H. MÜLLER
UND
A. HUPE

DIE MATHEMATIK AUF DEN GYMNASIEN UND REALSCHULEN

B II OBERSTUFE

ABTEILUNG 1

17

Schaffen und Schauen

I
Von deutſcher
Art und Arbeit

Ein Führer ins Leben

II
Des Menſchen
Sein u. Werden

2 Bände, einzeln käuflich, in Leinwand gebunden **5 Mark**

Das Werk darf ſich beſonders denen als ein „Führer ins Leben“ anbieten, die vor der für ihr Leben entſcheidenden zugleich ſchönen und ſchweren Aufgabe der Wahl eines Lebensberufes ſtehen. Es möchte ſie ſo leiten helfen, daß die Erfüllung der Lebensarbeit zum Segen und zur Freude wird im Sinne von Fichtes Wort: „Der Menſch ſoll arbeiten, aber nicht wie ein Laſttier, das unter ſeiner Bürde in den Schlaf ſinkt und nach der notdürftigſten Erholung der erſchöpften Kraft zum Tragen derſelben Bürde wieder aufgeſtört wird. Er ſoll angſtlos, mit Luſt und Freudigkeit arbeiten und Zeit übrig behalten, ſeinen Geiſt und ſein Auge zum Himmel zu erheben, zu deſſen Anblick er gebildet iſt.“ Wer ſo ſich ſein Leben geſtalten möchte, wer vor kurzſichtig befangenem oder einſeitig vorſchnellem Urteil ſich bewahren und dazu einen Überblick gewinnen möchte über all die Kräfte, die das Leben unſeres Volkes und damit unſer eigenes in Staat, Wirtſchaft und Technik, in Wiſſenſchaft, Weltanſchauung und Kunſt bewegen, der wird ſich der Führung von „Schaffen und Schauen“ getroſt anvertrauen dürfen, über das ein kleines **Proſpektheft** mit Probeabſchnitten aus dem Buche (umſonſt erhältlich vom Verlag B. G. Teubner in Leipzig, Poſtſtr. 3) näher unterrichtet.

Aus dem Geleitwort.

Ein Geſchichtsforſcher unſerer Zeit hat kürzlich ausgeſprochen, daß das einzelne Menſchenleben wohl „als nichts denn ein kleiner Punkt erſcheinen könne, ein Schnittpunkt, in dem unzählige Fäden ſich kreuzend zuſammenlaufen, die dem Punkt ſeine Geſtalt, ſeine Bedeutung geben“. Sich all dieſer Fäden bewußt zu werden, die die Stelle, an der er ſteht, mit der Umwelt verbinden und ſeine Lage in ihr bedingen, muß die Aufgabe eines jeden Menſchen ſein. Dazu will das Buch helfen. Darum ſpricht es einmal „Von deutſcher Art und Arbeit“ und zum anderen von „Des Menſchen Sein und Werden“. Wie unſer deutſches Volk und mit ihm jeder einzelne von der Geſtaltung unſeres Landes abhängig iſt, wie die beſondere Anlage unſeres Volkes ſich auswirkt, wie unſer Deutſches Reich geworden und welches heute ſeine Stellung unter den Völkern iſt, das wird oder ſollte doch der ins Leben Hinaustretende ſich fragen. Und da er in der oder jener Form am Wirtſchaftsleben teilnehmen muß, ſo wird er weiter über die Grundlagen unſerer Volkswirtſch [illegible] ihre heutige Geſtaltung und über die Ent [illegible] ten für ſie maßgebenden Betätigungsa [illegible] ende Macht des Staates verſtehen lernen [illegible] ründung und nach den Bedingungen ihrer [illegible] ebieten, die er ſeit alters und unumſtritten [illegible] Wohl und Wehe der einzelnen

Müller, Mathematiſches Unterrichtswerk. 80 : 809.

berühren, um ſo mehr den Widerſtreit der Meinungen hervorrufen. Er wird aber auch nach einer Einführung in die Beſtrebungen, mit denen der Staatsbürger ſeinerſeits an der Ausgeſtaltung des nationalen Lebens teilnehmen will und ſoll, verlangen. Endlich aber wird er ſelbſt nach Maßgabe ſeiner Neigungen und ſeiner Kräfte an einer Stelle Hand anlegen wollen an den großen Bau der deutſchen Arbeit, wird einen Beruf ſich wählen wollen — und da ſoll ihm wieder das Buch nicht ſowohl deſſen äußere Seiten vorführen, als verſuchen, ihn in ſein inneres Weſen einen Einblick tun zu laſſen, um ſeine Wahl ſo zu lenken, daß er in ſeiner Lebensarbeit innerliche Befriedigung finden kann. Doch wir ſind nicht nur Deutſche, wir ſtehen zugleich in der großen Entwicklungsreihe, die die Menſchheit, von Jahrtauſenden her Glied an Glied reihend, in unbeſtimmte Zeiten weiterführend zu einer innerlichen Einheit verbindet. Darum verlangen wir zu wiſſen, welches die Stellung des Menſchen in der Natur ſei, und wie unſer eigenes leibliches Weſen beſchaffen, aber auch nach welchen Geſetzen das, was uns erſt zu Menſchen erhebt, unſer Geiſtesleben, ſich vollzieht. Wir ſollen uns aber weiter auch bewußt ſein, daß wir nicht nur ein Glied der großen Menſchheit ſind, ſondern daß wir insbeſondere der Kultureinheit zugehören, zu deren Bau die Griechen einſt in wunderbarer Genialität den Grund gelegt und zu dem ununterbrochen bis zum heutigen Tage die Völker Stein auf Stein gefügt. Wir ſollen wiſſen, auch wenn wir nicht ſelbſttätig an ihrem Ausbau teilnehmen, was des Menſchen Geiſt in Natur und Menſchenleben erforſcht hat und was er noch zu erforſchen hoffen darf. Wir wollen all die Einzelergebniſſe der Wiſſenſchaft zuſammenknüpfen zu einem umfaſſenden Weltbild, wie es uns die Philoſophie entwirft. Aber nicht nur mit dem Verſtande wollen wir unſere Umwelt erfaſſen, ſondern auch mit unſerem Gefühl ſie umfangen. Wir wollen durch die Religion uns den letzten Sinn des Daſeins deuten laſſen, und wir wollen an all den Schöpfungen der Kunſt teilnehmen, mit denen von alters bis zum heutigen Tage die Menſchheit verſucht hat, in Natur und Leben nachſchaffend einzudringen. Und wenn wir ſo alle Gebiete des menſchlichen Lebens durchwandert, dann legen wir uns mit doppeltem Ernſt die Frage vor: was bin ich, was kann und was ſoll ich ſelbſt in dieſer Welt tun und leiſten? — ſuchen wir Zielpunkte für unſere Lebensführung zu gewinnen.

Mitarbeiter:

R. Bürkner · H. Dade · R. Deutſch · A. Dominicus · K. Dove · E. Fuchs
P. Klopfer · E. Koerber · O. Lyon E. Maier · G. Maier · C. v. Maltzahn
†A. v. Reinhardt · F. A. Schmidt · O. Schnabel G. Steinhauſen · E. Teichmann
· A. Thimm · K. Vorländer · A. Witting · G. Wolff Th. Zielinski

Mit 8 allegoriſchen Zeichnungen von Alois Kolb

Inhaltsüberſicht.

I. Band. Das deutſche Land. Das deutſche Volk. Wie das Deutſche Reich geworden. Das Deutſche Reich im Zeitalter der Weltmächte. — Die Grundlagen der Volkswirtſchaft. Die deutſche Volkswirtſchaft der Gegenwart. Land- und Forſtwirtſchaft. Der Bergbau. Die Induſtrie. Die Technik. Das Kunſtgewerbe und die Architektur. Der Handel. Das Verkehrsweſen. — Der Staat. Die Wehrmacht des Staates. Die äußere Vertretung. Das Recht. Das Bildungsweſen. Sonſtige Verwaltungsaufgaben des modernen Staates. Organiſation der Staats- und Gemeindeverwaltung. Wirtſchaftspolitiſche Fragen (Steuerpolitik. Handelspolitik. Kolonialpolitik. Die Boden- und Wohnungsfrage. Das Bevölkerungsproblem. Die Frauenarbeit. Sozialpolitik). Staatsbürgerliche Beſtrebungen (Politiſche Parteien. Wirtſchaftliche Vereine. Soziale Beſtrebungen. Bildungsbeſtrebungen. Frauenbewegung. Die Preſſe). — Die Vorbildung. Der Beruf. Die wichtigſten Berufe.

II. Band. Des Menſchen Herkunft und Stellung in der Natur. Des menſchlichen Körpers Bau und Leben. Des Menſchen Seele. Die Entwicklung der geiſtigen Kultur. — Die Wiſſenſchaft und ihre Pflege. Die mathematiſchen Wiſſenſchaften. Die Naturwiſſenſchaften. Die Geiſteswiſſenſchaften. — Die Philoſophie. Die Kunſt. Die Religion. — Das Leben. Der Beruf. Volk und Staat. Perſönliches Leben. Lebensgemeinſchaften. Der Wert des Lebens.

== Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin ==

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Davys Stahlſteinlampe. Aus Tidy, das Feuerzeug.

Das Feuerzeug. Von Ch. M. Tidy. Drei Vorträge vor jugendlichen Zuhörern. Nach dem engliſchen Original bearb. v. P. Pfannenſchmidt. Mit 40 Figuren. In Leinw. geb. ℳ 2.—

Das Büchlein beſchäftigt ſich mit einem der feſſelndſten Abſchnitte aus der Kulturgeſchichte der Menſchheit; an der Hand einfacher Verſuche geht es der Geſchichte der Feuer- und Lichterzeugung nach, die aufs engſte verknüpft iſt mit der Ausbreitung der menſchlichen Erkenntnis überhaupt. Durch den behaglichen Plauderton in der Darſtellungsweiſe erinnert es an Faradays „Naturgeſchichte einer Kerze". Einfachſte Verſuche oft führen zu bedeutſamen, weittragenden Schlüſſen, die wieder zu neuen Verſuchen Veranlaſſung geben; ſo gewähren dieſe Darbietungen einen lichtvollen Einblick in die Art und Weiſe naturwiſſenſchaftlicher Forſchung. Beſonders wird das Büchlein dadurch Spaß machen, daß der Leſer viele der beſchriebenen Experimente ſelbſt ausführen kann.

Chemiſches Experimentierbuch für Knaben. Von Prof. Dr. Karl Scheid. Zweite, verbeſſerte und vermehrte Auflage. Mit 79 Abbildungen. In Leinwand gebunden ℳ 3.20.

„Ein vortreffliches Buch, das uns lange gefehlt hat. . . . Der Verfaſſer iſt ein gründlicher Kenner der Chemie und beherrſcht zugleich vollkommen die methodiſche Behandlung des häufig ſo ſpröden Stoffes. So hat man denn überall in ſeinem Buche das wohltuende Gefühl, daß man ſich in ganz ſicheren Händen befindet. . . . Der Verfaſſer zeigt nun meiſterhaft, welche Tatſachen und Erlebniſſe uns dieſe ‚alltäglichen' Dinge erzählen können, wenn man ihre Sprache verſteht. Er lehrt keine Salonzauberkunſt, ſondern ernſte Wiſſenſchaft in heiterem Gewande. Der Knabe, welcher das Buch durchgearbeitet, hat nicht nur eine Menge chemiſcher Tatſachen und Naturgeſetze, er hat auch einen Einblick in die Quellen des Volkswohlſtandes und in das Sein und Werden der Naturkörper erhalten. Wir geſtehen, daß uns ſeit langer Zeit kein Buch in die Hand gekommen iſt, das ſeine Aufgabe in ſo geſchickter, gründlicher und feſſelnder Weiſe gelöſt hat. . . ." **(Zeitſchr. f. Lehrmittelweſen u. pädag. Literatur.)**

„. . . Sprache ſind die chemiſchen Reaktionen; Zuhörer iſt der Experimentierende, der ſie zum Reden zwingt. Und was können uns die ‚alltäglichen' Dinge erzählen. Sie berichten von geheimnisvollen Naturgeſetzen, welche der Wiſſende ſich gefügig zu machen verſteht; ſie erzählen von den Quellen des Volkswohlſtandes, von den Gewerben und Induſtrien mit ihren Freuden und Gefahren, vom Leben der Pflanzen, Tiere und Menſchen, vom Sein und Werden aller Naturkörper. Eine erſte Anleitung, dieſe Sprache zu verſtehen, ſoll das vorliegende Buch ſein; möge es ſich recht viele Freunde erwerben!" **(Frankfurter Zeitung.)**

Streifzüge durch Wald und Flur. Von Profeſſor B. Landsberg. Eine Anleitung zur Beobachtung der heimiſchen Natur in Monatsbildern. Für Haus und Schule bearbeitet. 4. Auflage. Mit 88 Illuſtrationen nach Originalzeichnungen von Frau H. Landsberg. In Leinw. geb. ℳ 5.—

Wollen wir rechte Freude an der Mutter Natur haben, ſo müſſen wir ſie zu verſtehen ſuchen, eindringen und uns ſättigen an der Weisheit, die das All erfüllt und leitet. Dazu gibt uns jeder Ort Gelegenheit.

Und ſeht! Leben will ich euch finden lehren draußen in Wald und Flur. Wir wollen hier nicht Beſchreibungen von Tieren und Pflanzen liefern. Nein! Leben laßt uns ſuchen. Ob es nun frei um uns her ſchwirrt und ſingt, ſich ſcheu in allerlei Schlupfwinkeln verbirgt, im Boden zu unſeren Füßen ſich regt und durch unſere Tritte „vernichtet und begraben wird", oder ob es endlich, unſern Augen verborgen, ſich nur dem Verſtande offenbart.

So nehmt denn, ihr Knaben und Jünglinge, Mädchen und Jungfrauen, dies Buch! Benutzt es nicht zur flüchtigen Lektüre! Nein, geht hinaus und prüfet nach! Erſt dann, wenn ihr gelernt habt, in dem Buche der Natur zu leſen, wenn ſich euch Fragen aufdrängen, den hier behandelten ähnlich und doch nicht beantwortet, wenn ihr überzeugt ſeid, wieviel ihr noch lernen könnt — erſt dann hat mein Büchlein ſeine Arbeit an euch getan.

Zu euren Forſchungsreiſen bedürft ihr keiner großen Ausrüſtung. Ein Inſektenkäſcher von dünnem Stoffe, einer von derberem zum Fiſchen, ein kräftiger, kleiner Spaten und eine Lupe genügen. Dazu ein Sammelgefäß mit klaren, durchſichtigen Glaswänden zum genaueren Betrachten einzelner Funde und eine Botaniſiertrommel.

Prof. H. Müllers Mathematiſches Unterrichtswerk.

Die Mathematik
auf den
Gymnaſien und Realſchulen.

Für den Unterricht dargeſtellt von

Profeſſor **Heinrich Müller,**
Oberlehrer am Königl. Kaiſerin Auguſta-Gymnaſium zu Charlottenburg.

Ausgabe **B:**
Für reale Anſtalten und Reformſchulen,
unter Mitwirkung von

Profeſſor **Albert Hupe,**
weil. Oberlehrer an der Oberrealſchule zu Charlottenburg.

Zweiter Teil: Die Oberſtufe.
(Lehraufgabe der Klaſſen Ober-Sekunda und Prima.)

Abteilung I: Planimetrie, Algebra, Trigonometrie und Stereometrie.

Vierte Auflage.

Leipzig und Berlin,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1910.

Gebunden 3 Mark.

Aus dem Vorwort zur erſten Auflage.

Die „Oberſtufe“, der zweite Teil der **Mathematik auf den Gymnaſien und Realſchulen,** umfaßt die Lehraufgabe der drei oberen Klaſſen und iſt in der Verfolgung der Unterrichtsziele naturgemäß nur eine Fortſetzung der „Unterſtufe“. Der Verfaſſer iſt jedoch bemüht geweſen, das Buch äußerlich unabhängig von der „Unterſtufe“ zu geſtalten; er hat es vorgezogen, Hinweiſe auf die Nummern von Abſchnitten, Lehrſätzen uſw. des erſten Teiles zu vermeiden und dafür lieber mit einigen Worten die zu benutzenden Tatſachen anzugeben . . .

Eine Einteilung des Lehrſtoffes in die Lehraufgaben der einzelnen Klaſſen iſt nicht vorgenommen worden. Jedes Gebiet hat eine zuſammenhängende Darſtellung erhalten. Von inneren Gründen abgeſehen, die dieſe Einrichtung als geboten erſcheinen laſſen, leitete den Verfaſſer die Abſicht, den Schülern der oberſten Klaſſe die notwendigen Wiederholungen zu erleichtern, und das Beſtreben, ſelbſt den Anſchein zu vermeiden, als ob dem Lehrer durch das Buch der Gang des Unterrichts vorgeſchrieben werden ſollte. Wo noch in einem Raume die Unter- und Ober-Prima vereinigt ſind, wird der Lehrer ohnehin durch die Rückſicht auf die ungleich ausgebildeten Abteilungen gezwungen ſein, von einer Einteilung des Stoffes abzuweichen, die nur bei getrennten Primen durchführbar ſein könnte.

Die Form, in der die einzelnen Gebiete dargeſtellt ſind, läßt das Beſtreben, den Lernenden zur Mitarbeit an der Entwickelung des Lehrſtoffs heranzuziehen, äußerlich noch mehr hervortreten als in dem erſten Teile. Dadurch hofft der Verfaſſer, dem Schüler, der einige Unterrichtsſtunden verſäumt hat, die Ausfüllung der entſtandenen Lücken an der Hand des Buches ermöglicht zu haben.

Der Verfaſſer war auch bei dem zweiten Teile bemüht, für den Lehrſtoff die einfachſte Ausdrucksweiſe zu ſuchen.

Charlottenburg, im Juni 1899.

Aus dem Vorwort zur dritten Auflage.

Seit dem Erſcheinen der zweiten Auflage hat eine lebhafte Bewegung eingeſetzt, auf den höheren Lehranſtalten der Naturwiſſenſchaft einen größeren Raum zu gewinnen und den mathematiſchen Unterricht nach Methode und Umfang einer grundſätzlichen Umgeſtaltung zu unterziehen. Gleichzeitig mit dieſer Bewegung machte ſich das Beſtreben geltend, den Anregungen der Lehrpläne von 1901 zu folgen, auf die Pflege der Anſchauungstätigkeit ein erhöhtes Gewicht zu legen, den Begriff des funktionalen Zuſammenhangs auf allen Gebieten ſchärfer hervortreten zu laſſen und auf ein eingehendes Verſtändnis des Funktionsbegriffes hinzuarbeiten. Es liegt in der Natur der Sache, daß beide Bewegungen ſich vielfach berühren und auch auf die Geſtaltung der neueren Schulliteratur nicht ohne Einfluß bleiben konnten.

Auch auf die Bearbeitung der neuen Auflage dieſes Buches ſind die genannten Beſtrebungen nicht ganz ohne Einwirkung geblieben, wenn auch nur die zweite Bewegung für den Charakter der vorgenommenen Veränderungen unmittelbar mitbeſtimmend geweſen iſt. . . .

In zwei Anhängen iſt die Behandlung des Verſicherungsweſens durch die Verſicherungsgeſellſchaften und eine Einführung in die Infiniteſimalrechnung neu aufgenommen worden. Zu der Frage, ob und in welchem Umfang die beiden Gebiete dem Lehrſtoff anzugliedern ſeien, hat Verf. hier nicht Stellung nehmen wollen; es handelte ſich für ihn nur darum, einigen Freunden des Buches entgegenzukommen, welche für beſſere Schülergenerationen eine elementare Behandlung der beiden Gegenſtände gewünſcht hatten und mit dem Verf. der Meinung waren, daß deren Durchnahme durch die geltenden Lehrpläne nicht ausgeſchloſſen ſei. An eine organiſche Verbindung des Anhangs II mit dem algebraiſchen Abſchnitt durfte allerdings noch nicht gedacht werden; dies wird erſt geſchehen können, wenn die Einführung in die Infiniteſimalrechnung durch die amtlichen Lehrpläne dem Lehrſtoffe ausdrücklich hinzugefügt iſt.

Bei der Bearbeitung des Anhangs I, der mit den erforderlichen Tafeln in der Müller und Kutnewskyſchen Aufgabenſammlung, Teil B II, zuerſt veröffentlicht worden iſt, wurde Verf. in liebenswürdiger Weiſe durch den Direktor der Preußiſchen Rentenverſicherungsanſtalt Herrn Hartung und durch den beim Kaiſerlichen Aufſichtsamt als Sachverſtändigen zugelaſſenen Kollegen Herrn Prof. Nitſche unterſtützt, und daher kann die Darſtellung auf Zuverläſſigkeit Anſpruch machen. . . .

Charlottenburg, im Juli 1907.

Vorwort zur vierten Auflage.

Bei der Bearbeitung der vierten Auflage dieſes Teiles iſt ſein Aufbau ganz unverändert geblieben, und auch an der Darſtellung iſt bei den meiſten Gebieten keine weſentliche Umgeſtaltung eingetreten. Wo hier die beſſernde Hand eingegriffen hat, da geſchah es, um den Druck überſichtlicher zu geſtalten oder den Zuſammenhang der Tatſachen noch ſchärfer zum Ausdruck zu bringen, als es vorher der Fall war. In dieſer Abſicht iſt bei den harmoniſchen Strahlen die Reihenfolge einiger Sätze abgeändert und in der Gleichungslehre die Umſtellung einiger Nummern vorgenommen worden. Gelegentlich, wie z. B. in der Geometrie der Kugelfläche, wurden auch umſtändliche Beweiſe durch einfachere erſetzt. An einigen Stellen mußte ferner die Darſtellung abgeändert werden, weil ſie den geſchichtlichen Tatſachen nicht entſprochen hatte. Hierzu ſind die beiden Abſchnitte über die ſog. diophantiſchen Gleichungen und über die Beſtimmung der größten bzw. kleinſten Werte zu rechnen.

Der Lehre von der Kugel iſt auf Wunſch einiger Freunde des Buches eine Beſprechung der *Projektionen von Teilen einer Kugelfläche* auf eine Ebene, wie ſie zur Herſtellung von Erd- und Himmelskarten vorgenommen werden, hinzugefügt worden. Ebenſo hat der Anhang I durch die Hinzunahme einer von Herrn Prof. Nitſche-Charlottenburg freundlichſt zur Verfügung geſtellten, für das Verſtändnis des Verſicherungsweſens wichtigen Erörterung über das *Deckungskapital* (die Prämienreſerve) eine gewiß willkommene Bereicherung erfahren.

Der Anhang II über die Einführung der Infiniteſimalrechnung iſt ganz umgearbeitet worden. Bei der in der dritten Auflage gegebenen Darſtellung war in dem Beſtreben, den Gegenſtand möglichſt elementar zu geſtalten, zur Herleitung der Formeln und Sätze faſt ausſchließlich der binomiſche Lehrſatz verwandt und das Ergebnis verwandt worden, ohne daß in den einzelnen Fällen die Zuläſſigkeit dieſer Verwendung geprüft worden wäre. Dies hatte Veranlaſſung zu dem Einwand gegeben, daß die Darbietung ungründlich ſei, und da die Berechtigung eines derartigen Einwandes nicht beſtritten werden konnte, ſo mußte der Aufbau des Anhangs auf eine andere Grundlage geſtellt werden. Sollte jedoch der elementare Charakter der Darbietung nicht ganz verloren gehen, ſo mußten alle Funktionen, deren Stetigkeitsverhältniſſe nicht völlig klar vor Augen liegen, von der Betrachtung ganz ausgeſchieden bleiben. Bei der Herleitung der *Mac-Laurinſchen Reihe* iſt der Weg eingeſchlagen worden, den Mac-Laurin ſelbſt betreten hatte (ſ. Treatise of fluxions. Edinburgh 1742, Bd. I, S. 610) und vor ihm bereits Taylor bei der Herleitung ſeiner Reihe gegangen war (ſ. Methodus incrementorum. London 1715, S. 27). Wie

Verfaſſer ſich im Unterricht überzeugen konnte, bietet dieſer Weg dem Primaner keine bemerkenswerte Schwierigkeit, wenn man ſich auf Entwicklungen beſchränkt, bei denen eine Unterſuchung des Reſtgliedes überflüſſig iſt, während der neueren Herleitung ſelbſt von den begabteren Schülern nur wenig Verſtändnis entgegengebracht worden iſt.

Mit der Umarbeitung wurde eine Vermehrung der Beiſpiele verbunden, die von mehreren Freunden des Buches gewünſcht worden war.

Eine organiſche Verbindung des Anhangs II mit dem algebraiſchen Abſchnitt konnte auch diesmal noch nicht vorgenommen werden. Ganz abgeſehen davon, daß die Einführung in die Differentialrechnung heute noch nicht zu dem vorgeſchriebenen Lehrſtoff gehört, und daß die Anſichten über die Ausdehnung, die man dem Gebiete in der Schule geben kann, noch weit auseinander gehen, verbot es mit Rückſicht auf die zahlreichen Anſtalten, an denen das Buch gebraucht wird, daß Änderungen ausgeführt würden, welche die Möglichkeit, die vorhergehende Auflage neben der neuen zu benutzen, in Frage hätten ſtellen können. Bei der *Oberſtufe der Ausgabe für Gymnaſien*, deren neue Auflage die *Verſchmelzung der beiden Gebiete* enthält, fiel dies Bedenken der Tatſache gegenüber, daß in ihr die methodiſchen Arbeiten der letzten 6 Jahre noch keine Berückſichtigung hatten finden können, weniger ſchwer ins Gewicht.

Eine ſtufenweiſe Einführung in die Infiniteſimalrechnung müßte naturgemäß etwas breiter gehalten ſein, als ſie es in dem Anhang II zu ſein brauchte. Schon bei der Wiederholung der Lehre von den Potenzen wird man damit beginnen können. Hat man zunächſt für ein poſitives ganzzahliges n die Funktion $y = x^n$ graphiſch dargeſtellt, ſo kann man daran die Aufgabe ſchließen, *die Tangente eines Punktes der Kurve zu zeichnen*. Nun hat der Schüler in den Mittelklaſſen die Tangente eines Kreiſes als die Grenzlage einer Sekante gelernt; der Gedanke liegt alſo nahe, hier die gleiche Betrachtung anzuwenden und eine Sekante ſich um einen feſten Punkt der Kurve drehen zu laſſen, bis ſie in die Tangente des Punktes übergeht. Ferner iſt der Schüler mit den trigonometriſchen Funktionen bereits vertraut und kann einen Winkel zeichnen, von dem er die Größe einer ſeiner Winkelfunktionen kennt. Damit iſt aber der Weg zur Einführung des Differentialquotienten der gegebenen Funktion vorgezeichnet, und die Verallgemeinerung des Begriffs für alle Funktionen, deren geometriſches Bild eine ſtetig verlaufende Linie iſt, wird ſich leicht daran anſchließen. Verfolgt man jetzt die Entſtehung des Differentialquotienten der Funktion $y = x^n$ durch die Rechnung, indem man den Quotienten $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ entwickelt und dann h den Wert 0 annehmen läßt, ſo gelangt man zu dem Satze, daß der Differentialquotient von x^n gleich $n \cdot x^{n-1}$ iſt, wenn n eine poſitive ganze Zahl bezeichnet. Das gleiche Verfahren führt nun dazu, die Ableitung einer ganzen rationalen Funktion zu bilden und die Sätze über die Differentialquotienten einer Summe bzw. Differenz und eines Produktes aus ganzen rationalen Funktionen herzuleiten. Iſt die erſte Erweiterung des Potenzbegriffs durch Einführung negativer ganzzahliger Exponenten erfolgt, ſo leitet man den Differentialquotienten von $y = x^{-n}$ ab und beweiſt den Satz über die erſte Ableitung eines Quotienten aus ganzen rationalen Funktionen. Entſprechend geht man nach der Einführung gebrochener Exponenten vor; man zeigt, daß die Formel $d(x^n) = n \cdot x^{n-1} dx$ für jeden endlichen Wert von n gültig bleibt, und leitet dann noch den Differentialquotienten der Quadratwurzel aus einer rationalen Funktion ab. Es mag dahingeſtellt bleiben, ob es hier ſchon ratſam iſt, auf höhere Wurzelexponenten einzugehen.

Mit demſelben Rechte, mit dem man ausgedehnte Übungen im Rechnen mit Wurzeln vornehmen läßt, ohne daß die meiſten der gebräuchlichen Aufgaben eine unmittelbare praktiſche Verwendung finden, wird man Übungen im Differenzieren vornehmen laſſen dürfen, um für ſpäter gerüſtet zu ſein, wenn es ſich, wie bei den größten und kleinſten Werten, um Anwendungen handelt. Bei der Beſprechung der Grenzwerte wird man dann die Mac-Laurinſche und die Taylorſche Reihe ableiten, dabei ſich aber — der Aufgabe der Schule entſprechend — auf die Betrachtung von Funktionen beſchränken, für welche die Zuläſſigkeit der Reihenentwicklung von vornherein feſtſteht.

Sind die Additionstheoreme der Winkelfunktionen abgeleitet, ſo bietet die Herleitung der Differentialquotienten der Winkelfunktionen und auch der Kreisfunktionen keine Schwierigkeit mehr, vorausgeſetzt, daß man nicht verabſäumt hat, den Satz zu beweiſen, daß bei ſtetigen Funktionen der Quotient $\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}$ iſt. Da nach dem Beweiſe des binomiſchen Lehrſatzes für poſitive ganzzahlige Exponenten die Einführung der Zahl e und ihre Berechnung möglich iſt, ſo laſſen ſich die Differentialquotienten der Exponentialfunktionen und der logarithmiſchen Funktionen bilden. Mit dieſen aber iſt der Kreis der Funktionen geſchloſſen, die in der Schule behandelt werden.

Auf dem hier nur kurz ſkizzierten Wege gelangt man zur Bildung der Differentialquotienten aller Funktionen, die man dem Gebiete der elementaren Mathematik zuweiſen kann, ohne daß man genötigt geweſen wäre, den allgemeinen binomiſchen Lehrſatz zu benutzen. Man hat daher eine zuverläſſige Grundlage gewonnen, nicht nur um dieſen Satz zu beweiſen, ſondern auch, um die unendlichen Reihen zu entwickeln, deren Herleitung durch mühſame Grenzbetrachtungen auf ihn geſtützt werden muß, wenn man die Reihen von Taylor und Mac-Laurin nicht kennt.

Zur Einführung in die Integralrechnung bietet der gebräuchliche Lehrſtoff der Schule weniger Veranlaſſung; für die Fälle, in dem hier Integrale verwandt werden können, kennt man einfachere Löſungswege. Gleichwohl wird man nicht darauf verzichten mögen, um dem Schüler nicht ein Rüſtzeug vorzuenthalten, deſſen er bei ſeinen Studien vielfach bedürfen wird.

Verf. würde es mit Freuden begrüßen, wenn die hier vorgeſchlagene allmähliche Einführung in die Infiniteſimalrechnung von Freunden des Buches praktiſch erprobt würde, und bittet, ihm das Ergebnis der Verſuche gütigſt mitteilen zu wollen. Von dem Ausfall dieſer Verſuche möchte er es abhängen laſſen, ob in der nächſten Auflage des Buches die Verſchmelzung des Gebietes mit dem üblichen Lehrſtoff vorgenommen werden ſoll.

In Anhang III iſt ein Überblick der Geſchichte der Schulmathematik hinzugefügt worden. Die Darbietung ſchließt ſich eng an die Geſchichte der Elementar-Mathematik von J. Tropfke an (Leipzig, Veit & Co.). Für die entlegeneren Gebiete, die nicht berückſichtigt werden konnten, ſei hiermit auf dies Werk hingewieſen.

Verf. wiederholt auch diesmal ſeine Bitte um freundliche Mitteilung von Verbeſſerungsvorſchlägen und verſpricht, daß wie bisher jeder Vorſchlag herzlich willkommen geheißen und bei Neuauflagen tunlichſt berückſichtigt werden ſoll.

Charlottenburg, im März 1910.

Heinr. Müller.

Inhaltsüberſicht.

Abſchnitt I. **Abſchluß der Planimetrie.**

Abſchnitt IV. Trigonometrie.

Kapitel 1. Goniometrie.

Kapitel 2. Berechnungen beim Dreieck und Viereck.

Abſchnitt V. Zweiter Teil der Stereometrie.

Kapitel 1. Ebenen und Geraden.

Kapitel 2. Die körperliche Ecke.

Kapitel 3. Trigonometrie der dreiſeitigen Ecke.

Kapitel 4. Die regelmäßigen Vielflache (Polyeder).

Abſchnitt I.

Abſchluß der Planimetrie.

Kapitel 1.

Harmoniſche Punkte und harmoniſche Strahlen.

Nr. 1. Harmoniſche Punkte.

a) Erklärung. Eine Strecke heißt harmoniſch geteilt, wenn ſie innen und außen nach demſelben Verhältnis geteilt iſt. Die beiden Endpunkte der Strecke ſowie die beiden Teilungspunkte heißen einander zugeordnet.

Zur Herſtellung von 4 harmoniſchen Punkten beſchreibt man um A mit der Strecke p und um B mit der Strecke q Kreiſe und verbindet die Endpunkte paralleler Radien von gleicher, bzw. entgegengeſetzter Richtung. Die Lage der Radien bleibt ohne Einfluß auf die Lage der Teilungspunkte.

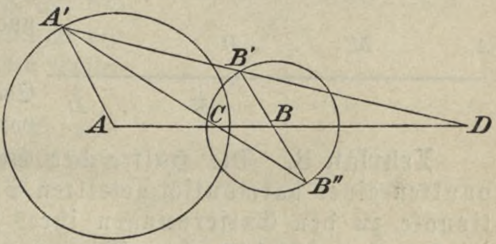


Fig. 1.

Folgerung 1. Durch 3 auf einer Geraden liegende Punkte iſt der 4^{te}, einem von dieſen zugeordnete harmoniſche Punkt beſtimmt.

Folgerung 2. Halbiert ein Punkt eine Strecke, ſo liegt der ihm zugeordnete harmoniſche Punkt im Unendlichen.

b) Teilen C und D die Strecke AB harmoniſch, ſo iſt

$$AC : BC = AD : BD$$

und nach Vertauſchung der Innenglieder auch

$$CA : DA = CB : DB,$$ d. h.

Lehrſatz 1. Teilen die Punkte C und D die Strecke AB harmoniſch, ſo wird auch die Strecke CD durch A und B harmoniſch geteilt.

c) Erſetzt man AC durch DA − DC und BC durch DC − DB, ſo erhält man:

$$(DA - DC)\,DB = (DC - DB)\,DA$$

oder

$$2DA \cdot DB = DA \cdot DC + DB \cdot DC,$$

und hieraus nach Diviſion durch $DA \cdot DB \cdot DC$:

$$\frac{1}{DC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{DA} + \frac{1}{DB}\right).$$

Entſprechend ergibt ſich:

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right).$$

Wird nun eine Größe als das harmoniſche Mittel zweier anderen bezeichnet, wenn ihr reziproker Wert das arithmetiſche Mittel aus den reziproken Werten der beiden anderen iſt, ſo folgt hieraus:

Lehrſatz 2. Eine harmoniſch geteilte Strecke iſt das harmoniſche Mittel zu den Entfernungen ihrer Teilungspunkte von ihrem Anfangspunkte.

d) Iſt AC : AD = 2 : 3, ſo ergibt ſich: AB : AD = 4 : 5. Sind daher AB, AC und AD die Längen gleichgeſpannter Saiten, und liefert AD den Grundton, ſo liefern AB die große Terz und AC die Quinte, alle drei zuſammen alſo den harmoniſchen Grundakkord. Daraus rechtfertigt ſich die Bezeichnung harmoniſche Teilung.

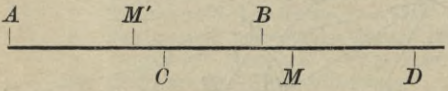
e) Drückt man ferner die Strecken durch Benutzung des Mittelpunktes M von CD aus, ſo folgt:

$$(MA - MC)\,(MB + MC) = (MC - MB)\,(MA + MC),$$

und hieraus:

$$MC^2 = MA \cdot MB.$$

Ebenſo ergibt ſich für die Mitte M′ von AB: $M'A^2 = M'C \cdot M'D$, d. h.:



Lehrſatz 3. Die Hälfte der Strecke zwiſchen den Teilungspunkten einer harmoniſch geteilten Strecke iſt die mittlere Proportionale zu den Entfernungen ihres Mittelpunktes von den Endpunkten der geteilten Strecke.

Nr. 2. Harmoniſche Strahlen.

a) Verbindet man 4 harmoniſche Punkte A, B, C und D mit einem Punkte S außerhalb ihrer Geraden, ſo entſtehen 4 harmoniſche Strahlen oder ein harmoniſches Strahlenbüſchel. Entſprechend wie bei den Punkten heißen von den 4 Strahlen je 2 einander zugeordnet, wenn ſie durch einen der beiden anderen getrennt ſind.

Überträgt man das Verhältnis AD : BD auf den Strahl SD, indem man durch B die Parallele EF zu SA zieht, ſo wird damit zugleich das Verhältnis AC : BC durch SA : BF erſetzbar. Man hat dann:

$$AC : BC = SA : BF$$

und

$$AD : BD = SA : BE,$$

und ſomit **BE = BF.** Da jede Parallele zu EF in demſelben Verhältnis geteilt wird, ſo folgt:

Lehrſatz 4. Zieht man zu einem von 4 harmoniſchen Strahlen eine Parallele, ſo teilt der zugeordnete Strahl den zwiſchen den beiden anderen liegenden Abſchnitt der Parallelen in zwei gleiche Teile.

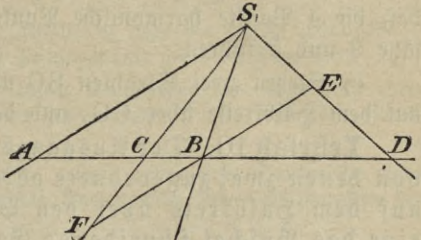


Fig. 2.

Durch Benutzung dieſes Satzes läßt ſich leicht beweiſen:

Lehrſatz 5. Ein harmoniſches Strahlenbüſchel wird durch eine beliebige Gerade in 4 harmoniſchen Punkten geſchnitten.

Der Lehrſatz 4 läßt ſich umkehren und die Umkehrung lautet:

Lehrſatz 6. Wird eine Parallele zu einem von 4 Strahlen eines Strahlenbüſchels durch den nicht-benachbarten Strahl ſo geſchnitten, daß ihr Abſchnitt zwiſchen den beiden anderen Strahlen halbiert iſt, ſo ſind die 4 Strahlen harmoniſche Strahlen.

b) In Lehrſ. 4 gelangt das **charakteriſtiſche Merkmal** eines harmoniſchen Strahlenbüſchels zum Ausdruck. Seine Umkehrung (Lehrſ. 6) wird daher die Grundlage für die Herleitung weiterer Eigenſchaften harmoniſcher Strahlenbüſchel bilden.

1) Wird zunächſt angenommen, daß die (dem Strahle SD parallele) Gerade AB auf SC ſenkrecht ſteht, daß alſo SC das Mittellot der Dreiecksſeite AB iſt, ſo halbiert SC den Winkel ASB. Hieraus folgt:

Lehrſatz 7. Stehen bei 4 harmoniſchen Strahlen zwei zugeordnete aufeinander ſenkrecht, ſo halbieren ſie die Winkel der beiden anderen.

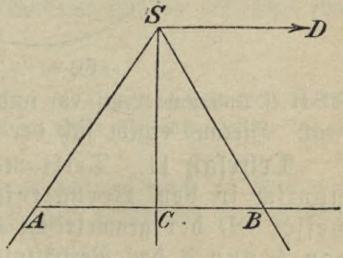


Fig. 3.

2) Wird umgekehrt angenommen, daß SC den Winkel ASB halbiert, ſo ſteht SC auf AB ſenkrecht, und da AB parallel SD iſt, ſo ſteht SC auch auf SD ſenkrecht. Somit folgt:

Lehrſatz 8. Wird bei 4 harmoniſchen Strahlen der Winkel zweier zugeordneten Strahlen durch einen der beiden anderen halbiert, ſo ſtehen dieſe aufeinander ſenkrecht.

3) Jeder der beiden Lehrſätze 7 und 8 kann umgekehrt werden. Iſt SC die Halbierungslinie des Winkels ASB, und ſteht SD auf SC ſenkrecht, ſo ſteht auch die Parallele AB zu SD auf SC ſenkrecht. Es ergibt ſich dann leicht, daß die Strecke AB in C halbiert iſt. Nach Lehrſ. 6 hat man daher den Satz:

Lehrſatz 9. Stehen 2 von 4 Strahlen eines Strahlenbüſchels aufeinander ſenkrecht und halbieren ſie den Winkel der beiden anderen, ſo ſind die 4 Strahlen harmoniſche Strahlen.

In zahlreichen Fällen, in denen über das Verhältnis der durch 4 Punkte einer Geraden begrenzten Strecken nichts bekannt iſt, läßt ſich der Nachweis, daß die 4 Punkte harmoniſche Punkte ſind, nur durch Benutzung der Lehrſätze 9 und 5 führen.

c) Stehen zwei Strahlen SC und SD aufeinander ſenkrecht, ſo liegt S auf dem Halbkreiſe über CD, und daraus folgt:

Lehrſatz 10. Der Ausgangspunkt von 4 harmoniſchen Strahlen, von denen zwei zugeordnete aufeinander ſenkrecht ſtehen, liegt ſtets auf dem Halbkreis über den Punkten, in welchen dieſe Strahlen eine das Büſchel ſchneidende Gerade treffen.

Nun ſtehen die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und ſeines Nebenwinkels aufeinander ſenkrecht und teilen die gegenüberliegende Seite harmoniſch, weil ſie dieſe innen und außen nach dem Verhältnis der beiden den Winkel einſchließenden Seiten teilen (ſ. Unterſtufe, Lehrſ. 72); der Scheitel des Winkels liegt alſo auf dem Kreiſe, der die Strecke zwiſchen den beiden Teilungspunkten zum Durchmeſſer hat. Ferner weiß man, daß ein Punkt, deſſen Entfernungen von den Endpunkten der Seite AB ſich wie die Seiten S A und SB verhalten, auf der Halbierungslinie des Winkels ASB (ſ. Unterſtufe, Lehrſ. 73) und ſomit (ſ. Lehrſ. 8) auf dem Halbkreis über CD liegt. Hieraus ergibt ſich der Satz:

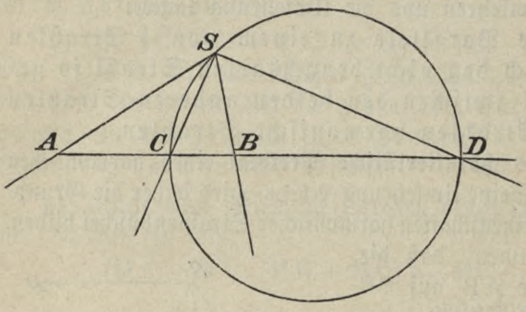


Fig. 4.

Lehrſatz 11. Teilt man eine Strecke AB durch C und D harmoniſch in dem Verhältnis p:q, ſo iſt der Kreis mit dem Durchmeſſer CD der **geometriſche Ort** eines Punktes, deſſen Entfernungen von A und B das Verhältnis p : q beſitzen. **(Apolloniſcher Kreis.)**

Nr. 3. Übungen zu Nr. 1 und 2.

a) Die Sätze zu beweiſen:

Satz 1. Die Halbierungslinien eines Dreieckswinkels und ſeines Nebenwinkels teilen die gegenüberliegende Seite harmoniſch.

Satz 2. Jede Winkelhalbierungslinie eines Dreiecks wird durch die Mittelpunkte des inneren und des zugehörigen äußeren Berührungskreiſes harmoniſch geteilt.

Satz 3. Der Fußpunkt der zugehörigen Höhe, der Endpunkt der Winkelhalbierungslinie und die Berührungspunkte des inneren und des zugehörigen äußeren Berührungskreiſes bilden auf jeder Dreiecksſeite 4 harmoniſche Punkte.

Satz 4. Steht in einem Kreiſe eine Sehne ſenkrecht auf einem Durchmeſſer, ſo teilen die Verbindungslinien ihrer Endpunkte mit einem beliebigen Punkte des Kreiſes den Durchmeſſer harmoniſch.

Satz 5. Steht in einem Kreiſe eine Sehne ſenkrecht auf einem Durchmeſſer, ſo teilen die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks über dem Durchmeſſer die Sehne harmoniſch.

Satz 6. Der Ausgangspunkt zweier Tangenten und ihre Berührungsſehne teilen den zugehörigen Durchmeſſer harmoniſch.

Satz 7. Iſt ein Durchmeſſer harmoniſch geteilt, ſo liegt der innere Teilungspunkt auf der Berührungsſehne der durch den äußeren Teilungspunkt gehenden Tangenten.

Satz 8. Steht eine Sehne ſenkrecht auf einem Durchmeſſer und wird einer ihrer Endpunkte mit dem ihrem Fußpunkte zugeordneten harmoniſchen Punkte verbunden, ſo iſt die Verbindungslinie eine Tangente.

Satz 9. Wird ein Kreis durch zwei Punkte gelegt, welche einen Durchmeſſer eines gegebenen Kreiſes harmoniſch teilen, ſo ſtehen die Radien nach den Schnittpunkten der beiden Kreiſe aufeinander ſenkrecht.

Anl. z. Bew. Es läßt ſich mit Benutzung des Sehnentangentenwinkels zeigen, daß der betr. Radius des erſten Kreiſes eine Tangente an den zweiten iſt.

Satz 10. Schneiden ſich zwei Kreiſe rechtwinklig, d. h. ſo, daß die Radien nach den Schnittpunkten aufeinander ſenkrecht ſtehen, ſo wird jeder Durchmeſſer des einen Kreiſes durch den anderen harmoniſch geteilt.

Anl. z. Bew. Vgl. die Anl. z. Bew. bei Satz 9.

b) Die Zeichnung auszuführen:

Aufg. 1. Einen Punkt zu beſtimmen, von dem aus

a) zwei aneinanderſtoßende Abſchnitte,
b) drei aneinanderſtoßende Abſchnitte

einer Geraden unter gleichen Winkeln geſehen werden.

Aufg. 2. Einen Punkt zu beſtimmen, deſſen Entfernungen von den Ecken eines gegebenen Dreiecks ſich verhalten wie

a) $1:1:2$. b) $1:2:3$. c) $p:q:r$.

Aufg. 3. Einen Kreis zu zeichnen, der zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt und deſſen Mittelpunkt von den Endpunkten der dritten Seite Abſtände beſitzt, die im Verhältnis $p:q$ $(3:4)$ ſtehen.

Aufg. 4. Auf einem Durchmeſſer eines Kreiſes liegen zwei durch den Mittelpunkt getrennte Punkte A und B. Es ſollen durch A und B zwei gleiche, ſich auf dem Kreiſe ſchneidende Sehnen gezogen werden.

Aufl. Der zu dem Schnittpunkt gehörige Durchmeſſer halbiert den Winkel der geſuchten Sehnen.

Aufg. 5. Einen Punkt zu beſtimmen, von dem aus zwei gegebene Kreiſe unter gleichen Winkeln geſehen werden.

Aufl. Die Herſtellung der Tangenten führt auf ähnliche Dreiecke und dann zu der Erkenntnis, daß die Mittelpunktslinie nach dem Verhältnis der Halbmeſſer harmoniſch zu teilen iſt.

Aufg. 6. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b:c=p:q$ und

a) α. b) h_a. c) m_a. d) w_α. e) $\sphericalangle a, m_a$.

Aufg. 7. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $h_b:h_c=p:q$ und

a) α. b) h_a. c) m_a. d) w_α.

Aufg. 8. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b:c=p:q$ und

a) $\sphericalangle h_a, m_a$. b) $\sphericalangle m_a, w_\alpha$. c) $b:w_\alpha$ oder $c:w_\alpha=r:s$.

Aufg. 9. Ein Dreieck zu zeichnen aus der Winkelhalbierungslinie w_α und den Abſchnitten u und v, in welche dieſe die gegenüberliegende Seite teilt.

Aufg. 10. Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite a und den Abſtänden r und s der Winkelhalbierungslinie w_α von den Ecken B und C. Welcher Einſchränkung unterliegen die Strecken r und s?

Aufg. 11. Ein Dreieck zu zeichnen aus $a:b = p:q$, m_a und $\sphericalangle b, m_a$.

Aufg. 12. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $m_b : m_c = p:q$ und $\sphericalangle m_b, m_c$.

Aufg. 13. Ein Dreieck zu zeichnen aus m_a, m_b und $a:b = p:q$.

Aufg. 14. Ein Dreieck zu zeichnen aus b, c und $p_{ba} : p_{ca} = r:s$.*)

Aufg. 15. Ein Dreieck zu zeichnen aus a, $b:c = p:q$ und $m_b : m_c = r:s$.

Aufl. Verlängert man a nach beiden Seiten hin um ſich ſelbſt, ſo erhält man die erforderlichen Beziehungen.

Aufg. 16. Ein Parallelogramm zu zeichnen aus

a) $a:b = p:q$, e und f.
b) a, b und $e:f = r:s$.
c) $a:b = p:q$, e und $\sphericalangle e, f$.
d) $a:b = p:q$, e und h_a.

Aufg. 17. Einen Rhombus zu zeichnen aus

a) a und $e:f = r:s$.
b) e und $a:f = r:s$.

Aufg. 18. Ein Trapez zu zeichnen aus a) den Grundlinien a und c, ihrem Abſtand h und dem Verhältnis der Diagonale AC (e) zu dem Schenkel BC (b).

b) $a - c$, h, e und $b:d$.
c) e, $\sphericalangle B$, $a:b$ und $c:d$.
d) e, $\sphericalangle A - \sphericalangle B = \delta$, h und $c:d$.
e) a, $e:b$ und ϱ (Tangenten-Trapez!).

Aufg. 19. Ein Sehnenviereck zu zeichnen aus

a) r, $a:b$, $\sphericalangle B$ und f (BD).
b) r, $a:b$, $\sphericalangle B$ und $c:d$.
c) r, $a \cdot b$, $\sphericalangle B$ und $c:d$.
d) r, $a^2 + b^2$, e und $c:d$.

Aufg. 20. Ein Tangentenviereck zu zeichnen aus

a) r, a, $\sphericalangle A + \sphericalangle B = \sigma$ und $d:f$.
b) r, $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$ und $b:e$.

Aufg. 21. Ein Viereck zu zeichnen aus

a) $a:b$ (AB : BC), $\sphericalangle B$, e (AC), f und $\sphericalangle e, f$.
b) a, c, $e:f$, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle C$.
c) $a:b$, $c:d$, e, $\sphericalangle B$ und $\sphericalangle D$.
d) $a:b$, $c:d$, e, f und $\sphericalangle b, e - \sphericalangle a, e = \delta$.
e) $a^2 + b^2$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle D$, e und $c:d$.

Nr. 4. Das vollſtändige Vierſeit.

Erklärung. Vier ſich gegenſeitig ſchneidende Geraden ſchneiden ſich in 6 Punkten und bilden ein **vollſtändiges Vierſeit,** deſſen Ecken die 6 Schnittpunkte ſind. Die Verbindungslinien der Ecken, welche nicht auf derſelben Geraden liegen, heißen Diagonalen des Vierſeits.

---

*) p_{ba} iſt die Projektion von b auf a.

Bei einem vollſtändigen Vierſeit, das zu einem Viereck ABCD gehört, ſei zu den Seiten AB und CD und der Diagonale EF der EF zugeordnete Strahl hergeſtellt und ſein Schnittpunkt mit der Diagonale AC durch G bezeichnet. Es ſind dann A, G, C und H 4 harmoniſche Punkte, und ſomit trifft der FE zugeordnete Strahl FJ des harmoniſchen Strahlenbüſchels FE, FB, FJ und FA den Strahl EG auf der Diagonale AC. Aber auch die Diagonale BD ſchneidet die beiden Strahlenbüſchel, und daher treffen ſich die FE zugeordneten Strahlen EG und FJ auch auf der Diagonale BD, d. h. G iſt der Schnittpunkt der beiden Diagonalen. Je zwei der Schnittpunkte G, H und K der drei Diagonalen teilen alſo die Diagonale, auf der ſie liegen, harmoniſch, und daraus folgt:

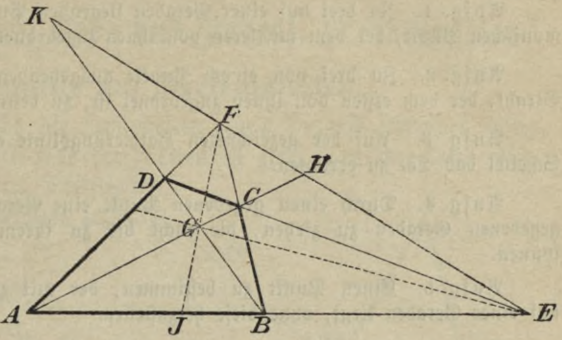


Fig. 5.

Lehrſatz 12. In einem vollſtändigen Vierſeit wird jede Diagonale durch die beiden anderen harmoniſch geteilt.

Zuſatz. Zwei Diagonalen und die Verbindungslinien ihres Schnittpunktes mit den Endpunkten der dritten teilen die 4 Seiten des Vierecks harmoniſch.

Bei einem Trapez iſt die dritte Diagonale den Grundlinien parallel und demnach werden dieſe durch die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Diagonalen und der Schenkel halbiert (Lehrſ. 4). Hieraus ergibt ſich:

Folgerung. Die Mitten der Grundlinien eines Trapezes bilden mit den Schnittpunkten ſeiner Diagonalen und Schenkel 4 harmoniſche Punkte.

Übungen.

a) Die Sätze zu beweiſen:

Satz 1. Jede Dreiecksſeite wird durch die zugehörige Höhe und die Verbindungslinie der Fußpunkte der beiden anderen Höhen harmoniſch geteilt.

Satz 2. Gehen von einem Punkte zwei Gruppen harmoniſcher Punkte aus, ſo ſchneiden ſich die Verbindungslinien der gleichnamigen Punkte in einem Punkte.

Satz 3. Gehen von einem Punkte zwei Gruppen harmoniſcher Punkte aus, ſo ſchneiden ſich die Verbindungslinien der zweiten mit den vierten und die Verbindungslinie der dritten Punkte in einem Punkte.

Satz 4. Haben zwei Gruppen harmoniſcher Strahlen einen gleichnamigen Strahl gemein, ſo ſchneiden ſich die übrigen gleichnamigen Strahlen auf einer Geraden.

b) Mit alleiniger Benutzung des Lineals die Zeichnung auszuführen:

Aufg. 1. Zu drei auf einer Geraden liegenden Punkten A, B und C den 4^{ten} harmoniſchen Punkt, der dem mittleren von ihnen zugeordnet iſt, zu beſtimmen.

Aufg. 2. Zu drei von einem Punkte ausgehenden Strahlen den 4^{ten} harmoniſchen Strahl, der dem erſten von ihnen zugeordnet iſt, zu beſtimmen.

Aufg. 3. Auf der gezeichneten Halbierungslinie eines gegebenen Winkels in deſſen Scheitel das Lot zu errichten.

Aufg. 4. Durch einen gegebenen Punkt eine Gerade nach dem Schnittpunkt zweier gegebenen Geraden zu ziehen, die nicht bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert werden können.

Aufg. 5. Einen Punkt zu beſtimmen, der mit zwei gegebenen Punkten A und B auf einer Geraden liegt, ohne dieſe herzuſtellen.

Aufg. 6. Den Schnittpunkt einer gegebenen Geraden mit der durch zwei gegebene Punkte A und B beſtimmten Geraden zu zeichnen, ohne die Gerade AB herzuſtellen.

Aufl. zu 1—6. Der Lehrſatz 12 kommt zur Verwendung.

c) Mit alleiniger Benutzung des Lineals die Zeichnung auszuführen:

Aufg. 7. Eine gegebene Strecke zu halbieren, welche auf einer von zwei gegebenen Parallelen liegt.

Aufg. 8. Durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Strecke, deren Mittelpunkt bekannt iſt, zu ziehen.

Aufg. 9. Durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu zwei gegebenen Parallelen zu ziehen.

Aufg. 10. Eine gegebene Strecke, welche auf einer von zwei gegebenen Parallelen liegt,

1. zu verdoppeln,
2. zu vervierfachen,
3. zu verdreifachen.

Aufg. 11. Eine durch zwei Gegenſeiten eines Parallelogramms begrenzte Strecke durch eine Gerade zu halbieren, welche durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht. (7!)

Aufg. 12. Durch den Schnittpunkt der Diagonalen eines Parallelogramms die Parallele zu einer gegebenen Geraden zu ziehen. (7 u. 8!)

Aufg. 13. Durch einen gegebenen Punkt die Parallele zu einer gegebenen Geraden, welche einen gegebenen Kreis mit dem bekannten Mittelpunkt M ſchneidet, zu ziehen. (7 u. 8!)

Aufg. 14. Zu einem gegebenen Durchmeſſer eines gegebenen Kreiſes mit bekanntem Mittelpunkt den ſenkrechten Durchmeſſer zu zeichnen. (8!)

Aufl. zu 7—14. Die Folgerung zu Lehrſ. 12 kommt zur Verwendung.

Kapitel 2.

Die Sätze von Menelaus, Ceva und Pascal. (Transverſalen.)

Nr. 5. Abſchnitte auf Dreiecksſeiten.

a) Eine Gerade DE, welche die drei Seiten eines Dreiecks ſchneidet, ohne durch eine Ecke zu gehen, teilt jede der Seiten in zwei Teilſtrecken. Um eine Beziehung zwiſchen dieſen Teilſtrecken zu erhalten, zieht man BG parallel zu AC.

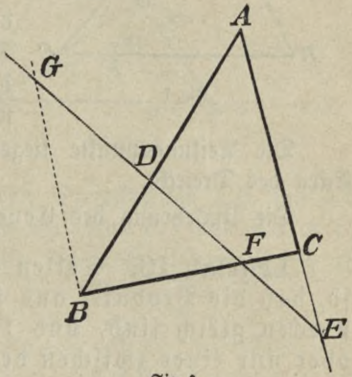


Fig. 6.

Es iſt dann

$$FB : FC = BG : EC,$$
$$DA : DB = EA : BG,$$

alſo

$$DA \cdot FB : DB \cdot FC = EA : EC.$$

Hieraus aber folgt:

$$DA \cdot FB \cdot EC = DB \cdot FC \cdot EA,$$ d. h.

Lehrſatz 13. (Satz des **Menelaus.**) Eine Gerade, welche die drei Seiten eines Dreiecks ſchneidet, teilt ſie (innen oder außen) ſo, daß die Produkte aus je drei nicht aneinander ſtoßenden Teilſtrecken*) gleich ſind.

Von den drei Teilungspunkten liegen entweder alle oder nur einer auf den Verlängerungen der Seiten.

Der Satz des Menelaus kann umgekehrt werden.

Lehrſatz 14. Sind die Seiten eines Dreiecks ſo geteilt, daß die Produkte aus je drei nicht aneinander ſtoßenden Teilſtrecken gleich ſind, und liegen die Teilungspunkte entweder alle oder nur einer auf den Verlängerungen der Seiten, ſo liegen die drei Punkte in einer Geraden.

Der Beweis iſt indirekt zu führen und auf den Satz zu ſtützen, daß eine Strecke nur durch einen Punkt innen oder außen nach einem gegebenen Verhältnis geteilt werden kann.

b) Wird die Teilung der Dreiecksſeiten durch die Ecklinien AF, BE und CD vollzogen, und gehen dieſe durch einen Punkt O, der innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, ſo kann der Satz des Menelaus wiederholt angewandt werden. Zunächſt ſchneidet AO die Seiten des Dreiecks BCE, und daher iſt

1. $$AE \cdot FC \cdot OB = AC \cdot FB \cdot OE.$$

---

*) Die Strecken ſind durch ihre Maßzahlen zu erſetzen.

Um die Strecken OB, AC und OE zu entfernen, benutzt man das Dreieck ABE, deſſen Seiten durch CO geſchnitten werden. Man hat dann

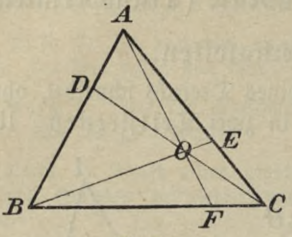


Fig. 7

2. $$OE \cdot CA \cdot DB = OB \cdot DA \cdot EC$$

und erhält durch Multiplikation aus 1 und 2

$$DB \cdot EA \cdot FC = DA \cdot EC \cdot FB,$$

d. h.

Lehrſatz 15. (Satz des **Ceva.**) Drei durch einen Punkt gehende Ecklinien eines Dreiecks teilen die Dreiecksſeiten ſo, daß die Produkte aus je drei nicht aneinander ſtoßenden Teilſtrecken gleich ſind.

Die Teilungspunkte liegen entweder alle oder nur einer zwiſchen den Ecken des Dreiecks.

Die Umkehrung des Cevaſchen Satzes lautet:

Lehrſatz 16. Teilen drei Ecklinien die Seiten eines Dreiecks ſo, daß die Produkte aus je drei nicht aneinander ſtoßenden Teilſtrecken gleich ſind, und liegen die Teilungspunkte entweder alle oder nur einer zwiſchen den Ecken, ſo gehen die drei Ecklinien durch **einen** Punkt.

Beweis indirekt. Vgl. Lehrſ. 14.

Der Lehrſatz 16 kann zum Beweiſe der Sätze über die beſonderen Punkte im Dreieck benutzt werden.

Bei den Mittellinien ſind die Teilſtrecken die Hälften der Seiten; die Bedingung des Lehrſ. 16 iſt alſo erfüllt.

Bei den Winkelhalbierungslinien ſind die Teilſtrecken den anſtoßenden Seiten proportional, und daraus ergibt ſich ohne Mühe die Erfüllung der geſtellten Bedingung. Ebenſo verhält es ſich bei den Halbierungslinien eines Winkels und der beiden nicht zugehörigen Außenwinkel.

Bei den Ecklinien nach den Berührungspunkten der Berührungskreiſe entſtehen die Produkte $(s - a)(s - b)(s - c)$, bzw. $s(s - b)(s - c)$ uſw.

Bei den Höhen lauten die Produkte

$$\sqrt{b^2 - h_a^2} . \sqrt{c^2 - h_b^2} . \sqrt{a^2 - h_c^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{c^2 - h_a^2} . \sqrt{a^2 - h_b^2} . \sqrt{b^2 - h_c^2},$$

und auch dieſe erweiſen ſich als gleich, weil $a . h_a = b . h_b = c . h_c$ iſt.

Nr. 6. Anwendung der Sätze des Menelaus und des Ceva.

a) Verbindet man in der Figur zum Satz des Ceva die Punkte D und E und iſt S der Schnittpunkt von DE und BC, ſo folgt aus dem Satz des Menelaus:

$$SB \cdot DA \cdot EC = SC \cdot EA \cdot DB,$$

und aus dem Satz des Ceva:

$$DA \cdot EC \cdot FB = DB \cdot EA \cdot FC.$$

Durch Diviſion erhält man alſo:

$$SB : FB = SC : FC, \quad \text{d. h.:}$$

BC iſt durch F und S harmoniſch geteilt. In gleicher Weiſe läßt ſich zeigen, daß AC durch E und DF ſowie AB durch D und EF harmoniſch geteilt wird, und damit ein zweiter Beweis für den Lehrſ. 12 über das vollſtändige Vierſeit herleiten.

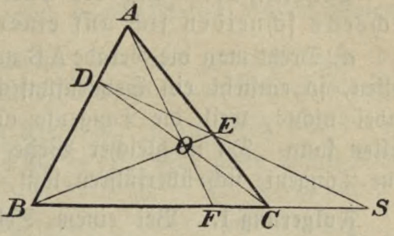


Fig 8.

b) Durch zwei Punkte P_1 und P_2 auf den Dreiecksſeiten AB und AC ſei ein Kreis gelegt, der AB und AC noch in P_6, bzw. P_3, und BC in P_4 und P_5 ſchneidet. Trifft dann die Sehne P_1P_2 die Seite BC in R, ſo iſt nach dem Satze des Menelaus:

1. $$RB \cdot P_1A \cdot P_2C = RC \cdot P_1B \cdot P_2A.$$

Iſt ferner S der Schnittpunkt der Sehne P_5P_6 mit AC, ſo hat man:

2. $$SC \cdot P_6A \cdot P_5B = SA \cdot P_6B \cdot P_5C.$$

Schneidet ſchließlich die Sehne P_3P_4 die Seite AB in T, ſo hat man auch

3. $$TA \cdot P_3C \cdot P_4B = TB \cdot P_3A \cdot P_4C.$$

Verbindet man die drei Gleichungen durch Multiplikation und beachtet, daß

$$AP_1 \cdot AP_6 = AP_2 \cdot AP_3,$$
$$BP_4 \cdot BP_5 = BP_1 \cdot BP_6,$$
$$CP_2 \cdot CP_3 = CP_4 \cdot CP_5$$

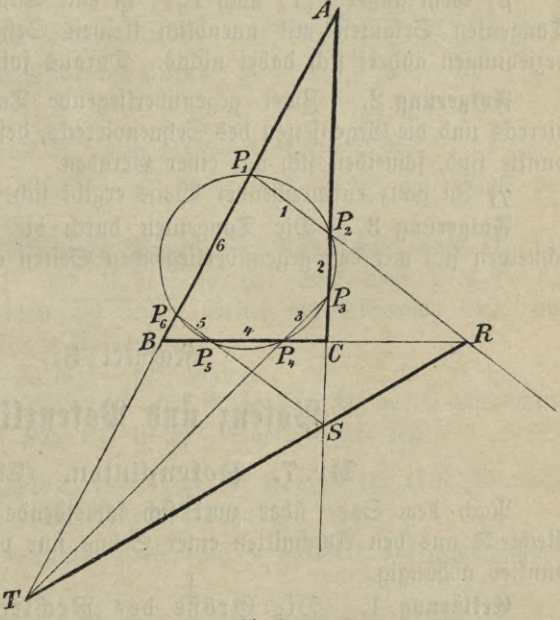


Fig. 9.

iſt, ſo fallen auf beiden Seiten 6 Faktoren weg und es bleibt

$$TA \cdot RB \cdot SC = TB \cdot RC \cdot SA.$$

Damit iſt die Bedingung für die Umkehrung des Menelausſchen Satzes erfüllt, und daraus folgt, daß R, S und T auf einer Geraden liegen. Nun iſt $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ ein Sehnenſechseck, und R, S und T ſind die Schnittpunkte ſeiner Gegenſeiten. Es beſteht alſo der Satz:

Lehrſatz 17. (Satz des **Pascal.**) Die Gegenſeiten eines Sehnenſechsecks ſchneiden ſich auf einer Geraden.

α) Dreht man die Gerade AB um A, bis die Punkte P_1 und P_6 zuſammenfallen, ſo entſteht ein Sehnenfünfeck. An den Lagenbeziehungen ändert ſich dabei nichts, weil die Tangente als Sekante mit unendlich kleiner Sehne gelten kann. Da in gleicher Weiſe jede der anderen Seiten des Sechsecks in eine Tangente ſich überführen läßt, ſo ergibt ſich:

Folgerung 1. Bei einem Sehnenfünfeck liegen die Schnittpunkte der 1^{ten} Sehne mit der 4^{ten}, der 2^{ten} mit der 5^{ten} und der 3^{ten} mit der Tangente durch die gegenüberliegende Ecke in einer Geraden.

Zuſatz. Jede Sehne kann als erſte gelten.

Aufgabe. Mit ausſchließlicher Benutzung des Lineals die Tangenten durch die Ecken eines Sehnenfünfecks zu ziehen.

β) Geht außer P_1P_6 auch P_3P_4 in eine Tangente über, ſo ſtellen beide Tangenten Sekanten mit unendlich kleinen Sehnen dar. An den Lagenbeziehungen ändert ſich dabei nichts. Daraus folgt:

Folgerung 2. Zwei gegenüberliegende Tangenten eines Tangentenvierecks und die Gegenſeiten des Sehnenvierecks, deſſen Ecken die 4 Berührungspunkte ſind, ſchneiden ſich auf einer Geraden.

γ) In ganz entſprechender Weiſe ergibt ſich:

Folgerung 3. Die Tangenten durch die Ecken eines Sehnendreiecks ſchneiden ſich mit den gegenüberliegenden Seiten auf einer Geraden.

Kapitel 3.

Potenz und Potenzlinien.

Nr. 7. Potenzlinien. (Chordalen.)

Nach dem Satze über zwei ſich ſchneidende Sehnen iſt die Größe des Rechtecks aus den Abſchnitten einer Sehne nur von der Lage des Teilungspunktes abhängig.

Erklärung 1. Die Größe des Rechtecks aus den Teilſtrecken einer Sehne heißt **Potenz** des Teilungspunktes für den Kreis.

Für jeden Punkt außerhalb des Kreiſes iſt die Potenz gleich dem Quadrat der zu dem Punkte gehörigen Tangente. Liegt der Punkt innerhalb des Kreiſes, ſo iſt ſeine Potenz das Quadrat aus der Hälfte der Sehne, die auf dem zugehörigen Durchmeſſer ſenkrecht ſteht. Im letzten Falle haben die Abſchnitte entgegengeſetzte Richtung.

Folgerung 1. Die Potenz eines Punktes außerhalb des Kreiſes iſt poſitiv, innerhalb des Kreiſes negativ und auf dem Kreiſe gleich Null.

Folgerung 2. Alle Punkte eines Kreiſes, der mit einem gegebenen Kreiſe den Mittelpunkt gemein hat, beſitzen bezüglich dieſes Kreiſes dieſelbe Potenz.

Erklärung 2. Der Ort aller Punkte, die für zwei Kreiſe die gleiche Potenz beſitzen, heißt **Potenzlinie** (Chordale) der beiden Kreiſe.

Die Potenz eines Punktes P für den Kreis M_1, r_1 iſt gleich $PM_1^2 - r_1^2$ und für einen zweiten Kreis M_2, r_2 gleich $PM_2^2 - r_2^2$. Für jeden Punkt P der Potenzlinie der beiden Kreiſe iſt daher $PM_1^2 - r_1^2 = PM_2^2 - r_2^2$. Steht nun PQ in Q ſenkrecht auf der Mittelpunktslinie M_1M_2, ſo kann

PM_1^2 durch $PQ^2 + QM_1^2$

und PM_2^2 durch $PQ^2 + QM_2^2$

erſetzt werden. Es iſt daher auch

$$QM_1^2 - r_1^2 = QM_2^2 - r_2^2,$$

d. h. Q liegt ebenfalls auf der Potenzlinie.

Iſt ferner P′ ein weiterer Punkt des Lotes PQ, ſo folgt aus

$$P'Q^2 + QM_1^2 = P'M_1^2 \text{ und } P'Q^2 + QM_2^2 = P'M_2^2$$

die Gleichheit $P'M_1^2 - r_1^2 = P'M_2^2 - r_2^2$, d. h. auch P′ iſt ein Punkt der Potenzlinie.

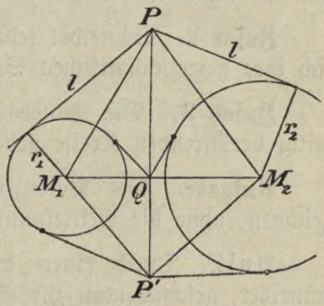


Fig. 10.

Iſt dagegen P′ ein beliebiger Punkt der Potenzlinie und Q′ der Fußpunkt des Lotes von P′ auf M_1M_2, ſo hat man auch $P'M_1^2 - r_1^2 = P'M_2^2 - r_2^2$, und wenn man auf beiden Seiten der Gleichung $P'Q'^2$ abzieht, ſo bleibt: $Q'M_1^2 - r_1^2 = Q'M_2^2 - r_2^2$

Hieraus folgt: $Q'M_1^2 - Q'M_2^2 = r_1^2 - r_2^2$.

Da aber auch $QM_1^2 - QM_2^2 = r_1^2 - r_2^2$ iſt, ſo muß Q′ mit Q zuſammenfallen, d. h. P′ muß auf dem Lote PQ liegen. Somit ergibt ſich:

Lehrſatz 18. Die Potenzlinie zweier Kreiſe iſt eine Gerade und ſteht ſenkrecht auf der Mittelpunktslinie.

Folgerung 1. Die Potenzlinie zweier Kreiſe halbiert die gemeinſchaftlichen Tangenten.

Folgerung 2. Die Potenzlinie zweier ſich ſchneidenden Kreiſe iſt die über die Endpunkte hinaus verlängerte gemeinſchaftliche Sehne.

Folgerung 3. Die Potenzlinie zweier ſich berührenden Kreiſe iſt ihre gemeinſchaftliche Tangente.

Nr. 8. Der Potenzmittelpunkt dreier Kreiſe.

Kommt zu den beiden Kreiſen noch ein dritter Kreis M_3, r_3 hinzu, ſo beſtimmt dieſer mit jedem der erſten eine Potenzlinie. Liegt nun M_3 nicht auf M_1M_2, ſo ſchneiden ſich zwei der Potenzlinien in einem Punkte O, der für die drei Kreiſe die gleiche Potenz beſitzt, und demnach geht auch die dritte Potenzlinie durch O. Daraus folgt:

Lehrſatz 19. Liegen die Mittelpunkte dreier Kreiſe nicht auf einer Geraden, ſo ſchneiden ſich ihre drei Potenzlinien in **einem** Punkte, dem **Potenzmittelpunkte.**

Zuſatz 1. Liegen die drei Mittelpunkte auf einer Geraden, ſo ſind die drei Potenzlinien parallel.

Zuſatz 2. Schneidet jeder von drei Kreiſen die beiden anderen, ſo treffen ſich ihre gemeinſchaftlichen Sehnen in einem Punkte.

Zuſatz 3. Die Tangenten in den Berührungspunkten dreier ſich gegenſeitig berührenden Kreiſe gehen durch einen Punkt.

Aufgabe. Die Potenzlinie zweier Kreiſe, die ſich nicht ſchneiden, zu zeichnen, ohne die Mittelpunktslinie zu benutzen.

Aufl. Durch einen dritten Kreis, der die gegebenen beiden Kreiſe ſchneidet, gelangt man zur Beſtimmung eines Punktes der Potenzlinie.

Übungen.

a) Beweiſe die Sätze:

Satz 1. Die Potenzlinie zweier Punkte iſt das Mittellot ihrer Verbindungslinie.

Satz 2. Die Potenzlinie eines Punktes P und eines Kreiſes M, r iſt das in der Entfernung $\frac{PM^2+r^2}{2\,PM}$ von M auf PM errichtete Lot.

Satz 3. Die Potenzlinie eines Punktes und einer Geraden iſt die Gerade ſelbſt.

Satz 4. Die Potenzlinie eines Kreiſes und einer Geraden iſt die Gerade ſelbſt.

Satz 5. Die Potenzlinie für die Schenkel eines Winkels iſt ſeine Halbierungslinie.

Satz 6. Die Potenzlinie zweier Geraden ſetzt ſich aus zwei aufeinander ſenkrechten Geraden zuſammen

Satz 7. Der Potenzmittelpunkt dreier Punkte iſt der Mittelpunkt des Kreiſes, der durch die drei Punkte geht.

Satz 8. Drei Geraden haben 4 Potenzmittelpunkte, die Mittelpunkte der 4 Berührungskreiſe.

Satz 9. Schneidet ein Kreis zwei andere Kreiſe rechtwinklig (ſ. Satz 10 in Nr. 3), ſo liegt ſein Mittelpunkt auf ihrer Potenzlinie.

Satz 10. Die Mittelpunktslinie zweier Kreiſe, welche zwei andere Kreiſe rechtwinklig ſchneiden, iſt die Potenzlinie derſelben.

Satz 11. Alle Kreiſe, welche zwei ſich nicht ſchneidende Kreiſe rechtwinklig ſchneiden, gehen durch dieſelben Punkte der Mittelpunktslinie der beiden Kreiſe.

Satz 12. Die Mittelpunktslinie zweier Kreiſe, welche von zwei anderen Kreiſen halbiert werden, iſt deren Potenzlinie.

b) Führe die Zeichnung aus:

Aufg. 1. Eine Strecke AB harmoniſch ſo zu teilen, daß ein auf der Verlängerung von AB liegender Punkt C von den Teilungspunkten gleichweit entfernt iſt.

Aufg. 2. Eine Strecke AB durch eine Strecke von der Länge l harmoniſch zu teilen.

Aufg. 3. Zu zwei Strahlen zwei harmoniſche Strahlen zu zeichnen, deren Winkel durch einen dritten gegebenen Strahl desſelben Büſchels halbiert wird.

Aufg. 4. Zu zwei Strahlen zwei harmoniſche Strahlen zu beſtimmen, welche miteinander den Winkel φ bilden.

Aufg. 5. Auf einer Geraden liegen 4 Punkte A, B, C und D. Die Strecken AB und CD durch dasſelbe Punktepaar harmoniſch zu teilen.

Aufg. 6. Durch einen Punkt S gehen 4 Geraden SA, SB, SC und SD. Es ſollen zwei Strahlen beſtimmt werden, welche ſowohl mit SA und SB, als auch mit SC und SD 4 harmoniſche Strahlen bilden.

Kapitel 4.

Pol und Polare. Ähnlichkeitsachſen.

Nr. 9. Sätze über Pol und Polare.

a) Erklärung. Zwei Punkte, welche einen Durchmeſſer harmoniſch teilen, werden **Pole** bezüglich des Kreiſes genannt. Das Lot auf dem Durchmeſſer in einem der Pole heißt **Polare** des anderen.

Zuſatz 1. Die Polare eines Punktes außerhalb des Kreiſes iſt ſeine Berührungsſehne.

Zuſatz 2. Jede Tangente iſt die Polare ihres Berührungspunktes.

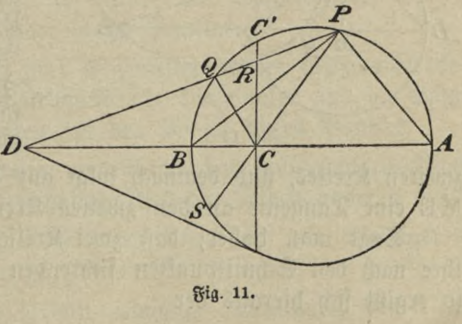


Fig. 11.

Wird ein Punkt P des Kreiſes (ſ. Fig. 11) mit zwei Polen C und D und mit den Endpunkten ihres Durchmeſſers AB verbunden, ſo halbiert PB den Winkel der Strahlen PC und PD. Es iſt daher Bogen BQ = Bogen BS, und ſomit halbiert CD den Winkel QCS. ($\triangle$ QCB $\cong$ $\triangle$ SCB!) Da hiernach CP, CQ, CR und CD 4 harmoniſche Strahlen ſind, ſo folgt:

Lehrſatz 20. Jede Sekante durch einen Punkt außerhalb (oder innerhalb) eines Kreiſes wird durch die Polare des Punktes harmoniſch geteilt.

Dieſer Satz kann umgekehrt werden, und die Umkehrung lautet:

Lehrſatz 21. Iſt eine Sehne harmoniſch geteilt, ſo liegt jeder der Teilpunkte auf der Polare des anderen.

b) C_1 und C_2 ſowie D_1 und D_2 ſeien zwei Paare von Polen. Es iſt dann nach Nr. 1, Lehrſ. 3:

$$C_1M \cdot D_1M = r^2 = C_2M \cdot D_2M, \qquad \text{d. h.}$$

Lehrſatz 22. Zwei Paare von Polen auf verſchiedenen Durchmeſſern ſind die Ecken eines Sehnenvierecks.

Liegt (ſ. Fig. 12) C_2 auf der Polare von D_1, ſo iſt $\sphericalangle C_2C_1D_1 = R$, alſo auch $\sphericalangle C_2D_2D_1 = R$, und ſomit D_1D_2 die Polare von C_2. Daraus ergeben ſich die Sätze:

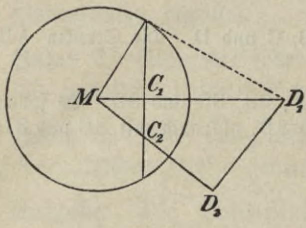


Fig. 12.

Lehrſatz 23. Liegt ein Punkt auf einer Geraden, ſo geht ſeine Polare durch den Pol dieſer Geraden.

Lehrſatz 24. Geht eine Gerade durch einen Punkt, ſo liegt ihr Pol auf der Polare dieſes Punktes.

c) Wird durch die Pole P und Q eines Durchmeſſers CD (ſ. Fig. 13) ein Kreis gelegt und einer der Schnittpunkte der beiden Kreiſe (E) mit den vier harmoniſchen Punkten verbunden, ſo bildet der Radius ME mit dem Strahle EQ einen Winkel MEQ, der gleich $\sphericalangle MEC - \sphericalangle QEC$ oder $\sphericalangle MCE - \sphericalangle QEC$ iſt. Da aber $\sphericalangle CED = R$ iſt und ſomit nach Lehrſ. 9 der Winkel PEQ halbiert wird, alſo $\sphericalangle QEC$ durch $\sphericalangle PEC$ erſetzt werden kann, und $\sphericalangle MCE - \sphericalangle PEC = \sphericalangle P$ iſt, ſo folgt: $\sphericalangle MEQ = \sphericalangle P$. Nun ſteht der Winkel P auf dem Bogen EQ des zweiten Kreiſes, und demnach folgt aus der Gleichheit $\sphericalangle MEQ = \sphericalangle P$, daß ME eine Tangente an den zweiten Kreis iſt, alſo auf M′E ſenkrecht ſteht.

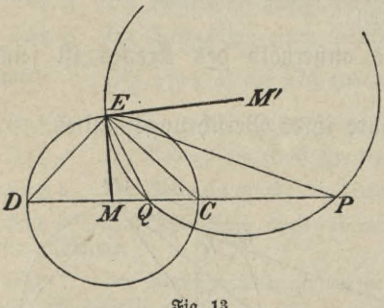


Fig. 13

Sagt man daher, daß zwei Kreiſe ſich rechtwinklig ſchneiden, wenn ihre nach den Schnittpunkten führenden Radien ſenkrecht aufeinander ſtehen, ſo ergibt ſich hieraus der

Lehrſatz 25. Jeder Kreis, der durch zwei Pole eines gegebenen Kreiſes geht, ſchneidet dieſen rechtwinklig.

Die Umkehrung dieſes Satzes lautet:

Lehrſatz 26. Schneiden ſich zwei Kreiſe rechtwinklig, ſo wird jeder Durchmeſſer des einen Kreiſes durch den anderen Kreis harmoniſch geteilt.

Bew. Nach der Vor. (ſ. Fig. 13) iſt der Winkel $MEQ = \sphericalangle P$, und da wieder $\sphericalangle MEQ = \sphericalangle MCE - \sphericalangle QEC$, $\sphericalangle P$ aber gleich $\sphericalangle MCE - \sphericalangle PEC$ iſt, ſo folgt: $\sphericalangle MCE - \sphericalangle QEC = \sphericalangle MCE - \sphericalangle PEC$, alſo $\sphericalangle PEC = \sphericalangle QEC$. Hieraus ergibt ſich die Behauptung mit Benutzung des Lehrſ. 7.

Nr. 10. Anwendungen. Satz des Brianchon.

a) Gehen von einem Punkte D zwei Sekanten eines Kreiſes DAB und DEF aus, ſo entſteht durch Verbindung der Schnittpunkte ein vollſtändiges Vierſeit, und daher ſind ſowohl D, K, A, B als auch D, J, E, F 4 harmoniſche Punkte. HG (JK) iſt daher die Polare des Punktes D. In gleicher Weiſe läßt ſich zeigen, daß DG die Polare des Punktes H und HD die Polare des Punktes G iſt. Hieraus aber folgt:

Lehrſatz 27. Bei jedem Sehnenviereck ſind die Schnittpunkte der Diagonalen und der Gegenſeiten die Ecken eines Dreiecks, in welchem jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke iſt.

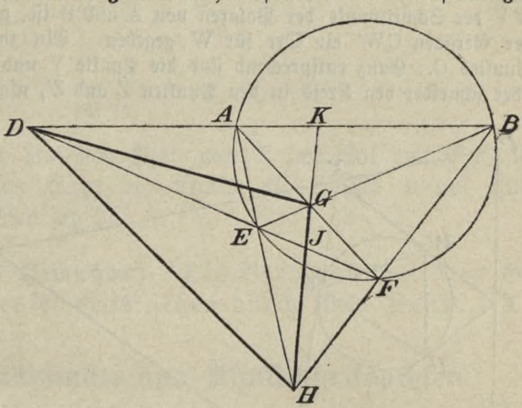


Fig. 14.

Folgerung 1. Schneiden ſich die Diagonalen zweier Sehnenvierecke eines Kreiſes in demſelben Punkte, ſo liegen die Schnittpunkte der vier Paare von Gegenſeiten auf der Polare dieſes Punktes.

Folgerung 2. Schneiden ſich zwei Gegenſeiten zweier Sehnenvierecke in demſelben Punkte, ſo liegen die Schnittpunkte der Diagonalen und die Schnittpunkte der beiden anderen Gegenſeiten auf der Polare dieſes Punktes.

Zuſatz. In jedem einem Kreiſe umgeſchriebenen vollſtändigen Vierſeit iſt jede Diagonale die Polare des Schnittpunktes der beiden anderen.

Aufg. 1. Von einem Punkte D an einen Kreis M,r mit alleiniger Benutzung des Lineals die Tangenten zu ziehen.

Aufg. 2. Zu einem Punkte D mit alleiniger Benutzung des Lineals die Polare bezüglich des Kreiſes M,r zu ziehen.

Aufg. 3. Den Satz zu beweiſen: Liegen die Ecken eines Sehnenvierecks auf den Seiten eines Tangentenvierecks, ſo liegen die 4 Schnittpunkte der 4 Paare von Gegenſeiten auf einer Geraden, und die Diagonalenpaare ſchneiden ſich in einem Punkte, welcher der Pol dieſer Geraden iſt.

Aufg. 4. (Aufgabe von Ottajano.) Einem gegebenen Kreiſe ein Dreieck einzuſchreiben, deſſen Seiten durch drei gegebene Punkte A, B und C gehen.

Aufl. Sind XYZ und X'Y'Z' zwei Sehnendreiecke*), deren Seiten XY und X'Y' durch C, XZ und X'Z' durch B, YZ und Y'Z' durch A gehen, und ſchneiden ſich die Verbindungslinien YZ' und Y'Z in A', XZ' und X'Z in B', XY' und X'Y in C', ſo liegen nach dem Pascalſchen Satze die Punkte 1. A', B', C', 2. A', B, C, 3. B', C, A und 4. C', A, B auf einer Geraden. Beſtimmen ferner die Verbindungslinien XX', YY' und ZZ' das Dreieck UVW (U auf YY' und ZZ', V auf XX' und ZZ'), ſo erweiſen ſich A'U, B'V und C'W als die Polaren der Punkte A, B und C und AU, BV und CW als die Polaren der Punkte A', B' und C'. Da aber der Schnittpunkt W' der Geraden A'U und B'V der Schnittpunkt der Polaren von A und B iſt, alſo hergeſtellt werden kann, ſo iſt in der Geraden CW' ein Ort für W gegeben. Ein zweiter Ort iſt die Polare C'W des Punktes C. Ganz entſprechend ſind die Punkte V und U zu beſtimmen. Die Gerade UV aber ſchneidet den Kreis in den Punkten Z und Z', uſw.

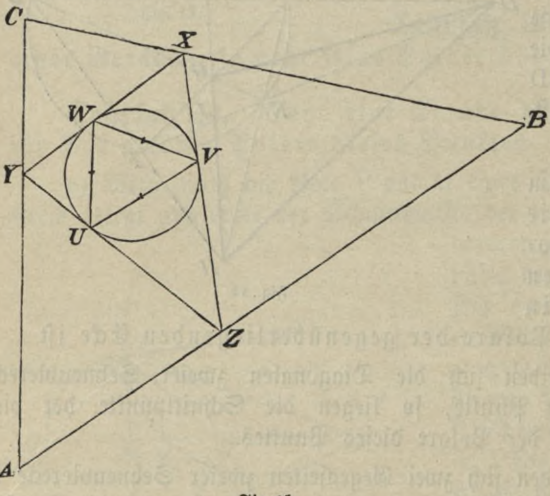


Fig. 15.

Aufg. 5. Einem gegebenen Kreiſe ein Dreieck umzuſchreiben, deſſen Ecken auf drei ein gegebenes Dreieck ABC bildenden Geraden liegen.

Aufl. Sind U, V und W die drei Berührungspunkte, ſo ſind die Ecken X, Y und Z des geſuchten Dreiecks die Pole der Seiten VW, UW und UV, und daher müſſen die Pole zu den Seiten des gegebenen Dreiecks auf UV, UW und VW liegen. Da aber dieſe Pole hergeſtellt werden können, ſo läßt ſich die Auflöſung auf die Aufl. der Aufg. 4 zurückführen.

b) Die Lehrſätze 23 und 24 können bei einem Sechseck, deſſen Seiten Tangenten an einen Kreis ſind, Verwendung finden. Durch Verbindung je zweier aufeinander folgenden Berührungspunkte entſteht ein Sehnenſechseck, deſſen Seiten die Polaren der Ecken des Tangentenſechsecks ſind. Nun geht die Diagonale P_1P_4 durch P_1; ihr Pol liegt alſo auf B_1B_6. Ferner

---

*) Die Figur iſt den Angaben entſprechend nach und nach zu entwerfen.

geht P_1P_4 durch P_4 und ihr Pol liegt daher auch auf B_3B_4. Demnach iſt der Schnittpunkt R von B_1B_6 und B_3B_4 der Pol der Diagonale P_1P_4.

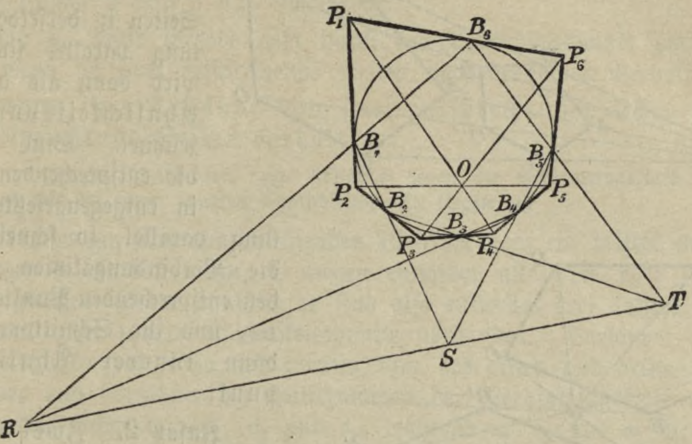


Fig. 16.

Ebenſo zeigt man, daß S der Pol von P_2P_5 und T der Pol von P_3P_6 iſt. Da aber nach dem Pascalſchen Satze die Punkte R, S und T auf einer Geraden liegen, ſo folgt aus Lehrſatz 23:

Lehrſatz 28. (Satz des **Brianchon.**) Die Verbindungslinien der Gegenecken eines Tangentenſechsecks gehen durch **einen** Punkt.

Nr. 11. Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachſen bei Vielecken.

a) **Erklärung 1.** Liegen zwei ähnliche Vielecke ſo, daß je zwei entſprechende Seiten parallel ſind, ſo ſagt man, ſie ſeien **ähnlichliegend.**

Zuſatz. Sind bei zwei ähnlichliegenden Vielecken die entſprechenden Seiten in derſelben (entgegengeſetzter) Richtung parallel, ſo heißen die Vielecke in gleichem (entgegengeſetztem) Sinne ähnlichliegend.

In jedem der beiden Fälle gehen die Verbindungslinien entſprechender Ecken ſämtlich durch einen Punkt (Bew. nach dem Strahlenbüſchelſatz). Wird dieſer als **Ähnlichkeitspunkt** der beiden Vielecke bezeichnet, ſo folgt hieraus:

Lehrſatz 29. Die Verbindungslinien der entſprechenden Ecken zweier ähnlichliegenden Vielecke ſchneiden ſich in dem Ähnlichkeitspunkt der beiden Vielecke.

Zuſatz 1. Der Ähnlichkeitspunkt liegt auf den Verlängerungen der Verbindungslinien (ſ. Fig. 17), wenn die entſprechenden Seiten in derſelben Richtung parallel ſind, und wird dann als äußerer Ähnlichkeitspunkt bezeichnet. Sind dagegen die entſprechenden Seiten in entgegengeſetzter Richtung parallel, ſo ſchneiden ſich die Verbindungslinien zwiſchen den entſprechenden Punkten (ſ. Fig. 18), und ihr Schnittpunkt heißt dann innerer Ähnlichkeitspunkt.

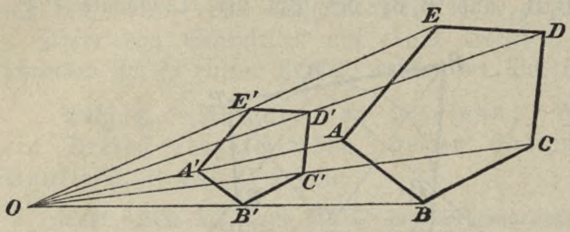


Fig. 17.

Zuſatz 2. Zwei ähnlichliegende regelmäßige Vielecke von gerader Seitenzahl beſitzen ſowohl einen äußeren als auch einen inneren Ähnlichkeitspunkt.

Der Lehrſatz 29 iſt umkehrbar.

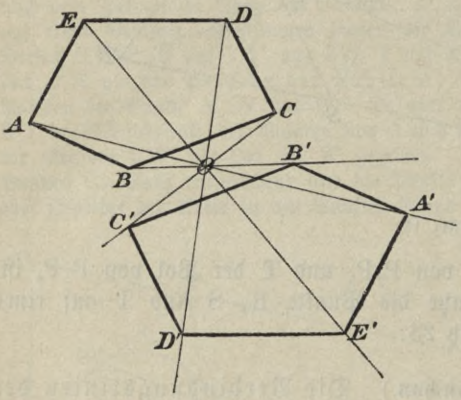


Fig. 18.

Lehrſatz 30. Verbindet man die Ecken eines Vielecks mit einem beliebigen Punkte und ſchneidet die Verbindungslinien durch aneinander grenzende Parallelen zu den Seiten des Vielecks, ſo entſteht ein dem gegebenen ähnliches Vieleck.

Aufgabe. Ein Vieleck zu zeichnen, das einem gegebenen Vieleck ähnlich iſt und deſſen Seiten zu den entſprechenden Seiten des gegebenen Vielecks im Verhältnis p : q ſtehen.

Aufl. Iſt eine Ecke beliebig angenommen und einer Ecke des gegebenen Vielecks zugeordnet, ſo iſt durch das Verhältnis p : q die Lage des Ähnlichkeitspunktes beſtimmt. Zwei Löſungen.

Erklärung 2. Eine Gerade, welche durch den Ähnlichkeitspunkt zweier Vielecke geht, heißt **Ähnlichkeitsſtrahl** der beiden Vielecke.

Durch Anwendung des Strahlenbüſchelſatzes ergibt ſich:

Zuſatz 1. Ein Ähnlichkeitsſtrahl trifft entweder beide Vielecke oder keins von ihnen.

Zuſatz 2. Entſprechende Seiten werden durch einen Ähnlichkeitsſtrahl nach demſelben Verhältnis geteilt.

Zuſatz 3. Die Abſtände eines Ähnlichkeitsſtrahles von zwei entſprechenden Ecken der Vielecke verhalten ſich wie zwei entſprechende Seiten.

Die Zuſätze 2 und 3 ſind umkehrbar.

Zuſatz 4. Eine Gerade geht durch den Ähnlichkeitspunkt zweier Vielecke, a) wenn ſie zwei entſprechende Seiten nach demſelben Verhältnis teilt,

b) wenn ihre Abſtände von zwei entſprechenden Ecken ſich wie zwei entſprechende Seiten verhalten.

Wie müſſen die Teilſtrecken bzw. Abſtände gegen die Verbindungslinie bei einem äußeren und wie bei einem inneren Ähnlichkeitspunkte liegen?

b) Kommt zu zwei ähnlichliegenden Vielecken noch ein drittes mit ihnen ähnlichliegendes Vieleck hinzu, ſo liegen entweder alle drei oder zwei von ihnen in gleichem Sinne ähnlich; es ſind alſo entweder drei äußere oder ein äußerer und zwei innere Ähnlichkeitspunkte vorhanden. Verbindet man die Ähnlichkeitspunkte des erſten und zweiten, bzw. des erſten und dritten Vielecks miteinander und bezeichnet die Entfernungen der Verbindungslinie von drei entſprechenden Ecken mit d_1, d_2 und d_3, während a_1, a_2 und a_3 die Längen dreier entſprechenden Seiten ſind, ſo iſt nach Zuſatz 3

$$\left.\begin{array}{l} d_1 : d_2 = a_1 : a_2 \\ d_1 : d_3 = a_1 : a_3 \end{array}\right\} \text{alſo auch } d_2 : d_3 = a_2 : a_3.$$

Nun kann man unbeſchadet der Allgemeinheit annehmen, daß die beiden erſten Vielecke einen äußeren Ähnlichkeitspunkt beſitzen und ſomit d_1 und d_2 auf derſelben Seite des gemeinſchaftlichen Ähnlichkeitsſtrahles liegen. Der Abſtand d_3 befindet ſich daher mit d_1 und d_2 gleichzeitig entweder auf derſelben oder auf verſchiedenen Seiten der gezogenen Verbindungslinie, und demnach folgt aus der Proportion $d_2 : d_3 = a_2 : a_3$ nach Zuſatz 4b in jedem der beiden Fälle, daß der gemeinſchaftliche Ähnlichkeitsſtrahl auch durch den Ähnlichkeitspunkt des zweiten und dritten Vielecks geht, d. h.

Lehrſatz 31. Die drei Ähnlichkeitspunkte dreier ähnlichliegenden Vielecke liegen gemeinſchaftlich auf einer Geraden. Dieſe Gerade wird **Ähnlichkeitsachſe** der drei Vielecke genannt.

Zuſatz. Drei ähnlichliegende regelmäßige Vielecke von gerader Seitenzahl beſitzen vier Ähnlichkeitsachſen, von denen eine die drei äußeren Ähnlichkeitspunkte und jede der drei anderen einen äußeren und die beiden nicht zu ihm gehörigen inneren Ähnlichkeitspunkte miteinander verbindet.

Da der Kreis als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich großer Seitenzahl angeſehen werden kann und deshalb zwei Kreiſe als ähnliche Figuren betrachtet werden dürfen, die ſtets ähnlichliegend ſind, ſo ließen ſich aus Zuſ. 2 zu Lehrſ. 29 und dem vorſtehenden Zuſatz entſprechende Sätze über Kreiſe bequem herleiten; es ſoll jedoch in der folgenden Nr. ein von dieſen

Zuſätzen unabhängiges, lehrreiches Verfahren zur Ableitung dieſer Beziehungen angewandt werden.

Nr. 12. Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachſen bei Kreiſen.

a) Wird die Mittelpunktslinie zweier Kreiſe in dem Verhältnis der Halbmeſſer harmoniſch geteilt, ſo werden die beiden Kreiſe an jedem der Teilungspunkte unter gleichen Winkeln geſehen. Man nennt daher die beiden Teilungspunkte Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreiſe und bezeichnet jede durch einen dieſer Punkte gehende Gerade als Ähnlichkeitsſtrahl. Hiernach beſteht der Satz:

Lehrſatz 32. Die Ähnlichkeitspunkte zweier Kreiſe teilen deren Mittelpunktslinie harmoniſch.

Zuſatz 1. Die Lage der Ähnlichkeitspunkte iſt nur von der Lage der Mittelpunkte und dem Verhältnis der Halbmeſſer abhängig.

Zuſatz 2. Die gemeinſchaftlichen Tangenten zweier Kreiſe gehen durch deren Ähnlichkeitspunkte.

Zuſatz 3. Geht eine Tangente an einen von zwei Kreiſen durch einen Ähnlichkeitspunkt, ſo berührt ſie auch den anderen Kreis.

Hierauf ſtützt ſich eine bequeme Herſtellung der gemeinſchaftlichen Tangenten zweier Kreiſe.

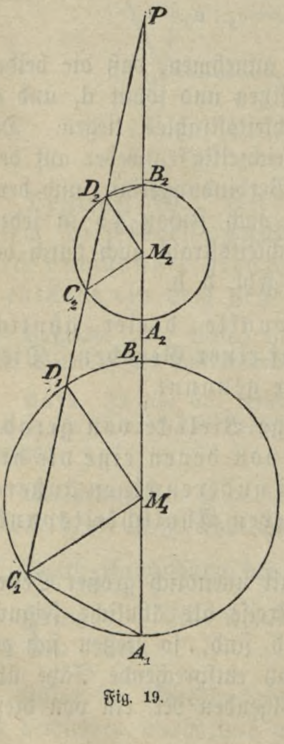


Fig. 19.

Zuſatz 4. Berühren ſich zwei Kreiſe, ſo iſt der Berührungspunkt ein Ähnlichkeitspunkt.

b) Von den 4 Punkten, in denen ein Ähnlichkeitsſtrahl zwei Kreiſe ſchneidet, können auch diejenigen, welche die Endpunkte der nicht parallelen Radien ſind, einander zugeordnet werden. Man nennt ſie inverſe Punkte.

Verbindet man zwei inverſe Punkte C_1 und D_2 eines beliebigen Ähnlichkeitsſtrahles mit zwei inverſen Punkten A_1 und B_2 auf der Mittelpunktslinie, ſo iſt

$$\begin{aligned}\sphericalangle A_1 &= \sphericalangle A_1C_1D_1 - \sphericalangle M_1C_1D_1,\\ &= \sphericalangle A_1C_1D_1 - \sphericalangle M_2D_2C_2,\\ \sphericalangle B_2 &= \sphericalangle B_2D_2C_2 - \sphericalangle M_2D_2C_2.\end{aligned}$$

Durch Subtraktion ergibt ſich hieraus:

$$\sphericalangle A_1 + \sphericalangle B_2D_2C_2 = \sphericalangle B_2 + \sphericalangle A_1C_1D_1,$$

d. h. $A_1C_1D_2B_2$ iſt ein Sehnenviereck. Ganz entſprechend zeigt ſich, daß auch $B_1D_1C_2A_2$ ein Sehnenviereck ſein würde. Es iſt daher:

$PC_1 \cdot PD_2 = PA_1 \cdot PB_2$

und $PD_1 \cdot PC_2 = PB_1 \cdot PA_2$.

Nun hat man $PA_1 \cdot PB_2 = (PM_1 + r_1)(PM_2 - r_2)$,

$PB_1 \cdot PA_2 = (PM_1 - r_1)(PM_2 + r_2)$,

und da $PM_1 : PM_2 = r_1 : r_2$, alſo $PM_1 \cdot r_2 = PM_2 \cdot r_1$,

und folglich $PA_1 \cdot PB_2 = PB_1 \cdot PA_2$ iſt,

ſo ergibt ſich: $PC_1 \cdot PD_2 = PD_1 \cdot PC_2 = PA_1 \cdot PB_2$.

Da die gleiche Beziehung für den inneren Ähnlichkeitspunkt Q abgeleitet werden kann, ſo ergibt ſich:

Lehrſatz 33. Das Rechteck aus den Entfernungen zweier inverſen Punkte von dem zugehörigen Ähnlichkeitspunkte iſt von der Richtung ihres Ähnlichkeitsſtrahles unabhängig.

Die Größe des Rechtecks wird durch zwei inverſe Punkte auf der Mittelpunktslinie beſtimmt.

Die Winkel der Dreiecke $M_1C_1D_1$ und $M_2C_2D_2$ ſind einander gleich. Die Radien nach inverſen Punkten ſchneiden ſich daher in den Spitzen gleichſchenkliger Dreiecke, und daraus folgt:

Lehrſatz 34. Zwei inverſe Punkte ſind ſtets die Berührungspunkte, in denen ein dritter Kreis die beiden erſten berührt.

Zuſatz. Die Berührung iſt gleichartig (beide Kreiſe berühren von innen oder beide werden von außen berührt), wenn der Ähnlichkeitsſtrahl durch den äußeren — und ungleichartig, wenn er durch den inneren Ähnlichkeitspunkt geht.

Werden umgekehrt zwei Kreiſe durch einen dritten berührt und die Berührungspunkte miteinander verbunden, ſo folgt aus den Beziehungen zwiſchen den Winkeln:

Lehrſatz 35. Berührt ein Kreis zwei andere Kreiſe, ſo geht die Berührungsſehne durch einen ihrer Ähnlichkeitspunkte.

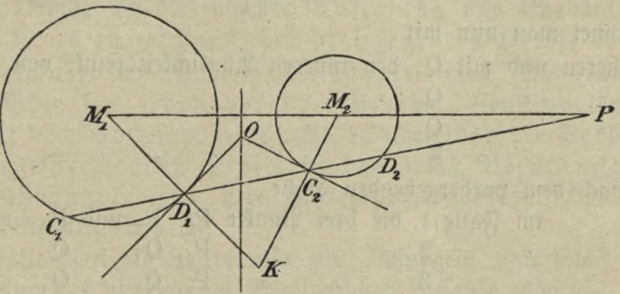


Fig. 20.

c) Schneiden ſich (ſ. Fig. 20) bei zwei von einem dritten berührten Kreiſen die durch die inverſen Punkte gelegten Tangenten in O, ſo iſt O der Pol des Ähnlichkeitsſtrahles C_1D_2 bezüglich des Kreiſes K. Daraus folgt:

Lehrſatz 36. Berührt ein Kreis zwei andere Kreiſe, ſo liegt der Pol der Berührungsſehne auf der Potenzlinie der beiden berührten Kreiſe.

Auf der Polare C_1D_2 von O liegt aber nach Lehrſ. 24 der Pol einer jeden durch O gehenden Geraden, alſo auch der Pol der Potenzlinie. Somit ergibt ſich:

Lehrſatz 37. Der Pol der Potenzlinie zweier Kreiſe bezüglich eines Berührungskreiſes liegt auf dem zugehörigen Ähnlichkeitsſtrahl.

d) Kommt noch ein zweiter Berührungskreis K_2 hinzu, ſo liefert auch dieſer (Lehrſ. 35) einen Ähnlichkeitsſtrahl, der den zu K_1 gehörigen Ähnlichkeitsſtrahl in dem äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkte trifft, je nachdem die Kreiſe M_1 und M_2 die Kreiſe K_1 und K_2 zugleich gleichartig oder ungleichartig berühren. Da die Berührungspunkte inverſe Punkte der Kreiſe M_1 und M_2 ſind, ſo hat nach Lehrſ. 33 der Schnittpunkt für die Kreiſe K_1 und K_2 die gleiche Potenz und liegt daher auf deren Potenzlinie. Daraus folgt:

Lehrſatz 38. Berühren zwei Kreiſe gleichzeitig zwei andere Kreiſe gleichartig (ungleichartig), ſo liegt ihr äußerer (innerer) Ähnlichkeitspunkt auf der Potenzlinie der berührten Kreiſe.

Werden die Kreiſe K_1 und K_2 außer von den Kreiſen M_1 und M_2 noch von einem dritten Kreiſe M_3 berührt, ſo ſind die Vorbedingungen für eine dreimalige Anwendung des Lehrſ. 38 in den Fällen erfüllt, daß die Kreiſe K_1 und K_2 von jedem der drei Kreiſe gleichartig berührt werden, und daß die Art der Berührung

1. bei den drei Kreiſen die gleiche iſt,
2. = M_1 und M_2 die gleiche und bei M_3 anders wie bei M_1 und M_2 iſt,
3. = M_1 = M_3 = = = = M_2 = = = M_1 = M_3 =,
4. = M_2 = M_3 = = = = M_1 = = = M_2 = M_3 =.

Bezeichnet man nun mit

P_1 den äußeren und mit Q_1 den inneren Ähnlichkeitspunkt von M_2 und M_3,
P_2 = = = = Q_2 = = = = M_3 = M_1,
P_3 = = = = Q_3 = = = = M_1 = M_2,
R = = = = S = = = = K_1 = K_2,

ſo liegen nach dem vorhergehenden Satze

im Falle 1. die drei Punkte P_1, P_2 und P_3
= = 2. = = = P_3, Q_1 = Q_2
= = 3. = = = P_2, Q_3 = Q_1
= = 4. = = = P_1, Q_2 = Q_3

gleichzeitig auf der Potenzlinie der Kreiſe K_1 und K_2, alſo auf einer Geraden. Da aber bei jeder Lage der Kreiſe M_1, M_2 und M_3 die Halbmeſſer r_1, r_2 und r_3 ſo gewählt werden können (ſ. Zuſ. 1 zu Lehrſ. 32), daß jeder der 4 Fälle möglich wird, ohne daß die Ähnlichkeitspunkte ihre Lage ändern, ſo folgt:

Lehrſatz 39. (Satz des **Monge.**) Von den 6 Ähnlichkeitspunkten dreier Kreiſe liegen die drei äußeren und jeder äußere mit den beiden nicht zu ihm gehörigen inneren in einer Geraden.

Der Satz des Monge kann auch durch Benutzung des Strahlenbüſchelſatzes abgeleitet werden. (S. Seite 21, Abſatz d.)

Bezeichnet man die Geraden, auf denen die Ähnlichkeitspunkte liegen, als **Ähnlichkeitsachſen,** ſo folgt jetzt aus Lehrſ. 38:

Lehrſatz 40. Jede Ähnlichkeitsachſe dreier Kreiſe iſt die Potenzlinie zweier Kreiſe, welche die drei erſten berühren.

e) Berühren die Kreiſe K_1 und K_2 jeden der Kreiſe M_1, M_2 und M_3 gleichartig, ſo liegt nach Lehrſ. 38 ihr äußerer Ähnlichkeitspunkt R auf den drei Potenzlinien der berührten Kreiſe, und iſt bei jedem der drei Kreiſe die Berührung ungleichartig, ſo liegt S auf den Potenzlinien. Daraus ergibt ſich:

Lehrſatz 41. Der Potenzmittelpunkt dreier Kreiſe iſt ein Ähnlichkeitspunkt zweier Kreiſe, welche die drei erſten berühren.

Folgerung. Der Potenzmittelpunkt dreier Kreiſe liegt mit den Berührungspunkten auf je einem der drei Kreiſe in einer Geraden.

Da nun nach Satz 38 der Pol der Potenzlinie von K_1 und K_2 bezüglich eines jeden der Kreiſe M_1, M_2 und M_3 ebenfalls mit den entſprechenden Berührungspunkten in einer Geraden liegt, ſo folgt aus den Lehrſätzen 40 und 41:

Lehrſatz 42. Der Pol einer Ähnlichkeitsachſe bezüglich eines der drei Kreiſe liegt mit dem Potenzmittelpunkt und den Berührungspunkten auf dieſem Kreiſe in einer Geraden.

Demnach ergibt ſich die folgende Auflöſung der **Apolloniſchen Aufgabe,** einen Kreis zu zeichnen, der drei gegebene Kreiſe berührt:

Man zeichnet den Potenzmittelpunkt, eine Ähnlichkeitsachſe und deren Pole für jeden der drei Kreiſe. Verbindet man dann die Pole mit dem Potenzmittelpunkt, ſo ſchneiden die Verbindungslinien die entſprechenden Kreiſe in den ſechs Berührungspunkten zweier Berührungskreiſe. Die Mittelpunkte dieſer Kreiſe liegen auf den Berührungsradien.

Jede Ähnlichkeitsachſe liefert alſo zwei Löſungen, und ſomit ſind 4 · 2, d. h. 8 Löſungen der allgemeinen Apolloniſchen Aufgabe möglich.

Abſchnitt II.

Algebra.

Erſter Teil.

Kapitel 1.

Potenzen und Wurzeln.

(Zur Wiederholung.)

Nr. 1. Potenzen mit ganzen poſitiven Exponenten.

a) Erklärung. Ein Produkt aus m Faktoren a heißt die m^{te} Potenz von a. Die poſitive ganze Zahl m heißt Exponent, und die beliebige Zahl a heißt Grundzahl der Potenz a^m.

Da ein Produkt nur dann negativ iſt, wenn es eine ungerade Anzahl negativer Faktoren enthält, ſo folgt:

Die m^{te} Potenz einer negativen Zahl iſt poſitiv, wenn $m = 2n$, und negativ, wenn $m = 2n + 1$ iſt.

Merke: Es iſt $(-1)^{2n} = 1$ und $(-1)^{2n+1} = -1$.

Aus der Erklärung der Potenz ergeben ſich die folgenden Formeln:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(m > n)$ 3. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

4. $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ 5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Jede dieſer Formeln iſt der Ausdruck für zwei Regeln, je nachdem man ſie vorwärts oder rückwärts lieſt.

b) Entſprechend wie bei der Bildung des Zahlbegriffs (Zuſammenfaſſung einer Mehrheit gleichartiger Dinge) 1 als Zahl gelten mußte, ſo gilt auch hier die Größe a^1 (= a) als die erſte Potenz von a. Ebenſo iſt das Zahlzeichen a^0, der Zahl 0 entſprechend, als die nullte Potenz von a anzuſehen. Da $a^m : a^m = a^0$ und $a^m : a^m = 1$ iſt, ſo hat die nullte Potenz einer beliebigen von 0 verſchiedenen (endlichen) Zahl die Größe 1.

Merke: Es iſt $a^1 = a$ und $a^0 = 1$.

c) Bei unveränderlichem Exponenten m iſt die Funktion $y = x^m$ lediglich eine Funktion der veränderlichen Grundzahl x.

Nr. 2. Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

Gibt man der Diviſionsaufgabe $a^m : a^n$ die Bruchform $\frac{a^m}{a^n}$ und entfernt durch Kürzung die gleichen Faktoren, ſo bleibt, wenn $m < n$ und $n - m = d$ iſt,

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} = \frac{1}{a^d}.$$

Anderſeits liefert die Formel 2 in Nr. 1 das Zahlzeichen a^{m-n} oder $a^{-(n-m)}$ oder a^{-d}. Somit hat das Zahlzeichen a^{-d} die Bedeutung $\frac{1}{a^d}$, d. h. Eine Potenz mit negativem Exponenten iſt der reziproke Wert derſelben Potenz mit poſitivem Exponenten.

Folgerung. Potenzen derſelben Grundzahl mit entgegengeſetzt gleichen Exponenten ſind reziprok.

Die Formeln in Nr. 1 gelten ſämtlich auch für Potenzen mit negativen Exponenten. Der Beweis dieſer Behauptung wird darauf geliefert, daß durch die Beziehung $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ die Rechnungen auf ſolche mit poſitiven Exponenten zurückgeführt und dann die Reſultate wieder in der Form von Potenzen mit negativen Exponenten geſchrieben werden. Die **erſte** Erweiterung des Potenzbegriffs, die in der Zulaſſung negativer Exponenten beſteht, wird auf dieſem Wege gerechtfertigt

Nr. 3. Potenzen mit gebrochenen Exponenten.

Erklärung. Unter dem Zahlzeichen $a^{\frac{1}{n}}$ verſteht man eine Zahl, deren n^{te} Potenz gleich a iſt.

(Es iſt $a^{\frac{1}{n}} = x$, wenn $x^n = a$ iſt.)

Zuſatz. Da $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ iſt, ſo verſteht man unter $a^{\frac{m}{n}}$ die m^{te} Potenz einer Zahl, deren n^{te} Potenz gleich a iſt.

Die Formeln 1 bis 5 in Nr. 1 gelten auch für Potenzen mit gebrochenen Exponenten. Beim Beweiſe dieſer Behauptung kann man ſich auf die Formeln 1, 3 und 5 beſchränken.

Sind $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ zwei Brüche, ſo folgt aus dem vorſtehenden Zuſatz:

1. $$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps}{qs}} \cdot a^{\frac{qr}{qs}},$$

$$= \left(a^{\frac{1}{qs}}\right)^{ps} \left(a^{\frac{1}{qs}}\right)^{qr},$$

und nun nach Nr. 1, 1 $$= a^{\frac{ps+qr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}.$$

2. Ferner iſt nach den Formeln 3 und 5 in Nr. 1

$$\left(a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}\right)^q = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q \cdot \left(b^{\frac{p}{q}}\right)^q$$
$$= a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p,$$

und ſomit nach der vorſtehenden Erklärung

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}} = (a \cdot b)^{\frac{p}{q}}$$

und umgekehrt

$$(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}.$$

3. Setzt man ſchließlich

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = x,$$

ſo hat man auf Grund der Erklärung:

$$x^s = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^r = a^{\frac{pr}{q}},$$

und nun wiederum nach dieſer:

$$x^{qs} = a^{pr}$$

Hieraus aber folgt:

$$x = a^{\frac{pr}{qs}},$$

alſo:

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}}.$$

Es zeigt ſich alſo, daß die Geſetze für das Rechnen mit Potenzen auch dann gültig bleiben, wenn die Exponenten gebrochene Zahlen ſind, und darin liegt die Rechtfertigung für die **zweite** Erweiterung des Potenzbegriffs, nach der auch Brüche als Exponenten zugelaſſen werden.

Nr. 4. Wurzeln.

Erklärung. Das Zeichen $\sqrt[n]{a}$ (geleſen: n^te^ Wurzel aus a) iſt gleichbedeutend mit dem Zahlzeichen $a^{\frac{1}{n}}$.

Zuſatz 1. Man bezeichnet n als den Exponenten der Wurzel und a als den Radikanden.

Zuſatz 2. Es iſt $\sqrt[n]{a^n} = a.$

Zuſatz 3. Es iſt $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$

Hiernach ſind Wurzeln als Potenzen mit gebrochenen Exponenten anzuſehen. Das Rechnen mit Wurzeln geſchieht deshalb nach den in Nr. 1 aufgeſtellten Geſetzen, und dieſe führen zu den folgenden Formeln:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}, \text{ alſo auch } \sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}.$$

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}, \quad \text{alſo auch} \quad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}, \quad \text{alſo auch} \quad \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \text{ alſo auch } \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n}. \quad \text{(Erweiterung der Exponenten.)}$$

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^{m+n}} \text{ und } \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n b^m}.$$

Nr. 5. Irrationale Zahlen.

Iſt $\frac{a}{b}$ ein Bruch, der nicht mehr gekürzt werden kann, ſo treten in der Potenz $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ auf dem Zähler nur die Faktoren von a und auf dem Nenner nur die Faktoren von b auf. Eine Kürzung des Bruches $\frac{a^m}{b^m}$ iſt daher ausgeſchloſſen, und $\frac{a^m}{b^m}$ kann nicht eine ganze Zahl ſein. Daraus folgt umgekehrt, daß eine ganze Zahl niemals als Potenz eines wirklichen Bruches (mit einem poſitiven Exponenten) dargeſtellt werden kann. Somit beſteht der Satz:

Lehrſatz 1. Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl kann niemals ein wirklicher Bruch ſein.

Iſt daher eine Wurzel aus einer ganzen Zahl nicht wieder eine ganze Zahl, ſo kann ihr Wert weder durch einen Bruch noch durch eine endliche oder periodiſche Dezimalzahl, d. h. durch die Einheit und ihre Teile, die rationalen Zahlen, ausgedrückt werden; er ſteht alſo nicht in einem angebbaren Verhältnis zur Einheit und wird deshalb als **irrationale** Zahl bezeichnet.

Wurzeln aus Brüchen (oder aus endlichen und periodiſchen, durch Brüche erſetzbaren Dezimalzahlen), bei denen nicht gleichzeitig die Wurzeln aus den Zählern und Nennern ganze Zahlen ſind, liefern ebenfalls irrationale Zahlen. Sagt man daher, eine Wurzel geht auf, wenn ihr Radikand als Potenz mit dem Exponenten der Wurzel dargeſtellt werden kann, ſo folgt:

Lehrſatz 2. Geht eine Wurzel nicht auf, ſo iſt ihr Wert eine irrationale Zahl.

Die Frage, ob eine 2te (Quadrat-) und eine 3te (Kubik-) Wurzel aufgeht, wird durch Berechnung dieſer Wurzeln beantwortet.

A. Berechnung der Quadratwurzel.

Iſt $\sqrt{a} = x + y + z + \cdots,$
alſo $a = (x + y + z + \cdots)^2,$
ſo hat man: $a = x^2 + y^2 + z^2 + \cdots + 2xy + 2xz + 2yz + \cdots,$
alſo: $a = x^2 + (2x + y)\,y + (2x + 2y + z)\,z + \cdots$

In a ſteckt als erſtes Glied x^2. Iſt x^2 von a abgezogen und wird das erſte Glied des Reſtes durch $2x$ dividiert, ſo ergibt ſich y. Zieht man dann $(2x + y)\,y$ von dem Reſte ab und dividiert die beiden erſten Glieder der Differenz durch die Summe $2x + 2y$, ſo ergibt ſich z, uſw. —. Solange es ſich alſo um Quadratwurzeln aus algebraiſchen Ausdrücken handelt, bietet das Verfahren keine Schwierigkeit. Iſt dagegen der Radikand eine Zahl, ſo muß nach jeder Diviſion geprüft werden, ob der Quotient zuläſſig iſt, d. h. ob das mit ihm zu bildende Teilprodukt den dividierten Reſt nicht überſteigt.

Das gebräuchliche Verfahren beim Ausziehen der Quadratwurzel kann, wenn eine größere Anzahl von Stellen berechnet werden ſoll, durch abgekürzte Diviſion weſentlich vereinfacht werden.

Beiſpiel.		$\sqrt{3\vert 51\vert 89{,}76\vert 4} = 187{,}589354$
	2	2 51
	36	27 89
	374	2 20 76
	3750	33 51 40
von hier ab Div.		3 50 76
	375	13 26
	37	2 01
	3(4)	16

B. Berechnung der Kubikwurzel.

Iſt $\sqrt[3]{a} = x + y + z + \cdots$, ſo hat man

$$a = x^3 + (3x^2 + 3xy + y^2)\,y + [3\,(x + y)^2 + 3\,(x + y)\,z + z^2]\,z + \cdots$$

In a ſteckt daher als erſtes Glied x^3. Iſt dies von a abgezogen und wird das erſte Glied des Reſtes durch $3x^2$ dividiert, ſo ergibt ſich y. Das Teilprodukt, das nun abzuziehen iſt, ſetzt ſich aus den drei Teilen $3x^2y$, $3xy^2$ und y^3 zuſammen. Der zweite Reſt wird dann durch $3\,(x + y)^2$ dividiert und der Quotient z zur Bildung des Subtrahenden $3\,(x + y)^2 z + 3\,(x + y)\,z^2 + z^3$ verwandt, uſw.

Beiſpiel 1. $\sqrt[3]{84\vert 604\vert 519} = 439$

	64
$3x^2 = 48$	20 604
$3x^2y$	14 4
$3xy^2$	1 08
y^3	27
$3\,(x + y)^2 = 5547$	50 97 519
$3\,(x + y)^2\,z$	49 92 3
$3\,(x + y)\,z^2$	1 04 49
z^3	729
	0

Beiſpiel 2. $\sqrt[3]{6,372|783|864} = 1,854$

$3x^2 = 3$	$5\,372$
$3x^2y$	$2\,4$
$3xy^2$	$1\,92$
y^3	512
$3(x+y)^2 = 972$	$540\,783$
$3(x+y)^2\cdot z$	$486\,0$
$3(x+y)z^2$	$13\,50$
z^3	125
$3(x+y+z)^2 = 102\,675$	$41\,158\,864$
$3(x+y+z)^2\cdot u$	$41\,070\,0$
$3(x+y+z)u^2$	$88\,80$
u^3	64
	0

Bricht man die Rechnung, falls ſie nicht aufgeht, an einer beſtimmten Stelle ab, ſo erhält man einen **Näherungswert** der irrationalen Zahl, und dieſer unterſcheidet ſich um ſo weniger von dem wirklichen Werte der irrationalen Zahl, je ſpäter die Rechnung abgebrochen wird. Die Näherungswerte können in Brüche umgewandelt werden. Hat daher eine Potenz einen irrationalen Exponenten, ſo kann man ſie mit beliebiger Annäherung durch eine Potenz mit einem gebrochenen Exponenten darſtellen. In dieſem Sinne bleiben die Sätze über Potenzen (nach Nr. 3) auch für irrationale Exponenten gültig; in dieſem Sinne kann daher durch Zulaſſung irrationaler Exponenten eine **dritte** Erweiterung des Potenzbegriffs eintreten.

Nr. 6. Vereinfachung von Wurzelausdrücken.

a) Treten im Nenner eines Bruches Wurzeln auf, ſo laſſen ſich dieſe durch geeignete Erweiterung häufig beſeitigen. Hat der Nenner nur ein Glied, ſo iſt die Beſeitigung ſtets möglich; der Erweiterungsfaktor iſt dann die gleichnamige Wurzel aus einer Potenz des Radikanden, welche mit dieſem multipliziert eine Potenz mit dem Exponenten der Wurzel liefert.

So iſt $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}\,\sqrt{b}} = \frac{a}{b}\cdot\sqrt{b}$ und $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^m}\,\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a}{b}\sqrt[n]{b^{n-m}}$.

Beſitzt der Nenner mehr als ein Glied, ſo iſt die Beſeitigung der Wurzeln im allgemeinen nur bei Quadratwurzeln möglich. Da $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ iſt, ſo hat man in folgender Weiſe zu verfahren:

α) Bei zweigliedrigen Nennern erhält man den Erweiterungsfaktor, wenn man dem zweiten Gliede das entgegengeſetzte Vorzeichen gibt.

So iſt

$$\frac{8\sqrt{21}+3\sqrt{35}}{3\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{(8\sqrt{21}+3\sqrt{35})\;(3\sqrt{3}+\sqrt{5})}{27-5}$$

$$= \frac{1}{22}\left(87\sqrt{7}+17\sqrt{105}\right).$$

β) Bei dreigliedrigen Nennern faßt man zunächſt zwei Glieder durch Einklammern zu einem zuſammen und verfährt dann zweimal wie im Falle a.

So iſt $$\frac{23}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{23\,(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2},$$
$$=\frac{23\,(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{5+4\sqrt{3}}=\frac{23\,(\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3})\,(4\sqrt{3}-5)}{(4\sqrt{3})^2-5^2},\text{ uſw.}$$

γ) Hat der Nenner vier Glieder, ſo bildet man zwei Summen aus zwei Gliedern uſw.

b) Kommt in einer Gleichung die Unbekannte unter Quadratwurzeln in verſchiedenen Verbindungen vor, ſo iſt ein Auflöſungsverſuch erſt dann möglich, wenn die Quadratwurzeln beſeitigt ſind. Nun ändert aber eine Gleichung nur ihre Form, wenn ihre beiden Seiten ins Quadrat erhoben werden, und demnach kann man eine Wurzel beſeitigen, wenn man ſie allein auf eine Seite der Gleichung ſtellt und dann die Quadrate bildet.

Beiſpiel. $$\sqrt{4x-11}+\sqrt{5x+25}=\sqrt{18x+19}.$$
$$4x-11+5x+25+2\sqrt{(4x-11)(5x+25)}=18x+19.$$

Hieraus: $$2\sqrt{(4x-11)(5x+25)}=9x+5,$$

und dann: $$4\,(4x-11)(5x+25)=81x^2+90x+25,$$

d. h. eine quadratiſche Gleichung für x.

Kapitel 2.

Logarithmen.

Nr. 7. Tranſzendente Funktionen. Logarithmenſyſteme.

a) Die bisher durchgeführten Erweiterungen des Potenzbegriffs zeigen, daß der Exponent eine beliebige (reelle) Zahl, poſitiv oder negativ, ganz oder gebrochen, rational oder irrational ſein darf; der Exponent darf alſo auch als eine beliebig veränderliche Zahl angeſehen werden, die alle Werte zwiſchen irgend zwei gegebenen Grenzen durchläuft. Zu jedem Werte x des Exponenten erhält die Funktion $y = a^x$ einen beſtimmten Wert, und ſomit erkennt man, daß man die Potenz auch als eine Funktion des Exponenten auffaſſen kann.

Erklärung. Eine Potenz mit veränderlichem Exponenten wird **Exponentialgröße** genannt, und die Funktion $f(x) = a^x$ heißt **Exponentialfunktion.** Die mit x vorzunehmende Rechnung heißt **Exponentieren,** und ihre Umkehrung, d. h. die Berechnung des Exponenten x aus a und einem gegebenen Werte von f(x) heißt **Logarithmieren.**

Anmerkung. Die Differenz $x^n - y^n$ läßt ſich durch $x - y$ teilen, wenn n eine ganze poſitive Zahl iſt. Ebenſo iſt die Differenz $x^{-n} - y^{-n}$ durch $x - y$ teilbar, wie man erkennt, wenn man die Potenzen auf poſitive Exponenten umſchreibt und die beiden Brüche addiert Ferner kann man $x^{\frac{p}{q}} - y^{\frac{p}{q}}$ durch $x - y$ $[(\sqrt[q]{x^p} - \sqrt[q]{y^p}) : (\sqrt[q]{x^q} - \sqrt[q]{y^q})!]$ dividieren und beliebig viele Glieder des Quotienten beſtimmen. Iſt daher $y = x + \delta$ und δ eine ſehr kleine Zahl, ſo ſieht man, daß man die Differenz $f(x + \delta) - f(x)$ nach den (bisher bekannt gewordenen) algebraiſchen Rechnungsarten durch x und δ ausdrücken kann. Dies iſt aber das Merkmal einer algebraiſchen Funktion. Wird dagegen in der Exponentialfunktion a^x die Veränderliche x durch $x + \delta$ erſetzt und die Differenz $a^{x+\delta} - a^x$ oder $a^x(a^\delta - 1)$ gebildet, ſo läßt ſich dieſe nicht mehr auf algebraiſchem Wege durch x und δ ausdrücken; die Rechnungen überſchreiten hier das Gebiet der algebraiſchen Rechnungsarten und ſollen deshalb als **tranſzendent** bezeichnet werden. Die Exponentialfunktion a^x iſt daher eine tranſzendente Funktion.

b) Die Beſtimmung des Exponenten m durch a und b aus der Gleichung $a = b^m$ liefert den Begriff des Logarithmus.

Erklärung. Iſt $a = b^m$, ſo heißt m der Logarithmus von a für die Grundzahl b $(m = {}^b\log a)$.

Die Zahlen a und b können beliebige Zahlen ſein. Soll aber m reell und eindeutig werden, ſo hat man ſowohl b als auch a poſitiv anzunehmen.

Die Logarithmen aller poſitiven Zahlen für eine (poſitive) Grundzahl b, die von 1 verſchieden iſt, bilden ein Logarithmen-Syſtem. Demnach können unendlich viele Logarithmen-Syſteme gebildet werden. Alle dieſe Syſteme laſſen ſich ineinander überführen.

Iſt α der Logarithmus einer Zahl z für die Grundzahl a, bzw. β der Logarithmus von z für eine zweite Grundzahl b, iſt alſo

$${}^a\log z = \alpha \qquad \text{und} \qquad {}^b\log z = \beta,$$

ſo hat man: $z = a^\alpha$ „ $z = b^\beta$

und ſomit auch: ${}^b\log z = \alpha \cdot {}^b\log a$ „ ${}^a\log z = \beta \cdot {}^a\log b$,

d. h. $\beta = \alpha \cdot {}^b\log a$ „ $\alpha = \beta \cdot {}^a\log b$.

Man hat daher:

$${}^a\log z = {}^b\log z \cdot {}^a\log b \qquad „ \qquad {}^b\log z = {}^a\log z \cdot {}^b\log a.$$

Bezeichnet man die Größe ${}^a\log b$ als den Modul des Syſtems mit der Grundzahl a bezüglich der Grundzahl b, ſo ergibt ſich der Satz:

Lehrſatz 3. Die Logarithmen für eine Grundzahl a entſtehen aus den Logarithmen für eine zweite Grundzahl b durch Multiplikation mit dem Modul des Syſtems mit der Grundzahl a bezüglich der Grundzahl b.

Außer den Logarithmen für die Grundzahl 10 (den dekadiſchen oder Briggsſchen Logarithmen) kommen noch die natürlichen Logarithmen vor, deren Grundzahl die Zahl $\mathbf{e = 2{,}7182818\ldots}$ iſt. Der Modul M des dekadiſchen Syſtems bezüglich der Grundzahl e iſt $\mathbf{M = 0{,}43429\ldots}$

Da die natürlichen Logarithmen, wie ſpäter gezeigt werden ſoll, ſich bequem berechnen laſſen, ſo iſt auch die Beſtimmung der dekadiſchen Logarithmen ohne beſondere Schwierigkeit durchführbar.

Zur Wiederholung. Für das Rechnen mit Logarithmen gelten bei jeder Grundzahl die Geſetze:

$$^{x}\log x = 1,\ ^{x}\log 1 = 0,\ \log(ab) = \log a + \log b,$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b,\ \log a^{n} = n \cdot \log a \text{ und } \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n}\log a.$$

Nr. 8. Elementare Berechnung dekadiſcher Logarithmen.

Da $^{10}\log 10^{n} = n$ iſt, ſo laſſen ſich für den dekadiſchen Logarithmus einer beliebigen Zahl ſofort zwei Grenzen angeben, zwiſchen denen er liegt. Durch fortgeſetztes Erheben ins Quadrat können die Grenzen immer enger gezogen werden. Dadurch wird es möglich, auch ohne Benutzung der natürlichen Logarithmen durch ein allerdings recht umſtändliches Verfahren den Logarithmus auf beliebig viele Dezimalſtellen genau zu berechnen.

Beiſpiel. Es ſei $10^{x} = 6$, alſo $0 < x < 1$. Es iſt dann

$10^{2x} = 36$,				alſo	$1 < 2x < 2$	oder	$\frac{1}{2} < x < 1$
$10^{4x} = 1296$,				„	$3 < 4x < 4$	„	$\frac{3}{4} < x < 1$
$10^{8x} = 1679$	mit	3	Stellen,	„	$6 < 8x < 7$	„	$\frac{6}{8} < x < \frac{7}{8}$
$10^{16x} = 2821$	„	9	„ ,	„	$12 < 16x < 13$	„	$\frac{12}{16} < x < \frac{13}{16}$
$10^{32x} = 7958$	„	21	„ ,	„	$24 < 32x < 25$	„	$\frac{24}{32} < x < \frac{25}{32}$
$10^{64x} = 6334$	„	46	„ ,	„	$49 < 64x < 50$	„	$\frac{49}{64} < x < \frac{50}{64}$
$10^{128x} = 4012$	„	96	„ ,	„	$99 < 128x < 100$	„	$\frac{99}{128} < x < \frac{100}{128}$
$10^{256x} = 1609$	„	196	„ ,	„	$199 < 256x < 200$	„	$\frac{199}{256} < x < \frac{200}{256}$
$10^{512x} = 2591$	„	395	„ ,	„	$398 < 512x < 399$	„	$\frac{398}{512} < x < \frac{399}{512}$
$10^{1024x} = 6712$	„	793	„ ,	„	$796 < 1024x < 797$	„	$\frac{796}{1024} < x < \frac{797}{1024}$
$10^{2048x} = 4508$	„	1590	„ ,	„	$1593 < 2048x < 1594$	„	$\frac{1593}{2048} < x < \frac{1594}{2048}$.

Da
$$\frac{1593}{2048} = 0{,}7778$$
und
$$\frac{1594}{2048} = 0{,}7783$$
iſt, ſo liegt log 6 zwiſchen 0,7778 und 0,7783.

Kapitel 3.

Imaginäre und komplexe Zahlen.

Nr. 9. Imaginäre Zahlen.

a) Wie die Subtraktion zur Einführung der negativen Zahlen, die Diviſion zur Einführung der Brüche und die Wurzelausziehung zur Einführung der irrationalen Zahlen nötigte, wenn die Rechnung in allen Fällen ausführbar ſein ſollte, ſo drängt die Wurzelausziehung zu einer weiteren Einführung neuer Zahlengrößen. Die Quadrate aller bisher betrachteten Zahlen ſind poſitiv; die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl kann alſo durch keine der bisher bekannten Zahlenarten ausgedrückt werden. Will man daher die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ($\sqrt{-n^2}$) zulaſſen, ſo iſt eine abermalige Erweiterung des bisherigen Zahlengebietes erforderlich. Die Größe $\sqrt{-n^2}$ (die Wurzel der Gleichung $x^2 = -n^2$) iſt gleich $\sqrt{n^2 \cdot (-1)}$ oder $n \cdot \sqrt{-1}$ und enthält daher n-mal die Einheit $\sqrt{-1}$ der neu einzuführenden Zahlen.

Erklärung. a) Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl heißt **imaginäre Zahl.**

b) Die Zahl $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$ iſt die **imaginäre Einheit.**

Zuſatz. Im Gegenſatz zu den imaginären Zahlen nennt man die bisher gebrauchten Zahlen **reelle Zahlen.**

b) Imaginäre Zahlen können durch Addition und Subtraktion miteinander verbunden werden. Es iſt $ai + bi - ci = (a + b - c)i$, d. h.

Die Summe imaginärer Zahlen iſt wieder eine imaginäre Zahl.

Auch die Multiplikation einer imaginären Zahl mit einer reellen bietet keine Schwierigkeit; es iſt $ai \cdot b = abi$. Dagegen bedarf es für die Multiplikation mit einer imaginären Zahl einer (abermaligen) Erweiterung des Multiplikationsbegriffes.

Erklärung. Es ſei $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ gleichbedeutend mit $\sqrt{(-1) \cdot (-1)}$.

Hiernach iſt $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ und allgemein

$$\mathbf{i^{4n} = +1,\quad i^{4n+1} = i,\quad i^{4n+2} = -1 \text{ und } i^{4n+3} = -i,}$$

wenn n eine ganze Zahl iſt. Man erhält daher den Satz:

Ein Produkt iſt imaginär, wenn es eine ungerade Anzahl imaginärer Faktoren enthält.

Die Diviſion wird wieder als die Umkehrung der Multiplikation behandelt. Man hat dann: $ai : bi = \frac{a}{b}$ und $a : bi = -\frac{a}{bi} = \frac{ai}{bi^2} = -\frac{ai}{b}$.

Nr. 10. Komplexe Zahlen. Sätze von Moivre. Binomiſche Gleichungen.

a) **Erklärung.** Die algebraiſche Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl wird **komplexe Zahl** genannt.

Die allgemeine Form einer komplexen Zahl lautet $a + bi$, wo a und b reelle Zahlen ſind.

Zuſatz. Zwei komplexe Zahlen heißen konjugiert, wenn ſie ſich nur im Vorzeichen ihrer imaginären Teile unterſcheiden, z. B. $7 + 3i$ und $7 - 3i$.

Komplexe Zahlen können durch die 4 Grundrechnungsarten miteinander verbunden werden. Es iſt

1. $(a + bi) + (c + di) = a + c + (b + d)i.$

2. $(a - bi) - (c - di) = a - c - (b - d)i.$

3. $(a + bi) \cdot (c + di) = ac + bci + adi + bdi^2,$

$$= ac - bd + (ad + bc)i.$$

4. $(a + bi) : (c + di) = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}.$

Aus den Gleichungen 1. und 3. folgt für komplexe Zahlen:

Die Summe und das Produkt zweier konjugierten Zahlen ſind reell.

Die wiederholte Anwendung der Gleichung 3. führt ferner auf den Satz:

Lehrſatz 4. Die Potenzen komplexer Zahlen ſind im allgemeinen wieder komplexe Zahlen.

Bezüglich der Ausnahmen ſ. Anmerkung am Schluß dieſer Nummer.

Iſt der Exponent ein Bruch und gleich $\frac{m}{n}$, ſo beachtet man, daß $(a + bi)^{\frac{1}{n}}$ eine Zahl bedeutet, deren n^{te} Potenz gleich $a + bi$ iſt. Wäre dieſe Zahl reell, ſo müßte die n^{te} Potenz einer reellen Zahl imaginär ſein, und dies iſt unmöglich. Daraus folgt:

Lehrſatz 5. Jede Wurzel aus einer komplexen Zahl iſt wieder eine komplexe Zahl.

Ein direkter Beweis dieſes Satzes ſteht in Nr. 47, S. 127.

Sind zwei komplexe Zahlen $a + bi$ und $c + di$ einander gleich, ſo hat man:

$$a - c = (d - b)i,$$

alſo

$$(a - c)^2 = (d - b)^2 i^2 = -(d - b)^2,$$

und da dieſe Gleichung nur für $a = c$ und $b = d$ möglich iſt, ſo ergibt ſich:

Lehrſatz 6. Sind zwei komplexe Zahlen einander gleich, ſo ſind ihre reellen und auch ihre imaginären Teile einander gleich.

Zuſatz. Eine Gleichung zwiſchen komplexen Zahlen führt ſtets auf zwei Gleichungen zwiſchen reellen Zahlen.

Von dieſem Zuſatz kann man Gebrauch machen, um die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl auszudrücken.

Setzt man $\sqrt{a+bi}=x+yi,$

ſo wird $\sqrt{a-bi}=x-yi,$

und demnach iſt $\sqrt{a+bi}+\sqrt{a-bi}=2x$

und $\sqrt{a+bi}-\sqrt{a-bi}=2yi.$

Erhebt man ins Quadrat, ſo erhält man hieraus:

$$4x^2=2a+2\sqrt{a^2+b^2} \text{ und } -4y^2=2a-2\sqrt{a^2+b^2},$$

und daher iſt $$\sqrt{a+bi}=\frac{1}{2}\sqrt{2a+2\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{i}{2}\sqrt{-2a+2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Damit iſt direkt gezeigt, daß die Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl wieder eine komplexe Zahl iſt.

b) **Lehrſatz 7.** Jede komplexe Zahl $a \pm bi$ kann auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gebracht werden.

Beweis. Man kann $a \pm bi$ durch $r\ (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ausdrücken, wenn r und φ ſich ſo beſtimmen laſſen, daß

$$r\cos\varphi = a$$

und zugleich $$r\sin\varphi = \pm b$$

iſt. Dazu aber hat man nur

$$r^2 = a^2 + b^2 \text{ und } \frac{\pm b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$$

zu ſetzen.

Die Größe $r=\sqrt{a^2+b^2}$ iſt ſtets poſitiv zu nehmen. Da unbeſchadet der Allgemeinheit a ſtets als poſitiv gelten kann (man würde ſonſt den Faktor -1 vor der Umwandlung abſondern), ſo iſt φ mit b zugleich poſitiv oder negativ. Die Benutzung eines negativen Winkels bei negativem b hat den Vorteil, daß φ ſtets zwiſchen 0^0 und 90^0 angenommen werden kann.

Erklärung. Die Größe $r = +\sqrt{a^2+b^2}$ heißt Modul, und der Winkel φ heißt Argument der komplexen Zahl $a \pm bi$.

Beiſpiele. Es iſt $3+3i=3\sqrt{2}\,(\cos 45^0 + i\sin 45^0)$

$$\text{und } 3-3i=3\sqrt{2}\,(\cos -45^0 + i\sin -45^0),$$

$$=3\sqrt{2}\,(\cos 45^0 - i\sin 45^0).$$

Zuſatz. Bei der Ausführung der Umwandlung empfiehlt es ſich, wenn a und b nicht einfache Zahlen ſind, zuerſt φ und dann aus $r\cos\varphi = a$ oder $r=\frac{a}{\cos\varphi}$ den Modul r zu berechnen.

e) **Lehrſatz 8.** (Erſter Satz von Moivre.) Es iſt

$$(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2).$$

Beweis. Es iſt

$$\begin{aligned}(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) &= \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ &+ i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2), \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2).\end{aligned}$$

Durch wiederholte Anwendung dieſer Gleichung gelangt man zu dem Satze:

Lehrſatz 9. (Zweiter Satz von Moivre.) Es iſt

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi.$$

Der Herleitung nach iſt n eine ganze poſitive Zahl. Es läßt ſich jedoch zeigen, daß n auch negativ und ein Bruch ſein darf.

α) Iſt zunächſt n negativ und gleich $-m$, ſo hat man:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-m} &= \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^m} \\ = \frac{1}{\cos m \varphi + i \sin m \varphi} &= \frac{\cos m \varphi - i \sin m \varphi}{\cos^2 m \varphi + \sin^2 m \varphi} \\ = \cos m \varphi - i \sin m \varphi &= \cos(-m \varphi) + i \sin(-m \varphi) \\ &= \cos n \varphi + i \sin n \varphi.\end{aligned}$$

β) Iſt weiter $n = \frac{p}{q}$, ſo hat man:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{\frac{p}{q}} &= [(\cos \varphi + i \sin \varphi)^p]^{\frac{1}{q}}, \\ &= (\cos p \varphi + i \sin p \varphi)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Nach Lehrſatz 5 aber kann man ſetzen:

$$(\cos p \varphi + i \sin p \varphi)^{\frac{1}{q}} = \cos x + i \sin x,$$

und hat dann:

$$\cos p \varphi + i \sin p \varphi = \cos q x + i \sin q x.$$

Nach Lehrſatz 6 folgt hieraus:

$$\cos p \varphi = \cos q x \quad \text{und} \quad \sin p \varphi = \sin q x,$$

alſo:

$$p \varphi = q x \quad \text{und} \quad x = \frac{p}{q} \varphi.$$

Somit ergibt ſich:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos \frac{p}{q} \varphi + i \sin \frac{p}{q} \varphi.$$

Für den Fall $p = 1$ und $q = n$ führt dies auf

Lehrſatz 10. (Dritter Satz von Moivre.) Es iſt

$$\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Da $\cos k \cdot 360^0 = 1$ und $\sin k \cdot 360^0 = 0$ iſt, ſo kann die Zahl 1 durch beliebig viele Ausdrücke von der Form $\cos k \cdot 360^0 + i \sin k \cdot 360^0$ dargeſtellt werden. Jeder dieſer Ausdrücke von komplexer Form kann in $\sqrt[n]{1}$ für 1 geſetzt werden. Man erhält dann nach Satz 10, wenn man k der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3 ... beilegt:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{1} &= \cos 0^0 + i\sin 0^0 = 1,\\ &= \cos\frac{1}{n}\cdot 360^0 + i\sin\frac{1}{n}\cdot 360^0,\\ &= \cos\frac{2}{n}\cdot 360^0 + i\sin\frac{2}{n}\,360^0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &= \cos\frac{k}{n}\,360^0 + i\sin\frac{k}{n}\,360^0.\end{aligned}$$

Wird $k = n$, ſo tritt der erſte Wert wieder ein. Für $k = n + r$ iſt das Argument gleich $\frac{n+r}{n}\cdot 360^0$ oder $360^0 + \frac{r}{n}\cdot 360^0$, und die Funktionen erhalten dieſelben Werte wie für $k = r$, d. h. man erhält alle Werte für $\sqrt[n]{1}$, wenn man k die Reihe der ganzen Zahlen von 0 bis $n - 1$ durchlaufen läßt. Da dieſe Werte voneinander verſchieden ſind, ſo folgt:

Lehrſatz 11. Die n^{te} Wurzel aus 1 iſt n-deutig.

In entſprechender Weiſe kann man

$$-1 = \cos(2k+1)\,180^0 + i\sin(2k+1)\,180^0$$

ſetzen und den Satz ableiten:

Lehrſatz 12. Die n^{te} Wurzel aus -1 iſt n-deutig.

Jede reelle Zahl a iſt aber gleich dem Produkt aus der abſoluten Zahl a und dem Faktor $+1$ oder -1. Es beſteht daher auch der Satz:

Lehrſatz 13. Die n^{te} Wurzel aus einer beliebigen reellen Zahl iſt n-deutig.

Schließlich kann $\cos\varphi + i\sin\varphi$ in der Form $\cos(k\cdot 360^0 + \varphi) + i\sin(k\cdot 360^0 + \varphi)$ geſchrieben und darin k der Reihe nach gleich 0, 1, 2, 3,... geſetzt werden. Die dritte Moivreſche Formel lautet demnach allgemein:

Lehrſatz 14. $\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{k\cdot 360^0 + \varphi}{n} + i\sin\frac{k\cdot 360^0 + \varphi}{n}.$

Dem Exponenten n entſprechend umfaßt der Ausdruck n verſchiedene Werte.

d) Da jede Zahl auf die Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gebracht und ſomit der allgemeinen **binomiſchen Gleichung** n^{ten} Grades die Geſtalt

$$x^n = a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

gegeben werden kann, ſo ergibt ſich aus Lehrſatz 14:

Lehrſatz 15. Die n Wurzeln der allgemeinen binomiſchen Gleichung $x^n = a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ gehen aus dem Ausdruck

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{k\cdot 360^0 + \varphi}{n} + i\sin\frac{k\cdot 360^0 + \varphi}{n}\right)$$

hervor, wenn k der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3, ... (n − 1) beigelegt werden.

Aufgabe 1. Die 3^{ten} Wurzeln aus 1 zu berechnen.

Aufl. Es iſt $\sqrt[3]{1} = \cos\frac{k}{3}360^0 + i\sin\frac{k}{3}360^0$, und daraus ergibt ſich

für $k = 0$: $\sqrt[3]{1} = \cos 0^0 + i\sin 0^0 = 1.$

„ $k = 1$: $\sqrt[3]{1} = \cos 120^0 + i\sin 120^0 = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}).$

„ $k = 2$: $\sqrt[3]{1} = \cos 240^0 + i\sin 240^0 = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$

Aufgabe 2. Die 4^{ten} Wurzeln aus -1 zu berechnen.

Aufl. Es iſt $\sqrt[4]{-1} = \cos\frac{2k+1}{4}180^0 + i\sin\frac{2k+1}{4}180^0$, und daraus ergibt ſich

für $k = 0$: $\sqrt[4]{-1} = \cos 45^0 + i\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i).$

„ $k = 1$: $\sqrt[4]{-1} = \cos 135^0 + i\sin 135^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 + i).$

„ $k = 2$: $\sqrt[4]{-1} = \cos 225^0 + i\sin 225^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1 - i).$

„ $k = 3$: $\sqrt[4]{-1} = \cos 315^0 + i\sin 315^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - i).$

Anmerkung. Mit Ausnahme der Formen $x^2 = \pm 1$ und $x^4 = +1$ hat die Gleichung $x^n = \pm 1$ ſtets einige Wurzeln, welche komplexe Zahlen ſind. Da aber auch deren n^{te} Potenz gleich ± 1 ſein muß, ſo erhält man in ihnen die komplexen Zahlen, deren n^{te} Potenzen nicht wieder komplexe Zahlen ſind. Berechnet man z. B. die 8^{ten} Wurzeln aus $+1$, ſo erkennt man, daß die 8^{te} Potenz einer jeden der Zahlen $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$ und $-1 - i$ reell iſt.

Nr. 11. Geometriſche Darſtellung komplexer Zahlen.

a) Die Reihe der poſitiven und negativen, ganzen und gebrochenen Zahlen läßt ſich durch Punkte auf einer Geraden darſtellen. Bei poſitiven Zahlen liegen die Punkte rechts und bei negativen links von einem beliebig gewählten Nullpunkte. Auch den irrationalen Zahlen entſprechen Punkte auf dieſer Geraden. Legt man durch den Nullpunkt eine zweite Gerade (am einfachſten ſenkrecht zu der Geraden der reellen Zahlen), ſo kann man jeden Punkt dieſer Geraden als Bild derjenigen imaginären Zahl bi betrachten, deren Koeffizient b den Abſtand des Punktes von dem Nullpunkte angibt. Dabei wird wieder durch das Vorzeichen zu unterſcheiden ſein, auf welcher Seite der erſten Geraden der Punkt liegt. Gewöhnlich legt man die Gerade der reellen Zahlen horizontal und zählt die poſitiven Abſtände nach rechts. Die Gerade der imaginären Zahlen iſt dann vertikal, und die poſitiven Abſtände werden nach oben gemeſſen.

Setzt man jetzt feſt, daß die vierte Ecke des Rechtecks, deſſen Seiten die Zahlen a und bi darſtellen, das Bild der komplexen Zahl a + bi ſein ſoll, ſo kann man jeden Punkt der Ebene als das Bild einer komplexen Zahl auffaſſen. Liegt der Punkt auf der reellen Achſe (Gerade), ſo iſt die Zahl reell, und liegt er auf der imaginären Achſe, ſo iſt ſie imaginär.

Die Beſtimmungsſtücke a und b der komplexen Zahl a + bi heißen Koordinaten ihres Bildes.

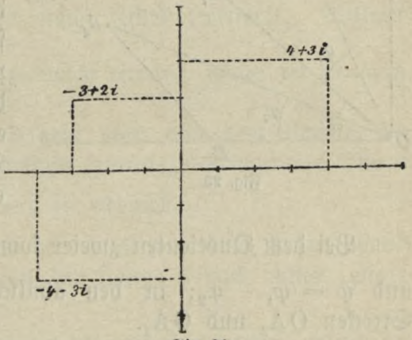


Fig. 21.

Will man wie bei den reellen und imaginären Zahlen auch bei den komplexen Zahlen die Entfernung ihres Bildes von dem Nullpunkte als Zahlſtrecke einführen, ſo reichen die Vorzeichen + und − nicht aus, um die Richtung zu beſtimmen, ſondern es muß der Winkel φ angegeben werden, den die Strecke mit der poſitiven Richtung der reellen Achſe bildet. Die Angabe des Winkels φ erſetzt alſo die Vorzeichen + und − und umfaßt auch den Fall, daß die Zahl reell iſt. Weshalb? Die Zahlſtrecke ſelbſt gilt ſtets als poſitiv. (S. Nr. 10b!)

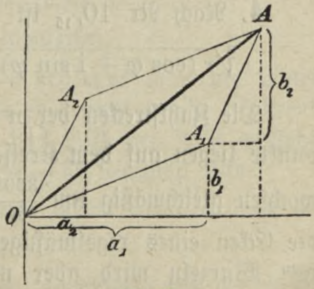


Fig. 22

b) Nach dieſer Feſtſetzung laſſen ſich die Geſetze für das Rechnen mit komplexen Zahlen veranſchaulichen.

1. Die Summe zweier komplexen Zahlen $a_1 + b_1 i$ und $a_2 + b_2 i$ iſt gleich $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$. Sind nun OA_1, OA_2 und OA die Zahlſtrecken der drei komplexen Zahlen, ſo läßt ſich aus der Figur ableſen, daß

$AA_1 = OA_2$ und $AA_1 \| OA_2$ und ſomit OA die Diagonale des Parallelogramms iſt, deſſen Seiten die Zahlſtrecken OA_1 und OA_2 ſind. Demnach wird die Addition zweier Strecken geometriſch dadurch ausgeführt, daß man die zweite Zahlſtrecke in ihrer Richtung an die erſte anträgt.

2. Setzt man $a_1 + b_1 i = r_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ und $a_2 + b_2 i = r_2 (\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$, ſo iſt $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ gleich $r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$, und demnach wird das Produkt durch die Zahlſtrecke $r = r_1 \cdot r_2$ mit der Richtung $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ dargeſtellt. Aus der Gleichung $r = r_1 \cdot r_2$ folgt die Proportion $1 : r_1 = r_2 : r$. Verbindet man daher den Punkt A mit A_1 und den Punkt A_2 mit dem Punkte B, der auf der reellen Achſe in der Entfernung + 1 von O liegt, ſo ergibt ſich aus der Gleichung $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, daß die Dreiecke OA_2B und OAA_1 ähnlich ſind. Die Multiplikation zweier komplexen Zahlen wird demnach (geometriſch) dadurch ausgeführt, daß über der erſten Zahlſtrecke ein OA_2B ähnliches Dreieck, in welchem OA_1 der Strecke OB entſpricht, hergeſtellt wird.

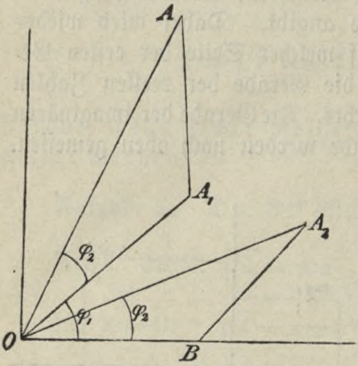


Fig. 23.

Bei dem Quotienten zweier komplexen Zahlen iſt $r = \frac{r_1}{r_2}$, alſo $r : r_1 = 1 : r_2$, und $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$; in den ähnlichen Dreiecken entſprechen ſich daher die Strecken OA_2 und OA_1.

3. Bei Potenzen komplexer Zahlen mit ganzen Exponenten haben die Zahlſtrecken der Reihe nach die Größe r, r^2, r^3 . . . und folgen unter Winkeln von φ^0 aufeinander. Die Richtung, in der ſich die ähnlichen Dreiecke aneinander lagern, hängt davon ab, ob der Exponent poſitiv oder negativ iſt. Die Endpunkte der einzelnen Zahlſtrecken liegen auf einer Kurve, welche logarithmiſche Spirale heißt. Iſt $r = 1$, ſo geht dieſe Kurve in den Kreis um O mit dem Halbmeſſer 1 über.

4. Nach Nr. $10,_{15}$ iſt

$$\sqrt[n]{r (\cos\varphi + i \sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos\frac{k \cdot 360^0 + \varphi}{n} + i \sin\frac{k \cdot 360^0 + \varphi}{n}\right).$$

Die Zahlſtrecken der n Wurzeln ſind alſo einander gleich, und ihre Endpunkte liegen auf dem Kreiſe um O mit dem Halbmeſſer $\sqrt[n]{r}$. Die Argumente wachſen gleichmäßig um $\frac{360^0}{n}$, und daher ſind die Endpunkte der Zahlſtrecken die Ecken eines regelmäßigen Vielecks. Eine geometriſche Beſtimmung der n^{ten} Wurzeln wird aber nur dann möglich ſein, wenn φ durch n geteilt werden kann, d. h. wenn $n = 2^\alpha$ und α eine ganze Zahl iſt.

Anhang.

Wiederholender Aufbau des arithmetiſchen Lehrganges.
Veranſchaulichung der Rechnungsarten.
Erweiterungen des Zahlengebietes.

A. Stellt man die Reihe der abſoluten ganzen Zahlen dadurch dar, daß man auf einer Geraden von einem beliebig gewählten Anfangspunkt aus nach einer Seite hin (nach rechts) hintereinander gleiche Strecken abmißt und jeden Endpunkt als das Bild*) der entſprechenden Zahl anſieht, ſo kann man die Rechnungsarten in folgender Weiſe veranſchaulichen:

a) Zur Bildung der **Summe** $a + b$ geht man von dem Punkte, der die Zahl a darſtellt, um b Teilſtrecken nach rechts (weiter!). S. Unterſtufe, II Nr. 2.

Die Zahlen a und b können miteinander vertauſcht werden. (Geſetz der Vertauſchbarkeit der Summanden.)

b) Zur Bildung der **Differenz** $a - b$ geht man von dem Punkte, der die Zahl a darſtellt, um b Teilſtrecken nach links (zurück!). S. Unterſtufe, II Nr. 3.

Zuſatz. Die Subtraktion iſt die Umkehrung der Addition.

c) Zur Bildung des **Produktes** $a \cdot b$ geht man von dem Anfangspunkt der Zählung aus um ſo viel Schritte von der Länge a nach rechts, wie b Einheiten enthält. S. Unterſtufe, II Nr. 4.

Zuſatz. Die Zahlen a und b können miteinander vertauſcht werden. (Geſetz der Vertauſchbarkeit der Faktoren.)

d) Die Darſtellung der **Potenz** a^b verlangt eine $(b - 1)$malige Wiederholung des Verfahrens c).

e) Zur Bildung des **Quotienten** $a : b$ beſtimmt man entweder, mit wieviel Schritten von der Länge b der Dividendus a erreicht worden iſt, oder wie groß jeder der b Schritte iſt, die von dem Bilde des Dividendus a nach dem Anfangspunkt zurückführen. S. Unterſtufe, II Nr. 5.

Zuſatz. Die Diviſion iſt die Umkehrung der Multiplikation.

f) Bei der Darſtellung der **Wurzel** $a = \sqrt[b]{c}$ beſtimmt man die Länge des Schrittes a, der zur Bildung der Potenz $c = a^b$ benutzt wurde, während bei der Darſtellung des **Logarithmus** $b = \log c$ das Bild der Zahl entſteht, welche angibt, wieviel Faktoren a zu der Potenz $c = a^b$ vereinigt ſind.

Zuſatz. Zur Bildung der Wurzeln und Logarithmen führen Umkehrungen des Potenzierens.

---

*) Die Entfernung des Bildes von dem Ausgangspunkt der Zählung wird als die entſprechende Zahlſtrecke bezeichnet.

B. Während die Ausführung und Darſtellung der Addition $a + b$, der Multiplikation $a \cdot b$ und der Potenzierung a^b ſtets möglich iſt, ſolange a und b endliche ganze Zahlen ſind, iſt dies bei den Umkehrungen nicht immer der Fall.

g) Zunächſt hat eine Differenz von der Form $a - b$, in der b gleich a oder größer als a iſt, keine Bedeutung und gewinnt erſt durch Einführung der negativen Zahlen und der Null einen Inhalt. **(Erſte Erweiterung des Zahlbegriffs.)** Der Ausgangspunkt der Zählung iſt das Bild der neuen Zahl Null (Nullpunkt!), und die Punkte auf der linken Seite des Nullpunktes ſind die Bilder der negativen Zahlen. Die Berechtigung zu dieſer Erweiterung des Zahlbegriffs wird durch den Nachweis dargetan, daß die negativen Zahlen denſelben Rechengeſetzen folgen wie die (bisherigen) poſitiven Zahlen. Da dieſer Nachweis bei der begrifflich noch inhaltsloſen Multiplikation mit einer negativen Zahl nicht möglich iſt, ſo muß eine (erſte) Erweiterung des Multiplikationsbegriffs eintreten.

S. Unterſtufe, II Nr. 8.

h) Ebenſo hat der Quotient $a : b$ keine Bedeutung mehr, wenn b nicht als Faktor in a enthalten iſt, und gewinnt erſt durch Einführung der Brüche einen Inhalt. **(Zweite Erweiterung des Zahlbegriffs.)** Teilt man die Strecken zwiſchen je zwei aufeinander folgenden Bildpunkten der ganzen Zahlen in b gleiche Teile, ſo ſind die Teilungspunkte die Bilder der Bruchzahlen mit dem Nenner b. Da jede von 1 verſchiedene ganze Zahl als Nenner auftreten kann, ſo wird das Bild des erweiterten Zahlengebietes eine mit beliebig nahe beieinander liegenden Punkten beſetzte Gerade ſein. Die Berechtigung zu dieſer Erweiterung des Zahlbegriffs wird wiederum durch den Nachweis dargetan, daß die Brüche denſelben Rechengeſetzen folgen wie die (bisherigen) ganzen Zahlen. Da dieſer Nachweis bei der begrifflich noch inhaltsloſen Multiplikation mit einem Bruche nicht möglich iſt, ſo muß eine neue (zweite) Erweiterung des Multiplikationsbegriffs eintreten.

S. Unterſtufe, II Nr. 15—17.

i) Die Ausdrücke $a = \sqrt[n]{b}$ und $n = {}^{a}\log b$ haben keine Bedeutung mehr, wenn nicht in dem bisherigen Zahlengebiet zwei Zahlen a und n vorhanden ſind, für welche a^n gleich b iſt, und gewinnen erſt durch Einführung der irrationalen Zahlen einen Inhalt. (S. k!) Wenn auch das bisherige Gebiet der rationalen Zahlen für eine ihm angehörige Zahl a (n) keine Zahl n (a) enthält, für welche a^n gleich b iſt, ſo laſſen ſich doch unendlich viele Zahlenpaare n_1 und n_2 (a_1 und a_2) derart beſtimmen, daß $a^{n_1} < b < a^{n_2}$ ($a_1^n < b < a_2^n$) iſt. (Näherungswerte.) Durch die Feſtſetzung, daß bei der Rechnung dieſe Näherungswerte an die Stelle der Wurzeln und Logarithmen treten ſollen, werden die irrationalen Zahlen dem (bisherigen) rationalen Zahlengebiet angegliedert. **(Dritte Erweiterung des Zahlbegriffs.)**

S. Unterſtufe, II Nr. 25.

k) Auch nach Einführung der irrationalen Zahlen läßt ſich die Gleichung $a^n = b$ noch nicht immer umkehren (z. B. $x^4 = -16$ oder $3^x = -9$). Sollen daher die Ausdrücke $\sqrt[n]{b}$ und ${}^a\log b$ ſtets eine Bedeutung beſitzen, ſo iſt eine abermalige Erweiterung des Zahlbegriffs erforderlich, und dieſe geſchieht durch Einführung der imaginären Zahlen. **(Vierte Erweiterung des Zahlbegriffs.)** Zur Darſtellung der imaginären Zahlen wird die Gerade benutzt, die im Nullpunkte auf der bisher verwandten Geraden ſenkrecht ſteht. Die Angliederung der imaginären Zahlen an das (bisherige) reelle Zahlengebiet verlangt eine erneute Erweiterung des Multiplikationsbegriffs.

l) Die allgemeinſte Zahl, mit der ſich die elementare Mathematik beſchäftigt, iſt die komplexe Zahl, die ſich aus einem reellen und imaginären Beſtandteil zuſammenſetzt. Als Bild einer komplexen Zahl $a + bi$ kann der Schnittpunkt der beiden durch die Bilder a und bi ihrer Beſtandteile zu der imaginären, bzw. reellen Geraden gelegten Parallelen angeſehen werden.

Über die geometriſche Deutung des Rechnens mit komplexen Zahlen ſ. Nr. 11.

Anmerkung. Alle bisherigen Rechnungsarten können ganz allgemein auf komplexe Zahlen ausgedehnt werden und führen niemals aus dem Gebiet der komplexen Zahlen hinaus. Der Beweis dieſer Behauptung, der hier noch nicht geliefert werden kann, wird in Nr. 47 folgen.

Kapitel 4.

Gleichungen zweiten Grades.

Nr. 12. Quadratiſche Gleichungen mit einer Unbekannten.

a) Sind in einer Gleichung zweiten Grades alle noch etwa verlangten Rechnungen, wie Multipl., Div. uſw., ausgeführt oder, wenn dies nicht möglich iſt, rückgängig gemacht (ſ. Nr. 6b), ſo entſteht durch Zuſammenfaſſung der Glieder mit der 2^{ten}, bzw. 1^{ten} Potenz von x und der von x freien Glieder die Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

In dieſer darf a nicht gleich 0 ſein. Man kann daher durch a dividieren und gelangt dadurch zu der Normalform

$$x^2 + px + q = 0.$$

Die Auflöſung dieſer Gleichung durch quadratiſche Ergänzung liefert:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{p}{2}\left(-1 + \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right) \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \frac{p}{2}\left(-1 - \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right). \end{aligned}$$

Bei der allgemeinen Auflöſung können 3 Fälle eintreten.

1. q iſt negativ. Die Quadratwurzel iſt dann reell, da p und q reell ſein ſollen.

2. q iſt poſitiv und kleiner als $\frac{p^2}{4}$. Auch in dieſem Falle bleibt die Quadratwurzel reell.

3. q iſt poſitiv und größer als $\frac{p^2}{4}$. Die Wurzel iſt dann imaginär, und x iſt komplex.

Anmerkung. Sind die Größen p und q für die Berechnung der Quadratwurzel unbequem, ſo kann mit Benutzung der Winkelfunktionen eine Umgeſtaltung der Ausdrücke eintreten, die eine bequeme logarithmiſche Durchführung der Aufgabe ermöglicht. (S. IV, Nr. 10.)

b) Da nach I.

$$x_1 + x_2 = -p \text{ und } x_1 \cdot x_2 = q$$

iſt, ſo kann man der Normalform die Geſtalt geben:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0 \text{ oder } (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Bezeichnet man daher die Wurzeln der Gleichung $x^2 + px + q = 0$ als Nullſtellen der Funktion $f(x) = x^2 + px + q$, ſo kann man den Satz ausſprechen:

Hat die Funktion $f(x) = x^2 + px + q$ die Nullſtellen x_1 und x_2, ſo läßt ſie ſich durch das Produkt aus den Faktoren erſten Grades (linearen Faktoren) $x - x_1$ und $x - x_2$ darſtellen.

Hierauf ſtützt ſich das folgende, bei einfachen Zahlen raſch zum Ziele führende Verfahren:

Man zerlegt q in Faktorenpaare und ſieht zu, welches Paar als algebraiſche Summe $-p$ liefert.

Aber auch bei größeren Zahlen läßt ſich, wenn die Wurzeln rational ſind, die Gleichung durch Zerlegung ihrer linken Seite in lineare Faktoren auflöſen. Sind

$$x_1 = \frac{\alpha}{\beta} \text{ und } x_2 = \frac{\gamma}{\delta}$$

die Wurzeln der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, ſo muß

$$\left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(x - \frac{\gamma}{\delta}\right) = 0 \text{ oder } \beta\delta x^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)x + \alpha\gamma = 0$$

und ſomit

$$\beta\delta = a,\ \alpha\gamma = c \text{ und } -(\alpha\delta + \beta\gamma) = b$$

ſein. Man zerlegt daher a und c in Faktorenpaare und beſtimmt diejenigen Paare, deren entſprechende Produkte $-b$ als algebraiſche Summe liefern.

Beiſpiel 1. In der Gleichung $213x^2 - 175x + 22 = 0$, in der die Faktoren α und γ gleiche Vorzeichen beſitzen müſſen, hat man

$$a = 1 \cdot 213 = 3 \cdot 71 \quad \text{und} \quad c = 1 \cdot 22 = 2 \cdot 11.$$

Von dieſen Zerlegungen ſind $3 \cdot 71$ und $2 \cdot 11$ verwendbar, weil $3 \cdot 11 + 71 \cdot 2 = 175$ iſt. Es ergibt ſich alſo:

$$(3x - 2)(71x - 11) = 0, \text{ und ſomit: } x_1 = \frac{2}{3} \text{ und } x_2 = \frac{11}{71}.$$

In vielen Fällen läßt ſich aus der Zahl b leicht entſcheiden, welche Zerlegungen der Zahlen a und b von vornherein ausgeſchieden werden können. Lautet z. B. die Gleichung $24x^2 - 74x + 45 = 0$, ſo erkennt man, daß 45 nicht in $3 \cdot 15$ zerlegt zu werden braucht, weil 74 den Faktor 3 nicht enthält, und daß bei 24 die Zerlegungen $1 \cdot 24$ und $3 \cdot 8$ überflüſſig ſind, weil aus dieſen die gerade Zahl 74 nicht entſtehen könnte. Somit hat man nur die Zerlegungen $45 = 1 \cdot 45 = 5 \cdot 9$ und $24 = 2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$ zu berückſichtigen; aus dieſen findet man aber raſch, daß die Zerlegung $(4x - 9)(6x - 5)$ lauten muß, und daß daher die beiden Wurzeln gleich $\frac{9}{4}$ und $\frac{5}{6}$ ſind.

Beiſpiel 1. Es ſei $264x^2 + 263x + 65 = 0$. Die Faktoren α und γ müſſen hier gleiche Vorzeichen beſitzen und 264 braucht nicht in zwei gerade Faktoren zerlegt zu werden; man hat alſo die Zerlegungen $264 = 1 \cdot 264 = 3 \cdot 88 = 8 \cdot 33 = 11 \cdot 24$ und $65 = 1 \cdot 65 = 5 \cdot 13$ zu berückſichtigen. Von dieſen ſind $11 \cdot 24$ und $5 \cdot 13$ verwendbar, weil $11 \cdot 13 + 24 \cdot 5 = 263$ iſt. Es ergibt ſich alſo: $(11x + 5)(24x + 13) = 0$, uſw.

Beiſpiel 2. Es ſei $325x^2 + 21x - 136 = 0$. Die Faktoren α und γ müſſen hier ungleiche Vorzeichen beſitzen; 325 braucht nicht in Faktoren mit dem gemeinſamen Faktor 5, und 136 braucht nicht in gerade Faktoren zerlegt zu werden; man hat alſo nur die Zerlegungen $325 = 1 \cdot 325 = 13 \cdot 25$ und $136 = \pm 1 \cdot \mp 136 = \pm 8 \cdot \mp 17$ zu berückſichtigen, und da $13 \cdot 17 - 8 \cdot 25 = 21$ iſt, ſo erhält man das Produkt $(13x - 8)(25x + 17)$, uſw.

Zuſatz. Ein zweites Verfahren ergibt ſich, wenn ax durch y erſetzt wird. Die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ geht dann in $y^2 + by + ac = 0$ über. In vielen Fällen führt jedoch das erſte Verfahren raſcher zum Ziele.

c) Beſitzt eine Gleichung die Geſtalt

$$x^{2n} + px^n + q = 0,$$

ſo iſt ſie in bezug auf x^n quadratiſch und auflösbar.

Ferner geht die Gleichung

$$\sqrt[n]{x^2} + p\sqrt[n]{x} + q = 0$$

durch die Subſtitution $\sqrt[n]{x} = y$ in die quadratiſche Gleichung $y^2 + py + q = 0$ über.

d) Schließlich kann die Unbekannte auch bei Potenz- oder Wurzelexponenten vorkommen. Entſteht dann durch Übergang zu den Logarithmen eine quadratiſche Gleichung, ſo iſt mit dieſer auch die urſprüngliche Gleichung auflösbar. Man nennt dieſe Gleichungen **Exponential-Gleichungen.**

Beiſpiel 1. Aus $23 \cdot 4{,}6^{2x^2 - 3x + 4} = 19^{5x - 7}$

folgt: $\log 23 + (2x^2 - 3x + 4) \log 4{,}6 = (5x - 7) \log 19$ oder

$$2 \log 4{,}6 \cdot x^2 - (3 \log 4{,}6 + 5 \log 19)\, x + \log 23 + 4 \log 4{,}6 + 7 \cdot \log 19 = 0,$$

und hieraus:

$$x^2 - \frac{3 \log 4{,}6 + 5 \log 19}{2 \log 4{,}6}\, x + \frac{\log 23 + 4 \log 4{,}6 + 7 \log 19}{2 \log 4{,}6} = 0.$$

Beiſpiel 2. Es ſei $\sqrt[2x]{81} = 3^{3x - 5}$.

Der Übergang zu den Logarithmen liefert:

$$\frac{1}{2x} \log 81 = (3x - 5) \log 3,$$

alſo: $\log 81 = (6x^2 - 10x) \log 3$.

Nun iſt $\log 81 = \log 3^4 = 4 \log 3$, und ſomit ergibt ſich die Gleichung:

$$6x^2 - 10x - 4 = 0.$$

e) Graphiſche Auflöſung der Gleichung zweiten Grades. (S. Unterſtufe, S. 140.) Iſt die Funktion $y = f(x)$ vom zweiten Grade und mit x durch die Gleichung $y = x^2 + ax + b$ verbunden, ſo kann man y als die Summe der beiden Funktionen $y_1 = x^2$ und $y_2 = ax + b$ anſehen. Aus den Linien, welche dieſe Funktionen darſtellen, erhält man die Kurve für y, wenn man die einander entſprechenden Werte von y_1 und y_2 jedesmal addiert und die zu der Summe $y_1 + y_2$ gehörigen Punkte durch einen Linienzug miteinander verbindet.

Die Linie $y = x^2$ iſt für alle Funktionen von der Form $y = x^2 + ax + b$ die gleiche; hat man ſie daher einmal ſorgfältig gezeichnet, ſo kann man ſie ausſchneiden und für Darſtellungen benutzen, welche in dem gleichen Maßſtab ausgeführt werden ſollen.

Die graphiſche Auflöſung der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ geſtaltet ſich nun einfach. Erſetzt man in der Gleichung x^2 durch y, ſo erhält man $y + ax + b = 0$ und weiß, daß der Wert von x, der zu einem Schnittpunkt der Linien $y = x^2$ und der Geraden $y + ax + b = 0$ gehört, eine Wurzel der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ iſt.

Beiſpiel. Es ſei $25x^2 - 18x \quad 45 = 0$ oder $x^2 - \frac{18}{25} x - \frac{45}{25} = 0$.

Aufl. Die Gerade $y - \frac{18}{25} x - \frac{45}{25} = 0$ trifft die Achſen in den Punkten $a = -2{,}5$ bzw. $b = 1{,}8$ und kann daher leicht gezeichnet werden. Wird auf die mit dem Zentimeter als Längeneinheit ausgeführte Figur die Kurve $y = x^2$ ſo gelegt, daß die Koordinatenachſen zuſammenfallen, ſo ſchneiden ſich die beiden Linien in zwei Punkten, für welche x die ungefähre Größe 1,7 bzw. -1 hat.

Nr. 13. Gleichungen 4^{ten} Grades, welche auf quadratiſche Gleichungen zurückgeführt werden können. Reziproke Gleichungen.

a) Eine Gleichung vierten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

iſt auf eine Gleichung zweiten Grades zurückführbar, wenn das Glied mit x^2 ſo zerlegt werden kann, daß die erſten Glieder das Quadrat des Ausdrucks $x^2 + \frac{a}{2}x$ bilden und die Reſtglieder ſich aus dieſem Ausdruck und einer von x freien Zahl zuſammenſetzen laſſen.

Lautet z. B. die Gleichung:

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 12x - 60 = 0,$$

ſo zerlegt man $5x^2$ in $9x^2 - 4x^2$ und erhält:

$$(x^2 - 3x)^2 - 4(x^2 - 3x) - 60 = 0,$$

und hieraus: $x^2 - 3x = 10$ oder -6.

Weiter liefert dann die Gleichung

$x^2 - 3x = 10$ die Wurzeln $x_1 = 5$ und $x_2 = -2$,

$x^2 - 3x = -6$ „ „ $x_3 = \frac{1}{2}(3 + i\sqrt{15})$ und $x_4 = \frac{1}{2}(3 - i\sqrt{15})$.

b) Iſt d nicht gleich 0, ſo kann auch x nicht den Wert 0 annehmen. Es iſt dann erlaubt, durch x^2 zu dividieren und die Gleichung zu bilden:

$$x^2 + \frac{d}{x^2} + a\left(x + \frac{c}{ax}\right) + b = 0.$$

Läßt ſich nun $x^2 + \frac{d}{x^2}$ durch $\left(x + \frac{c}{ax}\right)^2$ und eine von x freie Zahl darſtellen, ſo entſteht eine quadratiſche Gleichung für $x + \frac{c}{ax}$. Dieſe Bedingung aber iſt für $d = \frac{c^2}{a^2}$ oder $a^2 d = c^2$ erfüllt.

Beiſpiel. $$x^4 + 5x^3 - 56x^2 - 15x + 9 = 0,$$

$$x^2 + \frac{9}{x^2} + 5\left(x - \frac{3}{x}\right) - 56 = 0,$$

$$\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 + 6 + 5\left(x - \frac{3}{x}\right) - 56 = 0,$$

oder $$\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 + 5\left(x - \frac{3}{x}\right) - 50 = 0,$$

und hieraus: $$x - \frac{3}{x} = 5 \text{ oder } -10.$$

Nun ſind noch die beiden Gleichungen $x - \frac{3}{x} = 5$ und $x - \frac{3}{x} = -10$ aufzulöſen.

c) Iſt insbeſondere $d = 1$ und $c = a$, ſo lautet die Gleichung:

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

Dieſe Gleichung ändert ihre Form nicht, wenn x durch $\frac{1}{x}$ erſetzt wird, und wird daher als **reziproke Gleichung** bezeichnet. Iſt α eine ihrer Wurzeln, ſo wird ſie auch durch $\frac{1}{\alpha}$ befriedigt; ihre Wurzeln ſind demnach paarweis reziprok.

Zuſatz: Da ± 1 ſich ſelber reziprok iſt, ſo kann der Grad einer reziproken Gleichung auch eine ungerade Zahl ſein. Derartige Gleichungen müſſen durch Diviſion durch $x \mp 1$ auf reziproke Gleichungen, deren Grad eine gerade Zahl iſt, zurückgeführt werden.

Die Auflöſung reziproker Gleichungen 2ten Grades iſt einfach.

Die reziproke Gleichung 4ten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

wird, wie ſich aus **b)** ergibt, auf die Gleichung

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$$

zurückgeführt.

Anmerkung. Reziproke Gleichungen 6ten und 7ten Grades ſind mit den angegebenen Hilfsmitteln auf Gleichungen 3ten Grades zurückführbar.

Beiſpiel 1. $(5x^3 - 31x^2 + 31x - 5) = 0.$

Da $(5x^3 - 31x^2 + 31x - 5) : (x - 1) = 5x^2 - 26x + 5$

iſt, ſo bleibt die Gleichung $x^2 - \frac{26}{5}x + 1 = 0$ mit den Wurzeln 5 und $\frac{1}{5}$.

Beiſpiel 2. $x^4 - \frac{35}{6}x^3 + \frac{31}{3}x^2 - \frac{35}{6}x + 1 = 0.$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{35}{6}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{31}{3} - 2 = 0,$$

alſo $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ oder $\frac{5}{2}$.

Die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \\[2ex] x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{liefern jetzt } x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}, \\[2ex] \qquad\qquad x_3 = 3,\ x_4 = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Beiſpiel 3. $30x^5 - 157x^4 + 163x^3 + 163x^2 - 157x + 30 = 0.$

Da $x_1 = -1$ eine Wurzel iſt, ſo kann durch $x + 1$ dividiert werden. Die Rechnung führt dann auf

$$x^4 - \frac{187}{30}x^3 + \frac{35}{3}x^2 - \frac{187}{30}x + 1 = 0.$$

Es entſteht nun die Gleichung

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{187}{30}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{35}{3} - 2 = 0$$

mit den Wurzeln $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ oder $\frac{29}{10}$, uſw.

Nr. 14. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Schon bei den Gleichungen erſten Grades mit mehreren Unbekannten wird gezeigt, daß ebenſoviel voneinander unabhängige und ſich nicht widerſprechende Gleichungen gegeben ſein müſſen, wie Unbekannte vorhanden ſind. Während aber bei Gleichungen erſten Grades die durch Anwendung eines der verſchiedenen Auflöſungsverfahren entſtehende Schlußgleichung wieder vom erſten Grade iſt, wird bei Gleichungen zweiten Grades die Schlußgleichung nur unter ganz beſonderen Vorausſetzungen wieder vom zweiten Grade ſein.

Zunächſt tritt dies ſtets ein, wenn von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten eine vom erſten Grade iſt, weil dann durch eine Subſtitution eine Gleichung zweiten Grades für eine der Unbekannten abgeleitet werden kann. Sodann läßt ſich, wenn beide Gleichungen außer konſtanten Gliedern nur Glieder zweiten Grades (x^2, xy, y^2) enthalten, durch Diviſion eine Gleichung zweiten Grades für $\frac{x}{y}$ herſtellen; iſt dieſe aufgelöſt, ſo kann jede der gegebenen Gleichungen zur Beſtimmung von x und y benutzt werden. Ferner läßt ſich in zahlreichen Fällen durch Einführung neuer Unbekannten und geſchickte Handhabung der Elimination aus dem gegebenen Syſtem eine quadratiſche Schlußgleichung für eine der neu eingeführten Unbekannten ableiten. So iſt es vielfach möglich, die Summe, die Differenz, das Produkt, den Quotienten, die Summe oder Differenz der Quadrate der Unbekannten als neue Unbekannten einzuführen und dadurch leicht aufzulöſende Gleichungen herzuſtellen. Sind aber die neuen Unbekannten beſtimmt, ſo bietet die weitere Rechnung keine Schwierigkeit mehr.

α) Hat man $x + y = a$ und $x - y = b$ gefunden, ſo iſt $x = \frac{1}{2}(a + b)$ und $y = \frac{1}{2}(a - b)$.

β) Kennt man $x + y$ ($= a$) und $x \cdot y$ ($= b$), ſo ſind x und y die Wurzeln der Gleichung $z^2 - az + b = 0$.

γ) Iſt $x - y = a$ und $x \cdot y = b$, ſo ſind x und $-y$ die Wurzeln der Gleichung $z^2 - az - b = 0$.

δ) Hat man $x^2 \pm y^2$ und $x + y$ oder $x - y$ gefunden, ſo iſt einer der Fälle α), β) oder γ) ableitbar.

Allgemeine Vorſchriften, wie die Gleichungen für die neuen Unbekannten herzuleiten ſind, laſſen ſich nicht angeben. In zahlreichen Fällen können jedoch die folgenden Formeln mit Vorteil benutzt werden:

$$x^2 + y^2 + xy = (x + y)^2 - xy = (x - y)^2 + 3xy.$$

$$x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy = (x - y)^2 + xy.$$

$$4xy = (x + y)^2 - (x - y)^2.$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2).$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y)^2.$$

Beiſpiele.

1. $\mathbf{x^2 + xy = a, \quad y^2 + xy = b.}$

Durch Addition und Subtraktion ergibt ſich:

$$(x+y)^2 = a + b, \qquad x^2 - y^2 = a - b,$$

und hieraus: $x + y = \pm\sqrt{a+b}, \qquad x - y = \pm\frac{a-b}{\sqrt{a+b}}.$

2. $\mathbf{x^2 + y^2 = a, \quad x + y}$ **oder** $\mathbf{x - y = b.}$

Aus	$x^2 + y^2 = a$	$x^2 + y^2 = a$
und	$(x+y)^2 = b^2$	$(x-y)^2 = b^2$
folgt:	$2xy = b^2 - a$	$2xy = a - b^2.$

Damit kennt man $x + y$ und $x \cdot y$, bzw. $x - y$ und $x \cdot y$.

3. $\mathbf{x^2 - y^2 = a, \quad x \pm y = b.}$

Die Diviſion liefert $x \mp y = \frac{a}{b}$.

4. $x^2 - y^2 = a, \quad xy = b.$

Man erſetzt y^2 durch $\frac{b^2}{x^2}$.

5. $\mathbf{x^2 + y^2 \pm xy = a, \quad x \pm y = b.}$

Durch Verbindung der erſten Gl. mit $(x \pm y)^2 = b^2$ erhält man xy.

6. $x^2 + y^2 \pm (x \pm y) = a, \quad x \pm y \pm xy = b.$

Man erſetzt $x^2 + y^2$ durch $(x \pm y)^2 \mp 2xy$ und gelangt dann durch Elimination von xy zu einer Gleichung für $x \pm y$.

7. $\mathbf{x^3 + y^3 = a, \quad x + y = b.}$

Da $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy)$ iſt, ſo führt die Aufgabe auf das Beiſpiel 5 zurück

8. $\mathbf{x^3 - y^3 = a, \quad x - y = b.}$

Es iſt $(x^3 - y^3) : (x - y) = x^2 + y^2 + xy = (x-y)^2 + 3xy$,

und ſomit $3xy = \frac{a}{b} - b^2.$

9. $x^2 + y^2 + x \pm y = a, \quad (x^2 + y^2)(x \pm y) = b.$

Man erſetzt $x^2 + y^2$ durch u und $x + y$, bzw. $x - y$ durch v, beſtimmt u und v und hat dann das Syſtem $x^2 + y^2 = u$ und $x \pm y = v$ aufzulöſen.

10. $\mathbf{x^4 + y^4 = a, \quad x + y = b.}$

Man ſetzt $x - y = z$. Dann iſt $x = \frac{b+z}{2}$, $y = \frac{b-z}{2}$, alſo

$$x^4 + y^4 = \frac{1}{16}(2b^4 + 12b^2z^2 + 2z^4).$$

Es iſt daher die Gleichung $z^4 + 6b^2z^2 + b^4 - 8a = 0$ aufzulöſen. Iſt aber z gefunden, ſo kennt man auch x und y.

Nr. 15. Anzahl der Wurzelpaare bei Gleichungen 2ten Grades mit zwei Unbekannten.

Läßt ſich bei einem Syſtem 2ten Grades mit zwei Unbekannten eine Schlußgleichung 2ten Grades ableiten, ſo liefert dieſe die Werte für die Unbekannte, für die ſie entwickelt iſt, und dieſe Werte werden dann benutzt, um die Wurzelpaare des Syſtems zu beſtimmen.

a) Eine der beiden Gleichungen iſt vom erſten Grade. In dieſem Falle iſt mit jedem Werte der einen Unbekannten nur ein Wert der anderen verbunden, und das Syſtem hat nur zwei Wurzelpaare.

Können in den beiden Gleichungen die Unbekannten miteinander vertauſcht werden, ſind alſo die Gleichungen ſymmetriſch, ſo ſind auch die beiden Wurzelpaare ſymmetriſch.

b) Aus den beiden Gleichungen läßt ſich durch Elimination eine Gleichung erſten Grades zwiſchen den beiden Unbekannten ableiten. Es ſind dann gleichfalls nur zwei (endliche) Wurzelpaare vorhanden.

Der Fall tritt ein, wenn die Koeffizienten der quadratiſchen Glieder der einen Gleichung denen der anderen proportional ſind. Z. B.

$$3x^2 - 5xy + 4y^2 - 7x + 7y = 22,$$
$$9x^2 - 15xy + 12y^2 + 11x - 3y = 154.$$

Benutzt man die entſtehende Hilfsgleichung $4x - 3y = 11$, ſo gelangt man zu der Gleichung $(x - 5)(31x - 11) = 0$ bzw. $(y - 3)(31y + 99) = 0$, und die weitere Behandlung des Syſtems zeigt, daß nur die Wurzelpaare $x = 5$, $y = 3$ und $x = \frac{11}{31}$, $y = -\frac{99}{31}$ vorhanden ſind.

c) Beide Gleichungen ſind vom zweiten Grade, ohne daß der Fall b) vorliegt. Zu jedem Werte der einen Unbekannten gehören dann zwei Werte der anderen, und den beiden Wurzeln der Schlußgleichung entſprechen vier Wurzelpaare des gegebenen Syſtems.

Bei Textgleichungen iſt von den Wurzelpaaren häufig nur ein Paar für die Löſung verwendbar, und die anderen führen auf Größen, die für die geſtellte Aufgabe keine Bedeutung haben.

Kapitel 5.

Die arithmetiſchen und geometriſchen Reihen.

Eine Folge von Größen, von denen jede aus der vorhergehenden nach demſelben Geſetze entſteht, wird als eine (mathematiſche) Reihe bezeichnet. Die einzelnen Größen heißen Glieder der Reihe.

Beiſpiele. 1 2 3 4 5 6 . . .

1 5 9 13 17 21 . . .

Das Geſetz, das für die Art der Reihe maßgebend iſt (das Bildungsgeſetz), gelangt in dem allgemeinen Glied der Reihe zum Ausdruck. Die einzelnen

Glieder aber entſtehen aus dem allgemeinen Gliede, wenn der veränderlichen Größe der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3, uſw. beigelegt werden.

So entſteht aus dem allgemeinen Gliede

$$(k+1)^2 \text{ die Reihe } 1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2, \text{ uſw.}$$

$$[(k+1)\,n+k]^2 \quad " \quad " \quad n^2,\ (2n+1)^2,\ (3n+2)^2,\ (4n+3)^2, \text{ uſw.}$$

Anmerkung. Wenn auch das allgemeine Glied einer Reihe hiernach in der Form einer Funktion der veränderlichen Größe auftreten wird, ſo wird man es doch nicht in dem bisher angewandten Sinne als eine Funktion dieſer Größe bezeichnen können, da der Veränderlichen nicht beliebige, ſondern nur ganzzahlige Werte beigelegt werden dürfen.

Nr. 16. Die arithmetiſchen Reihen (erſter Ordnung).

Die einfachſte Reihe entſteht dadurch, daß jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Addition einer und derſelben (poſitiven oder negativen) Zahl gebildet wird. (**Arithmetiſche Reihe erſter Ordnung.**) Die Reihe heißt ſteigend oder fallend, je nachdem die Differenz zweier aufeinander folgenden Glieder poſitiv oder negativ iſt.

Bezeichnet **a** das erſte Glied und d die Differenz, ſo lautet die Reihe

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d\ \ldots$$

und demnach hat das n^{te} Glied t_n die Geſtalt:

$$1. \qquad \mathbf{t_n = a + (n-1)\,d.}$$

Dieſe Gleichung verbindet die 4 Größen a, d, n und t_n miteinander und führt, wenn drei von ihnen bekannt ſind, zu einer einfachen Berechnung der vierten Größe.

Aufgabe. Die Summe der n erſten Glieder einer arithmetiſchen Reihe zu bilden.

Aufl. Setzt man

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) \cdots + (t_n - d) + t_n,$$

ſo iſt nach Umkehrung der Reihenfolge auch

$$S_n = t_n + (t_n - d) + (t_n - 2d) \cdots + (a+d) + a,$$

und ſomit

$$2S_n = (a+t_n) + (a+t_n) + (a+t_n) \cdots + (a+t_n) + (a+t_n)$$

alſo

$$2. \qquad \mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,(a+t_n),}$$

und mit Benutzung der Gleichung 1.

$$3. \qquad \mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,[2a + (n-1)\,d].}$$

Die Gleichungen 1. und 2., bzw. 1. und 3. ſtellen zwei Gleichungen zwiſchen den 5 Größen a, d, n, t_n und S_n dar; ſind daher 3 von dieſen gegeben, ſo können die übrigen berechnet werden. Die Gleichungen ſind vom zweiten Grade, wenn a, d und S_n oder d, t_n und S_n gegeben ſind. Von dieſen beiden Fällen ſoll der erſte behandelt werden.

Aufgabe. Aus a, d und S_n die Größen t_n und n zu berechnen.

Aufl. Aus Gleichung 3. ergibt ſich

$$S_n = na + \frac{n(n-1)}{2} d$$

und hieraus:

$$n^2 - \frac{d - 2a}{d} n - \frac{2S_n}{d} = 0.$$

Es iſt daher

$$n = \frac{1}{2d}\left[d - 2a \pm \sqrt{(d-2a)^2 + 8dS_n}\right].$$

Weiter iſt nach Gleichung 1.:

$$n = \frac{t_n - a + d}{d},$$

und dann nach Gleichung 2.:

$$\begin{aligned} 2d\,S_n &= (t_n - a + d)(a + t_n) \\ &= t_n{}^2 + d t_n - a(a - d). \end{aligned}$$

Hieraus aber ergibt ſich:

$$t_n^2 + d t_n - [a(a-d) + 2d\,S_n] = 0,$$

alſo:

$$t_n = \frac{1}{2}\left(-d \pm \sqrt{(d-2a)^2 + 8dS_n}\right).$$

Die Wahl der Vorzeichen bei den beiden Quadratwurzeln wird dadurch beeinflußt, daß n ſtets poſitiv bleiben ſoll und t_n nur bei einem poſitiven d größer als a ſein kann.

Anwendungen.

Aufg. 1. Die Summe der erſten n ganzen Zahlen $\sum_1^n k$ zu berechnen.

Aufl. Es iſt $a = 1$, $d = 1$, $n = n$, $t_n = n$, alſo

$$\textbf{4.}\qquad \sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufg. 2. Die Summe der erſten n geraden Zahlen $\sum_1^n 2k$ zu berechnen.

Aufl. Es iſt $a = 2$, $d = 2$, $n = n$, $t_n = 2n$, alſo

$$\textbf{5.}\qquad \sum_1^n 2k = \frac{n}{2}(2n + 2) = n(n + 1).$$

Aufg. 3. Die Summe der erſten n ungeraden Zahlen $\sum\limits_1^n (2k-1)$ zu berechnen.

Aufl. Es iſt $a = 1$, $d = 2$, $n = n$, $t_n = 2n - 1$, alſo

$$\sum_1^n (2k-1) = \frac{n}{2}(2n - 1 + 1) = n^2. \tag*{6.}$$

Aufg. 4. Die Summe der erſten n Quadratzahlen $\sum\limits_1^n k^2$ zu berechnen.

Aufl. Es iſt
$$\begin{aligned}
1^3 &= && 1\\
2^3 &= (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1\\
3^3 &= (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1\\
4^3 &= (3+1)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^3 &= n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Nach der Addition der übereinander ſtehenden Ausdrücke fallen die dritten Potenzen bis auf $(n+1)^3$ fort. Man erhält daher

$$(n+1)^3 = 3\sum_1^n k^2 + 3\sum_1^n k + (n+1)$$

und ſomit

$$\sum_1^n k^2 = \frac{1}{3}\left[(n+1)^3 - \frac{3 \cdot n}{2}(n+1) - (n+1)\right] \tag*{7.}$$
$$= \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1).$$

Aufg. 5. Die Summe der erſten n Kubikzahlen $\sum\limits_1^n k^3$ zu berechnen.

Aufl. Wird hier die Formel

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

angewandt, ſo erhält man

$$\begin{aligned}
1^4 &= && 1\\
2^4 &= (1+1)^4 = 1^4 + 4 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 1\\
3^4 &= (2+1)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3 + 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 1\\
4^4 &= (3+1)^4 = 3^4 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 1\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(n+1)^4 &= n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1
\end{aligned}$$

und ſomit

$$(n+1)^4 = 4\sum_1^n k^3 + 6\sum_1^n k^2 + 4\sum_1^n k + (n+1).$$

Benutzt man die Ergebniſſe der vorhergehenden Aufgaben, ſo folgt:

$$4\sum_1^n k^3 = (n+1)\,[(n+1)^3 - n\,(2n+1) - 2n - 1],$$

und hieraus:

8. $$\sum_1^n k^3 = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left(\sum_1^n k\right)^2.$$

Anmerkung. Nach dem Ergebnis der Aufgaben 1., 4., 5. iſt die Summe der erſten n
1ten Potenzen ein Ausdruck 2ten Grades von n
2ten „ „ „ 3ten „ „ „
3ten „ „ „ 4ten „ „ „

Bildet man in entſprechender Weiſe die Summe der erſten n
4ten Potenzen, ſo erhält man einen Ausdruck 5ten Grades von n
5ten „ „ „ „ „ „ 6ten „ „ „ uſw.

Nr. 17. Arithmetiſche Reihen höherer Ordnung.

Erklärung 1. Iſt das allgemeine Glied einer Reihe eine Summe aus Potenzen einer veränderlichen Größe mit ganzen poſitiven Exponenten, ſo heißt die Reihe arithmetiſche Reihe, und ihre Ordnung iſt gleich dem Exponenten der höchſten in dem allgemeinen Gliede vorkommenden Potenz der veränderlichen Größe.

So iſt eine Reihe mit dem allgemeinen Gliede
$a + bx$ von der erſten Ordnung (ſ. Nr. 16),
$a + bx + cx^2$ „ „ zweiten „
$a + bx + cx^2 + dx^3$ „ „ dritten „ uſw.

Erklärung 2. Bildet man in einer arithmetiſchen Reihe die Differenzen der aufeinander folgenden Glieder, ſo entſteht wieder eine Reihe, welche als die erſte Differenzenreihe der urſprünglichen Reihe (Hauptreihe) bezeichnet wird. In entſprechender Weiſe wird aus der erſten die zweite, aus dieſer die dritte Differenzenreihe uſw. gebildet.

a) Enthält $a_0\,x^m$ die höchſte in dem allgemeinen Gliede einer Reihe vorkommende Potenz von x, ſo beginnt das allgemeine Glied der erſten Differenzenreihe mit $a_0\,[(x+1)^m - x^m]$, d. h. mit der $(m-1)$ten Potenz von x. In gleicher Weiſe zeigt ſich, daß das allgemeine Glied

der 2ten Differenzenreihe mit der Potenz x^{m-2}
„ 3ten „ „ „ „ x^{m-3}
„ 4ten „ „ „ „ x^{m-4} uſw.

beginnt, daß alſo das allgemeine Glied der $m$ten Differenzenreihe unveränderlich iſt und ſomit die ſämtlichen Glieder dieſer Reihe einander gleich ſind. (Stammreihe!) Hierauf ſtützt ſich die Erklärung:

Erklärung 3. Beſteht die m^{te} Differenzenreihe einer arithmetiſchen Reihe aus lauter gleichen Gliedern, ſo wird die urſprüngliche Reihe als eine Reihe m^{ter} Ordnung bezeichnet.

Beiſpiele. **1.** Das allgemeine Glied einer Reihe ſei $a + dx$. Es iſt dann das allgemeine Glied der erſten Differenzenreihe gleich $a + d(x + 1) - (a + dx)$ oder gleich d und ſomit die urſprüngliche Reihe von der erſten Ordnung.

2. Das allgemeine Glied einer Reihe ſei die Zahl $\frac{x(x + 1)}{1 \cdot 2}$. Es iſt dann das allgemeine Glied der erſten Differenzenreihe gleich $\frac{(x + 1)(x + 2)}{1 \cdot 2} - \frac{x(x + 1)}{1 \cdot 2}$ oder gleich $x + 1$. Die erſte Differenzenreihe iſt alſo von der erſten und ſomit die urſprüngliche Reihe von der zweiten Ordnung.

Zuſatz 1. Eine arithmetiſche Reihe m^{ter} Ordnung iſt durch ihr erſtes Glied und die Anfangsglieder ihrer m Differenzenreihen beſtimmt.

Beiſpiel. Eine Hauptreihe 3^{ter} Ordnung beginne mit dem Gliede $\overset{3}{a}_0 = 8$ und die Anfangsglieder ihrer Differenzenreihen ſeien $\overset{2}{a}_0 = 21$, $\overset{1}{a}_0 = 24$ und $\overset{0}{a}_0 = 12$. Man hat dann die

3^{te} Diff.-Reihe (Stammreihe)				12	12	12	12	12...	
2^{te} = =			24	36	48	60	72...		
1^{te} = =		21	45	81	129	189...			

und ſchließlich die

Hauptreihe	8	29	74	155	284...

b) Das **allgemeine Glied** einer arithmetiſchen Reihe m^{ter} Ordnung hat die Form

$$\overset{m}{a}_x = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_{m-1} x + A_m.$$

Dieſer Ausdruck enthält $m + 1$ voneinander unabhängige Koeffizienten, und daraus folgt:

Zuſatz 2. Eine arithmetiſche Reihe m^{ter} Ordnung iſt durch $m + 1$ Glieder von gegebener Stellenzahl beſtimmt.

Beiſpiel. Eine arithmetiſche Reihe 3^{ter} Ordnung beginne mit den Gliedern 8, 29, 74 und 155. Wie heißt das allgemeine Glied der Reihe?

Aufl. Wird das allgemeine Glied der Reihe $\overset{3}{a}_x$ gleich $A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3$ geſetzt, ſo entſteht

für $x = 0$ die Gleichung: $A_3 = 8$
= $x = 1$ = = $A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 29$
= $x = 2$ = = $8A_0 + 4A_1 + 2A_2 + A_3 = 74$
= $x = 3$ = = $27A_0 + 9A_1 + 3A_2 + A_3 = 155.$

Dieſe Gleichungen liefern für die Koeffizienten die Werte:

$$A_0 = 2,\quad A_1 = 6,\quad A_2 = 13 \quad \text{und} \quad A_3 = 8,$$

und demnach heißt das allgemeine Glied der Reihe:

$$\overset{3}{a}_x = 2x^3 + 6x^2 + 13x + 8.$$

c) Die **Summe der erſten n Glieder** einer arithmetiſchen Reihe m^{ter} Ordnung hat die Form

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overset{m}{a}_k = A_0 \Sigma k^m + A_1 \Sigma k^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \Sigma k + A_m n.$$

Faßt man hierin die Glieder mit gleichhohen Potenzen von n zuſammen, ſo ergibt ſich (ſ. Anm. zu Aufg. 5 in Nr. 16):

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overset{m}{a}_k = B_0 n^{m+1} + B_1 n^m + \cdots + B_{m-1} n^2 + B_m n.$$

Da dieſer Ausdruck $m + 1$ voneinander unabhängige Koeffizienten enthält, ſo folgt:

Zuſatz 3. Die Summenformel für eine arithmetiſche Reihe m^{ter} Ordnung läßt ſich aus ihren erſten $m + 1$ Gliedern entwickeln.

Beiſpiel. Benutzt man wiederum das bei Zuſ. 2 behandelte Beiſpiel, ſo erhält man:

für $n = 1$ die Gleichung: $B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = 8$
„ $n = 2$ „ „ $16B_0 + 8B_1 + 4B_2 + 2B_3 = 37$
„ $n = 3$ „ „ $81B_0 + 27B_1 + 9B_2 + 3B_3 = 111$
„ $n = 4$ „ „ $256B_0 + 64B_1 + 16B_2 + 4B_3 = 266.$

Dieſe Gleichungen liefern für die Koeffizienten die Werte:

$$B_0 = \tfrac{1}{2},\quad B_1 = 1,\quad B_2 = 4 \quad \text{und} \quad B_3 = 2\tfrac{1}{2},$$

und demnach lautet die Summenformel für die erſten n Glieder der Reihe:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \overset{3}{a}_k = \frac{1}{2} n^4 + n^3 + 4n^2 + 2\tfrac{1}{2} n.$$

d) **Erklärung 4.** Die Zahlen

$$\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2},\quad \frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},\quad \frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

uſw. heißen figurierte Zahlen.

Iſt die Reihe aus figurierten Zahlen von der p^{ten} Ordnung, ſo iſt das allgemeine Glied ihrer erſten Differenzenreihe gleich

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+p)}{1\cdot 2\cdot 3\dots p} - \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots p}$$

oder

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+p-1)[(x+p)-x]}{1\cdot 2\cdot 3\dots p}$$

und ſomit gleich

$$\frac{(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(p-1)}.$$

Erſetzt man hierin x durch x − 1, ſo erhält das allgemeine Glied die Form

$$\frac{x(x+1)(x+2)\cdot(x+p-2)}{1\cdot 2\cdot 3\dots(p-1)},$$

und ſomit ergibt ſich:

Lehrſatz 16. Die erſte Differenzenreihe der Reihe p^{ter} Ordnung aus figurierten Zahlen iſt die Reihe $(p-1)^{ter}$ Ordnung aus figurierten Zahlen.

Sind

$$a_0, \ a_1, \ a_2 \dots a_n \dots$$

die Glieder einer Reihe m^{ter} Ordnung, ſo heißt ihre erſte Differenzenreihe

$$a_1 - a_0, \ a_2 - a_1, \ a_3 - a_2 \dots a_n - a_{n-1},$$

und da die Summe der n erſten Glieder dieſer Reihe offenbar gleich $a_n - a_0$ iſt, ſo ergibt ſich:

Lehrſatz 17. Das $(n+1)^{te}$ Glied einer arithmetiſchen Reihe iſt gleich der Summe aus ihrem Anfangsgliede und der Summe der erſten n Glieder ihrer erſten Differenzenreihe.

Denkt man ſich, um dieſen Satz auf Reihen aus figurierten Zahlen anzuwenden, bei den Hauptreihen als Anfangsglied das Glied 0 hinzugefügt, und zählt dasſelbe nach erfolgter Anwendung nicht mit, ſo erhält man aus den Lehrſätzen 16 und 17 die

Folgerung für die figurierten Zahlen: Die Summe der erſten n Glieder einer Reihe aus figurierten Zahlen iſt gleich dem n^{ten} Gliede in der Reihe von der nächſt höheren Ordnung aus figurierten Zahlen.

Hiernach iſt

$$\sum_1^n x = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$$

$$\sum_1^n \frac{x(x+1)}{1\cdot 2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$\sum_1^n \frac{x(x+1)(x+2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \text{ uſw.}$$

e) Die Beſtimmung des n^{ten} Gliedes einer arithmetiſchen Reihe m^{ter} Ordnung iſt nach Lehrſ. 17 auf die Bildung der Summe aus den erſten $n-1$ Gliedern einer Reihe $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zurückgeführt. Wird daher das n^{te} Glied einer Reihe m^{ter} Ordnung mit $\overset{m}{a}_{n-1}$ und das n^{te} Glied der zugehörigen p^{ten} Differenzenreihe mit $\overset{m-p}{a}_{n-1}$ bezeichnet, ſo iſt

$$\overset{m}{a}_{n-1} = \overset{m}{a}_0 + \sum_0^{n-2} \overset{m-1}{a}_k ,$$

$$\overset{m-1}{a}_{n-1} = \overset{m-1}{a}_0 + \sum_0^{n-2} \overset{m-2}{a}_k , \text{ uſw.}$$

Nun iſt $\overset{0}{a}_k = a_0$, alſo $\sum_0^{n-2} \overset{0}{a}_k = (n-1)\,\overset{0}{a}_0$, und ſomit folgt:

$$1.\qquad \overset{1}{a}_{n-1} = \overset{1}{a}_0 + (n-1)\,a_0 \text{ und}$$

$$\sum_0^{n-2} \overset{1}{a}_k = (n-1)\,\overset{1}{a}_0 + \sum_0^{n-2} k\,\overset{0}{a}_0 .$$

Da aber $\sum_0^{n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}$ iſt (ſ. Folg. zu Lehrſ. 17), ſo ergibt ſich:

$$2.\qquad \sum_0^{n-2} \overset{1}{a}_k = (n-1)\,\overset{1}{a}_0 + \frac{(n-2)(n-1)}{1 \cdot 2}\,\overset{0}{a}_0 ,$$

und ſomit:

$$3.\qquad \overset{2}{a}_{n-1} = \overset{2}{a}_0 + (n-1)\,\overset{1}{a}_0 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\,\overset{0}{a}_0 .$$

Bildet man die Summe $\sum_0^{n-2} \overset{2}{a}_k$ und beachtet, daß nach Folg. zu Lehrſ. 17 $\sum_0^{n-2} k(k-1) = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ iſt, ſo erhält man:

$$4.\qquad \sum_0^{n-2} \overset{2}{a}_k = (n-1)\,\overset{2}{a}_0 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\,\overset{1}{a}_0 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,a_0, \text{ und}$$

folglich:

$$5.\qquad \overset{3}{a}_{n-1} = \overset{3}{a}_0 + (n-1)\,\overset{2}{a}_0 + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}\,\overset{1}{a}_0 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,\overset{0}{a}_0 .$$

Die Fortſetzung dieſes Verfahrens liefert für **das n^{te} Glied** der Reihe m^{ter} Ordnung:

$$\text{I.}\quad \overset{m}{a}_{n-1}=\overset{m}{a}_0+(n-1)\overset{m-1}{a_0}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}\overset{m-2}{a_0}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}\overset{m-3}{a_0}+\cdots+\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\overset{0}{a_0}$$

und für die **Summe der erſten n Glieder** der Reihe m^{ter} Ordnung (wenn $n-1$ durch n erſetzt wird):

$$\text{II.}\quad \sum_0^{n-1}\overset{m}{a}_k=n\overset{m}{a}_0+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\overset{m-1}{a_0}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\overset{m-2}{a_0}+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m(m+1)}\overset{0}{a_0}.$$

Beiſpiel. Als Beiſpiel ſei wiederum die bei Zuſatz 1 benutzte Reihe genommen. Nach der Formel I erhält man, wenn man $n-1$ durch x erſetzt, als allgemeines Glied:

$$\overset{3}{a}_x=8+21x+24\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}+\frac{12x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

oder $\overset{3}{a}_x=8+13x+6x^2+2x^3$. (S. Beiſp. zu Zuſ. 2, S. 58.)

Als Summe der erſten n Glieder ergibt ſich nach II:

$$\sum_0^{n-1}\overset{3}{a}_k=8n+21\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+24\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+12\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

$$=2\tfrac{1}{2}n+4n^2+n^3+\tfrac{1}{2}n^4.$$ (S. Beiſp. zu Zuſ. 3, S. 59.)

f) Erklärung 5. Wird zu der arithmetiſchen Reihe erſter Ordnung

$$1\qquad 1+d\qquad 1+2d\qquad 1+3d\qquad 1+4d\ldots$$

die Summenreihe

$$1\qquad 2+d\qquad 3+3d\qquad 4+6d\qquad 5+10d\ldots,$$

zu dieſer wieder die Summenreihe

$$1\qquad 3+d\qquad 6+4d\qquad 10+10d\qquad 15+20d\ldots$$

uſw. gebildet, ſo entſtehen Reihen 2^ter^, 3^ter^ Ordnung uſw. mit dem Anfangsglied 1, deren Glieder als figurierte Zahlen im weiteren Sinne bezeichnet werden.

Aufgabe. Die n^{te} figurierte Zahl p^{ter} Ordnung $\overset{p}{a}_n$ zu beſtimmen.

Aufl. Zunächſt iſt $\overset{1}{a}_n=1+(n-1)d$.

Durch Addition folgt hieraus:

$$\overset{2}{a}_n=\sum_1^n\overset{1}{a}_k=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}d=\frac{n}{1\cdot 2}[2+(n-1)d].$$

$$\overset{3}{a}_n=\sum_1^n\overset{2}{a}_k=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}+\frac{(n+1)n(n-1)d}{1\cdot 2\cdot 3},$$ (ſ. Folg. zu Lehrſ. 17)

$$=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2\cdot 3}-[3+(n-1)d].$$

$$\overset{4}{a}_n = \sum_1^n \overset{3}{a}_k = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d,$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} [4 + (n-1) d].$$

. . . .

$$\overset{p}{a}_n = \sum_1^n \overset{p-1}{a}_k = \frac{n(n+1)(n+2) \ldots (n+p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots p} [p + (n-1) d].$$

Für d = 1 gehen hieraus die in Erkl. 4 genannten figurierten Zahlen hervor.

Zuſatz 4. Stellt man die Einheiten der figurierten Zahlen durch gleiche Kugeln dar, ſo läßt ſich mit jeder figurierten Zahl zweiter Ordnung

für d = 1 ein regelmäßiges Dreieck ausfüllen,
„ d = 2 „ „ Viereck (Quadrat) „
„ d = 3 „ „ Fünfeck „ uſw.

Die figurierten Zahlen *zweiter* Ordnung werden daher auch *Vieleckszahlen* genannt.

Ebenſo läßt ſich mit jeder figurierten Zahl dritter Ordnung

für d = 1 eine regelmäßige dreiſeitige Pyramide aufſchichten,
„ d = 2 „ „ quadratiſche „ „ uſw.

Die figurierten Zahlen *dritter* Ordnung werden daher auch *Pyramidenzahlen* genannt.

Nr. 18. Geometriſche Reihen.

Erklärung. Beſitzt das allgemeine Glied einer Reihe *nur ein Glied*, und tritt in dieſem die Veränderliche nur als Exponent auf, ſo heißt die Reihe *geometriſche Reihe*. Jedes Glied einer geometriſchen Reihe entſteht alſo aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit demſelben Faktor.

Das Anfangsglied ſei mit a und der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder ſei mit q bezeichnet. Die Reihe lautet dann:

$$a \qquad aq \qquad aq^2 \qquad aq^3 \qquad aq^4 \ldots$$

und das n^te^ Glied hat die Geſtalt:

$$\textbf{1.} \qquad t_n = aq^{n-1}.$$

Aus dieſer Gleichung folgt, wenn a, bzw. q oder n durch die 3 übrigen Stücke ausgedrückt werden ſollen:

$$a = \frac{t_n}{q^{n-1}},$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{a}},$$

$$n - 1 = \frac{\log t_n - \log a}{\log q}.$$

Bei der Bildung der Summe S_n der erſten n Glieder einer geometriſchen Reihe kann nicht in derſelben Weiſe verfahren werden wie bei der arithmetiſchen Reihe, weil die Vereinigung der entſprechenden Glieder nicht zu Ausdrücken führt, die addiert werden können. Beachtet man aber, daß jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplikation mit q entſteht, ſo kann man eine zweite Gleichung für S_n bilden, mit deren Hilfe ſich ſämtliche Zwiſchenglieder zum Verſchwinden bringen laſſen. Denn aus

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1}$$

und

$$S_n \cdot q = aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n$$

ergibt ſich durch Subtraktion:

$$S_n q - S_n = aq^n - a,$$

und ſomit:

2. $$S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mit Benutzung von 1. ergibt ſich weiter:

3. $$S_n = \frac{t_n \cdot q - a}{q - 1}.$$

Die Gleichungen 1. und 2., bzw. 1. und 3. verbinden die 5 Größen a, q, n, t_n und S_n miteinander und können, wenn 3 von dieſen Größen gegeben ſind, zur Beſtimmung der beiden übrigen benutzt werden. In den beiden Fällen, in denen aus n, S_n und a die Größen q und t_n, bzw. aus n, S_n und t_n die Größen q und a berechnet werden ſollen, ſind jedoch im allgemeinen die Gleichungen nur durch Näherung auflösbar.

Iſt der Quotient q dem abſoluten Werte nach kleiner als 1, ſo ſetzt man

$$S_n = a \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Wird in dieſem Falle die Gliederzahl unendlich groß, ſo ſinkt der Wert von q^n unter jede angebbare Zahl und kann daher gleich 0 geſetzt werden.

Es bleibt dann:

$$S_\infty = \frac{a}{1 - q}.$$

Nr. 19. Zuſammengeſetzte Reihen.

Erklärung. Tritt in dem allgemeinen Gliede einer Reihe die Veränderliche als Grundzahl und gleichzeitig als Exponent einer unveränderlichen Zahl auf, ſo heißt die Reihe zuſammengeſetzte Reihe.

Das allgemeine Glied der einfachſten zuſammengeſetzten Reihe hat die Geſtalt $(a + dx)\, q^x$, und die Reihe beginnt mit den Gliedern

$$a, \qquad (a + d)\, q, \qquad (a + 2d)\, q^2, \qquad (a + 3d)\, q^3 \ldots$$

Für $q = 1$ geht die Reihe in eine arithmetiſche und für $d = 0$ geht ſie in eine geometriſche Reihe über.

Der Erklärung gemäß iſt

1. $$t_n = [a + (n - 1)\, d]\, q^{n-1}.$$

Um die Summe der erſten n Glieder zu bilden, geht man wieder darauf aus, die Zwiſchenglieder zum Verſchwinden zu bringen. Aus

$$S_n \quad = a + (a + d)\, q + (a + 2d)\, q^2 + \cdots + [a + (n - 1)\, d]\, q^{n-1}$$

und

$$S_n q = \qquad aq + (a + d)\, q^2 + \cdots + [a + (n - 2)\, d]\, q^{n-1} + [a + (n - 1)\, d]\, q^n$$

ergibt ſich:

$$\begin{aligned} S_n (q - 1) &= [a + (n - 1)\, d]\, q^n - a - dq - dq^2 \cdots - dq^{n-1} \\ &= (a + nd)\, q^n - a - dq - dq^2 \cdots - dq^{n-1} - dq^n \\ &= a\,(q^n - 1) + ndq^n - dq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \end{aligned}$$

und hieraus folgt:

2. $$S_n = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} + \frac{ndq^n}{q - 1} - dq \cdot \frac{q^n - 1}{(q - 1)^2}\,.$$

Die Gleichungen 1. und 2. zwiſchen den 6 Größen einer zuſammengeſetzten Reihe können, wenn n und q unbekannt ſind, nur durch Näherung aufgelöſt werden.

Zuſatz. Iſt $q < 1$ und $n = \infty$, ſo wird S_n unbeſtimmt, da das Glied $\frac{ndq^n}{1 - q}$ die unbeſtimmte Form $\infty \cdot 0$ annimmt.

Nr. 20. Zinſeszins-Rechnung.

Werden die Zinſen eines Kapitals von a Mark an den Zinsterminen jedesmal dem Kapital hinzugefügt und dann mitverzinſt, ſo ſagt man, das Kapital ſei auf Zinſeszinſen ausgeliehen.

a) Iſt p% der Zinsfuß für ein Jahr, ſo wachſen 100 ℳ in einem Jahre auf 100 + p, a ℳ alſo auf $a \cdot \frac{100 + p}{100}$ oder $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ℳ an. Im 2^{ten} Jahre beträgt daher das ausgeliehene Kapitel $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ℳ und wächſt auf $a \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ ℳ an uſw. Die Hinzufügung der Zinſen für jedes hinzutretende Jahr hat demnach die Wirkung, daß das bereits vorhandene Kapital mit dem Faktor $q = 1 + \frac{p}{100}$, dem Zinsfaktor, multipliziert wird. Bezeichnet man daher das Kapital, auf welches a ℳ am Ende des n^{ten} Jahres angewachſen ſind (das Endkapital) mit k, ſo hat man:

1. $$k = aq^n = a \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Der Ableitung nach muß n eine ganze Zahl ſein. Die Formel 1 bleibt jedoch auch dann gültig, wenn n eine gebrochene Zahl von der Form $\frac{r}{s}$ iſt. Man kann nämlich, ohne k zu ändern, die Zeit in r Zeitabſchnitte einteilen, von denen jeder $\frac{1}{s}$ Jahr beträgt, wenn man nur den Zinsfuß p' für die neuen Zeitabſchnitte ſo wählt, daß $\left(1+\frac{p'}{100}\right)^s$ gleich $1+\frac{p}{100}$, alſo

$$q' = 1 + \frac{p'}{100} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{s}} = q^{\frac{1}{s}}$$

wird. In den r neuen Zeitabſchnitten aber wachſen a ℳ auf aq'^r ℳ an, und ſomit erhält man

$$k = aq'^r = aq^{\frac{r}{s}},$$

d. h. die Formel 1. iſt auch für eine gebrochene Zahl richtig.

Aus der Formel 1. folgt:

2.
$$a = \frac{k}{q^n},$$

$$q = \sqrt[n]{\frac{k}{a}},$$

$$n = \frac{\log k - \log a}{\log q}.$$

Zuſatz. Ändert ſich nach n_1 Jahren der Zinsfuß und beträgt der Zinsfaktor für die n_2 noch fehlenden Jahre. $1 + \frac{p_2}{100} = q_2$, ſo iſt

$$k = aq_1^{n_1} q_2^{n_2}.$$

b) Wird am Ende des erſten und jedes folgenden Jahres außer den Zinſen noch das Kapital b dem bereits vorhandenen Kapital hinzugefügt, ſo kommt zu k noch die Summe

$$\begin{array}{ll}
 & bq^{n-1} \text{ (Endkapital der } 1^{\text{ten}} \text{ Nachzahlung)} \\
+ & bq^{n-2} \text{ (〃 〃 } 2^{\text{ten}} \text{ 〃)} \\
+ & bq^{n-3} \text{ (〃 〃 } 3^{\text{ten}} \text{ 〃)} \\
+ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+ & bq \text{ (Endkapital der vorletzten Nachzahlung)} \\
+ & b \text{ (letzte 〃)}
\end{array}$$

hinzu. Die Glieder dieſer Summe

$$bq^{n-1} + bq^{n-2} + \cdots + bq + b$$

bilden eine geometriſche Reihe mit dem Anfangsgliede b (von rechts nach links geleſen!), dem Quotienten q und der Gliederzahl n. Die Summe iſt daher gleich $b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ (Nr. 18, 2), und ſomit erhält man:

3. $$S = aq^n + b\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\cdot$$ **(Sparkaſſenformel.)**

c) Wird dagegen am Ende des erſten und jedes folgenden Jahres die Summe b weggenommen, ſo beträgt die Reſtſumme (das Guthaben)

4. $$D = aq^n - b\cdot\frac{q^n-1}{q-1}\cdot$$

Bei jedem der Fälle b) und c) würde die Berechnung des Faktors q (p) aus den übrigen Stücken auf eine Gleichung führen, die nur durch Annäherung aufgelöſt werden könnte, wenn n größer als 4 iſt.

Treten die Einzahlungen halbjährlich, vierteljährlich uſw. ein, ſo iſt q durch $q' = \sqrt{1+\frac{p}{100}}$, bzw. $\sqrt[4]{1+\frac{p}{100}}$ uſw. und n durch 2n, bzw. 4n uſw. zu erſetzen. Eine einfache Teilung von p wäre nur näherungsweiſe richtig. Handelt es ſich z. B. um vierteljährliche Einzahlungen, ſo iſt deren Wert am Ende des erſten Jahres

$$b + bq' + bq'^2 + bq'^3 = b\frac{q'^4-1}{q'-1}.$$

Nun iſt aber q' oder $\sqrt[4]{1+\frac{p}{100}}$ nicht gleich $1+\frac{p}{400}$, und demnach würde der Wert ungenau ſein, wenn man $q' = 1+\frac{p}{400}$ ſetzte. Bei der Tilgung größerer Anleihen (S. Nr. 21) dürfte dieſe Ungenauigkeit nicht unberückſichtigt bleiben.

d) Die Ein- und Auszahlungen können auf doppelte Weiſe wachſen oder auch abnehmen.

α. Beträgt die jedesmalige Änderung r% und ſetzt man $1 + \frac{r}{100}$, bzw. $1 -- \frac{r}{100}$ gleich g, ſo ſind die Zahlungen der Reihe nach gleich

$$b, \quad bg, \quad bg^2 \ldots \quad bg^{n-1}$$

und ihre Endwerte gleich

$$bq^{n-1} \quad bgq^{n-2}, \quad bg^2q^{n-3}, \ldots\ bg^{n-1}.$$

Dies iſt eine geometriſche Reihe mit dem Anfangsgliede bq^{n-1}, dem Quotienten $\frac{g}{q}$ und der Gliederzahl n. Ihre Summe beträgt $bq^{n-1}\cdot\frac{\left(\frac{g}{q}\right)^n-1}{\frac{g}{q}-1}$ oder $b\frac{g^n-q^n}{g-q}$, und ſomit iſt

5. $$S = aq^n \pm b\cdot\frac{g^n-q^n}{g-q}.$$

β. Beſteht die Änderung in einer Vermehrung oder Verminderung und bezeichnet d den Unterſchied, ſo ſind die Zahlungen gleich

$$b, \quad b+d, \quad b+2d, \ldots \quad b+(n-1)d$$

und ihre Endwerte gleich

$$bq^{n-1}.\ (b+d)q^{n-2},\ (b+2d)q^{n-3}\ \ldots\ b+(n-1)d.$$

Dieſe bilden eine zuſammengeſetzte Reihe mit dem Anfangsgliede bq^{n-1}, dem Quotienten q^{-1}, der Differenz d und der Gliederzahl n. Ihre Summe iſt nach Nr. 19, 2 herzuſtellen und dann mit aq^n durch Addition, bzw. Subtraktion zu vereinigen.

e) Bei der **Kapitalverſicherung***) mit gleichgroßen Jahresbeiträgen wird am Anfange eines jeden Jahres ein feſter Betrag r (die Prämie) an eine Geſellſchaft entrichtet, welche dafür die Verpflichtung übernimmt, am Ende des n^{ten} Jahres dem Verſicherten eine beſtimmte Summe S auszuzahlen.

Wird der Zinsfaktor wieder mit q bezeichnet, ſo hat man

$$S = rq^n + rq^{n-1} + rq^{n-2} + \cdots + rq, \text{ und ſomit}$$

$$\textbf{6.} \qquad S = rq\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Bei **Lebensverſicherungen***), bei denen die Summe S nach dem Tode des Verſicherten auszuzahlen iſt und die Anzahl der Prämien durch Schätzung (nach Sterblichkeitstafeln) beſtimmt wird, könnte die Jahresprämie mit der Verſicherungsſumme gleichfalls durch die Formel 6 verbunden werden und der Geſchäftsgewinn der Geſellſchaft entſprechend wie bei der Kapitalverſicherung in der Höhe des Zinsfußes zum Ausdruck gelangen, allein die Berechnungsweiſe der Verſicherungsgeſellſchaften iſt eine ganz andere.

Nr. 21. Renten und Anleihen.

a) Renten.*)

Erklärung 1. Eine in gleichen Zeitabſchnitten wiederkehrende Einnahme, welche für eine beſtimmte Zeitdauer durch eine einmalige Einzahlung eines Betrages, des Einſatzes, geſichert wird, heißt **Rente** (r). Unter dem Werte (W) einer Rente zu einer beſtimmten Zeit verſteht man die Summe der Werte, welche die einzelnen Rentenbezüge zu dieſer Zeit beſitzen. — Eine Rente heißt gleichmäßig, wenn alle Rentenbezüge gleich groß ſind, und ſteigend, bzw. fallend, wenn dieſe eine geometriſche oder auch eine arithmetiſche Reihe bilden. Iſt das letztere nicht ausdrücklich bemerkt, ſo gilt die Rente als gleichmäßig. Hört die Rente erſt mit dem Tode des Verſicherten auf, ſo heißt ſie **Leibrente.**

Zuſatz. Der Einſatz heißt auch Barwert (B) der Rente. Endwert (E) heißt ihr Wert am letzten Zahlungstage.

Aufg. 1. Den Endwert E einer Jahresrente r zu beſtimmen, welche n mal ausgezahlt werden ſoll. Zinsfuß: $p\%$.

Aufl. Der letzte Rentenbezug iſt nicht mehr zu verzinſen. Der vorletzte iſt ein Jahr zu verzinſen und hat daher den Wert $r\left(1 + \frac{p}{100}\right) = rq$. So ergibt ſich weiter für den

---

*) Über die Behandlung dieſes Gebietes durch die Verſicherungsgeſellſchaften ſ. Anhang I, S. 224 ff.

1^{ten}, 2^{ten}, $3^{\text{ten}}, \ldots$ $(n-1)^{\text{ten}}$, n^{ten} Rentenbezug
rq^{n-1}, rq^{n-2}, $rq^{n-3}, \ldots$ rq, r als Endwert,
und demnach iſt

$$1. \qquad E = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad \textbf{(Rentenformel I.)}$$

Zuſatz. Soll der Wert für den m^{ten} Zahlungstag beſtimmt werden, ſo iſt

$$Wq^{n-m} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

alſo

$$2. \qquad W = \frac{r}{q^{n-m}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Iſt der Einſatz B s Jahre vor dem erſten, alſo $s + n - 1$ Jahre vor dem letzten Zahlungstage gemacht worden, ſo hat man nach Gl. 2:

$$3. \qquad B = \frac{r}{q^{s+n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad \textbf{(Rentenformel II.)}$$

Aufg. 2. Eine Jahresrente r, die n mal auszuzahlen iſt, ſoll in eine andere m Jahre früher beginnende Jahresrente mit t Jahresterminen umgewandelt werden. Zinsfuß: p%.

Aufl. Beſtimmt man die Werte der beiden Renten für den erſten Zahlungstag der erſten Rente und ſetzt die Werte einander gleich, ſo erhält man:

$$\frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{xq^m}{q^{t-1}} \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}, \text{ alſo: } x = \frac{rq^t}{q^m q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q^t - 1}.$$

Aufg. 3. Eine Jahresrente r, die n mal auszuzahlen iſt, ſoll in eine Vierteljahrsrente umgewandelt werden, die mit der erſten zugleich beginnt und m Jahre dauert (4 m mal ausgezahlt wird). Zinsfuß: p%.

Aufl. Am erſten Zahlungstage haben die beiden Renten die Werte:

$$r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \cdots \qquad + \frac{r}{q^{n-1}} = \frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

bzw.

$$x + \frac{x}{q^{\frac{1}{4}}} + \frac{x}{q^{\frac{2}{4}}} + \frac{x}{q^{\frac{3}{4}}} \cdots \quad + \frac{x}{q^{\frac{4m-1}{4}}} = \frac{x}{q^{\frac{4m-1}{4}}} \cdot \frac{q^m - 1}{q^{\frac{1}{4}} - 1},$$

und demnach iſt

$$x = \frac{rq^m \cdot q}{q^n q^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{(q^n - 1)\left(q^{\frac{1}{4}} - 1\right)}{(q^m - 1)\,(q - 1)}.$$

b) Tilgung von Anleihen.

Erklärung 2. Unter Tilgung (Amortiſation) einer Anleihe verſteht man die Begleichung der Schuld durch Zahlungen (Raten, r), die ſich eine Zeitlang in gleichen Zeitabſchnitten wiederholen

Iſt eine Anleihe von a ℳ Nennwert aufgenommen, und werden p % Zinſen berechnet, ſo wird zunächſt der ganze Betrag der Anleihe bis zum Beginn der Tilgung verzinſt. Erſt von dieſem Termin ab fängt die Rückzahlung an. Soll dieſe in der Weiſe vor ſich gehen, daß am Ende eines jeden Jahres eine ſich gleichbleibende Summe r zur Begleichung der noch fälligen Zinſen und zum Rückkauf von Schuldſcheinen verwandt wird, und iſt feſtgeſetzt, daß die Tilgung in n Raten erfolgen ſoll, ſo müſſen ein Jahr vor dem erſten Termin (an dem zum letztenmal nur die Zinſen zu zahlen ſind) die Werte der n Raten zuſammen gleich dem Betrag a der Anleihe ſein, d. h. es iſt

$$\frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \frac{r}{q^3} + \frac{r}{q^4} + \cdots\cdots + \frac{r}{q^n} = a.$$

Die Glieder dieſer Summe bilden eine geometriſche Reihe mit dem Anfangsglied $\frac{r}{q^n}$, dem Quotienten q und der Gliederzahl n. Somit iſt a gleich $\frac{r}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, und daraus folgt:

$$4. \qquad r = \frac{aq^n(q-1)}{q^n - 1}.$$

Zuſatz 1. Mit dem hier berechneten Jahresbedarf r iſt die **Tilgungsrate** nicht zu verwechſeln. Dieſe gibt an, wieviel % der Anleihe am erſten Termin zurückgekauft werden.

Zuſatz 2. Da nach jedem Zahlungstermin die Anzahl der Schuldſcheine kleiner und damit der Zinsbedarf geringer geworden iſt, ſo bleibt an den folgenden Terminen der Jahresbedarf r nur dann unverändert, wenn die Anzahl der einzulöſenden Schuldſcheine zunimmt. Da indeſſen die Zinserſparnis auf den kleinſten Nennwert der ausgegebenen Schuldſcheine abgerundet werden muß, ſo wird die wirkliche Rate bald etwas mehr bald etwas weniger als r betragen. Der Tilgungsplan wird ſo eingerichtet, daß am Schluß alle Schuldſcheine zurückgekauft ſind und der durchſchnittliche Bedarf dem berechneten Jahresbedarf möglichſt nahe kommt.

Zuſatz 3. Bei den meiſten Anleihen iſt die Tilgung eine halbjährliche; in der Gleichung 4 iſt dann q durch q' $\left(q' = \sqrt{1 + \frac{p}{100}}\right)$ zu erſetzen, während n wieder die Anzahl der Termine bezeichnet.

Zuſatz 4. Iſt bei der Tilgung eine Zu- oder Abnahme des Jahresbedarfs beabſichtigt, ſo hat man für den Anſatz ſinngemäß die Gleichung 5 in Nr. 20 oder die Gleichung 2 in Nr. 19 zu verwenden.

Abſchnitt III.

Algebra.

Zweiter Teil.

Kapitel 6.

Lehre von den Gleichungen.

Nr. 22. Begriff der Gleichung.

Zur Wiederholung des Funktionsbegriffs. Iſt eine Größe y von einer veränderlichen Größe x derart abhängig, daß zu jedem Zahlenwerte von x ein beſtimmter Zahlenwert von y gehört (oder auch mehrere beſtimmte Zahlenwerte von y gehören), ſo heißt y eine Funktion von x; man nennt dann x die unabhängige und y die abhängige Veränderliche. Iſt das Abhängigkeitsverhältnis durch irgendeine für alle Zahlenwerte von x geltende Rechenvorſchrift ausgedrückt, ſo ſagt man, y ſei als eine entwickelte Funktion von x gegeben; muß aber die Vorſchrift, nach der y zu berechnen iſt, erſt aus einer zwiſchen x und y beſtehenden Gleichung abgeleitet werden, ſo wird y als eine unentwickelte Funktion von x bezeichnet.

Setzt ſich die Rechenvorſchrift für eine entwickelte Funktion aus einer endlichen Anzahl von Rechnungen mit der Veränderlichen x zuſammen, und kommen bei dieſen außer den vier Grundrechnungsarten

1) keine weiteren Rechnungen vor, ſo heißt die Funktion rational,

2) auch Wurzelausziehungen vor, ſo heißt die Funktion algebraiſch.

In allen anderen Fällen wird die Funktion als tranſzendent bezeichnet. Vgl. Nr. 7.

Treten in der Rechenvorſchrift für eine rationale Funktion keine Brüche auf, deren Nenner die Veränderliche x enthalten, ſo nennt man die Funktion ganze rationale Funktion. Jede ganze rationale Funktion von x läßt ſich durch eine Summe aus (einer endlichen Anzahl von) Potenzen von x darſtellen (in eine Potenzreihe entwickeln). Iſt n der Exponent der höchſten in der Summe vorkommenden Potenz von x, ſo gibt n den Grad der Funktion an.

Bei entwickelten Funktionen von mehreren Veränderlichen beſteht die gleiche Einteilung. Als Grad einer ganzen rationalen Funktion von mehreren Veränderlichen gilt die größte unter den Summen der Exponenten, welche die Veränderlichen bei den einzelnen Gliedern beſitzen.

Erklärung 1. Iſt der Wert einer ganzen Funktion gleich 0, welche Größe auch der (den) Veränderlichen gegeben werden mag, ſo ſagt man, die Funktion ſei identiſch gleich 0 (z. B. $4x^2 - 6x^2 + 2x^2$).

Iſt eine Funktion nicht identiſch gleich 0, und wird behauptet, daß ſie einen beſtimmten Wert annimmt, ſo entſteht eine **Gleichung.**

Erklärung 2. Eine Gleichung n^{ten} Grades iſt die Behauptung, daß eine ganze Funktion n^{ten} Grades einen gegebenen Wert annimmt oder mit einer zweiten ganzen Funktion, deren Grad n nicht überſteigt, den gleichen Wert hat.

Erklärung 3. Eine Gleichung auflöſen heißt Werte (Wurzeln) beſtimmen, welche der (den) Veränderlichen beizulegen ſind, damit die Funktion die angegebene Größe erhält.

Nr. 23. Anzahl der Wurzeln von Gleichungen n^{ten} Grades mit einer Unbekannten.

Soll eine Funktion vom Grade n

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}x + A_n$$

den Wert A annehmen, ſo entſteht durch Vereinigung der Größen A und A_n und durch Beſeitigung des Faktors A_0 die Gleichung n^{ten} Grades:

$$1.\quad f_n(x) \equiv x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Nach einem Satze, deſſen Beweis in der niederen Mathematik nicht gegeben werden kann, muß dieſe Gleichung mindeſtens eine Wurzel beſitzen; es muß alſo eine Größe α_1 vorhanden ſein, für welche die Summe

$$\alpha_1{}^n + a_1\alpha_1{}^{n-1} + a_2\alpha_1{}^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\alpha_1 + a_n$$

gleich 0 wird. Subtrahiert man daher dieſe Summe von der linken Seite der Gleichung 1, ſo hat dies weiter keinen Einfluß, als daß die Form der Gleichung ſich ändert. Man erhält dann aber:

$$(x^n - \alpha_1{}^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha_1{}^{n-1}) + a_2(x^{n-2} - \alpha_1{}^{n-2}) + \cdots + a_{n-1}(x - \alpha_1) = 0$$

und hieraus, da der Faktor $(x - \alpha_1)$ abgeſondert werden kann,

$$f_n(x) \equiv (x - \alpha_1)f_{n-1}(x) = 0.$$

Wird dieſe Gleichung dadurch befriedigt, daß man den zweiten Faktor gleich 0 ſetzt, ſo erhält man eine Gleichung vom Grade n — 1. Für dieſe gelten dieſelben Überlegungen wie für die Gleichung n^{ten} Grades. Es muß daher eine Größe α_2 vorhanden ſein, welche die Gleichung $f_{n-1}(x) = 0$ befriedigt und zu der neuen Umgeſtaltung führt:

$$2.\quad f_n(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)f_{n-2}(x) = 0.$$

In gleicher Weiſe muß die Gleichung $f_{n-2}(x) = 0$ mindeſtens eine Wurzel beſitzen. Wird dieſe mit α_3 bezeichnet, ſo folgt:

$$f_n(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)f_{n-3}(x) = 0.$$

Da mit jeder Abſonderung eines linearen Faktors der Grad der neuen Funktion um 1 kleiner als der Grad der vorhergehenden wird, ſo gelangt man ſchließlich zu einer Funktion erſten Grades von der Form $x - \alpha_n$. Es ergibt ſich alſo:

$$\mathbf{3.}\quad f_n(x) \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_n) = 0.$$

Aus der Form dieſer Gleichung laſſen ſich mehrere Schlüſſe ziehen.

a) Die Anzahl der Faktoren beträgt n, d. h.:

Lehrſatz 1. Die Gleichung n^{ten} Grades hat n Wurzeln.

Die Wurzeln brauchen jedoch nicht ſämtlich voneinander geſchieden zu ſein (mehrfache Wurzeln!).

b) Da keiner der n Faktoren gleich 0 wird, wenn x ein von den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ verſchiedener Wert beigelegt wird, ſo folgt:

Lehrſatz 2. Die Gleichung n^{ten} Grades kann nur n Wurzeln beſitzen.

Nr. 24. Komplexe (imaginäre) Wurzeln.

Iſt eine Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten $f_n(x) = 0$ komplex (imaginär) und von der Form $\alpha + \beta i$, und wird in der Gleichung die Größe x durch $\alpha + \beta i$ erſetzt, ſo führt die nach Ausführung der Potenzen von $\alpha + \beta i$ mögliche Trennung der reellen und imaginären Teilprodukte auf eine Gleichung von der Geſtalt $A + Bi = 0$, in der A und B reelle Zahlen ſind. Dieſe Gleichung verlangt, daß A und B gleichzeitig den Wert 0 haben. Zur Bildung der Größe A tragen nur die geraden Potenzen von βi bei, während in Bi alle Teilprodukte mit ungeraden Potenzen von βi vereinigt ſind. Wird daher $\alpha + \beta i$ durch $\alpha - \beta i$ erſetzt, ſo entſteht der Ausdruck $A - Bi$, und dieſer muß ebenfalls gleich Null ſein, da $A = 0$ und $B = 0$ iſt. Iſt alſo $\alpha + \beta i$ eine Wurzel der Gleichung $f_n(x) = 0$, ſo iſt es auch $\alpha - \beta i$, d. h.:

Lehrſatz 3. Unter den Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten können komplexe Wurzeln nur paarweiſe und von konjugierter Form vorkommen.

Folgerung 1. Iſt n eine ungerade Zahl, ſo muß die Gleichung $f_n(x) = 0$ mindeſtens eine reelle Wurzel beſitzen.

Folgerung 2. Da $[x - (\alpha + \beta i)]\,[x - (\alpha - \beta i)] = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, d. h. eine Funktion zweiten Grades mit reellen Koeffizienten iſt, ſo folgt, daß bei der Zerlegung einer Funktion $f_n(x)$ mit komplexen Nullſtellen in die größtmögliche Anzahl von Faktoren mit reellen Koeffizienten ſo viel Faktoren zweiten Grades auftreten, wie komplexe Wurzelpaare vorhanden ſind.

Nr. 25. Wurzeln und Koeffizienten.

Die Ausführung des Produktes

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n)$$

kann ſo geſchehen, daß zuerſt die Multiplikation $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$ ausgeführt, alsdann das Reſultat mit $(x - \alpha_3)$, das dadurch entſtandene Reſultat mit $(x - \alpha_4)$ uſw. multipliziert und die Teilprodukte mit gleichen Potenzen von x addiert werden. Es iſt aber

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3,$$

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4) = x^4 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)x^3 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4)x^2 - (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4)x + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Aus dieſen Gleichheiten laſſen ſich bereits die Regeln erkennen, nach denen die Koeffizienten einer Gleichung n^{ten} Grades aus den Wurzeln gebildet werden.

Lehrſatz 4. (Satz von **Girard.**) 1. Der Koeffizient von x^n iſt gleich 1.

2. Der Koeffizient von x^{n-1} iſt die **negative** Summe der Wurzeln.

3. Der Koeffizient von x^{n-2} iſt die **poſitive** Summe aller Produkte, die aus je **zwei** Wurzeln gebildet werden können.

4. Der Koeffizient von x^{n-3} iſt die **negative** Summe aller Produkte, die aus je **drei** Wurzeln gebildet werden können.

5. Der Koeffizient von x^{n-k} iſt gleich dem Produkt aus $\mathbf{(-1)^k}$ und der Summe aller Produkte, die aus **je k** Wurzeln gebildet werden können.

Von dieſen Regeln (die durch einen Induktionsſchluß gefunden worden ſind), muß noch bewieſen werden, daß ſie allgemein gültig ſind. Zu dem Zweck nimmt man an, daß ſie für ein Produkt aus n Differenzen richtig ſeien, und beweiſt, daß ſie unverändert bleiben, wenn das Produkt mit dem $(n + 1)^{\text{ten}}$ Faktor $x - \alpha_{n+1}$ multipliziert wird. Es ſei alſo

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) = x^n - \sum_1^n \alpha_\varkappa x^{n-1} + \sum_1^n \alpha_\varkappa \alpha_\lambda x^{n-2} - \sum_1^n \alpha_\varkappa \alpha_\lambda \alpha_\mu x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n.$$

Es iſt dann $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)\cdot(x-\alpha_{n+1})$

$$= x^{n+1} - \sum_1^n \alpha_\varkappa x^n + \sum_1^n \alpha_\varkappa \alpha_\lambda x^{n-1} - \cdots + (-1)^n \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n x$$

$$- \alpha_{n+1} x^n + \alpha_{n+1} \sum_1^n \alpha_\varkappa x^{n-1} - \cdots + (-1)^n \alpha_{n+1} \sum_1^n \alpha_\varkappa \cdots \alpha_\tau x$$

$$+ (-1)^{n+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \alpha_{n+1},$$

$$= x^{n+1} - \sum_1^{n+1} \alpha_\varkappa x^n + \sum_1^{n+1} \alpha_\varkappa \alpha_\lambda x^{n-1} + \cdots + (-1)^{n+1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \alpha_{n+1}.$$

Damit iſt der Lehrſatz 4. (durch einen vollſtändigen Induktionsſchluß) als allgemein richtig nachgewieſen.

Aus der Zuſammenſetzung des abſoluten (von x freien) Gliedes

$$(-1)^n \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdots \alpha_n$$

läßt ſich ein Schluß auf die Anzahl der negativen Wurzeln ziehen. Da komplexe Wurzeln nur paarweiſe und von konjugierter Form vorkommen können, und das Produkt zweier konjugierten Zahlen poſitiv iſt $[(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2!]$, ſo üben komplexe Wurzeln keinen Einfluß auf das Vorzeichen des abſoluten Gliedes aus. Somit ergibt ſich:

Die Anzahl der negativen Wurzeln unterſcheidet ſich von der Anzahl der poſitiven um eine ungerade Zahl, wenn
bei einem geraden n das abſolute Glied negativ iſt,
„ „ ungeraden n „ „ „ poſitiv „ .

Nr. 26. Anwendungen.

a) In einer reziproken Gleichung mit den Wurzeln α, β $\frac{1}{\alpha}$ und $\frac{1}{\beta}$ iſt der Koeffizient von

x^3 gleich $-\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$,

x^2 „ $+\left(\alpha\beta+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\frac{1}{\beta}+\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\beta\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right)$,

x „ $-\left(\alpha\cdot\beta\cdot\frac{1}{\alpha}+\alpha\cdot\beta\cdot\frac{1}{\beta}+\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\beta\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right)$

oder $-\left(\beta+\alpha+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)$

und das von x freie Glied gleich $+\alpha\cdot\beta\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}$ oder gleich $+1$. Die Koeffizienten von x^3 und x ſind alſo einander gleich, und der Koeffizient von x^4 iſt gleich dem abſoluten (von x freien) Gliede, d. h. die Gleichung beſitzt die für eine reziproke Gleichung charakteriſtiſche Form. (S. Nr. 13.)

b) Da das abſolute Glied der Gleichung n^{ten} Grades die n Wurzeln als Faktoren enthält, ſo kann man es in ſeine Faktoren zerlegen und durch Einſetzen feſtſtellen, ob einer der Faktoren die Gleichung befriedigt. Iſt dies bei dem Faktor α der Fall, ſo kann man $f_n(x)$ durch $x - \alpha$ dividieren und dadurch zu einer Gleichung vom Grade $n - 1$ gelangen. Wird dann mit der neuen Gleichung in derſelben Weiſe verfahren, ſo erhält man eine Gleichung vom Grade $n - 2$ uſw. Häufig gelingt auf dieſem Wege die Auflöſung einer Gleichung höheren Grades.

Beiſpiel 1. In der Gleichung

$$x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24 = 0$$

hat das abſolute Glied 24 die Faktoren ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12 und ± 24. Der Faktor $+1$ befriedigt die Gleichung. Da

$$(x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24) : (x - 1) = x^3 - x^2 - 14x + 24$$

iſt, ſo genügen die übrigen Wurzeln der Gleichung:

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0.$$

Dieſe wird durch $x = +2$ befriedigt. Nun iſt aber

$$(x^3 - x^2 - 14x + 24) : (x - 2) = x^2 + x - 12,$$

und ſomit entſteht die neue Gleichung:

$$x^2 + x - 12 = 0$$

mit den Wurzeln 3 und -4. Demnach iſt

$$(x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 38x - 24) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4).$$

Beiſpiel 2. Es ſei $x^5 - 8x^4 + 20x^3 + 10x^2 - 101x + 78 = 0$. 78 enthält die Faktoren ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 13, ± 26, ± 39 und ± 78. Von dieſen erweiſt ſich $+1$ als eine Wurzel. Die Diviſion

$$(x^5 - 8x^4 + 20x^3 + 10x^2 - 101x + 78) : (x - 1)$$

führt auf die Gleichung:

$$x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 23x - 78 = 0,$$

und dieſe wird durch $x = -2$ befriedigt. Die Diviſion

$$(x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 23x - 78) : (x + 2)$$

liefert

$$x^3 - 9x^2 + 31x - 39 = 0.$$

$x = 3$ iſt eine Wurzel dieſer Gleichung. Da

$$(x^3 - 9x^2 + 31x - 39) : (x - 3) = x^2 - 6x + 13$$

iſt, ſo bleibt

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

mit den Wurzeln $3 + 2i$ und $3 - 2i$. Somit ſind die 5 Wurzeln gleich $+1$, -2, $+3$, $3 + 2i$ und $3 - 2i$.

c) Hat die Gleichung nicht die Wurzeln ± 1, ± 2 oder ± 3, ſo erfordert das Einſetzen der Teiler, zumal wenn der Grad 4 überſteigt, ein umſtändliches Rechnen. Man kann jedoch ſchneller zum Ziele gelangen, wenn man nach der Zerlegung des Gliedes a_n ſofort mit der Diviſion durch die linearen Faktoren $x - \alpha_k$ beginnt. Findet man dann, daß α eine Wurzel iſt, ſo hat man gleichzeitig die erſte durch Reduktion entſtehende Gleichung erhalten. Bei der Diviſion genügt es, daß man die Koeffizienten der jedesmaligen Quotienten hinſchreibt und durch Angabe des Reſtes anzeigt, ob die Diviſion aufgegangen iſt.

Das Verfahren möge bei dem Beiſpiel 2 angewandt werden.

Das abſolute Glied hat die Teiler 1, 2, 3, 6, 13, 26 und 78.

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
\multicolumn{6}{l|}{(x^5-8x^4+20x^3+10x^2-101x+78)} & \\ \hline
1- 7 & +13 & +23 & -78 & (0) & & :(x-1);\ +1 \text{ iſt eine Wurzel.}\\
 & 1-8 & +21 & -2 & (-76) & & :(x+1);\ -1 \text{ iſt keine } =\\
 & 1-5 & +3 & +29 & (-20) & & :(x-2);\ +2 \text{ iſt keine } =\\
 & 1-9 & +31 & -39 & (0) & & :(x+2);\ -2 \text{ iſt eine } =\\
 & & 1 & -6 & +13 & (0) & :(x-3);\ +3 \text{ iſt eine } =
\end{array}$$

Nun iſt noch die Gleichung $x^2 - 6x + 13 = 0$ aufzulöſen.

Nr. 27. Auflösbarkeit der Gleichungen mit einer Unbekannten.

Eine Gleichung n^{ten} Grades von der binomiſchen Form $x^n = a$ iſt ſtets auflösbar. Die Wurzeln erſcheinen ſämtlich unter der Form $x = \sqrt[n]{a}$, und dieſe n-deutig. (S. Nr. 10, Lehrſatz 15.)

Da in der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \cdots + a_n = 0$$

die Unbekannte aus ihrer Verbindung mit den Koeffizienten nicht losgelöſt werden kann, ſo iſt die Gleichung nur dann auflösbar, wenn es möglich iſt, entweder die Potenzreihe in ein Produkt zu verwandeln (ſ. Nr. 26b), oder durch Einführung neuer Unbekannten, die mit x durch auflösbare Gleichungen verbunden ſind, aus der gegebenen Gleichung binomiſche Gleichungen für die neuen Unbekannten abzuleiten. (Vgl. Nr. 31.)

Anmerkung. Die Auflöſung der Gleichung 2^{ten} Grades durch quadratiſche Ergänzung bildet hierzu das einfachſte Beiſpiel. Denn wenn aus $x^2 + px = -q$ die Gleichung $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q$ gebildet wird, ſo iſt dies nichts anderes wie die Zurückführung der gegebenen Gleichung auf die Form $z^2 = \frac{p^2}{4} - q$ durch die Subſtitution $x = z - \frac{p}{2}$. Dieſe Subſtitution hätte aber auch auf dem folgenden Wege gefunden werden können: Man erſetzt x durch $z + a$ und erhält dann $z^2 + (2a + p)z + a^2 + pa + q = 0$. Da nun die erſte Potenz von z verſchwinden ſoll, ſo iſt a gleich $-\frac{p}{2}$ zu ſetzen, uſw.

Nr. 28. Wurzeln von Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Soll eine ganze Funktion n^{ten} Grades von mehr als einer Veränderlichen einen beſtimmten Wert annehmen, ſo entſteht eine Gleichung von der Form

$$f_n(x, y, z \ldots) = 0.$$

Dieſe kann als Gleichung gelten

a) für x, wenn man y, z ... beliebige Wert gibt,
b) = y, = = x, z ... = = = uſw.

Daraus folgt aber, daß durch die Gleichung $f_n(x, y, z \ldots) = 0$ die einzelnen Veränderlichen nicht beſtimmt, ſondern nur in eine gewiſſe Abhängigkeit voneinander gebracht ſind.

Insbeſondere bindet die Gleichung

$$f_n(x, y) = 0$$

die Veränderlichen x und y derart aneinander, daß jedem Werte von x eine beſtimmte Anzahl von (reellen oder komplexen) Werten für y entſpricht, und umgekehrt. Hieraus folgt:

Lehrſatz 5. Die Gleichung $f_n(x, y,) = 0$ reicht zur Beſtimmung der Größen x und y nicht aus, da ſie durch eine unendliche Anzahl von zuſammengehörigen Wertepaaren befriedigt werden kann.

Der gleiche Satz gilt für eine zweite, von der erſten unabhängige Gleichung

$$f_m(x, y) = 0.$$

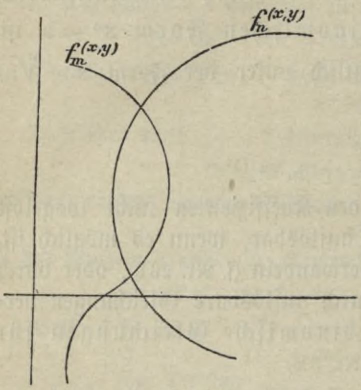


Fig. 24.

Laſſen ſich die beiden Gleichungen graphiſch darſtellen, und haben die Bilder der Gleichungen einen oder mehrere Punkte gemein, ſo entſprechen dieſe Punkte Wertepaaren von x und y, welche beiden Gleichungen zugleich genügen. Dieſe Wertepaare, die Wurzeln des Gleichungsſyſtems $f_n(x, y) = 0$ und $f_m(x, y) = 0$, ſind durch die beiden Gleichungen vollſtändig beſtimmt, falls die Gleichungen ſich nicht widerſprechen. Somit ergibt ſich:

Lehrſatz 6. Zur Beſtimmung zweier Unbekannten ſind zwei voneinander unabhängige und ſich nicht widerſprechende Gleichungen erforderlich und ausreichend.

Anmerkung 1. Durch entſprechende Betrachtungen wird gezeigt, daß zur Beſtimmung von n Unbekannten n voneinander unabhängige Gleichungen erforderlich ſind. Auf den Beweis dieſer Erweiterung kann jedoch nicht eingegangen werden.

Anmerkung 2. Auf den Fall, daß zwei voneinander unabhängige und ſich nicht widerſprechende Gleichungen keine reellen Wurzelpaare beſitzen, läßt ſich dieſe geometriſche Betrachtung nicht ausdehnen, weil die Bilder der Gleichungen dann keinen Punkt gemeinſam haben.

Über die Anzahl der Wurzelpaare bei Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten ſ. Nr. 15

Nr. 29. Auflösbarkeit der Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten ſind nur dann bezüglich einer Unbekannten auflösbar, wenn es gelingt, aus ihnen eine Gleichung für dieſe Unbekannte abzuleiten, welche aufgelöſt werden kann.

Da die geſuchten Werte der Unbekannten ſämtlichen Gleichungen genügen müſſen, ſo iſt man berechtigt,

1. eine Unbekannte aus einer der Gleichungen auszudrücken und in den übrigen Gleichungen durch den gefundenen Ausdruck zu erſetzen. Dadurch wird die Anzahl der Unbekannten um 1 vermindert. Die Wiederholung dieſes Verfahrens führt ſchließlich auf eine Gleichung mit einer Unbekannten. (Löſung durch Einſetzen.)

2. eine der Unbekannten aus ſämtlichen Gleichungen auszudrücken und die gefundenen Ausdrücke einander gleich zu ſetzen. Die Wirkung des Verfahrens iſt dieſelbe wie im Falle 1. (Löſung durch Gleichſetzen.)

3. je zwei der Gleichungen durch Multiplikation derart umzugeſtalten, daß durch Addition ihrer linken Seiten der Koeffizent derſelben Unbekannten jedesmal gleich 0 wird. Auch hier iſt die Wirkung dieſelbe wie im Falle 1. (Löſung durch Addition.)

Die Verwendbarkeit der genannten Methoden hängt jedoch davon ab, daß ſowohl die urſprünglichen als auch die neu entſtehenden Gleichungen bezüglich der einzelnen Unbekannten auflösbar ſind. Dieſe Bedingung wird im allgemeinen nur von den Gleichungen erſten Grades erfüllt

Gleichungen höheren Grades mit mehr als einer Unbekannten ſind hiernach nur lösbar, wenn ſie beſondere Formen beſitzen. (S. Nr. 14.)

Bei den Gleichungen erſten Grades mit **drei** Unbekannten läßt ſich noch die folgende Auflöſungsmethode mit Vorteil verwenden: Man drückt aus zwei von den Gleichungen zwei Unbekannten mit Benutzung der dritten aus und ſetzt die gewonnenen Ausdrücke in die dritte Gleichung ein. Hierdurch geht dieſe in eine Gleichung für die dritte Unbekannte über. **(Löſung durch gleichzeitiges Einſetzen.)**

Beiſpiel.

$$\begin{array}{l} 2x + 6y + 5z = 29 \\ 3x + 4y - 2z = 5 \\ \underline{4x - 2y + 7z = 21} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|r} 2x + 6y = 29 - 5z & -2 & 3 \\ \underline{3x + 4y = 5 + 2z} & 3 & -2 \end{array}$$

$$x = \frac{16z - 43}{5},\ y = \frac{77 - 19z}{10},$$

und nun nach der dritten Gleichung:

$$\frac{64z - 172}{5} - \frac{154 - 38z}{10} + 7z = 21$$

oder $236z = 708$ und $z = 3.$

Es iſt dann $x = \frac{48 - 43}{5} = 1$ und $y = \frac{77 - 57}{10} = 2.$

Nr. 30. Unvollſtändige Gleichungsſyſteme.

(Diophantiſche Gleichungen.)

Iſt die Anzahl der Gleichungen kleiner als die der Unbekannten, ſo genügen unzählig viel Wertegruppen den aufgeſtellten Bedingungen, und die Aufgabe iſt unbeſtimmt. Es liegt jedoch in der Natur zahlreicher derartiger Aufgaben, daß nur ganzzahlige Werte, und unter dieſen wiederum nur poſitive Werte der Unbekannten zuläſſig ſind, oder daß die ganzzahligen Werte gewiſſe Grenzen nicht überſteigen dürfen (z. B. Anzahl der Tage eines Monats, Anzahl der Monate eines Jahres u. dgl.). Durch dieſe Bedingungen aber, die bei der Aufſtellung der Gleichungen nicht mit benutzt werden, wird die Unbeſtimmtheit eingeſchränkt und kann in beſonderen Fällen ganz aufgehoben werden.

a) Unbeſtimmte Gleichungen erſten Grades.

Die allgemeine Form einer diophantiſchen Gleichung erſten Grades zwiſchen **zwei** Unbekannten lautet:

$$ax \pm by = c,$$

wo a, b und c poſitive ganze Zahlen bezeichnen und weder a, b und c, noch a und b allein einen gemeinſchaftlichen Faktor beſitzen. Sind nun α und β zwei Werte für x und y, welche der Gleichung $ax \pm by = c$ genügen, ſo müſſen alle Werte von der Form

$x = \alpha + nb$ und $y = \beta - na$ die Gleichung $ax + by = c$,
$x = \alpha + nb$ ⸗ $y = \beta + na$ ⸗ ⸗ $ax - by = c$

befriedigen. Unter dieſen Wertepaaren kann im erſten Falle nur eine begrenzte Anzahl aus poſitiven Zahlen beſtehen. Daraus folgt:

Lehrſatz 7. Die Anzahl der Wurzelpaare iſt nur bei der Gleichung $ax - by = c$ unbegrenzt.

Die Auflöſung der diophantiſchen Gleichungen erſten Grades geſchieht nach der Eulerſchen Reduktionsmethode in folgender Weiſe:

Man drückt aus der Gleichung zunächſt diejenige Unbekannte aus, welche den kleineren Koeffizienten hat, und zerlegt den gefundenen Ausdruck durch Diviſion in zwei Teile, von denen der erſte ſicher eine ganze Zahl iſt und der zweite die Form eines Bruches hat. Dieſen Bruch ſetzt man gleich einer neuen Unbekannten und behandelt dann die dadurch entſtehende Gleichung wie die urſprüngliche. Da die Koeffizienten dabei kleiner geworden ſein müſſen, ſo führt die Fortſetzung dieſes Verfahrens ſchließlich zu einem ganzzahligen Ausdruck für die vorletzte der neu eingeführten Unbekannten. Damit aber ergibt ſich die Möglichkeit, rückwärtsſchreitend die Wurzeln der urſprünglichen Gleichung durch die zuletzt eingeführte Unbekannte ganzzahlig auszudrücken und dann feſtzuſtellen, für welche Werte dieſer Unbekannten die Wurzelpaare poſitiv ſind

Beiſpiel 1. $13x + 22y = 435.$

a) $$x = \frac{435 - 22y}{13} = 33 - 2y + \frac{4y + 6}{13} = 33 - 2y + \mathbf{z}.$$

b) $$13z = 4y + 6, \text{ alſo}$$

$$y = \frac{13z - 6}{4} = 3z - 1 + \frac{z - 2}{4} = 3z - 1 + \mathbf{n}.$$

c) Aus $z - 2 = 4n$ folgt: $z = 4n + 2$. Es iſt dann $y = 3(4n + 2) - 1 + n = \mathbf{13n + 5}$ und $x = 33 - 2(13n + 5) + 4n + 2 \mathbf{= 25 - 22n}$.

So erhält man für

n = 0	1
x = 25	3
y = 5	18.

Beiſpiel 2. $\mathbf{34x - 19y = 85.}$

34 und 85 haben den gemeinſchaftlichen Faktor 17, und daher muß auch y den Faktor 17 enthalten. Man kann alſo $y = 17z$ ſetzen und ſomit die Gleichung bilden:

$$2x - 19z = 5.$$

a) $$x = \frac{5 + 19z}{2} = 3 + 9z + \frac{z - 1}{2} = 3 + 9z + \mathbf{n}.$$

b) Aus $z - 1 = 2n$ folgt: $z = 2n + 1$. Es iſt dann $x = 3 + 9(2n + 1) + n \mathbf{= 19n + 12}$ und $\mathbf{y = 17(2n + 1)}$.

Sind mehr als zwei Unbekannten vorhanden, ſo ſtellt man zunächſt eine Gleichung mit zwei Unbekannten her, löſt dieſe auf und leitet dann aus den gegebenen Gleichungen die Ausdrücke für die übrigen Unbekannten ab.

Beiſpiel 3. $$5x - 7y + 9z = 33,$$
$$4x + 11y - 15z = 65.$$

Die Elimination von x liefert die Gleichung

$$83y - 111z = 193.$$

a) $$y = \frac{193 + 111z}{83} = z + 2 + \frac{28z + 27}{83} = z + 2 + \mathbf{u}.$$

b) $$83u - 28z = 27, \text{ alſo}$$

$$z = \frac{83u - 27}{28} = 3u - 1 - \frac{u - 1}{28} = 3u - 1 - \mathbf{n}.$$

c) Aus $u - 1 = 28n$ folgt: $u = 28n + 1$.

Es iſt dann $z = 84n + 3 - 1\,v = 83n + 2,$

$$y = 83n + 2 + 2 + 28n + 1 = 111n + 5$$

und $$x = \frac{1}{5}(33 + 777n + 35 - 747n - 18) = 6n + 10.$$

Man hat alſo die Werte-Gruppen:

$$\mathbf{x = 10 + 6n, \quad y = 5 + 111n, \quad z = 2 + 83n.}$$

Enthält die Schlußgleichung mehr als 2 Unbekannten, ſo heißt ſie **mehrfach unbeſtimmt.** Zu ihrer Auflöſung nimmt man innerhalb der gegebenen Einſchränkungen alle bis auf 2 als willkürlich an, entwickelt für dieſe die Ausdrücke und ſetzt dann in die Ausdrücke die zuläſſigen Werte der als willkürlich angenommenen Unbekannten ein.

Beiſpiel. $2x + 3y + 5z = 27.$

Es iſt $z = \frac{27 - 2x - 3y}{5}$, und da x und y mindeſtens den Wert 1 haben müſſen, ſo kann z nicht größer als $\frac{22}{5}$, d. h. nicht größer als 4 werden.

Nun liefert die Gleichung $2x + 3y = 27 - 5z$
die Ausdrücke: $x = 12 - z - 3n,$
$y = 1 - z + 2n;$

es kann daher für	z = 1	2	3	4
n die Werte annehmen	1, 2, 3	1, 2, 3	2	2,

und ſomit ergeben ſich die Auflöſungsgruppen:

x = 8	5	2	7	4	1	3	2
y = 2	4	6	1	3	5	2	1
z = 1	1	1	2	2	2	3	4.

b) Gleichungen zweiten Grades (diophantiſche Gleichungen).

Die Auflöſung der unbeſtimmten Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

zunächſt in rationalen und erſt dann in poſitiven ganzen Zahlen iſt mit elementaren Mitteln nur in beſonderen Fällen möglich.

Erſter Fall. Die Gleichung iſt wenigſtens für eine der Unbekannten vom erſten Grade.

Man löſt in dieſem Falle die Gleichung für die Unbekannte auf, die nur im erſten Grade vorkommt, und geſtaltet den gefundenen Ausdruck ſo um, daß leicht entſchieden werden kann, für welche ganzzahligen Werte der anderen Unbekannten auch die erſte eine ganze Zahl wird.

Beiſpiel 1. Es ſei $6xy - 5x - 4y = 13$, alſo $y(6x - 4) = 5x + 13$ und $y = \frac{5x + 13}{6x - 4}$.
Bildet man hieraus: $6y = \frac{15x + 39}{3x - 2}$ oder $6y = \frac{15x - 10 + 49}{3x - 2} = 5 + \frac{49}{3x - 2}$, ſo erkennt man leicht, daß nur die Werte $x = 1$ und $x = 3$ zuläſſig ſein können. Beide Werte ſind verwendbar und liefern $y = 9$, bzw. $y = 2$.

Beiſpiel 2. Es ſei $4y^2 - 3xy - 5x + 11y - 41 = 0$,

alſo $x(3y + 5) = 4y^2 + 11y - 41$ und $x = \frac{4y^2 + 11y - 41}{3y + 5}$.

Bildet man hieraus

$$3x = \frac{12y^2 + 33y - 123}{3y + 5} = \frac{12y^2 + 20y + 12y + 20 + y - 143}{3y + 5} = 4(y + 1) - \frac{143 - y}{3y + 5},$$

ſo erkennt man leicht, daß das kleinſte poſitive ganzzahlige Wurzelpaar die Werte $x = 2$ und $y = 3$ ſind.

Zweiter Fall. Die Gleichung läßt ſich auf eine Form bringen, in der beide Seiten als Produkte aus zwei Faktoren erſten oder nullten Grades dargeſtellt werden können. (Verfahren nach **John Leslie**, Profeſſor in Edinburgh, † 1832.)

Lautet in dieſem Falle die Gleichung:

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = (\alpha x + \beta y + \gamma)(\alpha' x + \beta' y + \gamma'),$$

ſo kann man

$$ax + by + c = n(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

und

$$a'x + b'y + c' = \frac{1}{n}(\alpha' x + \beta' y + \gamma')$$

ſetzen und dieſe Gleichungen nach x und y auflöſen. Man hat dann der Zahl n Werte beizulegen, für welche x und y ganze poſitive Zahlen werden.

Beiſpiel 3. Aus $5x^2 - 3y^2 = 6(x + y)$ folgt zunächſt $x(5x - 6) = 3y(y + 2)$.

Setzt man:

$$5x - 6 = n(y + 2), \text{ alſo } x = \frac{3y}{n},$$

ſo ergibt ſich:

$$x = \frac{6(n + 3)}{15 - n^2} \text{ und } y = \frac{2n(n + 3)}{15 - n^2}$$

und als kleinſtes poſitives und ganzzahliges Wurzelpaar: $x = 6$ und $y = 6$.

Beiſpiel 4. Aus $3x^2 - 7xy + 4y^2 - 5x + 10y - 10 = 0$

folgt zunächſt:

$$(3x - 4y)(x - y) = 5(x - 2y + 2).$$

Setzt man

$$3x - 4y = 5n, \text{ alſo } x - y = \frac{1}{n}(x - 2y + 2),$$

ſo ergibt ſich:

$$x = \frac{8 - 5n(n - 2)}{n + 2} \text{ und } y = \frac{6 - 5n(n - 1)}{n + 2}$$

und als kleinſtes poſitives und ganzzahliges Wurzelpaar $x = 4$ und $y = 3$.

Beiſpiel 5. Für welche ganzzahligen, poſitiven Werte von x entſteht aus dem Ausdruck $3x^2 - 5x - 1$ das Quadrat einer ganzen Zahl?

Setzt man $3x^2 - 5x - 1 = z^2$ oder, um zerlegen zu können, $3x^2 - 5x - 2 = z^2 - 1$,

ſo hat man:

$$(3x + 1)(x - 2) = (z + 1)(z - 1).$$

Aus

$$3x + 1 = n(z + 1)$$

und

$$x - 2 = \frac{1}{n}(z - 1)$$

ergibt ſich dann: $x = \frac{2n^2 - 2n + 1}{n^2 - 3} = \frac{2n^2 - 6 + 7 - 2n}{n^2 - 3} = 2 + \frac{7 - 2n}{n^2 - 3},$

und hieraus als einziger poſitiver und ganzzahliger Wert: $x = 5$. Für $x = 5$ aber wird $3x^2 - 5x - 1$ gleich 49, alſo gleich 7^2.

Zuſatz. Zu den diophantiſchen Gleichungen gehört auch die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$, d. h. die Aufgabe, **die allgemeine Form der Pythagoreiſchen Zahlen** zu beſtimmen.

Zunächſt iſt $z^2 - y^2 = x^2$ und hiernach $\frac{z+y}{x} = \frac{x}{z-y}$. Setzt man daher $\frac{z+y}{x}$ oder $\frac{x}{z-y}$ gleich $\frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen bezeichnen und $p > q$ iſt, ſo hat man

$$z + y = \frac{p}{q} x \text{ und } z - y = \frac{q}{p} x,$$

alſo $$y = \frac{1}{2} x \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right) = \frac{p^2-q^2}{2pq} x \text{ und } z = \frac{1}{2} x \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) = \frac{p^2+q^2}{2pq} x.$$

Demnach werden y und z zugleich mit x ganze Zahlen, wenn man $x = 2pq$ ſetzt. Man hat dann

$$\mathbf{x = 2pq, \quad y = p^2 - q^2, \quad z = p^2 + q^2.}$$

Sollen außerdem x, y und z keinen gemeinſchaftlichen Teiler beſitzen, ſo dürfen p und q weder durch dieſelbe Zahl teilbar ſein noch beide durch ungerade Zahlen erſetzt werden.

Hiernach ergeben ſich als Pythagoreiſche Zahlen ohne gemeinſchaftlichen Teiler:

für p = 2	und	q = 1	x = 4,	y = 3,	z = 5
3	⸗	2	12	5	13
4	⸗	1	8	15	17
4	⸗	3	24	7	25
5	⸗	2	20	21	29
5	⸗	4	40	9	41
6	⸗	1	12	35	37
6	⸗	5	60	11	61, uſw.

In ganz entſprechender Weiſe kann die Gleichung $ax^2 + bxy + cy^2 = z^2$ aufgelöſt werden, wenn ihre linke Seite ſich als Produkt zweier Faktoren erſten Grades darſtellen läßt.

Beiſpiel 6. Welche ganzen poſitiven Zahlengruppen genügen der Gleichung $x^2 + 3xy - 10y^2 = z^2$?

Aufl. Da $x^2 + 3xy - 10y^2 = (x + 5y)(x - 2y)$ iſt, ſo hat man:

$$(x + 5y)(x - 2y) = z^2, \text{ alſo } \frac{x+5y}{z} = \frac{z}{x-2y}.$$

Setzt man $\frac{x+5y}{z} = \frac{p}{q}$ und $\frac{z}{x-2y} = \frac{p}{q}$ und löſt die Gleichungen nach x und y auf, ſo erhält man:

$$x = \frac{2p^2+5q^2}{7pq} \cdot z \text{ und } y = \frac{p^2-q^2}{7pq} \cdot z.$$

Somit entſtehen alle poſitiven ganzzahligen Wurzelgruppen der gegebenen Gleichung, wenn in den Ausdrücken

$$x = 2p^2 + 5q^2, \; y = p^2 - q^2 \text{ und } z = 7pq$$

p und q die Reihe der ganzen poſitiven Zahlen ſo durchlaufen, daß p größer als q bleibt.

Nr. 31. Die Gleichung 3ten Grades.

a) Um die allgemeine Gleichung 3ten Grades

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

aufzulöſen, muß man neue Unbekannten einzuführen ſuchen, deren 2te und 1te Potenzen aus der Gleichung fortfallen. Setzt man zunächſt

$$x = y + f,$$

ſo ergibt ſich:

$$y^3 + (3f + a)y^2 + (3f^2 + 2af + b)y + (f^3 + af^2 + bf + c) = 0.$$

Man kann nun über f ſo verfügen, daß y^2 **oder** y verſchwindet. Beides läßt ſich nicht zugleich erreichen, wenn nicht a und b beſondere Werte beſitzen. Wählt man das erſtere, ſo muß $f = -\frac{a}{3}$ werden und ſomit die Subſtitution lauten:

$$1. \qquad x = y - \frac{a}{3}.$$

Die Gleichung geht dann in die Normalform über:

$$2. \qquad \mathbf{y^3 + py + q = 0.}$$

Auch dieſe Gleichung iſt noch nicht auflösbar, da ſie außer der 3ten noch die 1te Potenz von y enthält. Eine zweite Subſtitution von der Form $y = z + f'$ führt, wie die Rechnung zeigt, ebenfalls nicht zu einer binomiſchen Gleichung. Erſetzt man jedoch y durch die Summe u + v zweier neuen Unbekannten, bildet man alſo die Gleichung

$$0 = (u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q,$$

ſo erkennt man, daß man u und v durch die Gleichung $3uv + p = 0$ oder $3uv = -p$ zu verbinden hat, um zu den auflösbaren Gleichungen

$$u^3 + v^3 = -q$$

und

$$uv = -\frac{p}{3}$$

zu gelangen. Dieſe liefern

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

und führen auf die Kardaniſche Formel:

$$3. \qquad y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Da jede der Kubikwurzeln drei Werte beſitzt, ſo umfaßt der Ausdruck für y 9 Werte; es läßt ſich jedoch zeigen, daß von dieſen mit Rückſicht auf die Gleichung $3uv = -p$ nur drei zuläſſig ſind. Bezeichnen nämlich r und s die Zahlenwerte der Kubikwurzeln, ſo iſt

$$y = r\sqrt[3]{1} + s\sqrt[3]{1},$$

und demnach hat man von den Größen

$$\begin{array}{cc} r & s \\ \frac{1}{2}r(-1+i\sqrt{3}) & \frac{1}{2}s(-1+i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}r(-1-i\sqrt{3}) & \frac{1}{2}s(-1-i\sqrt{3}) \end{array}$$

diejenigen Paare zuſammenzuſtellen, deren Produkt reell wird. Dies iſt aber, wenn r und s ſelber reell ſind, nur der Fall bei

$$\begin{array}{c} r+s \\ \frac{1}{2}r(-1+i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}s(-1-i\sqrt{3}) \\ \frac{1}{2}r(-1-i\sqrt{3}) + \frac{1}{2}s(-1+i\sqrt{3}). \end{array}$$

Auf den Fall, daß r und s komplex ſind, wird ſpäter eingegangen.

b) Für die Normalform ergibt ſich, wenn die Gleichung eine ganzzahlige Wurzel beſitzt, eine ſehr bequeme Auflöſung durch die folgende Betrachtung: Aus den Beziehungen zwiſchen den Wurzeln y_1, y_2 und y_3 der Gleichung $y^3 + py + q = 0$

a) $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ oder $y_2 + y_3 = -y_1$

b) $y_1 y_2 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = p$ oder $(y_2 + y_3)y_1 = p - y_2 y_3$

c) $y_1 y_2 y_3 = -q$

folgt, wenn man $y_2 y_3 = k$ ſetzt, $-y_1^2 = p - k$, alſo

4. $$\mathbf{y_1 = \sqrt{k - p}.}$$

Läßt ſich daher $-q$ in zwei Faktoren y_1 und k ſo zerlegen, daß $y_1 = \sqrt{k-p}$ iſt, ſo iſt y_1 eine rationale Wurzel der Gleichung $y^3 + py + q = 0$.

Beiſpiel 1. Es ſei $y^3 - 4y + 15 = 0$.

Setzt man y_1	alſo k	ſo wird $\sqrt{k-p}$	und die Zerlegung liefert
$= +1$	-15	$\sqrt{-11}$	keine Wurzel
-1	$+15$	$\sqrt{19}$	= =
$+3$	-5	$\sqrt{-1}$	= =
-3	$+5$	$\sqrt{9}$	die Wurzel -3.

Die Gleichung beſitzt alſo die rationale Wurzel -3.

Beiſpiel 2. Es ſei $y^3 - 39y - 70 = 0$.

Setzt man y_1	alſo k	ſo wird $\sqrt{k-p}$	und die Zerlegung liefert
$= +1$	$+70$	$\sqrt{109}$	keine Wurzel
-1	-70	$\sqrt{-31}$	„ „
$+2$	$+35$	$\sqrt{74}$	„ „
-2	-35	$\sqrt{4}$	die Wurzel -2
$+5$	$+14$	$\sqrt{53}$	keine Wurzel
-5	-14	$\sqrt{25}$	die Wurzel -5
$+7$	$+10$	$\sqrt{49}$	„ „ $+7$.

Die Gleichung beſitzt alſo die rationalen Wurzeln -2, -5 und $+7$.

Hiernach läßt ſich bequem entſcheiden, ob eine kubiſche Gleichung, in deren Normalform die Koeffizienten p und q ganze Zahlen ſind, eine oder drei ganzzahlige rationale Wurzeln beſitzt.

c) Geht die Quadratwurzel in der Formel 3. nicht auf, oder ſind die Zahlen p und q für die erforderlichen Rechnungen unbequem, ſo kann eine goniometriſche Umgeſtaltung der Kardaniſchen Schlußformel eintreten, die eine einfachere logarithmiſche Berechnung ermöglicht. Zunächſt kann man die Kubikwurzeln auf die Form bringen:

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\left(1\mp\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)},$$

und wenn unter der Wurzel ſtets der abſolute Wert von q benutzt wird,

$$=-\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1\mp\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)},\ \text{bzw.}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1\mp\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)},$$

je nachdem in der Gleichung $y^3+py+q=0$ die Größe q poſitiv oder negativ iſt. Bei der weiteren Behandlung der Wurzel ſind 3 Fälle zu unterſcheiden:

1ter Fall. p **iſt poſitiv.** Man ſetzt $\frac{4p^3}{27q^2}=\operatorname{tg}^2\varphi$; es iſt dann

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1\mp\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1\mp\frac{1}{\cos\varphi}\right)}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\cdot\frac{\cos\varphi\mp1}{\cos\varphi}}.$$

Da aber $$\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=\frac{4}{q^2}\cdot\frac{p^3}{27},$$

und ſomit $$\frac{\frac{q}{2}}{\cos\varphi}=\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\sin\varphi}$$

iſt, ſo erhält man

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1\mp\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}\right)}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,\frac{\cos\varphi\mp1}{\sin\varphi}}=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\frac{\cos\varphi\mp1}{\sin\varphi}}.$$

Demnach iſt

$$y = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\right).$$

Die weitere Subſtitution $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi$, alſo auch $\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ctg}\psi$, führt nun zu dem Reſultate:

$$y = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\operatorname{ctg}\psi - \operatorname{tg}\psi\right) = \sqrt{\frac{p}{3}}\,\frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{\cos\psi\sin\psi}$$

oder

$$\mathbf{y = \sqrt{\frac{4p}{3}}\operatorname{ctg} 2\,\psi.}$$

Die Auflöſung erfordert alſo die drei Berechnungen:

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{4p^3}{27q^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{4p}{3}}\operatorname{ctg} 2\psi.$$

Das Vorzeichen von y iſt dem Vorzeichen von q entgegengeſetzt.

2ter Fall. **p iſt negativ und $4p^3 < 27q^2$.**

Setzt man $\frac{4p^3}{27q^2} = \sin^2\varphi$, ſo iſt

$$\sqrt[3]{\frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4p^3}{27q^2}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}(1 \mp \cos\varphi)} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\cdot\frac{1 \mp \cos\varphi}{\sin\varphi}},$$

und ſomit

$$y = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}\right).$$

Für $\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\psi$ alſo auch $\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{ctg}\psi$, erhält man hieraus:

$$y = \sqrt{\frac{p}{3}}\left(\operatorname{tg}\psi + \operatorname{ctg}\psi\right) = \sqrt{\frac{4p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\psi}.$$

Es ſind daher die Berechnungen durchzuführen:

$$\sin^2\varphi = \frac{4p^3}{27q^2}, \quad \operatorname{tg}\psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{4p}{3}}\cdot\frac{1}{\sin 2\psi},$$

und y erhält das Vorzeichen + oder −, je nachdem q negativ oder poſitiv iſt.

Zuſatz. Will man in den Fällen 1. und 2. die beiden anderen Wurzeln ausrechnen, ſo beachtet man, daß nach den Bedingungen

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \quad \text{oder} \quad y_2 + y_3 = -\,y_1$$

und

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 = -\,q \quad 〃 \quad y_2 \cdot y_3 = -\,\frac{q}{y_1}$$

y_2 und y_3 ſich erweiſen als Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + y_1 z - \frac{q}{y_1} = 0.$$

3ter Fall. **p iſt negativ und $4p^3 > 27q^2$. (Casus irreducibilis.)**

Setzt man $\frac{4p^3}{27q^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, ſo iſt

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4p^3}{27q^2}}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\left(1\mp\frac{i\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\,\frac{\cos\varphi\mp i\sin\varphi}{\cos\varphi}},$$

und da $\frac{q}{2}$ durch $\cos\varphi\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ erſetzt werden kann,

$$=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\,(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)}.$$

Nach dem dritten Moivreſchen Satze iſt aber

$$\sqrt[3]{\cos\varphi\pm i\sin\varphi} = \cos\frac{k\cdot 360^0+\varphi}{3} \pm i\sin\frac{k\cdot 360^0+\varphi}{3};$$

bei der Addition der Kubikwurzeln fallen daher die imaginären Teile fort und es bleibt

$$y=\sqrt{\frac{p}{3}}\cdot 2\cos\frac{k\cdot 360^0+\varphi}{3}.$$

Demnach ergeben ſich die Wurzeln

$$y_1 = \mp\sqrt{\frac{4p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$y_2 = \pm\sqrt{\frac{4p}{3}}\sin\left(30^0+\frac{\varphi}{3}\right),$$

$$y_3 = \pm\sqrt{\frac{4p}{3}}\sin\left(30^0-\frac{\varphi}{3}\right).$$

Die oberen Vorzeichen entſprechen einem poſitiven und die unteren einem negativen q.

Die gleichen Formeln laſſen ſich durch Benutzung der goniometriſchen Gleichung

$$\cos\varphi = 4\cos^3\frac{\varphi}{3} - 3\cos\frac{\varphi}{3}$$

ableiten. Bildet man durch Erweiterung mit ϱ^3 die Gleichung

$$\left(\varrho\cos\frac{\varphi}{3}\right)^3 - \frac{3}{4}\varrho^2\left(\varrho\cos\frac{\varphi}{3}\right) - \frac{1}{4}\varrho^3\cos\varphi = 0,$$

ſo wird dieſe mit der Gleichung

$$y^3 - py + q = 0$$

identiſch, wenn man ſetzt:

1. $\frac{3}{4}\varrho^2 = p$, alſo $\varrho = \pm\sqrt{\frac{4p}{3}}$,
2. $\frac{1}{4}\varrho^3\cos\varphi = -q$, alſo $\cos\varphi = \mp\frac{q}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{p}\right)^3}$ und
3. $\varrho\cos\frac{\varphi}{3} = y$.

Da aber $\cos\varphi = \cos(k \cdot 360^0 + \varphi)$ iſt, ſo ergeben ſich die Wurzeln

$$y_1 = \mp \sqrt{\frac{4p}{3}} \cos\frac{\varphi}{3},$$

$$y_2 = \mp \sqrt{\frac{4p}{3}} \cos\left(120^0 + \frac{\varphi}{3}\right) = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} \sin\left(30^0 + \frac{\varphi}{3}\right)$$

und
$$y_3 = \mp \sqrt{\frac{4p}{3}} \cos\left(240^0 + \frac{\varphi}{3}\right) = \pm \sqrt{\frac{4p}{3}} \sin\left(30^0 - \frac{\varphi}{3}\right).$$

In entſprechender Weiſe hätte die Formel

$$\sin\varphi = 3\sin\frac{\varphi}{3} - 4\sin^3\frac{\varphi}{3}$$

zu einer Auflöſung benutzt werden können.

Nr. 32. Auflöſung der numeriſchen Gleichungen durch Näherung.

a) Erklärungen.

Erklärung 1. Eine algebraiſche Gleichung heißt numeriſch, wenn ihre Koeffizienten rationale Zahlen ſind.

Zuſatz. Jede numeriſche Gleichung kann auf die Normalform

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

in der die Koeffizienten und Exponenten ganze Zahlen ſind, gebracht werden.

Bew. 1. Hat die Gleichung nach Beſeitigung der Nenner die Geſtalt

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} x + A_n = 0$$

angenommen, ſo kann man $x = \frac{y}{A_0}$ ſetzen und die Gleichung durch Erweiterung mit $A_0{}^{n-1}$ in die Normalform einer Gleichung für y überführen.

2. Hat die Gleichung nach Beſeitigung der Nenner z. B. die Geſtalt

$$3x^{\frac{7}{12}} - 2x^{\frac{1}{6}} - 5x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{2}} - 7 = 0$$

angenommen, ſo kann man dieſe in

$$3x^{\frac{7}{12}} - 2x^{\frac{2}{12}} - 5x^{\frac{4}{12}} + 6x^{\frac{6}{12}} - 7 = 0$$

umformen und durch die Subſtitution $y = x^{\frac{1}{12}}$ in die Gleichung

$$3y^7 + 6y^6 - 5y^4 - 2y^2 - 7 = 0$$

überführen. Hieraus läßt ſich durch die Subſtitution $y = \frac{2}{3}$ die Normalform einer Gleichung für z ableiten.

Erklärung 2. Wird in der Normalform einer numeriſchen Gleichung x durch $-y$ erſetzt (und bei einem ungeraden n der erforderliche Vorzeichenwechſel vorgenommen), ſo entſteht ihre **entgegengeſetzte** Gleichung.

So hat z. B. die Normalform $x^7 + 3x^4 - 5x^2 - 11x + 9 = 0$

die entgegengeſetzte Gleichung $y^7 - 3y^4 + 5y^2 - 11y - 9 = 0$.

Erklärung 3. Wird in der Normalform einer numeriſchen Gleichung x durch $\frac{1}{y}$ erſetzt, ſo entſteht ihre **reziproke** Gleichung.

So hat z. B. die Normalform $x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 5x - 2 = 0$

die reziproke Gleichung $2y^5 - 5y^4 - 3y^2 + 4y - 1 = 0$,

und dieſe iſt nach Erkl. 1. Zuſ. durch die Subſtitution $y = \frac{z}{2}$ auf die Normalform

$$z^5 - 5z^4 - 12z^2 + 32z - 16 = 0$$

zu bringen.

b) Grenzen der reellen Wurzeln.

Wird in der ganzen rationalen Funktion

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

die Größe x durch $x + \delta$ erſetzt, ſo liefert die Entwicklung:

$$\begin{aligned} f(x+\delta) = {} & x^n + \binom{n}{1} x^{n-1}\delta + \binom{n}{2} x^{n-2}\delta^2 + \cdots + \delta^n \\ & + a_1\left[x^{n-1} + \binom{n-1}{1} x^{n-2}\delta + \binom{n-1}{2} x^{n-3}\delta^2 + \cdots + \delta^{n-1}\right] \\ & + a_2\left[x^{n-2} + \binom{n-2}{1} x^{n-3}\delta + \binom{n-2}{2} x^{n-4}\delta^2 + \cdots + \delta^{n-2}\right]. \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n-1}[x + \delta] \\ & + a_n. \end{aligned}$$

Wird in dieſer Entwicklung der Ausdruck

$$\binom{n}{1} x^{n-1} + a_1\binom{n-1}{1} x^{n-2} + a_2\binom{n-2}{1} a^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \quad \text{mit } f'(x),$$

$$2!\left[\binom{n}{2} x^{n-2} + a_1\binom{n-1}{2} x^{n-3} + a_2\binom{n-2}{2} x^{n-4} + \cdots + a_{n-2}\right] \quad \text{mit } f''(x),$$

$$3!\left[\binom{n}{3} x^{n-3} + a_1\binom{n-1}{3} x^{n-4} + a_2\binom{n-2}{3} x^{n-5} + \cdots + a_{n-3}\right] \quad \text{mit } f'''(x),$$

uſw. bezeichnet, ſo ergibt ſich:

$$f(x+\delta) = f(x) + \frac{\delta}{1} f'(x) + \frac{\delta^2}{2!} f''(x) + \frac{\delta^3}{3!} f'''(x) + \cdots + \delta^n,$$

und ſomit:

$$f(x+\delta) - f(x) = \delta\left[f'(x) + \frac{\delta}{2!} f''(x) + \frac{\delta^2}{3!} f'''(x) + \cdots + \delta^{n-1}\right].$$

Da die abgeleiteten Funktionen (die **Ableitungen**) $f'(x)$, $f''(x)$ uſw. gleichfalls ganz rationale Funktionen ſind, ſo bleiben ſie für jeden endlichen Wert von x endliche Größen; die rechte Seite der vorſtehenden Gleichung kann daher mit δ zugleich beliebig klein gemacht werden. Bezeichnet man alſo eine Funktion $f(x)$ als eine **ſtetige Funktion**, wenn ſich durch eine hinreichend kleine Veränderung von x eine beliebig kleine Veränderung von $f(x)$ erzielen läßt, ſo folgt hieraus, daß jede ganze rationale Funktion ſtetig verläuft. Eine ganze rationale Funktion kann daher ihr Vorzeichen nicht wechſeln, ohne durch den Wert 0 hindurchzugehen. Somit hat man den Satz:

Lehrſatz 8. Nimmt die Funktion $f(x)$ für $x = \alpha$ und $x = \beta$ Werte mit verſchiedenen Vorzeichen an, ſo liegt zwiſchen α und β mindeſtens eine reelle Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$.

Erſetzt man in der Funktion $f(x)$ ſämtliche Koeffizienten durch den abſoluten Betrag p des größten unter den negativen Koeffizienten, ſo entſteht auf der rechten Seite die Summe

$$x^n + p(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) \text{ oder } x^n + \frac{p x^n}{x-1} - \frac{p}{x-1}.$$

Wählt man daher x ſo, daß $(x-1) > p$ und ſomit $\frac{p}{x-1}$ poſitiv bleibt, ſo wird x^n größer als die Summe aller auf x^n folgenden Glieder. Selbſt wenn demnach auch alle Koeffizienten a_k negativ wären, ſo würde der Wert der Funktion $f(x)$ für jeden Wert von x, der größer als $(p+1)$ iſt, doch poſitiv bleiben. Um ſo mehr iſt dies der Fall, wenn einige der Koeffizienten poſitiv ſind. Hieraus aber folgt:

Lehrſatz 9. Iſt p der abſolute Betrag des größten negativen Koeffizienten in der Gleichung $f(x) = 0$, ſo liegen die poſitiven Wurzeln zwiſchen 0 und $p+1$.

Folgerung. Iſt q der abſolute Betrag des größten negativen Koeffizienten in der entgegengeſetzten Gleichung, ſo liegen die negativen Wurzeln der urſprünglichen Gleichung zwiſchen 0 und $-(q+1)$.

Die hier angegebenen Grenzen ſind oft ſehr weit, und daher empfiehlt es ſich, zu unterſuchen, ob die Grenzen nicht enger gezogen werden können. Sind die erſten r Koeffizienten der Funktion $f(x)$ poſitiv, und wird x ſo gewählt, daß $f(x)$ poſitiv bleibt, auch wenn von dem erſten negativen Gliede ab alle Koeffizienten durch $-p$ erſetzt werden, ſo iſt zweifellos

$$x^n > p(x^{n-r} + x^{n-r-1} + \cdots + 1) \text{ oder } x^n > \left(\frac{p x^{n-r+1}}{x-1} - \frac{p}{x-1}\right).$$

Da $(x-1) > 0$, alſo $\frac{p}{x-1}$ poſitiv iſt, ſo bleibt $f(x)$ ſicher poſitiv, wenn $x^n > \frac{p x^{n-r+1}}{x-1}$ oder $x^n(x-1) > \frac{p x^{n+1}}{x^r}$ oder ſchließlich $\frac{x-1}{x} > \frac{p}{x^r}$ gewählt wird. Nun iſt $\frac{x-1}{x}$ ein echter Bruch, alſo $\left(\frac{x-1}{x}\right) > \left(\frac{x-1}{x}\right)^r$, und ſomit wird die Bedingung $\frac{x-1}{x} > \frac{p}{x^r}$ jedenfalls erfüllt, wenn $\left(\frac{x-1}{x}\right)^r > \frac{p}{x^r}$ oder $(x-1) > \sqrt[r]{p}$ angenommen wird.

Demnach iſt $1+\sqrt[r]{p}$ die obere Grenze für die poſitiven Wurzeln, wenn die erſten r Koeffizienten poſitiv ſind und p den abſoluten Betrag des größten negativen Koeffizienten bezeichnet.

Ganz entſprechend läßt ſich mit Benutzung der entgegengeſetzten Gleichung eine untere Grenze für die negativen Wurzeln ableiten. Sind s und q die betreffenden Zahlen, ſo iſt dieſe Grenze gleich $-(1+\sqrt[s]{q})$.

Zuſatz. Aus den reziproken Gleichungen können auf dem oben eingeſchlagenen Wege untere Grenzen für die poſitiven und obere Grenzen für die negativen Wurzeln aufgefunden werden.

c) Berechnung reeller Wurzeln durch Näherung.

1. Hat man nach Lehrſatz 9 die Grenzen für die reellen Wurzeln ermittelt und erſetzt man in der Funktion f(x) die Veränderliche x der Reihe nach durch die ganzen Zahlen zwiſchen 0 und der oberen Grenze, ſo zeigt ein Zeichenwechſel des Funktionswertes bei $x=\alpha$ und $x=\alpha+1$ das Vorhandenſein mindeſtens einer poſitiven irrationalen*) Wurzel an, die mit α Einern beginnt. In gleicher Weiſe ergibt ſich, wenn nun x der Reihe nach durch $\alpha+\frac{1}{10}$, $\alpha+\frac{2}{10}$, $\alpha+\frac{3}{10}\dots$ erſetzt wird, aus einem zwiſchen $x=\alpha+\frac{\beta}{10}$ und $x=\alpha+\frac{\beta+1}{10}$ eintretenden Zeichenwechſel, daß die Wurzel β Zehntel enthält. Ganz entſprechend könnten die in der Wurzel enthaltenen Hundertſtel, Tauſendſtel uſw. beſtimmt werden; es iſt jedoch bequemer, zur Berechnung der auf die erſte folgenden Dezimalſtellen ein Verfahren anzuwenden, das weniger Zeitaufwand erfordert.

2. Regula falsi. Sind α und β zwei bereits genäherte Werte einer poſitiven Wurzel der Gleichung $f(x)=0$, ſo berechtigt die Stetigkeit der Funktion zu der Annahme, daß f(x) zwiſchen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ ſich annähernd in demſelben Verhältnis ändere wie x zwiſchen α und β. Iſt daher $\alpha<\beta$

---

*) Unter den Wurzeln einer numeriſchen Gleichung, deren Koeffizienten ganze Zahlen ſind, kann ſich kein Bruch befinden. Denn erſetzt man in der Gleichung

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

x durch $\frac{p}{q}$ und erweitert dann mit q^{n-1}, ſo werden alle Glieder ganze Zahlen, bis auf das erſte, das die Geſtalt $\frac{p^n}{q}$ annimmt. Für $x=\frac{p}{q}$ entſteht alſo eine unmögliche Gleichung, da die Summe aus einem Bruche und ganzen Zahlen niemals gleich 0 ſein kann. Wurzeln, welche zwiſchen zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen liegen, müſſen daher irrational ſein.

und δ die **Korrektion**, d. h. der Zuwachs, den α erhalten muß, um gleich der geſuchten Wurzel zu werden, ſo kann die Proportion

$$[f(\beta) - f(\alpha)] : [0 - f(\alpha)] = (\beta - \alpha) : \delta$$

aufgeſtellt und hieraus der Wert $\delta = -\frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$ abgeleitet werden. Es iſt dann $\gamma = \alpha - \frac{(\beta - \alpha) f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)}$ ein beſſerer Näherungswert als α und β. Unterſcheiden ſich insbeſondere α und β nur um eine Einheit der p^{ten} Dezimalſtelle, ſo iſt in γ bereits die $(p + 1)^{\text{te}}$ Dezimalſtelle genau. — Das Verfahren kann beliebig oft wiederholt und damit jede verlangte Genauigkeit für die Wurzel erzielt werden. Ganz entſprechend iſt das Verfahren bei negativen Wurzeln.

Beiſpiel 1. Es ſei $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 55$.

Da f(x) für x = 0 negativ iſt, ſo hat die Gleichung f(x) = 0 mindeſtens eine poſitive Wurzel. Nun nimmt die Funktion f(x)

für x =	0,	1,	2,	3,	4,
den Wert	− 55,	− 57,	− 51,	− 31,	+ 9

an, und ſomit liegt zwiſchen + 3 und + 4, und zwar näher bei 4 als bei 3, eine irrationale Wurzel.

Für x = 3,7 wird f(x) = − 5,457,
3,8 = f(x) = − 0,888,
3,9 = f(x) = + 3,929.

Die Wurzel liegt alſo zwiſchen 3,8 und 3,9, die Korrektion δ_1 iſt gleich $0{,}1 \cdot \frac{0{,}888}{4{,}817}$ oder 0,01 ..., und der Näherungswert γ_1 iſt gleich 3,81.

Weiter hat nun

für x = 3,81 die Funktion f(x) den Wert − 0,420
und = x = 3,82 = = = = = + 0,053;

die Korrektion δ_2 beträgt alſo $0{,}01 \cdot \frac{0{,}42}{0{,}473}$ oder 0,008 ..., und der Näherungswert γ_2 iſt gleich 3,818. Die folgende Korrektion δ_3 wird gleich 0,0008, und der entſprechende Näherungswert γ_3 wird gleich 3,8188.

Die regula falsi kann auch auf Gleichungen, welche nicht algebraiſch ſind, (auf tranſzendente Gleichungen) angewandt werden.

Beiſpiel 2. Es ſei $f(x) = 2^x + 3^x - 12$.

Für x =	0,	1,	2
hat die Funktion f(x) die Werte	− 10,	− 7,	+ 1,

und demnach liegt zwiſchen + 1 und + 2, und zwar näher bei 2 als bei 1, eine irrationale Wurzel. Für x = 1,9 iſt die Funktion gleich − 0,2045, alſo noch negativ; die Wurzel liegt daher zwiſchen 1,9 und 2, die Korrektion δ_1 beträgt $0{,}1 \cdot \frac{0{,}2045}{1{,}2045}$ oder 0,01 ..., und der Näherungswert γ_1 iſt gleich 1,91.

Weiter hat nun die Funktion für $x = 1{,}91$ den Wert $-\ 0{,}0979$
und „ $x = 1{,}92$ „ „ $+\ 0{,}0269$;

die Korrektion δ_2 beträgt alſo $0{,}01 \cdot \frac{0{,}0979}{0{,}1248}$ oder 0,007, und der Näherungswert γ_2 iſt gleich 1,917, uſw.

3. Newtonſche Näherungsmethode. Iſt α ein bereits gefundener Näherungswert einer Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ und δ die Korrektion von α, ſo üben in der Entwicklung

$$f(\alpha + \delta) = f(\alpha) + \frac{\delta}{1} f'(\alpha) + \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} f''(\alpha) + \cdots$$

nur die erſten beiden Glieder einen weſentlichen*) Einfluß auf die nächſte Dezimalſtelle aus. Man kann daher

$$f(\alpha) + \delta f'(\alpha) = 0 \text{ oder } \boldsymbol{\delta = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}}$$

ſetzen und erhält in $\alpha' = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ einen genaueren Näherungswert als α. Für den korrigierten Wert α' läßt ſich auf dem gleichen Wege eine Korrektion δ' beſtimmen, uſw.

Zuſatz 1. Die Reihenentwicklung für $f(\alpha + \delta)$ darf ohne weiteres nur auf ganze rationale Funktionen angewandt werden; es iſt daher ratſam, ſich hier auf dieſe zu beſchränken und bei anderen Funktionen die regula falsi anzuwenden.

Zuſatz 2. Die Herſtellung der Ableitung $f'(x)$ iſt nur bei ganzen rationalen Funktionen einfach und wird dadurch ausgeführt, daß das allgemeine Glied der Reihe $a_k x^{n-k}$ durch $(n-k) a_k x^{n-k-1}$ erſetzt wird.

Beiſpiel. (S. Beiſpiel 1.) Es ſei $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 55$;
es iſt dann $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$.

Für den Näherungswert $\alpha = 3{,}8$ ergibt ſich:

$$f(\alpha) = -0{,}888, \quad f'(\alpha) = 46{,}9, \quad \delta = \frac{0{,}888}{46{,}9} = 0{,}01 \ldots \text{ und } \alpha' = 3{,}81.$$

Für $\alpha' = 3{,}81$ aber iſt

$f(\alpha') = -0{,}420$ und $f'(\alpha') = 47{,}17$. Man erhält alſo $\delta'' = \frac{0{,}42}{47{,}17} = 0{,}008$ und $\alpha'' = 3{,}818$.

Da $f(\alpha'') = -0{,}039$ und $f'(\alpha'') = 47{,}368$, alſo $\delta'' = \frac{0{,}039}{47{,}368} = 0{,}0008$ iſt, ſo folgt: $\alpha''' = 3{,}8188$.

---

*) Liegen zwei Wurzeln ſehr nahe beieinander, ſo iſt die Formel für δ nicht ausreichend. Es muß dann die Gleichung

$$f(\alpha) + \delta f'(\alpha) + \frac{1}{2} \delta^2 f''(\alpha) = 0$$

benutzt werden, welche zwei getrennt weiter zu behandelnde Korrektionen liefert.

Nr. 33. Größte und kleinſte Werte. (Maxima und Minima.)

Eine Funktion kann, wie z. B. die Funktion $y = ax^2$, ins Unbegrenzte wachſen bzw. abnehmen, ſie kann aber auch, wie die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ zwiſchen zwei endlichen Grenzen eingeſchloſſen bleiben. Beſitzt eine Funktion für zwei aufeinanderfolgende Werte a und b von x, zwiſchen denen ſie ſtetig iſt, dieſelbe Größe, ſo gibt es zwiſchen f(a) und f(b) mindeſtens einen Wert f(m), der entweder größer oder kleiner als alle Werte von f(x) in der Nachbarſchaft von f(m) iſt. Im erſten Falle nennt man f(m) einen größten Wert **(Maximum)** und im zweiten Falle nennt man f(m) einen kleinſten Wert **(Minimum)** der Funktion, während in beiden Fällen f(m) als ein Grenzwert der Funktion f(x) bezeichnet wird.

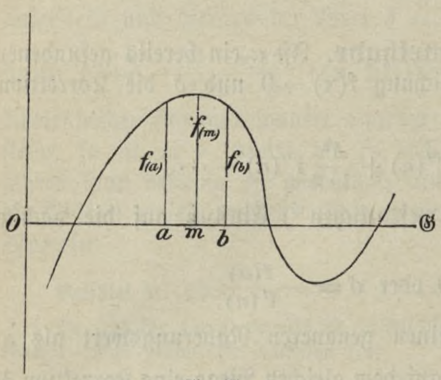


Fig. 25.

Die Beſtimmung derartiger Grenzwerte läßt ſich in zahlreichen Fällen bereits durch ganz elementare Betrachtungen durchführen.

a) Grenzwerte ganzer rationaler Funktionen zweiten Grades.

Die ganze rationale Funktion zweiten Grades

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

läßt ſich ſtets ſo umgeſtalten, daß die Veränderliche x nur in der Grundzahl eines Quadrates auftritt. Durch Abſonderung erhält man:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Demnach tritt für $x = -\frac{b}{2a}$ in dem Werte $y = c - \frac{b^2}{4a}$ bei einem poſitiven (negativen) a ein kleinſter (größter) Wert auf.

Beiſpiel 1. Es ſei $y = 3x^2 + 4x + 12$.

Aufl. Es iſt $y = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + 12 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 12 - \frac{4}{3}$, und ſomit erreicht bei $x = -\frac{2}{3}$ die Funktion y ihren kleinſten Wert $\frac{32}{3}$.

Beiſpiel 2. Es ſei $y = 12 + 5x - 2x^2$.

Aufl. Es iſt $y = 12 - 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) = 12 + \frac{25}{8} - 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2$, und ſomit erreicht bei $x = \frac{5}{4}$ die Funktion y ihren größten Wert $\frac{121}{8}$.

Beiſpiel 3. Welches von allen Dreiecken mit der Grundlinie a und dem Umfang 2s hat den größten Inhalt?

Aufl. Setzt man $b = x$, alſo $s - c = a + x - s$, ſo hat man:

$$\frac{J^2}{s \cdot (s-a)} = (s-x)(a-s+x) = s(a-s) - x^2 + (2s-a)x$$
$$= \frac{a^2}{4} - \left(x - \frac{2s-a}{2}\right)^2.$$

Hiernach erreicht bei $x = \frac{2s-a}{2}$ der Inhalt ſeinen größten Wert $\frac{a}{2}\sqrt{s(s-a)}$. Aus $x = \frac{2s-a}{2}$ oder $b = \frac{b+c}{2}$ folgt aber $c = b$, d. h. das Dreieck iſt gleichſchenklig.

Beiſpiel 4. Welche gerade quadratiſche Pyramide hat bei der Größe O der Oberfläche den größten Rauminhalt?

Aufl. Zunächſt iſt $3V = a^2h$. Da aber

$$O = a^2 + 2a\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad \text{alſo} \quad (O - a^2)^2 = 4a^2\left(h^2 + \frac{a^2}{4}\right)$$

und ſomit $h^2 = \frac{O^2}{4a^2} - \frac{O}{2}$ iſt, ſo folgt:

$$36V^2 = O^2a^2 - 2Oa^4 = 2O\left(\frac{O}{2}a^2 - a^4\right) = \frac{O^3}{8} - 2O\left(a^2 - \frac{O}{4}\right)^2.$$

Hiernach erreicht bei $a^2 = \frac{O}{4}$ oder $a = \frac{1}{2}\sqrt{O}$ der Rauminhalt ſeinen größten Wert $\frac{O}{24}\sqrt{2O}$. Für $a = \frac{1}{2}\sqrt{O}$ und $V = \frac{O}{24}\sqrt{2O}$ aber wird $h = \frac{1}{2}\sqrt{2O}$

b) Beſtimmung der Grenzwerte durch Auflöſung der Gleichung $y = f(x)$.

Iſt die Funktion f(x) vom zweiten Grade, und wird die Gleichung $y = f(x)$ nach x aufgelöſt, ſo erſcheint y unter der Quadratwurzel. Aus der Forderung, daß die Löſung der Gleichung reell ſein ſoll, ergibt ſich nun die Bedingung, daß der Radikand nicht negativ werden darf, und demnach erhält man eine Gleichung für den Grenzwert von y, wenn man den Radikanden gleich Null ſetzt. Dies Verfahren läßt ſich auch bei gebrochenen und irrationalen Funktionen verwenden, wenn die entſtehende Schlußgleichung vom zweiten Grade iſt oder doch auf eine Gleichung zweiten Grades zurückgeführt werden kann.

Beiſpiel 5. S. Beiſpiel 1.

Aufl. Die Gleichung $3x^2 + 4x + 12 = y$ hat die Wurzeln $x = \frac{1}{3}(-2 \pm \sqrt{3y - 32})$. Somit tritt für $x = -\frac{2}{3}$ der kleinſte für y zuläſſige Wert $\frac{32}{3}$ ein.

Beiſpiel 6. Es ſei $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x^2}$.

Aufl. Die entſtehende Gleichung $(3y - 2)x^2 + 3x - 5 = 0$ iſt vom zweiten Grade und hat die Wurzeln $x = \frac{1}{2(3y-2)}(-3 \pm \sqrt{60y - 31})$. Somit darf y nicht unter $\frac{31}{60}$ ſinken, und dies Minimum der Funktion tritt für $x = \frac{10}{3}$ ein.

Beiſpiel 7. Die Funktion y ſei mit der Veränderlichen x durch die Gleichung $x^2+y^2-6xy+10x+18=0$ verbunden.

Aufl. Für x liefert die Gleichung die Wurzeln

$$x=3y-5\pm\sqrt{8y^2-30y+7}\quad=3y-5\pm\sqrt{(4y-1)(2y-7)}.$$

Der Radikand iſt poſitiv, wenn y größer als $\frac{7}{2}$ oder kleiner als $\frac{1}{4}$ iſt, und negativ, wenn y zwiſchen dieſen Grenzen liegt. Demnach beſitzt die Funktion an der Stelle $x=-\frac{17}{4}$ das Maximum $\frac{1}{4}$ und an der Stelle $x=\frac{11}{2}$ das Minimum $\frac{7}{2}$.

c) Beſtimmung nach dem Schellbachſchen Verfahren.

Ein von der vorſtehenden Betrachtungsweiſe unabhängiges Verfahren läßt ſich durch die folgende Überlegung gewinnen:

Hat eine ſtetige Funktion f(x) für $x=x_1$ und $x=x_2$ denſelben Wert, ſo muß zwiſchen x_1 und x_2 mindeſtens eine Grenzſtelle der Kurve $y=f(x)$ liegen, und man muß ſich dieſer Grenzſtelle (oder einer dieſer Grenzſtellen) von x_1 und x_2 aus gleichzeitig ſtets ſo nähern können, daß die zugehörigen Wertepaare der Funktion einander gleich bleiben. Nun laſſen ſich in der Gleichung $f(x_1)-f(x_2)=0$ die Glieder mit gleich hohen Potenzen von x_1 und x_2 zuſammenfaſſen und dann die rechte Seite der Gleichung durch x_1-x_2 dividieren, da ein etwa vorhandenes konſtantes Glied von f(x) in der Differenz $f(x_1)-f(x_2)$ nicht vorkommt. Gelangen daher x_1 und x_2 bei der Annäherung an die Grenzſtelle x, d. h. erſetzt man x_1 und x_2 in der umgeformten Gleichung durch x, ſo entſteht eine Gleichung für x. Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind die Werte von x, für welche f(x) Grenzwerte annehmen kann.

Dies Verfahren iſt von **Schellbach** († 1892) abgeleitet worden.

Beiſpiel 8. Wie groß hat man die Grundkante einer quadratiſchen Säule zu nehmen, damit die Oberfläche bei dem Inhalt V am kleinſten wird?

Aufl. Aus $O=2a^2+4ah$ und $V=a^2h$ ergibt ſich: $O=2a^2+\frac{4V}{a}$. Somit hat man:

$$a_1^2-a_2^2+2V\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)=0$$

oder

$$a_1^2-a_2^2-\frac{2V}{a_1\cdot a_2}(a_1-a_2)=0.$$

Es entſteht alſo die Gleichung: $2a=\frac{2V}{a^2}$, und hieraus folgt: $a=\sqrt[3]{V}$.

d) Das Verfahren von Fermat.

Einen ähnlichen Gang hatte ſchon **Fermat** († 1665) bei der Beſtimmung von Grenzwerten eingeſchlagen. Er ſetzte in den Ausdruck, den er auf Grenzwerte hin unterſuchte, ſtatt der Veränderlichen A (er wählte ebenſo wie Vieta zur Bezeichnung der Unbekannten die großen Vokale) die neue Größe A + E ein, in der E eine nur wenig von 0 verſchiedene Zahl bezeichnen ſollte, verband die beiden Ausdrücke für A und A + E durch das Gleichheitszeichen, machte die Gleichung nennerfrei, ordnete ſie und dividierte dann durch E. Alsdann vollzog er den Grenzübergang zu E = 0 und erhielt auf dieſe Weiſe eine Gleichung zur Beſtimmung der Grenzſtellen.

Wählt man die jetzt gebräuchliche Bezeichnungsweiſe und erſetzt A durch x bzw. A + E durch x', ſo hat man hiernach das folgende Verfahren:

Man bildet die Differenz $y - y'$ [$f(x) - f(x')$], dividiert durch $x - x'$, läßt in dem Quotienten $x' = x$ werden, ſetzt den hierdurch entſtehenden Ausdruck $f'(x)$ gleich 0 und löſt die Gleichung $f'(x) = 0$ nach x auf. Die reellen Wurzeln ſind dann die Werte von x, für welche die Funktion einen Grenzwert annehmen kann.

Die einzelnen Teile des Fermatſchen Verfahrens laſſen ſich an dem durch graphiſche Darſtellung gewonnenen Bilde der Funktion $y = f(x)$ veranſchaulichen. Sind die Punkte P und P' durch die Werte $y = f(x)$ und $y' = f(x')$ beſtimmt, ſo entſprechen den Differenzen $y - y'$ und $x - x'$ die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, und daher iſt der Quotient $\frac{y - y'}{x - x'}$ gleich der trigonometriſchen Tangente des Winkels α, den die Sekante PP' mit der (poſitiven Richtung der) X-Achſe bildet. Dreht man die Sekante PP' um den Punkt P, bis ſie in die Tangente des Punktes P übergeht (läßt man x' gleich x werden), ſo wird dieſer Quotient gleich der trigonometriſchen Tangente des Winkels φ, den die Tangente des Punktes P mit der X-Achſe einſchließt. Man hat alſo:

$$\lim_{x = x'} \frac{y - y'}{x - x'} = \operatorname{tg} \varphi.$$

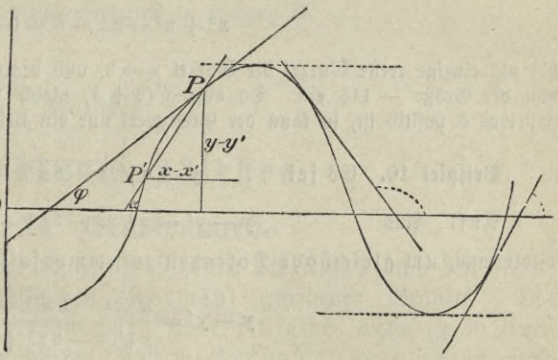


Fig. 26.

Nun geht die Kurve $y = f(x)$ vom Steigen zum Fallen (vom Fallen zum Steigen) über, wenn die Funktion einen größten (kleinſten) Wert erreicht hat, und an der Übergangsſtelle iſt die Tangente der X-Achſe parallel, bildet mit ihr alſo den Winkel $\varphi = 0$. Iſt aber $\varphi = 0$, ſo iſt auch $\operatorname{tg} \varphi = 0$, und daher iſt die Gleichung

$$\lim_{x' = x} \frac{y - y'}{x - x'} = 0$$

dahin zu deuten, daß an den Punkten der Kurve, die ihren Wurzeln entſprechen, die Tangenten der X-Achſe parallel ſind.

Wie man ſieht, läßt ſich aus dem Fermatſchen Verfahren (ebenſowenig wie aus dem Verfahren von Schellbach) bereits ein Schluß auf das Vorhandenſein eines Grenzwertes ziehen, da die Tangente auch an anderen Punkten (Wendepunkte der Kurve!) der X-Achſe parallel ſein kann. Vgl. Anhang II, Nr. 7.

Da der Winkel der Tangente und der X-Achſe (ſ. Fig. 26) unmittelbar nach einem größten (kleinſten) Wert der Funktion ſtumpf (ſpitz), alſo der Quotient f′(x) negativ (poſitiv) iſt, ſo läßt ſich die Entſcheidung, ob ein Grenzwert ein größter oder ein kleinſter iſt, nach der folgenden Regel treffen:

Iſt α eine Grenzſtelle der Funktion f(x) und für ein poſitives δ der Wert von $f'(\alpha+\delta)$

negativ, ſo iſt der Grenzwert ein größter,
poſitiv, " " " " " kleinſter.

Beiſpiel 9. Es ſei $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 96x + 47$.

Aufl. Es iſt $y - y' = 3(x^4 - x'^4) + 4(x^3 - x'^3) - 12(x^2 - x'^2) - 96(x - x')$,

alſo
$$\frac{y-y'}{x-x'} = 3(x^3+x^2x'+xx'^2+x'^3)+4(x^2+xx'+x'^2)-12(x+x')-96$$

und ſomit
$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x - 96.$$

Die hieraus entſtehende Gleichung
$$x^3 + x^2 - 2x - 8 = 0$$
hat als einzige reelle Wurzel die Wurzel $x = 2$, und demnach tritt für $x = 2$ ein Grenzwert von der Größe -113 ein. Da aber $f'(2+\delta)$ gleich $12\delta(\delta^2 + 7\delta + 14)$, alſo für ein poſitives δ poſitiv iſt, ſo kann der Grenzwert nur ein kleinſter ſein.

Beiſpiel 10. Es ſei $y = x\sqrt{24 - 3x^2}$.

Aufl. Aus
$$y - y' = x\sqrt{24 - 3x^2} - x'\sqrt{24 - 3x'^2}$$
bildet man, um gleichhohe Potenzen zuſammenfaſſen zu können,
$$y - y' = \frac{x^2(24 - 3x^2) - x'^2(24 - 3x'^2)}{x\sqrt{24 - 3x^2} + x'\sqrt{24 - 3x'^2}},$$
$$= \frac{24(x^2 - x'^2) - 3(x^4 - x'^4)}{x\sqrt{24 - 3x^2} + x'\sqrt{24 - 3x'^2}},$$
und erhält dadurch:
$$f'(x) = \frac{24 - 6x^2}{\sqrt{24 - 3x^2}}.$$

Somit ſind die beiden Grenzſtellen $x = \pm 2$ mit den Grenzwerten $\pm 4\sqrt{3}$ vorhanden. Da aber
$$f'(2+\delta) = \frac{-24\delta - 6\delta^2}{\sqrt{12 - 12\delta - 3\delta^2}} \quad \text{und} \quad f'(-2+\delta) = \frac{+24\delta - 6\delta^2}{\sqrt{12 + 12\delta - 3\delta^2}}$$
und folglich für ein poſitives δ

$f'(2+\delta)$ negativ und $f'(-2+\delta)$ poſitiv

iſt, ſo muß $4\sqrt{3}$ ein größter und $-4\sqrt{3}$ ein kleinſter Wert ſein.

Zuſatz. Wie auf Seite 91 gezeigt worden iſt, läßt ſich bei einer ganzen rationalen Funktion f(x) der Wert für $x = a + \delta$ durch die Summe

$$f(a + \delta) = f(a) + \frac{\delta}{1} f'(a) + \frac{\delta^2}{2!} f''(a) + \frac{\delta^3}{3!} f'''(a) + \cdots + \delta^n$$

darſtellen. Man hat alſo in dieſem Falle:

$$f(a) - f(a + \delta) = -\frac{\delta}{1} f'(a) - \frac{\delta^2}{2!} f''(a) - \frac{\delta^3}{3!} f'''(a) - \cdots$$

Iſt daher a eine Grenzſtelle, ſo folgt:

$$f(a) - f(a + \delta) = -\frac{\delta^2}{2!}\left[f''(a) + \frac{\delta}{3} f'''(a) + \frac{\delta^2}{3 \cdot 4} f^{IV}(a) + \cdots\right],$$

und da δ ſo klein gewählt werden kann, daß $f''(a)$ ſeinem abſoluten Betrage nach größer als die Summe aller in der Klammer noch folgenden Glieder iſt, ſo erkennt man, daß an der Grenze die Differenz $f(a) - f(a + \delta)$ das entgegengeſetzte Vorzeichen von $f''(a)$ beſitzt. Hieraus aber folgt:

Regel von Fermat: Eine (ganze rationale) Funktion f(x) beſitzt für $x = a$ einen größten (kleinſten) Wert, wenn für $x = a$ ihre erſte Ableitung $f'(x)$ gleich 0 und ihre zweite Ableitung $f''(x)$ negativ (poſitiv) iſt.

☞ Vgl. die Behandlung dieſes Abſchnitts in Anhang II.

Kapitel 7.

Kombinationslehre.

Nr. 34. Erklärungen.

1. Die Kombinationslehre beſchäftigt ſich mit der Anzahl und den Arten aller möglichen Zuſammenſtellungen (Formen) gegebener Größen. Die Größen werden Elemente genannt, und zwar einfache, wenn ſie in einer Form nur einmal vorkommen dürfen, und wiederholte, wenn ſie in einer Form mehrfach vorkommen können oder müſſen.

2. Die Elemente werden nach beſtimmten Geſichtspunkten, z. B. alphabetiſch oder der Größe nach angeordnet. Dieſe Reihenfolge wird als die natürliche Reihenfolge bezeichnet. Jedes folgende Element heißt im Vergleich zu einem vorhergehenden ein höheres (ſpäteres).

3. Kommen in einer Form alle gegebenen Elemente vor und iſt nur die natürliche Reihenfolge derſelben verändert, ſo heißt die Form eine **Permutation.**

4. Kommen von n Elementen in einer Form nur k vor und bleibt die Reihenfolge der k Elemente ohne Einfluß, ſo heißt die Form eine **Kombination von n Elementen zur k^{ten} Klaſſe.** Wird dagegen auch die Reihenfolge der k Elemente berückſichtigt, ſo heißt die Form eine **Variation von n Elementen zur k^{ten} Klaſſe.**

Folgerung. Aus jeder Kombinationsform laſſen ſich ſo viel Variationsformen bilden, wie für ihre k Elemente Permutationen möglich ſind.

Zuſatz. Bei beiden Arten von Formen kann es geſtattet ſein, dasſelbe Element in derſelben Form zu wiederholen. Man hat dann Kombinationen, bzw. Variationen mit Wiederholung.

Beiſpiel. Die Elemente ſeien 1, 2, 3, 4, 5, 6.

a) Soll beſtimmt werden, wieviel 6-ziffrige Zahlen ſich aus dieſen Elementen bilden laſſen, ohne daß eine Ziffer wiederholt wird, ſo iſt dies eine Permutations-Aufgabe.

b) Soll beſtimmt werden, wieviel 3-ziffrige Zahlen aus dieſen Elementen mit oder ohne Wiederholung herſtellbar ſind, ſo liegt eine Aufgabe der Variations-Rechnung vor.

c) Soll dagegen die Anzahl aller Produkte aus je drei dieſer Elemente angegeben werden, wobei jede Zahl nur einmal oder auch wiederholt vorkommen kann, ſo iſt dies eine Kombinations-Aufgabe.

Nr. 35. Permutationen.

a) **Aufgabe 1.** Die Anzahl der Permutationen aus n verſchiedenen Elementen zu beſtimmen.

Aufl. Sämtliche Permutationen der n Elemente können in n Gruppen verteilt werden, von denen jede eins der n Elemente an der Spitze hat und die Permutationsformen der übrigen n − 1 Elemente enthält. Iſt daher P_k die Anzahl der Permutationen aus k Elementen, ſo folgt hieraus:

$$P_n = n\,P_{n-1},\; P_{n-1} = (n-1)\,P_{n-2} \ldots P_2 = 2P_1 = 2 \cdot 1,$$

und ſomit

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n = n! \text{ (geſprochen: } \mathbf{n\ Fakultät}\text{).}$$

Aufgabe 2. Die Anzahl der Permutationen aus n Elementen zu beſtimmen, unter denen α gleiche Elemente einer Art, β gleiche Elemente einer zweiten Art uſw. vorkommen.

Aufl. Iſt $P_{\frac{n}{\alpha,\beta..}}$ die geſuchte Anzahl und werden zunächſt die α Elemente als verſchieden angenommen, ſo gehen aus jeder Form ohne Änderung in der Stellung der übrigen Elemente ſo viel neue Formen hervor, wie ſich α Elemente permutieren laſſen, d. h. $\alpha!$. Werden in jeder der neuen Formen die β Elemente als verſchieden angeſehen, ſo können in gleicher Weiſe aus denſelben $\beta!$ neue Formen gebildet werden uſw. Demnach entſtehen, wenn alle Elemente als verſchieden betrachtet werden, aus jeder der urſprünglichen Formen $\alpha!\ \beta! \ldots$ neue Formen. Da aber die Anzahl aller dieſer Formen P_n beträgt, ſo hat man

$$P_n = \alpha!\ \beta! \ldots P_{\frac{n}{\alpha,\beta..}},$$

und ſomit iſt

$$P_{\frac{n}{\alpha,\beta\,..}} = \frac{n!}{\alpha!\,\beta! \ldots}.$$

b) Die Reihenfolge der Formen iſt beſtimmt, wenn die Umſtellung der Elemente nach gewiſſen Geſetzen erfolgt. Setzt man feſt, daß nicht eher eine frühere Stelle durch ein höheres Element eingenommen werden darf, als bis eine ſpätere (nach rechts ſtehende) Stelle ſich nicht mehr erhöhen läßt, ſo iſt eine Form als die höhere zu bezeichnen, wenn ſie ſpäter gebildet wird.

So folgen aus der Form

$$a_1 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_3 \quad a_2$$

der Reihe nach die Formen

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & a_5 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_5 & a_2 & a_4 & a_3 \\ a_1 & a_5 & a_3 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_5 & a_3 & a_4 & a_2 \\ a_1 & a_5 & a_4 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2, \end{array}$$

und dann erſt darf a_2 an die erſte Stelle rücken. Das Bildungsgeſetz bleibt dasſelbe, wenn wiederholte Elemente vorkommen.

Aufgabe 3. Die Stellenzahl einer gegebenen Form von n Elementen zu beſtimmen.

Aufl. Nimmt das erſte Element der gegebenen Form in der natürlichen Reihenfolge der Elemente die k^{te} Stelle ein, ſo gehen $k - 1$ Gruppen von Formen aus $n - 1$ Elementen (ſ. Aufg. 1) voraus. Iſt dann das zweite Element das l^{te} unter den $n - 1$ übrig gebliebenen Elementen, ſo gelangt es an die vorgeſchriebene Stelle erſt dann, wenn $l - 1$ Gruppen von $n - 2$ Elementen vorausgegangen ſind. In entſprechender Weiſe kann beſtimmt werden, wieviel Formen vorausgehen, bis jedes Element an ſeine Stelle in der gegebenen Form kommt.

Zuſatz. Das Verfahren bleibt dasſelbe, wenn mehrfach Elemente auftreten. Iſt z. B. das Element a unter den n Elementen α mal vorhanden, ſo beginnt in Wirklichkeit nur eine Gruppe mit a, allein man gelangt zu derſelben Zahl, wenn man α Gruppen annimmt und die Permutationszahl der Gruppe durch α dividiert.

Beiſpiel 1. Welche Stellenzahl beſitzt das Wort secunda?

Aufl. Die Elemente ſind acdensu (7).

Vor	sacdenu	ſtehen	$5 \cdot 6! = 3600$	Formen
	eacdnu	„	$3 \cdot 5! = 360$	„
	cadnu	„	$1 \cdot 4! = 24$	„
	uadn	„	$3 \cdot 3! = 18$	„
	nad	„	$2 \cdot 2! = 4$	„
	da	„	$1 \cdot 1! = 1$	„
			zuſammen 4007	Formen;

alſo iſt secunda die 4008^{te} Form.

Beiſpiel 2. Welche Stellenzahl beſitzt das Wort mississippi?

Aufl. Die Elemente ſind iiiimppssss (11).

Vor $\underline{m}$iiiippssss ſtehen $4\cdot\frac{10!}{4!\;2!\;4!} = 12600$ Formen
$\underline{s}$iiippsss „ $5\cdot\frac{8!}{3!\;2!\;4!} = 700$ „
$\underline{s}$iiippss „ $5\cdot\frac{7!}{3!\;2!\;3!} = 350$ „
$\underline{s}$iipps „ $4\cdot\frac{5!}{2!\;2!\;2!} = 60$ „
$\underline{s}$iipp „ $4\cdot\frac{4!}{2!\;2!} = 24$ „
$\underline{p}$ip „ $\frac{2!}{2!} = 1$ „
pi „ $1 = 1$ „

zuſammen 13736 Formen;

alſo iſt mississippi die 13737te Form.

c) Aufgabe 4. Wie heißt die Nte Permutation von n gegebenen Elementen?

Aufl. In $N - 1$ geht $(n-1)!$ ſo oft mal auf, wie dem erſten Element der geſuchten Form in der natürlichen Reihenfolge Elemente vorausgehen. Iſt das erſte Element herausgenommen, ſo enthält der Reſt R_1 ſo oft mal $(n-2)!$, wie Elemente unter den übriggebliebenen dem 2ten Element der geſuchten Form vorausgehen. Die Diviſion von R_2 durch $(n-3)!$ liefert dann die Anzahl der Elemente, die nun noch vor dem dritten Elemente der Form ſtehen, und einen Reſt R_3 uſw.

Zuſatz. Bei wiederholten Elementen kann die Diviſion einen Quotienten q liefern, der zu einem der wiederholten Elemente führt, das nicht das erſte ſeiner Art iſt. In dieſem Falle iſt natürlich nur dasjenige Vielfache des Diviſors abzuziehen, das der Stellung des erſten der betreffenden wiederholten Elemente entſpricht.

Beiſpiel 1. Wie heißt die 371te Permutation der Elemente aeikrs?

Aufl. Elemente: aeikrs (6).

$370 : 5!$ oder $370 : 120 = 3$, $R_1 = 10$. Das 1te Element iſt k,
$10 : 4!$ „ $10 : 24 = 0$, $R_2 = 10$. „ 2te „ „ a,
$10 : 3!$ „ $10 : 6 = 1$, $R_3 = 4$. „ 3te „ „ i,
$4 : 2!$ „ $4 : 2 = 2$, $R_4 = 0$. „ 4te „ „ s,
und nun folgen e r.

Die geſuchte Form heißt daher kaiser.

Beiſpiel 2. Wie heißt die 2872te Permutation der Elemente aehhrrsu?

Aufl. Elemente: aehhrrsu (8).

$2871 : \frac{7!}{2!\,2!}$ oder $2871 : 1260 = 2$, Reſt 351. Das 1te Element iſt h,
$351 : \frac{6!}{2!}$ $351 : 360 = 0$, „ 351. „ 2te „ „ a,
$351 : \frac{5!}{2!}$ $351 : 60 = 5$, „ 51. „ 3te „ „ u,
$51 : \frac{4!}{2!}$ „ $51 : 12 = 4$, „ 3. „ 4te „ „ s,
$3 : \frac{3!}{2!}$ „ $3 : 3 = 1$, „ 0. „ 5te „ „ h,

und da keine Permutationen mehr vorhanden ſind, ſo folgen nun die Elemente err, d. h. die Form heißt hausherr.

Nr. 36. Kombinationen.

Sind $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ die n Elemente, die (zunächſt ohne Wiederholung) zur k^{ten} Klaſſe kombiniert werden ſollen, ſo heißt die niedrigſte Form $a_1 a_2 \ldots a_{k-1} a_k$, und aus dieſer gehen die folgenden in der Weiſe hervor, daß die Erhöhung eines Elementes ſo ſpät und ſo wenig als möglich eintritt.

Es heißt demnach
die 2te Form $a_1\ a_2 \ldots\ a_{k-1}\ \ a_{k+1}$,
„ 3te „ $a_1\ a_2 \ldots\ a_{k-1}\ \ a_{k+2}$ uſw.
Auf die Form $a_1\ a_2 \ldots a_{k-2}\ \ a_k\ \ a_n$
folgt $a_1\ a_2 \ldots a_{k-2}\ \ a_{k+1}\ \ a_n$,
auf dieſe $a_1\ a_2 \ldots a_{k-2}\ \ a_{k+2}\ \ a_n$
uſw., bis $a_1\ a_2 \ldots a_{k-2}\ \ a_{n-1}\ \ a_n$
erreicht iſt. Nun erſt kann die Form $a_1 a_2 \ldots a_{k-3}\ a_{k-1}\ a_k\ a_{k+1}$ gebildet werden. Geht man in dieſer Weiſe vor, ſo erhält man der Reihe nach alle Kombinationen der n Elemente zur k^{ten} Klaſſe. Das Bildungsgeſetz bleibt dasſelbe, wenn Wiederholung zuläſſig iſt.

Aufgabe 1. Die Anzahl C_n^k der Kombinationen von n Elementen zur Klaſſe k ohne Wiederholung zu beſtimmen.

Aufl. Sind die Kombinationen der Klaſſe k — 1 bekannt, ſo laſſen ſich aus jeder Form durch Hinzufügung je eines der n — (k — 1) fehlenden Elemente n — (k — 1) Formen der Klaſſe k bilden. Auf dieſem Wege aber entſteht jede Form der k^{ten} Klaſſe k mal, weil ſie durch Hinzufügung eines jeden der k Elemente zu einer Form aus den k — 1 übrigen Elementen hervorgehen kann.

Demnach iſt
$$C_n^k = \frac{n-(k-1)}{k}\cdot C_n^{k-1}$$

In gleicher Weiſe erhält man:
$$C_n^{k-1} = \frac{n-(k-2)}{k-1}\cdot C_n^{k-2},$$
$$C_n^{k-2} = \frac{n-(k-3)}{k-2}\cdot C_n^{k-3}$$

uſw., bis ſchließlich
$$C_n^2 = \frac{n-1}{2}\cdot C_n^1 = \frac{n-1}{2}\cdot\frac{n}{1}$$
entſteht. Daraus folgt aber:

1.
$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(k-1)k},$$

und wenn mit (n − k)! erweitert wird:

2.
$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Folgerung. Da in der Schlußgleichung k und n − k miteinander vertauſcht werden können, ſo folgt:

3.
$$C_n^{n-k} = C_n^k.$$

Zuſatz. Für den Ausdruck C_n^k wird zur Abkürzung das Zeichen $\binom{n}{k}$ gebraucht (geleſen: n tief k oder n über k).

Aufgabe 2. Die Anzahl ${}^{r}C_n^k$ der Kombinationen aus n Elementen zur k^{ten} Klaſſe mit Wiederholung zu beſtimmen.

Aufl. Sind alle Kombinationen der k^{ten} Klaſſe mit Wiederholung gebildet, und werden in den Formen von den Elementen das 2^{te} um 1, das 3^{te} um 2, das 4^{te} um 3 uſw. erhöht, ſo verſchwinden alle Wiederholungen, aber die letzte Form $n\,n\,n\ldots n$

weiſt jetzt in
$$n(n+1)(n+2)\ldots(n+k-1)$$
k − 1 neue Elemente auf. Wird umgekehrt das k^{te} Glied in jeder der neuen Formen um k − 1, das $(k-1)^{te}$ Glied um k − 2 uſw., das 2^{te} Glied alſo um 1 vermindert, ſo entſteht jedesmal eine der urſprünglichen Formen. Es iſt daher
$${}^{r}C_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Nr. 37. Variationen.

Um ſämtliche Variationen der Klaſſe k aus n Elementen zu bilden, ſtellt man zunächſt alle Kombinationen der Klaſſe k her und führt dann alle Permutationen der Elemente in jeder der entſtandenen Formen aus. Dies Bildungsgeſetz gilt für Variationen ohne und mit Wiederholung und liefert auch die Variationsformen in geordneter Reihenfolge.

Aufg. 1. Die Anzahl V_n^k der Variationen aus n Elementen zur Klaſſe k ohne Wiederholung zu beſtimmen.

Aufl. **Es iſt $V_n^k = k! \cdot C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.**

Aufg. 2. Die Anzahl ${}^rV_n^k$ der Variationen aus n Elementen zur Klaſſe k mit der Wiederholung zu beſtimmen.

Aufl. Sind die Variationen der Klaſſe k — 1 bekannt, ſo kann man die Formen der Klaſſe k dadurch herſtellen, daß man jeder Form der Reihe nach jedes der n Elemente hinzufügt. Da die entſtehenden Variationsformen ſämtlich voneinander verſchieden ſind, ſo folgt:

$${}^rV_n^k = n\,{}^rV_n^{k-1},\quad {}^rV_n^{k-1} = n\,{}^rV_n^{k-2} \text{ uſw.},$$

und da ${}^rV_n^1 = n$ ſelber iſt, ſo ergibt ſich:

$${}^rV_n^k = n^k.$$

Nr. 38. Anfangsgründe der Wahrſcheinlichkeitsrechnung.

Die Lehre von den Kombinationen und Variationen findet eine ausgedehnte Verwendung bei den Aufgaben aus der Wahrſcheinlichkeitsrechnung.

Erklärung 1. Unter der **mathematiſchen Wahrſcheinlichkeit** für das Eintreffen eines Ereigniſſes verſteht man den Quotienten aus der Anzahl aller dem Ereignis günſtigen Fälle und der Anzahl aller dabei möglichen Fälle.

Iſt m die Anzahl aller bei einem Ereignis möglichen und g die Anzahl der günſtigen Fälle, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit (für das Eintreffen) des Ereigniſſes

$$w = \frac{g}{m}.$$

So iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit

einer Münze „Bild" zu werfen, gleich $\frac{1}{2}$, da $m = 2$ und $g = 1$ iſt,

einem Würfel 3 Augen ⸗ ⸗ , ⸗ $\frac{1}{6}$, ⸗ $m = 6$ ⸗ $g = 1$ ⸗,

⸗ ⸗ eine gerade Zahl ⸗ ⸗ , ⸗ $\frac{1}{2}$, ⸗ $m = 6$ ⸗ $g = 3$ ⸗.

Zuſatz. Iſt $g = m$, alſo $w = 1$, ſo iſt das Ereignis gewiß.

⸗ $g > \frac{1}{2}m$, ⸗ $w > \frac{1}{2}$, ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ wahrſcheinlich.

⸗ $g = \frac{1}{2}m$, ⸗ $w = \frac{1}{2}$, ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ zweifelhaft.

⸗ $g < \frac{1}{2}m$, ⸗ $w < \frac{1}{2}$, ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ unwahrſcheinlich.

⸗ $g = 0$, ⸗ $w = 0$, ⸗ ⸗ ⸗ ⸗ unmöglich.

Beiſpiel 1. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei Würfeln 9 Augen zu werfen?

Aufl. Mit zwei Würfeln ſind ${}^rV_6{}^2 = 6^2 = 36$ Würfe möglich. Unter dieſen befinden ſich

2 Würfe mit den Augen 3 und 6,
2 „ „ „ „ 4 „ 5,

im ganzen alſo 4 günſtige Würfe, und daher iſt $w = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Beiſpiel 2. In einer Urne befinden ſich 6 weiße und 7 ſchwarze Kugeln. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Griff eine weiße und eine ſchwarze Kugel aus der Urne zu nehmen?

Aufl, Es ſind C_{13}^2 oder 78 Fälle möglich, und unter dieſen befinden ſich ſo viel günſtige Fälle, als man eine der weißen mit einer der ſchwarzen Kugeln zuſammenſtellen kann, d. h. 6 · 7 oder 42 Fälle. Demnach iſt $w = \frac{42}{78} = \frac{7}{13}$.

Beiſpiel 3. Ein Verein hat bei einer Lotterie mit 100 Nummern und 5 Treffern 20 Loſe genommen. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß er mit 3 und nur mit 3 Nummern herauskommt?

Aufl. Es ſind C_{100}^5 Zuſammenſtellungen von Gewinnummern möglich. Unter dieſen ſind alle Fälle günſtig, in denen irgend 3 der beſetzten Nummern mit einer beliebigen Kombination 2ter Klaſſe aus den 80 nicht beſetzten Nummern vereinigt ſind. Demnach beträgt die Anzahl der günſtigſten Fälle $C_{20}^3 \cdot C_{80}^2$, und die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt gleich

$$\frac{C_{20}^3 \cdot C_{80}^2}{C_{100}^5} \text{ oder gleich } \frac{7505}{156849}.$$

Erklärung 2. Unter der **entgegengeſetzten** Wahrſcheinlichkeit (Unwahrſcheinlichkeit) verſteht man den Quotienten aus der Anzahl aller dem Ereignis ungünſtigen und der Anzahl aller dabei möglichen Fälle.

Wird die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit mit W_e bezeichnet, ſo iſt

$$W_e = \frac{m-g}{m} = 1 - \frac{g}{m} = 1 - w, \text{ und ſomit } \mathbf{W_e + w = 1}, \text{ d. h.}$$

Zuſatz. Die Summe aus der direkten und der entgegengeſetzten Wahrſcheinlichkeit iſt gleich 1.

Beiſpiel 4. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit drei Würfeln wenigſtens zwei gleiche Augen zu werfen?

Aufl. Es ſind ${}^rV_6^3 = 216$ Würfe möglich, und unter dieſen ſind alle Würfe mit lauter verſchiedenen Augen ungünſtig. Die Anzahl derſelben iſt aber gleich V_6^3 oder $6 \cdot 5 \cdot 4$, d. h. 120, und ſomit iſt $W_e = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}$, alſo $w = \frac{4}{9}$.

Beiſpiel 5. Wie groß iſt für den Verein in Beiſpiel 3 die Wahrſcheinlichkeit, überhaupt zu gewinnen?

Aufl. Unter den C_{100}^5 möglichen Fällen ſind die C_{80}^5 Fälle ungünſtig, in denen nur Loſe aus den nicht beſetzten Nummern gezogen werden. Es iſt daher

$$W_e = \frac{C_{80}^5}{C_{100}^5} = \frac{19513}{61110},\ \text{alſo}\ w = \frac{41597}{61110}.$$

Erklärung 3. Unter der **vollſtändigen** (totalen) Wahrſcheinlichkeit verſteht man die Wahrſcheinlichkeit für das Eintreten irgendeines unter mehreren voneinander unabhängigen Ereigniſſen.

Iſt m die Anzahl der möglichen Fälle und ſind von dieſen g_k für das k^{te} Ereignis günſtig, ſo ſind Σg_k günſtige Fälle vorhanden. Die Wahrſcheinlichkeit W_v für das Eintreten eines der Ereigniſſe iſt daher gleich $\frac{g_1 + g_2 + g_3 + \cdots g_n}{m}$ oder $\frac{g_1}{m} + \frac{g_2}{m} + \frac{g_3}{m} + \cdots + \frac{g_n}{m}$, und ſomit iſt

$W_v = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n$, d. h.

Lehrſatz 10. Die vollſtändige Wahrſcheinlichkeit iſt gleich der Summe aus den Wahrſcheinlichkeiten für das Eintreten der einzelnen Ereigniſſe.

Beiſpiel 6. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit drei Würfeln 8 oder 10 Augen zu werfen?

Aufl. Die Wahrſcheinlichkeit w_1, 8 Augen zu werfen, iſt gleich $\frac{7}{72}$

und „ „ w_2, 10 „ „ „ , „ „ $\frac{9}{72}$.

Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit W_v iſt daher gleich $\frac{7+9}{72}$ oder $\frac{2}{9}$.

Erklärung 4. Unter der **zuſammengeſetzten** Wahrſcheinlichkeit verſteht man die Wahrſcheinlichkeit, daß zwei oder mehrere voneinander unabhängige Ereigniſſe gleichzeitig oder auch in beſtimmter Reihenfolge nacheinander eintreten.

Bei 2 Ereigniſſen mit m_1 und m_2 möglichen Fällen ſind, da jedes Ereignis der erſten mit jedem der zweiten Art zuſammentreffen kann, für das gleichzeitige Eintreffen der beiden Ereigniſſe $m_1 \cdot m_2$ Fälle möglich. Jeder von dieſen kann mit einem der m_3 für ein drittes, von den beiden erſten unabhängiges Ereignis möglichen Fälle zuſammentreffen, und daher ſind für das gleichzeitige Eintreten der drei Ereigniſſe $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$ Möglichkeiten vorhanden, uſw. Sollen daher n voneinander unabhängige Ereigniſſe mit $m_1, m_2, m_3 \ldots m_n$ Möglichkeiten gleichzeitig oder in beſtimmter Reihenfolge nacheinander eintreten, ſo ſind $M = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_n$ Fälle möglich. In ganz entſprechender Weiſe läßt ſich zeigen, wenn g_k Fälle dem k^{ten} Ereignis günſtig ſind, daß das Produkt $G = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdots g_n$ die Anzahl der Fälle angibt, welche durch das Zuſammentreffen der günſtigen Fälle entſteht. Es iſt daher

$$W_z = \frac{G}{M} = \frac{g_1 \cdot g_2\ g_3 \cdots g_n}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \ldots m_n} = w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \ldots w_n, \qquad \text{d. h.}$$

Lehrſatz 11. Die zuſammengeſetzte Wahrſcheinlichkeit iſt gleich dem Produkt aus den Wahrſcheinlichkeiten der einzelnen Ereigniſſe.

Beiſpiel 7. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei Würfeln zuerſt 11 und dann 9 Augen zu werfen?

Aufl. Für jeden der beiden Würfe iſt $m = 36$. Für den erſten ſind 2 und für den zweiten 4 Fälle günſtig. Demnach iſt $w_1 = \frac{2}{36}$ und $w_2 = \frac{4}{36}$, alſo $W_z = \frac{1}{162}$.

Beiſpiel 8. Die Wahrſcheinlichkeit, nach 10 Jahren noch zu leben, iſt bei einem gewiſſen Ehepaar für den Mann gleich $\frac{2}{3}$ und für die Frau gleich $\frac{3}{4}$. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß nach 10 Jahren nur die Frau noch lebt?

Aufl. Die Wahrſcheinlichkeit, daß der Mann nach 10 Jahren geſtorben iſt, beträgt $1 - \frac{2}{3}$ oder $\frac{1}{3}$. Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt daher gleich $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$.

Beiſpiel 9. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit drei Würfeln zuerſt einen vollſtändigen Paſch, dann ein Sequens und zuletzt keins von dieſen beiden zu werfen?

Aufl Für jeden der Würfe ſind 216 Fälle möglich, und von dieſen ſind für den erſten 6 und für den zweiten 24 Fälle günſtig. Es iſt daher $w_1 = \frac{1}{36}$, $w_2 = \frac{1}{9}$ und folglich $w_3 = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$. Man erhält demnach: $W_z = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{31}{36} = \frac{31}{11664}$.

Zuſatz. Der Lehrſatz 11 gilt auch für den Fall, daß die aufeinander folgenden Ereigniſſe nicht unabhängig voneinander ſind. Nur muß dann bei der Berechnung der einzelnen Wahrſcheinlichkeiten berückſichtigt werden, daß die vorhergehenden Ereigniſſe bereits eingetreten ſind.

Beiſpiel 10. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten zuerſt den Schellenkönig, dann das rote As und ſchließlich den Eichelober zu ziehen, ohne die gezogene Karte zurückzuſtecken?

Aufl. Die erſte Wahrſcheinlichkeit w_1 iſt gleich $\frac{1}{32}$. Beim zweiten Herausziehen ſind nur 31 Karten vorhanden, und daher iſt $w_2 = \frac{1}{31}$. Entſprechend iſt $w_3 = \frac{1}{30}$. Man erhält daher: $W_z = \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{30}$.

Erklärung 5. Unter der **beſchränkten** Wahrſcheinlichkeit verſteht man die Wahrſcheinlichkeit, daß von zwei oder mehreren Ereigniſſen wenigſtens eins eintritt.

Die Wahrſcheinlichkeit, daß keins von n Ereigniſſen mit den Wahrſcheinlichkeiten w_1, w_2, $w_3 \ldots w_n$ eintritt, iſt nach Lehrſ. 11 gleich $(1 - w_1) \cdot (1 - w_2) \cdot (1 - w_3) \;\ldots (1 - w_n)$, und demnach erhält man für die Wahrſcheinlichkeit W_b, daß wenigſtens eins der Ereigniſſe eintritt:

$$W_b = 1 - (1 - w_1)(1 - w_2)(1 - w_3) \ldots (1 - w_n).$$

Beiſpiel 11. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei Würfeln zuerſt 9, und wenn dies nicht geſchieht, dann 11 Augen zu werfen?

Aufl. Es iſt $w_1 = \frac{1}{9}$ und $w_2 = \frac{1}{18}$, alſo $W_b = 1 - \frac{8}{9} \cdot \frac{17}{18} = \frac{13}{81}$.

Beiſpiel 12. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei Würfeln ſpäteſtens beim 4^{ten} Wurfe 7 Augen zu werfen?

Aufl. Es iſt $w = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, alſo $W_b = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^4 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$.

Erklärung 6. Unter der **relativen** Wahrſcheinlichkeit eines von mehreren Ereigniſſen verſteht man das Verhältnis der Wahrſcheinlichkeit dieſes Ereigniſſes zu der vollſtändigen Wahrſcheinlichkeit für das Eintreten irgendeines der Ereigniſſe.

Es iſt
$$W_r = \frac{w_k}{w_1 + w_2 + w_3 \dots w_n}.$$

Beiſpiel 13. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, daß von dem Ehepaar in Beiſp. 8 nach 10 Jahren eher der Mann noch lebt als die Frau?

Es iſt
$$W_r = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = \frac{8}{17}.$$

Beiſpiel 14. Wie groß iſt die Wahrſcheinlichkeit, aus einem Spiel von 32 Karten auf einmal eher zwei Karten von gleicher Farbe als zwei gleiche Bilder zu ziehen? (Das As gelte als Bild.)

Aufl. Es iſt
$$\left.\begin{aligned} w_1 &= 4 \cdot \frac{C_8^2}{C_{32}^2} = \frac{7}{31}, \\ w_2 &= 4 \cdot \frac{1}{C_{32}^2} = \frac{1}{124}, \end{aligned}\right\} \text{ und ſomit } W_r = \frac{\frac{7}{31}}{\frac{7}{31} + \frac{1}{124}} = \frac{28}{29}.$$

Kapitel 8.

Der binomiſche Lehrſatz.

Nr. 39. Ableitung des binomiſchen Lehrſatzes für poſitive ganzzahlige Exponenten.

Die Ausführung des Produktes

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\dots(x+a_n)$$

liefert 2^n Teilprodukte, die zu $n+1$ Gliedern zuſammengefaßt werden können. Das erſte von dieſen heißt x^n und das letzte $a_1 a_2 a_3 \dots a_n$. Die dazwiſchen liegenden Glieder ſind Potenzen von x, deren Exponent zwiſchen 0 und n liegt, und beſitzen Koeffizienten, die nach ganz beſtimmten Geſetzen zu bilden ſind. Die Teilprodukte mit x^k entſtehen dadurch, daß aus k Klammern die Größen x mit den Größen a der $n-k$ übrigen Klammern zu einem Produkte vereinigt werden. Nun laſſen ſich aber aus den n Klammern C_n^{n-k} verſchiedene Zuſammenſtellungen von $n-k$ Klammern bilden, und daher iſt der Koeffizient von x^k die Summe aus den C_n^{n-k} Produkten aus je $n-k$ Faktoren, zu denen die Größen a kombiniert werden können.

Sind die Größen a untereinander gleich, ſo iſt jedes dieſer Produkte gleich a^{n-k}. In der Ausführung der Potenz $(x+a)^n$ hat demnach das Glied mit x^k die Form

$$C_n^{n-k} x^k a^{n-k} \quad \text{oder} \quad \binom{n}{n-k} x^k a^{n-k} = \binom{n}{k} x^k a^{n-k},$$

und ſomit entſteht, wenn man $x+a$ durch $a+b$ erſetzt, die Formel:

1. $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{1} ab^{n-1} + b^n.$

Dieſe Formel wird **binomiſcher Lehrſatz** genannt, und ihre Koeffizienten $\binom{n}{k}$ heißen Binomialkoeffizienten.

Anmerkung. Der binomiſche Lehrſatz iſt hier zwar nur für ganze poſitive Exponenten abgeleitet, er bleibt aber auch gültig, wenn der Exponent eine negative oder eine gebrochene Zahl iſt, vorausgeſetzt, daß $\frac{b}{a}$ zwiſchen $+1$ und -1 liegt. (S. Nr. 43!)

Zuſatz. Wird b durch $-b$ erſetzt, ſo entſteht:

2. $(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - \cdots + (-1)^n b^n.$

Nr. 40. Eigenſchaften der Binomialkoeffizienten.

1. Die Eigenſchaft $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ iſt bereits bei der Aufſtellung der Reihe 1 in Nr. 39 benutzt. Es ſind hiernach die von Anfang und Ende gleich weit entfernten Koeffizienten einander gleich.

2. Setzt man in der Binomialreihe $a = b = 1$, ſo erkennt man, daß die Summe aller Binomialkoeffizienten gleich 2^n iſt.

3. Setzt man in der Reihe für $(a-b)^n$ $a = b = 1$, ſo ergibt ſich $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} \ldots$, wo $\binom{n}{0}$ für 1 gebraucht iſt. Jede dieſer beiden Summen beträgt 2^{n-1}. (S. 2!)

4. Es iſt
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{(k+1)!},$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{k+1+n-k}{k+1},$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\cdot(n+1)}{(k+1)!},$$

und ſomit
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Dieſe Formel liefert als Koeffizienten der erſten 10 Potenzen **(Pascalſches Dreieck!):**

n = 0 . 1
1 . . . . 1 1
2 . . . . 1 2 1
3 . . . . 1 3 3 1
4 . . . . . . 1 4 6 4 1
5 . . . . . 1 5 10 10 5 1
6 . . . . 1 6 15 20 15 6 1
7 . . . 1 7 21 35 35 21 7 1
8 . . 1 8 28 56 70 56 28 8 1
9 . 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1.

Nr. 41. Entwickelung von sin n φ und cos n φ.

Nach dem binomiſchen Lehrſatze iſt
$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos^n\varphi + i\binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi + i^2\binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi$$
$$+ i^3\binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \cdots - + i^n\sin^n\varphi.$$

Nach dem zweiten Moivreſchen Satze iſt aber

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

und ſomit ergeben ſich durch Scheidung der reellen und imaginären Glieder die beiden Gleichungen:

$$1.\ \cos n\varphi = \cos^n\varphi - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi - \cdots$$

$$2.\ \sin n\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi$$
$$+ \binom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \cdots$$

Hiernach iſt

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi),$$
$$= 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi.$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi = 3\sin\varphi(1-\sin^2\varphi) - \sin^3\varphi,$$
$$= 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi.$$

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi,$$
$$= 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1.$$

$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi,$$
$$= 4\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,(\sin\varphi - 2\sin^3\varphi).$$

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi, \text{ uſw.}$$

Nr. 42. Konvergente und divergente Reihen.

Wird eine Funktion $f(x)$ durch eine Summe aus Potenzen von x mit wachſenden Exponenten dargeſtellt (in eine Potenzreihe entwickelt), ſo können zwei Fälle eintreten: entweder die Entwickelung nimmt ein Ende und führt ſomit auf eine endliche Anzahl von Gliedern, oder ſie liefert eine unbegrenzte Anzahl von Gliedern.

So liefert die Funktion $(a+bx)^n$ eine endliche Anzahl von Gliedern, wenn n eine poſitive ganze Zahl iſt, während die Funktion $\frac{a+bx}{c+dx}$ eine unendliche Anzahl von Gliedern liefert, wenn nicht $a:c = b:d$ iſt.

Erklärung 1. Eine Reihe heißt endlich, wenn ihre Gliederzahl begrenzt, und **unendlich**, wenn dieſe unbegrenzt iſt.

Iſt eine Funktion der Veränderlichen x in die Potenzreihe

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

entwickelt, ſo hat die Gleichung

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots$$

nur für diejenigen Werte von x eine Bedeutung, für welche die Summe auf ihrer rechten Seite bei beliebiger Vermehrung der Gliederzahl ſich einer beſtimmten endlichen Grenze nähert.

Erklärung 2. Eine unendliche Reihe heißt **konvergent**, wenn die Summe ihrer Glieder bei beliebiger Vermehrung ihrer Anzahl ſich einer beſtimmten endlichen Grenze nähert. Eine Reihe, deren Summe ſich nicht einer beſtimmten endlichen Grenze nähert, heißt **divergent.**

So iſt die Reihe $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$ konvergent

$$\left.\begin{array}{ll}\text{und die Reihe} & 1-1+1-1+1-\cdots \\ \text{oder die Reihe} & \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}+\cdots\end{array}\right\}\text{divergent.}$$

Zuſatz. Wird eine unendliche Reihe bei ihrem n^{ten} Gliede abgebrochen, ſo nennt man die Summe aller noch folgenden Glieder der Reihe ihren Reſt und bezeichnet dieſen mit R_n.

Lehrſatz 12. Wenn bei einer unendlichen Reihe die Zahl n ſo groß gewählt werden kann, daß der Reſt R_p für $p > n$ ſeinem abſoluten Betrage nach kleiner als eine beliebig kleine poſitive Größe δ bleibt, ſo iſt die Reihe konvergent.

Hiernach kann eine Reihe nur dann konvergent ſein, wenn ihr allgemeines Glied mit wachſender Stellenzahl ſich der Null nähert, allein ein ſicheres Merkmal für die Konvergenz iſt dies nicht. So nähert ſich in der harmoniſchen Reihe

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots$$

das allgemeine Glied $\frac{1}{n}$ zwar mit wachſendem n dem Werte 0, und doch iſt die Reihe nicht konvergent. Denn gibt man der Summe die Form

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

und beachtet, daß für jedes ganzzahlige m

$$\left(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\frac{1}{2^m+3}+\cdots+\frac{1}{2^m+2^m}\right)>\frac{2^m}{2\cdot 2^m},\ \text{d. h.} > \frac{1}{2}$$

und ſomit

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)>\left(1+\frac{m+1}{2}\right)$$

iſt, ſo erkennt man, daß die Summe mit wachſendem m beliebig groß werden kann.

Zuſatz 1. Eine unendliche Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen der Glieder iſt ſtets konvergent, wenn das allgemeine Glied mit wachſender Gliederzahl ſich der Null nähert.

So iſt die Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$ konvergent. Denn der abſolute Betrag des Reſtes

$$|R_n|=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots\right)$$

bleibt ſtets kleiner als $\frac{1}{n+1}$ und kann daher unter jede noch ſo kleine poſitive Zahl δ ſinken.

Zuſatz 2. Eine unendliche Reihe mit lauter poſitiven Gliedern iſt $\frac{\text{konvergent}}{\text{divergent}}$, wenn jedes ihrer Glieder $\frac{\text{kleiner}}{\text{größer}}$ iſt als das entſprechende Glied einer anderen Reihe, deren $\frac{\text{Konvergenz}}{\text{Divergenz}}$ bekannt iſt.

So iſt die Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{31}+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}\right)\cdots$ konvergent,

weil die Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\cdots$ konvergent,

und die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}\cdots+\frac{n}{n+1}\cdots$ divergent,

weil die Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{n+1}\cdots$ divergent iſt.

Folgerung. Iſt eine Reihe konvergent, wenn ihre ſämtlichen Glieder poſitiv ſind, ſo iſt ſie erſt recht konvergent, wenn die Vorzeichen ihrer Glieder abwechſeln.

Mit Benutzung des Zuſatzes 2 läßt ſich eine weitere Konvergenzbedingung ableiten. Wenn in einer Reihe mit lauter poſitiven Gliedern von dem m^{ten} Gliede ab das Verhältnis jedes folgenden zum vorhergehenden kleiner als ein beſtimmter echter Bruch q iſt, und die Reihe

$$a_m,\quad qa_m,\quad q^2a_m,\quad q^3a_m\ldots$$

gebildet wird, ſo ſind die Glieder dieſer Reihe vom zweiten ab ſämtlich größer als die entſprechenden Glieder der urſprünglichen Reihe. Da aber $q < 1$ iſt, und ſomit die Summe

$$a_m + qa_m + q^2a_m + q^3a_m + \cdots$$

einen endlichen Wert beſitzt, ſo iſt die urſprüngliche Reihe konvergent. Es beſteht alſo der Satz:

Lehrſatz 13. Wenn von irgendeinem Gliede einer Reihe an das Verhältnis eines jeden folgenden Gliedes zu dem vorhergehenden ſeinem abſoluten Betrage nach kleiner als ein beſtimmter echter Bruch bleibt, ſo iſt die Reihe konvergent.

Zuſatz 3. Iſt das Verhältnis größer als 1, ſo iſt die Reihe divergent. Iſt dagegen der Grenzwert des Verhältniſſes gleich 1, ſo iſt die Konvergenz zweifelhaft und muß auf anderem Wege ermittelt werden.

Beiſpiel 1. In der Reihe

$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots$ iſt $a_{m+1}:a_m=\frac{m+1}{2^{m+1}}:\frac{m}{2^m}=\frac{m+1}{2m}$, alſo $q < 1$,

d. h. die Reihe iſt konvergent.

Beiſpiel 2. In der Reihe $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2^2}{5\cdot 7}+\frac{2^3}{7\cdot 9}+\cdots$

iſt $a_{m+1}:a_m = \frac{2^m}{(2m+1)(2m+3)}:\frac{2^{m-1}}{(2m-1)(2m+1)}=\frac{2(2m-1)}{2m+3}=2-\frac{8}{2m+3}$,

alſo von $m = 3$ an $q > 1$, d. h. die Reihe iſt divergent.

Beiſpiel 3. In der Reihe $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$

iſt
$$a_{m+1}:a_m=\frac{1}{m(m+1)}:\frac{1}{(m-1)m}=\frac{m-1}{m+1}=\frac{1-\frac{1}{m}}{1+\frac{1}{m}}.$$

Der Grenzwert des Verhältniſſes $a_{m+1}:a_m$ iſt daher gleich 1. Erſetzt man aber das allgemeine Glied $\frac{1}{m(m+1)}$ durch $\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}$, ſo entſteht die Reihe
$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots,$$
d. h. eine konvergente Reihe mit der Summe 1, und daher iſt die gegebene Reihe konvergent.

Die Entſcheidung der Frage, innerhalb welches Bereichs der Veränderlichen x die durch Entwickelung der Funktion f(x) gewonnene Gleichung
$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots$$
ihre Gültigkeit behält, kann jetzt nach Lehrſ. 13 getroffen werden. Das Verhältnis $a_{m+1}x^{m+1}:a_mx^m$ iſt gleich $\frac{a_{m+1}}{a_m}x$, und demnach konvergiert die Reihe, wenn $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}x\right|$ mit wachſendem m kleiner als 1 wird. Iſt daher q der Grenzwert für $\frac{a_{m+1}}{a_m}$, ſo bleibt die Reihe konvergent, ſolange $|qx|<1$, d. h. $|x|<\frac{1}{q}$ iſt. Hieraus folgt:

Lehrſatz 14. Iſt in der Reihe $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots$ der Grenzwert des Verhältniſſes $\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|$ gleich q, ſo iſt die Reihe innerhalb des Bereichs der Veränderlichen von $-\frac{1}{q}$ bis $+\frac{1}{q}$ konvergent.

Nr. 43. Der binomiſche Lehrſatz für negative und gebrochene Exponenten.

Erklärung. Eine Reihe von der Form
$$B(x)_n=1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+\binom{n}{4}x^4+\cdots,$$
in welcher n eine beliebige reelle Zahl iſt, heißt **allgemeine Binomialreihe** vom Grade n mit dem Argument x.

Zuſatz. Iſt n eine poſitive ganze Zahl, ſo iſt $B(x)_n = (1+x)^n$.

Das Verhältnis des $(m+1)^{ten}$ Gliedes der Reihe zu ihrem m^{ten} Gliede iſt gleich

$$\binom{n}{m+1}x^{m+1} : \binom{n}{m}x^m \quad \text{oder} \quad \frac{n-m}{m+1}x \quad \text{oder} \quad -\frac{1-\frac{n}{m}}{1+\frac{1}{m}}x.$$

Da aber für jeden reellen Wert von n die Quotienten $\frac{n}{m}$ und $\frac{1}{m}$ mit wachſendem m ſich der Null nähern, ſo nähert ſich das angegebene Verhältnis dem Werte x, und demnach konvergiert die Binomialreihe, wenn x ein poſitiver oder negativer echter Bruch iſt. Hieraus folgt:

Lehrſatz 15. Die allgemeine Binomialreihe

$$B(x)_n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \cdots$$

iſt für jeden Wert von x innerhalb des Bereichs von -1 bis $+1$ konvergent.

Bildet man das Produkt zweier Binomialreihen $B(x)_p$ und $B(x)_q$, ſo erhält man

$$\begin{aligned}
B(x)_p \cdot B(x)_q &= \left(1+\binom{p}{1}x+\binom{p}{2}x^2+\binom{p}{3}x^3\ldots\right)\left(1+\binom{q}{1}x+\binom{q}{2}x^2+\binom{q}{3}x^3\ldots\right)\\
&= 1+\binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \binom{p}{4}x^4 + \cdots\\
&\quad + \binom{q}{1}x + \binom{p}{1}\binom{q}{1}x^2 + \binom{p}{2}\binom{q}{1}x^3 + \binom{p}{3}\binom{q}{1}x^4 + \cdots\\
&\quad + \binom{q}{2}x^2 + \binom{p}{1}\binom{q}{2}x^3 + \binom{p}{2}\binom{q}{2}x^4 + \cdots\\
&\quad + \binom{q}{3}x^3 + \binom{p}{1}\binom{q}{3}x^4 + \cdots\\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

In der hieraus entſtehenden Summe iſt der Koeffizient von x^k gleich

$$\binom{p}{k} + \binom{p}{k-1}\binom{q}{1} + \binom{p}{k-2}\binom{q}{2} + \cdots + \binom{q}{k}.$$

Nun iſt aber

1. $$\binom{p}{1} + \binom{q}{1} = \binom{p+q}{1},$$

2. $$\begin{aligned}
\binom{p}{2} + \binom{p}{1}\binom{q}{1} + \binom{q}{2} &= \frac{1}{1\cdot 2}[p(p-1) + 2pq + q(q-1)]\\
&= \frac{1}{1\cdot 2}[p(p-1) + pq \quad + q(q-1) + pq]\\
&= \frac{1}{1\cdot 2}(p+q-1)(p+q) = \binom{p+q}{2},
\end{aligned}$$

3. $$\binom{p}{3}+\binom{p}{2}\binom{q}{1}+\binom{p}{1}\binom{q}{2}+\binom{q}{3}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}[p(p-1)(p-2)+3p(p-1)q$$
$$+3q(q-1)p+q(q-1)(q-2)]$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}[p(p-1)(p-2)+p(p-1)q+q(q-1)(q-2)$$
$$+q(q-1)p+2pq(p+q-2)]$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(p+q-2)[p(p-1)+q(q-1)+2pq]$$
$$=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}(p+q-2)(p+q-1)(p+q)=\binom{p+q}{3}.$$

Die Fortſetzung dieſes Verfahrens liefert die Gleichung:

$$\binom{p}{k}+\binom{p}{k-1}\binom{q}{1}+\binom{p}{k-2}\binom{q}{2}+\cdots+\binom{q}{k}=\binom{p+q}{k},\ \text{d. h.}$$

Lehrſatz 16. Innerhalb des Konvergenzbereichs iſt das Produkt zweier Binomialreihen vom Grade p, bzw. q gleich einer Binomialreihe vom Grade $p+q$.

Aus der Gleichung $B(x)_{p-q}\cdot B(x)_q=B(x)_p$ folgt: $\frac{B(x)_p}{B(x)_q}=B(x)_{p-q}$, d. h.

Folgerung 1. Innerhalb des Konvergenzbereichs iſt der Quotient zweier Binomialreihen vom Grade p, bzw. q gleich einer Binomialreihe vom Grade $p-q$.

Nun iſt $B(x)_0=1$, alſo $\frac{B(x)_0}{B(x)_n}=\frac{1}{B(x)_n}$. Da aber $\frac{B(x)_0}{B(x)_n}=B(x)_{-n}$ iſt, ſo folgt:

Zuſatz 1. Der reziproke Wert einer Binomialreihe vom Grade n iſt innerhalb des Konvergenzbereichs gleich einer Binomialreihe vom Grade $-n$.

Die wiederholte Anwendung des Lehrſatzes 16 führt auf die Gleichung:

$$\underbrace{B(x)_m\cdot B(x)_m\cdot B(x)_m\ldots B(x)_m}_{n\ \text{Faktoren}}=B(x)_{m\cdot n}$$

oder $$[B(x)_m]^n=B(x)_{m\cdot n},\ \text{d. h.}$$

Folgerung 2. Innerhalb des Konvergenzbereichs iſt die n^{te} Potenz einer Binomialreihe vom Grade m gleich einer Binomialreihe vom Grade $m\cdot n$, wenn n eine poſitive ganze Zahl iſt.

Iſt aber $m=\frac{p}{q}$ und $n=q$, ſo folgt aus der Gleichung

$$\left(B(x)_{\frac{p}{q}}\right)^q=B(x)_{\frac{p}{q}\cdot q}=B(x)_p$$

durch Ausziehung der q^{ten} Wurzel:

$$\sqrt[q]{B(x)_p}=B(x)_{\frac{p}{q}},\ \text{d. h.}$$

Zuſatz 2. Die q^{te} Wurzel aus einer Binomialreihe vom Grade p iſt innerhalb des Konvergenzbereichs gleich einer Binomialreihe vom Grade $\frac{p}{q}$, wenn q eine poſitive ganze und p eine beliebige ganze Zahl iſt.

Die Zuſätze 1. und 2. enthalten den binomiſchen Lehrſatz für negative und gebrochene Exponenten, und demnach beſteht der Satz:

Lehrſatz 17. Allgemeiner binomiſcher Lehrſatz. Innerhalb des Bereichs der Veränderlichen x von -1 bis $+1$ iſt ſtets

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \cdots,$$

einerlei, ob n eine ganze oder gebrochene, poſitive oder negative Zahl iſt.

Weshalb iſt die Anzahl der Glieder einer Binomialreihe nur dann eine endliche, wenn n eine poſitive ganze Zahl iſt?

Zuſatz. Iſt n eine gebrochene Zahl von der Form $\frac{p}{q}$ und q poſitiv, ſo liefert die Binomialreihe nur den reellen, poſitiven Wert der Wurzel. Die übrigen Wurzelwerte ſind aus dieſem durch Multiplikation mit den Einheitswurzeln zu berechnen.

Anmerkung 1. Die Binomialreihe für $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ kann zur Berechnung von Wurzeln aus beſtimmten Zahlen benutzt werden. So iſt z. B. auf 5 Dezimalſtellen genau

1. $$\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = 7\sqrt{1+\frac{1}{49}} = 7\ (1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{49}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{49^2}+\cdots),$$
$$= 7\cdot(1+0{,}01020-0{,}00005),$$
$$= 7\cdot 1{,}01015 = \underline{7{,}07105.}$$

2. $$\sqrt[3]{213} = \sqrt[3]{216-3} = 6\sqrt[3]{1-\frac{1}{72}} = 6\cdot(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{72}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{72^2}-\cdots),$$
$$= 6\cdot(1-0{,}00463-0{,}00002),$$
$$= 6\ \ (0{,}99535 = \underline{5{,}97210.}$$

3. $$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{100}{49}\cdot\frac{98}{100}} = \frac{10}{7}\sqrt{1-\frac{2}{100}} = \frac{10}{7}(1-0{,}01-0{,}00005),$$
$$= \frac{10}{7}\cdot 0{,}98995 = \underline{1{,}41421.}$$

Anmerkung 2. Ein zweiter Beweis des allgemeinen binomiſchen Lehrſatzes ſtützt ſich auf die Karteſiſche Methode der unbeſtimmten Koeffizienten, die auf den Sätzen beruht:

a) Sind zwei ganze rationale Funktionen für jeden Wert der Veränderlichen x innerhalb eines die Null enthaltenden Konvergenzbereichs einander gleich, ſo ſind auch die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich.

b) Der Quotient $\frac{x^n - y^n}{x - y}$ nimmt für $y = x$ den Wert nx^{n-1} an, einerlei, ob n eine poſitive oder negative, ganze oder gebrochene Zahl iſt.

Man ſetzt

$$(1+x)^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

und

$$(1+y)^n = 1 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + \cdots,$$

bildet die Differenz $(1+x)^n - (1+y)^n$, dividiert dieſe durch $(1+x) - (1+y)$ und läßt dann y gleich x werden. Dadurch erhält man:

$$n(1+x)^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots,$$

und hieraus folgt durch Multiplikation mit $(1+x)$:

$$\begin{aligned} n(1+x)^n &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots \\ &\quad\;\; + a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots \\ &= a_1 + (2a_2 + a_1)x + (3a_3 + 2a_2)x^2 + (4a_4 + 3a_3)x^3 + \cdots \end{aligned}$$

Da aber auch

$$n(1+x)^n = n + a_1 nx + a_2 nx^2 + a_3 nx^3 + \cdots$$

iſt, ſo liefert die Anwendung des Satzes a)

1. $a_1 = n = \binom{n}{1}$
2. $2a_2 + a_1 = a_1 n$, alſo $2a_2 = a_1(n-1) = n(n-1)$ und $a_2 = \binom{n}{2}$
3. $3a_3 + 2a_2 = a_2 n$, alſo $3a_3 = a_2(n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}$ und $a_3 = \binom{n}{3}$

uſw. Es iſt daher innerhalb des Konvergenzbereichs für jeden reellen Wert von n

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \cdots$$

Der Satz a) wird hier jedoch auf unendliche Reihen angewandt, während er nur für *ganze rationale* Funktionen aufgeſtellt iſt.

Nr. 44. Die Exponentialreihe.

a) Nach der Binomialformel iſt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 \cdot 2} + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdots \end{aligned}$$

Bezeichnet man den Grenzwert, dem $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ mit wachſendem n zuſtrebt, mit e, ſetzt man alſo $\lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, ſo ergibt ſich hieraus:

1. $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Der Wert von e iſt zunächſt größer als 2. Erſetzt man vom 3^{ten} Gliede ab in den Nennern alle Faktoren durch 2, ſo werden die Glieder und damit ihre Summe vergrößert. Daraus folgt:

$$e < [1 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots)],$$

alſo: $$e < \left[1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty}}{1-\frac{1}{2}}\right], \text{ d. h. } e < 3,$$

da $\left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0$ iſt. Verwandelt man die Glieder in Dezimalzahlen, ſo liefert die Addition bald den Wert $\mathbf{e = 2{,}7182818 \ldots}$

Die Zahl e iſt die *Grundzahl der natürlichen Logarithmen*.

b) Iſt x eine beliebige endliche Zahl, ſo wird $\frac{n}{x}$ mit n zugleich unendlich groß, und daher iſt auch

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}} = e.$$

Geht man zur x^{ten} Potenz über, ſo folgt:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^{x}.$$

Nun wird $\binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^{k}$ oder $\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}x^{k}$

für $n = \infty$ gleich $\frac{x^k}{k!}$, und ſomit ergibt ſich:

$$\lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

Es iſt alſo für jeden endlichen Wert von x:

2. $$\mathbf{e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots}$$

Der Quotient $\frac{x^{m+1}}{(m+1)!} : \frac{x^m}{m!}$ iſt gleich $\frac{x}{m+1}$ und wird daher bei jedem endlichen Wert von x mit wachſendem m kleiner als ein beliebig angenommener echter Bruch. S. Nr. 42, Lehrſ. 13.

Bezeichnet ferner la den Logarithmus von a für die Grundzahl e, ſo iſt $a^x = e^{x\,l a}$, und damit ergibt ſich:

3. $$\mathbf{a^{x} = 1 + \frac{x\,l a}{1} + \frac{(x\,l a)^2}{2!} + \frac{(x\,l a)^3}{3!} + \frac{(x\,l a)^4}{4!} + \cdots}$$

Die Reihen 2. und 3. heißen **Exponentialreihen**.

Nr. 45. Die logarithmiſche Reihe.

Aus $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ folgt $\lim\limits_{n=\infty} n\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$

Erſetzt man $1+\frac{1}{n}$ durch a^δ, ſo wird $\delta=0$ für $n=\infty$, und damit wird der Grenzübergang nach 0 verlegt. Es iſt dann

$$n=\frac{1}{a^\delta-1} \quad\text{und}\quad l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\delta\, l a,$$

alſo $n\,l\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\delta\, l a}{a^\delta-1}$ und ſomit $\lim\limits_{\delta=0}\frac{\delta\, l a}{a^\delta-1}=1.$

Daraus aber folgt:

1. $$l a=\lim_{\delta=0}\frac{a^\delta-1}{\delta}.$$

Erſetzt man a durch $1+x$, ſo ergibt ſich:

$$l(1+x)=\lim_{\delta=0}\frac{(1+x)^\delta-1}{\delta}$$

$$=\lim_{\delta=0}\left(x+\frac{\delta-1}{2!}x^2+\frac{(\delta-1)(\delta-2)}{3!}x^3+\frac{(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{4!}x^4\ldots\right),$$

und nun durch Übergang zur Grenze:

2. $$l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

Weiterhin liefert die Subſtitution $a=1-x$:

3. $$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\cdots$$

Durch Verbindung von 2. und 3. erhält man:

4. $$l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\cdots\right).$$

Dieſe Reihe heißt **logarithmiſche Reihe.**

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder dieſer Reihe $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}:\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ iſt gleich $\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}x^2$ und hat x^2 als Grenzwert. Die Reihe iſt daher nur ſo lange konvergent, wie $|x|<1$ bleibt.

Die Glieder der Reihe 4. nehmen nur bei ſehr kleinen Werten von x hinreichend ſchnell ab, um eine raſche Berechnung der Logarithmen zu ermöglichen. Außerdem iſt die Herſtellung der Form $\frac{1+x}{1-x}$ aus einer Zahl a unbequem. Daher empfiehlt es ſich, die Reihe durch eine Subſtitution umzugeſtalten.

Man ſetzt $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+y}{n}$, alſo $x = \frac{n}{2n+y}$,

wo n und y beliebige poſitive Zahlen bezeichnen. Es iſt dann

$$5.\ l(n+y) = ln + 2\left[\frac{y}{2n+y} + \frac{1}{3}\left(\frac{y}{2n+y}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{y}{2n+y}\right)^5 + \cdots\right].$$

Iſt z. B. l 101 zu berechnen, ſo ſetzt man $n = 100$ und $y = 1$. Es iſt dann $\frac{y}{2n+y} = \frac{1}{201}$, und $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{201}\right)^3$ beeinflußt ſchon die 7te Dezimalſtelle nicht mehr.

Anmerkung. Iſt $y : n$ eine ſehr kleine Zahl, ſo darf näherungsweiſe

$$l(n+y) = ln + \frac{y}{n}$$

geſetzt werden. Unter derſelben Vorausſetzung über z iſt

$$l(n+z) = ln + \frac{z}{n},$$

und ſomit ergibt ſich:

$$[l(n+y) - l(n)] : [l(n+z) - ln] = y : z.$$

Die gleiche Beziehung beſteht für die Logarithmen mit der Grundzahl 10. Hiernach verhalten ſich bei großen und nur wenig voneinander abweichenden Zahlen die Differenzen der Logarithmen wie die Differenzen der Zahlen ſelbſt. Auf dieſen Satz ſtützt ſich bei der Logarithmenrechnung die Benutzung der Tafeln für die Proportionalteile.

Nr. 46. Die Reihen für Sinus und Koſinus und die Zahl π.

Vorbemerkung. Um eine Gleichung zwiſchen einer Winkelfunktion und ihrem Argument bilden zu können, muß man zunächſt dafür Sorge tragen, daß beides Größen derſelben Art ſind. Man erreicht dies, wenn man den Winkel als Mittelpunktswinkel in einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer 1 annimmt und ihn durch den Bogen mißt, zu dem er gehört, weil dann auch die Winkelfunktionen als Längen auftreten. Bei dieſer Art des Meſſens iſt für jeden endlichen Wert von x

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \text{ alſo } \frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

und daher auch $\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ oder $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

Nimmt x bis zur unteren Grenze 0 ab, ſo wächſt $\cos x$ bis zur oberen Grenze $+1$, und daher nähert ſich der Quotient $\frac{\sin x}{x}$ mit abnehmendem x der Grenze 1. Hieraus kann der Schluß gezogen werden, daß man $\sin\frac{\varphi}{n}$ durch $\frac{\varphi}{n}$ erſetzen darf, wenn n eine ſehr große Zahl iſt.

a) Die Reihen für $\sin n\varphi$ und $\cos n\varphi$ gehen, wenn φ durch $\frac{\varphi}{n}$ erſetzt wird, in die Reihen über:

$$1.\ \cos\varphi = \cos^n\frac{\varphi}{n} - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\frac{\varphi}{n}\sin^2\frac{\varphi}{n} + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\frac{\varphi}{n}\sin^4\frac{\varphi}{n}\cdots$$

$$2.\ \sin\varphi = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\frac{\varphi}{n}\sin\frac{\varphi}{n} - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\frac{\varphi}{n}\sin^3\frac{\varphi}{n} + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\frac{\varphi}{n}\sin^5\frac{\varphi}{n}\cdots$$

Iſt nun n eine ſehr große Zahl, ſo hat man:

$$\cos^n \frac{\varphi}{n} = \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{n}\right)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{n} + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{1\ 2} \sin^4 \frac{\varphi}{n} \cdots$$

$$= 1 - \frac{n}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{n^2} + \frac{\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2} \frac{\varphi^4}{n^4} \cdots \quad \text{(ſ. Vorbem.)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{n} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2} \frac{\varphi^4}{n^4} \cdots,$$

und da für $n = \infty$ auf der rechten Seite dieſer Gleichung alle Glieder bis auf das erſte verſchwinden, alſo $\cos^n \frac{\varphi}{n}$ und ſomit auch $\cos^k \frac{\varphi}{n}$ für $n = \infty$ gleich 1 iſt, ſo treten dann in den Reihen 1 und 2 nur Glieder von der Form $\binom{n}{k}\left(\frac{\varphi}{n}\right)^k$ auf. Es iſt aber

$$\binom{n}{k}\left(\frac{\varphi}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-[k-1])}{k!} \frac{\varphi^k}{n^k},$$

$$= \frac{1\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}{k!} \varphi^k.$$

Für $n = \infty$ entſteht hieraus $\frac{\varphi^k}{k!}$, und ſomit nehmen die Reihen die Form an:

3. $$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \frac{\varphi^8}{8!} \cdots$$

4. $$\sin \varphi = \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \frac{\varphi^9}{9!} \cdots$$

b) Bezeichnet das Zahlzeichen $e^{\varphi i}$ den Wert der Exponentialreihe 2 in Nr. 44 für $x = \varphi i$, ſo iſt

$$e^{\varphi i} = 1 + i \frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^2}{2!} - i \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i \frac{\varphi^7}{7!} \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{\varphi}{1} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\right)$$

und nun nach 3. und 4.:

5. $$e^{\varphi i} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

In entſprechender Weiſe ergibt ſich:

6. $$e^{-\varphi i} = \cos \varphi - i \sin \varphi,$$

und ſomit hat man:

7. $$e^{2\varphi i} = \left(\frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi - i \sin \varphi}\right) = \frac{1 + i \operatorname{tg} \varphi}{1 - i \operatorname{tg} \varphi}.$$

Geht man zu den Logarithmen über, ſo erhält man hieraus:

$$2\varphi i = l\left(\frac{1+i\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1-i\,\mathrm{tg}\,\varphi}\right),$$

alſo nach der Reihe 4. in Nr. 45:

$$2\varphi i = 2\left(i\,\mathrm{tg}\,\varphi + \frac{(i\,\mathrm{tg}\,\varphi)^3}{3} + \frac{(i\,\mathrm{tg}\,\varphi)^5}{5} + \cdots\right).$$

Da nur ungerade Potenzen von i vorkommen, ſo fällt i fort, und es bleibt:

8. $$\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi - \frac{\mathrm{tg}^3\varphi}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5\varphi}{5} - \frac{\mathrm{tg}^7\varphi}{7} + \cdots$$

oder wenn man $\mathrm{tg}\,\varphi = x$, alſo $\varphi = \mathrm{arc\,tg}\,x$ ſetzt:

9. $$\mathbf{arc\,tg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots}$$

c) Die Reihe 8. kann zur Berechnung der Zahl π benutzt werden.

α) Setzt man $\varphi = \frac{\pi}{4}$ und ſomit $\mathrm{tg}\,\varphi = 1$, ſo geht aus 8. die zuerſt von **Leibniz** aufgeſtellte Reihe hervor:

10. $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

Die Berechnung nach dieſer Reihe beanſprucht viel Zeit, da die Glieder nur langſam abnehmen, und daran ändert ſich auch nicht viel, wenn man aus ihr durch Ausführung der Subtraktionen eine Reihe mit lauter poſitiven Gliedern bildet.

β) Setzt man ferner $\varphi = \frac{\pi}{6}$ und ſomit $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, ſo geht aus der Reihe 8 die Reihe von **Lagny** hervor:

11. $$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \cdots\right).$$

Bei dieſer beeinflußt ſchon das 10te Glied die 5te Dezimalſtelle nicht mehr.

γ) Weit raſcher führt eine Reihe zum Ziele, die zuerſt von **Machin** mit Benutzung der Additionstheoreme hergeleitet worden iſt. Setzt man $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{5}$, ſo wird $\mathrm{tg}\,2\varphi = \frac{5}{12}$, $\mathrm{tg}\,4\varphi = \frac{120}{119}$ und $\mathrm{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$. Man hat daher:

$$\varphi = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots,$$

$$4\varphi - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \cdots,$$

und ſomit:

12. $$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7}\cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5}\cdots\right)$$

Soll π auf 5 Dezimalſtellen genau berechnet werden, ſo genügen von der erſten Summe die erſten drei Glieder, während von der zweiten Summe nur das erſte Glied benutzt zu werden braucht.

δ) Schließlich mag hier noch die zuerſt von **Euler** aufgeſtellte Reihe entwickelt werden. Setzt man $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, ſo wird $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{1}{3}$. Man hat daher:

$$\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} \cdots$$

$$\frac{\pi}{4} - \varphi = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} \cdots$$

und erhält ſomit durch Addition:

$$13. \quad \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} \cdots\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \cdots\right).$$

Nr. 47. Abſchluß der Erweiterungen des Zahlengebietes.

a) Durch den Nachweis, daß der zweite Satz von Moivre auch für ganzzahlige negative Exponenten beſteht (ſ. Seite 38), iſt zugleich der Beweis dafür erbracht, daß die erſte Erweiterung des Potenzbegriffs auch für eine komplexe Grundzahl gilt.

Erſetzt man in der Binomialreihe x durch xi, ſo werden die Glieder mit ungeraden Potenzen von x ſämtlich imaginär, und die rechte Seite zerfällt in zwei Summen, von denen die erſte nur reelle und die zweite nur imaginäre Glieder enthält. Iſt der Exponent der Reihe gleich $\frac{1}{n}$ und n eine poſitive ganze Zahl, ſo ſtellt die rechte Seite der Gleichung die Reihenentwicklung für die n^{te} Potenz aus einer komplexen Zahl dar. Mit dieſem direkten Beweis für den Lehrſatz 5 auf Seite 36 iſt die Ableitung des dritten Satzes von Moivre als einwandfrei dargetan und die Tatſache feſtgeſtellt, daß auch die zweite Erweiterung des Potenzbegriffs für komplexe Zahlen gültig iſt.

b) Da $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Periode 2π beſitzen, ſo erweiſt ſich $e^{\varphi i}$ als eine periodiſche Funktion mit der Periode 2π. Aus der Gleichung 5 in Nr. 46 geht daher die Gleichung hervor:

$$\cos\varphi + i \sin\varphi = e^{(\varphi + 2k\pi)i},$$

und ſomit erhält man durch Übergang zu den Logarithmen

$$\begin{aligned}
&\text{für } \varphi = 0: && l(+1) = (0 + 2k\pi)i = 0 + \frac{4k+0}{2}\pi i.\\
&\varphi = \frac{\pi}{2}: && l(+i) = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i = 0 + \frac{4k+1}{2}\pi i.\\
&\varphi = \pi: && l(-1) = \left(\frac{2\pi}{2} + 2k\pi\right)i = 0 + \frac{4k+2}{2}\pi i.\\
&\varphi = \frac{3\pi}{2}: && l(-i) = \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)i = 0 + \frac{4k+3}{2}\pi i
\end{aligned}$$

Nun kann eine beliebig reelle Zahl a als das Produkt aus ihrem abſoluten Betrag und dem Faktor $+1$ oder -1 dargeſtellt werden, und ſomit ergibt ſich:

a) *Jede Zahl hat unzählig viele Logarithmen.*

b) *Poſitive Zahlen beſitzen einen einzigen reellen Logarithmus.*

c) *Die Logarithmen negativer Zahlen ſind ſämtlich imaginär.*

Ebenſo iſt eine imaginäre Zahl gleich dem Produkt aus ihrem poſitiv genommenen Koeffizienten und dem Faktor $+i$ oder $-i$; es ergibt ſich alſo auch der Satz:

d) *Die Logarithmen imaginärer Zahlen ſind imaginär.*

Schließlich kann eine beliebige komplexe Zahl $a+bi$ durch das Produkt $r\cdot[\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)]$, alſo durch $r\cdot e^{(\varphi+2k\pi)i}$ dargeſtellt werden. Durch Übergang zu den Logarithmen erhält man hieraus:

$$l(a+bi) = lr + (\varphi + 2k\pi)i, \quad \text{d. h.:}$$

e) *Die Logarithmen komplexer Zahlen ſind wieder komplexe Zahlen.*

c) Erſetzt man in der Exponentialreihe für a^x (ſ. Nr. 44b) den Exponenten x durch xi, ſo zerfällt die rechte Seite in zwei Summen, von denen die erſte nur reelle und die zweite nur imaginäre Glieder enthält. Beide Summen haben mit a^x gleichzeitig beſtimmte endliche Werte. Die Potenz a^{x+yi} aber kann in das Produkt $a^x\cdot a^{yi}$ zerlegt werden. Es zeigt ſich alſo, daß *bei Potenzen reeller Grundzahlen auch komplexe Exponenten zugelaſſen werden dürfen.*

Für den Ausdruck $(a+bi)^{x+yi}$ läßt ſich ferner durch die Subſtitution $a+bi = r\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi) = r\cdot e^{\varphi i}$ die Gleichung herſtellen:

$$(a+bi)^{x+yi} = r^{x+yi}\cdot(e^{\varphi i})^x\cdot(e^{\varphi i})^{yi}.$$

Von den Faktoren auf der rechten Seite ſind die erſten beiden komplexe Zahlen, und durch Übergang zu den Logarithmen entſteht aus dem dritten die Größe $yi\cdot l(e^{\varphi i})$ oder $yi\cdot\varphi i\cdot le$ oder ſchießlich $-y\cdot\varphi$; es iſt alſo umgekehrt $(e^{\varphi i})^{yi} = e^{-y\cdot\varphi}$. Somit zeigt ſich, daß *auch bei komplexen Grundzahlen der Exponent eine komplexe Zahl ſein darf.*

Damit iſt der Nachweis dafür geliefert, daß *alle bisherigen Rechnungsarten ganz allgemein auf komplexe Zahlen ausgedehnt werden können und niemals aus dem Gebiet der komplexen Zahlen hinausführen.* Man wird alſo nicht zur Einführung neuer Zahlen gedrängt, wenn man die Rechnungsarten für die allgemeinſte Zahlenart, die komplexen Zahlen, erweitert. *Das Zahlengebiet iſt nun in ſich abgeſchloſſen.*

Abſchnitt IV.

Trigonometrie.*)

Kapitel 1.

Goniometrie.

Nr. 1. Erklärung der Funktionen Sinus und Koſinus.

a) Bei der Unterſuchung über die Abhängigkeit der Seiten und Winkel eines Dreiecks voneinander gelangt die Planimetrie zu dem Satze, daß in zwei rechtwinkligen Dreiecken mit gleichgroßen Hypotenuſen dem größeren von zwei ſpitzen Winkeln die größere Kathete gegenüberliegt. Zur Darſtellung dieſes Satzes eignet ſich am beſten der Kreis, in dem ein beweglicher Radius MB auf einen feſtliegenden Radius MA projiziert und dadurch zur Hypotenuſe gemacht werden kann. Solange der Mittelpunktswinkel AMB ſpitz bleibt, veranſchaulicht die Figur, daß dem größeren Winkel AMB die größere Kathete BC gegenüber- und die kleinere Kathete MC anliegt. Wird der Winkel AMB größer als 90°, ſo gehört er nicht mehr dem rechtwinkligen Dreieck an, und der Satz gilt dann für ſeinen Nebenwinkel. Dabei bleibt aber die Kathete BC die Länge der projizierenden Linie und MC die Projektion des beweglichen Radius MB auf den feſtliegenden Radius MA. Die Figur kann alſo dazu benutzt werden, die Abhängigkeit dieſer beiden Strecken von der Größe des Mittelpunktswinkels φ (AMB) zu erkennen. Sie zeigt, daß das Wachſen des Winkels die Zunahme des Lotes BC zur Folge hat, ſolange φ ſpitz iſt, daß das Lot die größte Länge erreicht für $\varphi = 90^0$, und wieder kleiner wird, wenn φ über 90° hinausgeht, bis es für $\varphi = 180^0$ die Größe 0 annimmt. Wächſt aber φ über 180° hinaus, ſo fällt das Lot auf die andere Seite der Geraden, die den Radius MA trägt,

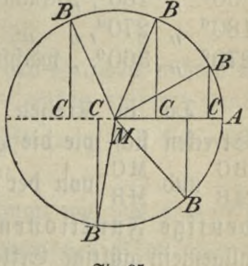


Fig. 27

---

*) Die Anfangsgründe der Trigonometrie ſtehen in Unterſtufe B, Abſchnitt III.

und erleidet dort bei weiterem Wachſen des Winkels φ bis zur Grenze 360° genau dieſelben Größenveränderungen, die bei der Zunahme des Winkels von 0° bis 180° beobachtet werden.

In entſprechender Weiſe ſieht man die Projektion MC abnehmen, wenn φ von 0° bis 90° wächſt; ſie erreicht für $\varphi = 90^\circ$ die Größe 0, nimmt dann aber wieder an Länge zu, bis φ den Wert 180° erreicht hat, und erfährt bei weiterer Zunahme von φ bis zur Grenze 360° in umgekehrter Reihenfolge genau dieſelben Größenveränderungen, die für den Zwiſchenraum von 0° bis 180° eintreten.

Wächſt φ über 360° hinaus, ſo beginnt ſowohl für BC als auch für MC wieder die Reihe der Werte, die von $\varphi = 0^\circ$ ab ermittelt werden.

Dreht ſich der Radius MB von MA aus nach rechts, ſo betrachtet man den Winkel BMA als negativ. Die Figur läßt nun erkennen, daß bei jedem Wert von φ ſowohl die Projektion MC als auch die projizierende Linie BC für $\sphericalangle AMB = -\varphi$ die gleiche Länge wie für $\sphericalangle AMB = +\varphi$ hat. Aber während bei den beiden Winkeln die Projektion dieſelbe iſt, liegen die projizierenden Linien auf verſchiedenen Seiten des Durchmeſſers MA.

Für jede Größe des Winkels φ erhält man alſo durch Projektion des freien Schenkels MB auf den feſtliegenden Schenkel MA ein rechtwinkliges Dreieck, deſſen Katheten BC und MC durch den Winkel eindeutig beſtimmt ſind. Gelten in gewohnter Weiſe die Strecken BC und MC als negativ, wenn der Punkt B unterhalb des Durchmeſſers MA bzw. links von dem auf MA ſenkrechten Durchmeſſer liegt, ſo läßt ſich für $MB = MA = r$ aus der Figur ableſen:

Wächſt der Winkel φ von

0°	bis	90°,	ſo wächſt	BC	von	0	bis	r,	ſo nimmt	MC	von	r	bis	0 ab.
90°	„	180°,	„ nimmt	BC	„	r	„	0 ab,	„ „	MC	„	0	„	−r „
180°	„	270°,	„ „	BC	„	0	„	−r „	„ wächſt	MC	„	−r	„	0.
270°	„	360°,	„ wächſt	BC	„	−r	„	0,	„ „	MC	„	0	„	r.

Da in Kreiſen mit verſchiedenen Halbmeſſern entſprechend gezogene Strecken ſich wie die Halbmeſſer verhalten, ſo ſind die Streckenverhältniſſe $\frac{BC}{MB}$ und $\frac{MC}{MB}$ von der Länge des Radius MB unabhängig; ſie ſind alſo eindeutige Funktionen des Winkels φ (AMB). Man hat daher die folgende allgemein gültige Erklärung:

Erklärung. Von den Streckenverhältniſſen, die bei der Projektion eines Schenkels des Winkels φ auf den anderen entſtehen, bezeichnet man das Verhältnis

1. des Lotes zu dem projizierten Schenkel als **Sinus**-Funktion
2. der Projektion zu dem projizierten Schenkel als **Koſinus**-Funktion

des Winkels φ.

b) Gibt man dem Halbmeſſer $MB = r$ die Länge 1, ſo werden durch die Strecken BC und MC (mit der Längeneinheit gemeſſenen) die Maßzahlen der Größen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ dargeſtellt. Nach den Pyth. Lehrſatz beſteht daher für jede Größe des Winkels φ die Gleichung:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1.$$

Vgl. hierzu: Unterſtufe, Abſchnitt III, Nr. 2.

Nr. 2. Graphiſche Darſtellung der beiden Funktionen.

In einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer 1 ſind die Strecken BC und MC die Maße der Funktionen Sinus und Koſinus; dieſe Maße können als Ordinaten benutzt werden. Welche Einheit für die unabhängige Veränderliche φ gewählt wird, iſt gleichgültig; es können daher auch die Bogen verwandt werden, die im Einheitskreiſe zu Mittelpunktswinkeln von der Größe φ gehören. Geſchieht dies, ſo erhält man bei der Sinus-Funktion eine Linie, die

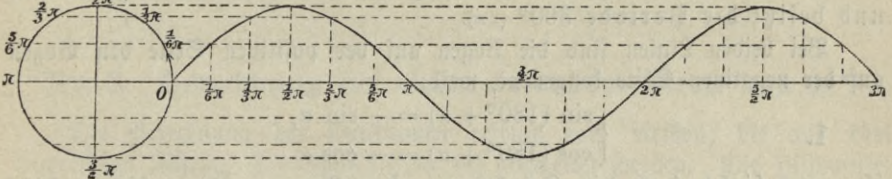


Fig. 28.

a) den Punkt 0 mit der horizontalen Geraden gemein hat;

b) von $\varphi = 0^0$ bis $\varphi = 90^0$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ſich nach oben von der Geraden entfernt (ſteigt) und für $\varphi = 90^0$ die Entfernung 1 beſitzt;

c) von $\varphi = 90^0$ bis $\varphi = 180^0$ (π) ſich wieder der Geraden nähert und dann bis $\varphi = 270^0$ $(\frac{3}{2}\pi)$ ſich nach unten von der Geraden entfernt (ſinkt);

d) von $\varphi = 270^0$ bis $\varphi = 360^0$ (2π) aus der Entfernung -1 ſich wieder bis zu der Entfernung 0 der Geraden nähert (ſteigt);

e) von $\varphi = 360^0$ ab wieder denſelben Verlauf nimmt wie von $\varphi = 0^0$ an.

Dieſe Linie, **Sinus-Linie** genannt, gibt ein überſichtliches Bild über den Verlauf der Funktion. Sie bringt die Tatſache zur Anſchauung,

1. daß der Sinus eines Winkels im 1ten und 2ten Quadranten poſitiv und im 3ten und 4ten Quadranten negativ iſt;
2. daß der Sinus im 4ten und 1ten Quadranten von -1 bis $+1$ ſteigt und im 2ten und 3ten Quadranten von $+1$ bis -1 ſinkt;
3. daß der Sinus eine **periodiſche** Funktion ſeines Argumentes iſt und ſeine Periode 360^0 (2π) beträgt.

In ganz entſprechender Weiſe läßt ſich die **Koſinus-Linie** graphiſch darſtellen. Die Figur bringt wiederum die Sätze zur Anſchauung:

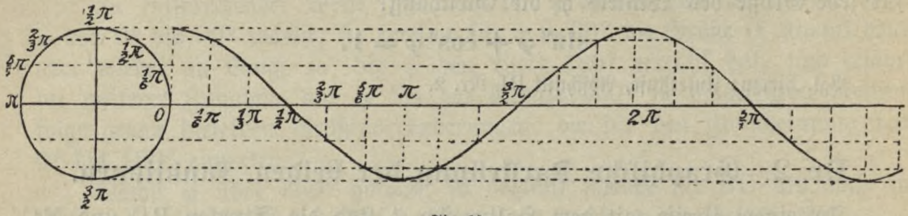


Fig. 29.

1. Der Koſinus eines Winkels iſt poſitiv im 1^{ten} und 4^{ten} und negativ im 2^{ten} und 3^{ten} Quadranten.

2. Der Koſinus ſteigt im 3^{ten} und 4^{ten} von -1 bis $+1$ und ſinkt im 1^{ten} und 2^{ten} Quadranten von $+1$ bis -1.

3. Der Koſinus iſt eine **periodiſche** Funktion ſeines Argumentes und beſitzt die Periode 360° (2π).

Bei beiden Linien ſind die Bogen auf der poſitiven Seite den Bogen auf der negativen Seite kongruent, weil

$$1.\quad \begin{cases} \sin(180^0 + \alpha) = -\sin\alpha, \\ \cos(180^0 + \alpha) = -\cos\alpha \end{cases}$$

iſt; man ſieht, daß die Funktionen der Argumente zwiſchen 180° und 360° ſich auf gleichbenannte Funktionen zwiſchen 0° und 180° zurückführen laſſen.

Jeder Bogen zerfällt in zwei ſpiegelbildlich gleiche (ſymmetriſche) Teile, weil

$$2.\quad \begin{cases} \sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha, \\ \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha, \\ \sin(90^0 + \alpha) = \sin(90^0 - \alpha), \\ \cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha) \end{cases}$$

iſt, d. h. weil die Funktionen der Argumente zwiſchen 90° und 180° auf gleichbenannte Funktionen zwiſchen 0° und 90° zurückgeführt werden können.

Bei der Sinus-Linie beginnen die Bogen auf der poſitiven Seite jedesmal um 90° ſpäter als bei der Koſinus-Linie; die Figur beſtätigt alſo die Formeln:

$$\sin(90^0 + \alpha) = \cos\alpha \text{ und } \sin(180^0 - \alpha) = \cos(90^0 - \alpha).$$

Die Benutzung der Formeln 2. liefert hieraus:

$$3.\quad \begin{cases} \sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha, \\ \cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha. \end{cases}$$

Somit können die Funktionen der Winkel zwiſchen 45° und 90° durch Funktionen von Argumenten zwiſchen 0° und 45° ausgedrückt werden.

Eine Funktionentafel braucht alſo nur für die Argumente von 0° bis 45° berechnet zu werden.

Zuſatz. Es iſt

$$4.\quad \begin{cases} \sin(90^0 + \alpha) = \sin(90^0 - \alpha) \quad = \cos\alpha, \\ \cos(90^0 + \alpha) = -\cos(90^0 - \alpha) = -\sin\alpha. \end{cases}$$

Anmerkung. Setzt man die beiden Figuren über den Punkt 0 nach links fort, ſo kann man ſchließlich die Formeln ableſen:

$$5.\quad \begin{cases} \sin(-\varphi) = -\sin\varphi, \\ \cos(-\varphi) = \cos\varphi. \end{cases}$$

Nr. 3. Berechnung für einige beſondere Werte von φ.*)

Die Berechnung der Funktionen erfolgt nach Reihen, die aus dem binomiſchen Lehrſatz (ſ. Abſchnitt III, Nr. 46) abgeleitet werden. Die Hilfsmittel der Planimetrie geſtatten dagegen die Berechnung ihrer Werte nur für ſolche Argumente, die durch fortgeſetzte Halbierung aus den Winkeln 90°, 60°, 36° (Zehneck!) und 24° (15-Eck!) entſtehen.

Iſt a_n die Seite eines regelmäßigen n-Ecks in einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer 1 und ϱ_n ihr Abſtand vom Mittelpunkte, ſo hat man:

$$\sin\frac{360^0}{2n} = \frac{1}{2}a_n,$$

$$\cos\frac{360^0}{2n} = \varrho_n = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}a_n\right)^2}.$$

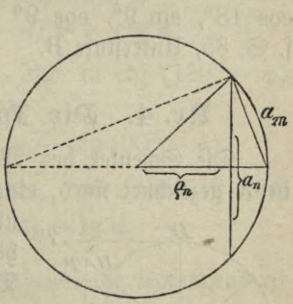


Fig. 30.

Die Seite a_{2n} des regelmäßigen 2n-Ecks iſt aber die mittlere Proportionale zum Durchmeſſer 2 und ihrer Projektion $1 - \varrho_n$ auf den Durchmeſſer. Damit erweiſen ſich $\sin\frac{360^0}{4n}$ und $\cos\frac{360^0}{4n}$ als berechenbar uſw.

1. Es ſei $n = 4$, alſo $\frac{360^0}{2n} = 45^0$.

---

*) Vgl. Unterſtufe B, Abſchnitt III, Nr. 3.

Die Seite a_4 iſt die Hypotenuſe eines gleichſchenkligen, rechtwinkligen Dreiecks, deſſen Schenkel die Länge 1 haben, und deshalb gleich $\sqrt{2}$. Man hat alſo

$$\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711,$$

$$\cos 45^0 = \varrho_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}70711.$$

Da $a_8 = \sqrt{2\,(1 - \varrho_4)} = 0{,}76536$ iſt, ſo ergibt ſich weiter:

$$\sin 22\tfrac{1}{2}^0 = \frac{1}{2}\,a_8 = 0{,}38268,$$

$$\cos 22\tfrac{1}{2}^0 = \varrho_8 \quad = 0{,}92388.$$

Aus ϱ_8 berechnet man a_{16} und dann die Funktionen von $11\frac{1}{4}^0$, uſw.

2. Es ſei $n = 6$, alſo $\frac{360^0}{2n} = 30^0$.

Da $a_6 = 1$ iſt, ſo hat man:

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = 0{,}5,$$

$$\cos 30^0 = \varrho_6 = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0{,}86603$$

und $a_{12} = 0{,}51763$. Weiter iſt dann

$$\sin 15^0 = 0{,}25882, \quad \cos 15^0 = 0{,}96592$$

und $a_{24} = 0{,}26108$. Jetzt ſind die Funktionen von $7\frac{1}{2}^0$ berechenbar, uſw.

3. Die Seite des regelmäßigen Zehnecks iſt gleich dem größeren Abſchnitt des ſtetig geteilten Halbmeſſers, alſo $= \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{5}\right) = 0{,}61803$. Das angewandte Verfahren würde hier zur Berechnung der Größen $\sin 18^0$, $\cos 18^0$, $\sin 9^0$, $\cos 9^0$ uſw. führen. — Für die Benutzung des 15-Ecks ſ. S. 85, Unterſtufe B.

Nr. 4. Die Funktionen Tangens und Kotangens.

Die Schenkel des Winkels φ (AMB) begrenzen auf der Tangente, die in A gezeichnet wird, eine Strecke AT, die in gleicher Weiſe wie der Sinus und Koſinus von der Größe des Winkels φ abhängt. Ihr Verhältnis zu MA wird deshalb als Tangens-Funktion des Arguments φ bezeichnet $\left(\operatorname{tg}\varphi = \frac{AT}{MA}\right)$. Die Tangente trifft den beweglichen Radius MB, bzw. ſeine Verlängerung auf der oberen Seite von MA, wenn φ im 1^{ten} und 3^{ten} Quadranten liegt, und auf der unteren Seite, wenn φ dem 2^{ten} und 4^{ten} Quadranten angehört; es iſt

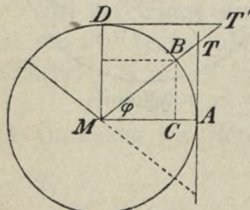


Fig. 31.

daher $\operatorname{tg}\varphi$ poſitiv im 1ten und 3ten Quadranten und negativ im 2ten und 4ten. Insbeſondere iſt

$$\operatorname{tg} 0^\circ = 0,\ \operatorname{tg} 180^\circ = 0,\ \operatorname{tg} 90^\circ = \pm\infty,\ \operatorname{tg} 270^\circ = \pm\infty,$$
$$\operatorname{tg} 45^\circ = +1,\ \operatorname{tg} 135^\circ = -1.$$

Die Tangente des Komplementwinkels von φ, gezeichnet im Punkte D, trifft den Schenkel MB, bzw. ſeine Verlängerung auf der rechten oder linken Seite von MD, je nachdem AMB in dem 1ten und 3ten oder in dem 2ten und 4ten Quadranten liegt. Die Kotangens-Funktion $\left(\frac{DT'}{MD} = \operatorname{ctg}\varphi\right)$ iſt alſo mit Tangens zugleich poſitiv und zugleich negativ; dagegen iſt

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \pm\infty,\ \operatorname{ctg} 180^\circ = \mp\infty,\ \operatorname{ctg} 90^\circ = 0,\ \operatorname{ctg} 270^\circ = 0.$$

Werden die beiden Funktionen in gleicher Weiſe wie der Sinus und Koſinus bildlich dargeſtellt, ſo ergeben ſich Linien, von denen jede in eine unbegrenzte Anzahl gleich verlaufender Zweige zerfällt. Aber während die Zweige der Tangens-Linie ſtetig ſteigen, fallen ſie ſtetig bei der Kotangens-Linie. Bei beiden folgen ſich die Zweige in Abſtänden von 180° und werden durch die horizontale Gerade in kongruente Teile zerlegt.

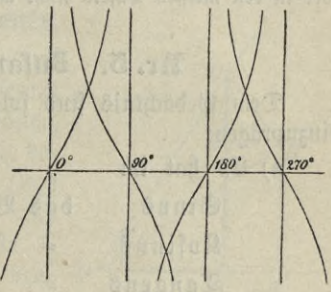


Fig. 32.

Die Betrachtung der Linien führt auch hier zu einer Reihe von Formeln, deren Beweis durch Benutzung kongruenter Dreiecke bequem zu erbringen iſt. Zunächſt hat man

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Erſetzt man ferner in $\operatorname{tg}(180^\circ - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$, bzw. in $\operatorname{ctg}(180^\circ - \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi$ das Argument φ durch $90^\circ - \alpha$, ſo folgt:

$$\operatorname{tg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha),\ \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha).$$

Auch die Zweige der beiden Linien ſind kongruent, und ſomit iſt auch

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \text{ und } \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Zuſatz. Nach der Erklärung der Funktionen Tangens und Kotangens iſt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AT}{MA} = \frac{BC}{MC} \text{ und } \operatorname{ctg}\varphi = \frac{DT'}{MD} = \frac{MC}{BC}.$$

Erweitert man mit MB, ſo erhält man:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{BC}{MB}\cdot\frac{MB}{MC}, \text{ bzw. } \operatorname{ctg}\varphi = \frac{MC}{MB}\cdot\frac{MB}{BC},$$

und ſomit ergeben ſich bei jeder Größe des Winkels φ die Beziehungen:

$$1.\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi},\ \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \text{ und } \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

(Vgl. hierzu: Unterſtufe B, Abſchnitt III, Nr. 2.)

Aus der ebenfalls für jede Größe des Winkels φ gültigen Formel

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

laſſen ſich nun die allgemein gültigen Formen ableiten:

$$2.\qquad 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi} \text{ und } 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi}.$$

Anmerkung. Man hat auch die Quotienten $\frac{1}{\cos\varphi}$ und $\frac{1}{\sin\varphi}$ als beſondere Funktionen eingeführt und ihnen die Namen Sekans und Koſekans gegeben. Ihre Werte werden aber in den meiſten Tafeln nicht mit aufgeführt.

Nr. 5. Zuſammenſtellung der Formeln.

Dem Gedächtnis ſind folgende Geſetze aus den vorſtehenden Abſchnitten einzuprägen:

a) Es hat im			1ten	2ten	3ten	4ten Quadranten
Sinus	das	Vorzeichen	+	+	−	−
Koſinus	=	=	+	−	−	+
Tangens	=	=	+	−	+	−
Kotangens	=	=	+	−	+	−

b) Im 1ten Quadranten nehmen bei wachſendem Argument Sinus und Tangens zu, dagegen Koſinus und Kotangens ab.

c) Für jeden Wert von α iſt

$$1.\qquad \begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha, \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}$$

$$2.\qquad \begin{aligned} \sin(360^0 + \alpha) &= \sin\alpha, \\ \cos(360^0 + \alpha) &= \cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(180^0 + \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(180^0 + \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}$$

$$3.\qquad \begin{aligned} \sin(180^0 - \alpha) &= \sin\alpha, \\ \cos(180^0 - \alpha) &= -\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(180^0 - \alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(180^0 - \alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha. \end{aligned}$$

4.
$$\sin(90^0+\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\cos(90^0+\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90^0+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(90^0+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

5.
$$\sin(90^0-\alpha)=\cos\alpha,$$
$$\cos(90^0-\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90^0-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(90^0-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$

Nr. 6. Additionstheoreme. Addition und Subtraktion zweier Argumente.

Zur Löſung der Aufgabe, den Sinus und Koſinus der Winkelſumme $\alpha+\beta$ oder der Differenz $\alpha-\beta$ durch Funktionen von α und β auszudrücken, ſtellt man zunächſt die Summe, bzw. Differenz dadurch her, daß man β vom 2^{ten} Schenkel des (von rechts nach links beſchriebenen) Winkels α aus anträgt, bzw. abträgt. Von einem Punkte C des 2^{ten} Schenkels der Summe (Fig. a), bzw. der Differenz (Fig. b) fällt man dann zur Herſtellung ihrer Sinus- und Koſinus-Strecken das Lot CA auf den erſten Schenkel von α und bringt die Strecken mit den nach demſelben Geſetz gebildeten Funktionenſtrecken für β und α dadurch in Beziehung, daß man die Lote CB von C auf OB und BA′ von B auf OA zeichnet. Zieht man nun noch BD parallel zu OA und beachtet, daß der Winkel DCB gleich α iſt, weil ſeine Schenkel auf den Schenkeln von α ſenkrecht ſtehen, ſo hat man

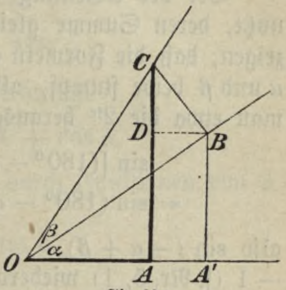


Fig. 33a

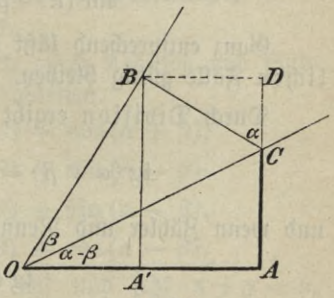


Fig. 33b.

bei $\alpha+\beta$ (Fig. a)	bei $\alpha-\beta$ (Fig. b)
1. $CA = BA' + CD,$	1. $CA = BA' - CD,$
$= OB\sin\alpha + BC\cos\alpha,$	$= OB\sin\alpha - BC\cos\alpha,$
$\frac{CA}{OC} = \frac{OB}{OC}\sin\alpha + \frac{BC}{OC}\cos\alpha,$	$\frac{CA}{OC} = \frac{OB}{OC}\sin\alpha - \frac{BC}{OC}\cos\alpha,$
d. h. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$	d. h. $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$

und

$$2.\ OA = OA' - BD,$$
$$= OB \cos\alpha - BC \sin\alpha,$$
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OC}\cos\alpha - \frac{BC}{OC}\sin\alpha,$$

d. h. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

$$2.\ OA = OA' + BD,$$
$$= OB \cos\alpha + BC \sin\alpha,$$
$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OC}\cos\alpha + \frac{BC}{OC}\sin\alpha,$$

d. h. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Man gelangt ſomit zu den Formeln:

$$1.\quad \left\{\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}\right.$$

Bei der Ableitung dieſer Gleichungen ſind zwar nur ſpitze Winkel benutzt, deren Summe gleichfalls kleiner als 90° iſt, allein es läßt ſich leicht zeigen, daß die Formeln auch für ſtumpfe Winkel gültig bleiben. Sind z. B. α und β beide ſtumpf, alſo $180^0 - \alpha$ und $180^0 - \beta$ ſpitz, ſo hat man, wenn man etwa die 2te herausgreift,

$$\sin[(180^0 - \alpha) - (180^0 - \beta)]$$
$$= \sin(180^0 - \alpha)\cos(180^0 - \beta) - \cos(180^0 - \alpha)\sin(180^0 - \beta),$$

alſo $\sin(-\alpha+\beta) = -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ und nach Erweiterung mit -1 (ſ. Nr. 5, 1) wiederum:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Ganz entſprechend läßt ſich zeigen, daß die Formeln 1. für alle möglichen Fälle gültig bleiben.

Durch Diviſion ergibt ſich aus den Gleichungen 1:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta},$$

und wenn Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\cos\beta$ dividiert werden,

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

In ganz entſprechender Weiſe erhält man:

$$2.\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \\ \operatorname{tg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}. \\ \operatorname{ctg}(\alpha-\beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Für den beſonderen Fall, daß $\beta = \alpha$ iſt, ergibt ſich:

$$3.\quad \left\{\begin{aligned} &\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.\\ &\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha.\\ &\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.\\ &\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.\end{aligned}\right.$$

Hieraus folgt durch Übergang zu den halben Argumenten:

$$4.\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.\\ &\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.\\ &\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \text{ und } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Aus der 2ten dieſer Gleichungen folgt durch Umkehrung:

$$5.\quad 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha \text{ und } 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha.$$

Aufg. $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$ uſw. durch Funktionen von α auszudrücken.

Aufl. Zerlege 3α in $2\alpha + \alpha$, 4α in $2\cdot 2\alpha$ uſw.

Nr. 7. Multiplikation, Addition und Subtraktion zweier Funktionen.

Aus den Gleichungen 1. in Nr. 6 laſſen ſich durch Addition und Subtraktion bequem die beſonders wichtigen Formeln ableiten:

$$1.\quad \left\{\begin{aligned} &2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).\\ &2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta).\\ &2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta).\\ &2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta).\end{aligned}\right.$$

Stellt man dieſe Formeln für x und y auf und ſetzt $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$, alſo $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ und $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, ſo ergibt ſich:

$$2.\quad \left\{\begin{aligned} &\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\\ &\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\\ &\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.\\ &\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\end{aligned}\right.$$

Zuſatz 1. Die Ausdrücke $\sin(\alpha \pm \beta) \pm \cos(\alpha \pm \beta)$ führen nicht auf einfache Produkte; nur gleichnamige Funktionen laſſen ſich auf dieſe Weiſe vereinigen.

Zuſatz 2. Für $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$ und $\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta$ iſt die Ableitung einfacher Produkte aus den Formeln 2. in Nr. 6 nicht durchführbar. Man erſetzt deshalb $\operatorname{tg}\alpha$ durch $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ uſw. und vollzieht die Vereinigung unter Benutzung der Gleichungen 1. in Nr. 6.

Nr. 8. Addition und Subtraktion von drei Funktionen, deren Argumente die Winkel eines Dreiecks ſind.

Sind α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, ſo iſt

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma, \qquad \frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}, \qquad \frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} \quad \text{uſw.}$$

Aus den Formeln 3. und 5. in Nr. 5 folgt daher:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma, \quad \cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma, \quad \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}\gamma,$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}, \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}, \quad \text{uſw.}$$

Die Anwendung dieſer Beziehungen führt zu einer großen Reihe von Formeln, von denen nur die wichtigſten hier abgeleitet werden ſollen.

Es iſt zunächſt

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta \pm \sin\gamma &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \pm 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\\ &= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \pm \sin\frac{\gamma}{2}\right),\\ &= 2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) \pm \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

und ſomit nach Gleichung 1. in Nr. 7

$$\text{1.} \quad \left|\begin{aligned}&\boldsymbol{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},}\\ &\boldsymbol{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.}\end{aligned}\right.$$

Entſprechend iſt

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta \pm \cos\gamma &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \pm \left(1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right),\\ &= 2\sin\frac{\gamma}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right) \mp \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right] \pm 1,\end{aligned}$$

und ſomit

$$\textbf{2.} \quad \left|\begin{aligned}&\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1,\\ &\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1.\end{aligned}\right.$$

Ferner führt die Gleichung $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$

auf
$$-\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$
und hieraus folgt:

3. $$\mathbf{tg}\,\alpha + \mathbf{tg}\,\beta + \mathbf{tg}\,\gamma = \mathbf{tg}\,\alpha\,\mathbf{tg}\,\beta\,\mathbf{tg}\,\gamma.$$

Die Winkel $90^0 - \frac{\alpha}{2}$, $90^0 - \frac{\beta}{2}$ und $90^0 - \frac{\gamma}{2}$ betragen gleichfalls zuſammen 180^0. Es iſt alſo auch
$$\operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$= \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\beta}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right),$$
und ſomit

4. $$\mathbf{ctg}\,\frac{\alpha}{2} + \mathbf{ctg}\,\frac{\beta}{2} + \mathbf{ctg}\,\frac{\gamma}{2} = \mathbf{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{ctg}\,\frac{\beta}{2}\,\mathbf{ctg}\,\frac{\gamma}{2}.$$

Nr. 9. Gleichungen zwiſchen Winkelfunktionen.

Winkelfunktionen ſind voneinander abweichende Größen, wenn bei demſelben Winkel verſchiedene Funktionen und bei derſelben Funktion verſchiedene Winkel vorkommen. Treten daher in einer Gleichung verſchiedene Funktionen desſelben Winkels oder gleichbenannte Funktionen verſchiedener Winkel auf, ſo müſſen die bekannten Beziehungen zwiſchen den Funktionen benutzt werden, um eine Schlußgleichung für einen Winkel und nur eine Funktion dieſes Winkels abzuleiten.

1. Lautet z. B. die Gleichung $a \sin x = b \cos x$, ſo ergibt ſich:
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{a}, \text{ alſo } \operatorname{tg} x = \frac{b}{a}.$$

2. In der Gleichung $a \sin x + b \cos x = c$ erſetzt man $\cos x$ durch $\sqrt{1 - \sin^2 x}$ und erhält in $(c - a \sin x)^2 = \left(b\sqrt{1-\sin^2 x}\right)^2$ eine quadratiſche Gleichung für $\sin x$.

3. Aus
$$a \sin 2x = b \operatorname{tg} x$$
bildet man:
$$2a \sin x \cos x = b\,\frac{\sin x}{\cos x}$$
und hat dann: $\sin x = 0$ und $\cos^2 x = \frac{b}{2a}$.

4. Aus
$$a + b \sin x = c \cos 2x$$
entſteht:
$$a + b \sin x = c\,(1 - 2 \sin^2 x),$$
alſo eine quadratiſche Gleichung für $\sin x$.

5. Aus
$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = c \sin 2x$$
folgt:
$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = 2c \sin x \cos x,$$
und hieraus:
$$a \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + b = 2c \frac{\sin x}{\cos x}$$
oder
$$a \operatorname{tg}^2 x + b = 2c \operatorname{tg} x.$$

Das iſt aber eine quadratiſche Gleichung für $\operatorname{tg} x$.

6. In
$$\sin 3x \sin x = a$$
entwickelt man $\sin 3x$ und erhält dann:
$$(3 \sin x - 4 \sin^3 x) \sin x = a, \quad \text{oder} \quad \sin^4 x - \frac{3}{4} \sin^2 x + \frac{a}{4} = 0.$$

7. Iſt
$$\sin 4x - \sin 2x = \sin x,$$
ſo hat man nach Nr. 7, 2:
$$2 \cos 3x \sin x = \sin x, \quad \text{alſo:} \quad \sin x = 0 \quad \text{und} \quad \cos 3x = \frac{1}{2}\cdot$$

8. In
$$\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 3 \operatorname{tg} x$$
iſt
$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$
und
$$\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}(2x + x) = \frac{\operatorname{tg} x (3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x},$$
und daher geht die Gleichung über in
$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{\operatorname{tg} x (3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = 3 \operatorname{tg} x.$$
Dieſe führt zu den beiden Gleichungen: $\operatorname{tg} x = 0$ und
$$2(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x) + (3 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - \operatorname{tg}^2 x) = 3(1 - \operatorname{tg}^2 x)(1 - 3 \operatorname{tg}^2 x);$$
aus der zweiten aber folgt eine quadratiſche Gleichung für $\operatorname{tg}^2 x$.

9. Als letztes Beiſpiel ſei die Aufgabe gewählt:
$$\sqrt[3]{(1 + \operatorname{tg} x)^2} + 6 \sqrt[3]{(1 - \operatorname{tg} x)^2} = 5 \sqrt[3]{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$
Man dividiert durch $\sqrt[3]{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ und erhält:
$$\sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} + 6 \sqrt[3]{\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}} = 5.$$

Setzt man jetzt
$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = y^3,$$
ſo wird die Ausführung der Aufgabe von der Auflöſung der Gleichungen
$$y + \frac{6}{y} = 5 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} x = \frac{y^3 - 1}{y^3 + 1}$$
abhängig gemacht.

Nr. 10. Umgeſtaltung algebraiſcher Ausdrücke.

a) Die Funktionen werden vielfach benutzt, um umſtändlichere Rechnungen zu vereinfachen. Sind z. B. in der Gleichung 2^{ten} Grades $x^2 + px + q = 0$ die Koeffizienten Brüche, Logarithmen oder andere unbequeme Zahlen, ſo bringt man die Löſung

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

zunächſt auf die Form

$$x = -\frac{p}{2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right)$$

und hat dann unter der Wurzel einen Ausdruck von der Geſtalt $1 - a^2$, bzw. $1 + a^2$, je nachdem q poſitiv oder negativ iſt. Im erſten Falle ſetzt man, wenn $a^2 < 1$ iſt,

$$\frac{4q}{p^2} = \sin^2 \varphi.$$

Es iſt dann $\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = \cos \varphi$, und dann nach Gl. 5. in Nr. 6

$$\text{I.} \qquad x_1 = -p \sin^2 \frac{\varphi}{2} \text{ und } x_2 = -p \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Iſt dagegen $a^2 > 1$, ſo ſetzt man

$$\frac{4q}{p^2} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Es iſt dann $\sqrt{1 - a^2} = i \operatorname{tg} \varphi$ und ſomit

$$\text{II.} \qquad x_1 = -\frac{p}{2}(1 - i \operatorname{tg} \varphi) \text{ und } x_2 = -\frac{p}{2}(1 + i \operatorname{tg} \varphi).$$

Im zweiten Falle, in welchem q negativ iſt, ſetzt man

$$\frac{-4q}{p^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$$

und hat dann $1 + \frac{-4q}{p^2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$,

alſo $$x = -\frac{p}{2} \frac{\cos \varphi \mp 1}{\cos \varphi}.$$

Da $\cos \varphi - 1 = -2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ und $\cos \varphi + 1 = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ iſt, ſo folgt hieraus:

$$x_1 = p \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}, \quad x_2 = -p \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi}.$$

Hierin ſtört noch das zweifache Argument. Da aber aus $\mathrm{tg}^2 \varphi = \frac{-4q}{p^2}$ die Beziehung

$$\frac{\frac{p}{2}}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{-q}}{\sin\varphi} = \frac{\sqrt{-q}}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}$$

folgt, ſo ergibt ſich ſchließlich:

$$\text{III.} \qquad x_1 = \sqrt{-q}\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad x_2 = -\sqrt{-q}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

b) Auch eine Gleichung von der Geſtalt

$$a\sin x + b\cos x = c$$

läßt ſich durch goniometriſche Umgeſtaltung bequemer löſen als durch Benutzung der Formel $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Dividiert man durch a, ſo folgt:

$$\sin x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}.$$

Setzt man jetzt

$$1. \qquad \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\varphi,$$

wobei φ mit b zugleich poſitiv und negativ iſt, ſo hat man:

$$\sin x + \frac{\sin\varphi\cos x}{\cos\varphi} = \frac{c}{a},$$

und hieraus: 2. $\sin(x + \varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi.$

Iſt φ nach 1. berechnet, ſo liefert 2. die Größe von $x + \varphi$ und damit x.

Ähnlich iſt das Verfahren bei der Aufgabe, aus

$$\cos x = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\sin\tau$$

die Größe des Winkels x zu berechnen. Man bildet

$$\cos x = \sin\alpha(\cos\beta - \mathrm{ctg}\,\alpha\sin\beta\sin\tau),$$

ſetzt 1. $\mathrm{ctg}\,\alpha\sin\tau = \mathrm{tg}\,\varphi$

und erhält: 2. $\cos x = \frac{\sin\alpha\cos(\beta+\varphi)}{\cos\varphi}.$

Anmerkung. Aufgaben dieſer Art kommen häufig in der mathematiſchen Geographie vor. (S. Abſchnitt V, Nr. 14.)

Kapitel 2.

Berechnungen beim Dreieck und Viereck.

Nr. 11. Erſte Sätze über Seiten und Winkel.

Zur Wiederholung. S. Unterſtufe, Abſchnitt III, Nr. 6.

a) Zeichnet man in einem Dreieck ABC eine Höhe, etwa h_a, ſo läßt ſich aus der Figur ableſen:

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c}, \ \sin\gamma = \frac{h_a}{b}, \text{ alſo } h_a = c\sin\beta = b\sin\gamma.$$

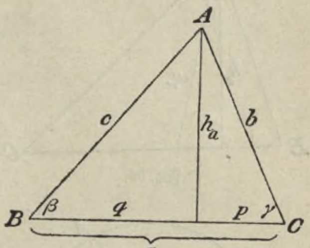


Fig 34.

In ganz entſprechender Weiſe findet man

$$h_b = a\sin\gamma = c\sin\alpha,$$
$$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha.$$

Hieraus aber folgen die Proportionen:

1. $\boldsymbol{\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c.}$ **(Sinus-Satz.)**

Folgerung 1. Es iſt $a = \frac{b}{\sin\beta}\sin\alpha = \frac{c}{\sin\gamma}\sin\alpha$, $b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$, uſw.

Folgerung 2. Es iſt $h_a = \frac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$, $h_b = \frac{b\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta}$, $h_c = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$, und ſomit

Folgerung 3. $J = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta} = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$. Aus $J = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ ergibt ſich ferner:

2. $$\boldsymbol{J = \frac{1}{2}ab\sin\gamma} = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}bc\sin\alpha.$$

Die Seite a iſt in 2 Abſchnitte p und q geteilt, von denen $p = b\cos\gamma$ und $q = c\cos\beta$ iſt. In entſprechender Weiſe laſſen ſich b und c zerlegen. Es beſteht alſo der Satz:

3. $$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{a = b\cos\gamma + c\cos\beta,} \\ b = c\cos\alpha + a\cos\gamma, \\ c = a\cos\beta + b\cos\alpha. \end{array}\right.$$ **(Koſinus-Satz.)**

Der Abſchnitt p der Seite a iſt die Projektion von b auf a. Wird dies für die Erweiterung des Pythagoreiſchen Lehrſatzes benutzt, ſo wird das doppelte Rechteck aus a und der Projektion von b auf a gleich $2\,a\,b\cos\gamma$. In gleicher Weiſe entſtehen die Rechtecke $2\,a\,c\cos\beta$ und $2\,b\,c\cos\alpha$. Dies führt zu den Formeln:

$$4.\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{a^2} &= \mathbf{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha}.\\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2\,c\,a\cos\beta.\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma.\end{aligned}\right.$$

(Erweiterung des **Pythagoreiſchen Lehrſatzes.**)

b) Zieht man außer h_a noch die Winkelhalbierungslinie w_α, ſo iſt der Winkel zwiſchen h_a und w gleich $\pm\frac{\beta-\gamma}{2}$. Es iſt daher

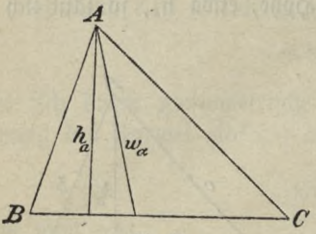


Fig. 35.

$$5.\qquad \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{h_a}{w_a}.$$

c) Zeichnet man den umgeſchriebenen Kreis und legt durch C den Durchmeſſer CA', ſo wird $\sphericalangle BA'C = \alpha$ (bzw. $= 180^0 - \alpha$) und $A'BC = R$. Somit iſt $BC = A'C\sin\alpha$, d. h.

$$6.\qquad \mathbf{a = 2\,r\sin\alpha}.$$

Ebenſo ergibt ſich:

$$b = 2\,r\sin\beta,\quad c = 2\,r\sin\gamma.$$

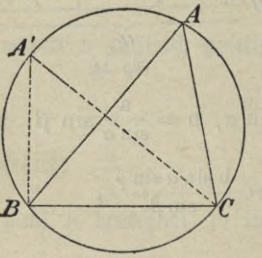


Fig. 36.

Anmerkung. Die Sehnenrechnung der Alten geht davon aus, daß die Sehnen eines Kreiſes durch die zugehörigen Umfangswinkel beſtimmt ſind. Die Seiten eines Dreiecks verhalten ſich wie die Sehnen irgendeines Kreiſes, die zu Umfangswinkeln gehören, welche den Dreieckswinkeln gleich ſind. Kann man alſo aus der Größe des Winkels die Länge der zugehörigen Sehne berechnen, ſo hat man in dieſen Sehnen ein Mittel, aus drei voneinander unabhängigen Stücken eines Dreiecks die übrigen durch Rechnung zu finden.

Nun geſtattet der Lehrſatz des Ptolemäus, aus den Sehnen, die zu zwei Winkeln gehören, die zu ihrer Summe bzw. Differenz gehörige Sehne zu berechnen. So hat Ptolemäus im Anſchluß an die Seite des eingeſchriebenen regelmäßigen Drei-, Vier-, Sechs-, Fünf- und Zehnecks eine Tafel aufgeſtellt, die für die Winkel von 30 zu 30 Minuten aufſteigend die Sehnen enthält. Die Berechnung mit ihnen iſt jedoch ſehr verwickelt, weil man auf den einen Begriff der Sehne beſchränkt bleibt.

Dagegen erhält man auf dieſem Wege einen einfachen Beweis für die Additionstheoreme, da ſich aus dem Ptolemäiſchen Lehrſatz die Formeln

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

bzw.

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

unmittelbar ergeben und aus dieſen die Formeln für $\cos(\alpha-\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ hervorgehen, wenn der Winkel α durch $90^0 - \alpha$ erſetzt wird.

d) Die Mittelpunkte der Berührungskreiſe liegen auf den Winkelhalbierungslinien. Die Abſchnitte auf den Seiten zwiſchen den Ecken und Berührungspunkten ſind durch die Seiten ausdrückbar.

Die Anwendung des Satzes, daß zwei von einem Punkte an einen Kreis gezogene Tangenten gleichgroß ſind, liefert als Länge der Tangente

an den Kreis	ϱ	ϱ_a	ϱ_b	ϱ_c
von der Ecke A:	$s - a$,	s,	$s - c$,	$s - b$,
= = = B:	$s - b$,	$s - c$,	s,	$s - a$,
= = = C:	$s - c$,	$s - b$,	$s - a$,	s.

Es iſt daher

$$7. \quad \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{s-a}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{s-b}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{s-c}. \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho_a}{s}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho_b}{s}, \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho_c}{s}. \\ \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho_b}{s-c}=\frac{\varrho_c}{s-b}. \\ \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho_c}{s-a}=\frac{\varrho_a}{s-c}. \\ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho_a}{s-b}=\frac{\varrho_b}{s-a}. \end{array}\right.$$

Folgerung. Es iſt $\varrho_a : \varrho_b : \varrho_c = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Hinzuzufügen ſind ferner noch die Formeln:

$$8. \quad J = \varrho\, s = \varrho_a (s - a) = \varrho_b (s - b) = \varrho_c (s - c).$$

Zur Verwendung gelangt auch häufig die Beziehung:

$$9. \quad (2\, m_a)^2 = 2\,(b^2 + c^2) - a^2,$$

die mit Benutzung des Pythagoreiſchen Lehrſatzes leicht abgeleitet werden kann.

Nr. 12. Anwendung des Sinus-Satzes.

Aufg. 1. Gegeben: a, α und β.

Aufl. Es iſt $b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta$ und $c = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma$.

Aufg. 2. Gegeben a, b und α.

Aufl. Es iſt $\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha$. Wenn $a > b$ iſt, bleibt nur ein Wert für β zuläſſig. Iſt aber $a < b$, ſo ſind die beiden Werte β und $180^0 - \beta$ möglich. Die Aufgabe iſt unlösbar für $\frac{b}{a}\sin\alpha > 1$.

Bei den folgenden Aufgaben ſind die aus dem Sinus=Satz abgeleiteten Gleichungen anzuwenden und zum Teil mit Benutzung der Additionstheoreme umzugeſtalten.

Aufg. 3. Gegeben: h_a, α und β.

Aufl. $h_a = b \sin \gamma$!

Aufg. 4. Gegeben: J, α und β.

Aufl. Aus $J = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$ folgt $a^2 = \frac{2 J \sin \alpha}{\sin \beta \sin \gamma}$.

Aufg. 5. Gegeben: a, h_a und α.

Aufl. Es iſt $h_a = \frac{a}{\sin \alpha} \sin \beta \sin \gamma = \frac{a\,[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)]}{2 \sin \alpha}$ (Nr. 7, 1),

$$= \frac{a\,[\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha]}{2 \sin \alpha},$$

und ſomit
$$\cos(\beta - \gamma) = \frac{2\,h_a}{a} \sin \alpha - \cos \alpha.$$

Durch $\beta - \gamma$ und $180^0 - \alpha = \beta + \gamma$ ſind β und γ beſtimmt. Zur Berechnung von b und c wird dann der Sinus-Satz benutzt.

Aufg. 6. Gegeben: a, h_a und $\beta - \gamma$.

Aufl. Nach der Auflöſung der Aufg. 5. iſt

$$\frac{2\,h_a}{a} \sin \alpha = \cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha.$$

Wird ins Quadrat erhoben und $\sin^2 \alpha$ durch $1 - \cos^2 \alpha$ erſetzt, ſo ergibt ſich eine quadratiſche Gleichung für $\cos \alpha$.

Aufg. 7. Gegeben: a, J, α oder $\beta - \gamma$.

Aufl. Da $h_a = \frac{2J}{a}$ iſt, ſo treten die Löſungen der Aufg. 5. und 6. wieder auf.

Aufg. 8. Gegeben: s, α und β.

Aufl. Aus $2s = a + b + c = a + \frac{a}{\sin \alpha} \sin \beta + \frac{a}{\sin \alpha} \sin \gamma$,

$$= \frac{a}{\sin \alpha} (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma),$$

$$= a \frac{4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\,a \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

folgt:
$$a = \frac{s \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}.$$

Aufg. 9. Gegeben: α, β und $s - a$ oder $s - b$ oder $s - c$.

Aufl. Entſprechend wie bei Aufgabe 8.

Aufg. 10. Gegeben: α, $\sin \beta \sin \gamma$ oder $\sin \beta \cos \gamma$ oder $\cos \beta \cos \gamma$ und a oder h_a oder J.

Aufl. Die Gl. 1. in Nr. 7 werden zur Beſtimmung von $\beta - \gamma$ benutzt.

Aufg. 11. Gegeben: $$\left.\begin{array}{r}\alpha,\ \sin\beta:\sin\gamma = p:q\\ \text{oder}\ \cos\beta:\cos\gamma = p:q\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{und a oder } h_a\\ \text{oder J oder s.}\end{array}$$

Aufl. Aus $\sin\beta:\sin\gamma = p:q$ folgt: $\frac{\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\beta-\sin\gamma} = \frac{p+q}{p-q}$,

und hieraus: $$\operatorname{ctg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{p+q}{p-q}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Aufg. 12. Gegeben a, $b \pm c$ und β.

Aufl. Aus $(b+c):a = (\sin\beta+\sin\gamma):\sin\alpha$ bildet man

$$\frac{b+c+a}{b+c-a} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha} = \frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ (Nr. 8, 1)},$$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Man kennt damit γ und kann zur Berechnung von b und c den Sinus-Satz anwenden.

Nr. 13. Anwendung des Pythagoreiſchen Lehrſatzes.

Zur Wiederholung. S. Unterſtufe, Abſchnitt III, Nr. 7c.

In der Form $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ kann der Satz nur in wenigen Fällen verwandt werden. Es iſt daher nötig, die Gleichung ſo umzugeſtalten, daß die in ihr enthaltenen Hilfsmittel beſſer hervortreten. Zuerſt kann man $b^2 + c^2$ zu $(b+c)^2$, bzw. $(b-c)^2$ ergänzen; man hat dann

$$a^2 = (b+c)^2 - 2bc - 2bc\cos\alpha,$$
$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc - 2bc\cos\alpha,$$

und ſomit

$$a^2 = (b+c)^2 - 2bc(1+\cos\alpha),$$
$$a^2 = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos\alpha).$$

Nach Nr. 6, 5 folgt hieraus:

$$1.\quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{a^2} &= \mathbf{(b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}}.\\ \mathbf{a^2} &= \mathbf{(b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Löſt man dieſe Gleichungen für α auf, ſo erhält man:

$$4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} = (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a) = 4s(s-a),$$

$$4bc\sin^2\frac{\alpha}{2} = a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c) = 4(s-b)(s-c),$$

und ſomit ergibt ſich:

$$
2. \quad \left\{
\begin{aligned}
\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{(s-b)(s-c)}{bc}. \\
\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{s(s-a)}{bc}. \\
\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Für β und γ ſind die entſprechenden Formeln hieraus leicht zu bilden; ſo iſt z. B. $\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}$. Die Gleichungen finden ihre Verwendung vorzugsweiſe bei der Aufgabe, *die Winkel eines Dreiecks aus ſeinen drei Seiten zu berechnen.*

In einigen Fällen iſt die Beſeitigung des Produktes bc erforderlich. Beachtet man, daß $J = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$, alſo $bc = \frac{2J}{\sin\alpha}$ iſt, ſo erhält man die Subſtitutionen:

$$
\begin{aligned}
2bc\cos\alpha &= 4J\,\mathrm{ctg}\,\alpha = 2a h_a\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \\
4bc\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{8J\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = 4J\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 2a h_a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}. \\
4bc\cos^2\frac{\alpha}{2} &= \qquad\qquad 4J\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = 2a h_a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}
$$

Damit aber ergeben ſich die Gleichungen:

$$
3. \quad \left\{
\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 4J\,\mathrm{ctg}\,\alpha = b^2 + c^2 - 2a h_a\,\mathrm{ctg}\,\alpha. \\
a^2 &= (b+c)^2 - 4J\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = (b+c)^2 - 2a h_a\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} \\
a^2 &= (b-c)^2 + 4J\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = (b-c)^2 + 2a h_a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Aufgaben.

Aufg. 1. Gegeben: a, b und c.

Aufl. Benutze die dritte der Gleichungen 2.

Aufg. 2. Gegeben: b, c und α.

Aufl. Es iſt $a^2 = (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$,

$$
= (b-c)^2\left(1 + \frac{4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(b-c)^2}\right).
$$

Setzt man $\quad$ I. $\mathrm{tg}^2\varphi = \frac{4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(b-c)^2}$,

ſo erhält man $\quad$ II. $a = \frac{b-c}{\cos\varphi}$.

Einfacher iſt die Löſung nach Nr. 14, 1.

Aufg. 3. Gegeben: a, b ± c und α.

Aufl. Nach Gl. 1. berechnet man 4bc; dann verbindet man 4bc mit $(b \pm c)^2$ und erhält $(b \mp c)$. Eine bequemere Löſung folgt in Nr. 14, 2.

Aufg. 4. Gegeben: a, b ± c und J oder h_a,
oder a, $b^2 + c^2$ und J oder h_a.

Aufl. Durch Benutzung der Gleichungen 3.

Aufg. 5. Gegeben: b ± c oder $b^2 + c^2$, J oder h_a und α.

Aufl. Nach den Gleichungen 3.

Nr. 14. Der Tangential-Satz und die Mollweideſchen Gleichungen.

Aus dem Sinus-Satz $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ folgt:

$$\begin{aligned}(a+b):(a-b) &= (\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta),\\ &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} : 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},\\ &= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} : \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.\end{aligned}$$

Es iſt alſo

$$1. \quad \mathbf{(a+b):(a-b) = tg\frac{\alpha+\beta}{2} : tg\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad \text{(Tangential-Satz.)}$$

Dieſer Satz findet in der Form

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a+b}{a-b}$$

ſehr häufig Verwendung.

Aus dem Sinus-Satz läßt ſich ferner bilden:

$$a:(b+c) = \sin\alpha : (\sin\beta + \sin\gamma) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$a:(b-c) = \sin\alpha : (\sin\beta - \sin\gamma) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : 2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2},$$

und da $\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$, bzw. $\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$ iſt, ſo ergibt ſich nach Entfernung der gleichen Faktoren:

$$2. \quad \left\{\begin{aligned} \mathbf{a:(b+c)} &= \mathbf{\sin\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta-\gamma}{2}},\\ \mathbf{a:(b-c)} &= \mathbf{\cos\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{\beta-\gamma}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Dieſe Gleichungen wurden zuerſt von **Mollweide** aufgeſtellt und heißen deshalb **Mollweideſche Gleichungen.***)

Aufgaben.

a) Zur Verwendung des Tangential-Satzes.

Aufg. 1. Gegeben: b, c und α oder $\beta - \gamma$.

Aufg. 2. Gegeben: $b \pm c$ und die Winkel.

Aufg. 3. Gegeben: $b : c = p : q$, α oder $\beta - \gamma$ und a oder h_a oder J.

Aufl. $\frac{b+c}{b-c}$ kann durch $\frac{p+q}{p-q}$ erſetzt werden.

b) Zur Verwendung der Mollweideſchen Gleichungen.

Aufg. 4. Gegeben: a, $b \pm c$ und α oder $\beta - \gamma$.

Aufg. 5. Gegeben: a, $b \pm c$ und r.

Aufl. Es iſt $a = 2r \sin\alpha$, alſo $\sin\alpha = \frac{a}{2r}$.

Aufg. 6. Gegeben: $b \pm c$, r und α oder $\beta - \gamma$.

Aufl. Durch $b \pm c = 2r(\sin\beta \pm \sin\gamma)$ iſt $\beta - \gamma$, bzw. α beſtimmt. Man kennt dann die Winkel und kann ſowohl Gl. 1. als auch Gl. 2. benutzen.

Aufg. 7. Gegeben: a, $b + c$ und $h_c + h_b$.

Aufl. Aus $h_b = c \sin\alpha$ und $h_c = b \sin\alpha$ ergibt ſich: $h_b + h_c = (b + c)\sin\alpha$. Demnach iſt α bekannt.

Aufg. 8. Gegeben: a, $b - c$, $h_c - h_b$.

Aufl. Es iſt $h_c - h_b = (b - c)\sin\alpha$.

Aufg. 9. Gegeben: a, α und $h_c \pm h_b$.

Aufl. Es iſt $b \pm c = \frac{h_c \pm h_b}{\sin\alpha}$.

Nr. 15. Die Halbmeſſer ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c und r.

Aus den Gleichungen 7. und 8. in Nr. 11 kann eine Reihe von Beziehungen zwiſchen den Halbmeſſern abgeleitet werden.

Zunächſt iſt nach Nr. 11, 8

$$\frac{J}{\varrho_a} = s - a, \quad \frac{J}{\varrho_b} = s - b, \quad \frac{J}{\varrho_c} = s - c,$$

alſo

$$\frac{J}{\varrho_a} + \frac{J}{\varrho_b} + \frac{J}{\varrho_c} = s - a + s - b + s - c = s.$$

---

*) Der geometriſche Beweis dieſer Sätze ſteht in Unterſtufe, Abſchnitt III, Nr. 7.

Da aber $s = \frac{J}{\varrho}$ iſt, ſo folgt:

1. $$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}.$$

Dieſelben Gleichungen liefern durch Multiplikation:

$$J^4 = \varrho\, \varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c\, s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c) = \varrho\, \varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c\, J^2,$$

und ſomit iſt

2. $$J^2 = \varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c.$$

Ferner hat man

$$J = \varrho_a\,(s-a),$$

$$(s-a) = \varrho_b \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \text{ (Nr. 11, 7)},$$

$$\varrho_b = \varrho_a \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \text{ (Folgerung zu Nr. 11, 7)},$$

$$= \varrho_a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2},$$

alſo

3. $$J = \varrho_a^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

Um ſchließlich die Winkel aus den Halbmeſſern ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c zu berechnen, geht man von der Gleichung

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)\ (s-c)}{s\,(s-a)}$$

aus, benutzt die Formeln Nr. 11, 8 und erhält dadurch

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{J}{\varrho_b} \cdot \frac{J}{\varrho_c} \cdot \frac{\varrho}{J} \cdot \frac{\varrho_a}{J} = \frac{\varrho \cdot \varrho_a}{\varrho_b\, \varrho_c}.$$

Nun iſt aber nach 1.

$$\varrho = \frac{\varrho_a\, \varrho_b\, \varrho_c}{\varrho_a\, \varrho_b + \varrho_a\, \varrho_c + \varrho_b\, \varrho_c},$$

und ſomit ergibt ſich:

4. $$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a^{\,2}}{\varrho_a\, \varrho_b + \varrho_a\, \varrho_c + \varrho_b\, \varrho_c}.$$

Auch der Halbmeſſer r des umgeſchriebenen Kreiſes läßt ſich mit den Halbmeſſern der Berührungskreiſe durch Gleichungen verbinden, die oft mit Vorteil zur Ausführung trigonometriſcher Aufgaben verwandt werden können. Vereinigt man nämlich die Formeln (ſ. Gl. 6. in Nr. 11)

$$s = r(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

$$s - a = r(\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha) = 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

mit $\varrho = (s-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = (s-a)\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ und $\varrho_a = s\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, ſo erhält man:

5.
$$\begin{cases} \boldsymbol{\varrho = 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}, \\ \boldsymbol{\varrho_a = 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}, \\ \text{und auf demſelben Wege:} \\ \varrho_b = 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathbf{sin}\,\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}, \\ \varrho_c = 4\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\,\mathbf{sin}\,\frac{\gamma}{2}. \end{cases}$$

Bildet man hiernach die Summe $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c$, ſo entſteht:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4\,r\left[\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right],$$

$$= 4\,r\left(\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$= 4\,r\left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right),$$

$$= 4\,r + 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$= 4\,r + 4\,r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

und folglich:

6. $$\boldsymbol{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = \varrho + 4\,r.}$$

Von den zahlreichen Beziehungen zwiſchen r und den Beſtimmungsſtücken des Dreiecks ſeien noch hervorgehoben:

7. $$h_a = b\sin\gamma = 2\,r\sin\beta\sin\gamma.$$

8. $$J = \frac{1}{2}\,a\,h_a = 2\,r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

Aufgaben.

Aufg 1. Gegeben: r, α, β. Die Halbmeſſer der Berührungskreiſe zu berechnen.

Aufg. 2. Gegeben: α, β, und ϱ oder ϱ_a oder ϱ_b oder ϱ_c. Den Halbmeſſer r zu berechnen.

Aufg. 3. Gegeben: α, β und ϱ_a oder ϱ_b oder ϱ_c. Den Inhalt J des Dreiecks zu berechnen.

Aufg. 4. Gegeben: ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c. Die Seiten und Winkel zu berechnen.

Aufl. Nach Gl. 4. ſind die Winkel beſtimmt.

Aufg. 5. Gegeben: Ein Halbmeſſer eines Berührungskreiſes, ein Winkel und r.

Aufl. für den Fall ϱ_b, γ, r. Aus $\varrho_b = 4\,r \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ (Gl. 5.)

folgt: $\dfrac{\varrho_b}{2\,r\cos\frac{\gamma}{2}} = \cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Es iſt alſo $\alpha - \beta$ berechenbar. Die Gleichung $a = 2\,r \sin\alpha$ liefert dann a.

Nr. 16. Aufgaben zu Nr. 11 bis Nr. 15.

Dem Auflöſungsverfahren, das eine direkte Verbindung der gegebenen Stücke ſucht und ſich dabei in der Regel an die Ausführung der entſprechenden Konſtruktionsaufgabe anſchließt, tritt bei der großen Leichtigkeit, r nach Nr. 11, 6 in Beziehung zu den übrigen Stücken des Dreiecks zu ſetzen, ein zweites Verfahren an die Seite, bei welchem die gegebenen Stücke durch r ausgedrückt und dann die erforderlichen Gleichungen durch Elimination von r gewonnen werden.

a) Aufgaben über die Halbmeſſer ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c.

Aufg. 1. Gegeben: Ein Halbmeſſer eines Berührungskreiſes, ein Winkel und eine Seite.

Aufl. für den Fall ϱ_c, b, α. Nach Nr. 12, 7 iſt $s - b = \varrho_c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

alſo $s = b + \varrho_c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \dfrac{\varrho_c}{b + \varrho_c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Aufg. 2. Gegeben: Ein Halbmeſſer eines Berührungskreiſes, ein Winkel und der Inhalt.

Aufl. für den Fall ϱ_b, γ, J.

a) Aus $s - a = \varrho_b \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ und $s - b = \dfrac{J}{\varrho_b}$

folgt: 1. $c = \dfrac{J}{\varrho_b} + \varrho_b \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ 2. $a - b = \dfrac{J}{\varrho_b} - \varrho_b \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Man kann jetzt $\alpha - \beta$ nach den Mollweideſchen Gleichungen berechnen.

b) Führt man r als Hilfsgröße ein, ſo erhält man

$$\varrho_b = 4\,r \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

$$J = 2\,r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

alſo:

$$\frac{J}{\varrho_b^{\,2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}},$$

und ſomit:

$$\frac{J\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\varrho_b^{\,2}} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Hieraus aber kann $\frac{\alpha-\beta}{2}$ berechnet werden. Man kennt dann J und die Winkel und kann nach Folgerung 3. zu Nr. 11, 1 verfahren.

Aufg. 3. Gegeben: ϱ, b + c und a oder α.

Aufl. Die Gleichung $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a} = \frac{2\varrho}{b+c-a}$ beſtimmt α, bzw. a. Man kennt alſo a, b + c und α.

Aufg. 4. Gegeben: ϱ, b − c und a.

Aufl. Aus a und b − c kann man s − b und s − c bilden und hat dann $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}$ und $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}$.

Aufg. 5. Gegeben: ϱ, b − c und α oder $\beta - \gamma$.

Aufl. Die Gleichungen $s - b = \varrho\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$ und $s - c = \varrho\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$ liefern

$$b - c = \frac{2\,\varrho \sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Iſt $\beta - \gamma$ zu berechnen, ſo iſt die Gleichung vom 2^ten^ Grade.

Aufg. 6. Gegeben: ϱ_a, b + c und a oder α.

Aufl. Aus $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{s} = \frac{2\,\varrho_a}{b+c+a}$ kann α, bzw. a berechnet werden.

Aufg. 7. Gegeben ϱ_a, b − c und α oder $\beta - \gamma$.

Aufl. S. Aufg. 5.

Aufg. 8. Gegeben: ϱ_a, a + b und $\alpha - \beta$ oder γ.

Aufl. Aus $s = \varrho_a\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ und $s - c = \varrho_a\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$ folgt: $c = \varrho_a\left(\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)$ $= \varrho_a \dfrac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$, und ſomit nach Mollweide:

$$2\,\varrho_a \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - (a+b)\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+b)\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Aufg. 9. Gegeben: ϱ_a, $a - b$ und γ.

Aufl. Aus $s - b = \varrho_a \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ oder $a - b + c = 2\varrho_a \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ und $a - b$ ergibt ſich c und dann nach Mollweide eine Gleichung 1ten Grades für $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Aufg. 10. Gegeben: $\varrho_a \pm \varrho_b$, α, β.

Aufl. a) Aus $\varrho_a = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und $\varrho_b = s \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ folgt $s = \frac{\varrho_a \pm \varrho_b}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \pm \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$; b und c ſind dann aus $\varrho_a \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = s - b$ und $\varrho_b \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = s$ uſw. beſtimmbar.

b) Führt man r als Hilfsgröße ein, ſo ergibt ſich:

$$\varrho_a \pm \varrho_b = 4\,r \cos\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}.$$

Hat man r berechnet, ſo ſind a, b und c leicht zu beſtimmen.

Aufg. 11. Gegeben: $\varrho_a + \varrho_b$, $a \pm b$ und c oder γ.

Aufl. Die Gl. $\varrho_a + \varrho_b = c \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ liefert γ oder c.

Aufg. 12. Gegeben: $\varrho_a - \varrho_b$, $a \pm b$ und c.

Aufl. Es iſt $\varrho_a - \varrho_b = (a - b)\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = (a + b)\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}$ (Tangential-Satz!). Somit iſt γ, bzw. $\alpha - \beta$ beſtimmbar.

b) Aufgaben über Höhen und Winkelhalbierungslinien.

Aufg. 13. Gegeben: Eine Höhe, der Halbmeſſer des umgeſchriebenen Kreiſes und eines Berührungskreiſes.

Aufl. für den Fall h_a, r, ϱ_b. Aus $(s - b)\,\varrho_b = \frac{a \cdot h_a}{2}$ oder $a - b + c = \frac{a\,h_a}{\varrho_b}$ folgt: $b - c = \frac{a\,(\varrho_b - h_a)}{\varrho_b}$, und ſomit nach Mollweide: $\sin\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\varrho_b - h_a}{\varrho_b} \cos\frac{\alpha}{2}$. Führt man dies ein in die Gleichung

$$\varrho_b = 4\,r \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = 2\,r \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta - \gamma}{2}\right),$$

ſo ergibt ſich:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_b^2}{2\,r\,(2\,\varrho_b - h_a)}.$$

Aufg. 14. Gegeben: h_a, ϱ oder ϱ_a oder ϱ_b oder ϱ_c und α oder $\beta - \gamma$.

Aufl. Die Beziehungen zum Inhalt liefern $(b + c) : a$, bzw. $(b - c) : a$.

Aufg. 15. Gegeben: $h_b + h_c$, ϱ und α.

Aufl. Durch $h_b + h_c = (b + c) \sin \alpha$ iſt $b + c$ beſtimmt und die Aufgabe auf Aufg. 3. zurückgeführt.

Aufg. 16. Gegeben: h_a, w_α und α.

Aufl. Gl. 5. in Nr. 11 kommt zur Verwendung.

Aufg. 17. Gegeben: h_a, w_α und J.

Aufl. Es iſt 1. $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{h_a}{w_\alpha}$; 2. $a = \frac{2 J}{h_a}$; 3. $h_a = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin \alpha}$, alſo $2 \cdot \frac{h_a}{a} \sin \alpha = \cos (\beta - \gamma) + \cos \alpha$.

Aufg. 18. Gegeben: h_a, w_α und $b : c = p : q$.

Aufl. Nach Berechnung von $\frac{\beta - \gamma}{2}$ iſt der Tangential-Satz verwendbar.

Aufg. 19. Gegeben: w_α, b und c.

Aufl. Es iſt $h_a = w_\alpha \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = w_\alpha \cdot \frac{b + c}{a} \sin \frac{\alpha}{2}$, alſo $w_\alpha \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a h_a}{b + c} = \frac{b c \sin \alpha}{b + c}$, und ſomit $w_\alpha = \frac{2 b c}{b + c} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Aufg. 20. Gegeben: w_α, $b + c$ oder $b \cdot c$ und α.

Aufl. Durch $w_\alpha = \frac{2 b c}{b + c} \cos \frac{\alpha}{2}$ iſt b c, bzw. $b + c$ beſtimmt. Man kann dann $b - c$ herſtellen.

Aufg. 21. Gegeben: w_α, ϱ und α oder $\beta - \gamma$.

Aufl. Aus $a h_a = (a + b + c) \varrho$ folgt: $\frac{h_a - \varrho}{\varrho} = \frac{b + c}{a} = \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, und hieraus: $h_a \sin \frac{\alpha}{2} = \varrho \sin \frac{\alpha}{2} + \varrho \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$. Erſetzt man jetzt h_a durch $w_\alpha \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$, ſo ergibt ſich: $w_\alpha \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \varrho \sin \frac{\alpha}{2} + \varrho \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$, alſo:

$$\cos \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\varrho \sin \frac{\alpha}{2}}{w_\alpha \sin \frac{\alpha}{2} - \varrho}, \text{ bzw. } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{w_\alpha \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \varrho}.$$

Aufg. 22. Gegeben: w_α, h_a und ϱ oder ϱ_a.

Aufl. Vgl. Aufg. 21.

c) Aufgaben über Mittellinien.

Die Mittellinie m_a iſt mit den Seiten durch die Gleichung (Nr. 11, 9) verbunden:

1. $$(2 m_a)^2 = 2 (b^2 + c^2) - a^2.$$

Nun iſt aber $b^2 + c^2 = a^2 + 4\,J\,\mathrm{ctg}\,\alpha$,

und ſomit ergibt ſich:

2. $$(2\,m_a)^2 = a^2 + 8\,J\,\mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Die Einführung von $b \pm c$ geſchieht durch die Gleichungen: (S. Nr. 13, 3)

3. $$\left\{\begin{array}{l} a^2 = (b + c)^2 - 4\,J\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}, \\ a^2 = (b - c)^2 + 4\,J\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}. \end{array}\right.$$

Aufg. 23. Gegeben: m_a, a und α.

Aufl. Nach 2. iſt J und dann nach 3. $b + c$ beſtimmt.

Aufg. 24. Gegeben: m_a, a und J.

Aufl. Gl. 2. liefert α und dann Gl. 3. $b + c$.

Aufg. 25. Gegeben: m_a, α und J.

Aufl. Nach Gl. 2. iſt a und dann nach Gl. 3. $b + c$ beſtimmt.

Aufg. 26. Gegeben: m_a, $b + c$ und a.

Aufl. Aus $$8\,J\,\mathrm{ctg}\,\alpha = (2\,m_a)^2 - a^2$$

und $$8\,J\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} = 2\,(b + c)^2 - 2\,a^2$$

ergibt ſich ein Ausdruck für $\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Aufg. 27. Gegeben: m_a, $b - c$ und a.

Aufl. Gl. 2. und 3. liefern einen Ausdruck für $\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Aufg. 28. Gegeben: m_a, $b \pm c$ und α.

Aufl. Die Gleichungen 2. und 3. führen durch Elimination von J auf einen Ausdruck für a^2.

Aufg. 29. Gegeben: m_a, $b + c$ und J.

Aufl. Eliminiert man a^2 aus Gl. 2. und 3., ſo erhält man:

$$4\,J\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} - 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha\right) = (b + c)^2 - (2\,m_a)^2,$$

und hieraus: $$4\,J\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = (b + c + 2\,m_a)\,(b + c - 2\,m_a).$$

Aufg. 30. Gegeben: m_a, $b - c$ und J.

Aufl. Es iſt $4\,J\left(2\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right) = 4\,J\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

d) Aufgaben über das Fußpunktsdreieck und die Höhenabſchnitte.

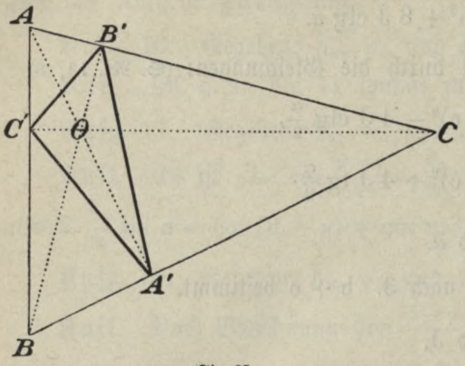


Fig. 37.

In dem Fußpunktsdreieck A′B′C′ des Dreiecks ABC ſeien die Seiten mit a′, b′ und c′, die Winkel mit α', β' und γ', die Höhen mit $h_{a'}$, $h_{b'}$ und $h_{c'}$, uſw. bezeichnet.

Da jeder Außenwinkel eines Sehnenvierecks gleich dem Viereckswinkel an der gegenüberliegenden Ecke iſt, ſo ſind die drei durch die Seiten des Fußpunktsdreiecks abgeſchnittenen Dreiecke dem ganzen Dreieck und ſomit auch einander ähnlich. Hieraus ergibt ſich:

1. $\boldsymbol{\alpha' = 180^0 - 2\alpha}$, $\beta' = 180^0 - 2\beta$ und $\gamma' = 180^0 - 2\gamma$.

Bei einem ſtumpfwinkligen Dreieck iſt

1a. $\alpha' = 2\alpha - 180^0$, $\beta' = 2\beta$ und $\gamma' = 2\gamma$.

Ferner beſteht die Proportion $B'C' : BC = AB' : AB$ oder

$$a' : a = AB \cos\alpha : AB,$$

und daraus folgt:

2. $\mathbf{a' = a \cos\alpha}$ und entſprechend: $b' = b\cos\beta$ und $c' = c\cos\gamma$.

Hiernach hat man:

$$a' + b' + c' = 2r\,(\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta + \sin\gamma\cos\gamma),$$
$$= r\,(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma).$$

Da aber nach 1. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma'$,

$$= 4\cos\frac{\alpha'}{2}\cos\frac{\beta'}{2}\cos\frac{\gamma'}{2},$$
$$= 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

iſt, ſo folgt:

3. $$\mathbf{a' + b' + c' = 4r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma},$$

und hieraus:

4. $$\mathbf{a' + b' + c' = 2h_a \sin\alpha}.$$

Für den Inhalt J′ ergibt ſich:

5. $$J' = \frac{1}{2}\,b\,c\sin 2\alpha\cos\beta\cos\gamma = \mathbf{2J\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Ebenſo ſind die Beziehungen

6. $$r' = \frac{1}{2} r \quad \text{und} \quad \varrho' = 2r \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

bequem ableitbar. Werden ſchließlich die oberen Höhenabſchnitte mit h^0 und die unteren mit h^u bezeichnet, ſo iſt

7. $$h_a^0 = a \operatorname{ctg} \alpha \quad \text{und} \quad h_a^u = \frac{a}{\sin\alpha} \cos\beta \cos\gamma.$$

Aufg. 31. Gegeben: α, b und c. Geſucht: $h_{a'}$, $h_{b'}$, $h_{c'}$.

Aufl. Es iſt $h_{a'} = c' \sin\beta' = c \cos\gamma \sin 2\beta$.

Aufg. 32. Gegeben: α', $h_{b'}$ und $h_{c'}$. Geſucht: a, b und c.

Aufl. Aus $h_{b'} = a \cos\alpha \sin 2\gamma$ und $h_{c'} = a \cos\alpha \sin 2\beta$ folgt:

$$h_{b'} + h_{c'} = a \cos\alpha (\sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 2\, a \cos\alpha \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma),$$

und da α durch α' gegeben iſt, ſo läßt ſich $\beta - \gamma$ berechnen.

Aufg. 33. Gegeben: r', s' und α'. Geſucht: a, b und c.

Aufl. Nach Gl. 3. und 6

Aufg. 34. Gegeben: h'_a, h_b und s'. Geſucht: a, b und c.

Aufl. Nach 4 iſt α und β beſtimmbar.

Aufg. 35. Gegeben: a, h_a^u und β. Geſucht: b und c.

Aufl. Der Wert des Verhältniſſes $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$ iſt bekannt.

Aufg. 36. Gegeben: a, α und $h_a^0 : h_a^u$. Geſucht: b und c.

Aufl. Das Produkt $\cos\beta \cos\gamma$ iſt berechenbar.

Nr. 17. Berechnung von Vierecken.

Da jedes Viereck durch eine ſeiner Diagonalen in zwei Dreiecke zerlegt wird, ſo müſſen, falls nicht eine Berechnung der beiden Dreiecke möglich iſt, die Beſtimmungsſtücke ſo gewählt ſein, daß aus den Formeln über das Dreieck auflösbare Gleichungen zwiſchen den Stücken des Vierecks hergeſtellt werden können.

a) **Aufg. 1.** Aus den Seiten a und b und dem Winkel γ eines **Parallelogramms** den Winkel φ ſeiner Diagonalen zu berechnen.

Aufl. Verdoppelt man die Seite a und wendet den Pyth. Lehrſatz an, ſo erhält man: $4a^2 = e^2 + f^2 - 2\, ef \cos\varphi$.
Da aber $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$ und $\frac{1}{2} ef \sin\varphi = J$, alſo $2ef \cos\varphi = 4J \operatorname{ctg}\varphi$ iſt, ſo folgt hieraus: $-4J \operatorname{ctg}\varphi = 2(a^2 - b^2)$.

Nun kann man J durch ab $\sin\varphi$ erſetzen; demnach ergibt ſich:

1. $$\operatorname{tg}\varphi = \mp \frac{2ab \sin\varphi}{a^2 - b^2}.$$

In ganz entſprechender Weiſe erhält man die Gleichung:

2. $$\operatorname{tg}\varphi = \mp \frac{2ef \sin\varphi}{e^2 - f^2}.$$

b) **Aufg. 2.** Aus den Seiten eines **Trapezes** die Diagonalen und Winkel zu berechnen.

Aufl. In dem Trapez ABCD ſeien die parallelen Seiten mit a und b, die Schenkel mit c und d, die Diagonalen mit e und f und der Winkel BAD mit α bezeichnet. Es iſt dann

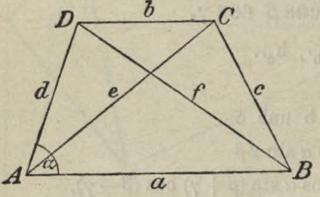


Fig. 38.

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha,$$

$$e^2 = b^2 + d^2 + 2bd\cos\alpha \;(CD \parallel AB!),$$

und hieraus folgt durch Elimination von $\cos\alpha$:

$$\textbf{1.}\quad ae^2 + bf^2 = ab(a+b) + d^2(a+b),$$
$$= (a+b)(ab+d^2).$$

Ebenſo ergibt ſich durch Benutzung des Winkels ABC:

$$\textbf{2.}\qquad be^2 + af^2 = (a+b)(ab+c^2).$$

Aus 1. und 2. erhält man durch Addition, bzw. Subtraktion:

$$\textbf{3.}\qquad \begin{cases} e^2 + f^2 = c^2 + d^2 + 2ab. \\ e^2 + f^2 = (d^2 - c^2)\cdot\dfrac{a+b}{a-b}. \end{cases}$$

Die Diagonalen ſind alſo berechenbar, und das Trapez zerfällt dann in zwei Dreiecke, deren Seiten bekannt ſind.

c) **Aufg. 3.** Aus den Seiten eines **Sehnenvierecks** die Winkel und Diagonalen zu berechnen.

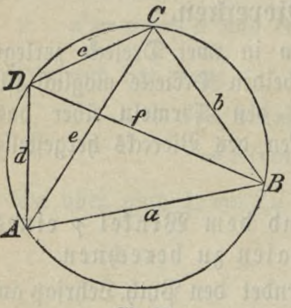


Fig. 39.

Aufl. Es ſei AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = e und BD = f. Bezeichnet α den Winkel BAD, $180^0 - \alpha$ alſo den Winkel BCD, ſo iſt

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha,$$

$$f^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha,$$

und ſomit **1.** $\cos\alpha = \dfrac{(a^2+d^2)-(b^2+c^2)}{2(ad+bc)}.$

Hieraus folgt:

$$1 + \cos\alpha = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)},$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad+bc)},$$

alſo $\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{(a+d)^2 - (b-c)^2},$

und wenn $a + b + c + d = 2s$ geſetzt wird,

$$2.\qquad \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}.$$

Führt man den Ausdruck für $\cos\alpha$ in die erſte Gleichung für f^2 ein, ſo ergibt ſich:

$$3.\qquad f^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

In ganz entſprechender Weiſe ergeben ſich die beiden Gleichungen:

$$4.\qquad \mathrm{tg}\beta = \frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}$$

und

$$5.\qquad e^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

Die Verbindung der Gleichungen 3 und 5 durch Multiplikation führt auf die Beziehung: $(e \cdot f)^2 = (ac+bd)^2$, alſo: $e \cdot f = ac + bd$, d. h. auf den Ptolemäiſchen Lehrſatz.

Verbindet man dagegen die Gleichungen 3 und 5 durch Diviſion, ſo erhält man: $f^2 : e^2 = (ab+cd)^2 : (ad+bc)^2$, alſo:

$$6.\qquad f : e = (ab+cd) : (ad+bc).$$

d) Bei einem beliebigen Viereck werden natürlich die Entwicklungen umſtändlicher. Es mag daher ausreichen, die bekannteſten Aufgaben, die zur Feldmeſſung vielfach benutzt werden, zu beſprechen.

Aufg. 4. (Das Vorwärtseinſchneiden.) An den Endpunkten A und B der Strecke a ſeien die Richtungen nach den Endpunkten C und D einer unbekannten Strecke CD feſtgelegt und die Winkel dieſer Richtungen mit AB ausgemeſſen. Es ſoll die Länge der Strecke CD berechnet werden.

Aufl. Es ſei $AB = a$, $\sphericalangle CAD = \alpha$ und $\sphericalangle CAB = \alpha_1$, $\sphericalangle DBC = \beta$ und $\sphericalangle DBA = \beta_1$.

Nach dem Sinus-Satz iſt

$$BD = a\frac{\sin(\alpha+\alpha_1)}{\sin(\alpha+\alpha_1+\beta_1)},$$

$$BC = a\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\beta_1+\alpha_1+\beta_1)}.$$

Somit kennt man in dem Dreieck BCD zwei Seiten und den von ihnen eingeſchloſſenen Winkel.

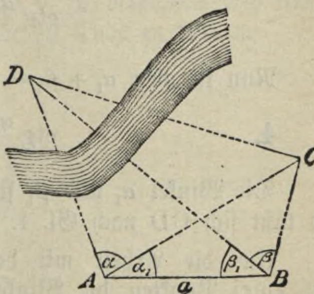


Fig. 40.

Aufg. 5. An den Endpunkten einer Strecke CD (deren Ausmeſſung nicht möglich iſt) ſeien die Richtungen nach den Endpunkten A und B einer bekannten Strecke a feſtgelegt und ihre Winkel mit CD ausgemeſſen. Es ſoll die Länge von CD berechnet werden. (**Hanſenſche** Aufgabe.)

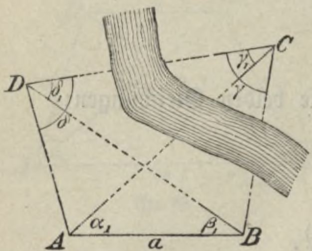


Fig. 41.

Aufl. Es ſei $AB = a$, $\sphericalangle DCB = \gamma$ und $\sphericalangle DCA = \gamma_1$, $\sphericalangle CDA = \delta$ und $\sphericalangle CDB = \delta_1$. Bezeichnet man $\sphericalangle DBA$ mit β_1 und $\sphericalangle CAB$ mit α_1, ſo liefert der Sinus-Satz:

$$AD : a = \sin\beta_1 : \sin(\delta - \delta_1),$$

$$CD : AD = \sin(\delta + \gamma_1) : \sin\gamma_1,$$

und ſomit:

$$1. \qquad \frac{CD}{a} = \frac{\sin\beta_1 \sin(\delta + \gamma_1)}{\sin\gamma_1 \sin(\delta - \delta_1)}.$$

Ferner iſt: $$CD : BC = \sin(\gamma + \delta_1) : \sin\delta_1,$$

$$BC : a = \sin\alpha_1 : \sin(\gamma - \gamma_1),$$

und daher:

$$2. \qquad \frac{CD}{a} = \frac{\sin\alpha_1 \sin(\gamma + \delta_1)}{\sin\delta_1 \sin(\gamma - \gamma_1)}.$$

Die Gleichungen 1. und 2. ergeben:

$$3. \qquad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\delta_1 \sin(\gamma - \gamma_1)\sin(\delta + \gamma_1)}{\sin\gamma_1 \sin(\delta - \delta_1)\sin(\gamma + \delta_1)}.$$

Erſetzt man den Quotienten auf der rechten Seite durch q und bildet

$$\frac{\sin\alpha_1 + \sin\beta_1}{\sin\alpha_1 - \sin\beta_1} = \frac{q+1}{q-1}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \frac{q+1}{q-1},$$

ſo ergibt ſich:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \frac{q+1}{q-1} \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}.$$

Nun iſt aber $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1 + \delta_1$; man hat daher

$$4. \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha_1 - \beta_1}{2} = \frac{q+1}{q-1} \operatorname{ctg}\frac{\gamma_1 + \delta_1}{2}.$$

Die Winkel α_1 und β_1 ſind demnach berechenbar. Kennt man α_1 und β_1, ſo läßt ſich CD nach Gl. 1. oder 2. beſtimmen.

Um die Arbeit mit den Feldmeßapparaten zu verringern und nicht an zwei Punkten die Winkel meſſen zu müſſen, kann man an dem Endpunkte C der unbekannten Strecke CD ein Dreieck feſtlegen, deſſen Seiten und

Winkel man kennt, und dann am Punkte D die Winkel δ_1 und δ_2 ausmeſſen, unter denen die Seiten AC und BC geſehen werden. Es entſteht dann die Aufgabe von **Pothenot:**

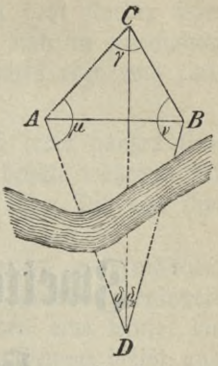


Fig. 12.

Aufg. 6. An dem zweiten Endpunkte einer Strecke, deren erſter Endpunkt eine Ecke eines bekannten Dreiecks iſt, ſind die Winkel, unter denen die Seiten des Dreiecks geſehen werden, ausgemeſſen worden. Man ſoll die Länge der Strecke berechnen. **(Das Rückwärtseinſchneiden.)**

Aufl. Bezeichnet man den Winkel CAD mit μ und den Winkel CBD mit ν, ſo iſt

$$\mathrm{CD} : \mathrm{AC} = \sin\mu : \sin\delta_1,$$

$$\mathrm{CD} : \mathrm{BC} = \sin\nu : \sin\delta_2,$$

und ſomit

$$\frac{\sin\mu}{\sin\nu} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \; \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2}.$$

Setzt man jetzt

1.
$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \cdot \frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_2} = \mathrm{q},$$

ſo erhält man:

$$\frac{\sin\mu + \sin\nu}{\sin\mu - \sin\nu} = \frac{\mathrm{q}+1}{\mathrm{q}-1},$$

alſo:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\mu+\nu}{2}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\mu-\nu}{2} = \frac{\mathrm{q}+1}{\mathrm{q}-1}.$$

Beachtet man aber, daß $\mu + \nu = 4\mathrm{R} - (\delta_1 + \delta_2 + \gamma)$ iſt, ſo folgt hieraus:

2.
$$\mathrm{ctg}\,\frac{\mu-\nu}{2} = \frac{\mathrm{q}+1}{\mathrm{q}-1}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\mu+\nu}{2},$$

$$= \frac{1+\mathrm{q}}{1-\mathrm{q}}\,\mathrm{ctg}\,\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 + \gamma).$$

Es iſt demnach möglich, die Winkel μ und ν zu berechnen und dann durch Verwendung des Sinus-Satzes die Aufgabe zu Ende zu führen.

Abſchnitt V.

Zweiter Teil der Stereometrie.

Syſtematiſche Begründung.

Schwierigere Körperberechnungen.

Kapitel 1.

Ebenen und Geraden.

Nr. 1. Grundformen räumlicher Gebilde.

Der Zuſammenhang zwiſchen den Grundformen räumlicher Gebilde Körper, Fläche, Linie und Punkt iſt in den Sätzen angegeben:

1. Durch Bewegung eines Punktes im Raume von einem Orte nach einem anderen entſteht eine Linie.

2. Durch Bewegung einer Linie entſteht eine Fläche, falls die Linie nicht in ſich ſelbſt verläuft.

3. Durch Bewegung einer Fläche, die nicht in ſich ſelbſt (Drehung einer Scheibe!) oder in einer anderen Fläche (Schieben auf einer Platte!) verläuft, entſteht ein Körper.

4. Wird ein Körper bewegt, ſo beſchreiben ſeine Punkte Linien, ſeine Linien Flächen, uſw.

Nr. 2. Drehungsflächen.

Beſondere Formen räumlicher Gebilde entſtehen, wenn die Bewegung des Körpers beſtimmten Geſetzen unterworfen iſt.

Wird die Bewegung eines Körpers in der Weiſe eingeſchränkt, daß ein ſtarr mit ihm verbundener Punkt A ſeine Lage im Raume unverändert beibehält, ſo kann ſich der Körper um A beliebig drehen.

Wird außer A noch ein zweiter Punkt B, der mit dem Körper ſtarr verbunden iſt, feſtgehalten, ſo kann die Bewegung nur noch in zweifachem Sinne erfolgen, und zwar als eine Drehung nach vorwärts oder nach rückwärts, bzw. nach rechts oder nach links.

a) Ein bewegter Punkt P des Körpers kehrt nach jeder ganzen Umdrehung wieder in ſeine urſprüngliche Lage zurück und behält während der Bewegung ſeine Entfernung von den Punkten A und B bei. Die von ihm beſchriebene Linie iſt ein **Kreis.**

Außer A und B behalten bei der Drehung des Körpers noch unzählig viele andere feſt mit ihm verbundene Punkte ihre Lage im Raume unverändert bei; ſie folgen ohne Unterbrechung aufeinander und bilden eine Linie, die durch A und B geht. Da dieſe Linie bei der Drehung unbewegt bleibt und von den übrigen Punkten des Körpers umkreiſt wird, ſo iſt ſie die Drehungsachſe des Körpers. Iſt die Drehungsachſe auf beiden Seiten unbegrenzt, ſo wird ſie **Gerade** genannt.

Die Drehungsachſe iſt durch die Wahl der Punkte A und B beſtimmt. Hieraus laſſen ſich die erſten Sätze über die Gerade ableiten.

b) Eine bewegte Linie des Körpers kehrt nach einer ganzen Umdrehung wieder in ihre urſprüngliche Lage zurück und beſchreibt daher bei jeder Umdrehung dieſelbe Drehungsfläche. Der beſondere Charakter einer Drehungsfläche wird durch die Eigenſchaften der bewegten Linie beſtimmt.

1. Iſt die Linie ein Kreis und die Drehungsachſe einer ſeiner Durchmeſſer, ſo iſt die Drehungsfläche eine **Kugelfläche.**

2. Iſt die Linie eine Gerade, welche die Achſe unter einem ſpitzen Winkel ſchneidet, ſo entſteht eine **Kegelfläche** mit dem Schnittpunkt als Spitze.

3. Iſt die Linie eine Gerade, welche mit der Achſe einen rechten Winkel bildet, ſo entſteht eine **Ebene.**

Bei jeder Lage iſt in dem Falle 3. die bewegte Gerade eine Normale (Senkrechte) zur Achſe, und daher ſagt man, die Ebene ſei eine **Normalebene** der Drehungsachſe, oder ſie ſtehe auf dieſer ſenkrecht. Die Drehungsachſe ihrerſeits ſteht ſenkrecht auf jeder Geraden in der Ebene, die durch den gemeinſamen Punkt der Achſe und der Ebene geht, und wird als Lot auf der Ebene bezeichnet.

Erklärung. Eine Gerade ſteht ſenkrecht auf einer Ebene, wenn ſie ſenkrecht auf allen Geraden ſteht, die in der Ebene liegen und durch deren Schnittpunkt mit der Geraden gehen.

Nr. 3. Eigenſchaften der Ebene.

a) Aus der Entſtehung der Ebene laſſen ſich ihre Eigenſchaften ableiten. Wählt man zunächſt auf der Drehungsachſe die Punkte A und B ſo, daß ſie vom Fußpunkte Q des bewegten Lotes gleichweit entfernt ſind, ſo iſt für jeden Punkt P dieſes Lotes $PA = PB$, und dieſe Gleichheit bleibt während der Drehung beſtehen. Iſt umgekehrt ein Punkt P von A und B gleichweit entfernt und P mit Q verbunden, ſo iſt $\triangle PQA \cong \triangle PQB$, alſo $\sphericalangle PQA = 90^0$. Der Punkt liegt daher auf einem Lote zur Drehungsachſe in Q und ſomit in der Ebene. Daraus folgt:

Lehrſatz 1. Die Ebene iſt der Ort aller Punkte, die von zwei Punkten des Raumes gleichweit entfernt ſind.

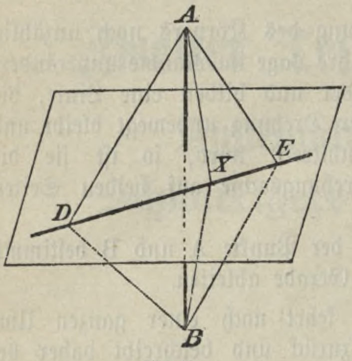


Fig. 43.

Zieht man ferner durch zwei beliebige Punkte D und E der Ebene eine Gerade und verbindet außer D und E noch irgendeinen Punkt X der Geraden mit A und B, ſo iſt $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BDX$ und ſomit $\triangle ADX \cong \triangle BDX$. Es iſt alſo, wo X auf DE auch liegen mag, ſtets $XA = XB$. Nach Satz 1 folgt daher:

Lehrſatz 2. Liegen zwei Punkte einer Geraden in einer Ebene, ſo liegt die Gerade ganz in der Ebene.

b) Eine Gerade kann verſchiedenen Ebenen angehören, die ſich durch Drehung um die Gerade ineinander überführen laſſen. Gelangt aber bei der Drehung die Ebene an einen außerhalb der Achſe liegenden Punkt, und wird beſtimmt, daß dieſer in ihr liegen ſoll, ſo iſt ſie unbeweglich, alſo nicht in einer zweiten Lage denkbar. Daraus folgt:

Lehrſatz 3. Eine Ebene iſt durch eine Gerade und einen Punkt außerhalb derſelben vollſtändig beſtimmt.

Folgerung 1. Eine Ebene iſt weiter beſtimmt

1. durch 3 nicht in einer Geraden liegende Punkte;
2. durch 2 ſich ſchneidende Geraden.

Folgerung 2. Durch 4 Punkte des Raumes läßt ſich im allgemeinen keine Ebene legen.

Folgerung 3. Die Schnittlinie zweier Ebenen iſt eine Gerade.

Die Annahme, daß die Schnittlinie auch eine krumme Linie ſein könne, ſteht im Widerſpruch zu Folgerung 1, 1. Inwiefern?

Nr. 4. Zwei und mehrere Geraden.

Die Lage zweier Geraden gegeneinander kann eine dreifache ſein.

a) Die Geraden ſchneiden ſich.

b) Die Geraden liegen in einer Ebene und ſind parallel.

c) Die Geraden liegen nicht in einer Ebene und heißen dann windſchief.

a) Jede Gerade kann als Schnittlinie zweier Ebenen gelten. Es ſei daher SC durch zwei Ebenen E_1 und E_2, SB durch zwei Ebenen E_1 und E_3 gebildet und E_3 ſei ſo gewählt, daß auch E_2 und E_3 ſich ſchneiden (in AA_1). Der Punkt S liegt dann ſowohl in E_1 und E_2, als auch in E_1 und E_3 und folglich gleichzeitig in E_2 und E_3. Hieraus ergibt ſich:

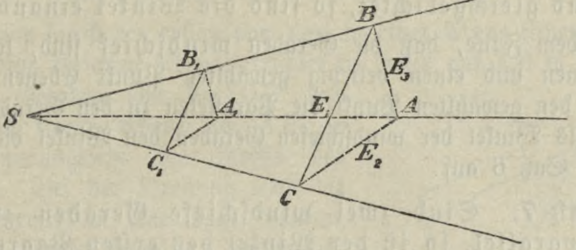


Fig. 44.

Lehrſatz 4. Treffen ſich zwei von den drei Schnittlinien dreier Ebenen in einem Punkte, ſo geht auch die dritte durch dieſen Punkt.

b) Iſt dagegen $BB_1 \parallel CC_1$, ſo muß auch $AA_1 \parallel BB_1$ und $AA_1 \parallel CC_1$ ſein. Denn wenn AA_1 mit einer der beiden anderen Schnittlinien, etwa mit BB_1, einen Punkt gemein hätte, ſo müßte nach Lehrſ. 4. auch die andere durch dieſen Punkt gehen, und dies widerſpricht der Annahme, daß $BB_1 \parallel CC_1$ ſei. Somit folgt:

Zuſatz. Sind zwei von den drei Schnittlinien dreier Ebenen parallel, ſo ſind ſie alle drei parallel.

Lehrſatz 5. Sind zwei Geraden einer dritten parallel, ſo ſind ſie unter ſich parallel.

Anl. zum Bew. Werden die Ebenen E_2 und E_3, in denen die Parallelen AA' und CC', bzw. BB' und CC' liegen, durch eine dritte Ebene E_1 geſchnitten, welche durch AA' und B geht, ſo geht die Schnittlinie mit E_3 durch B, iſt nach dem vorſtehenden Zuſatz parallel zu AA' und CC' und fällt daher mit BB' zuſammen.

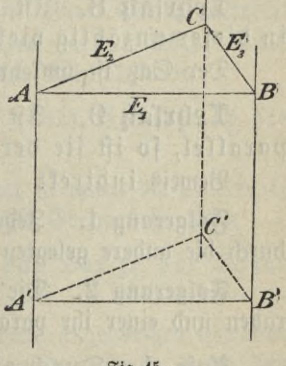


Fig. 45.

Iſt ferner $AB \parallel A'B'$ und $AC \parallel A'C'$ und macht man $A'B' = AB$, bzw. $A'C' = AC$, ſo ergibt ſich: $BB' \parallel CC'$ und $BB' = CC'$. Es iſt daher durch BB' und CC' eine Ebene beſtimmt, alſo $BCC'B'$ ein Parallelogramm und ſomit $B'C' = BC$. Damit aber ergibt ſich: $\triangle BAC \cong \triangle B'A'C'$, folglich: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$, d. h.

Lehrſatz 6. Sind die Schenkel zweier Winkel im Raume parallel und gleichgerichtet, ſo ſind die Winkel einander gleich.

c) In dem Falle, daß die Geraden windſchief ſind, legt man durch jede von ihnen und einen beliebig gewählten Punkt Ebenen und zieht in dieſen durch den gewählten Punkt die Parallelen zu den Geraden. Bezeichnet man dann als Winkel der windſchiefen Geraden den Winkel dieſer Parallelen, ſo führt der Satz 6 auf

Lehrſatz 7. Sind zwei windſchiefe Geraden zwei anderen paarweiſe parallel, ſo iſt der Winkel des erſten Paares gleich dem Winkel des zweiten Paares oder ergänzt ihn zu 180°.

Nr. 5. Gerade und Ebene.

Die Lage einer Geraden gegen eine Ebene kann eine zweifache ſein

a) Die Gerade iſt der Ebene parallel.

b) Die Gerade ſchneidet die Ebene.

a) **Erklärung.** Eine **Gerade** heißt **einer Ebene parallel,** wenn ſie mit ihr keinen Punkt gemein hat.

Legt man durch die Gerade G, die der Ebene E_1 parallel iſt, eine Ebene, welche E_1 ſchneidet, ſo iſt die Schnittlinie parallel zu G. Da aber die zweite Ebene beliebig viele Lagen einnehmen kann, ſo folgt:

Lehrſatz 8. Iſt eine Gerade einer Ebene parallel, ſo können in dieſer unzählig viele Parallelen zu der Geraden gezogen werden.

Der Satz iſt umkehrbar.

Lehrſatz 9. Iſt eine Gerade einer Geraden in einer Ebene parallel, ſo iſt ſie der Ebene parallel.

Beweis indirekt.

Folgerung 1. Jede von zwei parallelen Geraden iſt einer beliebigen durch die andere gelegten Ebene parallel.

Folgerung 2. Die Abſchnitte auf zwei Parallelen zwiſchen einer Geraden und einer ihr parallelen Ebene ſind gleichgroß.

Aufg. 1. Durch eine von zwei windſchiefen Geraden die Ebene zu legen, die der anderen parallel iſt.

Aufl. Legt man durch die zweite Gerade und einen Punkt der erſten eine Ebene und in dieſer durch den Punkt die Parallele zu der zweiten Geraden, ſo beſtimmt dieſe Parallele mit der erſten Geraden die geſuchte Ebene.

b) Schneidet die Gerade die Ebene, ſo ſind zwei Fälle denkbar.

α) Die Gerade iſt ein **Lot** auf der Ebene.

β) Die Gerade ſteht ſchief zu der Ebene.

α) Legt man durch die erſten von zwei in einer Ebene liegenden Geraden AB und CD eine beliebige Ebene, errichtet in dieſer auf AB in dem Schnittpunkte Q der Geraden das Lot QP′ und dreht dann die zweite Ebene um AB, ſo ändert ſich unausgeſetzt die Größe des Winkels PQC. Bei der Drehung kann die Ebene nur einmal in eine Lage kommen, bei welcher der Winkel PQC ein Rechter iſt, die Gerade PQ alſo auch auf CD ſenkrecht ſteht. Iſt nun EF eine beliebige dritte durch Q gehende Gerade der erſten Ebene, und zeichnet man QA = QB und QC = QD, ſo daß auch QE = QF und CE = DF wird, ſo läßt ſich leicht nachweiſen, daß die Dreiecke PQE und PQF kongruent, die Winkel PQE und PQF alſo einander gleich ſind, und ſomit PQ auch auf EF ſenkrecht ſteht. Hieraus folgt der Satz:

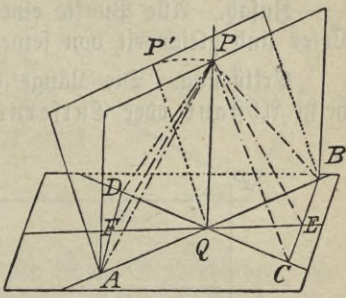


Fig. 46.

Lehrſatz 10a). Steht eine Gerade auf zwei Geraden einer Ebene ſenkrecht, ſo ſteht ſie auf der Ebene ſenkrecht.

Der Lehrſatz 10a) kann umgekehrt werden, und die Umkehrung lautet:

Lehrſatz 10b). Steht eine Gerade im Schnittpunkt dreier Geraden auf allen dreien ſenkrecht, ſo liegen dieſe in einer Ebene.

Merke: Um zu beweiſen, daß eine Gerade auf einer Ebene ſenkrecht ſteht, kann man zeigen, daß ſie mit zwei beliebigen in der Ebene durch ihren Schnittpunkt mit dieſer gelegten Geraden rechte Winkel bildet.

Aufg. 2. In einem gegebenen Punkte Q einer Geraden G die Normalebene zu G zu zeichnen.

Aufl. Man legt durch G zwei Ebenen, errichtet in ihnen die Lote in Q auf G und erhält ſo zwei Geraden, welche die geſuchte Ebene beſtimmen.

Aufg. 3. In einem Punkte einer Ebene das Lot zu der Ebene zu errichten.

Aufl. Das geſuchte Lot muß auf zwei der Ebene angehörigen Geraden ſenkrecht ſtehen. Dies wird dadurch erreicht, daß in der Ebene durch den gegebenen Punkt eine Gerade gezogen, zu dieſer die Normalebene in dem gegebenen Punkte hergeſtellt und dann in der Normalebene auf ihrer Schnittlinie mit der gegebenen Ebene das Lot errichtet wird.

Wird ein Punkt P des Lotes PQ mit einem Punkte R der Ebene verbunden, ſo iſt PR die Hypotenuſe des rechtwinkligen Dreiecks PQR, alſo $> PQ$. Ferner iſt $PR' = PR$, wenn $QR' = QR$ iſt. Man hat daher:

Lehrſatz 11. Das Lot von einem Punkt auf eine Ebene iſt kürzer als jede andere Verbindungslinie des Punktes mit der Ebene.

Zuſatz. Alle Punkte eines Kreiſes in der Ebene um den Fußpunkt des Lotes ſind gleichweit von ſeinem Ausgangspunkt entfernt.

Erklärung. Die Länge des Lotes von einem Punkte auf eine Ebene heißt Abſtand oder Entfernung des Punktes von der Ebene.

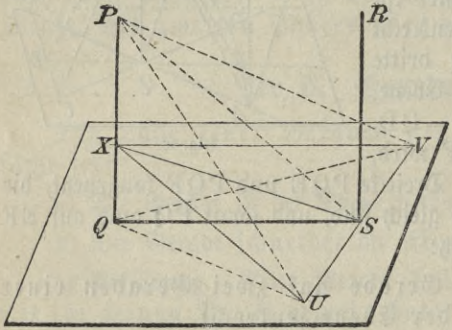


Fig. 47.

Iſt eine zweite Gerade RS parallel PQ, ſo ſteht ſie ſenkrecht auf der Verbindungslinie QS, und es fragt ſich, ob RS noch auf einer zweiten durch S gehenden Geraden der Ebene ſenkrecht ſteht. Die Lage dieſer Geraden iſt beliebig; man kann alſo UV in S ſenkrecht zu QS zeichnen. Iſt aber $SU = SV$, ſo folgt $QU = QV$, hieraus $PU = PV$ und dann $\sphericalangle PSU = \sphericalangle PSV = R$. Die Gerade US ſteht alſo auf der durch PQ und RS beſtimmten Ebene ſenkrecht. Daraus folgt:

Lehrſatz 12. Iſt eine von zwei Parallelen ein Lot auf einer Ebene, ſo iſt es auch die andere.

Die Umkehrung dieſes Satzes lautet:

Lehrſatz 13. Lote zu einer Ebene ſind parallel.

Entw. d. Bew. Da $PQ \perp QS$ und $RS \perp QS$, ſo iſt nur noch nachzuweiſen, daß PQ und RS in einer Ebene liegen. Iſt aber wieder $UV \perp QS$ und $US = SV$, ſind alſo alle Punkte der durch RS und QS beſtimmten Ebene von U und V gleichweit entfernt, ſo hat man nur noch zu beweiſen, daß auch für jeden Punkt X des Lotes PQ die Gleichheit $XU = XV$ beſteht.

Folgerung 1. Lote von einer Geraden auf eine ihr parallele Ebene ſind gleichgroß.

Folgerung 2. Die Projektion einer Strecke auf eine ihr parallele Ebene hat mit der Strecke gleiche Länge.

Aufg. 4. Von einem Punkte P das Lot auf eine Ebene E zu fällen.

Aufl. Man zieht in der Ebene E eine beliebige Gerade UV, legt durch P und UV eine Ebene, zeichnet PS ⊥ UV und errichtet in S auf UV ein in E liegendes Lot. Fällt man dann in der durch PS und dieſes Lot beſtimmten Ebene die Senkrechte PQ zu SQ, ſo iſt PQ das verlangte Lot, weil auch eine Parallele durch Q zu US auf der Ebene PQS ſenkrecht ſteht.

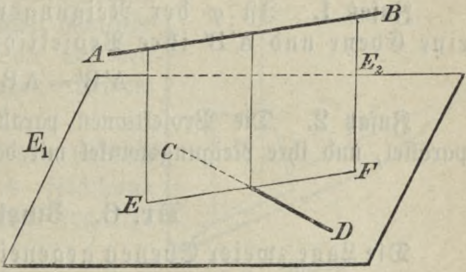


Fig. 48.

Sind AB und CD zwei *windſchiefe Geraden*, und legt man durch CD die AB parallele Ebene E_1 (ſ. Aufg. 1), ſo beſtimmen die Lote von Punkten der Geraden AB auf E_1 eine Ebene E_2, welche E_1 in einer Geraden EF ſchneidet. Jedes Lot von AB auf E_1 trifft EF, und jedes Lot in einem Punkte von EF auf E_1 trifft AB, ſteht ſenkrecht auf AB und iſt kürzer als irgendeine andere Gerade, die einen Punkt von AB mit der Ebene E_1 verbindet. Errichtet man daher in dem Schnittpunkt der Geraden CD und EF das Lot auf E_1, ſo iſt dies die *kürzeſte Verbindungslinie* zwiſchen den windſchiefen Geraden und daher als ihr Abſtand zu bezeichnen. Damit iſt der Weg angegeben für die Löſung der Aufgabe: *Den Abſtand zweier windſchiefen Geraden zu zeichnen.*

β) Die Gerade ſteht ſchief zu der Ebene.

Die Lote von den Punkten einer Geraden auf eine Ebene ſind ſämtlich parallel (Satz 13) und liegen in einer Ebene. Ihre Fußpunkte gehören der Schnittlinie dieſer Ebene mit der erſten Ebene an, und daraus folgt:

Lehrſatz 14. *Die Projektion einer Geraden auf eine Ebene iſt wieder eine Gerade.*

Erklärung. Der (ſpitze) Winkel einer Geraden mit ihrer Projektion auf eine Ebene heißt *Neigungswinkel* der Geraden gegen die Ebene, oder kurz *Winkel der Geraden und der Ebene.*

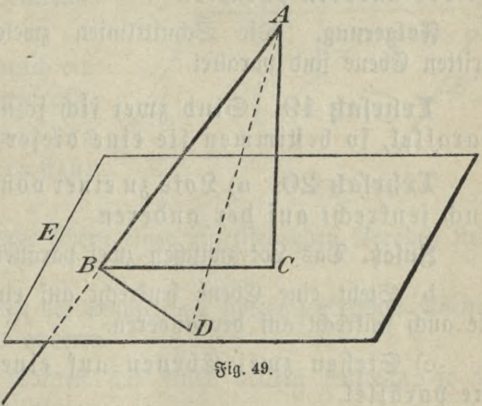


Fig. 49.

Iſt BC die Projektion der Strecke AB auf die Ebene E, und zieht man in E eine beliebige Gerade BD von der Länge BC, ſo entſteht durch Verbindung der Punkte A und D ein Dreieck, das in zwei Seiten mit dem Dreieck ABC übereinſtimmt. Da aber ſtets $AD > AC$ iſt, ſo folgt:

Lehrſatz 15. Der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene iſt kleiner als jeder andere Winkel, den die Gerade mit einer durch ihren Schnittpunkt mit der Ebene in dieſer gezogenen weiteren Geraden bildet.

Zuſatz 1. Iſt φ der Neigungswinkel einer Strecke AB gegen eine Ebene und $A'B'$ ihre Projektion auf dieſe, ſo iſt

$$A'B' = AB \cos \varphi.$$

Zuſatz 2. Die Projektionen paralleler Geraden auf eine Ebene ſind parallel, und ihre Neigungswinkel mit der Ebene ſind einander gleich.

Nr. 6. Zwei Ebenen.

Die Lage zweier Ebenen gegeneinander kann eine zweifache ſein:

a) die Ebenen ſind parallel,
b) die Ebenen ſchneiden ſich.

a) Parallele Ebenen. Über parallele Ebenen laſſen ſich eine Reihe leicht zu beweiſender Sätze aufſtellen.

Lehrſatz 16. Parallelen zwiſchen parallelen Ebenen ſind gleichlang.

Lehrſatz 17. Auf den Strahlen eines Strahlenbüſchels werden durch parallele Ebenen proportionale Abſchnitte begrenzt.

Lehrſatz 18. Jede Gerade in einer von zwei parallelen Ebenen iſt der anderen parallel.

Folgerung. Die Schnittlinien zweier parallelen Ebenen mit einer dritten Ebene ſind parallel.

Lehrſatz 19. Sind zwei ſich ſchneidende Geraden einer Ebene parallel, ſo beſtimmen ſie eine dieſer parallele Ebene.

Lehrſatz 20. a) Lote zu einer von zwei parallelen Ebenen ſtehen auch ſenkrecht auf der anderen.

Zuſatz. Das Lot zwiſchen zwei parallelen Ebenen iſt ihr Abſtand.

b) Steht eine Ebene ſenkrecht auf einer von zwei Parallelen, ſo ſteht ſie auch ſenkrecht auf der anderen.

c) Stehen zwei Ebenen auf einer Geraden ſenkrecht, ſo ſind ſie parallel.

Lehrſatz 21. Eine Gerade beſitzt gegen parallele Ebenen gleiche Neigungswinkel.

b) **Ebenen, die ſich ſchneiden.** Zwei ſich ſchneidende Ebenen begrenzen einen Flächenwinkel, deſſen Scheitelkante die Schnittlinie der Ebenen iſt. Als Maß des Flächenwinkels dient der Winkel zweier Lote in den beiden Ebenen, die in einem Punkte der Scheitelkante auf dieſer errichtet werden. Der Winkel der beiden Lote wird Neigungswinkel der beiden Ebenen genannt.

Die beiden Lote liegen in einer Normalebene zur Schnittkante, und dieſe Ebene enthält ſämtliche Senkrechten, die in Punkten der Lote auf den zugehörigen Ebenen errichtet werden können. Daraus folgt:

Lehrſatz 22. Der Winkel der beiden Lote von einem Punkte eines Flächenwinkels auf die Schenkelebenen ergänzt deren Neigungswinkel zu 2 R.

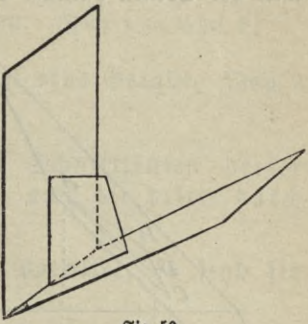


Fig. 50.

Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geſchnitten, ſo ſind die Schnittlinien und die Schenkel der Neigungswinkel parallel. Parallele Ebenen werden alſo von einer dritten unter gleichen Neigungswinkeln geſchnitten.

Erklärung. Iſt der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, ſo ſtehen die Ebenen aufeinander ſenkrecht.

Jede Ebene E durch ein Lot zu einer Ebene E' bildet mit dieſer eine Schnittlinie, die auf dem Lote ſenkrecht ſteht. Das zweite zur Herſtellung des Neigungswinkels erforderliche Lot liegt in E' und ſteht auf dem erſten ſenkrecht. Somit ergibt ſich:

Lehrſatz 23. Jede Ebene durch ein Lot zu einer Ebene ſteht auf dieſer ſenkrecht.

Folgerung 1. Die Ebene des Neigungswinkels zweier Ebenen ſteht auf beiden ſenkrecht.

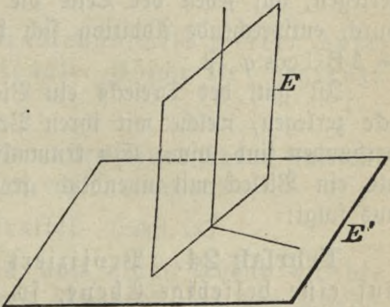


Fig. 51.

Folgerung 2. Die projizierende Ebene einer ſchiefſtehenden Geraden ſteht auf der Projektionsebene ſenkrecht.

Folgerung 3. Lote in Punkten der Schnittlinie zweier ſenkrechten Ebenen zu einer der Ebenen liegen in der anderen.

Folgerung 4. Stehen zwei Ebenen auf einer dritten ſenkrecht, ſo iſt dieſe eine Normalebene ihrer Schnittlinie.

Zuſatz. Stehen drei Ebenen aufeinander ſenkrecht, ſo ſtehen auch ihre Schnittlinien aufeinander ſenkrecht.

Anmerkung. Die Winkelſätze der Planimetrie bis zur Lehre von den Parallelen einſchließlich können auf Flächenwinkel übertragen werden.

Liegt in einer von zwei ſich unter dem Neigungswinkel φ ſchneidenden Ebenen ein Dreieck ABC ſo, daß eine ſeiner Seiten, etwa BC, der Schnittkante der Ebenen parallel iſt, und wird durch Projektion von ABC auf die zweite Ebene in dieſer das Dreieck $A'B'C'$ hergeſtellt, ſo iſt nach Folg. 2 zu Lehrſ. 13 $B'C' = BC$. Ferner iſt $B'C' \parallel BC$, und da $DD' \perp B'C'$ iſt, ſo hat man auch $DD' \perp BC$. Die Projektionsebene der Höhe AD ſteht daher auf BC (Lehrſ. 10) und ſomit auch auf $B'C'$ (Lehrſ. 12) ſenkrecht, und daraus folgt, daß $A'D'$ die zu $B'C'$ gehörige Höhe des Dreiecks $A'B'C'$ iſt. Nach Zuſ. 1 zu Lehrſ. 15 hat man aber $A'D' = AD \cos\varphi$, und daher iſt

$$A'B'C' = \frac{1}{2} B'C' \cdot A'D' = \frac{1}{2} BC \cdot AD \cos\varphi,$$

alſo

$$A'B'C' = ABC \cos\varphi.$$

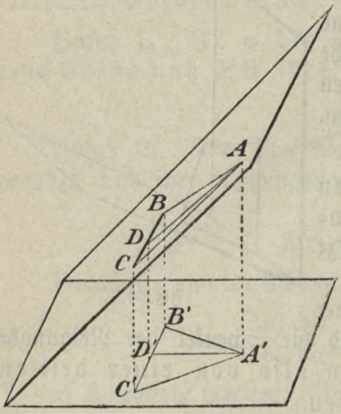


Fig. 52.

Iſt keine der Seiten des Dreiecks ABC der Schnittkante der Ebenen parallel, ſo kann man das Dreieck ABC durch eine Parallele zu dieſer in zwei Teile zerlegen, auf jeden der Teile die eben abgeleitete Beziehung anwenden und durch entſprechende Addition ſich davon überzeugen, daß wiederum $A'B'C' = ABC \cos\varphi$ iſt.

Iſt ſtatt des Dreiecks ein Vieleck gegeben, ſo läßt ſich dieſes in Dreiecke zerlegen, welche mit ihren Projektionen durch die angegebene Gleichung verbunden ſind, uſw. Ein krummlinig begrenztes Flächenſtück kann ſchließlich als ein Vieleck mit unendlich großer Seitenzahl betrachtet werden. Hieraus folgt:

Lehrſatz 24. Projiziert man eine geſchloſſene ebene Figur auf eine beliebige Ebene, ſo iſt der Flächeninhalt der Projektion gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt der Figur und dem Koſinus des Neigungswinkels der beiden Ebenen.

Nr. 7. Zuſammenfaſſung von Nr. 1 bis Nr. 6.

1. Die **Ebene** iſt der Ort aller

   a) Punkte, die von zwei Punkten des Raumes gleichweit entfernt ſind. (Lehrſ. 1.)

   b) Strahlen, die in einem Punkte einer Geraden auf dieſer ſenkrecht ſtehen. (Nr. 2, b, 3.)

2. Eine Ebene iſt beſtimmt
   - a) durch eine Gerade und einen außerhalb dieſer Geraden liegenden Punkt (Lehrſ. 3);
   - b) durch drei nicht in einer Geraden liegenden Punkte;
   - c) durch zwei ſich ſchneidende Geraden. (Folg. 1 zu Lehrſ. 3.)

3. Die Schnittlinie zweier Ebenen iſt eine Gerade. (Folg. 2 zu Lehrſ. 3.)

4. a) Treffen ſich zwei von den drei Schnittlinien dreier Ebenen in einem Punkte, ſo geht auch die dritte durch dieſen Punkt. (Lehrſ. 4.)
   - b) Sind zwei Geraden einer dritten parallel, ſo ſind ſie unter ſich parallel. (Lehrſ. 5.)

5. Winkel mit paarweiſe parallelen und gleichgerichteten Schenkeln ſind einander gleich. (Lehrſ. 6.)

6. a) Iſt eine Gerade einer Geraden in einer Ebene **parallel**, ſo iſt ſie der Ebene parallel. (Lehrſ. 9.)
   - b) Parallelen zwiſchen parallelen Ebenen ſind gleichlang. (Lehrſ. 16.)
   - c) Auf den Strahlen eines Strahlenbüſchels werden durch parallele Ebenen proportionale Abſchnitte begrenzt. (Lehrſ. 17.)

7. a) Steht eine Gerade auf zwei Geraden einer Ebene **ſenkrecht**, ſo ſteht ſie auf der Ebene ſenkrecht. (Lehrſ. 10.)
   - b) Lote zu einer Ebene ſind parallel. (Lehrſ. 13.)
   - c) Der Abſtand eines Punktes von einer Ebene iſt die kürzeſte Verbindungslinie des Punktes mit der Ebene. (Lehrſ. 11.)
   - d) Die Projektion einer Geraden auf eine Ebene iſt eine Gerade. (Lehrſ. 14.)
   - e) Unter allen Winkeln, die eine Gerade mit Geraden in einer Ebene bildet, iſt ihr **Neigungswinkel** gegen die Ebene der kleinſte. (Lehrſ. 15.)
   - f) Iſt φ der Neigungswinkel einer Strecke AB gegen eine Ebene und A′B′ ihre Projektion auf dieſe, ſo iſt A′B′ gleich $AB \cdot \cos\varphi$. (Zuſ. 1 zu Lehrſ. 15.)

8. a) **Lote** zu einer von zwei **parallelen Ebenen** ſtehen auch ſenkrecht auf der anderen. (Lehrſ. 20a.)

b) Steht eine Ebene ſenkrecht zu einer von zwei parallelen Geraden, ſo ſteht ſie auch ſenkrecht auf der anderen. (Lehrſ. 20b.)

c) Stehen zwei Ebenen auf einer Geraden ſenkrecht, ſo ſind ſie parallel. (Lehrſ. 20c.)

d) Die Ebene des **Neigungswinkels** zweier Ebenen ſteht auf beiden ſenkrecht. (Lehrſ. 23, Folg.)

e) Die Projektion eines ebenen Flächenſtücks J auf eine Ebene, die mit ſeiner Ebene den Neigungswinkel φ beſitzt, hat den Inhalt $J \cdot \cos\varphi$. (Lehrſ. 24.)

Nr. 8. Übungen zu Kapitel 1.

1. a) In zwei ſich ſchneidenden Ebenen E_1 und E_2 liegen zwei Geraden G_1 und G_2. Es ſoll durch Zeichnungen in den Ebenen E_1 und E_2 ermittelt werden, ob die beiden Geraden ſich ſchneiden, windſchief oder parallel ſind.

b) Durch eine in E_1 liegende Gerade G und einen in E_2 liegenden Punkt A ſei die Ebene E_3 gelegt. Wie läßt ſich die Schnittkante von E_2 und E_3 herſtellen,

α) wenn E_1 und E_2 ſich ſchneiden?

β) wenn E_1 und E_2 parallel ſind?

2. a) In der erſten von drei ſich ſchneidenden Ebenen liege der Punkt A und in der zweiten der Punkt B. Wie findet man den Punkt, in welchem die dritte Ebene von der Geraden AB geſchnitten wird?

b) Bei drei ſich ſchneidenden Ebenen E_1, E_2 und E_3 liege in E_1 der Punkt A, in E_2 der Punkt B und in E_3 der Punkt C. Es ſollen die Schnittkanten der Ebene ABC mit E_1, E_2 und E_3 gezeichnet werden.

3. Beweiſe die Sätze:

a) Alle Ebenen, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und

α) einer gegebenen Geraden parallel ſind, ſchneiden ſich in einer Geraden,

β) auf einer gegebenen Ebene ſenkrecht ſtehen, ſchneiden ſich in einer Geraden.

b) Die Schnittlinien einer Ebene mit allen durch eine ihr parallele Gerade gelegten Ebenen ſind einander parallel.

c) Iſt eine Ebene zwei in einer anderen Ebene liegenden und ſich ſchneidenden Geraden parallel, ſo ſind die beiden Ebenen parallel.

d) Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, ſo ſind auch ihre Ebenen parallel.

4. Beweiſe die Sätze:

a) Errichtet man auf zwei Geraden einer Ebene E ſenkrechte Ebenen, ſo ſchneiden ſich dieſe in einem Lote zu E.

b) Fällt man von einem Punkte A das Lot auf die Ebene E und von ſeinem Fußpunkte das Lot auf die in E liegende Gerade G, ſo iſt die durch die Lote beſtimmte Ebene eine Normalebene zu G.

c) Die Fußpunkte der Lote, die von einem Punkte A auf eine Schar von Parallelen in einer Ebene E gefällt werden können, liegen in einer Geraden.

d) Stehen eine Ebene und eine Gerade auf einer Ebene ſenkrecht, ſo ſind ſie parallel.

e) Stehen eine Ebene und eine Gerade auf einer Geraden ſenkrecht, ſo ſind ſie parallel.

5. Zu einer in der Ebene E liegenden Geraden in E eine Parallele zu ziehen, welche von einem Punkte A außerhalb E die Entfernung a beſitzt. Unter welche Größe darf a nicht ſinken?

6. a) Den Ort aller Punkte zu beſtimmen, welche ſowohl von allen Punkten als auch von allen Tangenten eines Kreiſes gleichweit entfernt ſind.

b) Den Ort aller Punkte einer Ebene E zu beſtimmen, deren Verbindungslinien mit einem Punkte A außerhalb E

α) mit der Ebene E denſelben Neigungswinkel bilden,

β) die Länge l beſitzen. Unter welche Größe darf l nicht ſinken?

7. Beweiſe die Sätze:

a) Errichtet man auf den Ebenen zweier gleichſchenkligen Dreiecke mit gemeinſchaftlicher Grundlinie in den Spitzen Lote, ſo ſchneiden ſich dieſe.

b) Errichtet man in den Mittelpunkten der umgeſchriebenen Kreiſe der durch 4 Punkte beſtimmten Dreiecke auf deren Ebenen Lote, ſo ſchneiden ſich dieſe in einem Punkte.

8. Die Ecken eines Dreiecks ſind 8 cm, 11 cm und 14 cm von einer Ebene E entfernt. Wie groß iſt der Abſtand der Ebene von dem Schwerpunkte des Dreiecks?

9. Wo liegen alle Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen Ebenen E_1 und E_2

a) die Länge l beſitzen?

b) einander gleich ſind?

c) ſich wie p zu q verhalten?

d) die Summe s beſitzen?

10. Wo liegen alle Punkte, deren Entfernungen

a) von zwei ſich ſchneidenden Geraden einander gleich ſind?

b) von zwei parallelen Geraden einander gleich ſind?

c) von drei durch einen Punkt gehenden Geraden einander gleich ſind?

d) von drei nicht in einer Ebene liegenden Geraden einander gleich ſind?

11. a) Wo liegen alle Punkte einer Ebene E, deren Entfernungen von zwei außerhalb E liegenden Punkten gleichgroß ſind?

b) Wo liegt in der Ebene E der Punkt, der von drei außerhalb E gegebenen Punkten gleichweit entfernt iſt?

12. a) Durch eine Gerade G der Ebene E eine zweite Ebene zu legen, welche mit der erſten einen Neigungswinkel von der Größe φ beſitzt.

b) Durch eine der Ebene E parallele Gerade G eine Ebene zu legen, welche mit E den Neigungswinkel φ beſitzt.

c) Durch eine Gerade G, welche die gegebene Ebene E ſchneidet, eine Ebene zu legen, welche mit E den Winkel φ bildet.

Anleitung. Lot auf E von einem Punkte der Geraden G; Ebene durch dies Lot; rechtwinkliges Dreieck in dieſer Ebene mit dem ſpitzen Winkel φ; Kreis; Tangente an dieſen Kreis.

d) Die Schnittkante der Ebenen zweier Dreiecke zu beſtimmen.

Anleitung. Zweimal je zwei Lote auf die gegebenen Ebenen führen auf zwei Punkte der Schnittkante.

Kapitel 2.

Die körperliche Ecke.

Nr. 9. Körperliche Ecken. Reziproke Ecken.

a) Sind ſämtliche Schnittlinien von n Ebenen parallel, ſo begrenzen die Ebenen einen n-ſeitigen prismatiſchen Raum. Gehen dagegen ſämtliche Schnittlinien von einem Punkte aus, ſo begrenzen die Ebenenſtücke zwiſchen je zwei aufeinanderfolgenden Schnittlinien pyramidenartige Räume, welche als **körperliche Ecken** bezeichnet werden. Die Schnittlinien der Ebenen heißen Kanten und ihr Schnittpunkt heißt Scheitel der Ecke. Die Winkel je zweier aufeinanderfolgenden Kanten werden Seiten und die Winkel (Neigungswinkel) benachbarter Seiten werden Winkel der Ecke genannt.

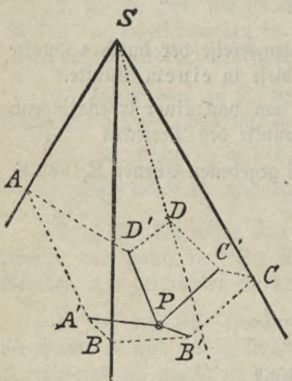


Fig. 53.

Eine Ecke heißt konvex, wenn in ihr überſtumpfe Winkel nicht vorkommen.

Nur von konvexen Ecken ſoll im folgenden die Rede ſein.

b) Fällt man, um die Winkel einer Ecke zu zeichnen, von einem Punkte (am bequemſten im Innern der Ecke) Lote auf die Seiten (Ebenen!) und von deren Fußpunkten Lote auf die Kanten, ſo beſtimmen die erſten n Lote eine zweite Ecke, auf deren Seiten je eine Kante der urſprünglichen Ecke ſenkrecht ſteht. Die Seiten einer jeden der beiden Ecken ſind demnach Normalebenen zu den Kanten der anderen. Bezeichnet man ſie daher als reziproke Ecken, ſo führt die wiederholte Anwendung des Satzes Nr. 6, 22 auf

Lehrſatz 25. Die Seiten (Winkel) einer Ecke ergänzen die entſprechenden Winkel (Seiten) einer zu ihr reziproken Ecke zu 180°.

Erklärung. Fallen die Scheitel zweier reziproken Ecken zuſammen, ſo heißt jede von ihnen die Polarecke der anderen.

Erklärung. Die Verlängerungen der Kanten über den Scheitel hinaus beſtimmen die Gegenecke der urſprünglichen Ecke.

Folgerung. Die Seiten und Winkel der Gegenecke ſind gleich den entſprechenden Seiten und Winkeln der urſprünglichen Ecke. Die Richtung aber, in der die gleichen Stücke aufeinanderfolgen, iſt bei beiden Ecken verſchieden. Daher ſind Ecke und Gegenecke ſymmetriſch und nur unter beſonderen Vorausſetzungen kongruent.

c) Die Größe der Seiten iſt von der Länge der Kanten unabhängig. Nimmt man aber die Kanten einer Ecke als gleichlang an, ſo kann man ſie als Radien einer Kugel betrachten, deren Mittelpunkt mit dem Scheitel der Ecke zuſammenfällt. Die Ebenen der Seiten gehen durch den Mittelpunkt und ſchneiden die Kugelfläche in einer von n Kreisbogen begrenzten Figur. Dieſe wird Kugelvieleck genannt. Die Winkel des Kugelvielecks werden von den Tangenten in den Ecken des Vielecks an die Kreiſe gebildet, die ſich in dieſen Ecken ſchneiden, und ſind daher gleich den Winkeln der Ecke. Die Seiten des Kugelvielecks ſind Stücke von Hauptkreiſen (weil ihre Ebenen durch den Mittelpunkt gehen), alſo Bogen, deren Mittelpunktswinkel die Seiten der Ecke ſind. Die Sätze, welche für die körperliche Ecke entwickelt werden, gelten deshalb auch für das Kugelvieleck.

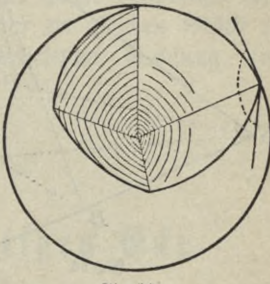


Fig. 54.

Nr. 10. Seiten und Winkel einer dreiſeitigen Ecke.

Über die dreiſeitige Ecke laſſen ſich mehrere Sätze ausſprechen, welche Sätzen über das ebene Dreieck entſprechen.

Es ſei die Seite $ASB > ASC$ und $> BSC$. Addiert man ASC und BSC, indem man ASC über SC hinaus um BSC fortſetzt, und zeichnet, um zu einer Vergleichung zu gelangen, $SD = SB$, ſo iſt in dem ebenen Dreieck ADB, das durch die Verbindung von B mit D entſteht, die Seite $AD = AC + CB$ und ſomit $AD > AB$. Durch Vergleichung der Dreiecke ASD und ASB ergibt ſich nun: $\sphericalangle ASD > \sphericalangle ASB$, und damit der Satz:

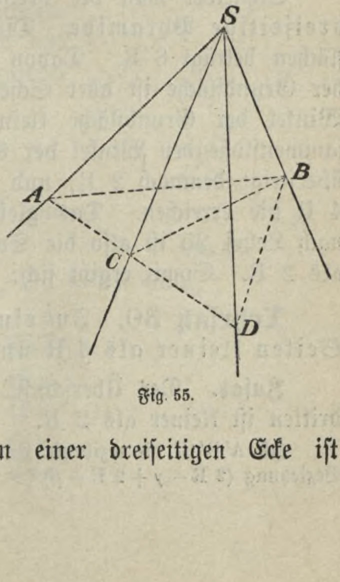


Fig. 55.

Lehrſatz 26. Die Summe zweier Seiten einer dreiſeitigen Ecke iſt größer als die dritte.

Folgerung. Die Differenz zweier Seiten einer dreiſeitigen Ecke iſt kleiner als die dritte.

Um die Beziehungen zwiſchen den Seiten und Winkeln einer dreiſeitigen Ecke kennen zu lernen, zeichnet man zwei ihrer (Neigungs-)Winkel, indem man von einem Punkte A der Kante SA das Lot AD auf die Ebene BSC fällt und durch AD die Normalebenen zu SB und SC legt.

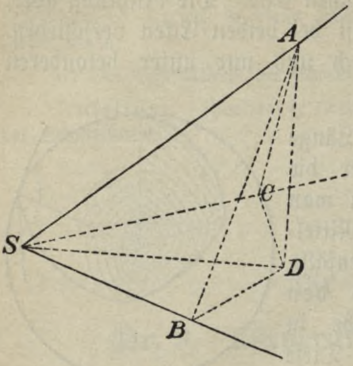


Fig. 56.

a) Sind die Seiten ASB und ASC einander gleich, ſo iſt AB = AC. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABD und ACD ſtimmen daher in zwei Seiten überein, und ſomit iſt ∢ ABD = ∢ ACD, d. h.

Lehrſatz 27. Gleichen Seiten einer dreiſeitigen Ecke liegen gleiche Winkel gegenüber.

b) Sind umgekehrt die Winkel ABD und ACD einander gleich, ſo iſt AB = AC, alſo △ ASB ≅ △ ASC, und ſomit Seite ASB = Seite ASC, d. h.

Lehrſatz 28. Gleichen Winkeln einer dreiſeitigen Ecke liegen gleiche Seiten gegenüber.

c) Iſt ∢ ASB > ∢ ASC, ſo iſt auch AB > AC und ſomit ∢ ACD > ∢ ABD. Die Schlüſſe laſſen ſich in umgekehrter Reihenfolge wiederholen. Dies führt zu

Lehrſatz 29. In einer dreiſeitigen Ecke liegt der größeren von zwei Seiten der größere Winkel und dem größeren von zwei Winkeln die größere Seite gegenüber.

Schneidet man die dreiſeitige Ecke durch eine Ebene, ſo entſteht eine dreiſeitige Pyramide. Die Summe der Winkel in den 4 Begrenzungsflächen beträgt 8 R. Davon beanſprucht die Grundfläche 2 R. Jede Ecke der Grundfläche iſt aber Scheitel einer dreiſeitigen Ecke, und daher iſt jeder Winkel der Grundfläche kleiner als die Summe der beiden mit ihm zuſammenſtoßenden Winkel der Seitenflächen. Die Summe aller dieſer Winkel überſteigt demnach 2 R, und daher können die Seiten der Ecke die Summe 4 R nie erreichen. Das gleiche gilt natürlich auch für die reziproke Ecke; nach Lehrſ. 25 iſt alſo die Summe der Winkel einer dreiſeitigen Ecke größer als 2 R. Somit ergibt ſich:

Lehrſatz 30. In einer dreiſeitigen Ecke iſt die Summe der Seiten kleiner als 4 R und die Summe der Winkel größer als 2 R.

Zuſatz. Der Überſchuß zweier Winkel einer dreiſeitigen Ecke über den dritten iſt kleiner als 2 R.

Iſt A'B'C' die reziproke Ecke von ABC, ſo folgt aus $(A'B' + A'C') > B'C'$ die Beziehung $(2\,R - \gamma + 2\,R - \beta) > (2\,R - \alpha$`, uſw.

Durch ganz entſprechende Schlüſſe läßt ſich zeigen:

Lehrſatz 31. In einer n-ſeitigen Ecke iſt die Summe der Seiten kleiner als 4 R und die Summe der Winkel größer als (2n − 4) R, aber kleiner als 2n R.

Die Bedingungen für die Kongruenz dreiſeitiger Ecken entſprechen den Bedingungen für die Kongruenz ebener Dreiecke, wenn die gleichen Stücke in derſelben Richtung aufeinanderfolgen. Bei entgegengeſetzter Richtung ſind die Ecken ſymmetriſch.

Kapitel 3.

Trigonometrie der dreiſeitigen Ecke.

Nr. 11. Die rechtwinklige dreiſeitige Ecke.

Da weder die Winkel noch die Seiten einer dreiſeitigen Ecke eine unveränderliche Summe beſitzen, ſo fehlen die Beziehungen, welche die Berechnung des ebenen Dreiecks vereinfachen. Es können mehr als ein rechter Winkel und mehr als eine rechtwinklige Seite vorhanden ſein. Spricht man daher von einer rechtwinkligen oder rechtſeitigen Ecke, ſo ſetzt man nur voraus, daß ein Winkel, bzw. eine Seite gleich 90° iſt, ohne über die anderen Seiten und Winkel eine Annahme zu machen.

Es ſei bezeichnet die Seite BSC mit a, ASC mit b, ASB mit c, der Winkel an der Kante SA mit α, an SB mit β und an SC mit γ.

Iſt nun γ ein rechter Winkel und an irgendeinem Punkte E der Kante SB der Neigungswinkel β gezeichnet, ſo beſtimmt deſſen Ebene das rechtwinklige Dreieck DEF mit dem rechten Winkel bei F. Es iſt daher

$$\sin\beta = \frac{DF}{DE}, \quad \cos\beta = \frac{EF}{DE}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{DF}{EF}.$$

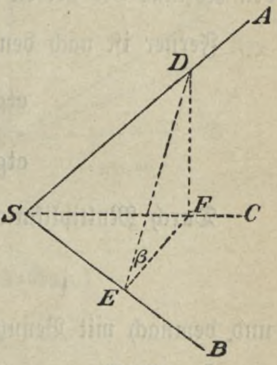


Fig. 57.

Da aber auch die Dreiecke SDE, SEF und SDF rechtwinklig ſind, ſo iſt

$$DE = SD \sin c, \quad DE = SE \operatorname{tg} c, \quad EF = SF \sin a,$$

und ſomit

$$1. \quad \begin{cases} \sin\beta = \dfrac{DF}{SD \sin c} = \dfrac{\sin b}{\sin c}, \\[2ex] \cos\beta = \dfrac{EF}{SE \operatorname{tg} c} = \dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}, \\[2ex] \operatorname{tg}\beta = \dfrac{DF}{SF \sin a} = \dfrac{\operatorname{tg} b}{\sin a}. \end{cases}$$

Auf ganz entſprechendem Wege ergibt ſich:

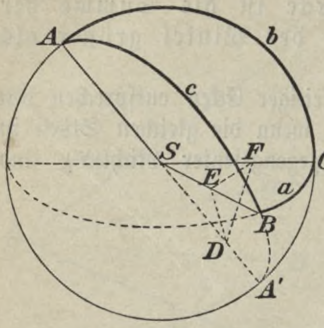


Fig. 58.

$$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}.$$

Anmerkung. Bei der Ableitung dieſer Formeln iſt eine Ecke benutzt worden, deren Seiten ſämtlich ſpitz ſind. Iſt eine der Seiten, z. B. b, ſtumpf, ſo trifft die Ebene DEF die Verlängerung der Kante SA in D, und in den rechtwinkligen Dreiecken auf den Seiten treten ſtatt c, b und β die Supplemente $180^0 - c$, $180^0 - b$, bzw. $180^0 - \beta$ auf. Jeder Vorzeichenwechſel in den Formeln 1. iſt daher mit einem zweiten verbunden, und beide heben ſich gegenſeitig auf.

Da ſtets $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$ iſt, ſo folgt aus den abgeleiteten Formeln:

$$\frac{\operatorname{tg} b}{\sin a} = \frac{\sin b}{\sin c} \cdot \frac{\operatorname{tg} c}{\operatorname{tg} a},$$

und daraus nach Entfernung der gleichen Faktoren:

2. $$\cos c = \cos a \cos b,$$

d. h. der Koſinus der Seite (der Hypotenuſe) c iſt gleich dem Produkt aus den Koſinus der beiden anderen Seiten (der beiden Katheten).

Ferner iſt nach den Formeln 1.

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} \cdot \frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\sin a \cos c}{\cos a \sin b},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin b \cos c}{\cos b \sin a}.$$

Durch Multiplikation ergibt ſich hieraus:

$$\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos^2 c}{\cos a \cos b},$$

und demnach mit Benutzung von Gl. 2.:

3. $$\operatorname{ctg}\alpha . \operatorname{ctg}\beta = \cos c.$$

Schließlich erhält man

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c} \cdot \frac{\sin c}{\sin b} = \frac{\cos c}{\cos b},$$

und dann nach Gl. 2.:

4. $$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \text{ und } \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Gibt man den Seiten und Winkeln unter Auslaſſung des rechten Winkels γ die Reihenfolge a, β, c, α, b und erſetzt a und b durch ihre Komplemente, ſo ſind die Formeln 1.—4. in der **Neperſchen** Regel enthalten:

Der Koſinus eines jeden Stückes iſt gleich dem Produkt aus den Sinus der beiden nicht-benachbarten und auch gleich dem Produkt aus den Kotangenten der beiden benachbarten Stücke.

Nr. 12. Die rechtſeitige dreiſeitige Ecke.

Die reziproke Ecke einer rechtſeitigen Ecke iſt rechtwinklig. Sind daher a', b', c', α', β' und γ' die entſprechenden Stücke der reziproken Ecke, ſo gelten für dieſe die Formeln in Nr. 11. Nun iſt aber

$$a' = 180^0 - \alpha,\ b' = 180^0 - \beta,\ \alpha' = 180^0 - a,\ \beta' = 180^0 - b,$$

und die Benutzung dieſer Gleichheiten führt leicht zu den Formeln für das rechtſeitige Dreieck.

Nr. 13. Die allgemeine dreiſeitige Ecke.

a) Wie in der ebenen Trigonometrie ſo werden auch hier die Beziehungen zwiſchen den Seiten und Winkeln durch Verwendung des rechtwinkligen Dreiecks abgeleitet. Man legt zu dem Zwecke durch die Kante SA die Ebene SAD ſenkrecht zu der Ebene BSC und erhält dadurch zwei rechtwinklige dreiſeitige Ecken. Bezeichnet man dann die gemeinſchaftliche Kathete ASD mit h (Höhe!), ſo hat man

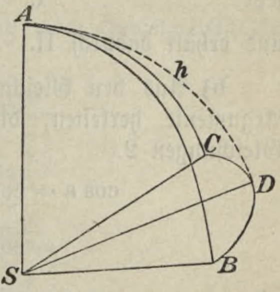


Fig. 59.

$$\sin\beta = \frac{\sin h}{\sin c} \text{ und } \sin\gamma = \frac{\sin h}{\sin b},$$

und daraus folgt:

$$\textbf{1.}\qquad \sin\beta : \sin\gamma = \sin b : \sin c. \quad \textbf{(Sinus-Satz.)}$$

Ferner iſt nach Gl. 2. in Nr. 11

$$\begin{aligned} \cos c &= \cos h \cos BSD \\ &= \cos h \cos(a - CSD) \\ &= \cos h (\cos a \cos CSD + \sin a \sin CSD). \end{aligned}$$

Ebenſo iſt
$$\cos b = \cos h \cos CSD,$$

alſo
$$\cos h = \frac{\cos b}{\cos CSD},$$

und ſomit
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos b \operatorname{tg} CSD.$$

Nun iſt aber $\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg} \mathrm{CSD}}{\operatorname{tg} b}$;

benutzt man dies, ſo ergibt ſich:

$$2.\quad \left\{\begin{aligned} &\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma, \\ &\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos\beta, \\ &\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha. \end{aligned}\right.$$

und entſprechend

(Koſinus-Satz.)

Wendet man den Koſinus-Satz auf die reziproke Ecke an und führt dann die Stücke der erſten Ecke wieder ein, ſo erhält man die Gleichungen:

$$3.\quad \left\{\begin{aligned} &-\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma \cos a, \\ &-\cos\beta = \cos\gamma \cos\alpha - \sin\gamma \sin\alpha \cos b, \\ &-\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \cos c. \end{aligned}\right.$$

Zuſatz. Bei der Verwendung der Formeln 2. und 3. führt häufig eine goniometriſche Umgeſtaltung zu einer bequemeren Berechnung. Iſt z. B. a aus b, c und α zu beſtimmen, ſo bildet man

$$\cos a = \cos b\,(\cos c + \sin c \operatorname{tg} b \cos\alpha),$$

ſetzt I. $\operatorname{tg} b \cos\alpha = \operatorname{ctg}\varphi$

und erhält dadurch II. $\cos a = \frac{\cos b \sin(c+\varphi)}{\sin\varphi}$.

b) Aus den Gleichungen 2. und 3. laſſen ſich Formeln für die halben Argumente herleiten, die häufig benutzt werden. Zunächſt iſt nach den Gleichungen 2.

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \\ &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right), \end{aligned}$$

alſo

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos(b-c) - 2\sin b \sin c \sin^2\frac{\alpha}{2}, \\ &= \cos(b+c) + 2\sin b \sin c \cos^2\frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

und ſomit

$$\begin{aligned} \sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\frac{a+b-c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}}{\sin b \sin c}, \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{b+c-a}{2}}{\sin b \sin c}. \end{aligned}$$

Setzt man $a + b + c = 2s$, ſo geht hieraus hervor:

$$4.\quad \left\{\begin{aligned} \sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}. \\ \cos^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}. \\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}. \end{aligned}\right.$$

Geht man von den Gleichungen 3. aus, ſo ergeben und entwickeln ſich ganz entſprechend wie vorher nach Einführung der Bezeichnung $\alpha + \beta + \gamma = 2\sigma$ die Formeln:

$$\text{4a.}\qquad \left\{\begin{aligned}
\sin^2 \frac{a}{2} &= -\frac{\cos\sigma \cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta \sin\gamma}.\\
\cos^2 \frac{a}{2} &= \frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}.\\
\mathrm{tg}^2 \frac{a}{2} &= -\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}.
\end{aligned}\right.$$

c) Werden in gleicher Weiſe die Formeln für $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ aufgeſtellt und mit 4. verbunden, ſo ergibt ſich:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} &= \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2},\\
\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} &= \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2},\\
\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} &= \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2},\\
\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} &= \frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgen durch Addition und Subtraktion nach einigen kleineren Umformungen die **Mollweideſchen Gleichungen:**

$$\text{5.}\qquad \left\{\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\\
\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2},\\
\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2} &= \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\\
\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2} &= \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}\right.$$

Durch Diviſion führen dieſe zu den **Neperſchen Analogien:**

$$\text{6.}\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2},\\
\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2},\\
\mathrm{tg}\frac{a+b}{2} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\mathrm{tg}\frac{c}{2},\\
\mathrm{tg}\frac{a-b}{2} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,\mathrm{tg}\frac{c}{2}.
\end{aligned}\right.$$

d) Die 6 Grundaufgaben über die dreiſeitige Ecke.

Aufg. 1. Gegeben: a, b und γ. Geſucht: c, α und β.

Aufl. Man berechnet c nach dem Koſinus-Satz und dann α und β nach dem Sinus-Satz, oder man verwendet zur Beſtimmung von α und β zuerſt die Analogien.

Aufg. 2. Gegeben: α, β und c. Geſucht: a, b und γ.

Aufl. Man benutzt zur Berechnung von γ die Formel 3 für $\cos\gamma$ und beſtimmt dann a und b nach dem Sinus-Satz, oder man verwendet zuerſt die Analogien zur Berechnung von a und b.

Aufg. 3. Gegeben: a, b und α. Geſucht: c und γ.

Aufl. Da auch β als bekannt gelten kann, ſo ſind die Analogien verwendbar. Oder: Aus

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha = \cos b\,(\cos c + \sin c \cdot \operatorname{tg} b \cos\alpha)$$

geht für

$$1. \qquad \operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg} b \cos\alpha$$

die Gleichung hervor: $\cos a = \frac{\cos b \sin(c+\varphi)}{\sin\varphi}$ oder

$$2. \qquad \sin(c+\varphi) = \frac{\cos a}{\cos b} \cdot \sin\varphi.$$

Durch $c + \varphi$ und φ iſt aber c beſtimmt.

Aufg. 4. Gegeben: α, β und a. Geſucht: c und γ.

Aufl. Entſprechend wie bei Aufg. 3 laſſen ſich die Analogien oder die Gleichung $-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma\cos a$ benutzen.

Aufg. 5. Gegeben: a, b und c. Geſucht: α, β und γ.

Aufl. Nach den Formeln 4.

Aufg. 6. Gegeben: α, β und γ. Geſucht: a, b und c.

Aufl. Nach den Formeln 4a.

Nr. 14. Anwendungen.

Die in Nr. 11—13 entwickelten Formeln können ohne jede Veränderung bei einem Kugeldreieck Verwendung finden, wenn deſſen Seiten in Graden ausgedrückt ſind (ſ. Nr. 9). [Die wirkliche Länge der Seiten iſt mit dem Halbmeſſer r der Kugel durch die Gleichung: b (Bogen) $= \frac{\varphi}{360} \cdot 2\pi r$ verbunden.] Die hierher gehörigen Aufgaben werden vorzugsweiſe der mathematiſchen Geographie entnommen.

a) Berechnungen auf der Erdoberfläche.

Die Punkte der Erde ſind durch Länge (λ) und Breite (φ) beſtimmt. Die Meridianebenen zweier Punkte A (λ_1, φ_1) und B (λ_2, φ_2) treffen ſich im Nordpol N und beſitzen den Neigungswinkel $\lambda_2 - \lambda_1$. Von N iſt A um $90 - \varphi_1$ und B um $90 - \varphi_2$ Grade entfernt. Legt man daher durch A, B und den Mittelpunkt eine Ebene, ſo beſtimmt dieſe auf der Kugel das Dreieck NAB.

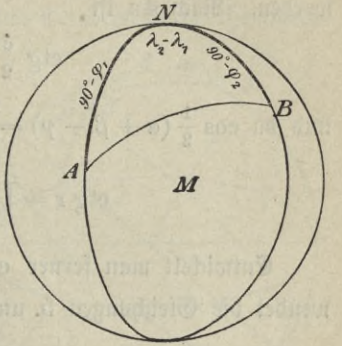


Fig. 60.

Aufg. 1. Die Entfernung*) zweier Punkte A und B der Erde aus den Angaben über ihre Lage zu berechnen.

Aufl. Man kennt zwei Seiten und den von dieſen eingeſchloſſenen Winkel des Dreiecks NAB und kann daher den Koſinus-Satz benutzen. Auch die Analogien in Verbindung mit dem Sinus-Satz ſind verwendbar. Iſt der Bogen AB berechnet, ſo folgt für die Entfernung: $e = \frac{AB}{360} \cdot 40000$ km.

Aufg. 2. Den Mittelpunkt O eines Kugeldreiecks ABC zu beſtimmen, deſſen Ecken drei Orte auf der Erde bilden.

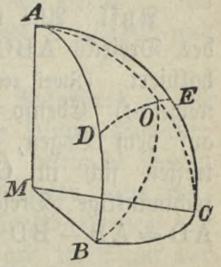


Fig. 61.

Aufl. Alle von A und B gleichweit entfernten Punkte liegen auf dem Bogen, deſſen Ebene in der Mitte D von AB auf der Ebene AMB ſenkrecht ſteht. (Zwei rechtw. Dreiecke mit gleichen Katheten!) Entſprechend iſt die Linie herzuſtellen, deren Punkte von A und C gleiche Entfernungen beſitzen. Beide Linien treffen ſich in O. Zur Berechnung von r (= OA) benutzt man das rechtwinklige Dreieck ODA. In dieſem iſt

$$\cos OAD = \frac{\operatorname{tg} AD}{\operatorname{tg} r} = \operatorname{tg} \frac{c}{2} \operatorname{ctg} r.$$

Da aber

$$\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA, \ \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB, \ \sphericalangle OCA = \sphericalangle OAC$$

iſt, ſo hat man

$$\begin{aligned}\sphericalangle OAD &= \alpha - OAC = \alpha - OCA, \\ &= \alpha - \gamma + OBC, \\ &= \alpha - \gamma + \beta - OAD,\end{aligned}$$

und ſomit $$\sphericalangle OAD = \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma).$$

Demnach iſt $$\operatorname{ctg} r = \operatorname{ctg} \frac{c}{2} \cos \frac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma).$$

---

*) Die Entfernung iſt der Bogen AB auf einem Kreiſe durch A und B mit dem Mittelpunkte M. (Vgl. Seite 214.)

Zuſatz. Die Gleichung für r läßt ſich auf zwei Formen bringen, bei denen entweder nur die Winkel oder nur die Seiten des Dreiecks benutzt werden. Nach 4a iſt

$$\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}{-\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}},$$

und da $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)=\cos(\sigma\quad\gamma)$ iſt, ſo folgt:

$$\operatorname{ctg} r=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{-\cos\sigma}}.$$

Entwickelt man ferner $\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma)$ oder $\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)$ und verwendet die Gleichungen 5. und 4., ſo erhält man:

$$\operatorname{ctg} r=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}}.$$

Aufg. 3. Im Innern eines Kugeldreiecks ABC, deſſen Ecken drei Orte auf der Erde bilden, den Punkt O zu beſtimmen, der von den drei Seiten gleichweit entfernt iſt.

Aufl. Alle von AB und AC gleichweit entfernten Punkte innerhalb des Dreiecks ABC liegen auf dem Bogen, deſſen Ebene den Winkel BAC halbiert. (Zwei rechtw. Dreiecke mit gemeinſchaftlicher Hypotenuſe und zwei gleichen Katheten!) Ebenſo liegen alle von BA und BC gleichweit entfernten Punkte auf dem Bogen, deſſen Ebene den Winkel ABC halbiert. Beide Linien treffen ſich in O. Zur Berechnung von ϱ (= OD) benutzt man das rechtwinklige Dreieck ADO. In dieſem iſt AD = AE, und da aus AD = AB − BD und AE = AC − CE die Gleichung

$$\begin{aligned}AD+AE=AB+AC-(BD+CE)&=AB+AC-BC\\&=c+b-a\end{aligned}$$

folgt, ſo ergibt ſich:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(s-a)}\text{ oder }\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\varrho}=\mathbf{sin}\,(\mathbf{s-a})\,\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\frac{\alpha}{2}}.$$

Zuſatz. In gleicher Weiſe wie bei Aufg. 2 läßt ſich der Ausdruck für ϱ ſo umgeſtalten, daß entweder nur die Seiten oder nur die Winkel des Dreiecks zur Berechnung von ϱ benutzt werden. Die Entwickelung liefert die Formeln:

$$\operatorname{tg}\varrho=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

und

$$\operatorname{tg}\varrho=\frac{\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}.$$

b) Aufgaben über die Erde als Himmelskörper.

Vorbemerkungen. Bei der großen Entfernung der Erde von den übrigen Himmelskörpern kann jeder ihrer Punkte als Mittelpunkt der Himmelskugel gelten. Die Schwerlinie, die das Himmelsgewölbe im Zenit des Beobachtungsortes trifft, iſt daher als Durchmeſſer anzuſehen. Die Normalebene zur Schwerlinie liefert den Horizont. Alle zum Horizont ſenkrechten Ebenen treffen das Himmelsgewölbe in Hauptkreiſen (ſ. Aufg. 1. Anmerk.) und ſchneiden ſich in der Zenitlinie. Ihre Winkel werden durch Bogen auf dem Horizont(kreiſe) gemeſſen. Der Südpunkt, ein Schnittpunkt des Meridians mit dem Horizonte, dient als Ausgangspunkt und die Bewegungsrichtung des Uhrzeigers dient als Richtung der Zählung. Die Lage eines Punktes am Himmel iſt demnach durch den Winkel ſeines Zenitkreiſes mit dem Meridian, ſein Azimut A, und ſeine Entfernung vom Horizont, ſeine Höhe h, beſtimmt. Höhe und Azimut ändern ſich mit der Breite φ und der Zeit t der Beobachtung; nur der Polarſtern P hat ſtets $A = 180^0$ und $h = \varphi$. **(Horizontal-Syſtem.)**

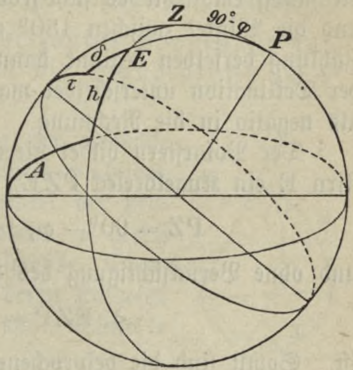


Fig. 62.

Die Verbindungslinie des Beobachtungsortes mit dem Polarſtern iſt die Himmelsachſe, und die Normalebene zu dieſer liefert den Himmelsäquator. Die Ebene durch die Himmelsachſe und einen Stern E beſtimmt ſeinen Deklinationskreis, die Entfernung des Sternes vom Äquator ſeine Abweichung oder Deklination δ und der Winkel des Deklinationskreiſes mit dem Meridian, gemeſſen auf dem Äquator vom Meridian aus im Sinne der ſcheinbaren täglichen Bewegung der Sonne, den Stundenwinkel τ des Sternes. **(Äquatorial-Syſtem.)**

In der Regel wird ſtatt τ die Zeit t angegeben, welche ſeit der Kulmination des Sternes verfloſſen iſt. Den 24 Stunden des Tages entſprechen 360⁰. Daher iſt $\boldsymbol{\tau = 15 \cdot t}$.

Der Stundenwinkel ändert ſich mit der Zeit, während δ nur von der Lage des Sternes abhängig iſt und deshalb in Deklinationstafeln gefunden werden kann. Das letztere gilt auch für die gerade Aufſteigung oder Rektaſzenſion α, d. h. für den Winkel des Deklinationskreiſes eines Sternes mit dem Deklinationskreiſe des Frühlingspunktes. Der Winkel α wird auf dem Äquator im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gemeſſen.

Der Stundenwinkel der Sonne, dividiert durch 15, heißt wahre Sonnenzeit (t), und der Stundenwinkel des Frühlingspunktes liefert entſprechend die Sternzeit (ϑ).

Es iſt ſtets

$$\tau = 15\vartheta - \alpha.$$

Azimut und Stundenwinkel werden von 0° bis 360° gezählt. Für die Rechnung empfiehlt es ſich jedoch, mit der Zählung nur bis 180° zu gehen und die Winkel zwiſchen 180° und 360° als negative zu behandeln. Die Zählung derſelben beginnt dann gleichfalls beim Meridian (Südpunkt). Bei der Deklination unterſcheidet man nördliche und ſüdliche und bringt die letztere als negativ in die Rechnung.

Der Polarſtern bildet hiernach mit dem Zenit des Ortes und dem Geſtirn E ein Kugeldreieck PZE, in welchem

$$PZ = 90^0 - \varphi, \quad PE = 90^0 - \delta, \quad ZE = 90^0 - h$$

und ohne Berückſichtigung des Vorzeichens

$$\sphericalangle EZP = 180^0 - A, \quad \sphericalangle EPZ = \tau$$

iſt. Somit ſind die beſprochenen Beſtimmungsſtücke durch die Gleichungen in Nr. 13 miteinander verbunden.

Aus der Fülle der nunmehr ausführbaren Aufgaben ſeien die folgenden gewählt:

Aufg. 4. An einem Tage, an dem die Deklination der Sonne δ beträgt, iſt am Orte N (φ) des Vormittags um t Uhr eine Straße ſchattenlos. Welche Richtung hat die Straße?

Aufl. Geſucht iſt das Azimut. Man kennt δ, φ und $\tau = -(12 - t) \cdot 15^0$, alſo zwei Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel. Koſinus-Satz!

Aufg. 5. Welche Breite hat ein Ort, an dem um t^h nachm. die Sonne in der Richtung A die Höhe h beſitzt?

Aufl. Geſucht iſt φ. Man kennt A, h und τ, alſo zwei Winkel und eine Gegenſeite. Analogien!

Aufg. 6. Wann hat am Orte N die Sonne in der Richtung A die Höhe h?

Aufl. Geſucht iſt t. Man kennt φ, A und h. Iſt δ gefunden, ſo liefert die Deklinationstafel das Datum.

Aufg. 7. Wann und wo geht in N die Sonne an einem Tage auf, an dem ſie die Deklination δ beſitzt, und wie lang iſt dieſer Tag?

Aufl. Man kennt φ und δ und weiß (Aufgang!), daß die Sonne im Horizont ſteht, alſo $ZE = 90^0$ iſt. Iſt τ berechnet, ſo liefert 2t die Länge des Tages.

Aufg. 8. Auf einem Schiffe wurde der Sonnenaufgang in der **Morgenweite** w $(= A + 90^0)$ beobachtet, während das Schiffschronometer t^h Hamburger Hafenzeit anzeigte und die Deklinationstafel δ lieferte. Wo befand ſich das Schiff?

Aufl. Man kennt $A = w - 90^0$, δ und $h = 0$. Iſt außer φ auch τ gefunden, ſo läßt ſich die Länge λ des Ortes einfach beſtimmen. Wieſo?

Aufg. 9. In dem Orte N ſei eine Horizontal-Sonnenuhr aufgeſtellt. Wie groß iſt der Winkel x, den die Stundenlinie um t^h mit dem Meridian bildet?

Aufl. Wird der Stab, der die Richtung der Erdachſe beſitzt und daher mit dem Meridian den Winkel φ bildet, von der Sonne aus projiziert, ſo iſt der Winkel der projizierenden Ebene mit der Ebene des Meridians τ gleich $t \cdot 15^0$. Meridian-, Projektions- und projizierende Ebene bilden alſo eine rechtwinklige dreiſeitige Ecke, deren Katheten gleich φ und x ſind. Da aber x dem bekannten Winkel τ gegenüberliegt, ſo folgt:

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{\operatorname{tg} x}{\sin\varphi}, \quad \text{und hieraus:} \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\tau \cdot \sin\varphi.$$

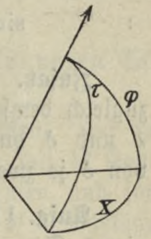


Fig. 63.

c) Sonne und Sterne.

Der Mittelpunkt der Sonne beſchreibt durch eine von der Bewegung der Himmelskugel unabhängige eigene Bewegung im Laufe des Jahres einen Hauptkreis auf der Himmelskugel, die Ekliptik, welcher den Himmelsäquator in zwei Punkten, dem Frühlings- und Herbſt-Äquinoktialpunkte, ſchneidet und mit ihm den Winkel $\varepsilon = 23^0\,27'$, die Schiefe der Ekliptik, bildet. Ein auf der Ebene der Ekliptik im Mittelpunkte der Himmelskugel errichtetes Lot trifft dieſe in zwei Punkten, den Polen der Ekliptik, und jede durch das Lot gelegte Ebene ſchneidet das Himmelsgewölbe in einem Hauptkreiſe, welcher Breitenkreis heißt. Die Stellung eines Sternes iſt bekannt, wenn man auf dem durch ihn gehenden Breitenkreiſe ſeine Entfernung von der Ekliptik, ſeine Breite β, und den (im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers gemeſſenen) Bogen der Ekliptik zwiſchen ſeinem Breitenkreiſe und dem Frühlingspunkte, ſeine Länge λ, kennt. (Ekliptiſches Syſtem.)

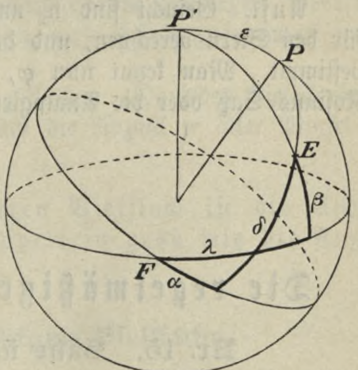


Fig. 64.

Der nördliche Pol P′ der Ekliptik bildet mit dem Polarſtern P und dem Stern E ein Kugeldreieck PP′E, in welchem $PP' = \varepsilon$, $PE = 90^0 - \delta$, $P'E = 90^0 - \beta$, $\sphericalangle\, PP'E = 90^0 - \lambda$ und $\sphericalangle\, P'PE = 90^0 + \alpha$ iſt. Somit ſind die Beſtimmungsſtücke des ekliptiſchen und des äquatorialen Syſtems ebenfalls durch die Gleichungen in Nr. 13 miteinander verbunden.

Aufg. 10. Aus der Länge λ die Abweichung δ und die gerade Aufſteigung α der Sonne zu berechnen.

Aufl. In dem rechtwinkligen Dreieck, deſſen Seiten die Bogen λ, δ und α ſind, kennt man die Hypotenuſe λ und den Winkel ε (= 23° 27′), welcher der Abweichung δ gegenüberliegt. Man erhält daher:

$$\sin\delta = \sin\varepsilon \sin\lambda \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \operatorname{ctg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta = \frac{\sin\lambda\cos\varepsilon}{\cos\delta}.$$

Zuſatz. Da δ die Größe 23° 27′ nicht überſteigen darf und α mit λ zugleich demſelben Quadranten angehört, ſo ſind δ und α durch λ und ebenſo λ und δ durch α eindeutig beſtimmt. Dagegen gehören zu jedem Werte von δ je zwei Werte von α und λ, die ſich zu 180° ergänzen.

Aufg. 11. Aus der Länge λ_1, der Breite β_1 und der Höhe h_1 eines Sternes, der Zeit t der Beobachtung und der geraden Aufſteigung α der Sonne die geographiſche Breite des Beobachtungsortes zu berechnen.

Aufl. Aus λ_1 und β_1 laſſen ſich α_1 und δ_1 für den Stern berechnen. Da der Stundenwinkel t_1 des Sternes gleich $\alpha - \alpha_1 + t$ iſt, ſo kennt man h_1, δ_1 und t_1. Zur Beſtimmung des Winkels φ können jetzt die Analogien benutzt oder es kann nach dem Zuſatz zu Nr. 13 a) verfahren werden.

Aufg. 12. An welcher Stelle des Himmels hat man zur Zeit t an einem Orte mit der geographiſchen Breite φ einen Stern mit der Länge λ_1 und der Breite β_1 aufzuſuchen, wenn die Sonne die Abweichung δ beſitzt?

Aufl. Geſucht ſind h_1 und A_1. Aus λ_1 und β_1 laſſen ſich α_1 und δ_1 für den Stern berechnen, und durch δ iſt die gerade Aufſteigung α der Sonne beſtimmt. Man kennt nun φ, δ_1 und t_1 (= $\alpha - \alpha_1 + t$!) und kann den Koſinus-Satz oder die Analogien benutzen.

Kapitel 4.

Die regelmäßigen Vielflache (Polyeder).

Nr. 15. Sätze über ein beliebiges Vielflach.

Wird ein prismatiſcher Raum durch zwei parallele Ebenen begrenzt, ſo entſteht ein Prisma. Ebenſo entſteht eine Pyramide, wenn eine körperliche Ecke durch eine Ebene, und ein Pyramidenſtumpf, wenn ſie durch zwei parallele Ebenen begrenzt wird. Die Grundflächen der Körper liegen in den begrenzenden Ebenen.

Gehen die n Schnittlinien der Seitenflächen nicht von einem Punkte aus, ohne ſämtlich parallel zu ſein, und ſind die Seitenflächen Parallelogramme, Trapeze oder auch Dreiecke, ſo heißt der Körper ein Körperſtumpf. Das gemeinſame Merkmal aller dieſer Körperformen beſteht darin, daß ſie nur von ebenen Flächen vollſtändig begrenzt werden.

Erklärung. Ein von ebenen Flächen vollſtändig begrenzter Körper wird Vielflach (Polyeder) genannt.

Zuſatz. Zur Behandlung kommen nur Vielflache mit konvexen Ecken. (Die Eulerſchen Polyeder.)

Die Oberfläche eines Vielflachs beſteht alſo aus Vielecken. Hat man aber ein beliebiges Netz von f' zuſammenhängenden Vielecken mit k' Kanten und e' Ecken, und nimmt man ein Vieleck weg, das n Kanten und ſomit $n-1$ Ecken mit den übrigen nicht gemein hat, ſo bleiben $f'-1$ Flächen, $k'-n$ Kanten und $e'-(n-1)$ Ecken übrig. Nun iſt

$$(f'-1)+[e'-(n-1)]-(k'-n)=f'+e'-k',$$

und daraus folgt, daß die Differenz $f'+e'-k'$ von der Anzahl der in dem Netze vorkommenden Vielecke unabhängig iſt, alſo auch für ein Vieleck dieſelbe bleibt. Dann iſt aber $f'=1$, $k'=e'$ alſo $\mathbf{f'+e'-k'=1}$.

Wird nun bei einem Vielflach, das f Flächen, e Ecken und k Kanten beſitzt, eine Fläche weggenommen, ſo wird dadurch weder die Anzahl der Kanten noch die der Ecken geändert. Das übrigbleibende Netz hat daher $f'=f-1$ Vielecke, e Ecken und k Kanten, und da $f'+e-k=1$ iſt, ſo folgt: $f+e-k=2$, d. h.

Lehrſatz 32. (Satz von **Euler**.) Auf einem konvexen Vielflach iſt die Anzahl der Begrenzungsflächen und Ecken zuſammen um 2 größer als die Anzahl der Kanten.

Jede Kante gehört zu zwei Begrenzungsflächen. Da jedes Vieleck ebenſoviel Winkel wie Seiten hat, ſo iſt hiernach die Anzahl w aller Winkel auf der Oberfläche gleich $2\,k$, d. h.

Lehrſatz 33. Auf einem konvexen Vielflach iſt die Anzahl der Winkel zwiſchen den Kanten doppelt ſo groß wie die Anzahl der Kanten.

Nr. 16. Die regelmäßigen Vielflache.

Erklärung. Ein Vielflach heißt regelmäßig, wenn ſeine Begrenzungsflächen kongruente regelmäßige Vielecke ſind und in gleicher Anzahl an jeder Ecke zuſammenſtoßen.

a) Nach Nr. 10 Lehrſ. 30 bleibt die Summe der Vieleckswinkel an einer Ecke des Vielflachs kleiner als 4 R, kann ſich alſo zuſammenſetzen aus höchſtens 5 Winkeln eines gleichſeitigen Dreiecks oder aus höchſtens 3 Winkeln eines 4ſeitigen oder aus höchſtens 3 Winkeln eines 5ſeitigen $\left(3 \cdot \frac{6}{5} = 3\frac{3}{5}!\right)$ regelmäßigen Vielecks. Bei einem regelmäßigen Vielflach kann alſo eine Ecke nur gebildet werden

1. aus 3 gleichſeitigen Dreiecken,
2. = 4 = = ,
3. = 5 = =
4. = 3 Quadraten,
5. = 3 regelmäßigen Fünfecken.

Daraus folgt:

Lehrſatz 34. Es ſind nur 5 regelmäßige Vielflache möglich.

b) Die 5 regelmäßigen Vielflache ſind leicht zu beſtimmen.

1. An einer Ecke ſtoßen 3 Dreiecke zuſammen.

Man hat $w = 3f$, $w = 3e$ und $w = 2k$. Wird dies für die Eulerſche Formel $f + e - k = 2$ benutzt, ſo folgt: $f + f - \frac{3}{2}f = 2$ oder

$\mathbf{f = 4}$ $(e = 4,\ k = 6)$: **Vierflach** (Tetraeder).

2. An einer Ecke ſtoßen 4 Dreiecke zuſammen.

Man hat $w = 3f$, $w = 4e$ und $w = 2k$, alſo $f + \frac{3}{4}f - \frac{3}{2}f = 2$, und hieraus:

$\mathbf{f = 8}$ $(e = 6,\ k = 12)$: **Achtflach** (Oktaeder).

3. An einer Ecke ſtoßen 5 Dreiecke zuſammen.

Man hat $w = 3f$, $w = 5e$ und $w = 2k$, alſo $f + \frac{3}{5}f - \frac{3}{2}f = 2$, und hieraus:

$\mathbf{f = 20}$ $(e = 12,\ k = 30)$: **Zwanzigflach** (Ikoſaeder).

4. An jeder Ecke ſtoßen 3 Quadrate zuſammen.

Man hat $w = 4f$, $w = 3e$ und $w = 2k$, alſo

$f + \frac{4}{3}f - 2f = 2$, und hieraus

$\mathbf{f = 6}$ $(e = 8,\ k = 12)$: **Würfel** (Hexaeder).

5. An jeder Ecke ſtoßen 3 Fünfecke zuſammen.

Man hat $w = 5f$, $w = 3e$ und $w = 2k$, alſo

$$f + \frac{5}{3}f - \frac{5}{2}f = 2,$$ und hieraus

$$\mathbf{f = 12}\ (e = 20,\ k = 30):$$ **Zwölfflach** (Dodekaeder).

c) Geht die Regelmäßigkeit eines Vielflachs nur ſo weit, daß alle Begrenzungsflächen n-ſeitige Vielecke ſind und an jeder Ecke m von ihnen zuſammenſtoßen, ſo iſt

$$w = n \cdot f,\ w = m \cdot e \text{ und } w = 2k,$$

alſo
$$f + \frac{n}{m}f - \frac{n}{2}f = 2,$$

und ſomit
$$m = \frac{2nf}{f \cdot (n-2) + 4},$$

worin m, f und n ganze poſitive Zahlen ſind.

Für $n = 3$ hat man nun $f = \frac{4m}{6 - m}$, und daher ſind die 3 Fälle $m = 3$, $\mathbf{f = 4}$, $m = 4$, $\mathbf{f = 8}$ und $m = 5$, $\mathbf{f = 20}$ möglich.

Iſt $n = 4$, ſo hat man $f = \frac{2m}{4 - m}$; es iſt alſo nur die Verbindung $m = 3$, $\mathbf{f = 6}$ möglich, da f nicht kleiner als 4 ſein darf.

Iſt ſchließlich $n = 5$, ſo hat man $f = \frac{4m}{10 - 3m}$ und ſomit nur die Verbindung $m = 3$, $\mathbf{f = 12}$.

Für $n = 6$ hätte man bereits $f = \frac{m}{3 - m}$, alſo einen unmöglichen Wert für f. Somit zeigt ſich, daß auch bei dem angegebenen geringeren Grad von Regelmäßigkeit nur 5 Vielflache möglich ſind.

Kapitel 5.

Oberfläche und Rauminhalt der Vielflache.

Nr. 17. Vergleichung der Inhalte prismatiſcher Körper. Das Cavalieriſche Prinzip.

a) Zwei Körper ſind kongruent, wenn ſie in allen Seiten und Winkeln übereinſtimmen und die gleichen Stücke in derſelben Richtung aufeinanderfolgen. Demnach ergeben ſich leicht die Sätze:

Lehrſatz 35. Ein Quader wird durch jede ſeiner Diagonalflächen in kongruente dreiſeitige Prismen zerlegt.

Lehrſatz 36. Stehen die Seitenflächen eines Parallelflachs ſenkrecht auf der Grundfläche, ſo zerlegt eine Diagonalfläche durch die Seitenkanten das Parallelflach in zwei kongruente dreiſeitige Prismen.

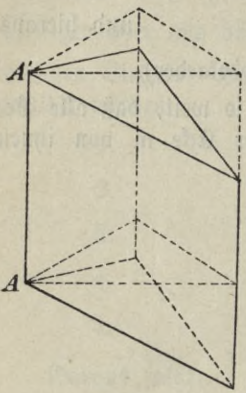


Fig. 65.

Legt man durch die Ecken A und A' der Kante AA' eines beliebigen dreiſeitigen Prismas die Normalebenen zu AA', ſo beſtimmen dieſe mit den Begrenzungsflächen des Prismas zwei kongruente Pyramiden. Führt man die entſprechende Zeichnung bei einem Parallelflach an den Enden einer Kante aus, durch welche die Diagonalfläche gelegt iſt, ſo ergibt ſich hiernach und nach Lehrſ. 36:

Lehrſatz 37. Ein Parallelflach wird durch jede ſeiner Diagonalflächen in zwei inhaltsgleiche dreiſeitige Prismen zerlegt.

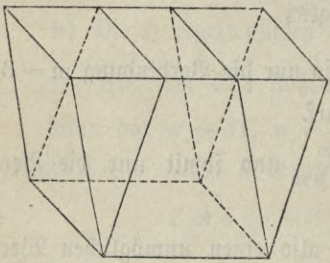


Fig. 66.

Zwei Parallelflache*) von gleichen Höhen können zwiſchen parallele Ebenen gelegt werden. Stehen beide über derſelben Grundfläche, ſo ſind zwei Fälle möglich:

a) Zwei Seitenflächen liegen in einer Ebene. Die nicht gemeinſchaftlichen dreiſeitigen Prismen ſind kongruent und demnach die beiden Körper inhaltsgleich.

b) Die Seitenflächen liegen in verſchiedenen Ebenen. Verlängert man in der Ebene der Endflächen zwei gegenüberliegende Seiten des einen und die ihnen nicht parallelen Seiten des anderen Parallelogramms und macht das dadurch entſtandene Parallelogramm zur Endfläche eines dritten über der gemeinſamen Grundfläche ſtehenden Parallelflachs, ſo iſt der Fall a) zweimal vorhanden und ſomit der dritte Körper ſowohl gleich dem erſten als auch gleich dem zweiten. Daraus folgt:

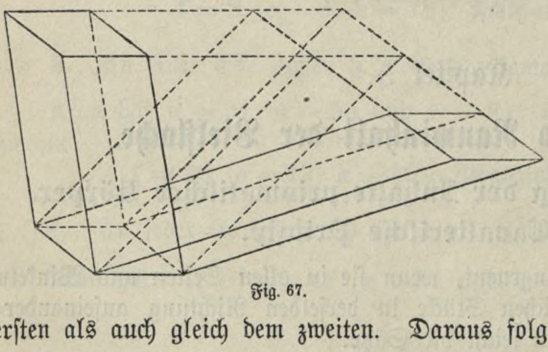


Fig. 67.

---

*) Die Beweiſe der Sätze 38.—40. ſind überflüſſig, wenn das Cavalieriſche Prinzip als Grundſatz vorangeſtellt wird.

Lehrſatz 38. Stehen zwei Parallelflache von gleichen Höhen auf derſelben oder auf kongruenten Grundflächen, ſo ſind ſie inhaltsgleich.

Sind die beiden Grundflächen beliebige Parallelogramme mit gleichen Grundlinien und Höhen, ſo kann hiernach der zweite Körper durch einen dritten erſetzt werden, der mit dem erſten in der zur Grundlinie gehörigen Seitenfläche übereinſtimmt. Sieht man dann dieſe Seitenflächen als Grundflächen an, ſo ſtehen beide Körper über kongruenten Grundflächen und haben gleiche Höhen; ſie ſind alſo inhaltsgleich. Somit iſt ein Parallelflach gleich einem Quader von gleicher Höhe und Grundfläche, wenn die beiden Grundflächen eine gleiche Seite beſitzen. Erſetzt man aber zwei Parallelflache mit gleichen Höhen, deren Grundflächen gleich ſind, ohne in einer Seite übereinzuſtimmen, durch Quader, ſo kann man dieſe ſo aufſtellen, daß ſie in einer Kante (KK′) zuſammenſtoßen und die beiden Seitenflächen an dieſer Kante in je einer Ebene liegen. Werden dann die beiden anderen Flächenpaare fortgeſetzt, bis ſie ſich ſchneiden, ſo entſtehen 3 Quader, welche die Diagonalebene durch die gemeinſchaftliche Kante nach Lehrſ. 35. in je zwei kongruente dreiſeitige Prismen zerlegt. Die aneinander geſtellten Quader ſind daher die Differenzen aus gleichgroßen Prismen und ſomit ſelber gleich. (Vgl. den Satz über Ergänzungsparallelogramme.) Daraus ergibt ſich:

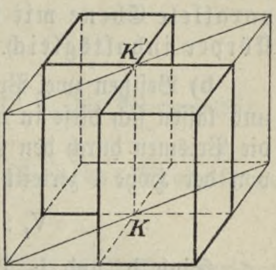


Fig. 68.

Lehrſatz 39. Parallelflache mit gleichen Grundflächen und Höhen haben gleichen Rauminhalt.

Folgerung. Der Inhalt eines Parallelflachs iſt gleich dem Inhalt eines Quaders von gleicher Grundfläche und Höhe.

Die Verbindung der Sätze 37. und 39. liefert

Lehrſatz 40. Dreiſeitige Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen ſind inhaltsgleich.

Da jedes n-ſeitige Prisma (entſprechend wie ein n-Eck in ein Dreieck) mit Benutzung dieſes Satzes in ein dreiſeitiges Prisma verwandelt werden kann, ſo folgt:

Folgerung. Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen ſind inhaltsgleich.

Liegen nun zwei Körper zwiſchen parallelen Ebenen mit dem Abſtand h, und teilt man h in n gleiche Teile, ſo begrenzen die Ebenen, welche durch die Teilpunkte parallel zu den erſten Ebenen gelegt werden, bei jedem Körper n Schichten. Setzt man jetzt voraus, daß in jeder Ebene die beiden Schnittflächen gleichgroß ſind und verwandelt ſie in Vielecke von hinreichend großer Seitenzahl, ſo kann bei beliebiger Geſtalt der Oberflächen n ſo groß gewählt werden, daß je zwei entſprechende Schichten von zwei paarweis gleichen Prismen eingeſchloſſen ſind. Der Unterſchied dieſer Prismen wird um ſo kleiner, je größer n wird, und verſchwindet ganz, wenn n ins Unendliche wächſt. Die Körper ſind dann aber in eine gleiche Anzahl von paarweis gleichen Schichten zerlegt und ſomit inhaltsgleich. Dies führt zu

Lehrſatz 41. **(Cavalieriſches Prinzip.)** Liegen zwei Körper zwiſchen parallelen Ebenen und bilden dieſe und jede ihnen parallele Ebene mit den Körpern gleiche Schnittflächen, ſo ſind die Körper inhaltsgleich.

b) Beſitzen zwei Prismen mit gleichen Grundflächen verſchiedene Höhen, und laſſen ſich dieſe in n_1, bzw. n_2 Stücke von der Länge l zerlegen, ſo können die Prismen durch den Grundflächen parallele Ebenen in n_1, bzw. n_2 Prismen von der Höhe l zerteilt werden, die ſämtlich gleichgroß ſind. Es iſt daher

$$V_1 : V_2 = n_1 : n_2 = n_1\, l : n_2\, l = h_1 : h_2.$$

Sind h_1 und h_2 inkommenſurabel und bleibt, wenn l, der q^{te} Teil von h_2, auf h_1 p-mal abgetragen worden iſt, ein Reſt, der kleiner als l iſt, ſo liegt der Wert des Verhältniſſes $h_1 : h_2$ zwiſchen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p+1}{q}$. Man hat alſo

1. $$\frac{p}{q} < \frac{h_1}{h_2} < \frac{p+1}{q}.$$

Die Ebenen, welche durch die Teilpunkte parallel zu den Grundflächen gelegt werden, teilen V_2 in q gleiche Prismen und zerlegen V_1 in p Prismen, welche mit den Teilen von V_2 gleichen Inhalt beſitzen, und in ein Reſtprisma, das kleiner als dieſe Teile iſt. Man hat demnach auch

2. $$\frac{p}{q} < \frac{V_1}{V_2} < \frac{p+1}{q}.$$

Die Werte der Verhältniſſe $h_1 : h_2$ und $V_1 : V_2$ liegen ſomit zwiſchen denſelben Grenzen $\frac{p}{q}$ und $\frac{p+1}{q}$, und da dieſe durch Vergrößerung von q einander beliebig nahe gebracht werden können, ſo ergibt ſich ſchließlich: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{V_1}{V_2}$, alſo

3. $$V_1 : V_2 = h_1 : h_2.$$

Die Gleichung $V_1 : V_2 = h_1 : h_2$ bleibt daher auch dann beſtehen, wenn h_1 und h_2 inkommenſurabel ſind, und daraus folgt:

Lehrſatz 42. Die Inhalte von Prismen mit gleichen Grundflächen verhalten ſich wie ihre Höhen.

Prismen mit gleichen Höhen können in Quader mit gleichen Höhen, und deren Grundflächen in Rechtecke mit der Seite a verwandelt werden.

Sind dann b_1 und b_2 die zweiten Seiten dieſer Rechtecke, ſo können die beiden Körper als Quader über $h \cdot a$ mit den Höhen b_1 und b_2 gelten. Es iſt dann

$$V_1 : V_2 = b_1 : b_2 = ab_1 : ab_2 = G_1 : G_2,$$ d. h.

Lehrſatz 43. Die Inhalte von Prismen mit gleichen Höhen verhalten ſich wie ihre Grundflächen.

Beſitzen ſchließlich die Prismen P_1 und P_2 die Grundflächen G_1 und G_2 und die Höhen h_1 und h_2, ſo ſtellt man ein drittes Prisma P_3 mit der Grundfläche G_1 und der Höhe h_2 her.

Es iſt dann $V_1 : V_3 = h_1 : h_2$
und $V_3 : V_2 = G_1 : G_2$,
alſo $V_1 : V_2 = h_1 G_1 : h_2 G_2$.

Iſt nun P_2 ein Würfel mit der Kante 1 und ſomit V_2 die Raumeinheit, ſo folgt hieraus: $V_1 = G_1 \cdot h_1$, d. h.

Lehrſatz 44. Der Inhalt eines Prismas iſt das Produkt aus ſeiner Grundfläche und Höhe.

Nr. 18. Inhalt und Oberfläche von Prismen und Pyramiden, Zylindern und Kegeln.

a) Bei einem **Würfel** mit der Kante a iſt

$$O = 6a^2, \qquad V = a^3.$$

b) Bei einem **Quader** mit den Kanten a, b und c iſt

$$O = 2(ab + ac + bc), \qquad V = a \cdot b \cdot c.$$

c) Ein **Parallelflach** habe die Kanten a, b und c, und die Kantenwinkel ſeien $\varphi_1 = (a, b)$, $\varphi_2 = (a, c)$ und $\varphi_3 = (b, c)$. Es iſt dann

$$O = 2(ab\sin\varphi_1 + ac\sin\varphi_2 + bc\sin\varphi_3).$$

Iſt nun φ der Neigungswinkel der Kante c gegen die Grundfläche, ſo hat man $h = c\sin\varphi$ und ſomit

$$V = abc\sin\varphi_1\sin\varphi.$$

Da aber φ in einer dreiſeitigen Ecke mit den Kanten a, b und c die Höhe auf die Seite (ab) iſt, ſo genügt der Sinus des Neigungswinkels der Bedingung $\sin\alpha = \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_2}$ oder $\sin\varphi = \sin\alpha\sin\varphi_2$. Nun iſt, wenn man $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2s$ ſetzt, nach Nr. 13, 4

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(s-\varphi_1)\sin(s-\varphi_2)}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin s\sin(s-\varphi_3)}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2},$$

alſo $$\sin\alpha = \frac{2}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}\sqrt{\sin s\sin(s-\varphi_1)\sin(s-\varphi_2)\sin(s-\varphi_3)}.$$

Daraus folgt ſchließlich:

$$V = 2abc\sqrt{\sin s \sin(s-\varphi_1)\sin(s-\varphi_2)\sin(s-\varphi_3)}.$$

d) Bei einem **geraden Zylinder** mit dem Halbmeſſer r der Grundfläche und der Höhe h iſt

$$M = 2\pi r h, \quad O = 2\pi r(r+h), \quad V = \pi r^2 h.$$

Zuſatz. Bildet die Achſe a eines **ſchiefen Kreiszylinders** mit der Grundfläche den Winkel φ, ſo iſt $h = a \sin\varphi$ und ſomit $V = \pi r^2 a \sin\varphi$. Der Mantel iſt dagegen mit elementaren Mitteln nicht berechenbar. Denn legt man durch die Endpunkte der Seitenlinie BB′ des zur Grundfläche ſenkrechten Achſenſchnitts zwei zu der Achſe lotrechte Ebenen, welche die kongruenten Abſchnitte ABC und A′B′C′ beſtimmen, ſo erkennt man zwar, daß der Mantel mit dem Mantel eines geraden Zylinders von der Höhe BB′ (a) über der durch die Ebene BC hergeſtellten Schnittfläche gleiche Größe beſitzt, allein der Mantel des geraden Zylinders ließe ſich nur berechnen, wenn der Umfang der Schnittfläche beſtimmt werden könnte. Da dieſe aber, wie hier bereits bemerkt werden mag, eine Ellipſe iſt und der Umfang einer Ellipſe mit den Hilfsmitteln der Schulmathematik nicht berechnet werden kann, ſo iſt mit dieſen bei einem ſchiefen Kreiszylinder die Beſtimmung des Mantels und der Oberfläche nicht durchführbar.

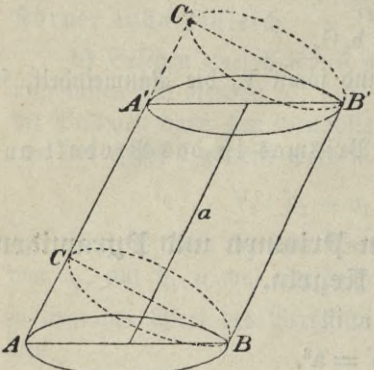


Fig. 69.

e) Ein dreiſeitiges Prisma kann in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegt werden. Eine von dieſen hat mit dem Prisma die Grundfläche und Höhe gemein, und da eine n-ſeitige Pyramide in n dreiſeitige mit derſelben Höhe zerlegt werden kann, ſo folgt für den Inhalt einer **Pyramide** mit der Grundfläche G und der Höhe h:

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h.$$

Iſt die Pyramide eine gerade mit regelmäßiger Grundfläche und den Kanten a und b; iſt ferner r der Halbmeſſer des umgeſchriebenen und ϱ der Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes für die n-ſeitige Grundfläche, ſo iſt

$$M = n \cdot \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

$$G = n \cdot \frac{a}{2}\varrho = n \cdot \frac{a^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{360^0}{2n} = n \cdot \varrho^2 \operatorname{tg}\frac{360^0}{2n} = n \cdot \frac{r^2}{2}\sin\frac{360^0}{n}.$$

Ferner iſt $h = \sqrt{b^2 - r^2}$ und auch $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \varrho^2}$.

f) Für den **geraden Kegel** mit der Höhe h, der Seitenlinie s und dem Halbmeſſer r der Grundfläche beſtehen die Formeln:

$$h^2 = s^2 - r^2, \quad \mathbf{M = \pi r s}, \quad O = \pi r (r + s) \quad \mathbf{V = \frac{1}{3} \pi r^2 h}.$$

Nr. 19. Inhalt und Oberfläche von abgeſtumpften Prismen, Pyramiden und Kegeln.

a) Der Inhalt eines **ſchief abgeſchnittenen dreiſeitigen Prismas** kann mit Benutzung der Formel für den Inhalt einer Pyramide berechnet werden, wenn die Länge ſeiner parallelen Kanten a, b und c und ſein zu dieſen ſenkrechter Querſchnitt Q bekannt iſt.

Es ſei c die kleinſte der drei Kanten; ihr Abſtand von der Ebene (ab) ſei mit h und der Abſtand der Kanten a und b voneinander ſei mit d bezeichnet. Werden durch die Endpunkte der Kante c die Normalebenen zu der Kante a gelegt, ſo zerfällt das ſchief abgeſchnittene Prisma in ein gerades Prisma mit dem Inhalt $Q \cdot c$ oder $\frac{1}{2} d \cdot h \cdot c$ und in zwei Pyramiden mit der Höhe h, deren Grundflächen zuſammen gleich $\frac{a+b}{2} \cdot d - c \cdot d$ ſind. Man erhält daher für den Inhalt V des ganzen Körpers:

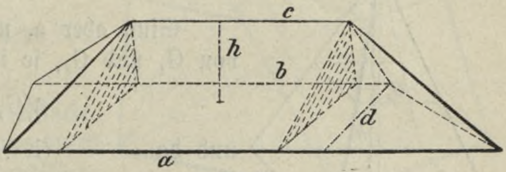


Fig. 70.

$$V = \frac{1}{2} dhc + \frac{1}{3} h \left(\frac{a+b-2c}{2}\right) \cdot d = \frac{dh}{2} \cdot \frac{a+b+c}{3}, \text{ d. h.}$$

$$\mathbf{V = Q \cdot \frac{a+b+c}{3}}.$$

b) Bei einem **dachförmigen Körper** iſt $b = a$, alſo $\mathbf{V = Q \frac{2a+c}{3}}$.

c) Ein **Obelisk** mit der Höhe h, deſſen Grund- und Deckfläche Rechtecke ſind, kann in zwei dachförmige Körper über den Grundflächen $a \cdot b$ und $a' \cdot b'$ zerlegt werden. Man hat daher für ſeinen Rauminhalt:

$$V = \frac{b \cdot h}{2} \cdot \frac{2a + a'}{3} + \frac{b'h}{2} \cdot \frac{2a' + a}{3} = \frac{h}{6} [ab + a'b' + (a + a')(b + b')].$$

Nun iſt $\frac{a+a'}{2}\cdot\frac{b+b'}{2}$ der Inhalt des Rechtecks, in welchem eine der Grundfläche parallele Ebene den Körper in der Höhe $\frac{h}{2}$ ſchneidet, d. h. der **Mittelfläche M** des Körpers, und ſomit iſt, wenn $a\cdot b$ mit G und $a'\cdot b'$ mit G' bezeichnet wird,

$$\mathbf{V = \frac{h}{6}(G + G' + 4M).}$$

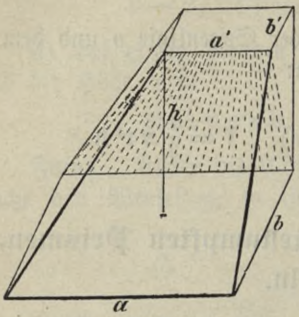


Fig. 71.

d) Ergänzt man einen **Pyramidenſtumpf** mit der Höhe h und den parallelen Flächen G_1 und G_2 zu einer Pyramide und bezeichnet die Höhe der aufgeſetzten Pyramide mit x, ſo iſt zunächſt

$$V = G_1\frac{h+x}{3} - G_2\frac{x}{3}.$$

Sind aber a_1 und a_2 zwei entſprechende Seiten von G_1 und G_2, ſo iſt

$$\sqrt{G_1} : \sqrt{G_2} = a_1 : a_2,$$

und da $(h+x) : x = a_1 : a_2$

iſt, ſo folgt: $(h+x) : x = \sqrt{G_1} : \sqrt{G_2},$

und hieraus: $h : x = \left(\sqrt{G_1} - \sqrt{G_2}\right) : \sqrt{G_2}.$

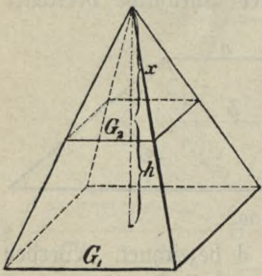


Fig. 72.

Wird dies bei dem Ausdruck für V benutzt, ſo ergibt ſich für den Inhalt des Pyramidenſtumpfs:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}h\left(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1\cdot G_2}\right).}$$

e) Bei einem **Kegelſtumpf** iſt $G_1 = \pi r_1^2$, $G_2 = \pi r_2^2$ und daher

$$\mathbf{V = \frac{\pi}{3}h\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1\cdot r_2\right).}$$

Iſt s' die Seitenlinie des aufgeſetzten Kegels, ſo hat man:

$$(s + s') : s' = r_1 : r_2,$$

alſo: $s : s' = (r_1 - r_2) : r_2$

oder $s' = \frac{r_2 s}{r_1 - r_2}.$

Man erhält daher für den Mantel M des Kegelſtumpfs, wenn dieſer ein gerader iſt,

$$M = \pi r_1(s + s') - \pi r_2 s' = \pi\left(\frac{r_1^2 s}{r_1 - r_2} - \frac{r_2^2 s}{r_1 - r_2}\right),$$

und hieraus folgt: $\mathbf{M = \pi s\,(r_1 + r_2).}$

f) Die Formeln für die Inhalte der beiden letzten Körper können noch auf einem zweiten Wege abgeleitet werden.

Bei einem Körperſtumpf mit der Höhe h ſei die Grundfläche G_1 ein n_1-Eck und die Endfläche G_2 ein n_2-Eck. Zerlegt man bei den Seitenflächen die vorkommenden Vierecke durch Diagonalen in Dreiecke, ſo werden die Seitenflächen von $n_1 + n_2$ Dreiecken gebildet. Legt man durch die Seiten dieſer Dreiecke, durch die Kanten der Grund- und Endfläche und einen Punkt P im Innern des Körpers Ebenen, ſo entſtehen aus dem Körper

1. eine n_1-ſeitige Pyramide über der Grundfläche;
2. eine n_2-ſeitige Pyramide über der Endfläche;
3. $n_1 + n_2$ dreiſeitige Pyramiden über den Seitenflächen.

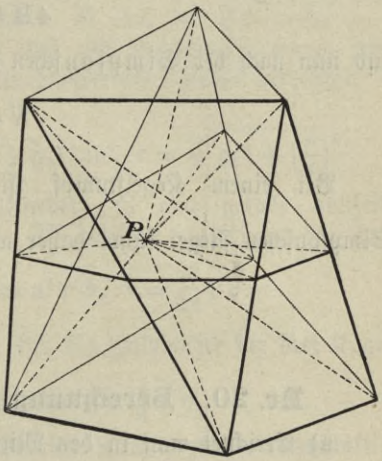


Fig. 73.

Liegt nun P auf der **Mittelfläche**, d. h. auf dem Vieleck, in welchem eine durch die Mitte von h parallel zu der Grundfläche gelegte Ebene den Körper ſchneidet, ſo iſt der Inhalt der beiden erſten Pyramiden gleich $\frac{h}{6}(G_1 + G_2)$. Jede der Pyramiden über den Seitenflächen wird durch die Mittelfläche in eine 4- und eine 3-ſeitige Pyramide zerlegt, deren Grundflächen im Verhältnis 3 : 1 ſtehen. Für die dreiſeitigen Pyramiden können die zugehörigen Dreiecke der Mittelfläche als Grundflächen gelten; ſie haben dann die Höhe $\frac{h}{2}$ und als Geſamtinhalt $\frac{Mh}{6}$. Demnach iſt der Inhalt des ganzen Körpers:

$$\frac{h}{6}(G_1 + G_2) + \frac{h}{6}M + \frac{3h}{6}M \text{ oder } \frac{h}{6}(G_1 + G_2 + 4M).$$

Daraus folgt:

Lehrſatz 45. (Newton-Simpſonſche Regel.) Bei einem Körperſtumpf mit der Höhe h, der Grundfläche G_1, der Endfläche G_2 und der Mittelfläche M iſt

$$\mathbf{V = \frac{h}{6}(G_1 + G_2 + 4M).}$$

Bei einem Pyramidenſtumpf iſt die Mittelfläche den beiden parallelen Flächen ähnlich. Sind daher a_1, a_2 und a_m drei entſprechende Seiten, ſo iſt $a_m = \frac{a_1 + a_2}{2}$, alſo

$$G_1 : M = a_1^2 : \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

$$G_2 : M = a_2^2 : \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2,$$

und hiernach

$$(a_1 + a_2)\sqrt{M} = \frac{a_1 + a_2}{2}\left(\sqrt{G_1} + \sqrt{G_2}\right).$$

Daraus folgt:

$$4M = G_1 + G_2 + 2\sqrt{G_1 \cdot G_2},$$

und nun nach der *Simpſonſchen* Regel:

$$V = \frac{h}{3}\left(G_1 + G_2 + \sqrt{G_1 \cdot G_2}\right).$$

Bei einem Kegelſtumpf iſt $M = \pi\left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right)^2$. Die Anwendung der Simpſonſchen Regel führt daher auf $V = \frac{h}{6}\left(\pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi (r_1 + r_2)^2\right)$.

$$= \pi \frac{h}{3}\left(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \cdot r_2\right).$$

Nr. 20. Berechnung der regelmäßigen Vielflache.

a) Errichtet man in den Mittelpunkten der eingeſchriebenen Kreiſe zweier benachbarten Begrenzungsflächen eines regelmäßigen Vielflachs Lote, ſo liegen dieſe in der Normalebene, welche zu der Mitte der gemeinſchaftlichen Kante gehört, und ſchneiden ſich in einem Punkte, der mit M bezeichnet werden mag (ſ. Nr. 6b). In gleicher Weiſe trifft ein drittes Lot, das auf einer weiteren, der erſten benachbarten Begrenzungsfläche in dem Mittelpunkt des eingeſchriebenen Kreiſes errichtet wird, das erſte Lot in einem Punkte M′. Da aber die Vierecke, welche bei dieſen Zeichnungen in den beiden Normalebenen entſtehen, in zwei Seiten und drei entſprechend liegenden Winkeln übereinſtimmen, alſo kongruent ſind, ſo fällt M′ mit M zuſammen. Ebenſo zeigt ſich, daß die Lote in den Mittelpunkten auf ſämtlichen Begrenzungsflächen durch M gehen und einander gleich ſind, *daß alſo das Vielflach eine eingeſchriebene Kugel* beſitzt.

Die Verbindungslinien des Punktes M mit den Kantenmitten ſind einander gleich (rechtwinklige Dreiecke mit gleichen Katheten!) und ſtehen auf den Kanten ſenkrecht (Normalebene!); M iſt daher auch der Mittelpunkt einer Kugel, welche die Kanten in ihren Mitten berührt. Mit Benutzung dieſer Verbindungslinien ergibt ſich aber leicht, daß ſchließlich M auch von den Ecken des Vielflachs gleichweit entfernt und der Mittelpunkt einer umgeſchriebenen Kugel iſt. Hieraus folgt:

Lehrſatz 46. *Jedes regelmäßige Vielflach beſitzt drei Kugeln mit demſelben Mittelpunkt. Die eine von ihnen berührt alle*

Flächen in ihren Mittelpunkten, die andere berührt ſämtliche Kanten in ihren Mitten und die dritte geht durch alle Ecken des Vielflachs.

Iſt ϱ der Halbmeſſer der eingeſchriebenen Kugel, ſo läßt ſich das Vielflach in Pyramiden mit der Höhe ϱ zerlegen und dann die Gleichung $V = \frac{1}{3} O \varrho$ bequem ableiten. Durch ϱ und den Halbmeſſer ϱ_a des Kreiſes, der einer Begrenzungsfläche eingeſchrieben werden kann, iſt aber der Halbmeſſer ϱ_k der die Kanten berührenden Kugel beſtimmt, und mit Benutzung von ϱ_k und a (Kante!) läßt ſich der Halbmeſſer r der umgeſchriebenen Kugel berechnen. Es ergibt ſich:

Zuſatz. Es iſt $\varrho = \frac{3V}{O}$, $\varrho_k = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_a^2}$ und $r = \sqrt{\varrho_k^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

b) Das regelmäßige **Vierflach** (Tetraeder) iſt eine gerade dreiſeitige Pyramide, deren Kanten gleichgroß ſind. Iſt daher a die Länge der Kante, ſo hat man

$$G = \frac{a^2}{4}\sqrt{3},\ h = \frac{a}{3}\sqrt{6},\ O = a^2\sqrt{3},\ V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$$

Ferner ergibt ſich, da $\varrho_a = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ iſt, für die Halbmeſſer der drei Kugeln:

$$\varrho = \frac{a}{12}\sqrt{6},\ \varrho_k = \frac{a}{4}\sqrt{2} \text{ und } r = \frac{a}{4}\sqrt{6}.$$

Die Höhe des Tetraeders iſt gemeinſchaftliche Kathete zweier rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenuſen a und $\frac{a}{2}\sqrt{3}$. Das erſte dieſer Dreiecke hat als zweite Kathete $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ und enthält den Neigungswinkel ψ einer Kante gegen eine Fläche. Das zweite dagegen hat als zweite Kathete $\frac{a}{6}\sqrt{3}$ und enthält den Neigungswinkel φ zweier Flächen. Man hat demnach:

$$\cos\varphi = \frac{a}{6}\sqrt{3} : \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}, \quad \text{alſo } \varphi = 70^0\ 31,7',$$

$$\cos\psi = \frac{a}{3}\sqrt{3} : a \quad = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \text{ alſo } \psi = 54^0\ 44,1'.$$

c) Das regelmäßige **Sechsflach** mit der Kante a iſt ein Würfel mit der Oberfläche $O = 6a^2$ und dem Rauminhalt $V = a^3$. Die drei Kugeln beſitzen die Halbmeſſer $\varrho = \frac{a}{2}$, $\varrho_k = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und $r = \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

d) Das regelmäßige **Achtflach** mit der Kante a iſt eine Doppelpyramide über der Grundfläche a^2. Bei jeder der Pyramiden iſt

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2},$$

und ſomit hat man

$$O = 2a^2\sqrt{3},\ V = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{a}{6}\sqrt{2} = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}.$$

Ferner ergibt ſich für die Halbmeſſer der drei Kugeln:

$$\varrho = \frac{a}{6}\sqrt{6}, \quad \varrho_k = \frac{a}{2} \text{ und } r = \frac{a}{2}\sqrt{2}.$$

Der Neigungswinkel φ zweier Flächen iſt doppelt ſo groß wie der Winkel φ_1, den eine von ihnen mit der gemeinſchaftlichen quadratiſchen Grundfläche bildet, und da

$$\cos \varphi_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}, \quad \text{alſo } \varphi_1 = 54^0\,44',1$$

iſt, ſo folgt: $\varphi = 109^0\;28,2'$.

e) Das regelmäßige **Zwölfflach** wird von 12 Fünfecken begrenzt, und da der Inhalt eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seite a gleich $5 \cdot \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} 36^0$ oder $5 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ *) iſt, ſo hat man

$$O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} = 20{,}65\,a^2.$$

Zur Beſtimmung des Rauminhalts iſt eine Zerlegung des Körpers erforderlich. Zieht man aber in zwei Fünfecken mit der gemeinſamen Kante AB die dieſer Kante gegenüberliegenden Diagonalen und in den anderen Fünfecken, die in A und B anſtoßen, die benachbarten Diagonalen, ſo entſteht ein Quadrat, und da dieſe Zeichnung 6 mal ſo wiederholt werden kann, daß je zwei dieſer Quadrate aufeinander ſenkrecht ſtehen, ſo wird dadurch der Körper in einen Würfel und 6 untereinander kongruente dachförmige Körper zerlegt. Die Kante des Würfels iſt die Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks mit der Seite a, alſo gleich $2a \cos 36^0$, und ſomit der Rauminhalt des Würfels

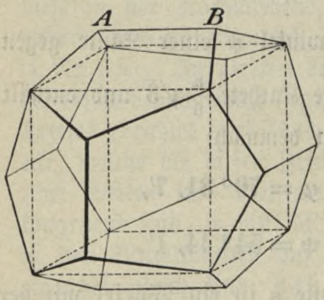


Fig. 74.

---

*) Sind a_5 und a_{10} die Seiten eines regelmäßigen Fünfecks, bzw. Zehnecks in einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer 1, ſo iſt $a_{10}{}^2 = 2(1 - \varrho_5)$ oder $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = 2(1-\varrho_5)$, und hieraus folgt: $\varrho_5 = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$. Da aber $\left(\frac{1}{2}a_5\right)^2 = 1 - \varrho_5{}^2$ iſt, ſo ergibt ſich: $a_5 = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$. Somit iſt

$$\sin 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \quad \cos 36^0 = \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right) \text{ und } \operatorname{ctg} 36^0 = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}.$$

1. $$V_1 = 8\,a^3 \cos^3 36^0.$$

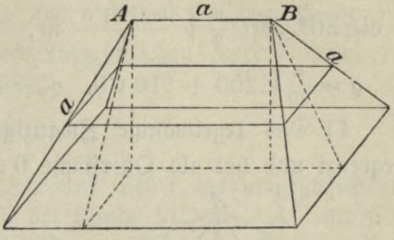


Fig. 75.

Die Höhe des dachförmigen Körpers iſt Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuſe $a \sin 36^0$ und der zweiten Kathete $\frac{2\,a \cos 36^0 - a}{2}$; es iſt daher

$$h^2 = a^2 \sin^2 36^0 - \frac{a^2}{4}(2\cos 36^0 - 1)^2$$
$$= \frac{a^2}{4}(4\sin^2 36^0 - 4\cos^2 36^0 + 4\cos 36^0 - 1),$$

alſo $$4\,h^2 = a^2[4(\sin^2 36^0 - \cos^2 36^0) - 4(1 - \cos 36^0) + 3],$$
$$= a^2(3 - 4\sin 18^0 - 8\sin^2 18^0).$$

Da aber $\sin 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ iſt*), ſo folgt:

$$4\,h^2 = a^2\left[3 - \sqrt{5} + 1 - \frac{1}{2}(6 - 2\sqrt{5})\right],$$
$$= a^2,$$

und ſomit: $$h = \frac{1}{2}\,a.$$

Die Mittelfläche des dachförmigen Körpers iſt ein Rechteck mit den Seiten $a \cos 36^0$ und $\frac{1}{2}(2\,a \cos 36^0 + a)$, ſeine Grundfläche iſt $4\,a^2 \cos^2 36^0$ und ſeine Endfläche iſt gleich 0. Sein Inhalt V_2 iſt daher nach der Simpſonſchen Regel gleich $\frac{a}{12}[4\,a^2\cos^2 36^0 + 2\,a \cos 36^0 (2\,a \cos 36^0 + a)]$, und daraus folgt:

$$V_2 = \frac{a^3}{6}(4\cos^2 36^0 + \cos 36^0).$$

Demnach iſt der Inhalt des ganzen Zwölfflachs

$$V = V_1 + 6\,V_2 = a^3(8\cos^3 36^0 + 4\cos^2 36^0 + \cos 36^0).$$

Da aber $\cos 36^0 = 1 - 2\sin^2 18^0 = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + 1)$ iſt, ſo ergibt ſich hieraus:

$$V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}) = \mathbf{7{,}663\,a^3}.$$

Der Neigungswinkel φ zweier benachbarten Flächen iſt jetzt leicht zu beſtimmen. Es iſt

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{a\cos 36^0}{h} = \frac{2\,a \cos 36^0}{a},$$

und daraus ergibt ſich: $\operatorname{tg}\varphi = -2$, alſo $\boldsymbol{\varphi = 116^0\,33{,}9'}$.

---

*) Es iſt $\sin 18^0 = \frac{\frac{1}{2}a_{10}}{r}$ und $a_{10} = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$.

Für die Halbmeſſer der drei Kugeln erhält man, da ϱ_a gleich $\frac{a}{2}\,\mathrm{ctg}\,36^0$ oder $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ iſt,

$$\varrho = \frac{a}{20}\sqrt{250+110\sqrt{5}},\quad \varrho_k = \frac{a}{4}(3+\sqrt{5})\ \text{und}\ r = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}.$$

f) Das regelmäßige **Zwanzigflach** iſt von 20 gleichſeitigen Dreiecken begrenzt und hat als Oberfläche $\mathbf{O = 5a^2\sqrt{3}}$.

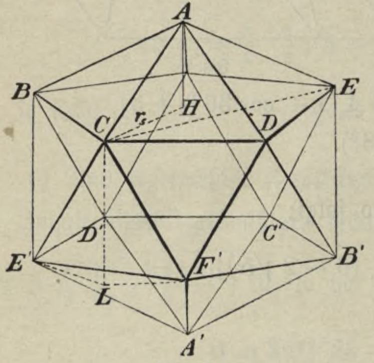


Fig. 76.

Legt man durch die 5 Kanten, die in den Begrenzungsflächen der Ecke A, bzw. A' gegenüberliegen, die durch ſie beſtimmten Ebenen, ſo wird der Körper in zwei 5-ſeitige Pyramiden ABCDEF und A'B'C'D'E'F' und in einen Körperſtumpf mit 10 dreiſeitigen Seitenflächen zerlegt. Die Grundflächen der drei Teile ſind kongruente regelmäßige 5-Ecke mit der Seite a und haben den Inhalt

$$G_1 = G_2 = \frac{5a^2}{4}\,\mathrm{ctg}\,36^0 = 1{,}7205\,a^2.$$

Die Mittelfläche des Körperſtumpfs iſt ein regelmäßiges 10-Eck mit der Seite $\frac{a}{2}$, und daraus folgt:

$$4M = \frac{5a^2}{2}\,\mathrm{ctg}\,18^0 = 7{,}6942\,a^2.$$

Die Höhe h_1 der Pyramiden bildet mit a und dem Halbmeſſer r des dem 5-Eck umgeſchriebenen Kreiſes ein rechtwinkliges Dreieck; daher iſt $h_1{}^2 = a^2 - r^2 = a^2 - (0{,}8506\,a)^2$ und ſomit $h_1 = 0{,}5257\,a$. Zeichnet man ferner die Höhe des Körperſtumpfs durch das Lot CL, ſo liegt L auf dem Kreiſe um das 5-Eck B'C'D'E'F', und daher iſt LE' eine Seite des eingeſchriebenen Zehnecks, alſo gleich 0,5257 a. Demnach iſt

$$h_2 = \sqrt{a^2 - 0{,}5257^2 a^2} = 0{,}8506\,a.$$

Somit iſt der Rauminhalt der beiden Pyramiden

$$V_1 = 0{,}6016\,a^3$$

und des Körperſtumpfs $V_2 = 1{,}5785\,a^3$,

alſo der Inhalt des Zwanzigflachs $\mathbf{V = 2{,}18\,a^3}$.

Zeichnet man die Diagonale CE und die Ebene ACE, ſo entſteht eine dreiſeitige Ecke mit den Seiten 60°, 60° und 108° (CE iſt auch Diagonale des Fünfecks ACF'B'E!). In dieſer Ecke liegt der Neigungswinkel φ der Seite 108° (CAE) gegenüber. Nach dem Koſinus-Satz iſt aber

$$\cos 108^0 = \cos^2 60^0 + \sin^2 60^0 \cos\varphi,$$

und hieraus ergibt ſich: $\mathbf{\varphi = 138^0\,11{,}5'}$.

Ein zweites Verfahren zur Berechnung des Rauminhalts ſtützt ſich auf die Formel $V = \frac{1}{3} O \varrho$. Die Halbmeſſer ϱ und r bilden mit dem Halbmeſſer des Kreiſes, der einem Begrenzungsdreieck umgeſchrieben werden kann, ein rechtwinkliges Dreieck, und daher iſt zunächſt

$$1. \qquad r^2 = \varrho^2 + \left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)^2 = \varrho^2 + \frac{a^2}{3}.$$

Da aber AA′ ein Durchmeſſer und AC eine Sehne der umgeſchriebenen Kugel iſt und AC mit AH, der Projektion der Kante AC auf AA′, und CH, dem Halbmeſſer r_5 des dem Fünfeck BCDEF umgeſchriebenen Kreiſes, einem rechtwinkligen Dreieck angehört, ſo hat man

$$a^2 = 2r \cdot AH = 2r\sqrt{a^2 - r_5{}^2} = 2r\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{20}\left(10 + 2\sqrt{5}\right)},$$

und hieraus folgt:

$$2. \qquad r = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Somit iſt $\qquad \varrho^2 = \frac{a^2}{16}\left(10 + 2\sqrt{5}\right) - \frac{a^2}{3}$, alſo

$$3. \qquad \varrho = \frac{a}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}}.$$

Setzt man dieſen Ausdruck mit $O = 5a^2\sqrt{3}$ zugleich in die Formel $V = \frac{1}{3} O \varrho$ ein, ſo erhält man:

$$V = \frac{1}{3} 5a^2\sqrt{3} \cdot \frac{a}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \frac{5a^3}{12}\sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \text{ oder:}$$

$$4. \qquad V = \frac{5a^3}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right).$$

Ferner folgt aus der Gleichung 3, da ϱ_a gleich $\frac{a}{6}\sqrt{3}$ iſt,

$$\varrho_k{}^2 = \frac{a^2}{144}\left(42 + 18\sqrt{5}\right) + \frac{a^2}{12}$$

$$= \frac{a^2}{144}\left(54 + 18\sqrt{5}\right) = \frac{a^2}{16}\left(6 + 2\sqrt{5}\right) = \frac{a^2}{16}\left(1 + \sqrt{5}\right)^2,$$

und ſomit:

$$5. \qquad \varrho_k = \frac{a}{4}\left(1 + \sqrt{5}\right).$$

Kapitel 6.

Die Kugel.

Nr. 21. Kreiſe auf der Kugel.

Wird ein Halbkreis um ſeinen Durchmeſſer gedreht, ſo beſchreibt er eine **Kugelfläche.** Der Mittelpunkt des gedrehten Kreiſes iſt zugleich der Mittelpunkt der Kugel, und die Verbindungslinie des Mittelpunktes mit einem Punkte der Kugelfläche wird auch hier Radius genannt.

a) Aus dieſer Entſtehungsweiſe der Kugelfläche folgt, daß jeder Normalſchnitt der Achſe ein Kreis iſt. Da aber jeder Durchmeſſer als Drehungsachſe gelten kann, ſo ergibt ſich:

Lehrſatz 47. Eine Kugelfläche wird durch jede ſchneidende Ebene in einem Kreiſe geſchnitten.

Iſt ϱ der Halbmeſſer eines Schnittkreiſes und d der Abſtand ſeiner Fläche von dem Mittelpunkte der Kugel, ſo beſteht die Gleichung: $\varrho^2 = r^2 - d^2$, und aus dieſer folgt, daß ein Schnittkreis um ſo größer iſt, je näher ſeine Fläche dem Mittelpunkte der Kugel liegt. Geht die Ebene durch den Mittelpunkt, ſo iſt $d = 0$ und ϱ erreicht ſeine größte Länge.

Erklärung. Geht die Ebene eines Schnittkreiſes durch den Mittelpunkt der Kugel, ſo heißt der Kreis **Hauptkreis** (Großkreis). Geht ſie nicht durch den Mittelpunkt, ſo wird der Kreis als **Nebenkreis** bezeichnet.

Folgerung. Alle Hauptkreiſe einer Kugel ſind einander gleich, und auch alle Nebenkreiſe, deren Ebenen von dem Mittelpunkte gleichweit entfernt ſind, ſind gleich groß.

Die Schnittlinie der Ebenen zweier Hauptkreiſe iſt ein Durchmeſſer. Bezeichnet man die Endpunkte eines Durchmeſſers als Gegenpunkte der Kugel, ſo hat man hiernach den Satz:

Lehrſatz 48. Zwei Hauptkreiſe einer Kugelfläche ſchneiden ſich in Gegenpunkten der Kugel und halbieren ſich in dieſen.

Zuſatz 1. Durch zwei Gegenpunkte einer Kugel laſſen ſich unbegrenzt viele Hauptkreiſe legen. (Meridiane auf der Erd- und Himmelskugel).

Zuſatz 2. Durch zwei Punkte der Kugelfläche, die nicht Gegenpunkte ſind, läßt ſich nur ein Hauptkreis legen.

b) Legt man durch zwei Punkte A und B einer Kugelfläche, die nicht Gegenpunkte ſind, den Hauptkreis und irgendeinen Nebenkreis, ſo iſt AB eine gemeinſchaftliche Sehne der beiden Kreiſe. Da der Halbmeſſer des Nebenkreiſes r′ kleiner als der Halbmeſſer r des Hauptkreiſes iſt, ſo gehört zu der Sehne AB in dieſem ein kleinerer Mittelpunktswinkel als in dem Nebenkreiſe. Zeichnet man daher die Dreiecke in einer Ebene ſo, daß ihre Mittelpunkte M und M′ auf derſelben Seite der gemeinſamen Sehne AB liegen, und zieht AC bzw. AC′, ſo erkennt man leicht, daß der Winkel ACM größer als der Winkel AC′M und folglich die Höhe DC des Kreisabſchnitts ACB kleiner als die Höhe DC′ des Kreisabſchnitts AC′B iſt. Der Punkt C liegt alſo vor C′, und daher iſt der Bogen ACB kleiner als der Bogen AC′B. Hieraus ergibt ſich der Satz:

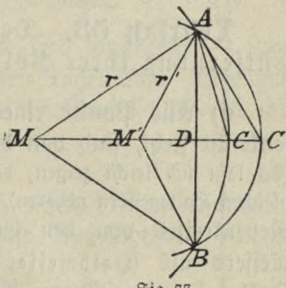


Fig. 77.

Lehrſatz 49. Der kleinere Bogen des Hauptkreiſes, der durch zwei beliebige Punkte einer Kugelfläche geht, iſt kleiner als der Bogen irgendeines durch die Punkte gelegten Nebenkreiſes.

Bezeichnet man den kleineren Bogen des Hauptkreiſes zwiſchen zwei Punkten der Kugelfläche als ihre **Entfernung auf der Kugel**, ſo folgt hieraus, daß die Entfernung zweier Punkte der Kugelfläche durch den kleineren Bogen des zu ihnen gehörigen Hauptkreiſes gemeſſen wird (Geodätiſche Entfernung zweier Punkte der Erde!)

c) **Erklärung.** Die Endpunkte des Durchmeſſers, der auf der Ebene eines Hauptkreiſes ſenkrecht ſteht, heißen **Pole** dieſes Kreiſes.

Da die Normalebene eines Durchmeſſers, die durch ſeine Mitte geht, ſämtliche Halbkreiſe (Meridiane) halbiert, deren Ebenen durch den Durchmeſſer gehen, ſo ergibt ſich:

Lehrſatz 50. Alle Punkte eines Hauptkreiſes ſind von jedem ſeiner Pole gleichweit entfernt.

Bezeichnet man zwei Hauptkreiſe als ſenkrecht aufeinander, wenn ihre Ebenen aufeinander ſenkrecht ſtehen, und beachtet man, daß auf der Ebene des Hauptkreiſes, die auf einem Durchmeſſer ſenkrecht ſteht, alle durch dieſen Durchmeſſer gehenden Ebenen ſenkrecht ſtehen, ſo gelangt man zu dem Satze:

Lehrſatz 51. Geht ein Hauptkreis durch einen Pol eines anderen Hauptkreiſes, ſo ſteht er auf dieſem ſenkrecht

Die Meridiane auf der Erde ſtehen ſämtlich auf dem Äquator ſenkrecht. Ebenſo ſtehen die Kreiſe durch Zenit und Nadir eines Ortes auf dem Horizont, und die Kreiſe, deren Ebenen durch die Himmelsachſe gehen, auf dem Himmelsäquator ſenkrecht. S. Nr. 14b) und c).

Der Lehrſatz 51 kann umgekehrt werden.

Lehrſatz 52. Stehen zwei Hauptkreiſe aufeinander ſenkrecht, ſo geht jeder von ihnen durch die Pole des anderen.

Folgerung. Stehen zwei Hauptkreiſe auf einem dritten ſenkrecht, ſo ſchneiden ſie ſich in ſeinen Polen. (Äquator und Meridiane).

Die Pole zweier Hauptkreiſe liegen auf dem Hauptkreiſe, auf dem die erſten beiden ſenkrecht ſtehen. Wird daher der Winkel zweier Hauptkreiſe durch den zugehörigen Bogen dieſes Kreiſes gemeſſen, ſo folgt:

Lehrſatz 53. Der (kleinere) Winkel zweier Hauptkreiſe iſt der Entfernung ihrer Pole gleich oder ergänzt ſie zu 180°.

d) Alle Punkte eines Nebenkreiſes, deſſen Ebene auf einem Durchmeſſer ſenkrecht ſteht, ſind von den Endpunkten des Durchmeſſers gleichweit entfernt. (Es läßt ſich leicht zeigen, daß die Bogen zu gleichen Mittelpunktswinkeln in Kreiſen mit gleichen Halbmeſſern gehören). Man kann daher die Entfernung der Punkte eines Nebenkreiſes von den Endpunkten des auf ſeiner Ebene ſenkrechten Durchmeſſers als (Halbmeſſer des Nebenkreiſes auf der Kugel oder) **ſphäriſchen Halbmeſſer** bezeichnen. Wird die Entfernung zweier parallelen Kreiſe auf der Kugel (zweier Kreiſe mit parallelen Ebenen) durch den zwiſchen ihnen liegenden Bogen eines Hauptkreiſes gemeſſen der durch ihre ſphäriſchen Mittelpunkte geht, ſo folgt:

Die Entfernung zweier parallelen Kreiſe auf einer Kugel iſt gleich der Differenz ihrer entſprechenden ſphäriſchen Halbmeſſer.

Anwendung auf Parallel- oder Breitenkreiſe auf der Erde.

e) Wendet man den Satz, daß die Tangenten von einem Punkte an einen Kreis einander gleich ſind, auf die Tangenten an, die man von einem auf der Verlängerung eines Durchmeſſers AB liegenden Punkte P des Raumes aus an die Kreiſe legen kann, die ſich in A und B ſchneiden, ſo erkennt man leicht, daß alle dieſe Tangenten einander gleich ſind. Da bei jedem einzelnen Kreiſe die Berührungsſehne auf dem gemeinſamen Durchmeſſer AB ſenkrecht ſteht, ſo folgt hieraus, daß die Berührungspunkte in einer auf AB ſenkrechten Ebene liegen, und daß die Tangenten Seitenlinien eines geraden Kegels ſind. Man hat daher den Satz:

Eine Kugel wird von jedem (außerhalb der Kugel gelegenen) Punkte P aus durch den Mantel eines Kegels berührt, deſſen Spitze der Punkt P iſt. Der Grundkreis des Kegels enthält ſämtliche Berührungspunkte, und die Achſe des Kegels geht durch den Mittelpunkt der Kugel.

Man bezeichnet dieſen Kegel als den **Tangentialkegel** und ſeinen Grundkreis als den Berührungskreis des Punktes P.

Liegt der Punkt P auf der Kugel, ſo gehören ſämtliche Tangenten der in dem Punkte P errichteten Normalebene des Durchmeſſers PM an. Bezeichnet man dieſe als **Tangentialebene**, ſo folgt der dem Satze über eine Tangente und ihren Berührungsradius entſprechende Satz, daß die Tangentialebene auf dem Berührungsradius ſenkrecht ſteht.

Nr. 22. Zweieck und Dreieck auf der Kugel.

Erklärung 1. Zwei Hauptkreiſe zerlegen die Kugelfläche in 4 Teile, welche **Zweiecke** genannt werden. Seiten eines Zweiecks heißen die begrenzenden Halbkreiſe. Als Winkel des Zweiecks wird der Neigungswinkel der beiden Ebenen bezeichnet, in denen die Hauptkreiſe liegen.

Folgerungen. Zwei gegenüberliegende Zweiecke ſind kongruent. — Zwei nebeneinanderliegende Zweiecke ergänzen ſich zur halben Kugelfläche. Bezeichnet O den Inhalt der Kugelfläche und α den Winkel des Zweiecks, ſo iſt die Fläche des Zweiecks gleich $\frac{\alpha}{360} \cdot O$

Erklärung 2. Werden zwei Hauptkreiſe durch einen dritten geſchnitten, ſo wird die Kugelfläche in 8 Teile zerlegt, welche **Kugeldreiecke** genannt werden.

Zuſatz. Zu jedem Kugeldreieck gehören

ein Gegendreieck, deſſen Ecken die Gegenpunkte ſeiner Ecken ſind;
drei Nebendreiecke, die mit ihm eine Seite gemeinſam beſitzen, und
drei Scheiteldreiecke, die mit ihm nur eine Ecke gemeinſchaftlich haben.

Folgerungen. 1. Gegendreiecke ſind ſymmetriſch. 2. Nebendreiecke ſtimmen in einer Seite und deren Gegenwinkel überein, und ihre Summe verhält ſich zu der Kugelfläche wie dieſer Winkel zu 360°. 3. Scheiteldreiecke ſtimmen in einem Winkel und deſſen Gegenſeite überein.

Die Sätze über Seiten und Winkel eines Kugeldreiecks und ſeine Berechnung ſtimmen mit dem überein, was in den Kapiteln 2 und 3 über die dreiſeitige Ecke abgeleitet worden iſt

In ſymmetriſchen Kugeldreiecken ſind entſprechend gezogene Linien gleichgroß, alſo auch die Linien, welche die Schnittpunkte der Mittellote mit den Ecken verbinden. Zwei ſymmetriſche Dreiecke werden alſo durch dieſe Linien in je 3 paarweis kongruente gleichſchenklige Dreiecke zerlegt, und daraus folgt:

Lehrſatz 54. Gegendreiecke einer Kugelfläche ſind gleichgroß.

Die halbe Kugelfläche, welche der zu AC gehörige Hauptkreis herſtellt, iſt die Summe aus den Dreiecken ABC, ABC', BA'C und BA'C'. Von dieſen bilden

ABC und ABC' ſowie ABC und BA'C

ein Zweieck, während ABC auch mit B'AC, dem Gegendreieck von BA'C', einem Zweieck angehört. Man hat daher (ſ. Folgerung 2):

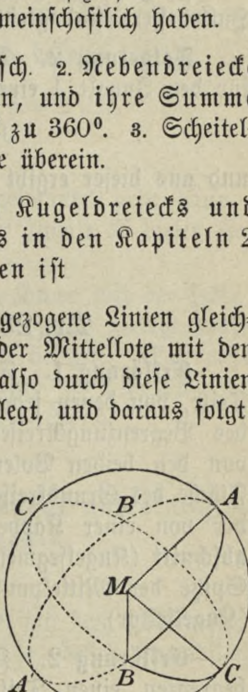


Fig. 78.

$$(ABC + ABC') : O = \sphericalangle C : 4R,$$
$$(ABC + BA'C) : O = \sphericalangle A : 4R,$$
$$(ABC + BA'C') : O = \sphericalangle B : 4R.$$

Daraus folgt durch Addition:

$$\left(2\,ABC + \frac{1}{2}\,O\right) : 3\,O = \sphericalangle\,(A + B + C) : 12R,$$

oder

$$(4\,ABC + O) : O = \sphericalangle\,(A + B + C) : 2R,$$

alſo:

$$4\,ABC : O = [\sphericalangle\,(A + B + C) - 2R] : 2R$$

und hieraus ſchließlich:

$$ABC : O = [\sphericalangle\,(A + B + C) - 2R] : 8R, \qquad \text{d. h.}$$

Lehrſatz 55. Der Inhalt eines Kugeldreiecks verhält ſich zur Kugelfläche wie der Überſchuß ſeiner Winkel über 2R (ſein ſphäriſcher Exzeß) zu 8R.

Folgerung 1. Dreiecke auf einer Kugel oder auf Kugeln mit gleichen Halbmeſſern ſind gleichgroß, wenn ſie eine gleiche Winkelſumme beſitzen.

Folgerung 2. Da die Kugelfläche die Größe $4\pi r^2$ beſitzt, ſo hat man für den Inhalt J eines Kugeldreiecks die Proportion

$$J : 4\pi r^2 = (\alpha + \beta + \gamma - 2R) : 8R,$$

und aus dieſer ergibt ſich:

$$\mathbf{J = \frac{\pi r^2}{2R}\,(\alpha + \beta + \gamma - 2R).}$$

Nr. 23. Kappe, Zone und Kugelfläche.

Erklärung 1. Ein Kreis auf einer Kugel teilt die Oberfläche in zwei Teile, von denen jeder **Kappe** (Haube, Kalotte) genannt wird. Die Fläche des Begrenzungskreiſes heißt Grundfläche der beiden Kappen. Die Lote von den beiden Polen, den ſphäriſchen Mittelpunkten der Kappen, auf die Fläche des Grundkreiſes ſind die Höhen der Kappen. — Der Teil der Kugel, der von einer Kappe und ihrer Grundfläche begrenzt wird, heißt **Kugelabſchnitt** (Kugelſegment). Steht über der Grundfläche noch ein Kegel, deſſen Spitze der Mittelpunkt der Kugel iſt, ſo heißt der Körper **Kugelausſchnitt** (Kugelſektor).

Erklärung 2. Zwei Kreiſe auf einer Kugel, deren Ebenen parallel ſind, begrenzen einen Teil der Kugelfläche, welcher **Zone** genannt wird. Der zwiſchen den Ebenen liegende Körper heißt **Kugelſchicht.** Der Abſtand der beiden Ebenen wird als Höhe der Zone, bzw. der Schicht bezeichnet.

Folgerung 1. Eine Zone kann als Unterſchied zweier Kappen angeſehen werden.

Folgerung 2. Eine Kappe entſteht aus einer Zone, wenn eine der parallelen Ebenen zur Tangential-Ebene wird.

Folgerung 3. Die Kugelfläche kann als eine Kappe mit der Höhe 2r angeſehen werden.

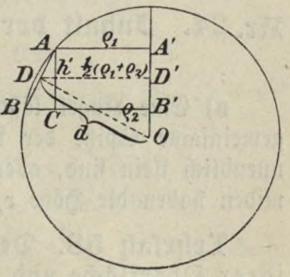


Fig. 79.

Bei der Entſtehung der Kugelfläche durch Drehung eines Kreiſes um einen Durchmeſſer beſchreibt ein Bogen AB dieſes Kreiſes eine Zone und die zugehörige Sehne AB einen Kegelſtumpf. Sind nun die Seitenlinien mit s und die Halbmeſſer der Begrenzungskreiſe mit ϱ_1 und ϱ_2 bezeichnet, ſo folgt für den Mantel des Kegelſtumpfs:

$$M = \pi s\,(\varrho_1 + \varrho_2).$$

Das Produkt $s\,(\varrho_1 + \varrho_2)$ kann aber durch die Höhe des Kegelſtumpfs (h′) und den Abſtand d der Sehne AB vom Mittelpunkte O der Kugel ausgedrückt werden. Zieht man durch die Mitte D von AB die Parallele DD′ zu AA′, ſo iſt DD′ $= \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2)$. Ferner iſt $\triangle\, ODD' \sim \triangle\, BAC$, und daraus folgt:

$$d : s = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2) : h', \quad \text{alſo: } (\varrho_1 + \varrho_2)\, s = 2\, dh'.$$

Man hat daher: $$M = 2\,\pi dh'.$$

Wird h′ unendlich klein, ſo wird $d = r$. Der Kegelmantel geht dann in eine Zone von unendlich kleiner Höhe über, und der Inhalt Z′ dieſer Zone beträgt $2\,\pi rh'$.

Nun kann man ſich eine jede Zone und eine jede Kappe mit der Höhe h in eine unbegrenzt große Anzahl aufeinanderfolgender Zonen zerlegt denken, deren Höhen unendlich klein ſind, aber die Summe h beſitzen. Man erhält dann für den Inhalt der Zone: $Z = \Sigma\, 2\pi rh'$ oder $= 2\,\pi r \Sigma h'$, alſo $Z = 2\pi rh$, und ebenſo für den Inhalt der Kappe: $K = 2\pi rh$.

Hieraus folgt:

Lehrſatz 56. Auf einer Kugel ſind eine Kappe und eine Zone von der Höhe h gleichgroß und beſitzen den Inhalt

$$\mathbf{Z = K = 2\pi rh.}$$

Folgerung 1. Jede Zone (Kappe) auf einer Kugel mit dem Halbmeſſer r iſt gleich dem Mantel eines Zylinders von gleicher Höhe, deſſen Grundfläche den Halbmeſſer r beſitzt.

Folgerung 2. Zonen (Kappen) auf derſelben Kugel oder auf Kugeln mit gleichen Halbmeſſern verhalten ſich wie ihre Höhen.

Die Kappe geht in die Kugelfläche über, wenn $h = 2r$ wird. Man erhält daher:

Lehrſatz 57. Die Kugelfläche hat den Inhalt $\mathbf{O = 4\pi r^2}$.

Folgerung. Eine Kugelfläche iſt 4mal ſo groß wie der Inhalt eines ihrer Hauptkreiſe.

Nr. 24. Inhalt der Kugel, des Ausſchnitts, des Abſchnitts und der Schicht.

a) Eine Kugel läßt ſich als Summe von Pyramiden anſehen, deren gemeinſame Spitze der Mittelpunkt der Kugel iſt, und deren Grundflächen unendlich klein ſind, aber die Kugelfläche als Summe beſitzen. Dieſe Pyramiden haben die Höhe r, und daher beſteht der Satz:

Lehrſatz 58. Der Rauminhalt einer **Kugel** iſt das Produkt aus ihrer Oberfläche und dem dritten Teile ihres Halbmeſſers.

$$\mathbf{V = \frac{O \cdot r}{3}}.$$

Folgerung. Da $O = 4\pi r^2$ iſt, ſo ergibt ſich:

$$\mathbf{V = \frac{4}{3}\pi r^3}.$$

Stehen ein Zylinder und ein Kegel mit der Höhe r auf Grundflächen mit dem Halbmeſſer r, ſo ſind ihre Inhalte πr^3 bzw. $\frac{1}{3}\pi r^3$. Da der Inhalt der Halbkugel $\frac{2}{3}\pi r^3$ beträgt, ſo folgt:

Lehrſatz 59. (Satz des **Archimedes.**) Stehen ein Zylinder, eine Halbkugel und ein Kegel von gleichen Höhen über gleichen Grundflächen, ſo verhalten ſich ihre Inhalte wie 3 : 2 : 1.

b) Ein Kugelausſchnitt kann in gleicher Weiſe wie die Kugel als Pyramiden-Summe, deren Grundflächen die zugehörige Kappe bilden, angeſehen werden. Man hat daher

Lehrſatz 60. Der Rauminhalt eines **Kugelausſchnitts** beträgt $\mathbf{\frac{2}{3}\pi r^2 h}$.

c) Ein Kugelabſchnitt entſteht, wenn der zu dem Ausſchnitt gehörige Kegel abgezogen wird. Nun iſt die Grundfläche dieſes Kegels gleich $\pi h\,(2r - h)$, ſeine Höhe gleich $r - h$ und ſein Rauminhalt $\frac{1}{3}\pi h\,(2r - h)(r - h)$. Der Kugelabſchnitt hat alſo den Inhalt

$$\frac{2}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi h\,(2r - h)\,(r - h) \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3}\pi h^2\,(3r - h).$$

Dies führt auf

Lehrſatz 61. Der Rauminhalt eines **Kugelabſchnitts** beträgt

$$\frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h).$$

d) Eine Kugelſchicht mit der Höhe h und den Halbmeſſern ϱ_1 und ϱ_2 der Begrenzungskreiſe kann als Unterſchied zweier Kugelabſchnitte mit den Höhen $(h + x)$ und x angeſehen werden und hat demnach den Rauminhalt

$$V = \frac{1}{3}\pi (h + x)^2 (3r - h - x) - \frac{1}{3}\pi x^2 (3r - x),$$

$$= \frac{\pi h}{6}(6rh - 2h^2 + 12rx - 6hx - 6x^2).$$

Da aber $\varrho_1{}^2 = (h + x)[2r - (h + x)] = 2r(h + x) - (h + x)^2$

und $\varrho_2{}^2 = x(2r - x) = 2rx - x^2,$

alſo $\varrho_1{}^2 + \varrho_2{}^2 = 2rh - h^2 + 4rx - 2hx - 2x^2$

und ſomit $3\varrho_1{}^2 + 3\varrho_2{}^2 + h^2 = 6rh - 2h^2 + 12rx - 6hx - 6x^2$

iſt, ſo folgt: $V = \frac{\pi h}{6}(3\varrho_1{}^2 + 3\varrho_2{}^2 + h^2),$ d. h.

Lehrſatz 62. Der Rauminhalt einer **Kugelſchicht** mit der Höhe h und den Halbmeſſern ϱ_1 und ϱ_2 der Begrenzungskreiſe beträgt

$$\frac{\pi h}{6}(3\varrho_1{}^2 + 3\varrho_2{}^2 + h^2).$$

e) Eine zweite Ableitung dieſer Sätze ſtützt ſich auf das Cavalieriſche Prinzip. Sind über einer gemeinſchaftlichen Grundfläche mit dem Halbmeſſer r ein Zylinder und ein Kegel mit der Höhe r errichtet, ſteht ferner auf der Deckfläche des Zylinders eine Halbkugel (ſ. Fig. 83), und werden die Körper durch eine zur Grundfläche parallele Ebene geſchnitten, ſo entſteht

bei dem Zylinder die Schnittfläche $\pi \cdot PS^2$,
″ ″ Kegel ″ ″ $\pi \cdot PQ^2$,
″ der Halbkugel ″ ″ $\pi \cdot PR^2$.

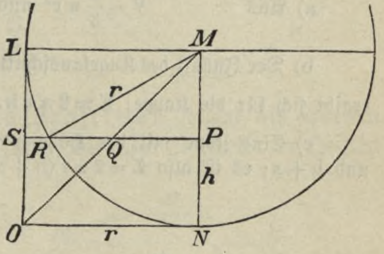


Fig. 80.

Da aber $PS = MR$, $PQ = MP$ und $PR^2 = MR^2 - MP^2$, alſo auch $PR^2 = PS^2 - PQ^2$ und demnach die Schnittfläche des aus Zylinder und Kegel gebildeten Reſtkörpers gleich der Schnittfläche der Halbkugel iſt, wo auch die Ebene gezogen ſein mag, ſo ſind die Bedingungen für die Anwendung des Cavalieriſchen Prinzips erfüllt. Man erhält hiernach:

1. Der Inhalt der **Halbkugel** beträgt $\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$ oder $\frac{2}{3}\pi r^3$.

2. Der Inhalt des Kugelabſchnitts mit der Höhe h iſt gleich der Differenz aus $\pi r^2 h$ und dem Inhalt eines Kegelſtumpfs mit der Höhe h und den Endflächen πr^2 und $\pi \cdot PQ^2$. Da aber $PQ = r - h$ iſt, alſo der Inhalt des Kegelſtumpfs

$$\frac{\pi h}{3}[r^2 + (r - h)^2 + r(r - h)] \text{ oder } \frac{\pi h}{3}(3r^2 - 3rh + h^2)$$

beträgt, ſo folgt für den Inhalt des Kugelabſchnitts:

$$\pi r^2 h - \frac{3\pi r^2 h}{3} + \frac{3\pi r h^2}{3} - \frac{\pi h^3}{3} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h).$$

3. Die Grundfläche des Kugelabſchnitts beträgt $\pi h(2r-h)$. Ein Kegel über dieſer Grundfläche mit der Spitze M hat die Höhe $r-h$ und demnach den Inhalt $\frac{\pi h}{3}(2r-h)(r-h)$. Addiert man hierzu $\frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$, ſo erhält man für den Inhalt des Kugelausſchnitts:

$$\pi h^2 r - \frac{\pi h^3}{3} + \frac{2\pi r^2 h}{3} + \frac{\pi h^3}{3} - \frac{\pi h}{3}\cdot 3rh = \mathbf{\frac{2}{3}\pi r^2 h}.$$

4. Auch der Inhalt der Kugelſchicht mit der Höhe h und den Begrenzungsflächen $\pi\varrho_1^2$ und $\pi\varrho_2^2$ kann mit Benutzung des Cavalieriſchen Prinzips beſtimmt werden. Der entſprechende Reſtkörper erweiſt ſich als Differenz aus einem Zylinder und einem Kegelſtumpf mit den parallelen Flächen $\pi(h+x)^2$ und πx^2. Man erhält daher für ſeinen Inhalt:

$$D = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{3}\left[(h+x)^2 + x^2 + (h+x)x\right],$$

$$= \pi r^2 h - \frac{\pi h}{6}\left[3(h+x)^2 + 3x^2 - h^2\right].$$

Da aber $x^2 = r^2 - \varrho_1^2$ und $(h+x)^2 = r^2 - \varrho_2^2$ iſt, ſo folgt:

$$D = \pi r^2 h - \frac{\pi h}{6}(6r^2 - 3\varrho_1^2 - 3\varrho_2^2 - h^2).$$

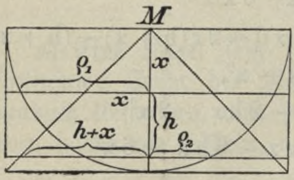


Fig. 81.

Somit iſt der Inhalt einer Kugelſchicht gleich $\mathbf{\frac{\pi h}{6}(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + h^2)}$.

Anmerkung. Hat man zuerſt auf dieſem Wege die Inhaltsformeln hergeleitet, ſo laſſen ſich die Formeln für die Flächen leicht herſtellen.

a) Aus $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $V = \frac{O\cdot r}{3}$ folgt: $\mathbf{O = 4\pi r^2}$.

b) Der Inhalt des Kugelausſchnitts iſt durch $\frac{K\cdot r}{3}$ und $\frac{2\pi r^2 h}{3}$ ausgedrückt, und daraus ergibt ſich für die Kappe: $\mathbf{K = 2\pi r h}$.

c) Eine Zone mit der Höhe h iſt der Unterſchied zweier Kappen mit den Höhen x und $h+x$; es iſt alſo $\mathbf{Z} = 2\pi r(h+x-x) = \mathbf{2\pi r h}$.

Nr. 25. Projektionen einer Kugelfläche.

(Herſtellung von Erd- und Himmelskarten.)

Die Oberfläche einer Kugel läßt ſich nicht in eine Ebene ausbreiten, und daher iſt für das durch Meridiane und Parallelkreiſe auf einer Kugel beſtimmte Gradnetz die Herſtellung einer getreuen ebenen Abbildung nicht möglich. Projiziert man die Punkte einer Kugel auf einer Ebene, um ein Kartenbild herzuſtellen, ſo erleiden die Figuren Größen- und Geſtaltsveränderungen. An dieſen Verzerrungen ändert ſich jedoch nichts, wenn die Projektionsebene parallel verſchoben wird, und demnach kann als Projektionsebene ſtets eine Tangentialebene der Kugel gewählt werden.

Erklärung. Iſt der Berührungspunkt der Projektionsebene

1. einer der beiden Pole, ſo heißt die Projektion Polarprojektion.
2. ein Punkt des Äquators, = = = = Äquatorialprojektion.
3. ein beliebiger anderer Punkt, = = = = Horizontalprojektion.

a) Zentrale Projektion. Wird der Mittelpunkt der Kugel als Projektionszentrum gewählt, ſo werden alle größten Kreiſe der Kugel, alſo auch die Meridiane, als gerade Linien abgebildet. Die Parallelkreiſe erſcheinen bei der Polarprojektion als Kreiſe und bei den beiden anderen Projektionen als Kegelſchnitte. Die Linien und Flächen auf der Kugel erleiden um ſo ſtärkere Vergrößerungen bzw. Verzerrungen, je weiter ſie von dem Berührungspunkt (dem Mittelpunkt der Karte) entfernt liegen, und daher kann die zentrale Projektion nur bei kleinen Teilen der Kugelfläche ein einigermaßen zutreffendes Bild liefern.

b) Senkrechte oder **orthographiſche Projektion.** Bei dieſer werden die von dem Berührungspunkt entfernteren Linien verkürzt und die Flächen verzerrt, und daher kann ſie ebenfalls nicht für größere Teile der Kugel ein getreues Bild liefern.

α) Bei der orthographiſchen Polarprojektion, bei der die Projektionsebene der Äquatorialebene parallel iſt, erſcheinen die Meridiane als gerade Linien und die Parallelkreiſe als Kreiſe mit demſelben Mittelpunkt. Iſt AB der Äquator und der Winkel $\varphi = P'NA$ die Breite des Ortes P, ſo liefert das Lot P′Q auf AB in Q einen Punkt des Parallelkreiſes, auf welchem P liegt.

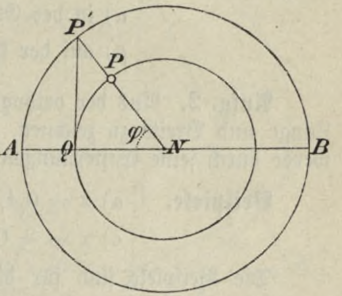


Fig. 82.

β) Bei der orthographiſchen Äquatorialprojektion ſtehen die Ebenen aller Parallelkreiſe auf der Zeichenebene ſenkrecht; die Parallelkreiſe erſcheinen daher als parallele gerade Linien. Da jeder Meridian durch die Parallelkreiſe in gleiche Teile geteilt wird, ſo laſſen ſich dieſe bequem herſtellen. Iſt AB der Äquator und der Winkel $\varphi = P'MA$ die Breite des Ortes P, ſo liefert die Parallele P′Q zu AB das Bild des Parallelkreiſes, auf welchem P liegt. Die Projektion des Meridians, der um 180° von der Projektionsebene abſteht, iſt der Durchmeſſer NS, während der um 90° abſtehende Doppel-Meridian durch den Kreis in der Zeichenebene abgebildet wird. Alle anderen Meridiane werden als Ellipſen mit der großen Achſe NS

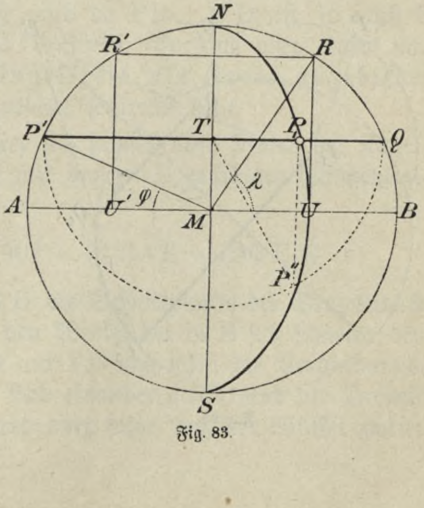


Fig. 83.

projiziert. Bildet ein Meridian mit der Projektionsebene den Winkel $\lambda = RMB$, ſo liefern die Lote RU und R'U' auf dem Äquator AB in UU' die kleine Achſe der zugehörigen Ellipſe.

Iſt ANB der 0-Meridian und λ die weſtliche Länge des Ortes P, ſo zeichnet man den Kreis mit dem Durchmeſſer P'Q, legt in T an TQ nach Weſten den Winkel λ an, fällt vom Schnittpunkt P'' des zweiten Schenkels und des Hilfskreiſes das Lot auf P'Q und erhält dann in dem Fußpunkt P_1 die Projektion des Ortes P.

Aufg. 1. Die Äquatorialprojektion eines Ortes mit der

a) Breite $\varphi = 30^0$ N und der Länge $\lambda = 45^0$ W,

b) „ $\varphi = 45^0$ N „ „ „ $\lambda = 75^0$ W,

c) „ $\varphi = 60^0$ S „ „ „ $\lambda = 130^0$ W

zu zeichnen, wenn der 0-Meridian

α) in der Ebene der Zeichnung liegt,

β) auf der Ebene der Zeichnung ſenkrecht ſteht.

Aufg. 2. Aus der orthographiſchen Äquatorialprojektion P_1 eines Ortes P ſeine Länge und Breite zu zeichnen. Der Halbmeſſer des Meridians ſei gleich 1, und P_1 werde durch ſeine Entfernungen x und y von NS, bzw. AB (ſ. Fig. 83) gegeben.

Beiſpiele. a) $x = 0{,}4$, $y = 0{,}5$. b) $x = 0{,}75$, $y = 0{,}36$.

c) $x = -0{,}6$, $y = 0{,}8$. d) $x = -0{,}3$, $y = -0{,}7$.

Die Beiſpiele ſind für die beiden Fälle durchzuführen, daß der 0-Meridian 1. auf der Zeichenebene liegt und 2. auf ihr ſenkrecht ſteht.

Aufg. 3. Die ſphäriſche Entfernung zweier Orte P und Q aus ihren orthographiſchen Äquatorialprojektionen P_1 und Q_1 zu beſtimmen.

Aufl. Betrachtet man die Sehne P_1Q_1 als Projektion des durch P und Q gehenden Nebenkreiſes, deſſen Ebene auf dem Meridian ſenkrecht ſteht, und errichtet auf P_1Q_1 in P_1 und Q_1 Lote, ſo ſchneiden dieſe den Halbkreis über der Sehne in zwei Punkten P_2 und Q_2, deren Verbindungslinie die Sekante P_1Q_1 in dem Schnittpunkt E der Sekante PQ und der Ebene des Meridians trifft. Da die Ebene des durch P und Q beſtimmten Hauptkreiſes gleichfalls durch E geht, ſo iſt EM ihre Schnittlinie mit der Zeichenebene. Die Lote von P und Q auf EM fallen mit den Loten von P_1 und Q_1 auf EM zuſammen, wenn die Ebene des Hauptkreiſes in die Meridianebene um EM umgelegt wird, und daher beſtimmen die Lote P_1P_3 und Q_1Q_3 in dem Bogen P_3Q_3 die (ſphäriſche) Entfernung der Orte P und Q.

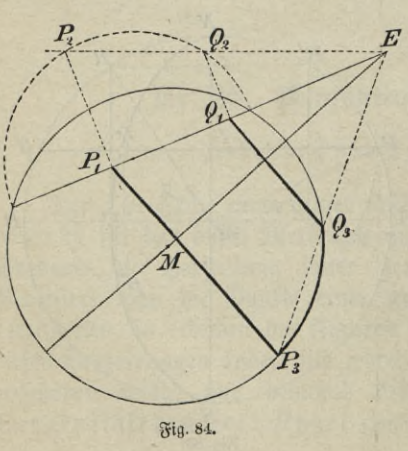


Fig. 84.

Aufg. 4. Die Entfernung zweier Orte aus ihren Längen und Breiten zu beſtimmen.

Beiſpiele. a) $\varphi_1 = 30^0\text{N}$, $\lambda_1 = 45^0\text{W}$ und $\varphi_2 = 75^0\text{N}$, $\lambda_2 = 120^0\text{W}$.
b) $\varphi_1 = 45^0\text{N}$, $\lambda_1 = 60^0\text{W}$ „ $\varphi_2 = 30^0\text{S}$, $\lambda_2 = 150^0\text{W}$.
c) $\varphi_1 = 60^0\text{S}$, $\lambda_1 = 22\frac{1}{2}^0\text{W}$ „ $\varphi_2 = 15^0\text{N}$, $\lambda_2 = 120^0\text{W}$.
d) $\varphi_1 = 15^0\text{S}$, $\lambda_1 = 67\frac{1}{2}^0\text{W}$ „ $\varphi_2 = 67\frac{1}{2}^0\text{S}$, $\lambda_2 = 157\frac{1}{2}^0\text{W}$.
e) $\varphi_1 = 22\frac{1}{2}^0\text{N}$, $\lambda_1 = 30^0\text{W}$ „ $\varphi_2 = 75^0\text{S}$, $\lambda_2 = 45^0\text{O}$.
f) $\varphi_1 = 30^0\text{N}$, $\lambda_1 = 15^0\text{W}$ „ $\varphi_2 = 45^0\text{S}$, $\lambda_2 = 105^0\text{O}$.

c) Stereographiſche Projektion (Hipparch, Ptolemäus). Bei dieſer Projektion wird der Gegenpunkt A des Berührungspunktes B als Projektionszentrum gewählt. Alle durch A gehenden Kreiſe werden dann als gerade Linien projiziert. Iſt CD der Durchmeſſer eines nicht durch A gehenden Kugelkreiſes, deſſen Ebene auf der Zeichenebene ſenkrecht ſteht, und C′D′ ſeine Projektion, iſt alſo $\sphericalangle AC'D' = \alpha = \sphericalangle ADC$, und wird durch einen beliebigen Punkt P der Projektion des Kreiſes eine Ebene parallel der Ebene des Kreiſes gelegt, welche die Zeichenebene in PR ſchneidet, ſo iſt $PR \perp ST$, und ſomit

$$PR^2 = SR \cdot TR.$$

Da aber $\triangle C'RS \sim \triangle TRD'$, alſo $C'R \cdot D'R = SR \cdot TR$ iſt, ſo folgt: $PR^2 = C'R \cdot D'R$. Dieſe Gleichung gilt für jeden Punkt der Projektionslinie, und da $PR \perp C'D'$ iſt, ſo muß P auf einem Kreiſe mit dem Durchmeſſer C′D′ liegen. Hieraus aber ergibt ſich, daß ein nicht durch A gehender Kugelkreis als Kreis abgebildet wird, wenn ſeine Ebene auf der Zeichenebene ſenkrecht ſteht.

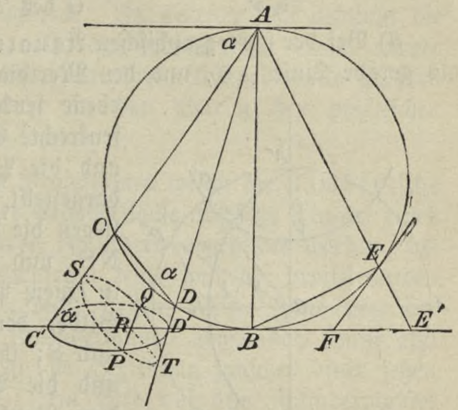


Fig. 85.

Liegt ferner der Schnittpunkt E zweier ſich ſchneidenden Linien der Kugelfläche in der Zeichenebene und hat dieſe mit der zu E gehörigen Tangentialebene die gerade EF gemein, ſo iſt

$$\sphericalangle FEE' = 90^0 - \sphericalangle FEB = 90^0 - \sphericalangle BAE = \sphericalangle FE'E$$

und ſomit $FE' = FE$. Sind alſo G und H die Schnittpunkte der Projektionsebene und der beiden Tangenten, welche den Winkel der in E ſich ſchneidenden Linien einſchließen, ſo ſteht GH ſenkrecht auf FE und FE′; die Verbindungslinien GE und GE′, bzw. HE und HE′ ſind einander gleich, und die Dreiecke GE′H und GEH ſind kongruent. Hieraus aber folgt, daß der Winkel zweier beliebiger Linien der Kugelfläche bei der ſtereographiſchen Projektion unverändert bleibt und ſomit das Bild einer auf der Kugelfläche liegenden Figur dieſer in den kleinſten Teilen „ähnlich" iſt. (Winkeltreue Karten!)

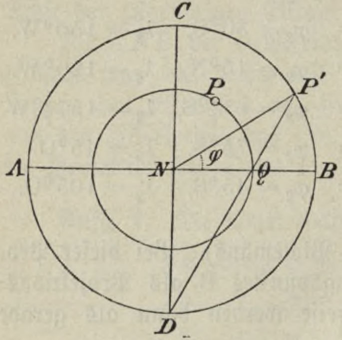


Fig. 86.

α) Bei der ſtereographiſchen Polarprojektion wird der Pol zum Mittelpunkt eines Kreiſes, der den Äquator darſtellt. Die Meridiane erſcheinen als Durchmeſſer dieſes Kreiſes und teilen ihn in gleiche Teile, während die Parallelkreiſe als Kreiſe um den Pol auftreten. Iſt der Winkel $\varphi = BNP'$ die Breite eines Ortes P, ſo erhält man einen Punkt des zugehörigen Parallelkreiſes in dem Schnittpunkte Q des Durchmeſſers AB und der Sehne DP′.

β) Bei der ſtereographiſchen Äquatorialprojektion erſcheint der Äquator als gerade Linie (AB), und der Meridian, deſſen Ebene auf der Projektionsebene ſenkrecht ſteht, erſcheint als eine auf AB ſenkrechte Gerade (NS). Alle anderen Meridiane und die Parallelkreiſe werden durch Kreisbogen dargeſtellt. Bei den Bildern der Parallelkreiſe liegen die Mittelpunkte ſämtlich auf der Geraden NS, und die Verbindungslinie AP′ trifft NS in einem Punkte Q des zugehörigen Kreiſes. Die Bilder der Meridiane gehen ſämtlich durch N und S; ihre Mittelpunkte liegen alſo auf AB, und die Verbindungslinie des Punktes S mit dem Punkte P″ trifft AB in einem Punkte R des Meridians, der mit der Projektionsebene den Winkel $\lambda = P''OB$ bildet.

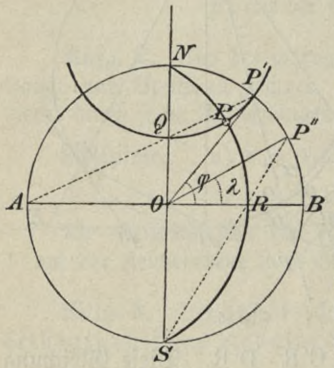


Fig. 87

Aufg. 5. Die in Aufg. 1a—c und Aufg. 4a—f angegebenen Orte durch ſtereographiſche Äquatorialprojektion darzuſtellen.

Aufg. 6. Die in Aufg. 2a—d zu beſtimmenden Orte durch ſtereographiſche Äquatorialprojektion darzuſtellen.

d) Merkators Projektion. Die Oberfläche der Erde wird bei der Merkator-Projektion als Zylinderfläche behandelt. Bei der Abwicklung dieſes Zylinders erſcheinen dann die Meridiane als Parallelen mit gleichen Abſtänden, während die Parallelkreiſe der Geraden, die den Äquator darſtellt, parallel werden. Trägt man auf den Meridianen die Strecken in ihrer wahren Größe ab, ſo werden bei wachſender Breite die Strecken der zugehörigen Parallelkreiſe ſtark vergrößert. Merkator vergrößerte nun, um dieſen Fehler auszugleichen, die Grade der Meridiane in demſelben Verhältnis (1 dividiert durch den Koſinus der geographiſchen Breite!), in welchem die Teile der Parallelkreiſe vergrößert erſchienen, und erreichte dadurch, daß das Bild einer auf der Kugelfläche liegenden Figur dieſer in den kleinſten Teilen „ähnlich" wurde. (Winkeltreue Karten!)

Die Merkator-Projektion iſt offenbar nicht geeignet, um Teile der Erdoberfläche in der Nähe der Pole darzuſtellen, da dieſe ſelbſt im Unendlichen liegen. (Vgl. Grönland mit Südamerika auf einem Globus und einer Merkatorkarte.)

Für die Schiffahrt iſt die Merkator-Projektion von beſonderer Wichtigkeit. Da alle Linien von Norden nach Süden ſenkrecht und von Oſten nach Weſten wagerecht gezeichnet werden, ſo läßt ſich jede Himmelsrichtung an jeder Stelle als gerade Linie eintragen, und der Weg eines Schiffes, das ſeinen Kurs nicht ändert, die Meridiane alſo unter gleichen Winkeln durchſchneidet, erſcheint als eine gerade Linie (Loxodrome!). Zur Herſtellung von Seekarten wurde daher ausſchließlich die Merkator-Projektion verwandt, ſolange die Schiffahrt auf der Loxodrome allein von Bedeutung war. In neueſter Zeit gewinnt die Schiffahrt auf dem größten Kugelkreiſe, alſo auf der kürzeſten Linie, immer mehr an Wichtigkeit, und damit tritt die Zentralprojektion, die alle größten Kreiſe als gerade Linien abbildet, mehr in den Bereich der praktiſchen Brauchbarkeit.

Zuſatz. Von den hier beſprochenen Projektionen weicht die Lambertſche **Zylinderprojektion,** bei der die Teile der Erdoberfläche auf dem Mantel eines die Erde längs des Äquators berührenden Zylinders abgebildet werden, beſonders darin ab, daß ein Projektionszentrum fehlt und die projizierenden Strahlen ſämtlich auf der Erdachſe ſenkrecht ſtehen. Eine Zone von der Höhe h wird dabei als ein gleichhoher Zylindermantel abgebildet, beſitzt alſo mit ihm denſelben Inhalt, und da die gleiche Beziehung zwiſchen einer jeden geſchloſſenen Figur auf der Kugel und ihrem Bild auf dem Zylindermantel beſteht, ſo folgt, daß bei der Zylinderprojektion die Karten **flächentreu** werden.

Kapitel 7.

Die Guldinſchen Regeln. Schwerpunkts-Beſtimmung.

Nr. 26. Die Guldinſchen Regeln.

Dreht ſich eine Strecke $AB = s_1$ um eine Gerade G, die mit s_1 in einer Ebene liegt, und ſind A und B von G um r_1 bzw. r_2 entfernt, ſo beſchreibt s_1 eine Drehungsfläche von der Größe $\pi s_1 (r_1 + r_2)$. Nun iſt

$\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ gleich dem Abſtand ϱ_1 der Mitte von AB, und daher die Drehungsfläche gleich $2\pi\varrho_1 s_1$, d. h. gleich dem Produkt aus der Länge s_1 und dem Wege, den der Schwerpunkt von s_1 zurücklegt.

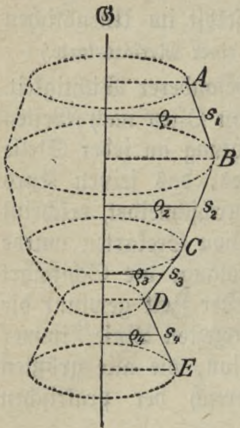


Fig. 88

Kommt zu AB eine zweite Strecke BC $= s_2$ hinzu, deren Mitte von G um ϱ_2 entfernt iſt, ſo gilt für die von s_2 beſchriebene Drehungsfläche das gleiche Geſetz, und die beiden Strecken s_1 und s_2 erzeugen eine Fläche von der Größe $2\pi(\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2)$. Wird entſprechend eine aus den Strecken $s_1, s_2, s_3 \,..\, s_n$ zuſammengeſetzte Linie um G gedreht und liegt die ganze Linie mit G in einer Ebene, ſo beſchreibt ſie eine Drehungsfläche von der Größe $2\pi(\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \cdots + \varrho_n s_n)$. Nach den Geſetzen der Mechanik iſt aber

$$\varrho_1 s_1 + \varrho_2 s_2 + \varrho_3 s_3 + \cdots + \varrho_n s_n$$
$$= (s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n)\varrho,$$

wo ϱ den Abſtand des Schwerpunkts der ganzen Linie bezeichnet, und ſomit iſt die Drehungsfläche gleich $2\pi\varrho(s_1 + s_2 + \cdots + s_n)$. Wählt man n groß genug, ſo kann jede Linie der Ebene durch die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n$ ausgedrückt werden. Man gelangt daher zu

Lehrſatz 63. Erſte **Guldinſche** Regel. Die Oberfläche eines Drehungskörpers iſt gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Linie und dem Wege, den ihr Schwerpunkt beſchreibt.

Dreht ſich weiter ein Rechteck ABCD mit den Seiten AB $= a$ und BC $= b$ um eine AB parallele Gerade G, ſo wird ein Hohlzylinder beſchrieben. Iſt AB von G um r_1 und CD von G um r_2 entfernt, ſo iſt der Rauminhalt des Hohlzylinders gleich

$$\pi a(r_1{}^2 - r_2{}^2) = \pi a(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)$$

$= 2\pi ab \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}$. Da aber der Schnittpunkt der Diagonalen der Schwerpunkt des Rechtecks und ſeine Entfernung ϱ von G gleich $\frac{r_1 + r_2}{2}$ iſt, ſo wird der Rauminhalt des Hohlzylinders gleich $2\pi\varrho \cdot ab$ oder $2\pi\varrho J$, d. h. gleich dem Produkt aus dem Inhalt des Rechtecks und dem Wege, den ſein Schwerpunkt zurückgelegt hat.

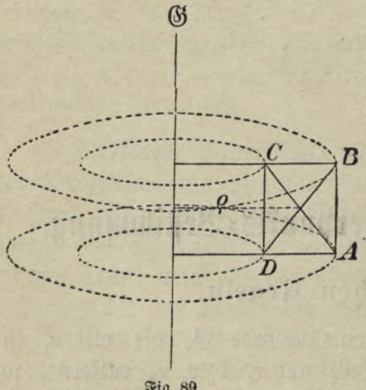


Fig. 89.

Schließen ſich n Rechtecke mit je einer G parallelen Seite aneinander, ſo iſt der Rauminhalt des entſtehenden Drehungskörpers

$$V = 2\pi\,(\varrho_1 J_1 + \varrho_2 J_2 + \cdots + \varrho_n J_n),$$

und da auch

$$\varrho_1 J_1 + \varrho_2 J_2 + \cdots + \varrho_n J_n = \varrho J$$

iſt, wo J den Inhalt der n Rechtecke und ϱ die Entfernung ihres Schwerpunktes von G bezeichnet, ſo folgt:

$$V = 2\pi\varrho J.$$

Eine jede ebene Fläche kann aber als eine Summe von Rechtecken, die am Rande der Fläche unendlich klein ſein dürfen, angeſehen werden, und daher führt die Betrachtung zu

Lehrſatz 64. Zweite **Guldin**ſche Regel. Der Rauminhalt eines Drehungskörpers iſt gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt der erzeugenden Fläche und dem Wege, den ihr Schwerpunkt zurücklegt.

Nr. 27. Schwerpunkts-Beſtimmungen.

Die Guldinſchen Regeln können benutzt werden, um die Schwerpunkte von in einer Ebene liegenden Linien und ebenen Flächen zu beſtimmen.

a) Hat die erzeugende Linie die Länge l und die erzeugte Fläche die Größe F, ſo findet man die Entfernung ϱ des Schwerpunktes der Linie von der Drehungsachſe aus der Gleichung: $F = 2\pi\varrho \cdot l$.

Aufgabe 1. Den Schwerpunkt eines Halbkreiſes zu beſtimmen.

Aufl. Zunächſt weiß man, daß der geſuchte Schwerpunkt auf dem Radius liegen muß, der auf dem Durchmeſſer des Halbkreiſes ſenkrecht ſteht. Wird nun der Halbkreis um den Durchmeſſer gedreht, ſo beſchreibt er eine Kugelfläche. Iſt daher ϱ der Abſtand des Schwerpunktes von dem Durchmeſſer, ſo hat man nach Lehrſ. 63: $2\pi\varrho \cdot \pi r = 4\pi r^2$, und daraus folgt: $\varrho = \frac{2r}{\pi}\cdot$

Aufgabe 2. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu beſtimmen.

Aufl. Dreht man den Bogen b um einen ſeiner Durchmeſſer, ſo beſchreibt er eine Kappe. Iſt h die Projektion des Bogens auf die Drehungsachſe, ſo hat die Kappe die Fläche $F = 2\pi rh$. Man erhält daher für den Abſtand ϱ des Schwerpunktes von der Achſe die Gleichung: $2\pi\varrho \cdot b = 2\pi rh$, und aus dieſer ergibt ſich: $\varrho = \frac{h}{b}\cdot r$.

Der zweite Ort für den Schwerpunkt iſt der Radius, der den Bogen halbiert.

b) Hat die erzeugende Fläche die Größe F und der erzeugte Körper den Inhalt V, ſo findet man die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsachſe aus der Gleichung: $V = F \cdot 2\pi\varrho$.

Aufgabe 3. Den Schwerpunkt der Fläche eines Halbkreiſes zu beſtimmen.

Aufl. Der Drehungskörper iſt eine Kugel und hat den Inhalt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Da die Fläche des Halbkreiſes gleich $\frac{1}{2}\pi r^2$ iſt, ſo hat man:

$$2\pi\varrho \cdot \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{alſo:} \quad \varrho = \frac{4r}{3\pi}.$$

Über den zweiten Ort ſ. Aufl. zu Aufgabe 1.

Aufgabe 4. Den Schwerpunkt eines halben Kreisrings mit den Halbmeſſern r_1 und r_2 zu beſtimmen.

Aufgabe 5. Den Schwerpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks zu beſtimmen und zu beweiſen, daß er der Schnittpunkt der drei Mittellinien iſt.

Anl. z. Aufl. Drehe das Dreieck um jede ſeiner Katheten!

Aufgabe 6. Den Schwerpunkt eines Dreiecks zu beſtimmen und zu beweiſen, daß er der Schnittpunkt der drei Mittellinien iſt.

Anl. z. Aufl. Lege durch A die Parallele zu BC und durch B die Parallele zu AC und drehe das Dreieck um jede der beiden Parallelen!

Aufgabe 7. Den Schwerpunkt eines Trapezes zu beſtimmen.

Aufgabe 8. Den Schwerpunkt des Kreisausſchnitts zu beſtimmen, der in einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer r zu dem Bogen b gehört.

Aufl. Der erſte Ort iſt die Halbierungslinie des zugehörigen Mittelpunktswinkels. Der Drehungskörper iſt ein Kugelausſchnitt mit der Höhe h (ſ. Aufl. zu Aufgabe 2) und hat den Inhalt $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$. Da der Kreisausſchnitt die Fläche $F = \frac{1}{2}b \cdot r$ hat, ſo ergibt ſich die Gleichung: $2\pi\varrho \cdot \frac{1}{2}br = \frac{2}{3}\pi r^2 h$, und aus dieſer folgt: $\varrho = \frac{2hr}{3b}$.

Aufgabe 9. Den Schwerpunkt des Kreisabſchnitts zu beſtimmen, der in einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer r zu dem Bogen b gehört.

Aufl. Der entſtehende Hohlkörper iſt der Unterſchied zwiſchen einem Kugelabſchnitt mit der Höhe h und einem Kegel von gleicher Höhe, deſſen Grundfläche gleich $\pi h(2r - h)$ iſt. Der Hohlkörper hat daher den Inhalt

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) - \frac{\pi h^2}{3}(2r - h) \quad \text{oder} \quad V = \frac{\pi h^2 r}{3}.$$

Nun hat der Kreisabſchnitt die Fläche

$$F = \frac{1}{2}b \cdot r - \frac{1}{2}r \cdot \sqrt{h(2r - h)},$$

und daher beſteht die Gleichung:

$$2\pi\varrho \cdot \frac{1}{2}r[b - \sqrt{h(2r - h)}] = \frac{\pi h^2 r}{3}.$$

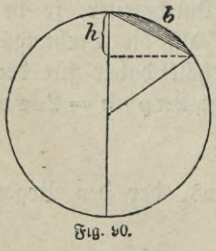


Fig. 60.

Aus dieſer aber folgt:

$$\varrho = \frac{h^2}{3[b - \sqrt{h(2r - h)}]}.$$

Aufgabe 10. Den Schwerpunkt des kleineren von den beiden Kreisabſchnitten zu beſtimmen, die bei einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer r zu der Sehne s gehören.

Anl. z. Aufl. Drehe den Abſchnitt um den Durchmeſſer, der parallel der Sehne s iſt!

Aufgabe 11. Den Schwerpunkt eines Teiles einer Kreisfläche zu beſtimmen, der durch

a) einen Durchmeſſer und eine dieſem parallele Sehne von der Länge s,
b) zwei auf derſelben Seite des Mittelpunktes liegende parallele Sehnen mit den Längen s_1 und s_2,
c) zwei auf verſchiedenen Seiten des Mittelpunktes liegende parallele Sehnen mit den Längen s_1 und s_2

begrenzt wird. (S. Anl. z. Aufl. bei Aufg. 10.)

Aufgabe 12. Den Schwerpunkt des größeren von den beiden Kreisabſchnitten zu beſtimmen, die bei einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer r zu der Sehne s gehören.

Aufgabe 13. Die Schwerpunkte der beiden Teile zu beſtimmen, in welche die Fläche der Aufgabe 11a) durch das Lot von dem Mittelpunkte auf die Sehnen zerlegt wird.

c) Die Guldinſchen Regeln können auch zur Inhaltsbeſtimmung benutzt werden, falls man ϱ kennt oder auf einem anderen Wege ermitteln kann.

Aufgabe 14. Die Oberfläche eines Ringes zu beſtimmen.

Aufl. Ein Ring wird durch einen Kreis erzeugt, wenn dieſer ſich um eine Gerade ſeiner Ebene dreht und die Gerade den Kreis nicht ſchneidet Der Schwerpunkt des Kreiſes iſt ſein Mittelpunkt. Hat dieſer von der Drehungsachſe den Abſtand ϱ, ſo hat der Ring die Oberfläche

$$O = 2\pi\varrho \; 2\pi r = 4\pi^2 r \cdot \varrho.$$

Wendet man den Lehrſ. 64 an, ſo erhält man für den Rauminhalt V des Ringes:

$$V = 2\pi\varrho \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 \cdot \varrho.$$

Aufgabe 15. Eine von zwei Bogen zweier Kreiſe mit den Halbmeſſern r_1 und r_2 begrenzte Fläche wird um eine Gerade gedreht, die der gemeinſamen Sehne parallel iſt und von ihr den Abſtand d hat. Wie groß iſt der Rauminhalt des erzeugten Körpers, wenn die beiden Bogen a) auf derſelben Seite, b) auf verſchiedenen Seiten der gemeinſamen Sehne liegen?

Vgl. Aufgabe 10.

Anhang I.

Kapital-, Lebens- und Rentenverſicherung nach der Berechnungsweiſe der Verſicherungsgeſellſchaften.

A. Einleitung.

Bei der in den Schulen üblichen Behandlung des Verſicherungsweſens, wie ſie auf Seite 68 und 69 angegeben iſt, erſcheinen die Verſicherungsgeſellſchaften als Banken, welche die Einlage(n) des einzelnen Verſicherten verzinſen und am Schluß der Verſicherungszeit das angewachſene Kapital zurückzahlen.*) Jeder Verſicherte erhält die ausbedungene Summe, und es wird angenommen, daß jeder Verſicherte das Lebensalter erreicht, das der Berechnung zugrunde gelegt worden iſt. Dieſe Auffaſſung entſpricht in keiner Weiſe den tatſächlichen Verhältniſſen; keine Geſellſchaft und keine Kaſſe dürfte ſo rechnen, ohne ein Riſiko zu übernehmen, das nicht getragen werden könnte, und Prämien verlangen zu müſſen, die niemand zahlen würde.

In Wirklichkeit werden die Verſicherungen jeder Art als Verträge auf Gegenſeitigkeit zwiſchen einer (feſtgeſetzten großen) Anzahl von Perſonen behandelt; die Kaſſen (Verſicherungsgeſellſchaften) erſcheinen als Verwalter des aus den Beiträgen (Prämien) gebildeten gemeinſchaftlichen Vermögens und begleichen aus dieſem die im Laufe der Zeit eintretenden Verpflichtungen, welche beim Abſchluß der Verſicherung vereinbart worden ſind. Sieht man von den Verwaltungskoſten ab, ſo werden die Beiträge ſo bemeſſen, daß am Tage des Verſicherungsabſchluſſes der Wert aller von den Verſicherten vorausſichtlich zu zahlenden Beiträge (die **Geſamtleiſtung der Verſicherten**) gleich dem Werte aller Leiſtungen (der **Gegenleiſtung der Kaſſe**) iſt, welche der Kaſſe vorausſichtlich bevorſtehen. Für die Verwaltungskoſten aber tritt eine angemeſſene prozentuale Erhöhung der Beiträge ein.

Man unterſcheidet demnach zwiſchen den rechnungsmäßigen Beiträgen, den Nettoprämien, und den Bruttoprämien, die von den Verſicherten in Wirklichkeit zu entrichten ſind. — Auf die Berechnung der Bruttoprämien ſoll hier nicht eingegangen werden.

---

*) Auch Weber hat in ſeiner Enzyklopädie der elementaren Algebra und Analyſis (Leipzig, B. G. Teubner) den Gegenſtand in der üblichen ſchulgemäßen Form beſprochen.

B. Sterbetafeln.

Die Berechnung der Kaſſen (Geſellſchaften) ſtützt ſich auf ſogenannte Sterbetafeln.

Bezeichnen l und l' je eine Anzahl von Perſonen, welche am Anfang eines Jahres (Lebensjahres oder anderen Jahres) leben, und d und d′ die Anzahl der von dieſen im Laufe des Jahres Sterbenden, ſo gelten bei den beiden Perſonengruppen $\frac{d}{l}$ und $\frac{d'}{l'}$ als *Maß der Sterblichkeit* während des Jahres. Die Werte von $\frac{d}{l}$ und $\frac{d'}{l'}$ können je nach den Umſtänden, unter denen die verſchiedenen Perſonen leben, insbeſondere je nach Alter, Geſchlecht, Berufstätigkeit, Klima u. dgl. ſehr verſchieden ſein. Sind aber l und l' große Zahlen und beide Gruppen *gleichaltrig*, und herrſcht auch in den ſonſtigen Lebensbedingungen annähernde Übereinſtimmung zwiſchen ihnen, ſo iſt erfahrungsmäßig $\frac{d}{l}$ von $\frac{d'}{l'}$ nur wenig verſchieden; man kann alſo annähernd $d' = \frac{d}{l} \cdot l'$ ſetzen und die Anzahl der Sterbefälle bei der einen Gruppe nach der in der anderen beobachteten Sterblichkeit vorausberechnen. Man nennt deshalb $\frac{d}{l}$ die *Sterbens-*, alſo $\frac{l-d}{l}$ die *Lebenswahrſcheinlichkeit* der Gruppen für das betreffende Alter.

Die Lebens- und Sterbenswahrſcheinlichkeiten für weitere Altersſtufen laſſen ſich entweder in gleicher Weiſe durch mehrjährige Beobachtung einer Perſonengruppe oder auch durch einjährige Beobachtung mehrerer verſchiedenaltriger Gruppen ermitteln, wofern nur die ſonſtigen Lebensbedingungen bei allen Gruppen übereinſtimmen.

Die Werte der Sterbenswahrſcheinlichkeiten nehmen bis zum Lebensalter 13 beſtändig ab und ſteigen von da erſt langſam und ſpäter ſchneller, bis ſie mit dem 100ten (oder einem in der Nähe liegenden) Lebensjahre den Wert 1 erreichen; von da ab iſt die Lebenswahrſcheinlichkeit alſo gleich 0.

Die Darſtellung des ganzen Verlaufs der Sterblichkeit einer beſtimmten Perſonengruppe von einem niedrigſten Alter m bis zu einem höchſten Alter n nennt man eine **Sterblichkeitstafel.** In ihrer einfachſten Form iſt die Tafel nur eine Zuſammenſtellung der beobachteten Sterbenswahrſcheinlichkeiten; handlicher aber wird die Tafel, wenn man mit Hilfe der Lebenswahrſcheinlichkeiten berechnet, wie viele von einer (beliebig gewählten) Anzahl Perſonen l_m des Alters m das Alter m + 1, wie viele von dieſen das Alter m + 2, wie viele von den Überlebenden das Alter m + 3, uſw. erleben, und die gefundenen Zahlen überſichtlich anordnet. Die Differenz $l_x - l_{x+1}$ gibt dann die Anzahl d_x der Perſonen an, die aus der Gruppe im Alter x ſterben. Man bezeichnet eine derartige Tafel auch als eine *Abſterbeordnung*.

Für die Einführung in die Verſicherungstechnik iſt es gleichgültig, welche Tafel verwandt wird. Die Zahlen*), die wir hier gelegentlich benutzen wollen, ſind aus der Sterbetafel genommen, die für ärztlich nicht unterſuchte Perſonen aus den Erfahrungen der deutſchen Verſicherungsgeſellſchaften gewonnen worden iſt. Die Zählung geht in dieſer Tafel von 100000 Perſonen aus, welche das 20. Lebensjahr bereits beendet haben, alſo im Alter 20 ſtehen, und gibt der Reihe nach an, wie viele von dieſen das Alter 21, 22, 23 uſw. erreichen. Nach der Tafel

	20	21	22	23	24	
ſtehen z. B. im Alter	100000	98981	97954	96924	95909	Perſonen
und ſterben = =	1019	1027	1030	1015		=

C. Arten der Verſicherung.

Eine Verſicherung kann auf den Lebensfall (beſſer: Erlebensfall) oder auf den Todesfall abgeſchloſſen ſein. Im erſten Falle gelangt die ausbedungene Summe nur dann an den Verſicherten, wenn er das vereinbarte Alter erreicht hat **(Kapitalverſicherung)** oder die feſtgeſetzten Zahlungstermine erlebt **(Rentenverſicherung)**; im zweiten Falle iſt die Verſicherung zugunſten der Erben abgeſchloſſen, und die Verſicherung wird dieſen nach dem Tode des Verſicherten ausgezahlt **(Lebensverſicherung)**. Häufig werden auch Verſicherungen auf den Todesfall mit dem Zuſatz abgeſchloſſen, daß die Summe an den Verſicherten ſelbſt auszuzahlen iſt, wenn er ein vereinbartes Alter erreicht hat; es liegen dann zwei Verſicherungen vor, und zwar eine Kapitalverſicherung und eine Verſicherung auf den Todesfall, bei der die Dauer der Prämienzahlung beſchränkt iſt.

D. Einmalige Prämie bei einer Kapitalverſicherung.

Die Berechnung der Prämie erfolgt für jedes Eintrittsalter beſonders und unter der Annahme, daß die Verſicherung gleichzeitig von ſo viel Perſonen abgeſchloſſen wird, wie die Abſterbeordnung Lebende des betr. Alters aufweiſt. Wenn aber l_n Perſonen eine Verſicherung auf 1 ℳ für den Fall abſchließen, daß ſie nach m Jahren noch am Leben ſind, ſo hat die Geſellſchaft nach m Jahren an l_{n+m} Überlebende im ganzen l_{n+m} ℳ zu zahlen. Bezeichnet man in gewohnter Weiſe den Aufzinſungsfaktor $1+\frac{p}{100}$ mit q, ſo hat dieſer Betrag am Tage des Verſicherungsabſchluſſes den Wert $\frac{l_{n+m}}{q^m}$ ℳ, und da an dieſem Tage die Geſamtleiſtung der Verſicherten gleich der Gegenleiſtung der Geſellſchaft ſein muß, ſo hat jeder der l_n Verſicherten als einmalige (Netto-)

---

*) Die zu dieſem Abſchnitt nötigen Tafeln ſind in Teil II, Ausgabe B der Müller und Kutnewskyſchen Aufgabenſammlung mit abgedruckt.

Prämie $\frac{l_{n+m}}{l_n \cdot q^m}$ ℳ zu entrichten. Da $\frac{l_{n+m}}{l_n \cdot q^m} = \frac{l_{n+m}}{q^{n+m}} : \frac{l_n}{q^n}$ iſt, ſo folgt, wenn man den Quotienten $\frac{l_x}{q^x}$ mit D_x bezeichnet, daß die einmalige Prämie für 1 ℳ gleich $\frac{D_{n+m}}{D_n}$ ℳ iſt.

D_x gibt den Wert von l_x ℳ am Geburtsdatum eines x-jährigen an und heißt deshalb diskontierte Zahl der Lebenden des Alters x.

Lautet die Verſicherung auf a ℳ, ſo iſt dies gleichbedeutend mit a Verſicherungen auf 1 ℳ, und die Prämie iſt das a-fache der für 1 ℳ berechneten Prämie. Somit ergibt ſich:

Eine Perſon im Alter n hat für eine nach m Jahren auszuzahlende Summe von a ℳ als einmalige (Netto-)Prämie in ℳ den Betrag

$$\text{I.} \qquad \mathbf{a} \cdot {}_m\mathbf{E}_n = \frac{\mathbf{D}_{n+m}}{\mathbf{D}_n} \cdot \mathbf{a}$$

zu entrichten.

Durch Hinzufügung des Aufſchlags für Verwaltungskoſten entſteht hieraus die von dem Verſicherten zu entrichtende Bruttoprämie.

Anmerkungen. 1. Die Ableitung zeigt, daß die Prämie von dem Zinsfuß abhängt. Die meiſten Geſellſchaften legen ihren Berechnungen $3\frac{1}{2}$ % zugrunde.

2. Um die zeitraubende Berechnung der Quotienten D nicht in jedem einzelnen Falle ausführen zu müſſen, hat man für den Normalzinsfuß $3\frac{1}{2}$ % eine Tabelle aufgeſtellt, welche D_x für die Jahre 0 bis 100 enthält.

E. Einmalige Prämie für die Verſicherung einer Leibrente.

Werden von einem Verſicherten gleichzeitig t Verſicherungen abgeſchloſſen, nach denen ihm nach n Jahren, d. h. beim Beginn des $(n+1)^{\text{ten}}$ Jahres 1 ℳ, nach n + 1 Jahren wieder 1 ℳ, nach n + 2 Jahren wiederum 1 ℳ, uſw. auszuzahlen iſt, und ſteht er beim Abſchluß der Verſicherung im Alter x, ſo beträgt nach Gl. I. die Geſamtprämie E in ℳ

$${}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{n+2}E_x + {}_{n+3}E_x + \cdots + {}_{n+t-1}E_x$$

oder

$$\frac{D_{x+n} + D_{x+n+1} + D_{x+n+2} + D_{x+n+3} + \cdots + D_{x+n+t-1}}{D_x}$$

$$\left(= \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{D_{x+n+\lambda}}{D_x}\right).$$

Die t Kapitalzahlungen von 1 ℳ ſtellen in dem angegebenen Falle eine jährliche vorſchüſſige Leibrente von 1 ℳ dar, die nach n Jahren beginnt und höchſtens t mal auszuzahlen iſt. Treten die Zahlungen erſt am Ende des Jahres ein (nachſchüſſige Rente), ſo iſt dies für die Rechnung dasſelbe, wie wenn die Rente eine vorſchüſſige iſt, die nach n + 1 Jahren beginnt. Erliſcht die Rente erſt beim Tode des Verſicherten, ſo iſt in beiden Fällen t durch 100 − x zu erſetzen. Somit folgt:

II. Die einmalige Prämie für eine im Alter x abgeſchloſſene Verſicherung einer Leibrente von 1 ℳ, die nach n Jahren beginnt und

beim Beginn jedes Jahres	tmal	auszuzahlen iſt, beträgt	$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} D_{x+n+\lambda}$ ℳ
	lebenslänglich	= = =	$\frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\lambda=0}^{100-x-n} D_{x+n+\lambda}$ ℳ
am Ende jedes Jahres	tmal	= = =	$\frac{1}{D_x} \sum_{\lambda=1}^{t} D_{x+n+\lambda}$ ℳ
	lebenslänglich	= = =	$\frac{1}{D_x} \sum_{\lambda=1}^{100-x-n} D_{x+n+\lambda}$ ℳ.

Beginnt die Rente mit dem erſten Jahre, ſo iſt $n = 0$ zu ſetzen.

Anmerkung. Um nicht in jedem einzelnen Falle die Summe ΣD ausrechnen zu müſſen, hat man auch hier eine Tabelle aufgeſtellt, in der die Summen bis zum Alter 100 verzeichnet ſind.

F. Jährliche Prämienzahlung bei Verſicherungen auf den Lebensfall.

Sollen ſtatt der einmaligen Prämie jährliche Prämien (die ſtets vorſchüſſig ſind) gezahlt werden, ſo muß infolge der Gleichwertigkeit von Leiſtung und Gegenleiſtung auch Gleichwertigkeit für die verſchiedenen Prämienzahlungsarten unter ſich vorliegen; es muß alſo der für den Zeitpunkt des Verſicherungsabſchluſſes berechnete Wert der jährlichen Prämienzahlung gleich der einmaligen Prämie ſein. Schließen aber l_x Perſonen eine Verſicherung ab, für die eine Jahresprämie von 1 ℳ mmal*) zu zahlen iſt, ſo hat die Geſellſchaft die Beiträge $\sum_{\lambda=0}^{m-1} l_{x+\lambda}$ ℳ zu erwarten, und deren Barwerte betragen

$$l_x + \frac{l_{x+1}}{q} + \frac{l_{x+2}}{q^2} + \frac{l_{x+3}}{q^3} + \cdots + \frac{l_{x+m-1}}{q^{m-1}} \mathcal{M} \quad \text{oder} \quad \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{l_{x+\lambda}}{q^\lambda} \mathcal{M}.$$

Hiervon entfällt auf jeden Verſicherten der l_x^{te} Teil, alſo der Betrag $\sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{D_{x+\lambda}}{D_x}$ ℳ. Somit erweiſen ſich die Jahresprämien als eine von dem Verſicherten an die Verſicherungsgeſellſchaft zu zahlende und ſofort beginnende Leibrente für längſtens m Jahre.

---

*) m darf höchſtens gleich n ſein, da die Leiſtung des Verſicherten beendet ſein muß, ehe eine Leiſtung der Geſellſchaft eintreten kann, wenn nicht deren Sicherheit gefährdet werden ſoll.

Bezeichnet man demnach mit Z_x den Barwert der Kaſſenleiſtungen für einen Verſicherten des Alters x und mit ${}_mP_x$ die Jahresprämie, ſo hat man:

$$\text{III.} \qquad Z_x = {}_mP_x \cdot \sum_{\lambda=0}^{m-1} \frac{D_{x+\lambda}}{D_x}\,\mathcal{M}$$

Hieraus läßt ſich ${}_mP_x$ berechnen.

G. Verſicherung auf den Todesfall.

Bei einer Verſicherung auf den Todesfall muß im Gegenſatz zu der Kapitalverſicherung auf den Lebensfall die Verſicherungsſumme jedenfalls einmal gezahlt werden. Haben l_x Perſonen eine Verſicherung von 1 ℳ Sterbegeld abgeſchloſſen, ſo ſtehen der Verſicherungsgeſellſchaft im erſten Jahre d_x ℳ, im zweiten Jahre d_{x+1} ℳ, im dritten Jahre d_{x+2} ℳ, uſw. Kaſſenleiſtungen bevor. In der allgemein üblichen Annahme, daß die Sterbegelder gemeinſchaftlich am Schluſſe des Sterbejahres bezahlt werden, betragen die Barwerte dieſer Leiſtungen zuſammen

$$\frac{d_x}{q} + \frac{d_{x+1}}{q^2} + \frac{d_{x+2}}{q^3} + \frac{d_{x+3}}{q^4} + \cdots \mathcal{M}.$$

Der Barwert oder die **einmalige** Prämie für die Verſicherungsſumme 1 ℳ beträgt daher für jeden einzelnen Verſicherten

$$\frac{1}{l_x}\left(\frac{d_x}{q} + \frac{d_{x+1}}{q^2} + \frac{d_{x+2}}{q^3} + \frac{d_{x+3}}{q^4} + \cdots\right)\mathcal{M}.$$

Erweitert man mit $\frac{1}{q^x}$, ſo erhält man

$$\frac{1}{\frac{l_x}{q_x}}\left(\frac{d_x}{q^{x+1}} + \frac{d_{x+1}}{q^{x+2}} + \frac{d_{x+2}}{q^{x+3}} + \frac{d_{x+3}}{q^{x+4}} + \cdots\right)\mathcal{M}.$$

Nun gibt der Bruch $\frac{d_x}{q^{x+1}}$ den Wert von d_x ℳ am Geburtsdatum eines x-jährigen an, und wird deshalb diskontierte Zahl der Toten des Alters x genannt. Bezeichnet man ihn mit C_x, ſo nimmt der vorſtehende Ausdruck die Form an:

$$\text{IV.} \qquad \frac{1}{D_x}(C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \cdots)\,\mathcal{M} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{D_x} \cdot \sum_{\lambda=x}^{100} C_\lambda\,\mathcal{M}.$$

Die Berechnung der Jahresprämien erfolgt nach Abſatz F.

Anmerkung. Zur Vereinfachung der Rechnung hat man auch für C_x und $\sum_x^{100} C_\lambda$ bei $3\frac{1}{2}$ % Tabellen aufgeſtellt.

H. Deckungskapital (Prämienreſerve).

Wollten l_x Perſonen eine Verſicherung auf den Todesfall in der Weiſe eingehen, daß dieſe immer für 1 Jahr beſtehen und beim Beginn eines jeden folgenden Jahres auf ein weiteres Jahr erneuert werden ſollte, ſo hätte ein Verſicherter für die Verſicherungsſumme 1 ℳ der Reihe nach die (Einmal-) Prämien

$$p_{x+k} = \frac{d_{x+k}}{q \cdot l_{x+k}} \quad \text{für } x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \text{uſw.}$$

zu entrichten. Berechnet man dieſe für das Alter 20 beim Beginn der Verſicherung, ſo ſtellt ſich heraus, daß die Einmalprämien bis zum Alter 47 kleiner als die gleichmäßige Jahresprämie ſind, von dann ab aber über dieſe hinausgehen. Für jedes Eintrittsalter gibt es ganz entſprechend zwei Zeitabſchnitte derart, daß in dem erſten die gleichmäßige Prämie größer als die Einmalprämie iſt, während ſie in dem zweiten hinter dieſer zurückbleibt. In dem erſten Zeitabſchnitt nimmt alſo die Verſicherungsgeſellſchaft jährlich an Prämien mehr ein, als ihre Kaſſenleiſtungen betragen, während in dem zweiten die Einnahmen aus den Prämien nicht ausreichen, um die eintretenden Verpflichtungen zu beſtreiten. Die Mehreinnahme in dem erſten Zeitabſchnitt muß daher von der Geſellſchaft zurückgelegt werden, damit den Anſprüchen an die Kaſſe in dem zweiten genügt werden kann. Den Wert dieſer zurückgelegten Beträge am Ende des n^{ten} Verſicherungsjahres bezeichnet man als das **Deckungskapital** (die Prämienreſerve) nach n Jahren.

Bei der Beſtimmung des Anteils, der von dem Deckungskapital auf den einzelnen Verſicherten entfällt, kommen naturgemäß nur die Überlebenden in Betracht. So ſind an der Mehreinnahme des erſten Geſchäftsjahres nur l_{x+1}, an der des zweiten nur l_{x+2}, an der des dritten nur l_{x+3} Perſonen uſw. beteiligt. Man könnte alſo von Jahr zu Jahr fortſchreitend den auf einen Verſicherten fallenden Teil des Deckungskapitals berechnen, indem man am Ende eines jeden Geſchäftsjahres den Endwert der Summe aus allen beim Beginn des Jahres gezahlten Prämien und dem vorhandenen Deckungskapital bildet, von dieſem die Leiſtungen der Kaſſe abzieht und den Reſt durch die Anzahl der Überlebenden dividiert; denn das für die Geſtorbenen zurückgelegte Deckungskapital kommt den Überlebenden gleichfalls zu. Allein dieſe zwar durchſichtige, aber recht umſtändliche Berechnungsweiſe läßt ſich durch ein weit einfacheres Verfahren erſetzen.

Die Jahresprämie P_x für die Verſicherungsſumme 1 ℳ muß ſo bemeſſen ſein, daß beim Beginn eines jeden Geſchäftsjahres die Summe aus dem Deckungskapital und dem Zeitwert aller von den Verſicherten noch zu erwartenden Prämien dem Zeitwert der noch bevorſtehenden Kaſſenleiſtungen gleich iſt. Nun ſind am Ende des n^{ten} Geſchäftsjahres noch l_{x+n} Überlebende vorhanden; für den einzelnen Verſicherten beträgt alſo der Zeitwert

1. der von ihm noch zu erwartenden Prämien $P_x \frac{\sum D_{x+n+\lambda}}{D_{x+n}}$,
2. der Verſicherungsſumme 1 ℳ $\frac{\sum C_{x+n+\lambda}}{D_{x+n}}$,

und ſomit kommt auf ihn am Ende des n^{ten} Geſchäftsjahres für die Verſicherungsſumme 1 ℳ das Deckungskapital

V. $$R_{x+n} = \frac{\sum C_{x+n+\lambda} - P_x \cdot \sum D_{x+n+\lambda}}{D_{x+n}}.$$

In entſprechender Weiſe läßt ſich für jede Verſicherungsart das Deckungskapital angeben. Man ſtellt feſt, um wieviel für den in Betracht kommenden Zeitpunkt der Zeitwert der noch zu erwartenden Beiträge hinter dem Zeitwert der Kaſſenleiſtungen zurückbleibt. Die Berechnung des Jahresbeitrags muß ſelbſtverſtändlich dieſer Rechnung vorausgehen.

I. Schlußbemerkungen.

a) Es liegt in der Natur der Sache, daß ein Geſunder ſich eher zu einer Verſicherung auf den Lebensfall und ein Kranker ſich leichter zu einer Verſicherung auf den Todesfall entſchließen wird. Man darf ſich daher nicht darüber wundern, daß die Geſellſchaften bei den beiden Verſicherungsarten verſchiedene Abſterbeordnungen benutzen und in jedem einzelnen Falle diejenige Sterbetafel wählen, die für ſie am günſtigſten iſt.

b) Die berechneten Prämienſätze ſind Durchſchnittswerte und bieten den Geſellſchaften oder Kaſſen nur bei zahlreichen Verſicherungsabſchlüſſen eine hinreichende Sicherheit. Auch aus dieſem Grunde wird der Verſicherer die für ihn günſtigſte Abſterbeordnung wählen, um ſein Riſiko zu vermindern.

c) Es wird daher häufig der Fall eintreten, daß der berechnete Jahresbedarf von dem wirklichen nicht erreicht wird. Die Differenz bildet dann einen Gewinn des Verſicherers (**Gewinn aus Unterſterblichkeit**).

Ferner liegt den Berechnungen der Zinsfuß $3\frac{1}{2}$ % zugrunde; es wird ſich aber ſelbſt bei der vorgeſchriebenen mündelſicheren Anlage der Kapitalien eine höhere Verzinſung erzielen laſſen, und da es ſich um ſehr große Beträge handelt, bei denen eine geringe Erhöhung des Zinsfußes ſchon beträchtliche Zinsüberſchüſſe liefert, ſo erwächſt dem Verſicherer aus der Anlage der Kapitalien ein Gewinn, der um ſo größer ausfällt, je günſtiger für ihn der Geldmarkt iſt (**Gewinn aus Zinsüberſchuß**).

Schließlich kommt es gar nicht ſelten vor, daß ein Verſicherter aus irgendeinem Grunde die Prämien nicht weiter zahlt; ſeine Police verfällt dann, und ſein Anteil an dem Geſamtvermögen (der Prämienreſerve) geht in das Eigentum des Verſicherers über (**Gewinn aus verfallenen Policen**).

d) Bei den Kaſſen, wie bei der Magdeburgiſchen Sterbekaſſe akademiſch gebildeter Lehrer, kommt der Gewinn (faſt ganz) in einem Abzug bei der nächſten Prämienzahlung (Dividende) den Verſicherten wieder zugute. Aber auch die Geſellſchaften verteilen vielfach Dividenden, um ſich dem Publikum zu empfehlen; ihr Nettogewinn, der an die Inhaber der Geſellſchaften (die Aktionäre) verteilt wird, iſt demungeachtet in den meiſten Geſchäftsjahren nicht unbeträchtlich.

Anmerkung. Der Lehrer möge es nicht verſäumen, auf die große ſoziale Bedeutung des Verſicherungsweſens hinzuweiſen und den Blick des Schülers auf die ſtaatlichen Verſicherungen zu lenken, die in Deutſchland mehr als in irgendeinem anderen Lande dem Arbeiter eine pekuniäre Sicherheit nicht nur für ſein Alter, ſondern auch gegen die Gefahren ſeines Berufes gewähren.

Anhang II.

Einführung in die Differential- und Integralrechnung.

Nr. 1. Zu- und Abnahme einer Funktion. Einführung des Differentialquotienten.

Um beurteilen zu können, ob die Funktion f(x) von der Stelle $x = a$ aus zu- oder abnimmt, müßte man die Werte der Funktion für $x = a$ und für $x = a + h$ berechnen, wo h eine im Verhältnis zu a ſehr kleine poſitive Größe bezeichnet. Iſt die Funktion nicht eine algebraiſche Funktion von einfachem Aufbau oder eine andere der Berechnung leicht zugängige Funktion, ſo kann die Arbeit recht viel Zeit beanſpruchen. Hat man die Funktion f(x) graphiſch dargeſtellt, ſo kann man ihren Verlauf allerdings bequem verfolgen und nicht nur die aufgeworfene Frage nach ihrem Verhalten von der Stelle $x = a$ aus leicht beantworten, ſondern auch der Figur die ungefähren Werte der Veränderlichen entnehmen, für welche die Funktion den Wert 0 oder einen Grenzwert annimmt, allein auch die graphiſche Darſtellung ſetzt im allgemeinen eine größere Menge rechneriſcher Arbeit voraus. Es empfiehlt ſich daher, ein weniger zeitraubendes Verfahren abzuleiten. Wir wollen uns dabei aber auf die Betrachtung ſolcher Funktionen beſchränken, die entweder in ihrem ganzen Verlauf (wie z. B. sin x, cos x und ſämtliche ganzen rationalen Funktionen) oder doch innerhalb bekannter Bereiche der Veränderlichen (wie z. B. tg x und ctg x) ſtetig ſind. (Vgl. Seite 92, oben.)

a) Bei einer ſtetigen Funktion $y = f(x)$ hat die Vergrößerung der Veränderlichen x um ein (zwar ſehr kleines aber doch endliches) Stück $\varDelta x$ eine beſtimmte Veränderung $\varDelta y$ von y zur Folge, und der Differenzenquotient

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}$$

gibt das Verhältnis an, in welchem an der Stelle x die Veränderung der Funktion zu der Zunahme der Veränderlichen ſteht.

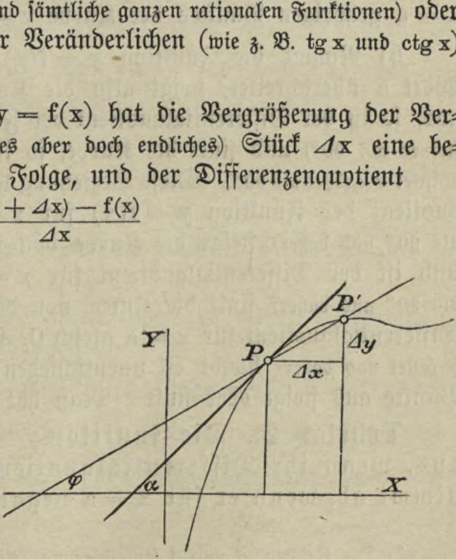


Fig. 91.

Dieſer Differentialquotient hat eine einfache geometriſche Bedeutung. Sind x, y und $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$ die Koordinaten zweier Punkte der Kurve, durch welche die Funktion $y = f(x)$ graphiſch dargeſtellt wird, und bezeichnet man den

Winkel der Sekante PP' und der (poſitiven Richtung der) X-Achſe mit φ, ſo erkennt man, daß der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gleich $\operatorname{tg} \varphi$ iſt, d. h.

Der Differenzenquotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ iſt gleich der trigonometriſchen Tangente des Winkels, den die Sekante PP' mit der X-Achſe bildet.

Wird nun die Sekante PP' um den Punkt P gedreht, bis ſie in die Tangente des Punktes P übergeht, d. h. bis P' dem Punkte P unendlich benachbart wird, ſo werden die Differenzen Δx und Δy unendlich klein, und der Winkel φ geht in den Winkel α der Tangente des Punktes P und der X-Achſe über. Bezeichnet man an der Grenze die unendlich kleinen Wertveränderungen mit dx und dy*), nennt ſie nicht mehr Differenzen, ſondern Differentiale, und führt den Begriff des Differentialquotienten der Funktion y nach x ein durch die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

ſo erhält man den Satz:

Lehrſatz 1. Der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $y = f(x)$ iſt gleich der trigonometriſchen Tangente des Winkels, den die geometriſche Tangente der Kurve $y = f(x)$ mit der (poſitiven Richtung der) X-Achſe bildet.

Folgerung. Der Wert des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ der Funktion $y = f(x)$ für $x = a$ iſt das Maß für die Steigung der Tangente des zu der Abſziſſe $x = a$ gehörigen Punktes der Kurve $y = f(x)$.

b) Nimmt die Funktion $y = f(x)$ zu, wenn die Veränderliche x den Wert a überſchreitet, ſteigt alſo die Kurve $y = f(x)$ von der Stelle $x = a$ aus, ſo iſt der Differentialquotient der Funktion für $x = a$ poſitiv (der Winkel α kleiner als 90°) und ſinkt die Kurve, ſo iſt der Differentialquotient negativ (der Winkel α größer als 90°). Dieſe Beziehung läßt ſich umkehren: Iſt der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ für $x = a$ poſitiv, ſo (iſt der Winkel α kleiner als 90° und daher) ſteigt die Kurve von dem zu $x = a$ gehörigen Punkte aus, und iſt der Differentialquotient für $x = a$ negativ, ſo (iſt der Winkel α größer als 90° und daher) ſinkt die Kurve von dieſem Punkte aus. Iſt ſchließlich der Differentialquotient für $x = a$ gleich 0, ſo (iſt die Tangente des Punktes der X-Achſe parallel und daher) bleibt es unentſchieden, ob die Kurve von dem zugehörigen Punkte aus ſteigt oder ſinkt. Man hat alſo den Satz:

Lehrſatz 2. Die Funktion $y = f(x)$ wächſt von der Stelle $x = a$ aus, wenn ihr Differentialquotient für $x = a$ poſitiv iſt, und ſie nimmt ab, wenn er für $x = a$ negativ iſt.

---

*) Die Zeichen Δ und d ſind hier natürlich keine Faktoren; obwohl ſie mit x und y in gleicher Höhe der Zeilen ſtehen, kommt ihnen doch nur die Bedeutung eines Index zu.

Zuſatz. Aus der Tatſache, daß der Differentialquotient der Funktion $y = f(x)$ für $x = a$ gleich 0 iſt, läßt ſich noch nicht entſcheiden, ob die Funktion von $x = a$ ab wächſt oder abnimmt.

c) Der Übergang der Sekante PP' in die Tangente des Punktes P kann erſt eintreten, wenn die Größe Δx den Wert 0 erreicht. Dieſer Übergang läßt ſich zwar an der Figur nicht beobachten, da unendlich benachbarte Punkte nicht gezeichnet (und auch nicht vorgeſtellt) werden können, aber bei der Rechnung iſt es (meiſtens) möglich, ihn mitzumachen. Hat man z. B. die ganze rationale Funktion

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

und vermehrt in in ihr die Veränderliche x um Δx, ſo erhält man:

$$y + \Delta y = a_0 + a_1(x + \Delta x) + a_2(x + \Delta x)^2 + a_3(x + \Delta x)^3 + \cdots + a_n(x + \Delta x)^n$$

Entwickelt man die Potenzen von $x + \Delta x$ und faßt die Glieder mit gleichhohen Potenzen von Δx zuſammen, ſo entſteht in der Summe der von x freien Glieder wieder die Funktion y, und daher fällt y aus der Gleichung fort. Auf der rechten Seite bleiben daher nur Glieder, die der Reihe nach die Faktoren Δx, $(\Delta x)^2$, $(\Delta x)^3, \cdots (\Delta x)^n$ haben. Dividiert man jetzt beide Seiten der Gleichung durch Δx, bildet man alſo den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, ſo erhält man rechts einen von Δx freien Ausdruck, der mit $f'(x)$ bezeichnet. wird, und weitere Glieder, die noch Potenzen von Δx zu Faktoren haben. Die mit dieſen Faktoren multiplizierten Summen nehmen für jeden endlichen Wert von x endliche Werte an, und daher werden alle noch mit Δx behafteten Glieder mit Δx zugleich gleich 0. Geht man alſo zur Grenze über, d. h. ſetzt man $\Delta x = 0$, ſo erhält man in $f'(x)$ den Grenzwert $\frac{dy}{dx}$ des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$.

d) In allen Fällen, in denen ſich dieſer Grenzübergang ausführen läßt, erhält man in $f'(x)$ wieder eine Funktion von x, d. h.

Lehrſatz 3. Der Differentialquotient einer Funktion von x iſt wieder eine Funktion von x.

Zuſatz 1. Der Differentialquotient wird auch als (erſte) Ableitung der Funktion bezeichnet. Vgl. Seite 92, oben.

Zuſatz 2. Statt der Gleichung $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ſchreibt man auch: $dy = f'(x)dx$.

Erklärung. Läßt ſich aus der Gleichung $y = f(x)$ für den Grenzwert $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x = 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ eine Funktion $f'(x)$ von x ableiten (und nimmt dieſe innerhalb eines beſtimmten Bereichs der Veränderlichen beſtimmte endliche Werte an), ſo ſagt man, die Funktion $f(x)$ kann (innerhalb dieſes Bereiches) nach x differenziert werden.

Nr. 2. Allgemeine Sätze über Differentialquotienten.

a) Iſt y eine Summe aus einer Funktion von x und einer konſtanten Größe c, iſt alſo $y = f(x) + c$, ſo hat man:

$$y + \varDelta y = f(x + \varDelta x) + c,$$

d. h. bei c tritt keine Veränderung ein. Man hat daher den Satz:

Lehrſatz 4. Der Differentialquotient einer additiven Konſtanten iſt gleich 0.

b) Iſt y gleich dem Produkt aus einer konſtanten Größe c und einer Funktion von x, iſt alſo $y = c \cdot f(x)$, ſo hat man:

$$\varDelta y = c \cdot f(x + \varDelta x) - c \cdot f(x) = c[f(x + \varDelta x) - f(x)]$$

und ſomit

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = c \cdot \frac{f(x + \varDelta x) - f(x)}{\varDelta x}.$$

Iſt f(x) eine Funktion, die differenziert werden kann, ſo folgt hieraus durch Übergang zur Grenze:

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot f'(x), \text{ d. h}$$

Lehrſatz 5. Ein konſtanter Faktor bleibt beim Differenzieren unverändert.

c) Sind g(x) und h(x) zwei Funktionen, die differenziert werden können ſo laſſen ſich auch ihre Summe bzw ihre Differenz, ihr Produkt und ihr Quotient differenzieren.

α) Iſt $y = g(x) + h(x)$, ſo hat man:

$$\begin{aligned} \varDelta y &= g(x + \varDelta x) + h(x + \varDelta x) - g(x) - h(x) \\ &= g(x + \varDelta x) - g(x) + h(x + \varDelta x) - h(x), \end{aligned}$$

alſo

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{g(x + \varDelta x) - g(x)}{\varDelta x} + \frac{h(x + \varDelta x) - h(x)}{\varDelta x},$$

und ſomit erhält man durch Übergang zur Grenze:

$$\frac{dy}{dx} = g'(x) + h'(x).$$

Ganz entſprechend ergibt ſich:

$$\frac{d}{dx}[g(x) - h(x)] = g'(x) - h'(x).$$

Man hat alſo den Satz:

Lehrſatz 6. Der Differentialquotient der **Summe** oder **Differenz** zweier Funktionen, die differenziert werden können, iſt gleich der Summe bzw. der Differenz der Differentialquotienten ihrer Glieder β) Iſt $y = g(x)\cdot h(x)$, ſo hat man:

$$\Delta y = g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x) - g(x)\cdot h(x)$$

$$= g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x) - g(x+\Delta x)\cdot h(x) - g(x)\cdot h(x) + g(x+\Delta x)\cdot h(x),$$

alſo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g(x+\Delta x)\ \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} + h(x)\ \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x},$$

und demnach erhält man durch Übergang zur Grenze:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)\cdot h'(x) + h(x)\cdot g'(x), \text{ d. h.}$$

Lehrſatz 7. Sind g(x) und h(x) zwei Funktionen, die differenziert werden können, ſo hat ihr **Produkt** den Differentialquotienten

$$\frac{d}{dx}[g(x)\cdot h(x)] = h(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot h'(x).$$

γ) Iſt $y = \frac{g(x)}{h(x)}$, ſo hat man:

$$\Delta y = \frac{g(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)} - \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{h(x)\cdot g(x+\Delta x) - g(x)\cdot h(x+\Delta x)}{h(x+\Delta x)\ h(x)}$$

$$= \frac{h(x)\cdot g(x+\Delta x) - h(x)\cdot g(x) - g(x)\cdot h(x+\Delta x) + g(x)\cdot h(x)}{h(x+\Delta x)\ h(x)}$$

alſo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{h(x+\Delta x)\cdot h(x)}\left[h(x)\cdot\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} - g(x)\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right],$$

und demnach erhält man durch Übergang zur Grenze:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h(x)\cdot h(x)}[h(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot h'(x)], \text{ d. h.}$$

Lehrſatz 8. Sind g(x) und h(x) zwei Funktionen, die differenziert werden können, ſo hat ihr **Quotient** $\frac{g(x)}{h(x)}$ den Differentialquotienten

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{h(x)}\right] = \frac{h(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot h'(x)}{[h(x)]^2}.$$

d) Iſt y eine Funktion einer veränderlichen Größe u, die ihrerſeits eine Funktion von x iſt, hat man alſo $y = g(u)$ und $u = h(x)$, und kann g(u) nach u bzw. h(x) nach x differenziert werden, ſo läßt ſich auch y nach x differenzieren. Denn aus der gemachten Annahme folgt zunächſt:

$$dy = \frac{d}{du}[g(u)]\cdot du,$$

und da aus dem gleichen Grunde

$$du = \frac{d}{dx}[h(x)]\cdot dx = \frac{du}{dx}\cdot dx$$

iſt, ſo ergibt ſich:

$$dy = \frac{d}{du}[g(u)]\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx, \quad \text{alſo:} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{du}[g(u)]\cdot\frac{du}{dx}.$$

Man hat alſo den Satz:

Lehrſatz 9. Iſt y eine differenzierbare Funktion von u und u eine differenzierbare Funktion von y, ſo iſt $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Nr. 3. Differentialquotienten algebraiſcher Funktionen.

a) Differentialquotient der Funktion $y = x^n$.

Entwickelt man die Potenzen $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ uſw. der Reihe nach in Summen, die nach fallenden Potenzen von a geordnet ſind, ſo erhalten die zweiten Glieder der Summen der Reihe nach die Koeffizienten 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 uſw. Hieraus kann der Schluß gezogen werden, daß die Entwicklung der Potenz $(a+b)^n$ mit den Gliedern a^n und $n \cdot a^{n-1}b$ beginnt, falls n eine poſitive ganze Zahl iſt. Iſt daher in der Funktionsgleichung $y = x^n$ der Exponent n eine poſitive ganze Zahl, ſo hat man:

$$\varDelta y = (x + \varDelta x)^n - x^n = n \cdot x^{n-1} \varDelta x + (\varDelta x)^2 \cdot \varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine ganze rationale Funktion von x bezeichnet, die für jeden endlichen Wert von x eine endliche Größe bleibt. Dividiert man durch $\varDelta x$ und geht dann zur Grenze über, ſo folgt: $\frac{dy}{dx} = n \cdot x^{n-1}$.

Iſt n eine negative ganze Zahl und gleich $-\nu$, ſo hat man: $y = \frac{1}{x^\nu}$, und da der Differentialquotient von x^ν gleich $\nu \cdot x^{\nu-1}$ iſt, ſo erhält man durch Anwendung des Lehrſatzes 8: $y' = \frac{-\nu \cdot x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu \cdot \frac{1}{x^{\nu+1}} = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$.

Erſetzt man nun $-\nu$ wieder durch n, ſo folgt: $y' = n \cdot x^{n-1}$.

Iſt ſchließlich n ein (poſitiver) Bruch und gleich $\frac{\mu}{\nu}$, ſo hat man: $y = x^{\frac{\mu}{\nu}}$, und hieraus folgt, wenn man zur νten Potenz übergeht,

$$u = y^\nu = x^\mu.$$

Differenziert man u nach y und auch nach x, ſo erhält man:

$$du = \nu \cdot y^{\nu-1} dy \quad \text{und} \quad du = \mu \cdot x^{\mu-1} dx,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu \cdot x^{\mu-1}}{\nu \cdot y^{\nu-1}} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{y \cdot x^\mu}{x \cdot y^\nu} = \frac{\mu}{\nu} \cdot \frac{y}{x}.$$

Erſetzt man jetzt $\frac{\mu}{\nu}$ wieder durch n und y durch x^n, ſo ergibt ſich auch hier: $y' = n \cdot x^{n-1}$.

Ganz entſprechend geſtaltet ſich die Rechnung, wenn n ein negativer Bruch iſt. Man hat daher die für alle reellen endlichen Werte von n gültige Formel

$$1. \qquad \mathbf{d(x^n) = n \cdot x^{n-1} dx.}$$

Über die Verwendung irrationaler Exponenten vgl. Abſchnitt II, Nr. 5.

b) Differentialquotienten rationaler Funktionen.

α) *Eine ganze rationale Funktion* von x kann ſtets durch eine Summe aus Potenzen von x mit einer endlichen Anzahl von Gliedern dargeſtellt werden. Iſt dieſe Entwicklung in eine Potenzreihe vollzogen, ſo bildet man nach der Formel 1 die Differentialquotienten der einzelnen Glieder und vereinigt ſie zu einer Summe. Da hierbei die Exponenten der einzelnen Potenzen um 1 kleiner werden, ſo folgt:

Der Differentialquotient einer ganzen rationalen Funktion vom Grade n iſt eine ganze rationale Funktion vom Grade n − 1.

Iſt die Funktion durch ein Produkt gegeben, ſo läßt ſich die Entwicklung in eine Summe umgehen, wenn man den Lehrſatz 6 anwendet.

β) Iſt y gleich der *nten Potenz einer ganzen rationalen Funktion* von x, ſo verfährt man unter Benutzung der Formel 1 nach Lehrſ. 9.

Beiſpiel. Es ſei

$$y = (5x^3 - 2x^2 + 7x - 9)^4.$$

Man hat hier:

$$\frac{dy}{du} = 4 \cdot (5x^3 - 2x^2 + 7x - 9)^3$$

und

$$\frac{du}{dx} = 15x^2 - 4x + 7,$$

alſo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 4(5x^3 - 2x^2 + 7x - 9)^3(15x^2 - 4x + 7), \text{ uſw.}$$

γ) Da man unter einer *gebrochenen rationalen Funktion* den Quotienten zweier ganzen rationalen Funktionen verſteht, bei dem die Diviſion nicht ausgeführt werden kann, ſo läßt ſich der Lehrſatz 8 benutzen. Die Differentialquotienten des Zählers und des Nenners werden nach Abſatz α) beſtimmt.

c) Differentialquotient einer Wurzel aus einer rationalen Funktion.

Iſt y gleich der nten Wurzel aus einer rationalen Funktion f(x), iſt alſo $y = \sqrt[n]{f(x)}$, ſo hat man: $u = f(x) = y^n$; man kann daher die Funktion u ſowohl nach x als auch nach y differenzieren. Aus den dabei entſtehenden Gleichungen

$$du = f'(x)dx \quad \text{und} \quad du = n \cdot y^{n-1}dy$$

ergibt ſich aber:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{n \cdot y^{n-1}} = \frac{t'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}, \text{ d. h.}$$

Lehrſatz 10. Iſt bei der Wurzel $\sqrt[n]{f(x)}$ der Exponent n eine (poſitive) ganze Zahl, und iſt f(x) eine rationale Funktion von x, ſo iſt

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt[n]{f(x)}\right] = \frac{f'(x)}{n \cdot \sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}}.$$

Insbeſondere iſt für die Quadratwurzel

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{f(x)}] = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Nr. 4. Differentialquotienten einiger tranſzendenten Funktionen.

a) Differentialquotienten der Winkelfunktionen.

Um die Ableitung einer Winkelfunktion bilden zu können, muß man zuerſt dafür Sorge tragen, daß die Funktion y und die Veränderliche x Größen derſelben Art ſind, weil ſonſt der Quotient $\frac{dy}{dx}$ keine Bedeutung beſitzt. Zu dem Zwecke nimmt man den Winkel als Mittelpunktswinkel in einem Kreiſe mit dem Halbmeſſer 1 an und mißt ihn durch den Bogen, zu dem er gehört. Die Winkelfunktionen treten dann gleichfalls als Längen auf.

Iſt aber x gleich dem Bogen AB nnd $\sin x = BC$ bzw. $\operatorname{tg} x = TA$, ſo hat man:

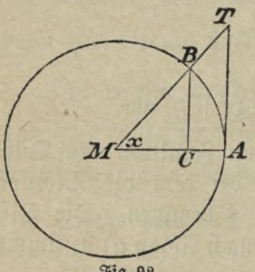


Fig. 92.

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,$$

alſo:

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

und daher:

$$\frac{\sin x}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$$

oder:

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Nimmt x bis zur Grenze 0 ab, ſo wächſt cos x bis zur oberen Grenze + 1, und daraus folgt:

Der Grenzwert des Quotienten $\frac{\sin x}{x}$ für $x = 0$ iſt gleich $+1$.*)

Iſt nun $y = \sin x$, ſo hat man: $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$

$$= 2 \sin \frac{1}{2} \Delta x \cos \frac{1}{2} (2x + \Delta x),$$

alſo:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \frac{1}{2} (2x + \Delta x) \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} \Delta x}{\frac{1}{2} \Delta x}.$$

Geht man jetzt zur Grenze über, ſo erhält man: $y' = \cos x$.

---

*) Die Ableitung dieſes Grenzwertes iſt hier für den Fall wiederholt, daß der Gegenſtand vor der Beſprechung der Reihen für sin x und cos x durchgenommen wird. S. Seite 124.

In gleicher Weiſe führt die Verwendung der Additionstheoreme auf die Herſtellung der Differentialquotienten der anderen Winkelfunktionen. Man findet:

1.
$$\mathbf{d(\sin x) = \cos x\,dx,}$$
$$\mathbf{d(\cos x) = -\sin x\,dx,}$$
$$\mathbf{d(tg\,x) = (1 + tg^2 x)\,dx = \frac{dx}{\cos^2 x},}$$
$$\mathbf{d(ctg\,x) = -(1 + ctg^2 x)\,dx = -\frac{dx}{\sin^2 x}.}$$

b) Differentialquotienten der Kreisfunktionen.

Vorbemerkung. Betrachtet man y als unabhängige Veränderliche, ſo hat man (ſ. Nr. 1) den Differenzenquotienten $\frac{\varDelta x}{\varDelta y}$ zu bilden und deſſen Grenzwert zu unterſuchen. Nun iſt dieſer Grenzwert gleich der trigonometriſchen Tangente des Winkels β, den die Tangente des Punktes P (ſ. Fig. 91) mit der poſitiven Richtung der Y-Achſe bildet; man hat alſo: $\frac{dx}{dy} = tg\,\beta$. Da aber das Koordinatenſyſtem rechtwinklig, alſo entweder die Summe $\alpha + \beta$ oder die Summe $(180^0 - \alpha) + (180^0 - \beta)$ gleich 90^0 iſt, ſo iſt $tg\,\beta = ctg\,\alpha$, alſo $tg\,\beta = \frac{1}{tg\,\alpha}$, d. h. bei allen Funktionen, die wir hier in Betracht ziehen, iſt der Quotient $\mathbf{\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}}$. Von dieſem Satze wollen wir Gebrauch machen, um die Differentialquotienten der Kreisfunktionen und der Exponentialfunktionen zu bilden.

Die Kreisfunktionen ergeben ſich durch Umkehrung der Winkelfunktionen. Iſt z. B. $x = \sin y$, ſo iſt $y = \text{arc} \sin x$. Da hiernach das gegebene Abhängigkeitsverhältnis zwiſchen x und y durch jede der beiden Gleichungen ausgedrückt wird, ſo kann die eine für die andere eintreten. Will man daher z. B. den Differentialquotienten der Funktion $y = \text{arc} \sin x$ beſtimmen, ſo kann man von der Gleichung $x = \sin y$ ausgehen, d. h. y als unabhängige Veränderliche anſehen, die Funktion x nach y differenzieren und aus dem Ergebnis den Differentialquotienten der Funktion $y = \text{arc} \sin x$ nach x ableiten. Nun iſt $dx = \cos y\,dy$, alſo $\frac{dx}{dy} = \cos y$, und da $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ iſt, ſo folgt $\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 - x^2}$, und daher nach dem vorhin ausgeſprochenen Satze: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Somit iſt $d(\text{arc} \sin x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Auf dem gleichen Wege findet man die Differentialquotienten der anderen Kreisfunktionen. Die Rechnung liefert die Formeln:

$$2.\qquad \mathbf{d\,(arc\,sin\,x) = \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}}, \qquad \mathbf{d\,(arc\,cos\,x) = -\frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}},$$

$$\mathbf{d\,(arc\,tg\,x) = \frac{d\,x}{1+x^2}}, \qquad \mathbf{d\,(arc\,ctg\,x) = -\frac{d\,x}{1+x^2}}.$$

c) Differentialquotienten der Exponentialfunktionen.

Bei den Exponentialfunktionen kann nicht wie bei den vorſtehenden Funktionen vorgegangen werden, weil für die Veränderungen, welche durch eine Vergrößerung der Veränderlichen hervorgerufen werden, entſprechende Gleichungen nicht beſtehen (ſ. Abſchnitt III, Nr. 7). Man muß daher, um die Ableitungen zu bilden, einen anderen Weg einſchlagen.

In Abſchnitt III, Nr. 44, wird die Zahl e, die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, durch die Gleichung $\lim\limits_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ eingeführt. Bezeichnet man den natürlichen Logarithmus einer Zahl a mit $l a$, ſo iſt alſo $l e = 1$. Liegt nun die Funktion $y = e^x$ vor, ſo hat man hiernach: $l y = x \cdot l e = x$, und ſomit erhält man durch Umkehrung die Funktionsgleichung $x = l y$. Vergrößert man y um $\varDelta y$ und bezeichnet die Veränderung von x mit $\varDelta x$, ſo hat man:

$$\varDelta x = l(y + \varDelta y) - l y = l\,\frac{y + \varDelta y}{y} = l\left(1 + \frac{\varDelta y}{y}\right),$$

und ſomit:

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta y} = \frac{1}{\varDelta y}\,l\left(1 + \frac{\varDelta y}{y}\right).$$

Erſetzt man jetzt auf der rechten Seite $\frac{\varDelta y}{y}$ durch $\frac{1}{n}$, alſo $\frac{1}{\varDelta y}$ durch $\frac{n}{y}$, ſo daß für jeden endlichen Wert von y die Zahl n unendlich groß wird, wenn $\varDelta y$ den Wert 0 annimmt, ſo erhält man:

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta y} = \frac{n}{y} \cdot l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{y} \cdot l\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{d\,x}{d\,y} = \frac{1}{y} \cdot l \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{y} \cdot l e = \frac{1}{y},$$

da $\lim\limits_{n=\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e$ und $l e = 1$ iſt. Nach der Vorbemerkung in Abſatz b) hat man daher: $\frac{d\,y}{d\,x} = y$ oder

$$3.\qquad \mathbf{d(e^x) = e^x\,d\,x},$$

d. h. der Differentialquotient der Funktion e^x iſt gleich e^x ſelber.

Eine zweite Herleitung der Gleichung 3 ſtützt ſich auf den Satz, daß e^x der Grenzwert von $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für $n = \infty$ iſt. Zunächſt hat man:

$$y + \varDelta y = e^{x+\varDelta x} = e^x \cdot e^{\varDelta x}, \quad \text{alſo:} \quad y = e^x(e^{\varDelta x} - 1),$$

und ſomit:

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = e^x \cdot \frac{e^{\varDelta x} - 1}{\varDelta x}.$$

Nun iſt aber

$$e^{\varDelta x} = 1 + \frac{\varDelta x}{1} + \frac{(\varDelta x)^2}{2!} + \frac{(\varDelta x)^3}{3!} + \frac{(\varDelta x)^4}{4!} + \cdots$$

alſo

$$\frac{e^{\varDelta x} - 1}{\varDelta x} = \frac{1}{1} + \frac{\varDelta x}{2!} + \frac{(\varDelta x)^2}{3!} + \frac{(\varDelta x)^3}{4!} + \cdots$$

und folglich

$$\lim_{\varDelta x = 0} \frac{e^{\varDelta x} - 1}{\varDelta x} = 1.$$

Man erhält daher wieder:

$$\frac{dy}{dx} = e^x \quad \text{oder} \quad d(e^x) = e^x dx.$$

Iſt die Funktion $y = a^x$ gegeben, ſo ſetzt man: $a = e^{la}$ und hat dann: $y = e^{x \cdot la}$ Auf dem gleichen Wege wie bei e^x erhält man auch hier:

4. $$\mathbf{d(a^x) = \mathit{l}a \cdot a^x dx.}$$

d) Differentialquotienten der logarithmiſchen Funktionen.

Im engſten Anſchluß an das bei e^x angewandte Verfahren gewinnt man die Formeln:

5. $$\mathbf{d(\mathit{l}x) = \frac{dx}{x}} \quad \text{und} \quad \mathbf{d(\log x) = \log e \frac{dx}{x}}.$$

e) Zuſätze zu Nr. 3 und Nr. 4.

Bezeichnet man bei einer Funktion den Differentialquotienten der
erſten Ableitung als zweite Ableitung der Funktion,
zweiten „ „ dritte „ „ „ uſw.,
ſo erhält man die folgenden Sätze:

I. Die k^{te} Ableitung einer ganzen rationalen Funktion n^{ten} Grades $(k < n)$ iſt eine ganze rationale Funktion vom Grade $n - k$.

II. Die Funktion $y = \sin x$ hat die Ableitungen

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x, \quad y''' = -\cos x, \quad y^{IV} = \sin x, \quad \text{uſw.}$$

III. Die Funktion $y = \cos x$ hat die Ableitungen

$$y' = -\sin x, \quad y'' = -\cos x, \quad y''' = \sin x, \quad y^{IV} = \cos x, \quad \text{uſw.}$$

IV. Sämtliche Ableitungen der Funktion $y = e^x$ ſind gleich e^x ſelber.

V. Die kte Ableitung der Funktion $y = a^x$ iſt gleich $(la)^k \cdot a^x$.

VI. Die Funktion $y = lx$ hat die Ableitungen

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y'' = -\frac{1}{x^2}, \quad y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, \quad y^{IV} = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} \quad \text{uſw.}$$

Nr. 5. Die Mac-Laurinſche und die Taylorſche Reihe.

a) Weiß man von einer Funktion $f(x)$, daß ſie in ihrem ganzen Verlauf (oder doch innerhalb beſtimmter Bereiche) ſtetig iſt, ſo darf man annehmen, daß es für die eine nach Potenzen von x fortſchreitende unendliche Reihe von der Form

$$\textbf{1.} \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4 + \cdots$$

gibt, die innerhalb des Stetigkeitsbereiches konvergent iſt. Gelingt es alſo, die Koeffizienten A_k zu beſtimmen, ſo erhält man für die Funktion $f(x)$ eine innerhalb des Stetigkeitsbereiches gültige Reihenentwicklung Der Zuſammenhang zwiſchen den (Zahlen-) Größen A_k und der Funktion läßt ſich aber unter der gemachten Annahme leicht ermitteln.

Da für $x = 0$ die Gleichung $f(0) = A_0$ entſteht, ſo hat man zunächſt:

$$\mathbf{A_0 = f(0)}.$$

Bildet man auf beiden Seiten der Gleichung 1 die Ableitungen, ſo erhält man:

$$f'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3 + 5A_5 x^4 + \cdots,$$

und hieraus ergibt ſich für $x = 0$:

$$f'(0) = A_1, \quad \text{alſo:} \quad \mathbf{A_1} = \frac{f'(0)}{1}.$$

Bildet man jetzt die zweite Ableitung von $f(x)$, d. h. die erſte Ableitung von $f'(x)$, ſo erhält man:

$$f''(x) = 2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + 3 \cdot 4A_4 x^2 + 4 \cdot 5A_5 x^3 + \cdots$$

und daraus folgt wiederum für $x = 0$:

$$f''(0) = 2A_2, \quad \text{alſo:} \quad \mathbf{A_2} = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}.$$

Für die dritte Ableitung der Funktion hat man:

$$f'''(x) = 2 \cdot 3A_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4A_4 x + 3 \cdot 4 \cdot 5A_5 x^2 + \cdots,$$

und dieſe Gleichung führt für $x = 0$ auf

$$f'''(0) = 2 \cdot 3A_3, \quad \text{alſo auf} \quad \mathbf{A_3} = \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Ganz entſprechend läßt ſich zeigen, daß $A_4 = \frac{f^{IV}(0)}{4!}$, $A_5 = \frac{f^{V}(0)}{5!}$ uſw. iſt. Somit geht die Gleichung 1 über in

$$2.\quad \mathbf{f(x) - f(0) + f'(0) \cdot \frac{x}{1} + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0) \cdot \frac{x^3}{3!} + f^{IV}(0) \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots}$$

Kennt man alſo von einer Funktion f(x) die Werte der Funktion und ihrer Ableitungen für $x = 0$, ſo kann man die Funktion durch eine nach Potenzen von x fortſchreitende unendliche Reihe darſtellen, deren aufeinanderfolgende Koeffizienten gleich $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ ſind. Die Reihe 2 heißt Mac-Laurinſche Reihe.

Da es hier noch nicht möglich iſt, die allgemeinen Bedingungen für die Gültigkeit der Mac-Laurinſchen Reihenentwicklung zu unterſuchen, ſo iſt es geboten, ſich auf Funktionen zu beſchränken, bei denen man die Konvergenz der Reihe 2 mit Beſtimmtheit nachweiſen kann.

b) In gleicher Weiſe kann man für die Funktion $f(a + x)$ die Reihe

$$f(a + x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^3 + \cdots$$

annehmen, und dann zeigen, daß

$$A_0 = f(a), \quad A_1 = \frac{f'(a)}{1}, \quad A_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \quad A_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$$

uſw. iſt, alſo unter der gleichen Annahme wie oben die Funktion in die Reihe

$$3.\quad \mathbf{f(a+x) = f(a) + f'(a) \cdot \frac{x}{1} + f''(a) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(a) \cdot \frac{x^3}{3!} + f^{IV}(a) \cdot \frac{x^4}{4!} + \cdots}$$

entwickelt werden kann. Die Reihe heißt Taylorſche Reihe.

Für $a = 0$ entſteht aus der Taylorſchen Reihe die Reihe von Mac-Laurin; dieſe bildet demnach einen beſonderen Fall der Taylorſchen Reihe. Taylor hat früher als Mac Laurin ſeine Formel aufgeſtellt.

c) Unendliche Reihen.

1. Der binomiſche Lehrſatz iſt weder für die Herſtellung des Differentialquotienten der Funktion $y = x^n$ noch für die Herleitung der Reihen 2 und 3 benutzt worden. Es unterliegt daher keinem Bedenken, den allgemeinen binomiſchen Lehrſatz aus einer dieſer Reihen abzuleiten. Setzt man $f(x) = (1 + x)^n$, wo n eine beliebige reelle Zahl bezeichnet, ſo hat man:

$$f'(x) = n \cdot (1 + x)^{n-1}, \; f''(x) = n(n-1)\,(1 + x)^{n-2},$$
$$f'''(x) = n(n-1)\,(n-2)\,(1 - x)^3,$$

uſw. Für $x = 0$ iſt alſo

$$f(0) = 1, \; f'(0) = n, \; f''(0) = n(n-1), \; f'''(0) = n(n-1)\,(n-2), \quad \text{uſw.}$$

Führt man dies in die Reihe von Mac-Laurin ein, ſo erhält man:

$$(1 + x)^n = 1 + n \cdot \frac{x}{1} + n(n-1) \cdot \frac{x^2}{2!} + n(n-1)\,(n-2) \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} \cdot x^2 + \binom{n}{3} x^3 + \binom{n}{4} x^4 + \cdots$$

Auf die Bedingung für die Konvergenz dieſer Reihe wollen wir hier nicht eingehen.

2. Bei dem erſten Verfahren zur Herſtellung den Differentialquotienten der Funktion e^x iſt die aus dem binomiſchen Lehrſatze abgeleitete Reihenentwicklung für e^x nicht verwandt worden. Demnach wird man dieſe mit Benutzung der Reihe von Mac-Laurin und der Ableitungen von e^x bilden dürfen. Da $e^0 = 1$ und $\frac{d^{(k)}}{dx}(e^x) = e^x$ iſt, ſo ergibt ſich leicht die Reihe 2 auf Seite 122. Man hat dann allerdings noch zu unterſuchen, innerhalb welches Bereiches von x die Reihe gültig iſt. Iſt die (poſitive) ganze Zahl p größer als ein beliebig angenommener endlicher Wert von x, und gibt man der Reihe die Geſtalt:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\left(1 + \frac{x}{p} + \frac{x^2}{p(p+1)} + \frac{x^3}{p(p+1)(p+2)} + \cdots\right)$$

und erſetzt in dem Klammerausdruck alle über p hinausgehende Faktoren durch p, ſo erkennt man leicht, daß der Klammerausdruck kleiner als $\frac{p}{p-x}$ bleibt, daß alſo die Reihe für e^x für jeden endlichen Wert von x einen endlichen Wert annimmt.

In ganz entſprechender Weiſe kann man die Reihe 3 auf Seite 122 für a^x bilden und deren Konvergenz für jeden endlichen Wert von x nachweiſen.

3. Nach den Gleichungen VI in Nr. 4e) tritt bei den Ableitungen der Funktion $l x$ die Veränderliche x als Faktor im Nenner auf, und daher werden für $x = 0$ ſämtliche Ableitungen unendlich groß; eine Verwendung der Mac-Laurinſchen Reihe iſt alſo hier noch ausgeſchloſſen. Nun ändern ſich aber die Formeln ihrer Bedeutung nach in keiner Weiſe, wenn man überall x durch $1 + x$ erſetzt; man hat auch dann als Ableitungen der Funktion $y = l(1 + x)$:

$$y' = \frac{1}{1+x},\ y'' = -\frac{1}{(1+x)^2},\ y''' = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3},\ y^{(IV)} = \frac{-2 \cdot 3}{(1+x)^4} \text{ uſw.},$$

und erkennt, daß jetzt für $x = 0$ die Nenner gleich 1 werden. Somit ergibt ſich:

$$l(1+x) = l1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} \cdot (-1) + \frac{x^3}{3!} \cdot 2 + \frac{x^4}{4!} \cdot (-2 \cdot 3) + \frac{x^5}{5!} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots$$
$$= 0 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

Die weitere Entwicklung der logarithmiſchen Reihen ſtimmt mit der auf Seite 123 und 124 gegebenen Entwicklung überein.

4. Beachtet man, daß $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ iſt, ſo erhält man durch Verwendung der Gleichungen II und III in Nr. 4e) und der Mac-Laurinſchen Reihe raſch die Entwicklungen 3 und 4 auf Seite 125 für die Sinus- und Koſinusfunktion.

Nr. 6. Größte und kleinſte Werte.

Die Behandlung der Grenzwerte wird weit einfacher und doch zuverläſſiger, wenn die Ableitungen in Verbindung mit der Taylorſchen Reihe benutzt werden.

Die Kurve, welche die Funktion $y = f(x)$ darſtellt, geht vom Steigen zum Fallen bzw. vom Fallen zum Steigen über, wenn die Funktion einen größten bzw. einen kleinſten Wert erreicht hat. An der Übergangsſtelle iſt alſo die Tangente an die Kurve der X-Achſe parallel, und ihr Winkel mit der X-Achſe iſt gleich 0^0 oder 180^0. Da aber $\operatorname{tg} 0^0 = 0$ und auch $\operatorname{tg} 180^0 = 0$ iſt, ſo erhält man eine Gleichung zur Beſtimmung der Übergangsſtellen, wenn man den erſten Differentialquotienten der Funktion gleich 0 ſetzt (ſ. Nr. 1, Lehrſ. 1). Somit ergibt ſich der Satz:

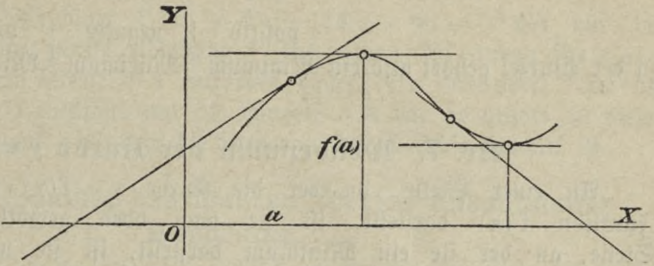


Fig. 93.

Lehrſatz 11. Eine ſtetige Funktion $f(x)$ kann für einen Wert der Veränderlichen x nur dann ein Maximum oder Minimum beſitzen, wenn ihr Differentialquotient für dieſen Wert gleich 0 iſt.

Iſt aber a eine Wurzel der Gleichung $f'(x) = 0$, ſo hat man nach der Taylorſchen Reihe:

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{4!} f^{(IV)}(a) + \cdots$$

Nun kann man h ſtets ſo klein wählen, daß die Summe aller Glieder, welche auf das erſte Glied der vorſtehenden Summe folgen, im Verhältnis zu dieſem unendlich klein wird, alſo nicht berückſichtigt zu werden braucht.*) Das Vorzeichen der Differenz $f(a+h) - f(a)$ wird dann von dem Vorzeichen von h (h^2!) unabhängig bleiben. Iſt daher $f''(a)$ poſitiv, ſo iſt $f(x)$ unmittelbar vor und nach dem Werte a größer als $f(a)$, d. h. dem Werte a entſpricht ein Minimum. Umgekehrt hat man ein Maximum, wenn $f''(a)$ negativ iſt. Hieraus folgt der Satz:

Lehrſatz 12. Iſt für die Wurzel a der Gleichung $f'(a) = 0$ die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ $\begin{matrix}\text{poſitiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$, ſo entſpricht dem Werte a der Veränderlichen ein $\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}$.

---

*) Iſt außer $f'(a)$ auch $f''(a)$ gleich 0, ſo müßte man das Verhalten der dritten und vierten Ableitung uſw. unterſuchen. Ein Eingehen hierauf würde jedoch die hier geſteckten Grenzen überſchreiten.

Beiſpiel. Es ſei $y = x^5 + 2\frac{1}{2}\,x^4 - 41\frac{2}{3}\,x^3 - 65\,x^2 + 600\,x - 400$.

Aufl. Die Gleichung $f'(x) = 5x^4 + 10x^3 - 125x^2 - 130x + 600 = 0$ hat die Wurzeln $+4$, $+2$, -3 und -5. Die zweite Ableitung $20x^3 + 30x^2 - 250x - 130$ wird für $x =$

	$+4$	$+2$	-3	-5
	poſitiv	negativ	poſitiv	negativ;
zu der Wurzel gehört alſo ein	Minimum	Maximum	Minimum	Maximum.

Nr. 7. Wendepunkt der Kurve $y = f(x)$.

An einer Stelle, an der die Kurve $y = f(x)$ ein Maximum der Funktion $f(x)$ darſtellt, iſt ſie nach oben gewölbt, und an einer Stelle, an der ſie ein Minimum darſtellt, iſt ſie nach unten gewölbt; zwiſchen zwei aufeinander folgenden Grenzſtellen muß ſie alſo einmal ihre Seite umgewandt haben. Den Punkt, an dem dies geſchehen iſt, nennt man einen Wendepunkt.

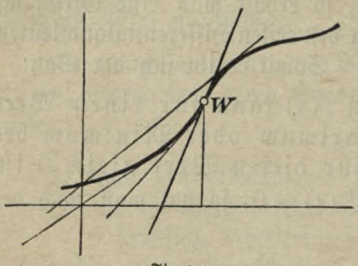


Fig. 94.

Eine Kurve kann indeſſen, auch ohne daß Grenzſtellen vorhanden ſind, Wendepunkte beſitzen. Verfolgt man in der Nähe einer ſolchen Stelle die Veränderungen des Winkels, den die Tangente mit der X-Achſe bildet, ſo erkennt man leicht, daß bei dem Wendepunkte der Winkel einen größten bzw. einen kleinſten Wert annimmt. Soll aber der Winkel und ſomit auch ſeine trigonometriſche Tangente, d. h. die Funktion $f'(x)$, einen Grenzwert annehmen, ſo muß $f''(x)$ gleich 0 ſein. Hieraus folgt:

Lehrſatz 13. Die Kurve $y = f(x)$ beſitzt an denjenigen Stellen Wendepunkte, für welche die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ gleich 0 iſt.

Beiſpiel 1. Es ſei $y = 3x^3 + 4x^2 - 17x - 36$.

Aufl. Man hat hier: $f'(x) = 9x^2 + 8x - 17$

und $f''(x) = 18x + 8$.

Die Gleichung $f'(x) = 0$ hat die Wurzeln $+1$ und $-\frac{17}{9}$, und dieſen entſpricht ein Minimum bzw. ein Maximum. Die Gleichung $f''(x) = 0$ hat die Wurzel $-\frac{4}{9}$, und da $+1 > -\frac{4}{9} > -\frac{17}{9}$ iſt, ſo ſieht man, daß der Wendepunkt zwiſchen den beiden Grenzſtellen liegt.

Beiſpiel 2. Setzt man bei dem Beiſpiel in Nr. 6 die zweite Ableitung gleich 0, ſo erhält man eine Gleichung mit den Wurzeln $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{53})$, $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}(-1-\sqrt{53})$. Den drei Wurzeln entſprechen drei zwiſchen den vier Grenzſtellen gelegene Wendepunkte.

Beiſpiel 3. Es ſei $y = x^3 - 12x^2 + 48x - 45$.

Aufl. Die Gleichung $f'(x) = 3x^2 - 24x + 48 = 0$ hat nur die Wurzel $+4$, und die zweite Ableitung $f''(x) = 6x - 24$ nimmt für $x = 4$ den Wert 0 an; dem Werte $+4$ entſpricht daher kein Grenzwert. Da die Gleichung $f''(x) = 0$ ebenfalls nur die Wurzel $+4$ hat, ſo gehört zu dieſer Wurzel ein Wendepunkt, bei dem die Tangente der X-Achſe parallel iſt.

Nr. 8. Beſtimmung des wahren Wertes unbeſtimmter Ausdrücke.

Häufig kommt es vor, daß ein aus zwei Funktionen einer Veränderlichen x gebildeter Ausdruck eine der unbeſtimmten Formen $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ annimmt, wenn man x einen gewiſſen Wert beilegt. Entwickelt man dann die Funktionen nach dem binomiſchen Satze, ſo gelingt es in den meiſten Fällen, durch Grenzübergänge den wahren Wert der Ausdrücke zu berechnen. Bequemer iſt es jedoch, ſich auch hier der Ableitungen zu bedienen.

a) Die Form $\frac{0}{0}$.

Werden für $x = a$ die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gleich 0 und entwickelt man $f(a+h)$ und $g(a+h)$ nach der Taylorſchen Reihe, ſo erkennt man, daß der wahre Wert des Quotienten $\frac{f(a)}{g(a)}$ gleich dem Grenzwert iſt, den der Quotient

$$\frac{hf'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \cdots}{hg'(a) + \frac{h^2}{2!} g''(a) + \frac{h^3}{3!} g'''(a) + \cdots}$$

für $h = 0$ annimmt. Da der Bruch ſich durch h kürzen läßt und an der Grenze im Zähler und Nenner mit Ausnahme der erſten alle Glieder verſchwinden, ſo iſt der wahre Wert des Quotienten gleich $\frac{f'(a)}{g'(a)}$. Sind aber auch die erſten Ableitungen für $x = a$ gleich 0, ſo iſt der wahre Wert gleich dem Quotienten aus den Ableitungen $f''(a)$ und $g''(a)$ uſw.

Beiſpiel 1. Der Quotient $\frac{x^3 + 3x - 14}{x^2 - 5x + 6}$ nimmt für $x = 2$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Da aber der Quotient der erſten Ableitungen $\frac{3x^2 + 3}{2x - 5}$ für $x = 2$ den Wert -15 beſitzt, ſo iſt der wahre Wert des gegebenen Quotienten für $x = 2$ gleich -15.

Beiſpiel 2. Der Quotient $\frac{e^x - \cos x - x}{x - \sin x}$ nimmt für $x = 0$ die Form $\frac{0}{0}$ an. Der Quotient der erſten Ableitungen $\frac{e^x + \sin x - 1}{1 - \cos x}$ nimmt für $x = 0$ ebenfalls die Form $\frac{0}{0}$ an. Der Quotient der zweiten Ableitungen $\frac{e^x + \cos x}{\sin x}$ wird gleich $\frac{2}{0}$, und demnach iſt der wahre Wert des gegebenen Quotienten für $x = 0$ gleich ∞.

b) Die Form $0 . \infty$.

Wird für $x = a$ die Funktion $f(x)$ gleich 0 und die Funktion $g(x)$ gleich ∞, ſo hat man wieder $f(a) : \frac{1}{g(a)} = \frac{0}{0}$; demnach iſt hier der Quotient aus $f(a)$ und $\frac{1}{g(a)}$ zu unterſuchen.

Beiſpiel 3. Das Produkt $(a^x - 1)\,\mathrm{ctg}\,x$ nimmt für $x = 0$ die Form $0 \cdot \infty$ an. Gibt man ihm die Form $\frac{a^x - 1}{\mathrm{tg}\,x}$ und bildet die Ableitungen, ſo erhält man als Grenzwert $\frac{l a \cdot a^0}{1 + \mathrm{tg}^2 0}$ oder $l a$.

c) Die Form $\frac{\infty}{\infty}$.

Werden die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ beide für $x = a$ unendlich groß, ſo werden ihre reziproken Werte für $x = a$ beide gleich 0. Aus $\frac{f(x)}{g(x)}$ bildet man daher $\frac{1}{g(x)} : \frac{1}{f(x)}$, um an der Grenze die Form $\frac{0}{0}$ zu erhalten.

Der Quotient der Ableitungen iſt hier gleich $\frac{g'(x) \cdot [f(x)]^2}{f'(x) \cdot [g(x)]^2}$. Bezeichnet man den geſuchten Grenzwert mit W, ſo iſt $W = \frac{g'(a)}{f'(a)} \cdot W^2$; in dem Falle, daß W nicht die Größe 0 beſitzt, kann man durch W kürzen und erhält dann wieder wie in Abſatz a) für den geſuchten Grenzwert den Quotienten $\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Beiſpiel 4. Der Quotient $\frac{a^{\frac{1}{x}} + 1}{\mathrm{ctg}\,x}$ nimmt für $x = 0$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an. Da $d\,(a^{\frac{1}{x}} + 1) = -\,l a \cdot \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$ und $d\,(\mathrm{ctg}\,x) = -\,(1 + \mathrm{ctg}^2 x)\,dx = -\,\frac{dx}{\sin^2 x}$ iſt, ſo nimmt der Quotient der Ableitungen die Geſtalt $\frac{l a \cdot a^{\frac{1}{x}} \sin^2 x}{x^2}$ an. Nun iſt $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1$, und daher erhält man den Grenzwert $\lim\limits_{x=0} (l a \cdot a^{\frac{1}{x}})$ oder ∞.

Nr. 9. Begriff des Integrals. Sätze über Integrale.

a) Wie bei den elementaren Rechnungsarten durch Umkehrung neue Rechnungsarten entſtehen, ſo tritt auch hier der Aufgabe, den Differentialquotienten einer gegebenen Funktion zu beſtimmen, die umgekehrte Aufgabe an die Seite, eine Funktion zu ermitteln, deren Ableitung bekannt iſt, d. h. eine gegebene Funktion als Ableitung einer anderen anzuſehen und dieſe aufzufinden.

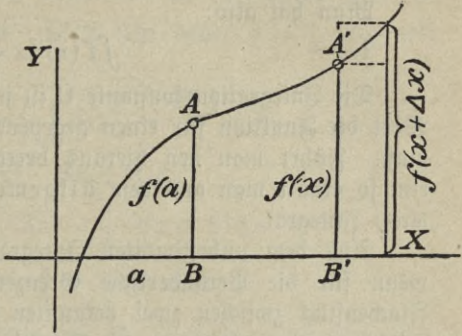


Fig. 95.

Stellt man die gegebene Funktion $y = f(x)$ graphiſch dar, ſo erweiſt ſich das Flächenſtück, das von den beiden Ordinaten AB und A′B′, der X-Achſe und dem Bogen AA′ der Kurve begrenzt wird, gleichfalls als eine Funktion von x; denn mit jeder Verſchiebung der Ordinate A′B′, d. h. mit jeder Veränderung von x ändert ſich auch die Größe der Fläche ABB′A′. Von dieſer Funktion, die mit $U = F(x)$ bezeichnet werden mag, weiß man vorläufig nur, daß ſie ſich ſtetig ändert, wenn f(x) eine ſtetige Funktion von x iſt. Nimmt nun x um Δx zu, ſo ſind f(x) und $f(x + \Delta x)$ die begrenzenden Ordinaten für das Flächenſtück $\Delta U = F(x + \Delta x) - F(x)$, und daher liegt ΔU zwiſchen (den Rechtecken) $\Delta x \cdot f(x)$ und $\Delta x \cdot f(x + \Delta x)$. Steigt die Kurve (wie in der Fig. 95) von der Stelle A′ aus, ſo iſt

$$\Delta x \cdot f(x) < \Delta U < \Delta x \cdot f(x + \Delta x),$$

und ſomit führt die Diviſion durch Δx auf

$$f(x) < \frac{\Delta U}{\Delta x} < f(x + \Delta x)\cdot$$

Die Ungleichheit, die hierin zum Ausdruck gelangt, wird um ſo kleiner, je kleiner Δx wird, und ſie wird unendlich klein, wenn man zur Grenze übergeht; man erhält daher:

$$f(x) = \lim_{\Delta x = 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{dU}{dx} = \frac{d}{dx}\,[F(x)],$$

d. h. die gegebene Funktion $y = f(x)$ iſt der Differentialquotient der Funktion F(x), oder die Größe f(x)dx iſt das Differential der Fläche $U = F(x)$, und die Summe aller zwiſchen zwei Ordinaten AB und A′B′ liegenden Flächenelemente iſt gleich der zugehörigen Fläche F(x). Wählt man nach dem Vorgang von Leibniz (1682) ſtatt des gewöhnlichen Summenzeichens $\sum$ das Zeichen $\int$, ſchreibt man alſo: $F(x) = \int f(x)\,dx$, ſo weiß man, daß $\int f(x)dx$ eine Funktion von x iſt, welche die Ableitung f(x) hat. Hiernach erweiſt ſich die Funktion $\int f(x)dx$ als eine Summe aus unendlich vielen unendlich kleinen Teilchen; man bezeichnet ſie daher als **Integral** (integrum = geſamt), und die Rechnung, welche zur Beſtimmung einer Funktion aus ihrer Ableitung führt, wird Integralrechnung genannt.

b) Nach Lehrſ. 4 in Nr. 2 macht ſich eine additive Konſtante einer Funktion bei ihrer Ableitung nicht bemerklich. Hierans folgt umgekehrt, daß zu jeder Funktion f(x) unzählig viele Integrale gehören, die ſich lediglich durch die Größe der additiven Konſtante unterſcheiden.

Man hat alſo:

$$1. \qquad \int f(x)dx = F(x) + C.$$

Die Integrationskonſtante C iſt jedoch beſtimmt, wenn man weiß, welchen Wert die Funktion für einen gegebenen Wert der Veränderlichen x annehmen muß. Führt man den hieraus berechneten Wert von C in die Gleichung 1 ein, ſo erhält man aus dem allgemeinen Integral ein beſonderes (partikuläres) Integral.

Aus dem unbeſtimmten Integral geht das **beſtimmte Integral** hervor, wenn für die Veränderliche Grenzen geſetzt werden. Soll z. B. nur das Flächenſtück zwiſchen zwei bekannten Ordinaten AB und A′B′ (ſ. Fig. 95) ermittelt werden, ſo wird die Funktion durch die Differenz aus der bis A′B′ und der bis AB reichenden Fläche dargeſtellt. Man gibt in dieſem Falle bei dem Integrationszeichen die untere Grenze unten und die obere Grenze oben an, ſchreibt alſo

$$2. \qquad \int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a).$$

c) Da $d[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)dx$, alſo $\int c \cdot f'(x)dx = c \cdot f(x)$

und auch $c \cdot \int f'(x)dx = c \cdot f(x)$

iſt, ſo beſteht die Gleichung (ſ. Lehrſ. 5 in Nr. 2):

$$3. \qquad \int c \cdot f'(x)dx = c \cdot \int f'(x)dx,$$

d. h. ein konſtanter Faktor kann vor das Integralzeichen geſetzt werden.

In gleicher Weiſe läßt ſich der Lehrſatz 6 in Nr. 2 umkehren.

Nr. 10. Methoden der Integralrechnung.

Wie bei allen Umkehrungen ſo wird auch hier weſentlich die Kraft des Gedächtniſſes in Anſpruch zu nehmen ſein, und die Sätze über Differentialquotienten und die Formeln, die für deren Herleitung benutzt worden ſind, werden zur Verwendung kommen müſſen. Die gegebene Funktion wird allerdings nicht immer von vornherein in eine der bekannten Differentialformeln hineinpaſſen, und man wird häufig Umgeſtaltungen und Subſtitutionen vorzunehmen haben, um aus der Funktion eine neue abzuleiten, die als Differentialquotient einer Funktion von bekannter Geſtalt erkennbar iſt.

a) Die Differentialformeln laſſen ſich umkehren.

Die Integration iſt am einfachſten, wenn die gegebene Funktion von vornherein in eine der bekannten Differentialformeln hineinpaßt, oder wenn nur kleinere Veränderungen vorzunehmen ſind, um eine bekannte Form herzuſtellen. Iſt z. B. $y' = 7x^5$, ſo weiß man, daß in der Funktion y die Potenz x^6 ſteht, und da deren Ableitung gleich $6x^5$ iſt, ſo muß man $7x^5$ ſo umgeſtalten, daß der Faktor 6 auftritt. Man ſetzt daher $y' = \frac{7}{6} \cdot 6x^5$ und hat dann:

$$y' = \frac{7}{6}\, d(x^6), \quad \text{alſo:} \quad y = \frac{7}{6}\int d(x^6) = \frac{7}{6}\, x^6 + C.$$

Beiſpiel 1. Aus $dy = (4x^3 + 5x^2 - 3x + 8)\,dx$

bildet man:
$$dy = \left(4x^3 + \frac{5}{3} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x + 8\right) dx$$

und hieraus:
$$y = x^4 + \frac{5}{3}\, x^3 - \frac{3}{2}\, x^2 + 8x + C.$$

b) Die Integration wird durch eine Subſtitution vorbereitet.

In manchen Fällen wird die Integration bequemer, bzw. erſt ausführbar, wenn man durch eine Subſtitution eine neue Veränderliche einführt.

Beiſpiel 2. Es ſei $dy = (ax + b)^n dx$.

Setzt man $ax + b = t$, ſo hat man: $a \cdot dx = dt$, alſo:

$$(ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot t^n dt$$

und ſomit:

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a} \cdot \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{a(n+1)} + C = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + C.$$

Beiſpiel 3. Es ſei $dy = \frac{dx}{x + a}$.

Setzt man $x + a = t$, ſo hat man: $dx = dt$ und $\frac{dx}{x + a} = \frac{dt}{t} = d(lt)$, und ſomit folgt: $\int \frac{dx}{x + a} = lt + C = l(x + a) + C$.

Beiſpiel 4. Es ſei $dy = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Setzt man $\frac{x}{a} = t$, ſo erhält man: $y = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ und dann nach Gleichung 2 in Nr. 4: $y = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

Beiſpiel 5. Es ſei $dy = \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2}$.

In dem Ausdruck $a^2 + b^2 x^2$ oder $a^2\left[1 + \left(\frac{bx}{a}\right)^2\right]$ ſetzt man $\frac{bx}{a} = t$; man hat dann: $dx = \frac{a}{b}\, dt$, alſo $dy = \frac{1}{ab} \cdot \frac{dt}{1 + t^2}$, und ſomit nach Gleichung 2 in Nr. 4: $y = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg} \frac{bx}{a} + C$.

Beiſpiel 6. Es ſei $dy = \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

Um hier eine der bekannteren Formen zu bilden, bringt man den Radikanden auf die Form $a^2-(b-x)^2$ und erſetzt $\frac{b-x}{a}$ durch t; man hat dann:

$$dx = -a\,dt;\quad a^2-(b-x)^2 = a^2(1-t^2),\quad dy = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

und daher wieder nach Gleichung 2 in Nr. 4

entweder: $$y = \arccos t + C = \arccos\frac{b-x}{a} + C$$

oder: $$y = -\arcsin t + C = \arcsin\frac{x-b}{a} + C.$$

In dem vorſtehenden Beiſpiel hat man 5 durch 9 − 4 zu erſetzen, um auf die entwickelte Form zu gelangen; es iſt alſo

$$\int\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \arccos\frac{2-x}{3} + C = \arcsin\frac{x-2}{3} + C.$$

Beiſpiel 7. Es ſei $dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Führt man hier die neue Veränderliche t durch die Subſtitution

$$x + \sqrt{x^2 \pm a^2} = t$$

ein, ſo hat man:

$$dt = dx + \frac{x \cdot dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2} + x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \frac{t\ dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \frac{dt}{t} = d(l t).$$

Somit ergibt ſich:

$$y = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = l t + C = l(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C.$$

c) **Partielle Integration** (Anwendung des Lehrſatzes 7 in Nr. 2).

Sind u und v zwei Funktionen von x, ſo hat man nach Lehrſ. 7:

$$d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du;\quad \text{es iſt alſo } \int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du.$$

Dieſe Gleichung kann oft verwandt werden, um ein Integral von der Form $\int u\,dv$ auf ein bekanntes Integral von der Form $\int v\,du$ zu bringen.

Beiſpiel 8. Es ſei $y' = x \sin x$.

Man hat: $$y'dx = x \sin x\,dx = x \cdot d(-\cos x) = -x \cdot d(\cos x)$$
$$= -d(x \cos x) + \cos x\,dx,$$

alſo: $$y = -x \cos x + \sin x + C.$$

Beiſpiel 9. Es ſei $y' = x^2 \cos x$.

Man hat hier: $$y' = x^2 \cos x dx = x^2 \cdot d(\sin x)$$
$$= d(x^2 \sin x) - \sin x \cdot d(x^2)$$
$$= d(x^2 \sin x) - 2x \sin x dx.$$

Nach Beiſpiel 8 ergibt ſich daher:
$$y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

Beiſpiel 10. Es ſei $y' = \cos^2 x$.

Man hat hier:
$$y' dx = \cos^2 x dx = \cos x \cdot d(\sin x) = d(\cos x \sin x) + \sin^2 x dx,$$
$$= d(\cos x \sin x) + dx - \cos^2 x dx,$$

alſo: $$2 \cos^2 x dx = d(\cos x \sin x) + dx,$$

und ſomit $$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(\cos x \sin x + x) + C.$$

Beiſpiel 11. Es ſei $dy = \sqrt{x^2 \pm a^2}\, dx$.

Hier iſt
$$\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = d\left(x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) - x \cdot d\sqrt{x^2 \pm a^2}) = d\left(x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) - \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$
$$= d\left(x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) - \frac{x^2 \pm a^2 \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$$
$$= d\left(x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) - \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \pm a^2 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

alſo
$$2 \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = d\left(x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) \pm a^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Nach Beiſpiel 7 erhält man daher:
$$y = \tfrac{1}{2} x \cdot \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \tfrac{1}{2} a^2 l\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + C.$$

Nr. 11. Anwendungen aus der Geometrie.

a) Beſtimmung von Flächen ebener Kurven. (Quadratur).

Wie in Nr. 9 bei der Einführung des Integrals bereits bemerkt iſt, begrenzt die ebene Kurve $y = f(x)$ mit der X-Achſe und den zu zwei Werten a und b von x gehörigen Ordinaten eine Fläche, deren Größe durch das Integral $\int_a^b y dx$ angegeben wird Von dieſer Tatſache wollen wir Gebrauch machen, um einige Flächen zu berechnen.

Beiſpiel 1. Die Fläche zu berechnen, welche eine im Abſtand $x = x_1$ auf der Achſe ſenkrecht ſtehende Sehne der **Parabel** $y^2 = 2px$ mit dieſer begrenzt.

Auflöſung. Die Hälfte der geſuchten Fläche iſt das Integral $\int\limits_0^{x_1} y\,dx$. Nun iſt hier

$$y\,dx = \sqrt{2p} \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \sqrt{2p} \;\; d\left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right);$$

man hat daher:

$$\frac{1}{2} F = \frac{2}{3}\sqrt{2p} \cdot x_1^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2p} \;\; x_1^{\frac{1}{2}} \cdot x_1 = \frac{2}{3}\sqrt{2px_1} \cdot x_1 = \frac{2}{3} y_1 x_1,$$

und folglich:

$$\mathbf{F = \frac{4}{3} x_1 y_1.}$$

Beiſpiel 2. Den Inhalt A_b eines **Kreisabſchnitts** zu berechnen, deſſen Begrenzungsſehne von dem Mittelpunkte den Abſtand p hat.

Auflöſung. Wählt man zwei aufeinander ſenkrechte Durchmeſſer, von denen einer auf der Begrenzungsſehne ſenkrecht ſteht, als Koordinatenachſen, ſo hat der Kreis die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$. Man hat alſo: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, und wenn die Sehne ein Lot der X-Achſe iſt, $y\,dx = \sqrt{r^2 - x^2} \;\; dx$. Da aber

$$\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = d\left(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\right) - x \cdot d\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right) = d\left(x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}\right) + \frac{x^2 dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

und
$$\frac{x^2 dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - (r^2 - x^2)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = \frac{r^2 dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \sqrt{r^2 - x^2 dx},$$

alſo
$$2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx = d\left(x \;\; \sqrt{r^2 - x^2}\right) + \frac{r^2 dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

iſt, ſo ergibt ſich nach Beiſpiel 4 in Nr. 10:

$$2\int y\,dx = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin\frac{x}{r} + C.$$

Nun läuft hier x von $x_1 = p$ bis r, und für $x = r$ wird das erſte Glied gleich 0, während das zweite die Größe $r^2 \cdot \arcsin 1$ oder $r^2 \cdot \frac{\pi}{2}$ annimmt. Man erhält daher:

$$\mathbf{A_b = 2\int\limits_p^r y\,dx = \frac{\pi}{2} r^2 - p_1 \cdot \sqrt{r^2 - p^2} - r^2 \cdot \arcsin\frac{p}{r}.}$$

Für $p = 0$ iſt der Abſchnitt die Fläche eines Halbkreiſes, und da für $p = 0$ die beiden Subtrahenden gleich 0 werden, ſo läßt ſich hieraus die bekannte Formel $J = \pi r^2$ für den Inhalt des Kreiſes ableiten

Beiſpiel 3. Den Inhalt A_b des Abſchnitts der **Ellipſe** $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ zu berechnen, der die Senkrechte $x = x_1$ als Begrenzungsſehne hat.

Auflöſung. Man hat hier: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, alſo:

$$A_b = 2 \cdot \int\limits_{x_1}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \;\; dx = \frac{2b}{a}\int\limits_{x_1}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Nach dem vorhergehenden Beiſpiel iſt daher

$$A_b = \frac{b}{a}\left[\frac{\pi}{2}a^2 - x_1\sqrt{a^2 - x_1^2} - a^2 \cdot \operatorname{arc}\sin\frac{x1}{a}\right].$$

Für $x_1 = 0$ werden die beiden Subtrahenden gleich 0; und daher erhält man für den Inhalt der Ellipſe: $J = \frac{b}{a}\pi \cdot a^2 = \pi \cdot a \cdot b$.

Beiſpiel 4. Den Inhalt A_b des Abſchnitts zu berechnen, den die Senkrechte zur X-Achſe $x = x_1$ mit dem Zweige der **Hyperbel** $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ begrenzt, von dem ſie geſchnitten wird.

Auflöſung. Man hat hier:

$$\frac{1}{2}A_b = \int_a^{x_1}\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_a^{x_1}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx.$$

Nach Beiſpiel 11 in Nr. 10 iſt aber

$$\int\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \cdot l(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C,$$

und da an der unteren Grenze (für $x = a$) das erſte Glied auf der rechten Seite dieſer Gleichung verſchwindet und das zweite den Wert $\frac{1}{2}a^2 \cdot la$ annimmt, alſo

$$\int_a^{x_1}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2}x_1 \cdot \sqrt{x_1^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2[l(x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}) - la]$$

$$= \frac{1}{2}x_1 \cdot \sqrt{x_1{}^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \cdot l\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}$$

iſt, ſo folgt:

$$A_b = 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_a^{x_1}\sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{b}{a} \cdot x_1 \cdot \sqrt{x_1^2 - a^2} - ab \cdot l\frac{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}}{a}.$$

Beiſpiel 5. Die Fläche zu beſtimmen, die von der X-Achſe und einem Bogen einer **Zykloide** begrenzt wird.

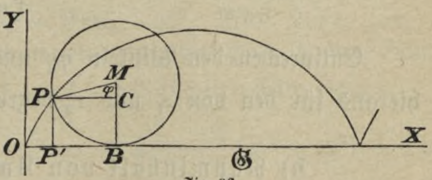


Fig. 96.

Auflöſung. Eine Zykloide iſt die Bahn eines feſten Punktes eines Kreiſes, der (ohne zu gleiten) auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ rollt. Wählt man $\mathfrak{G}$ als X-Achſe und verlegt den Urſprung nach dem Punkte, in dem der feſte Punkt zum erſten Male auf $\mathfrak{G}$ liegt, ſo iſt während der Bewegung auf dem erſten Bogen bei jeder Lage des Punktes P der Berührungspunkt B auf der X-Achſe von O ebenſoweit entfernt wie auf dem Kreiſe von P. Wird daher der Winkel BMP mit φ bezeichnet, ſo hat der Punkt P die Abſziſſe

1) $$x = OB - P'B = r \cdot \varphi - r\sin\varphi,$$

Entſprechend ergibt ſich für die Ordinate:

2) $$y = r - MC = \mathbf{r - r\cos\varphi}.$$

Man hat alſo: $dx = r \cdot d\varphi - r\cos\varphi d\varphi = r(1 - \cos\varphi)d\varphi$

und $$y = r(1 - \cos\varphi),$$

und ſomit:

$$ydx = r^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = r^2[d\varphi + 2 \cdot d(\sin\varphi) + \cos^2\varphi d\varphi.]$$

Für $\varphi = 0$ liegt P auf G, und für $\varphi = 2\pi$ fällt P wieder auf G; der Punkt P beſchreibt alſo einen ganzen Bogen, wenn φ von 0 bis 2π wächſt, und demnach iſt das Integral von 0 bis 2π zu nehmen. Von den drei Beſtandteilen des Differentials ydx liefert der erſte $2\pi r^2$ und der zweite die Größe 0, während der dritte nach Beiſpiel 10 in Nr. 10 auf den Beitrag $r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi$ oder πr^2 führt. Demnach erhält man für die geſuchte Fläche:

$$\mathbf{F = 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2.}$$

Beiſpiel 6. Die Fläche eines Ausſchnitts einer **logarithmiſchen Spirale** zu beſtimmen.

Vorbemerkung. Bei Benutzung von Polarkoordinaten wird die Lage eines Punktes P durch ſeine Entfernung r von dem Nullpunkte und den Winkel φ beſtimmt, den OP mit der (poſitiven) X-Achſe bildet. Beſteht zwiſchen r und φ (als Bogen eines Kreiſes mit dem Halbmeſſer 1 ausgedrückt) eine Gleichung, ſo iſt deren geometriſches Bild eine Spirale. Iſt insbeſondere r gleich einer Exponentialfunktion $c \cdot e^{m\varphi}$ des Winkels φ, ſo daß dieſer als eine logarithmiſche Funktion von r entwickelt werden kann, ſo heißt die Spirale logarithmiſche Spirale.

Auflöſung. Das Flächendifferential einer Spirale kann als ein Kreisausſchnitt mit dem Mittelpunktswinkel $d\varphi$ angeſehen werden; es iſt daher $df = \frac{1}{2}r^2 d\varphi$. Hat daher die Spirale die Gleichung $r = c \cdot e^{m\varphi}$, ſo iſt $df = \frac{1}{2}c^2 e^{2m\varphi} d\varphi$ und demnach

$$f = \frac{c^2}{2}\int e^{2m\varphi} d\varphi = \frac{c^2}{4m} e^{2m\varphi} + C = \frac{r^2}{4m} + C.$$

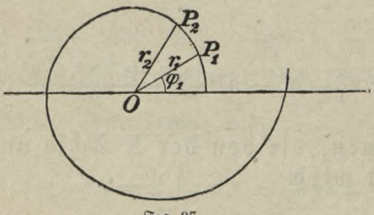


Fig 97.

Entſprechen den Winkeln φ_1 und φ_2 die Radien r_1 und r_2, ſo ergibt ſich hieraus für den von r_1 und r_2 begrenzten Ausſchnitt die Größe $\frac{1}{4m}(r_2{}^2 - r_1{}^2)$.

b) Rauminhalt von Umdrehungskörpern. (Kubatur).

Wird eine Kurve mit der Gleichung $y = f(x)$ um die X-Achſe gedreht, ſo beſchreibt ſie eine Fläche, welche einen Rotationskörper umſchließt. Zwei auf der Achſe ſenkrechte Ebenen, deren Abſtände von dem Nullpunkte gleich x und $x + dx$ ſind, ſchneiden aus dem Körper ein Raumelement dV heraus, das an der Grenze als ein Zylinder mit der Höhe dx und der Grundfläche πy^2 angeſehen werden kann. Man hat daher $dV = \pi y^2 dx$.

Beiſpiel 7. Den Rauminhalt eines geraden **Kreiskegels** zu beſtimmen.

Auflöſung. Die erzeugende Linie hat, wenn man den Koordinatenanfang in den Schnittpunkt der Geraden und der Drehungsachſe verlegt, die Gleichung: $y = Ax$. Es iſt daher $dV = \pi A^2x^2dx = \frac{\pi}{3}A^2d(x^3)$ und $V = \frac{\pi}{3}A^2x^3 + C$. Geht das Integral von 0 bis h, ſo folgt hieraus $V = \frac{\pi}{3}A^2h^3$. Wird jetzt der zu $x = h$ gehörige Wert von y mit r bezeichnet, ſo iſt $r = Ah$, alſo $A^2 = \frac{r^2}{h^2}$ und ſomit $\mathbf{V = \frac{\pi}{3}r^2h}$.

Zuſatz. Geht die Integration von x_1 bis x_2 und ſind r_1 und r_2 die zugehörigen Werte von y, ſo erhält man:

$$V = \frac{\pi}{3}A^2(x_2^3 - x_1^3) = \frac{\pi}{3}A^2(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2).$$

Nun iſt $x_2 - x_1$ gleich der Höhe h des Kegelſtumpfs, und da

$$A^2(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) = r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2$$

iſt, ſo ergibt ſich die bekannte Formel: $V = \frac{\pi}{3}h(r_2^2 + r_2r_1 + r_1^2)$.

Beiſpiel 8. Den Rauminhalt einer **Kugelſchicht** zu beſtimmen.

Auflöſung. Legt man den Koordinatenanfang in den einen Endpunkt des Durchmeſſers, um den ſich der Bogen des erzeugenden Kreiſes dreht, ſo hat man:

$$y^2dx = 2rxdx - x^2dx = rd(x^2) - \frac{1}{3}d(x^3)$$

und ſomit

$$\frac{V}{\pi} = rx^2 - \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Geht die Integration von x_1 bis x_2, ſo folgt hieraus zunächſt:

$$\frac{V}{\pi} = r(x_2^2 - x_1^2) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3).$$

Nun iſt aber dieſer Ausdruck gleich

$$(x_2 - x_1)\left[r(x_2 + x_1) - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2\right];$$

ferner iſt $y_2^2 = 2rx_2 - x_2^2$ und $y_1^2 = 2rx_1 - x_1^2$, alſo $2r(x_2 + x_1) = y_2^2 + y_1^2 + (x_2^2 + x_1^2)$. Beachtet man weiter, daß die Höhe h der Schicht gleich $x_2 - x_1$, daß alſo $x_2x_1 = \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2 - h^2)$ iſt, ſo erhält man:

$$\frac{V}{\pi} = h\left[\frac{1}{2}(y_2^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + x_1^2) - \frac{1}{3}(x_2^2 + x_1^2) - \frac{1}{6}(x_2^2 + x_1^2) + \frac{1}{6}h^2\right]$$

$$= h\left(\frac{3y_2^2 + 3y_1^2 + h^2}{6}\right), \text{ alſo } \mathbf{V = \frac{\pi h}{6}(3y_2^2 + 3y_1^2 + h^2)}.$$

Zuſatz. Aus dem allgemeinen Integral $\pi\left(rx^2 - \frac{1}{3}x^3\right)$ erhält man den Rauminhalt eines Kugelabſchnitts mit der Höhe h, wenn man x von 0 bis h laufen läßt; es iſt daher $A_b = \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right) = \frac{\pi}{3}h^2(3r - h)$. Ebenſo läßt ſich aus dem allgemeinen Integral bequem die Formel für den Rauminhalt der ganzen Kugel ableiten.

Beiſpiel 9. Den Rauminhalt eines **Rotationsellipſoides** zu beſtimmen.

Auflöſung. Dreht ſich die Ellipſe um ihre große Achſe, und liegt der Koordinatenanfang in einem Endpunkt dieſer Achſe, hat alſo die Ellipſe die Gleichung $b^2x^2 + a^2y^2 = 2ab^2x$, ſo erhält man $dV = \pi \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)\,dx$. Hieraus aber folgt: $\frac{a^2V}{b^2\pi} = ax^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$. Für das ganze Ellipſoid geht das Integral von 0 bis 2a; man hat daher $V = \pi \cdot \frac{b^2}{a^2}\left(4a^3 - \frac{8a^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

Dreht ſich die Ellipſe um ihre kleine Achſe, ſo hat man in dieſer Formel a mit b zu vertauſchen. Man erkennt leicht, daß das zweite Ellipſoid größer iſt als das erſte.

Beiſpiel 10. Den Rauminhalt des Körpers zu beſtimmen, der durch die Drehung eines Bogens einer **Zykloide** um ſeine Sehne entſteht.

Auflöſung. Nach Beiſpiel 5 hat man hier:

$$y^2 = r^2(1 - \cos\varphi)^2 \quad \text{und} \quad dx = r \cdot d\varphi - r\cos\varphi\, d\varphi,$$

und ſomit

$$y^2 \cdot dx = r^3(1 - \cos\varphi)^3 d\varphi,$$
$$= r^3(d\varphi - 3\cos\varphi\, d\varphi + 3\cos^2\varphi\, d\varphi - \cos^3\varphi\, d\varphi).$$

Nun iſt

$$\cos^3\varphi\, d\varphi = \cos^2\varphi \cdot d(\sin\varphi) = d[\cos^2\varphi \sin\varphi] + 2\sin^2\varphi\cos\varphi\, d\varphi$$
$$= d(\cos^2\varphi\sin\varphi) + 2\cos\varphi\, d\varphi - 2\cos^3\varphi\, d\varphi,$$

alſo

$$3\cos^3\varphi\, d\varphi = d(\cos^2\varphi\sin\varphi) + 2\cos\varphi\, d\varphi;$$

führt man dies in die Gleichung für y^2dx ein, ſo erhält man:

$$\frac{1}{r^3}y^2dx = d\varphi - \tfrac{11}{3}\cos\varphi\, d\varphi + 3\cos^2\varphi\, d\varphi - \tfrac{1}{3}d(\cos^2\varphi\sin\varphi).$$

Da nach Beiſpiel 10 in Nr. 10 das Integral von $\cos^2\varphi\, d\varphi$ gleich $\frac{1}{2}(\cos\varphi\sin\varphi + \varphi)$ iſt, ſo ergibt ſich hieraus:

$$\frac{1}{r^3}\int y^2dx = \tfrac{5}{2}\varphi - \tfrac{11}{3}\sin\varphi + \tfrac{3}{2}\cos\varphi\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi + C.$$

Der Winkel φ wächſt von 0 bis 2π; an beiden Grenzen fallen alſo die mittleren drei Glieder fort, und ſomit bleibt:

$$V = \pi \cdot r^3 \cdot \tfrac{5}{2} \cdot 2\pi, \quad \text{alſo:} \quad \mathbf{V = 5\pi^2 r^3}.$$

c) Länge krummer Linien (Rektifikation).

Das Differential ds eines Bogens iſt mit dem Differential dy der Funktion und dem Differential dx der Veränderlichen durch die Gleichung

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

verbunden; es iſt alſo

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx + C.$$

Beiſpiel 11. Die Länge eines Bogens des **Kreiſes** $x^2 + y^2 = r^2$ zu beſtimmen.

Auflöſung. Da ſich aus der Gleichung des Kreiſes $2xdx + 2ydy = 0$, alſo $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ ergibt, ſo hat man hier:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot dx = \frac{1}{y}\sqrt{x^2 + y^2} \cdot dx = r \cdot \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Nach Beiſpiel 4 in Nr. 10 iſt aber

$$\int r \cdot \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} = r \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{r} + C;$$

beginnt daher der Bogen bei der poſitiven Y-Achſe, d. h. läßt man x von 0 bis x laufen, und beachtet man, daß $\operatorname{arc\,sin} 0 = 0$ iſt, ſo erhält man:

$$\mathbf{s = r \cdot \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{r}}.$$

Erſtreckt ſich der Bogen bis zur poſitiven X-Achſe, ſo iſt an der oberen Grenze $\frac{x}{r} = 1$; und da $\operatorname{arc\,sin} 1 = \frac{\pi}{2}$ iſt, ſo hat ein Viertelkreis die Länge $\frac{\pi}{2}$ und der ganze Kreis die Länge $\mathbf{k = 2\pi r}$.

Beiſpiel 12. Die Länge eines Bogens der **Parabel** $y^2 = 2px$ zu beſtimmen.

Auflöſung. Man hat hier: $2ydy = 2pdx$, alſo wenn man y als unabhängige Veränderliche benutzt, $dx = \frac{y}{p}dy$ und ſomit:

$$(ds)^2 = \left(\frac{y}{p}dy\right)^2 + (dy)^2 = \frac{y^2 + p^2}{p^2} \cdot (dy)^2$$

alſo:

$$ds = \frac{1}{p}\sqrt{y^2 + p^2} \cdot dy.$$

Nach Beiſpiel 11 in Nr. 10 iſt aber

$$\int \sqrt{y^2 + p^2}\, dy = \tfrac{1}{2} y \cdot \sqrt{y^2 + p^2} + \tfrac{1}{2} p^2 \cdot l(y + \sqrt{y^2 + p^2}) + C,$$

und da für $y = 0$ das erſte Glied auf der rechten Seite verſchwindet und das zweite gleich lp wird, ſo ergibt ſich für den Bogen von dem Scheitel bis zu dem Punkte mit der Ordinate y_1:

$$\mathbf{s_1 = \frac{y}{2p} \cdot \sqrt{y^2 + p^2} + \tfrac{1}{2} p \cdot l \frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p}}.$$

Beiſpiel 13. Die Länge eines Bogens der **Zykloide** zu beſtimmen.

Auflöſung. S. Beiſp. 5. Es iſt hier

$$dx = r \cdot d\varphi - r\cos\varphi d\varphi = r(1-\cos\varphi)d\varphi \quad \text{und} \quad dy = r\sin\varphi d\varphi,$$

alſo

$$(ds)^2 = r^2(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + 1 - \cos^2\varphi)(d\varphi)^2$$
$$= 2r^2(1-\cos\varphi)(d\varphi)^2 = 4r^2\sin^2\frac{\varphi}{2}(d\varphi)^2,$$

und ſomit

$$ds = 2r\sin\frac{\varphi}{2}\cdot d\varphi = 4r\sin\frac{\varphi}{2}d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -4r\cdot d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot$$

Wird daher die Länge des Bogens mit z bezeichnet, ſo folgt:

$$z = -4r\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\left(\cos\frac{\varphi}{2}\right) = -4r(\cos\pi - \cos 0) = -4r(-1-1)$$

alſo:

$$\mathbf{z = 8r.}$$

Beiſpiel 14. Die Länge eines Bogens einer **logarithmiſchen Spirale** zu beſtimmen.

Auflöſung. S. Beiſp. 6. Aus $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $r = c\cdot e^{m\varphi}$ folgt: $x = c\cdot e^{m\varphi}\cos\varphi$ und $y = c\cdot e^{m\varphi}\sin\varphi$.

Hiernach hat man:

$$dx = c(me^{m\varphi}\cos\varphi - e^{m\varphi}\sin\varphi)d\varphi = c\cdot e^{m\varphi}(m\cos\varphi - \sin\varphi)d\varphi,$$
$$dy = c(me^{m\varphi}\sin\varphi + e^{m\varphi}\cos\varphi)d\varphi = c\cdot e^{m\varphi}(m\sin\varphi + \cos\varphi)d\varphi,$$

und ſomit iſt

$$(ds)^2 = c^2e^{2m\varphi}(m^2+1)(d\varphi)^2,$$

alſo

$$ds = c\cdot\sqrt{m^2+1}\cdot e^{m\varphi}d\varphi = c\sqrt{m^2+1}\cdot\frac{1}{m}d(e^{m\varphi})$$
$$= \sqrt{m^2+1}\cdot\frac{1}{m}d(c\cdot e^{m\varphi}) = \frac{1}{m}\cdot\sqrt{m^2+1}\,dr.$$

Für einen von den Vektoren r_1 und r_2 begrenzten Bogen folgt hieraus:

$$s = \frac{1}{m}\cdot\sqrt{m^2+1}(r_2 - r_1).$$

Anmerkung. Die Berechnung der Länge einer Ellipſe und einer Hyperbel erfordert Betrachtungen, die über die hier geſteckten Grenzen hinausgehen.

Nr. 12. Anwendungen aus der Phyſik.

a) Die Fallgeſetze und der ſchiefe Wurf.

α) Die gebräuchliche Erklärung für die Geſchwindigkeit v

$$v = \frac{s}{t}$$

paßt bei einer ungleichförmigen Bewegung nur für die mittlere Geſchwindigkeit in einem beſtimmten endlichen Zeitabſchnitt, allein man kann von ihr aus zu einer allgemein gültigen Erklärung gelangen, wenn man die mittlere Geſchwindigkeit für einen von dem Zeitpunkt t_1 beginnenden Zeitabſchnitt Δt

beſtimmt und dann Δt gleich 0 werden läßt. Legt aber der bewegte Körper von dem Zeitpunkt t_1 ab in Δt Sekunden die Strecke Δs zurück, ſo iſt ſeine mittlere Geſchwindigkeit in der Zeit von t_1 bis $t_1 + \Delta t$ gleich $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, und dieſer Quotient geht an der Grenze in $\frac{ds}{dt}$ über. Hiernach erhält man in dem Werte des Differentialquotienten

$$v = \frac{ds}{dt} \tag*{1)}$$

für $t = t_1$ die Geſchwindigkeit des bewegten Punktes zur Zeit t_1.

In gleicher Weiſe kann man aus der für eine gleichmäßig beſchleunigte Bewegung mit der Anfangsgeſchwindigkeit v_0 gültigen Erklärung der Beſchleunigung

$$p = \frac{v_t - v_0}{t}$$

die allgemein gültige Erklärung ableiten:

$$p = \frac{dv}{dt}. \tag*{2)}$$

Der freie Fall iſt nun eine gleichmäßig beſchleunigte Bewegung, und ſeine Beſchleunigung iſt gleich g; nach der Gleichung 2) hat man daher:

$$\frac{dv}{dt} = g, \text{ alſo } dv = dt \cdot g \text{ und } v = gt \cdot + C.$$

Da zur Zeit $t = 0$ auch $v = 0$ iſt, ſo iſt die Geſchwindigkeit eines frei fallenden Körpers zur Zeit t gleich $g \cdot t$.

Aus der Gleichung 1) folgt jetzt:

$$\frac{ds}{dt} = g \cdot t, \text{ alſo } ds = g \cdot t\,dt = \tfrac{1}{2} g \cdot d(t)^2,$$

und ſomit:

$$s = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2 + C'.$$

Da auch hier die Integrationskonſtante C' gleich 0 iſt, ſo ergibt ſich, daß ein frei fallender Körper in t Sekunden die Strecke $\tfrac{1}{2} g \cdot t^2$ zurücklegt.

Aus $v = g \cdot t$ und $s = \tfrac{1}{2} g \cdot t^2$ ergibt ſich durch Elimination von t ſchließlich die Formel: $v^2 = 2g \cdot s$

β) Hat der Körper in dem Augenblick, in dem er der Wirkung der Schwerkraft ausgeſetzt wird, bereits die Geſchwindigkeit v_0, ſo iſt $C = v_0$ und $C' = v_0 t$, alſo $v = gt + v_0$ und $s = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$.

Wird der Körper ſenkrecht in die Höhe geworfen, ſo iſt $dv = -gdt$, und wenn die Anfangsgeſchwindigkeit wieder mit v_0 bezeichnet wird, ſo folgt hieraus, daß $v = v_0 - gt$ und $h = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$ iſt.

γ) Beim ſchiefen Wurf iſt die horizontale Komponente $v_0 \cos \alpha$ der Geſchwindigkeit konſtant, und die in horizontaler Richtung zurückgelegte

Strecke x iſt gleich $v_0 t \cos\alpha$. Für die vertikale Geſchwindigkeit ergibt ſich $v_0 \sin\alpha - gt$, und daraus folgt für die Höhe h, die der Körper nach t Sekunden erreicht hat,

$$h = v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Die Wurfhöhe findet man leicht, wenn man die Ableitung von h gleich 0 ſetzt, uſw., und da die Wurfweite in der doppelten Zeit wie die Wurfhöhe erreicht wird, ſo läßt ſich auch deren Beſtimmung bequem durchführen.

b) Schwingungsdauer eines mathematiſchen Pendels.

Bildet das Pendel zur Zeit t mit ſeiner Ruhelage den Winkel φ, ſo erfährt es bei ſeiner Weiterbewegung von der Ruhelage aus die Beſchleunigung $-g\sin\varphi$. Es iſt daher $\frac{dv}{dt} = -g\sin\varphi$, und wenn man hieraus und aus der Gleichung $ds = v\,dt$ die Größe dt eliminiert, ſo erhält man:

$$v\,dv = -g\sin\varphi\, ds.$$

Iſt aber l die Länge des Pendels, ſo hat man $ds = l\,d\varphi$, und demnach iſt

$$v\,dv = -l g \sin\varphi\, d\varphi = g l\, d(\cos\varphi), \text{ alſo } \frac{1}{2} v^2 = g l \cos\varphi + C.$$

Iſt ferner α der Winkel, den die weiteſte Entfernung des Pendels von ſeiner Ruhelage mit dieſer bildet, ſo muß für $\varphi = \alpha$ die Geſchwindigkeit gleich 0 ſein; die Konſtante C hat daher die Größe $-g l \cos\alpha$, und ſomit ergibt ſich:

$$\frac{1}{2} v^2 = g l (\cos\varphi - \cos\alpha).$$

Jetzt iſt $\frac{l\,d\varphi}{dt} = \frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gl(\cos\varphi - \cos\alpha)}$, und hieraus folgt:

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\alpha)}}.$$

Iſt α ſo klein, daß in der Reihe für $\cos\alpha$ (ſiehe Seite 125, Gleichung 3) nur die zweite Potenz von α berückſichtigt zu werden braucht, ſo hat man: $2(\cos\varphi - \cos\alpha) = \alpha^2 - \varphi^2$, alſo $dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}$, und da (ſiehe Beiſpiel 4 in Nr. 10) $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = \arcsin\frac{\varphi}{\alpha}$ iſt, ſo folgt für die Zeit, in der das Pendel ſich von ſeiner Ruhelage aus um den Winkel α bewegt,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\,(\arcsin 1 - \arcsin 0) = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Für die Dauer der Bewegung von einer Grenzlage zur anderen und zurück (die Schwingungsdauer) erhält man alſo: $\mathbf{T} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Anhang III.

Überblick über die Geſchichte der Schulmathematik.

Nr. 1. Die Entwicklung der Geometrie.

a) Nach den Mitteilungen der Griechen liegt der Urſprung der Geometrie im Lande der Pharaonen, wo die Notwendigkeit, nach den jährlichen Überſchwemmungen des Nils ſich ſtets wiederholende Landesvermeſſungen vorzunehmen, geradezu zu der Entwicklung geometriſcher Kenntniſſe zwingen mußte. Aber auch der Anblick der gewaltigen Pyramiden und Tempel, die genaue Durchforſchung ihrer Bauart und Inſchriften und das Studium der gefundenen Papyrusrollen, beſonders des unter dem Namen „Rechenbuch des Ahmes“ bekannt gewordenen *Papyrus Rhind* (gegen 2000 v. Chr.) geben überraſchende Aufſchlüſſe über ägyptiſche Kenntniſſe in der Geometrie. Wie das durch einen glücklichen Zufall erhaltene Rechenbuch auf einen fachmänniſch erteilten Unterricht im Rechnen ſchließen läßt, ſo wird man auch in der Annahme nicht fehlgehen, daß geometriſche Lehrbücher vorhanden waren, und daß in dieſen die berufsmäßige formale Sprache und die Satzanordnung ſich zu bilden begonnen hatte, deren Spuren ſich bei Ahmes finden, und deren Ausbildung die Geometrie Euklids (300 v. Chr.) aufweiſt.

b) Auch die Babylonier haben ſich viel mit Geometrie beſchäftigt; die Lehre von den Parallelen, die Konſtruktion des regelmäßigen Sechsecks, die Einteilung des Kreiſes in 360° ſowie einige Sätze der Dreiecks- und Kreislehre ſtammen von ihnen und ſind durch berühmte Gelehrte wie Thales von Milet (gegen 600 v. Chr.) und Pythagoras (580—501) auf ihren Reiſen in fremden Ländern geſammelt und nach Griechenland verpflanzt worden.

c) Die Schule des Pythagoras löſte zuerſt die Geometrie als ſelbſtändige Wiſſenſchaft von der ſteten Verbindung mit der Praxis ab. Sie baute die Lehre von den Parallelen, die Sätze über die Winkel des Dreiecks, über die Kongruenz und Flächengleichheit von Dreiecken und deren Verwendung bei den Verwandlungsaufgaben aus und bereicherte ſie durch den Pythagoreiſchen Lehrſatz und die ſtetige Teilung. Nach den Aufzeichnungen von Hippokrates (um 440 v. Chr.) zu urteilen, waren ihre Beweiſe allerdings mehr Erfahrungsbeweiſe, bei denen die Einzelfälle herangezogen wurden, um aus ihnen den allgemeinen Satz herzuleiten. Die vielgerühmte griechiſche Strenge macht ſich zum erſten Male in den „Elementen“ von Hippokrates bemerkbar; von da ab iſt ſie untrennbar mit den geometriſchen Arbeiten der Griechen verbunden. Beſondere Verdienſte hat ſich Plato (429—348) um die Grundlegung der

Geometrie erworben. Indem er jeden Satz auf Vorderſätze zurückführte, gelangte er ſchließlich dazu, die Definitionen, Axiome und Poſtulate herauszuſchälen und zu formulieren; ferner wird ihm die Erfindung der analytiſchen Methode und des indirekten Beweiſes zugeſchrieben.

Was Pythagoras, Plato und deſſen Nachfolger geleiſtet hatten, faßte Euklid in ſeinen Elementen (300) in einer Formvollendung zuſammen, die es erklärlich erſcheinen läßt, daß uns von den Werken ſeiner Vorgänger vielfach nicht einmal die Namen überliefert worden ſind. Auf der Euklidiſchen Grundlage baute ein halbes Jahrhundert ſpäter der neben Ariſtoteles größte Geiſtesheros der nachplatoniſchen Zeit, Archimedes von Syrakus (287—212), ſeine ſtaunenswerten Leiſtungen auf (Quadratur des Kreiſes, der Ellipſe und der Parabel, Inhaltsbeſtimmung der Kugel und der anderen Umdrehungskörper u. a. m.), und faſt gleichzeitig mit ihm entwickelte Apollonius von Perga (gegen 250) ſeine Geometrie der Kegelſchnitte; auf Euklidiſcher Grundlage beruhen auch die Berechnungsregeln Heros von Alexandrien (gegen 50 v. Chr.), des großen Kenners der ägyptiſchen Technik, ſowie die geometriſchen Arbeiten von Menelaus, Klaudius Ptolemäus und Pappus (4. Jahrh. n. Chr.), deren Namen noch heute mit den von ihnen gefundenen Sätzen verbunden ſind.

d) Die Erbſchaft der Griechen ging auf die Römer über, traf aber hier einen recht ungünſtigen Boden an. Die kriegs- und rechtskundigen Römer beſaßen ein ungewöhnlich geringes Verſtändnis für mathematiſche Dinge, ſoweit ſie nicht zur Praxis dringend nötig waren, und vermochten nicht einmal zu erhalten, was ſie ererbt hatten. Auf keinem Gebiete iſt daher eine Förderung der Mathematik durch die Römer zu bemerken.

e) Auch der Anteil der Inder an der Entwicklung der Geometrie iſt nur gering; während ſie im Rechnen und in der Algebra hervorragende Leiſtungen aufzuweiſen haben, ſcheint ihnen der Sinn für die ſtrenge Folgerichtigkeit eines geometriſchen Beweiſes gefehlt zu haben. Ihr Beweismittel iſt faſt ausſchließlich die Anſchauung, und das einzige Wort „Siehe" neben einer anſchaulich gezeichneten Figur reicht ihnen ſelbſt bei nicht ganz leichten Sätzen zum Beweiſe völlig aus. Dagegen bauten ſie die algebraiſche Behandlung geometriſcher Probleme aus und kamen auf dieſem Wege ſo weit, daß ſie die Heroniſche Dreiecksformel für das Sehnenviereck erweitern konnten.

f) Die Araber haben hier wie bei den anderen mathematiſchen Diſziplinen das außerordentliche Verdienſt, in Überſetzungen uns die Arbeiten der Griechen und Inder erhalten zu haben. Eigene Leiſtungen von größerer Bedeutung haben ſie jedoch in der elementaren Planimetrie nicht aufzuweiſen.

g) Im Abendlande iſt das geometriſche Wiſſen bis in das 12. Jahrh. hinein auf die geringen Kenntniſſe der römiſchen Feldmeſſer beſchränkt geblieben. Erſt dann gelangte über arabiſche Autoren hinweg die griechiſche Geometrie in reiner Form ins Abendland und fand in den Werken *Practica geometriae* von Leonardo von Piſa (1220) und *De triangulis* von dem Ordensgeneral Nemorarius († 1237) eine Darſtellung, die bis in die Mitte des 15. Jahrh.

für die mathematiſche Wiſſenſchaft maßgebend war. Der Humanismus eröffnete nun ein direktes Zurückgehen auf die alten Quellen und eine Wiederherſtellung des alten Beſitzes, wie dies die Arbeiten von Peuerbach (1423–1461, Wien) und Regiomontan (1436–1476) erkennen laſſen; die Weiterentwicklung ging jedoch nur ſehr langſam vor ſich, bis endlich die große Entdeckung von Descartes (1637, *Géométrie*) die Geometrie mit der Algebra verband und in der analytiſchen Geometrie ein fruchtbares Hilfsmittel ſchuf, das der Mathematik zu ungeahnten Triumphen verhelfen ſollte. Infiniteſimalbetrachtungen, deren erſte Spuren ſich ſchon bei Archimedes und nach langer Pauſe dann wieder bei Kepler (*Stereometria doliorum* von 1615) und bei Cavalieri (*Geometria indivisibilibus* uſw. von 1635) vorfinden, vereinigten ſich mit der analytiſchen Geometrie, um ſchließlich als herrlichſte Frucht die Differential- und Integralrechnung zu zeitigen. Aber auch auf dem Wege der antiken Geometrie lernte man weitergehen und ſchuf in der projektiviſchen Geometrie (Monge, 18 Jahrh.; Steiner, 19. Jahrh.) eine neue Wiſſenſchaft, welche die tiefſten Einblicke in das Weſen der Raumlehre erſchloß.

Die erſte in deutſcher Sprache geſchriebene Geometrie ſtammt aus der zweiten Hälfte des 14. Jahrh. und iſt unter dem Namen *Geometria Culmonensis* bekannt; der (unbekannte) Verfaſſer hat hier der lateiniſchen Ausarbeitung des Werkes, das die Regeln und Vorſchriften der damals ſehr handwerksmäßig betriebenen Feldmeßkunſt zuſammenfaßt, eine ziemlich freie deutſche Überſetzung beigefügt.

Nr. 2. Erklärungen der Geraden, des Winkels und der Parallelen.

a) Euklid erklärt die **Gerade** als „eine Linie, die zwiſchen den in ihr befindlichen Punkten immer gleichmäßig liegt", und Hero ergänzte dieſe Erklärung durch den Zuſatz, der allerdings ſchon Archimedes bekannt war, „daß die Gerade zwiſchen zwei Punkten die kürzeſte von den Linien ſei, die dieſe beiden Punkte als Grenze haben".

b) Die Erklärung des **Winkels** als Richtungsunterſchied zweier Geraden ſtammt wahrſcheinlich aus der platoniſchen Schule und wird zuerſt bei Euklid angetroffen. Die gleichfalls heute geläufige Erklärung, daß ein Winkel das unendliche Flächenſtück zwiſchen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen ſei, iſt zuerſt von Bertrand (1778) aufgeſtellt und dann durch Baltzers „Elemente" in Deutſchland verbreitet worden. Eine dritte Erklärung, daß der Winkel eine Drehungsgröße ſei, rührt von Thibaut (1819, Göttingen) her. Möbius (1790–1868, Leipzig), dem die Einführung entgegengeſetzter Strecken zuzuſchreiben iſt, betont bei dem Winkel den Drehungsſinn und unterſcheidet ſtreng zwiſchen den Winkeln ABC und CBA.

Der Begriff des rechten Winkels iſt aus der ſenkrechten Stellung irgendeines Gegenſtandes zum Erdboden oder aus der aufrechten Haltung des

Menſchen ſelbſt abgeleitet und wohl erſt ſpäter in eine beliebige Ebene übertragen worden. Die Erklärung der Senkrechten (zwei gleiche Nebenwinkel!) und die Einteilung der Winkel in ſpitze, rechte und ſtumpfe gehört ſchon der vorplatoniſchen Zeit an. Der Satz von den Scheitelwinkeln wird zwar dem Thales zugeſchrieben, allein es iſt mit Sicherheit anzunehmen, daß Thales ihn aus Ägypten mitgebracht hat.

Die Bezeichnungen Komplement- und Supplementwinkel ſind erſt im Mittelalter entſtanden.

c) Auch für **parallele Linien** haben ſich im Laufe der Zeit drei Erklärungen herausgebildet. Die älteſte, die ſich ſchon bei Euklid vorfindet, lautet in der Überſetzung: „Parallel ſind gerade Linien, die, ſoweit man ſie auch an beiden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zuſammentreffen"; das iſt aber nichts anderes wie die heute noch gültige Erklärung, daß zwei Geraden parallel heißen, wenn ſie ſich nicht ſchneiden oder, was auf dasſelbe hinauskommt, ſich im Unendlichen treffen (Kepler, 1609). Zweitens hat man zwei Geraden parallel genannt, wenn ſie immer dieſelbe Richtung haben (1731, Elemente von Varignon), oder beſſer ausgedrückt, wenn ſie mit einer ſchneidenden Geraden gleiche Winkel bilden.

Die ſachlich richtigſte Erklärung, die von der Unveränderlichkeit des Abſtandes der Geraden ausgeht, iſt bereits von Poſidonius (135—51 v. Chr.) vorgeſchlagen worden, aber ſie iſt vor dem 16. Jahrh. nicht in die Lehrbücher eingedrungen und wird auch heute noch nur ſelten angetroffen.

Euklid hatte den Parallelenſatz als Axiom bezeichnet und ihm einen Platz angewieſen, der zu der Annahme berechtigt, daß er von der Unmöglichkeit eines Beweiſes überzeugt war. Gleichwohl haben ſich von Ptolemäus bis Legendre hin gar manche hervorragende Gelehrte damit abgequält, einen Beweis aufzufinden. Erſt Gauß gelangte zu der Gewißheit, daß das Axiom eine Erfahrungstatſache ſei, ein Beweis ſomit zu den Unmöglichkeiten gehöre. — Der alte Ptolemäiſche Beweis, der aus der Annahme eines Schnittpunktes die Exiſtenz eines zweiten ableitet, wird noch heute in der von Bertrand (1778) abgeänderten Form als Deckungsbeweis (Veranſchaulichung!) in den Schulen vielfach durchgenommen.

Nr. 3. Dreieck, Viereck und Kreis.

a) Die Lehre von der **Kongruenz der Dreiecke** mit ihren Anwendungen iſt von Pythagoras und ſeinen Schülern in der Hauptſache durchgeführt worden. Wie ſich aus der Zuſammenſtellung in dem erſten Buche der Elemente Euklids ergibt, waren ſie mit drei Kongruenzſätzen ausgekommen. Der SSW-Satz, den Pythagoras wahrſcheinlich gar nicht gekannt hat, taucht zum erſten Male in der 1750 erſchienenen Neuauflage der Wolffſchen „Anfangsgründe" auf, wird dann verſchiedentlich teils ſpezialiſiert, teils abgeändert und erhält ſchließlich 1883 in den „Elementen" Baltzers die Formulierung mit der größeren Seite, in der er ſich in den meiſten Lehrbüchern der Jetztzeit befindet.

b) Die Eigenſchaften der von Euklid unter dem Namen Parallelogramme zuſammengefaßten **Vierecke** waren den Pythagoreern bereits bekannt. In der Aufſtellung Euklids fehlt allerdings der Satz, daß die Diagonalen ſich gegenſeitig halbieren, aber da er von Archimedes gelegentlich wie ein allgemein bekannter Satz angewandt wird, ſo läßt ſich vermuten, daß Euklid ihn wohl kannte, aber nicht für wichtig genug hielt, um ihn in ſeine „Elemente" aufzunehmen. Die Verbindung der Parallelogramme unter ſich und mit dem allgemeinen Viereck iſt jüngeren Datums.

Eine ſyſtematiſche Behandlung der Parallelogramme iſt erſt im vergangenen Jahrhundert ausgebildet worden.

Auch der den Pythagoreern bereits bekannte Satz von der Summe der Winkel eines Vierecks fehlt bei Euklid; ebenſowenig meldet dieſer etwas davon, ob ſeine Vorgänger die Summe der Winkel in einem Vieleck bilden konnten. Die allgemeine Löſung dieſer Aufgabe und der Aufgabe, die Summe der Außenwinkel eines n=Ecks zu berechnen, iſt erſt von Regiomontan (15. Jahrh.) geliefert worden; für das Viereck und das Fünfeck hatte indeſſen ſchon Proklus (412—485 n. Chr.) die beiden Summen beſtimmt.

Die Anzahl der Diagonalen eines beliebigen n=Ecks wurde zuerſt von Lexell (Petersburg) im Jahre 1774 berechnet.

Die Viereckslehre erfuhr eine Erweiterung in der ſog. neueren Geometrie durch die Behandlung des vollſtändigen Vierſeits. (Carnot: *quadrilatère complet!*).

c) Der **Kreis** gehört zu den älteſten geometriſchen Figuren; ſeine Herſtellung durch ein geſpannt zu haltendes Seil, das mit einem Ende an einem feſten Stabe befeſtigt iſt, lehren die Worte *κέντρον* (= Stab) für den Mittelpunkt und *περιφέρεια* (von *περιφέρειν* = herumtragen) für einen Bogen. Die Anwendung des letzteren Wortes für die ganze Kreislinie iſt erſt ſpäter eingetreten; urſprünglich wurde der Umfang *περίμετρος* genannt, und der Durchmeſſer hieß *διάμετρος* (*dimetiens*). Einen Fachausdruck für den Halbmeſſer kannte das Altertum nicht; wo von dem Halbmeſſer die Rede iſt, da behilft man ſich mit Umſchreibungen. Die Bezeichnung *semidiameter*, die zuerſt bei Boëthius (470—524) auftaucht, iſt ohne Zweifel auf dem Umwege über Alexandrien von den Indern herübergekommen. Die Benennung *radius* findet ſich zuerſt in einem trigonometriſchen Werke von Fink (1583) und dringt nach der Empfehlung durch Vieta raſch in die Fachliteratur ein, um hier bald eine beherrſchende Stellung einzunehmen. Bei der Vorliebe der Deutſchen für Fremdwörter und alles Fremdländiſche war nicht zu erwarten, daß die gute deutſche, von Sturm 1670 zuerſt gebrauchte Bezeichnung Halbmeſſer gegen den *radius* merklich aufkommen würde. Mehr Glück haben die Benennungen

Mittelpunkt ſtatt Zentrum, Kreisausſchnitt ſtatt Sektor und Kreisabſchnitt ſtatt Segment gehabt, während der Zentriwinkel durch Pirkenſteiners (1699) Mittelpunktswinkel und der Peripheriewinkel durch den Umfangswinkel bisher ebenſowenig hat verdrängt werden können wie die Zentrale (man bedenke die Bedeutung dieſes Wortes im praktiſchen Leben!) und andere „volltönende" Bezeichnungen dieſer Art in der Mathematik.

d) **Die Sätze der Kreislehre** über Sehnen und ihre Abſtände vom Mittelpunkte, über Mittelpunkts- und Umfangswinkel auf gleichen Bogen eines Kreiſes oder zweier Kreiſe mit gleichen Halbmeſſern, über die Summe der gegenüberliegenden Winkel eines Sehnenvierecks, über die Tangente und den Sehnentangentenwinkel finden ſich bereits in den Elementen Euklids vor; dagegen fehlt noch der Satz über die Gleichheit der Tangentenabſchnitte, der von Archimedes zwar ſchon benutzt, aber von Hero erſt als ſelbſtändiger Satz aufgeſtellt wurde. Naturgemäß wird man nun nicht erwarten dürfen, den Satz von den Seiten eines Tangentenvierecks bei Euklid anzutreffen. Dieſer Satz erſcheint zuerſt in einer Schrift von Nemorarius (gegen 1200).

Nach neueren Unterſuchungen ſoll ſich ſchon Archimedes mit Berührungsaufgaben beſchäftigt haben; von ſeinen Ergebniſſen iſt uns jedoch nichts erhalten geblieben. Die Löſung der Berührungsaufgaben von Apollonius iſt gleichfalls verloren gegangen; erhalten iſt uns nur von Pappus (gegen 400 n. Chr.) die Behandlung des Falles, zu drei gegebenen Kreiſen den äußeren Berührungskreis zu zeichnen. Bei den im Mittelalter angeſtellten Verſuchen, die Löſungen des Apollonius wieder zu finden, iſt es Vieta in ſeinem *Apollonius Gallus* gelungen, eine allgemeine Löſung mit Zirkel und Lineal zu liefern.

e) **Die Konſtruktionsaufgaben** erlangten erſt unter der Macht griechiſcher Abſtraktion ihre wahre Bedeutung für die Geometrie. Zuerſt gebraucht, um dem vorſichtig vorwärts ſchreitenden Mathematiker die Gewißheit von der Exiſtenz der abſtrakten Begriffe zu geben, mit denen er ſich beſchäftigte, wurden ſie ſchließlich Selbſtzweck. Es bildete ſich eine Theorie ihrer Behandlung heraus, die unter Platos Händen ihre Vollendung empfing. Die Formulierung der Aufgabe, erſt allgemein und dann für den vorliegenden beſonderen Fall, die Entwicklung der Löſung (Analyſis), die Konſtruktion und dann der ſynthetiſche Beweis, daß durch dieſe die Aufgabe gelöſt ſei, — das ſind die äußeren Formen, in denen ſich ſchon in der Schule Platos die Behandlung der geometriſchen Konſtruktionsaufgabe vollzog. Die analytiſche Methode gab ferner Veranlaſſung, zu unterſuchen, unter welchen Bedingungen die geſtellte Aufgabe lösbar ſei, und der Löſung noch eine Determination hinzuzufügen. In dieſer Determination, deren Notwendigkeit Platos Schüler Leon (370) betont und deren großen Wert Apollonius erkannt hatte, liegen die erſten Keime einer Theorie der Maxima und Minima.

Beim Gebrauch der analytiſchen Methode hat ſich in der platoniſchen Schule allmählich auch der Begriff des geometriſchen Ortes entwickelt.

Die Platoniſche Schule ließ zur Ausführung der geometriſchen Konſtruktionsaufgaben nur den Gebrauch von Lineal und Zirkel zu. Die alleinige Verwendung des Lineals wurde zuerſt in der Schule Carnots (1753—1823) gefordert und dann von Brianchon (1785—1870) weiter ausgebildet. Den entgegengeſetzten Standpunkt nahm der Italiener Maſcheroni (1750—1800) ein, wenn er das Lineal ganz zu vermeiden und nur mit dem Zirkel zu zeichnen ſuchte. Ferner wurden Verſuche gemacht, mit dem Lineal allein auszukommen, wenn noch ein einziger feſter Kreis zugeſtanden wird oder der Zirkel eine unveränderliche Spannweite behält. Das erſte Verfahren hat Steiner beſonders ausgebildet, und das zweite hat unter den Mathematikern ſeit Hero bis auf die jüngſte Zeit immer wieder Anhänger gefunden.

Nr. 4. Flächenberechnung und Flächenvergleichung.

a) Die Berechnung von Flächen bildet den Hauptbeſtandteil der ägyptiſchen Geometrie. Rechtecke, gleichſchenklige Dreiecke, Paralleltrapeze und Vierecke, die ſich in der Form nicht weſentlich von Quadraten unterſchieden, waren die Grundfiguren, auf die ſie die Berechnung einer beliebigen Figur durch Zerſchneiden zurückführten. Die Feldmeſſer kannten Näherungsformeln, welche bei vorſichtiger Wahl der Grundfiguren die erforderliche Genauigkeit der Berechnungen gewährleiſteten. Auch ſpäter, als längſt die genaueren Formeln gefunden waren, zogen die griechiſchen und römiſchen Feldmeſſer die leichter zu handhabenden Näherungsformeln vor, und ſelbſt bis in die heutige Zeit hinein haben dieſe in den gewerblichen Fortbildungsſchulen, in denen ein größeres Maß von mathematiſchen Kenntniſſen nicht gefordert werden kann, ihren Platz behauptet.

b) Konnte der Feldmeſſer ſich mit Annäherungen begnügen, ſo war dies dem Vertreter der Wiſſenſchaft nicht geſtattet. Für dieſen galt es, unbekümmert um die praktiſche Verwendbarkeit der Ergebniſſe, den wirklichen Zuſammenhang zwiſchen den geometriſchen Gebilden zu erforſchen. So finden wir bei Euklid in ſeiner Zuſammenfaſſung der Arbeiten der Pythagoreiſchen und der Platoniſchen Schule nur eine Vergleichung der Flächen, während auf eine daraus folgende Berechnung an keiner Stelle eingegangen wird. Ob es zu ſeiner Zeit auch Lehrbücher der praktiſchen Geometrie, die man ſeit Ariſtoteles als *Geodaesie* bezeichnete, gegeben hat, weiß man nicht; denn außer der ſpäter erſchienenen Sammlung Heros iſt uns kein griechiſches Werk über geometriſche Berechnungen erhalten geblieben. Die Sammlung Heros aber iſt in der Behandlung der elementaren Berechnungen geradliniger Flächen geradezu erſchöpfend und läßt den Verluſt anderer Werke weniger bedauern.

c) Die Krone der Flächenvergleichung bildet der **Pythagoreiſche Lehrſatz.** Die alten Ägypter wußten ſchon, daß ein Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 rechtwinklig ſei, aber die Tatſache, daß die Summe der Quadrate von 3 und 4 dem Quadrate von 5 gleich iſt, war ihnen noch unbekannt. Pythagoras kann alſo ſeinen Satz nicht von den Ägyptern erhalten haben. Ferner ſteht feſt, daß die alten Inder nicht nur eine Reihe von Gruppen Pythagoreiſcher Zahlen, ſondern den Wortlaut des Satzes ſelber für dieſe Gruppen bereits gekannt haben; ob jedoch Pythagoras hiervon etwas gewußt hat, läßt ſich nicht feſtſtellen, wenn auch die Wahrſcheinlichkeit dafür ſpricht. Sein Verdienſt bleibt es jedenfalls, den Satz in ſeiner Allgemeinheit erkannt und ausgeſprochen zu haben. Von der Entdeckung ausgehend, daß der Satz für gewiſſe Zahlengruppen beſtehe, ſtellte er ſich die arithmetiſche Aufgabe, die Zahlengruppen zu finden, die derſelben Bedingung genügten, und dann den allgemeinen geometriſchen Satz auch geometriſch zu beweiſen. In welcher Weiſe er den Beweis lieferte, wiſſen wir nicht; denn der von Euklid angegebene Beweis iſt deſſen Werk. Da jedoch die Pythagoreiſche Schule ſchon die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat mit Hilfe des rechtwinkligen Dreiecks ausführen konnte, ſo iſt es wahrſcheinlich, daß ſie einen Beweis des Satzes kannte, der dem Gedankengange Euklids nahe kam, das Hypotenuſenquadrat in zwei Rechtecke zu zerlegen und deren Gleichheit mit je einem der Kathetenquadrate nachzuweiſen.

d) Die Pythagoreiſche Schule hat ferner die Erweiterung des Satzes für das ſchiefwinklige Dreieck ſchon gefunden; ebenſo deutet die mehr algebraiſche als geometriſche Form des Beweiſes für den Satz von dem Quadrat der Höhe im rechtwinkligen Dreieck darauf hin, daß auch dieſer Satz den Pythagoreern bereits bekannt geweſen iſt.

e) Die Verallgemeinerung des Pythagoreiſchen Lehrſatzes auf ähnliche und ähnlich liegende Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ſoll gleichfalls das Werk Euklids ſein. Die Ausdehnung auf Halbkreiſe, die zu dem Satze von den ſogenannten *lunulae Hippocratis* führt, iſt vor Pardies (1683) nicht anzutreffen.

f) Unter den zahlreichen Anwendungen des Pythagoreiſchen Satzes ſind in erſter Linie die geometriſche Auflöſung der quadratiſchen Gleichung $ax \pm x^2 = b$ von Euklid, die Ableitung der Inhaltsformeln von Hero und die von Pappus (gegen 400 n. Chr.) aufgeſtellten Gleichungen zwiſchen den Seiten eines Dreiecks und ſeinen Mittellinien zu erwähnen.

g) Seit Euklid hat es eine große Anzahl von Beweiſen für den Pythagoreiſchen Lehrſatz gegeben; eine Zuſammenſtellung aus der jüngſten Zeit führt nicht weniger als 46 Beweiſe auf.

Nr. 5. Zur Lehre von der Ähnlichkeit.

a) Die erſten Anfänge einer wiſſenſchaftlichen Ähnlichkeitslehre treffen wir bei Hippokrates (um 440 v. Chr.) an, und auch Archytas (430—365, Tarent) und Plato haben Ähnlichkeitsſätze zur Löſung der Aufgabe verwandt, einen Würfel zu verdoppeln; das Hauptverdienſt um den Aufbau einer geometriſchen **Proportionalitätslehre** ſcheint jedoch dem Eudoxos von Knidos (408—355), einem Schüler Platos, zuzukommen, von dem das ganze fünfte Buch der Elemente Euklids herrühren ſoll. Den Hauptſatz der Proportionalitätslehre, daß eine Parallele zu einer Dreiecksſeite die beiden anderen in proportionale Abſchnitte zerſchneidet, leitet Eudoxos aus dem Satze ab, daß Dreiecke von gleicher Höhe ſich wie ihre Grundlinien verhalten. Euklid hat eine ganze Reihe von Sätzen, die ſich hieraus ableiten laſſen, nicht aufgenommen, während ſie von Archimedes benutzt werden, alſo damals ſchon bekannt geweſen ſein müſſen.

b) In der Erklärung der **Ähnlichkeit** und in der Anzahl der **Ähnlichkeitsſätze** nimmt Euklid bereits den heutigen Standpunkt ein, und auch ſeine Löſung der Aufgaben, eine Strecke nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen, die dritte und die mittlere Proportionale der Strecken a und b zu zeichnen, ſtimmt mit der unſerigen überein. Ebenſo treffen wir bei ihm ſchon die heutige Behandlung des Verhältniſſes der Flächen ähnlicher Dreiecke und Vielecke an. Dagegen fehlt bei ihm die Benutzung der Ähnlichkeit zum Beweiſe des Sehnen- und des Sekantenſatzes. Der Satz von der Sekante und der Tangente ſcheint im 18. Jahrh. zuerſt als Sonderfall des Sekantenſatzes ausgeſprochen worden zu ſein. — Den Wert des Produktes hat zuerſt Steiner (19. Jahrh.) als „Potenz des Punktes in bezug auf den Kreis" bezeichnet.

c) Zu den älteſten **Anwendungen** der Ähnlichkeitslehre gehören der Ptolemäiſche Lehrſatz vom Sehnenviereck, der Apolloniſche Kreis, der Satz von Menelaus und der Satz von Pappus, daß ein harmoniſches Strahlenbüſchel von einer Geraden in 4 harmoniſchen Punkten geſchnitten wird. (Der Name harmoniſches Strahlenbüſchel ſtammt von Brianchon.) — Der Cevaſche Satz iſt erſt ſpäter (1678) aufgeſtellt worden.

d) Das Euklidiſche Lehrgebäude mit ſeinen Ergänzungen iſt eher eine Sammlung lehrreicher Sätze als ein Syſtem der Geometrie zu nennen. Erſt die Begründer der ſogenannten neueren ſynthetiſchen Geometrie, vor allen Monge, Carnot, Poncelet und Steiner, haben die gemeinſamen Geſichtspunkte aufgefunden.

Auf eine Trennung der Geometrie in zwei Gebiete, je nachdem nur die Lage der Raumgebilde zueinander (Geometrie der Lage) oder nur die Maßverhältniſſe (Geometrie des Maßes) unterſucht werden, hatte ſchon Ariſtoteles hingewieſen. Die Zweiteilung nahm jedoch erſt im 19. Jahrh. greifbare Geſtalt an. Staudts Geometrie der Lage (1847, Nürnberg) iſt das erſte Lehrbuch, das grundſätzlich jede Maßbeziehung ausſchließt.

Nr. 6. Über die regelmäßigen Vielecke.

a) Die älteſten Aufſchlüſſe über regelmäßige Vielecke finden wir wieder bei den Ägyptern. Ihnen iſt zuerſt zwar nur die Vierteilung des Kreiſes bekannt, aber von der achtzehnten Dynaſtie an begegnen uns bei ihnen auch die aus der Sechsteilung hervorgehenden Vielecke.

In dem Umfange, wie ihn die heutige Schulmathematik kennt, iſt die

Konſtruktion der regelmäßigen Vielecke ſchon durch Pythagoras und ſeine Schule geleiſtet worden, wenn auch in der Herſtellung des Fünfecks und des Fünfzehnecks eine Abweichung von unſerem Verfahren zu bemerken iſt. Die Konſtruktion mit Hilfe der ſtetigen Teilung iſt erſt von Pappus angegeben worden.

b) Die Bezeichnung „goldener Schnitt" für die ſtetige Teilung iſt erſt in der Mitte des 19. Jahrh. aufgekommen; Euklid hat dafür noch keinen beſonderen Namen. Wohl hat man ſchon im Mittelalter die Wichtigkeit der ſtetigen Teilung voll und ganz gewürdigt und in allerlei myſtiſche Beziehungen gebracht, wie dies die Benennung *sectio divina* (göttlicher Schnitt) von Kepler andeutet, aber der Überſchwang ſtellte ſich doch erſt ein, als man überall in dieſer Proportion den Ausdruck der höchſten Schönheit zu erblicken glaubte. Die Bezeichnung „ſtetige Teilung" kommt zum erſten Male in der deutſchen Euklid-Ausgabe von Lorenz (1781) vor.

c) Die Berechnung der Seite s_n eines regelmäßigen Vielecks aus dem Halbmeſſer r des umgeſchriebenen Kreiſes beginnt gleichfalls ſchon in der vorgriechiſchen Zeit. Die Formel $s_6 = r$ iſt dem Inhalt nach bereits den Babyloniern bekannt. Die Beziehung zwiſchen r und s_4 führt in der Pythagoreiſchen Schule zur Einführung des Begriffs der Irrationalität. Für $s_3 = r\sqrt{3}$ hat Hero den Näherungswert $r \cdot \frac{26}{15}$ berechnet. Die Unterſuchungen über s_5 und s_{10} werden einem Schüler des Sokrates zugeſchrieben, und Euklid ſtellt zwiſchen s_6, s_5 und s_{10} die Beziehung her, die in unſerer Formelſprache in der Gleichung $s_5^2 = s_6^2 + s_{10}^2$ zum Ausdruck kommt. Von größter Wichtigkeit iſt das Verfahren des Archimedes, von der Seite eines n-Ecks zu der Seite eines 2n-Ecks überzugehen.

Mit der Berechnung der Seite war gleichzeitig die Beſtimmung des Umfanges gegeben. Trotzdem haben ſich die Mathematiker des Mittelalters zuweilen noch mit der Ableitung von Gleichungen zwiſchen den Umfängen und auch den Inhalten des n-Ecks und des 2n-Ecks beſchäftigt. Zu nennen ſind hier beſonders die Arbeiten von Nemorarius. Später nahm Snellius (1581—1626, Leiden) dieſe Unterſuchungen wieder auf und führte ſie mit den Formeln

$$\frac{1}{J_{2n}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i_{2n}} + \frac{1}{J_n}\right) \quad \text{und} \quad U_{2n} : u_{2n} = u_{2n} : u_n$$

zu einem gewiſſen Abſchluß.

Noch bis zum Schluß des 18. Jahrh. war man der Meinung, daß man mit Zirkel und Lineal nur diejenigen regelmäßigen Vielecke herſtellen könne, deren Seitenzahl außer den Faktoren 3, 5 und den Potenzen von 2 keine anderen Faktoren enthielte. Gauß zeigte jedoch, daß außerdem der Kreis dann und nur dann allein mit Zirkel und Lineal in n gleiche Teile geteilt werden könne, wenn n eine Primzahl iſt und durch den Ausdruck $2^m + 1$ dargeſtellt werden kann, in welchem m eine Potenz von 2 bezeichnet.

Nr. 7. Über die Kreisberechnung.

a) Der älteſte Verſuch, die Kreisfläche durch den Halbmeſſer auszudrücken, begegnet uns wieder in dem Rechenbuche von Ahmes. Die hier gegebene Vorſchrift, welche $\frac{8}{9}$ des Durchmeſſers als Seite eines gleichgroßen Quadrates wählt, entſpricht dem Werte 3,16 für π, iſt alſo geradezu von überraſchender Genauigkeit. Wie die Ägypter zu dieſer Zahl gekommen ſind, iſt nicht bekannt. Die Babylonier nahmen für π den weniger genauen Wert 3 an, benutzten alſo die durch das Sechseck gegebene Annäherung.

b) Mit dem Eingreifen der Griechen in die Entwicklung der Mathematik beginnt auch für die Quadratur des Kreiſes die Zeit einer wiſſenſchaftlichen Behandlung. Wie Plutarch erzählt, hat ſich Anaxagoras von Klazomenä (gegen 500) zuerſt mit der Aufgabe beſchäftigt, die Fläche eines Kreiſes in ein Quadrat zu verwandeln; zu welchem Ergebnis er gekommen iſt, erfahren wir nicht. Antiphon (um 430) verſucht die Quadratur geometriſch auszuführen; er zeichnet dem Kreiſe zunächſt ein Quadrat ein, dann ein 8-Eck, ein 16-Eck uſw., bis das regelmäßige Vieleck von dem Kreiſe nicht mehr zu unterſcheiden iſt, und weiſt dann darauf hin, daß man ein Vieleck in ein Quadrat verwandeln könne. Ein Zeitgenoſſe von ihm benutzte das umgeſchriebene Vieleck, um zu einer oberen Grenze zu gelangen. Archimedes fand für das Verhältnis die Zahl $3\frac{1}{7}$. Die Archimediſchen Berechnungen wurden durch Apollonius von Perga wieder aufgenommen und verſchärft; das Ergebnis ſeiner Rechnung kennen wir jedoch nicht, wenn auch vermutet wird, daß die Zahl 3,1416, die am Ende des 5. Jahrh. n. Chr. in Indien auftaucht, auf ihn zurückzuführen iſt.

c) Die Inder ſelbſt haben die Frage umgekehrt und den Durchmeſſer eines Kreiſes geſucht, deſſen Fläche gleich einem gegebenen Quadrate iſt, und ſind dabei auf die Näherungszahl 3,1623 gekommen. Auch die Araber ſcheinen nicht über die griechiſchen Reſultate hinausgegangen zu ſein.

d) Im frühen Mittelalter gerät die Tatſache, daß $3\frac{1}{7}$ doch nur ein Näherungswert iſt, faſt ganz in Vergeſſenheit. Bezeichnend für die ganze Zeit iſt eine Schrift von *Albertus* von Sachſen († 1390), in der behauptet wird, das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmeſſer ſei genau 22 : 7; es gäbe hierfür einen Beweis, doch ſei derſelbe ſehr ſchwierig. *Nicolaus Cusanus* (deutſcher Kardinal in Rom, † 1464) hat das Verdienſt, wieder betont zu haben, daß $3\frac{1}{7}$ ein Näherungswert ſei. Anknüpfend an eine damals erſchienene lateiniſche Ausgabe des Archimedes nahm er die Studien über die Kreisberechnung mit großem Eifer auf und erfand neue Methoden zur Berechnung dieſes Näherungswertes. Mit beſonderer Zähigkeit verfolgte er den Gedanken, den die Inder ausgeführt hatten (*Cusanus* kannte deren Arbeiten nicht), zunächſt ein Vieleck aufzuſuchen, das mit einem gleichſeitigen Dreieck gleichen Umfang habe, von dieſem zu einem anderen Vieleck von gleichem Umfang, aber größerer Seitenzahl überzugehen uſw., um ſich ſo dem Kreiſe immer mehr zu nähern. Leider ſtand ſeine mathematiſche Technik mit ſeiner Erfindungsgabe nicht auf gleicher Stufe, und daraus erklärt es ſich, daß von allen ſeinen Werten für π nur einer die Zahl $3\frac{1}{7}$ an Genauigkeit übertrifft.

e) Mit dem Ende des 16. Jahrh. bricht für die Kreisberechnung eine neue glänzende Zeit an. An der Spitze ſchreitet Vieta, der 1593 die Genauigkeit bis zur 9ten Stelle ſteigert. In demſelben Jahre gibt der Niederländer Roomen ſchon 15 Stellen an. Unter Anwendung der Vielecksberechnung erhöhte dann Ludolph van Ceulen die Kenntnis der genauen Stellen auf 35, und Otho, ein Mitarbeiter von Rhaeticus, fand den Näherungswert $\frac{355}{113}$. Bald traten jedoch die elementar-geometriſchen Methoden der Kreisberechnung in den Hintergrund, als mit der Erfindung der Infiniteſimalrechnung ein Hilfsmittel geſchaffen war, dem Werte von π durch Reihen nahe zu kommen.

f) Den Nachweis, daß π keine rationale Zahl iſt, lieferte 1766 zum erſten Male der Oberbaurat Lambert in Berlin. Legendre zeigte dann 1794, daß auch π^2 irrational ſei. Daß π auch nicht zu den irrationalen Zahlen gehören könne, die als Wurzeln algebraiſcher Gleichungen auftreten, wie dies Euler ſchon vermutet hatte, daß alſo π eine tranſzendente Zahl ſein müſſe, iſt erſt im Jahre 1882 von Lindemann bewieſen worden.

Der Buchſtabe π für das Verhältnis zwiſchen Kreisumfang und Durchmeſſer iſt von Euler in die Literatur eingeführt worden.

Nr. 8. Die Entwicklung der Stereometrie.

a) Daß die Ägypter ſchon ſehr früh einige ſtereometriſche Kenntniſſe gehabt haben müſſen, geht vor allem aus dem Alter der gewaltigen Pyramidenbauten hervor. Man darf ferner annehmen, daß ſie die Raumberechnung bei dem Würfel und der geraden quadratiſchen Säule genau und bei der runden Säule mit der Genauigkeit, die ſie für π kannten, haben ausführen können; für die Pyramide, den Kegel und die Kugel mögen ſie wohl Näherungsformeln gehabt haben. Wie dieſe lauteten, wiſſen wir um ſo weniger, als wir aus den einzig zur Verfügung ſtehenden Überlieferungen Heros nicht einmal über die Geſtalt bei allen berechneten Körpern ausreichend unterrichtet werden. Ebenſo verraten uns die Bauten der Babylonier, daß auch dieſe nicht ohne Kenntniſſe in der Stereometrie geweſen ſein können.

b) Zu einer wirklichen Lehre wird die Stereometrie erſt bei den Griechen, obwohl bei ihnen anfangs wenig Vorliebe für dies Gebiet vorhanden war. Pythagoras und ſeine Schüler hatten zwar die Lehre von den regelmäßigen

Vielflachen durch die Entdeckung des Zwölf- und des Zwanzigflachs vervollſtändigt, aber da ſie die regelmäßigen Körper zu metaphyſiſchen Spekulationen benutzten (den 4 Körpern Würfel, Achtflach, Vier- und Zwanzigflach ordneten ſie die vier Grundelemente Erde, Luft, Feuer und Waſſer zu und nahmen an, daß das Weltganze die Geſtalt eines Zwölfflachs beſitze — daher der Name „kosmiſche Körper"), und zudem über ihre Myſterien ein ſtrenges Schweigegebot herrſchte, ſo konnten ihre Kenntniſſe nicht in weitere Kreiſe dringen. Plato hatte noch allen Grund zu ſeiner heftigen Klage über die Unwiſſenheit ſeiner Zeitgenoſſen in der Stereometrie. „Hinſichtlich der Meſſungen von allem, was Länge, Breite und Tiefe hat", ſo ſagt er, „legen die Griechen eine ebenſo lächerliche wie ſchmähliche Unwiſſenheit an den Tag." Bei dieſer Stellungnahme kann es nicht wundernehmen, daß Plato und ſeine Schüler ſich alle Mühe gaben, das Verſäumte nachzuholen. Mit welchem Erfolge, das zeigen die Tatſachen, daß Archytas von Tarent (gegen 400) die Grundlagen der Stereometrie bereits beherrſchte, daß Eudoxos von Knidos (gegen 360), der Entdecker des Satzes über den Inhalt der Pyramide, ſchon das Syſtem der Stereometrie aufbauen konnte, das wir bei Euklid vorfinden, daß Menächmus (gegen 350) bei Unterſuchungen über die Aufgabe, einen Würfel zu verdoppeln, zu der Entdeckung der Kegelſchnitte gelangte. Euklids Elemente enthalten die elementare Stereometrie bereits in einem Umfange, über den wir heute nur in wenigen Punkten hinausgehen, und was noch fehlte, das haben Archimedes mit ſeiner Berechnung des Rauminhaltes und der Oberfläche der Kugel, mit der Beſtimmung des Inhaltes einiger anderer Umdrehungskörper und der Aufſtellung der halbregelmäßigen Körper, Hypſikles (gegen 200 v. Chr.) und Pappus mit der Aufſtellung rechneriſcher Beziehungen zwiſchen den Beſtimmungsſtücken der regelmäßigen Körper und ſchließlich Pappus mit den ſogenannten Guldinſchen Regeln hinzugefügt. Paul Guldin ſelber (gegen 1600 n. Chr.), nach dem die Regeln genannt werden, iſt erſt der dritte Entdecker; vor ihm hatte ſchon Kepler unabhängig von Pappus die beiden Sätze gefunden.

c) Die Folgezeit kam über die Errungenſchaften der Griechen erſt hinaus, als die Einführung der Infiniteſimalrechnung neue Methoden ſchuf (Kepler; Cavalieri) und durch dieſe neue Reſultate zeitigte. Bald brachte die von Newton und Leibniz erfundene Integralrechnung die allgemeine Löſung des Kubaturproblems, und die Koordinaten-Geometrie von Descartes wurde zu einer analytiſchen Geometrie des Raumes erweitert. Im Gegenſatz zu dieſer hat ſich dann hauptſächlich im 19. Jahrh. auch eine projektiviſche Geometrie des Raumes entwickelt.

d) Der Satz von Euler $e + f = k + 2$ hat ein ähnliches Schickſal gehabt wie die Guldinſchen Regeln; auch er wurde dreimal neu entdeckt. Die Tatſache, daß Archimedes die Reihe der halbregelmäßigen Vielflache ſo durchaus vollſtändig hat aufzählen können, läßt mit Sicherheit darauf ſchließen, daß er den Satz ſchon gekannt hat. Ausgeſprochen wurde er zuerſt in einer Abhandlung von Descartes, die allerdings (in einem Auszug von Leibniz) erſt 1860 durch den Druck bekannt geworden iſt. Euler hat den Satz durchaus ſelbſtändig gefunden.

Nr. 9. Über die Koordinaten-Geometrie.

a) Das feinſte und vielſeitigſte Werkzeug der neueren Geometrie, die analytiſche Geometrie, ſtellt eine Vereinigung zweier Prinzipien dar, die lange vor ihrer Entſtehung einzeln ſchon im Gebrauch waren, der Verwendung von Koordinaten und der wechſelſeitigen Verbindung der Algebra und der Geometrie.

b) Die **Benutzung von Koordinaten** treffen wir ſchon bei den Alten an. Wenn die ägyptiſchen Architekten die Wand, die ſie mit einem Relief nach einer vorliegenden Skizze verſehen wollten, mit rechtwinklig ſich kreuzenden Parallelen gleichen Abſtandes überzogen, um ſich die Vergrößerung des ebenfalls karierten Entwurfs zu erleichtern, — wenn Hipparch die Punkte auf der Erdoberfläche durch Länge und Breite beſtimmte, wobei er den Meridian von Rhodus gleichſam als Koordinatenachſe bevorzugte, — wenn Hero bei ſeinen feldmeſſeriſchen Aufgaben parallele Linien zu einer beliebig gewählten Standlinie zog, um das zu vermeſſende Land in leicht zu trennende Trapeze zu zerlegen, — wenn Archimedes in der Theorie der Kegelſchnitte ſeinen Betrachtungen ein Achſenſyſtem zugrunde legte, wie wir es heute noch bei der Quadratur der Parabel benutzen, — wenn im frühen Mittelalter ſchon die Planetenbewegung im Tierkreiſe graphiſch dargeſtellt wurde, — wenn gegen 1400 gleichmäßig anwachſende *longitudines* (Längen) und ſich nach einem beſtimmten Geſetze ändernde *latitudines* (Breiten) benutzt wurden, um eine Punktreihe (*forma* genannt) entſtehen zu laſſen uſw., ſo iſt dies alles doch nur ein Beweis dafür, daß die Verwendung von Koordinaten zum alten Beſitz der Mathematiker gehörte.

c) Die **Verbindung der Algebra mit der Geometrie** hat ſich gleichfalls bei den Griechen ſchon vorbereitet. Das zweite Buch der Elemente Euklids enthält eine ganze Reihe von Sätzen, die als geometriſche Auslegung algebraiſcher Sätze gelten können; das Verfahren von Archimedes bei der Wurzelausziehung iſt aus alten geometriſchen Methoden hergeleitet; ähnlich haben ſich abgekürzte Verfahren ausgebildet, um auf rechneriſchem Wege eine zahlenmäßig gegebene quadratiſche Gleichung aufzulöſen, — kurz, ſchon lange vor Diophant (3. Jahrh. n. Chr.) hatte eine Arithmetiſierung der Geometrie angefangen. Die Araber verbanden dann die geometriſche Methode der Griechen mit echter Algebra, die von den Indern zu ihnen gekommen war, und gelangten ſo zu einer Auflöſung für kubiſche Gleichungen, deren rein-algebraiſche Löſung ſie für unmöglich hielten. Beſonders groß war ihre Fertigkeit, geometriſche Aufgaben, Konſtruktionen uſw. auf die Löſung einfacher Gleichungen zurückzuführen. Dieſe geometriſch-algebraiſche Behandlungsweiſe gelangte von den Arabern ins Abendland und fand hier in Leonardo von Piſa und Regiomontan eifrige Vertreter.

Wurde ſo die Algebra benutzt, um die Löſung geometriſcher Probleme zu erzwingen, ſo zogen umgekehrt Cardano und Tartaglia geometriſche Betrachtungen heran, um die Richtigkeit algebraiſcher Löſungsformen in der Lehre von den kubiſchen Gleichungen darzutun. Die Verwendung der Geometrie zur Unterſtützung der Algebra wurde bald nachgerade zu einer algebraiſchen Geometrie ausgebildet.

d) Descartes vereinigte die beiden Arten geometriſcher Arbeit. In ſeiner *Géométrie* (1637) zeigt er die enge Wechſelbeziehung zwiſchen den Operationen der Algebra und der Geometrie und leitet daraus die Berechtigung her, geometriſche Probleme algebraiſch zu behandeln. Scharf betont er, daß bei ihm die Größen a, a^2 und a^3 rein algebraiſche Gebilde (Maßzahlen) ſeien, daß er alſo darunter nicht Linien, Flächen und Rauminhalte verſtehe, wie es Vieta noch getan hatte. Wie ſein Vorgänger, ſo ſtellt auch er ſich die Aufgabe, aus den vorliegenden geometriſchen Problemen durch die Einführung von Unbekannten Gleichungen zu bilden und dieſe zu behandeln, wohl wiſſend, daß trotz erſchöpfender Ausnutzung der Vorausſetzungen die Anzahl der Gleichungen kleiner als die der Unbekannten und dadurch die Aufgabe unbeſtimmt wird. Für die Wahl der Variabeln bei ſolchen unbeſtimmten Aufgaben gibt er nun keine Vorſchriften, ſondern er wendet ſich ſofort dem Beiſpiel von Pappus zu, den Ort der Punkte zu finden, deren ſenkrechte Abſtände von einer (geraden) Anzahl gegebener Geraden der Bedingung genügen, daß das Produkt aus der einen Hälfte der Abſtände dem Produkt aus den übrigen gleich bzw. proportional iſt. Als Koordinatenachſe nimmt er irgendeine der Geraden und irgendeins der Lote, bezeichnet die Parallelabſtände eines die Bedingung erfüllenden Punktes C mit x und y, drückt die Abſtände durch x und y aus, bildet dann die unbeſtimmte Gleichung, deren Wertepaare x, y Punkte C der geforderten Art ergeben, und fährt nun fort:

> *Prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne* y, *on en trouvera aussi infinies pour la ligne* x, *et ainsi on aura une infinité de divers points, tels que celui qui est marqué* C, *par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée.*

Klarer kann das Prinzip der analytiſchen Geometrie nicht angegeben werden.

e) Descartes hat die Priorität der Veröffentlichung für ſich, aber er iſt nicht der erſte, der das fruchtbare Feld in Arbeit genommen hat und zu einem erfolgreichen Abſchluß gekommen iſt. Fermat, der geniale Vorläufer von Newton und Leibniz, hatte ſchon vor 1637 eine Schrift über den Gegenſtand beendet, die außer dem höheren Alter den Vorzug hat, daß ſie in Klarheit der Darſtellung, in ſyſtematiſcher Zuſammenfaſſung des Stoffes und nicht zum wenigſten in der Aufſtellung einer feſten Symbolik einen viel höheren Grad der Vollendung erreicht hat wie die *Géométrie* von Descartes. Aber unbegreiflicherweiſe iſt dieſe Schrift erſt nach dem Tode Fermats im Jahre 1679 veröffentlicht worden.

f) In der Koordinaten-Geometrie hatte die Mathematik eine ſcharfe Waffe erhalten, die ihr den Angriff auf höhere Probleme ausſichtsvoll machte. Man kann getroſt behaupten, daß durch ſie nicht nur die Kurvenlehre geſchaffen und der ſpäteren Infiniteſimalrechnung die Grundlage bereitet, ſondern auch die allgemeine Funktionenlehre erſt ermöglicht worden iſt.

Nr. 10. Trigonometrie.

a) Die Anfänger einer aſtronomiſchen Wiſſenſchaft, die wir bei den Chaldäern und den alten Ägyptern antreffen, laſſen annehmen, daß dieſe Völker bereits mit trigonometriſchen Berechnungen bekannt waren, wenn auch über den Umfang der hierzu erforderlichen Kenntniſſe Genaueres nicht geſagt werden kann. Sicherlich haben die Griechen, die Schöpfer der eigentlichen Trigonometrie, babyloniſche und ägyptiſche Quellen benutzt und aus ihnen die Anregung zur Ausbildung einer wirklichen Theorie erhalten. Die Mathematiker freilich ſchenkten dem Gebiete nur wenig Aufmerkſamkeit, da die Dreiecksberechnung ihnen kein einer ſtrengen Wiſſenſchaft würdiger Gegenſtand zu ſein ſchien, und die Feldmeſſer waren zu wenig theoretiſch vorgebildet, um ſich in eine wiſſenſchaftliche Trigonometrie hineinarbeiten zu können; ſo blieb denn die Ausbildung und Pflege der Trigonometrie den Aſtronomen vorbehalten, die theoretiſch und praktiſch geſchult ſein mußten. Unter dieſen war Ariſtarch (gegen 280 v. Chr.) der erſte, der die Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks zu benutzen verſtand, um die Verhältniſſe ſeiner Seiten zu berechnen. Ihm folgte ungefähr 150 Jahre ſpäter Hipparch von Nicäa in ſeinem Werke über die Kreisſehnen, in dem er die Grundlage der Sehnentrigonometrie entwickelte. Das gleiche Ziel hatte ſich Menelaus (98 n. Chr.) geſetzt. Leider iſt uns von den Werken dieſer Aſtronomen nur eine Abhandlung des Menelaus in Überſetzungen erhalten geblieben. Die Arbeiten ſeiner Vorgänger faßte dann bald darauf Klaudius Ptolemäus (2. Jahrh. n. Chr.) mit den Ergebniſſen ſeiner eigenen Forſchungen in einem Werke, dem Almageſt der Araber, zuſammen, das über ein Jahrtauſend hinaus die trigonometriſche Wiſſenſchaft beherrſchte. Die ebene Trigonometrie war allerdings auch bei den Aſtronomen nicht die Hauptſache und wurde nur betrieben, um die Hilfsmittel (Sehnentafel und mit dieſen zuſammenhängende Sätze) zu den Berechnungen der ſphäriſchen Trigonometrie zu gewinnen.

b) Ob in Indien ſelbſt die Anfänge einer wiſſenſchaftlichen Trigonometrie ſich bildeten, oder ob dieſe auch hier auf babyloniſche Quellen zurückzuführen ſind, läßt ſich mit Sicherheit nicht feſtſtellen; jedenfalls erfuhr unſer Gebiet dort die nachhaltigſte Förderung. Unter anderem führten die indiſchen Mathematiker ſtatt der Sehnen Hipparchs die halben Sehnen als Funktionen der halben Mittelpunktswinkel ein und ſchufen ſo die Sinustrigonometrie. Zu einer allgemeinen Behandlung des ſchiefwinkligen Dreiecks gelangten indeſſen auch die Inder noch nicht; auch ſie behalfen ſich damit, durch Zerlegung des ſchiefwinkligen Dreiecks in rechtwinklige Dreiecke eine Berechnung zu ermöglichen.

c) Was die Griechen und die Inder geleiſtet hatten, wurde von den Arabern zu einem Ganzen verſchmolzen und durch originale Arbeiten vervollſtändigt. Die Einführung der Funktionen Kotangens und Secans (gegen 900) uud der Funktion Tangens (gegen 970) iſt ihr Werk, und die erſte Zuſammenſtellung der trigonometriſchen Sätze mit ihren Beweiſen iſt auf arabiſchem Boden entſtanden (gegen 970). Den Abſchluß der (oſt-)arabiſchen Arbeit an der Trigonometrie bildet ein Werk von Naſir Eddin (1201—1274 in Perſien), in dem die ebene Trigonometrie zum erſten Male um ihrer ſelbſt willen behandelt wird. — Der Koſinus-Satz iſt Naſir Eddin noch nicht bekannt.

Von den Weſtarabern hat die ebene Trigonometrie keine Förderung erfahren, da dieſe ihre Aufmerkſamkeit vorzugsweiſe der ſphäriſchen Trigonometrie zuwandten.

Naſir Eddins Werk iſt erſt in neuerer Zeit (1891) näher bekannt geworden; ein Einfluß des Werkes auf den weiteren Ausbau der Trigonometrie hat ſich nicht nachweiſen laſſen.

d) Im Abendlande hat zuerſt Regiomontan († 1476) vollkommen ſelbſtändig die Trigonometrie als eigene Wiſſenſchaft behandelt und den Anſtoß zu dem Syſtem der ebenen Trigonometrie, wie es heute vor uns ſteht, durch ſein leider unvollendet gebliebenes Werk *De triangulis* gegeben. Die Verwendung der Tangensfunktion bei der Dreiecksberechnung war Regiomontan anfangs noch unbekannt; es geht dies aus einer Stelle des erſten Buches hervor, an der er behauptet, daß die Beſtimmung der Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks aus ſeinen Katheten ohne vorherige Berechnung der Hypotenuſe nicht möglich ſei. Daß er jedoch ſpäter die Funktion Tangens kennen gelernt und ihre Bedeutung zu würdigen gewußt hat, ergibt ſich aus ſeinem Tafelwerke, deſſen Abteilung *tabula foecunda* die Tangenswerte (*numeri* genannt) für die ganzen Grade von 1° bis 90° mit dem Maßſtab $r = 10^7$ enthält.

Seit Regiomontan hat die Mehrzahl der hervorragenden Mathematiker ihr Scherflein zu dem heutigen Umfang der Trigonometrie beigetragen. Das gewaltige Tafelwerk, der *Canon* von Rhaeticus († 1576 in Wittenberg), machte die Tangenten und ihre Verwendung zum Gemeingut der Mathematiker. Vieta († 1603) ſchuf eine eigentliche Goniometrie, führte algebraiſche Rechnungen und Umformungen in die Trigonometrie ein und vollendete den Aufbau ſowohl der ebenen als auch der ſphäriſchen Trigonometrie. Die handliche und durchſichtige Form der Formeln, wie wir ſie heute haben, iſt jedoch im weſentlichen das Werk Eulers († 1783); ihm haben wir auch die erſte richtige und erſchöpfende Darſtellung des Verhaltens der Winkelfunktionen in den vier Quadranten zu danken.

e) Die einzelnen Funktionen ſind im Verlauf der langen Entwicklung nach und nach eingeführt worden.

α) In der älteſten mathematiſchen Urkunde, dem Rechenbuche des Ägypters Ahmes (gegen 2000 v. Chr.), wird bereits eine Verhältnisgröße benutzt, die unſerem Koſinus vergleichbar iſt. Da dieſe einen beſonderen Namen (Seqt) trägt, ſo muß damals ſchon eine gewiſſe Theorie bekannt geweſen ſein, die in bewußter Weiſe Winkelgrößen mit Streckenverhältniſſen in Verbindung brachte. Die Griechen haben die Trigonometrie als Sehnenrechnung behandelt, und erſt die Inder gelangten zur Aufſtellung der **Sinusfunktion** (gegen 500 n. Chr.), allerdings auch noch nicht in dem heutigen Sinne. Ganz eigenartig iſt das Maß, in dem ſie zuerſt ihre Sinuswerte geben; ſie ſuchten zunächſt den Kreisbogen, deſſen Länge gleich dem Halbmeſſer iſt, und fanden unter Benutzung der Zahl $\pi = 3{,}1416$ für dieſen Bogen die Winkelgröße 3438′. Dieſe ſetzten ſie gleich $\sin 90^\circ$ und erhielten dann für $\sin 60^\circ$ den Wert 2978′ uſw. Der Umſtand, daß ihre Sinustabelle das Intervall $3^\circ 45'$ hatte, läßt vermuten, daß ihnen die Formel $2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha = 1 - \cos \alpha$ ſchon bekannt war.

Ungefähr 700 Jahre ſpäter entſtand bei ihnen eine Sinustabelle mit dem Intervall 1°, welche die erſten echten Sinuszahlen enthielt, weil als Maß der Halbmeſſer ſelbſt benutzt wurde. Der Verfaſſer Aryabhatta nahm als Halbmeſſer wieder 3438′, ſetzte $\sin 1^\circ = 60'$, fand daraus $\sin 1^\circ = \frac{10}{573}$ und $\cos 1^\circ = \frac{6568}{6569}$ und verwandte dann die Formel

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta}{r} \pm \frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta}{r},$$

um die Werte ſeiner Tabelle zu berechnen.

Die moderne Erklärung der Winkelfunktionen, die in ihnen nur unbenannte Zahlen ſieht, wird irrtümlicherweiſe Rhaeticus zugeſchrieben; ſie tritt erſt bei Käſtner 1764 auf. Die heutige allgemeine Definition des Koſinus, bei der nach Feſtlegung des Drehungsſinnes eines Winkels die Beziehung einer Strecke zu ihrer Projektion auf eine gegebene Gerade betrachtet wird, ſtammt von Möbius (1790—1868, Leipzig).

Die Inder hatten für die Sinusfunktion aus dem Worte *jyâ* (= Sehne) die Bezeichnung *ardhajyâ* (= Halbſehne) gebildet und den Koſinus mit *kotijyâ* benannt. Mit der Zeit kürzten ſie das erſte Wort in *jyâ* ab, und dies Wort ging in der Form *dschiba* als Fremdwort zu den Arabern über. Da indeſſen hier die Wörter ohne Vokale geſchrieben wurden, ſo entſtand die Verwechſlung mit dem echt arabiſchen Worte *dschaib* (= Buſen, Taſche), das dann allgemein als Fachwort anerkannt wurde. Der Name *sinus* iſt weiter nichts wie eine aus dem 12. Jahrh. herrührende Überſetzung des Wortes *dschaib*.

β) Es iſt bereits bemerkt worden, daß die Funktionen Tangens und Kotangens von den Arabern eingeführt worden ſind; ſie benutzten ſie, um die Höhe der Sonne, die Länge eines ſenkrecht aufgeſtellten Stabes und die Länge ſeines Schattens miteinander zu verbinden. Über dieſe „Schattenberechnung" ging man bis zur Zeit Regiomontans nicht hinaus, und erſt in dem Tabellenwerk von Rhaeticus ſind neben dem Sinus die Tangenten und Kotangenten als durchaus gleichwertig behandelt (ſ. Abſ. d). Der Name *tangens* iſt zuerſt von Thomas Fink im Jahre 1583 gebraucht worden.

f) Von den **goniometriſchen Formeln** iſt das Additionstheorem der Sinusfunktion als allgemeiner Sehnenſatz von den Griechen aufgeſtellt worden und wird gewöhnlich Ptolemäus zugeſchrieben; die Gleichungen $2\sin^2\frac{1}{2}\alpha = 1 - \cos\alpha$ und $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha = 1 + \cos\alpha$ ſtammen ſicher von ihm. Die Formel $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, die ſchon aus der Kreisberechnung des Archimedes herausgeleſen werden kann, iſt von den Arabern in einem beſonderen Satze entwickelt worden. Vieta, dem wir eine ganze Reihe goniometriſcher Formeln verdanken, hat dieſen Satz für $\sin 3\alpha$ und $\cos 3\alpha$ erweitert; die endgültige Löſung der Aufgabe, die Funktionen $\sin n\alpha$ und $\cos n\alpha$ durch die Größen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ auszudrücken, iſt zuerſt von Jac. Bernoulli († 1705) durchgeführt worden. Den Tangentialſatz hat Fink zuerſt ausgeſprochen.

g) Von den **Lehrſätzen der Trigonometrie** iſt bei den Griechen und Indern nichts anzutreffen, da dieſe ihre Berechnungen nur an rechtwinkligen Dreiecken ausführten, und auch bei den Arabern finden ſich zunächſt nur Hinweiſe darauf, daß im allgemeinen Dreieck aus der Kenntnis der Winkel auf das Verhältnis der Gegenſeiten geſchloſſen werden könne.

α) Den **Sinus-Satz** hat Naſir Eddin zuerſt aufgeſtellt. Nachdem er die Fälle des rechtwinkligen Dreiecks nach der Sehnenmethode des Ptolemäus behandelt hatte, ſtellte er beim Übergang zum ſchiefwinkligen Dreieck den Sinus-Satz als neuen Satz an die Spitze ſeiner Betrachtungen und wies ausdrücklich auf den Gegenſatz zu dem bisherigen alten Verfahren hin. Im Abendlande wird der Satz erſt durch Regiomontan, der ihn bei Levi ben Gerſon († 1344 in Avignon) gefunden hatte, weiteren Kreiſen bekannt gegeben. Der Beweis, den Regiomontan für den Satz gibt, weicht von den Eddinſchen Beweiſen ſo ſehr ab, daß auch dadurch die Annahme, Regiomontan habe das Eddinſche Werk nicht gekannt, weſentlich unterſtützt wird. — Aus dem Sinus-Satze wurden dann die Gleichungen für die Verhältniſſe $c : (a + b)$ und $c : (a - b)$ abgeleitet. Die Formel $c : (a + b) = \sin\frac{\gamma}{2} : \sin AEC$, in der $\sphericalangle AEC = \beta + \frac{\gamma}{2}$ oder $90^0 - \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$ iſt, findet ſich ſchon in Newtons *Arithmetica universalis* von 1707, und in der Zwiſchenzeit bis zur Ableitung der beiden Formeln durch Mollweide 1808 tauchen dieſe wiederholt, teilweiſe mit rein-geometriſchen Beweiſen, in der Fachliteratur auf. Gleichwohl iſt es üblich, die Formeln als **Mollweideſche Gleichungen** zu bezeichnen.

β) Inhaltlich iſt der **Koſinus-Satz** durch den allgemeinen Pythagoreiſchen Lehrſatz gegeben, aber eine trigonometriſche Form hat er erſt von Vieta in der Gleichung

$$2ab : (a^2 + b^2 - c^2) = 1 : \sin(90^0 - \gamma)$$

erhalten. Da man damals das Verhalten der Funktionen bei Winkeln von mehr als 90^0 noch nicht in Betracht zog, ſo mußte Vieta darauf aufmerkſam machen, daß der Winkel γ ſpitz oder ſtumpf iſt, je nachdem $a^2 + b^2$ größer oder kleiner als c^2 iſt. Die verſchiedenen Umgeſtaltungen des Koſinus-Satzes für die halben Winkel wurden ſchon im Laufe des 17. Jahrh. vorgenommen. Die Ableitung der Heroniſchen Formel $J = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ aus dem Pythagoreiſchen Lehrſatze, wie ſie heute allgemein gelehrt wird, iſt zuerſt von Newton 1707 durchgeführt worden.

γ) Der **Tangential-Satz** iſt von Fink 1583 gefunden worden, hat aber ſeine heutige Form erſt von Vieta 1593 erhalten. Die Gleichungen $\varrho = (s-a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ uſw., welche die Seiten und Winkel des Dreiecks mit den Halbmeſſern der Berührungskreiſe verbinden, werden zuerſt in einer 1596 veröffentlichten Schrift von Rhaeticus angetroffen.

h) Die **Berechnungen auf der Kugelfläche** hängen aufs engſte mit der Aſtronomie zuſammen, und da dieſe Wiſſenſchaft unter allen Zweigen des menſchlichen Wiſſens das älteſte iſt, ſo läßt ſich erwarten, daß die Arbeiten auf dieſem Gebiete ebenſo alt wie zahlreich ſein werden. Zwar fließen die Quellen aus dem Lande der Chaldäer recht ſpärlich, und auch bei den Ägyptern und Griechen ſetzt die vorhandene Literatur erſt im 4. Jahrh. v. Chr. ein, aber von da ab mehren ſich die Schriften bei den Griechen, den Indern, den Arabern und im Abendlande in einer Weiſe, daß es ganz unmöglich iſt, hier auch nur auf die wichtigſten Arbeiten näher einzugehen.

Für die Unterſuchungen auf der Kugelfläche hatten ſich ſchon frühe zwei Methoden herausgebildet. Die ältere, deren ſich bereits die Ägypter mit Gewandtheit bedient zu haben ſcheinen, beruht auf geometriſchen Konſtruktionen, die man durch Projektion der Figuren auf drei ſich rechtwinklig ſchneidende Ebenen ermöglichte. Die zweite von den Babyloniern erfundene Methode war rechneriſcher Art und bildete die Anfänge der ſphäriſchen Trigonometrie. Hipparch beherrſchte beide Methoden, gab aber der trigonometriſchen den Vorzug. Auf ſeine Forſchungen ſtützt ſich das älteſte uns bekannte Lehrbuch der ſphäriſchen Trigonometrie von Menelaus (98 n. Chr.). Wie weit Menelaus ſeine theoretiſchen Sätze in die Praxis umzuſetzen vermochte, kann nicht geſagt werden, da uns in dieſer Frage die Überlieferung im Stiche läßt. Praktiſche rechneriſche Anwendungen ſeiner Sätze finden ſich erſt in dem Hauptwerke des Ptolemäus, der bei den von ihm behandelten aſtronomiſchen Aufgaben immer wieder auf den Transverſalenſatz von Menelaus zurückgreift und ihn den beſonderen Zwecken der Aufgabe anpaßt. Von den 6 Hauptfällen des rechtwinkligen Dreiecks hat Ptolemäus nur 4 behandelt, vermutlich weil ihm die Gelegenheit zur Löſung der anderen fehlte. Auch in der Verwendung der graphiſchen Methode, bei der er bald die orthographiſche, bald die ſtereographiſche anwandte, iſt Ptolemäus nicht ſelbſtändig, da er hier offenſichtlich den Fußſtapfen Hipparchs folgt.

Im Abendlande ſtehen auch hier die Namen Regiomontan und Vieta im Vordergrunde des Intereſſes, und ihre Arbeiten ſind für lange Zeit vorbildlich. Koppernikus wich zuweilen von dem altgewohnten Wege ab, indem er die Ableitung ſeiner ſphäriſchen Sätze auf ebene Trigonometrie ſtützte. Vom größten Einfluß wurde Nepers Logarithmentafel. Während man vorher die Formeln ſo zu geſtalten ſuchte, daß Multiplikationen vermieden wurden, richtete man jetzt ſein Augenmerk darauf, daß in den Formeln möglichſt nur Produkte auftraten. Neper ſelbſt hat in ſeinen Analogien hierzu einen wichtigen Beitrag geliefert. Auf die heutige einfache Form wurde auch dies Gebiet erſt von Euler gebracht. Auf den Gedanken, daß der Koſinus-Satz allein zur Ableitung der geſamten ſphäriſchen Trigonometrie ausreicht, ſcheint er allerdings nicht gekommen zu ſein, da dieſer erſt 1783 von de Malves (Paris) geliefert und dann 1799 von Lagrange und 1810 von Gauß in vereinfachter Form wiederholt wurde.

Euler hatte ſchon 1753 darauf aufmerkſam gemacht, daß das ſphäriſche Dreieck in ein ebenes übergeht, wenn der Halbmeſſer der Kugel unendlich groß wird. Dieſen Gedanken hat Lambert 1765 durchgeführt, indem er den Koſinus gleich 1 ſetzte, wenn er als Faktor auftrat, und $\cos \varphi$ unter Vernachläſſigung der höheren Potenzen des Arguments durch $1 - \frac{1}{2} \varphi^2$ erſetzte, falls der Koſinus ohne weiteren goniometriſchen Faktor oder mit dem Quadrate eines Sinus verbunden war. Gleichzeitig mit Lambert hat auch der franzöſiſche Mathematiker Mauduit (1731—1815) einige Formeln der ebenen Trigonometrie aus Formeln der ſphäriſchen abgeleitet, und Euler hat ſpäter (1778) zu dieſer Frage noch einmal das Wort ergriffen.

Nr. 11. Zur Entwicklung der algebraiſchen Ausdrucksweiſe.

In der Geſchichte der algebraiſchen Ausdrucksweiſe laſſen ſich drei Stufen der Entwicklung unterſcheiden: die rhetoriſche, die ſynkopierte und die ſymboliſche Algebra.

a) In der erſten Periode herrſcht das Wort. Die Rechnungen werden ohne Benutzung von Zeichen aneinander geſetzt, und nur öfter wiederkehrende Redewendungen bilden ſich zu Fachausdrücken aus. Auf dieſer unterſten Stufe ſind die Griechen bis in die erſten Jahrhunderte n. Chr. hinein ſtehen geblieben; die Oſtaraber, die Perſer, die Weſtaraber bis zum 13. Jahrh., die älteren Italiener und ihre deutſchen Schüler bis zu Regiomontan hin kamen ebenfalls über dieſen Standpunkt nicht hinaus. Bei einigen Arabern wird die Vermeidung der Zeichen ſo weit getrieben, daß ſie ſelbſt die Ziffern durch Worte erſetzen.

b) Der Übergang zur zweiten Stufe liegt auf der Hand. Häufig gebrauchte Ausdrücke werden im Text abgekürzt, ohne daß jedoch die Abkürzungen die durch den Satzbau bedingten Endungen verlieren. Der bedeutendſte Vertreter dieſer Entwicklungsſtufe und zugleich der einzige in der älteren Literatur iſt Diophant, aber auch dieſer benutzt ſeine Abkürzungen noch nicht durchgängig. Aus der Tatſache, daß er es nie unterläßt, die Deklinationsendungen hinzuzufügen, geht hervor, daß er in ſeinen Zeichen nur die mit ihnen angedeuteten Fachwörter ſelber, keineswegs aber ſchon Symbole geſehen hat. Abgeſehen von dieſen Abkürzungen ſind bei Diophant ſämtliche algebraiſchen Herleitungen und Operationen ausführlich mit Worten beſchrieben.

Die Oſtaraber, denen ſonſt die Mathematik ſo manche Förderung verdankt, blieben beinahe durchgängig bei der rhetoriſchen Form ſtehen, ſelbſt nachdem ihnen das Werk Diophants bekannt geworden war, und da das frühe Mittelalter ſich ganz nach ihrem Vorbilde richtete, ſo kam das 15. Jahrh. heran, ehe man wieder in die Bahn einlenkte, die mehr als ein Jahrtauſend vorher Diophant bereits betreten hatte, und ſich der Abkürzungen zu bedienen begann.

c) Bei den alten Ägyptern läßt ſich ſchon die Benutzung mathematiſcher Symbole nachweiſen, und die Inder hatten dieſe weiter ausgebildet. Der Übergang von der ſynkopierten zur ſymboliſchen Form machte beſonders bei den Indern bereits ſolche Fortſchritte, daß man faſt von einer ſymboliſchen Algebra bei ihnen ſprechen kann. Aber ſie blieben ganz ohne Einfluß auf deren Ausbildung im Abendlande, da die Araber ihre Symbole nicht mitübernahmen.

d) Während im 15. Jahrh. die Abkürzungen immer gebräuchlicher werden, macht ſich bald ein neues Prinzip geltend: es erſcheinen ſymbolartige Zeichen, und damit wird die dritte Entwicklungsſtufe eingeleitet. Werden von dem Italiener Luca Paciuolo (1494) für plus und minus noch die Anfangsbuchſtaben gebraucht, ſo treten bei Joh. Widmann von Eger 1489 plötzlich die Zeichen + und − auf. Ebenſo ſpielen in der deutſchen Behandlungsform der Algebra, die unter dem Namen „*Coss*“ bekannt iſt, eigenartige Potenzſymbole, Charaktere genannt, eine Hauptrolle. Das Auftauchen des Gleichheitszeichens (1556) erleichtert die Schreibweiſe, und die ausſchließliche und folgerichtige Verwendung allgemeiner Buchſtabengrößen durch Vieta (1591) ermöglicht eine weſentliche Zuſammenziehung und überſichtlichere Geſtaltung allgemeiner Herleitungen. Den Höhepunkt erreicht die dritte Entwicklungsſtufe allerdings erſt bei Leibniz und Euler mit der umfaſſenden Einführung der Operationszeichen und der Unterſcheidung zwiſchen den Buchſtaben, die bekannte, unbekannte bzw. veränderliche und beliebige Zahlen bedeuten. Nun erſt iſt eine Algebra geſchaffen, die es geſtattet, ohne ein verbindendes Wort mathematiſche Deduktionen in eine jedem Fachmanne verſtändliche Form zu kleiden: die internationale mathematiſche Kurzſchrift iſt endlich gefunden.

Nr. 12. Von der Entwicklung der Gleichungslehre.

a) Allgemeiner Überblick.

Da Ahmes in ſeinem Rechenbuche ſelber auf alte Vorlagen für ſein Werk hinweiſt, ſo läßt ſich annehmen, daß ſchon vor dem zweiten Jahrtauſend v. Chr. die Behandlung der Gleichung erſten Grades mit einer Unbekannten den Ägyptern bekannt geweſen iſt. Jedenfalls liegt Ahmes der Begriff der unbekannten Größe (*Hau* = Haufen) bereits fertig vor, und der Weg zur Auflöſung iſt ihm in ſeinen Grundzügen ebenfalls ſchon bekannt. Inwieweit die Griechen der vorchriſtlichen Zeit ſich mit Gleichungen beſchäftigt haben, läßt ſich nicht feſtſtellen; ſicher iſt nur, daß ſie geometriſche Probleme zweiten Grades geometriſch und auch rechneriſch aufgelöſt haben. Im 4. Jahrh. n. Chr. treten indeſſen bei Diophant die mathematiſchen Begriffe des Bekannten und Unbekannten in voller Schärfe wieder auf, und daraus läßt ſich ſchließen, daß auch bei den Griechen die Zwiſchenzeit nicht ganz ohne Fortſchritte in der Gleichungslehre geblieben war. Die Inder, die Lehrmeiſter der Algebra, fügten eine methodiſche Behandlung der unbeſtimmten Gleichungen hinzu, und die Araber führten die Gleichungen dritten Grades geometriſch ihrer Löſung entgegen. Die rechneriſche Löſung der Gleichung dritten (und auch vierten) Grades entſtand im 16. Jahrh. auf italieniſchem Boden, und ſeitdem hat wohl keiner von den bedeutenderen Mathematikern es unterlaſſen, einen oder mehrere Bauſteine zu dem heutigen Lehrgebäude der Gleichungstheorie beizutragen.

b) Gleichungen erſten Grades mit einer Unbekannten.

Gleichungen erſten Grades mit einer Unbekannten finden ſich zuerſt in der Hau(fen)-Rechnung der alten Ägypter und treten dann nach einer überaus langen Pauſe wieder bei Diophant auf; erſt bei dieſem begegnet uns eine wirkliche Methode für die Auflöſung. Die Inder, die ſchon mit negativen Zahlen rechnen konnten, vereinfachten das Verfahren Diophants und nahmen die Ableitung der Normalform einer Gleichung ſchon in gleicher Weiſe vor, wie es heute noch in der Schule üblich iſt. Die Araber nannten das Ordnen einer Gleichung *Aldschebr walmukâbala*; von dem erſten Worte dieſer Bezeichnung ſtammt unſer Wort Algebra her.

c) Gleichungen erſten Grades mit mehreren Unbekannten.

Die älteſte Spur für dieſe Aufgaben bietet uns ein Problem, das nach einer Notiz von Jamblichus aus dem 4. Jahrh. n. Chr. einem gewiſſen Thymaridas zuzuſchreiben iſt. Ob dieſer Thymaridas der Pythagoreer gleichen Namens (390 v. Chr.) geweſen iſt, hat ſich nicht feſtſtellen laſſen. Diophant kennt für ſeine Unbekannten nur ein Zeichen; wo er es mit mehreren Unbekannten zu tun hat, da weiß er ſich durch geſchickte Subſtitutionen zu helfen, ohne jedoch auch hierbei zu einer einheitlichen Methode zu gelangen. Die Inder wählten zur Bezeichnung der Unbekannten verſchiedene Farben und hatten ſo ein leichteres Rechnen mit mehreren Unbekannten. Die Araber berückſichtigten Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten nur ſelten, und da die Mathematik des Mittelalters faſt nur aus arabiſchen Quellen ſchöpfte, ſo erklärt es ſich, daß bis zum 16. Jahrh. hin die Behandlung der Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten in den erſten Anfängen ſtecken geblieben iſt. Aus der Stelle der *Summa* des Italieners Paciuolo (1494), „die älteren Lehrbücher hatten gewöhnlich erſte und zweite *cosa* für die Unbekannten geſagt; die neueren ſagten lieber *cosa* für die eine Unbekannte und *quantita* für die andere" geht hervor, daß man mehr als zwei Unbekannte gar nicht in Betracht zog. Erſt in der Meiſterhand Stifels nahm der Stoff eine durchaus neue allgemeine Form an.

Die Additionsmethode wird ſchon von einem franzöſiſchen Mönche Buteo (1559) in derſelben Weiſe wie von uns angewandt.

Die Kombinations- und die Subſtitutionsmethode finden ſich als allgemeine Verfahren benutzt erſt in der *Arithmetica universalis* von Newton aus dem Jahre 1707.

d) Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Es iſt oben bereits erwähnt, daß die Griechen ſich hauptſächlich mit der geometriſchen Löſung von Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten beſchäftigt haben; alle Formen, ſoweit ſie nicht auf negative und komplexe Wurzeln führen, ſind bei Euklid ſchon behandelt (in unſerer Ausdrucksweiſe: $x^2+q^2=px$; $x^2+px=q^2$ und $x^2=px+q^2$). Wann die Umſetzung in ein algebraiſches Verfahren eingetreten iſt, läßt ſich nicht mit Sicherheit ermitteln; es iſt aber wahrſcheinlich, daß Hipparch bei der Aufſtellung ſeiner Sehnentafel eine numeriſche Auflöſung der Gleichungen zweiten Grades benutzt hat. Mit Sicherheit läßt ſich dies allerdings erſt bei Hero nachweiſen; auf dieſen ſcheint auch die Löſung durch die quadratiſche Ergänzung zurückzuführen zu ſein.

Die Griechen kannten den Gebrauch negativer Zahlen noch nicht, und daher tritt bei ihnen ſtets nur eine Wurzel auf. Auch die Inder begnügten ſich anfangs mit einer Wurzel; erſt ſpäter trifft man bei ihnen einen Hinweis auf das paarweiſe Auftreten der Wurzeln an. Die Araber hatten die negativen Zahlen von den Indern nicht mit übernommen und mußten daher auf die drei Grundformen der Griechen zurückgehen. Mit dieſen verbanden ſie dann die drei entſprechenden Formen für x^n. Das frühe Mittelalter fügte die Fälle hinzu, die aus den drei Formen durch Multiplikation mit x entſtehen, und entwickelte auf dieſem Wege 24 unter dem Namen „Regeln" bekannte Gleichungsformen, von denen jede für ſich behandelt wurde, weil man ihren inneren Zuſammenhang nicht kannte. Was ein Jahrtauſend vorher den Arabern gelungen, dann aber der Vergeſſenheit anheimgefallen war — die Zuſammenfaſſung in eine einzige Form —, das wurde erſt durch Stifel

(16. Jahrh.) der Mathematik wiedergewonnen, allerdings mit der Einſchränkung, daß die Doppeldeutigkeit nur dann, wenn beide Wurzeln poſitiv ſind, berückſichtigt wurde; denn negative Wurzeln waren ſeiner Zeit noch ganz fremd. An dem Vorurteil, daß die Wurzelwerte poſitiv ſein müßten, hielt auch Vieta (16. Jahrh.) noch feſt, und daher finden wir bei ihm den Zuſammenhang zwiſchen den Wurzeln und Koeffizienten nur für dieſen Fall ausgeſprochen. Vieta iſt ferner der erſte, der durch die Subſtitution $x = y + z$ die Gleichung in eine rein quadratiſche überführte.

Mit Cardano (1501—1576) wird eine tiefere Einſicht in das Weſen der negativen Zahlen eingeleitet, und auf Anſtoß der italieniſchen Schule wird ſogar die Inangriffnahme des Imaginären gewagt. So wird der Boden geſchaffen, auf dem die noch vorhandene Lücke ausgefüllt werden und ſchließlich Girard († 1632) zu dem Satze gelangen konnte, daß jede Gleichung ſo viel Wurzeln hat, wie der Exponent der höchſten Potenz der Unbekannten angibt.

e) Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten. Reziproke Gleichungen.

Gleichungen quadratiſchen Charakters mit zwei Unbekannten hat ſchon Euklid gelöſt, wenn er Aufgaben über Summen, Differenzen, Produkte und Summen bzw. Differenzen der Quadrate zweier Unbekannten behandelt. Fehlt es ihm auch noch an einem Zeichen für die zweite Unbekannte, ſo weiß er doch ſtets Mittel und Wege zu finden, um zu einer Löſung zu gelangen. Über dieſe Gruppen kamen auch die Araber nicht merklich hinaus. Die ſchwierigeren Formen treten erſt bei Stifel auf.

Der Begriff der reziproken Gleichung geht auf Moivre († 1754) zurück. Moivre hat zuerſt in den *Miscellanea analytica* Gleichungen behandelt, deren von den Enden gleichweit entfernte Glieder gleiche Koeffizienten beſitzen; er weiß, daß bei einem ungeraden n die Gleichung die Wurzel ± 1 hat und durch Diviſion um einen Grad erniedrigt werden kann, ohne die charakteriſtiſche Koeffizienteneigenſchaft zu verlieren; er weiß ferner, daß bei einem geraden n durch eine quadratiſche Subſtitution eine Gleichung entſteht, deren Grad halb ſo groß iſt. Die Subſtitution $x + \frac{1}{x} = y$ ſtammt von Lagrange (1772), und der Name reziproke Gleichungen iſt von Euler (1732) eingeführt worden.

f) Gleichungen dritten Grades.

Unter den Problemen, die von den alten Griechen immer wieder in Angriff genommen worden ſind, befinden ſich die beiden kubiſchen Aufgaben, einen Würfel zu verdoppeln und einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. Es iſt bekannt, daß ſie derartige Aufgaben mit Benutzung der Kegelſchnitte gelöſt haben. Dies Auflöſungsverfahren wurde von den Arabern auf die verſchiedenen Formen ausgedehnt, in denen Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten auftreten können. Zu einer algebraiſchen

Löſung gelangten aber auch die Araber nicht; ja, ſie hielten eine ſolche für ganz unmöglich. Erſt das 16. Jahrh. brachte eine für alle Fälle verwendbare Löſung. An dieſe knüpft ſich ein überaus häßlicher Streit um das Vorrecht der Entdeckung, wie ihn die Geſchichte der Mathematik nicht wieder kennt. Wie jetzt feſtſteht, hat Scipio del Ferro die Auflöſung der Gleichung $x^3 + ax = b$ zuerſt gefunden und darüber ſeinem Freunde Antoniomaria Fior und anderen Schülern Mitteilung gemacht. Fior hatte dann nach der Sitte ſeiner Zeit dem Tartaglia († 1557) 30 Wettaufgaben vorgelegt, die ſämtlich auf Gleichungen von der Form $x^3 + ax = b$ führten, und kurz vor Ablauf der Friſt will Tartaglia die Löſungsformel gefunden haben, auch für den Fall $x^3 = ax + b$. Vergebens erſuchten ihn ſeine Zeitgenoſſen um die Veröffentlichung ſeiner Methode, und als er ſchließlich von Cardano ſich dazu bewegen ließ, ihm von ſeinem Verfahren Mitteilung zu machen, tat er es in faſt unverſtändlichen Verſen, die er erſt erläuterte, als Cardano ihm eidlich zugeſagt hatte, daß er das Geheimnis nicht verraten wolle. Cardano hatte jedoch bald Gelegenheit, die Löſung Ferros anderweitig kennen zu lernen und feſtzuſtellen, daß dieſe völlig mit der Löſung von Tartaglia übereinſtimmte; die Annahme, daß Tartaglia die Formel gar nicht ſelber entdeckt, ſondern ſie irgendwie durch dritte Hand von Ferro entlehnt habe, war alſo mehr als wahrſcheinlich, und daher konnte Cardano ſich um ſo weniger durch den geleiſteten Eid gebunden fühlen, als von einem Geheimnis unter den obwaltenden Umſtänden gar nicht die Rede ſein konnte. Wenn er neben Ferro trotz ſeiner Kenntnis der Sachlage Tartaglia noch mit als Entdecker bezeichnet, ſo iſt dies wohl aus dem Beſtreben hervorgegangen, einem Streite vorzubeugen. — Die Berechtigung, die Löſung als Cardaniſche Formel zu bezeichnen, beruht lediglich darin, daß Cardano den Löſungsweg (1545 in ſeiner *Ars magna*) zuerſt veröffentlicht hat.

In der *Ars magna* trifft man auch die erſte allgemeine Löſung der Gleichung vierten Grades an.

g) Gleichungen von höherem als dem vierten Grade.

Als es geglückt war, die Gleichungen dritten und vierten Grades zu löſen, begann das Intereſſe an den Gleichungen höheren Grades ſich zu ſteigern. Die bedeutendſten Mathematiker des 17. und 18. Jahrh. verſuchten an ihnen ihre Kräfte, bis ſchließlich im Jahre 1824 von dem jungen Norweger Abel in unanfechtbarer Weiſe der Beweis geliefert wurde, daß die Auflöſung einer Gleichung von höherem als dem vierten Grade auf algebraiſchem Wege unmöglich ſei.

Hatten aber auch die Bemühungen der Mathematiker vor Abel nicht das erſehnte Ziel erreicht, ſo hatten ſich doch nebenbei andere Beobachtungen und Ergebniſſe eingeſtellt, die für den Ausbau der Gleichungslehre von weſentlicher Bedeutung ſind. Girard († 1632) ſpricht zuerſt allgemein aus, daß jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln habe, und behauptet, daß die imaginären

Wurzeln, die er an ſich für unberechtigt hält, nur dazu da ſeien, um ſolche Sätze in voller Allgemeinheit ausſprechen zu können. Die notwendige Ergänzung dieſes Satzes, daß eine Gleichung n^{ten} Grades nur n Wurzeln haben könne, liefert Newton, und Euler vereinigt beide Sätze in der genauen Form, daß jeder algebraiſche Ausdruck in Faktoren erſten und zweiten Grades zerlegt werden könne. Einen einwandsfreien Beweis des Eulerſchen Satzes verdanken wir erſt Gauß.

Den Zuſammenhang zwiſchen den Wurzeln und Koeffizienten einer geordneten Gleichung n^{ten} Grades hatte Cardano (1545) nur für die Gleichung dritten Grades und Vieta auch für höhere Gleichungen mit nur poſitiven Wurzeln gekannt; in ſeiner Allgemeinheit iſt er jedoch gleichfalls erſt von Girard aufgedeckt worden.

h) Unbeſtimmte Gleichungen.

Während bei den vorhergehenden Gebieten vielfach griechiſcher Einfluß auf die indiſche Mathematik feſtgeſtellt wurde, iſt die Lehre von den unbeſtimmten Gleichungen unabhängig von den Griechen bei den Indern entſtanden. Bei dieſen treffen wir zuerſt die Behandlung unbeſtimmter Gleichungen erſten Grades mit der Beſchränkung auf ganzzahlige Löſungswerte an, alſo derjenigen Gleichungen, die man in der Schulmathematik allgemein als Diophantiſche Gleichungen bezeichnet. Diophant aber bringt in ſeinem Werke nur eine Zuſammenſtellung von Einzelaufgaben ohne einen einheitlichen Löſungsweg; erwägt man ferner, daß er die Bedingung der Ganzzahligkeit gar nicht kennt, ſondern nur irrationale Löſungen ausſchließt, und daß er unbeſtimmte Gleichungen erſten Grades gar nicht behandelt, ſo erkennt man, daß dieſe Gleichungen ſeinen Namen zu Unrecht tragen.

Das eleganteſte und zugleich praktiſchſte Auflöſungsverfahren für unbeſtimmte Gleichungen erſten Grades ſtammt von Euler (ſ. Abſchnitt III, Nr. 30).

Es verdient, bemerkt zu werden, daß auf dieſem Gebiete auch die Chineſen ſelbſtändige Leiſtungen aufzuweiſen haben. Die von ihnen ſchon im 3. Jahrh. n. Chr. entwickelte Löſung der Aufgabe, eine Zahl zu ſuchen, die bei gegebenen Diviſoren gegebene Reſte liefert, weicht von der indiſchen zu ſehr ab, um noch als eine Umformung derſelben gelten zu können; ſie deckt ſich übrigens mit einer Methode, die Gauß in ſeinen *Disquisitiones arithmeticae* 1801 angegeben hat.

Von den unbeſtimmten Gleichungen zweiten Grades wird auf dem Gymnaſium zuweilen die Aufgabe behandelt, die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ aufzulöſen, d. h. rechtwinklige Dreiecke mit ganzzahligen Seiten zu beſtimmen. Pythagoras und ſeine Schüler fanden die Wertegruppe

1. $x = 2q + 1, \quad y = 2q^2 + 2q$ und $z = 2q^2 + 2q + 1,$

und die Platoniſche Schule kam auf die Gruppe

2. $x = m^2 - 1, \quad y = 2m$ und $z = m^2 + 1.$

Als allgemeine Löſung hat Euklid (in unſerer Ausdrucksweiſe) die Zuſammenſtellung

3. $$x = \alpha\beta\gamma, \quad y = \frac{1}{2}(\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2) \quad \text{und} \quad z = \frac{1}{2}(\alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2)$$

angegeben, falls $\alpha\beta^2$ und $\alpha\gamma^2$ gleichzeitig gerade oder ungerade ſind. Setzt man den Proportionalitätsfaktor α gleich 2, ſo geht hieraus die auf S. 84 angegebene Löſung hervor. Später hat man als allgemeine Löſung die Wertegruppe

4. $$x = p(2q + p), \quad y = 2q(q + p) \quad \text{und} \quad z = y + p^2 = x + 2q^2$$

gefunden, wo p der Bedingung unterliegt, eine gerade Zahl zu ſein.

Für $p = 1$ erhält man hieraus die von Pythagoras aufgeſtellte Gruppe;
„ $q = 1$ und $p + 1 = m$ geht hieraus die Gruppe von Plato hervor, und
„ $\beta = 2q + p$ und $\gamma = p$, alſo $q = \frac{1}{2}(\beta - \gamma)$ geht ſie in die Löſung von Euklid über, wenn man von dem gemeinſamen Faktor α abſieht.

Nr. 13. Über Maxima und Minima.

a) Schon ein Schüler Platos hat auf die Notwendigkeit hingewieſen, beim Abſchluß einer Konſtruktionsaufgabe eine Unterſuchung anzuſtellen, welche Bedingungen die gegebenen Stücke zu erfüllen haben, damit die Ausführung der Zeichnung nicht unmöglich wird. Derartige Determinationen, die ſich bereits bei Euklid, Archimedes und anderen vielfach vorfinden, beſtehen aber weſentlich in Maximal- und Minimalbetrachtungen und bilden daher den Ausgangspunkt der Lehre von den größten und kleinſten Werten. Schon Apollonius hatte erkannt, daß dieſen Betrachtungen ein beträchtlicher eigener Wert innewohne, und ihnen daher den größten Teil des fünften Buches ſeiner *Conica* gewidmet. Seine Anregung fiel inſoweit auf einen fruchtbaren Boden, als im Verlauf des folgenden Jahrtauſends die Anzahl der gelöſten Aufgaben ſich ſtark vergrößerte und auch ſchwierigere Fälle zur Behandlung herangezogen wurden. Die Namen Nemorarius, Regiomontan, Kepler und Cavalieri ſind auch mit dieſem Gebiete aufs engſte verbunden.

b) Indeſſen fehlte es den bisher genannten Mathematikern an einer allgemeinen Methode für ihre Grenzbetrachtungen; ſo geiſtreich dieſe auch in den einzelnen Fällen ſein mochten, ſo mußten doch faſt von Aufgabe zu Aufgabe neue Löſungswege geſucht werden. Dieſem Mangel konnte erſt Fermat mit einem Verfahren abhelfen, das nicht nur allgemein verwendbar war, ſondern auch den großen Vorzug hatte, elementar zu ſein. Fermat ſetzt in den Ausdruck, der einen Grenzwert annehmen ſoll, ſtatt der Veränderlichen A (er wählte geradeſo wie Vieta zur Bezeichnung der Unbekannten die großen Vokale) die neue Größe $A + E$ ein, in der E eine nur wenig von 0 verſchiedene Zahl bezeichnen ſoll, verbindet die beiden Ausdrücke für A und $A + E$ durch das Gleichheitszeichen, macht die Gleichung nennerfrei, ordnet ſie und dividiert dann durch E. Alsdann vollzieht er den Grenzübergang zu $E = 0$ und erhält auf dieſe Weiſe eine Gleichung zur Beſtimmung der Grenzſtelle.

c) Ein zweites elementares Verfahren iſt durch **Schellbach** im 19. Jahrhundert in die Schulmathematik eingeführt worden. Vgl. Nr. 33c) in Abſchnitt III.

d) Die Fermatſche Methode und auch das Schellbachſche Verfahren haben einen ſehr fühlbaren Mangel; ſie geben weder Auskunft darüber, ob einer Wurzel der entſtandenen Gleichung in Wirklichkeit auch ein Grenzwert entſpricht, noch laſſen ſie ohne eine vielfach recht zeitraubende Rechnung erkennen, was für ein Grenzwert vorliegen kann. Dieſem Mangel hat **Leibniz** in ſeinem 1684 erſchienenen Werke *Novus methodus pro maximis et minimis etc.* durch Verwendung der Differentialrechnung bei der Beſtimmung der Grenzwerte abgeholfen.

e) Das Altertum hat ſich auch mit einer zweiten Art von Maximalaufgaben, den **iſoperimetriſchen Aufgaben**, ſchon beſchäftigt; bereits am Anfang des 2. Jahrh. v. Chr. ſtellte **Zenodorus**, wie wir von **Pappus** erfahren, eine große Anzahl von Einzelfällen zuſammen (z. B. bei einem gegebenen Umfang hat das regelmäßige Vieleck einen größeren Inhalt als irgendein unregelmäßiges von gleicher Seitenzahl, aber einen kleineren Inhalt als ein regelmäßiges Vieleck von größerer Seitenzahl, und der Kreis hat den größten Inhalt). Aber dabei iſt es auch ſehr lange Zeit geblieben. Die ſpäteren Mathematiker kamen über die Ergebniſſe des Zenodorus nicht hinaus, wenn ſie überhaupt, was ſelten genug der Fall war, ſich mit dem Problem beſchäftigten. Erſt die Neuzeit hat das alte Thema wieder aufgenommen und in den Arbeiten von **Lhuilier** (1782) und von **Steiner** (1841) weſentliche Weiterführungen entſtehen laſſen.

Nr. 14. Die niederen Reihen.

a) Die arithmetiſchen Reihen erſter Ordnung.

Das Rechenbuch des **Ahmes** (gegen 2000 v. Chr.) enthält zwei keineswegs leichte Beiſpiele von arithmetiſchen Reihen, und dieſe ſind in einer Weiſe gelöſt, die es als wahrſcheinlich erſcheinen läßt, daß den alten Ägyptern eine Summenformel ſchon bekannt war. Ebenſo läßt eine Zahlenreihe, die auf einem Schriftendenkmal gefunden worden iſt und das allmähliche Wachstum der erleuchteten Mondſcheibe in den 15 Tagen vom Neumond bis zum Vollmond darſtellen ſoll, die Vermutung zu, daß auch die Babylonier von den niederen Reihen eine gewiſſe Kenntnis hatten.

Zuverläſſiger ſind die Mitteilungen über das Verhältnis der **Griechen** zur Reihenlehre. Die Pythagoreiſche Schule, die ſich viel mit Unterſuchungen über die Zahlen beſchäftigte, konnte ſchon die Reihen der natürlichen, der geraden und der ungeraden Zahlen ſummieren und die Theorie der figurierten Zahlen begründen. Die Akademie **Platos** baute dieſe Theorie aus und entwickelte die Lehre von den Vieleckszahlen. Fehlt es auch an einem Beleg dafür, daß die älteren Griechen eine allgemeine Summenformel kannten, ſo läßt ſich doch aus der Art und Weiſe, wie Archimedes die Summierung der Reihe der Quadratzahlen vorgenommen hat, der Schluß ziehen, daß zu ſeiner Zeit wenigſtens die allgemeine Summenformel der arithmetiſchen Reihe bekannt geweſen iſt. Später finden ſich bei Hero Aufgaben über arithmetiſche Reihen, und auch Diophant hat ſich eingehend mit Vieleckszahlen beſchäftigt.

Die Kenntniſſe der Inder gingen nicht über die Auflöſung der quadratiſchen Gleichung zur Beſtimmung der Gliederzahl aus der Summe, dem Anfangsglied und der Differenz hinaus, und das Verdienſt der Araber bleibt auf ihre Überſetzertätigkeit beſchränkt.

Im Abendlande treffen wir zum erſten Male im *liber abaci* des Leonardo von Piſa (1202) die Summenformel allgemein in Worten ausgedrückt und gleichzeitig in zwei für ein gerades und ein ungerades n getrennten Formen an. In den folgenden Jahrhunderten brachte die Literatur von den arithmetiſchen Reihen nur ſo viel, wie zur Einführung in die Theorie der Logarithmen erforderlich ſchien. Erſt das 19. Jahrh. hat den Stoff methodiſch durchgeführt und für die Schulen zurecht gemacht.

b) Arithmetiſche Reihen höherer Ordnung.

Eine arithmetiſche Reihe höherer Ordnung taucht erſt im 16. Jahrh. bei Simon Jacob (1565, Frankfurt a. M.) in der Aufgabe auf, die Summe der Zahlen $1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 22 + \cdots$ zu bilden. Bald darauf berechnete Faulhaber († 1635, Ulm) die Summe $1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \cdots$ für $m = 1$ bis $m = 11$. Da Erläuterungen zu den aufgeſtellten Formeln fehlen, ſo liegt die Vermutung nahe, daß die Formeln für die Summen, deren Exponent 4 überſteigt, durch Induktion gefunden ſind. Fermat beſchäftigte ſich gleichfalls mit dieſen Summen und teilte in einem Briefe mit, daß er eine Methode zur Summierung beliebiger Potenzen der ganzen Zahlen gefunden habe, allein eine Mitteilung dieſer Methode ſucht man in ſeinen Werken vergebens.

Bei der Unterſuchung der genannten Summen fiel Leibniz die Regelmäßigkeit in der m^{ten} Differenzenreihe auf und veranlaßte ihn, aus den erſten Gliedern der einzelnen Differenzenreihen eine Beſtimmung des allgemeinen Gliedes der Hauptreihe vorzunehmen; die Berechnung führte er dann noch an der Reihe der Kubikzahlen durch. Lagny († 1734, Paris) nahm die Unterſuchungen von Leibniz wieder auf und zeigte, daß nicht nur die m^{ten} Potenzen, ſondern auch die Funktion m^{ten} Grades

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \cdots + a_1 x$$

derartige Reihen lieferten, wenn man für x die Reihe der ganzen Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . einſetzte. Damit war der Begriff der arithmetiſchen Reihe höherer Ordnung endgültig feſtgelegt. Lagny gab auch den Weg an, auf dem man das allgemeine Glied finden kann. Die allgemeine Formel für das n^te Glied iſt indeſſen erſt von Newton entwickelt worden, und die Summation der allgemeinen Reihe hat F. C. Maier 1728 zuerſt durchgeführt.

c) Die geometriſche Reihe.

Auch das erſte Beiſpiel einer geometriſchen Reihe findet ſich in dem Rechenbuche des Ahmes in der Aufgabe, die Summe der erſten 5 Potenzen von 7 zu berechnen. Die angegebene Löſung $7 \cdot 2801$

$$\left(2801 = \frac{16806}{6} = \frac{16807-1}{6} = \frac{7^5-1}{7-1}!\right)$$

läßt vermuten, daß die Summenformel ſchon damals bekannt war. Ebenſo läßt die in a) erwähnte Zahlenreihe erkennen, daß auch den Babyloniern die geometriſche Reihe nicht ganz fremd geweſen ſein kann.

Bei den Griechen führte die Erweiterung der Erklärung für das geometriſche Mittel auf geometriſche Reihen, und ſchon Euklid fand eine allgemeine Summenformel, die er zur Summation der Potenzen von 2 anwandte.

Die bekannte Schachbrettaufgabe mit den Weizenkörnern ſtammt von den Arabern und wird gegen das Jahr 1000 zum erſten Male erwähnt. Zur Kenntnis des Abendlandes gelangte die Aufgabe im *liber abaci* des Leonardo von Piſa im Jahre 1202.

Die verſchiedenen Summenformeln, die heute gelehrt werden, ſind im 15. und 16. Jahrh. gefunden worden. Eine ſyſtematiſche Durcharbeitung aller möglichen Aufgaben, in denen aus drei von den 5 auftretenden Größen die beiden anderen berechnet werden ſollen, ſoweit ſie nicht auf Gleichungen höheren Grades führen, hat 1657 der engliſche Mathematiker Wallis geliefert.

Die erſte unendliche geometriſche Reihe $1, \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^3, \left(\frac{1}{4}\right)^4 \ldots$ hat Archimedes bei Gelegenheit der Parabelberechnung addiert; eine allgemeine Formel für $q < 1$ iſt jedoch erſt von Vieta gefunden worden.

d) Zinſeszinsrechnung.

Die Spuren der Zinſeszinsrechnung reichen nicht bis zu den Griechen hinab; die älteſte Aufgabe findet ſich in einem Werke des Inders Aryabhatta (gegen 500 n. Chr.). Mit dem Aufblühen des Handels im Mittelalter werden Zinſeszinsanwendungen häufiger, und die Formel $k = c \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ wird bald zum Gemeingut. Solange der Gebrauch der Logarithmen noch unbekannt war, bediente man ſich beſonderer Zinſeszinstafeln, aus denen durch Löſung einer Dreiſatzaufgabe für ein beliebiges Grundkapital das Endkapital und umgekehrt berechnet werden konnte. Im Druck ſind derartige Tafeln erſt gegen Ende des 16. Jahrh. erſchienen. In der älteſten, von dem Holländer

Simon Stevin herausgegebenen Zuſammenſtellung findet ſich auch eine Abteilung für den Barwert einer gleichmäßigen Rente. Stevin iſt der erſte, der die Frage nach dem Zinsfuß und der Anzahl der Jahre in Angriff nahm. Eine ſyſtematiſche Behandlung der Zinſeszinsrechnung in durchgängig algebraiſchem Gewande iſt zum erſten Male von dem Engländer Halley († 1742, Greenwich) gegeben worden.

Nr. 15. Die Logarithmen.

a) Der urſprüngliche Logarithmusbegriff wurde aus der Vergleichung einer geometriſchen und einer arithmetiſchen Reihe abgeleitet, deren Glieder in ihrer natürlichen Reihenfolge einander feſt zugeordnet wurden. Die arithmetiſche Reihe ſtellt die Logarithmen und die geometriſche Reihe ſtellt die zugehörigen Numeri dar. Bei dieſer Auffaſſung läßt ſich das logarithmiſche Geſetz der Multiplikation zweier Zahlen ſchon aus dem folgenden Satz von Archimedes herausleſen:

> Wenn von Zahlen, die von der Einheit ab in einem feſten Verhältnis ſtehen, irgend zwei miteinander multipliziert werden ſollen, ſo wird auch das Produkt derſelben Proportionsreihe angehören, und zwar wird dieſes von dem größten der beiden Faktoren ebenſoweit abſtehen, wie der kleinere von der Einheit in der Proportionsreihe abſteht; von der Einheit aber wird es um eine Stelle weniger weit abſtehen, als die Abſtandszahlen der beiden Faktoren von der Einheit aus zuſammen betragen.

Hätte Archimedes die Rangzahlen um 1 niedriger angeſetzt, ſo käme in dem Satze bereits die Gleichung $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ zum Ausdruck.

Gegen Ende des 15. Jahrh. finden wir dieſe Herabſetzung vollzogen und (in der heutigen Schreibweiſe) die Reihen zuſammengeſtellt:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \ldots \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 & a^7 \ldots, \end{array}$$

und beim Beginn des 16. Jahrh. werden die beiden Reihen von Stifel in ſeiner *Arithmetica integra* nach links fortgeſetzt. Aus einer Stelle dieſes Werkes, die in der Überſetzung lautet:

1. Die Addition bei der arithmetiſchen Reihe entſpricht der Multiplikation bei der geometriſchen;
2. die Subtraktion bei der arithmetiſchen Reihe entſpricht der Diviſion bei der geometriſchen;
3. die einfache Multiplikation (d. h. einer Zahl mit einer Zahl), die bei der arithmetiſchen Reihe vorgenommen wird, entſpricht der Potenzierung bei der geometriſchen;
4. die Diviſion bei der arithmetiſchen Reihe entſpricht der Wurzelausziehung bei der geometriſchen. So entſpricht die Halbierung bei der arithmetiſchen Reihe der Ausziehung der Quadratwurzel bei der geometriſchen . . .

geht unzweideutig hervor, daß Stifel den Zuſammenhang der beiden Reihen vollſtändig erfaßt hatte; die Geſetze des logarithmiſchen Rechnens waren ihm alſo bekannt, aber es fehlte noch die Berechnung zweier brauchbarer Reihen, deren Glieder ſo eng aneinander ſtanden, daß ſie praktiſch verwendbar waren.

b) Erſt um die Wende des 16. Jahrh. wurde die mühſame Arbeit in Angriff genommen und mit der Aufſtellung von Tabellen begonnen. Joſt Bürgi hatte bereits 1611 logarithmiſche Tabellen fertig, aber da er mit der Herausgabe bis 1620 zögerte, ſo entging ihm der Ruhm, die erſte Logarithmentafel veröffentlicht zu haben. Denn ſchon im Jahre 1614 hatte John Neper in Edinburg ſeine *Mirifici logarithmorum canonici descriptio* erſcheinen laſſen, die in überſichtlicher Anordnung eine Zuſammenſtellung der von ihm berechneten beiden Reihen enthielt. Während Bürgi (um in der heutigen Ausdrucksweiſe zu reden) als allgemeines Glied bei der arithmetiſchen Reihe $x_n = 10 \cdot n$ und bei der geometriſchen Reihe $y_n = 10^8 \cdot \left(1 + \frac{1}{10^8}\right)^n$ genommen hatte, lautete bei Neper das allgemeine Glied der arithmetiſchen Reihe $x_n = n$ und der geometriſchen Reihe $y_n = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$. Bürgi hatte für die arithmetiſche Reihe das Zehnfache der natürlichen Zahlen gewählt; Neper dagegen hatte für dieſe die Sinuswerte der Winkel von 0° bis 90° in Intervallen von 1′ zu 1′ genommen, und daher war ſeine Tafel eine trigonometriſch-logarithmiſche Tabelle, die für numeriſch-logarithmiſche Berechnungen die Benutzung rein-goniometriſcher Tafeln nötig machte. Dieſen Übelſtand beſeitigte Kepler, indem er die Tafeln von neuem ſo berechnete, daß er die Sinuswerte in arithmetiſcher Reihe zunehmen ließ, und nach ihm nahm Peter Crüger eine Trennung in einen numeriſch-logarithmiſchen und einen trigonometriſch-logarithmiſchen Teil vor, ohne jedoch dadurch verhüten zu können, daß die Neperſchen Tabellen das Schickſal der Bürgiſchen teilten und durch die Tafeln von Henry Briggs verdrängt wurden.

Ebenſowenig wie ihre Vorgänger hatten Bürgi und Neper die Logarithmen als Potenzexponenten einer beſtimmten Grundzahl betrachtet; dieſe Auffaſſung machte ſich erſt um die Mitte des 18. Jahrh. geltend. Sucht man nachträglich nach einer den Bürgiſchen Logarithmen zugrunde liegenden Grundzahl, ſo ergibt ſich eine gewiſſe Annäherung an die natürlichen Logarithmen; denn die Grundzahl ſeiner Logarithmen iſt gleich 2,7181459 ... und ſtimmt daher mit der Zahl e in den erſten 4 Ziffern überein. Gleichwohl wird man nicht daran denken dürfen, die Bürgiſchen Logarithmen als natürliche Logarithmen zu bezeichnen, da zu dieſen Infiniteſimalbetrachtungen gehören, die Bürgi noch ganz fremd waren. Bei Neper findet man eine Zahl, die von $\frac{1}{e}$ oder e^{-1} nur ſehr wenig abweicht; ſeine Grundzahl iſt alſo zwar mit der Zahl e verwandt, aber mit der Grundzahl der natürlichen Logarithmen nicht übereinſtimmend. Aus dieſem Grunde hat man die Berechtigung, die natürlichen Logarithmen als Neperſche Logarithmen zu bezeichnen, vielfach beſtritten. Um den Sachverhalt zu prüfen, muß man auf die Neperſche Einführung des Logarithmus zurückgehen. Sein Logarithmus iſt durch die Gleichung $\frac{x}{r} = -\log\frac{y}{r}$ beſtimmt. Neper kennt zwar nicht die hier benutzte Sprache, aber er drückt geometriſch oder kinematiſch denſelben Gedanken mit derſelben Genauigkeit aus, die wir durch dieſe Sprache erhalten. Sein r iſt gleich 10^7; er wählt eine höhere Einheit, um den Gebrauch von Dezimalzahlen zu umgehen, und die Wahl des Vorzeichens iſt darauf zurückzuführen, daß er ſein neues Hilfsmittel vorzugsweiſe auf echte Brüche ($\sin x$; $\cos x$) anwenden will. Von dieſen mehr zufälligen Abweichungen abgeſehen, ſchlägt Neper genau den Gedankengang ein, der uns auf die Grundzahl e führt. Sind alſo die natürlichen Logarithmen auch nicht identiſch mit den Neperſchen, ſo ſind ſie doch nach denſelben Geſichtspunkten gebildet, und daher iſt es ſehr wohl gerechtfertigt, die Erinnerung an den eigentlichen Schöpfer der Logarithmen dadurch feſtzuhalten, daß man die natürlichen Logarithmen als Neperſche Logarithmen bezeichnet.

c) Die Logarithmen mit der Grundzahl 10 ſtammen von Briggs, der ſich mit Neper zuſammengetan hatte, um ſeine Tafeln zu verbeſſern. Die Briggsſchen Tafeln umfaſſen die Zahlen von 1 bis 10000 und von 90000 bis 100000. Die Lücke wurde ſpäter von Vlacq ausgefüllt. Vlacq führte auch von ihm neu berechnete Tabellen für die Logarithmen der Winkelfunktionen hinzu und ſchuf auf dieſe Weiſe ein Werk, das faſt allen ſpäteren Tafeln zugrunde liegt. Trotz der Fülle eigener Arbeit zog er aus buchhändleriſchem Intereſſe (Vlacq war zugleich Buchhändler) vor, das Werk unter dem Titel *H. Briggs, Arithmetica logarithmica. Una cum canone triangulorum etc., ed. H. Vlacq, Goudae 1628* in die Welt hinauszuſchicken.

d) Bürgi hatte für ſeine Logarithmen 9 Stellen berechnet, und Neper hatte 7 Stellen benutzt. Briggs gab das erſte Tauſend ſeiner Logarithmen mit 9 Stellen (der Kennziffer und 8 Dezimalſtellen) heraus und berechnete dann erſt 14 Dezimalſtellen. Vlacq kürzte die Briggsſchen Logarithmen auf 10 Dezimalſtellen ab und gab auch ſeinen Ergänzungen 10 Dezimalſtellen.

Es liegt auf der Hand, daß die Benutzung derartig ausgedehnter Tafeln viel Zeit beanſpruchte, und daher trat bald das Beſtreben hervor, die Zahlen abzukürzen. Schon 1631 erſchien eine Tafel mit 7 Dezimalſtellen; 1705 wurden zum erſten Male die Kennziffer und das Komma weggelaſſen; 1781 kam in England die erſte 5-ſtellige Tafel heraus, und 1828 veröffentlichte der Berliner Aſtronom Encke die erſte 4-ſtellige Tafel. Aus den Schulen verſchwanden die 7-ſtelligen Tafeln erſt gegen Ende des 19. Jahrhunderts. Heute überwiegt hier noch der Gebrauch der 5-ſtelligen Tafeln, allein es ſcheint, daß auch dieſe bald den 4-ſtelligen Tafeln werden weichen müſſen. Vielſtellige Tafeln werden jetzt nur noch für beſonders genaue Berechnungen (Aſtronomie, Verſicherungsweſen) gebraucht, aber auch dieſe Tafeln ſind überſichtlicher gedruckt, da die gemeinſamen erſten Stellen nicht wiederholt werden.

e) Im Zuſammenhang mit der Verminderung der Stellenzahl ſteht bei den Logarithmen der Winkelfunktionen die Vergrößerung des Winkelintervalles. Die Neperſche Tafel ſchritt um je eine Minute vor. Dieſes Intervall wurde 1625 von dem Berliner Gelehrten Urſinus auf 10″ herabgeſetzt, und Vlacq ſchloß ſich dem an. Bei den 7-ſtelligen Tafeln wechſelt das Intervall zwiſchen 1′ und 10″, und für das Gebiet von 0° bis 4° wird zuweilen (Bremiker) von Sekunde zu Sekunde vorgeſchritten. Dem Intervall von 10″ entſpricht bei den 5-ſtelligen Logarithmen ein Intervall von 1′, und die Täfelchen für die Proportionalteile ſind meiſtens für die Zehntel einer Minute aufgeſtellt. Bei den 4-ſtelligen Tafeln werden die Intervalle 6′ (der Zehnteilung des Grades entſprechend) und 10′ benutzt, und die Täfelchen für die Proportionalteile werden in der Regel weggelaſſen. Der Unterſchied in der Genauigkeit iſt für die beiden Intervalle nur gering und fällt gegenüber der leichteren Benutzbarkeit der Tafeln mit dem Intervall 10′ kaum ins Gewicht.

f) Die Kunſtwörter. Das Wort Logarithmus iſt von Neper neu gebildet. Die Bezeichnung *Logarithmus naturalis* wird zuerſt von Mercator für die durch ſeine Reihe

$$l(1+a)=a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^5}{5}-\cdots$$

definierten Logarithmen gebraucht. Von Mercator ſtammt auch das Wort Modul für das konſtante Verhältnis der Logarithmen zweier verſchiedenen Syſteme. Die Bezeichnung Logarithmenſyſtem taucht erſt im Jahre 1714 auf. Die Bezeichnung Charakteriſtik ſtammt von Briggs, und ihre Verdeutſchung in Kennziffer rührt von Käſtner her. Euler gebrauchte das früher für die Dezimalſtellen einer Dezimalzahl vielfach benutzte Wort Mantiſſe ausſchließlich für die Dezimalſtellen eines Logarithmus, aber erſt mit dem Beginn des 19. Jahrh. bürgerte ſich dieſe Einſchränkung ein. Der Ausdruck Tafel doppelten Eingangs iſt auf Regiomontan zurückzuführen.

Nr. 16. Alphabetiſche Zuſammenſtellung.

1. Apollonius von Perga, ein Schüler von Archimedes, lehrte von 250 bis 230 in Alexandria und nachher in Pergamon.
2. Archimedes, geb. 287 und † 212 in Syrakus, der größte Mathematiker des Altertums.
3. Archytas, bekannt durch die Ode des Horaz, 430—365, Tarent.

4. Ariſtarch von Samos, lebte um 280 v. Chr. in Alexandrien.
5. Baltzer, 1818—1887, wirkte zuerſt in Dresden und dann in Königsberg.
6. Bernoulli, Jakob, 1654—1705, in Baſel.
7. Boëthius, Schüler des Proklus, geb. zu Rom 470 n. Chr., lebte lange in Athen und wurde dann Staatsmann in Rom. † 524 in Pavia.
8. Bremiker hat 1857 eine fehlerfreie Bearbeitung der Vegaſchen Logarithmentafel herausgegeben.
9. Brianchon, ein franzöſiſcher Artillerieoffizier, lebte im Anfang des 19. Jahrh.
10. Briggs, Henry, 1556—1630 in London und Oxford.
11. Bürgi, Joſt, Mechaniker und Aſtronom. 1552—1633, zuerſt in Prag und dann in Kaſſel.
12. Cardano, 1501—1576, Prof. der Mathematik und der Medizin in Italien.
13. Carnot, 1753—1823, Paris. *Géométrie de position:* 1803.
14. Cavalieri, † als Profeſſor in Bologna.
15. Ceva, lebte als Mitglied des Jeſuitenordens gegen 1700 in Mailand.
16. Descartes (Carteſius), 1596—1650, als Mathematiker und Philoſoph gleich hervorragend, der Schöpfer der analytiſchen Geometrie.
17. Diophant, zwiſchen 350 und 400 n. Chr. in Alexandrien.
18. Eddin Naſir, 1201—1274, am Hofe des Mongolenfürſten Hulagu.
19. Encke, Aſtronom in Berlin, gibt 1828 die erſte 4-ſtellige Logarithmentafel heraus.
20. Eudoxos von Knidos, 408—355, Schüler von Archytas und Plato.
21. Euklid, lebte um 300 v. Chr. in Alexandrien. Von ſeinen Lebensverhältniſſen iſt nichts bekannt.
22. Euler, Leonhard, geb. 1707 zu Baſel, lebte zeitweilig auch in Berlin. † 1783 zu Petersburg.
23. Fermat, geb. 1601, † 1665 in Toulouſe. Seine Arbeiten wurden erſt nach ſeinem Tode von ſeinem Sohne herausgegeben.
24. Ferro, Scipione del, von 1496—1526 Profeſſor in Bologna.
25. Fink, Thomas, geb. 1561 in Flensburg, † 1656 in Kopenhagen.
26. Fior, Antoniomaria, † 1525, bekannt aus dem Streite zwiſchen Cardano und Tartaglia.
27. Gauß, geb. 1777 in Braunſchweig, † 1855 in Göttingen. „Fürſt der Mathematiker".
28. Girard, † 1652 in Leiden, veröffentlicht 1629 den Satz über die Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades.
29. Guldin, ein Schweizer von Geburt, † 1643 in Graz.
30. Halley, Aſtronom in Greenwich, 1656—1742.
31. Hanſen, † 1874 als Direktor der Sternwarte Seeberg bei Gotha.
32. Hero, lebte um die Mitte des 1. Jahrh. v. Chr. in Alexandrien.
33. Hipparch von Nicäa, lehrte 169—125 v. Chr. in Rhodos und Alexandrien.

34. Hippokrates, ein berühmter Arzt, geb. gegen 400 v. Chr. auf Chios, † um 364 zu Lariſſa in Theſſalien.
35. Karſten, v., ließ 1767—1775 ein Werk unter dem Titel „Lehrbegriff der geſamten Mathematik“ erſcheinen.
36. Käſtner, 1719—1800, zuletzt Profeſſor in Göttingen.
37. Kepler, Johannes, berühmter Aſtronom, 1571—1630.
38. Koppernikus, 1473 Thorn — 1543 Frauenburg.
39. Lagny, de, 1660—1734, † in Paris.
40. Lagrange, geb. 1736 in Turin, lebte in Turin, Berlin und Paris. † 1813 in Paris.
41. Lambert, 1728—1777, Oberbaurat und Mitglied der Akademie in Berlin.
42. Legendre, geb. 1752 in Toulouſe, † 1833 in Paris, Profeſſor an der *École normale.*
43. Leibniz, geb. 1646 zu Leipzig, † 1716 zu Hannover. Seiner Anregung iſt die Stiftung der Berliner Akademie der Wiſſenſchaften zu danken.
44. Leon, ein Schüler Platos, lebte gegen 370 v. Chr.
45. Leonardo von Piſa, 1180—1250? Sein *liber abaci* erſchien 1202.
46. Lhuilier, 1752—1833 in Paris.
47. Lindemann, geb. 1852, beweiſt 1882, daß π eine tranſzendente Zahl iſt.
48. Machin, John, Aſtronom in London, † 1751.
49. Mac=Laurin, 1689—1746, Profeſſor in Edinburg.
50. Maier, F. G., Petersburg, in der erſten Hälfte des 18. Jahrh.
51. Mascheroni, 1750—1800 in Pavia und Paris.
52. Menächmus, der Entdecker der Kegelſchnitte, lebte im 4. Jahrh. v. Chr.
53. Menelaus, lebte zu Alexandrien in der erſten Hälfte des 2. Jahrh. n. Chr.
54. Mercator (Gerhardt Kremer), 1512—1594, Geograph und Kartograph.
55. Möbius, 1790—1868, Profeſſor in Leipzig.
56. Moivre, 1667—1754, ein Franzoſe von Geburt, lebte als Privatgelehrter in London.
57. Mollweide, 1774—1825, Profeſſor in Leipzig.
58. Monge, 1746—1818, anfangs in Lyon, ſpäter an der *École politechnique.*
59. Nemorarius, Jordanus, Deutſcher, † 1237 als Ordensgeneral der Dominikaner.
60. Neper, John, 1559—1617, ſchottiſcher Baron.
61. Newton, geb. 1643, † 1727 in Cambridge, von Gauß ſtets *summus Neutonus* genannt.
62. Paciuolo, Luca, † 1514 zu Florenz. Seine *Summa* erſchien 1494.
63. Pappus, von 379—395 n. Chr. in Alexandrien tätig.
64. Pascal, 1623—1662, Mathematiker, Phyſiker und Philoſoph.

65. **Plato**, 429—348 v. Chr. in Athen.
66. **Poſidonius**, geb. 135 v. Chr. zu Apameia in Syrien, † 51 auf Rhodos.
67. **Pothenot**, † 1732, war ein franzöſiſcher Mathematiker.
68. **Proklus**, geb. 412 n. Chr. in Byzanz, † 485 in Athen, Lehrer der platoniſchen Philoſophie.
69. **Ptolemäus**, Klaudius, lebte in der erſten Hälfte des 2. Jahrh. n. Chr., einer der größten Mathematiker der alten Zeit.
70. **Pythagoras** von Samos, um 550 v. Chr., Begründer der Pythagoreiſchen Schule.
71. **Regiomontan** (Joh. Müller aus Königsberg im Herzogtum Koburg), 1436 bis 1476, berühmter Mathematiker und Philoſoph.
72. **Rhaeticus**, 1514—1576, zuletzt in Wittenberg.
73. **Schellbach**, geb. 1805 zu Eisleben, † 1892 zu Berlin.
74. **Simpſon**, lebte im Anfang des 18. Jahrh. zu Glasgow.
75. **Snellius**, 1581—1626, in Leiden, Mathematiker, Geodät und Phyſiker.
76. **Staudt**, v., 1798—1867, Erlangen. Geometrie der Lage: 1847, Nürnberg.
77. **Stevin**, Simon, geb. 1548 zu Brügge, † 1620 zu Leiden.
78. **Steiner**, 1796—1863, zuletzt in Berlin.
79. **Stifel**, 1486—1567, lutheriſcher Prediger, zuletzt in Jena.
80. **Sturm**, Johannes, Nürnberg, veröffentlicht 1670 eine Überſetzung des Archimedes.
81. **Tartaglia**, 1500—1557, Lehrer der Mathematik, abwechſelnd in Brescia und Venedig.
82. **Taylor**, 1685—1731, in London.
83. **Thales** von Milet, geb. um 640 v. Chr., † 548 in Athen.
84. **Thibaut**, Grundriß der reinen Mathematik, erſchien 1801.
85. **Varignon**, 1654—1722 in Paris.
86. **Vieta**, 1540—1603, der größte franzöſiſche Mathematiker des 16. Jahrh.
87. **Vlacq**, 1600—1667, zuletzt im Haag.
88. **Weierſtraß**, 1815—1897 in Berlin, einer der größten Mathematiker des 19. Jahrh.
89. **Widmann** von Eger, Johannes, gab 1489 ein berühmt gewordenes Rechenbuch heraus.
90. **Wolff**, Chr., Freiherr v., geb. 1679 zu Breslau, † 1754 zu Halle.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin.

Dr. K. Kraepelin: Naturſtudien

(Mit Zeichnungen von O. Schwindrazheim)

im Hauſe
3. Auflage
Geb. M. 3.20

im Garten
3. Auflage
Geb. M. 3.60

in Wald und Feld
3. Auflage
Geb. M. 3.60

in der Sommerfriſche
Geb. M. 3.20

Volksausgabe
Eine Auswahl. Veranſtaltet vom Hamburger Jugendſchriften-Ausſchuß. Geb. M. 1.—

„. . . Die Vorzüge der Kraepelinſchen Naturſchilderungen liegen in den intereſſanten Beobachtungen, der Lebendigkeit des Dialogs, der anregenden Darſtellungsweiſe und einer populären Schreibart. Daß ſelbſt gebildete Erwachſene mit Vergnügen das Buch leſen und es mit Vorteil benutzen, darf behauptet werden. Unſere großen Schüler haben hier eine Fundgrube der ſchönſten und eindringlichſten Belehrung, dazu in vornehmem Gewande. Das Werk wird uns ſehr warm empfohlen.“ **(Jugendſchriften-Warte.)**

„Das freundliche Buch iſt wohl geeignet, eine verſtändige Naturbetrachtung und Neigungen, mit der Natur zu plaudern, in die richtigen Wege zu leiten, auch wohl überhaupt zu einer näheren Betrachtung der Natur anzuregen. Aufgeweckten Knaben und Mädchen kann das Buch daher als guter Führer in die Hand gegeben werden. . . . Wir freuen uns, daß das Buch den verdienten Anklang ſchnell gefunden hat.“ **(Naturwiſſenſchaftliche Wochenſchrift.)**

Natur-Paradoxe. Ein Buch für die Jugend, zur Erklärung von Erſcheinungen, die mit der täglichen Erfahrung im Widerſpruch zu ſtehen ſcheinen. Nach Dr. W. Hampſons „Paradoxes of nature and science“ bearbeitet von Dr. **C. Schäffer.** Mit 4 Tafeln und 65 Textbildern. In Leinwand geb. M. 3.—

„Ich brauche nur einige Überſchriften, unter denen ſolche Phänomene dargeſtellt und analyſiert werden, hierher zu ſetzen, um erkennen zu laſſen, welch intereſſante Dinge der Leſer des Buches erfahren wird. Da iſt die Rede von Bällen, die um die Ecke fliegen, von Eis, das ſchmilzt, während es kälter wird, da wird gefragt: „Wie der Schwächere den Stärkeren beſiegt“ oder „Wer kann durch die Hand ſehen?“; da wird das alte Problem des Steines der Weiſen gelöſt, das „Bauchreden“ erklärt und ſchließlich auch gezeigt, worauf der Trugſchluß des Zenon beruht, daß Achilles die Schildkröte nicht einholen könne. Dies iſt nur ein Weniges aus der Fülle. Ich meine aber, niemand, der ſich und der ſeiner Obhut unterſtehenden wiſſensdurſtigen Jugend frohe und genußreiche Stunden zu bereiten wünſcht, ſollte an dieſem Buche vorbeigehen. Die Überſetzung iſt einwandfrei. Dem Text ſind gute Bilder und inſtruktive ſchematiſche Zeichnungen beigegeben.“ **(Frankfurter Zeitung.)**

Populäre Aſtrophyſik. Von Dr. **J. Scheiner.** Mit 30 Tafeln und 210 Figuren. In Leinwand geb. M. 12.—

„In klarer, leichtfaßlicher Sprache wird im erſten Teile der Leſer in die Grundlehren der Optik, ſoweit ſie zum Verſtändnis des Folgenden erforderlich ſind, eingeführt, mit dem Wichtigſten aus der Spektralanalyſe und in ausführlicher Weiſe mit den photometriſchen Theorien und Apparaten bekannt gemacht. Im zweiten Teile werden die Reſultate beſprochen, zu denen man in bezug auf die phyſiſche Konſtitution der Himmelskörper gelangt iſt. Zunächſt finden wir eine ſehr geordnete und anſprechende Darſtellung der verſchiedenen Sonnenphänomene, an die ſich die Erörterung der ſpektroſkopiſchen Ergebniſſe bezüglich dieſer Erſcheinungen und die verſchiedenen Anſichten über das Weſen der Sonne (Sonnentheorien) ſchließt. Im nächſten Abſchnitte folgen Erläuterungen über die phyſiſche Beſchaffenheit der Planeten, Monde, Kometen, Meteore und des Zodiakallichtes. Ein weiterer Abſchnitt handelt von den Nebelflecken und der Schlußabſchnitt von den Fixſternen, deren ſpektroſkopiſche Unterſuchungen mit anerkennenswerter Klarheit dargelegt werden. Hohes Intereſſe gewährt das Kapitel über die ‚Neuen Sterne‘, deren Auftreten bis auf unſere Tage verfolgt wird. In den drei letzten Kapiteln dieſes Abſchnittes werden ‚Spezielle Sternſpektra‘ betrachtet ſowie die photometriſchen und photographiſchen Ergebniſſe in betreff der Fixſterne klargelegt. Eine beſondere Zierde des auch ſonſt vornehm ausgeſtatteten Buches bilden die zahlreichen, ſehr netten, den Text wirkſam unterſtützenden Illuſtrationen und die prächtigen Tafeln mit zum größeren Teil photographiſchen Reproduktionen. Das Werk ſei allen aufs wärmſte empfohlen, die ihr aſtronomiſches Wiſſen in aſtrophyſikaliſcher Richtung mit Erfolg zu erweitern ſtreben.“ **(Zeitſchrift für das Realſchulweſen.)**

Lehrbuch der Phyſik. Zum Gebrauch beim Unterricht, bei akademiſchen Vorleſungen und zum Selbſtſtudium. Von Dr. **E. Grimſehl.** Mit 1091 Textfiguren, 2 farbigen Tafeln und einem Anhange, enthaltend Tabellen phyſikaliſcher Konſtanten und Zahlentabellen. [VII u. 1052 S.] gr. 8. 1909. Geh. M. 15.—, geb. M. 16.—

Der moderne phyſikaliſche Schulunterricht ſoll eine Überſicht über das ganze Gebiet der Phyſik geben. Er ſoll aber außerdem, beſonders in den Oberklaſſen, einige begrenzte Gebiete ausführlich und wiſſenſchaftlich ſtreng behandeln. Dem Schüler ſoll das Buch auch dann noch ein Führer ſein, wenn er die Schule verlaſſen hat; es ſoll ihn befähigen, ſeine Kenntniſſe auch auf denjenigen Gebieten zu vervollſtändigen, in denen der Schulunterricht nur die Grundlagen hat geben können.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Aus Natur und Geiſteswelt

Sammlung wiſſenſchaftlich-gemeinverſtändlicher Darſtellungen aus allen Gebieten des Wiſſens in Bändchen v. 120—180 Seiten.

Geheftet M. 1.—

Gebunden M. 1.25

In erſchöpfender und allgemein-verſtändlicher Behandlung werden in abgeſchloſſenen Bänden auf wiſſenſchaftlicher Grundlage ruhende Darſtellungen wichtiger Gebiete in planvoller Beſchränkung aus allen Zweigen des Wiſſens geboten, die von allgemeinem Intereſſe ſind und dauernden Nutzen gewähren.

Erſchienen ſind 300 Bände aus den verſchiedenſten Gebieten, u. a.:

Mathematiſche Spiele. Von Dr. W. Ahrens. Mit 1 Titelbild u. 69 Figuren im Text. (Bd. 170.)

Das Schachſpiel und ſeine ſtrategiſchen Prinzipien. Von Dr. Max Lange. (Bd. 281.)

Einführung in die Infiniteſimalrechnung mit einer hiſtoriſchen Überſicht. Von Profeſſor Dr. G. Kowalewski. Mit 18 Figuren. (Bd. 197.)

Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Von Profeſſor Dr. Felix Auerbach. 2. Aufl. Mit 79 Figuren im Text. (Bd. 40.)

Die Lehre von der Energie. Von Alfred Stein. Mit 13 Figuren im Text. (Bd. 257.)

Einführung in die chemiſche Wiſſenſchaft. Von Prof. Dr. Walter Loeb. Mit 16 Figuren im Text. (Bd. 264.)

Tierkunde. Eine Einführung in dit Zoologie. Von Privatdozent Dr. Kurt Hennings. Mit 34 Abbild. (Bd. 142.)

Die Beziehungen der Tiere zueinander und zur Pflanzenwelt. Von Prof. Dr. K. Kraepelin. (Bd. 79.)

Die Welt der Organismen. Von Profeſſor Dr. Kurt Lampert. Mit 52 Abbildungen. (Bd. 236.)

Abſtammungslehre und Darwinismus. Von Prof. Dr. Richard Heſſe. 3. Auflage. Mit 37 Figuren. (Bd. 39.)

Die Weltanſchauungen der großen Philoſophen der Neuzeit. Von weil. Profeſſor Dr. Ludwig Buſſe. 4. Auflage. Herausgegeben von Prof. Dr. Falckenberg. (Bd. 56.)

Nautik. Von Dr. Johannes Möller. Mit 58 Figuren im Text und auf einer Tafel. (Bd. 255.)

Das aſtronomiſche Weltbild im Wandel der Zeit. Von Profeſſor Dr. S. Oppenheim. Mit 24 Abbildungen im Text. (Bd. 110.)

Der Bau des Weltalls. Von Profeſſor Dr. J. Scheiner. 3. Aufl. Mit 26 Figuren im Text und auf 2 Tafeln. (Bd. 24.)

Die Philoſophie der Gegenwart in Deutſchland. Eine Charakteriſtik ihrer Hauptrichtungen. Von Profeſſor Dr. Oswald Külpe. 4. Auflage. (Bd. 41.)

Philoſophie. Einführung in die Wiſſenſchaft, ihr Weſen und ihre Probleme. Von Direktor H. Richert. (Bd. 186.)

Deutſche Romantik. Eine Skizze von Prof. Dr. Oskar F. Walzel. (Bd. 252.)

Albrecht Dürer. Von Dr. Rudolf Wuſtmann. Mit 33 Abbildungen. (Bd. 97.)

Geſchichte der Muſik. Von Dr. Friedrich Spiro. (Nr. 143.)

Die deutſchen Volksſtämme und Landſchaften. Von Prof. Dr. O. Weiſe. 3. verbeſſerte Auflage. Mit 29 Abbildungen im Text und auf 15 Tafeln. (Bd. 16.)

Das deutſche Haus und ſein Hausrat. Von Profeſſor Dr. R. Meringer. Mit 106 Abbildungen, darunter 85 von Profeſſor A. von Schroetter. (Bd. 116.)

Das deutſche Dorf. Von R. Mielke. Mit 51 Abbildungen im Text. (Bd. 192.)

Die deutſche Volksſage. Von Dr. Otto Böckel. (Bd. 262.)

Illuſtrierter und ausführlicher Katalog umſonſt und poſtfrei vom Verlag

S-96

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Einführung in die Biologie. Von Dr. K. Kraepelin.

Zum Gebrauch an höheren Schulen und zum Selbſtunterricht. 2. Auflage. Mit 303 Abbildungen, 5 mehrfarbigen Tafeln und 2 Karten. In Leinw. geb. ℳ 4.—

Der ſicherſte Beweis, daß dieſes Werk des geſchätzten Autors, das bei Kritik und Schulkreiſen gleich freudige Aufnahme fand, einem wirklichen Bedürfniſſe entgegenkam, iſt die kaum zwei Jahre nach Erſcheinen ſich als notwendig erweiſende Neuauflage, die trotz des weſentlich erweiterten Umfanges, der gediegeneren Ausſtattung und der Beigabe von Farbentafeln zu dem gleichen Preiſe wie die erſte Auflage zur Ausgabe gelangt. Möchte es auch in ſeiner neuen Geſtalt zahlreiche Freunde gewinnen.

Biologiſches Praktikum für höhere Schulen. Von Dr. B. Schmid.

Mit 75 Abbildungen im Text und 9 Tafeln. [VI u. 71 S.] gr. 8. 1909. Steif geh. ℳ 2.—, in Leinw. geb. ℳ 2.50.

Dieſer Leitfaden iſt für ſolche Lehranſtalten beſtimmt, die den biologiſchen Unterricht mit praktiſchen Uebungen verbinden. Der Inhalt erſtreckt ſich auf das zoologiſche und botaniſche Gebiet und berückſichtigt in jedem dieſer Teile außer dem anatomiſchen Bau von Tier und Pflanze auch das phyſiologiſche Moment, wenn auch den Verhältniſſen entſprechend der pflanzenphyſiologiſche Kurſus ungleich weiter ausgedehnt iſt als der tierphyſiologiſche. Soweit es angängig, bewegt ſich das Buch in einer Art Syſtematik. Es behandelt den Bau der pflanzlichen (und tieriſchen) Mikroorganismen nebſt Anleitung zu ihrer Reinkultur, hebt verſchiedene Vertreter der niederen Pflanzenwelt beſonders hervor und widmet einen längeren Abſchnitt den Geweben, darunter namentlich den Gefäßen. Ueber Schnittführung und wichtige Reagentien wird bei paſſender Gelegenheit geſprochen. Im phyſiologiſchen Teil findet man eine Anzahl von Gruppenverſuchen zuſammengeſtellt. — Das Tierreich bringt in einer dem Verſtändnis der Schüler entſprechenden Art die Anatomie wichtiger Vertreter einzelner Tierkreiſe bzw. Klaſſen (beiſpielsweiſe den Regenwurm, den Flußkrebs, den Gelbrand, die Teichmuſchel, den Karpfen, den Froſch, das Kaninchen) ſowie eine vergleichend anatomiſche Zuſammenſtellung verſchiedener Organe. Auch dieſen Übungsbeiſpielen iſt eine Anleitung nach der rein manuellen Seite hin beigegeben. — Von den zahlreichen Abbildungen, die der Leitfaden aufweiſt, iſt eine Anzahl nach eigens zu dieſem Zweck angefertigten Präparaten gezeichnet worden.

Die Pflanzen Deutſchlands. Von Dr. Otto Wünſche.

Eine Anleitung zu ihrer Kenntnis. Die höheren Pflanzen. 9. Auflage, bearbeitet von Dr. J. Abromeit. Mit einem Bildnis O. Wünſches. [XXIX u. 689 S.] gr. 8. 1909. In biegſamen Leinwandband geb. ℳ 5.—

Die Vorzüge, die den Wünſcheſchen Büchern ſo günſtigen Eingang verſchafften, beſtehen in der klaren und einfachen Gliederung der Beſtimmungstabellen und der überſichtlichen Anordnung derſelben, in der Grundlegung des natürlichen, phylogenetiſchen Pflanzenſyſtems, in der Zuverläſſigkeit der Tabellen und floriſtiſchen Daten, in der Reichhaltigkeit an Unterarten und Varietäten und nicht zuletzt in der bequemen Taſchenform.

In der neuen Auflage wurden mit Rückſicht auf die Beſtimmungsübungen, wozu ſich das Werk ganz beſonders eignet, einige Verbeſſerungen und Erweiterungen vorgenommen. Die Nomenklatur wurde gemäß der auf dem zweiten internationalen botaniſchen Kongreß in Wien 1905 zur Annahme gelangten Regeln geſtaltet und auch die deutſchen Namen der Pflanzen im engeren Anſchluß an Meigens Vorſchläge behandelt. Die Verbreitung der Arten ſowie ihre Geſelligkeitsverhältniſſe wurden etwas mehr als bisher berückſichtigt, ohne den Umfang des Buches erheblich zu überſchreiten.

Die verbreitetſten Pflanzen Deutſchlands. Von Dr. O. Wünſche.

Ein Übungsbuch für den naturwiſſenſchaftlichen Unterricht. 5. Auflage herausgegeben und bearbeitet von Dr. B. Schorler. Mit 459 Umrißzeichnungen. [VI u. 290 S.] 8. 1909. In biegſamen Leinwandband geb. ℳ 2.60.

Die neue Auflage unterſcheidet ſich von der früheren beſonders durch die beigefügten 459 in den Text gedruckten Figuren und durch die blütenbiologiſchen Angaben. Da das Buch in erſter Linie für Anfänger im Pflanzenbeſtimmen in den Schulen beſtimmt iſt, ſo kann durch das Wort allein nicht immer jeder Zweifel ausgeſchloſſen werden, mag der Beſtimmungsſchlüſſel oder die Pflanzenbeſchreibung auch noch ſo klar und ſcharf ſein. Der Herausgeber hat ſich deshalb entſchloſſen, zur Erläuterung der in den Beſtimmungsſchlüſſeln angegebenen Merkmale einfache Umrißzeichnungen der Blüten oder Blütenteile anzufertigen, die das Beſtimmen weſentlich erleichtern dürften. Eine weitere Neuerung iſt inſofern eingetreten, als bei jeder Art die blütenbiologiſchen Verhältniſſe angegeben ſind, und zwar in Geſtalt der ſchon von v. Müller in die Blütenbiologie eingeführten Zeichen und Abkürzungen. Dieſe werden auch vielen willkommen ſein.