



Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299036

x
1263

Das
Kreisdiagramm des Drehstrommotors

und seine
Anwendung auf die Kaskadenschaltung.

VON

Dr. MAX BRESLAUER,
INGENIEUR IN WIEN.

MIT 24 FIGUREN UND 2 TABELLEN.

29/7
Sonderausgabe

aus der

Sammlung elektrotechnischer Vorträge.

Herausgegeben von Prof. Dr. ERNST VOIT.

Band IV.

C. Nr. 25 265.



STUTTGART.

VERLAG VON FERDINAND ENKE.

1903.

X
1263

II 5401



Akc. Nr. _____

5440/50

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort	Seite 1
-------------------	------------

Erster Teil.

Die Diagramme der Kaskadenschaltung ohne Berücksichtigung der Verluste.

A. Kaskadenschaltung zweier genau gleichen Motoren	2
1. Ableitung des Diagramms	2
2. Analytischer Beweis	8
3. Verhältnis der Drehmomente	10
4. Deutung des Diagramms	11
B. Kaskadenschaltung zweier Motoren mit verschiedenen magnetischen Widerständen bei gleicher Windungszahl	16
1. Hauptwiderstände gleich, Streuwiderstände verschieden	17
2. Hauptwiderstände verschieden, Streuwiderstände gleich	30
3. Hauptwiderstände verschieden, Streuwiderstände verschieden	33
C. Kaskadenschaltung zweier Motoren mit verschiedenen magnetischen Widerständen und verschiedener Windungszahl	42
1. Windungszahlen verschieden, Streufaktoren gleich	43
2. Windungszahlen verschieden, magnetische Widerstände verschieden	51
D. Geschwindigkeit zweier in Kaskade geschalteten Motoren	54

Zweiter Teil.

Das Diagramm der Kaskadenschaltung mit Berücksichtigung der Verluste.

A. Berücksichtigung der Verluste im normalen Kreisdiagramm	58
1. Verluste im Rotor	58
2. Eisenverluste	58
3. Primäre Kupferverluste	59

	Seite
4. Einführung der charakteristischen Grösse σ	61
5. Ableitung des charakteristischen Kreises	62
6. Praktische Anwendung des Diagramms	66
7. Numerisches Beispiel und Formelsammlung	68
B. Berücksichtigung der Verluste im Kaskadendiagramm	71
1. Ableitung des Diagramms der Fig. 22	71
2. Deutung des Diagramms der Fig. 22	78
3. Verhältnis der Drehmomente	80
4. Tertiärstrom i_3	81
5. Praktische Anwendung	83
6. Numerisches Beispiel und Formelsammlung	85

Vorwort.

Eine Veröffentlichung von mir in der E.T.Z. über das Thema der Kaskadenschaltung (E.T.Z. 1903, Heft 1) beschäftigte sich¹⁾ wesentlich mit der Lösung des Spezialfalles zweier in Dimensionierung und Wickelung genau gleicher Motoren. Die Praxis bietet jedoch diese Aufgabe auch in der erweiterten Form zweier beliebig verschiedenen Motoren und legt den Wunsch nahe, die Verhältnisse auch hier leicht überblicken zu können. — Ich erinnere an die Patente von Danielson, der Motoren verschiedener Polzahl in Kaskade schaltet, und an meinen eigenen Vorschlag, verschieden grosse Motoren auf Triebräder verschiedener Grösse von Drehstromlokomotiven arbeiten zu lassen.

Ferner wurde in jener Studie der Einfluss der Kupferverluste auf die Form des Diagramms mit Benutzung der gleichen Vernachlässigungen berücksichtigt, die seiner Zeit von Heyland bei Ableitung seines Diagramms angewandt wurden. Eine nähere Betrachtung lehrte jedoch, dass gerade in diesem Falle solche Vernachlässigungen zu Fehlern führen, welche immerhin ins Gewicht fallen, und legte den Wunsch nahe, eine exaktere Methode zu finden, welche im zweiten Teile auseinandergesetzt wird und insofern zu recht einfachen Resultaten führt, als — auch bei exakter Berücksichtigung der Ohmschen Widerstände — der geometrische Ort der Ströme die Kreisform beibehält, so dass das Diagramm Fig. 22 als Hauptergebnis dieser Arbeit zu betrachten sein dürfte.

Gleichzeitig ergab sich hierbei, dass es wünschenswert ist, darzulegen, wie die von Prof. Ossanna²⁾ gefundenen Resultate in der Praxis am vorteilhaftesten verwendet werden können und dies gab Anlass zur Mitteilung der Methode, welche ich seit langem zur Untersuchung und Berechnung von Drehstrommotoren im Laboratorium verwende und

¹⁾ Ebenso wie die Abhandlung von Eichberg, Z. f. E. 1898, S. 578 ff.

²⁾ Ossanna, E.T.Z. 1900, S. 712; vgl. auch Sumec, Z. f. E. 1903, S. 1.

welche insofern von Interesse ist, als sie in der Aufstellung einer zweiten für jeden Motor charakteristischen Grundgrösse neben dem bekannten Streufaktor τ gipfelt, deren Einführung in Rechnung und Diagramm wesentlich dazu beiträgt, die Uebersichtlichkeit zu erhöhen.

Ein weiterer Grund für eine so ausführliche Behandlung dieses scheinbar so eng umgrenzten Stoffes liegt ausser in dem didaktischen Wert der hier zur Anwendung kommenden Diagramme, welche sämtlich ohne Vermittlung des in der Starkstrompraxis selten direkt verwendbaren Koeffizienten der Selbstinduktion abgeleitet wurden, — auch noch in der Anwendbarkeit auf die Theorie des Einphaseninduktionsmotors, sowie auf den Zusammenhang dieser Diagramme mit dem bekannten Görgesschen Phänomen¹⁾.

Erster Teil.

Die Diagramme der Kaskadenschaltung ohne Berücksichtigung der Verluste.

A. Kaskadenschaltung zweier genau gleichen Motoren.

1. Ableitung des Diagrammes.

Die Kaskadenschaltung ist eine Erfindung von Prof. Görges (E.T.Z. 1894, Heft 47) und wurde von ihm zuerst im Jahre 1892 für ein Aggregat von 30 PS bei der Firma Siemens & Halske, Berlin, für ein Bergwerk angewandt.

Für diesen Zweck ist die Anordnung insofern von besonderem Vorteil, als sie gestattet, ohne Schleifringe zu arbeiten und darum jede Gefahr wegen schlagender Wetter auszuschliessen.

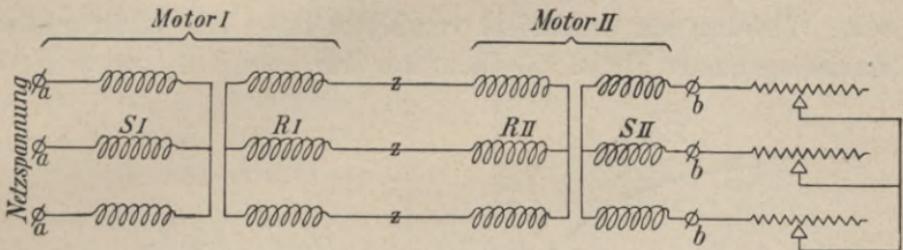
Die wichtigste Anwendung hievon wurde von den Herren Blathy und Kando durch die Firma Ganz & Co. auf der ersten elektrischen Vollbahnstrecke, welche mit Drehstrom betrieben wird — auf der Valtellinabahn —, mit Erfolg gemacht.

Die Schaltung ist in Fig. 1 dargestellt und besteht darin, dass der Stator S_I von Motor I in üblicher Weise an die Netzspannung angeschlossen wird (Klemmen a, a, a), sein Rotor R_I wird jedoch nicht in sich selbst, bzw. beim Angehen durch Widerstände geschlossen, sondern arbeitet auf den genau gleich gewickelten Rotor R_{II} von Motor II, dessen Stator S_{II} erst beim Angehen auf Widerstände oder beim Betrieb in sich kurz geschlossen wird.

¹⁾ Vgl. Eichberg, l. c.

Man sieht, dass hierdurch allerdings Schleifringe vermieden werden können, denn da die beiden Rotoren R_I und R_{II} auf einer Welle sitzend gedacht sind, so können die drei Zuleitungen Z, Z, Z zwischen R_I und R_{II} ohne Zuhilfenahme von Schleifringen an die beiden Wickelungen

Fig. 1.



angeschlossen werden. — Die ruhenden Klemmen b, b, b von S_{II} gestatten dann einen völlig gefahrlosen Anschluss der Anlasswiderstände.

Ersichtlich ist sofort, dass das Kreisdiagramm seiner Ableitung entsprechend, auf Motor I darum nicht mehr Anwendung finden kann, weil sein Rotor nicht in sich kurz geschlossen ist, d. h. auf seine eigenen — nach Berücksichtigung der Streuung — induktionsfreien Windungen zu arbeiten hat, sondern auf eine zweite Wickelung, welche wattlose Ströme von variabler Grösse je nach der Belastung erfordert.

Bei Motor II trifft zwar die Bedingung zu, dass seine Sekundärwicklung — in diesem Falle sein Stator S_{II} — in sich kurz geschlossen ist, bzw. auf induktionsfreie Widerstände arbeitet, dagegen ist wieder die Bedingung konstanter Spannung an seinen Primärklemmen nicht eingehalten, denn je nach Belastung wird, infolge der Streuung, die Spannung an den Enden des Rotors von Motor I beträchtlich variieren.

Ebenso schwer lässt sich ferner auch a priori voraussagen, welche Tourenzahl das ganze System annehmen wird, da diese von der Schlüpfung des Motors II einerseits und von der variablen Wechselzahl, welche er erhält, andererseits abhängt.

Trotz dieser Komplikationen lässt sich mit Hilfe des Heyland'schen Diagrammes ein rascher Ueberblick gewinnen.

Es sei infolge von Stromentnahme i_2 aus Rotor I die Stärke des Primärfeldes N_1 auf den Wert N_2 gefallen, so wird dieses reduzierte Feld die Klemmenspannung von Motor II für diesen Belastungsfall zu bilden haben. Da jedoch die Windungszahl in Rotor II gleich der in Rotor I ist, ausserdem die Wechselzahl beider ebenfalls übereinstimmt,

so wird dieses Feld N_2 in genau gleicher Grösse und Richtung als Primärfeld von Motor II wieder erscheinen. Wir brauchen daher auf das Spannungsdiagramm gar nicht erst zurückzugreifen, sondern bleiben — wie überhaupt in der ganzen nachfolgenden Arbeit — innerhalb des Feld-, bzw. Ampèrewindungsdiagramms.

Für dieses einmal gegebene Feld N_2 gilt natürlich — in Bezug auf seine Wirkung als Primärfeld von Motor II — das Bildungsgesetz des Kreisdiagramms Fig. 2, freilich nur für diesen Einzelwert. In

Fig. 2.

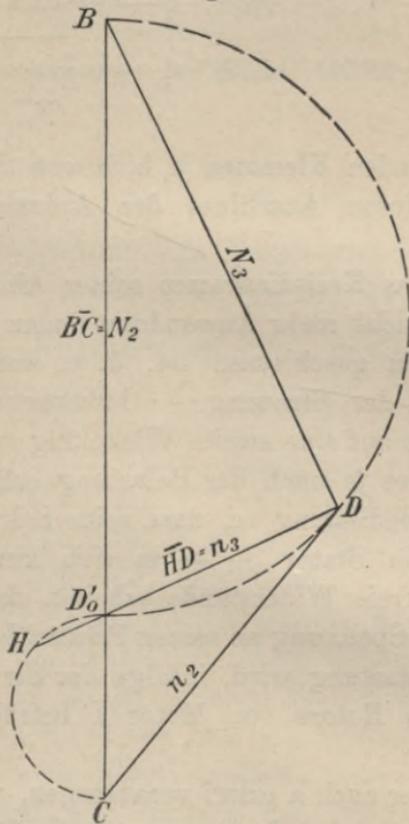
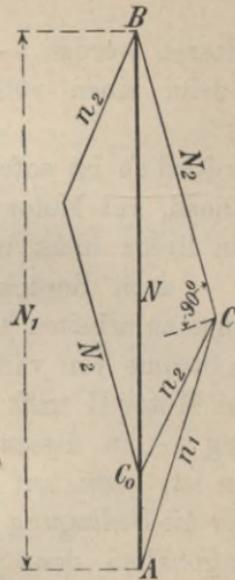


Fig. 3.



dieser Figur ist n_2 das dem Strom i_2 entsprechende Streufeld, welches der Grösse und Richtung nach in beiden Rotoren genau gleich sein soll. Subtrahieren wir dieses geometrisch von N_2 , so ergibt sich das Statorfeld N_3 von Motor II und die beiden bekannten Heylandschen Kreise ergeben die Strecke

$$\overline{HD} = n_3,$$

welche senkrecht steht auf N_3 und das tertiäre Streufeld n_3 bzw. den tertiären Strom i_3 erzeugen.

entsprechende Leerlaufstreufeld vermindert wird, so dass für Rotor I und den von diesem abhängigen Motor II von vorneherein nur das Feld

$$\overline{C_0 B} = N = (1 - \tau) N_1$$

übrig bleibt, welches dasjenige Feld ist, das den Strom i_2 und Ankerfeld N_2 ausbalancieren soll.

Nach ausgeführter geometrischer Subtraktion $N_1 - i_1$, bzw. $N - i_2$ erhält man das Ankerfeld N_2 von Motor I, welches nunmehr im Diagramm von Motor II (siehe Fig. 4) in gleicher Grösse und Richtung wieder erscheint und dort als für diesen Belastungsfall vorhandenes Primärfeld auftritt.

Der gleiche Strom i_2 , wie im Rotor von Motor I, tritt aber auch hier auf und ruft in Motor II genau das gleiche Streufeld

$$\overline{CD} = \overline{C_0 C}$$

hervor, das sich von N_2 geometrisch subtrahiert und das Tertiärfeld N_3 übrig lässt.

Der Deutlichkeit wegen ist die Strecke \overline{BC} in Fig. 4 in zwei parallele und gleiche Linien gespalten; an die Linie rechter Hand gliedert sich das Diagramm von Motor II, an die linke das von Motor I.

Motor II folgt natürlich dem Kreisgesetz und dementsprechend ist

$$\overline{D_0' C} = \tau N_2$$

und

$$\overline{D_0' D} \perp N_3,$$

was durch den gestrichelten Kreis angedeutet ist.

Bei Leerlauf wird das Feld N_2 um ein geringes kleiner werden als N , da im Primäranker von Motor I ausser seinem eigenen Magnetisierungsstrom

$$\overline{AC_0} = i_{m_1}$$

noch der Magnetisierungsstrom fließen muss, welcher das Feld N_2 von Motor II zu magnetisieren hat. Bei Leerlauf erhält daher N_2 den Wert

$$\overline{C_0' B} = N - \overline{C_0 C_0'} = N - i_{m_2}.$$

In gleicher Weise wird bei Leerlauf das Tertiärfeld N_3 um i_{m_2} kleiner werden als N_2 und daher

$$N_3 = \overline{D_0 B} = N - 2i_{m_2}.$$

Durch den Punkt D_0' muss natürlich $\overline{C_0' B}$ ebenfalls so geteilt werden, dass

$$\overline{C_0' D_0'} = \tau \cdot \overline{C_0' B}$$

und wir erkennen, dass

$$\overline{C_0' C} \parallel \overline{D_0' D}$$

sein muss.

Somit liegt das Diagramm für den einzelnen Belastungsfall fest und es ergibt sich die Aufgabe, den geometrischen Ort der beiden Punkte D und C zu bestimmen.

Diese beiden Orte sind — geometrisch gesprochen — durch die Forderung verbunden, dass jeder von C_0 gezogene Strahl $\overline{C_0 D}$ durch den Punkt C halbiert wird:

$$\overline{C_0 C} = \overline{CD} = i_2,$$

und ferner für Leerlauf und Kurzschluss folgende Bedingungen erfüllt sein müssen:

- 1. Bei Leerlauf fällt Punkt C in C_0 , wobei nach obigem

$$\overline{C_0 C_0'} = \overline{C_0' D_0} = i_{m_2} = \tau(N - i_{m_2}),$$

woraus

$$i_{m_2} = \frac{\tau}{1 + \tau} N \dots \dots \dots (1)$$

oder wegen

$$N = (1 - \tau) N_1$$

$$i_{m_2} = \tau \frac{1 - \tau}{1 + \tau} N_1 \dots \dots \dots (2)$$

Hierdurch ist sowohl C_0' wie auch D_0 festgelegt.

- 2. Bei Kurzschluss folgt aus der Bedingung, dass beide Streufelder i_2 gleich sind und ihre Summe gleich N sein muss, dass durch den geometrischen Ort des Punktes C die Strecke $C_0 B$ halbiert wird. Punkt D wird also in B fallen, Punkt C auf

$$\frac{1}{2} N = \frac{1}{2} (1 - \tau) N_1.$$

Sämtliche Punkte D liegen also auf einer Kurve zwischen D_0 und B, sämtliche Punkte C zwischen C_0' und $\frac{1}{2} (1 - \tau) N_1$, bzw. $\frac{1}{2} N$.

Es zeigt sich nun, dass beide Kurven Kreise sind: der geometrische Ort für C ist ein Halbkreis über $\overline{C_0' M}$ (Fig. 5), wo C_0' aus Gleichung 1 definiert ist, während M daraus resultiert, dass

$$\overline{C_0 M} = \overline{MB} = \frac{1}{2} N = \frac{1}{2} (1 - \tau) N_1,$$

während der geometrische Ort für D einen Halbkreis über $\overline{D_0 B}$ bildet, wo

$$\overline{D_0 C_0} = 2 i_{m_2} = 2 \tau \frac{1 - \tau}{1 + \tau} N_1.$$

2. Analytischer Beweis der Richtigkeit des Diagramms Fig. 5.

Der Beweis mag analytisch geführt werden im Hinblick darauf, dass die hierbei abzuleitenden Formeln ohnehin für die Handhabung des Diagramms von Vorteil sind.

Wenn Punkt C auf einem Kreise liegt, so muss

$$\sphericalangle C_0'CM = 90^\circ$$

sein und daher

$$\overline{cC} = i_w$$

die mittlere Proportionale zwischen $\overline{cC_0'}$ und \overline{cM} sein.

Es ist daher zu beweisen, dass

$$i_w^2 = \overline{cC_0'} \cdot \overline{cM}.$$

Da aber

$$\begin{aligned} \overline{cC_0'} &= i_0 - i_{m_2} = i_0 - \frac{\tau}{1 + \tau} N \\ \overline{cM} &= \frac{1}{2} N - i_0, \end{aligned}$$

so erhält man als Definitionsgleichung des Kreises für C, deren Beweis zu erbringen ist:

$$i_w^2 = \left(\frac{1}{2} N - i_0\right) \left(i_0 - \frac{\tau}{1 + \tau} N\right). \quad \dots \quad (1)$$

Nun haben wir aber (Fig. 5):

$$\begin{aligned} N^2 &= i_2^2 + N_2^2 - 2i_2 N_2 \cos(i_2, N_2) \\ &= i_2^2 + N_2^2 + 2i_2 N_2 \cdot \frac{i_0'}{i_2}, \text{ wenn } EC = i_0', \\ &= i_2^2 + N_2^2 + 2i_0' N_2. \quad \dots \quad (2) \end{aligned}$$

Ferner im rechtwinkligen $\triangle D_0'BD$:

$$i_w^2 = (N_2 - i_0') (i_0' - \tau N_2) = i_2^2 - i_0'^2,$$

daher

$$\begin{aligned} i_2^2 &= (N_2 i_0' - i_0'^2 - \tau N_2^2 + \tau i_0' N_2) + i_0'^2 \\ i_2^2 &= (1 + \tau) N_2 i_0' - \tau N_2^2. \quad \dots \quad (3) \end{aligned}$$

Gleichung 3 in Gleichung 2 eingesetzt, ergibt

$$\begin{aligned} N^2 &= (1 + \tau) N_2 i_0' - \tau N_2^2 + N_2^2 + 2i_0' N_2 \\ &= (3 + \tau) N_2 i_0' + (1 - \tau) N_2^2. \quad \dots \quad (4) \end{aligned}$$

Hieraus wird

$$i_0' = \frac{N^2 - (1 - \tau) N_2^2}{(3 + \tau) N_2};$$

Endlich ist noch

$$N_2^2 = i_w^2 + (N - i_0)^2$$

und dies in Gleichung 5 eingesetzt, gibt:

$$i_2^2 = i_w^2 + i_0^2 = \frac{1 + \tau}{3 + \tau} N^2 - \frac{1 + 3\tau}{3 + \tau} i_w^2 - \frac{1 + 3\tau}{3 + \tau} (N - i_0)^2$$

oder

$$4 \frac{1 + \tau}{3 + \tau} i_w^2 = \frac{1 + \tau}{3 + \tau} N^2 - \frac{1 + 3\tau}{3 + \tau} N^2 - \frac{1 + 3\tau}{3 + \tau} i_0^2 - i_0^2 + 2 \frac{1 + 3\tau}{3 + \tau} i_0 N$$

oder

$$4(1 + \tau) i_w^2 = -2\tau N^2 - 4(1 + \tau) i_0^2 + 2(1 + 3\tau) i_0 N$$

endlich

$$i_w^2 = \frac{1}{2(1 + \tau)} ([1 + 3\tau] i_0 N - 2[1 + \tau] i_0^2 - \tau N^2) \quad (6)$$

Diese so gefundene Endgleichung, welche als Grundgleichung für den gesuchten geometrischen Ort von C zu betrachten ist, erweist sich jedoch als genau identisch mit der oben aufgestellten Definitionsgleichung des Kreises über $C_0'M$, deren Richtigkeit damit erwiesen ist. Die Identität tritt zu Tage, wenn die beiden Klammerausdrücke von Gleichung 1 ausmultipliziert werden.

3. Verhältnis der Drehmomente.

Aus dem Diagramm Fig. 5 ist nun ersichtlich, dass diese Schaltung derartig wirken muss, dass der zu einem bestimmten Belastungsstrom i_2 gehörende Wattstrom i_w nicht unmittelbar durch Multiplikation mit N das Drehmoment der Anordnung ergibt, wie wir dies vom gewöhnlichen Motor her gewohnt sind, sondern dass ausser dem Drehmoment

$$D_1 = i_w N,$$

welches vom ersten Motor ausgeübt wird, noch ein zweites Drehmoment

$$D_2 = i_3 N_3$$

des zweiten Motors zur Verfügung steht, wenn wir mit i_3 den Sekundärstrom des zweiten Motors, mit N_3 das Sekundärfeld desselben bezeichnen.

Untersuchen wir das Verhältnis dieser beiden Drehmomente, so finden wir aus elementarer Ableitung, dass sie einander gleich sind; — das zu einem bestimmten Wattstrom i_w gehörige Gesamtdrehmoment wird daher verdoppelt.

Diese Thatsache ist insofern kein Widerspruch gegen das Energiegesetz, als ja der mechanische Effekt sich aus dem Produkt Drehmoment mal Tourenzahl ergibt: dem doppelten Drehmoment wird eben die halbe Tourenzahl entsprechen müssen, und wir haben daher schon a priori einen Grund für die Halbierung der Geschwindigkeit, deren nähere Begründung weiter unten behandelt werden wird.

Die Gleichheit der Drehmomente ergibt sich aus folgender Ueberlegung: Das Drehmoment von Motor I ist proportional seinem Rotorfeld N_2 , multipliziert mit derjenigen Komponente des Rotorstromes, welche senkrecht auf dem Rotorfeld steht.

Diese Komponente wird in Fig. 5 durch die gestrichelte Linie

$$\overline{C_0 F} \perp N_2$$

dargestellt. Somit erhalten wir als Drehmoment von Motor I

$$D_1 = \overline{C_0 F} \cdot N_2.$$

Andererseits ist das Drehmoment von Motor II ebenfalls proportional seinem Sekundärfeld N_3 , multipliziert mit dem darauf senkrechten Sekundärstrom i_3 , d. h.

$$D_2 = i_3 \cdot N_3.$$

Aus der Aehnlichkeit der in Betracht kommenden Dreiecke ist leicht zu erkennen, dass

$$i_3 \cdot N_3 = i_{w_2} \cdot N_2 = D_2.$$

Aus der Kongruenz der Dreiecke $C_0 CF$ und ECD folgt aber

$$i_{w_2} = \overline{C_0 F}$$

und damit

$$\overline{FC_0} \cdot N_2 = i_{w_2} \cdot N_2 = D_1 = D_2.$$

4. Deutung des Diagramms.

Wir brauchen ferner noch das Sekundärfeld N_3 des Motors II; zu dessen Berechnung lesen wir im Diagramm (Fig. 5) aus $\triangle C_0 CM$ die Beziehung ab:

$$\left(\frac{1}{2} N_3\right)^2 = i_2^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 - i_2 N \cdot \cos MC_0 C$$

oder wegen

$$\cos MC_0C = \frac{i_0}{i_2}$$

$$\left(\frac{1}{2} N_3\right)^2 = i_2^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 - Ni_0.$$

Zur Auswertung von Ni_0 haben wir aber die Grundgleichung:

$$i_w^2 = \left(\frac{N}{2} - i_0\right) \left(i_0 - \frac{\tau}{1+\tau} N\right)$$

$$= \frac{1}{2} Ni_0 + \frac{\tau}{1+\tau} Ni_0 - i_0^2 - \frac{\tau}{2(1+\tau)} N^2$$

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{1+\tau}\right) Ni_0 = i_w^2 + i_0^2 + \frac{\tau}{2(1+\tau)} N^2$$

oder wegen

$$i_w^2 + i_0^2 = i_2^2:$$

$$\frac{1+3\tau}{2(1+\tau)} Ni_0 = i_2^2 + \frac{\tau}{2(1+\tau)} N^2;$$

hieraus

$$Ni_0 = \frac{2(1+\tau)}{1+3\tau} i_2^2 + \frac{\tau}{1+3\tau} N^2.$$

Dies eingesetzt in die obige Gleichung für $\left(\frac{1}{2} N_3\right)^2$, gibt

$$\left(\frac{1}{2} N_3\right)^2 = i_2^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^2 - \frac{2(1+\tau)}{(1+3\tau)} i_2^2 - \frac{\tau}{1+3\tau} N^2$$

$$= \frac{1-\tau}{4(1+3\tau)} \left(\frac{N}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\tau}{1+3\tau}\right) i_2^2$$

$$= \frac{1-\tau}{1+3\tau} \left(\frac{1}{4} N^2 - i_2^2\right)$$

und endlich

$$N_3^2 = \frac{1-\tau}{1+3\tau} (N^2 - 4i_2^2). \quad \dots \quad (7)$$

Endlich brauchen wir noch den Sekundärstrom i_3 von Motor II. Diesen erhalten wir aus dem Dreieck HDC, da

$$i_3^2 = \overline{HD}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{HC}^2.$$

Es ist nun $\overline{DC} = i_2$; andererseits wegen Aehnlichkeit der Dreiecke HD_0C und D_0BD

$$\overline{HC} = \overline{D_0C} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{D_0B}} = \tau N_2 \cdot \frac{N_3}{(1-\tau)N_2}$$

$$= \frac{\tau}{1-\tau} N_3.$$

Wir erhalten daher

$$i_3^2 = i_2^2 - \left(\frac{\tau}{1 - \tau} \right)^2 N_3^2;$$

führen wir noch N_3^2 aus Gleichung 7 hier ein, so wird

$$i_3^2 = i_2^2 - \frac{\tau^2}{(1 - \tau)(1 + 3\tau)} N^2 + \frac{4\tau^2}{(1 - \tau)(1 + 3\tau)} i_2^2$$

$$i_3^2 = \frac{1}{(1 - \tau)(1 + 3\tau)} (i_2^2 [1 + \tau]^2 - \tau^2 N^2). \quad \dots \quad (8)$$

Zur vollständigen Deutung des Diagramms ist noch der kleine Kreis über $\overline{C_0 C_0'}$ zu betrachten, dessen Benützung dadurch gegeben ist, dass

$$\triangle C_0 G C_0' \approx C_0' C M.$$

Es verhält sich also

$$\overline{GC_0} : \overline{MC} = \overline{C_0 C_0'} : \overline{C_0' M}$$

oder

$$\overline{GC_0} : \frac{1}{2} N_3 = \frac{\tau}{1 + \tau} N : \left(\frac{1}{2} N - \frac{\tau}{1 + \tau} N \right)$$

$$= \frac{2\tau}{1 - \tau},$$

somit

$$\overline{GC_0} = \frac{\tau}{1 - \tau} N_3 \quad \dots \quad (9)$$

Die Strecke $\overline{GC_0}$ stellt uns also den Magnetisierungsstrom des Tertiärfeldes dar, welcher, wie man sieht, bei zunehmender Belastung im gleichen Masse abnimmt, wie N_3 selbst. Bei Leerlauf wird

$$N_3 = \overline{BD_0} = N \left(1 - \frac{2\tau}{1 + \tau} \right) = \frac{1 - \tau}{1 + \tau} N,$$

der Magnetisierungsstrom wird dann aus Gleichung 9

$$\overline{GC_0} = \frac{\tau}{1 - \tau} \cdot \frac{1 - \tau}{1 + \tau} N = \frac{\tau}{1 + \tau} N = i_{m_2}.$$

Bei Kurzschluss hingegen wird

$$N_3 = 0,$$

folglich auch

$$\overline{GC_0} = 0.$$

Der auf den Halbkreis über $\overline{C_0 C_0'}$ wandernde Punkt G ist aber gleichzeitig auch der Endpunkt des jeweiligen Magnetisierungsstromes \overline{AG} für das gemeinsame Feld $\overline{BC} = N_2$.

Dies ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke $AC_0'G$ und $C_0'CB$ ¹⁾. \overline{AG} erfüllt daher zunächst die Bedingung, dass es parallel zum Feld N_2 und diesem proportional ist, ausserdem haben wir

$$\overline{AG} : \overline{AC_0'} = N_2 : \overline{C_0'B}$$

oder wegen

$$\overline{AC_0'} = i_{m_1} + i_{m_2} = \frac{\tau}{1-\tau} N + \frac{\tau}{1+\tau} N = \frac{2\tau}{1-\tau^2} N$$

wird

$$\overline{AG} : \frac{2\tau}{1-\tau^2} N = N_2 : \left(N - \frac{\tau}{1+\tau} N \right),$$

hieraus

$$\overline{AG} = \frac{2\tau}{1-\tau^2} (1+\tau) N_2$$

und endlich

$$\overline{AG} = \frac{2\tau}{1-\tau} N_2. \dots \dots \dots (10)$$

Betrachten wir auch hier die Grenzfälle, so sehen wir, dass bei Leerlauf, wo

$$N_2 = \overline{C_0'B} = N \left(1 - \frac{\tau}{1+\tau} \right) = \frac{1}{1+\tau} N$$

wird, der gesamte Magnetisierungsstrom den Wert

$$\overline{AG} = \frac{2\tau}{1-\tau} \cdot \frac{1}{1+\tau} N = \frac{2\tau}{1-\tau^2} N = i_{m_1} + i_{m_2}$$

annimmt, während bei Kurzschluss, wo

$$N_2 = \overline{BM} = \frac{1}{2} N$$

wird, der gesamte Magnetisierungsstrom den Wert

$$\overline{AG} = \frac{2\tau}{1-\tau} \cdot \frac{1}{2} N = \frac{\tau}{1-\tau} N = i_{m_1} = \overline{AC_0'}$$

erhält.

Hieraus erkennen wir, dass der gesamte Magnetisierungsstrom der Kaskade $i_m = i_{m_1} + i_{m_2}$ bei zunehmender Belastung nicht, wie beim

¹⁾ Denn es verhält sich

$$\overline{GC_0'} : \overline{C_0'C} = \overline{C_0C_0'} : \overline{C_0'M} = \frac{\tau}{1+\tau} N : \frac{1-\tau}{2(1+\tau)} N = \frac{2\tau}{1-\tau},$$

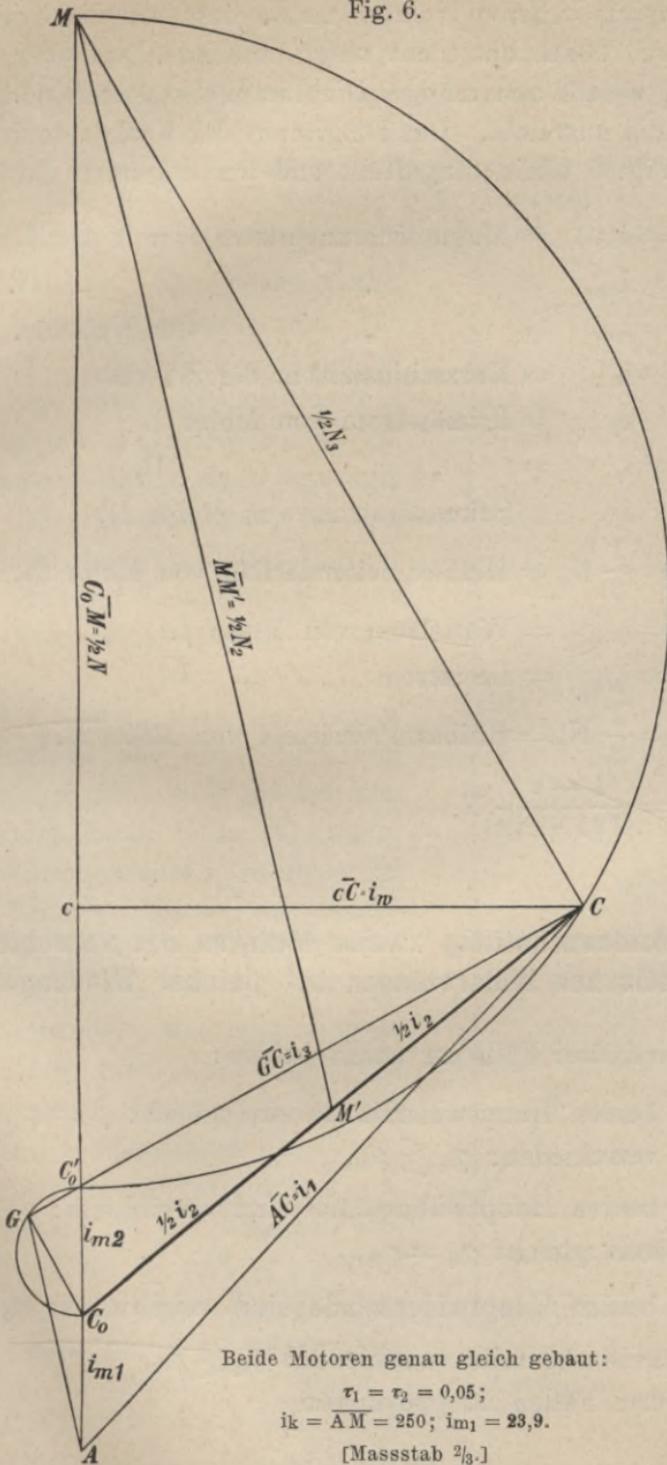
ferner

$$\overline{AC_0'} : \overline{C_0'B} = \frac{2\tau}{1-\tau^2} N : \left(1 - \frac{\tau}{1+\tau} \right) N = \frac{2\tau}{(1-\tau)(1+\tau)} : \frac{1}{1+\tau} = \frac{2\tau}{1-\tau};$$

folglich:

$$\overline{GC_0'} : \overline{C_0'C} = \overline{AC_0'} : \overline{C_0'B}.$$

Fig. 6.



Beide Motoren genau gleich gebaut:

$$\tau_1 = \tau_2 = 0,05;$$

$$i_k = \overline{AM} = 250; i_{m1} = 23,9.$$

[Massstab $\frac{2}{3}$.]

normalen Motor, verschwindet, sondern bei Kurzschluss noch ungefähr den halben Wert behält.

Gleichzeitig sehen wir aber auch, dass wir die beiden grossen Kreise (Fig. 5) überhaupt nicht mehr brauchen, und dass für alle Betrachtungen, welche man an dem Diagramm anstellen kann, die Strecke \overline{AM} vollständig ausreicht. Das Diagramm der Kaskadenschaltung wird also durch Fig. 6 allein dargestellt und wir erkennen daraus

$$\begin{aligned} \overline{AC_0} &= i_{m_1} = \text{Magnetisierungsstrom von Motor I,} \\ \overline{C_0 C_0'} &= i_{m_2} = \text{ " " " " II,} \\ \overline{AC_0'} &= i_m = \text{ " " " " der Kaskade,} \\ \overline{AM} &= i_k = \text{Kurzschlussstrom der Kaskade,} \\ \overline{AC} &= i_1 = \text{Primärstrom von Motor I,} \\ \overline{C_0 C} &= i_2 = \text{ " " " " II,} \\ \overline{GC} &= i_3 = \text{Sekundärstrom von Motor II,} \\ \overline{MC} &= \frac{1}{2} N_3 = \text{Halbes Sekundärfeld von Motor II,} \\ \overline{Cc} &= i_w = \text{Wattstrom von Motor I,} \\ \overline{Ac} &= i_0 = \text{Leerstrom " " I,} \\ \overline{MM'} &= \frac{1}{2} N_2 = \text{Halbes Primärfeld von Motor II,} \\ \overline{C_0' M} &= \frac{1 - \tau}{2(1 + \tau)} N. \end{aligned}$$

B. Kaskadenschaltung zweier Motoren mit verschiedenen magnetischen Widerständen bei gleicher Windungszahl.

Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. die beiden Hauptwiderstände sind gleich: $\rho_1 = \rho_2$, die Streuwiderstände verschieden: $\rho_{s_1} \lesseqgtr \rho_{s_2}$,

2. die beiden Hauptwiderstände sind verschieden: $\rho_1 \lesseqgtr \rho_2$, die Streuwiderstände gleich: $\rho_{s_1} = \rho_{s_2}$,

3. die beiden Hauptwiderstände sind verschieden: $\rho_1 \lesseqgtr \rho_3$, die Streuwiderstände ebenfalls verschieden: $\rho_{s_1} \gtrless \rho_{s_2}$.

Allen drei Fällen ist gemeinsam

$$\tau_1 \lesseqgtr \tau_2$$

und jeder ist auf seine Eigenschaften, insbesondere auf Ueberlastbarkeit und Leistungsfaktor zu untersuchen.

Damit ist das Felddiagramm für diesen Fall gegeben und es handelt sich zu seiner Vervollständigung nur noch um die Auffindung des geometrischen Ortes für den Punkt C, welcher gleichzeitig die beiden Bedingungen erfüllt (vergl. S. 6), dass durch ihn alle von C₀ ausgehenden Strahlen $\overline{C_0 D}$ im Verhältnis $n_2 : n_2' = \tau_1 : \tau_2$ geteilt werden und ferner die im Punkte D auf \overline{BD} errichtete Senkrechte $\overline{D_0' D}$ von N₂ eine Strecke $\overline{D_0' C}$ abschneidet, derart dass

$$\overline{D_0' C} = \tau_2 \cdot \overline{BC} = \tau_2 N_2.$$

Das Streufeld n₂ schrumpft nun bei Leerlauf auf den Wert $\overline{C_0 C_0'}$ zusammen, welcher sich algebraisch von $\overline{BC_0} = N$ subtrahiert, so dass bei Leerlauf für den zweiten Motor ein Feld

$$N_2 = \overline{C_0' B}$$

übrig bleibt.

Aber auch dieses Feld N₂ tritt nicht in voller Stärke in den Sekundäranker des zweiten Motors über, sondern es geht abermals ein Teil

$$\overline{C_0' D_0} = \tau_2 \cdot \overline{C_0' B}$$

als Leerlaufstrefeld verloren und erst $\overline{BD_0}$ ist das Ankerfeld N₃ bei Leerlauf.

Zur Bestimmung von $\overline{C_0 C_0'}$ haben wir zu beachten, dass der Strom, welcher dieses Streufeld bildet, in Motor I fließt, also dort jenen Streuwiderstand vorfindet, welcher dem Faktor τ_1 entspricht: wir haben also

$$\overline{C_0 C_0'} = \tau_1 (N - \overline{C_0 C_0'}),$$

oder

$$\overline{C_0 C_0'} = \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} N = i_{m_2} = \tau_1 \frac{1 - \tau_1}{1 + \tau_1} N_1 \dots \dots \dots (1)$$

und hieraus

$$\overline{C_0' D_0} = \tau_2 \cdot \overline{C_0' B} = \tau_2 (N - \overline{C_0 C_0'}) = \tau_2 N \left(1 - \frac{\tau_1}{1 + \tau_1}\right)$$

oder

$$\overline{C_0' D_0} = \frac{\tau_2}{1 + \tau_1} N = \tau_2 \frac{1 - \tau_1}{1 + \tau_1} N_1 \dots \dots \dots (2)$$

Dividiert man Gleichung 1 durch Gleichung 2, so erhält man das Verhältnis der beiden Streufelder bei Leerlauf

$$\frac{\overline{C_0' D_0}}{\overline{C_0 C_0'}} = \frac{\tau_2}{\tau_1},$$

was zu erwarten war, da ja auch

$$\frac{\overline{C_0'D_0}}{\overline{C_0'C_0}} = \frac{n_2'}{n_2}$$

sein muss.

Es wird daher $\overline{D_0D} \parallel \overline{C_0'C}$ sein müssen, um letztere Bedingung zu erfüllen, und gleichzeitig wird die Verbindungslinie $\overline{D_0D}$ auf \overline{BC} ein Stück $\overline{D_0'C}$ abschneiden, derart dass

$$\overline{D_0'C} : N_2 = \overline{C_0D_0} : \overline{C_0'B},$$

oder

$$\overline{D_0'C} = N_2 \cdot \frac{\frac{\tau_2}{1+\tau_1} N}{N - C_0 C_0'} = N_2 \cdot \frac{\frac{\tau_2}{1+\tau_1} N}{N \left(1 - \frac{\tau_1}{1+\tau_1}\right)}$$

das heisst

$$\overline{D_0'C} = \tau_2 N_2.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die oben aufgestellte Bedingung, dass

$$\overline{D_0'C} = \tau_2 N_2,$$

darin ihren Ausdruck findet, dass die Verbindungslinien jedes Punktes des geometrischen Ortes für C mit C_0' parallel mit $\overline{D_0D}$ sind, wo D auf der Verlängerung von n_2 eine Strecke

$$n_2' = n_2 \cdot \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

abschneidet. Hierbei sind die Punkte C_0 , C_0' und D_0 durch Gleichung 1 und 2 definiert.

Der gesuchte geometrische Ort für C ist abermals ein Kreis, und zwar mit dem Durchmesser $\overline{C_0'M'}$ (Fig. 8), wo M' dadurch bestimmt ist, dass

$$\overline{C_0M'} : \overline{M'B} = \tau_1 : \tau_2.$$

Ebenso ist auch der geometrische Ort für Punkt D ein Kreis über Durchmesser $\overline{D_0B}$, wo der Punkt D_0 aus Gleichung 2 (S. 18) bestimmt ist.

Die beiden Kreise erfüllen zunächst die Bedingung, dass jede von C_0 aus gezogene Gerade durch sie in zwei Strecken $\overline{C_0C}$ und \overline{CD} geteilt wird, derart dass

$$\overline{C_0C} : \overline{CD} = \overline{C_0C_0'} : \overline{C_0'D_0} = \overline{C_0M'} : \overline{M'B} = \tau_1 : \tau_2.$$

Denn es verhält sich

$$\overline{C_0 C_0'} : \overline{C_0' D_0} = n_2 : n_2',$$

dies ist aber nur möglich, wenn in dem Dreieck $C_0 D_0 D$ die Linie

$$\overline{C_0' C} \parallel D_0 D$$

ist.

Somit ist auch die zweite Grundbedingung erfüllt, dass

$$\overline{D_0' C} = \tau_2 \cdot N_2,$$

und damit das Felddiagramm auch für diesen Fall erledigt.

Das Diagramm ist jedoch in dieser Form nur mit grosser Vorsicht zu verwenden. Wir haben hier nämlich zum ersten Male den — methodologisch — interessanten Fall, dass man nicht ohne weiteres vom Diagramm der Felder oder Kraftlinienzahlen auf das der Stromstärken übergehen kann.

Um dies thun zu können, müssen wir uns erinnern, dass derselbe Sekundärstrom i_2 in Motor I ein anderes Streufeld hervorruft, als in Motor II. Bezeichnen wir den Widerstand des Streufeldes in Motor I mit ρ_s , den in Motor II mit ρ_s' , so ist das Streufeld von i_2 in Motor I

$$n_2 = \frac{i_2}{\rho_s}$$

dagegen in Motor II

$$n_2' = \frac{i_2}{\rho_s'}.$$

Derselbe Strom erzeugt also (Fig. 7) verschiedene Streufelder, je nachdem er in Motor I oder Motor II auftritt, und dementsprechend sind alle Stromgrössen, welche im Dreieck BCD , welches die Verhältnisse in Motor II darlegt, auftreten, d. i. n_2' und n_3' , mit einem andern Proportionalitätsfaktor zu multiplizieren als n_1 , n_2 und n_3 in $\triangle ABC$, welches Motor I entspricht.

Wählen wir z. B. den Massstab so, dass $n_1 = i_1$ und $n_2 = i_2$, so müssen wir auch die Strecke $\overline{CD} = n_2 = i_2$ machen; wir erkennen dann weiter, dass auch

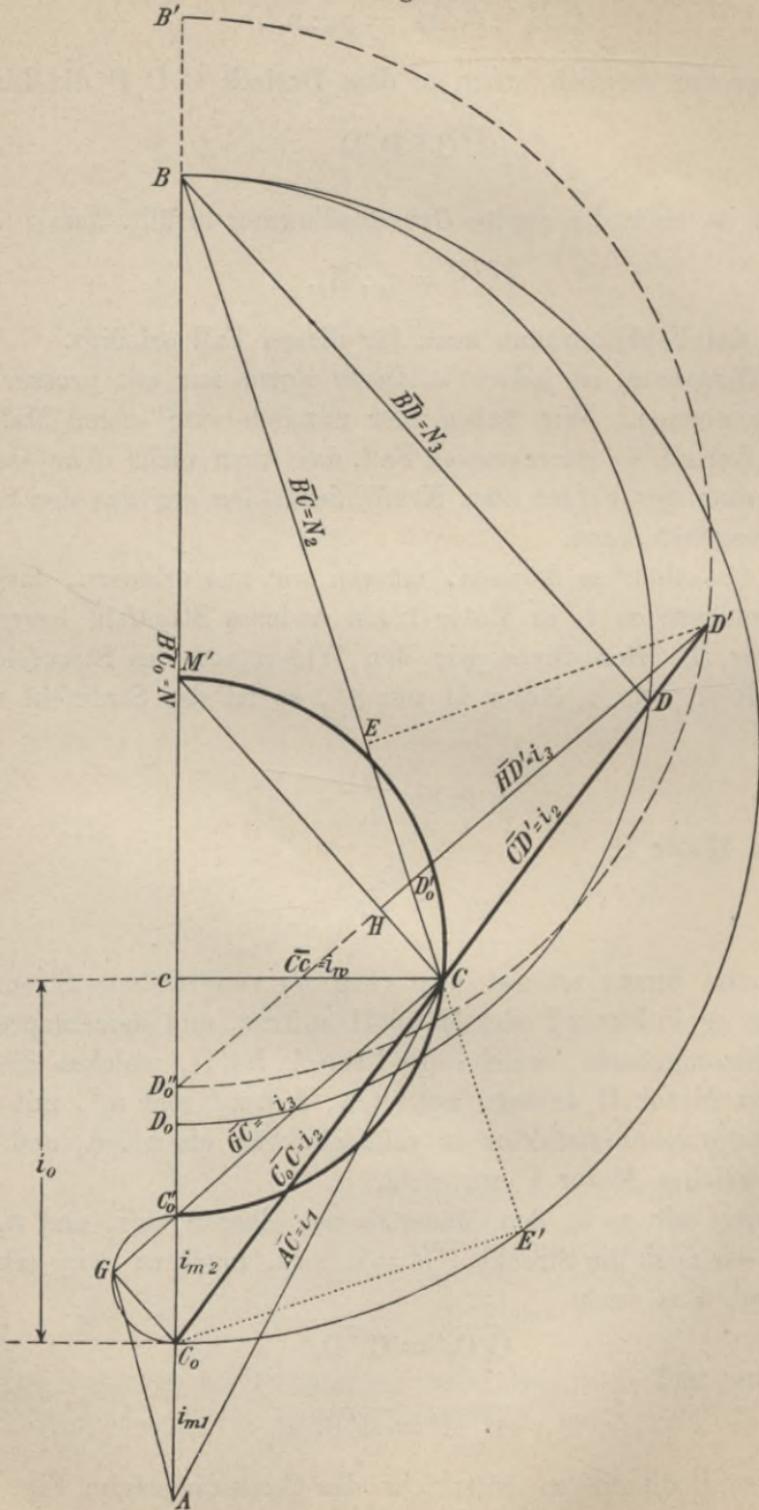
$$\overline{C_0 C_0'} = \overline{C_0' D_0}$$

werden muss und

$$\overline{C_0 M'} = \overline{M' B}.$$

Diesen Bedingungen entspricht das Stromdiagramm Fig. 9, in welchem der gestrichelte Kreis den geometrischen Ort für i_2 darstellt.

Fig. 9.



Nun erkennen wir auch die Gleichheit der beiden Drehmomente an der Kongruenz der punktierten Hilfsdreiecke

$$D'EC \cong C_0E'C,$$

woraus

$$\overline{C_0E'} = \overline{D'E},$$

und folglich

$$D_1 = \overline{C_0E'} \cdot \overline{CB} = D_2 = \overline{D'E} \cdot \overline{CB}.$$

Wir haben ferner folgende Beziehungen:

$$\overline{AM'} = i_k = N_1 - \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} N = \left(\frac{1}{1 - \tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right) N. \quad (3)$$

$$i_k = \frac{1}{1 + \alpha} \frac{1 + \tau_2}{1 - \tau_1} N = \text{Kurzschlussstrom beider Motoren in Kaskade,}$$

wenn $\alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1}$, woraus

$$N = (1 + \alpha) \frac{1 - \tau_1}{1 + \tau_2} i_k$$

$$i_m = i_{m_1} + i_{m_2} = \left(\frac{\tau_1}{1 - \tau_1} + \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} \right) N = \frac{2\tau_1}{1 - \tau_1^2} N = \text{Leerlaufstrom beider Motoren in Kaskade.} \quad \dots \quad (4)$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} N_1 = \overline{AB} &= \frac{1}{1 - \tau_1} N = \frac{1}{1 - \tau_1} \frac{(1 + \alpha)(1 - \tau_1)}{1 + \tau_2} i_k = \frac{1 + \alpha}{1 + \tau_2} i_k \\ &= \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha\tau_1} i_k \quad \dots \quad (5) \end{aligned}$$

$$i_{m_1} = \overline{AC_0} = \frac{\tau_1}{1 - \tau_1} N = \tau_1 \frac{1 + \alpha}{1 + \tau_2} i_k \quad \dots \quad (6)$$

$$\overline{C_0M'} = \frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} N = \frac{1}{1 + \alpha} N = \frac{1 - \tau_1}{1 + \tau_2} i_k \quad \dots \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \overline{C_0'M'} = 2(i_w)_{\max} &= \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2} - \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} \right) N = \frac{1}{1 + \alpha} \frac{1 - \tau_2}{1 + \tau_1} N \\ &= \frac{1 - \tau_1}{1 + \tau_1} \frac{1 - \tau_2}{1 + \tau_2} i_k \quad \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen erhalten wir als Grundgleichung des Kreises über $\overline{C_0'M'}$ aus Fig. 8:

$$\begin{aligned} i_w^2 &= (\overline{C_0'M'} - i_0)(i_0 - i_{m_2}) \\ i_w^2 &= \left(\frac{1}{1 + \alpha} N - i_0 \right) \left(i_0 - \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} N \right) \quad \dots \quad (9) \end{aligned}$$

oder aufgelöst

$$i_w^2 = \frac{1 + \tau_1(2 + \alpha)}{(1 + \alpha)(1 + \tau_1)} N i_0 - i_0^2 - \frac{1}{1 + \alpha} \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} N^2. \quad (9a)$$

Hieraus der Sekundärstrom:

$$i_2^2 = \frac{1 + \tau_1(2 + \alpha)}{(1 + \alpha)(1 + \tau_1)} N i_0 - \frac{1}{1 + \alpha} \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} N^2. \quad (10)$$

Wir brauchen ferner das Sekundärfeld N_2 des Motors I, welches gleichzeitig Primärfeld von Motor II ist, und haben hierfür:

$$\begin{aligned} N_2^2 &= i_w^2 + (N - i_0)^2 = i_w^2 + N^2 + i_0^2 - 2N i_0 \\ &= i_2^2 + N^2 - 2N i_0. \end{aligned}$$

Hierin den Wert für i_2^2 aus Gleichung 10 eingesetzt, gibt

$$N_2^2 = \left(\frac{1 + \tau_1(2 + \alpha)}{(1 + \alpha)(1 + \tau_1)} - 2 \right) N i_0 + \left(1 - \frac{1}{1 + \alpha} \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} \right) N^2$$

oder

$$N_2^2 = \frac{1 + \alpha(1 + \tau_1)}{(1 + \alpha)(1 + \tau_1)} N^2 - \frac{1 + \alpha(2 + \tau_1)}{(1 + \alpha)(1 + \tau_1)} N i_0. \quad (11)$$

Weiter ist noch von Wert, das Tertiärfeld N_3 analytisch zu kennen: hierfür haben wir

$$\overline{M'C} : N_3 = \overline{C_0 M'} : \overline{C_0 B}$$

$$\overline{M'C} = N_3 \cdot \frac{\frac{1}{1 + \alpha} \cdot N}{N} = \frac{1}{1 + \alpha} N_3; \quad (12)$$

ferner

$$\begin{aligned} \overline{M'C}^2 &= i_w^2 + \overline{M'c}^2 = i_w^2 + \left(\frac{1}{1 + \alpha} N - i_0 \right)^2 \\ &= i_w^2 + i_0^2 + \frac{1}{(1 + \alpha)^2} N^2 - \frac{2}{1 + \alpha} i_0 N \\ &= \left(\frac{1 + \tau_1(2 + \alpha)}{(1 + \alpha)(1 + \tau_1)} - \frac{2}{1 + \alpha} \right) N i_0 - \left(\frac{1}{1 + \alpha} \cdot \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} - \frac{1}{(1 + \alpha)^2} \right) N^2 \\ &= \frac{2\alpha - 1}{(1 + \alpha)(1 + \tau_1)} N i_0 - \frac{1 - \alpha\tau_1}{(1 + \alpha)^2(1 + \tau_1)} N^2. \quad (13) \end{aligned}$$

Hierin der Wert für $\overline{M'C}$ aus Gleichung 12 eingesetzt, gibt

$$N_3^2 = \frac{(1 + \alpha)(2\alpha - 1)}{1 + \tau_1} N i_0 - \frac{1 - \alpha\tau_1}{1 + \tau_1} N^2. \quad (14)$$

Endlich ist noch der Tertiärstrom

$$i_3 = \overline{GC} = \overline{HD'}$$

zu bestimmen. Hierfür haben wir im $\triangle C_0'CM'$ die Beziehung

$$\overline{C_0'C^2} = \overline{C_0'M'^2} - \overline{M'C^2}$$

oder unter Zuhilfenahme von Gleichung 8 und 12

$$\begin{aligned} \overline{C_0'C^2} &= \left(\frac{1}{1+\alpha} \frac{1-\alpha\tau_1}{1+\tau_1} \right)^2 N^2 - \frac{2\alpha-1}{(1+\alpha)(1+\tau_1)} Ni_0 + \frac{1-\alpha\tau_1}{(1+\alpha)^2(1+\tau_1)} N^2 \\ &= \frac{1-\alpha\tau_1}{(1+\alpha)^2(1+\tau_1)^2} (1-\alpha\tau_1+1+\tau_1) N^2 - \frac{2\alpha-1}{(1+\alpha)(1+\tau_1)} Ni_0 \\ &= \frac{(1-\alpha\tau_1)(2+[1-\alpha]\tau_1)}{(1+\alpha)^2(1+\tau_1)^2} N^2 - \frac{2\alpha-1}{(1+\alpha)(1+\tau_1)} Ni_0. \end{aligned}$$

Nun verhält sich aber wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $GC_0'C_0$ und $C_0'CM'$

$$\begin{aligned} \overline{C_0'C} : i_3 &= \overline{C_0'M'} : \overline{C_0M'} \\ &= \frac{1}{1+\alpha} \frac{1-\alpha\tau_1}{1+\tau_1} : \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1-\alpha\tau_1}{1+\tau_1}, \end{aligned}$$

somit

$$i_3 = \frac{1+\tau_1}{1-\alpha\tau_1} \overline{C_0'C}.$$

Dies in den obigen Ausdruck für $\overline{C_0'C}$ eingesetzt, gibt:

$$i_3^2 = \frac{2+(1-\alpha)\tau_1}{(1+\alpha)^2(1-\alpha\tau_1)} N^2 - \frac{(2\alpha-1)(1+\tau_1)}{(1+\alpha)(1-\alpha\tau_1)^2} Ni_0. \quad (15)$$

Aus all diesen Ableitungen erkennen wir wieder, dass alle Beziehungen, welche wir brauchen, ohne Zuhilfenahme der drei grossen Kreise von Fig. 8, allein durch den stark ausgezogenen kleinen Kreis über $\overline{C_0'M'}$ dargestellt werden. Die vereinfachte Fig. 10 gibt uns daher alles Notwendige. Gegebene Grössen sind uns darin durch Messung oder Rechnung die Strecken

$$\overline{AC_0'} = i_m = i_{m_1} + i_{m_2} = \text{Leerlaufstrom der Kaskade,}$$

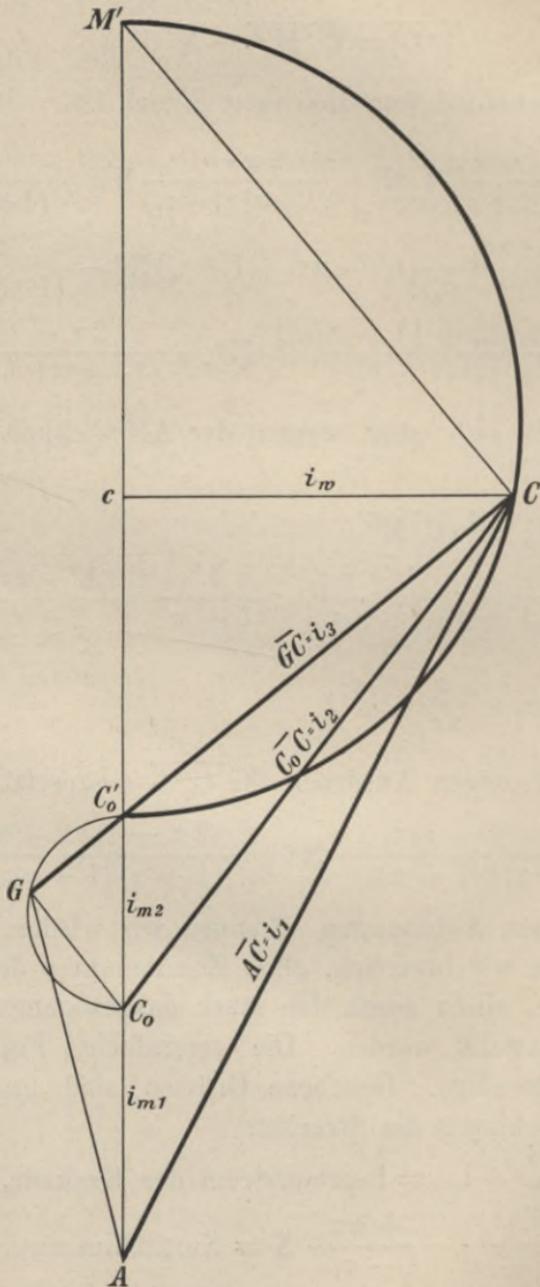
$$\overline{AM'} = i_k = \frac{1}{1+\alpha} \frac{1+\alpha\tau_1}{1-\tau_1} N = \text{Kurzschlussstrom der Kaskade.}$$

Wieder ist $i_w = \overline{cC}$ das Mass für die Energieaufnahme der Kaskade, welche dargestellt wird durch

$$L_I = ei_w.$$

Diese verteilt sich auf die beiden Motoren, — doch so, dass die Drehmomente unter allen Umständen einander gleich bleiben. Nun

Fig. 10.



gehört aber zu demselben Wattstrom i_w immer auch das gleiche Drehmoment D in jedem Motor, mag derselbe normal oder in Kaskade

geschaltet sein; da aber allgemein die Leistung des normal geschalteten Motors

$$L = D n,$$

wo n die Tourenzahl, andererseits die Leistung der Kaskade

$$L = D_1 n_1 + D_2 n_2 = D(n_1 + n_2),$$

so muss

$$n = n_1 + n_2$$

werden, d. h. die Summe der Geschwindigkeiten der in Kaskade geschalteten Motoren muss immer gleich der Geschwindigkeit des normal geschalteten Motors sein.

In diesem Falle genügt es jedoch nicht bloss, wie vorher, wo $\tau_1 = \tau_2$ angenommen war, den gesamten Leerstrom der Kaskade $i_m = i_{m_1} + i_{m_2}$, sowie den Kurzschlussstrom i_k der Kaskade zu messen, sondern wir brauchen noch das Verhältnis $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \alpha$ der beiden Streufaktoren. Es muss mindestens noch einer der beiden Kurzschlussströme bei normal geschaltetem Motor, z. B. N_1 (im Strommassstab) und der zugehörige Magnetisierungsstrom i_{m_1} gemessen sein. Dann ist gegeben:

$$i_m, i_{m_1}, i_k, N_1.$$

Hieraus geht α durch folgende Beziehungen hervor:

$$i_{m_1} = \tau_1 N_1,$$

daher

$$\tau_1 = \frac{i_{m_1}}{N_1};$$

ferner wegen Gleichung 6

$$i_{m_1} = \tau_1 \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha \tau_1} i_k,$$

daher

$$\tau_1 N_1 = \tau_1 \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha \tau_1} i_k$$

oder

$$N_1 (1 + \alpha \tau_1) = (1 + \alpha) i_k$$

oder

$$N_1 + \alpha \frac{i_{m_1}}{N_1} N_1 = i_k + \alpha i_k$$

$$\alpha (i_{m_1} - i_k) = i_k - N_1$$

$$\alpha = \frac{i_k - N_1}{i_{m_1} - i_k}$$

oder

$$\alpha = \frac{N_1 - i_k}{i_k - i_{m_1}}$$

Durch die drei Grössen τ_1 , α und i_k sind alle Beziehungen festgelegt; es ist

$$N = (1 + \alpha) \frac{1 - \tau_1}{1 + \alpha \tau_1} i_k$$

$$i_{m_2} = i_m - i_{m_1}$$

und der maximale Wattstrom

$$2\bar{i}_w = \frac{1 - \tau_1}{1 + \tau_1} \frac{1 - \alpha \tau_1}{1 + \alpha \tau_1} i_k.$$

Ueber diese weitaus wichtigste Grösse, welche die maximale Zugkraft der Kaskade darstellt, in ihrer Abhängigkeit vom sekundären Streufaktor bzw. von der Grösse α gewinnt man durch Fig. 11 ein besonders deutliches Bild. Der kleinste Kreis zeigt das Verhalten bei Gleichheit der beiden Streuwiderstände, während die mehr und mehr wachsenden Durchmesser den Einfluss verringerter Streuung im zweiten Motor darstellen. Wird der Streuwiderstand im letzteren unendlich gross — immer noch unter Annahme, dass der magnetische Widerstand des Hauptfeldes konstant geblieben ist —, so fällt Punkt M mit B zusammen und die Kaskade hat dann einen Gesamtstreu­faktor, der etwas weniger als doppelt so gross ist gegenüber der von Motor I, da

$$i_m = i_{m_1} + i_{m_2} = \frac{2\tau_1}{1 + \tau_1} N_1$$

gegenüber

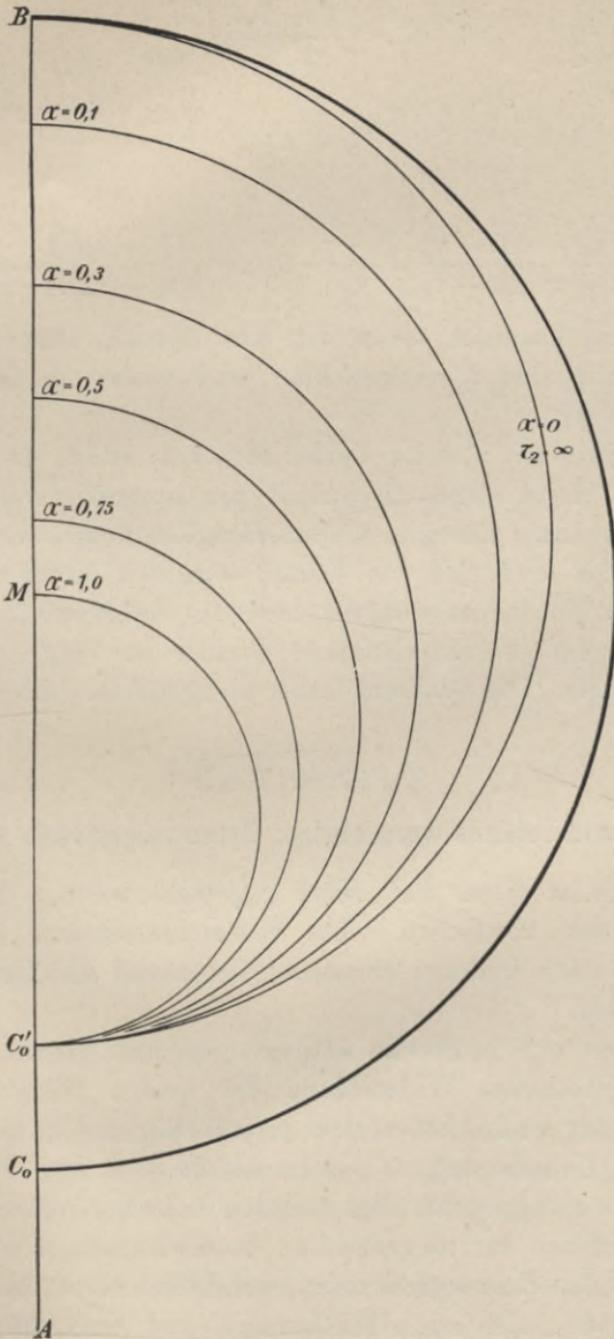
$$i_{m_1} = \tau_1 N_1,$$

während im ersten Fall $\tau_1 = \tau_2$, der resultierende scheinbare Streufaktor vervierfacht wurde¹⁾.

An Hand dieser Resultate lässt sich die Frage beantworten, welche Anordnung die günstigere wäre, falls man zwei Motoren hat, deren Untersuchung verschieden grosse Streuung ergab bei gleichem magnetischen Hauptwiderstand, — ob der Motor mit kleinem τ als Motor II zu verwenden ist oder umgekehrt.

¹⁾ Dies ist der Spezialfall des Einphaseninduktionsmotors, dessen Verhalten hieraus in einfachster Weise hergeleitet werden kann, worauf ich an anderer Stelle zurückkommen werde.

Fig. 11.



Um dies zu entscheiden, hatten wir auf S. 23, Gleichung 8 die Beziehung

$$2\bar{i}_w = \frac{1}{1 + \alpha} \frac{1 - \alpha\tau_1}{1 + \tau_1} N$$

oder da

$$N = \frac{1 - \tau_1}{\tau_1} i_{m_1},$$

und wegen

$$\alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1},$$

wird

$$2\bar{i}_w = \frac{\tau_1}{\tau_2 + \tau_1} \frac{1 - \tau_2}{1 + \tau_1} \frac{1 - \tau_1}{\tau_1} i_{m_1} = \frac{(1 - \tau_2)(1 - \tau_1)}{(\tau_1 + \tau_2)(1 + \tau_1)} i_{m_1}. \quad (16)$$

In diesem Ausdruck sehen wir, dass überall, ohne Wertänderung hervorzurufen, τ_2 und τ_1 vertauschbar sind ausser in dem Klammerausdruck: $1 + \tau_1$.

Vertauschen wir also die beiden Motoren, so ist, da i_{m_1} in beiden Fällen gleich bleibt wegen Gleichheit der magnetischen Hauptwiderstände, die maximale Energieaufnahmefähigkeit umgekehrt proportional mit $1 + \tau_1$. Es wird also von Vorteil sein, den Motor mit kleinerem Streufaktor als Motor I zu benutzen, trotz der verhältnismässig stärkeren Verkleinerung des charakteristischen Kreises im Vergleich zum Kreis des Primärmotors. Die Differenz kann übrigens nie bedeutend werden.

Zweiter Fall.

Hauptwiderstände verschieden, Streuwiderstände gleich.

Praktisch ist dieser Fall dann gegeben, wenn z. B. die beiden Luftspalte etwas abweichen. Die Kurzschlussströme bleiben dann trotzdem in weiten Grenzen konstant¹⁾, während die Leerströme verschieden werden.

Gehen wir nun zu diesem entgegengesetzten Grenzfall über, d. h. dass die magnetischen Widerstände der beiden Hauptfelder ρ verschieden, die der beiden Streufelder ρ_s jedoch gleich sind, so erkennen wir, dass die Ueberlegungen, welche auf S. 4 ff. zum Felddiagramm Fig. 5 geführt haben, auch hier Geltung behalten müssen.

Die Gleichheit der magnetischen Streuwiderstände hat zur Folge, dass die durch den Belastungsstrom i_2 gebildeten Streufelder n_2 in allen Belastungswerten, also auch bei Leerlauf und Kurzschluss, einander gleich sein müssen. Dies führt bei Kurzschluss (Fig. 8) wieder auf die Halbierung von $N = \overline{C_0 B}$ also

$$\overline{C_0 M'} = \overline{M' B} = \frac{1}{2} N.$$

¹⁾ Vgl. Breslauer, Ztschr. f. El. 1903, Heft 3.

Bei Leerlauf ist die Lage von C_0' so zu bestimmen, dass wieder der Magnetisierungsstrom von Motor II in diesem das gleiche Streufeld $\tau_2 N_2$ erzeugt, wie in Motor I, d. h.

$$\overline{C_0 C_0'} = \overline{C_0' D_0} = \tau_2 N_2 = \tau_2 (N - \tau_2 N_2),$$

woraus

$$N_2 (1 + \tau_2) = N$$

oder

$$N_2 = \frac{1}{1 + \tau_2} N,$$

folglich

$$\overline{C_0 C_0'} = \overline{C_0' D_0} = \frac{\tau_2}{1 + \tau_2} N = \frac{\alpha \tau_1}{1 + \alpha \tau_1} N,$$

wenn wieder $\alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1}$ gesetzt wird.

Wir erkennen, dass der so gefundene Punkt C_0' gegenüber dem zuletzt besprochenen Fall gleicher magnetischer Hauptwiderstände dadurch verschieden ist, dass, wenn $\tau_2 < \tau_1$ die Strecke $C_0 C_0'$ ebenfalls kleiner wird. Während vorher Gleichung 1, S. 18

$$\overline{C_0 C_0'} = \frac{\tau_1}{1 + \tau_1} N$$

gewesen war, wird jetzt

$$\overline{C_0 C_0'} = \frac{\alpha \tau_1}{1 + \alpha \tau_1} N. (17)$$

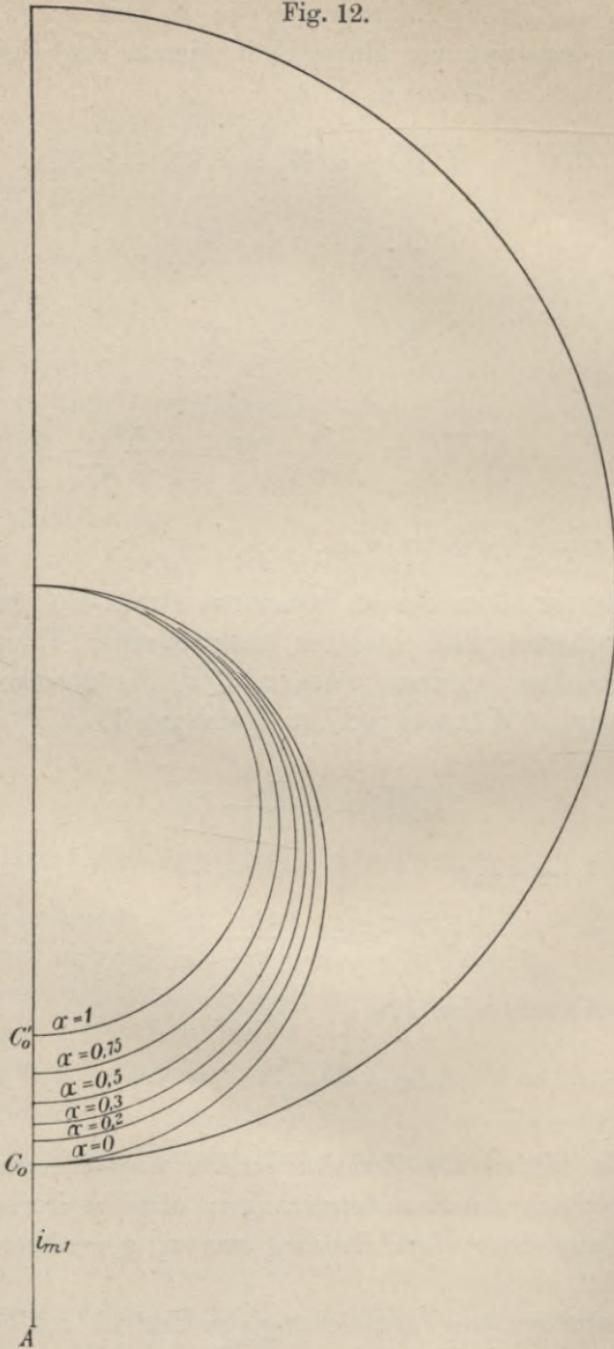
Das Verhältnis wird also

$$\alpha \cdot \frac{1 + \tau_1}{1 + \alpha \tau_1}.$$

Natürlich bilden alle Zwischenpunkte wieder einen Kreis, was aus den bisherigen Auseinandersetzungen ohne weiteres hervorgeht, und die Wirkung einer Verkleinerung von τ_2 gegenüber τ_1 erkennen wir aus Fig. 12.

Charakteristisch bei Vergleichung von Fig. 11 mit Fig. 12 ist die Thatsache, dass die Verkleinerung des Hauptwiderstandes bei weitem nicht den Einfluss auf die Ueberlastbarkeit auszuüben vermag wie die Vergrößerung des Streuwiderstandes. In Fig. 11 erreichten wir im Grenzfall $\tau_2 = \infty$ fast eine Verdoppelung des maximalen Drehmomentes, in Fig. 11 sehen wir, dass das maximale Drehmoment der Kaskade höchstens gleich dem normalen Drehmoment des Motors I werden kann.

Fig. 12.



Wir erhalten in unserm vorliegenden Falle

$$2\bar{i}_w = \frac{1}{2} N - \overline{C_0 C_0'} = N \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha \tau_1}{1 + \alpha \tau_1} \right)$$

oder

$$2\bar{i}_w = \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha \tau_1}{1 + \alpha \tau_1} N \dots \dots \dots (18)$$

Wieder ist die Frage von Interesse, welcher der beiden Motoren am vorteilhaftesten direkt ans Netz anzuschliessen ist. Wir erhalten aus Gleichung 18 unter Einsetzung von

$$N = \frac{1 + \alpha \tau_1}{\alpha \tau_1} i_{m1}$$

die Beziehung

$$2\bar{i}_w = \frac{1}{2} \frac{1 - \alpha \tau_1}{\alpha \tau_1} i_{m1} = \frac{1}{2} \frac{1 - \tau_2}{\tau_2} i_{m1};$$

vertauschen wir die beiden Motoren, so wird

$$2\bar{i}_w' = \frac{1}{2} \frac{1 - \tau_1}{\tau_1} \alpha i_{m1}.$$

Wir erhalten also als Verhältnis der Kippmomente

$$\frac{2\bar{i}_w}{2\bar{i}_w'} = \frac{1 - \alpha \tau_1}{1 - \tau_1} \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1 - \tau_2}{1 - \tau_1} \frac{\tau_1^2}{\tau_2^2}.$$

Dieser Ausdruck zeigt im Gegensatze zu Früherem, dass umgekehrt wesentliche Vorteile erzielt werden, wenn der Motor mit schlechterem Streufaktor ans Netz geschaltet wird. Die Differenz in der Ueberlastungsfähigkeit kann sogar sehr bedeutend werden: ist z. B., wie in unserm Zeichnungsbeispiele, $\tau_1 = 0,12$, $\tau_2 = 0,09$, so wird das Verhältnis der Kippmomente:

$$\frac{2\bar{i}_w}{2\bar{i}_w'} = 1,84,$$

d. h. fast doppelt so gross.

Dritter Fall.

Hauptwiderstände verschieden, Streuwiderstände verschieden.

Alle übrigen Fälle liegen nun zwischen diesen beiden und der allgemeinste Fall ist der, wo sowohl Haupt- als auch Streuwiderstand der beiden Motoren von einander abweichen: d. h.

$$\begin{aligned} \rho' &= a \rho \\ \rho_s' &= b \rho_s'. \end{aligned}$$

Im allgemeinen wird also

$$n_2 \lesseqgtr n_2'$$

und daher wird unter allen Umständen das Felddiagramm Fig. 8 Geltung behalten; die Umdeutung desselben auf Strommassstab wird jedoch gegenüber Fig. 9 geändert werden müssen.

Es wird jetzt bedeuten:

$\rho_1 =$ magnetischer Widerstand des Hauptfeldes von Motor I

$\rho_2 =$ " " " " " " " " II

$\rho_{s1} =$ Streuwiderstand von Motor I

$\rho_{s2} =$ " " " " " " " " II

$\tau_1 = \frac{\rho_1}{\rho_{s1}} =$ Streufaktor von Motor I

$\tau_2 = \frac{\rho_2}{\rho_{s2}} =$ " " " " " " " " II, wobei jetzt ganz im all-

gemeinen

$$\rho_1 \lesssim \rho_2,$$

$$\rho_{s1} \lesssim \rho_{s2},$$

$$\tau_1 \lesssim \tau_2.$$

Das Stromdiagramm lässt sich sofort entwerfen, sobald alle Punkte auf der Linie \overline{AB} , d. h. die Strecken $\overline{AC_0}$, $\overline{C_0C_0'}$, $\overline{C_0'D_0}$, $\overline{C_0'M'}$ und \overline{AB} selbst festgelegt sind.

Strom- bzw. Ampèrewindungszahl und Feldstärke sind aber durch das allgemeine Grundgesetz des magnetischen Kreises verbunden.

$$\text{Kraftlinienzahl} = \frac{\text{Ampèrewindungszahl}}{\text{Magnet. Widerstand}}.$$

Dementsprechend werden alle Streufelder, das sind $\overline{AC_0}$, $\overline{C_0C_0'}$ und $\overline{C_0'D_0}$, sich aus der Beziehung

$$\frac{\text{Magnetisierungsstrom}}{\text{Streuwiderstand}}$$

ergeben, während die Hauptfelder $\overline{AB} = N_1$, $\overline{C_0B} = N$, $\overline{C_0'B} = N_2$ (bei Leerlauf) und $\overline{D_0B} = N_3$ (bei Leerlauf) sich ergeben aus

$$\frac{\text{Magnetisierungsstrom}}{\text{Widerstand des Hauptfeldes}}.$$

Wir erhalten daher:

$$\overline{AC_0} = \tau_1 N_1 = \frac{i_{m1}}{\rho_{s1}}; \quad \dots \dots \dots (18a)$$

ferner

$$\overline{C_0C_0'} = \frac{i_{m2}}{\rho_{s1}}, \quad \dots \dots \dots (19)$$

denn $\overline{C_0C_0'}$ ist dasjenige Streufeld, welches in Motor I durch das Vorhandensein des Magnetisierungsstromes von Motor II bei Leerlauf erzeugt wird, während $\overline{C_0'D_0}$ dasjenige Streufeld ist, welches zwar

durch denselben Magnetisierungsstrom i_{m_2} erzeugt wird, wie vorher $C_0 C_0'$, jedoch in einem andern Widerstande, nämlich im Streuwiderstande von Motor II, daher

$$\overline{C_0' D_0} = \frac{i_{m_2}}{\rho_{s_2}}$$

Gleichzeitig wissen wir, dass $\overline{C_0' D_0}$ das zum Sekundärfeld N_2 gehörige Streufeld sein muss, oder da

$$N_2 = N - \overline{C_0 C_0'}$$

wird

$$\overline{C_0' D_0} = \tau_2 N - \tau_2 \overline{C_0 C_0'} = \tau_2 (1 - \tau_1) \frac{i_{m_1}}{\rho_1} - \tau_2 \overline{C_0 C_0'}$$

Nun verhält sich aber

$$\overline{C_0 C_0'} : \overline{C_0' D_0} = \frac{i_{m_2}}{\rho_{s_1}} : \frac{i_{m_2}}{\rho_{s_2}} = \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}}$$

oder

$$\overline{C_0 C_0'} = \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} \cdot \overline{C_0' D_0}$$

Dies oben eingesetzt, ergibt

$$\overline{C_0' D_0} = \tau_2 (1 - \tau_1) \frac{i_{m_1}}{\rho_1} - \tau_2 \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} \overline{C_0' D_0} = \tau_2 (1 - \tau_1) \frac{i_{m_1}}{\rho_1} - \frac{\rho_2}{\rho_{s_1}} \overline{C_0' D_0}$$

$$\overline{C_0' D_0} = \frac{\tau_2 (1 - \tau_1) \frac{i_{m_1}}{\rho_1}}{1 + \frac{\rho_2}{\rho_{s_1}}} = \frac{\tau_2}{\tau_1} \frac{1 - \tau_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} i_{m_1}$$

$$\overline{C_0' D_0} = \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \tau_2 \frac{i_{m_1}}{\rho_1} \dots \dots \dots (20)$$

und hieraus wegen

$$\overline{C_0' D_0} = \frac{i_{m_2}}{\rho_{s_2}} = \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \tau_2 \frac{i_{m_1}}{\rho_1}$$

$$i_{m_2} = \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \frac{\rho_2}{\rho_1} i_{m_1} \dots \dots \dots (21)$$

Damit sind die Punkte A, C₀, C₀', D₀'' bereits festgelegt. Die Strecke \overline{AB} gewinnen wir aus

$$\overline{AB} = N_1 = \frac{i_{m_1}}{\rho_1}$$

und den Punkt M' daraus, dass die Strecke

$$\overline{C_0 B} = N$$

durch ihn im Verhältnis

$$\overline{C_0 M'} : \overline{M' B} = \rho_{s_2} : \rho_{s_1}$$

geteilt werden muss.

Hieraus ergibt sich, dass

$$\overline{C_0 M'} = \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} \overline{M' B} = \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} N - \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} \overline{C_0 M'}$$

und

$$\overline{C_0 M'} = \frac{1}{1 + \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}}} \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} N = \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1} + \rho_{s_2}} N = \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1} + \rho_{s_2}} (1 - \tau_1) N_1 \quad (22)$$

oder

$$\begin{aligned} \overline{A M'} &= \overline{C_0 M'} + \overline{A C_0} = \left(\frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1} + \rho_{s_2}} (1 - \tau_1) + \tau_1 \right) N_1 \\ &= \left(\frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1} + \rho_{s_2}} - \tau_1 \frac{\rho_{s_2} - \rho_{s_1} - \rho_{s_2}}{\rho_{s_1} + \rho_{s_2}} \right) N_1 \\ &= \frac{\rho_{s_2} + \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_{s_2}} \frac{i_{m_1}}{\rho_1} \dots \dots \dots (23) \end{aligned}$$

Die wichtigste Grösse, den Durchmesser des charakteristischen Kreises, aus welchem das maximale Drehmoment folgt, erhält man aus Gleichung 22 und 21.

$$\begin{aligned} \overline{C_0' M'} &= \overline{C_0 M'} - \overline{C_0 C_0'} = N_1 \left(\frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_{s_2}} \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} - \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \frac{\rho_2}{\rho_{s_1}} \right) \\ &= \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1}} N_1 \frac{(\rho_{s_1} + \rho_2) \rho_{s_2} - (\rho_{s_1} + \rho_{s_2}) \rho_2}{(\rho_{s_1} + \rho_{s_2}) (\rho_{s_1} + \rho_2)} \\ &= \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1}} \cdot \frac{\rho_{s_1} \rho_{s_2} + \rho_2 \rho_{s_2} - \rho_2 \rho_{s_1} - \rho_2 \rho_{s_2}}{(\rho_{s_1} + \rho_{s_2}) (\rho_{s_1} + \rho_2)} N_1 \\ &= \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1}} \frac{\rho_{s_1} (\rho_{s_2} - \rho_2)}{(\rho_{s_1} + \rho_{s_2}) (\rho_{s_1} + \rho_2)} N_1 \end{aligned}$$

und hieraus:

$$\overline{C_0' M'} = \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \cdot \frac{\rho_{s_2} - \rho_2}{\rho_{s_2} + \rho_{s_1}} \cdot \frac{i_{m_1}}{\rho_1} \dots \dots \dots (24)$$

Erinnern wir uns nun noch, dass der Strom, welcher $\overline{C_0 M'}$ entspricht, auf den Streuwiderstand ρ_{s_1} von Motor I zu wirken hat, so sehen wir, dass dem Felde $\overline{C_0' M'}$ der Strom

$$\overline{C_0' M'} \cdot \rho_{s_1} = 2 \overline{i_w}$$

entsprechen muss, und deshalb

$$2 \overline{i_w} = \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \cdot \frac{\rho_{s_2} - \rho_2}{\rho_{s_2} + \rho_{s_1}} \frac{1}{\tau_1} i_{m_1} \dots \dots \dots (25)$$

Wir erhalten ferner den gesamten Magnetisierungsstrom in der Kaskade aus Gleichung 21:

$$i_m = i_{m_1} + i_{m_2} = i_{m_1} \left(1 + \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \\ = \frac{\rho_1 \rho_{s_1} + \rho_2 \rho_1 + \rho_2 \rho_{s_1} - \rho_2 \rho_1}{\rho_1 (\rho_{s_1} + \rho_2)} i_{m_1},$$

woraus

$$i_m = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_{s_1} + \rho_2} \cdot \frac{1}{\tau_1} i_{m_1} \dots \dots \dots (26)$$

Ferner berechnet sich der Kurzschlussstrom i_k der Kaskade aus Gleichung 25 und 26, indem

$$i_k = 2\bar{i}_w + i_m = \frac{(\rho_{s_1} - \rho_1) (\rho_{s_2} - \rho_2) + (\rho_1 + \rho_2) (\rho_{s_2} + \rho_{s_1})}{(\rho_{s_1} + \rho_2) (\rho_{s_2} + \rho_{s_1})} \cdot \frac{1}{\tau_1} i_{m_1} \\ = \frac{\rho_{s_2} \rho_{s_1} - \rho_{s_2} \rho_1 - \rho_2 \rho_{s_1} + \rho_1 \rho_2 + \rho_{s_2} \rho_1 + \rho_{s_2} \rho_2 + \rho_{s_1} \rho_1 + \rho_{s_1} \rho_2}{(\rho_{s_1} + \rho_2) (\rho_{s_2} + \rho_{s_1})} \cdot \frac{1}{\tau_1} i_{m_1} \\ = \frac{\rho_{s_2} (\rho_{s_1} + \rho_2) + \rho_1 (\rho_2 + \rho_{s_1})}{(\rho_{s_1} + \rho_2) (\rho_{s_2} + \rho_{s_1})} \cdot \frac{1}{\tau_1} i_{m_1},$$

und hieraus:

$$i_k = \frac{\rho_{s_2} + \rho_1}{\rho_{s_2} + \rho_{s_1}} \cdot \frac{1}{\tau_1} i_{m_1} \dots \dots \dots (27)$$

Von Bedeutung ist noch das Verhältnis des in der Kaskade auftretenden Magnetisierungsstromes von Motor II: i_{m_2} zu demjenigen Magnetisierungsstrom, welcher bei direktem Anschluss von Motor II an das Netz fließen würde und der mit i'_{m_2} bezeichnet werden soll.

Es müssen sich diese beiden Ströme wie die Felder verhalten, welche von ihnen magnetisiert werden sollen, d. h.

$$i_{m_2}' : i_{m_2} = N_1 : N_2 \\ i_{m_2}' = i_{m_2} \frac{N_1}{N - C_0 C_0'} = i_{m_2} \cdot \frac{N_1}{(1 - \tau_1) N_1 - \frac{i_{m_2}}{\rho_{s_1}}} \\ = i_{m_2} \frac{1}{1 - \tau_1 - \frac{\rho_{s_1} - \rho_1}{\rho_{s_1} + \rho_2} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_{s_2}}} \\ = \frac{\rho_{s_1} (\rho_{s_1} + \rho_2)}{(\rho_{s_1} - \rho_1) (\rho_{s_1} + \rho_2) - (\rho_{s_1} - \rho_1) \rho_2} i_{m_2} \\ i_{m_2}' = \frac{\rho_{s_1} + \rho_2}{\rho_{s_1} - \rho_1} i_{m_2}.$$

Um nun aus diesen Formeln den Rückweg in die physikalische Wirklichkeit zu finden, ist zu bedenken, dass uns weder beim Entwerfen oder Berechnen, noch auch bei der Probe solcher Motoren die

magnetischen Widerstände direkt gegeben sind. Nur das Verhältnis der magnetischen Widerstände lässt sich durch Messung oder Rechnung bestimmen, insofern wir die Magnetisierungs- und Kurzschlussströme beider Motoren, wenn sie an die Netzspannung angelegt sind, berechnen, bzw. messen können. Um also die Formeln praktisch anwendbar zu machen, müssen wir sie derart umformen, dass statt der absoluten Widerstände deren Verhältnisse vorkommen.

Bezeichnen wir wieder mit i'_{m_2} den Magnetisierungsstrom von Motor II, wenn er direkt ans Netz gelegt würde, und entsprechend i'_{k_2} den Kurzschlussstrom unter denselben Voraussetzungen, so ist

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{i'_{m_2}}{i'_{m_1}} = \beta,$$

$$\frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} = \frac{i'_{k_2}}{i'_{k_1}} = \gamma,$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{s_1}} = \frac{i'_{m_1}}{i'_{k_1}} = \tau_1,$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_{s_2}} = \frac{i'_{m_2}}{i'_{k_2}} = \tau_2.$$

Aus diesen Verhältnissen folgt noch:

$$\frac{\rho_2}{\rho_{s_1}} = \beta \tau_1 = \gamma \tau_2$$

und

$$\frac{\rho_1}{\rho_{s_2}} = \frac{\tau_1}{\gamma} = \frac{\tau_2}{\beta}.$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen erhalten wir aus Gleichung 21

$$i_{m_2} = \frac{1 - \tau_1}{1 + \beta \tau_1} \cdot \beta i_{m_1}, \quad \dots \quad (28)$$

aus Gleichung 25:

$$2 i_w^- = \frac{1 - \tau_1}{1 + \beta \tau_1} \cdot \frac{1 - \tau_2}{1 + \gamma \tau_1} \frac{\gamma}{\tau_1} i_{m_1}, \quad \dots \quad (29)$$

aus Gleichung 26:

$$i_m = \frac{1 + \beta}{1 + \beta \tau_1} i_{m_1}, \quad \dots \quad (30)$$

aus Gleichung 28:

$$i_{m_2}' = \frac{1 + \beta \tau_1}{1 - \tau_1} i_{m_2} \quad \dots \quad (31)$$

und endlich der Kurzschlussstrom der Kaskade aus Gleichung 27:

$$i_k = \frac{\gamma + \tau_1}{\gamma + 1} \frac{1}{\tau_1} i_{m_1}. \quad \dots \quad (32)$$

Wenden wir diese letzten Formeln auf unser bisheriges zeichnerisches Beispiel an (Fig. 8), so hatten wir darin:

$$i_{m_1} = 27,3$$

$$\tau_1 = 0,12; \quad i_{k_1} = \frac{i_{m_1}}{\tau_1} = 227$$

$$\tau_2 = 0,09,$$

und setzen fest:

$$i_{m_2}' = 23,$$

woraus

$$i_{k_2} = \frac{i_{m_2}'}{\tau_2} = 255.$$

Also

$$\beta = \frac{i_{m_2}}{i_{m_1}} = \frac{23}{27,3} = 0,84; \quad \beta \tau_1 = 0,101$$

und

$$\gamma = \frac{i_{k_2}'}{i_{k_1}} = \frac{255}{227} = 1,12.$$

Hiemit ist alles gegeben, um das Diagramm für diesen allgemeinsten Fall entwerfen zu können; nämlich:

$$i_{m_2} = \frac{1 - \tau_1}{1 + \beta \tau_1} \beta i_{m_1} = \frac{0,88}{1,101} \cdot 0,84 \cdot 27,3 = 18,3$$

$$2\bar{i}_w = \frac{1 - \tau_1}{1 + \beta \tau_1} \cdot \frac{1 - \tau_2}{1 + \gamma \tau_1} \gamma i_{m_1} = \frac{0,88}{1,101} \cdot \frac{0,91}{2,12} \cdot \frac{1,12}{0,12} \cdot 27,3 = 87$$

$$i_m = \frac{1 + \beta}{1 + \beta \tau_1} i_{m_1} = \frac{1,84}{1,101} \cdot 27,3 = 45,5$$

$$i_k = \frac{\gamma + \tau_1}{\gamma + 1} \frac{1}{\tau_1} i_{m_1} = \frac{1,24}{2,12} \cdot \frac{1}{0,12} \cdot 27,3 = 133.$$

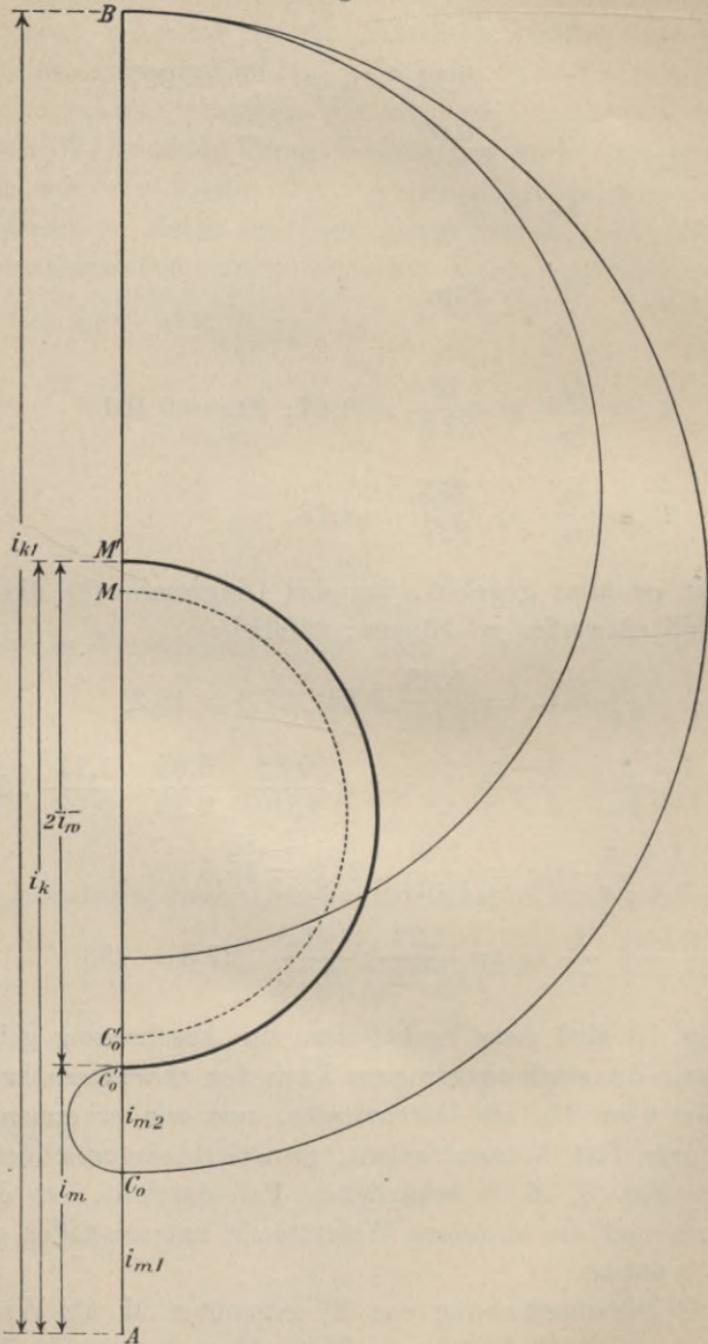
In Fig. 13 sind diese Verhältnisse zur Anschauung gebracht: es bedeutet darin der stark ausgezogene Kreis den charakteristischen Kreis der Kaskade über $2\bar{i}_w$ als Durchmesser, und wir erkennen im Vergleich zu dem fast konzentrischen, punktiert eingezeichneten Kreis, welcher den Fig. 5, S. 9 behandelten Fall darstellt, wo die beiden Streufaktoren und die einzelnen Widerstände untereinander gleich angenommen wurden:

1. Die Hinausschiebung von M' gegenüber M , als Wirkung des vergrößerten Streuwiderstandes in Motor II und dadurch Vergrößerung von i_k ;

2. die Hinunterschiebung von c_0' gegenüber C_0' als Wirkung des verringerten Widerstandes des Hauptfeldes in Motor II und dadurch

Verkleinerung des Gesamtleerstromes i_m bei konstant gebliebenem i_{m1} und i_{k1} .

Fig. 13.



Die praktisch wichtige Frage, welcher der beiden Motoren am vorteilhaftesten direkt ans Netz angeschlossen werden soll, lässt sich hier nicht mehr allgemein beantworten. Prinzipiell lässt sich nur

sagen, dass, wenn der Hauptwiderstand stärker verringert wird als der Streuwiderstand vergrössert, wir uns also dem Fall Fig. 12 nähern, dass dann vorteilhaft der Motor mit grösserer Streuung ans Netz anzuschliessen sein wird.

Ist umgekehrt der Widerstand des Streufeldes wesentlich stärker gewachsen bei einem der beiden Motoren, als der des Hauptfeldes verringert wurde, so nähern wir uns dem Fall Fig. 11, und es wird dann vorteilhafter, wie S. 33 nachgewiesen, den Motor mit geringerer Streuung ans Netz zu schalten.

Das Kriterium bleibt immer die möglichste Vergrösserung des charakteristischen Kreises über $2\bar{i}_w$.

Im Falle der Fig. 13 ist die Untersuchung folgendermassen anzustellen. Schalten wir Motor II ans Netz, so wird

$$\begin{aligned} i_{m_1} &= 23 \\ \tau_1 &= 0,09, \text{ woraus } i_{k_1}' = 256 \\ \tau_2 &= 0,12, \text{ woraus } i_{k_2}' = 227 \\ i_{m_2}' &= 27,3 \end{aligned}$$

daher

$$\beta = \frac{i_{m_2}'}{i_{m_1}} = 1,19; \beta \tau_1 = 0,107$$

und

$$\gamma = \frac{i_{k_2}'}{i_{k_1}} = 0,89.$$

Daraus ergibt sich der gesuchte charakteristische Kreisdurchmesser:

$$\begin{aligned} 2\bar{i}_w &= \frac{1 - \tau_1}{1 + \beta \tau} \frac{1 - \tau_2}{1 + \gamma} \frac{\gamma}{\tau_1} i_{m_1} = \frac{0,91}{1,107} \cdot \frac{0,88}{1,89} \cdot \frac{0,89}{0,09} \cdot 23 \\ 2\bar{i}_w &= 87. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass in diesem Falle es völlig gleichgültig ist, welcher der beiden Motoren zum Anschluss ans Netz bestimmt wird.

Einige durchgerechnete Beispiele lehren überdies, dass auch bei weit übertriebenen Verhältnissen die Differenz, welche aus der verschiedenen Art der Schaltung in der Ueberlastungsfähigkeit $2\bar{i}_w$ der Kaskade hervorgebracht werden kann, wenig ins Gewicht fällt.

Nehmen wir z. B. den obigen Fall nur mit der Aenderung, dass $\tau_2 = 0,06$, während

$$\begin{aligned} i_{m_1} &= 27,3 \\ \tau_1 &= 0,12 \\ i_{m_2}' &= 23 \end{aligned}$$

beibehalten wird, so bekommen wir, wenn der Motor mit grösserer Streuung ans Netz geschaltet wird:

$$2\bar{i}_w = 106,5,$$

im andern Falle dagegen:

$$2\bar{i}_w = 110.$$

Wir sehen somit, dass trotz dieser extremen Verhältnisse $\left[\tau_2 = \frac{1}{2} \tau_1 \right]$ der Unterschied nur $3\frac{1}{2}\%$ beträgt, was auf dieselben Gründe, wie auf S. 30 dargelegt, zurückzuführen ist, und daher können wesentliche Fehler nach dieser Richtung nicht gemacht werden.

Wie in allen bisher besprochenen Fällen, sehen wir auch hier, dass das Diagramm über AM' allein genügt, um alle wesentlichen Eigenschaften der Kaskade davon abzuleiten, und es bleibt daher Fig. 10, richtig interpretiert, das allein notwendige Diagramm, welches in Betracht zu ziehen ist.

Wir richten nunmehr die Untersuchung auf die Aenderungen, welche dieses Diagramm erfährt, wenn die Windungszahlen

$$m_2 \geq m_2',$$

d. h. die Motoren verschieden gewickelt und ganz verschieden dimensioniert sind.

C. Kaskadenschaltung zweier Motoren mit verschiedenen magnetischen Widerständen und verschiedener Windungszahl.

Verschiedene Windungszahl bedeutet natürlich verschieden grosses Feld, daher verschieden grosse Eisendimensionen, also auch zwei ganz verschieden grosse Motoren.

Bei der nachstehenden Behandlung sollen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Verschiedene Windungszahl bei gleichen magnetischen Widerständen

$$w_1 \geq w_2; \tau_1 = \tau_2,$$

2. Verschiedene Windungszahl bei verschieden magnetischen Widerständen

$$w_1 \geq w_2; \rho_1 \leq \rho_2; \rho_{s_1} \leq \rho_{s_2}; \tau_1 \leq \tau_2.$$

Erster Fall.

Windungszahlen verschieden, Streufaktoren gleich.

Bei Leerlauf erhalten wir wieder in Motor I ein Feld N_1 , von welchem zunächst ein Teil τN_1 durch das Streufeld, das von i_{m_1} erzeugt wird, verloren geht. Im Sekundärteil von Motor I bleibt das Feld

$$N = (1 - \tau) N_1$$

übrig; dieses erzeugt hier eine E.M.K., welche in Motor II äquilibriert werden muss dadurch, dass dort ein Feld N_2 von entsprechender Grösse entsteht. Es ist jedoch, wie bisher, wieder zu beachten, dass N_2 um dasjenige Streufeld kleiner ist als N , welches der zu N_2 gehörige Magnetisierungsstrom i_{m_2} im Motor I hervorruft. Der Unterschied gegen alle bisherigen Betrachtungen besteht nur darin, dass dieses N_2 eine doppelte Bedeutung erhält, je nachdem es als Primärfeld von Motor II oder als Sekundärfeld von Motor I betrachtet wird. Da wir vorausgesetzt haben, dass die Windungszahl w_1 des Sekundärteils von Motor I grösser sein soll als die Windungszahl w_2 des Primärteils von Motor II, so wird, um das auszugleichen, das notwendige Gesamtfeld N_2 von Motor II entsprechend grösser sein müssen, also

$$N_2' = \frac{w_1}{w_2} N_2.$$

Der zugehörige Magnetisierungsstrom wächst aber, da die magnetischen Widerstände beider Motoren einander gleich gesetzt wurden, nicht bloss infolge des Anwachsens dieses Feldes im Verhältnis N_2 zu N_2' , also auf das $\frac{w_1}{w_2}$ -fache, sondern wegen der verringerten Windungszahl in Motor II im quadratischen Verhältnisse um das $\left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2$ -fache. Im gleichen Masse wächst aber auch, da dieser selbe so erhöhte Strom den Sekundärteil von Motor I durchfliesst, in diesem das Leerlaufstreufeld um

$$\overline{C_0 C_0'} = \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \tau (N - \overline{C_0 C_0'})$$

oder

$$\overline{C_0 C_0'} = \frac{1}{1 + \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \tau} \left(\frac{w_1}{w_2}\right)^2 \tau N;$$

oder auch, wenn

$$\frac{w_1}{w_2} = \zeta,$$

$$\overline{C_0 C_0'} = \frac{\zeta^2 \tau}{1 + \zeta^2 \tau} N. \quad \dots \quad (33)$$

Um nun das Leerlaufstreufeld $\overline{C_0' D_0}$ von Motor II zu erhalten, läge es nahe, dieses im Verhältnis

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{\zeta}$$

kleiner zu setzen als $\overline{C_0 C_0'}$, da ja die Windungszahl, durch welche es erzeugt wird, in diesem Verhältnis geringer ist, der durch sie hindurchfließende Strom i_2 aber derselbe. Wir müssen jedoch bedenken, dass wir nur solche Felder miteinander vergleichen können, welche proportionale elektromotorische Kräfte verursachen; von diesem Standpunkt erscheint dieses Streufeld $\overline{C_0' D_0}$ noch einmal im Verhältnis $\frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{\zeta}$ verkleinert, da es ja auf die um $\frac{1}{\zeta}$ verringerte Windungszahl des Motors II zu wirken hat. Diese Ueberlegung lehrt, dass

$$\overline{C_0' D_0} = \frac{1}{\zeta^2} \overline{C_0 C_0'} = \frac{\tau}{1 + \zeta^2 \tau} N \quad \dots \quad (34)$$

sein muss.

Dieses Verhältnis gilt nun aber nicht bloss bei Leerlauf, sondern bei jedem beliebigen andern Strom, weil überall dieselbe Ueberlegung stattfindet. — Wieder muss also die Strecke $\overline{C_0 D}$ unter jedem beliebigen Winkel durch den Punkt C so geteilt werden, dass

$$\overline{C_0 C} : \overline{CD} = \zeta^2,$$

und dieser Bedingung entsprechen abermals (Fig. 14) die beiden Kreise über $\overline{C_0' M'}$ und $\overline{D_0 B}$.

In dieser Figur ist wieder

$$\overline{AB} = N_1$$

$$\overline{BC_0} = N = (1 - \tau) N_1$$

$$\overline{AC_0} = \tau N_1 = \frac{\tau}{1 - \tau} N,$$

ferner folgen die Punkte C_0' und D_0 aus Gleichung 33 und 34 und M' aus der Bedingung

$$\overline{C_0 M'} : \overline{M' B} = \zeta^2,$$

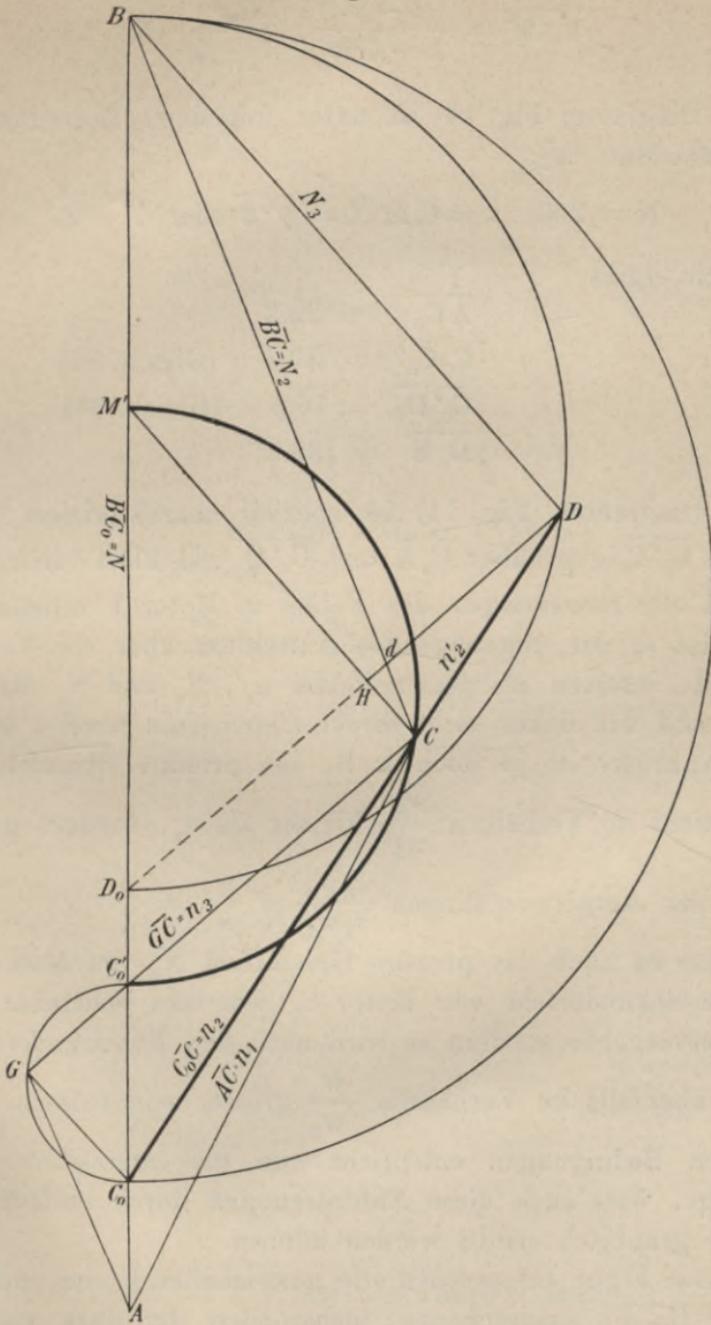
woraus

$$\overline{C_0 M'} = \zeta^2 (N - \overline{C_0 M'}),$$

oder

$$\overline{C_0 M'} = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} N. \quad \dots \quad (35)$$

Fig. 14.



Endlich noch der Kreisdurchmesser

$$\begin{aligned} \overline{C_0'M'} &= \overline{C_0M'} - \overline{C_0C_0'} = \left(\frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} - \frac{\zeta^2\tau}{1 + \zeta^2\tau} \right) N \\ &= \frac{1 + \zeta^2\tau - \tau - \zeta^2\tau}{(1 + \zeta^2)(1 + \zeta^2\tau)} \zeta^2 N \end{aligned}$$

und

$$\overline{C_0'M'} = \frac{1 - \tau}{1 + \zeta^2 \tau} \cdot \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} N. \quad \dots \quad (36)$$

Das Diagramm Fig. 14 ist unter folgenden Bedingungen konstruiert [Massstab $\frac{2}{3}$]:

$$N = 200; \quad \tau = 0,1; \quad \zeta = \sqrt{2} \text{ oder } \zeta^2 = 2,$$

woraus sich ergibt

$$\begin{aligned} \overline{AC_0} &= 22,2 \\ \overline{C_0C_0'} &= 33,4 \quad (\text{Gleich. 33}) \\ \overline{C_0'D_0} &= 16,6 \quad (\text{Gleich. 34}) \\ \overline{D_0B} &= 133. \end{aligned}$$

Das Diagramm (Fig. 14) ist speziell charakterisiert durch die Grösse von $\overline{C_0'C_0}$ gegenüber $\overline{C_0A}$ und $\overline{C_0'D}$ und klärt durch den Kreis über $\overline{C_0'M'}$ die Beziehungen des Feldes in Motor I vollständig auf; dagegen gibt es nur ungenügenden Aufschluss über die Verhältnisse in Motor II, insofern als dessen Felder n_2' , N_3 und N_2 massstäblich verändert sind und daher nicht direkt abgemessen werden können.

In Wahrheit ist ja doch z. B. das primäre Streufeld n_2' von Motor II nicht im Verhältnis $\frac{w_2^2}{w_1^2}$ kleiner als n_2 , sondern genau entsprechend den Ampèrewindungen $\frac{i_2 w_2}{i_2 w_1} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{\zeta}$.

Ebenso ist auch das primäre Gesamtfeld N_2 von Motor II nicht gleich dem Sekundärfeld von Motor I, wie dies scheinbar aus der Fig. 14 hervorgeht, sondern es wird nach den Auseinandersetzungen auf S. 44 ebenfalls im Verhältnis $\frac{w_1}{w_2}$ grösser sein müssen.

Diesen Bedingungen entspricht nun die interessante Fig. 15, welche zeigt, dass auch diese Anforderungen durch einfachste Konstruktionen graphisch erfüllt werden können.

In dieser Figur entsprechen alle gestrichelten Kreise und Geraden dem Motor II, die ausgezogenen, insbesondere der stark ausgezogene charakteristische Kreis, dem Motor I.

Vergrössern wir nämlich, wie vorher angegeben, die Strecke \overline{CD} auf $\overline{CD'}$, d. h. auf das wahre Streufeld des Motors II

$$n_2' = \overline{CD'} = \zeta \cdot \overline{CD} = \frac{1}{\zeta} n_2,$$

und

$$\overline{C_0 M} = \frac{1}{\zeta} \overline{M F};$$

2. Punkt B'' dagegen einen kleineren Kreis über Durchmesser $\overline{F B'}$ durchläuft, wo B' dadurch gegeben ist, dass

$$\overline{B' D_0'} = \zeta \cdot \overline{B D_0}.$$

Denn dieser Kreis über $\overline{F B'}$ erfüllt die Bedingung, dass die Strecke $\overline{C B''}$ jeweils durch den Punkt B im Verhältnis

$$\overline{C B} : \overline{C B''} = \overline{C' B} : \overline{C' B'} = 1 : \zeta$$

geteilt wird. Die Erfüllung der Bedingung, welche hierzu erforderlich ist, nämlich dass die Durchmesser $\overline{F B'}$ und $\overline{M C'}$ der beiden in Betracht kommenden Kreise sich wie die ihnen benachbarten Abschnitte der Verbindungslinie $\overline{M F}$ verhalten müssen, geht aus folgender Zusammenstellung, welche zur Konstruktion des Diagramms erforderlich ist, hervor:

Es ist

$$\overline{A C_0} = \tau N_1 = \frac{\tau}{1 - \tau} N,$$

$$\overline{C_0 C'} = \frac{\zeta^2 \tau}{1 + \zeta^2 \tau} N \text{ nach Gleichung 33,}$$

$$\overline{C' D_0} = \frac{\tau}{1 + \zeta^2 \tau} N \text{ nach Gleichung 34,}$$

$$\overline{C_0 M} = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} N \text{ nach Gleichung 35,}$$

hieraus

$$\overline{M B} = \left(1 - \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} \right) N = \frac{1}{1 + \zeta^2} N,$$

$$\overline{C' M} = \frac{1 - \tau}{1 + \zeta^2 \tau} \cdot \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} N \text{ nach Gleichung 36,}$$

$$\overline{C' B} = N - \overline{C_0 C'} = \frac{1}{1 + \zeta^2 \tau} N,$$

$$\overline{D_0 B} = \overline{C' B} - \overline{C' D_0} = \frac{1 - \tau}{1 + \zeta^2 \tau} N,$$

ferner als neu hinzutretende Bedingungen:

$$\overline{C' D_0'} = \frac{1}{\zeta} \overline{C_0 C'} = \frac{\zeta \tau}{1 + \zeta^2 \tau} N, \dots \dots \dots (37)$$

$$\overline{C' B'} = \zeta \cdot \overline{C' B} = \frac{\zeta}{1 + \zeta^2 \tau} N, \dots \dots \dots (38)$$

woraus

$$\overline{BB'} = \overline{C'B'} - \overline{C'B} = \frac{\zeta - 1}{1 + \zeta^2 \tau} N, \dots \dots \dots (39)$$

ferner

$$\overline{MF} = \frac{1}{\zeta} \overline{C_0 M} = \frac{\zeta}{1 + \zeta^2} N, \dots \dots \dots (40)$$

woraus

$$\overline{BF} = \overline{MF} - \overline{MB} = \frac{\zeta - 1}{1 + \zeta^2} N, \dots \dots \dots (41)$$

endlich

$$\overline{FB'} = \overline{BB'} - \overline{BF} = \frac{1 - \tau}{1 + \zeta^2 \tau} \cdot \frac{\zeta^2 (\zeta - 1)}{1 + \zeta^2} N. \dots (42)$$

Aus dieser Zusammenstellung geht hervor, dass

$$\overline{FB'} : \overline{BF} = \frac{1 - \tau}{1 + \zeta^2 \tau} \cdot \frac{\zeta^2 (\zeta - 1)}{1 + \zeta^2} : \frac{\zeta - 1}{1 + \zeta^2} = \frac{\zeta^2 (1 - \tau)}{1 + \zeta^2 \tau},$$

während

$$\overline{C_0' M} : \overline{MB} = \frac{1 - \tau}{1 + \zeta^2 \tau} \cdot \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2} : \frac{1}{1 + \zeta^2} = \frac{\zeta^2 (1 - \tau)}{1 + \zeta^2 \tau},$$

somit ist die obige Bedingung erfüllt, wonach

$$\overline{FB'} : \overline{BF} = \overline{C_0' M} : \overline{MB}$$

sein sollte.

Das Diagramm Fig. 15 ist unter der Bedingung entworfen, dass die Zahl der Sekundärwindungen von Motor I $\sqrt{2}$ mal so gross ist als die Primärwindungen von Motor II, d. h.

$$\zeta = \frac{w_1}{w_2} = \sqrt{2},$$

ferner

$$N = 150; \tau = 0,1,$$

woraus sich nach obigen Formeln 33 bis 42 ergab:

$$\overline{C_0 C'} = 25, \overline{C' D_0} = 12,5, \overline{C_0' M} = 75, \overline{FB'} = 31, \overline{BB'} = 51,8.$$

Nachdem somit das Felddiagramm auch für diesen Fall in aller Vollständigkeit festgelegt ist, handelt es sich noch darum, dieses, um es praktisch brauchbar zu gestalten, auf das Diagramm der Ströme zu reduzieren.

Hierbei werden wir das Novum in Rücksicht zu ziehen haben, dass, während bei allen bisher in Betracht gezogenen Fällen Strom und magnetische Kraft, bezw. Ampèrewindungszahl in beiden Motoren

proportional gesetzt werden durfte, dies jetzt wegen der Verschiedenheit der Windungszahl nicht mehr zulässig ist. — Wir umgehen die dadurch hervorgerufene Komplikation am einfachsten dadurch, dass wir nicht das Stromdiagramm, sondern das Diagramm der Ampèrewindungen zu entwerfen suchen.

Dann erkennen wir aber, dass durch das Felddiagramm (Fig. 15) auch gleichzeitig das Strom- bzw. Ampèrewindungsdiagramm gegeben ist, da wir die magnetischen Widerstände in beiden Motoren als gleich angenommen hatten. Wählen wir also den Massstab so, dass

$$\overline{AB} = i_{1k},$$

so wird

$$\overline{AC_0} = \tau \cdot i_{1k} = i_m,$$

$$\overline{AM} = i_k = \frac{\zeta^2 + \tau}{\zeta^2 + 1} i_{1k}$$

$$\overline{C_0 C_0'} = i_{m_2} = \frac{\zeta^2 \tau (1 - \tau)}{1 + \zeta^2 \tau} i_{1k}$$

$$\overline{AC_0'} = i_m = \frac{1 + \zeta^2}{1 + \tau \zeta^2} \tau \cdot i_{1k}$$

$$\overline{C_0' M} = 2 \overline{i_w} = \frac{\zeta^2}{(1 + \zeta^2 \tau)(1 + \zeta^2)} i_{1k}.$$

Damit ist alles vorbereitet, um die Entscheidung über das Verhältnis der von den beiden Motoren entwickelten Drehmomente treffen zu können. Dieses ergibt sich allgemein aus dem Produkt: Feld \times Ampèrewindungszahl, wird also offenbar, wenn $\overline{ED'} \perp \overline{CB''}$ und $\overline{C_0 E'} \perp \overline{CB''}$, dargestellt für Motor I durch

$$D_1 = \overline{C_0 E'} \cdot N_2,$$

weil $\overline{C_0 E'}$ die Wattkomponente des Sekundärstroms i_2 in Beziehung auf das Sekundärfeld N_2 von Motor I; wir können auch schreiben

$$D_1 = N_2 \cdot i_2 \cdot \sin(N_2, i_2).$$

Das Drehmoment von Motor II wird im gleichen Massstab dargestellt durch die Wattkomponente $\overline{ED'}$ der primären Ampèrewindungen $\overline{CD'}$ von Motor I und das zugehörige Feld $\overline{CB''}$. Nun ist

$$\overline{CD'} = \frac{1}{\zeta} \cdot \overline{C_0 C} = \frac{1}{\zeta} i_2,$$

folglich

$$\overline{ED'} = \overline{CD'} \sin(N_2, i_2) = \frac{1}{\zeta} i_2 \sin(N_2, i_2);$$

und ferner

$$\overline{CB''} = \zeta \cdot \overline{BC} = \zeta \cdot N_2,$$

somit

$$D_2 = \zeta N_2 \cdot \frac{1}{\zeta} i_2 \cdot \sin(N_2, i_2')$$

$$= N_2 \cdot i_2 \cdot \sin(N_2, i_2')$$

Wieder erhalten wir das hier ganz besonders überraschende und auffallende Resultat

$$D_1 = D_2,$$

d. h. beide Motoren, wenn auch noch so verschieden in Dimensionierung und Wicklung, ergeben in Kaskadenschaltung das gleiche Drehmoment.

Wohl kann also unter Umständen die Leistungsfähigkeit der Kaskade erhöht werden, wenn wir als Motor II einen solchen von höherem Drehmoment wählen, dagegen verteilen sich die Drehmomente immer zu gleichen Teilen.

Und abermals finden wir, dass zur völligen Charakterisierung aller Verhältnisse der kleine, stark ausgezogene Kreis über $\overline{C_0}'M$ völlig ausreicht und das Diagramm daher ebenso vereinfacht werden kann, wie alle vorangegangenen.

Zweiter Fall.

Windungszahlen verschieden, magnetische Widerstände verschieden.

Endlich haben wir noch den allgemeinsten Fall zweier in der Wicklung sowohl als auch in den magnetischen Widerständen beliebig abweichender Motoren zu betrachten. Also

$$\rho_1 \gtrless \rho_2 \quad \text{und zwar} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \beta = \frac{i_{m_2}'}{i_{m_1}}$$

$$\rho_{s_1} \gtrless \rho_{s_2} \quad " \quad " \quad \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}} = \gamma = \frac{i_{k_2}'}{i_{k_1}}$$

$$w_1 \gtrless w_2 \quad " \quad " \quad \frac{w_1}{w_2} = \zeta;$$

hieraus

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_1}{\rho_{s_1}} &= \frac{i_{m_1}}{i_{k_1}} = \tau_1 \\ \frac{\rho_2}{\rho_{s_2}} &= \frac{i_{m_2}'}{i_{k_2}'} = \tau_2 \\ \frac{\rho_2}{\rho_{s_1}} &= \beta \tau_1 = \gamma \tau_2 \\ \frac{\rho_1}{\rho_{s_2}} &= \frac{\tau_1}{\gamma} = \frac{\tau_2}{\beta} \end{aligned} \right\} \text{vgl. S. 38.}$$

Das Verhältnis der Streufelder n_2 und n_2' (Fig. 15) ist in diesem Falle durch zwei Faktoren bestimmt. Durch das Verhältnis der Windungszahlen $\frac{w_1}{w_2} = \zeta$ und durch das Verhältnis der Streuwiderstände. Der grössere Motor, also derjenige mit der geringeren Windungszahl w_2 wird im allgemeinen auch den grösseren Streuwiderstand ρ_{s_2} haben. Daher wird das wirkliche primäre Streufeld von Motor II im Verhältnis

$$\frac{w_2}{w_1} \cdot \frac{\rho_{s_1}}{\rho_{s_2}} = \frac{1}{\zeta \gamma}$$

kleiner werden, als das sekundäre Streufeld n_2 von Motor I. Es tritt jedoch auch hier wieder die Ueberlegung hinzu, dass wir zunächst nicht mit dem wirklich auftretenden Streufeld von Motor II rechnen dürfen, sondern mit dem auf die Windungszahl von Motor I reduzierten, weil im Diagramm nur solche Felder miteinander verglichen werden können, welche proportionale Spannungen ergeben (vgl. S. 44).

Das schon im Verhältnis $\frac{w_2}{w_1}$ verkleinerte Streufeld wirkt ausserdem

noch auf eine im selben Verhältnis $\frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{\zeta}$ verringerte Windungszahl, kann also erst nach Reduktion mit dem Faktor $\frac{1}{\zeta^2}$ ins Diagramm eingeführt werden.

Es wird daher das im Diagramm zum Ausdruck kommende reduzierte Streufeld

$$n_2' = \frac{1}{\zeta^2 \gamma} n_2$$

sein müssen.

Dies Verhältnis gilt durchgängig, also auch bei Kurzschluss und Leerlauf, wir haben daher im Felddiagramm:

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MC_0}} = \frac{\overline{D_0 C_0'}}{\overline{C_0' C_0}} = \frac{1}{\zeta^2 \gamma}$$

Da $\overline{AB} = N_1$ und $\overline{AC_0} = \tau_1 N_1$, somit $\overline{C_0 B} = N = (1 - \tau_1) N_1$ gegeben ist, so ist das Felddiagramm damit ebenfalls gegeben.

Notwendig ist jedoch hier wieder die Umdeutung des Felddiagramms auf das Stromdiagramm (vgl. S. 34), unter Benutzung der Beziehung

$$\text{Feld} = \frac{\text{Ampèrewindungen}}{\text{Magnet. Widerstand}}$$

Danach werden wir erhalten

$$i_{m_1} = \overline{A C_0} \cdot \rho_{s_1} = \tau_1 N_1 \cdot \rho_{s_1} = \rho_1 N_1 = \frac{\rho_1}{1 - \tau_1} N, \quad \dots \quad (43)$$

ferner

$$i_{m_2} = \overline{C_0 C_0'} \cdot \rho_{s_1},$$

oder wegen

$$\overline{C_0' D_0} = \tau_2 \cdot (N - \overline{C_0 C_0'}) = \frac{1}{\zeta^2 \gamma} \cdot \overline{C_0 C_0'},$$

woraus

$$\overline{C_0 C_0'} = \frac{\tau_2}{\tau_2 + \frac{1}{\zeta^2 \gamma}} N = \frac{\tau_2 \zeta^2 \gamma}{1 + \tau_2 \zeta^2 \gamma} N$$

und

$$i_{m_2} = \frac{\zeta^2 \tau_2}{1 + \zeta^2 \tau_2 \gamma} \rho_{s_2} N = \frac{\zeta^2}{1 + \zeta^2 \tau_2 \gamma} \rho_2 N$$

oder wegen

$$\rho_2 = \beta \rho_1 = \beta \frac{i_{m_1}}{N_1} = \beta (1 - \tau_1) \frac{i_{m_1}}{N},$$

wird

$$i_{m_2} = \frac{\zeta^2 (1 - \tau_1)}{1 + \zeta^2 \beta \tau_1} \beta i_{m_1} \dots \dots \dots (44)$$

Der gesamte Leerstrom der Kaskade wird danach:

$$i_m = i_{m_1} + i_{m_2} = \left(1 + \frac{\zeta^2 (1 - \tau_1) \beta}{1 + \zeta^2 \beta \tau_1} \right) i_{m_1}$$

oder

$$i_m = \frac{1 + \zeta^2 \beta}{1 + \zeta^2 \beta \tau_1} i_{m_1} \dots \dots \dots (45)$$

Den charakteristischen Kreis der Kaskade gewinnen wir aus der Grösse $\overline{C_0 M}$. Es ist dies dasjenige Streufeld, welches auf den Streuwiderstand ρ_{s_1} von Motor I arbeitet und sich in das Feld N mit dem Kurzschlussstrefeld von Motor II wieder im Verhältniss $\zeta^2 \gamma : 1$ teilt. Also

$$2 \overline{i_w} = \overline{C_0 M} \cdot \rho_{s_1} - i_{m_2}$$

und wegen

$$\begin{aligned} \overline{C_0 M} &= \zeta^2 \gamma \overline{B M} = \zeta^2 \gamma (N - \overline{C_0 M}) \\ &= \frac{\zeta^2 \gamma}{1 + \zeta^2 \gamma} N = \frac{\zeta^2 \gamma}{1 + \zeta^2 \gamma} \cdot \frac{1 - \tau_1}{\rho_1} i_{m_1}, \end{aligned}$$

wird

$$2\bar{i}_w = \frac{\zeta^2 \gamma}{1 + \zeta^2 \gamma} \frac{1 - \tau_1}{\tau_1} i_{m_1} - \frac{\zeta^2 (1 - \tau_1)}{1 + \zeta^2 \beta \tau_1} \beta i_{m_1}$$

$$2\bar{i}_w = \frac{(1 - \tau_1)(1 - \tau_2)}{(1 + \zeta^2 \gamma)(1 + \zeta^2 \beta \tau_1)} \frac{\zeta^2 \gamma}{\tau_1} i_{m_1} \dots \dots \dots (46)$$

Hieraus der Kurzschlussstrom der Kaskade:

$$i_k = \overline{C_0 M} \cdot \rho_{s_1} + i_{m_1} = \left(\frac{\zeta^2 \gamma}{1 + \zeta^2 \gamma} \frac{1 - \tau_1}{\tau_1} + 1 \right) i_{m_1}$$

$$i_k = \frac{\zeta^2 \gamma + \tau_1}{1 + \zeta^2 \gamma} \frac{1}{\tau_1} i_{m_1} \dots \dots \dots (47)$$

D. Die Geschwindigkeit zweier in Kaskade geschalteten Motoren¹⁾.

Schon auf S. 11 habe ich Gelegenheit genommen, zu zeigen, wie aus der Bedingung, dass die Drehmomente gleich sind, bei direkter Kupplung auf Halbierung der Tourenzahl geschlossen werden muss, um das Gesetz von der Erhaltung der Energie zu erfüllen.

Zur genaueren Ableitung der wirklichen Tourenzahl wollen wir den von Blondel²⁾ eingeschlagenen Weg betreten.

Ist n die synchrone Tourenzahl des ersten Motors und s_1 seine Schlüpfung, so ist seine absolute Geschwindigkeit

$$n(1 - s_1),$$

somit die in seinem Sekundärteile erzeugte Wechselzahl

$$n s_1.$$

Die synchrone Tourenzahl von Motor II wird dann ebenfalls $n s_1$, seine absolute Geschwindigkeit dagegen

$$n s_1 (1 - s_2).$$

Da wir nun, wie dies der Verwendungsart der ganzen Anordnung entspricht, direkte Kupplung der beiden Motoren voraussetzen, so müssen die absoluten Geschwindigkeiten einander gleichgesetzt werden und wir erhalten

$$n(1 - s_1) = n s_1 (1 - s_2)$$

$$1 - s_1 = s_1 - s_2 s_1$$

$$1 - 2 s_1 = - s_2 s_1$$

$$s_1 = \frac{1}{2 - s_2} \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ S. 54 bis 57 ist mit Genehmigung der Redaktion meiner Arbeit in Heft 1 der E.T.Z. 1903 entnommen.

²⁾ Vgl. Blondel et Paul-Dubois, „La Traction Électrique“ II. Bd., S. 315.

Die Formel zeigt uns die Abhängigkeit der primären von der sekundären Schlüpfung. Wir erkennen zunächst für $s_2 = 0$, also Leerlauf,

$$s_1 = \frac{1}{2},$$

d. h. die bekannte Beziehung, dass der Synchronismus bereits bei halber Tourenzahl erreicht wird; da sich jedoch s in den Grenzen von 2 bis 5% bewegt, so wird innerhalb der normalen Belastung die Tourenzahl gleich der Hälfte des eigentlichen Synchronismus sein und der zweite Motor ist somit für die halbe Wechselzahl zu berechnen. Je grösser s_2 , um so grösser auch s_1 und bei $s_2 = 1$ bzw. 100% wird

$$s_1 = \frac{1}{2 - 1} = 1,$$

also ebenfalls 100%, d. i. derjenige Belastungsfall, welcher dem Kurzschlusspunkt entspricht.

In Verbindung mit dieser Ueberlegung gibt somit das einfache Diagramm (Fig. 5) über sämtliche Fragen bei beiden Motoren schnellen Aufschluss.

Es ist übrigens recht interessant, die Blondelsche Ableitung noch zu verallgemeinern. Wir sind nämlich nicht bloss auf den Fall des Uebersetzungsverhältnisses 1:1 wie bei direkter Kupplung allein angewiesen, sondern können auch beliebige Uebersetzungsverhältnisse in Anwendung bringen und damit den Synchronismus auf eine beliebig hohe oder niedrigere Tourenzahl einstellen, ohne an der Wicklung etwas zu ändern.

Ist das gewählte Uebersetzungsverhältnis u , so erhalten wir

$$\begin{aligned} n_1(1 - s_1) &= u n_1(s_1[1 - s_2]) \\ 1 - s_1 &= u s_1(1 - s_2) = u s_1 - u s_1 s_2 \\ s_1(1 + u - u s_2) &= 1 \\ s_1 &= \frac{1}{1 + u(1 - s_2)} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Ist z. B. die Tourenzahl von Motor II halb so gross als die von Motor I, also

$$u = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{2},$$

so erhalten wir Synchronismus bei

$$s_1 = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3},$$

wenn $u = \frac{1}{4}$, wird $s_1 = \frac{4}{5}$,

„ $u = 0$, „ $s_1 = 1$.

Umgekehrt, wenn Motor II schneller läuft als Motor I, also z. B.

$$u = \frac{n_2}{n_1} = 2,$$

so erhalten wir Synchronismus bei

$$s_1 = \frac{1}{3},$$

wenn $u = 3$ bei $s_1 = \frac{1}{4}$ u. s. f.

„ $u = \infty$ „ $s_1 = 0$.

Wir besitzen hierdurch die Möglichkeit, mit Hilfe der Kaskadenschaltung die verschiedensten Tourenvariationen zu erzielen, ja es ist sogar möglich, eine stetige Tourenänderung in beliebig weiten Grenzen von Synchronismus bis Stillstand mit Hilfe von zwei konischen Riemenscheiben bei konstantem Wirkungsgrade zu erzielen, wäre nicht eben jenes Riemenvorgelege gerade diejenige mechanische Vorrichtung, welche wir durch elektrische Regulierung zu ersetzen bestrebt sind.

Interessant sind endlich noch die Möglichkeiten verschiedener Synchronismen bei verschiedenen Polzahlen¹⁾ der beiden Motoren. Die Motoren mögen $2p_1$ bzw. $2p_2$ Pole besitzen, so ist wieder n_1 die synchrone Tourenzahl pro Sekunde und

$$z_1 = 2p_1 n_1 = \text{primäre Wechselzahl,}$$

$$n_1 (1 - s_1) = \text{absolute Geschwindigkeit von Motor I,}$$

$$2p_1 n_1 s_1 = z_2 = \text{Wechselzahl für Motor II und}$$

$$\frac{z_2}{2p_2} (1 - s_2) = \frac{2p_1}{2p_2} n_1 s_1 (1 - s_2)$$

$$= \text{absolute Geschwindigkeit von Motor II.}$$

Die beiden absoluten Geschwindigkeiten einander gleichgesetzt, gibt

$$\frac{2p_1}{2p_2} n_1 s_1 (1 - s_2) = n_1 (1 - s_1)$$

oder wenn

$$\frac{2p_1}{2p_2} = \rho,$$

$$\rho s_1 - \rho s_2 s_1 = 1 - s_1$$

$$s_1 (\rho + 1 - \rho s_2) = 1$$

$$s_1 = \frac{1}{1 + \rho(1 - s_2)}. \quad \dots \quad (3)$$

¹⁾ Vgl. Danielson, „E.T.Z.“ 1902, S. 656.

Das ist ein ganz ähnlicher Ausdruck wie Gleichung 2 für variable Uebersetzung.

Haben wir z. B. am Motor I 4 Pole bei 100 Wechseln, am Motor II dagegen nur 2 Pole, so wird

$$\frac{2p_1}{2p_2} = \rho = 2$$

und wir erhalten danach

$$s_1 = \frac{1}{3},$$

und als synchrone Geschwindigkeit des ganzen Aggregates

$$1500 (1 - s_1) = 1000$$

statt des eigentlichen Synchronismus von 1500 Touren.

Hat Motor II dagegen 8 Pole, d. i.

$$\rho = \frac{1}{2},$$

so wird

$$s_1 = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3},$$

und der neue Synchronismus wird

$$1500 (1 - s_1) = 500 \text{ Touren.}$$

Wir können endlich noch weiter verallgemeinern, indem wir gleichzeitig Polzahl und Uebersetzung ändern; dann müssen wir schreiben

$$u \frac{2p_1}{2p_2} n_1 s_1 (1 - s_2) = n_1 (1 - s_1)$$

$$u \rho s_1 - u \rho s_2 s_1 = 1 - s_1$$

$$s_1 (u \rho + 1 - u \rho s_2) = 1$$

$$s_1 = \frac{1}{1 + u \rho (1 - s_2)}. \quad \dots \quad (4)$$

In dieser allgemeinsten Formel sind sämtliche Synchronismen enthalten, welche durch Kaskadenschaltung zweier Motoren beliebiger Polzahl, die durch ein beliebiges Uebersetzungsverhältnis miteinander gekuppelt sind, erhalten werden können.

Zweiter Teil.

Das Diagramm der Kaskadenschaltung mit Berücksichtigung der Verluste.

Bevor wir zur Herleitung des vervollständigten Diagramms der Kaskadenschaltung, insbesondere mit Berücksichtigung der Ohmschen Widerstände übergehen, ist es notwendig, das bisher verwendete Kreisdiagramm von Heyland ebenfalls auf die Veränderungen hin zu untersuchen, welchen dieses bei Berücksichtigung — besonders der Verluste durch den primären Ohmschen Widerstand — unterliegt.

A. Berücksichtigung der Verluste im normalen Kreisdiagramm.

1. Verluste im Rotor.

Es ist von vornherein klar, dass, wie ich seiner Zeit E.T.Z. 1900, Heft 23, ausgeführt habe, die im Rotor auftretenden Verluste im Kupfer ebensowenig einen Einfluss auf den Kreis ausüben können, wie die Reibungsverluste, denn ob der sekundäre Wattstrom zur Erzeugung von Kupferwärme oder mechanischer Energie verwendet wird, ist für die Form des Diagramms gleichgültig — es wäre ja sogar zulässig, dass alle Energie in Wärme verwandelt würde — wie beim rein elektrischen Transformator —, ohne dass eine prinzipielle Änderung an der Betrachtungsweise damit gegeben wäre. Dass die Reibungsverluste andererseits nichts weiter als eine mechanische Belastung darstellen und darum ohne weiteres sich den Bedingungen, unter denen das Heylandsche Diagramm abgeleitet wurde, anpassen, ist a priori einleuchtend.

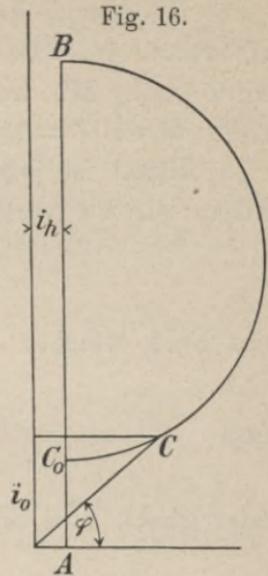
2. Eisenverluste.

Es bleiben noch die Verluste im Stator, bestehend aus den Verlusten im Eisen V_h und den primären Kupferverlusten; beide Gruppen müssen offenbar gerade so wirken, wie wenn sie ausserhalb des betrachteten Motors wären, etwa wie ein fremder vorgeschalteter Widerstand. Sie werden infolgedessen offenbar einen verzerrenden Einfluss auf den Kreis ausüben müssen.

Welche Veränderung die Eisenverluste an diesem hervorbringen, ist sehr leicht zu übersehen, wenn man bedenkt, dass diese in allen

vorkommenden Belastungsgrenzen konstant sind, daher einem konstanten zusätzlichen Wattstrom i_h entsprechen müssen. Dies hat dieselbe Wirkung, als ob die Ordinatenachse (Fig. 16) um die Strecke i_h nach links gerückt würde und das zu demselben Leerstrom i_0 gehörige i_w auf $i_w + i_h$ gewachsen wäre.

Man sieht, auch hierdurch wird noch der eigentliche Kreis nicht geändert, sondern nur sein Mittelpunkt verschoben. Alle übrigen Verhältnisse bleiben unberührt, nur $\cos \varphi$ wird um ein geringes, d. h. im Verhältnis $\frac{i_w + i_h}{i_w}$ verbessert.

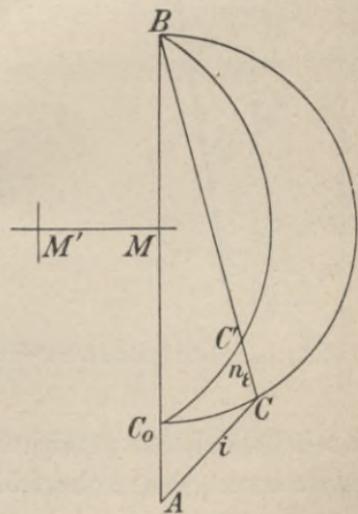


3. Primäre Kupferverluste.

Es bleiben demnach allein die primären Kupferverluste übrig, deren Wirkung darin besteht, dass sie das Primärfeld $AB = \frac{1}{\tau} i_m$ und daher auch den zugehörigen Magnetisierungsstrom $AC_0 = i_m$ verringern, gleichzeitig aber auch seine Richtung ändern.

Heyland¹⁾ macht nun bewusst die, wie ich bald zeigen werde, nicht immer zulässige Vernachlässigung des Magnetisierungsstromes, indem er das Feld n_2 , welches dem Spannungsabfall $i r$ entspricht, nicht senkrecht zu i aufträgt (Fig. 17), sondern in Richtung des Ankerfeldes BC , welches immer stumpfwinklig zu i steht. Diese Vernachlässigung ist bei grossen Motoren mit kleinem Streufaktor τ wirklich geringfügig, bei kleineren Motoren jedoch nicht mehr, und ist der Grund für die häufig schlechte Uebereinstimmung der aus dem Diagramm erhaltenen Werte für $\cos \varphi$ mit den durch Messung gefundenen.

Fig. 17.



In Wirklichkeit stellt sich der Leistungsfaktor nicht unwesentlich höher.

¹⁾ Vgl. Sammlung elektrot. Vorträge von Prof. Voit, 1900, Bd. II.

Heyland kommt durch diese Annahme (l. c.) auf die Konstruktion eines zweiten Kreises mit einem nach links verschobenen Mittelpunkt M' , welcher den geometrischen Ort des Punktes C' darstellt, wo $\overline{CC'} = n_\varepsilon$ (Fig. 17).

Exakt ist jedoch allein die Darstellung des Diagramms Fig. 18; hierin ist, wie vorher (Fig. 17),

$$\overline{AB} = N_1 = \frac{1}{\tau} i_m,$$

das Feld, welches der Klemmenspannung e entspricht,

$$\overline{AC_0} = i_m$$

und

$$\overline{AC} = i$$

oder gleich dem Streufeld, welches der Primärstrom i hervorruft.

Fig. 18.

Dieser Strom i erzeugt nun im Widerstand r der Primärwicklung einen Spannungsabfall

$$\varepsilon = ir$$

in seiner eigenen Richtung und verbraucht hierzu ein Feld, welches senkrecht hierzu, also auch senkrecht zu i stehen muss, dies Feld ist dargestellt durch

$$\overline{BB'} \perp \overline{AC},$$

so dass

$$\sphericalangle ABB' = \varphi$$

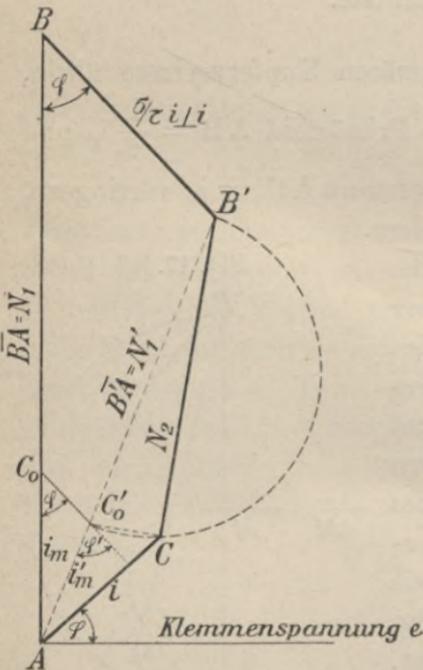
den Winkel der Phasenverschiebung zwischen Klemmenspannung und Strom darstellt.

Die geometrische Subtraktion von $\overline{BB'}$ gibt nun das Feld $\overline{AB'} = N_1'$, welches erst dasjenige Primärfeld darstellt, auf welches der Heylandsche Kreis (gestrichelt gezeichnet) exakt Anwendung findet; die Strecke $\overline{B'C}$ stellt somit das Ankerfeld N_2 dar, auf welchem das Ankerstreufeld

$$\overline{C_0'C} = i_2$$

senkrecht steht und auf $\overline{AB'}$ den entsprechenden Magnetisierungsstrom $\overline{AC_0'} = i_m'$ abschneidet:

$$i_m' = \tau \cdot N_1'.$$



Damit ist das Felderpolygon $ABB'C$ geschlossen, und die Aufgabe ist nun, den geometrischen Ort für den Punkt C zu finden, welcher den neuen Voraussetzungen entspricht.

Wie Ossanna (E.T.Z. 1900, S. 712) nachgewiesen hat, ist auch dieser geometrische Ort abermals ein Kreis, dessen Mittelpunktskoordinaten sich auf folgendem vereinfachten Wege bestimmen lassen:

Zwischen den gestrichelten Grössen finden exakt die Beziehungen des Kreisdiagramms Anwendung, wir haben also

$$i_w'^2 = (i_0' - i_m') \left(\frac{1}{\tau} i_m' - i_0' \right)^1$$

oder

$$\tau i_w'^2 = (i_0' - i_m') (i_m' - \tau i_0') = (1 + \tau) i_0' i_m' - \tau i_0'^2 - i_m'^2. \quad (1)$$

Wir haben jetzt die Koordinatentransformation von i_w' und i_0' auf i_w und i_0 vorzunehmen und erhalten hierfür aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck über AC_0 (Fig. 18) die Beziehungen:

$$i_m \sin \varphi = i_m' \sin \varphi'$$

oder

$$i_m \frac{i_0}{i} = i_m' \frac{i_0'}{i},$$

woraus

$$i_m i_0 = i_m' i_0' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nun entspricht in dem grossen Dreieck ABB' (Fig. 18) die Seite $\overline{BB'}$ dem Felde, welches durch den Spannungsabfall ir vernichtet wird, andererseits $\overline{AB} = \frac{1}{\tau} i_m$ der gesamten Klemmenspannung e , es wird sich also verhalten

$$\overline{BB'} : \overline{AB} = ir : e$$

also

$$\overline{BB'} = \overline{AB} \cdot \frac{ir}{e} = \frac{i_m r}{e} i.$$

4. Einführung der charakteristischen Grösse σ .

Betrachten wir diesen letzten Ausdruck näher, so erkennen wir in dem Faktor $\frac{i_m \cdot r}{e}$ das für alle Belastungen konstante Verhältnis des Spannungsabfalles bei Leerlauf $i_m \cdot r$ zur konstanten Klemmenspannung. Dieses Verhältnis ist ganz analog dem Streufaktor, welchen

¹⁾ Ableitung vgl. E.T.Z. 1900, Heft 23. Wegen der Bezeichnung vgl. auch Fig. 21, aus welcher diese Beziehung direkt abzulesen ist.

wir bekanntlich als das Verhältnis des Streufeldes bei Leerlauf zum konstanten primären Felde definieren: es entspricht also

Spannungsabfall bei Leerlauf — dem Streufeld bei Leerlauf,
konstante primäre Klemmenspannung — dem konstanten Primärfelde.

Dieses so gekennzeichnete Verhältnis erweist sich als eine ebenso charakteristische Grundgrösse für das Verhalten des Motors, wie der Streufaktor selbst und soll im folgenden mit der Benennung Leerlaufabfall und dem Zeichen σ verwendet werden, so dass

$$\sigma = \frac{i_m \cdot r}{e},$$

wo r der primäre Widerstand, i_m der Magnetisierungsstrom bei Leerlauf und e die konstante Klemmenspannung.

5. Ableitung des charakteristischen Kreises.

Damit erhalten wir für $\overline{BB'}$ den vereinfachten Ausdruck

$$\overline{BB'} = \frac{\sigma}{\tau} i.$$

Da ferner nach Konstruktion

$$\triangle AC_0C_0' \approx \triangle ABB',$$

so erhalten wir

$$\overline{C_0C_0'} : \overline{BB'} = \overline{AC_0} : \overline{AB} = \tau,$$

woraus

$$\overline{C_0C_0'} = \frac{\sigma}{\tau} i \cdot \tau = \sigma i,$$

und hieraus ergibt sich in dem kleinen Dreieck AC_0C_0' der Wert für

$$i_m'^2 = i_m^2 + \sigma^2 i^2 - 2i_m \cdot \sigma i \cos \varphi$$

oder

$$i_m'^2 = i_m^2 + \sigma^2 i^2 - 2\sigma i_m i_w \dots \dots \dots (3)$$

Führen wir die beiden so gewonnenen Beziehungen 2 und 3 in Gleichung 1 ein, welche wir schreiben

$$\tau(i_w'^2 + i_0'^2) - (1 + \tau)i_0' i_m' + i_m' = 0,$$

so erhalten wir

$$\tau i^2 - (1 + \tau)i_0 i_m + i_m^2 + \sigma^2 i^2 - 2\sigma i_m i_w = 0$$

oder

$$(\tau + \sigma^2)i^2 - (1 + \tau)i_0 i_m - 2\sigma i_m i_w + i_m^2 = 0$$

und wegen

$$i^2 = i_w^2 + i_0^2$$

$$i_w^2 + i_0^2 - \frac{1 + \tau}{\tau + \sigma^2} i_0 i_m - \frac{2\sigma}{\tau + \sigma^2} i_w i_m + \frac{1}{\tau + \sigma^2} i_m^2 = 0 \quad (4)$$

Dies ist die gesuchte Grundgleichung der neuen Kurve für den geometrischen Ort von C, dessen Koordinaten i_w und i_0 .

Nach einer bekannten Beziehung aus der analytischen Geometrie ist aber die schematische Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunktskoordinaten i_{00} und i_{w_0} heissen mögen und dessen Radius R ist:

$$i_w^2 + i_0^2 - 2i_{00} \cdot i_0 - 2i_{w_0} \cdot i_w + (i_{w_0}^2 + i_{00}^2 - R^2) = 0.$$

Man sieht sofort, dass diese Gleichung mit der soeben abgeleiteten Grundgleichung 4 identisch wird, wenn man setzt:

$$i_{00} = \frac{1}{2} \frac{1 + \tau}{\tau + \sigma^2} i_m \quad \dots \quad (5)$$

ferner

$$i_{w_0} = \frac{\sigma}{\tau + \sigma^2} i_m \quad \dots \quad (6)$$

endlich

$$i_{w_0}^2 + i_{00}^2 - R^2 = \frac{1}{\tau + \sigma^2} i_m^2,$$

hieraus

$$R^2 = \frac{(1 + \tau)^2 + 4\sigma^2 - 4(\tau + \sigma^2)}{4(\tau + \sigma^2)^2} i_m^2$$

und

$$R = \frac{1}{2} \frac{1 - \tau}{\tau + \sigma^2} i_m \quad \dots \quad (7)$$

Damit sind alle Bestimmungsstücke für die Konstruktion des exakt richtigen Kreises, welcher an Stelle des idealen Kreises tritt, gegeben. Die entsprechenden Werte für diesen „idealen“ Kreis erhält man durch Einsetzung von

$$\sigma = 0;$$

dann wird:

$$i_{00} = \frac{1}{2} \frac{1 + \tau}{\tau} i_m; \quad i_{w_0} = 0; \quad R = \frac{1}{2} \frac{1 - \tau}{\tau} i_m.$$

Die Grösse der Veränderung, welche dieser Kreis erfährt, ist daher allein durch die Grösse von σ bestimmt und hierüber können wir uns auf folgendem Wege ein ungefähres Bild verschaffen.

Der primäre Spannungsabfall eines etwa 12 PS.-Motor wird im Durchschnitt mit etwa 4 % bei normaler Last einzusetzen sein, d. h.

$$\frac{i \cdot r}{e} = 0,04;$$

nun wird ein solcher Motor bei guter Ueberlastbarkeit einen Leerlaufstrom von etwa 30% des Normalstromes zeigen und demnach wird

$$\sigma = \frac{i_m r}{e} = 0,3 \cdot \frac{i r}{e} = 0,012$$

werden, gegenüber einem Streufaktor

$$\tau = \frac{i_m}{i_k} = 0,05.$$

In den drei Ausdrücken 5, 6, 7 steht durchgängig im Nenner die Summe

$$\tau + \sigma^2 = 0,05 + 0,00014 = 0,05014.$$

Man erkennt also, dass σ^2 in diesem Fall nicht ganz 0,3% von τ ausmacht und wir können hiernach ganz allgemein aussprechen, dass bei allen praktisch brauchbaren Motoren σ^2 gegen τ vernachlässigt werden kann.

Die abgekürzten Beziehungen sind danach

$$i_{00} = \frac{1}{2} \frac{1 + \tau}{\tau} i_m \dots \dots \dots (5a)$$

$$i_{w_0} = \frac{\sigma}{\tau} i_m \dots \dots \dots (6a)$$

$$R = \frac{1}{2} \frac{1 - \tau}{\tau} i_m \dots \dots \dots (7a)$$

In Worten heisst das: Kreisdurchmesser und Lage bleiben unverändert, nur der Koordinatenanfang A ist um die Strecke $i_{w_0} = \frac{\sigma}{\tau} i_m$ (Fig. 19) etwas nach links zu A' gerückt, oder auch: der zu einem bestimmten wattlosen Strom i_0 gehörige Wattstrom i_w , wie er aus dem idealen Diagramm hervorgehen würde, wird um das konstante Stück $i_{w_0} = \frac{\sigma}{\tau} i_m$ vermehrt. Entsprechend sind die Gesamtströme i nicht mehr von A, sondern von A' aus abzumessen und man ersieht sofort, dass hierdurch besonders bei kleineren Belastungen der Leistungsfaktor $\cos \varphi$ wesentlich bessere Werte annehmen wird, als nach dem idealen Diagramm.

Löst man noch die jetzige Grundgleichung 4 als quadratische Gleichung nach i_w auf, so erhält man

$$i_w = \sqrt{\frac{1}{\tau + \sigma^2} (i_m i_0 [1 + \tau] - i_0^2 [\tau + \sigma^2] - \frac{\tau}{\tau + \sigma^2} i_m^2)} + \frac{\sigma}{\tau + \sigma^2} i_m \quad (8)$$

oder mit der zulässigen Vernachlässigung von σ^2

$$i_w = \sqrt{\frac{1}{\tau} (i_m - \tau i_0) (i_0 - i_m) + \frac{\sigma}{\tau} i_m} \quad \dots \quad (8a)$$

Auch aus dieser letzten Gleichung 8a ist der oben erwähnte Charakter des neuen Kreises zu erkennen, wonach die zu einem bestimmten i_0 gehörigen Werte von i_w , wenn sie nach dem idealen Kreis berechnet sind, alle um die konstante Grösse

$$i_{w_0} = \frac{\sigma}{\tau} i_m$$

vermehrt werden müssen, da das Glied unter der Wurzel der Grundgleichung¹⁾ des idealen Kreises entspricht.

Der Endeffekt ist somit ganz analog dem Vorgang bei Berücksichtigung der Eisenverluste durch Fig. 19 dargestellt, und wir erhalten das vollständige Diagramm, wenn die Ordinatenaxe um eben jenes Stück i_h , entsprechend den Eisenverlusten, abermals nach links zum Anfangspunkt A_2 verschoben wird; das so vervollständigte Diagramm wird durch Fig. 20 dargestellt.

Fig. 19.

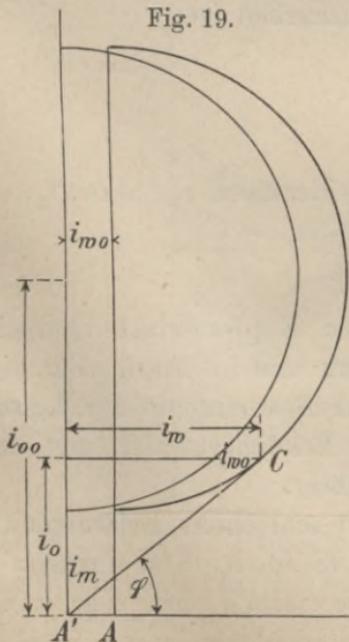
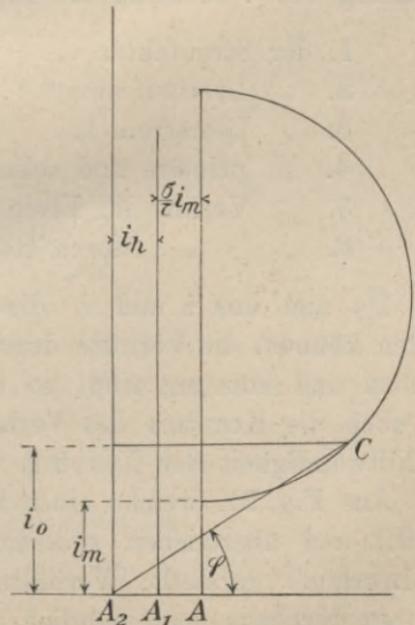


Fig. 20.



¹⁾ Ableitung vgl. E.T.Z. 1900, Heft 23.

Es wird nun häufig noch dieses Diagramm zur Lösung weiterer Aufgaben verwendet, indem durch Zuhilfenahme recht eleganter geometrischer Konstruktionen versucht wird, alle sonstigen wichtigen Bestimmungsstücke möglichst direkt ablesbar zu machen, d. h. Drehmoment, Schlüpfung, Wirkungsgrad u. s. f. In der Praxis zeigt sich jedoch, wie überall, so auch hier, dass die Graphik wohl vorzüglich zur Ableitung der Gesetze, zur prinzipiellen Veranschaulichung der Vorgänge dienen kann, jedoch bei der prinzipiellen Behandlung von praktischen Aufgaben nur mit Vorsicht zu handhaben ist.

6. Praktische Anwendung des Diagramms.

Schärfer und sicherer rechnet man doch immer mit Zahlen, falls die Formeln einigermassen handlich sind.

Die Fragen, deren Beantwortung in der Praxis verlangt wird, sind nun:

1. der Verlauf des Leistungsfaktors $\cos \varphi$,
2. " " " Wirkungsgrades η ,
3. " " " Primärstromes i ,
4. " " " der Schlüpfung s ,

alles in Abhängigkeit von der abgegebenen Leistung L , wobei durch Rechnung bezw. Messung als gegeben anzusehen ist:

1. der Streufaktor τ ,
2. " Leerlaufsabfall σ ,
3. " Leerstrom i_m ,
4. " primäre und sekundäre Widerstand r_1 , bezw. r_2 ,
5. " Verlust im Eisen V_e ,
6. " " durch Reibung V_r .

Da nun aus i und r_1 die primären Kupferverluste berechnet werden können, die Verluste durch Reibung und im Eisen aber direkt gegeben und konstant sind, so bleibt zur Bestimmung der Leistung nur noch die Kenntnis des Verlustes im Sekundärkupfer und damit die Notwendigkeit der Kenntnis von i_2 übrig.

Aus Fig. 21, welche einen Motor mit schlechtem Leistungsfaktor $\tau = 0,1$ und übertrieben grossem $\sigma = 0,08$ (d. h. 8% Primärabfall bei Leerlauf) darstellt, Verhältnisse, die jedoch bei sehr kleinen Motoren durchaus noch möglich sind, erkennen wir in der Linie \overline{DC} die Lage und Grösse des Sekundärstromes i_2 .

Da nun wegen der Aehnlichkeit der zugehörigen Dreiecke

$$N_2 \cdot i_2 = i_w' N_1' = i_w' \cdot \frac{1}{\tau} i_m'$$

oder wegen

$$\begin{aligned} N_2^2 &= (1 - \tau) N_1' \cdot (N_1' - i_0') = \frac{1 - \tau}{\tau} i_m' \left(\frac{1}{\tau} i_m' - i_0' \right) \\ &= \frac{1 - \tau}{\tau^2} i_m' (i_m' - \tau i_0'), \end{aligned}$$

wird

$$i_2^2 = \frac{1}{1 - \tau} \frac{i_w'^2 \cdot i_m'}{i_m' - \tau i_0'};$$

oder wegen

$$i_w'^2 = \frac{1}{\tau} (i_m' - \tau i_0') (i_0' - i_m')$$

wird

$$\begin{aligned} i_2^2 &= \frac{1}{\tau(1 - \tau)} i_m' (i_0' - i_m') \\ &= \frac{1}{1 - \tau} \left(\frac{1}{\tau} i_m' [i_0' (1 + \tau) - i_m'] - i_m' i_0' \right) \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$i^2 = \frac{1}{\tau} i_m' [i_0' (1 + \tau) - i_m']$$

folglich

$$i_2^2 = \frac{1}{1 - \tau} (i^2 - i_m' i_0') \dots \dots \dots (10)$$

Da endlich nach Gleichung 2, S. 61

$$i_m' i_0' = i_m i_0,$$

so bekommen wir zur Berechnung des Sekundärstromes die einfache Formel

$$i_2^2 = \frac{1}{1 - \tau} (i^2 - i_m i_0) \dots \dots \dots (11)$$

Somit ist auch diese noch fehlende Grösse durch eine einfache Beziehung mit den bereits bekannten Werten i und i_0 verbunden und wir können nunmehr zur praktischen Verwertung der gewonnenen Resultate schreiten.

7. Numerisches Beispiel und Formelsammlung.

Diese können am besten an der Hand des in Tabelle 1 durchgerechneten Beispielles verfolgt werden.

Hier ist ein Motor von ca. 150 kw = 200 PS Leistung und 1000 Touren angenommen, von welchem durch Messung bekannt ist:

$$\sigma = 0,008; \tau = 0,04; r_1 = 0,57 \Omega = r_2; i_m = 14; e = 1000;$$

$$V_e = 2400 \text{ Watt}, V_r = 3000 \text{ Watt}.$$

Hieraus berechnet sich zunächst

$$\frac{\sigma}{\tau} = 0,2; i_{w0} = \frac{\sigma}{\tau} i_m = 2,8; i_h = \frac{V_e}{3000} = 0,8, \text{ und wir wählen nun}$$

6 möglichst geschickt verteilte Werte von i_0 zwischen Leerlaufs- und Umkehrpunkt, und berechnen hieraus in der ersten Horizontalreihe der zugehörigen Wattströme nach der Formel

$$i_w = \sqrt{\frac{1}{\tau} (i_m - \tau i_0) (i_0 - i_m)} + \frac{\sigma}{\tau} i_m,$$

daraus folgt:

$$i^2 = i_w^2 + i_0^2,$$

dann

$$i = \sqrt{i_w^2 + i_0^2},$$

dann

$$\cos \varphi = \frac{i_w + i_h}{i},$$

dann die zugeführte Leistung:

$$L_I = 3e (i_w + i_h),$$

der Primärverlust $3i^2r$,

die auf den Anker übertragene Leistung:

$$L_{II} = L_I - V_e - 3i^2r,$$

hierauf

$$i_2^2 = \frac{1}{1-\tau} (i^2 - i_m i_0),$$

der Sekundärverlust

$$3i_2^2r,$$

die abgegebene Leistung in Watt:

$$L = L_{II} - 3i_2^2r - V_r,$$

der Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{L}{L_I},$$

die Schlüpfung

$$s = \frac{3i_2^2r}{L_{II}},$$

das Drehmoment

$$D = \frac{L_{II} \cdot 0,981}{(1-s) \cdot 1000} \text{ kgm}.$$

Tabelle I.

	1 $i_0 = 14,5$	2 $i_0 = 20$	3 $i_0 = 40$	4 $i_0 = 80$	5 $i_0 = 130$	6 $i_0 = 200$
$i_w = \sqrt{\frac{1}{\tau} (i_m - \tau i_0) (i_0 - i_m) + \frac{\sigma}{\tau} i_m}$ $= \sqrt{25 (14 - 0,04 i_0) (i_0 - 14) + 2,8}$	15,7	47,3	92,8	136	163	170
$i^2 = i_w^2 + i_0^2$	456	2640	10200	24800	43300	59000
i	21,4	51,4	101	157	208	243
$\cos \varphi = \frac{i_w + i_h}{i} = \frac{i_w + 0,8}{i}$	0,77	0,935	0,918	0,865	0,79	0,70
$L_I = 3 e (i_w + i_h) = 3000 (i_w + 0,8) \dots \text{kw}$	49,6	150	281	410	490	512
$3 i^2 r = 1,71 i^2 \dots \text{Watt}$	780	4520	17400	42500	74200	101000
$L_{II} = L_I - V_0 - 3 i_2^2 r$ $= L_I - 2400 - 1,71 i_2^2 \dots \text{kw}$	46,4	143	261	365	413	409
$i_2^2 = \frac{1}{1 - \tau} (i^2 - i_m i_0)$ $= 1,04 i^2 - 14,6 i_0$	263	2470	10200	24800	43300	59000
$3 i_2^2 r = 1,71 i_2^2 \dots \text{Watt}$	450	4250	17400	42500	74200	101000
$L = L_{II} - 3 i_2^2 r - V_r$ $= L_{II} - 1,71 i_2^2 - 3000 \dots \text{kw}$	43	136	241	320	336	305
$\eta = \frac{L}{L_I}$	0,87	0,91	0,86	0,78	0,69	0,595
$s = \frac{3 i_2^2 r}{L_{II}} \dots \dots \dots \%$	0,97	3,0	6,6	9,2	18	24,8
$D = \frac{L_{II} \cdot 0,981}{(1 - s_1) 1000} \dots \dots \text{kgm}$	47	144	275	395	492	532

Ersichtlich sind alle verwendeten Formeln einfach genug, um in der Praxis, wie Verfasser aus Erfahrung weiss, mit Vorteil verwendet zu werden: es ist thatsächlich möglich, die ganze vorstehende Rechnung in knapp $\frac{3}{4}$ Stunden zu erledigen.

Der Verlauf der Kurven ist in Fig. 24 dargelegt, in welcher alle Kurven mit Umkehrpunkt bei 340 kw sich auf vorliegende Rechnung beziehen.

Es sei besonders hervorgehoben, dass während der theoretische maximale Leistungsfaktor sich aus

$$\frac{1 - \tau}{1 + \tau} = 0,92$$

berechnen würde, in Wirklichkeit ein

$$(\cos \varphi)_{\max} = 0,94$$

erreicht wird.

B. Berücksichtigung der Verluste im Kaskadendiagramm.

1. Ableitung des Diagramms der Fig. 22.

Eine Betrachtung von Fig. 5 lehrt, dass der Kreis über $\overline{C_0'M}$ ganz analog dem Diagramm eines normalen Motors angesehen werden kann, dessen Koordinatenanfang in C_0 liegt.

Sein Magnetisierungsstrom wäre:

$$i_{m'2} = \frac{1 - \tau}{1 + \tau} i_{m'1},$$

sein Streufaktor

$$\tau' = \frac{i_{m'2}}{\frac{1}{2} \frac{1}{\tau} i_{m'1} (1 - \tau)} = \frac{2\tau}{1 + \tau};$$

sein Leerlaufsabfall σ' (vgl. S. 61) ergibt sich daraus, dass als Widerstand für den Leerstrom i_{m2} die Summe des Sekundärwiderstandes von Motor I plus Primärwiderstand von Motor II in Betracht kommt, als Klemmenspannung dagegen nur die um $\frac{1}{2} (1 - \tau)$ verminderte primäre Klemmenspannung e , so dass, wenn wir die zulässige Annahme machen, dass die Widerstände in den 4 Wicklungen des Motorenpaares unter einander gleich und zwar gleich dem Widerstande r der Primärwicklung von Motor I sind:

$$\sigma' = \frac{i_{m'2} \cdot 2r}{e' (1 - \tau)} = \frac{2}{1 + \tau} \frac{i_{m'1} r}{e'} = \frac{2\sigma}{1 + \tau}.$$

Hierbei sei bemerkt, dass die Annahme der Gleichheit aller 4 Widerstände einerseits durchaus zulässig ist, andererseits ihren Ausdruck in der runden Zahl 2 findet, welche bei gewissen Untersuchungen, z. B. über den Einfluss von eingeschalteten Widerständen zwischen

den beiden Motoren leicht durch eine andere Zahl ersetzt werden kann; die Vereinfachung — wohl zu unterscheiden von Vernachlässigung — ist zur Gewinnung eines erleichterten Ueberblicks von Wert.

Die Betrachtung sei vorläufig auf den Fall beschränkt, dass der Primärwiderstand von Motor I einflusslos ist, denn nur dann ist der Punkt C_0 unbeweglich.

Unter dieser Voraussetzung lassen sich die Ausführungen von Teil II, Gleichung 5, 6, 7 anwenden und wir erhalten als Mittelpunktskoordinaten dieses neuen Kreises

$$i'_{w_0} = \frac{\sigma'}{\tau' + \sigma'^2} i_{m_2}' = \frac{2\sigma(1-\tau)}{2\tau(1+\tau) + 4\sigma^2} i_{m_2}' = \frac{\sigma(1-\tau)}{\tau(1+\tau) + 2\sigma^2} i_{m_2}'$$

$$i'_{00} = \frac{1}{2} \frac{1+\tau'}{\tau' + \sigma'^2} i_{m_2}' = \frac{1}{2} \frac{1 + \frac{2\tau}{1+\tau}}{2\tau(1+\tau) + 4\sigma^2} \cdot \frac{(1+\tau)^2(1-\tau)}{1+\tau} i_{m_2}'$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(1+3\tau)(1-\tau)}{\tau(1+\tau) + 2\sigma^2} i_{m_2}'$$

sein Radius:

$$R' = \frac{1}{2} \frac{1-\tau'}{\tau' + \sigma'^2} i_{m_2}' = \frac{1}{2} \frac{(1-\tau)^2}{2\tau(1+\tau) + 4\sigma^2} i_{m_2}'$$

$$= \frac{1}{4} \frac{(1-\tau)^2}{\tau(1+\tau) + 2\sigma^2} i_{m_2}'$$

Demnach lautet die Gleichung dieses Kreises:

$$i_2^2 - \frac{1}{2} \frac{(1+3\tau)(1-\tau)}{\tau(1+\tau) + 2\sigma^2} i_{m_2}' i_0' - \frac{2\sigma(1-\tau)}{\tau(1+\tau) + 2\sigma^2} i_{m_2}' i_w'$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{(1-\tau)^2}{\tau(1+\tau) + 2\sigma^2} i_{m_2}'^2 = 0. \quad (1)$$

Für den entsprechenden grossen Kreis, als geometrischen Ort desjenigen Punktes, welcher die Verdoppelung von i_2 darstellt, verdoppeln sich natürlich auch die drei Konstanten i_{w_0}' , i_{00}' und R' .

Beide Kreise (Fig. 22) erleiden jedoch eine abermalige Aenderung, wenn jetzt auch noch der Primärwiderstand r von Motor I berücksichtigt wird. Ganz entsprechend [den Ausführungen in Teil II, Seite 60, vermindert sich dann i_{m_1} durch geometrische Subtraktion einer Strecke $\sigma i_1 \perp i_1$: auf die Grösse von i_{m_1}' , und der Kreis der Gleichung 1 gewinnt erst seine Bedeutung in Bezug auf die jeweilige veränderte Lage der Strecke i_{m_1}' .

Wir stehen daher vor der Aufgabe, seine Koordinaten i_w' und i_0' auf i_0 und i_w zu transformieren und haben hierfür, wie aus Figur 22 hervorgeht, in dem kleinen Dreieck über AC_0 zunächst:

$$i_m \sin \varphi = i_m' \sin \varphi'$$

oder

$$i_m \frac{i_0}{i_1} = i_m' \frac{i_0' + i_m'}{i_1}$$

und hieraus

$$i_m' i_0' = i_m i_0 - i_m'^2; \dots \dots \dots (2)$$

ferner ist aus Fig. 22 an demselben kleinen Dreieck abzulesen:

$$i_m' \cos \varphi' = i_m \cos \varphi - \sigma i_1$$

oder

$$i_m' i_1 \cos \varphi' = i_m i_1 \cos \varphi - \sigma i_1^2$$

d. h.:

$$i_m' i_w' = i_m i_w - \sigma i_1^2. \dots \dots \dots (3)$$

Endlich geht — wieder aus diesem kleinen Dreieck, hervor:

$$i_m'^2 = i_m^2 + \sigma^2 i_1^2 - 2 \sigma i_m i_w \dots \dots \dots (4)$$

Schliesslich ist noch

$$\begin{aligned} i_2^2 &= i_1^2 + i_m'^2 - 2 i_1 i_m' \sin \varphi' = i_1^2 + i_m'^2 - 2 i_m i_0 \\ i_2^2 &= i_1^2 - 2 i_m i_0 + i_m^2 + \sigma^2 i_1^2 - 2 \sigma i_m i_w \\ i_2^2 &= (1 + \sigma^2) i_1^2 - 2 i_m i_0 - 2 \sigma i_m i_w + i_m^2 \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

Setzen wir die Werte der Gleichungen 2, 3, 4 und 5 in Gleichung 1 ein, welche wir in der Form schreiben wollen

$$i_2^2 = A i_m' i_0' + B i_m' i_w' - C i_m'^2,$$

so erhalten wir die gesuchte neue Gleichung mit den Koordinaten i_0 und i_w statt i_0' und i_w' :

$$\begin{aligned} &(1 + \sigma^2) i_1^2 - 2 i_m i_0 - 2 \sigma i_m i_w + i_m^2 \\ &= A i_m i_0 - (A + C) i_m'^2 + B i_m i_w - \sigma B i_1^2 \\ &= A i_m i_0 + B i_m i_w - \sigma B i_1^2 - (A + C) i_m^2 \\ &\quad + 2 \sigma (A + C) i_m i_w - (A + C) \sigma^2 i_1^2 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} &(1 + \sigma B + \sigma^2 [1 + A + C]) i_1^2 - (2 + A) i_m i_0 - (B + 2 \sigma [1 + A + C]) i_m i_w \\ &\quad + (1 + A + C) i_m^2 = 0 \\ i_1^2 &- \frac{2 + A}{1 + \sigma B + \sigma^2 (1 + A + C)} i_m i_0 - \frac{B + 2 \sigma (1 + A + C)}{1 + \sigma B + \sigma^2 (1 + A + C)} i_m i_w \\ &\quad + \frac{1 + A + C}{1 + \sigma B + \sigma^2 (1 + A + C)} i_m^2 = 0. \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, dass in dieser Gleichung die Grösse $i_1^2 = i_w^2 + i_0^2$, so erkennen wir, dass wir abermals einen Kreis vor uns haben mit den Mittelpunktskoordinaten:

$$i_{00} = \frac{1}{2} \frac{2 + A}{1 + \sigma B + \sigma^2 (1 + A + C)} \cdot i_{m_1}$$

$$i_{w_0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{B + 2\sigma (1 + A + C)}{1 + \sigma B + \sigma^2 (1 + A + C)} \cdot i_{m_1}$$

und dem Kreisradius

$$R = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{B^2 + A^2 - 4C}}{1 + \sigma B + \sigma^2 (1 + A + C)} \cdot i_{m_1}$$

Hierin bedeutet

$$A = \frac{1}{2} \frac{(1 + 3\tau)(1 - \tau)}{\tau(1 + \tau) + 2\sigma^2}; \quad B = \frac{2\sigma(1 - \tau)}{\tau(1 + \tau) + 2\sigma^2};$$

$$C = \frac{1}{2} \frac{(1 - \tau)^2}{\tau(1 + \tau) + 2\sigma^2};$$

diese Werte eingesetzt, ergeben:

$$i_{00} = \frac{1}{4} \frac{1 + 6\tau + \tau^2 + 8\sigma^2}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} i_{m_1} \quad \dots \quad (7)$$

$$i_{w_0} = \frac{2\sigma(1 + \sigma^2)}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} i_{m_1} \quad \dots \quad (8)$$

$$R = \frac{1}{4} \frac{(1 - \tau)^2}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} i_{m_1} \quad \dots \quad (9)$$

Die Grundgleichung des kleinen Kreises ist daher nach Einsetzung der Werte 7, 8, 9:

$$\begin{aligned} i_1^2 - \frac{1}{2} \frac{1 + 6\tau + \tau^2 + 8\sigma^2}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} \\ - \frac{4\sigma(1 + \sigma^2)}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} i_m i_w \\ + \frac{1 + \tau + 2\sigma^2}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} i_m^2 = 0 \quad \dots \quad (10) \end{aligned}$$

Diese Gleichung lässt sich noch für denjenigen, der das analytische Rechnen wegen grösserer Genauigkeit vorzieht, am bequemsten in folgender Weise schreiben:

$$i_w^2 + i_0^2 - 2i_{00} \cdot i_0 - 2i_{w_0} \cdot i_w + (i_{00}^2 + i_{w_0}^2 - R^2) = 0.$$

Dies als quadratische Gleichung nach i_w aufgelöst, gibt

$$i_w = i_{w_0} + \sqrt{i_{w_0}^2 - i_0^2 + 2i_{00} \cdot i_0 - i_{00}^2 - i_{w_0}^2 + R^2}$$

oder endlich

$$i_w = \sqrt{i_0(2i_{00} - i_0) - i_{00}^2 + R^2} + i_{w_0} \quad \dots \quad (10a)$$

Zur vollständigen Lösung aller Aufgaben brauchen wir nun noch den grösseren Kreis Fig. 22, dessen Koordinaten mit x und y bezeichnet werden sollen.

Aus Fig. 22 erkennen wir

$$\triangle CED \cong Cc_0E'$$

hieraus

$$\overline{DE} = \overline{CE'} = i_w - \sigma i \sin \varphi = i_w - \sigma i_0,$$

woraus

$$x = i_w + \overline{DE} = 2i_w - \sigma i_0 \quad \dots \quad (11)$$

Zur Bestimmung von y haben wir

$$\overline{CE} = \overline{c_0E'} = i_0 - i_m + \sigma i \cos \varphi = i_0 - i_m + \sigma i_w,$$

woraus

$$y = i_0 + \overline{CE} = 2i_0 + \sigma i_w - i_m \quad \dots \quad (12)$$

Aus Gleichung 11 und 12 bestimmt sich

$$i_0 = \frac{2i_w - x}{\sigma}, \text{ hieraus } y = \frac{4i_w}{\sigma} - \frac{2x}{\sigma} + \sigma i_w - i_m \text{ und}$$

$$i_w = \frac{\sigma y + 2x + \sigma i_m}{4 + \sigma^2} \quad \dots \quad (13)$$

ferner

$$i_w = \frac{x + \sigma i_0}{2}, \text{ hieraus } y = 2i_0 + \frac{\sigma x}{2} + \frac{\sigma^2 i_0}{2} - i_m \text{ und}$$

$$i_0 = \frac{2y - \sigma x + 2i_m}{4 + \sigma^2} \quad \dots \quad (14)$$

endlich

$$i_1^2 = i_w^2 + i_0^2$$

$$= \frac{1}{(4 + \sigma^2)^2} (\sigma^2 y^2 + 4x^2 + \sigma^2 i_m^2 + 4\sigma xy + 2\sigma^2 y i_m + 4\sigma x i_m + 4y^2 + \sigma^2 x^2 + 4i_m^2 - 4\sigma xy + 8y i_m - 4\sigma x i_m)$$

$$i_1^2 = \frac{1}{4 + \sigma^2} (y^2 + x^2 + i_m^2 + 2i_m y) \quad \dots \quad (15)$$

Führen wir die so gewonnenen Werte der Gleichungen 13, 14, 15 in die Grundgleichung 10 ein, welche wir in der Form

$$i_1^2 - \alpha i_m i_0 - \beta i_m i_w + \gamma i_m^2 = 0$$

benützen wollen, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} y^2 + x^2 + 2i_m y &+ i_m^2 \\ - 2\alpha i_m y - 2\alpha i_m^2 + \alpha\sigma i_m x & \\ - \sigma\beta i_m y - \beta\sigma i_m^2 - 2\beta i_m x & \\ &+ \gamma(4 + \sigma^2) i_m^2 \end{aligned} \right\} = 0$$

oder

$$y^2 + x^2 - (2\alpha + \sigma\beta - 2) i_m y - (2\beta - \alpha\sigma) i_m x + (1 - 2\alpha - \sigma\beta + [4 + \sigma^2] \gamma) i_m^2 = 0 \quad . . . (16)$$

Abermals erhalten wir die charakteristische Gleichung eines Kreises mit den Mittelpunktskoordinaten:

$$y_0 = \frac{1}{2} (2\alpha + \sigma\beta - 2) i_m \quad (17)$$

$$x_0 = \frac{1}{2} (2\beta - \sigma\alpha) i_m \quad (18)$$

und den Kreisradius

$$R_g = \frac{1}{2} \sqrt{(4 + \sigma^2) (\alpha^2 + \beta^2 - 4\gamma)} i_m \quad (19)$$

Hierin ist noch zu ersetzen:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{1 + 6\tau + \tau^2 + 8\sigma^2}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)}; \beta = \frac{4\sigma(1 + \sigma^2)}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)}; \\ \gamma = \frac{1 + \tau + 2\sigma^2}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)}$$

und wir erhalten als Endwerte:

$$y_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + 4\tau - \tau^2 + 2\sigma^2(1 + \tau)}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} i_m \quad (20)$$

$$x_0 = \frac{1}{4} \frac{\sigma(15 - 6\tau - \tau^2 + 8\sigma^2)}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} \cdot i_m \quad (21)$$

$$R_g = \frac{1}{4} \frac{(1 - \tau)^2 \sqrt{4 + \sigma^2}}{\tau(1 + \tau) + \sigma^2(5 - \tau + 2\sigma^2)} i_m \quad (22)$$

Hiermit sind alle Bestimmungsstücke gegeben, um das Diagramm Fig. 22 exakt entwerfen zu können, welches unter Annahme von

$$i_{k_1} = 300; \tau = 0,1; i_{m_1} = 30; \sigma = 0,04$$

konstruiert wurde und dessen beide charakteristische Kreise (dick ausgezogen) sich aus diesen Annahmen nach obigen Formeln berechnen zu

$$i_{00} = 103; i_{w_0} = 20,4; R = 51,4 \text{ für den kleinen Kreis}$$

und

$$y_0 = 178; x_0 = 36,6; R_g = 103 \text{ für den grossen Kreis.}$$

Hierbei sei bemerkt, dass die Formeln 7, 8, 9 und 20, 21, 22 bei näherer Betrachtung ihren komplizierten Charakter insofern verlieren, als in ihnen allen die Glieder mit den Quadraten von τ und σ in Wirklichkeit völlig verschwinden und unter Berücksichtigung dessen geschrieben werden kann:

a) für den kleinen Kreis

b) für den grossen Kreis

$$i_{00} = \frac{1}{4} \frac{1 + 6\tau}{\tau(1 + \tau) + 5\sigma^2} i_{m_1} \quad (23) \quad y_0 = \frac{1}{2} \frac{1 + 4\tau}{\tau(1 + \tau) + 5\sigma^2} \quad (26)$$

$$i_{w_0} = \frac{2\sigma}{\tau(1 + \tau) + 5\sigma^2} i_{m_1} \quad (24) \quad x_0 = \frac{1}{4} \frac{\sigma(15 - 6\tau)}{\tau(1 + \tau) + 5\sigma^2} \quad (27)$$

$$R = \frac{1}{4} \frac{(1 - \tau)^2}{\tau(1 + \tau) + 5\sigma^2} i_{m_1} \quad (25) \quad R_g = \frac{1}{2} \frac{(1 - \tau)^2}{\tau(1 + \tau) + 5\sigma^2} \quad (28)$$

In vielen Fällen wird es sogar statthaft sein, noch das Glied $5\sigma^2$ im Nenner zu vernachlässigen, wodurch eine weitere Vereinfachung eintritt.

2. Deutung des Diagramms.

Zur Deutung des Diagramms Fig. 22 ist folgendes zu bemerken: Es besteht im wesentlichen aus dem stark ausgezogenen Polygon mit 6 Seiten $ABB'B''DCA$. Von diesen ist \overline{AB} der primäre Kurzschlussstrom i_{k_1} und kann gleichzeitig auch als das der primären Klemmenspannung entsprechende Gesamtfeld N_1 aufgefasst werden.

Der Primärstrom $\overline{AC} = i_1$ erzeugt nun einen Spannungsabfall i_{1r} , welcher einen Teil des Feldes N_1 absorbiert von der Grösse (vergl. Teil II, S. 62)

$$\overline{BB'} = \frac{\sigma}{\tau} i \perp i,$$

und daher unter dem Winkel φ geometrisch subtrahiert werden muss.

Das übrig bleibende Stück, $\overline{AB'} = N_1'$, ist erst dasjenige Feld, von welchem sich, entsprechend den Ausführungen Teil II, S. 60, das primäre Streufeld $\overline{AC} = i_2$ subtrahiert.

Diese Subtraktion gibt das Sekundärfeld von Motor I ($\overline{CB'}^1$), welches jedoch abermals nicht als solches für Motor II zu Verfügung steht, sondern eine weitere Verkleinerung dadurch erfährt, dass erst dasjenige Feld $B'B''$ hiervon zu subtrahieren ist, welches dem Spannungsabfall $2i_2r$ in Sekundärwicklung von Motor I plus Primärwicklung von Motor II entspricht. Dieses steht senkrecht zu i_2 und hat die Grösse

$$\overline{B'B''} = 2 \frac{\sigma}{\tau} i_2.$$

Das Resultat dieser Subtraktion ist das dieser Belastung i entsprechende Sekundärfeld

$$\overline{B''C} = N_2$$

und auf dieses erst lässt sich das eigentliche Heylandsche Kreisdiagramm anwenden.

Wir ziehen von N_2 geometrisch das primäre Streufeld i_2 von Motor II ab und erhalten endlich das Sekundärfeld von Motor II

$$\overline{DB''} = N_3,$$

wodurch das Polygon geschlossen wird.

Dieses N_3 ist dasjenige Feld, welches für die Bildung und Berechnung des Drehmomentes von Motor II massgebend ist und welches auf seinem Strom $i_3 = \overline{DD'}$ senkrecht steht. Dieser Sekundärstrom i_3 von Motor II muss daher auch das Gesamtfeld N_2 von Motor II in einem Punkte schneiden welcher N_2 im Verhältnis τ teilt, was in der Fig. 22 durch den gestrichelten Kreis kenntlich gemacht ist.

Wie vorstehend nachgewiesen, bewegen sich die Punkte D und C auf zwei Kreisen mit den Mittelpunktskoordinaten x_0 und y_0 , bzw. i_{w_0} und i_{0_0} , deren Berechnung durch die Formeln 7, 8, 9, bzw. 20, 21, 22 oder angenähert und bequemer durch 23 bis 28 gegeben wurde.

Die dünn ausgezogenen zwei Kreise zeigen die geometrischen Orte von D und C, wie früher abgeleitet unter Vernachlässigung der Kupferverluste; und dienen zur unmittelbaren Veranschaulichung des Einflusses der Kupferverluste durch Vergleichung mit den korrigierten Kreisen: wenn auch die Verhältnisse bei diesem Beispiele wegen der Deutlichkeit besonders in Bezug auf die Grösse der Verluste etwas übertrieben sind, so ist doch zu erkennen, dass auch unter normalen Verhältnissen das Diagramm Veränderungen erfährt, welche nicht mehr

¹⁾ Der Deutlichkeit wegen nicht ausgezogen.

zu vernachlässigen sind und nur auf dem angegebenen Wege berücksichtigt werden können.

Zur vollständigen Erklärung ist noch hinzuzufügen, dass in dem kleinen Dreieck AC_0c_0 die Strecke

$$\overline{C_0c_0} = \sigma i$$

senkrecht auf i steht, ferner

$$\begin{aligned} & i_w' \text{ und } 2i_w' \perp N_1' \\ & \left. \begin{aligned} \overline{FC} = i_w' \\ \overline{GD} = x \end{aligned} \right\} \perp N_1 \\ & \overline{c_0E'} \perp \overline{FC} \\ & \overline{CE} \perp \overline{GD}. \end{aligned}$$

Die punktierten Linien bei H, wo $\overline{B''H} \perp \overline{CH}$, d. h. $\overline{B''H}$ Verlängerung von $\overline{B'B''}$ und \overline{DH} Verlängerung von $\overline{CD} = i_2$, dienen endlich zur Bestimmung der beiden Drehmomente.

3. Das Verhältnis der Drehmomente.

Es ist vorauszusehen, dass, da ein Teil der Energie auf dem Wege von Motor II zu Motor I in den Widerständen in Wärme verwandelt wird, die beiden Drehmomente nicht mehr gleich sein können und ihr Verhältnis $D_2 : D_1$ wird von der Belastung abhängig werden.

Das Drehmoment wird nun in allen Fällen dargestellt durch das Produkt aus Ankerstrom und derjenigen Komponente des Ankerfeldes, welche senkrecht zum Ankerstrom steht.

Für Motor I erhalten wir für diese Komponente die Strecke $\overline{B'H}$ (Fig. 22) und als Ankerstrom i_2 , daher sein Drehmoment:

$$D_1 = i_2 \cdot \overline{B'H},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$D_1 = i_2 \cos \psi \cdot \frac{\overline{B'H}}{\cos \psi} = i_w' \cdot c_0 \overline{B'} = i_w \cdot \frac{1}{\tau} i_m' (1 - \tau),$$

oder unter Berücksichtigung von Formel 3, S. 74:

$$D_1 = \frac{1 - \tau}{\tau} (i_m i_w - \sigma i_1^2). \quad \dots \quad (29)$$

Für Motor II erhalten wir als Ankerstrom i_3 als Ankerfeld $\overline{B''D} = N_3$ und daher als Drehmoment

$$D_2 = i_3 \cdot N_3.$$

Nun ist aber die soeben verwendete Komponente des Ankerfeldes von Motor I

$$\overline{B'H} = \overline{B'B''} + \overline{B''H} = \frac{2\sigma}{\tau} i_2 + N_3 \cdot \cos \gamma^1),$$

oder wegen $\cos \gamma^1) = \frac{i_3}{i_2}$ in dem Dreieck $DD'C$, wird

$$\overline{B'H} = \frac{2\sigma}{\tau} i_2 + \frac{N_3 i_3}{i_2} = \frac{2\sigma}{\tau} i_2 + \frac{D_2}{i_2},$$

woraus

$$i_2 \cdot \overline{B'H} = \frac{2\sigma}{\tau} i_2^2 + D_2.$$

Da aber, wie eben abgeleitet, $i_2 \cdot \overline{B'H} = D_1$, so erhalten wir die einfache Beziehung

$$D_2 = D_1 - \frac{2\sigma}{\tau} i_2^2, \quad (30)$$

welche deutlich zeigt, dass D_2 wesentlich kleiner wird als D_1 und dass der Abstand um so mehr zum Ausdruck kommt, je grösser die durch die Variable i_2 ausgedrückte Belastung. Setzen wir hierin den Wert der Gleichung 29 ein, so bekommen wir

$$D_2 = \frac{1 - \tau}{\tau} (i_m i_w - \sigma i^2) - \frac{2\sigma}{\tau} i_2^2, \quad (31)$$

und endlich das gesuchte Verhältnis

$$\frac{D_2}{D_1} = 1 - \frac{\frac{2\sigma}{\tau} i_2^2}{\frac{1 - \tau}{\tau} (i_m i_w - \sigma i^2)}$$

oder

$$\frac{D_2}{D_1} = 1 - \frac{2\sigma}{1 - \tau} \frac{i_2^2}{i_m i_w - \sigma i^2}. \quad (32)$$

Hierin ist der Wert i_2 aus Gleichung 5, S. 74 als Funktion von i_0 und i_w zu entnehmen.

4. Tertiärstrom i_3 .

Endlich ist noch der Tertiärstrom i_3 zu bestimmen. Hierfür haben wir aus dem kleinen rechtwinkligen $\triangle DCD'$ die Beziehung Fig. 22:

¹⁾ Die beiden kleinen mit γ bezeichneten Winkel bei B'' und D sind gleich, weil ihre Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen.

$$i_3^2 = i_2^2 - \frac{\tau^2}{(1-\tau)^2} N_3^2$$

oder wegen

$$N_3^2 = (1-\tau)^2 N_2^2 - (1-\tau)^2 i_3^2$$

wird auch

$$\begin{aligned} i_3^2 &= i_2^2 - \tau^2 N_2^2 + \tau^2 i_3^2 \\ (1-\tau^2) i_3^2 &= i_2^2 - \tau^2 N_2^2. \quad (33) \end{aligned}$$

Hierin ist N_2^2 zu bestimmen, welches sich auf folgendem Wege ergibt: Zieht man $\overline{B''J} \perp \overline{AB}$ und $\overline{B'K} \perp \overline{B''J}$, so ist

$$\triangle B'KB'' \sim \triangle c_0 E'C,$$

woraus

$$\overline{E'C} : \overline{B'K} = i_2 : \frac{2\sigma}{\tau} i_2$$

und

$$\begin{aligned} \overline{B'K} &= \frac{2\sigma}{\tau} \overline{E'C} = \frac{2\sigma}{\tau} (i_w - \sigma i \sin \varphi) \quad [\text{vgl. S. 76, Gl. 11}] \\ &= \frac{2\sigma}{\tau} (i_w - \sigma i_0), \end{aligned}$$

und hieraus

$$\overline{BJ} = \frac{3\sigma}{\tau} i_w - \frac{2\sigma^2}{\tau} i_0$$

und

$$\begin{aligned} \overline{FJ} &= \frac{1}{\tau} i_m - i_0 - \overline{BJ} = \frac{1}{\tau} i_m - i_0 \left(1 - \frac{2\sigma^2}{\tau}\right) - \frac{3\sigma}{\tau} i_w \\ &= \frac{1}{\tau} (i_m - [\tau - 2\sigma^2] i_0 - 3\sigma i_w) = \overline{LC}. \end{aligned}$$

Aus der Aehnlichkeit der eben erwähnten beiden Dreiecke folgt ferner

$$\overline{B''K} = \frac{2\sigma}{\tau} \cdot \overline{E'c_0} = \frac{2\sigma}{\tau} (i_0 - i_m + \sigma i \cos \varphi) = \frac{2\sigma}{\tau} (i_0 - i_m + \sigma i_w)$$

und hieraus

$$\overline{B''J} = \frac{3\sigma}{\tau} i_0 - \frac{2\sigma}{\tau} (i_m - \sigma i_w)$$

und

$$\begin{aligned} \overline{B''L} &= \overline{B''J} - i_w \\ &= \frac{3\sigma}{\tau} i_0 - \frac{2\sigma}{\tau} i_m - i_w \left(1 - \frac{2\sigma^2}{\tau}\right) \\ &= \frac{1}{\tau} (3\sigma i_0 - 2\sigma i_m - [\tau - 2\sigma^2] i_w). \end{aligned}$$

Endlich liefert das rechtwinklige $\triangle CB''L$ die Beziehung

$$N_2^2 = \overline{LB''^2} + \overline{LC^2},$$

oder

$$\begin{aligned} \tau^2 N_2^2 &= (i_m - [\tau - 2\sigma^2]i_0 - 3\sigma i_w)^2 + (3\sigma i_0 - 2\sigma i_m - [\tau - 2\sigma^2]i_w)^2 \\ &= i_m^2 + (\tau - 2\sigma^2)^2 i_0^2 + 9\sigma^2 i_w^2 - 2i_m(\tau - 2\sigma^2)i_0 - 6\sigma i_m i_w \\ &\quad + 6\sigma(\tau - 2\sigma^2)i_0 i_w + 4\sigma^2 i_m^2 + (\tau - 2\sigma^2)i_w^2 + 9\sigma^2 i_0^2 - 12i_m \sigma^2 i_0 \\ &\quad + 4\sigma(\tau - 2\sigma^2)i_m i_w - 6\sigma(\tau - 2\sigma^2)i_0 i_w \\ &= (\tau - 7\sigma^2)i^2 - 2(\tau - 4\sigma^2)i_m i_0 - 2\sigma(3 - 2\sigma[\tau - 2\sigma^2])i_m i_w \\ &\quad + (1 + 4\sigma^2)i_m^2. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck für $\tau^2 N_2^2$ in Gleichung 33 eingesetzt, gibt

$$\begin{aligned} (1 - \tau^2)i_3^2 &= (1 + \sigma^2)i^2 - 2i_m i_0 - 2\sigma i_m i_w + i_m^2 \\ &= (\tau - 7\sigma^2)i^2 + 2(\tau - 4\sigma^2)i_m i_0 + 2\sigma(3 - 2\sigma[\tau - 2\sigma^2])i_m i_w \\ &\quad (1 + 4\sigma^2)i_m^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} i_3^2 &= \frac{1}{1 - \tau^2} ([1 - \tau + 8\sigma^2]i^2 - 2[1 - \tau + 4\sigma^2]i_m i_0 \\ &\quad + 4\sigma[1 - \sigma(\tau - 2\sigma^2)]i_m i_w - 4\sigma^2 i_m^2) \dots \dots \dots (34) \end{aligned}$$

oder mit den zulässigen Vernachlässigungen:

$$i_3^2 = \frac{1}{1 - \tau^2} ([1 - \tau]i^2 - 2[1 - \tau]i_m i_0 + 4\sigma i_m i_w - 4\sigma^2 i_m^2). \quad (35)$$

5. Praktische Anwendung.

Damit ist endlich alles gegeben, um zur praktischen Anwendung des Diagramms übergehen zu können. — Durch Messung, event. auch Rechnung, seien gefunden i_{m_1} , τ und Widerstand pro Phase r , somit auch Leerlaufsabfall $\sigma = \frac{i_{m_1} r}{e}$, wo e die primäre Klemmenspannung pro Phase, endlich noch der Eisenverlust V_e und der Reibungsverlust des ganzen Systems V_r .

Erstrebt wird wieder der Entwurf der Kurven für Wirkungsgrad, Leistungsfaktor, Tourenzahl bezw. Schlüpfung, und die Drehmomente beider Motoren sowie deren Verhältnis.

Ebenso wie bei den Diagrammen von Teil I, wo die Kupferverluste unberücksichtigt blieben, brauchen wir auch hier nur den kleinen Kreis zu konstruieren, mit dessen Hilfe alle übrigen Größen berechnet werden können.

Die charakteristischen Grössen desselben finden wir aus Gleichung 7, 8, 9, S. 75, wofür auch im allgemeinen, solange σ^2 klein ist gegen τ , die vereinfachten Gleichungen 23, 24, 25 benutzt werden können.

Es werden dann zu einer Anzahl (4 bis 5) passend gewählter Leerströme i_0 die zugehörigen Wattströme i_w und Gesamtströme i_0 abgemessen; der jeweilige Wattstrom ist noch um die konstante Grösse $i_h = \frac{V_e}{3e}$ zu vermehren und hieraus resultiert

$$\cos \varphi = \frac{i_w + i_h}{i}$$

Nunmehr können wir die Graphik ganz verlassen und berechnen zunächst die zugeführte primäre Leistung $L_I = 3ei$; von dieser abgezogen V_e und $3i_1^2 r$, gibt die auf den Sekundärteil von Motor I übertragene Leistung L_{II} .

Um die Verluste in diesem sowie im Primärteil von Motor II berechnen zu können, verwenden wir Gleichung 5, S. 74 und erhalten i_2^2 , woraus der sekundäre Kupferverlust $6i_2^2 r$ hervorgeht.

Mit Hilfe desselben i_2^2 berechnet sich das Verhältnis der Drehmomente $D_2 : D_1$ nach Gleichung 32, S. 81. Subtrahieren wir nun noch $6i_2^2 \cdot r$ von L_{II} , so erhalten wir die auf Motor II übertragene Leistung

$$L_{III} = L_I - V_e - 3i_1^2 r - 6i_2^2 r,$$

welche für die Bildung des Drehmomentes massgebend ist.

Endlich berechnen wir noch aus Gleichung 35 den Tertiärstrom i_3^2 und bilden $3i_3^2 r$, woraus endlich die abgegebene Leistung

$$L = L_I - V_e - 3i_1^2 r - 6i_2^2 r - 3i_3^2 r - V_r$$

hervorgeht, wenn V_r die Reibung bedeutet, und erhalten als Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{L}{L_I}$$

Als Schlüpfung ergibt sich dann

$$s = \frac{3i_3^2 r}{L + 3i_3^2 r + V_r}$$

und hieraus die Tourenzahl des ganzen Systems:

$$n = n_1(1 - s_1) = \left(1 - \frac{1}{2 - s}\right) n_1 = \frac{1 - s}{2 - s} n_1^1),$$

wo n_1 die synchrone Tourenzahl bedeutet.

Von Wert wird schliesslich noch die Berechnung der absoluten Grösse des gesamten Drehmoments, indem

$$D = \frac{L_{III} \cdot 0,981}{n} \text{ in kgm.}$$

6. Numerisches Beispiel und Zusammenstellung der Formeln.

Ein Beispiel, wie es thatsächlichen Verhältnissen entspricht, mag zu näherer Beleuchtung dieser Methode hier durchgerechnet werden.

Es sei gemessen:

$$\tau = 0,04; i_{k_1} = 350; i_{m_1} = 14; \sigma = \frac{i_m r}{e} = 0,008; r = 0,57; \\ e = 1000 \text{ Volt.}$$

Ferner Eisenverlust $V_e = 2400$ Watt und Reibungsverlust $V_r = 2700$ Watt.

Hieraus zunächst die drei Characteristica des kleinen Kreises:

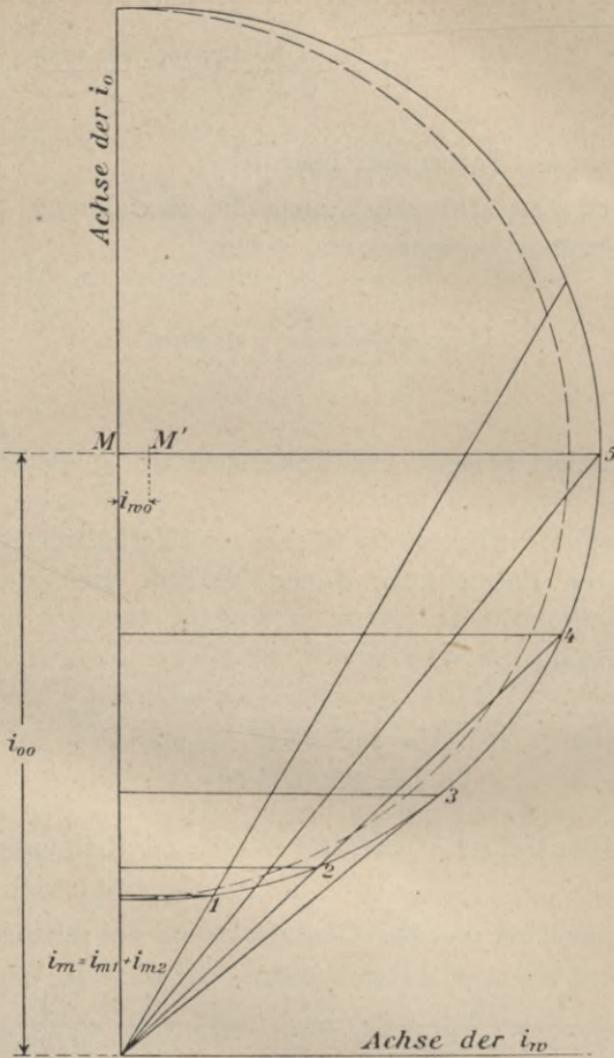
$$i_{00} = \frac{1}{4} \frac{1 + 6\tau}{\tau(1 + \tau) + 5\sigma^2} i_{m_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1,24 \cdot 14}{0,0461 + 0,000064} = 105 \\ i_{w_0} = \frac{2\sigma}{\tau(1 + \tau)} i_{m_1} = \frac{0,016 \cdot 14}{0,0416} = 5,4 \\ R = \frac{1}{4} \frac{(1 - \tau)^2}{\tau(1 + \tau)} i_{m_1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{0,92 \cdot 14}{0,0416} = 77,6.$$

Der Kreis ist in Fig. 23 dargestellt²⁾ und wird nun in der Weise benutzt, dass, wie es dort geschehen, 5 möglichst charakteristische Werte auf ihm gewählt werden, bezeichnet mit 1 bis 5, und die zugehörigen Werte für i_w und i abgemessen werden.

¹⁾ Vgl. S. 54, Gleichung 1.

²⁾ Der gestrichelte Kreis ist ohne Berücksichtigung der Ohmschen Verluste konstruiert und dient zur Vergleichung.

Fig. 23.



[Massstab $\frac{2}{3}$.]

Aus dem gemessenen Eisenverlust $V_e = 2400$ Watt berechnet sich der konstante Verluststrom durch Hysterisis

$$i_h = \frac{2400}{1000 \cdot 3} = 0,8 \text{ Amp.}$$

Dieser addiert sich zu den abgemessenen Wattströmen i_w und beeinflusst dadurch den Leistungsfaktor, welchen wir setzen müssen

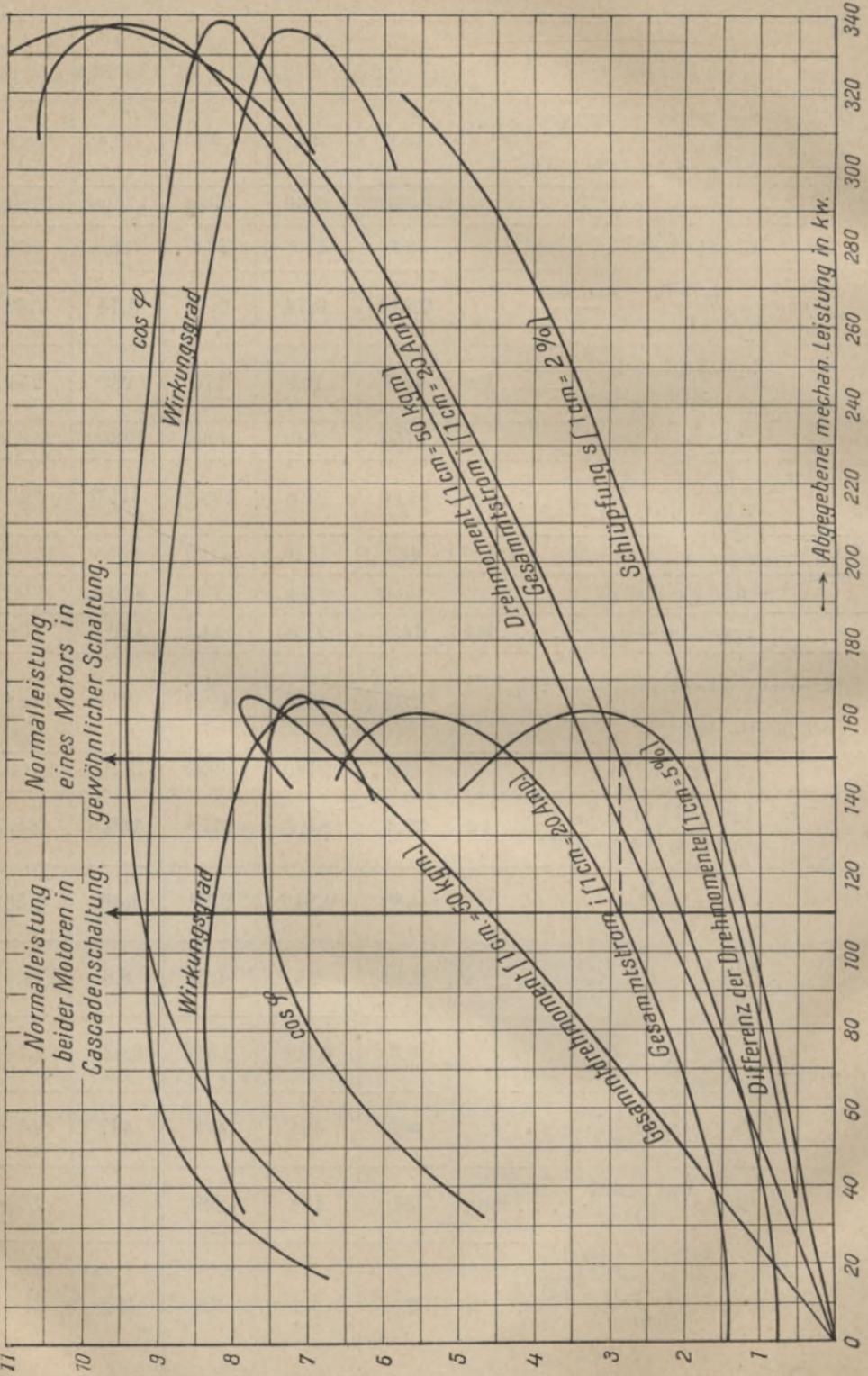
$$\cos \varphi = \frac{i_w + i_h}{i}$$

Tabelle II.

	1 $i_0 = 28$	2 $i_0 = 32,7$	3 $i_0 = 46$	4 $i_0 = 73,5$	5 $i_0 = 105$
$i_w = \sqrt{i_0(2i_{00} - i_0) - i_{00}^2 + R^2 + i_{w0}^4}$ $= \sqrt{i_0(210 - i_0) - 4980 + 5,4}$	15,6	34	56	76,5	83,3
$i_1^2 = i_w^2 + i_0^2$	1020	2240	5300	11200	18000
$i_1 = \sqrt{i_w^2 + i_0^2}$	32	47,3	72,6	106,4	134
$\cos \varphi = \frac{i_w + i_h}{i_1} = \frac{i_w + 0,8}{i_1}$	0,512	0,74	0,76	0,74	0,62
$L_I = 3e(i_w + i_h)$ $= 3000(i_w + 0,8) \dots \text{kw}$	49,2	104	170	233	254
$3i_1^2 r = 1,71 i_1^2$	1750	3840	9000	19300	30600
$L_{II} = L_I - V_e - 3i_1^2 r$ $= L_I - 2400 - 1,71 i_1^2 \dots \text{kw}$	44,05	97,8	158,6	211,3	221
$i_2^2 = i_1^2 - 2i_m i_0 + i_m^2 = i_1^2 - 28 i_0 + 196^2$	435	1516	4190	9356	15250
$6i_2^2 r = 3,42 i_2^2$	1500	5200	13800	32000	52000
$L_{III} = L_{II} - 6i_2^2 r \dots \text{kw}$	42,5	92,6	144,4	179,3	169
$i_3^2 = \frac{1}{1 - \tau^2} ([1 - \tau] i^2 - 2[1 - \tau] i_m i_0^3)$ $= 0,96 i^2 - 26,9 i_0$	230	1270	4040	9230	14380
$3i_3^2 r = 1,71 i_3^2$	385	2180	6900	15700	24600
$L = L_{III} - 3i_3^2 r - V_r$ $= L_{III} - 1,71 i_3^2 - 2700 \dots \text{kw}$	39,4	87,7	135,8	160,9	141,7
$\eta = \frac{L}{L_I}$	0,80	0,842	0,80	0,69	0,56
$s_2 = \frac{3i_3^2 r}{L + 3i_3^2 r + V_r} = \frac{1,71 i_3^2}{L_{III}} \dots \%$	0,92	2,4	4,75	8,8	14,6
$s_1 = \frac{1}{2 - s_2}$	0,5	0,506	0,512	0,523	0,54
$n = (1 - s_1) n_1 = \frac{1 - s_2}{2 - s_2} n_1$	500	494	488	477	460
$D = \frac{L_{III} \cdot 0,981}{500} \dots \text{kgm}$	84	184	290	370	360
$1 - \frac{D_2}{D_1} = \frac{2\sigma}{1 - \tau} \frac{i_2^2}{i_m i_w - \sigma i^2}$ $= \frac{0,0161 \cdot i_2^2}{14 i_w - 0,008 i^2} \dots \%$	3,5	5,4	8,8	15,6	24,8

¹⁾ Gl. 10a in Verbindung mit 23, 24, 25. ²⁾ Gl. 5, S. 74 mit zulässiger Verkürzung. ³⁾ Gl. 35, S. 83 mit zulässiger Verkürzung. ⁴⁾ Gl. 32, S. 81.

Fig. 24.



Streng genommen würde dadurch auch i um ein geringes geändert werden, doch ist dies von verschwindendem Einfluss und kann vernachlässigt werden.

Die vorstehende Tabelle II enthält in den Horizontalreihen die in der numerischen Rechnung aufeinanderfolgenden Werte, wobei hervorzuheben ist, dass die im Früheren angegebenen Formeln für i_2 und i_3 infolge verschwindender Grössen die in der Tabelle enthaltenen Vereinfachungen ergeben und somit alle Schrecken langer Formeln verlieren, wodurch auch hier die Ueberlegenheit des numerischen Rechnens zum Ausdruck kommt.

Die Resultate der Rechnung bilden die Kurven der Fig. 24, in welcher die Kurvenschar, welche ihren Umkehrpunkt bei 340 kw Leistung hat, dem normal geschalteten Motor, welcher auf S. 70 behandelt wurde, angehört, während die Kurvenschar, welche bei 160 kw umkehrt, den soeben berechneten in Kaskade geschalteten Motoren entspricht.

Die Vergleichung beider Kurvenscharen zeigt zunächst sinnfällig die auffallende Verschlechterung von $\cos \varphi$ und Wirkungsgrad, dann aber den gewaltigen Unterschied im maximal erreichbaren Drehmoment, welches bei einem Motor allein in normaler Schaltung nahezu doppelt so gross wird, als das der Kaskade.

Nimmt man ferner als normale Dauerleistung der Kaskade denjenigen Punkt an, bei welchem die Ueberlastungsfähigkeit noch 50 % beträgt, bevor der Motor ausser Tritt fällt, so erhält man 110 kw = 150 PS als Normalleistung, bei welcher auch gleichzeitig die zulässige Erwärmung im Dauerbetrieb stattfinden soll. Hierzu gehört ein Strom von 56 Amp. Bei diesem Strom wird natürlich auch die Erwärmungsgrenze bei normaler Schaltung desselben Motors vorhanden sein, und wir erhalten dadurch die normale Dauerleistung jedes der beiden Motoren mit 150 kw = 200 PS. (Vgl. in der Fig. 24 die beiden Vertikallinien).

Vergleichen wir diese beiden Punkte miteinander, so erhalten wir in der Kaskade:

$$\eta = 83 \% ; \cos \varphi = 76 \% ; D = 230 \text{ kgm (Gesamtdrehmoment)} ; \\ 7 \% \text{ Differenz der beiden Drehmomente.}$$

in der Normalschaltung:

$$\eta = 91 \% ; \cos \varphi = 94 \% ; D = 165 \text{ kgm (Drehmoment eines Motors).}$$

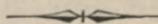
Wir sehen daher, dass wir wohl mit gleichem Strom ein wesentlich höheres Drehmoment erzielen können, dabei aber beträchtliche Einbussen am Wirkungsgrad und Leistungsfaktor mit in Kauf nehmen müssen.

Endlich ist noch der Einfluss der Korrektur insofern bemerkenswert, als der maximal erreichbare Leistungsfaktor ohne Berücksichtigung der Verluste sein würde:

$$(\cos \varphi)_{\max} = \frac{1 - \frac{4\tau}{(1 + \tau)^2}}{1 + \frac{4\tau}{(1 + \tau)^2}} = \frac{1 - 0,148}{1 + 0,148} = 0,74.$$

In Wirklichkeit wird erreicht

$$(\cos \varphi)_{\max} = 0,77.$$



S-98

WYDZIAŁY POLITECHNICZNE KRAKÓW

BIBLIOTEKA GŁÓWNA



L. inw.

5401

Biblioteka Politechniki Krakowskiej



10000299036