. Die analogen, durch (67.) ausgedrückten Bedingungen sollen hier nicht in Ausführlichkeit wiedergegeben werden; denn die Grössen $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$, zu deren Bestimmung dieselben dienen, werden, wie oben erwähnt, als Grössen 2ter Ordnung in den Rechnungen der folgenden Abschnitte nicht mehr berücksichtigt.

Auf die Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, welche nach (68.) die von z allein abhängigen unbekannten Werthe $\mathfrak{T}_1''$, $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{Q}_1''$ enthalten, finden die nämlichen Bemerkungen Anwendung, welche im § 6 in Bezug auf L_1, M_1, L_2, M_2 gemacht wurden. Da z in den Gleichungen (60.) und (70.) nur als Parameter auftritt, so sind $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ für das Integrationsverfahren als gegebene Functionen, in denen jedoch 3 unbekannte Constanten vorkommen, anzusehen. Die ganze Betrachtung kann auf je einen zur z-Achse senkrechten Querschnitt beschränkt werden, an dessen Randcurve die für den bezüglichen Werth von z zu nehmenden Bedingungen (70.) in Kraft treten. Im § 6 wurde ferner erwähnt, dass bei den Grössen $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$, welche durch die Gleichungen (47.), (48.), (53.), (54.) bestimmt sind, je eine additive Function von z willkürlich bleibt. Dasselbe gilt in Betreff der Bestimmung der Variablen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ durch (60.) und (70.). In letzteren Gleichungen kommen ausschliesslich die Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}$, $\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}$, $\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}$, nicht $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ selbst, vor, woraus folgt, dass je ein nur von z abhängiger Summandus in $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ willkürlich bleiben muss.

Endlich ist anzuführen, dass die Grössen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, sowie die anderen unbekannten Functionen von z allein, welche von der Integration der partiellen Differentialgleichungen herrühren, durch die Gleichungen (10.) und (11.) des § 1 bestimmt werden. Das Verfahren, das sich hierfür ergiebt, ist genau dasselbe, welches im § 5 für die unbekannten Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ angewendet wurde. Jede der genannten Gleichungen lässt sich durch Unterscheidung der Grössenordnungen in eine Reihe verschiedener Gleichungen zerlegen; die nur von z abhängigen Factoren treten dann immer vor die Integralzeichen. Im § 5 wurde bei dreien der Gleichungen (10.) und (11.)

die Abtrennung der Summanden der 2 beträchtlichsten Ordnungen bewirkt, wodurch man einerseits die Werthe (40.) für $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ ermittelte, andererseits die Gleichungen (39.), die für die weiteren Entwicklungen wesentlich sind, erhielt. Analog werden die Bestimmungsgleichungen für $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{P}_1$ etc. abgeleitet. Hat man die partiellen Differentialgleichungen, in denen x und y die unabhängigen Variablen sind, gelöst, so sind in den bestimmten Integralen, welche die linken Seiten von (10.) und (11.) bilden, die zu integrirenden Ausdrücke bekannte Functionen von x und y. Zwei Beispiele für die Rechnungen, welche die genauere Behandlung des Problems erfordert, sind im 2ten und 3ten Abschnitt durchgeführt worden.

Bei den hier angestellten Untersuchungen sind die äusseren Druckkräfte X, Y, Z überall als Grössen 0ter Ordnung angenommen, und die Ordnungen der in (8.), (9.), (12.), (13.), (14.) definirten Ausdrücke f_1, g_1, ... F_1, G_1, ... dem entsprechend festgestellt worden. Indessen bleiben, mit gewissen Modificationen, die erhaltenen Resultate auch noch gültig, wenn einzelne der äusseren Kräfte von beträchtlicherer Ordnung als die übrigen sind. Die in einem solchen Falle eintretenden Aenderungen beziehen sich auf die Grössenordnungen, welche den verschiedenen Summanden der rechten Seiten von (10.) und (11.) zuzuertheilen sind. Im Vorhergehenden bezeichnete man durch f_1, g_1, h_1 die Bestandtheile 1ster, und durch f_2, g_2, h_2 die Bestandtheile 2ter Ordnung der Functionen f, g, h, die auf den rechten Seiten von (10.) stehen. Ebenso wurden die in (11.) vorkommenden Functionen F, G, H nach den Grössenordnungen in F_1, F_2, F_3, respective G_1, G_2, G_3 und H_1, H_2 eingetheilt. Wenn nun die gegebenen Oberflächenkräfte nicht sämmtlich von der Ordnung 0 sind, so wird die Zerlegung der Grössen f, g, h, F, G, H eine andere, während die Rechnungen selbst sich nicht wesentlich ändern. Man nehme z. B. den Fall, dass die Endfläche $z = l$ des Stabes durch Kräfte in Anspruch genommen sei, welche die an der Mantelfläche wirkenden in solchem Masse übertreffen, dass man sie nicht zur 0ten, sondern (wie X_z und Y_z) zur $-$ 1ten Ordnung zu rechnen hat. Dann sind die in (9.) angeführten Integrale über die Endfläche gleichzeitig mit den Ausdrücken (8.) als die Bestandtheile 1ster Ordnung von f, g, h zu bezeichnen, und analog hat man die in (13.) vorkommenden Integrale über die Endfläche zu F_1, G_1 hinzuzunehmen, sowie F_3, G_3, H_2 zu den übrigen Werthen (13.). Will man die bisherige Bezeichnungsweise beibehalten, der zufolge f_1, g_1, h_1 die Bestandtheile 1ster Ordnung von f, g, h darstellen u. s. f., so sind die Definitionen von f_1, g_1 h_1 etc. in der Art, wie die obige Erörterung fordert, zu modificiren. Abgesehen hiervon bleiben dann alle Entwicklungen dieselben. Es können ferner die Functionen F_1 und G_1 gleichzeitig identisch Null werden, ohne dass die gegebene Lösung der Differentialgleichungen gültig zu sein aufhört, wenn sich auch hierdurch die Kraft Z_z auf die —1te, die Ausdrücke F und G auf die 2te Ordnung reduciren. In Folge des Umstandes, dass überall Superposition anwendbar ist, werden in den erhaltenen Formeln die verschiedenen Gruppen von Termen von einander unabhängig, so dass auch eine theilweise Aenderung in den Grössenordnungen der gegebenen Kräfte die Lösung selbst nicht hinfällig macht. — Der Fall, dass von den äusseren Druckkräften gewisse sehr gross sind und desshalb zu einer negativen Ordnung gerechnet werden müssen, tritt namentlich bei denjenigen Aufgaben ein, wo der Stab an den Enden aufliegt oder eingeklemmt ist. Man bemerke, dass weil die den Endflächen benachbarten Stabtheile von der Betrachtung ganz ausgeschlossen sind (§ 2), die im Vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen nicht minder für den an den Enden aufliegenden oder eingeklemmten Stab gelten, als für den, dessen Enden frei schweben. An dem Ende, wo ein Stab aufliegt, hat man eine unbekannte Kraft hinzuzufügen, welche später durch die Bedingung der Unverrückbarkeit des Stabendes bestimmt wird. Ist der Stab eingeklemmt, so tritt ausserdem an dem betreffenden Ende ein unbekanntes Kräftepaar hinzu, dessen Werth sich aus der vorgeschriebenen Richtung der Tangente der elastischen Linie an jenem Ende ergiebt. Die genannten hinzuzufügenden Kräfte sind nun im Allgemeinen von der Ordnung — 1, respective — 2. Denn wenn der Stab an den Enden unterstützt ist, so folgt aus den Bedingungen für das Gleichgewicht des Stabes, dass die Componenten der unbekannten Kräfte die explicit gegebenen Componentensummen, die sich über die ganze Mantelfläche erstrecken, aufheben müssen; und bei dem eingeklemmten Stab wird die Ordnung der unbekannten Kräfte noch um 1 niedriger, weil zu ihnen Hebelarme der 1sten Ordnung gehören, während die an der Mantelfläche wirkenden Kräfte theilweis Hebelarme 0ter Ordnung haben. In diesen Fällen sind in den Gleichungen (10.) und (11.) die Grössen f, g, h, F, G, H um unbekannte Constanten, und die Grössen F und G ausserdem um Ausdrücke $k_1\ (l-z)$, $k_2\ (l-z)$ zu vermehren, wie aus (9.), (13.), (14.) hervorgeht. Die Ordnung der hinzutretenden Werthe ergiebt sich stets aus den Gleichgewichtsbedingungen des als starr angesehenen Stabes.

Es ist schliesslich noch zu erwähnen, dass auch die seitliche Begrenzung des Stabes eine andere, als im § 1 vorausgesetzt wurde, sein darf. Nach § 1 sollten die Ebenen $z = l$ und $z = -l$ die Begrenzung bilden. Da indessen die Stabenden für die obigen Rechnungen überhaupt nur in sofern in Betracht kommen, als sie Beiträge zu den Integralen f, g, h, F, G, H liefern, so bleiben alle erhaltenen Gleichungen auch in dem Falle gültig, dass die Stabenden durch eine beliebige andere Fläche begrenzt werden. Es ist dann nur erforderlich, die Werthe f, g, h, F, G, H entsprechend zu modificiren.

§ 8. Ueber das Gleichgewicht eines Stabes mit veränderlichem Querschnitt.

In den vorstehenden Paragraphen ist der betrachtete Stab als ursprünglich cylindrisch vorausgesetzt worden, so dass vor Eintritt der Deformation alle zu seiner Achse senkrechten Querschnitte congruente Umrisse hatten. Die bisherigen Rechnungen lassen sich aber mit geringen Aenderungen auch auf den Stab mit variablem Querschnitt übertragen, falls die Abweichungen des Stabes von der cylindrischen Gestalt innerhalb gewisser Grenzen bleiben. Von den Winkeln λ, μ, ν, welche die Oberflächennormale mit den Coordinatenachsen bildet, hatte ν im Vorhergehenden den constanten Werth $\frac{\pi}{2}$, also $\cos\nu$ den Werth 0, da die Cylinderkante parallel zur z-Achse genommen wurde. Es soll nun der Fall behandelt werden, dass $\cos\nu$ nicht mehr gleich 0, jedoch eine kleine Grösse von derselben Ordnung wie c sei. Bei dieser Annahme, die für einen beliebigen Punkt der Oberfläche (abgesehen von den seitlichen Grenzflächen) gemacht wird, bleibt die der z-Achse parallele Dimension die vorwiegende, so dass der betrachtete Körper noch als Stab (oder Balken) bezeichnet werden kann. Die Querschnittflächen, welche die zur z-Achse senkrechten Ebenen aus dem Stabe ausschneiden, werden indessen hiermit als veränderlich vorausgesetzt, so dass die in (7.) definirten Grössen A, B, C nicht mehr constant, sondern Functionen von z sind. Der geometrische Ort der Schwerpunkte der zur z-Achse senkrechten Querschnitte, der bisher mit der z-Achse zusammenfiel, geht im Allgemeinen in eine krumme Linie über. Ebenso werden die Winkel, welche die Richtungen der Hauptträgheitsachsen der genannten Querschnitte mit der x- und y-Achse bilden, zu variablen Grössen. Hieraus ergiebt sich, dass die Gleichungen (5.) und (6.) nicht mehr erfüllt sind. Man stellt in Bezug auf die Lage des rechtwinkligen Coordinatenkreuzes jetzt nur die Bedingung, dass die z-Achse so gewählt sei, dass die Variablen x und y für alle Punkte des Stabes gleich kleinen Grössen sind. Eine derartige Wahl ist stets möglich, weil $\cos\nu$ als ein Werth von der Ordnung von c vorausgesetzt wird.

Als Bedingungen für die Oberfläche des Stabes hat man, da $\cos\nu$ von Null verschieden ist, nicht die Gleichungen (3.), sondern die in IV. der Einleitung angeführten Gleichungen.

$$
(71.)\quad \begin{cases} X_x \cos\lambda + X_y \cos\mu + X_z \cos\nu = X, \\ X_y \cos\lambda + Y_y \cos\mu + Y_z \cos\nu = Y, \\ X_z \cos\lambda + Y_z \cos\mu + Z_z \cos\nu = Z \end{cases}
$$

anzuwenden. Ferner modificiren sich in den Gleichungen (10.) und (11.) die rechts stehenden Integrale. Denn an Stelle des Elementes der Mantelfläche des Cylinders tritt jetzt das im Allgemeinen der z-Achse nicht mehr parallele Element der Staboberfläche. Um für das letztere Element einen Ausdruck zu gewinnen, lege man, wie im § 1, zwei benachbarte und zur z-Achse senkrechte Ebenen $z = \mathfrak{z}$ und $z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ durch den Stab, und bezeichne das Bogenelement der Schnittcurve der Staboberfläche mit der Ebene $z = \mathfrak{z}$ durch $d\mathfrak{s}$. Es sei P ein beliebiger Punkt der letzteren Schnittcurve, und PN die nach aussen gerichtete Normale der Staboberfläche in diesem Punkte. Zieht man von P aus parallel zur positiven z-Achse die Gerade PP', so ist $\angle NPP' = \nu$, und die Ebene durch PN und PP' steht auf dem durch P gehenden Bogenelement $d\mathfrak{s}$ senkrecht. In dieser Ebene sei PP'' die zur z-Achse normale Gerade. Dann ist $\angle NPP'' = \pm\left(\frac{\pi}{2} - \nu\right)$, wo das positive oder negative Vorzeichen gilt, jenachdem ν spitz oder stumpf ist; in allen Fällen besteht folglich die Gleichung $\cos NPP'' = \sin\nu$. Das gesuchte Oberflächenelement unterscheidet sich nun von dem Element der cylindrischen Oberfläche allein dadurch, dass der Factor $\frac{1}{\cos NPP''}$ hinzutritt. Wenn der Stab cylindrisch ist, hat in dem ringförmigen, durch die Ebenen $z = \mathfrak{z}$ und $z = \mathfrak{z} + d\mathfrak{z}$ ausgeschnittenen Oberflächenstücke das Flächenelement den Werth $d\mathfrak{z}\ d\mathfrak{s}$. Man lege auch im vorliegenden Falle durch $d\mathfrak{s}$ das der z-Achse parallele Flächenelement; dann ist der Winkel, den die zwei Flächenelemente mit einander bilden, gleich dem Winkel zwischen ihren Normalen, d. h. $= \angle NPP''$. Folglich hat man bei dem nicht cylindrischen Stabe das Oberflächenelement gleich $\frac{1}{\sin\nu}\, d\mathfrak{z}\ d\mathfrak{s}$ zu setzen. Der Nenner $\sin\nu$ dieses Werthes ist, da $\cos\nu$ als eine kleine Grösse vorausgesetzt wird, stets nur wenig von der Zahl 1 verschieden.

Die Einführung des Flächenelementes $\frac{1}{\sin\nu}\, d\mathfrak{z}\ d\mathfrak{s}$ statt $d\mathfrak{z}\ d\mathfrak{s}$ ist die einzige Aenderung, welche in (8.) und (12.) bei den Grössen f_1, g_1, h_1, F_1, G_1, sowie bei den übrigen in (13.) angegebenen Integralen, die über die Mantelfläche auszudehnen sind, eintritt. Die auf die Endfläche $z = l$ bezüglichen Integrale bleiben unverändert. Die von der Schwerkraft Γ herrührende, in (9.) vorkommende Componente ist jetzt durch

$$-D\Gamma\int_z^l d\mathfrak{z}\int\int dx\, dy$$

zu ersetzen; und die Beiträge, welche die Schwerkraft zu den Drehungsmomenten um die x- und z-Achse liefert, werden respective gleich den Integralen

$$D\Gamma\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\, d\mathfrak{z}\int\int dx\, dy,\quad -D\Gamma\int_z^l d\mathfrak{z}\int\int x\; dx\, dy.$$

Hiernach hat man f, g, h, F, G, H bei dem vorliegenden Problem als folgende Werthe zu definiren:

$$\begin{cases} f = f_1+f_2, & g = g_1+g_2, & h = h_1+h_2, \\ F = F_1+F_2+F_3, & G = G_1+G_2+G_3, & H = H_1+H_2, \end{cases}$$

$$(72.)\quad \begin{cases} f_1 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int X(\mathfrak{z})\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu}, \\ g_1 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int Y(\mathfrak{z})\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu}, \\ h_1 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int Z(\mathfrak{z})\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu}, \end{cases}$$

$$(73.)\quad \begin{cases} f_2 = \int\int X(l)\, dx\, dy, \\ g_2 = \int\int Y(l)\, dx\, dy - D\Gamma\int_z^l d\mathfrak{z}\int dx\, dy, \\ h_2 = \int\int Z(l)\, dx\, dy, \end{cases}$$

$$(74.)\quad \begin{cases} F_1 = -\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\, d\mathfrak{z}\int X(\mathfrak{z})\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu}, \\ G_1 = -\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\, d\mathfrak{z}\int Y(\mathfrak{z})\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu}, \end{cases}$$

$$(75.)\quad \begin{cases} F_2 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int x\, Z(\mathfrak{z})\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu} - (l-z)\int\int X(l)\, dx\, dy, \\ G_2 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int y\, Z(\mathfrak{z})\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu} - (l-\mathfrak{z})\int\int Y(l)\, dx\, dy \\ \qquad\qquad + D\Gamma\int_z^l (\mathfrak{z}-z)\, d\mathfrak{z}\int\int dx\, dy, \\ H_1 = \int_z^l d\mathfrak{z}\int \{x\, Y(\mathfrak{z}) - y\, X(\mathfrak{z})\}\,\dfrac{d\mathfrak{s}}{\sin\nu}, \end{cases}$$

$$(76.)\quad \begin{cases} F_3 = \int\int x\, Z(l)\, dx\, dy, \\ G_3 = \int\int x\, Z(l)\, dx\, dy, \\ H_2 = \int\int \{x\, Y(l) - y\, X(l)\}\, dx\, dy - D\Gamma\int_z^l d\mathfrak{z}\int\int x\, dx\, dy. \end{cases}$$

Für die so definirten Grössen sind die Gleichungen (10.) und (11.) auch bei dem nicht cylindrischen Stabe gültig.

Da $\sin\nu$ von der Zahl 1 nur um eine kleine Grösse abweicht, so bewirkt der hinzugekommene Factor $\frac{1}{\sin\nu}$ keinerlei Veränderung in den Ordnungen der obigen Ausdrücke. In Folge dessen gehören, wie früher, die Werthe f_1, g_1, h_1, F_1, G_1 zur 1sten, die Werthe f_2, g_2, h_2, F_2, G_2, H_1 zur 2ten, und F_3, G_3, H_2 zur 3ten Ordnung. Im Ganzen unterscheidet sich also, wenn man von der modificirten Definition der Grössen f, g, h, F, G, H absieht, das in diesem Paragraphen behandelte Problem von dem früheren nur dadurch, dass die Oberflächenbedingungen (71.) an Stelle von (3.) getreten, die Gleichungen (5.) und (6.) fortgefallen, und die Werthe A, B, C Functionen von z geworden sind.

Hieraus ergiebt sich, dass die Rechnungen, die im § 3 angestellt wurden, auch im Fall des nicht cylindrischen Stabes ihre vollständige Gültigkeit behalten. Denn dieselben gründen sich ausschliesslich auf die Klassification der einzelnen Grössen nach ihren Ordnungen, und diese Ordnungen haben sich nicht geändert. Im § 4, wo die Ausdrücke für u_0, v_0 entwickelt sind, kommen die Oberflächenbedingungen (3.) zur Anwendung, da sie die Gleichungen (30.) liefern. Indessen bleiben die Formeln des § 4 bei dem vorliegenden Problem ebenfalls sämmtlich in Kraft, weil die Gleichungen (30.) wiedererhalten werden. Die linken Seiten von (30.),

$$\begin{cases} [X_x]_{-1} \cos\lambda + [X_y]_{-1} \cos\mu, \\ [X_y]_{-1} \cos\lambda + [Y_y]_{-1} \cos\mu, \end{cases}$$

stellen die Summen der Terme — 1ter Ordnung dar, die in den 2 ersten Gleichungen (3.) vorkommen. Nun stehen allerdings auf den linken Seiten der Gleichungen (71.), welche hier statt (3.) anzuwenden sind, noch die Summanden $X_z \cos\nu$, $Y_z \cos\nu$. Aber da $\cos\nu$ als eine Grösse 1ster Ordnung vorausgesetzt wird, und die Componenten X_z, Y_z die Ordnung -1 haben, so gehen die Produkte $X_z \cos\nu$ und $Y_z \cos\nu$, als Grössen 0ter Ordnung, nicht in diejenigen Gleichungen ein, welche u_0, v_0 bestimmen. Daher sind die Bedingungen (30.), und in Folge dessen alle übrigen Gleichungen des § 4 auch hier gültig.

Im § 5 setzte man, um $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ als Functionen von z zu bestimmen, den Ausdruck (36.) der Kraft Z_z in die Gleichungen (10.) und (11.) ein. Da nun die Gleichungen (36.), (10.), (11.) ihre Gültigkeit behalten haben, so modificirt sich die Berechnung der Werthe $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ nur insofern, als A, B, C jetzt variabel sind, und die Gleichungen (5.) und (6.) nicht mehr bestehen. Man bezeiche durch A_1, B_1, K die über den Querschnitt zu nehmenden Integrale

$$(77.) \quad \begin{cases} A_1 = \iint x\,dx\,dy, \; B_1 = \iint y\,dx\,dy, \\ K = \iint xy\,dx\,dy, \end{cases}$$

die ebenfalls Functionen von z sind, und von denen A_1, B_1 zur 3ten, K zur 4ten Ordnung gehören. Dann ergeben sich für $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ statt der im § 5 abgeleiteten Gleichungen die folgenden:

$$A\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2} + K\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2} + A_1\frac{d\mathfrak{h}}{dz} = -(F_1+F_2),$$

$$K\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2} + B\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2} + B_1\frac{d\mathfrak{h}}{dz} = -(G_1+G_2),$$

$$A_1\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2} + B_1\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2} + C\frac{d\mathfrak{h}}{dz} = -h_1.$$

Gemäss (24.) ist

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2,\quad \mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2,\quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2,$$

wo $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}_1$ die — 3te, $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{h}_1$ die — 2te, $\mathfrak{h}_2$ die — 1te Ordnung haben. Nach Einsetzung dieser Werthe zerlegt sich jede der obigen Gleichungen in zwei andere, und man erhält:

$$(78.)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2} + K\dfrac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2} + A_1\dfrac{d\mathfrak{h}_1}{dz} = -F_1, \\ K\dfrac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2} + B\dfrac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2} + B_1\dfrac{d\mathfrak{h}_1}{dz} = -G_1, \\ A_1\dfrac{d^2\mathfrak{F}_1}{dz^2} + B_1\dfrac{d^2\mathfrak{G}_1}{dz^2} + C\dfrac{d\mathfrak{h}_1}{dz} = 0, \end{cases}$$

$$(79.)\quad \begin{cases} A\dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2} + K\dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2} + A_1\dfrac{d\mathfrak{h}_2}{dz} = -F_2, \\ K\dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2} + B\dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2} + B_1\dfrac{d\mathfrak{h}_2}{dz} = -G_2, \\ A_1\dfrac{d^2\mathfrak{F}_2}{dz^2} + B_1\dfrac{d^2\mathfrak{G}_2}{dz^2} + C\dfrac{d\mathfrak{h}_2}{dz} = -h_1. \end{cases}$$

Durch Auflösung der linearen Gleichungssysteme (78.), (79.) findet man $\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}$, $\frac{d\mathfrak{h}}{dz}$ und daher auch $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ als eindeutige Functionen von z. Die bei der unbestimmten Integration von $\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}$, $\frac{d\mathfrak{h}}{dz}$ auftretenden willkürlichen Constanten können, wie im § 5 bemerkt wurde, fortgelassen werden, da von denselben nur Terme der in (11.) der Einleitung angegebenen Beschaffenheit herrühren. — Die Substitution der aus (78.) und (79.) folgenden Werthe von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ in die Gleichungen (36.) und (38.) liefert für den nicht cylindrischen Stab eine angenäherte Lösung von derselben Art, wie sie im § 5 für den cylindrischen discutirt wurde. Die 2 Lösungen unterscheiden sich im Wesentlichen nur dadurch, dass hier eine jede der Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ gleichzeitig von den 3 Grössen F, G, h abhängt.

Die Differentialgleichungen, denen die Bestandtheile höherer Ordnung von ξ, η, ζ für Punkte des Innern bei dem vorliegenden Problem genügen, sind den in §§ 6 und 7 abgeleiteten Gleichungen völlig entsprechend. Man hat bei den Substitutionen für w und für u, v nur die Aenderung der Werthe von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ zu berücksichtigen, um für $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$, $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$ genau die nämlichen Differentialgleichungen wie früher zu erhalten. In (46.) und (57.) wurden, gemäss den Gleichungen (40.), die Werthe

$$-\frac{F_1+F_2}{A}, \quad -\frac{G_1+G_2}{B}, \quad -\frac{h_1}{C}$$

an Stelle von $\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}, \frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}, \frac{d\mathfrak{h}}{dz}$ gesetzt. Wendet man also bei dem Stabe mit variablem Querschnitt die zu (46.) und (57.) analogen Substitutionen an

$$(80.)\quad \mathfrak{w} = \frac{x^2+y^2}{4E}\left\{\frac{d^3\mathfrak{F}}{dz^3}x + \frac{d^3\mathfrak{G}}{dz^3}y + 2\frac{d^2\mathfrak{h}}{dz^2}\right\} - \frac{d\mathfrak{P}}{dz}x - \frac{d\mathfrak{Q}}{dz}y + \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_2 + \mathfrak{w},$$

$$(81.)\quad \begin{cases} u = -\dfrac{d^4\mathfrak{F}}{dz^4}\left(\dfrac{x^2}{E}+\dfrac{3y^2-x^2}{E_2}\right)\dfrac{x^2}{24} + \dfrac{d^2\mathfrak{T}}{dz^2}\dfrac{y^3}{6} \\ \quad -\dfrac{d^4\mathfrak{G}}{dz^4}\left(\dfrac{x^2+y^2}{E_1}+\dfrac{y^2}{2E_2}\right)\dfrac{xy}{6} + (a-2b)\dfrac{d^2\mathfrak{P}}{dz^2}\dfrac{x^2}{2a} \\ \quad -\left(\dfrac{a-b}{E}+\dfrac{b}{E_1}\right)\dfrac{d^3\mathfrak{h}}{dz^3}\dfrac{x^3}{6a} + \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2 + \mathfrak{u}, \\ v = -\dfrac{d^4\mathfrak{G}}{dz^4}\left(\dfrac{y^2}{E}+\dfrac{3x^2-y^2}{E_2}\right)\dfrac{y^2}{24} - \dfrac{d^2\mathfrak{T}}{dz^2}\dfrac{x^3}{6} \\ \quad -\dfrac{d^4\mathfrak{F}}{dz^4}\left(\dfrac{x^2+y^2}{E_1}+\dfrac{x^2}{2E_2}\right)\dfrac{xy}{6} + \left[(a-2b)\dfrac{d^2\mathfrak{Q}}{dz^2}+D\Gamma\right]\dfrac{y^2}{2a} \\ \quad -\left(\dfrac{a-b}{E}+\dfrac{b}{E_1}\right)\dfrac{d^3\mathfrak{h}}{dz^3}\dfrac{y^3}{6a} + \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{v}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ die durch (24.), (78.), (79.) bestimmten Ausdrücke bedeuten, so findet man für $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ wiederum die Gleichungen (47.), (48.), und für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{V}_2$ die Gleichungen (60.), (61.).

Es bleibt übrig, die Oberflächenbedingungen zu behandeln, welche sich im Fall des Stabes mit variablem Querschnitt für die letzterwähnten Unbekannten ergeben. Im § 6 wurden die auf $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ bezüglichen Gleichungen (53.), (54.) aus der 3ten Gleichung (3.) durch Abtrennung der Glieder — 1ter und 0ter Ordnung erhalten. An Stelle der 3ten Gleichung (3.)

$$X_z \cos\lambda + Y_z \cos\mu = Z$$

ist jetzt die 3te Gleichung (71.)

$$X_z \cos\lambda + Y_z \cos\mu + Z_z \cos\nu = Z$$

getreten, so dass man ausser den in (53.), (54.) vorkommenden Ausdrücken noch die Summanden 0ter und — 1ter Ordnung von $Z_z \cos\nu$ zu berücksichtigen hat. Aber $\cos\nu$ ist von der Ordnung 1, und die Terme — 2ter und — 1ter Ordnung von Z_z sind nach (36.) gleich dem Ausdruck

$$-\left(\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,x + \frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,y + \frac{d\mathfrak{h}}{dz}\right),$$

der in Folge der Gleichungen (78.) und (79.) eine bekannte Function von x, y, z ist. Daher sind die Terme — 1ter und 0ter Ordnung des Produkts $Z_z \cos\nu$ gegebene Werthe, welche man mit der rechts stehenden gegebenen Function Z vereinigen kann. Die von den Unbekannten $\mathfrak{W}_1$, $\mathfrak{W}_2$ abhängigen Ausdrücke sind genau dieselben, wie bei dem früheren Problem. Analog verhält es sich mit den Oberflächenbedingungen für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{B}_2$. Statt der Gleichungen (66.) und (67.) sind die aus (71.) folgenden Gleichungen

$$\begin{cases} [X_x]_0 \cos\lambda + [X_y]_0 \cos\mu = X - [X_z]_{-1} \cos\nu, \\ [X_y]_0 \cos\lambda + [Y_y]_0 \cos\mu = Y - [Y_z]_{-1} \cos\nu, \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} [X_x]_1 \cos\lambda + [X_y]_1 \cos\mu = -[X_z]_0 \cos\nu, \\ [X_y]_1 \cos\lambda + [Y_y]_1 \cos\mu = -[Y_z]_0 \cos\nu \end{cases}$$

anzuwenden. Nun hat man, wie im Vorhergehenden (§ 7) erörtert wurde, bei der Berechnung von $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{B}_2$ die Grössen $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$ als bekannt anzusehen, da deren Bestimmungsgleichungen bereits ermittelt worden sind. Ferner bleiben die Gleichungen (52.) für X_z und Y_z in Kraft, wenn nur die Definitionen von L_1, M_1, L_2, M_2 entsprechend der Substitution (80.) geändert werden. Folglich sind die Bestandtheile — 1ter und 0ter Ordnung von X_z, Y_z wiederum gleich den für bekannt geltenden Werthen:

$$b\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx} - L_1\right),\ b\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dy} - M_1\right),$$
$$b\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dx} - L_2\right),\ b\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dy} - M_2\right).$$

Somit unterscheiden sich auch bei diesen Oberflächenbedingungen die zwei Probleme des cylindrischen und des nicht cylindrischen Stabes nur durch die gegebenen rechten Seiten, während die Ausdrücke, welche die Unbekannten enthalten, hier nicht anders als in (66.), (67.) lauten.

Aus den angestellten Betrachtungen geht hervor, dass solange der Winkel ν, den die Oberflächennormale mit der z-Achse bildet, von einem Rechten nur um Werthe, welche die Ordnung von c haben, abweicht, die in den §§ 1—7 entwickelte Theorie sich ohne weitere Beschränkung direkt auf das Gleichgewicht des Stabes mit veränderlichem Querschnitt ausdehnen lässt. Die Modificationen, welche die Differentialgleichungen in diesem Falle erleiden, sind, wie sich aus dem Obigen ergiebt, von solcher Art, dass die Schwierigkeiten der Rechnung nicht grösser als bei dem cylindrischen Stabe werden.

Abschnitt II.

Gleichgewicht des cylindrischen vollen Stabes mit kreisförmigem Querschnitt.

§ 9. Bestimmung von $\mathfrak{W}_1$ für den kreisförmigen Querschnitt; Einführung neuer Variablen.

Die Differentialgleichungen, welche in den §§ 6 und 7 für die genauere Ermittlung der Vorgänge der Stabdeformation aufgestellt worden sind, sollen für die 2 Fälle, dass der cylindrische Stab einen vollen Kreis, und dass derselbe einen von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Ring zum Querschnitt hat, näher behandelt werden. Die in diesem Abschnitt ausgeführten Rechnungen betreffen das erstere der genannten beiden Probleme; das letztere bildet den Gegenstand der Betrachtungen des 3ten Abschnitts.

Von den unbekannten Bestandtheilen der Verschiebungen ξ, η, ζ wurde $\mathfrak{W}_1$ durch die im § 6 angegebene Differentialgleichung (47.)

$$\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy^2} = 0$$

und die Oberflächenbedingung (53.)

$$\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx} - L_1\right)\cos\lambda + \left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dy} - M_1\right)\cos\mu = 0$$

bestimmt. In dem vorliegenden Fall, wo der Querschnitt des Stabes ein voller Kreis mit dem Radius c sein soll, hat man für $\cos\lambda$ und $\cos\mu$ die Quotienten $\frac{x}{c}$ und $\frac{y}{c}$ einzusetzen. Nach Substitution der Werthe (50.) für L_1, M_1 und Berücksichtigung der Gleichung $x^2 + y^2 = c^2$ findet man

$$L_1 \cos\lambda + M_1 \cos\mu = \frac{c}{4A}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{E}\right)\left(\frac{dF_1}{dz}\,x + \frac{dG_1}{dz}\,y\right).$$

Die Hauptträgheitsmomente A und B haben bei dem kreisförmigen Querschnitt den gleichen Werth $\frac{\pi c^4}{4}$. Die Grösse $\mathfrak{W}_1$ ist somit bei dem vollen Kreiscylinder eine Function, welche für jeden zur Cylinderachse senkrechten Querschnitt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy^2} = 0$$

im Innern und die Bedingung

$$\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx}\frac{x}{c} + \frac{d\mathfrak{W}_1}{dy}\frac{y}{c} = \frac{c}{4A}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\left(\frac{dF_1}{dz}x + \frac{dG_1}{dz}y\right)$$

am Rande zu befriedigen hat. Man sieht leicht, dass diesen Anforderungen durch die Function

$$(1.)\quad \mathfrak{W}_1 = \frac{c^2}{4A}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\left(\frac{dF_1}{dz}x + \frac{dG_1}{dz}y\right) + \mathfrak{K},$$

wo $\mathfrak{K}$ eine willkürliche Function von z allein ist, genügt wird.

Zu den Bestandtheilen negativer Ordnung der Verschiebung ζ, welche nach (24.) und (25.) des § 3

$$W_1 + W_2 = -\frac{1}{E}\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz}x + \frac{d\mathfrak{G}}{dz}y + \mathfrak{h}\right)$$

lauten, tritt also bei dem Stab mit kreisförmigem Querschnitt der folgende Ausdruck 0^{ter} Ordnung

$$\frac{1}{4A}\left\{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)c^2 - \frac{x^2+y^2}{E}\right\}\left\{\frac{dF_1}{dz}x + \frac{dG_1}{dz}y\right\}$$
$$-\frac{d\mathfrak{P}_1}{dz}x - \frac{d\mathfrak{Q}_1}{dz}y + \mathfrak{K}$$

hinzu, wie sich aus der Gleichung (46.) des vorigen Abschnitts nach Berücksichtigung der Ordnungen der daselbst vorkommenden Grössen und nach Anwendung der Gleichungen (35.) ergiebt. Wenn man sich nur die Verschiebung $\zeta = W_1 + W_2$ ausgeführt denkt, so liegen, wie im § 5 (Gleichung (43.)) erörtert wurde, die materiellen Theilchen, die sich anfänglich in einer zur z-Achse senkrechten Ebene befinden, nach der Deformation des Stabes wieder in einer Ebene. Dies gilt auch noch, wenn von den oben erwähnten zur 0^{ten} Ordnung gehörigen Summanden von ζ die folgenden

$$\frac{c^2}{4A}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\left(\frac{dF_1}{dz}x + \frac{dG_1}{dz}y\right) - \frac{d\mathfrak{P}_1}{dz}x - \frac{d\mathfrak{Q}_1}{dz}y + \mathfrak{K}$$

zu $W_1 + W_2$ hinzugenommen werden. Dagegen drückt der Term

$$-\frac{x^2+y^2}{4AE}\left\{\frac{dF_1}{dz}x + \frac{dG_1}{dz}y\right\}$$

eine der z-Achse parallele Verrückung aus, durch welche ein beliebiger Querschnitt $z = z_0$ in eine Fläche 3^{ten} Grades verwandelt wird. Geht man von dem Querschnitt $z = z_0$ aus, so giebt ζ die der z-Achse parallele Coordinate an; dann wird durch die xz-Ebene die Curve $\zeta = \text{Const.}\, x^3$ aus der Fläche 3ten Grades ausgeschnitten. Zu je zwei correspondirenden Punkten (x, y) und $(-x, -y)$ des Querschnitts $z = z_0$ gehören gleiche und entgegengesetzte Werthe der obigen Ausweichung.

Für die Grössen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$, durch welche die unbekannten Bestandtheile 1ster Ordnung der Verschiebungen ξ und η bezeichnet wurden, fand man im § 7 die Differentialgleichungen (60.), welche nach Substitution des hier erhaltenen Werthes (1.) von $\mathfrak{W}_1$ die Gestalt

$$\begin{cases} a\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right)+b\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right) \\ \qquad = -(a-b)\dfrac{c^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\dfrac{d^2F_1}{dz^2}, \\ a\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right)-b\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}_1}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right) \\ \qquad = -(a-b)\dfrac{c^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\dfrac{d^2G_1}{dz^2} \end{cases}$$

annehmen. Man verbinde die Variablen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ mit zwei neuen Unbekannten $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ durch die Relationen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}'-\dfrac{c^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\dfrac{d^2G_1}{dz^2}\,xy, \\ \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}'-\dfrac{c^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\dfrac{d^2F_1}{dz^2}\,xy. \end{cases}$$

Dann ergeben sich für $\mathfrak{U}'$ und $\mathfrak{V}'$ die einfacheren Differtialgleichungen

$$(3.)\quad \begin{cases} a\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dy}\right)+b\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dx}\right)=0, \\ a\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dy}\right)-b\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dx}\right)=0. \end{cases}$$

Zur Integration derselben führt man Polarcoordinaten an Stelle der gradlinigen Coordinaten x, y ein; es sei

$$(4.)\quad x = r\cos s,\quad y = r\sin s,$$

so dass r in dem betrachteten Querschnitt den Radius vector, und s den Winkel zwischen r und der positiven x-Achse angiebt. Man ersetzt ferner die Grössen $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$, welche Verschiebungen der Theilchen parallel zur x- und y-Achse darstellen, durch zwei andere Verschiebungscomponenten ϱ, σ, von denen die erstere die Richtung des wachsenden Radius r hat, die letztere zu r senkrecht steht und im Sinne des wachsenden Winkels s gerichtet ist. Dies geschieht bekanntlich durch die Substitution:

$$(5.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}' = \varrho\cos s - \sigma\sin s, \\ \mathfrak{V}' = \varrho\sin s + \sigma\cos s. \end{cases}$$

In entsprechender Weise führt man statt der Componenten X, Y der gegebenen, an der Staboberfläche wirkenden Druckkräfte zwei neue Componenten R, S ein, die zu ϱ, respective σ parallel gerichtet sind. R und S werden demnach durch die Gleichungen

$$(6.)\quad \begin{cases} X = R\cos s - S\sin s, \\ Y = R\sin s + S\cos s, \end{cases}$$

oder

$$(7.)\quad \begin{cases} R = X\cos s + Y\sin s, \\ S = -X\sin s + Y\cos s \end{cases}$$

definirt.

§ 10. Integration der Gleichungen für ϱ, σ.

In die Gleichungen (3.) substituire man zunächst die aus (4.) und (5.) folgenden Werthe

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{U}'}{dx} + \dfrac{d\mathfrak{V}'}{dy} = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d(r\varrho)}{dr} + \dfrac{d\sigma}{ds}\right], \\ \dfrac{d\mathfrak{U}'}{dy} - \dfrac{d\mathfrak{V}'}{dx} = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d\varrho}{ds} - \dfrac{d(r\sigma)}{dr}\right]. \end{cases}$$

Sodann addire man die Gleichungen (3.), nachdem man die erste durch $\cos s$, die zweite durch $\sin s$, respective die erste durch $-\sin s$, die zweite durch $\cos s$ multiplicirt hat, wobei die Formeln

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx}\,\dfrac{dx}{dr} + \dfrac{d\varphi}{dy}\,\dfrac{dy}{dr} = \dfrac{d\varphi}{dr}, \\ \dfrac{d\varphi}{dx}\,\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{d\varphi}{dy}\,\dfrac{dy}{ds} = \dfrac{d\varphi}{ds}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dr} = \cos s, \quad \dfrac{dx}{ds} = -r\sin s, \\ \dfrac{dy}{dr} = \sin s, \quad \dfrac{dy}{ds} = r\cos s \end{cases}$$

zur Anwendung kommen. Auf diese Weise entstehen für ϱ, σ die Differentialgleichungen:

$$(8.)\quad \begin{cases} a\,\dfrac{d}{dr}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d(r\varrho)}{dr} + \dfrac{d\sigma}{ds}\right]\right\} + \dfrac{b}{r}\,\dfrac{d}{ds}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d\varrho}{ds} - \dfrac{d(r\sigma)}{dr}\right]\right\} = 0, \\ \dfrac{a}{r}\,\dfrac{d}{ds}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d(r\varrho)}{dr} + \dfrac{d\sigma}{ds}\right]\right\} - b\,\dfrac{d}{dr}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d\varrho}{ds} - \dfrac{d(r\sigma)}{dr}\right]\right\} = 0. \end{cases}$$

Um dieselben zu integriren, sucht man zunächst partikuläre Integrale auf, indem man

$$\varrho = \mathfrak{A}r^m\cos ns, \quad \sigma = \mathfrak{A}'r^m\sin ns$$

setzt, wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, m, n nicht von r, s abhängen sollen. Man erhält dann

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d(r\varrho)}{dr}+\frac{d\sigma}{ds}\right]=[(m+1)\mathfrak{A}+n\mathfrak{A}']\,r^{m-1}\cos ns,$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d\varrho}{ds}-\frac{d(r\sigma)}{dr}\right]=-[n\mathfrak{A}+(m+1)\mathfrak{A}']\,r^{m-1}\sin ns,$$

so dass die Gleichungen (8.) nach Heraushebung des Factors $r^{m-2}\cos ns$, bezüglich $r^{m-2}\sin ns$, die folgenden Beziehungen zwischen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, m, n liefern:

$$\mathfrak{A}\,[a(m^2-1)-bn^2]+\mathfrak{A}'n\,[a(m-1)-b(m+1)]=0,$$
$$\mathfrak{A}n\,[b(m-1)-a(m+1)]+\mathfrak{A}'\,[b(m^2-1)-an^2]=0.$$

Wenn hieraus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ eliminirt werden, ergiebt sich zwischen m und n die Beziehung

$$\{(m+1)^2-n^2\}\ \{(m-1)^2-n^2\}=0$$

oder

$$\begin{cases} m+1=\pm n,\\ m-1=\pm n.\end{cases}$$

Da aber das partikuläre Integral, das zu einem Werthe $-n$ gehört, identisch mit dem zum Werthe $+n$ gehörigen ist, so braucht man nur die positiven Werthe von n (inclusive des Werthes $n=0$) zu berücksichtigen. Für m sind also die zwei Werthe

$$m=n-1,\quad m=n+1,$$

wo $n\geqq 0$ ist, einzusetzen. Nimmt man $m=n-1$, so entsteht die Gleichung

$$n\,[a(n-2)-bn]\ [\mathfrak{A}+\mathfrak{A}']=0,$$

welcher durch

$$\mathfrak{A}'=-\mathfrak{A}$$

genügt wird. Ausgenommen ist der Fall $n=0$, wo $\mathfrak{A}'$ fortfällt, während $\mathfrak{A}$ beliebig bleibt. Indem man der Grösse $\mathfrak{A}$ den Index n beifügt, um die zu verschiedenen Werthen von n gehörigen Coefficienten von einander zu unterscheiden, erhält man die dem Werthe $m=n-1$ entsprechende partikuläre Lösung

$$\varrho=\mathfrak{A}_n r^{n-1}\cos ns,\quad \sigma=-\mathfrak{A}_n r^{n-1}\sin ns.$$

Wird zweitens der Werth $m=n+1$ substituirt, so entsteht zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die Relation

$$\mathfrak{A}\left(\frac{n+2}{b}-\frac{n}{a}\right)-\mathfrak{A}'\left(\frac{n+2}{a}-\frac{n}{b}\right)=0.$$

Man genügt derselben, indem man

$$\mathfrak{A}=\left(\frac{n+2}{a}-\frac{n}{b}\right)\mathfrak{C}_n,\quad \mathfrak{A}'=\left(\frac{n+2}{b}-\frac{n}{a}\right)\mathfrak{C}_n$$

setzt, wo $\mathfrak{C}_n$ eine beliebige, von r und s unabhängige Grösse bedeutet, so dass ϱ und σ die Werthe

$$\varrho = \left(\frac{n+2}{a} - \frac{n}{b}\right) \mathfrak{C}_n r^{n+1} \cos ns,$$

$$\sigma = \left(\frac{n+2}{b} - \frac{n}{a}\right) \mathfrak{C}_n r^{n+1} \sin ns,$$

annehmen.

Ausser diesen Ausdrücken von ϱ, σ, in denen n eine beliebige positive Zahl bedeutet, gewinnt man weitere partikuläre Integrale mittelst der Substitution

$$\varrho = \mathfrak{B} r^m \sin ns, \quad \sigma = -\mathfrak{B}' r^m \cos ns,$$

die zu ganz analogen Rechnungen führt. Zwischen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ bestehen dieselben Beziehungen, welche oben zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ erhalten wurden; daher ergeben sich jetzt für ϱ und σ die Werthe:

$$\begin{cases} \varrho = \mathfrak{B}_n r^{n-1} \sin ns, \\ \sigma = \mathfrak{B}_n r^{n-1} \cos ns, \end{cases}$$

und

$$\varrho = \left(\frac{n+2}{a} - \frac{n}{b}\right) \mathfrak{D}_n r^{n+1} \sin ns,$$

$$\sigma = -\left(\frac{n+2}{b} - \frac{n}{a}\right) \mathfrak{D}_n r^{n+1} \cos ns,$$

wo $\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{D}_n$ willkürliche Grössen bedeuten, die von r, s nicht abhängen.

Durch Summation der verschiedenen partikulären Integrale findet man als die allgemeine Lösung der Gleichungen (8.) die folgenden Ausdrücke von ϱ und σ:

$$(9.)\quad \begin{cases} \varrho = \sum\limits_{(n)} r^{n-1} \{\mathfrak{A}_n \cos ns + \mathfrak{B}_n \sin ns\} \\ \qquad + \sum\limits_{(n)} \left(\frac{n+2}{a} - \frac{n}{b}\right) r^{n+1} \{\mathfrak{C}_n \cos ns + \mathfrak{D}_n \sin ns\}, \\ \sigma = -\sum\limits_{(n)} r^{n-1} \{\mathfrak{A}_n \sin ns - \mathfrak{B}_n \cos ns\} \\ \qquad + \sum\limits_{(n)} \left(\frac{n+2}{b} - \frac{n}{a}\right) r^{n+1} \{\mathfrak{C}_n \sin ns - \mathfrak{D}_n \cos ns\}. \end{cases}$$

Zur Ermittlung der Grössen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ hat man die auf $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$ bezüglichen Oberflächenbedingungen (70.) des § 7 anzuwenden.

§ 11. Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$.

In den Rechnungen des vorigen Paragraphen sind $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ als die Integrationsconstanten anzusehen; indessen stellen dieselben, da bei der Integration nur x und y als Variable vorkommen, willkürliche Functionen von z dar. Man drückt, um sie zu bestimmen, in den Oberflächenbedingungen (70.) des § 7 die Grössen $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, x, y gemäss den Gleichungen (2.), (4.), (5.) durch ϱ, σ, r, s aus. Ausserdem transformirt man die genannten Bedingungen in der Art, dass man die erste Gleichung (70.) mit $\cos s$, respective $-\sin s$, die zweite mit $\sin s$, respective $\cos s$, multiplicirt und dieselben addirt. Dann entstehen, nach Berücksichtigung von (7.), die Gleichungen

$$(10.)\quad \begin{cases} a\,\dfrac{d\varrho}{dr}+\dfrac{a-2b}{r}\left(\dfrac{d\sigma}{ds}+\varrho\right)=\mathfrak{R}, \\ \dfrac{b}{r}\,\dfrac{d\varrho}{ds}+br\,\dfrac{d}{dr}\,\dfrac{\sigma}{r}=\mathfrak{S}, \end{cases}$$

woselbst $r=c$ zu setzen ist, und durch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ die Functionen

$$(11.)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}=R+\dfrac{c^3}{2A}\left(1+\dfrac{b}{E}\right)\sin 2s\left(\dfrac{d^2F_1}{dz^2}\sin s+\dfrac{d^2G_1}{dz^2}\cos s\right) \\ \qquad -\Big[\mathfrak{L}\cos^2 s+\mathfrak{M}\sin^2 s+\mathfrak{N}\sin 2s\Big]_{r=c} \\ \mathfrak{S}=S+\dfrac{c^3}{4A}\left(1+\dfrac{b}{E}\right)\left(\dfrac{d^2F_1}{dz^2}\sin 3s+\dfrac{d^2G_1}{dz^2}\cos 3s\right) \\ \qquad +\left[\dfrac{\mathfrak{L}-\mathfrak{M}}{2}\sin 2s-\mathfrak{N}\cos 2s\right]_{r=c} \end{cases}$$

bezeichnet sind.

Die Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, die von s und z abhängen, werden in Bezug auf s nach dem Fourier'schen Satz entwickelt. Man habe die Entwicklungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \mathfrak{R}=\tfrac{1}{2}\alpha_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\big\}\,\alpha_n\cos ns+\beta_n\sin ns\big\{, \\ \mathfrak{S}=\tfrac{1}{2}\delta_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\big\}\,\gamma_n\sin ns+\delta_n\cos ns\big\{, \end{cases}$$

deren Coefficienten α_n, β_n, γ_n, δ_n von z allein abhängen. Der Umstand, dass in $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (siehe die Gleichungen (68.) des § 7) die bisher noch unbekannten Functionen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$ von z vorkommen, bewirkt, dass in (12.) einzelne Entwicklungscoefficienten vorläufig unbekannt bleiben und erst durch die späteren Rechnungen bestimmt werden.

Für ϱ und σ hat man die Ausdrücke (9.) in die linken Seiten von (10.) einzusetzen. Um letztere für $r=c$ mit den Reihen (12.) identisch zu machen, beschränkt man n auf ganzzahlige Werthe. Ferner dürfen, da der Querschnitt des Stabes nach der Voraussetzung ein voller Kreis ist, negative Potenzen von r in den Summen (9.) nicht enthalten sein; denn dieselben würden für $r=0$ den Verschiebungen ϱ und σ unendliche Werthe verleihen. Somit sind in jeder der beiden Gleichungen (9.) die Grenzen $n=1$ und $n=\infty$ für die erste Summe und die Grenzen $n = -1$ und $n = \infty$ für die zweite anzuwenden. Man bemerke jedoch, dass die zweiten Summen für $n = -1$ die Terme

$$\varrho = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(\mathfrak{C}_{-1} \cos s - \mathfrak{D}_{-1} \sin s),$$

$$\sigma = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(\mathfrak{C}_{-1} \sin s + \mathfrak{D}_{-1} \cos s)$$

liefern, welche mit den für $n = 1$ von den ersten Summen herrührenden Termen

$$\varrho = \mathfrak{A}_1 \cos s + \mathfrak{B}_1 \sin s,$$

$$\sigma = -(\mathfrak{A}_1 \sin s - \mathfrak{B}_1 \cos s)$$

identisch sind, da $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_{-1}$, $\mathfrak{D}_{-1}$ willkürliche Grössen bezeichnen. Daher kann man, ohne die Allgemeinheit zu beschränken, den Werth $n = 0$, statt $n = -1$, als untere Grenze der zweiten Summen nehmen. Die Gleichungen (10.) gehen durch Substitution der Werthe (9.) für ϱ und σ, sowie des Werthes c für r, in die folgenden über:

$$4\,\frac{a-b}{a}\,\mathfrak{C}_0$$

$$+\,2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\begin{array}{l} \left[b(n-1)\,c^{n-2}\mathfrak{A}_n - \frac{a-b}{a}(n+1)(n-2)\,c^n\,\mathfrak{C}_n\right]\cos ns \\ +\left[b(n-1)\,c^{n-2}\mathfrak{B}_n - \frac{a-b}{a}(n+1)(n-2)\,c^n\,\mathfrak{D}_n\right]\sin ns \end{array}\right\} = \mathfrak{R},$$

$$2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\begin{array}{l} \left[-b(n-1)\,c^{n-2}\mathfrak{A}_n + \frac{a-b}{a}\,n(n+1)\,c^n\,\mathfrak{C}_n\right]\sin ns \\ +\left[b(n-1)\,c^{n-2}\mathfrak{B}_n - \frac{a-b}{a}\,n(n+1)\,c^n\,\mathfrak{D}_n\right]\cos ns \end{array}\right\} = \mathfrak{S}.$$

Man führt hierin für $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ die Reihen (12.) ein und setzt die Coefficienten von $\cos ns$ und $\sin ns$ rechts und links für ein beliebiges n einander gleich. Auf diese Weise entsteht für $n > 0$ das Gleichungssystem

$$(13.)\quad \left\{\begin{array}{l} b(n-1)c^{n-2}\mathfrak{A}_n - \frac{a-b}{a}(n+1)(n-2)\,c^n\,\mathfrak{C}_n = \tfrac{1}{2}\alpha_n, \\ -b(n-1)\,c^{n-2}\mathfrak{A}_n + \frac{a-b}{a}\,n(n+1)\,c^n\,\mathfrak{C}_n = \tfrac{1}{2}\gamma_n, \\ b(n-1)\,c^{n-2}\mathfrak{B}_n - \frac{a-b}{a}(n+1)(n-2)\,c^n\,\mathfrak{D}_n = \tfrac{1}{2}\beta_n, \\ b(n-1)c^{n-2}\mathfrak{B}_n - \frac{a-b}{a}\,n(n+1)\,c^n\,\mathfrak{D}_n = \tfrac{1}{2}\delta_n, \end{array}\right.$$

in welchem die beiden letzten Gleichungen aus den beiden ersten entstehen, wenn man $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{C}_n$, α_n, γ_n, bezüglich durch $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{D}_n$, β_n, $-\delta_n$ ersetzt. Mit Ausnahme des Falles $n = 1$ ergeben sich aus (13.) die Werthe

$$(14.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_n = \dfrac{n\alpha_n + (n-2)\gamma_n}{4b(n-1)c^{n-2}}, & \mathfrak{C}_n = \dfrac{a(\alpha_n+\gamma_n)}{4(a-b)(n+1)c^n}, \\ \mathfrak{B}_n = \dfrac{n\beta_n - (n-2)\delta_n}{4b(n-1)c^{n-2}}, & \mathfrak{D}_n = \dfrac{a(\beta_n-\delta_n)}{4(a-b)(n+1)c^n}. \end{cases}$$

Für $n = 1$ bleiben $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ willkürlich, da ihre Factoren in (13.) verschwinden. Die Coefficienten $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ haben nach (13.) die Werthe

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{a\alpha_1}{4(a-b)c}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{a\beta_1}{4(a-b)c},$$

während gleichzeitig für α_1, γ_1, β_1, δ_1 die Bedingungen

$$\alpha_1 - \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 + \delta_1 = 0$$

erhalten werden. Man erkennt, dass bei Berücksichtigung der letzteren Gleichungen die für $n > 1$ geltenden Formeln (14.) auch die Werthe von $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1$ richtig angeben. Ein zu $n = 0$ gehöriges, also von s unabhängiges Glied kommt nur in der ersten Oberflächengleichung vor; es folgt hieraus einerseits für $\mathfrak{C}_0$ die Bestimmung

$$\mathfrak{C}_0 = \frac{a\alpha_0}{8(a-b)},$$

andererseits die Gleichung

$$\delta_0 = 0.$$

Für die Entwicklungscoefficienten von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ haben sich demnach die Bedingungen

$$(15.)\quad \alpha_1 - \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 + \delta_1 = 0, \quad \delta_0 = 0$$

ergeben; im Folgenden wird gezeigt werden, dass dieselben stets erfüllt sind.

Zu den unbestimmt bleibenden Ceefficienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ gehören nach (9.) die Summanden

$$\begin{cases} \varrho = \mathfrak{A}_1 \cos s + \mathfrak{B}_1 \sin s, \\ \sigma = -\mathfrak{A}_1 \sin s + \mathfrak{B}_1 \cos s, \end{cases}$$

denen gemäss (5.) die Werthe

$$\mathfrak{U}_1 = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{B}_1$$

entsprechen. Dieselben geben folglich nur eine constante Verschiebung parallel der x-, respective der y-Achse an. Ausser $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ ist noch die Grösse $\mathfrak{D}_0$ willkürlich, da sie in (9.), aber nicht in den Oberflächenbedingungen vorkommt. Von ihr hängt in (9.) das Glied

$$\sigma = -\frac{2\mathfrak{D}_0}{b}\, r$$

ab, welches eine constante kleine Drehung des betrachteten Cylinderquerschnittes um die z-Achse ausdrückt und nach (5.) die Werthe

$$\begin{cases} \mathfrak{U}_1 = \frac{2\mathfrak{D}_0}{b}\, r \sin s = \frac{2\mathfrak{D}_0}{b}\, y, \\ \mathfrak{V}_1 = -\frac{2\mathfrak{D}_0}{b}\, r \cos s = -\frac{2\mathfrak{D}_0}{b}\, x \end{cases}$$

liefert. In den obigen Rechnungen sind somit nur Terme, welche den in (11.) der Einleitung erwähnten analog sind, willkürlich geblieben.

§ 12. Berechnung der Componente Z_z.

Die für $\mathfrak{W}_1$, ϱ, σ abgeleiteten Werthe sollen dazu angewendet werden, die Druckkraft Z_z mit der Genauigkeit zu bestimmen, dass noch die Terme 0ter Ordnung vollständig angegeben werden. In die Formel (41.) des § 5

$$Z_z = \frac{F_1 + F_2}{A}\, x + \frac{G_1 + G_2}{B}\, y + \frac{h_1}{C} + a\,\frac{dw}{dz} + (a - 2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)$$

hat man zunächst die durch (46), (57.) der §§ 6, 7 und (2.), (5.) des § 9 für w, u, v substituirten Ausdrücke einzuführen, sodann die Variablen $\mathfrak{W}_1$, ϱ, σ gleich den für den kreisförmigen Querschnitt ermittelten Werthen (1.), (9.), (14.) zu setzen. Es ergiebt sich hierdurch, wenn man die Gleichheit von A und B beachtet, und gemäss (69.) des § 7 zur Abkürzung

$$\frac{d^2 F_1}{dz^2} = F_1'', \quad \frac{d^2 G_1}{dz^2} = G_1'',$$
$$\frac{d^2 \mathfrak{P}_1}{dz^2} = \mathfrak{P}_1'', \quad \frac{d^2 \mathfrak{Q}_1}{dz^2} = \mathfrak{Q}_1'',$$

sowie

$$\frac{d\mathfrak{K}}{dz} = \mathfrak{K}'$$

setzt, für die Componente Z_z die Gleichung:

$$(16.)\quad Z_z = \frac{F_1 + F_2}{A}\, x + \frac{G_1 + G_2}{A}\, y + \frac{h_1}{C} + (a - 2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) + a(\mathfrak{K}' - \mathfrak{P}_1'' x - \mathfrak{Q}_1'' y) + \frac{a}{4}\,\frac{F_1'' x + G_1'' y}{A}\left\{c^2\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{E}\right) - \frac{x^2 + y^2}{E}\right\}.$$

Hierin ist für $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$ die Summe

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=$$
$$\frac{1}{r}\left\{\frac{d(r\varrho)}{dr}+\frac{d\sigma}{ds}\right\}+\frac{a-2b}{a}\left(\mathfrak{P}_1''x+\mathfrak{Q}_1''y\right)$$
$$+\frac{F_1''x}{4A}\left\{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{E_2}\right)\frac{x^2}{3}+\left(\frac{2}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)y^2\right\}$$
$$+\frac{G_1''y}{4A}\left\{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{E_2}\right)\frac{y^2}{3}+\left(\frac{2}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)x^2\right\}$$
$$-\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\frac{F_1''x+G_1''y}{A}+\psi$$

zu setzen, in welcher die Gesammtheit der Glieder von positiver Ordnung durch ψ bezeichnet ist. Der Ausdruck (16.) von Z_z nimmt eine einfachere Gestalt an, wenn man diejenigen Bestandtheile von $\frac{1}{r}\left\{\frac{d(r\varrho)}{dr}+\frac{d\sigma}{ds}\right\}$, welche F_1'', G_1'', $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{Q}_1''$ enthalten, von den übrigen abtrennt. Zufolge von (9.) und (14.) ist

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{d(r\varrho)}{dr}+\frac{d\sigma}{ds}\right\}=$$
$$\frac{\alpha_0}{2(a-b)}+\frac{1}{a-b}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^n\left\{(\alpha_n+\gamma_n)\cos ns+(\beta_n-\delta_n)\sin ns\right\}.$$

Jeder der Coefficienten α_n, β_n, γ_n, δ_n besteht aber aus zwei wesentlich von einander verschiedenen Theilen. Denn in den Functionen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$, welche in (12.) nach dem Fourrier'schen Satz entwickelt wurden, kommen nach (11.) einerseits die gegebenen Oberflächenkräfte R und S selbst, andererseits gewisse von den Functionen F_1, G_1 etc. abhängige Summanden vor. Man setzt nun für ein beliebiges n

$$(17.)\quad\left\{\begin{array}{l}\alpha_n=\alpha_n'+\alpha_n'',\quad\beta_n=\beta_n'+\beta_n'',\\ \gamma_n=\gamma_n'+\gamma_n'',\quad\delta_n=\delta_n'+\delta_n'',\end{array}\right.$$

indem man durch α_n', β_n', γ_n', δ_n' die bezüglichen Entwicklungscoefficienten der Oberflächenkräfte R und S, durch α_n'', β_n'', γ_n'', δ_n'' die der übrigen Bestandtheile von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Die Entwicklung für R, S soll also

$$(18.)\quad\left\{\begin{array}{l}R=\tfrac{1}{2}\alpha_0'+\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}(\alpha_n'\cos ns+\beta_n'\sin ns),\\[2ex] S=\tfrac{1}{2}\delta_0'+\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}(\gamma_n'\sin ns+\delta_n'\cos ns)\end{array}\right.$$

lauten, wo dann α_n', β_n', γ_n', δ_n' gegebene Functionen von z sind; und andererseits setzt man:

$$\frac{c^3}{2A}\left(1+\frac{b}{E}\right)\sin 2s\,(F_1''\sin s+G_1''\cos s)$$
$$-\Big[\mathfrak{L}\cos^2 s+\mathfrak{M}\sin^2 s+\mathfrak{N}\sin 2s\Big]_{r=c}$$
$$=\tfrac{1}{2}\alpha_0''+\sum_{n=1}^{n=\infty}\{\alpha_n''\cos ns+\beta_n''\sin ns\},$$
$$\frac{c^3}{4A}\left(1+\frac{b}{E}\right)(F_1''\sin 3s+G_1''\cos 3s)$$
$$+\Big[\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{M}}{2}\sin 2s-\mathfrak{N}\cos 2s\Big]_{r=c}$$
$$=\tfrac{1}{2}\delta_0''+\sum_{n=1}^{n=\infty}\{\gamma_n''\sin ns+\delta_n''\cos ns\}.$$

Von den Coefficienten α_n'', β_n'', γ_n'', δ_n'' sind nur die zu einem Index $n \leqq 5$ gehörigen von Null verschieden, da die zu entwickelnde Function den 5ten Grad in Bezug auf x und y hat. Um die genannten Coefficienten zu berechnen, hat man die in (68.) des § 7 definirten Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ durch Einführung der Polarcoordinaten r, s zu transformiren, und findet dann nach Anwendung der Relationen (15.) des § 1, die zwischen den Elasticitätsconstanten gelten, die folgenden Gleichungen:

$$\alpha_0''=0,$$
$$\alpha_1''+\gamma_1''=\frac{c^2}{12}\left(2+\frac{3b}{E}\right)\frac{F_1''}{A}+\frac{(a-2b)\,bc}{a}\mathfrak{P}_1'',$$
$$\alpha_3''+\gamma_3''=-\frac{c^3}{24}\,\frac{(a-b)\,(a-2b)}{a\,(3a-4b)}\,\frac{F_1''}{A},$$
$$\beta_1''-\delta_1''=\frac{c^3}{12}\left(2+\frac{3b}{E}\right)\frac{G_1''}{A}+\frac{(a-2b)\,bc}{a}\mathfrak{Q}_1'',$$
$$\beta_3''-\delta_3''=\frac{c^3}{24}\,\frac{(a-b)\,(a-2b)}{a\,(3a-4b)}\,\frac{G_1''}{A}.$$

Alle übrigen Binome $\alpha_n''+\gamma_n''$, $\beta_n''-\delta_n''$ sind gleich Null. Mit Rücksicht auf das Folgende (§ 15) sei noch erwähnt, dass

$$\left\{\begin{aligned}\alpha_1''-\gamma_1''&=\frac{c^3}{4}\,\frac{F_1''}{A},\\ \beta_1''+\delta_1''&=\frac{c^3}{4}\,\frac{G_1''}{A},\\ \delta_0''&=\frac{bc^2}{2}\mathfrak{T}_1''\end{aligned}\right.$$

erhalten wird. Durch Substitution der obigen Werthe ergiebt sich, wenn man zur Abkürzung durch Φ die Summme

$$(19.)\quad \Phi = \tfrac{1}{2}\alpha'_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^n \left\{ (\alpha'_n + \gamma'_n) \cos ns + (\beta'_n - \delta'_n) \sin ns \right\}$$

bezeichnet, die Gleichung

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{d(r\varrho)}{dr} + \frac{d\sigma}{ds}\right\} =$$

$$\frac{\Phi}{a-b} + \frac{b(a-2b)}{a(a-b)}(\mathfrak{P}''_1 x + \mathfrak{Q}''_1 y)$$

$$+ \frac{c^2}{4}\left\{\frac{b+E}{(a-b)E} - \frac{1}{3(a-b)}\right\}\frac{F''_1 x + G''_1 y}{A}$$

$$- \frac{a-2b}{24a(3a-4b)A}\left\{F''_1 x(x^2-3y^2) + G''_1 y(y^2-3x^2)\right\}.$$

In Folge dessen ist

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = \frac{\Phi}{a-b} + \frac{a-2b}{a-b}(\mathfrak{P}''_1 x + \mathfrak{Q}''_1 y) + \psi$$

$$+ \frac{2a-3b}{8b(3a-4b)}\,\frac{x^2+y^2}{A}\,(F''_1 x + G''_1 y)$$

$$- \frac{c^2}{4(a-b)}\left\{(a-2b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{E}\right) + \frac{1}{3}\right\}\frac{F''_1 x + G''_1 y}{A}.$$

Den auf die Summanden -2ter, -1ter und 0ter Ordnung beschränkten Ausdruck der Componente Z_z bezeichne man durch (Z_z). Derselbe ergiebt sich aus (16.), wenn man in dem Werth von $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$ den Term ψ fortlässt. Durch Substitution des letzterhaltenen Ausdrucks von $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$ erhält man aus (16.) nach einigen einfachen Transformationen für (Z_z) die Gleichung:

$$(20.)\quad (Z_z) = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{F_1+F_2}{A}\,x + \dfrac{G_1+G_2}{A}\,y + \dfrac{h_1}{C} \\[2ex] + a\mathfrak{K}' - E(\mathfrak{P}''_1 x + \mathfrak{Q}''_1 y) + \dfrac{2E}{E_1}\Phi \\[2ex] + \left\{\left(5 + \dfrac{2b}{E}\right)\dfrac{c^2}{12} - \left(1 + \dfrac{2b}{E}\right)\dfrac{x^2+y^2}{8}\right\}\dfrac{F''_1 x + G''_1 y}{A}. \end{array}\right.$$

Es bleibt übrig, die unbekannten, von z abhängigen Grössen $\mathfrak{P}''_1$, $\mathfrak{Q}''_1$ $\mathfrak{K}'$, die in (20.) enthalten sind, zu ermitteln.

§ 13. Bestimmung der Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{K}$; schliesslicher Ausdruck der Componente Z_z.

Im § 5 wurden die Werthe der Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{h}$ mittelst dreier der Gleichungen (10.) und (11.) des § 1, die sich auf das Gleichgewicht des starren Stabes bezogen, gefunden. Dieselben drei Gleichungen dienen auch zur Bestimmung von $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{Q}_1''$, $\mathfrak{K}'$, indem sie im § 5 sowohl das Gleichungssystem (40.) als auch das Gleichungssystem (39.) lieferten, von denen bisher nur das erstere benutzt worden ist. Der in (39.) vorkommende Ausdruck

$$a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)$$

hat, abgesehen von dem Summandus positiver Ordnung $(a-2b)\psi$, den Werth

$$a\mathfrak{K}' - E(\mathfrak{P}_1''x + \mathfrak{Q}_1''y) + \frac{2E}{E_1}\Phi$$
$$+\left\{\left(5+\frac{2E}{b}\right)\frac{c^2}{12} - \left(1+\frac{2b}{E}\right)\frac{x^2+y^2}{8}\right\}\frac{F_1''x + G_1''y}{A},$$

wie die Vergleichung der Formel (20.) mit der am Eingang des § 12 erwähnten Formel für Z_z zeigt. Aus der ersten der Gleichungen (39.) des § 5 ergiebt sich daher im vorliegenden Falle

$$\int\int\left\{a\mathfrak{K}' - E(\mathfrak{P}_1''x + \mathfrak{Q}_1''y) + \frac{2E}{E_1}\Phi\right\}x\,dx\,dy$$
$$+\int\int\left\{\left(5+\frac{2E}{b}\right)\frac{c^2}{12} - \left(1+\frac{2b}{E}\right)\frac{x^2+y^2}{8}\right\}\frac{F_1''x^2 + G_1''xy}{A}\,dx\,dy = F_3,$$

wo die Integrationen über den Querschnitt des Stabes auszudehnen sind. Auf beiden Seiten dieser Gleichung stehen ausschliesslich Terme der 3ten Ordnung; der oben genannte Summandus ψ von $\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}$ kommt hier nicht in Betracht, da er zu dem Doppelintegral nur Beiträge 4ter oder höherer Ordnung liefern würde. Nun ist nach (5.) und (6.) des § 1

$$\int\int x\,dx\,dy = 0, \quad \int\int xy\,dx\,dy = 0;$$

also hat von den drei Unbekannten $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{Q}_1''$, die (als Functionen von z allein) vor die Integralzeichen treten, nur $\mathfrak{P}_1''$ einen von Null verschiedenen Factor. Man findet auf diese Weise zunächst:

$$AE\mathfrak{P}_1'' = \frac{2E}{E_1}\int\int\Phi x\,dx\,dy - F_3$$
$$+\int\int\left\{\left(5+\frac{2E}{b}\right)\frac{c^2}{12} - \left(1+\frac{2b}{E}\right)\frac{x^2+y^2}{8}\right\}\frac{F_1''x^2 + G_1''xy}{A}\,dx\,dy.$$

Von dem Integral

$$\int\int\Phi x\,dx\,dy = \int_0^c r^2dr\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\cos s\,ds$$

bleibt nach Substitution des Werthes (19.) nur das eine, zu $n=1$ gehörige Glied

$$\frac{\alpha_1' + \gamma_1'}{c} \int_0^c r^3\, dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 s\, ds = \frac{\pi c^3}{4} (\alpha_1' + \gamma_1')$$

übrig, wie aus einem bekannten Satze folgt. Ferner ist:

$$\iint x^2\, dx\, dy = A = \tfrac{1}{4} \pi c^4,$$
$$\iint (x^2 + y^2)\, x^2\, dx\, dy = \tfrac{1}{6} \pi c^6,$$

während das Integral $\iint (x^2+y^2)\, xy\, dx\, dy$ wegen der Symmetrie der Querschnittfigur verschwindet. Daher erhält man:

$$AE\mathfrak{P}_1'' = \frac{E}{E_1} \frac{\pi c^3}{2} (\alpha_1' + \gamma_1') - F_3 + \frac{c^2}{6}\left(2 + \frac{E}{b} - \frac{b}{E}\right) F_1''.$$

Aus der zweiten Gleichung (39.) des § 5 leitet man durch analoge Rechnungen den Werth von $\mathfrak{Q}_1''$ ab; die dritte, bei der von der Summe Φ nur das Anfangsglied übrig bleibt, bestimmt die Function $\mathfrak{K}'$. Es ergeben sich auf diese Weise die Werthe

$$(21.) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_1'' = \dfrac{2}{E_1} \dfrac{\alpha_1' + \gamma_1'}{c} + \dfrac{c^2}{6}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{E} - \dfrac{b}{E^2}\right) \dfrac{F_1''}{A} - \dfrac{F_3}{AE}, \\[2ex] \mathfrak{Q}_1'' = \dfrac{2}{E_1} \dfrac{\beta_1' - \delta_1'}{c} + \dfrac{c^2}{6}\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2}{E} - \dfrac{b}{E^2}\right) \dfrac{G_1''}{A} - \dfrac{G_3}{AE}, \\[2ex] \mathfrak{K}' = -\dfrac{E\alpha_0'}{aE_1} + \dfrac{h_2}{aC}, \end{cases}$$

welche in die Gleichung (20.) zu substituiren sind.

Die Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{K}$ werden aus den Ausdrücken (21.) durch unbestimmte Integration erhalten, da

$$\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2} = \mathfrak{P}_1'', \quad \frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2} = \mathfrak{Q}_1'', \quad \frac{d\mathfrak{K}}{dz} = \mathfrak{K}'$$

gesetzt worden ist. Die willkürlichen Integrationsconstanten können hierbei wiederum weggelassen werden. Denn aus den Gleichungen (38.) in § 4 und (46.) in § 6 geht hervor, dass die Grössen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ (die nach (35.) die Bestandtheile -1ter Ordnung von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ angeben) in den Formeln der Verschiebungen ξ, η, ζ nur in der Verbindung

$$\xi = \mathfrak{P}_1, \quad \eta = \mathfrak{Q}_1, \quad \zeta = -\left(\frac{d\mathfrak{P}_1}{dz} x + \frac{d\mathfrak{Q}_1}{dz} y\right)$$

vorkommen. Fügt man also zu $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ Ausdrücke $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}z$ und $\mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}z$ hinzu, so vermehren sich ξ, η, ζ nur um die Summanden

$$\xi = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}z, \quad \eta = \mathfrak{b}_0 - \mathfrak{a}z, \quad \zeta = -\mathfrak{b}x + \mathfrak{a}y,$$

die in den Werthen (11.) der Einleitung enthalten sind und daher nicht besonders erwähnt zu werden brauchen. Dasselbe gilt von der willkürlichen Constante, welche (nach (1.) in § 9) bei der Integration von $\mathfrak{K}'$ zu der Verschiebung ζ hinzutritt.

Durch Einsetzen der Werthe (21.) von $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{Q}_1''$, $\mathfrak{K}'$ erhält man aus (20.) die schliessliche Gleichung für (Z_z). Indem man zur Abkürzung durch Φ_1 die von $n = 2$ an genommene Summe

$$(22.)\quad \Phi_1 = \sum_{n=2}^{n=\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^n \{(\alpha'_n + \gamma'_n)\cos ns + (\beta'_n - \delta'_n)\sin ns\}$$

bezeichnet und die Gleichungen

$$F = F_1 + F_2 + F_3,\quad G = G_1 + G_2 + G_3,\quad h = h_1 + h_2$$

berücksichtigt, ergiebt sich für die Componente Z_z in der gesuchten Annäherung der Ausdruck

$$(23.)\quad (Z_z) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{Fx + Gy}{A} + \dfrac{h}{C} + \dfrac{2E}{E_1}\Phi_1 \\ -\left(1 + \dfrac{2b}{E}\right)\left(\dfrac{x^2 + y^2}{2} - \dfrac{c^2}{3}\right)\dfrac{F''_1 x + G''_1 y}{4A}, \end{array} \right.$$

welcher sämmtliche Terme der Ordnungen -2, -1 und 0 umfasst.

Unter den in (23.) vorkommenden Summanden unterscheidet sich der mit Φ_1 multiplicirte wesentlich von den übrigen. Betrachtet man irgend einen zur Stabachse senkrechten Querschnitt, so stellen (nach § 1) die Grössen F, G, h Summen von Drehungsmomenten, respective von Componenten dar, welche sich über den ganzen Stabtheil von jenem Querschnitt bis zum Ende $z = l$ erstrecken. Dagegen hängt Φ_1 ausschliesslich von denjenigen Kräften ab, welche am Rande des betrachteten Querschnitts wirken. Denn die in der Summe (22.) enthaltenen Grössen α'_n, β'_n, γ'_n, δ'_n sind nach (18.) die Coefficienten der Entwicklungen von R und S in Bezug auf die Variable s, so dass dieselben für einen bestimmten Werth von z nur von den zu diesem z gehörigen Werthen der Componenten R und S abhängen. Schneidet man also durch irgend zwei benachbarte, zur Stabachse senkrechte Ebenen eine unendlich dünne Scheibe aus, so erfährt dieselbe einmal durch die unmittelbare Einwirkung der an ihrem Rande angebrachten äusseren Kräfte gewisse Verzerrungen; diesen entspricht der Term $\frac{2E}{E_1}\Phi_1$ in (23.). Sodann dient die kleine Scheibe zur Uebertragung sämmtlicher zwischen ihr und dem Stabende angebrachten Kräfte; letzterer Vorgang, der von der Gesammtbiegung, dem Gesammtauszug etc. des Stabes abhängt, liefert zu (23.) die mit F, G, h, F''_1, G''_1 multiplicirten Glieder. Sind am Rande irgend eines zur Stabachse senkrechten Querschnittes keine äusseren Druckkräfte vorhanden, so ist Φ_1 für alle Punkte des Querschnittes gleich Null.

Die Terme $\frac{Fx + Gy}{A} + \frac{h}{C}$ von (23.) entsprechen genau dem in § 5 abgeleiteten angenäherten Werthe (42.) von Z_z

$$\frac{F_1 + F_2}{A}\,x + \frac{G_1 + G_2}{A}\,y + \frac{h_1}{C}.$$

Nur treten in (23.) die vollständigen resultirenden Drehungsmomente F, G und die vollständige Componentensumme h an Stelle der Grössen $F_1 + F_2$, $G_1 + G_2$, h_1, welche die beträchlichsten Bestandtheile von F, G, h angeben. — Der letzte Summandus der rechten Seite von (23.)

$$-\left(1 + \frac{2b}{E}\right)\left(\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{c^2}{3}\right)\frac{F_1''x + G_1''y}{4A},$$

welcher, ebenso wie Φ_1 nur der Ordnung 0 angehört, ist aus verschiedenartigen Einflüssen entstanden; die Gleichungen (16.), (20.), (21.) zeigen, dass mehrere der im Vorhergehenden auftretenden Functionen zu demselben beigetragen haben. Man bemerke, dass die im genannten Term vorkommende Function 3ten Grades der Coordinaten x und y

$$-\left(1 + \frac{2b}{E}\right)\frac{x^2 + y^2}{2}\,\frac{F_1''x + G_1''y}{4A}$$

zum geringeren Theil von $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}$, hauptsächlich aber, wie sich aus dem Vorzeichen ergiebt, von der in w enthaltenen F u n c t i o n 3ten G r a d e s

$$-\frac{x^2 + y^2}{4AE}\left\{\frac{dF_1}{dz}\,x + \frac{dG_1}{dz}\,y\right\}$$

herrührt. Durch diesen Bestandtheil von w geht, nach § 9, wenn von den übrigen Verschiebungen abgesehen wird, ein beliebiger Querschnitt $z = z_0$ der Anfangslage in eine Fläche 3ten Grades über, deren Parameter die Grössen $\frac{dF_1}{dz}$ und $\frac{dG_1}{dz}$ sind. Man sieht leicht, dass durch die Veränderlichkeit der Parameter $\frac{dF_1}{dz}$, $\frac{dG_1}{dz}$ bei dem Uebergang von einem Querschnitt zum benachbarten sich gewisse Dilatationen oder Compressionen in der Richtung der z-Achse ergeben, welche einen Beitrag zu der Kraft Z_z liefern. Nur da, wo die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2F_1}{dz^2}$ und $\frac{d^2G_1}{dz^2}$ gleich Null, also jene Flächen 3ten Grades für benachbarte Querschnitte congruent sind, fällt der in Rede stehende Term des Ausdrucks (23.) fort.

Es wurde oben gezeigt, dass wenn am Rande irgend eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts keine äusseren Kräfte angebracht sind, die Function Φ_1 für die Punkte des Querschnitts verschwindet. In diesem Fall sind auch die Grössen $\frac{d^2F_1}{dz^2}$ und $\frac{d^2G_1}{dz^2}$ für den betreffenden Werth von z gleich Null. Nach § 1 sind die Differentialquotienten $\frac{dF_1}{dz}$, $\frac{dG_1}{dz}$ mit den in (8.) definirten Integralen f_1, g_1 identisch und stellen daher die Summen der zur x-, respective y-Achse parallelen Componenten aller Kräfte dar, die an der Mantelfläche zwischen dem Querschnitt $\mathfrak{z} = z$ und dem Stabende $\mathfrak{z} = l$ wirken. Man nehme nun an, dass zwischen zwei Querschnitten $\mathfrak{z} = z_1$ und $\mathfrak{z} = z_2$ keine äusseren Druckkräfte vorhanden sind; dann erfahren die Functionen f_1 und g_1 auf diesem Abschnitt des Stabes beim Wachsen von z keine Incremente, d. h. es bestehen für $z_1 < z < z_2$ die Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dz} = F_1'' = \dfrac{d^2F_1}{dz^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{dg_1}{dz} = G_1'' = \dfrac{d^2G_1}{dz^2} = 0. \end{cases}$$

Hieraus folgt, dass für die Punkte eines zur Stabachse senkrechten Querschnitts, an dessen Rande keine äusseren Druckkräfte wirken, der in (23.) angegebene Werth der Componente Z_z sich auf den nach x und y linearen Ausdruck

$$\frac{Fx + Gy}{A} + \frac{h}{C}$$

reducirt, welcher dem in erster Annäherung geltenden Werth von Z_z (§ 5) analog gebildet ist.

§ 14. Die resultirende Druckkraft für das zur z-Achse senkrechte Flächenelement.

Die Kraft Z_z nimmt unter den 6 inneren Druckkräften die grössten Werthe an, da sie allein die Ordnung — 2 erreicht. In dem Ausdruck für die resultirende Kraft, welche auf ein zur z-Achse senkrechtes Flächenelement wirkt,

$$\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2},$$

dürfen indessen bei der hier durchgeführten Annäherung die Summanden X_z^2 und Y_z^2 nicht neben Z_z^2 vernachlässigt werden (im Gegensatz zu den Rechnungen des § 5). Denn die Anfangsglieder von X_z^2 und Y_z^2 haben die Ordnung — 2; und da die Gleichung (23.) für Z_z^2 einen Ausdruck ergiebt, in welchem die Terme der Ordnungen — 4, — 3, — 2 (nicht mehr die der Ordnung — 1) genau sind, so hat man in dem obigen Radicandus jetzt die Bestandtheile — 1ter Ordnung von X_z und Y_z zu berücksichtigen, um die Glieder der 3 beträchtlichsten Ordnungen vollständig zu erhalten.

Nach der Gleichung (52.) des § 6 werden die Glieder — 1ter Ordnung von X_z, Y_z durch

$$b\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx} - L_1\right),\ b\left(\frac{d\mathfrak{W}_1}{dy} - M_1\right)$$

dargestellt. Die Bestandtheile 0ter Ordnung von X_z, Y_z,

$$b\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dx} - L_2\right),\ b\left(\frac{d\mathfrak{W}_2}{dy} - M_2\right),$$

ergeben sich, wenn man die Function $\mathfrak{W}_2$ aus der Differentialgleichung (48.) und der Oberflächenbedingung (54.) des § 6 berechnet. Diese Bestimmung von $\mathfrak{W}_2$ hat bei dem vorliegenden Problem des kreisförmigen Querschnitts keine Schwierigkeiten, da die partikulären Integrale sich wiederum aus Potenzen von r und den trigonometrischen Functionen von s zusammensetzen. Indessen soll hier nicht näher darauf eingegangen, sondern die Rechnung auf die Behandlung des Ausdrucks $\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2}$ beschränkt werden, welcher den für die Anwendung hauptsächlich wichtigen Werth der Maximal-Druckkraft liefert. Ebenso werden auch die Bestandtheile 0ter Ordnung von X_x, Y_y, X_y, die in Folge der Ermittlung der Werthe von $\mathfrak{W}_1$, ϱ, σ vollständig bekannt sind, nicht in Ausführlichkeit angegeben werden.

Durch Substitution des Werthes (1.) für $\mathfrak{W}_1$ und der Werthe (50.) in § 6 für L_1, M_1 erhält man für die Bestandtheile — 1ter Ordnung von X_z, Y_z, die durch (X_z), (Y_z) bezeichnet werden mögen, die Gleichungen:

$$(24.)\quad \left\{\begin{aligned}
(X_z) &= \frac{1}{4A}\frac{dF_1}{dz}\left\{\left(1+\frac{b}{E}\right)(c^2-x^2) - \left(\frac{3b}{E}-1\right)y^2\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2A}\left(1-\frac{b}{E}\right)\frac{dG_1}{dz}\,xy - b\,\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}\,y, \\
(Y_z) &= \frac{1}{4A}\frac{dG_1}{dz}\left\{\left(1+\frac{b}{E}\right)(c^2-y^2) - \left(\frac{3b}{E}-1\right)x^2\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2A}\left(1-\frac{b}{E}\right)\frac{dF_1}{dz}\,xy + b\,\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}\,x.
\end{aligned}\right.$$

Es kommt hierin die bisher noch unbekannte, von z allein abhängige Function $\mathfrak{T}_1$ vor. Der Werth derselben ergiebt sich aus der 3ten Gleichung (11.) des § 1,

$$\int\!\!\int (x Y_z - y X_z)\,dx\,dy = H,$$

die sich auf das Moment der Drehung um die Cylinderachse bezieht. Indem man in letzterer Gleichung die Terme 2ter Ordnung links und rechts einander gleichsetzt, gelangt man zu der Relation

$$\int\!\!\int \{x(Y_z) - y(X_z)\}\,dx\,dy = H_1,$$

in welche die Werthe (24.) für (X_z) und (Y_z) einzusetzen ist. In den Produkten $x(Y_z)$ und $y(X_z)$ sind aber sämmtliche Summanden durch ungrade Potenzen von x oder y multiplicirt, mit Ausnahme der von

$\mathfrak{T}_1$ abhängigen. Bei der Integration über den kreisförmigen Querschnitt bleiben daher letztere allein übrig, und da

$$\int\int x^2\, dx\, dy = \int\int y^2\, dx\, dy = A = \tfrac{1}{4}\pi c^4$$

ist, so folgt aus der obigen Gleichung der Ausdruck:

$$(25.)\quad \frac{d\mathfrak{T}_1}{dz} = \frac{H_1}{2bA}.$$

Wenn man, um $\mathfrak{T}_1$ zu erhalten, die Gleichung (25.) unbestimmt integrirt, so kann, analog zu dem Früheren, die Integrationsconstante fortgelassen werden, weil die von derselben abhängigen Terme der Verschiebungen ξ und η (Gleichungen (38.) in § 4),

$$\xi = -\mathfrak{c}y,\quad \eta = \mathfrak{c}x,$$

zu den in (11.) der Einleitung erwähnten Ausdrücken gehören.

Die Formeln (23.) und (24.) lassen sich mit Hülfe der Superposition vereinfachen. Da die gegebenen Oberflächenkräfte in sämmtlichen Gleichungen nur linear vorkommen, so kann man die Betrachtung auf die Fälle reduciren, wo ausschliesslich je eine dieser Kräfte von Null verschieden ist. Es soll hier zunächst die Voraussetzung gemacht werden, dass $X = Z = 0$, aber die Vertikalkraft Y von Null verschieden ist, so dass man eine Biegung des Stabes in der yz-Ebene erhält. Dann ist auch $F = F_1 = h = 0$, und es folgen aus (23.), (24.), (25.) die Gleichungen:

$$(26.)\quad \begin{cases} (Z_z) = \dfrac{Gy}{A} + \dfrac{2E}{E_1}\Phi_1 - \left(1 + \dfrac{2b}{E}\right)\left(\dfrac{x^2+y^2}{2} - \dfrac{c^2}{3}\right)\dfrac{G_1''y}{4A}, \\[2ex] (X_z) = -\dfrac{1}{2A}\left(1 - \dfrac{b}{E}\right)\dfrac{dG_1}{dz}xy - \dfrac{H_1 y}{2A}, \\[2ex] (Y_z) = \dfrac{1}{4A}\dfrac{dG_1}{dz}\left\{\left(1 + \dfrac{b}{E}\right)(c^2 - r^2) + 2\left(1 - \dfrac{b}{E}\right)x^2\right\} + \dfrac{H_1 x}{2A}. \end{cases}$$

In dem Fall, dass $Y = Z = 0$, und X von Null verschieden ist, lauten die Formeln genau analog, da dieselben alsdann die Biegung des Stabes in der xz-Ebene angeben. Ist endlich $X = Y = 0$, und Z von Null verschieden, so bleibt ausser einer Biegung von untergeordneter Art nur der (positive oder negative) Auszug des Stabes übrig.

Der geometrische Ort derjenigen Punkte, für welche die Componente Z_z gleich Null ist, wird bei der Stabbiegung als „neutrale Schicht" bezeichnet. Nach den Formeln (26.) gehören sämmtliche Punkte der Cylinderachse zur neutralen Schicht. Denn für dieselben ist $x = y = r = 0$, und daher nach (22.) auch $\Phi_1 = 0$. Bei Betrachtung der einzelnen, zur z-Achse senkrechten Querschnitte hat man wiederum zu unterscheiden, ob an ihrem Rande äussere Kräfte vorhanden sind, oder nicht. Im letzteren Falle schneiden sich die neutrale Schicht und der betreffende Querschnitt in der Geraden $y = 0$, da der Werth (26.) der Componente Z_z sich dann auf $\frac{Gy}{A}$ reducirt (§ 13). Wirken dagegen äussere Druckkräfte auf den Rand eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts, so bilden, weil Φ_1 von Null verschieden ist, die in demselben liegenden Punkte der neutralen Schicht im Allgemeinen eine gekrümmte Linie.

Die Tangentialkräfte X_z und Y_z enthalten nach (26.) je ein mit $\frac{dG_1}{dz}$ und ein mit H_1 multiplicirtes Glied. Der von $\frac{dG_1}{dz}$ abhängige Bestandtheil der Horizontalkraft X_z zeigt in Bezug auf das Vorzeichen ein wesentlich anderes Verhalten, als der von derselben Grösse abhängige Bestandtheil der Vertikalkraft Y_z. Denn während ersterer zugleich mit x und mit y das Zeichen wechselt, behält letzterer, da $r \leqq c$ und $b < E$ ist, innerhalb je eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts stets das gleiche Vorzeichen bei, nämlich das der Function $\frac{dG_1}{dz}, = g_1$. In (26.) werden sämmtliche äusseren Kräfte als vertikal vorausgesetzt, und die Function g_1 stellt die Resultante dar, welche der betrachtete Querschnitt von dem einen Theil des Stabes auf den anderen zu übertragen hat. Die obige Eigenschaft von Y_z bedeutet daher, dass alle Elemente der Querschnittfläche an der Uebertragung dieser Resultante in demselben Sinne mitwirken. Die Grösse der zugehörigen Tangentialkraft ist jedoch bei den einzelnen Flächenelementen verschieden. Vergleicht man die Punkte, die zu je einem Kreise $r =$ Const. gehören, mit einander, so nimmt der genannte Bestandtheil von Y_z seinen grössten Werth für die Endpunkte des horizontalen Durchmessers an. Den Werth Null hat derselbe nur im obersten und im untersten Punkte des Querschnitts, wo $x = 0$, $r = c$ ist. — Die Grösse H_1 giebt das Torsionsmoment der an der Mantelfläche des Stabes angebrachten Kräfte an. Vereinigt man die von H_1 abhängigen Bestandtheile der Componenten X_z und Y_z zu einer Resultante, so ist nach (26.) letztere gleich $\frac{H_1 r}{2A}$, also gleich einer linearen Function des Radius vector r, die für $r = 0$ verschwindet.

Was die Frage des Maximums der resultirenden Druckkraft $\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2}$ anbelangt, so ist zu beachten, dass in dem angenäherten Werthe (26.) der Componente Z_z der Term $\frac{Gy}{A}$ alle Bestandtheile -2^{ter} und -1^{ter} Ordnung enthält; denn die Summanden

$$\frac{2E}{E_1}\Phi_1 - \left(1 + \frac{2b}{E}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{c^2}{3}\right)\frac{G_1''y}{4A}$$

haben die Ordnung 0. Also hängen in dem Trinom

$$X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2$$

nach Substitution der Ausdrücke (26.) die Glieder — 4ter und — 3ter Ordnung ausschliesslich von $\frac{Gy}{A}$ ab. Der letztere Term nimmt aber innerhalb eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts seinen grössten absoluten Werth für $y = \pm c$ an, d. h. an dem obersten, respective dem untersten Punkt des Querschnitts. Dieser Werth $y = \pm c$ ist daher auch für das Maximum von $\sqrt{X_z^2 + Y_z^2 + Z_z^2}$ zunächst massgebend; auf eine genauere Bestimmung der Maximal-Druckkraft soll hier verzichtet werden.

Setzt man den Werth $y = \pm c$, für den $x = 0$ ist, in die Formeln (26.) ein, so erhält man für die Tangentialkräfte die Ausdrücke:

$$[X_z]_{y=\pm c} = \mp \frac{H_1 c}{2A}, \quad [Y_z]_{y=\pm c} = 0.$$

Wenn also $H_1 = 0$ ist, d. h. keine Torsion Statt findet, so liefern die Tangentialkräfte X_z, Y_z keinen Beitrag zu der in Rede stehenden Maximalspannung, die dann mit $[Z_z]_{y=\pm c}$ identisch wird.

Aus der ersten Gleichung (26.) ergiebt sich ferner, wenn man $A = \frac{1}{4}\pi c^4$ berücksichtigt, für $y = \pm c$ der Werth

$$(27.) \quad [Z_z]_{y=\pm c} = \pm \frac{Gc}{A} + \frac{2E}{E_1}\Phi_1 \mp \left(1 + \frac{2b}{E}\right)\frac{G_1''}{6\pi c}.$$

Für $y = \pm c$ wird der Leitstrahl r gleich c, und der Winkel s gleich $\pm\frac{\pi}{2}$. Setzt man diese Argumente in den Ausdruck (22.) von Φ_1 ein so findet man für $y = +c$

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \left(\alpha'_{2m} + \gamma'_{2m} + \beta'_{2m+1} - \delta'_{2m+1}\right)$$

und für $y = -c$

$$\Phi_1 = \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \left(\alpha'_{2m} + \gamma'_{2m} - \beta'_{2m+1} + \delta'_{2m+1}\right),$$

welche Werthe in die Gleichung (27.) zu substituiren sind. Der Ausdruck (27.) ist eine Function von z. Indem man das Maximum derselben aufsucht, erhält man den am Stabe überhaupt vorkommenden Maximalwerth von Z_z.

§ 15. Die Bedingungen in Betreff der Coefficienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_0, \delta_1$.

Bei Bestimmung der Grössen $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}_n, \mathfrak{C}_n, \mathfrak{D}_n$ im § 11 ergaben sich gleichzeitig für die Coefficienten $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_0, \delta_1$, die in den Entwicklungen (12.) der Functionen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ enthalten sind, die Bedingungen (15.)

$$\alpha_1 - \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 + \delta_1 = 0, \quad \delta_0 = 0.$$

Es soll nun der Nachweis geführt werden, dass in Folge der Definition jener Coefficienten den Gleichungen (15.) stets genügt ist. Nach § 12 ist

$$\alpha_1 - \gamma_1 = \alpha'_1 - \gamma'_1 + \alpha''_1 - \gamma''_1 = \alpha'_1 - \gamma'_1 + \frac{c^3}{4} \frac{F''_1}{A},$$

$$\beta_1 + \delta_1 = \beta'_1 + \delta'_1 + \beta''_1 + \delta''_1 = \beta'_1 + \delta'_1 + \frac{c^3}{4} \frac{G''_1}{A},$$

$$\delta_0 = \delta'_0 + \delta''_0 = \delta'_0 + \frac{bc^2}{2} \mathfrak{T}''_1.$$

Die Werthe $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \delta'_0, \delta'_1$, welche nach (18.) Coefficienten der Fourier'schen Reihen für R und S darstellen, sind gleich den Integralen

$$\alpha'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R \cos s\, ds, \quad \beta'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R \sin s\, ds,$$

$$\gamma'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S \sin s\, ds, \quad \delta'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S \cos s\, ds,$$

$$\delta'_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S\, ds.$$

Nach Berücksichtigung von (6.), (7.), (25.) in §§ 9 und 14 erhält man hieraus die Gleichungen

$$\alpha_1 - \gamma_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\, ds + \frac{1}{\pi c} \frac{d^2 F_1}{dz^2},$$

$$\beta_1 + \delta_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\, ds + \frac{1}{\pi c} \frac{d^2 G_1}{dz^2},$$

$$\delta_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \{ Y \cos s - X \sin s \}\, ds + \frac{1}{\pi c^2} \frac{dH_1}{dz}.$$

Nach § 1 besteht aber, wenn für das Bogenelement $d\mathfrak{s}$ der beim Kreiscylinder anzuwendende Werth $c\, ds$ gesetzt wird, die Beziehung

$$\frac{dF_1}{dz} = f_1 = c\int_z^l d\mathfrak{z} \int_{-\pi}^{\pi} X(\mathfrak{z})\, ds,$$

$$\frac{dG_1}{dz} = g_1 = c\int_z^l d\mathfrak{z} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\mathfrak{z})\, ds,$$

woraus

$$\frac{d^2F_1}{dz^2} = -c\int_{-\pi}^{\pi} X\,ds, \quad \frac{d^2G_1}{dz^2} = -c\int_{-\pi}^{\pi} Y\,ds$$

folgt. Also ist in der That immer

$$\alpha_1 - \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 + \delta_1 = 0.$$

Für die Grösse H_1, welche in (13.), § 1, als das Integral

$$H_1 = \int_z^l d\mathfrak{z} \int \{x\,Y(\mathfrak{z}) - y\,X(\mathfrak{z})\}\, d\mathfrak{S}$$

definirt wurde, ergiebt sich, da

$$d\mathfrak{S} = c\,ds, \quad x = c\cos s, \quad y = c\sin s$$

ist, der Ausdruck

$$H_1 = c^2\int_z^l d\mathfrak{z}\int_{-\pi}^{\pi} \{Y(\mathfrak{z})\cos s - X(\mathfrak{z})\sin s\}\, ds.$$

Der Differentialquotient dieses Integrals

$$\frac{dH_1}{dz} = -c^2\int_{-\pi}^{\pi} \{Y\cos s - X\sin s\}\, ds$$

verificirt die dritte Gleichung (15.).

§ 16. Beispiel des auf hoher Kante gleichmässig belasteten Stabes.

Die in diesem Abschnitt abgeleiteten Formeln sollen auf ein einfaches Beispiel angewendet werden. Man nehme den Fall, dass der cylindrische Stab in seiner ganzen Länge (von $z = -l$ bis $z = +l$) durch eine vertikale constante Kraft, die auf seine hohe Kante wirkt, in Anspruch genommen sei. Die Unterstützung erfolge in der Umgebung des zu $z = 0$ gehörigen Punktes der unteren Kante; die Stabenden seien frei. Man setzt $X = Z = 0$. Die Componente Y wird auf den die Kante $s = \frac{\pi}{2}$ einschliessenden Theilen der Mantelfläche als von Null verschieden angenommen; es sei

$$Y = -k \text{ für } \frac{\pi}{2} - \tau < s < \frac{\pi}{2} + \tau,$$

wo k eine positive Constante bezeichnet. Im Uebrigen sei Y gleich Null, mit Ausnahme des unterstützten Theils der Staboberfläche. Die Unterstützung möge auf der Strecke von $z = -l_1$ bis $z = +l_1$ und zwischen $s = -\frac{\pi}{2} - \tau$ und $s = -\frac{\pi}{2} + \tau$ geschehen; also man setzt

$$Y = k_1 \text{ für } \begin{cases} -l_1 < z < l_1, \\ -\frac{\pi}{2} - \tau < s < -\frac{\pi}{2} + \tau, \end{cases}$$

wo k_1 constant ist. Die Grösse l_1 denke man sich klein im Vergleich zu l, sowie τ klein im Vergleich zu π. Der Werth der Kraft k_1 ergiebt sich aus der Bedingung, dass dieselbe der Belastung der oberen Kante und der Schwere des Stabes das Gleichgewicht hält. Da k und k_1 auf Flächen von dem respectiven Inhalt $4c\tau l$ und $4c\tau l_1$ wirken, und die Masse des Stabes gleich $2\pi c^2 lD$ ist, so besteht die Gleichung

$$4c\tau l_1 k_1 = 4c\tau lk + 2\pi c^2 lD\Gamma$$

oder:

$$(28.)\quad k_1 = \frac{l}{l_1}\left\{k + \frac{\pi cD\Gamma}{2\tau}\right\}.$$

In den Ausdrücken f, F, h, H werden sämmtliche Summanden gleich Null; es findet daher nur eine Biegung in der yz-Ebene Statt.

Es sollen zunächst diejenigen zur z-Achse senkrechten Querschnitte behandelt werden, welche die unterstützte Stelle der Oberfläche nicht schneiden, d. h. es wird $-l < z < -l_1$ oder $l_1 < z < l$ vorausgesetzt. Dann reduciren sich die Coefficienten α'_n, β'_n, γ'_n, δ'_n der Fourier'schen Reihen (18.), für welche die Werthe

$$\alpha'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R \cos ns\,ds, \quad \beta'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R \sin ns\,ds,$$

$$\gamma'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S \sin ns\,ds, \quad \delta'_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S \cos ns\,ds$$

bekannt sind, nach Berücksichtigung der Gleichungen (7.)

$$R = Y \sin s, \quad S = Y \cos s,$$

auf die Integrale:

$$\alpha'_n = -\frac{k}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\tau}^{\frac{\pi}{2}+\tau} \cos ns\, \sin s\,ds, \quad \beta'_n = -\frac{k}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\tau}^{\frac{\pi}{2}+\tau} \sin ns\, \sin s\,ds,$$

$$\gamma'_n = -\frac{k}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\tau}^{\frac{\pi}{2}+\tau} \sin ns\, \cos s\,ds, \quad \delta'_n = -\frac{k}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}-\tau}^{\frac{\pi}{2}+\tau} \cos ns\, \cos s\,ds.$$

Man setze hierin $s = \frac{\pi}{2} + s'$, wodurch die Beziehungen

$$\cos s = -\sin s', \quad \sin s = \cos s',$$

$$\cos ns = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ns'\right), \quad \sin ns = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ns'\right)$$

erhalten werden, und die Integralgrenzen in $-\tau$ und $+\tau$ übergehen. Ist n gerade, $= 2m$, so hat man:

$$\cos 2ms = \cos(m\pi + 2ms') = (-1)^m \cos 2ms',$$
$$\sin 2ms = \sin(m\pi + 2ms') = (-1)^m \sin 2ms'.$$

Die Produkte $\cos 2ms' \sin s'$ und $\sin 2ms' \cos s'$ sind ungerade Functionen von s', so dass ihre zwischen $-\tau$ und $+\tau$ genommenen Integrale verschwinden, mithin

$$\beta'_{2m} = \delta'_{2m} = 0.$$

Dagegen findet man

$$\alpha'_{2m} = \frac{k}{\pi}(-1)^{m+1}\left\{\frac{\sin(2m+1)\tau}{2m+1} + \frac{\sin(2m-1)\tau}{2m-1}\right\},$$
$$\gamma'_{2m} = \frac{k}{\pi}(-1)^{m+1}\left\{\frac{\sin(2m+1)\tau}{2m+1} - \frac{\sin(2m-1)\tau}{2m-1}\right\}.$$

Ist n ungerade, $= 2m+1$, so führen die Gleichungen

$$\cos(2m+1)s = (-1)^{m+1}\sin(2m+1)s',$$
$$\sin(2m+1)s = (-1)^m \cos(2m+1)s'$$

zu den Werthen:

$$\alpha'_{2m+1} = \gamma'_{2m+1} = 0,$$
$$\beta'_{2m+1} = \frac{k}{\pi}(-1)^{m+1}\left\{\frac{\sin(2m+2)\tau}{2m+2} + \frac{\sin 2m\tau}{2m}\right\},$$
$$\delta'_{2m+1} = \frac{k}{\pi}(-1)^{m}\left\{\frac{\sin(2m+2)\tau}{2m+2} - \frac{\sin 2m\tau}{2m}\right\}.$$

Indem man in den Ausdruck (22.) von Φ_1 diese Werthe der Coefficienten substituirt und die Gleichungen

$$\cos 2ms = (-1)^m \cos 2ms', \quad \sin(2m+1)s = (-1)^m \cos(2m+1)s'$$

anwendet, gewinnt man für Φ_1 die Gleichung

$$(29.) \quad \Phi_1 = -\frac{2k}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^n \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1}\cos ns',$$

woselbst $s' = s - \frac{\pi}{2}$ gesetzt ist. In (29.) ist $-l < z < -l_1$ oder $l_1 < z < l$ vorausgesetzt.

Bei den Querschnitten, welche durch die Unterstützungsstelle hindurchgehen, also für $-l_1 < z < l_1$, haben die Coefficienten α'_n, β'_n, γ'_n, δ'_n andere Werthe, da zu den obigen Ausdrücken noch die Integrale

$$\frac{k_1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}-\tau}^{-\frac{\pi}{2}+\tau}\cos ns \sin s\, ds, \quad \frac{k_1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}-\tau}^{-\frac{\pi}{2}+\tau}\sin ns \sin s\, ds,$$
$$\frac{k_1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}-\tau}^{-\frac{\pi}{2}+\tau}\sin ns \cos s\, ds, \quad \frac{k_1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}-\tau}^{-\frac{\pi}{2}+\tau}\cos ns \cos s\, ds$$

hinzutreten. Transformirt man die letzteren Integrale durch die Substitution $s = -s''$, so unterscheiden sich dieselben von den früher erhaltenen Werthen α'_n, β'_n, γ'_n, δ'_n nur dadurch, dass k_1 an Stelle von k steht, und das Vorzeichen bei β'_n und δ'_n das entgegengesetzte ist. In Folge dessen lautet der Ausdruck von Φ_1 für $-l_1 < z < l_1$:

$$(30.)\quad \Phi_1 = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\left\{k + (-1)^n k_1\right\}\left(\frac{r}{c}\right)^n \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1}\cos ns'.$$

Die Grösse s' bedeutet, wie in (29.), die Differenz $s - \frac{\pi}{2}$.

Für die Functionen G_1, G_2, G_3 erhält man nach (12.), (13.), (14.) des § 1 bei dem vorliegenden Beispiel, wenn $l_1 < z$ ist, die Werthe

$$G_1 = ck\int_z^l (\mathfrak{z} - z)\, d\mathfrak{z} \int_{\frac{\pi}{2}-\tau}^{\frac{\pi}{2}+\tau} ds = ck\tau\,(l-z)^2,$$

$$G_2 = \tfrac{1}{2}CD\Gamma\,(l-z)^2, \quad G_3 = 0,$$

folglich, da $C = \pi c^2$ ist,

$$(31.)\quad \begin{cases} G = G_1 + G_2 + G_3 = \left(ck\tau + \dfrac{\pi c^2 D\Gamma}{2}\right)(l-z)^2, \\[2ex] G_1'' = \dfrac{d^2 G_1}{dz^2} = 2ck\tau. \end{cases}$$

Man bemerke, dass wegen der Symmetrie des Vorganges die Betrachtung auf die Seite der positiven z beschränkt werden kann. An dem unterstützten Theil des Stabes ist für G statt des Ausdrucks (31.) der folgende

$$G = \left(ck\tau + \frac{\pi c^2 D\Gamma}{2}\right)(l-z)^2 - ck_1\tau\,(l_1 - z)^2$$

anzuwenden, der nach Substitution des Werthes (28.) von k_1 in

$$\left\{ck\tau + \frac{\pi c^2 D\Gamma}{2}\right\}\left\{(l-z)^2 - \frac{l}{l_1}(l_1 - z)^2\right\}$$

oder

$$\left(ck\tau + \frac{\pi c^2 D\Gamma}{2}\right)(l-l_1)\left(l - \frac{z^2}{l_1}\right)$$

übergeht. Der Bestandtheil beträchtlichster Ordnung ist hierin

$$G_1 = ck\tau\,(l-l_1)\left(l - \frac{z^2}{l_1}\right).$$

Auf diese Weise ergeben sich für $0 < z < l_1$ die Gleichungen:

$$(32.)\quad \begin{cases} G = \left(ck\tau + \dfrac{\pi c^2 D\Gamma}{2}\right)(l-l_1)\left(l - \dfrac{z^2}{l_1}\right), \\[2ex] G_1'' = -2ck\tau\left(\dfrac{l}{l_1} - 1\right). \end{cases}$$

Aus (31.) und (32.) folgt, dass die Function G ihren grössten Werth für $z = 0$ annimmt; denn sowohl in dem Intervall $l_1 < z < l$ als in dem Intervall $0 < z < l_1$ ist G eine Function, die mit abnehmendem z wächst.

Der Ausdruck der Componente Z_z wird erhalten, wenn man in die Gleichung (23.) die Werthe (29.) und (31.), falls $l_1 < z < l$ ist, und die Werthe (30.) und (32.), falls $0 < z < l_1$ ist, sowie

$$F = F_1'' = h = 0$$

substituirt. Für ein negatives z hat Z_z denselben Werth als für das entsprechende positive z.

Es soll auf die Werthe (27.), welche Z_z für $y = \pm c$ annimmt, hier etwas näher eingegangen werden. Zu $y = +c$ gehören die Argumente $r = c$, $s = \frac{\pi}{2}$, also $s' = 0$, so dass nach (29.) die Function Φ_1 für $y = c$, $l_1 < z < l$ gleich dem Ausdruck

$$\Phi_1 = -\frac{2k}{\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1}$$

wird. Bekanntlich besteht aber für $0 < \tau < \pi$ die Gleichung:

$$\frac{\sin \tau}{1} + \frac{\sin 2\tau}{2} + \frac{\sin 3\tau}{3} + \ldots \text{ in inf.} = \frac{\pi - \tau}{2},$$

folglich ist

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1} = \frac{\pi - \tau}{2} - \sin \tau - \frac{\sin 2\tau}{2}.$$

Die Grösse τ setzt man als hinreichend klein voraus, um $\sin \tau$ und $\sin 2\tau$ mit τ und 2τ identificiren zu können; dann ist die rechte Seite der letzten Gleichung $= \frac{\pi - 5\tau}{2}$, und man findet:

$$\Phi_1 = -k\left(1 - \frac{5\tau}{\pi}\right).$$

Ist $y = -c$, so hat man $r = c$, $s = -\frac{\pi}{2}$, daher $s' = -\pi$, $\cos ns' = (-1)^n$ zu nehmen, wodurch die Gleichung (29.) in

$$\Phi_1 = -\frac{2k}{\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1}$$

übergeht. Aus der für $-\pi < \tau < \pi$ geltenden Entwicklung

$$\frac{\tau}{2} = \sin \tau - \frac{\sin 2\tau}{2} + \frac{\sin 3\tau}{3} - \ldots \text{ in inf.}$$

folgt die Gleichung

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1} = \frac{\tau}{2} - \sin\tau + \frac{\sin 2\tau}{2},$$

deren rechte Seite sich wegen der vorausgesetzten Kleinheit von τ auf $\frac{\tau}{2}$ reducirt. Daher ist jetzt:

$$\Phi_1 = -\frac{k\tau}{\pi}.$$

Indem man sodann für G und G_1'' die Werthe (31.) und für A den Werth $\frac{\pi c^4}{4}$ einsetzt, erhält man aus (27.) die Gleichungen

$$(33.)\quad \begin{cases} [Z_z]_{y=c} = Q - \dfrac{2Ek}{E_1}\left(1 - \dfrac{5\tau}{\pi}\right), \\ [Z_z]_{y=-c} = -\left(Q + \dfrac{2Ek\tau}{E_1\pi}\right), \end{cases}$$

die für $l_1 < z < l$ gelten, und in denen zur Abkürzung durch Q der Ausdruck

$$(34.)\quad Q = (4k\tau + 2\pi c D\Gamma)\frac{(l-z)^2}{\pi c^2} - \left(1 + \frac{2b}{E}\right)\frac{k\tau}{3\pi}$$

bezeichnet ist. Die Grösse Q ist positiv, da die Summanden -2ter und -1ter Ordnung

$$4k\tau\frac{(l-z)^2}{\pi c^2}, \quad 2\pi c D\Gamma\frac{(l-z)^2}{\pi c^2}$$

das positive Vorzeichen haben; der Term $\left(1 + \frac{2b}{E}\right)\frac{k\tau}{3\pi}$ und die Terme

$$\frac{2Ek}{E_1}\left(1 - \frac{5\tau}{\pi}\right), \quad \frac{2Ek\tau}{E_1\pi}$$

sind von der Ordnung 0. In Folge dessen ist $[Z_z]_{y=c}$ positiv, und $[Z_z]_{y=-c}$ negativ, d. h. es findet an der oberen Seite des Stabes ein Auszug der Längsfasern, an der unteren eine Compression statt. Die Frage, ob der absolute Werth, den die Componente Z_z erreicht, auf der oberen oder auf der unteren Seite grösser ist, wird für das Intervall $l_1 < z < l$ durch die Gleichungen (33.) dahin entschieden, dass der grössere Werth von Z_z zu $y = -c$, also zu der Seite der Compression, gehört. Denn in der ersten Gleichung (33.) hat der zu Q hinzutretende Summandus das entgegengesetzte, in der zweiten das gleiche Vorzeichen.

Wie im § 13 ausgeführt wurde, stellt in der Formel der Componente Z_z der Term $\frac{2E}{E_1}\Phi_1$ die direkte Einwirkung derjenigen Kräfte dar, die am Rande des betreffenden, zur z-Achse senkrechten Querschnitts angebracht sind. Bei dem vorliegenden Beispiel ist für

$l_1 < z < l$ nur eine Belastung längs der oberen Kante vorhanden. Der Beitrag, welchen die direkte Einwirkung dieser Belastung zu Z_z liefert, ist sowohl für $y = c$ als für $y = -c$ negativ, da für $\frac{2E}{E_1}\Phi_1$ die respectiven Ausdrücke

$$-\frac{2Ek}{E_1}\left(1-\frac{5\tau}{\pi}\right), \quad -\frac{2Ek\tau}{E_1\pi}$$

gefunden worden sind. Der absolute Werth von $\frac{2E}{E_1}\Phi_1$ ist jedoch für $y = c$ erheblich grösser als für $y = -c$; denn nach der Voraussetzung ist der Quotient $\frac{\tau}{\pi}$ klein neben der Einheit. Dies zeigt, dass die Randkräfte auf diejenige Seite des Stabes, an der sie angebracht sind, eine weit beträchtlichere Einwirkung ausüben, als auf die gegenüberliegende. Aus dem Umstand, dass der obige Ausdruck von $\frac{2E}{E_1}\Phi_1$ für $y = c$ den absoluten Werth von Z_z verkleinert, geht hervor, dass die Randkräfte in dem Intervall $l_1 < z < l$, wo sie ausschliesslich die dilatirte Seite des Stabes angreifen, den Einfluss haben, die Angriffsstelle gewissermassen zu schützen, indem sie den ausdehnenden Kräften daselbst entgegenwirken. Auf der gegenüberliegenden Seite (für $y = -c$) rührt, wie erwähnt, von den bei $y = +c$ angebrachten Kräften eine geringe Vermehrung der Compression her. Die Constante k wird hier als positiv vorausgesetzt, so dass die Oberflächenkräfte nach dem Innern des Stabes zu gerichtet sind. Nimmt man k negativ, so wechseln sowohl Q als die Terme $\frac{2E}{E_1}\Phi_1$ ihr Vorzeichen. Folglich ist wiederum in dem Intervall $l_1 < z < l$ der absolute Werth von Z_z für $y = -c$ grösser als für $y = +c$. Indessen liegt der Punkt $y = -c$ dann auf der Seite der Dilatation, da die Krümmung des Stabes die entgegengesetzte geworden ist. Es dienen also auch in diesem Fall die (von innen nach aussen gerichteten) Randkräfte ihren Angriffspunkten zum Schutz; jedoch geschieht es dadurch, dass sie der Compression entgegenwirken.

An der unterstützten Stelle des Stabes, für $-l_1 < z < l_1$, hat die Function Φ_1, wenn $y = c$, also $r = c$, $s' = 0$ gesetzt wird, nach (30.) den Werth

$$\Phi_1 = -\frac{2k}{\pi}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{\sin(n+1)\tau}{n+1} - \frac{2k_1}{\pi}\sum(-1)^n\frac{\sin(n+1)\tau}{n+1},$$

welcher in Folge der oben abgeleiteten angenäherten Gleichungen

$$\sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1} = \frac{\pi - 5\tau}{2}, \quad \sum (-1)^n \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1} = \frac{\tau}{2}$$

in

$$\Phi_1 = -\frac{k(\pi - 5\tau) + k_1\tau}{\pi}$$

übergeht. Für das Argument $y = -c$, wo $r = c$, $s' = -\pi$ ist, ergiebt sich aus (30.)

$$\Phi_1 = -\frac{2k}{\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} (-1)^n \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1} - \frac{2k_1}{\pi} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{\sin(n+1)\tau}{n+1}$$

oder

$$\Phi_1 = -\frac{k_1(\pi - 5\tau) + k\tau}{\pi}.$$

Nach Substitution dieser Werthe von Φ_1, sowie der Werthe (32.) von G und G_1'' erhält man aus (27.) die im Intervall $-l_1 < z < l_1$ bestehenden Gleichungen

$$(35.) \quad \begin{cases} [Z_z]_{y=c} = Q_1 - \dfrac{2E}{E_1} \dfrac{k(\pi - 5\tau) + k_1\tau}{\pi}, \\[2ex] [Z_z]_{y=-c} = -\left\{Q_1 + \dfrac{2E}{E_1} \dfrac{k_1(\pi - 5\tau) + k\tau}{\pi}\right\}, \end{cases}$$

in denen Q_1 die Function

$$(36.) \quad Q_1 = \frac{l - l_1}{\pi c^2} (4k\tau + 2\pi c D\Gamma) \left(l - \frac{z^2}{l_1}\right) + \left(1 + \frac{2b}{E}\right) \left(\frac{l}{l_1} - 1\right) \frac{k\tau}{3\pi}$$

bedeutet.

Da sowohl Q_1 als die Ausdrücke

$$\frac{2E}{E_1} \frac{k(\pi - 5\tau) + k_1\tau}{\pi}, \quad \frac{2E}{E_1} \frac{k_1(\pi - 5\tau) + k\tau}{\pi}$$

positiv sind, so ist der absolute Werth von $[Z_z]_{y=-c}$ auch hier grösser als der von $[Z_z]_{y=c}$. Für den unterstützten Theil des Stabes gilt folglich derselbe Satz, der oben für $z > l_1$, respective $z < -l_1$, erhalten wurde, dass nämlich innerhalb je eines zur z-Achse senkrechten Querschnitts das Maximum des absoluten Werthes von Z_z an der unteren Stabkante, also auf der Seite der Compression liegt. Während indessen der unmittelbare Einfluss, den die an der oberen Kante angebrachten Kräfte auf ihre Angriffspunkte ausübten, darin bestand, die Componente Z_z zu verkleinern, bewirken die von der Unterstützung herrührenden Randkräfte bei ihren Angriffspunkten eine Vergrösserung des absoluten Werthes von Z_z. Denn in der zweiten Gleichung (35.) ist der von k_1 abhängige Term des Ausdrucks

$\frac{2E}{E_1}\Phi_1$ negativ, nämlich $= -\frac{2E}{E_1}\frac{k_1(\pi - 5\tau)}{\pi}$, so dass derselbe gleiches Vorzeichen mit dem ersten Summandus $-Q_1$ hat. In der That macht man sich leicht klar, dass weil die Kraft k_1, ebenso wie k, von aussen nach innen gerichtet ist, sie in der Umgebung ihres Angriffspunktes eine Compression hervorrufen muss, durch welche die von der Biegung herrührende Compression verstärkt wird.

Die Function G erreicht, wie im Vorhergehenden gezeigt wurde, ihr Maximum für $z = 0$. Der überhaupt vorkommende grösste absolute Werth von Z_z gehört folglich (mit dem Grade von Genauigkeit, der diesen Rechnungen zu Grunde gelegt ist) zu dem Argument $y = -c$, $z = 0$. Der Punkt $x = 0$, $y = -c$, $z = 0$ ist somit derjenige, an welchem im Fall einer zunehmenden Belastung (d. h. Vergrösserung von k) zuerst die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze Statt findet (die Identität der Elasticitätsgrenze für Druck und für Zug vorausgesetzt). Die Componenten X_z und Y_z kommen nach § 14 für die Frage der Maximal-Druckkraft nicht in Betracht, da hier $H_1 = 0$ ist; die Symmetrie der Belastung schliesst das Vorkommen der Torsion aus. Man kann den Ausdrücken (28.) und (36.) von k_1 und Q_1 eine etwas andere Form geben, indem man den absoluten Werth der Gesammtkraft, welche an der oberen Seite des Stabes angebracht ist, durch K, und das Gesammtgewicht des Stabes durch P bezeichnet. Es sei also

$$(37.)\quad 4c\tau lk = K,\quad 2\pi c^2 lD\Gamma = P,$$

wodurch

$$(38.)\quad \begin{cases} k = \dfrac{K}{4c\tau l},\quad k_1 = \dfrac{K+P}{4c\tau l_1}, \\[2ex] Q_1 = \dfrac{K+P}{\pi c}\,\dfrac{l-l_1}{c^2}\left(1 - \dfrac{z^2}{ll_1}\right) + \dfrac{K}{12\pi c}\left(1 + \dfrac{2b}{E}\right)\left(\dfrac{1}{l_1} - \dfrac{1}{l}\right) \end{cases}$$

erhalten wird. Dann ergiebt sich aus (35.) für das Argument $y = -c$, $z = 0$, welchem das Maximum des absoluten Werthes von Z_z entspricht, der Ausdruck:

$$(39.)\quad [Z_z]_{y=-c,\ z=0} = -\frac{K+P}{\pi c}\left\{\frac{l-l_1}{c^2} + \frac{E}{2E_1}\,\frac{\pi - 5\tau}{\tau l_1}\right\}$$
$$- \frac{K}{2\pi c}\left\{\frac{E}{E_1 l} + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{2b}{E}\right)\left(\frac{1}{l_1} - \frac{1}{l}\right)\right\}.$$

Von demselben hängt im vorliegenden Beispiel die Tragfähigkeit des Stabes (oder Balkens) ab.

Unter den Summanden, welche die rechte Seite von (39.) bilden, enthält der erste

$$-\frac{K+P}{\pi c}\,\frac{l-l_1}{c^2}$$

alle Bestandtheile der -2^{ten} und -1^{ten} Ordnung (man bemerke, dass c in $K+P$ als Factor vorkommt). Die übrigen Terme von (39.), welche (in Bezug auf c) sämmtlich die Ordnung 0 haben, sind nach der Art, wie sie die Grössen τ und l_1 enthalten, zu classificiren. Gemäss der Voraussetzung ist τ klein gegen π; ferner stellt l_1 eine kleine Grösse dar, weil l_1 klein im Vergleich zu l sein soll, und l nach § 2 zur Ordnung der Längeneinheit gehört. Daher ist in dem Ausdruck (39.) besonders noch das Glied

$$(40.) \qquad -\frac{E}{2E_1}\,\frac{K+P}{\pi c}\,\frac{\pi}{\tau l_1}$$

als beträchtlich hervorzuheben, welches sowohl $\frac{\pi}{\tau}$ als $\frac{1}{l_1}$ zum Factor hat. Von den übrigen Summanden (39.) sind

$$\frac{5E}{2E_1}\,\frac{K+P}{\pi c l_1} - \frac{1}{12}\left(1+\frac{2b}{E}\right)\frac{K}{\pi c l_1}$$

der Grösse $\frac{1}{l_1}$ proportional, während in

$$-\frac{K}{2\pi c l}\left\{\frac{E}{E_1} - \frac{1}{6}\left(1+\frac{2b}{E}\right)\right\}$$

weder $\frac{\pi}{\tau}$ nach $\frac{1}{l_1}$ als Factor vorkommt.

Die obigen Werthe zeigen, dass bei dem behandelten Beispiele die Terme 0^{ter} Ordnung von Z_z in dem Falle, wo die Angriffsfläche der äusseren Kräfte sehr klein wird, einen erheblichen Einfluss neben den Termen -2^{ter} und -1^{ter} Ordnung gewinnen. Geschieht namentlich die Unterstützung des Stabes auf einer sehr kleinen Fläche, so kann, weil der Quotient $\frac{\pi}{\tau l_1}$ neben $\frac{1}{c^2}$ vorkommt, der Ausdruck (40.) ebenso erheblich, als diejenigen Bestandtheile von Z_z, die in Bezug auf c von der -2^{ten} oder -1^{ten} Ordnung sind, werden. Der Werth (40.) rührt von der unmittelbaren Einwirkung der Randkräfte her, da er ein Theil von Φ_1 ist. Es ist klar, dass diese Einwirkung um so beträchtlicher sein muss, je mehr sich die Gesammtkraft auf eine kleine Angriffsfläche concentrirt.

In (34.) wird Q gleich der Differenz, in (36.) dagegen Q_1 gleich der Summe zweier verschiedener Glieder gefunden. Dieser Unterschied rührt davon her, dass der zweite Summandus von Q und Q_1 mit dem in (27.) vorkommenden Term

$$-\left(1+\frac{2b}{E}\right)\frac{G_1''}{6\pi c}$$

identisch ist, und die Grösse G_1'' nach (31.) und (32.) für $l_1 < z < l$ ein anderes Vorzeichen hat, als für $0 < z < l_1$. Den Hauptbeitrag zu dem obigen Ausdruck $-\left(1+\frac{2b}{E}\right)\frac{G_1''}{6\pi c}$ liefert (was man leicht durch die Vergleichung der Vorzeichen beweist, cfr. § 13 und die Gleichung (26.) in § 14) der in § 9 angeführte Term von ζ

$$-\frac{x^2+y^2}{4AE}\,y\,\frac{dG_1}{dz},$$

der die einzelnen, zur z-Achse senkrechten Querschnitte in Flächen 3ten Grades verwandelt. Man kann sich in Folge dessen auch auf geometrischem Wege von der Nothwendigkeit Rechenschaft geben, dass der zweite Summandus von Q ein anderes Vorzeichen hat, als der zweite Summandus von Q_1. In dem Intervall $l_1 < z < l$, wo nach (31.)

$$\frac{dG_1}{dz} = -2ck\tau\,(l-z)$$

zu setzen ist, hat innerhalb eines beliebigen Querschnitts $z = z_0$ die in Rede stehende, der z-Achse parallele Verschiebung den Werth

$$(41.)\quad \zeta = \frac{ck\tau}{2AE}\,(l-z_0)\,(x^2+y^2)\,y.$$

Für die Theilchen, die sich in der Anfangslage oberhalb der Horizontalebene $y=0$ befinden, ist die Ausweichung eine positive, für die Theilchen unterhalb eine negative (nach der Stabmitte gerichtete). Am Stabende, für $z_0 = l$, verschwindet die rechte Seite von (41.). Lässt man z_0 von l bis l_1 abnehmen, so steigt der absolute Werth des Ausdrucks (41.) continuirlich, da der Factor $l - z_0$ sich vergrössert. Hieraus ergiebt sich, dass wenn die Ausweichung (41.) allein vorhanden wäre, sie oberhalb der Ebene $y = 0$ eine Compression, unterhalb derselben eine Dilatation der zwischen je zwei Querschnitten enthaltenen Schichten zur Folge haben würde. In dem Intervall $0 < z < l_1$ hat man, da nach (32.)

$$\frac{dG_1}{dz} = -2ck\tau\,\frac{l-l_1}{l_1}\,z$$

ist, statt (41.) den Ausdruck

$$(42.)\quad \zeta = \frac{ck\tau}{2AE}\,\frac{l-l_1}{l_1}\,z_0\,(x^2+y^2)\,y$$

anzuwenden. Der absolute Werth des letzteren verringert sich schnell, wenn man z_0 von l_1 bis 0 abnehmen lässt, und ist für $z_0 = 0$ wieder der Null gleich. Daher bewirkt die Verschiebung (42.), wenn man sich dieselbe allein vorhanden denkt, umgekehrt für $y > 0$ eine Dilatation, für $y < 0$ eine Compression der Schichten. Da nun das Gesammtresultat der Biegung für die obere Seite des Stabes eine Dilatation und für die untere eine Compression ergiebt, so erkennt man, dass in dem Intervall $l_1 < z < l$ die Verschiebung (41.) den Hauptkräften der

Biegung entgegenwirkt, und folglich den Einfluss hat, den absoluten Werth der Kraft Z_z zu verkleinern, während für $0 < z < l_1$, wo der Stab unterstützt ist, der absolute Werth von Z_z durch den Beitrag des Terms (42.) vergrössert wird. Dem entspricht in der That das Vorzeichen der zweiten Summanden von Q und Q_1 in (34.) nnd (36.).

§ 17. Vergleichung der erhaltenen Formeln mit den Resultaten einer anderen Methode.

Ein Theil der vorstehenden Rechnungen soll mit Formeln, die auf einem wesentlich verschiedenen Wege abgeleitet worden sind, verglichen werden. Die sich ergebende Uebereinstimmung dient zur Bestätigung der hier gewonnenen Resultate. Im Vorhergehenden ist die Methode angewendet worden, die Bedingung, dass die Länge des Stabes gross gegen die Dimensionen seines Querschnitts sei, von Anfang an in die Rechnung einzuführen und dem entsprechend die einzelnen Summanden der Unbekannten ξ, η, ζ nach Grössenordnungen einzutheilen. Wie im ersten Abschnitt entwickelt wurde, bietet diese Methode den Vortheil, die gesuchten Gesetze für die Formveränderungen des Stabes in direkter Weise zu liefern. Indessen steht dieselbe in anderer Beziehung demjenigen Verfahren nach, welches die Angaben, dass gewisse Grössen klein sein sollen, erst nach Ausführung der Integration der Differentialgleichungen berücksichtigt. Im § 3 ging man, um zu einer Lösung der Gleichungen für ξ, η, ζ zu gelangen, von der Annahme aus, dass die Componente Z_z einer beträchtlicheren Grössenordnung angehöre, als die übrigen 5 Componenten der inneren Druckkräfte. Diese Eigenschaft von Z_z wurde im § 2 nicht streng bewiesen. Denn aus der Ordnung der in (10.) und (11.) vorkommenden bestimmten Integrale ist nicht mit Sicherheit auf die Ordnung der daselbst zu integrirenden Functionen zu schliessen. Mit Genauigkeit ergiebt sich nur, von welcher Ordnung die inneren Druckkräfte zum M i n d e s t e n sein müssen (Z_z von der -2^{ten}, X_z und Y_z von der -1^{ten}); aber es bleibt die Möglichkeit offen, dass dieselben eine noch beträchtlichere Ordnung haben. Man konnte also im Voraus nicht wissen, ob man in der That auf jenem Wege zu einer befriedigenden Lösung der Differentialgleichungen gelangen würde. Erst dadurch, dass sich eine solche ergab, und dass nur eine einzige Lösung möglich ist, wurde die Festsetzung, dass Z_z allein von der -2^{ten}, die übrigen Componenten von einer höheren Ordnung sein sollen, als richtig erwiesen.

Gelingt es dagegen, zuerst die Differentialgleichungen für beliebige Dimensionen des Cylinders vollständig zu integriren, so werden vorläufige, auf die Unbekannten bezügliche Annahmen, wie die oben erwähnte, ganz vermieden, und es kann in keinem Stadium der Rechnung ein Zweifel in Bezug auf die Grössenordnungen der einzelnen Werthe bestehen. Desshalb dürfte die Vergleichung der vorstehenden Entwicklungen mit den Formeln eines nach letzterer Methode behandelten Problems nicht überflüssig erscheinen. Dass die Rechnungen erheblich weitläuftiger sein müssen, wenn die Bestimmung, dass die eine Dimension vorwalten soll, erst zum Schluss eingeführt wird, ist im § 1 erörtert worden. Der Verfasser hat in einer im 81ten Bande des Crelle-Borchardt'schen Journals erschienenen Abhandlung, betitelt „Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders“, einen auf das Gleichgewicht des Cylinders bezüglichen Fall in der Art durchgeführt, dass die Annahme der Kleinheit des Querschnitts erst nach Herstellung der vollständigen Integrale gemacht wird. Die Näherungsrechnung, welche schliesslich auf letztere Integrale angewendet wird, erstreckt sich in Bezug auf die Kräfte nur bis zur Ordnung —1. Die auf diese Weise gefundenen Werthe der Kräfte und der Verschiebungen erweisen sich, wie gezeigt werden soll, als identisch mit den hier abgeleiteten Ausdrücken gleicher Ordnung.

Um das Verhältniss der genannten Rechnungen zu einander klar zu stellen, möge an den Schluss des § 7 im Abschnitt I. erinnert werden, wo die Fälle des aufliegenden und des eingeklemmten Stabes erwähnt sind. Es wurde ausgeführt, dass an den betreffenden Stabenden eine gewisse Kraft, respective ein Kräftepaar hinzuzufügen sei, dass aber diese hinzutretenden Grössen nur in soweit in Betracht kommen, als sie die Werthe der gegebenen Functionen f, g, h, F, G, H ändern. Denn nach § 2 wird darauf verzichtet, die an den Enden selbst Statt findenden Verschiebungen zu berechnen. Die specielle Art, wie die Festlegung des Stabendes, respective die Erhaltung der Richtung der Cylinderachse daselbst erreicht wird, hat auf die im Vorhergehenden entwickelten Formeln weiter keinen Einfluss. In Folge dessen ist es möglich, den Fall des an beiden Enden eingeklemmten Stabes (für die hier ausgeführten Rechnungen) auch in anderer Weise darzustellen; und zwar wird dies durch den Uebergang vom endlichen Cylinder zum unendlichen bewirkt. Das Verfahren soll zunächst an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Man betrachte einen sehr langen cylindrischen Balken, welcher auf einer grossen Anzahl von Pfeilern, die gleichen Abstand von einander haben, frei aufliegt; jedesmal in der Mitte zwischen zwei benachbarten Pfeilern möge in verticaler Richtung eine constante Last P auf den Balken wirken. Man sieht leicht, dass in diesem Fall der Vorgang zwischen je zwei auf einander folgenden Pfeilern stets ein verschiedener ist. Denn bei den äussersten Intervallen hat man ein frei aufliegendes Ende, während nach der Mitte zu die Biegung sich schrittweis dem Fall des an beiden Enden eingeklemmten Balkens nähert. Sobald man jedoch den Cylinder und die Anzahl der Pfeiler ins Unendliche wachsen lässt, werden die Vorgänge in den durch je zwei Pfeiler begrenzten Intervallen einander gleich, indem dann vollkommene Symmetrie herrscht, und die Biegung in sämmtlichen Intervallen auf den Fall, wo beide Enden eingeklemmt sind, zurückkommt. Aus der Symmetrie der Figur zu beiden Seiten eines jeden Pfeilers ergiebt sich unmittelbar, dass die Cylinderachse bei den Pfeilern horizontal bleibt, also der Bedingung der Einklemmung entsprochen ist. Die grössere Einfachheit der bei dem unendlichen Cylinder auftretenden Erscheinungen erklärt sich, wenn man bedenkt, dass der unendliche Cylinder in mathematischer Beziehung ein weit einfacherer Körper ist, als der begrenzte Cylinder. Analoge Betrachtungen, wie in dem eben erwähnten Beispiel, lassen sich stets anstellen, wenn die Belastung des Cylinders in allen Intervallen die gleiche und in jedem einzelnen Intervall symmetrisch zur Mitte ist. Hierdurch wird die Berechnung der Deformation des an beiden Seiten eingeklemmten Stabes auf das Problem reducirt, das Gleichgewicht des unbegrenzten Cylinders im Fall der Periodicität der einwirkenden Oberflächenkräfte zu bestimmen. Die Grösse der Periode (die in dem angeführten Beispiel mit dem Abstand zweier benachbarter Pfeiler von einander identisch ist) möge durch $2l$ bezeichnet werden. Man wählt die Cylinderachse auch hier zur z-Achse und legt den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte einer Periode. Dann sollen die gegebenen äusseren Druckkräfte X, Y, Z als periodische gerade Functionen von z mit der Periode $2l$ vorausgesetzt werden.

In der erwähnten Abhandlung wird dieses Problem für den Fall, dass der Cylinderquerschnitt ein voller Kreis ist, behandelt. Den Radius des Kreises nennt man c. Nachdem x, y durch die Polarcoordinaten r, s ersetzt sind, führen die allgemeinen Integrale auf Bessel'sche Functionen der Variable r und auf trigonometrische Functionen der Variablen s und z. Die Bestimmung der Integrationsconstanten geschieht für $r = c$ durch Entwicklung der gegebenen Functionen X, Y, Z nach dem Fourier'schen Satz und Vergleichung der Coefficienten. Nachdem so die allgemein gültigen Ausdrücke der Verschiebungen ξ, η, ζ abgeleitet sind, wird die Voraussetzung, dass c eine kleine Grösse gegen l sein soll, eingeführt. Man reducirt in Folge dessen die Potenzreihe der Bessel'schen Function auf eine bestimmte Anzahl von Gliedern; und zwar ist hierbei nach dem Grundsatz verfahren worden, dass diejenigen Summanden, welche zu den Verschiebungen oder zu den Druckkräften Bestandtheile von negativer Ordnung (in Bezug auf c) lieferten, beibehalten worden sind. Diese

Annäherung ist im Ganzen mit der Vernachlässigung der Potenz $\left(\frac{c}{l}\right)^4$ neben der Einheit identisch. In Betreff der äusseren Druckkräfte gelangt man durch Anwendung der Superposition zu Vereinfachungen, da das allgemeine Problem sich in drei einfachere Theilprobleme zerlegen lässt. Von letzteren wird zunächst dasjenige behandelt, wo allein Normalkräfte auf die Cylinderoberfläche wirken. Die Vorgänge der Biegung werden durch diese Voraussetzung nur in sofern eingeschränkt, als die Torsion ausgeschlossen bleibt. In den Gleichungen, die dann für ξ, η, ζ erhalten werden, kommen gewisse Functionen von z allein vor, welche aus den gegebenen Oberflächenkräften abgeleitet werden. Man schneide durch zwei zur Cylinderachse senkrechte Ebenen, die den Abstand dz von einander haben, eine dünne Scheibe aus dem Cylinder aus, und vereinige, während dieselbe als starr gilt, die an ihrer krummen Oberfläche wirkenden äusseren Kräfte; die hierdurch entstehende Resultante möge parallel der x- und y-Achse die Componenten $\mathfrak{X}\,dz$ und $\mathfrak{Y}\,dz$ haben. Die Grössen $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, welche gerade periodische Functionen von z sind, entwickelt man nach dem Fourier'schen Satz in die Reihen

$$\mathfrak{X} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{a}_n \cos\frac{n\pi z}{l}, \quad \mathfrak{Y} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{b}_n \cos\frac{n\pi z}{l},$$

bei denen ein constantes Glied nicht vorkommt, da die Summe aller x-, respective y-Componenten gleich Null sein muss. Man sieht leicht, dass $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ gleich den Integralen

$$(43.)\quad \mathfrak{X} = c\int_{-\pi}^{\pi} X\,ds, \quad \mathfrak{Y} = c\int_{-\pi}^{\pi} Y\,ds$$

sind, da die Componenten X, Y hier auf das Oberflächenelement $c\,ds\,dz$ wirken. Man definire nun zwei Functionen φ und ψ durch die Gleichungen

$$(44.)\quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{4\,l^4}{\pi^5 c^4} \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{a}_n}{n^4} \cos\frac{n\pi z}{l}, \\[2ex] \psi = \dfrac{4\,l^4}{\pi^5 c^4} \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\mathfrak{b}_n}{n^4} \cos\frac{n\pi z}{l}. \end{cases}$$

Dann erhält man für ξ, η, ζ (in der erwähnten Annäherung) die Ausdrücke

$$(45.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\varphi}{E} + \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\varphi}{dz^2}\,\dfrac{x^2-y^2}{2} + \dfrac{d^2\psi}{dz^2}\,xy\right) - \dfrac{c^2}{4E_3}\,\dfrac{d^2\varphi}{dz^2}, \\[2ex] \eta = \dfrac{\psi}{E} + \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\psi}{dz^2}\,\dfrac{y^2-x^2}{2} + \dfrac{d^2\varphi}{dz^2}\,xy\right) - \dfrac{c^2}{4E_3}\,\dfrac{d^2\psi}{dz^2}, \\[2ex] \zeta = -\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{d\varphi}{dz}\,x + \dfrac{d\psi}{dz}\,y\right) \\[2ex] \qquad + \left(\dfrac{c^2}{4}\left[\dfrac{1}{E_3} - \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{E}\right] + \dfrac{x^2+y^2}{4E}\right)\left(\dfrac{d^3\varphi}{dz^3}\,x + \dfrac{d^3\psi}{dz^3}\,y\right), \end{cases}$$

wo E und E_1 die in (12.) der Einleitung angegebenen Constanten sind, und E_3 durch die Gleichung

$$\frac{1}{E_3} = \frac{2}{E} + \frac{a^2-2b^2}{3b(3a-4b)^2}$$

bestimmt ist.*)

Um die Functionen (45.) mit den in den vorstehenden Rechnungen abgeleiteten Werthen von ξ, η, ζ zu vergleichen, hat man zunächst zu beachten, dass in Folge der Voraussetzung, dass nur normale Oberflächenkräfte vorhanden sein sollen, $\mathfrak{h} = \mathfrak{T} = 0$ zu nehmen ist, weil h_1 und das Torsionsmoment H_1 verschwinden [Gl. (40.) in § 5 und (25.) in § 14]. Ferner sind von den durch die Substitution (16.) im § 3

$$\begin{cases} \xi = U_1 + U_2 + u_0 + u, \\ \eta = V_1 + V_2 + v_0 + v, \\ \zeta = W_1 + W_2 + w \end{cases}$$

eingeführten Grössen nur U_1, U_2, V_1, V_2, W_1, W_2 vollständig zu berücksichtigen; von u_0, v_0, w kommt ein Theil der Summanden in Betracht, während u, v fortzulassen sind. Denn es sollen von ξ, η, ζ einerseits alle Bestandtheile negativer Ordnung, andererseits noch diejenigen Summanden 0ter Ordnung beibehalten werden, welche zu den Druckkräften einen Beitrag von der -1ten Ordnung liefern. Da die Ordnung durch die Differentiation nach x oder y, nicht aber durch die nach z, erniedrigt wird, so ergiebt sich, dass von u_0, v_0 und dem Bestandtheil 0ter Ordnung von w die von z allein abhängigen Glieder ($\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{R}$) nicht aufgeführt werden dürfen; ausserdem kommen die Terme $-\mathfrak{T}_2 y$ und $+\mathfrak{T}_2 x$ von u_0 und v_0 zum Fortfall. Die übrigen Summanden der genannten Grössen hat man dagegen beizubehalten. Nach (38.) im § 4, (46.) im § 6 und (1.) im § 9 müssen also die folgenden Gleichungen

$$(46.)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\mathfrak{F}}{E} + \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}\,\dfrac{x^2-y^2}{2} + \dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}xy\right) + \mathfrak{P}_1, \\[2ex] \eta = \dfrac{\mathfrak{G}}{E} + \dfrac{1}{E_1}\left(\dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\,\dfrac{y^2-x^2}{2} + \dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}xy\right) + \mathfrak{Q}_1, \\[2ex] \zeta = -\dfrac{1}{E}\left(\dfrac{d\mathfrak{F}}{dz}x + \dfrac{d\mathfrak{G}}{dz}y\right) - \dfrac{d\mathfrak{P}_1}{dz}x - \dfrac{d\mathfrak{Q}_1}{dz}y \\[2ex] \qquad + \dfrac{1}{4A}\left(c^2\left[\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right] - \dfrac{x^2+y^2}{E}\right)\left(\dfrac{dF_1}{dz}x + \dfrac{dG_1}{dz}y\right), \end{cases}$$

in denen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ die Werthe (40.) des § 5, und $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$ die Werthe (21.) des § 13 haben, als identisch mit den Gleichungen (45.) bewiesen werden.

---

*) Die obigen Gleichungen (45.) sind die Gleichungen (55.) der genannten Abhandlung, indessen steht daselbst U statt $\frac{\pi^4 c^3}{4l^4}\varphi$, und V statt $\frac{\pi^4 c^3}{4l^4}\psi$.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass die Relationen

$$(47.)\quad \begin{cases} \varphi = \mathfrak{F}, & \dfrac{c^2}{4E_3}\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} = -\mathfrak{P}_1, \\ \psi = \mathfrak{G}, & \dfrac{c^2}{4E_3}\dfrac{d^2\psi}{dz^2} = -\mathfrak{Q}_1 \end{cases}$$

bestehen, wodurch die zwei ersten Gleichungen (45.) in die zwei ersten Gleichungen (46.) übergehen. Die Functionen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ sind nach (40.) im § 5 gleich den Integralen

$$\mathfrak{F} = -\frac{1}{A}\int\!\!\int(F_1+F_2)\,dz^2, \qquad \mathfrak{G} = -\frac{1}{A}\int\!\!\int(G_1+G_2)\,dz^2;$$

bei dem kreisförmigen Querschnitt ist $A = B = \dfrac{\pi c^4}{4}$. Die bei diesen Integralen auftretenden willkürlichen Constanten kommen, wie im § 5 gezeigt wurde, für das hier behandelte Problem nicht in Betracht, da sie auf die Deformation keinen Einfluss haben. In Folge dessen braucht man statt der Gleichungen $\varphi = \mathfrak{F}$, $\psi = \mathfrak{G}$ nur die Gleichungen $\dfrac{d^2\varphi}{dz^2} = \dfrac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2}$, $\dfrac{d^2\psi}{dz^2} = \dfrac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}$ zu beweisen. Die analoge Bemerkung gilt nach § 13 für die Grössen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$. Also kann man das Gleichungssystem (47.) durch das folgende ersetzen:

$$(48.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\varphi}{dz^2} = -\dfrac{1}{A}(F_1+F_2), & \dfrac{c^2}{4E_3}\dfrac{d^4\varphi}{dz^4} = -\dfrac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2}, \\ \dfrac{d^2\psi}{d^2z} = -\dfrac{1}{A}(G_1+G_2), & \dfrac{c^2}{4E_3}\dfrac{d^4\psi}{dz^4} = -\dfrac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2}. \end{cases}$$

Bei zweien dieser letzteren Gleichungen tritt noch eine weitere Reduction ein. Man will die Uebereinstimmung der Resultate, welche in der gedachten Abhandlung für den unendlichen Cylinder erhalten wurden, mit den hier gewonnenen Resultaten constatiren, unter der Voraussetzung, dass letztere auf den Fall des an beiden Enden eingeklemmten Stabes angewendet werden. Nun hat nach § 7 die Bedingung, dass die Enden des Stabes eingeklemmt seien, zur Folge, dass die Functionen F, G (deren Theile F_1, F_2, G_1, G_2 sind) sich um die Ausdrücke $K_1 + k_1(l-z)$, $K_2 + k_2(l-z)$ vermehren, wo K_1, K_2, k_1, k_2 Constanten sind, die durch die Angaben über die Lage der Stabenden bestimmt werden. Direkt gegebene Grössen sind also im vorliegenden Falle nicht F und G, da sie die vorläufig unbekannten Constanten K_1, K_2, k_1, k_2 enthalten, sondern nur ihre zweiten Differentialquotienten $\dfrac{d^2F}{dz^2}$ und $\dfrac{d^2G}{dz^2}$, in denen jene Constanten nicht mehr vorkommen. Hieraus folgt, dass man statt der Gleichungen (48.)

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} = -\frac{1}{A}(F_1+F_2), \quad \frac{d^2\psi}{dz^2} = -\frac{1}{A}(G_1+G_2)$$

nur die Gleichungen

$$(49.) \quad \frac{d^4\varphi}{dz^4} = -\frac{1}{A}\,\frac{d^2(F_1+F_2)}{dz^2}, \quad \frac{d^4\psi}{dz^4} = -\frac{1}{A}\,\frac{d^2(G_1+G_2)}{dz^2}$$

zu beweisen hat. Denn sobald letztere erfüllt sind, müssen es auch die ersteren sein, weil die in beiden Problemen übereinstimmenden Angaben in Betreff der Stabenden eine Verschiedenheit der Constanten K_1, K_2, k_1, k_2 nicht zulassen.

Nach (44.) ist

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{4}{\pi c^4}\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{a}_n \cos\frac{n\pi z}{l} = \frac{\mathfrak{X}}{A},$$

$$\frac{d^4\psi}{dz^4} = \frac{4}{\pi c^4}\sum_{n=1}^{n=\infty} \mathfrak{b}_n \cos\frac{n\pi z}{l} = \frac{\mathfrak{Y}}{A},$$

oder, wegen der Gleichungen (43.),

$$\frac{d^4\varphi}{dz^4} = \frac{c}{A}\int_{-\pi}^{\pi} X\,ds, \quad \frac{d^4\psi}{dz^4} = \frac{c}{A}\int_{-\pi}^{\pi} Y\,ds.$$

Andererseits wurden im § 15 die Gleichungen

$$\frac{d^2F_1}{dz^2} = -c\int_{-\pi}^{\pi} X\,ds, \quad \frac{d^2G_1}{dz^2} = -c\int_{-\pi}^{\pi} Y\,ds$$

abgeleitet; die Grössen $\frac{d^2F_2}{dz^2}$ und $\frac{d^2G_2}{dz^2}$ sind gleich Null nach (13.) im § 1, da hier $Z=0$ ist, und von der Schwerkraft abgesehen wird. Somit sind die Gleichungen (49.) bewiesen.

Für die Functionen $\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2}$ und $\frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2}$ ermittelte man im § 13 die Werthe:

$$\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2} = \frac{2}{E_1}\,\frac{\alpha_1' + \gamma_1'}{c} + \frac{c^2}{6A}\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{E}-\frac{b}{E^2}\right)\frac{d^2F_1}{dz^2} - \frac{F_3}{AE},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2} = \frac{2}{E_1}\,\frac{\beta_1' - \delta_1'}{c} + \frac{c^2}{6A}\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{E}-\frac{b}{E^2}\right)\frac{d^2G_1}{dz^2} - \frac{G_3}{AE}.$$

Die Coefficienten γ_1' und δ_1', welche nach (18.) im § 12 zu der Entwicklung von S gehören, verschwinden im vorliegenden Falle, wo nur Normalkräfte wirken sollen, also $S=0$ ist. Ebenso ist wegen $Z=0$ nach (14.) im § 1 auch $F_3 = G_3 = 0$. Die im § 15 angegebenen Werthe von α_1' und β_1' transformiren sich nach Berücksichtigung der Relationen

$$X = R\cos s, \quad Y = R\sin s$$

und der oben benutzten Gleichungen in die folgenden:

$$\alpha'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R \cos s\, ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\, ds = -\frac{1}{\pi c}\,\frac{d^2F_1}{dz^2},$$

$$\beta'_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R \sin s\, ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Y\, ds = -\frac{1}{\pi c}\,\frac{d^2G_1}{dz^2}.$$

Auf diese Weise findet man für $\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2}$ die Ausdrücke

$$\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2} = \frac{c^2}{2A}\left\{-\frac{1}{E_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{E} - \frac{b}{E^2}\right)\right\}\frac{d^2F_1}{dz^2},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2} = \frac{c^2}{2A}\left\{-\frac{1}{E_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{E} - \frac{b}{E^2}\right)\right\}\frac{d^2G_1}{dz^2},$$

und da nach (15.) des § 1

$$-\frac{1}{E_1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{E} - \frac{b}{E^2}\right) = \frac{1}{E} + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2b\,(3a-4b)} - \frac{b}{E^2}\right)$$
$$= \frac{1}{E} + \frac{a^2 - 2b^2}{6b\,(3a-4b)^2} = \frac{1}{2E_3}$$

ist, so ergiebt sich

$$\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2} = \frac{c^2}{4A\,E_3}\,\frac{d^2F_1}{dz^2} = -\frac{c^2}{4E_3}\,\frac{d^4\varphi}{dz^4},$$

$$\frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2} = \frac{c^2}{4A\,E_3}\,\frac{d^2G_1}{dz^2} = -\frac{c^2}{4E_3}\,\frac{d^4\psi}{dz^4},$$

womit die Gleichungen (48.), also auch die Gleichungen (47.) bewiesen sind.

Es bleibt übrig, die 3te Gleichung (45.) als identisch mit der 3ten Gleichung (46.) nachzuweisen. Man hat aber in die letztere Gleichung nur die aus (47.) folgenden Werthe

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{P}_1}{dz} &= -\frac{c^2}{4E_3}\,\frac{d^3\varphi}{dz^3} = -\frac{c^2}{4E_3}\,\frac{d^3\mathfrak{F}}{dz^3},\\ \frac{d\mathfrak{Q}_1}{dz} &= -\frac{c^2}{4E_3}\,\frac{d^3\psi}{dz^3} = -\frac{c^2}{4E_3}\,\frac{d^3\mathfrak{G}}{dz^3}, \end{aligned}\right.$$

sowie die Werthe

$$\frac{dF_1}{dz} = -A\,\frac{d^3\mathfrak{F}}{dz^3},\quad \frac{dG_1}{dz} = -A\,\frac{d^3\mathfrak{G}}{dz^3}$$

zu substituiren, um dieselbe auf die Form

$$\zeta = -\frac{1}{E}\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz}\,x + \frac{d\mathfrak{G}}{dz}\,y\right)$$
$$+\left(\frac{c^2}{4}\left[\frac{1}{E_3} - \frac{1}{b} - \frac{1}{E}\right] + \frac{x^2+y^2}{4E}\right)\left(\frac{d^3\mathfrak{F}}{dz^3}\,x + \frac{d^3\mathfrak{G}}{dz^3}\,y\right)$$

zu bringen. Dieser Ausdruck von ζ kommt, da $\varphi = \mathfrak{F}$, $\psi = \mathfrak{G}$ ist, genau auf den in (45.) angegebenen zurück.

Hiermit ist für den Fall, dass nur Normalkräfte auf den Cylindermantel wirken, die vollständige Uebereinstimmung der nach den zwei verschiedenen Methoden abgeleiteten angenäherten Formeln bewiesen. Dieselbe Uebereinstimmung ergiebt sich auch in den übrigen beiden Fällen (Tangentialkräfte senkrecht oder parallel zur Cylinderkante), zu denen die Zerlegung des allgemeinen Problems des unbegrenzten Cylinders führt. Die in der oben erwähnten Abhandlung enthaltenen Rechnungen sind daher als eine Bestätigung der hier entwickelten Theorie anzusehen.

Abschnitt III.

Der Hohlcylinder mit kreisförmigem Querschnitt.

§ 18. Integration der Differentialgleichungen.

Das zweite Problem, das hier näher behandelt werden soll, betrifft den Fall, dass der Querschnitt des cylindrischen Stabes aus einem durch zwei concentrische Kreise gebildeten Ringe besteht. Dasselbe führt zu ähnlichen partikulären Integralen, wie das Problem des vollen Kreiscylinders; jedoch nehmen die Integrationsconstanten wesentlich andere Werthe an. Es wird vorausgesetzt, dass der Hohlcylinder nur an seiner äusseren Oberfläche durch Druckkräfte in Anspruch genommen wird, an der inneren dagegen $X = Y = Z = 0$ sind. Der Cylinderquerschnitt werde durch die zwei Kreise

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad x^2 + y^2 = c_1{}^2$$

begrenzt, und zwar sei der Radius c_1 der kleinere. Die Grössen c und c_1 werden in den nachfolgenden Rechnungen als nicht sehr verschieden von einander angenommen; man setzt die durch die Gleichung

$$(1.)\quad \frac{c_1}{c} = 1 - \varepsilon$$

definirte Grösse ε als klein neben der Einheit voraus (d. h. die Wandstärke des Hohlcylinders als klein neben seinem Querdurchmesser).

Für die Variable $\mathfrak{W}_1$ gilt im Innern des Stabes die Differentialgleichung (47.) des § 6

$$\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx^2} + \frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy^2} = 0,$$

welche nach Einführung der Polarcoordinaten

$$x = r \cos s, \quad y = r \sin s$$

die Form

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{d\mathfrak{W}_1}{dr}\right) + \frac{1}{r} \frac{d^2\mathfrak{W}_1}{ds^2} = 0$$

annimmt. In der zugehörigen Oberflächenbedingung (53.) sind $\cos\lambda$, $\cos\mu$ für die äussere Begrenzung gleich $\cos s$, $\sin s$, und für die innere gleich $-\cos s$, $-\sin s$ zu nehmen. Ausserdem ist

$$\frac{d\mathfrak{W}_1}{dx}\cos\lambda + \frac{d\mathfrak{W}_1}{dy}\cos\mu = \frac{d\mathfrak{W}_1}{dr},$$

so dass man die zwei Gleichungen

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\mathfrak{W}_1}{dr}\right)_{r=c} = (L_1\cos s + M_1\sin s)_{r=c}, \\ \left(\dfrac{d\mathfrak{W}_1}{dr}\right)_{r=c_1} = (L_1\cos s + M_1\sin s)_{r=c_1} \end{cases}$$

erhält. Nach Substitution der in (50.) des § 6 angegebenen Werthe von L_1 und M_1 lauten dieselben:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d\mathfrak{W}_1}{dr}\right)_{r=c} = \dfrac{c^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\left(\dfrac{dF_1}{dz}\cos s + \dfrac{dG_1}{dz}\sin s\right), \\ \left(\dfrac{d\mathfrak{W}}{dr}\right)_{r=c_1} = \dfrac{c_1{}^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\left(\dfrac{dF_1}{dz}\cos s + \dfrac{dG_1}{dz}\sin s\right). \end{cases}$$

Aus diesen Bestimmungen ergiebt sich für $\mathfrak{W}_1$, wenn zum Schluss wieder die Coordinaten x, y angewendet werden, der Ausdruck

$$(2.)\quad \mathfrak{W}_1 = \frac{1}{4A}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{E}\right)\left(c^2+c_1^2+\frac{c^2c_1^2}{x^2+y^2}\right)\left(\frac{dF_1}{dz}x + \frac{dG_1}{dz}y\right) + \mathfrak{K},$$

in welchem $\mathfrak{K}$ eine willkürliche Function der Variable z bedeutet.

Die Grössen $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{V}_1$ haben nach (60.) des § 7 im Innern des Stabes die Gleichungen

$$a\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right) + b\,\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}-\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right) = -(a-b)\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dx\,dz},$$

$$a\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}_1}{dy}\right) - b\,\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{U}_1}{dy}-\frac{d\mathfrak{V}_1}{dx}\right) = -(a-b)\frac{d^2\mathfrak{W}_1}{dy\,dz}$$

zu erfüllen, in die für $\mathfrak{W}_1$ der Werth (2.) eingesetzt wird. Man transformire diese Gleichungen durch die Substitution

$$(3.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{U}' - \dfrac{c^2+c_1^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)G_1''xy \\ \qquad\qquad - \dfrac{c^2c_1^2}{4A}\,\dfrac{a-b}{a+b}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\dfrac{x(F_1''x+G_1''y)}{x^2+y^2}, \\ \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}' - \dfrac{c^2+c_1^2}{4A}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)F_1''xy \\ \qquad\qquad - \dfrac{c^2c_1^2}{4A}\,\dfrac{a-b}{a+b}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{E}\right)\dfrac{y(F_1''x+G_1''y)}{x^2+y^2}, \end{cases}$$

woselbst zur Abkürzung F_1'', G_1'' für $\dfrac{d^2F_1}{dz^2}$, $\dfrac{d^2G_1}{dz^2}$ geschrieben ist.

Dann entstehen für die neuen Unbekannten $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ die Differentialgleichungen

$$\begin{cases} a \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dy}\right)+b\,\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dx}\right)=0, \\ a \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dx}+\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dy}\right)-b\,\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d\mathfrak{U}'}{dy}-\dfrac{d\mathfrak{V}'}{dx}\right)=0, \end{cases}$$

die mit den Gleichungen (3.) im § 9 identisch sind. Ebenso wie bei dem vollen Kreiscylinder werden an Stelle von $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ zwei Verschiebungen ϱ, σ eingeführt, welche die Richtung des wachsenden Radius vector r, respective die dazu senkrechte Richtung haben. Man setzt

$$(4.)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}' = \varrho \cos s - \sigma \sin s, \\ \mathfrak{V}' = \varrho \sin s + \sigma \cos s, \end{cases}$$

wodurch man, wie dort, für ϱ und σ die Differentialgleichungen

$$(5.)\quad \begin{cases} a\,\dfrac{d}{dr}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d(r\varrho)}{dr}+\dfrac{d\sigma}{ds}\right]\right\}+\dfrac{b}{r}\,\dfrac{d}{ds}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d\varrho}{ds}-\dfrac{d(r\sigma)}{dr}\right]\right\}=0, \\ \dfrac{a}{r}\,\dfrac{d}{ds}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d(r\varrho)}{dr}+\dfrac{d\sigma}{ds}\right]\right\}-b\,\dfrac{d}{dr}\left\{\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{d\varrho}{ds}-\dfrac{d(r\sigma)}{dr}\right]\right\}=0 \end{cases}$$

erhält. Die vollständigen Integrale dieser Gleichungen wurden im § 10 entwickelt; dieselben lauten:

$$(6.)\quad \begin{cases} \varrho = \sum\limits_{(n)} r^{n-1}\left\{\mathfrak{A}_n \cos ns + \mathfrak{B}_n \sin ns\right\} \\ \qquad + \sum\limits_{(n)} \left(\dfrac{n+2}{a}-\dfrac{n}{b}\right) r^{n+1}\left\{\mathfrak{C}_n \cos ns + \mathfrak{D}_n \sin ns\right\}, \\ \sigma = -\sum\limits_{(n)} r^{n-1}\left\{\mathfrak{A}_n \sin ns - \mathfrak{B}_n \cos ns\right\} \\ \qquad + \sum\limits_{(n)} \left(\dfrac{n+2}{b}-\dfrac{n}{a}\right) r^{n+1}\left\{\mathfrak{C}_n \sin ns - \mathfrak{D}_n \cos ns\right\}. \end{cases}$$

Die Grössen $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$, welche Functionen von z sind, ergeben sich aus den Bedingungen für die Oberfläche des Stabes.

§ 19. Bestimmung der Coefficienten.

Die Oberflächenbedingungen (70.) im § 7 liefern zwei Gleichungen für die äussere und zwei Gleichungen für die innere Begrenzung. Die ersteren sind mit den Gleichungen (10.) im § 11 identisch, und die letzteren unterscheiden sich von den eben genannten nur dadurch, dass die gegebenen Druckkräfte R, S gleich Null zu setzen sind, und dass c_1 an Stelle von c tritt. Auf diese Weise hat man zur Bestimmung der Coefficienten $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{D}_n$ die Gleichungen

$$
(7.)\quad \begin{cases}
\left[a\dfrac{d\varrho}{dr}+\dfrac{a-2b}{r}\left(\dfrac{d\sigma}{ds}+\varrho\right)\right]_{r=c}=\mathfrak{R}, \\
\left[\dfrac{b}{r}\dfrac{d\varrho}{ds}+br\dfrac{d}{dr}\dfrac{\sigma}{r}\right]_{r=c}=\mathfrak{S}, \\
\left[a\dfrac{d\varrho}{dr}+\dfrac{a-2b}{r}\left(\dfrac{d\sigma}{ds}+\varrho\right)\right]_{r=c_1}=\bar{\mathfrak{R}}, \\
\left[\dfrac{b}{r}\dfrac{d\varrho}{ds}+br\dfrac{d}{dr}\dfrac{\sigma}{r}\right]_{r=c_1}=\bar{\mathfrak{S}},
\end{cases}
$$

in denen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ die folgenden Functionen bedeuten:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{R} &= R+\frac{c^3}{2A}\left(1+\frac{b}{E}\right)\sin 2s\,(F_1''\sin s+G_1''\cos s) \\
&\quad -\Big[\mathfrak{L}\cos^2 s+\mathfrak{M}\sin^2 s+\mathfrak{N}\sin 2s\Big]_{r=c}, \\
\mathfrak{S} &= S+\frac{c^3}{4A}\left(1+\frac{b}{E}\right)(F_1''\sin 3s+G_1''\cos 3s) \\
&\quad +\left[\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{M}}{2}\sin 2s-\mathfrak{N}\cos 2s\right]_{r=c}, \\
\bar{\mathfrak{R}} &= \frac{c_1^3}{2A}\left(1+\frac{b}{E}\right)\sin 2s\;(F_1''\sin s+G_1''\cos s) \\
&\quad -\Big[\mathfrak{L}\cos^2 s+\mathfrak{M}\sin^2 s+\mathfrak{N}\sin 2s\Big]_{r=c_1}, \\
\bar{\mathfrak{S}} &= \frac{c_1^3}{4A}\left(1+\frac{b}{E}\right)(F_1''\sin 3s+G_1''\cos 3s) \\
&\quad +\left[\frac{\mathfrak{L}-\mathfrak{M}}{2}\sin 2s-\mathfrak{N}\cos 2s\right]_{r=c_1}.
\end{aligned}
$$

Die Werthe der Functionen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sind in den Gleichungen (68.) des § 7 angegeben. Für die Entwicklung der Grössen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ nach der Variable s werden dieselben Bezeichnungen wie in §§ 11 und 12 — Gleichungen (12.), (17.), (18.) — angewendet. Man setzt also

$$
(8.)\quad \begin{cases}
\mathfrak{R}=\tfrac{1}{2}\alpha_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\{\alpha_n\cos ns+\beta_n\sin ns\}, \\
\mathfrak{S}=\tfrac{1}{2}\delta_0+\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty}\{\gamma_n\sin ns+\delta_n\cos ns\},
\end{cases}
$$

und zerlegt die (von z allein abhängigen) Werthe α_n, β_n, γ_n, δ_n in je 2 Summanden $\alpha_n'+\alpha_n''$, $\beta_n'+\beta_n''$, $\gamma_n'+\gamma_n''$, $\delta_n'+\delta_n''$. Durch α_n', β_n', γ_n', δ_n' werden die Coefficienten der Entwicklung der gegebenen Oberflächenkräfte R und S

$$(9.)\quad \begin{cases} R = \frac{1}{2}\alpha'_0 + \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \{\alpha'_n \cos ns + \beta'_n \sin ns\}, \\ S = \frac{1}{2}\delta'_0 + \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \{\gamma'_n \sin ns + \delta'_n \cos ns\}, \end{cases}$$

und durch α''_n, β''_n, γ''_n, δ''_n die analogen Coefficienten der Entwicklung des Restbestandtheils von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ bezeichnet. Diese Unterscheidung fällt für die Functionen $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ fort, da nach der Voraussetzung keine Kräfte auf die innere Begrenzung wirken. Die Entwicklung von $\bar{\mathfrak{R}}$ und $\bar{\mathfrak{S}}$ sei:

$$(10.)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{R}} = \frac{1}{2}\bar{\alpha}_0 + \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \{\bar{\alpha}_n \cos ns + \bar{\beta}_n \sin ns\}, \\ \bar{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2}\bar{\delta}_0 + \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \{\bar{\gamma}_n \sin ns + \bar{\delta}_n \cos ns\}. \end{cases}$$

Die Coefficienten $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$, $\bar{\delta}_n$ entstehen, wie die obigen Definitionen von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ ergeben, aus den Coefficienten α''_n, β''_n, γ''_n, δ''_n, wenn c durch c_1 ersetzt wird.

Bei dem Hohlcylinder nimmt die Grösse n in den Summen (6.) alle ganzzahligen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ an, während bei dem vollen Cylinder die Summation sich nur auf die positiven ganzen Zahlen erstreckte. An Stelle von $\mathfrak{A}_{-n}$, $\mathfrak{B}_{-n}$, $\mathfrak{C}_{-n}$, $\mathfrak{D}_{-n}$ soll hier $\mathfrak{A}'_n$, $\mathfrak{B}'_n$, $\mathfrak{C}'_n$, $\mathfrak{D}'_n$ geschrieben werden; dann kann man den Werth des Index n wiederum auf die positiven ganzen Zahlen, einschliesslich der Null, beschränken. Man setzt, nachdem für ϱ und σ die Werthe (6.) substituirt sind, die Coefficienten von $\cos ns$ und $\sin ns$ auf der rechten und linken Seite einer jeden der 4 Gleichungen (7.) einander gleich, und erhält hierdurch, wenn vom Fall $n = 0$ zunächst abgesehen wird, für die 8 Grössen

$$\mathfrak{A}_n,\ \mathfrak{B}_n,\ \mathfrak{C}_n,\ \mathfrak{D}_n,\ \mathfrak{A}'_n,\ \mathfrak{B}'_n,\ \mathfrak{C}'_n,\ \mathfrak{D}'_n$$

je 8 lineare Gleichungen. Die ersten 4 derselben lauten

$$(11.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha_n = \begin{cases} b(n-1)c^{n-2}\mathfrak{A}_n - \frac{a-b}{a}(n+1)(n-2)c^n\mathfrak{C}_n \\ -b(n+1)c^{-n-2}\mathfrak{A}'_n - \frac{a-b}{a}(n-1)(n+2)c^{-n}\mathfrak{C}'_n, \end{cases} \\ \frac{1}{2}\gamma_n = \begin{cases} -b(n-1)c^{n-2}\mathfrak{A}_n + \frac{a-b}{a}n(n+1)c^n\mathfrak{C}_n \\ -b(n+1)c^{-n-2}\mathfrak{A}'_n - \frac{a-b}{a}n(n-1)c^{-n}\mathfrak{C}'_n, \end{cases} \end{cases}$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{1}{2}\beta_n = \begin{cases} \quad b(n-1)c^{n-2}\mathfrak{B}_n - \dfrac{a-b}{a}(n+1)(n-2)c^n\mathfrak{D}_n \\ + b(n+1)c^{-n-2}\mathfrak{B}'_n + \dfrac{a-b}{a}(n-1)(n+2)c^{-n}\mathfrak{D}'_n, \end{cases} \\ \frac{1}{2}\delta_n = \begin{cases} \quad b(n-1)c^{n-2}\mathfrak{B}_n - \dfrac{a-b}{a}n(n+1)c^n\mathfrak{D}_n \\ -b(n+1)c^{-n-2}\mathfrak{B}'_n - \dfrac{a-b}{a}n(n-1)c^{-n}\mathfrak{D}'_n, \end{cases} \end{array}\right.$$

und die 4 übrigen entstehen aus diesen, wenn man c durch c_1, sowie α_n, β_n, γ_n, δ_n durch $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$, $\bar{\delta}_n$ ersetzt. Von den 4 Gleichungen (11.) gehen die beiden ersten in die beiden letzten über, wenn statt

$$\mathfrak{A}_n,\ \mathfrak{A}'_n,\ \mathfrak{C}_n,\ \mathfrak{C}'_n,\ \alpha_n,\ \gamma_n$$

bezüglich die Grössen

$$\mathfrak{B}_n,\ -\mathfrak{B}'_n,\ \mathfrak{D}_n,\ -\mathfrak{D}'_n,\ \beta_n,\ -\delta_n$$

genommen werden.

Zu $n=0$ gehören nur die 4 Coefficienten $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{D}_0$, von denen, wie im § 11, der Werth $\mathfrak{D}_0$ willkürlich bleibt. Es ergeben sich für $n=0$ die 4 Bestimmungen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\alpha_0 &= -2b\,c^{-2}\,\mathfrak{A}_0 + 4\frac{a-b}{a}\,\mathfrak{C}_0, \\ \tfrac{1}{2}\bar{\alpha}_0 &= -2b\,c_1^{-2}\,\mathfrak{A}_0 + 4\frac{a-b}{a}\,\mathfrak{C}_0, \\ \tfrac{1}{2}\delta_0 &= -2b\,c^{-2}\,\mathfrak{B}_0, \\ \tfrac{1}{2}\bar{\delta}_0 &= -2b\,c_1^{-2}\,\mathfrak{B}_0, \end{aligned}$$

durch deren Auflösung man für $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $\mathfrak{C}_0$ die Ausdrücke

$$(12.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_0 = \dfrac{c^2c_1^2(\alpha_0-\bar{\alpha}_0)}{4b(c^2-c_1^2)},\quad \mathfrak{B}_0 = -\dfrac{c^2\delta_0}{4b}, \\ \mathfrak{C}_0 = \dfrac{a}{8(a-b)}\,\dfrac{c^2\alpha_0 - c_1^2\bar{\alpha}_0}{c^2-c_1^2} \end{cases}$$

und ausserdem die Bedingung

$$c^2\delta_0 = c_1^2\bar{\delta}_0$$

erhält.

Die 2 ersten Gleichungen (11.) verwandeln sich durch Addition und Subtraction in die folgenden

$$\frac{\alpha_n-\gamma_n}{4} = (n-1)\left\{b\,c^{n-2}\mathfrak{A}_n - \frac{a-b}{a}(n+1)\,c^n\,\mathfrak{C}_n - \frac{a-b}{a}\,c^{-n}\,\mathfrak{C}'_n\right\},$$

$$\frac{\alpha_n+\gamma_n}{4} = (n+1)\left\{-b\,c^{-n-2}\mathfrak{A}'_n + \frac{a-b}{a}\,c^n\,\mathfrak{C}_n - \frac{a-b}{a}(n-1)\,c^{-n}\,\mathfrak{C}'_n\right\},$$

woraus man erkennt, dass der Fall $n=1$ eine Ausnahme bildet. Denn für $n=1$ bleiben die Coefficienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}'_1$, $\mathfrak{D}'_1$ willkürlich, während sich für die Constanten α_1, β_1 etc. gewisse Bedingungen ergeben. Es soll zunächst der Fall $n > 1$ behandelt werden. Man kann für $n > 1$ die Coefficienten $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}'_n$ aus den obigen zwei Gleichungen und den analogen, die c_1, $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$, $\bar{\delta}_n$ statt c, α_n, β_n, γ_n, δ_n enthalten, eliminiren. Hierdurch gelangt man zu den zwei Gleichungen

$$\frac{a-b}{a}\left\{n^2\left(\frac{c}{c_1}-\frac{c_1}{c}\right)^2-\left(\frac{c^n}{c_1^n}-\frac{c_1^n}{c^n}\right)^2\right\}\mathfrak{C}_n =$$

$$\frac{1}{c^n}\left(1-\frac{c^2}{c_1^2}\right)\frac{\alpha_n-\gamma_n}{4}+\frac{1}{c^n}\left(\frac{c^2}{c_1^2}-\frac{c^{2n}}{c_1^{2n}}\right)\frac{\alpha_n+\gamma_n}{4\,(n+1)}$$

$$+\frac{1}{c_1^n}\left(1-\frac{c_1^2}{c^2}\right)\frac{\bar{\alpha}_n-\bar{\gamma}_n}{4}+\frac{1}{c_1^n}\left(\frac{c_1^2}{c^2}-\frac{c_1^{2n}}{c^{2n}}\right)\frac{\bar{\alpha}_n+\bar{\gamma}_n}{4\,(n+1)},$$

$$\frac{a-b}{a}\left\{n^2\left(\frac{c}{c_1}-\frac{c_1}{c}\right)^2-\left(\frac{c^n}{c_1^n}-\frac{c_1^n}{c^n}\right)^2\right\}\mathfrak{C}'_n =$$

$$c^n\left(1-\frac{c^2}{c_1^2}\right)\frac{\alpha_n+\gamma_n}{4}-c^n\left(\frac{c^2}{c_1^2}-\frac{c_1^{2n}}{c^{2n}}\right)\frac{\alpha_n-\gamma_n}{4\,(n-1)}$$

$$+c_1^n\left(1-\frac{c_1^2}{c^2}\right)\frac{\bar{\alpha}_n+\bar{\gamma}_n}{4}-c_1^n\left(\frac{c_1^2}{c^2}-\frac{c^{2n}}{c_1^{2n}}\right)\frac{\bar{\alpha}_n-\bar{\gamma}_n}{4\,(n-1)},$$

welche $\mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{C}'_n$ bestimmen. Diese Gleichungen werden nun durch Benutzung der im § 18 gemachten Voraussetzung transformirt, dass die Differenz $1-\frac{c_1}{c}$, die man durch ε bezeichnete, eine kleine Grösse gegen die Zahl 1 sei. Indem man für c_1 den Werth $c\,(1-\varepsilon)$ einsetzt und bei der Entwicklung der Potenzen nach dem binomischen Satz überall neben dem Anfangsgliede noch die folgende Potenz von ε berücksichtigt, erhält man aus den obigen, für $n > 1$ geltenden Gleichungen die folgenden angenäherten Werthe der Coefficienten $\mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{C}'_n$:

$$\mathfrak{C}_n = \frac{3a}{8\,(a-b)\,\varepsilon^3 n^2 (n+1)\,c^n}\left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\alpha_n-\gamma_n}{n-1}+\left(1+\frac{2n-1}{2}\,\varepsilon\right)\frac{\alpha_n+\gamma_n}{n+1}\\&-\left(1+\frac{2n-5}{2}\,\varepsilon\right)\frac{\bar{\alpha}-\bar{\gamma}_n}{n-1}-\left(1-\frac{5\varepsilon}{2}\right)\frac{\bar{\alpha}_n+\bar{\gamma}_n}{n+1}\end{aligned}\right\},$$

$$\mathfrak{C}'_n = \frac{3a\,c^n}{8\,(a-b)\,\varepsilon^3 n^2 (n-1)}\left\{\begin{aligned}&\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\alpha_n+\gamma_n}{n+1}+\left(1-\frac{2n+1}{2}\,\varepsilon\right)\frac{\alpha_n-\gamma_n}{n-1}\\&-\left(1-\frac{2n+5}{2}\,\varepsilon\right)\frac{\bar{\alpha}_n+\bar{\gamma}_n}{n+1}-\left(1-\frac{5\varepsilon}{2}\right)\frac{\bar{\alpha}_n-\bar{\gamma}_n}{n-1}\end{aligned}\right\}.$$

Im Fall $n = 1$ erhält man einerseits die Bedingungen

$$\alpha_1 = \gamma_1,\ \bar{\alpha}_1 = \bar{\gamma}_1,\ \beta_1+\delta_1 = 0,\ \bar{\beta}_1+\bar{\delta}_1 = 0,$$

andererseits für $\mathfrak{C}_1$ den Ausdruck:

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{a}{16\,(a-b)\,c\,\varepsilon}\left\{\alpha_1-\bar{\alpha}_1+\frac{3\varepsilon}{2}\,(\alpha_1+\bar{\alpha}_1)\right\}.$$

Die Werthe von $\mathfrak{D}_n$ und $-\bar{\mathfrak{D}}'_n$ entstehen aus den obigen Werthen von $\mathfrak{C}_n$ und $\mathfrak{C}'_n$, wenn man α_n, $\bar{\alpha}_n$, γ_n, $\bar{\gamma}_n$ respective durch β_n, $\bar{\beta}_n$, $-\delta_n$, $-\bar{\delta}_n$ ersetzt.

Die Coefficientenbestimmung wird hier hauptsächlich zu dem Zweck unternommen, in dem Ausdruck von Z_z noch alle zur Ordnung 0 gehörigen Summanden zu ermitteln, weil dadurch eine genauere Bestimmung der überhaupt vorkommenden Maximal-Druckkraft möglich wird (cfr. die Gleichung (23.) im § 13, und der § 14). In der Formel für Z_z kommen aber nur die Coefficienten $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{C}'_n$, $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D}'_n$, nicht die Coefficienten $\mathfrak{A}_n$, $\mathfrak{A}'_n$, $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B}'_n$ vor. Daher soll auf den Werth der letzteren nicht näher eingegangen werden.

Nach (41.) im § 5 gilt für die Componente Z_z die Gleichung:

$$Z_z = \frac{F_1 + F_2}{A}\, x + \frac{G_1 + G_2}{B}\, y + \frac{h_1}{C} + a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right).$$

Man hat hier $A = B$ zu nehmen und für u, v, w die ermittelten Werthe einzusetzen. Die Substitutionen (46.) im § 6 und (57.) im § 7 für w, u, v und die Gleichungen (2.), (3.) des § 18 liefern die Transformation

$$(13.)\quad \left\{\begin{aligned}
& a\,\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) = \\
& a\,\frac{d\mathfrak{R}}{dz} - \frac{4b\,(a-b)}{a}\left(\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2}\, x + \frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2}\, y\right) \\
& + \frac{F''_1 x + G''_1 y}{A}\left\{\begin{aligned} & \frac{c^2 + c_1^2}{2}\left(1 + \frac{b}{E}\right) - \frac{a\,(x^2+y^2)}{4E} \\ & + \frac{c^2 c_1^2}{2}\,\frac{2a-b}{a+b}\left(1 + \frac{b}{E}\right)\frac{1}{x^2+y^2}\end{aligned}\right\} \\
& + (a-2b)\,\frac{F''_1 x}{12A}\left\{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{E_2}\right) x^2 + 3\left(\frac{2}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) y^2\right\} \\
& + (a-2b)\,\frac{G''_1 y}{12A}\left\{\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{E_2}\right) y^2 + 3\left(\frac{2}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right) x^2\right\} \\
& + (a-2b)\left(\frac{d\mathfrak{U}'}{dx} + \frac{d\mathfrak{V}'}{dy}\right) + \Psi,
\end{aligned}\right.$$

wo in Ψ alle Glieder von höherer Ordnung als der 0ten zusammengefasst sind. In $\frac{d\mathfrak{U}'}{dx} + \frac{d\mathfrak{V}'}{dy}$ drückt man nach (4.) im § 18 die Variablen $\mathfrak{U}'$, $\mathfrak{V}'$ durch ϱ, σ aus und nimmt sodann für ϱ, σ die Integrale (6.). Es entsteht auf diese Weise die Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{U}'}{dx} + \frac{d\mathfrak{V}'}{dy} = \frac{1}{r}\left\{\frac{d\,(r\varrho)}{dr} + \frac{d\sigma}{ds}\right\} =$$

$$\frac{4\mathfrak{C}_0}{a} + \frac{4}{a}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left\{\begin{aligned} & (n+1)\, r^n\,(\mathfrak{C}_n \cos ns + \mathfrak{D}_n \sin ns) \\ & -(n-1)\, r^{-n}\,(\mathfrak{C}'_n \cos ns - \mathfrak{D}'_n \sin ns)\end{aligned}\right\},$$

in die für $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{C}'_n$, $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D}'_n$ die gefundenen Werthe zu substituiren sind. Bevor indessen letzteres geschieht, soll in Berücksichtigung des Umstandes, dass c_1 und c als wenig von einander verschieden vorausgesetzt werden, statt r eine andere Variable eingeführt werden. Man setzt:

$$(14.)\quad r = c(1-\tau).$$

Dann liegt, weil r nur zwischen c und c_1, also zwischen c und $c\,(1-\varepsilon)$, variirt, der Werth τ stets zwischen 0 und ε. Folglich ist τ, ebenso wie ε, eine Grösse, welche als klein neben der Zahl 1 angenommen wird. Bei Berechnung der Coefficienten $\mathfrak{C}_n$, $\mathfrak{C}'_n$, $\mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D}'_n$ wurden das Anfangsglied und die nächstfolgende Potenz von ε beibehalten. Indem man dasselbe Princip der Annäherung auf die von τ abhängigen Grössen anwendet, hat man

$$r^n = c^n\,(1-\tau)^n = c^n\,(1-n\tau),$$
$$r^{-n} = c^{-n}\,(1-\tau)^{-n} = c^{-n}\,(1+n\tau)$$

zu nehmen. In $\frac{d\mathfrak{V}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}'}{dy}$ müssen die zum Werth $n=1$ gehörigen Summanden von den übrigen abgetrennt werden, da die Coefficienten $\mathfrak{C}_1$ etc durch besondere Formeln bestimmt sind. Es ergiebt sich die Gleichung

$$(15.)\quad \frac{d\mathfrak{U}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{V}'}{dy} = Q_0 + Q,$$

wenn

$$(16.)\quad Q_0 = \frac{1}{4\,(a-b)\,\varepsilon}\left\{\alpha_0-\bar{\alpha}_0+\frac{\varepsilon}{2}(\alpha_0+3\bar{\alpha}_0)\right\}$$
$$+\frac{1}{2\,(a-b)\,\varepsilon}\left\{\begin{aligned}&\left[(\alpha_1-\bar{\alpha}_1)\,(1-\tau)+\frac{3\varepsilon}{2}(\alpha_1+\bar{\alpha}_1)\right]\cos s\\ +&\left[(\beta_1-\bar{\beta}_1)\,(1-\tau)+\frac{3\varepsilon}{2}(\beta_1+\bar{\beta}_1)\right]\sin s\end{aligned}\right\}$$

und

$$(17.)\quad Q =$$
$$\frac{3\left(1-\frac{2\tau}{\varepsilon}\right)}{2\,(a-b)\,\varepsilon^2}\sum_{n=2}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\alpha_n-\bar{\alpha}_n-(\gamma_n-\bar{\gamma}_n)}{n-1}+\frac{\alpha_n-\bar{\alpha}_n+\gamma_n-\bar{\gamma}_n}{n+1}\right]\cos ns\\ +&\left[\frac{\beta_n-\bar{\beta}_n+\delta_n-\bar{\delta}_n}{n-1}+\frac{\beta_n-\bar{\beta}_n-(\delta_n-\bar{\delta}_n)}{n+1}\right]\sin ns\end{aligned}\right\}$$

gesetzt wird.

Die in (13.) angegebenen Summanden haben, bis auf Ψ, ihrer Definition nach sämmtlich die Ordnung 0 in Bezug auf c. Dieselben zerfallen nun aber in verschiedene Gruppen durch die Dimension, welche sie in Bezug auf ε (und τ) haben. Denn es ist zu der ursprünglichen Voraussetzung, dass $\frac{c}{l}$ klein sei, die weitere Voraussetzung, dass auch ε klein sei, hinzugetreten. Von den in (13.) vorkommenden Termen sind einige von der — 2ten, andere von der — 1ten Dimension nach ε. In der schliesslichen Formel für Z_z sollen von den obengenannten (in Bezug auf c zur Ordnung 0 gehörigen) Gliedern nur diejenigen beibehalten werden, welche die — 2te Dimension in Bezug auf ε haben. Indessen sind in (13.) noch die Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}_1$ unbekannt, und es zeigt sich, dass bei den Rechnungen, durch die man diese findet, die Summanden — 1ter Dimension des Ausdrucks (13.) dazu dienen, gewisse Bestandtheile — 2ter Dimension von Z_z zu bestimmen. Es sind daher zunächst die auf $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}_1$ bezüglichen Rechnungen auszuführen.

§ 20. Bestimmung der Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}_1$.

Wie bei dem Problem des vollen Kreiscylinders wendet man, um die Werthe von $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}$ zu ermitteln, die 3 Gleichungen (39.) des § 5 an:

$$\int\!\!\int \left\{a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\right\} x\,dx\,dy = F_3,$$

$$\int\!\!\int \left\{a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\right\} y\,dx\,dy = G_3,$$

$$\int\!\!\int \left\{a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\right\} dx\,dy = h_2.$$

Nachdem man in dieselben den Ausdruck (13.) für

$$a\frac{dw}{dz} + (a-2b)\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)$$

eingesetzt hat, sind die Integrationen über den Querschnitt des Stabes auszuführen, wobei die von z allein abhängigen Factoren vor die Integralzeichen treten. Diese Rechnungen sind den im § 13 angestellten völlig analog; nur hat man zu berücksichtigen, dass der Querschnitt des Stabes hier nicht ein Kreis, sondern ein Kreisring ist. Für das Trägheitsmoment A und den Flächeninhalt C des Querschnitts erhält man jetzt die Werthe:

$$A = \frac{\pi}{4}(c^4 - c_1^4) = \frac{\pi c^4}{4}\left\{1-(1-\varepsilon)^4\right\},$$

$$C = \pi(c^2 - c_1^2) = \pi c^2\left\{1-(1-\varepsilon)^2\right\}.$$

Es sollen von den Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}$ nur die Bestandtheile, welche die beträchtlichste Dimension in Bezug auf ε haben, aufgesucht werden.

Daher vernachlässigt man in den Ausdrücken von A und C die höheren Potenzen von ε und setzt

$$(18.)\quad A = \pi c^4 \varepsilon, \quad C = 2\pi c^2 \varepsilon.$$

In Analogie zu § 13 fällt die Summe Q aus den obigen Doppelintegralen ganz heraus; dagegen liefert Q_0 einen von Null verschiedenen Beitrag. Man substituirt in Q_0 für die Coefficienten α_0, α_1, β_1, $\bar{\alpha}_0$, $\bar{\alpha}_1$, $\bar{\beta}_1$ ihre aus (8.), (9.), (10.) folgenden Werthe. Nach einigen Transformationen findet man dann für $\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2}$, $\frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2}$, $\frac{d\mathfrak{R}}{dz}$ die Ausdrücke

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2} = \dfrac{\alpha'_1}{c\varepsilon E_1} - \dfrac{F_3}{AE} + \dfrac{F''_1 c^2}{2A}\left\{\left(1+\dfrac{b}{E}\right)\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2a-b}{E(a+b)}\right) - \dfrac{a}{4E(a-b)}\right\}, \\ \dfrac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2} = \dfrac{\beta'_1}{c\varepsilon E_1} - \dfrac{G_3}{AE} + \dfrac{G''_1 c^2}{2A}\left\{\left(1+\dfrac{b}{E}\right)\left(\dfrac{1}{b} + \dfrac{2a-b}{E(a+b)}\right) - \dfrac{a}{4E(a-b)}\right\}, \\ \dfrac{d\mathfrak{R}}{dz} = -\dfrac{E\alpha'_0}{2a\varepsilon E_1} + \dfrac{h_2}{aC}, \end{cases}$$

welche den Grad von Genauigkeit haben, dass alle Terme von negativer Dimension in Bezug auf ε beibehalten worden sind. Die in letzteren Gleichungen vorkommenden Summanden haben sämmtlich die Dimension -1 in Bezug auf ε, wie man leicht erkennt, wenn man beachtet, dass A und C von der $+1^{\text{sten}}$ Dimension nach ε sind.

Für die Function $\frac{d\mathfrak{T}_1}{dz}$ ergiebt sich aus der 3ten Gleichung (11.) des § 2 genau derselbe Werth, der im § 14 für den Fall des vollen Kreiscylinders erhalten wurde, nämlich

$$(20.)\quad \frac{d\mathfrak{T}_1}{dz} = \frac{H_1}{2bA}.$$

In Betreff der Integrationsconstanten, welche bei Herstellung der Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{T}_1$ selbst auftreten, gelten die in §§ 13 und 14 gemachten Bemerkungen. Die genannten Constanten können, wie daselbst erörtert wird, gleich Null gesetzt werden, ohne dass die Allgemeinheit der Rechnung beeinträchtigt wird.

Der in (13.) angegebene Ausdruck hängt von den Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$ in doppelter Weise ab. Denn einerseits kommen in demselben die Summanden

$$-\frac{4b(a-b)}{a}\left(\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2}x + \frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2}y\right)$$

vor; andererseits sind $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, wie auch $\mathfrak{T}_1$, in den Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ enthalten, welche durch die Gleichungen (68.) des § 7 definirt wurden. Von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ hängen aber nach (16.), (17.) die Summen Q_0 und Q ab, da die Functionen $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ die Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ enthalten, und nach (8.) und (10.) die Werthe α_n, β_n, γ_n, δ_n, $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$, $\bar{\delta}_n$ die Entwicklungscoefficienten von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ bedeuten. Also sind erst in Folge der Gleichungen (19.) und (20.) alle Bestandtheile von Q_0 und Q bekannt. Die Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{T}_1$ haben die Dimension -1 nach ε. Es bleibt übrig, die Dimension der Grössen Q_0 und Q in Bezug auf ε festzustellen.

Da, nach (68.) des § 7, in $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ theils Ausdrücke, die den Factor $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$ haben, theils die respectiven Summanden

$$-\frac{2b}{a}(a-2b)\frac{d^2\mathfrak{Q}_1}{dz^2}y, \quad -\frac{2b}{a}(a-2b)\frac{d^2\mathfrak{P}_1}{dz^2}x, \quad \frac{b}{2}\frac{d^2\mathfrak{T}_1}{dz^2}(y^2-x^2)$$

enthalten sind, so haben $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, und folglich auch $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$, $\bar{\mathfrak{R}}$, $\bar{\mathfrak{S}}$ die Dimension -1 nach ε. Von der nämlichen Dimension sind im Allgemeinen α_n, β_n, γ_n, δ_n, $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$, $\bar{\delta}_n$ als Entwicklungscoefficienten der letztgenannten Functionen. Indessen überzeugt man sich leicht, dass die Differenzen

$$\alpha_n-\bar{\alpha}_n, \quad \beta_n-\bar{\beta}_n, \quad \gamma_n-\bar{\gamma}_n, \quad \delta_n-\bar{\delta}_n,$$

welche in Q ausschliesslich vorkommen, sich auf die Dimension 0 reduciren. Man bemerke, dass

$$\begin{cases} \alpha_n=\alpha_n'+\alpha_n'', & \beta_n=\beta_n'+\beta_n'', \\ \gamma_n=\gamma_n'+\gamma_n'', & \delta_n=\delta_n'+\delta_n'' \end{cases}$$

gesetzt worden ist, und dass nach (9.) die Coefficienten

$$\alpha_n', \quad \beta_n', \quad \gamma_n', \quad \delta_n'$$

von der 0ten Dimension in Bezug auf ε sind, weil die Oberflächenkräfte R S, zu deren Entwicklung sie gehören, zu dem Werthe ε in keiner Beziehung stehen. Also hat man nur die Differenzen

$$\alpha_n''-\bar{\alpha}_n, \quad \beta_n''-\bar{\beta}_n, \quad \gamma_n''-\bar{\gamma}_n, \quad \delta_n''-\bar{\delta}_n$$

auf ihre Dimension nach ε zu untersuchen. Und da, nach § 19, die Coefficienten $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\beta}_n$, $\bar{\gamma}_n$, $\bar{\delta}_n$ dieselben Functionen für das Argument $r=c_1=c-c\varepsilon$ bedeuten, welche für das Argument c gleich α_n'', β_n'', γ_n'', δ_n'' sind, so stellen die genannten Differenzen die betreffenden Incremente jener Functionen beim Wachsen der Grösse c_1 um $c\varepsilon$ dar. Hieraus ergiebt sich, dass

$$\alpha_n''-\bar{\alpha}_n, \quad \beta_n''-\bar{\beta}_n, \quad \gamma_n''-\bar{\gamma}_n, \quad \delta_n''-\bar{\delta}_n$$

eine um 1 höhere Dimension nach ε als die Coefficienten α_n'', $\bar{\alpha}_n$, . . $\bar{\delta}_n$ selbst, d. h. die Dimension 0 haben. Nun steht in dem Ausdruck (17.) von Q vor dem Summenzeichen ein Factor von der Dimension -2 nach ε. Folglich ist die Function Q von der Dimension -2 in Bezug auf ε. Dagegen hat Q_0 nur die Dimension -1, da in dem Ausdruck (16.) die erste Potenz von ε im Nenner steht.

Die Werthe α''_n, β''_n, γ''_n, δ''_n, $\bar{\alpha}^n$, $\bar{\beta}^n$, $\bar{\gamma}^n$, $\bar{\delta}_n$ sind für $n > 5$ sämmtlich gleich 0, da die Functionen, deren Entwicklungscoefficienten sie sind, in Bezug auf x und y den 5ten Grad haben. Man trennt daher zweckmässigerweise den von α'_n, β'_n, γ'_n, δ'_n abhängigen Bestandtheil der Summe Q von den übrigen. Nach Substitution der Werthe von

$$\alpha''_n - \bar{\alpha}_n, \quad \beta''_n - \bar{\beta}_n, \quad \gamma''_n - \bar{\gamma}_n, \quad \delta''_n - \bar{\delta}_n$$

erhält man

$$(21.) \quad Q = Q_1 + Q_2 + Q',$$

wo in Q' sämmtliche Terme von Q, die nicht die Dimension -2 nach ε haben, zusammengefasst sind, und Q_1 und Q_2 die folgenden Functionen bedeuten:

$$(22.) \quad Q_1 = \left(1 - \frac{2\tau}{\varepsilon}\right) \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{b}{2aE_1}\,\frac{F_3 c}{A\varepsilon} - \frac{1}{4E_3}\,\frac{F_1'' c^3}{A\varepsilon}\right] \cos 3s \\ -\left[\frac{b}{2aE_1}\,\frac{G_3 c}{A\varepsilon} - \frac{1}{4E_3}\,\frac{G_1'' c^3}{A\varepsilon}\right] \sin 3s \\ + \frac{c^2}{16\,(a-b)\,A\varepsilon}\,\frac{dH_1}{dz} \sin 4s \\ + \frac{3bc^3}{320\,(a-b)} \left(\frac{6}{E_2} - \frac{1}{E}\right) \frac{F_1'' \cos 5s + G_1'' \sin 5s}{A\varepsilon} \end{array} \right\},$$

$$(23.) \quad Q_2 = -\left(1 - \frac{2\tau}{\varepsilon}\right) \frac{bE}{2aE_1^2\,\varepsilon^2} (\alpha'_1 \cos 3s + \beta'_1 \sin 3s)$$
$$+ \frac{3\left(1 - \frac{2\tau}{\varepsilon}\right)}{2\,(a-b)\,\varepsilon^2} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\alpha'_n - \gamma'_n}{n-1} + \frac{\alpha'_n + \gamma'_n}{n+1}\right] \cos ns \\ + \left[\frac{\beta'_n + \delta'_n}{n-1} + \frac{\beta'_n - \delta'_n}{n+1}\right] \sin ns \end{array} \right\}.$$

Durch $\frac{1}{E_3}$ ist die Constante

$$(24). \quad \frac{1}{E_3} = \left(1 + \frac{b}{E}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)\left(\frac{1}{a-b} + \frac{b}{(a+b)\,E_1}\right)$$
$$+ \frac{b}{8\,(a-b)} \left(\frac{3}{2E} - \frac{8}{E_1} - \frac{3}{E_2}\right)$$

bezeichnet worden. Für das Trägheitsmoment A ist der Werth (18.) einzusetzen. Die in (22.), (23.) enthaltenen Functionen F''_1, G''_1 $\left(= \frac{d^2F_1}{dz^2}, \frac{d^2G_1}{dz^2}\right)$, F_3, G_3, H_1 haben, ebenso wie die Elasticitätsconstanten, in Bezug auf ε die Dimension 0, da sie nicht von ε abhängen.

§ 21. Ausdruck der Componente Z_z.

Der Werth der Kraft Z_z ergiebt sich aus der im § 19 erwähnten Formel

$$Z_z = \frac{F_1 + F_2}{A} x + \frac{G_1 + G_2}{A} y + \frac{h_1}{C}$$
$$+ a \frac{dw}{dz} + (a - 2b) \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} \right),$$

wenn man die Gleichungen (13.), (15.), (21.) berücksichtigt. Von den Summanden von Z_z sind gewisse denjenigen Ausdrücken analog, welche im Fall des vollen Kreiscylinders erhalten wurden. Auf diese soll nicht näher eingegangen werden, da in den §§ 13, 14, 16 die einzelnen Summanden von Z_z ausführlich discutirt worden sind. Dagegen treten in dem hier gewonnenen Ausdruck von Z_z andere Terme auf, die dem Hohlcylinder eigenthümlich sind. Die erheblichsten derselben erhält man, wenn man für Z_z eine angenäherte, aus den obigen Gleichungen folgende Formel nach dem Princip ableitet, dass von den Termen (13.) nur diejenigen, die in Bezug auf ε die Dimension -2 haben, beibehalten werden. Es entsteht auf diese Weise die Gleichung:

$$(25.) \quad Z_z = \frac{F_1 + F_2}{A} x + \frac{G_1 + G_2}{A} y + \frac{h_1}{C} + (a - 2b)(Q_1 + Q_2).$$

Der Ausdruck $(a-2b)(Q_1 + Q_2)$, welcher zu dem in erster Annäherung (§ 5) geltenden Werth von Z_z,

$$\frac{F_1 + F_2}{A} x + \frac{G_1 + G_2}{A} y + \frac{h_1}{C},$$

hinzutritt, ist bei dem Hohlcylinder verhältnissmässig beträchtlicher, als der bei dem vollen Cylinder gefundene Bestandtheil 0^{ter} Ordnung von Z^z. Da Q_1 und Q_2 der Grösse $\frac{1}{\varepsilon^2}$ proportional sind, so macht sich der Einfluss dieser Terme in einem um so höheren Masse geltend, je geringer die Wandstärke des Hohlcylinders wird.

Die Grössen Q_1 und Q_2 sind lineare Functionen von τ, da sie letztere Variable nur in dem Factor $1 - \frac{2\tau}{\varepsilon}$ enthalten. Die Grösse τ durchläuft die Werthe von 0 bis ε, und zwar werden nach (14.), wenn s und z unverändert bleiben, durch $\tau = 0$ und $\tau = \varepsilon$ je zwei gegenüberliegende Punkte der äusseren und der inneren Wandung bezeichnet, welche den Abstand $c - c_1$ von einander haben. Die Differenz $1 - \frac{2\tau}{\varepsilon}$ ist $= +1$ für $\tau = 0$ und $= -1$ für $\tau = \varepsilon$. In der Mitte der Wandung, für $\tau = \frac{\varepsilon}{2}$, ist $1 - \frac{2\tau}{\varepsilon} = 0$; und für je zwei Punkte, welche von dieser

Mitte gleich weit entfernt sind, d. h. für $\tau = \frac{\varepsilon}{2} - \tau'$ und $\tau = \frac{\varepsilon}{2} + \tau'$, nimmt die genannte Differenz gleiche und entgegengesetzte Werthe an. Diese Eigenschaften übertragen sich, gemäss (22.) und (23.), auf die Functionen Q_1 und Q_2. In der Mitte der Wandung verschwinden Q_1 und Q_2, und zu je zwei symmetrisch zur Mitte liegenden Punkten gehören gleiche und entgegengesetzte Werthe derselben.

Im Abschnitt I. wurde als charakteristisch für die Biegung gefunden, dass die Kraft Z_z in Bezug auf die als klein vorausgesetzten Grössen bis zur Dimension -2 anwächst, während im Fall des Auszugs, der Torsion etc. des Stabes nur die Dimension -1 vorkommen konnte. Der Umstand, dass hier Q_1 und Q_2 die Dimension -2 in Bezug auf ε haben, und das oben erwähnte Verhalten derselben beim Variiren von τ weisen darauf hin, dass der Bestandtheil $(a-2b)(Q_1+Q_2)$ des Ausdrucks (25.) der Kraft Z_z von einer s e c u n d ä r e n B i e g u n g herrührt. Das Vorhandensein einer solchen Biegung abstrahirt man leicht aus der Anschauung. Man lege durch den Hohlcylinder zwei benachbarte, zu seiner Achse senkrechte Ebenen. Dieselben schneiden einen ringförmigen Körper aus, den man gewissermassen als einen kreisförmigen Stab ansehen kann, in sofern als nach der Voraussetzung die eine Dimension vorwaltet. Denn die Wandstärke $c-c_1$ des Hohlcylinders wird als klein neben der Peripherie $2\pi c$ des Querschnitts angenommen. Auf die Biegung, welche dieser ringförmige Körper durch die auf ihn wirkenden Kräfte erleidet, sind bis zu einem bestimmten Grade die Schlüsse übertragbar, die im Abschnitt I. für den cylindrischen Stab abgeleitet wurden. Dem dort auftretenden Factor $\frac{1}{c^2}$ der Druckkraft Z_z entspricht hier der Factor $\frac{1}{\varepsilon^2}$ der Functionen Q_1 und Q_2. Ebenso wie dort eine neutrale Schicht gefunden wurde, welche die Dilatation der einen Seite des Stabes von der Compression der anderen Seite schied, so wird auch hier in jedem einzelnen Ringe durch die Gesammtheit der von der inneren und der äusseren Wandung gleich weit entfernten Punkte eine neutrale Schicht gebildet, für welche Q_1 und Q_2 verschwinden. Diese neutrale Schicht giebt, wie oben gezeigt wurde, sowohl für Q_1 als für Q_2 den Uebergang von der Dilatation zur Compression an.

Von der Biegung, die ein kreisförmiger dünner Ring sonst erfahren würde, unterscheidet sich indessen die in Rede stehende secundäre Biegung des Hohlcylinders dadurch, dass die Seitenflächen der Ringe, in die man sich den Hohlcylinder getheilt denkt, nicht frei sind, da die Ringe in einem ununterbrochenen Zusammenhang unter einander stehen. Während bei dem isolirten Ringe die in der Längsrichtung auftretende starke Zug- oder Druck-Kraft eine Quercontraction (respective eine Vergrösserung des Querschnitts) hervorruft, die sich unbehindert vollziehen kann, hat bei dem Hohlcylinder die secundäre Biegung eine Einwirkung der einzelnen Ringe auf einander in der zur Cylinderachse parallelen Richtung zur Folge. Hieraus erklärt sich der Beitrag, welcher der Kraft Z_z aus der secundären Biegung erwächst.

Die secundäre Biegung wird bei jedem einzelnen Ringe theils durch die an seiner äusseren Oberfläche angebrachten Kräfte, theils durch diejenigen Kräfte hervorgerufen, welche auf die Flächenelemente der zur z-Achse senkrechten Querschnitte wirken. Den ersteren Kräften entspricht der Term Q_2, den letzteren der Term Q_1. Denn in (23.) kommen ausschliesslich die Entwicklungscoefficienten α'_n, β'_n, γ'_n, δ'_n der gegebenen Kräfte R und S (Gleichung (9.)) für das betreffende Argument z vor. Die Summe Q_1 hängt dagegen nach (22.) von den Functionen F, G, H_1 ab, welche die Hauptbiegung und die Torsion des Hohlcylinders an der betreffenden Stelle bestimmen. Es unterscheidet sich also Q_2 in analoger Weise von Q_1, wie im § 13 der die Einwirkung der Randkräfte darstellende Ausdruck $\frac{2E}{E_1}\,\Phi_1$ von den übrigen Summanden 0ter Ordnung der Componente Z_z.

Abschnitt IV.

Die angenäherten Differentialgleichungen für gewisse Fälle des ursprünglich gekrümmten Stabes.

---

§ 22. Die Voraussetzungen der Rechnung; Transformation der Coordinaten.

In den vorhergehenden Abschnitten wurde der betrachtete Stab als cylindrisch oder als nur wenig vom Cylinder abweichend (§ 8) vorausgesetzt. Auf einen Stab von gekrümmter Gestalt sind daher die bisherigen Rechnungen nicht anwendbar. Indessen lässt sich in gewissen Fällen, nach Einführung anderer Coordinaten, auch bei dem ursprünglich krummen Stabe die den obigen Entwicklungen zu Grunde liegende Methode benutzen, der zufolge die beträchtlichere Grössenordnung der einen inneren Druckkraft zu Schlüssen in Betreff der Form der unbekannten Functionen und zu einer Zerlegung der allgemeinen Differentialgleichungen führt.

Die Gestalt des Stabes und die Richtungen der gegebenen Kräfte müssen, damit eine derartige Lösung möglich sei, bestimmten Bedingungen genügen. Die Betrachtung soll hier auf die Fälle beschränkt werden, wo die zwei Voraussetzungen erfüllt sind:

1) dass eine Ebene existirt, welche den Stab nach seiner Längsrichtung in zwei symmetrische Hälften theilt;

2) dass alle äusseren Kräfte dieser Ebene parallel sind.

Der ersten Voraussetzung zufolge wird die ursprüngliche Gestalt des Stabes durch eine ebene Curve angegeben. Man wähle die genannte Symmetrie-Ebene zur yz-Ebene. Dann entspricht in der Anfangslage jedem Theilchen des Stabes mit den (rechtwinkligen linearen) Coordinaten x, y, z ein anderes mit den Coordinaten $-x$, y, z. Ferner ist die Coordinate x, der Definition des Stabes nach, stets eine kleine Grösse im Vergleich zur Längeneinheit. Die Coordinaten, welche die

Lage eines beliebigen Theilchens nach der Verrückung angeben, werden wiederum $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ genannt. Von äusseren, der Masse proportionalen Kräften wird nur die Schwerkraft als wirkend angenommen, deren Richtung der $-y$-Achse parallel sein möge.

Man erkennt leicht, dass durch die gemachten Voraussetzungen das Moment der Torsion bei dem gekrümmten Stabe, wie früher bei dem cylindrischen, überall nur verhältnissmässig kleine Werthe annimmt. Denn da die ursprüngliche Stabform keine doppelte Krümmung aufweisen, und die der x-Achse parallelen Componenten der gegebenen Oberflächenkräfte gleich Null sein sollen, so bleiben alle zur Torsion gehörigen Hebelarme Grössen erster Ordnung. Sobald man dagegen jene Voraussetzungen, oder auch nur die zweite, fortlässt, wächst das Torsionsmoment im Allgemeinen zu derselben Ordnung wie das Biegungsmoment an, so dass die durch die Torsion hervorgerufenen inneren Druckkräfte in ihrer Ordnung den auf die Biegung bezüglichen Druckkräften nicht mehr nachstehen. Das Verfahren, das für die vorstehenden Rechnungen eingeschlagen wurde, beruht aber im Wesentlichen auf dem Ueberwiegen der Biegung über die Torsion. Hieraus erklärt sich, dass die obigen zwei Voraussetzungen geeignet sind, dasselbe auch für den gekrümmten Stab anwendbar zu machen.

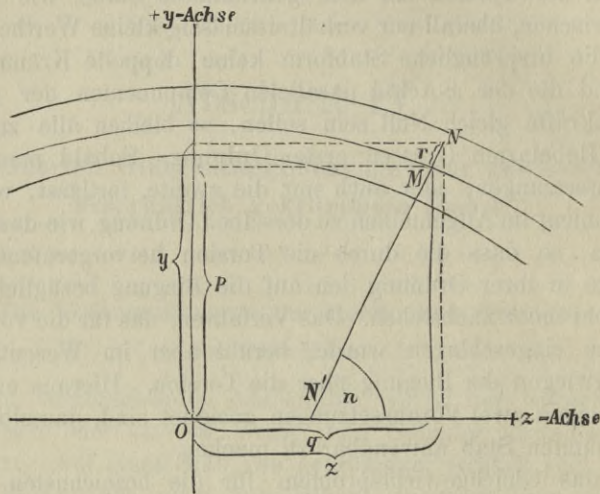
Um das Gleichgewichtsproblem für die bezeichneten Fälle des ursprünglich krummen Stabes zu behandeln, ersetzt man die Grössen y, z durch andere Coordinaten. Es müssen an Stelle der geradlinigen Coordinaten hier krummlinige eingeführt werden, weil eine dem Früheren analoge Classification der einzelnen Werthe nach Grössenordnungen nur möglich ist, wenn die Raumcoordinaten sich der gegebenen Gestalt des Stabes anpassen. Man wähle in der Anfangslage innerhalb der yz-Ebene eine Curve, deren sämmtliche Punkte zum Innern des Stabes gehören. Ein beliebiger Punkt derselben habe parallel der y- und der z-Achse die Coordinaten p und q; die Gleichung der Curve möge durch

$$\varphi\,(p, q) = 0$$

bezeichnet werden. Construirt man in irgend einem Punkte den zur Curve normalen Querschnitt des Stabes, so sollen die Dimensionen der Schnittfläche stets klein sein. Ausserdem soll nirgends ein und derselbe Punkt des Stabes gleichzeitig zwei derartigen Normalschnitten angehören. (Hierbei ist jedoch in den Fällen, wo die Normalebene die Curve $\varphi\,(p, q) = 0$ in mehr als einem Punkte schneidet, nicht von den entfernteren Schnittflächen des Stabes die Rede). Im Uebrigen bleibt die Curve $\varphi\,(p, q) = 0$ beliebig. Es existirt, wie man leicht erkennt, immer eine ganze Schaar von Curven, welche die verlangten Eigenschaften besitzen.

Man betrachte in der Anfangslage zunächst einen in der yz-Ebene liegenden Punkt N, der zum Stabe gehört, und ziehe durch denselben die Normale zu der gewählten Curve $\varphi(p, q) = 0$. Diese Normale

Fig. 8.



möge die Curve im Punkte M, die z-Achse im Punkte N' treffen. Die Strecke MN werde durch r, und der Winkel, den die Gerade NN' mit der Richtung der positiven z-Achse bildet, durch n bezeichnet. Dann ist, der Voraussetzung nach, die Länge r (ebenso wie x) ein gegen die Längeneinheit kleiner Werth. Man rechnet r von M aus nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ. Die Coordinaten y, z des Punktes N stehen, wie unmittelbar ersichtlich, mit den Coordinaten p, q des Punktes M und den Grössen r, n in der Beziehung

$$(1.)\quad \begin{cases} y = p + r \sin n, \\ z = q + r \cos n. \end{cases}$$

Es sollen nun an Stelle von y und z die Werthe r und n zur Bestimmung der Lage des Punktes N benutzt werden. Die Grössen p und q sind bekannte Functionen von n allein, da zu der Relation $\varphi(p, q) = 0$ die aus der Betrachtung des Winkels der Normale folgende Gleichung

$$\frac{dp}{dq} = -\cot n$$

hinzutritt. Sind daher die Werthe von r und n gegeben, so kennt man durch (1.) auch die zugehörigen Werthe von y und z. Einen Punkt des Stabes, der nicht in der yz-Ebene liegt, projicirt man auf letztere, worauf wiederum die Gleichungen (1.) zur Geltung kommen. Es werden also allgemein die 3 Coordinaten x, r, n zur Bestimmung eines beliebigen Punktes des Stabes angewendet.

Die absolute Länge des Bogenelements der Curve $\varphi(p, q) = 0$ werde ds genannt, so dass

$$(2.) \quad ds = +\sqrt{dp^2 + dq^2}$$

gesetzt wird. Dann bestehen, wie bekannt, für ein beliebiges n die Gleichungen

$$(3.) \quad \sin n = \frac{dq}{ds}, \quad \cos n = -\frac{dp}{ds}.$$

Ferner wird die Krümmung der Curve $\varphi(p, q) = 0$ durch den Quotienten $\frac{dn}{ds}$ ausgedrückt, da dn den Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Normalen darstellt. Bezeichnet man also den Krümmungsradius dieser Curve durch τ, so ist

$$(4.) \quad \tau = \frac{ds}{dn}.$$

Statt der Ausweichungscomponenten η und ζ führt man zwei andere ϱ und σ ein, deren Richtungen mit der zu dem betreffenden Punkte gehörigen Richtung von r und der zu letzterer senkrechten Richtung übereinstimmen. Man setzt

$$(5.) \quad \begin{cases} \eta = \varrho \sin n - \sigma \cos n, \\ \zeta = \varrho \cos n + \sigma \sin n, \end{cases}$$

woraus

$$(6.) \quad \begin{cases} \varrho = \eta \sin n + \zeta \cos n, \\ \sigma = -\eta \cos n + \zeta \sin n \end{cases}$$

folgt. Für $n = 90^0$ wird ϱ mit η, und σ mit ζ identisch. Die Transformation entspricht der Drehung des Coordinatenkreuzes der yz-Ebene um den Winkel $90^0 - n$ in der von der positiven y-Achse zur positiven z-Achse fortschreitenden Drehungsrichtung. Die Richtungen des Bogenelementes ds und der Ausweichungscomponente σ sind einander parallel.

Man zerlegt in analoger Weise die gegebenen, auf die Oberfläche wirkenden Druckkräfte nach den Richtungen von ϱ und σ. Die in diese Richtungen fallenden Componenten der genannten Kräfte mögen R und S heissen, so dass die 4 Grössen Y, Z, R, S durch die Gleichungen

$$(7.) \quad \begin{cases} Y = R \sin n - S \cos n, \\ Z = R \cos n + S \sin n \end{cases}$$

oder

$$(8.)\quad \begin{cases} R = Y \sin n + Z \cos n, \\ S = -Y \cos n + Z \sin n, \end{cases}$$

verbunden sind.

Die Differentiation der Gleichungen (1.) nach r und n liefert, da p und q von r unabhängig sind, die Werthe

$$\frac{dy}{dr} = \sin n, \quad \frac{dy}{dn} = \frac{dp}{dn} + r \cos n,$$

$$\frac{dz}{dr} = \cos n, \quad \frac{dz}{dn} = \frac{dq}{dn} - r \sin n,$$

oder, weil nach (3.) und (4.)

$$\frac{dp}{dn} = -\frac{ds}{dn} \cos n = -\tau \cos n,$$

$$\frac{dq}{dn} = \frac{ds}{dn} \sin n = \tau \sin n$$

ist, die folgenden:

$$(9.)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dr} = \sin n, \quad \dfrac{dy}{dn} = -(\tau - r) \cos n, \\[2ex] \dfrac{dz}{dr} = \cos n, \quad \dfrac{dz}{dn} = (\tau - r) \sin n. \end{cases}$$

Differenzirt man sodann die Gleichungen (1.) nach y, so ergeben sich aus

$$\begin{cases} 1 = \sin n \dfrac{dr}{dy} + \left(\dfrac{dp}{dn} + r \cos n\right) \dfrac{dn}{dy}, \\[2ex] 0 = \cos n \dfrac{dr}{dy} + \left(\dfrac{dq}{dn} - r \sin n\right) \dfrac{dn}{dy} \end{cases}$$

die Relationen

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dq}{dn} \sin n - \dfrac{dp}{dn} \cos n - r\right) \dfrac{dr}{dy} = \dfrac{dq}{dn} - r \sin n, \\[2ex] \left(\dfrac{dq}{dn} \sin n - \dfrac{dp}{dn} \cos n - r\right) \dfrac{dn}{dy} = -\cos n. \end{cases}$$

Nach (3.) ist

$$dq \sin n - dp \cos n = ds,$$

also

$$\frac{dq}{dn} \sin n - \frac{dp}{dn} \cos n - r = \frac{ds}{dn} - r = \tau - r,$$

und

$$\frac{dq}{dn} - r \sin n = \left(\frac{ds}{dn} - r\right) \sin n = (\tau - r) \sin n.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe und Ausführung der entsprechenden Rechnungen für die Differentialquotienten nach z entsteht das Gleichungssystem:

$$(10.)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dy} = \sin n, \quad \dfrac{dr}{dz} = \cos n, \\ \dfrac{dn}{dy} = -\dfrac{\cos n}{\tau - r}, \quad \dfrac{dn}{dz} = \dfrac{\sin n}{\tau - r}. \end{cases}$$

Da ferner für eine beliebige Function Φ die Gleichungen

$$\frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dr} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dr} = \frac{d\Phi}{dr},$$

$$\frac{d\Phi}{dy}\frac{dy}{dn} + \frac{d\Phi}{dz}\frac{dz}{dn} = \frac{d\Phi}{dn}$$

bestehen, so werden aus (9.) die Formeln

$$(11.)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Phi}{dy}\sin n + \dfrac{d\Phi}{dz}\cos n = \dfrac{d\Phi}{dr}, \\ \dfrac{d\Phi}{dy}\cos n - \dfrac{d\Phi}{dz}\sin n = -\dfrac{1}{\tau - r}\dfrac{d\Phi}{dn} \end{cases}$$

erhalten.

§ 23. Die auf die neuen Coordinaten bezüglichen inneren Druckkräfte.

Nachdem die Grössen r, n, ϱ, σ an Stelle von y, z, η, ζ in die Rechnung eingeführt worden sind, sollen auch die inneren Druckkräfte, statt auf die y- und z-Achse, auf die Richtungen von r und ds (von ϱ und σ) bezogen werden. Das Flächenelement, welches in einem beliebigen Punkte des Stabes auf der Richtung von r senkrecht steht, werde durch eine Druckkraft in Anspruch genommen, deren Componenten parallel der x-, y-, z-Achse gleich X_r, Y_r, Z_r sind. Die Projectionen der nämlichen Kraft auf die zu ϱ und σ parallelen Richtungen nennt man R_r und S_r. Ferner habe die Druckkraft, welche in dem betrachteten Punkte auf das zu σ (zu ds) senkrechte Flächenelement wirkt, parallel den genannten 5 Richtungen die Componenten

$$X_s,\ Y_s,\ Z_s,\ R_s,\ S_s.$$

Man will die Formeln für diese Componenten ableiten und speciell die Kräfte R_r, S_s, R_s, X_r, X_s durch ξ, ϱ, σ, x, r, n ausdrücken.

Die Werthe von X_r, Y_r, Z_r und X_s, Y_s, Z_s ergeben sich aus den in der Einleitung bewiesenen Gleichungen (6.). Die Winkel, welche die Richtung von r mit der positiven x-, y-, z-Achse bildet, sind gleich 90^0, $90^0 - n$, n, und die entsprechenden Winkel der Richtung von σ und ds gleich 90^0, $180^0 - n$, $90^0 - n$. Folglich erhält man

$$\begin{cases} X_r = X_y \sin n + X_z \cos n, \\ Y_r = Y_y \sin n + Y_z \cos n, \\ Z_r = Z_y \sin n + Z_z \cos n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_s = -X_y \cos n + X_z \sin n, \\ Y_s = -Y_y \cos n + Y_z \sin n, \\ Z_s = -Z_y \cos n + Z_z \sin n. \end{cases}$$

Sodann bestehen zwischen R_r, S_r, Y_r, Z_r, respective R_s, S_s, Y_s, Z_s die zu (8.) analogen Gleichungen:

$$\begin{cases} R_r = Y_r \sin n + Z_r \cos n, \\ S_r = -Y_r \cos n + Z_r \sin n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_s = Y_s \sin n + Z_s \cos n, \\ S_s = -Y_s \cos n + Z_s \sin n. \end{cases}$$

Durch Einsetzen der soeben erwähnten Werthe von Y_r, Z_r, Y_s, Z_s findet man daher für R_r, S_s, R_s die Ausdrücke:

$$\begin{cases} R_r = Y_y \sin^2 n + Z_z \cos^2 n + 2Y_z \sin n \cos n, \\ S_s = Y_y \cos^2 n + Z_z \sin^2 n - 2Y_z \sin n \cos n, \\ R_r = S_r = (Z_z - Y_y) \sin n \cos n + Y_z (\sin^2 n - \cos^2 n). \end{cases}$$

Es bleibt übrig, dieselben als Functionen der neuen Coordinaten allein darzustellen.

Die Componenten Y_y, Z_z, Y_z sind nach (7.), (8.) der Einleitung gleich den Werthen

$$Y_y = (a - 2b)\,\vartheta + 2b\,\frac{d\eta}{dy},$$

$$Z_z = (a - 2b)\,\vartheta + 2b\,\frac{d\zeta}{dz},$$

$$Y_z = b\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$

wo ϑ die kubische Dilatation

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$$

bedeutet. Man hat hierin die Grössen r, n, ϱ, σ mittelst der Substitutionen (1.) und (5.) einzuführen. Es ist jedoch zu beachten, dass wenn zunächst nur die Gleichungen (5.) angewendet werden, die Elimination der Variablen y und z aus den obigen Ausdrücken von R_r, S_s, R_s sich in besonders einfacher Weise mit Hilfe der Formeln (11.) bewirken lässt. Man gewinnt dann die Gleichungen

$$(12.)\quad \vartheta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right),$$

$$(13.)\quad \begin{cases} R_r = a\,\dfrac{d\varrho}{dr} + (a-2b)\left\{\dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{1}{\tau - r}\left(\dfrac{d\sigma}{dn} - \varrho\right)\right\}, \\ S_s = \dfrac{a}{\tau - r}\left(\dfrac{d\sigma}{dn} - \varrho\right) + (a-2b)\left(\dfrac{d\xi}{dx} + \dfrac{d\varrho}{dr}\right), \\ R_s = S_r = b\left\{\dfrac{d\sigma}{dr} + \dfrac{1}{\tau - r}\left(\dfrac{d\varrho}{dn} + \sigma\right)\right\}, \end{cases}$$

deren rechte Seiten ausschliesslich die Variablen x, r, n, ξ, ϱ, σ enthalten.

Um die Formel für X_x

$$X_x = (a-2b)\,\vartheta + 2b\,\frac{d\xi}{dx}$$

auf die neuen Coordinaten zu reduciren, hat man nur den Werth (12.) für ϑ einzusetzen. Endlich sind in die für X_r und X_s entwickelten Gleichungen

$$X_r = X_y \sin n + X_z \cos n,$$
$$X_s = -X_y \cos n + X_z \sin n$$

die Werthe

$$X_y = b\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right),\quad X_z = b\left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right)$$

zu substituiren, worauf theils die Formeln (11.), theils die Formeln (6.) zur Anwendung kommen. Auf diese Weise findet man:

$$(13.)\quad \begin{cases} X_x = a\,\dfrac{d\xi}{dx} + (a-2b)\left\{\dfrac{d\varrho}{dr} + \dfrac{1}{\tau - r}\left(\dfrac{d\sigma}{dn} - \varrho\right)\right\}, \\ X_r = R_x = b\left(\dfrac{d\xi}{dr} + \dfrac{d\varrho}{dx}\right), \\ X_s = S_x = b\left(\dfrac{d\sigma}{dx} + \dfrac{1}{\tau - r}\,\dfrac{d\xi}{dn}\right). \end{cases}$$

Die Gleichungen (13.) und (14.) geben die Ausdrücke der 6 inneren Druckkräfte für das neue (variable) Coordinatenkreuz an; sowohl diese Kräfte selbst, als auch die Normalen der Flächenelemente, auf die sie wirken, sind der Richtung von x, von r oder von ds parallel.*)

---

*) Die Formeln, durch welche die Druckkräfte und die Differentialgleichungen des isotropen Mediums auf die allgemeinen orthogonalen Coordinaten zurückgeführt werden, sind zuerst von Lamé hergestellt worden; man vergleiche sein Werk: *„Coordonnées Curvilignes“*, Paris, 1859, Leçons XV und XVI. Eine Vereinfachung der Lamé'schen Rechnungen hat der Verfasser in Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik, Jahrgang 19, 1874 („Ueber die Herstellung des Ausdrucks $\triangle F$ etc.“) angegeben. Andere, auf die Variationsrechnung gegründete Ableitungen der genannten Formeln sind von C. Neumann (in dem Crelle-Borchardt'schen Journal, Bd. 57) und von Borchardt (in demselben Journal, Bd. 76) veröffentlicht worden.

Man hat, wie früher, zwischen den Normalkräften, die hier durch X_x, R_r, S_s vertreten sind, und den Tangentialkräften X_r, X_s, R_s zu unterscheiden. Die Formeln der ersteren enthalten allein die Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dx}$, $\frac{d\varrho}{dr}$, $\frac{d\sigma}{dn}$, die der letzteren allein die übrigen Differentialquotienten von ξ, ϱ, σ. Ausser den Differentialquotienten der Verschiebungen kommen in (13.), (14.) auch die Grössen ϱ und σ selbst vor, und zwar ϱ bei den Normalkräften und σ bei der Tangentialkraft R_s, während in den entsprechenden Formeln des cylindrischen Stabes die Verschiebungen nur als Differentiale enthalten sind. Es ist ferner zu erwähnen, dass wenn an einer Stelle des Stabes die Krümmung gleich Null ist, man zunächst gemäss (4.) den Werth ds für $\tau\, dn$ einzuführen und dann $\tau = \infty$ zu setzen hat.

In den Gleichungen (11.) der Einleitung sind diejenigen Verschiebungen bezeichnet worden, die eine Bewegung des starren Körpers darstellen, und die folglich hier, wo es sich nur um die Deformation handelt, als willkürlich anzusehen sind. Man legt diese Ausdrücke, die

$$\begin{cases} \xi = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}z - \mathfrak{c}y, \\ \eta = \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{c}x - \mathfrak{a}z, \\ \zeta = \mathfrak{c}_0 + \mathfrak{a}y - \mathfrak{b}x, \end{cases}$$

lauten, zu Grunde, um mittelst der Gleichungen (6.),

$$\begin{cases} \varrho = \eta \sin n + \zeta \cos n, \\ \sigma = -\eta \cos n + \zeta \sin n, \end{cases}$$

die correspondirenden willkürlichen Werthe von ϱ und σ herzustellen. Gleichzeitig hat man für die Variablen y und z die Werthe (1.)

$$y = p + r \sin n, \quad z = q + r \cos n$$

einzusetzen. Dann ergiebt sich, dass bei dem Gleichgewichtsproblem des betrachteten krummen Stabes die unbestimmt bleibenden Bestandtheile der Verschiebungen ξ, ϱ, σ durch die Summen

$$(15.)\quad \begin{cases} \xi = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}\,q - \mathfrak{c}p + (\mathfrak{b} \cos n - \mathfrak{c} \sin n)\, r, \\ \varrho = \mathfrak{b}_0 \sin n + \mathfrak{c}_0 \cos n \\ \qquad + \mathfrak{a}\,(p \cos n - q \sin n) - (\mathfrak{b} \cos n - \mathfrak{c} \sin n)\, x, \\ \sigma = -\mathfrak{b}_0 \cos n + \mathfrak{c}_0 \sin n \\ \qquad + \mathfrak{a}(r + p \sin n + q \cos n) - (\mathfrak{b} \sin n + \mathfrak{c} \cos n)\, x \end{cases}$$

dargestellt werden, in denen $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}_0$, $\mathfrak{c}_0$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ willkürliche Constanten bedeuten.

§ 24. Classification nach Grössenordnungen; die Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems.

Da die Coordinaten x und r eines beliebigen Punktes des Stabes als klein gegen die Längeneinheit vorausgesetzt werden, so kann man, wie im § 2, alle in der Rechnung vorkommenden Werthe nach Grössenordnungen eintheilen. Hierbei werden x und r als Grössen der Ordnung 1 gerechnet, während $\sin n$, $\cos n$, sowie die von n allein abhängigen Werthe p, q, τ die Ordnung 0 haben.

Man lege durch den beliebigen Punkt M der Curve $\varphi\,(p, q) = 0$ die zu letzterer senkrechte Ebene und bezeichne, analog dem Früheren, den Inhalt der Querschnittfläche, in welcher die Ebene den Stab schneidet, durch C. Dann ist C eine Grösse zweiter Ordnung. Der Querschnitt des Stabes wird, abgesehen von den Festsetzungen des § 22, als in beliebiger Weise variabel angenommen, so dass C eine Function von n ist. Der Schwerpunkt der genannten Querschnittfläche habe, von M aus gerechnet, die zur Richtung von r parallele Coordinate $\mathfrak{r}$. Ferner mögen die Trägheitsmomente dieser Querschnittfläche, die sich auf eine durch M gehende und zu r, respective zu x parallele Drehungsachse beziehen, durch A und B bezeichnet werden. Man setzt also

$$(16.)\quad \begin{cases} \iint x^2\, dx\, dr = A, \quad \iint r^2\, dx\, dr = B, \\ \iint dx\, dr = C, \quad \iint r\, dx\, dr = C\mathfrak{r}, \end{cases}$$

wo die Integrationen sich über den betrachteten Querschnitt erstrecken. A, B, $\mathfrak{r}$ sind ebenfalls gegebene Functionen der Variable n, und zwar gehören A, B zur 4ten, und $\mathfrak{r}$ zur 1sten Ordnung. Da nach der Voraussetzung die yz-Ebene in der Anfangslage den Stab in zwei symmetrische Hälften theilt, so bestehen für ein beliebiges n, wenn man über den zur Curve $\varphi\,(p, q) = 0$ normalen Querschnitt integrirt, die Gleichungen:

$$(17.)\quad \iint x\, dx\, dr = 0, \quad \iint x\, r\, dx\, dr = 0.$$

Denn die Integralelemente, die zu je zwei symmetrisch gelegenen Punkten x, r, n und $-x$, r, n gehören, heben sich gegenseitig auf. Die erste der Gleichungen (17.) sagt aus, dass die Gerade, in welcher die yz-Ebene den betreffenden Normalschnitt schneidet, den Schwerpunkt desselben enthält, und die zweite, dass diese Gerade eine der Hauptträgheitsachsen des Normalschnitts ist, was sich aus der Symmetrie der Figur ohne Weiteres ergiebt.

Von den gegebenen Oberflächenkräften wird nach § 22 die Componente X gleich Null angenommen. Die übrigen Componenten Y, Z, und daher auch R, S, gehören (§ 2) zur Ordnung 0.

Im § 1 wurden die 6 Gleichgewichtsbedingungen des starren Systems für den einen der zwei Theile entwickelt, in welche der cylindrische Stab durch einen beliebigen Normalschnitt zerlegt wird. Die entsprechenden Gleichungen sind für den krummen Stab aufzustellen. Man betrachte den Abschnitt, welcher zwischen der obenerwähnten Normalebene durch den Punkt M und dem einen Stabende liegt. In den 6 Gleichgewichtsbedingungen für denselben kommen ausser den gegebenen Kräften die Componenten X_s, R_s, S_s vor. Die Bedingung, dass die der x-Achse parallelen Componenten die Summe 0 haben, reducirt sich, da $X=0$ ist, auf die Gleichung

$$(18.)\quad \int\!\!\int X_s\, dx\, dr = 0,$$

wo die Integration über den Querschnitt auszudehnen ist. Man setzt sodann die Summe derjenigen Componenten gleich Null, welche der zu M gehörigen Richtung von r, respective von ds, parallel sind. Man hat zu diesem Behuf einerseits die Kräfte $-R_s$, $-S_s$ über den Querschnitt, andererseits die in (8.) angegebenen Componenten R, S über den betrachteten Theil der Staboberfläche zu integriren; die Grösse n gilt hierbei für constant. Ausserdem treten die Componenten der Schwerkraft hinzu. Zur Abkürzung bezeichne man durch g und h die Ausdrücke

$$(19.)\quad \begin{cases} \sin n\int Y\, dT + \cos n\int Z\, dT - \Gamma \sin n\int dm = g, \\ -\cos n\int Y\, dT + \sin n\int Z\, dT + \Gamma \cos n\int dm = h, \end{cases}$$

in denen Γ die Constante der Schwerkraft, dT das Oberflächenelement, dm das Massenelement bedeutet, und die Integrationen sich auf die Oberfläche, respective die Masse des in Rede stehenden Stababschnitts beziehen. Dann erhält man als zweite und dritte Gleichgewichtsbedingung die Gleichungen:

$$(20.)\quad \begin{cases} \int\!\!\int R_s\, dx\, dr = g, \\ \int\!\!\int S_s\, dx\, dr = h. \end{cases}$$

Die Grössen g und h sind gegebene Functionen von n, die sich (analog zu § 1) aus Summanden der 1sten und 2ten Ordnung zusammensetzen.

Bei den Bedingungen für die Kräftepaare wird M als der Punkt genommen, von dem aus die Hebelarme gemessen werden. Man zieht von M die Parallele zur x-Achse, sowie die in die Richtung von r und ds fallenden Geraden. Dann mögen durch G, F, H die resultirenden Drehungsmomente bezeichnet werden, welche die gegebenen, auf den Stababschnitt wirkenden Kräfte in Bezug auf die genannten drei Geraden als Drehungsachsen haben. Die Gleichgewichtsbedingungen für die Kräftepaare lauten hiernach:

$$(21.)\quad \begin{cases} \int\!\!\int x\, S_s\, dx\, dr = F, \\ \int\!\!\int r\, S_s\, dx\, dr = G, \\ \int\!\!\int (x\, R_s - r\, X_s)\, dx\, dr = H. \end{cases}$$

Die Ausdrücke der Grössen F, G, H (als bestimmte Integrale) sollen hier nicht ausführlich wiedergegeben werden, da sie den Werthen F, G, H im § 1, respective im § 8, analog gebildet sind. Was die Ordnungen derselben anbelangt, so gehören die beträchtlichsten Bestandtheile von F und H der 2ten, die beträchtlichsten Bestandtheile von G der 1sten Ordnung an. Denn da nach der Voraussetzung $X = 0$, also alle gegebenen Kräfte zur yz-Ebene parallel sind, so haben die Hebelarme bei zweien der obigen drei Drehungen die Ordnung 1; nur bei der Drehung um die Parallele zur x-Achse kommen Hebelarme von der Ordnung der Längeneinheit zur Geltung. Man setzt ferner

$$\begin{cases} g = g_1 + g_2, \quad h = h_1 + h_2, \\ F = F_1 + F_2, \quad G = G_1 + G_2 + G_3, \quad H = H_1 + H_2, \end{cases}$$

indem man in g_1, h_1, G_1 die Glieder 1ster Ordnung von g, h, G zusammenfasst, und durch g_2, h_2, F_1, G_2, H_1 die Bestandtheile 2ter Ordnung von g, h, F, G, H, durch F_2, G_3, H_2 die übrigen Bestandtheile von F, G, H bezeichnet.

§ 25. Die Form der Functionen ξ, ϱ, σ.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen, welche im vorigen Paragraphen für den durch eine beliebige Normalebene begrenzten Abschnitt des Stabes abgeleitet wurden, zieht man, wie im § 2, Schlussfolgerungen in Betreff der Ordnungen der inneren Druckkräfte. In den Gleichungen (21.) sind die Componenten X_s, R_s, S_s mit den Hebelarmen 1ster Ordnung x, r multiplicirt, und die links stehenden Integrale erstrecken sich über die zur 2ten Ordnung gehörige Querschnittfläche. Da nun ausserdem die Ordnungen der rechten Seiten dieser Gleichungen bekannt sind, so kann man gewisse Ordnungen, welche die genannten Componenten zum Mindesten annehmen, ermitteln. Die Function G ist nach § 24 von der Ordnung 1; also muss die Kraft S_s, damit das in der zweiten Gleichung (21.) vorkommende Integral $\int\int r\, S_s\, dx\, dr$ gleich G sein könne, die Ordnung — 2 erreichen. Das Torsionsmoment H hat in Folge der Voraussetzungen des § 22 die Ordnung 2; daher ergiebt sich aus (21.) — und ebenso aus (20.) — für die Componenten X_s und R_s nur die Ordnung — 1. Man schliesst ferner analog zu § 2, dass auch in Betreff der 3 übrigen inneren Druckkräfte X_x, R_r, X_r kein Umstand vorliegt, der für dieselben eine ebenso beträchtliche Grössenordnung wie für S_s forderte.

Aus den Ordnungen der inneren Druckkräfte sucht man nun, in ähnlicher Weise wie bei dem cylindrischen Stabe, Aufschluss über die Form der unbekannten Functionen, durch welche die Verschiebungen dargestellt werden, zu gewinnen. Man stellt sich, im Einklang mit den obigen Erwägungen, die Aufgabe, eine Lösung der Differentialgleichungen abzuleiten, bei welcher die Kraft S_s von beträchtlicherer Grössenordnung als alle übrigen inneren Druckkräfte ist, indem sie allein die Ordnung — 2 annimmt. Wie die folgenden Entwicklungen zeigen, existirt in der That eine derartige Lösung, durch welche sowohl die Gleichungen für das Innere als die Oberflächenbedingungen befriedigt werden. Und da das Problem nur eine eindeutige Lösung zulässt, so wird die hier aufgestellte Bedingung durch das schliessliche Resultat der Rechnung verificirt.

Es sollen zunächst die Normalkräfte X_x, R_r, S_s betrachtet werden, für die nach (13.) und (14.) die Formeln

$$X_x = a\frac{d\xi}{dx} + (a-2b)\left\{\frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right)\right\},$$

$$R_r = a\frac{d\varrho}{dr} + (a-2b)\left\{\frac{d\xi}{dx} + \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right)\right\},$$

$$S_s = \frac{a}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right) + (a-2b)\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\varrho}{dr}\right)$$

bestehen. Um die Forderung, dass nur S_s die — 2te, die übrigen Componenten eine höhere Ordnung haben, zu verwerthen, wendet man für die Verschiebungen ξ, ϱ, σ, wie früher für ξ, η, ζ, eine Substitution an, welche ihre einzelnen Summanden in Bezug auf die Grössenordnung unterscheidet. Man setzt

$$(22.)\quad \begin{cases} \xi = U_1 + U_2 + u_0 + u, \\ \varrho = V_1 + V_2 + v_0 + v, \\ \sigma = W_1 + W_2 + w_0 + w, \end{cases}$$

indem man durch U_1, V_1, W_1 diejenigen Bestandtheile der Functionen ξ, ϱ, σ, die zu einer beträchtlicheren Ordnung als der — 1ten gehören, bezeichnet, ferner durch U_2, V_2, W_2 die Bestandtheile — 1ter, durch u_0, v_0, w_0 die Bestandtheile 0ter Ordnung derselben. Die Grössen u, v, w enthalten die Terme positiver Ordnung von ξ, ϱ, σ.

Der Bestandtheil — 2ter Ordnung der Componente S_s werde J genannt. Sodann sollen der Abkürzung halber diejenigen Summanden von $\frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right)$, deren Ordnungszahl eine grössere negative Zahl als — 1 ist, in χ_1, die übrigen in χ_2 zusammengefasst werden, so dass

$$(23.)\quad \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right) = \chi_1 + \chi_2$$

gesetzt wird.

Man trennt nun auf den rechten Seiten der obigen Gleichungen für X_x, R_r, S_s die Glieder, die der — 2ten oder einer niedrigeren Ordnung angehören, von den übrigen, wobei zu beachten ist, dass die

Differentialquotienten $\frac{dU_2}{dx}$, $\frac{dU_2}{dr}$, $\frac{dV_2}{dx}$, $\frac{dV_2}{dr}$ die Ordnung — 2 annehmen. Dann erhält man in Folge der Bedingung, dass S_s allein die Ordnung — 2 erreichen soll, die (zu (17.) des § 3 analogen) Gleichungen

$$a\frac{d(U_1+U_1)}{dx}+(a-2b)\left\{\frac{d(V_1+V_2)}{dr}+\chi_1\right\}=0,$$

$$a\frac{d(V_1+V_2)}{dr}+(a-2b)\left\{\frac{d(U_1+U_2)}{dx}+\chi_1\right\}=0,$$

$$a\chi_1+(a-2b)\left\{\frac{d(U_1+U_2)}{dx}+\frac{d(V_1+V_2)}{dr}\right\}=J,$$

aus denen sich die Werthe

$$\begin{cases}\frac{d(U_1+U_2)}{dx}=\frac{d(V_1+V_2)}{dr}=-\frac{J}{E_1},\\ \chi_1=\frac{J}{E}\end{cases}$$

ergeben. Zwei der letzteren 3 Gleichungen gestatten eine weitere Zerlegung. Denn die Grössen J, $\frac{dU_2}{dx}$, $\frac{dV_2}{dr}$ sind ihrer Definition nach von der — 2ten Ordnung, während die Terme von $\frac{dU_1}{dx}$ und $\frac{dV_1}{dr}$, falls sie von Null verschieden wären, einer beträchtlicheren Ordnung als der — 2ten angehören müssten. Daher entsteht das Gleichungssystem:

$$(24.)\quad \frac{dU_1}{dx}=\frac{dV_1}{dr}=0,$$

$$(25.)\quad \frac{dU_2}{dx}=\frac{dV_2}{dr}=-\frac{J}{E_1},\quad \chi_1=\frac{J}{E}.$$

Ferner erhält man, weil X_r keine niedrigere Ordnung als die — 1te haben soll, aus dem Ausdruck (14.) der genannten Componente die Gleichungen:

$$(26.)\quad \frac{dU_1}{dr}+\frac{dV_1}{dx}=0,$$

$$(27.)\quad \frac{dU_2}{dr}+\frac{dV_2}{dx}=0.$$

Durch Differentiation der Gleichung (26.) nach r und nach x und Anwendung der Gleichungen (24.) findet man dann

$$\frac{d^2U_1}{dr^2}=\frac{d^2V_1}{dx^2}=0.$$

Dies zeigt, dass die Grösse U_1, die nach (24.) nur von r, n abhängt, eine lineare Function von r ist, und ebenso V_1 eine lineare Function von x. Nach Berücksichtigung von (26.) gelangt man daher zu den Gleichungen

$$(28.)\quad U_1 = \mathfrak{K} + \mathfrak{M}r,\quad V_1 = \mathfrak{L} - \mathfrak{M}x,$$

wo $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ Functionen von n allein bedeuten. Der Definition von U_1, V_1 zufolge können die Summanden von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ die Ordnungen — 2, — 3 etc., die Summanden von $\mathfrak{M}$ die Ordnungen — 3, — 4 etc. annehmen. Um für das Folgende eine genauere Bezeichnungsweise zu haben, setzt man

$$(29.)\quad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2,\quad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2,\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2.$$

Hierin sollen $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{L}_2$ die Bestandtheile — 2ter Ordnung von $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$, ferner $\mathfrak{M}_2$ den Bestandtheil — 3ter Ordnung von $\mathfrak{M}$ bedeuten, während die Terme von erheblicherer Ordnung respective in $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}_1$ zusammengefasst werden.

Aus den in (13.) und (14.) angeführten Formeln der Tangentialkräfte R_s und X_s,

$$X_s = b\left\{\frac{d\sigma}{dx} + \frac{1}{\tau - r}\,\frac{d\xi}{dn}\right\},$$

$$R_s = b\left\{\frac{d\sigma}{dr} + \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\varrho}{dn} + \sigma\right)\right\},$$

leitet man zunächst eine Gleichung ab, in welcher die Variable σ nicht vorkommt. Die nach r, bezüglich x, differenzirten Werthe

$$\frac{1}{b}\,\frac{dX_s}{dr} = \frac{d^2\sigma}{dx\,dr} + \frac{1}{\tau - r}\,\frac{d^2\xi}{dr\,dn} + \frac{1}{(\tau - r)^2}\,\frac{d\xi}{dn},$$

$$\frac{1}{b}\,\frac{dR_s}{dx} = \frac{d^2\sigma}{dx\,dr} + \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d^2\varrho}{dx\,dn} + \frac{d\sigma}{dx}\right)$$

werden von einander subtrahirt, und der Differentialquotient $\frac{d\sigma}{dx}$ durch X_s ausgedrückt. Dann ist σ eliminirt, und man erhält nach Multiplication mit $(\tau - r)^2$ die Gleichung

$$\frac{(\tau - r)^2}{b}\left(\frac{dX_s}{dr} - \frac{dR_s}{dx}\right) + \frac{\tau - r}{b}\,X_s =$$

$$2\,\frac{d\xi}{dn} + (\tau - r)\left(\frac{d^2\xi}{dr\,dn} - \frac{d^2\varrho}{dx\,dn}\right),$$

welche zu einer Relation zwischen den Functionen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{M}$ führt. Da dem Obigen zufolge die Componenten X_s, R_s die Ordnung — 1, ihre Differentialquotienten $\frac{dX_s}{dr}$, $\frac{dR_s}{dx}$ die Ordnung — 2 haben, so kann auch die rechte Seite der letzten Gleichung keine Glieder von erheblicherer Ordnung als der — 2ten enthalten. Aber nach (22.), (28.), (29.) ist

$$2\frac{d\xi}{dn}+(\tau-r)\left(\frac{d^2\xi}{dr\,dn}-\frac{d^2\varrho}{dx\,dn}\right)=$$
$$2\frac{d\mathfrak{K}_1}{dn}+2\tau\frac{d\mathfrak{M}}{dn}+2\frac{d(U_2+u_0+u)}{dn}$$
$$+2\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}+(\tau-r)\left\{\frac{d^2(U_2+u_0+u)}{dr\,dn}-\frac{d^2(V_2+v_0+v)}{dx\,dn}\right\},$$

in welchem Ausdruck die Functionen $\frac{d\mathfrak{K}_1}{dn}$ und $\frac{d\mathfrak{M}}{dn}$ ausschliesslich aus Summanden der -3^{ten}, -4^{ten} etc. Ordnung bestehen, während die übrigen Terme zu der -2^{ten} oder einer höheren Ordnung gehören. Folglich sind $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{M}$ durch die Gleichung

$$(30.)\quad \frac{d\mathfrak{K}_1}{dn}+\tau\frac{d\mathfrak{M}}{dn}=0$$

verbunden.

Man setzt sodann in die Formel der Componente X_s die Werthe (22.) für ξ, ϱ und σ ein, wodurch die Gleichung

$$\frac{1}{b}X_s=\frac{d(W_1+W_2)}{dx}+\frac{1}{\tau-r}\,\frac{dU_1}{dn}$$
$$+\frac{d(w_0+w)}{dx}+\frac{1}{\tau-r}\,\frac{d(U_2+u_0+u)}{dn}$$

entsteht. Nun haben die Grössen

$$X_s,\quad \frac{d(w_0+w)}{dx},\quad \frac{1}{\tau-r}\,\frac{d(U_2+u_0+u)}{dn}$$

die -1^{te} oder eine höhere Ordnung. Also müssen die in der Summe

$$\frac{d(W_1+W_2)}{dx}+\frac{1}{\tau-r}\,\frac{dU_1}{dn}$$

enthaltenen Terme der -2^{ten}, -3^{ten} etc. Ordnung für sich verschwinden. Nach (28.), (29.), (30.) ist

$$\frac{1}{\tau-r}\,\frac{dU_1}{dn}=-\frac{d\mathfrak{M}}{dn}+\frac{1}{\tau-r}\,\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn},$$

und in dem Ausdruck $\frac{1}{\tau-r}\,\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}$ gehört nach Substitution der Reihe

$$\frac{1}{\tau-r}=\frac{1}{\tau}+\frac{r}{\tau^2}+\frac{r^2}{\tau^3}+\dots \text{ in inf.}$$

nur das Anfangsglied $\frac{1}{\tau}\,\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}$ zur Ordnung -2. In $\frac{dW_2}{dx}$ sind alle Summanden von der -2^{ten} Ordnung, in $\frac{dW_1}{dx}$ alle von einer niedrigeren Ordnung als der -2^{ten}, wie aus den Definitionen von W_1 und W_2 folgt. Daher ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{cases} \dfrac{dW_1}{dx} - \dfrac{d\mathfrak{M}}{dn} = 0, \\ \dfrac{dW_2}{dx} + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\mathfrak{R}_2}{dn} = 0, \end{cases}$$

oder

$$(31.)\quad \begin{cases} W_1 = \dfrac{d\mathfrak{M}}{dn} x + \Psi_1, \\ W_2 = -\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\mathfrak{R}_2}{dn} x + \Psi_2, \end{cases}$$

wo Ψ_1 und Ψ_2 nur von r und n abhängen.

Endlich transformirt man, um die Functionen Ψ_1 und Ψ_2 näher zu bestimmen, die Formel für die Componente R_s ebenfalls mittelst der Substitutionen (22.) und der letzterhaltenen Gleichungen. Für den Ausdruck $\dfrac{\tau - r}{b} R_s$ findet man durch (13.) und (22.) die Gleichung

$$\frac{\tau-r}{b} R_s = (\tau - r)\frac{d(W_1+W_2)}{dr} + \frac{dV_1}{dn} + W_1$$
$$+ (\tau - r)\frac{d(w_0+w)}{dr} + \frac{d(V_2+v_0+v)}{dn} + W_2 + w_0 + w,$$

und da R_s die Ordnung -1 hat, so müssen die Bestandtheile -2ter, -3ter, etc. Ordnung der Function

$$(\tau - r)\frac{d(W_1+W_2)}{dr} + \frac{dV_1}{dn} + W_1$$

gleich Null sein. Aber nach (28.) und (31.) ist

$$(\tau - r)\frac{d(W_1+W_2)}{dr} + \frac{dV_1}{dn} + W_1 =$$
$$\tau\frac{d\Psi_1}{dr} + \frac{d\mathfrak{L}}{dn} + \Psi_1 - r\frac{d\Psi_1}{dr} + (\tau - r)\frac{d\Psi_2}{dr}.$$

Während die Grösse Ψ_2, als ein Theil von W_2, zur Ordnung -1 gehört, haben die Summanden von Ψ_1 die -2te oder eine niedrigere Ordnung. Man substituirt in Folge dessen

$$\Psi_1 = \psi_\alpha + \psi_{\alpha-1} + \dots + \psi_3 + \psi_2,$$

indem man durch ψ_2 den Bestandtheil -2ter, durch ψ_3 den Bestandtheil -3ter, etc. durch ψ_α den Bestandtheil $-\alpha$ter Ordnung von Ψ_1 bezeichnet. Dann erhält man

$$(\tau - r)\frac{d(W_1+W_2)}{dr} + \frac{dV_1}{dn} + W_1$$
$$= \begin{cases} \tau\dfrac{d(\psi_\alpha + \dots + \psi_2)}{dr} + \dfrac{d\mathfrak{L}}{dn} \\ + \psi_\alpha + \dots + \psi_2 - r\dfrac{d(\psi_\alpha + \dots + \psi_2)}{dr} + (\tau - r)\dfrac{d\Psi_2}{dr}. \end{cases}$$

In letzterem Ausdruck ist der Term $\tau \dfrac{d\psi_\alpha}{dr}$ von der Ordnung — $(\alpha+1)$, also von beträchtlicherer als ψ_α, $r\dfrac{d\psi_\alpha}{dr}$ und die von $\psi_{\alpha-1}, \ldots \psi_2$, Ψ_2 abhängigen Summanden. Hieraus folgt, dass $\dfrac{d\psi_\alpha}{dr}$ von r unabhängig ist. Denn $\tau\dfrac{d\psi_\alpha}{dr}$ muss entweder gleich Null sein oder sich gegen einen Bestandtheil der nur von n abhängigen Function $\dfrac{d\mathfrak{L}}{dn}$ fortheben. Die Grösse ψ_α ist also eine lineare Function von r. Man setzt

$$\psi_\alpha = \mathfrak{g}_\alpha r + \mathfrak{h}_\alpha,$$

wo $\mathfrak{g}_\alpha$, $\mathfrak{h}_\alpha$ Functionen von n allein sind, und $\mathfrak{g}_\alpha$ die Ordnung — $(\alpha+1)$, $\mathfrak{h}_\alpha$ die Ordnung — α hat. Zur Ordnung — α gehören, abgesehen von einem Bestandtheil von $\dfrac{d\mathfrak{L}}{dn}$, nur die Ausdrücke $\tau\dfrac{d\psi_{\alpha-1}}{dr}$, ψ_α und $r\dfrac{d\psi_\alpha}{dr}$; und da die letzte Gleichung die Beziehung

$$\psi_\alpha - r\frac{d\psi_\alpha}{dr} = \mathfrak{h}_\alpha$$

ergiebt, so ist auch $\dfrac{d\psi_{\alpha-1}}{dr}$ eine Function von n allein, also $\psi_{\alpha-1}$ eine lineare Function von r, die durch $\mathfrak{g}_{\alpha-1} r + \mathfrak{h}_{\alpha-1}$ bezeichnet werden möge. Der gleiche Schluss wiederholt sich für alle folgenden Glieder $\psi_{\alpha-2}, \ldots \psi_2$ und endlich auch für Ψ_2; denn der zur Ordnung — 2 gehörige Term $\tau\dfrac{d\Psi_2}{dr}$ muss sich gegen eine von n allein abhängige Function, nämlich gegen $\psi_2 - r\dfrac{d\psi_2}{dr}$ und einen Bestandtheil von $\dfrac{d\mathfrak{L}}{dn}$, fortheben. Somit ist bewiesen, dass die beiden Grössen Ψ_1 und Ψ_2 lineare Functionen von r sind. Man setzt daher

$$(32.)\quad \Psi_1 = \mathfrak{G}_1 r + \mathfrak{H}_1, \quad \Psi_2 = \mathfrak{G}_2 r + \mathfrak{H}_2,$$

wo $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{H}_2$ nur von n abhängen. Die Grösse $\mathfrak{H}_2$ hat die — 1te, $\mathfrak{G}_2$ die — 2te Ordnung; in $\mathfrak{H}_1$ ist die Ordnung aller Summanden niedriger als die — 1te, in $\mathfrak{G}_1$ niedriger als die — 2te.

Die Function

$$(\tau - r)\frac{d(W_1 + W_2)}{dr} + \frac{dV_1}{dn} + W_1,$$

welche sich dem Vorhergehenden zufolge auf die Ordnung — 1 reduciren soll, nimmt durch (32.) den Werth

$$\tau\,\mathfrak{G}_1 + \frac{d\mathfrak{L}}{dn} + \mathfrak{H}_1 + (\tau - r)\,\mathfrak{G}_2$$

an. Hierin ist allein der Term $r\,\mathfrak{S}_2$ von der Ordnung -1; alle übrigen Glieder gehören zu niedrigeren Ordnungen. Also ergiebt sich die Gleichung

$$\tau(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2) + \frac{d\mathfrak{L}}{dn} + \mathfrak{H}_1 = 0$$

oder

$$(33.)\quad \mathfrak{H}_1 = -\frac{d\mathfrak{L}}{dn} - \tau(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2).$$

Indem man die Werthe (32.) und (33.) in die Gleichungen (31.) einsetzt, findet man für W_1 und W_2 die Ausdrücke

$$(34.)\quad \begin{cases} W_1 = \dfrac{d\mathfrak{M}}{dn}x + \mathfrak{S}_1 r - \dfrac{d\mathfrak{L}}{dn} - \tau(\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2), \\ W_2 = -\dfrac{1}{\tau}\,\dfrac{d\mathfrak{K}_2}{dn}x + \mathfrak{S}_2 r + \mathfrak{H}_2, \end{cases}$$

in denen $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{H}_2$ unbekannte Functionen von n allein sind.

§ 26. Die Functionen J, U_2, V_2.

Die letzte der Gleichungen (25.)

$$\chi_1 = \frac{J}{E}$$

stellt die Beziehung dar, in welcher der zur Ordnung -2 gehörige Bestandtheil J der Kraft S_s zu den Verschiebungen steht. Die Grösse χ_1 wurde in (23.) als derjenige Bestandtheil von $\frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right)$ definirt, welcher die Summanden von niedrigerer als der -1ten Ordnung umfasst. Die obige Gleichung zeigt, dass χ_1, ebenso wie J, die Ordnung -2 hat. Multiplicirt man also (23.) mit $\tau - r$, so hat auf der rechten Seite der hierdurch entstehenden Gleichung

$$\frac{d\sigma}{dn} - \varrho = \chi_1\tau - \chi_1 r + \chi_2(\tau - r)$$

das Glied $\chi_1\tau$ allein eine erheblichere Ordnung als die -1te. Die linke Seite derselben geht aber durch (22.) in die Summe

$$\frac{d\sigma}{dn} - \varrho = \frac{dW_1}{dn} - V_1 + \frac{d(W_2 + w_0 + w)}{dn} - (V_2 + v_0 + v)$$

über, in welcher nur $\frac{dW_1}{dn}$ und V_1 von niedrigerer Ordnung als der -1ten sind. Daher findet man

$$\chi_1\tau = \frac{dW_1}{dn} - V_1$$

und folglich

$$(35.)\quad J = \frac{E}{\tau}\left(\frac{dW_1}{dn} - V_1\right).$$

Aus (35.) erhält man, wenn für V_1, W_1 die Werthe (28.), (34.), und gleichzeitig für $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$ die Werthe (29.)

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$$

substituirt werden, die Gleichung

$$\frac{\tau J}{E} = \left(\frac{d^2\mathfrak{M}_1}{dn^2} + \mathfrak{M}_1\right)x - \left\{\frac{d^2\mathfrak{L}_1}{dn^2} + \mathfrak{L}_1 + \frac{d(\tau\mathfrak{G}_1)}{dn}\right\}$$
$$+ \left(\frac{d^2\mathfrak{M}_2}{dn^2} + \mathfrak{M}_2\right)x + \frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}r - \left\{\frac{d^2\mathfrak{L}_2}{dn^2} + \mathfrak{L}_2 + \frac{d(\tau\mathfrak{G}_2)}{dn}\right\}.$$

Hierin sind die Terme

$$\left(\frac{d^2\mathfrak{M}_1}{dn^2} + \mathfrak{M}_1\right)x, \quad \frac{d^2\mathfrak{L}_1}{dn^2} + \mathfrak{L}_1 + \frac{d(\tau\mathfrak{G}_1)}{dn}$$

von niedrigerer Ordnung als der -2^{ten}, die Grösse $\frac{\tau J}{E}$ von der -2^{ten}; ferner können nach der Definition von $\mathfrak{G}_1$ in dem Produkt $\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}r$ Summanden der Ordnungen -2, -3 etc. vorkommen, während die übrigen Glieder der rechten Seite theils zur -2^{ten}, theils zu einer höheren Ordnung gehörən. Der Forderung, dass die Bestandtheile der rechten Seite von beträchtlicherer Ordnung als der -2^{ten} sich gegenseitig aufheben, kann aber für beliebige Werthe von x, r, n nur in der Art genügt werden, dass die obigen Factoren von x und r für sich verschwinden. Man folgert daraus zunächst, dass $\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}r$ ausschliesslich Terme der -2^{ten}, also $\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}$ ausschliesslich Terme der -3^{ten} Ordnung enthält. Ausserdem ergeben sich die Gleichungen

$$(36.)\quad \frac{d^2\mathfrak{M}_1}{dn^2} + \mathfrak{M}_1 = 0,$$

$$(37.)\quad \frac{d^2\mathfrak{L}_1}{dn^2} + \mathfrak{L}_1 + \frac{d(\tau\mathfrak{G}_1)}{dn} = 0,$$

so dass für J, nach Einführung der abgekürzten Bezeichnungen

$$(38.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathfrak{L}_2}{dn^2} + \mathfrak{L}_2 + \dfrac{d(\tau\mathfrak{G}_2)}{dn} = L, \\[2ex] \dfrac{d^2\mathfrak{M}_2}{dn^2} + \mathfrak{M}_2 = M, \end{cases}$$

die Gleichung

$$(39.)\quad J = \frac{E}{\tau}\left\{Mx + \frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}r - L\right\}$$

entsteht.

Die auf U_2 und V_2 bezüglichen Rechnungen sind denen analog, welche im § 3 für die daselbst vorkommenden Grössen U_2, V_2 angestellt wurden. Die drei Gleichungen (25.) und (27.), die für U_2 und V_2 gefunden wurden, lauten nach Berücksichtigung von (39.)

$$\begin{cases} \dfrac{dU_2}{dx} = \dfrac{dV_2}{dr} = -\dfrac{E}{E_1\tau}\left(Mx + \dfrac{d\mathfrak{S}_1}{dn}r - L\right), \\ \dfrac{dU_2}{dr} + \dfrac{dV_2}{dx} = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt

$$U_2 = -\frac{E}{E_1\tau}\left(\frac{Mx^2}{2} + \frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}xr - Lx\right) + \Pi_1(r, n),$$

$$V_2 = -\frac{E}{E_1\tau}\left(Mxr + \frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}\frac{r^2}{2} - Lr\right) + \Pi_2(x, n),$$

wo Π_1 nur von r, n, und Π_2 nur von x, n abhängt. Durch Substitution dieser Werthe von U_2, V_2 in die dritte Gleichung erhält man

$$-\frac{E}{E_1\tau}\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}x + \frac{d\Pi_2(x, n)}{dx} = \frac{E}{E_1\tau}Mr - \frac{d\Pi_1(r, n)}{dr}.$$

Da hier die linke Seite nicht von r, die rechte nicht von x abhängt, so sind beide gleich einer Function von n allein, die durch $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet werden möge. Aus den Gleichungen

$$\frac{d\Pi_1(r, n)}{dr} = -\mathfrak{T}_1 + \frac{E}{E_1\tau}Mr,$$

$$\frac{d\Pi_2(x, n)}{dx} = +\mathfrak{T}_1 + \frac{E}{E_1\tau}\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}x$$

werden dann die Werthe

$$\Pi_1(r, n) = -\mathfrak{T}_1 r + \frac{E}{E_1\tau}\frac{Mr^2}{2} + \mathfrak{P}_1,$$

$$\Pi_2(x, n) = +\mathfrak{T}_1 x + \frac{E}{E_1\tau}\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}\frac{x^2}{2} + \mathfrak{Q}_1$$

abgeleitet, in denen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{Q}_1$ Functionen von n allein bedeuten. Auf diese Weise findet man für U_2, V_2 die Gleichungen:

$$(40.)\quad \begin{cases} U_2 = -\dfrac{E}{E_1\tau}\left(M\dfrac{x^2 - r^2}{2} + \dfrac{d\mathfrak{S}_1}{dn}xr - Lx\right) - \mathfrak{T}_1 r + \mathfrak{P}_1, \\ V_2 = -\dfrac{E}{E_1\tau}\left(\dfrac{d\mathfrak{S}_1}{dn}\dfrac{r^2 - x^2}{2} + Mxr - Lr\right) + \mathfrak{T}_1 x + \mathfrak{Q}_1. \end{cases}$$

Von den Grössen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{T}_1$ gehören die beiden ersteren, wie aus der Definition von U_2, V_2 folgt, zur Ordnung -1, dagegen $\mathfrak{T}_1$ zur Ordnung -2.

§ 27. Bestimmung der Functionen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}_1$.

Durch die vorstehenden Entwicklungen sind die Werthe von

$$U_1,\ U_2,\ V_1,\ V_2,\ W_1,\ W_2$$

so weit bestimmt worden, dass nur die von n allein abhängigen Functionen, welche in (28.), (34.) und (40.) vorkommen, unbekannt geblieben sind. Von letzteren kann man nun die Functionen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{G}_1$, deren Ordnungszahl eine grössere negative Zahl als — 2 ist, dadurch ermitteln, dass man die bisher gewonnenen Ausdrücke in die Gleichgewichtsbedingungen (20.), (21.) des § 24 einsetzt. Die Rechnung ist der im § 5 angestellten ganz analog; man gelangt durch dieselbe, wie bei dem cylindrischen Stabe, zu einer ersten angenäherten Lösung. Allerdings ist die Form der Differentialgleichungen, welche sich für die unbekannten Functionen ergeben, hier zum Theil eine andere, als im § 5; es ist zu beachten, dass die Bewegungen des starren Körpers, welche willkürlich bleiben müssen, in den krummlinigen Coordinaten durch die Ausdrücke (15.), § 23, dargestellt werden.

Von den Bedingungen (20.), (21.) sollen die auf die Componente S_s bezüglichen

$$\begin{cases} \int\int x\, S_s\, dx\, dr = F, \\ \int\int r\, S_s\, dx\, dr = G, \\ \int\int S_s\, dx\, dr = h, \end{cases}$$

angewendet werden. Man betrachtet in den 2 ersten dieser Gleichungen die Terme 1ster, in der dritten die Terme 0ter Ordnung. Da der Bestandtheil — 2ter Ordnung von S_s durch J, der Bestandtheil 1ster Ordnung von G durch G_1 bezeichnet wurde, und F zur 2ten, h zur 1sten Ordnung gehört, so gelangt man zu den 3 Gleichungen

$$(41.)\quad \begin{cases} \int\int x\, J\, dx\, dr = 0, \\ \int\int r\, J\, dx\, dr = G_1, \\ \int\int J\, dx\, dr = 0. \end{cases}$$

Nach Substitution des Werthes (39.) der Function J treten die von n allein abhängigen Factoren M, $\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}$, L vor die Integralzeichen. Indem man dann die Gleichungen (16.) und (17.) berücksichtigt, gewinnt man aus (41.) die 3 Bestimmungen:

$$(42.)\quad M = \frac{d^2\mathfrak{M}_2}{dn^2} + \mathfrak{M}_2 = 0,$$

$$(43.)\quad \begin{cases} B\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn} - \mathfrak{r}CL = \frac{\mathfrak{r}G_1}{E}, \\ \mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn} - L = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (42.) hat dieselbe Form wie die Gleichung (36.), und da $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2$ gesetzt war, so genügt die Function $\mathfrak{M}$ der analog gebildeten Differentialgleichung

$$(44.)\quad \frac{d^2\mathfrak{M}}{dn^2} + \mathfrak{M} = 0.$$

Die Auflösung der Gleichungen (43.) liefert für $\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}$ und L die Ausdrücke

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{G}_1}{dn} = \dfrac{1}{E}\,\dfrac{\tau G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}, \\ L = \dfrac{1}{E}\,\dfrac{\tau\mathfrak{r}G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}, \end{cases}$$

wodurch für $\mathfrak{G}_1$ der Werth

$$(45.)\quad \mathfrak{G}_1 = \frac{1}{E}\int \frac{\tau G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}\,dn,$$

und für $\mathfrak{L}_2$ die Differentialgleichung

$$(46.)\quad \frac{d^2\mathfrak{L}_2}{dn^2} + \mathfrak{L}_2 + \frac{d(\tau\mathfrak{G}_2)}{dn} = \frac{1}{E}\,\frac{\tau\mathfrak{r}G_1}{B - C\mathfrak{r}^2},$$

deren linke Seite der Form nach mit (37.) übereinstimmt, erhalten wird.

Der Gleichung (44.) zufolge ist $\mathfrak{M}$ gleich der Function

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{b}\cos n - \mathfrak{c}\sin n,$$

wo $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ beliebige Constanten bedeuten. Man verbindet hiermit die Gleichung (30.)

$$\frac{d\mathfrak{K}_1}{dn} + \tau\,\frac{d\mathfrak{M}}{dn} = 0.$$

Dann ergiebt sich für $\mathfrak{K}_1$ der Werth

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{b}\int \tau \sin n\,dn + \mathfrak{c}\int \tau\cos n\,dn$$

oder, wenn man die Gleichungen (4.) und (3.)

$$\tau = \frac{ds}{dn},\quad \sin n\,ds = dq,\quad \cos n\,ds = -dp$$

benutzt und durch $\mathfrak{a}_0$ eine willkürliche Constante bezeichnet, der folgende

$$\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}q - \mathfrak{c}p.$$

Die von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{M}$ abhängigen Glieder der Verschiebungen ξ, ϱ, σ lauten somit nach (28.), (29.), (34.)

$$\begin{cases} \xi = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}q - \mathfrak{c}p + (\mathfrak{b}\cos n - \mathfrak{c}\sin n)r, \\ \varrho = -(\mathfrak{b}\cos n - \mathfrak{c}\sin n)x, \\ \sigma = -(\mathfrak{b}\sin n + \mathfrak{c}\cos n)x. \end{cases}$$

Der Vergleich mit den Formeln (15.) zeigt aber, dass die letztgenannten Werthe vollständig in denjenigen Ausdrücken enthalten sind, welche hier überhaupt beliebig bleiben. Daher ist es keine Beschränkung, wenn man

$$(47.)\quad \mathfrak{M} = \mathfrak{K}_1 = 0$$

setzt.

Die Function $\mathfrak{L}_1$ wird durch die Differentialgleichung (37.)

$$\frac{d^2\mathfrak{L}_1}{dn^2} + \mathfrak{L}_1 = -\frac{d(\tau\mathfrak{S}_1)}{dn}$$

bestimmt, in welche für $\mathfrak{S}_1$ der Werth (45.) zu substituiren ist. Durch Integration nach bekannter Methode findet man als das Integral dieser Gleichung

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_1 &= \sin n(\mathfrak{b}_0 - \int \tau\mathfrak{S}_1 \sin n\, dn)\\ &\quad + \cos n(\mathfrak{c}_0 - \int \tau\mathfrak{S}_1 \cos n\, dn),\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ willkürliche Constanten sind. Man darf indessen auch $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{c}_0 = 0$ nehmen, ohne die Allgemeinheit der Rechnung zu beeinträchtigen. Denn da von der Function $\mathfrak{L}_1$, wie aus (28.) und (34.) hervorgeht, nur die in ϱ und σ enthaltenen Summanden

$$\varrho = \mathfrak{L}_1, \quad \sigma = -\frac{d\mathfrak{L}_1}{dn}$$

abhängen, so kommen $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ ausschliesslich in den Termen

$$\begin{cases}\varrho = \mathfrak{b}_0 \sin n + \mathfrak{c}_0 \cos n,\\ \sigma = -\mathfrak{b}_0 \cos n + \mathfrak{c}_0 \sin n\end{cases}$$

vor, welche ebenfalls zu den in (15.) angegebenen Ausdrücken gehören. Auf diese Weise erhält man für $\mathfrak{L}_1$ die Gleichung

$$(48.)\quad \mathfrak{L}_1 = -\cos n \int \tau\mathfrak{S}_1 \cos n\, dn - \sin n \int \tau\mathfrak{S}_1 \sin n\, dn,$$

der man durch Anwendung der aus (3.), (4.) folgenden Relationen

$$\tau \cos n\, dn = -dp, \quad \tau \sin n\, dn = dq$$

die Gestalt

$$(49.)\quad \mathfrak{L}_1 = \cos n \int \mathfrak{S}_1\, dp - \sin n \int \mathfrak{S}_1\, dq$$

geben kann. Der Differentialquotient $\frac{d\mathfrak{L}_1}{dn}$ ist hiernach gleich der Summe

$$\frac{d\mathfrak{L}_1}{dn} = -\sin n \int \mathfrak{S}_1\, dp - \cos n \int \mathfrak{S}_1\, dq - \tau\mathfrak{S}_1,$$

woraus sich für das in W_1 enthaltene Binom $\frac{d\mathfrak{L}_1}{dn} + \tau\mathfrak{S}_1$ der Werth

$$-\sin n \int \mathfrak{S}_1\, dp - \cos n \int \mathfrak{S}_1\, dq$$

ergiebt. Die Grösse $\mathfrak{L}_1$ gehört, wie $\mathfrak{S}_1$, zur Ordnung -3.

Die Function $\mathfrak{S}_1$ wurde in (45.) gleich einem unbestimmten Integral gefunden, so dass in derselben eine additive Constante willkürlich geblieben ist. Es soll gezeigt werden, dass letztere für die gesuchten Ausdrücke der Verschiebungen unwesentlich ist. Lässt man $\mathfrak{S}_1$ um eine beliebige Constante $\mathfrak{a}$ wachsen, so erfährt nach (49.) die Function $\mathfrak{L}_1$ das Increment

$$\mathfrak{a}\ (p \cos n - q \sin n)$$

und die Function $\frac{d\mathfrak{L}_1}{dn} + \tau \mathfrak{G}_1$ das Increment

$$-\mathfrak{a}\ (p \sin n + q \cos n).$$

Der erstere Werth stellt nach (28.) gleichzeitig den Zuwachs von V_1 dar, während W_1 sich um

$$\mathfrak{a}\ (r + p \sin n + q \cos n)$$

vergrössert, und die Ausdrücke (40.), (34.) für U_2, V_2, W_2 sich nicht ändern. Die Vermehrung der Function $\mathfrak{G}_1$ um die Constante $\mathfrak{a}$ hat daher nur das Hinzutreten der Terme

$$\begin{cases} \varrho = \mathfrak{a}\ (p \cos n - q \sin n), \\ \sigma = \mathfrak{a}\ (r + p \sin n + q \cos n) \end{cases}$$

zur Folge. Und da diese wiederum in den unbestimmt bleibenden Werthen (15.) enthalten sind, so ist bewiesen, dass die Integrationsconstante des Integrals (45.) keinen Beitrag zu Verschiebungen, die eine Deformation des Stabes bewirken, liefert.

Die obigen Erörterungen lassen erkennen, dass die Functionen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}_1$ durch die erhaltenen Differentialgleichungen vollständig bestimmt sind, abgesehen von denjenigen Bestandtheilen, welche der Natur des Problems nach hier willkürlich sein müssen. Die Gesammtheit der bei $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{L}_1$ auftretenden Integrationsconstanten führt in die Ausdrücke von ξ, ϱ, σ nur gerade die in (15.) angegebenen Summen ein, die sich auf die Bewegungen des starren Stabes beziehen.

Durch Substitution der Werthe

$$M = \mathfrak{M} = \mathfrak{K}_1 = 0, \quad L = \mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}$$

ergeben sich aus (28.), (34.), (40.) für U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2 die Ausdrücke

$$(50.)\quad \begin{cases} U_1 = \mathfrak{K}_2, \\ V_1 = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2, \\ W_1 = -\left(\frac{d\mathfrak{L}_1}{dn} + \tau\mathfrak{G}_1\right) + \mathfrak{G}_1 r - \left(\frac{d\mathfrak{L}_2}{dn} + \tau\mathfrak{G}_2\right), \\ U_2 = -\frac{E}{E_1\tau}\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}\,x\,(r - \mathfrak{r}) - \mathfrak{T}_1 r + \mathfrak{P}_1, \\ V_2 = -\frac{E}{E_1\tau}\,\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}\left(\frac{r^2 - x^2}{2} - \mathfrak{r}r\right) + \mathfrak{T}_1 x + \mathfrak{Q}_1, \\ W_2 = -\frac{1}{\tau}\,\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}\,x + \mathfrak{G}_2 r + \mathfrak{H}_2, \end{cases}$$

in denen nach (45.) und (48.)

$$\begin{cases} \mathfrak{G}_1 = \frac{1}{E}\int \frac{\tau G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}\,dn, \\ \mathfrak{L}_1 = -\cos n \int \tau\mathfrak{G}_1 \cos n\,dn - \sin n \int \tau\mathfrak{G}_1 \sin n\,dn \end{cases}$$

zu setzen ist.

§ 28. Die in erster Annäherung geltende Lösung.

Um diejenigen Ausdrücke der Verschiebungen, die für die erste Annäherung anzuwenden sind, zu erhalten, beschränkt man die Werthe von ξ, ϱ, σ auf die niedrigste vorkommende Ordnung, d. h. auf die — 3te. Dann entstehen aus den Gleichungen (22.) und (50.), da $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{S}_2$ und das Produkt $\mathfrak{S}_1 r$ zur Ordnung — 2 gehören, die Formeln

$$(51.)\quad \xi = 0,\quad \varrho = \mathfrak{L}_1,\quad \sigma = -\left(\frac{d\mathfrak{L}_1}{dn} + \tau\mathfrak{S}_1\right),$$

wo $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{L}_1$ die Werthe (45.) und (48.) haben.

Die Kraft S_s ist in erster Annäherung ihrem Bestandtheil — 2ter Ordnung J gleich zu setzen. Daher gelangt man nach Berücksichtigung der oben abgeleiteten Werthe zu der angenäherten Gleichung

$$(52.)\quad S_s = \frac{E}{\tau}\,\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}(r-\mathfrak{r}) = \frac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B-C\mathfrak{r}^2}.$$

Es ist zu bemerken, dass die durch die Gleichungen (51.) und (52.) ausgedrückte angenäherte Lösung weniger vollständig ist, als die in § 5 gefundene Lösung, die sich auf den cylindrischen Stab bezieht. Denn die letztere enthält sowohl bei den Verschiebungen ξ, η, ζ als bei der Componente Z_z die Summanden der zwei beträchtlichsten Ordnungen, während hier nur die Anfangsglieder der entsprechenden Grössen bestimmt sind.

Setzt man in (51.) für $\mathfrak{L}_1$ und $\dfrac{d\mathfrak{L}_1}{dn} + \tau\mathfrak{S}_1$ die im vorigen Paragraphen ermittelten Functionen ein, so folgt

$$\begin{cases} \varrho = \cos n\int\mathfrak{S}_1\,dp - \sin n\int\mathfrak{S}_1\,dq, \\ \sigma = \sin n\int\mathfrak{S}_1\,dp + \cos n\int\mathfrak{S}_1\,dq. \end{cases}$$

Um die zugehörigen Werthe der Ausweichungscomponenten η und ζ zu erhalten, braucht man nur die letzten Gleichungen mit den Formeln (6.) zu vergleichen. Dann ergeben sich sofort die Ausdrücke

$$\eta = -\int\mathfrak{S}_1\,dq,\quad \zeta = \int\mathfrak{S}_1\,dp.$$

Da die Grösse $\mathfrak{S}_1$ nach (45.) selbst gleich einem unbestimmten Integral ist, so erscheint es zweckmässig, auf $\int\mathfrak{S}_1\,dp$ und $\int\mathfrak{S}_1\,dq$ die theilweise Integration anzuwenden, wodurch für η und ζ die Gleichungen entstehen:

$$(53.)\quad \begin{cases} \eta = -q\mathfrak{G}_1 + \int \frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}\, q\, dn \\ \quad = -\frac{q}{E}\int \frac{\tau\, G_1\, dn}{B - C\mathfrak{r}^2} + \frac{1}{E}\int \frac{\tau\, G_1\, q}{B - C\mathfrak{r}^2}\, dn, \\ \zeta = p\,\mathfrak{G}_1 - \int \frac{d\,\mathfrak{G}_1}{dn}\, p\, dn \\ \quad = \frac{p}{E}\int \frac{\tau\, G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}\, dn - \frac{1}{E}\int \frac{\tau\, G_1\, p}{B - C\mathfrak{r}^2}\, dn. \end{cases}$$

Auf Grund der Gleichungen (51.), (52.) kann man zeigen, dass die Gesetze, welche in erster Annäherung für die Deformation des ursprünglich gekrümmten Stabes gelten, in vielen Beziehungen den für den cylindrischen Stab gefundenen genau entsprechen. Es soll zunächst darauf eingegangen werden, dass die Formel (52.) eine analoge mechanische Bedeutung hat, wie die nach § 5 unter gleichen Voraussetzungen anzuwendende Formel von Z_z. Man nehme bei dem cylindrischen Stabe den Fall, dass die Componente X der Oberflächenkraft verschwindet, also $F_1 = 0$ ist, und berücksichtige in dem Ausdruck von Z_z nur den Bestandtheil niedrigster Ordnung. Dann folgt aus (42.) des § 5, da die Functionen F_2, G_2, h_1 von höherer Ordnung als G_1 sind, die Gleichung

$$Z_z = \frac{G_1 y}{B},$$

woselbst die Coordinate y vom Schwerpunkt des Querschnitts aus gerechnet, und durch B das in (7.), § 1, angeführte Hauptträgheitsmoment bezeichnet wird. In den Formeln, die im Vorhergehenden für den gekrümmten Stab entwickelt worden sind, ist der Punkt, von dem aus innerhalb je eines Querschnitts die Längen x und r gemessen werden, unbestimmt geblieben. Aber da, nach (16.), $\mathfrak{r}$ die Coordinate des Schwerpunkts des Querschnitts bedeutet, so drückt die Grösse $r - \mathfrak{r}$, gerade wie oben die Grösse y, die in der Vertikalebene liegende relative Coordinate aus, welche ein beliebiger Punkt des Querschnitts in Bezug auf jenen Schwerpunkt hat. Sodann ist aus der analytischen Mechanik der Satz bekannt, dass die Trägheitsmomente für zwei parallele Achsen, von denen die eine durch den Schwerpunkt geht, sich von einander nur um das Produkt aus der Gesammtmasse und dem Quadrate des gegenseitigen Abstandes der Achsen unterscheiden, und dass das kleinere Trägheitsmoment stets zu der den Schwerpunkt enthaltenden Geraden gehört. Wendet man diesen Satz auf die Trägheitsmomente des betrachteten Querschnitts an, dessen Gesammtmasse gleich dem Flächeninhalt C zu setzen ist, so ergiebt sich, dass die Differenz $B - C\mathfrak{r}^2$ das Trägheitsmoment für die durch den Schwerpunkt gehende Parallele zur x-Achse darstellt.

Hieraus folgt, dass die rechte Seite von (52.) in Zähler und Nenner dem Ausdruck $\frac{G_1 y}{B}$ analog gebildet ist. Für den gekrümmten, zur yz-Ebene symmetrischen Stab gilt also in Betreff der Biegung in der yz-Ebene dasselbe Gesetz, wie für den cylindrischen Stab, indem die in der Längsrichtung auftretende Druckkraft von erheblichster Ordnung in jedem Normalschnitt direkt proportional zu der auf den Schwerpunkt bezogenen relativen Coordinate und umgekehrt proportional zu dem vorerwähnten Trägheitsmoment ist.

Im § 5 wurde ferner die Beziehung untersucht, in welcher die in (42.) vorkommenden Functionen zu der Gestalt der elastischen Linie stehen, und man fand, dass sowohl bei der Biegung in der horizontalen als in der vertikalen Ebene der angenäherte Werth von Z_z gleich dem Produkt aus der Krümmung der elastischen Linie und der Grösse $-Ex$, respective $-Ey$, war. Ein ähnlicher Satz folgt für den ursprünglich krummen Stab aus den Näherungsformeln (51.) und (52.); nur ist als Factor nicht, wie bei dem cylindrischen Stabe, die vorhandene Krümmung selbst, sondern der Zuwachs der Krümmung, der durch die Deformation eintritt, anzuwenden. Man bezeichne den Krümmungsradius derjenigen Curve, in welche die Curve $\varphi(p, q) = 0$ durch die Verrückungen (51.) übergeht, durch τ' und die Differenz $\frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau}$ durch ω. Dann ist, wie bewiesen werden soll, die Kraft S_s zu der Grösse ω proportional.

Für die Krümmung $\frac{1}{\tau}$ besteht bekanntlich, da dieselbe gleich dem Quotienten aus dem Differential des Tangentenwinkels $\left(= d \operatorname{arc\,tang} \frac{dp}{dq}\right)$ und dem Bogendifferential ds ist, die Formel

$$\frac{1}{\tau} = \frac{dq\, d^2p - dp\, d^2q}{(dp^2 + dq^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq\, d^2p - dp\, d^2q}{ds^3}.$$

Um $\frac{1}{\tau'}$ zu erhalten, ersetzt man in diesem Ausdruck p und q durch $p + \eta$ und $q + \zeta$, worauf die Gleichungen (5.) und (51.) zu berücksichtigen sind. Die Grösse ξ hat nach (51.) den Werth Null, so dass die ganze Betrachtung auf die yz-Ebene beschränkt bleibt. Es ist nun hier

$$(dp + d\eta)^2 + (dq + d\zeta)^2 = dp^2 + dq^2 + 2\,dp\,d\eta + 2\,dq\,d\zeta$$

zu nehmen, da wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Deformation (Einleitung, I.) die Grössen $d\eta^2$, $d\zeta^2$ neben den ersten Potenzen $d\eta$, $d\zeta$ vernachlässigt werden. Durch Benutzung des binomischen Satzes gelangt man nach demselben Princip zu der Gleichung

$$\{(dp + d\eta)^2 + (dq + d\zeta)^2\}^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{ds^3}\left\{1 + 2\,\frac{dp\,d\eta + dq\,d\zeta}{ds^2}\right\}^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{1}{ds^3}\left\{1 - 3\,\frac{dp\,d\eta + dq\,d\zeta}{ds^2}\right\}.$$

Ebenso findet man

$$(dq + d\zeta)(d^2p + d^2\eta) - (dp + d\eta)(d^2q + d^2\zeta) =$$
$$dq\,d^2p - dp\,d^2q + d\zeta\,d^2p - d\eta\,d^2q + dq\,d^2\eta - dp\,d^2\zeta$$

und

$$\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\zeta\,d^2p - d\eta\,d^2q}{ds^3} + \frac{dq\,d^2\eta - dp\,d^2\zeta}{ds^3} - \frac{3}{\tau}\,\frac{dp\,d\eta + dq\,d\zeta}{ds^2},$$

welche Gleichung man wegen der Relation

$$d\zeta\,d^2p - d\eta\,d^2q = d\,(dp\,d\zeta - dq\,d\eta) - (dp\,d^2\zeta - dq\,d^2\eta)$$

auf die Form

$$\omega = \frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau} =$$
$$\frac{d\,(dp\,d\zeta - dq\,d\eta)}{ds^3} + 2\,\frac{dq\,d^2\eta - dp\,d^2\zeta}{ds^3} - \frac{3}{\tau}\,\frac{dp\,d\eta + dq\,d\zeta}{ds^2}$$

bringen kann. Man substituire hierin zunächst für dp und dq die Werthe (3.)

$$dp = -\cos n\;ds, \quad dq = \sin n\;ds$$

und beachte die aus (6.) folgenden Gleichungen

$$d\varrho = \sin n\;d\eta + \cos n\;d\zeta - \sigma\,dn,$$
$$d\sigma = -\cos n\;d\eta + \sin n\;d\zeta + \varrho\,dn.$$

Dann hat man

$$dp\,d\zeta - dq\,d\eta = -(d\varrho + \sigma\,dn)\,ds,$$
$$dp\,d\eta + dq\,d\zeta = (d\sigma - \varrho\,dn)\,ds.$$

Aber nach (51.) und (37.) ist

$$d\varrho + \sigma\,dn = -\tau\mathfrak{S}_1\,dn = -\mathfrak{S}_1\,ds,$$
$$d\sigma - \varrho\,dn = -\left(\frac{d^2\mathfrak{L}_1}{dn^2} + \mathfrak{L}_1 + \frac{d\,(\tau\mathfrak{S}_1)}{dn}\right)dn = 0,$$

so dass die Gleichungen

$$dp\,d\zeta - dq\,d\eta = \mathfrak{S}_1\,ds^2,$$
$$dp\,d\eta + dq\,d\zeta = 0$$

entstehen. Ferner führt die Differentiation des oben erwähnten Binoms

$$\sin n\;d\eta + \cos n\;d\zeta = d\varrho + \sigma\,dn = -\mathfrak{S}_1\,ds$$

zu der Beziehung

$$\sin n\;d^2\eta + \cos n\;d^2\zeta =$$
$$-d\,(\mathfrak{S}_1\,ds) - (\cos n\;d\eta - \sin n\;d\zeta)\,dn =$$
$$-d\,(\mathfrak{S}_1\,ds) + (d\sigma - \varrho\,dn)\,dn = -d\,(\mathfrak{S}_1\,ds),$$

woraus

$$\frac{dq\,d^2\eta - dp\,d^2\zeta}{ds} = -d\,(\mathfrak{S}_1\,ds)$$

folgt. Indem man diese Werthe in die Gleichung für ω einsetzt, findet man für letztere Grösse den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau} = \frac{d(\mathfrak{S}_1\, ds^2)}{ds^3} - 2\,\frac{d(\mathfrak{S}_1\, ds)}{ds^2}$$

oder, da

$$d(\mathfrak{S}_1\, ds^2) = d\mathfrak{S}_1\, ds^2 + 2\mathfrak{S}_1\, ds\, d^2 s,$$
$$d(\mathfrak{S}_1\, ds) = d\mathfrak{S}_1\, ds + \mathfrak{S}_1\, d^2 s$$

ist, den schliesslichen Ausdruck

$$(54.)\quad \omega = \frac{1}{\tau'} - \frac{1}{\tau} = -\frac{d\mathfrak{S}_1}{ds} = -\frac{1}{\tau}\,\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}.$$

Durch Vergleichung von (52.) und (54.) ergiebt sich dann unmittelbar das zu dem Satz des § 5 analoge Resultat, dass der Werth (52.) der Componente S_s gleich dem Produkt aus dem Krümmungszuwachs ω und der Grösse $-E(r-\mathfrak{r})$ ist.

Die Curve $\varphi(p, q) = 0$, auf welche die Krümmungsradien τ und τ' bezogen sind, ist keine völlig bestimmte, wie aus der Definition derselben in § 22 hervorgeht. Die obige Entwicklung beweist indessen, dass die Abweichungen der verschiedenen Curven, die man für $\varphi(p, q) = 0$ wählen kann, von einander nicht erheblich genug sind, um die Formeln der ersten Annäherung zu beeinflussen.

§ 29. Differentialgleichungen für die Functionen u_0, v_0, w_0.

Zur Herstellung einer genaueren Lösung als der im vorigen Paragraphen discutirten hat man zunächst auf die Gleichungen einzugehen, durch welche die Grössen u_0, v_0, w_0 bestimmt werden. Nach (22.) sind letztere die Bestandtheile 0ter Ordnung der Verschiebungen ξ, ϱ, σ. Bei der Betrachtung des Gleichgewichtszustandes des cylindrischen Stabes fand man für die correspondirenden Ausdrücke u_0, v_0, welche die Bestandtheile 0ter Ordnung von ξ, η bezeichneten, eine feststehende Form, die für einen Stab mit beliebigem Querschnitt galt [s. d. Gleichungen (34.) des § 4]. In dem Problem des ursprünglich krummen Stabes ist es dagegen, wie sich aus dem Folgenden ergiebt, nicht möglich, zu Schlussfolgerungen in Betreff der Functionen u_0, v_0 zu gelangen, ehe nicht der Umriss des Querschnitts bekannt ist. Die Differentialgleichungen und Oberflächenbedingungen für die genannten Grössen lassen nicht mehr eine so einfache Lösung zu, weil hier im Allgemeinen alle 6 inneren Druckkräfte eine negative Grössenordnung annehmen.

In dem Abschnitt I. wurden nicht allein für die Bestandtheile 0ter, sondern auch für die Bestandtheile 1ster Ordnung der Verschiebungen die Differentialgleichungen des Innern und die zugehörigen Oberflächenbedingungen abgeleitet, was der Berücksichtigung der Summanden 0ter Ordnung in den Formeln der innern Druckkräfte entsprach. Bei dem ursprünglich krummen Stab soll jedoch die Rechnung auf die Glieder u_0, v_0, w_0 beschränkt werden, wenngleich die im § 7 angegebene Methode auch für eine weiter gehende Annäherung anwendbar bleibt. Von den inneren Druckkräften werden in Folge dessen hier nur die Bestandtheile negativer Ordnung behandelt werden.

Um die Bestimmungen für u_0, v_0, w_0 zu erhalten, geht man, wie im § 4, auf die allgemeinen Differentialgleichungen des isotropen Körpers zurück, die man indessen zuvor durch Einführung der Variablen r, n, ϱ, σ zu transformiren hat. Indem man dann in die genannten Gleichungen die in den vorstehenden Pragraphen gewonnenen Ausdrücke von ξ, ϱ, σ einsetzt und die Terme niedrigster Ordnung von den übrigen absondert, ergeben sich die auf u_0, v_0, w_0 bezüglichen Differentialgleichungen. Analog hat man bei den Bedingungen für die Oberfläche zu verfahren.

Die allgemeinen Differentialgleichungen lauten nach (10.) der Einleitung, wenn $X_0 = Z_0 = 0$, $Y_0 = -\Gamma$ gesetzt wird,

$$(55.)\quad \left\{\begin{aligned} & a\frac{d\vartheta}{dx} - b\left\{\frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right)-\frac{d}{dy}\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)\right\} = 0,\\ & a\frac{d\vartheta}{dy} - b\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dy}-\frac{d\eta}{dx}\right)-\frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)\right\} - D\Gamma = 0,\\ & a\frac{d\vartheta}{dz} - b\left\{\frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right)\right\} = 0.\end{aligned}\right.$$

Man hat aus denselben die Grössen y, z, η, ζ zu eliminiren, die mit r, n, ϱ, σ durch die Relationen (1.) und (5.) verbunden sind. Um dies in einfacher Weise zu bewerkstelligen, nehme man die folgende Entwicklung zu Hilfe. Wenn zwei Functionen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ mit zwei anderen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ in der Beziehung

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{A}' &= \mathfrak{B}\sin n - \mathfrak{C}\cos n,\\ \mathfrak{A}'' &= \mathfrak{B}\cos n + \mathfrak{C}\sin n\end{aligned}\right.$$

stehen, und $\mathfrak{A}$ eine beliebige Grösse bedeutet, so beweist man mittelst der Formeln (11.) leicht die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{A}'}{dz}-\frac{d\mathfrak{A}''}{dy} &= \frac{1}{\tau-r}\left\{\frac{d\mathfrak{B}}{dn}-\frac{d(\tau-r)\mathfrak{C}}{dr}\right\},\\ \frac{d\mathfrak{A}''}{dx}-\frac{d\mathfrak{A}}{dz} &= \left(\frac{d\mathfrak{C}}{dx}-\frac{1}{\tau-r}\frac{d\mathfrak{A}}{dn}\right)\sin n - \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr}-\frac{d\mathfrak{B}}{dx}\right)\cos n,\\ \frac{d\mathfrak{A}}{dy}-\frac{d\mathfrak{A}'}{dx} &= \left(\frac{d\mathfrak{C}}{dx}-\frac{1}{\tau-r}\frac{d\mathfrak{A}}{dn}\right)\cos n + \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr}-\frac{d\mathfrak{B}}{dx}\right)\sin n.\end{aligned}$$

Dieselben sollen zwei Mal nach einander angewendet werden. Man wähle erstens

$$\mathfrak{A} = \xi,\quad \mathfrak{A}' = \eta,\quad \mathfrak{A}'' = \zeta,$$

so dass nach (5.)

$$\mathfrak{B} = \varrho, \quad \mathfrak{C} = \sigma$$

wird; hiedurch findet man

$$\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy} = \frac{1}{\tau - r}\left\{\frac{d\varrho}{dn} - \frac{d(\tau - r)\sigma}{dr}\right\},$$

$$\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz} = \left(\frac{d\sigma}{dx} - \frac{1}{\tau - r}\frac{d\xi}{dn}\right)\sin n - \left(\frac{d\xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dx}\right)\cos n,$$

$$\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{d\sigma}{dx} - \frac{1}{\tau - r}\frac{d\xi}{dn}\right)\cos n + \left(\frac{d\xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dx}\right)\sin n.$$

Nimmt man sodann

$$\mathfrak{A} = \frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}, \quad \mathfrak{A}' = \frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}, \quad \mathfrak{A}'' = \frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx},$$

so zeigen die beiden letzten der eben erhaltenen 3 Gleichungen, dass $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ die Werthe

$$\mathfrak{B} = \frac{d\sigma}{dx} - \frac{1}{\tau - r}\frac{d\xi}{dn}, \quad \mathfrak{C} = \frac{d\xi}{dr} - \frac{d\varrho}{dx}$$

haben. Folglich bestehen die Gleichungen

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right) = \frac{1}{\tau - r}\left\{\frac{d\mathfrak{B}}{dn} - \frac{d(\tau - r)\mathfrak{C}}{dr}\right\},$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\xi}{dy} - \frac{d\eta}{dx}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right) = \left(\frac{d\mathfrak{C}}{dx} - \frac{1}{\tau - r}\frac{d\mathfrak{A}}{dn}\right)\sin n - \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} - \frac{d\mathfrak{B}}{dx}\right)\cos n,$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{d\zeta}{dx} - \frac{d\xi}{dz}\right) = \left(\frac{d\mathfrak{C}}{dx} - \frac{1}{\tau - r}\frac{d\mathfrak{A}}{dn}\right)\cos n + \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dr} - \frac{d\mathfrak{B}}{dx}\right)\sin n,$$

wenn durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Functionen

$$(56.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \dfrac{1}{\tau - r}\left\{\dfrac{d\varrho}{dn} - \dfrac{d(\tau - r)\sigma}{dr}\right\}, \\[2ex] \mathfrak{B} = \dfrac{d\sigma}{dx} - \dfrac{1}{\tau - r}\dfrac{d\xi}{dn}, \\[2ex] \mathfrak{C} = \dfrac{d\xi}{dr} - \dfrac{d\varrho}{dx} \end{cases}$$

bezeichnet werden.

Diese Ausdrücke und der in (12.) für die kubische Dilatation ϑ ermittelte Werth

$$\vartheta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\varrho}{dr} + \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d\sigma}{dn} - \varrho\right)$$

werden in die Gleichungen (55.) eingesetzt. Ausserdem transformirt man die zweite und dritte Gleichung (55.) in der Art, dass man sie mit $\sin n$, $\cos n$, respective mit $-\cos n$, $\sin n$ multiplicirt und addirt, wobei für die Function ϑ noch einmal die Formeln (11.) anzuwenden sind. Dann ergiebt sich das Gleichungssystem

$$(57.)\quad \begin{cases} a\,\dfrac{d\vartheta}{dx} - \dfrac{b}{\tau - r}\left\{\dfrac{d\mathfrak{B}}{dn} - \dfrac{d\,(\tau - r)\,\mathfrak{C}}{dr}\right\} = 0, \\ a\,\dfrac{d\vartheta}{dr} - \dfrac{b}{\tau - r}\left\{\dfrac{d\,(\tau - r)\,\mathfrak{C}}{dx} - \dfrac{d\mathfrak{A}}{dn}\right\} - D\Gamma \sin n = 0, \\ \dfrac{a}{\tau - r}\,\dfrac{d\vartheta}{dn} - b\left\{\dfrac{d\mathfrak{A}}{dr} - \dfrac{d\mathfrak{B}}{dx}\right\} + D\Gamma \cos n = 0. \end{cases}$$

Es sind nun an Stelle von ξ, ϱ, σ die Summen (22.)

$$\begin{cases} \xi = U_1 + U_2 + u_0 + u, \\ \varrho = V_1 + V_2 + v_0 + v, \\ \sigma = W_1 + W_2 + w_0 + w \end{cases}$$

in (56.) und (57.) einzuführen, und die für U_1, V_1, W_1, U_2, V_2, W_2 ermittelten Werthe (50.) zu berücksichtigen. In den Gleichungen, welche hierdurch aus (57.) entstehen, trennt man die Glieder, welche einer niedrigeren Ordnung als der -1^{ten} angehören, von den übrigen. Zu diesem Behufe soll auf die Ausdrücke der in (57.) vorkommenden Differentialquotienten von ϑ, $\mathfrak{A}$ etc. näher eingegangen werden.

In der ersten Gleichung (57.) hängt die linke Seite von den Differentialquotienten

$$\frac{d\vartheta}{dx},\ \frac{d\mathfrak{B}}{dn},\ \frac{d\,(\tau - r)\,\mathfrak{C}}{dr}$$

ab. Substituirt man in $\dfrac{d\vartheta}{dx}$,

$$= \frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\varrho}{dx\,dr} + \frac{1}{\tau - r}\left(\frac{d^2\sigma}{dx\,dn} - \frac{d\varrho}{dx}\right),$$

die Summen (22.), so sind Terme von der -2^{ten} oder einer niedrigeren Ordnung nur in

$$\frac{d^2(U_1 + U_2 + u_0)}{dx^2} + \frac{d^2(V_1 + V_2 + v_0)}{dx\,dr} + \frac{1}{\tau - r}\left\{\frac{d^2(W_1 + W_2)}{dx\,dn} - \frac{d(V_1 + V_2)}{dx}\right\}$$

enthalten, wie aus der Definition von U_1, U_2, u_0 etc. folgt. Nach (50.) ist aber

$$\frac{d^2U_1}{dx^2} = \frac{d^2U_2}{dx^2} = \frac{d^2V_1}{dx\,dr} = \frac{d^2V_2}{dx\,dr} = 0,$$

während die Differenz

$$\frac{d^2(W_1 + W_2)}{dx\,dn} - \frac{d(V_1 + V_2)}{dx}$$

in den Ausdruck

$$-\frac{E}{E_1\tau}\,\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}\,x - \mathfrak{T}_1 - \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau}\,\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}\right)$$

übergeht. In letzterem sind alle Summanden von der Ordnung -2. In Folge dessen hat man die Grösse $\dfrac{1}{\tau - r}$, welche als Factor vor demselben steht, hier durch $\frac{1}{\tau}$ zu ersetzen; denn nach Einführung der Reihe $\frac{1}{\tau}+\frac{r}{\tau^2}+\frac{r^2}{\tau^3}+\ldots$ an Stelle von $\frac{1}{\tau-r}$ behalten nur die mit dem Anfangsgliede $\frac{1}{\tau}$ multiplicirten Werthe die -2^{te} Ordnung. Der Bestandtheil -2^{ter} Ordnung von $\frac{d\vartheta}{dx}$ wird also durch die Function

$$-\frac{E}{E_1\tau^2}\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}x-\frac{\mathfrak{T}_1}{\tau}-\frac{1}{\tau}\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}\right)+\frac{d^2u_0}{dx^2}+\frac{d^2v_0}{dx\,dr}$$

dargestellt. Terme von niedrigerer Ordnung als der -2^{ten} kommen in $\frac{d\vartheta}{dx}$ nicht vor.

In dem Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{B}}{dn}$ übersteigt allein die Differenz

$$\frac{d^2(W_1+W_2)}{dx\,dn}-\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau-r}\frac{dU_1}{dn}\right)$$

die Ordnung -1. Von der Entwicklung des Quotienten $\frac{1}{\tau-r}$ kommt auch hier nur das Anfangsglied $\frac{1}{\tau}$ in Betracht, da $\frac{dU_1}{dn}$ eine Grösse -2^{ter} Ordnung ist. Nach Berücksichtigung von (50.) ergiebt sich auf diese Weise für den Bestandtheil -2^{ter} Ordnung von $\frac{d\mathfrak{B}}{dn}$ der Werth

$$-2\,\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}\right).$$

Ferner zeigt die aus (56.) und (22.) folgende Gleichung

$$\frac{d(\tau-r)\mathfrak{C}}{dr}=(\tau-r)\left\{\frac{d^2(U_1+U_2+u_0+u)}{dr^2}-\frac{d^2(V_1+V_2+v_0+v)}{dx\,dr}\right\}$$
$$-\left\{\frac{d(U_1+U_2+u_0+u)}{dr}-\frac{d(V_1+V_2+v_0+v)}{dx}\right\},$$

dass in $\frac{d(\tau-r)\mathfrak{C}}{dr}$ nur die Terme

$$(\tau-r)\left\{\frac{d^2(U_1+U_2)}{dr^2}-\frac{d^2(V_1+V_2)}{dx\,dr}\right\}$$
$$+\tau\left(\frac{d^2u_0}{dr^2}-\frac{d^2v_0}{dx\,dr}\right)-\left\{\frac{d(U_1+U_2)}{dr}-\frac{d(V_1+V_2)}{dx}\right\}$$

eine niedrigere Ordnung als die -1^{te} haben. Da aber nach (50.) die Gleichungen

$$\frac{d^2U_1}{dr^2}=\frac{d^2U_2}{dr^2}=\frac{d^2V_1}{dx\,dr}=\frac{d^2V_2}{dx\,dr}=0,$$
$$\frac{d(U_1+U_2)}{dr}-\frac{d(V_1+V_2)}{dx}=-\frac{2E}{E_1\tau}\frac{d\mathfrak{S}_1}{dn}x-2\mathfrak{T}_1$$

bestehen, so sind auch in $\frac{d(\tau-r)\mathfrak{C}}{dx}$ keine Terme von beträchtlicherer

Ordnung als der -2^{ten} vorhanden, und die zur -2^{ten} Ordnung gehörigen Summanden lauten:

$$\frac{2E}{E_1\tau}\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}x + 2\mathfrak{T}_1 + \tau\left(\frac{d^2u_0}{dr^2} - \frac{d^2v_0}{dx\,dr}\right).$$

Die Forderung, dass in der ersten Gleichung (57.) die Glieder -2^{ter} Ordnung sich gegenseitig aufheben, liefert daher für u_0, v_0 die Differentialgleichung:

$$a\left(\frac{d^2u_0}{dx^2} + \frac{d^2v_0}{dx\,dr}\right) + b\left(\frac{d^2u_0}{dr^2} - \frac{d^2v_0}{dx\,dr}\right) =$$
$$\frac{a-2b}{\tau}\left\{\frac{E}{E_1\tau}\frac{d\mathfrak{G}_1}{dn}x + \mathfrak{T}_1 + \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\mathfrak{R}_2}{dn}\right)\right\}.$$

Analog werden die zweite und die dritte Gleichung (57.) behandelt. Indem man in denselben ausschliesslich die Terme von niedrigerer Ordnung als der -1^{ten} betrachtet, gewinnt man aus der zweiten Gleichung eine weitere Bestimmung für u_0, v_0, aus der dritten eine Bestimmung für w_0. Bei Ausführung der Rechnung ist zu beachten, dass da, wo der Quotient $\frac{1}{\tau - r}$ als Factor von Werthen -3^{ter} Ordnung auftritt, von seiner Entwicklung die 2 ersten Glieder $\frac{1}{\tau} + \frac{r}{\tau^2}$ beibehalten werden müssen. Schliesslich heben sich alle Grössen -3^{ter} Ordnung von selbst fort. Man findet auf diese Weise, nach Berücksichtigung des Werthes (45.) von $\mathfrak{G}_1$, für die Variablen u_0 und v_0 das Gleichungssystem

$$(58.)\quad \left\{\begin{aligned} & a\frac{d}{dx}\left(\frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dr}\right) + b\frac{d}{dr}\left(\frac{du_0}{dr} - \frac{dv_0}{dx}\right) = \\ & \qquad \frac{a-2b}{\tau}\left\{\frac{G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}\frac{x}{E_1} + \mathfrak{T}_1 + \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\mathfrak{R}_2}{dn}\right)\right\}, \\ & a\frac{d}{dr}\left(\frac{du_0}{dx} + \frac{dv_0}{dr}\right) - b\frac{d}{dx}\left(\frac{du_0}{dr} - \frac{dv_0}{dx}\right) = \\ & \qquad -\frac{1}{\tau}\frac{G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}\left\{\frac{2(a-b)r}{E} + \frac{a(r-\mathfrak{r})}{E_1}\right\} - \frac{a-2b}{\tau}\frac{d\mathfrak{G}_2}{dn} \end{aligned}\right.$$

und für w_0 die Gleichung

$$(59.)\quad \frac{d^2w_0}{dx^2} + \frac{d^2w_0}{dr^2} = -\frac{2}{E\tau}\frac{d}{dn}\frac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B - C\mathfrak{r}^2}.$$

Die Form der linken Seiten von (58.) ist genau dieselbe wie in (60.), (61.) etc. des § 7, und die der linken Seite von (59.) dieselbe wie in (47.), (48.) des § 6. Durch Anwendung der Substitutionen

$$u_0 = u_0' + \frac{a-2b}{\tau}\left\{\frac{G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}\frac{x^3}{6aE_1} + \left[\mathfrak{T}_1 + \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau}\frac{d\mathfrak{R}_2}{dn}\right)\right]\frac{r^2}{2b}\right\},$$

$$v_0 = v_0' - \frac{r^2}{a\tau}\frac{G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}\left\{\frac{a-b}{3E}r + \frac{a}{2E_1}\left(\frac{r}{3} - \mathfrak{r}\right)\right\} - \frac{a-2b}{b\tau}\frac{d\mathfrak{G}_2}{dn}\frac{x^2}{2}$$

und

$$w_0 = w_0' - \frac{x^2 + r^2}{4E\tau} \frac{d}{dn} \frac{G_1(r - 2\mathfrak{r})}{B - C\mathfrak{r}^2}$$

transformirt man die Gleichungen (58.) und (59.) in die einfacheren

$$\begin{cases} a \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du_0'}{dx} + \dfrac{dv_0'}{dr}\right) + b\, \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{du_0'}{dr} - \dfrac{dv_0'}{dx}\right) = 0, \\ a \dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{du_0'}{dx} + \dfrac{dv_0'}{dr}\right) - b\, \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{du_0'}{dr} - \dfrac{dv_0'}{dx}\right) = 0, \end{cases}$$

$$\frac{d^2 w_0'}{dx^2} + \frac{d^2 w_0'}{dr^2} = 0.$$

Da in (58.) und (59.) die Differentialquotienten der gesuchten Functionen u_0, v_0, w_0 nach n nicht vorkommen, so gilt — analog zu §§ 6 und 7 — die Grösse n bei der Integration der Differentialgleichungen für constant. Folglich sind auch die in (58.) enthaltenen, von n allein abhängigen Functionen

$$\mathfrak{T}_1 + \frac{d}{dn}\left(\frac{1}{\tau} \frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}\right), \quad \frac{d\mathfrak{S}_2}{dn},$$

deren Werth noch nicht ermittelt ist, hier zunächst als unbekannte Constanten anzusehen. Die Bestimmung dieser Grössen geschieht nachträglich, nachdem die Integration der Gleichungen (58.) ausgeführt worden ist, in derselben Weise, wie in §§ 13 und 20 die Functionen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, etc. berechnet wurden.

Ausser den Differentialgleichungen (58.), (59.), die für einen beliebigen Punkt des Innern erfüllt sein müssen, erhält man drei Oberflächenbedingungen zur Bestimmung von u_0, v_0, w_0. In IV. der Einleitung wurden die Gleichungen, denen die Druckkräfte an einem Punkt der Oberfläche des isotropen Körpers genügen, durch die Betrachtung einer kleinen dreiseitigen Pyramide gewonnen, welche drei zur x-, y-, z-Achse parallele Kanten hatte. Dieselbe Rechnung bleibt anwendbar, wenn man die Richtungen der Coordinaten y und z durch die Richtungen von r und ds ersetzt; denn auch letztere Richtungen sind sowohl zu einander, als zu der Richtung von x senkrecht. Nur beziehen sich die Bedingungen dann nicht auf die Componenten X_y, X_z, $\ldots Z_z$, sondern anf X_r, X_s, $\ldots S_s$. Bezeichnet man also durch μ' und ν' die Winkel, welche die in einem beliebigen Punkt der Oberfläche errichtete Normale mit den zu diesem Punkt gehörigen Richtungen von r und ds bildet, so bestehen die Gleichungen:

$$(60.) \quad \begin{cases} X_x \cos\lambda + X_r \cos\mu' + X_s \cos\nu' = X, \\ X_r \cos\lambda + R_r \cos\mu' + R_s \cos\nu' = R, \\ X_s \cos\lambda + R_s \cos\mu' + S_s \cos\nu' = S. \end{cases}$$

Die Grössen R und S haben die in (8.) angeführten Werthe.

Für die Kräfte

$$X_x,\ R_r,\ S_s,\ X_r,\ X_s,\ R_s$$

wurden im § 23 die Formeln (13.) und (14.) abgeleitet. Man hat nun in letztere die für ξ, ϱ, σ bisher ermittelten Ausdrücke einzusetzen, und darauf in den Oberflächengleichungen (60.) die einzelnen Summanden nach ihren Grössenordnungen zu unterscheiden. Die auf u_0, v_0, w_0 bezüglichen Bedingungen werden aus (60.) durch Betrachtung der Terme niedrigster Ordnung erhalten.

Analog zu § 8 nimmt man, da der betrachtete Körper nirgends von der Stabform abweichen soll, den Winkel, den die Oberflächennormale mit der Richtung von ds bildet, als nur wenig verschieden von einem Rechten an. Es wird die Voraussetzung gemacht, dass $\cos\nu'$ stets eine kleine Grösse sei, die zur Ordnung 1 gehört. Im Uebrigen bleibt die Oberfläche des Stabes eine beliebige. In Folge der genannten Voraussetzung reduciren sich in (60.) die Producte $X_s \cos\nu'$ und $R_s \cos\nu'$ auf die Ordnung 0, das Produkt $S_s \cos\nu'$ auf die Ordnung -1; und zwar wird in letzterem der Bestandtheil -1^{ter} Ordnung durch $J\cos\nu'$,

$$= \frac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B-C\mathfrak{r}^2}\cos\nu',$$

ausgedrückt. Ferner mögen die Bestandtheile -1^{ter} Ordnung von X_x, R_r, X_r, X_s, R_s respective durch

$$[X_x]_{-1},\ [R_r]_{-1},\ [X_r]_{-1},\ [X_s]_{-1},\ [R_s]_{-1}$$

bezeichnet werden. Dann ergeben sich aus (60.), da die Oberflächenkräfte X, R, S von der 0^{ten} Ordnung sind, und somit auf den linken Seiten die Bestandtheile -1^{ter} Ordnung sich gegenseitig aufheben müssen, die Gleichungen

$$(61.)\quad \begin{cases} [X_x]_{-1}\cos\lambda + [X_r]_{-1}\cos\mu' = 0, \\ [X_r]_{-1}\cos\lambda + [R_r]_{-1}\cos\mu' = 0, \\ [X_s]_{-1}\cos\lambda + [R_s]_{-1}\cos\mu' + J\cos\nu' = 0, \end{cases}$$

die für einen beliebigen Punkt der Oberfläche gelten. Man substituirt in dieselben für die Grössen

$$[X_x]_{-1},\ [R_r]_{-1},\ [X_r]_{-1},\ [X_s]_{-1},\ [R_s]_{-1}$$

die Werthe, die aus §§ 25—27 folgen. Gemäss (13.), (14.), (22.), (50.) bestehen, wenn man die Formeln (15.) des § 1 berücksichtigt, die Gleichungen

$$(62.)\quad \begin{cases} [X_x]_{-1} = a\dfrac{du_0}{dx} + (a-2b)\left(\dfrac{dv_0}{dr} - \Omega\right), \\[2ex] [R_r]_{-1} = a\dfrac{dv_0}{dr} + (a-2b)\left(\dfrac{du_0}{dx} - \Omega\right), \\[2ex] [X_r]_{-1} = b\left(\dfrac{du_0}{dr} + \dfrac{dv_0}{dx}\right), \end{cases}$$

$$
(63.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{b}[X_s]_{-1} = \dfrac{dw_0}{dx} - \dfrac{x}{E_1\tau}\dfrac{d}{dn}\dfrac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B-C\mathfrak{r}^2} - K'r + \dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\mathfrak{P}_1}{dn}, \\ \dfrac{1}{b}[R_s]_{-1} = \dfrac{dw_0}{dr} + \dfrac{x^2+r^2}{2E_1\tau}\dfrac{d}{dn}\dfrac{G_1}{B-C\mathfrak{r}^2} + K'x \\ \qquad\qquad - \dfrac{r}{E_1\tau}\dfrac{d}{dn}\dfrac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B-C\mathfrak{r}^2} + \varLambda', \end{cases}
$$

wo zur Abkürzung

$$
(64.)\quad \varOmega = \frac{G_1}{2\tau(B-C\mathfrak{r}^2)}\left\{\frac{x^2+r^2}{E_1} - \frac{r(r-\mathfrak{r})}{b}\right\} + Kx - \frac{d\mathfrak{G}_2}{dn}\frac{r}{\tau} + \varLambda
$$

gesetzt ist, und K, K', $\varLambda$, $\varLambda'$ die von n allein abhängigen Functionen

$$
(65.)\quad \begin{cases} K = \dfrac{1}{\tau}\left\{\mathfrak{T}_1 + \dfrac{d}{dn}\left(\dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\mathfrak{K}_2}{dn}\right)\right\}, \\ K' = \dfrac{1}{\tau}\left\{\dfrac{d\mathfrak{T}_1}{dn} - \dfrac{1}{\tau}\dfrac{d\mathfrak{K}_2}{dn}\right\}, \\ \varLambda = \dfrac{1}{\tau}\left\{\mathfrak{Q}_1 - \dfrac{d\mathfrak{H}_2}{dn}\right\}, \\ \varLambda' = \dfrac{1}{\tau}\left\{\dfrac{d\mathfrak{Q}_1}{dn} + \mathfrak{H}_2\right\} \end{cases}
$$

bezeichnen. Hierdurch ergeben sich aus (61.) die Bedingungen

$$
(66.)\quad \begin{cases} \left[a\dfrac{du_0}{dx} + (a-2b)\dfrac{dv_0}{dr}\right]\cos\lambda + b\left[\dfrac{du_0}{dr} + \dfrac{dv_0}{dx}\right]\cos\mu' \\ \qquad = (a-2b)\,\varOmega\cos\lambda, \\ \left[a\dfrac{dv_0}{dr} + (a-2b)\dfrac{du_0}{dx}\right]\cos\mu' + b\left[\dfrac{du_0}{dr} + \dfrac{dv_0}{dx}\right]\cos\lambda \\ \qquad = (a-2b)\,\varOmega\cos\mu', \end{cases}
$$

$$
(67.)\quad \frac{dw_0}{dx}\cos\lambda + \frac{dw_0}{dr}\cos\mu' =
$$

$$
\left[\frac{x}{E_1\tau}\frac{d}{dn}\frac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B-C\mathfrak{r}^2} + K'r + \frac{1}{\tau}\frac{d\mathfrak{P}_1}{dn}\right]\cos\lambda
$$

$$
-\left[\begin{matrix} \dfrac{x^2+r^2}{2E_1\tau}\dfrac{d}{dn}\dfrac{G_1}{B-C\mathfrak{r}^2} + K'x \\ -\dfrac{r}{E_1\tau}\dfrac{d}{dn}\dfrac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B-C\mathfrak{r}^2} + \varLambda' \end{matrix}\right]\cos\mu' - \frac{G_1(r-\mathfrak{r})}{b(B-C\mathfrak{r}^2)}\cos\nu',
$$

von denen die letzte nur w_0, die zwei ersten nur v_0, v_0 enthalten. Die Variablen u_0, v_0 werden somit durch (58.) und (66.), die Variable w_0 durch (59.) und (67.) bestimmt. Wie in (58.), (59.), so fehlen auch in den Oberflächenbedingungen (66.), (67.) die Differentialquotienten von u_0, v_0, w_0 nach n.

Für den Bestandtheil -1^{ter} Ordnung von S_s findet man nach (13.), (22.), (50.) den Ausdruck

$$[S_s]_{-1} = (a-2b)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{dv_0}{dr}\right) - a\,\Omega,$$

wo Ω die Function (64.) bedeutet. Wird also durch (S_s) die Summe $J+[S_s]_{-1}$, d. h. die Summe der Bestandtheile der zwei beträchtlichsten Ordnungen von S_s bezeichnet, so besteht die Gleichung

$$(68.)\quad (S_s) = \frac{G_1(r-\mathfrak{r})}{B-C\mathfrak{r}^2} + (a-2b)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{dv_0}{dr}\right) - a\,\Omega.$$

Nach Integration der obigen Differentialgleichungen für u_0, v_0, w_0 geben die Formeln (62.), (63.), (68.) die Werthe der inneren Druckkräfte mit der Genauigkeit an, dass alle Summanden von negativer Ordnung berücksichtigt sind. Indessen kommen in (62.), (63.), (64.) ausser u_0, v_0, w_0, G_1 noch die 6 unbekannten, von n allein abhängigen Functionen

$$K,\ K',\ \Lambda,\ \Lambda',\ \frac{d\mathfrak{S}_2}{dn},\ \frac{d\mathfrak{P}_1}{dn}$$

vor, die bei dem Integrationsverfahren als constant anzusehen waren, und von denen K und $\frac{d\mathfrak{S}_2}{dn}$ auch in den Differentialgleichungen (58.) enthalten sind. Zur Bestimmung dieser 6 Functionen dienen die 6 Gleichgewichtsbedingungen (18.), (20.), (21.), welche im § 24 für den durch einen beliebigen Normalschnitt begrenzten Theil des Stabes aufgestellt wurden. Die 3 auf S_s bezüglichen Bedingungen kamen bereits in § 27 für die Ermittlung von M, L, $\mathfrak{S}_1$ in der Art zur Anwendung, dass in denselben die Terme niedrigster Ordnung links und rechts einander gleichgesetzt wurden. Indem man die Summanden der nächst höheren Ordnung in jeder der genannten 3 Gleichgewichtsbedingungen betrachtet, gelangt man zu den für K, Λ, $\frac{d\mathfrak{S}_2}{dn}$ erforderlichen Angaben. Die Definition der Grössen F_1, G_2, h_1 (§ 24) liefert nämlich unmittelbar die Relationen

$$\left\{\begin{aligned} &\iint [S_s]_{-1}\, x\,dx\,dr = F_1,\\ &\iint [S_s]_{-1}\, r\,dx\,dr = G_2,\\ &\iint [S_s]_{-1}\, dx\,dr = h_1 \end{aligned}\right.$$

oder

$$(69.)\ \left\{\begin{aligned} &\iint \left\{(a-2b)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{dv_0}{dr}\right) - a\Omega\right\} x\,dx\,dr = F_1,\\ &\iint \left\{(a-2b)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{dv_0}{dr}\right) - a\Omega\right\} r\,dx\,dr = G_2,\\ &\iint \left\{(a-2b)\left(\frac{du_0}{dx}+\frac{dv_0}{dr}\right) - a\Omega\right\} dx\,dr = h_1. \end{aligned}\right.$$

Nun haben wegen der vorausgesetzten Symmetrie des Stabes die Integrale $\iint x^3\,dx\,dr$ und $\iint r^2 x\,dx\,dr$, ebenso wie die Integrale (17.), den Werth Null. Ferner mögen durch A' und B' die (über den Normalschnitt erstreckten) Integrale

$$A' = \int\int x^2 r\, dx\, dr, \quad B' = \int\int r^3\, dx\, dr$$

bezeichnet werden. Dann folgt aus (64.) und (16.)

$$\int\int \Omega x\, dx\, dr = A K,$$

$$\int\int \Omega r\, dx\, dr = \frac{G_1}{2\tau(B - C\mathfrak{r}^2)}\left(\frac{A' + B'}{E_1} - \frac{B' - B\mathfrak{r}}{b}\right) - \frac{B}{\tau}\frac{d\mathfrak{G}_2}{dn} + C\mathfrak{r}A,$$

$$\int\int \Omega\, dx\, dr = \frac{G_1}{2\tau}\left\{\frac{A + B}{E_1(B - C\mathfrak{r}^2)} - \frac{1}{b}\right\} - \frac{C\mathfrak{r}}{\tau}\frac{d\mathfrak{G}_2}{dn} + CA,$$

womit bewiesen ist, dass in dem Gleichungssystem (69.) allein die 3 Grössen K, A, $\frac{d\mathfrak{G}_2}{dn}$ als Unbekannte enthalten sind.

Aus den 3 anderen Gleichgewichtsbedingungen (18.), (20.), (21.), deren linke Seiten von X_s und R_s abhängen, erhält man hierauf für

$$K', \; A', \; \frac{d\mathfrak{P}_1}{dn}$$

die Gleichungen

$$\begin{cases} \int\int [X_s]_{-1}\, dx\, dr = 0, \\ \int\int [R_s]_{-1}\, dx\, dr = g_1, \\ \int\int \{x[R_s]_{-1} - r[X_s]_{-1}\}\, dx\, dr = H_1 \end{cases}$$

oder, nach Substitution der Ausdrücke (63.),

$$(70.) \quad \begin{cases} C\mathfrak{r}K' - \frac{C}{\tau}\frac{d\mathfrak{P}_1}{dn} - \int\int \frac{dw_0}{dx}\, dx\, dr = 0, \\ CA' + \int\int \frac{dw_0}{dr}\, dx\, dr = \\ \qquad \frac{g_1}{b} - \frac{C\mathfrak{r}}{E_1\tau}\frac{d}{dn}\frac{G_1\mathfrak{r}}{B - C\mathfrak{r}^2} - \frac{A - B}{2E_1\tau}\frac{d}{dn}\frac{G_1}{B - C\mathfrak{r}^2}, \\ (A + B)K' - \frac{C\mathfrak{r}}{\tau}\frac{d\mathfrak{P}_1}{dn} + \int\int\left(x\frac{dw_0}{dr} - r\frac{dw_0}{dx}\right) dx\, dr = \frac{H_1}{b}. \end{cases}$$

Es bleibt übrig, auf die Werthe der Functionen $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{H}_2$ einzugehen, welche durch die Differentialgleichungen (65.) mit K, K', A, A' verbunden sind. Die letztgenannten Functionen können hier als bekannt angesehen werden. Es soll gezeigt werden, dass durch das Gleichungssystem (65.) auch die Werthe von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{H}_2$ vollkommen bestimmt sind, soweit dieselben für die Deformation des Stabes in Betracht kommen. Die für $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ geltenden Gleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{Q}_1 - \frac{d\mathfrak{H}_2}{dn} = \tau A, \\ \frac{d\mathfrak{Q}_1}{dn} + \mathfrak{H}_2 = \tau A' \end{cases}$$

führen zu den Integralen

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{b}_0 \sin n + \mathfrak{c}_0 \cos n + \sin n \int (\varLambda \cos n + \varLambda' \sin n)\, \tau\, dn$$
$$- \cos n \int (\varLambda \sin n - \varLambda' \cos n)\, \tau\, dn,$$
$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{c}_0 \sin n - \mathfrak{b}_0 \cos n - \cos n \int (\varLambda \cos n + \varLambda' \sin n)\, \tau\, dn$$
$$- \sin n \int (\varLambda \sin n - \varLambda' \cos n)\, \tau\, dn,$$

in denen $\mathfrak{b}_0$ und $\mathfrak{c}_0$ beliebige Constanten sind. Ferner stimmen die 2 letzten Gleichungen (65.) mit den 2 ersten überein, wenn $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\varLambda$, $\varLambda'$ respective durch $\mathfrak{T}_1, -\frac{1}{\tau}\frac{d\mathfrak{K}_2}{dn}$, K, K' ersetzt werden. Auf diese Weise entstehen für $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nach Berücksichtigung von (3.), (4.) und Anwendung der Formel der partiellen Integration die Gleichungen

$$\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{c} \sin n - \mathfrak{b} \cos n + \sin n \int (K \cos n + K' \sin n)\, \tau\, dn$$
$$- \cos n \int (K \sin n - K' \cos n)\, \tau\, dn,$$
$$\mathfrak{K}_2 = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}\, q - \mathfrak{c}\, p + p \int (K\, dp - K'\, dq) - \int p\, (K\, dp - K'\, dq)$$
$$+ q \int (K\, dq + K'\, dp) - \int q\, (K\, dq + K'\, dp),$$

wo $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Integrationsconstanten bezeichnen. Fasst man also diejenigen Summanden von ξ, ϱ, σ zusammen, welche von den in $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{H}_2$ vorkommenden willkürlichen Constanten abhängen, so findet man nach (22.) und (50.) die Ausdrücke:

$$\begin{cases} \xi = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{b}\, q - \mathfrak{c} p + (\mathfrak{b} \cos n - \mathfrak{c} \sin n)\, r, \\ \varrho = \mathfrak{b}_0 \sin n + \mathfrak{c}_0 \cos n - (\mathfrak{b} \cos n - \mathfrak{c} \sin n)\, x, \\ \sigma = -\mathfrak{b}_0 \cos n + \mathfrak{c}_0 \sin n - (\mathfrak{b} \sin n + \mathfrak{c} \cos n)\, x. \end{cases}$$

Letztere bilden aber einen Bestandtheil der Summen (15.), die bei dem vorliegenden Problem willkürlich bleiben müssen, so dass in der That die Ermittlung der Werthe von $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{H}_2$ durch die obigen Integralgleichungen erledigt wird.

Ein analoges Resultat erhält man in Betreff der Functionen $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{P}_1$, sowie der Function $\mathfrak{L}_2$, die mit $\mathfrak{G}_2$ durch die Gleichung (46.) zusammenhängt. Da man durch (69.), (70.) zu den Werthen von $\frac{d\mathfrak{G}_2}{dn}$ und $\frac{d\mathfrak{P}_1}{dn}$ gelangt, so bleibt in $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{P}_1$ nur je eine additive Integrationsconstante willkürlich. Nun wird durch das Hinzutreten einer additiven Constante zu $\mathfrak{P}_1$ nur ξ um eine ebensolche vermehrt; und für $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{L}_2$ gelten genau dieselben Betrachtungen, welche im § 27 für $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{L}_1$ angestellt wurden. Somit kommen auch in diesen Functionen die mit willkürlichen Constanten multiplicirten Terme auf die Ausdrücke (15.) zurück, woraus sich ergiebt, dass nach Integration der Differentialgleichungen für u_0, v_0, w_0 die in (50.) angeführten Summanden der Verschiebungen ξ, ϱ, σ durch die vorstehenden Rechnungen vollständig bestimmt sind.

Halle, Druck von E. Karras.