VORTRÄGE

ÜBER

BAUMECHANIK,

GEHALTEN AM

K. K. DEUTSCHEN POLYTECHNISCHEN INSTITUTE IN PRAG

VON

KARL v. OTT,

DIRECTOR DER II. DEUTSCHEN STAATS-OBERREALSCHULE UND
HON. DOCENT DER BAUMECHANIK.

II. THEIL, 1. LIEFERUNG,

ENTHALTEND

DIE ZUG-, DRUCK- UND SCHUBFESTIGKEIT, RESP. ELASTICITÄT,
SAMMT DEREN ANWENDUNG IN DER TECHNISCHEN PRAXIS.

ZWEITE UMGEARBEITETE AUFLAGE.

PRAG.
VERLAG VON H. DOMINICUS.
1877.

Druck von Heinr. Mercy in Prag.

Einleitung.

1. **Elasticität und Festigkeit.** Man kann sich jeden festen Körper aus materiellen Punkten zusammengesetzt denken, die durch eine ihnen eigenthümliche Kraft — Cohäsion genannt — im Zusammenhange erhalten werden. Die Cohäsion äussert sich durch den Widerstand, welchen die festen Körper jeder Formänderung, d. i. jeder Verrückung ihrer materiellen Punkte entgegen setzen.

Wir wollen in der Folge den Inbegriff der auf einen Körper einwirkenden äusseren Kräfte die Belastung desselben und den Körper selbst den Träger dieser Belastung nennen.

Innerhalb gewisser Grenzen ist mit jeder Belastung eine entsprechende Formänderung des in Anspruch genommenen Trägers verbunden, welche mehr oder weniger verschwindet, wenn die Belastung aufgehoben wird. Man pflegt jenen Theil der Cohäsion, durch welchen nach der Wegnahme der Belastung die Formänderung wieder aufgehoben wird, die Elasticität des Trägers zu nennen.

Wird nach der Beseitigung der Belastung durch die Elasticität die ursprüngliche Form des Trägers genau wieder hergestellt, so sagt man: der Träger verhalte sich vollkommen elastisch; ist dies aber nicht der Fall, d. h. verschwindet die Formänderung nach der Wegnahme der Belastung nicht gänzlich, so sagt man: der Träger verhalte sich unvollkommen elastisch.

Die grösste Formänderung, welche ein belasteter Träger annehmen kann, ohne aufzuhören vollkommen elastisch zu sein, heisst die Elasticitätsgrenze und die Belastung, durch welche diese Grenze erreicht wird, die Elasticitätsgrösse oder Grenzbelastung.

Es versteht sich von selbst, dass beide sowohl von der materiellen Beschaffenheit als auch von der Grösse und Form des Trägers abhängen.

Wird durch die Belastung die Elasticitätsgrösse überschritten, so wird auch die Elasticitätsgrenze überschritten, d. h. der afficirte Träger nimmt nach dem Aufheben der Belastung nicht mehr seine ursprüngliche Form vollständig an; es erfahren also die einzelnen materiellen Punkte desselben eine bleibende Verrückung, durch welche natürlich auch eine Aenderung der ursprünglichen Cohäsion bedingt ist. Jener Theil der Formänderung, welcher alsdann nach der Beseitigung der Belastung wieder verschwindet, heisst die elastische, während der zurück gebliebene Theil die bleibende oder permanente Formänderung genannt wird. Beide zusammen geben die totale Formänderung des Trägers.

Erfolgt endlich bei stetiger Zunahme der Belastung und bei der hiemit fortschreitenden Formänderung eine Trennung der materiellen Punkte, d. h. tritt eine Zerstörung des Trägers ein, so wird die ganze Cohäsion des Materiales an der Bruchstelle überwunden und im Augenblicke der Zerstörung das Mass der sogenannten Festigkeit erreicht. Festigkeit ist also der durch die Belastung eines Trägers in demselben hervorgerufene totale Widerstand gegen die Trennung seiner Theilchen.

Je nach der Art der Belastung und der durch dieselbe erzielten Formänderung unterscheidet man bekanntlich mehrere Arten der Elasticität und Festigkeit, wie z. B. die Zug-, Druck-, Schub-, Biegungs-, Drehungs-Elasticität und Festigkeit.

2. **Grösse der Belastung.** Sollen die im Bauwesen angewendeten Materialien der Belastung mit hinreichender Sicherheit für die Dauer widerstehen, so darf durch die Belastung die Elasticitätsgrenze nicht überschritten, ja in den meisten Fällen nicht einmal erreicht werden; denn fast alle Träger sind mehr oder weniger momentanen Erschütterungen oder Stössen ausgesetzt, durch welche — namentlich wenn sich dieselben rasch wiederholen — mit der Zeit eine Aenderung der Structur des Materiales bewerkstelligt wird, die oft eine bedeutende Verminderung der Elasticität zur Folge hat. Da überdies die Baumaterialien mehr oder weniger dem verderblichen Einflusse der Atmosphärilien ausgesetzt sind, so ist es erklärlich, dass in der Baupraxis die grösste zulässige Belastung von verschiedenen Umständen abhängig sein wird. Wie weit man mit der Belastung in den verschiedenen Fällen der Praxis gehen darf, wird später bestimmt werden, doch müssen wir schon jetzt die für alle definitiven Bauten giltige Regel aufstellen: dass bei allen Bauconstructionen durch die grösste Belastung die Elasticitätsgrenze der einzelnen Constructionstheile nicht erreicht werden dürfe.

3. **Aufgabe der Elasticitätslehre.** Die Elasticitätslehre hat demnach im Allgemeinen die folgenden Aufgaben zu lösen:

a) Ermittlung der Belastung, welche die elastischen Träger mit entsprechender Sicherheit für die Dauer tragen können, oder umgekehrt: Bestimmung der Dimensionen der einzelnen Constructionstheile, damit sie einer gegebenen Belastung für die beabsichtigte Dauer widerstehen können.

b) Bestimmung der Formänderung, welche die einzelnen Constructionstheile durch die gegebene Belastung erleiden.

Um diese Aufgaben lösen zu können, würde es vor Allem darauf ankommen, die allgemeinen Beziehungen kennen zu lernen, die zwischen den äusseren oder angreifenden Kräften und den durch dieselben hervorgerufenen oder inneren Kräften des afficirten Trägers stattfinden.

Wir sollten hier also die allgemeine Theorie der inneren Kräfte entwickeln; dies würde uns jedoch zu weit führen, wir werden daher nur jene Fälle der allgemeinen Elasticitäts- und Festigkeitslehre entwickeln, die zum Verständnis des Nachfolgenden unentbehrlich sind. Alle jene, welche die allgemeinsten Fälle der Elasticitäts- und Festigkeitslehre studieren wollen, verweisen wir zunächst auf die betreffenden Werke von Dr. F. Grashof (Berlin, 1866) und Dr. E. Winkler (Prag, 1868).

4. **Allgemeine Bezeichnungen.** Um die räumlichen Abstufungen der in Rechnung zu nehmenden Grössen besser zu veranschaulichen, wollen wir nach dem Vorgange von Culmann *) die verschiedenen räumlichen Abstufungen durch verschiedene Buchstaben systematisch kennzeichnen, und zwar die von drei Dimensionen abhängigen Grössen mit grossen Frakturbuchstaben, die von zwei Dimensionen abhängigen mit grossen lateinischen, die linearen Grössen mit kleinen lateinischen und die Verhältniszahlen durch kleine griechische Buchstaben ausdrücken. Hiernach werden im Folgenden die Rauminhalte und Momente durch grosse Fracturbuchstaben, die Flächen und Kräfte, weil letztere gewöhnlich den Flächen proportional sind, mit grossen lateinischen, die Strecken und die pro Längeneinheit wirkenden Kräfte mit kleinen lateinischen und endlich die pro Flächeneinheit wirkenden Kräfte oder Spannungen mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnet.

Es bezeichnet also in der Folge:

$\mathfrak{J}$ Körperinhalte und Trägheitsmomente,
$\mathfrak{M}$ statische Momente,
B Belastungen von Constructionstheilen,
D Auflager oder Stützendrücke,
F Querschnittsflächen,
G Gewichte,
O Kräfte im oberen Gurte von Trägern,
P äussere Kräfte,
R Resultirende mehrerer Kräfte,
S Kräfte in Streben und Diagonalbändern,
T Kräfte in Bogen und Ketten,
U Kräfte im Untergurte und
V die Transversal- oder Verticalkräfte in Querschnitten horizontaler Träger; ferner
a oder e Abstände oder Entfernungen,
b Breitendimensionen,

*) Siehe Culmann's graphische Statik, Zürich 1875.

d Durchmesser,
g Belastungen durchs Eigengewicht pro Längeneinheit,
h Höhendimensionen,
l Längen,
p mobile Belastungen pro Längeneinheit,
$q = g + p =$ totale Belastungen pro Längeneinheit und
r die Radien; endlich
α die specifischen Arbeitsfestigkeiten,
β die zulässigen Beanspruchungen pro Flächeneinheit,
γ die Gewichte der Volumseinheiten,
ε die Elasticitätsmoduli,
η die Elasticitätsgrenzen oder die Grenzmoduli,
μ die Festigkeits- oder Bruchmoduli.

Als Krafteinheit wird im Allgemeinen 1 Kilogramm und als Flächeneinheit 1 Quadrat-Centimeter gewählt.

5. **Die inneren Kräfte.** Wird ein Träger durch äussere Kräfte deformirt, d. h. werden die ursprünglichen Abstände der materiellen Punkte innerhalb der Elasticitätsgrenze geändert, so sucht die Elasticität die materiellen Punkte wieder in ihre ursprüngliche Lage zurück zu führen. Denkt man sich nun in diesem Träger eine unendlich kleine ebene Fläche F, so werden sich zwischen den auf beiden Seiten dieser Fläche liegenden materiellen Punkten wechselseitige Kräfte äussern, von denen man annehmen kann, dass sie sich über die unendlich kleine Fläche F gleichmässig vertheilen. Bezeichnet man die Mittelkraft der auf das Flächenelement F wirkenden inneren Kräfte mit R, so gibt der Quotient $\frac{R}{F}$ die auf die Flächeneinheit des afficirten Flächenelementes bezogene innere Kraft σ, die wir in der Folge die *specifische Spannung* oder *Beanspruchung* nennen wollen. *Unter der specifischen Spannung oder Beanspruchung werden wir also im Nachfolgenden stets nur die pro Quadrat- oder Flächeneinheit in irgend einer ebenen Schnittfläche des belasteten Trägers thätige innere Kraft verstehen.*

Die Spannung σ können wir uns stets in zwei Componenten zerlegt denken, von denen die eine σ_n auf dem afficirten Flächenelemente F senkrecht steht, während die andere σ_s in der Ebene F selbst wirkt. Die senkrecht zu F thätige Componente σ_n heisst die Normalspannung; sie äussert sich als *Zug-* oder Druckspannung, je nachdem sie die auf beiden Seiten von F liegenden materiellen Punkte von einander zu entfernen, oder einander zu nähern strebt. Die *Zugspannung* wollen wir als *positive*, die *Druckspannung* als *negative* Spannung in Rechnung nehmen. Die in der Fläche selbst wirkende Componente σ_s sucht die auf beiden Seiten der Fläche F liegenden materiellen Punkte über einander zu verschieben, weshalb sie die *Schub-* oder die *Tangentialspannung* genannt werden wird.

6. **Grundprincip der Formänderung.** Um zu einer genauen Kenntnis der Beziehungen zwischen den Spannungen und der durch sie verursachten Formänderung zu gelangen, müsste das Gesetz bekannt sein, nach welchem sich die Elasticität bei den verschiedenen Arten von elastischen Körpern mit der Deformirung dieser Körper ändert. Da aber dieses Gesetz bisher nicht bekannt ist, so müssen wir uns zunächst an die durch zahlreiche und sorgfältige Versuche gewonnenen Resultate halten, wobei insbesondere der folgende Fundamentalversuch massgebend ist.

Lässt man auf ein homogenes rechtwinkliges Parallelepiped mit den Kanten *abc*, Fig. 1, parallel zur Kante *c* auf jede von

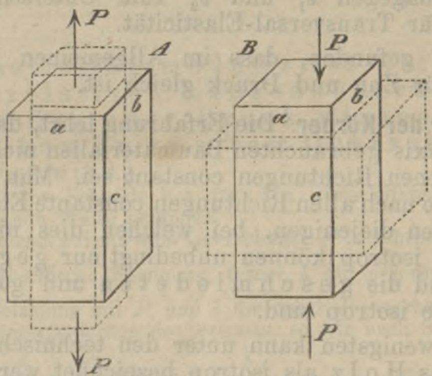


Fig. 1.

den beiden gegenüberstehenden Flächen eine auf die ganze Fläche gleichmässig vertheilte Kraft P wirken, so geht das Parallelepiped in ein anderes nach folgendem Gesetzo über: Wenn die Kraft ziehend wirkt, so wird c verlängert, a und b dagegen werden verkürzt (Fig 1, A.); wenn die Kraft drückend wirkt, so wird c verkürzt, a und b dagegen werden verlängert (Fig. 1, B.)

Die Längenänderung der Kanten in Richtung der Kraft P, also jener c, nennt man die longitudinale Längenänderung oder Längenänderung schlechtweg und bezeichnet sie mit $+$ (plus), die Längenänderung der andern Kanten a und b dagegen die transversale Längenänderung und bezeichnet sie mit $-$ (minus). Der Quotient aus der Längenänderung durch die ursprüngliche Kantenlänge wird die relative Längenänderung genannt. Durch die Versuche wurde constatirt, dass so lange durch die Normalspannung die Elasticitätsgrenze des Parallelepipeds nicht überschritten wird, sowohl die relat. longitudinale als auch die relat. transversale Längenänderung proportional ist der auf die Flächeneinheit des Querschnittes wirkenden Kraft σ (Hooke's Gesetz).

Bezeichnet man mit $\triangle c$, $\triangle a$ und $\triangle b$ die Längenänderung der Kanten c, a und b, so kann man daher, wenn ε, ε_1 und ε_2

gewisse dem Materiale des Parallelepipeds bezüglich der Richtung der Kanten c, a und b zukommende Erfahrungscoëfficienten bedeuten, die Gleichungen aufstellen:

$$\frac{\triangle c}{c} = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \frac{\triangle a}{a} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_1} \text{ und } \frac{\triangle b}{b} = \frac{-\sigma}{\varepsilon_2} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Hiernach wird die relative Längenänderung gefunden, wenn man die per Flächeneinheit thätige Normalspannung σ durch eine von der Elasticität des Materiales abhängige Grösse dividirt.

Man nennt hierbei ε den Elasticitätsmodul oder Elasticitätscoëfficienten, dagegen ε_1 und ε_2 zum Unterschiede von ε die Coëfficienten für Transversal-Elasticität.

Man hat gefunden, dass im Allgemeinen der Elasticitätscoëfficient ε für Zug und Druck gleich ist.

7. **Textur der Körper.** Die Erfahrung lehrt, dass die Elasticität der in der Praxis gebrauchten Baumaterialien nicht bei allen nach den verschiedenen Richtungen constant sei. Man nennt diejenigen Materialien, die nach allen Richtungen constante Elasticität besitzen, isotrop, dagegen diejenigen, bei welchen dies nicht der Fall ist, anisotrop. Als isotrop können unbedingt nur gegossene Körper gelten, während die geschmiedeten und gewalzten nur näherungsweise isotrop sind.

Am allerwenigsten kann unter den technisch wichtigen Baumaterialien das Holz als isotrop bezeichnet werden, denn es hat nur nach einer Richtung, nämlich nach der Faserrichtung nahezu constante Elasticität und in dieser Richtung die grösste Normalfestigkeit, worauf in der Praxis Rücksicht genommen werden muss. Auch der Draht hat in der Längenrichtung und das Blech in der Walzrichtung constante Elasticität und die grösste Festigkeit.

Im Allgemeinen kann man die beiden Coëfficienten ε_1 und ε_2 der Transversal-Elasticität einander gleich setzen; doch sind sie von ε wesentlich verschieden, so dass man schreiben kann $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = n\varepsilon$, wobei im Allgemeinen n zwischen $\frac{2}{5}$ und $\frac{3}{8}$ liegt, sich jedoch dem Zahlenwerthe $\frac{2}{5}$ mehr nähert, so dass nahezu $n = \frac{2}{5}$ gesetzt werden kann, oder $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0{\cdot}4\ \varepsilon$.

8. **Elasticitätsmodul** ε. Aus der Gleichung (1) folgt:

$$\triangle c = \frac{c\sigma}{\varepsilon} \text{ oder } \triangle c = \frac{c\sigma F}{\varepsilon F},$$

wenn F die Grösse der Querschnittsfläche des auf Zug oder Druck in Richtung der Kante c, Fig. 1, in Anspruch genommenen Parallelepipeds bedeutet. Da aber σ die Anspruchnahme pro

Flächeneinheit ist, so gibt $\sigma \,.\, F = P$ die auf die ganze Querschnittsfläche thätige Kraft, weshalb

$$\triangle c = \frac{c \,.\, P}{\varepsilon \,.\, F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2);$$

d. h. die Längenänderung ist innerhalb der Elasticitätsgrenze direct proportional der thätigen Zug- oder Druckkraft P und umgekehrt proportional dem Producte aus der Querschnittsfläche F und dem Elasticitätsmodul ε.

Für $F = 1$ und $P = 1$ wird $\frac{\triangle c}{c} = \frac{1}{\varepsilon}$, so dass man sagen kann:

Der Elasticitätsmodul ε ist der reciproke Werth der relativen Längenänderung, welche von der als Zug oder Druck wirkenden Krafteinheit in einem Prisma vom Querschnitte Eins bewerkstelligt wird.

Professor Gustav Schmidt hat für den Elasticitätmodul eine andere Bedeutung auf folgende Weise gefunden.

Ist P die in einem Prisma vom Querschnitte F bestehende totale Spannung, also $\sigma = \frac{P}{F}$ die specifische Spannung, ferner l die ursprüngliche Länge des Prismas vor der Belastung mit P, und λ die durch P innerhalb der Elasticitätsgrenze erzeugte Längenänderung des Prismas, so wir nach Gleichung (1)

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \text{ oder } \sigma = \varepsilon \frac{\lambda}{l} \quad \ldots\ldots (\alpha).$$

Wird nun angenommen, dass das für permanente Gase von constanter Temperatur bestehende Mariotte'sche Gesetz: „Product aus Spannung mit Volum = Constans" auch für feste Körper gelte, und bedeutet μ die Molecularanziehung der innern Theilchen auf jede Flächeneinheit der Oberfläche im natürlichen Zustande des Prismas, somit $\mu - \sigma$ die nach Anbringung der Kraft P verbleibende specifische Spannung, so besteht dem obigen Gesetze zufolge die Gleichung:

$$\mu l = (\mu - \sigma)(l + \lambda) = \mu l - \sigma l + \mu \lambda - \sigma \lambda,$$

daher

$$\sigma (l + \lambda) = \mu \lambda, \text{ oder } \sigma = \frac{\mu \lambda}{l + \lambda}.$$

Da aber λ gegen l sehr klein ist, so folgt: $\sigma = \mu \frac{\lambda}{l} \ldots\ldots (\beta)$.

Aus der Vergleichung der Gleichungen (α) und (β) ergibt sich $\mu = \varepsilon$; d. h. der Elasticitätsmodul bedeutet die Molecularanziehung pro Flächeneinheit.

Da im natürlichen Zustande für jedes Innentheilchen die molecularen Anziehungskräfte nach irgend einer Richtung mit den molecularen Abstossungskräften im Gleichgewichte stehen, so wie an der Oberfläche, so vertheilt sich auch die Längenänderung λ gleichmässig auf die ganze Länge.

Die Richtigkeit dieser Auffassung des Elasticitätsmoduls bekräftigt Professor Schmidt in seinen Vorlesungen über mechanische Wärmetheorie durch die von ihm und Hirn zugleich gefundene Zustandsgleichung der Dämpfe, welche in der Form geschrieben werden kann: $\mathfrak{J}\,(\pi + \mu) = \alpha \,.\, t$, oder wenn die absolute Temperatur t constant bleibt:

$$\mathfrak{J}\,(\pi + \mu) = \text{Constans}.$$

Hiebei ist $\mathfrak{J}$ der Rauminhalt, π die äussere Pressung pro Flächeneinheit, entsprechend dem $-\sigma$, μ die moleculare Anziehung pro Flächeneinheit, von Hirn „die innere Pressung“ genannt. Bei einem vollkommenen Gase ist $\mu = 0$, bei permanenten Gasen äusserst klein, aber nicht 0, bei coërciblen Dämpfen noch immer klein, aber bei weitem nicht 0, und bei festen Körpern ist es sehr gross; für alle Körper gilt aber, wenn t constant bleibt, in diesem Sinne genommen das Mariotte'sche Gesetz. Hieraus ist auch erklärlich, dass bei festen Körpern der Elasticitätsmodul für Zusammendrückung eines kurzen sich nicht biegenden Körpers denselben Werth hat, wie für Ausdehnung.

Der numerische Werth des Elasticitätsmoduls ε hängt natürlich ausser vom Materiale auch von der Wahl der Kraft- und Flächeneinheit ab, so ist z. B. für Schmiedeisen, wenn 1 □Centimeter als Flächeneinheit und 1 Kilogramm als Krafteinheit gewählt wird, $\varepsilon = 2000000$, während für dasselbe Materiale, wenn 1 Quadrat-Zoll als Flächeneinheit und 1 Centner als Krafteinheit angenommen wird, $\varepsilon = 276000$. In der folgenden Tabelle sind die Mittelwerthe des Elasticitätsmoduls verschiedener Materialien in Kilogrammen pro Quadratcentimeter und die Werthe von $\frac{\triangle c}{c}$ an der Elasticitätsgrenze zusammengestellt.

Material	ε in Kgr. pro □cm.	$\frac{\triangle c}{c}$
Aluminium	675000	— —
Blei	50000	0·00210
Bleidraht	70000	0·000667
Bronze	690000	0·000629
Eichenholz Faserrichtung	117000	0·001667
„ radial	1300	— —
„ tangential	800	— —
Eisen, Gusseisen { Zug	1000000	0·000760
Eisen, Gusseisen { Druck	990000	0·001500
„ geschmiedet in Stäben	2000000	0·000690
„ gewalzt	1800000	0·000800
„ Draht	2190000	0·001000
Fichte, Kiefer, Faserrichtung	100000	0·002000
„ „ radial	1100	— —
„ „ tangential	650	— —
Glas	700000	— —
Gold	800000	0·001667
Kupfer gehämmert	1100000	0·000250
„ Blech	1100000	0·000274
„ Draht	1200000	0·001000
Lederriemen	730	— —
Messing	640000	0·000758
„ Draht	987000	0·001350
Platin	1600000	0·001667
Stahl ungehärtet	2046780	0·001000
„ gehärtet	2250000	0·001208
„ Guss, ungehärtet	2500000	0·001500
„ „ gehärtet	3000000	0·002222
Silber	730000	0·001515
Zink	950000	0·000241
Zinn	400000	0·001111

9. **Festigkeits- und Grenzmodul.** Die kleinste ruhende Belastung, durch welche der Bruch des Trägers veranlasst wird, heisst die Bruchbelastung. Der von der Bruchbelastung auf die Flächeneinheit der Bruchfläche entfallende Betrag μ wird **Bruch-** oder **Festigkeitsmodul** genannt und zwar für Zug, Druck oder Schub, je nachdem das Materiale des Trägers nur auf Zug, Druck oder Schub allein in Anspruch genommen wurde.

Die Belastung, durch welche die Elasticitätsgrenze des Trägermateriales erreicht wird, heisst Grenzbelastung. Der von der Grenzbelastung auf die Flächeneinheit der afficirten Fläche entfallende Betrag η wird **Grenz-** oder **Tragmodul** genannt.

Aus der Gleichung (1) d. i. aus $\frac{\triangle c}{c} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ erhält man also für die Elasticitätsgrenze, für welche $\sigma = \eta$ wird, $\eta = \frac{\triangle c}{c}\ \varepsilon$.

Man findet also aus der 1. Tabelle den Grenzmodul η, indem man die relative Längenänderung $\frac{\triangle c}{c}$, welche sich für die Elasticitätsgrenze ergibt, mit dem zugehörigen Elasticitätsmodul ε multiplicirt.

In der folgenden Tabelle sind die Mittelwerthe der Festigkeits- und Grenzmoduli für mittelgute Materialien in Kilogr. pro □Centim. zusammengestellt. Leider differiren die durch die bisher angestellten Versuche gewonnenen Resultate für gleichnamige Materialien, wegen der verschiedenen Qualität derselben, ziemlich stark und sind namentlich die böhmischen noch fast gar nicht bezüglich ihrer Festigkeit und Elasticität gebührend erprobt worden, weshalb wir die Aufstellung der Gollner'schen Festigkeitsmaschine am hiesigen deutschen Polytechnicum mit lebhafter Befriedigung begrüssen und den bezüglichen Versuchsresultaten mit grossem Interesse entgegensehen. Mit dieser Maschine kann man alle Arten der Festigkeit mit bedeutender Schärfe, nämlich mit nur 5 Kg. Belastungsdifferenz bei einer Wirkungsgrösse bis zu 25000 Met. Kg. bestimmen.

Tabelle
des Festigkeits- und Grenzmoduls in Kgr. pro □cm.

Material	Festigkeitsmodul für Zug	Festigkeitsmodul für Druck	Festigkeitsmodul für Schub	Elasticitätsgrenze oder Grenzmodul für Zug	Elasticitätsgrenze oder Grenzmodul für Druck	Elasticitätsgrenze oder Grenzmodul für Schub	Specifisches Gewicht
A. Metalle.							
Aluminium	2000	—	—	—	—	—	2·50
Blei	130	500	100	100	—	—	11·37
„ — Draht	220	—	—	50	—	—	—
Bronze	2500	—	2000	440	—	—	8·60
Eisen — Gusseisen	1300	7000	1040	750	1500	600	7·24
„ — geschmiedet	4000	4000	3200	1400	1400	1100	7·75
„ — Blech	3300	3000	2600	1400	1400	1100	7·80
„ — Draht	6000	—	—	2200	—	—	7·80
Gold	2700	—	—	1300	—	—	19·26
Kupfer — gegossen	1340	4100	1070	—	—	—	8·70
„ — geschmiedet	2400	—	1900	270	—	210	8·75
„ — Blech	2100	—	1680	300	—	240	8·94
„ — Draht	4200	—	—	1200	—	—	9·00
Messing — gegossen	1242	1100	990	480	—	380	8·55
„ — Draht	3600	—	—	1300	—	—	8·60
Platin	3400	—	2700	2660	—	—	22·70
Silber	2900	—	—	1100	—	—	10·47
Stahl — weich	5000	5480	4000	2000	2000	1600	7·75
„ — Blech	5000	5000	4000	2500	2500	2000	7·80
„ — Draht	9000	—	—	4500	—	—	7·80
„ — gehärtet	7500	7500	6000	2700	2700	2160	7·78
Gussstahl — weich	8000	10000	6400	3750	5000	2800	7·78
„ — gehärtet	10000	—	8000	6660	—	5330	7·80
„ Draht	11000	—	—	—	—	—	7·80
Zink gegossen	526	—	420	230	—	180	7·00
„ Blech	480	—	380	230	—	180	7·20
Zinn gegossen	800	—	240	440	—	350	7·28
„ Draht	850	—	—	440	—	—	7·30
B. Bauholz.							
Eichenholz ‖ zur Faserrichtung	800	700	80	200	180	20	0·85
„ ⊥ zur Faserrichtung	50	350	160	—	—	—	—
Nadelholz ‖ zur Faserrichtung	700	600	60	200	—	20	0·70
„ ⊥ zur Faserrichtung	45	220	130	—	—	—	—
Buchenholz ‖ zur Faserrichtung	1000	660	66	160	—	—	0·721
„ ⊥ zur Faserrichtung	70	350	—	—	—	—	—
C. Bausteine.							
Basalt	—	1200	—	—	—	—	2·85
Granit und Gneis	30	600	100	—	—	—	2·82
Kalkstein	27	300	70	—	—	—	2·75
Sandstein	17	200	80	—	—	—	2·45
Ziegel gebrannt	12	100	40	—	—	—	1·80
Luftmörtel	—	60	5	—	—	—	1·80
Cement (Portlandcement, rein)	10	234	18	—	—	—	2·7—3
1 Theil Cement, 1 Theil Sand	14	228	28	—	—	—	
1 „ „ 2 „ „	13	193	26	—	—	—	
1 „ „ 3 „ „	14	173	25	—	—	—	
1 Th. hydr. Kalk, 1 Th. Sand	—	108	—	—	—	—	2·3–2·5
1 „ „ „ 2 „ „	—	128	—	—	—	—	
1 „ „ „ 3 „ „	—	115	—	—	—	—	

10. **Zulässige Beanspruchung β pro Flächeneinheit.** (1 □cm.) Man hat bisher bei der Berechnung der Querschnittsdimensionen der Constructionstheile als zulässige specifische Beanspruchung β gewöhnlich einen Theil des Festigkeitsmoduls μ, z. B. den $n$ten Theil angenommen, und alsdann behauptet, man baue mit $n$facher Bruchsicherheit. Selbstverständlich wurde der Sicherheits-Coëfficient n so gewählt, dass $\frac{\mu}{n}$, d. i. β, unterhalb der Elasticitätsgrenze η blieb, und zwar wurde n um so grösser angenommen, je grösser die schädlichen Einflüsse der Atmosphärilien, je grösser die Stösse oder Erschütterungen gewesen sind, denen die Constructionstheile ausgesetzt waren und je mehr der Festigkeitsmodul μ des betreffenden Materiales variirte.

Die folgende Tabelle gibt die Mittelwerthe des Sicherheitscoëfficienten n, mit dem man den Festigkeitsmodul μ zu dividiren hat, um die zulässige Beanspruchung β für die gewöhnlichsten Fälle der Baupraxis zu erhalten.

Tabelle

des Sicherheitsgrades n.

Material	Provisorische Bauten für kurze Dauer	Gebäude-Constructionen im Allgemeinen	Dach- und Brücken-Constructionen im Allgemeinen	Stark erschütterte Constructionen (Maschinenbau)
Holz	6	9	10	15
Gusseisen . . .	—	6	7	10
Schmiedeeisen .	3	4	5 bis 6	7 bis 8
Eisenblech . . .	—	4		
Gewöhnl. Stahl .	—	—		
Bessemer- „ .	—	—		
Gussstahl . . .	—	—		
Seile u. Riemen .	4	5	6	10
Stein	10	20	30	35

Hiernach ergeben sich die abgerundeten Werthe der zulässigen Beanspruchung $\beta = \frac{\mu}{n}$ für mittelgute Materialien.

Tabelle

der zulässigen Beanspruchung β in Kgr. pr. □cm.

Material	Provisorische Bauten von kurzer Dauer			Gebäude-Construction im Allgemeinen			Dach- und Brücken-Constructionen im Allgemeinen			Stark erschütterte Constructionen (Maschinenbau)		
	Zug	Druck	Schub	Zug	Druck	Schub	Zug	Druck	Schub	Zug	Druck	Schub
Eichenholz } Faser-	130	120	15	90	80	10	80	70	8	60	50	6
Nadelholz } richtung	120	100	10	80	70	7	70	60	6	50	40	4
Gusseisen	300	750	240	250	600	200	200	500	150	130	300	100
Schmiedeisen in Stäben	1200	1200	1000	1000	1000	800	800 - 700	800—700	640—560	500	500	400
Eisenblech	—	—	—	800	800	600	700—600	700—600	560—480	300	300	240
Eisendraht	—	—	—	—	—	—	1200—1000	—	—	800	—	—
Gewöhnl. Stahl, weich .	—	—	—	—	—	—	1000—900	1000—900	800 - 700	700	700	560
Gehärteter Stahl . . .	—	—	—	—	—	—	1500—1200	1500—1200	1200 - 960	1000	1000	800
Gussstahl	—	—	—	—	—	—	2000—1700	2000—1700	1600—1300	1400	1400	1100
Mauer aus Kalkstein .	—	50	—	—	25	—	—	15	—	—	10	—
„ „ Sandstein .	—	20	—	—	10	—	—	7	—	—	5	—
„ „ Ziegel . . .	—	6	—	—	3	—	—	2	—	—	—	—

Die für provisorische Bauten angeführten Beanspruchungen gelten für Gerüste, Nothbrücken u. dgl., aber auch für Träger ruhender Belastung; jene für Gebäude-Constructionen auch für alle Constructionstheile, die nur mässigen Erschütterungen ausgesetzt sind und deren Belastungen genau ermittelt werden können. Die für Dach- und Brücken-Constructionen angegebenen grösseren Beanspruchungen beziehen sich auf die Hauptträger (Sparren und Gurte); dagegen die kleineren auf die Querträger und Füllungsglieder (Diagonal- und Verticalstäbe); doch sind diese Zahlen auch für mässig erschütterte Maschinenelemente massgebend.

Nach der bisherigen Querschnittsbestimmung der Constructionstheile ermittelt man zunächst die numerisch grösste Belastung max B, welche der betreffende Constructionstheil im ungünstigsten Falle aufzunehmen hat, dividirt dieselbe durch die pro Flächeneinheit zulässige Beanspruchung β und erhält so den Querschnitt F des Constructionstheils aus

$$F = \frac{\max B}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Ist nun β der $n$te Theil vom Bruchmodul μ, so schliesst man, dass die Construction die $n$fache Bruchsicherheit gewähre. Dies ist jedoch im Allgemeinen ein Trugschluss; denn durch die Beanspruchung μ erfolgt der Bruch schon bei einmaliger ruhender Belastung, während er auch durch viel geringere Anspruchnahmen erfolgen kann, wenn sich dieselben hinreichend oft wiederholen. Es gewähren daher jene Constructionstheile, deren Belastungen häufig wechseln und deren Querschnittsbestimmung nach Formel (3) nur auf Grund der specifischen Beanspruchung $\beta = \frac{\mu}{n}$ erfolgte, nicht die $n$fache, sondern eine um so geringere Bruchsicherheit, je rascher und häufiger der Wechsel in der Belastung stattfindet. Dies gilt aber ganz besonders bezüglich jener Constructionstheile, die abwechselnd auf Zug und Druck, also im gerade entgegengesetzten Sinne beansprucht und überdies Stössen ausgesetzt sind.

Schon im Jahre 1858 hat A. Wöhler (gegenwärtig Eisenbahndirector in Elsass-Lothringen) darauf hingewiesen, dass es zur Gewinnung einer sicheren Grundlage der Berechnung von Constructionstheilen nöthig sei, Versuche über die Widerstandsfähigkeit der Baumaterialien gegen häufig wiederholte Beanspruchungen zu machen, und hat hierauf — auf Anordnung des preussischen Ministeriums für Handel, Gewerbe und öffentliche Arbeiten — in den Jahren 1859 bis 1870 die bezüglichen Versuche für Zugs-, Biegungs- und Torsionsheftigkeit mit grosser Schärfe durchgeführt. Die Versuchsstücke wurden hierbei durch besondere, von einer

Dampfmaschine angetriebene Apparate in schneller Aufeinanderfolge innerhalb bestimmter, normirter Grenzen deformirt und die Zahl der Deformationen durch einen Zählapparat gemessen.*) Diese Versuche wurden in den Jahren 1871 bis 1873 von Prof. Spangenberg in Berlin fortgesetzt.**)

Aus sämmtlichen Versuchen ergaben sich folgende Gesetze:

1) Der Bruch des Trägers erfolgt nicht nur durch die sogenannte Bruchbelastung bei einmaliger Wirkung, sondern auch durch bedeutend geringere Belastungen, wenn sich dieselben oft genug wiederholen.

2) Die Schädlichkeit einer öfteren Schwingung oder Spannungsänderung ist am geringsten in der Nähe der Nullspannung und wird um so grösser, je mehr sich die Schwingung von derselben entfernt und der für ruhende Last zulässigen Grenzspannung nähert.

3) Wenn die Maximalspannung kleiner ist als eine gewisse von der materiellen Beschaffenheit abhängige Grenze, so tritt der Bruch erst nach unendlich vielen Beanspruchungen ein. Launhardt nennt diese Grenzspannung die Arbeitsfestigkeit.

4) Die Arbeitsfestigkeit ist bei wechselnden Beanspruchungen in gerade entgegengesetztem Sinne (Zug- und Druckspannung) kleiner als bei Beanspruchungen in einerlei Sinn, indem sich die entgegengesetzten Spannungen in ihrer Wirkung summiren.

Seit der Veröffentlichung der Wöhler'schen Versuchsresultate und der daraus abgeleiteten Gesetze wurden von hervorragenden Fachmännern, z. B. von dem englischen Ingenieur B. Backer und den deutschen Ingenieuren, beziehungsweise Professoren, Gerber, Müller, Launhardt, Schäffer, Weyrauch und E. Winkler Vorschläge bezüglich einer neuen, den Wöhler'schen Gesetzen angepassten Berechnungsweise der Eisen- und Stahlconstructionen in Vorschlag gebracht und es beschloss der Verband deutscher Ingenieur-Vereine durch systematische, gleichartige Beobachtungen eine Lösung anzustreben, „damit sich die mit der Unterhaltung der Eisenconstructionen beauftragten Ingenieure nicht vor Katastrophen gestellt sehen.“

Es ist hier nicht der Ort, um die von den genannten Autoren gemachten Vorschläge und entwickelten Formeln zu reproduciren; wir verweisen diesfalls auf die in jüngster Zeit erschienenen Brochuren von Prof. Dr. J. Weyrauch***) und Prof. Dr. E. Winkler,†)

---

*) A. Wöhler: „Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl“ Berlin 1870 bei Ernst & Korn.

**) Spangenberg: „Verhalten der Metalle bei wiederholten Anstrengungen.“ Berlin 1875. Ernst & Korn.

***) Weyrauch: Festigkeit und Dimensionsberechnung der Eisen- und Stahlconstructionen etc. Leipzig 1876 bei Teubner.

†) Winkler: Wahl der zulässigen Inanspruchnahme der Eisenconstructionen etc. Wien 1877 bei Waldheim.

in welchen die gemachten Vorschläge verglichen und modificirt werden. Erwähnen müssen wir aber doch, dass der Ingenieur H. Gerber (gegenwärtig Director der süddeutschen Brückenbau-Gesellschaft) der Erste war, welcher — auf Grundlage der Wöhler'schen Gesetze — den Einfluss der veränderlichen Belastung auf die Constructionstheile in richtige Erwägung zog. Er nahm nämlich bei der Berechnung der Mainzer Brücke für die einzelnen Constructionstheile eine um so geringere specifische Beanspruchung an, je grösser sich die Belastung derselben durch die mobile oder Verkehrslast im Vergleich zu jener durch das Eigengewicht ergab und hat überdies den Einfluss der Verkehrsstösse dadurch in Rechnung zu nehmen gesucht, dass er statt der einfachen die $1\frac{1}{2}$fache Verkehrslast rechnete.*)

Wir werden in der Folge die zulässige Inanspruchnahme β pro Flächeneinheit (nach der im Allgemeinen von Launhardt aufgestellten Methode) aus der sogenannten Arbeitsfestigkeit entwickeln und nicht nur auf Eisen- und Stahlconstructionen, sondern auch auf Holzconstructionen ausdehnen.

Launhardt'sche Formel der Arbeitsfestigkeit. Nach den Wöhler-schen Versuchsresultaten wird bekanntlich die Anzahl der Belastungswiederholungen eines Trägers um so grösser werden können, je geringer die Belastung wird, so dass, wenn die Belastung bis zur Elasticitätsgrenze herabsinkt, erst nach einer unendlich grossen Anzahl der Belastungen der Bruch eintreten würde. Bezeichnen wir also die kleinste Beanspruchung pro Flächeneinheit, nach deren Beseitigung der Träger wieder in den vollständig spannungslosen Zustand übergeht, mit η, so entspricht dem η eine unendlich grosse Anzahl von Belastungsfällen, bevor der Bruch erfolgt. Ist aber die specifische Beanspruchung grösser als η, so wird nach dem Aufhören derselben der Stab nicht mehr in den vollkommen spannungslosen Zustand übergehen, sondern es bleibt eine gewisse Spannung σ bleibend zurück. Die specifische Beanspruchung, welche alsdann in diesem allgemeineren Falle den Bruch herbeiführt, heisst nach Launhardt die Arbeitsfestigkeit und zwar, weil sie sich auf die Flächeneinheit bezieht, die s p e c i f i s c h e A r b e i t s f e s t i g k e i t und möge mit α bezeichnet werden. Die Spannungsdifferenz δ zwischen beiden ist bestimmt durch

$$\delta = \alpha - \sigma$$

woraus

$$\alpha = \delta + \sigma \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

α erscheint hiernach als Function von δ, also allgemein

$$\alpha = \varkappa \delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

wenn $\varkappa$ einen vorläufig noch unbekannten Coëfficienten bezeichnet.

*) Gerber: Bestimmung der zulässigen Spannung in Eisenconstructionen. Zeitschrift des Bairischen Archit. und Ingen. Vereins 1874, pag. 101.

Um $\varkappa$ zu bestimmen, gehen wir auf die beiden Grenzwerthe von α über; es ist zunächst:

$$\text{für } \sigma = 0, \quad \alpha = \delta = \eta,$$
$$\text{für } \delta = 0, \quad \alpha = \sigma = \mu;$$

es erscheinen also der Grenz- und Festigkeitsmodul als specielle Fälle der specifischen Arbeitsfestigkeit.

Da nun für $\delta = 0$, $\alpha = \mu$, so ist nach (5) für diesen Grenzfall $\boldsymbol{k} = \infty$; da ferner für $\delta = \eta$ auch $\alpha = \delta$, so ist für diesen zweiten Grenzfall $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}$.

Diesen beiden Bedingungen entspricht der von Launhardt gewählte Ausdruck

$$\varkappa = \frac{\mu - \eta}{\mu - \alpha},$$

wofür

$$\alpha = \frac{\mu - \eta}{\mu - \alpha}\, \delta,$$

oder wenn für δ der aus (4) sich ergebende Werth eingeführt wird,

$$\alpha = \frac{\mu - \eta}{\mu - \alpha}\, (\alpha - \sigma);$$

woraus nach einfacher Reduction

$$\alpha = \eta \left(1 + \frac{\mu - \eta}{\eta}\, \frac{\sigma}{\alpha}\right) \quad \ldots\ldots (6).$$

Bezeichnet man mit min B die kleinste und mit max B die grösste Beanspruchung eines Constructionstheiles, so ist offenbar

$$\frac{\sigma}{\alpha} = \frac{\min B}{\max B}$$

und hiefür die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\boldsymbol{\alpha = \eta \left(1 + \frac{\mu - \eta}{\eta}\, \frac{\min B}{\max B}\right)} \quad \ldots . (7).$$

Dies ist die Launhardt'sche Formel der specifischen Arbeitsfestigkeit, welche zufolge der Gleichung (4) offenbar nur für jene Belastungsfälle gilt, in denen min B und max B gleiche Vorzeichen haben, somit der betreffende Constructionstheil immer in gleichem Sinne, d. h. nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht wird. Es wird jedoch hierbei vorausgesetzt, dass der auf Druckfestigkeit beanspruchte Stab gegen seitliche Ausbiegung geschützt sei.

Da nun der Bruch eines Trägers durch alle zwischen den Grenzen μ und η liegenden specifischen Beanspruchungen eintreten kann, so haben wir nun den Begriff der Festigkeit im allgemeineren Sinne, als es bisher üblich war, aufzufassen und darunter die Arbeitsfestigkeit für die betreffende Beanspruchungsart auf Zug, Druck, Schub u. s. w. zu verstehen.

Wir haben noch zu untersuchen, ob sich die Wahl des Coefficienten $\varkappa$ auch für die Zwischenstadien der obigen Grenzfälle bewährt. Zu diesem Zwecke lösen wir (6) nach α auf und erhalten

$$\alpha = \frac{\eta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + \sigma\,(\mu - \eta)} \quad \ldots\ldots (8),$$

wo vor dem Wurzelausdruck nur das $+$ Zeichen zu wählen ist, weil α positiv und grösser als η sein muss. Beziehen wir nun diese Formel z. B. auf ungehärteten Krupp'schen Federgussstahl, dessen Arbeitsfestigkeit Wöhler für verschiedene Werthe von σ durch Versuche bestimmte und für welchen er pro □cm. $\mu = 8041$ Kg. und $\eta = 3656$ Kg. fand, so ergibt sich nach vorstehender Formel (8) die Arbeitsfestigkeit pro □cm. in Kilogrammen ausgedrückt durch:

$$\alpha = 1828 + \sqrt{3341584 + 4385\,\sigma}.$$

Vergleicht man nun die nach dieser Formel für verschiedene Werthe von σ berechneten Arbeitsfestigkeiten mit jenen der Wöhlerschen Versuchsresultate, so ergibt sich folgende schätzenswerthe Uebereinstimmung:

für $\sigma =$	0,	1827,	2924,	4380,	8041,
nach Versuchen $\alpha =$	3655,	5117,	5848,	6579,	8041,
nach der Formel $\alpha =$	3656,	5197,	5848,	6576,	8041.

Wir ersehen aus dieser Uebereinstimmung die Richtigkeit der Launhardt'schen Formel, aber auch die Thatsache, dass der Bruch nicht nur durch die einmalige Beanspruchung mit 8041 Kg. pro □cm., sondern auch durch alle Beanspruchungen bis 3656 Kg. herab bei hinreichend oft wiederholten Beanspruchungen erfolgen könne.

Weyrauch'sche Formel. Es erübrigt nun noch eine Formel für die specifische Arbeitsfestigkeit bei wechselnder Beanspruchung auf Zug und Druck aufzustellen. Wir wollen dieselbe nach dem Vorgange von Dr. Weyrauch auf Grundlage der Wöhler'schen Versuchsresultate entwickeln.

Nach den genannten Versuchen ist die Arbeitsfestigkeit für Materialien, welche durch Biegungen nach entgegengesetzten Seiten abwechselnd auf Zug und Druck beansprucht werden, unter übrigens gleichen Umständen, bedeutend kleiner als jene, welche der Beanspruchung in stets gleichem Sinne entspricht.

Wöhler hat besonders den Fall untersucht, in welchem die entgegengesetzten Beanspruchungen numerisch gleich gross sind, und nennt die bezügliche Festigkeit mit Recht die Schwingungsfestigkeit, indem die abwechselnden Ausdehnungen und Zusammendrückungen des Constructionstheiles als Schwingungen aufgefasst werden können. Wir wollen die Schwingungsfestigkeit pro Flächeneinheit, d. i. die specifische Schwingungsfestigkeit, welche unendlich vielen Schwingungen entspricht, also den Grenzmodul der Schwingungs-Elasticität bestimmt, mit η' bezeichnen. Wenn hierbei die Beanspruchung in dem einen Sinne, z. B. jene auf Druck, gleich Null ist, so geht dann offenbar η' in η über. Mit η und η' sind also zwei Grenzwerthe der specifischen Arbeitsfestigkeit gegeben.

Wird nun ein Stab vom Querschnitte Eins abwechselnd auf Zug und Druck beansprucht, und bezeichnet α die Arbeitsfestigkeit, welche der grösseren dieser beiden entgegengesetzten Spannungen und α' jene, welche der kleineren Beanspruchung in der Art zukäme, dass bei der grössten vorkommenden Anzahl Schwingungen zwischen $\pm\,\alpha$ und $\mp\,\alpha'$ das Materiale gerade noch halte, so wäre die hierbei auftretende Spannungsdifferenz (wegen der entgegengesetzten Vorzeichen von α und α')

also
$$\left.\begin{array}{l}\delta = \alpha + \alpha', \\ \alpha = \delta + \alpha'\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

wenn alle Grössen nur dem Zahlenwerthe nach eingesetzt würden. α erscheint hierbei wieder als Function von δ, es ist also

$$\alpha = \varkappa\,\delta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

und wird der Coëfficient $\varkappa$ aus den Grenzwerthen von α bestimmt werden können, wenn berücksichtigt wird, dass für $\alpha = \alpha'$ die specifische Arbeitsfestigkeit $\alpha = \eta'$, und für $\alpha' = 0$ $\alpha = \eta$ wird.

Nach (9) wird also

für $\quad \alpha' = 0 \quad \alpha = \eta = \delta,$

und für $\quad \alpha = \alpha' \quad \alpha = \eta' = \frac{1}{2}\delta.$

Man erhält somit für diese Grenzwerthe aus (10)

für $\quad \alpha = \eta \quad \varkappa = 1,$

und für $\quad \alpha = \eta' \quad \varkappa = \frac{1}{2}.$

Diesen Bedingungen entspricht der Ausdruck

$$\varkappa = \frac{\eta - \eta'}{2\eta - \eta' - \alpha},$$

wofür

$$\alpha = \frac{\eta - \eta'}{2\eta - \eta' - \alpha}\,\delta,$$

oder weil $\quad \delta = \alpha + \alpha',$

$$\alpha = \frac{\eta - \eta'}{2\eta - \eta' - \alpha}\,(\alpha + \alpha').$$

Hieraus ergibt sich

$$\alpha = \eta\left(1 - \frac{\eta - \eta'}{\eta}\,\frac{\alpha'}{\alpha}\right).$$

Ist nun für einen Constructionstheil max B das absolute Maximum der vorkommenden Beanspruchung, gleichgiltig ob Zug oder Druck, und max B' die relativ grösste Beanspruchung im entgegengesetzten Sinne, so wird

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\max B'}{\max B}$$

und hierfür die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\boldsymbol{\alpha = \eta\left(1 - \frac{\eta - \eta'}{\eta}\,\frac{\max B'}{\max B}\right)} \quad . \; . \; . \; (11).$$

Dies ist die Weyrauch'sche Formel, in welcher alle Grössen nur nach dem Zahlenwerthe, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, einzusetzen sind. Sie gilt für Constructionstheile, die abwechselnd im entgegengesetzten Sinne beansprucht werden.

11. **Neuere Bestimmung der zulässigen Beanspruchung β pro Quadratcentimeter.** Hat man durch die statische Berechnung die Maximalbelastungen der einzelnen Constructionstheile festgestellt, so erhält man aus den Formeln (7) oder (11) durch die specifische Arbeitsfestigkeit α diejenige Spannung pro Flächeneinheit, durch welche erst nach unendlich vielen Belastungswiederholungen der Bruch des Materiales eintreten würde. Dabei ist jedoch noch keinerlei Rücksicht auf diejenigen ungünstigen Einflüsse genommen worden, welche sich nicht genau ermitteln lassen, z. B. die Einwirkung der Stösse, oder Erschütterungen durch die Verkehrslast, die Ungleichartigkeit im Materiale, der schädliche Einfluss der Atmosphärilien (Rost, Temperaturwechsel) u. s. w.

Diesen ungünstigen Einflüssen lässt sich daher nur durch Einführung passender Sicherheitscoëfficienten Rechnung tragen, indem man für die zulässige Beanspruchung β nur einen Theil der Arbeitsfestigkeit α annimmt, der um so kleiner wird, je mehr das Materiale in seiner Güte variirt.

Die ältere Berechnungsweise unterscheidet sich also von der neueren wesentlich dadurch, dass bei der älteren für β ein Theil des Festigkeitsmoduls μ gewählt wurde, während bei der neueren für β ein Theil der Arbeitsfestigkeit α angenommen und hierbei auch auf den eventuellen Wechsel in der Belastung Rücksicht genommen wird, was bei der älteren Methode nicht der Fall war. Wir wollen nun die den wichtigsten Materialien entsprechenden Werthe der zulässigen Anspruchnahme β pro □cm aus der specifischen Arbeitsfestigkeit α ableiten und hierbei den Sicherheitsgrad so wählen, dass sich für den speciellen Fall der ruhenden Belastung, nämlich für min B = max B, die bisher übliche Inanspruchnahme ergibt.

A. Holz.

1. Beanspruchung auf Zug allein oder Druck allein. Nach Formel (7) ist die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\alpha = \eta \left(1 + \frac{\mu - \eta}{\eta} \, \frac{\min B}{\max B}\right).$$

Da nun für Holz der Mittelwerth von $\eta = 200$ und jener von $\mu = 600$, so wird hierfür

$$\alpha = 200 \left(1 + 2 \, \frac{\min B}{\max B}\right).$$

Wird nun für Holzconstructionen, wegen des bedeutenden, schädlichen Einflusses der Atmosphärilien, mindestens die 6fache Bruchsicherheit bezüglich der Arbeitsfestigkeit beansprucht, also für β nur der 6. Theil des kleinsten Werthes von α in Rechnung genommen, so ergibt sich als zulässige Spannung in Kilogramm pro Quadratcentimeter

$$\beta = 30 \left(1 + 2 \, \frac{\min B}{\max B}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12).$$

Für Constructionstheile, welche dauernd mit der gleichen ruhenden Last beansprucht sind, wie sie vorwiegend im Hochbau vorkommen, ist wegen min B = max B,

$$\beta = 90 \text{ Kilogramm.}$$

Für Gurtungen von hölzernen Balkenbrücken und Dachstühlen wird min B durch das Eigengewicht und max B durch die totale Belastung hervorgerufen; bezeichnet also g das Eigengewicht und q die Totallast pro laufenden Meter, so wird, weil dann

$$\min B : \max B = g : q,$$

aus (12)

$$\beta = 30 \left(1 + 2 \, \frac{g}{q}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13).$$

Nach dieser Formel erhält man für verschiedene Werthe von $\frac{g}{q}$ die folgenden Anspruchnahmen:

für $\frac{g}{q} = 0, \; \frac{1}{6}, \; \frac{2}{7}, \; \frac{3}{8}, \; \frac{4}{9}, \; \frac{5}{10}, \; \frac{6}{11}, \; \frac{7}{12}, \; \frac{2}{3}, \; 1,$

$\beta = 30, \; 40, \; 47, \; 52, \; 56, \; 60, \; 63, \; 65, \; 70, \; 90.$

Der erste Grenzfall, nämlich $\frac{g}{q} = 0$, bezieht sich auf ganz kurze Brücken, bei welchen das Eigengewicht vernachlässigt wird. Für diesen Fall wäre $\beta = 25$, also am geringsten, was durch den Umstand gerechtfertigt wird, dass die schädlichen Stösse und Erschütterungen desto grösser sind, je kleiner das Eigengewicht der Träger im Verhältniss zur Verkehrslast ist.

Der zweite Grenzfall, nämlich $\frac{g}{q} = 1$, bezieht sich offenbar auf jene Träger, deren mobile oder temporäre Belastung im Vergleich zur permanenten Belastung verschwindend klein ist, wie dies bei den meisten Hochbauconstructionen der Fall ist, die also am meisten, nämlich mit 90 Kil. pro □cm beansprucht werden können.

2. **Wechselnde Beanspruchung auf Zug und Druck.** Nach Formel (11) ist hierfür die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\alpha = \eta \left(1 - \frac{\eta - \eta'}{\eta} \frac{\max B'}{\max B}\right).$$

Für Holz ist $\eta = 200$ und $\eta' = 100$, wofür

$$\alpha = 200 \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\max B'}{\max B}\right),$$

somit bei 6facher Sicherheit die zulässige Beanspruchung pro □cm.

$$\beta = 30 \left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\max B'}{\max B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Hierbei bedeutet $\max B'$ den kleineren Zahlenwerth der beiden entgegengesetzten Maximalbeanspruchungen ohne Rücksicht auf das Vorzeichen.

Für Constructionstheile, deren Maximalbeanspruchungen auf Zug und Druck gleich sind, ergibt sich aus (14), wegen $\max B = \max B'$, der Minimalwerth:

$$\beta = 15 \text{ Kilogramm.}$$

B. Schmiedeisen.

1. **Beanspruchung auf Zug allein oder Druck allein.** Nach Formel (7) ist die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\alpha = \eta \left(1 + \frac{\mu - \eta}{\eta} \frac{\min B}{\max B}\right).$$

Für gutes Schmiedeisen ist mindestens $\mu = 3500$ und $\eta = 1500$ daher

$$\alpha = 1500 \left(1 + \tfrac{4}{3} \frac{\min B}{\max B}\right),$$

somit wird bei 3facher Sicherheit, mit Rücksicht auf den Belastungswechsel, die zulässige Beanspruchung pro □cm

$$\beta = 500 \left(1 + \tfrac{4}{3} \frac{\min B}{\max B}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; (15).$$

Für Constructionstheile, welche dauernd mit der gleichen Last beansprucht sind, wird aus (15), wegen $\min B = \max B$,

$$\beta = 1160 \text{ Kilogramm.}$$

Für Gurtungen von Fachwerkbrücken und Dachstühlen ist, wenn g das Eigengewicht und q die totale Last pro laufenden Meter bedeutet,

$$\min B : \max B = g : q,$$

also nach (15)

$$\beta = 500 \left(1 + \tfrac{4}{3} \frac{g}{q}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; (16).$$

Hiernach erhält man

für $\frac{g}{q} = 0, \; \frac{1}{6}, \; \frac{2}{7}, \; \frac{3}{8}, \; \frac{4}{9}, \; \frac{5}{10}, \; \frac{6}{11}, \; \frac{7}{12}, \; \frac{2}{3}, \; 1,$

genau genug $\beta = 500, 600, 700, 750, 800, 830, 860, 900, 1060, 1160.$

Der erste Grenzwerth, nämlich $\frac{g}{q} = 0$ bezieht sich wieder auf ganz kurze Brücken, bei welchen g im Verhältniss zu q vernachlässigt werden kann. Wegen ihrer geringen Masse, erleiden sie durch die Verkehrslast bedeutende Erschütterungen, weshalb für die zulässige Beanspruchung β der kleinste Werth angesetzt erscheint.

Der zweite Grenzfall, nämlich $\frac{g}{q} = 1$, bezieht sich dagegen auf solche Träger, die ausser der ruhenden eine sehr geringe mobile Last zu tragen haben, wie dies im Allgemeinen bei Trägern im Hochbau der Fall ist.

2. **Wechselnde Beanspruchung auf Zug und Druck.** In diesem Falle ist nach (11) die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\alpha = \eta \left(1 - \frac{\eta - \eta'}{\eta} \frac{\max B'}{\max B}\right),$$

daher für $\eta = 1500$ und $\eta' = 0{\cdot}6\, \eta = 900$

$$\alpha = 1500 \left(1 - \tfrac{2}{5} \frac{\max B'}{\max B}\right).$$

Bei 3facher Sicherheit wird also die zulässige Beanspruchung pro □cm

$$\beta = 500\left(1 - \tfrac{2}{5}\,\frac{\max B'}{\max B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Für den besonderen Fall, dass $\max B' = \max B$, wird das Minimum von β erhalten, nämlich $\beta = 300$ Kg.

Hierbei bedeutet $\max B'$ die kleinere und $\max B$ die grössere der beiden entgegengesetzten Maximal-Belastungen.

C. Gewöhnlicher Stahl (ungehärtet).

1. **Beanspruchung auf Zug allein oder Druck allein.** Für gewöhnlichen weichen dehnbaren Stahl, mit circa 0·45% Kohlenstoff, der für Brückenconstructionen sehr geeignet ist, ist im Minimum $\mu = 5000$ und $\eta = 2000$, daher ergibt sich nach Formel (7) für solchen Stahl die specifische Arbeitsfestigkeit pro □cm

$$\alpha = 2000\left(1 + \tfrac{3}{2}\,\frac{\min B}{\max B}\right).$$

Nimmt man für die zulässige Beanspruchung β die 3fache Sicherheit bezüglich der Arbeitsfestigkeit an, so wird

$$\beta = 670\left(1 + \tfrac{3}{2}\,\frac{\min B}{\max B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Für Constructionen, welche dauernd mit der gleichen Last beansprucht sind, wird $\min B = \max B$, also ihre grösste Beanspruchung pro □cm

$$\beta = 1670 \text{ Kilogramm.}$$

Für Gurtungen der Fachwerkbrücken und Dachconstructionen ist wieder

$$\min B : \max B = g : q,$$

daher

$$\beta = 670\left(1 + \tfrac{3}{2}\,\frac{g}{q}\right).$$

Ist g gegen q verschwindend klein, also $\frac{g}{q} = 0$, so erhält man für diesen Grenzfall $\beta = 670$ Kg.

2. **Wechselnde Beanspruchung auf Zug und Druck.** Für $\eta = 2000$ und $\eta' = 1200$ wird nach (11) die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\alpha = 2000\left(1 - \tfrac{2}{5}\,\frac{\max B'}{\max B}\right),$$

daher bei 3facher Sicherheit die zulässige Beanspruchung pro □cm

$$\beta = 670\left(1 - \tfrac{2}{5}\,\frac{\max B'}{\max B}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Für Constructionstheile mit gleicher entgegengesetzter Anspruchnahme auf Zug und Druck wird $\max B' = \max B$, daher

$$\beta = 400 \text{ Kilogramm.}$$

D. Gussstahl.

1. Beanspruchung auf Zug allein oder Druck allein. Für ungehärteten Gussstahl (mit circa 0·6% Kohlenstoff) kann man, wenn sein Phosphorgehalt unter 0·03% bleibt, $\mu = 8000$ $\eta = 3750$ annehmen, so dass nach Formel (7) die specifische Arbeitsfestigkeit wenigstens den Werth erreicht:

$$\alpha = 3750\left(1 + 1{\cdot}13\,\frac{\min B}{\max B}\right).$$

Für 3fache Sicherheit ergibt sich hieraus die zulässige Beanspruchung pro □cm

$$\beta = 1250\left(1 + 1{\cdot}13\,\frac{\min B}{\max B}\right) \quad . \; . \; . \; . \; (20).$$

Für Constructionstheile, welche dauernd mit der gleichen Last beansprucht sind, wird, wegen $\min B = \max B$,

$$\beta = 2660 \text{ Kilogramm.}$$

Für Gurtungen von Fachwerkbrücken und Dachstühlen, für welche

$$\min B : \max B = g : q,$$

wird

$$\beta = 1250\left(1 + 1{\cdot}13\,\frac{g}{q}\right).$$

Ist g gegen q sehr klein, also $\frac{g}{q} = 0$, so wird $\beta = 1100$ Kil.

2. Wechselnde Beanspruchung auf Zug und Druck. Für dieselbe Qualität des Gussstahls ist die specifische Schwingungsfestigkeit $\eta' = 2000$ und daher, wegen $\eta = 3750$, nach Formel (11) die specifische Arbeitsfestigkeit

$$\alpha = 3750\left(1 - \tfrac{7}{15}\,\frac{\max B'}{\max B}\right).$$

Für 3fache Sicherheit wird hieraus die zulässige Beanspruchung pro □cm

$$\beta = 1250\left(1 - \tfrac{7}{15}\,\frac{\max B'}{\max B}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (21).$$

Für Constructionstheile mit gleichen entgegengesetzten Maximalspannungen, für welche also $\max B' = \max B$, wird pro □cm

$$\beta = 670 \text{ Kilogramm.}$$

12. Allgemeine Dimensionsbestimmung.

a) Ist ein Constructionstheil nur auf Zug oder nur auf Druck beansprucht und ist $\max B$ die grösste Belastung desselben in Kilogramm, so wird, wenn β die zulässige Beanspruchung des betreffenden Materiales pro □cm in Kilogramm bezeichnet, die Querschnittsfläche F des Constructionstheiles in □cm bestimmt sein durch

$$F = \frac{\max B}{\beta} \quad \dots\dots\dots (22).$$

Der Werth von β ist nach der Launhardt'schen Formel (7) zu bestimmen; es ist nämlich allgemein bei $n$facher Sicherheit

$$\beta = \frac{\eta}{n}\left(1 + \frac{\mu - \eta}{\eta}\,\frac{\min B}{\max B}\right).$$

Nach den in dem vorhergehenden Abschnitte für die wichtigsten Baumaterialien angegebenen Werthen von μ, η und n ergibt sich für

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Holz} \dots\dots\dots & \beta = 30\left(1 + 2\,\dfrac{\min B}{\max B}\right) \\
\text{Schmiedeeisen} \;\dots & \beta = 500\left(1 + \frac{4}{3}\,\dfrac{\min B}{\max B}\right) \\
\text{weichen Stahl} \dots & \beta = 670\left(1 + \frac{3}{2}\,\dfrac{\min B}{\max B}\right) \\
\text{ungehärt. Gussstahl} & \beta = 1250\left(1 + 1{\cdot}13\,\dfrac{\min B}{\max B}\right)
\end{array}\right\} \dots\dots (23).$$

Hierbei ist $\min B$ die kleinste und $\max B$ die grösste Belastung des nur in einerlei Sinn beanspruchten Constructionstheiles.

b) Ist der Constructionstheil abwechselnd in entgegengesetztem Sinne, also auf Zug und Druck beansprucht, so ist in der Formel (22) für $\max B$ der numerisch grössere Werth der beiden entgegengesetzten Belastungen des Constructionstheiles und für β die nach der Weyrauch'schen Formel (11) bei $n$facher Sicherheit berechnete zulässige Anspruchnahme, nämlich

$$\beta = \frac{\eta}{n}\left(1 - \frac{\eta - \eta'}{\eta}\,\frac{\max B'}{\max B}\right)$$

einzuführen.

Nach den in Nr. 10 entwickelten Werthen von η, η' und n wird für

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{Holz} \dots\dots\dots & \beta = 30\left(1 - \frac{1}{2}\,\dfrac{\max B'}{\max B}\right) \\
\text{Schmiedeeisen} \dots\dots & \beta = 500\left(1 - \frac{2}{5}\,\dfrac{\max B'}{\max B}\right) \\
\text{weichen Stahl} \dots\dots & \beta = 670\left(1 - \frac{2}{5}\,\dfrac{\max B'}{\max B}\right) \\
\text{ungehärt. Gussstahl} \;. & \beta = 1250\left(1 - \frac{7}{15}\,\dfrac{\max B'}{\max B}\right)
\end{array}\right\} \dots (24),$$

wobei max B die numerisch grössere der beiden entgegengesetzten Belastungen, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, bedeutet.

Zusatz. Da nach dem 4. Wöhler'schen Gesetze die Tragfähigkeit eines Constructionstheiles bei abwechselnden Beanspruchungen in entgegengesetztem Sinne, unter übrigens gleichen Umständen, kleiner ist als bei Beanspruchungen in nur einem Sinne, indem sich im ersteren Falle die entgegengesetzten Spannungen in ihrer die Tragfähigkeit des Constructionstheiles schädigenden Wirkung summiren, so haben die amerikanischen Ingenieure in neuester Zeit zur Berechnung der Querschnittsfläche F eines Constructionstheils, der die beiden entgegengesetzten Maximalbelastungen $+$ max B und $-$ max B' aufzunehmen hat, die Formel gewählt:

$$F = \frac{\max B + \max B'}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (25),$$

in welcher β die bisher übliche zulässige Inanspruchnahme bezeichnet und zwar pro □cm

$$\left.\begin{array}{llll} \text{für Holz} \ldots\ldots\ldots & \beta = & 60 \text{ bis } 80 & \text{Kilogr.} \\ \text{„ Schmiedeeisen} \ldots & \beta = & 700 \text{ „ } 800 & \text{„} \\ \text{„ weichen Stahl} \ldots & \beta = & 1000 & \text{„} \\ \text{„ ungehärt. Gussstahl} . & \beta = & 1200 & \text{„} \end{array}\right\} \ldots (26).$$

Die nach der Formel (25) bestimmten Werthe von F gewähren jedenfalls eine hinreichende Sicherheit und ist überdies diese Formel, wegen ihrer Einfachheit, für die Praxis um so empfehlenswerther, als die hiernach berechneten Werthe von F mit jenen, die aus den beiden Formeln (22) und (24) resultiren, ziemlich übereinstimmen.

Erster Abschnitt.

Normal- u. Schub-Elasticität resp. Festigkeit.

I. Capitel.

Normal-Elasticität gerader Stäbe.

§. 1. **Allgemeines.** Unter einem Stabe versteht man im Allgemeinen jene Körperform; welche durch die Bewegung einer ebenen Figur derart entsteht, dass sich der Schwerpunkt derselben auf einer gegebenen Linie, der sogenannten Axe, bewegt und die Ebene der Figur stets auf dieser Linie senkrecht bleibt, während sich die Gestalt der Figur beliebig ändern kann. Die bewegliche Figur bildet hierbei in den einzelnen Stellungen die verschiedenen Querschnitte und je zwei sehr nahe Querschnitte begrenzen eine sogenannte Scheibe des Stabes. Jede materielle Linie des Stabes, die mit der Axe parallel ist, heisst eine Faser des Stabes. Man unterscheidet Stäbe mit gerader, einfach gekrümmter und doppelt gekrümmter Axe. Für die Praxis ist besonders die Normalelasticität geradaxiger Stäbe von Wichtigkeit, weshalb wir dieselbe eingehend behandeln wollen.

Die Normalelasticität gerader Stäbe kommt zur Wirksamkeit, wenn die Resultirende B der äusseren Kräfte der Richtung nach mit der Axe des Stabes zusammenfällt; sie äussert sich als **Zug** oder **Druck**, je nachdem durch B eine Entfernung oder Annäherung der benachbarten Querschnitte (die übrigens stets parallel bleiben) angestrebt wird.

Daraus folgt, dass, wenn ausser der Belastung auch das eigene Gewicht des Stabes denselben auf Normalelasticität in Anspruch nehmen soll, die Axe des Stabes eine lothrechte Lage haben müsse.

Wir unterscheiden hierbei zwei Fälle; entweder ist der Querschnitt des Stabes constant, der Stab also prismatisch, oder der Querschnitt ist veränderlich.

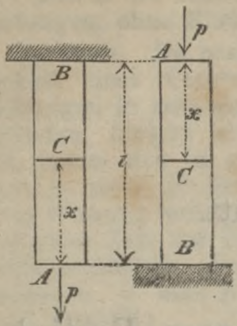


Fig. 2.

§. 2. **Prismatische Stäbe.** Es bezeichne nach Fig. 2

F den constanten Querschnitt des Stabes,

l dessen ganze Länge AB,

x die Länge eines beliebigen Stückes AC,

γ das Gewicht der Volumseinheit des Stabes,

β die zulässige Beanspruchung seines Materiales und

P die auf das freie Ende A in Richtung der Axe thätige äussere Kraft, wobei P positiv oder negativ in Rechnung zu nehmen ist, je nachdem es den Stab auf Zug oder Druck in Anspruch nimmt.

Betrachtet man nun das Fragment AC des Stabes, so ist einleuchtend, dass auf den Querschnitt C ausser der Belastung P auch noch das Gewicht des Fragmentes AC wirkt; bezeichnet man daher die auf C einwirkende Axialkraft, oder totale Belastung, mit B, so ist

$$B = P + \gamma F x.$$

Die gesammte Axialkraft wird hiernach zum Maximum für den Querschnitt B, d. i. für $x = l$, nämlich

$$\max B = P + \gamma F l \quad \ldots \ldots \ldots (27).$$

Soll nun die durch diese Totalbelastung erzielte Längenänderung innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben, so darf offenbar die durch $\max B$ im Querschnitte F bei B hervorgerufene Spannung den zulässigen Werth β nicht überschreiten; es wird also im Allgemeinen die Gleichung bestehen müssen

$$\max B = \beta F \text{ oder } P + \gamma F l = \beta F.$$

Hieraus ergibt sich bei gegebenem Querschnitte F die zulässige äussere Belastung

$$P = F(\beta - \gamma l) \quad \ldots \ldots \ldots (28),$$

oder bei gegebenem P, die Querschnittsfläche

$$F = \frac{P}{\beta - \gamma l} \quad \ldots \ldots \ldots (29).$$

Um die totale Längenänderung $\triangle l$ des Stabes zu finden, lassen wir AC oder x um die unendlich kleine Länge dx zu- oder abnehmen, und berücksichtigen, dass dann auf die an C anstossende unendlich dünne Scheibe die Belastung

$$B = P + \gamma F x$$

wirkt, durch welche in dieser Scheibe nach Gleichung (2) die Längenänderung

$$\triangle\, dx = \frac{(P + \gamma F x)\, dx}{\varepsilon F}$$

erzielt wird.

Durch die Summation aller der Längenänderungen der aufeinander folgenden Scheiben zwischen den Grenzen A und C erhält man offenbar die Längenänderung $\triangle\, x$ des Fragmentes AC von der Länge x, nämlich

$$\triangle\, x = \int_0^x \frac{P + \gamma F x}{\varepsilon F}\, dx,$$

oder weil P, γ, ε und F in Bezug auf x constant sind, nach einfacher Integration

$$\triangle\, x = \frac{Px}{\varepsilon F} + \frac{\gamma x^2}{2\varepsilon} = \frac{x}{\varepsilon F}\left(P + \frac{\gamma F x}{2}\right).$$

Hieraus ergibt sich für $x = l$ die totale Längenänderung des prismatischen Stabes, nämlich

$$\triangle\, l = \frac{l}{\varepsilon F}\left(P + \frac{\gamma F l}{2}\right) \; \ldots\ldots \; (30).$$

Ist das Gewicht des Stabes im Verhältniss zu seiner Belastung P sehr gering, wie dies bei kurzen Stäben der Fall ist, so pflegt man es zu vernachlässigen und erhält alsdann aus den Gleichungen (28), (29) und (30) der Reihe nach

$$P = \beta F \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (31).$$

$$F = \frac{P}{\beta} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (32).$$

$$\triangle\, l = \frac{Pl}{\varepsilon F} = \frac{\beta l}{\varepsilon} \; \ldots\ldots\ldots \; (33).$$

1. Beispiel. Welchen Durchmesser muss eine cylindrische Zugstange aus Schmiedeeisen erhalten, um bei 5facher Sicherheit eine ruhende Last von 1000 Kilogr., d. i. eine Tonne zu tragen?

Nach Gleichung (32) ist $F = \frac{P}{\beta}$. Bezeichnet man den Durchmesser der Stange mit d, so ist $F = \frac{\pi}{4} d^2$ und da $P = 1000$ Kilogr. und bei 5facher Bruchsicherheit β pro □ Centim. gleich 700 Kilogr. ist, so wird $\frac{\pi}{4} d^2 = \frac{1000}{700}$ und hieraus $d = 1{,}43$ Centim.

2. Beispiel. Welchen Querschnitt wird die schmiedeiserne Diagonalstange eines Fachwerkträgers erhalten, deren grösste Zugsbelastung 9550 und deren grösste Druckbelastung 4600 Kilogramm beträgt?

Da diese Stange abwechselnd auf Zug und Druck beansprucht ist, so wird zunächst deren zulässige Beanspruchung β pro $\square$cm nach der Formel (17) pag. 23, d. i. nach

$$\beta = 500\left(1 - \tfrac{2}{5}\,\frac{\max B'}{\max B}\right)$$

zu bestimmen sein. Im vorliegenden Falle ist $\max B' = 4600$ und $\max B = 9550$, daher

$$\beta = 500\left(1 - \tfrac{2}{5}\,\frac{4600}{9550}\right) \doteq 400 \text{ Kil. pro } \square\text{cm};$$

somit $$F = \frac{9550}{400} = 24\ \square\text{cm}.$$

§. 3. **Stäbe von constanter Normal-Festigkeit.** Unter einem Stabe von constanter Normal-Festigkeit versteht man einen solchen, der in allen seinen Querschnitten dieselbe Normal-Spannung besitzt, so dass bei hinreichender Belastung die Elasticitäts- oder Festigkeitsgrenze in allen Querschnitten gleichzeitig erreicht wird. Es versteht sich von selbst, dass bei den in Fig. 3 dargestellten Stäben von constanter Festigkeit die Querschnitte gegen das Ende B werden zunehmen müssen, und dass sie somit in B selbst zum Maximum anwachsen, während sie bei A ihr Minimum haben werden.

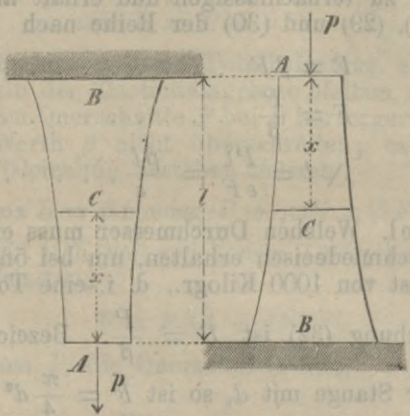


Fig. 3.

Soll nun die Anspruchnahme pr. Flächeneinheit in allen Querschnitten des Stabes denselben Werth β erlangen, so muss für jeden Querschnitt, z. B. für jenen bei C, von der Grösse F, der in der Entfernung $AC = x$ gewählt wird, die Gleichung bestehen:

$$\beta F = G + P,$$

wobei G das Gewicht des Fragmentes AC und P die äussere Belastung bedeutet.

Da in dieser Gleichung β und P gegebene Grössen sind, so erhält man durch die Differentiation dieser Gleichung die folgende:

$$\beta\, d F = d G.$$

Es ist aber offenbar

$$d G = \gamma F d x,$$

wenn γ das Gewicht der Volumseinheit des Stabes bezeichnet, daher für diesen Werth

$$\beta\, d F = \gamma F d x$$

oder

$$d x = \frac{\beta}{\gamma} \cdot \frac{d F}{F},$$

woraus durch Integration

$$x = \frac{\beta}{\gamma} \int \frac{d F}{F} = \frac{\beta}{\gamma} (\log \text{ nat } F + \text{Const}).$$

Um nun die Const. zu bestimmen, berücksichtige man, dass für $x = 0$ der Querschnitt F in den kleinsten bei A übergeht, der mit F_0 bezeichnet werden möge; es wird also für $x = 0$

$$O = \frac{\beta}{\gamma} (\log \text{ nat } F_0 + \text{Const}),$$

$$\text{oder Const} = -\frac{\gamma}{\beta} \log \text{ nat } F_0.$$

Hiefür wird

$$x = \frac{\beta}{\gamma} (\log \text{ nat } F - \log \text{ nat } F_0)$$

$$= \frac{\beta}{\gamma} \log \text{ nat } \frac{F}{F_0},$$

oder

$$\log \text{ nat } \frac{F}{F_0} = \frac{\gamma x}{\beta},$$

woraus

$$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma x}{\beta}},$$

wenn e die Basis des natürlichen Logarithmensystemes bedeutet. Bekanntlich ist aber

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{1.2} + \ldots .$$

daher für $y = \frac{\gamma x}{\beta}$ aus obiger Gleichung

$$F = F_0 \, [1 + \frac{\gamma x}{\beta} + \frac{\gamma^2 x^2}{2\beta^2} + \ldots] \ldots (34).$$

Für $x = l$ wird

$$\max F = F_0 \, [1 + \frac{\gamma l}{\beta} + \frac{\gamma^2 l^2}{2 . \beta^2} + \ldots].$$

Die Grösse des Querschnittes F_0 bei A ist, da auf A nur die äussere Belastung P einwirkt, offenbar bestimmt durch

$$F_0 = \frac{P}{\beta}.$$

Da die relative Längenänderung eines Stabes von constantem Widerstand überall dieselbe ist, so ist offenbar die gesammte Längenänderung des Stabes bestimmt durch

$$\triangle l \doteq \frac{l\beta}{\varepsilon} \ldots\ldots\ldots (35).$$

Die Gleichung (34) kann zur Formbestimmung langer Schachtgestänge und hoher Pfeiler angewendet werden. Da jedoch die stetige Veränderlichkeit des Querschnittes in der Praxis schwer ausführber ist, so pflegt man Stäbe von gleichem Widerstande näherungsweise dadurch zu erzielen, dass man die Stäbe, von A aus gerechnet, aus verschiedenen prismatischen Stücken mit den Längen l_1, l_2, l_3 . . . zusammengesetzt und deren Querschnitte F_1, F_2, F_3 . . . so wählt, dass in den Endquerschnitten dieser Stücke dieselbe Spannung β herrscht.

Dieser Forderung entsprechen die Gleichungen

$$P + \gamma F_1 l_1 = F_1 \beta,$$
$$P + \gamma F_1 l_1 + \gamma F_2 l_2 = F_2 \beta,$$
$$P + \gamma F_1 l_1 + \gamma F_2 l_2 + \gamma F_3 l_3 = F_3 \beta, \text{ u. s. w.,}$$

woraus der Reihe nach

$$F_1 = \frac{P}{\beta - \gamma l_1},$$

$$F_2 = \frac{P\beta}{(\beta - \gamma l_1)\,(\beta - \gamma l_2)},$$

$$F_3 = \frac{P\beta^2}{(\beta - \gamma l_1)\,(\beta - \gamma l_2)\,(\beta - \gamma l_3)},$$

u. s. w.

Für den besonderen Fall, dass $l_1 = l_2 = l_3 \ldots = l$, wird allgemein

$$F_n = \frac{P}{\beta} \left(\frac{\beta}{\beta - \gamma l}\right)^n \ldots\ldots (36).$$

Die totale Längenänderung eines derartigen aus prismatischen Stücken zusammengesetzten Trägers ergibt sich selbstverständlich durch die Summation der nach der Gleichung (30) ermittelten Längenänderungen der einzelnen Prismen.

B e i s p i e l. Welche Querschnitte wird ein steinerner Brückenpfeiler von 30 Meter Höhe erhalten, der ausser seinem Gewichte noch den Auflagerdruck von 100 Tonnen zu tragen und aus 6 gleich langen prismatischen Stücken zu bestehen hat, wenn 1 Cubik-Meter des Materiales 2,4 Tonnen und die zulässige Druckspannung des Mauerwerkes pr. □Centimeter 8 Kilogramm beträgt?

Wählt man den Quadratmeter als Flächeneinheit und die Tonne als Krafteinheit, so wird $\beta = 80$, $P = 100$, $l = 5$ und $\gamma = 2{,}4$; für diese Werthe erhält man nach Gleichung (36) der Reihe nach:

$F_1 = 1{,}47$, $F_2 = 1.73$, $F_3 = 2{,}04$, $F_4 = 2{,}39$, $F_5 = 2{,}82$ und $F_6 = 3{,}31$ Quadratmeter.

§. 4. Hanfseile, Drahtseile und Ketten.

A. H a n f s e i l e. Die Tragfähigkeit der Hanfseile ist im Allgemeinen um so grösser, je dicker sie sind, aus je feineren Fäden sie bestehen, je weniger sie gedreht werden und je besser der Hanf ist, der zu ihrer Anfertigung gewählt wird. Damit die Seile eine hinreichende Consistenz erlangen, pflegt man die einzelnen Fäden zu Bündeln, Litzen genannt, soweit zusammen zu drehen, dass sie sich beiläufig um $\frac{1}{5}$ ihrer Länge verkürzen.

Eine noch weiter gehende Zusammendrehung beeinträchtigt die Festigkeit der Seile, indem mit der Grösse des Drehungswinkels die Spannung der einzelnen Fäden wächst und somit deren Tragfähigkeit vermindert. Nach angestellten Versuchen ist ein Seil, dessen Fäden durch Zusammendrehung um $\frac{1}{5}$ ihrer ursprünglichen Länge verkürzt wurden, bei einer Last von 3100 Kilogramm zerrissen, während zwei andere Seile von derselben Fadenzahl, deren Fäden durch Drehung um $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{3}$ ihrer Länge verkürzt wurden, beziehungsweise bei einer Belastung von 2420 und 2050 Kilogramm zerrissen wurden.

Die besten und dauerhaftesten Seile sind die sogenannten Patentseile, bei welchen die einzelnen Litzen um einen Kern, die sogenannte Seele, schraubenförmig gedreht werden. Dieser Kern besteht aus einem Bündel ungedrehter Hanffäden und hat meist denselben Durchmesser wie die gedrehten Litzen. Die Fig. 4 gibt den Querschnitt eines solchen Seiles vor der Drehung.

Fig. 4.

Um die Festigkeit der Seile zu erhöhen, hat man die Drehung der Litzen um die Seele ganz aufzugeben versucht, und die parallel neben einander liegenden Litzen durch Bänder oder durch Zusammenflechten an einander befestigt.

Diese unter dem Namen Bindelseile bekannten Seile haben aber den Nachtheil, dass sich dieselben nicht gut über Rollen legen lassen, indem hierbei die äusseren Litzen eine bedeutend grössere Ausdehnung erfahren als die inneren. Die Bindelseile sind daher als stehende, d. h. unbewegte Seile den laufenden vorzuziehen.

Trockene Seile sind unter gleichen Umständen fester als nasse oder getheerte Seile, denn durch das Eindringen der Flüssigkeit werden die Fasern dicker und verkürzt, und durch Verkürzung wie bei jener durch Drehung gespannt. Erfahrungsmässig beträgt die Widerstandsfestigkeit nasser oder getheerter Seile circa 75 Procent trockener Seile.

Endlich ist noch zu bemerken, dass die Festigkeit stärkerer Seile oder Taue verhältnissmässig, d. h. pro Flächeneinheit des Querschnittes geringer ist als diejenige schwächerer Seile. Im Allgemeinen variirt die Festigkeit der Hanfseile zwischen 500 bis 800 Kilogr. pro □Centimeter, so dass man bei 6facher Bruchsicherheit als zulässige Spannung pro □Centimet. $\beta = 100$ Kilogr. annehmen kann.

Wird nun noch berücksichtigt, dass bei den Patent-Hanfseilen der nutzbare Querschnitt circa $\frac{9}{10}$ von jener Kreisfläche ist, welche dem Seilquerschnitte umschrieben ist, so ergibt sich die absolute Tragfähigkeit P eines Hanfseiles, vom Durchmesser d, aus der Formel:

$$P = 0{\cdot}9 \frac{\pi d^2}{4} \beta \doteq 0{\cdot}7 \beta d^2 \quad \ldots \ldots (37).$$

Hieraus ergibt sich der Seildurchmesser

$$d = \sqrt{\frac{P}{0{\cdot}7 \beta}} \doteq 1{\cdot}19 \sqrt{\frac{P}{\beta}} \quad \ldots \ldots (38).$$

Für 6fache Bruchsicherheit, d. h. für $\beta = 100$ Kg pro □cm, wird

$$P = 70\, d^2 \text{ in Kg.}$$

$$d \doteq 0{\cdot}119 \sqrt{P} \text{ in cm.}$$

Das Gewicht g eines Hanfseiles pro laufenden Meter im trockenen und ungetheerten Zustande ergibt sich nach der empirischen Formel

$$g \doteq 0{\cdot}065\, d^2,$$

dagegen des nassen oder getheerten Seiles mit

$$g \doteq 0{\cdot}078\, d^2.$$

Endlich mag noch erwähnt werden, dass 1 Kilogramm Hanfseil circa 0·80 Gulden ö. W. kostet.

Zur bequemeren Berechnung dient die folgende Tabelle.

Durchmesser des Hanfseiles in cm	Absolute Tragfähigkeit in Kg	Gewicht pro laufenden Meter in Kg	Preis pro laufenden Meter in fl. ö. W.
1 6	180	0·20	0·16
2 0	280	0·31	0 25
2·3	370	0·41	0·33
2·6	470	0·53	0·42
2·9	590	0·66	0·53
3·3	760	0·85	0·68
3·6	900	1·00	0·80
3·9	1060	1·18	0·94
4·6	1480	1·65	1·32
5·2	1890	2·10	1·68

Als kleinster Aufwicklungsradius für Hanfseile, resp. die Seiltrommel gilt $r = 4d$.

B. Drahtseile.

Rundseile aus Eisendraht. Die Drahtseile sind entweder gedreht oder ungedreht.

I. Die ungedrehten Drahtseile, d. i. die sogenannten Bindel- oder stehenden Seile, bestehen aus einer gewissen Anzahl parallel gelegter Drähte, die stellenweise durch umgewickelten Draht zusammen gebunden sind. Man wendet die Bindelseile nur als stehende Seile, die über keine Rollen oder Seiltrommeln zu gehen haben, an — wie z. B. bei Hängebrücken.

Bezeichnet n die Anzahl der Drähte eines Bindelseiles, δ den Durchmesser eines Drahtes, β die zulässige Beanspruchung pro Quadrateinheit, und P die Tragfähigkeit des Seiles, so ist zunächst allgemein

$$\left.\begin{aligned} P &= n\,\frac{\pi\,\delta^2}{4}\,\beta \\ \text{und}\qquad \delta &= 1{\cdot}128\sqrt{\frac{P}{n\beta}} \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ldots\ (39).$$

Für guten Eisendraht ist bei 5facher Bruchsicherheit pro □cm mindestens $\beta = 1000$ Kg, also hiefür nahezu

$$\left.\begin{aligned} P &= 800\,n\,\delta^2 \text{ in Kg} \\ \text{und}\qquad \delta &= 0{\cdot}035\sqrt{\frac{P}{n}} \text{ in cm} \end{aligned}\right\}\quad \ldots\ldots\ (39\,a).$$

Da überdies bei Bindelseilen der Durchmesser d des Seiles durch die Gleichung

$$d = 1{\cdot}3\,\delta\,\sqrt{n}$$

bestimmt ist, so wird

$$\delta = \frac{d}{1{\cdot}3\,\sqrt{n}} = \frac{0{\cdot}77\,d}{\sqrt{n}},$$

und für diesen Werth genau genug

$$\left.\begin{array}{rl} P = & 470\,d^2 \text{ in Kg} \\ \text{und } d = & 0{\cdot}046\,\sqrt{P} \text{ in cm} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (39\,\text{b}).$$

II. Die gedrehten Drahtseile werden jetzt fast ausschliesslich als sogenannte Patenttaue construirt, indem man die einzelnen Drähte zunächst in Litzen zusammendreht und aus einer Anzahl Litzen — analog wie beim Hanfseile — das Drahtseil verfertigt. Sowohl die Drähte in den Litzen, als auch die Litzen selbst, werden gewöhnlich wieder um eine Hanfseele gedreht, wodurch die Biegsamkeit und Consistenz des Drahtseiles gefördert wird. Nur bei Anwendung von ganz dünnen Drähten wird in den Litzen die Hanfseele zuweilen durch einen Draht ersetzt. Die Anzahl der Litzen ist gewöhnlich 4 oder 6 und die Anzahl der Drähte im Seile 18, 24, 30, 36, 72, 84, 108, 144, 192; sie ist also durch Zahlen repräsentirt, die durch 6 theilbar sind. Am gewöhnlichsten sind die 36 drähtigen Seile, die also aus 6 Litzen mit je 6 Drähten bestehen. Die Fig. 5 zeigt den Querschnitt eines solchen Seiles. Die üblichen Drahtstärken liegen zwischen 0·09 bis 0·35 cm. Die Festigkeit der Eisendrähte liegt zwischen 5000 bis 7000 Kg pro □cm, und zwar ist sie für dünne und ungeglühte Drähte verhältnissmässig grösser als für dicke oder geglühte. Zu Förderseilen empfiehlt es sich daher möglichst dünne Drähte anzuwenden. Der Drehungswinkel beträgt für die Drähte in den Litzen 8 bis 15°; dagegen für die Litzen in den Seilen 10 bis 25°. Die gedrehten Drahtseile kommen meist als sogenannte Treib- oder Förderseile, welche auf Rollen oder Trommeln aufgewunden werden, bei den Fördermaschinen in Bergwerken und bei Drahtseil-Betrieb auf stark geneigten Bahnen in vielfache Verwendung.

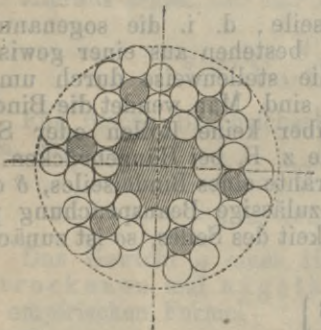


Fig. 5.

Obzwar durch die Drehung der Drähte der Zugswiderstand des Seiles geschwächt wird, so ist diese Drehung für Förderseile doch nothwendig, um die Consistenz des Seiles zu vermehren und um durch den Drall, der gleichsam wie eine schraubenförmig gewundene Feder wirkt, die Stösse und Vibrationen beim Anholen und während des Betriebes möglichst unschädlich zu machen.

Es darf jedoch das gedrehte Seil nie so stark in Anspruch genommen warden, dass der Drall merklich ausgereckt, also die Elasticität desselben überschritten wird; denn es reisst dann das Seil, und zwar am gewöhnlichsten beim Anholen, oft plötzlich. Da ferner die Förderseile auch durch die Biegung auf der Seiltrommel eine beträchtliche Spannung erleiden, so muss man bei der Bestimmung des nutzbaren Seilquerschnittes auf dreierlei Umstände Rücksicht nehmen, nämlich: 1. auf die Grösse der zu fördernden Last, 2. auf die Spannung, die das Seil durch die Biegung auf der Seiltrommel erfährt und 3. auf die Elasticität des Dralls.

Nach der in den Drahtseil-Fabriken zu Kladno und Přibram üblichen Berechnungsweise wird zunächst die specifische Biegungsspannung σ' des Seiles von dem Festigkeitsmodul μ des Drahtes abgezogen und der 6. Theil des Restes als zulässige Dehnungsspannung angenommen. Selbstverständlich darf aber die Summe aus der specifischen Dehnungsspannung σ und der Biegungsspannung σ' die Elasticitätsgrenze oder den Grenzmodul η des Drahtmateriales nicht erreichen. Es müssen also die beiden Bedingungen realisirt werden:

$$(\sigma + \sigma') < \eta \text{ und } \sigma = \frac{\mu - \sigma'}{6} \quad \ldots \ldots (40).$$

Da nun die Biegungsspannung σ' vom Halbmesser r der Seiltrommel oder der Seilscheibe abhängig ist, so wollen wir zunächst σ' durch r ausdrücken.

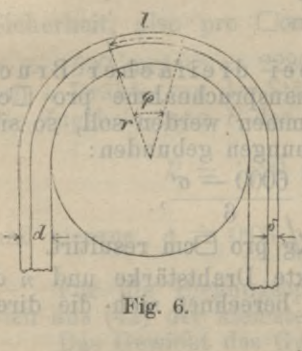


Fig. 6.

Bezeichnet, nach Fig. 6, d die Seildicke, l die Länge eines Drahtstückchens im obersten, d. i. des durch die Biegung des Seiles am meisten gespannten Drahtes in seiner Längenaxe, λ die Verlängerung der äussersten Fasern dieses Drahtstückchens durch die Biegung, φ die Bogenlänge des dem Drahtelemente l zugehörigen Centriwinkels für den Radius 1, so wird offenbar

$$l = \left(r + d - \frac{\delta}{2}\right) \varphi \text{ und } l + \lambda = (r + d)\, \varphi$$

daher
$$\lambda = \frac{\delta}{2}\, \varphi.$$

Ist nun σ' die durch die Biegung in den obersten Fasern hervorgerufene Dehnungsspannung pro □ cm, so wird nach Gleichung (1) Seite 6,

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\sigma'}{\varepsilon},$$

wenn ε den Elasticitätsmodul bedeutet. Führen wir für λ und l die obigen Werthe ein, so wird

$$\sigma' = \frac{\delta \varphi \varepsilon}{2\left(r + d - \frac{\delta}{2}\right)\varphi} = \frac{\delta \varepsilon}{2 r} \quad \ldots \ldots (41),$$

wenn in der Summe die im Vergleich zu r sehr geringe Grösse $d - \frac{\delta}{2}$ vernachlässigt wird.

Aus (41) ergibt sich

$$r = \frac{\delta \varepsilon}{2\sigma'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (42).$$

Wir ersehen aus (42), dass der Aufwicklungs-Radius r des Seiles um so grösser werden muss, je stärker der Draht und je kleiner die Biegungsspannung σ' werden soll.

Wir wollen nun die Gleichungen (40) und (42) auf Patentseile aus Eisen- und Stahldraht anwenden.

1. Patent-Rundseile aus Eisendraht. Der Festigkeitsmodul μ für vorzüglichen Eisendraht ist 6000, der Grenzmodul $\eta = 2400$ und der Elasticitätsmodul $\varepsilon = 2000000$ Kg pro □cm. Die zulässige totale Inanspruchnahme β pro □cm, die sich aus $\sigma + \sigma'$, d. i. aus der Dehnungs- und Biegungs-Spannung zusammensetzt, muss nach Formel (40) kleiner sein als der Grenzmodul η, und für die Dehnungsspannung σ ist die Gleichung vorgeschrieben:

$$\sigma = \frac{\mu - \sigma'}{6}.$$

Da nun für guten Eisendraht, bei dreifacher Bruchsicherheit, die totale zulässige Inanspruchnahme pro □cm, d. i. für β, höchstens 2000 Kg angenommen werden soll, so sind die Minimal-Dimensionen an die Gleichungen gebunden:

$$2000 = \sigma + \sigma' \text{ und } \sigma = \frac{6000 - \sigma'}{6},$$

woraus $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{800}$ und $\boldsymbol{\sigma'} = \mathbf{1200}$ Kg pro □cm resultirt.

Ist also δ die in cm ausgedrückte Drahtstärke und n die Anzahl der Drähte im Drahtseile, so berechnet sich die direct wirkende Zugsbelastung P aus

$$\left.\begin{array}{l} P \doteq 800 \,.\, n \dfrac{\delta^2 \pi}{4} \doteq 630\, n \delta^2 \text{ in Kg} \\ \text{und hieraus } \delta \doteq 0{\cdot}04 \sqrt{\dfrac{P}{n}} \text{ in cm } \ldots \ldots \end{array}\right\} . \, (42).$$

Selbstverständlich ist in der Zugsbelastung P bei Förderseilen auch deren Eigengewicht G, sowie auch das Gewicht der Förderschalen und Wägen mit inbegriffen.

Bei Förderseilen kann man mit der Drahtstärke δ nicht unter 0·12 cm herabgehen, weil dünnere Drähte zu bald durchrosten und zu rasch abgenützt würden. Da nun pro □cm für Eisendraht der Elasticitätsmodul $\varepsilon = 2000000$, die Biegungsspannung $\sigma' = 1200$ Kg und für Förderseile δ im Minimum $= 0{\cdot}12$ cm betragen soll, so ergibt sich aus Gleichung (42) der kleinste Aufwicklungsradius $r \doteq 100$ cm.

Im Allgemeinen ist für Eisendrahtseile, wenn die Biegungsspannung $\sigma' = 1200$ Kg pro □cm betragen soll, $r = 833\ \delta$.

Ueber das Eigen-Gewicht und die Anschaffungskosten der Drahtseile erhält man genügende Anhaltspunkte aus den nachstehenden Preis-Courants. Im Allgemeinen ist das Gewicht pro Meter $g \doteq 0{\cdot}8\ n\,\delta^2$ in Kg, wenn δ in cm. ausgedrückt wird.

2. Patent-Rundseile aus Gussstahl. Dieselben werden neuerer Zeit in vielfache Anwendung gebracht und sind namentlich für grosse Schachttiefen, wegen ihres — im Verhältniss zu Eisendrahtseilen — fast 2mal grösseren Tragvermögens, sowie auch wegen ihrer grösseren Dauerhaftigkeit den Eisen-Drahtseilen vorzuziehen.

Für Gussstahldraht ist pro □cm der Bruchmodul $\mu = 11400$ der Grenzmodul $\eta = 5600$ und der Elasticitätsmodul $\varepsilon = 2750000$ Kg

Nach den unter (40) vorgeführten Formeln muss $(\sigma + \sigma') < \eta$ und $\sigma = \frac{\mu - \sigma'}{6}$.

Wählt man für $\sigma + \sigma'$, d. i. für die totale Anspruchnahme β des Seiles durch die Dehnung und Biegung, wieder die 3fache Sicherheit, also pro □cm $\sigma + \sigma' \doteq \frac{\mu}{3} = 3800$ Kg, so wird $\sigma = 1520$ und $\sigma' = 2280$ Kg pro □cm. Hat also das Gussstahlseil n Drähte von der Stärke δ (cm), so ergibt sich, für $\sigma = 1520$, die Zugsbelastung P des Seiles aus

$$\left.\begin{aligned} P &= 1520\ n\,\frac{\delta^2\pi}{4} \doteq 1200\ n\,\delta^2 \text{ in Kg.} \\ \text{und hieraus}\quad \delta &\doteq 0{\cdot}03\sqrt{\frac{P}{n}} \text{ in cm } \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (43).$$

Für die Biegungsspannung $\sigma' \doteq 2280$ Kg pro □cm ergibt sich aus (42) der kleinste Aufwicklungsradius $\boldsymbol{r = 625\ \delta}$.

Das Gewicht des Gussstahl-Drahtseiles ergibt sich pro laufenden Meter, wenn δ in cm ausgedrückt wird, annähernd aus $g = 0{\cdot}9\ n\,\delta^2$.

Berechnung der Drahtseile nach der Launhardt'schen Formel. Da bei totaler Anspruchnahme der Förderseile durch die Biegungs- und Dehnungsspannung im Vorhergehenden nur die 3fache Bruchsicherheit für die ruhende Belastung vorausgesetzt wurde, so ist es — zufolge der Launhardt'schen Formel — klar, dass während des Betriebes eine geringere als die 3fache Bruchsicherheit stattfindet. Nach der Launhardt'schen Formel (7) ist nämlich die Arbeitsfestigkeit

$$\alpha = \eta \left(1 + \frac{\mu - \eta}{\eta} \frac{\min B}{\max B}\right),$$

daher für 3fache Sicherheit während des Betriebes die zulässige totale Anspruchnahme pro Flächeneinheit

$$\beta = \frac{\eta}{3} \left(1 + \frac{\mu - \eta}{\eta} \frac{\min B}{\max B}\right).$$

Hiebei ist $\min B$ die specifische Anspruchnahme des Seiles im unbelasteten Zustande der Förderschale und Wagen (Hunde), dagegen $\max B$ die specifische Anspruchnahme des Seiles bei voller Ladung.

Da nun für guten Eisendraht pro □cm $\mu = 6000$ und $\eta = 2400$ Kg ist, so wird die zulässige totale Anspruchnahme der Eisendrahtseile pro □cm durch

$$\beta \doteq 800 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\min B}{\max B}\right) \quad \ldots\ldots (44)$$

ausgedrückt erscheinen.

Da ferner für guten Gussstahldraht pro □cm $\mu = 11400$ und $\eta = 5600$ Kg, so ergibt sich bei 3facher Bruchsicherheit während des Betriebes, die zulässige totale Anspruchnahme des Gussstahl-Drahtseiles pro □cm aus

$$\beta \doteq 1870 \left(1 + \frac{\min B}{\max B}\right) \ldots\ldots (45).$$

Die specifische Biegungsspannung σ' des Seiles ergibt sich aus Formel (41), nämlich aus $\sigma' = \frac{\delta \,.\, \varepsilon}{2r}$ und daher die zulässige specifische Dehnungsspannung σ aus $\sigma = \beta - \sigma'$.

Die zulässige verticale Belastung P des Seiles berechnet sich alsdann aus

$$P = \sigma \,.\, n \frac{\delta^2 \pi}{4} \quad \ldots\ldots\ldots (46),$$

wenn n die Drahtzahl und δ die Drahtstärke bezeichnet.

Um eine möglichst grosse Tragfähigkeit des Seiles zu erhalten, wollen wir das Verhältniss des kleinsten Aufwicklungsradius r zur Drahtstärke δ so wählen, dass die Biegungsspannung möglichst klein, also die Dehnungsspannung möglichst gross wird.

Es ist die specifische Dehnungsspannung

$$\sigma = \beta - \sigma' = \beta - \frac{\delta\,\varepsilon}{2r},$$

oder wenn wir die Dehnungsspannung eines der Drähte des Seiles mit s bezeichnen

$$\sigma = \frac{s}{\frac{\delta^2 \pi}{4}} = \frac{4s}{\delta^2 \pi},$$

daher

$$\frac{4s}{\delta^2\pi} = \beta - \frac{\delta\,\varepsilon}{2\,r}$$

und hieraus $$s = \frac{\delta^2\pi}{4}\left(\beta - \frac{\delta\,\varepsilon}{2\,r}\right).$$

Soll nun s in Bezug auf ein veränderliches δ zum Maximum anwachsen, so muss bekanntlich zunächst $\frac{d\,s}{d\,\delta} = 0$ werden. Wir bilden also $\frac{d\,s}{d\,\delta}$, setzen diesen Differentialquotienten gleich Null und erhalten daraus nach einfacher Rechnung

$$r = \frac{3\,\varepsilon\,\delta}{4\,\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (47).$$

Für diesen Werth wird nach (41) die Biegungsspannung $\sigma' = \frac{2}{3}\,\beta$, und weil $\sigma = \beta - \sigma'$, die Dehnungsspannung $\sigma = \frac{\beta}{3}$.

Wir haben also für den zweckmässigsten Fall:

$$\sigma = \frac{\beta}{3} \text{ und } \sigma' = \frac{2}{3} \quad \ldots\ldots (48).$$

Aus (47) ergibt sich für Eisendraht, weil pro □cm $\varepsilon = 2000000$,

$$r = \frac{1500000\,\delta}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (49),$$

und für Gussstahldraht, wegen $\varepsilon = 2750000$,

$$r = \frac{2062500\,\delta}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (50),$$

und zwar in cm; wobei δ in cm und β pro □cm eingesetzt werden muss, weil auch ε pro □cm gerechnet wurde.

Zur Vergleichung der aus den beiden vorgeführten Berechnungsweisen der Drahtseile sich ergebenden Resultate wollen wir folgendes Beispiel vorführen.

Beispiel. Man berechne die Drahtstärke δ eines 72drähtigen Förderseiles aus Eisendraht, welches bei einer Schachttiefe von 200 Meter, ausser seinem Eigengewichte, das Gewicht der Förderschale und Hunde pr. 700 Kg und die Ladung von 800 Kg mit 3facher Bruchsicherheit bei seiner grössten Anspruchnahme (nämlich mit Rücksicht auf die grösste Dehnungs- und Biegungsspannung) tragen soll.

Das Eigengewicht des Seiles pro laufenden Meter ist nahezu bestimmt durch $g = 0{\cdot}8\,n\,d^2$ (wenn δ in cm), daher für die Länge von 200 Metern, für $n = 72$, durch

$$G = g\,.\,l = 0{\cdot}8 \times 72 \times \delta^2 \times 200 = 11520\,\delta.$$

Es ist also die totale verticale Belastung

$$P = 700 + 800 + 11520\,\delta^2 = 1500 + 11520\,\delta^2.$$

Nach Formel (42) ist aber $P = 630\,n\delta^2$, daher für $n = 72$, $P = 45360\,\delta^2$.

Durch Gleichstellung der beiden Werthe von P erhält man

$$1500 + 11520\,\delta^2 = 45360\,\delta^2,$$

woraus $\delta \doteq 0{\cdot}21$ cm,

und hierfür $P \doteq 2000$ Kg.

Aus der Gleichung $r = 833\,\delta$ ergibt sich der kleinste Aufwicklungsradius r des Seiles mit 175 cm.

Thatsächlich ist alsdann für $\delta = 0{\cdot}21$ und $r = 175$ cm. nicht die 3fache Sicherheit während des Betriebes vorhanden; denn es wurde für die totale specifische Anspruchnahme $\beta = \sigma + \sigma'$ der 3. Theil des Bruchmoduls $\mu = 6000$ Kg pro □cm, der sich auf ruhende Last bezieht, gewählt, während jener für bewegte Last und Belastungswechsel entschieden kleiner ist. Wir wollen also β nach der Formel (44), d. i. aus

$$\beta = 800\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{\min B}{\max B}\right)$$

berechnen, wobei $\min B$ die kleinste und $\max B$ die grösste Seilbelastung bezeichnet. Hier ist also $\min B$ gleich dem Gewichte der leeren Förderschale und Wägen; dagegen $\max B$ gleich $\min B$ plus der Förderlast; somit

$$\frac{\min B}{\max B} = \frac{700}{700 + 800} = \frac{7}{15}.$$

Für diesen Werth wird $\beta = 1360$ Kg, also um 640 Kg pro □cm geringer als im vorigen Falle. Da nun die Dehnungsspannung σ nach (48) gleich $\frac{\beta}{3} \doteq 453$ Kg, so wird nach (46), für $n = 72$, $P = 453 \times 72\,\frac{\delta^2\pi}{4} \doteq 25600\,\delta^2$.

Zugleich ist P gleich dem Eigengewichte des Seiles und dessen totaler Belastung, d. i. nach Obigem $P = 1500 + 11520\,\delta^2$.

Wir erhalten also aus der Gleichstellung der beiden Werthe von P, nämlich aus: $25600\,\delta^2 = 1500 + 11520\,\delta^2$, $\delta \doteq 0{\cdot}3$ cm also eine um $0{\cdot}09$ cm grössere Drahtstärke als im vorigen Falle. Endlich wird für diesen Werth von δ und dem obigen von β nach Gleichung (49), der kleinste Aufwicklungsradius $r \doteq 330$ cm, also fast doppelt so gross als früher.

Da jedoch die Grösse der Seiltrommel oder Seilkörbe durch locale Umstände beschränkt ist und auch die Drahtstärke δ innerhalb gewisser Grenzen bleiben muss, so wird gewöhnlich r und δ von vornherein angenommen und alsdann bei gegebener Last die Drahtzahl n berechnet. Selbstverständlich muss n stets zu einer ganzen Zahl ergänzt werden und wird gewöhnlich, aus Herstellungsrücksichten, n so lang erhöht, bis es durch 6 theilbar ist.

III. Verjüngte Drahtseile. Um das Eigengewicht der Drahtseile zu vermindern, und dadurch die Tragfähigkeit derselben zu vergrössern, pflegt man für sehr bedeutende Schachttiefen die Querschnitte der Seile mit der zunehmenden Tiefe derart abnehmen zu lassen, dass in den Endquerschnitten der einzelnen Seilstücke dieselbe specifische Spannung β herrsche, also nach pag. 32 Seile von nahezu gleicher Widerstandsfähigkeit in ihren einzelnen Theilen zu schaffen. Bezeichnet L die ganze, dem Seile angehängte Last, n die constante Drahtzahl, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ die Drahtstärke in den aufeinander folgenden Drahtstücken, $l_1, l_2, l_3, \ldots$ deren Längen, $G_1, G_2, G_3, \ldots$ die Gewichte der einzelnen Drahtstücke und g das Gewicht des Seiles pro laufenden Meter, so ist für die Rundseile aus Eisendraht nahezu $g = 0{\cdot}8\, n\delta^2$ und für Gussstahldraht $g = 0{\cdot}9\, n\delta^2$; setzen wir allgemein $g = \varkappa n \delta^2$ (wobei also für Eisendraht $\varkappa = 0{\cdot}8$ und für Gussstahldraht $\varkappa = 0{\cdot}9$), so wird

$$G_1 = \varkappa n \delta_1^2 l_1, \quad G_2 = \varkappa n \delta_2^2 l_2, \quad G_3 = \varkappa n \delta_3^2 l_3 \text{ u. s. w.}$$

Soll nun in den Endquerschnitten der einzelnen Seilstücke dieselbe specifische Spannung β herrschen, so müssen die folgenden Gleichungen realisirt werden:

$$L + \varkappa n \delta_1^2 l_1 = n\beta \frac{\delta_1^2 \pi}{4},$$

$$L + \varkappa n \delta_1^2 l_1 + \varkappa n \delta_2^2 l_2 = n\beta \frac{\delta_2^2 \pi}{4},$$

$$L + \varkappa n \delta_1^2 l_1 + \varkappa n \delta_2^2 l_2 + \varkappa n \delta_3^2 l_3 = n\beta \frac{\delta_3^2 \pi}{4},$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die folgenden Drahtstärken:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{L}{n\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_1\right)}},$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{L\,\frac{\beta\pi}{4}}{n\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_1\right)\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_2\right)}},$$

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{L\left(\frac{\beta\pi}{4}\right)^2}{n\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_1\right)\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_2\right)\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_3\right)}},$$

u. s. w.;

allgemein

$$\delta_n = \sqrt{\frac{L\left(\frac{\beta\pi}{4}\right)^{n-1}}{n\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_1\right)\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_2\right) \ldots \left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l_n\right)}} \ldots (52).$$

Haben die einzelnen Seilstücke von verschiedenen Querschnitten gleiche Länge, ist also $l_1 = l_2 = l_3 = \ldots = l_n$, so wird aus (50)

$$\delta_n = \sqrt{\frac{L\left(\frac{\beta\pi}{4}\right)^{n-1}}{n\left(\frac{\beta\pi}{4} - \varkappa l\right)^n}} \ldots \text{(51 a)}.$$

Beim Adalbertschachte in Příbram, von 1200 Meter Fördertiefe, ist ein 36drähtiges Gussstahl-Drahtseil, bei welchem die Drahtstärke in 5 Abstufungen von 0·19 bis 0·265 cm zunimmt, in Anwendung. Hierbei beträgt

das Gewicht der		Förderschale	450	Kg.
„	„	„ Wagen	340	„
„	„	„ Ladung	1000	„
„	„	des Seiles	1800	„

Der Korbradius beträgt 3 Meter, also ist in Gleichung (41) $r = 300$ cm und daher ist die Biegungsspannung des Seiles pro □cm $\sigma' = \frac{\delta\varepsilon}{2r} = \frac{0·265 \times 2750000}{600} \doteq 1200$ Kg.

Der nutzbare Querschnitt des Seiles ist

$$F = 36 \frac{0·265^2 \times 3·14}{4} \doteq 2 \text{ □cm},$$

also die durch die gesammte verticale Last $P = 3590$ Kg erzeugte Zugsspannung $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{3590}{2} \doteq 1800$ Kg.

Die totale specifische Beanspruchung des Seiles pro □cm ist demnach $\beta = \sigma + \sigma' = 3000$ und der Sicherheitsgrad für ruhende und constante Last gleich $\frac{\mu}{\beta} = \frac{11400}{3000} = 3·8.$

Frägt man nun nach der grössten zulässigen Beanspruchung β, die das Seil bei 3facher Sicherheit in Bezug auf die Arbeitsfestigkeit α erfahren dürfte, so ergibt sich β, nach Formel (45) aus

$$\beta = 1870\left(1 + \frac{\min B}{\max B}\right),$$

wobei $\min B$ die kleinste und $\max B$ die grösste Seilbelastung bezeichnet. Hier ist also $\min B$ gleich der Verticallast ohne die

Ladung, während $\max B$ durch $\min B$ und die Ladung auszudrücken ist.

Demnach ist $\min B = 2590$ und $\max B = 3590$; daher $\beta = 1870\left(1 + \frac{2590}{3590}\right) \doteq 3200$ Kg, also um 200 Kg pro □cm mehr als im obigen Falle. Es hat demnach das Seil auch während des Betriebes mindestens die 3fache Bruchsicherheit.

Bandseile. Dieselben werden aus mehreren Strängen bandförmig (in einer Ebene) zusammengeflochten. Sie gewähren gegenüber den Rundseilen den Vortheil, dass sie biegsamer sind, daher keine so grossen Seiltrommeln und Seilkörbe erfordern, als die Rundseile; dagegen ist ihr Gewicht und der Preis bei gleicher Tragkraft und gleichen Umständen um $\frac{1}{3}$ grösser als das der Rundseile und da sie sich auch rascher abnützen, so erfahren sie eine geringere Anwendung als die Rundseile. Die Berechnung der Bandseile erfolgt übrigens auf gleiche Weise wie jene der Rundseile.

Der folgenden von Prof. Gustav Schmidt berechneten Tabelle über das Tragvermögen der eisernen Drahtseile dient die Annahme zur Grundlage, dass die directe specifische Zugspannung $\sigma = 800$ und die Biegungsspannung $\sigma' = 1600$ Kg, also die totale Beanspruchung pro □cm, d. i. $\beta = 2400$ Kg betrage, was für $\mu = 6000$, einer $2\frac{1}{2}$fachen Bruchsicherheit für eine constante, ruhende Belastung, somit circa der 2fachen Bruchsicherheit während des Betriebes entspricht.

Tabelle über die Tragfähigkeit, das Gewicht und den Preis der Eisendrahtseile.

Stärke des Drahtes und des Seiles	Querschnitt eines Drahtes	Anzahl der Drähte	Kleinster Aufwickelungsradius r	Tragvermögen ohne Biegung bei 7facher Sicherheit	Anzahl der Stränge im Bandseile	Anzahl der Litzen im Seile	Anzahl der Drähte pr. Litze	Anzahl der Draht-Seelen im Seile	Anzahl der Hanf-Seelen pr. Litze	Gewicht eines Meters Seil	Preis pro 100 Kilogr. Netto
cm	□cm	n	cm	Kg						Kg	fl.
0·12	0·0113										
0·9	Rundseile	24	75·0	217		4	6	4	.	0·28	49
1·1		36		326		6	6	6	1	0·45	
1·6		72		651		6	12	.	1	0·85	
1·9		108		977		6	18	6	1	1·25	
1·1	Bandseile	144		1303	6	4	6	24	.	1·68	64
1·1		192		1737	8	4	6	32	.	2·24	

Stärke des Drahtes und des Seiles	Querschnitt eines Drahtes	Anzahl der Drähte	Kleinster Aufwickelungsradius r	Tragvermögen ohne Biegung bei 7facher Sicherheit	Anzahl der					Gewicht eines Meters Seil	Preis pro 100 Kilogr. Netto
					Stränge im Bandseile	Litzen im Seile	Drähte pr. Litze	Draht-Seelen im	Hanf-Seelen pr. Litze		
cm	□cm	n	cm.	Kg						Kg	fl.
0·13	0·0133										
1·0		24		255		4	6	4	.	0·35	
1·3	Rund-	36		382		6	6	6	1	0·54	
1·8	seile	72		764		6	12	.	1	0·94	47
2·1		108	81·3	1146		6	18	6	1	1·52	
1·2	Band-	144		1529	6	4	6	24	.	2·10	62
1·2	seile	192		2038	8	4	6	32	.	2·80	
0·15	0·0177										
1·2		24		345		4	6	4	.	0·47	
1·4	Rund-	36		518		6	6	6	1	0·70	
2·0	seile	72		1036		6	12	.	1	1·12	44
2·4		108	93·8	1554		6	18	6	1	1·92	
1·4	Band-	144		2072	6	4	6	24	.	2·82	56
1·4	seile	192		2762	8	4	6	32	.	3·76	
0·17	0·0227										
1·3		24		436		4	6	4	.	0·53	
1·6	Rund-	36		654		6	6	6	1	0·85	
2·2	seile	72		1308		6	12	.	1	1·46	42
2·4		90	106·3	1634		6	15	6	1	1·85	
2·7		108		1961		6	18	6	1	2·20	
1·5	Band-	144		2615	6	4	6	24	.	3·18	52
1·5	seile	192		3487	8	4	6	32	.	4·24	
0·19	0·0284										
1·8		36		816		6	6	6	1	1·02	
2·3	Rund-	72		1633		6	12	.	1	1·73	40
2·7	seile	90		2041		6	15	6	1	2·30	
3·0		108	118·8	2449		6	18	6	1	2·76	
1·8	Band-	144		3266	6	4	6	24	.	3·86	48
1·8	seile	192		4345	8	4	6	32	.	5·15	
0·21	0·0346										
2·0		36		998		6	6	6	1	1·31	
2·6	Rund-	72		1995		6	12	.	1	2·30	38
3·0	seile	90		2494		6	15	6	1	2·95	
3·3		100	131·3	2993		6	18	6	1	3·53	
2·0	Band-	144		3990	6	4	6	24	.	5·10	44
2·0	seile	192		5321	8	4	6	32	.	6·80	
0·25	0·0491										
2·4		36		1414		6	6	6	1	1·76	
3·3	Rund-	72		2828		6	12	.	1	3·10	35
3·5	seile	90		3534		6	15	6	1	3·95	
4·0		108	156·3	4241		6	18	6	1	4·75	
2·4	Band-	144		5655	6	4	6	24	.	6·75	40
2·4	seile	192		7540	8	4	6	32	.	9·00	
0·28	0·0616										
2·7			175·0								
	Rund-seile	36		1773		6	6	6	1	2·31	34

Die in dieser Tabelle enthaltenen Angaben über die Stärke des Drahtes und des Seiles, über die Seilconstruction, das Gewicht pro Meter Seil und den Preis pro 100 Kilogr. sind aus dem Preis-Courante der k. k. Drahtseilfabrik in Příbram entnommen.

Zur Gewinnung weiterer Anhaltspunkte für die Praxis möge noch der folgende Preiscourant mit der Bemerkung aufgenommen werden, dass die directe Zugspannung σ mit der Zunahme der Drahtstärke abnimmt, weshalb für dünne Drähte eine grössere, dagegen für starke eine geringere Dehnungsspannung gerechnet wurde, so z. B. für $\delta = 0{\cdot}12$ cm $\sigma \doteq 1000$; dagegen für $\delta = 0{\cdot}32$ cm σ nur 900 Kg pro □cm. Demnach liegt auch die totale Beanspruchung β, weil die Biegungsspannung σ' mit 1200 Kg pro □cm angenommen wurde, zwischen den Grenzen 2200 und 2100 Kg pro □cm, was — weil dünnere Drähte eine grössere specifische Festigkeit als dickere Drähte besitzen — einer circa 2·8fachen Bruchsicherheit für ruhende und constante Belastung entspricht, während die Dehnungsspannung allein nur $\frac{1}{6}$ der Bruchbelastung ausmacht.

Damit nun bei der Seilfahrt, d. h. bei der Befahrung des Schachtes durch die Mannschaft, wenigstens die 3fache Bruchsicherheit des Seiles vorhanden sei, darf die Belastung der Förderschale durch die Mannschaft (à 75 Kilogr.) nur die Hälfte der Last der beladenen Wägen betragen. Ferner darf bei der Seilfahrt die Geschwindigkeit von 3 Meter pro Secunde nicht überschritten werden, und sind überdies eigene Fangvorrichtungen angebracht, welche im Augenblicke des Seilbruches zur Thätigkeit gelangen und — beispielsweise in Příbram — so rasch wirken, dass nur eine Fallhöhe von circa 10 bis 12 cm möglich wird.

Was schliesslich die Zeitdauer betrifft, durch welche Förderseile in fortwährender Thätigkeit sein können, ohne den Bruch zu gefährden, so beträgt dieselbe bei Rundseilen aus Eisendraht durchschnittlich $1\frac{1}{2}$, dagegen bei jenen aus Gussstahldraht durchschnittlich 2 Jahre.

Preis-Courant
der Drahtseilfabrik der k. k. priv. öst. Staatseisenbahn-Gesellschaft auf dem Thinnfeldschachte bei Kladno.

Rundseile aus Eisendraht										
Drahtstärke in cm	Anzahl der Drähte im Seile	Anzahl der Litzen im Seile	Stärke des Seiles in cm	Kleinster Aufwicklungsradius r in cm	Tragvermögen ohne Biegung bei 6facher Sicherheit in Kilo	Seilgewicht per laufenden Meter in Kilo	Preis pr. 100 Kilog.	Preis der Theerung pr. 100 Kilog.	Preis eines gewöhnlichen Seil-Gehänges	Preis eines Frictions- Seil-Gehänges
	16	4	0·6	60	200	0·17				1·00
	18	6	0·7	65	220	0·19				1·00
	24	6	0·8	75	300	0·28				1·50
0·12	30	6	0·9	80	370	0·34	50·—	1·80	—·70	1·50
	36	6	1·1	85	440	0·45				1·50
	72	6	1·5	92·5	900	0·85				2·50
	108	6	1·8	100	1350	1·25				4·00
	24	6	1·0	72·5	450	0·35				1 50
	30	6	1·1	75	430	0·45				1·50
0·13	26	6	1·3	87·5	520	0·54	47·—	1·70	—.75	1·80
	72	6	1·7	95	1050	0·95				4·00
	108	6	2·1	112	1580	1·52				5·50
	24	6	1·1	82	470	0·47				1·50
	30	6	1·3	90	590	0·58				2·00
0·15	36	6	1·4	100	700	0·70	44·25	1·60	—·80	2·50
	72	6	2·0	110	1400	1·12				5·50
	108	6	2·4	130	2000	1·92				8·00
	24	6	1·3	112	550	0·53				1·50
	30	6	1·4	120	680	0·65				2·00
	36	6	1·6	125	820	0·85				2·50
0·17	72	6	2·2	130	1640	1·46	42·—	1·50	—·90	5·00
	84	6	2·4	135	1910	1·74				7·50
	108	6	2·7	147	2460	2·20				10·00
	24	6	1·4	125	640	0·66				2·00
	36	6	1·7	130	960	1·02				3·50
0·19	72	6	2·4	135	1900	1·78	40·—	1·40	1·00	8·00
	84	6	2·7	150	2230	2·14				10·00
	108	6	3·0	165	2860	2·76				13·00
	24	6	1·6	140	780	0·79				2·00
	30	6	1·8	145	970	0·98				3·00
	36	6	1·9	150	1170	1·31				5·50
0·21	72	6	2·7	160	2330	2·30	38·75	1·30	1·25	10·00
	84	6	2·9	170	2720	2·75				13·00
	108	6	3·2	182	3500	3·53				13·00

Rundseile aus Eisendraht										
Drahtstärke in cm	Anzahl der Drähte im Seile	Anzahl der Litzen im Seile	Stärke des Seiles in cm	Kleinster Aufwicklungsradius r in cm	Tragvermögen ohne Biegung bei 6facher Sicherheit in Kilo	Seilgewicht per laufenden Meter in Kilo	Preis pr. 100 Kilog.	Preis der Theerung pr. 100 Kilog.	Preis eines gewöhnlichen Seil-Gehänges	Preis eines Frictions- Seil-Gehänges
0·25	18	6	1·6	167	830	0·84	37 25	1·20	1·50	2·00
	24	6	1·9	175	1100	1·05				3·00
	36	6	2·3	192	1650	1·16				7·00
	72	6	3·2	200	3300	2·50				13·00
	108	6	3·9	215	4960	4·75				15·00
0·28	18	6	1·8	187	1050	1·45	35 75	1·10	1·75	3·00
	24	6	2·1	200	1380	1·84				5·00
	36	6	2·6	215	2070	2·20				9·00
	72	6	3·6	242	4140	4·20				14·00
0·32	16	4	1·9	215	1050	1·04	—·—	1·00	2·00	3·00
	24	6	2·4	230	1800	1·56				4·00
	30	6	2·7	240	2260	2·26				7·00
	36	6	2·9	275	2720	2·70				11·00
Rundseile aus Gussstahldraht										
0·17	24	6	1·3	157	1020	0·64	86.25	1·50	—·90	1·50
	30	6	1·4	160	1280	0·80				2·00
	36	6	1·6	165	1530	0 96				2·50
	72	6	2·2	170	3060	1·93				5·00
	84	6	2·4	180	3570	2·25				7·50
	108	6	2·7	195	4600	2·89				10·00
0·19	24	6	1·4	175	1280	0·80	83·—	1·40	1·00	2·00
	36	6	1·7	180	1900	1·20				3·50
	72	6	2·4	190	3820	2·40				8·00
	84	6	2·7	205	4450	2·80				10·00
	108	6	3·0	220	5720	3·60				13·00
0·21	24	6	1·6	190	1550	0·97	81·50	1·30	1·25	2·00
	30	6	1·8	195	1940	1·22				3·00
	36	6	1·9	200	2330	1·46				5 50
	72	6	2·7	210	4650	2·92				10·00
	84	6	2·9	230	5430	3·41				13·00
	108	6	3·2	344	6580	4·40				13·00

Drahtstärke in cm	Anzahl der Drähte im Seile	Anzahl der Stränge im Seile	Anzahl der Drähte im Strang	Seil: Breite in cm	Seil: Stärke in cm	Kleinster Aufwicklungsradius r in cm	Tragvermögen ohne Biegung bei 6facher Sicherheit	Beiläufiges Seilgewicht per met. in Kilogr.	Preis pr. 100 Kilog.	Preis der Theerung pr. 100 Kilog.	Preis eines Seil-Gehänges
Bandseile aus Eisendraht											
0·12	192	8	24	8·55	0·85	100	2390	2·40	64·25	1·80	
0·13	192	8	24	9·20	0·95	112	2800	2·80	59·50	1·70	
0·15	192	8	24	9·85	1·00	130	3730	3·90	55·50	1·60	
0·17	192	8	24	10·50	1·30	147	3990	4·15	53·50	1·50	—
0·19	192	8	24	11·15	1·40	165	5050	4·40	49·50	1·40	
0·21	192	8	24	11·85	1·60	182	6190	5·80	46·—	1·30	
0·25	160	8	20	13·45	1·75	215	7300	6·40	42 50	1·30	
Bandseile aus Gussstahldraht											
0·17	192	8	24	10·50	1·3	195	8250	5·18	97·—	1·50	
0·19	192	8	24	11·15	1·4	220	10340	6·40	92·50	1·40	—
0·21	192	8	24	11·85	1·6	245	12400	7·80	89·—	4·0	

Anmerkung. Aus der vorliegenden Tabelle ergibt sich, dass der Durchmesser d des runden Eisen-Drahtseiles nahezu aus der Formel $d = 1·59\,\delta\sqrt{n}$ bestimmt werden kann, wenn δ die Drahtstärke und n die Drahtzahl bedeutet. Wird nun d statt δ in den auf pag. 38 verzeichneten Formeln des Tragvermögens P und des Eigengewichtes g (pro laufenden Meter) eingeführt, so ergibt sich:

$$P \doteq 315\ d^2$$

und

$$g \doteq 0·3\ d^2,$$

aus welchen Formeln die Näherungswerthe von P und g gewöhnlich bestimmt zu werden pflegen.

C. Ketten.

Von den verschiedenen Kettenarten wollen wir nur die am häufigsten zur Anwendung kommenden Gliederketten und zwar insbesondere die enge Ring- oder englische Kette und die Stegkette oder das Kettentau in Betracht ziehen.

Die Glieder der englischen Kette haben die durch Fig. 7 dargestellte elliptische Contur. Selbstverständlich werden die Kettenglieder bei dieser Form nicht nur auf Zug- sondern auch Biegungs-Festigkeit in Anspruch genommen. Wir wollen hier jedoch nicht auf die complicirte Festigkeitstheorie dieser Kettenglieder eingehen, sondern constatiren nur, dass sich — nach den grossartigen Versuchen der englischen Admiralität — die Festigkeit dieser Ketten zu jener des ausgestreckten Rundeisens, aus welchem die Glieder bestehen, wie 11 : 9 verhält. Die Festigkeit des Rundeisens ist aber circa 4000 Kg pro □cm. Nimmt man daher, wie es bei Ketten gebräuchlich ist, die 4fache Bruchsicherheit, setzt also $\beta = 1000$ Kg, so ist, wenn d den Durchmesser des Rundeisens bezeichnet, das Tragvermögen P der Kette in Kg bestimmt durch

Fig. 7.

$$\left.\begin{aligned} P &= 1000\,\frac{d^2\pi}{4}\,\frac{11}{9} \doteq 960\,d^2 \\ \text{und}\qquad d &= 0{\cdot}032\sqrt{P} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (52).$$

Das Gewicht g des laufenden Meters dieser Kette in Kg ist:

$$g \doteq 2{\cdot}33\,d^2,$$

wobei d in cm auszudrücken ist.

Als kleinster Aufwicklungsradius der Kettenrollen gilt $r = 12\,d$.

Um die Tragfähigkeit dieser Ketten zu erhöhen und das Ausrecken der Glieder bei starkem Zuge hintan zu halten, hat man nach Fig. 8 in Richtung der kleinen Axe in jedem Kettengliede einen Quersteg angebracht. Solche Ketten heissen dann S t e g k e t t e n oder Brunton'sche K e t t e n t a u e und werden aus Rundeisen von 1,3 bis 5,2 Centim. Stärke angefertigt.

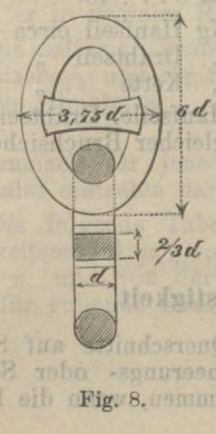


Fig. 8.

Nach den bereits angeführten Versuchen der englischen Admiralität verhält sich die Festigkeit der einfachen Ketten zu jener der Stegketten wie 7 : 9.

Es wird somit nach Gleichung (52) für Stegketten

$$\left.\begin{aligned} P &= 1234\,d^2 \\ \text{und}\quad d &= 0{,}028\sqrt{P} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (53).$$

Das Gewicht der einfachen Kette verhält sich zu jenem der Stegkette (bei gleicher Länge und gleicher Tragkraft) nahezu wie 4 zu 3, so dass also Stegketten den einfachen Ketten vorzuziehen sind.

Da die Ketten nach langem Gebrauche ihre Structur ändern und hierdurch an Zähigkeit verlieren, so pflegt man nach 3- bis 4jährigem Gebrauche die Ketten auszuglühen und sodann in Asche allmählich abzukühlen, wodurch sie wieder die erforderliche Zähigkeit erlangen.

Schliesslich wollen wir nur noch untersuchen, wie sich die Gewichte und Anschaffungskosten von ungetheerten Hanfseilen, gedrehten Drahtseilen und einfachen Ketten bei gleicher Tragfähigkeit verhalten.

Bezeichnet
d den Durchmesser des Hanfseiles,
d_1 „ „ „ Drahtseiles,
d_2 „ „ „ Rundeisens der Kette,
so ist bei gleicher Tragfähigkeit und 6facher Bruchsicherheit

$$P = 70\, d^2 = 315\, d^2_1 = 640\, d^2_2,$$

woraus $d^2_1 = \frac{70}{315} d^2 = \frac{d^2}{4\cdot5}$ und $d^2_2 = \frac{70}{640} d^2 \doteq \frac{d^2}{9}$.

Es verhalten sich aber auch nach dem Vorangehenden bei gleichem Tragvermögen und gleicher Bruchsicherheit (nämlich der 6fachen) die Gewichte g, g_1 und g_2 der Hanfseile, Drahtseile und Ketten zu einander wie

$$0\cdot078\, d^2 : 0\cdot3\, d^2_1 : 3\cdot5\, d^2_2,$$

oder wenn für d_1 und d_2 die obigen Werthe eingeführt werden, nach einfacher Reduction:

$$g : g_1 : g_2 \doteq 0\cdot078 : 0.0\dot{6} : 0\cdot4 = 8 : 7 : 40.$$

Berücksichtigt man endlich, dass 1 Kg Hanfseil circa 80 kr.
1 „ Drahtseil „ 45 „
1 „ Kette „ 40 „
kostet, so verhalten sich die Kosten der Hanfseile, Drahtseile und Ketten, bei gleichem Tragvermögen und gleicher Bruchsicherheit, nahezu wie 2 : 1 : 5.

II. Capitel.

Schub- oder Gleitungsfestigkeit.

§. 5. Ein Körper wird in einem Querschnitte auf Schub- oder Gleitungsfestigkeit, die auch Abscheerungs- oder Scheerfestigkeit genannt wird, in Anspruch genommen, wenn die Resultirende der angreifenden Kräfte in der Ebene des Querschnittes wirkt. In der Baupraxis kommt die Scheerfestigkeit, resp. Scheerelasticität, nur dann ganz allein zur Geltung, wenn auf einen Stab 2 Kräfte auf beiden Seiten einer Querschnittsebene, knapp neben dieser Ebene und parallel zu derselben nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Diese Kräfte suchen dann den Stab in dem bezeichneten Querschnitte zu trennen oder wie man sagt abzuscheeren.

Dies ist zum B. der Fall bei den Vernietungen, bei den Verbindungen der Kettenglieder mit Bolzen, bei den Blechscheeren u. s. w.

Der Widerstand gegen das Abscheeren ist wie jener gegen das Zerreissen der Grösse der Trennungsfläche direct proportional.

Bezeichnet daher P die Kraft, welche das Abscheeren bewirken soll, F die Grösse der Trennungsfläche und μ_1 den Modul der Scheerfestigkeit, so ist offenbar

$$P = F \cdot \mu_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54).$$

Diese Gleichung gilt also für jene Fälle, in welchen die Trennung der beanspruchten Fläche bezweckt wird, also für das Abschneiden, Abstossen und Durchlochen der Metalle, welche Arbeiten mit den sogenannten Durchbruchmaschinen bewerkstelligt werden.

Bei der Berechnung dieser Durchbruchmaschinen pflegt man aber gewöhnlich 1,1 μ_1 als Abscheerungswiderstand pro Flächeneinheit anzunehmen.

Bei Metallen beträgt der Festigkeitsmodul μ_1 gegen das Abscheeren etwa $\frac{3}{4}$ bis $\frac{4}{5}$ von jenem gegen das Zerreissen.

Beim Holz ist der Widerstand gegen das Abscheeren, wegen der Faserbildung, nach den verschiedenen Richtungen bedeutend verschieden; während er z. B. in Richtung der Fasern sehr gering ist, ist er in radialer Richtung verhältnissmässig sehr gross.

Die zulässige Beanspruchung β_1 ist im Mittel für Metalle $\frac{1}{5}$, für Hölzer $\frac{1}{10}$ und für Steine $\frac{1}{20}$ vom Festigkeitsmodul μ.

Die Gleichung

$$P = F\beta_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

gilt demnach für jene Fälle, in welchen kein Abscheeren des Materiales eintreten darf.

Die folgende Tabelle enthält die Mittelwerthe von dem Festigkeitsmodul μ_1, von dem Grenzmodul oder der Elasticitätsgrenze η_1 und von der zulässigen Beanspruchung β_1 in Kg pro □cm für ruhende Belastung.

Materiale	Festigkeits-modul μ_1	Elasticitäts-grenze η_1	Zulässige Beanspruchung β_1
	für Schub		
Holz (Faserrichtung) .	70	20	7
Gusseisen	1040	560	220
Schmiedeeisen . . .	2800	1400	600
Eisenblech	2400	1200	500
Nieteisen	3200	1600	640
Gewöhnl. Stahl . . .	4800	2400	960
Gussstahl	6400	3200	1300

Für veränderliche Belastungen wird man die zulässige Beanspruchung β_1 am rationellsten aus der Arbeitsfestigkeit α_1 rechnen. Für Belastungen in einerlei Richtung, d. i. nur für Zug oder nur für Druck, ist nach (7) pag. 16

$$\alpha_1 = \eta_1 \left(1 + \frac{\mu_1 - \eta_1}{\eta_1} \frac{\min B}{\max B}\right),$$

daher für $n$fache Sicherheit

$$\beta_1 = \frac{\eta_1}{n} \left(1 + \frac{\mu_1 - \eta_1}{\eta_1} \frac{\min B}{\max B}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (56).$$

Für wechselnde Beanspruchung auf Zug und Druck wird nach (11) pag. 19

$$\alpha_1 = \eta_1 \left(1 + \frac{\eta_1 - \eta_1'}{\eta_1} \frac{\max B'}{\max B}\right),$$

daher für $n$fache Sicherheit

$$\beta_1 = \frac{\eta_1}{n} \left(1 + \frac{\eta_1 - \eta_1'}{\eta_1} \frac{\max B'}{\max B}\right) \quad . \; . \; . \; . \; (57).$$

Für Holz ist $n = 6$, für Metalle $n = 3$.

III. Capitel.

Stärke der Verbindungsmittel.

Da bei den Verbindungsmitteln zunächst nur die Normal- und Schubelasticität zur Wirksamkeit kommt, so können wir bereits hier die Berechnung der wichtigsten Verbindungs- oder Befestigungsmittel einreihen.

§. 6. **Vernietungen.** Die Vernietungen sind unlösbare Verbindungen von Blechen oder Tafeln aus streckbaren Metallen und müssen, bei rationeller Construction, in allen ihren Theilen gleiche Bruchsicherheit besitzen.

Da das Blech an der Nietstelle durchlocht wird, so ist wohl einleuchtend, dass die Vernietung nicht dieselbe Festigkeit wie das volle Blech haben kann; man wird jedoch an eine rationelle Vernietung auch die Forderung stellen müssen, dass durch dieselbe das Blech so wenig geschwächt werde, als dies mit Rücksicht auf die jeweiligen Umstände, insbesondere mit Rücksicht auf die Dichte des Abschlusses in der Fuge möglich ist. Das Durchlochen des Blechs kann entweder mittelst der Stanzmaschine, also durch das sogenannte Stanzen, oder durch Bohrung geschehen. Da aber durch das Stanzen die Festigkeit des Blechs in der Nähe des Lochrandes bedeutend mehr geschwächt wird als durch das Bohren, so ist namentlich für stärkere Bleche, wie sie im Brückenbau zur Anwendung kommen, das Bohren der Löcher dem Stanzen stets vorzuziehen. Nach dem Lochen sind die Lochränder sorgfältig abzurunden, damit die Unebenheiten entfernt und die Blechtafeln in guten Contact kommen.

Der Widerstand der Vernietung setzt sich aus der Abscheerungsfestigkeit der Bolzen und der zwischen den verbundenen Blechen herrschenden Reibung zusammen, welche letztere bei warmer Nietung durch das bei der Erkaltung eintretende starke Zusammenziehen des Bolzens in hohem Grade erzeugt wird. Bei Versuchen, welche bei Gelegenheit des Baues der Britanniabrücke von W. Fairbairn und später von Lavalley, Clark, Harkort und Anderen angestellt worden sind, hat man gefunden, dass bei einer gewöhnlichen, warmen Nietung die Scheerfestigkeit des Bolzens, plus der Reibung zwischen den Blechtafeln, per Flächeneinheit des Bolzenquerschnittes der Trennung einen Widerstand entgegengesetzt, welcher zum mindesten der Zugfestigkeit des verwendeten Nieteisens gleich kommt.

Da sich jedoch bei warm eingezogenen Nieten der Durchmesser des Bolzens beim Erkalten um circa $\frac{1}{24}$ seiner Stärke verringert, somit das Nietloch nicht vollständig ausfüllt, so wird bei einer kleinen Verschiebung zuerst die Reibung überwunden und dann erst die Scheerfestigkeit des Bolzens in Anspruch genommen. Den obigen Versuchen zufolge ist diese Reibung höchstens halb so gross als die Scheerfestigkeit der Nietbolzen. Bei der Berechnung der genieteten Brückenträger sollte man aber auf diese Reibung um so weniger Rücksicht nehmen, als dieselbe durch Stösse und Vibrationen bedeutend vermindert werden kann. Vernachlässigt man also die Reibung gänzlich, so ist bloss die Scheerfestigkeit des Bolzens massgebend, welche mit 0,8 der Zugfestigkeit des Nieteisens bemessen wird. Da man aber zur Herstellung der Nieten das beste Eisen nimmt, dessen Festigkeit 1,2 bis 1,3mal grösser ist als die des Blecheisens, so kann man in Uebereinstimmung mit Morin, Redtenbacher, Grashof, Schwedler, Rebhann, Winkler und vielen anderen ohne weiters annehmen, dass die Scheerfestigkeit der Nietbolzen gleich sei der Zugfestigkeit des Eisenblechs.

Bevor wir zur Berechnung der Vernietungen übergehen, wollen wir noch in Kürze die Form der Nieten besprechen.

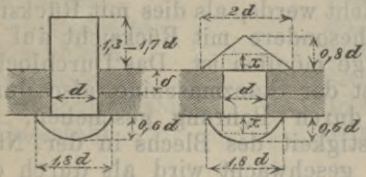


Fig. 9. Fig. 10.

Form der Nieten. Jeder Niet hat 2 Köpfe, von denen der eine, der Setzkopf, Fig. 9., vor der Verwendung angeschmiedet wird, während der zweite, der Schliesskopf Fig. 10., beim Schliessen der Nietung aus dem, beiläufig um 1,5 der Nietdicke d, über den Blechrand vorstehenden Bolzen gebildet wird.

Die Grösse der Köpfe ist an die Regel gebunden, dass der Widerstand gegen das Abscheeren eines Kopfes in Richtung der Längenaxe des Bolzens gleich sein soll der Zugfestigkeit des Bolzens, wobei vorausgesetzt werden soll, dass der Modul der Scheerfestigkeit $\frac{3}{4}$ von jenem der Zugfestigkeit betrage.

Der Widerstand des Bolzens gegen Zerreissen ist $\frac{d^2\pi}{4}\mu$, der Widerstand eines Nietkopfes gegen Abscheerung ist aber $d\pi x \frac{3}{4}\mu$, wenn x die Höhe der cylindrischen Trennungsfläche ist, die beim Abscheeren entstehen würde.

Aus der Gleichsetzung der beiden Widerstände ergibt sich

$$x = \frac{d}{3}.$$

In der Ausführung macht man aber $x = 0,4\ d$ bis $0,5\ d$.

Das Abscheeren der Nietköpfe bei geringer Höhe derselben könnte bei warmer Nietung durch die starke Zusammenziehung nach der Erkaltung langer Nietbolzen eintreten, weshalb man, wenn der Nietbolzen mehr als 10 cm zur Länge hat, nicht mehr die warme, sondern die kalte Nietung anwendet. Wird der Nietkopf mit Handhämmern ohne Anwendung von Gesenken geschmiedet, was gegenwärtig fast nur noch in England üblich ist, so erhält der Schliesskopf die in Fig. 10 dargestellte kegelförmige Form.

Macht man hierbei den Durchmesser des Kopfes $D = 2\ d$, und seine Höhe $H = 0,8\ d$, so wird, wie es sein soll, $x = 0,4\ d$, ferner das Gewicht des Kopfes $G = 0,00645\ d^3$ Kilogr. und sein Volumen $V = 0,838\ d^3$.

Wird ein Gesenk zum Formen des Kopfes benutzt, so kann man ihm jede beliebige Form geben, doch wird gewöhnlich der Abschnitt einer Kugel oder eines Elipsoides als Kopfform gewählt.

Für den Kugelabschnitt, Figur 11, wird meistens $D = 1\frac{2}{3}\,d$ und $H = \frac{2}{3}$ d.

Für diese Werthe wird $x = 0{,}5\,d$,

$$G = 0{,}0062\,d^3 \text{ Kilogr und } V = 0{,}805\,d^3.$$

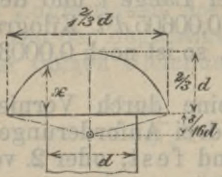


Fig. 11.

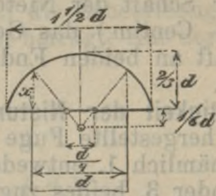


Fig. 12.

Für den ellipsoidischen Kopf, Fig. 12, wird gewöhnlich $D = \frac{3}{2}\,d$ und $H = \frac{2}{3}\,d$, wofür

$$x = 0{,}497\,d,\ G = 0{,}00605\,d^3 \text{ Kilogr. und } V = 0{,}785\,d^3.$$

Da sich bei der Bildung des Schliesskopfes die am Lochrande befindlichen Eisentheilchen um einen rechten Winkel verschieben müssen, so können dort leicht Risse entstehen, weshalb man bei grösseren Bolzendicken, die bei den sogenannten Festigkeitsnietungen vorkommen, sehr häufig eine konische Versenkung des Nietschaftes, nach Fig. 13, anwendet, durch welche die Festigkeit des Nagels bedeutend vermehrt wird.

Die Tiefe dieser Versenkung beträgt gewöhnlich $\frac{1}{8}\,d$.

Bei den Nietungen der Brückenträger sind jene Formverhältnisse zu wählen, die sich durch die sehr sorgfältigen Versuche beim Baue der Dirschauer Weichselbrücke als die zweckmässigsten ergeben haben.

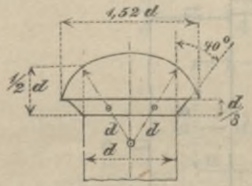


Fig. 13.

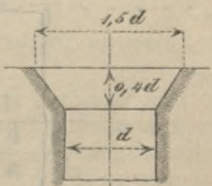


Fig. 14.

Die Fig. 13 zeigt den bezüglichen normalen Nietkopf (Setz- und Schliesskopf), und Fig. 14 den ganz versenkten Kopf, welcher auch sehr häufig bei Schiffswänden angewendet wird. In Fig. 13 ist der Krümmungsradius für den mittleren Theil der Kopfrundung gleich d und für die anschliessenden Theile gleich $\frac{d}{2}$.

Die bei der Nietung der Brückenträger angewendeten Bolzenstärken schwanken zwischen 1,8 und 3 Centim. und die Bolzenlängen sollen nicht die 4fache Nietstärke überschreiten. Für Bolzenlängen von mehr als der 4fachen Bolzendicke d soll die Verbindung nicht mehr durch Nieten, sondern durch Schrauben erfolgen.

Der Schaft der Niete hat bei der Länge l und der Dicke d (beide in Centim.) das Gewicht von $0{,}00605\,d^2l$ Kilogramm. Ist der Schaft an beiden Enden versenkt, so ist noch $0{,}00033\,d^3$ hinzu zu fügen.

Festigkeit der Nietungen. An eine durch Vernietung von Blechen hergestellte Fuge kann man drei Anforderungen stellen: sie soll nämlich 1. entweder vorwiegend fest, oder 2. vorwiegend dicht, oder 3. beides zugleich sein.

Man unterscheidet demnach 1. Kraftnietungen (Brückenträger, Blechbalken u. s. w.), 2. Verschliessnietungen (Gefässe mit geringem inneren Druck, wie Gasbehälter, Wasserreservoirs, Schiffe) und 3. Kraft- und Verschlussnietungen (Dampfkessel, frei tragende Gefässe).

Berechnung der Vernietungen.

1. Die einfache Vernietung, Figur 15. Bezeichnet δ die Blechdicke, d die Bolzendicke, a den Abstand der Nietmitten und b den Abstand der Nietmitten vom Blechrande, so sind,

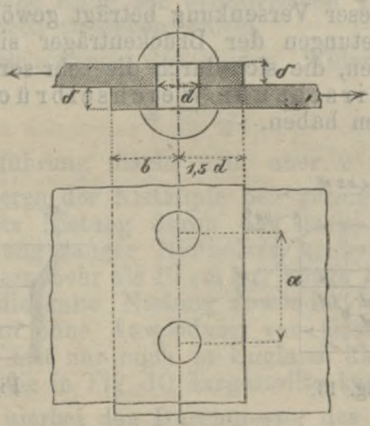


Fig. 15.

wenn P die auf die Fugenlänge a wirkende Zugkraft bedeutet, die Festigkeitsbedingungen gegen Zerreissen des Bleches, gegen Abscheeren der Nieten und gegen Ausreissen des Blechrandes folgende:

$$\text{I.} \quad P = (a - d)\,\delta\,\mu,$$

$$\text{II.} \quad P = \frac{\pi d^2}{4}\,\mu,$$

$$\text{III.} \quad P = 2\,b\,\delta\,\tfrac{3}{4}\,\mu,$$

wenn, wie bereits erwähnt wurde, die Scheerfestigkeit der Nieten gleich der Zugfestigkeit des Bleches und die Scheerfestigkeit des Bleches $\frac{3}{4}$ von der Zugfestigkeit desselben beträgt. Aus der Gleichsetzung der obigen Gleichungen folgt:

$$\frac{a}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta},$$

$$\frac{b}{\delta} = \frac{2}{3}\,\frac{(a-d)}{\delta} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2.$$

Da jedoch die nach der letzteren Formel berechneten Werthe von b für das Lochen des Bleches auf dem Durchstosse für Werthe von $\frac{d}{\delta} < 2{,}5$, zu klein ausfallen, so macht man in der Praxis durchgehends

$$\boldsymbol{b = 1{,}5\,d}.$$

Bezeichnet man endlich mit v das Verhältniss zwischen der Festigkeit der Nietnaht und derjenigen des vollen Bleches, so wird, weil auf die Entfernung a das Blech von einem Bolzen durchlocht, also um $d\,.\,\delta$ im Querschnitte verschwächt wird,

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\,\frac{\delta}{d}}.$$

Massgebend für die einfache Nietung sind also die Formeln:

$$\frac{a}{\delta} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad \ldots\ldots \quad (58),$$

$$b = 1{,}5\,d \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59),$$

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{4}{\pi}\,\frac{\delta}{d}} \quad \ldots\ldots \quad (60).$$

In der folgenden Tabelle sind die Resultate der Formeln (58) und (60) für die in der Praxis üblichen Werthe von $\frac{d}{\delta}$ zusammengestellt.

Tabelle der einfachen Nietung.

$\frac{d}{\delta} =$	1	1,5	2	2,5	3
$\frac{a}{\delta} =$	1,78	3,27	5,14	7,41	10,07
$v =$	0,44	0,54	0,61	0,66	0,70

Aus dieser Tabelle ersieht man, dass bei der Zunahme von $\frac{d}{\delta}$ die Festigkeit der Vernietung sich jener des Bleches nähert. Gleichzeitig mit $\frac{d}{\delta}$ wächst aber auch das Verhältniss $\frac{a}{\delta}$, was zur Folge hat, dass die Nieten auseinander rücken und daher die Nietnaht weniger dicht wird.

Wird dagegen $\frac{d}{\delta}$ kleiner, so wird auch $\frac{a}{\delta}$ und v kleiner; d. h. die Naht wird wegen der engeren Stellung der Nieten dichter, aber auch wegen der Abnahme von v schwächer.

Bei Kraftnietungen wählt man daher $\frac{d}{\delta}$ möglichst gross und zwar gewöhnlich gleich 3. Die Festigkeit der Nietnaht beträgt alsdann nur 70 Procent von jener des vollen, ungeschwächten Bleches. Ist also l die Länge der ganzen Nietnaht, so ist die Zugsfestigkeit in derselben

$$P = 0{\cdot}7\, l \delta \mu,$$

oder die zulässige Zugkraft

$$P = 0{\cdot}7\, l \delta \beta.$$

Die Blechdicke δ beträgt bei Trägern, die im Hochbau zur Anwendung kommen, gewöhnlich nur 0,5 bis 1 Centim.; dagegen bei Brückenträgern bis 2 Centim. Verlangt man wie bei Dampfkesseln eine möglichst feste und dichte Verbindung der Bleche, so wählt man im Mittel $\frac{d}{\delta} = 2$ und setzt $\frac{a}{\delta} = 5$, wofür nach (60) $v = 0{,}60$ wird, d. h. bei dieser Vernietung beträgt die Zugfestigkeit nur 60 Procent von jener des vollen Bleches. Wird endlich, wie bei Schiffswänden, Gas- und Wasserbehältern, vorherrschend ein dichter Verschluss gefordert, so wählt man am häufigsten $\frac{d}{\delta} = 1{,}5$.

Ganz dieselben Formeln oder Dimensionen gelten auch für die durch Fig. 16. dargestellte einfache Blechband- oder einfache Laschennietung, wenn dieselbe auf Zug in Anspruch genommen ist; doch braucht man bei derselben doppelt so viel Nieten als bei der ersteren und um die halbe Lasche mehr Blech.

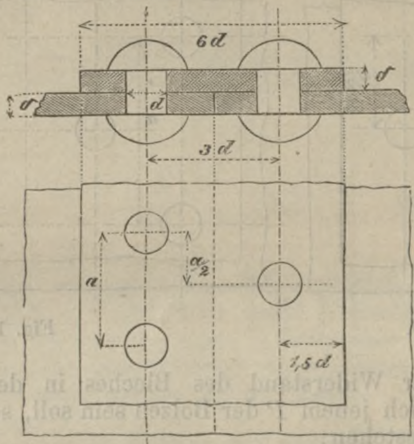


Fig. 16.

Anmerkung. Die Verbindung der Bleche durch die einfache Nietung hat den Nachtheil, dass die Richtung der angreifenden Kräfte nicht in eine Ebene fällt. Es entsteht in Folge dessen ein Kräftepaar mit dem Drehungsmomente $P \cdot \delta$, welches die Blechränder zu verbiegen sucht und dadurch die Beanspruchung der Bleche und der Nieten erhöht.

Da die Grösse des Drehungsmomentes mit δ wächst, so pflegt man die einfache Nietung nur für geringe Blechstärken (unter einem Centimeter) anzuwenden.

Bei Dampfkesseln bildet man die Längsnähte am zweckmässigsten mittelst der Kettennietung und bei Brückenträgern sind nur Vernietungen mit Doppellaschen zu empfehlen.

2. Die doppelte oder Kettennietung.

Bei dieser durch Fig. 17. versinnlichten Vernietung wendet man zwei Nietreihen an, und zwar so, dass je eine Niete der einen Reihe zwischen zwei Nieten der anderen Reihe liegt. Hierbei kommen auf die Länge a der Nietnaht 2 Bolzen zu rechnen und es ist daher der Widerstand derselben

$$P = 2 \frac{\pi}{4} d^2 \mu.$$

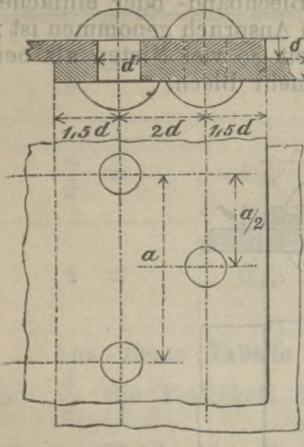


Fig. 17.

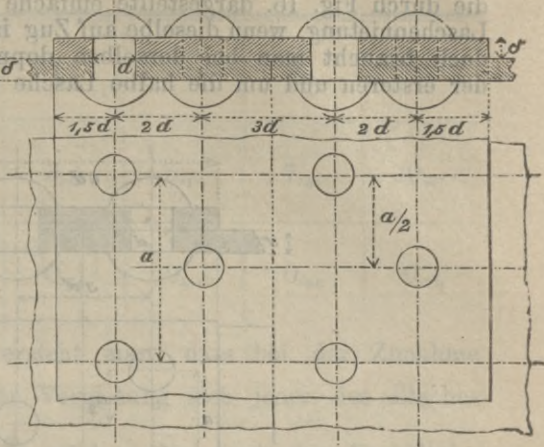


Fig. 18.

Da nun der Widerstand des Bleches in der Nietnaht bei der Länge a gleich jenem P der Bolzen sein soll, so muss offenbar die Gleichung bestehen:

$$2 \frac{\pi}{4} d^2 \mu = (a - d) \delta \mu,$$

woraus

$$\frac{a}{\delta} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots (61).$$

Das Verhältniss der Festigkeit der Nietnaht zu jener des vollen Bleches ist hiebei

$$v = \frac{a - d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\pi} \frac{d}{\delta}} \quad \ldots \ldots (62).$$

Vergleicht man diesen Werth von v mit jenem der einfachen Nietung, so findet man, dass die doppelte Vernietung im Verhältniss von $1 + \frac{4\delta}{\pi d} : 1 + \frac{2\delta}{\pi d}$ stärker ist als die einfache.

Die Entfernung b der Nietmitte vom Blechrande ist auch hier gleich $1{,}_5\,d$ und die Entfernung der beiden Nietreihen macht man gleich $2\,d$.

Die Formeln (61) und (62) gelten offenbar auch für die in Fig. 18. dargestellte Laschennietung, wenn dieselbe auf Zug beansprucht wird; doch braucht man bei derselben wieder doppelt so viel Nieten und um die Hälfte einer Lasche mehr Blech als bei jener durch Ueberplattung.

Tabelle der doppelten Nietung.

$\frac{d}{\delta} =$	1	$1{,}_5$	2	$2{,}_5$	3
$\frac{a}{\delta} =$	$2{,}_{57}$	$5{,}_{03}$	$8{,}_{28}$	$12{,}_{32}$	$17{,}_{30}$
v	$0{,}_{61}$	$0{,}_{70}$	$0{,}_{76}$	$0{,}_{80}$	$0{,}_{83}$

Es unterliegt nun gar keiner Schwierigkeit, die Berechnung von Nietungen mit 3, 4 und noch mehr Nietreihen vorzunehmen. Man geht jedoch nicht gerne über 2 Nietreihen hinaus, weil bei mehr Nietreihen eine gleichmässige Vertheilung der Kraft über alle Bolzen nicht angenommen werden kann.

3. Einfache Nietung mit Doppellaschen.

Bei dieser durch Fig. 19. veranschaulichten Vernietung müssten sich beim Abscheeren eines Bolzens zwei Schnittflächen ergeben, die Nieten sind hier also doppelschnittig, folglich ist der Widerstand der Bolzen für die Fugenlänge a

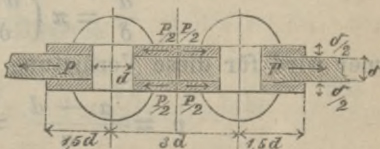


Fig. 19.

$$P = 2\,\frac{\pi}{4}\,d^2\mu,$$

und jener des Bleches für dieselbe Fugenlänge

$$P = (a - d)\,\delta\mu.$$

Aus der Gleichsetzung dieser Widerstände ergibt sich eben so wie bei der doppelten Nietung

$$\frac{a}{\delta} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad \ldots\ldots (63);$$

ferner

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\pi d}} \quad \ldots\ldots (64).$$

Die Tabelle der doppelten Nietung gilt also auch für die vorliegende Nietung mit Doppellaschen, welche aber gegenüber der doppelten Nietung nicht nur den Vortheil der Material-Ersparniss, sondern auch den einer solideren Verbindung für sich hat.

Gibt man jeder der beiden Laschen die halbe Blechstärke δ, so ist offenbar der Zugwiderstand der Laschen ebenso gross, als jener des Bleches.

4. **Doppelte oder Kettenvernietung mit Doppellaschen.** Fig. 20.

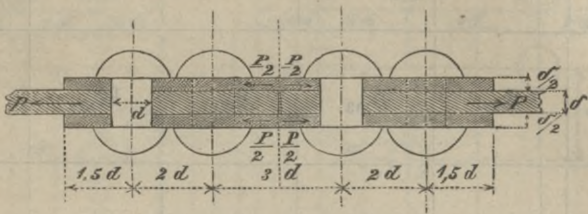


Fig. 20.

Auch hier sind die Nieten doppelschnittig und daher für die Fugenlänge a der Widerstand der Bolzen

$$P = 4\,\frac{\pi d^2}{4}\,\mu,$$

und jener des Bleches

$$P = (a - d)\,\delta\,\mu.$$

Aus der Gleichsetzung dieser Widerstände folgt

$$\frac{a}{\delta} = \pi\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots (65),$$

ferner wird für diese Vernietung

$$v = \frac{a - d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\pi d}} \quad \ldots \ldots (66).$$

Die Laschen erhalten auch hier die halbe Blechstärke δ.

Tabelle der Doppelnietung mit Doppellaschen.

$\frac{d}{\delta} =$	1	$1,_{5}$	2	$2,_{5}$	3
$\frac{a}{\delta} =$	$4,_{14}$	$8,_{56}$	$14,_{56}$	$22,_{12}$	$31,_{26}$
$v =$	$0,_{75}$	$0,_{82}$	$0,_{86}$	$0,_{88}$	$0,_{90}$

Schliesslich mögen hier noch einige Nietverbindungen vorgeführt werden, welche im Brückenbaue bei der Verbindung von zwei übereinander liegenden Blechplatten an den Stossfugen zur Anwendung kommen.

1. Fall. Die beiden Blechplatten sind, wie in Fig. 21, an demselben Punkte gestossen und mit Doppellaschen versehen.

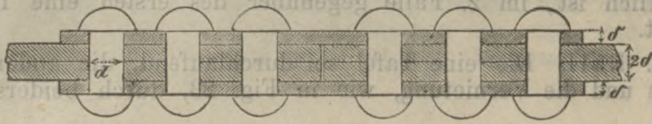


Fig. 21.

Da hier die Nieten doppelschnittig sind und zu beiden Seiten der Stossfuge je 3 Nieten vorkommen, so ist für die Fugenlänge a die Scheerfestigkeit der Bolzen (unter Voraussetzung einer gleichmässigen Anspruchnahme derselben)

$$P = 6\,\frac{\pi}{4}\,d^2\,\mu,$$

und die Zugfestigkeit des geschwächten Bleches

$$P = (a - d)\,2\delta\,\mu,$$

daher

$$\frac{a}{\delta} = \frac{3}{4}\,\pi\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad \ldots\ldots\ (67);$$

ferner ist die Verschwächung des Bleches

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{4\delta}{3\pi d}} \quad \ldots\ldots\ (68).$$

Setzt man $\frac{d}{\delta} = 3$, so wird

$$\frac{a}{\delta} = 24{\cdot}2 \text{ und } v = 0{\cdot}87.$$

2. Fall. Von den beiden Blechplatten sei, wie in Fig. 22, die eine durchlaufend, die andere gestossen und die Vernietung

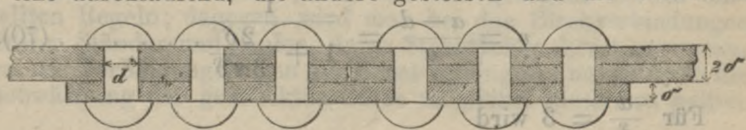


Fig. 22.

durch eine einseitige Lasche bewerkstelligt. Die Nieten sind hier ebenfalls zweischnittig, daher für die Fugenlänge a die Scheerfestigkeit der Bolzen

$$P = 6\,\frac{\pi}{4}\,d^2\,\mu,$$

und die Zugfestigkeit des durchlochten Bleches

$$P = (a - d)\, 2\delta\mu;$$

hieraus folgt, dass sich für diesen Fall dieselben Werthe von $\frac{a}{\delta}$ und v ergeben wie im vorigen Falle; doch wird, wie aus Fig. 22 ersichtlich ist, im 2. Falle gegenüber des ersten eine Lasche erspart.

3. Fall. Die eine Tafel sei durchlaufend, die andere gestossen und die Vernietung, wie in Fig. 23, durch beiderseitige

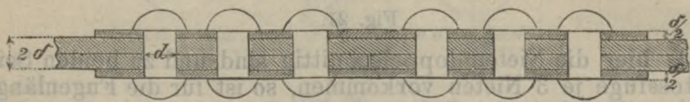


Fig. 23.

Laschen hergestellt. Es sind hier zu beiden Seiten der Stossfuge drei doppelschnittige Niete, auf welche, wenn wieder P die auf die Fugenlänge a wirksame Zugkraft ist, die Scheerkraft $\frac{P}{4}$ einwirkt, indem $\frac{P}{2}$ von der durchlaufenden Platte aufgenommen wird. Es ist daher $\frac{P}{4} = 3\frac{\pi d^2}{4}\mu$ oder

$$P = 3\pi d^2 \mu,$$

ferner der Widerstand des durchlochten Bleches

$$P = (a - d)\, 2\delta\mu.$$

Aus den beiden Werthen von P ergibt sich

$$\frac{a}{\delta} = \frac{3}{2}\pi\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \left(\frac{d}{\delta}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (69)$$

und hiefür wird

$$v = \frac{a-d}{a} = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{3\pi\delta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (70).$$

Für $\frac{d}{\delta} = 3$ wird

$$\frac{a}{\delta} = 45{,}4 \text{ und } v = 0{,}93.$$

Von den betrachteten 3 Fällen gibt somit der 3. die festeste Verbindung.

Zu bemerken ist nur noch, dass Stephenson beim Baue der Britanniabrücke, um an Stossplatten und Nieten zu sparen, den

3. Fall dahin modificirte, dass er, nach Fig. 24, die abwechselnden Stösse einander so nahe rückte, dass eine etwas längere Stossplatte je 2 Stösse deckte. Die Verschwächung v des Stosses ist hier offenbar dieselbe wie im 3. Falle; der Gewinn an Nieten und Laschenmaterial beträgt aber 25 Procent und es gewährt die Stephenson'sche Anordnung überdies den Vortheil, dass die Blechtafeln auf eine grössere Länge von Laschen frei sind, und somit eine bequemere Verbindung mit anderen Constructionsgliedern zulassen.

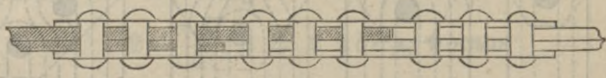


Fig. 24.

Die übliche Blechstärke δ liegt zwischen den Grenzen 0,7 und 2,5 Centim.; man geht jedoch nicht gerne über 2 cm. Die Breite der Blechtafeln beträgt gewöhnlich 1 bis 1,5, höchstens 2,2 Meter. Das Gewicht des Eisenblechs beträgt per □Meter 77 δ Kilogr., wenn δ in Centim. ausgedrückt wird. Ist also b die Breite und l die Länge einer Blechtafel in Metern und δ in cm ausgedrückt, so ist ihr Gewicht $G = 77\, b\, l\, \delta$, und es soll dieses Gewicht — aus Fabrikationsrücksichten — nicht 500 Kg überschreiten.

Zusatz. Wenn die vernieteten Bleche nicht auf Zug-, sondern auf Druckfestigkeit in Anspruch genommen werden, so kann man bei der Vernietung durch Ueberplattung, d. h. ohne Laschen, die Anordnung ebenso treffen wie bei den gezogenen Stäben. Stossen jedoch die Bleche direct zusammen, so sind bei genauer Berührung der Stossflächen die Laschen zur Uebertragung des Druckes gar nicht nothwendig; man wendet sie aber dennoch an, um zufällige Verschiebungen zu verhindern.

Für jene Blechverbindungen, die — wie dies bei Brückenträgern der Fall ist — abwechselnd auf Zug und Druck in Anspruch genommen werden, gelten die für gezogene Bleche aufgestellten Regeln; dagegen wird man bei den Blechverbindungen verticaler Ständer und Säulen, deren Stossflächen direct zusammen fallen, die Verbindungsbolzen möglichst verringern, um dadurch die Verschwächung der gedrückten Stäbe möglichst hintan zu halten.

Nietverbindungen für Stäbe.

1. Ohne Laschen. Denkt man sich nach Baurath Schwedler*) jeden Stab in einzelne Stränge zerlegt, welche sich auf die aus den Figuren 25 bis 29 ersichtliche Weise um die einzelnen Nieten schlingen, so muss man, damit diese Strang-

*) Deutsche Bauzeitung Jahrg. 1867.

bildung und mit ihr die gleichmässige Vertheilung der Zugkraft über die Nieten möglichst gefördert werde, das überflüssige Ma-



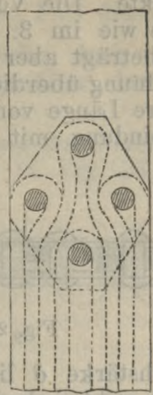
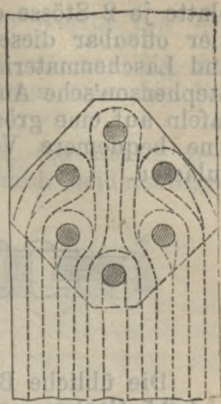




Fig. 25. Fig. 26. Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

teriale weglassen, also die Ecken, wie die Figuren 25 bis 29 zeigen, schräge abschneiden. Ist b die Breite eines solchen Stranges, δ die Blechstärke und d der Durchmesser eines Nietbolzens, so muss offenbar bei gleichmässiger Anspruchnahme der Stäbe und Bolzen die Gleichung bestehen:

$$\frac{\pi d^2}{4} \mu = 2 \delta b \mu, \text{ woraus}$$

$$\frac{b}{\delta} = 0{,}3927 \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (71).$$

Bezeichnet man die Anzahl der Niete mit n und die ganze Breite des Stabes mit B, so wird

$$B = 2nb + d = 0{,}7854 \frac{n d^2}{\delta} + d \quad \ldots\ldots (72);$$

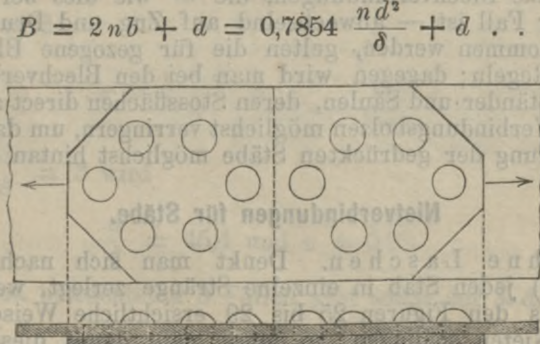


Fig. 30.

der nutzbare Querschnitt des Stabes ist aber nur $B-d$, daher ist die Tragfähigkeit eines Stabes bestimmt durch

$$P = (B - d)\,\delta\beta = 0{,}7854\, n d^2\beta \quad \ldots \ldots (73).$$

2. Mit einseitiger Lasche. Hier müssen selbstverständlich die Nieten zu beiden Seiten der Stossfuge ebenso gestellt werden wie im vorigen Falle; demnach gibt z. B. Fig. 30 die der Fig. 29 entsprechende, gleichstarke Vernietung.

3. Mit beiderseitigen Laschen. Hierbei sind die Nieten doppelschnittig und es gilt daher für n Bolzen auf je einer Seite der Stossfuge die Gleichung

$$2n\,\frac{\pi d^2}{4}\,\mu = 2\, n b \delta \mu, \text{ woraus}$$

$$\frac{b}{\delta} = 0{,}7854 \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots (74).$$

Die Breite des Stabes und somit auch der Laschen ist hier

$$B = 2\, nb + d = 1{,}5708\, \frac{n d^2}{\delta} + d \quad \ldots (75),$$

und die Tragfähigkeit des vernieteten Stabes

$$P = (B - d)\,\delta\beta = 1{,}5708\, n d^2\beta \quad \ldots \ldots (76),$$

also doppelt so gross wie in den beiden früheren Fällen; woraus folgt, dass bei Anwendung von Doppellaschen die Anzahl der Bolzen nur halb so gross zu sein braucht als bei überplatteter oder einseitiger Laschen-Nietung.

Die Fig. 31 stellt also die den Fig. 29 und 30 äquivalente Stabverbindung vor.

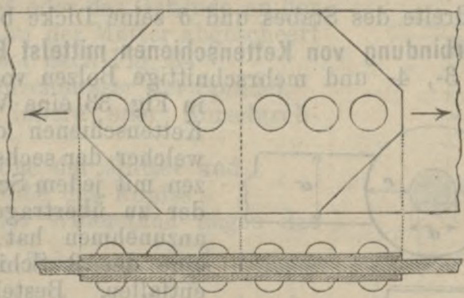


Fig. 31.

Zusatz. Wird der Stab nur auf **Druck** in Anspruch genommen und die Vernietung, wie in Fig. 32 durch Ueberplattung hergestellt, so wird man, unter der Annahme, dass die Bolzen dem Drucke eben so gut widerstehen als das Eisenblech, bei der Bestimmung des nutzbaren Stab-Querschnittes die Nietlöcher nicht abzuziehen haben.

Um hier eine möglichst gleichmässige Vertheilung des Druckes über alle Bolzen zu erzielen, setzt man in die erste Nietreihe die meisten, in die letzte Reihe die wenigsten Bolzen, weil man annehmen kann, dass die erste Nietreihe, auf die die Kraft unmittelbar einwirkt, am meisten, dagegen die letzte Nietreihe verhältnissmässig am wenigsten in Anspruch genommen werde.

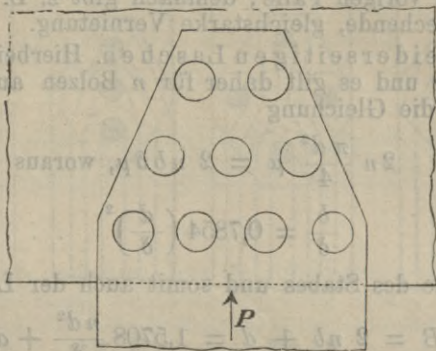


Fig. 32.

Ist hierbei n die Anzahl der Niete und d der Bolzendurchmesser, so bestimmt sich die Tragfähigkeit derselben offenbar durch

$$P = n \frac{\pi d^2}{4} \beta;$$

anderseits muss auch die Gleichung bestehen

$$P = B \delta \beta,$$

wenn B die Breite des Stabes und δ seine Dicke bezeichnet.

§. 7. **Verbindung von Kettenschienen mittelst Bolzen.** Hierbei kommen 2-, 3-, 4- und mehrschnittige Bolzen vor; so ist z. B. in Fig. 33 eine Verbindung von Kettenschienen dargestellt, bei welcher der sechsschnittige Bolzen mit jedem Schnitte je nur $\frac{1}{6}$ der zu übertragenden Kraft P anzunehmen hat, während auf eine der 3 Schienen $\frac{1}{3}$ von P entfallen. Besteht daher der Bolzen aus demselben Materiale wie die Schienen (Schmiedeisen) und nimmt man die Scheerfestigkeit des Materiales mit $\frac{3}{4}$ der Zugfestigkeit desselben an, so wird, wenn ab den Querschnitt einer Schiene und d den Bolzendurchmesser bedeutet, die

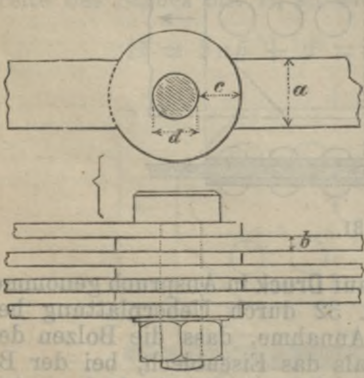


Fig. 33.

Tragfähigkeit und Construction der Kette im vorliegenden Fall bestimmt sein durch

$$P = 3\, ab\beta = 6 \frac{d^2\pi}{4} \frac{3}{4} \beta,$$

$$\text{woraus } d = 0{,}92 \sqrt{ab}.$$

Sind allgemein auf der einen Seite n Kettenschienen und auf der andern $(n + 1)$, so ist der Bolzen $2\,n$schnittig, daher die zulässige Ansprucnahme

$$P = 2n \frac{d^2\pi}{4} \cdot \frac{3}{4} \beta = n \cdot a \cdot b \cdot \beta,$$

woraus, wie oben,

$$d = \sqrt{\frac{8\,a\,b}{3\,\pi}} = 0{\cdot}92 \sqrt{ab}.$$

Damit der Schienenring um den Bolzen nicht durchgeschoben werde, muss die Gleichung bestehen:

$$ab\beta = 2bc\,\tfrac{3}{4}\,\beta,$$

woraus die Ringdicke

$$c = \frac{2}{3}\,a.$$

§. 8. **Berechnung der Schrauben.** Wird eine Schraube, wie dies zunächst bei den Befestigungsschrauben der Fall ist, nur auf Zug in Richtung ihrer Axe in Anspruch genommen, so kann bei hinreichender Grösse dieser Zugkraft entweder die Spindel zerreissen oder es kann der Schraubenkopf oder das Gewinde an der Spindel oder an der Mutter abgescheert werden. Es sei nach Fig. 34

d der Durchmesser der Spindel,

d_1 der innere oder Kerndurchmesser,

h die Höhe der Mutter und

h_1 die Höhe des Kopfes;

alsdann ist der Widerstand gegen das Zerreissen des Bolzens $\mu \frac{d^2\pi}{4}$, jener gegen Abscheeren des Kopfes $d\pi\, h_1 \cdot \frac{3}{4}\mu$ und der Widerstand gegen Abscheeren des von der Mutter umfassten scharfen Gewindes $d_1\pi\, h\, \frac{3}{4}\, \mu$.

Durch Gleichsetzung dieser Widerstände ergibt sich

$$h_1 = \frac{d}{3} \text{ und } h = \frac{d^2}{3\,d_1}.$$

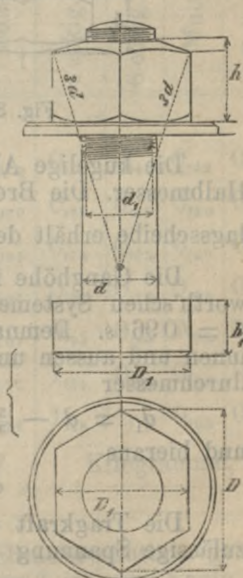


Fig. 34.

Die letztere Höhe würde aber nur für den Fall hinreichen, dass die Gewinde überall gleich gut in der Mutter aufliegen und die ganze Höhe derselben vollständig ausfüllen; da dies jedoch in der Praxis nicht immer der Fall ist, so setzt man bei scharfgängigen Schrauben die Mutterhöhe $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{d}$, und macht durchgehends die Höhe des Schraubenkopfes $\boldsymbol{h}_1 = 0{,}7\boldsymbol{d}$. Die letztere Dimension ist aber für alle Fälle zu gross.

Der Kopf wird gewöhnlich viereckig, Fig. 34, mitunter auch sechseckig, Fig. 35, die Mutter fast immer sechseckig gestaltet. Die Durchmesser der diesem regulären Sechsecke eingeschriebenen und umschriebenen Kreise berechnet man aus

$$D_1 = 1{,}4\ d + 0{,}5 \text{ cm. und } D = 1{\cdot}1547\ D_1 .$$

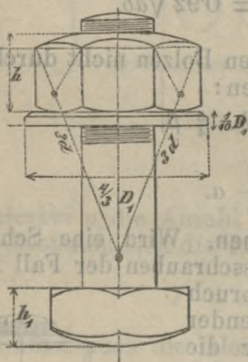


Fig. 35.

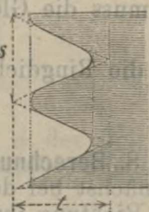


Fig. 36.

Die kugelige Abrundung der Muttern hat $\frac{5}{3}\ D_1 \doteq 3$ d zum Halbmesser. Die Breite des viereckigen Kopfes ist D_1. Die Unterlagsscheibe erhält den Durchmesser $\frac{4}{3}\ D_1$ und die Dicke $\frac{d}{5}$.

Die Ganghöhe ist nach dem fast allgemein üblichen Whitworth'schen Systeme $s = 0{,}08\ d + 0{,}1$ cm. und die Gangtiefe $t = 0{\cdot}96\ s$. Demnach wird, weil nach Fig. 36 das Gewinde innen und aussen um $\frac{1}{6}\ t$ abgerundet wird, der wirkliche Kerndurchmesser

$$d_1 = d - \tfrac{5}{3} t = d - 1{\cdot}6\ s = 0{\cdot}872 - 0{\cdot}16 \text{ cm}$$

und hieraus

$$d \doteq 1{\cdot}147\ d_1 + 0{\cdot}18 \text{ cm} \quad \ldots\ldots (77).$$

Die Tragkraft einer Schraube berechnet sich, wenn β die zulässige Spannung pro Quadrateinheit bezeichnet, offenbar aus

$$P = \frac{\pi d_1^2}{4}\ \beta \text{ und hieraus } d_1 = 1{\cdot}128 \sqrt{\frac{P}{\beta}} \quad . (78).$$

Hat man d_1, so ergibt sich dann der Bolzendurchmesser d aus (77), nämlich

$$d \doteq 1{\cdot}3 \sqrt{\frac{P}{\beta}} + 0{\cdot}18 \text{ cm} \quad \ldots\ldots (79).$$

Da nun der Bolzen nicht nur mit der Kraft P gespannt, sondern auch beim Anziehen der Mutter mittelst des Schraubenschlüssels auf Torsion in Anspruch genommen wird, so wird erfahrungsgemäss die zulässige Beanspruchung β des Bolzens pro □cm nur mit 280 Kg pro □cm angenommen, wofür nach (79)

$$d \doteq 0{\cdot}08 \sqrt{P} + 0{\cdot}18 \text{ cm} \quad \ldots\ldots (79a).$$

Das Gewicht der Befestigungsschrauben ist, wenn die Dimensionen in Centim. ausgedrückt werden:

Bolzen	0,00605 $d^2 l$	Kilogramme.
4-eckiger Kopf	0,00539 $D_1{}^2 d$	„
6-eckiger Kopf	0,00350 $D^2 d$	„
Mutter	(0,0050 D^2 — 0,00605 d^2) d	„
Unterlagsscheibe . . .	0,00121 (1,44 D^2 — d^2) d	„

Hiernach ist die folgende Tabelle berechnet:

d	Bolzen	4 eckig. Kopf	6 eckig. Kopf	Mutter	Scheibe	d	Bolzen	4 eckig. Kopf	6 eckig. Kopf	Mutter	Scheibe
2,0	0,024	0,13	0,11	0,10	0,04	3,4	0,070	0,54	0,47	0,43	0,19
2,2	0,029	0,15	0,14	0,13	0,06	3,6	0,079	0,63	0,55	0,50	0,22
2,4	0,035	0,21	0,18	0,17	0,07	3,8	0,088	0,74	0,65	0,59	0,26
2,6	0,041	0,26	0,23	0,22	0,09	4,0	0,097	0,86	0,75	0,68	0,29
2,8	0,047	0,32	0,28	0,26	0,11	4,2	0,107	0,93	0,86	0,78	0,34
3,0	0,054	0,38	0,32	0,31	0,13	4,4	0,117	1,21	0,98	0,88	0,38
3,2	0,062	0,45	0,39	0,36	0,16	4,6	0,128	1,28	1,11	0,00	0,43
Centm.	l	Kilogramme.				Centm.	l	Kilogramme.			

Die hier angegebenen Gewichte der Schraubenmuttern gelten für die leeren Muttern, und die Bolzenlänge l ist vom Kopfe bis zum Ende des Bolzens zu nehmen.

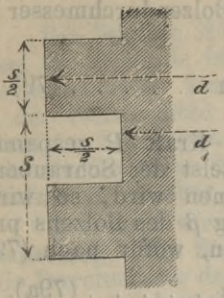


Fig. 37.

Zusatz. Wird bei Befestigungsschrauben der Zug so gross, dass der Bolzendurchmesser, bei der verlangten Sicherheit, über 5 Centim. dick werden müsste, so bedient man sich gewöhnlich der Schrauben mit flachem Gewinde, Fig. 37.

Hierbei richten sich P, d_1 und d wieder nach den Formeln (78) und (79); dagegen beträgt die Mutterhöhe $h = 1{,}5\ d$.

Die Gangtiefe t ist gleich der halben Gewindshöhe s, und zwar:

$$t = \frac{s}{2} = 0{,}045\ d + 0{,}1\text{cm},$$

daher $$d_1 = d - 2\ t = 0{,}91\ d - 0{,}2\text{cm},$$
oder $$d = 1{,}1 d_1 + 0{,}2\text{cm}.$$

§. 9. **Schraubenverbindungen.** Bei den Verbindungen der Metallplatten mittelst Schrauben gelten bezüglich des Verhältnisses der Bolzendicke d zur Stärke δ der Metallplatten oder Flacheisen, so wie bezüglich der Anzahl der Schrauben, dieselben Regeln wie bei den Nieten; denn die Vernietungen unterscheiden sich von den Verschraubungen nur dadurch, dass erstere unlösbare, dagegen letztere lösbare Verbindungen vorstellen. In Fig. 38 ist eine einfache Verschraubung im Durchschnitte dargestellt. Damit sich beim Anziehen der Mutter der Schraubenbolzen nicht mitdrehe, bekommt er oberhalb des Kopfes gewöhnlich einen quadratischen Querschnitt.

Die Fig. 39 stellt eine Schraubenverbindung mit versenktem Schraubenkopf vor, bei welcher der Kopf die Form eines vierseitigen Pyramidalstutzes erhält. Diese Verbindung kommt häufig zur Anwendung, wenn das Vorstehen des Kopfes vermieden werden muss.

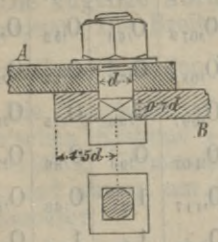


Fig. 38.

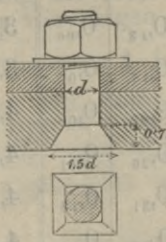


Fig. 39.

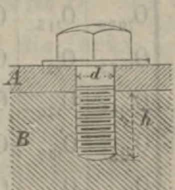


Fig. 40.

In Fig. 40 ist ein sogenannter Schraubenstift dargestellt, der zur Verbindung von Platten mit massiven Körpern dient. Hierbei bekommt der Schraubenkopf gewöhnlich die Form der Mutter und die eigentliche Mutter ist in den massiven Körper B eingeschnitten.

Bezeichnet β' die zulässige Schubspannung des Materiales, aus welchem B besteht, und β die zulässige Zugspannung des Bolzens pro Flächeneinheit, so muss — damit gleiche Sicherheit gegen das Zerreissen des Bolzens und gegen das Abscheeren des Gewindes bestehe — die Gleichung realisirt werden:

$$\frac{d^2 . \pi}{4} \beta = d . \pi . h . \beta', \text{ woraus } h = \frac{d . \beta}{4 \beta'}.$$

Besteht der massive Körper B aus demselben Materiale wie die Schraube, so genügt es, wenn $h = d$ gemacht wird; besteht aber die Schraube aus Eisen und der Körper B aus Holz, so ist $\frac{\beta}{\beta'} \doteq 24$ und daher $h = 6\ d$.

Stehen die Schraubenbolzen nahe bei den Seitenwänden des massiven Körpers B, Fig. 41, so kann auch die Befestigung der Bolzen in B durch Keile C erfolgen, wobei die üblichen Dimensionen aus der Figur zu entnehmen sind. Uebrigens muss die Gleichung bestehen:

$$\frac{d^2 \pi}{4} \beta = 2\ b . h . \beta',$$

worin b und h die Querschnittsdimensionen des Keiles, β die zulässige Inanspruchnahme des Bolzens und β' die zulässige Schubspannung bedeutet. Da nun bei Schrauben, nach §. 8, pro □cm $\beta = 280$ und für Eisen $\beta' = 600$ Kg, so wird hierfür nach obiger Formel der Keilquerschnitt $b . h \doteq \frac{d^2 \pi}{17}$, also für $h = d$, $b \doteq 0{,}2\ d$.

Die Fig. 42 zeigt die derartige Verbindung von 3 Körpern A, B, C, dass zwei der sich berührenden Stücke auch dann noch fest zusammengehalten werden, wenn die eine der beiden Schraubenmuttern gelüftet wird.

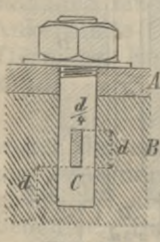


Fig. 41.

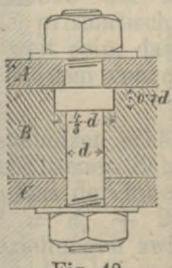


Fig. 42.

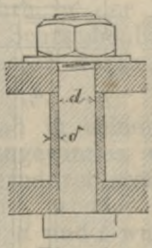


Fig. 43.

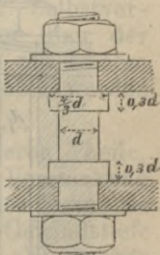


Fig. 44.

Durch die Fig. 43 und 44 ist die Verbindung von Platten ersichtlich gemacht, die in bestimmter Entfernung von einander erhalten werden sollen. Ist diese Entfernung gering, so genügt die Einschaltung einer cylindrischen Hülse, Fig. 43, durch welche der Schraubenbolzen hindurch geht; für grössere Entfernung ist aber die durch Fig. 44 dargestellte Anordnung vorzuziehen. Im ersteren Falle muss die Druckfestigkeit der Hülse gleich sein der Zugfestigkeit des Bolzens und im letzteren Falle soll die Scheerfestigkeit jedes der beiden Köpfe gleich sein der Zugfestigkeit des Bolzens. Aus diesen Bedingungen ergibt sich die Hülsenstärke $\delta \doteq \frac{d}{4}$ und die Höhe der Köpfe $\doteq \frac{d}{3}$.

Fig. 45.

Die Fig. 45 zeigt die sogenannte Einsenk- oder Ankerschraube (auch Blei- oder Schwefelschraube), welche dazu dient, grössere Metallkörper, respective deren Fundamentplatten, mit dem Fundament-Mauerwerk zu verbinden. Der Zwischenraum zwischen dem pyramidalstutzförmigen Schraubenkörper und dem Mauerwerke wird mit Blei, Schwefel, Gyps- oder Cementmörtel ausgegossen, zuvor aber die Schraube durch Holzkeile centrirt. Diese Senkschrauben dürfen keinen starken Erschütterungen ausgesetzt werden, weil sonst das Bindemittel gelockert oder zerbröckelt und die Schraube alsdann schlottern würde. Sie findet ihre häufigste Anwendung im Hochbau zur Befestigung der Säulenfüsse.

Zur Befestigung von Fundament- oder Lagerplatten, auf denen stark erschütterte Massen lagern, dienen die eigentlichen Fundamentschrauben, Fig. 46 und 47.

Die Fundamentschraube, Fig. 46, ist am unteren Ende zugänglich, während in Fig. 47 der Schraubenkopf im vollen Mauerwerk liegt.

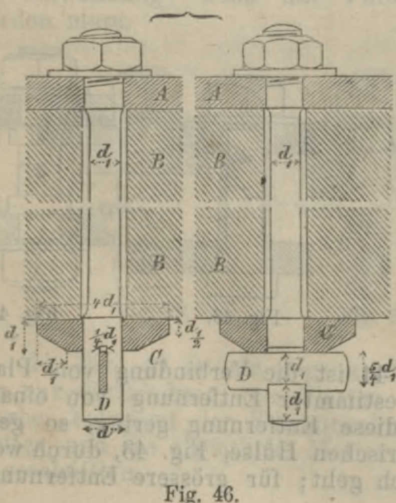


Fig. 46.

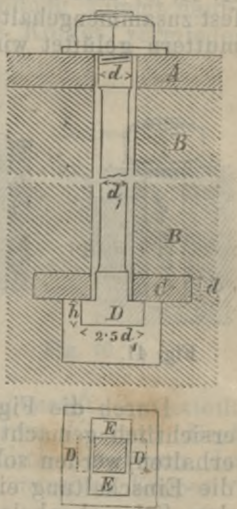


Fig. 47.

Im ersteren Falle (Fig. 46) ist der Bolzen am unteren Ende vierkantig und statt des Schraubenkopfes ein Keil D angeordnet. Damit sich aber der Keil nicht verschieben könne, ist derselbe in seiner Mitte mit einem Einschnitte versehen, in welchen der Schraubenbolzen eingreift.

Zur Aufnahme der Schraube wird in dem Mauerwerke entweder nur seitlich eine Rinne, oder aber — wenn die Schraube von der Wandfläche zu weit absteht — eine durch das Mauerwerk gehende Oeffnung hergestellt. Unter der Oeffnung befindet sich eine Nische, in welcher es möglich wird die Platte C über das untere Schraubende zu bringen und nachher darunter den Keil D einzuschieben. Die Oeffnung in der Platte C ist vierkantig und so gross, dass durch dieselbe bequem der verstärkte Theil des Schraubenbolzens geht, ohne jedoch eine Drehung des Bolzens zuzulassen.

Ist die Herstellung der unter dieser Schraube nöthigen Nische unzulässig, so wird die durch Fig. 47 dargestellte Schraube zur Anwendung gebracht. Hierbei wird die Ankerplatte C bereits bei der Aufführung des Mauerwerks an ihren Platz gebracht und vermauert. In derselben befindet sich eine längliche, rechteckige Oeffnung E, die so gross ist, dass der Tförmig gestaltete Schraubenkopf ohne Hinderniss durch dieselbe geschoben werden kann, aber doch auch eng genug, um eine Drehung des Schraubenbolzens, der unmittelbar oberhalb des Kopfes vierkantig ist, zu verhindern. Unterhalb der Ankerplatte C befindet sich in dem Mauerwerk ein Hohlraum, der eine Drehung der Schraube ermöglicht, sobald dieselbe so tief durch die Platte C geschoben wird, dass der kurze, vierkantige Ansatz unter dieser liegt. Diese Drehung des Bolzens um 90^0 ist deshalb erforderlich, um die beiden den Schraubenkopf bildenden Flügel $D\,D$ seitlich unter die Ankerplatte zu bringen und dadurch ein Herausziehen des Bolzens beim Anziehen der Mutter zu verhindern. Selbstverständlich muss die prismatische Röhre in der Mauer über der Ankerplatte C so weit sein, dass der Schraubenbolzen mit seinem Tförmigen Kopfe bequem von oben herab durchgeschoben werden könne.

Der Schraubenbolzen erhält auch in seinem oberen Theile, wegen des eingeschnittenen Schraubengewindes, eine Verstärkung und zwar derart, dass der innere Kerndurchmesser des Gewindes gleich d_1, also $d = d_1 + 2\,t$ wird, wenn t die Gewindstiefe bedeutet. Die Beziehungen zwischen d und t wurden aber bereits im §. 8 erläutert und gelten auch die dort entwickelten Formeln zur Bestimmung des Bolzendurchmessers d_1 und der Mutterhöhe. Die Stärke der Ankerplatten C, ferner des Keiles D (Fig. 46) und des Kopfes D (Fig. 47) wäre aus der Bedingung zu finden, dass der Zugswiderstand des Bolzens gleich sei dem Abscheerungswiderstande der genannten Constructionstheile. Gewöhnlich erhalten die runden Ankerplatten zum Durchmesser 4 bis 5 d_1 und die Stärke d_1. Der Keil wird $\frac{d_1}{4}$ stark und $\frac{5}{4}\,d_1$ hoch gemacht. Da der untere Theil des Schraubenbolzens quadratisch mit der Seite d ausgeführt wird, so ist der betreffende Querschnitt gleich d^2. Derselbe wird jedoch durch das Keilloch um $d \,.\, \frac{d_1}{4}$ verringert, es bleibt somit als tragender Querschnitt $d^2 - \frac{d\,.\,d_1}{4}$ und ist d aus der Bedingung zu bestimmen, dass der tragende Querschnitt gleich sei dem Querschnitte $\frac{d^2_1\pi}{4}$ des runden Bolzens.

Da endlich in Fig. 47 der Schraubenkopf keine quadratische, sondern eine rechteckige Grundform von der Breite d hat, so ist die Scheerfläche desselben gleich $2\,dh$, und ist daher die Höhe h aus der Gleichstellung des Abscheerungswiderstandes des Kopfes mit dem Widerstande gegen das Zerreissen des Bolzens, nämlich aus $2\,dh\,\frac{3}{4}\,\beta = \frac{d^2_1\pi}{4}\,\beta$, zu ermitteln; es wird also $h = \frac{d^2_1\pi}{6\,d}$.

§. 10. **Keilverbindungen.** Die Keile bilden ein sehr einfaches Verbindungsmittel für stangenförmige Körper. Hierbei wird das eine Stabende gabel- oder hülsenförmig gestaltet und umgreift das Ende des zweiten Stabes. Durch beide in einander geschobene Stabenden geht der Verbindungskeil hindurch und wird durch die Reibung in den Keillöchern festgehalten.

Die einfachste Keilverbindung ist durch Fig. 48 dargestellt. Der Keil ist an den schmäleren Seitenflächen der Länge nach

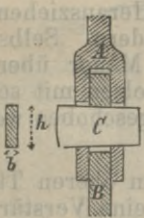


Fig. 48.

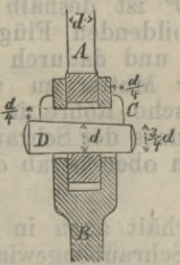


Fig. 49.

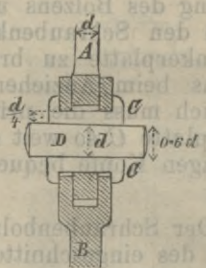


Fig. 50.

schräg geformt und auch die schmalen Seitenflächen der Keillöcher müssen genau dieselbe Neigung haben, wie die schrägen Flächen des Keiles, damit ein gleichmässiges Anziehen oder Lösen des Keiles möglich werde. Da jedoch die genaue Herstellung der schrägen Keilöffnungen schwierig ist, so pflegt man häufig einen oder zwei Gegenkeile C, Fig. 49 und 50 anzuwenden und gibt dann den Keilöffnungen die Form eines rechtwinkeligen Parallelepipeds.

Bei Anwendung eines Gegenkeiles Fig. 49, ist der Hauptkeil D nur an einer Seite schräg und an diese Schräge schliesst sich die Schräge des Gegenkeiles so an, dass die äusseren Seitenkanten beider Keile parallel laufen.

Bei Anwendung von 2 Gegenkeilen $C_1 C$, Fig. 50, hat der Hauptkeil D zwei sanft geneigte Seitenflächen, an welche sich wieder die schrägen Flächen der beiden Gegenkeile derart anschliessen, dass ihre äusseren Seitenflächen parallel laufen. Die Gegenkeile C sind an ihren Enden mit Haken versehen, welche die zu verbindenden Stücke umgreifen und ein Herausfallen der Hauptkeile D beim Anziehen oder Lösen derselben verhindern.

Wird der Reibungscoëfficient der Keile in den Keillöchern mit $\frac{1}{10}$ angenommen, so muss der symmetrisch angebrachte zweiseitige Anzug (oder die Schräge) kleiner als $\frac{1}{10}$, dagegen bei einseitigem Anzug (einseitiger Schräge) kleiner als $\frac{2}{10}$ sein, weil sonst der Keil durch Stösse oder rüttelnde Bewegungen gelöst werden könnte. Damit ferner kleine Verschiebungen der verbundenen Stücke in deren Längenrichtungen durch das stärkere oder schwächere Anziehen des Keiles möglich werden, sind die Keillöcher entsprechend höher gehalten als die Keilhöhe.

Die Querschnitts-Dimensionen der Keile sind an die Bedingung geknüpft, dass der Abscheerungswiderstand der Keile nicht geringer sei als der Widerstand gegen das Zerreissen der verbundenen Stangen.

Ist a die Dicke und b die Höhe des Keilquerschnittes, ferner β' die zulässige Scheer- oder Schubspannung des Keilmateriales pro Flächeneinheit und P die Zugkraft in den durch den Keil verbundenen Stangen, so ergeben sich die Querschnittsdimensionen des Keiles offenbar aus $P = 2\,a\,b\,\beta'$.

Ist nun z. B. $a = \frac{b}{4}$, so wird $a\,b = \frac{b^2}{4}$, daher $P = \frac{b^2 \beta'}{2}$

und hieraus $b = \sqrt{\frac{2\,P}{\beta'}}$.

Gewöhnlich wird die Keilstärke aus dem Durchmesser d der zu verbindenden Stangen bestimmt. Ist nämlich β die zulässige Zugspannung des Stangenmateriales pro Flächeneinheit, so muss, wenn der Widerstand gegen das Zerreissen der Stange gleich sein soll dem Abscheerungswiderstande des Keiles, die Gleichung realisirt werden:

$$\frac{d^2 \pi}{4}\,\beta = 2\,a\,b\,\beta',$$

woraus der Keilquerschnitt

$$a\,b = \frac{d^2 \pi \beta}{8\,\beta'}.$$

Bezeichnet man allgemein den Stangenquerschnitt mit F, so wird offenbar

$$a\,b = \frac{F\,.\,\beta}{2\,\beta'}.$$

Ist die Stange und der Keil aus Schmiedeeisen, so ist gewöhnlich $a = \frac{d}{4}$ und $b = d$.

Ist die Stange aus Schmiedeeisen und der Keil aus Stahl, so kann man $a = \frac{d}{5}$ und $b = \frac{4}{5}\,d$ annehmen.

§. 11. Verlängerungen.

A. Der Hölzer. Von den vielen in Anwendung gekommenen Längsverbindungen der Hölzer wollen wir nur jene vorführen, welche ihrer Länge nach einen Zug oder Druck aufzunehmen vermögen.

Die einfachste Verbindung gewährt in diesem Falle das gerade Hakenblatt, Fig. 51. Ist b die Breite und h die Höhe des Balkens, ferner l die Länge und $\frac{h}{4}$ die übliche Eingriffshöhe des Hakens, so muss die Sicherung gegen das Zerdrücken des Hakens ebenso gross sein als jene gegen das Abscheeren desselben; es muss also die Gleichung bestehen

$$b\,.\,\frac{h}{4}\,.\,\beta = b\,.\,l\,.\,\beta'.$$

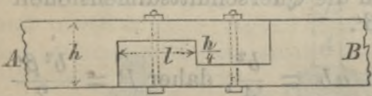


Fig. 51.

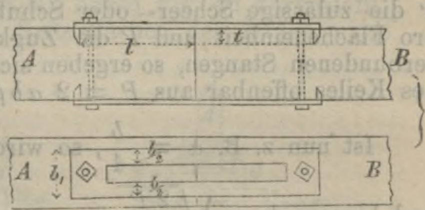


Fig. 52.

Da sich nun beim Holze die zulässige Druckspannung β zur Schubspannung β' wie 10 zu 1 verhält, so wird für diesen Werth aus der obigen Gleichung

$$l = \frac{h}{4}\,\frac{\beta}{\beta'} = \frac{10}{4}\,h = 2{\cdot}5\,h.$$

Zur weiteren Verstärkung und zur Verhinderung der Verschiebung können überdies noch zwei Schrauben angewendet werden.

Hat die Verbindung eine bedeutende Zugkraft zu übertragen, so geschieht die Verlängerung am besten nach Fig. 52 mittelst Hakenschienen. Die zu übertragende Zugkraft P muss dann durch die zu beiden Seiten angebrachten Schienen aufgenommen werden. Ist also b die Breite und d die Dicke einer Schiene in cm ausgedrückt, so ist der Zugswiderstand beider Schienen bei 5facher Bruchsicherheit, also für $\beta = 800$ Kg pro □cm, bestimmt durch

$$P = 2 \times 800\, b\,.\,d = 1600\, b\,d \;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha).$$

Soll ferner das Hirnholz hinter den auf die Tiefe t eingreifenden 2 eisernen Haken gegen das Zerdrücken gesichert sein, so muss — wenn die zulässige Druckspannung des Holzes pro □cm mit 80 Kg bemessen wird — auch die Gleichung

$$P = 2 \times 80\,.\,b_1\,.\,t = 160\, b_1 t \;.\;.\;.\;.\;.\; (\beta)$$

realisirt werden.

Damit endlich kein Ausscheeren des Holzes hinter den Haken eintreten könne, muss auch P durch den Schub-Widerstand des Holzes aufgehoben werden. Da nun die totale Scheerfläche F durch $F = 2\, b_1\, l + 4\, t\, l = 2\, l\, (b_1 + t)$ bestimmt ist, so wird, wenn die zulässige Schubspannung des Holzes pro □cm mit 8 Kg gewählt wird, die Gleichung bestehen müssen:

$$P = 2 \times 8\, l\, (b_1 + 2\, t) = 16\, l\, (b_1 + 2\, t) \;.\;.\; (\gamma).$$

Wir haben also zur Bestimmung der Dimensionen die 3 Gleichungen (α), (β) und (γ).

Wird die Dicke d der schmiedeisernen Schienen angenommen, so gibt bereits die Gleichung (α) den Werth von b. Die zweite Gleichung (β) bestimmt — bei angenommenem t — den Werth von b_1 und die Gleichung (γ) den Werth von l.

Ist beispielsweise $P = 4800$ Kg und $d = 0{\cdot}6$ cm, so wird aus (α) $b = 5$ cm, also $\frac{b}{2} = 2{\cdot}5$ cm; ferner für $t = 2$ cm aus (β) $b_1 \doteq 15$ cm und endlich für diese Werthe von b_1 und t aus (γ) $l \doteq 28$ cm.

Selbstverständlich sind beide Verbindungen auch zur Uebertragung von Druckkräften geeignet.

B. Verlängerungen der Metalle. Am häufigsten kommen die Verlängerungen von schmiedeisernen Stangen vor, und es gibt, wegen des verschiedenen Zweckes dieser Verlängerungen, sehr viele Verbindungsweisen. Wir wollen jedoch nur wieder jener vorführen, welche zur Uebertragung von Zug- oder Druckkräften dienen und sich durch Einfachheit und Zweckmässigkeit auszeichnen.

1. Feste oder unverstellbare Verlängerungen. Zu diesen gehören auch die bereits im §. 6 behandelten Vernietungen, und gelten — wenn statt der Nieten Schrauben angewendet werden — für diese die für die Nieten entwickelten Regeln. Wird aber verlangt, dass die Verbindung dieselbe Festigkeit habe, wie die Stangen selbst, so müssen die Stangen an der Verbindungs-

stelle eine entsprechende Verstärkung erhalten. Die Fig. 53 zeigt eine derartige Verbindung durch **Ueberblattung** und **Verschraubung**.

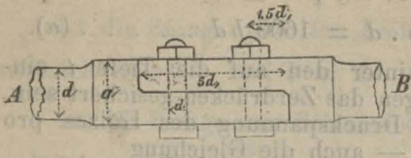


Fig. 53.

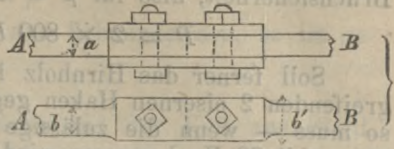


Fig. 54.

Bezeichnet d den Durchmesser der zu verbindenden schmiedeisernen Stangen A und B und a die Seite des quadratischen Endquerschnittes einer dieser Stangen, so muss demnach

$$\frac{d^2\pi}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ oder } a \doteq 1{\cdot}8\ d.$$

Sollen zur Verbindung 2 Schrauben angewendet werden, so muss offenbar, damit der Zugswiderstand des Rundeisens gleich sei dem Abscheerungswiderstande der beiden Schraubenbolzen,

$$\frac{d^2\pi}{4}\ \beta = 2\ \frac{d_1{}^2\pi}{4} \cdot \tfrac{3}{4}\ \beta,$$

woraus der Schraubendurchmesser

$$d_1 = d\sqrt{\tfrac{2}{3}} \doteq 0{\cdot}82\ d.$$

Eine zweckmässige Verbindung schmaler, prismatischer Stäbe (mittelst Doppellaschen) zeigt die Fig. 54.

Ist b die Breite und a die Dicke eines der beiden zu verbindenden Stäbe, so ist die Grösse der zu übertragenden Zugkraft P bestimmt durch $P = a \,.\, b \,.\, \beta$. Werden zur Verbindung nur 2 Schrauben (oder Nieten) benützt, so ist — weil hier die Bolzen doppelschnittig sind — $P = 2 \times 2 \frac{d^2\pi}{4} \tfrac{3}{4}\ \beta$, und aus der Gleichstellung der beiden Werthe von P ergibt sich

$$d = \sqrt{\frac{4\,a\,b}{3\,\pi}} \doteq 0{\cdot}425 \sqrt{a\,b}.$$

Sehr häufig wird die in Fig. 55 dargestellte Verbindung angewendet, wobei das eine Stangenende in eine Gabel übergeht, welche den prismatisch geschmiedeten Kopf der zweiten Stange umfasst und mit ihm durch eine oder zwei Schrauben verbunden wird.

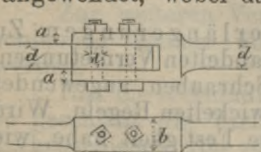


Fig. 55.

Behufs der Berechnung der beiden doppelschnittigen Schrauben setzen wir wieder den Zugswiderstand der Stange gleich dem Ab cheerungswiderstande der beiden Bolzen, also

$$\frac{d^2 \pi}{4}\, \beta = 4\, \frac{d_1^{\,2} \pi}{4}\, \tfrac{3}{4}\, \beta, \text{ woraus } d_1 \doteq 0{\cdot}6\, d.$$

Es muss ferner der Zugswiderstand der Stange gleich sein jenem des Kopfes und der Gabel an der durch den Bolzen geschwächten Stelle, also

$$\frac{d^2 \pi}{4}\, \beta = (b - d_1)\, d\, \beta = 2\, (b - d_1)\, a\, \beta.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt, wenn für d_1 der obige Werth $0{\cdot}6\, d$ eingeführt wird, $b = 1{\cdot}4\, d$;

ferner aus den beiden letzten Gleichungen $a = \frac{d}{2}$.

Zu erwähnen ist noch die feste Schraubenverbindung Fig. 56, welche wegen ihrer Einfachheit vielfache Anwendung findet.

Damit diese Verbindung mindestens denselben Widerstand wie die Stange gewähre, muss der innere Durchmesser d_1 des Schraubenbolzens $= d$, der Durchmesser des Muffes $\doteq 2\, d$ und die Länge l des Bolzens $\doteq 2$ bis $3\, d$ sein.

2. Verstellbare Verlängerungen. Bei den meisten Zugstangen muss die Anspannung regulirbar sein und wird die entsprechende Verlängerung oder Verkürzung durch die nachstehenden Vorrichtungen ermöglicht.

Fig. 56.

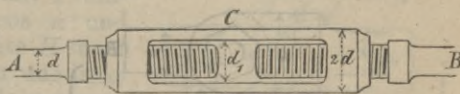


Fig. 57.

Die gewöhnlichste, verstellbare Verbindung ist die durch Fig. 57 dargestellte Schraubenmuff-Verbindung. Hiebei sind die Enden A und B der beiden Zugstangen verstärkt und mit entgegengesetzt ansteigenden Schraubengewinden versehen, welche in das sogenannte Schloss eingreifen, das die Stelle der Schraubenmutter vertritt. Durch die einmalige Umdrehung des Schlosses wird die Verkürzung oder Verlängerung der Stangen gleich der Summe der Ganghöhe beider Schrauben. Der innere Durchmesser d_1 der Schraubenbolzen ist wieder gleich d, die Stärke der Hülsen $= 2\, d$ und der Querschnitt der beiden Verbindungsstücke C, C wenigstens gleich dem Querschnitte der zu verbindenden Stangen.

Ist die eventuelle Längenänderung der Stangen nur sehr gering, so geschieht die Verbindung der Stangen durch Muffe und Keile nach Fig. 58. Solche Verbindungen oder

Fig. 58.

Schiftungen kommen häufig an den Zugstangen von Dachstühlen etc. vor. Die schmiedeiserne Hülse oder Dille bekommt hierbei die Wanddicke $\delta = \frac{d}{4}$. Die anderen Dimensionen sind aus der Figur ersichtlich und wurde ihre Berechnung bereits bei den Keilverbindungen besprochen.

B. Gelenkverbindung. Sollen die durch einen Bolzen mit einander verbundenen Stangen um diesen Bolzen drehbar sein, so geschieht die Verbindung nach Fig. 59. Der Gelenksbolzen ist hierbei doppelschnittig; soll daher die Festigkeit der Verbindung gleich sein jener der Stange und bezeichnet $F = ab$ die Querschnittsfläche der Stange, so muss: $F\beta = \frac{d^2\pi}{4} \frac{3}{4} \beta$, woraus $d = 0{\cdot}92 \sqrt{F}$.

Die Stärke c des den Bolzen umgreifenden Ringes ist — wie bei den Kettenschienen §. 7 — bestimmt durch $c = \frac{2}{3} a$.

Hiernach wird die Höhe des Bolzenringes $h = a + \frac{4}{3} a = \frac{7}{3} a$.

Die Stärke e der Gabel ergibt sich aus $2 (h - d)\, e \beta = a b \beta$, woraus $e = \frac{a b}{2 (h - d)}$.

C. Verzapfungen. Dieselben kommen meist nur bei Holzverbindungen vor und mögen hier nur die gangbarsten erwähnt werden.

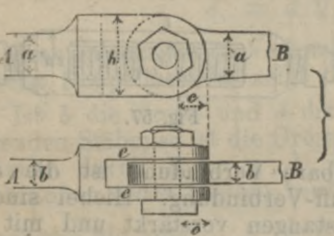


Fig. 59.

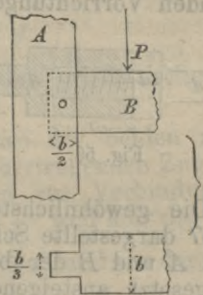


Fig. 60.

Fig. 60 stellt eine sehr einfache Verzapfung vor, welche zur Verbindung zweier rechtwinklig gestellten Hölzer gebraucht wird. Der Zapfen bekommt zur Dicke $\frac{1}{3}$ der Balkenbreite b und zur Länge $\frac{b}{2}$. Der zum Zapfen rechtwinklig gerichteten Kraft P widersteht der Zapfen mit seiner Scheerfestigkeit. Die zulässige Anspruchnahme des Holzes senkrecht zur Faserrichtung beziffert sich bei 10facher Bruchsicherheit mit circa 10 Kg. pro □cm. Soll also diese Sicherheit erreicht werden, so muss $P = \frac{10\, a b}{3}$ Kg. werden, wenn a und b in cm ausgedrückt sind.

Zu Eckbildungen eignet sich der durch Fig. 61 dargestellte Spaltzapfen. Die durch ihn zu übertragende Kraft berechnet sich auch hier aus $P = \frac{10}{3}\, a b$.

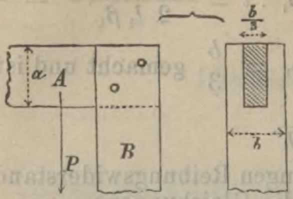


Fig. 61.

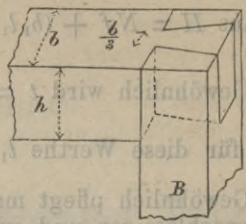


Fig. 62.

In Fig. 62 ist noch eine Eckverbindung mit schwalbenschwanzförmigen Zapfen angegeben.

Die Verbindung der Hölzer unter einem spitzigen Winkel geschieht am häufigsten durch den sogenannten Schrägzapfen, Fig. 63.

Ist P der durch die Strebe zu übertragende Druck, so lässt sich derselbe in zwei zum Stützbalken beziehungsweise parallele und normale Componenten H und N zerlegen. Bezeichnet α den Winkel, welchen H mit P einschliesst, so ist $H = P \,.\cos \alpha$ und $N = P \sin \alpha$. Die Componente H sucht den Zapfen abzuscheeren oder das links vor demselben befindliche Holzprisma, von der Länge l_1 und der Tiefe t, hinauszuschieben. Ist h_1 die Querschnittshöhe der Strebe, so ist die Scheerfläche des Zapfens $F = \frac{h_1}{\sin \alpha}\, b_1 = b_1\, l$. Die Scheerfläche F_1 des Holzprismas vor dem Zapfen setzt sich aus seiner Grundfläche $l_1\, b_1$ und den beiden Seitenflächen $2\, l_1 t$ zusammen. Der Verschiebung wirkt aber auch die durch den Normaldruck N erzeugte Reibung $N \,.\, f$ entgegen, wenn f den Reibungscoëfficienten bedeutet. Bezeichnet β_1 die zulässige Anspruchnahme des Holzes bezüglich seines Widerstandes gegen Abscheeren pro Flächeneinheit, so muss also behufs der Sicherung gegen Abscheerung die Gleichung bestehen:

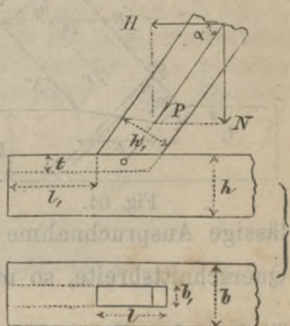


Fig. 63.

$$H = Nf + b_1\, l\, \beta_1 = Nf + [b_1\, l_1 + 2\, l_1\, \mathrm{t}]\, \beta_1.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$l_1 = \frac{b_1\, l}{b_1 + 2\, t}, \text{ wobei } l = \frac{h_1}{\sin \alpha}.$$

Aus der ersten Gleichung

$$H = Nf + b_1\, l\, \beta_1, \text{ wird } b_1 = \frac{H - Nf}{l\,\beta_1}$$

und aus $H = Nf + (b_1\, l_1 + 2\, l_1\, t)\; \beta_1\; .\; t = \dfrac{H - Nf}{2\, l_1\, \beta_1} - \dfrac{b_1}{2}$.

Gewöhnlich wird $t = \dfrac{h}{3}$ und $b_1 = \dfrac{b}{3}$ gemacht und ist alsdann für diese Werthe $l_1 = \dfrac{b\,l}{b + 6\,h}$.

Gewöhnlich pflegt man den geringen Reibungswiderstand Nf zu vernachlässigen und erhält dann die Gleichungen:

$$H = b_1\, l\, \beta_1 = (b_1\, l_1 + 2\, l_1\, t)\; \beta_1,$$

woraus $b_1 = \dfrac{H}{l\,\beta_1}$, $l_1 = \dfrac{b_1\, l}{b_1 + 2\,t}$ und $t = \dfrac{H}{2\, l_1\, \beta_1} - \dfrac{b_1}{2}$.

Ist durch die Strebe eine sehr bedeutende Kraft P zu übertragen, so wird dieselbe, nach Fig. 64, ihrer ganzen Breite nach in den Stützbalken eingelassen und in dieser Lage durch Verschraubung mit dem Stützbalken fest gehalten. Die Länge l_1 ist hierbei wenigstens gleich $l = \dfrac{h_1}{\sin\alpha}$, lässt sich übrigens, wenn vom veränderlicheren Reibungswiderstande abstrahirt wird, aus der Sicherung gegen das Abscheeren leicht bestimmen. Ist nämlich β_1 die zulässige Anspruchnahme des Holzes pro Flächeneinheit und b die Querschnittsbreite, so muss $H = b\, l_1\, .\, \beta_1$, woraus $l_1 = \dfrac{H}{b\,\beta_1}$. Die Tiefe t der Einzapfung macht man gewöhnlich $= \dfrac{h}{4}$.

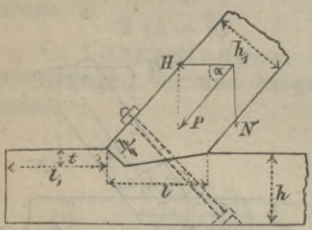


Fig. 64.

Zweiter Abschnitt.

Biegungs-Elasticität homogener Träger.

§. 12. **Voraussetzung und Erklärung bezüglich der Belastung.** Ein Träger wird auf Biegungselasticität allein nur dann in Anspruch genommen, wenn die angreifenden oder äusseren Kräfte senkrecht zur Längenaxe des Trägers wirken und sämmtlich in einer Ebene — der sogenannten Kraftebene — liegen, die durch die Längenaxe des Trägers geht.

Diese Kräfte können, nach Fig. 65, zum Theil Einzellasten P_1, P_2, P_3, ... sein, zum Theil können sie sich über die ganze Länge, oder über einzelne Theile derselben, gleichmässig vertheilen. Zu den äusseren Kräften gehören auch die Reactionen der Auflager oder Stützen, d. i. die sogenannten Auflager- oder Stützendrücke D, D'.

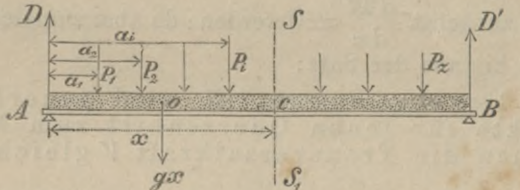


Fig. 65.

Bezeichnet man die Abstände der Einzellasten P_1, P_2, P_3, ... P_z von dem als Anfangspunkt gewählten Stütz- oder Befestigungspunkte A der Reihe nach mit a_1, a_2, a_3 .... a_z, ferner die, gewöhnlich vom Eigengewichte herrührende, gleichmässige Belastung des Trägers pro Längeneinheit mit g und betrachtet ein beliebiges Trägerfragment AC von der Länge x, auf welches als letzte Einzellast jene P_i im Abstande a_i von A wirken möge, so äussert sich auf dieses Trägerfragment:

1.) die verticale Schub- oder Transversalkraft

$$V = D - g\,x - (P_1 + P_2 + P_3 + \ldots . + P_i)$$

oder $V = D - g\,x - \Sigma_1^i\,P \ldots .$ (80), 2.) das auf den Querschnitt C thätige Biegungsmoment

$$\mathfrak{M} = Dx - g\frac{x^2}{2} - \left[P_1(x-a_1) + P_2(x-a_2) + \ldots + P_i(x-a_i)\right],$$

$$\text{oder } \mathfrak{M} = Dx - g\frac{x^2}{2} - \Sigma_1^i\, P(x-a) \;\ldots.\; (81).$$

Aus dem in (80) gewählten Vorzeichen der Kräfte folgt, dass wir die nach aufwärts gerichteten als positive, also die nach abwärts gerichteten als negative Kräfte in Rechnung nehmen; ferner aus (81), dass die Momente der rechts drehenden Kräfte als positive, somit jene der links drehenden Kräfte als negative Momente behandelt werden.

Um nun die Abhängigkeit des Biegungsmomentes $\mathfrak{M}$ von x kennen zu lernen, differenzirt man die Gleichung (81) in Bezug auf die Variable x und erhält

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = D - gx - \Sigma_1^i\, P.$$

Dieser Werth ist aber jenem der Transversalkraft V aus (80) gleich, so dass man setzen kann

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = V \;\ldots..\; (82).$$

Soll nun der Werth von x gefunden werden, für welchen $\mathfrak{M}$ zwischen den festen Stützpunkten zum Maximum wird, so muss bekanntlich zunächst $\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$ werden; da aber zugleich $\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = V$ ist, so folgt hieraus der Satz:

Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ wird innerhalb der Stützpunkte für jenen Querschnitt zum Maximum, für welchen die Transversalkraft V gleich Null ist.

§. 13. **Beziehungen zwischen den äusseren und inneren Kräften.** Durch die Einwirkung der äussern, zur Längenrichtung des Trägers senkrecht gerichteten Kräfte erfährt derselbe eine Biegung, die darin besteht, dass die Fasern zwischen zwei ursprünglich parallelen Querschnitten C, C_1, Fig. 66, auf der convexen Seite verlängert, dagegen auf der concaven Seite verkürzt werden.

Beim Uebergange von den verlängerten zu den verkürzten Fasern muss man daher auf eine neutrale Schichte AC gelangen, deren Fasern keine Längenänderung, sondern nur eine Formänderung, respective Biegung, erleiden.

Man nennt den Schnitt der neutralen Faserschichte mit einer Querschnittebene die neutrale Axe und die Schnittcurve der neutralen Schichte mit der durch die Längenaxe des Trägers gehenden Kraftebene die elastische Linie.

Von der neutralen Faserschichte aus nimmt die Verlängerung, beziehungsweise Verkürzung, gegen die äussersten Fasern allmählich zu und erreicht somit in den äussersten Fasern den grössten Werth.

Ein Mass für diese Verlängerung oder Verkürzung der Fasern ergibt sich durch die Annahme, dass zwei benachbarte Querschnitte C, C_1, welche vor der Biegung senkrecht zur Längenaxe sind, auch nach der Biegung — wenn dieselbe innerhalb der Elasticitätsgrenze erfolgt — auf der deformirten Längenaxe senkrecht stehen, also eben bleiben und sich in einer Geraden O schneiden. Da nun die mit Hilfe dieser Voraussetzung gewonnenen Resultate mit der Erfahrung übereinstimmen, so kann die gemachte Annahme als zulässig erklärt werden.

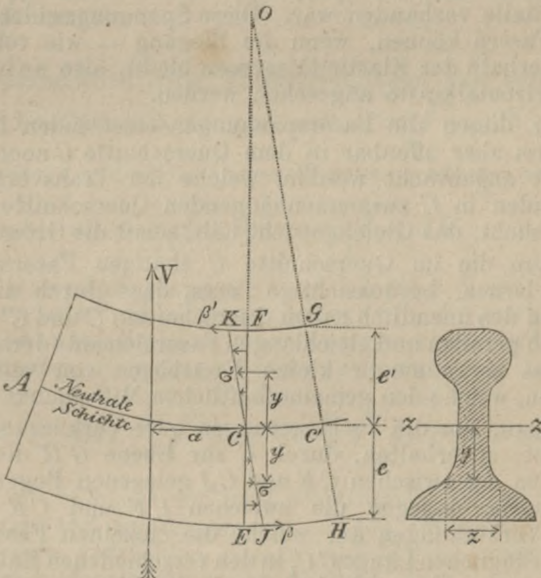


Fig. 66.

Um nun die durch die Biegung hervorgerufenen spannungen in einem beliebigen Querschnitte C bestimmen zu können, wollen wir die folgende Betrachtung anstellen.

Ein Träger sei durch äussere, senkrecht zu seiner Längenrichtung wirkende Kräfte innerhalb der Elasticitätsgrenze so weit gebogen worden, dass die durch die Biegung hervorgerufenen inneren Kräfte oder Spannungen den äusseren Kräften das Gleichgewicht halten. Denkt man sich nun den Träger durch einen beliebigen Querschnitt EF in zwei Fragmente getheilt, so werden die jedem Fragmente zukommenden äusseren Kräfte im Allgemeinen nicht im Gleichgewichte stehen; jedes Fragment müsste sich daher in Bewegung setzen, wenn nicht statt des weggeschnittenen Theiles äussere Kräfte am Querschnitte hinzugefügt würden, welche jenen inneren Kräften gleich sind, die vor der Trennung im betreffenden Querschnitte durch die äusseren Kräfte hervorgerufen wurden.

Betrachten wir z. B. das Fragment AC und nehmen statt aller der auf dieses Fragment thätigen, äusseren Kräfte deren Resultirende, d. i. die dem Querschnitte C entsprechende, nach Gleichung (80) zu bestimmende Transversalkraft V in Rechnung, so findet man, dass für den weiteren Bestand des Gleichgewichtes an der Schnittfläche jeder einzelnen Längenfaser eine in die Längenrichtung derselben fallende äussere Kraft anzubringen ist, von gleicher Grösse mit der Spannung, welche vorher in der Faser an dieser Stelle vorhanden war. Diese Spannungswiderstände der einzelnen Fasern können, wenn die Biegung — wie vorausgesetzt wird — innerhalb der Elasticitätsgrenze bleibt, also sehr gering ist, als Horizontalkräfte angesehen werden.

Ausser diesen die Faserspannungen ersetzenden Horizontalkräften muss aber offenbar in dem Querschnitte C noch eine verticale Kraft angebracht werden, welche der Transversalkraft V, die die beiden in C zusammenhängenden Querschnitte scheerend zu trennen sucht, das Gleichgewicht hält, somit die Grösse $-V$ hat.

Um nun die im Querschnitte C thätigen Faserspannungen kennen zu lernen, berücksichtige man, dass durch die Biegung alle zwischen den unendlich nahen Querschnitten C und C^1 liegenden, ursprünglich geraden und gleichlangen Faserelemente derart gebogen werden, dass sie nunmehr kleine Kreisbögen von verschiedener Länge bilden, welche den gemeinschaftlichen Mittelpunkt o besitzen.

Legt man, um die Verlängerungen oder Verkürzungen dieser Faserelemente zu erhalten, durch C zur Ebene GH die parallele JK, so geben die zwischen CE und CJ gelegenen Bogentheile die Verlängerungen, dagegen die zwischen CF und CK liegenden Stücke die Verkürzungen an, welche die einzelnen Faserelemente von der ursprünglichen Länge CC_1 in den verschiedenen Entfernungen von der neutralen Faserschichte durch die Biegung erleiden.

Diese Ausdehnungen und Verkürzungen sind offenbar den Entfernungen von der neutralen Schichte proportional und da nach dem Hook'schen Gesetze die Längenänderungen innerhalb der Elasticitätsgrenze wieder den Spannungen proportional sind, so verhalten sich also auch die Spannungen der einzelnen Fasern wie ihre Abstände von der neutralen Schichte.

Bezeichnet man also mit σ und σ' die pro Flächeneinheit in der beliebigen Entfernung y zu beiden Seiten der neutralen Axe auftretenden Zug- und Druckspannungen, ferner mit β und β' die in den äussersten gezogenen und gedrückten Fasern pro Flächeneinheit zulässigen Spannungen, sowie mit e und e' die Entfernungen dieser äussersten Fasern von der neutralen Axe, so müssen die Proportionen bestehen:

$$\sigma : \beta = y : e \text{ und } \sigma' : \beta' = y : e',$$

woraus
$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{\beta}{e}\, y \\ \sigma' &= \frac{\beta'}{e'}\, y \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(83)}.$$
und

Die in der Entfernung y auf ein Flächenelement dF des Querschnitts F wirkende Zug- respective Druckspannung ist also bestimmt durch $\sigma\, dF$ resp. $\sigma' dF$, somit die Summe aller Zugspannungen durch $\int_0^e \sigma\, dF$ und die Summe aller Druckspannungen durch $-\int_0^{e'} \sigma' dF$.

Die Gesammtheit aller Faserspannungen des ganzen Querschnittes F beziffert sich demnach mit $H = \int_0^e \sigma\, dF - \int_0^{e'} \sigma' dF$, oder, wenn für σ und σ' die obigen Werthe eingesetzt werden, mit

$$H = \frac{\beta}{e} \int_0 y\, d\mathrm{F} - \frac{\beta'}{e'} \int_0^{'} y\, dF.$$

Soll nun das Fragment AC keine Verschiebung in horizontaler Richtung erleiden, so muss — weil keine äusseren Kräfte vorhanden sind, welche die Resultirende H aller Faserspannungen aufheben könnten —

$$H = 0, \text{ oder } \frac{\beta}{e} \int_0^e y\, dF - \frac{\beta'}{e'} \int_0^{e'} y\, dF = 0 \text{ sein.}$$

Da aber bei einem rationell construirten Träger die grösste zulässige Zug- und Druckspannung in den äussersten gezogenen, beziehungsweise gedrückten Fasern gleichzeitig erreicht werden soll, so ist der Querschnitt so anzuordnen, dass

$$\frac{\beta}{e} = \frac{\beta'}{e'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(84)}.$$

Bei dieser Constructionsbedingung geht die obige Gleichung über in

$$\int_0^e y\, dF - \int_0^{e'} y\, dF = 0 \text{ oder } \int_{e'}^e y\, dF = 0.$$

Da jedoch das statische Moment der Querschnittsfläche nur in Bezug auf deren Schwerpunktsaxe gleich Null werden kann, so resultirt aus der letzten Gleichung der Satz:

Bei rationell construirten Trägern, bei welchen nämlich, nach Gleichung (84), die grösste zulässige Zug- und Druckspannung in den äussersten gezogenen, beziehungsweise gedrückten Fasern gleichzeitig erreicht wird, fällt die neutrale Axe mit der Schwerpunktsaxe ZZ' des Querschnittes zusammen, und die elastische Linie ist daher mit der Längenaxe des Trägers identisch.

Damit aber auch das Fragment AC im Gleichgewichte gegen Drehung bleibe, muss die algebraische Summe der statischen Momente aller der auf das Fragment AC wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige Axe, z. B. in Bezug auf die neutrale Axe des Querschnittes C, gleich Null sein.

Es muss also das statische Moment $\mathfrak{M}$ der Transversalkraft V, nämlich Va, gleich sein der Summe der statischen Momente aller Spannungswiderstände der einzelnen Flächenelemente dF des Querschnittes F in C, also

$$\mathfrak{M} = \int_{-e'}^{e} \sigma\, dF y = \frac{\beta}{e} \int_{-e'}^{e} y^2 dF \quad . \; . \; . \; . \; . \; (85),$$

wenn für σ der aus (83) resultirende Werth substituirt wird.

Der Ausdruck $\int_{-e'}^{e} y^2 dF$, d. i. die Summe der Producte aller Flächenelemente des Querschnittes in die Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Axe ZZ', ist bekanntlich das sogenannte Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf die Axe ZZ'; bezeichnen wir es mit $\mathfrak{J}$, so geht die Gleichung (85) über in jene

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (86).$$

Man nennt den Ausdruck $\frac{\beta}{e} \mathfrak{J}$, oder wegen $\frac{\beta}{e} = \frac{\beta'}{e'}$, jenen $\frac{\beta'}{e'} \mathfrak{J}$ das Widerstandsmoment des Querschnittes und kann demnach sagen:

Behufs der Sicherung gegen Drehung muss das Widerstandsmoment des afficirten Querschnittes gleich sein dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ der dem Querschnitte zugehörigen Transversalkraft V.

Aus der Gleichung (84), nämlich aus $\frac{\beta}{e} = \frac{\beta'}{e'}$, folgt, dass der Querschnitt jener homogenen Träger, deren Elasticitätsgrenze oder zulässige Inanspruchnahme auf Zug und Druck gleich ist, bezüglich der neutralen Axe vollkommen symmetrisch angeordnet werden soll.

Da übrigens das Materiale zunächst der neutralen Schichte am wenigsten, dagegen in den von ihr am weitesten abstehenden Fasern am meisten in Anspruch genommen wird, so folgt daraus, dass bei rationell gebauten Trägern, der Gleichung (83) entsprechend, das Materialquantum in directem Verhältnisse mit der Entfernung von der neutralen Schichte zunehmen soll.

Wird in der Gleichung (86) für $\frac{\beta}{e}$ der aus (83) resultirende Werth $\frac{\sigma}{y}$ substituirt, so erhält man $\mathfrak{M} = \frac{\sigma}{y}\,\mathfrak{J}$, woraus sich für die in der Entfernung y von der neutralen Axe pro Flächeneinheit des Querschnittes auftretende Faserspannung σ der Werth ergibt:

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (87).$$

§. 14. Bestimmung der durch die Biegung hervorgerufenen Schubspannungen.

1. Horizontale Schubspannungen. Betrachten wir das Fragment $ABCD$, Fig. 67, eines Trägers der durch die dem Querschnitte C zukommende Transversalkraft V innerhalb der Elasticitätsgrenze gebogen wurde, so können wir mit Benützung der Gleichung (87) die auf AB und CD des schraffirten Querschnittstheiles thätigen horizontalen Kräfte H und H_1 leicht bestimmen.

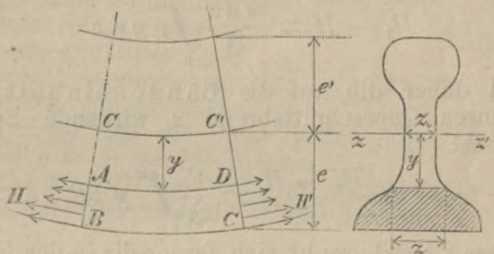


Fig. 67.

Es wirkt nämlich auf ein Querschnittselement $dF = z \,.\, dy$ in der Entfernung y von der neutralen Axe die Kraft σdF, daher auf AB, respective auf den schraffirten Querschnittstheil, die Summe aller Faserspannungen innerhalb der Grenzen y und e, so dass also

$$H = \int_y^e \sigma dF = \int_y^e \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,y dF.$$

Da aber $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{J}$ von y unabhängig sind, so kann man sie vor das Summenzeichen setzen und erhält

$$H = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} \int_y^e y dF.$$

Wird nun die Länge AD des Fragmentes unendlich klein angenommen, also $AD = dx$ gesetzt, so wird offenbar H_1 von H sehr wenig verschieden sein, also $H_1 - H$ die unendlich kleine Aenderung von H vorstellen, welche sich ergibt, wenn sich die afficirte Fläche AB nach Richtung der x um dx verschiebt, ohne dass sich gleichzeitig y ändert. Bezeichnet man das dem Querschnitte C_1 zukommende Biegungsmoment mit $\mathfrak{M}_1$, so wird, weil für zwei unendlich nahe Querschnitte die Grössen $\mathfrak{J}$ und $\int_y^e y\,dF$ unverändert bleibt,

$$H_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF,$$

und somit

$$H_1 - H = (\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}) \frac{1}{\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF$$

die horizontale Schubkraft bestimmen, welche eine Verschiebung des Fragmentes $ABCD$ längs AD und der ganzen Breite z anstrebt. Da aber $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M} = d\mathfrak{M}$ und nach (82) $\frac{dM}{dx} = V$ ist, so wird hiefür.

$$H_1 - H = \frac{V\,dx}{\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF.$$

Es wird daher die auf die Längeneinheit längs AD und der ganzen Querschnittsbreite z wirkende Schubkraft S bemessen durch:

$$S = \frac{H_1 - H}{dx} = \frac{V}{\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88).$$

Aus dieser Formel ergibt sich ferner die in der Entfernung y pro Flächeneinheit wirkende horizontale Schubspannung

$$\sigma_1 = \frac{S}{z} = \frac{V}{z\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89).$$

Da nun für einen und denselben Querschnitt die Grössen V und $\mathfrak{J}$ von y unabhängig sind, so ist es klar, dass die pro Längeneinheit auftretende Schubkraft S ihren grössten Werth erreicht, wenn der Ausdruck $\int_y^e y\,dF$ in jenen $\int_0^e y\,dF$ übergeht, d. h. die horizontale Schubkraft erreicht ihren grössten Werth in der neutralen Faserschichte. Hiernach beträgt sie pro Längeneinheit

$$S = \frac{V}{\mathfrak{J}} \int_0^e y\,dF \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90).$$

Ist nun z_0 die Breite des Querschnittes in der neutralen Axe, so ergibt sich die in der neutralen Faserschichte pro Flächeneinheit wirkende Maximal-Schubspannung aus

$$\sigma_1 = \frac{V}{z_0 \mathfrak{J}} \int_0^e y\,dF \quad \ldots \ldots \ldots (91).$$

Setzt man in dieser Formel statt σ_1 die zulässige Inanspruchnahme des Materiales auf Schub, so dient diese Formel insbesondere dazu, die geringste Dicke z_0 dünnwandiger Träger, z. B. der Blechträger, zu bestimmen, wobei für V selbstverständlich der Maximalwerth einzusetzen ist, der sich über den Auflagern bei totaler Belastung des Trägers ergibt.

2. Verticale Schubspannungen. Es wurde bereits hervorgehoben, dass bei einem durch Transversalkräfte belasteten geradaxigen Träger, der in irgend einem Querschnitte hervorgerufene Abscheerungswiderstand im Zustande des Gleichgewichtes gleich sein müsse der diesem Querschnitte entsprechenden Transversalkraft, und handelt es sich nun noch darum, das Vertheilungsgesetz der verticalen Schubspannungen im Querschnitte kennen zu lernen.

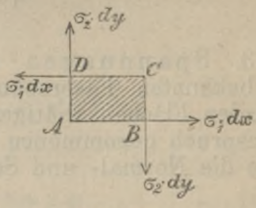


Fig. 68.

Zu diesem Behufe betrachten wir ein beliebiges Körperelement $ABCD$, Fig. 68, eines auf Biegungsfestigkeit in Anspruch genommenen Trägers, und setzen voraus, dass $AB = dx$, $AD = dy$ und die Dicke gleich Eins sei. Alsdann wirken auf dasselbe in Folge der Biegung:

a) Senkrecht zu AD und BC zwei gleiche aber entgegengesetzt wirkende Faserspannungen, welche sich das Gleichgewicht halten;

b) längs AB und CD die horizontalen Schubspannungen $\sigma_1\,dx$ und $-\sigma_1\,dx$, welche die Flächen AB und CD horizontal an einander verschieben wollen;

c) längs AD und CB die verticalen Schubspannungen $\sigma_2\,dy$ und $-\sigma_2\,dy$, welche die Verschiebung der Flächen AD und CB in verticaler Richtung anstreben.

Da sich die unter a) angeführten Spannungen aufheben, so bleiben blos die beiden unter b) und c) vorgeführten Kräftepaare übrig. Soll sich nun das Körperelement unter dem Einflusse dieser beiden Kräftepaare im Gleichgewichte gegen Drehung befinden, so muss die Summe der statischen Momente der genannten Kräftepaare in Bezug auf irgend einen in der Ebene dieser Kräfte gelegenen Punkt gleich Null sein. Wählen wir z. B. den Punkt B als Drehpunkt, so muss also die Gleichung bestehen

$$\sigma_1\,dx\,.\,dy = \sigma_2\,dy\,.\,dx,$$

woraus

$$\sigma_1 = \sigma_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (92);$$

d. h. die im verticalen Querschnitte an irgend einer Stelle thätige verticale Schubspannung σ_2 ist gleich der an derselben Stelle wirkenden horizontalen Schubspannung σ_1.

Die in der Entfernung y von der neutralen Axe auftretende horizontale oder verticale Schubspannung H_y ist also nach Gleichung (88) für die Länge Eins und die ganze Querschnittsbreite z bestimmt durch

$$S = \frac{V}{\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF;$$

und daher die an dieser Stelle pro Flächeneinheit auftretende horizontale oder verticale Schubspannung durch

$$\sigma_1 = \frac{V}{z\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF.$$

3. Spannungen in geneigten Flächen. Aus den nun bekannten Faserspannungen und den in horizontalen und verticalen Flächen thätigen Schubspannungen eines auf Biegung in Anspruch genommenen Trägers, lassen sich jetzt auf einfache Weise die Normal- und Schubspannungen, die durch die Biegung des Trägers in einer beliebigen Fläche desselben hervorgerufen werden, bestimmen. Um z. B. die Spannungen eines Flächenelementes AC, Fig. 69, von der Länge ds und der Breite Eins zu finden, das gegen die Längenaxe AX des Trägers unter dem beliebigen Winkel φ geneigt ist, so suche man zunächst die auf die verticale und horizontale Projection dieses Flächenelementes wirkenden Spannungen und zerlege dieselben in je zwei Componenten normal und parallel zu AC. Ist σ die specifische Faserspannung in der Entfernung y von der neutralen Axe und σ_1 die längs BC oder AD wirkende specifische Schubspannung, so wirkt auf $AB = dy$ die Faserspannung $\sigma \,.\, dy$ und die verticale Schubspannung $\sigma_1 \,.\, dy$, dagegen auf $BC = dx$ nur die horizontale Schubspannung $\sigma_1 \,.\, dx$. Durch die oben besprochene Zerlegung dieser Spannungen ergibt sich die auf $AC = ds$ thätige specifische Normalspannung

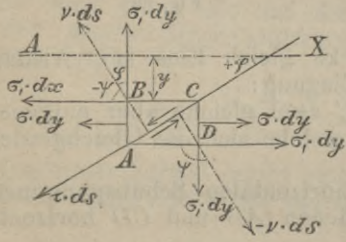


Fig. 69.

$$V = \frac{\sigma \,.\, dy \sin\varphi + \sigma_1 dy \cos\varphi + \sigma_1 dx \sin\varphi}{ds}$$

und die längs AC auftretende specifische Schubspannung

$$\tau = \frac{\sigma \,.\, dy \cos\varphi - \sigma_1 \,.\, dy \sin\varphi + \sigma_1 \,.\, dx \cos\varphi}{ds}.$$

Da nun $\frac{dy}{ds} = \sin\varphi$ und $\frac{dx}{ds} = \cos\varphi$, so wird hiefür

$$\nu = \sigma \sin^2\varphi + 2\,\sigma_1 \sin\varphi \,.\, \cos\varphi$$

und

$$\tau = \sigma \sin\varphi \,.\, \cos\varphi + \sigma_1 (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Weil aber bekanntlich

$$2 \sin\varphi \cos\varphi = \sin 2\varphi,$$

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi \qquad \text{und} \qquad \sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2},$$

so erhält man für diese Werthe

$$\nu = \frac{\sigma}{2}(1 - \cos 2\varphi) + \sigma_1 \sin 2\varphi \quad \ldots . (93)$$

und

$$\tau = \frac{\sigma}{2} \sin 2\varphi + \sigma_1 \cos 2\varphi \quad \ldots .. (94).$$

Selbstverständlich sind die Spannungen der Flächen AD und CD des Elementes $ABCD$ gleich und entgegengesetzt den Spannungen der gegenüberliegenden Flächen BC und AB, und es ist die Faserspannung σ mit dem Zeichen + oder — in Rechnung zu nehmen, je nachdem das Trägerelement innerhalb der gezogenen oder gedrückten Fasern des Trägers liegt.

Durch die Gleichungen (93) und (94) sind also die specifischen Normal- und Tangential- oder Schubspannungen an einer beliebigen Stelle x, y des Trägers in der beliebigen Richtung φ bestimmt, wenn in dieselben für σ und σ_1 die aus (87) und (89) resultirenden Werthe eingesetzt werden, welche den dieser Stelle x zukommenden Werthen von V und $\mathfrak{M}$ entsprechen.

Wir wollen nun diejenigen Werthe des Winkels φ ermitteln, für welche die specifische Normalspannung ν oder die specifische Schubspannung τ zum Maximum wird, wobei zu berücksichtigen kommt, dass für ein und dasselbe Trägerelement die Werthe von σ und σ_1 bei der Differentiation der Gleichungen (93) und (94) constant bleiben.

Bestimmen wir zunächst das Maximum von ν, so muss vor Allem $\frac{d\nu}{d\varphi}$, d. i. $\sigma \sin 2\varphi + 2\,\sigma_1 \cos 2\varphi = 0$ werden, woraus

$$\left.\begin{array}{ll} & \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{-2\sigma_1}{\sigma} \\ \text{oder} & \sin 2\varphi = \frac{2\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2}} \\ \text{und} & \cos 2\varphi = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (95).$$

Für diese Werthe erhält man aus (93):

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2} \quad .\ .\ (96).$$

Von den beiden Vorzeichen des Wurzelausdruckes ist im allgemeinen dasjenige massgebend, welches jenem des σ gleich ist; max ν ist also $+$ und Zug auf der Zugseite, dagegen $-$ und Druck auf der Druckseite.

Der Winkel ψ, unter welchem max ν zur Horizontalen geneigt ist, steht zu jenem φ in einer bestimmten Beziehung. Wird nämlich vorausgesetzt, dass der Scheitel des Winkels φ dem Maximalmomentenpunkte zugekehrt ist, (d. i. jenem Punkte, in welchem $\mathfrak{M}$ zum Maximum oder $V = 0$ wird), wird ferner der in der Längenaxe des Trägers liegende Schenkel fest gedacht und bei der Entstehung des positiven Winkels die Drehung des beweglichen Schenkels nach der Zugseite vorausgesetzt, so erscheint in Fig. 69 für Zug- oder positive Spannungen ψ negativ, dagegen für Druck- oder negative Spannungen ψ positiv und zwar wird (weil der bewegliche Schenkel von ψ stets auf dem beweglichen Schenkel von φ senkrecht steht)

$$\psi = \varphi \mp 90^0 \quad \ldots\ldots\ldots (95\,a),$$

wobei das obere Zeichen für Zug-, das untere für Druckspannungen giltig ist.

Mit Rücksicht auf die obigen Gleichungen (95) und (95 a) wird also für Zugspannungen

$$\left.\begin{array}{ll} & \operatorname{tang} 2\psi = \frac{-2\sigma_1}{\sigma} \\ \text{oder} & \sin 2\psi = \frac{-2\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2}} \\ \text{und} & \cos 2\psi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (97);$$

ferner für Druckspannungen

$$\left.\begin{array}{ll} & \operatorname{tang} 2\psi = \dfrac{2\sigma_1}{\sigma} \\ \text{oder} & \sin 2\psi = \dfrac{-2\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1{}^2}} \\ \text{und} & \cos 2\psi = \dfrac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1{}^2}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (98).$$

Um nun max τ zu erhalten, setzt man $\dfrac{d\tau}{d\varphi} = 0$, also

$$\sigma \cos 2\varphi - 2\sigma_1 \sin 2\varphi = 0,$$

woraus

$$\left.\begin{array}{ll} & \operatorname{tang} 2\varphi = \dfrac{\sigma}{2\sigma_1} \\ \text{oder} & \sin 2\varphi = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1{}^2}} \\ \text{und} & \cos 2\varphi = \dfrac{2\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1{}^2}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (99).$$

Für diese Werthe erhält man aus (94)

$$\mathbf{max}\ \boldsymbol{\tau} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2 + 4\boldsymbol{\sigma}_1{}^2} \quad \ldots (100).$$

Die Richtung von max τ ist hierbei durch jene des beweglichen Schenkels von φ bestimmt. Bei max τ kommt es offenbar nur auf den absoluten Werth des Wurzelausdruckes an; denn die beiden Vorzeichen desselben geben die gleichen aber entgegengesetzten Schubspannungen an, welche die in der Richtung AC zusammenhängenden Flächen pro Flächeneinheit zu verschieben suchen.

Wir wollen nun die beiden Maximalwerthe von ν und τ näher in Betracht ziehen.

Was zunächst das Maximum der Normalspannung, nämlich

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1{}^2}$$

anbelangt, so ergeben sich dafür folgende Specialwerthe.

In den äussersten Fasern, d. i. für $y = e$, geht $\int_y^e y\,dF$ in $\int_y^e y\,dF = 0$ über, es wird daher nach (89) $s_1 = 0$ und hiefür max $\nu_e = \sigma$, wobei nach (87) $\sigma = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,e$, also

$$\max \nu_e = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,e.$$

In der neutralen Faserschichte ist, wegen $y = 0$ nach (87) $\sigma = 0$, somit $\max \nu_0 = \sigma_1 = \frac{V}{z_0 \mathfrak{J}} \int_0^e y\, dF$.

Für alle zwischen den Grenzen $y = e$ und $y = 0$ liegenden Stellen ist aber, wie aus der allgemeinen Gleichung

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \sigma_1^2}$$

unmittelbar hervorgeht, $\max \nu$ jedenfalls grösser als der dieser Stelle entsprechende Werth der specifischen Faserspannung $\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} y$ oder der horizontalen specifischen Schubspannung $\sigma = \frac{V}{z \mathfrak{J}} \int_y^e y\, dF$.

In Folge dessen kann bei Trägern mit sehr dünner Mittelwand (Blechträgern) für gewisse Werthe von y (insbesondere dort, wo sich die Mittelwand an die Gurtung anschliesst), die in schräger Richtung auftretende Normalspannung $\max \nu$ grösser werden als die in den äussersten Fasern herrschende Faserspannung $\max \sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e$. Bezeichnet β die grösste zulässige Inanspruchnahme des Materiales pro Flächeneinheit, so muss selbstverständlich $\max \nu \leqq \beta$.

Da jedoch die horizontale Schubspannung σ_1 mit der Entfernung von der neutralen Axe abnimmt und für $y = e$ in Null übergeht, während bei der Faserspannung σ der gerade entgegengesetzte Fall stattfindet, so ist der Unterschied zwischen $\max \nu$ und $\max \sigma$ in den meisten Fällen der Baupraxis, namentlich bei den an beiden Enden frei aufliegenden Trägern, so gering, dass man sich bei der Querschnittsbestimmung der Träger gewöhnlich nur an die Formel

$$\beta = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e$$

zu halten pflegt, wobei für $\mathfrak{M}$ selbstverständlich das grösste Biegungsmoment der äusseren Kräfte einzusetzen ist. Bei continuirlichen Trägern dagegen, (d. i. solchen Trägern, die ohne Unterbrechung auf mehr als zwei Stützen aufliegen) wird — wie später gezeigt werden wird — über den Mittelstützen gleichzeitig der grösste Werth von V und $\mathfrak{M}$ erreicht, so dass σ und σ_1 in demselben Querschnitte, nämlich über den Mittelstützen, gleichzeitig am grössten werden, daher bei dünnwandigen continuirlichen Trägern die Gleichung

$$\beta = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \sigma_1^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (101)$$

die massgebende ist, worin

$$\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\, y \text{ und } \sigma_1 = \frac{V}{z\,\mathfrak{J}} \int_y^e y\,dF.$$

Was ferner das Maximum der specifischen Schubspannung, nämlich

$$\max \tau = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1^{\,2}}$$

betrifft, so ist leicht einzusehen, dass dieser Werth jenen der grössten horizontalen Schubspannung σ_1 in der neutralen Faserschichte kaum überschreiten wird; denn beim Uebergange von den äussersten Fasern zur neutralen Schichte nimmt σ in demselben Verhältnisse ab, als σ_1 zunimmt, so dass — wie specielle Rechnungen zeigen — in der Baupraxis die Formel (91), nämlich

$$\sigma_1 = \frac{V}{z_0\,\mathfrak{J}} \int_0^e y\,dF$$

für die grösste specifische Schubspannung massgebend ist.

§. 15. **Spannungstrajectorien.** Bestimmt man an irgend einer Stelle eines Querschnittes die Richtung ψ oder φ des dieser Stelle entsprechenden Werthes von max ν oder max τ, verlängert diese Spannungsrichtung bis zum Schnittpunkte mit einem benachbarten Querschnitte, bestimmt für diese Schnittstelle wieder die Richtuug von max ν oder max τ und deren Schnittpunkt mit dem nächst folgenden Querschnitte u. s. w., so erhält man durch diese zwischen den auf einander folgenden Querschnitten liegenden Spannungsrichtungen eine Curve, welche eine Trajectorie der grössten specifischen Normal- oder Schubspannung genannt wird, je nachdem sie die Richtung von max ν oder max τ angibt.

Wir wollen nun der Reihe nach die Trajectorien der grössten specifischen Zug-, Druck- und Schubspannung bestimmen.

a) Trajectorie der grössten Zugspannung. Soll die durch (96) bestimmte specifische Maximal-Normalspannung

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1^{\,2}}$$

in einer Zugspannung bestehen, so hat man von den beiden Vorzeichen des Wurzelausdruckes nur das positive zu berücksichtigen, erhält also

$$+\max \nu = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1^{\,2}}\,.$$

Zur Bestimmung der Spannungsrichtung dient eine der beiden letzten Gleichungen aus (97) nämlich

$$\sin 2\,\psi = \frac{-2\,\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1^{\,2}}} \text{ oder } \cos 2\,\psi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1^{\,2}}}$$

In den äussersten Fasern der Zugseite, d. i. für $y = e$, Fig. 70, ist $\sigma_1 = 0$ und nach (87) $\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e$, daher

$$+\max \nu_e = \sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e \text{ und } \sin 2\psi = 0, \text{ also } \psi = 0^o.$$

In der neutralen Faserschichte, d. i. für $y = 0$ ist $\sigma = 0$ und nach (91) $\sigma_1 = \frac{V}{z_0 \mathfrak{J}} \int_0^e y dF$; es wird hiefür

$$+\max \nu_0 = \sigma_1 = \frac{V}{z_0 \mathfrak{J}} \int_0^e y dF \text{ und } \sin 2\psi = -1,$$

$$\text{also } 2\psi = -90^0 \text{ oder } \psi = -45^0.$$

In den äussersten Fasern der Druckseite, d. i. für $y = -e_1$, wird $\sigma_1 = 0$ und $\sigma = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e_1$, daher

$$+\max \nu_{e_1} = -\frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = 0 \text{ und } \cos 2\varphi = -1,$$

$$\text{also } 2\varphi = 180^0 \text{ oder } \varphi = 90^0.$$

In allen andern Punkten des Querschnitts liegen Grösse und Richtung von max ν zwischen den obigen Grenzwerthen und ergeben sich aus den beiden Gleichungen

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2} \text{ und } \operatorname{tang} 2\psi = \frac{-2\sigma_1}{\sigma},$$

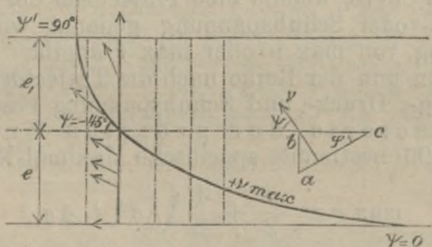


Fig. 70.

wenn für σ und σ_1 die durch die Gleichungen (87) und (89) bestimmten Werthe substituirt werden. Die Fig. 70 gibt ein Bild über den Verlauf einer Trajectorie der grössten Zugspannung max ν. Hiernach verlassen die Trajectorien der grössten Zugspannung die äusserste Druckfaser unter Winkeln von 90^0, schneiden die neutrale Faserschichte unter 45^0 und legen sich, so weit dies bis zum Maximalmomentpunkte möglich ist, asymptotisch an die äusserste Zugfaser.

b) Trajectorie der grössten Druckspannung. Soll sich die durch die Gleichung

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1{}^2}$$

bestimmte specifische Maximal-Normalspannung als Druckspannung äussern, so muss offenbar der Werth von $\max \nu$ negativ sein; es ist daher von den beiden Vorzeichen des Wurzelausdruckes nur das untere zu nehmen und man erhält zur Bestimmung der Maximaldruckspannung die Gleichung

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1{}^2}\,,$$

ferner zur Bestimmung der Spannungsrichtung aus (98) die Gleichung

$$\sin 2\,\psi = \frac{-2\,\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1{}^2}} \text{ oder } \cos 2\,\psi = \frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\,\sigma_1{}^2}}$$

In den äussersten Fasern der Druckseite, d. i. für $y = -e_1$, Fig. 71, ist $\sigma_1 = 0$ und nach (87) $\sigma = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,e_1$; es wird daher für diese Specialwerthe

$$-\max \nu = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,e_1 \text{ und } \sin 2\,\psi = 0, \text{ also } 2\,\psi = 0^0 \text{ und } \psi = 0^0$$

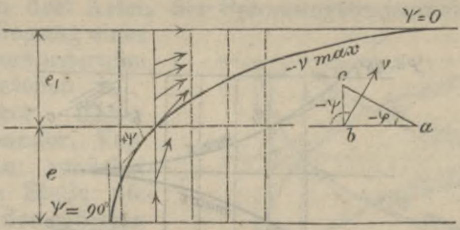


Fig. 71.

In der neutralen Faserschichte, d. i. für $y = 0$, ist $\sigma = 0$ und $\sigma_1 = \frac{V}{z_0\,\mathfrak{J}}\int_0^{e_1} y dF$, wofür

$$-\max \nu = \frac{V}{z_0\,\mathfrak{J}}\int_0^{e_1} y dF \text{ und } \sin 2\,\psi = 1,$$

$$\text{also } 2\,\psi = 90^0 \text{ oder } \psi = 45^0.$$

I n den äussersten Fasern der Zugseite, d. i. für $y = e$, wird nach (87) $\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e$ und $\sigma_1 = 0$, daher

$$- \max \nu_e = \frac{\sigma}{2} - \frac{\sigma}{2} = 0 \text{ und } \cos 2\psi = -1,$$
$$\text{somit } 2\psi = 180^0 \text{ und } \psi = 90^0.$$

Für alle andern Werthe von y erhält man Grösse und Richtung von $-\max \nu$ und ψ aus den beiden Gleichungen

$$\max \nu = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2} \text{ und } \tang \psi = \frac{2\sigma_1}{\sigma}.$$

Die Fig. 71 gibt ein beiläufiges Bild über den Verlauf einer Trajectorie der grössten Druckspannung.

Hiernach verlassen die Trajectorien der grössten Druckspannung die äusserste Zugfaser unter Winkeln von 90°, schneiden die neutrale Faserschichte unter 45° und legen sich, soweit dies bis zum Maximalmomentenpunkte möglich ist, asymptotisch an die äusserste Druckfaser.

c) Trajectorie der grössten Schubspannung. (Fig. 72.) Nach Gleichung (100) ist die in der Richtung φ auftretende specifische Maximal-Schubspannung bestimmt durch

$$\max \tau = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2}$$

und ihre Richtung durch

$$\sin 2\varphi = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2}} \quad \text{oder} \quad \cos 2\varphi = \frac{2\sigma_1}{\sqrt{\sigma^2 + 4\sigma_1^2}}.$$

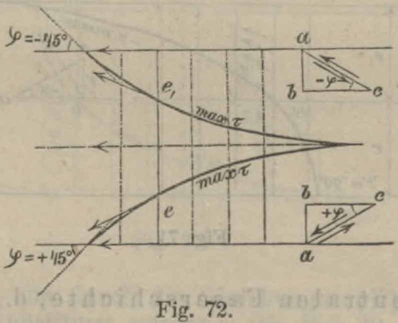


Fig. 72.

I n den äussersten Zugsfasern, d. i. für $y = e$, ist nach (87) $\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e$ und $\sigma_1 = 0$, daher

$$\max \tau_e = \frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{J}} e \text{ und } \sin 2\varphi = 1, \text{ also } 2\varphi = 90^0 \text{ oder } \varphi = 45^0.$$

In der neutralen Faserschichte, d. i. für $y = 0$, ist $\sigma = 0$ und nach (91) $\sigma_1 = \frac{V}{z_0 \mathfrak{J}} \int_0^e y\, dF$, daher

$$\max \tau_0 = \frac{V}{z_0 \mathfrak{J}} \int_0^e y\, dF \text{ und } \sin 2\varphi = 0, \text{ also } \varphi = 0.$$

In den äussersten Druckfasern, d. i. für $y = -e_1$, ist nach (87) $\sigma = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e_1$ und $\sigma_1 = 0$, daher $\max \tau_{e_1} = -\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}} e_1$ und $\sin 2\varphi = -1$, also $2\varphi = -90^0$ und

$$\varphi = -45^0.$$

Für alle anderen Werthe von y ist Grösse und Richtung von $\max \tau$ durch

$$\max \tau = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\, \sigma_1{}^2} \text{ und } \operatorname{tang} 2\varphi = \frac{\sigma}{2\sigma_1}$$

bestimmt, wobei σ aus (87) und σ_1 aus (89) zu berechnen ist. Fig. 72 stellt eine Trajectorie der grössten Schubspannung dar. Hiernach verlassen die Trajectorien der grössten Schubspannung die beiden äussersten Fasern unter 45^0 und legen sich, soweit dies bis zum Maximalmomentenpunkte möglich, asymptotisch an die Längenaxe des Trägers.

§. 16. **Beziehungen zwischen den Spannungstrajectorien.** Die vorgeführten drei Arten der Spannungstrajectorien (Fig. 73), die durch die Biegung eines Trägers hervorgerufen werden, stehen in wechselseitiger Beziehung zu einander. Vergleicht man zunächst für dieselbe Stelle die Richtung ψ der grössten Normalspannung $\max \nu$ mit der grössten Schubspannung $\max \tau$, so folgt aus (95) und (99), dass

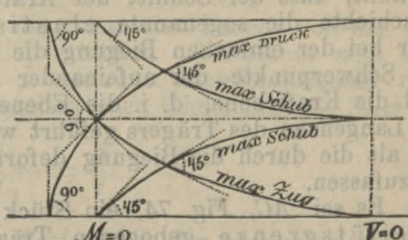


Fig. 73.

$$\operatorname{tang} 2\psi = -\frac{1}{\operatorname{tang} 2\varphi} = -\operatorname{cotg} 2\varphi,$$

also $$2\psi - 2\varphi = 90^0 \text{ oder } \psi = \varphi + 45^0.$$

Es bildet also an jeder Stelle die Richtung der grössten Normalspannung $\max \nu$ mit jener der grössten Schubspannung $\max \tau$ den Winkel von 45^0. Da aber für $+ \max \nu$ nach (97) $\tang 2\psi = \frac{-2\sigma_1}{\sigma}$, dagegen für $- \max \nu$ nach (98) $\tang 2\psi = \frac{2\sigma_1}{\sigma}$, so müssen die Richtungen der grössten Zugspannung $+ \max \nu$ auf jenen der grössten Druckspannung $- \max \nu$ senkrecht stehen.

Substituirt man die Werthe von $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ aus (95), für welche die specifische Normalspannung ν zum Maximum wird, in die Gleichung (94), so wird hiefür die specifische Schubspannung $\tau = 0$, d. h. die Trajectorien der grössten Normalspannung bestimmen jene Flächenelemente, längs welcher keine Schubspannungen stattfinden.

Setzt man ferner die durch (99) bestimmten Werthe von $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$, für welche τ zum Maximum wird, in die Gleichung (93), so wird hiefür $\nu = \frac{1}{2}\sigma$, d. h. die durch die Trajectorien der grössten Schubspannung bestimmten Flächenelemente erfahren die specifische Normalspannung $\frac{1}{2}\sigma = \frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{J}}y$.

Am deutlichsten finden sich die Spannungstrajectorien in der Natur in den Knochen und Bäumen, wo die Fibernbildung mit der zunehmenden Belastung fortschreitet, ausgebildet.

§. 17. **Gleichung der elastischen Linie.** Es wurde bereits erwähnt, dass der Schnitt der Kraftebene mit der neutralen Faserschichte die sogenannte elastische Linie bestimmt. Da aber bei der einfachen Biegung die neutrale Faserschichte durch die Schwerpunkte der aufeinander folgenden Querschnitte geht, und die Kraftebene, d. i. die Ebene der äusseren Kräfte, durch die Längenaxe des Trägers geführt wird, so ist die elastische Linie nur als die durch die Biegung deformirte Längenaxe des Trägers aufzufassen.

Es sei AC, Fig. 74, ein Stück des innerhalb der Elasticitätsgrenze gebogenen Trägers und die Curve AC die elastische Linie. Beziehen wir dieselbe auf ein rechtwinkeliges Axenkreuz AX und AY, das in der Kraftebene liegt und dessen X-Axe zu der ursprünglichen Lage der Längenaxe vor der Deformirung parallel lauft, so kann wegen der sehr geringen Biegung das unendlich kleine Bogenstück CC_1 als ein Kreisbogen angesehen werden, dessen Mittelpunkt O mit dem Schnittpunkte O der beiden Normalen CD und C_1D_1 zusammenfällt, und dessen Halbmesser $OC = r$ den Krümmungsradius der elastischen Linie für diese Stelle bildet.

Legt man $C_1E \parallel CD$, so ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke C_1D_1E und CC_1O die Proportion:

$$\frac{ED_1}{CC_1} = \frac{EC_1}{CO}.$$

Fig. 74.

In dieser Proportion stellt offenbar $\frac{ED_1}{CC_1}$ die relative Längenänderung vor, welche die äussersten Fasern von der ursprünglichen Länge $DE = CC_1$ erleiden. Bezeichnet man die Spannung dieser Fasern mit β und den Elasticitätsmodul des Materiales mit E, so ist bekanntlich nach Gleichung (1), Seite 6,

$$\frac{ED_1}{CC_1} = \frac{\beta}{\varepsilon}.$$

Setzt man überdies die Entfernung der äussersten Fasern von der elastischen Linie, nämlich $C_1E = e$, so geht die obige Proportion über in

$$\frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{e}{r},$$

woraus $r = \frac{e}{\beta}\,\varepsilon$ oder

$$\frac{1}{r} = \frac{\beta}{e\,\varepsilon}.$$

Drückt man nun r durch die Coordinaten des Punktes C aus, so ist bekanntlich nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2},},$$

wobei $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha$ ist, wenn α den Winkel bezeichnet, den die Tangente an die Curve AC im Punkte C mit der X-Axe bildet. Da jedoch wegen der vorausgesetzten sehr kleinen Biegung, $\sphericalangle\,\alpha$ sehr klein ist, so kann man die unendlich kleine Grösse $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ in der Summe vernachlässigen, und erhält alsdann

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2},$$

daher mit Rücksicht auf den früheren Werth

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\beta}{e\,\varepsilon} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102).$$

Da ferner nach Gleichung (86)

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J}, \text{ also } \frac{\beta}{e} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}},$$

so erhält man hiefür aus (102)

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

als Diffenrential-Gleichung der elastischen Linie.

Aus (103) folgt durch Integration

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (104)$$

und durch nochmalige Integration

$$y = \frac{1}{\varepsilon}\int dx \int \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{J}}\,dx \quad \ldots\ldots \quad (105).$$

Ist der Querschnitt für die ganze Länge des Trägers constant, so ist auch $\mathfrak{J}$ constant und alsdann die Formbestimmung der elastischen Linie ziemlich einfach.

Für jenen Punkt der elastischen Linie, für welchen $\mathfrak{M} = 0$, wird nach (103) $r = \infty$; an diesem Punkte wechselt $\mathfrak{M}$, also auch r das Vorzeichen, es ist daher dieser Punkt ein sogenannter Wende- oder Inflexionspunkt der elastischen Linie. Hiernach liegen also die Wendepunkte der elastischen Linie in jenen Punkten der Längenaxe, in welchen $\mathfrak{M} = 0$ ist.

In den höchsten, beziehungsweise tiefsten Punkten der elastischen Linie wird die Tangente zur Abscissenaxe parallel, also $\alpha = 0$ und tang $\alpha = 0$.

Man findet daher die Punkte der grössten Durchbiegung, wenn man den Werth von $\frac{dy}{dx}$ gleich Null setzt und hieraus die entsprechenden Werthe von x bestimmt.

§. 18. **Gefährlicher Querschnitt.** Unter dem gefährlichen Querschnitte versteht man denjenigen, in welchem die grösste Anspruchnahme des Materiales stattfindet, in welchem also, bei entsprechender Ueberlastung des Trägers, der Bruch desselben erfolgen würde. Bei prismatischen Trägern, deren Querschnitte in den Breitendimensionen nicht sehr verschieden sind, bei denen also die Schubspannung σ gegen die Normalspannung σ_1 verhältnissmässig gering ist, geht der gefährliche Querschnitt gewöhnlich durch jenen Punkt der Längenaxe, für welchen das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ der äusseren Kräfte zum Maximum wird.

Die Dimensionen dieses Querschnittes sind dann aus einer der unter (86) vorgeführten Gleichungen, d. i. aus

$$\mathfrak{M}_{max} \begin{cases} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J} \\ = \frac{\beta_1}{e_1} \mathfrak{J} \end{cases}$$

zu bestimmen.

Sind mehrere Maxima von $\mathfrak{M}$ vorhanden, die zum Theil positiv, zum Theil negativ sind, so ist offenbar der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen die Zugspannung $\beta = \frac{\mathfrak{M} e}{\mathfrak{J}}$ oder die Druckspannung $\beta_1 = \frac{\mathfrak{M} e_1}{\mathfrak{J}}$ am grössten wird.

§. 19. **Träger von constantem Biegungswiderstande.** Man versteht darunter gewöhnlich jene Träger, bei denen die verschiedenen Querschnitte den bezüglichen Biegungsmomenten der äusseren Kräfte proportional gemacht werden, bei denen also die Querschnitte zunächst an die Gleichung $\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J} = \frac{\beta_1}{e_1} \mathfrak{J}$ gebunden sind. Da sich diese Träger, gegenüber jenen von constanten Querschnitten, durch eine bedeutende Materialersparniss auszeichnen, so sind sie besonders für grosse Spannweiten empfehlenswerth.

Die Dimensionen jener Querschnitte, für welche $M = 0$, müssen aber so gross gewählt werden, dass sie den in diesen Querschnitten auftretenden Transversalkräften den hinreichenden Widerstand gegen Abscheeren entgegen setzen; für dieselben wird daher die Gleichung (91) zur Anwendung kommen.

Die Gestalt der Träger von constantem Biegungswiderstand hängt übrigens von der Querschnittsform, der Unterstützungs- und Belastungsweise ab.

Sind alle Querschnitte des Trägers einander ähnlich, und für zwei dieser ähnlichen Querschnitte b, b_1 deren Breiten, h, h_1 deren Höhen, e, e_1 die Abstände der äussersten Fasern von der neutralen Faserschichte, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}_1$ die Trägheitsmomente und $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1$ die auf diese Querschnitte einwirkenden statischen Momente der äusseren Kräfte, so ist nach (86)

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = \frac{\beta}{e}\mathfrak{J} : \frac{\beta}{e_1}\mathfrak{J}_1,$$

$$= \frac{\mathfrak{J}}{e} : \frac{\mathfrak{J}_1}{e_1},$$

oder weil bei ähnlichen Querschnitten

$$\mathfrak{J} : \mathfrak{J}_1 = bh^3 : b_1 h_1{}^3,$$

und

$$e : e_1 = h : h_1,$$

so wird

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = bh^2 : b_1 h_1{}^2 \quad \ldots\ldots \quad (106),$$

wodurch die Form des Trägers bei gegebener Belastungsweise im Allgemeinen bestimmt ist.

Hat man nämlich für einen Querschnitt, auf welchen sich das Moment $\mathfrak{M}_1$ bezieht, die Grösse b_1 und h_1 ermittelt, und setzt den bekannten Ausdruck $\frac{b_1 h_1{}^2}{\mathfrak{M}} = C$, so wird für einen anderen Querschnitt, auf welchen das Moment $\mathfrak{M}$ einwirkt, nach (106)

$$bh^2 = C\,\mathfrak{M} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (107),$$

oder weil in ähnlichen Querschnitten das Verhältniss $\frac{b}{h} = \frac{b_1}{h_1}$ constant, also im Allgemeinen gleich n ist, so wird, wegen $b = n\,h$, $h^3 = \frac{C}{n}\mathfrak{M}$.

Die Gleichung (106) gilt auch für Träger von constanter Biegungsfestigkeit mit rechteckigem Querschnitte; denn für das Rechteck ist $\mathfrak{J} = \frac{1}{12} bh^3$ und $e = \frac{h}{2}$, also

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = \frac{\mathfrak{J}}{e} : \frac{\mathfrak{J}_1}{e_1}$$
$$= bh^2 : b_1 h_1^2.$$

Weil ferner für den kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser d

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi}{64} d^4 \text{ und } e = \frac{d}{2}, \text{ so wird}$$
$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = d^3 : d_1^3.$$

Besteht die Belastung des Trägers nur aus isolirten Lasten, so ist nach der Gleichung (53) des § 12, wegen $g = 0$,

$$\mathfrak{M} = Dx - \Sigma P (x-a),$$

also $\mathfrak{M}$ in Bezug auf x vom ersten Grade, daher allgemein

$$\mathfrak{M} = \alpha x + \beta.$$

Für diesen Werth geht die Gleichung (107) über in

$$bh^2 = C (\alpha + \beta x).$$

Bei constanter Höhe h ist hiernach der Grundriss des Trägers geradlinig begrenzt.

Ist dagegen die Breite b constant, so hat der Aufriss des Trägers eine parabolische Begrenzung.

Ist auch der Träger seiner ganzen Länge nach gleichmässig belastet, so ist nach (53)

$$\mathfrak{M} = Dx - \Sigma P (x-a) - gx^2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2,$$

daher

$$bh^2 = C (\alpha + \beta x + \gamma x^2).$$

Bei constanter Höhe h ist demnach der Grundriss parabolisch, dagegen bei constanter Breite b der Aufriss elliptisch oder hyperbolisch begrenzt.

Für den Krümmungshalbmesser r der elastischen Linie ist nach Gleichung (102) und (103)

$$r = \frac{\varepsilon \mathfrak{J}}{\mathfrak{M}} = \frac{e\,\varepsilon}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots (108).$$

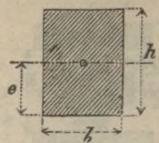
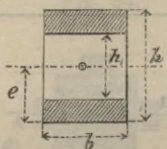
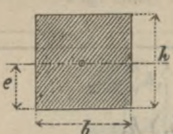
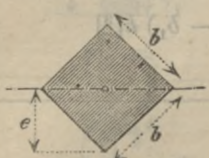
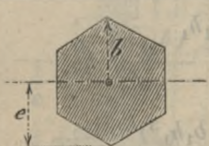
Wenn daher der Quotient $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{M}}$ für alle Querschnitte des Trägers gleiche Werthe annimmt, oder wenn bei einem Träger von constantem Biegungswiderstand die Höhe h desselben, also auch e constant ist, so ist auch r constant, und alsdann die elastische Linie ein Kreisbogen.

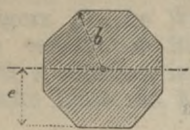
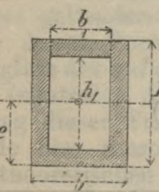
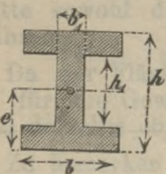
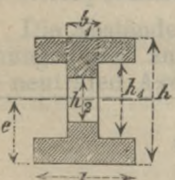
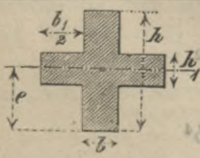
§. 20. **Tabelle der Trägheitsmomente der im Bauwesen öfter vorkommenden Querschnittsformen.** Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen die der Biegungselasticität geradaxiger Träger geltenden Formeln entwickelt und haben gesehen, dass in allen diesen Formeln das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ der Querschnitte bezüglich der auf der Kraftebene senkrecht stehenden Schwerpunktsaxe (neutralen Axe) eine Hauptrolle spielt. Eine specielle Ableitung dieser Trägheitsmomente für die einfacheren Querschnitte würde hier umsoweniger am Platze sein, als dieselbe bereits in der theoretischen Mechanik vorgeführt wurde; wir begnügen uns daher mit der Zusammenstellung der Trägheitsmomente für eine Reihe von praktisch wichtigen Querschnitten, wollen jedoch später die Bestimmung der Trägheitsmomente für complicirtere Querschnitte sowohl durch Rechnung als auch durch Construction vorführen.

Da der Flächeninhalt F des Querschnittes unter anderem auch für die Gewichtsberechnung des Trägers dienlich ist, so wurde derselbe ebenfalls in der folgenden Tabelle aufgenommen.

Zu bemerken ist nur noch, dass man sich bei jedem Querschnitt der Tabelle, die durch den Schwerpunkt desselben gehende neutrale Axe horizontal zu denken hat; sie ist übrigens durch eine strichpunktirte Linie angedeutet worden.

Die Abstände e und e_1 bedeuten wieder die bezüglichen Entfernungen der äussersten gezogenen und gedrückten Fasern von der neutralen Axe.

 Fig. 75.	$F = b \, . \, h$ $e = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12} \, bh^3.$
 Fig. 76.	$F = b \, (h - h_1)$ $e = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{b \, (h^3 - h_1{}^3)}{12}$
 Fig. 77.	$F = b^2$ $e = \frac{b}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{b^4}{12}$
 Fig. 78.	$F = b^2$ $e = \frac{b}{\sqrt{2}}$ $\mathfrak{J} = \frac{b^4}{12}$
 Fig. 79.	$F = 2{\cdot}598 \, b^2$ $e = 0{\cdot}866 \, b$ $\mathfrak{J} = 0{\cdot}5413 \, b^4$
 Fig. 80.	$F = 2{\cdot}598 \, b^2$ $e = b$ $\mathfrak{J} = 0{\cdot}5413 \, b^4$

 Fig. 81.	$F = 2{\cdot}828\, b^2$ $e = 0{\cdot}924\, b$ $\mathfrak{J} = 0{\cdot}638\, b^4$
 Fig. 82.	$F = bh - b_1 h_1$ $e = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}(bh^3 - b_1 h_1{}^3)$
 Fig. 83.	$F = bh - (b - b_1)\, h_1$ $e = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}[bh^3 - (b - b_1)\, h_1{}^3]$
 Fig. 84.	$F = b\,(h - h_1) + b_1\,(h_1 - h_2)$ $e = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}[b\,(h^3 - h_1{}^3) + b_1\,(h_1{}^3 - h_2{}^3)]$
 Fig. 85.	$F = bh + b_1 h_1$ $e = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}(bh^3 + b_1 h_1{}^3)$

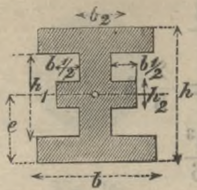
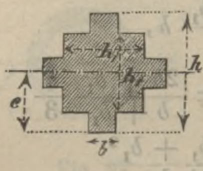
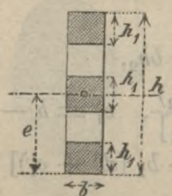
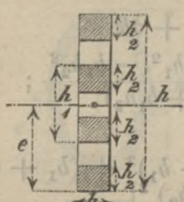
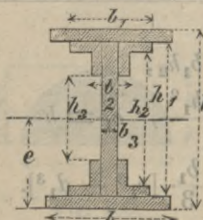
 Fig. 86.	$F = bh - (b - b_2)\, h_1 + b_1 h_2$ $e = \dfrac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}\,[bh^3 - (b - b_2)\, h_1{}^3 + b_1 h_2{}^3]$
 Fig. 87.	$F = bh + (h_1 - b)\, h_1 + (h - h_1)\, b$ $e = \dfrac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}\,[bh^3 + (h_1 - b)\, h_1{}^3 + (h - h_1)\, b^3]$
 Fig. 88.	$F = 3\, bh_1$ $e = \dfrac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \dfrac{b}{12}\,[9h_1{}^3 + 6hh_1\,(h - 2h_1)]$
 Fig. 89.	$F = 4\, bh_2$ $e = \dfrac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \dfrac{b}{12}\,[16\, h_2{}^3 + 6\, hh_2\,(h - 2\, h_2)$ $+ 6\, h_1\, h_2\,(h_1 - 2h_2)]$
 Fig. 90.	$F = b\,(h - h_1) + b_1\,(h_1 - h_2)$ $+ b_2\,(h_2 - h_3) + b_3 h_3$ $e = \dfrac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}\,[b\,(h^3 - h_1{}^3) + b_1\,(h_1{}^3 - h_2{}^3)$ $+ b_2\,(h_2{}^3 - h_3{}^3) + b_3 h_3{}^3]$

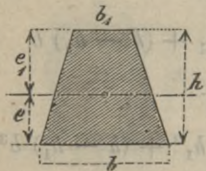
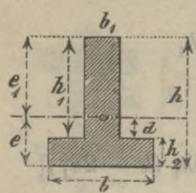
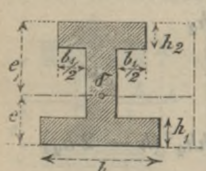
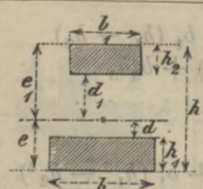
 Fig. 91.	$F = \frac{bh}{2}$ $e_1 = \frac{h}{3},\quad e = \frac{2}{3}\,h$ $\mathfrak{J} = \frac{bh^3}{36}$
 Fig. 92.	$F = \frac{b + b_1}{2}\,h,$ $e = \frac{b + 2b_1}{b + b_1}\,\frac{h}{3};\quad e_1 = \frac{2b + b_1}{b + b_1}\,\frac{h}{3},$ $\mathfrak{J} = \frac{b^2 + 4bb_1 + b_1^{\,2}}{36\,(b + b_1)}$
 Fig. 93.	$F = b_1 h_1 + b h_2,$ $e = \frac{bh_2^{\,2} + b_1 h_1\,(h + h_2)}{2\,[bh - (b - b_1)\,h_1]},\quad e_1 = h - e,$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{3}\,[b\,e^3 - d^3) + b_1\,(d^3 + e_1)]$
 Fig. 94.	$F = bh_1 + b_1 h_2 + \delta h$ $e = \frac{\delta h^2 + 2b_1 h_2 h + bh_1^{\,2} - b_1 h_2^{\,2}}{2\,(\delta h + bh_1 + b_1 h_2)};$ $e_1 = h - e$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{3}\,[(b + \delta)\,e^3 - b\,(e - h_1)^3 + (b_1 + \delta)\,e_1^{\,3} - b_1\,(e_1 - h_2)^{\,3}]$
 Fig. 95	$F = bh_1 + b_1 h_2;$ $e = \frac{b_1 h_2\,(2h - h_2) + bh_1^{\,2}}{2\,(bh_1 + b_1 h_2)},\quad e_1 = h - e$ $\mathfrak{J} = \frac{b}{3}\,[e^3 - d^3] + \frac{b_1}{3}\,[e_1^{\,3} - d_1^{\,3}].$

Fig. 96.

$$F = \frac{\pi}{4} d^2$$

$$e = e_1 = \frac{d}{2}$$

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi}{64} d^4 = 0{\cdot}0491\, d^4.$$

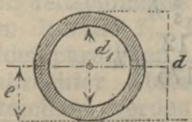


Fig. 97.

$$F = \frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^{\,2})$$

$$e = e_1 = \frac{d}{2}$$

$$\mathfrak{J} = 0{\cdot}0491\, (d^4 - d_1^{\,4})$$

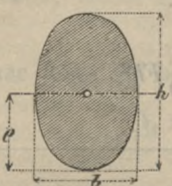


Fig. 98

$$F = \frac{\pi}{4} bh$$

$$e = e_1 = \frac{h}{2}$$

$$\mathfrak{J} = \frac{\pi}{64} bh^3 = 0{\cdot}0491\, bh^3$$

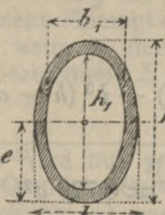


Fig. 99.

$$F = \frac{\pi}{4} (bh - b_1 h_1)$$

$$e = e_1 = \frac{h}{2}$$

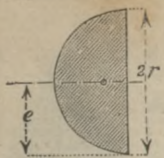
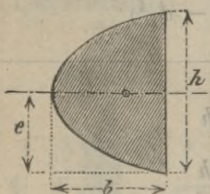
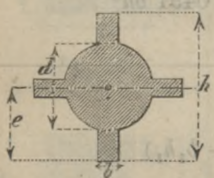
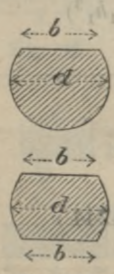
$$\mathfrak{J} = 0{\cdot}0491\, (bh^3 - b_1 h_1^{\,3})$$

Fig. 100.

$$F = \frac{r^2 \pi}{2}$$

$$e = 0.5765\, r, \; e_1 = 0{\cdot}4244\, r$$

$$\mathfrak{J} = 0{\cdot}1098\, r^4$$

 Fig. 101.	$F = \frac{r^2\pi}{2}$ $e = e_1 = r$ $\mathfrak{J} = 0{\cdot}3927\, r^4.$
 Fig. 102.	$F = \frac{2}{3}\, bh$ $e = \frac{2}{5}\, h,\ e_1 = \frac{3}{5}\, h$ $\mathfrak{J} = \frac{8}{175}\, bh^3 = \frac{12}{175}\, Fh$
 Fig. 103.	$F = \frac{2}{3}\, bh$ $e = e_1 = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{30}\, bh^3 = \frac{1}{20}\, Fh^2$
 Fig. 104.	$F = \frac{\pi}{4}\, d^2 + 2b\,(h - d)$ $e = e_1 = \frac{h}{2}$ $\mathfrak{J} = \frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16}\, d^4 + b\,(h^3 - d^3) + b^3\,(h - d)\right]$
 Fig. 105.	$\left\{\begin{array}{l} b = \frac{d}{3},\ e = 0{\cdot}476\, d,\ F = 0{\cdot}779\, d^2, \\ \mathfrak{J} = 0{\cdot}048\, d^4, \\ b = \frac{d}{2},\ e = 0{\cdot}447\, d,\ F = 0{\cdot}763\, d^2, \\ \mathfrak{J} = 0{\cdot}044\, d^4, \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} b = \frac{d}{3},\ e = e_1 = 0{\cdot}471\, d,\ F = 0{\cdot}714\, d^2, \\ \mathfrak{J} = 0{\cdot}047\, d^4, \\ b = \frac{d}{2},\ e = e_1 = 0{\cdot}433\, d,\ F = 0{\cdot}711\, d^2, \\ \mathfrak{J} = 0{\cdot}043\, d^4. \end{array}\right.$

Es wurde bereits erwähnt, dass sich die in dieser Tabelle zusammengestellten Werthe der Trägheitsmomente $\mathfrak{J}$, verschiedener Querschnittsflächen F, auf die durch die Schwerpunkte dieser Flächen gehenden neutralen Axen beziehen.

Es erübrigt uns nur noch der bekannten Methode Erwähnung zu thun, mittelst welcher man im Stande ist, das Trägheitsmoment einer Querschnittsfläche F, welches in Bezug auf deren Schwerpunktsaxe bekannt ist, auf jede andere zu dieser parallele Axe zu übertragen.

Um diese Uebertragungsformel abzuleiten, bestimmen wir die Trägheitsmomente $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J}_1$ einer beliebigen Querschnittsfläche vom Inhalte F, Fig. 106, bezüglich der beiden parallelen Axen ZZ' und Z_1Z_1', deren senkrechter Abstand von einander mit a bezeichnet werden möge. Ist nämlich dF ein beliebiges Flächenelement vom ganzen Querschnitte F und y sein Abstand von ZZ', so ist bekanntlich das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ bezogen auf ZZ' bestimmt durch

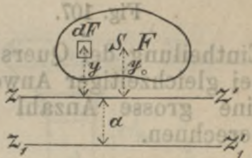


Fig. 106.

$$\mathfrak{J} = \Sigma\, y^2\, dF,$$

ferner jenes $\mathfrak{J}_1$ bezüglich der Axe $Z_1Z'_1$

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_1 &= \Sigma\,(a+y)^2\, dF \\ &= \Sigma\,(a^2\, dF + 2a\, y dF + y^2 dF) \\ &= a^2\, \Sigma\, dF + 2a\, \Sigma\, y dF + \Sigma\, y^2 dF\end{aligned}$$

Da nun $\Sigma\, y^2\, dF = \mathfrak{J}$, ferner $a^2\, \Sigma\, dF = a^2 F$ und $\Sigma\, y \,.\, dF$ das statische Moment des ganzen Querschnittes F bezüglich zz' vorstellt, also wenn y_0 den Abstand des Schwerpunktes S der Fläche von zz' bezeichnet, $\Sigma\, y\, dF = y_0\, F$, so wird für diese Werthe

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J} + 2a\, y_0\, F + a^2\, F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)\,.$$

Wird nun $y_0 = 0$, d. h. geht ZZ' durch den Schwerpunkt S der Querschnittsfläche, so fällt das zweite Glied der vorliegenden Gleichung (α) weg, und man erhält

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J} + a^2\, F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (109)\,,$$

d. h. das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_1$ einer Fläche F in Bezug auf eine beliebige Axe Z_1Z_1', ist gleich dem Trägheitsmomente $\mathfrak{J}$ dieser Fläche bezüglich ihrer zu Z_1Z_1' parallelen Schwerpunktsaxe, vermehrt um das Product aus dem Quadrat des Abstandes a beider Axen mit dem Inhalte F der Fläche.

Aus der Gleichung (109) ergibt sich auch umgekehrt, wenn $\mathfrak{J}_1$, a und F bekannt sind,

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 - a^2\, F \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (110)\,.$$

Beispiel. Man soll das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_1$ des Rechteckes, Fig. 107 bezüglich der durch seine Grundlinie gehenden Axe $Z_1 Z_1$ bestimmen.

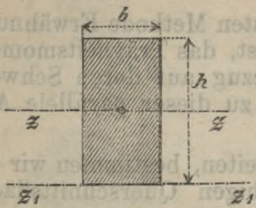


Fig. 107.

Nach der Tabelle ist für die Schweraxe ZZ das Trägheitsmoment $\mathfrak{J} = \frac{1}{12} bh^3$.

Da nun $F = bh$ und $a = \frac{h}{2}$, so wird nach (109)

$$\mathfrak{J}_1 = \tfrac{1}{12} bh^3 + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}\, b h^3.$$

Nach den bisherigen Erörterungen kann man nun durch eine zweckmässige Eintheilung der Querschnitte in solche, wie sie die Tabelle bietet, bei gleichzeitiger Anwendung der Gleichung (109) oder (110), für eine grosse Anzahl von Querschnitten die Trägheitsmomente berechnen.

§. 21. **Bestimmung des Trägheitsmomentes einer unregelmässigen Fläche.** Bei unregelmässig begrenzten Flächen bestimmt man das Trägheitsmoment am besten nach der bekannten Simpson'schen Regel.

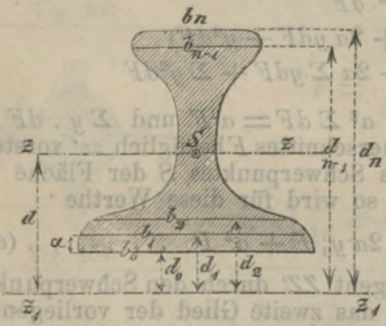


Fig. 108.

Um mittelst derselben z. B. das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_1$ des Schienenprofils, Fig. 108, bezüglich der Axe $Z_1 Z_1$ zu ermitteln, so zerlege man die Fläche durch zur Axe $Z_1 Z_1$ parallele Sehnen, welche von einander den gleichen Abstand a haben, in eine **gerade** Anzahl von Streifen, und es ist dann, wenn die Sehnen der Reihe nach die Längen $b_0, b_1, b_2 \ldots b_n$ haben und von $Z_1 Z_1$ bezüglich um d_0, $d_1, d_2 \ldots d_n$ abstehen,

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{a}{3}\Big[\, b_0 d_0^2 + b_n d_n^2 + 4\,(b_1 d_1^2 + b_3 d_3^2 + \ldots + b_{n-1}\, d_{n-1}^2) + 2\,(b_2 d_2^2 + b_4 d_4^2 + \ldots + b_{n-2}\, d_{n-2})\Big] \quad . \; . \; (111) .$$

Wollte man hieraus das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ bezüglich der zur $Z_1 Z_1$ parallelen Schwerpunktsaxe ZZ finden, so bestimme man zunächst den Schwerpunkt S am bequemsten empirisch, indem man ein Modell der Querschnittsfläche aus Carton herstellt, und dessen in der Symmetrieaxe liegenden Schwerpunkt durch Balanciren auf einer Schneide ermittelt. Ist nun die Entfernung d der beiden Axen ZZ und $Z_1 Z_1$ gefunden, so ergibt sich nach (110)

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 - d^2 F,$$

wobei die Grösse F der Querschnittsfläche am einfachsten mittelst eines Planimeters, oder in Ermanglung eines solchen nach der Formel

$$F = a\left(\frac{b_0 + b_n}{2} + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1}\right)$$

ermittelt werden kann.

Uebrigens lässt sich der Schwerpunkt S und das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}_1$ eines Querschnittes, Fig. 109, in Bezug auf die Axe $Z_1 Z_1$, annähernd durch Zerlegung des ganzen Querschnittes in, zur betreffenden Axe, parallele Streifen von trapezförmiger Gestalt bestimmen.

Bezeichnet man nämlich mit $b_1, b_2, \ldots b_n$ die mittleren Breiten der einzelnen Trapeze, ferner mit $h_1, h_2, \ldots h_n$ deren Höhen, und mit $d_1, d_2, \ldots d_n$ die mittleren Entfernungen derselben von $Z_1 Z_1$, so ist zunächst das statische Moment der Summe aller dieser Elementarflächen in Bezug auf $Z_1 Z_1$ offenbar gleich dem statischen Momente der ganzen Querschnittfläche F bezogen auf dieselbe Axe. Ist also $F \doteq b_1 h_1 + b_2 h_2 + \ldots + b_n h_n$ und d der Abstand des gesuchten Schwerpunktes S von $Z_1 Z_1$, so wird

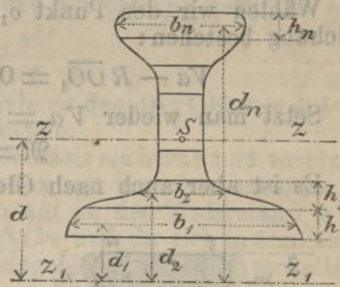


Fig. 109.

$$F \,.\, d \doteq b_1 h_1 d_1 + b_2 h_2 d_2 + \ldots + b_n h_n d_n,$$

also
$$d \doteq \frac{b_1 h_1 d_1 + b_2 h_2 d_2 + \ldots + b_n h_n d_n}{F}.$$

Es wird ferner

$$\mathfrak{J}_1 \doteq b_1 h_1 d_1^2 + b_2 h_2 d_2^2 + \ldots + b_n h_n d_n^2,$$

und hieraus auch das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ für die Schwerpunktsaxe ZZ, nach (110),

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 - F d^2.$$

Die Bestimmung des Schwerpunktes und des Trägheitsmomentes einer beliebigen, ebenen Fläche lässt sich auch sehr einfach graphisch vornehmen, und verweisen wir diesfalls auf unsere graphische Statik.

Zusatz. Bei den auf Biegungselasticität in Anspruch genommenen Trägern lässt sich das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ und somit auch das Widerstandsmoment $\frac{\beta}{e}\mathfrak{J}$ ihrer Querschnitte auf Grundlage der Gleichungen (86) und (87) leicht ermitteln.

Bedeutet nämlich V die auf das Trägerfragment AC, Fig. 110, thätige Transversalkraft, und sind R und R_1 die Resultanten der im Querschnitte mn herrschenden Zug- und Druckkräfte, so muss — wie bereits gezeigt wurde — zur Sicherung gegen Verschiebung im horizontalen Sinne $R = R_1$ sein, und damit keine Drehung eintreten könne, so muss die algebraische Summe der auf AC thätigen Kraftmomente bezüglich irgend eines in der Ebene dieser Kräfte gelegenen Punktes Null werden.

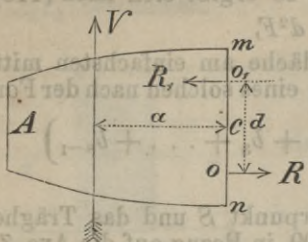


Fig. 110.

Wählen wir den Punkt o_1 als Drehpunkt, so muss also die Gleichung bestehen:

$$Va - R\,\overline{OO_1} = 0, \text{ oder } Va = R\,\overline{OO_1}.$$

Setzt man wieder $Va = \mathfrak{M}$, so wird für $\overline{OO_1} = d$,

$$\mathfrak{M} = Rd.^{*})$$

Es ist aber auch nach Gleichung (86)

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J}$$

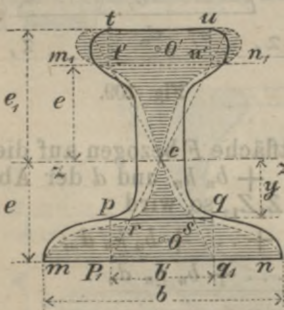


Fig. 111.

wobei bekanntlich β die Zugspannung der äussersten gezogenen Fasern und e deren Entfernung von der neutralen Axe bedeutet.

Aus den beiden Gleichungen für $\mathfrak{M}$ folgt nun

$$\mathfrak{J} = \frac{e}{\beta}\,Rd.$$

Wir wollen nun hiernach zunächst das Trägheitsmoment für den in Fig. 111 dargestellten Querschnitt bezüglich der neutralen Axe ZZ bestimmen.

Ist b die Breite der untersten Faserschichte mn und die in derselben herrschende Spannung β, so ist der Widerstand der untersten Faserschichte gleich $b\beta$, nimmt man überdiess β

---

*) Ist d die Entfernung der Schwerpunkte der beiden Gurte eines Blech- oder Fachwerkträgers, so kann man die in einem der beiden Gurte herrschende Zug- oder Druckspannung R bestimmen aus:

$$R = \frac{\mathfrak{M}}{d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (112),$$

wobei $\mathfrak{M}$ das auf den betreffenden Trägerquerschnitt wirkende Biegungsmoment bezeichnet.

als Masseinheit für die Spannungswiderstände an, so repräsentirt dann bereits b den in der untersten Faserschichte herrschenden Widerstand.

Um nun den Widerstand w einer beliebigen Faserschichte pq zu ermitteln, welche von ZZ um das Stück y absteht und die Breite b' hat, so berücksichtige man, dass wenn die specifische Faserspannung in dieser Schichte σ ist, nach Gleichung (87) sich verhält

$$\sigma : \beta = y : e, \text{ woraus } \sigma = \frac{\beta y}{e};$$

oder wegen $$\beta = 1,\ \sigma = \frac{y}{e};$$

es wird somit der Widerstand in der Schichte pq bestimmt sein

durch $$w = \sigma\, b' = \frac{yb'}{e}.$$

w ist also die vierte Proportionale zu den drei Grössen y, b', e und lässt sich leicht graphisch ermitteln.

Man projicire nämlich pq auf die Basis mn herab und verbinde die Endpunkte p_1 und q_1 der Projection mit dem Schwerpunkte C, so schneiden diese Verbindungslinien auf pq den Widerstand $w = rs$ ab; denn es ist das $\triangle Cp_1q_1 \sim \triangle Crs$ und da sich in ähnlichen Dreiecken die Grundlinien wie die zugehörigen Höhen verhalten,

so ist $b' : w = e : y$, woraus wirklich $w = \frac{b'y}{e}$.

Analog bestimmt man die Widerstände der andern Faserschichten auf der unter ZZ liegenden Querschnittshälfte, verbindet deren Endpunkte durch eine continuirliche Linie und erhält so die schraffirte Fläche.

Denkt man sich nun den Theil $CrmnsC$ der schraffirten Figur mit der Spannung β der untersten Schichte, die als Masseinheit gewählt wurde, gleichförmig in Anspruch genommen, oder mit andern Worten: multiplicirt man den Flächeninhalt F der schraffirten Figur $CrmnsC$ mit β, so erhält man offenbar den totalen Zugswiderstand $R = F . \beta$ der untersten Querschnittshälfte, dessen Angriffspunkt selbstverständlich in dem Schwerpunkte o dieser schraffirten Figur liegt, die wir mit Recht „die Widerstandsfläche mit constanter Zugspannung" nennen können.

Auf dieselbe Weise bestimmt man den gesammten Druckwiderstand $R_1 = R$ des über der neutralen Axe ZZ liegenden Querschnittstheiles, wobei man aber, wenn die oberste Faserschichte tu von ZZ nicht denselben Abstand hat wie die unterste mn, die Reduction der Widerstände der einzelnen Schichten bezüglich jener Schichte m_1n_1 vornehmen muss, die von ZZ eben so weit absteht als wie die unterste mn, deren Faserspannung als Einheit angenommen wurde.

Wird jedoch der ganze Querschnitt durch die neutrale Axe ZZ in zwei congruente Hälften getheilt, so braucht man nur wegen $R = R_1$ den Angriffspunkt o nach o_1 symmetrisch zu ZZ zu übertragen.

Hat man nun R so wie die Distanz $OO_1 = d$ ermittelt, so ist nach Obigem $\mathfrak{M} = R\,d$ und das Trägheitsmoment

$$\mathfrak{J} = \frac{e}{\beta} Rd, \text{ weil aber } R = F\beta,$$

so wird $$\mathfrak{J} = Fde \quad \ldots\ldots\ldots \quad (113),$$

wobei (wie schon bemerkt wurde) F den Flächeninhalt der unter der neutralen Axe ZZ liegenden (schraffirten) Widerstandsfläche mit constanter Spannung β bedeutet.

Die in der neutralen Faserschichte auftretende, durch Gleichung (91) bestimmte specifische Schubspannung σ_1 können wir nun ebenfalls durch d ausdrücken. Denken wir uns nämlich neben dem Querschnitte C einen unendlich nahen Querschnitt C_1, so ist die Schubkraft p, welche das zwischen diesen Querschnitten liegende Trägerelement (von der Länge dx) längs der neutralen Faserschichte zu verschieben sucht, offenbar bestimmt durch $p = dR$. Da nun $R = \frac{\mathfrak{M}}{d}$, so wird $p = \frac{dM}{d}$. Es ist aber nach (82) $\frac{dM}{d} = V$ also $p = \frac{V}{d}\,dx$. Es wird daher die in der neutralen Faserschichte per Flächeneinheit auftretende Schubspannung erhalten aus:

$$\sigma_1 = \frac{p}{z_0\,dx} = \frac{V}{d\,z_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (114),$$

wenn z_0 die Dicke des Querschnittes in der neutralen Axe bedeutet.

Wir können schliesslich nicht umhin hier in Kürze die Theorie eines höchst sinnreichen Apparates, des sogenannten „Amsler'schen Momentenplanimeters“ vorzuführen, wie sie der Hauptsache nach im 1. Hefte der Zeitschrift des österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines vom Jahre 1870 vom Professor Dr. E. Winkler entwickelt wurde.

Amsler's Momentenplanimeter *). Dasselbe besteht im wesentlichsten aus 3 Rollen R, R_1 und R_2, welche durch gerade Stäbe und ein Räderwerk derart verbunden sind, dass durch das Umfahren einer beliebigen ebenen Figur mittelst eines bestimmten Stiftes und den mit diesem einmaligen Umfahren der Figur verbundenen Umdrehungszahlen der 3 Rollen, der Reihe nach der Flächeninhalt, das statische Moment und das Trägheitsmoment der Figur bezüglich einer beliebigen Axe, auf welche das Instrument einzustellen ist, bestimmt werden kann.

---

*) Professor Amsler ist Mitbesitzer einer mathematisch-mechanischen Werkstätte in Schaffhausen.

Um dies einzusehen, denke man sich zunächst einen Stab AB, Fig. 112, von der Länge a, dessen Ende A sich in einer Geraden XX bewegt, wärend das andere mit einem Stifte versehene Ende B längs des Umfanges der beliebig begrenzten Figur herumgeführt wird. Sind nun AB und A_1B_1 zwei unmittelbar aufeinander folgende Stellungen des sich nach obigem Gesetze bewegenden Stabes AB, so dass $AA_1 = dx$ und Winkel $BMB_1 = CA_1B_1 = d\varphi$, und dreht sich um den Stab AB bei o eine auf der Papierfläche gleitende Rolle R, so entspricht der unendlich kleine Bogen oo_1 dem hierbei abgerollten Stücke du des Rollenumfanges und es ist also

$$oo_1 = du = Mo \,.\, d\varphi.$$

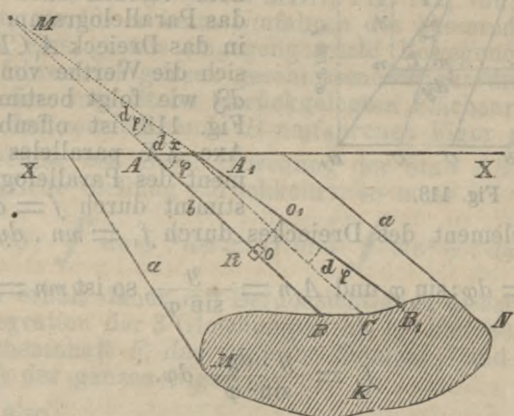


Fig. 112.

Setzt man $Ao = b$, so ist $Mo = MA + b$, und weil im Dreiecke MAA_1 sich verhält $MA : dx = \sin\varphi : d\varphi$, so wird

$$MA = \frac{\sin\varphi \,.\, dx}{d\varphi}, \text{ und hierfür } Mo = b + \frac{\sin\varphi \,.\, dx}{d\varphi}.$$

Für diesen Werth wird

$$du = b \,.\, d\varphi + \sin\varphi \,.\, dx.$$

Umfährt man nun mit dem Endpunkte B die ganze Figur und bezeichnet den während dieser Zeit abgewickelten Rollenumfang mit u, so ist offenbar

$$u = \int du = b \int d\varphi + \int \sin\varphi \,.\, dx.$$

Da sich aber der Stab AB beim Umfahren der geschlossenen Figur um denselben Winkel vorwärts bewegt, um welchen er dann wieder zurückgeführt wird, so ist offenbar die Summe dieser gleichen aber dem Zeichen nach entgegengesetzten Winkel gleich Null,

also $$\int d\varphi = 0,$$

mithin $$u = \int \sin\varphi \, . \, dx.$$

Bezeichnet man nun den Flächeninhalt des unendlich kleinen Viereckes ABB_1A_1 mit dF, ferner das statische Moment und das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Axe xx mit dS und $d\mathfrak{J}$, und zerlegt das bezeichnete Viereck nach Fig. 113 in das Parallelogramm $ABCA_1$ und in das Dreieck A_1CB_1, so lassen sich die Werthe von dF, dS und $d\mathfrak{J}$ wie folgt bestimmen. Nach Fig. 113 ist offenbar ein zur Axe XX paralleles Flächenelement des Parallelogrammes bestimmt durch $f = dy \, . \, dx$, und ein Flächenelement des Dreieckes durch $f_1 = mn \, . \, dy$, oder weil

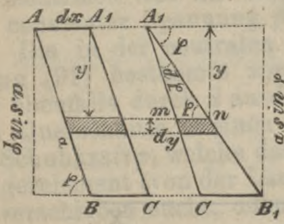


Fig. 113.

$$mn : A_1 n = d\varphi : \sin\varphi \text{ und } A_1 n = \frac{y}{\sin\varphi}, \text{ so ist } mn = \frac{y \, d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

und daher

$$f_1 = \frac{y \, . \, dy}{\sin^2\varphi} \, d\varphi.$$

Es wird daher

$$dF = \int_0^{a\sin\varphi} f + \int_0^{a\sin\varphi} f_1 = \int_0^{a\sin\varphi} dx \, . \, dy + \int_0^{a\sin\varphi} \frac{y \, . \, dy}{\sin^2\varphi} \, d\varphi,$$

und weil dx, $d\varphi \sin\varphi$ von y unabhängig sind, so ist

$$dF = dx \int_0^{a\sin\varphi} dy + \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \int_0^{a\sin\varphi} y dy,$$

woraus

$$dF = a \sin\varphi \, . \, dx + \frac{a^2}{2} \, d\varphi \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (\alpha);$$

ferner

$$dS = \int_0^{a\sin\varphi} f \, . \, y + \int_0^{a\sin\varphi} f_1 \, . \, y = dx \int_0^{a\sin\varphi} y \, . \, dy + \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} \int_0^{a\sin\varphi} y^2 dy,$$

woraus

$$dS = \frac{a^2}{2} \sin^2 \varphi \,.\, dx + \frac{a^3}{3} \sin \varphi \,.\, d\varphi \;.\;.\;.\; (\beta)$$

und

$$d\mathfrak{J} = \int_0^{a \sin \varphi} f \,.\, y^2 + \int_0^{a \sin \varphi} f_1 \,.\, y^2 = dx \int_0^{a \sin \varphi} y^2 \,.\, dy + \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} \int_0^{a \sin \varphi} y^3 dy,$$

woraus

$$d\mathfrak{J} = \frac{a^3}{3} \sin^3 \varphi \,.\, dx + \frac{a^4}{4} \sin^2 \varphi \,.\, d\varphi \;.\;.\;.\; (\gamma).$$

Während sich nun der Stab beim Umfahren des gegen die Axe xx gekehrten Umfangsstückes MBN, Fig. 112, von links nach rechst bewegt, macht er beim Umfahren des äusseren Umfangsstückes MKN eine gerade engegengesetzte Bewegung, so dass also beim Umfahren der ganzen geschlossenen Figur die algebraische Summe der vom Stabe zurückgelegten Flächenräume den Flächeninhalt der vom Stabende B umfahrenen Figur gibt.

Da überdies bei dieser Bewegung der Stab AB wieder in seine ursprüngliche Stellung zurückkehrt, so muss

$$\int d\varphi = 0, \int \sin \varphi \,.\, d\varphi = 0 \text{ und } \int \sin^2 \varphi \,.\, d\varphi = 0$$

sein, und man erhält daher mit Berücksichtigung dieser Gleichungen durch Integration der 3 Gleichungen (α), (β) und (γ) der Reihe nach den Flächeninhalt F, das statische Moment S und das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ der ganzen Figur.

Es wird also:

$$F = a \int \sin \varphi \,.\, dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\alpha_1),$$

$$S = \frac{a^2}{2} \int \sin^2 \varphi \,.\, dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\beta_1),$$

$$\mathfrak{J} = \frac{a^3}{3} \int \sin^3 \varphi \,.\, dx \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\gamma_1).$$

Vergleicht man nun den Werth von F mit dem Werthe $u = \int \sin \varphi \,.\, dx$ der Rollendrehung, so findet man, dass

$$F = au \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\mathrm{I});$$

d. h. dass der Flächeninhalt F der Umdrehung u der Rolle R proportionirt ist.

Um nun auch die Werthe von S und $\mathfrak{J}$ von der Drehung entsprechender Rollen abhängig zu machen, muss man die Gleichungen (β_1) und (γ_1) auf die Form der Gleichung (α_1) bringen;

d. h. man muss $\sin^2 \varphi$ und $\sin^3 \varphi$ durch die ersten Potenzen entsprechender Winkel ausdrücken. Dies ist aber leicht möglich, denn nach den Lehren der Goniometrie ist

$$\sin^2 \varphi = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \text{ und } \sin^3 \varphi = \tfrac{1}{4}(3 \sin \varphi - \sin 3\varphi).$$

Für diese Werthe wird daher, wenn berücksichtigt wird, dass das Stabende A, nachdem der Stift B die ganze Figur umfahren hat, wieder in seine ursprüngliche Stellung kommt, somit der von A zurückgelegte Weg $\int dx = 0$ ist,

$$S = \frac{-a^2}{4} \int \cos 2\varphi \, dx = \frac{-a^2}{4} \int \sin (90^0 - 2\varphi) \, dx \; . \; . \; . \; (\text{II}),$$

$$\mathfrak{J} = \frac{a^3}{12} \int (3 \sin \varphi - \sin 3\varphi) \, dx = \frac{F \, . \, a}{4} - \frac{a^3}{12} \int \sin 3\varphi \, . \, dx \; . \; (\text{III}).$$

Bringt man daher zur Bestimmung von S und $\mathfrak{J}$ zwei Rollen R_1 und R_2 derart an, dass in der Zeit, in welcher die Axe der Rolle R den Winkel φ beschreibt, die Axen der Rollen R_1 und R_2 die Winkel 2φ und 3φ zurücklegen, und stellt überdies die Axe der Rolle R_1 so, dass sie — der Gleichung (II.) entsprechend — mit der Normalen zur Axe XX den Winkel 2φ einschliesst, so ist es zufolge der Gleichungen (I.) bis (III.) leicht möglich, aus den Umdrehungszahlen der drei Rollen die fraglichen Grössen F, S und $\mathfrak{J}$ zu bestimmen.

Dieser Theorie entprechend ist das Amsler'sche Momentenplanimeter eingerichtet. Es besteht, nach Fig. 114, zunächst aus dem Stabe AB, der bei B den Stift trägt, mit welchem der Umfang der zu untersuchenden Figur umfahren wird. Dieser Stab trägt auch die zur Bestimmung des Flächeninhaltes F dienende Rolle R und ist mit den verzahnten Kreisbögen E, F fest verbunden, in welche die Räder G und H eingreifen, die zur Aufnahme der Rollen R_1 und R_2 dienen, wobei aber alle drei Rollen selbstverständlich mit der Ebene der aufzunehmenden Figur in Contact kommen müssen. Da nun dem Obigen entsprechend die Axen der Rollen R_1 und R_2 beziehungsweise 2- und 3mal grössere Winkel zurücklegen müssen, als die Axe der Rolle R, so sind die Radien der verzahnten Bögen E und F beziehungsweise 2- und 3mal grösser als die Radien der Rädchen G und H. Da überdies das Stabende A fortwährend auf der Axe XX bleiben und die Axen der Zahnräder sich beim Umfahren der Figur um gleich viel verrücken müssen, so muss sich ihre gemeinschaftliche Gestellaxe CD mit Hilfe zweier Rollen r_1, r_2, die in der Nuth eines zu XX parallelen Lineales JK laufen, parallel zu sich selbst verschieben lassen.

Das Gewicht L spielt blos die Rolle eines Gegengewichtes und soll, um die Bewegung zu erleichtern, das Gewicht des Apparates möglichst auf die Leitrollen r_1 und r_2 übertragen.

Bezeichnet man nun die Drehung der Rollen R, R_1 und R_2 mit u, u_1 und u_2, so ist nach Obigem

$$u = \int \sin \varphi \,.\, dx,\ u_1 = \int \sin (90^0 - 2\varphi)\, dx,\ u_2 = \int \sin 3\,\varphi\, dx,$$

mithin nach den Gleichungen (I.) bis (III.)

$$F = au,\ S = \frac{-a^2}{4}\, u_1,\ \mathfrak{J} = \frac{a^3}{4}\, u - \frac{a^3}{12}\, u_2.$$

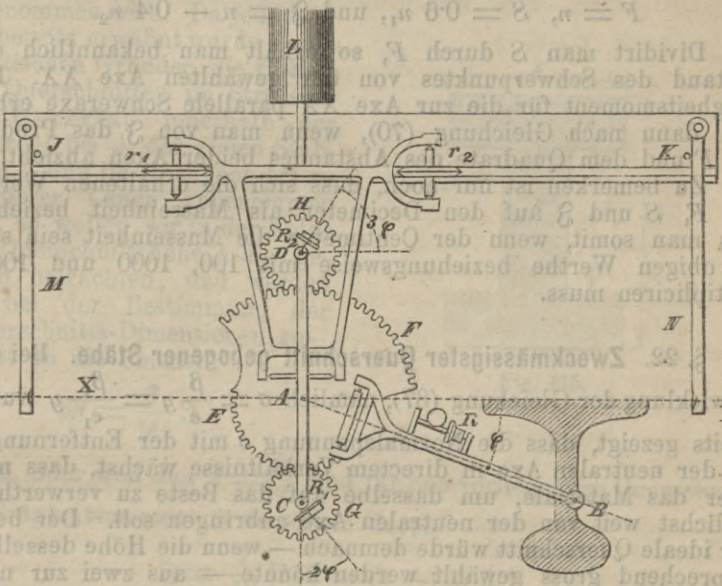


Fig. 114.

Entspricht der Umfang einer Rolle, d. i. eine Umdrehung der Ablesung 1, so wird, wenn die Anzahl der Ablesungen der drei Rollen R, R_1, R_2 mit n, n_1, n_2 und ihre Radien mit r, r_1 und r_2 bezeichnet werden,

$$u = 2r\pi n,\ u_1 = 2r_1\pi n_1,\ u_2 = 2r_2\pi n_2;$$

weil überdies die Theilung der Rolle R_1 entgegengesetzt beziffert ist zu jener der Rolle R, so ist n_1 und somit auch u_1 mit dem Zeichen minus in Rechnung zu nehmen, und wir erhalten durch Einführung der Werthe von u, u_1 und u_2 die folgenden Gleichungen:

$$F = 2r\pi an,\ S = \frac{r_1\pi}{2}\, a^2 n_1,$$

$$\mathfrak{J} = \frac{r\pi}{2}\, a^3 n - \frac{r_2\pi}{6}\, a^3 n_2.$$

Ist nun bei dem Apparate die Anordnung derart getroffen, dass

$$2r\pi : a = 1,\ \frac{r_1\pi}{2}\,a^2 = 0{\cdot}6,\ \frac{r\pi}{2}\,a^3 = 1,\ \frac{r_2\pi}{6}\,a^3 = 0{\cdot}4;$$

so wird, wenn z. B. $a = 2$ Decimeter ist,

$$r = \frac{1}{4\pi} = 0{\cdot}0795 \text{ Decimeter},\ r_1 = r_2 = \frac{0{\cdot}3}{\pi} = 0{\cdot}0956 \text{ Decimeter}$$

und hiefür

$$F = n,\quad S = 0{\cdot}6\ n_1, \text{ und } \mathfrak{J} = n - 0{\cdot}4\ n_2.$$

Dividirt man S durch F, so erhält man bekanntlich den Abstand des Schwerpunktes von der gewählten Axe XX. Das Trägheitsmoment für die zur Axe XX parallele Schweraxe erhält man dann nach Gleichung (70), wenn man von $\mathfrak{J}$ das Product aus F und dem Quadrate des Abstandes beider Axen abzieht.

Zu bemerken ist nur noch, dass sich die erhaltenen Werthe von F, S und $\mathfrak{J}$ auf den Decimeter als Masseinheit beziehen, dass man somit, wenn der Centimeter die Masseinheit sein soll, die obigen Werthe beziehungsweise mit 100, 1000 und 10000 multipliciren muss.

§. 22. **Zweckmässigster Querschnitt gebogener Stäbe.** Bei der Entwicklung der Gleichung (87), nämlich $\sigma = \frac{\beta}{e}\,y = \frac{\beta_1}{e_1}\,y$ wurde bereits gezeigt, dass die Normalspannung σ mit der Entfernung y von der neutralen Axe in directem Verhältnisse wächst, dass man daher das Materiale, um dasselbe auf das Beste zu verwerthen, möglichst weit von der neutralen Axe anbringen soll. Der beste oder ideale Querschnitt würde demnach —, wenn die Höhe desselben entsprechend gross gewählt werden könnte — aus zwei zur neutralen Axe parallelen, unendlich dünnen Gurten bestehen. In Wirklichkeit ist aber die grösste zulässige Höhe des Querschnittes durch praktische Rücksichten bestimmt, und müssen überdies die beiden Gurte, behufs der Aufnahme der Schubspannungen, durch eine entsprechende Fläche oder Rippe verbunden werden. Zugleich muss man, um eine gute Materialverwerthung zu erzielen, die Querschnittsform so wählen, dass bei einer genügend weit getriebenen Belastung die Spannungen auf der Zug- und Druckseite gleichzeitig den bezüglichen Grenzmodul erreichen würden. Bezeichnet man die Entfernungen der äussersten Fasern auf der Zug- und Druckseite, wie oben, mit e und e_1, sowie die zugehörigen Grenzmodule mit β und β_1, so muss daher

$$e : e_1 = \beta : \beta_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (115).$$

Man nennt die Querschnitte, bei welchen dieses Verhältniss eingehalten ist, Querschnitte von gleicher Festigkeit.

Bei Schmiedeisen sind demnach wegen $\beta = \beta_1$ die zweiaxig symmetrischen Querschnitte am zweckmässigsten; beim Gusseisen ist dagegen, wegen $\beta : \beta_1 = 2 : 5$, auch $e : e_1 = 2 : 5$ zu wählen.

Wir wollen nun ein paar erläuternde Beispiele bezüglich der Querschnittsbestimmung homogener Stäbe für Schmiedeisen, Gusseisen und Holz anreihen.

A. Schmiedeisen. Für dieses ist der sogenannte I-förmige Querschnitt, Fig. 115, der beste und einfachste; er gestattet eine um so grössere Materialersparniss, je grösser seine Höhe angenommen wird. Da jedoch — wie bereits erwähnt wurde — aus praktischen Gründen die Höhe h des Querschnittes im Strassen- und Wasserbau innerhalb der Grenze $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{16}$ der freien Stablänge l, und im Hochbaue bis zu $\frac{1}{30}$ dieser Länge angenommen wird, so wollen wir in der Folge die Querschnittshöhe h als gegeben betrachten, und werden uns bei der Bestimmung der Querschnitts-Dimensionen zunächst an die Formel

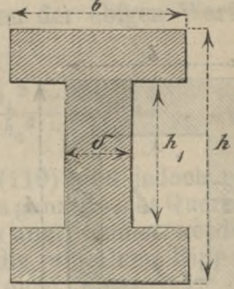


Fig. 115.

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J}$$

halten, oder weil hier $e = \frac{h}{2}$ und für den vorliegenden Querschnitt das Trägheitsmoment $\mathfrak{J}$ desselben durch

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{12} [bh^3 - (b - \delta)\, h_1{}^3]$$

bestimmt ist, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{6h} [bh^3 - (b - \delta)\, h_1{}^3] \quad . \; . \; . \; . \; (116) .$$

Da sich jedoch aus einer Gleichung nur eine der darin vorkommenden Grössen genau bestimmen lässt, so sind ausser den gegebenen Werthen von $\mathfrak{M}$, β und h noch die anderen Querschnittsdimensionen bis auf eine anzunehmen. Betrachten wir z. B. die Stärke δ der Mittelrippe, als die fragliche Grösse, und setzen beispielsweise $h = 20\,\delta$, $b = 10\,\delta$, $h_1 = 17\,\delta$, so ergibt sich aus (116) für diese Werthe

$$M = 298{\cdot}3\, \beta\delta^3,$$

woraus

$$\delta = 0{\cdot}15 \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{M}}{\beta}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (117).$$

Dieser Werth von δ darf aber nicht kleiner sein, als der aus (91) oder (114) resultirende, welcher die kleinste zulässige Dicke z_0 der Mittelwand mit Rücksicht auf die Schubfestigkeit in der neutralen Faserschichte feststellt. Dieselben Dimensionen würden sich offenbar auch für den röhrenförmigen Querschnitt, Fig. 116, ergeben.

Zu bemerken ist nur noch, dass die gewalzten schmiedeisernen Träger von der I-Form sehr häufig zur Ueberbrückung kleinerer Spannweiten (unter 7 Meter) angewendet werden. Ihre Maximalhöhe ist durch den Walzprocess beschränkt; es ist nämlich $h_{\max} = 40^{\text{cm.}}$, ferner $\delta_{\min} = \frac{h}{20}$.

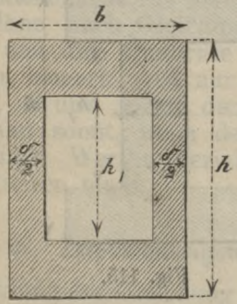


Fig. 116.

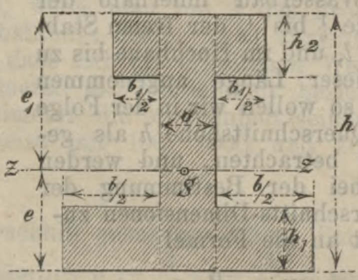


Fig. 117.

B. Gusseisen. Für gusseiserne Stäbe ist der unsymmetrisch I-förmige Querschnitt, Fig. 117, der zweckmässigste, wenn sich hierbei $e : e_1 = 2 : 5$ verhält; denn dann wird bei entsprechend weit getriebener Belastung die Elasticitätsgrenze der äussersten Fasern auf der Zug- und Druckseite gleichzeitig erreicht. Da überdies $e + e_1 = h$, so wird $e = \frac{2}{7} h$ und $e_1 = \frac{5}{7} h$. Für diese Werthe geht somit die Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J} = \frac{\beta_1}{e_1}\,\mathfrak{J}_1$$

über in jene

$$\mathfrak{M} = \frac{7}{2}\,\frac{\beta\mathfrak{J}}{h} = \frac{7}{5}\,\frac{\beta_1\mathfrak{J}}{h} \quad \ldots\ldots \quad (118).$$

Da nun die neutrale Axe ZZ durch den Schwerpunkt S des Querschnittes geht, so müssen die statischen Momente der beiderseits von ZZ liegenden Querschnittstheile einander gleich sein; es muss also nach den Bezeichnungen der Querschnittsfigur:

$$\frac{\delta e^2}{2} + b h_1\left(e - \frac{h_1}{2}\right) = \frac{\delta e_1{}^2}{2} + b_1 h_2\left(e_1 - \frac{h_2}{2}\right),$$

oder $\quad \delta e^2 + 2 b h_1 e - b h_1{}^2 = \delta e_1{}^2 + 2 b_1 h_2 e_1 - b_1 h_2{}^2.$

Es ist aber $e + e_1 = h$, oder $e_1 = h - e$; substituirt man diesen Werth von e_1 in die vorige Gleichung und bestimmt aus derselben e, so erhält man die erste der folgenden Gleichungen:

$$e = \frac{\delta h^2 + 2 b_1 h_2 h + b h_1{}^2 - b_1 h_2{}^2}{2\,(\delta h + b h_1 + b_1 h_2)},$$

$$e_1 = \frac{\delta h^2 + 2 b h_1 h + b_1 h_2{}^2 - b h_1{}^2}{2\,(\delta h + b h_1 + b_1 h_2)}.$$

Die zweite Gleichung ergibt sich offenbar aus der ersten, wenn man darin b mit b_1 und h_1 mit h_2 vertauscht. Da nun $\frac{e}{e_1} = \frac{2}{5}$, so ergibt sich durch Division der obigen Werthe von e und e_1 die Gleichung:

$$\frac{2}{5} = \frac{\delta h^2 + 2 b_1 h_2 h + b h_1{}^2 - b h_{12}{}^2}{\delta h^2 + 2 b h_1 h + b_1 h_2{}^2 - b h_1{}^2} \quad . \; . \; (119).$$

Durch die Gleichungen (118) und (119) sind jedoch nur zwei Unbekannte bestimmt, somit müssen, da im ganzen sechs Querschnittsdimensionen vorkommen, vier derselben angenommen werden. Soll aber der Guss gelingen, so müssen die einzelnen Rippen eine hinreichende Stärke bekommen, die nicht unter 0·7^{cm} bleiben soll. Wir werden daher ausser h noch h_1, h_2 und δ annehmen, so dass blos die Dimensionen b und b_1 unbekannt bleiben, die alsdann aus (118) und (119) bestimmt werden können.

In (118) muss aber noch zuvor $\mathfrak{J}$ durch b und b_1 ausgedrückt werden. Im vorliegenden Falle ist nach der Tabelle auf Seite 116

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{3}\,[(b + \delta)\, e^3 - b\,(e - h_1)^3 + (b_1 + \delta)\, e_1{}^3 - b_1\,(e_1 - h_2)^3],$$

worin
$$e = \frac{2}{7}\, h \text{ und } e_1 = \frac{5}{7}\, h.$$

Zu bemerken ist nur noch, dass bei der Wahl der grössten zulässigen Zug- und Druckspannungen, zunächst die kleinere Spannung, also β angenommen und mit dieser β_1 aus der Proportion $\beta : \beta_1 = 2 : 5$ bestimmt werden muss. Wählen wir z. B. für β den 5. Theil des Bruchmoduls für Zug, also $\beta = 260$, so wird

$$\beta_1 = \frac{5}{2}\, \beta = 650 \text{ Kilogramm}$$

per □Centimeter.

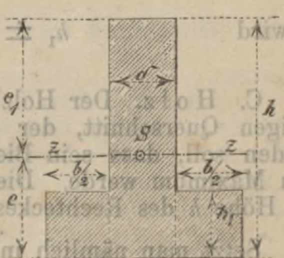


Fig. 118.

Wählt man

$$\delta = 1, \quad h = 16, \quad h_1 = 2 \quad \text{und} \quad h_2 = 1{\cdot}2,$$

so wird zunächst

$$e = \frac{2}{7} h \doteq 4{\cdot}6,\ e_1 = \frac{5}{7} h \doteq 11{\cdot}4,$$

und für diese Werthe

$$\frac{b}{2} \doteq 6{\cdot}5,\quad \frac{b_1}{2} \doteq 1{\cdot}5.$$

Zusatz. Die erhaltenen Relationen lassen sich auch auf den **T**-förmigen Querschnitt, Fig. 118, anwenden, wenn darin $b_1 = 0$ und $h_2 = 0$ gesetzt wird.

Es wird hiefür

$$\mathfrak{J} = \frac{1}{3} \left[(b + \delta)\, e^3 - b\,(e - h_1)^3 + \delta \,.\, e_1{}^3\right],$$

$$e = \frac{2}{7} h = \frac{\delta h^2 + b h_1{}^2}{2\,(\delta h + b h_1)},\ e_1 = \frac{5}{7} h = \frac{\delta h^2 + 2\, b h_1 h - b h_1{}^2}{2\,(\delta h + b h_1)};$$

somit

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{3e} \left[(b + \delta)\, e^3 - b\,(e - h_1)^3 + \delta e_1{}^3\right] \text{. (120)}$$

und

$$\frac{2}{5} = \frac{\delta h^2 + b h_1{}^2}{\delta h^2 + 2 b h_1 h - b h_1{}^2} \text{ . . . . . (121).}$$

Werden nun ausser den gegebenen Grössen $\mathfrak{M}$, β, die Werthe h und h_1 angenommen, so lassen sich jetzt aus den Gleichungen (120) und (121), wenn auch e und e_1 durch h ausgedrückt wird, die Werthe von b und δ berechnen.

Wählt man

$$\delta = 1,\quad h = 14,$$

also

$$e = \frac{2}{7} h = 4 \text{ und } e_1 = \frac{5}{7} h = 10,$$

so wird

$$h_1 \doteq 1{\cdot}6 \text{ und } \frac{b}{2} = 4.$$

C. Holz. Der Holzbalken erhält gewöhnlich einen rechteckigen Querschnitt, der aus dem Baumstamme so gezimmert werden soll, dass sein Biegungs- respective Widerstandsmoment zum Maximum werde. Dies ist der Fall, wenn sich die Breite b zur Höhe h des Rechteckes verhält wie $1 : \sqrt{2}$.

Setzt man nämlich in $\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J}$ für $\mathfrak{J}$ und e die bezüglichen Werthe ein, nämlich $\mathfrak{J} = \frac{bh^3}{12}$ und $e = \frac{h}{2}$, so wird

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{6}\, bh^2.$$

Soll nun $\mathfrak{M}$ zum Maximum anwachsen, so muss, weil $\frac{\beta}{6}$ constant ist, das Product $u = b \, . \, h^2$ den grössten Werth erreichen.

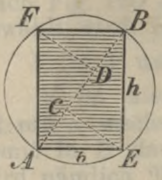


Fig. 119.

Statt h^2 kann man aber, wenn d den Durchmesser AB, (Fig. 119), des Baumstammes am schwächeren Ende des letzteren bezeichnet, den Werth $(d^2 - b^2)$ einführen, und erhält also

$$u = b \, (d^2 - b^2).$$

Damit nun u für ein variables b zum Maximum werde, muss

$$\frac{du}{db} = d^2 - 3 b^2 = 0$$

werden, woraus

$$\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{d}}{\sqrt{\boldsymbol{3}}} \text{ und somit aus } h^2 = d^2 - b^2 = \frac{2}{3} d^2, \ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{d} \sqrt{\frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}}}.$$

Es verhält sich alsdann wirklich

$$b : h = 1 : \sqrt{2} \quad \text{oder} \quad b : h \doteq 5 : 7 \quad . \; . \; . \; (122).$$

Hiernach ergibt sich bekanntlich die folgende Construction. Man theile AB in drei gleiche Theile, errichte in den Theilpunkten C, D nach entgegengesetzten Richtungen die Senkrechten CE und DF auf AB, wodurch sich das gesuchte Rechteck $AEBF$ ergibt.

Es ist nämlich im rechtwinkligen Dreiecke AEB

$$b^2 = AB \, . \, AC = d \, . \, \frac{d}{3} = \frac{d^2}{3}$$

und

$$h^2 = AB \, . \, CB = d \, . \, \frac{2}{3} \, d = \frac{2}{3} \, d^2,$$

weshalb sich das obige Verhältnis thatsächlich herausstellt.

Dritter Abschnitt.

Specielle Fälle der Biegungs-Elasticität homogener Träger.

Voraussetzung. Bei den nachstehenden speciellen Fällen der Biegungselasticität homogener Träger wird vorausgesetzt, dass deren Axen eine horizontale Lage haben, und dass somit die äusseren Kräfte lothrecht wirken. Es bezeichne wieder:

P die isolirte oder Einzellast,
q die gleichförmig vertheilte Belastung per Längeneinheit und
l die freie Spannweite des Trägers.

Ferner sei für einen beliebigen Querschnitt:

V die Transversalkraft, $\mathfrak{M}$ das Biegungsmoment, $\mathfrak{J}$ das Trägheitsmoment in Bezug auf die neutrale Axe, β und β_1 die grösste zulässige Zug- beziehungsweise Druckspannung der äussersten Fasern und
e, e_1 deren bezügliche Entfernung von der neutralen Axe.

Da jedoch vorausgesetzt wird, dass in den folgenden Fällen der Querschnitt so angeordnet wird, dass die Bedingungsgleichung $\frac{e}{e_1} = \frac{\beta}{\beta_1}$ stets zur Geltung kommt, so werden wir von den beiden Gleichungen $\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{M} = \frac{\beta_1}{e_1}\,\mathfrak{J}$ nur die erstere benützen.

Selbstverständlich müssen sich alle Dimensionen des Trägers auf dieselbe Einheit beziehen. Sind beispielsweise die Querschnitts-Dimensionen in Centimetern zu bestimmen, so müssen auch die Längendimensionen in Centimetern ausgedrückt werden. Da aber gewöhnlich q die gleichmässige Belastung des Trägers pro laufenden Meter der Trägerlänge l bedeutet, so ist alsdann, wenn l in Centimetern ausgedrückt wird, für q offenbar nur $\frac{q}{100}$ einzuführen.

IV. Capitel.

Der Träger ist an einem Ende eingespannt, am anderen frei.

§. 23. **Der Träger sei nur am freien Ende mit P belastet.** Nach Fig. 120 ist alsdann, wenn A als Coordinaten-Anfangspunkt gewählt wird, für einen beliebigen Querschnitt C:

$V = P$ und $\mathfrak{M} = Px$.

V ist also constant und $\mathfrak{M}$ mit x wachsend, $\mathfrak{M}$ erreicht somit in B das Maximum; es wird nämlich $\mathfrak{M}_{max} = Pl$.

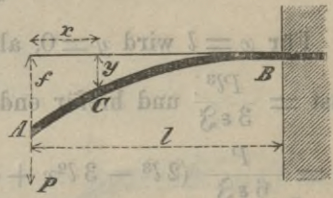


Fig. 120.

Es liegt demnach bei constantem Querschnitte der gefährliche Querschnitt am eingespannten Ende; die Grösse desselben ist also an die Gleichung gebunden:

$$\left.\begin{aligned} Pl &= \frac{\beta}{e}\mathfrak{J} \\ P &= \frac{\beta}{el}\mathfrak{J} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (123).$$

Für den rechteckigen Querschnitt ist $\mathfrak{J} = \frac{bh^3}{12}$ und $e = \frac{h}{2}$, daher nach (123):

$$P = \frac{\beta b h^2}{6l} \quad \ldots\ldots\ldots (124);$$

für den kreisförmigen Querschnitt ist dagegen, wegen $\mathfrak{J} = \frac{\pi}{64} d^3$ und $e = \frac{d}{2}$,

$$P = \beta \cdot \frac{\pi}{32} \cdot \frac{d^3}{l} \quad \ldots\ldots\ldots (125).$$

Anwendung bei Radarmen, Radzähnen, Zapfen, Hebeln etc.

Elastische Einbiegung. Nach (103) pag. 108 ist für den Punkt C:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon\mathfrak{J}} = \frac{Px}{\varepsilon\mathfrak{J}},$$

also bei constantem Querschnitte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2\varepsilon\mathfrak{J}} + \text{Const.}$$

Da nun für $\quad x = l, \ \frac{dy}{dx} = 0,$

mithin

$$0 = \frac{Pl^2}{2\varepsilon\mathfrak{J}} + \text{Const, also Const} = -\frac{Pl^2}{2\varepsilon\mathfrak{J}},$$

so wird $$\frac{dy}{dx} = \frac{-P\,(l^2 - x^2)}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}},$$
woraus durch nochmalige Integration:
$$y = \frac{-P\left(l^2 x - \frac{x^3}{3}\right)}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} + \text{Const.}$$

Für $x = l$ wird $y = 0$, also $0 = \frac{-Pl^3}{3\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} + \text{Const}$, woraus $\text{Const} = \frac{Pl^3}{3\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}$ und hiefür endlich
$$y = \frac{P}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(2\,l^3 - 3\,l^2 x + x^3) = \frac{P}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(2\,l + x)\,(l - x)^2.$$

Für $x = 0$ wird hiernach die Senkung des freien Endes, d. i. der sogenannte Biegungspfeil,
$$f = \frac{Pl^3}{3\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} = \frac{\beta\,l^2}{3\,\varepsilon\,e} \quad \ldots\ldots (126),$$
wenn für P der Werth aus (123) eingeführt wird.

Träger von constantem Widerstande. Bezeichnet man das Maximalmoment für das eingespannte Ende B mit $\mathfrak{M}_1$, die Breite und Höhe des Querschnittes daselbst mit b_1, h_1, sowie für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x von A die bezüglichen Grössen mit $\mathfrak{M}$, b und h, so wird nach (106) für den rechteckigen Querschnitt:
$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = bh^2 : b_1\,h_1^2,$$
und weil hier
$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = Px : Pl = x : l,$$
so gilt die Proportion:
$$x : l = bh^2 : b_1 h_1^2 \quad \ldots\ldots\ldots (127).$$

Hieraus ergeben sich folgende specielle Fälle:

a) Bei constanter Höhe, also für $h = h_1$, wird
$$x : l = b : b_1, \text{ woraus } b = \frac{x}{l}\,b_1\,.$$

In diesem Falle nimmt der Träger die keilförmige Gestalt, Fig. 121, an, die sich leicht herstellen lässt.

b) Bei constanter Breite, also für $b = b_1$, wird
$$x : l = h^2 : h_1^2,$$
woraus $$h = h_1 \sqrt{\frac{x}{l}};$$
d. h. der Träger wird ein parabolisch abgestumpfter Keil von der Form Fig. 122 oder jener Fig. 122 a.

c) Sollen alle Querschnitte **ähnlich** werden, also

$$b : h = b_1 : h_1, \text{ oder } b = \frac{h}{n} \text{ und } b_1 = \frac{h_1}{n},$$

so geht die obige Proportion (127) über in

$$l : x = h_1{}^3 : h^3,$$

woraus
$$h = h_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$$

Fig. 121.

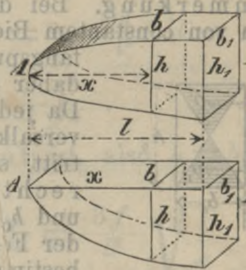


Fig. 122.

Die dieser Relation entsprechenden Träger nehmen bei **rechteckigem** Querschnitte die Gestalt der cubisch-parabolisch abgestumpften Pyramide, Fig. 123, an.

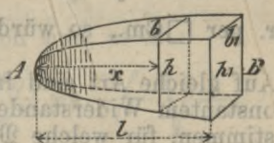


Fig. 123.

Gibt man dem Träger von gleichem Widerstande den **kreisförmigen** Querschnitt, so gilt für den veränderlichen Querschnittsdurchmesser die Gleichung

$$d = d_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}},$$

wobei der Durchmesser d_1 am eingespannten Ende B nach (125) aus

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{32\,Pl}{\beta\pi}}$$

zu bestimmen ist.

Bezeichnet man die Volumina der durch die Figuren 121 bis 123 versinnlichten Träger von constantem Widerstande der Reihe nach mit V_1, V_2, V_3, und das Volumen des zugehörigen prismatischen Trägers mit V, so wird, weil $V = b_1 h_1 l$,

$$V_1 = \tfrac{1}{2} b_1 h_1 l, \qquad V_2 = \tfrac{2}{3} b_1 h_1 l \quad \text{und} \qquad V_3 = \tfrac{3}{5} b_1 h_1 l,$$

die Proportion bestehen:

$$V : V_2 : V_3 : V_1 = 1 : {}^2/_3 : {}^3/_5 : {}^1/_2$$
$$= 30 : 20 : 18 : 15.$$

Der durch die Fig. 121 versinnlichte Träger zeichnet sich also durch das Minimum an Materiale aus, und lässt sich überdies am leichtesten herstellen.

Anmerkung. Bei den unter Fig. 121—123 vorgeführten Trägern von constantem Biegungswiderstande würde für den Anfangspunkt A, wegen $x = 0$ auch $\mathfrak{M} = 0$, daher der Querschnitt bei A ebenfalls Null. Da jedoch in diesem Querschnitte die Transversalkraft P als lothrechte Schubkraft auftritt, so sind — wenn die Dimensionen des rechteckigen Querschnittes in A mit b_0 und h_0 bezeichnet werden — dieselben nach der Formel (91) oder (114) für $z_0 = b_0$ zu bestimmen. Der letzteren Formel entsprechend ist, nach Fig. 124, $d = \frac{2}{3} h_0$, daher die grösste zulässige specifische Schubspannung bedingt durch

Fig. 124.

$$\sigma_1 = \frac{P}{d b_0}, \quad \text{woraus} \quad b_0 \,.\, h_0 = \tfrac{3}{2} \, \frac{P}{\sigma_1}.$$

Wäre z. B. $h_0 = h$ constant und für Schmiedeeisen $\sigma_1 = 600$ Kilogr. per □Cm., so würde $b_0 = \frac{P}{400\,h}$.

Auf gleiche Art sind in den folgenden Capiteln bei Trägern von constantem Widerstande die Dimensionen jener Querschnitte zu bestimmen, für welche $\mathfrak{M} = 0$ wird.

Elastische Einbiegung. Die Gleichung der elastischen Linie ist nach (102) bestimmt durch

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\beta}{e\,\varepsilon}.$$

Wäre der Träger prismatisch, so möchte die totale Durchbiegung desselben nach (126) bemessen sein durch

$$f = \frac{\beta}{3} \, \frac{l^2}{\varepsilon\, e_1},$$

wenn sich hierbei e_1 auf den Endquerschnitt B bezieht. Hieraus folgt:

$$\frac{\beta}{\varepsilon} = \frac{3\, e_1 f}{e\, l^2}.$$

und hiefür für den vorliegenden Fall:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3\, e_1 f}{e\, l^2},$$

oder weil sich $\dfrac{e_1}{e} = \dfrac{h_1}{h}$

auch $$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3 f h_1}{h\, l^2} \quad \ldots\ldots\ldots (128).$$

Hieraus ergibt sich:

a) Wenn die Höhe constant ist, also $h = h_1$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3f}{l^2}, \text{ woraus } \frac{dy}{dx} = -\frac{3f}{l^2}(l - x)$$

und $$y = \tfrac{3}{2} f \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots (129).$$

b) Wenn die Breite constant ist, also $b = b_1$, so ist zunächst

$$h = h_1 \sqrt{\frac{x}{l}}, \text{ also } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3f}{l^2} \sqrt{\frac{l}{x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6f}{l}\left(1 - \sqrt{\frac{x}{l}}\right)$$

und $$y = 2f\left[1 - 3\,\frac{x}{l} + 2\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^3}\,\right] \quad \ldots (130).$$

c) Wenn die Querschnitte ähnlich sind, so ist:

$$h = h_1 \sqrt[3]{\frac{x}{l}}, \text{ also } \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3f}{l^2} \sqrt{\frac{l}{x}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-9f}{l}\left(1 - \sqrt{\frac{x^2}{l^2}}\right)$$

und $$y = \tfrac{9}{5} f\left[1 - \tfrac{5}{2}\,\frac{x}{l} + \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{x}{l}\right)^5}\,\right] \quad \ldots (131).$$

Die Senkung des freien Endes *A* wird in diesen 3 Fällen:

a) $f_1 = \tfrac{3}{2} f$; b) $f_2 = 2f$; c) $f_3 = \tfrac{9}{5} f$,

wenn, wie schon bemerkt wurde, f den Biegungspfeil des prismatisch Trägers bedeutet.

Das Verhältniss der Senkungen f_1, f_2 f_3, ist 15 : 20 : 18, also genau dasselbe wie das der Volumina.

§. 24. **Der Träger** AB, Fig. 125, **sei gleichmässig mit** q **pro Längeneinheit belastet.** Für den beliebigen Querschnitt C wird

$$V = q\,x$$

und

$$\mathfrak{M} = \frac{q x^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132).$$

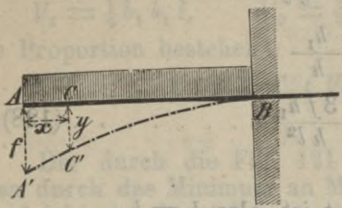


Fig. 125.

V und $\mathfrak{M}$ erreichen somit das Maximum am eingespannten Ende, also bei B. Hier wird auch bei constantem Querschnitte die Schubspannung σ_1 ein Maximum. Für den gefährlichen Querschnitt B wird nach (132):

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{q l^2}{2} = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J},$$

oder die Gesammtbelastung

$$q\,.\,l = \frac{2\beta}{e\,l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (133).$$

Der Träger trägt also bei gleichmässiger Belastung doppelt so viel, als wenn die Last am freien Ende wirkt.

Für den rechteckigen Querschnitt von der Höhe h und der Breite b wird nach (133)

$$q l = \frac{\beta b h^2}{3 l},$$

und für den kreisförmigen, mit dem Durchmesser d,

$$q l = \frac{\beta \pi d^3}{16 l}.$$

Anwendung bei Consolen, Drehbrücken, Sattelhölzern u. s. w.

Elastische Einbiegung. Nach (103) ist, wegen $\mathfrak{M} = \frac{q x^2}{2}$,

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{q x^2}{2 \beta \mathfrak{J}}.$$

Die zweimalige Integration gibt, wenn man die Constanten durch die Bedingung bestimmt, dass für $x = l$, $\frac{dy}{dx} = 0$ und $y = 0$ werden muss,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{q\,(l^3 - x^3)}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}},$$

$$y = \frac{q}{24\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(3\,l^4 - 4\,l^3 x + x^4) \quad . \quad . \quad . \quad (134).$$

Die totale Durchbiegung des freien Endes (für $x = 0$) ist

$$f = \frac{q l^4}{8 \varepsilon \mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots (135).$$

Wird der Träger mit der grössten zulässigen, durch (133) bestimmten Last belastet, so ist die totale Senkung

$$f = \frac{\beta l^2}{4 \varepsilon e} \quad \ldots\ldots\ldots (136).$$

Träger von constanter Festigkeit. Nach (106) wird

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = b \,.\, h^2 : b_1 \,.\, h_1{}^2,$$

und weil hier

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = \frac{q x^2}{2} : \frac{q l^2}{2} = x^2 : l^2,$$

so gilt für den vorliegenden Fall die Proportion:

$$x^2 : l^2 = b\, h^2 : b_1\, h_1{}^2 \quad \ldots\ldots (137).$$

Hieraus ergeben sich wieder folgende specielle Fälle:

a) Bei constanter Höhe wird $h = h_1$, also

$$x^2 : l^2 = b : b_1, \text{ woraus } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_1 \left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{l}}\right)^2.$$

Dieser Gleichung entspricht der parabolisch zugeschärfte Keil, Fig. 126.

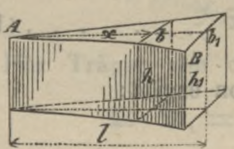


Fig. 126.

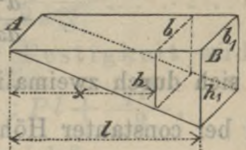


Fig. 127.

b) Bei constanter Breite wird $b = b_1$, also

$$x^2 : l^2 = h^2 : h_1{}^2, \text{ oder } x : l = h : h_1,$$

woraus

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 \, \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{l}},$$

welcher Gleichung die Keilform, Fig. 127, entspricht.

c) Für ähnliche Querschnitte wird, wegen

$$b : b_1 = h : h_1 \text{ oder } b = \frac{h}{n},\ b = \frac{h_1}{n},$$

$$x^2 : l^2 = h^3 : h_1{}^3, \text{ woraus } \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1 \sqrt[3]{\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{l}}\right)^2}.$$

Für den rechteckigen Querschnitt nimmt hiernach der Träger die Form der nach Neil'schen Parabeln abgestumpften Pyramide, Fig. 128, an.

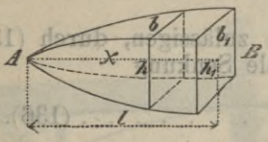


Fig. 128.

Anwendung bei Consolen. Sind V_1, V_2, V_3 die Volumina dieser drei Träger und V das Volumen des prismatischen Stabes mit gleich grosser Festigkeit, so ist, wegen

$$V = b_1\, h_1\, l,\quad V_1 = \tfrac{1}{3}\, b_1\, h_1\, l,\quad V_2 = \tfrac{1}{2}\, b_1\, h_1\, l,\ \text{ und }\ V_3 = \tfrac{3}{7}\, b_1\, h_1\, l$$

$$V : V_2 : V_3 : V_1 = 1 : \tfrac{1}{2} : \tfrac{3}{7} : \tfrac{1}{3}$$

$$= 42 : 21 : 18 : 14.$$

Für die Durchbiegung dieser Träger von constantem Widerstand ergibt sich in derselben Weise wie in §. 18, mit Benützung der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\beta}{e\,\varepsilon} = \frac{2\,\beta}{h\,\varepsilon}$$

und jener

$$f = \frac{\beta\,.\,l^2}{4\,\varepsilon\,e} = \frac{\beta\,.\,l^2}{2\,\varepsilon\,h},$$

welche der totalen Durchbiegung des prismatischen Stabes entspricht, dessen Höhe h_1 ist,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4\,f\,h_1}{h\,l^2} \quad \ldots\ldots\ldots (138),$$

woraus sich durch zweimalige Integration ergibt:

a) bei constanter Höhe:

$$y = 2f\left(1 - \frac{x}{l}\right)^2,$$

b) bei constanter Breite:

$$y = 4f\left(1 - \frac{x}{l} + \frac{x}{l}\ \text{log. nat.}\ \frac{x}{l}\right),$$

c) bei ähnlichen Querschnitten:

$$y = 3f\left(1 - 4\,\frac{x}{l} + 3\,\frac{x}{l}\sqrt[3]{\frac{x}{l}}\right).$$

Hiernach ist die Senkung des freien Endes der Reihe nach (für $x = 0$):

$$f_1 = 2f,\qquad f_2 = 4f,\qquad f_3 = 3f.$$

§. 25. **Der Träger hat ausser der gleichmässigen Belastung $q \cdot l$ auch noch die am freien Ende angehängte Last P zu tragen.** Bei diesem, durch Fig. 129 dargestellten Falle, erhält man die Werthe von V, $\mathfrak{M}$, y und f, wenn man die entsprechenden, in §. 22 und §. 23 gewonnenen Resultate addirt. Hiernach wird also zunächst:

Fig. 129.

$$V = P + qx \text{ und } \mathfrak{M} = Px + \frac{qx^2}{2}$$

somit für das eingespannte Ende B

$$V_{\max} = P + q\,l \text{ und } M_{\max} = Pl + \frac{q\,l^2}{2}.$$

Beim prismatischen Träger wird daher der Querschnitt aus

$$Pl + \frac{q\,l^2}{2} = \frac{\beta}{e}\mathfrak{J} \quad \ldots\ldots \quad (139)$$

zu bestimmen sein.

Bezüglich der Formänderung erhält man die Gleichungen:

$$y = \frac{P}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}(2\,l + x)(l - x)^2 + \frac{q}{24\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}(3\,l^4 - 4\,l^3 x + x^4) \,.\,. \quad (140).$$

und

$$f = \frac{Pl^3}{3\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} + \frac{q\,l^4}{8\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (141)$$

Für Träger von constanter Festigkeit wird, wegen

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = Px + \frac{qx^2}{2} : P\,l + \frac{q\,l^2}{2},$$

und wegen

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = b\,h^2 : b_1 h_1^{\,2},$$

$$\frac{b\,h^2}{b_1 h_1^{\,2}} = \frac{2\,Px + qx^2}{2\,Pl + ql^2} \quad \ldots\ldots \quad (142).$$

Hieraus folgt:

a) Bei constanter Höhe, also für $h = h_1$ wird

$$\frac{b}{b_1} = \frac{2\,Px + qx^2}{2\,Pl + ql^2},$$

woraus

$$b = b_1\,\frac{2\,Px + q\,x^2}{2\,Pl + q\,l^2};$$

hiernach wird der Träger im Grundriss von zwei Parabeln begrenzt erscheinen, deren Scheitel vom freien Ende die Entfernung $\frac{P}{q}$ hat.

b) Bei constanter Breite, also für $b = b_1$, wird

$$\frac{h^2}{h_1^{\,2}} = \frac{3\,Px + qx^2}{2\,Pl + ql^2},$$

woraus

$$h = h_1 \sqrt{\frac{2\,Px + qx^2}{2\,Pl + ql^2}}.$$

Hiernach wird der Aufriss von einer Hyperbel begrenzt, deren Mittelpunkt vom freien Ende ebenfalls um $\frac{P}{q}$ absteht.

V. Capitel.

Der Träger liegt mit beiden Enden frei auf Stützen auf.

§. 26. **Belastung durch eine feste isolirte Last** P. Fig. 130. Es seien D und D_1 die durch P bei A und B hervorgerufenen

Fig. 130.

Stützendrücke, τ und τ_1 die trigonometrischen Tangenten der Winkel, welche die Stabenden nach der Biegung mit der Horizontalen bilden*), a und b die Abstände der isolirten Last P von den Stützen A und B, x und y die Coordinaten irgend eines Punktes N im Fragmente AC, für welches A der Anfangspunkt ist, $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Coordinaten irgend eines Punktes $\mathfrak{N}$ im Fragmente BC, für welches B als Anfangspunkt gilt, V und $\mathfrak{V}$ die dem Punkte N beziehungsweise $\mathfrak{N}$ entsprechende Transversalkraft, M und $\mathfrak{M}$ die diesen Punkten zugehörigen Biegungsmomente; ferner sei l die freie Spannweite AB des Trägers, f die Durchbiegung im Belastungspunkte C und t die Tangente des Winkels, welchen die elastische Linie bei C_1 mit der Horizontalen bildet.

*) Da die Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze bleiben soll, also sehr gering ist, so kann man statt der Tangenten der Winkel τ und τ_1 deren Bögen setzen.

Um nun zunächst die Stützendrücke D und D_1 zu bestimmen, wählen wir einmal den festen Punkt B, das anderemal jenen A als Drehungspunkt, und erhalten die Gleichgewichts-Bedingungen gegen Drehung:

$$Dl = Pb \text{ und } D_1 l = Pa, \text{ woraus:}$$

$$\left.\begin{aligned} D &= P\frac{b}{l} \\ D &= P\frac{a}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (143).$$

Es wird ferner, wenn wir nach *oben* gerichtete Kräfte und die das betrachtete Trägerfragment nach *oben* drehenden Kraftmomente als *positiv* voraussetzen,

im Fragmente AC:

$$V = D = P\frac{b}{l},$$

$$M = Dx = P\frac{b}{l}\,x,$$

im Fragmente BC:

$$\mathfrak{V} = D_1 = P\frac{a}{l},$$

$$\mathfrak{M} = D_1 \mathfrak{x} = P\frac{a}{l}\,\mathfrak{x}.$$

Das Maximum von M oder $\mathfrak{M}$ findet daher statt, wenn der Punkt N oder $\mathfrak{N}$ mit dem Belastungspunkte C zusammenfällt, d. i. wenn $x = a$, $\mathfrak{x} = b$ wird.

Es ist also:

$$M_{\max} = Da = P\frac{ab}{l} \text{ oder } \mathfrak{M}_{\max} = D_1 b = P\frac{ab}{l}.$$

Beim prismatischen Träger liegt daher der gefährliche Querschnitt unter dem Belastungspunkte C; es ist somit die Grösse des Querschnittes an die Gleichung gebunden:

$$P\frac{ab}{l} = \frac{e}{\beta}\,\mathfrak{J} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (144).$$

Da $M_{\max}$ mit dem Producte ab wächst und überdies $a + b = l$, also constant ist, so wird bekanntlich ab am grössten, wenn

$$a = b = \frac{l}{2} \text{ wird.}$$

Liegt also die isolirte Last in der Mitte des Trägers, so erreicht das Biegungsmoment in der Trägermitte das absolute Maximum; es wird nämlich

$$\max M = -\frac{Pl}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (145).$$

Aus

$$P \cdot \frac{l}{4} = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J}$$

wird dann

$$P = 4\,\frac{\beta\mathfrak{J}}{el} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (146).$$

woraus folgt, dass in diesem Falle der Träger viermal so viel trägt, als wenn er an einem Ende befestigt und am andern Ende belastet wäre.

Anwendung bei Axen, Wellen und Eisenbahnbrücken unter 2·6 Meter Spannweite.

Elastische Durchbiegung. Nach Gleichung (103) ergibt sich für einen beliebigen Punkt des prismatischen Trägers

Im Fragment AC:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon\mathfrak{J}} = \frac{Pb}{\varepsilon\mathfrak{J}l}\,x,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{2\varepsilon\mathfrak{J}l}\,x^2 + C.$$

Im Fragment BC:

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon\mathfrak{J}} = \frac{Pa}{\varepsilon\mathfrak{J}\,.\,l}\,\mathfrak{x},$$

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \frac{Pa}{2\varepsilon\mathfrak{J}l}\,\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{C}.$$

Bezüglich der Bestimmung der Constanten C und $\mathfrak{C}$ berücksichtige man, dass für

$$x = 0,\ \frac{dy}{dx} = C = \tau, \qquad \mathfrak{x} = 0,\ \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \mathfrak{C} = \tau_1,$$

so dass

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{2\varepsilon\mathfrak{J}l}\,x^2 + \tau \;.\;.\;(\alpha), \qquad \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \frac{Pa}{2\varepsilon\mathfrak{J}l}\,\mathfrak{x}^2 + \tau_1 \;.\;.\;(\alpha'),$$

woraus

$$y = \frac{Pb}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\,x^3 + \tau x \;.\;.\;.\;(\beta), \qquad \mathfrak{y} = \frac{Pa}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\,\mathfrak{x}^3 + \tau_1\mathfrak{x} \;.\;.\;.\;(\beta').$$

Eine Constante ist hier nicht mehr beizufügen, weil für $x = 0$, $y = 0$ und für $\mathfrak{x} = 0$, auch $\mathfrak{y} = 0$ wird.

Um nun die unbekannten Werthe von τ und τ_1 zu erhalten, berücksichtige man, dass für den Belastungspunkt C:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = t \text{ und } y = \mathfrak{y} = f \text{ wird,}$$

so dass aus den obigen Gleichungen für $x = a$, beziehungsweise $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$

$$t = \frac{Pb}{2\varepsilon\mathfrak{J}l}\,a^2 + \tau = \frac{-Pa}{2\varepsilon\mathfrak{J}l}\,b^2 - \tau_1.$$

$$f = \frac{Pb}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\,a^3 + a\tau = \frac{Pa}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\,b^3 + b\tau_1.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\tau = \frac{-Pab}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\,(a + 2b) \text{ und } \tau_1 = \frac{-Pab}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\,(2a + b).$$

Für diese Werthe wird aus (β) beziehungsweise (β')

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{-Pbx}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\left[a(a+2b)-x^2\right], \\ \mathfrak{y} &= \frac{-Pa\mathfrak{x}}{6\varepsilon\mathfrak{J}l}\left[b(2a+b)-\mathfrak{x}^2\right], \end{aligned}\right\} \quad \ldots (147).$$

Die Durchbiegung des Punktes C wird hiernach für $x = a$ oder $\mathfrak{x} = \mathfrak{b}$

$$f = \frac{-Pa^2b^2}{3\varepsilon\mathfrak{J}l} \quad \ldots\ldots\ldots (148).$$

Für den tiefsten Punkt der elastischen Linie wird offenbar die Tangente zur Abscissenaxe AB parallel.

Ist nun $b > a$, so liegt der tiefste Punkt im grösseren Fragmente BC, und da für denselben $\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = 0$, so ist Gleichung ($\alpha'$)

$$\frac{Pa\mathfrak{x}^2}{2\varepsilon\mathfrak{J}l} + \tau_1 = 0,$$

woraus sich, wenn für τ_1 der obige Werth eingesetzt wird, die Abscisse $\mathfrak{x}$ für den tiefsten Punkt ergibt mit

$$\mathfrak{x} = \sqrt{\frac{(2a+b)\,\mathfrak{b}}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots (149).$$

Für diesen Werth wird aus Gleichung (147) die grösste Senkung:

$$\max \mathfrak{y} = \frac{-Pab}{27\varepsilon\mathfrak{J}l}(2a+b)\sqrt[3]{3b(2a+b)} \quad \ldots (150).$$

L i e g t d i e L a s t P i n d e r M i t t e d e s T r ä g e r s, d. h. ist $a = b = \frac{l}{2}$, so wird allgemein

$$y = \frac{-Px}{12\varepsilon\mathfrak{J}}\left(\tfrac{3}{4}l^2 - x^2\right) \quad \ldots\ldots (151),$$

und in der Mitte des Trägers

$$\max y = \frac{-Pl^3}{48\varepsilon\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots (152).$$

Träger von constanter Festigkeit. Die Gestalt des Fragmentes AC oder BC lässt sich im vorliegenden Falle ebenso bestimmen, wie dies im §. 23 für den an einem Ende befestigten, am andern Ende belasteten Träger geschah; denn der Stützendruck D wirkt auf das Fragment AC in gleicher Weise, wie die Last P am Ende A des Stabes AB, Fig. 120. Der Träger wird daher im vorliegenden Falle aus zwei besonderen im Belastungspunkte C zusammenstossenden Formen bestehen, die nach den speciellen Fällen a) b) und c) des §. 23 zu bestimmen sind.

Ist z. B. die Höhe des Trägers constant, so wird er aus zwei nach Fig. 121 zu formenden Keilen zusammenzusetzen sein, die im Belastungspunkte C mit ihren Rücken zusammenstossen. —

Ist dagegen die Breite constant, so wird der Träger aus zwei, nach Fig. 122 geformten, von Parabeln begrenzten Fragmenten zusammenzusetzen sein, deren Scheitelpunkte in den Stützpunkten A und B liegen und deren gemeinschaftliche Ordinate durch den Belastungspunkt C geht.

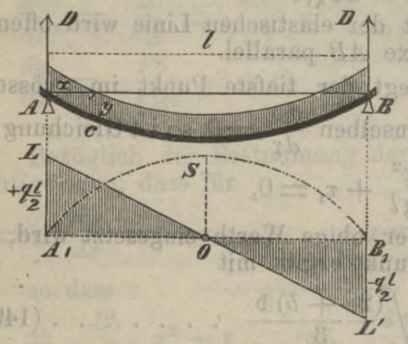


Fig. 131.

Die elastische Durchbiegung ist ebenfalls nach den analogen Fällen des §. 23 zu ermitteln.

§. 27. Gleichmässige Belastung. Bezeichnet q die Belastung per Längeneinheit des Trägers AB, Fig. 131, so ist jeder der beiden Stützendrücke gleich der halben totalen Last, also $D = \frac{q\,l}{2}$.

Für einen beliebigen Querschnitt C wird

$$V = D - q \cdot x = q\left(\frac{l}{2} - x\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153).$$

Für $x = \frac{l}{2}$ wird somit $V = 0$.

Den grössten numerischen Werth erreicht V für $x = 0$, nämlich $V = \frac{ql}{2}$, und für $x = l$, nämlich $V = \frac{-ql}{2}$.

Da nun nach (153) V mit der Zunahme von x abnimmt und für $x = \frac{l}{2}$ in Null übergeht, so werden im vorliegenden Falle die Transversalkräfte durch eine Gerade LL' abgegrenzt, welche die Axe AB in der Mitte 0 schneidet und über den Stützpunkten die Ordinaten $A_1L = -B_1L = \frac{ql}{2}$ abschneidet.

Das auf den Querschnitt C wirkende Biegungsmoment ist

$$\mathfrak{M} = Dx - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l - x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154).$$

Für $x = 0$ oder $x = l$ wird $\mathfrak{M} = 0$, dagegen erhält es den grössten Werth für $x = \frac{l}{2}$, wofür

$$\max \mathfrak{M} = \frac{ql^2}{8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (155).$$

Bei prismatischen Trägern liegt daher der gefährliche Querschnitt in der Mitte, und ist somit die Grösse desselben aus

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J}$$

oder aus

$$ql = \frac{8\beta}{el} \mathfrak{J} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (156).$$

zu ermitteln.

Da hier ql die totale Belastung des Trägers gibt, so folgt aus der letzten Gleichung, dass der Träger im vorliegenden Falle achtmal mehr trägt als der an einem Ende befestigte, am anderen Ende belastete Balken.

Die nach der Gleichung (154) für die verschiedenen Werthe von x construirten Momente bestimmen offenbar eine Parabel A_1SB_1, deren Scheitel S über dem Mittelpunkte O im Abstande $OS = \frac{ql^2}{8}$ liegt.

Anwendung bei Balkenbrücken, Dach- und Deckenconstructionen etc.

Elastische Durchbiegung. Nach Gleichung (103) und (154) wird für irgend einen Querschnitt C des prismatischen Trägers

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx(l-x)}{2\varepsilon\mathfrak{J}},$$

woraus — bei constantem Querschnitte —

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{2\varepsilon\mathfrak{J}}\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Die Constante C lässt sich hier auch dadurch bestimmen, dass für $x = \frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, wofür $C = \frac{-ql^3}{24\varepsilon\mathfrak{J}}$, und daher allgemein

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q}{12\varepsilon\mathfrak{J}}(3lx^2 - 2x^3) - \frac{ql^3}{24\varepsilon\mathfrak{J}},$$

woraus durch nochmalige Integration

$$y = \frac{-qx}{24\varepsilon\mathfrak{J}}(l^3 - 2lx^2 + x^3) \quad \ldots\ldots \quad (157).$$

Die Senkung wird am grössten in der Mitte des Trägers, also für $x = \frac{l}{2}$, wofür

$$\max y = \frac{-5ql^4}{384\varepsilon\mathfrak{J}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (158).$$

Wird der Träger mit der grössten zulässigen, aus (156) bestimmten Totallast ql belastet, so wird

$$\max y = \frac{-5\,\beta l^2}{48\,\varepsilon e} \quad \ldots\ldots\ldots (159)\,.$$

Anwendung bei Probebelastungen der Balkenbrücken, um aus der durch die Probebelastung ql erzielten Durchbiegung die grösste Materialspannung β der äussersten Fasern zu berechnen.

Träger von constanter Festigkeit. Nach §. 18 ist

$$\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = bh^2 : b_1 h_1{}^2\,;$$

beziehen sich nun die mit dem Index 1 bezeichneten Grössen auf die Trägermitte, so wird, weil nach (154)

$$\mathfrak{M} = \frac{qx}{2}\,(l - x) \text{ und } \mathfrak{M}_1 = \frac{ql^2}{8},$$

$$bh^2 : b_1 h_1{}^2 = x\,(l - x) : \frac{l^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots (160)\,.$$

Hieraus ergeben sich als besondere Formen:

$$\left.\begin{aligned} &a)\ \text{bei constanter Höhe:}\ b = 4\,b_1\,\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right), \\ &b)\ \text{bei constanter Breite:}\ h = 2\,h_1\sqrt{\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (161)\,.$$

Im ersteren Falle wird der Grundriss des Trägers von Parabeln, Fig. 132, dagegen im letzteren Falle der Aufriss von einer Ellipse, Fig. 133, begrenzt. Bezeichnet man die entsprechenden Volumina

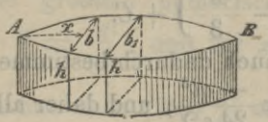


Fig. 132.

Fig. 133.

mit V_1 und V_2, dagegen jenes des prismatischen Stabes bei gleicher Festigkeit mit V, so wird

$$V_1 = \tfrac{2}{3}\,V \text{ und } V_2 = \frac{\pi}{4}\,V = 0{\cdot}785\,V.$$

Was die elastische Durchbiegung anbelangt, so ist zunächst allgemein nach (102)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\beta}{\varepsilon e} \quad \ldots\ldots\ldots (162)\,.$$

Bezeichnet man die Senkung des **prismatischen** Stabes in der Mitte mit y_1, und hängt den sich auf die Mitte beziehenden Grössen den Index 1 an, so wird nach (159)

$$y_1 = -\frac{5}{48}\,\frac{\beta l^2}{\varepsilon e_1},$$

und da die mittleren Querschnitte beim prismatischen Träger und jenem von constanter Festigkeit (bei gleichem Tragvermögen) gleich sein müssen, so kann man aus der letzten Gleichung den Werth von $\frac{\beta}{\varepsilon}$ bestimmen und in (162) einsetzen, wofür

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-48\,e_1 y_1}{5\,e l^2},$$

oder weil

$$\frac{e_1}{e} = \frac{h_1}{h},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-48\,h_1 y_1}{5\,h l^2} \quad \ldots \ldots \ldots (163).$$

Hieraus ergibt sich bei **constanter Höhe** allgemein:

$$y = \frac{24\,y_1}{5\,l^2}\,x\,(l-x) \quad \ldots \ldots (164).$$

und für

$$x = \frac{l}{2}$$

$$\max y = \frac{6}{5}\,y_1 \quad \ldots \ldots \ldots (165).$$

Bei **constanter Breite** wird nach (161) zunächst

$$h = 2\,h_1\sqrt{\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)},$$

oder wenn man die Entfernung des variablen Querschnittes von der Mitte mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet, also

$$x = \left(\frac{l}{2} - \mathfrak{x}\right) \text{ setzt, } h = h_1\sqrt{1-\frac{4\,\mathfrak{x}^2}{l^2}},$$

folglich hiefür nach (163)

$$\frac{d^2y}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{-48\,\mathfrak{y}_1}{5\,l\sqrt{l^2-4\mathfrak{x}^2}},$$

woraus

$$\frac{dy}{d\mathfrak{x}} = \frac{24\,y_1}{5}\,\text{arc sin}\,2\,\frac{\mathfrak{x}}{l}, \text{ und}$$

$$y = \frac{6}{5}\,y_1\left(\pi - 4\,\frac{\mathfrak{x}}{l}\,\text{arc sin}\,2\,\frac{\mathfrak{x}}{l} - 2\sqrt{1-4\,\frac{\mathfrak{x}^2}{l^2}}\right) \quad \ldots (166),$$

und für die Trägermitte, wegen $\mathfrak{x} = 0$,

$$\max y = \frac{6\,(\pi-2)}{5}\,y_1 = 1{\cdot}37\,y_1 \quad \ldots \ldots (167).$$

§. 28. **Belastung durch mehrere Einzellasten und durch eine gleichmässig über den Träger vertheilte Last.** Der Träger AB, Fig. 134, sei durch mehrere Einzellasten P_1, P_2, P_3 . . . belastet,

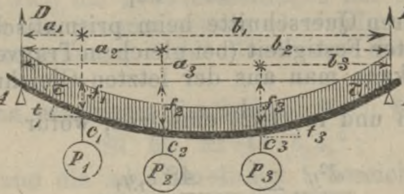


Fig. 134.

die von A um a_1, a_2, a_3 . . . und von B um b_1, b_2, b_3 . . . abstehen und die gleichmässige Belastung, die gewöhnlich vom Eigengewicht des Trägers herrührt, sei g pro Längeneinheit.

Ist l der Abstand der beiden Stützen A und B, so ergeben sich auf A und B die Stützendrücke

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{gl}{2} + P_1 \frac{b_1}{l} + P_2 \frac{b_2}{l} + P_3 \frac{b_3}{l} + \ldots \\ D_1 &= \frac{gl}{2} + P_1 \frac{a_1}{l} + P_2 \frac{a_2}{l} + P_3 \frac{a_3}{l} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad . (168) .$$

Sind V_1, V_2, V_3 . . . die Transversalkräfte in den Belastungspunkten C_1, C_2, C_3 . . . , so ist

$$V_1 = D - a_1\, g; \quad V_2 = D - P_1 - a_2\, g;$$

$$V_3 = D - P_1 - P_2 - a_3\, g, \text{ usw.}$$

Sind $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ . . . die Momente für die Querschnitte C_1, C_2, C_3 . . . , so ist

$$\mathfrak{M}_1 = Da_1 - \frac{g{a_1}^2}{2}; \quad \mathfrak{M}_2 = Da_2 - P_1\,(a_2 - a_1) - \frac{g{a_2}^2}{2};$$

$$M_3 = Da_3 - P_1\,(a_3 - a_1) - P_2\,(a_3 - a_2) - \frac{g{a_3}^2}{2} \text{ usw.}$$

Allgemein ist das Moment $\mathfrak{M}$ für einen beliebigen Querschnitt im Abstande x von A bestimmt durch

$$\mathfrak{M} = Dx - \frac{gx^2}{2} - P_1\,(x - a_1) - P_2\,(x - a_2) - \ldots$$

$$= Dx - \frac{gx^2}{2} - \Sigma P\,(x - a) \quad . \ . \ . \ . (169),$$

wobei sich das Summirungszeichen Σ auf alle links vom betreffenden Querschnitte liegenden Lasten zu erstrecken hat.

Die Grösse des betreffenden Querschnittes wäre nun aus

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J}$$

zu bestimmen.

Für einen prismatischen Träger (der also constanten Querschnitt besitzt) wäre selbstverständlich die Querschnittsgrösse

aus $$\max \mathfrak{M} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J}$$

zu ermitteln, wobei sich $\max \mathfrak{M}$ in einem der Belastungspunkte ergibt.

Ist aber der Träger beträchtlich lang, so wird man, um an Materiale zu ersparen, den einzelnen Fragmenten des Trägers verschiedene Querschnitte geben. Bezeichnet man z. B. die Trägheitsmomente der Querschnitte innerhalb AC_1, C_1C_2, C_2C_3 . . . der Reihe nach mit $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{J}_3$ . . ., so würden die betreffenden Querschnitte zu bestimmen sein aus:

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{\beta}{e_1} \mathfrak{J}_1 ; \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{\beta}{e_2} \mathfrak{J}_2 ; \quad \mathfrak{M}_3 = \frac{\beta}{e_3} \mathfrak{J}_3 \text{ usf.},$$

wobei $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$ . . . die obigen Werthe haben.

Anwendung bei Balkenbrücken, Querträgern, Wellen etc.

Elastische Durchbiegung. Um im vorliegenden Falle die Durchbiegungen in den einzelnen Belastungspunkten C_1, C_2, C_3 . . . . zu finden, werden wir analog wie in den beiden vorhergehenden Fällen verfahren.

Wir bezeichnen die den Belastungspunkten C_1, C_2, C_3 . . . . geltenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$ mit t_1, t_2, t_3 . . . ., und die zugehörigen Werthe von y mit f_1, f_2, f_3 . . .

Die Gleichung der elastischen Linie ist nun nach (103) innerhalb der Strecke AC_1.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon \mathfrak{J}_1} \left(Dx - \frac{gx^2}{2} \right),$$

woraus durch Integration, bei constantem Querschnitte innerhalb AC_1:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon \mathfrak{J}_1} \left(\frac{Dx^2}{2} - \frac{gx^3}{6} \right) + C.$$

Für $x = o$ wird $\frac{dy}{dx} = \tau$, also ist die Constante $C = \tau$.

Durch nochmalige Integration wird:

$$y = \frac{1}{\varepsilon \mathfrak{J}_1} \left(\frac{Dx^3}{6} - \frac{gx^4}{24} \right) + \tau q.$$

Für $x = a_1$ wird also:

$$t_1 = \frac{a_1^2}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}_1}\left(D - \frac{a_1 g}{3}\right) + \tau$$

$$\text{und } f_1 = \frac{a_1^3}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}_1}\left(D - \frac{a_1 g}{4}\right) + a_1 \tau.$$

Ebenso ist innerhalb der Strecke $C_1 C_2$:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{1}{\varepsilon\,\mathfrak{J}_2}\left(D x - P_1 (x - a_1) - \frac{g x^2}{2}\right),$$

woraus bei constantem Querschnitte $C_1 C_2$:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{1}{\varepsilon\,\mathfrak{J}_2}\left(\frac{D x^2}{2} - P_1 \left(\frac{x^2}{2} - a_1 x\right) - \frac{g x^3}{6}\right) + C_1,$$

wobei sich die Constante C_1 für $x = a_1$ aus $\frac{d y}{d x} = t_1$ ergibt.

Durch nochmalige Integration wird

$$y = \frac{1}{\varepsilon\,\mathfrak{J}_2}\left(\frac{D x^3}{6} - P_1 \left(\frac{x^3}{6} - \frac{a_1 x^2}{2}\right) - \frac{g x^4}{24}\right) + C_1 x + C_2.$$

Die Constante C_2 erscheint hierbei bestimmt, indem für $x = a_1$, $y = f_1$ wird.

Analog würden die folgenden Fragmente $C_2 C_3$ u. s. w. zu behandeln sein.

Haben hierbei in zwei aufeinander folgenden Belastungspunkten C die Winkel t entgegengesetzte Zeichen, so liegt dazwischen offenbar ein Punkt grösster Durchbiegung, welcher durch $\frac{d y}{d x} = 0$ betimmt ist, wenn unter y die Ordinate eines Punktes des betreffenden Fragmentes der elastischen Linie verstanden wird.

Statt vom Stützpunkte A kann man natürlich auch vom Stützpunkte B ausgehen, oder auch für einen Theil $A C_n$ des Trägers von A, für den anderen $B C_n$ von B ausgehend die aufeinander folgenden Integrationen verrichten.

Für jede Strecke zwischen zwei aufeinander folgenden Belastungspunkten lassen sich somit zwei Gleichungen aufstellen; sind also n Belastungspunkte vorhanden, so sind offenbar $n + 1$ Strecken, somit $2\,n + 2$ Bedingungsgleichungen möglich, aus denen sich $2 n + 2$ Unbekannte bestimmen lassen. Diese $2 n + 2$ Unbekannten sind die den n Belastungspunkten entsprechenden Werthe von t und f, sowie die beiden Auflagerwinkel τ und τ_1, also factisch $2 n + 2$ Unbekannte.

Zur näheren Erläuterung möge der folgende specielle Fall dienen.

Belastung durch zwei gleich grosse Lasten, welche von den Stützen die gleiche Entfernung a haben. Fig. 135. Jeder Stützendruck ist hier, wenn wir das Eigengewicht des Trägers

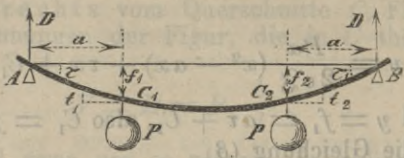


Fig. 135.

vernachlässigen, $D = P$. Nehmen wir wieder A als Anfangspunkt der X an, so ist innerhalb der Strecke $A\,C_1$

$$\mathfrak{M} = Dx = Px,$$

somit für diese Strecke, bei constantem Querschnitte

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Px}{\varepsilon\,\mathfrak{J}},\ \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} + \tau \text{ und}$$

$$y = \frac{Px^3}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} + \tau x.$$

Hieraus wird für $x = a$

$$t_1 = \frac{Pa^2}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} + \tau \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\alpha)$$

$$\text{und } f_1 = \frac{Pa^3}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}} + a\tau \quad . \ . \ . \ . \ . \ (\beta)$$

Innerhalb der mittleren Strecke $C_1\,C_2$ wird

$$\mathfrak{M} = Dx - P(x - a) = Pa;$$

demnach ist innerhalb der mittleren Strecke $\mathfrak{M}$ constant und von der Entfernung AB der Stützen unabhängig. Die Querschnittsgrösse des Trägers wird also aus

$$\max \mathfrak{M} = Pa = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J}$$

zu ermitteln sein.

Es wird nun innerhalb $C_1\,C_2$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Pa}{\varepsilon\,\mathfrak{J}} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{Pax}{\varepsilon\,\mathfrak{J}} + C,$$

und weil für $x = a$, $\dfrac{dy}{dx} = t_1$, so wird die Constante

$$C = t_1 = \frac{Pa^2}{\varepsilon\,\mathfrak{J}},$$

Für diesen Werth wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pa}{\varepsilon \mathfrak{J}}\left(x - \frac{a}{2}\right) + \tau \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\gamma)$$

und hieraus

$$y = \frac{Pa}{2 e \mathfrak{J}}(x^2 - ax) + \tau x + C_1 \ .$$

Für $x = a$ wird $y = f_1 = a\tau + C_1$, also $C_1 = f_1 - a\tau$ und mit Rücksicht auf die Gleichung (β)

$$C_1 = \frac{Pa^3}{6} \ .$$

Es wird demnach hiefür:

$$y = \frac{Pa}{2 \varepsilon \mathfrak{J}}\left(x^2 - a x + \frac{a^2}{3}\right) + \tau x \ . \ . \ . \ . \ (\delta) \ .$$

Für $x = l - a$ erhalten wir für den Punkt C_2 aus (γ) und (δ):

$$t_2 = \frac{Pa}{2 \varepsilon \mathfrak{J}}(2l - 3a) + \tau \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\alpha_1) \ .$$

und
$$f_2 = \frac{Pa}{2 \varepsilon \mathfrak{J}}(l^2 - 3al + \tfrac{3}{7} a^2) + \tau (l - a) \quad . \ . \ (\beta_1)$$

Da nun wegen der symmetrischen Anordnung $t_1 = - t_2$ sein muss, so ergibt sich aus (α) und (α_1)

$$\tau = \frac{-Pa^2}{2 \varepsilon \mathfrak{J}}(l - a)$$

und hiefür aus (β) und (β_1)

$$f_1 = f_2 = \frac{-Pa}{2 \varepsilon \mathfrak{J}}, (l - \tfrac{4}{3} a) \quad . \ . \ . \ (170).$$

Das Maximum der Durchbiegung liegt hier offenbar in der Mitte des Trägers; wir erhalten hiefür aus (δ) für $x = \frac{l}{2}$

$$\max y = \frac{-Pa}{2 \varepsilon \mathfrak{J}}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{a^2}{3}\right) \ . \ . \ . \ (171).$$

§. 29. **Belastung durch eine bewegliche isolirte Last.** Dieser Fall kommt am häufigsten bei kurzen Brücken vor, auf welchen wegen ihrer geringen Länge nicht gleichzeitig zwei auf einander folgende Radstände Platz finden können.

Es wird nun darauf ankommen, diejenige Lage der Last zu bestimmen, bei welcher die Anspruchnahme irgend eines Querschnittes am grössten wird.

a) Transversalkräfte. Um zunächst den Einfluss einer beweglichen Einzellast P auf die Transversalkraft eines beliebigen Querschnittes kennen zu lernen, betrachten wir folgende zwei Fälle:

1. Liegt P rechts vom Querschnitte C, Fig. 136, so ist nach den Bezeichnungen der Figur, die in C thätige Transversalkraft:

$$V = D = P\frac{b}{l},$$

also **positiv**, und zwar um so grösser, je grösser b wird, d. h. je näher die bewegliche Last P zum Querschnitte C rückt.

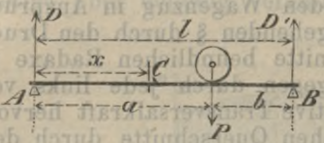


Fig. 136.

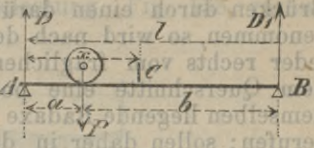


Fig. 137.

2. Liegt aber P, wie in Fig. 137, links von C, so ist die in C thätige Transversalkraft

$$V = D - P = P\frac{b}{l} - P = -P\frac{a}{l}$$

also **negativ**, und wird numerisch um so grösser, je näher P zum Querschnitte rückt.

Wir können somit sagen:

Jede Einzellast erzeugt eine positive oder negative Transversalkraft, je nachdem sie auf der rechten oder linken Seite des fraglichen Querschnittes liegt, und es ist diese Transversalkraft um so grösser, je näher die Last zum Querschnitte rückt.

b) Momente. Mit Rücksicht auf die eben behandelten Fälle wird:

1. Wenn die Last P rechts vom Querschnitte C, Fig. 136, liegt,

$$\mathfrak{M} = Dx = \frac{Pb}{l}x.$$

also positiv, und um so grösser, je grösser b wird, d. h. je näher die Last zum Querschnitte rückt;

2. wenn die Last links vom Querschnitte C, Fig. 137, liegt,

$$\mathfrak{M} = Dx\,P(x-a) = \frac{Pb}{l}x - P(x-a)$$

$$= \frac{Pa}{l}(l-x)$$

also wieder **positiv**, und um so grösser, je grösser a ist, d. h. je näher P beim Querschnitte C liegt.

Es gilt also der Satz:

Jede Einzellast, sie möge rechts oder links vom fraglichen Querschnitte liegen, erzeugt in demselben ein positives Moment, welches um so grösser wird, je näher die Einzellast zum Querschnitte rückt. —

§. 30. Belastung durch ein System von beweglichen Einzellasten.

A) Transversalkräfte. Denken wir uns den Träger durch ein System von beweglichen Einzellasten, wie z. B. bei Brücken durch einen darüber rollenden Wagenzug in Anspruch genommen, so wird nach dem vorhergehenden § durch den Druck jeder rechts vom fraglichen Querschnitte befindlichen Radaxe in dem Querschnitte eine positive, dagegen durch jede links von demselben liegende Radaxe eine negative Transversalkraft hervorgerufen; sollen daher in dem fraglichen Querschnitte durch den Wagenzug nur positive Transversalkräfte hervorgerufen werden, so muss derselbe offenbar von rechts kommen und darf nur bis zum betreffenden Querschnitte auffahren.

Würde dagegen der Wagenzug von links kommen und den fraglichen Querschnitt C nicht überschreiten, so würden durch die Drücke der einzelnen Radaxen im Querschnitte C nur negative Transversalkräfte erzeugt werden. Hieraus folgt:

dass in einem beliebigen Querschnitte eines Brückenträgers der grösste numerische Werth der Transversalkräfte hervorgerufen wird, wenn der schwerste Lastzug von der entfernten Stütze kommend bis zum Querschnitte auffährt, so dass die erste Radaxe unmittelbar über dem Querschnitte liegt.

Die Grösse dieser Transversalkraft ist dann nach §. 28 zu bestimmen.

Bei Eisenbahnbrücken würde das absolute Maximum der Transversalkraft offenbar am Auflager durch den grössten Stützendruck erreicht werden, welcher sich ergäbe, wenn das erste Räderpaar der schwersten Lastzugsmaschine unmittelbar über dem Auflager stünde und die ganze Brücke durch eine Reihe von Locomotiven der schwersten Art belastet wäre.

B) Momente. Nach dem vorigen § hat sich für das auf den fraglichen Querschnitt C wirkende Moment ergeben, dass dasselbe durch jede rechts und links von diesem Querschnitte innerhalb der Stützen A und B angebrachte Last vergrössert wird, und zwar um so mehr, je näher die Lasten zum fraglichen Querschnitte rücken. Für Brücken ergibt sich hiernach, dass für irgend einen Querschnitt das Moment der äusseren Kräfte am grössten wird, wenn die ganze Brücke belastet und eine der grössten Einzellasten möglichst nahe beim betreffenden Querschnitte steht.

Da überdies bei der Anspruchnahme eines Trägers durch Einzellasten die grössten Momente, nach §. 28, in den Belastungspunkten liegen, so folgt daraus überdies, dass für einen Querschnitt das Moment zum Maximum wird, wenn eine Einzellast unmittelbar über dem Querschnitt liegt. Welche der Einzellasten über dem Querschnitte liegen müsse, wird aus der folgenden Untersuchung ersichtlich werden.

Gefährlichste Belastungsweise bezüglich der Momente. Um die gefährlichste Lage der beweglichen Last bezüglich der Momente annähernd bestimmen zu können, wollen wir zunächst eine stetige aber beliebig veränderliche Belastung, Fig. 138, voraus-

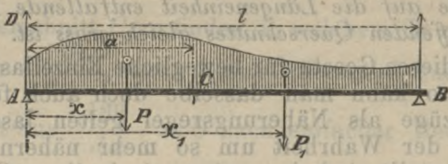


Fig. 138.

setzen. Es seien P und P_1 die Resultirenden der zu beiden Seiten des Querschnittes C liegenden Last, und x, x_1 ihre bezüglichen Abstände von A, so ist zunächst der Stützendruck

$$D = P\frac{l-x}{l} + P_1\frac{l-x_1}{l}$$

und für den Querschnitt C, der von A um a absteht, das Moment

$$\mathfrak{M} = Da - P(a-x),$$

oder mit Rücksicht auf den obigen Werth von D

$$\mathfrak{M} = \frac{Px(l-a) + P_1 a (l-x_1)}{l}.$$

Lässt man nun die bewegliche Last um dx nach links vorschreiten, so wird sich $\mathfrak{M}$ um $d\mathfrak{M}$ ändern. Die Differentiation von $\mathfrak{M}$ nach x und x_1 gibt (wegen $dx = dx_1$)

$$d\mathfrak{M} = \frac{P(l-a)\,dx - P_1\,a\,dx}{l},$$

woraus
$$\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = \frac{P(l-a) - P_1\,a}{l}.$$

Soll nun $\mathfrak{M}$ für den Querschnitt C zum Maximum werden, so muss $\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$ werden, also

$$P(l - a) = P_1 a,$$

oder

$$\frac{P}{a} = \frac{P_1}{l - a} \quad \ldots\ldots\ldots (172).$$

$\frac{P}{a}$ bedeutet aber die mittlere auf die Längeneinheit des Fragmentes AC entfallende Last, während $\frac{P_1}{l-a}$ die auf das Fragment BC pro Längeneinheit entfallende mittlere Last bezeichnet. Aus der Gleichung (172) ergibt sich also die Regel:

Das Moment wird in irgend einem Querschnitte zum Maximum, wenn die auf die Längeneinheit entfallende Last auf jeder Seite des betreffenden Querschnittes gleich gross ist.

Obzwar dieses Gesetz für bewegliche Einzellasten nicht genau gelten wird, so kann man dasselbe doch auch für Belastungen durch Wagenzüge als Näherungsregel gelten lassen, und zwar wird sie sich der Wahrheit um so mehr nähern, je enger die Einzellasten gestellt sind, je weniger sie in ihrer Grösse von einander abweichen und je länger der Träger dieser Lasten ist.

Für lange Eisenbahnbrücken lässt sich daher in Anbetracht der gewonnenen Resultate die Regel aufstellen:

Damit das Moment für einen beliebigen Querschnitt ein Maximum werde, muss eine Radaxe über dem Querschnitte stehen und der Zug eine solche Lage haben, dass die auf die Längeneinheit entfallende Last auf jeder Seite des Querschnittes nahezu gleich gross ist.

Es erübrigt uns noch zu zeigen, an welchem Querschnitte sich der numerisch grösste Werth, nämlich das **absolute Maximum des Momentes** ergeben werde.

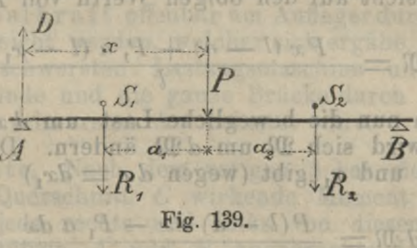


Fig. 139.

Nehmen wir an, dieser Querschnitt C liege von A, Fig. 139, im Abstande x, so muss sich zunächst an diesem Querschnitte eine der grössten Lasten befinden, und zu beiden Seiten desselben werden möglichst viele der grössten Verkehrslasten derart vertheilt sein müssen, dass die pro Längeneinheit entfallende Last zu beiden Seiten des Querschnittes möglichst gleich gross werde. Bezeichnen wir mit P die am fraglichen Querschnitte C liegende Last und die Resultanten der links und rechts von C liegenden Belastungen mit R_1 und R_2, ferner ihre Abstände von C mit a_1 und a_2, endlich die Länge AB des Trägers zwischen den Auflagern mit l, so geben diese Lasten in A den Auflagerdruck

$$D = \frac{R_1 (l - x + a_1) + P(l - x) + R_2 (l - x - x_2)}{l}$$

und es wird das Moment in C

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= D x - R_1 a_1 \\ &= \frac{1}{l} [R_1 (l - x)(x - a_1) + P(l - x) x + R_2 (l - x - a_2) x] \end{aligned}$$

Um nun den Querschnitt C zu finden, in welchem $\mathfrak{M}$ zum Maximum wird, bilde man $\frac{d\mathfrak{M}}{dx}$, setzte diesen Differential-Quotienten gleich Null, und erhält aus $\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$ nach einfacher Rechnung

$$x = \frac{l}{2} + \frac{R_1 a_1 - R_2 a_2}{2(R_1 + P + R_2)} = \frac{l}{2} + \frac{R_1 a_1 - R_2 a_2}{2Q}$$

wobei $Q = R_1 + P + R_2$ offenbar die totale Belastung des Trägers bildet, und die Producte $R_1 a_1$, $R_2 a_2$ die Momente aller der links, respective rechts vom Querschnitte C liegenden Lasten bezüglich dieses Querschnittes, bedeuten.

Im allgemeinen wird das zweite Glied des obigen Ausdruckes von x sehr klein sein, so dass in der Praxis gewöhnlich

$$x = \frac{l}{2},$$

d. h. die Trägermitte als diejenige Stelle bezeichnet wird, an welcher das absolute Maximum des Momentes vorkommt.

Durch Einsetzung des genaueren Werthes von α in die obige Gleichung von $\mathfrak{M}$, erhält man das absolute Maximum des Momentes, nämlich

$$\max \mathfrak{M} = \frac{Ql}{4} - \frac{1}{2}(R_1 a_1 + R_2 a_2) + \frac{(R_1 a_1 - R_2 a_2 e)}{4Q}.$$

Da aber das letzte Glied dieses Ausdruckes gewöhnlich sehr klein ist, so pflegt man es zu vernachlässigen und erhält alsdann annähernd richtig

$$\max \mathfrak{M} = \frac{Ql}{4} - \frac{1}{2}(R_1 a_1 + R_2 a_2) \quad . \; . \; (173).$$

§. 31. **Brückenbelastung**. Die totale Brückenbelastung besteht 1. aus dem Eigengewichte der Brücke, 2. aus der beweglichen (mobilen) Belastung, 3. aus dem Schneedrucke und 4. aus den horizontalen Kräften.

I. Eigengewicht.

Dasselbe hängt ab:

a) Von der Grösse der Verkehrsbelastung,

b) von der zulässigen Maximalspannung des Materiales, aus welchem die Brücke besteht, und

c) von dem Constructionssystem der Brückenträger.

Da nun die Grösse der Verkehrslast wieder von der Spannweite der Brücke abhängig ist, so wird das Gewicht der eigentlichen Brücken- oder Hauptträger zunächst als Function der Spannweite darzustellen sein. Da ferner bei jedem Brückensystem das Gewicht der Fahrbahn von der Spannweite unabhängig ist, so wird in die Formel für das Eigengewicht der Brücken auch eine Constante aufzunehmen sein.

Bezeichnet daher g das Eigengewicht der Brücke pro Längeneinheit, l die freie Spannweite der Brücke, α und β gewisse Erfahrungscoëfficienten, so kann für das Eigengewicht derselben die allgemeine Formel aufgestellt werden:

$$g = \alpha \,.\, l + \beta \quad \ldots\ldots\ldots (174).$$

Die Coefficienten α und β müssen aus einer grossen Reihe rationell construirter Brücken verschiedener Systeme, bei einer bestimmten Maximalspannung des Materiales bestimmt werden.

A. Eigengewicht der Eisenbahnbrücken. Nach den umfangreichen Zusammenstellungen des Eigengewichtes verschiedener Brückensysteme vom Baurath Schwedler, vom General-Inspector Heinrich Schmidt und Anderen kann man als Mittelwerthe für richtig construirte eiserne Eisenbahn-Brücken, deren Hauptträger pr. □ Cm. nie über 8 Kilogr. und deren Querträger nur mit 6 Kilogr. pr. □ Centim. in Anspruch genommen werden, als grössten Werth des Eigengewichts für die Längeneinheit und für ein Geleise setzen

$$g = 30\, l + 800 \text{ Kilogr.} \quad \ldots\ldots (175),$$

wenn l in Metern ausgedrückt und das Gewicht des Oberbaues mit eingerechnet wird. Das Eisengewicht g_1 in Kg. pro laufenden Meter ist hiebei höchstens mit $g_1 = 30\, l + 400$ anzunehmen.

Nach den Formeln von Laissle und Schübler ist für eingeleisige Eisenbahnbrücken

$$g = 35\, l + F \quad \ldots\ldots\ldots (175\,a),$$

wenn F das Gewicht der Fahrbahn (sammt Querträgern, Schwellen, Schienen und Bedielung) pro laufenden Meter in Kg. bedeutet; ferner das Eisengewicht

$$g_1 = 35\, l + F_1,$$

wenn F_1 das Eisengewicht der Fahrbahn (ohne Schienen) pro laufenden Meter in Kg. bezeichnet.

Die Werthe von F und F_1 sind hiebei von der Constructionsweise der Fahrbahn und der Entfernung e der Querträger abhängig. Es sind diesfalls die folgenden Grundtypen massgebend.

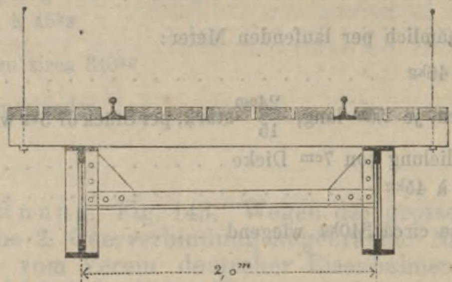


Fig. 140.

1. Anordnung. Fig. 140. Die beiden Schienenstränge liegen mittelst gewöhnlicher Querschwellen auf den Hauptträgern unmittelbar auf. Für $e = 0{\cdot}9^{m}$ ist hiebei pro laufenden Meter $F = 380$ und $F_1 = 85^{kg}$.

Es ist nämlich das Gewicht von

2 Fahrschienen, incl. Befestigungsmitteln per laufenden Meter, à 40^{kg} .	80 Kg.
$\frac{1{\cdot}0}{0{\cdot}9}$ Querschwellen, je $2{\cdot}5^{m}$ lang und $\frac{24^{cm}}{15}$ stark, per Stück $67{\cdot}5^{kg}$ wiegend	75 „
2·2 Quadratmeter eichene Bedielung von 7^{cm} Dicke (per Cubik-Meter 900^{kg}) nahezu	140 „
die Befestigungsplatten, Schrauben etc.	15 „
Endlich das einfache beiderseitige Eisengeländer pro laufenden Meter circa	70 „
	380 Kg.

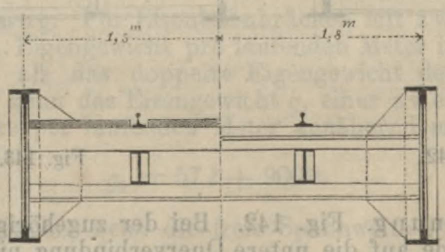


Fig. 141.

2. Anordnung. Fig. 141. Diese Anordnung ist stets möglich, wenn die Schienenoberkante nicht mehr als $0{\cdot}75^{m}$ unter-

halb der Oberkante der Hauptträger liegt. Die Schienen liegen hier mittelst Querschwellen auf besonderen Zwischenträgern I, den sogenannten Schwellenträgern auf, welche auf Querträgern, die in Entfernungen $e = 1{\cdot}8^m$ angebracht sind, ruhen. Hiebei ist per laufenden Meter $F = 575$ und $F_1 = 280^{kg}$.

Es wiegen nämlich per laufenden Meter:

2 Fahrschienen, à 40^{kg}	80 Kg.
$\frac{1{\cdot}0}{0{\cdot}9}$ Querschwellen, je 2.5^m lang, $\frac{24^{cm}}{15}$ stark, per Stück $67{\cdot}5^{kg}$ wiegend,	75 „
$2{\cdot}2\square^m$ eichene Bedielung von 7^{cm} Dicke	140 „
2 Schwellenträger, à 45^{kg}	90 „
$\frac{1{\cdot}0}{1{\cdot}8}$ Querträger, je circa 340^{kg} wiegend	190 „
	575 Kg.

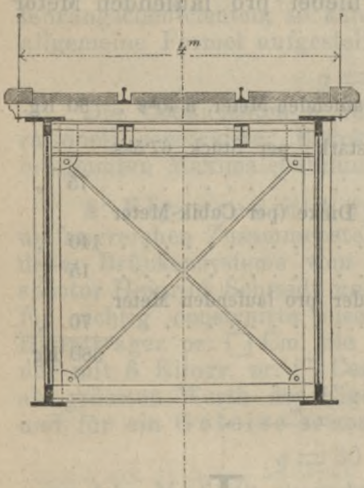


Fig. 142.

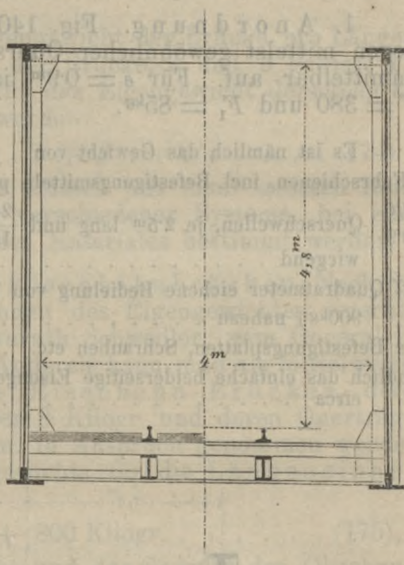


Fig. 143.

3. Anordnung. Fig. 142. Bei der zugehörigen Gewichtsberechnung wurde auf die untere Querverbindung nicht Rücksicht genommen, weil dieselbe von der Trägerhöhe abhängig, somit veränderlich ist. Die Entfernung der Querträger ist wieder $e = 1{\cdot}8^m$. Man erhält hiefür per laufenden Meter der Fahrbahn $F = 815$ und $F_1 = 352^{kg}$.

Es wiegen nämlich per laufenden Meter:

2 Fahrschienen, à 40^{kg}	80 Kg.
$\frac{1 \cdot 0}{0 \cdot 9}$ Querschwellen, je $4 \cdot 5^{m}$ lang, $\frac{24^{cm}}{15}$ stark, per Stück 120^{kg} wiegend,	133 „
$4 \square^{m}$ eichene Bedielung von 7^{cm} Dicke	250 „
2 Schwellenträger, à 45^{kg}	90 „
$\frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 8}$ Querträger zu circa 340^{kg}	192 „
Das einfache Eisengeländer	70 „
	815 Kg.

4. Anordnung. Fig. 143. Wegen der grossen Trägerhöhe ist oberhalb eine 2. Querverbindung angebracht. Nach dem Normalprofile, das vom Verein deutscher Eisenbahnen angenommen wurde, beträgt hiebei die lichte Weite zwischen den Hauptträgern 4^{m} und die lichte Höhe zwischen der oberen Schienenfläche und der Querverbindung $4 \cdot 8^{m}$. Die Entfernung e der Querträger ist wieder $1 \cdot 8^{m}$. Das Gewicht der Fahrbahn (ohne die obere Querverbindung und ohne die Diagonalverbindungen) ist pro laufenden Meter nahezu bestimmt durch $F \doteq 800^{kg}$, wobei das Eisengewicht $F_1 \doteq 337^{kg}$.

Es wiegen hiebei per laufenden Meter:

2 Fahrschienen, à 40^{kg}	80 Kg.
$\frac{1 \cdot 0}{0 \cdot 9}$ Querschwellen, je $4 \cdot 5^{m}$ lang, $\frac{24^{cm}}{15}$ stark, per Stück 120^{kg} wiegend,	133 „
$4 \square^{m}$ eichene Bedielung von 7^{cm} Dicke	250 „
2 Schwellenträger, à 45^{kg}	90 „
$\frac{1 \cdot 0}{1 \cdot 8}$ Querträger zu circa 450^{kg}	247 „
	800 Kg.

Anmerkung. Für Eisenbahnbrücken mit zwei Geleisen ergibt sich das Eigengewicht pro laufenden Meter im Allgemeinen etwas geringer als das doppelte Eigengewicht der eingeleisigen Brücken. Man kann das Eisengewicht g_1 einer zweigeleisigen Eisenbahnbrücke per laufenden Meter annähernd mit

$$g_1 = 57\, l + 900^{kg}$$

in Rechnung nehmen, wenn die freie Spannweite l in Metern ausgedrückt wird.

Die specielle Anordnung einer solchen Brücke ist aus Fig. 144 ersichtlich. Das Gewicht der Fahrbahn berechnet sich per laufenden Meter wie folgt:

4 Fahrschienen, à 40^{kg}	160 Klgr.
$\frac{1 \cdot 0}{0 \cdot 9}$ Querschwellen, je $8 \cdot 5^{m}$ lang, $\frac{24^{cm}}{15}$ stark, je 225^{kg} wiegend	252 "
$7 \cdot 6 \square^{m}$ eichene Bedielung von 7^{cm} Stärke	400 "
4 Schwellenträger, per laufenden Meter 100^{kg} wiegend	480 "
$\frac{1 \cdot 0}{3 \cdot 6}$ Querträger, je 1830^{kg} wiegend, per Meter . . .	508 "
	1800 Klgr.

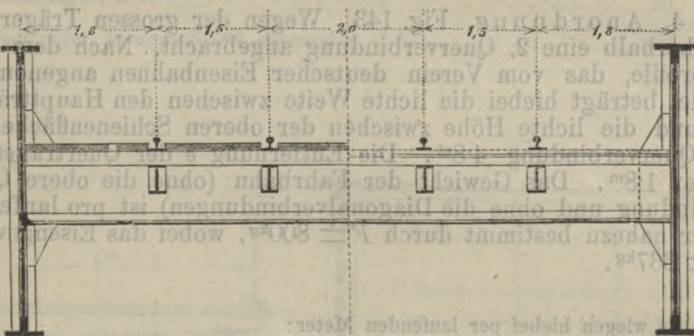


Fig. 144.

B) Eigengewicht der Strassenbrücken. Bei Strassenbrücken ist die Aufstellung einer für das Eigengewicht halbwegs brauchbaren allgemeinen Formel sehr problematisch, indem das Eigengewicht nicht nur von der Länge, sondern auch wesentlich von der Breite der Brücke und von der Constructionsart der Fahrbahn abhängt.

Es sind hiebei insbesondere Brücken mit Beschotterung und solche mit einfacher Holzüberlage zu unterscheiden.

Im Allgemeinen kann man für eiserne Strassenbrücken, von $5 \cdot 5^{m}$ Fahrbahnbreite und beiderseits je 1^{m} Fusswegbreite, also von 7·5 Meter Totalbreite und laufenden Meter Spannweite,

a) bei Anwendung von $0 \cdot 2^{m}$ dicker Beschotterung

$$g = 42\,l + 3600 \text{ Klgr. Gesammtgewicht}$$

und $$g_1 = 42\,l + 900 \text{ Klgr. Eisengewicht,}$$

b) bei Anwendung von doppelter eichener Bedielung

$$g = 28\,l + 1300 \text{ Klgr. Gesammtgewicht}$$

und $$g_1 = 28\,l + 600 \text{ Klgr. Eisengewicht}$$

per laufenden Meter annehmen.

Genauere Resultate erhält man, wenn das Fahrbahngewicht F der jeweiligen Anordnung derselben angepasst wird; also

a) für Brücken mit Beschotterung:

$$g = 42\,l + F \qquad \text{(176)},$$

b) für solche mit doppelter eichener Bedielung:

$$g = 28\,l + F \qquad \text{(177)}.$$

1. Anordnung. Fig. 145. Diese eignet sich für kleine Spannweiten, wobei die aus gewalztem Schmiedeisen hergestellten I-förmigen Hauptträger unterhalb der Fahrbahn liegen und einander so nahe gestellt sind, dass zur Aufnahme des Brücken-

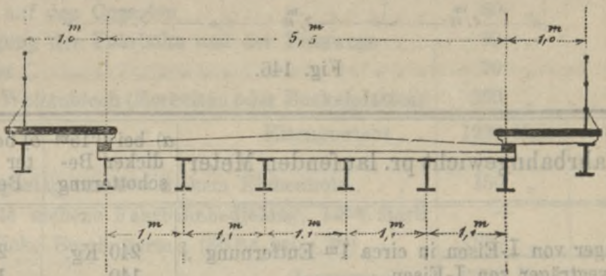


Fig. 145.

belages keine Querträger nothwendig sind. Die Beschotterung wird gewöhnlich von 0·6^{cm} starkem Wellenblech (oder von Zoreeisen, oder von Buckelblech) getragen, das pro □^{m} circa 60^{kg} wiegt.

F = Fahrbahngewicht pr. laufenden Meter	*a*) bei 0·15^{m} hoher Beschotterung	*b*) bei doppelter eichener Bedielung
Befestigung der Fahrbahn und der Fusswege . .	30 Kg.	30 Kg.
Geländer	70 „	70 „
5·5□^{m} Wellenblech (Zoreeisen oder Buckelplatten)	330 „	—
Eisengewicht . .	430 Kg.	100 Kg.
2 Fusswegschwellen von Eichenholz $\frac{13^{cm}}{17}$ stark .	40 „	40 „
Fusswegbelag von 8^{cm} dickem Eichenholz	150 „	150 „
Doppelte eichene Fahrbahn-Bedielung, 14^{cm} dick	—	700 „
0·15^{m} dicke Beschotterung (300^{kg} pro □^{m})	1650 „	—
2 Kiesabschlussschwellen (Streifbäume)	40 „	—
Zusammen . .	2310 Kg.	990 Kg.

2. Anordnung. Fig. 146. Dieselbe eignet sich für grössere Spannweiten, wenn die hinreichende Höhe vorhanden ist, um auf den in geringerer Anzahl verwendeten Haupt- respective Blechträgern den Brückenbelag, mittels Querträgern von I-Eisen, anbringen zu können.

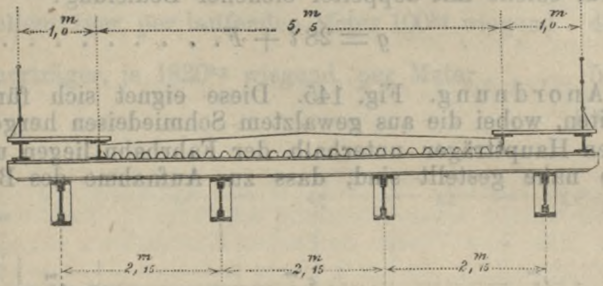


Fig. 146.

F = Fahrbahngewicht pr. laufenden Meter	*a*) bei 0·15^m dicker Beschotterung	*b*) bei doppelter eichener Bedielung
Querträger von I-Eisen in circa 1^m Entfernung .	240 Kg.	210 Kg.
4 Fusswegträger von I-Eisen	140 „	140 „
Geländer	70 „	70 „
Befestigung der Fahrbahn und der Fusswege . .	30 „	30 „
5·5□^m Wellenblech (Zoreeisen oder Buckelplatten)	330 „	—
Eisengewicht . .	810 Kg.	450 Kg.
Fusswegbelag von 8^cm dickem Eichenholz	150 „	150 „
Doppelte eichene Fahrbahnbedielung, 14^cm stark .	—	700 „
0·15^m dicke Beschotterung (300^kg pro □^m) . . .	1650 „	—
Zusammen . .	2610 Kg.	1300 Kg.

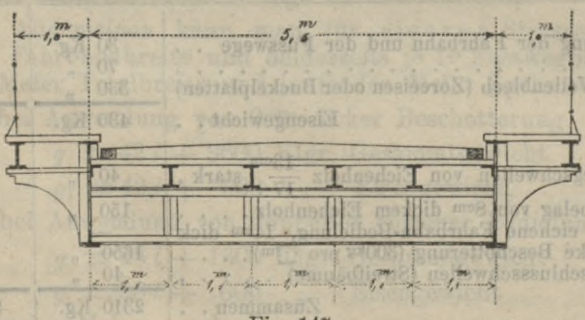


Fig. 147.

3. Anordnung. Fig. 147. Hiebei sind nur 2 Hauptträger (Blech- oder Fachwerkträger) vorausgesetzt, auf die sich die Fusswege und die aus Blechträgern hergestellten, in Entfernungen von 3^m angebrachten Querträger stützen, über welche die aus I-Eisen bestehenden Zwischenträger führen, die den eigentlichen Brückenbelag aufzunehmen haben.

F = Fahrbahngewicht pr. laufenden Meter	*a*) bei $0{\cdot}15^m$ dicker Beschotterung	*b*) bei doppelter eichener Bedielung
Querträger in 3^m Entfernung	300 Kg.	180 Kg.
4 Zwischenträger aus I-Eisen	340 „	180 „
Consolen	120 „	120 „
Träger auf den Consolen	80 „	80 „
Befestigung der Fahrbahn und der Fusswege	50 „	50 „
Geländer	70 „	70 „
5·5 □^{m} Wellenblech (Zoreeisen oder Buckelplatten)	330 „	—
Eisengewicht	1290 Kg.	680 Kg.
Fusswegbelag von 8^{cm} dickem Eichenholz	150 „	150 „
Doppelte eichene Fahrbahnbedielung, 14^{cm} stark	—	700 „
$0{\cdot}15^m$ dicke Beschotterung (300^{kg} pro □^{m})	1650 „	—
Zusammen	3090 Kg.	1530 Kg.

4. Anordnung. Fig. 148. Dieselbe ist nur für grössere Spannweiten geeignet, wobei die Hauptträger über die Fusswege hinausragen.

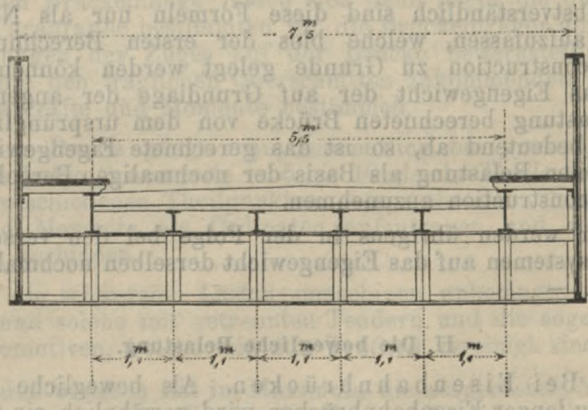


Fig. 148.

F = Fahrbahngewicht pr. laufenden Meter	*a*) bei 0·15^{m} dicker Beschotterung	*b*) bei doppelter eichener Bedielung
Querträger in 3^{m} Entfernung	600 Kg.	400 Kg.
6 Zwischenträger aus I-Eisen	510 „	270 „
Befestigung der Fahrbahn und der Fusswege . .	80 „	80 „
5·5□^{m} Wellenblech (Zoreeisen oder Buckelplatten)	330 „	—
Eisengewicht . .	1520 Kg.	750 Kg.
Fusswegbelag aus 8^{cm} dickem Eichenholz	150 „	150 „
Doppelte eichene Fahrbahnbedielung, 14^{cm} stark	—	700 „
0·15^{m} dicke Beschotterung (300^{kg} per □^{m})	1650 „	—
Zusammen . .	3320 Kg.	1600 Kg.

Für das Eigenwicht hölzerner Strassenbrücken mit einfacher Balkenlage, bei 5^{m} Fahrbahnbreite und beiderseits je 1^{m} Fusswegbreite, kann man

a) bei Anwendung von 0·15^{m} dicker Beschotterung

$$g = 3000^{kg} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (178),$$

b) bei Anwendung von doppelter eichener Bedielung

$$g = 1500^{kg} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (179)$$

per laufenden Meter annehmen.

Uebrigens werden wir die den verschiedenartigen Brücken entsprechenden Eigengewichte später bei der Behandlung der einzelnen Brückensysteme bestimmter angeben.

Selbstverständlich sind diese Formeln nur als Näherungswerthe aufzufassen, welche blos der ersten Berechnung einer Brückenconstruction zu Grunde gelegt werden können. Weicht dann das Eigengewicht der auf Grundlage der angenommenen Totalbelastung berechneten Brücke von dem ursprünglich eingeführten bedeutend ab, so ist das gerechnete Eigengewicht nebst der mobilen Belastung als Basis der nochmaligen Berechnung der Brückenconstruction anzunehmen.

Wir werden übrigens in der Folge bei den verschiedenen Brückensystemen auf das Eigengewicht derselben nochmals zurückkommen. —

II. Die bewegliche Belastung.

A) Bei Eisenbahnbrücken. Als bewegliche Maximalbelastung langer Eisenbahnbrücken wird gewöhnlich ein Güterzug, der von zwei bis drei vollständig ausgerüsteten Locomotiven der schwersten Art der betreffenden Bahn, geführt wird, angenommen. Die angereihten Güterwagen sind hierbei bis zum Maximum ihrer Tragfähigkeit belastet und in solcher Anzahl anzunehmen, dass der complete Zug die ganze Länge der Brücke bedecken kann.

In neuerer Zeit wurde von mehreren Ingenieuren als grösste mobile Last bei Eisenbahnbrücken jene, die aus einem ganzen Zuge von Locomotiven besteht, in Rechnung genommen, und damit motivirt, dass dieser Belastungsfall in Kriegszeiten eintreten könnte. Da sich jedoch diese Belastungsweise unter allen Umständen vermeiden lässt, so ist es jedenfalls rationeller, die Brückenberechnung auf denjenigen ungünstigsten Belastungsfall zu basiren, der thatsächlich vorkommen kann. Demnach wird bei der Bestimmung der grössten Transversal- oder Verticalkräfte ein vollständig beladener Güterzug, der von drei der schwersten Güterzugs-Maschinen gezogen wird, in Betracht genommen; dagegen bei der Bestimmung der grösstmöglichen Biegungsmomente die ungünstigste Belastungsweise durch eine derartige Zusammenrückung von zwei Güterzügen erzielt, dass die Locomotiven der beiden Züge Brust an Brust stehen, und jeder der beiden Güterzüge von zwei vollständig ausgerüsteten Locomotiven der schwersten Art geführt wird.

Um nun bei langen Eisenbahnbrücken die verschiedenen Stellungen des Zuges bezüglich der in Betracht zu ziehenden einzelnen Brückenquerschnitte nicht immer von Neuem zeichnen zu müssen, wird man am einfachsten die Axeneintheilung des ganzen Zuges, nach dem der Zeichnung zu Grunde liegenden Längenmassstabe auf einem Papierstreifen auftragen, gehörig numeriren und zu den einzelnen Axen die zugehörigen Axendrücke einschreiben.

Durch einfache Verschiebung dieses Streifens längs der gezeichneten Brückenlänge lassen sich dann leicht die durch die früheren Paragraphe bestimmten für die Brückenträger ungünstigsten Stellungen des Zuges auf der Brücke bewerkstelligen und hiernach die den fraglichen Querschnitten zukommenden, grössten Transversalkräfte und Momente bestimmen.

In der Praxis pflegt man, namentlich bei grossen Spann, weiten, die halbe Spannweite in 5 bis 10 gleiche Theile zu theilen die den verschiedenen Theilpunkten entsprechenden Transversalkräfte und Momente als Ordinaten aufzutragen und sie durch Curven zu verbinden.

Was die schwersten Lastzugsmaschinen anbelangt, so unterscheidet man solche mit getrennten Tendern und die sogenannten Tenderlocomotiven, welche mit den Tendern vereinigt sind.

Bei den ersteren hat im Maximum die ausgerüstete Maschine 37 Tonnen, der gefüllte Tender 27 Tonnen Gewicht und sind die betreffenden Maximal-Axendrücke und kleinsten Radstände, sowie jene eines belasteten Güterwagens aus Fig. 149 ersichtlich.

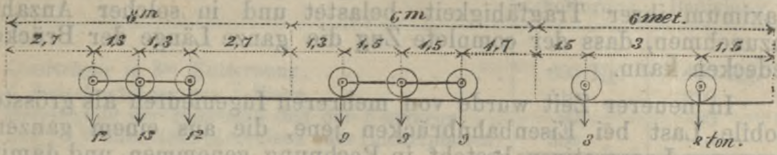


Fig. 149.

Die ausgerüsteten Lastzugs-Tendermaschinen wiegen höchstens 60 Tonnen und sind deren Axendrücke und Radstände aus Fig. 150 zu ersehen.

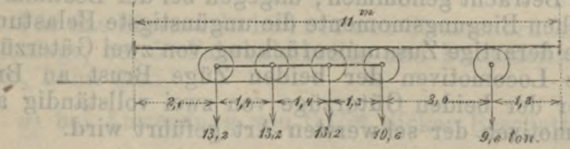


Fig. 150.

B) Bei Strassenbrücken. Die grösste mobile Belastung der Strassenbrücken tritt gewöhnlich bei Menschengedränge ein. Je nach der Dichte des Gedränges gehen erfahrungsmässig auf 1 □^{m} 5 bis 6 Mann. Nimmt man nun das Gewicht eines Mannes mit 70 Kilogr. an, so ist die Belastung pro □ Meter 350 bis 420 Kilogr.

Für Brücken in Landstrassen kann man die kleinere Zahl, für frequente Brücken in Städten die grössere Zahl in Rechnung bringen. —

Es ist jedoch bei der Berechnung der Brücken- und Querträger, sowie der Fahrbahn nicht nur die gleichmässige Belastung, sondern auch jene durch die Raddrücke schwerer Lastwagen zu berücksichtigen, wobei — je nachdem der Radstand der schwersten Fuhrwerke 2·8, 3·5 und 4·5 Meter ist — ein Axendruck von 3, 6 und 10 Tonnen vorkommen kann. Die Breite eines Wagens wird mit 2·5^m und das Gewicht von einem Paar schwerer Zugpferde mit 0·8 Tonnen angenommen.

Die obigen Axendrücke beziehen sich der Reihe nach: a) auf zweispännige Lastwagen, b) auf vierspännige und c) auf mehrspännige Lastwagen, welche zum Transport von Dampfkesseln, schweren Maschinen, Eisenbahnwaggons und demontirter Locomotiven bestimmt sind.

Die erste Kategorie von Lastwagen bezieht sich auf Brücken in gewöhnlichen Landstrassen, die zweite gilt für Brücken in

Chausséen und die dritte für Brücken in Städten mit gepflasterten Strassen und für Pferdeeisenbahnen.

Durch die Figuren 151 bis 153 sind die bezüglichen Lastvertheilungen und ihre Abstände, wie man sie bei der Berechnung von Strassenbrücken anzunehmen pflegt, ersichtlich gemacht.

Die Axendrücke sind besonders für die Dimensionen der Querträger und des Brückenbelages massgebend; während bei der Berechnung der Hauptträger gewöhnlich das Biegungsmoment, welches sich durch die Belastung der ganzen Brücke bei Menschengedränge ergibt, zu berücksichtigen kommt, weil es bei grösseren, über 25 Meter betragenden Spannweiten entschieden grösser ist, als das durch Lastwagen hervorgerufene Biegungsmoment. Bei kleineren Spannweiten wird aber durch die gleichzeitige Belastung der Brücke mit einem Lastwagen und dichtem Menschengedränge eine grössere Anspruchnahme der

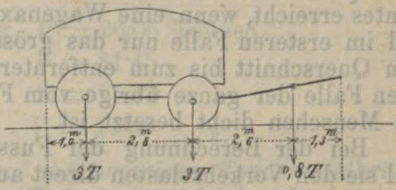


Fig. 151.

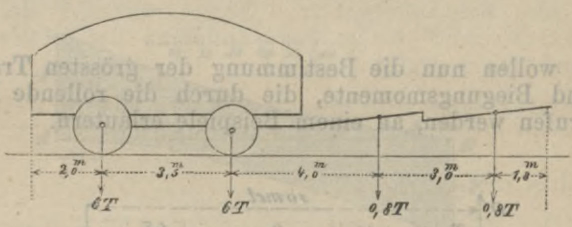


Fig. 152.

Brückenconstruction erzielt als bei gleichmässiger Belastung derselben durch Menschengedränge allein. Man erhält alsdann nach §. 29 das absolute Maximum der Transversalkraft am Auflager

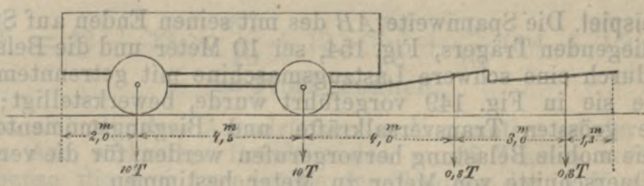


Fig. 153.

durch den Stützendruck, der sich ergibt, wenn die vordere Radaxe des Lastwagens gerade am Auflager ruht und der übrige Theil der Brückenbahn, sowie die Fusswege durch dichtes Menschengedränge beansprucht sind. Ebenso ergibt sich das absolute Maximalmoment für die Brückenmitte, wenn eine Radaxe über derselben steht und ausser dem Lastwagen und den vorgespannten Pferden, der übrige Theil der Brückenbahn und die ganzen Fusswege dicht mit Menschen besetzt gedacht werden. —

Auch für andere Querschnitte wird bei Brückenträgern unter 25^m Spannweite das Maximum der Transversalkraft oder des Momentes erreicht, wenn eine Wagenaxe über dem Querschnitte steht und im ersteren Falle nur das grössere Brückenfragment (nämlich vom Querschnitt bis zum entfernteren Auflager), dagegen im letzteren Falle der ganze übrige vom Fuhrwerke nicht bedeckte Theil mit Menschen dicht besetzt ist.

Bei der Berechnung der Fussweg-Bestandtheile pflegt man, weil sie den Verkehrslasten direct ausgesetzt sind und, wegen ihrer geringen Masse, bedeutendere Erschütterungen erleiden, als die massiven Fahrbahntheile, als grösste Belastung 560 Kg. pro $\square^m$ anzunehmen; während bei der Berechnung der Hauptträger, die über 25^m lang sind, allgemein die Belastung mit 350 Kg. pro $\square^m$ der Brückenbahn (mit Einschluss der Fusswege) in Rechnung genommen wird.

Wir wollen nun die Bestimmung der grössten Transversalkräfte und Biegungsmomente, die durch die rollende Belastung hervorgerufen werden, an einem Beispiele erläutern.

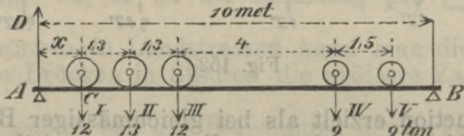


Fig. 154.

Beispiel. Die Spannweite AB des mit seinen Enden auf Stützen frei aufliegenden Trägers, Fig. 154, sei 10 Meter und die Belastung werde durch eine schwere Lastzugsmaschine mit getrenntem Tender, wie sie in Fig. 149 vorgeführt wurde, bewerkstelligt; man soll die grössten Transversalkräfte und Biegungsmomente, die durch die mobile Belastung hervorgerufen werden, für die verschiedenen Querschnitte von Meter zu Meter bestimmen.

a) **Transversalkräfte.** Um zunächst für den Querschnitt C, der von der Stütze A um **einen Meter** absteht, die grösste Transversalkraft zu finden, muss nach §. 30 der Zug von der entfernteren Stütze B kommend bis zu C auffahren, so dass das erste Locomotivrad über C steht. Es wird dann

$$V = D = 12 \times \frac{9}{10} + 13 \times \frac{7 \cdot 7}{10} + 12 \times \frac{6 \cdot 4}{10} + 9 \times \frac{2 \cdot 4}{10} + 9 \times \frac{0 \cdot 9}{10}$$
$$= 31 \cdot 56 \text{ Tonnen.}$$

Analog erhält man:

Für $AC = 2$ Meter, $V = 26 \cdot 05$ Tonnen.
„ $AC = 3$ „ $V = 21 \cdot 45$ „
„ $AC = 4$ „ $V = 17 \cdot 39$ „
„ $AC = 5$ „ $V = 14 \cdot 88$ „

Da sich nun die positiven und negativen Transversalkräfte der Querschnitte, welche von der Trägermitte gleich weit abstehen, numerisch gleich gross ergeben, so braucht man nur die positiven Transversalkräfte, welche dem von rechts über die Brückenmitte auffahrenden Zug entsprechen, zu ermitteln und sie auf die aus Fig. 155 ersichtliche Weise zur Bestimmung der negativen Transversalkräfte, die offenbar dem von links auf die Brücke auffahrenden Zuge entsprechen, zu verwenden.

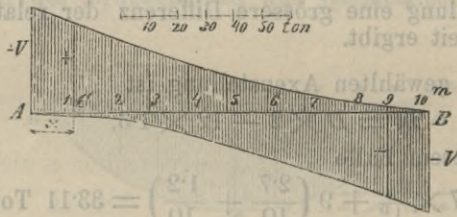


Fig. 155.

Das absolute Maximum der Transversalkraft ergibt sich aber über den Stützpunkten, z. B. über A, wenn der Zug von rechts kommend bis A aufgefahren ist, so dass die erste Locomotivaxe über A steht. Es wird dann

$$\mathbf{max\ V} = 12 + 13 \times \frac{8 \cdot 7}{10} + 12 \times \frac{7 \cdot 4}{10} + \frac{9}{10}(3 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 4),$$
$$= \mathbf{37{,}32\ Tonnen,}$$

oder da sich die drei Axendrücke der Locomotive zu der in der zweiten Axe wirkenden Resultirenden pr. 37 Tonnen vereinigen, und ebenso die drei Axendrücke des Tenders die in V wirkende Resultirende pr. 27 Tonnen geben, einfacher:

$$\max V = 37 \times \frac{8 \cdot 7}{10} + 27 \times \frac{1 \cdot 9}{10} = 37 \cdot 32 \text{ Tonnen.}$$

b) **Momente**. Es sei wieder zunächst das grösste Moment für den Querschnitt *C*, Fig. 154, für welchen **$AC = 1$ Meter**, zu bestimmen. Nach §. 30 muss eine Axe über dem Querschnitte *C* stehen und ist dieselbe nach der dort entwickelten Regel zu ermitteln. Zwischen *A* und *C* kann aber im vorliegenden Falle keine Axe stehen, weil die geringste Raddistanz 1·3 *m* ist. Es kann somit für *C* die citirte Regel nicht direct angewendet werden. Da nun jede auf der Brücke befindliche Last das Moment vergrössert, so wird dasselbe in *C* am grössten, wenn der Zug von *B* kommend bis *C* auffährt, so dass *I* auf *C* zu stehen kommt. Es wird dann:

$$\mathfrak{M} = D \times 1.$$

Für diesen Fall ist aber nach Obigem $D = 31{\cdot}56$ Tonnen, also **$\mathfrak{M} = 31{\cdot}56$ Tonnen-Meter.**

Für **$AC = 2$ Meter** kann bereits zwischen *A* und *C* eine Axe liegen, und man ist versucht anzunehmen, dass in diesem Falle in *C* das grösste Moment erzielt wird, wenn auf *C* die Axe *II*, somit *I* zwischen *A* und *C* liegt; es ist dann der Druck pro Meter: *links* von C: $\frac{12}{2} = 6$, dagegen *rechts* von C: $\frac{12 + 9 + 9 + 9}{8} = 5$ Tonnen, also die Differenz $= 1$ Tonne, während sich für jede andere Axenstellung eine grössere Differenz der relativen Drücke per Längeneinheit ergibt.

Bei dieser gewählten Axenstellung ist

$$\mathfrak{M} = D \times 2 - 12 \times 1{\cdot}3,$$

oder weil in diesem Falle

$$D = 37 \times \tfrac{8}{10} + 9\left(\frac{2{\cdot}7}{10} + \frac{1{\cdot}2}{10}\right) = 33{\cdot}11 \text{ Tonnen},$$

$$\mathbf{\mathfrak{M} = 50{,}62 \text{ Tonnen-Meter.}}^{*)}$$

Für **$AC = 3$ Meter** ergibt sich in *C* das grösste Biegungsmoment, wenn *II* auf *C* steht, est ist dann der Druck pro Meter *links* von C gleich $\frac{12}{3} = 4$, dagegen *rechts* von C gleich $\frac{12 + 9 + 9}{8}$ $= 4{\cdot}29$ Tonnen, also die Belastung per Längeneinheit beiderseits von *C* nahezu gleich, während für jede andere Stellung des Zuges die Ungleichheit bedeutend grösser wird.

---

*) Etwas grösser ergibt sich aber M, wenn der Zug von B bis C auffährt, so dass I über C zu liegen kommt; es wird dann nach Obigem zunächst $D = 26{\cdot}05$ Tonnen und somit $M = D \times 2 = 52{\cdot}1$ Tonnen-Meter.

Die im §. 30 entwickelte Regel ist also, wie schon erwähnt wurde, für isolirte Lasten nur näherungsweise richtig.

Bei der fixirten Axenstellung wird

$\mathfrak{M} = D \times 3 - 12 \times 1{\cdot}3$ oder weil $D = 27{\cdot}61$ Tonnen,

$$\mathfrak{M} = 67{\cdot}23 \text{ Tonnen-Meter.}$$

Für **$AC = 4$ Meter** ergibt sich in C ebenfalls das grösste Moment, wenn II über C liegt, und zwar wird dann

$$\mathfrak{M} = D \times 4 - 12 \times 1{,}3,$$

oder weil bei dieser Radstellung

$$D = 22{\cdot}83 \text{ Tonnen, } \mathbf{\mathfrak{M} = 75{\cdot}72 \text{ Tonnen-Meter}}.$$

Für **$AC = 5$ Meter** wird im Querschnitte C das Moment ebenfalls am grössten, wenn II über C liegt. Für diesen Fall wird $\mathfrak{M} = D \times 5 - 12 \times 1{\cdot}3$, und wegen $D = 18{\cdot}5$ Tonnen,

$$\mathbf{\mathfrak{M} = 76{\cdot}9 \text{ Tonnen-Meter.}}$$

Es ist dies zugleich das absolute Maximum des Biegungsmomentes.

Für die andere Brückenhälfte ergeben sich offenbar, wenn der Zug von links nach rechts auffährt, bezüglich der symmetrisch gelegenen Querschnitte dieselben Momente, und sind somit nach Fig. 156 von der Brückenmitte aus symmetrisch zu übertragen.

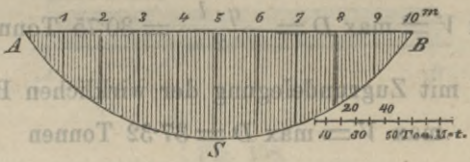


Fig. 156.

Selbstverständlich wäre nun noch die Wirkung des Eigengewichtes der Brücke auf die behandelten Querschnitte nach §. 27 zu ermitteln, um sodann durch Summirung der von der mobilen Belastuug und dem Eigengewichte erzielten Einwirkung die Anspruchnahme der Brückenträger bezüglich der Transversalkräfte und Biegungsmomente zu erhalten.

§. 32. **Reduction von Einzellasten auf eine gleichmässige Belastung.** Um die Berechnung der Transversalkräfte und Biegungsmomente zu vereinfachen, pflegen die Praktiker statt der isolirten Lasten eine gleichmässige Belastung in Betracht zu ziehen, welche das selbe Maximalmoment in der Mitte der Brücke erzielt wie die vorhandenen isolirten Lasten.

Dieser Vorgang führt mitunter, namentlich bei geringen Spannweiten, zu ganz unrichtigen Transversalkräften und Biegungsmomenten und kann somit im Allgemeinen nicht empfohlen werden.

Um dies ersichtlich zu machen, wollen wir das vorige Beispiel nochmals in Betracht ziehen.

Es ergab sich dort das grösste Biegungsmoment für die Brückenmitte mit max $\mathfrak{M} = 76{\cdot}9$ Tonnen-Meter. Denken wir uns nun statt der einzelnen Axendrücke eine über die ganze Brücke gleichmässig vertheilte Belastung angebracht, die dasselbe Maximalmoment in der Brückenmitte hervorruft, und nennen den auf den laufenden Meter entfallenden Betrag q, so ist (nach Gleichung (155) im §. 27)

$$\max \mathfrak{M} = \frac{q l^2}{8}, \text{ also für } l = 10^m, \max \mathfrak{M} = \frac{100}{8} q.$$

Setzt man nun die beiden Maximal-Werthe von $\mathfrak{M}$ einander gleich, so ergibt sich aus: $\frac{100}{8}\, q = 76{\cdot}9$,

$$q = 6{\cdot}15 \text{ Tonnen pr. Meter.}$$

Berechnet man nun auf Grundlage dieser idealen gleichmässigen Belastung, zunächst die grössten Transversalkräfte über den Stützen, so wird, weil auf jede Stütze die Hälfte der Totallast entfällt, in A

$$\max V = \max D = \frac{q \,.\, l}{2} = 30{\cdot}75 \text{ Tonnen,}$$

während sich mit Zugrundelegung der wirklichen Belastung

$$\max V = \max D = 37{\cdot}32 \text{ Tonnen}$$

ergab.

Eine weit grössere Differenz ergibt sich für die Mitte der Brücke, wenn wir, statt des bis zur Brückenmitte auffahrenden Zuges, die über die halbe Brückenlänge gleichmässig vertheilte ideale Belastung $\frac{q \,.\, l}{2}$ in Rechnung ziehen.

Nach Fig. 157 wird dann für die Brückenmitte

$$V = D = \frac{q \,.\, l}{8} = 7{\cdot}7 \text{ Tonnen,}$$

während die wirkliche der natürlichen Belastung entsprechende Transversalkraft 14·88 Tonnen betrug, so dass der durch die fingirte Lastvertheilung begangene Fehler fast 50 Procent beträgt.

Auch die mit Hilfe der idealen Belastung gerechneten Biegungsmomente weichen für die Querschnitte in der Nähe der Auflager von den wirklichen bedeutend ab.

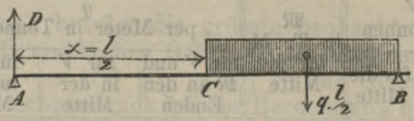


Fig. 157.

Denken wir uns nämlich die Brücke total belastet, so wird für einen Querschnitt, der von der Stütze A um x absteht, bei gleichmässiger Belastung, nach Fig. 158,

$$\mathfrak{M} = D\,x - \frac{q x^2}{2},$$

und hiernach für $x = 1$ Meter

$$\mathfrak{M} = 30.75 - 3.07 = 27.68 \text{ Tonnen-Meter},$$

während für die wirkliche Belastung, nach dem obigen Beispiele $\mathfrak{M} = 31.56$ T. M. betrug.

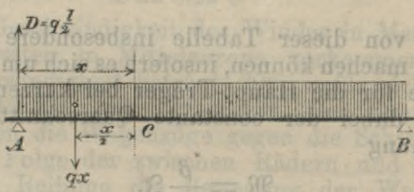


Fig. 158.

Wir ersehen hieraus, dass durch die Annahme einer gleichförmig vertheilten Last, die dasselbe Maximal-Biegungsmoment für die Brückenmitte wie die isolirten Lasten erzielt, bei der Bestimmung der Transversalkräfte und Momente für verschiedene Querschnitte bedeutende Fehler entstehen können. Man wird daher, um einigermassen brauchbare Resultate zu erhalten, die Werthe der gleichmässigen Belastung q pro Längeneinheit sowohl für die Biegungsmomente gesondert berechnen müssen, und zwar insbesondere für den Brückenanfang und die Brückenmitte.

In der folgenden Tabelle sind die Werthe V und $\mathfrak{M}$, sowie die entsprechenden Werthe von q für die Mitte und für die Enden der Eisenbahn-Brücken (mit 1 Geleise) bezüglich der mobilen Belastung zusammengestellt, wobei für grosse Spannweiten eine Belastung durch drei ausgerüstete Locomotive, nach dem System Fig. 149, mit daran gehängten, bis zum Maximum ihrer Tragfähigkeit belasteten Güterwagen vorausgesetzt wird. In der letzten Rubrik ist auch das beiläufige Eigengewicht eiserner Brücken pro Meter und ein Geleis angegeben.

l in Metern	V in Tonnen		$\mathfrak{M}$ in T. M. für die Mitte	q per Meter in Tonnen			g Eigengewicht in Tonn. pr. Meter
	für die Enden	für die Mitte		für V und $\mathfrak{M}$ an den Enden	für V in der Mitte	für $\mathfrak{M}$ in der Mitte	
1	13·0	6·5	3·3	26·0	50·0	26·0	0·86
2	17·2	6·5	6·5	17·2	26·0	13·0	0·89
3	21·0	6·9	12·2	14·0	18·3	10·8	0·92
4	25·0	8·3	21·4	12·5	16·5	10·7	0·96
5	27·4	9·1	30·7	11·0	14·6	9·81	1·00
7	30·6	11·6	49·2	8·76	13·3	8·03	1·07
10	37·0	13·7	76·9	7·39	11·0	6·15	1·18
15	47·0	15·8	145·7	6·27	8·44	5·18	1·36
20	59·4	18·7	250·4	5·94	7·46	5·01	1·51
30	81·5	23·5	518·0	5·43	6·27	4·60	1·95
40	104·8	29·7	911·0	5·24	5·94	4·56	2·37
50	125·2	35·4	1409·6	5·01	5·67	4·51	2·83
80	176·0	52·4	3241·6	4·40	5·24	4·05	4·43
100	206·2	62·6	4598·2	4·13	5·01	3·68	5·78
150	277·7	84·1	8986·5	3·70	4·48	3·20	10·54

Man wird von dieser Tabelle insbesondere dann vortheilhaften Gebrauch machen können, insofern es sich um die Bestimmung der Querschnitte für die Haupt-Träger bei kurzen Balkenbrücken handelt, indem dabei der constante Querschnitt dieser Träger nach der Gleichung

$$\mathfrak{M} = \frac{\beta}{e} \mathfrak{J},$$

zunächst nur von max $\mathfrak{M}$ und bei Blechbrücken die Dicke z_0 der Mittelwand, nach Gleichung

$$0{\cdot}6\,\beta = \frac{V}{z_0 \cdot \mathfrak{J}} \int_0^e y \cdot dF,$$

von max V abhängig ist. Anders ist es bei Brückenträgern von grosser Spannweite, bei welchen der Querschnitt der Gurtungen von der Brückenmitte gegen die Enden derselben stufenweise abnimmt und bei denen die Verbindungselemente der Gurtungen, wie sie bei Gitter- und Fachwerkträgern vorkommen, von der jedem Querschnitte zukommenden grössten Transversalkraft abhängig sind.

In diesem Falle ist es nicht zulässig den schwersten Eisenbahnzug durch eine gleichmässige Last zu ersetzen, sondern man wird — um richtig und naturgemäss vorzugehen — die den einzelnen Querschnitten, in welchen ein Caliberwechsel stattfinden soll, zukommenden grössten Transversalkräfte und Biegungsmomente nach §. 30 zu bestimmen haben.*)

III. Belastung der Brücken durch Schnee.

In Mitteleuropa beträgt die grösste beobachtete Schneehöhe auf horizontalen Grundflächen 0.8^m und es entspricht dieser Höhe ein Maximaldruck von 100 Kg. pro $\square^m$ der Grundfläche. Man pflegt jedoch den Schneedruck bei der Berechnung deren Brückenträger gar nicht zu berücksichtigen, weil bei hohem Schnee der Verkehr sehr beschränkt und alsdann die Brücke viel weniger belastet ist, als wenn sie, vom Schnee befreit, dicht mit Menschen oder Wagenzügen belastet wird.

IV. Belastung der Brücken durch horizontale Kräfte.

Zu diesen Belastungen gehören: 1) der Winddruck, 2) die Stösse durch die Seitenschwankungen der Wagenzüge und 3) die Centrifugalkräfte bei Brücken, welche in Curven liegen.

1) Winddruck. Die ungünstigste Richtung des Windes auf die Brückenträger ist offenbar die horizontale, normal zur Brückenaxe. Die Grösse des normalen Winddruckes in Kg. pro $\square^m$ lässt sich nach der Formel bestimmen:

$$w = 0.12\, v^2$$

in welcher v die Geschwindigkeit des Windes in Metern bedeutet. Die bei den grössten in Mitteleuropa vorkommenden Stürmen beobachtete Geschwindigkeit beträgt 30^m, wofür sich als grösster Winddruck $w = 110$ Kg. pro $\square^m$ ergibt. Bei einem so grossen Winddrucke werden die Wagenzüge gegen die Schienen so stark gedrückt, dass in Folge der zwischen Rädern und Schienen auftretenden grossen Reibung die Bewegung der Wagenzüge sehr erschwert wird. Hiernach ergibt sich auf Brücken der grösste Winddruck bei totaler Belastung derselben durch Wagenzüge, wobei man die Höhe der Wagen bei Eisenbahnen zu 4^m und bei Strassenbrüken zu 3 annimmt, so dass als Maximalwinddruck pro laufenden Meter bei Eisenbahnbrücken 440 Kg. und bei Strassenbrücken 330 Kg. in Rechnung zu nehmen ist, der von der Querversteifung der Brücken aufgenommen werden muss.

2) Seitenstösse der Räder. Dieselben werden durch die Seitenschwankungen der rasch bewegten Wagenzüge hervor-

---

*) Nach der Verordnung des k. k. Ministeriums für Handel de dato 30. August 1870 ist für eingeleisige Eisenbahnbrücken als mobile Last pro laufenden Meter zu nehmen:

für	1	Meter	Spannweite	$q = 20$	Tonnen,
„	2	„	„	$q = 15$	„
„	5	„	„	$q = 10$	„
„	20	„	„	$q = 5$	„
„	30	„	„	$q = 4$	„ .

gerufen und nehmen erfahrungsmässig mit der Grösse der Verkehrslast und Verkehrsgeschwindigkeit zu; ihre Wirkung konnte aber bisher nur schätzungsweise beurtheilt werden. Da sie aber mit der Grösse des Winddruckes abnimmt und bei dem stärksten in die Rechnung eingeführten Winddrucke verschwindet, so wird sie bei der Berechnung der Brückenträger gewöhnlich unberücksichtigt gelassen.

3) Die Centrifugalkraft, welche durch die in gecurvten Brückengeleisen verkehrenden Wagenzüge entsteht, wächst bekanntlich mit der Grösse der bewegten Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit in directem, dagegen mit dem Krümmungshalbmesser im umgekehrten Verhältnisse. Ihre Grösse pro laufenden Meter des Geleises ist bestimmt durch

$$C = \frac{p v^2}{g r} \text{ in Kg.},$$

wenn p die auf den laufenden Meter des Geleises reducirte Verkehrslast in Kg., v die in Metern ausgedrückte Verkehrsgeschwindigkeit, $g = 9.81^m$ die Beschleunigung der Schwere und r den in Metern eingesetzten Krümmungsradius bezeichnet.

Bei der grössten Geschwindigkeit der Eisenbahnzüge, welche in Curven bei dem üblichen Radius zulässig sind, d. i.

$$\begin{array}{ll} \text{für } r = 600, & 400 \text{ und } 200 \text{ Meter} \\ \text{und } v = \;\; 18, & \;\; 14 \;\;\;\; „ \;\;\;\; 10 \;\;\;\; „ \end{array}$$

ergibt sich durchschnittlich $C = 0.05\, p$. Es beträgt also dieser horizontale Druck nur circa $5^0/_0$ des grössten verticalen Druckes, so dass er gegenüber des grössten Winddruckes von geringerer Bedeutung ist. Für $p = 4000$ Kg. wird nämlich $C = 200$ Kg., also nicht einmal halb so gross als der Winddruck, der mit 440 Kg. pro laufenden Meter des Geleises berechnet wurde.

VI. Kapitel.

Der Träger ist an beiden Enden befestigt.

§. 33. **Der an beiden Enden horizontal eingemauerte oder eingespannte Stab ist mit einer Einzellast belastet.** Die horizontale Einspannung der Enden können wir uns dadurch ersetzt denken, dass wir nach Fig. 159 zunächst der Stützen A und B solche Kräfte P' und P'' anbringen, welche die Enden derart afficiren, dass die Tangenten an die elastische Linie in A und B horizontal bleiben:

Es seien:

D' und D'' die Stützendrücke bei A und B,

$$V' = D' - P' \text{ und } V'' = D'' - P''$$

die auf die Stabenden resultirenden Drücke, e' und e'' die Entfernungen der Kräfte P' und P'' von A und B,

$$\mathfrak{M}' = P' e' \text{ und } \mathfrak{M}'' = P'' e''$$

die unbekannten Auflagermomente, ferner sei:

$$AB = l,\ AC = a \text{ und } BC = b.$$

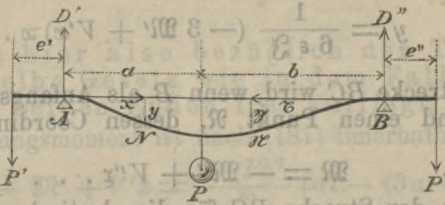


Fig. 159.

Die auf die Stabenden resultirenden Drücke V' und V'' lassen sich leicht aus der Bedingungsgleichung gegen Drehung des Stabes um die Punkte B und A bestimmen.

Um V' zu erhalten, wählen wir B als Drehpunkt und erhalten hiefür

$$-P'(e'+l) + D'l - Pb + P''e'' = 0,$$

oder

$$-P'e' + (D' - P')\,l - Pb + P''e'' = 0,$$

und mit Rücksicht auf die obige Bezeichnung

$$-\mathfrak{M}' + V'l - Pb - \mathfrak{M}'' = 0,$$

woraus und analog

$$\left.\begin{aligned} V' &= \frac{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{l} + \frac{Pb}{l} \\ V'' &= \frac{\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}'}{l} + \frac{Pa}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ (180).$$

Innerhalb der Strecke AC ist nun für irgend einen Punkt N, mit den Coordinaten x und y, das Biegungsmoment

$$\mathfrak{M} = -P'(e'+x) + D'x = -P'e' + (D' - P')\,x,$$

oder

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}' + V'x \quad \ldots\ldots\ldots\ (181).$$

Nach Gleichung (103) ist nun für die elastische Linie im Punkte C

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon\,\mathfrak{J}},$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}' + V'x}{\varepsilon\,\mathfrak{J}}.$$

Wird diese Gleichung zweimal integrirt, wobei die Constanten Null werden, weil für $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ und $y = 0$ wird, so ergibt sich bei constantem Querschnitte

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(-2\,\mathfrak{M}' + V'x)\,x\,. \quad . \quad . \quad . \quad (182),$$

$$y = \frac{1}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(-3\,\mathfrak{M}' + V'x)\,x\,. \quad . \quad . \quad . \quad (183).$$

Für die Strecke BC wird, wenn B als Anfangspunkt gewählt wird, für irgend einen Punkt $\mathfrak{N}$, dessen Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sein mögen,

$$\mathfrak{M} = -\,\mathfrak{M}'' + V''\mathfrak{x}\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184),$$

somit innerhalb der Strecke BC für die elastische Linie

$$\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}^2} = \frac{\mathfrak{M}'' + V''\mathfrak{x}}{\varepsilon\,\mathfrak{J}},$$

und durch wiederholte Integration:

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \frac{1}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(-2\,\mathfrak{M}'' + V''\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}\,. \quad . \quad . \quad . \quad (185),$$

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(-3\,\mathfrak{M}'' + V''\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}^2\,. \quad . \quad . \quad . \quad (186).$$

Im Belastungspunkte C müssen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} \text{ und } y = \mathfrak{y}$$

werden; es wird also

$$\left.\begin{array}{l}(-2\,\mathfrak{M}' + V'a)\,a = -(-2\,\mathfrak{M}'' + V''b)\,b \\ (-3\,\mathfrak{M}' + V'a)\,a^2 = -(-3\,\mathfrak{M}'' \times V''b)\,b^2\end{array}\right\}$$

Werden nun für V' und V'' die obigen Werthe eingeführt, so erhält man zwei Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$, woraus

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{M}' = P\,\dfrac{ab^2}{l^2} \\ \text{und} \qquad \mathfrak{M}'' = P\,\dfrac{a^2b}{l^2}\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (187).$$

Für diese Werthe wird alsdann (180)

$$\left.\begin{array}{l}V' = \dfrac{P\,b^2}{l^3}\,(3\,a + b) \\ \text{und} \qquad V'' = \dfrac{P\,a^2}{l^3}\,(a + 3\,b)\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (188).$$

Anspruchnahme des Trägers. Innerhalb der Strecke AC ist die Transversalkraft für jeden Querschnitt

$$V = V' = \frac{P b^2}{l^3}(3a + b),$$

also positiv.

Dagegen innerhalb der Strecke BC

$$V = V' - P = \frac{-Pa^2}{l^3}(a + 3b),$$

also negativ.

Es gilt hier also bezüglich der Transversalkräfte dasselbe Gesetz wie in dem Falle, wenn der Balken mit beiden Enden frei aufliegt.

Das Biegungsmoment ist nach (181) innerhalb AC:

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}' + V'x = \frac{-Pb^2}{l^3}[al - (3a + b)x] \;.\;. (189);$$

dagegen innerhalb BC:

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}'' + V''\mathfrak{x} = -\mathfrak{M}'' + V''(l - x);$$

d. i. $$\mathfrak{M} = \frac{Pa^2}{l^3}[(a + 2b)\,l - (a + 3b)\,x] \;.\;.\;. (190).$$

Da also das Moment $\mathfrak{M}$ in Bezug auf x vom ersten Grade ist, so kann es nur für die Punkte A, B oder C zum Maximum werden; d. i. für

$$x = 0,\; x = a \text{ oder } x = l.$$

Bezeichnet man das Moment für den Belastungspunkt C mit $\mathfrak{M}_0$, so erhält man der Reihe nach für die Punkte A, C und B:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= \frac{Pab^2}{l^2} \\ \mathfrak{M}_0 &= \frac{-2\,Pa^2b^2}{l^3} \\ \mathfrak{M}'' &= \frac{Pa^2b}{l^2} \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;. (191).$$

Ist $a > b$, so ist $\mathfrak{M}'' > \mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}'' > \mathfrak{M}_0$;
ist $b > a$, so ist $\mathfrak{M}' > \mathfrak{M}''$ und $\mathfrak{M}' > \mathfrak{M}_0$.

Das absolut grösste Moment findet also an dem der isolirten Last näher liegenden Stützpunkte statt. Liegt jedoch die Last in der Mitte, ist also $a = b$, so wird:

$$\mathfrak{M}' = -\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}'' = \frac{P\,.\,l}{8},$$

also $$\max \mathfrak{M} = \frac{P\,.\,l}{8} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (192)$$

und die Grösse des Querschnittes bestimmt sich dann aus:

$$\frac{Pl}{8} = \frac{\beta\,.\,\mathfrak{J}}{e} \text{ oder aus } \mathbf{P} = 8\,\frac{\beta\,.\,\mathfrak{J}}{e\,.\,l} \;.\;.\;.\;.\;. (193).$$

Der an beiden Enden befestigte und in der Mitte belastete Träger kann demnach 8mal mehr tragen, als der an einem Ende befestigte und am anderen Ende belastete Träger.

Es frägt sich nun, bei welcher Lage der Last P das Moment $\mathfrak{M}'$ am grössten wird? Setzen wir in der Gleichung $\mathfrak{M}' = \frac{Pab^2}{l^2}$ statt b den Werth $(l - a)$, so wird

$$\mathfrak{M}' = P\,\frac{a\,(l - a)^2}{l^2},$$

und hieraus ergibt sich, dass für ein veränderliches a, $\mathfrak{M}'$ am grössten wird für $a = \frac{l}{3}$.

Die Beanspruchung des Trägers ist also am grössten, wenn die Last um $\frac{1}{3}$ der freien Trägerlänge von einem Befestigungspunkte entfernt ist.

Für diese ungünstigste Belastungsweise wird

$$\mathfrak{M}' = \frac{4}{27}\,Pl,$$

daher wegen $\mathfrak{M}' = \frac{\beta}{e}\,\mathfrak{J}$, die zulässige Belastung

$$P = \frac{27\,\beta\,\mathfrak{J}}{4\,el} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (194).$$

Die Last beträgt also in diesem Falle circa 84 Procent von derjenigen Last, die der Träger in seiner Mitte tragen kann.

Elastische Durchbiegung. Innerhalb der Strecke AC ist nach Gleichung (183)

$$y = \frac{1}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(-3\,\mathfrak{M}' + V'x)\,x^2;$$

substituirt man hierin für $\mathfrak{M}'$ und V' die Werthe aus (187) und (188), so wird

$$y = \frac{Pb^2}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}\,l^3}\,[3\,al - (3\,a + b)\,x]\,x^2;$$

woraus bei constantem Querschnitte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Pb^2}{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}\,l^3}\,[2\,al - (3\,a + b)\,x]\,x.$$

Da nun für den Punkt der grössten Durchbiegung $\frac{dy}{dx} = 0$ werden muss, $\frac{dy}{dx}$ innerhalb AC aber Null werden kann, wenn

$a > \frac{l}{2}$, so folgt hieraus, dass die grösste Einsenkung y innerhalb der grösseren der beiden Strecken AC und BC vorkommt, und zwar wird y zum Maximum für $x = \frac{2\,al}{3a + b}$.

Durch Einführung dieses Werthes in der obigen Gleichung ergibt sich

$$\max y = \frac{2\,Pa^3b^2}{3\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{J}\,(3a + b)^2} \quad . \quad . \quad . \quad (195).$$

Für $a = b$ wird hiernach

$$\max y = \frac{Pl^3}{192\,\mathfrak{E}\,\mathfrak{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196).$$

Anmerkung. Ist der Träger mit mehreren isolirten Lasten belastet, so hat man analog dem §. 28 zu verfahren. Auch die Querschnitte für Träger von constanter Festigkeit wären nach den Bemerkungen des §. 28 zu bestimmen.

§. 34. Der an beiden Enden in horizontaler Lage befestigte oder eingemauerte Träger sei gleichmässig belastet. (Fig. 160.)

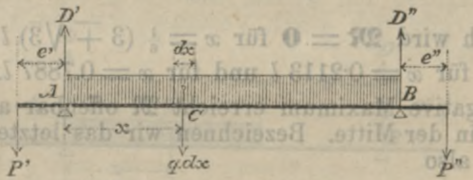


Fig. 160.

Bezeichnet man die Belastung pro Längeneinheit mit q, und denkt sich die totale gleichmässige Belastung aus einzelnen zusammenhängenden Lasten von der Grösse $q \,.\, dx$ bestehend, so ist zunächst wegen der symmetrischen Anordnung

$$D' - P' = D'' - P'' \text{ oder } V' = V'',$$

und

$$P'\,e' = P''\,e'' \text{ oder } \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'',$$

somit nach Gleichung (187) des vorigen Paragraphes für

$$P = q \,.\, dx, \; a = x \text{ und } b = l - x,$$

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \int_0^l \frac{q \,.\, dx \,.\, x\,(l - x)^2}{l^2},$$

das ist

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'' = \frac{1}{12}\,q\,l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197).$$

Ferner wird nach Gleichung (180), wegen $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}''$ und $b = l - x$,

$$V' = V'' = \int_0^l \frac{q \cdot dx \cdot (l - x)}{l},$$

das ist

$$V' = V'' = \frac{q\,l}{2} \quad \ldots \ldots \quad (198).$$

Ansprucbnahme des Trägers. Für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x von A wird im vorliegenden Falle die Transversalkraft

$$V = V' - q\,x = \frac{q}{2}\,(l - 2\,x),$$

wornach V zum Maximum wird für $x = 0$ und $x = l$, nämlich

$$\max V = \pm \frac{q \cdot l}{2} \quad \ldots \ldots \quad (199).$$

Das Biegungsmoment für einen beliebigen Querschnitt wird

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{M}' + V'\,x - \frac{q\,x^2}{2} = \frac{-q}{12}\,[l - 6\,(l - x)\,x] \;.\; (200).$$

Hiernach wird $\mathfrak{M} = 0$ für $x = \frac{1}{6}\,(3 \mp \sqrt{3})\,l$; d. i.
für $x = 0{\cdot}2113\,l$ und für $x = 0.7887\,l$.

Das negative Maximum erreicht $\mathfrak{M}$ offenbar an den Enden, das positive in der Mitte. Bezeichnen wir das letztere wieder mit $\mathfrak{M}_0$, so wird also

$$\left.\begin{aligned} \max \mathfrak{M} = \mathfrak{M}' &= \frac{-q\,l^2}{12} \\ \text{und} \qquad \mathfrak{M}_0 &= +\frac{q\,l^2}{24} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (201).$$

Der gefährliche Querschnitt liegt also an den Enden des Stabes, und es wird aus $\frac{q\,l^2}{12} = \frac{\beta\,\mathfrak{J}}{e}$ die zulässige Belastung bestimmt durch

$$\boldsymbol{q \cdot l = 12\,\frac{\beta\,\mathfrak{J}}{e\,l}} \quad \ldots \ldots \quad (202).$$

Der an beiden Enden in horizontaler Lage befestigte und gleichmässig belastete Träger kann demnach 12-mal mehr tragen, als der an einem Ende befestigte und am anderen Ende belastete Träger.

A n w e n d u n g. Bei den an beiden Enden eingemauerten oder mit Schrauben befestigten Trägern des Hochbaues.

Elastische Durchbiegung. Für einen beliebigen Querschnitt ist nach (200):

$$\mathfrak{M} = \frac{-q}{12}\left[l^2 - 6\,(l-x)\,x\right],$$

daher nach Gleichung (63)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-q}{12\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\left[l^2 - 6\,l - x)\,x\right],$$

woraus nach 2-maliger Integration bei constantem Querschnitte

$$y = \frac{-q\,x^2}{24\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(l-x)^2 \quad \ldots\ldots (203).$$

An den Stellen, wo $\mathfrak{M} = 0$, liegen offenbar Wendepunkte der elastischen Linie, nämlich bei $x = 0{\cdot}2113\,l$ und $x = 0{\cdot}7887\,l$.

Die grösste Senkung tritt in der Mitte ein, d. i. für $x = \frac{l}{2}$

$$\boldsymbol{max\; y = \frac{q\,.\,l^4}{384\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}} \quad \ldots\ldots (204).$$

§. 35. **Der an beiden Enden in horizontaler Lage befestigte Stab werde nur partiell belastet.** Fig. 161.

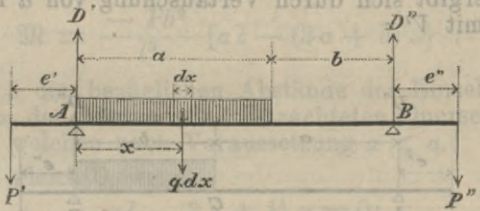


Fig. 161.

Ist nur die Strecke $AC = a$ mit q pro Längeneinheit belastet, so ist — wenn wir uns diese Belastung aus aneinander gereihten Einzellasten von der Grösse $P = qdx$ ersetzt denken — nach Gleichung (187) im §. 32, für $a = x$ und $b = l - x$

$$\mathfrak{M}' = P'\,e' = \int_0^a \frac{q\,.\,dx\,(l-x)^2\,x}{l^2}$$

und $$\mathfrak{M}'' = P''\,e'' = \int_0^a \frac{q\,.\,dx\,.\,x^2\,(l-x)}{l^2};$$

d. i. $$\mathfrak{M}' = \frac{q\,.\,a^2}{12\,l^2}\,(6\,l^2 - 8\,a\,l + 3\,a^2)$$

und $$\mathfrak{M}'' = \frac{q\,a^3}{12\,l^2}\,(4\,l - 3\,a) \quad \ldots (205).$$

Ferner nach Gleichung (180) im §. 33, für $P = q dx$, $a = x$ und $b = l - x$.

$$V' = \frac{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{l} + \int_0^a \frac{q \cdot dx\,(l - x)}{l}$$

und
$$V'' = \frac{\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}'}{l} + \int_0^a \frac{q \cdot dx \cdot x}{l},$$

das ist
$$V' = \frac{\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}''}{l} + \frac{aq\,(2l - a)}{2l},$$

$$V'' = \frac{\mathfrak{M}'' - \mathfrak{M}'}{l} + \frac{a^2 q}{2l};$$

oder nach Einführung der obigen Werthe von $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$

und
$$\left.\begin{aligned} V' &= \frac{q\,a}{2\,l^3}\,[a b^2 + (b + l)^2] \\ V'' &= \frac{q\,a^3\,(b + l)}{2\,l^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (206).$$

Wird dagegen der rechte Theil BC, Fig. 162, des Trägers belastet, so ergibt sich durch Vertauschung von a mit b, $\mathfrak{M}'$ mit $\mathfrak{M}''$ und V' mit V'':

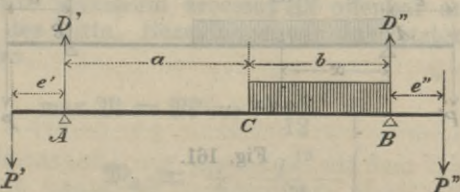


Fig. 162.

$$\mathfrak{M}' = \frac{qb^3\,(4\,l - 3\,b)}{12\,l^2},$$

$$\mathfrak{M}'' = \frac{qb^2}{12\,l^2}\,(6\,l^2 - 8\,bl + 3\,b^2),$$

$$V' = \frac{qb^3\,(a + l)}{2\,l^3},$$

$$V'' = \frac{qb}{2\,l^3}\,[a^2 b + (a + l)\,l^2].$$

A n s p r u c h n a h m e. Im §. 32 wurde gefunden, dass eine Einzellast in einem beliebigen Querschnitte eine positive oder negative Transversalkraft erzeugt, je nachdem sie auf der rechten oder linken Seite des fraglichen Querschnittes liegt; es gilt hier also auch das dort bezüglich der grössten Transversalkräfte citirte Gesetz, so dass man allgemein sagen kann:

Für einen beliebigen Querschnitt eines an beiden Enden unterstützten oder befestigten Trägers wird die Transversalkraft zum positiven oder negativen Maximum, je nachdem die Belastung vom betreffenden Querschnitte aus bis zum rechten oder linken Auflager reicht.

Für den Querschnitt C ist also

$$\left.\begin{aligned} \max(+V) &= \frac{qb^3(a+l)}{2l^3} \\ \text{und} \quad \max(-V) &= \frac{qa^3(b+l)}{2l^3} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (207).$$

Um nun die gefährlichste Belastungsweise bezüglich der Biegungsmomente kennen zu lernen, wollen wir zunächst den Einfluss untersuchen, welchen eine Einzellast P auf einen beliebigen Querschnitt ausübt, je nachdem sie rechts oder links von diesem Querschnitte liegt.

a) P liegt rechts vom Querschnitte. Nach Gleichung (189) §. 33 ist in diesem Falle das Biegungsmoment

$$\mathfrak{M} = \frac{-Pb^2}{l^3}\left[al - (3a+b)x\right] \quad \ldots (208),$$

wobei a und b die bezüglichen Abstände der Einzellast P von A und B, und x der Abstand des betrachteten Querschnittes von A bedeutet, für welchen nach Voraussetzung $x < a$.

$\mathfrak{M}$ wird gleich 0, wenn

$$al - (3a+b)x = 0;$$

setzen wir für b seinen Werth $(l - a)$, so geht diese Bedingungsgleichung über in:

$$al - (2a+l)x = 0.$$

Betrachten wir hierin a als veränderlich und bezeichnen die zulässige Wurzel dieser Gleichung mit a_x, so wird $\mathfrak{M} = 0$, wenn

$$a_x = \frac{lx}{l-2x}, \text{ oder } x = \frac{al}{2a+l} \quad \ldots (209).$$

Für ein variables x ergibt sich hiernach für den Grenzfall $a_x = l$:

$$x = \frac{l}{3} \quad \ldots\ldots\ldots (210).$$

Für jeden grösseren Werth von x wird $a_x > l$, also unzulässig.

$\mathfrak{M}$ kann daher nur Null werden, wenn $x \overset{=}{<} \frac{l}{3}$.

In Anbetracht der beiden Gleichungen (208) und (209) wird nun $\mathfrak{M}$ negativ oder positiv, je nachdem $a \gtrless a_x$ ist.

b) *P* liegt links vom Querschnitte. Wählen wir den Punkt *B* zum Ausgangspunkt, so werden sich die in diesem Falle entsprechenden Formeln sofort aus jenen des vorigen Falles ergeben, wenn dort a mit b und x mit $\mathfrak{x} = (l - x)$ vertauscht wird. Es wird also zunächst

$$\mathfrak{M} = \frac{-Pa^2}{l^3} [b\,l - (3\,b + a)\,\mathfrak{x}],$$

und für ein variables b wird $\mathfrak{M} = 0$, wenn

$$b_{\mathfrak{x}} = \frac{l\mathfrak{x}}{l - 2\mathfrak{x}}, \text{ oder } x = \frac{b\,l}{2b + l} \quad . \;.\; . \; (211).$$

Für den Grenzfall $b_{\mathfrak{x}} = l$ wird aus (211)

$$\mathfrak{x} = \frac{l}{3} \quad . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; . \;.\; (212).$$

Für jeden grösseren Werth von $\mathfrak{x}$ wird $b_{\mathfrak{x}} > l$, also unmögich. $\mathfrak{M}$ kann daher nur Null werden, wenn $\mathfrak{x} \leqq \frac{l}{3}$.

$\mathfrak{M}$ wird nun wieder negativ oder positiv, je nachdem $b \gtrless b_{\mathfrak{x}}$.

Wir wollen die durch die Gleichungen (210) und (212) bestimmten Punkte, welche in dem ersten und zweiten Drittelpunkte der Trägerlänge *AB* liegen, die Fundamental- oder Fixpunkte nennen und können nun der angestellten Untersuchung zufolge bezüglich der Momente folgendes Gesetz aufstellen:

Das Moment wird zum negativen oder positiven Maximum *a)* im linken Drittel, wenn die Belastung von a_x bis zur rechten oder linken Stütze reicht; *b)* im rechten Drittel, wenn die Belastung von $b_{\mathfrak{x}}$ bis zur linken oder rechten Stütze reicht, und *c)* im mittleren Drittel zum positiven Maximum, wenn der ganze Träger belastet wird.

Nachdem durch dieses Gesetz die ungünstigste Belastungsweise des Trägers bezüglich der Momente festgestellt ist, so lässt sich nun auch die grösste Deformirung des Trägers nach der Gleichung der elastischen Linien, d. i. nach $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{\varepsilon\,\mathfrak{J}}$ bestimmen, worauf wir jedoch nicht weiter eingehen wollen.

§. 36. Prismatischer Träger mit schiefer Einspannung und beliebiger Belastung. Wir können uns in diesem Falle den Träger bei *A* und *B* unterstützt und dessen Enden durch Kräfte *P'* und

P'', Fig. 163, derart beansprucht denken, dass die Tangenten an die Biegungscurve in A und B mit der Horizontalen die bezüglichen Winkel t' und t'' einschliessen; überdies sei die Senkung des Punktes B unter der Horizontalen des Punktes A gleich s.

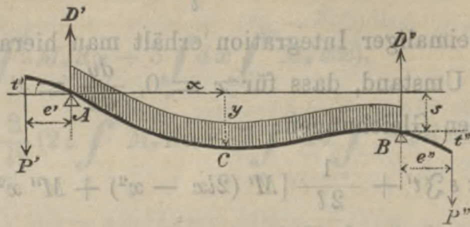


Fig. 163.

Für den Fall, als die Trägerenden horizontal eingespannt wären, seien die Auflagermomente $P'e' = \mathfrak{M}'$, und $P''e'' = \mathfrak{M}''$; dagegen für den vorliegenden Fall $P'e' = M'$ und $P''e'' = M''$.

Bezeichnen wir ferner für einen beliebigen Punkt C das Biegungsmoment der zwischen A und C liegenden Belastung mit M_x, weiters mit M_0 und M_l die Biegungsmomente der ganzen zwischen A und B liegenden Belastung in Bezug auf A und B und setzen wieder:

$$V' = D' - P' \text{ und } V'' = D'' - P'',$$

so wird für den beliebig gewählten Punkt C:

$$\mathfrak{M}_x = - P' (e' + x) + D x - M_x = - P' e' + (D' - P') x - M_x$$

oder mit Rücksicht auf die oben eingeführte Bezeichnung:

$$\mathfrak{M}_x = - M' + V' x - M_x.$$

Behufs der Bestimmung von V' und V'' stellen wir wieder die Gleichgewichtsbedingungen gegen Drehung in Bezug auf die Punkte B und A auf, und erhalten aus den betreffenden Gleichungen

$$- M' + V'l - M_l + M'' = 0$$

und
$$- M'' + V''l - M_0 + M' = 0,$$

nach einfacher Reduction:

$$\left.\begin{aligned} V' &= \frac{M' - M'' + M_l}{l} \\ V'' &= \frac{M'' - M' + M_0}{l} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (213).$$

Durch Einführung des Werthes von V' wird

$$\mathfrak{M}_x = \frac{M' (l - x) - M'' x + M_l x}{l} - M_x \quad \ldots (214);$$

daher nach der Formel $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}_x}{\varepsilon \mathfrak{J}}$ für den Punkt C der Biegungscurve

$$\varepsilon \mathfrak{J} \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-M'(l-x) - M'' x + M_l x}{l} - M_x .$$

Nach zweimaliger Integration erhält man hieraus mit Rücksicht auf den Umstand, dass für $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = t'$ und $y = 0$ wird, die beiden Gleichungen:

$$-\varepsilon \mathfrak{J} \frac{dy}{dx} = \varepsilon \mathfrak{J} t' + \frac{1}{2l} [M'(2lx - x^2) + M'' x^2 - M_l x^2] + \int_0^x M_x dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (215)$$

und

$$-\varepsilon \mathfrak{J} y = \varepsilon \mathfrak{J} t' x + \frac{1}{6l} [M'(3lx^2 - x^3) + M'' x^3 - M_l x^3] + \int_0^x dx \int_0^x M_x dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; (216).$$

Für $x = l$ wird $\frac{dy}{dx} = t''$ und $y = s$, wodurch sich aus (215) und (216) zur Bestimmung von M' und M'' die folgenden zwei Gleichungen ergeben:

$$-\frac{2\varepsilon\mathfrak{J}}{l}(t'' - t') = M' + M'' - M_l + \frac{2}{l}\int_0^l M_x dx$$

$$-\frac{6\varepsilon\mathfrak{J}}{l^2}(s - t'l) = 2M' + M'' - M_l + \frac{6}{l^2}\int_0^l dx \int_0^x M_x dx.$$

Durch Auflösung der beiden Gleichungen nach M' und M'' wird:

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{-2\varepsilon\mathfrak{J}}{l^2}[l(2t' + t'') - 3s] + \frac{2}{l^2}\Big[l\int_0^l M_x dx \\ &\qquad - 3\int_0^l dx \int_0^x M_x dx\Big] \\ M'' &= \frac{2\varepsilon\mathfrak{J}}{l^2}[l(t' + 2t'') - 3s] + M_l - \frac{2}{l^2}\Big[2l\int_0^l M_x dx \\ &\qquad - 3\int_0^l dx \int_0^x M_x dx\Big] \end{aligned}\right\} \; . \; (217).$$

Für den Fall, dass die Enden des Trägers horizontal befestigt sind, somit $t' = 0$, $t'' = 0$ und $s = 0$, verschwindet offenbar in beiden Gleichungen der erste Theil, und es gibt dann der zweite Theil die Werthe der Auflagermomente $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ bei horizontaler Einspannung; es wird also:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}' &= \frac{2}{l^2}\left(l \int_0^l M_x\,dx - 3\int_0^l dx \int_0^x M_x\,dx\right), \\ \mathfrak{M}'' &= M_l - \frac{2}{l^2}\left(2l \int_0^l M_x\,dx - 3\int_0^l dx \int_0^x M_x\,dx\right). \end{aligned}\right\} \quad . \ (218).$$

Die allgemeinen Gleichungen (217) der Auflagermomente für den schief eingespannten Träger gehen nach Einführung dieser Werthe über in:

$$\left.\begin{aligned} M' &= \mathfrak{M}' + \frac{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}{l^2}\left[l\,(2t' + t'') - 3s\right], \\ M'' &= \mathfrak{M}'' + \frac{2\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}{l^2}\left[l\,(t' + 2t'') - 3s\right], \end{aligned}\right\} \quad . \ (219).$$

Die Reduction dieser Gleichungen auf t_1 und t_2 bestimmt die Tangenten der Auflagerwinkel; es wird nämlich, wenn überdies

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{2\,\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = K'} \\ \mathbf{\mathfrak{M}' + 2\,\mathfrak{M}'' = K''} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (220),$$

gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} t' &= -\frac{l}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(2M' + M'' - K') + \frac{s}{l} \\ t'' &= +\frac{l}{6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}}\,(M' + 2M'' - K'') + \frac{s}{l} \end{aligned}\right\} \quad . \ (221).$$

Aus den vorhergehenden Paragraphen ergibt sich nun für die verschiedenen Belastungsfälle:

a) Für eine isolirte Last, Fig. 159,

$$\left.\begin{aligned} K' &= P\,\frac{ab}{l^2}\,(2b + a) \\ K'' &= P\,\frac{ab}{l^2}\,(2a + b) \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ (222).$$

b) für totale gleichmässige Belastung, Fig. 160:

$$K' = K'' = \frac{1}{4}\,q\,l^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (223).$$

c) für eine partielle gleichmässige Belastung:

α) wenn dieselbe linksseitig, Fig. 161:

$$\left.\begin{aligned} K' &= \frac{q(l^2-b^2)^2}{4l^2} = \frac{q a^2 (2l-a)^2}{4 l^2} \\ \text{und} \quad K'' &= \frac{q a^2 (2 l^2 - a^2)}{4 l^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (224).$$

β) wenn dieselbe rechtsseitig, Fig. 162:

$$\left.\begin{aligned} K' &= \frac{q b^2 (2 l^2 - b^2)}{4 l^2} \\ \text{und} \quad K'' &= \frac{q(l^2-a^2)^2}{4 l^2} = \frac{q b^2 (2l-b)^2}{4l^2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (225).$$

Für den letzten unter c) vorgeführten Fall, der bei der Berechnung der continuirlichen Träger der wichtigste ist, ergibt sich die folgende nach Gleichung (224) und (225) berechnete Tabelle.

$\frac{a}{l}$	Links belastet. (Fig. 161.)		Rechts belastet. (Fig. 162.)	
	$\frac{K'}{ql^2}$	$\frac{K''}{ql^2}$	$\frac{K'}{ql^2}$	$\frac{K''}{ql^2}$
0	0	0	0·25000	0·25000
0·1	0·00903	0·00497	0·24097	0·24503
0·2	0·03240	0·01960	0·21760	0·23040
0·3	0·06503	0·04298	0·18497	0·20703
0 4	0·10240	0·07360	0 14760	0·17640
0·5	0·14063	0·10938	0·10938	0·14063
0·6	0·17640	0·14760	0 07360	0·10240
0·7	0·20703	0 18497	0·04298	0·06503
0·8	0·23040	0·21760	0·01960	0·03240
0·9	0·24503	0 24097	0·00497	0·00903
1	0·25000	0·25000	0	0

Anmerkung. Ist der Träger blos an einem Ende eingespannt und am andern Ende auf der Stütze frei aufliegend, so braucht man nur, um für diesen Fall die nöthigen Formeln zu gewinnen, in der obigen Ableitung für den beiderseits befestigten Träger das Auflagermoment für das freie Ende gleich Null zu setzen.

Wir wollen blos den in Fig. 164 dargestellten Fall in Betracht ziehen, wobei das eine Ende des gleichmässig mit q pro Längeneinheit belasteten Balkens AB bei B durch eine Kraft P in horizontaler Lage festgehalten und das andere Ende in gleicher Höhe mit B, bei A frei aufliegt.

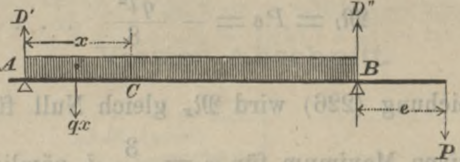


Fig. 164.

Für einen beliebigen Querschnitt C, in der Entfernung x von A, ist das Biegungsmoment

$$\mathfrak{M}_x = Dx - \frac{q x^2}{2},$$

und es geht hiefür die Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}_x}{\varepsilon \mathfrak{J}}$ der elastischen Linie über in

$$\varepsilon \mathfrak{J} \frac{d^2y}{dx^2} = D x - \frac{q x^2}{2};$$

woraus durch Integration

$$\varepsilon \mathfrak{J} \frac{dy}{dx} = \frac{Dx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C.$$

Für $x = l$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$, also die Constante

$$C = -\frac{D l^2}{2} - \frac{q l^3}{6}$$

und hiefür

$$\varepsilon \mathfrak{J} \frac{dy}{dx} = -\frac{D}{2}(l^2 - x^2) + \frac{q}{6}(l^3 - x^3);$$

woraus durch nochmalige Integration

$$\varepsilon \mathfrak{J} y = -\frac{Dx}{2}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{qx}{6}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right).$$

Für $x = l$ wird $y = 0$, also

$$0 = -\frac{Dx}{2}\left(l^2 - \frac{x^2}{3}\right) + \frac{qx}{6}\left(l^3 - \frac{x^3}{4}\right),$$

und hieraus $$D = \frac{3}{8} q l.$$

Für diesen Werth wird

$$\mathfrak{M}_x = \frac{3}{8} q l x - \frac{q x^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots (226),$$

und für $x = l$

$$\mathfrak{M}_l = Pe = -\frac{q l^2}{8} \quad \ldots \ldots \ldots (227).$$

Nach Gleichung (226) wird $\mathfrak{M}_x$ gleich Null für $x = \frac{6}{8} l$ und zum positiven Maximum für $x = \frac{3}{8} l$, nämlich

$$+ \max M = \frac{9}{128} q l^2,$$

welcher Werth offenbar numerisch kleiner ist als das Auflagermoment $Pe = -\frac{q l^2}{8}$.

Vierter Abschnitt.

Theorie der continuirlichen Träger.

VII. Capitel.

Allgemeines. Unter einem continuirlichen Träger versteht man jenen Träger, der auf mehr als zwei Stützen ruht. Die einzelnen Abtheilungen, in welche der Träger durch die Stützen zerlegt wird, werden Felder oder Oeffnungen genannt.

Denkt man sich irgend ein Feld des continuirlichen Trägers herausgehoben und an den beiden Schnittenden nächst A und B, Fig. 163, die Kräfte P' und P'' angebracht, welche die Einwirkung der benachbarten Felder ersetzen, so befindet sich offenbar dieses betrachtete Feld in demselben Zustande, als wie der im vorigen Paragraphe behandelte Träger mit schief befestigten oder eingespannten Enden. — Es lassen sich also die im Vorhergehenden gewonnenen Resultate auf den continuirlichen Träger direct anwenden. —

Es wird daher auch hier zunächst darauf ankommen, die Angriffsmomente der äusseren Kräfte zunächst für die Querschnitte über den Auflagern, d. i. die sogenannten Auflagermomente zu bestimmen, weil sich dann mit diesen die Auflager-Reactionen oder Stützendrücke, sowie die Transversalkräfte und Momente für alle anderen Querschnitte bestimmen lassen.

§. 37. Continuirlicher Träger mit beliebiger Belastung.

A) Auflagermomente. Es bezeichne im Folgenden:

n die Anzahl der Felder, somit

$n + 1$ die Anzahl der Stützen,

$0, 1, 2, 3 \ldots n$ die Indices der Stützen,

$l_1, l_2, l_3 \ldots l_n$ die Längen der aufeinander folgenden Felder,

$D_0, D_1, D_2 \ldots D_n$ die Stützendrücke,

$\mathfrak{M}_0, \mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \ldots \mathfrak{M}_n$ die Auflagermomente,

$t_0, t_1, t_2 \ldots t_n$ die Tangenten der Winkel, welche die deformirte Längenaxe über den Stützen mit der Horizontalen bilden.

Setzen wir zunächst voraus, dass der Querschnitt des Trägers constant ist und sämmtliche Stützen in einer Horizontalen liegen, so ergibt sich nach den Gleichungen (221) für den Winkel t_m an der $m$ten Stütze, indem man einmal diesen Winkel als t'' für das $m$te Feld, sodann als t' für das $(m+1)$ Feld, Fig. 165, betrachtet

$$\left.\begin{array}{l} 6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}\,t_m = +\,l_m\,(M_{m-1} + 2\,M_m - K''_m) \\ 6\,\varepsilon\,\mathfrak{J}\,t_m = -\,l_{m+1}\,(2\,M + M_{m+1} - K'_{m+1}) \end{array}\right\} \;.\;.\; (227\,\mathrm{a}).$$

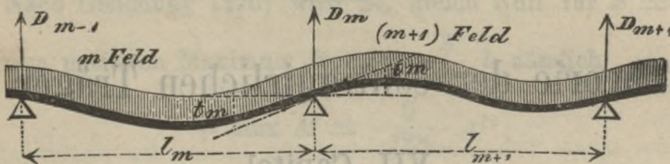


Fig. 165.

Hierbei sind nach Gleichung (220) für das $m$te Feld

$$\left.\begin{array}{l} K''_m = \mathfrak{M}'_m + 2\,\mathfrak{M}''_m \\ K'_{m+1} = 2\,\mathfrak{M}'_m + \mathfrak{M}''_m \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (228),$$

wobei $\mathfrak{M}'_m$ und $\mathfrak{M}''_m$ die Momente an den Enden des $m$ten Feldes bezeichnen, wenn dieselben horizontal befestigt, also die bezüglichen Momente von den übrigen Feldern unabhängig und somit nach den früheren Paragraphen zu bestimmen wären.

Aus (227 a) folgt durch Gleichstellung der Werthe von t_m

$$\begin{array}{l} M_{m-1}\,l_m + 2\,M_m\,(l_m + l_{m+1}) + M_{m+1}\,l_{m+1} \\ \qquad = K''_m\,l_m + K'_{m+1}\,l_{m+1} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (229). \end{array}$$

Wird diese Gleichung für je drei aufeinander folgende Stützen des continuirlichen Trägers in Anwendung gebracht, so ergeben sich mit Rücksicht auf den Umstand, dass die äussersten Enden des continuirlichen Trägers frei aufliegen, somit die Auflagermomente für dieselben Null sind, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} 2\,M_1\,(l_1 + l_2) + M_2 l_2 = K''_1 l_1 + K'_2 l_2 \\ M_1 l_2 + 2\,M_2\,(l_2 + l_3) + M_3 l_3 = K''_2 l_2 + K'_3 l_3 \\ M_2 l_3 + 2\,M_3\,(l_3 + l_4) + M_4 l_4 = K''_3 l_3 + K'_4 l_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_{n-3}\,l_{n-2} + 2\,M_{n-2}\,(l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1}\,l_{n-1} \\ = K''_{n-2}\,l_{n-2} + K'_{n-1}\,l_{n-1} \\ M_{n-2}\,l_{n-1} + 2 M_{n-1}\,(l_{n-1} + l_n) = K''_{n-1}\,l_{n-1} + K_n\,l_n \end{array}\right\} (230).$$

Dies sind die $(n-1)$ Fundamental-Gleichungen, welche zur Bestimmung der $(n-1)$ unbekannten Auflagermomente dienen. — Wir wollen dieselben zur Bestimmung der Auflagermomente für die gewöhnlich vorkommenden Felderzahlen anwenden.

Da jedoch die continuirlichen Träger gewöhnlich symmetrisch angeordnet werden, so wollen wir in der Folge voraussetzen, dass die beiden Endfelder die gleiche Spannweite l_1 und alle inneren Felder einerlei Spannweite l haben.

I. **Träger mit 2 Feldern.** Fig. 166. Da hier nur 3 Stützen vorkommen, so ist nur die erste der unter (230) vorgeführten Gleichungen massgebend, und zwar wird wegen $l_1 = l$, und $M_0 = M_2 = 0$

$$4\, M_1 = K''_1 + K'_2,$$

woraus

$$M_1 = \tfrac{1}{4}\,(K''_1 + K'_2)\;.\;.\;(231).$$

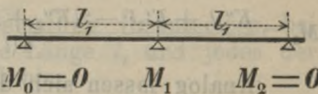


Fig. 166.

Wäre l_1 von l verschieden, so wäre

$$M_1 = \frac{K''_1 l_1 + K'_2 l}{2\,(l_1 + l)}.$$

II. **Träger mit 3 Feldern.** Fig. 167. Hier sind 4 Stützen und somit sind nur die beiden ersten Gleichungen aus (230) anzuwenden, denen zu Folge wegen $M_3 = 0$, $l_1 = l_3$ und $l_2 = l$

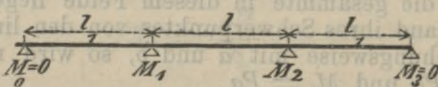


Fig. 167.

$$\left.\begin{aligned} 2\,M_1\,(l_1 + l) + M_2 l &= K''_1 l_1 + K'_2 l \\ M_1 l + 2\,M_2\,(l_1 + l) &= K''_2 l + K'_3 l \end{aligned}\right\}$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2\,(K''_1 l_1 + K'_2 l)\,(l + l_1) - (K''_2 l + K'_3 l_1)\, l}{(l + 2\,l_1)\,(3\,l + 2\,l_1)} \\ M_2 &= \frac{2\,(K'_3 l_1 + K''_2 l)\,(l + l_1) - (K'_2 l + K''_1 l_1)\, l}{(l + 2\,l_1)\,(3\,l + 2\,l_1)} \end{aligned}\right\}\,(232).$$

III. **Träger mit 4 Feldern.** Fig. 168. Da hierbei 5 Stützen vorkommen, so ergeben sich aus (230) die drei ersten Gleichungen und zwar wird, wegen $l_2 = l_3 = l$ und $M_4 = 0$,

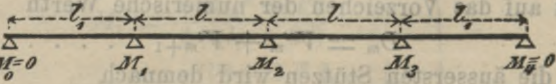


Fig. 168.

$$\left.\begin{array}{l} 2M_1(l_1+l)+M_2l=K''_1l_1+K'_2l \\ M_1l+4M_2l+M_3l=K''_2l+K'_3l \\ M_2l+2M_3(l+l_1)=K''_3l+K'_4l_1 \end{array}\right\}$$

woraus nach einfacher Reduction:

$$\left.\begin{array}{l} M_1=\dfrac{(K''_1l_1+K'_2l)(7l+8l_1)-2(K''_2+K'_3)(l+l_1)l+K''_3l^2+K'_4ll_1}{4(l+l_1)(3l+4l_1)} \\ M_2=\dfrac{-K''_1l_1-K'_2l+2(K''_2+K''_3)(l+l_1)-K''_3l-K'_4l_1}{2(3l+4l_1)} \\ M_3=\dfrac{K''_1l_1+K'_2l^2-2(K''_2+K'_3)(l_1+l)l+(K''_3l+K'_4l_1)(7l+8l_1)}{4(l+l_1)(3l-4l_1)} \end{array}\right\} \quad (233).$$

Analog lassen sich die Auflagermomente der continuirlichen Träger mit mehr als 4 Feldern bestimmen; da jedoch mehr als 4 Felder seltener zur Anwendung kommen, so wollen wir nicht weiter darauf eingehen.

B) **Transversalkräfte, Momente und Stützendrücke.** Mittelst der Auflagermomente lassen sich nun nach den vorhergehenden Paragraphen die übrigen Stücke leicht berechnen.

Bezeichnen wir nämlich die beiden Transversalkräfte für die Enden eines Feldes mit V', V'', die bezüglichen Auflagermomente mit M', M'', die gesammte in diesem Felde liegende Last mit P und den Abstand ihres Schwerpunktes von den linken und rechten Stützen beziehungsweise mit a und b, so wird nach (213) §. 36, wegen $M_l = Pb$ und $M_0 = Pa$

$$\left.\begin{array}{l} V'=\dfrac{M'-M''}{l}+\dfrac{Pb}{l} \\ V''=\dfrac{M''-M'}{l}+\dfrac{Pa}{l} \end{array}\right| \quad \ldots\ldots \quad (234).$$

Bezeichnet P_x die Last, welche zwischen der linken Stütze und jenem Querschnitte liegt, für welchen die Transversalkraft V und das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ bestimmt werden soll, und ist a_x der Abstand des Schwerpunktes der Last P_x vom fraglichen Querschnitte, so ist

$$V = V' - P_x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (235)$$

und nach (S. 195), aus $\mathfrak{M} = -M' + V'_x - M_x$, wegen $M_x = P_x a_x$

$$\mathfrak{M} = -M' + V'x - P_x a_x \quad \ldots\ldots \quad (236).$$

Ist D_m der auf die $m$te Stütze ausgeübte Stützendruck und sind die unmittelbar links und rechts von dieser Stütze wirkenden Transversalkräfte beziehungsweise V''_m und V'_{m+1}, so ist ohne Rücksicht auf das Vorzeichen der numerische Werth

$$D_m = V''_m + V'_{m+1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (237).$$

Für die äussersten Stützen wird demnach

$$D_0 = +V'_1 \text{ und } D_n = V''_n \quad \ldots\ldots \quad (237a).$$

§. 38. **Continuirlicher Träger mit gleichmässiger Belastung.** Dieser Fall bezieht sich besonders auf den Einfluss des Eigengewichtes der continuirlichen Brückenträger als auch auf gleichmässig belastete Hochbauträger, die — wie z. B. Sparren- und Deckenträger — in mehr als 2 Punkten unterstützt sind.

A) Auflagermomente. Bezeichnen wir die auf die Längeneinheit entfallende Last mit q, so ist nach Gleichung (232), §. 37,

$$K''_1 = \tfrac{1}{4}\,q l_1^2,\; K'_2 = K''_2 = \tfrac{1}{4}\,q l_2^2,\; K'_3 = K''_3 = \tfrac{1}{4}\,q l_3^2 \text{ usw.}$$

Da wir aber eine symmetrische Belastung voraussetzen, bei welcher jedes der äussersten Felder die Länge l_1 und jedes der inneren Felder die Länge l hat, so wird hier

$$k''_1 = k'_n = \frac{q l_1^2}{4} \text{ und } k'_2 = k''_2 = k'_3 = k''_3 = \cdots = \frac{q l^2}{4},$$

weshalb sich die Gleichungen (230), indem je zwei Auflagermomente gleich werden, auf die Hälfte reduciren.

I. **Träger mit 2 Feldern.** Wegen $l_1 = l$ und $M_2 = 0$ erhalten wir aus (230) die einzige Gleichung $4 M_1 l = \frac{q l^2}{2}$, woraus

$$M_1 = \frac{q l^2}{8} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (238).$$

II. **Träger mit 3 Feldern.** Wegen $M_3 = 0$ und $M_1 = M_2$ gehen die beiden ersten Gleichungen aus (230) über in

$$2 M_1 (l_1 + l) + M_1 l = \frac{q}{4} (l_1^3 + l^3),$$

woraus
$$M_1 = M_2 = \frac{q (l_1^3 + l^3)}{4 (2 l_1 + 3 l)} \quad \ldots\ldots \quad (239).$$

III. **Träger mit 4 Feldern.** Wegen $l_1 = l_4$ und $l_2 = l_3 = l$, $M_4 = 0$ und $M_1 = M_3$ ergeben sich aus (230) die beiden Gleichungen

$$2 M_1 (l_1 + l) + M_2 l = \frac{q}{4} (l_1^3 + l^3)$$

und
$$2 M_1 l + 4 M_2 l = \frac{q l^3}{3}, \text{ woraus}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{q (2 l_1^3 + l^3)}{4 (4 l_1 + 3 l)} \\ M_2 &= \frac{q (l^3 + 2 l^2 l_1 - l_1^3)}{4 (4 l_1 + 3 l)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (240).$$

B) Transversalkräfte. Bezeichnen wir die Auflagermomente für die Enden eines beliebigen Feldes mit M' und M'', so ist nach (234), §. 37,

$$\left.\begin{aligned} V' &= \frac{M' - M''}{l} + \frac{ql}{2} \\ V'' &= \frac{M'' - M'}{l} + \frac{ql}{2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (241)$$

und daher für einen beliebigen Querschnitt

$$V = V' - q \cdot x \ldots \ldots \ldots (242).$$

Die Stützendrücke sind nunmehr durch die Gleichung (237) bestimmt.

C) Momente. Nach (236) wird für einen beliebigen Querschnitt

$$\mathfrak{M} = -M' + V'x - \frac{qx^2}{2},$$

oder wenn für V' der Werth aus (241) eingesetzt wird,

$$\mathfrak{M} = -M\left(1 - \frac{x}{l}\right) - M'' \frac{x}{l} + \frac{qx}{2}(l - x) \;. (243).$$

Damit $\mathfrak{M}$ zum Maximum werde, muss zunächst $\frac{d\mathfrak{M}}{dx} = 0$ werden, aus welcher Bedingung sich für x der Werth ergibt

$$x = \frac{M' - M''}{ql} + \frac{l}{2} \ldots \ldots (244).$$

Für diesen Werth wird nach einfacher Reduction

$$\max \mathfrak{M} = -\frac{M' + M''}{2} + \frac{(M' - M'')^2}{2\,ql^2} + \frac{ql^2}{8} \;. (245).$$

Beispiel. Zur Erläuterung der gewonnenen Resultate wollen wir die vorliegenden Formeln an einem continuirlichen Träger mit drei Feldern zur Anwendung bringen, bei welchem sich die Felderlängen verhalten wie 5 : 6 : 5, so dass $l = 1{,}2\,l_1$ oder $l_1 = \frac{5}{6}\,l$ wird.

Nach (239) wird hiefür

$$M_1 = M_2 = \frac{q\,(l_1{}^3 + 1{\cdot}2^3\,l_1{}^3)}{4\,(2l_1 + 3\,.\,1{\cdot}2\,l_1)} = 0{\cdot}1218\,ql_1{}^2 = 0{\cdot}0846\,ql^2.$$

Für diese Werthe wird nun:

a) I. Im Felde, für welches $M_1 = 0$ und $M_2 = 0{\cdot}1218\,ql_1{}^2$, daher nach (241)

$$V'_1 = -\,0{\cdot}1218\,ql_1 + \frac{ql_1}{2} = 0{\cdot}3782\,ql_1,$$

$$V''_1 = 0{\cdot}1218\,ql_1 + \frac{ql}{2} = 0{\cdot}6218\,ql_1.$$

Hiernach wird die Transversalkraft für einen beliebigen Querschnitt nach (242)

$$V = q l_1 \left(0{\cdot}3782 - \frac{x}{l_1}\right).$$

Für $x = 0{\cdot}3782\, l_1$ wird daher $V = 0$ und für $x = l_1$ am grössten, nämlich gleich V''_1.

Das Biegungsmoment für einen beliebigen Querschnitt wird nach (243), wegen $M' = 0$ und $M'' = 0{\cdot}1218\, q l_1^2$,

$$\mathfrak{M} = q x \left(- 0{\cdot}1218\, l_1 + \frac{l_1 - x}{2}\right) = q l_1 x \left(0{\cdot}3782 - \frac{x}{2\, l_1}\right).$$

Für $x = 2 \,.\, 0{\cdot}3782\, l_1 = 0{\cdot}7564\, l_1$ wird hiernach $\mathfrak{M} = 0$, und nach (244) zum Maximum für $x = 0{\cdot}3728\, l_1$; es wird hiefür

$$\max \mathfrak{M} = 0{\cdot}07152\, q l_1^2.$$

Dieselben Relationen gelten offenbar auch für das III. Feld, wenn dessen rechts liegender Stützpunkt als Anfangspunkt gewählt wird. —

b) Im II. Felde ist $M_1 = M_2 = 0{\cdot}0846\, q l^2$, daher nach (241)

$$V'_2 = V''_2 = \frac{q l}{2},$$

somit für einen beliebigen Querschnitt nach (242)

$$V = \frac{q}{2}\,(l - 2\, x).$$

Hiernach wird $V = 0$ für $x = \frac{l}{2}$, und zum numerischen Maximum für $x = 0$ oder $x = l$.

Nach (243) ergibt sich ferner:

$$\mathfrak{M} = - 0{\cdot}0846\, q l^2 + \frac{q l x}{2} - \frac{q x^2}{2}$$

$$= \left[- 0{\cdot}0846 + \frac{x}{2\, l} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] q l^2.$$

Es wird demnach $\mathfrak{M} = 0$, wenn

$$- 0{\cdot}0846 + \frac{x}{2\, l} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 = 0,$$

oder wenn

$$x^2 - l x + 0{\cdot}1692\, l^2 = 0,$$

d. i. für $x = 0{\cdot}2157\, l$ und $0{\cdot}7843\, l$.

Zum Maximum wird $\mathfrak{M}$ nach (243) für $x = \frac{l}{2}$, und zwar wird

$$\max \mathfrak{M} = 0{\cdot}04043\, q l^2.$$

Wir wollen nun noch die Stützendrücke bestimmen. Nach (237) wird

$$D_0 = D_3 = V'_1 = 0{\cdot}3782\, ql_1,$$

ferner
$$D_1 = D_2 = V'_2 + V''_1 = \frac{ql}{2} + 0{\cdot}6218\, ql_1$$

oder
$$D_1 = D_2 = 1{\cdot}2218\, ql_1 = 1{\cdot}0182\, ql.$$

Zusatz. Sind die Felderlängen alle gleich, so werden die in diesem Paragraphe aufgestellten Formeln noch einfacher, indem in denselben überall $l_1 = l$ zu setzen ist.

Wir wollen hier nur die sich in diesem Falle ergebenden Stützendrücke zusammenstellen, weil sich aus diesen sehr einfach die Transversalkräfte und Momente bestimmen lassen.

Bezeichnen wir die gleichmässige Belastung eines Feldes, nämlich ql, mit Q und die aufeinander folgenden Stützendrücke der Reihe nach mit D_0, D_1, D_2 . . ., so ergibt sich für dieselben bei verschiedener Felderzahl die folgende Tabelle.

Anzahl der Felder	$\frac{D_0}{Q}$	$\frac{D_1}{Q}$	$\frac{D_2}{Q}$	$\frac{D_3}{Q}$	$\frac{D_4}{Q}$	$\frac{D_5}{Q}$	$\frac{D_6}{Q}$	$\frac{D_7}{Q}$	$\frac{D_8}{Q}$	$\frac{D_9}{Q}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{10}{8}$	$\frac{3}{8}$	—	—	—	—	—	—	—
3	$\frac{4}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{4}{10}$	—	—	—	—	—	—
4	$\frac{11}{28}$	$\frac{32}{28}$	$\frac{26}{28}$	$\frac{32}{28}$	$\frac{11}{28}$	—	—	—	—	—
5	$\frac{15}{38}$	$\frac{43}{38}$	$\frac{37}{38}$	$\frac{37}{38}$	$\frac{43}{38}$	$\frac{15}{38}$	—	—	—	—
6	$\frac{41}{104}$	$\frac{118}{104}$	$\frac{100}{104}$	$\frac{106}{104}$	$\frac{100}{104}$	$\frac{118}{104}$	$\frac{41}{104}$	—	—	—
7	$\frac{56}{142}$	$\frac{161}{142}$	$\frac{137}{142}$	$\frac{143}{142}$	$\frac{143}{142}$	$\frac{137}{142}$	$\frac{161}{142}$	$\frac{56}{142}$	—	—
8	$\frac{153}{388}$	$\frac{440}{388}$	$\frac{374}{388}$	$\frac{392}{388}$	$\frac{386}{388}$	$\frac{392}{388}$	$\frac{374}{388}$	$\frac{440}{388}$	$\frac{153}{388}$	—
9	$\frac{209}{530}$	$\frac{601}{530}$	$\frac{511}{530}$	$\frac{535}{530}$	$\frac{529}{530}$	$\frac{529}{530}$	$\frac{535}{530}$	$\frac{511}{530}$	$\frac{601}{530}$	$\frac{209}{530}$

Diese Werthe der Stützendrücke gelten sowohl für wagrecht als auch für geneigt liegende geradaxige Träger, z. B. Sparren, welche auf gleich weit entfernten Pfetten ruhen.

Beispiel. Wählen wir einen continuirlichen Träger mit 3 gleich langen, gleichmässig belasteten Feldern, so wird, wenn die gleichmässige Belastung eines Feldes, nämlich Q, gleich ql gesetzt wird:

a) **Im 1. Felde** für einen beliebigen Querschnitt in der Entfernung x vom 1. Stützpunkte

$$V = D_0 - qx = q\left(\tfrac{4}{10}\, l - x\right),$$

und
$$\mathfrak{M} = D_0 x - \frac{qx^2}{2} = qx\left(\tfrac{4}{10}\, l - \frac{x}{2}\right).$$

b) **Im 2. Felde**, wenn der 2. Stützpunkt als Anfangspunkt gewählt wird,

$$V = D_0 + D_1 - q\,(l + x) = \tfrac{4}{10}\,ql + \tfrac{11}{10}\,ql - q\,(l + x)$$

$$= q\left(\frac{l}{2} - x\right),$$

und

$$\mathfrak{M} = D_0\,(l + x) + D_1\,x - ql\left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{qx^2}{2}$$

$$= \tfrac{4}{10}\,ql\,(l + x) + \tfrac{10}{11}\,qlx - ql\left(\frac{l}{2} + x\right) - \frac{qx^2}{2}$$

$$= \left(5\,lx - \frac{l^2}{10} - \frac{x^2}{2}\right) q.$$

Das 3. Feld ist selbstverständlich analog dem 1. Felde beansprucht.

Bevor wir nun zur Bestimmung der gefährlichsten Belastungsweise continuirlicher Träger durch eine mobile Last schreiten, wollen wir noch zuvor den Einfluss der Belastung eines einzigen Feldes erörtern, um hiedurch für die späteren Untersuchungen einige Anhaltspunkte zu gewinnen.

---

§. 39. Belastung eines einzigen Feldes.

A) Auflagermomente für die nicht belasteten Felder. Nehmen wir an, dass nur das $r$te Feld belastet sei, wobei die Belastung nach einem beliebigen Gesetze stattfinden kann, so gehen die Fundamental-Gleichungen (230), weil nur K'_r und K''_r von Null verschieden sind, in die folgenden über:

$$\left.\begin{array}{l}
2\,M_1\,(l_1 + l_2) + M_2\,l_2 = 0, \\
M_1\,l_2 + 2\,M_2\,(l_2 + l_3) + M_3\,l_3 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
M_{r-2}\,l_{r-1} + 2\,M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) + M_r\,l_r = K'_r\,l_r, \\
M_{r-1}\,l_r + 2\,M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\,l_{r+1} = K''_r\,l_r, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
M_{n-3}\,l_{n-2} + 2\,M_{n-2}\,(l_{n-2} + l_{n-1}) + M_{n-1}\,l_{n-1} = 0, \\
M_{n-2}\,l_{n-1} + 2\,M_{n-1}\,(l_{n-1} + l_n) + 0.
\end{array}\right\} \quad (246)\,.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich zunächst

$$M_2 = -2\,M_1\left(1 + \frac{l_1}{l_2}\right) \quad \dots\dots\,(\alpha);$$

hiernach haben M_2 und M_1 entgegengesetzte Vorzeichen und dem numerischen Werthe nach ist

$$M_2 > 2\,M_1 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\beta)$$

Ferner wird aus der zweiten Gleichung

$$M_3 = -2\,M_2\left(2+2\frac{l_2}{l_3}\right) - M_1\frac{l_2}{l_3} = -M_2\left[2 + \frac{l_2}{l_3}\left(2 + \frac{M_1}{M_2}\right)\right];$$

$\frac{M_1}{M_2}$ ist aber nach Gleichung (α) negativ und nach (β) $< \frac{1}{2}$, also ist

$$2 + \frac{M_1}{M_2} \text{ positiv und } > \tfrac{3}{2},$$

demnach haben auch M_2 und M_3 entgegengesetzte Vorzeichen und ist dem numerischen Werthe nach $M_3 > 2\,M_2$, oder sogar

$$M_3 > M_2\left(2 + \tfrac{3}{2}\frac{l_2}{l_3}\right) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (\gamma)$$

Durch Fortsetzung dieser Schlüsse ergibt sich die Regel:

Die aufeinander folgenden Auflagermomente haben entgegengesetzte Vorzeichen, sind also abwechselnd positiv und negativ, und nehmen von den Enden nach dem belasteten Felde hin zu, wobei jedes Auflagermoment wenigstens zweimal grösser ist als das vorgehende; denn es ist sogar:

$$M_{r+1} > M_r\left(2 + \frac{3\,l_r}{2\,l_{r+1}}\right) \;.\;.\;.\;.\;. (247).$$

Setzen wir der Kürze halber, von dem linken Ende beginnend, $M_2 = -c_2\,M_1$, $M_3 = -c_3\,M_2$, $M_4 = -c_4\,M_3$ . . . . so ergibt sich aus den obigen Fundamental-Gleichungen:

$$c_2 = \frac{2\,(l_1 + l_2)}{l_2},\; c_3 = \frac{2\,(l_2 + l_3) - \frac{l^2}{c_2}}{l_3},\; c_4 = \frac{2\,(l_3 + l_4) - \frac{l_3}{c_3}}{l_4} \;.\;. (248),$$

wonach in speciellen Fällen die Coefficienten c_2, c_3, c_4 . . . der Reihe nach bestimmt werden können.

Analog wird, wenn wir vom rechten Ende beginnen:

$M_{n-2} = -c_{n-1}\,M_{n-1}$, $M_{n-3} = -c_{n-2}\,M_{n-2}$, $M_{n-4} = -c_{n-3}\,M_{n-3}$, . . .
und hiefür aus (246):

$$c_{n-1} = \frac{2\,(l_n + l_{n-1})}{l_{n-1}},\; c_{n-2} = \frac{2\,(l_{n-1} + l_{n-2}) - \frac{l_{n-1}}{c_{n-1}}}{l_{n-2}} \;.\;. (248\,\alpha)$$

wonach wieder in speciellen Fällen die Coefficienten c_{n-1}, c_{n-2}, . . . successive zu berechnen sind.

Bei symmetrischer Anordnung wird offenbar

$$c_2 = c_{n-1}, \quad c_3 = c_{n-2}, \quad c_4 = c_{n-3} \text{ u. s. f.}$$

und allgemein

$$c_r = c_{n-r+1}.$$

In der folgenden Tabelle sind die Werthe dieser Coefficienten für den Fall berechnet, dass die inneren Felder alle die Länge l und die beiden äussersten je die Länge l_1 haben.

$\frac{l}{l_1}$	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
0·9	4·22222	3·76316	3·73426	3·73221	3·73206
1·0	4·00000	3·75000	3·73333	3·73214	3·73206
1·1	3·81818	3·73810	3·73246	3·73208	3·73205
1·2	3·66667	3·72727	3·73171	3·73203	3·73205
1·3	3·53846	3·71739	3·73099	3·73197	3·73205

Im Allgemeinen ist nach (247) stets

$$c_r > 2 + \frac{3\, l_{r-1}}{2\, l_r} \quad \ldots\ldots \quad (248\text{ b}).$$

und für gleich lange Felder sogar $c_r > 3{\cdot}5$.

B) Auflagermomente für das belastete Feld. Nach (246) ergeben sich für das belastete, d. i. das $r$te Feld und die beiden angrenzenden Felder die beiden Gleichungen:

$a)$ $M_{r-2}\, l_{r-1} + 2 M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) + M_r\, l_r = K'_r\, l_r$,

$b)$ $M_{r-3}\, l_r + 2 M_r\,(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}\, l_{r+} = K''_r\, l_r$.

Denkt man sich nun das $r$te Feld nicht belastet, so wird

$c)$ $M_{r-2}\, l_{r-1} + 2 M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r) + M_r\, l_r = 0$,

$d)$ $M_{r-1}\, l_r + 2 M_r\,(l_r + l_{r-1}) + M_{r+1}\, l_{r+1} = 0$;

alsdann ist aber, wenn $M_r = -\, c_r\, M_{r-1}$ gesetzt wird, nach c)

$$M_{r-2}\, l_{r-1} + 2 M_{r-1}\,(l_{r-1}) - c_r\, M_{x-1}\, l_r = 0.$$

Da diese Gleichung auch noch bestehen wird, wenn das $r$te Feld belastet ist, weil sich durch diese Belastung das Verhältniss von M_{r-2} und M_{r-1} im $(r-1)$ten Felde nicht ändert, so kann man den hieraus für $M_{r-2}\, l_{r-1} + 2\, M_{r-1}\,(l_{r-1} + l_r)$ resultirenden Werth in der Gleichung a) substituiren, und erhält hiedurch

$e)$ $c_r\, M_{r-1} + M_r = K'_r$.

Ebenso wird, wenn in der Gleichung d) vom äussersten rechten Ende des continuirlichen Trägers vorgegangen, M_{r-1} durch

M_r ausgedrückt, und der betreffende Coefficient kurzweg mit c'_r bezeichnet wird, $M_{r-1} = - c'_r M_r$, wofür aus d)

$$M_{r+1} l_{r-1} + 2 M_r (l_r + l_{r-1}) = c'_r M_r l_r .$$

und hiefür nach b)

$$f) \; M_{r-1} + c'_r M_r = K''_r .$$

Aus e) und f) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} M_{r-1} &= \frac{c'_r K'_r - K''_r}{c_r c'_r - 1}, \\ M_r &= \frac{c_r K''_r - K'_r}{c_r c'_r - 1}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (249),$$

oder wenn für K'_r und K''_r die aus Formel (220) Seite 197, ersichtlichen Werthe, nämlich $K'_r = 2\,\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, $K''_r = \mathfrak{M}' + 2\,\mathfrak{M}''$, eingeführt, und der Kürze halber die Indices von c und K weggelassen werden,

$$\left.\begin{aligned} M_{r-1} &= \frac{c' K - K''}{c c' - 1} = \frac{(2 c' - 1)\,\mathfrak{M}' + (c' - 1)\,\mathfrak{M}''}{c c' - 1} \\ M_r &= \frac{c K'' - K'}{c c' - 1} = \frac{(c - 2)\,\mathfrak{M}' + 2\,(c - 2)\,\mathfrak{M}''}{c c' - 1} \end{aligned}\right\} . \; (250).$$

Da sich nun die Auflagermomente $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ auf den an beiden Enden horizontal befestigten Balken beziehen, und diese nach §. 35 positiv sein müssen; da ferner c und c' ebenfalls positiv und > 2 sind, so folgt aus (250), dass auch M_{r-1} und M_r positive Werthe geben; d. h.

Die Auflagermomente an den Enden des belasteten Feldes sind beide positiv.

Dieser Satz und die in A) aufgestellte Regel lassen nun in jedem speciellen Falle das Vorzeichen irgend eines Auflagermomentes leicht erkennen, wenn man vom belasteten Felde ausgeht.

Aus e) und f) ergibt sich durch Addition dieser beiden Gleichungen, wenn wieder die Indices bei c und K weggelassen werden,

$$(c + 1)\, M_{r-1} + (c' + 1)\, M_r = K' + K'',$$

oder nach Einführung der Werthe von K' und K'',

$$(c + 1)\, M_{r-1} + (c' + 1)\, M_r = 3\,(\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'').$$

Da nun c und $c' > 2$, also $c + 1$ oder $c' + 1 > 3$ ist, so ist offenbar

$$M_{r-1} + M_r < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' \quad \ldots\ldots (251).$$

C) Transversalkräfte, Stützendrücke und Momente. Nehmen wir wieder, der Einfachheit halber, die inneren Felder gleich lang an, und setzen voraus, dass nur das $r$te

Feld belastet sei, so ergibt sich für irgend eines der unbelasteten Felder, z. B. für das $m$te (für welches also $m < r$), nach Formel (234) und (235) die Transversalkraft V_m in der Entfernung x vom linken Auflager:

$$V_m = V'_m = \frac{M_{m-1} - M_m}{l},$$

und für das $(m+1)$te Feld analog:

$$V_{m+1} = V'_{m+1} = \frac{M_m - M_{m+1}}{l}.$$

Es wird also

$$\frac{V_{m+1}}{V_m} = \frac{M_m - M_{m+1}}{M_{m-1} - M_m} = \frac{1 - \frac{M_{m+1}}{M_m}}{\frac{M_{m-1}}{M_m} - 1}.$$

Da nun, wie unter A) gezeigt wurde, $\frac{M_{m+1}}{M_m}$ negativ und > 2, so ist der Zähler des vorigen Ausdruckes positiv und > 3, ferner ist $\frac{M_{m-1}}{M_m}$ negativ und $< \frac{1}{2}$; also der Nenner negativ und $< \frac{3}{2}$; es wird demnach der Werth von $\frac{V_{m+1}}{V_m}$, oder für die Auflager $\frac{V'_{m+1}}{V_m'}$ negativ und > 2, d. h.

Die Transversalkräfte in den aufeinander folgenden unbelasteten Feldern sind abwechselnd positiv und negativ, und nehmen nach dem belasteten Felde hin zu, so dass allgemein:

$$\frac{V_{m+1}}{V_m} > 2 \quad \dots\dots\dots \text{(252)}.$$

Da nun nach Gleichung (237) die beiden Stützendrücke im m-ten Felde mit Berücksichtigung des Vorzeichens bestimmt sind durch

$$D_m = - V''_m + V'_{m+1} \text{ und } D_{m+1} = - V''_{m+1} + V'_{m+2},$$

so wird

$$\frac{D_{m+1}}{D_m} = \frac{1 - \frac{V'_{m+2}}{V''_{m+1}}}{\frac{V''_m}{V''_{m+1}} - 1} = \frac{1 - \frac{V_{m+2}}{V_{m+1}}}{\frac{V_m}{V_{m+1}} - 1}$$

Nach dem Vorhergehenden ist $\frac{V_{m-2}}{V_{m-1}}$ negativ und > 2, ferner $\frac{V_m}{V_{m+1}}$ negativ und $< \frac{1}{2}$, daher im obigen Ausdruck der Zähler positiv und > 3, der Nenner dagegen negativ und $< \frac{3}{2}$, das heisst:

Die Stützendrücke in den unbelasteten Feldern sind abwechselnd positiv und negativ, und nehmen nach dem belasteten Felde hin zu, wobei im Allgemeinen

$$\frac{\boldsymbol{D}_{m+1}}{\boldsymbol{D}_m} > 2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (253).$$

Das Moment $\mathfrak{M}$ für einen beliebigen Querschnitt im $m$ten Felde ist nach (236), wegen $P = 0$

und
$$V' = \frac{M' - M''}{l},$$

$$\mathfrak{M} = -M_{m-1} + (M_{m-1} - M_m)\frac{x}{l} \quad . \; . \; . \; (254).$$

Da nun M_{m-1} und M_m nach dem belasteten Felde hin zunehmen, so nimmt für denselben Werth von $\frac{x}{l}$ auch $\mathfrak{M}$ nach dem belasteten Felde hin zu.

In der graphischen Darstellung erscheinen die Werthe von $\mathfrak{M}$ durch eine Gerade begrenzt.

Nach (254) wird

$$\mathfrak{M} = 0 \text{ für } x = f = \frac{l\,M_{m-1}}{M_{m-1} - M_m} \quad . \; . \; . \; (255).$$

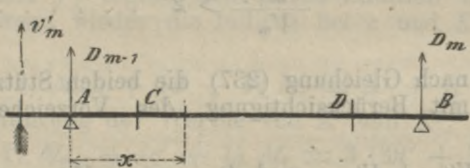


Fig. 169.

Es sei C, Fig. 169, dieser Querschnitt, so theilt er das Feld AB in zwei Theile AC und CB, in denen die Momente entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Setzen wir $\boldsymbol{AC} = f$, so wird nach (255)

$$f = \frac{l M_{m-1}}{M_{m-1} - M_m} = \frac{l}{1 - \frac{M_m}{M_{m-1}}}.$$

Da sich nun das Verhältniss $\frac{M_m}{M_{m-1}}$ nicht ändert, wenn irgend eines der rechts folgenden Felder belastet wird, so ist f constant, und daher, wegen $M_m = - c_m M_{m-1}$,

$$f = \frac{l}{1 + c_m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (256).$$

Ist eines der links vom $m$ten Felde liegenden Felder belastet und gehen wir von rechts gegen links vor, so ergibt sich in gleicher Weise, dass sich das Feld AB in zwei Theile BD und DA theilt, in denen die Momente verschiedene Vorzeichen erhalten.

Setzen wir $\boldsymbol{BD} = f'$ und $M_{m-1} = c'_m M_m$, so wird

$$f' = \frac{l}{1 + c'_m} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (257).$$

Die Punkte C und D werden, da sich ihre Lage nicht ändert, welches der bezüglich rechts oder links liegenden Felder auch belastet sein möge, die Fixpunkte dieses Feldes genannt.

Da die Werthe von f und f' zunächst nur von c_m und c'_m abhängig sind, und diese wieder nur, nach (248), von dem Längenverhältniss $\frac{l}{l_1}$ abhängen, so ergibt sich mit Benutzung der Werthe von c aus der vorhergehenden Tabelle die folgende Tabelle für f beziehungsweise f', wenn von rechts gezählt wird.

$\frac{l_1}{l}$	Im 2. Felde $\frac{f}{l}$	Im 3. Felde $\frac{f}{l}$	Im 4. Felde $\frac{f}{l}$	Im 5. Felde $\frac{f}{l}$
0·9	0·1915	0·2099	0·2112	0·2113
1·0	0·2000	0·2102	0·2113	0·2113
1·1	0·2075	0·2111	0·2113	0·2113
1·2	0·2143	0·2115	0·2113	0·2113
1·3	0·2203	0·2120	0·2114	0·2113

Nach dieser Tabelle ergibt sich für einen continuirlichen Träger mit 4 Feldern, deren Längen im Verhältniss $5:6:6:5$ stehen,

im 2. Felde $f = 0{\cdot}2143\, l$, $f' = 0{\cdot}2115\, l$;
im 3. Felde $f = 0{\cdot}2115\, l$, $f' = 0{\cdot}21143\, l$.

Der besseren Uebersicht halber wurden die in diesem Paragraphe gewonnenen Resultate in Fig. 170 graphisch dargestellt,

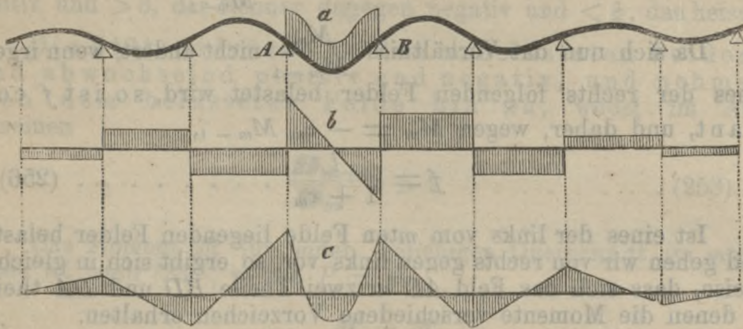


Fig. 170.

und zwar gibt a das beiläufige Bild der elastischen Linie, b die Transversalkräfte und c die Momente.

---

§. 40. Gefährlichste Belastungsweise der continuirlichen Träger durch eine mobile Last.

A) *Bezüglich der Transversalkräfte.*

1. Belastung des fraglichen Feldes. Soll in irgend einem Querschnitt N, Fig. 171, im Abstande x von der linken Stütze A die grösstmögliche Transversalkraft bestimmt werden,

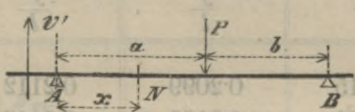


Fig. 171.

so denken wir uns das Feld zunächst nur durch eine Einzellast P belastet, wofür nach (234) die Transversalkraft zunächst des Auflagers

$$V' = \frac{M' - M''}{l} + \frac{Pb}{l}.$$

Nach dem vorigen Paragraphe sind die Auflagermomente M' und M'' für das belastete Feld stets positiv; ist daher $M' > M''$, so ist V' positiv. Ist dagegen $M' < M''$, so ist zunächst $M' - M''$

negativ, und es muss nun speciell untersucht werden, ob in der obigen Gleichung das erste Glied $\frac{M' - M''}{l}$ > oder < als das zweite Glied $\frac{Pb}{l}$ ist. Offenbar ist $M' - M'' < M' + M''$, oder weil nach (251) $M' + M'' < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, so ist $M' - M'' < \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, und da überdies nach Gleichung (187), pag. 186, $\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' = P\frac{ab}{l}$ so wird $M' - M'' < P\frac{ab}{l}$ und somit auch $\frac{M' - M''}{l} < \frac{Pab}{l^2} < \frac{Pb}{l}$.

Es ist also V' stets positiv, wo auch die Last P zwischen A und B liegen möge.

Analog lässt sich zeigen, dass V'', d. i. die Transversalkraft zunächst des rechten Auflagers B stets negativ ist.

Liegt nun die Last P rechts vom Querschnitte N, so ist für diesen Querschnitt $V = V'$, also V positiv; liegt dagegen P links vom fraglichen Querschnitte, so ist $V = V' - P = V''$, also V negativ.

Hiernach erzeugt jede Einzellast, je nachdem sie rechts oder links vom fraglichen Querschnitte liegt, in demselben eine positive oder negative Transversalkraft, weshalb sich für eine mobile Belastung der Satz aufstellen lässt:

Die Transversalkraft wird für irgend einen Querschnitt zum positiven oder negativen Maximum, wenn sich die mobile Last vom betreffenden Querschnitte aus bis zum rechten oder linken Stützpunkte des Feldes erstreckt.

Dasselbe Gesetz haben wir bekanntlich auch für den einfachen, an beiden Enden frei aufliegenden Träger, sowie für den mit beiden Enden horizontal eingespannten Träger, aufgestellt.

2. Belastung der übrigen Felder. Denkt man sich das fragliche Feld nicht belastet, so ist für jeden Querschnitt desselben offenbar $V = V'$. Es ist aber, nach §. 39, V' positiv, wenn das links neben dem fraglichen Felde liegende belastet, dagegen das rechts neben demselben liegende Feld nicht belastet und die übrigen Felder abwechselnd belastet sind; V' wird dagegen negativ, wenn die umgekehrte Belastungsweise eintritt.

Mit Rücksicht auf diesen und den vorhergehenden Satz ergibt sich der folgende:

Die Transversalkraft wird zum positiven Maximum, wenn der rechts vom fraglichen Querschnitte liegende Theil des betrachteten Feldes und das links anstossende Feld ganz belastet, das rechts anstossende Feld dagegen nicht belastet und alle übrigen Felder abwechselnd belastet sind.

Die Transversalkraft wird dagegen zum negativen Maximum, wenn der links vom fraglichen Querschnitte liegende Theil des betrachteten Feldes und das rechts anstossende Feld ganz belastet, das links anstossende Feld dagegen nicht belastet und alle übrigen Felder abwechselnd belastet sind.

Die Fig. 172 gibt von dieser gefährlichsten Belastungsweise ein deutliches Bild.

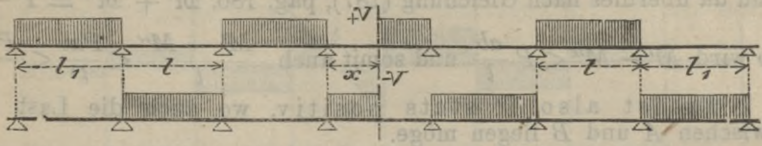


Fig. 172.

Da jedoch bei Eisenbahnbrücken höchstens nur zwei getrennte Züge die Brücke gleichzeitig passiren dürfen, also für die gefährlichste Belastungsweise nur zwei von einander getrennte Verkehrslasten in Rechnung genommen werden können, so ergibt sich bezüglich der Maxima der Transversalkräfte für die continuirlichen Träger der Eisenbahnbrücken die Regel:

Die Transversalkraft wird zum positiven Maximum, wenn der rechts vom fraglichen Querschnitte liegende Theil des betrachteten Feldes und das links neben diesem Felde liegende Feld ganz belastet sind; dagegen zum negativen Maximum, wenn der links vom fraglichen Querschnitte liegende Theil des betrachteten Feldes und das rechts neben diesem Felde liegende Feld ganz belastet sind.

Berechnung der grössten Transversalkräfte. Mit Rücksicht auf die eben ausgesprochenen Regeln bezüglich der gefährlichsten Belastungsweise ergibt sich, wenn wieder die mobile Belastung pro Längeneinheit mit q bezeichnet wird, nach den Gleichungen (235) und (234) auf Seite 204, wenn dort $P = q\,(l - x)$ und $b = \frac{l - x}{2}$ gesetzt wird, für irgend einen Querschnitt im $r$ten Felde

$$\max\,(+V) = \frac{M_{r-1} - M_r}{l} + \frac{q\,(l - x)^2}{2\,l} \quad . \; . \; (258),$$

wobei die Auflagermomente M_{r-1} und M_r, die dieser Belastungsweise entsprechen, nach (249) und (250) zu ermitteln sind.

Um die grössten negativen Transversalkräfte leicht berechnen zu können, berücksichtige man, dass sich nach Fig. 172 die Belastungen für das positive und negative Maximum der Transversalkraft zur totalen Belastung ergänzen. Bezeichnet man daher die der totalen Belastung entsprechende Transversalkraft irgend eines Querschnittes mit V_t, so ist für diesen Querschnitt

$$\max (+V) + \max (-V) = V_t,$$

woraus

$$\max (-V) = V_t - \max (+V) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (259).$$

V_t ist hierbei selbstverständlich nach den Gleichungen (241) und (242) des §. 38 zu bestimmen.

Uebrigens lässt sich direct für max $(-V)$, analog wie für max $(+V)$ die Formel ableiten:

$$\max (-V) = \frac{M_{r-1} - M_r}{l} - \frac{qx^2}{2l} \quad . \quad . \quad (259\,a).$$

Absolutes Maximum der Transversalkräfte. Nach (258) wird max $(+V)$ umso grösser, je kleiner x ist; das absolute positive Maximum erreicht also die Transversalkraft für $x = 0$.

Mit Rücksicht auf die obige Belastungsregel wird demnach die Transversalkraft zum positiven Maximum an der linken Stütze des fraglichen Feldes, wenn die Felder zu beiden Seiten dieser Stütze ganz belastet und die übrigen Felder abwechselnd belastet sind.

Ebenso ergibt sich, dass die Transversalkraft zum negativen Maximum an der rechten Stütze des fraglichen Feldes wird, wenn die Felder zu beiden Seiten dieser Stütze ganz belastet und die übrigen Felder abwechselnd belastet sind.

Wir können also ganz allgemein sagen:

Die Transversalkraft wird zum absoluten Maximum an den Stützen, wenn die auf beiden Seiten der fraglichen Stützen liegenden Felder ganz belastet und die übrigen Felder abwechselnd belastet sind.

Bei continuirlichen Trägern von Eisenbahnbrücken fällt die zweite Bedingung weg und lautet daher die Regel:

Bei Eisenbahnbrücken wird die Transversalkraft zum absoluten Maximum an den Stützen, wenn die Felder zu beiden Seiten der fraglichen Stützen belastet sind.

Für diese Belastungsweise wird im $r$ten Felde:

$$\left.\begin{aligned} \max (+V) &= \frac{M_{r-1} - M_r}{l} + \frac{ql}{2} \\ \max (-V) &= \frac{M_{r-1} - M_r}{l} - \frac{ql}{2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (260).$$

Da endlich nach Gleichung (237) der Stützendruck gleich der Summe der absoluten Werthe derselben ist, und beide Transversalkräfte für dieselbe Belastungsweise zum Maximum werden, so wird auch der Stützendruck für dieselbe Belastungsweise zum Maximum.

Zur Erläuterung der für die Maxima der Transversalkräfte und Stützendrücke entwickelten Regeln wollen wir die Berechnung einiger speciellen Fälle vornehmen.

Specielle Fälle.

I. *Träger mit 2 Feldern.* Da wir, nach Fig. 173, zwei gleich lange Felder voraussetzen, so brauchen wir offenbar die Transversalkräfte nur für das 1. Feld zu entwickeln und dieselben für Querschnitte, die zur mittleren Stütze symmetrisch liegen, gleich zu setzen.

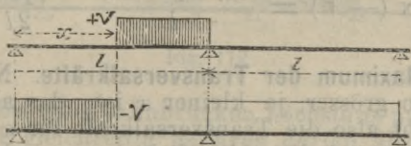


Fig. 173.

Das positive Maximum von V in einem beliebigen Querschnitte tritt nach Obigem ein, wenn nur der rechte Theil des ersten Feldes belastet ist, Fig. 173. Für diese Belastungsweise wird in Gleichung (231), weil im 2. Felde $q = 0$, also nach (225) auch $K'_2 = 0$ wird,

$M_1 = \frac{K''_1}{4}$, und wenn für K''_1 aus (225) der Werth eingeführt wird,

$$M_1 = \frac{q\,(l^2 - x^2)^2}{16\,l^2}.$$

Setzen wir nun in (258) $M_{r-1} = 0$ und $M_r = M_1$, so wird für einen beliebigen Querschnitt

$$\max(+V) = \frac{-\,q\,(l^2 - x^2)^2}{16\,l^3} + \frac{q\,(l-x)^2}{2\,l}$$

oder nach gehöriger Reduction

$$\max(+V) = \frac{q\,(l-x)^2\,(7\,l - 2\,lx - x^2)}{16\,l^3} \quad . \quad . \quad (261).$$

Für $x = 0$ wird hiernach:

$$\max V' = \frac{7}{16}\,ql \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (262).$$

Diese Transversalkraft gibt offenbar zugleich den grössten Stützendruck auf die erste oder letzte Stütze; es ist also

$$\max D_0 = \max D_2 = \frac{7}{16}\,ql \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (263).$$

Um nun nach der Formel (259) für einen beliebigen Querschnitt max $(- V)$ bestimmen zu können, berechne man zunächst für diesen Querschnitt V_t bei totaler Belastung.

Bei totaler Belastung ist nach (238):

$$M_1 = \frac{q l^2}{8},$$

also nach (241), wenn dort $M_1 = 0$ und $M_2 = M_1$ gesetzt wird, zunächst des linken Auflagers:

$$V' = \frac{- M_1}{l} + \frac{q l}{2} = \tfrac{3}{8} q l,$$

daher $$V_t = V' - qx - \frac{q}{8}(3l - 8x).$$

Nach Formel (259), d. i. nach

$$\max(- V) = V_t - \max(+ V),$$

wird somit nach Einsetzung der Werthe und gehöriger Reduction:

$$\max(- V) = \frac{- q(l^4 + 10 l^2 x^2 - x^4)}{16 l^3} \quad . . (264).$$

Für $x = l$ wird hiernach:

$$\max V'' = - \tfrac{5}{8} q l \quad . . . . (265).$$

Nach (237) wird nun für die zweite Stütze

$$\max D_1 = \max V''_1 + \max V'_2$$

oder wegen $$\max V'_2 = \max V''_1 = \tfrac{5}{8} q l,$$

$$\max D_1 = \frac{10}{8} q l \quad . . . . (266).$$

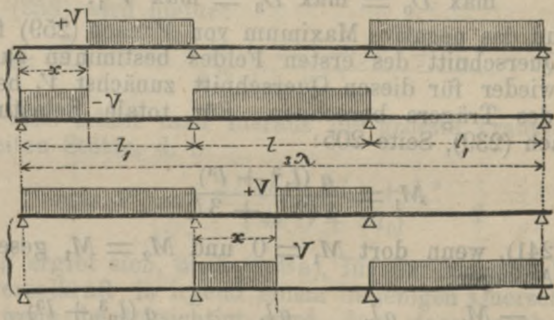


Fig. 174.

II. *Träger mit* 3 *Feldern*. Da wir nach Fig. 174 die beiden äussersten Felder gleich lang voraussetzen, so brauchen wir offenbar wegen der symmetrischen Lage die Berechnung der Transversalkräfte nur bis zur Mitte des 2. Feldes vorzunehmen.

I. Feld. Das positive Maximum von V für irgend einen Querschnitt des ersten Feldes ergibt sich, wenn der rechte Theil desselben und das dritte Feld ganz belastet ist. In der Formel (232), Seite 203, ist dann bei dieser Belastungsweise, weil im 2. Felde $q = 0$ ist, $K'_2 = 0$, $K''_2 = 0$, ferner nach (225) im ersten Felde $K''_1 = \frac{q(l_1^2 - x^2)^2}{4 l_1^2}$, und nach (223) im 3. Felde $K'_3 = \frac{q l_1^2}{4}$; weshalb für diese Werthe die Formel (232) übergeht in

$$M_1 = \frac{2(l + l_1)(l_1^2 - x^2)^2 - l_1^4 l}{4(l + 2l_1)(3l + 2l_1) l} q.$$

Nach der Gleichung (258) wird nun, wenn $M_{r-1} = 0$ und $M_r = M_1$ gesetzt wird,

$$\max(+V) = \frac{-M_1}{l_1} + \frac{q(l_1 - x)^2}{2l_1},$$

und für den obigen Werth von M_1 nach gehöriger Reduction:

$$\max(+V) = \left\{ \frac{2(l_1 - x)^2 [l_1 (l + 2l_1)(3l + 2l_1) - (l + l_1)(l_1 + x)^2] + l l_1^4}{4 l_1^2 (l + 2l_1)(3l + 2l_1)} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (267).$$

Für $x = 0$ wird hiernach am linken Auflager:

$$\max V'_1 = \frac{q l_1}{4} \cdot \frac{6l^2 + 15 l l_1 + 6 l_1^2}{(l + 2l_1)(3l + 2l_1)} \quad . \quad . \quad (268).$$

Diese Transversalkraft repräsentirt zugleich den Maximal-Stützendruck auf die erste und letzte Stütze; d. h. es ist

$$\max D_0 = \max D_3 = \max V'_1.$$

Um nun das negative Maximum von V nach (259) für einen beliebigen Querschnitt des ersten Feldes bestimmen zu können, wird man wieder für diesen Querschnitt zunächst V_t bei totaler Belastung des Trägers berechnen. Für totale Belastung wird zunächst nach (239), Seite 205:

$$M_1 = \frac{q(l_1^3 + l^3)}{4(2l_1 + 3l)},$$

also nach (241), wenn dort $M_1 = 0$ und $M_2 = M_1$ gesetzt wird, am linken Auflager:

$$V' = \frac{-M_1}{l_1} + \frac{q l_1}{2} = \frac{q l_1}{2} - \frac{q(l_1^3 + l^3)}{4(2l_1 + 3l) l_1},$$

daher

$$V_t = V' - qx = q\left(\frac{l_1}{2} - x - \frac{l_1^3 + l^3}{4(2l_1 + 3l) l_1}\right).$$

Für diesen und den Werth aus (267) ergibt sich nun, nach (259), nach gehöriger Reduction:

$$\max(-V) = -\left\{ \frac{2x^2 [l_1 (l + 2l_1)(3l + 2l_1) + (l + l_1)(2l_1^2 - x^2)] + l^3 l_1 (+ 2l_1)}{4 l_1^2 (l + 2l_1)(3l + 2l_1)} \right\} q \quad . \quad . (269).$$

Für x = l_1 erhält man am rechten Auflager:

$$\max V''_1 = \frac{-q [l^4 + 2l^3 l_1 + 6l^2 l_1^2 + 18 l l_1^3 + 10 l_1^4]}{4 l_1 (l + 2l_1)(3l + 2l_1)} \quad . \quad . (270).$$

II. Feld. Aus den Gleichungen (232) ergibt sich zunächst durch Subtraction derselben:

$$M_1 - M_2 = \frac{K''_1 l_1 + (K'_2 - K''_2) l - K'_3 l_1}{l + 2l_1}.$$

Da aber das positive Maximum der Transversalkraft für einen beliebigen Querschnitt des 2. Feldes eintritt, wenn nach Fig. 174 der rechte Theil dieses Feldes und das ganze erste Feld belastet wird, so ergibt sich für diese Belastungsweise nach (223) für das 1. Feld $K''_1 = \frac{q l_1^2}{4}$, und nach (225) für das 2. Feld:

$$K'_2 - K'' = \frac{-q x^2 (l - x)^2}{2 l^2};$$

endlich für das 3. Feld, für welches $q = 0$, $K'_3 = 0$.

Für diese Werthe wird daher:

$$M_1 - M_2 = \frac{l l_1^3 - 2x^2 (l - x)^2}{4l (l + 2l_1)} q.$$

Nach (258) wird hiefür:

$$\max(+V) = \frac{2(l - x)^2 [l (l + 2l_1) - x^2] + l l_1^3}{4l^2 (l + 2l_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . (271).$$

Für $x = 0$ erhält man hieraus die grösste Transversalkraft an der zweiten Stütze, d. i.

$$\max V'_2 = \frac{2l^2 (l + 2l_1) + l_1^3}{4l (l + 2l_1)} q \quad . \quad . \quad . (272).$$

Analog ergibt sich, nach (259a), für das negative Maximum der Transversalkraft in irgend einem beliebigen Querschnitte des 2. Feldes, wenn berücksichtigt wird, dass dann, nach Fig. 174, der linke Theil des zweiten Feldes und das ganze dritte Feld belastet sein muss,

$$\max(-V) = -\frac{2x^2 [l (l + 2l_1) - (l - x)^2] + l l_1^3}{4l^2 (l + 2l_1)} q \quad . (273).$$

Für $x = l$ wird hiernach die grösste Transversalkraft am rechten Auflager des 2. Feldes, d. i.

$$\max V''_2 = -\frac{2l^2(l + 2l_1) + l_1^3}{4l(l + 2l_1)} \quad . . (274);$$

sie unterscheidet sich daher von jener max V'_2 am linken Auflager nur durch das Vorzeichen.

Endlich ergibt sich nun nach Formel (237) das Maximum des Stützendruckes auf die zweite, respective dritte Stütze, d. i.

$$\max D_1 = \max D_2 = \max V''_1 + \max V'_2,$$

worin für max V''_1 und max V'_1 die aus (270) und (272) resultirenden Werthe, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, einzuführen sind; es wird hiefür:

$$\max D_1 = \frac{q(l^5 + 8l^4 l_1 + 22l^3 l_1^2 + 26l^2 l_1^3 + 13ll_1^4 + 2l^5_1)}{4ll_1(l + 2l_1)(3l + 2l_1)} \quad . . (275).$$

Setzt man die mittlere Länge eines Feldes gleich λ, so ist $2l_1 + l = 3\lambda$; ist überdies $l = ml_1$, so wird

$$l_1 = \frac{3\lambda}{2+m}, l = \frac{3m\lambda}{2+m};$$

setzt man ferner im ersten Felde $\frac{x}{l_1} = n$ und im zweiten Felde $\frac{x}{l} = n$, wobei also unter n ein beliebiger aliquoter Theil der Felderlänge verstanden wird, so gehen die obigen Formeln in die folgenden über:

I. Feld:

$$\max(+V) = \left\{\frac{6(1-n)^2[(2+m)(2+3m) - (1+m)(1+n)^2] + 3m}{4(2+m)^2(2+3m)}\right\} q\lambda \quad . . . (276).$$

$$\max(-V) = -\left\{\frac{6n^2[(2+m)(2+3m) + (1+m)(2-n^2)] + 3m^3(2+m)}{4(2+m)^2(2+3m)}\right\} q\lambda \;. (277),$$

$$\max D_0 = \frac{18 + 45m + 18m^2}{4(2+m)^2(2+3m)} q\lambda \quad . . (278).$$

II. Feld:

$$\max(+V) = \frac{6m(1-n)^2[2+m) - mn^2] + 3}{4m(2+m^2)} q\lambda \quad . \quad . (279),$$

$$\max(-V) = -\frac{6m^2n^2[(2+m) - m(1-n)^2] + 3}{4m(2+m)^2} q\lambda \quad . (280),$$

$$\max D_1 = \frac{36 + 95m + 78m^2 + 24m^3 + 3m^4}{4(2+m)^2(2+3m)} q\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . (281).$$

Beispiel. Es seien die Transversalkräfte und Stützendrücke für einen continuirlichen Träger mit 3 Feldern zu berechnen, deren Längen sich wie 5 : 6 : 5 verhalten. Ist λ die mittlere Länge, so ist:

$$\lambda = \tfrac{6}{8} l = \tfrac{16}{15} l_1 \text{ oder } l = \tfrac{9}{8}\lambda \text{ und } l_1 = \tfrac{15}{16}\lambda,$$

ferner $l = \frac{5}{6} l_1 = 1{\cdot}2 l_1$, also $m = 1{\cdot}2$.

Für letzteren Werth wird nun im I. Felde nach den Formeln (276) bis (278)

$$\max(+V) = \frac{6(1-n)^2[17{\cdot}92 - 2{\cdot}2(1+n)^2] + 3{\cdot}6}{229{\cdot}376} q\lambda$$

$$= [(1-n)^2(0{\cdot}4688 - 0{\cdot}0576(1+n)^2) + 0{\cdot}0156]\, q\lambda,$$

$$\max(-V) = -\frac{6n^2[17{\cdot}92 + 2{\cdot}2(2-n^2)] + 16{\cdot}5888}{229{,}376} q\lambda$$

$$= -[n^2(0{\cdot}5839 - 0{\cdot}0576n^2) + 0{\cdot}0723]\, q\lambda$$

$$\max D_0 = 0{\cdot}4269\, q\lambda.$$

Im II. Felde nach den Formeln (236) bis (238):

$$\max(+V) = \frac{8{\cdot}64(1-n)^2[3{\cdot}2 - 1{\cdot}2n^2] + 3}{49{\cdot}152} q\lambda$$

$$= [(1-n)^2(0{\cdot}5625 - 0{\cdot}2109n^2) + 0{\cdot}061]\, q\lambda,$$

$$\max(-V) = -\frac{8{\cdot}64\, n^2[3{\cdot}2 - 1{\cdot}2(1-n)^2] + 3}{49{\cdot}152} q\lambda$$

$$= -[n^2(0{\cdot}5625 - 0{\cdot}2109(1-n)^2 + 0{\cdot}0611]\, q\lambda,$$

$$\max D_1 = 1{\cdot}2221\, q\lambda.$$

Die Fig. 175 gibt ein deutliches Bild der nach diesen Formeln berechneten Transversalkräfte.

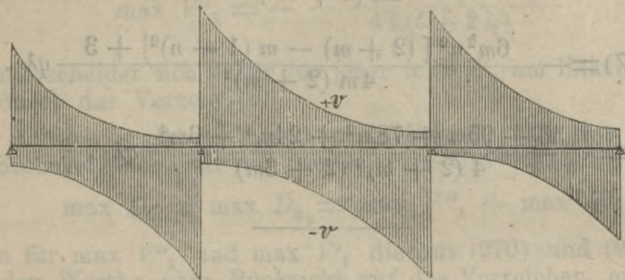


Fig. 175.

In der folgenden von Prof. Dr. E. Winkler veröffentlichten Tabelle sind die Transversalkräfte (max V) und Stützendrücke (max D) für Träger mit zwei, drei und vier Feldern zusammengestellt und bedeutet in derselben g die vom Eigengewicht, q die von der mobilen Belastung auf die Längeneinheit entfallende Last, l die Spannweite eines Feldes, λ das arithmetische Mittel sämmtlicher Spannweiten und x die Entfernung des fraglichen Querschnittes vom linken Auflager des betreffenden Feldes.

I. Träger mit 2 Feldern.

$\frac{x}{l}$	Transversalkraft					
	Einfluss von g		Einfluss von q			
			max $(+V)$		(max $-V$)	
0	$+$ 0·375		0·4375		0·0625	
0·1	$+$ 0·275		0·3437		0·0687	
0·2	$+$ 0·175		0·2624		0·0874	
0·3	$+$ 0·075		0·1932		0·1182	
0·375	0		0·1491		0·1491	
0·4	$-$ 0·025		0·1359		0·1609	
0·5	$-$ 0·125	gl	0·0898	ql	0·2148	ql
0·6	$-$ 0·225		0·0544		0·2794	
0·7	$-$ 0·325		0·0287		0·3537	
0·8	$-$ 0·425		0·0119		0·4369	
0·9	$-$ 0·525		0·0027		0·5277	
1·0	$-$ 0·625		0		0·6250	

max $D_0 = 0·375\, gl + 0·4375\, ql$; max $D_1 = 1·25\,(g + q)\, l$.

II. Träger mit drei Feldern.

$l_1 : l : l_1 = 1 : 1 : 1.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von q max $(+ Q)$	Einfluss von q (max $- Q$)
I. Feld.		+	—
0	+ 0·4	0·4500	0·0500
0·1	+ 0·3	0·3560	0·0563
0·2	+ 0·2	0·2752	0·0752
0·3	+ 0·1	0·2065	0·1065
0·4	0	0·1496	0·1496
0·5	— 0·1	0·1042	0·2042
0·6	— 0·2	0·0694	0·2694
0·7	— 0·3	0·0443	0·3443
0·8	— 0·4	0·0280	0·4280
0·9	— 0·5	0·0193	0·5191
1·0	— 0·6	0·0167	0·6167
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$
II. Feld.		+	—
0	+ 0·5	0·5833	0·0833
0·1	+ 0·4	0·4870	0·0870
0·2	+ 0·3	0·3991	0·0991
0·3	+ 0·2	0·3210	0·1210
0·4	+ 0·1	0·2537	0·1537
0·5	0	0·1979	0·1979
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$

Stützendrücke:

$\max D_0 = 0{\cdot}404\, g\lambda + 0{\cdot}45\, q\lambda;$

$\max D_1 = 1{\cdot}1\, g\lambda + 1{\cdot}2\, q\lambda.$

Mittlere Transversalkraft:

$V = 0{\cdot}2567\, g\lambda + 0{\cdot}3425\, q\lambda.$

Träger mit drei Feldern.

$l_1 : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}1 : 1 \qquad l_1 = \frac{30}{31}\lambda; \quad l = \frac{33}{31}\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft					
	Einfluss von g		Einfluss von q			
			max $(+V)$		(max $-V$)	
I. Feld.			+		—	
0	+ 0·3775	$g\lambda$	0·4382	$q\lambda$	0·0607	$q\lambda$
0·1	+ 0·2807		0·3475		0·0668	
0·2	+ 0·1839		0·2689		0·0850	
0·3	+ 0·0871		0·2021		0·1150	
0·3904	0		0·1519		0·1519	
0·4	— 0·0096		0·1468		0·1564	
0·5	— 0·1064		0·1024		0·2088	
0·6	— 0·2032		0·0683		0·2715	
0·7	— 0·3000		0·0437		0·3437	
0·8	— 0·3967		0·0275		0·4242	
0·9	— 0·4935		0·0188		0·5123	
1	— 0·5903		0·0162		0·6065	
II. Feld.			+		—	
0	+ 0·5323	$g\lambda$	0·6032	$q\lambda$	0·0709	$q\lambda$
0·1	+ 0·4258		0·5005		0·0747	
0·2	+ 0·3194		0·4068		0·0876	
0·3	+ 0·2129		0·3234		0·1105	
0·4	+ 0·1065		0·2517		0·1452	
0·5	0		0·1922		0·1922	

Stützendrücke:

$\max D_0 = 0{\cdot}3775\, g\lambda + 0{\cdot}4382\, q\lambda;$

$\max D_1 = 1{\cdot}1226\, g\lambda + 1{\cdot}2097\, q\lambda.$

Mittlere Transversalkraft:

$V = 0{\cdot}2580\, g\lambda + 0{\cdot}3325\, q\lambda.$

Träger mit drei Feldern.

$l_1 : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}2 : 1 \qquad l_1 = \frac{15}{16}\lambda; \quad l = \frac{9}{8}\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkraft		
	Einfluss von g	Einfluss von q max $(+V)$	Einfluss von q (max $-V$)
I. Feld.		+	—
0	+ 0·3546	0·4269	0·0723
0·1	+ 0·2608	0·3390	0·0782
0·2	+ 0·1671	0·2627	0·0956
0·3	+ 0·0733	0·1977	0·1244
0·3782	0	0·1547	0·1547
0·4	— 0·0204	0·1438	0·1642
0·5	— 0·1142	0·1005	0·2147
0·6	— 0·2079	0·0671	0·2750
0·7	— 0·3017	0·0429	0·3446
0·8	— 0·3954	0·0270	0·4224
0·9	— 0·4892	0·0183	0·5075
1	— 0·5829	0·0157	0·5986
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$
II. Feld.		+	—
0	+ 0·5625	0·6235	0·0610
0·1	+ 0·4500	0·5150	0·0650
0·2	+ 0·3375	0·4156	0·0781
0·3	+ 0·2250	0·3274	0·1024
0·4	+ 0·1125	0·2514	0·1389
0·5	0	0·1885	0·1885
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$

Stützendrücke:

$$\max D_0 = 0{\cdot}3546\, g\lambda + 0{\cdot}4269\, q\lambda;$$
$$\max D_1 = 1{\cdot}1454\, g\lambda + 1{\cdot}2221\, q\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft:

$$V = 0{\cdot}2607\, g\lambda + 0{\cdot}3450\, q\lambda.$$

Träger mit drei Feldern.

$l_1 : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}3 : 1.$ $l_1 = \frac{10}{11}\lambda;$ $l = \frac{13}{11}\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Transversalkraft: Einfluss von g	Einfluss von q: max $(+V)$	Einfluss von q: (max $-V$)
I. Feld.		+	—
0	+ 0·3314	0·4160	0·0846
0·1	+ 0·2405	0·3307	0·0902
0·2	+ 0·1496	0·2566	0·1070
0·3	+ 0·0587	0·1934	0·1347
0·3646	0	0·1583	0·1583
0·4	— 0·0322 $g\lambda$	0·1409 $q\lambda$	0·1731 $q\lambda$
0·5	— 0·1232	0·0986	0·2218
0·6	— 0·2141	0·0659	0·2800
0·7	— 0·3050	0·0421	0·3471
0·8	— 0·3959	0 0264	0·4223
0·9	— 0·4868	0·0178	0·5046
1	— 0·5777	0·0152	0·5929
II. Feld.		+	—
0	+ 0·5909	0·6439	0·0530
0·1	+ 0·4727	0·5298	0·0571
0·2	+ 0·3545 $g\lambda$	0·4252 $q\lambda$	0·0707 $q\lambda$
0·3	+ 0·2364	0·3323	0 0959
0·4	+ 0·1182	0·2523	0·1341
0·5	0	0·1862	0·1862

Stützendrücke:

$\max D_0 = 0{\cdot}3314\, g\lambda + 0{\cdot}4160\, q\lambda;$

$\max D_1 = 1{\cdot}1686\, g\lambda + 1{\cdot}2368\, q\lambda.$

Mittlere Transversalkraft:

$V = 0{\cdot}2642\, g\lambda + 0{\cdot}3487\, q\lambda.$

III. Träger mit vier Feldern.

$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1 : 1 : 1.$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Transversalkräfte		
	Einfluss von g	Einfluss von q max $(+V)$	Einfluss von q (max $-V$)
I. Feld.		+	—
0	+ 0·3929	0·4464	0·0535
0·1	+ 0·2929	0·3528	0·0599
0·2	+ 0·1929	0·2717	0·0788
0·3	+ 0·0929	0·2029	0·1101
0·3929	0	0·1498	0·1498
0·4	— 0·0071	0·1461	0·1533
0·5	— 0·1071	0·1007	0·2079
0·6	— 0·2071	0·0660	0·2731
0·7	— 0·3071	0·0410	0 3481
0·8	— 0 4071	0 0247	0·4319
0·9	— 0 5071	0 0160	0·5231
1	— 0·6071	0·0134	0·6205
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$
II. Feld.		+	—
0	+ 0·5357	0·6027	0·0670
0·1	+ 0·4357	0·5064	0·0707
0·2	+ 0·3357	0·4187	0·0830
0·3	+ 0·2357	0 3410	0·1153
0·4	+ 0·1357	0·2742	0·1385
0·5	+ 0 0357	0·2190	0·1833
0·5357	0	0·2028	0·2028
0·6	— 0·0643	0·1755	0 2398
0·7	— 0·1643	0 1435	0·3078
0.8	— 0·2643	0·1222	0·3865
0 9	— 0·3643	0·1106	0·4749
1	— 0·4643	0·1071	0·5714
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$

Stützendrücke:

$$\max D_0 = 0{\cdot}3929\, g\lambda + 0{\cdot}4464\, q\lambda,$$
$$\max D_1 = 1{\cdot}1428\, g\lambda + 1{\cdot}2232\, q\lambda,$$
$$\max D_2 = 0{\cdot}9286\, g\lambda + 1{\cdot}1428\, q\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft:

$$V = 0{\cdot}2564\, g\lambda + 0{\cdot}3512\, q\lambda.$$

Träger mit vier Feldern.

$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}1 : 1{\cdot}1 : 1.$ $\qquad l_1 = \frac{20}{21}\lambda, \qquad l = \frac{22}{21}\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Transversalkräfte: Einfluss von g	Einfluss von q: max $(+V)$	Einfluss von q: (max $-V$)
I. Feld.		+	—
0	+ 0·3676	0·4313	0·0637
0·1	+ 0·2723	0·3420	0·0697
0·2	+ 0·1771	0·2646	0·0875
0·3	+ 0·0818	0·1989	0·1171
0·3859	0	0·1515	0·1515
0·4	— 0·0134	0·1444	0·1578
0·5	— 0·1087 $g\lambda$	0·1008 $q\lambda$	0·2094 $q\lambda$
0·6	— 0·2039	0·0672	0·2711
0·7	— 0·2991	0·0430	0·3431
0·8	— 0·3943	0·0272	0·4215
0·9	— 0·4896	0·0186	0·5082
1	— 0·5848	0·0160	0·6009
II. Feld.		+	—
0	+ 0·5410	0·6112	0·0702
0·1	+ 0·4362	0·5102	0·0740
0·2	+ 0·3315	0·4180	0·0865
0·3	+ 0·2267	0·3361	0·1094
0·4	+ 0·1219	0·2657	0·1437
0·5	+ 0·0172	0·2073	0·1901
0·5164	0 $g\lambda$	0·1990 $q\lambda$	0·1990 $q\lambda$
0·6	— 0·0876	0·1613	0·2489
0·7	— 0·1924	0·1274	0·3198
0·8	— 0·2972	0·1049	0·4021
0·9	— 0·4019	0·0926	0·4945
1	— 0·5066	0·0890	0·5956

Stützendrücke:

$$\max D_0 = 0{\cdot}3676\, g\lambda + 0{\cdot}4313\, q\lambda,$$
$$\max D_1 = 0{\cdot}1259\, g\lambda + 1{\cdot}2121\, q\lambda,$$
$$\max D_2 = 1{\cdot}0132\, g\lambda + 1{\cdot}1912\, q\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft:

$$V = 0{\cdot}2566\, g\lambda + 0{\cdot}3518\, q\lambda.$$

Träger mit vier Feldern.

$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}2 : 1{\cdot}2 : 1.\qquad l_1 = \frac{10}{11}\lambda,\qquad l = \frac{12}{11}\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Transversalkräfte Einfluss von g	Einfluss von q max $(+V)$	Einfluss von q (max $-V$)
I. Feld.		+	—
0	+ 0·3431	0·4176	0·0746
0·1	+ 0·2521	0·3324	0·0802
0·2	+ 0·1612	0·2583	0·0971
0·3	+ 0·0703	0·1954	0·1251
0·3774	0	0·1541	0·1541
0·4	— 0·0206	0·1431	0·1637
0·5	— 0·1115	0·1011	0·2126
0·6	— 0·2024	0·0687	0·2711
0·7	— 0·2933	0·0452	0·3385
0·8	— 0·3842	0·0298	0·4140
0·9	— 0·4751	0·0213	0·4965
1	— 0·5660	0·0188	0·5848
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$
II. Feld.		+	—
0	+ 0·5484	0·6215	0·0731
0·1	+ 0·4393	0·5160	0·0767
0·2	+ 0·3302	0·4198	0·0896
0·3	+ 0·2211	0·3341	0·1130
0·4	+ 0·1120	0·2603	0·1483
0·5	+ 0.0030	0·1991	0·1961
0·5027	0	0·1976	0·1976
0·6	— 0·1031	0·1508	0·2569
0·7	— 0·2152	0·1151	0·3303
0·8	— 0·3243	0·0914	0·4157
0·9	— 0·4334	0·0785	0·5119
1	— 0·5425	0·0747	0·6172
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$

Stützendrücke:

$$\max D_0 = 0{\cdot}3431\, g\lambda + 0{\cdot}4176\, q\lambda,$$
$$\max D_1 = 1{\cdot}1144\, g\lambda + 1{\cdot}2063\, q\lambda,$$
$$\max D_2 = 1{\cdot}0850\, g\lambda + 1{\cdot}2344\, q\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft:

$$V = 0{\cdot}2583\, g\lambda + 0{\cdot}3509\, q\lambda.$$

Träger mit vier Feldern.

$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}3 : 1{\cdot}3 : 1.\qquad l_1 = \frac{20}{23}\lambda,\qquad l = \frac{26}{23}\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Transversalkräfte		
	Einfluss von g	Einfluss von q max (+ V)	Einfluss von q max (— V)
I. Feld.		+	—
0	+ 0·3193	0·4053	0·0860
0·1	+ 0·2323	0·3237	0·0914
0·2	+ 0·1454	0·2528	0·1074
0·3	+ 0·0584	0·1924	0·1340
0·3672	0	0·1588	0·1588
0·4	— 0·0285	0·1421	0·1707
0·5	— 0·1155	0·1016	0·2171
0·6	— 0·2025	0·0703	0·2728
0·7	— 0·2894	0·0475	0·3369
0·8	— 0·3764	0·0324	0·4088
0·9	— 0·4633	0·0242	0·4875
1	— 0·5503	0·0217	0·5720
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$
II. Feld.		+	—
0	+ 0·5572	0·6329	0·0757
0·1	+ 0·4441	0·5236	0·0795
0·2	+ 0·3311	0·4235	0·0924
0·3	+ 0·2181	0·3342	0·1162
0·4	+ 0·1050	0·2573	0·1523
0·4929	0	0·1981	0·1981
0·5	— 0·0080	0·1934	0·2015
0·6	— 0·1211	0·1430	0·2641
0·7	— 0·2341	0·1059	0·3400
0·8	— 0·3472	0·0810	0·4282
0·9	— 0·4602	0·0675	0·5277
1	— 0·5733	0·0635	0·6368
	$g\lambda$	$q\lambda$	$q\lambda$

Stützendrücke:

$$\max D_0 = 0{\cdot}3103\,g\lambda + 0{\cdot}4053\,q\lambda,$$
$$\max D_1 = 1{\cdot}1075\,g\lambda + 1{\cdot}2049\,q\lambda,$$
$$\max D_2 = 1{\cdot}1466\,g\lambda + 1{\cdot}2736\,q\lambda.$$

Mittlere Transversalkraft:

$$V = 0{\cdot}2677\,g\lambda + 0{\cdot}3538\,q\lambda.$$

B) *Gefährlichste Belastungsweise bezüglich der Momente.*

1. Gefährlichste Belastung des fraglichen Feldes, wenn dasselbe ein **Mittelfeld** ist. Nimmt man zunächst an, dass das fragliche Feld, z. B. das $r$te, nur durch eine Einzellast P belastet ist, so ist in den Gleichungen (250), nämlich in:

$$M_{r-1} = \frac{K'c' - K''}{cc' - 1} \text{ und } M_r = \frac{K''c - K'}{cc' - 1},$$

bei der Bestimmung der Auflagermomente M_{r-1} und M_r der Werth von K'_r und K''_r nach Formel (222) Seite 187 einzusetzen, und man erhält nach einfacher Reduction:

$$\left.\begin{aligned} M_{r-1} &= P\frac{ab}{l^2}\left(\frac{(2l-a)\,c' - (l+a)}{cc'-1}\right) \\ M_r &= P\frac{ab}{l^2}\left(\frac{(l+a)\,c - (2\,l-a)}{cc'-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots (282).$$

Die Coefficienten c und c' sind hierbei für das $r$te Feld nach §. 39 zu bestimmen, und zwar c, beziehungsweise c_r, beim Vorgehen von links nach rechts, dagegen c' oder c'_r beim Vorgehen von rechts nach links.

Liegt die Last P rechts vom fraglichen Querschnitte, so ist das Moment für diesen Querschnitt nach (234) und (236), S. 204,

$$\mathfrak{M} = -\frac{M_{r-1}(l-x) + M_r x}{l} + \frac{Pb}{l}x,$$

und nach Einsetzung der Werthe von M_{r-1} und M_r

$$\mathfrak{M} = \frac{-Pb}{(cc'-1)\,l^3}\left\{\begin{aligned} a^2\,[(c+1)\,x - (c'+1)\,(l-x)] + \\ al\,[(c-2)\,x + (2c'-1)\,(l-x)] - (cc'-1)\,l^2x \end{aligned}\right\}$$

Nach dieser Gleichung wird $\mathfrak{M}_x = 0$ für

$$\left.\begin{aligned} a^2\,[(c+1)\,x - (c'+1)\,(l-x)] \\ + al\,[(c-2)x + (2\,c'-1)\,(l-x)] - (cc'-1)\,l^2x \end{aligned}\right\} = 0 \ (283).$$

Betrachten wir a als veränderlich und bezeichnen die zulässige Wurzel dieser Gleichung mit a_x, so muss, damit die vorliegende Bedingungsgleichung realisirt werde, für $x = 0$ auch $a_x = 0$ werden.

Geht man auf den Grenzfall über, setzt also $a_x = l$, d. h. nimmt das Feld unbelastet an, so muss nach (256), Seite 215,

$$x = \frac{l}{1+c} = f \ldots\ldots\ldots (284)$$

werden, d. h. wir erhalten alsdann den durch die Gleichung (256), Seite 215, bestimmten linken Fixpunkt C des betreffenden Feldes.

Wird nun $x > f$, so wird offenbar $a_x > l$, also unmöglich. Das Moment kann daher nur Null werden im linken Fragment für $x \overline{\overline{<}} f$. Das Moment $\mathfrak{M}_x$ ist nun positiv oder negativ, je nachdem $a \gtrless a_x$.

Liegt die Einzellast P links vom fraglichen Querschnitte, so wird, wenn wir vom rechts liegenden Stützpunkte des betrachteten Feldes vorgehen, die Bedingungsgleichung für $\mathfrak{M} = 0$ aus (283) dadurch erhalten, wenn darin a mit b, x mit $(l - x)$ und c mit c' vertauscht wird; es wird also auch $\mathfrak{M} = 0$, wenn

$$\left.\begin{array}{r} b^2 [(c' + 1)(l - x) - (c + 1) x] + \\ bl [(c' - 2)(l - x) + (2c - 1) x] - (cc' - 1) l^2 (l - x) \end{array}\right\} = 0 \quad (285).$$

Die zulässige Wurzel sei b_x. Damit diese Gleichung realisirt werde, muss für $x = l$ auch $b_x = 0$, ferner für $b_x = l$,

$$(l - x) = \frac{l}{1 + c'} = f' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (286)$$

werden; d. h. wir erhalten für den letzteren Grenzfall nach Gleichung (257) den rechten Fixpunkt D des betrachteten Feldes.

Für kleinere x wird $b_x > l$, also unmöglich.

$\mathfrak{M}$ ist also positiv oder negativ, je nachdem $b \lessgtr b_x$.

Beachten wir nun, dass durch die beiden Fixpunkte C und D das betreffende Feld AB, Fig. 169, in drei Theile getheilt wird, so ergibt sich nun leicht die folgende Regel:

Das Moment wird zum negativen oder positiven Maximum a) in dem links vom linken Fixpunkte liegenden Theile (AC), wenn der Lastzug von a_x bis zur rechten oder linken Stütze reicht; b) in dem rechts vom rechten Fixpunkte liegenden Theile (BD), wenn der Zug von b_x bis zur linken oder rechten Stütze reicht; c) im mittleren Theile (CD), wenn das Feld gar nicht oder ganz belastet ist.

2. Gefährlichste Belastung des Feldes, wenn dasselbe ein **Endfeld** ist. Die vorige Untersuchung lässt sich auch auf das erste Feld anwenden, wenn man sich am linken Auflager statt M_{r-1} das Moment $M_0 = 0$ und am rechten statt M_r jenes M_1 wirksam denkt. Da nun bei der Belastung eines rechts vom ersten Felde liegenden Feldes, nach §. 39, $M_1 = cM_0$ und $M_0 = 0$ ist, so muss offenbar $c = \infty$ werden. Geht man aber von rechts nach links vor, so ist, wenn man sich den Träger nach links über die äusserste Stütze fortgesetzt und eines der links folgenden Felder belastet denkt, $M_0 = - c'M_1$, wobei also c' das Verhältniss $\frac{M_0}{M_1} = 0$ bedeuten würde.

Wir erhalten alsdann für das erste Feld aus den Gleichungen (282), wenn wir Zähler und Nenner mit c dividiren und sodann $\frac{1}{c} = 0$ setzen,

$$M_0 = 0, M_1 = \frac{Pab\,(l_1 + a)}{c'l_1^2} = \frac{Pa\,(l_1^2 - a^2)}{c'l_1^2},$$

und hiefür nach (234)

$$V' = \frac{-M_1}{l_1} + \frac{Pb}{l_1} \text{ und } V'' = \frac{M_1}{l_1} + \frac{Pa}{l_1},$$

ferner nach (237 a) den Druck auf die erste Stütze:

$$D_0 = V' = -\frac{M_1}{l_1} + \frac{Pb}{l_1} = \frac{-Pa\,(l_1^2 - a^2)}{c'l_1^2} + \frac{P\,(l_1 - a)}{l_1}.$$

Liegt nun die Last rechts vom fraglichen Querschnitte, so wird für denselben

$$\mathfrak{M} = D_0 \,.\, x,$$

also ist dann $\mathfrak{M}$ positiv, da D_0 stets positiv ist.

Liegt P links vom fraglichen Querschnitte, so ist nach Gleichung (285), wenn dieselbe mit c dividirt und $\frac{1}{c} = \infty$ gesetzt wird, $\mathfrak{M} = 0$ für $b^2x - 2\,bl_1x + c'l_1^2(l_1 - x) = 0$, oder wenn wir $b = l_1 - a$ setzen, für

$$a^2x - l_1^2x + c'l_1^2\,(l_1 - x) = 0.$$

Die zulässige Wurzel dieser in Bezug auf a quadratischen Gleichung ist

$$a_x = l_1 \sqrt{\frac{(1 + c')\,x - c'l_1}{x}} = l_1 \sqrt{1 + c' - \frac{c'l_1}{x}} \quad (287).$$

Für $x = l_1$ wird $a_x = l_1$; ferner wird $a_x = 0$ für

$$x = \frac{c'l_1}{1 + c'} \text{ oder } l_1 - x = \frac{l_1}{1 + c'} \;.\;.\;.\; (288),$$

wobei c' respective c'_1 vom rechten Endfelde aus für das äusserste linke Feld zu bestimmen und gleich c_{n-1} ist.

Da nun $(l_1 - x)$ den rechten Fixpunkt (D) bestimmt, so hat er auch in den Endfeldern eine reelle Bedeutung, während der linke Fixpunkt (C) mit dem Stützpunkte A zusammenfällt.

$\mathfrak{M}$ ist dem Obigen nach positiv oder negativ, je nachdem $a \gtrless a_x$; es gilt also fürs erste Feld die Regel:

$\mathfrak{M}$ wird zum negativen oder positiven Maximum a) im linken bis zum Fixpunkte D reichenden Theile (AD), wenn das Feld gar nicht oder ganz belastet wird, b) im rechten Theile (BD), wenn der Lastzug von a_x bis zur linken oder rechten Stütze reicht. —

Hiernach gilt also für den ersten Theil (AD) eines Endfeldes dieselbe Belastungsregel wie für den mittleren Theil (CD) eines Mittelfeldes, und für den zweiten Theil (BD) des Endfeldes dieselbe Belastungsregel wie für den dritten Theil (DB) eines Mittelfeldes.

3. Gefährlichste Belastungsweise der übrigen Felder. Ist das 1., 3., 5. u. s. w. der rechts vom fraglichen Felde liegenden Felder belastet, so ist nach §. 39 $\mathfrak{M}$ im Theile AC, Fig. 169, positiv, im Theile CB dagegen negativ; ist dagegen das 2., 4., 6. usw. Feld belastet, so ist umgekehrt $\mathfrak{M}$ im Theile AC negativ, im Theile CB positiv. Ist ferner das 1., 3., 5. usw. der links vom fraglichen Felde liegenden Felder belastet, so ist $\mathfrak{M}$ im Theile AD negativ, im Theile DB positiv; ist dagegen das 2., 4., 6. etc. Feld belastet, so ist umgekehrt $\mathfrak{M}$ im Theile AD positiv, im Theile BD negativ.

Fasst man die unter 1) und 3) gewonnenen Resultate zusammen, so ergibt sich hieraus folgende Regel: Das Moment wird zum Maximum, wenn die Felder abwechselnd belastet sind und zwar derart, dass an das belastete Ende des fraglichen Feldes ein unbelastetes Feld, dagegen an das unbelastete Ende desselben ein belastetes Feld folgt.

Diese Regel ist in Fig. 176 veranschaulicht und zwar in A für den linken, in B für den mittleren und in C für den rechten Theil eines beliebigen Feldes.

Bei Eisenbahnbrücken wird man wieder zu beachten haben, dass nur zwei getrennte Züge gleichzeitig auf der Brücke verkehren können, daher nur zwei getrennte Lasten in Betracht zu ziehen sind.

4. Berechnung der Maximalmomente. a) Im mittleren Theile. In diesem zwischen den beiden Fixpunkten C und D liegenden Theile eines beliebigen, z. B. des r-Feldes, wird nach der sub 1. entwickelten Regel das negative Maximum erzielt, wenn das Feld gar nicht belastet ist; es wird also nach (234) und (236), Seite 204,

$$V_r' = \frac{M_{r-1} - M_r}{l} \text{ und } \mathfrak{M} = -M_{r-1} + V_r' x;$$

d. i. $$\max(-\mathfrak{M}) = -M_{r-1} + (M_{r-1} - M_r)\frac{x}{l} \quad . \quad . \quad (289).$$

Hiernach wächst $\mathfrak{M}$ mit x in directem Verhältnisse, erscheint somit in der graphischen Darstellung als gerade Linie.

Für das positive Maximum erscheint das ganze Feld belastet, es wird daher

$$V_r' = \frac{M_{r-1} - M_r}{l} + \frac{ql}{2} \text{ und } \mathfrak{M} = -M_{r-1} + V_r'x - \frac{qx^2}{2},$$

das ist

$$\mathbf{max\ (+\mathfrak{M}) = -M_{r-1} + (M_{r-1} - M_r)\frac{x}{l}}$$
$$\mathbf{+ \frac{qx}{2}(l - x)} \ldots\ldots \quad (290).$$

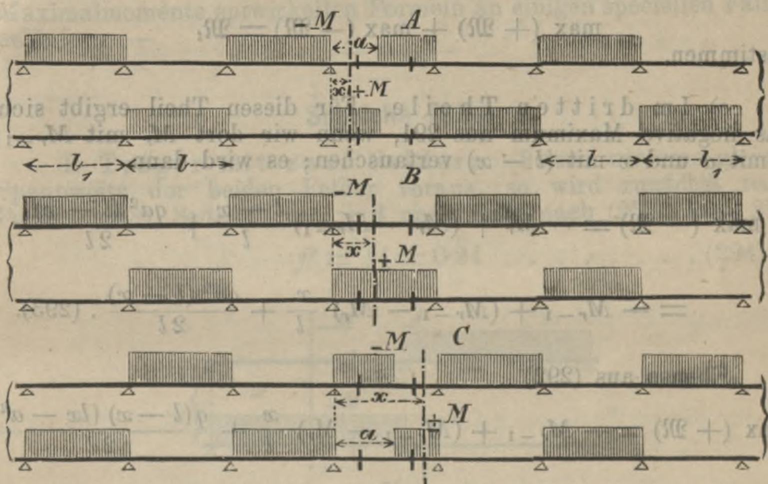


Fig. 176.

b) Im ersten Theile. Für das negative Maximum ist nach den entwickelten Regeln der links vom fraglichen Querschnitte liegende Theil nicht belastet, also nach (234) und (236)

$$V'_r = \frac{M_{r-1} - M_r}{l} + \frac{qb^2}{2l} \text{ und } \mathfrak{M} = -M_{r-1} + V'x, \text{ d. i.}$$

$$\mathbf{max\ (-\mathfrak{M}) = -M_{r-1} + (M_{r-1} - M_r)\frac{x}{l}}$$
$$\mathbf{+ \frac{qb^2x}{2l}} \ldots\ldots\ldots \quad (291).$$

Für das positive Maximum ist der linke Theil bis über den fraglichen Querschnitt hinaus belastet. Es wird hier, für $b = (l - a)$

$$V_r' = \frac{M_{r-1} - M_r}{l} + \frac{qa(2l - a)}{2l} \text{ und } \mathfrak{M} = -M_{r-1} + V'x - \frac{qx^2}{2}$$

das ist

$$\max(+\mathfrak{M}) = -M_{r-1} + (M_{r-1} - M_r)\frac{x}{l}$$
$$+ \frac{qx}{2l}(2al - a^2 - lx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292).$$

Hat man übrigens das eine der beiden Maximalmomente bestimmt, so lässt sich aus demselben und aus $\mathfrak{M}_t$, d. i. aus dem Momente bei totaler Belastung, das andere auch aus

$$\max(+\mathfrak{M}) + \max(-\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_t$$

bestimmen.

c) Im dritten Theile. Für diesen Theil ergibt sich das negative Maximum aus 291, wenn wir dort M_r mit M_{r-1}, b mit a und x mit $(l - x)$ vertauschen; es wird dann

$$\max(-\mathfrak{M}) = -M_r + (M_r - M_{r-1})\frac{l - x}{l} + \frac{qa^2(l - x)}{2l}$$

$$= -M_{r-1} + (M_{r-1} - M_r)\frac{x}{l} + \frac{qa^2(l - x)}{2l} \; . \; (293).$$

Ebenso aus (292)

$$\max(+\mathfrak{M}) = -M_{r-1} + (M_{r-1} - \mathrm{M}_r)\frac{x}{l} + \frac{q(l - x)(lx - a^2)}{2l}$$

Das positive Maximum findet man auch hier am bequemsten aus

$$\max(+\mathfrak{M}) + \max(-\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_t.$$

5. Absolutes Maximum der Momente.

Zum absoluten positiven Maximum wird $\mathfrak{M}$ nach den entwickelten Regeln an den Stützen, wenn die Felder zu beiden Seiten der betreffenden Stützen ganz belastet und die übrigen Felder abwechselnd belastet sind.

Ganz dieselbe Belastungsweise ergab sich auch für die Maxima der Stützendrücke (Seite 219).

Zum absoluten positiven Maximum wird $\mathfrak{M}$ im mittleren Theile jedes Feldes und zwar, wenn das ganze Feld belastet ist und die übrigen Felder abwechselnd belastet sind.

Der betreffende Querschnitt wird analog bestimmt wie in §. 38 und zwar ist, entsprechend der Gleichung (244) Seite 206, für diesen Querschnitt

$$x = \frac{l}{2} + \frac{M_{r-1} - M_r}{ql},$$

wofür, entsprechend der Gleichung (245), nämlich

$$\max(+M) = + \frac{ql^2}{8} - \tfrac{1}{2}(M_{r-1} + M_r) + \frac{(M_{r-1} - M_r)^2}{2ql^2}.$$

Wir wollen nun die in diesem Paragraphe bezüglich der Maximalmomente entwickelten Formeln an einigen speciellen Fällen erläutern. —

Specielle Fälle.

1. Träger mit zwei Feldern. Setzen wir eine gleiche Spannweite der beiden Felder voraus, so wird zunächst nach Formel (248), Seite 210, $c'_2 = 4$ und hiefür nach (257), Seite 215,

$$f' = \tfrac{1}{5}l = 0{\cdot}2\,l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (294).$$

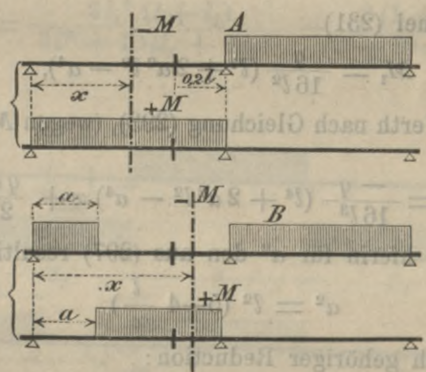


Fig. 177.

Erster Theil. $\mathfrak{M}$ wird für einen beliebigen Querschnitt dieses Theiles zum negativen Maximum, wenn nur das zweite Feld, zum positiven Maximum, wenn nur das erste Feld belastet ist. (Fig. 177.) Für diese Belastungsweise wird im ersten Falle, für welchen $K''_1 = 0$ und $K'_2 = \frac{ql^2}{4}$ zu setzen ist, nach Formel (231), Seite 203,

$$M_1 = \frac{q\,l^2}{16},$$

und daher nach Gleichung (289), in welcher $M_{r-1} = M_0 = 0$ und $M_r = M_1$ zu setzen ist,

$$\max(-M) = -\frac{q\,l\,x}{16} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(295).$$

Ebenso wird für das positive Maximum des Momentes, wegen $K'_2 = 0$ und $K''_1 = ql^2$, $M_3 = \frac{ql^2}{16}$, und daher nach Formel (290), in welcher wieder $M_{r-1} = M_0 = 0$ und $M_r = M_1$ zu setzen ist,

$$\max(+\mathfrak{M}) = \frac{q\,x}{16}(7\,l - 8\,x) \;.\;.\;.\;.\;.\;(296).$$

Zweiter Theil. Für $c' = 4$ ergibt sich zunächst aus (287)

$$a_x = \sqrt{5 - 4\frac{l}{x}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(297).$$

und es wird, weil für das negative Maximum der linke Theil des ersten Feldes bis zu a_x und das ganze zweite Feld belastet sein muss (Fig. 177), nach (224) und (223)

$$K_1 = \frac{q\,a^2\,(2\,l^2 - a^2)}{4\,l^2},\; K'_2 = \frac{q\,l^2}{4},$$

daher nach Formel (231)

$$M_1 = \frac{q}{16\,l^2}(l^4 + 2\,a^2\,l^2 - a^4),$$

und für diesen Werth nach Gleichung (293), (wegen $M_{r-1} = M_0 = 0$ und $M_r = M_1$)

$$\max(-\mathfrak{M}) = \frac{-\,q}{16\,l^3}(l^4 + 2\,a^2\,l^2 - a^4)\,x + \frac{q\,a^2}{2\,l}(l - x).$$

Führen wir hierin für a^2 den aus (297) resultirenden Werth

$$a^2 = l^2\left(5 - 4\,\frac{l}{x}\right)$$

ein, so wird nach gehöriger Reduction:

$$\max(-\mathfrak{M}) = -\frac{q\,l}{8}\left(13\,x - 20\,l + 8\,\frac{l^2}{x}\right) \;.\;.\;(298).$$

Um nun das positive Maximum zu erhalten, beachte man, dass für totale Belastung, nach §. 38, Gleichung (243) für $M' = M_0 = 0$ und $M'' = M_1 = \frac{ql^2}{8}$,

$$M_t = \frac{q\,x}{8}(4\,x - 3\,l),$$

und daher nach der Formel max $(+\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_l - \max(-\mathfrak{M})$,

$$\max(+\mathfrak{M}) = \frac{q}{8}\left(16\,l x - 4 x^2 - 20\,l^2 + 8\,\frac{l^3}{x}\right) \quad . \; . \; (299).$$

Träger mit drei Feldern.

I. Feld. Nach (248 a), Seite 210 wird, wenn vom rechten Ende gezählt wird

$$c'_2 = 2\,\frac{(l + l_1)}{l}$$

und
$$c'_1 = \frac{2\,(l + l_1) - \dfrac{l}{c_2}}{l_1} = \frac{(l + 2\,l_1)\,(3\,l + 2\,l_1)}{2\,l_1\,(l + l_1)}$$

oder wenn $l = n l_1$ gesetzt wird,

$$c'_1 = \frac{(2 + n)\,(2 + 3\,n)}{2\,(1 + n)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (300).$$

Nach Formel (257), Seite 215 wird hiefür

$$f' = \frac{l_1}{l + c'_1} = \frac{2\,l_1^2\,(l + l_1)}{3\,l^2 + 10\,l l_1 + 6\,l_1^2} = \frac{2\,(1 + n)\,l_1}{6 + 10\,n + 3\,n^2} \,. \; (301).$$

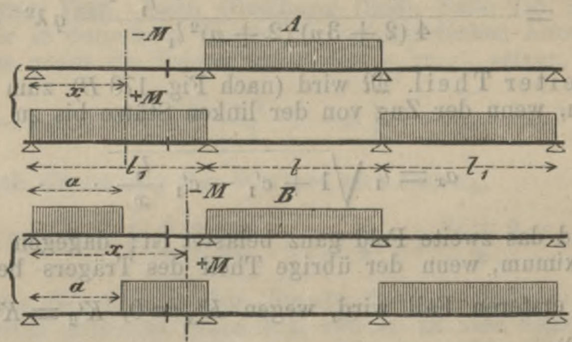


Fig. 178.

Erster Theil. $\mathfrak{M}$ wird (nach Fig. 178 *A*) zum negativen Maximum bei Belastung des zweiten und zum positiven Maximum bei Belastung des ersten und dritten Feldes.

Nach Formel (232), Seite 203 wird für den ersteren Fall, wegen

$$K''_1 = 0,\ K'_2 = K''_2 = \frac{q l^2}{4}$$

und
$$K'_3 = 0,\ M_1 = \frac{q l^3}{4(3l + 2l_1)},$$

daher nach (289), für $M_{r-1} = M_0$ und $M_r = M_1$,

$$\max(-\mathfrak{M}) = \frac{-q l^3 x}{4(3l + 2l_1) l_1},$$

oder für $l + 2l_1 = 3\lambda$ und $l = n_1 l$,

$$\max(-\mathfrak{M}) = \frac{-9n^3 x}{4(2+n)^2 (2+3n) l} q\lambda^2 \quad . \quad . \ (302).$$

Für die letztere Belastungsweise wird, wegen

$$K''_1 = K'_3 = \frac{q l^2_1}{4} \text{ und } K'_2 = K''_2 = 0,$$

nach (232)
$$M_1 = \frac{q l_1^3}{4(3l + 2l_1)},$$

daher nach Formel (290), für $M_{r-1} = 0$ und $M_r = M_1$,

$$\max(+\mathfrak{M}) = \frac{qx\,[3l_1(2l + l_1) - 2(3l + 2l_1)x]}{4(3l + 2l_1)}$$

$$= \frac{9\left[3(1+2n) - 2(2+3n)\frac{x}{l_1}\right]x}{4(2+3n)(2+n)^2 l_1} q\lambda^2 \quad . \quad . \ (303).$$

Zweiter Theil. $\mathfrak{M}$ wird (nach Fig. 178 B) zum negativen Maximum, wenn der Zug von der linken Stütze bis zu

$$a_x = l_1 \sqrt{1 + c'_1 - c'_1 \frac{l_1}{x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (304).$$

reicht und das zweite Feld ganz belastet ist; dagegen zum positiven Maximum, wenn der übrige Theil des Trägers belastet ist. Für den ersteren Fall wird, wegen $K'_3 = 0,\ K'_2 = K''_2 = \frac{q l^2}{4}$ nach (232)

$$M_1 = \frac{8K''_1 l_1 (l + l_1) + q l^3 (l + 2l_1)}{4(l + 2l_1)(3l + 2l_1)}$$

$$= \frac{9\left[8(1+n)\frac{K''_1}{l_1^2} + (2+n) n^3 q\right]}{4(2+3n)(2+n)^3} \lambda^2 \quad . \quad . \ (305).$$

Der Werth von K''_1 ist hierbei nach (224), Seite 198

$$K''_1 = \frac{q a^2 (2 l_1^2 - a^2)}{4 l_1^2},$$

worin aber für a der aus (304) resultirende Werth gesetzt werden muss, für welchen alsdann

$$K''_1 = \frac{q l_1^2}{4} \left[1 - c_1^2 \left(1 - \frac{l_1}{x}\right)^2\right] \text{ wird.}$$

Nach Formel (293) wird nun, für $M_{r-1} = M_0 = 0$ und $M_r = M_1$,

$$\max(-\mathfrak{M}) = -M_1 \frac{x}{l_1} + \frac{q a^2 (l_1 - x)}{2 l_1} \quad . \ . \ (306).$$

Das positive Maximum findet man nun am einfachsten aus

$$\max(+\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_t - \max(-\mathfrak{M}).$$

II. Feld. Nach (248), Seite 210, wird zunächst

$$c_2 = \frac{2(l_1 + l)}{l} = \frac{2(1 + n)}{n},$$

und hiefür nach (256), Seite 215

$$f = \frac{l}{l + c_2} = \frac{l}{3l + 2 l_1} = \frac{n}{3 + 3n} l \quad . \ . \ (307).$$

Erster Theil. Nach Gleichung (283), Seite 235 ergibt sich, wenn wir in derselben, wegen der symmetrischen Anordnung des 2. Feldes gegen die beiden Endfelder, $c_2 = c'_2$ setzen,

$$(l - 2x) a^2 - \left(\frac{2 c_2 - 1}{c_1 + 1} l - x\right) a l + (c_2 - 1) l^2 x = 0,$$

oder nach Einsetzung des Werthes von $c = c'_2$,

$$(l - 2x) a^2 - \left(\frac{4 + 3n}{2 + 3n} l - x\right) a l + \frac{2_2 + n}{n} l^2 x = 0 \ (308).$$

Nach den entwickelten Regeln über die gefährlichste Belastungsweise wird nun (nach Fig. 179 *A*) $\mathfrak{M}$ zum negativen Maximum, wenn das zweite Feld von a bis zum rechten Ende desselben und das ganze erste Feld belastet sind; dagegen zum positiven Maximum, wenn der übrige Theil des Trägers belastet ist.

Für die erstere Belastungsweise wird nach (232), Seite 203, weil $k''_1 = \frac{q l_1^2}{4}$ und $K'_3 = 0$,

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= \frac{2ql_1^3(l+l_1)+8K'_2 l(l+l_1)-4K''_2 l^2}{4(l+2l_1)(3l+2l_1)} \\ M_2 &= \frac{-ql_1^3\, l-4K'_2\, l^2+8K''_2\, l\,(l+l_1)}{4(l+2l_1)(3l+2l_1)} \end{aligned}\right\} \cdot \quad (309),$$

also
$$M_1 - M_2 = \frac{ql_1^3 + 4(K'_2 - K''_2)l}{4(l+2l_1)} \quad \ldots \quad (310).$$

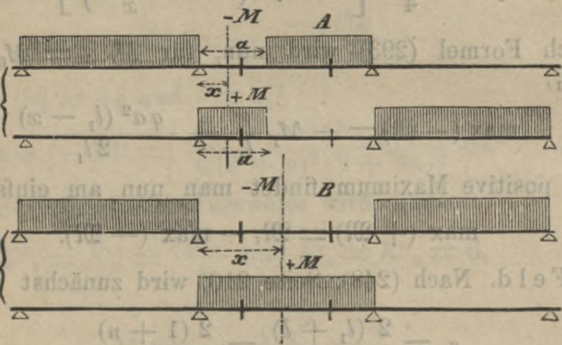


Fig. 179.

Hierin sind aber für K'_2 und K''_2 die hiefür aus (225) resultirenden Werthe einzuführen, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} K'_2 &= q\,\frac{b^2(2l^2-b^2)}{4l^2} \\ K''_2 &= q\,\frac{(l^2-a^2)^2}{4l^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (311).$$

Nach Formel (291) wird nun

$$\max(-\mathfrak{M}) = -M_1 + (M_1 - M_2)\,\frac{x}{l} + \frac{qb^2x}{2l} \cdot \quad (312).$$

Das positive Maximum berechnet sich wieder am einfachsten nach der Gleichung:

$$\max(+M) = M_t - \max(-M).$$

Mittlerer Theil. In diesem wird $\mathfrak{M}$ (nach Fig. 179 *B*) zum negativen Maximum bei Belastung der beiden äusseren, dagegen zum positiven Maximum bei Belastung des mittleren Feldes.

Für den ersteren Fall wird nach (223) $K''_1 = K'_3 = \frac{ql_1}{4}$ ferner $K'_2 = K''_2 = 0$, somit nach (232)

$$M_1 = M_2 = \frac{ql_1^3}{4(3l+2l_1)}.$$

Hiefür wird nach Formel (289)

$$\max(-\mathfrak{M}) = \frac{-q l_1^3}{4(3l + 2l_1)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313).$$

Für die dem positiven Maximum von $\mathfrak{M}$ entsprechende Belastungsweise wird, wegen $K''_1 = K'_3 = 0$ und $K'_2 = K''_2 = \frac{ql^2}{4}$ nach (232)

$$M_1 = M_2 = \frac{ql^3}{4(3l + 2l_1)},$$

und daher nach (290)

$$\max(+M) = \frac{-ql^3}{4(3l + 2l_1)} + \frac{qx}{2}(l - x) \quad . \quad (314).$$

Schliesslich wollen wir noch das im §. 40 begonnene Beispiel ergänzen, indem wir für den dort behandelten Träger die Maximal-Momente für beliebige Querschnitte berechnen.

Beispiel. Es sind für einen continuirlichen Träger mit drei Feldern, deren Längen sich verhalten wie 5 : 6 : 5, die Formeln für die Maximalmomente beliebiger Querschnitte aufzustellen.

Setzen wir wieder $2l_1 + l = 3\lambda$, so ist

$$\lambda = \tfrac{8}{9} l = \tfrac{16}{15} l_1 \text{ oder } l = \tfrac{9}{8}\lambda,\ l_1 = \tfrac{15}{16}\lambda.$$

I. **Feld.** Nach den Formeln (300) und (301) wird für $n = 1{\cdot}2$, $c'_1 = \frac{224}{55}$, $f' = 0{\cdot}19713\, l_1$, also $l_1 - f' = 0{\cdot}80287\, l_1$; d. h. der einzige Fixpunkt D dieses Feldes liegt in der Entfernung $AD = 0{\cdot}80287\, l_1$, vom linken Auflager A dieses Feldes.

Erster Theil (AD). Für einen beliebigen Querschnitt desselben wird nun nach Formel (302)

$$\max(-\mathfrak{M}) = \frac{-243\, x}{3584\, l_1} q\lambda.$$

Obzwar sich das positive Maximum nach (303) direct bestimmen liesse, so wollen wir es doch, um rascher zum Ziele zu kommen, nach der Formel

$\max(+\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_t - \max(-\mathfrak{M})$ bestimmen.

Bei totaler Belastung wird nach §. 37

$$\mathfrak{M}_t = \left(0{\cdot}33241\, \frac{x}{l_1} - 0{\cdot}43945\, \frac{x^2}{l_1^2}\right) q\lambda^2,$$

mithin

$$\max(+\mathfrak{M}) = \left(0{\cdot}40021\, \frac{x}{l_1} - 0{\cdot}43945\, \frac{x^2}{l_1^2}\right) q\lambda^2.$$

Für $x = 0{\cdot}5\, l_1$ wird hiernach
$\max(-\mathfrak{M}) = 0{\cdot}0339\, q\lambda^2$ und $\max(\mathfrak{M}+) = 0{\cdot}09024\, q\lambda^2$.

Zweiter Theil (DB). Nach (304) wird

$$a_x = l_1 \sqrt{5{\cdot}0727 - 4{\cdot}0727 \frac{l_1}{x}},$$

wofür nach (305) und (306) nach gehöriger Reduction

$$M_1 = -[0{\cdot}77313 - 1{\cdot}78977 \frac{l_1}{x} + 0{\cdot}89488 \frac{l_1^2}{x^2}]\, q\lambda_2,$$

und $\max(-\mathfrak{M}) = -(1{\cdot}4561 \frac{x}{l_1} - 2{\cdot}22923 + 0{\cdot}89489 \frac{l_1}{x})\, q\lambda^2.$

Da für totale Belastung nach Obigem

$$\mathfrak{M}_t = (0{\cdot}33241 \frac{x}{l_1} - 0{\cdot}43945 \frac{x^2}{l_1^2})\, q\lambda^2$$

ist, so wird

$$\max(+\mathfrak{M}) = M_t - \max(-\mathfrak{M})$$

$$= (1{\cdot}78851 \frac{x}{l_1} - 0{\cdot}43945 \frac{x^2}{l_1^2} - 2{\cdot}22923 + 0{\cdot}89489 \frac{l_1}{x})\, q\lambda^2.$$

Für $x = 0{\cdot}9\, l_1$ wird hiernach

$\max(-\mathfrak{M}) = -0{\cdot}07558\, q\lambda^2$ und $\max(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}01879\, q\lambda^2$.

II. Feld. Nach (307) wird hiefür $f = \frac{1{\cdot}2}{5{\cdot}6} l = \frac{3}{14} l$, d. h. der erste Fixpunkt C dieses Feldes liegt in der Entfernung $\frac{3}{14} l$ vom linken Auflager A, und es wird daher wegen der symmetrischen Anordnung auch der zweite Fixpunkt D in derselben Entfernung vom rechten Auflager B dieses Feldes liegen.

Erster Theil (AC). Nach Formel (308) wird zunächst für $n = 1{\cdot}2$

$$(l - 2x)\, a^2 - (1{\cdot}35714\, l - x)\, al + 2{\cdot}66667\, l^2 x = 0.$$

Wird hieraus a bestimmt und dieser Werth, sowie jener $b = l - a$ in (311) eingeführt, so ergibt sich

$$\frac{K'_2}{ql^2} = \frac{b^2}{4\, l^2}\left(2 - \frac{b^2}{l^2}\right),\ \frac{K''_2}{ql^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)^2 = \frac{b^2}{4\, l^2}\left(2 - \frac{b^2}{l}\right)^2$$

und hiefür nach (309) und (310)

$$M_4 = [0{\cdot}05395 + (0{\cdot}08475 + 0{\cdot}1017 \frac{b}{l} - 0{\cdot}11865 \frac{b^2}{l^2}) \frac{b^2}{l^2}]\, qx^2,$$

$$M_4 - M_2 = 0{\cdot}05722\, (1 - 3{\cdot}456 \frac{a^2 b^2}{l^4}).$$

Für diese Werthe wird endlich nach (312)

$$\frac{\max(-\mathfrak{M})}{q\lambda^2} = -0{\cdot}05395 - (0{\cdot}08475 + 0{\cdot}1017 \frac{b}{l} - 0{\cdot}11865 \frac{a^2}{l^2}) \frac{b^2}{l^2}$$

$$+ 0{\cdot}06866 \left(1 - 3{\cdot}456 \frac{a^2 b^2}{l^4}\right) \frac{x}{l} + 0{\cdot}63281 \frac{b^2 x}{l^3}.$$

Ist z. B. $x = 0{\cdot}1\, l$, so erhält man hiefür aus der ersten für a aufgestellten Gleichung:

$$0{\cdot}8\, a^2 - 1{\cdot}25714\, la + 0{\cdot}26667\, l^2 = 0,$$

woraus $a = 0{\cdot}25279\, l$ und $b = l - a = 0{\cdot}74721\, l$.

Für diese Werthe wird nun nach gehöriger Reduction:

$$\max(-\mathfrak{M}) = -0{\cdot}06536\, q\lambda^2.$$

Für totale Belastung des Trägers ist nach §. 37:

$$\mathfrak{M}_t = -\left[0{\cdot}10704 - 0{\cdot}63281\,\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right] q\lambda^2,$$

und für $x = 0{\cdot}1\,l$, $M_t = -0{\cdot}05009\, q\lambda^2$, also

$$\max(+\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}_t - \max(-\mathfrak{M}) = (-0{\cdot}05009 + 0{\cdot}06536)\, q\lambda^2$$
$$= 0{\cdot}01527\, q\lambda^2.$$

Mittlerer Theil. Für diesen wird nach den Formeln (313) und (314), wegen $l = \frac{9}{8}\lambda$ und $l_1 = \frac{15}{16}\lambda$.

$$\max(-\mathfrak{M}) = \frac{-9\, q\lambda^2}{4\,.\,5{\cdot}6\,.\,3{\cdot}2^2} = -0{\cdot}03924\, q\lambda^2,$$

$$\max(+\mathfrak{M}) = \frac{9\,.\,1{\cdot}2^2 q\lambda^2}{4\,.\,3{\cdot}2^2}\left[-\frac{1{\cdot}2}{5{\cdot}7} + 2\,\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]$$

$$= \left[-0{\cdot}0678 + 0{\cdot}63281\,\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\right] q\lambda^2.$$

Für $x = 0{\cdot}5\,l$ wird hiernach

$$\max(-\mathfrak{M}) = -0{\cdot}03923\, q\lambda^2 \text{ und } \max(+M) = 0{\cdot}0904\, q\lambda^2.$$

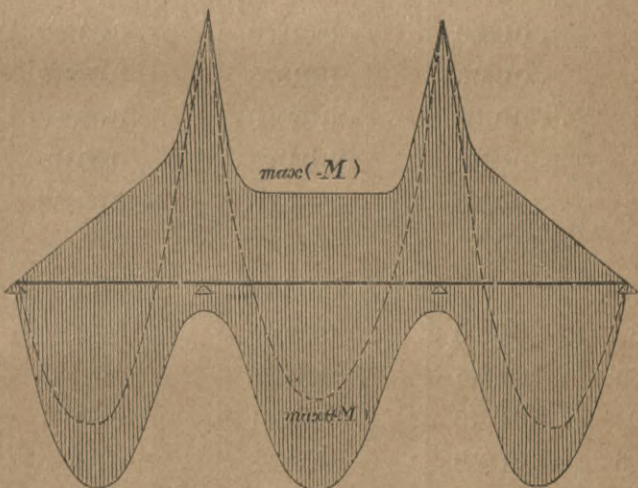


Fig. 180.

In Fig. 180 sind alle diesem Beispiele entsprechenden Maximalmomente graphisch dargestellt. Die punktirte Linie stellt die der totalen Belastung des Trägers zukommenden Momente dar.

In den folgenden Tabellen sind zur Erleichterung der Berechnung continuirlicher Träger die Maximalmomente für Träger mit 2, 3 und 4 Feldern zusammengestellt. Hierbei bedeutet wieder l_1 die Spannweite eines äusseren, l jene eines inneren Feldes, λ das arithmetische Mittel sämmtlicher Spannweiten, g die vom Eigengewichte und q die von der mobilen Belastung auf die Längeneinheit entfallende Last; endlich bedeutet x die Entfernung des fraglichen Querschnittes vom linken Auflager des betreffenden Feldes.

Träger mit zwei gleich langen Feldern.

$\frac{x}{l}$	Momente		
	Einfluss von g	Einfluss von q	
		max ($-\mathfrak{M}$)	max ($+\mathfrak{M}$)
	gl^2	$-$ ql^2	$+$ ql^2
0	0	0	0
0·1	+ 0·0325	0·00625	0·03875
0·2	+ 0·0550	0·01250	0·06750
0·3	+ 0·0675	0·01875	0·08625
0·4	+ 0·0700	0·02500	0·09500
0·5	+ 0·0625	0·03125	0·09375
0·6	+ 0·0450	0·03750	0·08250
0·7	+ 0 0175	0·04375	0·06125
0·75	0	0·04688	0·04688
0·8	— 0·0200	0·05000	0·03000
0·85	— 0·0425	0·05773	0·01523
0·9	— 0·0675	0·07361	0·00611
0·95	— 0·0950	0·09638	0·00138
1	— 0·1250	0·12500	0

Absolutes positives Maximum:

Eigengewicht: max ($+\mathfrak{M}$) $= 0·07031\ ql^2$ für $x = 0·3750\ l$.

Mobile Last: max ($+\mathfrak{M}$) $= 0·09566\ gl^2$ für $x = 0·4374\ l$.

Träger mit drei Feldern.

$l_1 : l : l_1 = 1 : 1 : 1.$

$\frac{x}{l}$	Momente		
	Einfluss von g	Einfluss von q	
		max (— $\mathfrak{M}$)	max (+ $\mathfrak{M}$)
I. Feld.		—	+
0	0	0	0
0·1	+ 0·035	0·005	0·040
0·2	+ 0·060	0·010	0·070
0·3	+ 0·075	0·015	0·090
0·4	+ 0·080	0·020	0·100
0·5	+ 0·075	0·025	0·100
0·6	+ 0·060	0·030	0·090
0·7	+ 0·035 gl^2	0·035 ql^2	0·070 ql^2
0·7895	+ 0·00414	0·03948	0·04362
0·8	0	0·04022	0·04022
0·85	— 0·02125	0·04898	0·02773
0·9	— 0·04500	0·06542	0·02042
0·95	— 0·07125	0·08831	0·01706
1	— 0·10000	0·11667	0·01667
II. Feld.		—	+
0	— 0·11111	0·11667	0·01667
0·05	— 0·07625	0·09033	0·01408
0·1	— 0·0550	0·06248	0·00748
0·15	— 0·03625	0·05678	0·02053
0·2	— 0·020 gl^2	0·050 ql^2	0·030 ql^2
0·2764	0	0·050	0·050
0·3	+ 0·005	0·050	0·055
0·4	+ 0·020	0·050	0·070
0·5	+ 0·025	0·050	0·075

Absolutes positives Maximum:

Eigengewicht: I. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) $= 0·080\,gl^2$ für $x = 0·4\,l$.
" II. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) $= 0·025\,gl^2$ für $x = 0·5\,l$.

Mobile Last: I. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) $= 0·10125\,ql^2$ für $x = 0·45\,l$.
" " II. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) $= 0·07500\,ql^2$ für $x = 0·5\,l$.

Träger mit drei Feldern.

$$l_1 : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}1 : 1.$$
$$3\,\lambda = 2\,l_1 + l.$$
$$l_1 = \tfrac{30}{31}\lambda = 0{\cdot}96774\,\lambda, \quad l = \tfrac{33}{31}\lambda = 1{\cdot}06451\,\lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Momente: Einfluss von g		Einfluss von q: max $(-\mathfrak{M})$		Einfluss von q: max $(+\mathfrak{M})$	
I. Feld.			—		+	
0	0		0		0	
0·1	+ 0·03185		0·00588		0·03773	
0·2	+ 0·05433		0·01176		0·06609	
0·3	+ 0·06744		0·01764		0·08508	
0·4	+ 0·07119		0·02351		0·09470	
0·5	+ 0·06558		0·02939		0·09497	
0·6	+ 0·05060		0·03527		0·08587	
0·7	+ 0·02626	$g\lambda^2$	0·04114	$q\lambda^2$	0·06740	$q\lambda^2$
0·7801	0		0.04586		0·04586	
0·7964	— 0·00161		0·04683		0·04075	
0·8	— 0·00761		0·04706		0·03945	
0·85	— 0·02782		0·05486		0·02704	
0·9	— 0·05053		0·07013		0·01960	
0·95	— 0·07558		0·09171		0·01613	
1	— 0·10297		0·11865		0·01568	
II. Feld.			—		+	
0	— 0·10297		0·11865		0·01568	
0·05	— 0·07606		0·08976		0·01370	
0·1	— 0·05198		0·06723		0·01525	
0·15	— 0·03073		0·05232		0·02159	
0·2	— 0·01231		0·04478		0·03247	
0·2075	— 0·00992	$g\lambda^2$	0.04417	$q\lambda^2$	0·03427	$q\lambda^2$
0·2387	0		0·04417		0·04417	
0·3	+ 0·01701		0·04417		0·06118	
0·4	+ 0·03301		0·04417		0·07718	
0·5	+ 0·03868		0·04417		0·08285	

Absolutes positives Maximum:

Eigengewicht: I. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}07124\,g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}3901\,l_1$.
" II. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}03868\,g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}5\,l$.
Mobile Last: I. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}09602\,g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}4528\,l_1$.
" " II. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}08285\,g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}5\,l_1$.

Träger mit drei Feldern.

$$l_1 : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}2 : 1.$$
$$3\lambda = 2l_1 + l.$$
$$l_1 = \tfrac{15}{16}\lambda = 0{\cdot}9375\lambda, \quad l = \tfrac{9}{8}\lambda = 1{\cdot}125\lambda.$$

$\frac{l_1}{x}$ $\frac{l}{x}$	Momente		
	Einfluss von g	Einfluss von q	
		max (— $\mathfrak{M}$)	max (+ M)
I. Feld.		—	+
0	0	0	0
0·1	+ 0·02885	0.00678	0.03563
0·2	+ 0·04890	0·01356	0.06246
0·3	+ 0·06017	0.02034	0.08051
0·4	+ 0·06265	0·02710	0.08975
0·5	+ 0·05634	0·03390	0.09024
0·6	+ 0·04124	0·04069	0.08193
0·7	+ 0·01736	0·04746	0.06482
0·7564	0	0·05127	0.05127
0·8	— 0·01532	0·05424	0.03892
0·8029	— 0·01639	0·05443	0.03804
0·85	— 0·03496	0·06016	0.02520
0·9	— 0·05679	0·07558	0.01879
0·95	— 0·08082	0·09606	0.01524
1	— 0·10704 $g\lambda^2$	0·12176 $q\lambda^2$	0.01471 $q\lambda^2$
II. Feld.		—	+
0	— 0·10704	0·12176	0·01471
0·05	— 0·07698	0·08995	0·01297
0·1	— 0·05009	0·06536	0·01527
0·15	— 0·02637	0·04882	0·02245
0·2	— 0·00579	0·04039	0·03460
0·2143	— 0·00050	0·03923	0·03875
0·2157	0	0·03923	0·03923
0·3	+ 0·02585	0·03923	0·06508
0·4	+ 0·04483	0·03923	0·08407
0·5	+ 0·05116 $g\lambda^2$	0·03923 $q\lambda^2$	0·09040 $q\lambda^2$

Absolutes positives Maximum.

Eigengewicht: I. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·06282 $g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}378\, l_1$.
„ II. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·05116 $g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}5\, l$.
Mobile Last: I. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·09111 $q\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}456\, l_1$.
„ „ II. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·09040 $q\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}5\, l_2$.

Träger mit drei Feldern.

$$l_1 : l : l_1 = 1 : 1\cdot3 : 1$$
$$3\lambda = 2l_1 + l$$
$$l_1 = \tfrac{10}{11}\lambda = 0\cdot90909\,\lambda,\quad l = \tfrac{13}{11}\lambda = 1\cdot18182\,\lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Momente		
	Einfluss von g	Einfluss von q	
		max (— $\mathfrak{M}$)	max (+ $\mathfrak{M}$)
I. Feld.		—	+
0	0	0	0
0·1	+ 0·02599	0·00769	0·03369
0·2	+ 0·04373	0·01539	0·05911
0·3	+ 0·05319	0·02308	0·07627
0·4	+ 0·05439	0·03077	0·08517
0·5	+ 0·04733	0·03847	0·08580
0·6	+ 0·03200	0·04616	0·07816
0·7	+ 0·00841	0·05385	0·06226
0·7291	0	0·05609	0·05609
0·8	— 0·02341	0·06155	0·03810
0·8089	— 0·02668	0·06225	0·03556
0·85	— 0·04247	0·06804	0·02557
0·9	— 0·06356	0·08155	0·01799
0·95	— 0·08673	0·10108	0·01435
1	— **0·11196** $\cdot g\lambda^2$	**0·12575** $\cdot q\lambda^2$	0·01380 $\cdot q\lambda^2$
II. Feld.		—	+
0	— **0·11196**	**0·12575**	0·01380
0·05	— 0·07878	0·09124	0·01246
0·1	— 0·04910	0·06433	0·01523
0·15	— 0·02357	0·04610	0·02253
0·2	— 0·00022	0·03672	0·03650
0·2005	0	0·03644	0·03644
0·2203	— 0·00802	0·03503	0·04305
0·3	— 0·03469	0·03503	0·06972
0·4	— 0·05566	0·03503	0·09069
0·5	— **0·06264** $\cdot g\lambda^2$	0·03503 $\cdot q\lambda^2$	**0·09767** $\cdot q\lambda^2$

Absolutes positives Maximum:

Eigengewicht: I. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·05491 $g\lambda^2$ für $x = 0\cdot365\,l_1$,
" II. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·06263 $g\lambda^2$ für $x = 0\cdot5\,l$,
Mobile Last: I. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·08654 $q\lambda^2$ für $x = 0\cdot458\,l_1$,
" " II. Feld. max (+ $\mathfrak{M}$) = 0·09767 $q\lambda^2$ für $x = 0\cdot5\,l$.

Träger mit vier Feldern.

$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1 : 1 : 1.$

$\frac{x}{l}$	Momente		
	Einfluss von g	Einfluss von q	
		max (— 𝔐)	max (+ 𝔐)
I. Feld.		—	+
0	0	0	0
0·1	+ 0·03429	0·00536	0·03964
0·2	+ 0·05857	0·01071	0·06929
0·3	+ 0·07286	0·01607	0·08893
0·4	+ 0·07714	0·02143	0·09857
0·5	+ 0·07143	0·02679	0·09822
0·6	+ 0·05572	0·03214	0·08786
0·7	+ 0·03000 $\cdot gl^2$	0·03750 $\cdot ql^2$	0·06750 $\cdot ql^2$
0·7857	0	0·04209	0·04209
0·7887	— 0·00117	0·04225	0·04108
0·8	— 0·00571	0·04309	0·03738
0·85	— 0·02732	0·05216	0·02484
0·9	— 0·05143	0·06772	0·01629
0·95	— 0·07803	0·09197	0·01393
1	— 0·10714	0·12054	0·01340
II. Feld.		—	+
0	— 0·10714	0·12054	0·01340
0·05	— 0·08160	0·09323	0·01163
0·1	— 0·05857	0·07212	0·01455
0·15	— 0·03803	0·06340	0·02537
0·2	— 0·02000	0·05000	0·03000
0·2661	0	0·04882	0·04882
0·3	+ 0·00857	0·04821	0·05678
0·4	+ 0·02714	0·04643	0·07357
0·5	+ 0·03572 $\cdot gl^2$	0·04464 $\cdot ql^2$	0·08036 $\cdot ql^2$
0·6	+ 0·03429	0·04286	0·07715
0·7	+ 0·02286	0·04107	0·06393
0·7895	+ 0·00416	0·03947	0·04363
0·8	+ 0·00143	0·04027	0·04170
0·8053	0	0·04092	0·04092
0·85	— 0·01303	0·04754	0·03451
0·9	— 0·03000	0·06105	0·03105
0·95	— 0·04947	0·08120	0·03173
1	— 0·07143	0·10714	0·03572

Absolutes positives Maximum:

Eigengewicht: I. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0771 gl^2 für $x = 0{\cdot}393\ l_1$,
" II. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0363 gl^2 für $x = 0{\cdot}536\ l$.
Mobile Last: I. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0997 ql^2 für $x = 0{\cdot}446\ l_1$,
" " II. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0805 ql^2 für $x = 0{\cdot}512\ l$.

$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}1 : 1{\cdot}1 : 1. \qquad 4\lambda = 2\,(l_1 + l).$

$l_1 = \frac{20}{21}\lambda = 0{\cdot}9524\,\lambda,\; l = \frac{22}{21}\lambda = 1{\cdot}0472\,\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Momente: Einfluss von g		Momente: Einfluss von q: max $(-\mathfrak{M})$		Momente: Einfluss von q: max $(+\mathfrak{M})$	
I. Feld.			—		+	
0	0		0		0	
0·1	+ 0·03047		0·00607		0·03654	
0·2	+ 0·05187		0·01213		0·06400	
0·3	+ 0·06421		0·01820		0·08241	
0·4	+ 0·06745		0·02427		0·09172	
0·5	+ 0·06164		0·03034		0·09198	
0·6	+ 0·04676		0·03640		0·08316	
0·7	+ 0·02281	$.g\lambda^2$	0·04247	$.\,q\lambda^2$	0·06428	$.\,q\lambda^2$
0·7118	0		0·04683		0·04683	
0·7962	— 0·00883		0·04830		0·03947	
0·8	— 0·01022		0·04858		0·03836	
0·85	— 0·03013		0·05650		0·02637	
0·9	— 0·05230		0·07161		0·01931	
0·95	— 0·07675		0·09278		0·01603	
1	— **0·10347**		**0·11872**		0·01525	
II. Feld.						
0	— **0·10347**		**0·11872**		0·01525	
0·05	— 0·07651		0·08988		0·01337	
0·1	— 0·05229		0·06587		0·01358	
0·15	— 0·03081		0·05875		0·02794	
0·2	— 0·01206		0·04402		0·03196	
0·2075	— 0·00947		0·04278		0·03331	
0·2369	0		0·04278		0·04278	
0·3	+ 0·01718		0·04278		0·05996	
0·4	+ 0·03544		0·04277		0·07821	
0·5	+ 0·04274	$.g\lambda^2$	0·04276	$.\,q\lambda^2$	0·08550	$.\,q\lambda^2$
0·6	+ 0·03905		0·04276		0·08181	
0·7	+ 0·02439		0·04275		0·06714	
0·7889	+ 0·00213		0·04274		0·04487	
0·7959	0		0·04317		0·04317	
0·8	— 0·00124		0·04365		0·04241	
0·85	— 0·01819		0·05139		0·03320	
0·9	— 0·03786		0·06622		0·02836	
0.95	— 0·06028		0·07006		0·00978	
1	— **0·08544**		**0·11651**		0·03107	

Absolutes positives Maximum:

Eigengewicht: I. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}0672\,g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}385\,l$,

„ II. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}0424\,g\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}517\,l$.

Mobile Last: I. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}0925\,q\lambda^2$ für $x = 0{\cdot}453\,l$,

„ „ II. Feld. max $(+\mathfrak{M}) = 0{\cdot}0852\,q\lambda^6$ für $x = 0{\cdot}517\,l$.

$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}2 : 1{\cdot}2 : 1. \qquad 4\lambda = 2\,(l_1 + l).$
$l_1 = \frac{10}{11}\lambda = 0{\cdot}9091\,\lambda,\ l = \frac{12}{11}\lambda = 1{\cdot}0909\,\lambda.$

$\frac{x}{l_1}$ $\frac{x}{l}$	Momente		
	Einfluss von g	Einfluss von q	
		max (— 𝔐)	max (+ 𝔐)
I. Feld.		—	+
0	0	0	0
0·1	+ 0·02706	0·00678	0·03383
0·2	+ 0·04585	0·01356	0·05940
0·3	+ 0·05637	0·02033	0·07671
0·4	+ 0·05863	0·02711	0·08574
0·5	+ 0·05263	0·03389	0·08652
0·6	+ 0·03836	0·04067	0·07903
0·7	+ 0·01583 $\cdot g\lambda^2$	0·04745 $\cdot q\lambda^2$	0·06328 $\cdot q\lambda_2$
0·7547	0	0·05114	0·05114
0·8	— 0·01497	0·05422	0·03926
0·80307	— 0·01604	0·05443	0·03839
0·85	— 0·03346	0·06100	0·02754
0·9	— 0·05403	0·07364	0·01961
0·95	— 0·07666	0·09408	0·01742
1	— 0·10135	0·11844	0·01709
II. Feld.			
0	— 0·10135	0·11844	0·01709
0·05	— 0·07292	0·08761	0·01469
0·1	— 0·04747	0·06355	0·01608
0·15	— 0·02499	0·05547	0·03048
0·2	— 0·00548	0·03809	0·03260
0·2143	— 0·00047	0·03689	0·03642
0·2157	0	0·03698	0·03698
0·3	+ 0·02459	0·03822	0·06281
0·4	+ 0·04277	0·03976	0·08253
0·5	+ 0·04905 $\cdot g\lambda^2$	0·04131 $\cdot q\lambda^2$	0·09036 $\cdot q\lambda^2$
0·6	+ 0·04343	0·04285	0·08628
0·7	+ 0·02590	0·04440	0·07030
0·7885	+ 0·00046	0·04577	0·04623
0·7898	0	0·04590	0·04590
0·8	— 0·00352	0·04680	0·04328
0·85	— 0·02270	0·05512	0·03242
0·9	— 0·05485	0·07109	0·02624
0·95	— 0·06998	0·09463	0·02465
1	— 0·09809	0·12527	0·02718

Absolutes positives Maximum:

Eigengewicht: I. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0590 $g\lambda^2$ für x = 0·377 l_1,
„ II. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0491 $g\lambda^2$ für x = 0·501 l.
Mobile Last: I. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0872 $q\lambda^2$ für x = 0·401 l_1,
„ „ II. Feld. max (+ 𝔐) = 0·0895 $q\lambda^2$ für x = 0·514 l.

$$l_1 : l : l : l_1 = 1 : 1{\cdot}3 : 1{\cdot}3 : 1$$
$$4\lambda = 2\,(l_1 + l)$$
$$l_1 = \tfrac{20}{23}\lambda = 0{\cdot}8696\,\lambda,\; l = \tfrac{26}{23}\lambda = 1{\cdot}1304\,\lambda.$$

$\frac{x}{l_1}$ / $\frac{x}{l}$	Momente					
	Einfluss von g		Einfluss von q			
			max (— $\mathfrak{M}$)		max (+ $\mathfrak{M}$)	
I. Feld.			—		+	
0	0	$.g\lambda^2$	0	$.q\lambda^2$	0	$.q\lambda^2$
0·1	+ 0·02398		0·00748		0·03146	
0·2	+ 0·04041		0·01496		0·05537	
0·3	+ 0·04927		0·02344		0·07171	
0·4	+ 0·05057		0·02992		0·09557	
0·5	+ 0·04430		0·03741		0·08171	
0·6	+ 0·03048		0·04489		0·07537	
0·7	+ 0·00909		0·05237		0·06146	
0·7344	0		0·05493		0·05493	
0·8	— 0·00985		0·05985		0·04986	
0·8095	— 0·02301		0·06056		0·03755	
0·85	— 0·03716		0·06595		0·92979	
0·9	— 0·05636		0·07835		0·02199	
0·95	— 0·07745		0·00550		0·01905	
1	— 0·10043		0·11928		0·01885	
II. Feld.						
0	— 0·10043	$.g\lambda^2$	0·11928	$.q\lambda^2$	0·01885	$.q\lambda^2$
0·05	— 0·07053		0·08680		0·01627	
0·1	— 0·04384		0·06122		0·01738	
0·15	— 0·02033		0·05338		0·03305	
0·2	0		0·03529		0·03529	
0·2203	+ 0.00732		0·03204		0·03936	
0·3	+ 0·03101		0·03437		0·06538	
0·4	+ 0·04937		0·03728		0·08655	
0·5	+ 0·05475		0·04019		0·09494	
0·6	+ 0·04474		0·04311		0·09055	
0·7	+ 0·02738		0·04603		0·07341	
0·7857	0		0·04844		0·04844	
0·7880	— 0·00084		0·04858		0·04774	
0·8	— 0·00548		0·04973		0·04423	
0·85	— 0·02671		0·05750		0·03079	
0·9	— 0·05111		0·07559		0·02448	
0·95	— 0·07871		0·10082		0·02211	
1	— 0·10952		0·13362		0·02410	